Phiên bản ngày 1/31/2025

TÓM TẮT

$\cos\theta$ | $\sin x = 0$ | log | y' | Tiếp tuyến | $\int dx$ | Lớp 10 | Lớp 11

Lớp 12

- Tính đơn điệu | Cực trị | GTLN, GTNN | Tiệm cận
- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số
- Một số bài toán về đồ thị | Biến đổi đồ thị
- Nguyên hàm | Tích phân
- Vectơ trong không gian | Hệ tọa độ trong không gian
- Các loại tích vectơ và ứng dụng
- Phương trình mặt cầu | Phương trình mặt phẳng | Phương trình đường thẳng
- Vị trí tương đối | Hình chiếu, điểm đối xứng của điểm
- Tổng hợp về góc, khoảng cách, độ dài | Một số bài toán khác
- Xác suất có điều kiện | Thống kê ghép nhóm | Thống kê không ghép nhóm

Lớp 11

- Lượng giác | Hàm số lượng giác | Phương trình lượng giác
- Quy nạp | Dãy số | Cấp số cộng | Cấp số nhân
- Giới hạn dãy số | Dãy số có giới hạn hữu hạn | Dãy số có giới hạn vô cực

Thầy Lê Trung Kiên

Kỹ thuật tính giới hạn dãy số

★ Giới hạn hàm số | Các dạng vô định | Giới hạn 1 bên

Hàm số liên tục tại 1 điểm | Hàm số liên tục trên khoảng, đoạn

★ Đạo hàm

★ Lũy thừa | Hàm số Lũy thừa | Hàm số mũ | Căn bậc | Logarit

Phương trình, bất phương trình mũ, logarit

★ Hình học không gian (Thao tác phụ, kí hiệu)

Hình học không gian (Dạng toán chứng minh)

Hình học không gian (Dạng toán tính góc, khoảng cách)

Hình học không gian (Định lý vuông góc, song song)

Các khối hình | Khối đa diện và thể tích

★ Thống kê ghép nhóm

Lớp 10

Mệnh đề | Tập hợp | Bất phương trình bậc nhất 2 ẩn

Hàm số và đồ thị | Hàm số bậc 2

Giá trị lượng giác từ 0° đến 180°

Hệ thức lượng trong tam giác vuông | Hệ thức lượng trong tam giác tùy ý

Vecto | Tích vô hướng

Số gần đúng, sai số | Thống kê không ghép nhóm

Dấu của tam thức bậc 2 | Phương trình quy về bậc 2 | Đại số tổ hợp

Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng | Phương trình đường thẳng

Phương trình đường tròn | Elip | Hyperbol | Parabol | Xác suất lớp 10 & 11

Thầy Lê Trung Kiên

Mục lục

MỆNH ĐỀ **18**
1. Mệnh đề là gì? 18
2. Một số kiến thức cũ 18
3. Mệnh đề chứa biến 19
4. Mệnh đề phủ định 19
5. Mệnh đề kéo theo 21
6. Mệnh đề đảo 21
7. Mệnh đề tương đương 21
8. Kí hiệu ∀ và ∃ 21
TẬP HỢP **22**
9. Kí hiệu 22
10. Các tập số 22
11. Các cách cho một tập hợp 22
12. Tập con và hai tập hợp bằng nhau 23
13. Biểu đồ Ven 23
14. Các phép toán tập hợp 24
15. Các tập con của tập số thực 25
BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN **26**
16. Định nghĩa 26
17. Biểu diễn tập nghiệm 26
18. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn 26
19. Tìm cực trị biểu thức F = ax + by trên một miền đa giác 27
20. Áp dụng vào bài toán kinh tế 28
HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ **29**
21. Định nghĩa 29
22. Cách cho hàm số 29
23. Tìm tập xác định của hàm số 29
24. Đồ thị hàm số 30
25. Sự biến thiên của hàm số 31
26. Khảo sát sự biến thiên của hàm số trên một khoảng 31
HÀM SỐ BẬC 2 ..... **33**
27. Định nghĩa 33
28. Đặc điểm đồ thị 33
29. Các bước vẽ đồ thị 34
30. Phương trình bậc hai 34
31. Định lý Viét 34
32. Định lý Viét đảo 34
33. Một số điều kiện về nghiệm 35

Thầy Lê Trung Kiên

34. Các dạng biểu diễn của hàm số bậc 2 35
GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC TỪ 0° ĐẾN 180° 36
35. Định nghĩa nửa đường tròn đơn vị 36
36. Xác định góc từ 0° đến 180° trên nửa đường tròn đơn vị 36
37. Xác định giá trị lượng giác của góc từ 0° đến 180° 37
38. Giá trị lượng giác của các góc phụ và bù 37
39. Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt 38
40. Hệ thức cơ bản 38
HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG 39
HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC TÙY Ý 40
41. Quy ước về kí hiệu cạnh, góc 40
42. Định lý cos 40
43. Định lý sin 41
44. Độ dài trung tuyến và phân giác trong 41
45. Diện tích tam giác 42
46. Diện tích tam giác và đa giác đặc biệt 42
47. Các độ dài đặc biệt 43
VECTƠ 45
48. Các khái niệm 45
49. Cộng vectơ 47
50. Vectơ đối 48
51. Hiệu của hai vectơ 48
52. Tích của một số với một vectơ 48
53. Một số hệ thức quan trọng 48
54. Điều kiện cùng phương, thẳng hàng 49
TÍCH VÔ HƯỚNG 50
55. Góc giữa 2 vectơ 50
56. Tích vô hướng 50
57. Tính chất 51
58. Điểm thỏa mãn đẳng thức về tích vô hướng hay về độ dài 51
SỐ GẦN ĐÚNG, SAI SỐ 54
59. Các hàng số 54
60. Định nghĩa (Sai số tuyệt đối) 54
61. Định nghĩa (Sai số tỷ đối) 54
62. Quy tắc làm tròn số 54
63. Xác định số quy tròn của số gần đúng với độ chính xác cho trước 55
64. Xác định số gần đúng của một số với độ chính xác cho trước 55
THỐNG KÊ KHÔNG GHÉP NHÓM 56
65. Tần số, tần suất (tần số tương đối), cỡ mẫu 56
66. Các số đặc trưng đo xu thế trung tâm 57

Thầy Lê Trung Kiên

a) Số trung bình 57
b) Trung vị 58
c) Tứ phân vị 60
d) Mốt 62
67. Các số đặc trưng cho mức độ phân tán 64
a) Khoảng biến thiên 64
b) Khoảng tứ phân vị 65
c) Phương sai, độ lệch chuẩn 68
68. Giá trị ngoại lệ 70
69. Bấm máy tính các số liệu thống kê 71
DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI 72
70. Tam thức bậc hai là gì? 72
71. Dấu của tam thức bậc hai 72
72. Định lý về dấu của tam thức bậc hai 72
73. Điều kiện luôn (–) hoặc luôn (+) 74
74. Bất phương trình bậc hai một ẩn là gì? 74
75. Phương pháp giải bất phương trình bậc hai một ẩn 74
a) Sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc 2 74
b) Sử dụng máy tính bỏ túi 74
PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI 76
ĐẠI SỐ TỔ HỢP 77
76. Quy tắc cộng 77
77. Quy tắc nhân 77
78. Giai thừa 78
79. Các mô hình rút gọn của quy tắc nhân 79
a) Hoán vị 79
b) Chỉnh hợp 80
c) Tổ hợp 82
d) Ví dụ phân biệt chỉnh hợp, tổ hợp 84
e) Giải thích một số công thức tổ hợp bằng hình học 85
80. Một số tính chất về lũy thừa 86
81. Tam giác Pascal 87
82. Nhị thức Newton 87
PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ 88
83. Trục tọa độ 88
84. Hệ trục tọa độ 88
85. Biểu thức tọa độ phép toán vectơ & điểm quan trọng 88
86. Các loại tâm và điểm đặc biệt của tam giác 90
87. Công thức tính nhanh hình chiếu của một điểm lên một đường thẳng 92
PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG 93

Thầy Lê Trung Kiên

88. Vectơ đặc trưng cho phương của đường thẳng 93
89. Các dạng phương trình đường thẳng 93
a) Phương trình tham số và chính tắc 94
b) Phương trình đoạn chắn 94
c) Phương trình dạng hệ số góc 94
d) Phương trình tổng quát 95
90. Vị trí tương đối của hai đường thẳng 95
91. Hệ số góc đường thẳng song song, vuông góc, tạo góc 95
92. Góc giữa hai đường thẳng 96
93. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng 97
94. Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song 97
95. Phương trình phân giác 2 đường thẳng 97
96. Hai điểm cùng phía, khác phía so với 1 đường thẳng 97
97. Viết nhanh phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm 98
98. Đối xứng điểm qua đường đặc biệt 98
PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN 99
99. Các dạng phương trình đường tròn 99
100. Tiếp tuyến đường tròn 100
101. Vị trí tương đối của hai đường tròn 100
102. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn 100
103. Phương trình đường tròn đi qua 3 điểm 101
ELIP 102
104. Định nghĩa 102
105. Phương trình chính tắc 102
106. Phương trình tham số 102
107. Đặc điểm hình học 103
108. Vị trí tương đối với đường thẳng 104
109. Diện tích 104
HYPERBOL 105
110. Định nghĩa 105
111. Phương trình chính tắc 105
112. Đặc điểm hình học 106
113. Vị trí tương đối với đường thẳng 106
PARABOL 107
114. Định nghĩa 107
115. Đặc điểm hình học 107
116. Làm gì nếu quên công thức? 108
117. Đường chuẩn và tiêu điểm của $y = ax^2 + bx + c$ 108
118. Vị trí tương đối với đường thẳng 108
XÁC SUẤT (LỚP 10 & 11) 109

Thầy Lê Trung Kiên

119. Phép thử và không gian mẫu 109
a) Phép thử ngẫu nhiên 109
b) Không gian mẫu 109
120. Biến cố và các loại biến cố 109
a) Biến cố là gì? 109
b) Tập hợp các kết quả thuận lợi cho biến cố 109
c) Biến cố chắc chắn 109
d) Biến cố không thể 109
e) Biến cố xung khắc 110
f) Biến cố đối 110
g) Hai biến cố độc lập 110
h) Biến cố hợp 110
i) Biến cố giao 110
121. Định nghĩa cổ điển của xác xuất 110
LƯỢNG GIÁC 111
122. Hai đơn vị đo góc cơ bản 111
a) Độ 111
b) Radian 111
c) Đổi độ ↔ rađian (phương pháp tỷ số) 113
d) Đổi độ ↔ rađian (máy tính bỏ túi) 113
e) Mối liên hệ giữa độ dài cung và số đo góc ở tâm trong đường tròn 113
f) Một số góc lượng giác đặc biệt 113
123. Góc lượng giác 114
a) Góc lượng giác âm, dương và quy ước chiều quay 114
b) Hệ thức Chasles 116
c) Cách xác định góc 116
d) Công thức cho 1 tia lượng giác 117
e) Công thức các tia lượng giác cách đều nhau 117
124. Định nghĩa các giá trị lượng giác 118
a) Định nghĩa sin 118
b) Định nghĩa cos 118
c) Định nghĩa tan 118
d) Định nghĩa cot 119
125. Dấu của các giá trị lượng giác 120
126. Các công thức cơ bản 121
127. Công thức cộng 121
128. Công thức nhân đôi 121
129. Công thức hạ bậc 121
130. Công thức nhân ba 121

Thầy Lê Trung Kiên

131. Công thức tổng thành tích 121
132. Công thức tích thành tổng 121
133. Số đo các góc liên quan đặc biệt 122
134. Một số công thức khác 123
HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC 124
135. Sự biến thiên & Đồ thị các hàm lượng giác cơ bản 124
PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC 126
136. Phương trình sin 126
137. Phương trình cos 126
138. Phương trình tan 126
139. Phương trình cot 126
140. Một số dạng phổ biến 127
a) Dạng $\sin^2(x)=a$ hoặc $\cos^2(x)=a$ 127
b) Phương trình dạng bậc hai 127
c) Dạng $a\times\sin(x)+b\times\cos(x)=c$ 128
d) Dạng: $a\times\sin^2(x)+b\times\sin(x)\times\cos(x)+c\times\cos^2(x)=d$ 128
e) Phương trình đẳng cấp 129
f) Phương trình đối xứng theo sin và cos 129
g) Phương trình chứa đồng thời sin ± cos và sin × cos 129
PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC 130
DÃY SỐ 132
141. Định nghĩa dãy số 132
142. Những cách cho dãy số 132
143. Biểu diễn hình học của dãy số 132
144. Tính tăng, giảm của dãy số 133
145. Phương pháp xét tính tăng, giảm của dãy số 134
146. Dãy số bị chặn 134
147. Công thức số hạng tổng quát dạng đa thức 135
148. Dãy tổng có dạng $S_{n+1} = S_n$ + Đa thức bậc m 136
149. Dãy tổng dạng $S_{n+1} = S_n$ + (Đa thức bậc m theo n) × β^n 137
150. Dãy số $u_n = A\times u_{n-1} + B$ 138
CẤP SỐ CỘNG 139
CẤP SỐ NHÂN 140
GIỚI HẠN DÃY SỐ 141
151. Một bài toán mở đầu về khái niệm giới hạn dãy số 141
152. Giới hạn dãy số là gì? 142
153. Bấm máy tính tìm giới hạn dãy số 142
154. Dãy số có giới hạn 0 147
a) Định nghĩa 147
b) Một số dãy số có giới hạn 0 148

Tây Lê Trung Kiên

c) Định lý kẹp 148
DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN HỮU HẠN 149
155. Định nghĩa 149
156. Quy tắc tính giới hạn hữu hạn 149
157. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn 149
DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN VÔ CỰC 150
158. Định nghĩa 150
159. Quy tắc tìm giới hạn vô cực 150
160. Các giới hạn hỗn hợp $n^{mũ}$, $số^{n}$, n!, n^{n} 151
CÁC KỸ THUẬT TÍNH GIỚI HẠN DÃY SỐ 152
GIỚI HẠN HÀM SỐ 155
161. Giới hạn hàm số là gì? 155
162. Các loại ký hiệu giới hạn hàm số 156
163. Bấm máy tìm giới hạn hàm số 156
164. Các định nghĩa giới hạn hàm số 160
165. Tính giới hạn của hàm số bằng định nghĩa 161
166. Chứng minh hàm số không tồn tại giới hạn 161
167. Quy tắc tìm giới hạn hữu hạn 161
168. Quy tắc tìm giới han vô cực 162
CÁC DẠNG VÔ ĐỊNH 163
169. Giải thích các dạng vô định 163
170. Kỹ thuật tìm giới hạn khi gặp dạng vô định 164
GIỚI HẠN MỘT BÊN 167
171. Định nghĩa giới hạn hữu hạn và vô hạn 167
172. Điều kiện hàm số có giới hạn 168
HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM 169
173. Định nghĩa 169
174. Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm 169
175. Tìm điều kiện của tham số để hàm số liên tục tại một điểm 170
HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN KHOẢNG, ĐOẠN 171
176. Các định nghĩa 171
177. Định lý giá trị trung gian 171
178. Ứng dụng tính liên tục để chứng minh sự có nghiệm 172
ĐẠO HÀM 174
179. Định nghĩa 174
180. Số e 175
181. Bảng đạo hàm 176
182. Quy tắc tính 177
183. Công thức tính nhanh 177
184. Ý nghĩa cơ học 177

Thầy Lê Trung Kiên

185. Hệ số góc đường thẳng 178
186. Hệ số góc đường thẳng song song, vuông góc, tạo góc 178
187. Phương trình tiếp tuyến 179
LŨY THỪA 181
188. Các định nghĩa 181
189. Điều kiện của $(f(x))^{\alpha}$ 181
190. Tính chất 181
191. So sánh lũy thừa cùng cơ số 181
192. Lãi đơn 182
193. Lãi kép 182
194. Một số bài toán lãi suất khác 183
HÀM SỐ LŨY THỪA 184
195. Định nghĩa 184
196. Đạo hàm 184
197. Sự biến thiên và đồ thị 184
HÀM SỐ MŨ 187
198. Định nghĩa hàm số mũ 187
199. Đạo hàm của hàm số mũ 187
200. Sự biến thiên và đồ thị hàm số mũ 187
CĂN BẬC 189
201. Định nghĩa 189
202. Tính chất 189
LOGARIT 190
203. Định nghĩa 190
204. Tính chất 192
205. Hàm số logarit 193
206. Mối liên hệ giữa $y = \log_a(x)$ và $y = a^x$ 194
PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT 195
207. Phương trình mũ 195
208. Bất phương trình mũ 196
209. Phương trình logarit 196
210. Bất phương trình logarit 197
HÌNH KHÔNG GIAN (THAO TÁC PHỤ, KÍ HIỆU) 198
211. Kí hiệu mặt phẳng 198
212. Điểm $\in$ đường hoặc mặt 198
213. Quy ước vẽ hình 198
214. Vị trí tương đối 199
215. Lý do điểm $\in$ mặt phẳng 199
216. Xác định 4 điểm đồng phẳng 199
217. Xác định 2 đường thẳng tạo bởi 4 điểm cắt nhau 200

Thầy Lê Trung Kiên

218. Tìm một điểm chung giữa hai mặt phẳng 200
219. Điều kiện xác định mặt phẳng 200
220. Lưu ý kí hiệu khi viết chứng minh 201
221. Định lý Menelaus 201
DẠNG TOÁN CHỨNG MINH TÍNH CHẤT 203
222. Tìm một điểm nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng 203
223. Tìm giao điểm giữa đường thẳng và mặt phẳng 203
224. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng 204
225. Chứng minh ba điểm thẳng hàng 204
226. Tìm tập hợp giao điểm của hai đường thẳng di động 205
227. Chứng minh hai đường thẳng song song 205
228. Chứng minh ba đường thẳng đồng quy 205
229. Xác định thiết diện của hình chóp và mặt phẳng 206
230. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng phân biệt 207
231. Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng 207
232. Chứng minh hai mặt phẳng song song 208
233. Chứng minh ba vectơ đồng phẳng 209
234. Chứng minh bốn điểm đồng phẳng thông qua vectơ 210
235. Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng 210
236. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc 211
237. Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc 211
238. Tìm hình chiếu vuông góc của một điểm lên một mặt phẳng 212
DẠNG TOÁN TÍNH GÓC, KHOẢNG CÁCH 214
239. Tìm góc giữa hai đường thẳng 214
240. Tìm góc giữa đường thẳng và mặt phẳng 215
241. Tìm góc giữa hai mặt phẳng 215
242. Góc nhị diện và góc phẳng nhị diện 217
243. Khoảng cách giữa điểm và mặt phẳng 218
244. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song 219
245. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song 220
246. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau 220
CÁC ĐỊNH LÝ VỀ VUÔNG GÓC VÀ SONG SONG 223
CÁC HÌNH KHỐI CƠ BẢN 226
KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH 230
247. Hình đa diện, khối đa diện 230
248. Khối đa diện lồi 230
249. Khối đa diện đều 231
250. Mặt phẳng và trục đối xứng 233
251. Thể tích đa diện 235
252. Độ dài và diện tích đặc biệt 239

Tài Liệu Trung Kiên

253. Định lý Menelaus 239
254. Tam diện vuông 239
THỐNG KÊ GHÉP NHÓM 240
255. Lưu ý bấm máy tính 240
256. Cỡ mẫu, giá trị đại diện, độ dài nhóm, quy tắc ghép nhóm 240
257. Các số đặc trưng đo xu thế trung tâm 241
a) Số trung bình 241
b) Trung vị 242
c) Tứ phân vị 245
d) Mốt 250
258. Các số đặc trưng cho mức độ phân tán 251
a) Khoảng biến thiên 251
b) Khoảng tứ phân vị 253
c) Phương sai và độ lệch chuẩn 254
259. Giá trị ngoại lệ 255
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ 256
TÍNH ĐƠN ĐIỆU 256
260. Các dấu hiệu xét tính đơn điệu của hàm số 256
a) Tính đơn điệu dựa vào so sánh 256
b) Tính đơn điệu dựa vào tỷ số 256
c) Tính đơn điệu dựa vào đồ thị hàm số 257
d) Tính đơn điệu dựa vào dấu đạo hàm 257
e) Tính đơn điệu dựa vào bảng biến thiên 257
261. Một số nhận xét 258
262. Xét dấu biểu thức 259
263. Tìm điều kiện tham số từ biểu thức chứa x và m 260
264. Xét tính đơn điệu biết công thức hàm số 261
265. Tính đơn điệu hàm bậc 3 261
266. Tính đơn điệu hàm bậc nhất / bậc nhất 262
267. Tìm điều kiện hàm số đơn điệu trên 1 tập (tổng quát) 262
268. Tìm tham số để hàm |f(x)| đơn điệu 263
CỰC TRỊ HÀM SỐ 264
269. Thuật ngữ 264
270. Định nghĩa cực trị 264
271. Định lí : Đạo hàm tại điểm cực trị 265
272. Định lí : Điều kiện có cực trị dựa vào sự đổi dấu đạo hàm 266
273. Định lí : Điều kiện có cực trị dựa vào đạo hàm cấp 2 266
274. Điều kiện hàm đạt cực trị, cực đại, cực tiểu tại một điểm 267
275. Số điểm cực trị của |f(x)|, f(|x|), $k_1f(ax+b)+k_2$ 267
276. Tính nhanh cực trị, phương trình đường đi qua cực trị hàm phân thức 268

Tây Lê Trung Kiên

277. Một số nhận xét về cực trị hàm đa thức 268
278. Cực trị hàm bậc 3 270
279. Cực trị hàm bậc 4 trùng phương 274
280. Cực trị của hàm số cho bằng công thức cụ thể 275
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT 276
281. Định nghĩa 276
282. Các phương pháp tìm GTLN, GTNN hàm 1 biến thường dùng 277
283. Một số bất đẳng thức hữu ích 277
284. GTLN, GTNN Hàm bậc 1 / bậc 1 277
285. So sánh GTLN, GTNN của |f(x)+m| với một số α 277
286. Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên tập xác định 278
287. Tìm GTLN, GTNN của hàm số liên tục trên đoạn [a;b] 278
288. Tìm GTLN, GTNN của hàm số f(x) trên một tập A tùy ý 278
ĐƯỜNG TIỆM CẬN 279
289. Định nghĩa tiệm cận ngang 279
290. Định nghĩa tiệm cận đứng 279
291. Định nghĩa tiệm cận xiên 279
292. Các bước tìm tiệm cận ngang 280
293. Các bước tìm tiệm cận đứng 280
294. Các bước tìm tiệm cận xiên 281
295. Số lượng các loại tiệm cận 281
296. Tiệm cận hàm bậc 1 / bậc 1 281
297. Tiệm cận của bậc 2 / bậc 1 281
298. Một số nhận xét 282
KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ 283
299. Hàm số bậc 3 283
a) Các bước khảo sát và vẽ đồ thị 283
b) Vẽ nhanh đồ thị 283
c) Các dạng đồ thị 283
d) Dấu hệ số 285
e) Tính đơn điệu 285
f) Cực trị 285
300. Hàm số trùng phương 286
a) Các bước khảo sát và vẽ đồ thị 286
b) Các dạng đồ thị 286
c) Liên hệ giữa số nghiệm phương trình trùng phương & phương trình bậc 2 287
d) Cực trị 287
301. Hàm số bậc 1 / bậc 1 288
a) Các bước khảo sát và vẽ đồ thị 288

Thầy Lê Trung Kiên

b) Các dạng đồ thị ... 288
c) Tiệm cận & Cực trị ... 289
d) Dấu hệ số ... 289
e) Tính đơn điệu ... 289
f) Các bài toán min, max ... 290
g) Điều kiện đồ thị cắt đường thẳng tại 2 điểm ... 291
h) Điểm có tọa độ nguyên ... 292
i) Tập hợp các điểm kẻ tiếp tuyến đến đồ thị ... 293
302. Hàm bậc 2 / bậc 1 ... 294
a) Khảo sát và vẽ đồ thị ... 294
b) Các dạng đồ thị ... 294
c) Cực trị ... 295
d) Tiệm cận ... 295
e) Dấu hệ số ... 296
f) Bài toán min, max ... 296
g) Tập hợp các điểm kẻ tiếp tuyến đến đồ thị ... 297
h) Điểm có tọa độ nguyên ... 298
MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐỒ THỊ ... 299
303. Điều kiện tiếp xúc của 2 đồ thị ... 299
304. Liên hệ giữa số nghiệm phương trình và số giao điểm của đồ thị ... 299
305. Tìm điểm cố định ... 299
BIẾN ĐỔI ĐỒ THỊ HÀM SỐ ... 300
306. Hàm chẵn, lẻ ... 300
307. Tịnh tiến đồ thị ... 300
308. f(x) → |f(x)| hoặc f(|x|) hoặc |f(|x|)| ... 301
309. f(x) → -f(x) hoặc f(-x) hoặc -f(-x) ... 302
310. f(x) → f(kx) (k > 1) ... 303
311. f(x) → f(kx) (0 < k < 1) ... 304
312. f(x) → kf(x) với 0 < k < 1 ... 305
313. f(x) → kf(x) với k > 1 ... 306
314. f(x) → $k_1 f(k_2 x+a)+b$ ... 306
315. f(x)×h(x) → |f(x)|×h(x) ... 306
NGUYÊN HÀM ... 307
316. Khái niệm nguyên hàm ... 307
317. Bấm máy kiểm tra nguyên hàm ... 307
318. Một số định lý về liên tục, có đạo hàm, có nguyên hàm ... 307
319. Bảng nguyên hàm ... 308
320. Tính chất nguyên hàm ... 309
321. Công thức vi phân ... 309

Tài Liệu Trung Kiên

322. Phương pháp đặt ẩn phụ 310
323. Nguyên tắc đưa vào hoặc đưa ra vi phân 311
324. Phương pháp đưa vào vi phân 312
325. Phương pháp lượng giác hóa 313
326. Nguyên hàm từng phần 314
327. Bảng đạo nguyên 316
328. Nguyên hàm các hàm có y" = ky 317
329. Nguyên hàm phân thức 318
330. Tách nguyên hàm trên nhiều miền 319
331. Phương trình vi phân 320
TÍCH PHÂN 322
332. Định nghĩa tích phân 322
333. Tính chất của tích phân 322
334. Tích phân đổi biến số 323
335. Tích phân từng phần 323
336. Một số dạng đặc biệt 324
337. Ý nghĩa hình học 326
338. Ứng dụng của tích phân 327
339. Một số kiến thức về hình học cần thiết 330
a) Đường tròn 330
b) Elip 331
c) Parabol xoay ngang 331
VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN 332
340. Các định nghĩa 332
341. Phép cộng 334
342. Vectơ đối và phép trừ vectơ 335
343. Tích của vectơ với một số 335
344. Tích vô hướng giữa hai vectơ 336
345. Trọng tâm tứ diện 336
346. Bài toán lực 337
HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN 339
347. Hệ tọa độ 339
348. Tọa độ điểm 339
349. Toạ độ vectơ 339
350. Biểu thức tọa độ phép toán vectơ & điểm quan trọng 340
351. Các loại tâm và điểm đặc biệt của tam giác 342
352. Kiểm tra 2 vectơ cùng phương dựa vào tỷ lệ 345
353. Điểm thuộc đối tượng đặc biệt 345
354. Hình chiếu của điểm lên đối tượng đặc biệt 346

Thầy Lê Trung Kiên

355. Khoảng cách từ điểm tới đối tượng đặc biệt 346
356. Đối xứng điểm qua đối tượng đặc biệt 347
CÁC LOẠI TÍCH VECTƠ 348
357. Góc giữa 2 vectơ 348
358. Tích vô hướng 348
359. Biểu thức tọa độ tích vô hướng 348
360. Tích có hướng 349
361. Phương pháp tính tích có hướng 350
362. Tích hỗn tạp của ba vectơ 351
363. Ứng dụng tích vectơ 352
PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU 353
364. Phương trình mặt cầu 353
365. Viết phương trình mặt cầu dạng đơn giản 353
PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG 355
366. Vectơ đặc trưng cho phương của mặt phẳng 355
367. Phương trình tổng quát của mặt phẳng 355
368. Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn 357
369. Các mặt phẳng đặc biệt 357
370. Viết phương trình mặt phẳng 358
a) Không có yếu tố đường thẳng và mặt cầu 358
b) Có chứa yếu tố đường thẳng 359
371. Hai điểm cùng phía, khác phía so với 1 mặt phẳng 361
PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG 362
372. Vectơ đặc trưng cho phương của đường thẳng 362
373. Phương trình tham số và chính tắc của đường thẳng 362
374. Một số dạng viết phương trình đường thẳng 363
VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI 368
375. Vị trí tương đối giữa 2 đường thẳng 368
a) Vị trí tương đối giữa 2 đường thẳng dựa vào các tích vectơ 368
b) Vị trí tương đối của 2 đường thẳng đã biết phương trình tham số 369
c) Vị trí tương đối của 2 đường thẳng dựa vào phương pháp đại số 369
d) Tìm tham số để 2 đường thẳng song song, trùng, cắt, chéo, vuông 370
376. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng 370
a) Phương pháp đại số 370
b) Tìm giao điểm giữa đường thẳng và mặt phẳng 371
c) Phương pháp hình học 371
377. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu 372
378. Vị trí tương đối giữa mặt phẳng và mặt cầu 372
379. Vị trí tương đối giữa 2 mặt phẳng 373
HÌNH CHIẾU, ĐIỂM ĐỐI XỨNG CỦA ĐIỂM 374

Thầy Lê Trung Kiên

380. Tìm hình chiếu vuông góc của điểm lên đường thẳng 374
381. Tìm điểm đối xứng của điểm qua đường thẳng 374
382. Tìm hình chiếu vuông góc của điểm lên mặt phẳng 374
383. Tìm điểm đối xứng của điểm qua mặt phẳng 374
TỔNG HỢP VỀ GÓC, KHOẢNG CÁCH, ĐỘ DÀI 375
384. Tổng hợp về góc 375
385. Tổng hợp về khoảng cách, độ dài 376
MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÁC 378
386. Tâm tỷ cự của hệ điểm 378
a) Biểu thức tổ hợp tuyến tính 378
b) Tổ hợp tuyến tính tổng bình phương 379
c) Chuyển tích vô hướng thành hiệu bình phương 380
387. Bài toán cực trị 380
XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN 386
388. Xác suất có điều kiện 386
389. Công thức xác suất toàn phần 386
390. Công thức Bayes 386
391. Cách tính P(A|B) 387
392. Cách tính P(A∩B) 387
393. Cách tính P(A) 387

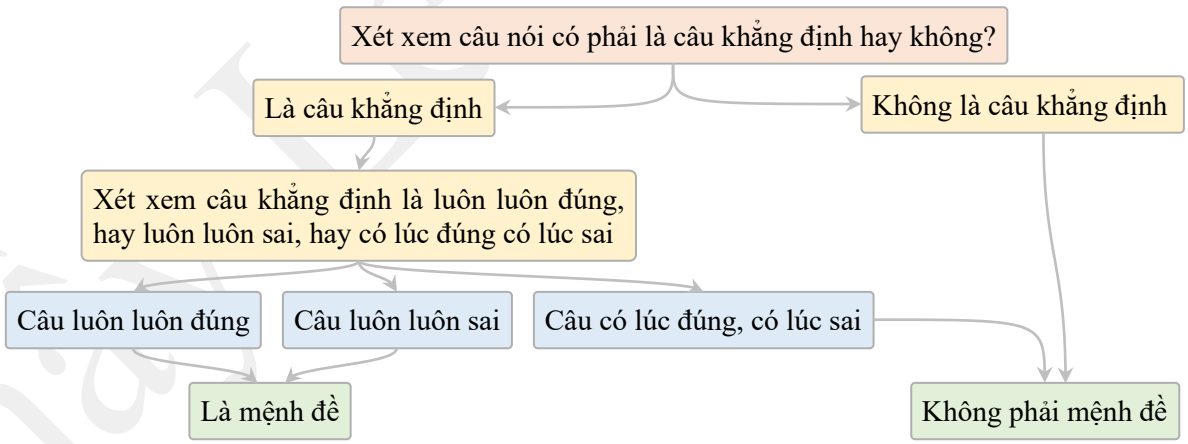
Thầy Lê Trung Kiên

MỆNH ĐỀ

1. Mệnh đề là gì?

▪ **Mệnh đề** là một câu khẳng định đúng hoặc một câu khẳng định sai. *Ví dụ:* "$1+1=2$", *"Hà Nội là thủ đô của Việt Nam", "Đà Nẵng là thành phố của nước Mỹ", "Việt Nam thống nhất đất nước vào năm 1977" là các mệnh đề.*
▪ Một khẳng định đúng gọi là **mệnh đề đúng**. *Ví dụ:* "$1+1=2$", *"Hà Nội là thủ đô của Việt Nam" là các mệnh đề đúng.*
▪ Một khẳng định sai gọi là **mệnh đề sai**. *Ví dụ: "Đà Nẵng là thành phố của nước Mỹ", "Việt Nam thống nhất đất nước vào năm 1977" là mệnh đề sai.*
▪ Một mệnh đề không thể vừa đúng, vừa sai.
▪ Người ta thường sử dụng các chữ cái in hoa $P, Q, R, \ldots$ để kí hiệu mệnh đề. *Ví dụ: mệnh đề* P: "$1+1=2$", *mệnh đề* Q = *"Hà Nội là thủ đô của Việt Nam".*
▪ Những mệnh đề có liên quan đến toán học còn được gọi là **mệnh đề toán học**. *Ví dụ:* "$1+1=2$" *là một mệnh đề toán học.*
▪ Tồn tại những câu là mệnh đề, nhưng hiện tại chúng ta chưa thể biết là mệnh đề đúng, hay mệnh đề sai. *Ví dụ: "Tổng thống nhiệm kỳ tiếp theo của nước Mỹ có tên là David", câu này chắc chắn đúng, hoặc chắc chắn sai, vì nếu tổng thống nhiệm kỳ tiếp theo của nước Mỹ có tên là David thì mệnh đề là đúng, còn nếu tổng thống nhiệm kỳ tiếp theo của nước Mỹ không có tên là David thì mệnh đề sai, nhưng để biết cụ thể mệnh đề là đúng hay sai, thì ta phải chờ đợi mới biết được.*
▪ Các câu cảm thán (câu có dấu chấm than ở cuối), câu hỏi (có dấu chấm hỏi ở cuối) không phải là mệnh đề. *Ví dụ: các câu "Hôm nay trời đẹp quá!", "Bạn ăn cơm chưa?" không phải là mệnh đề*

Để kiểm tra 1 câu có phải mệnh đề hay không, ta thường tuân theo suy luận như sau:



2. Một số kiến thức cũ

Số 0 không phải số nguyên âm và cũng không phải số nguyên dương.
Một số là **số chính phương** nếu nó là bình phương của một số tự nhiên. *Ví dụ: 1, 4, 9, 16, 25, ... là số chính phương, vì* $1=1^2, 4=2^2, 9=3^2, 16=4^2, 25=5^2, \ldots$
Các số nguyên dương không phải là số nguyên tố thì gọi là **hợp số**.

Một số không là số nguyên tố thì chưa chắc nó đã là hợp số. *Ví dụ:* $\frac{1}{2}$ *không là số nguyên tố, nhưng nó cũng không phải hợp số.*
Số hữu tỷ là số có thể viết được dưới dạng tỷ số của hai số nguyên với mẫu số khác 0. (hữu: tức là có, tỷ: tức là tỷ số, hữu tỷ : tức là viết được dưới dạng tỷ số của hai số nguyên) *Ví dụ:* $0, 1, 2, 4, -6, 4, \frac{1}{2}, -\frac{5}{2}$ *là các số hữu tỷ.*
Số vô tỷ là số không thể viết được dưới dạng tỷ số của hai số nguyên với mẫu số khác 0. *Ví dụ:* $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}+1$, $\frac{\sqrt[3]{10}}{2}$ *là các số vô tỷ.*
Số nguyên âm là các số nguyên nhỏ hơn 0. *(VD:* $\ldots, -6, -5, -4, -3, -2, -1$*).*
Số nguyên dương là các số nguyên lớn hơn 0. *(VD:* $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots$*).*
Số âm $\Leftrightarrow$ Số < 0
Số dương $\Leftrightarrow$ Số > 0
Số không âm $\Leftrightarrow$ Số ≥ 0
Số không dương $\Leftrightarrow$ Số ≤ 0

3. Mệnh đề chứa biến

Một nhận định được gọi là mệnh đề chứa biến nếu các điều kiện sau được thỏa mãn:
- Là một câu khẳng định chứa biến, biến số thường được ký hiệu bởi các chữ cái như x, y, z, t,...
- Biến số nhận giá trị trong một tập X nào đó (tập X này có thể do nhận định cho, hoặc nếu không cho thì ta hiểu rằng biến số thuộc tập số thực $\mathbb{R}$).
- Với mỗi giá trị cụ thể của biến thuộc X ta được một mệnh đề.

Chú ý:

– Một mệnh đề chứa biến có thể chứa một biến hoặc nhiều biến.

– Mệnh đề chứa biến có thể là mệnh đề, cũng có thể không là mệnh đề.

Ví dụ

a) Với n là số tự nhiên thì n^2+1 chia hết cho 2.

b) Với x là số thực thì $x^2+1 \geq 0$.

c) Với t là số thực thì $t^2+1 < 0$.

d) $P(x)$: "$2x = 1$".

e) $R(x; y)$: "$2x + y = 3$" (mệnh đề này chứa hai biến là x và y).

f) $T(n)$: "$2n + 1$ là số chẵn" (n là số tự nhiên).

4. Mệnh đề phủ định

Cho mệnh đề P.
- Mệnh đề "Không phải P" được gọi là mệnh đề phủ định của P và kí hiệu là $\bar{P}$.
- Nếu P đúng thì $\bar{P}$ sai, nếu P sai thì $\bar{P}$ đúng.
- Mệnh đề P và mệnh đề phủ định $\bar{P}$ của nó có tính đúng sai trái ngược nhau. Nghĩa là khi P đúng thì $\bar{P}$ sai, khi P sai thì $\bar{P}$ đúng.

Chú ý: Một số phủ định thường gặp

Mệnh đề chính	Phủ định thành
hữu hạn	vô hạn
vô nghiệm	có nghiệm
chia hết	không chia hết
bằng	không bằng (khác)
với mọi	tồn tại
tồn tại	với mọi
lớn hơn	nhỏ hơn hoặc bằng
nhỏ hơn	lớn hơn hoặc bằng
lớn hơn hoặc bằng	nhỏ hơn
nhỏ hơn hoặc bằng	lớn hơn
là số nguyên tố	không là số nguyên tố
… và …	… hoặc …
… hoặc …	… và …
A_1 và A_2 và A_3 và ... A_n	$\overline{A_1}$ hoặc $\overline{A_2}$ hoặc $\overline{A_3}$ hoặc ... $\overline{A_n}$
A_1 hoặc A_2 hoặc A_3 hoặc ... A_n	$\overline{A_1}$ và $\overline{A_2}$ và $\overline{A_3}$ và ... $\overline{A_n}$

Ví dụ

Mệnh đề P	Mệnh đề phủ định $\overline{P}$
12 là số nguyên tố	12 không là số nguyên tố
$1 + 2 = 3$	$1 + 2 \neq 3$
$5 \geq 4$	$5 < 4$
$5 < 6$	$5 \geq 6$
12 chia hết cho 6	12 không chia hết cho 6
Chim cánh cụt biết bay	Chim cánh cụt không biết bay
Cá voi có ngà	Cá voi không có ngà
Con bọ ngựa có bờm	Con bọ ngựa không có bờm

Chú ý:

▪ Mệnh đề phủ định của P có thể diễn đạt theo nhiều cách khác nhau.
Ví dụ: P: "8 là số nguyên tố" có $\overline{P}$: "8 *không phải là số nguyên tố" hay* $\overline{P}$: "*Nói 8 là số nguyên tố là sai*".

▪ Có thể dùng mệnh đề phủ định 2 lần của mệnh đề P để diễn đạt P.
Ví dụ: P: "*Dây đồng dẫn điện*" *có* $\overline{\overline{P}}$: "*Không phải dây đồng không dẫn điện*" *(Tức là dây đồng phải dẫn điện).*
Vậy $P \equiv \overline{\overline{P}}$.

▪ Cẩn thận với khi thay thế các mệnh đề bằng các ý tương tự nó.
Ví dụ: A: "a là số nguyên tố" có $\bar{A}$: "a không là nguyên tố". Mệnh đề $\bar{A}$ không giống với mệnh đề B: "a là hợp số", vì ta giả sử $a = \frac{1}{2}$ thì "$\frac{1}{2}$ không là nguyên tố" là mệnh đề đúng, trong khi "$\frac{1}{2}$ là hợp số" là mệnh đề sai.
Ví dụ: C: "Nấm là một loài động vật" có $\bar{C}$: "Nấm không là một loài động vật". Mệnh đề $\bar{C}$ không giống với mệnh đề D: "Nấm là một loài thực vật", vì "Nấm không là một loài động vật" là mệnh đề đúng, trong khi "Nấm là một loài thực vật" là một mệnh đề sai.

5. Mệnh đề kéo theo

Cho hai mệnh đề P và Q

▪ Mệnh đề "Nếu P thì Q" được gọi là mệnh đề kéo theo và kí hiệu là $P \Rightarrow Q$.

▪ Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng và Q sai.

Chú ý: ▪ Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ còn được phát biểu là "P kéo theo Q" hoặc "Từ P suy ra Q".

▪ Các định lý toán học thường có dạng $P \Rightarrow Q$. Khi đó: P là giả thiết, Q là kết luận.

▪ Một vài cách phát biểu mệnh đề "Nếu P thì Q"

Nếu P thì Q	Phát biểu dùng điều kiện cần	Điều kiện cần để P là Q
		Q là điều kiện cần để có P
	Phát biểu dùng điều kiện đủ	Điều kiện đủ để Q là P
		P là điều kiện đủ để có Q

▪ Để xét tính đúng sai của mệnh đề $P \Rightarrow Q$, ta chỉ cần xét trường hợp P đúng. Khi đó, nếu Q đúng thì mệnh đề đúng, nếu Q sai thì mệnh đề sai.

6. Mệnh đề đảo

▪ Cho mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$. Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

▪ Mệnh đề đảo có thể đúng, cũng có thể sai.

7. Mệnh đề tương đương

Cho hai mệnh đề P và Q.

▪ Mệnh đề "P nếu và chỉ nếu Q" (hoặc "P khi và chỉ khi Q") được gọi là mệnh đề tương đương và kí hiệu là $P \Leftrightarrow Q$.

▪ Nếu cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng thì mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng.

▪ Hai mệnh đề P và Q tương đương khi chúng cùng đúng hoặc cùng sai.

Chú ý: Nếu mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ là một định lý thì ta nói P là **điều kiện cần và đủ** để có Q.

8. Kí hiệu $\forall$ và $\exists$

$\forall$: với mọi giá trị (hoặc với tất cả giá trị).

$\exists$: tồn tại giá trị (hoặc có giá trị, hoặc có ít nhất một giá trị).

(Hai kí hiệu này giúp việc viết các định lý, biểu thức, điều kiện toán học ngắn gọn và nhanh chóng hơn)

Hai dạng mệnh đề quan trọng và mệnh đề phủ định của nó :

Mệnh đề	$\forall x \in X, P(x)$	$\exists x \in X, P(x)$
Mệnh đề phủ định	$\exists x \in X, \overline{P(x)}$	$\forall x \in X, \overline{P(x)}$

Chú ý: ▪ Mệnh đề "$\forall x \in M, P(x)$" đúng nếu với mọi $x_0 \in M$, $P(x_0)$ là mệnh đề đúng.

▪ Mệnh đề "$\exists x \in M, P(x)$" đúng nếu có $x_0 \in M$ sao cho $P(x_0)$ là mệnh đề đúng.

▪ Trong một số sách ký hiệu $\exists!$ nghĩa là tồn tại duy nhất một.

▪ Ký hiệu $\exists$ chỉ cho ta biết có giá trị, chứ không cho ta biết có bao nhiêu giá trị.

TẬP HỢP

9. Kí hiệu

Trong cuộc sống, người ta dùng từ tập hợp để chỉ một nhóm đối tượng nào đó hoàn toàn xác định. Mỗi đối tượng trong nhóm gọi là một phần tử của tập hợp đó.

Ví dụ:

a) Các học sinh của lớp 10A1 tạo thành 1 tập hợp. Các học sinh nữ của lớp này cũng tạo thành 1 tập hợp.

b) Các nghiệm của phương trình $x^2 - 4 = 0$ *tạo thành một tập hợp. Tập hợp này có hai phần tử là* 2 *và* -2.

Chú ý:

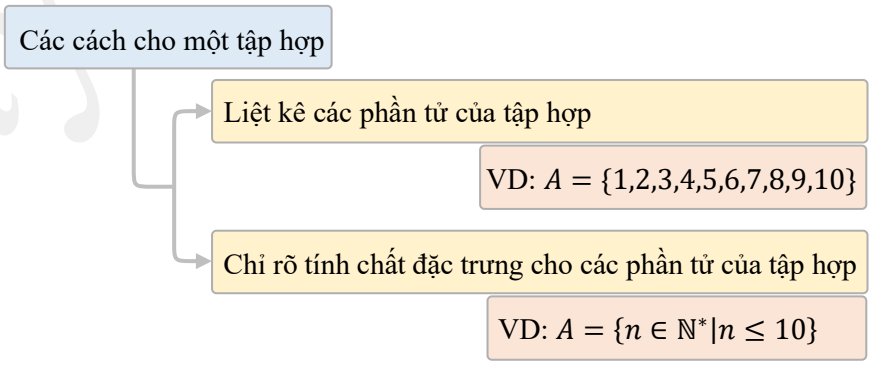
Người ta thường kí hiệu tập hợp bằng các chữ cái in hoa A, B, C... và kí hiệu phần tử của tập hợp bằng các chữ cái in thường a, b, c, ...
Đôi khi, để ngắn gọn người ta dùng từ "tập" thay cho "tập hợp".
Nếu a là phần tử của tập X, ta viết $a \in X$.
Nếu a không phải phần tử của tập X, ta viết $a \notin X$.

10. Các tập số

Tên	Kí hiệu	Các phần tử hoặc đặc điểm
Tập hợp số tự nhiên	$\mathbb{N}$	$\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; \dots\}$
Tập hợp số tự nhiên khác không	$\mathbb{N}^*$	$\{1; 2; 3; 4; 5; 6; \dots\}$
Tập hợp số nguyên	$\mathbb{Z}$	$\{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$
Tập hợp số nguyên dương	$\mathbb{Z}^+$	$\{1; 2; 3; 4; 5; 6; \dots\}$
Tập hợp số nguyên âm	$\mathbb{Z}^-$	$\{\dots; -4; -3; -2; -1\}$
Tập hợp số hữu tỷ	$\mathbb{Q}$	$\left\{\frac{m}{n} \middle\| m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$
Tập hợp số vô tỷ	I	Là số thực nhưng không là số hữu tỷ
Tập hợp số thực	$\mathbb{R}$	Bao gồm tất cả các tập số ở trên

Chú ý: Số 0 không là số nguyên dương, cũng không là số nguyên âm.

11. Các cách cho một tập hợp



Chú ý:

▪ Tập hợp không chứa phần tử nào gọi là tập rỗng, kí hiệu $\emptyset$.
▪ Tập hợp luôn mở đầu và kết thúc bằng cặp ngoặc nhọn { }.

Thầy Lê Phụng Kiên

▪ Khi liệt kê các phần tử của tập hợp, ta có một số chú ý sau đây:

– Các phần tử có thể được viết theo thứ tự tuỳ ý. Chẳng hạn, để viết tập hợp A các nghiệm của phương trình $x(x-1)=0$, ta có thể viết $A=\{0;1\}$ hoặc $A=\{1;0\}$.

– Mỗi phần tử chỉ được liệt kê một lần. Chẳng hạn, nếu kí hiệu B là tập hợp các chữ cái trong từ "$Hello$" thì $B=\{H;e;l;o\}$.

– Nếu quy tắc xác định các phần tử đủ rõ thì người ta dùng "..." mà không nhất thiết viết ra tất cả các phần tử của tập hợp. Chẳng hạn, tập hợp các số tự nhiên không quá 100 có thể được viết là {0;1;2;3;...;100}.

▪ Có những tập hợp mà ta có thể đếm được số lượng cụ thể các phần tử của chúng. Những tập hợp như vậy được gọi là tập hợp hữu hạn.

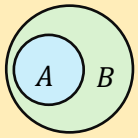
▪ Nếu E là tập hợp hữu hạn thì số phần tử của nó được kí hiệu là $n(E)$. Đặc biệt, $n(\emptyset)=0$.

Ví dụ: $E=\{1;a;7;-1\}$ *có* $n(E)=4$.

12. Tập con và hai tập hợp bằng nhau

Tập A được gọi là **tập con** của tập B, ký hiệu $A\subset B$ nếu với mọi phần tử của tập A đều là phần tử của tập B.

$$A\subset B \Leftrightarrow (\forall x, x\in A \Rightarrow x\in B)$$



Hai tập A và B được gọi là bằng nhau, ký hiệu $A=B$ nếu với mỗi phần tử của A là một phần tử của B và mỗi phần tử của B cũng là một phần tử của A.

$$A=B \Leftrightarrow (A\subset B \text{ và } B\subset A)$$

Chú ý:

▪ $A\subset A$ và $\emptyset\subset A$ với mọi tập hợp A.

▪ Nếu A không phải là tập con của B thì ta kí hiệu $A\not\subset B$ (đọc là A không chứa trong B hoặc B không chứa A).

▪ Nếu $A\subset B$ hoặc $B\subset A$ thì ta nói A và B có quan hệ bao hàm.

▪ Cho một tập A gồm n phần tử khác nhau.

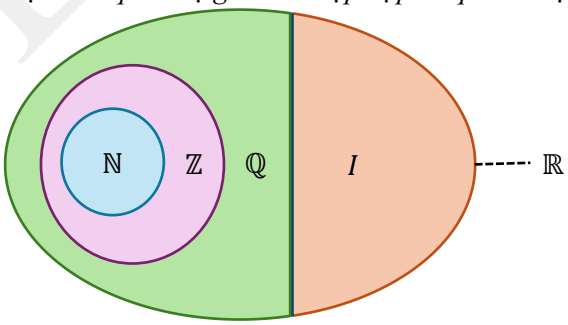
– Số tập con của tập A (tính cả tập $\emptyset$) là 2^n.

– Số tập con của tập A gồm k phần tử khác nhau là: C_n^k (Bấm máy tính n Shift nCr k).

13. Biểu đồ Ven

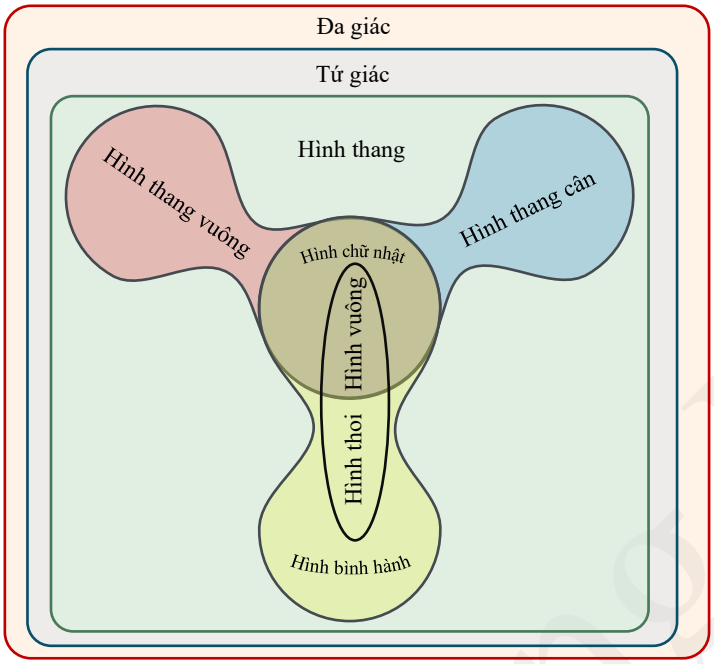
Để minh họa các tập hợp người ta dùng biểu đồ Ven. Một hình kép kín (thường là hình tròn) để biểu diễn tập hợp.

Hình dưới là biểu đồ Ven minh họa cho quan hệ giữa các tập hợp số quen thuộc.

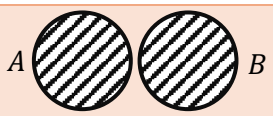
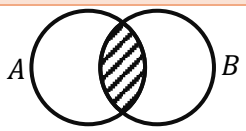
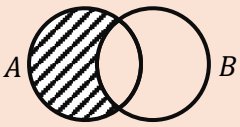


Thầy Lê Trung Kiên

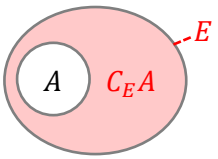
Biểu đồ Ven minh họa mối quan hệ giữa các loại đa giác thường gặp



14. Các phép toán tập hợp

Tên	Phát biểu	Ký hiệu	Minh họa hình học
Phép hợp	Hợp của hai tập hợp A và B là tập hợp bao gồm tất cả các phần tử thuộc A hoặc thuộc B.	$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$	
Phép giao	Giao của hai tập hợp A và B là tập hợp bao gồm tất cả các phần tử thuộc cả A và B.	$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$	
Phép hiệu	Hiệu của hai tập hợp A và B là tập hợp bao gồm tất cả các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B.	$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$	

Đặc biệt nếu $A \subset E$ thì hiệu của E và A được ký hiệu là $C_E A$ được gọi là **phần bù** của A trong E, như vậy: $C_E A = E \backslash A = \{x \mid x \in E \text{ và } x \notin A\}$.



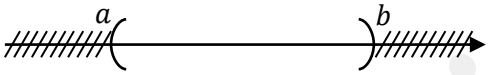
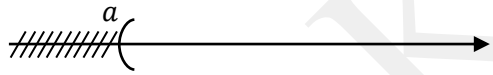
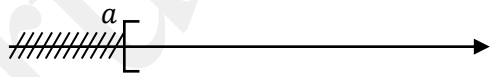
Chú ý:

- Nếu A và B là hai tập hợp hữu hạn thì $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.
- Đặc biệt, nếu A và B không có phần tử chung, tức $A \cap B = \emptyset$, thì $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.
- Nếu A, B, C là ba tập hợp hữu hạn thì :

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$

Tây Ninh Kiên

15. Các tập con của tập số thực

Tên gọi và ký hiệu	Tập hợp	Hình biểu diễn
Đoạn $[a;b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$	
Khoảng $(a;b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
Khoảng $(-\infty;a)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	
Khoảng $(a;+\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$	
Nửa khoảng $[a;b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$	
Nửa khoảng $(a;b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$	
Nửa khoảng $(-\infty;a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \le a\}$	
Nửa khoảng $[a;+\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\}$	

Thầy Lê Trung Kiên

BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

16. Định nghĩa

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn là bất phương trình có một trong các dạng:

$ax + by + c < 0$ $ax + by + c \le 0$ $ax + by + c > 0$ $ax + by + c \ge 0$

trong đó a, b, c là những số cho trước sao cho $a^2 + b^2 \neq 0$; x và y là các ẩn.

Ví dụ: $2x + 3y - 3 < 0$, $-\frac{1}{2}x - y \ge 0$, $\sqrt{2}x > 2$, $\frac{1}{6}y \le 4$ *là các bất phương trình bậc nhất 2 ẩn.*

17. Biểu diễn tập nghiệm

Xét bất phương trình $ax + by + c \le 0$.
Mỗi cặp số $(x_0; y_0)$ thỏa mãn $ax_0 + by_0 + c \le 0$ được gọi là một nghiệm của bất phương trình đã cho.
(Nghiệm của các bất phương trình $ax + by + c > 0, ax + by + c < 0, ax + by + c \ge 0$ cũng được định nghĩa tương tự)

Để xác định miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c < 0$, ta làm như sau:

▪ Vẽ đường thẳng (d): $ax + by + c = 0$ (Xác định 2 điểm rồi vẽ đường thẳng)

▪ Xét một điểm $M(x_0; y_0)$ (Thường là gốc tọa độ $(0; 0)$) không nằm trên (d))

– Nếu $ax_0 + by_0 + c < 0$ thì nửa mặt phẳng (không kể bờ (d)) chứa điểm M là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c < 0$.

– Nếu $ax_0 + by_0 + c > 0$ thì nửa mặt phẳng (không kể bờ (d)) không chứa điểm M là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c < 0$.

Chú ý : Đối với các bất phương trình dạng $ax + by + c \le 0$ hoặc $ax + by + c \ge 0$ thì miền nghiệm là nửa mặt phẳng kể cả bờ.

18. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

▪ Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là hệ gồm hai hay nhiều bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y. Mỗi nghiệm chung của tất cả các bất phương trình đó được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

▪ Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm (x_0, y_0) có tọa độ là nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn được gọi là miền nghiệm của hệ bất phương trình đó.

Ví dụ: $\begin{cases} 2x + 4 \ge 0 \\ 4x - y < 5 \\ x \ge 2 \\ y \le \frac{1}{2} \end{cases}$ *là một hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn.*

▪ Để biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên mặt phẳng tọa độ Oxy, ta thực hiện như sau:

– Trên cùng mặt phẳng tọa độ, biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình của hệ.

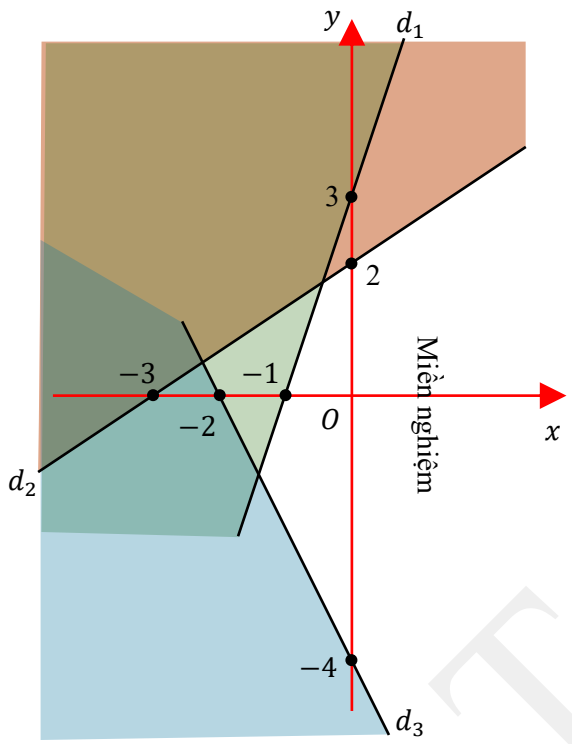
– Phần giao của các miền nghiệm là miền nghiệm của hệ bất phương trình.

Thầy Lê Thanh Kiên

Ví dụ

Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x - y + 3 > 0 \\ -2x + 3y - 6 < 0 \\ 2x + y + 4 > 0 \end{cases} (I)$

Giải



Trước hết, ta vẽ ba đường thẳng

$(d_1): 3x - y + 3 = 0$

$(d_2): -2x + 3y - 6 = 0$

$(d_3): 2x + y + 4 = 0$

Thử trực tiếp ta thấy $(0; 0)$ là nghiệm của cả ba bất phương trình. Điều đó có nghĩa là gốc tọa độ thuộc cả ba miền nghiệm của ba bất phương trình của hệ (I). Sau khi gạch bỏ các miền không thích hợp, miền không tô đậm trên hình (không kể biên là miền nghiệm của hệ (I).

19. Tìm cực trị biểu thức F = ax + by trên một miền đa giác

Các bước làm bài:

Bước 1: Đặt ẩn số phụ x và y tương ứng với các đại lượng mà đề bài cho.

Bước 2: Thiết lập các điều kiện cho x và y và biểu thức cần tìm giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) phụ thuộc vào x và y.

Bước 3: Đặt tất cả các điều kiện của x và y là cùng một hệ. Biểu diễn miền nghiệm của hệ trên.

Bước 4: Tìm đỉnh của miền nghiệm của hệ trên.

Bước 5: Tính giá trị của biểu thức cần tìm giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) tại các đỉnh của miền nghiệm rồi chọn ra giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) theo yêu cầu của đề bài.

Thầy Trung Hiên

20. Áp dụng vào bài toán kinh tế

Ví dụ

Người ta dự định dùng hai loại nguyên liệu để chiết xuất ít nhất 140 kg chất A và 9 kg chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại I giá 4 triệu đồng, có thể chiết xuất được 20 kg chất A và 0,6 kg chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại II giá 3 triệu đồng, có thể chiết xuất được 10 kg chất A và 1,5 kg chất B. Hỏi phải dùng bao nhiêu tấn nguyên liệu mỗi loại để chi phí mua nguyên liệu là ít nhất, biết rằng cơ sở cung cấp nguyên liệu chỉ có thể cung cấp không quá 10 tấn nguyên liệu loại I và không quá 9 tấn nguyên liệu loại II?

Giải

Phân tích bài toán. Nếu sử dụng x tấn nguyên liệu loại I và y tấn nguyên liệu loại II thì theo giả thiết, có thể chiết xuất được $(20x + 10y)$ kg chất A và $(0{,}6x + 1{,}5y)$ kg chất B. Theo giả thiết, x và y phải thỏa mãn các điều kiện:

$0 \le x \le 10$ và $0 \le y \le 9$;

$20x + 10y \ge 140$, hay $2x + y \ge 14$;

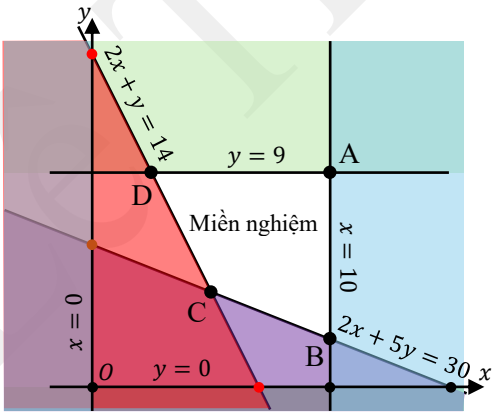
$0{,}6x + 1{,}5y \ge 9$, hay $2x + 5y \ge 30$.

Tổng số tiền mua nguyên liệu là $T(x; y) = 4x + 3y$.

Bài toán đã cho trở thành: Tìm các số x và y thỏa mãn hệ bất phương trình $\begin{cases} 0 \le x \le 10 \\ 0 \le y \le 9 \\ 2x + y \ge 14 \\ 2x + 5y \ge 30 \end{cases}$

Sao cho $T(x; y) = 4x + 3y$ có giá trị nhỏ nhất.

Để giải bài toán này, ta thừa nhận rằng biểu thức $T(x; y)$ có giá trị nhỏ nhất (hoặc lớn nhất) và giá trị ấy đạt được tại một trong các đỉnh của tứ giác $ABCD$. Bằng cách tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D rồi so sánh các giá trị tương ứng của $T(x; y)$, ta được $T(5; 4) = 32$ là giá trị nhỏ nhất.



Miền nghiệm là miền màu trắng trên hình vẽ

Vậy để chi phí nguyên liệu ít nhất, cần sử dụng 5 tấn nguyên liệu loại I và 4 tấn nguyên liệu loại II (khi đó, chi phí tổng cộng là 32 triệu đồng).

Thầy Lê Phúc Kiên

HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

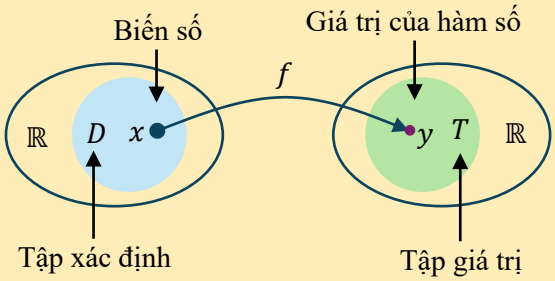
21. Định nghĩa

▪ Cho $D \subset R, D \neq \emptyset$. **Hàm số f** xác định trên D là một quy tắc đặt tương ứng mỗi số $x \in D$ với một và chỉ một số $y \in R$.

▪ x được gọi là **biến số** (hay đối số, hay biến độc lập), y được gọi là **giá trị** của hàm số f tại x (hay biến phụ thuộc). Kí hiệu $y = f(x)$.

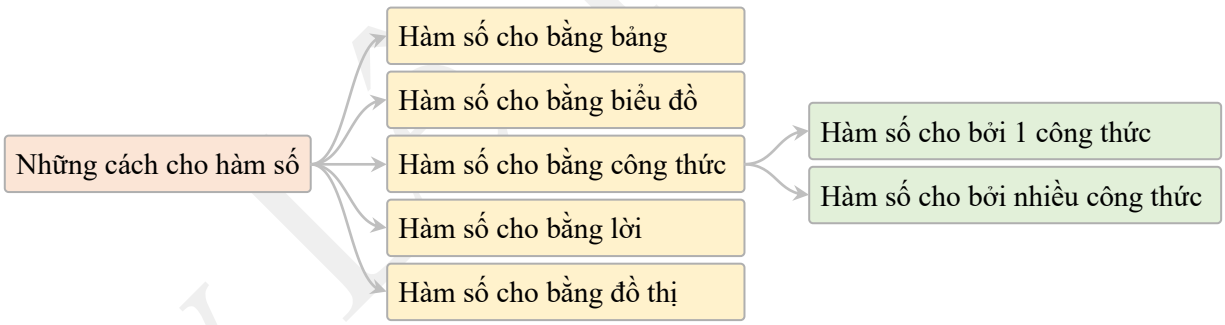
▪ D được gọi là **tập xác định** của hàm số.

▪ $T = \{y | y = f(x), x \in D\}$ được gọi là **tập giá trị** của hàm số.



Chú ý: Trong nhiều trường hợp, nếu không nói gì thêm thì ta hiểu tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

22. Cách cho hàm số



23. Tìm tập xác định của hàm số

▪ Tìm tập xác định D của hàm số $y = f(x)$ là tìm tất cả những giá trị của biến số x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa: $D = \{x \in R | f(x) \text{ có nghĩa}\}$.

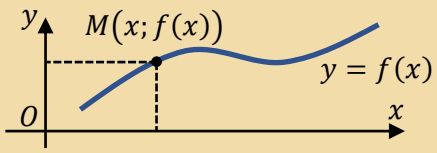
▪ Tập xác định của một hàm số có thể là tập hợp của các giá trị đơn lẻ rời rạc, cũng có thể là các tập dạng khoảng, đoạn, nửa khoảng, hoặc sự kết hợp của các loại tập hợp này.

▪ Điều kiện xác định của một số hàm số thường gặp:

Biểu thức	Điều kiện	Phạm vi lớp được học
$\frac{P(x)}{Q(x)}$	$Q(x) \neq 0$	Lớp ≤ 10
$\sqrt{P(x)}$	$P(x) \geq 0$	Lớp ≤ 10
$\sqrt[3]{P(x)}$	Không cần điều kiện	Lớp ≤ 10
$\sqrt[\text{số chẵn}]{P(x)}$	$P(x) \geq 0$	Lớp ≤ 10
$\sqrt[\text{số lẻ}]{Q(x)}$	Không cần điều kiện	Lớp ≤ 10
$\lvert P(x)\rvert$	Không cần điều kiện	Lớp ≤ 10
$A \times B \neq 0$	$\Leftrightarrow \begin{cases} A \neq 0 \\ B \neq 0 \end{cases}$	Lớp ≤ 10
$\begin{cases} A \geq 0 \\ A \neq 0 \end{cases}$	$\Leftrightarrow A > 0$	Lớp ≤ 10
$A^2 > 0$	$\Leftrightarrow A \neq 0$	Lớp ≤ 10
$\log_a b$	$\begin{cases} a > 0, a \neq 1 \\ b > 0 \end{cases}$	Lớp 11
$P(x)^{\text{số nguyên dương}}$	Không cần điều kiện	Lớp 11
$P(x)^{\text{số nguyên âm hoặc 0}}$	$P(x) \neq 0$	Lớp 11
$P(x)^{\text{số không nguyên}}$	$P(x) > 0$	Lớp 11
$a^{P(x)}$ (Với $a > 0, a \neq 1$)	Không cần điều kiện	Lớp 11

24. Đồ thị hàm số

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D là tập hợp tất cả các điểm $M(x; f(x))$ trên mặt phẳng tọa độ với mọi $x \in D$. x gọi là **hoành độ**, y gọi là **tung độ**.



Chú ý:

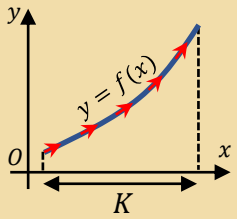
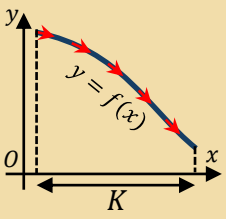
▪ Ta thường gặp đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là một đường. Khi đó $y = f(x)$ là phương trình của đường đó.

▪ $M(x_0; f(x_0))$ thuộc đồ thị hàm số $\Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$ $(x_0 \in D)$

Thầy Trần Kiên

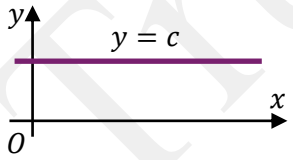
25. Sự biến thiên của hàm số

Cho hàm số f xác định trên K, trong đó K là một khoảng (nửa khoảng hay đoạn) nằm trong D.

Hàm số $f(x)$ **đồng biến (tăng)** trên K nếu: $\forall x_1, x_2 \in K: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$	Hàm số $f(x)$ **nghịch biến (giảm)** trên K nếu: $\forall x_1, x_2 \in K: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
hoặc $\forall x_1, x_2 \in K: x_1 \neq x_2 \Rightarrow \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$	hoặc $\forall x_1, x_2 \in K: x_1 \neq x_2 \Rightarrow \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$
	
Trên K, đồ thị của hàm số f đi lên (theo chiều tăng của biến số)	Trên K, đồ thị của hàm số f đi xuống (theo chiều tăng của biến số)

Chú ý:

▪ Nếu $f(x_1) = f(x_2)$ với mọi $x_1, x_2 \in K$ tức là $f(x) = c$ thì f là hàm số không đổi (hay hàm hằng) trên K. Đồ thị của hàm hằng là một đường thẳng song song hoặc trùng với trục Ox.



▪ Ta thường ghi kết quả khảo sát sự biến thiên của hàm số bằng cách lập bảng biến thiên.

26. Khảo sát sự biến thiên của hàm số trên một khoảng

Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng A

(Tức là trả lời câu hỏi: "Hàm số $y = f(x)$ tăng, hay giảm, hay không đổi khi $x \in A$?)

Cách 1: Sử dụng phương pháp tỷ số

Bước 1: Lấy $x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$.

Bước 2: Tính $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$

– Nếu $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0, \forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$ thì kết luận hàm số f đồng biến trên A.

– Nếu $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0, \forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$ thì kết luận hàm số f nghịch biến trên A.

Cách 2: Sử dụng phương pháp so sánh

Bước 1: Lấy $x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2$.

Bước 2: So sánh giá trị của $f(x_1)$ và $f(x_2)$

– Nếu $f(x_1) < f(x_2)$ thì $f(x)$ đồng biến trên A.

– Nếu $f(x_1) > f(x_2)$ thì $f(x)$ nghịch biến trên A.

– Nếu $f(x_1) = f(x_2), \forall x_1, x_2 \in A$ thì $f(x)$ không đổi trên A.

▪ Trong tính toán có sử dụng các kỹ thuật như:

– Các hằng đẳng thức :

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

– Quy đồng phân số.

– Nhân liên hợp :

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$
$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) = \frac{a - b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$$

Thầy Lê Trung Kiên

HÀM SỐ BẬC 2

27. Định nghĩa

Hàm số bậc 2 theo biến x là hàm số có dạng $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Hàm số bậc 2 có tập xác định $D = R$.

Ví dụ: $y = -2x^2 + 3x + 1$, $y = 3x^2 + 1$, $y = -\sqrt{2}x^2 + 5x$, $y = 2x^2$ *là các hàm số bậc hai.*

28. Đặc điểm đồ thị

$$y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$$

Tập xác định $D = R$.

Bảng biến thiên:

Trường hợp $a > 0$

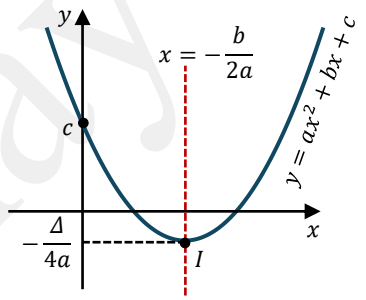
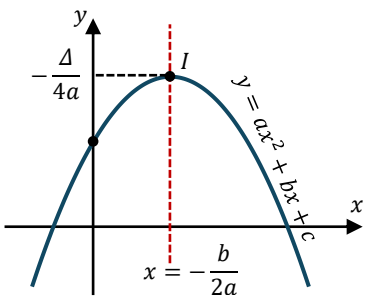
x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$

Trường hợp $a < 0$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$

Đặc điểm đồ thị:

- Đồ thị là một parabol có đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.
- Nhận đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$ làm trục đối xứng.
- Hướng bề lõm lên trên nếu $a < 0$,và hướng xuống dưới khi $a < 0$.
- Cắt trục Oy tại điểm $(0; c)$.
- Nếu $a > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại đỉnh Parabol. Nếu $a < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại đỉnh Parabol.
- Nếu $a > 0$ thì hàm số có giá trị nhỏ nhất là $y = y_{\text{đỉnh}}$ khi $x = x_{\text{đỉnh}}$. Nếu $a < 0$ thì hàm số có giá trị lớn nhất là $y = y_{\text{đỉnh}}$ khi $x = x_{\text{đỉnh}}$.
- Nếu $a > 0$ thì hàm số có tập giá trị là $[y_{\text{đỉnh}}; +\infty)$. Nếu $a < 0$ thì hàm số có tập giá trị là $(-\infty; y_{\text{đỉnh}}]$.
- Nếu đồ thị hàm số cắt trục Ox lần lượt tại 2 điểm có hoành độ là x_1 và x_2 thì $x_{\text{đỉnh}} = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

$a > 0$	$a < 0$
	
Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$.	Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$.

Thầy Lê Trung Kiên

29. Các bước vẽ đồ thị

Để vẽ đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ ta có thể thực hiện các bước như sau:

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2: (Xác định các hệ số a, b, c)

– Xác định tọa độ đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

– Xác định trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$.

Bước 3: Lập bảng biến thiên của hàm số.

Bước 4: Nêu tính đồng biến và nghịch biến của hàm số.

Bước 5: Xác định một số điểm cụ thể của parabol (chẳng hạn, giao điểm của parabol với các trục tọa độ và các điểm đối xứng với chúng qua trục đối xứng), hoặc lập bảng 1 vài giá trị.

Bước 6: Vẽ đồ thị hàm số: Vẽ đỉnh → Vẽ trục đối xứng → Vẽ các điểm đã xác định thuộc đồ thị hàm số → Vẽ đồ thị hoàn chỉnh.

30. Phương trình bậc hai

Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$

	Biệt thức: $\Delta = b^2 - 4ac$	Biệt thức thu gọn: $\Delta' = b'^2 - ac$ $(b' = \frac{b}{2})$
$\Delta > 0$ (hoặc $\Delta' > 0$)	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta}}{a}$
$\Delta = 0$ (hoặc $\Delta' = 0$)	$x = -\frac{b}{2a}$	$x = -\frac{b'}{a}$
$\Delta < 0$ (hoặc $\Delta' < 0$)	Phương trình vô nghiệm	

31. Định lý Viét

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có 2 nghiệm phân biệt là x_1 và x_2 thì:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

32. Định lý Viét đảo

Muốn tìm hai số u và v, biết $u + v = S, uv = P$, ta giải phương trình:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

(Điều kiện để có u và v là $S^2 - 4P \geq 0$)

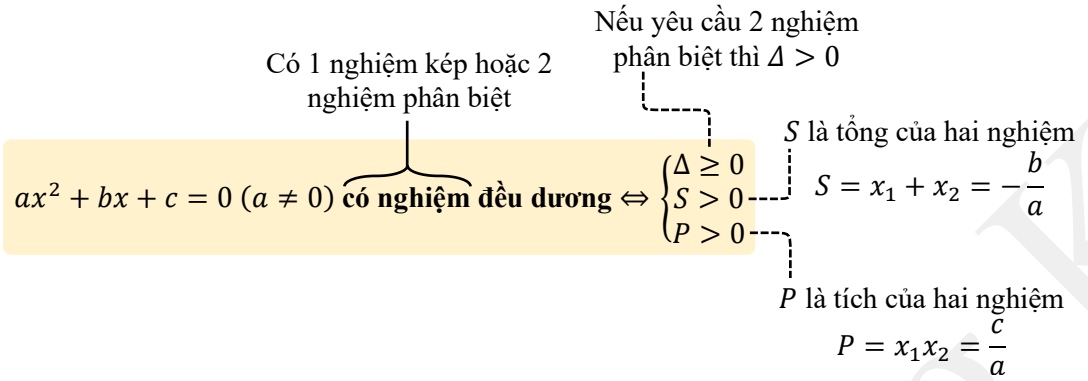
Thầy Lê Trung Kiên

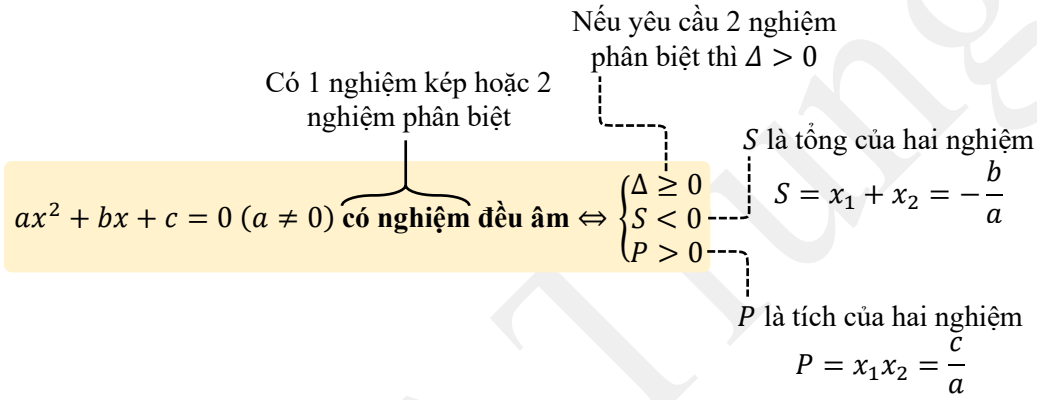
33. Một số điều kiện về nghiệm

$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ **có nghiệm** $\Leftrightarrow \Delta=b^2-4ac\geq 0$

$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ **có 2 nghiệm phân biệt** $\Leftrightarrow \Delta=b^2-4ac>0$

$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ **có hai nghiệm trái dấu** $\Leftrightarrow \dfrac{c}{a}<0$ (hoặc $ac<0$)





34. Các dạng biểu diễn của hàm số bậc 2

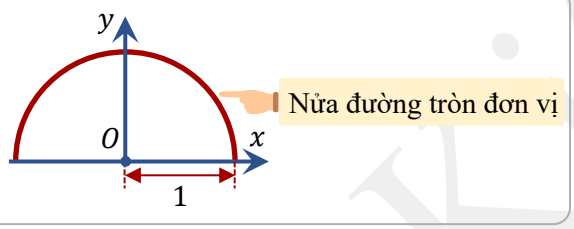
Tên gọi	Đặc điểm
Dạng khai triển: $y=ax^2+bx+c$	Tọa độ đỉnh $\left(-\frac{b}{2a};\frac{-\Delta}{4a}\right)$.
Dạng giao Ox: $y=a(x-x_1)(x-x_2)$	Hoành độ giao điểm với Ox là $x=x_1$ và $x=x_2$. $\Rightarrow$ Hoành độ đỉnh $x_{\text{đỉnh}}=\frac{x_1+x_2}{2}$.
Dạng đỉnh: $y=a(x-x_{\text{đỉnh}})^2+y_{\text{đỉnh}}$	Tọa độ đỉnh $(x_{\text{đỉnh}};y_{\text{đỉnh}})$.

Thầy Lê Tùng Kiên

GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC TỪ 0° ĐẾN 180°

35. Định nghĩa nửa đường tròn đơn vị

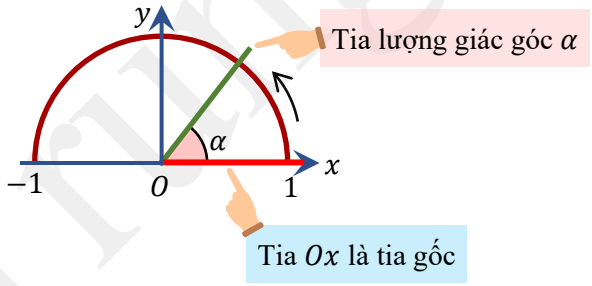
Trong hệ trục tọa độ Oxy, vẽ nửa đường tròn có tâm là gốc tọa độ O, bán kính $R = 1$. Nửa đường tròn như vậy được gọi là nửa đường tròn đơn vị.



36. Xác định góc từ 0° đến 180° trên nửa đường tròn đơn vị

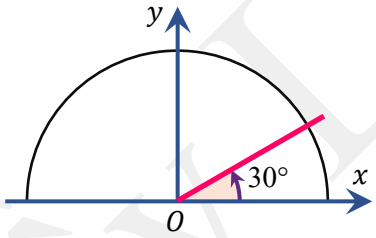
Góc được xác định thông qua nửa đường tròn đơn vị thực chất là góc giữa hai tia với đỉnh của góc là gốc tọa độ, 1 trong 2 tia để xác định góc là tia Ox (tia cố định, tia này gọi là tia gốc), tia còn lại có vị trí tùy thuộc vào góc cần xác định.

Để xác định một góc $\alpha \in [0°; 180°]$ ta làm như sau: từ tia gốc (tia Ox) quay ngược chiều kim đồng hồ một góc có giá trị bằng α. Tia nhận được gọi là tia lượng giác góc α.

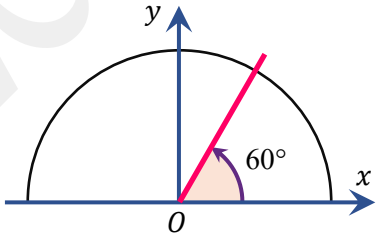


Ví dụ (Một số góc lượng giác từ 0° → 180°)

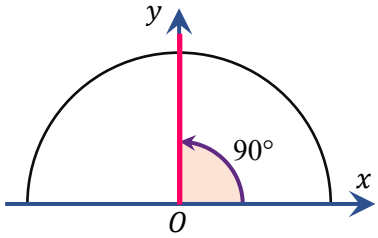
a)



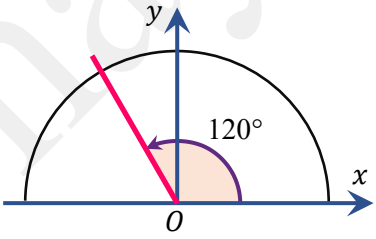
b)



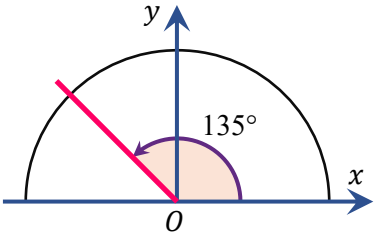
c)



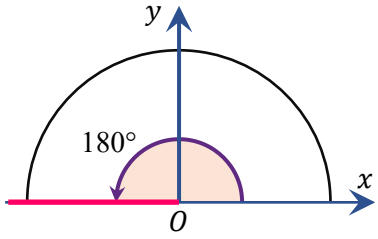
d)



e)



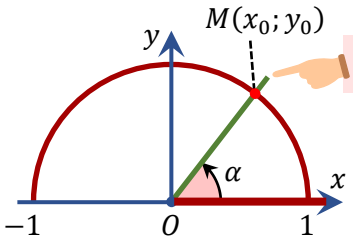
f)



Thầy Lê Trung Kiên

37. Xác định giá trị lượng giác của góc từ 0° đến 180°

Cho góc $\alpha \in [0°; 180°]$. Khi đó tia lượng giác góc α cắt nửa đường tròn đơn vị tại điểm M có tọa độ $M(x_0; y_0)$.
Khi đó ta có các định nghĩa sau:



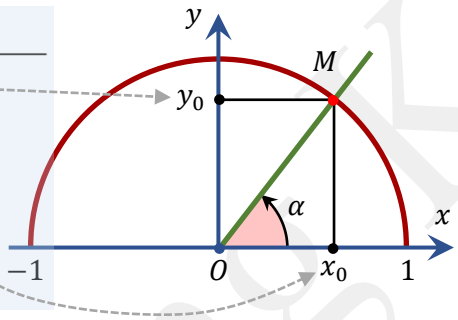
Định nghĩa

$\sin\alpha = y_0$ (tung độ)

$\cos\alpha = x_0$ (hoành độ)

$\tan\alpha = \dfrac{y_0}{x_0}\left(\dfrac{\text{tung độ}}{\text{hoành độ}}\right) (x_0 \neq 0)$

$\cot\alpha = \dfrac{x_0}{y_0}\left(\dfrac{\text{hoành độ}}{\text{tung độ}}\right) (y_0 \neq 0)$



Chú ý:

- Dấu của các giá trị lượng giác:
  α nhọn $\Rightarrow$ Toàn bộ các giá trị lượng giác $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ đều dương.
  α tù $\Rightarrow$ Chỉ có $\sin\alpha > 0$, các giá trị còn lại $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ đều âm.
- Khi $\alpha \in [0°; 180°]$ thì $\tan\alpha$ xác định khi $\alpha \neq 90°$, $\cot\alpha$ xác định khi $\alpha \neq 0°$ và $\alpha \neq 180°$.

38. Giá trị lượng giác của các góc phụ và bù

Góc phụ nhau
$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$
$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$
$\tan(90° - \alpha) = \cot\alpha$
$\cot(90° - \alpha) = \tan\alpha$

Góc bù nhau
$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$
$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$
$\tan(180° - \alpha) = -\tan\alpha$
$\cot(180° - \alpha) = -\cot\alpha$

Hai góc là **phụ** nhau nếu tổng của chúng bằng **90°**.
Hai góc là **bù** nhau nếu tổng của chúng bằng **180°**.

Thầy Lê Phước Kiên

39. Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\|\|$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
cot	$\|\|$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\|\|$

Chú ý:
- $\|\|$ có nghĩa là giá trị không xác định.
- Các giá trị trong bảng này không cần nhớ, bấm máy tính cho nhanh.

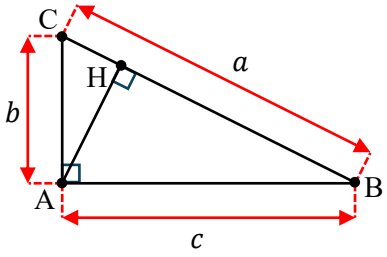
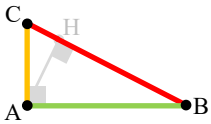
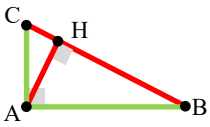
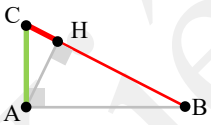
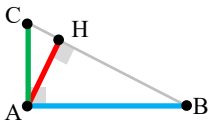
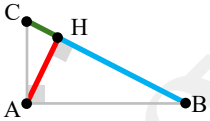
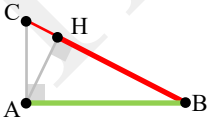
40. Hệ thức cơ bản

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$	$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$	$1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$
$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$

Chú ý: khi $0°\le\alpha\le180°$ thì $0\le\sin\alpha\le1;\ -1\le\cos\alpha\le1$.

Thầy Lê Phong Kiên

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

<table>
<tr>
<td rowspan="3"> 
</td>
<td>$BC^2 = AB^2 + AC^2$
(Định lý Pi-ta-go)
  </td>
<td>$AH \cdot BC = AB \cdot AC$
  </td>
<td>$AC^2 = BC \cdot CH$
  </td>
</tr>
<tr>
<td>$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$
  </td>
<td>$AH^2 = BH \cdot CH$
  </td>
<td>$AB^2 = BC \cdot BH$
  </td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">$c = a \cdot \sin C = a \cdot \cos B = b \cdot \tan C = b \cdot \cot B$
$b = a \cdot \sin B = a \cdot \cos C = c \cdot \tan B = c \cdot \cot C$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="4">Trong tam giác vuông:
"Cạnh góc vuông bằng cạnh huyền nhân sin góc đối hoặc cosin góc kề,
Bằng cạnh góc vuông kia nhân tan góc đối hoặc cotan góc kề"</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="4">Trong tam giác vuông:
$\sin = \frac{\text{đối}}{\text{huyền}}$ $\quad \text{cosin} = \frac{\text{kề}}{\text{huyền}}$ $\quad \tan = \frac{\text{đối}}{\text{kề}}$ $\quad \text{cotan} = \frac{\text{kề}}{\text{đối}}$</td>
</tr>
</table>

Thầy Lê Trung Kiên

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC TÙY Ý

41. Quy ước về kí hiệu cạnh, góc

Cho ΔABC có:

– Độ dài các cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$

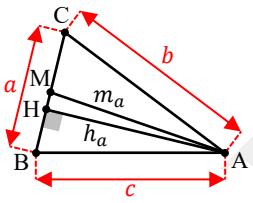
– Độ dài đường trung tuyến vẽ từ các đỉnh A, B, C: m_a, m_b, m_c.

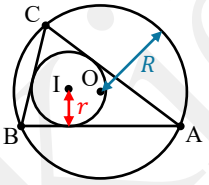
– Độ dài các đường cao vẽ từ các đỉnh A, B, C: h_a, h_b, h_c.

– Bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp lần lượt là R, r.

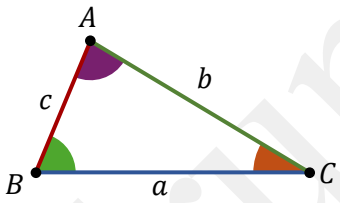
– Nửa chu vi tam giác $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

– Diện tích tam giác S.





42. Định lý cos



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cdot \cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$

Từ đó ta suy ra các công thức tính cosin của một góc trong tam giác

$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

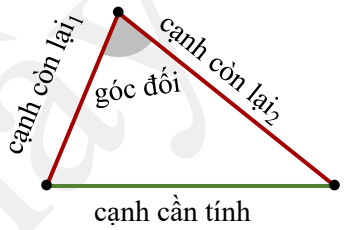
$\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

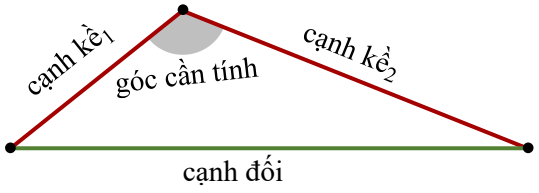
$\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

Góc của một tam giác nhọn nếu cos(góc) > 0 hoặc 0° < góc < 90°.
Góc của một tam giác tù nếu cos(góc) < 0 hoặc 90° < góc < 180°.

Để ghi nhớ về mặt hình học định lý cos, học sinh có thể xem hình vẽ sau

$$(\text{cạnh cần tính})^2 = (\text{cạnh còn lại}_1)^2 + (\text{cạnh còn lại}_2)^2 - 2 \cdot \text{cạnh còn lại}_1 \cdot \text{cạnh còn lại}_2 \cdot \cos(\text{góc đối})$$



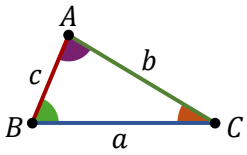


$$\cos(\text{góc cần tính}) = \frac{(\text{cạnh kề}_1)^2 + (\text{cạnh kề}_2)^2 - (\text{cạnh đối})^2}{2 \cdot \text{cạnh kề}_1 \cdot \text{cạnh kề}_2}$$

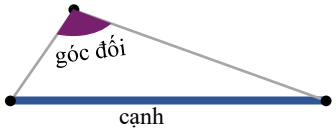
Chú ý: **Giải tam giác** là tính các cạnh và các góc của tam giác khi biết một số yếu tố cho trước.

43. Định lý sin

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$



Để ghi nhớ định lý sin học sinh có thể nhớ như sau



$\frac{\text{cạnh}}{\sin(\text{góc đối})}$ bằng nhau với cả 3 cạnh của tam giác và bằng 2 lần bán kính đường tròn ngoại tiếp

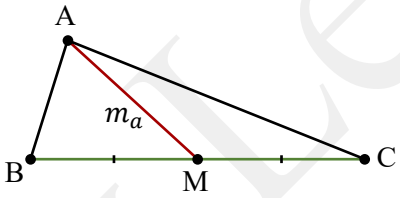
44. Độ dài trung tuyến và phân giác trong

Độ dài trung tuyến

$$m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}$$

$$m_b^2=\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4}$$

$$m_c^2=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}$$

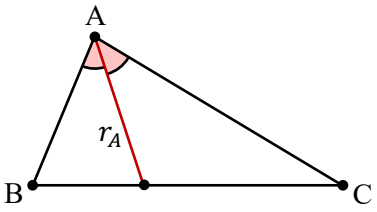


Độ dài phân giác trong

$$r_A=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\hat{A}}{2}=\sqrt{bc\left(1-\frac{a^2}{(b+c)^2}\right)}$$

$$r_B=\frac{2ac}{a+c}\cos\frac{\hat{B}}{2}=\sqrt{ac\left(1-\frac{b^2}{(a+c)^2}\right)}$$

$$r_C=\frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\hat{C}}{2}=\sqrt{ab\left(1-\frac{c^2}{(a+b)^2}\right)}$$



Thầy Lê Trung Kiên

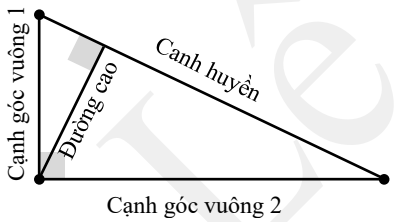
45. Diện tích tam giác

Diện tích tam giác: $S =$

$= \frac{1}{2} \times$ Đáy $\times$ Chiều cao	$= \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c$	Lớp 10
$= \frac{1}{2} \times$ Tích hai cạnh $\times \sin$(góc xen giữa)	$= \frac{1}{2}bc \cdot \sin A = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C = \frac{1}{2}ac \cdot \sin B$	Lớp 10
Nhóm các công thức đặc biệt	$= \frac{abc}{4R}$ $= pr$ $= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (Công thức Hê-rông)	Lớp 10
Sử dụng tích vô hướng	$= \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right)^2}$ (Các công thức khác tương tự cho các tích vô hướng cùng tỏa ra từ 1 đỉnh)	Lớp 10
Sử dụng tích có hướng	$= \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\|$ (Các công thức khác tương tự cho các tích có hướng cùng tỏa ra từ 1 đỉnh)	Lớp 12
Sử dụng định thức cấp 3 (Khi tam giác $\subset$ mp(Oxy)	$= \frac{1}{2}\underbrace{\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}}_{\text{Tính định thức}}$	Lớp 10 Nâng cao

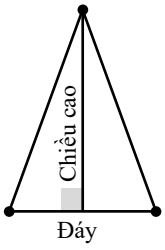
46. Diện tích tam giác và đa giác đặc biệt

Tam giác vuông



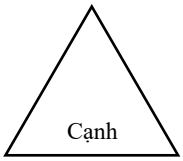
$S = \frac{1}{2} \times$ (Cạnh góc vuông 1) $\times$ (Cạnh góc vuông 2)
$= \frac{1}{2} \times$ Đường cao $\times$ Cạnh huyền

Tam giác cân



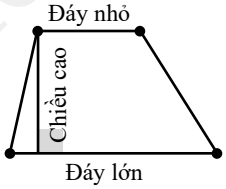
$S = \frac{1}{2}$ Đáy $\times$ Chiều cao

Tam giác đều



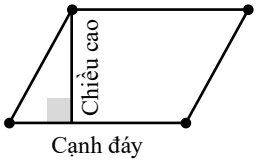
$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\text{Cạnh})^2$

Hình thang



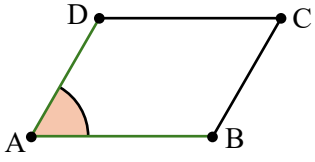
$S = \frac{(\text{Đáy lớn} + \text{Đáy nhỏ}) \times \text{Chiều cao}}{2}$

Hình bình hành



$S =$ Cạnh đáy $\times$ Chiều cao

Hình bình hành



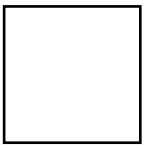
$S = AD \cdot AB \cdot \sin \hat{A}$

Hình chữ nhật



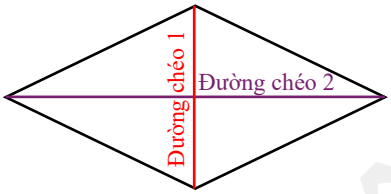
$S =$ Chiều dài $\times$ Chiều rộng

Hình vuông



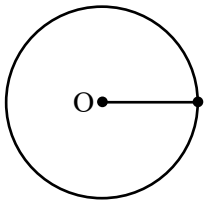
$S = (\text{Cạnh})^2$

Hình thoi



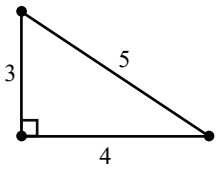
$S = \frac{1}{2} \times$ Đường chéo 1 $\times$ Đường chéo 2

Hình tròn

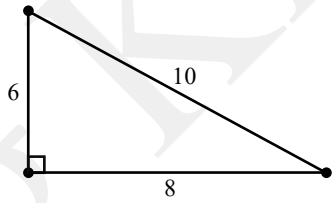


$S = \pi(\text{bán kính})^2 = \frac{\pi(\text{đường kính})^2}{4}$

Một số tam giác vuông có số đo đẹp



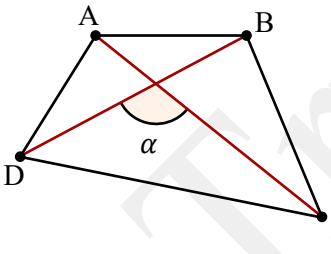
Tam giác vuông 3-4-5



Tam giác vuông 6-8-10

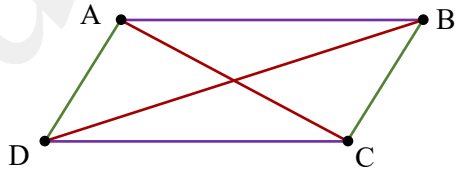
Cho tứ giác lồi $ABCD$, gọi α là góc hợp bởi hai đường chéo AC và BD.

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\alpha$

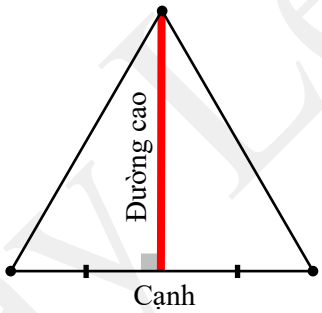


Cho hình bình hành $ABCD$. Ta có:

$BD^2 + AC^2 = 2(AD^2 + AB^2)$

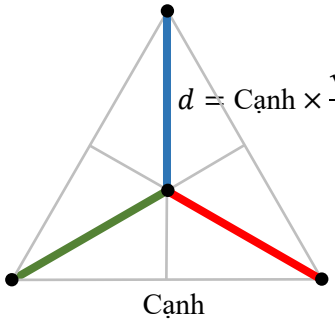


47. Các độ dài đặc biệt



$\text{Đường cao}_{\Delta\text{đều}} = \text{Trung tuyến}_{\Delta\text{đều}} = \text{Cạnh} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

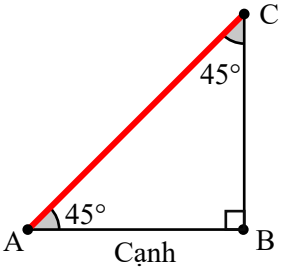
Khoảng cách từ một đỉnh đến trọng tâm của tam giác đều

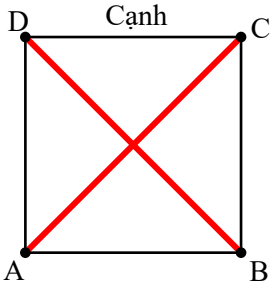


$d =$ Cạnh $\times \frac{\sqrt{3}}{3}$

Thầy Lê Trung Kiên

Đường chéo hình vuông (Cạnh huyền tam giác vuông cân)





Đường chéo hình vuông = Cạnh huyền tam giác vuông cân = Cạnh $\times \sqrt{2}$

Nửa đường chéo hình vuông = Cạnh $\times \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

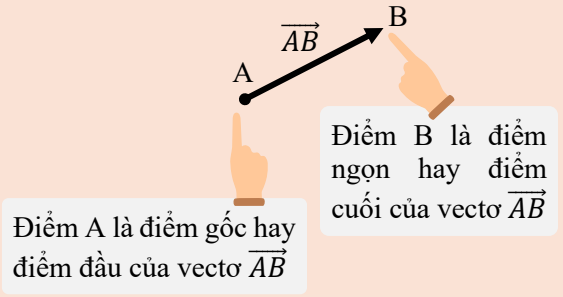
Thầy Lê Trung Kiên

VECTƠ

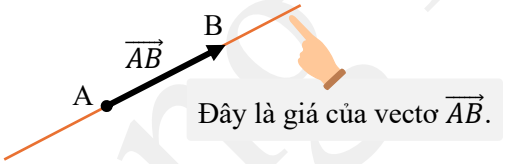
48. Các khái niệm

👉**Vectơ** là một đoạn thẳng có hướng. Ký hiệu vectơ có điểm đầu A (điểm gốc), điểm cuối B (điểm ngọn) là $\overrightarrow{AB}$.

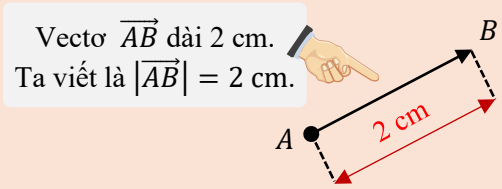
Ta còn sử dụng ký hiệu $\vec{a}, \vec{b}, \ldots$ để biểu diễn vectơ khi không quan tâm đến điểm nào là điểm ngọn hay điểm nào là điểm gốc của vectơ.



Giá của vectơ là đường thẳng chứa vectơ đó.

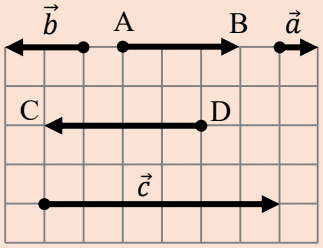


Độ dài của vectơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ, ký hiệu $|\overrightarrow{AB}|$.
Đương nhiên $|\overrightarrow{AB}| = AB$. Độ dài vectơ tự do ký hiệu là $|\vec{a}|$.



Vectơ - không là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, ký hiệu $\vec{0}$.
Khi muốn chỉ rõ một vectơ nào đó có độ dài khác 0, ta dùng thuật ngữ "**vectơ khác không**".
Khi muốn chỉ rõ một vectơ nào đó có độ dài bằng 1, ta dùng thuật ngữ **vectơ đơn vị**.
Qui ước: Vectơ $\vec{0}$ cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ. Mọi vectơ $\vec{0}$ đều bằng nhau.

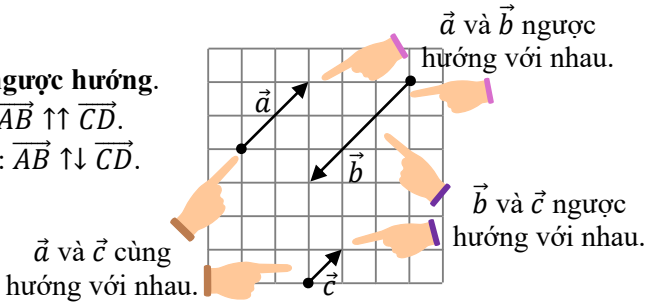
Hai vectơ được gọi là **cùng phương** nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.



Ở hình vẽ bên tất cả các vectơ $\vec{b}; \overrightarrow{AB}; \vec{a}; \overrightarrow{DC}; \vec{c}$ đều là vectơ cùng phương.

Để biểu thị hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng phương ta ký hiệu $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD}$.
Nếu giá của vectơ $\overrightarrow{AB}$ hoặc song song hoặc trùng với đường thẳng Δ thì ta cũng viết $\overrightarrow{AB}//\Delta$.

Hai vectơ cùng phương có thể **cùng hướng** hoặc **ngược hướng**.
Để biểu thị hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ cùng hướng, ta viết: $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$.
Để biểu thị hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ ngược hướng, ta viết: $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$.

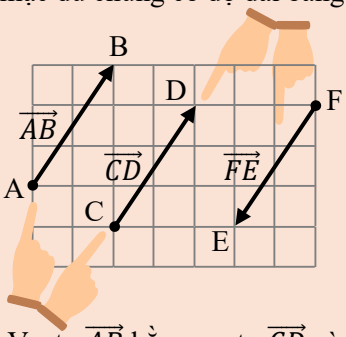


Hai vectơ được gọi là **bằng nhau** nếu chúng cùng hướng và có cùng độ dài.

Điều kiện để hai vectơ bằng nhau
- Cùng hướng
- Độ dài bằng nhau

Để biểu thị hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ bằng nhau ta viết $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Vectơ $\overrightarrow{CD}$ không bằng vectơ $\overrightarrow{FE}$ vì chúng ngược hướng (mặc dù chúng có độ dài bằng nhau).



Vectơ $\overrightarrow{AB}$ bằng vectơ $\overrightarrow{CD}$ vì chúng có cùng hướng và có độ dài bằng nhau

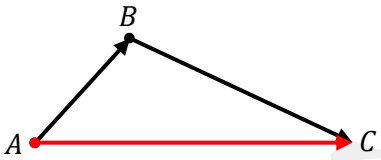
Thầy Lê Trung Hiếu

49. Cộng vectơ

Quy tắc ba điểm: Với ba điểm A, B, C tùy ý, ta có:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

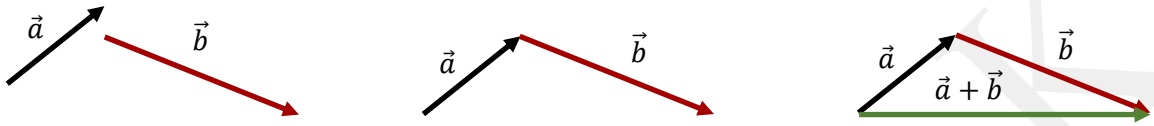
Lưu ý: Quy tắc ba điểm áp dụng cộng cho hai vectơ bất kỳ.



Để tính tổng hai vectơ theo quy tắc ba điểm ta thực hiện theo các bước sau

Sắp xếp hai vectơ sao cho ngọn của một trong hai vectơ trùng với gốc của vectơ còn lại

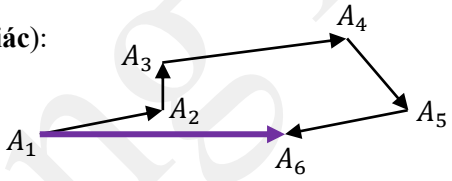
Khi đó tổng của hai vectơ là 1 vectơ nối từ điểm gốc của vectơ đầu tiên tới điểm ngọn của vectơ thứ hai.



Quy tắc ba điểm mở rộng thành quy tắc n điểm (**quy tắc đa giác**):

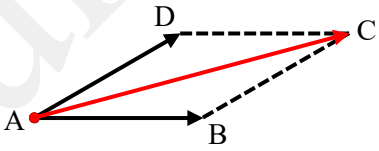
$$\overrightarrow{A_1A_n} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$$

(chập gốc ngọn các vectơ liên tục)



Qui tắc hình bình hành

Với $ABCD$ là hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

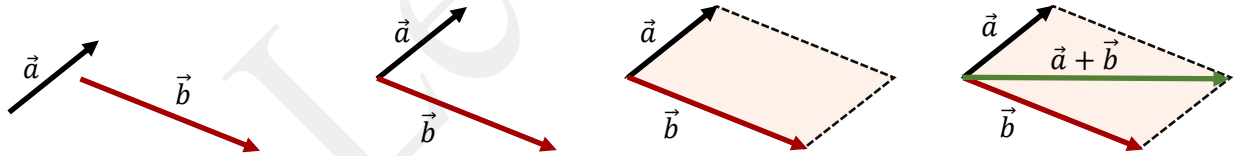


Để tính tổng hai vectơ theo quy tắc hình bình hành ta thực hiện theo các bước sau

Sắp xếp hai vectơ sao cho gốc của chúng trùng nhau

Tọa thành một hình bình hành từ 2 vectơ

Vectơ tổng kéo dài từ gốc 2 vectơ cũ đến điểm đối diện với điểm gốc chung trong hình bình hành



		Điều kiện áp dụng	Bản chất
Quy tắc tính tổng vectơ	Quy tắc ba điểm	Hai vectơ tùy ý	Chập gốc - ngọn
	Quy tắc đa điểm	Nhiều vectơ tùy ý	
	Quy tắc hình bình hành	Chỉ áp dụng cho 2 vectơ không cùng phương	Làm 2 vectơ chung gốc

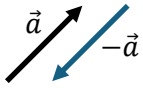
Tính chất phép cộng vectơ

- Giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- Kết hợp: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- Tính chất của $\vec{0}$: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$

Thầy Lê Trung Kiên

50. Vectơ đối

Vectơ đối của $\vec{a}$ là vectơ ngược chiều với $\vec{a}$ và có cùng độ dài với $\vec{a}$. Ký hiệu vectơ đối của $\vec{a}$ là $-\vec{a}$.



Chú ý:

- Nếu $\vec{b}$ là vectơ đối của $\vec{a}$ thì $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$.
- Bỏ hay thêm dấu trừ thì phải đảo gốc và ngọn của vectơ: $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA};\ -\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DC};\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA};\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{DC}$.
- Vectơ đối của $\vec{0}$ là $\vec{0}$.

51. Hiệu của hai vectơ

- $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$
- Qui tắc ba điểm đối với phép hiệu vectơ: $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$ (Với O,A,B tùy ý).

52. Tích của một số với một vectơ

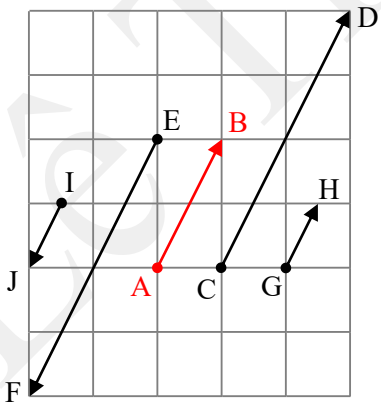
Cho vectơ $\vec{a}$ và một số $k\in R$. $k\vec{a}$ là một vectơ được xác định như sau :

- Về hướng: $\begin{cases} k\vec{a} \text{ cùng hướng với } \vec{a} \text{ nếu } k\geq 0 \\ k\vec{a} \text{ ngược hướng với } \vec{a} \text{ nếu } k<0 \end{cases}$
- Về độ dài: $|k\vec{a}|=|k||\vec{a}|$

Tính chất

$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ $\quad (k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$ $\quad k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$ $\quad k\vec{a}=\vec{0}\Leftrightarrow k=0$ hoặc $\vec{a}=\vec{0}$

Ví dụ:



Trên hình vẽ ta có :

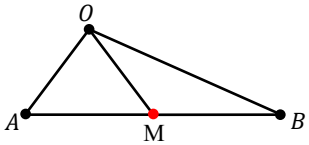
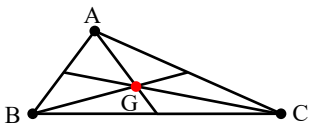
$\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{EF}=-2\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{GH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{IJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

53. Một số hệ thức quan trọng

Hệ thức trung điểm	M là trung điểm của đoạn thẳng AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OM}$ (O tùy ý)	
Hệ thức trọng tâm	G là trọng tâm ΔABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$ (O tùy ý)	

Thầy Lê Tiến Kiên

54. Điều kiện cùng phương, thẳng hàng

Điều kiện để hai vectơ cùng phương: $\vec{a}$ và $\vec{b}\ (\vec{a} \neq \vec{0})$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}: \vec{b} = k\vec{a}$
Điều kiện ba điểm phân biệt thẳng hàng: A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \exists k \neq 0: \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.
Biểu thị một vectơ qua hai vectơ không cùng phương : Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{x}$ tùy ý. Khi đó, $\exists! m, n \in \mathbb{R}: \vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}$.
Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi đó: $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow x = y = 0$.
Nếu $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ và $\vec{d} = x'\vec{a} + y'\vec{b}$ thì $\vec{c}$ và $\vec{d}$ **cùng phương** $\Leftrightarrow$ Tồn tại k sao cho $x = kx', y = ky'$.

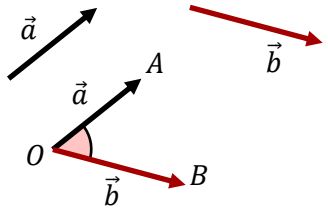
Thầy Lê Trung Kiên

TÍCH VÔ HƯỚNG

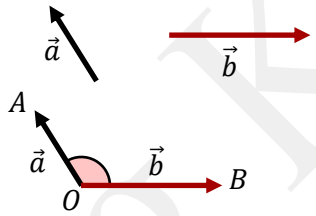
55. Góc giữa 2 vectơ

Cho $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, góc giữa 2 vectơ được kí hiệu là $(\vec{a}; \vec{b})$. Từ một điểm O bất kỳ vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}; \overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Khi đó $(\vec{a}, \vec{b}) = \widehat{AOB}$ với $0° \leq \widehat{AOB} \leq 180°$

Trường hợp 1: Góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc nhọn



Trường hợp 2: Góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc tù



Một số nhận xét về góc giữa 2 vectơ

- $0° \leq$ Góc giữa 2 vectơ $\leq 180°$.
- $(\vec{a}, \vec{b}) = 90° \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.
- $(\vec{a}, \vec{b}) = 0° \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.
- $(\vec{a}, \vec{b}) = 180° \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng.
- $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.
- Để xác định đúng góc giữa hai vectơ hãy đảm bảo là cả hai vectơ cùng gốc.
- Trong trường hợp có ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ hoặc $\vec{b}$ là vectơ $\vec{0}$ thì ta quy ước số đo góc giữa hai vectơ đó là tuỳ ý (từ $0°$ đến $180°$).
- A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 0°$ hoặc $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 180°$.

56. Tích vô hướng

Cho hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác véctơ $\vec{0}$, góc giữa hai véctơ kí hiệu là $(\vec{a}; \vec{b})$. Tích vô hướng giữa hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là 1 số xác định bởi công thức:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b})$$

Tích vô hướng = Tích độ dài × cos(góc giữa hai vectơ)

Quy ước : Nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $\vec{b} = \vec{0}$ thì tích vô hướng bằng 0.

Thầy Lê Trung Kiên

57. Tính chất

Với $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bất kỳ và $\forall k \in \mathbb{R}$.

Nhóm tính chất liên quan đến tích

Bình phương vô hướng: $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

Giao hoán: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

Giao hoán đối với 1 số: $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$

Phân phối với tổng (hiệu) vectơ: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \pm \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \pm \vec{a} \cdot \vec{c}$

Nhóm tính chất liên quan hằng đẳng thức

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$$

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$$

$$\vec{a}^2 - \vec{b}^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$$

Tính chất liên quan vectơ không

$$\vec{a}^2 \geq 0$$

$$\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$$

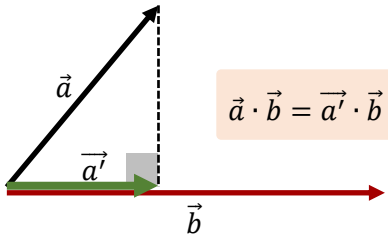
Nhóm tính chất liên quan đến góc

$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b})$ tù

$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b})$ nhọn

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 90°$

Công thức hình chiếu về tích vô hướng



$\vec{a} \cdot \vec{b} = \overrightarrow{a'} \cdot \vec{b}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\text{Chiếu } \vec{a} \text{ theo phương } \vec{b}) \cdot \vec{b}$
$= \vec{a} \cdot (\text{Chiếu } \vec{b} \text{ theo phương } \vec{a})$

58. Điểm thỏa mãn đẳng thức về tích vô hướng hay về độ dài

Bài toán: Tìm điểm M thỏa mãn đẳng thức về tích vô hướng hay độ dài

Ta biến đổi biểu thức ban đầu về một trong các dạng sau:

Dạng 1:

Điểm cần tìm → $AM^2 = k$ ← Điểm đã biết

- $k < 0 \Rightarrow M \in \emptyset$
- $k = 0 \Rightarrow M \equiv A$
- $k > 0 \Rightarrow M \in$ Đường tròn tâm A, bán kính $R = \sqrt{k}$

Dạng 2: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$, với A, B cố định và k không đổi, M là điểm cần tìm. Khi đó:

Gọi I là trung điểm AB, ta được:

$$k = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = MI^2 - IA^2$$

$$\Rightarrow k = MI^2 - IA^2 \Leftrightarrow IM^2 = k + IA^2 \Leftrightarrow IM^2 = k + \frac{AB^2}{4}$$

$\Rightarrow$ Chuyển về dạng 1.

Mở rộng dạng số 2:

Nếu ta có $\overrightarrow{MA} \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = k$ với $A, A_i, i = \overline{1,n}$ cố định, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_1 \neq 0$ và k không đổi. Khi đó:

Gọi K là điểm thỏa mãn: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{KA_i} = \vec{0} \Rightarrow$ tồn tại duy nhất điểm cố định K.

Từ đó:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MK} = \alpha \overrightarrow{MK} \left(\text{với } \alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right)$$

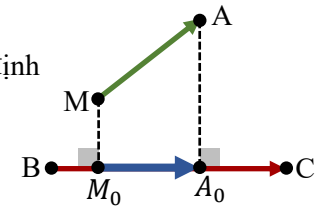
Khi đó ta được: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MK} = \frac{k}{\alpha}$

Dạng 3:

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = k$, với A, B, C cố định

↑

Điểm cần tìm



Gọi M_0, A_0 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M, A lên BC, ta được:

$$k = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{M_0A_0} \cdot \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow M_0A_0 \cdot BC \cdot \cos\left(\overrightarrow{M_0A_0}; \overrightarrow{BC}\right) = k$$

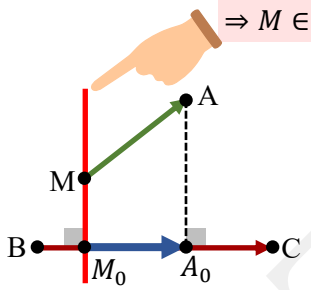
Vì k xác định và $M_0A_0 \cdot BC > 0$ và $\left[\begin{array}{l}\left(\overrightarrow{M_0A_0}; \overrightarrow{BC}\right) = 0° \\ \left(\overrightarrow{M_0A_0}; \overrightarrow{BC}\right) = 180°\end{array}\right.$

$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{M_0A_0}; \overrightarrow{BC}\right)$ có giá trị không đổi.

$\Rightarrow M_0A_0 = \dfrac{k}{BC \cdot \cos\left(\overrightarrow{M_0A_0}; \overrightarrow{BC}\right)}$ = hằng số

Mà A_0 cố định $\Rightarrow M_0$ cố định.

$\Rightarrow M \in$ Đường thẳng vuông góc với BC tại M_0.



Thầy Lê Trung Kiên

Dạng 4: Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn: $\alpha MA^2 + \beta MB^2 = k$ (1) với A, B cố định, $\alpha + \beta \neq 0$ và k không đổi.

Bước 1: Gọi I là điểm thỏa mãn:

$$\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha\left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BA}\right) + \beta\overrightarrow{IB} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)\overrightarrow{IB} = \alpha\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IB} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$$

Vậy tồn tại duy nhất một điểm I cố định.

Bước 2: Ta biến đổi (1) về dạng:

$$k = \alpha\overrightarrow{MA}^2 + \beta\overrightarrow{MB}^2 = \alpha\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \beta\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2$$
$$= (\alpha + \beta)MI^2 + \alpha IA^2 + \beta IB^2 + 2\left(\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB}\right).\overrightarrow{MI}$$
$$\Rightarrow MI^2 = \frac{1}{\alpha + \beta}[k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)]$$

⇒ Chuyển về dạng 1.

Mở rộng dạng số 4:

Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2 = k$$

(Với $A_i, i = \overline{1,n}$ cố định, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, k không đổi)

Bước 1: Gọi I là điểm thỏa mãn:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{IA_i} = \vec{0}$$

Khi đó tồn tại duy nhất một điểm I cố định.

Bước 2: Ta biến đổi (1) về dạng:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA_i} + IA_i^2\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MI^2 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA_i} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i IA_i^2 = MI^2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + 2\overrightarrow{MI} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{IA_i} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i IA_i^2$$

(Đặt $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i IA_i^2 = l$)

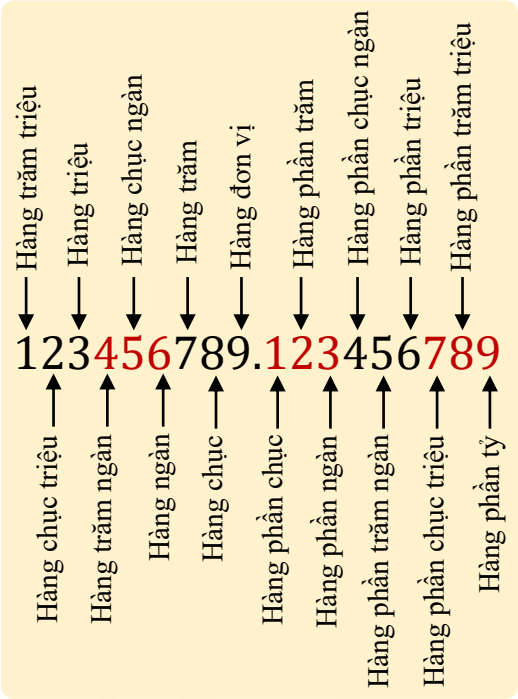
$$= MI^2\alpha + 0 + l = \alpha MI^2 + l \Rightarrow \alpha MI^2 + l = k \Rightarrow MI^2 = \frac{k - l}{\alpha}$$

⇒ Chuyển về dạng 1.

Thầy Lê Trung Kiên

SỐ GẦN ĐÚNG, SAI SỐ

59. Các hàng số



60. Định nghĩa (Sai số tuyệt đối)

Nếu a là số gần đúng của số đúng $\bar{a}$ thì $\Delta_a = |\bar{a} - a|$ được gọi là sai số tuyệt đối của số gần đúng a.

Trên thực tế ta thường không biết số đúng $\bar{a}$ nên không thể tính được chính xác Δ_a. Thay vào đó, ta thường tìm cách khống chế sai số tuyệt đối Δ_a không vượt quá mức $d > 0$ cho trước, tức là:

$$\Delta_a = |\bar{a} - a| \le d \text{ hay } a - d \le \bar{a} \le a + d$$

Khi đó, ta nói a là số gần đúng của số đúng $\bar{a}$ với độ chính xác d và viết gọn là $\bar{a} = a \pm d$.

61. Định nghĩa (Sai số tỷ đối)

Sai số tương đối của số gần đúng a, kí hiệu là δ_a, là tỉ số giữa sai số tuyệt đối Δ_a và $|a|$:

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$$

Nếu $\bar{a} = a \pm d$ thì $\Delta_a \le d \Rightarrow \delta_a \le \frac{d}{|a|}$. Nếu δ_a càng nhỏ thì chất lượng của phép đo đạc hay tính toán càng cao.

Người ta thường viết sai số tương đối dưới dạng phần trăm.

62. Quy tắc làm tròn số

Quy tắc làm tròn số đến một hàng nào đó (gọi là hàng quy tròn) như sau:

▪ Nếu chữ số sau hàng quy tròn nhỏ hơn 5 thì ta thay nó và các chữ số bên phải nó bởi chữ số 0.

Ví dụ: 12,34 làm tròn đến hàng phần chục được 12,3; 12,34 làm tròn đến hàng đơn vị được 12.

▪ Nếu chữ số sau hàng quy tròn lớn hơn hoặc bằng 5 thì ta cũng làm như trên nhưng cộng thêm 1 đơn vị vào chữ số hàng quy tròn.

Ví dụ: 12,567 làm tròn đến hàng phần chục được 12,6; 12,567 làm tròn đến hàng đơn vị được 13.

Thầy Lê Phạm Thành Kiên

63. Xác định số quy tròn của số gần đúng với độ chính xác cho trước

Các bước xác định số quy tròn của số gần đúng a với độ chính xác d cho trước:
Bước 1: Tìm hàng của chữ số khác 0 đầu tiên bên trái của d.
Bước 2: Quy tròn số a ở hàng gấp 10 lần hàng tìm được ở Bước 1.

64. Xác định số gần đúng của một số với độ chính xác cho trước

Để tìm số gần đúng a của số đúng $\bar{a}$ với độ chính xác d, ta thực hiện các bước sau:
Bước 1: Tìm hàng của chữ số khác 0 đầu tiên bên trái của d.
Bước 2: Quy tròn $\bar{a}$ đến hàng tìm được ở trên.

Thầy Lê Trung Kiên

THỐNG KÊ KHÔNG GHÉP NHÓM

65. Tần số, tần suất (tần số tương đối), cỡ mẫu

▪ Tần số của 1 giá trị là số lần xuất hiện của giá trị đó trong mẫu số liệu

Ví dụ

Cho mẫu số liệu:

1, 2, 3, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 2, 2, 3

– Giá trị 1 có tần số là 3.
– Giá trị 2 có tần số là 4.
– Giá trị 3 có tần số là 5.

Ta có bảng tần số sau:

Giá trị	1	2	3
Tần số	3	4	5

▪ Tần suất của một giá trị = Tần số của giá trị đó ÷ Cỡ mẫu

Lưu ý: Tần suất có thể tính theo %

Ví dụ

Cho mẫu số liệu có bảng tần số như sau:

Giá trị	1	2	3
Tần số	3	4	5

Cỡ mẫu = 3 + 4 + 5 = 12

Tần suất của giá trị 1 là 3/12 = 0,25 = 25%

Tần suất của giá trị 1 là 4/12 ≈ 0,333 = 33,3%

Tần suất của giá trị 1 là 5/12 ≈ 0,417 = 41,7%

Ta có bảng tần suất như sau:

Giá trị	1	2	3
Tần suất	25%	33,3%	41,7%

▪ Giả sử ta có một mẫu số liệu là $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{n-1}, x_n$. Thì cỡ mẫu là n.

▪ Giả sử mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng tần số

Giá trị	x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_{k-1}	x_k
Tần số	n_1	n_2	n_3	n_4	...	n_{k-1}	n_k

Thì cỡ mẫu $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + \cdots + n_k$ = Tổng tần số

Ví dụ

a) Cho mẫu số liệu: 1, 2, a, b, c, e, 10, 11 thì cỡ mẫu là $n = 8$.

b) Cho mẫu số liệu:

Giá trị	7,6	8,3	9,78	2,4
Tần số	12	3	43	23

Cỡ mẫu $n = 12 + 3 + 43 + 23 = 81$

Thầy Lê Trung Kiên

66. Các số đặc trưng đo xu thế trung tâm

- Số trung bình
- Trung vị
- Tứ phân vị
- Mốt

a) Số trung bình

- Giả sử ta có một mẫu số liệu là $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{n-1}, x_n$.

Số trung bình (hay **số trung bình cộng**) của mẫu số liệu này, kí hiệu là $\bar{x}$, được tính bởi công thức:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_{n-1} + x_n}{n}$$

- Giả sử mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng tần số

Giá trị	x_1	x_2	...	x_{k-1}	x_k
Tần số	n_1	n_2	...	n_{k-1}	n_k

Khi đó, công thức tính số trung bình trở thành:

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_{k-1}x_{k-1} + n_kx_k}{n}$$

Trong đó cỡ mẫu: $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_{k-1} + n_k$.

- Nếu kí hiệu f_k là tần số tương đối (hay còn gọi là tần suất) của x_k trong mẫu số liệu thì số trung bình còn có thể biểu diễn là:

$$\bar{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_{k-1}x_{k-1} + f_kx_k$$

- Ý nghĩa của số trung bình

Số trung bình của mẫu số liệu được dùng làm đại diện cho các số liệu của mẫu. Nó là một số đo xu thế trung tâm của mẫu đó.

Ví dụ

Tính số trung bình của mẫu số liệu sau:

a) Mẫu số liệu: 1; 3; 6; 10; 40; 52; 9

Số trung bình:

$$\bar{x} = \frac{1 + 3 + 6 + 10 + 40 + 52 + 9}{7} = \frac{121}{7} \approx 17{,}2857$$

b) Mẫu số liệu

Giá trị	3	5	8	7	10
Tần số	12	23	30	40	55

Cỡ mẫu: $n = 12 + 23 + 30 + 40 + 55 = 160$

Số trung bình:

$$\bar{x} = \frac{3 \times 12 + 5 \times 23 + 8 \times 30 + 7 \times 40 + 10 \times 55}{160} = \frac{1221}{160} \approx 7{,}6312$$

c) Mẫu số liệu

Giá trị	3	5	8	7	10
Tần suất	0,1	0,2	0,5	0,15	0,05

Số trung bình:

$$\bar{x} = 3 \times 0{,}1 + 5 \times 0{,}2 + 8 \times 0{,}5 + 7 \times 0{,}15 + 10 \times 0{,}05 = \frac{137}{20} = 6{,}85$$

Thầy Lê Trung Kiên

b) Trung vị

Sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm, ta được:

$$x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_{n-1} \le x_n$$

Trung vị của mẫu, kí hiệu là M_e, là giá trị ở chính giữa dãy $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$. Cụ thể:

– Nếu $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$, thì $M_e = x_{k+1}$



– Nếu $n = 2k, k \in \mathbb{N}$, thì $M_e = \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1})$



▪ Ý nghĩa của trung vị

Trung vị được dùng để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu. Trung vị là giá trị nằm ở chính giữa của mẫu số liệu theo nghĩa: luôn có ít nhất 50% số liệu trong mẫu lớn hơn hoặc bằng trung vị, và ít nhất 50% số liệu trong mẫu nhỏ hơn hoặc bằng trung vị. Khi trong mẫu xuất hiện thêm một giá trị rất lớn hoặc rất nhỏ thì số trung bình sẽ bị thay đổi đáng kể nhưng trung vị thì ít thay đổi.

Ví dụ

Tính trung vị của các mẫu số liệu sau:

a) Mẫu số liệu: 1; 3; 6; 1; 10; 40; 52; 9

Xếp mẫu theo thứ tự không giảm: $\underbrace{1}_{x_1}; \underbrace{1}_{x_2}; \underbrace{3}_{x_3}; \underbrace{6}_{x_4}; \underbrace{9}_{x_5}; \underbrace{10}_{x_6}; \underbrace{40}_{x_7}; \underbrace{52}_{x_8}$

$x_1 \longrightarrow x_8$

Từ x_1 đến x_8 thì phần tử chính giữa được tìm bằng cách tính $\frac{1+8}{2} = 4{,}5$ (là số không nguyên) ⇒ Phần tử chính giữa là x_4 và x_5

$$M_e = \frac{x_4 + x_5}{2} = \frac{6 + 9}{2} = 7{,}5$$

b) Mẫu số liệu: 1; 3; 6; 10; 40; 52; 9; 5; 19

Xếp mẫu theo thứ tự không giảm: $\underbrace{1}_{x_1}; \underbrace{3}_{x_2}; \underbrace{5}_{x_3}; \underbrace{6}_{x_4}; \underbrace{9}_{x_5}; \underbrace{10}_{x_6}; \underbrace{19}_{x_7}; \underbrace{40}_{x_8}; \underbrace{52}_{x_9}$

$x_1 \longrightarrow x_9$

Từ x_1 đến x_9 thì phần tử chính giữa được tìm bằng cách tính $\frac{1+9}{2} = 5$ (là số nguyên) ⇒ Phần tử chính giữa là x_5

$$M_e = x_5 = 9$$

c) Mẫu số liệu

Giá trị	3	5	8	7	10
Tần số	12	23	30	40	55

Xếp mẫu theo thứ tự không giảm:

Giá trị	3	5	7	8	10
Tần số	12	23	40	30	55
	$x_1 \to x_{12}$	$x_{13} \to x_{35}$	$x_{36} \to x_{75}$	$x_{76} \to x_{105}$	$x_{106} \to x_{160}$

$x_1 \longrightarrow x_{160}$

Từ x_1 đến x_{160} thì phần tử chính giữa được tìm bằng cách tính $\frac{1+160}{2} = 80{,}5$ (là số không nguyên) ⇒ Phần tử chính giữa là x_{80} và x_{81}

$$M_e = \frac{x_{80} + x_{81}}{2} = \frac{8 + 8}{2} = 8$$

Thầy Lê Trung Kiên

d) Mẫu số liệu

Giá trị	3	5	8	7	10
Tần suất	0,1	0,2	0,5	0,15	0.05

Nếu lấy cỡ mẫu là 20 thì toàn bộ tần số đều là số nguyên nên ta lấy cỡ mẫu $n = 10$. Khi đó ta có:

Giá trị	3	5	8	7	10
Tần số	0,1×20	0,2×20	0,5×20	0,15×20	0,05×20

hay

Giá trị	3	5	8	7	10
Tần số	2	4	10	3	1

Xếp mẫu theo thứ tự không giảm:

Giá trị	3	5	7	8	10
Tần số	2	4	3	10	1
	$x_1 \to x_2$	$x_3 \to x_6$	$x_7 \to x_9$	$x_{10} \to x_{19}$	x_{20}

Trung vị:

x_1 ⟶ x_{20}

Từ x_1 đến x_{20} thì phần tử chính giữa được tìm bằng cách tính $\frac{1+20}{2} = 10{,}5$ (là số không nguyên) ⇒ Phần tử chính giữa là x_{10} và x_{11}

$$M_e = \frac{x_{10} + x_{11}}{2} = \frac{8+8}{2} = 8$$

Thầy Lê Trung Kiên

c) Tứ phân vị

Sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm, ta được:

$$x_1 \le x_2 \le \cdots x_{n-1} \le x_n$$

Tứ phân vị của một mẫu số liệu gồm ba giá trị, gọi là tứ phân vị thứ nhất, thứ hai và thứ ba (lần lượt kí hiệu là Q_1, Q_2, Q_3). Ba giá trị này chia tập hợp dữ liệu đã sắp xếp thành bốn phần đều nhau. Cụ thể:

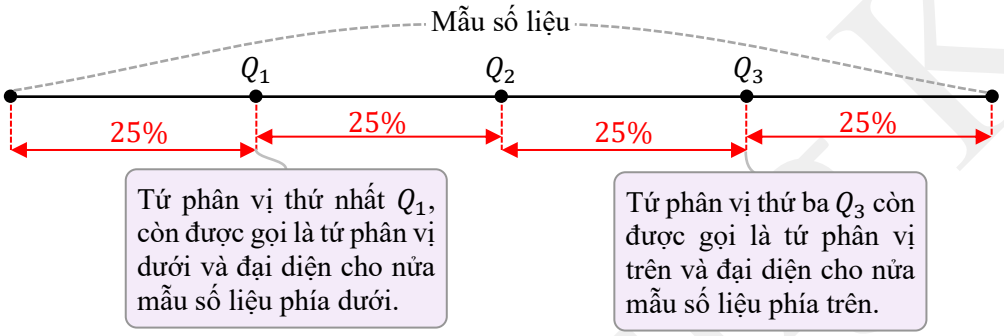
Giá trị tứ phân vị thứ hai, Q_2, chính là số trung vị của mẫu.

Giá trị tứ phân vị thứ nhất Q_1, là trung vị của nửa số liệu đã sắp xếp bên trái Q_2 (không bao gồm Q_2 nếu n lẻ).

Giá trị tứ phân vị thứ ba, Q_3, là trung vị của nửa số liệu đã sắp xếp bên phải Q_2 (không bao gồm Q_2 nếu n lẻ).

Ý nghĩa của tứ phân vị

Các điểm tứ phân vị Q_1, Q_2, Q_3 chia mẫu số liệu đã xắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn thành bốn phần, mỗi phần chứa khoảng 25% tổng số số liệu đã thu thập được.



Ví dụ

Tính tứ phân vị của các mẫu số liệu sau:

a) Mẫu số liệu: 1; 3; 6; 1; 10; 40; 52; 9

Xếp mẫu theo thứ tự không giảm: $\underbrace{1}_{x_1}; \underbrace{1}_{x_2}; \underbrace{3}_{x_3}; \underbrace{6}_{x_4}; \underbrace{9}_{x_5}; \underbrace{10}_{x_6}; \underbrace{40}_{x_7}; \underbrace{52}_{x_8}$

Tứ phân vị:

$x_1 \longrightarrow x_8$

Từ x_1 đến x_8 thì phần tử chính giữa được tìm bằng cách tính $\frac{1+8}{2} = 4{,}5$ *(là số không nguyên)* $\Rightarrow$ *Phần tử chính giữa là* x_4 và x_5

$x_1 \longrightarrow x_4$ $\qquad$ $x_5 \longrightarrow x_8$

Để tìm Q_1 *và* Q_3 *ta tách mẫu dữ liệu gốc thành 2 phần trái và phải:*
Mẫu dữ liệu gốc có hai *phần tử chính giữa là* x_4 và x_5 *thế nên:*

- *Phần trái: từ* x_1 *đến* x_4 *có phần tử chính giữa là* x_2 và x_3
- *Phần phải: từ* x_5 *đến* x_8 *có phần tử chính giữa là* x_6 và x_7

$$Q_1 = \frac{x_2 + x_3}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$$

$$Q_2 = \frac{x_4 + x_5}{2} = \frac{6+9}{2} = 7{,}5$$

$$Q_3 = \frac{x_6 + x_7}{2} = \frac{10+40}{2} = 25$$

Thầy Lê Trần Kiên

b) Mẫu số liệu: 1; 3; 6; 10; 40; 52; 9; 5; 19

Xếp mẫu theo thứ tự không giảm: $\underbrace{1}_{x_1}; \underbrace{3}_{x_2}; \underbrace{5}_{x_3}; \underbrace{6}_{x_4}; \underbrace{9}_{x_5}; \underbrace{10}_{x_6}; \underbrace{19}_{x_7}; \underbrace{40}_{x_8}; \underbrace{52}_{x_9}$

Tứ phân vị:

$x_1 \longrightarrow x_9$

Từ x_1 đến x_9 thì phần tử chính giữa được tìm bằng cách tính $\frac{1+9}{2} = 5$ (là số nguyên) ⇒ Phần tử chính giữa là x_5

$x_1 \longrightarrow x_4 \quad x_5 \quad x_6 \longrightarrow x_9$

Để tìm Q_1 và Q_3 ta tách mẫu dữ liệu gốc thành 2 phần trái và phải:
Mẫu dữ liệu gốc có một phần tử chính giữa là x_5 thế nên:
- *Phần trái: từ x_1 đến x_4 có phần tử chính giữa là x_2 và x_3*
- *Phần phải: từ x_6 đến x_9 có phần tử chính giữa là x_7 và x_8*

$$Q_1 = \frac{x_2 + x_3}{2} = \frac{3+5}{2} = 4$$

$$Q_2 = x_5 = 9$$

$$Q_3 = \frac{x_7 + x_8}{2} = \frac{19+40}{2} = 29{,}5$$

c) Mẫu số liệu

Giá trị	3	5	8	7	10
Tần số	12	23	30	40	55

Xếp mẫu theo thứ tự không giảm:

Giá trị	3	5	7	8	10
Tần số	12	23	40	30	55
	$x_1 \to x_{12}$	$x_{13} \to x_{35}$	$x_{36} \to x_{75}$	$x_{76} \to x_{105}$	$x_{106} \to x_{160}$

Tứ phân vị:

$x_1 \longrightarrow x_{160}$

Từ x_1 đến x_{160} thì phần tử chính giữa được tìm bằng cách tính $\frac{1+160}{2} = 80{,}5$ (là số không nguyên) ⇒ Phần tử chính giữa là x_{80} và x_{81}

$x_1 \longrightarrow x_{80} \qquad x_{81} \longrightarrow x_{160}$

Để tìm Q_1 và Q_3 ta tách mẫu dữ liệu gốc thành 2 phần trái và phải:
Mẫu dữ liệu gốc có hai phần tử chính giữa là x_{80} và x_{81} thế nên:
- *Phần trái: từ x_1 đến x_{80} có phần tử chính giữa là x_{40} và x_{41}*
- *Phần phải: từ x_{81} đến x_{160} có phần tử chính giữa là x_{120} và x_{121}*

$$Q_1 = \frac{x_{40} + x_{41}}{2} = \frac{7+7}{2} = 7$$

$$Q_2 = \frac{x_{80} + x_{81}}{2} = \frac{8+8}{2} = 8$$

$$Q_3 = \frac{x_{120} + x_{121}}{2} = \frac{10+10}{2} = 10$$

Thầy Lê Tùng Kiên

d) Mẫu số liệu

Giá trị	3	5	8	7	10
Tần suất	0,1	0,2	0,5	0,15	0,05

Nếu lấy cỡ mẫu là 20 thì toàn bộ tần số đều là số nguyên nên ta lấy cỡ mẫu $n = 10$. Khi đó ta có:

Giá trị	3	5	8	7	10
Tần số	0,1×20	0,2×20	0,5×20	0,15×20	0,05×20

hay

Giá trị	3	5	8	7	10
Tần số	2	4	10	3	1

Xếp mẫu theo thứ tự không giảm:

Giá trị	3	5	7	8	10
Tần số	2	4	3	10	1
	$x_1 \to x_2$	$x_3 \to x_6$	$x_7 \to x_9$	$x_{10} \to x_{19}$	x_{20}

Tứ phân vị:

$x_1 \longrightarrow x_{20}$

Từ x_1 đến x_{20} thì phần tử chính giữa được tìm bằng cách tính $\frac{1+20}{2} = 10{,}5$
(là số không nguyên) ⇒ Phần tử chính giữa là x_{10} và x_{11}

$x_1 \longrightarrow x_{10}$ $\quad$ $x_{11} \longrightarrow x_{20}$

Để tìm Q_1 và Q_3 ta tách mẫu dữ liệu gốc thành 2 phần trái và phải:
Mẫu dữ liệu gốc có hai *phần tử chính giữa là x_{10} và x_{11} thế nên:*
- *Phần trái: từ x_1 đến x_{10} có phần tử chính giữa là x_5 và x_6*
- *Phần phải: từ x_{11} đến x_{20} có phần tử chính giữa là x_{15} và x_{16}*

$$Q_1 = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{5+5}{2} = 5$$
$$Q_2 = \frac{x_{10} + x_{11}}{2} = \frac{8+8}{2} = 8$$
$$Q_3 = \frac{x_{15} + x_{16}}{2} = \frac{8+8}{2} = 8$$

d) Mốt

▪ Cho một mẫu số liệu dưới dạng bảng tần số. Giá trị có tần số lớn nhất là mốt của mẫu số liệu và kí hiệu là M_0.
▪ **Chú ý**:
– Một mẫu số liệu có thể có nhiều mốt.
– Khi tất cả các giá trị trong mẫu số liệu có tần số xuất hiện bằng nhau thì mẫu số liệu đó không có mốt.
▪ **Ý nghĩa của mốt**
– Mốt đặc trưng cho giá trị xuất hiện nhiều nhất trong mẫu.

Ví dụ

Tính mốt của các mẫu số liệu sau:
a) Mẫu số liệu: 1; 3; 6; 1; 10; 40; 52; 9
Giá trị 1 có tần số lớn nhất là 2 ⇒ Mốt của mẫu dữ liệu là: $M_0 = 1$.
b) Mẫu số liệu: 1; 3; 6; 10; 40; 52; 9; 5; 19; 3; 10
Các giá trị 3;10 có cùng tần số lớn nhất là 2 ⇒ Mốt của mẫu dữ liệu là các giá trị: $M_0 = 3, M_0 = 10$.

Thầy Lê Trung Kiên

c) Mẫu số liệu

Giá trị	3	5	8	7	10
Tần số	12	23	30	40	55

Giá trị 10 có tần số lớn nhất là 55 ⇒ Mốt của mẫu dữ liệu là: $M_0 = 10$.

d) Mẫu số liệu

Giá trị	3	5	8	7	10
Tần suất	0,1	0,2	0,5	0,15	0,05

Giá trị 8 có tần suất lớn nhất là 0,5 ⇒ Mốt của mẫu dữ liệu là: $M_0 = 8$.

Thầy Lê Trung Kiên

67. Các số đặc trưng cho mức độ phân tán

▪ Khoảng biến thiên
▪ Khoảng tứ phân vị
▪ Phương sai và độ lệch chuẩn

a) Khoảng biến thiên

Sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm, ta được: $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_{n-1} \le x_n$

▪ **Khoảng biến thiên** của một mẫu số liệu, kí hiệu là R, là hiệu giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mẫu số liệu đó, tức là:

$$\boxed{R = x_n - x_1 = x_{\max} - x_{\min}}$$

▪ **Ý nghĩa của khoảng biến thiên**

– Khoảng biến thiên đặc trưng cho độ phân tán của toàn bộ mẫu số liệu.

Ví dụ

Tính khoảng biến thiên của các mẫu số liệu sau:

a) Mẫu số liệu: 1; 3; 6; 1; 10; 40; 52; 9

Giá trị lớn nhất là: $x_{\max} = 52$.

Giá trị nhỏ nhất là: $x_{\min} = 1$.

Khoảng biến thiên: $R = x_{\max} - x_{\min} = 51$.

b) Mẫu số liệu:

Giá trị	3	5	8	7	10
Tần số	12	23	30	40	55

Giá trị lớn nhất là: $x_{\max} = 10$.

Giá trị nhỏ nhất là: $x_{\min} = 3$.

Khoảng biến thiên: $R = x_{\max} - x_{\min} = 7$.

Thầy Lê Trung Kiên

b) Khoảng tứ phân vị

▪ **Khoảng tứ phân vị**, kí hiệu là Δ_Q, là hiệu giữa Q_3 và Q_2, tức là:

$$\boxed{\Delta Q = Q_3 - Q_1}$$

▪ **Ý nghĩa của khoảng tứ phân vị**

– Khoảng tứ phân vị đặc trưng cho độ phân tán của một nửa các số liệu, có giá trị thuộc đoạn từ Q_1 đến Q_3 trong mẫu.

– Khoảng tứ phân vị không bị ảnh hưởng bởi các giá trị rất lớn hoặc rất bé trong mẫu.

Ví dụ

Tính khoảng tứ phân vị của các mẫu số liệu sau:

a) Mẫu số liệu: 1; 3; 6; 1; 10; 40; 52; 9

Xếp mẫu theo thứ tự không giảm: $\underbrace{1}_{x_1}; \underbrace{1}_{x_2}; \underbrace{3}_{x_3}; \underbrace{6}_{x_4}; \underbrace{9}_{x_5}; \underbrace{10}_{x_6}; \underbrace{40}_{x_7}; \underbrace{52}_{x_8}$

Tứ phân vị thứ nhất và thứ ba:

$x_1 \longrightarrow x_8$

Từ x_1 đến x_8 thì phần tử chính giữa được tìm bằng cách tính $\frac{1+8}{2} = 4{,}5$ (là số không nguyên) ⇒ Phần tử chính giữa là x_4 và x_5

$x_1 \longrightarrow x_4$ $\qquad$ $x_5 \longrightarrow x_8$

Để tìm Q_1 và Q_3 ta tách mẫu dữ liệu gốc thành 2 phần trái và phải:
Mẫu dữ liệu gốc có hai *phần tử chính giữa là x_4 và x_5 thế nên:*
- *Phần trái: từ x_1 đến x_4 có phần tử chính giữa là x_2 và x_3*
- *Phần phải: từ x_5 đến x_8 có phần tử chính giữa là x_6 và x_7*

$$Q_1 = \frac{x_2 + x_3}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$$

$$Q_3 = \frac{x_6 + x_7}{2} = \frac{10+40}{2} = 25$$

Khoảng tứ phân vị $\Delta Q = Q_3 - Q_1 = 25 - 2 = 23$.

Thầy Lê Phùng Kiên

b) Mẫu số liệu

Giá trị	3	5	8	7	10
Tần số	12	23	30	40	55

Xếp mẫu theo thứ tự không giảm:

Giá trị	3	5	7	8	10
Tần số	12	23	40	30	55
	$x_1 \to x_{12}$	$x_{13} \to x_{35}$	$x_{36} \to x_{75}$	$x_{76} \to x_{105}$	$x_{106} \to x_{160}$

Tứ phân vị thứ nhất và thứ ba:

$x_1 \longrightarrow x_{160}$

Từ x_1 đến x_{160} thì phần tử chính giữa được tìm bằng cách tính $\frac{1+160}{2} = 80{,}5$
(là số không nguyên) $\Rightarrow$ *Phần tử chính giữa là* x_{80} và x_{81}

$x_1 \longrightarrow x_{80}$ $\quad$ $x_{81} \longrightarrow x_{160}$

Để tìm Q_1 *và* Q_3 *ta tách mẫu dữ liệu gốc thành 2 phần trái và phải:*
Mẫu dữ liệu gốc có hai *phần tử chính giữa là* x_{80} và x_{81} *thế nên:*
- *Phần trái: từ* x_1 *đến* x_{80} *có phần tử chính giữa là* x_{40} và x_{41}
- *Phần phải: từ* x_{81} *đến* x_{160} *có phần tử chính giữa là* x_{120} và x_{121}

$$Q_1 = \frac{x_{40} + x_{41}}{2} = \frac{7+7}{2} = 7$$

$$Q_3 = \frac{x_{120} + x_{121}}{2} = \frac{10+10}{2} = 10$$

$\Delta Q = Q_3 - Q_1 = 10 - 7 = 3.$

Thầy Lê Trung Kiên

c) Mẫu số liệu

Giá trị	3	5	8	7	10
Tần suất	0,1	0,2	0,5	0,15	0,05

Nếu lấy cỡ mẫu là 20 thì toàn bộ tần số đều là số nguyên nên ta lấy cỡ mẫu $n = 10$. Khi đó ta có:

Giá trị	3	5	8	7	10
Tần số	0,1×20	0,2×20	0,5×20	0,15×20	0,05×20

hay

Giá trị	3	5	8	7	10
Tần số	2	4	10	3	1

Xếp mẫu theo thứ tự không giảm:

Giá trị	3	5	7	8	10
Tần số	2	4	3	10	1
	$x_1 \to x_2$	$x_3 \to x_6$	$x_7 \to x_9$	$x_{10} \to x_{19}$	x_{20}

Tứ phân vị thứ nhất và thứ ba:

$x_1 \longrightarrow x_{20}$

Từ x_1 đến x_{20} thì phần tử chính giữa được tìm bằng cách tính $\frac{1+20}{2} = 10{,}5$
(là số không nguyên) $\Rightarrow$ *Phần tử chính giữa là* x_{10} và x_{11}

$x_1 \longrightarrow x_{10}$ $\quad$ $x_{11} \longrightarrow x_{20}$

Để tìm Q_1 *và* Q_3 *ta tách mẫu dữ liệu gốc thành 2 phần trái và phải:*
Mẫu dữ liệu gốc có hai *phần tử chính giữa là* x_{10} và x_{11} *thế nên:*
- *Phần trái: từ* x_1 *đến* x_{10} *có phần tử chính giữa là* x_5 và x_6
- *Phần phải: từ* x_{11} *đến* x_{20} *có phần tử chính giữa là* x_{15} và x_{16}

$$Q_1 = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{5+5}{2} = 5$$

$$Q_3 = \frac{x_{15} + x_{16}}{2} = \frac{8+8}{2} = 8$$

Khoảng tứ phân vị $\Delta Q = Q_3 - Q_1 = 8 - 5 = 3$.

Thầy Lê Trung Kiên

c) Phương sai, độ lệch chuẩn

Giả sử ta có một mẫu số liệu là $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$.

▪ **Phương sai** của mẫu số liệu này, kí hiệu là S^2, được tính bởi công thức:

$$S^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2]$$

trong đó $\bar{x}$ là số trung bình của mẫu số liệu.

▪ Căn bậc hai của phương sai được gọi là **độ lệch chuẩn**, kí hiệu là S.

Chú ý: Có thể biến đổi công thức tính phương sai ở trên thành:

$$S^2 = \frac{1}{n}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) - \bar{x}^2$$

Trong thống kê, người ta cũng quan tâm đến phương sai hiệu chỉnh, kí hiệu là $\hat{S}^2$, được tính bởi công thức:

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{n-1}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2]$$

Giả sử mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng tần số:

Giá trị	x_1	x_2	…	x_k
Tần số	n_1	n_2	…	n_k

Khi đó, công thức tính phương sai trở thành:

$$S^2 = \frac{1}{n}[n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + n_k(x_k - \bar{x})^2]$$

trong đó $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

Có thể biến đổi công thức tính phương sai trên thành:

$$S^2 = \frac{1}{n}(n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + \cdots + n_kx_k^2) - \bar{x}^2 = \frac{\text{Tổng: Tần số} \times (\text{Giá trị})^2}{\text{Cỡ mẫu}} - (\text{Số trung bình})^2$$

▪ **Ý nghĩa của phương sai và độ lệch chuẩn**

– Phương sai là trung bình cộng của các bình phương độ lệch từ mỗi giá trị của mẫu số liệu đến số trung bình.

– Phương sai và độ lệch chuẩn được dùng để đo mức độ phân tán của các số liệu trong mẫu quanh số trung bình.

– Phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn thì các giá trị của mẫu càng cách xa nhau (có độ phân tán lớn).

Ví dụ

Tính phương sai và độ lệch chuẩn của các mẫu số liệu sau:

a) Mẫu số liệu: 1; 3; 6; 1; 10; 40; 52; 9

Cỡ mẫu: $n = 8$.

Số trung bình:

$$\bar{x} = \frac{1 + 3 + 6 + 1 + 10 + 40 + 52 + 9}{8} = \frac{61}{4} = 15{,}25$$

Phương sai:

$$S^2 = \frac{1^2 + 3^2 + 6^2 + 1^2 + 10^2 + 40^2 + 52^2 + 9^2}{8} - \left(\frac{61}{4}\right)^2$$

$$= \frac{5343}{16} = 333{,}9375$$

Độ lệch chuẩn:

$$S = \sqrt{S^2} = \frac{\sqrt{5343}}{4} \approx 18{,}274$$

Thầy Lê Trung Kiên

b) Mẫu số liệu

Giá trị	3	5	8	7	10
Tần số	12	23	30	40	55

Cỡ mẫu: $n = 12 + 23 + 30 + 40 + 55 = 160$.

Số trung bình:

$$\bar{x} = \frac{3 \times 12 + 5 \times 23 + 8 \times 30 + 7 \times 40 + 10 \times 55}{160} = \frac{1221}{160} \approx 7{,}6312$$

Phương sai:

$$S^2 = \frac{(3)^2 \times 12 + (5)^2 \times 23 + (8)^2 \times 30 + (7)^2 \times 40 + (10)^2 \times 55}{160} - \left(\frac{1221}{160}\right)^2 = \frac{119239}{25600} \approx 4{,}6578$$

Độ lệch chuẩn:

$$S = \sqrt{S^2} = \frac{\sqrt{119239}}{160} \approx 2{,}1582$$

c) Mẫu số liệu

Giá trị	3	5	8	7	10
Tần suất	0,1	0,2	0,5	0,15	0,05

Số trung bình:

$$\bar{x} = 3 \times 0{,}1 + 5 \times 0{,}2 + 8 \times 0{,}5 + 7 \times 0{,}15 + 10 \times 0{,}05 = \frac{137}{20} = 6{,}85$$

Phương sai:

$$S^2 = ((3)^2 \times 0{,}1 + (5)^2 \times 0{,}2 + (8)^2 \times 0{,}5 + (7)^2 \times 0{,}15 + (10)^2 \times 0{,}05) - \left(\frac{137}{20}\right)^2 = \frac{1331}{400} = 3{,}3275$$

Độ lệch chuẩn:

$$S = \sqrt{S^2} = 1{,}82414363469547 \approx 1{,}8241$$

Thầy Lê Trung Kiên

68. Giá trị ngoại lệ

Khoảng tứ phân vị được dùng để xác định các giá trị ngoại lệ trong mẫu, đó là các giá trị quá nhỏ hay quá lớn so với đa số các giá trị của mẫu. Cụ thể, phần tử x trong mẫu là giá trị ngoại lệ nếu:

$$\boxed{x > Q_3 + 1{,}5 \times \Delta_Q} \text{ hoặc } \boxed{x < Q_1 - 1{,}5 \times \Delta_Q}.$$

Ví dụ

Trong các mẫu số liệu sau, giá trị nào là giá trị ngoại lệ

a) Mẫu số liệu 4; 4; 9; 1; 10; 15; 15; 6; 8; 5

Xếp mẫu theo thứ tự không giảm: $\underbrace{1}_{x_1}; \underbrace{4}_{x_2}; \underbrace{4}_{x_3}; \underbrace{5}_{x_4}; \underbrace{6}_{x_5}; \underbrace{8}_{x_6}; \underbrace{9}_{x_7}; \underbrace{10}_{x_8}; \underbrace{15}_{x_9}; \underbrace{15}_{x_{10}}$

Tìm khoảng tứ phân vị:

$x_1 \longrightarrow x_{10}$

Từ x_1 đến x_{10} thì phần tử chính giữa được tìm bằng cách tính $\frac{1+10}{2} = 5{,}5$ (là số không nguyên) ⇒ Phần tử chính giữa là x_5 và x_6

$x_1 \longrightarrow x_5$ $\qquad$ $x_6 \longrightarrow x_{10}$

Để tìm Q_1 và Q_3 ta tách mẫu dữ liệu gốc thành 2 phần trái và phải:
Mẫu dữ liệu gốc có hai phần tử chính giữa là x_5 và x_6 thế nên:
- *Phần trái: từ x_1 đến x_5 có phần tử chính giữa là x_3*
- *Phần phải: từ x_6 đến x_{10} có phần tử chính giữa là x_8*

$$Q_1 = x_3 = 4$$
$$Q_3 = x_8 = 10$$

Khoảng tứ phân vị: $\Delta Q = Q_3 - Q_1 = 10 - 4 = 6$

giá trị ngoại diện là giá trị thỏa mãn: $x < Q_1 - 1{,}5\Delta Q$ hoặc $x > Q_3 + 1{,}5\Delta Q$

$\Leftrightarrow x > 4 - 1{,}5 \times 6$ hoặc $x > 10 + 1{,}5 \times 6$

$\Leftrightarrow x < -5$ hoặc $x > 19$.

Từ mẫu số liệu ta thấy không có giá trị ngoại lệ.

b) Mẫu số liệu 2; 80; 95; 80; 70; 72; 74; 65; 80; 300

Xếp mẫu theo thứ tự không giảm: $\underbrace{2}_{x_1}; \underbrace{65}_{x_2}; \underbrace{70}_{x_3}; \underbrace{72}_{x_4}; \underbrace{74}_{x_5}; \underbrace{80}_{x_6}; \underbrace{80}_{x_7}; \underbrace{80}_{x_8}; \underbrace{95}_{x_9}; \underbrace{300}_{x_{10}}$

Tìm khoảng tứ phân vị:

$x_1 \longrightarrow x_{10}$

Từ x_1 đến x_{10} thì phần tử chính giữa được tìm bằng cách tính $\frac{1+10}{2} = 5{,}5$ (là số không nguyên) ⇒ Phần tử chính giữa là x_5 và x_6

$x_1 \longrightarrow x_5$ $\qquad$ $x_6 \longrightarrow x_{10}$

Để tìm Q_1 và Q_3 ta tách mẫu dữ liệu gốc thành 2 phần trái và phải:
Mẫu dữ liệu gốc có hai phần tử chính giữa là x_5 và x_6 thế nên:
- *Phần trái: từ x_1 đến x_5 có phần tử chính giữa là x_3*
- *Phần phải: từ x_6 đến x_{10} có phần tử chính giữa là x_8*

$$Q_1 = x_3 = 70$$
$$Q_3 = x_8 = 80$$

Khoảng tứ phân vị: $\Delta Q = Q_3 - Q_1 = 80 - 70 = 10$

giá trị ngoại diện là giá trị thỏa mãn: $x < Q_1 - 1{,}5\Delta Q$ hoặc $x > Q_3 + 1{,}5\Delta Q$

$\Leftrightarrow x > 70 - 1{,}5 \times 10$ hoặc $x > 80 + 1{,}5 \times 10$

$\Leftrightarrow x < 55$ hoặc $x > 95$.

Từ mẫu số liệu ta thấy các giá trị ngoại lệ là: 2 và 300.

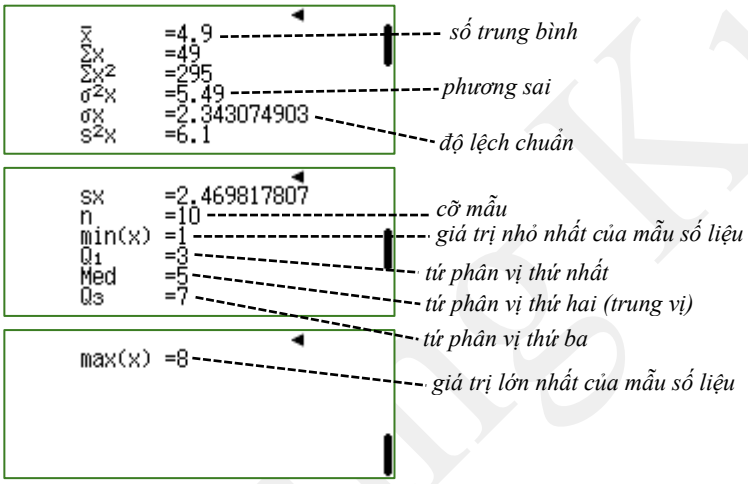
Thầy Lê Trung Kiên

69. Bấm máy tính các số liệu thống kê

Bấm máy tính tìm các số liệu thống kê của các mẫu số liệu sau (máy 580):

a) Mẫu số liệu: 1,6,3,7,8,4,2,4,6,8.

Tắt cột tần số	SHIFT MENU ▼ 3 2
Bấm máy chương trình thống kê	MENU 6 1 1 = 6 = 3 = 7 = 8 = 4 = 2 = 4 = 6 = 8 =
Hiển thị các số liệu thống kê	OPTN 3

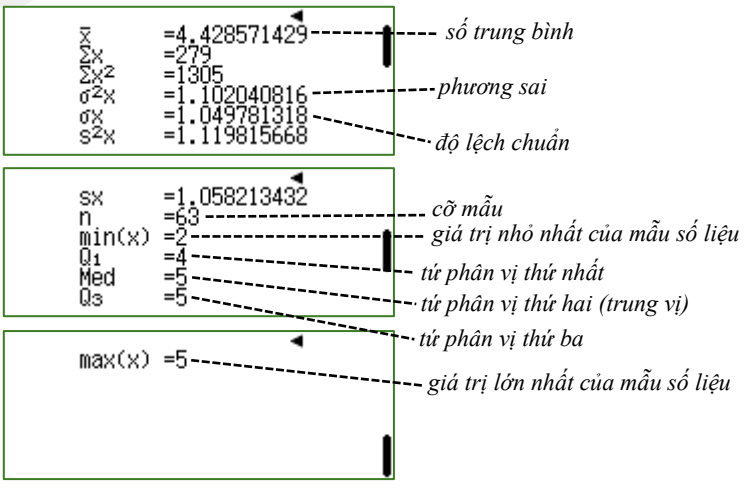


b) Mẫu số liệu:

Giá trị	2	4	5	5	2
Tần số	8	9	11	34	1

Bấm máy tính như sau:

Bật cột tần số	SHIFT MENU ▼ 3 1
Bấm máy chương trình thống kê	MENU 6 1 2 = 4 = 5 = 5 = 2 = ▼ ▶ 8 = 9 = 1 1 = 3 4 = 1 =
Hiển thị các số liệu thống kê	OPTN 3



Thầy Lê Trung Kiên

DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

70. Tam thức bậc hai là gì?

Tam thức bậc hai (đối với x) là biểu thức dạng $f(x) = ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là những số cho trước với $a \neq 0$.

Ví dụ: $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $f(x) = -\sqrt{2}x^2 + 5x - \sqrt{3}$, $f(x) = -2x^2 + 2x$, $f(x) = 3x^2 + 1$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ là những tam thức bậc 2.

71. Dấu của tam thức bậc hai

Cho tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Khi thay $x = x_0$ vào $f(x)$, ta được $f(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c$, gọi là giá trị của tam thức bậc hai tại x_0.

▪ Nếu $f(x_0) > 0$ thì ta nói $f(x)$ dương tại x_0.

▪ Nếu $f(x_0) < 0$ thì ta nói $f(x)$ âm tại x_0.

▪ Nếu $f(x_0) = 0$ thì ta nói $f(x)$ bằng 0 tại x_0.

Nếu $f(x)$ dương (âm) tại mọi điểm x thuộc một khoảng hoặc một đoạn thì ta nói $f(x)$ dương (âm) trên khoảng hoặc đoạn đó.

72. Định lý về dấu của tam thức bậc hai

▪ Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Khi đó:

– Nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ là nghiệm của $f(x)$.

– Biểu thức $\Delta = b^2 - 4ac$ và $\Delta' = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$ lần lượt là biệt thức và biệt thức thu gọn của $f(x)$.

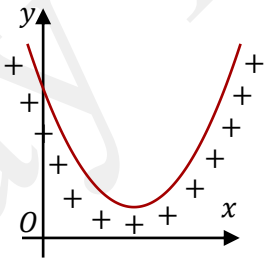
▪ Dấu của tam thức bậc hai phụ thuộc vào:

– Hệ số a (hệ số gắn với x^2)

– Biệt thức Δ (hoặc Δ')

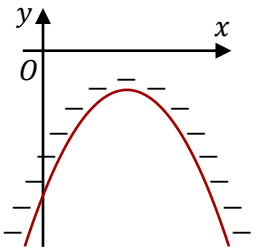
☞ $\Delta < 0$ (tam thức bậc 2 vô nghiệm) $\Rightarrow f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$a > 0$



x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	

$a < 0$



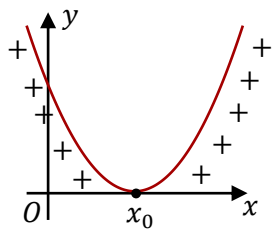
x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	Cùng dấu với a	

Thầy Lê Trung Kiên

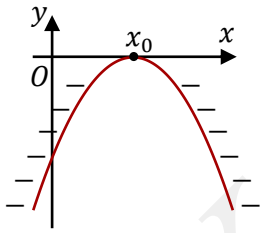
☞ $\Delta = 0$ $\left(\text{tam thức bậc 2 có nghiệm kép } x_0 = -\dfrac{b}{2a}\right) \Rightarrow f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \neq -\dfrac{b}{2a}$.

$a > 0$



x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$+$

$a < 0$



x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$-$

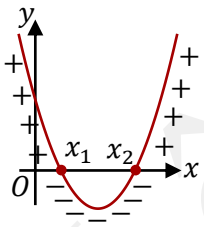
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	Cùng dấu với a	0	Cùng dấu với a

☞ $\Delta > 0$ (tam thức bậc hai có hai nghiệm x_1 và x_2 $(x_1 < x_2)$), thì ta có:

▪ $f(x)$ trái dấu với hệ số a với mọi x nằm trong khoảng $(x_1; x_2)$ (tức là với $x_1 < x < x_2$)

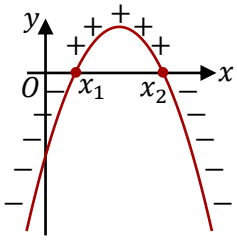
▪ $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi x nằm ngoài đoạn $[x_1; x_2]$ (tức là với $x < x_1$ hoặc $x > x_2$).

$a > 0$



x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$ 0	$+$

$a < 0$



x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$ 0	$-$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$	Cùng dấu với a	0	Khác dấu với a 0	Cùng dấu với a

Để dễ nhớ ta chỉ cần nhớ câu :

"TRONG TRÁI, NGOÀI CÙNG"

Thầy Lê Trung Kiên

73. Điều kiện luôn (–) hoặc luôn (+)

Cho $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$

Tam thức $ax^2 + bx + c \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

Nếu có dấu "=" Thì ở đây có dấu "="

Tam thức $ax^2 + bx + c \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

Nếu có dấu "=" Thì ở đây có dấu "="

74. Bất phương trình bậc hai một ẩn là gì?

Bất phương trình bậc hai (ẩn x) là bất phương trình có một trong các dạng:

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad ; \quad ax^2 + bx + c < 0$$
$$ax^2 + bx + c \geq 0 \quad ; \quad ax^2 + bx + c \leq 0$$

(Trong đó $a \neq 0$)

Nghiệm của bất phương trình bậc hai là các giá trị của biến x mà khi thay vào bất phương trình ta được biểu thức đúng.

75. Phương pháp giải bất phương trình bậc hai một ẩn

a) Sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc 2

Xem lại lý thuyết về dấu tam thức bậc 2.

b) Sử dụng máy tính bỏ túi

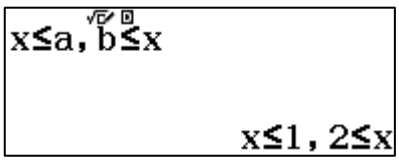
Ví dụ

Giải các bất phương trình bậc 2 sau:

a) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$

Bấm máy tính như sau:

MENU (–) 2 3 1 = – 3 = 2 = =



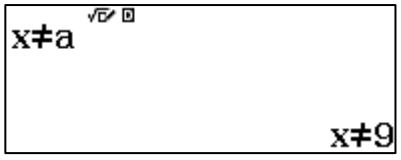
$x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \leq 1 \\ 2 \leq x \end{bmatrix}$

hay $x \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$.

b) $2x^2 - 36x + 162 > 0$

Bấm máy tính như sau:

MENU (–) 2 1 2 = – 3 6 = 1 6 2 = =



$2x^2 - 36x + 162 > 0 \Leftrightarrow x \neq 9$

hay $x \in \mathbb{R} \backslash \{9\}$.

Thầy Lê Trung Kiên

c) $-x^2+3x-2\geq 0$

Bấm máy tính như sau:

MENU (−) 2 3 − 1 = 3 = − 2 = =	a≤x≤b 1≤x≤2 $-x^2+3x-2\geq 0 \Leftrightarrow 1\leq x\leq 2$ hay $x\in[1;2]$.

d) $x^2-18x+82>0$

Bấm máy tính như sau:

MENU (−) 2 1 1 = − 1 8 = 8 2 = =	Tất cả số thực $x^2-18x+82>0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$

e) $\sqrt{2}x^2-6x+82<0$

Bấm máy tính như sau:

MENU (−) 2 2 √ 2 = − 6 = 8 2 = =	Vô nghiệm $\sqrt{2}x^2-6x+82<0 \Leftrightarrow x\in\emptyset$

Thầy Lê Trung Kiên

PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Phương trình $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{dx^2+ex+f}$

Để giải phương trình $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{dx^2+ex+f}$, ta làm như sau:

Bước 1: Bình phương hai vế của phương trình để được phương trình $ax^2+bx+c=dx^2+ex+f$.

Bước 2: Giải phương trình nhận được ở Bước 1.

Bước 3: Thử lại các giá trị x tìm được ở Bước 2 có thoả mãn phương trình đã cho hay không và kết luận nghiệm.

Phương trình $\sqrt{ax^2+bx+c}=dx+e$

Để giải phương trình $\sqrt{ax^2+bx+c}=dx+e$, ta làm như sau:

Bước 1: Bình phương hai vế của phương trình để được phương trình $ax^2+bx+c=(dx+e)^2$.

Bước 2: Giải phương trình nhận được ở Bước 1.

Bước 3: Thử lại các giá trị x tìm được ở Bước 2 có thoả mãn phương trình đã cho hay không và kết luận nghiệm.

Lưu ý: ▪ Khi thử lại x, ta thay x vào phương trình gốc đề bài cho, để xem 2 vế có bằng nhau hay không.

▪ Để kiểm tra $x=x_0$ có phải là nghiệm của phương trình $f(x)=g(x)$ hay không ta có thể bấm máy như sau:

Bước 1: Bấm: $f(x)-g(x)$

Bước 2: CALC: $x=x_0$, bấm $=$ $=$ nếu ra 0 thì x_0 đúng là nghiệm của phương trình.

Ví dụ

Giải phương trình: $\sqrt{x^2-3x+1}=3x-8$

Giải

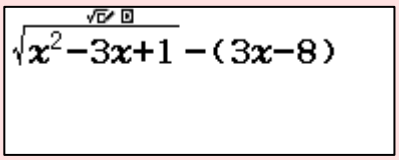
Ta có: $\sqrt{x^2-3x+1}=3x-8\Rightarrow x^2-3x+1=(3x-8)^2$

$$\Rightarrow x^2-3x+1=9x^2-48x+64\Rightarrow -8x^2+45x-63=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\x=\dfrac{21}{8}\end{array}\right.$$

Thử lại ta nhận nghiệm $x=3$. Vậy tập nghiệm $S=\{3\}$.

Ta bấm

$\sqrt{\square}$ x x^2 $-$ 3 x $+$ 1 $\blacktriangleright$ $-$ (3 x $-$ 8)



CALC 3 $=$ $=$ ra $0\Rightarrow x=3$ là nghiệm của phương trình

Tiếp tục CALC 2 1 $\blacktriangleright$ 8 $=$ $=$

ra $\frac{1}{4}\neq 0\Rightarrow x=\frac{21}{8}$ không là nghiệm của phương trình

Thầy Lê Trung Kiên

ĐẠI SỐ TỔ HỢP

76. Quy tắc cộng

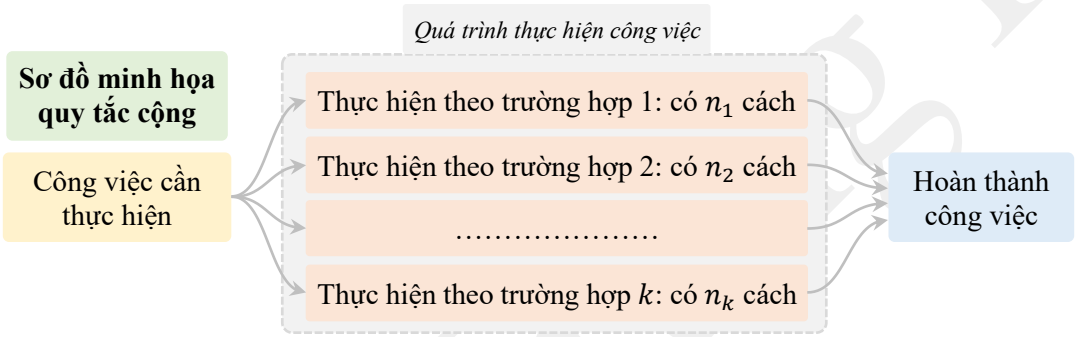
Nếu một công việc được hoàn thành theo một trong k trường hợp, các trường hợp này loại trừ lẫn nhau (tức là, không có 2 trường hợp nào có cùng 1 cách giống nhau), trong đó ta biết :

- Trường hợp 1 có n_1 cách thực hiện.
- Trường hợp 2 có n_2 cách thực hiện.
- .....
- Trường hợp thứ k có n_k cách thực hiện

Thì số cách hoàn thành công việc ấy là:

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

Sơ đồ minh họa quy tắc cộng



Thực hiện công việc theo trường hợp khi nào?

Khi chỉ cần hoàn thành đúng một trong các trường hợp là công việc đã hoàn thành.

77. Quy tắc nhân

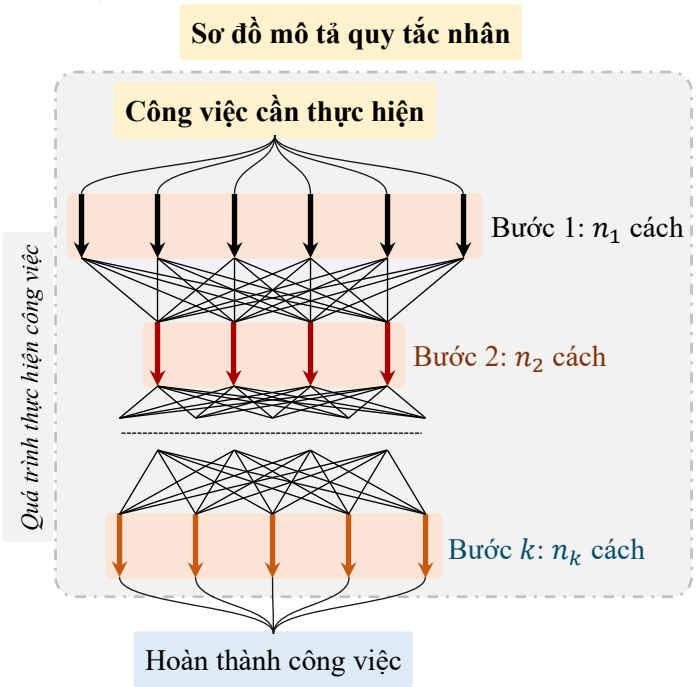
Nếu một công việc muốn hoàn thành phải trải qua tất cả k bước, trong đó :

- Bước 1: Có n_1 cách thức hiện.
- Bước 2: Có n_2 cách thức hiện.
- .....
- Bước k: Có n_k cách thực hiện.

Thì số cách hoàn thành công việc là:

$$n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$$

Sơ đồ mô tả quy tắc nhân



Thực hiện công việc theo bước khi nào?

Khi cần phải trải qua lần lượt, đầy đủ tất cả các bước thì công việc mới hoàn thành.

78. Giai thừa

Định nghĩa giai thừa : $n! = \underbrace{1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n}_{\text{Tích các số tự nhiên liên tục từ 1 đến } n} \ (n \geq 1)$ Qui ước: $0! = 1$	Cách đọc: Dấu "!" đọc là "giai thừa" VD: "6!" đọc là "sáu giai thừa". Để bấm giai thừa trong máy tính bỏ túi, hãy tìm ký hiệu ! trên máy tính.
Một số tính chất:	
$n! = (n-1)! \times n$ $= (n-2)! \times (n-1)n$ $= (n-3)! \times (n-2)(n-1)n$ $= (n-4)! \times (n-3)(n-2)(n-1)n$ $= \cdots$	$\frac{n!}{p!} = \underbrace{(p+1)(p+2)\ldots n}_{\text{Tích các số tự nhiên liên tục từ } p+1 \text{ đến } n}$ (với $n > p$)

Thầy Lê Trung Kiên

79. Các mô hình rút gọn của quy tắc nhân

Các mô hình rút gọn của quy tắc nhân

- Mô hình hoán đổi vị trí (**Hoán vị**)
- Mô hình chọn vật theo thứ tự, theo bước (**Chỉnh hợp**)
- Mô hình chọn vật trong 1 lần (**Tổ hợp**)

a) Hoán vị

Mô hình — Tổng quát → **Mô hình tổng quát hóa thành hoán vị**

Cho tập A gồm n phần tử khác nhau ($n \geq 1$). Có bao nhiêu cách xếp n phần tử này vào n vị trí khác nhau.

Bước 1 : Chọn phần tử xếp vào vị trí thứ nhất có n cách.

↓ Còn lại $n-1$ phần tử

Bước 2 : Chọn phần tử xếp vào vị trí thứ hai có $n-1$ cách.

↓ Còn lại $n-2$ phần tử

Bước 3 : Chọn phần tử xếp vào vị trí thứ ba có $n-2$ cách.

↓ Còn lại $n-3$ phần tử

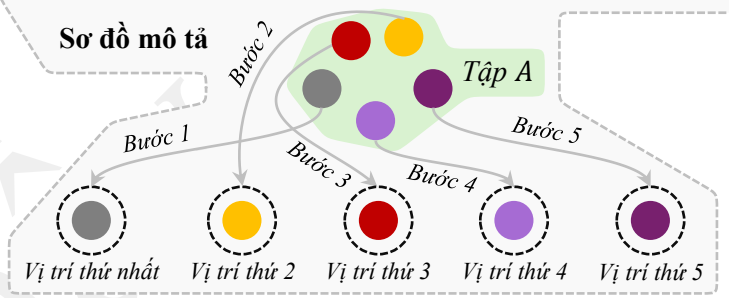
…

↓ Còn lại 1 phần tử

Bước n : Chọn phần tử xếp vào vị trí thứ n có 1 cách.

Vậy theo quy tắc nhân ta có $n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1 = n!$ cách

Sơ đồ mô tả

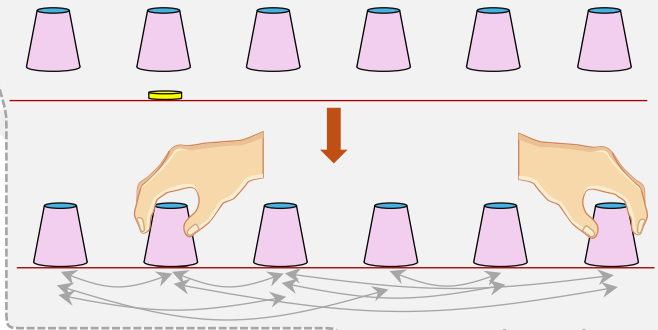


Một tập gồm n phần tử khác nhau ($n \geq 1$). Mỗi cách sắp xếp n phần tử này theo một **thứ tự** cụ thể được gọi là một cách **hoán đổi vị trí** của n phần tử.

👉Số lượng cách ***hoán đổi vị trí*** của n phần tử là: $P_n = n!$

Viết tắt: ***hoán vị***

Ví dụ: Có 6 cái cốc khác nhau và 1 đồng xu. Giấu đồng xu vào 1 trong những cái cốc sau đó xếp 6 cái cốc thành 1 hàng ngang và hoán đổi vị trí của 6 cái cốc 1 cách tùy ý. Hỏi có bao nhiêu cách xáo trộn 6 cái cốc trên?



Mỗi cách xếp 6 cốc là 1 cách hoán đổi vị trí của 6 phần tử, nên số cách xếp là $P_6 = 6! = 720$ cách.

b) Chỉnh hợp

Mô hình — Tổng quát hóa → Cho tập A gồm n phần tử khác nhau.

Cho tập A gồm n phần tử khác nhau ($n \geq 1$). Có bao nhiêu cách lấy ra từ tập A số lượng k phần tử và xếp vào k vị trí khác nhau.

Bước 1: Chọn phần tử xếp vào vị trí thứ nhất có n cách.

Còn lại $n-1$ phần tử

Bước 2: Chọn phần tử xếp vào vị trí thứ 2 có $n-1$ cách.

Còn lại $n-2$ phần tử

Bước 3: Chọn phần tử xếp vào vị trí thứ 3 có $n-2$ cách.

Còn lại $n-3$ phần tử

…

Còn lại $n-(k-1)$ phần tử

Bước k: Chọn phần tử xếp vào vị trí thứ k có $n-(k-1)$ cách.

Vậy theo quy tắc nhân ta có số cách là:

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))$$

Thêm bớt

$$= n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) \times \frac{(n-k)!}{(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

Mỗi cách lấy ra k phần tử khác nhau từ tập A và sau đó sắp xếp lại theo một thứ tự cụ thể.

Mỗi cách lấy ra k phần tử khác nhau từ tập A và xếp vào k vị trí khác nhau.

Mỗi cách lấy ra k phần tử khác nhau từ tập A theo cách:
Bước 1: lấy ra vật thứ nhất.
Bước 2: lấy ra vật thứ hai.
…
Bước k: lấy ra vật thứ k

Mỗi cách như vậy được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử của tập A.

Số chỉnh hợp chập k của n phần tử :

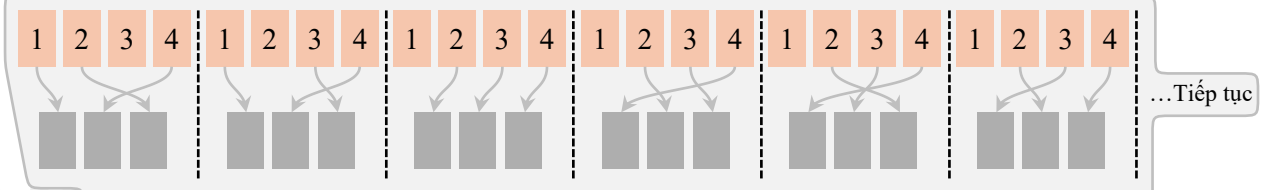
$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Công thức trên cũng đúng cho trường hợp $k = 0$ hoặc $k = n$.
Khi $k = n$ thì $A_n^n = P_n = n!$

👉 *Lưu ý*: Bấm chỉnh hợp hãy tìm ký hiệu nPr.
Ví dụ : muốn tính A_4^3, ta bấm 4P3.
Điều kiện A_n^k xác định là $\begin{cases} n \in \mathbb{N}^* \\ 0 \leq k \leq n, k \in \mathbb{N} \end{cases}$

Ví dụ: Từ các số {1, 2, 3, 4}. Có thể tạo được bao nhiêu số có 3 chữ số khác nhau.

Suy luận: Mỗi số có 3 chữ số khác nhau được tạo ra từ các số {1, 2, 3, 4} là một chỉnh hợp chập 3 của 4 phần tử {1, 2, 3, 4} (*Sơ đồ minh họa bên dưới*)



Lời giải

Mỗi số thỏa mãn yêu cầu là một chỉnh hợp chập 3 của 4 phần tử, nên số lượng số thỏa mãn đề bài là $A_4^3 = 24$ số.

(Dưới đây liệt kê 24 số đó: 142; 143; 234; 423; 432; 324; 124; 134; 123; 132; 213; 214; 231; 241; 243; 312; 314; 321; 341; 342; 412; 413; 421; 431)

Ví dụ: Có 6 bạn tham gia thi chạy là An, Bình, Châu, Đạt, Hồng, Linh. Có 3 giải thưởng sẽ được trao là Nhất, Nhì, Ba. Có tất cả bao nhiêu cách trao giải có thể xảy ra nếu không xảy ra trường hợp có 2 người về đích cùng 1 lúc.

Suy luận: Mỗi cách trao 3 giải là một chỉnh hợp chập 3 của 6 phần tử {An, Bình, Châu, Đạt, Hồng, Linh} (*Xem sơ đồ minh họa bên dưới*)

Nhất	Bình	Châu	Đạt	Linh	Bình	...
Nhì	Châu	Bình	Châu	Châu	Hồng	...
Ba	An	An	An	Hồng	An	...

Lời giải

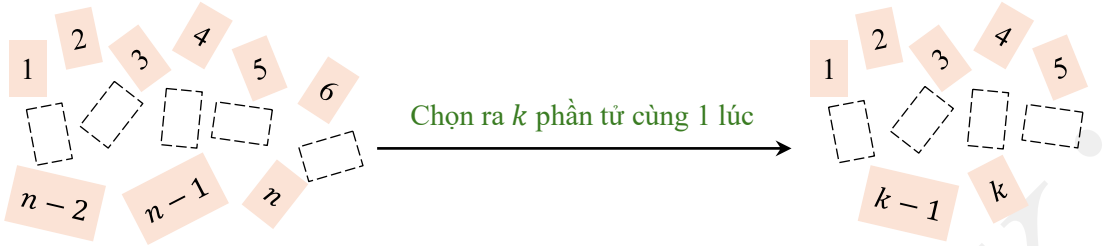
Số cách trao giải là:

$A_6^3 = 120$ cách

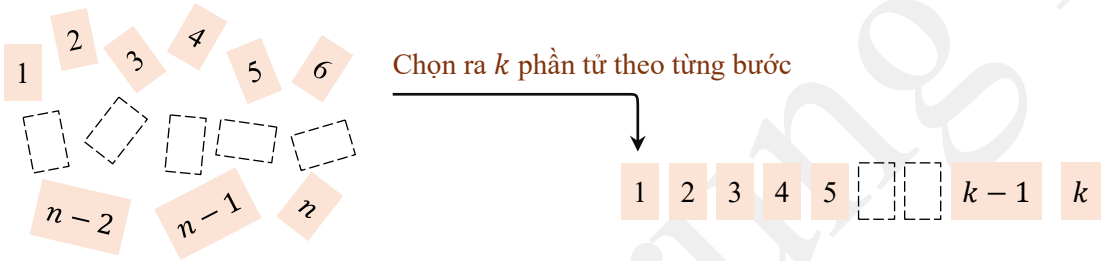
Thầy Lê Trung Kiên

c) Tổ hợp

Bài toán thứ nhất: Từ một tập hợp gồm n phần tử khác nhau. Chọn ra từ n phần tử đó k phần tử cùng một lúc để tạo thành một tập hợp A. Hỏi có bao nhiêu cách để tạo ra một tập hợp A như thế?



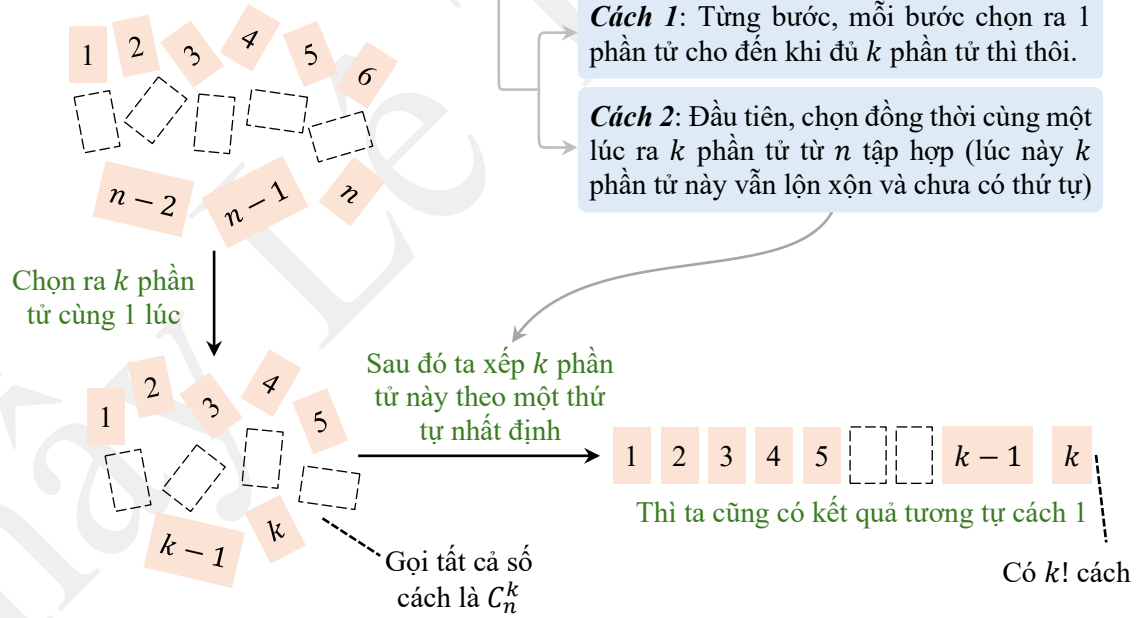
Ta giải quyết bài toán bằng cách tìm sự liên hệ giữa bài toán trên và ***Bài toán thứ 2*** như sau: "Chọn ra từ n phần tử khác nhau k phần tử theo cách lấy lần lượt ra từng phần tử (tức là lần 1 lấy ra 1 vật, sau đó lấy tiếp ra 1 vật nữa, rồi sau đó lại lấy tiếp 1 vật nữa,… cho đến khi có đủ k phần tử)", số cách lấy ra có thứ tự như vậy ta đã biết



Bây giờ ta sẽ suy luận từ bài toán thứ 2 để tìm ra lời giải cho bài toán thứ nhất. Để chọn ra có thứ tự k phần tử từ tập n phần tử ta có thể có thể làm theo 2 cách tương đương như sau:

Cách 1: Từng bước, mỗi bước chọn ra 1 phần tử cho đến khi đủ k phần tử thì thôi.

Cách 2: Đầu tiên, chọn đồng thời cùng một lúc ra k phần tử từ n tập hợp (lúc này k phần tử này vẫn lộn xộn và chưa có thứ tự)



$$\Rightarrow A_n^k = C_n^k \cdot k! \Rightarrow C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$$

▪ Cho tập A gồm n phần tử khác nhau. Mỗi cách *chọn ra cùng 1 lúc k phần tử* $(1 \le k \le n)$ từ n phần tử được gọi là một **tổ hợp** chập k của n phần tử. Số lượng tổ hợp chập k của n phần tử là:

$$\boxed{C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

▪ Qui ước : $C_n^0 = 1$.

▪ Điều kiện C_n^k xác định: $\begin{cases} n \in \mathbb{N}^* \\ 0 \le k \le n, k \in \mathbb{N} \end{cases}$

▪ Tính chất:

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$
$$C_n^k = C_n^{n-k}$$
$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$
$$C_n^k = \frac{n-k+1}{k} C_n^{k-1}$$

▪ ***Lưu ý***: Để bấm máy số tổ hợp hãy tìm ký hiệu nCr trong máy.

Ví dụ : muốn tính C_8^5 ta bấm $8C5$.

▪ **Phân biệt chỉnh hợp và tổ hợp**

Chỉnh hợp và tổ hợp liên hệ nhau bởi công thức:

$$A_n^k = k!\,C_n^k$$

Chỉnh hợp : chọn vật, chọn vị trí có thứ tự.

Tổ hợp : chọn các vật ra cùng một lúc, không có thứ tự.

⇒ Những bài toán mà kết quả phụ thuộc vào vị trí hay thứ tự của các phần tử → Sử dụng chỉnh hợp.

Ngược lại, là tổ hợp. Tổ hợp chỉ quan tâm có những phần tử gì được chọn ra mà không quan tâm tới thứ tự của chúng.

Thầy Lê Trung Kiên

d) Ví dụ phân biệt chỉnh hợp, tổ hợp

Phân biệt chỉnh hợp tổ hợp

Một lớp học có 30 học sinh

Chọn ra 3 học sinh đi quét lớp.

Có C_{30}^3 cách

Chọn ra 3 học sinh làm ban cán sự, 1 lớp trưởng, 1 lớp phó học tập, 1 lớp phó văn nghệ.

Có A_{30}^3 cách

Cho 5 món ăn: Thịt nướng, Rau cải xào, Gà rán, Thịt kho, Rau muống luộc

Hãy chọn ra 3 món ăn tùy ý

Có C_5^3 cách

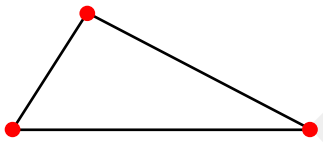
Hãy chọn ra 3 món ăn theo mức độ yêu thích của bạn

Có A_5^3 cách

Cho 3 điểm không thẳng hàng A, B, C

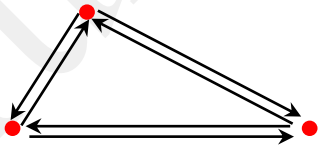
Có bao nhiêu đoạn thẳng có 2 đầu mút được tạo ra từ 3 điểm đã cho

Có C_3^2 đoạn thẳng



Có bao nhiêu vectơ ($\neq \vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối được tạo ra từ 3 điểm đã cho

Có A_3^2 vectơ



Cho một tập gồm 4 phần tử A, B, C, D

Các tổ hợp chập 3 của 4 phần tử này là

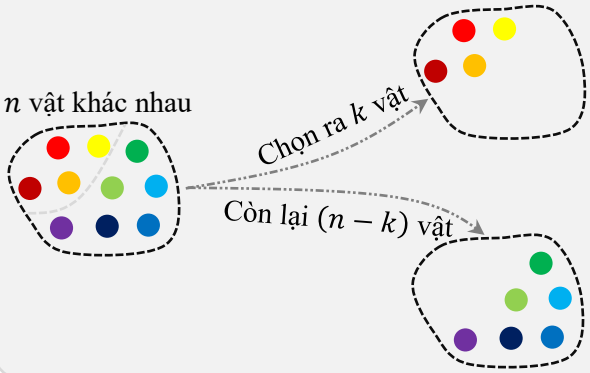
Các chỉnh hợp chập 3 của 4 phần tử này là

	Các chỉnh hợp sinh ra từ bộ	
{B, C, D}	(B, C, D) (B, D, C) (C, D, B) (C, B, D) (D, B, C) (D, C, B)	
{A, C, D}	(A, C, D) (A, D, C) (D, A, C) (D, C, A) (C, D, A) (C, A, D)	
{A, B, D}	(A, B, D) (A, D, B) (D, A, B) (D, B, A) (B, D, A) (B, A, D)	
{A, B, C}	(A, B, C) (A, C, B) (C, A, B) (C, B, A) (B, C, A) (B, A, C)	

Thầy Lê Trung Hiếu

e) Giải thích một số công thức tổ hợp bằng hình học

Giải tích công thức $C_n^k = C_n^{n-k}$ bằng bài toán chọn đồ vật

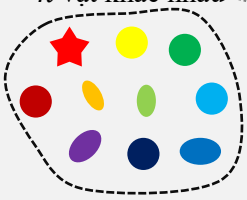


Mỗi cách chọn ra k vật từ n vật thì ta cũng vô tình có một cách để lại $(n-k)$ vật từ n vật.

$\Rightarrow$ Số cách chọn ra k vật từ n vật khác nhau $=$ Số cách để lại $(n-k)$ vật từ n vật khác nhau

$$\Rightarrow C_n^k = C_n^{n-k}$$

Giải tích công thức $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ bằng bài toán chọn đồ vật



Có C_n^k cách

Chọn ra k vật từ n vật ta có thể suy luận như sau:

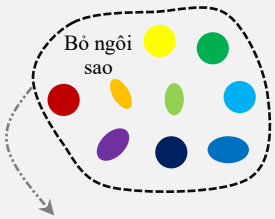
Khi chọn ra k vật từ n vật thì chỉ có thể xảy ra 1 trong 2 trường hợp như sau:

TH1: Có ngôi sao màu đỏ trong k vật được chọn ra.

TH2: Không có ngôi sao màu đỏ trong k vật được chọn ra.

TH1: Có ngôi sao màu đỏ trong k vật được chọn ra.

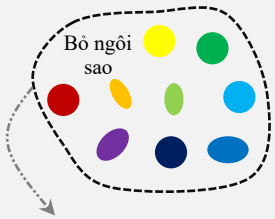
Như vậy ta chỉ cần chọn thêm $(k-1)$ vật nữa từ tập hợp ban đầu sau khi đã bỏ đi ngôi sao màu đỏ.



Chọn ra $(k-1)$ vật từ $(n-1)$ vật

TH2: Không có ngôi sao màu đỏ trong k vật được chọn ra.

Như vậy toàn bộ k vật được chọn ra ta chọn chúng trong tập hợp ban đầu sau khi đã bỏ đi ngôi sao màu đỏ



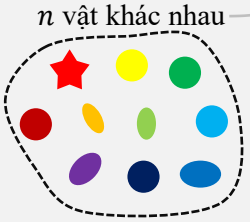
Chọn ra k vật từ $(n-1)$ vật

Từ 2 trường hợp ta suy ra số cách chọn ra k vật từ n vật khác nhau là: $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$

Giải tích công thức $C_n^k = \frac{n-k+1}{k} C_n^{k-1}$ bằng bài toán chọn đồ vật

Có C_n^k cách

n vật khác nhau → Chọn ra k vật từ n vật ta có thể suy luận như sau:



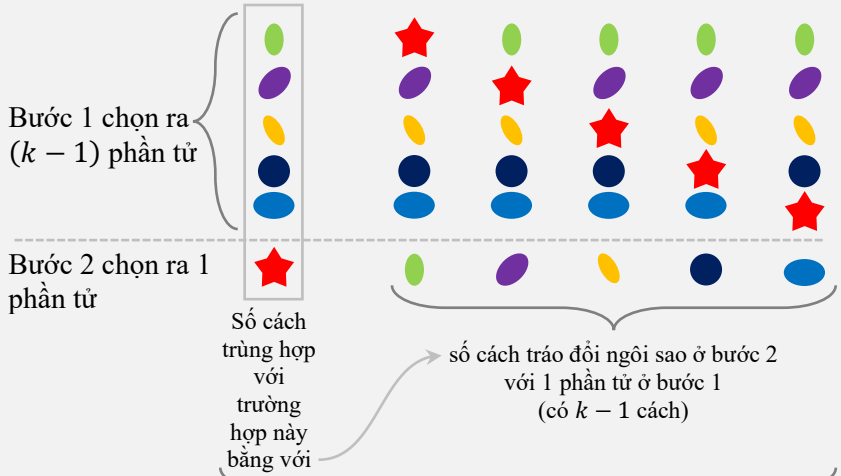
Bước 1: Chọn ra $(k-1)$ vật có C_n^{k-1} cách.
(Sau bước 1, tập hợp n vật khác nhau chỉ còn $n-(k-1)$ vật)

Bước 2: Chọn 1 vật còn lại có $n-(k-1)$ cách.

Vậy có $C_n^{k-1} \times \big(n-(k-1)\big) = (n-k+1)C_n^{k-1}$

Thế nhưng cách này lại gây ra các sự trùng lặp (nguyên nhân là do lập luận ở đây theo bước thì có phân biệt thứ tự của các thành phần được chọn ra, bạn đọc có thể xem ví dụ sau để thấy rõ sự trùng lặp do lập luận theo 2 bước trên gây ra)

Ví dụ: Chọn ra 6 vật từ tập trên thì nếu tiến hành theo 2 bước lập luận ở trên ta có



Theo như 2 bước chọn này thì tập  sẽ có k lần trùng nhau

Vậy ta có: Với mỗi cách trong $(n-k+1)C_n^{k-1}$ cách sẽ có k lần trùng nhau nên:

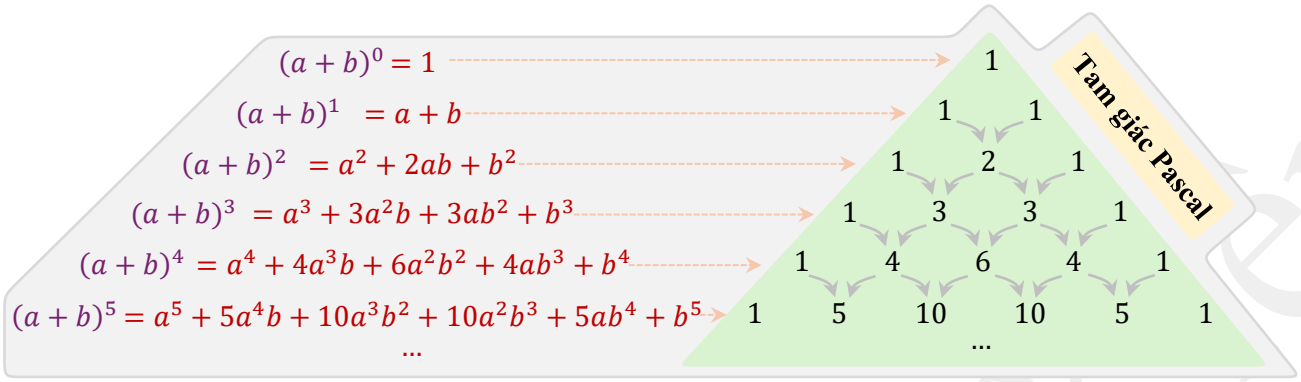
$$\frac{(n-k+1)C_n^{k-1}}{k} = C_n^k$$

80. Một số tính chất về lũy thừa

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ | $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ | $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ | $a^n \cdot b^n = (a.b)^n$ | $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ | $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ | $(a^n)^m = (a^m)^n = a^{m \times n}$ | **Lưu ý :** $(a^m)^n \neq a^{m^n}$

81. Tam giác Pascal



82. Nhị thức Newton

Với mọi $n \in N$ và với mọi cặp a, b ta có : $\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k}$

Một số tính chất

Số lượng các số hạng của khai triển bằng $n+1$.
Tổng các số mũ của a và b trong mỗi số hạng đều bằng n.
Số hạng tổng quát thứ $(k+1)$ có dạng $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ $(k = \overline{0,n})$.

Lưu ý về tên gọi

$$\left(\frac{1}{x^2} - x^3\right)^5 = 10 + \frac{1}{x^{10}} - \frac{5}{x^5} - 10x^5 + 5x^{10} - x^{15}$$
$$= 10 + 1 \times \frac{1}{x^{10}} + (-5) \times \frac{1}{x^5} + (-10) \times x^5 + 5 \times x^{10} + (-1) \times x^{15}$$
$$\text{Tổng hệ số} = 10 + 1 + (-5) + (-10) + 5 + (-1) = 0$$

Chú ý: Để tìm tổng hệ số của một khai triển nhị thức tùy ý thì ta thay mọi biến số bằng 1.

$$\left(\frac{1}{x^2} - x^3\right)^5 = 10 + 1 \times \frac{1}{x^{10}} - 5 \times \frac{1}{x^5} - 10 \times x^5 + 5 \times x^{10} - 1 \times x^{15}$$

Hệ số tự do; Hệ số của số hạng chứa $\frac{1}{x^{10}}$; Hệ số của số hạng chứa $\frac{1}{x^5}$; Hệ số của số hạng chứa x^5; Hệ số của số hạng chứa x^{10}; Hệ số của số hạng chứa x^{15}

$$\left(\frac{1}{x^2} - x^3\right)^5 = 10 + \frac{1}{x^{10}} - \frac{5}{x^5} - 10x^5 + 5x^{10} - x^{15}$$

Số hạng không chứa x; Số hạng chứa $\frac{1}{x^{10}}$; Số hạng chứa $\frac{1}{x^5}$; Số hạng chứa x^5; Số hạng chứa x^{10}; Số hạng chứa x^{15}

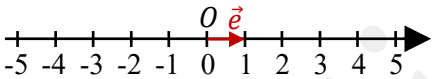
Nếu trong khai triển nhị thức Newton, ta gán cho a và b những giá trị đặc biệt thì ta sẽ thu được những công thức đặc biệt. Chẳng hạn:

$$(1+x)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \cdots + C_n^n \xrightarrow{\text{Thay } x=1} C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$$
$$(x-1)^n = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^n C_n^n \xrightarrow{\text{Thay } x=1} C_n^0 - C_n^1 + \cdots + (-1)^n C_n^n = 0$$

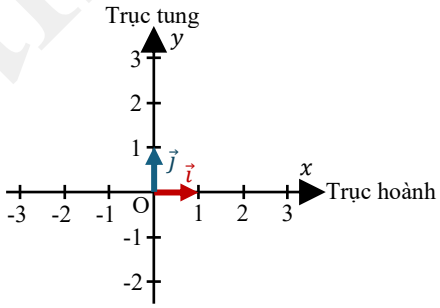
Thầy Lê Trung Kiên

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ

83. Trục tọa độ

Trục tọa độ (trục) là một đường thẳng trên đó đã xác định một điểm gốc O và một vectơ đơn vị $\vec{e}$ (có độ dài bằng 1). Ký hiệu $(O;\vec{e})$.	
▪ Tọa độ của vectơ trên trục : $\vec{u}=(a)\Leftrightarrow\vec{u}=a\cdot\vec{e}$. ▪ Tọa độ của điểm trên trục: $M(k)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=k\cdot\vec{e}$ ▪ Độ dài đại số của vectơ trên trục : $\overline{AB}=a\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=a\cdot\vec{e}$ ▪ Tọa độ của vectơ khi biết tọa độ hai điểm trên trục: $A(a),B(b)\Rightarrow\overline{AB}=b-a$	**Chú ý:** ▪ Nếu $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\vec{e}$ thì $\overline{AB}=AB$. ▪ Nếu $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng với $\vec{e}$ thì $\overline{AB}=-AB$. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\overline{AB}=\overline{CD}$ ▪ Hệ thức Sa-lơ: Với A,B,C tùy ý trên trục, ta có: $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ ▪ Nếu $A(a),B(b)$ thì $\overline{AB}=b-a$.

84. Hệ trục tọa độ

▪ Hệ gồm hai trục tọa độ Ox,Oy vuông góc với nhau. Vectơ đơn vị trên Ox,Oy lần lượt là $\vec{i},\vec{j}$. O là gốc tọa độ, Ox là trục hoành, Oy là trục tung.	
▪ Tọa độ của vectơ đối với hệ trục tọa độ: $\vec{u}=(x;y)\Leftrightarrow\vec{u}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}$ ▪ Tọa độ của điểm đối với hệ trục tọa độ: $M(x;y)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}$. Chú ý: x được gọi là **hoành độ**, y được gọi là **tung độ.**	

85. Biểu thức tọa độ phép toán vectơ & điểm quan trọng

Cho $\vec{a}=(a_1;a_2)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2)$

Hai **vectơ bằng nhau**	$\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=b_1\\a_2=b_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\text{hoành}=\text{hoành}\\\text{tung}=\text{tung}\end{cases}$
Hai **vectơ ngược chiều**	Với $\vec{b}\neq\vec{0}$ thì $\vec{a}$ ngược chiều $\vec{b}$ $\Leftrightarrow\exists k<0:\vec{a}=k\vec{b}$ $\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}<0\ (b_1,b_2\neq0)$
Hai **vectơ cùng chiều**	▪ Nếu ít nhất một trong hai vectơ bằng $\vec{0}$ thì 2 vectơ cùng chiều. ▪ Nếu cả 2 vectơ đều khác $\vec{0}$ thì $\vec{a}$ cùng chiều $\vec{b}$ $\Leftrightarrow\exists k>0:\vec{a}=k\vec{b}$ $\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}>0\ (b_1,b_2\neq0)$

Hai **vectơ cùng phương** 	▪ Nếu ít nhất một trong hai vectơ bằng $\vec{0}$ thì 2 vectơ cùng phương. ▪ Nếu cả 2 vectơ đều khác $\vec{0}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}: \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}: \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}\ (b_1, b_2 \neq 0)$
Tổng, hiệu vectơ	$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2)$
Số × Vectơ	$k\vec{a} = k(a_1; a_2) = (ka_1; ka_2)$
Tọa độ vectơ khi biết tọa độ gốc, ngọn	$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$
Trung điểm đoạn thẳng AB	$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$
Độ dài vectơ	$\vec{a} = (a_1; a_2) \Rightarrow \lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$
Độ dài đoạn thẳng	$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ $= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$
Tọa độ đầu mút	Đầu mút cần tìm = 2 × Trung điểm − Đầu mút còn lại 
Trọng tâm ΔABC	$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$
Vectơ bằng vectơ không	$\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 = 0$ $\Leftrightarrow$ Cả 2 thành phần tọa độ đều bằng 0
Vectơ khác vectơ không	$\vec{a} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 \neq 0 \\ a_2 \neq 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 \neq 0$ $\Leftrightarrow$ Ít nhất 1 thành phần tọa độ khác 0
Tâm tỷ cự của hệ điểm	▪ Nếu $k_1\overrightarrow{IA} + k_2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ $\Rightarrow x_I = \frac{k_1x_A + k_2x_B}{k_1 + k_2}$ (tương tự cho y_I) ▪ Nếu $k_1\overrightarrow{IA} + k_2\overrightarrow{IB} + k_3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ $\Rightarrow x_I = \frac{k_1x_A + k_2x_B + k_3x_C}{k_1 + k_2 + k_3}$ (tương tự cho y_I)
Chuẩn hóa vectơ đơn vị	Cho $\vec{a} = (a_1; a_2)$. Ký hiệu $\overrightarrow{a_{\lvert 1\rvert}}$ là vectơ cùng chiều với $\vec{a}$ và có độ dài bằng 1. Khi đó ta có: $\overrightarrow{a_{\lvert 1\rvert}} = \frac{1}{\lvert\vec{a}\rvert} \times \vec{a} = \left(\frac{a_1}{\lvert\vec{a}\rvert}; \frac{a_2}{\lvert\vec{a}\rvert}\right)$
Ba điểm thẳng hàng	A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow$ 2 vectơ tùy ý tạo ra từ 3 điểm A, B, C cùng phương $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{AC}$ (sử dụng các điều kiện cùng phương)
Biểu thức tọa độ tích vô hướng	Biết $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$ ta có: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$

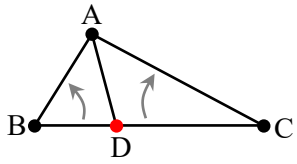
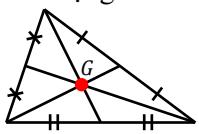
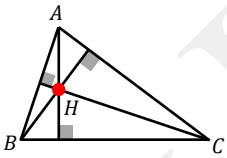
Cos góc xen giữa 2 vectơ	$\cos(\vec{a};\vec{b}) = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$
Điều kiện 2 vectơ vuông góc	$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$

86. Các loại tâm và điểm đặc biệt của tam giác

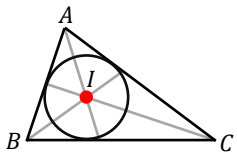
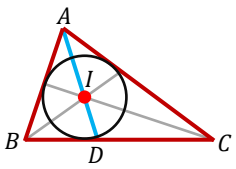
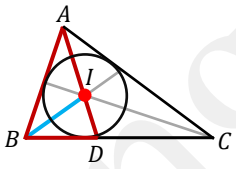
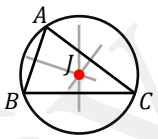
Công thức tính nhanh các loại tâm của tam giác

$$(\text{Tâm}) = \frac{\text{hệ số } 1 \times (A) + \text{hệ số } 2 \times (B) + \text{hệ số } 3 \times (C)}{\text{hệ số } 1 + \text{hệ số } 2 + \text{hệ số } 3}$$

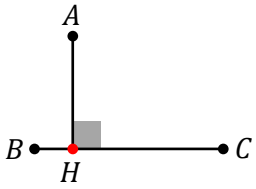
Trong đó: $(\text{Tâm}), (A), (B), (C)$ lần lượt là tọa độ của loại tâm cần tìm, đỉnh A, đỉnh B, đỉnh C của ΔABC (khi thay thì thay đồng thời toàn bộ hoành độ hoặc toàn bộ tung độ)

Chân đường phân giác trong 	Tính chất đường phân giác: $\dfrac{BD}{BA} = \dfrac{DC}{CA}$ $\Rightarrow BD = \dfrac{BA}{CA}DC \Rightarrow \overrightarrow{BD} = \dfrac{BA}{CA}\overrightarrow{DC}$
Trọng tâm 	$(G) = 1:1:1 = \dfrac{1(A) + 1(B) + 1(C)}{1 + 1 + 1}$
Trực tâm 	***Cách 1***: Công thức tính nhanh (nếu tam giác không đều và không vuông mới áp dụng công thức này, tam giác đều có trực tâm trùng với trọng tâm, tam giác vuông có trực tâm trùng với đỉnh góc vuông) $(H) = \tan(\hat{A}):\tan(\hat{B}):\tan(\hat{C})$ $= \dfrac{\tan(\hat{A}) \times (A) + \tan(\hat{B}) \times (B) + \tan(\hat{C}) \times (C)}{\tan(\hat{A}) + \tan(\hat{B}) + \tan(\hat{C})}$ ***Cách 2***: Khi chưa học phương trình đường thẳng. *Bước 1*: Gọi tọa độ H là $(x_H; y_H)$. *Bước 2*: Tìm tọa độ H dựa vào 2 điều kiện vuông góc: $\begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Giải hệ 2 ẩn tìm ra x_H và y_H, từ đó suy ra tọa độ H. ***Cách 3***: Khi đã học phương trình đường thẳng. *Bước 1*: Viết 2 phương trình đường cao tùy ý. Giả sử ta viết phương trình 2 đường thẳng là AH và BH. *Bước 2*: Tìm $H = AH \cap BH$ bằng cách lập hệ phương trình tạo bởi 2 đường thẳng này, từ đó suy ra tọa độ điểm H.

Thầy Lê Hùng Kiên

Tâm đường tròn nội tiếp  	***Cách 1***: Công thức tính nhanh (dùng khi tam giác không phải tam giác đều, nếu tam giác là tam giác đều thì tâm đường tròn nội tiếp trùng với trọng tâm) $(I) = a:b:c = \dfrac{a \times (A) + b \times (B) + c \times (C)}{a+b+c}$ ***Cách 2***: Khi chưa học phương trình đường thẳng *Bước 1*: Tìm tọa độ điểm D là chân đường phân giác trong góc A của ΔABC.  *Bước 2*: Tìm tọa độ điểm I là chân đường phân giác trong góc B của ΔABD.  ***Cách 3***: Khi đã học phương trình đường thẳng *Bước 1*: Viết phương trình 2 đường phân giác trong tùy ý của ΔABC. Đi đến: *Phương trình đường phân giác của 2 đường thẳng.* *Bước 2*: Tìm tâm đường tròn nội tiếp là giao của 2 đường phân giác trong ở Bước 1, bằng cách lập hệ phương trình từ 2 đường thẳng này.
Tâm đường tròn ngoại tiếp  	**Cách 1**: Công thức tính nhanh (dùng khi tam giác không vuông và không đều, tam giác vuông có tâm đường tròn ngoại tiếp là trung điểm cạnh huyền, tam giác đều có tâm đường tròn ngoại tiếp trùng với trọng tâm) $(J) = \sin(2\hat{A}):\sin(2\hat{B}):\sin(2\hat{C})$ $= \dfrac{\sin(2\hat{A}) \times (A) + \sin(2\hat{B}) \times (B) + \sin(2\hat{C}) \times (C)}{\sin(2\hat{A}) + \sin(2\hat{B}) + \sin(2\hat{C})}$ **Cách 2**: Khi chưa học phương trình đường thẳng *Bước 1*: gọi $J(x_J; y_J)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. *Bước 2*: tìm J dựa vào 2 điều kiện: $\begin{cases} JA = JB \\ JA = JC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} JA^2 = JB^2 \\ JA^2 = JC^2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn, tìm ra tọa độ điểm J. **Cách 3**: Khi đã học phương trình đường thẳng *Bước 1*: Viết phương trình 2 đường trung trực tùy ý của 2 cạnh của tam giác. *Bước 2*: Tìm tâm đường tròn ngoại tiếp bằng cách giải hệ phương trình tạo bởi 2 đường trung trực đã tìm được ở bước 1.

Thầy Lê Trung Kiên

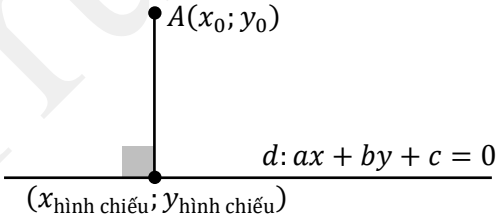
Hình chiếu vuông góc điểm lên đường thẳng  	Xác định hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng BC **Cách 1**: Khi chưa học phương trình đường thẳng *Bước 1*: Vì H ∈ BC ⇒ H, B, C thẳng hàng ⇒ $\overrightarrow{BH} = k\overrightarrow{BC}$ (1) (Mục tiêu là tìm k) *Bước 2*: Vì $AH \perp BC \Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ *(Chèn B và giữa $\overrightarrow{AH}$ để sử dụng được (1))* $\Rightarrow \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}\right) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ $\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ $\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + k\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ $\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + k \times BC^2 = 0$ (2) *(Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ và độ dài BC, thay vào (2) giải ra k)* *Bước 3*: Sau khi tính ra k thay vào (1) tìm ra H. **Cách 2**: Khi đã học phương trình đường thẳng *Bước 1*: Viết phương trình đường thẳng AH đi qua A và vuông góc với BC. *Bước 2*: Tìm $H = AH \cap BC$ bằng cách giải hệ phương trình tạo bởi 2 phương trình đường thẳng đã viết ở bước 1.

87. Công thức tính nhanh hình chiếu của một điểm lên một đường thẳng

Đường thẳng $d: ax + by + c = 0$ và điểm $A(x_0; y_0)$

$$x_{\text{hình chiếu}} = x_0 - \frac{a}{a^2 + b^2} \times (ax_0 + by_0 + c)$$

$$y_{\text{hình chiếu}} = y_0 - \frac{b}{a^2 + b^2} \times (ax_0 + by_0 + c)$$

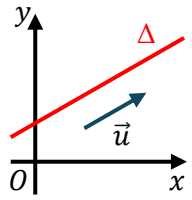


Thầy Lê Trung Kiên

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

88. Vectơ đặc trưng cho phương của đường thẳng

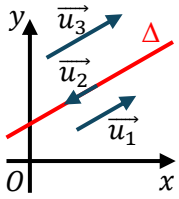
Vectơ chỉ phương (viết tắt vtcp) của đường thẳng



Vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ được gọi là **vectơ chỉ phương** của đường thẳng Δ nếu giá của nó song song hoặc trùng với Δ.

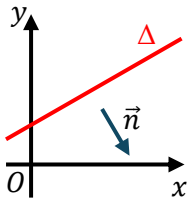
▪ Nếu $\vec{u} = (a; b)$ là một vtcp của Δ thì $k\vec{u} = (ka; kb)$ $(k \neq 0)$ cũng là một vtcp của Δ.

▪ Một đường thẳng hoàn toàn xác định nếu biết một điểm và một vtcp.



(Trên hình tất cả các vectơ $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$ đều là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ, như vậy *một đường thẳng có vô số vectơ chỉ phương.*)

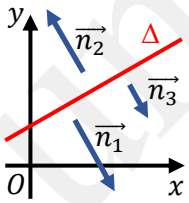
Vectơ pháp tuyến (viết tắt vtpt) của đường thẳng



Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ được gọi là **vectơ pháp tuyến** của đường thẳng Δ nếu giá của nó vuông góc với Δ.

▪ Nếu $\vec{n} = (a; b)$ là một vtpt của Δ thì $k\vec{n} = (ka; kb)$ $(k \neq 0)$ cũng là một vtpt của Δ.

▪ Một đường thẳng hoàn toàn xác định nếu biết một điểm và một vtpt.



(Trên hình tất cả các vectơ $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{n_3}$ đều là vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ, vậy một đường thẳng có vô số vectơ pháp tuyến.)

▪ Nếu $\vec{u}$ là một vtcp và $\vec{n}$ là một vtptcủa Δ thì $\vec{u} \perp \vec{n}$.

▪ Cách chuyển đổi giữa vectơ chỉ phương và vectơ pháp tuyến

Bước 1: Đổi vị trí hoành độ và tung độ.

Bước 2: Đổi dấu 1 trong 2 thành phần hoành độ hoặc tung độ.

89. Các dạng phương trình đường thẳng

Các loại phương trình đường thẳng
- Phương trình tham số
- Phương trình chính tắc
- Phương trình đoạn chắn
- Phương trình dạng hệ số góc
- Phương trình tổng quát

Thầy Lê Trung Kiên

a) Phương trình tham số và chính tắc

Đường thẳng Δ đi qua $M(x_0; y_0)$ và $\vec{u}_{\text{chỉ phương}} = (u_1; u_2)$

Phương trình tham số: $\Delta: \begin{cases} x = x_0 + t \cdot u_1 \\ y = y_0 + t \cdot u_2 \end{cases} \quad (t \in R)$

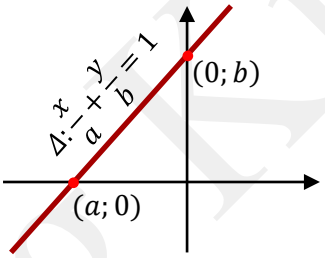
Phương trình chính tắc: $\dfrac{x - x_0}{u_1} = \dfrac{y - y_0}{u_2}$

Chú ý : Trong trường hợp $u_1 = 0$ hoặc $u_2 = 0$ thì đường thẳng không có phương trình chính tắc.

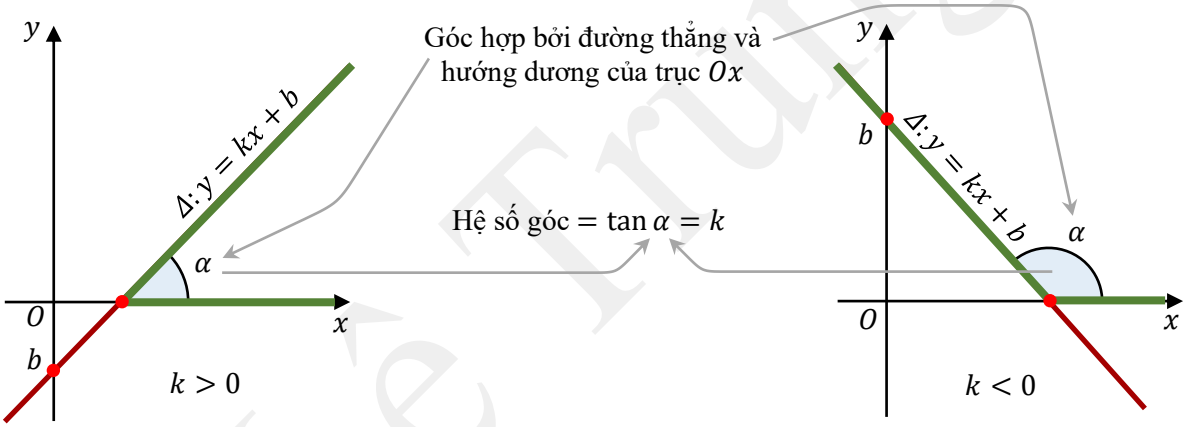
b) Phương trình đoạn chắn

Phương trình đường thẳng đi qua điểm $(a; 0), (0; b)$ $(a, b \neq 0)$ là:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



c) Phương trình dạng hệ số góc



Dạng 1: $(d)\ y = kx + b$

👉 k là hệ số góc của đường thẳng

👉 b là một số thuộc $\mathbb{R}$ (khi $x = 0$ thì $y = b \Rightarrow b$ là tung độ giao điểm của đường thẳng với trục Oy)

Dạng 2: $(d)\ y = k(x - x_0) + y_0$

👉 $M(x_0; y_0)$ là một điểm tùy ý thuộc đường thẳng

Lưu ý:

▪ Nếu đường thẳng d đi qua 2 điểm A và B thì hệ số góc k được tính theo công thức: $k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
▪ Tan(góc nhọn) > 0; Tan(góc tù) < 0
▪ Nếu biết hệ số góc của đường thẳng d là k thì để tìm góc hợp bởi đường thẳng và hướng dương của trục Ox ta tính: $\tan^{-1}(k)$ (hoặc $\arctan(k)$)
▪ Phương trình dạng hệ số góc không bao gồm các đường thẳng có dạng $x = C$ $(C \in \mathbb{R})$ (Các đường thẳng vuông góc với trục Ox). Chính vì thế cần cẩn thận thiếu đáp án nếu ta giả sử phương trình đường thẳng ở dạng hệ số góc.
▪ Mỗi đường thẳng nếu có phương trình dạng hệ số góc thì phương trình đó là duy nhất.

Tài Liệu Trung Kiên

▪ Mối quan hệ giữa hệ số góc và vectơ chỉ phương

Nếu k là hệ số góc của Δ thì: $k = \frac{u_2}{u_1}$, với $u_1 \neq 0, \vec{u}_{\text{chỉ phương}} = (u_1; u_2)$

d) Phương trình tổng quát

▪ Đường thẳng đi qua $M_0(x_0; y_0)$ và có $\vec{n}_{\text{pháp tuyến}} = (a; b)$ có phương trình tổng quát là:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

hoặc

$$ax + by - (ax_0 + by_0) = 0$$

▪ Phương trình $ax + by + c = 0$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$ được gọi là phương trình tổng quát của đường thẳng.

▪ Δ có phương trình $ax + by + c = 0$ thì:

$\vec{n}_{\text{pháp tuyến}} = (a; b)$

và $\vec{u}_{\text{chỉ phương}} = (-b; a)$ hoặc $\vec{u}_{\text{chỉ phương}} = (b; -a)$.

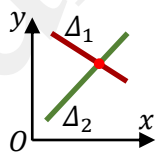
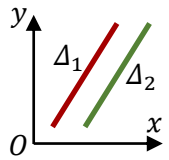
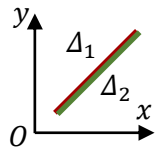
Các trường hợp đặc biệt:

Tính chất đường thẳng Δ	Điều kiện	Phương trình đường thẳng Δ
Δ đi qua gốc tọa độ	$c = 0$	$ax + by = 0$
$\Delta // Ox$ hoặc $\Delta \equiv Ox$	$a = 0$	$y + c = 0$
$\Delta // Oy$ hoặc $\Delta \equiv Oy$	$b = 0$	$x + c = 0$

90. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng $\Delta_1: a_1x + b_1y = c_1$ và $\Delta_2: a_2x + b_2y = c_2$

Tọa độ giao điểm của Δ_1 và Δ_2 là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ (1)

▪ Δ_1 cắt Δ_2 $\Leftrightarrow$ hệ (1) có một nghiệm $\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ (nếu $a_2, b_2 \neq 0$)	
▪ $\Delta_1 // \Delta_2$ $\Leftrightarrow$ hệ (1)vô nghiệm $\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ (nếu $a_2, b_2, c_2 \neq 0$)	
▪ $\Delta_1 \equiv \Delta_2$ $\Leftrightarrow$ hệ (1) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ (nếu $a_2, b_2, c_2 \neq 0$)	

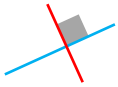
91. Hệ số góc đường thẳng song song, vuông góc, tạo góc

Cho hai đường thẳng $\Delta_1: y = k_1x + b_1 (k_1 \neq 0)$ và $\Delta_2: y = k_2x + b_2 (k_2 \neq 0)$

▪ $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$



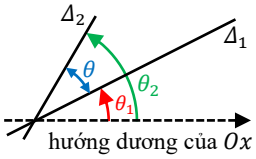
▪ $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow k_1 \times k_2 = -1$



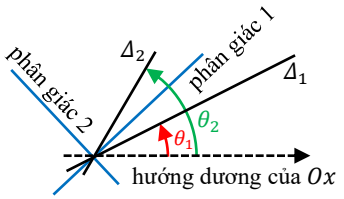
Thầy Lê Trung Kiên

▪ Gọi θ_1 là góc để xác định hệ số góc của Δ_1, θ_2 là góc để xác định hệ số góc của Δ_2,

Δ_1 tạo với Δ_2 một góc θ thì $\begin{cases} \theta_1 = \arctan(k_1) \\ \theta_2 = \arctan(k_2) \\ |\theta_1 - \theta_2| = \theta \\ \tan\theta = \left|\frac{k_1 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right| \end{cases}$



▪ Gọi d là đường thẳng phân giác của 2 đường thẳng Δ_1 và Δ_2, θ_d là góc để xác định hệ số góc của d thì:



$$\theta_d = \frac{\arctan(k_1) + \arctan(k_2)}{2} \text{ hoặc } \theta_d = \frac{\arctan(k_1) + \arctan(k_2)}{2} + \frac{\pi}{2}$$

92. Góc giữa hai đường thẳng

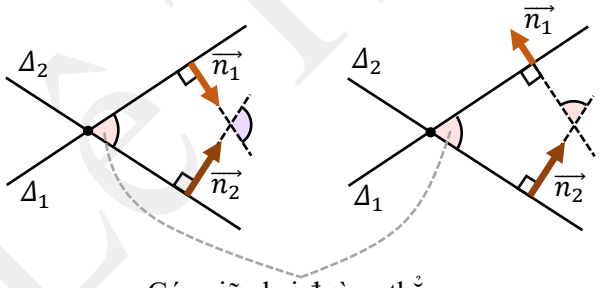
Cho hai đường thẳng:

$$\Delta_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ (có vtpt } \vec{n}_1 = (a_1; b_1))$$
$$\Delta_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0 \text{ (có vtpt } \vec{n}_2 = (a_2; b_2))$$

Góc giữa 2 đường thẳng $\left(\widehat{\Delta_1; \Delta_2}\right) = \begin{cases} (\overrightarrow{n_1}; \overrightarrow{n_2}) \text{ khi } (\overrightarrow{n_1}; \overrightarrow{n_2}) \le 90° \\ 180° - (\overrightarrow{n_1}; \overrightarrow{n_2}) \text{ khi } (\overrightarrow{n_1}; \overrightarrow{n_2}) > 90° \end{cases}$

$$\cos\left(\widehat{\Delta_1; \Delta_2}\right) = |\cos(\overrightarrow{n_1}; \overrightarrow{n_2})| = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

(Lưu ý: toàn bộ vectơ pháp tuyến ở trên có thể thay bằng vectơ chỉ phương thì các công thức cũng vẫn đúng)



Góc giữa hai đường thẳng

Lưu ý:

▪ $0° \le$ Góc giữa 2 vectơ $\le 180°$.

▪ $0° \le$ Góc giữa 2 đường thẳng $\le 90°$.

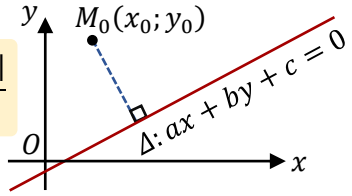
▪ Góc giữa hai vectơ pháp tuyến (hoặc hai vectơ chỉ phương) chưa chắc là góc giữa hai đường thẳng.

Thầy Lê Thống Kiên

93. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Cho đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$ và điểm $M_0(x_0; y_0)$

$$d(M_0; \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



94. Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song

$$\Delta_1: ax + by + c = 0; \Delta_2: ax + by + c' = 0$$

$$d(\Delta_1; \Delta_2) = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

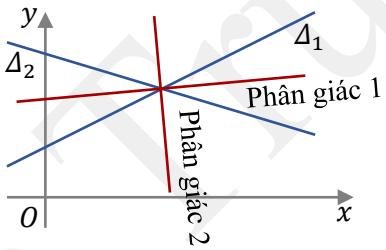
Lưu ý: phần nhân với x và y của 2 phương trình tổng quát phải giống nhau.

95. Phương trình phân giác 2 đường thẳng

Cho hai đường thẳng $\Delta_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ cắt nhau

Phương trình các đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 là

$$\frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$



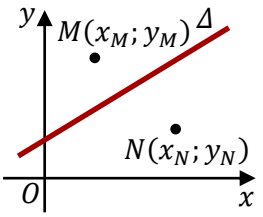
Lưu ý: Trong tam giác, để nhận biết phân giác nào là phân giác trong, phân giác nào là phân giác ngoài, ta thường sử dụng điều kiện cùng hoặc khác phía của hai điểm so với một đường thẳng.

96. Hai điểm cùng phía, khác phía so với 1 đường thẳng

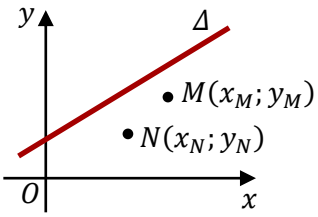
Cho đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$ và hai điểm $M(x_M; y_M); N(x_N; y_N) \notin \Delta$

M, N **nằm cùng phía** đối với $\Delta \Leftrightarrow (ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) > 0$

M, N **nằm khác phía** đối với $\Delta \Leftrightarrow (ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) < 0$



Hai điểm M và N nằm khác phía đối với Δ



Hai điểm M và N nằm cùng phía đối với Δ

Thầy Lê Trung Kiên

97. Viết nhanh phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm

Viết nhanh đường thẳng đi qua 2 điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$

Bước 1: Xét xem $x_A = x_B$ hay không? → Có → $AB: x = x_A$

Không

Bước 2: Xét xem $y_A = y_B$ hay không? → Có → $AB: y = y_A$

Không

Bước 3: Xét xem $\frac{y_A}{x_A} = \frac{y_B}{x_B}$ hay không? → Có → $AB: y = \frac{y_A}{x_A}x$

Không

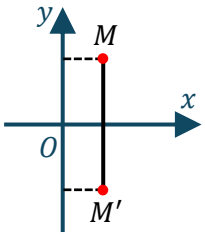
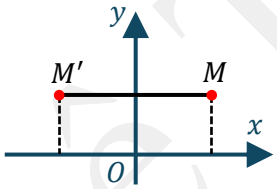
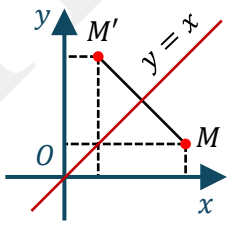
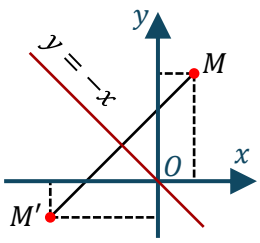
Bước 4: Phương trình AB có dạng $AB: ax + by + 1 = 0$.
Bấm hệ phương trình 2 ẩn a và b có các hệ số nhập vào máy tính dạng

$$\begin{matrix} x_A & y_A & -1 \\ x_B & y_B & -1 \end{matrix}$$

Hoặc $AB: \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$

98. Đối xứng điểm qua đường đặc biệt

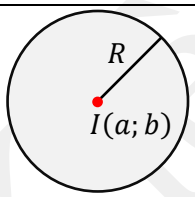
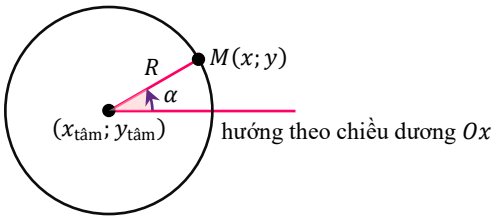
Cho điểm $M(x; y)$, và $M'(x'y')$ là điểm đối xứng của điểm M qua đường thẳng d

Nếu d là trục Ox, thì $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$	Nếu d là trục Oy thì $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$	Nếu d là đường thẳng $y = x$ thì $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$	Nếu d là đường thẳng $y = -x$ thì $\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$
			

Thầy Lê Trung Kiên

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

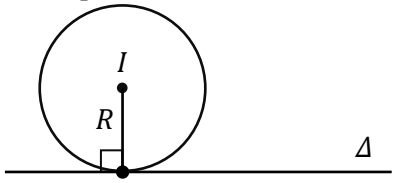
99. Các dạng phương trình đường tròn

<table>
<tr><td>Dạng chuẩn tắc</td><td>Đường tròn (C) tâm $I(a,b)$, bán kính R có phương trình là :
$(C)\colon (x-a)^2+(y-b)^2=R^2$
hay
$(C)\colon (x-x_{\text{tâm}})^2+(y-y_{\text{tâm}})^2=\text{Bán kính}^2$
  </td></tr>
<tr><td>Dạng khai triển</td><td>$x^2+y^2+ax+by+c=0$
Với tọa độ tâm $I\left(\dfrac{\text{hệ số trước } x}{-2};\dfrac{\text{hệ số trước } y}{-2}\right)$
và bán kính $R=\sqrt{x_{\text{tâm}}^2+y_{\text{tâm}}^2-\text{hệ số tự do}}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Điều kiện để phương trình $x^2+y^2+ax+by+c=0$ là phương trình của một đường tròn là:
$\left(\dfrac{a}{-2}\right)^2+\left(\dfrac{b}{-2}\right)^2-c>0$
hay
$\Leftrightarrow \underbrace{\left(\dfrac{\text{hệ số trước } x}{-2}\right)^2+\left(\dfrac{\text{hệ số trước } y}{-2}\right)^2-\text{hệ số tự do}}_{\text{Chính là biểu thức dưới dấu căn khi tính } R}>0$</td></tr>
<tr><td>Dạng tham số</td><td>Cho đường tròn (C) có tâm $(x_{\text{tâm}};y_{\text{tâm}})$ có bán kính R. Phương trình tham số của đường tròn là:
$\begin{cases}x=x_{\text{tâm}}+R\cos\alpha\\ y=y_{\text{tâm}}+R\sin\alpha\end{cases}$
Với α là góc lượng giác với tia gốc có đỉnh là tâm của đường tròn và hướng theo chiều dương của Ox.
  </td></tr>
</table>

Thầy Lê Trung Kiên

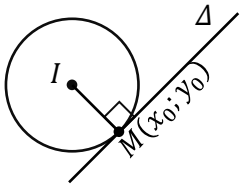
100. Tiếp tuyến đường tròn

Cho đường tròn (C) có tâm I, bán kính R và đường thẳng Δ.
Δ là **tiếp tuyến của đường tròn** $(C) \Leftrightarrow \Delta$ tiếp xúc với $(C) \Leftrightarrow d(I,\Delta) = R$



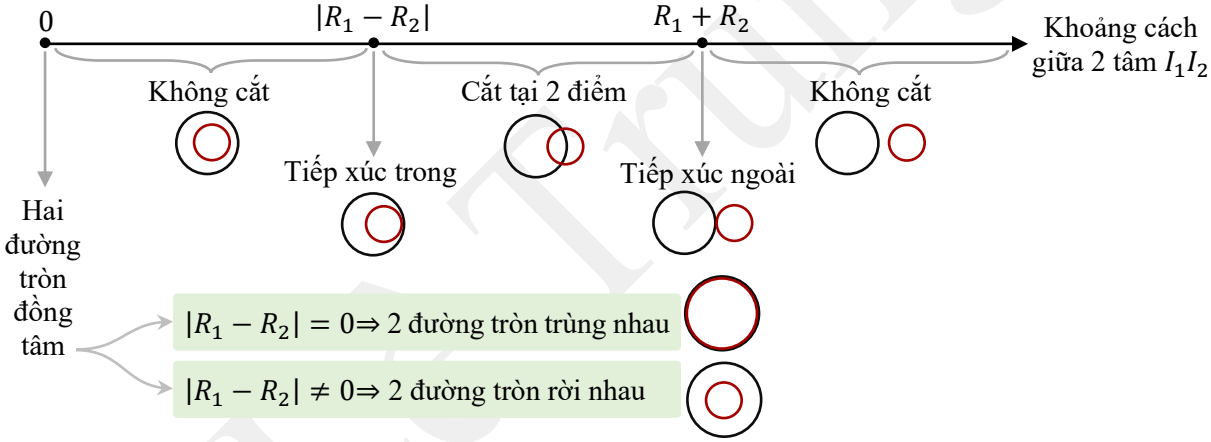
Phương trình tiếp tuyến tại tiếp điểm $M(x_0;y_0)$

$$\Delta: (x - x_{\text{tâm}})(x_0 - x_{\text{tâm}}) + (y - y_{\text{tâm}})(y_0 - y_{\text{tâm}}) = R^2$$



101. Vị trí tương đối của hai đường tròn

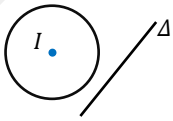
Với I_1, I_2 là tâm của hai đường tròn, R_1, R_2 lần lượt là bán kính của 2 đường tròn.



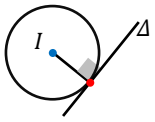
102. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

Cho đường thẳng Δ và đường tròn (C) có tâm I và bán kính R.

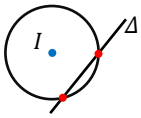
- Δ không cắt $(C) \Leftrightarrow d_{(I;\Delta)} > R$



- Δ cắt (C) tại 1 điểm (hoặc Δ tiếp xúc với $(C) \Leftrightarrow d_{(I;\Delta)} = R$



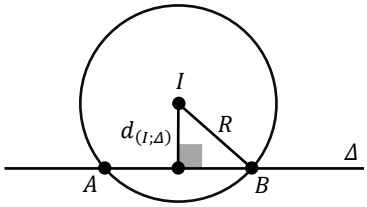
- Δ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow d_{(I;\Delta)} < R$



Thầy Lê Trung Kiên

Lưu ý: Khi Δ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A và B thì ta có:

$$d_{(I;\Delta)}^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = R^2$$



103. Phương trình đường tròn đi qua 3 điểm

Phương trình đường tròn đi qua 3 điểm $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$, $C(x_C;y_C)$ có dạng $x^2+y^2+ax+by+c=0$
Tìm a,b,c bằng cách bấm vào máy tính hệ phương trình bậc nhất 3 ẩn có các hệ số như sau:

$$\begin{matrix} x_A & y_A & 1 & -x_A^2-y_A^2 \\ x_B & y_B & 1 & -x_B^2-y_B^2 \\ x_C & y_C & 1 & -x_C^2-y_C^2 \end{matrix}$$

Thầy Lê Trung Kiên

ELIP

104. Định nghĩa

Cho F_1, F_2 cố định với $F_1F_2 = 2c$ $(c > 0)$

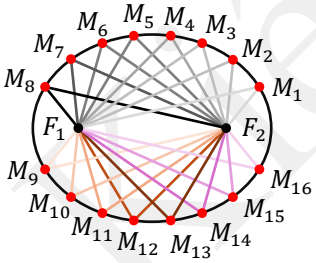
$$M \in \text{Elip} \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 2a \ \ (a > c)$$

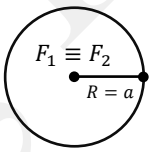
F_1, F_2 là hai **tiêu điểm**, $F_1F_2 = 2c$ gọi là **tiêu cự**.

Đường thẳng F_1F_2 gọi là **tiêu trục**.

Như vậy elip là tập hợp những điểm sao cho tổng khoảng cách từ điểm đó đến 2 điểm cố định bằng 1 hằng số. Trên hình ta có:

$$M_1F_1 + M_1F_2 = M_2F_1 + M_2F_2 = \cdots = M_{16}F_1 + M_{16}F_2 = 2a = \text{Hằng số}$$





Lưu ý:

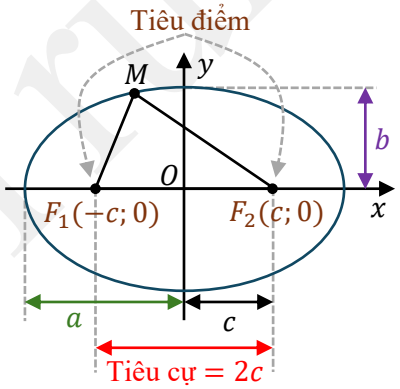
Đường tròn là trường hợp đặc biệt của đường elip khi 2 tiêu điểm trùng nhau.

Nếu $F_1 \equiv F_2$ thì Elip trở thành đường tròn tâm F_1 bán kính $R = a$.

105. Phương trình chính tắc

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

$$(a > b > 0, b^2 = a^2 - c^2)$$



Nếu điểm $M(x;y) \in (E)$ thì: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} \le 1 \\ \dfrac{y^2}{b^2} \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| \le a \\ |y| \le b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a \le x \le a \\ -b \le x \le b \end{cases}$

106. Phương trình tham số

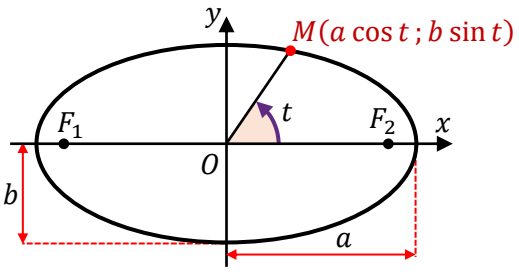
Cho Elip (E): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Phương trình tham số của elip là: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

Trong đó: t là tham số dạng góc.

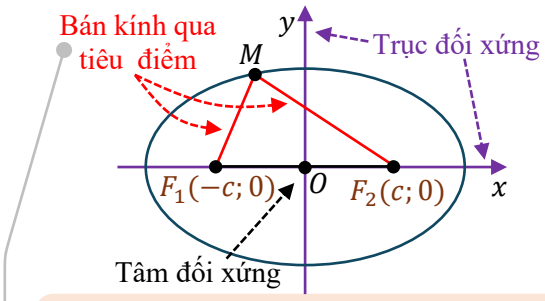
– Nếu t đo bằng độ thì t: $0° \to 360°$.

– Nếu t đo bằng radian thì t: $0 \to 2\pi$.



Thầy Lê Trung Kiên

107. Đặc điểm hình học



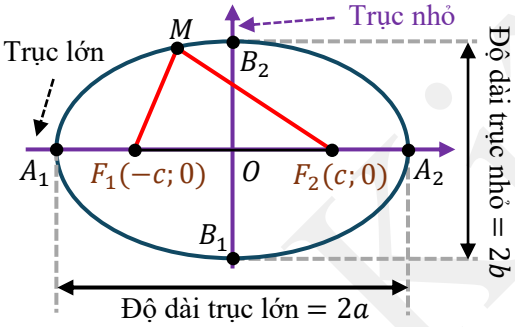
😍 Tọa độ các **tiêu điểm** $F_1(-c\,;0)\,;F_2(c\,;0)$.

😚 Với $M(x\,;y)\in(E), MF_1, MF_2$ được gọi là các **bán kính qua tiêu điểm** của M :

$$MF_1=a+\frac{c}{a}x, MF_2=a-\frac{c}{a}x$$

🤗 (E) nhận các trục tọa độ làm các trục đối xứng và gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

Độ dài các trục : ***trục lớn*** $A_1A_2=2a$, ***trục nhỏ*** : $B_1B_2=2b$



😚 **Tâm sai** (E) : $e=\frac{c}{a}$ $(0<e<1)$

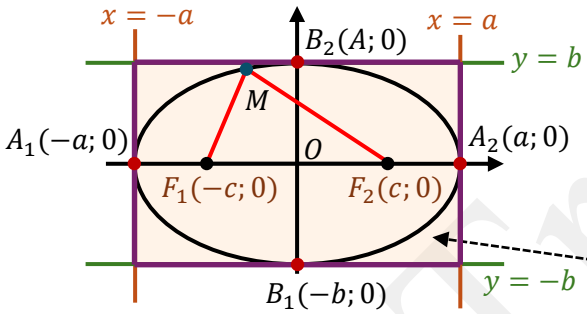
😝 **Hình chữ nhật cơ sở** tạo bởi các đường thẳng

$x=\pm a\,;y=\pm b$ (ngoại tiếp elip)

😳 Tọa độ các **đỉnh**: $A_1(-a\,;0)$; $A_2(a\,;0)$; $;B_1(0\,;-b)$; $B_2(0\,;b)$.

😘 Diện tích hình chữ nhật cơ sở

$$S=4ab$$



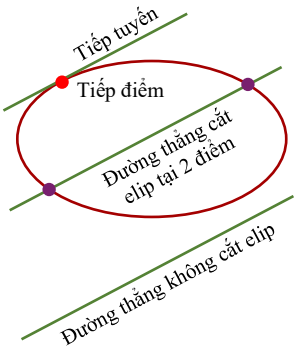
Hình chữ nhật cơ sở

Tâm sai e đặc trưng cho độ dẹt của hình elip , e chạy từ 0 (trường hợp của đường tròn) đến 1 (trường hợp elip suy biến thành đoạn thẳng)



Thầy Đặng Việt Hùng

108. Vị trí tương đối với đường thẳng



Cho đường thẳng $d: Ax + By + C = 0$ và elip $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Giao điểm của đường thẳng và elip là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

Rút x theo y (hoặc y theo x) thay vào phương trình còn lại

$\Rightarrow$ Một phương trình bậc 2 theo x (hoặc theo y) (1)

- (d) không cắt $(E) \Leftrightarrow$ (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta_{\text{pt bậc 2}} < 0$
- (d) tiếp xúc với $(E) \Leftrightarrow$ (1) có 1 nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta_{\text{pt bậc 2}} = 0$
- (d) cắt (E) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta_{\text{pt bậc 2}} > 0$

Phương trình tiếp tuyến Elip khi biết tiếp điểm $M(x_0; y_0)$ là:

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$$

Đường thẳng $(d): Ax + By + C = 0$ tiếp xúc với Elip

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow C^2 = A^2a^2 + B^2b^2$$

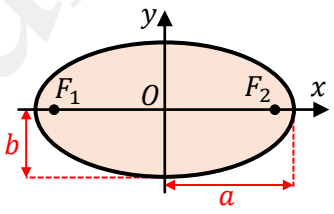
109. Diện tích

Diện tích của Elip có độ dài các bán trục lần lượt là a và b là :

$$S_{\text{elip}} = \pi ab$$

Khi Elip bị suy biến thành đường tròn thì $a = b$ suy ra :

$$S_{\text{elip}} = \pi aa = \pi a^2 = S_{\text{hình tròn}}$$

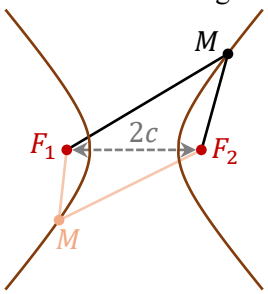


Thầy Lê Trung Kiên

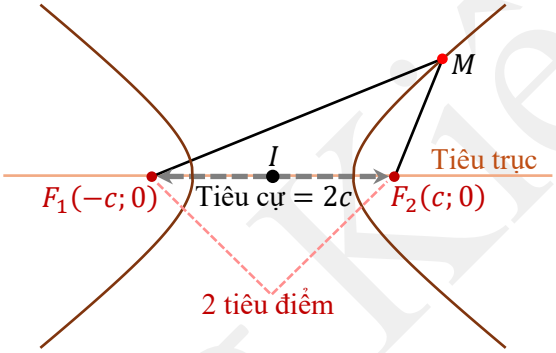
HYPERBOL

110. Định nghĩa

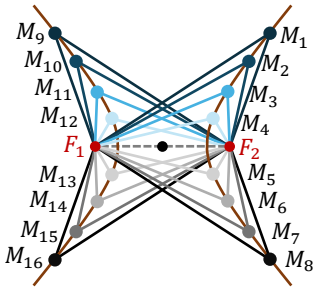
Cho trước 2 điểm phân biệt F_1 và F_2 sao cho $F_1F_2 = 2c$. Hyperbol (H) là tập hợp những điểm sao cho giá trị tuyệt đối của hiệu các khoảng cách tới 2 điểm F_1 và F_2 bằng một số không đổi $2a$, $2a$ nhỏ hơn khoảng cách F_1F_2.



Vậy $M \in$ Hyperbol $\Leftrightarrow |MF_1 - MF_2| = 2a < 2c$.



2 điểm cố định F_1, F_2 gọi là 2 **tiêu điểm**.
Khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ được gọi là **tiêu cự**.
Đường thẳng F_1F_2 gọi là **tiêu trục**.
Trung điểm I của F_1F_2 là **tâm của Hyperbol**.



Trên hình vẽ ta có:

$$|M_1F_1 - M_1F_2| = \cdots = |M_8F_1 - M_8F_2| = |M_9F_1 - M_9F_2| = \cdots = |M_{16}F_1 - M_{16}F_2| = 2a = \text{Hằng số}$$

Trong đó các điểm ở nhánh phải thỏa:

$M_1F_1 - M_1F_2 = \cdots = M_8F_1 - M_8F_2 = 2a$ (vì ở nhánh này $MF_1 > MF_2$)

Các điểm ở nhánh trái thỏa:

$M_9F_1 - M_9F_2 = \cdots = M_{16}F_1 - M_{16}F_2 = -2a$ (vì ở nhánh này $MF_1 < MF_2$)

111. Phương trình chính tắc

Trong mặt phẳng Oxy có các tiêu điểm $F_1(-c; 0)$ và $F_2(c; 0)$, và hyperbol là tập hợp các điểm M sao cho $|MF_1 - MF_2| = 2a$ thì phương trình của hyperbol là:

$$(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (Với } b^2 = c^2 - a^2)$$

Điểm $M(x; y) \in (H)$ luôn có:

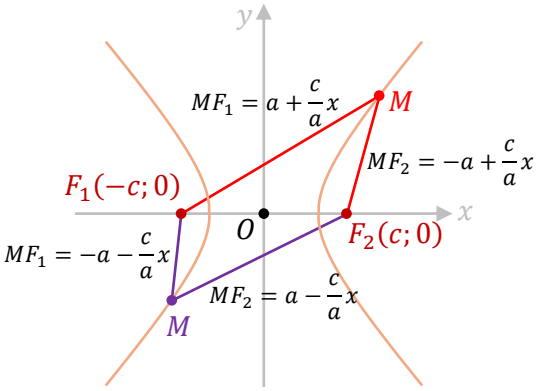
$$MF_1 = a + \frac{c}{a}x; MF_2 = -a + \frac{c}{a}x \text{ (nếu } x > 0)$$

$$MF_1 = -a - \frac{c}{a}x; MF_2 = a - \frac{c}{a}x \text{ (nếu } x < 0)$$

Hoặc công thức chung là:

$$MF_1 = \left|a + \frac{c}{a}x\right|; MF_2 = \left|a - \frac{c}{a}x\right|$$

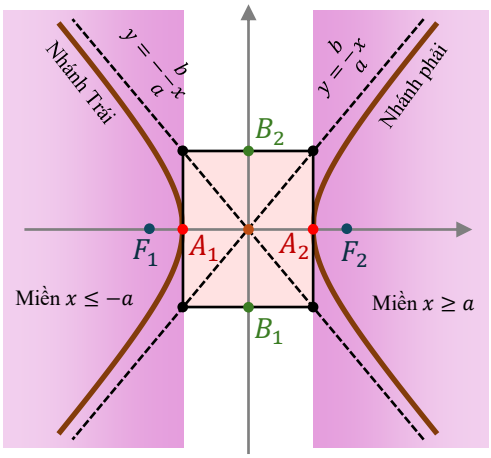
Tâm sai: $e = \frac{c}{a}$ $(e > 1)$



Thầy Lê Trung Kiên

112. Đặc điểm hình học

$$(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



▪ Nhận các trục tọa độ làm **trục đối xứng**; nhận gốc tọa độ làm **tâm đối xứng**.

▪ $(H) \cap Ox = A_1$ và A_2 có tọa độ là $A_1(-a;0)$; $A_2(a;0)$ được gọi là **đỉnh** của (H), đoạn thẳng A_1A_2 gọi là **trục thực** và $A_1A_2 = 2a$ được gọi là **độ dài trục thực**.

▪ (H) không cắt Oy. Đặt $B_1(-b;0)$; $B_2(0;b)$ và đoạn thẳng B_1B_2 được gọi là **trục ảo**, $B_1B_2 = 2b$ được gọi là **độ dài trục ảo**.

▪ Vậy trục thực của Hyperbol là trục đối xứng cắt Hyperbol, trục ảo là trục đối xứng không cắt Hyperbol.

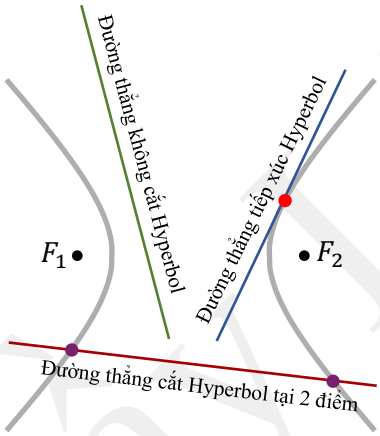
▪ $M \in$ Hyperbol $\Rightarrow x_M \le -a$ hoặc $x_M \ge a$.

Lưu ý: ▪ Tiêu điểm của Hyperbol luôn ở trên trục thực.

▪ Tập con của (H) chứa những điểm $M(x;y)$ thỏa mãn $x \ge a$ gọi là **nhánh bên phải** của Hyperbol.
Tập con của (H) chứa những điểm $M(x;y)$ thỏa mãn $x \le -a$ gọi là **nhánh bên trái** của Hyperbol.
Như vậy Hyperbol (H) là tập hợp của 2 tập hợp con không giao nhau.
Hai nhánh này đối xứng nhau qua trục ảo và cả 2 đều nhận trục thực làm trục đối xứng.

▪ Đồ thị (H) nhận 2 đường thẳng $y = \frac{b}{a}x$ và $y = -\frac{b}{a}x$ làm 2 đường tiệm cận.

113. Vị trí tương đối với đường thẳng



Cho đường thẳng $d: Ax + By + C = 0$ và hyperbol $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Giao điểm của đường thẳng và hyperbol là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

Rút x theo y (hoặc y theo x) thay vào phương trình còn lại

$\Rightarrow$ Một phương trình bậc 2 theo x (hoặc theo y) (1)

▪ (d) không cắt $(H) \Leftrightarrow$ (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta_{\text{pt bậc 2}} < 0$

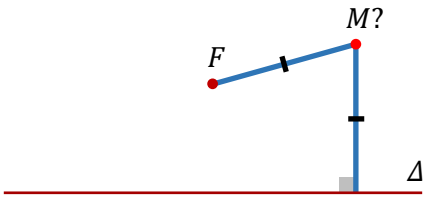
▪ (d) tiếp xúc với $(H) \Leftrightarrow$ (1) có 1 nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta_{\text{pt bậc 2}} = 0$

▪ (d) cắt (H) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta_{\text{pt bậc 2}} > 0$

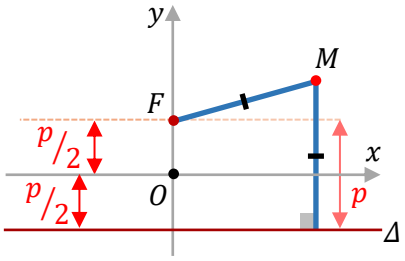
Thầy Lê Trung Kiên

PARABOL

114. Định nghĩa



Cho điểm F và đường thẳng Δ. Tập hợp các điểm M thỏa mãn khoảng cách từ điểm đó tới F bằng khoảng cách từ điểm đó tới đường thẳng Δ là gì?



Ta lập luận như sau: Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ:

Khi đó tọa độ $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$ và phương trình đường thẳng $\Delta: y=-\frac{p}{2}$

$\Rightarrow \Delta: y+\frac{p}{2}=0.$

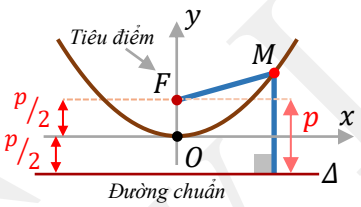
$$MF=\sqrt{(x_M-0)^2+\left(y_M-\frac{p}{2}\right)^2}=\sqrt{x_M^2+\left(y_M-\frac{p}{2}\right)^2}$$

$$d_{(M;\Delta)}=\frac{\left|y_M+\frac{p}{2}\right|}{\sqrt{1^2+0^2}}=\left|y_M+\frac{p}{2}\right|$$

$$MF=d_{(M;\Delta)} \xrightarrow{\text{Thay thế các độ dài}} \sqrt{x_M^2+\left(y_M-\frac{p}{2}\right)^2}=\left|y_M+\frac{p}{2}\right| \xrightarrow{\text{Bình phương 2 vế}} x_M^2+\left(y_M-\frac{p}{2}\right)^2=\left(y_M+\frac{p}{2}\right)^2$$

$$\xrightarrow{\text{Khai triển các hằng đẳng thức}} x_M^2+y_M^2-y_Mp+\frac{p^2}{4}=y_M^2+y_Mp+\frac{p^2}{4} \xrightarrow{\text{Thu gọn tối đa 2 vế}} x_M^2=2py_M$$

115. Đặc điểm hình học

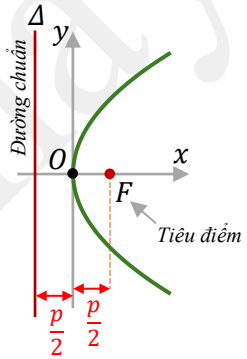


Vậy M thuộc đường cong có dạng $x^2=2py$, đây chính là một phương trình parabol có dạng:

$$y=\frac{1}{2p}x^2$$

Parabol này đi qua gốc tọa độ O và có chiều hướng lên trên như hình vẽ (vì $\frac{1}{2p}>0$).

F gọi là **tiêu điểm** và Δ gọi là **đường chuẩn** của Parabol.



Nếu ta chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ thì phương trình Parabol có dạng:

$$x=\frac{1}{2p}y^2$$

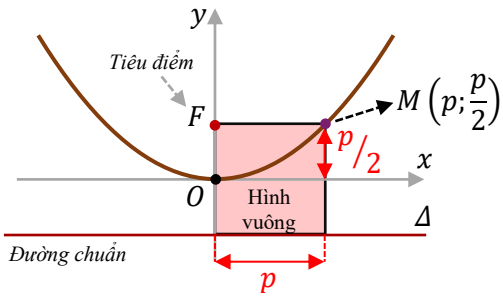
Vậy cho một điểm F và một đường thẳng Δ cố định không đi qua F. Tập hợp các điểm M cách đều F và Δ là một Parabol.

Chú ý: Trong hình vẽ này:

- O gọi là đỉnh của parabol (P).
- Ox gọi là trục đối xứng của parabol (P).
- p gọi là tham số tiêu của parabol (P).

Thầy Lê Trung Kiên

116. Làm gì nếu quên công thức?



Làm gì nếu quên công thức?

Ta có thể suy luận như sau:

Nếu đường chuẩn nằm ngang. Ta chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó phương trình parabol có dạng: $y = kx^2$.

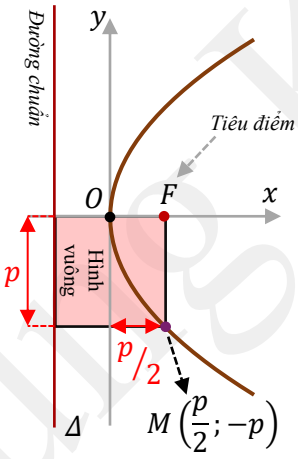
Ta có một điểm M của hình vuông tạo bởi F và Δ (xem hình vẽ) thuộc vào parabol. Mà tọa độ M là $M\left(p;\frac{p}{2}\right)$ nên suy ra:

$$\Rightarrow \frac{p}{2} = kp^2 \Rightarrow k = \frac{1}{2p} \Rightarrow (P): y = \frac{1}{2p}x^2$$

Nếu đường chuẩn thẳng đứng. Ta chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó phương trình parabol có dạng: $x = ky^2$.

Ta có một điểm M của hình vuông tạo bởi F và Δ (xem hình vẽ) thuộc vào parabol. Mà tọa độ M là $M\left(\frac{p}{2};-p\right)$ nên suy ra:

$$\Rightarrow \frac{p}{2} = k(-p)^2 \Rightarrow k = \frac{1}{2p} \Rightarrow (P): x = \frac{1}{2p}y^2$$



117. Đường chuẩn và tiêu điểm của y = ax² + bx + c

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - x_{\text{đỉnh}})^2 + y_{\text{đỉnh}}$$

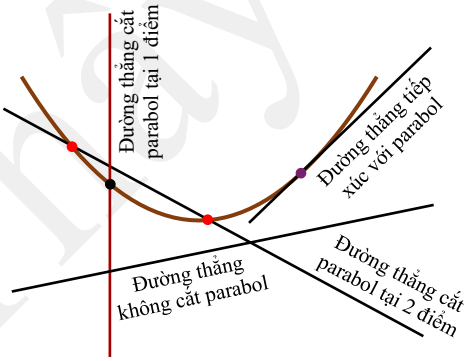
$$\Rightarrow y - y_{\text{đỉnh}} = a(x - x_{\text{đỉnh}})^2$$

$$\Rightarrow Y = aX^2 \ (\text{Với } \begin{cases} Y = y - y_{\text{đỉnh}} \\ X = x - x_{\text{đỉnh}} \end{cases})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2p} = |a| \Rightarrow p = \frac{1}{2|a|}$$

- Nếu $a > 0$ thì tiêu điểm $F\left(x_{\text{đỉnh}}; y_{\text{đỉnh}} + \frac{p}{2}\right)$ đường chuẩn $\Delta: y = y_{\text{đỉnh}} - \frac{p}{2}$.
- Nếu $a < 0$ thì tiêu điểm $F\left(x_{\text{đỉnh}}; y_{\text{đỉnh}} - \frac{p}{2}\right)$ đường chuẩn $\Delta: y = y_{\text{đỉnh}} + \frac{p}{2}$.

118. Vị trí tương đối với đường thẳng



Cho đường thẳng $d: Ax + By + C = 0$ và parabol (P)

Giao điểm của đường thẳng và (P) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ \text{Phương trình } (P) \end{cases}$$ Rút x theo y (hoặc y theo x) thay vào phương trình còn lại

$\Rightarrow$ Một phương trình bậc 2 theo x (hoặc theo y) (1)

- (d) không cắt $(P) \Leftrightarrow$ (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta_{\text{pt bậc 2}} < 0$
- (d) tiếp xúc với $(P) \Leftrightarrow$ (1) có 1 nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta_{\text{pt bậc 2}} = 0$
- (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta_{\text{pt bậc 2}} > 0$

Thầy Lê Trung Kiên

XÁC SUẤT (LỚP 10 & 11)

119. Phép thử và không gian mẫu

a) Phép thử ngẫu nhiên

▪ Một thí nghiệm, phép đo hay một sự quan sát hiện tượng nào đó,… được hiểu là một phép thử.
▪ Một phép thử có thể là phép thử ngẫu nhiên hoặc là phép thử không ngẫu nhiên.
Phép thử không ngẫu nhiên thì ta biết chắc kết quả là gì trong mỗi lần thử. Ví dụ cho Axit + Bazơ → muối + nước. Vì biết trước kết quả của phép thử không ngẫu nhiên, thế nên người ta chỉ nghiên cứu các tính chất vật lý hoặc hóa học, định lượng, hoặc một kía cạnh nào đó của phép thử không ngẫu nhiên.
▪ Phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là phép thử) là một thí nghiệm hay một hành động mà :
– Kết quả của nó không dự đoán trước được trong mỗi lần thử.
– Có thể xác định được tập hợp tất cả các kết quả có thể có của nó.
Vì không thể đoán trước kết quả của phép thử ngẫu nhiên trong mỗi lần thử (mặc dù ta biết tập hợp tất cả các kết quả có thể có của lần thử đó) thế nên người ta nghiên cứu về khả năng xảy ra một kết quả nào đó là nhiều hay ít.
▪Phép thử thường được kí hiệu bởi chữ T.
Để đơn giản, từ nay phép thử ngẫu nhiên được gọi tắt là phép thử. Trong chương trình THPT ta chỉ xét các phép thử có một số hữu hạn kết quả.

b) Không gian mẫu

▪ Tập hợp tất cả các kết quả có thể của phép thử được gọi là không gian mẫu của phép thử và được kí hiệu bởi chữ Ω.
▪ Để chỉ số phần tử của không gian mẫu ta dùng kí hiệu $n(\Omega)$ hoặc $|\Omega|$.

120. Biến cố và các loại biến cố

a) Biến cố là gì?

Biến cố A, hay còn gọi là sự kiện A, liên quan tới phép thử T, là biến cố mà việc xảy ra hay không xảy ra của nó tuỳ thuộc vào kết quả của phép thử T.
Mỗi kết quả của phép thử T làm cho biến cố A xảy ra được gọi là một kết quả thuận lợi cho A.

b) Tập hợp các kết quả thuận lợi cho biến cố

Tập hợp các kết quả thuận lợi cho biến cố A được kí hiệu bởi Ω_A. Để đơn giản, ta có thể dùng chính chữ A để kí hiệu tập hợp các kết quả thuận lợi cho A.
Để chỉ số phần tử thuận lợi cho A ta dùng kí hiệu $n(\mathrm{A})$ hoặc $|\Omega_\mathrm{A}|$ hoặc $|A|$.
Khi đó ta cũng nói biến cố A được mô tả bởi tập A.

c) Biến cố chắc chắn

Là biến cố **luôn luôn xảy ra** khi thực hiện phép thử T.
Biến cố chắc chắn được mô tả bởi tập Ω và được kí hiệu là Ω.

d) Biến cố không thể

Là biến cố **không bao giờ xảy ra** khi thực hiên phép thử T.
Biến cố không thể được mô tả bởi tập ∅ và được kí hiệu là ∅.

Thầy Lê Trung Kiên

e) Biến cố xung khắc

Hai biến cố A và B được gọi là xung khắc với nhau nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra (Hay hai biến cố này không được xảy ra đồng thời).

f) Biến cố đối

Cho A là một biến cố. Khi đó biến cố "Không xảy ra A" được gọi là biến cố đối của A. Biến cố đối của A kí hiệu là $\bar{A}$.

g) Hai biến cố độc lập

Hai biến cố A và B được gọi là độc lập với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia.

h) Biến cố hợp

Cho hai biến cố A và B. Biến cố "A hoặc B xảy ra", kí hiệu $A \cup B$, được gọi là hợp của hai biến cố A và B.

Một cách tổng quát, cho k biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Biến cố : "Có ít nhất một trong các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_k$ xảy ra", kí hiệu là $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$, được gọi là hợp của k biến cố đó.

i) Biến cố giao

Cho hai biến cố A và B. Biến cố "Cả A và B đều xảy ra" kí hiệu là AB hoặc $A \cap B$ được gọi là giao của hai biến cố A và B.

Một cách tổng quát, cho k biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Biến cố : "Tất cả k biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_k$ đều xảy ra", kí hiệu là $A_1 A_2 \ldots A_k$ hoặc $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k$, được gọi là giao của k biến cố đó.

121. Định nghĩa cổ điển của xác xuất

Xác suất của biến cố A : $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$

Trong đó : $n(A)$ là số kết quả thuận lợi cho A, $n(\Omega)$ số phần tử của không gian mẫu.

Tính chất : $0 \le P(A) \le 1$; $P(\Omega) = 1$; $P(\emptyset) = 0$.

Qui tắc cộng : Nếu $A \cap B = \emptyset$ thì $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Qui tắc cộng mở rộng :

Với 2 biến cố A, B bất kì : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Với 3 biến cố A, B, C bất kì : $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$

Xác suất của biến cố đối : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Qui tắc nhân : Nếu A, B độc lập thì $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

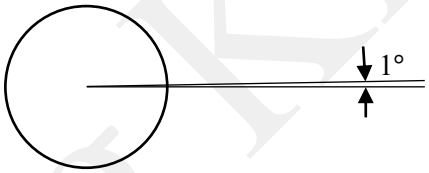
LƯỢNG GIÁC

122. Hai đơn vị đo góc cơ bản

Có 2 đơn vị đo góc cơ bản là Độ (Degree) (ký hiệu ° hoặc deg) và Radian (ký hiệu ^{r} hoặc rad), 2 đơn vị này chỉ khác nhau về cách xác định 1 đơn vị góc của chúng. Độ thường được dùng trong đo đạc các góc thực tế, góc trong xây dựng, kiến trúc,… Radian thường được dùng trong các bài toán lý thuyết, nghiên cứu khoa học.

a) Độ

Cách xác định 1 độ: Chia 1 vòng tròn thành 360 phần, khi đó 1 phần nhỏ riêng lẻ nhận được sẽ có số đo là 1°.



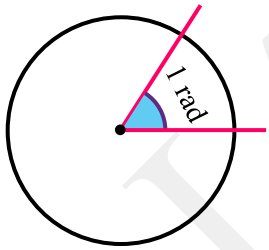
Chú ý: Để xác định các lượng góc nhỏ hơn 1° người ta còn sử dụng **phút** (kí hiệu ') và **giây** (kí hiệu '') với quy ước:

1 độ = 60 phút *hay viết dưới dạng ký hiệu* $\mathbf{1° = 60'}$ *tức là* $\mathbf{1'} = \left(\frac{1}{60}\right)°$

1 phút = 60 giây *hay viết dưới dạng ký hiệu* $\mathbf{1' = 60''}$ *tức là* $\mathbf{1''} = \left(\frac{1}{60}\right)' = \left(\frac{1}{3600}\right)°$

b) Radian

1 rad được xác định bằng cách chia 1 vòng tròn thành 2π phần (khoảng 6,3 phần), sau đó lấy 1 phần riêng lẻ ta nhận được 1 rad.



Vậy 1 vòng tròn được chia thành 2π phần thì được 1 rad $\Rightarrow$ 1 vòng tròn không đem chia ra thì sẽ có số đo đúng bằng 2π rad.

$$\frac{1 \text{ vòng tròn}}{2\pi} = 1 \text{ radian}$$

$$\Rightarrow 1 \text{ vòng tròn} = 2\pi \times 1 \text{ radian} = 2\pi \text{ radian}$$

Mà 1 vòng tròn = 360°

$\Rightarrow$ 360° = 1 vòng tròn = 2π radian

$\Rightarrow$ 360° = 2π radian

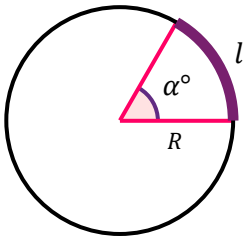
hay có thể viết đơn giản là 180° = π radian

Khi ghi số đo của một góc theo radian, người ta thường bỏ đi chữ rad sau số đo.

Ví dụ, 2π rad được viết là 2π, 2 rad được viết là 2.

Thầy Lê Trung Kiên

Mục đích chính của đơn vị radian là làm đơn giản hóa các công thức toán học có sử dụng đơn vị đo góc. Lấy một ví dụ công thức quen thuộc như sau, ta đã biết :



l = Độ dài cung = $\underbrace{\frac{2\pi R}{360}}_{\text{Độ dài cung } 1^\circ}$ × Số đo góc ở tâm bằng độ

hay viết dưới dạng ký hiệu:

$$l = \frac{2\pi R}{360} \times \alpha \Rightarrow l = \frac{\pi}{180} \times R\alpha \ (1)$$

Như vậy, mỗi lần muốn tính độ dài cung l với số đo góc ở tâm $\alpha°$ ta phải nhân thêm một hằng số khá cồng kềnh là $\frac{\pi}{180}$.

Mà đơn vị đo góc là tùy ý do con người thiết lập (tương tự như đơn vị đo độ dài, người ta có thể dùng mét, kilomét, dặm, hải lý, năm ánh sáng ,…, đơn vị đo góc cũng có thể có nhiều, tùy vào cách xác định đơn vị đó của con người). Từ đó người ta đặt câu hỏi: *Nên thiết lập đơn vị đo góc như thế nào để công thức liên hệ giữa độ dài cung và số đo góc ở tâm đẹp nhất*?

Người ta suy luận như sau:

Độ dài cung l phụ thuộc vào góc ở tâm đo bằng độ là: $l = \frac{\pi}{180} \times R\alpha$

Nếu ta thiết lập một đơn vị đo góc mới (ta gọi đơn vị mới đó là radian) thì ta mong muốn công thức độ dài cung l phụ thuộc vào góc ở tâm đo bằng đơn vị mới radian phải ở dạng đẹp nhất đó là:

$$l = R\gamma \ (\textit{với } \gamma \textit{ là góc ở tâm đo bằng radian}) \ (2)$$

Từ (1) và (2) với cùng một độ dài cung l thì ta có:

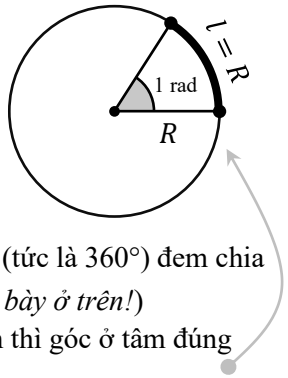
$$\frac{\pi}{180} \times R\alpha = R\gamma$$

(α đo bằng độ và γ đo bằng radian)

$$\Rightarrow \frac{\pi}{180} \times \alpha = \gamma$$

Như vậy ta có công thức liên hệ giữa số đo độ và đơn vị mới radian như sau:

$$\frac{\pi}{180} \times \text{Số đo độ} = \text{Số đo radian}$$



Từ đó ta dễ dàng suy ra một số nhận xét sau:

👉Số đo độ = 360 ⇒ Số đo radian = 2π

👉Số đo độ = 180 ⇒ Số đo radian = π

👉Số đo độ = $\frac{180}{\pi}$ ⇒ Số đo radian = 1, mà $\frac{180}{\pi} = \frac{360}{2\pi}$ từ đó ta thấy 1 vòng tròn (tức là 360°) đem chia thành 2π phần thì được 1 radian (*Đây chính là cách xác định 1 rad được trình bày ở trên!*)

👉Số đo radian = 1 từ (2) ⇒ $l = R$ ⇒ Nếu cung có độ dài đúng bằng bán kính thì góc ở tâm đúng bằng 1 radian

Thầy Lê Trung Kiên

c) Đổi độ ↔ radian (phương pháp tỷ số)

Để đổi giữa 2 đơn vị đo, bạn cần nhớ một mốc liên hệ giữa độ và radian (tốt nhất nên nhớ rằng π rad $= 180°$)

Cách đổi dựa vào công thức:

$$\frac{\text{Số đo độ 1}}{\text{Số đo radian 1}} = \frac{\text{Số đo độ 2}}{\text{Số đo radian 2}} \quad \text{hoặc} \quad \frac{\text{Số đo radian 1}}{\text{Số đo độ 1}} = \frac{\text{Số đo radian 2}}{\text{Số đo độ 2}}$$

Trong đó: Số đo độ 1 và số đo radian 1 là tương ứng với nhau. Số đo độ 2 và Số đo radian 2 là tương ứng với nhau.

Từ đó ta suy ra 2 công thức tính sau:

$$\text{Số đo độ} = \text{Số đo radian} \times \frac{180}{\pi} \qquad \text{Số đo radian} = \text{Số đo độ} \times \frac{\pi}{180}$$

d) Đổi độ ↔ radian (máy tính bỏ túi)

Trong máy tính có 3 đơn vị đo góc là: Độ (Degree hay deg), Radian (rad), Grad.

Với 3 đơn vị đo góc này ta có 2 chế độ nhập đơn vị đo góc là chế độ mặc định và chế độ tùy chỉnh(người dùng tự xác định đơn vị đo góc)

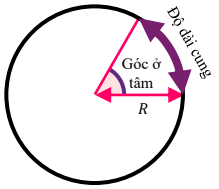
Hiển thị các đơn vị đo ở chế độ mặc định (ở chế độ này, nếu người dùng nhập giá trị góc mà không nhập đơn vị đo thì máy tính sẽ hiểu đơn vị đo góc là đơn vị mặc định): Degree D, Radian R, Grad G.

Các đơn vị đo ở chế độ tùy chỉnh (ở chế độ này, người dùng nhập giá trị góc, sau đó thêm vào ngay phía sau giá trị đó đơn vị đo góc): Degree °, Radian ^{r}, Grad ^{g}.

e) Mối liên hệ giữa độ dài cung và số đo góc ở tâm trong đường tròn

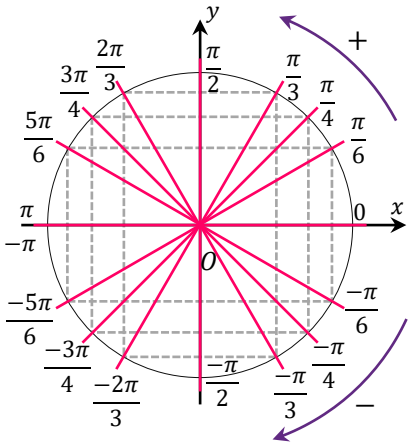
Nếu góc ở tâm đo bằng độ: Độ dài cung $= \underbrace{\frac{2\pi R}{360}}_{\text{Độ dài cung } 1°} \times$ Số đo góc ở tâm bằng độ

Nếu góc ở tâm đo bằng rad: Độ dài cung $= R \times$ Số đo góc bằng rad



f) Một số góc lượng giác đặc biệt

$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$270°$	$360°$
0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
				1/4 vòng				Nửa vòng	3/4 vòng	1 vòng



Thầy Lê Trung Kiên

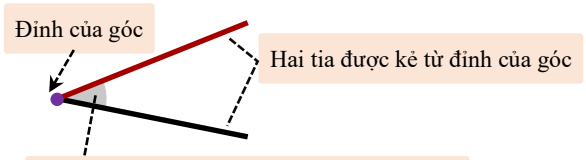
123. Góc lượng giác

a) Góc lượng giác âm, dương và quy ước chiều quay

Việc xác định góc lượng giác bằng đường tròn lượng giác dựa trên cơ sở góc giữa 2 tia nên trước tiên ta nhắc lại về góc giữa 2 tia.

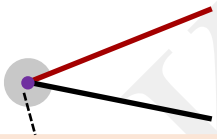
Xác định góc giữa 2 tia

Giả sử ta quan tâm đến góc nhỏ hơn giữa 2 tia. Khi đó ta có:



Góc nhỏ hơn giữa hai tia kẻ từ đỉnh của góc

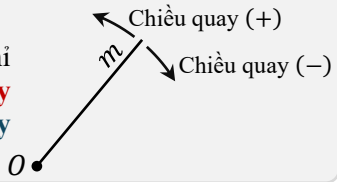
Nếu quan tâm đến góc lớn hơn xác định giữa 2 tia thì ta có:



Góc lớn hơn giữa hai tia kẻ từ đỉnh của góc

Quy ước chiều quay

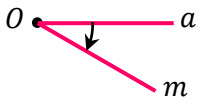
Khi xét chuyển động quay của một tia Om quanh gốc O chỉ theo một chiều cố định, người ta quy ước **chiều quay ngược chiều kim đồng hồ là chiều dương** và **chiều quay cùng chiều kim đồng hồ là chiều âm**.



👉Nếu một tia Om quay quanh gốc O của nó theo một chiều cố định, bắt đầu từ vị trí tia Oa và dừng lại sau khi đã quay được một góc α thì ta nói tia Om quét được một góc α tính từ tia Oa.

Ví dụ

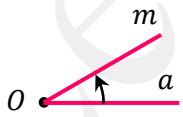
a)



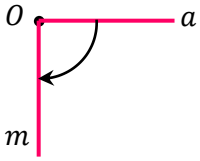
Om quay một góc lượng giác $-30°$ tính từ tia Oa

b)

Om quay một góc lượng giác $30°$ tính từ tia Oa



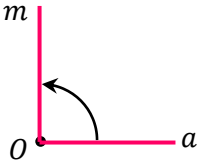
c)



Om quay một góc lượng giác $-90°$ tính từ tia Oa

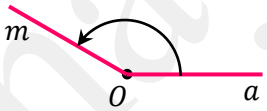
d)

Om quay một góc lượng giác $90°$ tính từ tia Oa

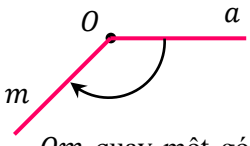


e)

Om quay một góc lượng giác $150°$ tính từ tia Oa



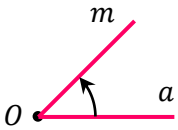
f)



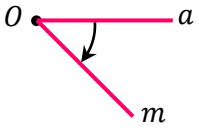
Om quay một góc lượng giác $-135°$ tính từ tia Oa

g)

Om quay một góc lượng giác $45°$ tính từ tia Oa



h)

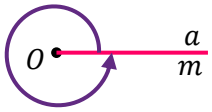


Om quay một góc lượng giác $-45°$ tính từ tia Oa

Thầy Lê Thanh Kiên

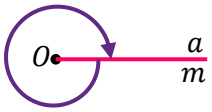
i)

Om quay một góc lượng giác 360° tính từ tia Oa



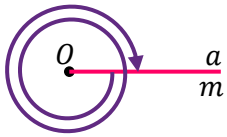
j)

Om quay một góc lượng giác -360° tính từ tia Oa



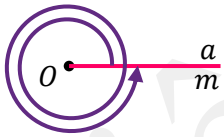
k)

Om quay một góc lượng giác -720° tính từ tia Oa



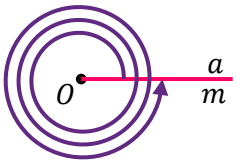
l)

Om quay một góc lượng giác 720° tính từ tia Oa



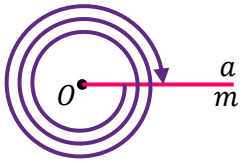
m)

Om quay một góc lượng giác 1080° tính từ tia Oa

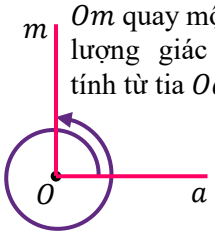


n)

Om quay một góc lượng giác -1080° tính từ tia Oa



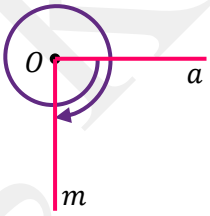
o)



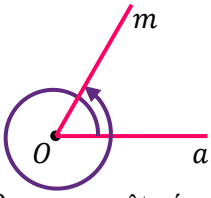
Om quay một góc lượng giác 450° tính từ tia Oa

p)

Om quay một góc lượng giác -450° tính từ tia Oa



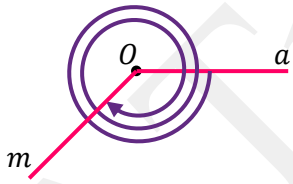
q)



Om quay một góc lượng giác 420° tính từ tia Oa

r)

Om quay một góc lượng giác -855° tính từ tia Oa



Cho hai tia Oa, Ob.

👉Nếu một tia Om quay quanh gốc O của nó theo một chiều cố định bắt đầu từ vị trí tia Oa và dừng ở vị trí tia Ob thì ta nói tia Om quét một góc lượng giác có tia đầu Oa, tia cuối Ob, kí hiệu hành động của sự quay từ Oa tới Ob như vậy là (Oa, Ob).

👉Khi tia Om quay một góc α từ tia Oa tới tia Ob, ta nói số đo của góc lượng giác của sự quay (Oa, Ob) bằng α, kí hiệu $sđ(Oa, Ob) = \alpha$.

👉Với hai tia Oa và Ob cho trước, có vô số góc lượng giác tia đầu Oa và tia cuối Ob. Ta dùng chung kí hiệu (Oa, Ob) cho tất cả các góc lượng giác này.

👉Như vậy (Oa, Ob) được dùng với 2 ý nghĩa:

Ý nghĩa 1: Để nói về hành động quay bắt đầu từ tia Oa đến tia Ob.

Ý nghĩa 2: (Oa, Ob) = Tất cả các góc lượng giác để quay từ tia Oa đến tia Ob.

👉Phân biệt ký hiệu: (Oa, Ob) và $sđ(Oa, Ob)$

$sđ(Oa, Ob)$ = Một giá trị góc cụ thể để quay từ Oa đến Ob.

(Oa, Ob) = Tất cả các góc lượng giác để quay từ tia Oa đến tia Ob.

Cho hai tia Oa, Ob thì có vô số góc lượng giác có tia đầu Oa và tia cuối Ob. Số đo của các góc lượng giác này sai khác nhau một bội nguyên của 360°. Tất cả các góc lượng giác như thế được kí hiệu chung là (Oa, Ob).

Vậy ta có: nếu đo bằng độ thì $(Oa, Ob) = sđ(Oa, Ob) + k360°(k \in \mathbb{Z})$ ($sđ(Oa, Ob)$ đo bằng độ).

Nếu đo bằng radian thì $(Oa, Ob) = sđ(Oa, Ob) + k2\pi(k \in \mathbb{Z})$ ($sđ(Oa, Ob)$ đo bằng radian).

($sđ(Oa, Ob)$ là số đo của một góc lượng giác cụ thể tùy ý có tia đầu là Oa và tia cuối là Ob)

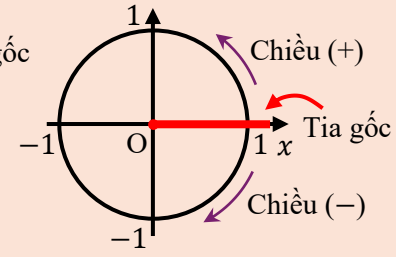
Tài liệu Trung Kiên

b) Hệ thức Chasles

Với ba tia Oa, Ob, Oc bất kì, ta có:
$sđ(Oa, Oc) = sđ(Oa, Ob) + sđ(Ob, Oc) + k360°(k \in \mathbb{Z})$ (tất cả góc đo bằng độ)
hoặc
$sđ(Oa, Oc) = sđ(Oa, Ob) + sđ(Ob, Oc) + k2\pi(k \in \mathbb{Z})$ (tất cả góc đo bằng radian)

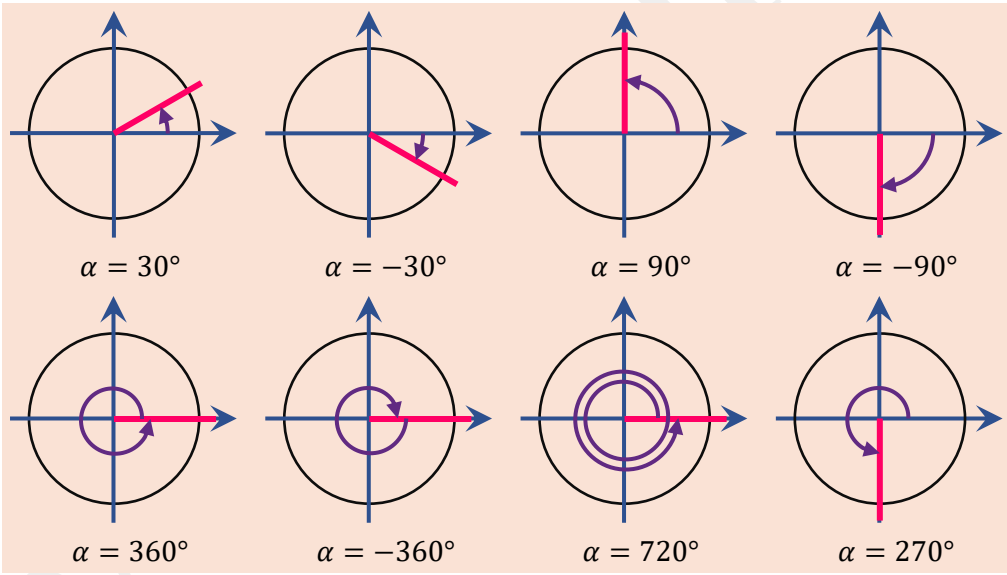
c) Cách xác định góc

Các quy ước
Đường tròn lượng giác là đường tròn có tâm tại gốc tọa độ O và bán kính bằng 1 đơn vị.
Tia gốc để đo góc quay là tia Ox.
Chiều quay:
$\begin{cases} \text{chiều } (+) : \text{ngược chiều kim đồng hồ} \\ \text{chiều } (-) : \text{cùng chiều kim đồng hồ} \end{cases}$



Cách xác định một góc trên đường tròn lượng giác
Bước 1: Xác định giá trị góc là âm hay dương để quay theo chiều thích hợp.
Bước 2: Quay theo chiều đã xác định ở bước 1 với độ lớn của góc (tính từ tia gốc là tia Ox).

Một số thí dụ xác định góc trên đường tròn lượng giác

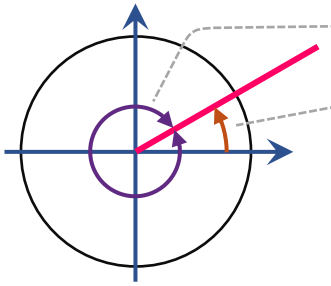


d) Công thức cho 1 tia lượng giác

Công thức biểu diễn góc cho một tia lượng giác

Các góc lượng giác $=$ một góc cụ thể nào đó của tia lượng giác $+ k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

(Lưu ý: 2π chính là 1 vòng tròn)



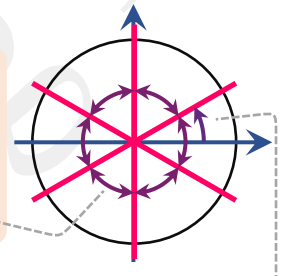
🚨 Chú ý: một tia lượng giác có thể được biểu diễn bởi nhiều công thức khác nhau.

e) Công thức các tia lượng giác cách đều nhau

Công thức biểu diễn góc cho một nhóm tia lượng giác cách đều nhau

$$\text{Các góc lượng giác} = \frac{\text{1 góc lượng giác cụ thể nào đó}}{\text{của 1 tia lượng giác trong nhóm}} + k \times \frac{\text{khoảng cách giữa}}{\text{2 tia liên tiếp}}$$

$$(k \in \mathbb{Z})$$



🚨 Chú ý: một nhóm tia lượng giác cách đều nhau có thể được biểu diễn bởi nhiều công thức khác nhau.

Thầy Lê Phạm Kiên

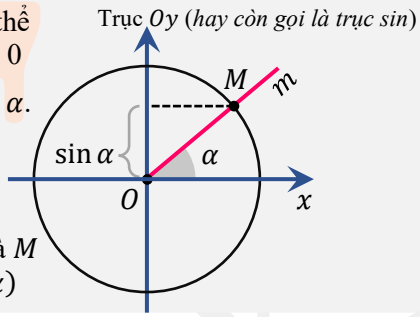
124. Định nghĩa các giá trị lượng giác

a) Định nghĩa sin

α tùy ý thuộc $\mathbb{R}$; α có thể âm, dương, hoặc bằng 0

Giả sử ta cần xác định giá trị lượng giác sin của góc lượng giác α.
Ta làm như sau:

Bước 1: Vẽ 1 đường tròn lượng giác
Bước 2: Xác định tia Om sao cho $sđ(Ox, Om) = \alpha$
Bước 3: Gọi giao điểm giữa tia Om và đường tròn lượng giác là M
Bước 4: Tung độ của điểm M trên trục Oy chính là giá trị $\sin(\alpha)$

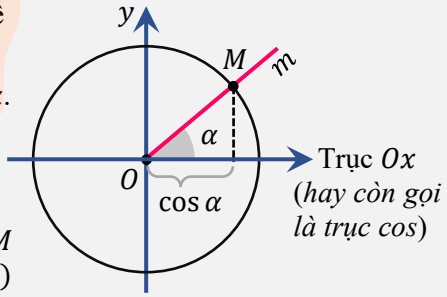


b) Định nghĩa cos

α tùy ý thuộc $\mathbb{R}$; α có thể âm, dương, hoặc bằng 0

Giả sử ta cần xác định giá trị lượng giác cos của góc lượng giác α.
Ta làm như sau:

Bước 1: Vẽ 1 đường tròn lượng giác
Bước 2: Xác định tia Om sao cho $sđ(Ox, Om) = \alpha$
Bước 3: Gọi giao điểm giữa tia Om và đường tròn lượng giác là M
Bước 4: Hoành độ của điểm M trên trục Ox chính là giá trị $\cos(\alpha)$

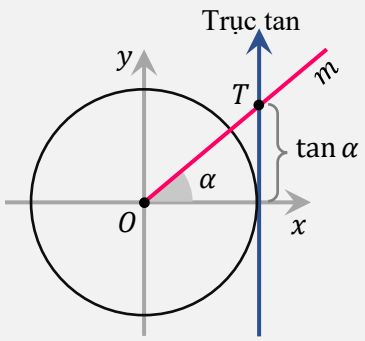


c) Định nghĩa tan

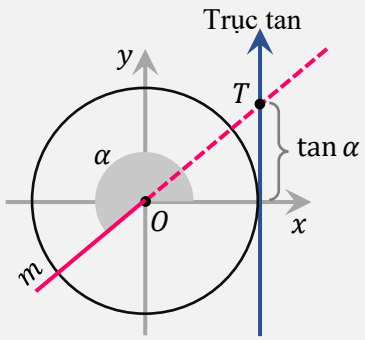
α tùy ý thuộc $\mathbb{R}$; α có thể âm, dương, hoặc bằng 0

Giả sử ta cần xác định giá trị lượng giác tan của góc lượng giác α.
Ta có thể làm theo một trong 2 cách như sau:

👉**Cách 1**: Xác định tan dựa vào tỷ số tan = sin / cos
Bước 1: Xác định $\sin(\alpha)$ và $\cos(\alpha)$
Bước 2: Tính $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$



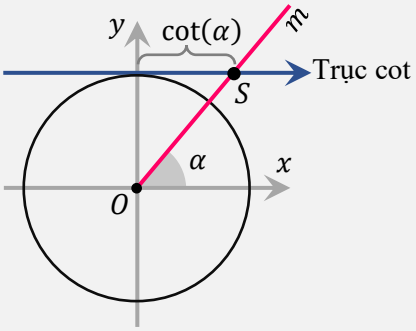
👉**Cách 2**: Xác định tan dựa vào hình học
Bước 1: Vẽ 1 đường tròn lượng giác
Bước 2: Vẽ trục tan như sau: Từ điểm $(1; 0)$ vẽ một trục tiếp tuyến với đường tròn lượng giác, chiều dương trục tan hướng lên trên, gốc 0 của trục tan là điểm $(1; 0)$.
Bước 3: Xác định tia Om sao cho $sđ(Ox, Om) = \alpha$.
Bước 4: Gọi giao điểm giữa **đường thẳng** Om và trục tan (đã vẽ ở bước 2) là T.
Bước 5: Tọa độ của điểm T trên trục tan chính là giá trị $\tan(\alpha)$.



d) Định nghĩa cot

α tùy ý thuộc $\mathbb{R}$; α có thể âm, dương, hoặc bằng 0

Giả sử ta cần xác định giá trị lượng giác cot của góc lượng giác α. Ta có thể làm theo một trong 2 cách như sau:



👉**Cách 1**: Xác định cot dựa vào tỷ số cot = cos / sin

Bước 1: Xác định $\sin(\alpha)$ và $\cos(\alpha)$

Bước 2: Tính $\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$

👉**Cách 2**: Xác định cot dựa vào hình học

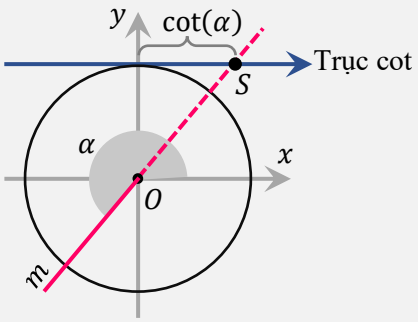
Bước 1: Vẽ 1 đường tròn lượng giác.

Bước 2: Vẽ trục cot như sau: Từ điểm $(0; 1)$ vẽ một trục tiếp tuyến với đường tròn lượng giác, chiều dương trục cot hướng qua bên phải, gốc 0 của trục tan là điểm $(0; 1)$.

Bước 3: Xác định tia Om sao cho $s\text{đ}(Ox, Om) = \alpha$

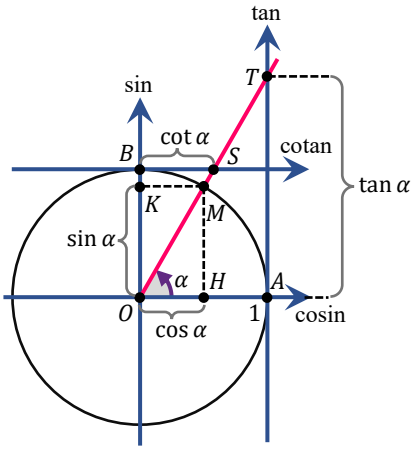
Bước 4: Gọi giao điểm giữa **đường thẳng** Om và trục cot (đã vẽ ở bước 2) là S.

Bước 5: Tọa độ của điểm S trên trục cot chính là giá trị $\cot(\alpha)$.



Thầy Lê Trung Kiên

Tổng kết



Cho $(Ox, OM) = \alpha$.
Giả sử $M = (x_M; y_M)$

$\cos\alpha = x_M = \overline{OH}$

$\sin\alpha = y_M = \overline{OK}$

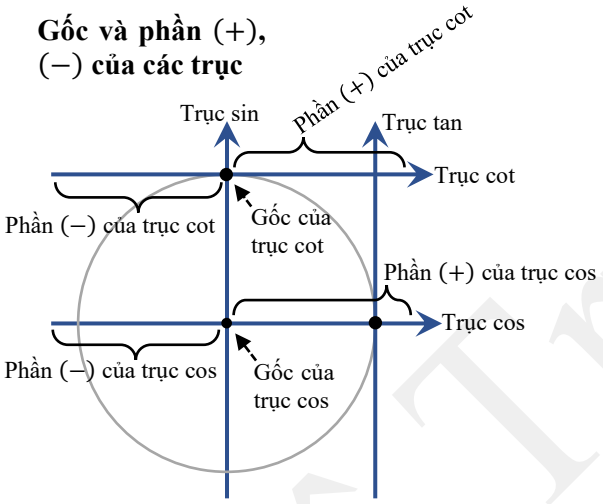
$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \overline{AT}$

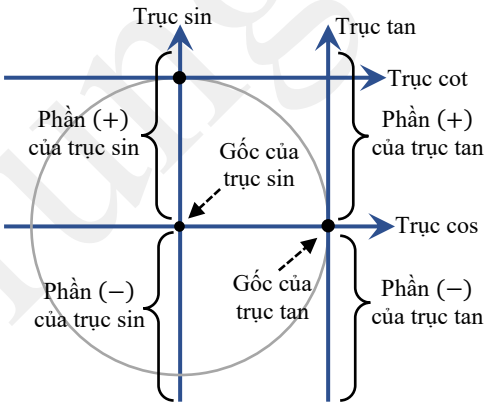
$\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \overline{BS}$

Một số nhận xét

- Phạm vi sin, cos: $\forall\alpha \in \mathbb{R}$
  $\Rightarrow -1 \le \cos\alpha \le 1; -1 \le \sin\alpha \le 1$
- Điều kiện của tan:
  $\tan\alpha$ xác định khi $\alpha \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$
- Điều kiện của cot:
  $\cot\alpha$ xác định khi $\alpha \ne k\pi, k \in Z$

Gốc và phần (+), (−) của các trục



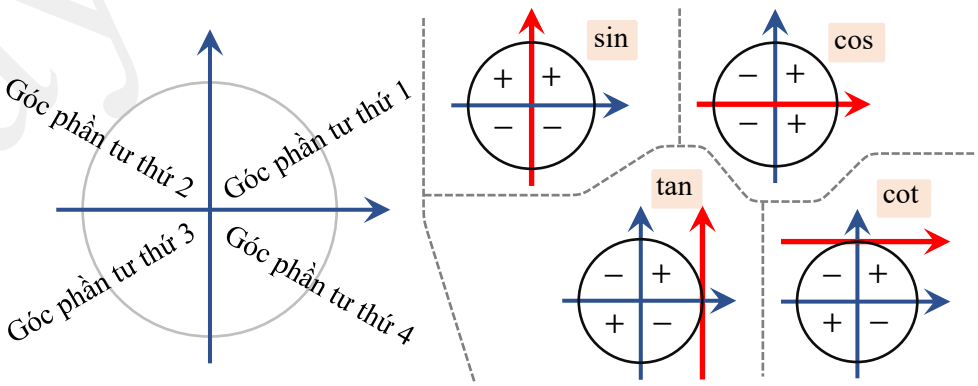


Lưu ý về mặt kí hiệu: $\sin^n x = (\sin x)^n$, $\sin x^n = \sin(x^n)$, $\sin^n x^m = \sin^n(x^m) = (\sin(x^m))^n$
(Tương tự cho cos)

$$\tan^n x = (\tan x)^n = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^n = \frac{(\sin x)^n}{(\cos x)^n} = \frac{\sin^n x}{\cos^n x} \Rightarrow \tan^n x = \frac{\sin^n x}{\cos^n x}$$

$$\cot^n x = \frac{\cos^n x}{\sin^n x}$$

125. Dấu của các giá trị lượng giác



126. Các công thức cơ bản

$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$	$1 + \tan^2 a = \dfrac{1}{\cos^2 a}$	$1 + \cot^2 a = \dfrac{1}{\sin^2 a}$
$\tan a \cdot \cot a = 1$	$\tan a = \dfrac{\sin a}{\cos a}$	$\cot a = \dfrac{\cos a}{\sin a}$

127. Công thức cộng

$\sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos b \pm \cos a \cdot \sin b$	$\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \sin a \cdot \sin b$	
$\tan(a \pm b) = \dfrac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \cdot \tan b}$	$\cot(a \pm b) = \dfrac{\cot a \cdot \cot b \mp 1}{\cot a \pm \cot b}$	$\tan\left(\dfrac{\pi}{4} \pm x\right) = \dfrac{1 \pm \tan x}{1 \mp \tan x}$

128. Công thức nhân đôi

$\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$	$\tan 2a = \dfrac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$	$\cot 2a = \dfrac{\cot^2 a - 1}{2 \cot a}$
$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2 \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1$		

129. Công thức hạ bậc

$\sin^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{2}$	$\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos 2a}{2}$	$\tan^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$

130. Công thức nhân ba

$\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$	$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$	$\tan 3a = \dfrac{3 \tan a - \tan^3 a}{1 - 3 \tan^2 a}$

131. Công thức tổng thành tích

$\cos a + \cos b = 2 \cos \dfrac{a+b}{2} \cdot \cos \dfrac{a-b}{2}$	$\sin a + \sin b = 2 \sin \dfrac{a+b}{2} \cdot \cos \dfrac{a-b}{2}$
$\cos a - \cos b = -2 \sin \dfrac{a+b}{2} \cdot \sin \dfrac{a-b}{2}$	$\sin a - \sin b = 2 \cos \dfrac{a+b}{2} \cdot \sin \dfrac{a-b}{2}$
$\tan a \pm \tan b = \dfrac{\sin(a \pm b)}{\cos a \cdot \cos b}$	$\cot a \pm \cot b = \dfrac{\sin(b \pm a)}{\sin a \cdot \sin b}$

132. Công thức tích thành tổng

$\cos a \cdot \cos b = \dfrac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$	$\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(a - \dfrac{\pi}{4}\right)$
$\sin a \cdot \sin b = \dfrac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$	$\sin a - \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \cos\left(a + \dfrac{\pi}{4}\right)$
$\sin a \cdot \cos b = \dfrac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)]$	

Thầy Lê Trung Kiên

133. Số đo các góc liên quan đặc biệt

Cung đối nhau	Cung bù nhau	Cung phụ nhau
$\cos(-a) = \cos a$	$\sin(\pi - a) = \sin a$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$
$\sin(-a) = -\sin a$	$\cos(\pi - a) = -\cos a$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$
$\tan(-a) = -\tan a$	$\tan(\pi - a) = -\tan a$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cot a$
$\cot(-a) = -\cot a$	$\cot(\pi - a) = -\cot a$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \tan a$

Cung hơn kém nhau π	Cung hơn kém nhau $\frac{\pi}{2}$	Cung hơn kém nhau 2π
$\sin(\pi + a) = -\sin a$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$	$\sin(\alpha \pm k2\pi) = \sin\alpha$
$\cos(\pi + a) = -\cos a$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$	$\cos(\alpha \pm k2\pi) = \cos\alpha$
$\tan(\pi + a) = \tan a$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\cot a$	$\tan(\alpha \pm k2\pi) = \tan\alpha$
$\cot(\pi + a) = \cot a$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\tan a$	$\cot(\alpha \pm k2\pi) = \cot\alpha$

Một cách nhớ giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt

Thật khó khăn khi chúng ta phải nhớ các công thức lượng giác của những góc có liên quan đặc biệt, vì có quá nhiều công thức, thật khó để nhớ hết chúng mà không sai gì về giá trị, hay sai về dấu, chúng ta có một số cách chính để nhớ như sau.

Về cách đổi lượng giác của những góc có liên quan đặc biệt thì ta có nhận xét sau, cấu trúc của công thức lượng giác cần đổi là:

$$\boxed{\text{Giá trị lượng giác}}\left(\boxed{\text{góc cụ thể}} \pm \boxed{\text{góc chứa ẩn số}}\right)$$
$$= \boxed{\text{Dấu âm hoặc dương}}\boxed{\text{Giá trị lượng giác}}\left(\boxed{\text{góc chứa ẩn số}}\right)$$

Ví dụ: $\sin(90° - x) = +\cos(x)$, $\sin(180° - 2x) = +\sin(2x)$, $\cos\left(180° - \frac{x}{2}\right) = -\cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

Chú ý: **góc cụ thể** phải có tia lượng giác biểu diễn là tia thẳng đứng hoặc nằm ngang.

Ví dụ: Ta muốn đổi $\sin(90° + x)$ về dạng: $\boxed{\text{Dấu âm hoặc dương}}\boxed{\text{Giá trị lượng giác}}\left(\boxed{\text{góc chứa ẩn số}}\right)$. Trong đó **góc chứa ẩn số** là x, và **góc cụ thể** là $90°$ vậy: $\sin(90° + x) = \boxed{\text{Dấu âm hoặc dương}}\boxed{\text{Giá trị lượng giác}}(x)$

Ta chỉ cần tìm được **Dấu âm hoặc dương** và **giá trị lượng giác** thay thế vào là xong.

Quy tắc tìm **Giá trị lượng giác** : Nếu **góc cụ thể** là góc có tia biểu diễn của nó trên đường tròn lượng giác là tia thẳng đứng thì ta đổi chéo, tức là sin → cos, cos → sin và tan → cot, cot → tan. Nếu **góc cụ thể** là góc có tia biểu diễn của nó trên đường tròn lượng giác là tia thẳng nằm ngang thì ta đổi cùng, tức là sin → sin, cos → cos, tan → tan, cot → cot.

Quy tắc tìm dấu: Xác định **góc cụ thể** trên đường tròn lượng giác. Sau đó thay toàn bộ phần góc chứa ẩn số bằng $45°$, rồi xác định dấu của biểu thức lượng giác gốc. Sau đó **Dấu âm hoặc dương** bằng dấu của tỷ số lượng giác gốc lúc này.

Tiếp tục chuyển $\sin(90° + x)$ về tỷ số lượng giác chỉ chứa x.

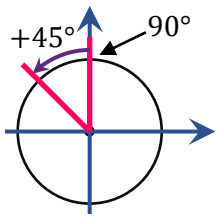
Ta có $90°$ là góc có tia biểu diễn thẳng đứng nên ta đổi chéo sin → cos tức là $\sin(90° + x) = \boxed{\text{Dấu âm hoặc dương}}\cos x$.

Bây giờ ta đi tìm dấu ở phía trước là gì?

Có thể làm bằng hai cách thử bằng máy tính hoặc vẽ đường tròn lượng giác để được dấu.

Cách 1: Bấm máy tính, ta thay $x = 45°$ thì bấm $\sin(90 + 45)$ vào máy tính và ra giá trị dương thế nên $\sin(90 + x) = +\cos(x)$.

Cách 2: Dùng đường tròn lượng giác.



Dễ thấy Sin của góc mới là dương nên ở đây ta cũng có $\sin(90° + x) = +\cos(x)$.

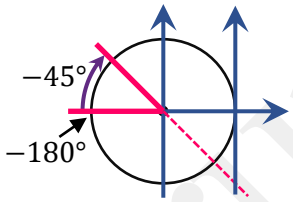
Ví dụ: chuyển $\tan(-180° - 3x)$ về một tỷ số lượng giác chỉ chứa $3x$.

Ta thấy $-180°$ là một góc có tia biểu diễn nằm ngang nên tan → tan, tức là $\tan(-180° - 3x) =$ Dấu âm hoặc dương $\tan(3x)$.

Bây giờ ta đi tìm **Dấu âm hoặc dương** bằng cách lấy $3x = 45°$.

Cách 1: Bấm máy $\tan(-180° - 45°)$ ra âm, vậy $\tan(-180° - 3x) = -\tan(3x)$.

Cách 2: Vẽ đường tròn lượng giác



Dễ thấy là $\tan(-180° - 45°)$ âm nên $\tan(-180° - 3x) = -\tan(3x)$.

Khi đã làm quen thì ta có thể tưởng tượng trong đầu và không cần vẽ ra giấy nữa!

Ví dụ: đổi $\tan\left(270° - \frac{4t}{5}\right)$, góc cụ thể $270°$ là tia thẳng đứng ⇒ đổi chéo tan → cot, thay góc chứa tham số $\frac{4t}{5} = 45°$, ta có $\tan(270° - 45°) > 0$, vậy suy ra $\tan\left(270° - \frac{4t}{5}\right) = +\cot\left(\frac{4t}{5}\right)$

Ví dụ: đổi $\sin(-180° - x^2)$, góc cụ thể $-180°$ là tia nằm ngang ⇒ đổi cùng sin → sin, thay góc chứa tham số $x^2 = 45°$, ta có $\sin(-180° - 45°) > 0$, vậy suy ta $\sin(-180° - x^2) = +\sin(x^2)$

134. Một số công thức khác

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots + \sin nx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$$

▪ Biểu diễn công thức theo tan(góc/2)

Đặt $t = \tan\frac{\alpha}{2}$, thì ta có:

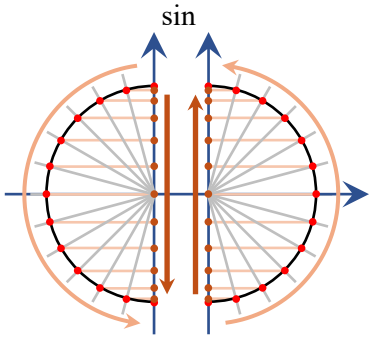
$$\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \tan\alpha = \frac{2t}{1-t^2} \qquad \cot\alpha = \frac{1-t^2}{2t}$$

Thầy Lê Trung Kiên

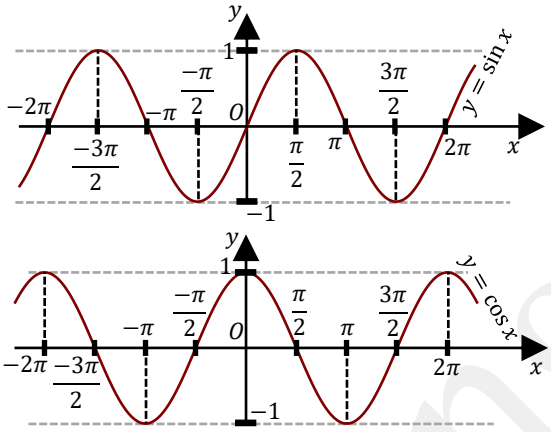
HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

135. Sự biến thiên & Đồ thị các hàm lượng giác cơ bản

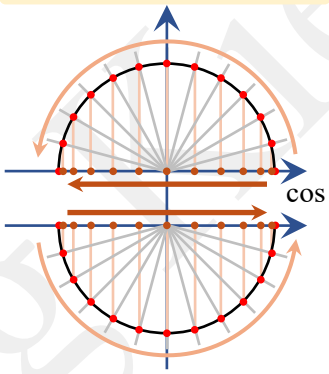
Sự biến thiên của sin trên đường tròn lượng giác



Đồ thị hàm số $y = \sin x$

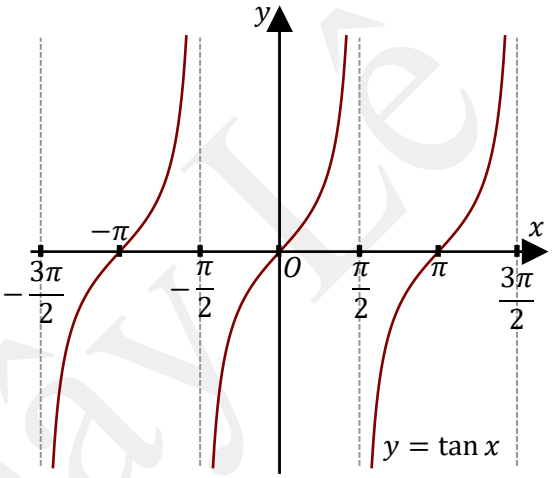


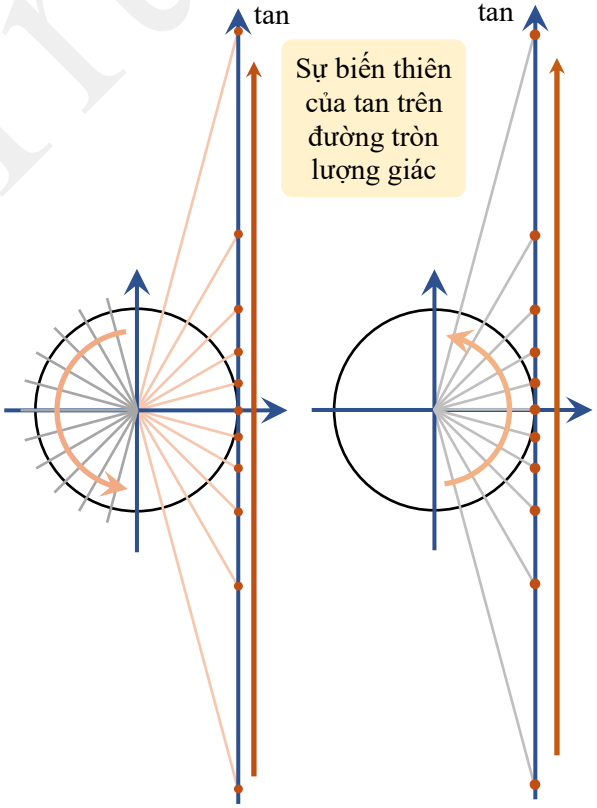
Sự biến thiên của cos trên đường tròn lượng giác



Đồ thị hàm số $y = \cos x$

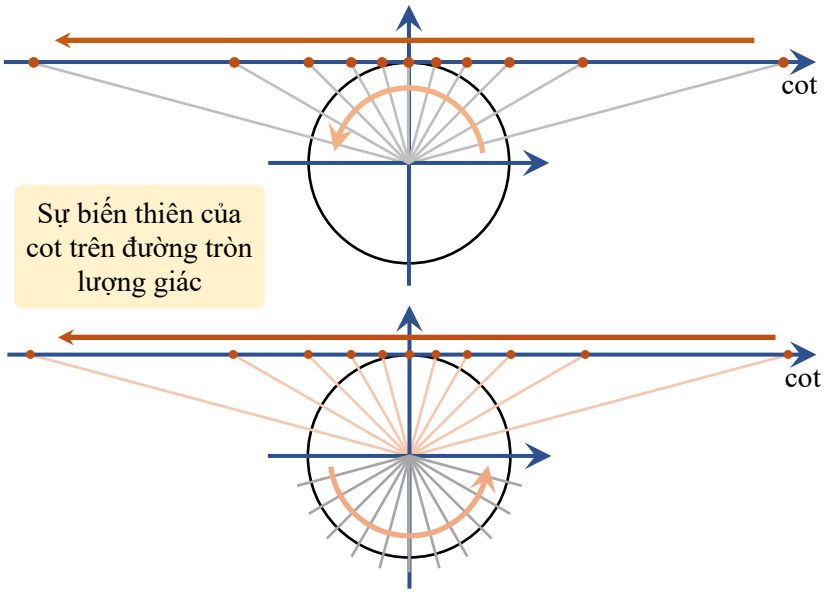
Đồ thị hàm số $y = \tan x$





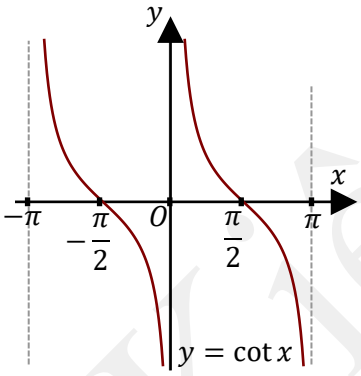
Sự biến thiên của tan trên đường tròn lượng giác

Thầy Lê Trung Hiếu



Sự biến thiên của cot trên đường tròn lượng giác

Đồ thị hàm số $y = \cot x$



Hàm số	Điều kiện xác định	Tập giá trị	Chu kỳ	Loại hàm số
$y = \sin x$	$x \in \mathbb{R}$	$[-1; 1]$	2π	Hàm lẻ
$y = \sin(ax + b)$			$\frac{2\pi}{\lvert a\rvert}$	Chưa biết
$y = \cos x$			2π	Hàm chẵn
$y = \cos(ax + b)$			$\frac{2\pi}{a}$	Chưa biết
$y = \tan x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$\mathbb{R}$	π	Hàm lẻ
$y = \tan(ax + b)$	$ax + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$		$\frac{\pi}{\lvert a\rvert}$	Chưa biết
$y = \cot x$	$x \neq k\pi$		π	Hàm lẻ
$y = \cot(ax + b)$	$ax + b \neq k\pi$		$\frac{\pi}{\lvert a\rvert}$	Chưa biết

Lưu ý:

- $y = \sin\big(f(x)\big)$ xác định $\Leftrightarrow f(x)$ xác định.
- $y = \cos\big(f(x)\big)$ xác định $\Leftrightarrow f(x)$ xác định.
- $y = \tan\big(f(x)\big)$ xác định $\Leftrightarrow f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.
- $y = \cot\big(f(x)\big)$ xác định $\Leftrightarrow f(x) \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$.
- $y = f_1(x)$ có chu kỳ T_1; $y = f_2(x)$ có chu kỳ T_2.
Thì hàm số $y = f_1(x) \pm f_2(x)$ có chu kỳ T_0 là bội số chung nhỏ nhất của T_1 và T_2

Trần Đình Trung Kiên

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Lưu ý: Trong các công thức dưới đây $k \in \mathbb{Z}$.

136. Phương trình sin

$\sin f(x) = \sin g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = \quad g(x) + k2\pi \\ f(x) = \pi - g(x) + k2\pi \end{array}\right.$	$\sin f(x) = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = \quad \arcsin a + k2\pi \\ f(x) = \pi - \arcsin a + k2\pi \end{array}\right.$ Điều kiện $-1 \le a \le 1$.

Các trường hợp đặc biệt:

$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$	$\sin x = \pm 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1$ $\Leftrightarrow \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$ $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$	
$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$	

137. Phương trình cos

$\cos f(x) = \cos g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = \quad g(x) + k2\pi \\ f(x) = -g(x) + k2\pi \end{array}\right.$	$\cos f(x) = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = \quad \arccos a + k2\pi \\ f(x) = -\arccos a + k2\pi \end{array}\right.$ Điều kiện $-1 \le a \le 1$.

Các trường hợp đặc biệt:

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$	$\cos x = \pm 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1$ $\Leftrightarrow \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ $\Leftrightarrow x = k\pi$
$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$	
$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$	

138. Phương trình tan

$\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$	$\tan x = a \Leftrightarrow x = \arctan(a) + k\pi$
$\tan f(x) = \tan g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + k\pi$ (Cần đặt điều kiện $f(x)$, $g(x)$ để tan xác định)	

139. Phương trình cot

Nếu biết trước giá trị lượng giác, cần tìm trước một góc thỏa mãn: $\cot(\overbrace{\text{góc}}^{\text{cần tìm}}) = \overbrace{\text{giá trị lượng giác}}^{\text{đã biết}}$ thì ta làm như sau:

TH1: Giá trị lượng giác $= 0 \Rightarrow$ góc $= \frac{\pi}{2}$.

TH2: Giá trị lượng giác $\neq 0$, sử dụng $\tan(\text{góc}) \cdot \cot(\text{góc}) = 1$

$$\Rightarrow \text{góc} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\text{giá trị lượng giác}}\right)$$

$\cot f(x) = \cot\alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha + k\pi$	$\cot f(x) = a \Leftrightarrow f(x) = \text{arccot}(a) + k\pi$
$\cot f(x) = \cot g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + k\pi$ (Cần đặt điều kiện $f(x)$, $g(x)$ để cot xác định)	

Thầy Lê Trung Kiên

Lưu ý

Đổi chéo	Đổi đối	Đổi chéo và đối
$\begin{matrix}\sin\\ \cos\\ \tan\\ \cot\end{matrix}(\text{góc}) = \begin{matrix}\cos\\ \sin\\ \cot\\ \tan\end{matrix}\left(\frac{\pi}{2} - \text{góc}\right)$	$\begin{matrix}-\sin\\ -\tan(\text{góc}) = \tan(-\text{góc})\\ -\cot\end{matrix}\quad\begin{matrix}\sin\\ \\ \cot\end{matrix}$	$-\sin(\text{góc}) = \cos\left(\text{góc} + \frac{\pi}{2}\right)$
	$-\cos(\text{góc}) = \cos(\pi \pm \text{góc}) = \cos(\text{góc} \pm \pi)$	$\begin{matrix}-\cos\\ -\tan(\text{góc}) = \\ -\cot\end{matrix}\quad\begin{matrix}\sin\\ \cot\left(\text{góc} - \frac{\pi}{2}\right)\\ \tan\end{matrix}$

▪ Khi tìm được nghiệm nếu cần kiểm tra với điều kiện. Ta thường dùng một trong các cách sau để kiểm tra điều kiện:

– Kiểm tra trực tiếp bằng cách thay giá trị của x vào biểu thức điều kiện. (rất ít dùng)

– Dùng đường tròn lượng giác. (hay dùng)

– Giải các phương trình vô định. (hay dùng)

▪ Phương trình $ax + by = c$ (với $a, b, c \in \mathbb{Z}$) và ƯCLN$(a, b) = 1$ có nghiệm là: $\begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 - at \end{cases} (t \in \mathbb{Z})$.

Với x_0, y_0 là một nghiệm cụ thể của phương trình.

140. Một số dạng phổ biến

a) Dạng $\sin^2(x)=a$ hoặc $\cos^2(x)=a$

$$\sin^2 x = a \text{ hoặc } \cos^2 x = a$$

TH1: $a < 0$ phương trình vô nghiệm.

TH2: $a = 0$ khi đó: $\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ và $\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$

TH3: $a > 0$

Cách 1: Dùng công thức hạ bậc ta đưa về các dạng phương trình cơ bản:

$$\sin^2 x = a \Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2x}{2} = a \Leftrightarrow \cdots \text{ và } \cos^2 x = a \Leftrightarrow \frac{1 + \cos 2x}{2} = a \Leftrightarrow \cdots$$

Cách 2: $\sin^2 x = a \Leftrightarrow \left[\begin{matrix}\sin x = \sqrt{a}\\ \sin x = -\sqrt{a}\end{matrix}\right.$ và $\cos^2 x = a \Leftrightarrow \left[\begin{matrix}\cos x = \sqrt{a}\\ \cos x = -\sqrt{a}\end{matrix}\right.$

Không nên sử dụng cách 2 vì sẽ tạo ra 4 họ nghiệm, trong khi cách 1 chỉ tạo ra 2 họ nghiệm.

b) Phương trình dạng bậc hai

Dạng	Đặt	Điều kiện
$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x + c = 0$	$t = \sin x$	$-1 \le t \le 1$
$a \cdot \cos^2 x + b \cdot \cos x + c = 0$	$t = \cos x$	$-1 \le t \le 1$
$a \cdot \tan^2 x + b \cdot \tan x + c = 0$	$t = \tan x$	$t \in \mathbb{R}$
$a \cdot \cot^2 x + b \cdot \cot x + c = 0$	$t = \cot x$	$t \in \mathbb{R}$

😎Nếu đặt $t = \sin^2 x$ hoặc $t = |\sin x|$ thì điều kiện : $0 \le t \le 1$.

😂Nếu đặt $t = \cos^2 x$ hoặc $t = |\cos x|$ thì điều kiện : $0 \le t \le 1$.

c) Dạng a×sin(x)+b×cos(x)=c

$$a\sin x + b\cos x = c\ (1)$$

Cách 1: Chia hai vế cho $\sqrt{a^2+b^2}$ ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Đặt: $\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\ (\alpha \in [0;2\pi])$ $\left(\text{Hoặc } \sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

Phương trình trở thành: $\sin\alpha\cdot\sin x + \cos\alpha\cdot\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \cos(x-\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\beta\ (2)$

$$\left(\text{Hoặc } \sin(x+\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

Điều kiện để phương trình có nghiệm là: $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1 \Leftrightarrow \boxed{a^2+b^2 \ge c^2}$

$$(2) \Leftrightarrow x = \alpha \pm \beta + k2\pi\ (k \in Z)$$

Cách 2:

Bước 1: Xét $x = \pi + k2\pi \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ có là nghiệm hay không?

Bước 2: Xét $x \ne \pi + k2\pi \Leftrightarrow \cos\frac{x}{2} \ne 0$

Đặt $t = \tan\frac{x}{2}$, thay $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Ta được phương trình bậc hai theo t: $(b+c)^2t^2 - 2at + c - b = 0\ (3)$

Vì $x \ne \pi + k2\pi \Leftrightarrow b + c \ne 0$, nên (3) có nghiệm khi : $\Delta' = a^2 - (c^2 - b^2) \ge 0 \Leftrightarrow \boxed{a^2+b^2 \ge c^2}$

Giải (3) với mỗi nghiệm t_0, ta có phương trình : $\tan\frac{x}{2} = t_0$.

d) Dạng: a×sin²(x)+b×sin(x)×cos(x)+c×cos²(x)=d

$$\boldsymbol{a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d}\ \boldsymbol{(1)}$$

Cách 1: Đưa về phương trình bậc hai theo $\tan x$

Bước 1: Kiểm tra $\cos x = 0$ có thỏa mãn phương trình hay không?

Nếu có thì $\cos x = 0$ là một nghiệm của phương trình.

Nếu không thì $\cos x = 0$ không là nghiệm của phương trình.

Bước 2: Khi $\cos x \ne 0$, chia hai vế phương trình (1) cho $\cos^2 x \ne 0$ ta được:

$$a\cdot\tan^2 x + b\cdot\tan x + c = d(1+\tan^2 x)$$

Tiếp theo đưa về phương trình bậc hai theo ẩn $t = \tan x$.

Cách 2: Dùng công thức hạ bậc

$$(1) \Leftrightarrow a\cdot\frac{1-\cos 2x}{2} + b\cdot\frac{\sin 2x}{2} + c\cdot\frac{1+\cos 2x}{2} = d$$

(Đưa về phương trình bậc nhất đối với $\sin 2x$ và $\cos 2x$)

e) Phương trình đẳng cấp

Phương trình đẳng cấp bậc 3 theo $\sin x$, $\cos x$ là phương trình dạng:

$$a \cdot \sin^3 x + b \cdot \sin^2 x \cdot \cos x + c \cdot \sin x \cdot \cos^2 x + d \cdot \cos^3 x = 0$$

Phương trình đẳng cấp bậc n theo $\sin x$, $\cos x$ là phương trình dạng

$$a_n \cdot \sin^n x + a_{n-1} \cdot \sin^{n-1} x \cdot \cos x + \cdots + a_1 \cdot \sin x \cdot \cos^{n-1} x + a_0 \cdot \cos^n x = 0$$

Cách giải chia cả hai vế của phương trình cho $\sin^n x$ (hoặc $\cos^n x$) là lũy thừa bậc cao nhất sau khi đã lý luận nó khác 0. (tương tự Dạng: $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$)

f) Phương trình đối xứng theo sin và cos

Dấu hiệu nhận biết: Khi thay đổi vai trò của $\sin f(x)$ và $\cos f(x)$ thì phương trình không thay đổi.

Ví dụ: $\sin^4 x + \cos^4 x + 2 \sin x \cos x = 3$, $\sin^6 2x + \cos^6 2x = \frac{1}{4}$, $\sin^3 \frac{x}{2} + \cos^3 \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Cách giải: phương pháp chung là hạ bậc, dùng hằng đẳng thức đáng nhớ để dẫn về phương trình quen thuộc.

Các kiến thức cần nhớ:

Công thức hạ bậc:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad ; \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Các hằng đẳng thức:

$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$

g) Phương trình chứa đồng thời sin ± cos và sin × cos

Dạng 1: $a(\sin x \pm \cos x) + b \sin x \cos x + c = 0$

* Đặt: $t = \cos x \pm \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x \mp \frac{\pi}{4}\right)$; $|t| \le \sqrt{2}$.

$$\Rightarrow t^2 = 1 \pm 2 \sin x \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = \pm \frac{1}{2}(t^2 - 1).$$

* Thay vào phương trình đã cho, ta được phương trình bậc hai theo t.

Giải phương trình này tìm t thỏa $|t| \le \sqrt{2}$. Suy ta x.

Lưu ý:

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Dạng 2: $a|\sin x \pm \cos x| + b \sin x \cos x = 0$

* Đặt: $t = |\cos x \pm \sin x| = \sqrt{2} \left|\cos\left(x \mp \frac{\pi}{4}\right)\right|$; điều kiện: $0 \le t \le \sqrt{2}$.

$$\Rightarrow \sin x \cos x = \pm \frac{1}{2}(t^2 - 1)$$

* Tương tự dạng trên. Khi tìm x cần lưu ý phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối.

PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

Bài toán và phương pháp giải: Chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ là đúng $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ta thực hiện như sau:
Bước 1: Kiểm tra mệnh đề đúng với $n = 1$ (1).
Bước 2: Giả sử mệnh đề đúng với số nguyên dương $n = k(k \geq 1)$.
Ta chứng minh rằng mệnh đề cũng đúng với $n = k + 1$ (2).
Kết luận: Từ (1) và (2) theo quy nạp ta suy ra mệnh đề $A(n)$ đúng $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Bài toán và phương pháp giải : Chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ là đúng $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq p$.

Ta thực hiện như sau:
Bước 1: Kiểm tra mệnh đề đúng với $n = p$ (1).
Bước 2: Giả sử mệnh đề đúng với số nguyên dương $n = k(k \geq p)$.
Ta chứng minh rằng mệnh đề cũng đúng với $n = k + 1$ (2).
Kết luận: Từ (1) và (2) theo quy nạp ta suy ra mệnh đề $A(n)$ đúng $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq p$.

Ví dụ

Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ $(*)$

Giải

Bước 1. Khi $n = 1$, vế trái $(*)$ là 1, vế phải $(*)$ là $1^2 \Rightarrow (*)$ đúng với $n = 1$ (1)
Bước 2. Đặt vế trái $(*)$ bằng S_n.
Giả sử $(*)$ đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là
$$S_k = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2 \text{ (giả thiết quy nạp).}$$
Ta phải chứng minh rằng $(*)$ cũng đúng với $n = k + 1$, tức là
$$S_{k+1} = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2$$
Từ giả thiết quy nạp ta có:
$$S_{k+1} = S_k + [2(k + 1) - 1] = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$
$\Rightarrow$ Mệnh đề đúng với $n = k + 1$ (2)
Kết luận: Từ (1), (2) theo quy nạp suy ra $(*)$ đúng $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ

Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $2^n > n$ $(*)$

Giải

Bước 1: Với $n = 1$, $(*)$ có dạng $2^1 > 1 \Rightarrow (*)$ đúng với $n = 1$ (1)
Bước 2: Giả sử $(*)$ đúng với $n = k \geq 1$, tức là: $2^k > k$ (giả thiết quy nạp)
Ta cần chứng minh $(*)$ đúng với $n = k + 1$, tức là $2^{k+1} > k + 1$.
Ta có $2^{k+1} = 2^k . 2 > 2k$
Mà $2k \geq k + 1 \Leftrightarrow k \geq 1$ (luôn đúng $\forall k \in \mathbb{N}^*$).
Suy ra $2^{k+1} > 2k \geq k + 1 \Rightarrow 2^{k+1} > k + 1$ mệnh đề đúng với $n = k + 1$ (2)
Kết luận: Từ (1), (2) theo quy nạp $(*)$ đúng $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ

Chứng minh rằng số đường chéo của một đa giác lồi n cạnh là $\frac{n(n-3)}{2}$ với $n \geq 3$.

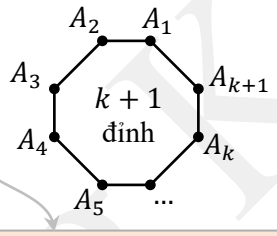
Giải

Bước 1: Với $n = 3$ thì mệnh đề đúng vì tam giác có số đường chéo là $0 = \frac{3(3-3)}{2}$. (1)

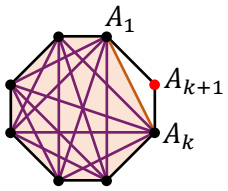
Bước 2: Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 3$. Tức là số đường chéo của một đa giác lồi k cạnh là $\frac{k(k-3)}{2}$.

Ta cần chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$. Tức là số đường chéo của một đa giác lồi $k + 1$ cạnh là $\frac{(k+1)(k-2)}{2}$.

Ta gọi các đỉnh của đa giác có $k + 1$ cạnh là $A_1, A_2, \ldots, A_{k+1}$.
Đa giác gồm $k + 1$ đỉnh này sẽ chỉ gồm có 2 loại đường chéo đó là:

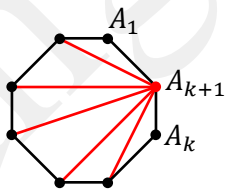


Loại đường chéo không có đầu mút là điểm A_{k+1}

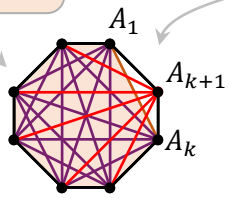


Loại đường chéo không có đầu mút là điểm A_{k+1}. Các đường chéo loại này sẽ là các đường chéo của một đa giác gồm k đỉnh còn lại của đa giác $k + 1$ đỉnh sau khi đã bỏ đi đỉnh A_{k+1} và thêm 1 cạnh nối A_1 và A_k $\Rightarrow$ có tất cả $\frac{k(k-3)}{2} + 1$ đường chéo loại này.

Loại đường chéo có đầu mút là điểm A_{k+1}.



Loại đường chéo có đầu mút là điểm A_{k+1} thì đầu mút còn lại không được phép là 2 đỉnh kề với A_{k+1} nên có $(k + 1) - 3$ đường chéo loại này.



Vậy suy ra có $\frac{k(k-3)}{2} + 1 + (k + 1) - 3 = \frac{(k+1)(k-2)}{2}$
$\Rightarrow$ Mệnh đề đúng với $n = k + 1$. (2)

Kết luận: Từ (1), (2) suy ra mệnh đề đúng $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3$.

Thầy Lê Trung Kiên

DÃY SỐ

141. Định nghĩa dãy số

Dãy số vô hạn phần tử	Dãy số hữu hạn phần tử
Mỗi hàm số u xác định trên tập số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số). Kí hiệu: $u : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ $n \mapsto u(n)$ Trong đó $u_n = u(n)$ là số hạng thứ n và gọi nó là số hạng tổng quát của dãy số, u_1 là số hạng đầu của dãy số.	Mỗi hàm số u xác định trên tập số $M = \{1, 2, 3, \ldots, m\}$, với $m \in \mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số hữu hạn. Kí hiệu: $u : M \to \mathbb{R}$ $n \mapsto u(n)$ Trong đó u_1 là số hạng đầu, u_m là số hạng cuối.

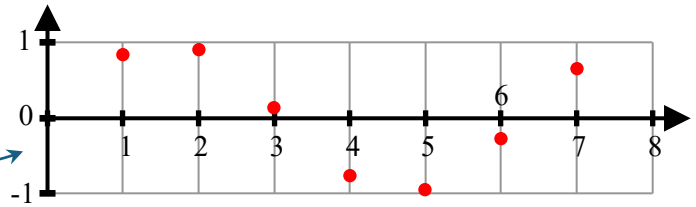
142. Những cách cho dãy số

Cách cho dãy số	Ví dụ
Cho dãy số dưới dạng liệt kê: $(u_n) = u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots$	Dãy $(a_n) = 2, 4, 6, 8, 10, \ldots$ là dãy các số tự nhiên chẵn (dãy này gồm vô số phần tử). Dãy $(b_n) = 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, \ldots$ là dãy bình phương của các số tự nhiên khác 0 (dãy này gồm vô số phần tử).
Cho dãy số dưới dạng công thức số hạng thứ n (công thức số hạng tổng quát): $u_n = f(n)$	$c_n = \sqrt{n^2 + 1}$ $d_n = \sqrt{2}n^2 + \sqrt[3]{n^7} + 1$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$
Cho dãy số dưới dạng công thức truy hồi: – Cho 1 vài số hạng đầu. – Và công thức $u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots)$ (công thức u_n phụ thuộc vào 1 vài số hạng đứng trước nó)	$u_1 = -3,\ u_n = 2u_{n-1} + 3$ $v_1 = 1, v_2 = 4, v_n = 5v_{n-1}^2 + \dfrac{5}{v_{n-2}}$
Dãy số cho bằng phương pháp mô tả: Người ta cho một mệnh đề mô tả cách xác định các số hạng liên tiếp của dãy số.	Ví dụ: Số $\pi = 3{,}1415926535 \ldots$ Nếu lập dãy số (u_n) với u_n là giá trị gần đúng của số π làm tròn đến chữ số thập phân thứ n thì: $u_1 = 3{,}1;\ u_2 = 3{,}14;\ u_3 = 3{,}141;\ \ldots$

143. Biểu diễn hình học của dãy số

Vì dãy số là một hàm số trên $\mathbb{N}^*$ nên ta có thể biểu diễn dãy số bằng đồ thị. Khi đó, trong mặt phẳng tọa độ, dãy số được biểu diễn bằng các điểm có tọa độ (n, u_n).

Ví dụ: Cho dãy số có công thức tổng quát $u_n = \sin n$ (n đo bằng radian)
Khi đó ta có: $u_1 = \sin 1,\ u_2 = \sin 2,\ u_3 = \sin 3, \ldots$ Biểu diễn hình học của dãy số là hình vẽ bên:



144. Tính tăng, giảm của dãy số

(u_n) là **dãy số tăng** $\Leftrightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$	(u_n) là **dãy số giảm** $\Leftrightarrow u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$
Nếu dãy số $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) tăng $\Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$	Nếu dãy số $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) giảm $\Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$
Phương pháp chứng minh dãy số tăng **(Đề bài yêu cầu rõ chứng minh dãy số tăng)** **Cách 1:** (Chứng minh tương đương) – Ta giả sử $u_{n+1} > u_n$. – Bằng các biến đổi tương đương (với điều kiện $n \in \mathbb{N}^*$) ta biến đổi để : $u_{n+1} > u_n \Leftrightarrow$… Các biến đổi trung gian … $\Leftrightarrow$ Một kết quả luôn đúng khi $n \in \mathbb{N}^*$ – Suy ra $u_{n+1} > u_n$ đúng $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_n$ tăng. **Cách 2:** Nếu dãy số u_n là dãy số dương (tức là $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$) thì ta có thể làm như sau: – Ta giả sử $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. – Bằng các biến đổi tương đương (với điều kiện $n \in \mathbb{N}^*$) ta biến đổi để: $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Leftrightarrow$… Các biến đổi trung gian … $\Leftrightarrow$ Một kết quả luôn đúng khi $n \in \mathbb{N}^*$ – Suy ra $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ đúng $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_n$ tăng. **Cách 3:** Tính giá trị $u_{n+1} - u_n$ và sau đó chứng minh giá trị này luôn dương. Từ đó suy ra u_n là dãy số tăng. **Cách 4**: Nếu dãy số u_n là dãy số dương (tức là $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$). Thì ta có thể làm như sau: Tính giá trị $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ và sau đó chứng minh giá trị này luôn lớn hơn 1. Từ đó suy ra u_n là dãy số tăng.	**Phương pháp chứng minh dãy số giảm** **(Đề bài yêu cầu rõ chứng minh dãy số giảm)** **Cách 1:** (Chứng minh tương đương) – Ta giả sử $u_{n+1} < u_n$. – Bằng các biến đổi tương đương (với điều kiện $n \in \mathbb{N}^*$) ta biến đổi để : $u_{n+1} < u_n \Leftrightarrow$… Các biến đổi trung gian … $\Leftrightarrow$ Một kết quả luôn đúng khi $n \in \mathbb{N}^*$ – Suy ra $u_{n+1} < u_n$ đúng $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_n$ giảm. **Cách 2:** Nếu dãy số u_n là dãy số dương (tức là $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$) thì ta có thể làm như sau: – Ta giả sử $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$. – Bằng các biến đổi tương đương (với điều kiện $n \in \mathbb{N}^*$) ta biến đổi để: $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Leftrightarrow$… Các biến đổi trung gian … $\Leftrightarrow$ Một kết quả luôn đúng khi $n \in \mathbb{N}^*$ – Suy ra $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ đúng $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_n$ giảm. **Cách 3:** Tính giá trị $u_{n+1} - u_n$ và sau đó chứng minh giá trị này luôn âm. Từ đó suy ra u_n là dãy số giảm. **Cách 4**: Nếu dãy số u_n là dãy số dương (tức là $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$). Thì ta có thể làm như sau: Tính giá trị $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ và sau đó chứng minh giá trị này luôn nhỏ hơn 1. Từ đó suy ra u_n là dãy số giảm.

Thầy Lê Tuấn Kiên

145. Phương pháp xét tính tăng, giảm của dãy số

Đề bài chỉ yêu cầu xét tính đơn điệu của dãy số, chưa cho biết phải chứng minh dãy số là tăng, hay giảm, hay không tăng cũng không giảm.

🚨 **Lưu ý**: Có thể sử dụng máy tính bỏ túi để dự đoán trước tính đơn điệu của dãy số. Sử dụng chức năng lập bảng Table hoặc chức năng thay thế giá trị CALC của máy tính bỏ túi.

🚨 **Lưu ý:** khi bài toán yêu cầu xét tính tăng, giảm của dãy số, nếu ta lựa chọn chứng minh theo cách giả sử tính tăng (giảm của dãy số) mà không biết trước được dãy số đó là tăng hay giảm, thì ta cứ giả sử là nó tăng (hoặc giảm), sau đó biến đổi tương đương để được một biểu thức luôn đúng hoặc luôn sai (với điều kiện $n \in \mathbb{N}^*$). Nếu ra biểu thức luôn đúng thì giả sử là đúng, nếu ra biểu thức luôn sai thì giả sử là sai (tức là điều ngược lại là đúng).

Cách 1: Tính $u_{n+1} - u_n$

- Nếu $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_n$ là dãy số tăng.
- Nếu $u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_n$ là dãy số giảm.

Cách 2: Nếu $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tính tỷ số $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

- Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_n$ dãy số tăng.
- Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_n$ dãy số giảm.

Cách 3: Giả sử tính tăng giảm như $u_{n+1} > u_n$ (hay $u_{n+1} < u_n$) rồi chứng minh tương đương ra một biểu thức luôn đúng hoặc luôn sai và đưa ra kết luận phù hợp.

Cách 4: Chỉ ra một thí dụ cụ thể cho thấy có lúc dãy tăng, có lúc lại giảm từ đó suy ra dãy không tăng cũng không giảm.

146. Dãy số bị chặn

Các định nghĩa:
(u_n) là dãy số bị **chặn trên** $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}: u_n \le M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
(u_n) là dãy số bị **chặn dưới** $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}: m \le u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
(u_n) là dãy số **bị chặn** $\Leftrightarrow (u_n)$ bị chặn trên và bị chặn dưới
$\Leftrightarrow \exists m, M \in \mathbb{R}: m \le u_n \le M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

🚨 **Lưu ý:** 👉Để xét tính chặn của một dãy số, ta thường sử dụng các tính chất của bất đẳng thức.
👉Có thể sử dụng máy tính bỏ túi để dự đoán về tính bị chặn của dãy số bằng cách tính ra nhiều số hạng đầu của dãy số và đưa ra các nhận định phù hợp. Sử dụng chức năng lập bảng Table hoặc chức năng thay thế giá trị CALC của máy tính bỏ túi.

147. Công thức số hạng tổng quát dạng đa thức

Cho dãy số $(u_n) = u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, ...$
Ta thử lập ra 1 bảng như sau:

	Trừ lần 1	Trừ lần 2	
u_1	$u_2 - u_1 = a_1$	$a_2 - a_1 = b_1$	
u_2	$u_3 - u_2 = a_2$	$a_3 - a_2 = b_2$	
u_3	$u_4 - u_3 = a_3$	$a_4 - a_3 = b_3$	...
u_4	$u_5 - u_4 = a_4$	$a_5 - a_4 = b_4$	
u_5	$u_6 - u_5 = a_5$	...	
u_6	...		
...			

Nếu ở lần trừ thứ n nào đó mà các giá trị đều bằng nhau thì dãy số u_n có công thức tổng quát là đa thức bậc n. Lập hệ phương trình để giải và tìm ra các hệ số của đa thức này.

Thầy Lê Trung Kiên

148. Dãy tổng có dạng $S_{n+1} = S_n +$ Đa thức bậc m

Cho tổng $S_n =$ Công thức theo n. Nếu tổng có dạng: $S_{n+1} = S_n +$ (Đa thức bậc m)
$\Rightarrow S_n =$ Đa thức bậc $(m+1)$ theo biến n, các hệ số của đa thức bậc $(m+1)$ theo biến n này được tìm bằng cách lập một hệ phương trình ứng với $(m+2)$ giá trị đầu tiên của S_n.

Ví dụ

Cho $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3$. Tìm công thức tổng quát của S_n?

Bước dự đoán công thức (làm ngoài nháp):

Ta có: $S_{n+1} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = S_n + \underbrace{(n+1)^3}_{\text{Đa thức bậc 3}}$

$\Rightarrow S_n =$ Đa thức bậc $4 = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e$

Bấm máy tính ta có $S_1 = 1, S_2 = 9, S_3 = 36, S_4 = 100, S_5 = 225$.

Ta có hệ: $\begin{cases} a\cdot 1^4 + b\cdot 1^3 + c\cdot 1^2 + d\cdot 1 + e = 1 & (1) \\ a\cdot 2^4 + b\cdot 2^3 + c\cdot 2^2 + d\cdot 2 + e = 9 & (2) \\ a\cdot 3^4 + b\cdot 3^3 + c\cdot 3^2 + d\cdot 3 + e = 36 & (3) \\ a\cdot 4^4 + b\cdot 4^3 + c\cdot 4^2 + d\cdot 4 + e = 100 & (4) \\ a\cdot 5^4 + b\cdot 5^3 + c\cdot 5^2 + d\cdot 5 + e = 225 & (5) \end{cases}$

(Lưu ý: máy tính chỉ có thể giải đến hệ phương trình bậc nhất 4 ẩn số)

Lấy các phương trình $(2), (3), (4), (5)$ lần lượt trừ đi (1) thì biến e mất đi, ta được hệ 4 ẩn:

$$\begin{cases} 15a + 7b + 3c + d = 8 \\ 80a + 26b + 8c + 2d = 35 \\ 255a + 63b + 15c + 3d = 99 \\ 624a + 124b + 24c + 4d = 224 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{4} \\ b = \dfrac{1}{2} \\ c = \dfrac{1}{4} \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow e = 0 \Rightarrow S_n = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

Vậy ta dự đoán $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$

Cách kiểm ta lại bằng máy tính: Nhập vào máy tính như sau: $\sum_{x=1}^{x}(x^3) - \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2\right)$

Sau đó CALC các số nguyên từ 1 → khoảng 15 ta thấy đều ra 0 chứng tỏ 2 công thức này bằng nhau!

Bước trình bày tự luận: Ta đi chứng minh bằng quy nạp công thức:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

Thầy Lê Trung Kiên

Ví dụ

Cho $S_n = 1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 5 + 4\cdot 6 + 5\cdot 7 + \cdots + n\cdot(n+2)$. Tìm công thức tổng quát của S_n.

Giải

$S_{n+1} = S_n + \underbrace{(n+1)\big((n+1)+2\big)}_{\text{Đa thức bậc 2}} \Rightarrow S_n = \text{Đa thức bậc 3} = an^3 + bn^2 + cn + d$

Ta có $S_1 = 3, S_2 = 11, S_3 = 26, S_4 = 50$

Ta có hệ: $\begin{cases} 1^3a + 1^2b + 1c + d = 3 \\ 2^3a + 2^2b + 2c + d = 11 \\ 3^3a + 3^2b + 3c + d = 26 \\ 4^3a + 4^2b + 4c + d = 50 \end{cases} \xLeftrightarrow{\text{Bấm máy hệ 4 ẩn}} \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{3}{2} \\ c = \frac{7}{6} \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow S_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{6}n$

Có thể kiểm tra lại bằng máy tính: $\sum_{x=1}^{x} x(x+2) - \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{6}x\right)$

Sau đó CALC các số nguyên từ 1 → khoảng 15 ta thấy đều ra 0 chứng tỏ 2 công thức này trùng nhau!

149. Dãy tổng dạng $S_{n+1} = S_n + (\text{Đa thức bậc m theo n}) \times \beta^n$

Nếu một dãy số có dạng: $S_{n+1} = S_n + (\text{Đa thức bậc } m \text{ theo } n) \times \beta^n$

$\Rightarrow S_n = (\text{Đa thức bậc } m \text{ theo } n) \times \beta^n + C$

S_n sẽ bao gồm $m+1$ ẩn số của Đa thức bậc m theo biến n và ẩn C, như vậy có tất cả là $m+2$ ẩn được tìm bằng cách thiết lập hệ từ $m+2$ giá trị đầu tiên của dãy.

Ví dụ

Tìm công thức của tổng: $S_n = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \cdots + \frac{n}{2^n}$

Giải

Ta có: $S_{n+1} = S_n + \frac{n+1}{2^{n+1}} \Rightarrow S_{n+1} = S_n + \underbrace{\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right)}_{\text{Đa thức bậc 1}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\Rightarrow S_n = (bn + c)\left(\frac{1}{2}\right)^n + d$

Ta có: $S_1 = \frac{1}{2}, S_2 = 1, S_3 = \frac{11}{8}$

Ta có hệ: $\begin{cases} (b\cdot 1 + c)\left(\frac{1}{2}\right)^1 + d = \frac{1}{2} \\ (b\cdot 2 + c)\left(\frac{1}{2}\right)^2 + d = 1 \\ (b\cdot 3 + c)\left(\frac{1}{2}\right)^3 + d = \frac{11}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ c = -2 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow S_n = (-n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$

Thầy Lê Trung Kiên

150. Dãy số $u_n = A \times u_{n-1} + B$

Cho dãy số $u_n = Au_{n-1} + B$ không phải cấp số cộng tức là $A \neq 0$ và $A \neq 1$; A, B là các hằng số. Để tìm được công thức của dãy số u_n ta làm như sau. Ta sẽ tìm cách đưa dãy số về dạng cấp số nhân.

Đặt $v_n = Ku_n + D \Rightarrow v_{n+1} = Ku_{n+1} + D$

Tìm điều kiện để v_n là cấp số nhân.

$v_{n+1} = Qv_n$ (Trong đó Q là công bội của dãy v_n và ta hiện chưa biết)

$$\Rightarrow Ku_{n+1} + D = Q(Ku_n + D)$$

$$\Rightarrow K(Au_n + B) + D = Q(Ku_n + D)$$

$\Rightarrow u_n(KA - QK) + (KB + D - QD) = 0$ (vì công thức này đúng với mọi u_n nên ta suy ra chỉ có thể xảy ra trường hợp $u_n \times 0 + 0 = 0$)

$$\Rightarrow \begin{cases} KA - QK = 0 \\ KB + D - QD = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K(A - Q) = 0 \\ KB + D - QD = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = Q \\ KB + D - AD = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = Q \\ KB = D(A - 1) \end{cases}$$

$$\text{Chọn } K = 1 \Rightarrow D = \frac{B}{A - 1}$$

Quá trình được rút gọn như sau:

Cho dãy số $u_n = Au_{n-1} + B$ ($A \neq 0$ và $A \neq 1$)

Khi đó nếu đặt $v_n = u_n + D$ (D là số cần tìm).

Nếu D được chọn thích hợp thì (v_n) sẽ là một cấp số nhân. Để tìm D ta làm như sau.

Bước 1: Tính u_1 và u_2

Bước 2: Vì v_n là cấp số nhân $\Rightarrow v_{n+1} = Av_n$

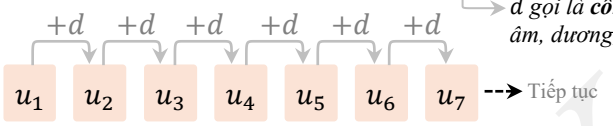
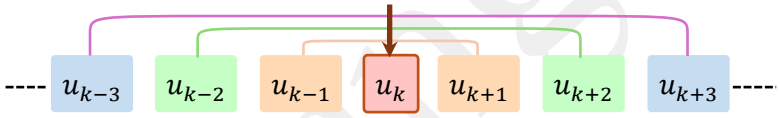
$\Rightarrow v_2 = Av_1 \Rightarrow u_2 + D = A(u_1 + D) \Rightarrow$ giải ra D

Bước 3: Vì $v_{n+1} = Av_n \Rightarrow v_n = v_1 A^{n-1}$

$\Rightarrow u_n + D = v_1 A^{n-1} \Rightarrow$ Giải ra u_n

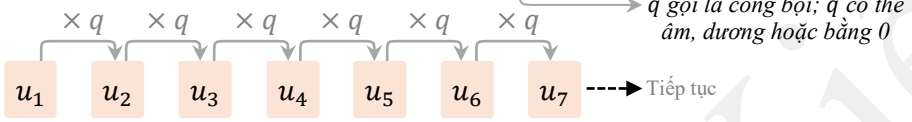
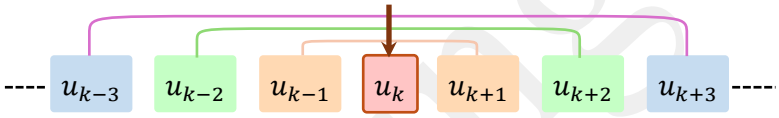
Thầy Lê Trung Kiên

CẤP SỐ CỘNG

Định nghĩa	Số sau = Số trước + 1 số không đổi Dãy số (u_n) là **cấp số cộng** $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + d, \forall n \in \mathbb{N}^*$ *d gọi là **công sai**; d có thể âm, dương, hoặc bằng 0* 
Tính chất	*Trung bình cộng của 2 số 2 bên bằng số chính giữa, tức là:* $u_k = \dfrac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$ với $k \geq 2$ **Tổng quát:** *Trung bình cộng của 2 số cách đều 2 bên của 1 số thì bằng số chính giữa, tức là:* $u_k = \dfrac{u_{k-l} + u_{k+l}}{2}$ với $k - l \geq 1$ 
Số hạng tổng quát	$u_n = u_1 + (n-1)d, \forall n \in \mathbb{N}^*$
Tổng của n số hạng đầu tiên	$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \dfrac{n(u_1 + u_n)}{2}$ $= \dfrac{(\text{Số đầu} + \text{Số cuối}) \times \text{Số lượng số hạng}}{2}$ $= \dfrac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$ **Số lượng số hạng** $= \dfrac{\text{Số cuối} - \text{Số đầu}}{\underbrace{\text{Độ tăng giữa 2 số liên tiếp}}_{\text{Lấy số sau trừ số trước}}} + 1$
Một số nhận xét	(u_n) là cấp số cộng $\Leftrightarrow u_n =$ hàm bậc nhất theo biến n
	Nếu $u_n = an + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thì (u_n) là cấp số cộng và $u_1 = a + b$ và công sai $d = a$
	Điều kiện để 3 số a, b, c lập thành một cấp số cộng theo đúng thứ tự đó là : $\dfrac{a + c}{2} = b$

Thầy Lê Trung Kiên

CẤP SỐ NHÂN

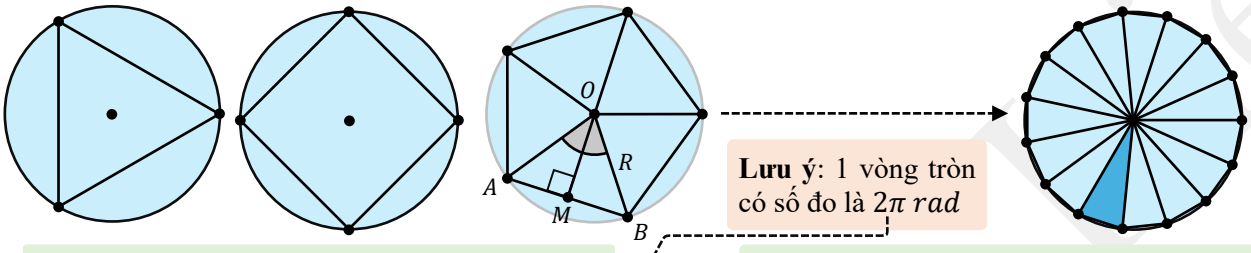
Định nghĩa	Số sau = Số trước × 1 số không đổi Dãy số (u_n) là **cấp số nhân** $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n \cdot q, \forall n \in \mathbb{N}^*$ q gọi là công bội; q có thể âm, dương hoặc bằng 0 
Số hạng tổng quát	$u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \ (\forall n \in \mathbb{N}^*)$
Tính chất	*Trung bình nhân của 2 số 2 bên bằng bình phương số chính giữa, tức là:* $u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1}$ với $k \geq 2$ **Tổng quát:** *Trung bình nhân của 2 số cách đều 2 bên của 1 số bằng bình phương số chính giữa, tức là:* $u_k^2 = u_{k-l} \cdot u_{k+l}$ với $k - l \geq 1$ 
Tổng n số hạng đầu tiên	Nếu $q = 1$ thì : $S_n = u_1 + u_2 + u_2 + \cdots + u_n = nu_1$ Nếu $q \neq 1$ thì : $S_n = u_1 + u_2 + u_2 + \cdots + u_n = u_1 \times \dfrac{(1 - q^n)}{1 - q}$ $= \text{Số hạng đầu} \times \dfrac{1 - (\text{Công bội})^{\text{Số lượng số hạng}}}{1 - \text{Công bội}}$
Một số nhận xét	Nếu $u_n = a \times b^n \ (a, b \in \mathbb{R})$ thì (u_n) là cấp số nhân và $u_1 = a \times b$ và công bội $d = b$
	Điều kiện để ba số a, b, c lập thành một cấp số nhân theo đúng thứ tự đó là : $a \cdot c = b^2$

Thầy Lê Trọng Kiên

GIỚI HẠN DÃY SỐ

151. Một bài toán mở đầu về khái niệm giới hạn dãy số

Tính gần đúng diện tích hình tròn dựa vào diện tích đa giác đều và xấp xỉ số π



Lưu ý: 1 vòng tròn có số đo là $2\pi\ rad$

Xét ngũ giác đều nội tiếp đường tròn bán kính R

$$MB = R \times \sin\widehat{MOB} = R \times \sin\left(\frac{2\pi}{5} \div 2\right)$$

$$OB = R \times \cos\widehat{MOB} = R \times \cos\left(\frac{2\pi}{5} \div 2\right)$$

$$S_{\text{Ngũ giác}} =$$

$$= 5 \times \underbrace{\frac{1}{2} \times \left(\overbrace{2 \times \overbrace{R}^{AB} \times \sin\frac{\pi}{5}}^{MB}\right) \times \left(\overbrace{R \times \cos\frac{\pi}{5}}^{OM}\right)}_{S_{\Delta AOB}}$$

$$= \frac{5}{2}R^2 \sin\frac{\pi \times 2}{5}$$

Tổng quát: Xét đa giác đều n cạnh nội tiếp đường tròn bán kính R

$$S_{\text{Đa giác đều } n \text{ cạnh}} =$$

$$= n \times \underbrace{\frac{1}{2} \times \left(2 \times R \times \sin\frac{\pi}{n}\right) \times \left(R \times \cos\frac{\pi}{n}\right)}_{S_{1 \text{ tam giác nhỏ thành phần}}}$$

$$= \frac{n}{2}R^2 \sin\frac{2\pi}{n}$$

Về mặt trực quan ta thấy khi n ngày càng lớn dần

$$n = 100 \to n = 10000 \to \cdots \to n = +\infty$$

Thì đa giác đều n cạnh sẽ ngày càng trùng với hình tròn, từ đó ta có:

$$\pi R^2 \approx \frac{n}{2}R^2 \sin\frac{2\pi}{n} \text{ (khi } n \text{ rất rất lớn)}$$

$$\Rightarrow \pi \approx \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n} \text{ (khi } n \text{ rất rất lớn)}$$

Vậy ta kí hiệu $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n} = \pi$

Chúng ta có thể bấm thử máy tính để kiểm chứng $\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$ sẽ ngày càng xấp xỉ π khi n là số nguyên dương ngày càng lớn.

Bấm máy công thức: $\frac{x}{2}\sin\frac{2\pi}{x}$ (máy để ở chế độ rad), sau đó CALC các giá trị x như sau:

x	Kết quả
100	**3.1**39525976
1000 (1 nghìn)	**3.1415**71983
10000 (10 nghìn)	**3.141592**447
1000000 (1 triệu)	**3.141592654**
10000000 (10 triệu)	**3.141592654**
…	…

Giá trị làm tròn của số π tối đa mà máy tính có thể hiển thị là:

$\pi \approx$ **3.141592654**

Từ bảng giá trị ta dễ thấy n càng tiến về $+\infty$ thì giá trị $\frac{x}{2}\sin\frac{2\pi}{x}$ ngày càng xấp xỉ π (hay ngày càng tiến về gần π).

Học sinh có thể thử tính gần đúng chu vi hình tròn dựa vào đa giác đều nội tiếp và xấp xỉ số π bằng một cách thức tương tự như cách thức ở trên.

152. Giới hạn dãy số là gì?

Đi tìm giới hạn dãy số (u_n) tức là đi trả lời câu hỏi: "*Khi n ngày càng tiến về dương vô cực thì giá trị u_n như thế nào?*" → hay "*Khi n trở nên rất rất lớn thì giá trị u_n như thế nào?*"

Câu trả lời của câu hỏi: "*Khi n ngày càng tiến về dương vô cực thì giá trị u_n như thế nào?*" chỉ có thể là một trong các ý sau:

- Giá trị u_n ngày càng xấp xỉ 1 con số cụ thể nào đó (có thể là số nguyên, phân số hoặc số vô tỷ)
  - hoặc Giá trị u_n ngày càng tiến tới 1 con số cụ thể nào đó
  - hoặc Giá trị u_n ngày càng tiến gần một con số cụ thể nào đó
  - hoặc Giá trị u_n ngày càng bằng một con số cụ thể nào đó
  - hoặc Giá trị u_n bằng một con số cụ thể nào đó

  VD: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{2n^2-1}=0$

  VD: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n+1}{2n-1}=\dfrac{3}{2}$

  VD: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\approx 2{,}71828$

  VD: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin n}{n}=1$
- Giá trị u_n trở nên rất rất lớn (hoặc giá trị u_n ngày càng lớn dần) — VD7: $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2=+\infty$; VD8: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5n^2+1}{\sqrt{2}n}=+\infty$
- Giá trị u_n tiến mãi về phía âm (hoặc giá trị u_n ngày càng âm dần) — VD9: $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-n^2)=-\infty$; VD10: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-5n^2+1}{\sqrt{2}n}=-\infty$
- Giá trị u_n không thỏa mãn cả 3 trạng thái ở trên (tức là u_n không tiến về 1 số cụ thể, u_n không tiến về $+\infty$ cũng chẳng tiến về $-\infty$)

  VD11: $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n$ không tồn tại; VD12: $\lim\limits_{n\to+\infty}(n\sin n)$ không tồn tại

153. Bấm máy tính tìm giới hạn dãy số

Ví dụ: Bấm máy tính tìm giới hạn dãy số

Tìm giới hạn của dãy số sau:

$$u_n=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{4n^2+1}-n}$$

Nhập vào máy tính

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{4x^2+1}-x}$$

CALC các giá trị x như sau:

x	$\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{4x^2+1}-x}$
100	$-4{,}987437427\times10^{-4}$
1000 (1 nghìn)	$-1{,}580743348\times10^{-5}$
10000 (10 nghìn)	$-4{,}999874994\times10^{-7}$
100000 (100 nghìn)	$-1.581134877\times10^{-8}$

Nhìn vào sự thay đổi của giá trị dãy số ta dự đoán khi x ngày càng lớn thì u_n sẽ ngày càng tiến gần về số 0.

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{4n^2+1}-n}=0$$

🚨 **Lưu ý**: số có dạng "số $\times 10^{-\text{số nguyên dương}}$" là những số rất gần với số 0
VD: $-1.581134877\times10^{-8}=-0.00000001581134877\approx 0$

Ví dụ: Bấm máy tính tìm giới hạn dãy số

Tìm giới hạn của dãy số sau:

$$u_n = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{4n^2+1} - n}$$

Nhập vào máy tính

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{4x^2+1} - x}$$

CALC các giá trị x như sau:

x	$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{4x^2+1} - x}$
100	$-4{,}987437427 \times 10^{-4}$
1000 (1 nghìn)	$-1{,}580743348 \times 10^{-5}$
10000 (10 nghìn)	$-4{,}999874994 \times 10^{-7}$
100000 (100 nghìn)	$-1.581134877 \times 10^{-8}$

Nhìn vào sự thay đổi của giá trị dãy số ta dự đoán khi x ngày càng lớn thì u_n sẽ ngày càng tiến gần về số 0.

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{4n^2+1} - n} = 0$$

🚨 **Lưu ý**: số có dạng "số $\times 10^{-\text{số nguyên dương}}$" là những số rất gần với số 0
VD: $-1.581134877 \times 10^{-8} = -0.00000001581134877 \approx 0$

Ví dụ: Bấm máy tính tìm giới hạn dãy số

Tìm giới hạn của dãy số sau:

$$u_n = \frac{n^2 - 3n + 1}{1 - 2n\sqrt{n} + 2n^2}$$

Nhập vào máy tính

$$\frac{x^2 - 3x + 1}{1 - 2x\sqrt{x} + 2x^2}$$

CALC các giá trị x như sau:

x	$\frac{x^2 - 3x + 1}{1 - 2x\sqrt{x} + 2x^2}$
100	0,5389145047
1000 (1 nghìn)	0,5147789834
10000 (10 nghìn)	0,5048989924
1000000 (1 triệu)	0,500498999
100000000 (100 triệu)	0,50004999

Nhìn vào sự thay đổi của giá trị dãy số ta dự đoán khi x ngày càng lớn thì u_n sẽ ngày càng tiến gần về số 0,5.

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 - 3n + 1}{1 - 2n\sqrt{n} + 2n^2} = 0{,}5$$

🚨 Lưu ý: để nhập nhanh các số có nhiều số 0 ở cuối ta làm như sau:
VD: 1 triệu $= 1 \times 10^6$ bấm [1] [$\times 10^x$] [6]
VD: 100 triệu $= 1 \times 10^8$ bấm [1] [$\times 10^x$] [8] hoặc [1] [0] [0] [$\times 10^x$] [6]
VD: 250 tỷ $= 250 \times 10^9$ bấm [2] [5] [0] [$\times 10^x$] [9]

Thầy Lê Trung Kiên

Ví dụ: Bấm máy tính tìm giới hạn dãy số

Tìm giới hạn của dãy số sau:

$$u_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$$

Nhập vào máy tính

$$\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$$

CALC các giá trị x như sau:

x	$\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$
100	7,244646118
1000 (1 nghìn)	7,37431239
10000 (10 nghìn)	7,388908321
1000000 (1 triệu)	7,389041321
100000000 (100 triệu)	7,389055951
1×10^{12}	7,389056099

Nhìn vào sự thay đổi của giá trị dãy số ta dự đoán khi x ngày càng lớn thì u_n sẽ ngày càng tiến gần về số 7,38905.

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n \approx 7{,}38905$$

🚨 Lưu ý: nếu ở bài này ta tăng dần giá trị n như sau:

x	$\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$
1×10^{13}	7,389056099
1×10^{14}	7,389056099
1×10^{15}	7,389056099
1×10^{16}	1
1×10^{17}	1
1×10^{18}	1

Máy tính có thể hiện sai kết quả!

Một số máy tính bắt đầu hiện ra kết quả như thế này! Giá trị dãy số bỗng biến thành 1. Tại sao lại như vậy? Nguyên nhân là do khi giá trị x quá lớn dẫn đến sự làm tròn số bị sai sót dẫn đến kết quả tính toán sai lầm!

Như vậy:

👉Khi $n\to+\infty$ ta CALC các số lớn, nhưng không nên nhập các số rất lớn.

👉Nên nhập các giá trị n một cách từ từ và tăng dần, quan sát sự thay đổi kết quả để đưa ra các suy đoán thích hợp.

👉Nếu giá trị dãy số bỗng thay đổi một cách đột ngột so với dự đoán (khi CALC các giá trị rất lớn) thì phải cẩn thận giá trị đó có thể là giá trị sai do số quá lớn dẫn đến máy tính làm tròn không đúng.

Ví dụ: Bấm máy tính tìm giới hạn dãy số

Tìm giới hạn của dãy số sau:

$$u_n = \frac{n^4+6n^2+1}{-3n^2-\sqrt{n}}$$

Nhập vào máy tính

$$\frac{x^4+6x^2+1}{-3x^2-\sqrt{x}}$$

CALC các giá trị x như sau:

x	$\frac{x^4+6x^2+1}{-3x^2-\sqrt{x}}$
100	$-3334{,}221959$
1000 (1 nghìn)	$-333331{,}8197$
100000 (100 nghìn)	-3333333300

Nhìn vào sự thay đổi của giá trị dãy số ta dự đoán khi x ngày càng lớn thì u_n sẽ ngày càng tiến gần về số $-\infty$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{n^4+6n^2+1}{-3n^2-\sqrt{n}} = -\infty$$

Thầy Lê Văn Tiến

Ví dụ: Bấm máy tính tìm giới hạn dãy số

Tìm giới hạn của dãy số sau: $u_n = n^5 - 3n^2 + \sin n$

Nhập vào máy tính $x^5 - 3x^2 + \sin x$ (Máy tính để ở chế độ rad)

CALC các giá trị x như sau:

x	$x^5 - 3x^2 + \sin x$
100	9999969999
1000 (1 nghìn)	$9{,}99999997 \times 10^{14}$
100000 (100 nghìn)	$1 \times 10^{25} = 10000000000000000000000000$

Nhìn vào sự thay đổi của giá trị dãy số ta dự đoán khi x ngày càng lớn thì u_n sẽ ngày càng tiến gần về số $+\infty$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (n^5 - 3n^2 + \sin n) = +\infty$

Ví dụ: Bấm máy tính tìm giới hạn dãy số

Tìm giới hạn của dãy số sau: $u_n = n \sin n$

Nhập vào máy tính $x \sin x$ (Máy tính để ở chế độ rad)

CALC các giá trị x như sau:

x	$x \sin x$
100	$-50{,}63656411$
1000 (1 nghìn)	$826{,}8795405$
10000 (10 nghìn)	$-3056{,}143889$
100000 (100 nghìn)	$3574{,}879797$
1 triệu	$-349993{,}5022$
10 triệu	$4205477{,}932$

Nhìn vào sự thay đổi của giá trị dãy số ta nhận thấy dãy số không tiến về 1 số cụ thể, cũng không tiến về $-\infty$, cũng không tiến về $+\infty$, như vậy nhìn chung dãy số không có giới hạn (tức là nó không tiến về đâu hết!)

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (n^5 - 3n^2 + \sin n)$ không tồn tại.

Ví dụ: Bấm máy tính tìm giới hạn dãy số

Tìm giới hạn của dãy số sau: $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$

Nhập vào máy tính $\dfrac{\sin x}{x}$ (Máy tính để ở chế độ rad)

CALC các giá trị x như sau:

x	$\dfrac{\sin x}{x}$
100	$-5{,}063656411 \times 10^{-3}$
1000 (1 nghìn)	$8{,}268795405 \times 10^{-4}$
10000 (10 nghìn)	$-3{,}056143889 \times 10^{-5}$
100000 (100 nghìn)	$3{,}574879797 \times 10^{-7}$
1 triệu	$-3{,}499935022 \times 10^{-7}$
10 triệu	$4{,}205477932 \times 10^{-8}$

Nhìn vào sự thay đổi của giá trị dãy số ta nhận thấy có lúc dãy số âm, có lúc dãy số dương, nhưng nhìn chung các giá trị của dãy số ngày càng tiến gần tới số 0.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$

Lưu ý: số có dạng "số $\times 10^{-\text{số nguyên dương}}$" là những số rất gần với số 0
VD: $4{,}205477932 \times 10^{-8} = 0{,}00000004205477932 \approx 0$

Thầy Lê Phúc Việt

Ví dụ: Bấm máy tính tìm giới hạn dãy số

Tìm giới hạn của dãy số sau:
$u_n = \sin n + \cos\sqrt{n}$

Nhập vào máy tính
$\sin x + \cos\sqrt{x}$
(Máy tính để ở chế độ rad)

CALC các giá trị x như sau:

x	$\sin x + \cos\sqrt{x}$
100	$-1{,}34543717$
1000 (1 nghìn)	$1{,}805562237$
10000 (10 nghìn)	$0{,}5567044834$
100 nghìn	$-0{,}4416608401$
1 triệu	$0{,}2123855741$
10 triệu	$0{,}158972144$
10 triệu 500 nghìn	$-0{,}7566477107$

Nhìn vào sự thay đổi của giá trị dãy số ta nhận thấy có lúc dãy số âm, có lúc dãy số dương và không tiến cụ thể tới 1 con số nào, cũng không tiến về $+\infty$ hay $-\infty$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sin n + \cos\sqrt{n}\right)$ không tồn tại.

Ví dụ: Bấm máy tính tìm giới hạn dãy số

Tìm giới hạn của dãy số sau:
$u_n = \dfrac{2^{n+1} - 8.5^{n+1}}{3^{n+2} - 9.5^{n-1}}$

Nhập vào máy tính
$\dfrac{2^{x+1} - 8.5^{x+1}}{3^{x+2} - 9.5^{x-1}}$
(Máy tính để ở chế độ rad)

CALC các giá trị x như sau:

x	$\dfrac{2^{x+1} - 8.5^{x+1}}{3^{x+2} - 9.5^{x-1}}$
10	22,91489371
20	22,22628535
40	22,22222237
70	22,22222222
100	$\dfrac{200}{9} \approx 22{,}22222222$

Nhìn vào sự thay đổi của giá trị dãy số ta nhận thấy:

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^{n+1} - 8.5^{n+1}}{3^{n+2} - 9.5^{n-1}} = \dfrac{200}{9}$

Ở ví dụ này mặc dù $n \to +\infty$ nhưng chúng ta không nhập các giá trị n quá lớn!
Nguyên nhân là do các biểu thức có dạng số^n có giá trị tăng rất rất nhanh khi n vào cỡ vài chục, thế nên nếu nhập giá trị n quá lớn thì máy có thể không tính nổi hoặc tính sai.
VD: 2^n khi ta CALC $n = 100$ thì ra được:

$$2^{100} \approx 1{,}2676506 \times 10^{30} \approx 1267650600000000000000000000000$$

trong khi nếu n^5 khi ta CALC $n = 100$ thì ta được:

$$100^5 = 10^{10} = 10000000000$$

Như vậy khi tính giới hạn của các dãy số có chứa dạng số^n (VD có chứa 2^n, 5^n, $(-3)^n$, …) thì ta chỉ nên CALC n vào cỡ vài chục (VD: n: $10 \to 20 \to 30 \to 40 \to 50 \to 60$), không nên CALC các số quá lớn như vài trăm, vài ngàn, hay lớn hơn nữa!

Thầy Trần Tiến

154. Dãy số có giới hạn 0

a) Định nghĩa

Hiểu một cách đơn giản thì:
Dãy số u_n *có giới hạn là 0* tức là *khi n trở nên rất rất lớn thì* u_n *rất gần (hoặc xấp xỉ, hoặc bằng) với số 0.*

Định nghĩa chặt chẽ bằng ngôn ngữ toán học

Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là 0 nếu với mỗi số dương nhỏ tùy ý cho trước, thì kể từ một số hạng nào đó trở đi của dãy số, các số hạng của dãy đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn số dương đó.

$$\lim u_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq N_0 \Rightarrow |u_n| < \varepsilon$$

Kí hiệu: $\lim u_n = 0$ hoặc $\lim(u_n) = 0$ hoặc $u_n \to 0$ hoặc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (đọc là dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần đến vô cực). Để hiểu về dãy số có giới hạn 0, ta sẽ lấy một số thí dụ tính toán bằng số sau.

Xét dãy số $a_n = \frac{1}{n}$

Bảng giá trị của dãy số với các giá trị n tăng dần.

n	$\frac{1}{n}$
1	1
2	0.5
3	0.333333333
...	
20	0.05
...	
1000	0.001
...	
1000000	0.000001
1000000000	0.000000001
...	
$n \to +\infty$	$a_n \to 0$

Ta nhận thấy khi n tăng dần đến rất lớn thì a_n có xu hướng giảm dần và ngày càng xấp xỉ 0.

Như vậy $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Xét dãy số $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Bảng giá trị của dãy số với các giá trị n tăng dần.

n	$\frac{(-1)^n}{n}$
1	-1
2	0.5
3	-0.33333333
6	0.166666667
...	
155	-0.00645161
156	0.006410256
...	
1000000	0.000001
1000000000	0.000000001
...	
$n \to +\infty$	$b_n \to 0$

Ta nhận thấy khi n tăng dần đến rất lớn thì b_n vừa có xu hướng tăng lại vừa có xu hướng giảm. Nhưng nhìn chung thì b_n ngày càng tiến gần (hay xấp xỉ) về 0.

Như vậy $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Lưu ý : Khi viết $\lim u_n = 0$ thì ta phải hiểu là dãy số u_n có xu hướng tiến tới 0 hay xấp xỉ 0 (hay gần bằng 0) khi mà n có xu hướng tiến tới dương vô cùng (hay xu hướng trở nên rất lớn hay vô cùng lớn). Không nên hiểu là có một lúc nào đó $\frac{1}{n} = 0$, bởi vì rõ ràng: $\frac{1}{n} = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$ (Vô lý).

Thế nên phải hiểu giới hạn của một dãy số (và sau này là một hàm số) là xu hướng giá trị của nó tiến tới đâu khi mà biến số tiến tới một giá trị (hoặc có một xu hướng) nào đó.

b) Một số dãy số có giới hạn 0

$\lim 0 = 0$	$\lim \frac{1}{n} = 0$	$\lim \frac{1}{n^k} = 0\ (k \in \mathbb{N}^*)$
$\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$	$\lim \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$	$\lim \frac{1}{\sqrt[k]{n^m}} = 0\ (k \in \mathbb{N}^*, k \geq 2; m \in \mathbb{N}^*)$
$\lim \frac{C}{n} = 0$, với mọi $C \in \mathbb{R}$	$\lim \frac{C}{n^k} = 0$, với mọi $C \in \mathbb{R}$, với mọi $k \in \mathbb{N}^*$	
Nếu $\lvert q \rvert < 1$ thì $\lim q^n = 0$	Nếu $a > 1, k > 0$ thì $\lim \frac{n^k}{a^n} = 0$	
Như vậy ta có một quy luật rất dễ nhớ: $\frac{\text{Một số cụ thể}}{\text{Một số rất rất lớn}} \approx 0$ hoặc $\frac{\text{Một số cụ thể}}{\pm\infty} \approx 0$		

c) Định lý kẹp

Định lý kẹp giới hạn 0	**Định lý kẹp giới hạn $+\infty$**
$\left.\begin{array}{l} \lvert u_n \rvert \leq v_n, \forall n \geq N_0\ (N_0 \in \mathbb{N}^*) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$	$\left.\begin{array}{l} u_n \geq v_n, \forall n \geq N_0\ (N_0 \in \mathbb{N}^*) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
Hiểu một cách đơn giản thì: |Dãy số thứ nhất| ≤ Dãy số thứ 2 Cũng có giới hạn là 0 — Có giới hạn là 0	Hiểu một cách đơn giản thì: Dãy số thứ nhất ≤ Dãy số thứ 2 Có giới hạn là $+\infty$ — Cũng có giới hạn là $+\infty$

Thầy Lê Trung Kiên

DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN HỮU HẠN

155. Định nghĩa

Hiểu một cách đơn giản thì:
😘 Dãy số u_n *có giới hạn là* L tức là *khi* n *trở nên rất rất lớn thì* u_n *rất gần (hoặc xấp xỉ, hoặc bằng) với số* L.

Định nghĩa toán học

Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là số thức L nếu $\lim(u_n - L) = 0$. Tức là:

$$\lim(u_n - L) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}^*: \forall n \geq N_0 \Rightarrow |u_n - L| < \varepsilon.$$

Kí kiệu: $\lim u_n = L$ hoặc $\lim(u_n) = L$ hoặc $u_n \to L$.
Dãy số có giới hạn là một số thực gọi là dãy số có giới hạn hữu hạn.

156. Quy tắc tính giới hạn hữu hạn

Định lý: Giả sử $\lim u_n = L, \lim v_n = M$ và c là hằng số. Khi đó:

Giới hạn trị tuyệt đối	$\lim\|u_n\| = \|L\|$
Giới hạn căn bậc ba	$\lim \sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{L}$
Giới hạn căn bậc hai	Nếu $u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $L \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{L}$
Giới hạn của tổng	$\lim(u_n \pm v_n) = L \pm M$
Giới hạn của tích	$\lim(u_n \cdot v_n) = L \cdot M$
Giới hạn nhân với một số	$\lim(cu_n) = cL$
Giới hạn của thương	$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{L}{M} (M \neq 0)$

157. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Định nghĩa

Cấp số nhân lùi vô hạn là cấp số nhân có vô số số hạng và có công bội q thỏa $|q| < 1$.

Ví dụ: $(u_n) = \frac{1}{2}; \left(\frac{1}{2}\right)^2; \left(\frac{1}{2}\right)^3; \left(\frac{1}{2}\right)^4; \left(\frac{1}{2}\right)^5; \left(\frac{1}{2}\right)^6; \left(\frac{1}{2}\right)^7;$ ... là một cấp số nhân lùi vô hạn.

Định lý : Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn là : $S = u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + \cdots = \frac{u_1}{1-q}$

Ví dụ: $S = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \cdots = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$

Thầy Lê Trung Kiên

DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN VÔ CỰC

158. Định nghĩa

Dãy số có giới hạn $+\infty$	**Dãy số có giới hạn $-\infty$**
Hiểu một cách đơn giản thì: Dãy số u_n *có giới hạn là* $+\infty$ tức là *khi n trở nên rất rất lớn thì* u_n *dương và ngày càng lớn dần lên.*	Hiểu một cách đơn giản thì: Dãy số u_n *có giới hạn là* $-\infty$ tức là *khi n trở nên rất rất lớn thì* u_n *âm và có độ lớn ngày càng tăng lên.*
Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ nếu với mỗi số dương tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều lớn hơn số dương đó.	Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ nếu với mỗi số âm tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều nhỏ hơn số âm đó.
Định nghĩa toán học: $\lim u_n = +\infty$ $\Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq N_0 \Rightarrow u_n > M$ Kí hiệu : $\lim u_n = +\infty$ hoặc $\lim(u_n) = +\infty$ hoặc $u_n \to +\infty$	Định nghĩa toán học: $\lim u_n = -\infty$ $\Leftrightarrow \forall M < 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq N_0 \Rightarrow u_n < M$ Kí hiệu : $\lim u_n = -\infty$ hoặc $\lim(u_n) = -\infty$ hoặc $u_n \to +\infty$
Các dãy số có giới hạn $+\infty$ và $-\infty$ được gọi là các dãy số có giới hạn vô cực hay dần đến vô cực	
Nếu $\lim u_n = +\infty$ thì $\lim \sqrt{u_n} = +\infty$ và $\lim \sqrt[3]{u_n} = +\infty$	Nếu $\lim u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = +\infty$
Nếu $\lim\lvert u_n\rvert = +\infty$ thì $\lim \frac{1}{u_n} = 0.$	

159. Quy tắc tìm giới hạn vô cực

Quy tắc 1 $(\infty.\infty)$

Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim(u_n v_n)$ được cho trong bảng sau :

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n v_n)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

☞ $\infty \times \infty = \infty$

Quy tắc 2 $(L.\infty)$

Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = L \neq 0$ thì $\lim(u_n v_n)$ được cho trong bảng sau :

$\lim u_n$	Dấu của L	$\lim(u_n v_n)$
$+\infty$	$(+)$	$+\infty$
$+\infty$	$(-)$	$-\infty$
$-\infty$	$(+)$	$-\infty$
$-\infty$	$(-)$	$+\infty$

☞ (Số khác 0) $\times \infty = \infty$

Quy tắc 3 $\left(\frac{L}{0}\right)$

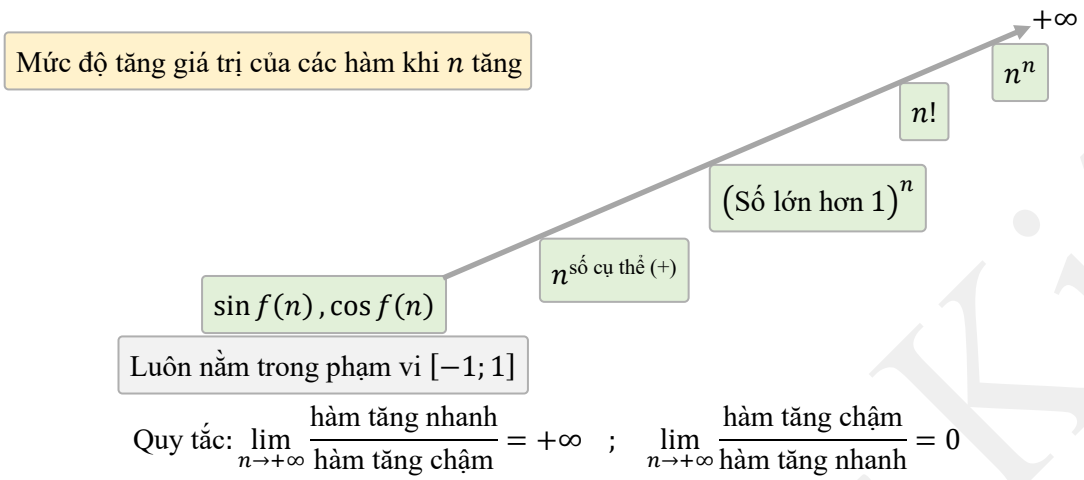
Nếu $\lim u_n = L \neq 0, \lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ hoặc $v_n < 0$ kể từ một số hạng nào đó trở đi thì $\lim \frac{u_n}{v_n}$ được cho trong bảng sau:

Dấu của L	Dấu của v_n	$\lim \frac{u_n}{v_n}$
$+$	$+$	$+\infty$
$+$	$-$	$-\infty$
$-$	$+$	$-\infty$
$-$	$-$	$+\infty$

☞ $\frac{\text{Số khác } 0}{0} = \infty$

Như vậy ta có 3 quy tắc này để tìm giới hạn của dãy số có giới hạn là vô cực. Dấu của các giới hạn giống như dấu của các phép toán số học thông thường (tức là (âm) × (âm) = (dương); (âm) / (dương) = âm;…)

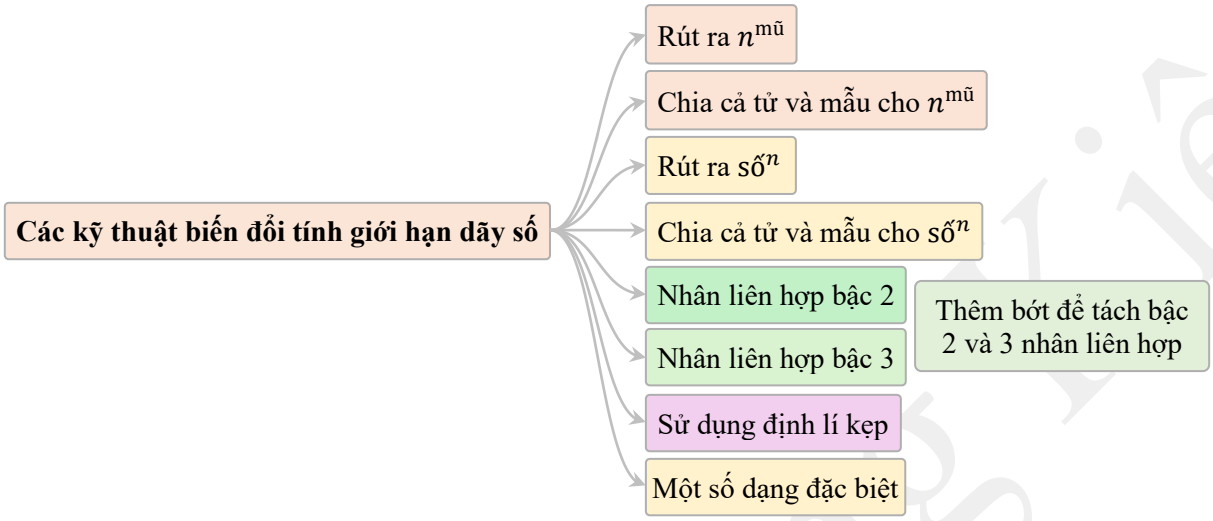
160. Các giới hạn hỗn hợp nmũ, số^n, n!, n^n



Quy tắc: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\text{hàm tăng nhanh}}{\text{hàm tăng chậm}} = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\text{hàm tăng chậm}}{\text{hàm tăng nhanh}} = 0$

Thầy Lê Trung Kiên

CÁC KỸ THUẬT TÍNH GIỚI HẠN DÃY SỐ



Tên kỹ thuật	Dùng khi nào
Rút ra $n^{mũ}$ **Chia tử & mẫu cho $n^{mũ}$** (Khi tử và mẫu cùng rút ra 1 lượng là $n^{mũ}$ giống nhau thì ta chia cả tử và mẫu cho $n^{mũ}$ giúp phần trình bày ngắn gọn hơn)	$\lim \frac{\text{đa thức bậc } k}{\text{đa thức bậc } m} \rightarrow$ Rút ra ở tử số n^k, rút ra ở mẫu số n^m
	$\lim$ (đa thức bậc k) $\rightarrow$ Rút ra n^k
	Các dạng có căn nhưng không phải nhân liên hợp.
Rút ra số^n **Chia tử & mẫu cho số^n** (Khi tử và mẫu cùng rút ra 1 lượng là số^n giống nhau thì ta chia cả tử và mẫu cho số^n trong phần trình bày ngắn gọn hơn)	Dùng khi n chỉ có ở số mũ, và những phần có n đều viết được về dạng $(\text{số cụ thể})^n$, ta thường tiến hành chia (hoặc rút ra) ở cả tử và mẫu cho số hạng $(a_0)^n$ với a_0 là cơ số có độ lớn lớn nhất của các số hạng có dạng $(\text{số cụ thể})^n$.
Nhân liên hợp bậc 2	Gọi P_n và Q_n là các đa thức biến n và An^m và Bn^k lần lượt số hạng có bậc lớn nhất của P_n và Q_n Nếu nhân tử ở tử số hoặc mẫu số có 1 trong các dạng: $a\sqrt{P_n} \pm b\sqrt{Q_n}$ (1) ; $P_n \pm b\sqrt{Q_n}$ (2) ; $a\sqrt{P_n} \pm Q_n$ (3) Với (1) nếu $a\sqrt{An^m} \pm b\sqrt{Bn^k} = 0$ thì nhân liên hợp bậc 2. Với (2) nếu $An^m \pm b\sqrt{Bn^k} = 0$ thì nhân liên hợp bậc 2. Với (3) nếu $a\sqrt{An^m} \pm Bn^k = 0$ thì nhân liên hợp bậc 2. Những phần nhân tử trên nếu không phải nhân liên hợp bậc 2 thì chỉ đơn giản là rút ra $n^{mũ}$. Sau khi nhân liên hợp bậc 2 xong ta thường tiếp tục rút ra $n^{mũ}$ để tính giới hạn. Biểu thức liên hợp của $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ là $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. Khi nhân liên hợp thì ta phải nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp.

Thầy Lê Thông Kiên

	$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ hoặc nếu ngắn gọn thì : $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$
Nhân liên hợp bậc 3	Gọi P_n và Q_n là các đa thức biến n và An^m và Bn^k lần lượt số hạng có bậc lớn nhất của P_n và Q_n Nếu nhân tử ở tử số hoặc mẫu số có 1 trong các dạng: $a\sqrt[3]{P_n}\pm b\sqrt[3]{Q_n}$ (1) ; $P_n\pm b\sqrt[3]{Q_n}$ (2) ; $a\sqrt[3]{P_n}\pm Q_n$ (3) Với (1) nếu $a\sqrt[3]{An^m}\pm b\sqrt[3]{Bn^k}=0$ thì nhân liên hợp bậc 3. Với (2) nếu $An^m\pm b\sqrt[3]{Bn^k}=0$ thì nhân liên hợp bậc 3. Với (3) nếu $a\sqrt[3]{An^m}\pm Bn^k=0$ thì nhân liên hợp bậc 3. Những phần nhân tử trên nếu không phải nhân liên hợp bậc 3 thì chỉ đơn giản là rút ra $n^{\text{mũ}}$. Sau khi nhân liên hợp bậc 3 xong ta thường tiếp tục rút ra $n^{\text{mũ}}$ để tính giới hạn. + Biểu thức liên hợp của $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$ là $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=\dfrac{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$ viết ngắn gọn thì :$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$ + Biểu thức liên hợp của $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ là $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=\dfrac{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$ viết ngắn gọn thì : $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$ **Một số biểu thức liên hợp bậc 3 khác** $\sqrt[3]{a}-b=\dfrac{a-b^3}{(\sqrt[3]{a})^2+\sqrt[3]{a}.b+b^2}$; $\sqrt[3]{a}+b=\dfrac{a+b^3}{(\sqrt[3]{a})^2-\sqrt[3]{a}.b+b^2}$ $a-\sqrt[3]{b}=\dfrac{a^3-b}{a^2+a.\sqrt[3]{b}+(\sqrt[3]{b})^2}$; $a+\sqrt[3]{b}=\dfrac{a^3+b}{a^2-a.\sqrt[3]{b}+(\sqrt[3]{b})^2}$

Thầy Lê Trung Kiên

Thêm bớt để tách bậc 2 và 3 nhân liên hợp	Gọi P_n và Q_n là các đa thức biến n và An^m và Bn^k lần lượt số hạng có bậc lớn nhất của P_n và Q_n. Những dạng chứa cả căn bậc hai và căn bậc ba ta có thể phải thêm bớt vào một số hạng nào đó, rồi tách riêng thành các nhóm để nhân liên hợp cho từng nhóm. Mỗi nhóm khi đó chỉ chứa căn bậc hai hoặc chỉ chứa căn bậc ba. Nếu tử số hoặc mẫu số hoặc chính biểu thức có dạng: $$a\sqrt[3]{P_n}+b\sqrt{Q_n}$$ Và $a\sqrt[3]{An^m}+b\sqrt{Bn^k}=0$ thì ta thêm bớt để tách ra nhân liên hợp bậc 2 và 3. Thì ta thêm bớt số hạng $a\sqrt[3]{An^m}$ và tách ra để nhân liên hợp căn bậc hai và căn bậc ba. Nói cách khác: $$\left(\underbrace{a\sqrt[3]{P_n}-a\sqrt[3]{An^m}}_{\text{Liên hợp bậc 3}}\right)-\left(\underbrace{b\sqrt{Bn^k}-b\sqrt{Q_n}}_{\text{Liên hợp bậc 2}}\right)$$
Sử dụng định lý kẹp	Xem lại nội dung định lý kẹp

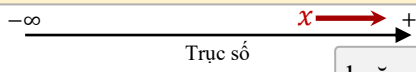
Thầy Lê Trung Kiên

GIỚI HẠN HÀM SỐ

161. Giới hạn hàm số là gì?

Giới hạn của hàm số là gì?

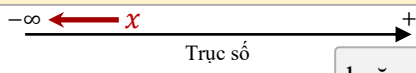
Giới hạn của hàm số $f(x)$ khi $x \to +\infty$



Trả lời cho câu hỏi: "Khi x trở nên rất rất lớn thì giá trị của $f(x)$ như thế nào?"

hoặc: "Khi x tiến tới $+\infty$ thì giá trị của $f(x)$ như thế nào?"

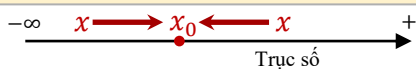
Giới hạn của hàm số $f(x)$ khi $x \to -\infty$



Trả lời cho câu hỏi: "Khi x trở nên rất rất âm thì giá trị của $f(x)$ như thế nào?"

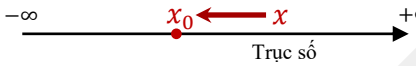
hoặc: "Khi x tiến tới $-\infty$ thì giá trị của $f(x)$ như thế nào?"

Giới hạn của hàm số $f(x)$ khi $x \to x_0$



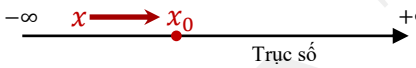
Trả lời cho câu hỏi: "Khi x tiến ngày càng gần về x_0 từ cả 2 phía trái và phải (nhưng không bao giờ bằng x_0) thì giá trị của $f(x)$ như thế nào?"

Giới hạn của hàm số $f(x)$ khi $x \to x_0^+$



Trả lời cho câu hỏi: "Khi x tiến ngày càng gần về x_0 từ phía bên tay phải (nhưng x không bao giờ bằng x_0) thì giá trị của $f(x)$ như thế nào?"

Giới hạn của hàm số $f(x)$ khi $x \to x_0^-$



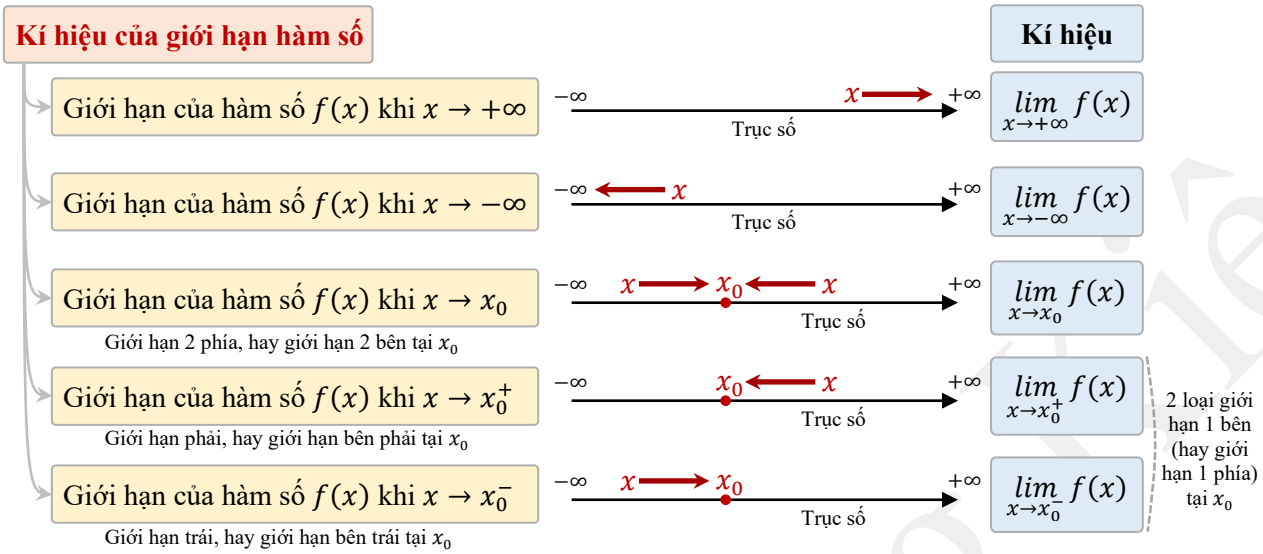
Trả lời cho câu hỏi: "Khi x tiến ngày càng gần về x_0 từ phía bên tay trái (nhưng x không bao giờ bằng x_0) thì giá trị của $f(x)$ như thế nào?"

Câu trả lời của các câu hỏi trên chỉ có thể là một trong các ý sau:

- $f(x)$ ngày càng tiến tới (xấp xỉ hoặc bằng) một số cụ thể nào đó
- $f(x)$ trở nên rất rất lớn (tức là $f(x) \to +\infty$)
- $f(x)$ trở nên rất rất âm (tức là $f(x) \to -\infty$)
- $f(x)$ không tiến tới (xấp xỉ hay bằng) một số cụ thể, cũng không trở nên rất rất lớn, cũng không trở nên rất rất âm. Khi đó dãy số không có giới hạn ứng với trạng thái x mà nó đang tiến tới.

Thầy Nguyễn

162. Các loại ký hiệu giới hạn hàm số

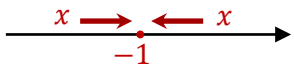


163. Bấm máy tìm giới hạn hàm số

Ví dụ (Giới hạn 2 bên)

Tính $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^2-3x-4}{x+1}$

Bước 1: Nhập công thức hàm số vào máy tính: $\frac{x^2-3x-4}{x+1}$.



$x \to -1$ tức là x tiến tới ngày càng gần -1 từ hai phía (nhưng không bao giờ xảy ra $x = -1$)

Bước 2: CALC các giá trị x

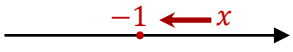
x tiến tới -1 từ phía bên trái (tức là x nhỏ hơn -1 và tiến tới ngày càng gần -1, nhưng không bao giờ bằng -1), kí hiệu $x \to -1^-$



x	$f(x)$
-1.01	-5.01
-1.0001	-5.0001
-1.000001	-5.000001

Dự đoán: $\lim\limits_{x\to-1^-} \frac{x^2-3x-4}{x+1} = -5$

x tiến tới -1 từ phía bên phải (tức là x lớn hơn -1 và tiến tới ngày càng gần -1, nhưng không bao giờ bằng -1), kí hiệu $x \to -1^+$



x	$f(x)$
-0.99	-4.99
-0.9999	-4.9999
-0.999999	-4.999999

Dự đoán: $\lim\limits_{x\to-1^+} \frac{x^2-3x-4}{x+1} = -5$

Vậy ta có $\lim\limits_{x\to-1^-} \frac{x^2-3x-4}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1^+} \frac{x^2-3x-4}{x+1} = 5 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-1} \frac{x^2-3x-4}{x+1} = 5$

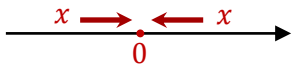
🚨 Lưu ý: Chúng ta không nên nhập các số quá xấp xỉ -1, thí dụ như $x = -1.0000000000000001$, vì nếu nhập các số như thế, máy tính có thể sẽ tính sai do sự làm tròn vượt quá bộ nhớ!

Thầy Lê Trung Kiên

Ví dụ (Giới hạn 2 bên)

Tính $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$

Bước 1: Nhập công thức hàm số vào máy tính: $\frac{|x|}{x}$.



$x\to 0$ tức là x tiến tới ngày càng gần 0 từ hai phía (nhưng không bao giờ xảy ra $x=0$)

Bước 2: CALC các giá trị x

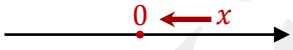
x tiến tới 0 từ phía bên trái (tức là x nhỏ hơn 0 và tiến tới ngày càng gần 0, nhưng không bao giờ bằng 0), kí hiệu $x\to 0^-$



x	$f(x)$
-0.1	-1
-0.01	-1
-0.0001	-1

Dự đoán: $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1$

x tiến tới 0 từ phía bên phải (tức là x lớn hơn 0 và tiến tới ngày càng gần 0, nhưng không bao giờ bằng 0), kí hiệu $x\to 0^+$



x	$f(x)$
0.1	1
0.01	1
0.0001	1

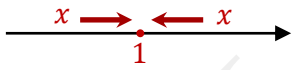
Dự đoán: $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=1$

Vậy ta có $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}\neq\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ không tồn tại.

Ví dụ (Giới hạn 2 bên)

Tính $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+2x+\sqrt[3]{x+1}}}{x^2-1}$

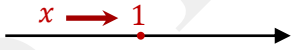
Bước 1: Nhập công thức hàm số vào máy tính: $\frac{\sqrt{x^2+2x+\sqrt[3]{x+1}}}{x^2-1}$.



$x\to 1$ tức là x tiến tới ngày càng gần 1 từ hai phía (nhưng không bao giờ xảy ra $x=1$)

Bước 2: CALC các giá trị x

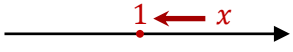
x tiến tới 1 từ phía bên trái (tức là x nhỏ hơn 1 và tiến tới ngày càng gần 1, nhưng không bao giờ bằng 1), kí hiệu $x\to 1^-$



x	$f(x)$
0.9	-10.32513316
0.99	-103.2038676
0.9999	-10319.79414

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{x^2+2x+\sqrt[3]{x+1}}}{x^2-1}=-\infty$

x tiến tới 1 từ phía bên phải (tức là x lớn hơn 1 và tiến tới ngày càng gần 1, nhưng không bao giờ bằng 1), kí hiệu $x\to 1^+$



x	$f(x)$
1.1	10.31321188
1.01	103.1917726
1.0001	10319.78204

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^2+2x+\sqrt[3]{x+1}}}{x^2-1}=+\infty$

Vậy ta có $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{x^2+2x+\sqrt[3]{x+1}}}{x^2-1}\neq\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^2+2x+\sqrt[3]{x+1}}}{x^2-1}$

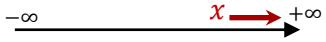
$\Rightarrow\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+2x+\sqrt[3]{x+1}}}{x^2-1}$ không tồn tại.

Thầy Lê Phong Kiên

Ví dụ (Giới hạn tại $+\infty$)

Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2-5x^2}{x^2+3}$

Bước 1: Nhập công thức hàm số vào máy tính: $\frac{2-5x^2}{x^2+3}$.



$x\to+\infty$ tức là x trở nên rất rất lớn.

Bước 2: CALC các giá trị x

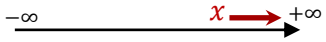
x	$f(x)$
$\times 10^x 2$ (1 trăm)	-4.99830051
$\times 10^x 3$ (1 nghìn)	-4.999983
$\times 10^x 4$ (10 nghìn)	-4.99999983

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{2-5x^2}{x^2+3}=-5$$

Ví dụ (Giới hạn tại $+\infty$)

Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+1}{x^2+1}$

Bước 1: Nhập công thức hàm số vào máy tính: $\frac{x^3+1}{x^2+1}$.



$x\to+\infty$ tức là x trở nên rất rất lớn.

Bước 2: CALC các giá trị x

x	$f(x)$
$\times 10^x 2$ (1 trăm)	99.99010099
$\times 10^x 3$ (1 nghìn)	999.999001
$\times 10^x 4$ (10 nghìn)	9999.9999

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+1}{x^2+1}=+\infty$$

Ví dụ (Giới hạn tại $-\infty$)

Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(x^2-1)(1-2x)^5}{x^7+x+3}$

Bước 1: Nhập công thức hàm số vào máy tính: $\frac{(x^2-1)(1-2x)^5}{x^7+x+3}$.



$x\to-\infty$ tức là x trở nên rất rất âm.

Bước 2: CALC các giá trị x

x	$f(x)$
$-\times 10^x 2$ (-1 trăm)	-32.8047593
$-\times 10^x 3$ (-1 nghìn)	-32.08004796
$-\times 10^x 4$ (-10 nghìn)	-32.00800048
$-\times 10^x 5$ (-100 nghìn)	-32.0008

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2-1)(1-2x)^5}{x^7+x+3}=-32$$

Ví dụ (Giới hạn tại $+\infty$)

Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{2x^5+x^3-1}{(2x^2-1)(x^3+x)}}$

Bước 1: Nhập công thức hàm số vào máy tính: $\sqrt[3]{\frac{2x^5+x^3-1}{(2x^2-1)(x^3+x)}}$.



$x\to+\infty$ tức là x trở nên rất rất lớn.

Bước 2: CALC các giá trị x

x	$f(x)$
$\times 10^x 2$ (1 trăm)	1.000000002
$\times 10^x 3$ (1 nghìn)	1
$\times 10^x 4$ (10 nghìn)	1

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{2x^5+x^3-1}{(2x^2-1)(x^3+x)}}=1$$

Thầy Lê Trung Kiên

Ví dụ (Giới hạn bên trái)

Tính $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{\sqrt{x^2-7x+12}}{\sqrt{9-x^2}}$

Bước 1: Nhập công thức hàm số vào máy tính: $\dfrac{\sqrt{x^2-7x+12}}{\sqrt{9-x^2}}$.



x tiến tới 3 từ phía bên trái (tức là x nhỏ hơn 3 và tiến tới ngày càng gần 3, nhưng không bao giờ bằng 3), kí hiệu $x \to 3^-$

Bước 2: CALC các giá trị x

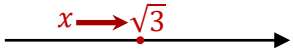
x	$f(x)$
2.9	0.4317877696
2.99	0.4106267859
2.9999	0.4082721046
2.999999	0.4082485286
2.9999999	0.4082483143

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{\sqrt{x^2-7x+12}}{\sqrt{9-x^2}} \approx 0.4082$

Ví dụ (Giới hạn bên trái)

Tính $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}^-}\dfrac{\sqrt{x^4+2x^2}-\sqrt{15}}{\sqrt{3-x^2}}$

Bước 1: Nhập công thức hàm số vào máy tính: $\dfrac{\sqrt{x^4+2x^2}-\sqrt{15}}{\sqrt{3-x^2}}$.



x tiến tới $\sqrt{3}$ từ phía bên trái (tức là x nhỏ hơn $\sqrt{3}$ và tiến tới ngày càng gần $\sqrt{3}$, nhưng không bao giờ bằng $\sqrt{3}$), kí hiệu $x \to \sqrt{3}^-$.

Bước 2: CALC các giá trị x

x	$f(x)$
$\sqrt{3}-0.1$	-0.6008755829
$\sqrt{3}-0.01$	-0.192003024
$\sqrt{3}-0.001$	-0.06077983602
$\sqrt{3}-0.0001$	-0.01922226935
$\sqrt{3}-0.00001$	$-6.078678466\times 10^{-3}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to \sqrt{3}^-}\dfrac{\sqrt{x^4+2x^2}-\sqrt{15}}{\sqrt{3-x^2}} = 0$

🚨 **Lưu ý**: khi nhập các giá trị $x \to a^-$ mà ta không thể biết được số thập phân của a thì ta nhập như sau:

x	$f(x)$
$a-0.1$	…
$a-0.01$	…
$a-0.001$	…
$a-0.0001$	…

🚨 **Lưu ý**: khi nhập các giá trị $x \to a^+$ mà ta không thể biết được số thập phân của a thì ta nhập như sau:

x	$f(x)$
$a+0.1$	…
$a+0.01$	…
$a+0.001$	…
$a+0.0001$	…

Ví dụ (Giới hạn bên phải)

Tính $\lim\limits_{x\to \sqrt{5}^+}\dfrac{\sin\sqrt{x^2-5}}{\sqrt{2x^2-10}}$

Bước 1: Nhập công thức hàm số vào máy tính: $\dfrac{\sin\sqrt{x^2-5}}{\sqrt{2x^2-10}}$ (máy để ở chế độ radian)



x tiến tới $\sqrt{5}$ từ phía bên phải (tức là x lớn hơn $\sqrt{5}$ và tiến tới ngày càng gần $\sqrt{5}$, nhưng không bao giờ bằng $\sqrt{5}$), kí hiệu $x \to \sqrt{5}^+$.

Bước 2: CALC các giá trị x

x	$f(x)$
$\sqrt{5}+0.1$	0.6544421227
$\sqrt{5}+0.01$	0.7018363586
$\sqrt{5}+0.001$	0.706579735
$\sqrt{5}+0.0001$	0.7070540766
$\sqrt{5}+0.00001$	0.7071015107

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to \sqrt{5}^+}\dfrac{\sin\sqrt{x^2-5}}{\sqrt{2x^2-10}} \approx 0.71$

Thầy Trần Viên

164. Các định nghĩa giới hạn hàm số

Các định nghĩa toán học về giới hạn hàm số

Giới hạn của hàm số tại một điểm

Giả sử $(a;b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và $f(x)$ là một hàm số xác định trên tập hợp $(a;b)\backslash\{x_0\}$.

Giới hạn hữu hạn

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ nếu với mọi dãy số (x_n) trong tập hợp $(a\,;b)\backslash\{x_0\}$ mà $\lim x_n=x_0$, ta đều có $\lim f(x_n)=L$.

Kí hiệu : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ hoặc $f(x)\to L$ khi $x\to x_0$.

Giới hạn vô cực

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n) trong tập hợp $(a;b)\backslash\{x_0\}$ mà $\lim x_n=x_0$, ta đều có $\lim f(x_n)=+\infty$.

Kí hiệu : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ hoặc $f(x)\to+\infty$ khi $x\to x_0$.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n) trong tập hợp $(a;b)\backslash\{x_0\}$ mà $\lim x_n=x_0$, ta đều có $\lim f(x_n)=-\infty$.

Kí hiệu : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ hoặc $f(x)\to-\infty$ khi $x\to x_0$.

Giới hạn của hàm số tại vô cực

Giới hạn tại $+\infty$

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$.

Giới hạn hữu hạn

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ nếu với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(a;+\infty)$ mà $\lim x_n=+\infty$, ta đều có $\lim f(x_n)=L$.

Kí hiệu : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ hoặc $f(x)\to L$ khi $x\to+\infty$.

Giới hạn vô cực

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(a;+\infty)$ mà $\lim x_n=+\infty$, ta đều có $\lim f(x_n)=+\infty$.

Kí hiệu : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ hoặc $f(x)\to+\infty$ khi $x\to+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(a;+\infty)$ mà $\lim x_n=+\infty$, ta đều có $\lim f(x_n)=-\infty$.

Kí hiệu : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ hoặc $f(x)\to-\infty$ khi $x\to+\infty$.

Giới hạn tại $-\infty$

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty;a)$.

Giới hạn hữu hạn

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ nếu với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(-\infty;a)$ mà $\lim x_n=-\infty$, ta đều có $\lim f(x_n)=L$.

Kí hiệu : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ hoặc $f(x)\to-\infty$ khi $x\to-\infty$.

Giới hạn vô cực

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(-\infty;a)$ mà $\lim x_n=-\infty$, ta đều có $\lim f(x_n)=+\infty$.

Kí hiệu : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ hoặc $f(x)\to-\infty$ khi $x\to-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(-\infty;a)$ mà $\lim x_n=-\infty$, ta đều có $\lim f(x_n)=-\infty$.

Kí hiệu : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ hoặc $f(x)\to-\infty$ khi $x\to-\infty$.

Thầy Lê Văn Đoàn

165. Tính giới hạn của hàm số bằng định nghĩa

Dùng định nghĩa, tìm giới hạn của hàm số $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

Bước 1: Thử bấm máy dự đoán giới hạn của hàm số (nếu đề bài chưa cho giới hạn của hàm số). (Xem phần bấm máy dự đoán giới hạn hàm số)

Bước 2: Chứng minh bằng định nghĩa (thông qua dãy số).

166. Chứng minh hàm số không tồn tại giới hạn

Chứng minh hàm số không tồn tại giới hạn khi $x \to L$ (L ở đây có thể là một số, giới hạn trái, phải, hoặc vô cùng).

Bước 1: Chọn ra hai dãy số (x_n) và (y_n) ($(x_n$ và y_n phải thuộc tập xác định của hàm số) cùng tiến tới L và (x_n), (y_n) khác nhau và khác L.

(Phải chọn sao cho $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n)$)

Bước 2: Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n)$. Từ đó suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n)$.

167. Quy tắc tìm giới hạn hữu hạn

Định lý: Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = M$ $(L, M \in \mathbb{R})$. Khi đó:

Giới hạn của tổng hiệu	$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x) \pm g(x)] = L \pm M$
Giới hạn của tích	$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x).g(x)] = L.M$
Giới hạn nhân với số	$\lim\limits_{x\to x_0}[cf(x)] = cL$ (c là hằng số)
Giới hạn của thương	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ $(M \neq 0)$
Giới hạn trị tuyệt đối	$\lim\limits_{x\to x_0}\lvert f(x)\rvert = \lvert L\rvert$
Giới hạn của căn bậc ba	$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{L}$
Giới hạn của căn bậc hai	Nếu $f(x) \geq 0, \forall x \in (a;b)\backslash\{x_0\}$, trong đó $(a;b)$ là một khoảng nào đó chứa x_0 thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

👉**Nhận xét:** Nếu k là một số nguyên dương và c là một hằng số thì với mọi $x_0 \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{x\to x_0}\left(cx^k\right) = cx_0^k$.

Khi tính giới hạn hàm số tại 1 điểm x_0 cụ thể, dễ dàng nhất đó là thay x_0 vào công thức hàm số $f(x)$ để nhận ngay được kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ hoặc $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ hoặc $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.

168. Quy tắc tìm giới hạn vô cực

Chý ý: định lý và các quy tắc dưới đây được áp dụng cho mọi trường hợp $x \to x_0$, $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$. Tuy nhiên, để cho gọn, ta chỉ phát biểu cho trường hợp $x \to x_0$.

Quy tắc 1 (Vô cực × Vô cực)

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]$ được cho trong bảng sau :

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Quy tắc 2 (Số khác 0 × Vô cực)

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L \neq 0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]$ được cho trong bảng sau :

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	Dấu của L	$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]$
$+\infty$	$(+)$	$+\infty$
$+\infty$	$(-)$	$-\infty$
$-\infty$	$(+)$	$-\infty$
$-\infty$	$(-)$	$+\infty$

Quy tắc 3 $\left(\frac{\text{Số khác 0}}{0}\right)$

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \neq 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ và $g(x) > 0$ hoặc $g(x) < 0, \forall x \in (a;b)\backslash\{x_0\}$, trong đó $(a;b)$ là một khoảng nào đó chứa x_0 thì $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ được cho trong bảng sau:

Dấu của L	Dấu của g(x)	$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
$(+)$	$(+)$	$+\infty$
$(+)$	$(-)$	$-\infty$
$(-)$	$(+)$	$-\infty$
$(-)$	$(-)$	$+\infty$

Quy tắc 4 (Tổng của 2 vô cực)

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Chưa thể biết rõ!
$-\infty$	$+\infty$	Chưa thể biết rõ!

Như vậy ta có 4 quy tắc này để tìm giới hạn của hàm số có giới hạn là vô cực. Dấu của các giới hạn giống như dấu của các phép toán số học thông thường (tức là (âm) × (âm) = (dương); (âm) / (dương) = âm;…)

$\infty \times \infty = \infty$	$\infty + \infty = \infty$ (các ∞ đều cùng loại)	(Số khác 0) $\times \infty = \infty$	$\frac{\text{Số khác 0}}{0} = \infty$

Lưu ý: Điều kiện $L \neq 0$ ở các dạng trên là rất quan trọng để có thể áp dụng các định lý.

CÁC DẠNG VÔ ĐỊNH

169. Giải thích các dạng vô định

7 dạng vô định

$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$	$\infty - \infty$ (2 vô cực cùng loại)	$0 \times \infty$	1^{∞}	∞^0	0^0
Được học ở chương trình cơ bản cấp PTTH				Được học ở chương trình nâng cao hoặc chương trình chuyên cấp PTTH		

Dạng	Biểu thức	Đặc điểm nhận biết
$\frac{0}{0}$	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$	$x \to x_0 \Rightarrow \begin{cases} f(x_0) = 0 \\ g(x_0) = 0 \end{cases}$
$\frac{\infty}{\infty}$	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$	$x \to x_0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) \to \infty \\ g(x) \to \infty \end{cases}$
$0 \cdot \infty$	$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]$	$x \to x_0 \Rightarrow \begin{cases} f(x_0) = 0 \\ g(x) \to \infty \end{cases}$
$\infty - \infty$	$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x) - g(x)]$	$x \to x_0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) \to \infty \\ g(x) \to \infty \end{cases}$ (Vô cùng ở đây là cùng loại)

Khi tìm giới hạn có dạng vô định, ta phải khử dạng vô định bằng các thực hiện các phép biến đổi như: phân tích tử và mẫu thành nhân tử để làm xuất hiện thừa số $(x - x_0)$, nhân lượng liên hợp, đặt bậc cao nhất của tử và mẫu ra ngoài, thêm bớt, tách thành những giới hạn quen thuộc … để có thể sử dụng các định lý và các quy tắc đã biết.

Lưu ý: có thể thay $x \to x_0$ bởi $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

Tại sao lại gọi các dạng $0 \times \infty$; $\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; \infty - \infty$ là các dạng vô định?

Trước tiên, để nói thế nào là vô định, ta cần phải nói thế nào là *giới hạn dạng xác định.*

Ví dụ: $L \cdot \infty$ $(L \neq 0)$ là dạng xác định vì dễ thấy ở bất kỳ trường hợp nào thì $L.\infty = \infty$ (vô cùng ở đây tùy thuộc vào dấu của các hàm số).

Còn dạng $0 \cdot \infty$ vô định, tức là "không xác định" vì ta không thể xác định một cách tổng quát nó là bao nhiêu. Ví dụ, tất cả các hàm dưới đây đều có x tiến tới 0.

	$f(x)$	$g(x)$	$f(x) \cdot g(x)$
Công thức	x^2	$\frac{1}{x^2}$	1
Giới hạn	0	$+\infty$	1

	$f(x)$	$g(x)$	$f(x) \cdot g(x)$
Công thức	x^3	$\frac{1}{x^2}$	x
Giới hạn	0	$+\infty$	0

	$f(x)$	$g(x)$	$f(x).g(x)$
Công thức	x^2	$\frac{1}{x^4}$	$\frac{1}{x^2}$
Giới hạn	0	$+\infty$	$+\infty$

Dễ thấy ở cả ba trường hợp đều có dạng $0 \times (+\infty)$ thế nhưng lại cho các giới hạn khác nhau hoàn toàn là $0; 1; +\infty$. Vậy $0 \times (+\infty)$ là dạng vô định. Các dạng vô định khác học sinh có thể tự lấy ví dụ.

Làm sao để tính giới hạn của các dạng vô định?

Ta thực hiện biến đổi công thức hàm số để đưa biểu thức gốc về một biểu thức không còn dạng vô định. Tùy thuộc vào kiểu biểu thức mà ta lựa chọn các kiểu biến đổi biểu thức phù hợp.

170. Kỹ thuật tìm giới hạn khi gặp dạng vô định

🚨 Lưu ý: trong bảng bên dưới ∞ là $-\infty$ hoặc $+\infty$.

Tên kỹ thuật	Dùng khi nào?
Rút ra $x^{\text{mũ}}$	Dùng khi $x \to \infty$, khi không phải nhân liên hợp.
Chia cả tử và mẫu cho $x^{\text{mũ}}$	Dùng khi $x \to \infty$, khi không phải nhân liên hợp.
Rút ra số^x	Hs tự tìm hiểu thêm
Chia cả tử và mẫu cho số^x	Hs tự tìm hiểu thêm
Nhân liên hợp bậc 2	Dùng khi $x \to \infty$ hoặc $x \to x_0$ (từ 1 hoặc cả 2 phía) ▪ Khi $x \to \infty$ Gọi $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức biến x và Ax^m và Bx^k lần lượt số hạng có bậc lớn nhất của $P(x)$ và $Q(x)$. Nếu nhân tử ở tử số hoặc mẫu số của dãy số có 1 trong các dạng: $$a\sqrt{P(x)} \pm b\sqrt{Q(x)}\ (1)$$ hoặc $$P(x) \pm b\sqrt{Q(x)}\ (2)$$ hoặc $$a\sqrt{P(x)} \pm Q(x)\ (3)$$ Với (1) nếu $a\sqrt{Ax^m} \pm b\sqrt{Bx^k} = 0$ thì nhân liên hợp bậc 2. Với (2) nếu $Ax^m \pm b\sqrt{Bx^k} = 0$ thì nhân liên hợp bậc 2. Với (3) nếu $a\sqrt{Ax^m} \pm Bx^k = 0$ thì nhân liên hợp bậc 2. Những phần nhân tử trên nếu không phải nhân liên hợp bậc 2 thì chỉ đơn giản là rút ra $x^{\text{mũ}}$. Biểu thức liên hợp của $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ là $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. Khi nhân liên hợp thì ta phải nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp. $$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$ 🚨 Cẩn thận khi đưa và hoặc rút ra $x^{\text{mũ}}$ từ biểu thức có dạng $\sqrt{...}$ khi $x \to -\infty$. ▪ Khi $x \to x_0$ (từ 1 hoặc cả 2 phía) Nếu giới hạn cần tìm có dạng $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$ và $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = \lim\limits_{x\to x_0} Q(x) = 0$. Nếu $P(x)$ hay $Q(x)$ có chứa biến số dưới dấu căn bậc 2 (không có căn bậc 3) thì có thể nhân tử và mẫu với biểu thức liên hợp trước khi phân tích chúng thành tích để giản ước. Cụ thể, ta biến đổi như sau: $$\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)\cdot A(x)}{(x-x_0)\cdot B(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{A(x)}{B(x)}$$ và tính $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{A(x)}{B(x)}$.

Thầy Lê Trung Kiên

Nhân liên hợp bậc 3	Dùng khi $x \to \infty$ hoặc $x \to x_0$ (từ 1 hoặc cả 2 phía) ▪ Khi $x \to \infty$ Gọi $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức biến x và Ax^m và Bx^k lần lượt số hạng có bậc lớn nhất của $P(x)$ và $Q(x)$. Nếu nhân tử ở tử số hoặc mẫu số của dãy số có 1 trong các dạng: $$a\sqrt[3]{P(x)} \pm b\sqrt[3]{Q(x)}\ (1)$$ hoặc $$P(x) \pm b\sqrt[3]{Q(x)}\ (2)$$ hoặc $$a\sqrt[3]{P(x)} \pm Q(x)\ (3)$$ Với (1) nếu $a\sqrt[3]{Ax^m} \pm b\sqrt[3]{Bx^k} = 0$ thì nhân liên hợp bậc 3. Với (2) nếu $Ax^m \pm b\sqrt[3]{Bx^k} = 0$ thì nhân liên hợp bậc 3. Với (3) nếu $a\sqrt[3]{Ax^m} \pm Bx^k = 0$ thì nhân liên hợp bậc 3. Những phần nhân tử trên nếu không phải nhân liên hợp bậc 3 thì chỉ đơn giản là rút ra $x^{\text{mũ}}$. **Một số biểu thức liên hợp bậc 3** $$\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} \quad ; \quad \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \frac{a+b}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$$ $$\sqrt[3]{a} - b = \frac{a-b^3}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2 + \sqrt[3]{a}\cdot b + b^2} \quad ; \quad \sqrt[3]{a} + b = \frac{a+b^3}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2 - \sqrt[3]{a}\cdot b + b^2}$$ $$a - \sqrt[3]{b} = \frac{a^3-b}{a^2 + a\cdot\sqrt[3]{b} + \left(\sqrt[3]{b}\right)^2} \quad ; \quad a + \sqrt[3]{b} = \frac{a^3+b}{a^2 - a\cdot\sqrt[3]{b} + \left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$$ ▪ Khi $x \to x_0$ (từ 1 hoặc cả 2 phía) Nếu giới hạn cần tìm có dạng $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ và $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = \lim\limits_{x\to x_0} Q(x) = 0$. Nếu $P(x)$ hay $Q(x)$ có chứa biến số dưới dấu căn bậc 3 (không có căn bậc 2) thì có thể nhân tử và mẫu với biểu thức liên hợp trước khi phân tích chúng thành tích để giản ước. Cụ thể, ta biến đổi như sau: $$\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)\cdot A(x)}{(x-x_0)\cdot B(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{A(x)}{B(x)}$$ và tính $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{A(x)}{B(x)}$.

Thầy Lê Trung Kiên

Thêm bớt để tách nhân liên hợp bậc 2 và 3	Dùng khi $x \to \infty$ hoặc $x \to x_0$ (từ 1 hoặc cả 2 phía) Những dạng chứa cả căn bậc hai và căn bậc ba ta có thể phải thêm bớt vào một số hạng nào đó, rồi tách riêng thành các nhóm để nhân liên hợp cho từng nhóm. Mỗi nhóm khi đó chỉ chứa căn bậc hai hoặc chỉ chứa căn bậc ba. ▪ Khi $x \to \infty$ Gọi $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức biến x và Ax^m và Bx^k lần lượt số hạng có bậc lớn nhất của $P(x)$ và $Q(x)$. Nếu biểu thức có dạng $$a\sqrt[3]{P(x)} + b\sqrt{Q(x)} \text{ và } a\sqrt[3]{Ax^m} + b\sqrt{Bx^k} = 0$$ Thì ta thêm bớt số hạng $\sqrt[3]{a_m n^m}$ và tách ra để nhân liên hợp căn bậc hai và căn bậc ba. Nói cách khác: $$\left(\underbrace{a\sqrt[3]{P(x)} - a\sqrt[3]{Ax^m}}_{\text{Liên hợp bậc 3}}\right) - \left(\underbrace{b\sqrt{Bx^k} - b\sqrt{Q(x)}}_{\text{Liên hợp bậc 2}}\right)$$ ▪ Khi $x \to x_0$ (từ 1 phía hoặc từ 2 phía) Nếu biểu thức có dạng phân thức $\frac{u(x)}{v(x)}$ và tử hoặc mẫu số có dạng $a\sqrt[3]{P(x)} + b\sqrt{Q(x)}$ và khi $x \to x_0$ xảy ra dạng vô định 0/0 thì ta tách như sau: $$\left(\underbrace{a\sqrt[3]{P(x)} - a\sqrt[3]{P(x_0)}}_{\text{Liên hợp bậc 3}}\right) - \left(\underbrace{b\sqrt{Q(x_0)} - b\sqrt{Q(x)}}_{\text{Liên hợp bậc 2}}\right)$$ Sau khi nhân liên hợp xong ta biến đổi như sau: $$\lim_{x\to x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)\cdot A(x)}{(x-x_0)\cdot B(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{A(x)}{B(x)}$$
Sử dụng định lý kẹp	Hs tự tìm hiểu thêm
Quy tắc l'Hospital	Hs tự tìm hiểu thêm Chỉ sử dụng khi đã học xong đạo hàm
Một số dạng đặc biệt	$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$ $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$ $$\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$ (Với e là một hằng số có giá trị $e \approx 2{,}718281828$)

Thầy Lê Hồng Kiên

GIỚI HẠN MỘT BÊN

171. Định nghĩa giới hạn hữu hạn và vô hạn

Giới hạn hữu hạn

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0;a)$ $(x_0 \in \mathbb{R})$. Hàm số $f(x)$ có **giới hạn bên phải** là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(x_0;a)$ là $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$, ta đều có $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = L$.

Kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to x_0^+$.

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a;x_0)$ $(x_0 \in \mathbb{R})$. Hàm số f có **giới hạn bên trái** là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(a;x_0)$ là $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$, ta đều có $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = L$.

Kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to x_0^-$.

Giới hạn vô cực

Các định nghĩa:

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$

được định nghĩa tương tự giới hạn hữu hạn.

Các định lý về giới hạn hữu hạn đã học ở các bài trước vẫn đúng khi thay $x \to x_0$ bởi $x \to x_0^+$ hoặc $x \to x_0^-$.

Nhận xét: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L$

Để hiểu về giới hạn hai phía, ta cần hiểu về cách x tiến tới giá trị x_0 như thế nào. Hãy xét các ví dụ sau.

Ví dụ

Tính $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x^2+1}{x-2}$

$x \to 2^+$ tức là x tiến tới 2 từ phía bên phải, tức là x lớn hơn 2 và ngày càng tiến tới gần số 2.

x	$f(x)$
2.1	54.1
2.01	504.1
2.001	5004.01

Từ bảng dễ thấy $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x^2+1}{x-2} = +\infty$.

Tính $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x^2+1}{x-2}$

$x \to 2^-$ tức là x tiến tới 2 từ phía bên trái, tức là x nhỏ hơn 2 và ngày càng tiến tới gần số 2.

x	$f(x)$
1.9	-46.1
1.99	-496.01
1.999	-4996.001

Từ bảng dễ thấy $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x^2+1}{x-2} = -\infty$.

Thầy Lê Thông

172. Điều kiện hàm số có giới hạn

Hàm số $y = f(x)$ có giới hạn tại $x = x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$

Bài toán và phương pháp giải : Tìm điều kiện tham số để $f(x)$ có giới hạn tại $x = x_0$

Bước 1: Tính $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.

Bước 2: Hàm số có giới hạn tại x_0 khi $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$

$\Leftrightarrow$ Giải phương trình để tìm ra tham số

Lưu ý: sẽ có ít nhất một trong hai giới hạn trên còn phụ thuộc vào tham số m khi tính ở bước 1.

Thầy Lê Trung Hiếu

HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

173. Định nghĩa

Định nghĩa

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$.

Hàm số f liên tục tại điểm $x_0 \Leftrightarrow \underbrace{\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)}_{\text{Thường dùng khi công thức hai bên gần } x_0 \text{ giống nhau}} \Leftrightarrow \underbrace{\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)}_{\text{Thường dùng khi công thức 2 bên gần } x_0 \text{ khác nhau}}$

Hàm số không liên tục tại điểm x_0 gọi là gián đoạn tại điểm x_0.

Chú ý :

▪ Nếu $x_0 \notin D$, với D là tập xác định của hàm số thì ta không đặt vấn đề xét tính liên tục (hoặc gián đoạn) của hàm số đã cho tại điểm x_0.

▪ Tính liên tục của hàm sơ cấp

Hàm số đa thức $y = P(x)$, các hàm số lượng giác $y = \sin x$, $y = \cos x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Hàm số phân thức $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, hàm số căn thức $y = \sqrt{P(x)}$, các hàm số lượng giác $y = \tan x$, $y = \cot x$ liên tục trên các khoảng của tập xác định của chúng.

Trong đó $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức.

Hàm số thuộc những loại trên được gọi chung là hàm số sơ cấp.

▪ Tổng, hiệu, tích, thương của các hàm số liên tục

Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục tại điểm x_0. Khi đó:

Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$ và $y = f(x) \cdot g(x)$ liên tục tại x_0.

Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

174. Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm

Bài toán và phương pháp giải : Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại $x = x_0$

Bước 1: Tính $f(x_0)$

– Nếu $f(x_0)$ là một số cụ thể (có thể vẫn còn phụ thuộc tham số) thì chuyển qua làm bước 2.

– Nếu $f(x_0)$ không phải một số cụ thể hoặc $f(x)$ không xác định tại $x = x_0$ thì kết luận hàm số không liên tục tại x_0.

Bước 2: Tính $\lim\limits_{x\to x_0} f(x_0)$ (có thể phải tính $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ nếu công thức ở 2 bên x_0 khác nhau)

– Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x_0)$ không tồn tại thì kết luận hàm số không liên tục tại x_0.

– Nếu khi mới tính được một giới hạn một bên mà thấy khác $f(x_0)$ thì ngừng tính giới hạn bên còn lại và kết luận luôn hàm số không liên tục tại x_0.

– Nếu tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ là một số cụ thể thì làm tiếp bước 3.

Bước 3: So sánh $f(x_0)$ và $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

– Nếu $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ thì kết luận hàm số liên tục tại x_0.

– Nếu $f(x_0) \neq \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ thì kết luận hàm số không liên tục tại x_0.

175. Tìm điều kiện của tham số để hàm số liên tục tại một điểm

Bài toán và phương pháp giải : Tìm điều kiện của tham số để hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = x_0$

Bước 1: Tính $f(x_0)$.

Bước 2: Tính $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ (hoặc $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$)

Bước 3: Hàm số liên tục tại x_0 khi: $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. (Hoặc $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$)

(Giải phương trình hoặc hệ phương trình để tìm ra các tham số)

Thầy Lê Trung Kiên

HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN KHOẢNG, ĐOẠN

176. Các định nghĩa

Lưu ý về mặt kí hiệu	Đoạn: $[a;b]$
	Khoảng: $(a;b)$, $(a;+\infty)$; $(-\infty;a)$
	Nửa khoảng: $[a;b)$, $[a;+\infty)$; $(-\infty;a]$; $(a;b]$

Liên tục trên khoảng	**Liên tục trên đoạn**
Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên tập hợp J (J là một khoảng hoặc hợp nhiều khoảng). Hàm số $f(x)$ liên tục trên J nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc tập hợp đó.	Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn $[a;b]$. Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ nếu f liên tục trên khoảng $(a;b)$ và $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

Liên tục trên nửa khoảng	
Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên nửa khoảng $(a;b]$. Hàm số $f(x)$ liên tục trên nửa khoảng $(a;b]$ nếu $f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.	Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên nửa khoảng $[a;b)$. Hàm số $f(x)$ liên tục trên nửa khoảng $[a;b)$ nếu $f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ và $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$.
Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên nửa khoảng $[a;+\infty)$. Hàm số $f(x)$ liên tục trên nửa khoảng $[a;+\infty)$ nếu $f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;+\infty)$ và $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$.	Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên nửa khoảng $(-\infty;b]$. Hàm số $f(x)$ liên tục trên nửa khoảng $(-\infty;b]$ nếu $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-\infty;b)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

⚠ Đồ thị của hàm số liên tục trên một đoạn, khoảng, nửa khoảng là một đường liền nét.

Nhận xét : Tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số liên tục tại một điểm là những hàm số liên tục tại điểm đó (trong trường hợp thương, giá trị của mẫu tại điểm đó khác 0).

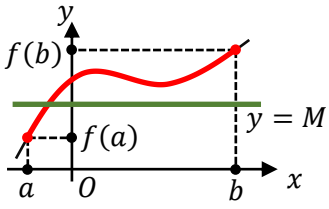
Hàm đa thức và hàm phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) liên tục trên tập xác định của chúng.

177. Định lý giá trị trung gian

Định lý về giá trị trung gian của hàm số liên tục

Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$. Nếu $f(a)\neq f(b)$ thì với mỗi số thực M nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$, tồn tại ít nhất một điểm $c\in(a;b)$ sao cho $f(c)=M$.

Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ và M là một số thực nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$ thì đường thẳng $y=M$ cắt đồ thị của hàm số $y=f(x)$ ít nhất tại một điểm có hoành độ $c\in(a;b)$.



Hệ quả:

👉Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a)f(b)<0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c\in(a;b)$ sao cho $f(c)=0$.

👉Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a)f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(a;b)$.

178. Ứng dụng tính liên tục để chứng minh sự có nghiệm

Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a)f(b)<0$ thì đồ thị của hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành ít nhất tại một điểm có hoành độ $c\in(a;b)$.

Bài toán và phương pháp giải : Chứng minh phương trình có ít nhất một nghiệm (hoặc phương trình có nghiệm) thuộc đoạn $[a;b]$

Bước 1: Chứng minh tính liên tục của hàm số trên $[a;b]$ (1).
Bước 2: Tính $f(a)$; tính $f(b)$ từ đó suy ra $f(a)\cdot f(b)<0$ (2).
Từ (1), (2) suy ra hàm số có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(a;b)$.

Bài toán và phương pháp giải : Chứng minh phương trình có ít nhất một nghiệm (hoặc có nghiệm) (không cho trước đoạn $[a;b]$)

Bước 1: Thử tìm một nghiệm của phương trình (bằng máy tính).

Bước 2: Lựa chọn đoạn $[a;b]$ sao cho nghiệm tìm được thuộc vào $[a;b]$ và $f(a), f(b)$ trái dấu; và hàm số liên tục trên mọi đoạn $[a;b]$ được chọn.

2 bước này làm nháp

Bước 3: Trình bày giống như dạng toán đã biết đoạn $[a;b]$ cho trước.

Một số nhận xét

Nếu bài yêu cầu chứng minh phương trình có ít nhất n nghiệm thì phải chọn được n đoạn (sao cho các khoảng tương ứng là riêng biệt, hay không giao nhau) để áp dụng định lí.

Định lí được áp dụng cho đoạn, nhưng khi kết luận thì phải kết luận *có ít nhất một nghiệm thuộc vào khoảng.*

Một phương trình đa thức bậc n có tối đa n nghiệm. Tức là:
Phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ có tối đa 3 nghiệm.
Phương trình $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ có tối đa 4 nghiệm.

Phương trình đa thức bậc lẻ luôn luôn có ít nhất 1 nghiệm.

Bài toán chứng minh phương trình luôn có nghiệm $\forall m$ ta thường lựa chọn giá trị x_0 như sau:
Giả sử phương trình có dạng: $f(x,m)=0$.
Phương trình có thể thu được về dạng:

$$m^n\times A_n(x)+m^{n-1}\times A_{n-1}(x)+\cdots+m\times A_1(x)+A_0(x)=0$$

(đa thức bậc n theo biến m)

Trong đó: $A_i(x)$ là các công thức chỉ phụ thuộc vào x.
Khi đó các giá trị x_0 thường được chọn sao cho:

$$A_n(x)=A_{n-1}(x)=\cdots=A_1(x)=0$$ (các hệ số gắn với m đều bằng 0)

Hoặc nếu phương trình có dạng đặc biệt: $m^{2n}A(x)+B(x)=0$ (Trong đó: $A(x)$, $B(x)$ là các công thức chỉ phụ thuộc vào x.

Ta thường chọn x_0 sao cho $A(x)=0$ hoặc $B(x)=0$ hoặc $\begin{cases}A(x)<0\\B(x)<0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}A(x)>0\\B(x)>0\end{cases}$

Cho hàm số $f(x)=ax^2+bx+c\ (c\neq 0)$ và $Ma+Nb+Lc=0$.

Chứng minh phương trình $f(x)=0$ luôn có nghiệm ta làm như sau:

$f(0)=c$

Ta đi tìm x_0 là giá trị thỏa mãn $f(x_0)=K_1(Ma+Nb+Lc)+K_2c=K_2c$

(trong đó K_1 và K_2 là 2 số chưa biết)

Ta có $f(x_0)=ax_0^2+bx_0+c=K_1(Ma+Nb+Lc)+K_2c$

(đồng nhất hệ số của a, b, c ở 2 vế ta được)

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0^2=K_1M \\ x_0=K_1N \\ 1=K_1L+K_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0^2=K_1M \\ x_0=K_1N \end{cases} \Rightarrow x_0=\frac{M}{N}$$

Thường thì 2 giá trị $x_0=0$ và $x_0=\frac{M}{N}$ sẽ chính là 2 giá trị thỏa mãn định lý tồn tại nghiệm.

Thầy Lê Trung Kiên

ĐẠO HÀM

179. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và điểm $x_0 \in (a; b)$.

Giới hạn hữu hạn (nếu có) của tỷ số $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ khi $x \to x_0$ được gọi là **đạo hàm** của hàm số đã cho tại điểm x_0.

Kí hiệu: $f'(x_0)$ hoặc $y'(x_0)$

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Nếu đặt $\Delta x = x - x_0$ và

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

thì ta có :

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Số $\Delta x = x - x_0$ được gọi là **số gia của biến số** tại điểm x_0.

Số $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ được gọi là **số gia của hàm số** ứng với số gia Δx tại điểm x_0.

Một số nhận xét

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì hàm số liên tục tại điểm x_0.
Nếu hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại điểm x_0 thì hàm số không có đạo hàm tại điểm x_0.
Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm x_0 thì hàm số chưa chắc có đạo hàm tại điểm x_0.

Bấm máy tính tìm đạo hàm của hàm số tại 1 điểm x_0 cụ thể

Cú pháp: $\frac{d}{dx}(\text{Công thức hàm số})|_{x=x_0}$

$f(x)$ có đạo hàm tại $x = x_0$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \text{Một số hữu hạn}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \text{Một số hữu hạn}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \text{Một số cụ thể} \\ g(x_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x_0) = 0$$

180. Số e

Người ta chứng minh được rằng: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \approx 2{,}718281828\ldots$

Giới hạn trên là một số vô tỷ được gọi là số e, tức là $e = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \approx 2{,}718281828\ldots$

Bài toán: Một người gửi vào ngân hàng số tiền vốn ban đầu A với lãi suất là r/năm. Tính số tiền cả vốn lẫn lãi mà người đó nhận được nếu phương thức tính lãi là lãi kép và kỳ hạn tính lãi rất rất bé (gọi là **lãi kép liên tục**).

Giả sử 1 năm được chia thành n kỳ hạn ⇒ Độ dài của một kỳ hạn là $\frac{1}{n}$ và lãi suất của mỗi kỳ hạn là $\frac{r}{n}$.

Tại một thời điểm t tùy ý thì số kỳ hạn đã trải qua là $\frac{t}{1/n} = nt$

Công thức lãi kép để tính số tiền cả gốc và lãi là: $T(t) = A\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$

Lãi kép được tính liên tục nên n sẽ trở nên rất rất lớn để mỗi kỳ hạn trở nên rất rất ngắn.

Khi đó ta cần biến đổi để vận dụng được công thức: $e = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

Ta có: $T(t) = A\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = A\left(1+\frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{nt} = A\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^{r\times t}$

Khi $n \to +\infty$ thì việc tính lãi trở nên liên tục (kỳ hạn ngắn dần và độ dài kỳ hạn $\to 0$) thì:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{\frac{n}{r}} = e$$

Từ đó suy ra: $T(t) = Ae^{rt}$

(Với $T(t)$ là số tiền cả gốc và lãi tại thời điểm t (t tính bằng năm), A là số tiền vốn ban đầu, $e \approx 2{,}718281828\ldots$ (e có thể lấy trong máy tính), r là lãi suất của 1 năm)

Sự khác biệt giữa **lãi kép** và **lãi kép liên tục**

	Lãi kép	**Lãi kép liên tục**
Độ dài kỳ hạn	Độ dài kỳ hạn là 1 con số hữu hạn và cụ thể. Ví dụ: kỳ hạn là 1 năm hoặc 3 tháng hoặc 1 tháng.	Độ dài kỳ hạn rất rất bé ≈ 0 (chính vì thế mà quá trình tính lãi xảy ra liên tục trong từng khoảnh khắc)
Công thức tính tổng tiền vốn và lãi	$T_n = A(1+r)^n$	$T(t) = Ae^{rt}$
Ý nghĩa thông số	T_n: là tổng số tiến vốn và lãi nhận được sau n kỳ hạn. n: là số kỳ hạn (n là một số nguyên dương) A: số tiền vốn ban đầu. r: lãi suất 1 năm	$T(t)$: là tổng số tiến vốn và lãi nhận được tại thời điểm t. (Bắt đầu gửi tiền từ thời điểm $t = 0$). t: thời điểm tính tiền ($t \geq 0$ tùy ý và có đơn vị là năm) A: số tiền vốn ban đầu. r: lãi suất 1 năm

Thầy Lê Trung Kiên

181. Bảng đạo hàm

Trong các công thức sau u, v, w là hàm số của x. Các chữ khác đại diện cho các số thích hợp. Tất cả các góc của hàm số lượng giác đều đo bằng radian. Các biểu thức đều thỏa điều kiện xác định. $n \in \mathbb{R}$.

Hàm cơ bản	Hàm hợp	Hàm cơ bản	Hàm hợp
$(C)' = 0$		$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cos u$
$(x)' = 1$		$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \sin u$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(u^n) = nu^{n-1}u'$	$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^u)' = u'a^u \ln a$	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u'e^u$		

Một vài công thức khác

$(\lvert x\rvert)' = \dfrac{x}{\lvert x\rvert}$	$(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\sinh x)' = \cosh x$
$\left(\dfrac{1}{x^n}\right)' = \dfrac{-n}{x^{n+1}}$	$(\arccos(x))' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\cosh x)' = \sinh x$
$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$(\arctan(x))' = \dfrac{1}{x^2+1}$	$(\tanh x)' = \operatorname{sech}^2 x$
$(\sin^n x)' = n \sin^{n-1} x \cos x$	$(\operatorname{arccot} x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$	$(\coth x)' = -\operatorname{csch}^2 x$
$(\cos^n x)' = -n \cos^{n-1} x \sin x$	$(\operatorname{arcsec} x)' = \dfrac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$	$(\operatorname{sech} x)' = -\operatorname{sech} x \tanh x$
$(\tan^n x)' = n \tan^{n-1} x \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{arccsc} x)' = \dfrac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$	$(\operatorname{csch} x)' = -\operatorname{csch} x \coth x$
$(\cot^n x)' = -n \cot^{n-1} x \dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(u^n v^m)' = u^{n-1}v^{m-1}(nu'v + muv')$	$(\operatorname{arcsinh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$(\sec x)' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \tan x$	$(u^v)' = vu^{v-1}u' + \ln u \,.\, u^v v'$	$(\operatorname{arccosh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$(\csc x)' = \dfrac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\csc x \cot x$	$\left(\dfrac{u^n}{v^m}\right)' = \dfrac{u^{n-1}}{v^{m+1}}(nu'v - muv')$	$(\operatorname{arctanh} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$
$\left(\int_C^x f(t)dt\right)' = f(x)$	$\left(\int_x^C f(t)dt\right)' = -f(x)$	$(\operatorname{arccoth} x)' = -\dfrac{1}{x^2-1}$
$\left(\int_C^{g(x)} h(t)dt\right)' = h(g(x)) \times g'_x$		

182. Quy tắc tính

Tổng, Hiệu	Tích 2 biểu thức	Nhân với hằng số	Thương
$(u \pm v) = u' \pm v'$	$(uv)' = u'v + uv'$	$(ku) = k \cdot u'$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Một số quy tắc khác

Tích 3 biểu thức	$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$
Đạo hàm hàm hợp	$y = f(u) \Rightarrow y'_x = f'_u(u) \cdot u'_x$
Đạo Hàm Cấp Hai	$f''(x) = [f'(x)]'$
Đạo hàm cấp cao	$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]', (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$
Một số quy tắc liên quan đến đạo hàm cấp cao	
Đạo hàm cấp 2 của tích	$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$
Đạo hàm cấp 3 của tích	$(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$
Đạo hàm cấp n của tổng hiệu	$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$
Đạo hàm cấp n khi nhân với hằng số	$(ku)^{(n)} = k \cdot u^{(n)}$
Đạo hàm cấp n của tích	$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \cdots + uv^{(n)}$

183. Công thức tính nhanh

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \Rightarrow y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$$

$$y = \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2} \Rightarrow y' = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} x^2 + 2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{(a_2x^2 + b_2x + c_2)^2}$$ ("Che ngược, ở giữa nhân đôi")

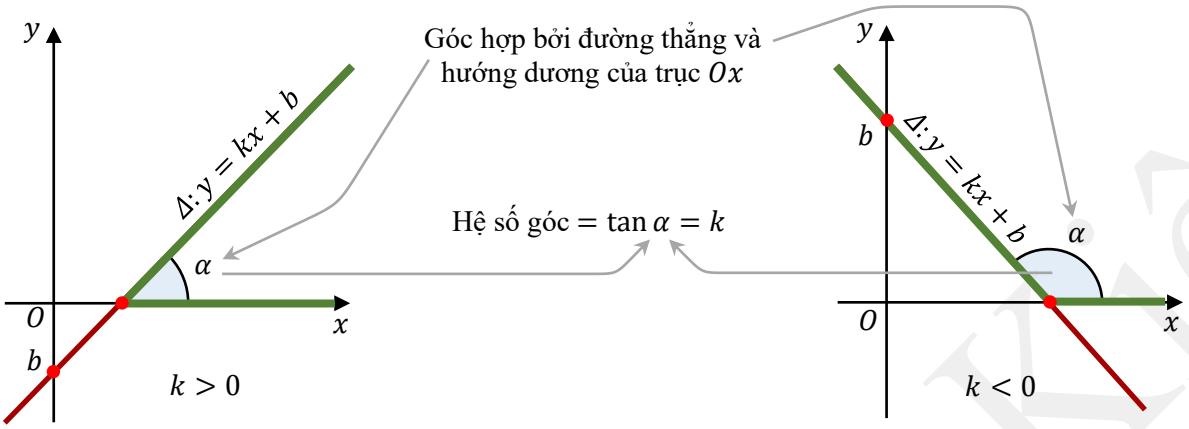
184. Ý nghĩa cơ học

v: vận tốc, a: gia tốc, s: vị trí của vật

$$v(t) = s'(t)$$
$$a(t) = v'(t)$$

Thầy Lê Trung Kiên

185. Hệ số góc đường thẳng



Dạng 1: $(d)\ y = kx + b$

👉 k là hệ số góc của đường thẳng

👉 b là một số thuộc $\mathbb{R}$ (khi $x = 0$ thì $y = b \Rightarrow b$ là tung độ giao điểm của đường thẳng với trục Oy)

Dạng 2: $(d)\ y = k(x - x_0) + y_0$

👉 $M(x_0; y_0)$ là một điểm tùy ý thuộc đường thẳng

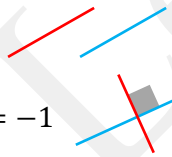
Lưu ý:

- Nếu đường thẳng d đi qua 2 điểm A và B thì hệ số góc k được tính theo công thức: $k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
- Tan(góc nhọn) > 0; Tan(góc tù) < 0
- Nếu biết hệ số góc của đường thẳng d là k thì để tìm góc hợp bởi đường thẳng và hướng dương của trục Ox ta tính: $\tan^{-1}(k)$ (hoặc $\arctan(k)$)

186. Hệ số góc đường thẳng song song, vuông góc, tạo góc

Cho hai đường thẳng $\Delta_1: y = k_1x + b_1 (k_1 \neq 0)$ và $\Delta_2: y = k_2x + b_2 (k_2 \neq 0)$

- $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$

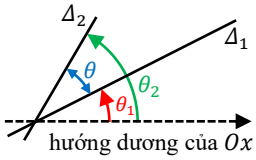


- $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow k_1 \times k_2 = -1$

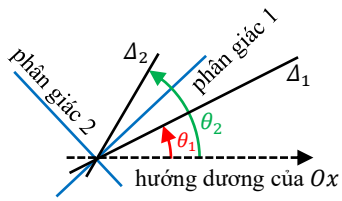


- Gọi θ_1 là góc để xác định hệ số góc của Δ_1, θ_2 là góc để xác định hệ số góc của Δ_2,

Δ_1 tạo với Δ_2 một góc θ thì $\begin{cases} \theta_1 = \arctan(k_1) \\ \theta_2 = \arctan(k_2) \\ |\theta_1 - \theta_2| = \theta \end{cases}$



- Gọi d là đường thẳng phân giác của 2 đường thẳng Δ_1 và Δ_2, θ_d là góc để xác định hệ số góc của d thì:



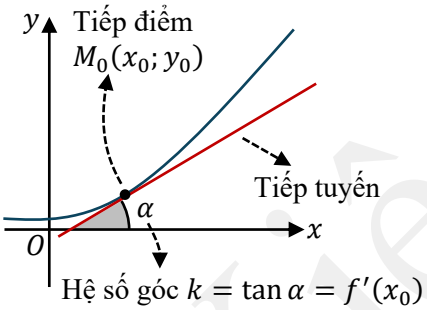
$$\theta_d = \frac{\arctan(k_1) + \arctan(k_2)}{2} \text{ hoặc } \theta_d = \frac{\arctan(k_1) + \arctan(k_2)}{2} + \frac{\pi}{2}$$

187. Phương trình tiếp tuyến

Ý nghĩa hình học của đạo hàm: Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là **hệ số góc của tiếp tuyến** của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại tiếp điểm $M\big(x_0\,; f(x_0)\big)$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại tiếp điểm $M\big(x_0\,; f(x_0)\big)$:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

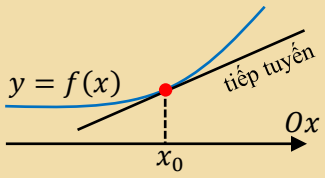


Bài toán và phương pháp giải : Viết phương trình tiếp tuyến biết hoành độ (hoặc tọa độ) tiếp điểm

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ biết hoành độ tiếp điểm là $x = x_0$ (nếu thiếu tung độ tiếp điểm thì tính $y_0 = f(x_0)$)

– Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $\big(x_0; f(x_0)\big)$ là:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$



Bài toán và phương pháp giải : Viết phương trình tiếp tuyến biết tung độ tiếp điểm

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có tung độ bằng số b.

– Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

– Ta có $y_0 = b$.

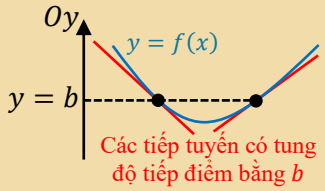
– Thế $y = b$ vào phương trình $y = f(x)$ từ đó tìm được x_0.

– Tính $f'(x)$, từ đó tính được $f'(x_0)$.

– Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M là:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + b$$

(Kết quả có thể là nhiều phương trình tiếp tuyến)



Bài toán và phương pháp giải : Viết phương trình tiếp tuyến biết hệ số góc của tiếp tuyến

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng k.

– Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

– Hệ số góc tiếp tuyến bằng k nên $f'(x_0) = k$. Giải phương trình này ta tìm được x_0.

– Thế x_0 vào phương trình $y = f(x)$ tìm được y_0.

– Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M là: $y = k(x - x_0) + y_0$

(Kết quả có thể là nhiều phương trình tiếp tuyến)

Bài toán và phương pháp giải : Viết phương trình tiếp tuyến song song với đường thẳng cho trước

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = ax + b$.

– Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

– Tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = ax + b$

$\Rightarrow f'(x_0) = a$. Giải phương trình tìm ra x_0.

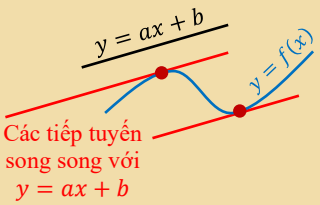
– Thế x_0 vào phương trình $y = f(x)$ tìm được y_0.

– Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M là:

$$y = a(x - x_0) + y_0$$

(Kết quả có thể là nhiều phương trình tiếp tuyến)

Chú ý: Nhớ kiểm tra tính song song của tiếp tuyến, tiếp tuyến nhận được phải có hệ số tự do khác với b.



Bài toán và phương pháp giải : Viết phương trình tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng cho trước

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: y = ax + b$.

– Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

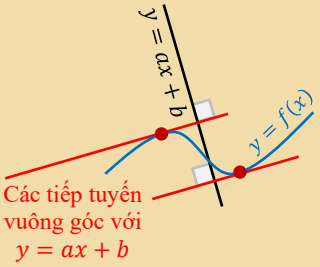
– Tiếp tuyến vuông góc với $d: y = ax + b \Rightarrow f'(x_0) = -\frac{1}{a}$. Giải phương trình tìm ra x_0.

– Thế x_0 vào phương trình $y = f(x)$ tìm được y_0.

– Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M là:

$$y = -\frac{1}{a}(x - x_0) + y_0$$

(Kết quả có thể là nhiều phương trình tiếp tuyến)



Bài toán và phương pháp giải : Viết phương trình tiếp tuyến đi qua điểm

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm $A(x_A; y_A)$

– Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến d đi qua A.

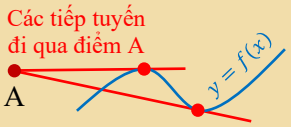
– Suy ra $d: y - y_A = k(x - x_A) \Leftrightarrow y = kx - kx_A + y_A (*)$.

– d tiếp xúc với $(C) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = kx - kx_A + y_A & (1) \\ f'(x) = k & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

– Thế (2) vào (1) để tìm hoành độ tiếp điểm x.

– Thế x vào phương trình (2) để tìm hệ số góc k của tiếp tuyến.

– Thế k vào $(*)$ tìm được phương trình tiếp tuyến đi qua M.



Chú ý: Khi thế (2) vào (1) và giả sử thu được phương trình ẩn số là x và được ký hiệu là (1). Thông thường phương trình (1) có bao nhiêu nghiệm x thì qua điểm A có bấy nhiêu tiếp tuyến đến đồ thị (C). Từ đó ta giải quyết được bài toán "Tìm điều kiện để qua A có thể vẽ được đến đồ thị (C) n tiếp tuyến".

LŨY THỪA

188. Các định nghĩa

Lũy thừa với số mũ nguyên dương	Lũy thừa với số mũ 0 và số mũ nguyên âm
Với $n \in \mathbb{Z}^+$. Lũy thừa bậc n của số a (còn gọi là lũy thừa của a với số mũ n) là: $a^n = \underbrace{a.a\ldots a}_{\text{n thừa số}}$ (a là cơ số, n là số mũ)	Với $a \neq 0, n = 0$ hoặc $n \in \mathbb{Z}^-$, lũy thừa bậc n của a là số a^n xác định bởi: $a^0 = 1 \quad ; \quad a^n = \frac{1}{a^{-n}}$ *Chú ý* : Các ký hiệu $0^0, 0^n$ $(n \in \mathbb{Z}^-)$ không có nghĩa.
Lũy thừa với số mũ hữu tỷ Cho $a \in \mathbb{R}^+$ và $r \in \mathbb{Q}$. Giả sử $r = \frac{m}{n}$, với $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+$. Lũy thừa của a với số mũ r là số a^r xác định bởi: $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	

189. Điều kiện của $(f(x))^\alpha$

$\alpha \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow f(x) \in \mathbb{R}$ | $\alpha = 0$ hoặc $\alpha \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow f(x) \neq 0$ | $\alpha \notin \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) > 0$

190. Tính chất

Với $a \neq 0, b \neq 0$ và $m, n \in \mathbb{Z}$; ta có :

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$(ab)^n = a^n b^n$	$a^{m^n} \neq (a^m)^n$
$a^{-1} = \frac{1}{a}$	$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$
$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ (với $a > 0$)	$\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$ (với $a > 0$)	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ (với $a > 0$)
$\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$	$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$	

191. So sánh lũy thừa cùng cơ số

Với $0 < a < 1$ thì: $m \leq n$

Dấu bị đổi

Cho $m, n \in \mathbb{Z}$. Khi đó : $a^m \geq a^n$

Dấu giữ nguyên

Với $a > 1$ thì: $m \geq n$

Thầy Lê Trung Kiên

Hệ quả:

Hệ quả 1 (So sánh cùng số mũ với cơ số dương)	**Hệ quả 2 (So sánh cùng số mũ lẻ)**
Với $0 < a < b$ và $m \in \mathbb{Z}$ thì $a^m < b^m \Leftrightarrow m > 0$ $a^m > b^m \Leftrightarrow m < 0$	Với $a < b, n$ là số tự nhiên lẻ thì $a^n < b^n$
Hệ quả 3	**Hệ quả 4**
Với $a, b > 0, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ thì $a^n = b^n \Leftrightarrow a = b$	$a^{2n} = b^{2n} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a = -b \end{array}\right.$

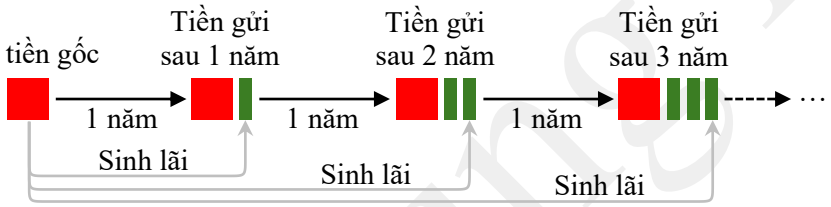
192. Lãi đơn

Lãi đơn là số tiền lãi chỉ tính trên số vốn gốc ban đầu.

Công thức số tiền cả gốc và lãi ở cuối chu kì thứ n của lãi đơn:

$$T_n = T_{\text{ban đầu}}(1 + n.r_{\text{lãi}}\%)$$

Sơ đồ minh họa lãi đơn với chu kì 1 năm



193. Lãi kép

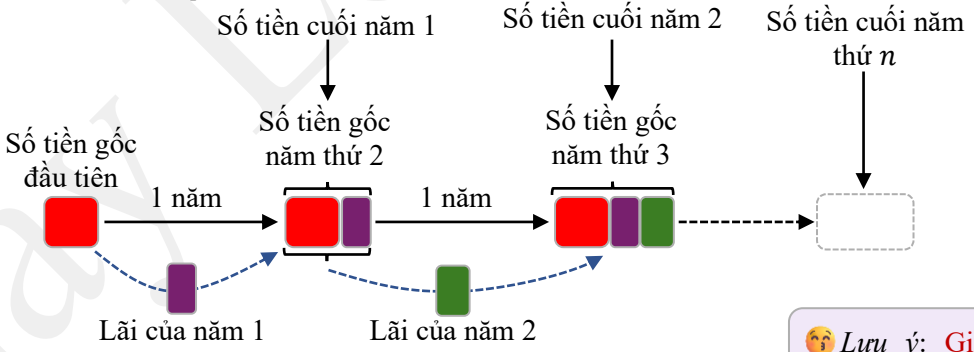
Công thức lãi kép

Gửi tiền vào ngân hàng, ngoài thể thức lãi đơn, còn có thể thức lãi kép. Theo thể thức này, nếu đến kì hạn người gửi không rút lãi ra thì tiền lãi được tính vào vốn của kì kế tiếp. Thuật ngữ lãi kép cũng đồng nghĩa với các thuật ngữ như lãi gộp vốn, lãi ghép vốn hoặc lãi nhập vốn.

Nếu một người gửi số tiền $T_{\text{gốc ban đầu}}$ với lãi suất $r_{\text{lãi}}\%$ mỗi kì thì dễ thấy sau N kì số tiền người ấy thu được cả vốn lẫn lãi là :

$$T_{\text{chu kỳ sau}} = T_{\text{chu kì trước}} + T_{\text{chu kì trước}} \times r_{\text{lãi}}\%$$
$$\Rightarrow T_{\text{chu kỳ sau}} = \underbrace{(1 + r_{\text{lãi}}\%)}_{\text{hằng số}} T_{\text{chu kì trước}} \quad \text{(Dạng cấp số nhân)}$$
$$\Rightarrow T_{\text{chu kì thứ } n} = T_{\text{gốc ban đầu}}(1 + r_{\text{lãi}}\%)^n$$

Sơ đồ minh họa lãi kép với chu kì là 1 năm



Nếu một giá trị hoặc đại lượng tăng theo quy luật:
Giá trị lần thứ n = Giá trị lần thứ $(n-1) \pm$ Giá trị lần thứ $(n-1) \times r$
$\Rightarrow$ Giá trị lần thứ n = Giá trị ban đầu$\times(1 \pm r)^n$

😘 *Lưu ý*: Giá trị ban đầu ứng với $n = 0$, ở công thức trên nếu là tăng thêm thì lấy dấu cộng, giảm bớt thì lấy dấu trừ.

Thầy Lê Trung Kiên

194. Một số bài toán lãi suất khác

Cơ chế lãi kép độc lập

Số tiền gốc ban đầu là $T_{\text{gốc}_0}$, sau đó vào thời điểm nào đó lại gửi thêm $T_{\text{gốc}_1}$, sau đó vào thời điểm nào đó lại gửi thêm $T_{\text{gốc}_2}$,…, sau đó vào thời điểm nào đó lại gửi thêm $T_{\text{gốc}_m}$.
Giả sử từ thời điểm gửi $T_{\text{gốc}_0}$ đến hết thời gian gửi là n_0 chu kỳ tính lãi; từ thời điểm gửi $T_{\text{gốc}_1}$ đến hết thời gian gửi là n_1 chu kỳ tính lãi; từ thời điểm gửi $T_{\text{gốc}_2}$ đến hết thời gian gửi là n_2 chu kỳ tính lãi;…; từ thời điểm gửi $T_{\text{gốc}_m}$ đến hết thời gian gửi là n_m chu kỳ tính lãi.
Khi đó, số tiền nhận được vào cuối thời gian gửi (tính theo kiểu lãi kép) là:

$$T_{\text{gốc}_0}(1+r\%)^{n_0} + T_{\text{gốc}_1}(1+r\%)^{n_1} + T_{\text{gốc}_2}(1+r\%)^{n_2} + \cdots + T_{\text{gốc}_m}(1+r\%)^{n_m}$$

(Số tiền nhận được bằng tổng số tiền do từng $T_{\text{gốc}_i}$ sinh ra theo kiểu lãi kép)

Lưu ý: Các số tiền $T_{\text{gốc}_i}$ mang giá trị dương nếu tiền được gửi thêm vào, $T_{\text{gốc}_i}$ mang giá trị âm nếu tiền bị rút ra.

Số tiền gốc gửi vào là $T_{\text{gốc}}$, đầu mỗi chu kỳ (tính từ chu kỳ thứ 2) gửi thêm vào $T_{\text{thêm}}$, lãi suất $r\%$/chu kỳ được tính theo thể thức lãi kép. T_n là số tiền nhận được ở cuối chu kỳ thứ n (trước khi gửi thêm vào $T_{\text{thêm}}$)

$$\begin{aligned} T_n &= T_{\text{gốc}}(1+r\%)^n + [T_{\text{thêm}}(1+r\%)^{n-1} + T_{\text{thêm}}(1+r\%)^{n-2} + \cdots + T_{\text{thêm}}(1+r\%)^1] \\ &= T_{\text{gốc}}(1+r\%)^n + T_{\text{thêm}} \times \frac{(1+r\%)(1-(1+r\%)^{n-1})}{1-(1+r\%)} \\ &= T_{\text{gốc}}(1+r\%)^n + T_{\text{thêm}} \times \frac{(1+r\%)((1+r\%)^{n-1}-1)}{r\%} \end{aligned}$$

Nếu $T_{\text{gốc}} = T_{\text{thêm}}$ thì:

$$\begin{aligned} T_n &= T_{\text{thêm}}(1+r\%)^n + T_{\text{thêm}}(1+r\%)^{n-1} + T_{\text{thêm}}(1+r\%)^{n-2} + \cdots + T_{\text{thêm}}(1+r\%)^1 \\ &= T_{\text{thêm}} \times \frac{(1+r\%)((1+r\%)^n-1)}{r\%} \end{aligned}$$

Gửi ngân hàng số tiền gốc $T_{\text{gốc}}$ với lãi suất $r\%$/chu kỳ. Vào đầu mỗi chu kỳ (tính từ đầu chu kỳ thứ 2) rút ra số tiền là $T_{\text{rút}} > 0$. Gọi T_n là số tiền còn lại sau n chu kỳ (trước khi rút $T_{\text{rút}}$ vào đầu chu kỳ tiếp theo).

$$\begin{aligned} T_n &= T_{\text{gốc}}(1+r\%)^n - [T_{\text{rút}}(1+r\%)^{n-1} + T_{\text{rút}}(1+r\%)^{n-2} + \cdots + +T_{\text{rút}}(1+r\%)^1] \\ &= T_{\text{gốc}}(1+r\%)^n - T_{\text{rút}} \times (1+r\%)\frac{(1+r\%)^{n-1}-1}{r\%} \end{aligned}$$

Vay ngân hàng số tiền là $T_{\text{gốc}}$ với lãi suất $r\%$/chu kỳ. Hoàn nợ vào cuối mỗi chu kỳ với số tiền hoàn nợ không đổi là $T_{\text{hoàn nợ}}$. Gọi T_n là số tiền còn nợ ngân hàng ở cuối chu kỳ thứ n (sau khi đã nộp vào $T_{\text{hoàn nợ}}$)

$$\begin{aligned} T_n &= T_{\text{gốc}}(1+r\%)^n - [T_{\text{hoàn nợ}}(1+r\%)^{n-1} + T_{\text{hoàn nợ}}(1+r\%)^{n-2} + \cdots + T_{\text{hoàn nợ}}(1+r\%)^0] \\ &= T_{\text{gốc}}(1+r\%)^n - T_{\text{hoàn nợ}} \times \frac{(1+r\%)^n-1}{r\%} \end{aligned}$$

HÀM SỐ LŨY THỪA

195. Định nghĩa

> Hàm số lũy thừa là hàm số có dạng $y = x^{\alpha}$, trong đó α là một hằng số tùy ý.

Chú ý : Đẳng thức $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ chỉ xảy ra nếu $x > 0$. Do đó hàm số $y = x^{\frac{1}{n}}$ không đồng nhất với hàm số $y = \sqrt[n]{x} (n \in \mathbb{N}^*)$.

196. Đạo hàm

Hàm số lũy thừa $y = x^{\alpha}$ (với $\alpha \in \mathbb{R}$) có đạo hàm tại mọi điểm $x > 0$ và $(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha - 1}$

Đạo hàm của hàm số lũy thừa hợp: $\left(u^{\alpha}(x)\right)' = u'(x) \cdot \alpha u^{\alpha - 1}(x)$

197. Sự biến thiên và đồ thị

Xét hàm số $y = x^{\alpha}$

▪ Nếu α nguyên dương thì đồ thị và sự biến thiên của một số hàm số như vậy đã được học như:

$$y = x, y = x^2, y = x^3, y = x^4.$$

▪ Nếu α không nguyên thì :

– Tập xác định $D = (0; +\infty)$.

– Tập giá trị $T = (0; +\infty)$.

– Nếu $\alpha > 0$ thì hàm số đồng biến trên D, không có tiệm cận.

– Nếu $\alpha < 0$ thì hàm số nghịch biến trên D, Ox là tiệm cận ngang, Oy là tiệm cận đứng.

– Đồ thị hàm số luôn luôn đi qua điểm $(1; 1)$.

α nguyên dương và chẵn

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

α nguyên dương và lẻ và $\alpha \neq 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

$\alpha = 1$

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$+$	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$

α nguyên âm và chẵn

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

α nguyên âm và lẻ

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

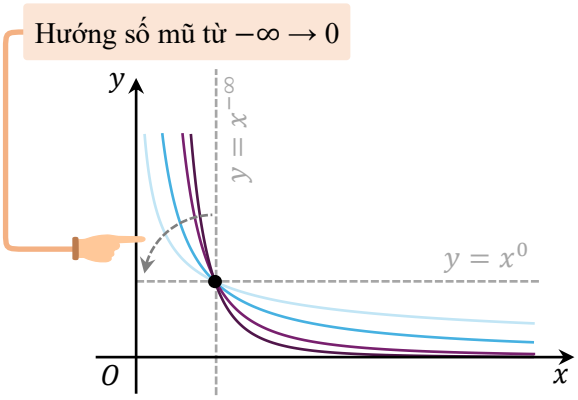
$\alpha < 0$ nhưng không nguyên

x	0		$+\infty$
y'		$-$	
y	$+\infty$	↘	0

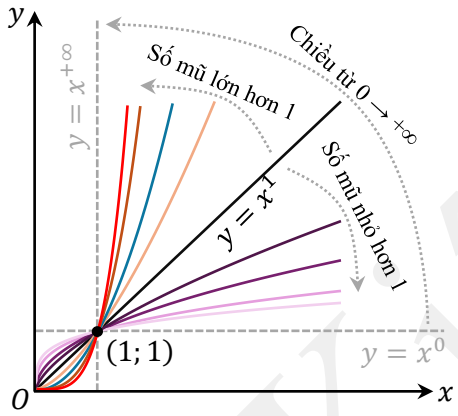
$\alpha > 0$ nhưng không nguyên

x	0		$+\infty$
y'		$+$	
y	0	↗	$+\infty$

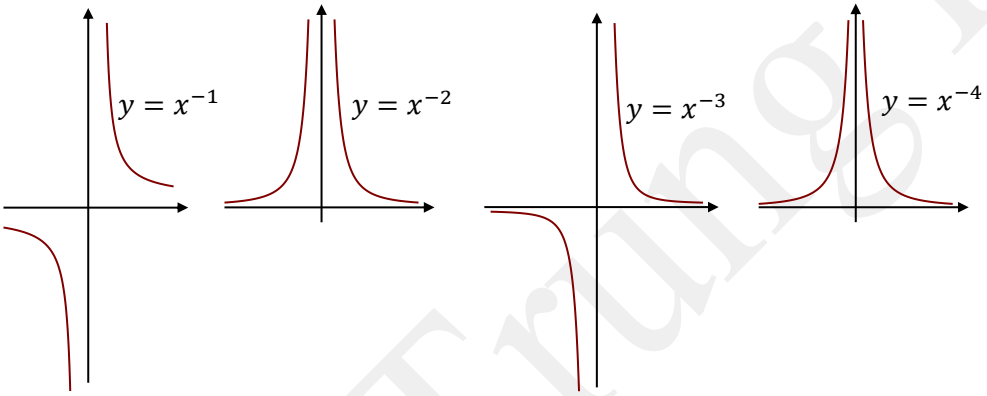
Thầy Lê Trung Kiên

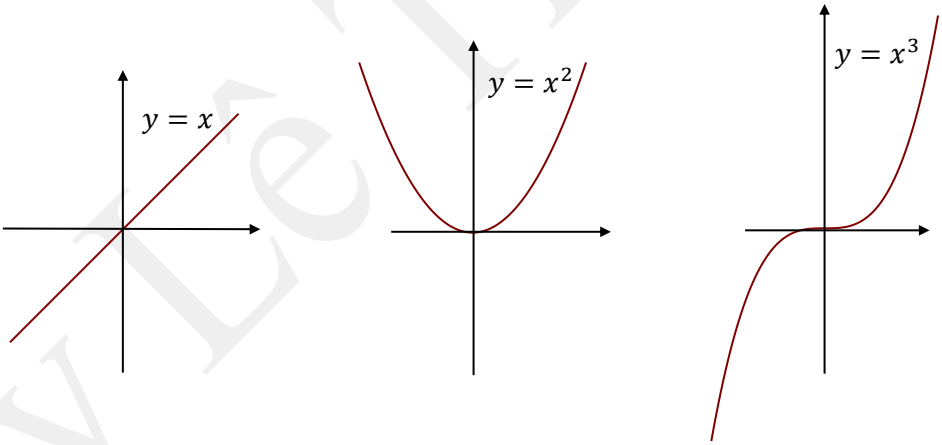


Các hàm $y = x^\alpha$ nghịch biến

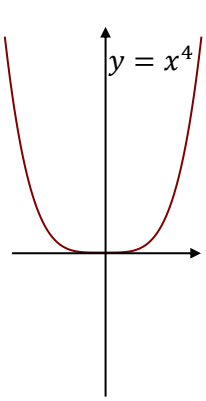


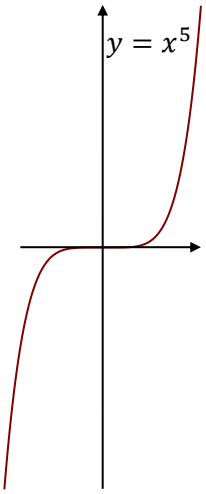
Các hàm $y = x^\alpha$ đồng biến

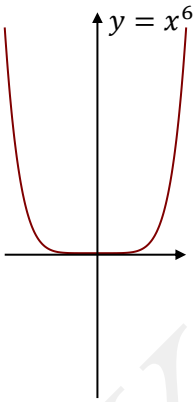


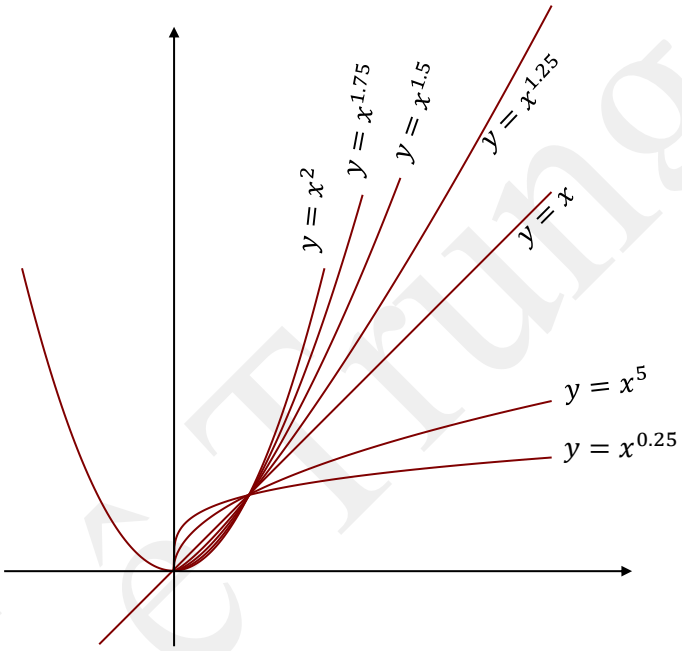


Thầy Lê Trung Kiên









Thầy Lê Trung Kiên

HÀM SỐ MŨ

Trong mục này, ta luôn giả thiết $a > 0$ và $a \neq 1$

198. Định nghĩa hàm số mũ

Định nghĩa

Hàm số dạng $y = a^x$ được gọi là hàm số mũ cơ số a.

Chú ý:

- Tập xác định của hàm số mũ : $D = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị của hàm số mũ : $T = (0; +\infty)$.
- Hàm số mũ với cơ số e được kí hiệu là $y = e^x$ hoặc $y = \exp(x)$.

199. Đạo hàm của hàm số mũ

- Hàm số $y = a^x$ có đạo hàm tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$ và $(a^x)' = a^x \ln a$
- Đạo hàm hàm hợp của hàm số mũ : $\left(a^{u(x)}\right)' = u'(x).a^{u(x)} \ln a$ ($u(x)$ là một hàm số của x)
- Đặc biệt : $(e^x)' = e^x; (e^x)^{(n)} = e^x$.

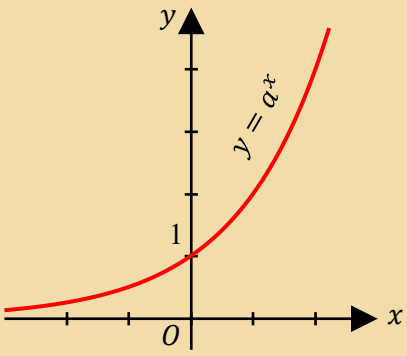
200. Sự biến thiên và đồ thị hàm số mũ

Hàm số $y = a^x$

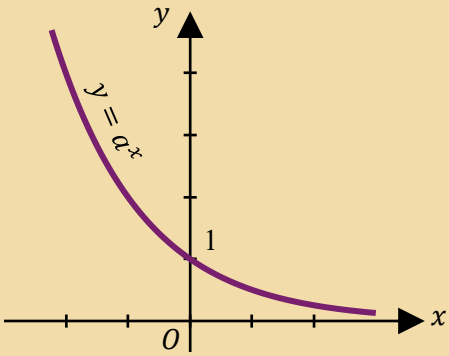
- Có tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị $T = (0; +\infty)$.
- Đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a > 1$. Nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $0 < a < 1$.
- Có đồ thị luôn luôn :

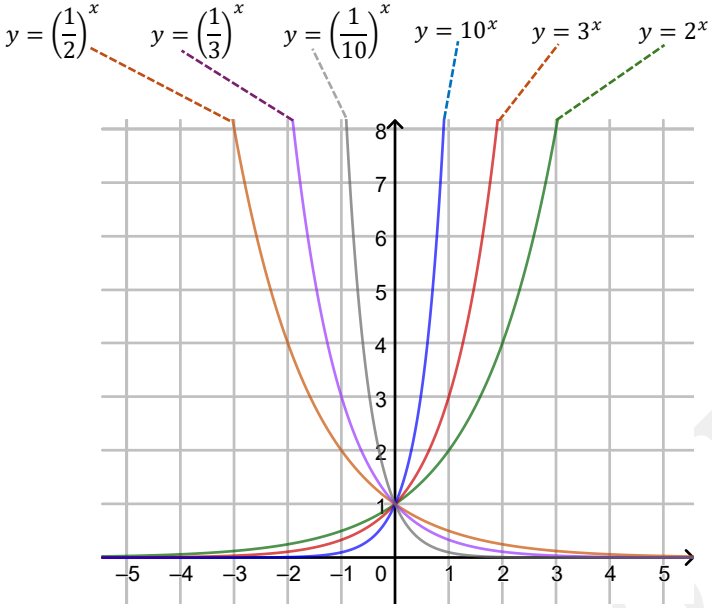
– Đi qua điểm $(0; 1)$.
– Nằm ở phía trên trục hoành.
– Nhận trục hoành làm tiệm cận ngang.
– Dạng đồ thị :

$a > 1$



$0 < a < 1$





Thầy Lê Trung Kiên

CĂN BẬC

201. Định nghĩa

Định nghĩa (Căn bậc n)
Với $n \in \mathbb{Z}^+$, căn bậc n của số thực a là số thực b sao cho $b^n = a$.

Chú ý:

Khi n là số lẻ, mỗi số thực a chỉ có một căn bậc n. Căn đó được kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$.
Khi n chẵn, mỗi số thực dương a có đúng hai căn bậc n là hai số đối nhau. Căn có giá trị dương kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$ (còn gọi là căn số học bậc n của a), căn có giá trị âm kí hiệu là $-\sqrt[n]{a}$.
Căn bậc 1 của số a chính là a.
Căn bậc n của số 0 là 0.
Số âm không có căn bậc chẵn vì lũy thừa bậc chẵn của một số thực bất kì là số không âm.
Với n nguyên dương lẻ, ta có : $\sqrt[n]{a} > 0$ khi $a > 0$. $\sqrt[n]{a} < 0$ khi $a < 0$.
$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a \text{ khi } n \text{ lẻ} \\ \lvert a \rvert \text{ khi } n \text{ chẵn} \end{cases}$

202. Tính chất

Với $a \geq 0, b \geq 0$; $m \in \mathbb{Z}^+, n \in \mathbb{Z}^+$ và $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}$ tùy ý, ta có :

$\sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p (a > 0)$	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$\sqrt[n]{a} = \sqrt[m \times n]{a^m}$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} (b > 0)$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \times n]{a}$	Nếu $\frac{p}{n} = \frac{q}{m}$ thì $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q} (a > 0)$

Với $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$\sqrt[2n]{a^{2n}} = \lvert a \rvert$	$\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a$	$\sqrt[2n]{ab} = \sqrt[2n]{\lvert a \rvert} \cdot \sqrt[2n]{\lvert b \rvert}, \forall ab \geq 0$
$\sqrt[2n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2n]{\lvert a \rvert}}{\sqrt[2n]{\lvert b \rvert}}, \forall ab \geq 0, b \neq 0$	$\sqrt[2n+1]{ab} = \sqrt[2n+1]{a} \cdot \sqrt[2n+1]{b}$	$\sqrt[2n+1]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2n+1]{a}}{\sqrt[2n+1]{b}}, b \neq 0$
$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m, \forall a > 0, n \in \mathbb{Z}^+, m \in \mathbb{Z}$		

Thầy Lê Phúc Điền

LOGARIT

203. Định nghĩa

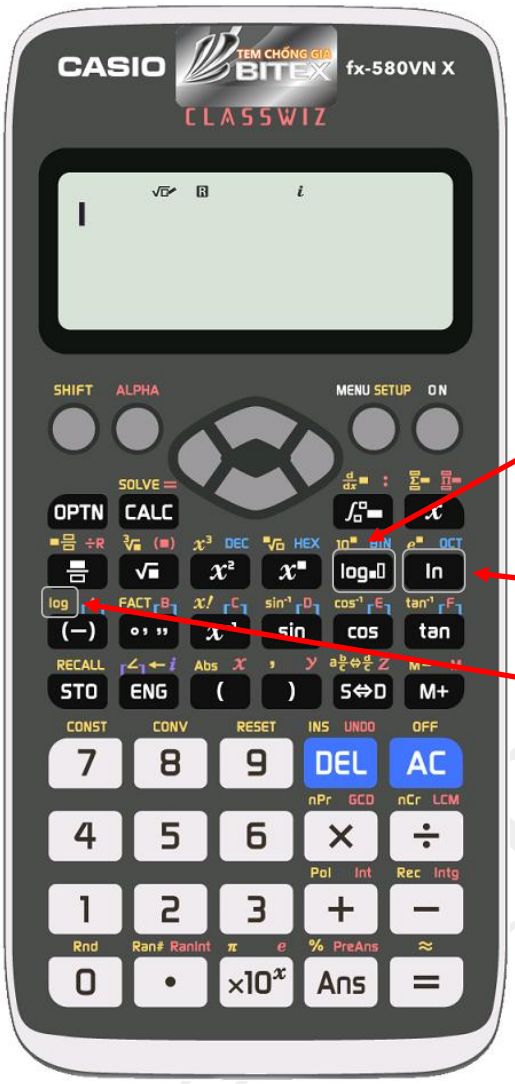
Cho $a > 0, a \neq 1$ và $b > 0$. Số thực α để $a^\alpha = b$ được gọi là logarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$, tức là :

$$a^\alpha = b \Leftrightarrow \log_a b = \alpha$$

Cách hiểu đơn giản: $\log_a b$ = Một số thỏa mãn a mũ mấy bằng b?

Chú ý:

Tên gọi các thành phần $\log_a b$ ← *Argument của logarit* ↑ *Cơ số của logarit*	Chú ý về cách viết: $\log_a^n b = (\log_a b)^n$ $\log_a b^n = \log_a(b^n)$	**Logarit thập phân** Logarit cơ số 10 của một số dương x được gọi là logarit thập phân của x và kí hiệu là $\log x$ (hoặc $\lg x$)
Định nghĩa (Số e) Số e là giá trị của giới hạn : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ $\approx 2{,}718281828\ldots$ Số e là một số vô tỷ.	**Logarit tự nhiên** Người ta gọi Logarit cơ số e là Logarit tự nhiên (hay Logarit Nê-pe) và kí hiệu: $\log_e x = \ln x$	Ví dụ *2 mũ mấy bằng 8?* $\log_2 8 = 3$ *3 mũ mấy bằng 9?* $\log_3 9 = 2$ *10 mũ mấy bằng 10000?* $\log_{10} 10000 = 4$ *$\sqrt{5}$ mũ mấy bằng 25?* $\log_{\sqrt{5}} 25 = 4$
Ví dụ *10 mũ mấy bằng 1000?* $\log 1000 = \log_{10} 1000 = 3$ *10 mũ mấy bằng $\frac{1}{10}$?* $\log\frac{1}{10} = \log_{10}\frac{1}{10} = -1$ *10 mũ mấy bằng $10^{\sqrt{2}}$?* $\log 10^{\sqrt{2}} = \log_{10} 10^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ *e mũ mấy bằng e?* $\ln e = \log_e e = 1$ *e mũ mấy bằng $e^{\frac{3}{5}}$?* $\ln e^{\frac{3}{5}} = \log_e e^{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5}$	Ví dụ: Tìm điều kiện xác định của hàm số $y = \log_5(1-x^2)$ Điều kiện xác định: $1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$	Ví dụ: Tìm điều kiện xác định của hàm số $y = \log_{x-1}(x^2 - 3x + 2)$ Điều kiện xác định $\begin{cases} x-1>0 \\ x-1\neq 1 \\ x^2-3x+2>0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x\neq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x<1 \\ x>2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x>2$



Bấm logarit với cơ số do người dùng nhập

Bấm logarit tự nhiên

Bấm logarit thập phân

Thầy Lê Văn Kiên

204. Tính chất

Lũy thừa logarit cùng cơ số	$a^{\log_a b} = b$
Logarit lũy thừa cùng cơ số	$\log_a a^n = n$
Logarit của chính cơ số	$\log_a a = 1$
Logarit của 1	$\log_a 1 = 0$
So sánh hai logarit cùng cơ số	Khi $a > 1$: $\Leftrightarrow b > c$ Giữ nguyên Cho $a > 0$, $a \neq 1$ và $b > 0$, $c > 0$. Khi đó: $\log_a b > \log_a c$ Đảo dấu Khi $0 < a < 1$: $\Leftrightarrow b < c$ **Hệ quả 1** Cho số $a > 0$, $a \neq 1$ và $b > 0$, $c > 0$. ▪ Khi $a > 1$ thì $\log_a b > 0 \Leftrightarrow b > 1$. ▪ Khi $0 < a < 1$ thì $\log_a b > 0 \Leftrightarrow b < 1$. ▪ $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$
Logarit của tích	$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$
Logarit của thương	$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
Logarit của lũy thừa	$\log_a b^n = n \log_a b$
Logarit với cơ số dạng mũ	$\log_{a^n} c = \frac{1}{n} \cdot \log_a c$
Logarit của nghịch đảo	$\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$
Logarit của căn	$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$
Đổi cơ số dạng tích	$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$
Đổi cơ số dạng thương	$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$
Đổi cơ số và argument	$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
Tráo đổi cơ số lũy thừa và argument logarit	$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$
Hạ mũ chẵn của argument	$\log_a b^{2n} = 2n \log_a \lvert b \rvert$
$\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$	
$\log_a(b_1 b_2 b_3 \dots b_n) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \log_a b_2 + \dots + \log_a b_n$	
$\log_a\left(b_1^{m_1} b_2^{m_2} b_3^{m_3} \dots b_n^{m_n}\right) = m_1 \log_a b_1 + m_2 \log_a b_2 + m_3 \log_a b_2 + \dots + m_n \log_a b_n$	
Đạo hàm logarit	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$; $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

205. Hàm số logarit

Hàm số dạng $y = \log_a x$ được gọi là **hàm số logarit** cơ số a.

▪ Tập xác định $D = (0\,; +\infty)$.

▪ Tập giá trị $T = \mathbb{R}$.

▪ Hàm số $y = \log_a x$ có đạo hàm tại mọi điểm $x > 0$ và

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad ; \quad \text{Đặc biệt : } (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

▪ Đạo hàm của hàm số hợp logarit

$$(\log_a u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x) \ln a} \quad ; \quad \text{Đặc biệt : } (\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

▪ Sự biến thiên và đồ thị của hàm số logarit

– Hàm số $y = \log_a x$

– Có tập xác định là khoảng $(0; +\infty)$ và tập giá trị là $\mathbb{R}$.

– Đồng biến trên $(0; +\infty)$ khi $a > 1$, nghịch biến trên $(0; +\infty)$ khi $0 < a < 1$;

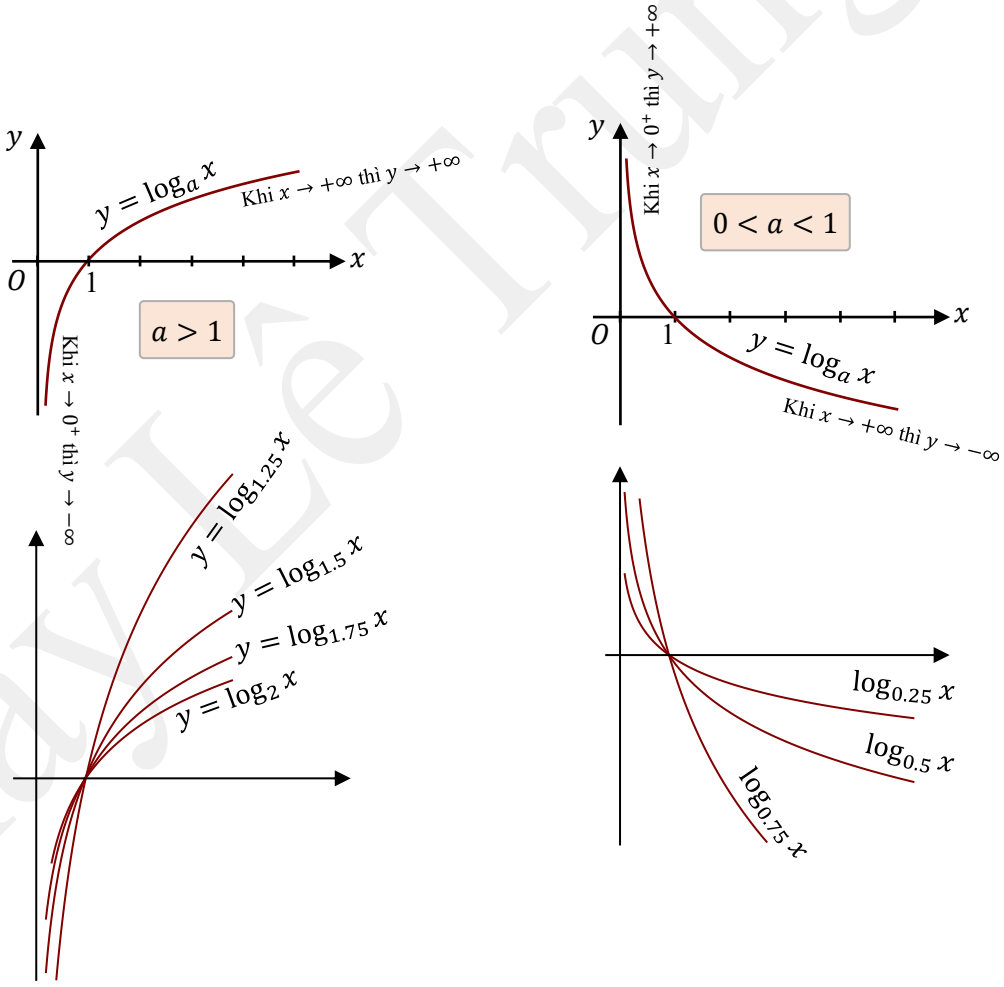
– Có đồ thị luôn luôn :

· Đi qua điểm $(1; 0)$.

· Nằm bên phải trục tung.

· Nhận trục tung làm tiệm cận đứng.

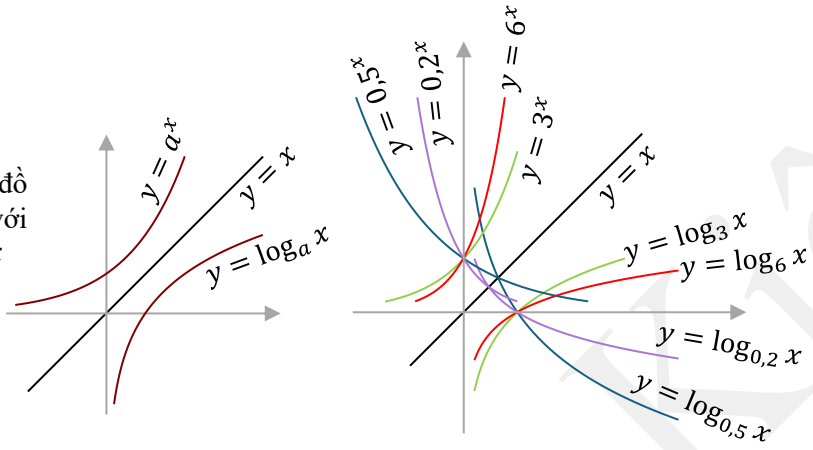
– Dạng đồ thị:



Thầy Lê Trung Kiên

206. Mối liên hệ giữa y = $\log_a(x)$ và y = a^x

Đồ thị hàm số $y = \log_a x$ và đồ thị hàm số $y = a^x$ đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$



Thầy Lê Trung Kiên

PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT

207. Phương trình mũ

Với $a > 0, a \neq 1$ và $b > 0, b \neq 1$.

Điều kiện $b > 0$ — *Nếu $b \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm*

$$a^x = b \Leftrightarrow \log_a a^x = \log_a b \Leftrightarrow x \log_a a = \log_a b \Leftrightarrow x = \log_a b$$

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

Nếu $a = 1$ thì phương trình nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$

Với $c > 0, c \neq 1$

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_c\left(a^{f(x)}\right) = \log_c\left(b^{g(x)}\right) \Leftrightarrow f(x)\log_c a = g(x)\log_c b$$

$$h(x)^{f(x)} = h(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h(x) = 1 \\ \begin{cases} 0 < h(x) \neq 1 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} h(x) > 0 \\ (h(x) - 1)[f(x) - g(x)] = 0 \end{cases}$$

Sử dụng tính đơn điệu của hàm số để giải phương trình

Xét phương trình $f(x) = g(x)$ (1) trên tập K.

Bước 1: Dự đoán nghiệm x_0 của (1) (có thể sử dụng chức năng Solve của máy tính).

Bước 2: Dựa vào tính đồng biến, nghịch biến của $f(x)$ và $g(x)$ để kết luận x_0 là nghiệm duy nhất. Sử dụng một trong các điều kiện sau: Trong hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$:

- Một hàm đồng biến trên K và một hàm nghịch biến trên K.
- Một hàm đồng biến trên K và một hàm không đổi trên K.
- Một hàm nghịch biến trên K và một hàm không đổi trên K.

Đưa về phương trình về các phương trình đặc biệt

Phương trình tích $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \end{array}\right.$ $(A, B$ thỏa điều kiện của phương trình$)$.

Phương trình $A^2 + B^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$ $(A, B$ thỏa điều kiện của phương trình$)$.

Một số dạng đặt ẩn phụ phương trình mũ

Dạng 1 : Cho $P(t)$ là hàm số theo biến số t, và $a > 0, a \neq 1$, $f(x)$ là hàm số theo biến số x.

Khi đó: $P\left(a^{f(x)}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = a^{f(x)}, t > 0 \\ P(t) = 0 \end{cases}$

Ví dụ: $Aa^{2x} + Ba^x + C = 0$.
Đặt $t = a^2$ (điều kiện $t > 0$), phương trình trở thành: $At^2 + Bt + C = 0$

Dạng 2 : $A\left(a^{f(x)}\right)^2 + B(ab)^{f(x)} + C\left(b^{f(x)}\right)^2 = 0$

Cách 1: Chia 2 vế cho $\left(b^{f(x)}\right)^2$, rồi đặt ẩn phụ $t = \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}$.
Phương trình trở thành: $At^2 + Bt + C = 0$.

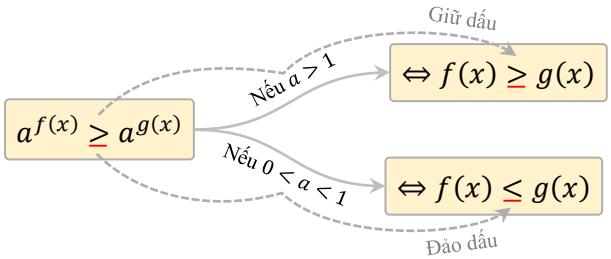
Cách 2: Chia 2 vế cho $\left(a^{f(x)}\right)^2$, rồi đặt ẩn phụ $t = \left(\frac{b}{a}\right)^{f(x)}$.
Phương trình trở thành: $A + Bt + Ct^2 = 0$

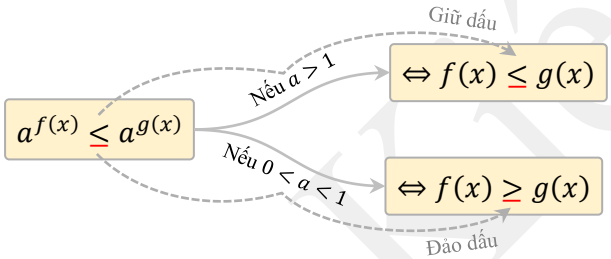
Dạng 3: $A^{f(x)} + B^{f(x)} = C$, với $AB = 1$. Đặt $t = A^{f(x)} \Rightarrow B^{f(x)} = \frac{1}{t}$.

Phương trình trở thành: $t + \frac{1}{t} = C$

208. Bất phương trình mũ

Khi giải các bất phương trình mũ ta cần chú ý đến cơ số





209. Phương trình logarit

Một số lưu ý:

$$\log_a\left(f(x)\right)^n \begin{cases} \text{Nếu } n \text{ chẵn} \rightarrow = n\log_a|f(x)| \\ \text{Nếu } n \text{ lẻ} \rightarrow = n\log_a f(x) \end{cases} \quad \Big| \quad \log_a^n f(x) = (\log_a f(x))^n \quad \Big| \quad \log_a\left(f(x)\right)^n = \log_a\left[\left(f(x)\right)^n\right]$$

Với $a > 0, a \neq 1$

Không cần đặt điều kiện $f(x) > 0$

$$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow a^{\log_a f(x)} = a^b \Leftrightarrow f(x) = a^b$$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \text{ (hoặc } g(x) > 0) \end{cases}$$

$$\log_a f(x) = \log_b g(x) \Leftrightarrow \log_a f(x) = \frac{\log_a g(x)}{\log_a b}$$

$$\Leftrightarrow a^{\log_a f(x)} = a^{\frac{\log_a g(x)}{\log_a b}} \Leftrightarrow a^{\log_a f(x)} = a^{\frac{\log_a g(x)}{\log_a b}}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \left(a^{\log_a g(x)}\right)^{\frac{1}{\log_a b}} \Leftrightarrow f(x) = \left(g(x)\right)^{\frac{1}{\log_a b}}$$

Dạng đặt ẩn phụ

Cho $P(t)$ là hàm số theo biến số t, và $a > 0$, $a \neq 1$, $f(x)$ là hàm số theo biến số x.

Khi đó: $P(\log_a f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \log_a f(x) \\ P(t) = 0 \end{cases}$

Ví dụ: $A(\log_a f(x))^2 + B\log_a f(x) + C = 0$.
Đặt $t = \log_a f(x)$, phương trình trở thành: $At^2 + Bt + C = 0$

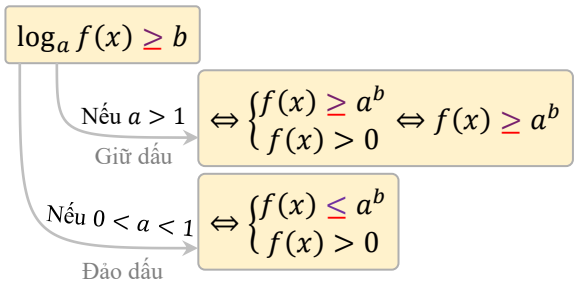
Cho n_1, n_2, n_3 đều thỏa mãn lớn hơn 0 và khác 1.

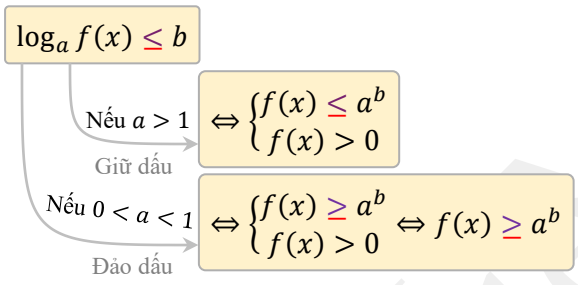
Phương trình ẩn số a, b: $\log_{n_1} a = \log_{n_2} b = \log_{n_3}(k_1 a + k_2 b)$ có thể giải như sau:

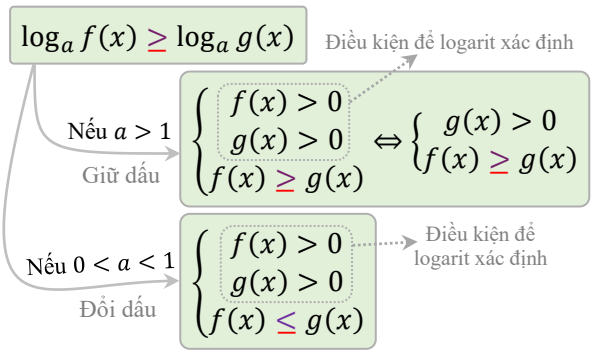
Đặt $\log_{n_1} a = \log_{n_2} b = \log_{n_3}(k_1 a + k_2 b) = t \Rightarrow \begin{cases} a = n_1^t \\ b = n_2^t \\ k_1 a + k_2 b = n_3^t \end{cases} \Rightarrow k_1 n_1^t + k_2 n_2^t = n_3^t$

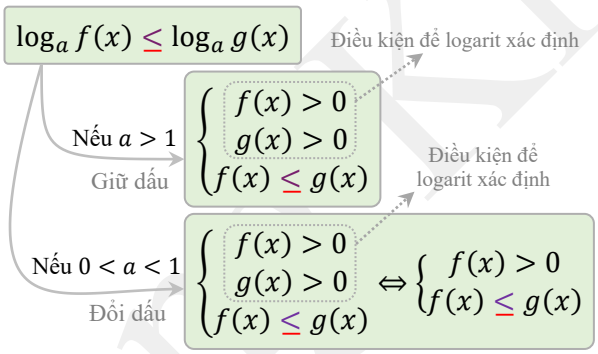
(Đây là một phương trình mũ ẩn t)

210. Bất phương trình logarit







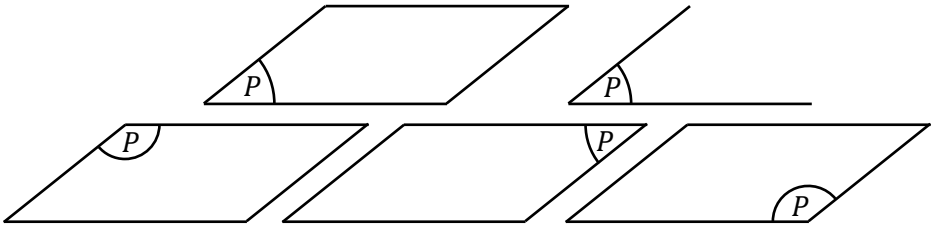


Thầy Lê Trung Kiên

HÌNH KHÔNG GIAN (THAO TÁC PHỤ, KÍ HIỆU)

211. Kí hiệu mặt phẳng

Người ta thường biểu diễn một mặt phẳng bằng một hình bình hành hoặc một miền góc và ghi tên của mặt phẳng vào một góc của hình biểu diễn và dùng một chữ cái đặt trong dấu ngoặc ( ) để đặt tên cho mặt phẳng ấy.



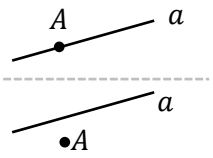
Năm hình bên đều là hình biểu diễn của mặt phẳng (P), sự khác nhau là mỗi hình lại đặt ký hiệu P ở một góc khác nhau, việc đặt này là tùy ý, sao cho thuận tiện cho việc vẽ hình là được. Chú ý ký hiệu P đặt bên trong ký hiệu góc.

Mặt phẳng	Mặt phẳng (P)	mặt phẳng (Q)	mặt phẳng (α)	mặt phẳng (β)
Viết tắt	mp(P) hoặc (P)	mp(Q) hoặc (Q)	mp(α) hoặc (α)	mp(β) hoặc (β)

212. Điểm ∈ đường hoặc mặt

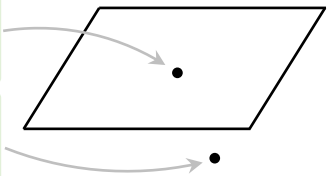
Cho điểm A và đường thẳng a ta có hai khả năng sau

- Điểm A thuộc đường thẳng a, kí hiệu $A \in a$
- Điểm A không thuộc đường thẳng a, kí hiệu $A \notin a$



Với một điểm A và một mặt phẳng (P), ta có hai khả năng sau

- Điểm A thuộc mp(P), kí hiệu $A \in mp(P)$ hay $A \in (P)$
- Điểm A không thuộc mp(P), hay điểm A ở ngoài $mp(P)$, kí hiệu $A \notin mp(P)$ hay $A \notin (P)$.



213. Quy ước vẽ hình

Để vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian lên mặt phẳng (giấy, bề mặt bảng,...), người ta đưa ra những quy tắc thường được áp dụng như sau:

– Đường thẳng được biểu diễn bởi đường thẳng. Đoạn thẳng được biểu diễn bởi đoạn thẳng.

– Hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau) được biểu diễn bởi hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau).

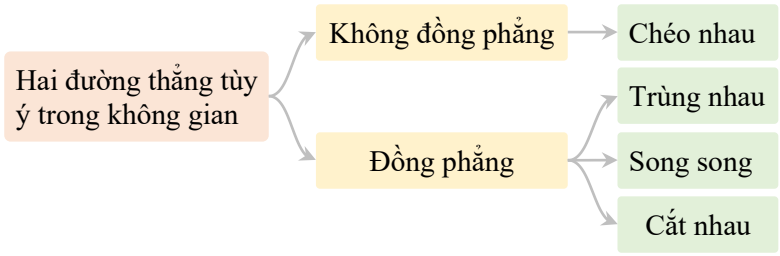
– Điểm A thuộc đường thẳng a được biểu diễn bởi một điểm A' thuộc đường thẳng a', trong đó a' biểu diễn cho đường thẳng a, A' biểu diễn cho điểm A.

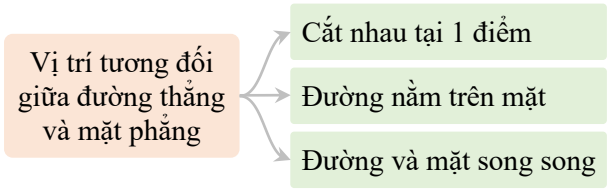
– Dùng nét vẽ liền (————————) để biểu diễn cho những đường trông thấy.

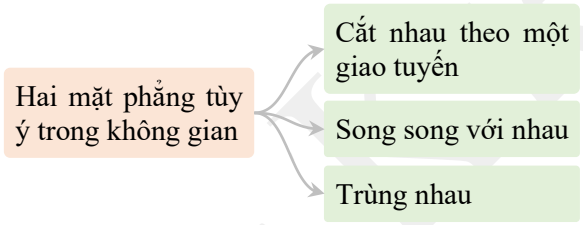
– Dùng nét đứt đoạn (----------) để biểu diễn cho những đường bị khuất (mắt không thấy).

Thư viện

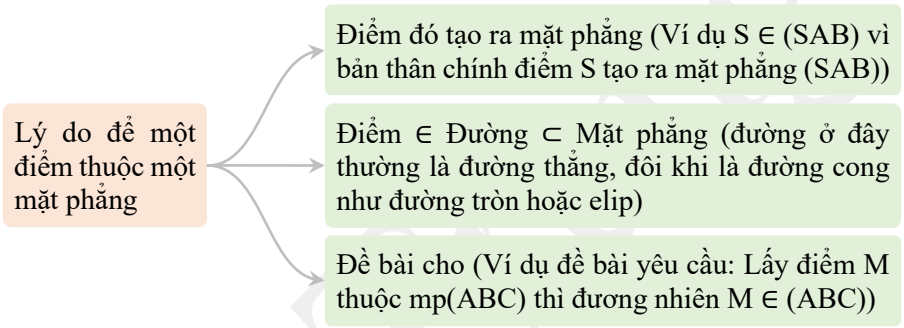
214. Vị trí tương đối



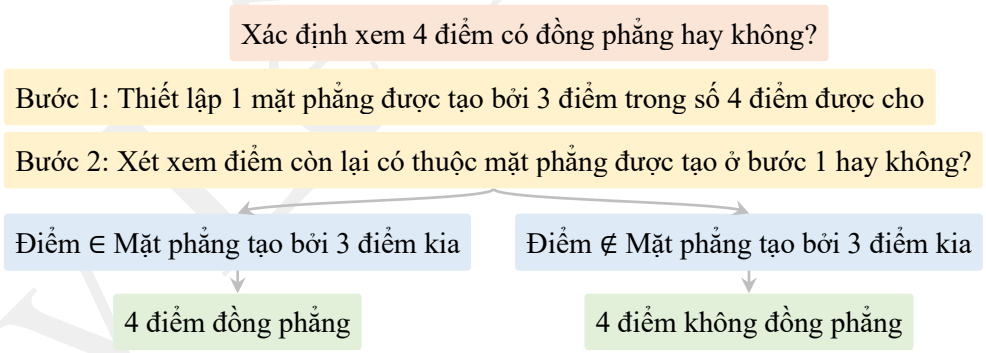




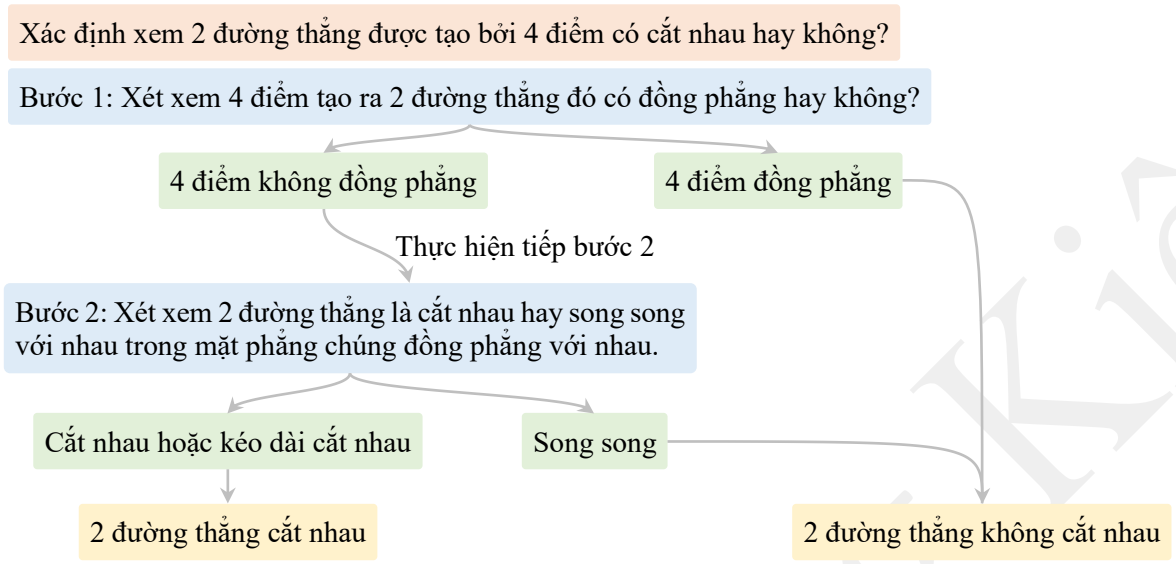
215. Lý do điểm ∈ mặt phẳng



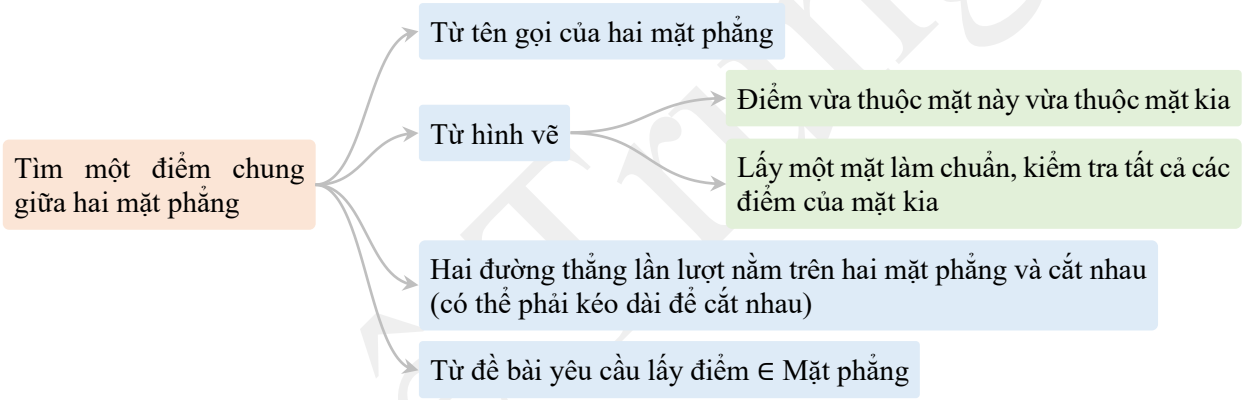
216. Xác định 4 điểm đồng phẳng



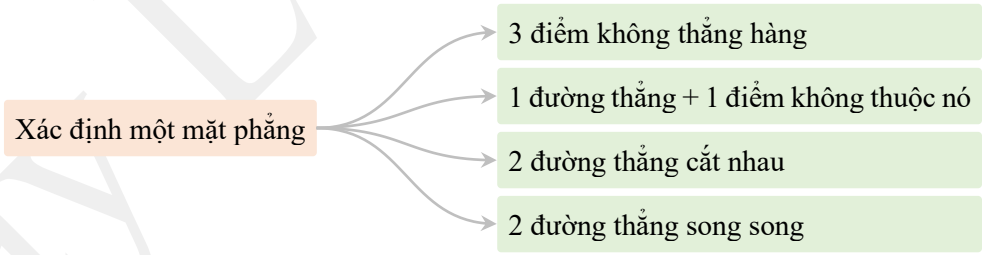
217. Xác định 2 đường thẳng tạo bởi 4 điểm cắt nhau



218. Tìm một điểm chung giữa hai mặt phẳng



219. Điều kiện xác định mặt phẳng



Thầy Lê Tùng Kiên

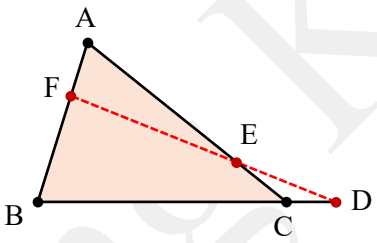
220. Lưu ý kí hiệu khi viết chứng minh

Trong khi trình bày cần sử dụng đúng các kí hiệu như sau:
điểm ∈ đường; điểm ∈ mặt
đường ⊂ mặt; điểm ∈ đường ⊂ mặt
{điểm} = đường ⋂ mặt hoặc điểm = đường ⋂ mặt
{điểm} = đường ⋂ đường hoặc điểm = đường ⋂ đường
mặt ⋂ mặt = đường
(đường: đường thẳng; mặt: mặt phẳng)

221. Định lý Menelaus

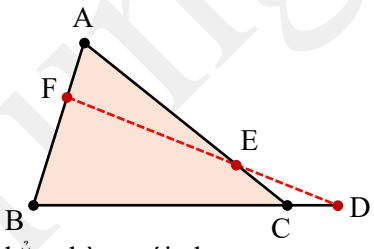
Cho tam giác ABC. Các điểm D, E, F lần lượt nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB. Khi đó:

D, E, F thẳng hàng $\Leftrightarrow \dfrac{\overline{FA}}{\overline{FB}}\cdot\dfrac{\overline{DB}}{\overline{DC}}\cdot\dfrac{\overline{EC}}{\overline{EA}}=1$

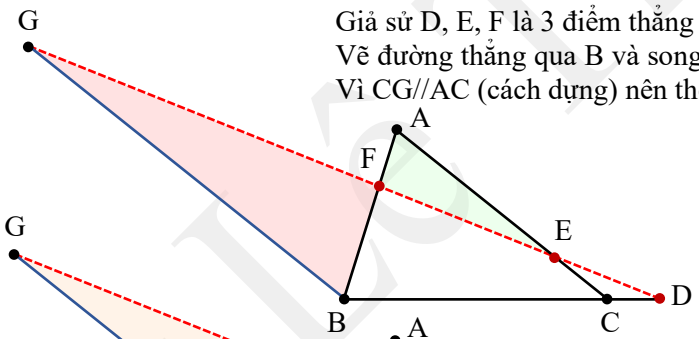


Chứng minh chiều thuận

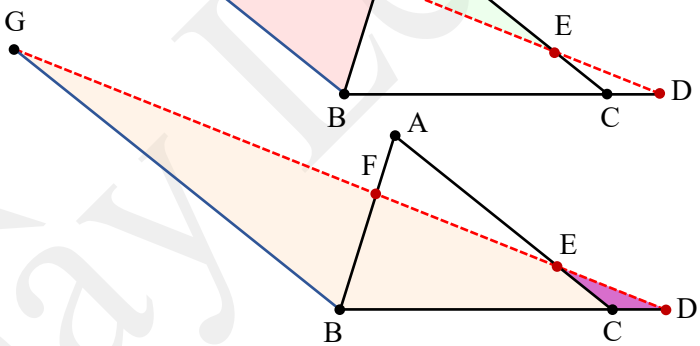
D, E, F thẳng hàng $\Rightarrow \dfrac{\overline{FA}}{\overline{FB}}\cdot\dfrac{\overline{DB}}{\overline{DC}}\cdot\dfrac{\overline{EC}}{\overline{EA}}=1$



Giả sử D, E, F là 3 điểm thẳng hàng với nhau.
Vẽ đường thẳng qua B và song song với AC cắt đường thẳng DE tại G.
Vì CG//AC (cách dựng) nên theo định lý Ta-lét, ta có:



$\dfrac{CE}{BG}=\dfrac{DC}{DB}$



$\dfrac{FA}{FB}=\dfrac{AE}{BG}$

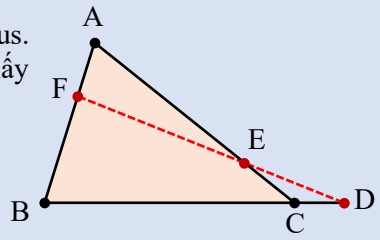
Nhân vế theo vế

$\dfrac{FA}{FB}\cdot\dfrac{DB}{DC}\cdot\dfrac{EC}{EA}=1 \Leftarrow \dfrac{FA}{FB}\cdot\dfrac{CE}{BG}=\dfrac{AE}{BG}\cdot\dfrac{DC}{DB}$

Thầy Lê Trung Kiên

Trong các bài tập ta thường sử dụng hệ quả sau của định lý Menelaus.
Hệ quả: Cho tam giác ABC, trên các cạnh AB, BC, CA lần lượt lấy các điểm F, D, E. Khi đó ta có:

D, E, F thẳng hàng $\Rightarrow$ $\dfrac{FA}{FB}\cdot\dfrac{DB}{DC}\cdot\dfrac{EC}{EA}=1$



Thầy Lê Trung Kiên

DẠNG TOÁN CHỨNG MINH TÍNH CHẤT

222. Tìm một điểm nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng

(Dạng này cũng có thể hiểu là tìm một điểm chung của hai mặt phẳng)

❖ ***Cách 1: Từ tên gọi***

Ví dụ: Từ tên gọi của hai mặt phẳng (SAB) và (SMN) ta dễ thấy S là một điểm nằm trên giao tuyến của hai mặt trên (Mà không cần phải vẽ hình).

❖ ***Cách 2: Từ hình vẽ***

Nhìn xem có điểm nào vừa thuộc mặt phẳng này và vừa thuộc mặt phẳng kia hay không?

Lấy một mặt làm chuẩn, lần lượt kiểm tra tất cả các điểm của mặt kia có thuộc mặt còn lại không?

❖ ***Cách 3: Hai đường thẳng cắt nhau***

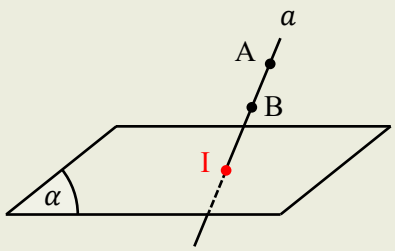
Xác định hai đường thẳng lần lượt nằm trên hai mặt phẳng đó và cho chúng giao nhau (có khi cần phải kéo dài để xác định được giao điểm). Khi đó, giao điểm của hai đường thẳng đó chính là một điểm nằm trên cả hai mặt phẳng.

223. Tìm giao điểm giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cách 1: (Nên thử cách này đầu tiên khi gặp dạng này)

Xét lần lượt các điểm trên đường thẳng xem có điểm nào thuộc mặt phẳng hay không?

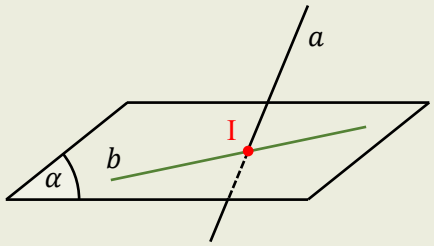
(Nếu có thì điểm đó chính là giao điểm giữa đường thẳng và mặt phẳng cần tìm)



Cách 2: (Sử dụng khi cách 1 không giải quyết được)

Xét xem đã có sẵn đường thẳng b nào nằm trên mặt phẳng (α) mà cắt được đường thẳng a hay không ?

(Nếu có thì giao điểm của hai đường thẳng a và b chính là giao điểm giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α)).

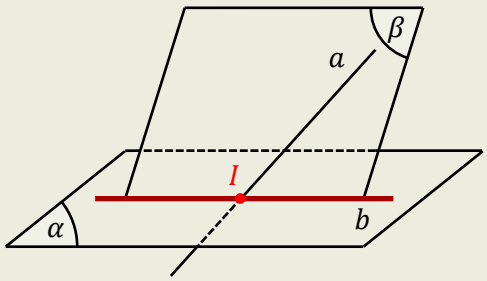


Cách 3: Chọn mặt phẳng phụ (Sử dụng khi cách 1 và 2 đều không giải quyết được)

Bước 1: Chọn mặt phẳng phụ (β) chứa đường thẳng a.

Bước 2: Tìm giao tuyến của mặt phẳng phụ (β) và mặt phẳng chính (α).

Bước 3: Cho giao tuyến cắt với đường thẳng a ta được giao điểm I giữa a và (α).



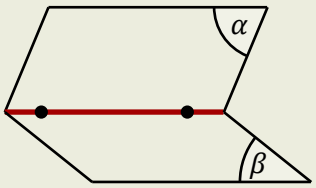
224. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

(Bản chất là xác định một đường thẳng trong không gian)

Cách 1: Xác định hai điểm phân biệt nằm trên giao tuyến.

Ta đi tìm hai điểm phân biệt nằm trên giao tuyến (hay ta đi tìm hai điểm chung của hai mặt phẳng)

(Xem lại mục: Dạng toán tìm một điểm nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng)



Cách 2: Tìm một điểm nằm trên giao tuyến và phương của nó.

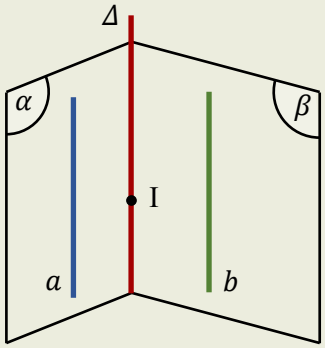
Bước 1: (Tìm một giao điểm)

Xem lại mục: Dạng toán tìm một điểm nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng.

Bước 2: (Tìm phương)

Tìm xem có hai đường thẳng nào nằm trên hai mặt phẳng mà song song với nhau hay không?

Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng sẽ song song với hai đường thẳng đó.

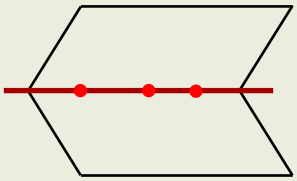


225. Chứng minh ba điểm thẳng hàng

Cách 1:

Chứng minh ba điểm đó cùng thuộc vào một giao tuyến của hai mặt phẳng phân biệt.

(Thường là mỗi điểm sẽ là giao điểm của hai đường thẳng nằm trong hai mặt phẳng)



Các câu hỏi nên đặt ra để biết hướng giải quyết của dạng toán này là:

Câu hỏi 1: Ta cần chứng minh ba điểm thẳng hàng như thế nào ?

Câu hỏi 2: Ta sẽ chứng minh ba điểm đó thuộc vào giao tuyến của hai mặt phẳng nào? (Hãy thử liệt kê tất cả các mặt phẳng chứa đồng thời cả ba điểm đó trên hình vẽ rồi sau đó lựa chọn)

Câu hỏi 3: Tại sao mỗi điểm lại thuộc vào giao tuyến của hai mặt phẳng ta lựa chọn? (thường là do chúng thuộc vào hai đường thẳng cắt nhau và mỗi đường nằm trên một mặt phẳng).

Cách 2: Để chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng trong không gian ta đi biến đổi để có được một biểu thức có dạng:

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}\ (k \neq 0)$$

Khi đó hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương, mà hai vectơ đó lại có cùng một điểm chung (là A chẳng hạn), nên suy ra A, B, C thẳng hàng.

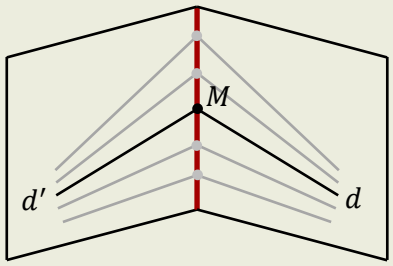
226. Tìm tập hợp giao điểm của hai đường thẳng di động

Phương pháp: Gọi 2 đường thẳng di động là d và d', $d \cap d' = \{M\}$.
Muốn tìm tập hợp M ta làm như sau:

Tìm hai mặt phẳng cố định lần lượt chứa d và d'. Chứng minh rằng M di động trên giao tuyến cố định của hai mặt phẳng đó.

Giới hạn (nếu có). Tức là đi xác định phạm vi điểm M sẽ từ đâu đến đâu.

Phần đảo.



227. Chứng minh hai đường thẳng song song

Phương pháp: Muốn chứng minh hai đường thẳng song song ta có thể:

▪ Dùng tính chất: hai mặt phẳng cắt nhau, lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng song song với 2 đường thẳng này.

▪ Chứng minh chúng cùng song song với một đường thẳng thứ ba.

▪ Dùng tính chất đường trung trung bình của tam giác.

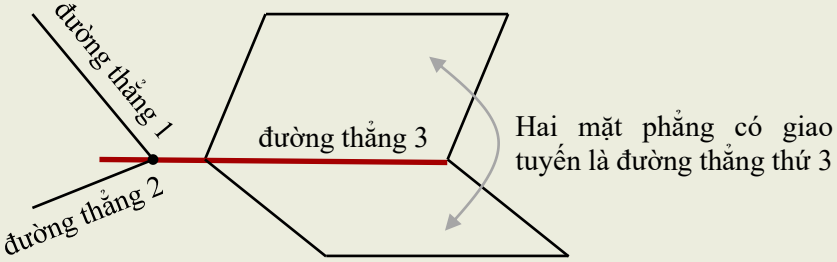
▪ Dùng định lý Thales đảo cho một tam giác.

▪ Dùng tính chất cùng vuông góc với một đường thẳng (cả 3 đường phải đồng phẳng).

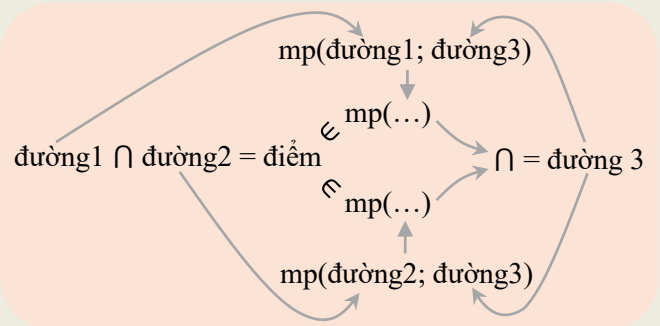
…

228. Chứng minh ba đường thẳng đồng quy

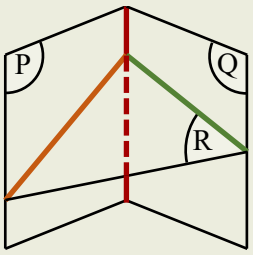
Cách 1: Chứng minh giao điểm của hai đường thẳng này là điểm chung của hai mặt phẳng mà giao tuyến là đường thẳng thứ ba.



Sơ đồ suy luận:



Cách 2: Ta đi chứng minh ba đường thẳng đó là ba giao tuyến của ba mặt phẳng phân biệt và có ít nhất hai đường thẳng trong số ba đường thẳng đó cắt nhau.



229. Xác định thiết diện của hình chóp và mặt phẳng

(Bản chất là bài toán tìm giao tuyến giữa hai mặt phẳng.)

Phương pháp: Cho hình chóp $S.A_1A_2 \dots A_n$ và mặt phẳng α.

Nếu α cắt một mặt nào đó của hình chóp (mặt bên hay mặt đáy) thì α sẽ cắt mặt này theo một đoạn thẳng gọi là đoạn giao tuyến của α với mặt đó.

Các đoạn giao tuyến nối tiếp nhau, tạo thành một đa giác phẳng gọi là thiết diện. Như vậy, muốn tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng α, ta tìm các đoạn giao tuyến (nếu có). Đa giác tạo bởi các đoạn giao tuyến là thiết diện cần tìm.

Cách thức tiến hành

Tìm thiết diện cắt khối hình H (hình chóp hoặc lăng trụ) bởi mặt phẳng (P)

Bước 1: Liệt kê các mặt ngoài bao bọc lấy hình H mà các mặt đó giao được với mặt phẳng (P). (Để biết mặt ngoài nào của hình H giao được với mặt phẳng (P) ta thường xét xem (P) và mặt ngoài đó có điểm nào chung hay không? Nếu có ít nhất 1 điểm chung thì chúng có thể giao nhau).

$$\begin{array}{l|l} (P) & \cap(\text{mặt ngoài 1}) = \text{điểm 1} \dots \\ & \cap(\text{mặt ngoài 2}) = \text{điểm 2} \dots \\ & \cap(\text{mặt ngoài 3}) = \text{điểm 3} \dots \\ & \cap(\text{mặt ngoài 4}) = \text{điểm 4} \dots \\ & \dots \end{array}$$

Bước 2: Tìm các giao tuyến của mặt phẳng (P) với các mặt đã liệt kê ở bước 1. (Nếu mặt nào khó tìm giao tuyến với (P) thì ta chuyển qua tìm giao tuyến của mặt phẳng khác với (P), trong quá trình tìm giao tuyến có thể phát sinh thêm mặt ngoài của khối hình (H) giao được với (P).

Bước 3: Hoàn thành thiết diện

Thiết diện cần tìm là một đa giác phải thỏa mãn 3 điều kiện sau:

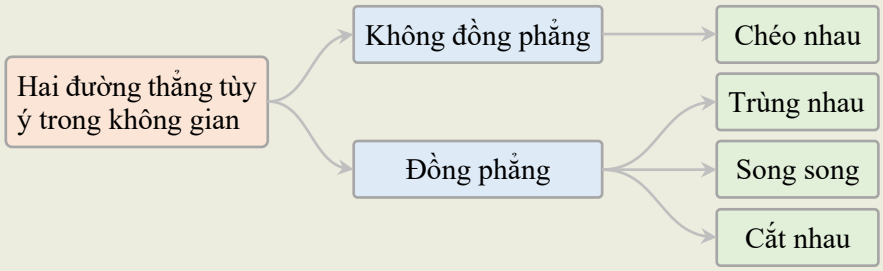
- Là một đa giác khép kín.
- Mỗi cạnh của đa giác nằm hoàn toàn trên một mặt ngoài nào đó của khối hình H.
- Mỗi cạnh của đa giác đều nằm hoàn toàn trên (P).

(Thường thì ta chỉ cần xét 2 điều kiện đầu là đủ)

230. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng phân biệt

Ta cần trả lời câu hỏi: Hai đường thẳng đồng phẳng (tức cùng thuộc một mặt phẳng) hay chéo nhau (tức không cùng thuộc một mặt phẳng).

Nếu hai đường thẳng đồng phẳng thì cần trả lời thêm chúng song song hay cắt nhau hay trùng nhau.

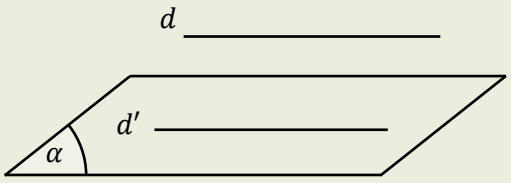


231. Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng

Bài toán chứng minh đường thẳng d song song với mặt phẳng (α)

Cách 1: Nếu đường thẳng d không nằm trong mặt phẳng (α) và d song song với một đường thẳng d' nằm trong (α) thì d song song với (α)

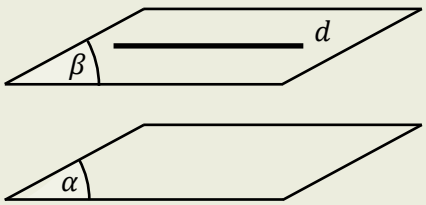
$$\begin{cases} d \not\subset (\alpha) \\ d' \subset (\alpha) \\ d // d' \end{cases} \Rightarrow d // (\alpha)$$



"Muốn chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng ta chứng minh đường thẳng đó song song với một đường thẳng khác nằm trên mặt phẳng."

Cách 2: Nếu d nằm trong một mặt phẳng (β) song song với (α) thì d song song với (α)

$$\begin{cases} (\beta) // (\alpha) \\ d \subset (\beta) \end{cases} \Rightarrow d // (\alpha)$$

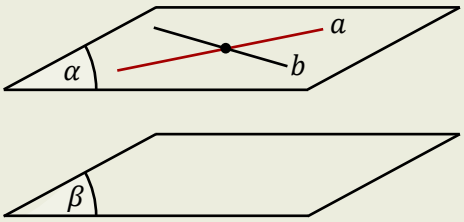


232. Chứng minh hai mặt phẳng song song

Bài toán chứng minh mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (β)

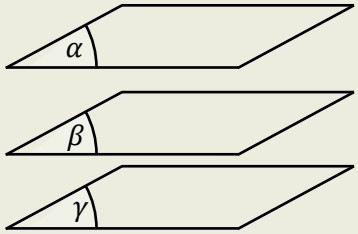
Cách 1: Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và a, b cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β).

$$\begin{cases} a, b \subset (\alpha) \\ a \cap b \neq \emptyset \\ a//(\beta) \\ b//(\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha)//(\beta)$$



Cách 2: Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau

$$\begin{cases} (\alpha)//(\gamma) \\ (\beta)//(\gamma) \\ (\alpha) \cap (\beta) = \emptyset \end{cases} \Rightarrow (\alpha)//(\beta)$$



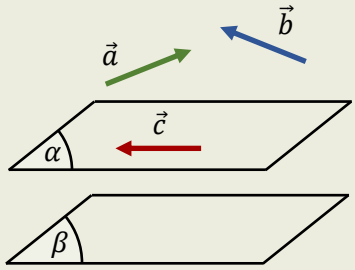
Thầy Lê Trung

233. Chứng minh ba vectơ đồng phẳng

Chứng minh $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng

Cách 1: (Dựa vào định nghĩa)

Nếu đã thấy được một mặt phẳng α nào đó thỏa mãn: α chứa giá của các vectơ hoặc song song với giá của các vectơ (với mỗi vectơ thì nó chỉ cần có giá nằm trong α hoặc có giá song song với α; không nhất thiết giá của cả 3 vectơ phải cùng song song với α, thí dụ giá của 1 vectơ chứa trong α, giá của 2 vectơ còn lại song song α là thỏa yêu cầu)



Bước 1: Lần lượt chứng minh giá của $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ song song hoặc chứa trong α.

Bước 2: Từ đó suy ra giá của $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ song song với một mặt phẳng β tùy ý (mặt phẳng đó không chứa giá của $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$) và β // α

(Nếu α không chứa giá của bất cứ vectơ nào trong các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ thì có thể lấy $\beta \equiv \alpha$).

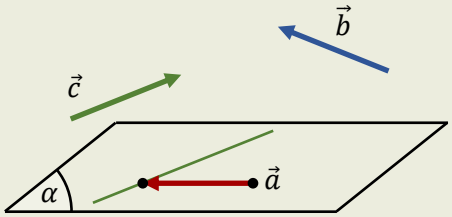
Cách 2: (Dựa vào định nghĩa)

Nếu không thấy được một mặt phẳng α giống như cách 1 thì ta làm như sau:

Ta cần dựng một mặt phẳng α thỏa mãn: α chứa giá của các vectơ hoặc song song với giá của các vectơ (thông thường các vectơ này sẽ là các vectơ tạo bởi điểm).

Bước 1: Từ gốc (hoặc ngọn) của 1 vectơ (giả sử là $\vec{a}$) dựng một đường thẳng song song với 1 trong 2 vectơ còn lại (giả sử là $\vec{b}$ và $\vec{c}$). Khi đó mặt phẳng α ta cần chính là mặt phẳng tạo bởi đường thẳng này và điểm ngọn (hoặc gốc) của vectơ $\vec{a}$.

Bước 2: Sau đó lặp lại Cách 1.



Cách 3: (Phân tích 1 vectơ theo 2 vectơ)

Ba vectơ đồng phẳng $\Leftrightarrow$ có cặp số m, n duy nhất sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$, trong đó $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ không cùng phương.

Hoặc Ba vectơ đồng phẳng $\Leftrightarrow$ có bộ ba số m, n, p (không đồng thời bằng 0) duy nhất sao cho:

$$m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$$

trong đó $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ không cùng phương.

234. Chứng minh bốn điểm đồng phẳng thông qua vectơ

Bài toán yêu cầu chứng minh bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng

Ta đi biến đổi để thu được một biểu thức có dạng:

$$m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{BC} + p\overrightarrow{CD} = \vec{0}$$

(Trong đó m, n, p không đồng thời bằng 0)

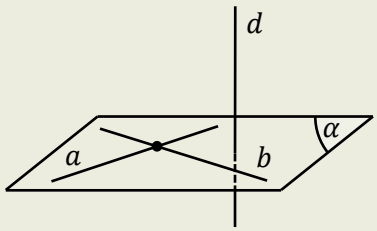
Khi đó suy ra ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ đồng phẳng, mà mặt phẳng (ABC) chứa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ lại chứa một điểm C của vectơ $\overrightarrow{CD}$, nên suy ra D cũng thuộc mặt phẳng (ABC) suy ra A, B, C, D đồng phẳng.

235. Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Bài toán chứng minh đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α)

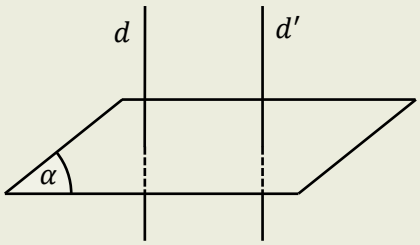
Cách 1: Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α) thì $d \perp (\alpha)$

$$\begin{cases} a, b \subset (\alpha) \\ d \perp a \\ d \perp b \end{cases} \Rightarrow d \perp (\alpha)$$



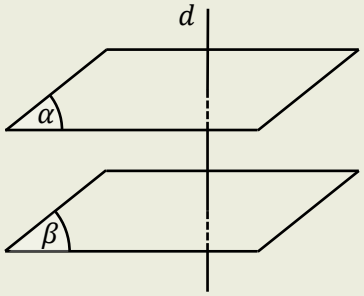
Cách 2: Sử dụng tính bắc cầu của quan hệ vuông góc

$$\begin{cases} d' \perp (\alpha) \\ d // d' \end{cases} \Rightarrow d \perp (\alpha)$$



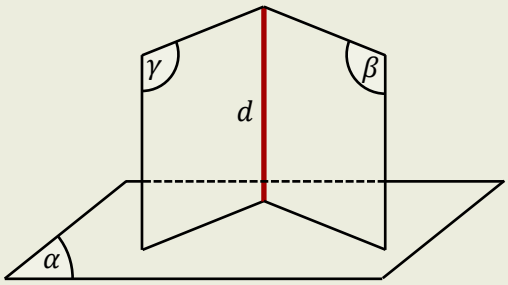
Cách 3: Sử dụng tính bắc cầu của quan hệ vuông góc

$$\begin{cases} (\alpha) // (\beta) \\ d \perp (\beta) \end{cases} \Rightarrow d \perp (\alpha)$$



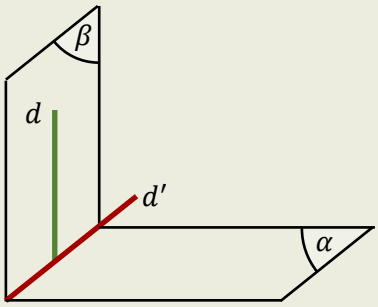
Cách 4: (hai mặt cùng vuông góc một mặt) Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.

$$\begin{cases} (\gamma)\cap(\beta) = d \\ (\gamma) \perp (\alpha) \\ (\beta) \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow d \perp (\alpha)$$



Cách 5: (vuông góc với giao tuyến hai mặt phẳng vuông góc)

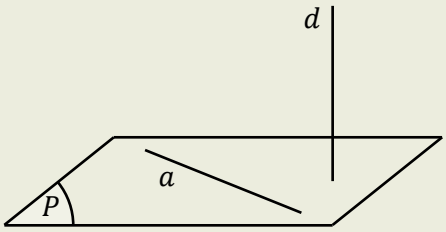
$$\begin{cases} (\alpha) \perp (\beta) \\ (\alpha)\cap(\beta) = d' \\ d \subset (\beta) \\ d \perp d' \end{cases} \Rightarrow d \perp (\alpha)$$



236. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Cách 1: Muốn chứng minh đường thẳng d vuông góc với đường thẳng a, ta tìm mặt phẳng (P) chứa đường thẳng a sao cho việc chứng minh $d \perp (P)$ dễ thực hiện. Từ đó suy ra hai đường thẳng a và b vuông góc.

$$\left.\begin{matrix} d \perp (P) \\ a \subset (P) \end{matrix}\right\} \Rightarrow d \perp a$$



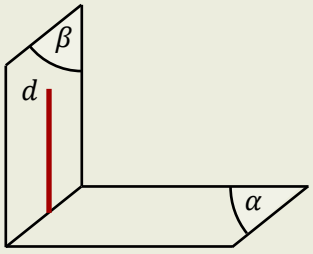
Cách 2: Muốn chứng minh hai đường thẳng AB và CD vuông góc với nhau ta có thể chứng minh $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Cách 3: Chứng minh 2 đường thẳng đồng phẳng rồi sử dụng các phương pháp chứng minh vuông góc đã học ở trong hình học phẳng.

237. Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

Cách 1: Chứng minh mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia (tức là chuyển về bài toán đường thẳng vuông góc với mặt phẳng)

$$\begin{cases} d \subset (\beta) \\ d \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \perp (\beta)$$



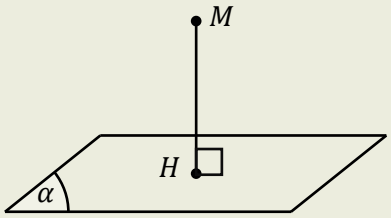
Cách 2: Chuyển về bài toán tính góc giữa hai mặt phẳng.

238. Tìm hình chiếu vuông góc của một điểm lên một mặt phẳng

Tìm hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng (α)

Cách 1: (Đơn giản nhất)

Nếu thấy được ngay một điểm $H \in (\alpha)$ mà $MH \perp (\alpha)$ thì H chính là hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng (α).

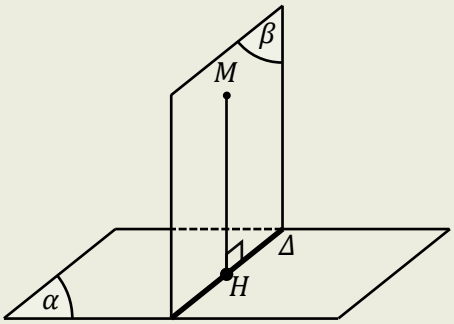


Cách 2: (Mặt phẳng phụ vuông góc)

Bước 1: Chọn mặt phẳng phụ (β) thỏa mãn: (β) vuông góc (α) và (β) chứa M.

Bước 2: Xác định giao tuyến Δ của (α) và (β).

Bước 3: Xác định hình chiếu H của điểm M lên giao tuyến Δ. Khi đó H chính là hình chiếu vuông góc của điểm M lên mp(α).



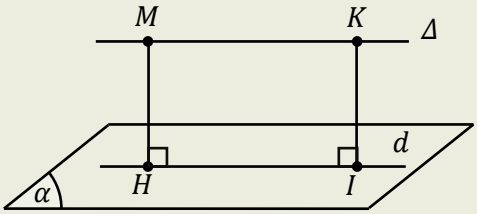
Cách 3: (Dịch điểm song song)

Bước 1: Tìm (hoặc dựng) một đường thẳng Δ song song với (α) và Δ đi qua M.

Bước 2: Chọn một điểm K trên Δ sao cho có thể dựng được dễ dàng hình chiếu của K lên (α). Tìm hình chiếu vuông góc I của K lên mặt phẳng α.

Bước 3: Dựng đường thẳng d qua I và song song với Δ.

Bước 4: Từ M dựng MH vuông góc với d tại H. Khi đó H chính là hình chiếu vuông góc của điểm M lên (α).



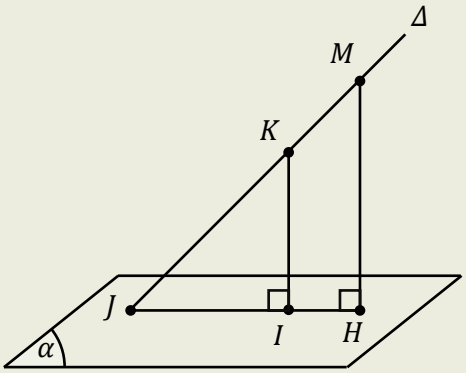
Cách 4: (Dịch điểm đồng dạng)

Bước 1: Tìm (hoặc dựng) một đường thẳng Δ cắt với (α) và Δ đi qua M.

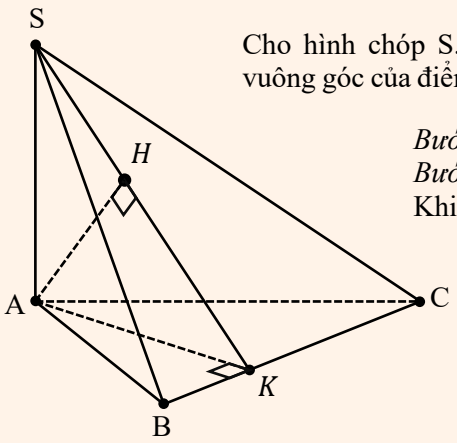
Bước 2: Chọn một điểm K trên Δ sao cho có thể dựng được dễ dàng hình chiếu của K lên (α). Tìm hình chiếu vuông góc I của K lên mặt phẳng α.

Bước 3: Tìm giao điểm J của Δ và (α).

Bước 4: Kẻ IJ, dựng MH vuông góc với IJ tại H. Khi đó H chính là hình chiếu vuông góc của điểm M lên (α).



Trong các bài toán liên quan đến hình chóp ta thường gặp mô hình sau đây



Cho hình chóp S.ABC có SA $\perp$ (ABC). Để dựng hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng (SBC) ta thực hiện như sau:

Bước 1: Trong mp(ABC), dựng AK vuông góc BC tại K.
Bước 2: Trong mp(SAK), dựng AH vuông góc SK tại H.
Khi đó H chính là hình chiếu vuông góc của điểm A lên mp(SBC)

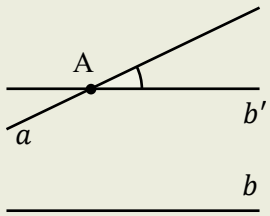
Thầy Lê Trung Kiên

DẠNG TOÁN TÍNH GÓC, KHOẢNG CÁCH

239. Tìm góc giữa hai đường thẳng

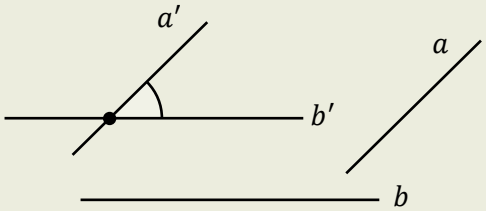
Cách 1: (Dịch song song 1 đường thẳng) Chọn một điểm A bất kỳ thuộc a, rồi từ đó kẻ một đường thẳng b' qua A và song song với b.

Khi đó: $(\widehat{a;b}) = (\widehat{a;b'})$

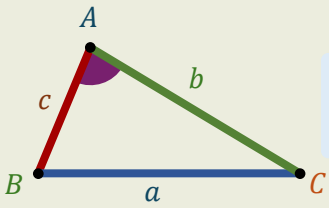


Cách 2: (Dịch song song 2 đường thẳng) Chọn hai đường thẳng cắt nhau a' và b' lần lượt song song với a và b.

Khi đó: $(\widehat{a,b}) = (\widehat{a';b'})$



Lưu ý: Để tính góc ở cách 1 và 2 này ta thường sử dụng định lí côsin trong tam giác



$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Cách 3: Sử dụng góc giữa hai vectơ

Giả sử đường thẳng a có một vectơ chỉ phương là $\vec{a}$, đường thẳng b có vectơ chỉ phương là $\vec{b}$. Góc giữa hai đường thẳng a và b được tính thông qua góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ như sau:

$$\cos(a,b) = \left|\cos(\vec{a},\vec{b})\right| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

$$\Rightarrow (a,b) = \cos^{-1}(\cos(a,b))$$

Đặc biệt nếu $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ ta có $(\vec{a},\vec{b}) = 90°$.

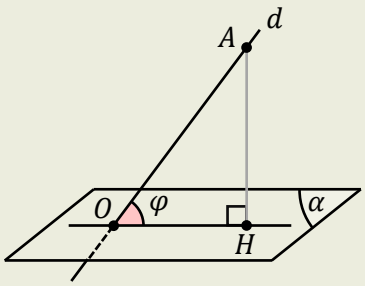
240. Tìm góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cách 1: (Hình chiếu vuông góc)

Bước 1: Tìm giao điểm O của d và (α)

Bước 2: Chọn điểm $A \in d$ và dựng $AH \perp (\alpha)$.

Khi đó $\widehat{AOH} = (\widehat{d,(\alpha)})$

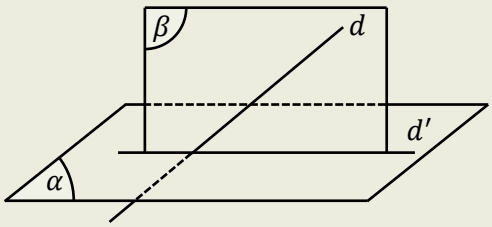


Cách 2: (Mặt phẳng phụ)

Bước 1: Dựng mặt phẳng phụ (β) chứa d và vuông góc (α)

Bước 2: Tìm giao tuyến d' của (α) và (β), nếu d không vuông góc với (α) thì giao tuyến d' chính là hình chiếu của d lên (α).

Khi đó: $(\widehat{d,(\alpha)}) = (\widehat{d';d})$.



Cách 3: Áp dụng phương pháp tìm góc giữa vectơ chỉ phương của đường thẳng và vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Xem phương pháp tọa độ trong không gian)

241. Tìm góc giữa hai mặt phẳng

Tính góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β)

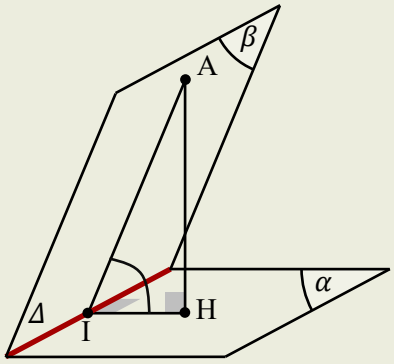
Cách 1: Hình chiếu vuông góc

Bước 1: Tìm $\Delta = (\alpha) \cap (\beta)$.

Bước 2: Chọn $A \in (\beta)$, kẻ $AH \perp (\alpha)$ tại H.

Bước 3: Kẻ $HI \perp \Delta$ tại I.

Khi đó $((\widehat{P);(Q)}) = \widehat{AIH}$

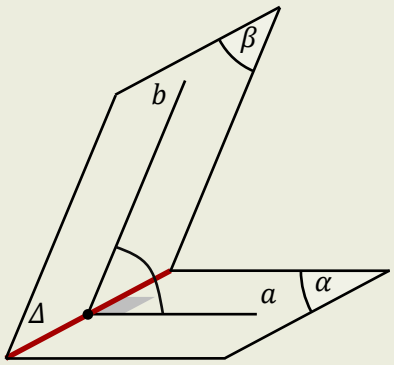


Cách 2: Hai đường vuông góc giao tuyến

Bước 1: Tìm $\Delta = (\alpha) \cap (\beta)$

Bước 2: Tìm $a \subset (\alpha); b \subset (\beta)$, sao cho $a \perp \Delta, b \perp \Delta$ và a và b cắt nhau tại 1 điểm.

Khi đó $((\widehat{\alpha),(\beta)}) = (\widehat{a,b})$

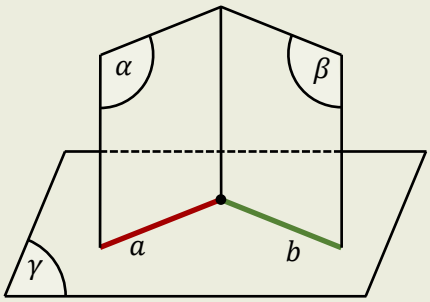


Cách 3: Mặt phẳng phụ

Bước 1: Tìm $(\gamma) \perp (\alpha), (\gamma) \perp (\beta)$

Bước 2: Tìm $a = (\gamma) \cap (\alpha); b = (\gamma) \cap (\beta)$.

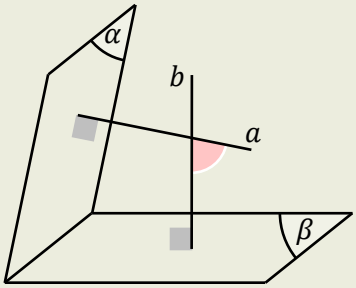
Khi đó $((\widehat{\alpha), (\beta)}) = \widehat{(a, b)}$.



Cách 4: Dùng định nghĩa

Tìm $a \perp (\alpha); b \perp (\beta)$.

Khi đó $((\widehat{\alpha), (\beta)}) = \widehat{(a, b)}$



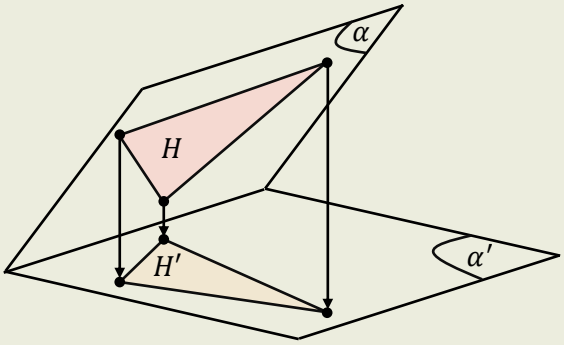
Cách 5: Dùng hình chiếu đa giác

Bước 1: Chọn đa giác H trong (α).

Bước 2: Chiếu H xuống (β) được H'.

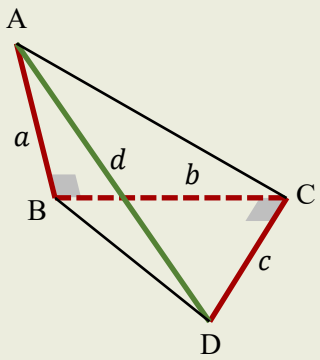
Bước 3: Gọi $\varphi = (\widehat{(\alpha), (\beta)})$.

Khi đó $S_{H'} = S_H \cos\varphi$.



Hay ***Diện tích hình chiếu = Diện tích hình đem chiếu × cos(góc xen giữa 2 mặt phẳng)***

Cách 6: Sử dụng công thức hai đoạn vuông góc với giao tuyến không cùng một điểm



Cho hình chóp ABCD có AB ⊥ BC và CD ⊥ BC, AB = a, BC = b, CD = c, AD = d. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD).

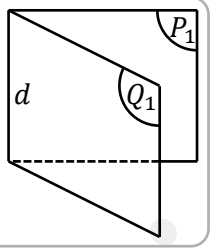
$$\cos\big((ABC);(BCD)\big) = \cos(AB;CD) = \frac{|a^2 + b^2 + c^2 - d^2|}{2ac}$$

(Lưu ý: công thức trên vẫn đúng khi B ≡ C, tức là $b = 0$)

242. Góc nhị diện và góc phẳng nhị diện

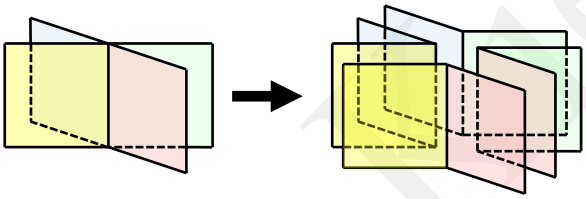
Định nghĩa. Cho hai nửa mặt phẳng (P_1) và (Q_1) có chung bờ là đường thẳng d. Hình tạo bởi (P_1), (Q_1) và d được gọi là góc nhị diện tạo bởi (P_1) và (Q_1), kí hiệu $[P_1, d, Q_1]$.

Hai nửa mặt phẳng (P_1), (Q_1) gọi là hai mặt của nhị diện và d gọi là cạnh của nhị diện.



Chú ý: ▪ Hai mặt phẳng cắt nhau theo giao tuyến d tạo thành bốn góc nhị diện. (Trên hình vẽ, các góc nhị diện được vẽ tách ra cho dễ nhìn).

▪ Góc nhị diện $[P_1, d, Q_1]$ còn được kí hiệu là $[M, d, N]$ với M, N tương ứng thuộc hai nửa mặt phẳng (P_1), (Q_2).

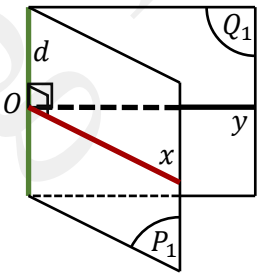


Cho góc nhị diện $[P_1, d, Q_1]$. Gọi O là một điểm tuỳ ý trên d, Ox là tia nằm trong (Q_1) và vuông góc với d, Oy là tia nằm trong (Q_1) và vuông góc với d. Khi đó, $\widehat{xOy}$ gọi là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[P_1, d, Q_1]$.

Định nghĩa. Góc phẳng nhị diện của góc nhị diện là góc có đỉnh nằm trên cạnh của nhị diện, có hai cạnh lần lượt nằm trên hai mặt cua nhị diện và vuông góc với cạnh của nhị diện.

Lưu ý: ▪ Góc nhị diện có góc phẳng nhị diện là góc vuông được gọi là góc nhị diện vuông.

▪ Số đo góc nhị diện nhận giá trị từ 0° đến 180°.



Lưu ý:

▪ Nếu góc phẳng nhị diện là góc ≤ 90° thì Góc phẳng nhị diện = Góc giữa 2 mặt phẳng.

▪ Nếu góc phẳng nhị diện là góc > 90° thì Góc phẳng nhị diện = 180° – Góc giữa 2 mặt phẳng.

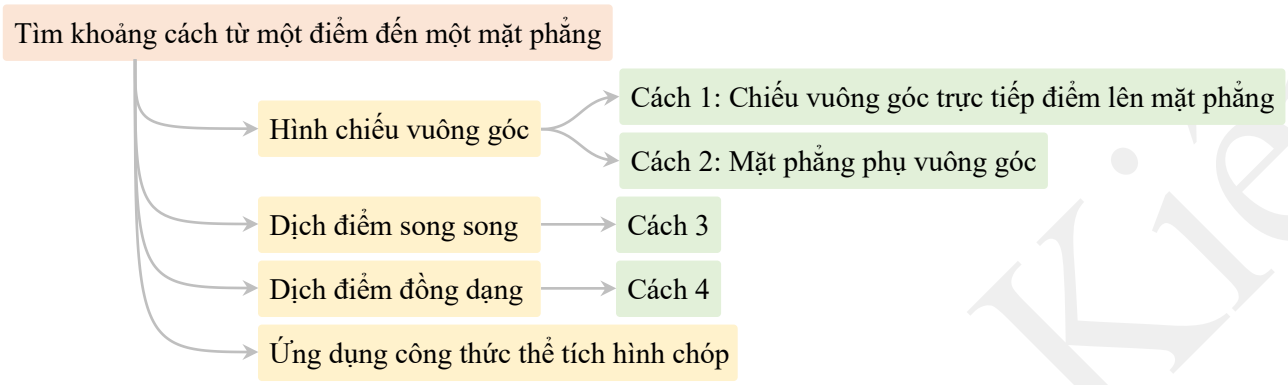
Xem lại phần góc giữa 2 mặt phẳng.

Thầy Lê Trung Hiếu

243. Khoảng cách giữa điểm và mặt phẳng

Sơ đồ tóm tắt các phương pháp tính khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng

(Mỗi phương pháp có thể thực hiện theo một số cách khác nhau)



Để xác định khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P), ta sử dụng các phương pháp sau đây:

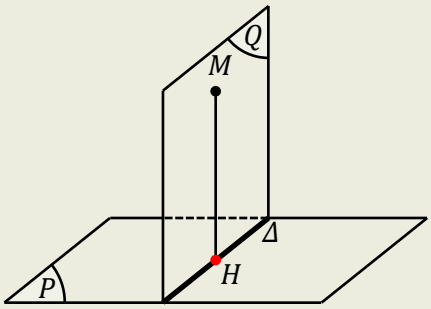
Cách 1: Tìm trực tiếp hình chiếu vuông góc của M lên (P). Thông thường ta dựng đường thẳng qua M và song song với một đường đã vuông góc với mặt phẳng (α).

Cách 2: (Cũng thông qua dựng hình chiếu vuông góc)

+ Tìm mặt phẳng (Q) chứa M và vuông góc với mặt phẳng (P) theo giao tuyến Δ

+ Từ M hạ MH vuông góc với Δ $(H \in \Delta)$.

+ Khi đó $d\big(M;(P)\big) = MH$.

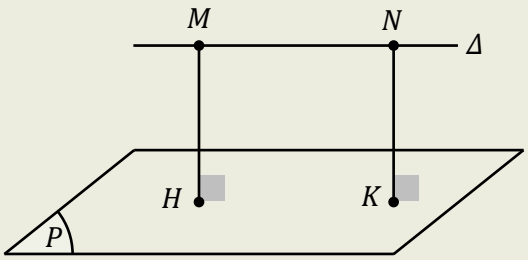


Cách 3: Dịch điểm song song

+ Qua M, kẻ $\Delta // (P)$. Ta có: $d\big(M;(P)\big) = d(\Delta;(P))$

+ Chọn $N \in \Delta$. Khi đó:

$$d\big(M;(P)\big) = d\big(\Delta;(P)\big) = d(N;(P))$$



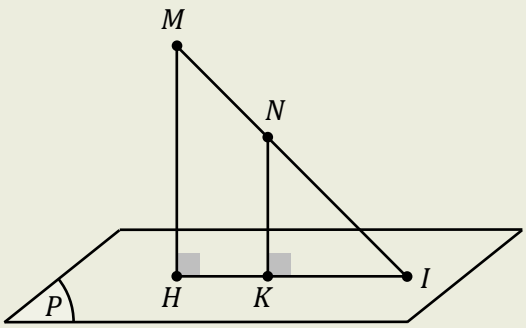
Cách 4: Dịch điểm đồng dạng

Nếu $MN \cap (P) = I$. Ta có

$$\frac{d(M,(P))}{d(N,(P))} = \frac{MI}{NI}$$

Tính $d\big(N,(P)\big)$ và $\dfrac{MI}{NI}$

$$\Rightarrow d\big(M,(P)\big) = \frac{MI}{NI} \cdot d(N,(P))$$



Chú ý: Điểm N ở đây ta phải chọn sao cho tìm khoảng cách từ N đến mặt phẳng (P) dễ hơn tìm khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P).

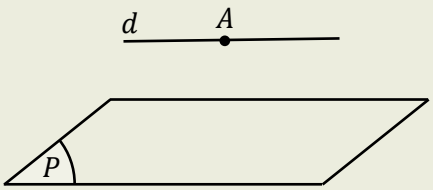
244. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song

Tính khoảng giữa đường thẳng d đến mặt phẳng (P)

Cách 1: chuyển về bài toán tìm khoảng cách giữa điểm và mặt phẳng

Bước 1: Chọn một điểm A thuộc đường thẳng d

Bước 2: Xác định khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P).

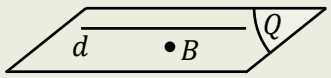


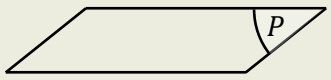
Cách 2: chuyển về bài toán tìm khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song.

Bước 1: Tìm một mặt phẳng phụ (Q) chứa d và song song với (P).

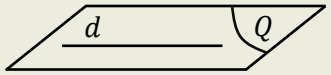
Bước 2: Chọn một điểm $B \in (Q)$ (hoặc $B \in (P)$). (Chọn B sao cho việc xác định khoảng cách từ nó đến mặt phẳng còn lại là dễ dàng)

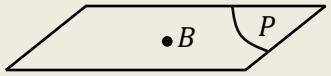
Bước 3: Xác định khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng còn lại mà nó không thuộc vào.





hoặc



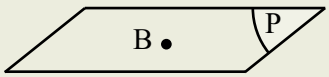


Thầy Lê T

245. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

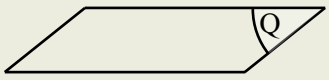
Xác định khoảng cách giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) song song với nhau

Là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia. (Chuyển về bài toán khoảng cách giữa điểm và mặt phẳng)

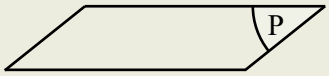


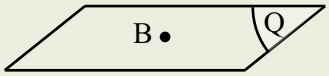
Bước 1: Chọn một điểm $B \in (Q)$ (hoặc $B \in (P)$). (Chọn B sao cho việc xác định khoảng cách từ nó đến mặt phẳng còn lại là dễ dàng)

Bước 2: Xác định khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng còn lại mà nó không thuộc vào.



hoặc

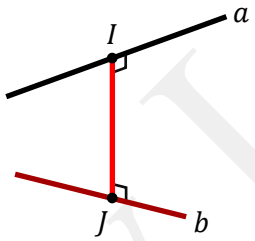




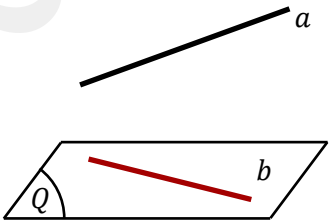
246. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau ta thường tính các khoảng cách sau

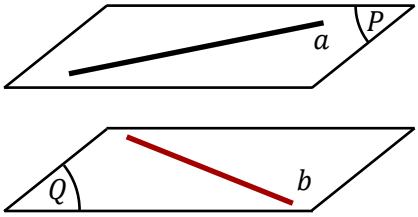
Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung giữa chúng.



Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó và mặt phẳng song song với nó, chứa đường thẳng còn lại.



Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.



Cách 1: Thường dùng khi a và b chéo nhau và $a \perp b$

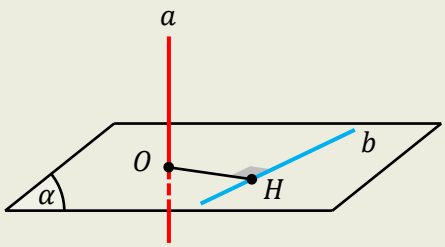
Bước 1: Dựng(α) chứa b và $(\alpha) \perp a$.

Bước 2: Tìm $O = a \cap (\alpha)$

Bước 3: Dựng $OH \perp b$ tại H

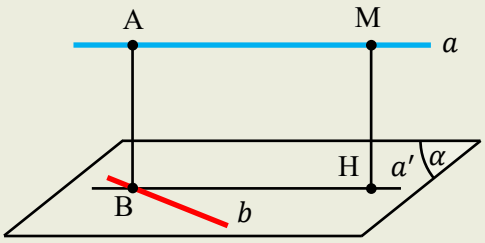
Khi đó OH là đoạn vuông góc chung của a và b.

$$\Rightarrow d_{(a;b)} = OH$$



Cách 2:

Bước 1: Dựng (α) chứa b và $(\alpha)//a$



TH1: Nếu đề chỉ bắt tính khoảng cách và không yêu cầu dựng đoạn vuông góc chung.

Bước 2: Lấy $M \in a$

Khi đó: $d(a,b) = d(M,(\alpha))$ chuyển về bài toán khoảng cách giữa điểm và mặt phẳng)

TH2: Nếu đề bài yêu cầu dựng đoạn vuông góc chung và tính khoảng cách

Bước 2: Lấy $M \in a$

Bước 3: Dựng $MH \perp (\alpha)$ tại H

Bước 4: Dựng a' chứa H và $a'//a$.

Bước 5: Tìm $B = a' \cap b$.

Bước 6: Dựng $BA//MH$ với $A \in a$.

Khi đó AB là đoạn vuông góc chung của a và b.

$$d(a,b) = d(M,(\alpha)) = MH = AB$$

Nhận xét: Khoảng cách giữa hai đường chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó và mặt phẳng song song với nó chứa đường thẳng còn lại.

Cách 3: a chéo b và a, b không vuông góc với nhau

Nếu đề chỉ bắt tính khoảng cách và không yêu cầu dựng đoạn vuông góc chung thì chỉ làm tới bước 3.

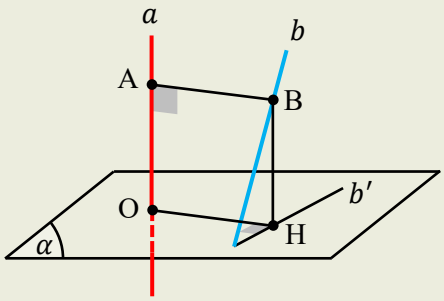
Bước 1: Chọn O tùy ý thuộc a.

Dựng mp(α) qua O và $(\alpha) \perp a$.

Bước 2: Chiếu b xuống (α) được b'

Bước 3: Trong (α), kẻ $OH \perp b'$ tại H.

Nếu đề bài yêu cầu dựng đoạn vuông góc chung và tính khoảng cách thì mới làm thêm bước 4.



Bước 4: Dựng $HB//a$ $(B \in b)$, Dựng $BA \perp a$ tại A

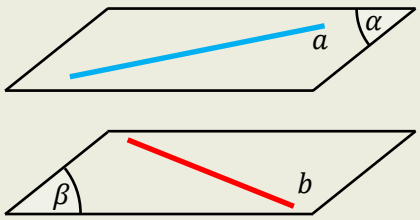
Khi đó AB là đoạn vuông góc chung giữa a và b

$\Rightarrow d(a;b) = OH = AB$.

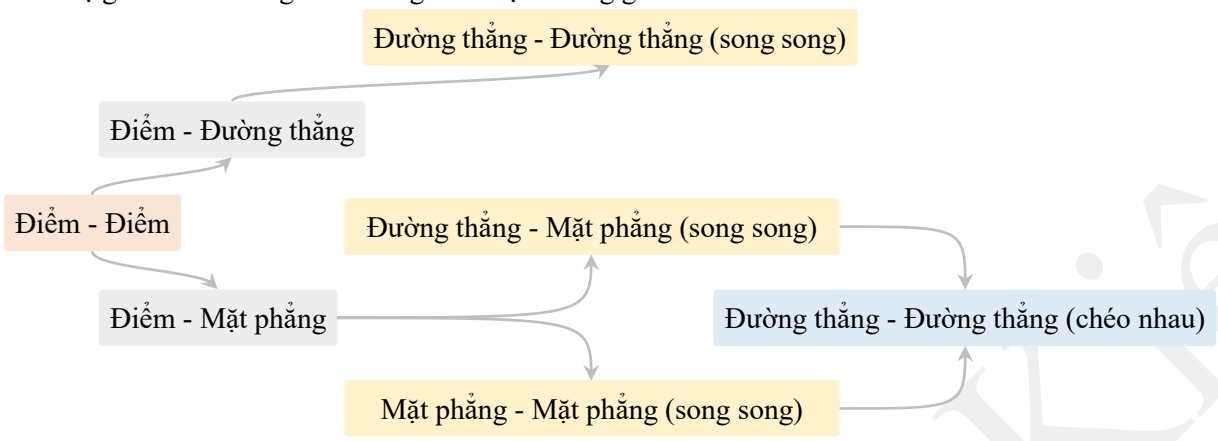
Cách 4:

Dựng mp(α) chứa a, mp(β) chứa b, mp(α) // mp(β)

Khi đó $d(a,b) = d((\alpha),(\beta))$



Mối liên hệ giữa các khoảng cách trong hình học không gian



Sơ đồ liên hệ các loại khoảng cách trong không gian. Các khoảng cách ở phía bên phải được xây dựng bởi bằng các khoảng cách ở bên trái của nó.

Các loại khoảng cách:

Điểm – Điểm (Cơ sở).

Điểm – Đường thẳng (Khoảng cách từ điểm đến hình chiếu vuông góc của nó lên đường thẳng).

Điểm – Mặt phẳng (Khoảng cách từ điểm đến hình chiếu vuông góc của nó lên mặt phẳng).

Đường thẳng – Đường thẳng (Hai đường thẳng song song) (Khoảng cách của một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia).

Đường thẳng – Mặt phẳng (Đường thẳng và mặt phẳng song song) (Khoảng cách từ một điểm tùy ý thuộc đường thẳng tới mặt phẳng).

Mặt phẳng – Mặt phẳng (Hai mặt phẳng song song) (Khoảng cách từ một điểm tùy ý thuộc mặt phẳng này tới mặt phẳng kia).

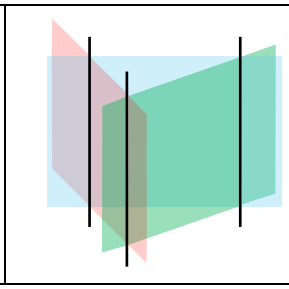
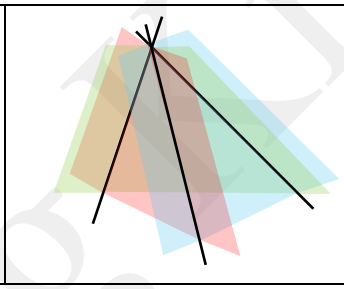
Đường thẳng – Đường thẳng (Hai đường thẳng chéo nhau) (Khoảng cách từ đường thẳng này đến mặt phẳng chứa đường thẳng kia và song song với nó; hoặc là khoảng cách giữa hai mặt phẳng lần lượt chứa 2 đường thẳng và song song với nhau).

Thầy Lê Trung Kiên

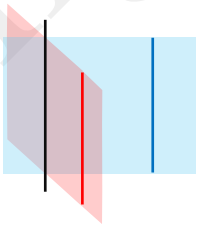
CÁC ĐỊNH LÝ VỀ VUÔNG GÓC VÀ SONG SONG

Nhóm định lý suy ra tính song song

▪ Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.

$\begin{cases}(\alpha)\neq(\beta)\neq(\gamma)\\(\alpha)\cap(\beta)=d_1\\(\alpha)\cap(\gamma)=d_2\\(\beta)\cap(\gamma)=d_3\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}d_1//d_2//d_3\\d_1\cap d_2\cap d_3=I\end{array}\right.$		

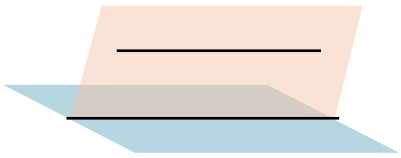
▪ Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng nếu có cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

$\begin{cases}(\alpha)\neq(\beta)\\d_1\subset(\alpha)\\d_2\subset(\beta)\\d_1//d_2\\(\alpha)\cap(\beta)=d\end{cases}\Rightarrow d//d_1//d_2$ (Với $d\neq d_1$ và $d\neq d_2$)	

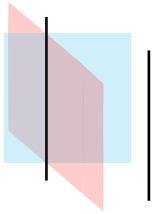
▪ Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

$$\begin{cases}d_1\neq d_2\neq d_3\\d_1//d_3\\d_2//d_3\end{cases}\Rightarrow d_1//d_2//d_3$$

▪ Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α). Nếu mặt phẳng (β) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì b song song với a.

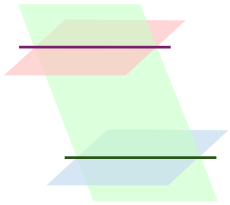
$\begin{cases}a//(\alpha)\\a\subset(\beta)\\(\alpha)\cap(\beta)=d\end{cases}\Rightarrow d//a$	

▪ Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.

$\begin{cases}(\alpha)\neq(\beta)\\(\alpha)\cap(\beta)=d\\(\alpha)//a\\(\beta)//a\end{cases}\Rightarrow a//d$	

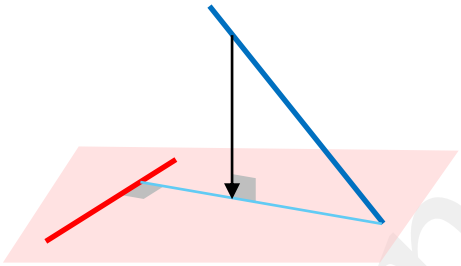
Thầy Lê Trung Hiếu

▪ Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.

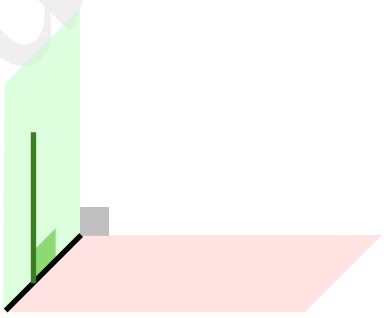
$\begin{cases} (\alpha)//(\beta) \\ (\gamma)\cap(\alpha)=d_1 \\ (\gamma)\cap(\beta)=d_2 \end{cases} \Rightarrow d_1//d_2$	

Nhóm định lý suy ra tính vuông góc

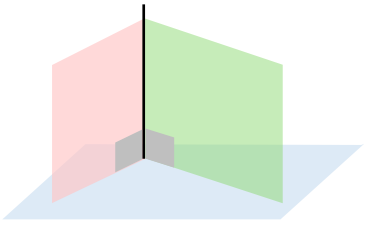
▪ Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) và b là đường thẳng không nằm trong (α) đồng thời không vuông góc với (α). Gọi b' là hình chiếu vuông góc của b trên (α). Khi đó $a \perp b \Leftrightarrow a \perp b'$ *(Định lý ba đường vuông góc).*



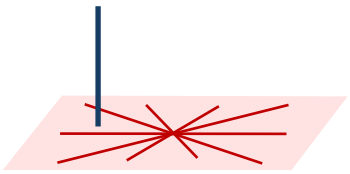
▪ Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.

$\begin{cases} (\alpha)\perp(\beta) \\ (\alpha)\cap(\beta)=d \\ a\subset(\alpha) \\ a\perp d \end{cases} \Rightarrow a\perp(\beta)$	

▪ Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.

$\begin{cases} (\alpha)\cap(\beta)=d \\ (\alpha)\perp(\gamma) \\ (\beta)\perp(\gamma) \end{cases} \Rightarrow d\perp(\gamma)$	

▪ Đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (α) thì a vuông góc với mọi đường nằm trong (α)

$\begin{cases} a\perp(\alpha) \\ b\subset(\alpha) \end{cases} \Rightarrow a\perp b$	

Thầy Lê Trung Kiên

Quan hệ song song và vuông góc giữa đường và mặt

(**Lưu ý** ta chỉ được sử dụng các suy luận Đúng và không được sử dụng các suy luận Sai)

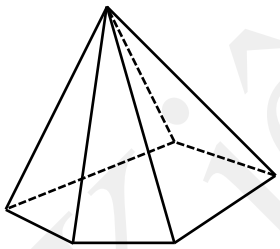
$\begin{cases}\text{đối tượng 1 } // \text{ đối tượng 2}\\ \text{đối tượng 1 } \perp \text{ đối tượng 3}\end{cases} \Rightarrow$ đối tượng 2 $\perp$ đối tượng 3	$\begin{cases}\text{đối tượng 1 } \perp \text{ đối tượng 2}\\ \text{đối tượng 1 } \perp \text{ đối tượng 3}\end{cases} \Rightarrow$ đối tượng 2 $//$ đối tượng 3
$\begin{cases}a // b\\ a \perp c\end{cases} \Rightarrow b \perp c$ (Đúng)	$\begin{cases}a \perp b\\ a \perp c\end{cases} \Rightarrow b // c$ (Sai)
$\begin{cases}a // b\\ a \perp (\alpha)\end{cases} \Rightarrow b \perp (\alpha)$(Đúng)	$\begin{cases}a \perp b\\ a \perp (\alpha)\end{cases} \Rightarrow b // (\alpha)$(Đúng)
$\begin{cases}a // (\alpha)\\ a \perp (\beta)\end{cases} \Rightarrow (\beta) \perp (\alpha)$(Đúng)	$\begin{cases}a \perp (\alpha)\\ a \perp (\beta)\end{cases} \Rightarrow (\beta) // (\alpha)$(Đúng)
$\begin{cases}a // (\alpha)\\ a \perp b\end{cases} \Rightarrow b \perp (\alpha)$(Sai)	$\begin{cases}a \perp (\alpha)\\ a \perp b\end{cases} \Rightarrow b // (\alpha)$(Đúng)
$\begin{cases}(\alpha) // a\\ (\alpha) \perp b\end{cases} \Rightarrow a \perp b$(Đúng)	$\begin{cases}(\alpha) \perp a\\ (\alpha) \perp b\end{cases} \Rightarrow a // b$(Đúng)
$\begin{cases}(\alpha) // a\\ (\alpha) \perp (\beta)\end{cases} \Rightarrow a \perp (\beta)$(Sai)	$\begin{cases}(\alpha) \perp a\\ (\alpha) \perp (\beta)\end{cases} \Rightarrow a // (\beta)$(Đúng)
$\begin{cases}(\alpha) // (\beta)\\ (\alpha) \perp a\end{cases} \Rightarrow a \perp (\beta)$(Đúng)	$\begin{cases}(\alpha) \perp (\beta)\\ (\alpha) \perp a\end{cases} \Rightarrow a // (\beta)$(Đúng)
$\begin{cases}(\alpha) // (\beta)\\ (\alpha) \perp (\gamma)\end{cases} \Rightarrow (\beta) \perp (\gamma)$(Đúng)	$\begin{cases}(\alpha) \perp (\beta)\\ (\alpha) \perp (\gamma)\end{cases} \Rightarrow (\beta) \perp (\gamma)$(Sai)

Thầy Lê Trung Kiên

CÁC HÌNH KHỐI CƠ BẢN

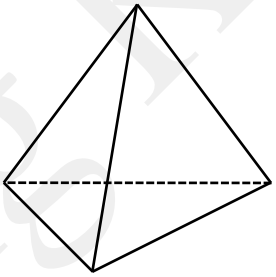
Hình chóp:

- Đáy là một đa giác.
- Có duy nhất một đỉnh, đỉnh không nằm trong mặt phẳng đáy



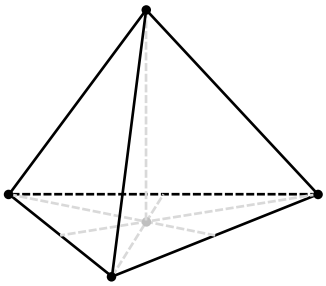
Hình tứ diện (tứ = bốn; diện = mặt)

- Hình chóp có đáy là tam giác
- Có 4 mặt (3 mặt bên, 1 mặt đáy)
- Có 6 cạnh (3 cạnh bên, 3 cạnh đáy)
- Tất cả các mặt đều là tam giác



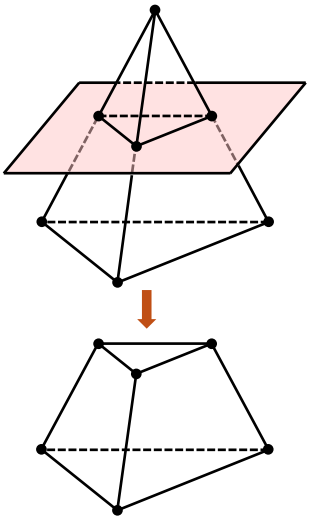
Tứ diện đều

- Là hình chóp có tất cả các mặt là các tam giác đều và bằng nhau.
- Hình chiếu vuông góc của đỉnh xuống đáy trùng với tâm của đáy.



Hình chóp cụt

- Là hình chóp bị cắt cụt bởi một mặt phẳng song song với đáy.
- Có hai đáy song song và đồng dạng.
- Các cạnh bên khi kéo dài sẽ đồng quy nhau.
- Các mặt bên là những hình thang.



Thầy Lê Trung Kiên

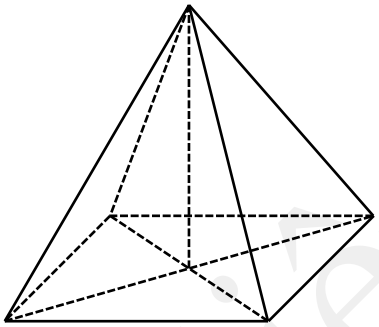
Hình chóp đều

▪ Đáy là đa giác đều (tam giác đều, hình vuông, ngũ giác đều,…)

▪ Hình chiếu vuông góc của đỉnh xuống mặt phẳng đáy trùng với tâm của đa giác đáy.

▪ Các cạnh bên bằng nhau.

▪ Các mặt bên là những tam giác cân tại đỉnh của hình chóp và là các tam giác bằng nhau.



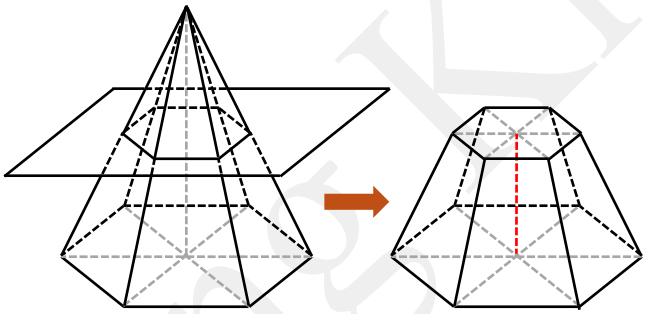
Hình chóp cụt đều

▪ Là hình chóp đều bị cắt cụt bởi một mặt phẳng song song với đáy.

▪ Hai đáy là hai đa giác đều và đồng dạng nhau.

▪ Các cạnh bên bằng nhau.

▪ Đường nối hai tâm của hai đa giác đáy vuông góc với hai mặt đáy.



Hình lăng trụ

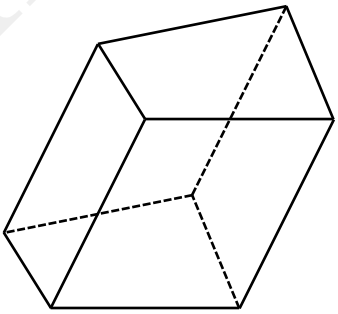
▪ Có 2 đáy là 2 đa giác bằng nhau và nằm trong 2 mặt phẳng song song với nhau.

▪ Các cạnh tương ứng của 2 đa giác đáy thì song song và bằng nhau.

▪ Tất cả các mặt bên đều là những hình bình hành.

▪ Tất cả các cạnh bên đều song song và bằng nhau.

Lưu ý: Các cạnh bên có thể xiên so với đáy.



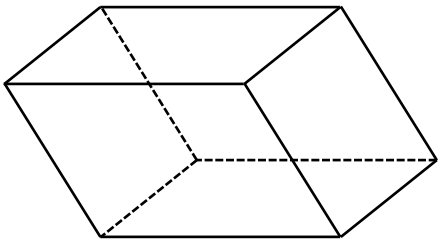
Hình hộp

▪ Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành.

▪ Các mặt đối diện là những hình bình hành bằng nhau và nằm trong hai mặt phẳng song song.

▪ Các cạnh bên có thể xiên so với đáy.

▪ Các cạnh bên bằng nhau và song song với nhau.

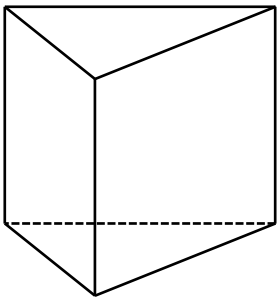


Hình lăng trụ đều

▪ Có đáy là đa giác đều.

▪ Các cạnh bên vuông góc với đáy.

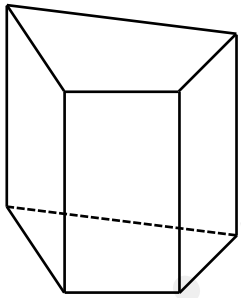
▪ Các mặt bên là những hình chữ nhật bằng nhau.



Thầy Lê Trung Kiên

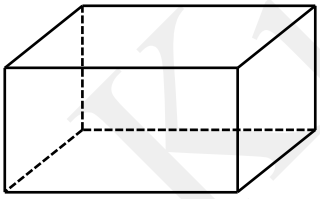
Hình lăng trụ đứng

- Là một hình lăng trụ.
- Các cạnh bên vuông góc với đáy.
- Các mặt bên là những hình chữ nhật.



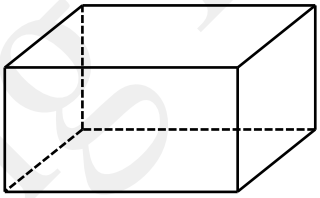
Hình hộp đứng

- Là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành



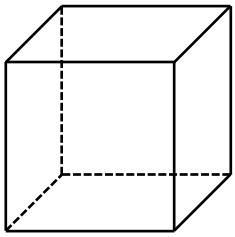
Hình hộp chữ nhật

- Là một hình lăng trụ
- Đáy là hình chữ nhật
- Các cạnh bên vuông góc với đáy.

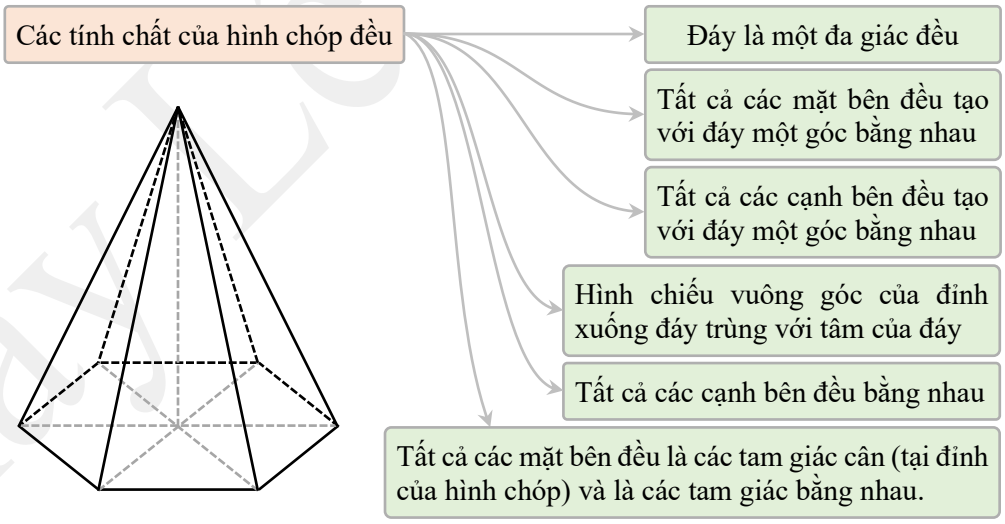


Hình lập phương

- Tất cả các mặt đều là hình vuông.
- Các cạnh bên đều vuông góc với đáy.

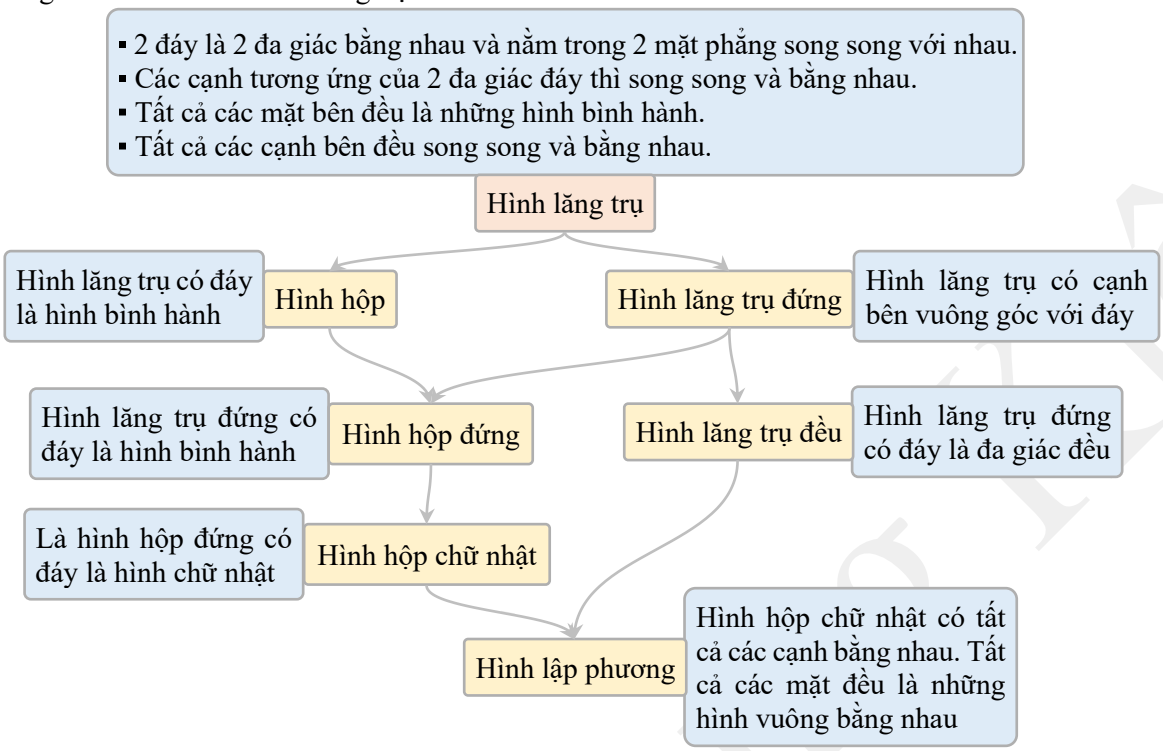


Sơ đồ tổng kết một vài tính chất quan trọng của hình chóp đều



Thầy Lê Trung Kiên

Bảng tổng kết tính chất các hình lăng trụ



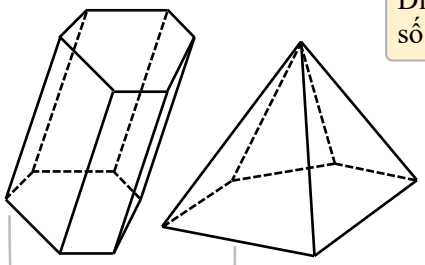
Đối với hình hộp chữ nhật: Đường chéo $= \sqrt{\text{dài}^2 + \text{rộng}^2 + \text{cao}^2}$

Đối với hình lập phương: Đường chéo $=$ cạnh $\times \sqrt{3}$

Thầy Lê Phúc Kiên

KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH

247. Hình đa diện, khối đa diện



Hình đa diện

Điều kiện để một khối được tạo bởi một số hữu hạn các đa giác là hình đa diện

- Hai đa giác phân hiệt chỉ có thể hoặc không có điểm chung, hoặc chỉ có một đỉnh chung, hoặc chỉ có một cạnh chung
- Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác

Khối đa diện

Khối đa diện là phần không gian bên trong được giới hạn bởi một hình đa diện, kể cả hình đa diện đó

Trong một khối đa diện, mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất 3 mặt.
Trong một khối đa diện, mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt.
Trong một khối đa diện, mỗi mặt có ít nhất ba cạnh.
Khối đa diện có số đỉnh ít nhất, số cạnh ít nhất, số mặt ít nhất là khối tứ diện.
Bất cứ hình đa diện nào cũng có thể phân chia thành nhiều khối tứ diện.
Một hình đa diện có M mặt, mỗi mặt có p cạnh thì có $\frac{Mp}{2}$ cạnh.

Trong một **khối lăng trụ**

Trong một **khối chóp**

$$\text{Số đỉnh ở đáy} = \text{Số cạnh ở đáy} = \frac{\text{Số cạnh toàn bộ}}{2} = \text{Số mặt bên} = \text{Số mặt toàn bộ} - 1$$

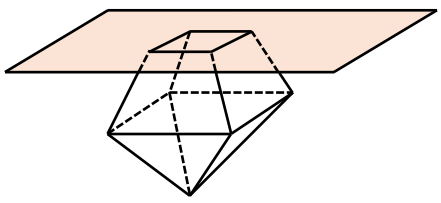
Toàn bộ số đỉnh = Số đỉnh của 1 đáy × 2
Số cạnh của 1 đáy = Số đỉnh của 1 đáy = Số cạnh bên
Toàn bộ số cạnh = Số đỉnh của 1 đáy × 3
Toàn bộ số mặt = Số đỉnh của 1 đáy + 2
Số mặt bên = Số đỉnh của 1 đáy

248. Khối đa diện lồi

Đặc điểm nhận biết khối đa diện lồi

Khối đa diện (H) được gọi là khối đa diện lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kì của (H) luôn thuộc (H). Khi đó đa diện xác định (H) được gọi là đa diện lồi

Một khối đa diện là khối đa diện lồi khi và chỉ khi miền trong của nó luôn nằm về một phía đối với mỗi mặt phẳng chứa một mặt của nó.



249. Khối đa diện đều

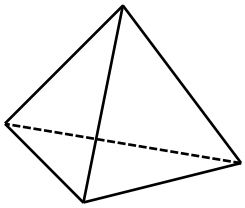
Tính chất **khối đa diện đều**

- Mỗi mặt của nó là một đa giác đều p cạnh
- Mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của đúng q mặt

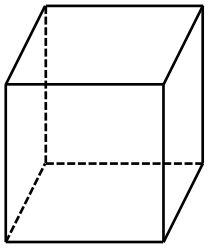
Khối đa diện đều như vậy được gọi là khối đa diện đều loại $\{p; q\}$

Chỉ có năm loại khối đa diện đều. Đó là loại {3;3}, loại {4;3}, loại {3;4}, loại {5;3} và loại {3;5}.

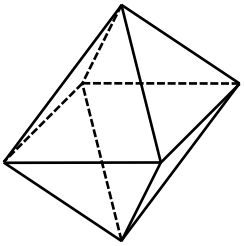
Khối tứ diện đều



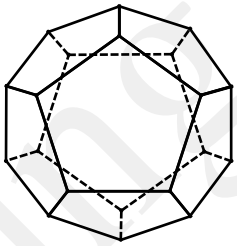
Khối lập phương



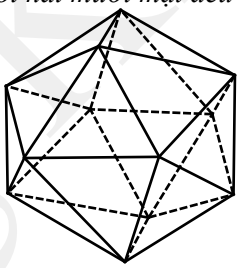
Khối bát diện đều



Khối mười hai mặt đều



Khối hai mươi mặt đều



Bảng tóm tắt của năm loại khối đa diện đều

Loại	Tên gọi	Số đỉnh	Số cạnh	Số mặt
{3;3}	Tứ diện đều	4	6	4
{4;3}	Lập phương	8	12	6
{3;4}	Bát diện đều	6	12	8
{5;3}	Mười hai mặt đều	20	30	12
{3;5}	Hai mươi mặt đều	12	30	20

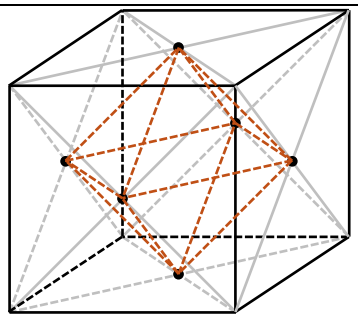
Lưu ý : Trong một đa diện đều :

$$\text{Số đỉnh} + \text{Số mặt} = \text{Số cạnh} + 2$$

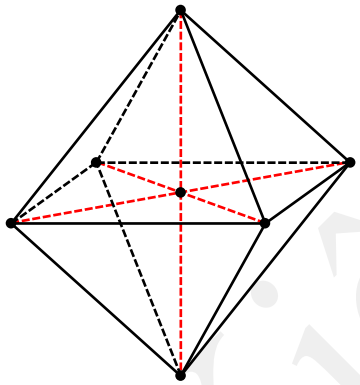
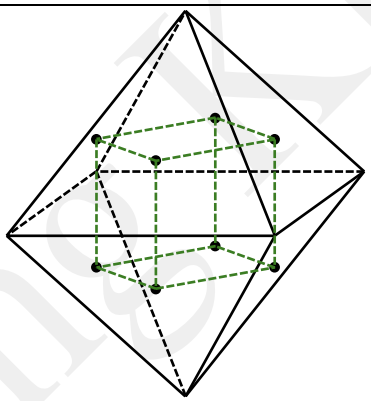
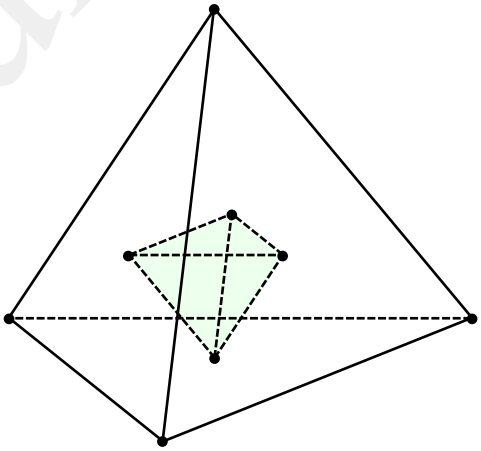
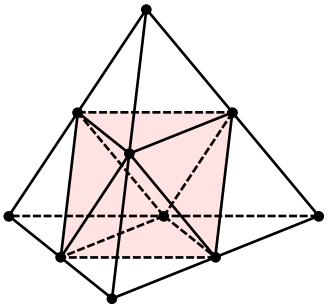
$$q \times \text{Số đỉnh} = 2 \times \text{Số cạnh} = p \times \text{Số mặt}$$

Trong đó: p là số cạnh của mỗi mặt đa giác đều tạo nên đa diện đều.

q là số lượng mặt đi qua mỗi đỉnh cụ thể của đa diện đều.

Tâm của các mặt của một khối lập phương là các đỉnh của một khối bát diện đều	

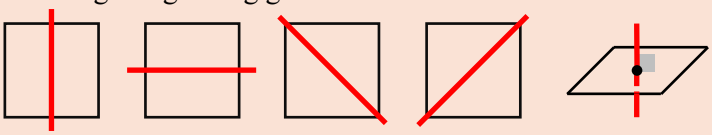
Thầy Lê Trung Kiên

Hai đỉnh của một khối bát diện đều được gọi là **hai đỉnh đối diện** nếu chúng không cùng thuộc một cạnh của khối đó. Đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện gọi là **đường chéo** của khối bát diện đều. Khi đó: – Ba đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường – Ba đường chéo đôi một vuông góc với nhau; – Ba đường chéo bằng nhau	
Tâm của các mặt của một khối bát diện đều là các đỉnh của một khối lập phương	
Cho một khối tứ diện đều. Khi đó, các trọng tâm của các mặt của nó là các đỉnh của một khối tứ diện đều.	
Cho một khối tứ diện đều. Khi đó, các trung điểm của các cạnh của nó là các đỉnh của một khối bát diện đều (khối tám mặt đều).	

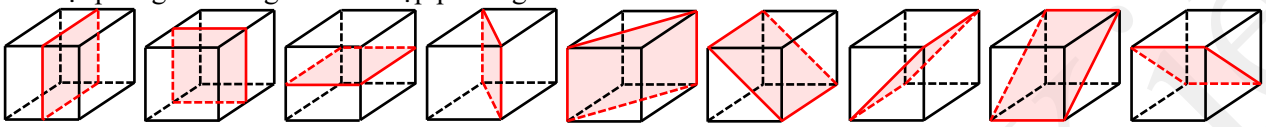
Thầy Lê Trung Kiên

250. Mặt phẳng và trục đối xứng

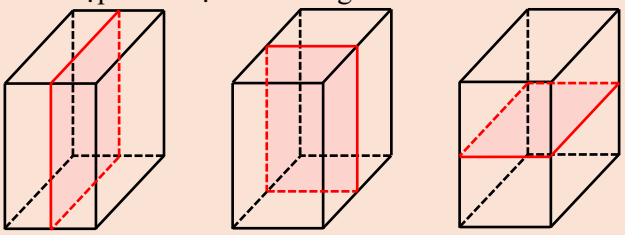
Số trục đối xứng của hình vuông trong không gian là: 5



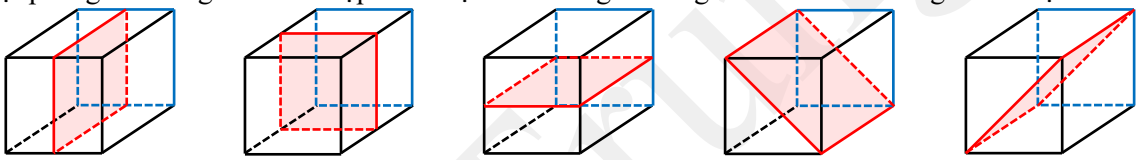
Số mặt phẳng đối xứng của hình lập phương là: 9



Số mặt phẳng đối xứng của hình hộp chữ nhật có 3 thông số khác nhau là 3.

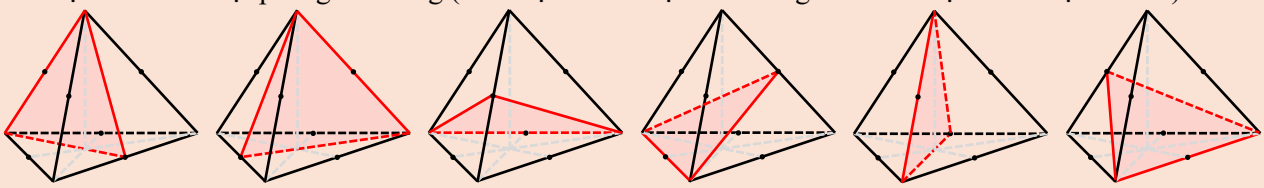


Số mặt phẳng đối xứng của hình hộp chữ nhật có 2 thông số bằng nhau và khác thông số còn lại là 5.

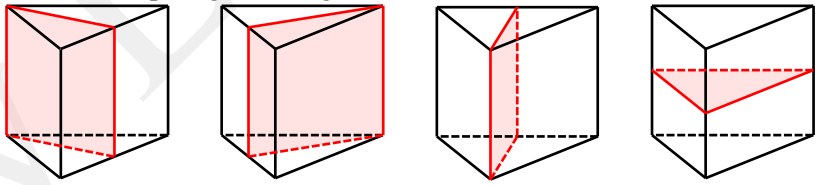


(Trong hình các cạnh màu xanh bằng nhau)

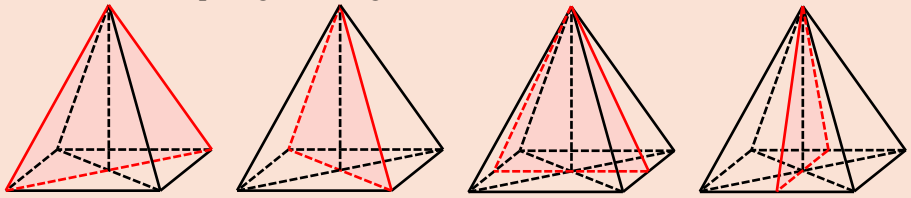
Tứ diện đều có 6 mặt phẳng đối xứng (mỗi mặt chứa 1 cạnh và trung điểm của cạnh đối diện với nó)



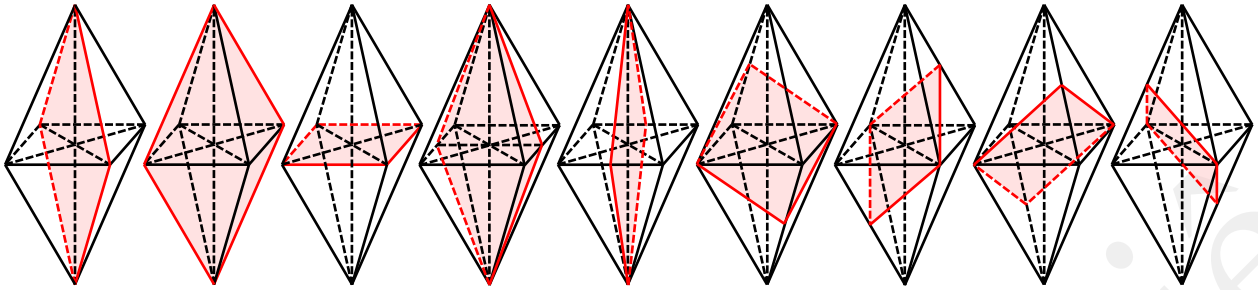
Lăng trụ tam giác đều có 4 mặt phẳng đối xứng.



Hình chóp tứ giác đều có 4 mặt phẳng đối xứng.



Bát diện đều có 9 mặt phẳng đối xứng.



Thầy Lê Trung Kiên

251. Thể tích đa diện

Tính thể tích của một khối đa điện

- Dựa vào **công thức tính toán cơ bản** → Hình chóp, hình lăng trụ, hình hộp chữ nhật nếu có đủ diện tích đáy và chiều cao. Hình lập phương nếu biết được cạnh của hình lập phương.
- **Chia nhỏ** hình thành các phần dễ tính hơn và tính thể tích mỗi phần rồi cộng lại
- **So sánh thể tích** cần tìm với một thể tích khác đã biết (so sánh đáy, chiều cao và dạng công thức tính thể tích là hình chóp hay lăng trụ)
- Lấy thể tích một khối lớn đã biết trừ đi thể tích **phần bù** với nó trong khối lớn đã biết
- Dùng công thức **tỷ lệ thể tích tứ diện** nếu biết tỷ lệ chia trên 3 cạnh xuất phát từ một đỉnh của hình chóp.
- Ta có thể **ghép thêm** vào khối đa diện một khối đa diện khác sao cho khối đa diện thêm vào và khối đa diện mới tạo thành có thể dễ tính được thể tích.
- **Đảo đỉnh đối với tứ diện** (nếu thấy việc đảo đỉnh dễ dàng cho việc tính toán thể tích)

Từ tính bảo toàn của thể tích ta rút ra hai cách có thể dùng để tính thể tích như sau

Công thức phân chia thể tích

Nếu ta chia khối đa diện A thành các khối đa diện nhỏ hơn chứa bên trong nó là A_1 và A_2, A_1 và A_2 không có phần thể tích chung, A_1 và A_2 hợp lại được A, thì ta có công thức phân chia thể tích :

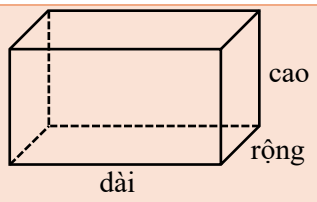
$$\boxed{V_A = V_{A_1} + V_{A_2}}$$

$$\boxed{V_{\text{hình hộp chữ nhật}} = \text{dài} \times \text{rộng} \times \text{cao} = S_{\text{đáy}} \times \text{chiều cao}}$$

Hình hộp chữ nhật có đặc điểm :

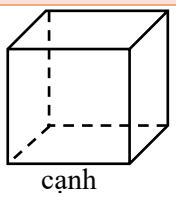
– Đáy là hình chữ nhật.

– Các cạnh bên vuông góc với đáy.

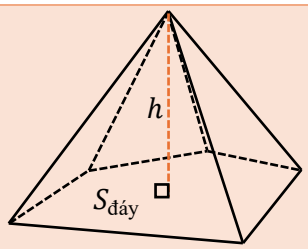


$$\boxed{V_{\text{lập phương}} = (\text{cạnh})^3}$$

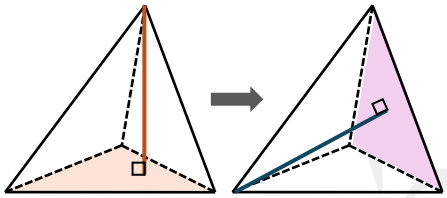
(trong đó a là độ dài cạnh của hình lập phương)



$$\boxed{V_{\text{chóp}} = \frac{1}{3} S_{\text{đáy}} \cdot h}$$



Lưu ý: từ công thức thể tích hình chóp ta suy ra một phương pháp tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng như sau :



Giả sử cho một hình chóp có đáy là tam giác mà ta đã tính được thể tích của nó. Đề bài yêu cầu tính khoảng cách từ một đỉnh của hình chóp tới mặt nào đó của hình chóp đó thì ta có thể làm như sau :
Chọn đỉnh đó là đỉnh của hình chóp, với mặt đáy là mặt phẳng đi qua ba đỉnh còn lại của hình chóp.

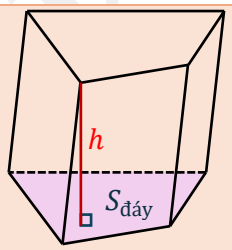
Tính diện tích của tam giác đáy tương ứng.

Từ công thức thể tích $V = \frac{1}{3}S_{\text{đáy}}.h \Rightarrow h = \frac{3V}{S_{\text{đáy}}}$; h chính là khoảng cách cần tìm.

$$\boxed{V_{\text{lăng trụ}} = S_{\text{đáy}} \cdot h}$$

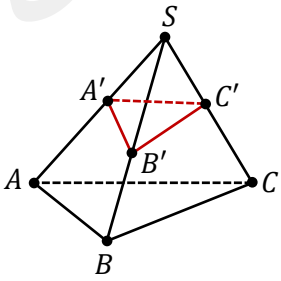
Diện tích xung quanh của hình lăng trụ (hình chóp) bằng tổng diện tích các mặt bên.

Diện tích toàn phần của hình lăng trụ (hình chóp) bằng tổng diện tích xung quanh với diện tích các đáy.



Cho hình chóp $S.ABC$. Trên các đoạn thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm A', B', C' khác với S. Ta có **tỷ lệ thể tích** :

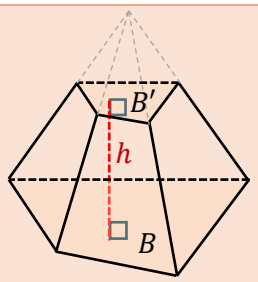
$$\boxed{\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}}$$



$$\boxed{V_{\text{chóp cụt}} = \frac{1}{3}h\left(B + B' + \sqrt{BB'}\right)}$$

Trong đó : B, B' là diện tích hai đáy.

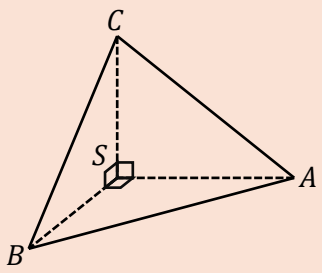
h : là chiều cao của hình chóp cụt.

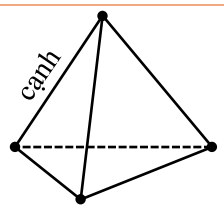
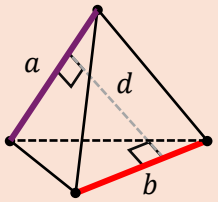
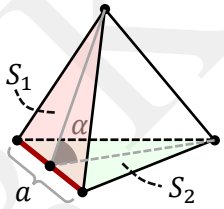
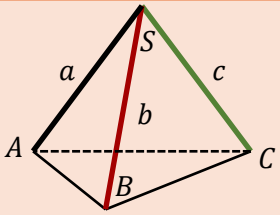
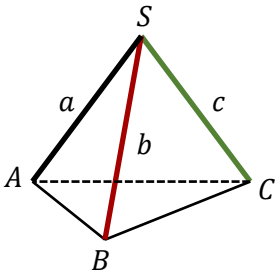
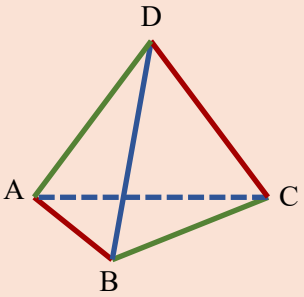
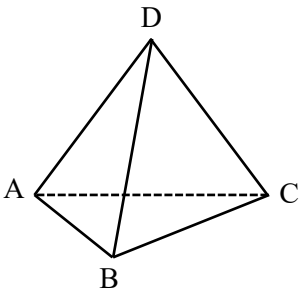


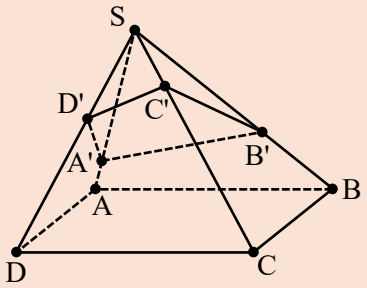
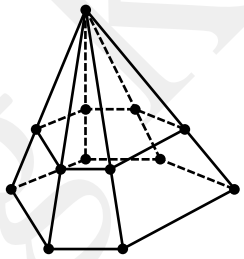
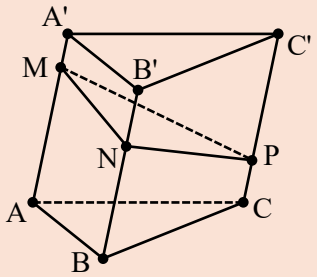
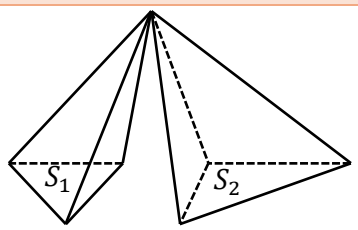
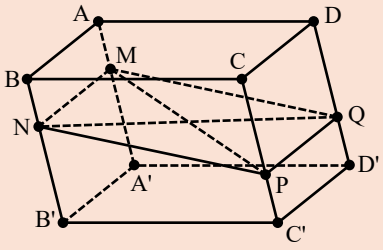
Một số công thức đặc biệt khác

Tứ diện $S.ABC$ có SA, SB, SC **đôi một vuông góc**.

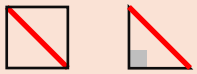
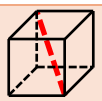
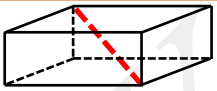
$$V_{S.ABC} = \frac{1}{6}SA.SB.SC = \frac{\sqrt{2S_{\Delta SAB}.S_{\Delta SBC}.S_{\Delta SAC}}}{3}$$



$V_{\text{tứ diện đều}} = \dfrac{\sqrt{2}}{12}(\text{cạnh})^3$	
Thể tích tứ diện khi biết độ dài 2 cạnh đối là a và b, và khoảng cách giữa chúng là (d) và góc giữa chúng là (α): $V = \dfrac{1}{6}abd \cdot \sin\alpha$	
Thể tích khi biết cạnh kẹp giữa 2 mặt kề nhau và diện tích, góc giữa 2 mặt đó $V = \dfrac{2S_1S_2\sin\alpha}{3a}$	
Công thức tính khi biết 3 cạnh, 2 góc ở đỉnh và 1 góc nhị diện $\begin{cases} SA = a, SB = b, SC = c \\ \left(\widehat{(SAB),(SAC)}\right) = \alpha \\ \widehat{ASB} = \beta, \widehat{ASC} = \varphi \end{cases} \Rightarrow V = \dfrac{abc}{6}\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi$	
Tứ diện có 3 góc và cạnh cùng xuất phát từ một đỉnh Tứ diện $SABC$ có $SA = a, SB = b, SC = c$ và $\widehat{ASB} = x, \widehat{BSC} = y, \widehat{CSA} = z$ ta có: $V = \dfrac{1}{6}abc\sqrt{1 + 2\cos x\cos y\cos z - \cos^2 x - \cos^2 y - \cos^2 z}$	
Thể tích khối tứ diện $ABCD$ (gần đều) **có các cặp cạnh đối bằng nhau** là: $AB = CD = a, AC = BD = b, AD = BC = c$ $V_{ABCD} = \dfrac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}$	
Tứ diện $ACBD$ có $BC = a, CA = b, AB = c, AD = d, BD = e, CD = f$ ta có công thức tính thể tích của tứ diện theo 6 cạnh như sau: $V = \dfrac{1}{12}\sqrt{M + N + P - Q}$ Trong đó $M = a^2d^2(b^2+e^2+c^2+f^2-a^2-d^2)$ $N = b^2e^2(a^2+d^2+c^2+f^2-b^2-e^2)$ $P = c^2f^2(a^2+d^2+b^2+e^2-c^2-f^2)$	

$Q = (abc)^2 + (aef)^2 + (bdf)^2 + (cde)^2$	
Tỷ lệ khối chóp có đáy là hình bình hành $\begin{cases} a = \dfrac{SA'}{SA} \\ b = \dfrac{SB'}{SB} \\ c = \dfrac{SC'}{SC} \\ d = \dfrac{SD'}{SD} \\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{d} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{abcd}{4}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d}\right)$	
Tỷ lệ thể tích 2 khối chóp chung đỉnh và có 2 đáy song song Tỷ lệ V = (Tỷ lệ 1 cạnh tương ứng)^3 = (Tỷ lệ 2 đường cao tương ứng)^3	
Tỷ lệ thể tích lăng trụ tam giác $\begin{cases} a = \dfrac{A'M}{AA'} \\ b = \dfrac{B'N}{BB'} \\ c = \dfrac{C'P}{CC'} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{V_{MNP.A'B'C'}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \dfrac{a+b+c}{3}$	
Tỷ lệ thể tích hai khối chóp chung đỉnh và mặt phẳng đáy $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{S_1}{S_2}$	
Tỷ lệ thể tích hình hộp (đáy là hình bình hành) $\begin{cases} a = \dfrac{AM}{AA'} \\ b = \dfrac{BN}{BB'} \\ c = \dfrac{CP}{CC'} \\ d = \dfrac{DQ}{DD'} \\ a + c = b + d \end{cases} \Rightarrow \dfrac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \dfrac{a+b+c+d}{4}$	

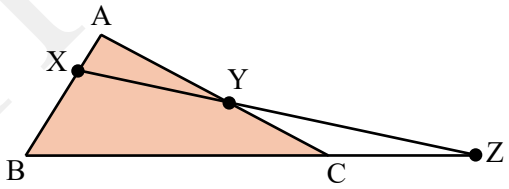
252. Độ dài và diện tích đặc biệt

Đường chéo hình vuông = Cạnh huyền tam giác vuông cân = cạnh × $\sqrt{2}$	
Diện tích hình vuông = $(\text{cạnh})^2$	
Đường chéo hình lập phương = cạnh × $\sqrt{3}$	
Đường chéo hình hộp chữ nhật = $\sqrt{\text{dài}^2 + \text{rộng}^2 + \text{cao}^2}$	
Đường cao tam giác đều = $\frac{\sqrt{3}}{2} \times$ cạnh	
Diện tích tam giác đều = $\frac{\sqrt{3}}{4} \times (\text{cạnh})^2$	
Đỉnh → Tâm tam giác đều = $\frac{\sqrt{3}}{3} \times$ cạnh	
Đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông = $\frac{\text{Cạnh huyền}}{2}$	

253. Định lý Menelaus

Trên các cạnh của ΔABC có 3 điểm $X \in AB$, $Y \in AC$, $Z \in CB$; sao cho X, Y, Z thẳng hàng.

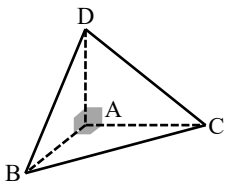
$$\Rightarrow \boxed{\frac{AX}{BX} \cdot \frac{BZ}{CZ} \cdot \frac{CY}{AY} = 1}$$



254. Tam diện vuông

Cho tứ diện ABCD có AB , AC, AD đôi một vuông góc. Khi đó ta có:

- H là hình chiếu vuông góc của A lên mp(BCD) ⇔ H là trực tâm ΔBCD
- $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2}$
- $V = \frac{1}{6} AB.AC.AD$



Thầy Lê Trung Kiên

THỐNG KÊ GHÉP NHÓM

255. Lưu ý bấm máy tính

▪ Trong máy tính bỏ túi, chương trình thống kê chỉ có thể tính đúng các giá trị ghép nhóm đó là: số trung bình, phương sai, độ lệch chuẩn.

▪ Các giá trị: trung vị, tứ phân vị, mốt, khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị không thể tính bằng chương trình thống kê trong máy tính.

▪ Khi tính các số đặc trưng ghép nhóm cột x ta nhập giá trị đại diện, cột n ta nhập tần số.

256. Cỡ mẫu, giá trị đại diện, độ dài nhóm, quy tắc ghép nhóm

Bảng tần số ghép nhóm

Nhóm	$[u_1;u_2)$	$[u_2;u_3)$	...	$[u_k;u_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	...	n_k

▪ Bảng trên gồm k nhóm $[u_j;u_{j+1})$ với $1 \le j \le k$, mỗi nhóm gồm một số giá trị được ghép theo một tiêu chí xác định.

▪ **Cỡ mẫu** $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k =$ Tổng tần số

▪ Giá trị chính giữa mỗi nhóm được dùng làm **giá trị đại diện** cho nhóm ấy. Ví dụ nhóm $[u_1;u_2)$ có giá trị đại diện là $\frac{1}{2}(u_1+u_2)$. Hiểu một cách đơn giản thì:

Giá trị đại diện = Trung bình cộng 2 đầu mút

▪ Hiệu $u_{j+1} - u_j$ được gọi là **độ dài của nhóm** $[u_j;u_{j+1})$. Hiểu một cách đơn giản thì:

Độ dài nhóm = Mút phải của nhóm − Mút trái của nhóm

Một số quy tắc ghép nhóm của mẫu số liệu

Mẫu số liệu có thể được ghép nhóm theo nhiều cách khác nhau nhưng thường tuân theo 1 số quy tắc sau:

▪ Sử dụng từ $k = 5$ đến $k = 20$ nhóm. Cỡ mẫu càng lớn thì cần càng nhiều nhóm số liệu.

▪ Các nhóm có cùng độ dài bằng L thoả mãn $R < k \times L$, trong đó R là khoảng biến thiên, k là số nhóm.

▪ Giá trị nhỏ nhất của mẫu thuộc vào nhóm $[u_1;u_2)$ và càng gần u_1 càng tốt. Giá trị lớn nhất của mẫu thuộc nhóm $[u_k;u_{k+1})$ và càng gần u_{k+1} càng tốt.

▪ Các đầu mút của các nhóm có thể không là giá trị của mẫu số liệu.

Hiệu chỉnh nhóm

▪ Ta hay gặp các bảng số liệu ghép nhóm là số nguyên, chẳng hạn như bảng thống kê số lỗi chính tả trong bài kiểm tra giữa học kì 1 môn Ngữ Văn của học sinh khối 11 như sau:

Số lỗi	[1;2]	[3; 4]	[5; 6]	[7; 8]	[9; 10]
Số bài	122	75	14	5	2

Để thuận lợi cho việc tính các số đặc trưng cho bảng số liệu này, người ta hiệu chỉnh bằng cách thêm và bớt 0,5 đơn vị vào đầu mút bên phải và bên trái của mỗi nhóm số liệu như sau:

Số lỗi	[0,5; 2,5)	[2,5; 4,5)	[4,5; 6,5)	[6,5; 8,5)	[8,5; 10,5)
Số bài	122	75	14	5	2

257. Các số đặc trưng đo xu thế trung tâm

- Số trung bình
- Trung vị
- Tứ phân vị
- Mốt

a) Số trung bình

Giả sử mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng tần số ghép nhóm:

Nhóm	Nhóm 1	Nhóm 2	...	Nhóm k
Giá trị đại diện	c_1	c_2	...	c_k
Tần số	n_1	n_2	...	n_k

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu $\bar{x}$, được tính như sau:

$$\bar{x} = \frac{n_1c_1 + n_2c_2 + n_3c_3 + \cdots + n_kc_k}{n} = \frac{\text{Tổng: Tần số} \times \text{Giá trị đại diện}}{\text{Cỡ mẫu}}$$

Với cỡ mẫu $n = n_1 + n_2 + n_2 + \cdots + n_k$

Ý nghĩa của số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho số trung bình của mẫu số liệu gốc. Nó thường dùng để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu.

Ví dụ

Tìm số trung bình của mẫu số liệu sau:

Giá trị	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)
Tần số	9	7	23	19	3

Giải

Giá trị đại diện	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5
Giá trị	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)
Tần số	9	7	23	19	3

Cỡ mẫu: $n = 9 + 7 + 23 + 19 + 3 = 61$

Số trung bình:

$$\bar{x} = \frac{7{,}5 \times 9 + 12{,}5 \times 7 + 17{,}5 \times 23 + 22{,}5 \times 19 + 27{,}5 \times 3}{61} = \frac{35}{2} = 17{,}5$$

Thầy Lê Trung Kiên

b) Trung vị

Công thức xác định **trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm**:
Gọi n là cỡ mẫu.
Giả sử nhóm $[u_m; u_{m+1})$ chứa trung vị.
n_m là tần số của nhóm chứa trung vị.
$C = n_1 + n_2 + \cdots + n_{m-1}$
Khi đó:

$$M_e = u_m + \frac{\frac{n}{2} - C}{n_m} \times (u_{m+1} - u_m)$$

$$\text{Trung vị} = \begin{array}{c}\text{Đầu mút trái}\\ \text{của nhóm}\\ \text{chứa trung vị}\end{array} + \frac{\frac{\text{Cỡ mẫu}}{2} - \begin{array}{c}\text{Tổng tần số}\\ \text{của các nhóm}\\ \text{trước nhóm chứa trung vị}\end{array}}{\begin{array}{c}\text{Tần số của nhóm}\\ \text{chứa trung vị}\end{array}} \times \text{Độ dài nhóm}$$

Ý nghĩa của trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Từ dữ liệu ghép nhóm nói chung không thể xác định chính xác trung vị của mẫu số liệu gốc. Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho mẫu số liệu gốc và có thể lấy làm giá trị đại diện cho mẫu số liệu.

Ví dụ

Tìm trung vị của mẫu số liệu sau:

Giá trị	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)
Tần số	9	7	23	19	3

Giải

Ta có:

Giá trị	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)
Tần số	9	7	23	19	3
	$x_1 \to x_9$	$x_{10} \to x_{16}$	$x_{17} \to x_{39}$	$x_{40} \to x_{58}$	$x_{59} \to x_{61}$

chứa Q_2

Vì trung vị:

$x_1 \longrightarrow x_{61}$

Từ x_1 đến x_{61} thì phần tử chính giữa được tìm bằng cách tính $\frac{1+61}{2} = 31$ (là số nguyên) $\Rightarrow$ Phần tử chính giữa là x_{31}

$x_1 \longrightarrow x_{31} \longrightarrow x_{61}$

$$M_e = x_{31} = 15 + \frac{\frac{2 \times 61}{4} - (9+7)}{23} \times (20 - 15) \approx 18{,}152$$

Ví dụ

Tìm trung vị của mẫu số liệu sau:

Giá trị	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)
Tần số	9	7	23	19	4

Giải

Ta có:

Giá trị	[5;10)	[10;15)	[15;20) chứa Q_2	[20;25)	[25;30)
Tần số	9	7	23	19	4
	$x_1 \to x_9$	$x_{10} \to x_{16}$	$x_{17} \to x_{39}$	$x_{40} \to x_{58}$	$x_{59} \to x_{62}$

Tìm trung vị:

$x_1 \longrightarrow x_{62}$

Từ x_1 đến x_{62} thì phần tử chính giữa được tìm bằng cách tính $\frac{1+62}{2} = 31.5$

(là số không nguyên*)* $\Rightarrow$ *Phần tử chính giữa là* x_{31} và x_{32}

$x_1 \longrightarrow x_{31}$ $\quad$ $x_{32} \longrightarrow x_{62}$

$$M_e = \frac{x_{31} + x_{32}}{2} = 15 + \frac{\frac{2 \times 62}{4} - (9+7)}{23} \times (20-15) \approx 18{,}261$$

Ví dụ

Tìm trung vị của mẫu số liệu sau:

Giá trị	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)
Tần số	1	4	12	0	4

Giải

Ta có:

Giá trị	[5;10)	[10;15)	[15;20) chứa Q_2	[20;25)	[25;30)
Tần số	1	4	12	0	4
	x_1	$x_2 \to x_5$	$x_6 \to x_{17}$		$x_{18} \to x_{21}$

Tìm trung vị:

$x_1 \longrightarrow x_{21}$

Từ x_1 đến x_{21} thì phần tử chính giữa được tìm bằng cách tính $\frac{1+21}{2} = 11$

(là số nguyên*)* $\Rightarrow$ *Phần tử chính giữa là* x_{11}

$x_1 \longrightarrow x_{11} \longrightarrow x_{21}$

$$M_e = x_{11} = 15 + \frac{\frac{2 \times 21}{4} - (1+4)}{12} \times (20-15) \approx 17{,}292$$

Ví dụ

Tìm trung vị của mẫu số liệu sau:

Giá trị	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)
Tần số	1	14	2	9	4

Giải

Ta có:

chứa Q_2

Giá trị	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)
Tần số	1	14	2	9	4
	x_1	$x_2 \to x_{15}$	$x_{16} \to x_{17}$	$x_{18} \to x_{26}$	$x_{27} \to x_{30}$

Tìm trung vị:

$x_1 \longrightarrow x_{30}$

Từ x_1 đến x_{30} thì phần tử chính giữa được tìm bằng cách tính $\frac{1+30}{2} = 15.5$

(là số không nguyên*)* $\Rightarrow$ *Phần tử chính giữa là* x_{15} và x_{16}

$x_1 \longrightarrow x_{15}$ $\quad$ $x_{16} \longrightarrow x_{30}$

$$M_e = \frac{x_{15} + x_{16}}{2} = 15$$

Thầy Lê Trung Kiên

c) Tứ phân vị

Cho dãy số $x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, \ldots, x_k$ khi đó:

▪ Nếu $\frac{j+k}{2}$ là số nguyên thì phần tử chính giữa của dãy số là: $x_{\frac{j+k}{2}}$

▪ Nếu $\frac{j+k}{2}$ là số không nguyên thì phần tử chính giữa của dãy số là 2 phần tử: $x_{\frac{j+k}{2}-\frac{1}{2}}$ và $x_{\frac{j+k}{2}+\frac{1}{2}}$

Lưu ý: Nếu $\frac{j+k}{2}$ là số không nguyên thì $\frac{j+k}{2}-\frac{1}{2}$ và $\frac{j+k}{2}+\frac{1}{2}$ là 2 số nguyên ở 2 bên của $\frac{j+k}{2}$.

▪ Tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu Q_2, cũng chính là trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm.

▪ Để tìm **tứ phân vị thứ nhất** của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu Q_1, ta thực hiện như sau:

Giả sử nhóm $[u_m; u_{m+1})$ chứa tứ phân vị thứ nhất.

n_m là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất.

$C = n_1 + n_2 + \cdots + n_{m-1}$

Khi đó:

$$Q_1 = u_m + \frac{\frac{n}{4} - C}{n_m} \times (u_{m+1} - u_m)$$

$$\text{Tứ phân vị thứ nhất} = \text{Đầu mút trái của nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất} + \frac{\frac{\text{Cỡ mẫu}}{4} - \text{Tổng tần số của các nhóm trước nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất}}{\text{Tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất}} \times \text{Độ dài nhóm}$$

▪ Để tìm **tứ phân vị thứ ba** của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu Q_3, ta thực hiện như sau:

Giả sử nhóm $[u_j; u_{j+1})$ chứa tứ phân vị thứ ba.

n_j là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ ba.

$C = n_1 + n_2 + \cdots + n_{j-1}$

$$Q_3 = u_j + \frac{\frac{3n}{4} - C}{n_j} \times (u_{j+1} - u_j)$$

$$\text{Tứ phân vị thứ ba} = \text{Đầu mút trái của nhóm chứa tứ phân vị thứ ba} + \frac{\frac{3\times\text{Cỡ mẫu}}{4} - \text{Tổng tần số của các nhóm trước nhóm chứa tứ phân vị thứ ba}}{\text{Tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ ba}} \times \text{Độ dài nhóm}$$

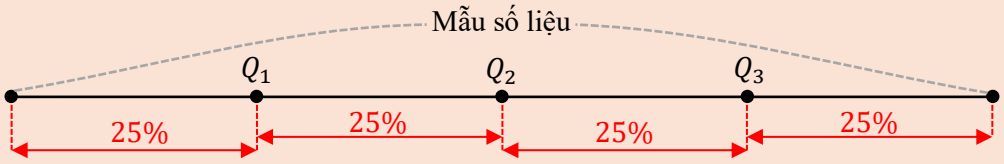
Chú ý: Nếu tứ phân vị thứ k là $\frac{1}{2}(x_m + x_{m+1})$, trong đó x_m và x_{m+1} thuộc hai nhóm liên tiếp, ví dụ như $x_m \in [u_{j-1}; u_j)$ và $x_{m+1} \in [u_j; u_{j+1})$ thì ta lấy $Q_k = u_j$.

▪ Công thức chung của cả 3 loại tứ phân vị là:

$$\text{Tứ phân vị thứ } (i) = \begin{matrix}\text{Đầu mút trái của nhóm}\\ \text{chứa tứ phân vị thứ } (i)\end{matrix} + \frac{\dfrac{i \times \text{Cỡ mẫu}}{4} - \begin{matrix}\text{Tổng tần số của các nhóm}\\ \text{trước nhóm chứa}\\ \text{tứ phân vị thứ } (i)\end{matrix}}{\begin{matrix}\text{Tần số của nhóm}\\ \text{chứa tứ phân vị}\\ \text{thứ } (i)\end{matrix}} \times \text{Độ dài nhóm}$$

Ý nghĩa của tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

▪ Ba điểm tứ phân vị chia mẫu số liệu đã sắp xếp theo thứ tự không giảm thành bốn phần đều nhau. Giống như với trung vị, nói chung không thể xác định chính xác các điểm tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm.



▪ Bộ ba tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho tứ phân vị của mẫu số liệu gốc và được sử dụng làm giá trị đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu.

▪ Tứ phân vị thứ nhất và thứ ba đo xu thế trung tâm của nửa dưới (các dữ liệu nhỏ hơn Q_2) và nửa trên (các dữ liệu lớn hơn Q_2) của mẫu số liệu.

Ví dụ

Tìm tứ phân vị của mẫu số liệu sau:

Giá trị	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)
Tần số	9	7	23	19	3

Giải

Ta có:

Giá trị	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)
Tần số	9	7	23	19	3
	$x_1 \to x_9$	$x_{10} \to x_{16}$	$x_{17} \to x_{39}$	$x_{40} \to x_{58}$	$x_{59} \to x_{61}$

Tứ phân vị:

$x_1 \longrightarrow x_{61}$

Từ x_1 đến x_{61} thì phần tử chính giữa được tìm bằng cách tính $\frac{1+61}{2} = 31$ (là số nguyên) ⇒ Phần tử chính giữa là x_{31}

$x_1 \longrightarrow x_{30}$ x_{31} $x_{32} \longrightarrow x_{61}$

Để tìm Q_1 và Q_3 ta tách mẫu dữ liệu gốc thành 2 phần trái và phải:
Mẫu dữ liệu gốc có một phần tử chính giữa là x_{31} thế nên:
- *Phần trái: từ x_1 đến x_{30} có phần tử chính giữa là x_{15} và x_{16}*
- *Phần phải: từ x_{32} đến x_{61} có phần tử chính giữa là x_{46} và x_{47}*

$$Q_1 = \frac{x_{15} + x_{16}}{2} = 10 + \frac{\frac{1 \times 61}{4} - (9)}{7} \times (15 - 10) \approx 14{,}464$$

$$Q_2 = x_{31} = 15 + \frac{\frac{2 \times 61}{4} - (9 + 7)}{23} \times (20 - 15) \approx 18{,}152$$

$$Q_3 = \frac{x_{46} + x_{47}}{2} = 20 + \frac{\frac{3 \times 61}{4} - (9 + 7 + 23)}{19} \times (25 - 20) \approx 21{,}776$$

Ví dụ

Tìm tứ phân vị của mẫu số liệu sau:

Giá trị	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)
Tần số	9	7	23	19	4

Giải

Ta có:

Giá trị	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)
Tần số	9	7	23	19	4
	$x_1 \to x_9$	$x_{10} \to x_{16}$	$x_{17} \to x_{39}$	$x_{40} \to x_{58}$	$x_{59} \to x_{62}$

Tứ phân vị:

$x_1 \longrightarrow x_{62}$

Từ x_1 đến x_{62} thì phần tử chính giữa được tìm bằng cách tính $\frac{1+62}{2} = 31.5$

(là số không nguyên*)* $\Rightarrow$ *Phần tử chính giữa là* x_{31} và x_{32}

$x_1 \longrightarrow x_{31}$ $\quad$ $x_{32} \longrightarrow x_{62}$

Để tìm Q_1 *và* Q_3 *ta tách mẫu dữ liệu gốc thành 2 phần trái và phải:*
Mẫu dữ liệu gốc có hai *phần tử chính giữa là* x_{31} và x_{32} *thế nên:*

- *Phần trái: từ* x_1 *đến* x_{31} *có phần tử chính giữa là* x_{16}
- *Phần phải: từ* x_{32} *đến* x_{62} *có phần tử chính giữa là* x_{47}

$$Q_1 = x_{16} = 10 + \frac{\frac{1 \times 62}{4} - (9)}{7} \times (15 - 10) \approx 14{,}643$$

$$Q_2 = \frac{x_{31} + x_{32}}{2} = 15 + \frac{\frac{2 \times 62}{4} - (9 + 7)}{23} \times (20 - 15) \approx 18{,}261$$

$$Q_3 = x_{47} = 20 + \frac{\frac{3 \times 62}{4} - (9 + 7 + 23)}{19} \times (25 - 20) \approx 21{,}974$$

Thầy Lê Trung Kiên

Ví dụ

Tìm tứ phân vị của mẫu số liệu sau:

Giá trị	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)
Tần số	1	4	12	0	4

Giải

Ta có:

Giá trị	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)
Tần số	1	4	12	0	4
	x_1	$x_2 \to x_5$	$x_6 \to x_{17}$		$x_{18} \to x_{21}$

Tứ phân vị:

$x_1 \longrightarrow x_{21}$

Từ x_1 đến x_{21} thì phần tử chính giữa được tìm bằng cách tính $\frac{1+21}{2} = 11$ (là số nguyên*) ⇒ Phần tử chính giữa là x_{11}*

$x_1 \longrightarrow x_{10}$ x_{11} $x_{12} \longrightarrow x_{21}$

Để tìm Q_1 và Q_3 ta tách mẫu dữ liệu gốc thành 2 phần trái và phải:
Mẫu dữ liệu gốc có một *phần tử chính giữa là x_{11} thế nên:*
- *Phần trái: từ x_1 đến x_{10} có phần tử chính giữa là x_5* và *x_6*
- *Phần phải: từ x_{12} đến x_{21} có phần tử chính giữa là x_{16}* và *x_{17}*

$$Q_1 = \frac{x_5 + x_6}{2} = 15$$

$$Q_2 = x_{11} = 15 + \frac{\frac{2 \times 21}{4} - (1+4)}{12} \times (20 - 15) \approx 17{,}292$$

$$Q_3 = \frac{x_{16} + x_{17}}{2} = 15 + \frac{\frac{3 \times 21}{4} - (1+4)}{12} \times (20 - 15) \approx 19{,}479$$

Thầy Lê Trung Kiên

Ví dụ

Tìm tứ phân vị của mẫu số liệu sau:

Giá trị	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)
Tần số	1	14	2	9	4

Giải

Ta có:

Giá trị	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)
Tần số	1	14	2	9	4
	x_1	$x_2 \to x_{15}$	$x_{16} \to x_{17}$	$x_{18} \to x_{26}$	$x_{27} \to x_{30}$

Tứ phân vị:

$x_1 \longrightarrow x_{30}$

Từ x_1 đến x_{30} thì phần tử chính giữa được tìm bằng cách tính $\frac{1+30}{2} = 15.5$

(là số không nguyên*)* $\Rightarrow$ *Phần tử chính giữa là* x_{15} và x_{16}

$x_1 \longrightarrow x_{15}$ $\quad$ $x_{16} \longrightarrow x_{30}$

Để tìm Q_1 và Q_3 ta tách mẫu dữ liệu gốc thành 2 phần trái và phải:
Mẫu dữ liệu gốc có hai *phần tử chính giữa là* x_{15} và x_{16} *thế nên:*
- *Phần trái: từ x_1 đến x_{15} có phần tử chính giữa là x_8*
- *Phần phải: từ x_{16} đến x_{30} có phần tử chính giữa là x_{23}*

$$Q_1 = x_8 = 10 + \frac{\frac{1 \times 30}{4} - (1)}{14} \times (15 - 10) \approx 12{,}321$$

$$Q_2 = \frac{x_{15} + x_{16}}{2} = 15$$

$$Q_3 = x_{23} = 20 + \frac{\frac{3 \times 30}{4} - (1 + 14 + 2)}{9} \times (25 - 20) \approx 23{,}056$$

Thầy Lê Trung Kiên

d) Mốt

▪ Nhóm chứa **mốt của mẫu số liệu ghép nhóm** là nhóm có tần số lớn nhất.

▪ Giả sử nhóm chứa mốt là $[u_m; u_{m+1})$, khi đó mốt của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu là M_0, được xác định bởi công thức:

$$M_0 = u_m + \frac{n_m - n_{m-1}}{(n_m - n_{m-1}) + (n_m - n_{m+1})} \times (u_{m+1} - u_m)$$

$$\text{Mốt} = \begin{matrix}\text{Đầu mút trái}\\ \text{của nhóm}\\ \text{có tần số}\\ \text{lớn nhất}\end{matrix} + \frac{\begin{matrix}\text{Tần số}\\ \text{lớn nhất}\end{matrix} - \begin{matrix}\text{Tần số}\\ \text{ngay phía trước}\\ \text{tần số lớn nhất}\end{matrix}}{\left(\begin{matrix}\text{Tần số}\\ \text{lớn nhất}\end{matrix} - \begin{matrix}\text{Tần số}\\ \text{ngay phía trước}\\ \text{tần số lớn nhất}\end{matrix}\right) + \left(\begin{matrix}\text{Tần số}\\ \text{lớn nhất}\end{matrix} - \begin{matrix}\text{Tần số}\\ \text{ngay phía sau}\\ \text{tần số lớn nhất}\end{matrix}\right)} \times \text{Độ dài nhóm}$$

Chú ý: Nếu không có nhóm kề trước của nhóm chứa mốt thì $n_{m-1} = 0$. Nếu không có nhóm kề sau của nhóm chứa mốt thì $n_{m+1} = 0$.

Ý nghĩa của mốt của mẫu số liệu ghép nhóm

▪ Mốt của mẫu số liệu không ghép nhóm là giá trị có khả năng xuất hiện cao nhất khi lấy mẫu. Mốt của mẫu số liệu sau khi ghép nhóm M_0 xấp xỉ với mốt của mẫu số liệu không ghép nhóm. Các giá trị nằm xung quanh M_0 thường có khả năng xuất hiện cao hơn các giá trị khác.

▪ Một mẫu số liệu ghép nhóm có thể có nhiều nhóm chứa mốt và nhiều mốt.

Ví dụ

Tìm mốt của mẫu số liệu sau:

Giá trị	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)
Tần số	9	7	23	19	3

Giải

Nhóm [15;20) có tần số lớn nhất là 23.

$$M_0 = 15 + \frac{23 - 7}{(23 - 7) + (23 - 19)} \times (20 - 15) = 19$$

Ví dụ

Tìm mốt của mẫu số liệu sau:

Giá trị	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)
Tần số	9	19	3	19	3

Giải

Nhóm [10;15) có tần số lớn nhất là 19.

$$M_0 = 10 + \frac{19 - 9}{(19 - 9) + (19 - 3)} \times (15 - 10) = \frac{155}{13} \approx 11{,}923$$

Nhóm [20;25) có tần số lớn nhất là 19.

$$M_0 = 20 + \frac{19 - 3}{(19 - 3) + (19 - 3)} \times (25 - 20) = \frac{45}{2} = 22{,}5$$

Vậy có 2 giá trị mốt là $M_0 = 11{,}923$ và $M_0 = 22{,}5$.

258. Các số đặc trưng cho mức độ phân tán

▪ Khoảng biến thiên
▪ Khoảng tứ phân vị
▪ Phương sai và độ lệch chuẩn

a) Khoảng biến thiên

Khoảng biến thiên, kí hiệu R, của mẫu số liệu ghép nhóm là hiệu số giữa đầu mút phải của nhóm cuối cùng và đầu mút trái của nhóm đầu tiên có chứa dữ liệu của mẫu số liệu.
Chú ý: Xét mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở bảng sau:

Nhóm	$[u_1;u_2)$	$[u_2;u_3)$		$[u_k;u_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	...	n_k

Nếu $n_1$và n_k cùng khác 0 thì khoảng biến thiên là: $\boxed{R = u_{k+1} - u_1}$

Ý nghĩa của khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm

▪ Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc và có thể dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu.
▪ Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm luôn lớn hơn hoặc bằng khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc.
▪ Khoảng biến thiên $R = u_{k+1} - u_1$ chưa phản ánh được đầy đủ mức độ phân tán của phần lớn các số liệu. Hơn nữa, giá trị của R thường tăng vọt khi xuất hiện giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu. Do đó, để phản ánh mức độ phân tán của số liệu, người ta còn dùng các số đặc trưng khác.

Ví dụ

Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu sau:

Giá trị	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)
Tần số	9	19	3	19	3

Giải

Nhóm đầu tiên có dữ liệu là [5;10), mút trái của nhóm là: 5.
Nhóm cuối cùng có dữ liệu là [25;30), mút phải của nhóm là: 30.
Khoảng biến thiên: $R = 30 - 5 = 25$.

Ví dụ

Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu sau:

Giá trị	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)
Tần số	0	19	3	19	3

Giải

Nhóm đầu tiên có dữ liệu là [10;15), mút trái của nhóm là: 10.
Nhóm cuối cùng có dữ liệu là [25;30), mút phải của nhóm là: 30.
Khoảng biến thiên: $R = 30 - 10 = 20$.

Ví dụ

Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu sau:

Giá trị	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)
Tần số	9	19	3	19	0

Giải

Nhóm đầu tiên có dữ liệu là [5;10), mút trái của nhóm là: 5.
Nhóm cuối cùng có dữ liệu là [20;25), mút phải của nhóm là: 25.
Khoảng biến thiên: $R = 25 - 5 = 20$.

Ví dụ

Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu sau:

Giá trị	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)
Tần số	0	19	3	19	0

Giải

Nhóm đầu tiên có dữ liệu là [10;15), mút trái của nhóm là: 10.
Nhóm cuối cùng có dữ liệu là [20;25), mút phải của nhóm là: 25.
Khoảng biến thiên: $R = 25 - 10 = 15$.

Thầy Lê Trung Kiên

b) Khoảng tứ phân vị

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu chép nhóm cũng được xác định dựa trên tứ phân vị thứ nhất và tứ phân vị thứ ba như đối với mẫu số liệu không ghép nhóm.

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu Δ_Q là hiệu giữa tứ phân vị thứ ba Q_3 và tứ phân vị thứ nhất Q_1, của mẫu số liệu ghép nhóm đó, tức là: $\boxed{\Delta_Q = Q_3 - Q_1}$

Ý nghĩa của khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

▪ Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc và có thể dùng để đo mức độ phân tán của nửa giữa của mẫu số liệu (tập hợp gồm 50% số liệu nằm chính giữa mẫu số liệu).

▪ Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm càng nhỏ thì dữ liệu càng tập trung xung quanh trung vị.

▪ Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm không bị ảnh hưởng nhiều bởi các giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu.

▪ Khoảng tứ phân vị được dùng để xác định giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu.

Ví dụ

Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu sau:

Giá trị	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)
Tần số	9	7	23	19	3

Giải

Ta có:

Giá trị	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)
Tần số	9	7	23	19	3
	$x_1 \to x_9$	$x_{10} \to x_{16}$	$x_{17} \to x_{39}$	$x_{40} \to x_{58}$	$x_{59} \to x_{61}$

Tìm Q_1 và Q_3:

$x_1 \longrightarrow x_{61}$

Từ x_1 đến x_{61} thì phần tử chính giữa được tìm bằng cách tính $\frac{1+61}{2} = 31$ (là số nguyên*) ⇒ Phần tử chính giữa là x_{31}*

$x_1 \longrightarrow x_{30}$ x_{31} $x_{32} \longrightarrow x_{61}$

Để tìm Q_1 và Q_3 ta tách mẫu dữ liệu gốc thành 2 phần trái và phải:
Mẫu dữ liệu gốc có một *phần tử chính giữa là x_{31} thế nên:*
- *Phần trái: từ x_1 đến x_{30} có phần tử chính giữa là x_{15}* và *x_{16}*
- *Phần phải: từ x_{32} đến x_{61} có phần tử chính giữa là x_{46}* và *x_{47}*

$$Q_1 = \frac{x_{15} + x_{16}}{2} = 10 + \frac{\frac{1 \times 61}{4} - (9)}{7} \times (15 - 10) \approx 14{,}464$$

$$Q_3 = \frac{x_{46} + x_{47}}{2} = 20 + \frac{\frac{3 \times 61}{4} - (9 + 7 + 23)}{19} \times (25 - 20) \approx 21{,}776$$

Khoảng tứ phân vị: $\Delta Q = Q_3 - Q_1 = 21{,}776 - 14{,}464 = 7{,}312$.

c) Phương sai và độ lệch chuẩn

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu là S^2 được tính theo công thức sau:

$$\boxed{S^2 = \frac{n_1c_1^2 + n_2c_2^2 + \cdots + n_kc_k^2}{n} - \bar{x}^2}$$

hay

$$\boxed{\text{Phương sai} = \frac{\sum \text{Tần số} \times (\text{Giá trị đại diện})^2}{\text{Cỡ mẫu}} - \left(\text{Số trung bình}\right)^2}$$

Ngoài ra phương sai còn 1 công thức khác tính như sau:

$$\boxed{S^2 = \frac{n_1(c_1 - \bar{x})^2 + n_2(c_2 - \bar{x})^2 + \cdots + n_k(c_k - \bar{x})^2}{n}}$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu S, là căn bậc hai số học của phương sai, nghĩa là;

$$\boxed{S = \sqrt{S^2}}$$

hay

$$\boxed{\text{Độ lệch chuẩn} = \sqrt{\text{Phương sai}}}$$

Ý nghĩa của phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm

▪ Phương sai (độ lệch chuẩn) của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho phương sai (độ lệch chuẩn) của mẫu số liệu gốc. Chúng được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm xung quanh số trung bình của mẫu số liệu.

▪ Phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn thì dữ liệu càng phân tán.

▪ Độ lệch chuẩn có cùng đơn vị với đơn vị của mẫu số liệu.

Ví dụ

Tìm phương sai và độ lệch chuẩn mẫu số liệu sau:

Giá trị	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)
Tần số	9	7	23	19	3

Giải

Giá trị đại diện	7.5	12.5	17.5	22.5	27.5
Giá trị	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)
Tần số	9	7	23	19	3

Cỡ mẫu: $n = 9 + 7 + 23 + 19 + 3 = 61$

Số trung bình:

$$\bar{x} = \frac{7{,}5 \times 9 + 12{,}5 \times 7 + 17{,}5 \times 23 + 22{,}5 \times 19 + 27{,}5 \times 3}{61} = \frac{35}{2} = 17{,}5$$

Phương sai:

$$S^2 = \frac{(7{,}5)^2 \times 9 + (12{,}5)^2 \times 7 + (17{,}5)^2 \times 23 + (22{,}5)^2 \times 19 + (27{,}5)^2 \times 3}{61} - \left(\frac{35}{2}\right)^2 = \frac{1850}{61}$$
$$\approx 30{,}3279$$

Độ lệch chuẩn:

$$S = \sqrt{S^2} = 5{,}507074436800274 \approx 5{,}5071$$

259. Giá trị ngoại lệ

Giá trị x trong mẫu số liệu là giá trị ngoại lệ nếu $x > Q_3 + 1{,}5\Delta_Q$ hoặc $x < Q_1 - 1{,}5\Delta_Q$.

Thầy Lê Trung Kiên

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

TÍNH ĐƠN ĐIỆU

260. Các dấu hiệu xét tính đơn điệu của hàm số

Tính đơn điệu của hàm số *tức là* **tính tăng giảm của hàm số**
Các dấu hiệu xét tính đơn điệu của hàm số $f(x)$:

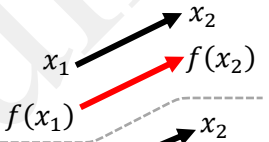
- Dựa vào đồ thị hàm số $f(x)$ (dấu hiệu lên, xuống hoặc đi ngang của đồ thị từ trái qua phải)
- Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ (tính âm, dương của giá trị $f'(x)$)
- Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(x)$(sự lên, xuống, đi ngang của $f(x)$; hoặc tính âm, dương của $f'(x)$)
- Dựa vào công thức $f'(x)$ (xét dấu $f'(x)$ → dựa vào sự âm, dương của $f'(x)$)
- Sử dụng máy tính bỏ túi tính đạo hàm tại các điểm rời rạc (chỉ dùng khi làm trắc nghiệm)

Lưu ý: đối với 1 đồ thị, phần nổi lên bên trên Ox có giá trị dương, phần chìm xuống dưới Ox có giá trị âm.

a) Tính đơn điệu dựa vào so sánh

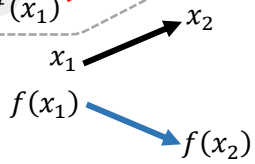
Hàm số f được gọi là **đồng biến** trên K nếu:

$$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



Hàm số f được gọi là **nghịch biến** trên K nếu:

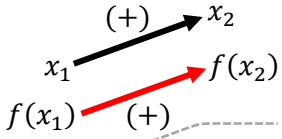
$$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



b) Tính đơn điệu dựa vào tỷ số

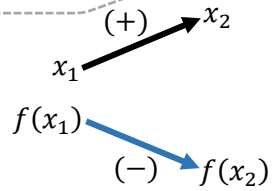
Hàm số f được gọi là **đồng biến** trên K nếu:

$$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$



Hàm số f được gọi là **nghịch biến** trên K nếu:

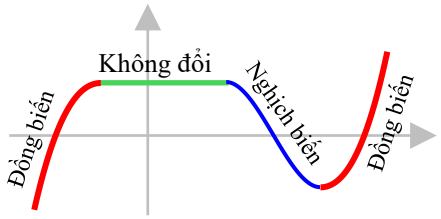
$$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$$



Thầy Lê Trung Kiên

c) Tính đơn điệu dựa vào đồ thị hàm số

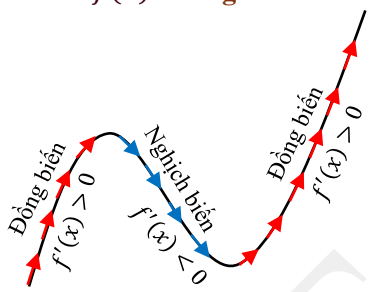
Về mặt đồ thị, hàm số đồng biến trên khoảng nào thì đồ thị hàm số đi lên từ trái qua phải trên khoảng đó, hàm số nghịch biến trên khoảng nào thì đồ thị hàm số đi xuống từ trái qua phải trên khoảng đó. Hàm số không đổi trên khoảng nào thì đồ thị hàm số đi ngang từ trái qua phải trên khoảng đó

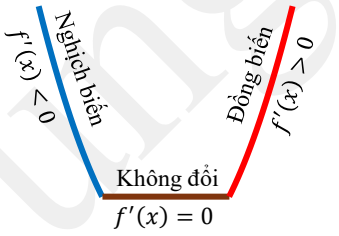


d) Tính đơn điệu dựa vào dấu đạo hàm

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K.

- Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì $f(x)$ **đồng biến** trên khoảng K.
- Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì $f(x)$ **nghịch biến** trên khoảng K.
- Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì $f(x)$ **không đổi** trên khoảng K.





e) Tính đơn điệu dựa vào bảng biến thiên

Trong bảng biến thiên

- Tại hàng y:
  - – Khoảng nào là mũi tên đi lên là hàm số đồng biến.
  - – Khoảng nào là mũi tên đi xuống thì hàm số nghịch biến.
  - – Khoảng nào mũi tên đi ngang là hàm số không đổi.
- Cũng có thể dựa vào dấu của y' của bảng biến thiên để biết hàm số đồng biến hay nghịch biến:
  - – Khoảng nào $y' > 0$ thì hàm số đồng biến
  - – Khoảng nào $y' < 0$ thì hàm số nghịch biến
  - – Khoảng nào $y' = 0$ thì hàm số không đổi.

x	$-\infty$		1		2		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	0	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	Đồng biến ↗	-5	Nghịch biến ↘	-10	Đồng biến ↗	1	Không đổi →	1	Đồng biến ↗	10

Thầy Lê Trung Kiên

261. Một số nhận xét

▪ Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K được gọi chung là đơn điệu trên K.

▪ Nếu đề bài hỏi về khoảng đơn điệu của hàm số mà có nhiều khoảng đơn điệu thì các khoảng được kết luận phân cách nhau bởi từ "và", hoặc "," (không sử dụng ký hiệu hợp "∪" và ký hiệu "\"). Các khoảng là các tập hợp có dạng $(a;+\infty)$; $(-\infty;a)$; $(a;b)$, $(-\infty;+\infty)$.

▪ Ở giữa khoảng đồng biến, hoặc nghịch biến của hàm số vẫn có thể có điểm mà tại đó $y'=0$.

Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$. Khi đó ta có:

▪ Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$ thì $f'(x)\geq 0, \forall x\in(a;b)$.

▪ Nếu hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ thì $f'(x)\leq 0, \forall x\in(a;b)$.

Nếu thay đổi khoảng $(a;b)$ bằng một đoạn hoặc nửa khoảng thì phải bổ sung thêm giả thiết hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn hoặc nửa khoảng đó.

Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$. Khi đó ta có:

▪ $f(x)$ đồng biến trên $(a;b)\Leftrightarrow f'(x)\geq 0, \forall x\in(a;b)$ và $f'(x)=0$ tại hữu hạn điểm thuộc khoảng $(a;b)$.

▪ $f(x)$ nghịch biến trên $(a;b)\Leftrightarrow f'(x)\leq 0, \forall x\in(a;b)$ và $f'(x)=0$ tại hữu hạn điểm thuộc khoảng $(a;b)$.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên A. Khi đó ta có:

▪ $y=f(x)$ đồng biến trên $A\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\text{ xác định trên }A\\ f'(x)\geq 0, \forall x\in A\\ f'(x)=0\text{ tại hữu hạn điểm (hoặc tại các điểm rời rạc } \in A)\end{cases}$

▪ $y=f(x)$ nghịch biến trên $A\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\text{ xác định trên }A\\ f'(x)\leq 0, \forall x\in A\\ f'(x)=0\text{ tại hữu hạn điểm (hoặc tại các điểm rời rạc } \in A)\end{cases}$

(Với A là một tập con tùy ý của $\mathbb{R}$)

• Nếu hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cùng đồng biến (nghịch biến) trên K thì hàm số $f(x)+g(x)$ cũng đồng biến (nghịch biến) trên K. Tính chất này có thể không đúng đối với hiệu $f(x)-g(x)$. Nói một cách đơn giản:

"Tổng của các hàm đồng biến là hàm đồng biến"

"Tổng của các hàm nghịch biến là hàm nghịch biến".

• Nếu hàm số $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số dương và cùng đồng biến (nghịch biến) trên K thì hàm số $f(x)\cdot g(x)$ cũng đồng biến (nghịch biến) trên K. Tính chất này có thể không đúng khi các hàm số $f(x)$, $g(x)$ không là các hàm số dương trên K. Nói một cách đơn giản:

"Tích của các hàm dương và đồng biến là hàm đồng biến"

"Tích của các hàm dương và nghịch biến là hàm nghịch biến"

▪ Hàm đa thức cụ thể $y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ (bậc của đa thức khác 0)

$y'\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow y$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$y'\leq 0, \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow y$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

▪ Hàm đa thức bậc chẵn không bao giờ luôn đồng biến hay luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$, hàm đa thức bậc chẵn **luôn** có khoảng đồng biến và nghịch biến trên toàn bộ $\mathbb{R}$.

▪ Các hàm số đa thức bậc lẻ **có thể** chỉ có một tính biến thiên trên $\mathbb{R}$.

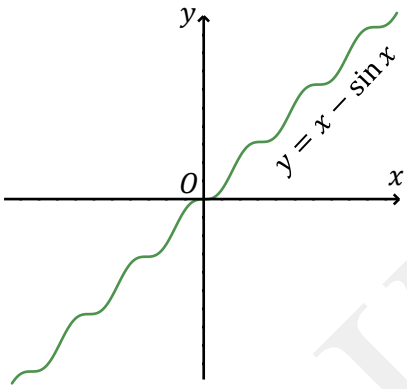
▪ Hàm số $y=ax+b$ đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow a>0$, nghịch biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow a<0$.

▪ Hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ không bao giờ luôn đồng biến hay luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ (vì nó có một điểm không xác định trên $\mathbb{R}$).

▪ Hàm phân thức mà mẫu số bằng 0 có nghiệm, thì **không bao giờ** đồng biến hoặc nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

▪ Một hàm số $f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) trên một tập K thì vẫn có thể có $f'(x) = 0$ tại vô số điểm thuộc K (nhưng các điểm đó phải rời rạc nhau).

VD: hàm số $f(x) = x - \sin x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, $f'(x) = 1 - \cos x$ bằng 0 tại vô số điểm $\in \mathbb{R}$.



Khi giải phương trình, hệ phương trình, hoặc tìm điều kiện của tham số, hoặc so sánh giá trị hàm số, mà cần dùng đến tính đơn điệu, ta thường sử dụng những nhận xét sau:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập A, và u, v là các biểu thức bất kì có giá trị thuộc vào tập A.

▪ $f(x)$ luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) trên A thì ta có: $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$

▪ $f(x)$ đồng biến trên A thì ta có: $f(u) \geq f(v) \Leftrightarrow u \geq v$

▪ $f(x)$ nghịch biến trên A thì ta có: $f(u) \geq f(v) \Leftrightarrow u \leq v$

▪ Một số điều kiện của biểu thức bậc hai $ax^2 + bx + c (a \neq 0)$:

$ax^2 + bx + c \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

Nếu có dấu "=" — Thì ở đây có dấu "="

$ax^2 + bx + c \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

Nếu có dấu "=" — Thì ở đây có dấu "="

Định lý Viét: cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có 2 nghiệm là x_1 và x_2 khi đó: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

262. Xét dấu biểu thức

Bài toán và phương pháp giải : Các bước xét dấu của biểu thức $f(x)$

Bước 1: Tìm tập xác định của $f(x)$.

Bước 2: Giải $f(x) = 0$ (vì số 0 là ranh giới giữa âm và dương)

Bước 3: Lập 1 bảng xét dấu hoặc trục xét dấu cho $f(x)$ như sau:

x	Điền các giá trị x của Bước 1 và Bước 2 theo thứ tự tăng dần
Dấu $f(x)$	Vị trí không xác định đánh dấu || Vị trí cụ thể là nghiệm của $f(x) = 0$ thì ghi 0. Điền dấu âm, dương giữa mỗi khoảng (có thể sử dụng máy tính bỏ túi tính giá trị $f(x)$ tại 1 điểm tùy ý nằm giữa mỗi khoảng để xác định dấu của khoảng đó)

Lưu ý: Khi xét dấu của một đa thức bậc n thì có 1 trường hợp đặc biệt như sau: nếu đa thức bậc n có n nghiệm phân biệt thì: dấu của $f(x)$ ở khoảng ngoài cùng bên phải cùng dấu với dấu hệ số bậc cao nhất, và biểu thức đan dấu.

Một số nhận xét

Cho đa thức $f(x) = k(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2}\ldots(x-x_k)^{n_k}$ (với $x_1 \neq x_2 \neq \cdots \neq x_k$ và n_i là các số nguyên). Biết $x = x_i$ là nghiệm của phương trình.

▪ Nếu n_i là số chẵn thì x_i được gọi là nghiệm bội chẵn, và qua $x = x_i$ thì $f(x)$ không có sự đổi dấu.

▪ Nếu n_i là số lẻ thì x_i được gọi là nghiệm bội lẻ, và qua $x = x_i$ thì $f(x)$ có sự đổi dấu.

Phương trình bậc 2 nếu :

▪ Có 1 nghiệm kép thì nghiệm đó là nghiệm bội 2.

▪ Có 2 nghiệm phân biệt thì mỗi nghiệm là 1 nghiệm bội 1.

Đa thức bậc n nếu có đủ n nghiệm phân biệt thì:

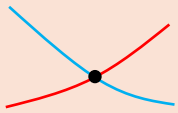
▪ Đan dấu.

▪ Dấu của miền bên phải ngoài cùng: cùng dấu với hệ số bậc lớn nhất.

▪ Nếu một phương trình ở dạng tích hoặc thương của các đa thức và x_0 là 1 nghiệm của phương trình và là nghiệm của nhiều nhân tử thì bội của x_0 đối với toàn bộ phương trình là tổng bội của từng phần riêng lẻ có nghiệm là x_0. Khi đó, nếu nghiệm là bội chẵn thì biểu thức không đổi dấu khi đi qua x_0, nếu nghiệm là bội lẻ thì biểu thức đổi dấu khi đi qua x_0.

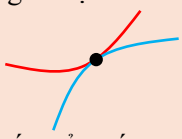
Cho $y = f(x) - g(x)$. Biết $f(x) - g(x) = 0$ có nghiệm là $x = x_0$ và trên đồ thị hàm số:

▪ Nếu $y = f(x)$ cắt xuyên qua $y = g(x)$ tại điểm có hoành độ $x = x_0$ thì khi đi qua x_0 biểu thức $f(x) - g(x)$ có sự đổi dấu.



Cắt xuyên qua

▪ Nếu $y = f(x)$ cắt kiểu tiếp xúc với $y = g(x)$ tại điểm có hoành độ $x = x_0$ thì khi đi qua x_0 biểu thức $f(x) - g(x)$ không có sự đổi dấu.



Cắt kiểu tiếp xúc

263. Tìm điều kiện tham số từ biểu thức chứa x và m

Bài toán và phương pháp giải : Tìm điều kiện tham số m từ biểu thức chứa x và m

TH1: Nếu biểu thức có dạng $ax^2+bx+c \geq 0$ (hoặc $ax^2+bx+c > 0$ hoặc $ax^2+bx+c \leq 0$ hoặc $ax^2+bx+c \leq 0$)

TH1A: Nếu cần đúng $\forall x \in \mathbb{R}$ thì sử dụng điều kiện của a và Δ. (nếu a có thể bằng 0 thì cần xét thêm trường hợp $a = 0$ trước khi sử dụng điều kiện cho biểu thức bậc 2)

$$a \neq 0: ax^2+bx+c > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \quad ; \quad a \neq 0: ax^2+bx+c \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

$$a \neq 0: ax^2+bx+c < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \quad ; \quad a \neq 0: ax^2+bx+c \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

TH1B: Nếu cần đúng $\forall x \in K$ (mà $K \neq \mathbb{R}$)

Hướng 1: Nếu m đồng bậc ở tất cả các vị trí thì cô lập tham số (tách riêng m và x ra 2 bên khác nhau) → Khi thu gọn được về dạng $f(x)\ldots g(x)h(m)$ (... chứa 1 dấu so sánh), nếu $f(x) = 0$ và $g(x) = 0$ có nghiệm chung thì thực hiện phân tích thành nhân tử rồi sau đó chuyển về đặt phân tử chung), nếu $f(x) = 0$ và $g(x) = 0$ không có nghiệm chung thì tiếp tục tiến hành cô lập tham số.

Hướng 2: Nếu m không đồng bậc thì tính Δ và giải phương trình bậc hai.

TH2: Nếu không là biểu thức bậc 2 thì thường sử dụng kỹ thuật:

Cô lập tham số.

Phân tích thành nhân tử.

Một số dạng đặc biệt khác

264. Xét tính đơn điệu biết công thức hàm số

Bài toán và phương pháp giải: Xét tính đơn điệu của hàm số cho bằng công thức cụ thể

Các câu hỏi khác như: Tìm khoảng đồng biến. Tìm khoảng nghịch biến. Xét chiều biến thiên ,…
Cách làm:
Bước 1: Tìm tập xác định.
Bước 2: Tính $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x)=0$ để tìm các điểm x_i sao cho $f'(x_i)=0$, hoặc các điểm mà tại đó đạo hàm không xác định nhưng hàm số vẫn xác định.
Bước 3:
Cách 1: Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ (dùng khi làm tự luận).
Cách 2: Lập bảng xét dấu của $f'(x)$ (dùng khi làm trắc nghiệm hoặc tự luận).
Cách 3: Lập trục xét dấu nhanh của $f'(x)$ (dùng khi làm trắc nghiệm).
(Sử dụng điều kiện về dấu của $f'(x)$; hoặc về tính lên, xuống của hàm số $f(x)$ để kết luận về tính đơn điệu của hàm số; khi kết luận ta thường kết luận về khoảng đơn điệu của hàm số)

265. Tính đơn điệu hàm bậc 3

Bài toán và phương pháp giải : Tìm điều kiện hàm bậc ba đơn điệu trên một tập

Tìm điều kiện của tham số để hàm số có dạng bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ **đồng biến** trên $\mathbb{R}$.
Bước 1: Tính $y'=3ax^2+2bx+c$
Bước 2: Nếu a có thể bằng 0 thì xét 2 trường hợp, còn nếu a chắc chắn khác 0 thì chỉ xét 1 trường hợp.

Nếu a có thể bằng 0	**Nếu a chắc chắn khác 0**
TH1: Xét $a=0\Rightarrow$ tham số cụ thể. Thay tham số vào y' và xét dấu đạo hàm.	
TH2: Xét $a\neq 0$ ta giải điều kiện: $y'\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow 3ax^2+2bx+c\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}3a>0\\ \Delta'_{y'}=b^2-3ac\leq 0\end{cases}$	Xét $a\neq 0$ ta giải điều kiện: $y'\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow 3ax^2+2bx+c\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}3a>0\\ \Delta'_{y'}=b^2-3ac\leq 0\end{cases}$

Bước 3: Kết luận.

Ta có một số kết quả tính nhanh như sau:

$$\text{Hàm bậc 3 đồng biến trên } \mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta'_{y'\ \text{hàm bậc 3}}\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ b^2-3ac\leq 0\end{cases}$$

$$\text{Hàm bậc 3 nghịch biến trên } \mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta'_{y'\ \text{hàm bậc 3}}\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ b^2-3ac\leq 0\end{cases}$$

(Nếu a có thể bằng 0 thì cần xét thêm trường hợp $a=0$, sau đó mới dùng công thức tính nhanh)

266. Tính đơn điệu hàm bậc nhất / bậc nhất

Bài toán và phương pháp giải : Hàm phân thức bậc nhất chia bậc nhất đơn điệu

Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

Mẫu số $= 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{d}{c}$

$y' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2} \Rightarrow$ Tử số của $y' = ad - bc$

▪ Hàm số đồng biến trên từng miền xác định $\Leftrightarrow$ Tử số của $y' > 0$

▪ Hàm số nghịch biến trên từng miền xác định $\Leftrightarrow$ Tử số của $y' < 0$

▪ Hàm số đồng biến trên một tập $A \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{d}{c} \notin A \\ \text{Tử số của } y' > 0 \end{cases}$

▪ Hàm số nghịch biến trên một tập $A \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{d}{c} \notin A \\ \text{Tử số của } y' < 0 \end{cases}$

267. Tìm điều kiện hàm số đơn điệu trên 1 tập (tổng quát)

Bài toán và phương pháp giải : tìm tham số để hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trên tập A

Bước 1: Tìm điều kiện của tham số để $f(x)$ xác định trên A (nếu cần).

Bước 2: Tìm $f'(x)$.

Bước 3: Suy ra điều kiện về dấu của $f'(x)$

▪ Nếu đề yêu cầu hàm số đồng biến trên $A \Rightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in A$ (nếu không có giá trị nào của tham số m mà khi thay vào $f'(x)$ làm cho $f'(x)$ trở thành hàm 0)

▪ Nếu đề yêu cầu hàm số đồng biến trên $A \Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \in A$ (nếu có giá trị của tham số m mà khi thay vào $f'(x)$ làm cho $f'(x)$ trở thành hàm 0)

▪ Nếu đề yêu cầu hàm số nghịch biến trên $A \Rightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in A$ (nếu không có giá trị nào của tham số m mà khi thay vào $f'(x)$ làm cho $f'(x)$ trở thành hàm 0)

▪ Nếu đề yêu cầu hàm số nghịch biến trên $A \Rightarrow f'(x) < 0, \forall x \in A$ (nếu có giá trị của tham số m mà khi thay vào $f'(x)$ làm cho $f'(x)$ trở thành hàm 0)

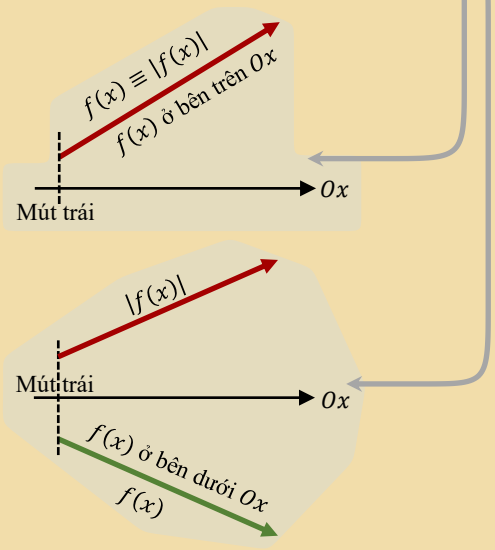
Bước 4: Tìm điều kiện của tham số từ biểu thức ở bước 3.

268. Tìm tham số để hàm |f(x)| đơn điệu

Bài toán và phương pháp giải : Tìm tham số để hàm số |f(x)| đơn điệu trên tập K

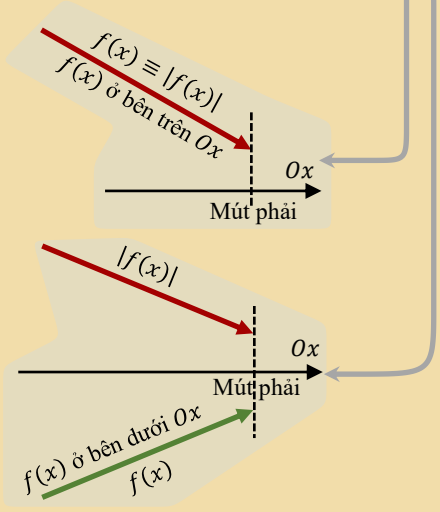
Hàm số $y=|f(x)|$ đồng biến trên K

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x) \text{ đồng biến trên } K\\ f(\text{mút trái})\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}f(x) \text{ nghịch biến trên } K\\ f(\text{mút trái})\leq 0\end{cases}\end{array}\right.$$



Hàm số $y=|f(x)|$ nghịch biến trên K

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x) \text{ nghịch biến trên } K\\ f(\text{mút phải})\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}f(x) \text{ đồng biến trên } K\\ f(\text{mút phải})\leq 0\end{cases}\end{array}\right.$$



Thầy Lê

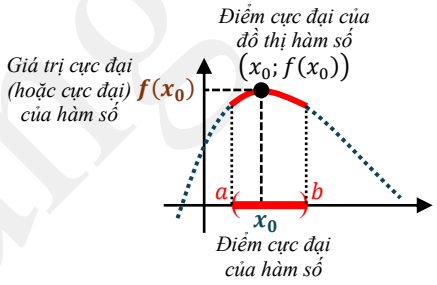
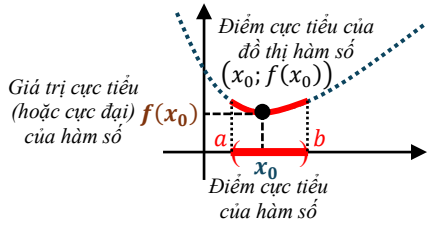
CỰC TRỊ HÀM SỐ

269. Thuật ngữ

• Điểm cực trị của hàm số: là x
• Giá trị cực trị: là y
• Cực trị của hàm số (hoặc cực trị): là y
• Điểm cực trị của đồ thị hàm số: là $(x;y)$
• Hàm số đạt cực trị tại $x = x_{\text{cực trị}}$

270. Định nghĩa cực trị

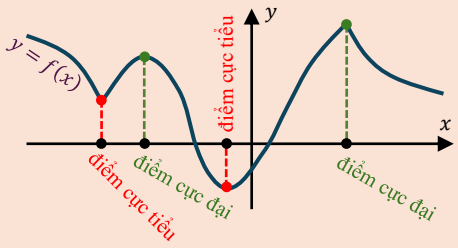
Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên tập $D (D \subset \mathbb{R})$ và $x_0 \in D$.

<table>
<tr>
<td>a) x_0 được gọi là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$ (hay điểm cực đại) nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 sao cho $(a;b) \subset D$ và $f(x) < f(x_0), \forall x \in (a;b) \backslash \{x_0\}$.
Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số $f(x)$ (hay cực đại của hàm số hay cực đại)</td>
<td> 
</td>
</tr>
<tr>
<td>b) x_0 được gọi là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$ (hay điểm cực tiểu) nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 sao cho $(a;b) \subset D$ và $f(x) > f(x_0), \forall x \in (a;b) \backslash \{x_0\}$.
Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số $f(x)$ (hay cực tiểu của hàm số hay cực tiểu)</td>
<td> 
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">c) Giá trị cực đại $y_{\text{cực đại}}$ và giá trị cực tiểu $y_{\text{cực tiểu}}$ được gọi chung là cực trị (hay cực trị của hàm số)
Điểm cực đại $x_{\text{cực đại}}$ và điểm cực tiểu $x_{\text{cực tiểu}}$ của hàm số được gọi chung là điểm cực trị (hay điểm cực trị của hàm số)</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">d) Điểm $(x_{\text{cực tiểu}}; y_{\text{cực tiểu}})$ được gọi là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.
Điểm $(x_{\text{cực đại}}; y_{\text{cực đại}})$ được gọi là điểm cực đại của đồ thị hàm số.
Các điểm $(x_{\text{cực tiểu}}; y_{\text{cực tiểu}})$ và $(x_{\text{cực đại}}; y_{\text{cực đại}})$ được gọi chung là điểm cực trị của đồ thị hàm số.</td>
</tr>
</table>

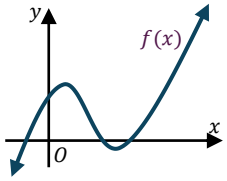
Thầy Lê Trung

Nhận xét

▪ **Trên đồ thị**, các điểm cực đại giống với các điểm ở đỉnh núi (lồi lên), còn các điểm cực tiểu nằm ở thung lũng (đáy lõm xuống).

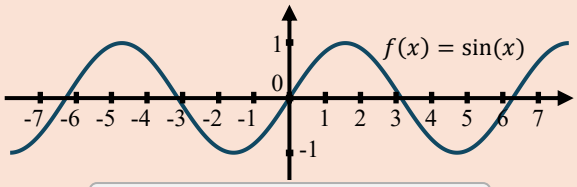


▪ Giá trị cực đại $y_{\text{cực đại}}$ (hoặc giá trị cực tiểu $y_{\text{cực tiểu}}$) của hàm số nói chung không phải là giá trị lớn nhất (hoặc giá trị nhỏ nhất) của hàm số, mà chỉ là giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) của hàm số trên một khoảng $(a;b)$ nào đó chứa điểm x_0.



Hàm số này không có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên toàn bộ tập xác định vì nó mở rộng mãi về âm vô cực và dương vô cực.

▪ Hàm số f có thể đạt cực đại hoặc cực tiểu tại nhiều điểm trên tập hợp cho trước.
▪ Hàm số cũng có thể không có cực trị trên một tập hợp số thực cho trước.



Hàm số $y = \sin x$ đạt cực đại tại vô số điểm thỏa mãn $\sin x = 1$ và đạt cực tiểu tại vô số điểm thỏa mãn $\sin x = -1$.

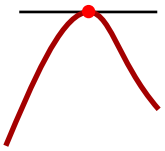
▪ Khi kết luận về cực trị của một hàm số ta thường sử dụng cấu trúc:

"Hàm số đạt cực trị tại $x =$?, giá trị cực trị $y =$?"

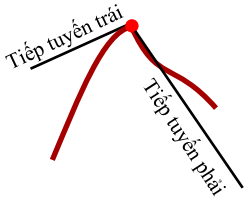
271. Định lí : Đạo hàm tại điểm cực trị

Giả sử hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó sẽ chỉ xảy ra một trong 2 trường hợp sau cho đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0:

▪ $f'(x_0) = 0$. (nguyên nhân do tiếp tuyến tại $x = x_0$ nằm ngang)



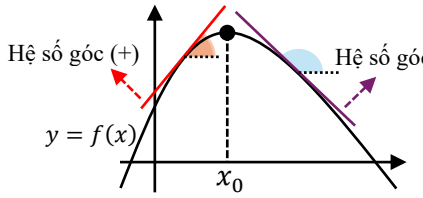
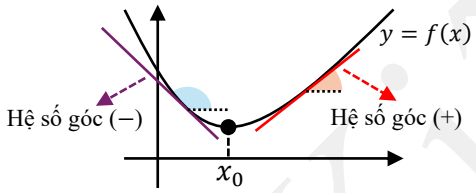
▪ $f'(x_0)$ không tồn tại. (nguyên nhân do hàm số bị "gãy" tại x_0
$\Leftrightarrow$ Tiếp tuyến trái và tiếp tuyến phải tại $x_{\text{cực trị}}$ khác nhau)



Thầy Lê Minh Tuấn

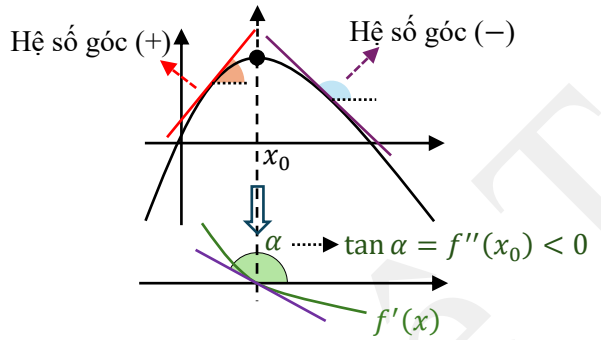
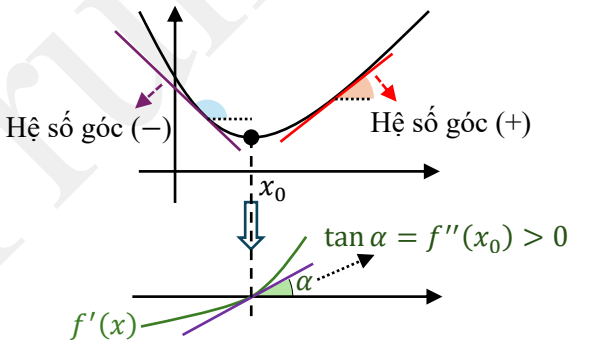
272. Định lí : Điều kiện có cực trị dựa vào sự đổi dấu đạo hàm

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$. Khi đó

Nếu $f'(x)<0$ với mọi $x\in(a;x_0)$ và $f'(x)>0$ với mọi $x\in(x_0;b)$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0.	Nếu $f'(x)>0$ với mọi $x\in(a;x_0)$ và $f'(x)<0$ với mọi $x\in(x_0;b)$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0.
	
Nói một cách khác: Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ $(-)$ sang $(+)$ khi x đi qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0.	***Nói một cách khác***: Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ $(+)$ sang $(-)$ khi x đi qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0.

273. Định lí : Điều kiện có cực trị dựa vào đạo hàm cấp 2

Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp một trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm $x_0, f'(x_0)=0$ và $f(x)$ có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0.

Nếu $f''(x_0)<0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0.	Nếu $f''(x_0)>0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0.
	

Một số nhận xét

▪ Cho hàm số $y=f(x)$ và biết tại $x=x_0$ thì $f'(x_0)=0\Rightarrow$ Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $x=x_0$ nằm ngang.

▪ Cho hàm số $y=f(x)$ xác định 2 bên tại $x=x_0$. Khi đó $f'(x_0)$ không tồn tại

$\Leftrightarrow$ Hàm số bị "gãy" tại x_0

$\Leftrightarrow$ Tiếp tuyến trái và tiếp tuyến phải tại x_0 khác nhau.

▪ Một hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0, hoặc tại đó đạo hàm không xác định nhưng hàm số vẫn xác định.

▪ $f'(x)$ bằng 0 tại điểm x_0 nhưng hàm số $f(x)$ *có thể* không đạt cực trị tại điểm x_0. Tức là ngoài điều kiện $f'(x_0)=0$, thì hàm còn phải thỏa mãn thêm một số điều kiện nữa thì mới có thể đạt cực trị tại x_0.

▪ Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên K, các nhận xét sau là các nhận xét về việc có (hoặc không có) cực trị của hàm số khi $x\in K$:

– Hàm số $f(x)$ có cực trị $\Leftrightarrow f'(x)$ đổi dấu.

– Hàm số $f(x)$ không có cực trị $\Leftrightarrow f'(x)$ không đổi dấu.

– Hàm số $f(x)$ chỉ có n cực trị $\Leftrightarrow f'(x)$ đổi dấu đúng n lần.

Tuyển Tập Trần Kiên

274. Điều kiện hàm đạt cực trị, cực đại, cực tiểu tại một điểm

▪ Điều kiện để $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên tập A **đạt cực trị** tại $x_0 \in A$ là:

$$\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f'(x) \text{ đổi dấu khi đi qua } x_0 \end{cases}$$

Lưu ý:

– Nếu từ $f'(x_0)=0$ ta giải ra được tham số thì cần kiểm tra lại sự đổi dấu của $f'(x)$ khi đi qua x_0.

– Nếu từ điều kiện $f'(x_0)=0$ không tìm được tham số thì ta sử dụng các điều kiện sau:

$$f'(x) \text{ đổi dấu khi đi qua } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f'(x) \times \lim_{x\to x_0^+} f'(x) < 0$$

▪ Điều kiện để $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên tập A **đạt cực đại** tại $x_0 \in A$ là:

$$\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f'(x) \text{ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua } x_0 \end{cases}$$

Lưu ý:

– Nếu từ $f'(x_0)=0$ ta giải ra được tham số thì cần kiểm tra lại sự đổi dấu của $f'(x)$ khi đi qua x_0.

– Nếu từ điều kiện $f'(x_0)=0$ không tìm được tham số thì ta sử dụng các điều kiện sau:

$$f'(x) \text{ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua } x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x) > 0 \\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x) < 0 \end{cases}$$

▪ Điều kiện để $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên tập A **đạt cực tiểu** tại $x_0 \in A$ là:

$$\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f'(x) \text{ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua } x_0 \end{cases}$$

Lưu ý:

– Nếu từ $f'(x_0)=0$ ta giải ra được tham số thì cần kiểm tra lại sự đổi dấu của $f'(x)$ khi đi qua x_0.

– Nếu từ điều kiện $f'(x_0)=0$ không tìm được tham số thì ta sử dụng các điều kiện sau:

$$f'(x) \text{ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua } x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x) < 0 \\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x) > 0 \end{cases}$$

275. Số điểm cực trị của |f(x)|, f(|x|), k_1f(ax+b)+k_2

▪ Số lượng điểm cực trị của $|f(x)|$

$$\begin{array}{c}\text{Số điểm cực trị của} \\ \text{hàm số } |f(x)|\end{array} = \begin{array}{c}\text{Số điểm cực trị của} \\ \text{hàm số } f(x)\end{array} + \begin{array}{c}\text{Số giao điểm đổi dấu} \\ \text{của } f(x) \text{ với trục } Ox\end{array}$$

hoặc

$$\begin{array}{c}\text{Số điểm cực trị của} \\ \text{hàm số } |f(x)|\end{array} = \begin{array}{c}\text{Số điểm cực trị của} \\ \text{hàm số } f(x)\end{array} + \begin{array}{c}\text{Số giao điểm của} \\ f(x) \text{ với trục } Ox\end{array} - \begin{array}{c}\text{Số giao điểm không đổi dấu} \\ \text{của } f(x) \text{ với trục } Ox\end{array}$$

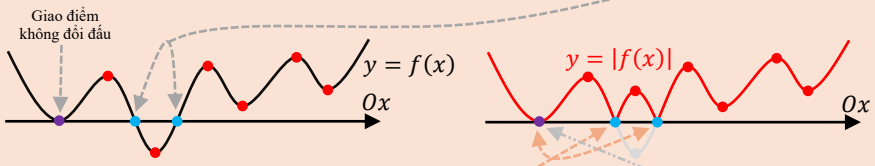
Lưu ý: Giao điểm không đổi dấu của $f(x)$ với trục Ox là những điểm mà tại đó $y=f(x)$ cắt trục Ox và hàm số $y=f(x)$ không đổi dấu khi đi qua điểm đó.

Giao điểm đổi dấu của $f(x)$ với trục Ox là những điểm mà tại đó $y=f(x)$ cắt trục Ox và hàm số $y=f(x)$ đổi dấu khi đi qua điểm đó.

Cách 1: Số điểm cực trị của hàm số $|f(x)|$ = Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ + Số giao điểm đổi dấu của $f(x)$ với trục Ox

= 7 + 2 = 9

Ví dụ:



Cách 2: Số điểm cực trị của hàm số $|f(x)|$ = Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ + Số giao điểm của $f(x)$ với trục Ox − Số giao điểm không đổi dấu của $f(x)$ với trục Ox

= 7 + 3 − 1 = 9

▪ Số lượng điểm cực trị của $f(|x|)$

Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ = Số điểm cực trị có $x_{CT} > 0$ của hàm số $f(x)$ $\times 2 + 1$

(Lưu ý: Nếu $y = f(x)$ là hàm hằng trong một khoảng $[0;\alpha)(\alpha > 0$ tùy ý thuộc $\mathbb{R})$; hoặc $f(x)$ không xác định tại $x = 0$ thì công thức trên ta không cộng 1)

Ví dụ:



Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ = Số điểm cực trị có $x_{CT} > 0$ của hàm số $f(x)$ $\times 2 + 1$

= 3 $\times 2 + 1 = 7$

▪ Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ = Số điểm cực trị của hàm số $k_1 f(ax + b) + k_2$

276. Tính nhanh cực trị, phương trình đường đi qua cực trị hàm phân thức

▪ Kỹ thuật tính nhanh cực trị hàm phân thức:

Cho hàm số $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ có $y'(x_0) = 0$. Khi đó để tính giá trị hàm số tại x_0 ta có thể dùng công thức:

$$y_0 = \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$$

▪ Phương trình đường (thẳng hoặc cong) đi qua tất cả điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ là $y = \frac{u'(x)}{v'(x)}$

▪ Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e} = \frac{\text{Tử}}{\text{Mẫu}}$ là $y = \frac{(\text{Tử})'}{(\text{Mẫu})'}$

277. Một số nhận xét về cực trị hàm đa thức

▪ Hàm số $y = ax + b$ không có cực trị

▪ Hàm số đa thức bậc chẵn luôn luôn có cực trị

▪ Hàm phân thức bậc nhất / bậc nhất không có cực trị

▪ Hàm số $y = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$:

– Nếu $a > 0 \Rightarrow y$ có cực tiểu.

– Nếu $a < 0 \Rightarrow y$ có cực đại.

▪ Hàm đa thức bậc n có tối đa n nghiệm phân biệt.

▪ Hàm đa thức bậc n (với n chẵn) có số lượng nghiệm tối thiểu là 0.

▪ Hàm đa thức bậc n (với n lẻ) có tối thiểu là 1 nghiệm.

▪ Hàm đa thức bậc n có tối đa $(n-1)$ điểm cực trị.

▪ Hàm đa thức bậc n nếu có n nghiệm phân biệt thì số điểm cực trị là tối đa và là $(n-1)$ điểm cực trị (điều ngược lại không đúng).

▪ Cho $f'(x) = k(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2}\ldots(x-x_k)^{n_k}$ với $x_1 \neq x_2 \neq \cdots \neq x_k$ và $n_i \in \mathbb{N}^*$.

– Nếu với giá trị x_i mà n_i là số chẵn thì x_i không là điểm cực trị của hàm số.

– Nếu với giá trị x_i mà n_i là số lẻ thì x_i là điểm cực trị của hàm số.

Thầy Lê Trung Kiên

278. Cực trị hàm bậc 3

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow \Delta'_{y'} = b^2 - 3ac$$

Số lượng cực trị của một hàm đa thức nói chung phụ thuộc vào nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ và sự đổi dấu của $f'(x)$ khi đi qua điểm đó. Đối với hàm bậc ba, $f'(x)$ là hàm bậc hai:

– Nếu hàm bậc hai vô nghiệm ⇒ không có cực trị

– Nếu hàm bậc hai có nghiệm kép ⇒ hàm $f'(x)$ không đổi dấu khi qua nghiệm kép ⇒ không có cực trị

– Nếu hàm bậc hai có hai nghiệm phân biệt ⇒ $f'(x)$ đổi dấu khi qua mỗi nghiệm đó ⇒ có 2 cực trị (1 điểm là điểm cực đại và 1 điểm là điểm cực tiểu)

▪ Định lý Vi-ét cho phương trình bậc 3: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ là $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}$

▪ Phương trình bậc 3 có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng khi có 1 nghiệm là $x = \frac{-b}{3a}$.

Lưu ý: Ba số x_1, x_2, x_3 tạo thành một cấp số cộng theo đúng thứ tự đó nếu $\frac{x_1+x_3}{2} = x_2$.

▪ Phương trình bậc 3 có 3 nghiệm lập thành cấp số nhân khi có 1 nghiệm là $x = -\sqrt[3]{\frac{d}{a}}$.

Lưu ý: Ba số x_1, x_2, x_3 tạo thành một cấp số nhân theo đúng thứ tự đó nếu $x_1x_3 = x_2^2$.

Thầy Lê Trung Kiên

▪ Hàm số bậc 3 có cực trị (hay có 2 cực trị, hay có cực đại và cực tiểu) $\Leftrightarrow \Delta'_{y'} > 0 \Leftrightarrow b^2 - 3ac > 0$

▪ Hàm số bậc 3 không có cực trị $\Leftrightarrow \Delta'_{y'} \le 0 \Leftrightarrow b^2 - 3ac \le 0$

▪ Có hai điểm cực trị trái dấu $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu

$$\begin{cases} \Delta'_{y'} > 0 \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{3a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ ac < 0 \end{cases} \Leftrightarrow ac < 0$$

▪ Có hai điểm cực trị cùng dấu $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu

$$\begin{cases} \Delta'_{y'} > 0 \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ ac > 0 \end{cases}$$

▪ Có hai điểm cực trị cùng dấu dương $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ S = x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{3a} > 0 \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ ab < 0 \\ ac > 0 \end{cases}$$

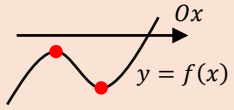
▪ Có hai điểm cực trị cùng dấu âm $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ S = x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{3a} < 0 \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ ab > 0 \\ ac > 0 \end{cases}$$

▪ Có 2 điểm cực trị x_1, x_2 thỏa	$x_1 < \alpha < x_2$	$\Leftrightarrow (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) < 0 \Leftrightarrow x_1x_2 - \alpha(x_1 + x_2) + \alpha^2 < 0$
	$x_1 < x_2 < \alpha$	$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \\ x_1 + x_2 < 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_2 - \alpha(x_1 + x_2) + \alpha^2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 2\alpha \end{cases}$
	$\alpha < x_1 < x_2$	$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \\ x_1 + x_2 > 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_2 - \alpha(x_1 + x_2) + \alpha^2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 2\alpha \end{cases}$

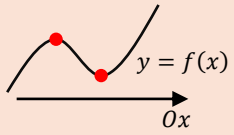
▪ Các điểm cực trị của đồ thị cùng nằm *về phía dưới đối với trục Ox*

$\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $\begin{cases} y_{CĐ} \cdot y_{CT} > 0 \\ y_{CĐ} + y_{CT} < 0 \end{cases}$



▪ Các điểm cực trị của đồ thị cùng nằm *về phía trên đối với trục Ox*

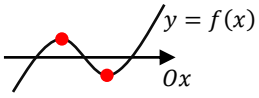
$\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $\begin{cases} y_{CĐ} \cdot y_{CT} > 0 \\ y_{CĐ} + y_{CT} > 0 \end{cases}$



▪ Các điểm cực trị của đồ thị nằm *về 2 phía đối với trục Ox*

$\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $y_{CĐ} \cdot y_{CT} < 0$ (*áp dụng khi không nhẩm được nghiệm và viết được phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số*)

$\Leftrightarrow$ Đồ thị cắt trục *Ox* tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt (*áp dụng khi nhẩm được nghiệm*)



▪ Phương trình đường thẳng $g(x)$ đi qua 2 điểm cực trị của hàm số bậc 3 có thể được tính theo 1 trong những cách sau:

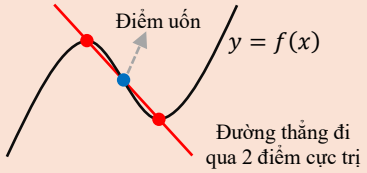
$$g(x)=\frac{2}{3}\left(c-\frac{b^2}{3a}\right)x+d-\frac{bc}{9a}$$

$$g(x)=-\frac{2\Delta'_{y'}}{9a}x+(y\text{ giao }Oy)+\frac{(y'\text{giao }Oy)(y''\text{ giao }Ox)}{3}$$

$$g(x)=y-\frac{y'\cdot y''}{18a}$$

$$g(x)=y-\frac{y'\cdot y''}{3y'''}$$

$g(x)=$ Đa thức dư của$(y$ chia $y')$

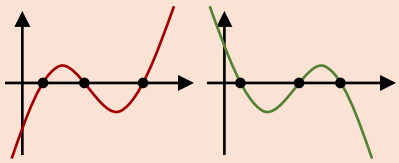


▪ Gọi $d: y=Ax+B$ là đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số bậc 3. Khi đó:

$$y_{CĐ}\cdot y_{CT}=(Ax_{CĐ}+B)(Ax_{CT}+B)=A^2x_{CĐ}x_{CT}+AB(x_{CĐ}+x_{CT})+B^2$$

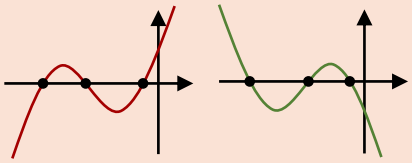
▪ Điều kiện phương trình bậc 3 có 3 nghiệm dương phân biệt:

$$\begin{cases}y'=0\text{ có 2 nghiệm thỏa mãn }0<x_1<x_2\\ y_{CĐ}\cdot y_{CT}<0\\ af(0)<0\end{cases}$$



▪ Điều kiện phương trình bậc 3 có 3 nghiệm âm phân biệt:

$$\begin{cases}y'=0\text{ có 2 nghiệm thỏa mãn }x_1<x_2<0\\ y_{CĐ}\cdot y_{CT}<0\\ af(0)>0\end{cases}$$



▪ Điểm uốn là tâm đối xứng của đồ thị hàm số bậc 3.

▪ Hoành độ điểm uốn của hàm số bậc 3 là nghiệm của phương trình $y''=0$.

▪ Trong các tiếp tuyến của đồ thị hàm số thì tiếp tuyến tại điểm uốn là tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất khi $a>0$, và là tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất khi $a<0$.

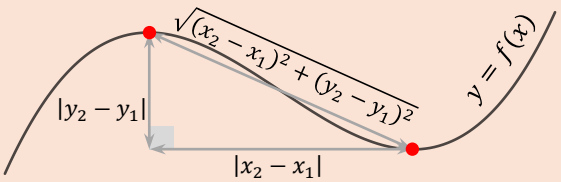
▪ Vị trí điểm uốn trên đồ thị hàm số bậc 3:



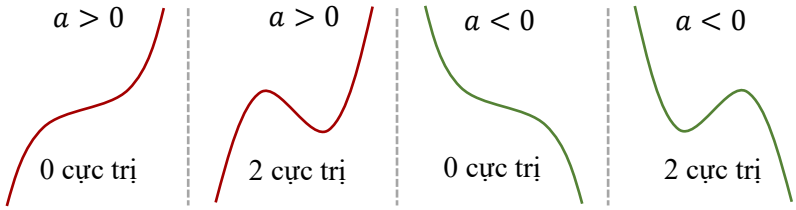
▪ Giả sử đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị là $(x_1;y_1)$ và $(x_2;y_2)$

Khoảng cách giữa	*Công thức*
Hai điểm cực trị của hàm số	$\lvert x_2-x_1\rvert$
Hai cực trị của hàm số	$\lvert y_2-y_1\rvert$
Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số	$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

▪ Khoảng cách giữa 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc 3 là $AB=\sqrt{\frac{4e+16e^3}{a}}$ với $e=\frac{b^2-3ac}{9a}$.



Các dạng đồ thị hàm số bậc 3



Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$

Cực trị của hàm số $g(x) = |f(x)|$

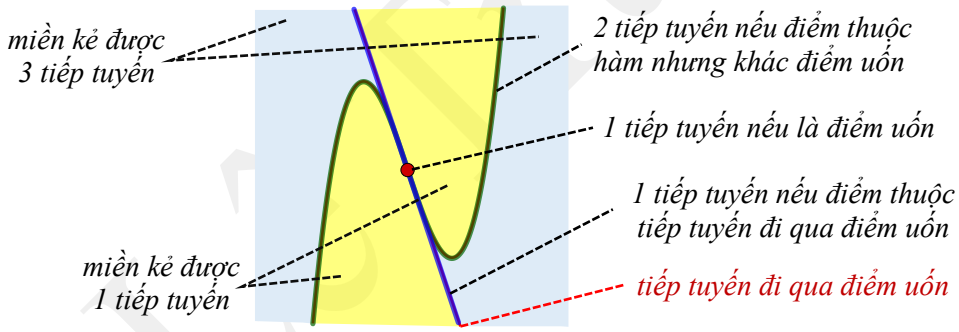
- $g(x)$ có 1 cực trị $\Leftrightarrow f(x)$ chỉ có 1 tính đơn điệu trên $\mathbb{R}$.
- $g(x)$ có 3 cực trị $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \text{ có 2 cực trị } (\Delta'_{f'} > 0) \\ f_{CĐ} \cdot f_{CT} \geq 0 \end{cases}$
- $g(x)$ có 5 cực trị $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \text{ có 2 cực trị } (\Delta'_{f'} > 0) \\ f_{CĐ} \cdot f_{CT} < 0 \end{cases}$

Cực trị của hàm số $h(x) = f(|x|)$

- $h(x)$ có 1 cực trị $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \text{ chỉ có 1 tính đơn điệu trên } \mathbb{R} \\ f'(x) = 0 \text{ có 2 nghiệm thỏa mãn } x_1 < x_2 \leq 0 \end{array}\right.$
- $h(x)$ có 3 cực trị $\Leftrightarrow f'(x) = 0$ có 2 nghiệm thỏa mãn $x_1 \leq 0 < x_2$
- $h(x)$ có 5 cực trị $\Leftrightarrow f'(x) = 0$ có hai nghiệm thỏa mãn $0 < x_1 < x_2$

Phân bố miền của các điểm kẻ tiếp tuyến đến hàm số bậc 3

Trường hợp $a > 0$



(Trường hợp hệ số $a < 0$ tương tự)

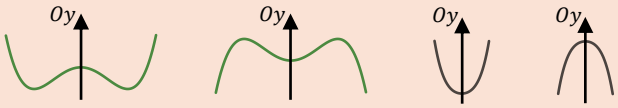
279. Cực trị hàm bậc 4 trùng phương

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c (a \neq 0)$

- Hàm số luôn luôn có cực trị.
- Hàm số luôn luôn có 1 điểm cực trị là $x = 0$.

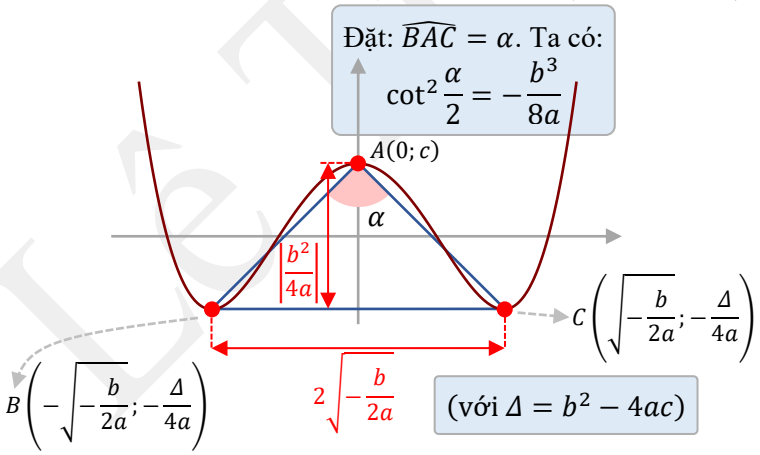
- Hàm số có một điểm cực trị $\Leftrightarrow ab \geq 0$.
- Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow ab < 0$.
- Hàm số có đúng 1 điểm cực trị và điểm cực trị là điểm cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$.
- Hàm số có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$.
- Hàm số có đúng 1 điểm cực trị và điểm cực trị là cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$.
- Hàm số có 1 điểm cực tiểu và 2 điểm cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$.

- Đồ thị hàm số đối xứng qua trục Oy.



Một số công thức tính nhanh

Giả sử hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 3 cực trị (tức là $ab < 0$):

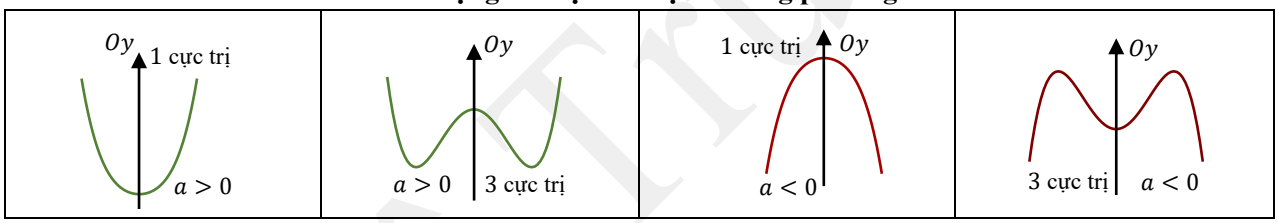


Tam giác ABC vuông cân tại A	$b^3 = -8a$
Tam giác ABC đều	$b^3 = -24a$
Tam giác ABC có cực trị $B, C \in Ox$	$b^2 = 4ac$
Tam giác ABC có trọng tâm O	$b^2 = 6ac$
Tam giác ABC có 3 góc nhọn	$b(8a + b^3) > 0$
Tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R_{\Delta ABC} = R$	$R = \left\|\frac{b^3 - 8a}{8ab}\right\|$
Tam giác ABC có độ dài cạnh $BC = m_0$	$am_0^2 + 2b = 0$
Tam giác ABC có độ dài $AB = AC = n_0$	$16a^2n_0^2 - b^4 + 8ab = 0$
Tam giác ABC có trực tâm O	$b^3 + 8a - 4ac = 0$

Tài Liệu Toán Kiên

Tam giác ABC cùng điểm O tạo thành hình thoi	$b^2 = 2ac$
Tam giác ABC có O là tâm đường tròn nội tiếp	$b^3 - 8a - 4abc = 0$
Tam giác ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp	$b^3 - 8a - 8abc = 0$
Tam giác ABC có cạnh $BC = kAB = kAC$	$b^3 \cdot k^2 - 8a(k^2 - 4) = 0$
Trục hoành chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau	$b^2 = 4\sqrt{2}\lvert ac\rvert$
Tam giác ABC có điểm cực trị cách đều trục hoành	$b^2 = 8ac$
Đồ thị hàm số $(C): y = ax^4 + bx^2 + c$ cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt lập thành cấp số cộng	$b^2 = \frac{100}{9}ac$
Định tham số để hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y = ax^4 + bx^2 + c$ và trục hoành có diện tích phần trên và phần dưới bằng nhau.	$b^2 = \frac{36}{5}ac$
Phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC là:	$x^2 + y^2 - \left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a} + c\right)y + c\left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a}\right) = 0$
Diện tích ΔABC	$32a^3(S_{\Delta ABC})^2 + b^5 = 0$
Bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC	$r_{\Delta ABC} = \frac{b^2}{4\lvert a\rvert\left(1 + \sqrt{1 - \frac{b^3}{8a}}\right)}$

Các dạng đồ thị hàm bậc 4 trùng phương



280. Cực trị của hàm số cho bằng công thức cụ thể

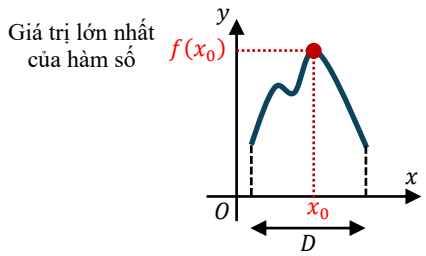
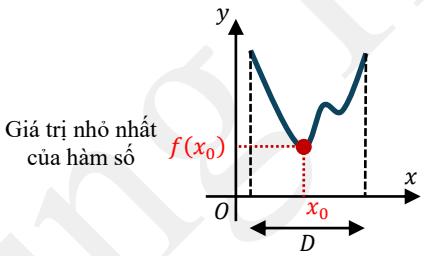
Bài toán và phương pháp giải : Tìm cực trị của hàm số cho bằng công thức cụ thể

Bước 1: Tìm tập xác định và tính $f'(x)$.
Bước 2: Tìm các điểm x_i mà $f'(x_i) = 0$ hoặc các điểm x_i mà $f'(x_i)$ không xác định nhưng hàm số vẫn xác định tại điểm đó.
Bước 3:
Cách 1: Lập bảng biến thiên.
Cách 2: Xét sự đổi dấu của $f'(x)$
Nếu dấu $f'(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_i thì hàm số đạt cực trị tại x_i.
Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ $(-) \to (+)$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm đó.
Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ $(+) \to (-)$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm đó.
Nếu dấu $f'(x)$ không đổi dấu khi x qua điểm x_i thì hàm số không đạt cực trị tại x_i.
Cách 3: Xét giá trị $f''(x_i)$
Tìm $f''(x)$ và tính $f''(x_i)$
Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_i.
Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_i.
Nếu $f''(x_i) = 0$ thì ta không thể kết luận tại điểm x_i hàm số đạt cực đại hay cực tiểu, khi đó ta thường chuyển qua sử dụng cách 1 hoặc cách 2.

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

281. Định nghĩa

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên tập hợp $D (D \subset \mathbb{R})$

Nếu tồn tại một điểm $x_0 \in D$ sao cho $f(x) \le f(x_0)$ với mọi $x \in D$ thì số $M = f(x_0)$ được gọi là **giá trị lớn nhất** của hàm số f trên D, kí hiệu là : $M = \max\limits_{x \in D} f(x)$ (hoặc $M = \max\limits_{D} f(x)$ hoặc $M = \max\limits_{x \in D} f$ hoặc $M = \max\limits_{D} f$)	Nếu tồn tại một điểm $x_0 \in D$ sao cho $f(x) \ge f(x_0)$ với mọi $x \in D$ thì số $m = f(x_0)$ được gọi là **giá trị nhỏ nhất** của hàm số f trên D, kí hiệu là : $m = \min\limits_{x \in D} f(x)$ (hoặc $m = \min\limits_{D} f(x)$ hoặc $m = \min\limits_{x \in D} f$ hoặc $m = \min\limits_{D} f$)
	
Nói đơn giản thì: giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ khi $x \in D$ phải thỏa mãn các điều kiện sau: ▪ Là giá trị y lớn nhất khi $x \in D$. ▪ Giá trị y lớn nhất đó phải là 1 số cụ thể (không được phép là $+\infty$). ▪ Tồn tại giá trị x_0 cụ thể (không được phép là vô cực hoặc các giới hạn) để đạt được giá trị lớn nhất đó.	*Nói đơn giản thì*: giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ khi $x \in D$ phải thỏa mãn các điều kiện sau: ▪ Là giá trị y nhỏ nhất khi $x \in D$. ▪ Giá trị y nhỏ nhất đó phải là 1 số cụ thể (không được phép là $-\infty$). ▪ Tồn tại giá trị x_0 cụ thể (không được phép là vô cực hoặc các giới hạn) để đạt được giá trị nhỏ nhất đó.

Một số nhận xét

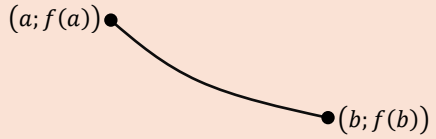
▪ Mọi hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$ đều có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.
▪ Hàm số liên tục trên một khoảng có thể không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên khoảng đó.

▪ Cho một biến có giá trị thỏa mãn $u \in [a; b]$ khi đó để xác định $|u|$ thuộc tập nào? ta làm như sau:
– Nếu $ab > 0$ (tức là a, b cùng dấu) thì $|u| \in [\min\{|a|; |b|\}; \max\{|a|; |b|\}]$
– Nếu $ab \le 0$ (tức là a, b trái dấu hoặc có một đầu mút = 0) thì $|u| \in [0; \max\{|a|; |b|\}]$

▪ Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[a; b]$ thì $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$ và $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$.



▪ Nếu hàm số $f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[a; b]$ thì $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$ và $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$.



282. Các phương pháp tìm GTLN, GTNN hàm 1 biến thường dùng

- Lập bảng biến thiên.
- Dùng phương pháp tìm GTNN và GTLN của hàm số liên tục trên một đoạn.
- Dùng máy tính lập bảng (Table) (Thường dùng khi tập x có độ dài hữu hạn)
- Phương pháp kiểm định điểm đạt được (Shift + Solve)
- Phương pháp sử dụng bất đẳng thức

283. Một số bất đẳng thức hữu ích

- $|a\sin x + b\cos x| \le \sqrt{a^2+b^2}$
- Bất đẳng thức Côsi cho n số không âm:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1a_2a_3\ldots a_n}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n$

- Bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối:

$$|a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n| \le |a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|$$

Dấu "=" xảy ra khi toàn bộ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ cùng dấu hoặc bằng 0 với số lượng số hạng tùy ý

- Bất đẳng thức Bunhiacopxki

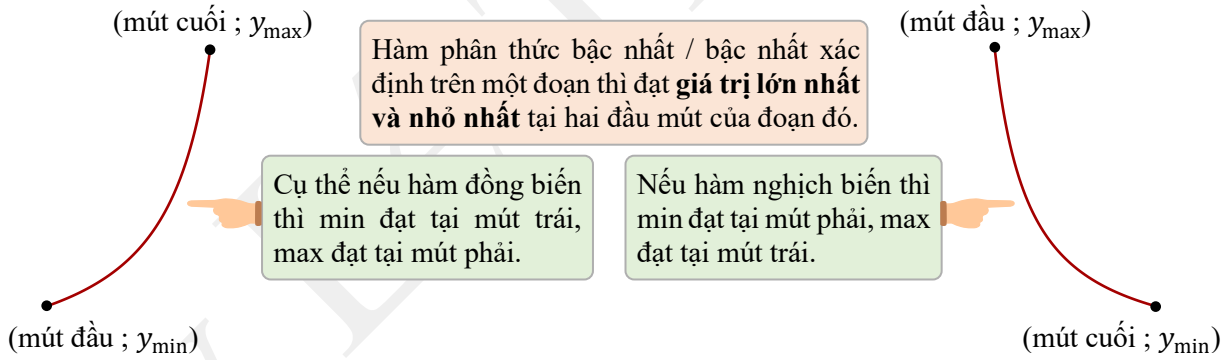
Với hai bộ số $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ ta có:

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2) \ge (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$

Với quy ước nếu một số nào đó a_i hoặc b_i $(i = 1,2,3,\ldots,n)$ bằng 0 thì số tương ứng cũng bằng 0.

284. GTLN, GTNN Hàm bậc 1 / bậc 1



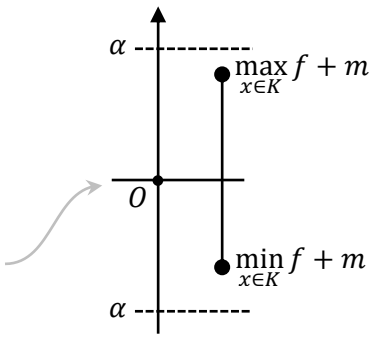
285. So sánh GTLN, GTNN của |f(x)+m| với một số α

- So sánh GTLN và GTNN của hàm số $g(x) = |f(x)+m|$ khi $x \in K$ (K là một tập con của tập xác định) so với một số α

Bước 1: Tìm GTLN và GTNN của hàm số $y = f(x)$ khi $x \in K$

Bước 2: Suy ra $f(x)+m \in \left[\min\limits_{x\in K} f+m; \max\limits_{x\in K} f+m\right]$

Bước 3: Biểu diễn tập giá trị của $f(x)+m$ khi $x \in K$ và tìm điều kiện cần thiết của $|f(x)+m|$ so với số α



Thầy Đặng Trung Kiên

286. Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên tập xác định

Bài toán và phương pháp giải : Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên tập xác định

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2: Tính $f'(x)$.

Bước 3: Tìm các điểm x_i mà tại đó $f'(x_i) = 0$ hoặc các điểm x_i mà tại đó $f'(x_i)$ không xác định nhưng hàm số vẫn xác định tại điểm đó.

Bước 4: Lập bảng biến thiên. (Hoặc một biểu đồ có cơ chế giống bảng biến thiên)

Bước 5: Kết luận

287. Tìm GTLN, GTNN của hàm số liên tục trên đoạn [a;b]

Bài toán và phương pháp giải : Tìm GTLN, GTNN của hàm số liên tục trên đoạn [a;b]

Bước 1: Tìm các điểm $x_i \in (a;b)$ mà tại đó hàm số $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định nhưng hàm số vẫn xác định.

Bước 2: Tính $f(x_i)$ và $f(a)$ và $f(b)$.

Bước 3: So sánh các giá trị tìm được.

Số lớn nhất trong các giá trị ở B2 là giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$, số nhỏ nhất trong các giá trị ở B2 là giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

288. Tìm GTLN, GTNN của hàm số f(x) trên một tập A tùy ý

Bài toán và phương pháp giải : Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên một tập A tùy ý

Bước 1: Tìm các điểm hàm số không xác định trên tập A.

Bước 2: Tính $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i \in A$ tại đó hàm số $f'(x) = 0$ hoặc các điểm mà tại đó $f'(x)$ không xác định (nhưng hàm số vẫn xác định).

Bước 2: Tính $f(x_i)$, với x_i là các điểm ở B2 hoặc các điểm ở đầu mút ngoặc vuông; và giới hạn của hàm số tại các điểm hàm số không xác định (giới hạn 1 bên hoặc giới hạn cả 2 bên, tùy thuộc vào tập A) hoặc giới hạn tại các điểm dạng ngoặc tròn của tập A (kể cả $-\infty$ hoặc $+\infty$).

Bước 3: So sánh các giá trị tìm được và kết luận giá trị lớn nhất và nhỏ nhất với các lưu ý quan trọng như sau:

▪ Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ khi $x \in A$ phải thỏa mãn tất cả các điều kiện sau:

– Là giá trị y lớn nhất khi $x \in A$.

– Giá trị y lớn nhất đó phải là 1 số cụ thể (không được phép là $+\infty$).

– Tồn tại giá trị x_0 cụ thể (không được phép là vô cực hoặc giới hạn) để đạt được GTLN đó.

▪ Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ khi $x \in A$ phải thỏa mãn tất cả các điều kiện sau:

– Là giá trị y nhỏ nhất khi $x \in A$.

– Giá trị y nhỏ nhất đó phải là 1 số cụ thể (không được phép là $+\infty$).

– Tồn tại giá trị x_0 cụ thể (không được phép là vô cực hoặc các giới hạn) để đạt được GTNN đó.

ĐƯỜNG TIỆM CẬN

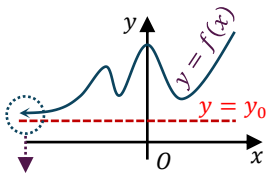
289. Định nghĩa tiệm cận ngang

▪ Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là **đường tiệm cận ngang** (gọi tắt là tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu nó thỏa ít nhất một trong hai điều kiện sau :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0 \text{ hoặc } \lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0$$

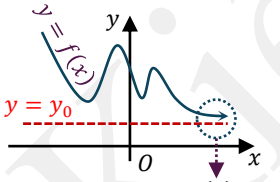
▪ Như vậy tiệm cận ngang: x tiến tới vô cực thì y tiến tới 1 số cụ thể.

▪ Một hàm số có thể có tối đa 2 tiệm cận ngang, cũng có thể có 1 hoặc không có tiệm cận ngang.



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = y_0$

$\Rightarrow y = y_0$ là tiệm cận ngang



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = y_0$

$\Rightarrow y = y_0$ là tiệm cận ngang

290. Định nghĩa tiệm cận đứng

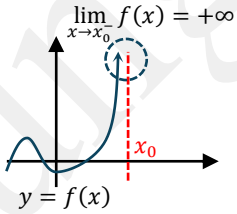
▪ Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là **đường tiệm cận đứng** (gọi tắt là tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

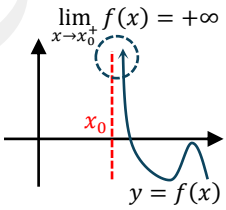
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty \text{ hoặc } \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$$

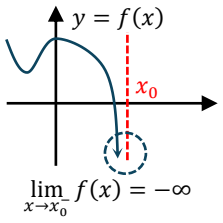
$$\text{hoặc } \lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty \text{ hoặc } \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$$

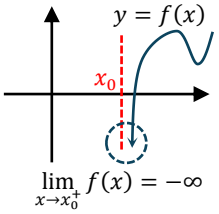
▪ Như vậy tiệm cận đứng: x tiến tới 1 số cụ thể thì y tiến tới vô cùng.

▪ Một hàm số có thể có hoặc cũng có thể không có tiệm cận đứng.





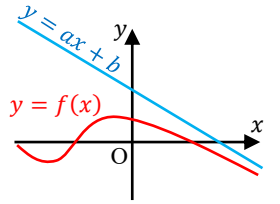




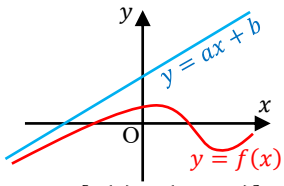
291. Định nghĩa tiệm cận xiên

▪ Đường thẳng $y = ax + b\ (a \neq 0)$, được gọi là **đường tiệm cận xiên** (hay **tiệm cận xiên**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0$ hoặc $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0$.

▪ Một hàm số có thể có tối đa 2 tiệm cận xiên, cũng có thể có 1 hoặc không có tiệm cận xiên.



$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0$



$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0$

Thầy Lê Trung Kiên

292. Các bước tìm tiệm cận ngang

Bài toán và phương pháp giải : Các bước tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số

Bước 2:

- Nếu hàm số xác định tại $x = -\infty$ thì tính $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
  - Nếu $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ số cụ thể
    $\Rightarrow y = 1$ số cụ thể : là 1 tiệm cận ngang của đồ thị hàm số
- Nếu hàm số xác định tại $x = +\infty$ thì tính $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
  - Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ số cụ thể
    $\Rightarrow y = 1$ số cụ thể : là 1 tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

293. Các bước tìm tiệm cận đứng

Bài toán và phương pháp giải : Các bước tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số

Bước 2: Tính giới hạn hàm số khi x tiến tới các điểm x_i đặc biệt cụ thể của tập xác định (mà tại các điểm đó hàm số không xác định, đó làm các điểm ranh giới của tập xác định hoặc nghiệm của mẫu số).

- Tính giới hạn trái tại x_i
  - Nếu giới hạn này ra vô cực
  - Nếu giới hạn này không ra vô cực thì làm tiếp
- Tính giới hạn phải tại x_i
  - Nếu giới hạn này ra vô cực
  - Nếu giới hạn này không ra vô cực

$x = x_i$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Hàm số có tiệm cận đứng là $x = x_i$

294. Các bước tìm tiệm cận xiên

Bài toán và phương pháp giải : Các bước tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$. Giả sử hàm số có tiệm cận xiên là $y = ax + b$. Để tìm a và b ta tiến hành theo các bước sau:

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2A: Nếu hàm số xác định tại $x = -\infty$ thì tính $a = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$.

– Nếu a là 1 số cụ thể và khác 0 thì tính $b = \lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - ax] \Rightarrow$ Tiệm cận xiên $y = ax + b$.

– Nếu a không ra 1 số cụ thể hoặc $a = 0 \Rightarrow$ Không có tiệm cận xiên bên trái.

Bước 2B: Nếu hàm số xác định tại $x = +\infty$ thì tính $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

– Nếu a là 1 số cụ thể và khác 0 thì tính $b = \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - ax] \Rightarrow$ Tiệm cận xiên $y = ax + b$.

– Nếu a không ra 1 số cụ thể hoặc $a = 0 \Rightarrow$ Không có tiệm cận xiên bên phải.

Bước 3: Kết luận về tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Lưu ý: Một hàm số có thể không có tiệm cận xiên, hoặc có 1 tiệm cận xiên, hoặc có tối đa 2 tiệm cận xiên.

295. Số lượng các loại tiệm cận

Loại	Số lượng tối đa	Số lượng tối thiểu	▪ Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang bên nào thì không có tiệm cận xiên bên đó và ngược lại.
Tiệm cận ngang	2	0	
Tiệm cận đứng	vô số	0	
Tiệm cận xiên	2	0	

296. Tiệm cận hàm bậc 1 / bậc 1

▪ Hàm $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (không bị suy biến thành hàm hằng), có 2 đường tiệm cận:

– Tiệm cận đứng: $x = -\frac{d}{c}$ = nghiệm của mẫu số bằng 0.

– Tiệm cận ngang: $y = \frac{a}{c}$ = hai hệ số của x đem chia cho nhau.

297. Tiệm cận của bậc 2 / bậc 1

▪ Hàm $y = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ (không bị suy biến thành hàm bậc nhất), có 2 đường tiệm cận:

– Tiệm cận đứng: $x = -\frac{e}{d}$ = nghiệm của mẫu số bằng 0.

– Tiệm cận xiên: $y = Ax + B$ với $A = \frac{a}{d}$ và $B = \lim\limits_{x\to-\infty} (y - Ax)$ (hoặc $B = \lim\limits_{x\to+\infty} (y - Ax)$).

▪ Hàm $y = Ax + B + \frac{C}{dx+e}$ có tiệm cận xiên là $y = Ax + B$.

298. Một số nhận xét

▪ Một hàm số có dạng phân thức $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ thì chưa chắc có tiệm cận đứng.

▪ Nếu x_0 là nghiệm của mẫu số của hàm số $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ thì $x=x_0$ chưa chắc là tiệm cận đứng.

▪ Tồn tại những hàm không có dạng phân số nhưng vẫn có tiệm cận đứng (Ví dụ: $y=\log_2 x$ có tiệm cận đứng $x=0$)

▪ Trong giới hạn:

$$\frac{\text{Số khác 0}}{0}=\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}\ (\text{tương tự khi } x\to-\infty)$$

$$\text{Nếu } \begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\text{số cụ thể}\\ g(x_0)=0\end{cases} \text{ thì } f(x_0)=0$$

$$\text{Nếu } \begin{cases}\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)g(x)\big)=\text{số cụ thể}\\ \lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty\end{cases} \text{ thì } \lim_{x\to\infty}g(x)=0.$$

(Với ∞ là $-\infty$ hoặc $+\infty$)

Cho biểu thức $f(x)$ có x_0 là một nghiệm của $f(x)=0$. Số $r>0$ được gọi là **bội của nghiệm** x_0 nếu:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{(x-x_0)^r}=\text{số cụ thể }(*)\\ r \text{ là số dương lớn nhất trong những}\\ \text{số dương thỏa mãn điều kiện }(*)\end{cases}$$

(Bội của nghiệm x_0 có thể hiểu là số mũ lớn nhất có thể phân tích thành nhân tử của biểu thức $(x-x_0)$ từ $f(x)$)

Thầy Lê Trung Kiên

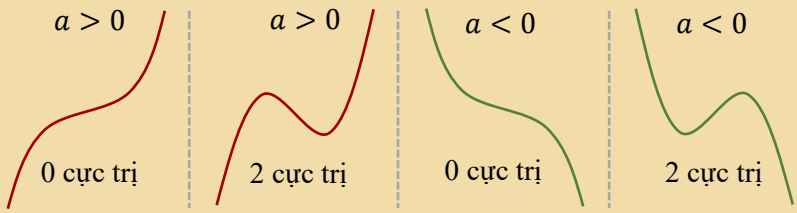
KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

299. Hàm số bậc 3

a) Các bước khảo sát và vẽ đồ thị

Bài toán và phương pháp giải : Các bước khảo sát và vẽ đồ thị hàm số bậc 3

Bước 1: Tìm tập xác định: $D = R$.
Bước 2: Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
Bước 3:
– Tìm $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x) = 0 \Rightarrow x = ? \Rightarrow y$ tương ứng. ($y' = 0$ hoặc có 2 nghiệm, hoặc có nghiệm kép, hoặc vô nghiệm).
– Tìm $f''(x)$, giải phương trình $f''(x) = 0$, tìm điểm uốn (là tâm đối xứng của đồ thị)
Bước 4: Lập bảng biến thiên.
– Nếu $y' = 0$ có hai nghiệm thì dấu của y' là "Trong trái ngoài cùng".
– Nếu $y' = 0$ có nghiệm kép thì dấu của y' là "Luôn cùng dấu với a" (ngoại trừ tại nghiệm kép thì $y' = 0$).
– Nếu $y' = 0$ vô nghiệm thì dấu của y' là "Luôn cùng dấu với a".
Kết luận về tính đơn điệu (hàm số đồng biến trên khoảng nào và hàm số nghịch biến trên khoảng nào).
Kết luận về cực trị của hàm số (nêu ra điểm cực đại, cực tiểu (nếu có)).
Bước 5: Vẽ đồ thị :
Tìm giao điểm của đồ thị và trục Ox (nếu nghiệm đẹp mới thực hiện) và tìm giao điểm với trục Oy.
Tính thêm vài điểm thuộc vào đồ thị hàm số bằng cách lập bảng giá trị (nếu thấy cần thiết).
Vẽ hệ trục tọa độ → Đánh dấu các điểm cực trị → Đánh dấu các điểm đặc biệt khác (giao điểm với các hệ trục và các điểm tính thêm) → Vẽ phác đồ thị : nối các điểm lại bằng các đường thẳng và bút chì (nếu thấy cần thiết) → vẽ nét trơn cho đồ thị.
Nhận xét về đồ thị: Hàm số có tâm đối xứng là điểm uốn (chương trình nâng cao)
Các dạng đồ thị



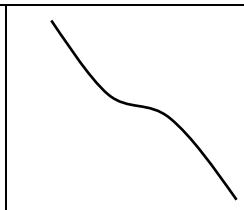
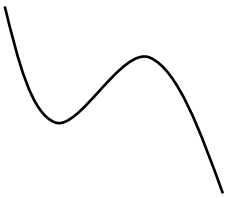
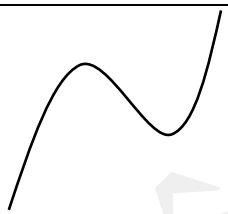
b) Vẽ nhanh đồ thị

Bài toán và phương pháp giải : Vẽ nhanh đồ thị hàm số bậc 3

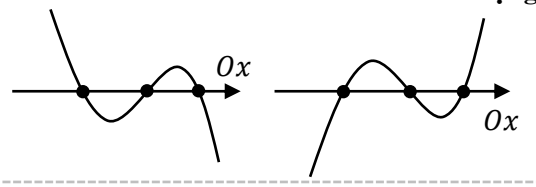
Bước 1: Vẽ hệ trục tọa độ
Bước 2: Bấm máy tính đánh dấu giao điểm với Ox
Bước 3: Bấm máy tính và đánh dấu các điểm cực trị (nếu có)
Bước 4: Đánh dấu giao điểm với Oy (nếu cần)
Bước 5: Vẽ phác đồ thị hàm số → sau đó vẽ trơn

c) Các dạng đồ thị

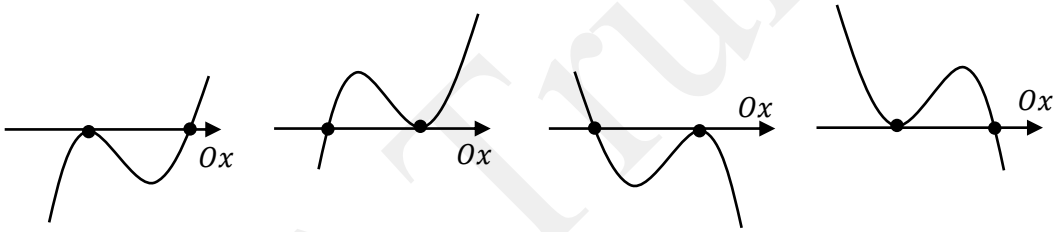
Khi ta quan tâm đến tính đơn điệu (hoặc cực trị) thì có các dạng đồ thị sau

Đồ thị				
Điều kiện	$a<0;\Delta'_{y'}\le 0$	$a<0;\Delta'_{y'}>0$	$a>0;\Delta'_{y'}\le 0$	$a>0;\Delta'_{y'}>0$
Tính chất	– Nghịch biến trên toàn bộ $\mathbb{R}$. – Không có cực trị.	– Vừa đồng biến, vừa nghịch biến. – Sự nghịch biến có thể xảy ra ở vô cực. – Có 2 cực trị.	– Đồng biến trên toàn bộ $\mathbb{R}$. – Không có cực trị.	– Vừa đồng biến vừa nghịch biến. – Sự đồng biến xảy ra được ở vô cực. – Có 2 cực trị.

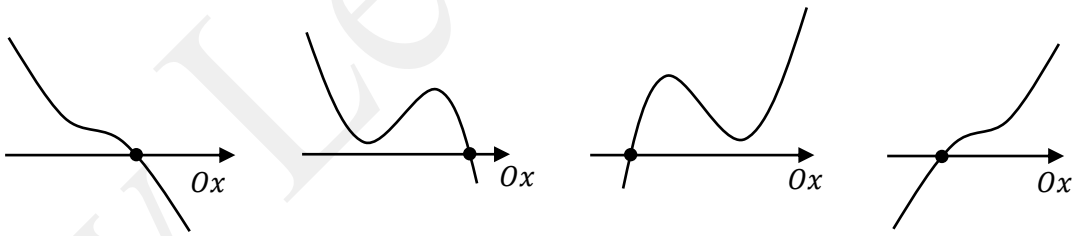
Khi ta quan tâm đến số giao điểm với Ox (hoặc số nghiệm của phương trình $f(x)=0$) thì có các dạng đồ thị sau



$f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt
$\Leftrightarrow$ Đồ thị $y=f(x)$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía khác nhau đối với trục hoành.



$f(x)=0$ có 2 nghiệm $\Leftrightarrow$ $f(x)$ có 2 điểm cực trị và một điểm cực trị có $y=0$.



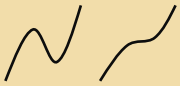
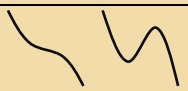
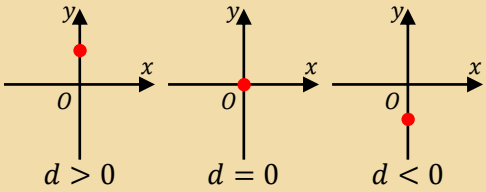
$f(x)=0$ có 1 nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \text{ luôn có một tính đơn điệu trên } \mathbb{R} \\ f(x) \text{ có cực trị và các cực trị nằm ở 1 bên so với } Ox \end{array}\right.$

Thầy Lê Trung Kiên

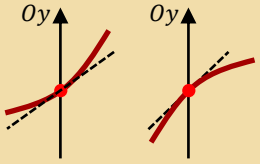
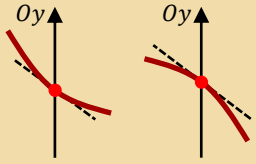
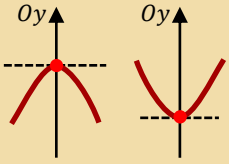
d) Dấu hệ số

Bài toán và phương pháp giải : Dấu các hệ số của hàm số bậc 3

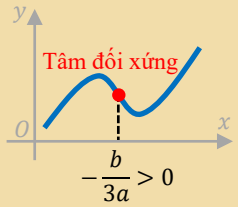
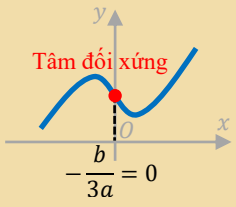
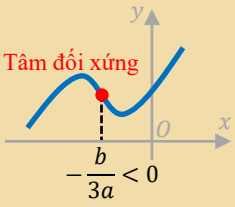
Dấu các hệ số của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$

a: trang thái chiếm đa số của hàm số	Nhìn chung đi lên $\Rightarrow a > 0$ 
	Nhìn chung đi xuống $\Rightarrow a < 0$ 
d: giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung Oy 	

c: hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $x = 0$

Tiếp tuyến đi lên $\Rightarrow c > 0$	Tiếp tuyến đi xuống $\Rightarrow c < 0$	Tiếp tuyến nằm ngang $\Rightarrow c = 0$
		

$-\frac{b}{3a}$: là hoành độ trung điểm của 2 điểm cực trị (nếu có cực trị), và cũng là hoành độ tâm đối xứng của đồ thị (tức là hoành độ điểm uốn)

Nếu tâm đối xứng ở bên phải Oy thì $-\frac{b}{3a} > 0$	Nếu tâm đối xứng ở trên Oy thì $-\frac{b}{3a} = 0$	Nếu tâm đối xứng ở bên trái Oy thì $-\frac{b}{3a} < 0$
		

- Vị trí điểm uốn trên đồ thị hàm số bậc 3:



e) Tính đơn điệu

Đi đến: Tính đơn điệu hàm bậc 3

f) Cực trị

Đi đến: Cực trị hàm bậc 3

300. Hàm số trùng phương

a) Các bước khảo sát và vẽ đồ thị

Bài toán và phương pháp giải : khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c (a \neq 0)$

Bước 1: Tìm tập xác định $D = R$.
Bước 2: Tìm $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
Bước 3: Tìm $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x) = 0 \Rightarrow x = ? \Rightarrow y$ tương ứng ($f(x)' = 0$ hoặc có 3 nghiệm phân biệt, hoặc có 1 nghiệm; và luôn có nghiệm $x = 0$).
Bước 4: Lập bảng biến thiên.
Kết luận về tính đơn điệu của hàm số (hàm số đồng biến trên khoảng nào và hàm số nghịch biến trên khoảng nào).
Kết luận về cực trị của hàm số (nêu ra điểm cực đại, cực tiểu (nếu có)).
Bước 5: Vẽ đồ thị :
Tìm giao điểm của đồ thị và trục Ox (nếu nghiệm đẹp mới thực hiện) và tìm giao điểm với trục Oy.
Tính thêm vài điểm thuộc vào đồ thị hàm số (nếu thấy cần thiết).
Vẽ hệ trục tọa độ → Đánh dấu các điểm cực trị → Đánh dấu các điểm đặc biệt khác (giao điểm với các hệ trục và các điểm tính thêm) → Vẽ phác đồ thị : nối các điểm lại bằng các đường thẳng và bút chì (nếu thấy cần thiết) → vẽ nét trơn cho đồ thị.
Nêu kết luận : Hàm số đã cho là hàm số chẵn nên nó nhận trục tung làm trục đối xứng.

b) Các dạng đồ thị

Khi ta quan tâm đến số lượng cực trị



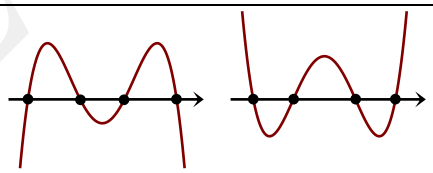
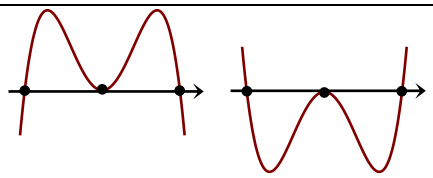
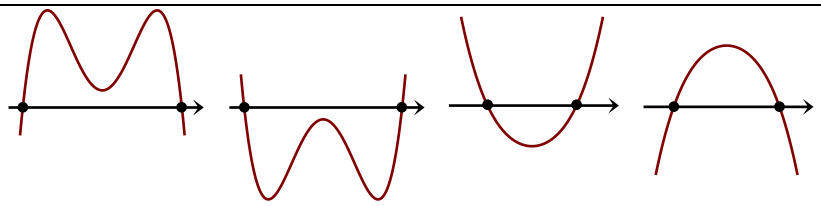
Có 3 cực trị { 1 cực đại; 2 cực tiểu

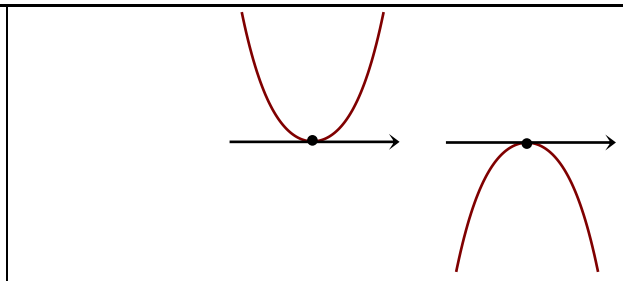
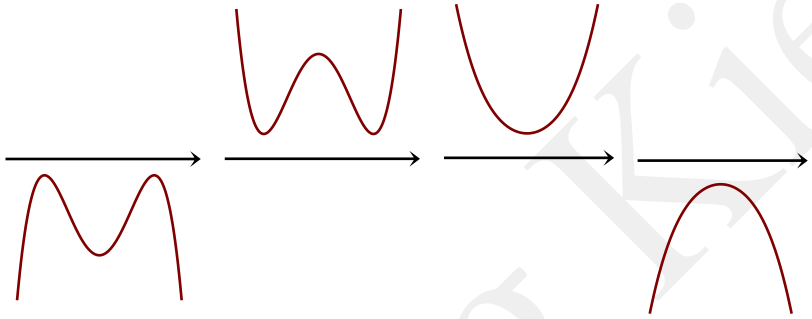
Có 3 cực trị { 1 cực tiểu; 2 cực đại

Có 1 cực trị, cực trị đó là cực đại.

Có 1 cực trị, cực trị đó là cực tiểu.

Khi ta quan tâm đến giao điểm với trục Ox

4 giao điểm với Ox	
3 giao điểm với Ox	
2 giao điểm với Ox	

1 giao điểm với Ox	
Không có giao điểm với Ox	

c) Liên hệ giữa số nghiệm phương trình trùng phương & phương trình bậc 2

Sự liên hệ giữa số nghiệm của $ax^4+bx^2+c=0(a\neq 0)$ và $at^2+bt+c=0(a\neq 0)$

$ax^4+bx^2+c=0$		$at^2+bt+c=0$
Có 4 nghiệm phân biệt	$\Leftrightarrow$	Có 2 nghiệm dương phân biệt
Có 3 nghiệm phân biệt	$\Leftrightarrow$	Có 1 nghiệm $t=0$ và 1 nghiệm dương
Có 2 nghiệm phân biệt	$\Leftrightarrow$	$\left[\begin{array}{l}\text{Có 1 nghiệm kép dương}\\ \text{Có 2 nghiệm trái dấu}\end{array}\right.$
Có 1 nghiệm	$\Leftrightarrow$	$\left[\begin{array}{l}\text{Có 1 nghiệm bằng 0 và 1 nghiệm âm}\\ \text{Có 1 nghiệm kép bằng 0}\end{array}\right.$
Vô nghiệm	$\Leftrightarrow$	$\left[\begin{array}{l}\text{Vô nghiệm}\\ \text{Có 1 nghiệm kép âm}\\ \text{Có 2 nghiệm phân biệt âm}\end{array}\right.$

d) Cực trị

Đi đến: Cực trị hàm bậc 4 trùng phương

Thầy Lê Phúc Kiên

301. Hàm số bậc 1 / bậc 1

Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad - bc \neq 0, c \neq 0) \Rightarrow y' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

a) Các bước khảo sát và vẽ đồ thị

Bài toán và phương pháp giải : khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

Bước 1: Tìm tập xác định $D = R\backslash\left\{-\frac{d}{c}\right\}$

Bước 2: Tìm các đường tiệm cận.

Tính $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \Rightarrow$ Tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$ (hai hệ số của x chia cho nhau)

Tính $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \Rightarrow$ Tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$ (nghiệm của mẫu số = 0)

Bước 3: Tìm $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

($f'(x)$ hoặc luôn dương, hoặc luôn âm $\forall x \in D$)

Bước 4: Lập bảng biến thiên.

Nêu ra hàm số đồng biến trên khoảng nào (hoặc hàm số nghịch biến trên khoảng nào).

Hàm số không có cực trị.

Bước 5: Vẽ đồ thị:

Tìm giao điểm của đồ thị và trục Ox (nếu nghiệm đẹp mới thực hiện) và trục Oy.

Tính thêm vài điểm thuộc vào đồ thị hàm số (nếu thấy cần thiết) (các giá trị x nên lấy xung quanh tiệm cận đứng)

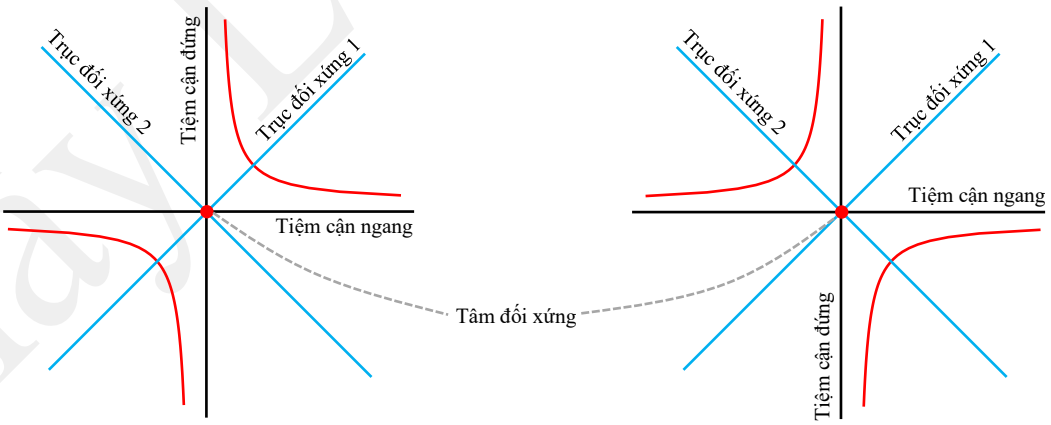
Vẽ hệ trục tọa độ → Vẽ các đường tiệm cận → Đánh dấu các điểm đặc biệt khác (giao điểm với các hệ trục và các điểm tính thêm) → Vẽ phác đồ thị: nối các điểm lại bằng các đường thẳng và bút chì (nếu thấy cần thiết) → vẽ nét trơn cho đồ thị.

Nhận xét:

– Đồ thị hàm số nhận giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

– Đồ thị hàm số nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi 2 đường tiệm cận làm trục đối xứng.

b) Các dạng đồ thị



Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

c) Tiệm cận & Cực trị

▪ Hàm số có hai **đường tiệm cận**

– Tiệm cận ngang: $y = \frac{a}{c}$ (hai hệ số của x chia cho nhau)

– Tiệm cận đứng: $x = -\frac{d}{c}$ (nghiệm của mẫu số $= 0$)

▪ Hàm số không có cực trị

d) Dấu hệ số

▪ **Xác định dấu (hoặc giá trị) của các hệ số** của $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (Không bị suy biến thành hàm hằng) từ đồ thị:

– Tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$

– Tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$

– Giao điểm với Ox: $x = -\frac{b}{a}$

– Giao điểm với Oy: $y = \frac{b}{d}$

– Tính đồng nghịch: $ad - bc$

– Các điểm có tọa độ cụ thể thuộc đồ thị.

e) Tính đơn điệu

Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} \Rightarrow$ Tử số của $y' = ad - bc$

– Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow$ Tử số của $y' > 0$

– Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow$ Tử số của $y' < 0$

– Hàm số đồng biến trên tập $A \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{d}{c} \notin A \\ \text{Tử số của } y' > 0 \end{cases}$

– Hàm số nghịch biến một tập $A \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{d}{c} \notin A \\ \text{Tử số của } y' < 0 \end{cases}$

Thầy Lê Trung Kiên

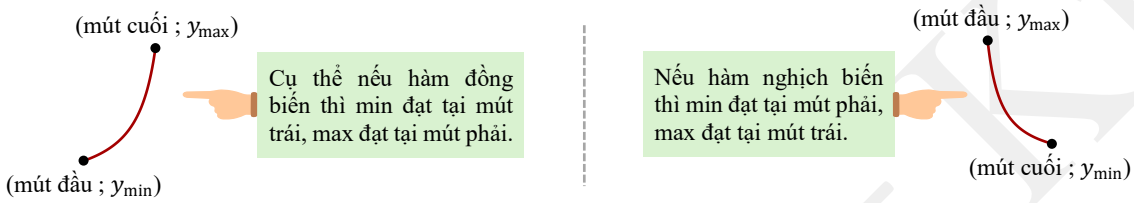
f) Các bài toán min, max

Cho hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị (C).

Đưa công thức hàm về dạng chính tắc: Đặt $\begin{cases}X=x-x_{\text{tiệm cận}}\\ Y=y-y_{\text{tiệm cận}}\end{cases}\Rightarrow Y=-\frac{\text{Tử số của đạo hàm}}{c^2X}=\frac{k}{X}$

Chú ý: nếu có thêm các yếu tố điểm và đường thì cần tịnh tiến đồng thời các đối tượng đó (nếu cần thiết trong tính toán)

▪ Hàm phân thức bậc nhất / bậc nhất liên tục trên một đoạn thì đạt **giá trị lớn nhất và nhỏ nhất** tại hai đầu mút của đoạn đó.



▪ Tổng khoảng cách từ 1 điểm thuộc đồ thị tới 2 đường tiệm cận là:

$$D=\sqrt{X^2+Y^2}=\sqrt{X^2+\frac{k^2}{X^2}}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của D:

$$D=\sqrt{X^2+\frac{k^2}{X^2}}\geq\sqrt{2\sqrt{X^2\frac{k^2}{X^2}}}=\sqrt{2|k|}$$

(Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số không âm)

$\Rightarrow D_{\min}=\sqrt{2|k|}$, dấu "=" xảy ra khi $X^4=k^2\Leftrightarrow X^2=|k|$

$\Leftrightarrow X=\pm\sqrt{|k|}$

Vị trí M để xảy ra $D_{\min}$ là: $M=$ Trục đối xứng $\cap$ Đồ thị hàm số.

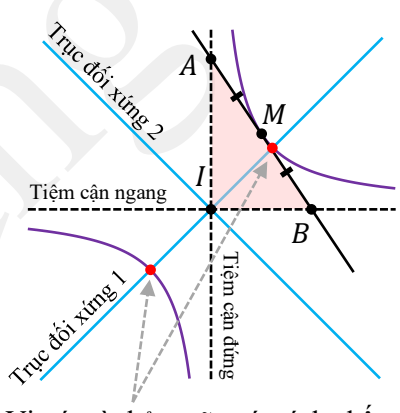
▪ Cho hàm phân thức: $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ tiếp tuyến tại tiếp điểm M cắt tiệm cận đứng, tiệm cận ngang lần lượt ở A và B thì:

– M luôn là trung điểm của AB.

– Diện tích ΔIAB không đổi: $S_{\Delta IAB}=\frac{2}{c^2}|ad-bc|$.

– Chu vi ΔIAB nhỏ nhất khi $M=$ Trục đối xứng $\cap$ Đồ thị hàm số.

(I là giao điểm của 2 đường tiệm cận)



Vị trí mà thỏa mãn các tính chất:

– Tổng khoảng cách từ điểm tới 2 đường tiệm cận nhỏ nhất.

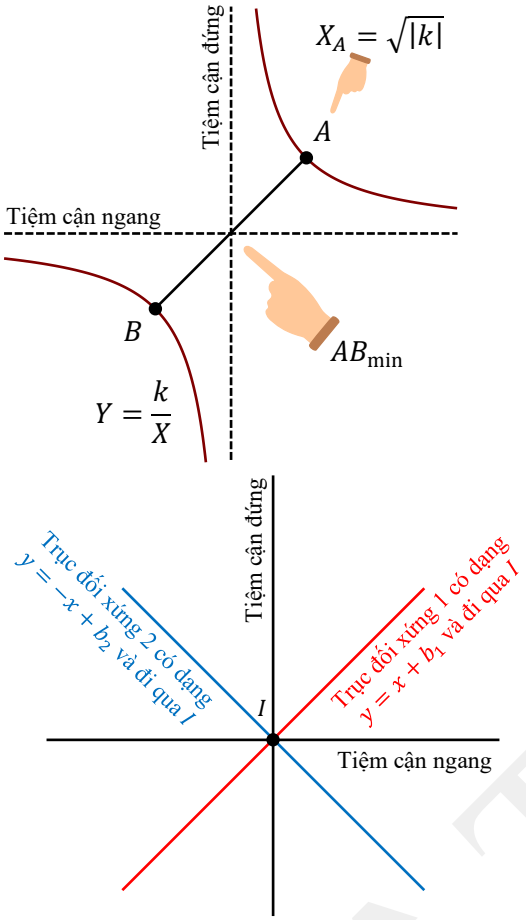
– Khoảng cách từ điểm tới tâm đối xứng nhỏ nhất.

– Chu vi ΔIAB nhỏ nhất.

– Khoảng cách giữa 2 điểm thuộc 2 nhánh của đồ thị hàm số nhỏ nhất.

Thầy Lê Trung Kiên

▪ Cho hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$ có đồ thị (C). Hãy tìm trên (C) hai điểm A và B thuộc hai nhánh đồ thị hàm số sao cho khoảng cách AB ngắn nhất.



Biến đổi công thức hàm về dạng $Y=\frac{k}{X}$

Giả sử $X_A>0, X_B<0$

$$AB^2=(X_A-X_B)^2+\left(\frac{k}{X_A}-\frac{k}{X_B}\right)^2$$
$$=(X_A-X_B)^2+k^2\cdot\frac{(X_A-X_B)^2}{X_A^2X_B^2}$$
$$=(X_A-X_B)^2\left(1+\frac{k^2}{X_A^2X_B^2}\right)$$

Ta có: $X_A^2X_B^2=\left(X_A\cdot(-X_B)\right)^2\leq\left(\frac{X_A-X_B}{2}\right)^4$

(Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số không âm)

$$\Rightarrow AB^2\geq(X_A-X_B)^2\left(\underbrace{1+\frac{16k^2}{(X_A-X_B)^4}}_{\geq 2\sqrt{\frac{16k^2}{(X_A-X_B)^4}}}\right)\geq 8|k|$$

$$\Rightarrow AB\geq\sqrt{8|k|}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}X_A=-X_B\\X_A-X_B=2\sqrt{|k|}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow X_A=-X_B=\sqrt{|k|}$$

Khi đó: A, B là giao của trục đối xứng (trục có thể cắt đồ thị) với đồ thị hàm số.

g) Điều kiện đồ thị cắt đường thẳng tại 2 điểm

Bài toán và phương pháp giải : Tìm điều kiện để đồ thị cắt đường thẳng tại 2 điểm phân biệt

Tìm tham số để đồ thị $(C): y=\frac{ax+b}{cx+d}$ cắt đường thẳng $(\Delta): y=ex+f$ tại hai điểm phân biệt

▪ Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Δ:

$$\frac{ax+b}{cx+d}=ex+f\xrightarrow{\text{Quy đồng và thu gọn}}Ax^2+Bx+C=0\ (*)$$

▪ Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác $-\frac{d}{c}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}A\neq 0\\\Delta_{(*)}>0\\A\left(-\frac{d}{c}\right)^2+B\left(-\frac{d}{c}\right)+C\neq 0\end{cases}\Rightarrow\text{tìm được tham số}$$

h) Điểm có tọa độ nguyên

Bài toán và phương pháp giải : bài toán tìm điểm có tọa độ nguyên

Cho đường cong (C) có phương trình $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ (hàm phân thức). Trong đó $P(x)$, $Q(x)$ và thương số và số dư khi đem chia $P(x)$ cho $Q(x)$ đều là các đa thức với hệ số nguyên. Hãy tìm những điểm có tọa độ nguyên của đường cong?

Chú ý: Những điểm có tọa độ nguyên là những điểm sao cho cả hoành độ và tung độ của điểm đó đều là số nguyên.

Bước 1: Thực hiện chia đa thức $P(x)$ cho $Q(x)$ ta được thương số là $H(x)$ và $Q(x)$, ta suy ra:

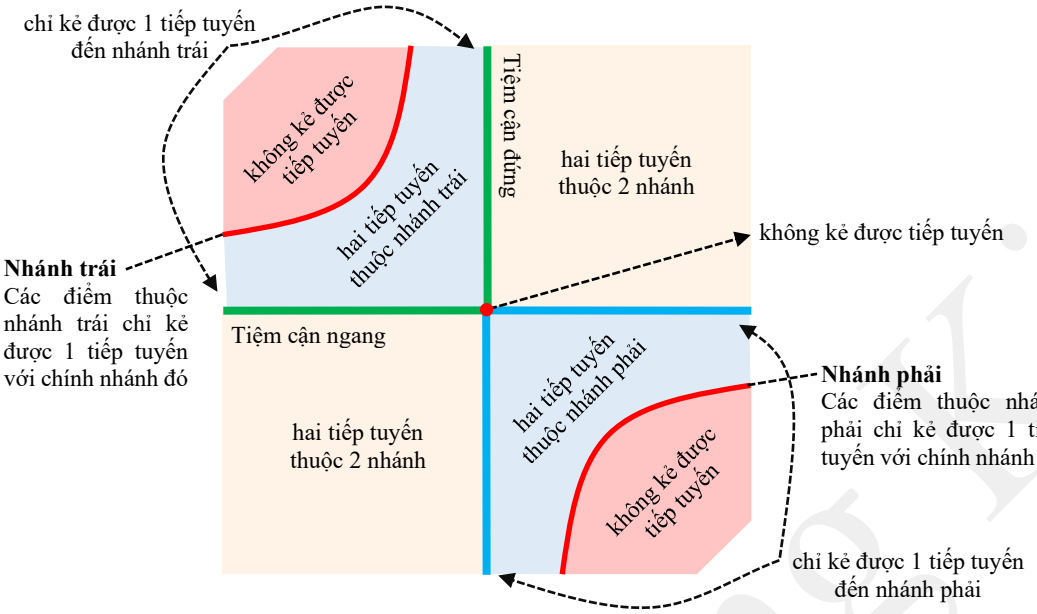
$$y = \frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{k}{Q(x)} \text{ (với } k \in \mathbb{Z})$$

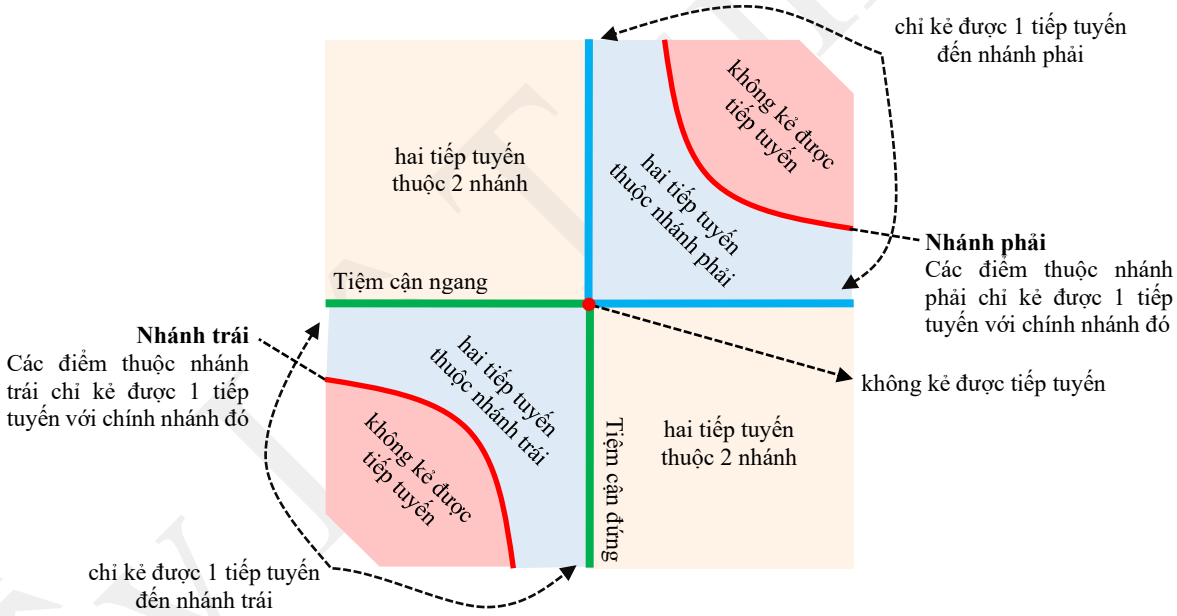
Bước 2: $y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow H(x) + \frac{k}{Q(x)} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{k}{Q(x)} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow Q(x)$ là ước của số k

Bước 3: Lần lượt cho $Q(x)$ nhận giá trị là các ước của k để tìm giá trị của x (rồi suy ra y tương ứng).

Thầy Lê Trung

i) Tập hợp các điểm kẻ tiếp tuyến đến đồ thị





Thầy Trần Phương Kiên

302. Hàm bậc 2 / bậc 1

Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ (với điều kiện tử không chia hết cho mẫu)

a) Khảo sát và vẽ đồ thị

Bài toán và phương pháp giải : Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

Bước 1: Tìm tập xác định $D = R\backslash\left\{-\frac{n}{m}\right\}$.

Bước 2: Tìm tiệm cận:

▪ Tiệm cận đứng: tính $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{n}{m}\right)^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{n}{m}\right)^-} f(x) \Rightarrow$ tiệm cận đứng $x = -\frac{n}{m}$.

▪ Tiệm cận xiên:

Tính $A = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ và $B = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - Ax)$

Tính $A = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ và $B = \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - Ax)$

$\Rightarrow$ Tiệm cận xiên $y = Ax + B$.

▪ Xác định trạng thái của hàm số tại vô cực: tính $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Lưu ý: Hàm số không có tiệm cận ngang.

Bước 3: Tính $f'(x) \rightarrow$ Giải $f'(x) = 0$ và tính giá trị $f(x)$ tại các nghiệm của $f'(x) = 0$

Bước 4: Lập bảng biến thiên

Nhận xét về khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Nhận xét về cực đại, cực tiểu của hàm số.

(Nếu bài chỉ yêu cầu xét tính biến thiên thì làm đến đây rồi ngừng!)

Bước 5: Lập bảng giá trị (nếu cần), các giá trị x thường được lấy ở 1 bên so với tiệm cận đứng và gần tiệm cận đứng.

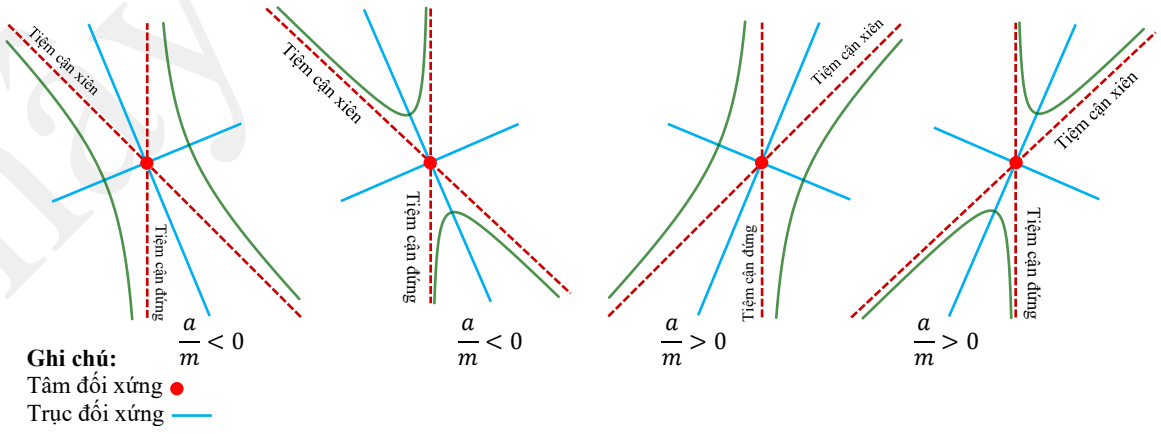
Vẽ đồ thị hàm số (vẽ hệ trục Oxy → Vẽ tiệm cận đứng → Vẽ tiệm cận xiên → chấm các điểm thuộc bảng giá trị (nếu có) → vẽ phác đồ thị dựa vào bảng biến thiên (nếu cần) → vẽ nét cong cho đồ thị).

Nhận xét:

▪ Đồ thị hàm số nhận giao điểm của 2 tiệm cận làm tâm đối xứng.

▪ Đồ thị hàm số nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi 2 đường tiệm cận làm trục đối xứng.

b) Các dạng đồ thị



c) Cực trị

Cho hàm số $y=\frac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ (với $a\neq 0, m\neq 0$ và tử không chia hết cho mẫu).

Tính đạo hàm y'. Giả sử sau khi tính đạo hàm ta được: $y'=\frac{g(x)}{(mx+n)^2}$

▪ Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow$ Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác $-\frac{n}{m}$

$$\Leftrightarrow g(x)=0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt} \neq -\frac{n}{m} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{g(x)}>0 \\ g\left(-\frac{n}{m}\right)\neq 0 \end{cases}$$

▪ Kỹ thuật tính nhanh cực trị: nếu $y=\frac{u(x)}{v(x)}$ có điểm cực trị là $x=x_0$ thì $y(x_0)=\frac{u(x_0)}{v(x_0)}=\frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$

▪ Phương trình đường thẳng đi qua CĐ, CT là $y=\frac{u'(x)}{v'(x)}=\frac{2a}{m}x+\frac{b}{m}$

d) Tiệm cận

▪ Các phương pháp tìm tiệm cận xiên của hàm số bậc 2/bậc 1. Giả sử tiệm cận xiên là $y=Ax+B$

Cách 1: Tính giới hạn (thường dùng khi hàm số đã cũ thể)

Tính $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ và $B=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-Ax)$ (hoặc tính $A=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ và $B=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-Ax)$)

$\Rightarrow$ Tiệm cận xiên $y=Ax+B$.

Lưu ý: có thể tính nhanh A bằng công thức $A=\frac{a}{m}$.

Cách 2: Chia đa thức (thường dùng khi hàm chứa tham số)

Tiệm cận xiên: $y=$ Thương số khi đem chia Tử số cho Mẫu số.

Cách 3: Sơ đồ hoocne (thường dùng khi hàm chứa tham số)

Lập sơ đồ hoocne như sau:

Nghiệm của mẫu số = 0 $\dashrightarrow$

	a	b	c
$-\frac{n}{m}$	?1	?2	?3

Sơ đồ hoocne tuân theo nguyên tắc: "Đầu rơi, nhân ngang; cộng chéo".

Tiệm cận xiên: $y=\frac{1}{m}(?1\times x+?2)$

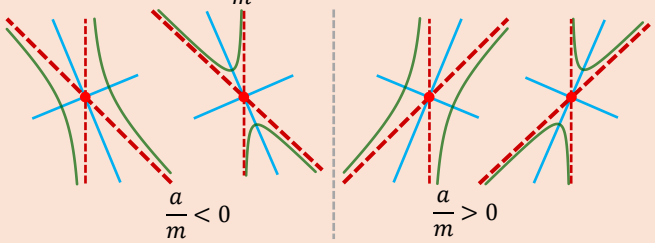
Thầy Lê Văn Kiên

e) Dấu hệ số

Hàm số $y = \frac{ax^2+bx+c}{mx+n}$

▪ Dấu của $\left(\frac{a}{m}\right)$ = Dấu của giá trị hàm số khi $x \to +\infty$ = Dấu của hệ số góc của tiệm cận xiên

Tiệm cận xiên đi lên từ trái qua phải thì $\frac{a}{m} > 0$, tiệm cận xiên đi xuống từ trái qua phải thì $\frac{a}{m} < 0$.



▪ $x = -\frac{n}{m}$ là tiệm cận đứng

▪ $y = \frac{c}{n}$ là giao của đồ thị hàm số và Oy

▪ $-\frac{b}{2a}$ là hoành độ trung điểm của giao điểm của đồ thị hàm số và trục Ox (nếu có giao điểm với Ox)

▪ $\frac{c}{a}$ là tích của các hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số và trục Ox (nếu có giao điểm với Ox)

▪ $\frac{b}{m}$ là tung độ giao điểm của đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị và trục tung (nếu có cực trị)

f) Bài toán min, max

Từ M bất kỳ ∈ đồ thị hàm số kẻ tiếp tuyến đối với đồ thị, tiếp tuyến này cắt tiệm cận đứng và xiên tại A và B, khi đó ta có:

▪ M luôn là trung điểm AB (cũng đúng cho hàm bậc nhất/bậc nhất).

▪ Tích khoảng cách từ M đến 2 đường tiệm cận là không đổi (cũng đúng cho hàm bậc nhất/bậc nhất).

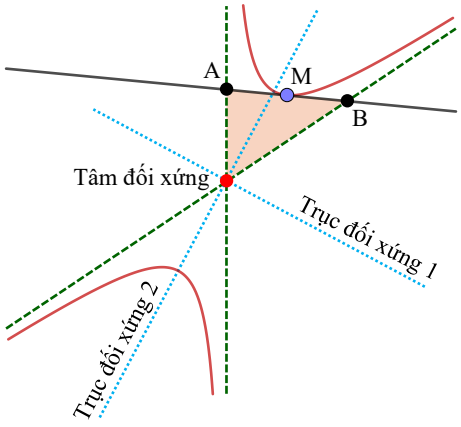
▪ Diện tích ΔIAB không đổi (cũng đúng cho hàm bậc nhất/bậc nhất).

▪ Chu vi ΔIAB nhỏ nhất ⇔ IA = IB ⇔ M = Đồ thị hàm số ∩ Trục đối xứng (cũng đúng cho hàm bậc nhất/bậc nhất).

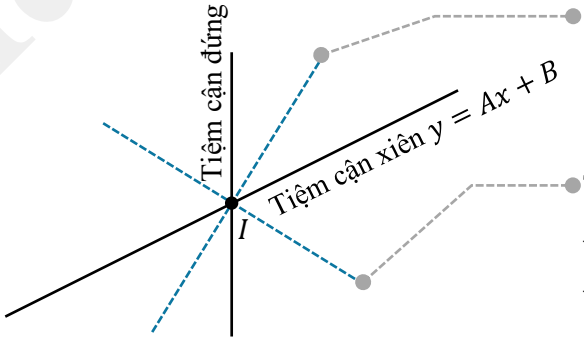
▪ Hai điểm P, Q thuộc 2 nhánh của đồ thị, khi đó PQ ngắn nhất ⇔ P và Q = Đồ thị hàm số ∩ Trục đối xứng (cũng đúng cho hàm bậc nhất/bậc nhất).

▪ Khoảng cách từ M tới tâm đối xứng nhỏ nhất ⇔ M = Đồ thị hàm số ∩ Trục đối xứng (cũng đúng cho hàm bậc nhất/bậc nhất).

▪ Tổng khoảng cách từ M tới 2 đường tiệm cận nhỏ nhất ⇔ M = Đồ thị hàm số ∩ Trục đối xứng (cũng đúng cho hàm bậc nhất/bậc nhất).



Đặc điểm trục đối xứng



Trục đối xứng 1:

– Có hệ số góc = $\tan\left(\frac{\arctan A+\frac{\pi}{2}}{2}\right)$

– Đi qua I (là tâm đối xứng của đồ thị)

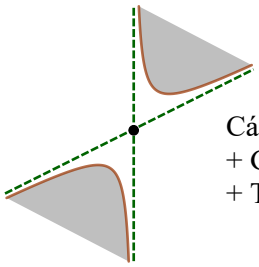
Trục đối xứng 2:

– Có hệ số góc = $\tan\left(\frac{\arctan A+\frac{\pi}{2}}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$

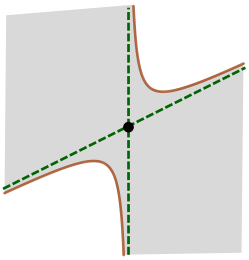
– Đi qua I (là tâm đối xứng của đồ thị)

(góc đo bằng radian)

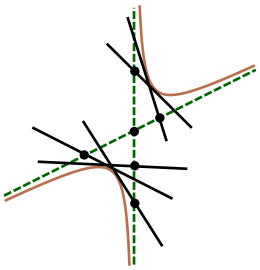
g) Tập hợp các điểm kẻ tiếp tuyến đến đồ thị



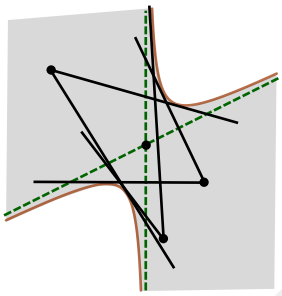
Các điểm nằm trên mặt phẳng tọa độ **không kẻ được tiếp tuyến tới đồ thị** hàm số là:
+ Giao điểm của 2 đường tiệm cận.
+ Tập hợp các điểm nằm bên trong của hyperbol tức là miền tô đậm.



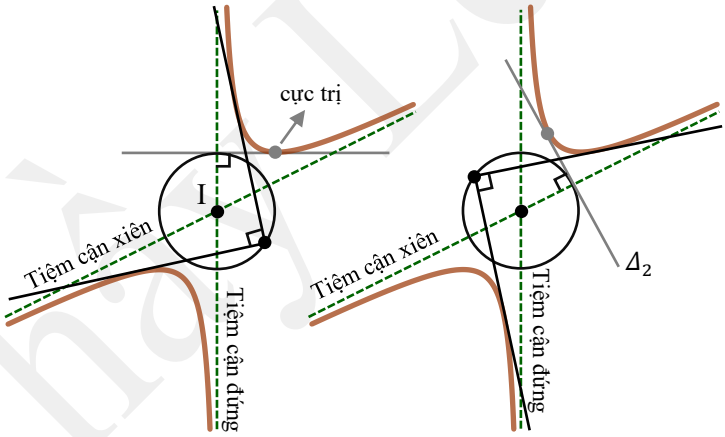
Các điểm **kẻ được tiếp tuyến đến đồ thị** hàm số là:
+ Tập hợp các điểm nằm trên Hyperbol.
+ Các điểm nằm ngoài Hyperbol (miền tô đậm) trừ giao điểm của 2 đường tiệm cận.



Các điểm **kẻ được đúng một tiếp tuyến đến đồ thị** hàm số là:
+ Tập hợp các điểm nằm trên đồ thị.
+ Các điểm nằm trên tiệm cận đứng, tiệm cận xiên bỏ đi giao điểm của 2 đường tiệm cận.



Các điểm **kẻ được 2 tiếp tuyến đến đồ thị** hàm số là các điểm nằm ở ngoài Hyperbol đồng thời bỏ đi các điểm nằm trên tiệm cận đứng và tiệm cận xiên (miền tô đậm ngoại trừ tiệm cận đứng và tiệm cận xiên)



Tập hợp các điểm mà từ đó **kẻ được 2 tiếp tuyến vuông góc với đồ thị** hàm số là một đường tròn có tâm là giao điểm của 2 đường tiệm cận, ngoại trừ các giao điểm của 2 đường tiệm cận và đường tròn, có bán kính được xác định như sau:
Cách 1:

$$R = \left|y_{\text{giao điểm 2 đường tiệm cận}} - y_{\text{cực trị}}\right|.$$

Cách 2: Viết phương trình đường thẳng vuông góc với tiệm cận xiên và tiếp xúc với đồ thị hàm số, khoảng cách từ I đến đường thẳng này sẽ chính là bán kính.

Thầy Lê Trung Kiên

h) Điểm có tọa độ nguyên

Bài toán và phương pháp giải : bài toán tìm điểm có tọa độ nguyên

Cho đường cong (C) có phương trình $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ (hàm phân thức). Trong đó $P(x)$, $Q(x)$ và thương số và số dư khi đem chia $P(x)$ cho $Q(x)$ đều là các đa thức với hệ số nguyên. Hãy tìm những điểm có tọa độ nguyên của đường cong?

Chú ý: Những điểm có tọa độ nguyên là những điểm sao cho cả hoành độ và tung độ của điểm đó đều là số nguyên.

Bước 1: Thực hiện chia đa thức $P(x)$ cho $Q(x)$ ta được thương số là $H(x)$ và $Q(x)$, ta suy ra:

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{k}{Q(x)} \text{ (với } k \in \mathbb{Z})$$

Bước 2: $y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow H(x) + \frac{k}{Q(x)} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{k}{Q(x)} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow Q(x)$ là ước của số k

Bước 3: Lần lượt cho $Q(x)$ nhận giá trị là các ước của k để tìm giá trị của x (rồi suy ra y tương ứng).

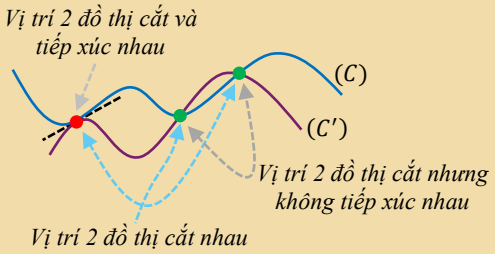
Thầy Lê Trung

MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐỒ THỊ

303. Điều kiện tiếp xúc của 2 đồ thị

Bài toán và phương pháp giải : Điều kiện tiếp xúc của 2 đồ thị

Cho hai hàm số (C): $y = f(x)$ và (C'): $y = g(x)$. Đồ thị (C) và (C') tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi hệ phương trình $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ có nghiệm.

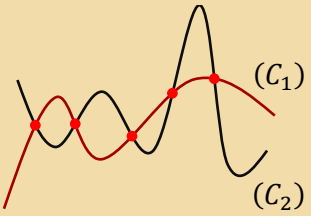


304. Liên hệ giữa số nghiệm phương trình và số giao điểm của đồ thị

Bài toán và phương pháp giải : Liên hệ giữa số nghiệm phương trình và số giao điểm của đồ thị

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C_1) và $y = g(x)$ có đồ thị (C_2).
Phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là $f(x) = g(x)$ (1).
Khi đó:

- Số giao điểm của (C_1) và (C_2) bằng số nghiệm của phương trình (1).
- Nghiệm x_0 của phương trình (1) chính là hoành độ x_0 của giao điểm.
- Để tính tung độ y_0 của giao điểm, ta thay hoành độ x_0 vào $y = f(x)$ hoặc $y = g(x)$. Điểm $M(x_0; y_0)$ là giao điểm của (C_1) và (C_2).



305. Tìm điểm cố định

Bài toán và phương pháp giải : bài toán tìm điểm cố định của họ đường cong

Xét họ đường cong (C_m) có phương trình $y = f(x, m)$, trong đó $f(x)$ là hàm đa thức theo biến x với m là tham số sao cho bậc của m không quá 2. Tìm những điểm cố định thuộc họ đường cong khi m thay đổi.
Phương pháp giải
Bước 1: Đưa phương trình $y = f(x, m)$ về dạng phương trình theo ẩn m có dạng sau:

$$Am + B = 0 \text{ hoặc } Am^2 + Bm + C = 0$$

Bước 2: Cho các hệ số bằng 0, ta thu được hệ phương trình và giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

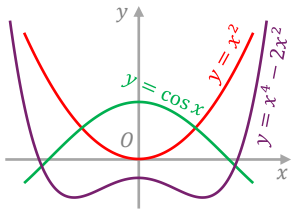
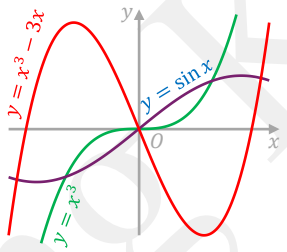
Bước 3: Kết luận:

- Nếu hệ vô nghiệm thì họ đường cong (C_m) không có điểm cố định.
- Nếu hệ có nghiệm thì nghiệm đó là điểm cố định của (C_m).

BIẾN ĐỔI ĐỒ THỊ HÀM SỐ

306. Hàm chẵn, lẻ

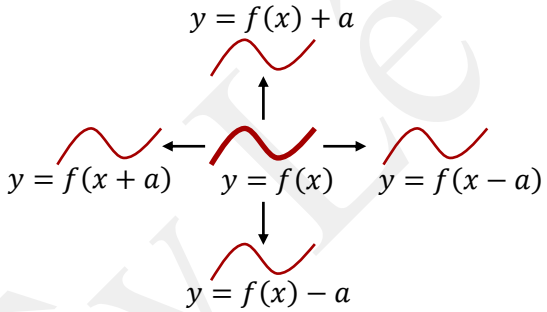
D là tập xác định của hàm số $y = f(x)$

Hàm số chẵn	Hàm số lẻ
$f(x)$ là **hàm số chẵn** nếu: $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ và $f(-x) = f(x)$  Hàm số chẵn đối xứng qua trục Oy.	$f(x)$ là **hàm số lẻ** nếu: $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$  Hàm số lẻ đối xứng qua gốc tọa độ.

307. Tịnh tiến đồ thị

Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $a > 0$

$y = f(x) + a$	Tịnh tiến $f(x)$ lên trên a đơn vị
$y = f(x) - a$	Tịnh tiến $f(x)$ xuống dưới a đơn vị
$y = f(x + a)$	Tịnh tiến $f(x)$ qua bên trái a đơn vị
$y = f(x - a)$	Tịnh tiến $f(x)$ qua bên phải a đơn vị

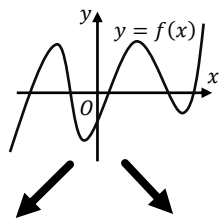


Để dễ nhớ, ta sử dụng quy tắc sau:
"Lên cộng, xuống từ, trái cộng, phải trừ"
Nếu thêm vào phần x thì tịnh tiến theo phương x
Nếu thêm vào phần y thì tịnh tiến theo phương y

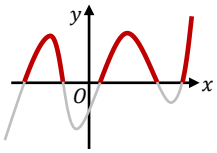
Thầy Lê Trung Kiên

308. f(x) → |f(x)| hoặc f(|x|) hoặc |f(|x|)|

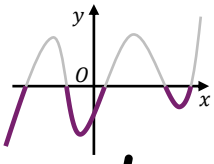
Từ đồ thị $y = f(x)$ suy ra đồ thị $y = |f(x)|$

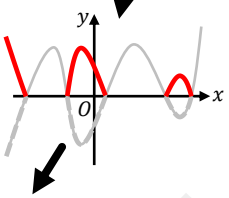


Giữ nguyên phần phía trên trục Ox của đồ thị hàm số $y = f(x)$

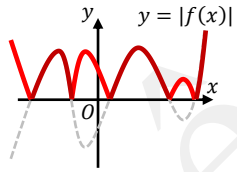


Lấy đối xứng phần phía dưới trục Ox của đồ thị hàm số $y = f(x)$ qua trục Ox

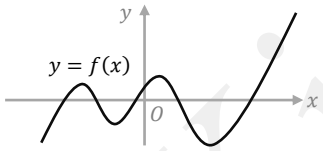




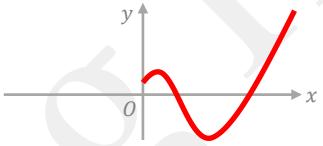
Kết hợp 2 phần này ta được đồ thị hàm số $y = |f(x)|$



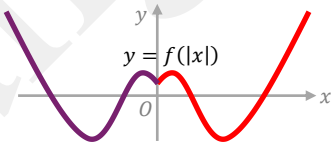
Từ đồ thị $y = f(x)$ suy ra đồ thị $y = f(|x|)$



Giữ lại phần bên phải trục Oy của đồ thị hàm số $y = f(x)$

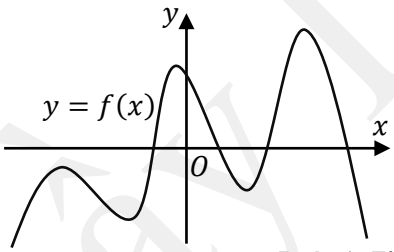


Lấy đối xứng phần giữ lại qua trục Oy

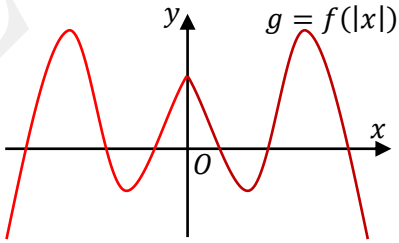


Đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ là hợp của phần giữ lại và phần sau khi lấy đối xứng

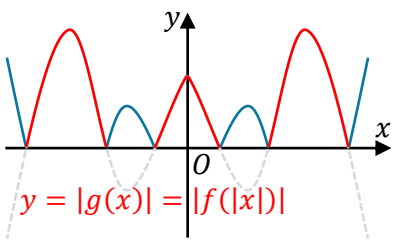
Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $y = |f(|x|)|$



Bước 1: Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $g(x) = f(|x|)$



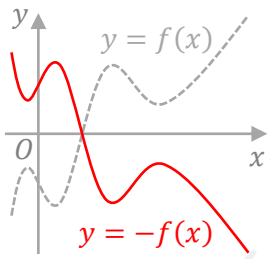
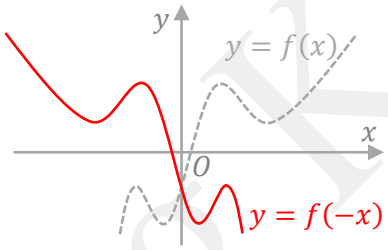
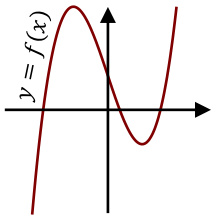
Bước 2: Từ đồ thị hàm số $y = g(x)$ suy ra đồ thị hàm số $y = |g(x)|$

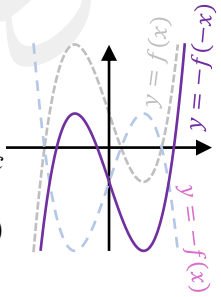


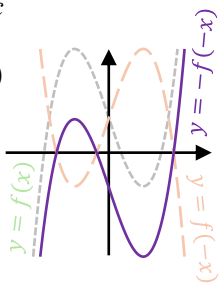
Đồ thị hàm số $y = |g(x)|$ chính là đồ thị hàm số $y = |f(|x|)|$

Thầy Lê Trung Kiên

309. f(x) → -f(x) hoặc f(-x) hoặc -f(-x)

<table>
<tr><td>Từ đồ thị $y=f(x)$, suy ra đồ thị $y=-f(x)$ bằng cách lấy đối xứng đồ thị $y=f(x)$ qua trục hoành.</td><td> 
</td></tr>
<tr><td>Từ đồ thị $y=f(x)$, suy ra đồ thị $y=f(-x)$ bằng cách lấy đối xứng đồ thị $y=f(x)$ qua trục tung</td><td> 
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Từ đồ thị $y=f(x)$ suy ra đồ thị $y=-f(-x)$
 

Lấy đối xứng toàn bộ đồ thị hàm số $y=f(x)$ qua trục hoành ta được đồ thị hàm số $y=-f(x)$.
Tiếp tục lấy đối xứng toàn bộ đồ thị hàm số $y=-f(x)$ qua trục tung ta được đồ thị hàm số $y=-f(-x)$.
Hoặc
Lấy đối xứng toàn bộ đồ thị hàm số $y=f(x)$ qua trục tung ta được đồ thị hàm số $y=f(-x)$.
Tiếp tục lấy đối xứng toàn bộ đồ thị hàm số $y=f(-x)$ qua trục hoành ta được đồ thị hàm số $y=-f(-x)$.
 

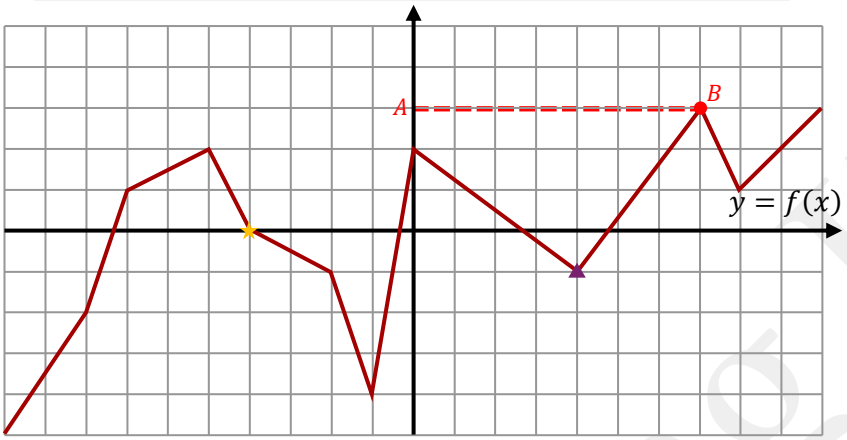
 
</td></tr>
</table>

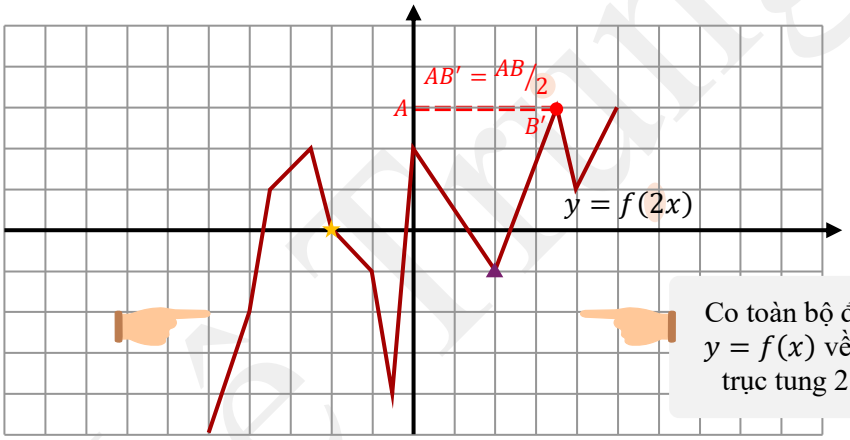
Thầy Lê Phùng Kiên

310. f(x) → f(kx) (k > 1)

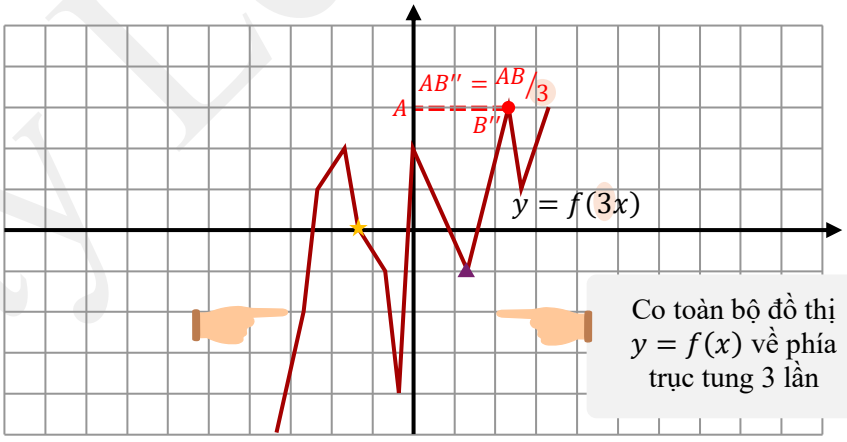
Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $y = f(kx)$ (Với $k > 1$)

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $y = f(kx)$ (Với $k > 1$) bằng cách co toàn bộ đồ thị về phía trục tung k lần.





Co toàn bộ đồ thị $y = f(x)$ về phía trục tung 2 lần



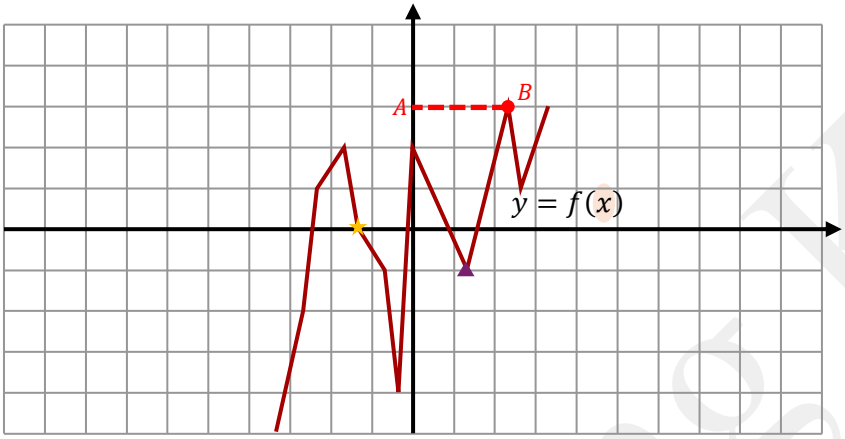
Co toàn bộ đồ thị $y = f(x)$ về phía trục tung 3 lần

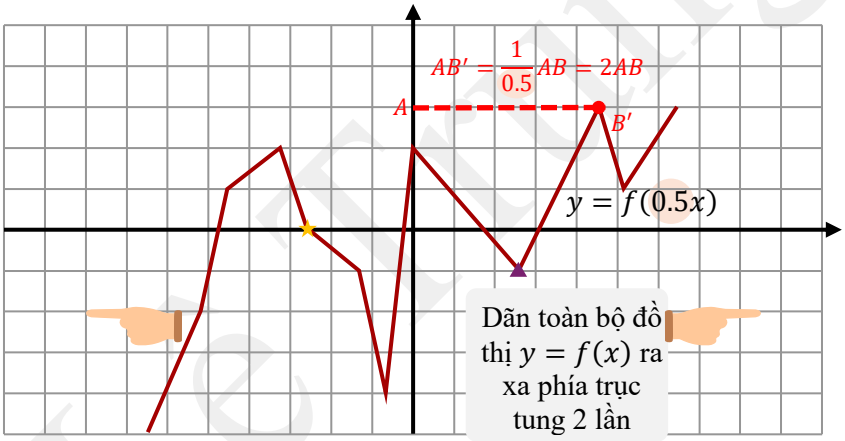
Thầy Lê Hồng Kiên

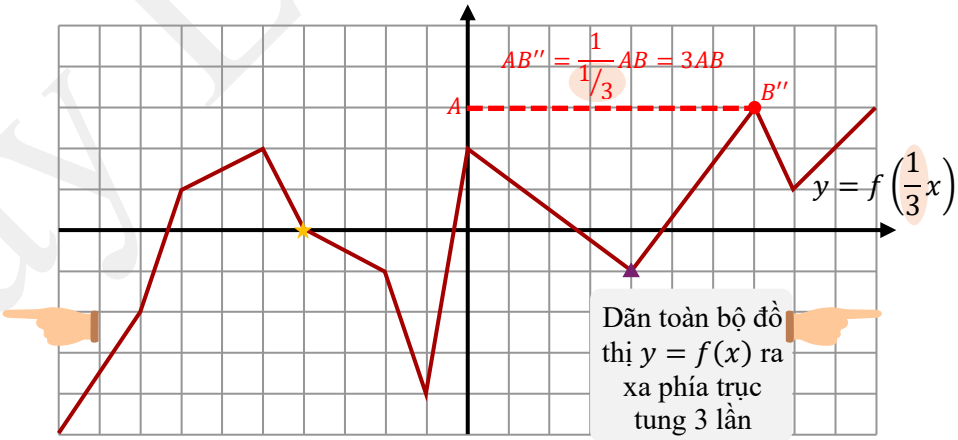
311. f(x) → f(kx) (0 < k < 1)

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $y = f(kx)$ (Với $k \in (0; 1)$)

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $y = f(kx)$ (Với $k \in (0; 1)$) bằng cách dãn toàn bộ đồ thị ra xa phía trục tung $\frac{1}{k}$ lần.





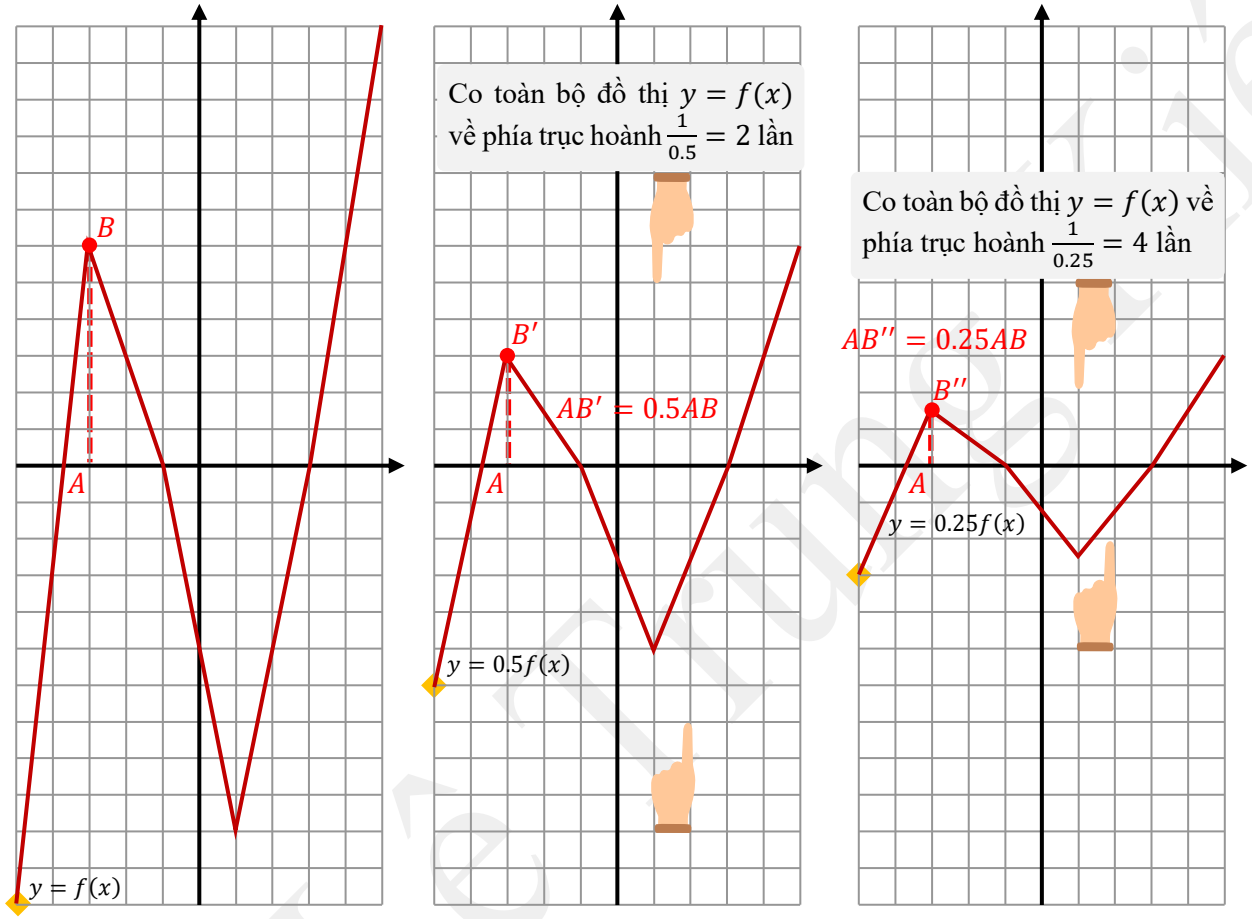


Thầy Lê Trung Kiên

312. f(x) → kf(x) với 0 < k < 1

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $y = kf(x)$ (với $k \in (0;1)$)

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $y = kf(x)$ (với $k \in (0;1)$) bằng cách co toàn bộ đồ thị hàm số $y = f(x)$ về phía trục hoành $\frac{1}{k}$ lần.

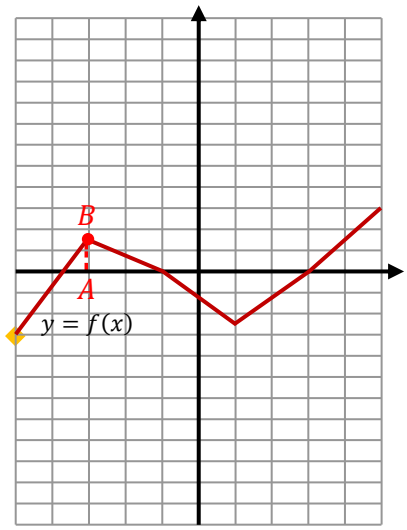


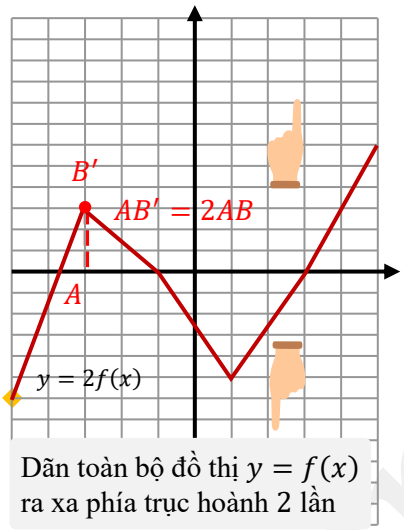
Thầy Lê Trung Kiên

313. f(x) → kf(x) với k > 1

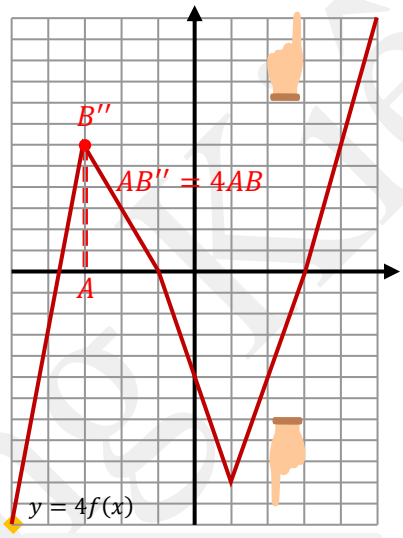
Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $y = kf(x)$ (với $k > 1$)

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $y = kf(x)$ (với $k > 1$) bằng cách dãn toàn bộ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ra xa phía trục hoành k lần.





Dãn toàn bộ đồ thị $y = f(x)$ ra xa phía trục hoành 2 lần



Dãn toàn bộ đồ thị $y = f(x)$ ra xa phía trục hoành 4 lần

314. f(x) → k_1f(k_2x+a)+b

Từ đồ thị $y = f(x)$ suy ra đồ thị $y = k_1 f(k_2 x + a) + b$

Cần trải qua các bước sau:

Bước 1: Từ $y = f(x)$ suy ra $f_1(x) = f(k_2 x)$

Bước 2: Từ $y = f_1(x)$ suy ra $f_2(x) = f_1(x + a)$

Bước 3: Từ $y = f_2(x)$ suy ra $f_3(x) = k_1 f_2(x)$

Bước 4: Từ $y = f_3(x)$ suy ra $f_4(x) = f_3(x) + b$

Đồ thị của $y = f_4(x)$ chính là đồ thị của hàm số $y = k_1 f(k_2 x + a) + b$.

315. f(x)×h(x) → |f(x)|×h(x)

Lưu ý: $|f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{nếu } f(x) \geq 0 \\ -f(x), \text{nếu } f(x) < 0 \end{cases}$

Từ $y = f(x) \cdot h(x)$ suy ra $y = |f(x)| \cdot h(x)$ như sau: $|f(x)|.h(x) = \begin{cases} f(x) \cdot h(x), \text{nếu } f(x) \geq 0 \\ -f(x) \cdot h(x), \text{nếu } f(x) < 0 \end{cases}$

Thầy Lê Trường Kiên

NGUYÊN HÀM

316. Khái niệm nguyên hàm

▪ Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K. Hàm số $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên K nếu: $F'(x) = f(x), \forall x \in K$.
▪ Một hàm số $y = f(x)$ nếu có nguyên hàm thì nó có vô số nguyên hàm, và tập hợp tất cả các nguyên hàm của một hàm số được gọi là ***họ nguyên hàm*** của hàm số đó.
▪ Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì ***họ nguyên hàm*** của $f(x)$ trên K là:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, (\text{Với } C \in \mathbb{R})$$

317. Bấm máy kiểm tra nguyên hàm

▪ Cú pháp bấm máy tính kiểm tra xem hàm $F(x)$ có phải là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ hay không?

$$\frac{d}{dx}(F(x))|_{x=x} - f(x)$$

(Ta đi kiểm tra bằng máy tính xem đạo hàm của $F(x)$ có bằng $f(x)$ hay không?)
CALC một vài giá trị x vào biểu thức (giá trị x phải thỏa điều kiện xác định của các hàm số). Nếu kết quả máy tính trả lại ra 0 hoặc ra dạng số $\times 10^{-\text{số nguyên dương}}$ thì khả năng cao $F(x)$ chính là nguyên hàm của $f(x)$. Nếu trong quá trình CALC chỉ cần có một kết quả máy tính trả lại ra khác 0 và khác số có dạng số $\times 10^{-\text{số nguyên dương}}$ thì chắc chắn $F(x)$ không là nguyên hàm của $f(x)$. Nên CALC khoảng từ 4 giá trị trở lên.

318. Một số định lý về liên tục, có đạo hàm, có nguyên hàm

▪ Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[a; b]$ thì $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$.

▪ Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì không đủ cơ sở để kết luận $y = f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[a; b]$.

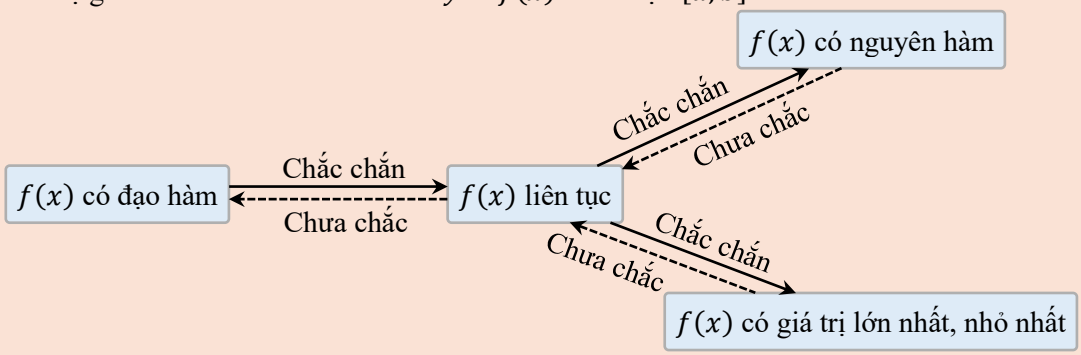
▪ Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì $y = f(x)$ có nguyên hàm trên đoạn $[a; b]$.

▪ Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì $y = f(x)$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[a; b]$.

▪ Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[a; b]$ thì $y = f(x)$ có nguyên hàm trên đoạn $[a; b]$.

▪ Nếu $F(x)$ và $G(x)$ là 2 nguyên hàm của cùng một hàm số $f(x)$ thì $F(x) - G(x) = C$, với C là hằng số.

▪ Sơ đồ liên hệ giữa các tính chất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$



319. Bảng nguyên hàm

Nguyên hàm đa thức

$\int 0dx = C$	$\int dx = x + C$	$\int kdx = kx + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$	(Với $n \neq -1$)

Nguyên hàm phân thức

$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln\lvert ax+b\rvert + C$
$\int \frac{1}{x^2} dx = \frac{-1}{x} + C$	$\int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{-1}{(ax+b)} + C$
$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$	$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$
$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \tanh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \\ \frac{1}{2a} \ln\frac{a+x}{a-x} + C \ (a^2 > x^2) \end{cases}$	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \begin{cases} -\frac{1}{a} \coth\left(\frac{x}{a}\right) + C \\ \frac{1}{2a} \ln\frac{x-a}{x+a} + C \ (x^2 > a^2) \end{cases}$

Nguyên hàm lượng giác

$\int \cos x \, dx = \sin x + C$	$\int \cos(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} \cdot \sin(ax+b) + C$
$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$	$\int \sin(ax+b) \, dx = -\frac{1}{a} \cdot \cos(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \cdot \tan(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cdot \cot(ax+b) + C$
$\int \sec x \, dx = \ln(\sec x + \tan x) + C = \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right) + C$	
$\int \csc x \, dx = \ln(\csc x - \cot x) + C = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C$	

Nguyên hàm logarit

$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$	$\int \ln(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} \cdot [(ax+b)\ln(ax+b) - (ax+b)] + C$

Nguyên hàm hàm mũ

$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax+b} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ (a > 0, a \neq 1)$	$\int a^{Ax+B} dx = \frac{1}{A} \cdot \frac{a^{Ax+B}}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1)$

Nguyên hàm chứa căn

$\int \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$	$\int \sqrt{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{(ax+b)^3} + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}} dx = \frac{1}{a} \cdot 2\sqrt{ax+b} + C$
$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\cos(x)} + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C \\ -\arccos\left(\frac{x}{a}\right) + C \ (a^2 > x^2) \end{cases}$	

Lưu ý: C là một hằng số tùy ý thuộc $\mathbb{R}$; k, n, a, b, c, d là những số thuộc $\mathbb{R}$.

Trong các công thức có a^2 ta luôn coi như $a \geq 0$.

$$\tanh x = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1};\ \coth x = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1};\ \sec x = \frac{1}{\cos x};\ \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$\ln x = \log_e x$; e là một hằng số thuộc $\mathbb{R}$ và $e \approx 2.718281828$

320. Tính chất nguyên hàm

Nguyên hàm của tổng, hiệu	$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
Nguyên hàm nhân với hằng số	$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx\ (k \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$
Nguyên hàm từng phần	$\int udv = uv - \int vdu$ Hệ quả: $\int uv'dx = uv - \int u'vdx$ $\int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx$ (Với u, v là hai hàm theo biến số x)
Bảo toàn dạng nguyên hàm	Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(g(x))d(g(x))$ (Lưu ý: $g'(x)dx = d(g(x))$) $= \int f(u)du = F(u) + C$ (Với $u = g(x)$) Một số hệ quả $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{d(f(x))}{f(x)} = \ln\lvert f(x)\rvert + C$ $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = \int \frac{d(f(x))}{\sqrt{f(x)}} = 2\sqrt{f(x)} + C$ (Lưu ý: $f'(x)dx = d(f(x))$)
Nguyên hàm của đạo hàm	$\int f'(x)dx = f(x) + C$
Đạo hàm của nguyên hàm	$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
Vi phân của nguyên hàm	$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$
Nguyên hàm của vi phân	$\int d(f(x)) = f(x) + C$
Nguyên hàm hỗn tạp 2 biến	$\int g(y)dx = \int \frac{g(y)}{y'}dy$ (với $y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dx = \frac{dy}{y'}$)

321. Công thức vi phân

$y = f(x) \Rightarrow dy = f'(x)dx$	$f(x) = u(t) \Rightarrow f'(x)dx = u'(t)dt$	$d(u(x)) = u'(x)dx$
$d(f(x)) = \frac{1}{k}d(kf(x))$	$dx = \frac{1}{k}d(kx)$	$dx = \frac{1}{k}d(kx + C)$
$d(f(x)) = d(f(x) + C)$	$dx = d(x + C)$	

322. Phương pháp đặt ẩn phụ

Giả sử ta cần tính $\int f(x)dx$. Các bước đặt ẩn phụ để tính nguyên hàm

Bước 1: Xác định sẽ đặt ẩn phụ là gì?

Phần được đặt làm ẩn phụ cần phải thỏa mãn ít nhất một trong hai yêu cầu sau:

Yêu cầu 1: Đạo hàm của phần được đặt làm ẩn phụ phải là 1 phần nhân tử riêng có thể tách ra từ $f(x)$, và tất cả các phần còn lại của $f(x)$ có thể biểu diễn theo ẩn phụ.	*Yêu cầu 2*: Đạo hàm của phần được đặt làm ẩn phụ có thể biểu diễn theo chính ẩn phụ đó, và $f(x)$ có thể biểu diễn theo ẩn phụ.
Ví dụ: Tính $I = \int \sin^5 x \cos x \, dx$ Nếu đặt $t = \sin x$ thì $t' = \cos x$ là 1 phần nhân tử có thể tách ra từ $\sin^5 x \cos x$ và phần còn lại $\sin^5 x$ có thể biểu diễn theo t thành t^5.	**Ví dụ**: Tính $I = \int \frac{1}{1+\sqrt{2x+1}} dx$ Nếu đặt $t = \sqrt{2x+1}$ thì $t' = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ có thể biểu diễn t' theo t bằng công thức $t' = \frac{1}{t}$ và $\frac{1}{1+\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{1+t}$.
Bước 2: Tiến hành đặt ẩn phụ.	
Đặt $t = \sin x$	Đặt $t = \sqrt{2x+1}$
Lấy vi phân biểu thức đặt ẩn phụ từ đó suy ra dx	
$\Rightarrow dt = \cos x \, dx$	$\Rightarrow dt = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx \Rightarrow dx = tdt$
Thay thế các thành phần của nguyên hàm theo ẩn phụ và thay thế dx	
$I = \int \sin^5 x \cos x \, dx = \int t^5 \, dt$	$I = \int \frac{1}{1+\sqrt{2x+1}} dx = \int \frac{1}{1+t} \cdot tdt$
Bước 3: Tiến hành lấy nguyên hàm theo ẩn số mới.	
$I = \int t^5 \, dt = \frac{t^6}{6} + C$	$I = \int \frac{t}{1+t} dt = \int \frac{t+1-1}{1+t} dt$ $= \int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = t - \ln\lvert t+1\rvert + C$
Bước 4: Trả lại biến số gốc của nguyên hàm	
$I = \frac{\sin^6 x}{6} + C$	$I = \sqrt{2x+1} - \ln\lvert\sqrt{2x+1}\rvert + C$

(**Lưu ý**: Ta có thể cần đặt ẩn phụ nhiều lần trong một bài toán)

Thầy Lê Thị Thịnh

323. Nguyên tắc đưa vào hoặc đưa ra vi phân

Giả sử có biểu thức $u(x)dx$, để đưa biểu thức $u(x)$ vào bên trong vi phân $d(\dots)$ ta tiến hành lấy nguyên hàm của $u(x)$ và đặt vào bên trong $d(\dots)$, tức là:

$$u(x)dx = d\left(\int u(x)dx\right)$$

(hằng số C cộng thêm là một số cụ thể tùy ý)

Ta có sơ đồ sau về sự đưa vào và đưa ra khỏi vi phân: $\int \dots d(\dots)$ (*Đưa vào lấy nguyên hàm* / *Đưa ra lấy đạo hàm*)

Ví dụ

$$x^2dx = d\left(\int x^2dx\right) = d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{1}{3}d(x^3)$$

$$\sin x\,dx = d\left(\int \sin x\,dx\right) = d(-\cos x) = -d(\cos x)$$

$$\frac{1}{\cos^2 x}dx = d\left(\int \frac{1}{\cos^2 x}dx\right) = d(\tan x)$$

Có thể bỏ qua

tức là ta có thể nhẩm nhanh và viết gọn:

$$x^3dx = \frac{1}{4}d(x^4)$$

$$\cos x\,dx = d(\sin x)$$

Chú ý: Một số phép đưa hàm số vào $d(\dots)$ hay sử dụng:

$dx = \frac{1}{a}d(ax+b)$	$f'(ax+b)dx = \frac{1}{a}d\big(f(ax+b)\big)$
$x^n dx = \frac{1}{n+1}d(x^{n+1})$	$(ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)}d((ax+b)^{n+1})$
$\frac{1}{x}dx = d(\ln x)$	$\frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}d(\ln(ax+b))$
$e^x dx = d(e^x)$	$e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}d(e^{ax+b})$
$a^x dx = \frac{1}{\ln a}d(a^x)$	$a^{cx+d} = \frac{1}{c.\ln a}d(a^{cx+d})$
$\cos x\,dx = d(\sin x)$	$\cos(ax+b) = \frac{1}{a}d(\sin(ax+b))$
$\sin x\,dx = -d(\cos x)$	$\sin(ax+b) = -\frac{1}{a}d(\cos(ax+b))$
$\frac{1}{\cos^2 x}dx = d(\tan x)$	$\frac{1}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a}d(\tan(ax+b))$
$\frac{1}{\sin^2 x} = -d(\cot x)$	$\frac{1}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{1}{a}d(\cot(ax+b))$

Thầy Lê Trung Kiên

324. Phương pháp đưa vào vi phân

Giả sử ta cần tính $\int f(x)dx$. Các bước tính nguyên hàm theo phương pháp đưa vào vi phân:

Bước 1: Nhẩm thử xem ta sẽ đưa phần nào vào trong vi phân. Phần đưa vào trong vi phân phải thỏa mãn tất cả các yêu cầu sau:

Yêu cầu 1: Phần đưa vào phải lấy được nguyên hàm.	*Yêu cầu 2*: Tất cả các phần còn lại phải biểu diễn được theo phần bên trong vi phân sau khi đã đưa được biểu thức nhẩm được vào trong vi phân.

Bước 2: Trình bày: Đưa phần nhẩm được vào bên trong vi phân và tiến hành đặt ẩn phụ mới là phần bên trong vi phân

Bước 3: Tính nguyên hàm theo ẩn phụ mới

Bước 4: Trả lại biến cũ

Sơ đồ minh họa Đưa vào $d(\dots)$

$$\int g[u(x)].u'(x)dx = \int g[u(x)]d(u(x)) = \int g(t)dt$$

Đặt $u(x) = t$

Chú ý:

- Sau khi tính $\int g(t)dt$ theo t, ta phải thay lại $t = u(x)$ để trả lại nguyên hàm về biến x.
- Trong nhiều trường hợp, phương pháp đặt ẩn phụ và phương pháp đưa vào vi phân thực chất chỉ là một cách làm nhưng khác nhau ở cách trình bày.
- Với các học sinh khá giỏi, để tránh dài dòng trong việc đặt ẩn phụ thì có thể sử dụng phương pháp đưa vào vi phân cho nhanh chóng.
- Trong nhiều bài toán, nếu khó thấy biểu thức đưa vào vi phân thì phương pháp đặt ẩn phụ có thể tỏ ra hiệu quả và dễ dàng hơn so với phương pháp đưa vào vi phân.
- Với các học sinh mức độ trung bình thì không cần học phương pháp đưa vào vi phân.

Ví dụ

Sau khi đưa x^2 và $d(\dots)$ ta được $d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{1}{3}d(x^3)$, số $\frac{1}{3}$ là hằng số dạng nhân nên ta rút ra ngoài

Bên trong vi phân $d(\dots)$ có thể cộng hoặc trừ thêm một hằng số tùy ý

Đưa vào

$$\int (x^3+1)^7 x^2 dx = \frac{1}{3}\int (x^3+1)^7 d(x^3) = \frac{1}{3}\int (x^3+1)^7 d(x^3+1)$$

Đặt là t

(Đặt $t = x^3 + 1$)

$$= \frac{1}{3}\int t^7 dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^8}{8} + C = \frac{t^8}{24} + C = \frac{(x^3+1)^8}{24} + C$$

Chuyển qua biến mới — Lấy nguyên hàm — Trả lại biến x

Thầy Lê Trung Kiên

325. Phương pháp lượng giác hóa

Lưu ý: Cách biến đổi lượng giác hóa chỉ sử dụng khi phương pháp đặt ẩn phụ đổi biến số không thể thực hiện được!

Ta thường gặp các trường hợp sau:

$f(x)$ có chứa	Cách biến đổi	Mục đích lượng giác hóa là để có thể áp dụng công thức lượng giác
$\sqrt{a^2-x^2}$ hoặc a^2-x^2	Đặt $x=\lvert a\rvert \sin t, -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow t=\arcsin\frac{x}{\lvert a\rvert}$	$\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=\lvert\cos t\rvert$
	Hoặc đặt $x=\lvert a\rvert\cos t, 0\le t\le\pi$ $\Rightarrow t=\arccos\frac{x}{\lvert a\rvert}$	$\sqrt{1-\cos^2 t}=\sqrt{\sin^2 t}=\lvert\sin t\rvert$
$\sqrt{a^2+x^2}$ hoặc a^2+x^2	Đặt $x=\lvert a\rvert\tan t, -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow t=\arctan\frac{x}{\lvert a\rvert}$	$\sqrt{1+\tan^2 t}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}=\frac{1}{\lvert\cos t\rvert}$
	Hoặc đặt $x=\lvert a\rvert\cot t, 0\le t\le\pi$ $\Rightarrow t=\operatorname{arccot}\frac{x}{\lvert a\rvert}$	$\sqrt{1+\cot^2 t}=\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}}=\frac{1}{\lvert\sin t\rvert}$
$\sqrt{x^2-a^2}$ hoặc x^2-a^2	Đặt $x=\frac{\lvert a\rvert}{\cos t}\to\begin{cases}\text{nếu } x<0 \text{ thì } \frac{\pi}{2}<t\le\pi\\ \text{nếu } x>0 \text{ thì } 0\le t<\frac{\pi}{2}\end{cases}$ $\Rightarrow t=\arccos\frac{\lvert a\rvert}{x}$	$\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}=\sqrt{\tan^2 t}=\lvert\tan t\rvert$
	Đặt $x=\frac{\lvert a\rvert}{\sin t}\to\begin{cases}\text{nếu } x<0 \text{ thì } \frac{-\pi}{2}\le t<0\\ \text{nếu } x>0 \text{ thì } 0<t\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$ $\Rightarrow t=\arcsin\frac{\lvert a\rvert}{x}$	$\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1}=\sqrt{\cot^2 t}=\lvert\cos t\rvert$

Ví dụ: Tính $I=\int\sqrt{4-x^2}dx$

Đặt $x=2\sin t\Rightarrow dx=2\cos t\,dt$ (với $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$)

$I=\int\sqrt{4-x^2}dx=\int\sqrt{4-(2\cos t)^2}\cdot 2\cos t\,dt$

$=2\int\sqrt{4\sin^2 t}\cos t\,dt=4\int\sin t\cos t\,dt$

$=2\int(2\sin t\cos t)dx=2\int\sin 2t\,dt$

$=-\cos 2t+C$

(Vì $x=2\sin t\Rightarrow\frac{x}{2}=\sin t\Rightarrow t=\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$)

$=-\cos\left(2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right)+C$

Ví dụ: Tính $\int\frac{1}{\sqrt{(x^2+9)^2}}dx$

Đặt $x=3\tan t\Rightarrow dx=\frac{3}{\cos^2 t}dt$ (với $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$)

$I=\int\frac{1}{\sqrt{(x^2+9)^2}}dx$

$=\int\frac{1}{\sqrt{(9\tan^2 t+9)^2}}\cdot\frac{3}{\cos^2 t}dt$

$=\int\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{9}{\cos^2 t}\right)^2}}\cdot\frac{3}{\cos^2 t}dt=\int\frac{1}{\frac{9}{\cos^2 t}}\cdot\frac{3}{\cos^2 t}dt$

$=\frac{1}{3}\int dt=\frac{1}{3}t+C$

(Với $x=3\tan t\Rightarrow\frac{x}{3}=\tan t\Rightarrow t=\arctan\frac{x}{3}$)

$=\frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3}+C$

Thầy Lê Trung Kiên

326. Nguyên hàm từng phần

Công thức nguyên hàm từng phần: $\int udv = uv - \int vdu$

Hệ quả:

$$\int uv'dx = uv - \int vu'dx \text{ (Trong đó: } u, v \text{ là hai hàm số theo biến số } x)$$

$$\int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx$$

Các dạng cơ bản

Thực hiện theo phương pháp đưa vào vi phân	Thực hiện theo phương pháp đặt ẩn phụ
$\int$ hàm đa thức $\times \begin{bmatrix}\sin(ax+b)\\ \cos(ax+b)\\ e^{ax+b}\end{bmatrix} dx$ (Đưa vào)	$\int$ hàm đa thức (Đặt là u) $\times \begin{bmatrix}\sin(ax+b)\\ \cos(ax+b)\\ e^{ax+b}\end{bmatrix} dx$ (Đặt là dv)
$\int \ln(ax+b) \times$ hàm đa thức dx (Đưa vào)	$\int \ln(ax+b)$ (Đặt là u) $\times$ hàm đa thức dx (Đặt là dv)
$\int \begin{bmatrix}\sin(cx+d)\\ \cos(cx+d)\end{bmatrix} \times e^{ax+b}dx$ (Đưa vào)	$\int \begin{bmatrix}\sin(cx+d)\\ \cos(cx+d)\end{bmatrix}$ (Đặt là u) $\times e^{ax+b}dx$ (Đặt là dv)

Ví dụ

Ví dụ: Tính $I = \int x \sin 2x\, dx$ theo phương pháp đặt ẩn phụ

Đặt $u = x$, $dv = \sin 2x\, dx$

$\Rightarrow v = \int \sin 2x\, dx = -\dfrac{\cos 2x}{2}$

$I = \int x \sin 2x\, dx = \int xd\left(-\dfrac{\cos 2x}{2}\right) = x \cdot \left(-\dfrac{\cos 2x}{2}\right) - \int \left(-\dfrac{\cos 2x}{2}\right) dx$

$= -\dfrac{x \cos 2x}{2} + \dfrac{1}{2}\int \cos 2x\, dx = -\dfrac{x \cos 2x}{2} + \dfrac{\sin 2x}{4} + C$

Ví dụ

Tính $I = \int \frac{\ln x}{x^2} dx$ theo phương pháp đưa vào vi phân

$I = \int \ln x \cdot \dfrac{1}{x^2} dx = \int \ln x\, d\left(-\dfrac{1}{x}\right) = \ln x \cdot \left(-\dfrac{1}{x}\right) - \int \left(-\dfrac{1}{x}\right) d(\ln x)$

$= \dfrac{-\ln x}{x} + \int \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{x} dx = \dfrac{-\ln x}{x} + \int \dfrac{1}{x^2} dx = \dfrac{-\ln x}{x} - \dfrac{1}{x} + C$

Thầy Lê Minh Tiến

Ví dụ

Tính $I = \int (x^2 + 2x)\ln(3x)\,dx$ theo phương pháp đặt ẩn phụ

Đặt $u = \ln(3x)$, $dv = (x^2 + 2x)dx$

$$\Rightarrow v = \int (x^2 + 2x)dx = \frac{x^3}{3} + x^2$$

$$I = \int (x^2 + 2x)\ln(3x)\,dx = \int \ln(3x)\,d\left(\frac{x^3}{3} + x^2\right) = \left(\frac{x^3}{3} + x^2\right)\ln(3x) - \int \left(\frac{x^3}{3} + x^2\right)d(\ln 3x)$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + x^2\right)\ln(3x) - \int \left(\frac{x^3}{3} + x^2\right)\cdot\frac{1}{x}dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2\right)\ln(3x) - \int \left(\frac{x^2}{3} + x\right)dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + x^2\right)\ln(3x) - \int \left(\frac{x^2}{3} + x\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2\right)\ln(3x) - \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{2} + C$$

Ví dụ

Tính $I = \int \ln(2x + 1)\,dx$ theo phương pháp đưa vào vi phân

$$I = \int \ln(2x + 1)\,dx$$

$$= x\cdot\ln(2x + 1) - \int x\cdot\frac{2}{2x + 1}dx = x\ln(2x + 1) - \int \frac{2x}{2x + 1}dx$$

$$= x\ln(2x + 1) - \int \frac{2x + 1 - 1}{2x + 1}dx = x\ln(2x + 1) - \int \left(1 - \frac{1}{2x + 1}\right)dx$$

$$= x\ln(2x + 1) - \left(x - \frac{1}{2}\ln|2x + 1|\right) + C = x\ln(2x + 1) - x + \frac{\ln|2x + 1|}{2} + C$$

Ví dụ

Tính $I = \int \sin 2x\, e^{5x}dx$ theo phương pháp đưa vào vi phân

$$I = \int \sin 2x\, e^{5x}dx = \int \sin 2x\, d\left(\frac{e^{5x}}{5}\right) = \sin 2x\cdot\frac{e^{5x}}{5} - \int \frac{e^{5x}}{5}d(\sin 2x)$$

$$= \sin 2x\cdot\frac{e^{5x}}{5} - \int \frac{e^{5x}}{5}\cdot 2\cos 2x\,dx = \sin 2x\cdot\frac{e^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\int \cos 2x\, e^{5x}dx$$

$$= \sin 2x\cdot\frac{e^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\int \cos 2x\, d\left(\frac{e^{5x}}{5}\right) = \sin 2x\cdot\frac{e^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\left(\cos 2x\cdot\frac{e^{5x}}{5} - \int \frac{e^{5x}}{5}d(\cos 2x)\right)$$

$$= \sin 2x\cdot\frac{e^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\left(\cos 2x\cdot\frac{e^{5x}}{5} - \int \frac{e^{5x}}{5}(-2\sin 2x)dx\right)$$

$$= \sin 2x\cdot\frac{e^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\left(\cos 2x\cdot\frac{e^{5x}}{5} + \frac{2}{5}\int e^{5x}\sin 2x\,dx\right)$$

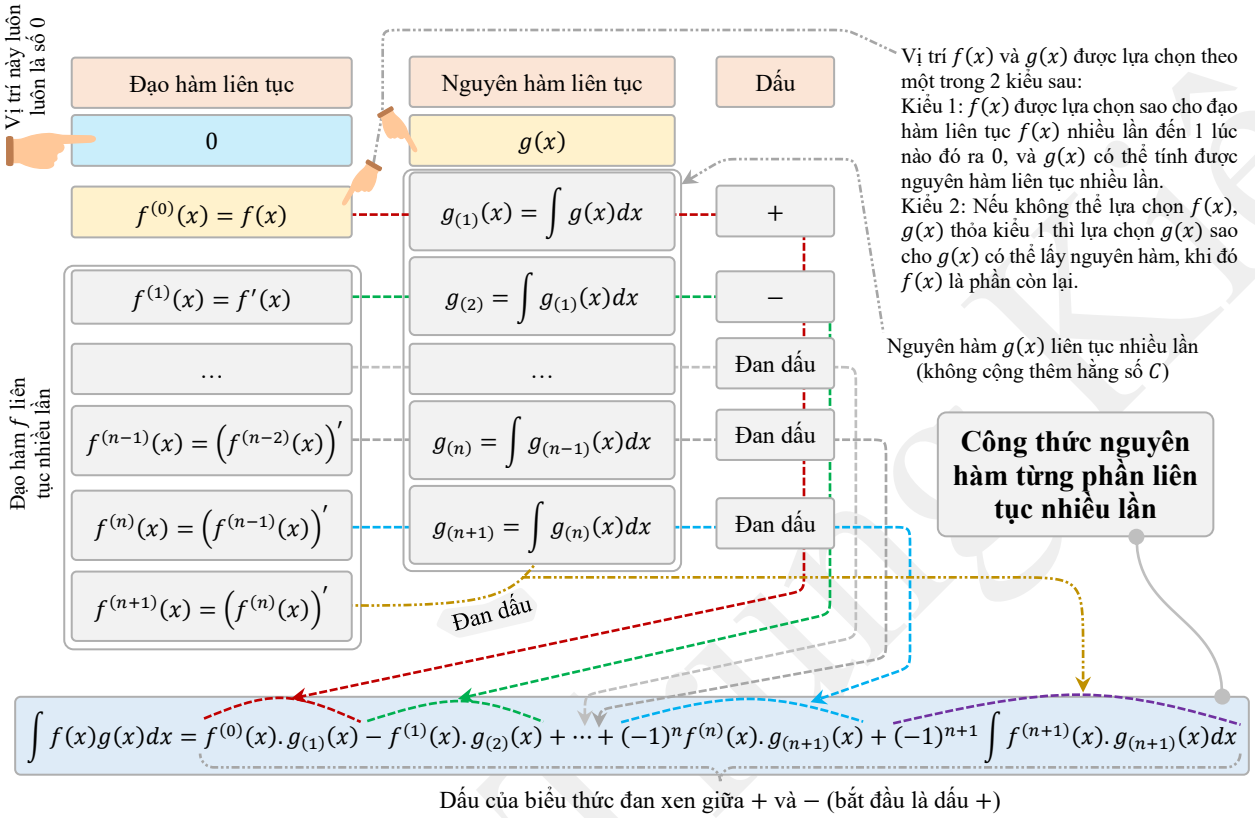
$$\Rightarrow I = \sin 2x\cdot\frac{e^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\left(\cos 2x\cdot\frac{e^{5x}}{5} + \frac{2}{5}I\right)$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{7}\left(\sin 2x\cdot e^{5x} - \frac{2}{5}\cos 2x\cdot e^{5x}\right) + C$$

Thầy Lê Trung Kiên

327. Bảng đạo nguyên

Bảng này giúp tính nhanh các bài toán cần phải sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần (đặc biệt là những bài toán áp dụng nguyên hàm từng phần nhiều lần)



Ví dụ

Tính $\int x^5 \sin x\, dx$

Đạo	Nguyên	Dấu
0	$\sin x$	
x^5	$-\cos x$	+
$5x^4$	$-\sin x$	−
$20x^3$	$\cos x$	+
$60x^2$	$\sin x$	−
$120x$	$-\cos x$	+
120	$-\sin x$	−
0	Không tính ô này vì cột đạo hàm đã bằng 0	

$$\int x^5 \sin x\, dx = -x^5\cos x + 5x^4 \sin x + 20x^3 \cos x - 60x^2 \sin x - 120x\cos x + 120\sin x + C$$

Thầy Lê Minh Kiên

Ví dụ

Tính $I = \int e^{2x} \cos 3x \, dx$

Đạo	Nguyên	Dấu
0	e^{2x}	
$\cos 3x$	$\frac{e^{2x}}{2}$	+
$-3\sin 3x$	$\frac{e^{2x}}{4}$	−
$-9\cos 3x$		

Đan dấu

+

$$I = \cos 3x \cdot \frac{e^{2x}}{2} + 3\sin 3x \cdot \frac{e^{2x}}{4} + \int \frac{e^{2x}}{4} \cdot (-9\cos 3x)dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{e^{2x}}{2}\left(\cos 3x + \frac{3}{2}\sin 3x\right) - \frac{9}{4}\int e^{2x}\cos 3x \, dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{e^{2x}}{2}\left(\cos 3x + \frac{3}{2}\sin 3x\right) - \frac{9}{4}I$$

$$\Rightarrow I = \frac{2e^{2x}}{13}\left(\cos 3x + \frac{3}{2}\sin 3x\right) + C$$

Ví dụ

Tính $I = \int \ln(4x - 5) \, dx$

Đạo	Nguyên	Dấu
0	1	
$\ln(4x-5)$	x	+
$\frac{4}{4x-5}$		

Đan dấu

−

$$I = x \cdot \ln(4x-5) - \int \frac{4}{4x-5} \cdot x dx$$

$$= x\ln(4x-5) - \int \frac{4x-5+5}{4x-5}dx$$

$$= x\ln(4x-5) - \int \left(1 + \frac{5}{4x-5}\right)dx$$

$$= x\ln(4x-5) - x - \frac{5}{4}\ln|4x-5| + C$$

328. Nguyên hàm các hàm có y'' = ky

Nếu $f''(x) = af(x)$ và $g''(x) = bg(x)$ và $b - a \neq 0$ thì

$$\int f(x)g(x)dx = \frac{f(x)g'(x) - f'(x)g(x)}{b-a} + C$$

Thầy Lê Trung Kiên

329. Nguyên hàm phân thức

Phân thức là biểu thức có dạng: $f(x) = \dfrac{\text{Đa thức tử}}{\text{Đa thức mẫu}}$

Các bước phân tích phân thức thành từng phần riêng biệt để tính nguyên hàm

Bước 1: Nếu *Bậc của tử* ≥ *Bậc của mẫu* thì tiến hành chia đa thức cho đa thức để đưa về dạng như sau:

$$\frac{\text{Đa thức tử}}{\text{Đa thức mẫu}} = \text{Đa thức thương} + \frac{\text{Đa thức dư}}{\text{Đa thức mẫu}}$$

Tiếp tục xử lý phần $\dfrac{\text{Đa thức dư}}{\text{Đa thức mẫu}}$ như sau:

Bước 2: Phân tích *Đa thức mẫu* thành nhân tử hết mức có thể

Một số phân tích hữu ích

▪ Phân tích bậc 2: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ (Với x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$)
▪ Phân tích bậc 3: $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ (Với x_1, x_2, x_3 là 3 nghiệm của phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$)
▪ Cho phương trình đa thức: $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ Nếu Tổng tất cả hệ số $= 0$ ⇒ Có 1 nghiệm là $x = 1$. Nếu Tổng hệ số bậc chẵn = Tổng hệ số bậc lẻ ⇒ Có 1 nghiệm là $x = -1$.
▪ Cho phương trình đa thức: $\pm x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ (hệ số bậc lớn nhất là $+1$ hoặc -1, và a_i là các số nguyên). Nếu phương trình có nghiệm nguyên thì nghiệm đó phải là ước số của a_0.
▪ Sơ đồ Hoocne: "Đầu rơi, nhân ngang cộng chéo".

Bước 3: Với mỗi nhân tử ở mẫu số ta dự đoán kiểu tách dựa vào 2 kiểu tách cơ bản như sau:

Hai kiểu tách cơ bản:

Kiểu 1: $\dfrac{\dots}{(ax+b)^n} = \dfrac{\text{số}}{(ax+b)} + \dfrac{\text{số}}{(ax+b)^2} + \dfrac{\text{số}}{(ax+b)^3} + \cdots + \dfrac{\text{số}}{(ax+b)^{n-1}} + \dfrac{\text{số}}{(ax+b)^n}$

Kiểu 2: $\dfrac{\dots}{ax^2+bx+c} = \dfrac{\text{số} \times x + \text{số}}{ax^2+bx+c}$ (Trong đó $ax^2 + bx + c = 0$ vô nghiệm)

Phương pháp phân tích nhanh biểu thức có dạng

$$\frac{\text{Đa thức tử bậc nhỏ hơn mẫu}}{\underbrace{(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\dots(a_nx+b_n)}_{\text{Mẫu số vế trái}}} = \frac{\overbrace{A_1}^{\text{Số cần tìm}}}{a_1x+b_1} + \frac{\overbrace{A_2}^{\text{Số cần tìm}}}{a_2x+b_2} + \cdots + \frac{\overbrace{A_n}^{\text{Số cần tìm}}}{a_nx+b_n}$$

Trong đó mỗi biểu thức $a_ix + b_i$ ở mẫu số vế trái là duy nhất, C là một hằng số thuộc $\mathbb{R}$.

Để tìm một A_i bất kì với $i = 1,2,\dots,n$ ta làm như sau: $A_i = \lim\limits_{x \to -\frac{b_i}{a_i}} (\text{Vế trái} \times (a_ix + b_i))$

Nếu thu gọn và khử được $a_ix + b_i$ ở biểu thức Vế trái $\times (a_ix + b_i)$ thì ta có:

$$A_i = \text{Vế trái} \times (a_ix + b_i) \left(\text{thay } x = -\frac{b_i}{a_i} \text{ sau khi thu gọn}\right)$$

Ví dụ

Ta phân tích: $\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{x+2}+\frac{A_3}{x+3}$

Ở đây ta thấy các biểu thức $(x+1)$ và $(x+2)$ và $(x+3)$ là duy nhất ở mẫu số của công thức gốc nên ta áp dụng được phương pháp phân tích nhanh! A_1, A_2, A_3 là các số cụ thể mà ta sẽ đi tìm.

Tìm A_1? $A_1=\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\times(x+1)=\frac{1}{(x+2)(x+3)}$ (Thay $x=-1$ ta được) $=\frac{1}{2}$

Tìm A_2? $A_2=\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\times(x+2)=\frac{1}{(x+1)(x+3)}$ (Thay $x=-2$ ta được) $=-1$

Tìm A_3? $A_3=\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\times(x+3)=\frac{1}{(x+1)(x+2)}$ (Thay $x=-3$ ta được) $=\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{2(x+3)}$$

Một số ví dụ về cách tách

Một số ví dụ

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{1/6}{x}+\frac{-1/2}{(x+1)}+\frac{1/2}{(x+2)}+\frac{-1/6}{(x+3)}$$

$$\frac{3x^2+x+1}{x(x+1)(x^2+2x+2)}=\frac{\frac{5}{2}x+5}{(x^2+2x+2)}+\frac{1/2}{x}-\frac{3}{x+1}$$

$$\frac{1}{x^5(x+1)^3}=\frac{1}{x^5}-\frac{3}{x^4}+\frac{6}{x^3}-\frac{10}{x^2}+\frac{15}{x}-\frac{1}{(x+1)^3}-\frac{5}{(x+1)^2}-\frac{15}{x+1}$$

330. Tách nguyên hàm trên nhiều miền

Nếu $F(x)=\int f(x)dx=k\ln|ax+b|+C$ thì $F(x)$ có thể bị tách thành các công thức như sau:

$$F(x)=\begin{cases}k\ln|ax+b|+C_1, \text{nếu } x<-\frac{b}{a}\\ k\ln|ax+b|+C_2, \text{nếu } x>-\frac{b}{a}\end{cases}$$

Nếu $F(x)=\int f(x)dx=k_1\ln|a_1x+b_1|+k_2\ln|a_2x+b_2|+C$ và gọi x_1, x_2 lần lượt là nghiệm của các phương trình $a_1x_1+b_1=0$, $a_2x_2+b_2$, giả sử $x_1<x_2$. Khi đó $F(x)$ có thể bị tách thành các công thức như sau:

$$F(x)=\begin{cases}k_1\ln|a_1x+b_1|+k_2\ln|a_2x+b_2|+C_1, \text{nếu } x<x_1\\ k_1\ln|a_1x+b_1|+k_2\ln|a_2x+b_2|+C_2, \text{nếu } x_1<x<x_2\\ k_1\ln|a_1x+b_1|+k_2\ln|a_2x+b_2|+C_3, \text{nếu } x>x_2\end{cases}$$

Thầy Lê Tiến Kiên

331. Phương trình vi phân

Lưu ý về mặt ký hiệu:

$$y \leftrightarrow f \leftrightarrow f(x) \leftrightarrow y(x);\ y' \leftrightarrow f' \leftrightarrow f'(x) \leftrightarrow \frac{dy}{dx} \leftrightarrow \frac{df}{dx}$$

Phương trình tách biến	Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1
Nếu $f(y)dy = h(x)dx$ (Trong đó $f(y)$ là một hàm số theo biến y, $h(x)$ là hàm số theo biến x) (Lấy nguyên hàm 2 vế ta được) $\int f(y)dy = \int h(x)dx$ $\Rightarrow F(y) = H(x) + C$ Với $F(y)$ là một nguyên hàm của $f(y)$ và $H(x)$ là một nguyên hàm của $h(x)$	Cho trước hàm số $g(x)$ và $k(x)$. Tìm hàm số $f(x)$, biết: $f'(x) + g(x).f(x) = k(x)$ **Bước 1**: Tính $g_{(1)}(x) = \int g(x)dx$ (không cộng thêm hằng số) **Bước 2**: Tìm $f(x)$ bằng công thức $f(x) = e^{-g_{(1)}(x)} \int e^{g_{(1)}(x)}.k(x)dx$

Ví dụ: Phương trình vi phân tách biến

Ví dụ: Tìm hàm y biết $y' = e^y$

Giải

$$y' = e^y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^y \Rightarrow \frac{dy}{e^y} = dx$$
$$\Rightarrow \int \frac{dy}{e^y} = \int dx \Rightarrow \int e^{-y}dy = \int dx$$
$$\Rightarrow -e^{-y} = x + C \Rightarrow e^{-y} = -x - C$$
$$\Rightarrow -y = \ln(-x - C) \Rightarrow y = -\ln(-x - C)$$

Ví dụ: Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Ví dụ: Tìm hàm $f(x)$ biết

$$x(x+1)f'(x) + f(x) = x^2 + x$$

Giải

Thu gọn về dạng $f'(x) + g(x) \cdot f(x) = k(x)$

$$x(x+1)f'(x) + f(x) = x^2 + x \Leftrightarrow f'(x) + \frac{1}{x(x+1)} \cdot f(x) = 1$$

Ta có: $g_1(x) = \int \frac{1}{x(x+1)}dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \ln x - \ln(x+1) = \ln\frac{x}{x+1}$

$$f(x) = e^{-\ln\frac{x}{x+1}} \int e^{\ln\frac{x}{x+1}}dx = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{-1} \int \frac{x}{x+1}dx = \frac{x+1}{x} \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$= \frac{x+1}{x}(x - \ln|x+1| + C)$$

Thầy Lê Phùng Kiên

Ví dụ: Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Ví dụ: Tìm hàm $f(x)$ biết

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x\ln x} + x\ln x + \ln x$$

Giải

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x\ln x} + x\ln x + \ln x \Leftrightarrow f'(x) - \frac{1}{x\ln x}\cdot f(x) = x\ln x + \ln x$$

Ta có: $g_1(x) = \int \frac{-1}{x\ln x}dx = \int \frac{-1}{\ln x}d(\ln x) = -\ln(\ln(x))$

$$f(x) = e^{\ln(\ln(x))}\int e^{-\ln(\ln(x))}(x\ln x + \ln x)dx = \ln x\int \frac{1}{\ln x}(x\ln x + \ln x)dx$$

$$= \ln x\int (x+1)dx = \ln x\left(\frac{x^2}{2} + x + C\right)$$

▪ Lập luận phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Cho trước hàm số $g(x)$ và $k(x)$. Tìm hàm số $f(x)$, biết: $f'(x) + g(x).f(x) = k(x)(*)$

Để tìm $f(x)$ ta dựa vào căn cứ lý thuyết như sau:

Đặt $g_{(1)}(x) = \int g(x)dx$ (không cộng thêm hằng số)

(Tức là $\left(g_{(1)}(x)\right)' = g(x)$)

Nhân 2 vế của $(*)$ với $e^{g_{(1)}(x)}$ ta được: $f'(x)\times e^{g_{(1)}(x)} + g(x).f(x)\times e^{g_{(1)}(x)} = k(x)\times e^{g_{(1)}(x)}(*)$

(Ta có $g(x)\times e^{g_{(1)}(x)} = \left(g_{(1)}(x)\right)'\times e^{g_{(1)}(x)} = \left(e^{g_{(1)}(x)}\right)'$)

$$\Rightarrow f'(x)\times e^{g_{(1)}(x)} + \left(e^{g_{(1)}(x)}\right)'\times f(x) = k(x)\times e^{g_{(1)}(x)}$$

(Thu gọn vế trái theo quy tắc $u'v + v'u = (uv)'$)

$$\Rightarrow \left(f(x)\times e^{g_{(1)}(x)}\right)' = k(x)\times e^{g_{(1)}(x)}$$

(Lấy nguyên hàm theo biến x ở cả 2 vế)

$$\Rightarrow f(x)\times e^{g_{(1)}(x)} = \int k(x)\times e^{g_{(1)}(x)}dx$$

(Chia $e^{g_{(1)}(x)}$ qua vế bên tay phải ta được)

$$\Rightarrow f(x) = e^{-g_{(1)}(x)}\int e^{g_{(1)}(x)}.k(x)dx$$

Thầy Lê Trung Kiên

TÍCH PHÂN

332. Định nghĩa tích phân

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên K và $a, b \in K$. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì: $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân của $f(x)$ từ a đến b và kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Lưu ý: Số a không nhất thiết phải nhỏ hơn số b.

333. Tính chất của tích phân

Tính bất biến của giá trị tích phân	$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \cdots = \int_a^b f(\text{biến số})d(\text{biến số}) = F(b) - F(a)$ **Hệ quả**: Nếu $\int_a^b f(x)dx = I_0$ thì suy ra mọi dạng $\int_a^b f(\text{biến số})d(\text{biến số}) = I_0$
Tích phân với cận trên trùng với cận dưới	$\int_a^a f(x)dx = 0$
Đảo vai trò giữa cận trên và cận dưới	$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
Tích phân khi nhân thêm hằng số	$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \ (k \in \mathbb{R})$
Tích phân của tổng, hiệu	$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
Chèn thêm một cận	$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (c là tùy ý nhưng hàm số phải liên tục trên các phạm vi $a \leftrightarrow c$ và $c \leftrightarrow b$, số c không nhất thiết phải nằm giữa hai số a và b)
Tích phân hàm bình phương bằng 0	Nếu $\int_a^b [f(x)]^2 dx = 0$ và $a \neq b$ thì ta suy ra $f(x) = 0$.

Thầy Lê Minh Kiên

Bất đẳng thức tích phân	▪ Bất đẳng thức tích phân 1a: Nếu $f(x) \geq 0$ trên $[a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ ▪ Bất đẳng thức tích phân 1b: Nếu $f(x) \leq 0$ trên $[a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \leq 0$ ▪ Bất đẳng thức tích phân 2: Nếu $f(x) \geq g(x)$ trên $[a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$ ▪ Bất đẳng thức tích phân 3: Nếu m và M là các GTNN và GTLN của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[a;b]$, tức là $m \leq f(x) \leq M, \forall a \leq x \leq b$ thì: $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ ▪ Bất đẳng thức tích phân 4: Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì $\left\|\int_a^b f(x)dx\right\| \leq \int_a^b \|f(x)\|dx$ ▪ Bất đẳng thức tích phân 5: Nếu $f(x), g(x)$ liên tục trên $[a;b]$ thì $\left(\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$ Dấu "=" xảy ra khi $f(x)=kg(x), k \in \mathbb{R}$

334. Tích phân đổi biến số

Đổi biến thì phải đổi cận

$$\int_a^b f[u(x)]\cdot u'_x(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du$$

Đang lấy tích phân theo biến x

Chuyển sang lấy tích phân theo biến u

Trong đó $u=u(x)$ có đạo hàm liên tục trên K, $y=f(u)$ liên tục và hàm hợp $f[u(x)]$ xác định trên $K; a,b \in K$.

335. Tích phân từng phần

Nếu u, v là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên $K; a,b \in K$ thì:

$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu$$

Hệ quả

$$\int_a^b f(x)dx = x\cdot f(x)|_a^b - \int_a^b xf'(x)dx$$

$$\int_a^b uv'dx = uv|_a^b - \int_a^b u'vdx$$

(Trong đó: u, v là hai hàm số theo biến số x)

Thầy Lê Trung Kiên

336. Một số dạng đặc biệt

$$I = \int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}$$

Phương pháp

Đặt $t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Ta có: $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ và $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$I = \int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c} = \int \frac{2dt}{(c-b)t^2 + 2at + b + c}$$

(Chuyển về dạng tích phân phân thức)

$$I = \int \frac{m\sin x + n\cos x + p}{a\sin x + b\cos x + c}dx$$

Phương pháp

Tìm A, B, C sao cho:

$$m\sin x + n\cos x + p = A(a\sin x + b\cos x + c) + B(a\cos x - b\sin x) + C$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{m\sin x + n\cos x + p}{a\sin x + b\cos x + c}dx = A\int dx + B\int \frac{a\cos x - b\sin x}{a\sin x + b\cos x + c}dx + C\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}$$

Tích phân $\int dx$ tính được.

Tích phân $\int \frac{a\cos x - b\sin x}{a\sin x + b\cos x + c}dx = \ln|a\sin x + b\cos x + c| + C$.

Tích phân $\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}$ tính được.

$$I = \int \frac{dx}{a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x + d}$$

Phương pháp

$$I = \int \frac{dx}{(a+d)\sin^2 x + b\sin x\cos x + (c+d)\cos^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{(a+d)\tan^2 x + b\tan x + (c+d)}$$

Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \Rightarrow I = \int \frac{dt}{(a+d)t^2 + bt + (c+d)}$

(Chuyển về dạng tích phân phân thức)

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và là hàm số chẵn trên đoạn$[-\alpha;\alpha]$. Khi đó

$$I = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x)}{a^x + 1}dx = \frac{1}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx$$

Chứng minh

Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx \Rightarrow dx = -dt$

Ta có $f(x) = f(-t) = f(t)$; $a^x + 1 = a^{-t} + 1 = \frac{a^t+1}{a^t}$

Khi $x = -\alpha$ thì $t = \alpha$; $x = \alpha$ thì $t = -\alpha$

Vậy $I = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x)}{a^x + 1}dx = \int_{\alpha}^{-\alpha} \frac{a^t f(t)}{a^t + 1}(-dt) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{a^t + 1 - 1}{a^t + 1}f(t)dt$

$$= \int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)dt - \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(t)}{a^t + 1}dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx - I \Rightarrow I = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx - I \Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx$$

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và là **hàm số lẻ** trên đoạn $[-a;a]$. Khi đó:

$$I = \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và là **hàm số chẵn** trên đoạn $[-a; a]$. Khi đó:

$$I = \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

Tích phân hàm tuần hoàn

Cho $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, và $f(x)$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ T. Khi đó ta có:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = k\int_{a}^{a+T} f(x)dx + \int_{a+kT}^{b} f(x)dx$$

(Với k là số nguyên không âm lớn nhất thỏa mãn: $a + kT \le b$)

Cho $f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Khi đó

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$$

Chứng minh

Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow dx = -dt$

Khi $x = 0$ thì $t = \frac{\pi}{2}$, khi $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 0$

Do đó $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left(\sin(\frac{\pi}{2} - t\right)dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

Nhận xét : Bằng cách làm tương tự ta có các công thức:

Nếu $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ thì

$$\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} f(\sin x)dx$$

và

$$\int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} xf(\cos x)dx = \pi\int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} f(\cos x)dx$$

Tính $\int_a^b |f(x)|dx$

Nếu trên đoạn $[a; b]$, hàm số $f(x)$ không đổi dấu thì: $\int_a^b |f(x)|dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$

Nếu cần khử dấu giá trị tuyệt đối của hàm số dưới dấu tích phân. Ta có thể làm như sau :

Bước 1 : Giải phương trình : $f(x) = 0$ trên đoạn $[a; b]$.

Giả sử tìm được n nghiệm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b)$.

Bước 2 : Sử dụng công thức phân đoạn:

$$\int_{a}^{b} |f(x)|dx = \int_{a}^{x_1} |f(x)|dx + \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|dx + \int_{x_2}^{x_3} |f(x)|dx + \cdots + \int_{x_n}^{b} |f(x)|dx =$$

$$= \left|\int_{a}^{x_1} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_2}^{x_3} f(x)dx\right| + \cdots + \left|\int_{x_n}^{b} f(x)dx\right|$$

(Vì trên các đoạn $[a; x_1], [x_1; x_2], [x_2; x_3], \ldots, [x_n; b]$ hàm số $f(x)$ không đổi dấu)

Bổ đề: Cho $A = k_1^{m_1}k_2^{m_2}k_3^{m_3}\ldots k_n^{m_n}$; trong đó $k_1, k_2, k_2,\ldots, k_n$ là các số tự nhiên và $m_1, m_2,\ldots,m_n$ là các số hữu tỷ. Khi đó tồn tại một số M_0 sao cho A^{M_0} là một số hữu tỷ.

Chứng minh. Gọi M_0 là bội chung nhỏ nhất của các mẫu số dương $m_1, m_2,\ldots,m_n$. Khi đó:

$$A^{M_0} = \left(k_1^{m_1}k_2^{m_2}k_3^{m_3}\ldots k_n^{m_n}\right)^{M_0} = k_1^{m_1M_0}k_2^{m_2M_0}k_3^{m_3M_0}\ldots k_n^{m_nM_0}$$

(Mà m_iM_0 là số nguyên $\Rightarrow k_i^{m_iM_0}$ là số hữu tỷ $\forall i = \overline{1,n}$)

$\Rightarrow A^{M_0}$ là số hữu tỷ

Ý nghĩa bổ đề trên nghĩa là một số có dạng:

$$(\text{số tự nhiên1})^{\text{số hữu tỷ1}} \times (\text{số tự nhiên2})^{\text{số hữu tỷ2}} \times \ldots$$

Nếu cứ mũ lên thì đến một lúc nào đó dạng này sẽ thành số hữu tỷ!

Ví dụ: $A = 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{3}{7}} \times 5^{\frac{6}{1}} \times 7^{-\frac{2}{5}}$ lúc này đang là vô tỷ!

Gọi $M_0 = BCNN(2;7;1;5) = 70$

$\Rightarrow A^{70} = 2^{35} \times 3^{-30} \times 5^{420} \times 7^{-28}$ là số hữu tỷ!

Suy ra hàm từ các điểm cắt

Cho hàm số $y = f(x)$ là đa thức bậc n và hàm số $y = g(x)$ là đa thức có bậc $\leq n$

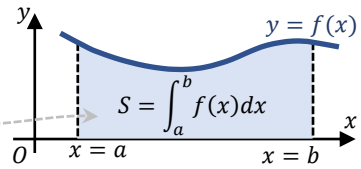
Nếu biết $y = f(x)$ cắt $y = g(x)$ tại n điểm có hoành độ $x_1, x_2,\ldots, x_n$ thì

$$f(x) - g(x) = k(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

(Trong đó k là một số nào đó thuộc $\mathbb{R}$)

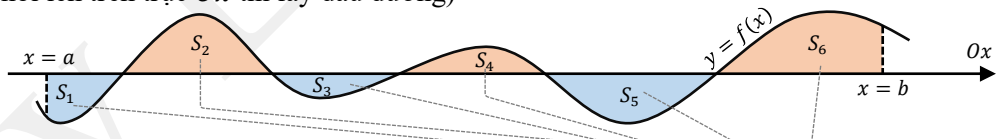
337. Ý nghĩa hình học

Ý nghĩa hình học 1: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và ***không âm*** trên đoạn $[a;b]$ thì diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b$ là:



Ý nghĩa hình học 2: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì:

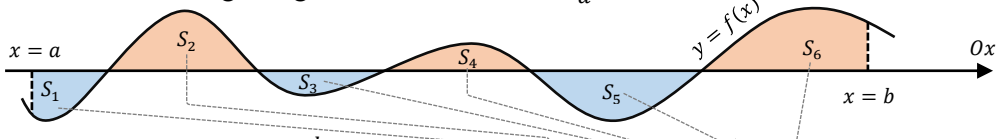
Tổng đại số diện tích của các phần đồ thị giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b$ (Nếu phần diện tích chìm xuống dưới Ox thì diện tích lấy dấu âm, nếu phần diện tích nổi lên trên trục Ox thì lấy dấu dương) $= \int_a^b f(x)dx$



$$\int_a^b f(x)dx = -S_1 + S_2 - S_3 + S_4 - S_5 + S_6$$

Ý nghĩa hình học 3: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì:

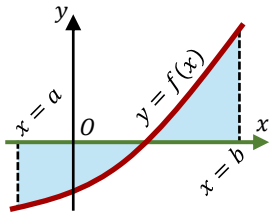
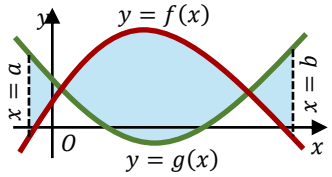
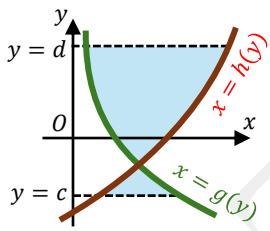
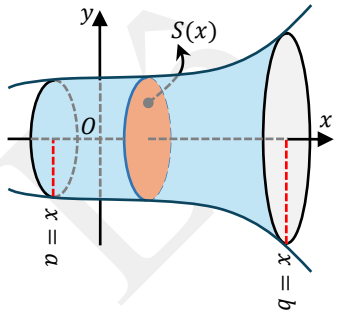
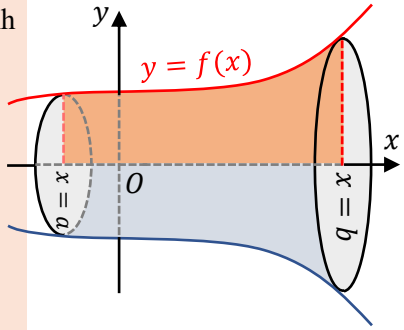
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b$ $= \int_a^b |f(x)|dx$

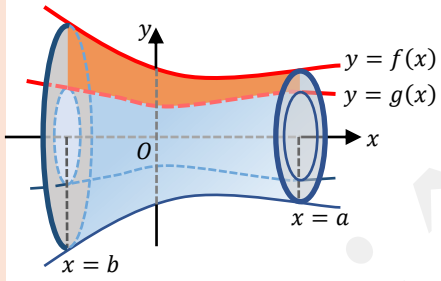
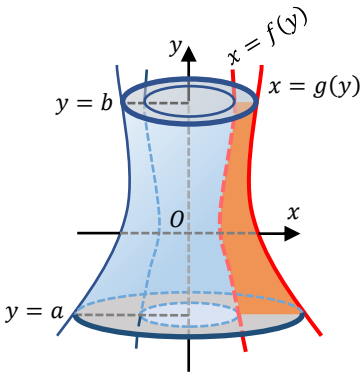
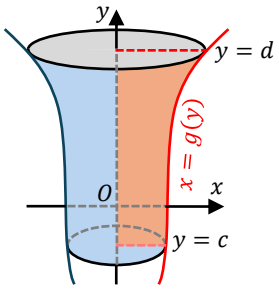
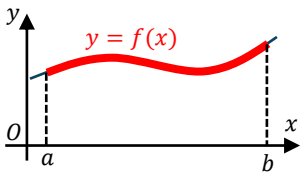


$$\int_a^b |f(x)|dx = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 = S$$

338. Ứng dụng của tích phân

Những bài toán thuộc loại không biết cận. Trước tiên ta tìm giao điểm của đồ thị hai hàm số. Khi đó cận dưới là nghiệm nhỏ nhất, cận trên là nghiệm lớn nhất.

Diện tích giới hạn bởi hàm số và trục hoành		Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường: 👉Đồ thị (C) của hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. 👉Trục hoành. 👉Hai đường thẳng $x=a, x=b$ $= \int_a^b \lvert f(x)\rvert dx$
Diện tích giữa 2 đồ thị hàm số		Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường : 👉Đồ thị của các hàm số $y=f(x), y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. 👉Hai đường thẳng $x=a, x=b$. $= \int_a^b \lvert f(x)-g(x)\rvert dx$
Diện tích hình phẳng theo biến y		Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường : 👉Đồ thị của $x=g(y)$, $x=h(y)$ (g,h là hai hàm số liên tục trên đoạn $[c;d]$) 👉Hai đường thẳng $y=c, y=d$ $= \int_c^d \lvert g(y)-h(y)\rvert dy$
Thể tích khi biết diện tích thiết diện		Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b. $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x(a\le x\le b)$. Giả sử $S(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Thể tích của B là: $V=\int_a^b S(x)dx$
Thể tích vật thể tròn xoay giới hạn bởi đồ thị 1 hàm số quay quanh trục Ox		Thể tích của khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường : 👉$y=f(x)$ 👉Trục hoành 👉$x=a, x=b$ $(a<b)$ Quay quanh trục Ox : $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$

Thể tích vật thể tròn xoay giữa 2 đồ thị hàm số quay quanh Ox	Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay miền D giới hạn bởi các đường : 👉$y = f(x)$ 👉$y = g(x)$ 👉$x = a, x = b\ (a < b)$ Quay xung quanh trục Ox: $$V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)|dx$$  **Lưu ý**: công thức này chỉ dùng khi phần được quay không có phần thể tích nào trùng lên nhau sau khi quay.
Thể tích vật thể tròn xoay giữa 2 đồ thị hàm số quay quanh Ox	 Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay miền D giới hạn bởi các đường : 👉$x = f(y)$ 👉$x = g(y)$ 👉$y = c, y = d\ (c < d)$ Quay xung quanh trục Oy : $$V = \pi \int_c^d |f^2(y) - g^2(y)|dy$$ **Lưu ý**: công thức này chỉ dùng khi phần được quay không có phần thể tích nào trùng lên nhau sau khi quay
Thể tích vật thể tròn xoay giới hạn bởi 1 đồ thị quay quanh trục Oy	Thể tích của khối tròn xoay sinh ra do hình phẳng giới hạn bởi các đường : 👉$x = g(y)$ 👉Trục tung 👉$y = c, y = d$ Quay xung quanh trục Oy: $$V = \pi \int_c^d g^2(y)dy$$ 
Ứng dụng tích phân để tính độ dài đường cong	Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Độ dài đường cong của hàm số $y = f(x)$ từ điểm $x = a$ tới điểm $x = b$ là : $$l_{a \to b} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}dx$$ 

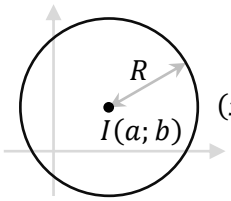
Ứng dụng vật lý	Tính quãng đường từ hàm vận tốc	$s_{t_1 \to t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \lvert v(t) \rvert dt$
	Tính độ dịch chuyển từ hàm vận tốc	$\Delta s = s_2 - s_1 = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$
	Tính vận tốc từ hàm gia tốc	$v(t) = \int a(t)dt$
	Tính điện lượng từ hàm cường độ dòng điện	$Q_{t_1 \to t_2} = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt$
	Tính công từ hàm lực	Lực tác dụng lên một chất điểm chịu tác dụng của lực F di chuyển dọc theo trục Ox tuân theo quy luật : $F = F(x)$ (Trong đó x là tọa độ của vật dọc theo trục di chuyển). Công do lực F thực hiện khi dịch chuyển vật từ vị trí x_1 tới vị trí x_2 là: $A_{x_1 \to x_2} = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$

Thầy Lê Trung Kiên

339. Một số kiến thức về hình học cần thiết

a) Đường tròn

Phương trình đường tròn biết tâm & bán kính

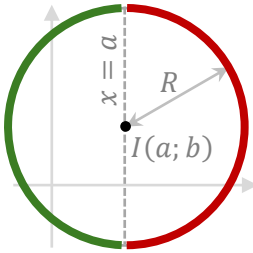


$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

Phương trình phần trái, phải của đường tròn

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \Rightarrow (x-a)^2=R^2-(y-b)^2$$
$$\Rightarrow x-a=\pm\sqrt{R^2-(y-b)^2} \Rightarrow x=a\pm\sqrt{R^2-(y-b)^2}$$

Phần đường tròn bên trái đường thẳng $x=a \Rightarrow x\le a$
$\Rightarrow x-a=-\sqrt{R^2-(y-b)^2}$
$\Rightarrow x=a-\sqrt{R^2-(y-b)^2}$

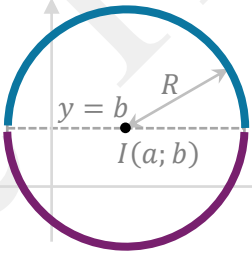


Phần đường tròn bên phải đường thẳng $x=a \Rightarrow x\ge a$
$\Rightarrow x-a=\sqrt{R^2-(y-b)^2}$
$\Rightarrow x=a+\sqrt{R^2-(y-b)^2}$

Phương trình phần trên, dưới của đường tròn

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \Rightarrow (y-b)^2=R^2-(x-a)^2$$
$$\Rightarrow y-b=\pm\sqrt{R^2-(x-a)^2} \Rightarrow y=b\pm\sqrt{R^2-(x-a)^2}$$

Phần đường tròn bên trên đường thẳng $y=b \Rightarrow y\ge b$
$\Rightarrow y-b=\sqrt{R^2-(x-a)^2} \Rightarrow y=b+\sqrt{R^2-(x-a)^2}$

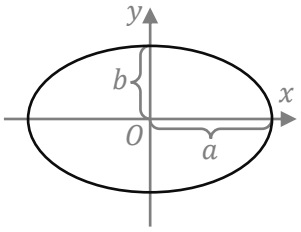


Phần đường tròn bên dưới đường thẳng $y=b \Rightarrow y\le b$
$\Rightarrow y-b=-\sqrt{R^2-(y-b)^2} \Rightarrow y=b-\sqrt{R^2-(y-b)^2}$

Thầy Lê Trung Kiên

b) Elip

Phương trình đường elip



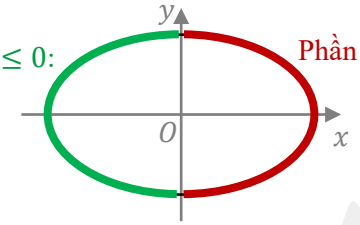
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Phương trình phần trái, phải của elip

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow x^2=a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right) \Rightarrow x=\pm\sqrt{a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)}$$

Phần đường elip bên trái trục tung $x \le 0$:

$$x=-\sqrt{a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)}$$



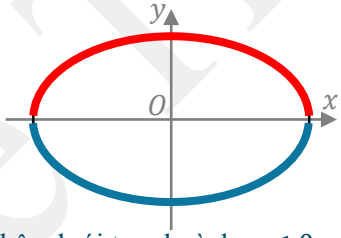
Phần đường elip bên phải trục tung $x \ge 0$:

$$x=\sqrt{a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)}$$

Phương trình phần trên, dưới của elip

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) \Rightarrow y=\pm\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}$$

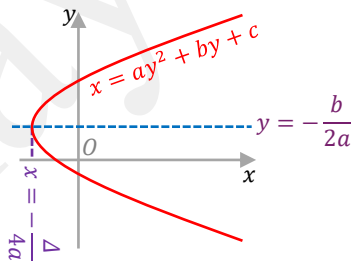
Phần đường elip ở bên trên trục hoành $y \ge 0$: $y=\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}$



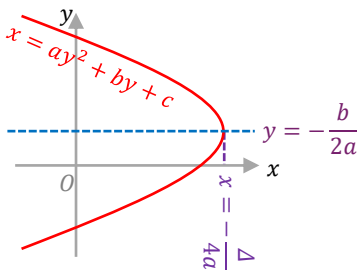
Phần đường elip ở bên dưới trục hoành $y \le 0$: $y=-\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}$

c) Parabol xoay ngang

$$x=ay^2+by+c(a\ne 0)$$



Nếu $a>0$ Parabol hướng bề lõm theo chiều dương của trục Ox



Nếu $a<0$ Parabol hướng bề lõm theo chiều âm của trục Ox

Trục đối xứng của Parabol $y=-\frac{b}{2a}$. Tọa độ đỉnh $y_{\text{đỉnh}}=-\frac{b}{2a}, x_{\text{đỉnh}}=-\frac{\Delta}{4a}$

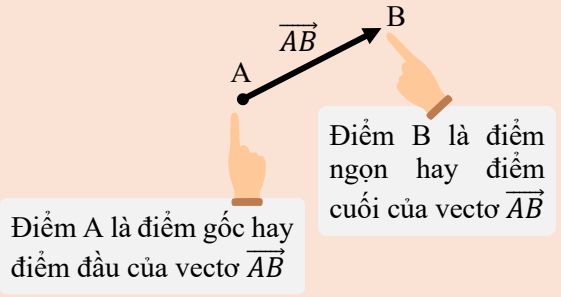
Thầy Lê Trung Kiên

VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

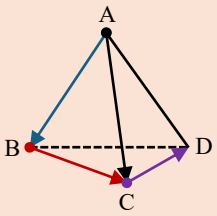
340. Các định nghĩa

👉 *Vectơ trong không gian* là một đoạn thẳng có hướng. Ký hiệu vectơ có điểm đầu A (điểm gốc), điểm cuối B (điểm ngọn) là $\overrightarrow{AB}$.

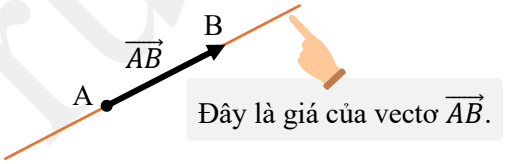
Ta còn sử dụng ký hiệu $\vec{a}, \vec{b}, \ldots$ để biểu diễn vectơ khi không quan tâm đến điểm nào là điểm ngọn hay điểm nào là điểm gốc của vectơ.



Ví dụ, tứ diện $ABCD$ có các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ không cùng nằm trong một mặt phẳng.

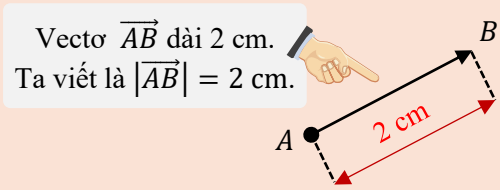


Giá của vectơ là đường thẳng chứa vectơ đó.



Độ dài của vectơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ, ký hiệu $|\overrightarrow{AB}|$.

Đương nhiên $|\overrightarrow{AB}| = AB$. Độ dài vectơ tự do ký hiệu là $|\vec{a}|$.



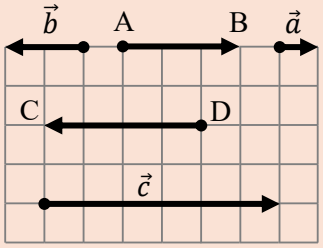
Vectơ - không là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, ký hiệu $\vec{0}$.

Khi muốn chỉ rõ một vectơ nào đó có độ dài khác 0, ta dùng thuật ngữ "**vectơ khác không**".

Khi muốn chỉ rõ một vectơ nào đó có độ dài bằng 1, ta dùng thuật ngữ **vectơ đơn vị**.

Qui ước: Vectơ $\vec{0}$ cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ. Mọi vectơ $\vec{0}$ đều bằng nhau.

Hai vectơ được gọi là **cùng phương** nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

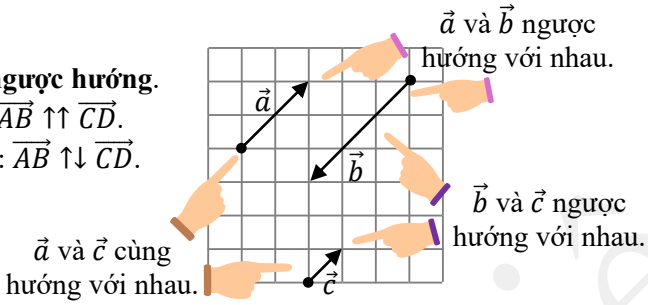


Ở hình vẽ bên tất cả các vectơ $\vec{b}; \overrightarrow{AB}; \vec{a}; \overrightarrow{DC}; \vec{c}$ đều là vectơ cùng phương.

Để biểu thị hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng phương ta ký hiệu $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD}$.

Nếu giá của vectơ $\overrightarrow{AB}$ hoặc song song hoặc trùng với đường thẳng Δ thì ta cũng viết $\overrightarrow{AB}//\Delta$.

Hai vectơ cùng phương có thể **cùng hướng** hoặc **ngược hướng**.
Để biểu thị hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ cùng hướng, ta viết: $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$.
Để biểu thị hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ ngược hướng, ta viết: $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$.

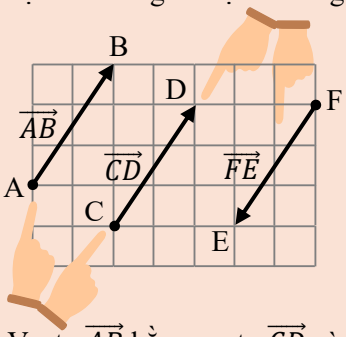


Hai vectơ được gọi là **bằng nhau** nếu chúng cùng hướng và có cùng độ dài.

Điều kiện để hai vectơ bằng nhau
- Cùng hướng
- Độ dài bằng nhau

Để biểu thị hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ bằng nhau ta viết $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Vectơ $\overrightarrow{CD}$ không bằng vectơ $\overrightarrow{FE}$ vì chúng ngược hướng (mặc dù chúng có độ dài bằng nhau).



Vectơ $\overrightarrow{AB}$ bằng vectơ $\overrightarrow{CD}$ vì chúng có cùng hướng và có độ dài bằng nhau

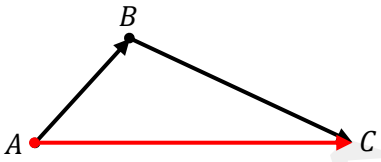
Thầy Lê Trung Kiên

341. Phép cộng

Quy tắc ba điểm: Với ba điểm A, B, C tùy ý, ta có:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

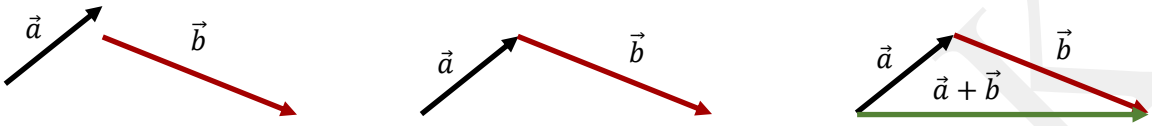
Lưu ý: Quy tắc ba điểm áp dụng cộng cho hai vectơ bất kỳ.



Để tính tổng hai vectơ theo quy tắc ba điểm ta thực hiện theo các bước sau

Sắp xếp hai vectơ sao cho ngọn của một trong hai vectơ trùng với gốc của vectơ còn lại

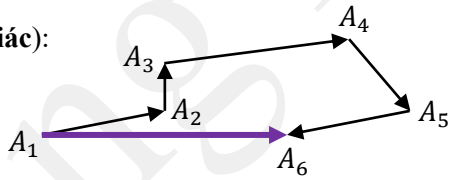
Khi đó tổng của hai vectơ là 1 vectơ nối từ điểm gốc của vectơ đầu tiên tới điểm ngọn của vectơ thứ hai.



Quy tắc ba điểm mở rộng thành quy tắc n điểm (**quy tắc đa giác**):

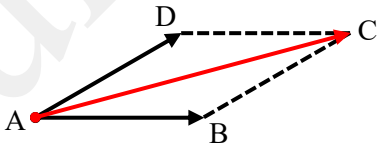
$$\overrightarrow{A_1A_n} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$$

(chập gốc ngọn các vectơ liên tục)



Qui tắc hình bình hành

Với $ABCD$ là hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

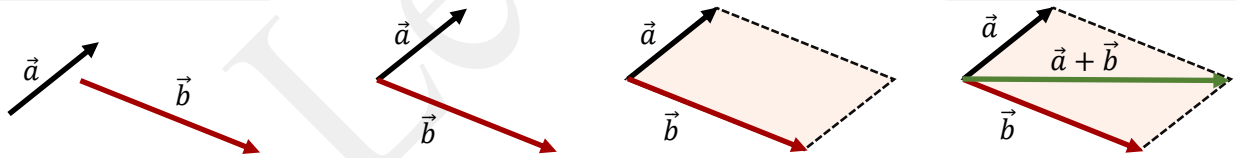


Để tính tổng hai vectơ theo quy tắc hình bình hành ta thực hiện theo các bước sau

Sắp xếp hai vectơ sao cho gốc của chúng trùng nhau

Tọa thành một hình bình hành từ 2 vectơ

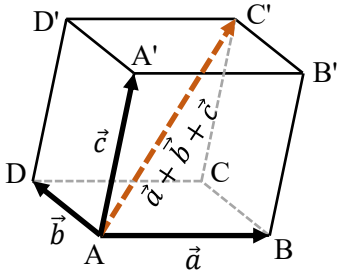
Vectơ tổng kéo dài từ gốc 2 vectơ cũ đến điểm đối diện với điểm gốc chung trong hình bình hành



Quy tắc hình hộp

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ với AB, AD, AA' là ba cạnh có chung đỉnh A và AC' là đường chéo, ta có:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC'}$$



Thầy Lê Trung Kiên

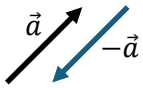
		Điều kiện áp dụng	Bản chất
Quy tắc tính tổng vectơ	Quy tắc ba điểm	Hai vectơ tùy ý	Chập gốc - ngọn
	Quy tắc đa điểm	Nhiều vectơ tùy ý	
	Quy tắc hình bình hành	Chỉ áp dụng cho 2 vectơ không cùng phương	Làm 2 vectơ chung gốc
	Quy tắc hình hộp	Chỉ áp dụng cho 3 vectơ không đồng phẳng	Làm 3 vectơ chung gốc

Tính chất phép cộng vectơ

- Giao hoán: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
- Kết hợp: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$
- Tính chất của $\vec{0}$: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

342. Vectơ đối và phép trừ vectơ

Vectơ đối của $\vec{a}$ là vectơ ngược chiều với $\vec{a}$ và có cùng độ dài với $\vec{a}$. Ký hiệu vectơ đối của $\vec{a}$ là $-\vec{a}$.



Chú ý:

- Nếu $\vec{b}$ là vectơ đối của $\vec{a}$ thì $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$.
- Bỏ hay thêm dấu trừ thì phải đảo gốc và ngọn của vectơ: $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA};\ -\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DC};\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA};\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{DC}$.
- Vectơ đối của $\vec{0}$ là $\vec{0}$.

343. Tích của vectơ với một số

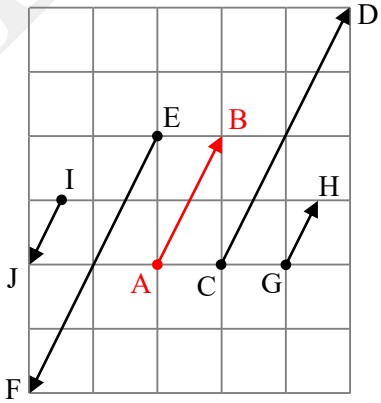
Cho vectơ $\vec{a}$ và một số $k\in R$. $k\vec{a}$ là một vectơ được xác định như sau :

- Về hướng: $\begin{cases} k\vec{a} \text{ cùng hướng với } \vec{a} \text{ nếu } k\geq 0 \\ k\vec{a} \text{ ngược hướng với } \vec{a} \text{ nếu } k<0 \end{cases}$
- Về độ dài: $|k\vec{a}|=|k||\vec{a}|$

Tính chất

$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ $\quad (k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$ $\quad k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$ $\quad k\vec{a}=\vec{0}\Leftrightarrow k=0$ hoặc $\vec{a}=\vec{0}$

Ví dụ:



Trên hình vẽ ta có :

$\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{EF}=-2\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{GH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{IJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Thầy Lê Trung Kiên

344. Tích vô hướng giữa hai vectơ

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ đều khác vectơ $\vec{0}$ trong không gian là một số được kí hiệu là $\vec{u}.\vec{v}$ xác định bởi: $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u},\vec{v})$

Nếu $\vec{u} = \vec{0}$ hoặc $\vec{v} = \vec{0}$ thì ta quy ước $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Tính chất: Với ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ bất kì trong không gian và với mọi số k ta có:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ (tính chất giao hoán)
$(k\vec{a})\cdot\vec{b} = k(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot k\vec{b}$
$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$ (tính chất phân phối đối với phép cộng vectơ)
$\vec{a}^2 \geq 0; \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$
Liên hệ giữa độ dài và bình phương vô hướng của vectơ: $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 \Rightarrow \overrightarrow{AB}^2 = AB^2$
Hằng đẳng thức liên quan đến tích vô hướng $\vec{a}^2 - \vec{b}^2 = (\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})$ $(\vec{a}\pm\vec{b})^2 = \vec{a}^2 \pm 2a\vec{b} + \vec{b}^2$ $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2 = \vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}\vec{b}+2\vec{b}\vec{c}+2\vec{c}\vec{a}$

Chứng minh ba điểm thẳng hàng

Để chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng trong không gian ta đi biến đổi để có được một biểu thức có dạng:

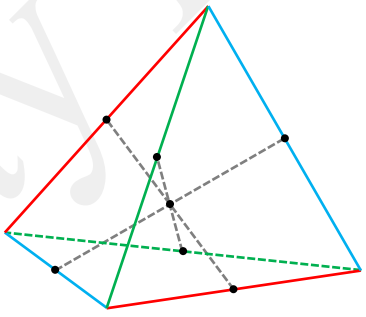
$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$ $(k \neq 0)$

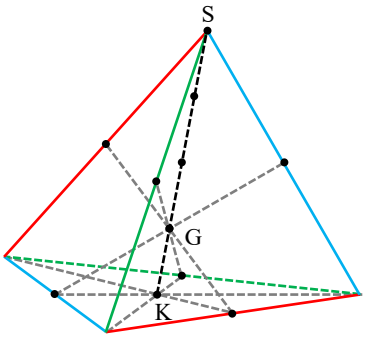
Khi đó hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương, mà hai vectơ đó lại có cùng một điểm chung (là A chẳng hạn), nên suy ra A, B, C thẳng hàng.

345. Trọng tâm tứ diện

- Trọng tâm của một tứ diện là trung điểm của đoạn nối các trung điểm của cặp cạnh đối diện.
- G là trọng tâm tứ diện $ABCD \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OG}$(Với O tùy ý).
- Trọng tâm của tứ diện nằm trên đường nối một đỉnh và trọng tâm của mặt đối diện của tứ diện.
- Trên hình vẽ, G là trọng tâm tứ diện, K là trọng tâm mặt đối diện đỉnh S của tứ diện. Khi đó ta có:

$$\frac{SG}{SK} = \frac{3}{4}$$



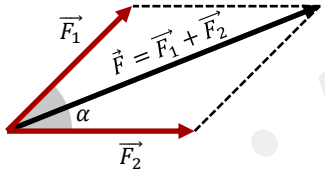


346. Bài toán lực

Khi biết độ lớn từng lực và góc giữa từng cặp lực

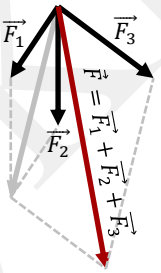
▪ Hai lực $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ cùng tác động vào 1 vật và góc giữa chúng là α. Gọi $\vec{F}$ là tổng của 2 vecto $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ thì:

$$\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} \Rightarrow \vec{F}^2 = \left(\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}\right)^2 = \overrightarrow{F_1}^2 + \overrightarrow{F_2}^2 + 2\overrightarrow{F_1}\,\overrightarrow{F_2}$$
$$\Rightarrow F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha$$

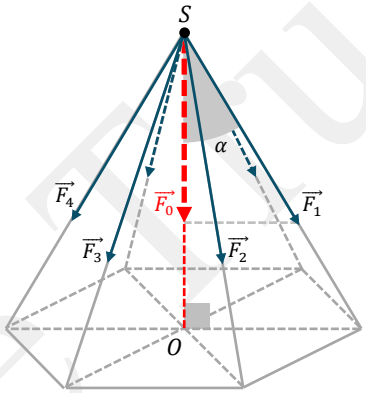


▪ Ba lực $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ và $\overrightarrow{F_3}$ cùng tác động vào 1 vật. Gọi $\vec{F}$ là tổng của 3 vecto $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ thì:

$$\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} \Rightarrow \vec{F}^2 = \left(\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3}\right)^2$$
$$\Rightarrow \vec{F}^2 = \overrightarrow{F_1}^2 + \overrightarrow{F_2}^2 + \overrightarrow{F_3}^2 + 2\overrightarrow{F_1}\,\overrightarrow{F_2} + +2\overrightarrow{F_2}\,\overrightarrow{F_3} + +2\overrightarrow{F_3}\,\overrightarrow{F_1}$$
$$\Rightarrow F^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + 2F_1F_2\cos\left(\overrightarrow{F_1};\overrightarrow{F_2}\right) + 2F_2F_3\cos\left(\overrightarrow{F_2};\overrightarrow{F_3}\right) + 2F_3F_1\cos\left(\overrightarrow{F_3};\overrightarrow{F_1}\right)$$



Khi các lực phân bố đối xứng xung quanh 1 trục



Cho n lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \ldots, \overrightarrow{F_n}$ cùng tác động vào 1 vật sao cho:

▪ Về độ lớn: $F_1 = F_2 = \cdots = F_n$.

▪ Về hướng: các lực phân bố đối xứng qua trục SO (dấu hiệu nhận biết: đáy là đa giác có tâm đối xứng là O).

Gọi $\vec{F}$ là vectơ hợp lực của $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \ldots, \overrightarrow{F_n}$; và α là góc của $\overrightarrow{F_1}$ lực hợp với trục SO.

Ta có: $\boxed{\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \cdots + \overrightarrow{F_n}}$.

Gọi $\overrightarrow{F_0}$ là hình chiếu vuông góc của $\overrightarrow{F_1}$ lên trục SO.

Vì tính đối xứng nên hình chiếu của mỗi lực $\overrightarrow{F_i}$ lên SO đều là $\overrightarrow{F_0}$.

Ta có: $\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \cdots + \overrightarrow{F_n} \Rightarrow F = nF_0 \Rightarrow \boxed{F = nF_1\cos\alpha}$

Nếu xử lý bằng phương pháp tọa độ thì ta có:

Vì $\begin{cases} \text{Các độ dài } SA_i \text{ bằng nhau} \\ \text{Độ lớn các lực là } F_i \text{ đều bằng nhau } (\forall i = \overline{1,n}) \text{ nên } \boxed{\overrightarrow{F_i} = k\overrightarrow{SA_i}}\ (\forall i = \overline{1,n}) \\ \overrightarrow{F_i} \text{ cùng chiều } \overrightarrow{SA_i} \end{cases}$

$$\Rightarrow \vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \cdots + \overrightarrow{F_n} = k\left(\overrightarrow{SA_1} + \overrightarrow{SA_2} + \cdots + \overrightarrow{SA_n}\right)$$
$$= k\left(\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OA_n}\right) = k\left(n\overrightarrow{SO} + \underbrace{\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n}}_{=\vec{0}\ (\text{Vì tính đối xứng})}\right) = kn\overrightarrow{SO}$$

Tuấn Lê Trung Kiên

$$\Rightarrow \boxed{F = kn \times SO}$$

Thầy Lê Trung Kiên

HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

347. Hệ tọa độ

▪ Trong không gian, cho ba trục $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ lần lượt là các **vectơ đơn vị** trên các trục $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$.

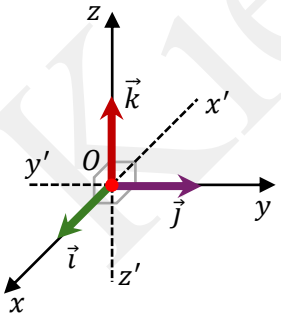
▪ Hệ ba trục như vậy được gọi là **hệ trục toạ độ Đề-các** vuông góc $Oxyz$ trong không gian, hay đơn giản được gọi là hệ toạ độ $Oxyz$.

▪ Điểm O được gọi là **gốc toạ độ**.

▪ Ox gọi là **trục hoành**, Oy gọi là **trục tung**, Oz gọi là **trục cao**.

▪ Các mặt phẳng (Oxy), (Oyz), (Ozx) đôi một vuông góc với nhau được gọi là các **mặt phẳng toạ độ.**

▪ Không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ còn được gọi là không gian $Oxyz$ và được kí hiệu là $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.



▪ Độ dài và tích vô hướng của các vectơ đơn vị

$$|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1 \qquad \vec{i}^2=\vec{j}^2=\vec{k}^2=1 \qquad \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=0$$

348. Tọa độ điểm

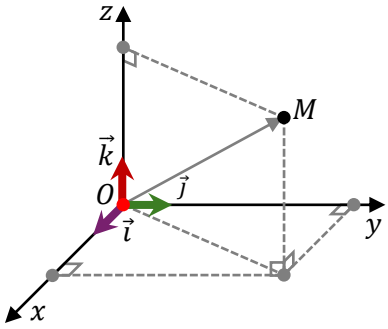
▪ Trong không gian $Oxyz$, cho một điểm M tùy ý. Vì ba vectơ $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ không đồng phẳng nên có một bộ ba số (x,y,z) duy nhất sao cho :

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

Ta gọi bộ ba số $(x;y;z)$ đó là tọa độ của điểm M đối với hệ trục tọa độ $Oxyz$ đã cho và viết $M=(x;y;z)$ (có dấu " $=$ ") hoặc $M(x;y;z)$ (không có dấu " $=$ ").

$$M(x;y;z)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

(Với O là gốc tọa độ)



▪ **Chú ý :** Trong ngôn ngữ giao tiếp khi muốn nói đến tọa độ x người ta có thể nói là **hoành độ**, tọa độ y là **tung độ**, tọa độ z là **cao độ**.

349. Toạ độ vectơ

▪ Trong không gian $Oxyz$ cho vectơ $\vec{a}$, khi đó luôn tồn tại duy nhất bộ ba số $(a_1;a_2;a_3)$ sao cho:

$$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$$

Ta gọi bộ ba số $(a_1;a_2;a_3)$ đó là toạ độ của vectơ $\vec{a}$ đối với hệ toạ độ $Oxyz$ cho trước và viết $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ hoặc $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$.

$$\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)\Leftrightarrow\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$$

▪ Một số toạ độ đặc biệt

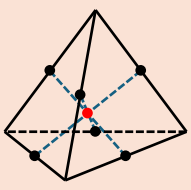
$O(0;0;0)$	$\vec{i}=(1;0;0)$	$\vec{j}=(0;1;0)$	$\vec{k}=(0;0;1)$	$\vec{0}=(0;0;0)$

Đặc điểm vectơ	Cùng phương Ox	Cùng phương Oy	Cùng phương Oz	
Dạng tọa độ	$(a;0;0)$	$(0;a;0)$	$(0;0;a)$	Với $a\in\mathbb{R}$

Thầy Lê Tùng Kiên

350. Biểu thức tọa độ phép toán vectơ & điểm quan trọng

Cho $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$

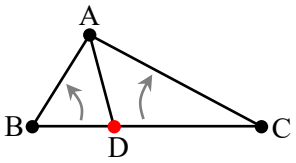
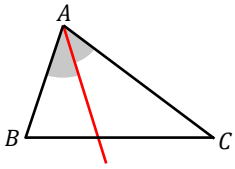
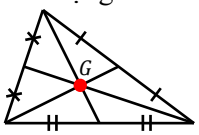
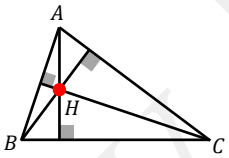
Hai **vectơ bằng nhau** 	$\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=b_1\\a_2=b_2\\a_3=b_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\text{hoành}=\text{hoành}\\\text{tung}=\text{tung}\\\text{cao}=\text{cao}\end{cases}$
Hai **vectơ ngược chiều** 	Với $\vec{b}\neq\vec{0}$ thì $\vec{a}$ ngược chiều $\vec{b}$ $\Leftrightarrow\exists k<0:\vec{a}=k\vec{b}$ $\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}<0\ (b_1,b_2,b_3\neq0)$
Hai **vectơ cùng chiều** 	▪ Nếu ít nhất một trong hai vectơ bằng $\vec{0}$ thì 2 vectơ cùng chiều. ▪ Nếu cả 2 vectơ đều khác $\vec{0}$ thì $\vec{a}$ cùng chiều $\vec{b}$ $\Leftrightarrow\exists k>0:\vec{a}=k\vec{b}$ $\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}>0\ (b_1,b_2,b_3\neq0)$
Hai **vectơ cùng phương** 	▪ Nếu ít nhất một trong hai vectơ bằng $\vec{0}$ thì 2 vectơ cùng phương. ▪ Nếu cả 2 vectơ đều khác $\vec{0}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{R}:\begin{cases}a_1=kb_1\\a_2=kb_2\\a_3=kb_3\end{cases}$ $\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}\ (b_1,b_2,b_3\neq0)$
Tổng, hiệu vectơ	$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_1\pm b_1;a_2\pm b_2;a_3\pm b_3)$
Số × Vectơ	$k\vec{a}=k(a_1;a_2;a_3)=(ka_1;ka_2;ka_3)$
Tọa độ vectơ khi biết tọa độ gốc, ngọn	$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$
Trung điểm đoạn thẳng AB	$M\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$
Độ dài vectơ	$\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)\Rightarrow\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$
Độ dài đoạn thẳng	$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$ $=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+(z_A-z_B)^2}$
Tọa độ đầu mút	Đầu mút cần tìm = 2 × Trung điểm − Đầu mút còn lại 
Trọng tâm ΔABC	$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3};\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$
Trọng tâm tứ diện $ABCD$ 	$\begin{cases}x_I=\frac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4}\\y_I=\frac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4}\\z_I=\frac{z_A+z_B+z_C+z_D}{4}\end{cases}$

Vectơ bằng vectơ không	$\vec{a}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=0\\a_2=0\\a_3=0\end{cases}\Leftrightarrow a_1^2+a_2^2+a_3^2=0$ $\Leftrightarrow$ Cả 3 thành phần tọa độ đều bằng 0
Vectơ khác vectơ không	$\vec{a}\neq\vec{0}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}a_1\neq 0\\a_2\neq 0\\a_3\neq 0\end{bmatrix}\Leftrightarrow a_1^2+a_2^2+a_3^2\neq 0$ $\Leftrightarrow$ Ít nhất 1 thành phần tọa độ khác 0
Tâm tỷ cự của hệ điểm	▪ Nếu $k_1\overrightarrow{IA}+k_2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ $\Rightarrow x_I=\dfrac{k_1x_A+k_2x_B}{k_1+k_2}$ (tương tự cho y_I và z_I) ▪ Nếu $k_1\overrightarrow{IA}+k_2\overrightarrow{IB}+k_3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ $\Rightarrow x_I=\dfrac{k_1x_A+k_2x_B+k_3x_C}{k_1+k_2+k_3}$ (tương tự cho y_I và z_I)
Chuẩn hóa vectơ đơn vị	Cho $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$. Ký hiệu $\overrightarrow{a_{\lvert 1\rvert}}$ là vectơ cùng chiều với $\vec{a}$ và có độ dài bằng 1. Khi đó ta có: $\overrightarrow{a_{\lvert 1\rvert}}=\dfrac{1}{\lvert\vec{a}\rvert}\times\vec{a}=\left(\dfrac{a_1}{\lvert\vec{a}\rvert};\dfrac{a_2}{\lvert\vec{a}\rvert};\dfrac{a_3}{\lvert\vec{a}\rvert}\right)$
Ba điểm thẳng hàng	A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow$ 2 vectơ tùy ý tạo ra từ 3 điểm A, B, C cùng phương $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{AC}$ (sử dụng các điều kiện cùng phương)
Biểu thức tọa độ tích vô hướng	Biết $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ ta có: $\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$
Cos góc xen giữa 2 vectơ	$\cos(\vec{a};\vec{b})=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$
Điều kiện 2 vectơ vuông góc	$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$

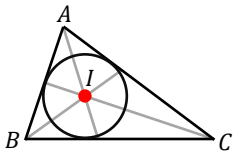
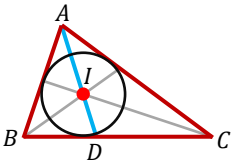
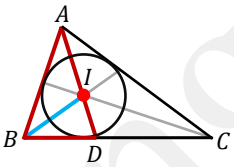
Thầy Lê Trần Kiên

351. Các loại tâm và điểm đặc biệt của tam giác

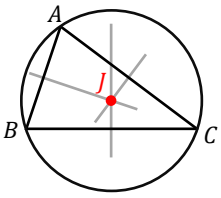
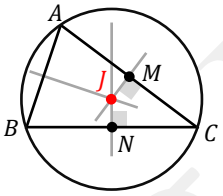
Quy ước về kí hiệu: (A), (B), (C): tọa độ x (hoặc y; hoặc z) tương ứng của điểm A, B, C.

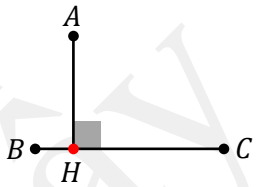
Chân đường phân giác trong 	Tính chất đường phân giác: $$\frac{BD}{BA}=\frac{DC}{CA}$$ $$\Rightarrow BD=\frac{BA}{CA}DC \Rightarrow \overrightarrow{BD}=\frac{BA}{CA}\overrightarrow{DC}$$
Phương trình đường phân giác trong của tam giác 	Cho ΔABC, viết phương trình đường phân giác trong góc $\hat{A}$. Đường phân giác trong góc $\hat{A}$ của ΔABC thỏa mãn các tính chất: – Đi qua A. – Có vtcp là $\vec{u}=\frac{1}{AB}\cdot\widehat{AB}+\frac{1}{AC}\cdot\widehat{AC}$
Trọng tâm 	$$(G)=1:1:1=\frac{1(A)+1(B)+1(C)}{1+1+1}$$
Trực tâm 	***Cách 1***: Công thức tính nhanh (nếu tam giác không đều và không vuông mới áp dụng công thức này, tam giác đều có trực tâm trùng với trọng tâm, tam giác vuông có trực tâm trùng với đỉnh góc vuông) $$(H)=\tan(\hat{A}):\tan(\hat{B}):\tan(\hat{C})$$ $$=\frac{\tan(\hat{A})\times(A)+\tan(\hat{B})\times(B)+\tan(\hat{C})\times(C)}{\tan(\hat{A})+\tan(\hat{B})+\tan(\hat{C})}$$ ***Cách 2***: Khi chưa học phương trình mặt phẳng. *Bước 1*: Vì $H\in mp(ABC)\Rightarrow \overrightarrow{AH}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$ $(*)$ *Bước 2*: Tìm m và n dựa vào 2 điều kiện: $$\begin{cases}AH\perp BC\\BH\perp AC\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AH})\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$$ $$\Rightarrow\begin{cases}(m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{BC}\\(\overrightarrow{BA}+m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$$ $\Rightarrow$ Giải hệ 2 ẩn tìm ra m và n. *Bước 3*: Thay m và n ở bước 2 vào $(*)$ và tìm ra tọa độ H. ***Cách 3***: Khi đã học phương trình mặt phẳng. *Bước 1*: Viết phương trình mặt phẳng đi qua A, B, C. *Bước 2*: Gọi tọa độ H là $H(x_H;y_H;z_H)$. Tìm tọa độ H dựa vào 3 điều kiện: $$\begin{cases}H\in(ABC)\\\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$$

Thầy Lê Trung Kiên

Tâm đường tròn nội tiếp  	***Cách 1***: Công thức tính nhanh (dùng khi tam giác không phải tam giác đều, nếu tam giác là tam giác đều thì tâm đường tròn nội tiếp trùng với trọng tâm) $(I) = a:b:c = \dfrac{a \times (A) + b \times (B) + c \times (C)}{a + b + c}$ ***Cách 2***: Khi phải trình bày chi tiết tự luận *Bước 1*: Tìm tọa độ điểm D là chân đường phân giác trong góc A của ΔABC.  *Bước 2*: Tìm tọa độ điểm I là chân đường phân giác trong góc B của ΔABD. 

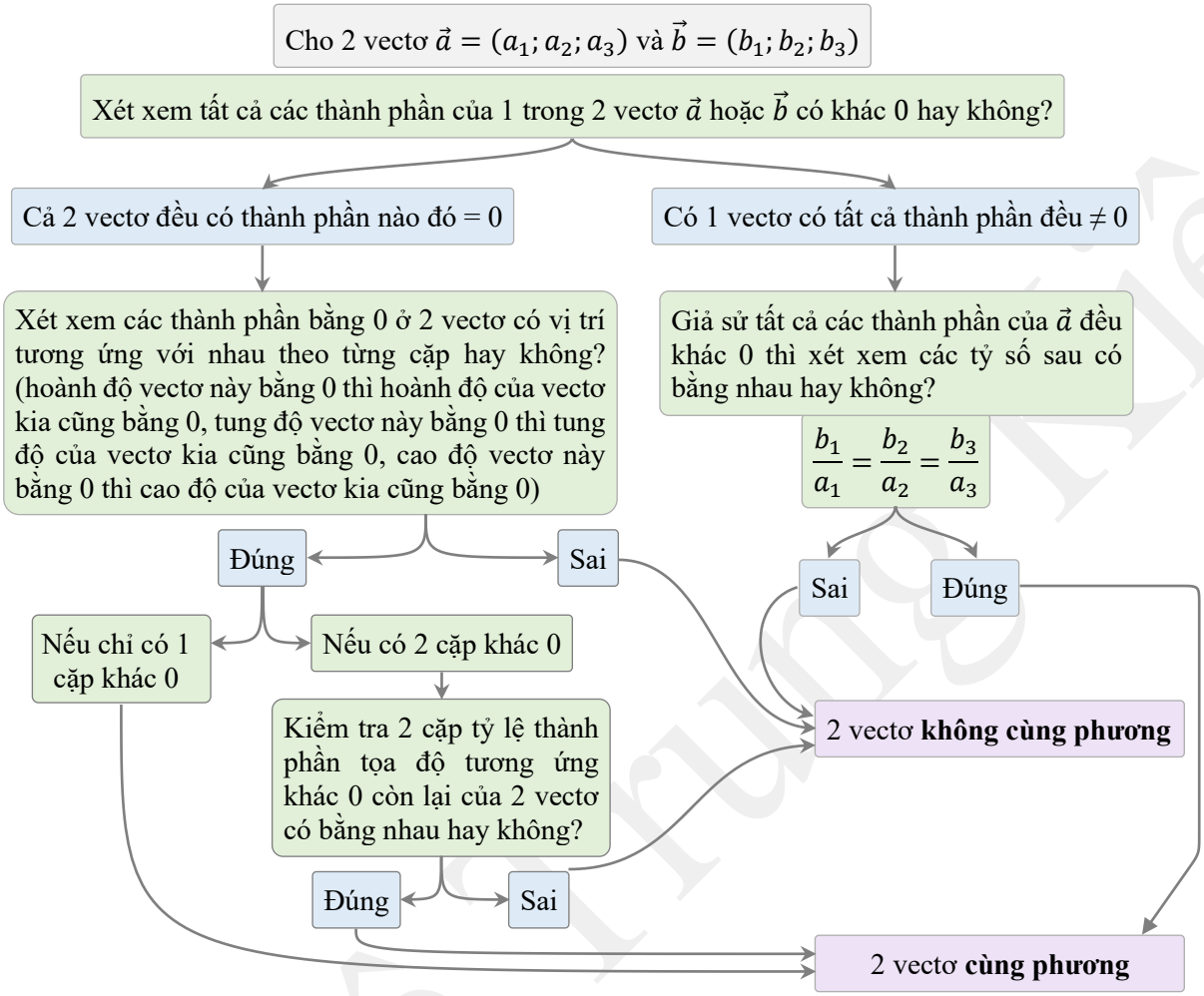
Thầy Lê Trung Kiên

<table>
<tr>
<td>Tâm đường tròn ngoại tiếp
 
</td>
<td>Cách 1: Công thức tính nhanh (dùng khi tam giác không vuông và không đều, tam giác vuông có tâm đường tròn ngoại tiếp là trung điểm cạnh huyền, tam giác đều có tâm đường tròn ngoại tiếp trùng với trọng tâm)
$(J) = \sin(2\hat{A}) : \sin(2\hat{B}) : \sin(2\hat{C})$
$= \dfrac{\sin(2\hat{A}) \times (A) + \sin(2\hat{B}) \times (B) + \sin(2\hat{C}) \times (C)}{\sin(2\hat{A}) + \sin(2\hat{B}) + \sin(2\hat{C})}$
Cách 2: Khi chưa học phương trình mặt phẳng
Bước 1: Vì $J \in mp(ABC) \Rightarrow \overrightarrow{AJ} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$ $(*)$
Bước 2: Tìm ra trung điểm M của AC và N của BC.
 

Bước 3: Tìm m và n dựa vào 2 điều kiện:
$\begin{cases} JN \perp BC \\ JM \perp AC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{JN} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{JM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AN}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ (\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AM}) \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases} (-m\overrightarrow{AB} - n\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AN}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ (-m\overrightarrow{AB} - n\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AM}) \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$
$\Rightarrow$ Giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn, tìm ra m và n.
Bước 4: Thay m và n ở bước 2 vào $(*)$ và tìm ra tọa độ H.
Cách 3: Khi đã học phương trình mặt phẳng
Bước 1: Viết phương trình mặt phẳng đi qua A, B, C.
Bước 2: Gọi tọa độ J là $J(x_J; y_J; z_J)$. Tìm tọa độ J dựa vào 3 điều kiện:
$\begin{cases} J \in (ABC) \\ JA = JB \\ JA = JC \end{cases}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Hình chiếu vuông góc điểm lên đường thẳng
 
</td>
<td>Xác định hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng BC
Bước 1: Vì H ∈ BC ⇒ H, B, C thẳng hàng ⇒ $\overrightarrow{BH} = k\overrightarrow{BC}$ (1)
(Mục tiêu là tìm k)
Bước 2: Vì $AH \perp BC \Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$
(Chèn B và giữa $\overrightarrow{AH}$ để sử dụng được (1))
$\Rightarrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$
$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$
$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + k\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$
$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + k \times BC^2 = 0$ (2)
(Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ và độ dài BC, thay vào (2) giải ra k)
Bước 3: Sau khi tính ra k thay vào (1) tìm ra H.</td>
</tr>
</table>

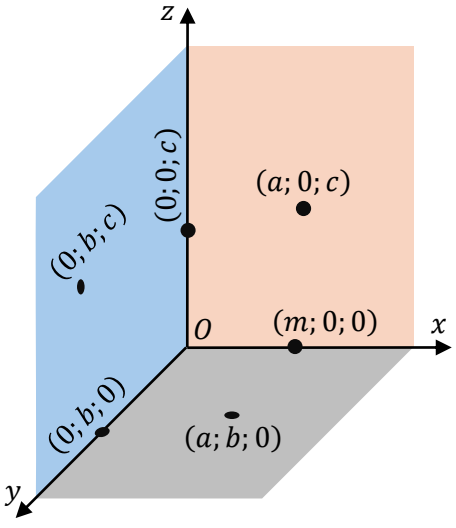
Thầy Lê Minh Kiên

352. Kiểm tra 2 vectơ cùng phương dựa vào tỷ lệ



353. Điểm thuộc đối tượng đặc biệt

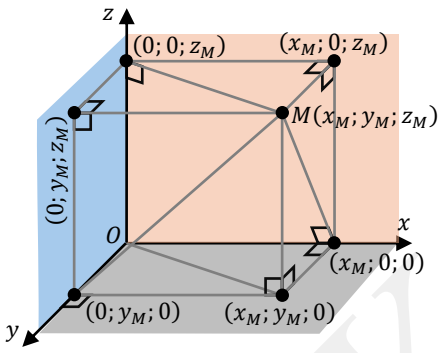
Đối tượng điểm thuộc vào	Đặc điểm tọa độ
Ox	$(m; 0; 0)$ $(m \in \mathbb{R})$
Oy	$(0; m; 0)$ $(m \in \mathbb{R})$
Oz	$(0; 0; m)$ $(m \in \mathbb{R})$
Oxy	$(a; b; 0)$ $(a, b \in \mathbb{R})$
Oyz	$(0; b; c)$ $(b, c \in \mathbb{R})$
Oxz	$(a; 0; c)$ $(a, c \in \mathbb{R})$
Tia Ox	$(m; 0; 0)$ $(m \geq 0)$
Tia Oy	$(0; m; 0)$ $(m \geq 0)$
Tia Oz	$(0; 0; m)$ $(m \geq 0)$
Tia đối của tia Ox	$(m; 0; 0)$ $(m \leq 0)$
Tia đối của tia Oy	$(0; m; 0)$ $(m \leq 0)$
Tia đối của tia Oz	$(0; 0; m)$ $(m \leq 0)$



Thầy Lê Trung Kiên

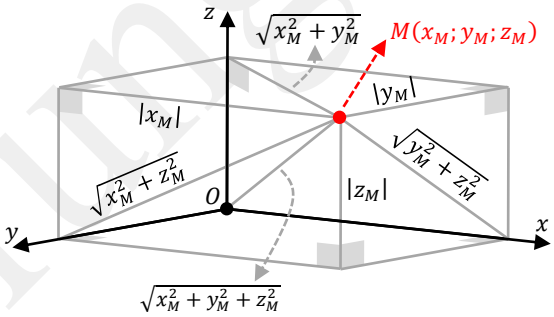
354. Hình chiếu của điểm lên đối tượng đặc biệt

Đối tượng chiếu lên	Đặc điểm tọa độ
Ox	$(x_M; 0; 0)$
Oy	$(0; y_M; 0)$
Oz	$(0; 0; z_M)$
Oxy	$(x_M; y_M; 0)$
Oyz	$(0; y_M; z_M)$
Oxz	$(x_M; 0; z_M)$



355. Khoảng cách từ điểm tới đối tượng đặc biệt

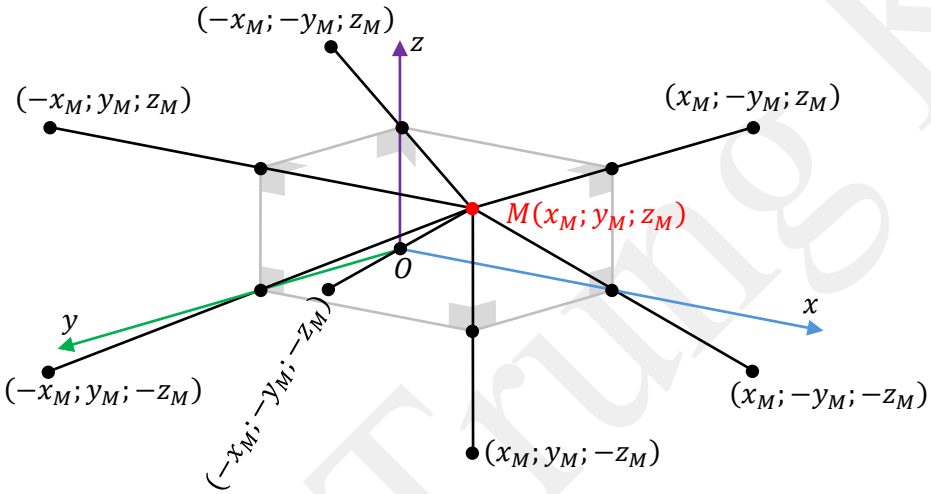
Khoảng cách tới đối tượng	Khoảng cách
Ox	$\sqrt{y_M^2 + z_M^2}$
Oy	$\sqrt{x_M^2 + z_M^2}$
Oz	$\sqrt{x_M^2 + y_M^2}$
Oxy	$\sqrt{z_M^2} = \lvert z_M \rvert$
Oyz	$\sqrt{x_M^2} = \lvert x_M \rvert$
Oxz	$\sqrt{y_M^2} = \lvert y_M \rvert$



Thầy Lê Trung Kiên

356. Đối xứng điểm qua đối tượng đặc biệt

Đối xứng qua	Đặc điểm tọa độ
O	$(-x_M;-y_M;-z_M)$
Ox	$(x_M;-y_M;-z_M)$
Oy	$(-x_M;y_M;-z_M)$
Oz	$(-x_M;-y_M;z_M)$
Oxy	$(x_M;y_M;-z_M)$
Oyz	$(-x_M;y_M;z_M)$
Oxz	$(x_M;-y_M;z_M)$



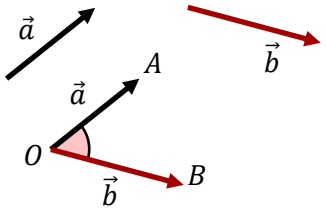
Thầy Lê Trung Kiên

CÁC LOẠI TÍCH VECTƠ

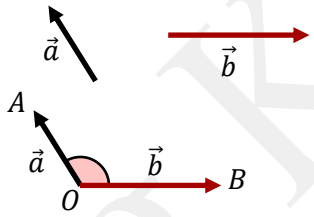
357. Góc giữa 2 vectơ

Cho $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, góc giữa 2 vectơ được kí hiệu là $(\vec{a}; \vec{b})$. Từ một điểm O bất kỳ vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}; \overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Khi đó $(\vec{a}, \vec{b}) = \widehat{AOB}$ với $0° \leq \widehat{AOB} \leq 180°$

Trường hợp 1: Góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc nhọn



Trường hợp 2: Góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc tù



Một số nhận xét về góc giữa 2 vectơ

- $0° \leq$ Góc giữa 2 vectơ $\leq 90°$.
- $(\vec{a}, \vec{b}) = 90° \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.
- $(\vec{a}, \vec{b}) = 0° \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.
- $(\vec{a}, \vec{b}) = 180° \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng.
- $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.
- Để xác định đúng góc giữa hai vectơ hãy đảm bảo là cả hai vectơ cùng gốc.
- Trong trường hợp có ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ hoặc $\vec{b}$ là vectơ $\vec{0}$ thì ta quy ước số đo góc giữa hai vectơ đó là tuỳ ý (từ $0°$ đến $180°$).
- A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 0°$ hoặc $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 180°$.

358. Tích vô hướng

Cho hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác véctơ $\vec{0}$, góc giữa hai véctơ kí hiệu là $(\vec{a}; \vec{b})$. Tích vô hướng giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là 1 số xác định bởi công thức:

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b})$$

Tích vô hướng = Tích độ dài × cos(góc giữa hai vectơ)

Quy ước : Nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $\vec{b} = \vec{0}$ thì tích vô hướng bằng 0

359. Biểu thức tọa độ tích vô hướng

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ được xác định bởi công thức :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Tích vô hướng = Hoành × Hoành + Tung × Tung + Cao × Cao

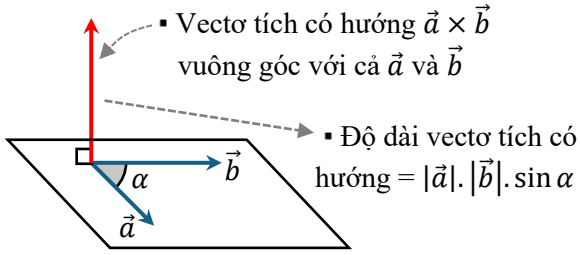
Tài liệu Trung Kiên

360. Tích có hướng

▪ Tích có hướng (hay tích vectơ) của hai vectơ $\vec{u}=(a;b;c)$ và $\vec{v}=(a';b';c')$ là một vectơ, kí hiệu là $[\vec{u},\vec{v}]$ hoặc $\vec{u}\times\vec{v}$ hoặc $\vec{u}\wedge\vec{v}$, được xác định bằng tọa độ như sau :

$$[\vec{u},\vec{v}]=\left(\begin{vmatrix}b & c\\ b' & c'\end{vmatrix};\begin{vmatrix}c & a\\ c' & a'\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}\right)=(bc'-b'c;ca'-c'a;ab'-a'b)$$

Một số tính chất tích có hướng

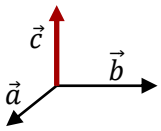


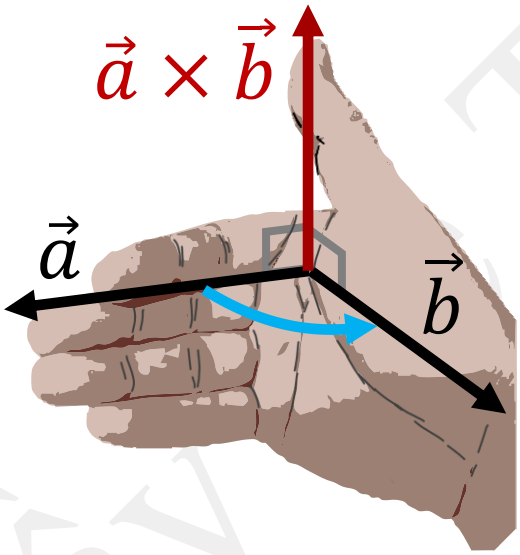
▪ Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow[\vec{u},\vec{v}]=\vec{0}$.

▪ Tích có hướng không có tính chất giao hoán, tức là : $[\vec{u},\vec{v}]\neq[\vec{v},\vec{u}]$

▪ $[\vec{u},\vec{v}]=-[\vec{v},\vec{u}]$

▪ Cho 2 vectơ không cùng phương là $\vec{a}$ và $\vec{b}$ để tạo ra một vectơ $\vec{c}$ vuông góc với cả $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thì ta tính $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ hoặc $\vec{c}=\vec{b}\times\vec{a}$



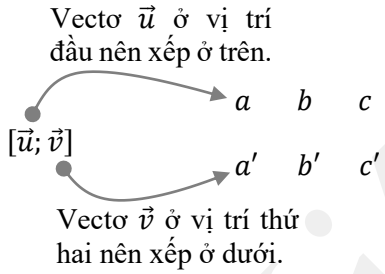


▪ Để xác định chính xác hướng của $\vec{a}\times\vec{b}$ ta sử dụng **quy tắc bàn tay phải** như sau:
Đặt bàn tay phải sao cho:
– Chiều từ lòng bàn tay đến các ngón tay chỉ chiều của $\vec{a}$.
– Chiều từ lòng bàn tay đến cổ tay chỉ chiều của $\vec{b}$.
Khi đó ngón tay cái choãi ra chỉ chiều của $\vec{a}\times\vec{b}$.

Thầy Trung Kiên

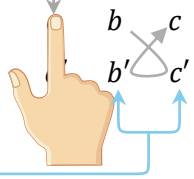
361. Phương pháp tính tích có hướng

Cho hai vectơ $\vec{u} = (a; b; c)$ và $\vec{v} = (a'; b'; c')$.
Tính $[\vec{u}; \vec{v}]$. Ta làm như sau:
Bước 1: Viết ra nháp, sắp xếp hai vectơ theo thứ tự sau :



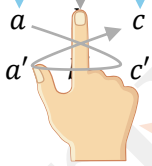
Bước 2 : Ta lần lượt đi tìm các thành phần hoành độ, tung độ, cao độ của vectơ tích có hướng như sau :

Tìm hoành độ. Ta che đi cột hoành độ và tính định thức của hai cột còn lại.



$= bc' - b'c$

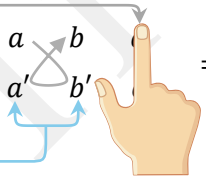
Tìm tung độ. Ta che đi cột tung độ và tính định thức của hai cột còn lại và **phải nhớ đổi dấu định thức tính được.**



$= -(ac' - a'c)$

Nhớ đổi đấu định thức tính được !

Tìm cao độ. Ta che đi cột cao độ và tính định thức của hai cột còn lại.



$= ab' - a'b$

Thầy Lê Trung Kiên

362. Tích hỗn tạp của ba vectơ

▪ Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bất kì. Tích hỗn tạp của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ theo đúng thứ tự đó là một số được cho bởi công thức :

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

▪ Các bước tính tích hỗn tạp $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c}$

Cách 1 : Làm lần lượt.

Bước 1 : Tính tích có hướng $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Bước 2 : Tính tích vô hướng giữa hai vectơ $[\vec{a}, \vec{b}]$ và $\vec{c}$.

Cách 2 : Làm gộp 1 lần (được trình bày ở dưới).

Cho ba vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3); \vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ và $\vec{c} = (c_1; c_2; c_3)$.

Đề bài yêu cầu tính tích hỗn tạp của ba vectơ $[\vec{a}; \vec{b}].\vec{c}$ theo đúng thứ tự đó là làm như sau :

Bước 1 : Viết lại các tọa độ vào nháp như sau (lưu ý : vectơ nào có mặt trước trong tích thì đặt ở trên rồi lần lượt tới các vectơ tiếp theo ở hàng dưới).

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix}$$

Bước 2 : Tính định thức cấp 3 như sau : (Nếu tính bằng tay) thì ghép thêm vào bên phải bảng vừa viết ra nháp hai cột nữa như sau :

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & c_2 \end{matrix}$$

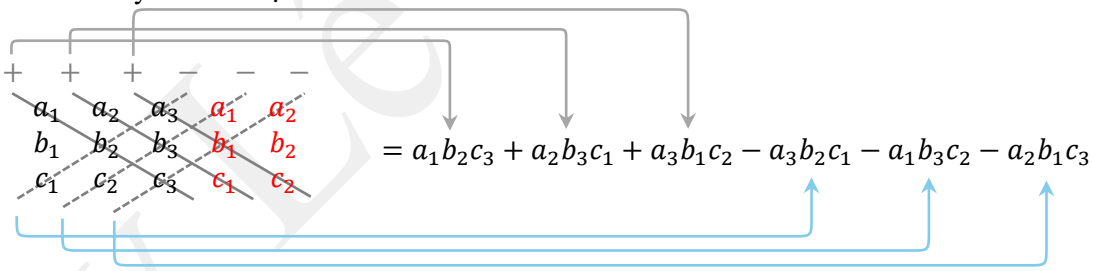
Hai cột được ghép thêm

Giá trị định thức cấp 3 nhận được chính là tích hỗn tạp của ba vectơ.

Lưu ý : có thể tính định thức này bằng máy tính trong trường hợp tất cả các số là số cụ thể.

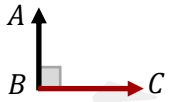
Nếu tính bằng tay thì ta tính định thức bằng quy tắc sau :

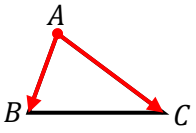
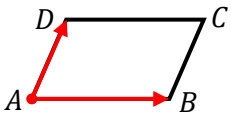
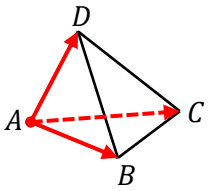
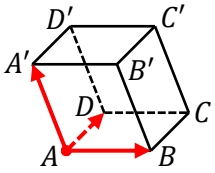
Ta sẽ có tất cả 6 hàng chéo. Mỗi hàng chéo ta tính tích của các phần tử trên hàng chéo đó và lấy dấu tương ứng của nó là $+$ hay $-$ như được đánh dấu ở hình dưới.



Thầy Lê Trung Kiên

363. Ứng dụng tích vectơ

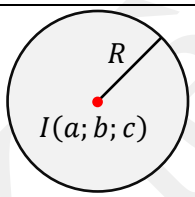
<table>
<tr><td>Điều kiện vuông góc</td><td colspan="2">$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
Lưu ý: Nếu ta cần điều kiện $\widehat{ABC} = 90°$ thì ta giải tìm tham số từ $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. Sau đó xét xem BA và BC có cần điều kiện khác 0 hay không?
 

☞Nếu có thì ta cần kiểm tra lại xem với mỗi giá trị của tham số thì BA và BC có bằng 0 hay không và nhận hoặc loại giá trị tham số cho phù hợp.
☞Nếu BA và BC được quyền suy biến thành một điểm (tức là $B \equiv A$ và $B \equiv C$) thì ta sẽ nhận hết giá trị của m mà không cần thử lại.
Nguyên nhân của sự phức tạp này là do:
▪ Hai vectơ vuông góc ⇒ Tích vô hướng giữa 2 vectơ = 0
▪ Tích vô hướng giữa hai vectơ = 0 ⇒ $\left[\begin{array}{l}\text{Hai vectơ vuông góc}\\ \text{Có ít nhất một trong 2 vectơ là } \vec{0}\end{array}\right.$</td></tr>
<tr><td>Điều kiện cùng phương</td><td colspan="2">$\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương $\Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{v}] = \vec{0}$</td></tr>
<tr><td>Điều kiện đồng phẳng</td><td colspan="2">$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{v}] \cdot \vec{w} = 0$</td></tr>
<tr><td>Diện tích tam giác</td><td>$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$
(Các công thức tương tự khác cho các vectơ tích có hướng cùng tỏa ra từ 1 đỉnh)
hoặc
$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right)^2}$
(Các công thức tương tự khác cho các vectơ tích vô hướng cùng tỏa ra từ 1 đỉnh)</td><td> 
</td></tr>
<tr><td>Diện tích hình bình hành</td><td>$S_{ABCD} = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|$
(Các công thức tương tự khác cho các vectơ tích có hướng cùng tỏa ra từ 1 đỉnh)</td><td> 
</td></tr>
<tr><td>Thể tích tứ diện</td><td>$V_{A.BCD} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AD}\right|$
(Các công thức tương tự khác cho các vectơ tích hỗn tạp cùng tỏa ra từ 1 đỉnh)</td><td> 
</td></tr>
<tr><td>Thể tích hình hộp</td><td>$V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right) \cdot \overrightarrow{AA'}\right|$
(Các công thức tương tự khác cho các vectơ tích hỗn tạp cùng tỏa ra từ 1 đỉnh)</td><td> 
</td></tr>
</table>

Thầy Lê Trung Kiên

PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

364. Phương trình mặt cầu

Dạng chuẩn tắc	Mặt cầu (S) tâm $I(a,b,c)$, bán kính R có phương trình là : $(S): (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ hay $(S): (x-x_{\text{tâm}})^2+(y-y_{\text{tâm}})^2+(z-z_{\text{tâm}})^2=\text{Bán kính}^2$ 
Dạng khai triển	$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ Với tọa độ tâm $I\left(\frac{\text{hệ số trước } x}{-2};\frac{\text{hệ số trước } y}{-2};\frac{\text{hệ số trước } z}{-2}\right)$ và bán kính $R=\sqrt{x_{\text{tâm}}^2+y_{\text{tâm}}^2+z_{\text{tâm}}^2-\text{hệ số tự do}}$

Điều kiện để phương trình $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ là phương trình của một mặt cầu là:

$$\left(\frac{a}{-2}\right)^2+\left(\frac{b}{-2}\right)^2+\left(\frac{c}{-2}\right)^2-d>0$$

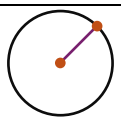
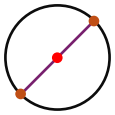
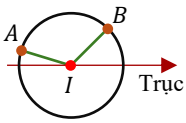
hay

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(\frac{\text{hệ số trước } x}{-2}\right)^2+\left(\frac{\text{hệ số trước } y}{-2}\right)^2+\left(\frac{\text{hệ số trước } z}{-2}\right)^2-\text{hệ số tự do}>0}_{\text{Chính là biểu thức dưới dấu căn khi tính } R}$$

365. Viết phương trình mặt cầu dạng đơn giản

Tùy thuộc vào số điểm đề bài cho thuộc vào mặt cầu mà ta sử dụng dạng chính tắc hoặc dạng khai triển một cách thích hợp.

▪ **Cách 1**: Khi số điểm đề bài cho thuộc mặt cầu là một số bé hơn hoặc bằng 2 ⇒ Sử dụng dạng chính tắc.
Nếu chưa biết tâm thì ta đi tìm tâm trước tiên. Nếu đã biết tâm thì ta đi tìm bán kính của mặt cầu.

Dạng 1 : Biết tâm + 1 điểm ∈ mặt cầu Bán kính = Khoảng cách từ tâm đến điểm ∈ mặt cầu.	
Dạng 2 : Biết 2 điểm nối tạo thành đường kính Tọa độ tâm = Trung điểm 2 điểm nối tạo thành đường kính Bán kính = Độ dài đường kính ÷ 2	
Dạng 3 : Biết tâm I ∈ đường thẳng Δ và 2 điểm A, B ∈ mặt cầu Xác định dạng tọa độ tâm I dựa vào I ∈ Δ và $IA=IB$.	

Thầy Lê Trung Kiên

▪ **Cách 2**: Khi số điểm đề bài cho thuộc mặt cầu là một số lớn hơn hoặc bằng 3 ⇒ Sử dụng dạng khai triển. Cách này thường phải lập hệ phương trình để giải.

Dạng 4: Phương trình mặt cầu đi qua 4 điểm A, B, C, D

Phương trình mặt cầu có dạng $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

Vì mặt cầu đi qua 4 điểm A, B, C, D nên ta lập được hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_A^2+y_A^2+z_A^2+ax_A+by_A+cz_A+d=0 \\ x_B^2+y_B^2+z_B^2+ax_B+by_B+cz_B+d=0 \\ x_C^2+y_C^2+z_C^2+ax_C+by_C+cz_C+d=0 \\ x_D^2+y_D^2+z_D^2+ax_D+by_D+cz_D+d=0 \end{cases}$$

4 ẩn số

Giải hệ 4 ẩn ta tìm được a,b,c,d, từ đó tìm được phương trình mặt cầu.

Dạng 5: (S) đi qua ba điểm A,B,C và có tâm I nằm trên mp(P)

Giả sử phương trình mặt cầu có dạng:

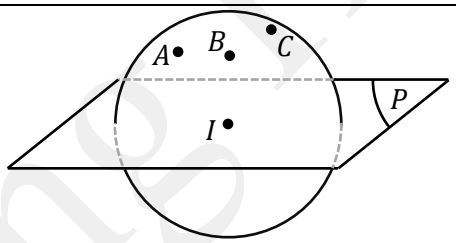
$$(S): x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

Vì $A,B,C\in(S)\Rightarrow$ 3 phương trình (1), (2), (3)

Từ phương trình $(S)\Rightarrow$ Tâm $I\left(\frac{a}{-2};\frac{b}{-2};\frac{c}{-2}\right)$

Mà $I\in mp(P)\Rightarrow$ Phương trình (4)

Giải hệ (1), (2), (3), (4) ta tìm được a,b,c,d



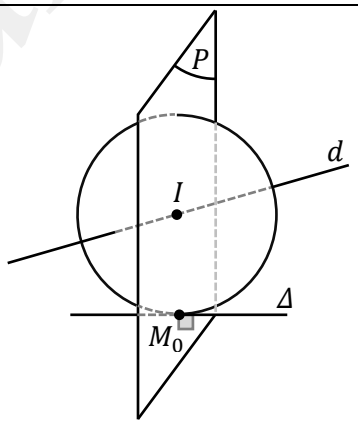
Dạng 6: Phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với một đường thẳng Δ tại tiếp điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có tâm I thuộc đường thẳng d cho trước

Viết ptmp (P) đi qua điểm M_0 và vuông góc với đường thẳng Δ.

Toạ độ tâm $I=(P)\cap\Delta$ là nghiệm của phương trình.

Bán kính mặt cầu $R=IM_0$

Kết luận về phương trình mặt cầu (S)



Dạng 7: Tìm tập hợp tâm mặt cầu

Tìm toạ độ của tâm I, chẳng hạn: $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \\ z=h(t) \end{cases}(*)$

Khử t trong $(*)$ ta có phương trình tập hợp điểm.

Tìm giới hạn quĩ tích (nếu có).

Thầy Lê Trung Kiên

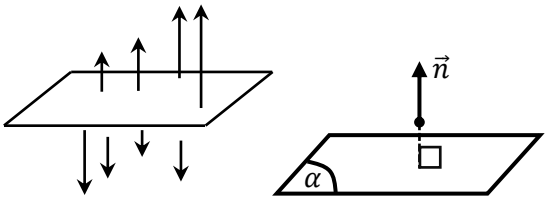
PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

366. Vectơ đặc trưng cho phương của mặt phẳng

Vectơ pháp tuyến (vtpt) của mặt phẳng

Cho mp(α). Nếu vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ và có giá vuông góc với mp(α) thì $\vec{n}$ được gọi là vtpt của (α).

Chú ý : Nếu $\vec{n}$ là vtpt của một mặt phẳng thì $k\vec{n}$ với $k \neq 0$, cũng là vtpt của mặt phẳng đó. Vậy một mặt phẳng có vô số vtpt vuông góc với nó.

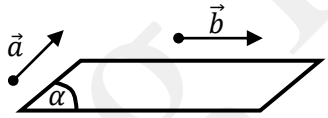


Cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng

Cho mp(α) và 2 vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$). Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là cặp vectơ chỉ phương của mp(α) nếu nó thỏa mãn hai điều kiện :

▪ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương.

▪ Giá của mỗi vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ hoặc song song hoặc nằm trong mặt phẳng (α).



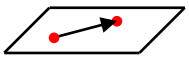
Quan hệ giữa cặp vectơ chỉ phương & vtpt của mặt phẳng

Giả sử $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là cặp vectơ chỉ phương của mp(α). Khi đó ta có $[\vec{a};\vec{b}]$ (hoặc $[\vec{b};\vec{a}]$) là một vtpt của mp(α).

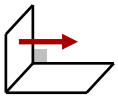
$$\vec{n}_{\text{pháp tuyến mặt phẳng}} = \text{Tích có hướng}(\text{Cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng})$$

Chú ý : Vectơ chỉ phương của mp thường được suy ra như sau:

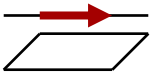
▪ Nếu biết trước 2 điểm nằm trên mp thì vectơ tạo bởi 2 điểm đó là 1 vtcp của mp.



▪ Nếu 2 mặt phẳng vuông góc với nhau thì vtpt của mp này là 1 vtcp của mp kia.



▪ Nếu đường thẳng song song hoặc nằm trên mp thì vtcp của đường thẳng là 1 vtcp của mp.



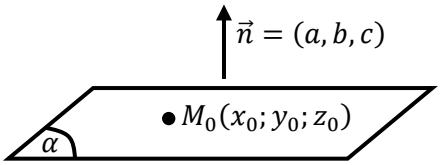
367. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

▪ Trong không gian Oxyz, cho mp(α) đi qua $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và nhận $\vec{n} = (a,b,c)$ làm vtpt. Phương trình của mp(α) :

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

hay

$$ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0$$



▪ Phương trình $ax + by + cz + d = 0$, trong đó a, b, c không đồng thời bằng 0, được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng.

Một số nhận xét về phương trình mặt phẳng

▪ Khi phải viết phương trình mặt phẳng mà ta chưa biết rõ vtpt hay chưa biết rõ một điểm thuộc nó thì ta thường giả sử mặt phẳng có dạng : $ax + by + cz + d = 0$ (Trong đó $\vec{n}_{\text{pháp tuyến}} = (a,b,c)$ và $d \in \mathbb{R}$)

▪ Nếu ta đã biết phương trình của một mặt phẳng là $ax + by + cz + d = 0$ thì ta suy ra được một vtpt của nó là $\vec{n} = (a;b;c)$.

▪ Để **tìm 1 điểm ∈ mp** ta chọn trước 2 thành phần của tọa độ, rồi thế vào phương trình mp để tìm tọa độ còn lại ⇒ tọa độ 1 điểm ∈ mp (2 thành phần tọa độ chọn trước thường được chọn là số tùy ý, nhưng có một số trường hợp cần chọn một cách kéo léo).

Tài Liệu Trung Kiên

▪ **Viết nhanh phương trình mặt phẳng khi biết vtpt và 1 điểm ∈ mặt phẳng**

Vtpt của mặt phẳng là $\vec{n} = (a; b; c)$

$\Rightarrow$ Ptmp là: $ax + by + cz + \cdots = 0$

Mặt phẳng đi qua điểm $(x_0; y_0; z_0)$, ta nhân tương ứng các tọa độ của điểm và vtpt với nhau.

$(x_0; y_0; z_0)$

$\vec{n} = (a\ ;\ b\ ;\ c)$

$x_0a + y_0b + z_0c$

Đổi dấu thành $-(x_0a + y_0b + z_0c)$

▪ **Phương pháp viết nhanh phương trình mặt phẳng đi qua 3 điểm**

Giả sử mặt phẳng đi qua ba điểm $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, $C(x_C; y_C; z_C)$

Bước 1: Bấm hệ phương trình bậc nhất 3 ẩn với hệ số có dạng:

$$\begin{matrix} x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \end{matrix}$$

Nếu ra nghiệm duy nhất giả sử là a, b, c thì phương trình mặt phẳng (ABC) là: $(ABC): ax + by + cz = 1$

Nếu ra vô nghiệm thì ta suy ra hệ số tự do phải bằng 0 $\Rightarrow$ Mặt phẳng chắc chắn đi qua gốc tọa độ.

Bước 2: Chọn hai điểm (có các thành phần tọa độ không tương ứng tỷ lệ ở tất cả các thành phần) trong số 3 điểm A, B, C, giả sử là 2 điểm A và B và tạo ra hai vectơ.

$\overrightarrow{OA} = (x_A; y_A; z_A)$

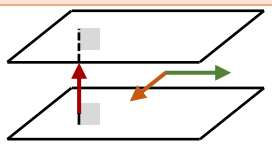
$\overrightarrow{OB} = (x_B; y_B; z_B)$

Tính tích có hướng của 2 vectơ này để ra vectơ pháp tuyến của mặt phẳng.

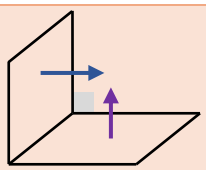
Sau đó áp dụng phương pháp viết phương trình mặt phẳng khi biết vectơ pháp tuyến và 1 điểm.

Hoàn thành

▪ Nếu 2 mp song song với nhau thì chúng có cùng vtpt và có cùng cặp véctơ chỉ phương.



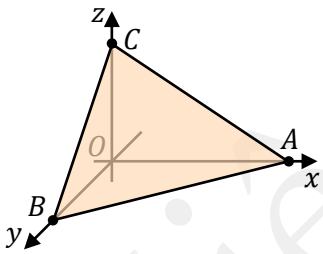
▪ Nếu 2 mp vuông góc với nhau thì vtpt của mp này sẽ là một véctơ chỉ phương của mp kia.



368. Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn

Trong không gian Oxyz, cho mp(α) đi qua 3 điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ $(a,b,c \neq 0)$ khi đó phương trình mp(α) là :

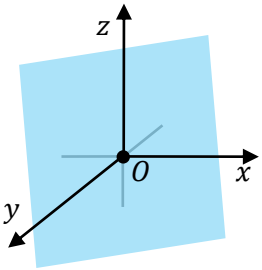
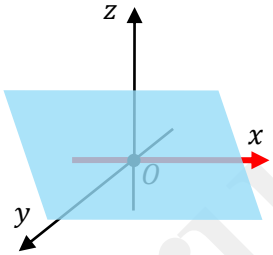
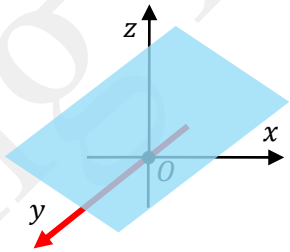
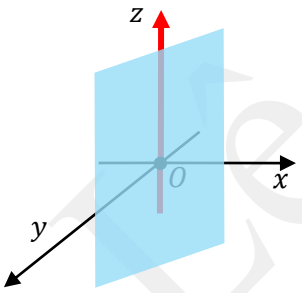
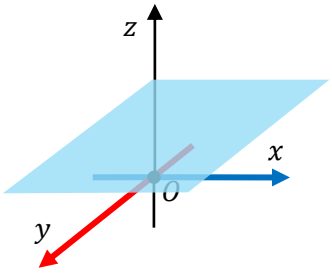
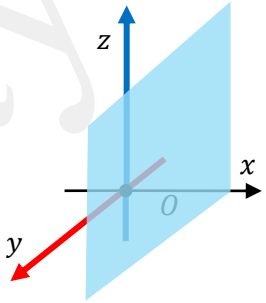
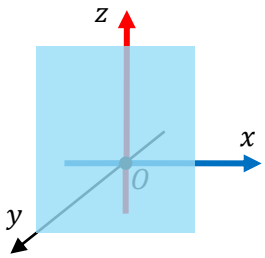
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$



Lưu ý: Mỗi điểm ở đây nằm hoàn toàn trên một trục tọa độ, dạng tổng quát là:

$$\frac{x}{\text{Điểm nằm trên } Ox}+\frac{y}{\text{Điểm nằm trên } Oy}+\frac{z}{\text{Điểm nằm trên } Oz}=1$$

369. Các mặt phẳng đặc biệt

Mặt phẳng đi **qua gốc tọa độ** $ax+by+cz=0$ (hệ số $d=0$) 	Song song hoặc chứa trục **Ox** $by+cz+d=0$ (hệ số $a=0$) 	Song song hoặc chứa trục **Oy** $ax+cz+d=0$ (hệ số $b=0$) 
Song song hoặc chứa trục **Oz** $ax+by+d=0$ (hệ số $c=0$) 	Song song hoặc trùng với **Oxy** $cz+d=0$ (hệ số $a=b=0$) 	
Song song hoặc trùng với **Oyz** $ax+d=0$ (hệ số $b=c=0$) 	Song song hoặc trùng với **Oxz** $by+d=0$ (hệ số $a=c=0$) 	

Thầy Lê Trung Kiên

370. Viết phương trình mặt phẳng

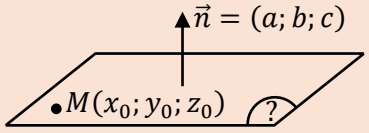
a) Không có yếu tố đường thẳng và mặt cầu

Dạng 1: Viết ptmp khi biết 1 điểm và vtpt của nó

$$\Rightarrow ptmp: a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

hoặc

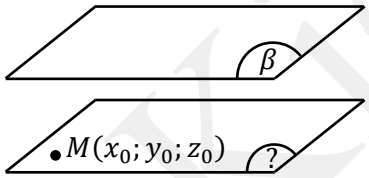
$$ax+by+cz-(ax_0+by_0+cz_0)=0$$



Dạng 2: Viết ptmp(α) đi qua $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và song song với mp(β): $Ax+By+Cz+D=0$ cho trước

Vì $(\alpha)//(\beta) \Rightarrow (\alpha)$ có dạng: $Ax+By+Cz+D'=0$ $(D' \neq D)$ $(*)$

Vì $M_0 \in (\alpha)$ nên thay tọa độ M_0 vào $(*)$ tìm được D' (nhớ nhận loại dựa vào điều kiện $D' \neq D$)

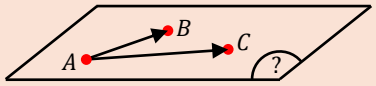


Dạng 3: Viết ptmp(α) đi qua 3 điểm A, B, C không thẳng hàng

Tìm tọa độ các vectơ: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Vectơ pháp tuyến $\vec{n}_\alpha = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

Chuyển về dạng 1: Viết ptmp khi biết 1 điểm và vtpt của nó.



Dạng 4: Viết ptmp(α) đi qua 2 điểm A, B và vuông góc với mp(β)

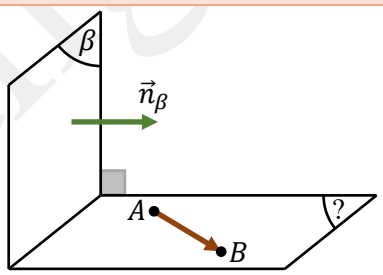
Tìm vtpt của (β) là $\vec{n}_\beta$.

Tìm tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB}$.

$\vec{n}_\beta$ và $\overrightarrow{AB}$ là cặp vectơ chỉ phương của mp(α)

$$\Rightarrow \text{vtpt } \vec{n}_\alpha = \vec{n}_\beta \times \overrightarrow{AB}$$

Chuyển về dạng 1: Viết ptmp khi biết 1 điểm và vtpt của nó.



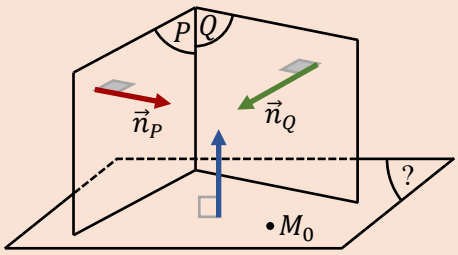
Dạng 5: Viết ptmp(α) đi qua điểm M_0 và vuông góc với 2 mặt phẳng (P) và (Q) cho trước.

Tìm vtpt của (P) và (Q) là $\vec{n}_P$ và $\vec{n}_Q$.

$\vec{n}_P$ và $\vec{n}_Q$ là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng

$$\Rightarrow \text{vtpt } \vec{n}_{(\alpha)} = \vec{n}_P \times \vec{n}_Q$$

Chuyển về dạng 1: Viết ptmp khi biết 1 điểm và vtpt của nó



Dạng 6: Viết ptmp(α) song song với mp(β) và cách mp(P): $Ax+By+Cz+D=0$ một khoảng k cho trước (biết mp(β) // mp(P) hoặc mp(β) $\equiv$ mp(P))

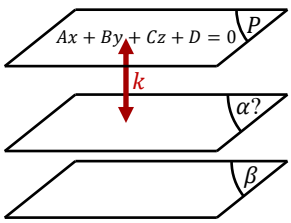
Vì $(\alpha)//(\beta) \Rightarrow (\alpha)$ có dạng: $Ax+By+Cz+D'=0$ $(D' \neq$ hệ số tự do của ptmp $(\beta))$

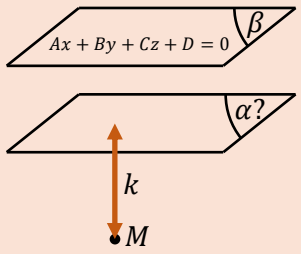
Sử dụng công thức khoảng cách:

$$d_{((\alpha);(P))} = k \Rightarrow \frac{|D-D'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = k$$

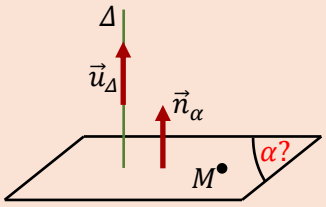
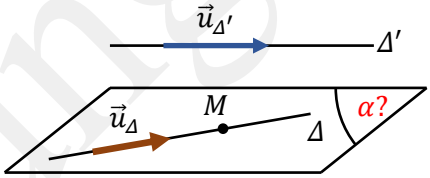
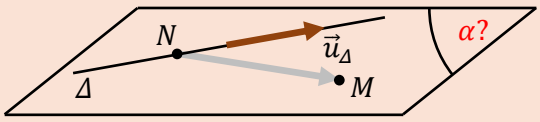
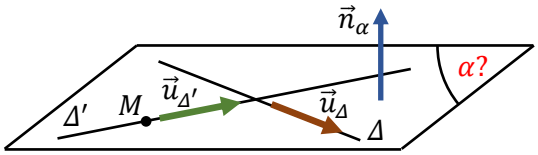
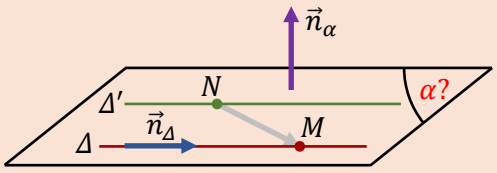
$\Rightarrow$ tham số $\Rightarrow$ kiểm tra lại tính song song với (β) của từng tham số.

Lưu ý: $|A| = B$ (với $B \geq 0$) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=B \\ A=-B \end{array}\right.$



Dạng 7: Viết mp(α) song song với mp(β): $Ax + By + Cz + D = 0$ cho trước và cách điểm M một khoảng k cho trước Vì $(\alpha)//(\beta) \Rightarrow (\alpha)$ có dạng: $Ax + By + Cz + D' = 0$ $(D' \neq D)$ Sử dụng công thức khoảng cách $d_{(M;(\alpha))} = k$ để tìm D' (nhớ kiểm tra lại điều kiện $D' \neq D$)	

b) Có chứa yếu tố đường thẳng

Dạng 1: Viết ptmp(α) đi qua M và vuông góc với đường thẳng Δ. Tìm vtcp của Δ là $\vec{u}_\Delta$. Vì $(\alpha) \perp \Delta \Rightarrow$ vtpt $\vec{n}_\alpha = \vec{u}_\Delta$. Áp dụng cách viết ptmp đi qua 1 điểm và có 1 vtpt $\vec{n}_\alpha$.	
Dạng 2: Viết ptmp (α) chứa đường thẳng Δ và song song với Δ' (Δ, Δ' chéo nhau). Tìm vtcp của Δ và Δ' là $\vec{u}_\Delta$ và $\vec{u}_{\Delta'}$. Vtpt của mp(α) là: $\vec{n}_\alpha = \vec{u}_\Delta \times \vec{u}_{\Delta'}$. Lấy 1 điểm $M \in \Delta$. Áp dụng cách viết ptmp đi qua 1 điểm và có 1 vtpt.	
Dạng 3: Viết ptmp(α) chứa đường thẳng Δ và 1 điểm M Tìm vtcp của Δ là $\vec{u}_\Delta$, lấy 1 điểm $N \in \Delta$. Tính tọa độ $\overrightarrow{MN}$ Vtpt của mp(α) là: $\vec{n}_\alpha = \vec{u}_\Delta \times \overrightarrow{MN}$ Áp dụng cách viết ptmp đi qua 1 điểm và có 1 vtpt	
Dạng 4: Viết ptmp(α) chứa 2 đường thẳng Δ và Δ' cắt nhau Tìm vtcp của Δ và Δ' là $\vec{u}_\Delta$ và $\vec{u}_{\Delta'}$. Vtpt của mp(α) là $\vec{n}_\alpha = \vec{u}_\Delta \times \vec{u}_{\Delta'}$. Lấy 1 điểm $M \in \Delta' \Rightarrow M \in (\alpha)$. Áp dụng cách viết ptmp đi qua 1 điểm và có 1 vtpt.	
Dạng 5: Viết ptmp(α) chứa 2 đường thẳng song song Δ và Δ' Tìm vtcp của Δ là $\vec{u}_\Delta$, lấy $M \in \Delta$, $N \in \Delta'$. Vtpt của mp(α) là $\vec{n}_\alpha = \vec{u}_\Delta \times \overrightarrow{MN}$. Áp dụng cách viết ptmp đi qua 1 điểm và có 1 vtpt.	

Dạng 6: Viết ptmp(α) chứa đường thẳng Δ, vuông góc với mp(β)

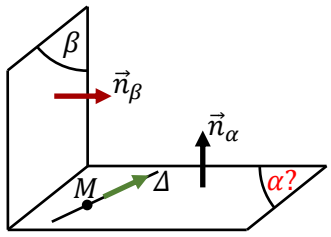
Tìm vtpt của (β) là $\vec{n}_\beta$.

Tìm vtcp của Δ là $\vec{u}_\Delta$.

Vtpt của mp(α) là : $\vec{n}_\alpha = \vec{n}_\beta \times \vec{u}_\Delta$.

Lấy 1 điểm $M \in \Delta$.

Áp dụng cách viết ptmp đi qua 1 điểm và có 1 vtpt.

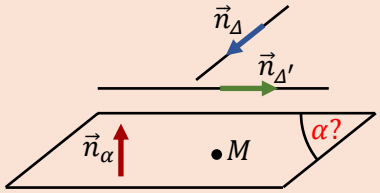


Dạng 7: Viết ptmp(α) đi qua 1 điểm M và song song với 2 đường thẳng Δ và Δ' chéo nhau cho trước.

Tìm vtcp của Δ và Δ' là $\vec{u}_\Delta$ và $\vec{u}_{\Delta'}$.

Vtpt của mp(α) là $\vec{n}_\alpha = \vec{u}_\Delta \times \vec{u}_{\Delta'}$.

Áp dụng cách viết ptmp đi qua 1 điểm và có 1 vtpt.



Dạng 8: Viết ptmp(α): $Ax + By + Cz + D = 0$, biết (α) chứa đường thẳng Δ và tạo với một mp(β) một góc φ.

Bước 1: Tìm vtpt của (β) là $\vec{n}_\beta$.

Bước 2: Tìm một điểm M tùy ý và $M \in \Delta$.

Bước 2: Tìm A, B, C dựa vào hệ phương trình:

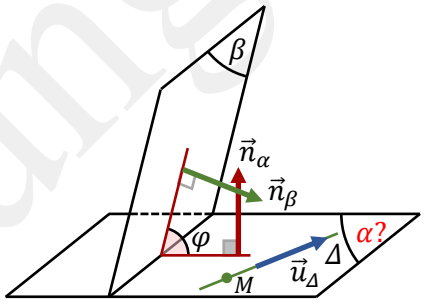
$$\begin{cases} \left|\cos\left(\vec{n}_\alpha; \vec{n}_\beta\right)\right| = \cos\varphi \\ \vec{n}_\alpha \cdot \vec{u}_\Delta = 0 \\ M \in (\alpha) \end{cases}$$

Xét 2 trường hợp:

TH1: $D = 0$, giải ra A, B, C.

TH2: $D \neq 0$, chọn tùy ý D là một số khác 0 và giải ra A, B, C.

Áp dụng cách viết ptmp đi qua 1 điểm và có 1 vtpt.

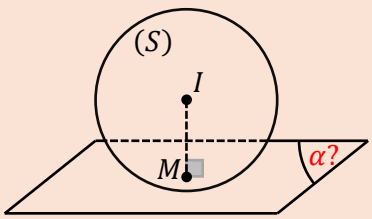


Dạng 9: Viết ptmp(α) tiếp xúc với mặt cầu (S)

Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của mặt cầu.

Nếu mp(α) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại $M \in (S)$ thì mp(α) đi qua điểm M và có vtpt là $\overrightarrow{MI}$.

Khi bài toán không cho tiếp điểm thì ta phải sử dụng các dữ kiện của bài toán tìm được vtpt của mp và viết ptmp có dạng $Ax + By + Cz + D = 0$ (D chưa biết). Sử dụng điều kiện tiếp xúc $d_{(I;(\alpha))} = R$ để tìm D.



Dạng 10: Viết ptmp(α) biết $d \subset (\alpha)$ và $d_{(M;(\alpha))} = k$.

(α) có dạng: $ax + by + cz + D = 0$ $(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$

Lấy 2 điểm tùy ý $A, B \in d \Rightarrow A, B \in (\alpha)$

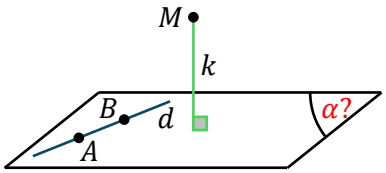
$\Rightarrow$ 2 phương trình (1), (2)

Từ điều kiện $d_{(M;(\alpha))} = k \Rightarrow$ phương trình (3)

Giải hệ (1), (2), (3). Xét 2 trường hợp

TH1: $D = 0$, giải ra a, b, c.

TH2: $D \neq 0$, chọn tùy ý D là một số khác 0 và giải ra a, b, c.



371. Hai điểm cùng phía, khác phía so với 1 mặt phẳng

Cho hai điểm A, B và mp(α) có phương trình (α): $ax + by + cz + d = 0$.
Gọi $T = (ax_A + by_A + cz_A + d)(ax_B + by_B + cz_B + d)$

▪ Nếu $T > 0$ thì A và B nằm cùng phía so với (α).



▪ Nếu $T < 0$ thì A và B nằm khác phía so với (α).



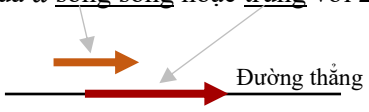
▪ Nếu $T = 0$ thì có ít nhất 1 trong 2 điểm nằm trên (α).

Thầy Lê Trung Kiên

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

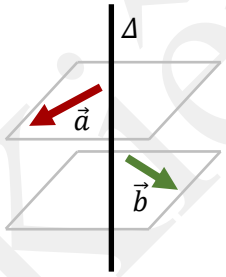
372. Vectơ đặc trưng cho phương của đường thẳng

Véctơ $\vec{a}$ được gọi là **vectơ chỉ phương** của đường thẳng Δ nếu giá của $\vec{a}$ song song hoặc trùng với Δ.



Cho đường thẳng Δ và hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ $(\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0})$. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là **cặp vectơ pháp tuyến của đường thẳng** Δ nếu nó thỏa mãn hai điều kiện :

- $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương.
- Giá của cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với đường thẳng Δ.

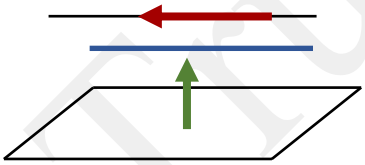


Quan hệ giữa vectơ chỉ phương và cặp vectơ pháp tuyến của đường thẳng

Giả sử $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là cặp vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ. Khi đó ta có $[\vec{a};\vec{b}]$ (hoặc $[\vec{b};\vec{a}]$) là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

$$\vec{u}_{\text{chỉ phương đường thẳng}} = \text{Tích có hướng}(\text{Cặp vectơ pháp tuyến của đường thẳng})$$

Chú ý : Cặp vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ thường được suy ra từ các quan hệ vuông góc với một đường thẳng khác, hoặc từ quan hệ Δ song song với một mặt phẳng nào đó.



373. Phương trình tham số và chính tắc của đường thẳng

Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và nhận $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$ làm vtcp.

Phương trình tham số của đường thẳng Δ :

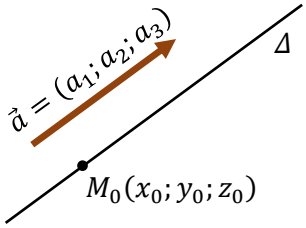
$$\Delta: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

(Trong đó t là tham số và giống nhau ở cả ba tọa độ)

Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ :

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

Chú ý : Nếu có ít nhất một thành phần của vectơ chỉ phương của đường thẳng bằng 0 thì đường thẳng đó không có phương trình chính tắc.



Thầy Lê Trung Kiên

Một số nhận xét

Cho đường thẳng Δ có phương trình: $\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

Kiểm tra một điểm có thuộc đường thẳng hay không?

Điểm $A(x_A; y_A; z_A) \in \Delta \Leftrightarrow \exists t_0 \in \mathbb{R}$ sao cho : $\begin{cases} x_A = x_0 + a_1 t_0 \\ y_A = y_0 + a_2 t_0 \\ z_A = z_0 + a_3 t_0 \end{cases}$

Suy ra vtcp của đường thẳng?

Vtcp của Δ là $\vec{u}_\Delta = (a_1; a_2; a_3)$

Suy ra tọa độ điểm thuộc đường thẳng?

Để tìm tọa độ của 1 điểm $\in$ đường thẳng ta chọn cho t một giá trị số cụ thể, rồi thay giá trị t đó vào trong phương trình đường thẳng để tìm ra tọa độ $(x; y; z)$.

Chuyển đổi phương trình tham số → chính tắc

Điều kiện: ta chỉ có thể chuyển đổi phương trình tham số về dạng chính tắc nếu cả ba thành phần của vectơ chỉ phương của đường thẳng đều khác 0.

Cách chuyển đổi :

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases} \xrightarrow{\text{Rút } t \text{ ra từ mỗi phương trình}} \begin{cases} \dfrac{x - x_0}{a_1} = t \\ \dfrac{y - y_0}{a_2} = t \\ \dfrac{z - z_0}{a_3} = t \end{cases} \Rightarrow \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

(ba tham số t ở các phương trình là bằng nhau nên ta cho ba giá trị t đó bằng nhau)

Chuyển đổi phương trình chính tắc → tham số

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

Cách chuyển đổi :

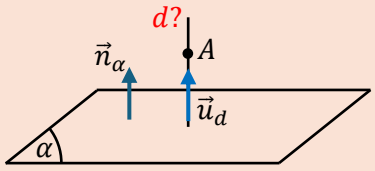
$$\text{Đặt } \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} = t \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

374. Một số dạng viết phương trình đường thẳng

Dạng 1: Lập ptđt d đi qua điểm A và $d \perp (\alpha)$

– Vì $d \perp (\alpha) \Rightarrow$ vtcp $\vec{u}_d = \vec{n}_\alpha$.

– Viết ptđt d đi qua A và có vtcp $\vec{u}_d = \vec{n}_\alpha$.



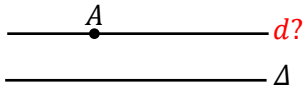
Dạng 2: Lập ptđt d đi qua điểm A và $d//\Delta$

Nếu $A \in \Delta \Rightarrow$ Không tồn tại d.

Nếu $A \notin \Delta$

– Vì $d//\Delta \Rightarrow \vec{u}_d = \vec{u}_\Delta$

– Viết ptđt d đi qua A và có vtcp $\vec{u}_d = \vec{u}_\Delta$

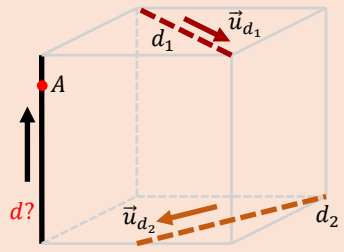


Dạng 3: Lập ptđt d đi qua A và $d \perp d_1$, $d \perp d_2$, d_1 không song song và không trùng d_2

– Vì $d \perp d_1$, $d \perp d_2 \Rightarrow$ Cặp vtpt của d là $\vec{u}_{d_1}$ và $\vec{u}_{d_2}$

$$\Rightarrow \vec{u}_d = \vec{u}_{d_1} \times \vec{u}_{d_2}$$

– Viết ptđt d qua A và có vtcp $\vec{u}_d = \vec{u}_{d_1} \times \vec{u}_{d_2}$.

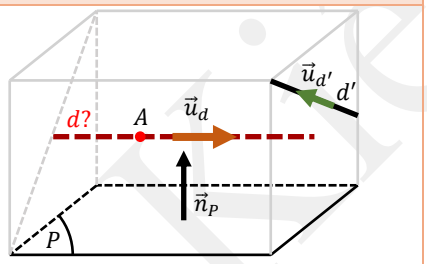


Dạng 4: Lập ptđt d đi qua A và $d \,//\, (P)$, $d \perp d'$

– Vì $d \,//\, (P)$, $d \perp d' \Rightarrow$ Cặp vtpt của d là $\vec{n}_P$ và $\vec{u}_{d'}$

$$\Rightarrow \vec{u}_d = \vec{n}_P \times \vec{u}_{d'}$$

– Viết ptđt d qua A và có vtcp $\vec{u}_d = \vec{n}_P \times \vec{u}_{d'}$.

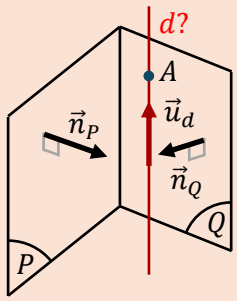


Dạng 5: Lập ptđt d đi qua A và $d \,//\, mp(P)$, $d \,//\, mp(Q)$, (P) không song song và không trùng với (Q)

– Vì $d \,//\, mp(P)$, $d \,//\, mp(Q) \Rightarrow$ Cặp vtpt của d là $\vec{n}_P$ và $\vec{n}_Q$

$$\Rightarrow \vec{u}_d = \vec{n}_P \times \vec{n}_Q$$

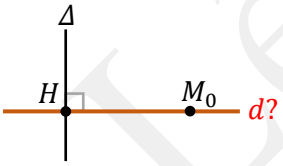
– Viết ptđt d đi qua A có có vtcp là $\vec{u}_d = \vec{n}_P \times \vec{n}_Q$.



Dạng 6: d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$, vuông góc và cắt đường thẳng Δ.

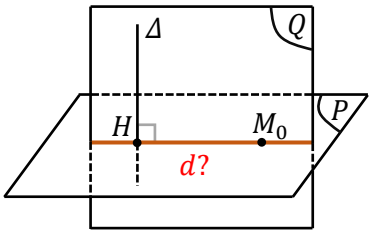
Cách 1: Gọi H là hình chiếu vuông góc của M_0 lên đường thẳng Δ. Thì $\begin{cases} H \in \Delta \\ \overrightarrow{M_0H} \perp \vec{u}_\Delta \end{cases} \Rightarrow$ Tọa độ H

Khi đó đường thẳng d là đường thẳng đi qua M_0, H.



Cách 2: Gọi (P) là mp đi qua M_0 và vuông góc với Δ; (Q) là mp đi qua M_0 và chứa Δ.

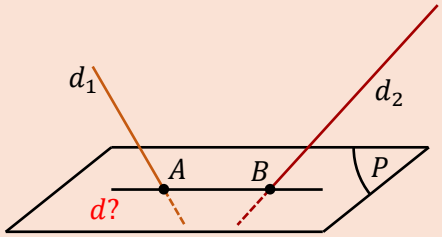
Khi đó $d = (P) \cap (Q)$



Dạng 7: d nằm trong mp(P) và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2

– Tìm các giao điểm $A = d_1 \cap (P)$, $B = d_2 \cap (P)$.

– Khi đó d chính là đường thẳng AB.



Tài Liệu Ôn Thi

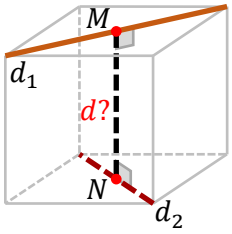
Dạng 8: d là đường vuông góc chung của 2 đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau

Cách 1: Gọi $M \in d_1, N \in d_2$.

Từ điều kiện $\begin{cases} MN \perp d_1 \\ MN \perp d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_{d_1} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_{d_2} = 0 \end{cases}$

Dùng tích vô hướng ta tìm được M, N.

Khi đó, d là đường thẳng MN.



Cách 2: Vì $d \perp d_1$ và $d \perp d_2$ nên một vtcp của d là: $\vec{u}_d = \vec{u}_{d_1} \times \vec{u}_{d_2}$.

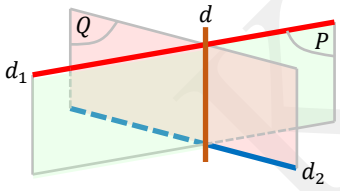
– Lập ptmp (P) chứa d và d_1 bằng cách:

Lấy một điểm A trên $d_1 \Rightarrow A \in (P)$.

Vtpt của (P) là: $\vec{n}_P = \vec{u}_d \times \vec{u}_{d_1}$.

– Tương tự lập ptmp (Q) chứa d và d_2

– Khi đó $d = (P) \cap (Q)$

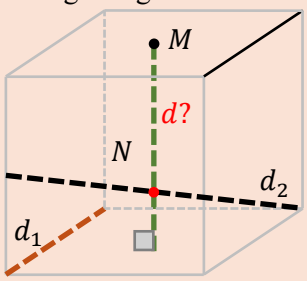


Dạng 9: d đi qua điểm M, vuông góc với d_1 và cắt d_2

Cách 1: Gọi $N = d \cap d_2$. Vì $N \in d_2 \Rightarrow$ dạng của N (phụ thuộc vào tham số t).

Từ điều kiện $MN \perp d_1 \Rightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_{d_1} = 0$ ta tìm được N.

Khi đó, d là đường thẳng MN.



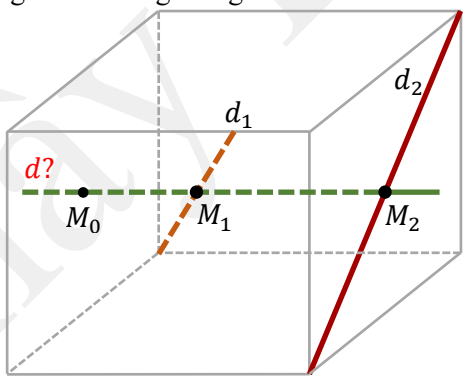
Cách 2: Viết ptmp(P) qua M và vuông góc với d_1

Viết ptmp(Q) chứa M và d_2

Khi đó $d = (P) \cap (Q)$

Dạng 10: d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và cắt hai đường thẳng d_1, d_2

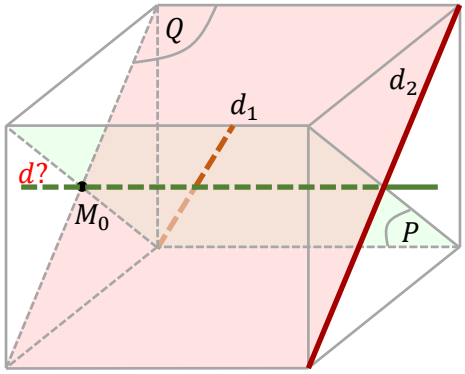
Cách 1: Gọi $M_1 \in d_1, M_2 \in d_2$. Từ điều kiện M_0, M_1, M_2 thẳng hàng ta tìm được M_1, M_2 (3 điểm thẳng hàng sử dụng điều kiện tỷ số). Từ đó suy ra phương trình đường thẳng d.



Cách 2: Gọi $(P) = (M_0; d_1)$, $Q = (M_0; d_2)$.

Khi đó $d = (P) \cap (Q)$

Do đó, một vtcp của d có thể chọn là $\vec{a} = \vec{n}_P \times \vec{n}_Q$.



Thầy Kiên

Dạng 11: Viết phương trình giao tuyến của 2 mặt phẳng

Cho 2 mp $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0,\ (\beta): A'x + B'y + C'z + D' = 0$

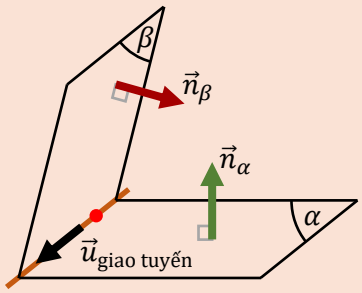
Bước 1: Tìm vtcp của giao tuyến $\vec{u}_{\text{giao tuyến}} = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta$.

Bước 2: Tìm 1 điểm thuộc giao tuyến bằng cách lựa chọn trước 1 trong 3 giá trị hoặc x hoặc y hoặc z, giả sử chọn trước $x = x_0$ thay vào 2 phương trình mặt phẳng và giải ra 2 thành phần tọa độ còn lại:

$$\begin{cases} Ax_0 + By + Cz + D = 0 \\ A'x_0 + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Giải tìm $y, z \Rightarrow$ Tọa độ 1 điểm thuộc giao tuyến.

Bước 3: Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm đã tìm ở bước 2 và có vtcp tìm được ở bước 1



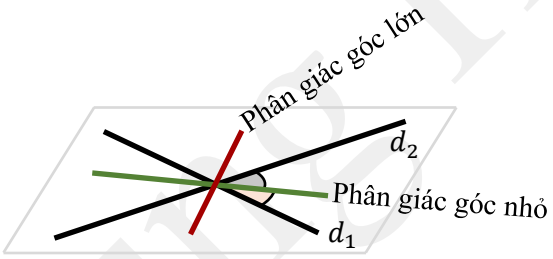
Dạng 12: Phương trình đường phân giác của 2 đường thẳng cắt nhau trong không gian

Cho 2 đường thẳng cắt nhau

$$d_1: \begin{cases} x = x_1 + a_1 t \\ y = y_1 + b_1 t \\ z = z_1 + c_1 t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

và

$$d_2: \begin{cases} x = x_2 + a_2 t' \\ y = y_2 + b_2 t' \\ z = z_2 + c_2 t' \end{cases} (t' \in \mathbb{R})$$



Bước 1: Tìm giao điểm của 2 đường thẳng bằng cách giải hệ :

$$\begin{cases} x_1 + a_1 t = x_2 + a_2 t' \\ y_1 + b_1 t = y_2 + b_2 t' \\ z_1 + c_1 t = z_2 + c_2 t' \end{cases} \Rightarrow \text{Giải hệ ẩn } t, t'$$

Thay t tìm được vào d_1 (hoặc t' và d_2) để tìm ra giao điểm.

Bước 2: Chuẩn hóa độ dài của 2 vtcp thành 1

Ta có : $\vec{u}_{d_1} = (a_1; b_1; c_1)$ chuẩn hóa thành

$$\vec{u}_{d_1} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} (a_1; b_1; c_1)$$

$\vec{u}_{d_2} = (a_2; b_2; c_2)$ chuẩn hóa thành

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} (a_2; b_2; c_2)$$

Bước 3: Tính góc giữa 2 vecto $\vec{u}_{d_1}$ và $\vec{u}_{d_2}$ bằng công thức:

$$\cos(\vec{u}_{d_1}; \vec{u}_{d_2}) = \frac{\text{Tích vô hướng}}{\text{Tích độ dài}} \Rightarrow \text{góc} = \ldots$$

Bước 4:

Nếu cần tính phân giác góc nhỏ	Nếu cần tính phân giác góc lớn
Nếu góc tính được ở bước 3 là góc nhỏ: $\Rightarrow \vec{u}_{\text{phân giác}} = \vec{u}_{d_1} + \vec{u}_{d_2}$ Nếu góc tính được ở bước 3 là góc tù: $\Rightarrow \vec{u}_{\text{phân giác}} = \vec{u}_{d_1} + (-\vec{u}_{d_2})$ hoặc $\vec{u}_{\text{phân giác}} = (-\vec{u}_{d_1}) + \vec{u}_{d_2}$	Nếu góc tính được ở bước 3 là góc nhỏ: $\Rightarrow \vec{u}_{\text{phân giác}} = \vec{u}_{d_1} + (-\vec{u}_{d_2})$ hoặc $\vec{u}_{\text{phân giác}} = (-\vec{u}_{d_1}) + \vec{u}_{d_2}$ Nếu góc tính được ở bước 3 là góc tù: $\Rightarrow \vec{u}_{\text{phân giác}} = \vec{u}_{d_1} + \vec{u}_{d_2}$

Bước 5: Viết ptđt biết vtcp và 1 điểm.

Thầy Lê Trung Kiên

Dạng 13: Viết phương trình hình chiếu của đường thẳng lên mặt phẳng

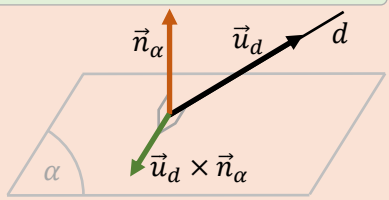
Viết phương trình hình chiếu của một đường thẳng d lên mp(α)

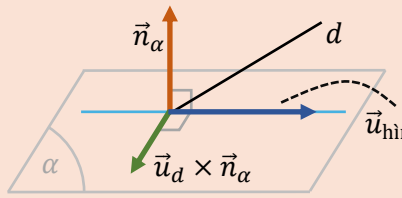
Bước 1: Xét xem đường thẳng song song hoặc nằm trên hay cắt với mặt phẳng

Nếu đường thẳng cắt mặt phẳng

Đường không vuông góc với mp

$\vec{u}_{\text{hình chiếu}} = (\vec{u}_d \times \vec{n}_\alpha) \times \vec{n}_\alpha$





$\vec{u}_{\text{hình chiếu}} = (\vec{u}_d \times \vec{n}_\alpha) \times \vec{n}_\alpha$

Đường $\perp$ mp

$\Rightarrow$ Hình chiếu của đường lên mặt là giao điểm của đường và mặt

Nếu đường thẳng song song hoặc nằm trên mặt phẳng

Nếu đường thẳng song song với mp

$\Rightarrow$ hình chiếu // d

$\Rightarrow \vec{u}_{\text{hình chiếu}} = \vec{u}_d$

Nếu đường thẳng nằm trên mp

$\Rightarrow$ hình chiếu $\equiv d$

Hoàn thành

Bước 2: Tìm giao điểm giữa đường thẳng và mặt phẳng

Bước 2: Lấy một điểm tùy ý trên đường thẳng d và tìm hình chiếu của nó lên mặt phẳng

Bước 3: Viết phương trình đường thẳng biết vtcp $\vec{u}_{\text{hình chiếu}}$ và đi qua điểm tìm được ở bước 2

Thầy Lê

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI

375. Vị trí tương đối giữa 2 đường thẳng

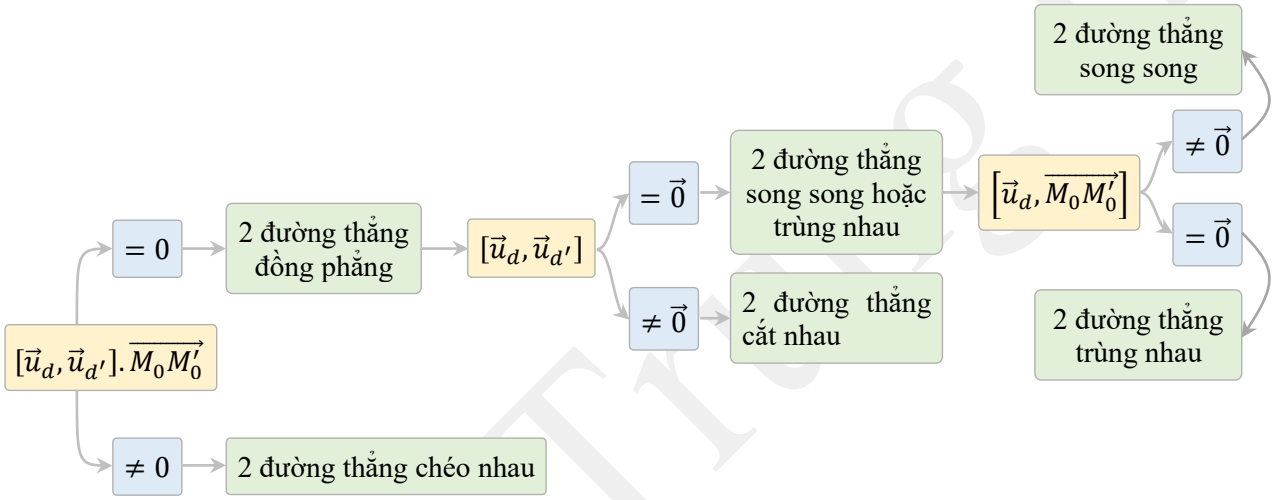
a) Vị trí tương đối giữa 2 đường thẳng dựa vào các tích vectơ

Cho 2 đường thẳng d và d' lần lượt đi qua 2 điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và $M_0'(x_0';y_0';z_0')$ có vtcp lần lượt là $\vec{u}_d=(a;b;c)$, $\vec{u}_{d'}=(a';b';c')$

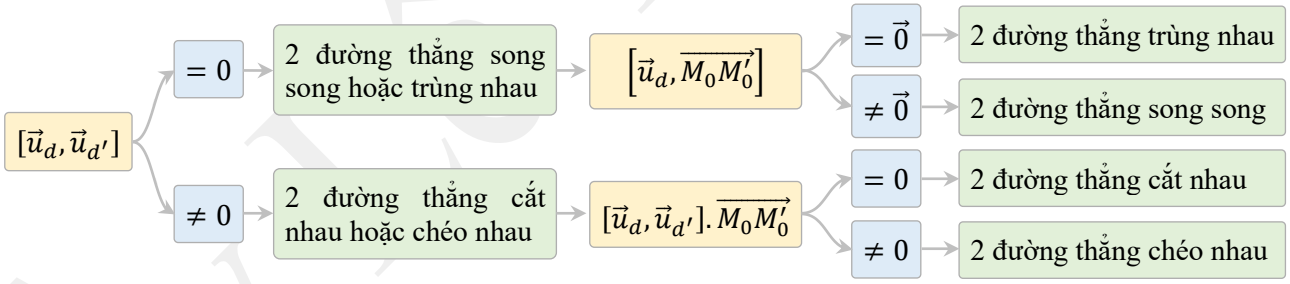
Số $[\vec{u}_d,\vec{u}_{d'}]\cdot\overrightarrow{M_0M_0'}$ đặc trưng cho sự đồng phẳng của 2 đường thẳng.

Vectơ $[\vec{u}_d,\vec{u}_{d'}]=\vec{0}$ đặc trưng cho sự cùng phương của 2 đường thẳng.

Sơ đồ 1 (Phân loại theo sự đồng phẳng trước tiên)



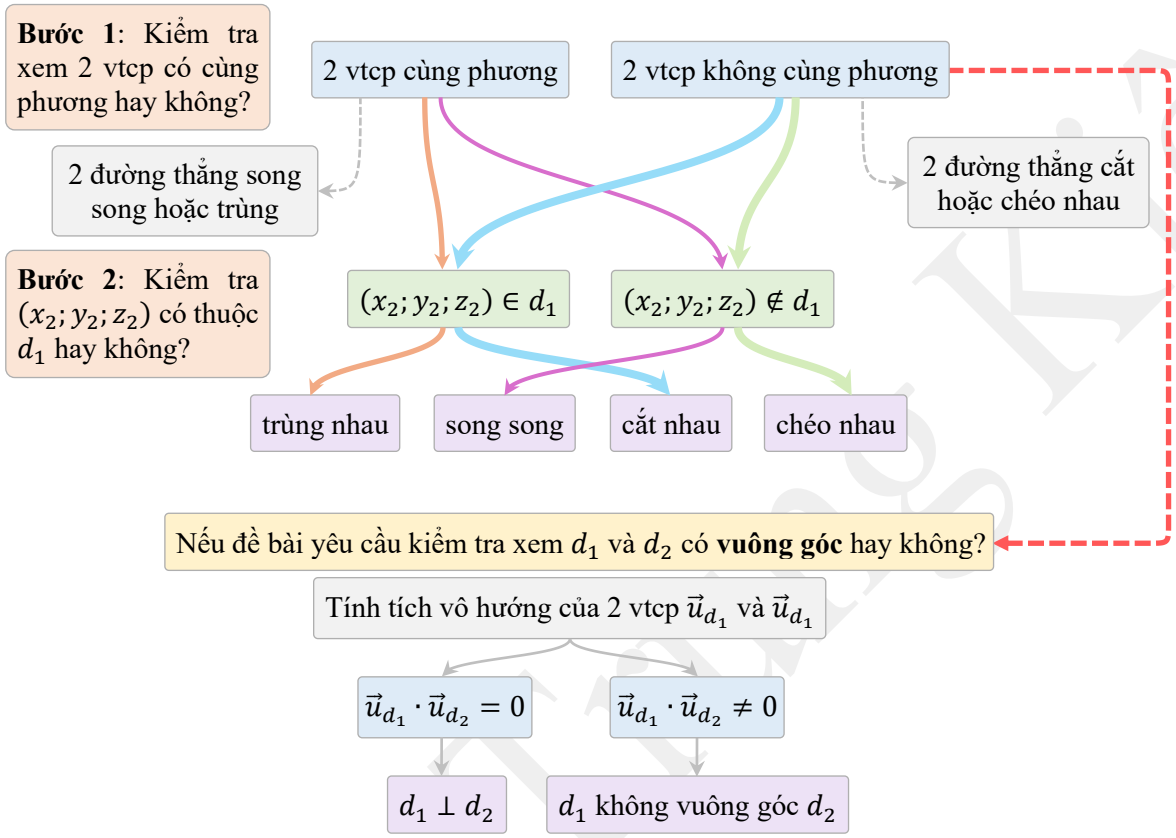
Sơ đồ 2 (Phân loại theo sự cùng phương của 2 đường thẳng trước tiên)



Thầy Lê Trọng Kiên

b) Vị trí tương đối của 2 đường thẳng đã biết phương trình tham số

$$d_1:\begin{cases}x=x_1+a_1t\\y=y_1+a_2t\\z=z_1+a_3t\end{cases}(t\in\mathbb{R})\ ;\ d_2:\begin{cases}x=x_2+b_1t\\y=y_2+b_2t\\z=z_2+b_3t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$$



c) Vị trí tương đối của 2 đường thẳng dựa vào phương pháp đại số

Cho 2 đường thẳng $(d):\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}(t\in\mathbb{R})$ và $(d'):\begin{cases}x=x_0'+a't'\\y=y_0'+b't'\\z=z_0'+c't'\end{cases}(t'\in\mathbb{R})$

Xét hệ phương trình : $\begin{cases}x_0+at=x_0'+a't\\y_0+bt=y_0'+b't'\\z_0+ct=z_0'+c't'\end{cases}(1)$

- d và d' cắt nhau $\Leftrightarrow$ (1) có đúng một nghiệm.
- d và d' chéo nhau $\Leftrightarrow$ 2 vectơ chỉ phương không cùng phương và (1) vô nghiệm.
- $d\equiv d'\Leftrightarrow$ (1) có vô số nghiệm.
- $d//d'\Leftrightarrow$ 2 vectơ chỉ phương cùng phương và (1) vô nghiệm.

Thầy Lê Thanh Kiên

d) Tìm tham số để 2 đường thẳng song song, trùng, cắt, chéo, vuông

Song song hoặc trùng nhau	Giải $\vec{u}_{d_1} \times \vec{u}_{d_2} = \vec{0} \Rightarrow$ giá trị tham số Thử lại tham số để biết giá trị song song hoặc trùng
Cắt nhau	Giải $\left(\vec{u}_{d_1} \times \vec{u}_{d_2}\right).\overrightarrow{M_0M_0'} = 0 \Rightarrow$ giá trị tham số điều kiện $\vec{u}_{d_1} \times \vec{u}_{d_2} \neq \vec{0}$
Chéo nhau	Giải $\left(\vec{u}_{d_1} \times \vec{u}_{d_2}\right).\overrightarrow{M_0M_0'} \neq 0 \Rightarrow$ giá trị tham số điều kiện $\vec{u}_{d_1} \times \vec{u}_{d_2} \neq \vec{0}$
Vuông góc	Giải $\vec{u}_{d_1}.\vec{u}_{d_2} = 0 \Rightarrow$ giá trị tham số Cẩn thận điều kiện: $\vec{u}_{d_1} \neq 0$ và $\vec{u}_{d_2} \neq 0$ khi tìm tham số

376. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

a) Phương pháp đại số

Trong không gian Oxyz cho mp(α) : $ax + by + cz + d = 0$ và đường thẳng d: $\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + b_1 t \\ z = z_0 + c_1 t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

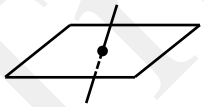
Thay x, y, z từ phương trình đường thẳng vào phương trình mặt phẳng ta được:

$$a(x_0 + a_1 t) + b(y_0 + b_1 t) + c(z_0 + c_1 t) + d = 0 \ (t \text{ là ẩn}) \ (1)$$

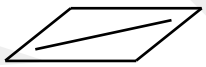
▪ d // (α) (hay d và (α) không có điểm chung) ⇔ (1) vô nghiệm t.



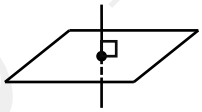
▪ d và (α) cắt nhau ⇔ (1) có nghiệm t duy nhất.



▪ d ⊂ (α) ⇔ (1) có vô số nghiệm t.



▪ $d \perp (\alpha) \Leftrightarrow vtpt\ \vec{n}_\alpha$ cùng phương $vtcp\ \vec{u}_d$.



Lưu ý: Phương trình $ax + b = 0$

▪ Có nghiệm duy nhất ⇔ $a \neq 0$

▪ Vô nghiệm ⇔ $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$

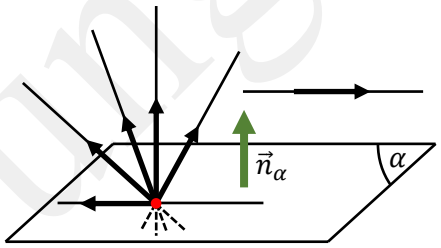
▪ Vô số nghiệm ⇔ $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

Thầy Lê Trung Kiên

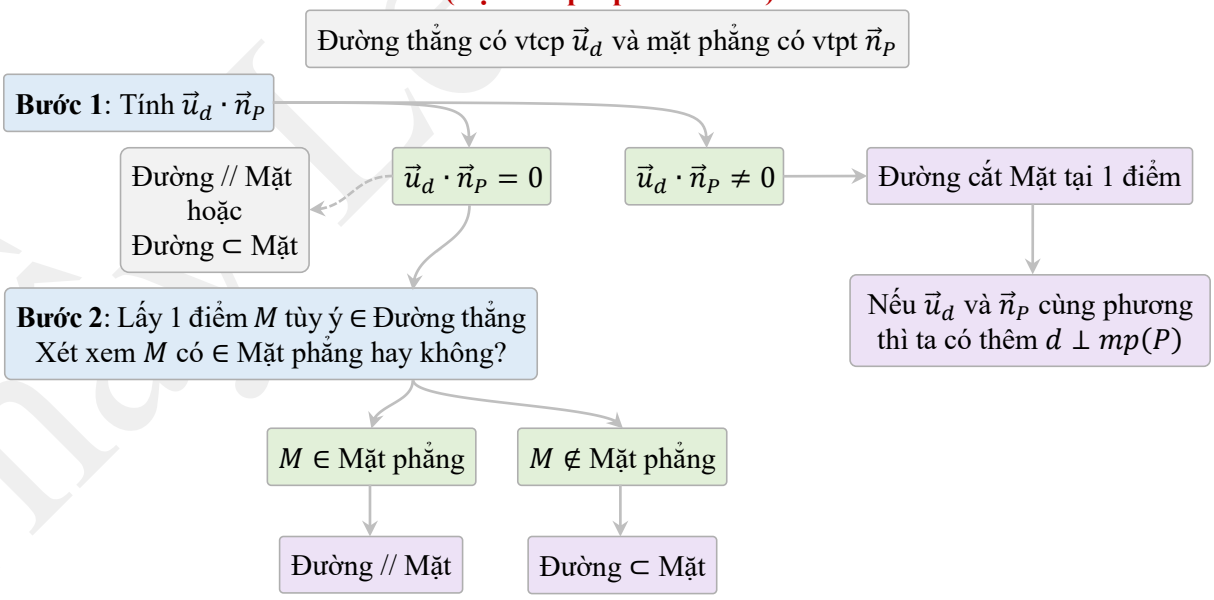
b) Tìm giao điểm giữa đường thẳng và mặt phẳng

Đường thẳng cho bởi phương trình tham số	Đường thẳng cho bởi phương trình tổng quát
Cho mp(α) : $ax+by+cz+d=0$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=x_0+a_1t\\y=y_0+b_1t\\z=z_0+c_1t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$ Thay x, y, z từ phương trình đường thẳng vào phương trình mặt phẳng ta được: $a(x_0+a_1t)+b(y_0+b_1t)+c(z_0+c_1t)+d=0$ **Bước 1:** Giải phương trình trên cho biến t. **Bước 2:** Thay giá trị t vào phương trình tham số của đường thẳng để suy ra tọa $(x;y;z)$.	Đường thẳng $d:\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ $mp(P):Ax+By+Cz+D=0$ Để tìm giao điểm giữa đường thẳng d và $mp(P)$ ta giải hệ phương trình bậc nhất 3 ẩn x, y, z sau: $\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}\\\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}\\Ax+By+Cz+D=0\end{cases}$

c) Phương pháp hình học

Đường thẳng Δ cắt $mp(\alpha)$ $\Leftrightarrow \vec{u}_\Delta$ không vuông góc với $\vec{n}_{(\alpha)} \Leftrightarrow \vec{u}_\Delta \cdot \vec{n}_\alpha \neq 0$	
Đường thẳng Δ song song $mp(\alpha)$ $\Leftrightarrow \begin{cases}\vec{u}_\Delta \perp \vec{n}_\alpha\\\text{Lấy } A\in\Delta \Rightarrow A\notin(\alpha)\end{cases}$	
Đường thẳng Δ nằm trong $mp(\alpha)$ $\Leftrightarrow \begin{cases}\vec{u}_\Delta \perp \vec{n}_\alpha\\\text{Lấy } A\in\Delta \Rightarrow A\in(\alpha)\end{cases}$	
Đường thẳng Δ vuông góc $mp(\alpha)$ $\Leftrightarrow \vec{u}_\Delta$ cùng phương với $\vec{n}_\alpha$	

Thuật toán xác định vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng
(Dựa vào phép toán vectơ)

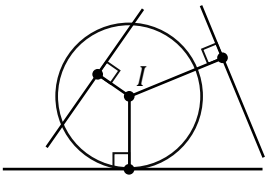


Thầy Lê Trung Kiên

377. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu

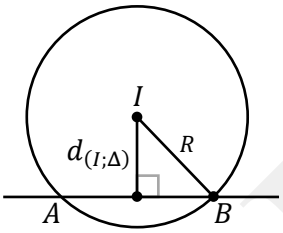
Cho đường thẳng Δ và mặt cầu tâm I bán kính R.

- Đường thẳng không cắt mặt cầu $\Leftrightarrow d_{(I;\Delta)} > R$
- Đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu $\Leftrightarrow d_{(I;\Delta)} = R$.
- Đường thẳng cắt mặt cầu tại hai điểm $\Leftrightarrow d_{(I;\Delta)} < R$.



Trong trường hợp đường thẳng Δ cắt mặt cầu tâm O bán kính R tại hai điểm A và B thì ta có hệ thức sau :

$$R^2 = \left(d_{(I;\Delta)}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$$



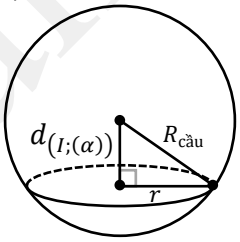
378. Vị trí tương đối giữa mặt phẳng và mặt cầu

Cho mặt phẳng (α) và mặt cầu tâm I bán kính $R_{\text{cầu}}$.

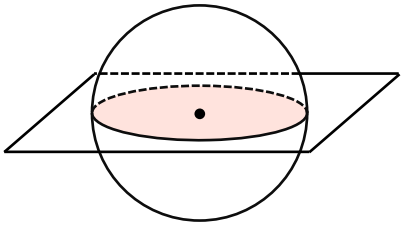
- Mặt phẳng không cắt mặt cầu $\Leftrightarrow d_{(I;(\alpha))} > R_{\text{cầu}}$.
- Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu $\Leftrightarrow d_{(I;(\alpha))} = R_{\text{cầu}}$.
- Mặt phẳng cắt mặt cầu (theo giao tuyến là một đường tròn) $\Leftrightarrow d_{(I;(\alpha))} < R_{\text{cầu}}$.

Chú ý : Khi mặt phẳng cắt mặt cầu theo giao tuyến là một đường tròn thì ta có hệ thức :

$$R_{\text{cầu}}^2 = \left(d_{(I;(\alpha))}\right)^2 + r^2$$



Lưu ý: Khi mặt phẳng (P) đi qua tâm I thì mặt phẳng (P) được gọi là mặt phẳng kính và thiết diện lúc đó được gọi là đường tròn lớn.

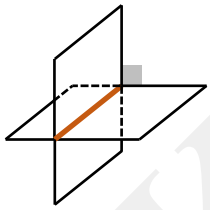
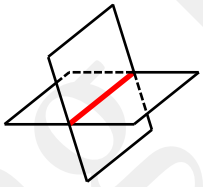
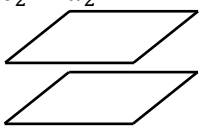
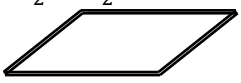


Thầy Lê Trung Kiên

379. Vị trí tương đối giữa 2 mặt phẳng

Cho 2 mp $(\alpha_1): a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ và $(\alpha_2): a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

Lưu ý: vtpt$(\alpha_1) \neq \vec{0}$, vtpt$(\alpha_2) \neq \vec{0}$.

<table>
<tr><td rowspan="2">2 mp cắt nhau $\Leftrightarrow$ 2 vtpt không cùng phương
(Sử dụng tích có hướng hoặc điều kiện tỷ số)</td><td>2 mp vuông góc $\Leftrightarrow$ Tích vô hướng 2 vtpt $= 0$
$\Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$
  </td></tr>
<tr><td>2 mặt phẳng cắt nhau nhưng không vuông góc
 
$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 \neq 0$</td></tr>
<tr><td>2 mặt phẳng song song</td><td>2 mp song song $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{2 vtpt cùng phương} \\ \text{2 mp không có điểm chung} \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_{\alpha_1} = k\vec{n}_{\alpha_2} \\ d_1 \neq kd_2 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$ ($a_2; b_2; c_2; d_2$ đều $\neq 0$)
  </td></tr>
<tr><td>2 mặt phẳng trùng nhau</td><td>2 mp trùng nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{2 vtpt cùng phương} \\ \text{2 mp có một điểm chung} \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_{\alpha_1} = k\vec{n}_{\alpha_2} \\ d_1 = kd_2 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$ $(a_2; b_2; c_2; d_2$ đều $\neq 0)$
  </td></tr>
</table>

Tìm tham số để 2 mp

<table>
<tr><td>Cắt nhau</td><td>Ý tưởng: loại bỏ các giá trị làm 2mp // hoặc trùng nhau
$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0} \Rightarrow$ tham số $\Rightarrow R \backslash \{$tham số tìm được$\}$</td></tr>
<tr><td>Song song</td><td rowspan="2">$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0} \Rightarrow$ tham số $\Rightarrow$ thử lại tham số để nhận loại</td></tr>
<tr><td>Trùng nhau</td></tr>
<tr><td>Vuông góc</td><td>$\Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$</td></tr>
</table>

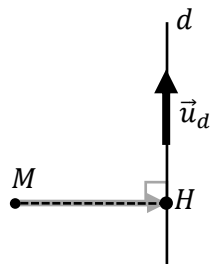
Thầy Lê Trung Kiên

HÌNH CHIẾU, ĐIỂM ĐỐI XỨNG CỦA ĐIỂM

380. Tìm hình chiếu vuông góc của điểm lên đường thẳng

Cho điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=x_1+at\\y=y_1+bt\\z=z_1+ct\end{cases}(t\in\mathbb{R})$

Cách 1: Gọi H là hình chiếu của M lên d.



Bước 1: Vì $H\in d\Rightarrow H(x_1+at;y_1+bt;z_1+ct)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MH}=(x_1+at-x_0;y_1+bt-y_0;z_1+ct-z_0)$

Bước 2: $\overrightarrow{MH}\perp\vec{u}_d\Rightarrow \overrightarrow{MH}.\vec{u}_d=0$

$\Rightarrow a(x_1+at-x_0)+b(y_1+bt-y_0)+c(z_1+ct-z_0)=0$

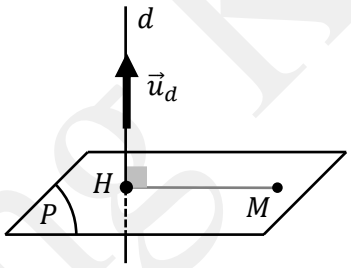
$\Rightarrow t=\ldots$

Bước 3: Thay t vào phương trình tham số d từ đó tính ra H.

Cách 2: Gọi H là hình chiếu của M lên d.

Bước 1: Viết ptmp(P) qua M, $(P)\perp d$.

Bước 2: Tìm điểm $H=d\cap(P)$.

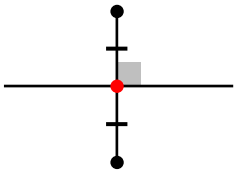


381. Tìm điểm đối xứng của điểm qua đường thẳng

Bước 1: Tìm hình chiếu vuông góc của điểm lên đường thẳng.

Bước 2: Tìm điểm đối xứng bằng công thức trung điểm:

Điểm đối xứng = 2 × Hình chiếu − Điểm ban đầu



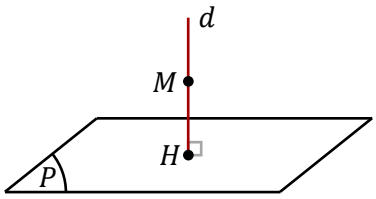
382. Tìm hình chiếu vuông góc của điểm lên mặt phẳng

Tìm hình chiếu vuông góc của điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ lên mp(P): $Ax+By+Cz+D=0$

Bước 1: Gọi H là hình chiếu của A lên mp(P)

Viết phương trình đường thẳng d qua A và vuông góc với mp(P)

Bước 2: tìm tọa độ điểm $H=d\cap(P)$

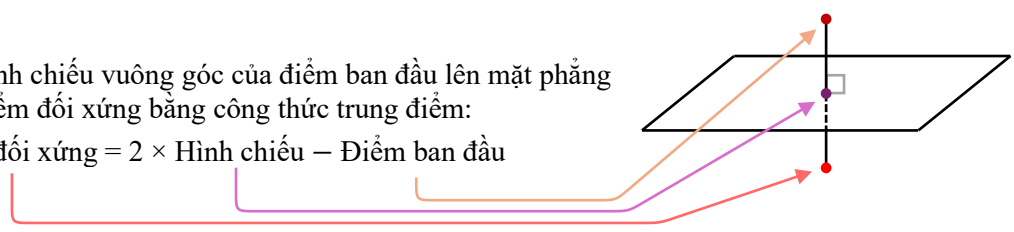


383. Tìm điểm đối xứng của điểm qua mặt phẳng

Bước 1: Tìm hình chiếu vuông góc của điểm ban đầu lên mặt phẳng

Bước 2: Tìm điểm đối xứng bằng công thức trung điểm:

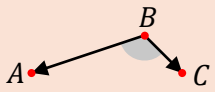
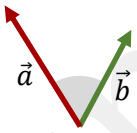
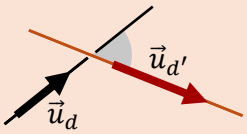
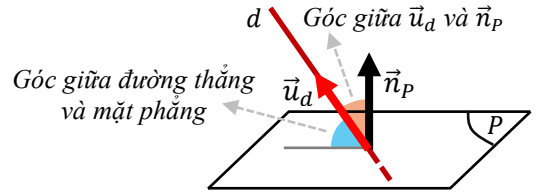
Điểm đối xứng = 2 × Hình chiếu − Điểm ban đầu

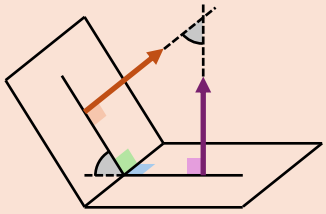


Thầy Lê Trung Kiên

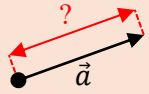
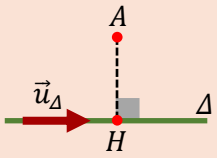
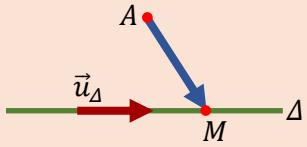
TỔNG HỢP VỀ GÓC, KHOẢNG CÁCH, ĐỘ DÀI

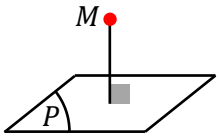
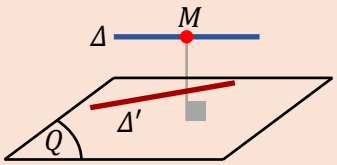
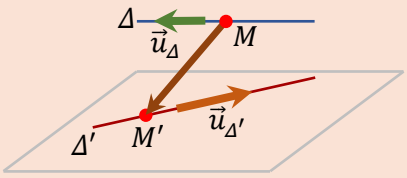
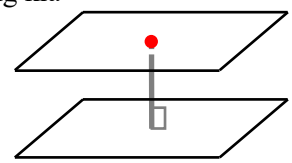
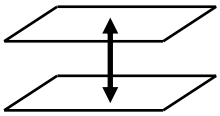
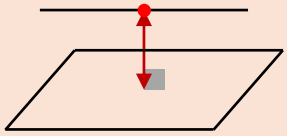
384. Tổng hợp về góc

Góc tạo bởi 3 điểm	Cho 3 điểm A, B, C. Tính $\widehat{ABC}$, ta sử dụng công thức: $\cos\widehat{ABC} = \cos(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = \dfrac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{BA \cdot BC}$ 
Góc giữa hai vectơ	Cho 2 véctơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} = \dfrac{\text{Tích vô hướng}}{\text{Tích độ dài}}$  Lưu ý: $0° \le$ Góc giữa 2 vectơ $\le 180°$.
Góc giữa hai đường thẳng	Cho 2 đường thẳng d và d' có vtcp lần lượt là $\vec{u}_d = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{u}_{d'} = (b_1; b_2; b_3)$ $\cos(d; d') = \lvert\cos(\vec{u}_d; \vec{u}_{d'})\rvert = \dfrac{\lvert a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\rvert}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$ $= \dfrac{\lvert\text{Tích vô hướng 2 vtcp}\rvert}{\text{Tích độ dài 2 vtcp}}$  Lưu ý: $0° \le$ Góc giữa 2 đường thẳng $\le 90°$.
Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng	Gọi $\vec{u}_d = (a_1; a_2; a_3)$ là vtcp của đường thẳng d và $\vec{n}_P = (b_1; b_2; b_3)$ là vtpt của mp(P). Góc giữa đường thẳng d và mp(P) được tính bằng công thức : $\sin(d; (P)) = \lvert\cos(\vec{u}_d; \vec{n}_P)\rvert = \dfrac{\lvert a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\rvert}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$ $= \dfrac{\lvert\text{Tích vô hướng vtcp của đt và vtpt của mp}\rvert}{\text{Tích độ dài vtcp của đt và vtpt của mp}}$  Lưu ý: $0° \le$ Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng $\le 90°$.

Góc giữa hai mặt phẳng	Gọi $\vec{n}_P = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{n}_Q = (b_1; b_2; b_3)$ lần lượt là vtpt của (P) và (Q). $\cos((P);(Q)) = \left\|\cos(\vec{n}_P; \vec{n}_Q)\right\| = \dfrac{\|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$ $= \dfrac{\|\text{Tích vô hướng 2 vtpt}\|}{\text{Tích độ dài 2 vtpt}}$  Lưu ý: $0° \le$ Góc giữa 2 mặt phẳng $\le 90°$.

385. Tổng hợp về khoảng cách, độ dài

Độ dài vectơ	Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \Rightarrow \|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ 
Khoảng cách giữa hai điểm	$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$ $= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$ 
Khoảng cách giữa điểm và đường thẳng	Trong không gian $Oxyz$, cho điểm A và đường thẳng Δ đi qua điểm M và có vtcp là $\vec{u}_\Delta = (a; b; c)$. Để tính khoảng cách từ A đến Δ ta có 2 cách: **Cách 1** ***Bước 1*** **:** Tìm hình chiếu vuông góc H của A lên đường thẳng Δ.  ***Bước 2*** **:** Khoảng cách từ A đến Δ chính là khoảng cách giữa hai điểm A và H : $d_{(A,\Delta)} = AH$ **Cách 2** Sử dụng công thức: $d_{(A,\Delta)} = \dfrac{\|\vec{u}_\Delta \times \overrightarrow{AM}\|}{\|\vec{u}_\Delta\|}$  (Với M là điểm tùy ý thuộc Δ)

Khoảng cách giữa điểm và mặt phẳng	Khoảng cách từ điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ đến mp(P): $Ax+By+Cz+D=0$ được tính bởi công thức : $d_{(M;(P))}=\dfrac{\lvert Ax_0+By_0+Cz_0+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\dfrac{\lvert\text{Thay tọa độ điểm vào phương trình mặt phẳng}\rvert}{\text{Độ dài vectơ pháp tuyến của mặt phẳng}}$  **Lưu ý**: Khi tính khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng thì tất cả các thành phần của phương trình mặt phẳng phải được chuyển hẳn về 1 vế.
Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau	Trong không gian Oxyz, cho 2 đường thẳng chéo nhau Δ và Δ' , trong đó Δ đi qua điểm M và có vtcp là $\vec{u}_\Delta=(a;b;c)$; Δ' đi qua điểm M' và có vtcp là $\vec{u}_{\Delta'}=(a';b';c')$. Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ và Δ' ta có 2 cách. **Cách 1** **Bước 1 :** Viết phương trình mp(Q) chứa đường thẳng Δ' và song song với Δ.  **Bước 2 :** Khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ và Δ' chính là khoảng cách giữa Δ và mặt phẳng (Q) : $d_{(\Delta,\Delta')}=d_{(\Delta,(Q))}=d_{(M,(Q))}$ (Với M là một điểm thuộc Δ). **Cách 2:** Sử dụng công thức : $d_{(\Delta;\Delta')}=\dfrac{\left\lvert\left(\overrightarrow{u_\Delta}\times\overrightarrow{u'_\Delta}\right)\cdot\overrightarrow{MM'}\right\rvert}{\left\lvert\overrightarrow{u_\Delta}\times\overrightarrow{u'_\Delta}\right\rvert}$ 
Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song	Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song **Cách 1**: Là khoảng cách từ một điểm thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia  **Cách 2**: Cho 2 mp(α): $Ax+By+Cz+D=0$ và mp(β): $Ax+By+Cz+D'=0$ $d_{(\alpha;\beta)}=\dfrac{\lvert D-D'\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ **Lưu ý**: hệ số nhân với x, y, z ở cả 2 phương trình phải giống nhau 
Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song	Khoảng cách giữa đường thẳng song song với mặt phẳng là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng tới mặt phẳng 

MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÁC

386. Tâm tỷ cự của hệ điểm

a) Biểu thức tổ hợp tuyến tính

M là điểm thay đổi, các điểm A_i, $i=\overline{1,n}$ đã biết trước, $\alpha_i, i=\overline{1,n}$ là bộ số đã biết trước. Cần thu gọn biểu thức:

$$S=\left|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}\right|$$

Nhân phân phối

$$S=\left|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA_i}\right)\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i.\overrightarrow{MI}+\alpha_i.\overrightarrow{IA_i}\right)\right|$$

(Chèn vào một điểm I tùy ý vào giữa các vecto $\overrightarrow{MA_i}$ ta được)

$$=\left|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.\overrightarrow{MI}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.\overrightarrow{IA_i}\right|=\left|\overrightarrow{MI}.\sum_{i=1}^{n}\alpha_i+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.\overrightarrow{IA_i}\right|$$

TH1: $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=0$

Khi đó lựa chọn I là một điểm cố định tùy ý:

$$\Rightarrow S=\left|\overrightarrow{MI}.\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}_{0}+\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.\overrightarrow{IA_i}}_{\text{vecto không đổi do } I \text{ đã được chọn cố định}}\right|=\left|\text{vecto không đổi}\right| \text{ (không phụ thuộc } M)$$

TH2: $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\neq 0$

Đặt $\alpha=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$ và I là điểm thỏa mãn $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.\overrightarrow{IA_i}=\vec{0}$

$$\Rightarrow S=\left|\overrightarrow{MI}.\sum_{i=1}^{n}\alpha_i+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.\overrightarrow{IA_i}\right|=\left|\overrightarrow{MI}.\alpha+\vec{0}\right|=\left|\alpha.\overrightarrow{MI}\right|=|\alpha|.\left|\overrightarrow{MI}\right|=|\alpha|.MI$$

Ví dụ. Thu gọn biểu thức sau:

$$T=5\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}+4\overrightarrow{MD}-6\overrightarrow{ME}$$

Gọi I là điểm thỏa mãn $5\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}-3\overrightarrow{IC}+4\overrightarrow{ID}-6\overrightarrow{IE}=\vec{0}$.

Khi đó chèn I vào giữa mỗi vecto của T ta được $T=(5+2-3+4-6)\overrightarrow{MI}=2\overrightarrow{MI}$

Thầy Lê Trung Kiên

b) Tổ hợp tuyến tính tổng bình phương

M là điểm thay đổi, các điểm $A_i, i=\overline{1,n}$ đã biết trước, $\alpha_i, i=\overline{1,n}$ là bộ số đã biết trước.
Cần thu gọn biểu thức có dạng:

$$S=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i MA_i^2=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}^2$$

$$S=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i MA_i^2=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}^2$$

Chuyển thành vectơ

Chèn một điểm I và giữa các vectơ $\overrightarrow{MA_i}$

$$=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA_i}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA_i}+\overrightarrow{IA_i^2}\right)$$

Khai triển hằng đẳng thức

$$=\overrightarrow{MI}^2.\sum_{i=1}^{n}\alpha_i+2\overrightarrow{MI}.\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.\overrightarrow{IA_i}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.\overrightarrow{IA_i}^2$$

TH1: $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=0$

$$\Rightarrow S=\overrightarrow{MI}^2.\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}_{0}+2\overrightarrow{MI}.\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.\overrightarrow{IA_i}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.\overrightarrow{IA_i}^2$$

$$=2\overrightarrow{MI}.\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.\overrightarrow{IA_i}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.\overrightarrow{IA_i}^2$$

(Chọn I là một điểm cố định cụ thể ta suy ra $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.\overrightarrow{IA_i}=$ vectơ cụ thể $=\vec{a}$, $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.\overrightarrow{IA_i}^2=$ số cụ thể $=k$)

$$=2\overrightarrow{MI}.\vec{a}+k$$

TH2: $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\neq 0$

Chọn I là điểm thỏa mãn $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.\overrightarrow{IA_i}=\vec{0}$, đặt $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=\alpha$, $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.\overrightarrow{IA_i}^2=k$

$$\Rightarrow S=\overrightarrow{MI}^2.\sum_{i=1}^{n}\alpha_i+2\overrightarrow{MI}.\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.\overrightarrow{IA_i}}_{\vec{0}}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.\overrightarrow{IA_i}^2=MI^2.\alpha+k$$

Ví dụ. Thu gọn các biểu thức sau

$$T=2MA^2-3MB^2+8MC^2-MD^2$$
$$=2\overrightarrow{MA}^2-3\overrightarrow{MB}^2+8\overrightarrow{MC}^2-\overrightarrow{MD}^2$$

Gọi I là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{IB}+8\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.

Chèn I vào giữa các vectơ của T ta được:

$$T=(2-3+8-1)\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{IA}^2-3\overrightarrow{IB}^2+8\overrightarrow{IC}^2-\overrightarrow{ID}^2$$
$$=7MI^2+2IA^2-3IB^2+8IC^2-ID^2$$

Thầy Lê Trung Kiên

c) Chuyển tích vô hướng thành hiệu bình phương

Cần thu gọn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ (M thay đổi, A, B đã biết)

Gọi I là trung điểm AB khi đó ta có:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = MI^2 - IA^2$$

387. Bài toán cực trị

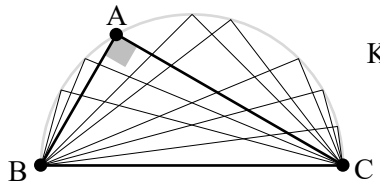
Hướng 1: (Đại số) Chuyển đại lượng cần tìm min, max về một biểu thức đại số và dùng các bất đẳng thức hoặc khảo sát hàm số để tìm min, max.

Hướng 2: (Hình học) Sử dụng các bất đẳng thức hình học để đánh giá.

Một số bất đẳng thức cơ bản

Kết quả 1

Trong không gian, cho ΔABC có cạnh huyền BC cố định. Điểm A có thể thay đổi tùy ý và A có thể trùng với B hoặc C.



Khi đó ta có giới hạn của 1 cạnh góc vuông, ví dụ AB như sau: $0 \le AB \le BC$

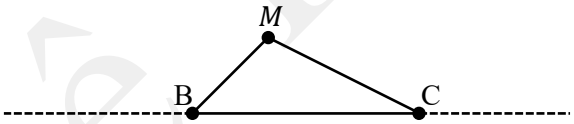
$$\Rightarrow \begin{cases} AB_{\min} = 0 \ khi \ A \equiv B \\ AB_{\max} = BC \ khi \ A \equiv C \end{cases}$$

Kết quả 2

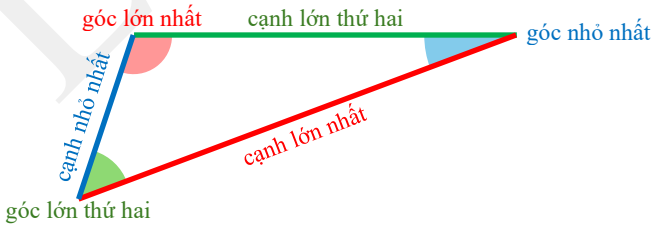
Trong không gian, cho ΔMBC có một cạnh BC có định, điểm M có thể thay đổi tùy ý, và M có thể trùng hoặc thẳng bàng với B và C. Khi đó.

Theo bất đẳng thức tam giác ta có $MB + MC \ge BC$ và $|MB - MC| \le BC$.

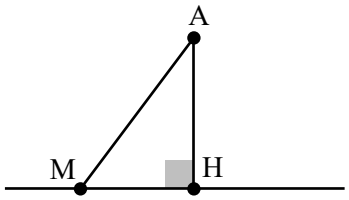
$$\Rightarrow \begin{cases} (MB + MC)_{\min} = BC \text{ khi } M \in \text{đoạn thẳng } BC \\ |MB - MC|_{\max} = BC \text{ khi } M \in \text{đường thẳng } BC \text{ nhưng không nằm trong đoạn } BC \end{cases}$$



Kết quả 3: (Quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác). Trong một tam giác, cạnh đối diện với góc lớn hơn thì lớn hơn.



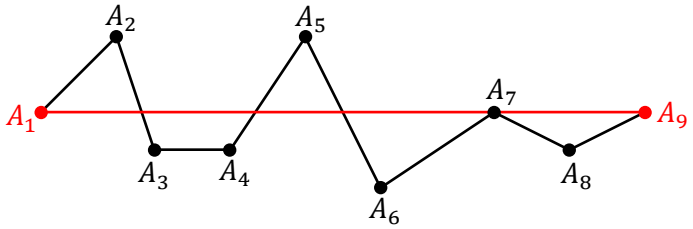
Kết quả 4: (Quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc). Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm nằm ngoài đường thẳng đến đường thẳng đó thì đường vuông góc là đường ngắn nhất. Như trong hình vẽ ta luôn có AM ≥ AH.



Thầy Lê Trung Kiên

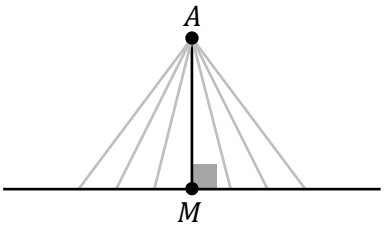
Kết quả 5: (Bất đẳng thức của đường gấp khúc)

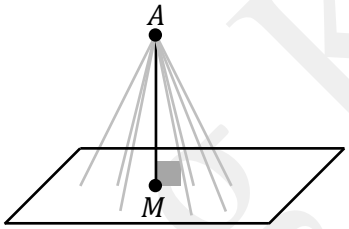
Tổng độ dài đường gấp khúc nối 2 điểm cố định ≥ Độ dài đoạn thẳng nối 2 điểm đó.



Dấu "=" xảy khi tất cả các điểm của đường gấp khúc đều nằm trên đoạn thẳng nối 2 điểm.

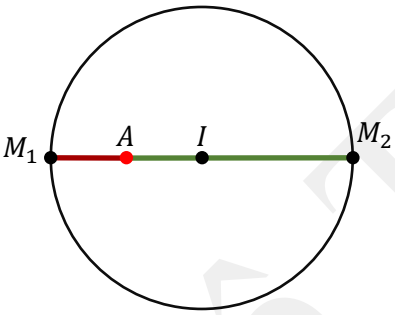
Bài toán: Cho điểm A cố định và điểm M di động trên hình (H) ((H) là đường thẳng, mặt phẳng). Tìm giá trị nhỏ nhất của AM.

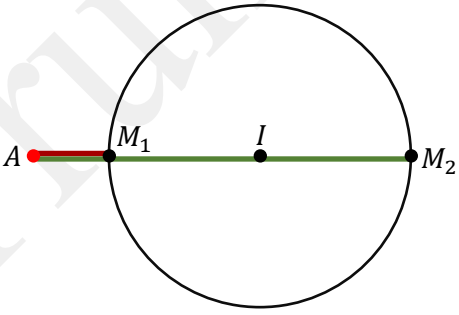




Trả lời: AM nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của A lên hình (H).

Bài toán: Cho điểm A và mặt cầu (S) có tâm I, bán kính R. M là điểm di động trên (S). Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của AM.





Trường hợp A nằm bên trong mặt cầu *Trường hợp A nằm bên ngoài mặt cầu*

Ta có: $\begin{cases} AM_{\min} = |R - IA| \\ AM_{\max} = R + IA \end{cases}$ xảy ra khi I, M, A thẳng hàng.

Cho mặt phẳng (P) và hai điểm phân biệt A, B. Tìm điểm M thuộc (P) sao cho: MA + MB nhỏ nhất.

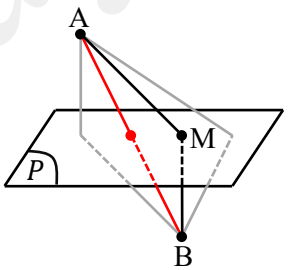
Ta xét các trường hợp sau

TH 1: Nếu A và B nằm về hai phía so với (P)

Khi đó: Theo bất đẳng thức trong ΔABM ta có:

MA + MB ≥ AB

$\Rightarrow (MA + MB)_{\min} = AB$, xảy ra khi M là giao điểm của AB với (P)

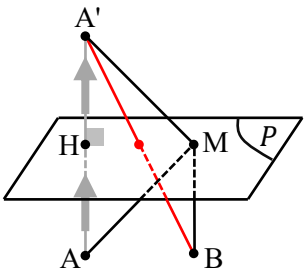


TH 2: Nếu A và B nằm cùng một phía so với (P)

Gọi A' đối xứng với A qua (P).

Khi đó MA + MB = MA' + MB ≥ A'B.

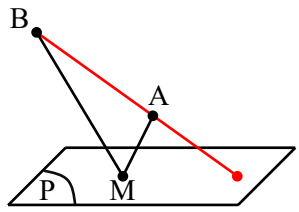
$\Rightarrow (MA + MB)_{\min} = A'B$, xảy ra khi M là giao điểm của A'B với (P).



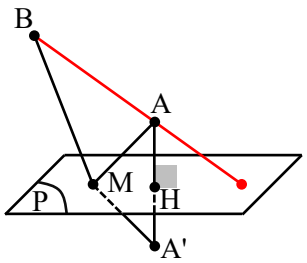
Thầy Lê Trung Kiên

Bài toán: Cho mặt phẳng (P) và hai điểm phân biệt A, B. Tìm điểm M thuộc (P) sao cho: |MA − MB| lớn nhất.
Ta xét 2 trường hợp sau:

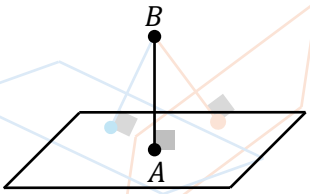
TH 1: Nếu A và B nằm cùng một phía so với (P).
Khi đó |MA − MB| ≤ AB.
Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của AB với (P).



TH 2: Nếu A và B nằm về hai phía so với (P).
Gọi A' đối xứng với A qua (P). Khi đó |AM − BM| = |A'M − BM| ≤ A'B.
Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của A'B với (P).

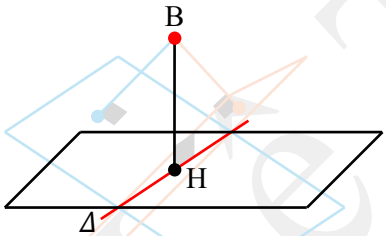


Bài toán: Cho A và B cố định. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và cách B một khoảng lớn nhất.



Mặt phẳng cần tìm đi qua A và nhận $\overrightarrow{AB}$ là vtpt.
Khi đó $d_{B;(P)_{\max}} = AB$.

Bài toán: Cho đường thẳng Δ và điểm B cố định, với $B \notin \Delta$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ và cách B một khoảng lớn nhất.

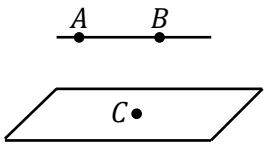


Mặt phẳng cần tìm thỏa mãn:
– Đi qua H.
– Nhận $\overrightarrow{BH}$ làm vtpt.
Với H là hình chiếu vuông góc của B lên Δ.

Thầy Lê Trung Kiên

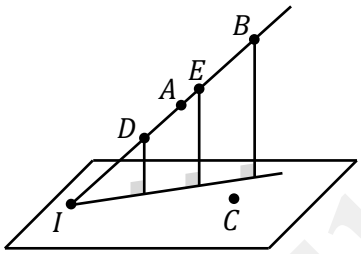
Bài toán: Cho các số thực dương α, β và ba điểm A, B, C.
Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua C và $T = \alpha \cdot d(A,(P)) + \beta \cdot d(B,(P))$ nhỏ nhất.
TH1: Xét A, B nằm về cùng phía so với (P).
– Nếu $AB \,//\, (P)$ thì:

$$P = (\alpha+\beta)d\big(A,(P)\big) \le (\alpha+\beta)AC.$$



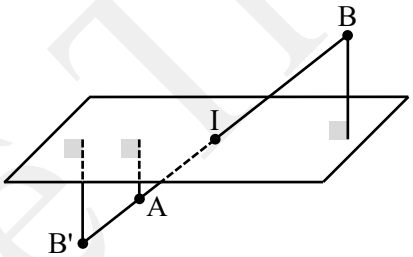
– Nếu đường thẳng AB cắt (P) tại I. Gọi D là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IB} = \frac{\alpha}{\beta}\overrightarrow{ID}$ và E là trung điểm BD. Khi đó:

$$P = \alpha \cdot d\big(A,(P)\big) + \beta \cdot \frac{IB}{ID} \cdot d\big(D,(P)\big) = 2\alpha \cdot d\big(E,(P)\big) \le 2(\alpha+\beta) \cdot EC.$$



TH2: Xét A, B nằm về hai phía so với (P). Gọi I là giao điểm của AB và (P), B' là điểm đối xứng với B qua I. Khi đó

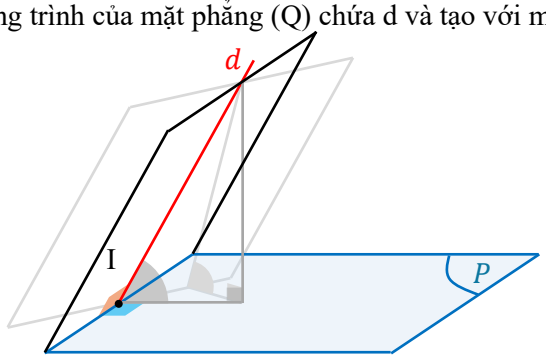
$$P = \alpha \cdot d\big(A,(P)\big) + \beta \cdot d\big(B',(P)\big).$$



Đến đây ta chuyển về TH1 trên.
So sánh các kết quả ở hai trường hợp trên ta chọn kết quả lớn nhất.

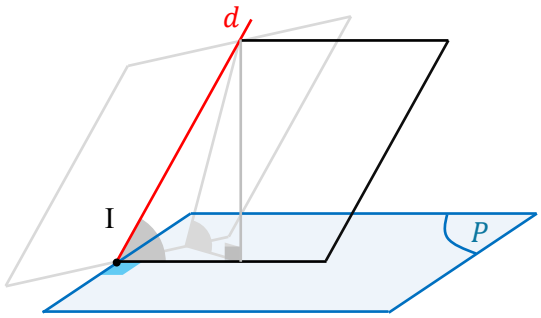
Thầy Lê Trung Kiên

Bài toán: Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) cắt nhau.
a) Viết phương trình của mặt phẳng (Q) chứa d và tạo với mặt phẳng (P) một góc nhỏ nhất.



Mặt phẳng cần tìm thỏa mãn:
– Đi qua 1 điểm tùy ý nằm trên d
– Có vtpt = $(\overrightarrow{n_P} \times \overrightarrow{u_d}) \times \overrightarrow{u_d}$
Khi đó góc giữa 2 mp = $\left(\widehat{d;(P)}\right)$

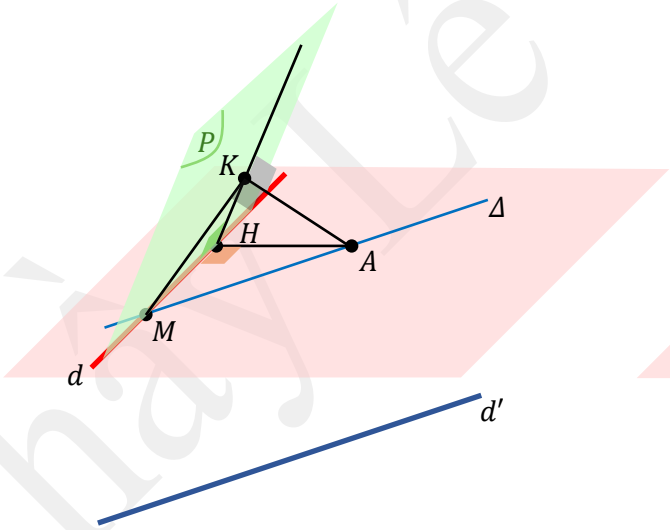
b) Viết phương trình của mặt phẳng (Q) chứa d và tạo với mặt phẳng (P) một góc lớn nhất.

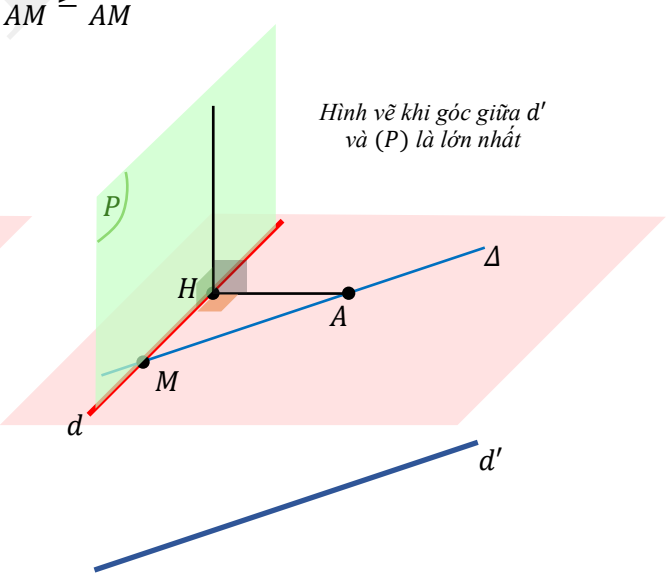


Mặt phẳng cần tìm thỏa mãn:
– Đi qua 1 điểm tùy ý nằm trên d
– Có vtpt = $\overrightarrow{n_P} \times \overrightarrow{u_d}$
Khi đó góc giữa 2 mp là 90°.

Bài toán: Cho hai đường thẳng d và d'. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d và tạo với d' một góc lớn nhất.
Trên đường thẳng d, lấy điểm M và dựng đường thẳng Δ đi qua M song song với d' . Khi đó góc giữa Δ và (P) chính là góc giữa d' và (P).
Trên đường thẳng Δ, lấy điểm A. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A lên (P) và d; φ là góc giữa Δ và (P).
Khi đó φ = $\widehat{AMH}$ và

$$\cos\varphi = \frac{MK}{AM} \geq \frac{MH}{AM}$$

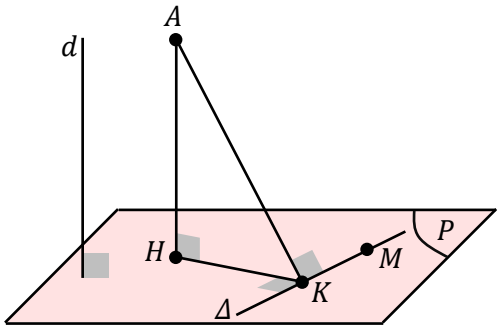


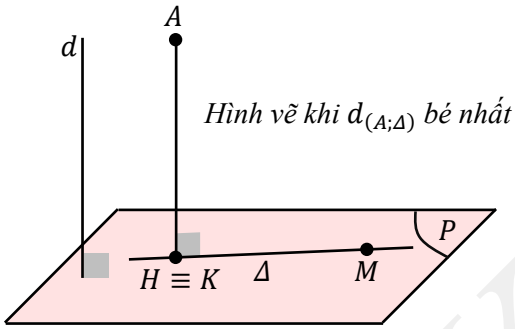


Suy ra mặt phẳng cần tìm thỏa mãn: (P) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với mặt phẳng (AMK).
Do đó (P) đi qua M và nhận $\left(\overrightarrow{u_d} \times \overrightarrow{u'_d}\right) \times \overrightarrow{u_d}$ làm vtpt. Khi đó $\left(\widehat{d';(P)}\right) = \left(\widehat{d';d}\right)$.

Thầy Lê Trung Kiên

Bài toán: Cho hai điểm M và A và đường thẳng d. Gọi Δ là đường thẳng qua M, vuông góc với đường thẳng d, đồng thời cách điểm A một khoảng bé nhất. Khoảng cách bé nhất đó là bao nhiêu?





Vì $\begin{cases} \Delta \text{ qua } M \\ \Delta \perp d \end{cases} \Rightarrow \Delta \subset$ mặt phẳng qua M và vuông góc với d, gọi mặt phẳng này là (P).

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (P). K là hình chiếu vuông góc của K lên Δ. Ta suy ra: $d_{(A;\Delta)} = AK$.

Như vậy ta cần tìm điều kiện để AK nhỏ nhất.

Xét ΔAHK vuông tại H có cạnh góc vuông AH không đổi, và HK và AK có thể thay đổi tùy ý: Vì AK là cạnh huyền nên $AK \geq AH \Rightarrow AK_{\min} = AH$ xảy ra khi $\Delta \equiv HM$, với H là hình chiếu vuông góc của A lên (P).

Bài toán: Cho mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) cố định ((P) và (S) không có điểm chung). Xét điểm M di động trên (P) và N di động trên (S).

a) Xác định vị trí M và N để độ dài MN nhỏ nhất.

b) Biết $MN \perp (P)$, Xác định vị trí M và N để độ dài MN lớn nhất.

▪ Tìm $MN_{\min}$

Nhận xét rằng MN nhỏ nhất khi M, N thuộc đường thẳng qua tâm I và vuông góc với (P).

Theo hình vẽ, thì $MN_{\min} = d_{(I;(P))} - R$.

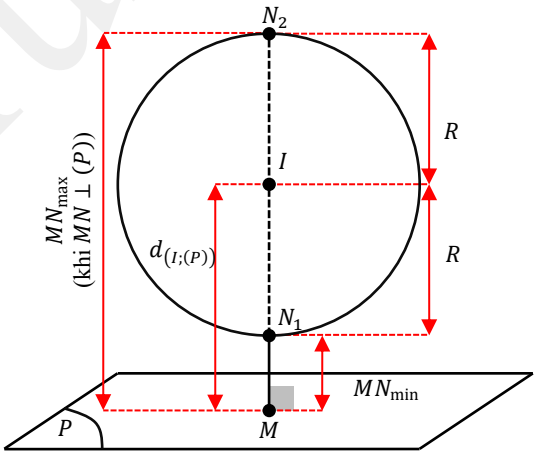
Để tìm M và N, ta có thể làm như sau:

Viết phương trình đường thẳng d qua I và vuông góc với (P), nhận $\vec{n}_P$ làm véc tơ chỉ phương.

Giải giao điểm $d \cap (S)$, ta được tọa độ hai điểm N (N_1 và N_2);

Tính độ dài MN_1 và MN_2 và so sánh. Kết luận $MN_{\min}$.

Giải giao điểm $d \cap (S)$, ta được tọa độ M.



▪ Tìm $MN_{\max}$ khi $MN \perp (P)$.

Nhận xét rằng MN lớn nhất nhất khi M, N thuộc đường thẳng qua tâm I và vuông góc với (P).

Theo hình vẽ, thì $MN_{\max} = d_{(I;(P))} + R$.

Thực hiện các bước tìm tương tự như trên.

Thầy Lê Trung Kiên

XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

388. Xác suất có điều kiện

Cho hai biến cố A và B. Xác suất của biến cố B khi biến cố A đã xảy ra được gọi là xác suất của B với điều kiện A. Kí hiệu là $\boxed{P(B|A)}$.

Công thức tính xác suất có điều kiện

Cho A và B là hai biến cố, trong đó $P(B) > 0$. Khi đó:

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

$$\boxed{P\big(\text{Xác suất xảy ra } A \text{ khi đã xảy ra } B\big) = \frac{P(\text{Xảy ra cả } A \text{ và } B)}{P(\text{Xảy ra } B)}}$$

Chú ý

▪ Kí hiệu biến cố giao của hai biến cố A và B là $A \cap B$ hoặc AB.

▪ Trong thực tế, người ta thường dùng tỉ lệ phần trăm để mô tả xác suất. Chẳng hạn, phát biểu "Khả năng xảy ra một sự kiện là 20%" cũng có nghĩa là "Xác suất xảy ra sự kiện đó là 0,2", phát biểu "Tỉ lệ phế phẩm của một lô hàng là 5%" cũng có nghĩa là "Nếu chọn ra ngẫu nhiên 1 sản phẩm từ lô hàng, xác suất sản phẩm đó là phế phẩm là 0,05".

▪ Từ công thức xác suất có điều kiện ta có $\boxed{P(AB) = P(B)P(A|B)}$.

Công thức trên được gọi là công thức nhân xác suất cho hai biến cố

▪ Với mỗi biến cố A và B, trong đó $P(B) > 0$, ta có: $\boxed{P\big(\overline{A}\big|B\big) = 1 - P(A|B)}$

▪ Với A và B là hai biến cố độc lập, trong đó $0 < P(B) < 1$, người ta chứng minh được rằng

$$\boxed{P(A|B) = P\big(A\big|\overline{B}\big) = P(A)}$$

Từ đẳng thức trên, ta thấy khi A và B độc lập thì việc biến cố B xảy ra hay không xảy ra không làm ảnh hưởng đến xác suất của biến cố A.

389. Công thức xác suất toàn phần

Cho hai biến cố A và B với $0 < P(B) < 1$. Khi đó

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P\big(\overline{B}\big)P\big(A\big|\overline{B}\big)$$

gọi là **công thức xác suất toàn phần**.

390. Công thức Bayes

Giả sử A và B là hai biến cố ngẫu nhiên thoả mãn $P(A) > 0$ và $0 < P(B) < 1$. Khi đó,

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} \text{ hoặc } P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P\big(\overline{B}\big)P\big(A\big|\overline{B}\big)}$$

gọi là các **công thức Bayes**.

391. Cách tính P(A|B)

Cách 1: (Công thức xác suất có điều kiện)	$P(A\|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$
Cách 2: (Công thức 2 biến cố độc lập)	$P(A\|B)=P(A)=P(A\|\bar{B})$ (nếu A và B độc lập nhau)
Cách 3: (Công thức khi biết số kết quả thuận lợi)	$P(A\|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{n(A\|B)}{n(\Omega)}$ (Ω là không gian mẫu)
Cách 4: (Công thức biến cố đối)	$P(A\|B)=1-P(\bar{A}\|B)$
Cách 5: (Công thức Bayes)	$P(A\|B)=\frac{P(A)P(B\|A)}{P(B)}=\frac{P(B)P(A\|B)}{P(B)P(A\|B)+P(\overline{B})P(A\|\overline{B})}$

392. Cách tính P(A∩B)

Cách 1 (Công thức xác suất có điều kiện)	$P(A\cap B)=P(A\|B)\times P(B)$
Cách 2 (Công thức 2 biến cố độc lập)	$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ (nếu A và B độc lập)
Cách 3 (Công thức phần bù của A)	$P(A\cap B)=P(A)-P(A\cap\bar{B})$
Cách 4 (Công thức phần bù của B)	$P(A\cap B)=P(B)-P(\bar{A}\cap B)$
Cách 5 (Công thức khi biết số kết quả thuận lợi)	$P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(\Omega)}$ (Ω là không gian mẫu)
Cách 6 (Dựa vào công thức hợp biến cố)	$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$

393. Cách tính P(A)

Cách 1 (Công thức xác suất có điều kiện):	$P(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B\|A)}$
Cách 2 (Công thức 2 biến cố độc lập):	$P(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap\bar{B})}{P(B)}=P(A\|B)=P(A\|\bar{B})$ (nếu A và B độc lập nhau)
Cách 3 (Công thức khi biết số kết quả thuận lợi):	$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$
Cách 4 (Công thức biến cố đối):	$P(A)=1-P(\bar{A})$
Cách 5 (Công thức biến cố giao):	$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\bar{B})$
Cách 6 (Công thức xác xuất toàn phần)	$P(A)=P(B)\cdot P(A\|B)+P(\bar{B})\cdot P(A\|\bar{B})$




Biên soạn và thiết kế bởi: **Lê Trung Kiên**
Mọi sai sót xin gửi về:
https://www.facebook.com/profile.php?id=100007917210489

Thầy Lê Trung Kiên