



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG ĐỀ TEST SỐ 01

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 3y + z + 2 = 0$. Véc tơ nào dưới đây là một véc tơ pháp tuyến của (P) ?

- A. $\vec{n}_2(2; 3; 1)$. B. $\vec{n}_3(2; 3; 2)$. C. $\vec{n}_1(2; 3; 0)$. D. $\vec{n}_4(2; 0; 3)$.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 5 = 0$. Điểm nào dưới đây thuộc (P) ?

- A. $P(0; 0; -5)$. B. $M(1; 1; 6)$. C. $Q(2; -1; 5)$. D. $N(-5; 0; 0)$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 2; 0)$ và $B(3; 0; 2)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

- A. $x + y + z - 3 = 0$. B. $2x - y + z + 2 = 0$. C. $2x + y + z - 4 = 0$. D. $2x - y + z - 2 = 0$.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1; 2; -3)$ và có một véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -2; 3)$.

- A. $x - 2y + 3z + 12 = 0$. B. $x - 2y - 3z - 6 = 0$. C. $x - 2y + 3z - 12 = 0$. D. $x - 2y - 3z + 6 = 0$.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; 1; 1)$, $B(2; 1; 0)$ và $C(1; -1; 2)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng BC có phương trình là

- A. $3x + 2z + 1 = 0$. B. $x + 2y - 2z + 1 = 0$. C. $x + 2y - 2z - 1 = 0$. D. $3x + 2z - 1 = 0$.

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2; -1; 4)$ và mặt phẳng $(P): 3x - 2y + z + 1 = 0$. Phương trình của mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (P) là

- A. $2x - 2y + 4z - 21 = 0$. B. $3x - 2y + z - 12 = 0$. C. $2x - 2y + 4z + 21 = 0$. D. $3x - 2y + z + 12 = 0$

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(-1; 5; 2)$ đồng thời có cặp véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (0; 1; 1)$ và $\vec{v} = (-3; -5; 1)$ có phương trình là

- A. $y + z - 7 = 0$. B. $2x - y + z + 5 = 0$.
C. $-x + 5y + 2z + 5 = 0$. D. $2x + y + z - 5 = 0$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $(Oxyz)$, cho ba điểm $A(0;2;1)$, $B(3;0;1)$, $C(1;0;0)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

A. $2x - 3y - 4z + 2 = 0$.

B. $4x + 6y - 8z + 2 = 0$.

C. $2x + 3y - 4z - 2 = 0$.

D. $2x - 3y - 4z - 2 = 0$.

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính khoảng cách từ $M(1;2;-3)$ đến mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z - 10 = 0$.

A. $\frac{11}{3}$.

B. 3.

C. $\frac{7}{3}$.

D. $\frac{4}{3}$.

Câu 10: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): ax + by + cz - 9 = 0$ chứa hai điểm $A(3; 2; 1)$, $B(-3; 5; 2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): 3x + y + z + 4 = 0$. Tính tổng $S = a + b + c$.

A. $S = -12$.

B. $S = 2$.

C. $S = -4$.

D. $S = -2$.

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, điểm M thuộc trục Oy và cách đều hai mặt phẳng:
 $(P): x + y - z + 1 = 0$ và $(Q): x - y + z - 5 = 0$ có tọa độ là

A. $M(0; -3; 0)$.

B. $M(0;3;0)$.

C. $M(0; -2; 0)$.

D. $M(0;1;0)$.

Câu 12: Trong không gian hệ toạ độ $Oxyz$, lập phương trình các mặt phẳng song song với mặt phẳng $(\beta): x + y - z + 3 = 0$ và cách (β) một khoảng bằng $\sqrt{3}$.

A. $x + y - z + 6 = 0$; $x + y - z = 0$.

B. $x + y - z + 6 = 0$.

C. $x - y - z + 6 = 0$; $x - y - z = 0$.

D. $x + y + z + 6 = 0$; $x + y + z = 0$.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1); B(1;-2;3); C(2;-1;2)$.

a) Ba điểm A, B, C đã cho thẳng hàng.

b) Có vô số mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C đã cho.

c) Mặt phẳng (ABC) có một vector pháp tuyến $\vec{n} = (1; 2; 3)$.

d) Mặt phẳng (ABC) có phương trình là $x + 2y + 3z - 6 = 0$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P), (Q)$ lần lượt có phương trình là

$$(P): x - 2y + 3z + 1 = 0 \text{ và } (Q): 2x - 4y + 6z + 1 = 0.$$

a) Các vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng trên cùng phương.

b) Hai mặt phẳng (P) và (Q) đều đi qua điểm $M(1;1;2)$.

c) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng $\frac{\sqrt{14}}{14}$.

d) Phương trình mặt phẳng (R) cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q) là:

$$4x + 8y + 12z - 5 = 0.$$

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;0)$, $B(1;0;2)$, $C(2;1;3)$, và mặt phẳng $(P): x - y + 2z + 7 = 0$.

a) Mặt phẳng (ABC) có một vectơ pháp tuyến là $(2;1;1)$.

b) Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $M(3;1;5)$.

c) Mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P) .

d) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) bằng 6.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, c đều dương.

a) Mặt phẳng (ABC) có phương trình $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

b) Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $G(1;2;3)$ sao cho G là trọng tâm ΔABC là $6x + 3y + 2z + 18 = 0$

c) Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $H(1;1;1)$ sao cho H là trực tâm ΔABC là $x + y + z - 3 = 0$

d) Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $M(2;-2;3)$ sao cho độ dài OA, OB, OC theo thứ tự tạo thành cấp số cộng có công sai bằng 2. Khoảng cách từ gốc tọa độ O tới mặt phẳng (α) bằng $\frac{m}{n}$ với

$\frac{m}{n}$ là phân số tối giản, khi đó $T = m + n = 19$.

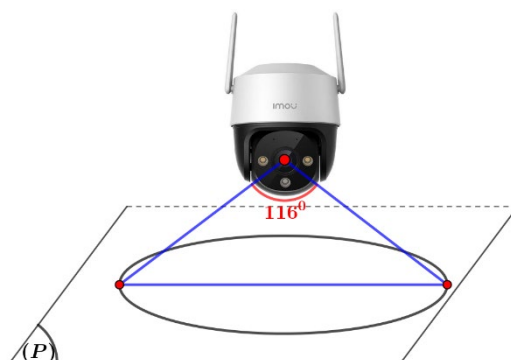
PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;5)$, $B(3;4;0)$, $C(2;-1;0)$ và mặt phẳng $(P): 3x + 3y - 2z - 29 = 0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc (P) sao cho biểu thức $T = MA^2 + MB^2 + 3MC^2$ đạt GTNN. Tính tổng $a + b + c$.

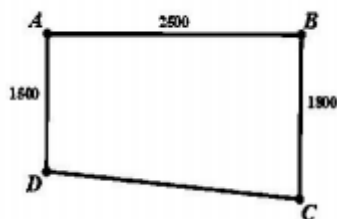
Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;6)$, $D(2;4;6)$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC) , (P) cách đều D và mặt phẳng (ABC) . Phương trình của mặt phẳng (P) là $ax + by + 2z + d = 0$ với $a, b, d \in \mathbb{Z}$. Giá trị của d bằng bao nhiêu?

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, Cho hai điểm $A(3;-1;2)$, $B(2;3;-3)$, $C(-2;1;-2)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oyz) sao $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$ có giá trị min. Tính tổng $a - 2b + c$.

Câu 4: Biết góc quan sát ngang của một camera là 116° . Trong không gian $Oxyz$, camera được đặt tại điểm $A(2;1;5)$ và chiếu thẳng về phía mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z + 13 = 0$. Hỏi vùng quan sát được trên mặt phẳng (P) của camera là hình tròn có đường kính bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến chữ số hàng chục)

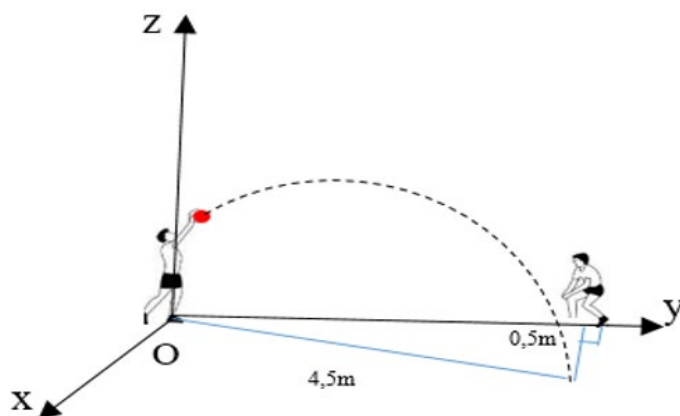


Câu 5: Một phần sân trường được định vị bởi các điểm A, B, C, D , như hình vẽ.



Bước đầu chúng được lấy “thăng bằng” để có cùng độ cao, biết $ABCD$ là hình thang vuông ở A và B với độ dài $AB = 25\text{ m}$, $AD = 15\text{ m}$, $BC = 18\text{ m}$. Do yêu cầu kỹ thuật, khi lát phẳng phần sân trường phải thoát nước về góc sân ở C nên người ta lấy độ cao ở các điểm B, C, D xuống thấp hơn so với độ cao ở A là 10 cm , $a\text{ cm}$, 6 cm tương ứng. Giá trị của a là

Câu 6: Trong tiết thể dục học về kỹ thuật chuyền bóng hơi, Nam và An đang tập chuyền bóng cho nhau, Nam ném bóng cho An đỡ, quả bóng bay lên cao nhưng lại lệch sang phải của Nam và rơi xuống vị trí cách An $0,5\text{ m}$ và cách Nam $4,5\text{ m}$ được mô tả bằng hình vẽ bên dưới



Biết rằng quỹ đạo của quả bóng nằm trong mặt phẳng $(\alpha): ax + \frac{1}{2}y + cx + d = 0$ và vuông góc với mặt đất. Khi đó giá trị của $a + c + d$ bằng (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 3y + z + 2 = 0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P) ?

- A. $\vec{n}_2(2; 3; 1)$. B. $\vec{n}_3(2; 3; 2)$. C. $\vec{n}_1(2; 3; 0)$. D. $\vec{n}_4(2; 0; 3)$.

Lời giải

Véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_2(2; 3; 1)$.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 5 = 0$. Điểm nào dưới đây thuộc (P) ?

- A. $P(0; 0; -5)$. B. $M(1; 1; 6)$. C. $Q(2; -1; 5)$. D. $N(-5; 0; 0)$.

Lời giải

Ta có $1 - 2 \cdot 1 + 6 - 5 = 0$ nên $M(1; 1; 6)$ thuộc mặt phẳng (P) .

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 2; 0)$ và $B(3; 0; 2)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

- A. $x + y + z - 3 = 0$. B. $2x - y + z + 2 = 0$. C. $2x + y + z - 4 = 0$. D. $2x - y + z - 2 = 0$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Suy ra $I(1; 1; 1)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; -2; 2)$.

Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua trung điểm I của AB và nhận $\overrightarrow{AB}$ làm vtpt, nên có phương trình là $(\alpha): 2x - y + z - 2 = 0$.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1; 2; -3)$ và có một vector pháp tuyến $\vec{n} = (1; -2; 3)$.

- A. $x - 2y + 3z + 12 = 0$. B. $x - 2y - 3z - 6 = 0$. C. $x - 2y + 3z - 12 = 0$. D. $x - 2y - 3z + 6 = 0$.

Lời giải

Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1; 2; -3)$ và có một vector pháp tuyến $\vec{n} = (1; -2; 3)$ là $1(x - 1) - 2(y - 2) + 3(z + 3) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 3z + 12 = 0$.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; 1; 1)$, $B(2; 1; 0)$, $C(1; -1; 2)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng BC có phương trình là

- A. $3x + 2z + 1 = 0$. B. $x + 2y - 2z + 1 = 0$. C. $x + 2y - 2z - 1 = 0$. D. $3x + 2z - 1 = 0$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{BC} = (-1; -2; 2)$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) cần tìm.

$\vec{n} = -\overrightarrow{BC} = (1; 2; -2)$ cũng là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $x + 2y - 2z + 1 = 0$.

- Câu 6:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;4)$ và mặt phẳng $(P):3x-2y+z+1=0$. Phương trình của mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (P) là
- A. $2x-2y+4z-21=0$. B. $3x-2y+z-12=0$. C. $2x-2y+4z+21=0$. D. $3x-2y+z+12=0$

Lời giải

Phương trình của mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (P) là

$$3(x-2)-2(y+1)+(z-4)=0 \Leftrightarrow 3x-2y+z-12=0.$$

- Câu 7:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(-1;5;2)$ đồng thời có cặp vectơ chỉ phương $\vec{u}=(0;1;1)$ và $\vec{v}=(-3;-5;1)$ có phương trình là
- A. $y+z-7=0$. B. $2x-y+z+5=0$. C. $-x+5y+2z+5=0$. D. $2x+y+z-5=0$.

Lời giải

Ta có $[\vec{u}, \vec{v}] = (6; -3; 3) = 3(2; -1; 1)$. Chọn $\vec{n} = (2; -1; 1)$ là 1 vectơ pháp tuyến của (α) .

Phương trình mặt phẳng qua $M(-1;5;2)$ nhận $\vec{n} = (2; -1; 1)$ làm 1 vectơ pháp tuyến là:

$$2(x+1)-(y-5)+(z-2)=0 \Leftrightarrow 2x-y+z+5=0.$$

- Câu 8:** Trong không gian với hệ tọa độ $(Oxyz)$, cho ba điểm $A(0;2;1)$, $B(3;0;1)$, $C(1;0;0)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là
- A. $2x-3y-4z+2=0$. B. $4x+6y-8z+2=0$. C. $2x+3y-4z-2=0$. D. $2x-3y-4z-2=0$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; -2; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (1; -2; -1)$

Vì mặt phẳng (ABC) đi qua ba điểm A, B, C nên VTPT $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (2; 3; -4)$

Phương trình mặt phẳng (ABC) : $2(x-0)+3(y-2)-4(z-1)=0 \Leftrightarrow 2x+3y-4z-2=0$.

- Câu 9:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính khoảng cách từ $M(1;2;-3)$ đến mặt phẳng $(P):x+2y+2z-10=0$.
- A. $\frac{11}{3}$. B. 3. C. $\frac{7}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } d(M; (P)) = \frac{|1+2.2+2.(-3)-10|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{|-11|}{3} = \frac{11}{3}.$$

- Câu 10:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): ax + by + cz - 9 = 0$ chứa hai điểm $A(3; 2; 1)$, $B(-3; 5; 2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): 3x + y + z + 4 = 0$. Tính tổng $S = a + b + c$.
- A. $S = -12$. B. $S = 2$. C. $S = -4$. D. $S = -2$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-6; 3; 1)$.

$\overrightarrow{n_{(Q)}} = (3; 1; 1)$ là VTPT của mp (Q) .

Mp (P) chứa hai điểm $A(3; 2; 1)$, $B(-3; 5; 2)$ và vuông góc với mặt phẳng (Q) .

$\Rightarrow \overrightarrow{n_{(P)}} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_{(Q)}}] = (2; 9; -15)$ là VTPT của mp (P)

Vì $A(3; 2; 1) \in (P) \Rightarrow (P): 2x + 9y - 15z - 9 = 0$ hoặc $(P): -2x - 9y + 15z + 9 = 0$

Mặt khác $(P): ax + by + cz - 9 = 0 \Rightarrow a = 2; b = 9; c = -15$.

Vậy $S = a + b + c = 2 + 9 + (-15) = -4$.

- Câu 11:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, điểm M thuộc trục Oy và cách đều hai mặt phẳng: $(P): x + y - z + 1 = 0$ và $(Q): x - y + z - 5 = 0$ có tọa độ là
- A. $M(0; -3; 0)$. B. $M(0; 3; 0)$. C. $M(0; -2; 0)$. D. $M(0; 1; 0)$.

Lời giải

Ta có $M \in Oy \Rightarrow M(0; y; 0)$.

Theo giả thiết: $d(M(P)) = d(M(Q)) \Leftrightarrow \frac{|y+1|}{\sqrt{3}} = \frac{|-y-5|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow y = -3$.

Vậy $M(0; -3; 0)$.

- Câu 12:** Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, lập phương trình các mặt phẳng song song với mặt phẳng $(\beta): x + y - z + 3 = 0$ và cách (β) một khoảng bằng $\sqrt{3}$.
- A. $x + y - z + 6 = 0; x + y - z = 0$. B. $x + y - z + 6 = 0$.
C. $x - y - z + 6 = 0; x - y - z = 0$. D. $x + y + z + 6 = 0; x + y + z = 0$.

Lời giải

Gọi mặt phẳng (α) cần tìm.

Vì $(\alpha) \parallel (\beta)$ nên phương trình (α) có dạng: $x + y - z + c = 0$ với $c \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Lấy điểm $I(-1; -1; 1) \in (\beta)$.

Vì khoảng cách từ (α) đến (β) bằng $\sqrt{3}$ nên ta có:

$$d(I, (\alpha)) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|-1-1-1+c|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|c-3|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ c=6 \end{cases} \text{ (thỏa điều kiện } c \in \mathbb{R} \setminus \{3\} \text{)}.$$

Vậy phương trình (α) là: $x + y - z + 6 = 0; x + y - z = 0$.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1); B(1;-2;3); C(2;-1;2)$.

- a) Ba điểm A, B, C đã cho thẳng hàng.
- b) Có vô số mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C đã cho.
- c) Mặt phẳng (ABC) có một vector pháp tuyến $\vec{n} = (1;2;3)$.
- d) Mặt phẳng (ABC) có phương trình là $x + 2y + 3z - 6 = 0$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

- a) Ta có: $\vec{AB} = (0; -3; 2); \vec{AC} = (1; -2; 1)$ và $\frac{0}{1} \neq \frac{-3}{-2} \Rightarrow \vec{AB}; \vec{AC}$ không cùng phương. Do đó ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Vậy a) **Sai**.
- b) Ta có ba điểm A, B, C không thẳng hàng nên tồn tại một mặt duy nhất qua ba điểm này. Vậy b) **Sai**.
- c) Ta có: VTPT $\vec{n} = [\vec{AB}, \vec{AC}] = (1; 2; 3)$. Vậy c) **Đúng**.
- d) Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $A(1;1;1)$ và nhận vector $\vec{n} = (1; 2; 3)$ làm một vector pháp tuyến là: $1(x-1) + 2(y-1) + 3(z-1) = 0$ hay $(ABC): x + y + z - 6 = 0$.
 Vậy d) **Đúng**.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P), (Q)$ lần lượt có phương trình là

$(P): x - 2y + 3z + 1 = 0$ và $(Q): 2x - 4y + 6z + 1 = 0$.

- a) Các vector pháp tuyến của hai mặt phẳng trên cùng phương.
- b) Hai mặt phẳng (P) và (Q) đều đi qua điểm $M(1;1;2)$.
- c) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng $\frac{\sqrt{14}}{14}$.
- d) Phương trình mặt phẳng (R) cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q) là: $4x + 8y + 12z - 5 = 0$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

- a) Ta có: một VTPT $\vec{n}_P = (1; -2; 3)$, một VTPT $\vec{n}_Q = (2; -4; 6)$ và $\vec{n}_Q = 2\vec{n}_P \Rightarrow \vec{n}_P; \vec{n}_Q$ cùng phương. Vậy a) **Đúng**.
- b) Ta có $\frac{1}{2} = \frac{-2}{-4} = \frac{3}{6} \neq \frac{1}{1} \Rightarrow (P) // (Q)$. Do đó hai mặt phẳng (P) và (Q) không có điểm chung. Vậy b) **Sai**.
- c) Ta có $(P) // (Q)$.

Lấy điểm $N(1;1;0) \in (P) \Rightarrow d((P), (Q)) = d(N, (Q)) = \frac{|2 \cdot 1 - 4 \cdot 1 + 6 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 6^2}} = \frac{\sqrt{14}}{28}$.

Vậy c) **Sai**.

d) Ta có $(P) // (Q)$. Lấy $N(1;1;0) \in (P); P\left(1;0;-\frac{1}{2}\right) \in (Q)$. Gọi I là trung điểm $MN \Rightarrow I\left(1;\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$. Ycbt $\Rightarrow (R)$ qua I và nhận vectơ $\vec{n}(1;2;3)$ làm một vectơ pháp tuyến là:
 $1(x-1)+2\left(y-\frac{1}{2}\right)+3\left(z+\frac{1}{4}\right)=0$ hay $(R): 4x+8y+12z-5=0$.

Vậy d) **Đúng**.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;0)$, $B(1;0;2)$, $C(2;1;3)$, và mặt phẳng $(P): x-y+2z+7=0$.

a) Mặt phẳng (ABC) có một vectơ pháp tuyến là $(2;1;1)$.

b) Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $M(3;1;5)$.

c) Mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P) .

d) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) bằng 6.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------------	----------------	---------------	---------------

a) Sai.

Ta có: $\overrightarrow{AB}(0;-2;2), \overrightarrow{BC}(1;1;1) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}] = (-4;2;2) = 2(-2;1;1) = 2\vec{n}$

Mặt phẳng (ABC) có một vectơ pháp tuyến: $\vec{n}(-2;1;1)$.

b) **Đúng**

Phương trình mặt phẳng $(ABC): -2(x-1)+1(y-2)+1(z-0)=0 \Leftrightarrow -2x+y+z=0$.

Thay tọa độ điểm $M(3;1;5)$ vào phương trình mặt phẳng $(ABC): -2.3+1+5=0$: thỏa mãn.

c) Sai.

Ta có vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P): \vec{n}_p = (1;-1;2)$.

$\vec{n}_p \cdot \vec{n} = -2.1-1.1+1.2 = -1 \neq 0 \Rightarrow$ Mặt phẳng (ABC) không vuông góc với mặt phẳng (P) .

d) Sai.

$$d(A;(P)) = \frac{|1-2+2.0+7|}{\sqrt{1+1+4}} = \sqrt{6}.$$

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, c đều dương.

a) Mặt phẳng (ABC) có phương trình $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

b) Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $G(1;2;3)$ sao cho G là trọng tâm ΔABC là $6x+3y+2z+18=0$

c) Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $H(1;1;1)$ sao cho H là trực tâm ΔABC là $x+y+z-3=0$

d) Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $M(2; -2; 3)$ sao cho độ dài OA, OB, OC theo thứ tự tạo thành cấp số cộng có công sai bằng 2. Khoảng cách từ gốc tọa độ O tới mặt phẳng (α) bằng $\frac{m}{n}$ với $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản, khi đó $T = m + n = 19$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
----------------	---------------	----------------	----------------

a) Đúng

Theo phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn ta có mặt phẳng (ABC) có phương trình

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

b) Sai

Vì G là trọng tâm ΔABC ta có
$$\begin{cases} \frac{a}{3} = 1 \\ \frac{b}{3} = 2 \\ \frac{c}{3} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \\ c = 9 \end{cases}$$

Mặt phẳng (ABC) có phương trình $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 18 = 0$

c) Đúng

Vì $H(1; 1; 1)$ là trực tâm ΔABC ta có
$$\begin{cases} H \in (ABC) \\ \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \\ -b + c = 0 \\ a - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \\ c = 3 \end{cases}$$

Phương trình (ABC) là: $x + y + z - 3 = 0$

d) Đúng

Giả sử mặt phẳng (α) cắt tia Ox tại điểm có hoành độ bằng a ($a > 0$) khi đó phương trình mặt phẳng (α) có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{a+2} + \frac{z}{a+4} = 1$.

Do (α) đi qua điểm $M(2; -2; 3)$ nên ta có $\frac{2}{a} + \frac{-2}{a+2} + \frac{3}{a+4} = 1 \Leftrightarrow a = 2$.

Vậy (α) cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại $A(2; 0; 0), B(0; 4; 0), C(0; 0; 6)$.

Gọi $d = d(O, (ABC))$.

Áp dụng công thức tính nhanh ta có $\frac{1}{d^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} = \frac{49}{144}$

$\Rightarrow d^2 = \frac{144}{49} \Rightarrow d = \frac{12}{7}$.

Vậy: $T = m + n = 19$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;5)$, $B(3;4;0)$, $C(2;-1;0)$ và mặt phẳng $(P): 3x+3y-2z-29=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc (P) sao cho biểu thức $T = MA^2 + MB^2 + 3MC^2$ đạt GTNN. Tính tổng $a+b+c$.

Lời giải

Chọn điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow I(2;1;1)$

Ta có:

$$\begin{aligned} T &= MA^2 + MB^2 + 3MC^2 \\ &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + 3\overrightarrow{MC}^2 \\ &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 \\ &= 5MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) + IA^2 + IB^2 + IC^2 \\ &= 5MI^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 \end{aligned}$$

$$T_{\min} \Leftrightarrow MI_{\min}$$

Suy ra, M là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P)

Gọi Δ là đường thẳng đi qua I và vuông góc với (P)

$$\Rightarrow \overrightarrow{u_{\Delta}} = \overrightarrow{n_P} = (3;3;-2)$$

$$\Delta: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

$$M \in \Delta \Rightarrow M(2+3t; 1+3t; 1-2t)$$

$$M \in (P) \Leftrightarrow 3(2+3t) + 3(1+3t) - 2(1-2t) - 29 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow M(5;4;-1)$$

$$\text{Vậy } a+b+c = 5+4-1 = 8.$$

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;6)$, $D(2;4;6)$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC) , (P) cách đều D và mặt phẳng (ABC) . Phương trình của mặt phẳng (P) là $ax+by+2z+d=0$ với $a,b,d \in \mathbb{Z}$. Giá trị của d bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$\text{Phương trình mặt phẳng } (ABC) \text{ là: } \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 12 = 0$$

Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (ABC) nên (P) có dạng: $6x+3y+2z+d=0$ ($d \neq -12$)

Vì (P) cách đều D và mặt phẳng (ABC) nên ta có: $d(D;(P)) = d((ABC);(P)) \Leftrightarrow d(D;(P)) = d(A;(P)) \Leftrightarrow |36+d| = |12+d| \Leftrightarrow d = -24$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là: $6x+3y+2z-24=0$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, Cho hai điểm $A(3;-1;2)$, $B(2;3;-3)$, $C(-2;1;-2)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oyz) sao $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$ có giá trị min. Tính tổng $a - 2b + c$.

Lời giải

Gọi $I(a;b;c)$, sao cho $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow I$ là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow I(1;1;-1)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} \\ &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \\ &= 3MI^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) + (\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IA}), \text{ (mà } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}) \\ &= 3MI^2 + (\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IA}) \end{aligned}$$

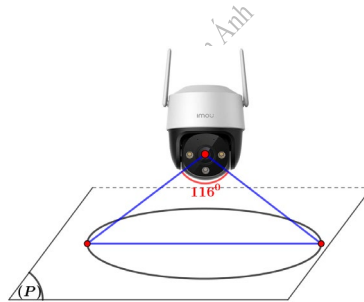
Vì điểm I, A, B, C cố định nên $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IA}$ có giá trị không đổi.

Để $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$ có giá trị min $\Leftrightarrow MI$ min.

Mà I cố định nên M là hình chiếu của I lên (Oyz) , suy ra $M(0;1;-1)$.

Vậy $a - 2b + c = 0 - 2 \cdot 1 - 1 = -3$.

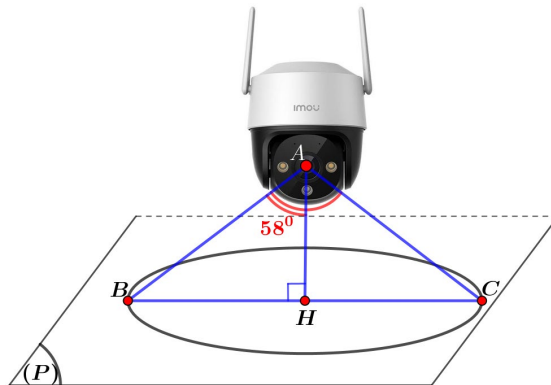
Câu 4: Biết góc quan sát ngang của một camera là 116° . Trong không gian $Oxyz$, camera được đặt tại điểm $A(2;1;5)$ và chiếu thẳng về phía mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z + 13 = 0$. Hỏi vùng quan sát được trên mặt phẳng (P) của camera là hình tròn có đường kính bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến chữ số hàng chục)



Lời giải

Gọi A, B, C là các điểm như hình vẽ bên dưới và H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (P) .

Hình vẽ



Theo đề $\widehat{BAC} = 116^\circ \Rightarrow \widehat{BAH} = 58^\circ$.

$$\text{Khi đó } AH = d(A, (P)) = \frac{|2 \cdot 2 - 1 - 2 \cdot 5 + 13|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = 2 \text{ (đvdd)}.$$

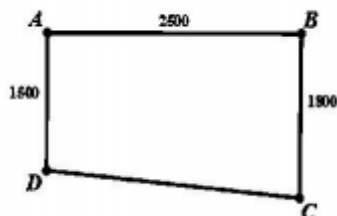
Xét tam giác ABH vuông tại H , ta có:

$$\tan \widehat{BAH} = \frac{BH}{AH} \Rightarrow BH = \tan 58^\circ \cdot 2 = 2 \tan 58^\circ \text{ (đvdd)}.$$

Suy ra $BC = 2BH = 2 \cdot 2 \tan 58^\circ \approx 6,4$ (đvdd)

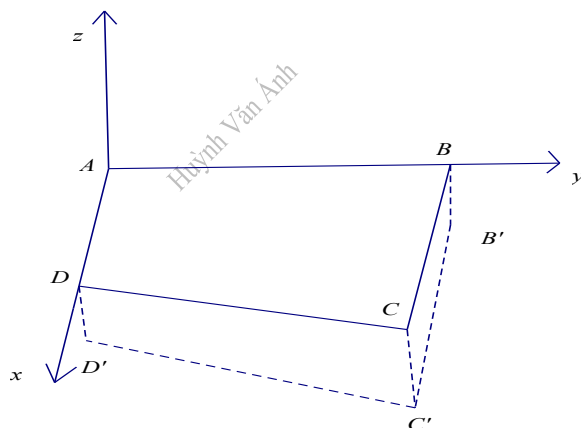
Vậy vùng quan sát của camera trên mặt phẳng (P) là hình tròn có đường kính khoảng 6,4 (đvdd).

Câu 5: Một phần sân trường được định vị bởi các điểm A, B, C, D , như hình vẽ.



Bước đầu chúng được lấy “thăng bằng” để có cùng độ cao, biết $ABCD$ là hình thang vuông ở A và B với độ dài $AB = 25$ m, $AD = 15$ m, $BC = 18$ m. Do yêu cầu kỹ thuật, khi lát phẳng phần sân trường phải thoát nước về góc sân ở C nên người ta lấy độ cao ở các điểm B, C, D xuống thấp hơn so với độ cao ở A là 10 cm, a cm, 6 cm tương ứng. Giá trị của a là

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho: $O \equiv A$, tia $Ox \equiv AD$; tia $Oy \equiv AB$.

Khi đó, $A(0;0;0)$; $B(0;2500;0)$; $C(1800;2500;0)$; $D(1500;0;0)$.

Khi hạ độ cao các điểm ở các điểm B, C, D xuống thấp hơn so với độ cao ở A là 10 cm, a cm, 6 cm tương ứng ta có các điểm mới $B'(0;2500;-10)$; $C'(1800;2500;-a)$;

$D'(1500;0;-6)$.

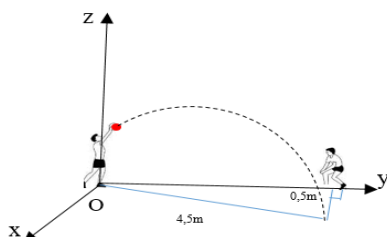
Theo bài ra có bốn điểm A ; B' ; C' ; D' đồng phẳng.

Phương trình mặt phẳng $(AB'D')$: $x + y + 250z = 0$.

Do $C'(1800; 2500; -a) \in (AB'D')$ nên có: $1800 + 2500 - 250a = 0 \Leftrightarrow a = 17,2$.

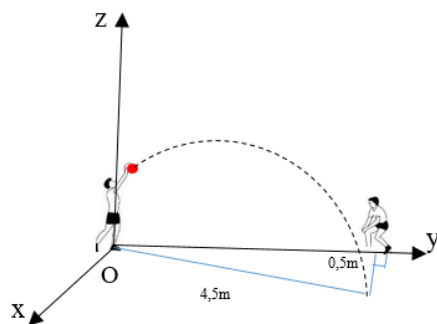
Vậy $a = 17,2$ cm.

Câu 6: Trong tiết thể dục học về kỹ thuật chuyển bóng hơi, Nam và An đang tập chuyển bóng cho nhau, Nam ném bóng cho An đỡ, quả bóng bay lên cao nhưng lại lệch sang phải của Nam và rơi xuống vị trí cách An 0,5m và cách Nam 4,5m được mô tả bằng hình vẽ bên dưới

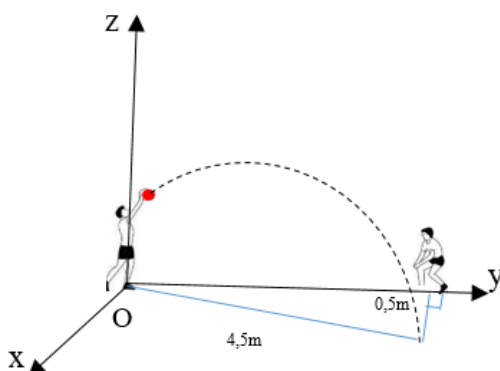


Biết rằng quỹ đạo của quả bóng nằm trong mặt phẳng $(\alpha): ax + \frac{1}{2}y + cx + d = 0$ và vuông góc với mặt đất.

Khi đó giá trị của $a + c + d$ bằng (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



Lời giải



Chọn hệ trục như hình vẽ. Gọi M là điểm mà quả bóng chạm đất.

Khi đó $x_M = 0,5$, $y_M = \sqrt{4,5^2 - 0,5^2} = 2\sqrt{5}$

Vì $(\alpha) \perp (Oxy)$ nên (α) có véc tơ chỉ phương $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Mà (α) có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{OM} = (0,5; 2\sqrt{5}; 0)$

Khi đó véc tơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n}_\alpha = [\vec{k}, \overrightarrow{OM}] = (-2\sqrt{5}; 0,5; 0)$.

Vậy $(\alpha): -2\sqrt{5}x + 0,5y = 0$ nên $a = -2\sqrt{5}; b = 0,5; c = 0; d = 0 \Rightarrow a + b + c + d \approx -4,5$.



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG ĐỀ TEST SỐ 02

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

- Câu 1:** Trong không gian $Oxyz$, một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $\frac{x}{-2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{3} = 1$ là
A. $\vec{n} = (3; 6; -2)$. **B.** $\vec{n} = (2; -1; 3)$. **C.** $\vec{n} = (-3; -6; -2)$. **D.** $\vec{n} = (-2; -1; 3)$.
- Câu 2:** Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua 3 điểm $M(-2; 0; 0)$, $N(0; -1; 0)$, $P(0; 0; 3)$ là
A. $3x + 6y - 2z - 6 = 0$. **B.** $2x + y - 3z - 1 = 0$.
C. $3x + 6y - 2z = 0$. **D.** $3x + 6y - 2z + 6 = 0$.
- Câu 3:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$. Mặt phẳng chứa điểm A và trục Oz có phương trình là
A. $2x - y = 0$. **B.** $x + y - z = 0$. **C.** $3y - 2z = 0$. **D.** $3x - z = 0$ vô số.
- Câu 4:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; -1; -3)$ và mặt phẳng $(P): 3x - 2y + 4z - 5 = 0$. Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua A và song song với mặt phẳng (P) . Mặt phẳng (Q) có phương trình là:
A. $3x - 2y + 4z - 4 = 0$ **B.** $3x - 2y + 4z + 4 = 0$. **C.** $3x - 2y + 4z + 5 = 0$. **D.** $3x + 2y + 4z + 8 = 0$.
- Câu 5:** Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(2; -1; 0)$, $B(1; 1; 2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x + y + 2z - 3 = 0$ là.
A. $2x + 4y - 3z - 8 = 0$. **B.** $2x + 4y - 3z = 0$.
C. $2x + 4y - 3z + 8 = 0$. **D.** $2x - 4y - 3z = 0$.
- Câu 6:** Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2; 1; -2)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(Q): x + y + 2z - 3 = 0$ và $(R): x - y - z + 4 = 0$ là.
A. $x + 3y - 2z + 9 = 0$. **B.** $2x + y - 2z - 9 = 0$. **C.** $x + 3y - 2z - 9 = 0$. **D.** $2x + y - 2z + 9 = 0$.
- Câu 7:** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(5; 1; 3)$, $B(1; 6; 2)$, $C(5; 0; 4)$, $D(4; 0; 6)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, B và song song với CD .
A. $4x - 5y + z + 24 = 0$. **B.** $x - 2z + 1 = 0$
C. $10x + 9y + 5z - 74 = 0$. **D.** $10x + 9y + 5z + 74 = 0$.

- Câu 8:** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 2x + y + z - 2 = 0$ song song với mặt phẳng nào dưới đây?
- A.** $x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z - 1 = 0$. **B.** $x - y - z - 2 = 0$. **C.** $4x + 2y + 2z + 4 = 0$. **D.** $2x + y + z - 2 = 0$.
- Câu 9:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 3 = 0$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với mặt phẳng (α) ?
- A.** $(\alpha_1): -2x + y - 3z = 0$. **B.** $(\alpha_2): x + 5y + z - 2 = 0$.
C. $(\alpha_3): 4x - 2y + 7 = 0$. **D.** $(\alpha_4): x + 2y - z + 1 = 0$.
- Câu 10:** Trong không gian $Oxyz$, điểm M thuộc trục Oy và cách đều hai mặt phẳng: $(P): x + y - z + 1 = 0$ và $(Q): x - y + z - 5 = 0$ có tọa độ là
- A.** $M(0; -3; 0)$. **B.** $M(0; 3; 0)$. **C.** $M(0; -2; 0)$. **D.** $M(0; 1; 0)$.
- Câu 11:** Trong không gian $Oxyz$ khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x + 2y + 3z - 1 = 0$ và $(Q): x + 2y + 3z + 6 = 0$ là
- A.** $\frac{7}{\sqrt{14}}$. **B.** $\frac{8}{\sqrt{14}}$. **C.** 14 . **D.** $\frac{5}{\sqrt{14}}$.
- Câu 12:** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2; 0; 0), B(0; 4; 0), C(0; 0; 6)$. Gọi (P) là mặt phẳng không chứa gốc tọa độ và song song với $mp(ABC)$, biết khoảng cách giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABC) bằng $\frac{12}{7}$. Phương trình của (P) là
- A.** $6x + 3y + 2z - 12 = 0$. **B.** $6x + 3y + 2z = 0$.
C. $6x + 3y + 2z - 24 = 0$. **D.** $6x + 3y + 2z - 36 = 0$.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

- Câu 1:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; 1; 0), B(1; -1; 2), C(1; -2; 1)$.
- a) Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$.
 b) Vectơ $\vec{n} = (1; 2; 3)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) .
 c) Vectơ $\vec{u} = (1; 1; 0)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng đi qua O và chứa đường thẳng AB .
 d) Vectơ $\vec{v} = (1; 2; 3)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng song song với hai đường thẳng AB và OC .
- Câu 2:** Cho các điểm $A(1; -2; 0); B(2; -1; 1); C(1; 1; 2)$.
- a) Phương trình mặt phẳng (ABC) là $x + 2y - 3z - 3 = 0$.
 b) Phương trình mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với BC là $x - 2y - z - 5 = 0$.
 c) Phương trình mặt phẳng trung trực (β) của đoạn AC là $6y + 4z - 1 = 0$.
 d) Phương trình mặt phẳng (γ) chứa trục Ox và điểm C là $2y + z = 0$.

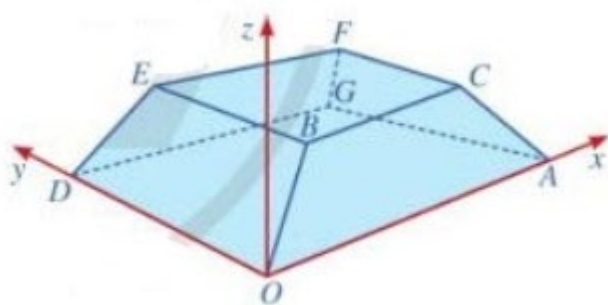
- Câu 3:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;5)$ và mặt phẳng $(\alpha): x+2y+2z-6=0$.
- a) Véc tơ $\vec{n}=(1;2;2)$ là một vectơ pháp tuyến của (α) .
- b) Phương trình mặt phẳng (β) đi qua điểm A và song song với mặt phẳng (α) có phương trình $x+2y+2z+15=0$
- c) Phương trình mặt phẳng (γ) đi qua hai điểm O và A đồng thời vuông góc với mặt phẳng (α) có phương trình $2x-y=0$.
- d) Điểm $M \in (\alpha)$ sao cho A, O, M thẳng hàng thì tọa độ $M\left(\frac{2}{5}; \frac{4}{5}; 2\right)$.

- Câu 4:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-2); B(2;1;2); C(3;-2;1)$.
- a) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A, B, C có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}=[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$.
- b) Phương trình mặt phẳng (P) là $13x+5y-2z+27=0$.
- c) Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1;2;-2)$ và nhận $\overrightarrow{BC}$ làm véc tơ pháp tuyến có dạng: $1(x+1)x-3(y+2)-1(z-2)=0$.
- d) Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $E; F; K$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên trục $Ox; Oy; Oz$ có phương trình $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}-\frac{z}{2}=1$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

- Câu 1:** Trong hệ trục tọa độ không gian $Oxyz$, cho $A(1;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, biết $b, c > 0$, phương trình mặt phẳng $(P): y-z+1=0$. Tính $M=c+b$ biết $(ABC) \perp (P)$, $d[O; (ABC)]=\frac{1}{3}$.
- Câu 2:** Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(-1;2;0)$, $B(1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x-2y+3z-5=0$. Phương trình của mặt phẳng đi qua hai điểm A, B , đồng thời vuông góc (P) là $2x-ay-bz+c=0$. Giá trị của biểu thức $a+2b+3c$ bằng
- Câu 3:** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) qua hai điểm $A(1;2;0)$, $B(4;1;2)$ và cách đều hai điểm $C(-2;1;-1)$, $D(0;-3;1)$ có dạng $ax+by+cz+1=0$ ($a < 0$). Tính $P=a+b+c$.
- Câu 4:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x+3y+z+1=0$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với (α) , cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng 6. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

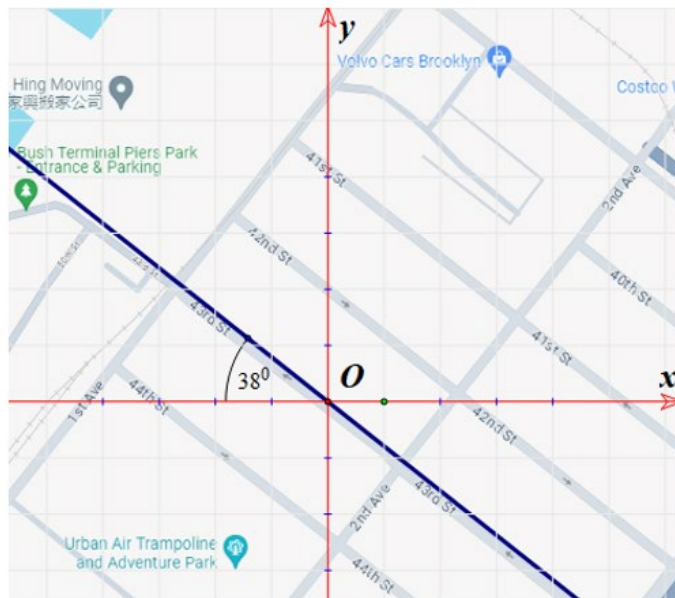
Câu 5: Một sân vận động được xây dựng theo mô hình là hình chóp cắt $OAGD.BCFE$ có hai đáy song song với nhau. Mặt sân $OAGD$ là hình chữ nhật và được gắn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Mặt sân $OAGD$ có chiều dài $OA = 100m$, chiều rộng $OD = 60m$ và tọa độ điểm $B(10;10;8)$. Giả sử phương trình tổng quát của mặt phẳng $(OACB)$ có dạng $ax + y + cz + d = 0$. Tính giá trị biểu thức $a + c + d$.



Câu 6: Manhattanhenge (Hình 1) là một sự kiện diễn ra khi Mặt Trời mọc hoặc khi Mặt Trời lặn nằm thẳng hàng với các tuyến phố Đông - Tây thuộc mạng lưới đường phố chính tại quận Manhattan của thành phố New York. Khi mặt trời lặn, tia sáng song song mặt đất lệch một góc khoảng 38° so với hướng tây (Hình 2).



Hình 1



Hình 2

Giả sử mặt tiền các tòa nhà hai bên đường nằm trong 2 mặt phẳng song song cách nhau $30m$ và vuông góc với mặt đất. Biết rằng mặt phẳng phía bắc đi qua gốc O của hệ trục $Oxyz$, với tia Oz vuông góc với mặt đất và hướng lên trên. Phương trình mặt phẳng thứ hai có dạng $(Q): x + ay + bz + c = 0$, với $c = \frac{m}{\sin n^\circ}$. Tính $m + n$.

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, một vector pháp tuyến của mặt phẳng $\frac{x}{-2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{3} = 1$ là

- A.** $\vec{n} = (3; 6; -2)$. **B.** $\vec{n} = (2; -1; 3)$. **C.** $\vec{n} = (-3; -6; -2)$. **D.** $\vec{n} = (-2; -1; 3)$.

Lời giải

Phương trình $\frac{x}{-2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 3x + 6y - 2z + 6 = 0$.

Một vector pháp tuyến của mặt phẳng đã cho là $\vec{n} = (3; 6; -2)$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua 3 điểm $M(-2; 0; 0)$, $N(0; -1; 0)$, $P(0; 0; 3)$ là

- A.** $3x + 6y - 2z - 6 = 0$. **B.** $2x + y - 3z - 1 = 0$.
C. $3x + 6y - 2z = 0$. **D.** $3x + 6y - 2z + 6 = 0$.

Lời giải

Áp dụng phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn, ta có phương trình mặt (MNP) là $\frac{x}{-2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 3x + 6y - 2z + 6 = 0$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$. Mặt phẳng chứa điểm A và trục Oz có phương trình là

- A.** $2x - y = 0$. **B.** $x + y - z = 0$. **C.** $3y - 2z = 0$. **D.** $3x - z = 0$ vô số.

Lời giải

Gọi (P) là mặt phẳng chứa điểm A và trục Oz .

Oz đi qua điểm $O(0; 0; 0)$ và có vector chỉ phương $\vec{u} = (0; 0; 1)$.

Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $\vec{n} = [\vec{u}, \overrightarrow{OA}] = (-2; 1; 0)$ và đi qua điểm $O(0; 0; 0)$ nên có phương trình $2x - y = 0$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; -1; -3)$ và mặt phẳng $(P): 3x - 2y + 4z - 5 = 0$. Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua A và song song với mặt phẳng (P) . Mặt phẳng (Q) có phương trình là:

- A.** $3x - 2y + 4z - 4 = 0$ **B.** $3x - 2y + 4z + 4 = 0$ **C.** $3x - 2y + 4z + 5 = 0$ **D.** $3x + 2y + 4z + 8 = 0$.

Lời giải

Mặt phẳng $(P): 3x - 2y + 4z - 5 = 0$ có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (3; -2; 4)$.

Do (Q) song song với (P) nên (Q) có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (3; -2; 4)$.

Phương trình mặt phẳng $(Q): 3(x - 2) - 2(y + 1) + 4(z + 3) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y + 4z + 4 = 0$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(2; -1; 0)$, $B(1; 1; 2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x + y + 2z - 3 = 0$ là.

- A.** $2x + 4y - 3z - 8 = 0$. **B.** $2x + 4y - 3z = 0$.

C. $2x + 4y - 3z + 8 = 0$. **D.** $2x - 4y - 3z = 0$.

Lời giải

Mặt phẳng (Q) có một vector pháp tuyến $\vec{n}_{(Q)} = (1; 1; 2)$.

Mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(2; -1; 0)$, $B(1; 1; 2)$ và vuông góc với mặt phẳng (Q) nên có cặp vector chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (-1; 2; 2)$ và $\vec{n}_{(Q)} = (1; 1; 2)$. Do đó (P) có vector pháp tuyến là: $\vec{n}_{(P)} = [\overrightarrow{AB}; \vec{n}_{(Q)}] = (2; 4; -3)$.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(2; -1; 0)$ và nhận $\vec{n}_{(P)} = (2; 4; -3)$ làm một vector pháp tuyến nên có phương trình: $2(x - 2) + 4(y + 1) - 3(z - 0) = 0 \Leftrightarrow 2x + 4y - 3z = 0$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2; 1; -2)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(Q): x + y + 2z - 3 = 0$ và $(R): x - y - z + 4 = 0$ là.

A. $x + 3y - 2z + 9 = 0$. **B.** $2x + y - 2z - 9 = 0$.

C. $x + 3y - 2z - 9 = 0$. **D.** $2x + y - 2z + 9 = 0$.

Lời giải

Mặt phẳng (Q) , (R) có một vector pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_{(Q)} = (1; 1; 2)$ và $\vec{n}_{(R)} = (1; -1; -1)$.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2; 1; -2)$ và vuông góc với hai mặt phẳng (Q) và (R) nên có cặp vector chỉ phương là $\vec{n}_{(Q)} = (1; 1; 2)$ và $\vec{n}_{(R)} = (1; -1; -1)$. Do đó (P) có vector pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)} = [\vec{n}_{(Q)}; \vec{n}_{(R)}] = (1; 3; -2)$.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2; 1; -2)$ và nhận $\vec{n}_{(P)} = (1; 3; -2)$ làm một vector pháp tuyến nên có phương trình: $1(x - 2) + 3(y - 1) - 2(z + 2) = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 2z - 9 = 0$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(5; 1; 3)$, $B(1; 6; 2)$, $C(5; 0; 4)$, $D(4; 0; 6)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, B và song song với CD .

A. $4x - 5y + z + 24 = 0$.

B. $x - 2z + 1 = 0$

C. $10x + 9y + 5z - 74 = 0$.

D. $10x + 9y + 5z + 74 = 0$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-4; 5; -1)$, $\overrightarrow{CD} = (-1; 0; 2) \Rightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}] = (10; 9; 5)$

Ta có mp (P) đi qua $A(5; 1; 3)$ và nhận $\vec{n} = (10; 9; 5)$ làm vector pháp tuyến nên có phương trình $10(x - 5) + 9(y - 1) + 5(z - 3) = 0 \Leftrightarrow 10x + 9y + 5z - 74 = 0$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 2x + y + z - 2 = 0$ song song với mặt phẳng nào dưới đây?

A. $x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z - 1 = 0$. **B.** $x - y - z - 2 = 0$. **C.** $4x + 2y + 2z + 4 = 0$. **D.** $2x + y + z - 2 = 0$.

Lời giải

Xét $(P): 2x + y + z - 2 = 0$ và $(Q_1): x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z - 1 = 0$ có $\frac{2}{1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \neq \frac{1}{-\frac{1}{2}} \Rightarrow (P)$ không song

song với (Q_1) .

Xét $(P): 2x + y + z - 2 = 0$ và $(Q_2): x - y - z - 2 = 0$ có $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1} = \frac{1}{-1} \Rightarrow (P)$ không song song với (Q_2) .

Xét $(P): 2x + y + z - 2 = 0$ và $(Q_3): 4x + 2y + 2z - 4 = 0$ có $\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{-2}{4} \Rightarrow (P)$ song song với (Q_3) .

Xét $(P): 2x + y + z - 2 = 0$ và $(Q_4): 2x + y + z - 2 = 0$ có $\frac{2}{2} = \frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{-2}{-2} \Rightarrow (P)$ trùng với (Q_4) .

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 3 = 0$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với mặt phẳng (α) ?

A. $(\alpha_1): -2x + y - 3z = 0$.

B. $(\alpha_2): x + 5y + z - 2 = 0$.

C. $(\alpha_3): 4x - 2y + 7 = 0$.

D. $(\alpha_4): x + 2y - z + 1 = 0$.

Lời giải

Mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 3 = 0$ có VTPT $\vec{n}_\alpha = (2; -1; 0)$.

Mặt phẳng $(\alpha_4): x + 2y - z + 1 = 0$ có VTPT $\vec{n}_4 = (1; 2; -1)$.

Vì $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_4 = 2.1 + (-1).2 + 0.(-1) = 0$ nên $(\alpha_4) \perp (\alpha)$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, điểm M thuộc trục Oy và cách đều hai mặt phẳng: $(P): x + y - z + 1 = 0$ và $(Q): x - y + z - 5 = 0$ có tọa độ là

A. $M(0; -3; 0)$.

B. $M(0; 3; 0)$.

C. $M(0; -2; 0)$.

D. $M(0; 1; 0)$.

Lời giải

Ta có $M \in Oy \Rightarrow M(0; y; 0)$.

Theo giả thiết: $d(M(P)) = d(M(Q)) \Leftrightarrow \frac{|y+1|}{\sqrt{3}} = \frac{|-y-5|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow y = -3$.

Vậy $M(0; -3; 0)$

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$ khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x + 2y + 3z - 1 = 0$ và $(Q): x + 2y + 3z + 6 = 0$ là

A. $\frac{7}{\sqrt{14}}$

B. $\frac{8}{\sqrt{14}}$

C. 14.

D. $\frac{5}{\sqrt{14}}$

Lời giải

$(P): x + 2y + 3z - 1 = 0$ $(Q): x + 2y + 3z + 6 = 0$. Ta có: $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} \neq \frac{-1}{6}$

$(P) \parallel (Q)$ nên chọn $A(1; 0; 0) \in (P)$. Vì $(P) \parallel (Q)$ nên $d((P); (Q)) = d(A, (Q))$
 $= \frac{|1 + 2.0 + 3.0 + 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{7}{\sqrt{14}}$

Cách khác: Công thức tính nhanh: $(P): Ax + By + Cz + D_1 = 0; (Q) Ax + By + Cz + D_2 = 0$

$$(P) // (Q) \Rightarrow d((P); (Q)) = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\text{Áp dụng công thức: } d((P); (Q)) = \frac{|-1 - 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{7}{\sqrt{14}}.$$

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2;0;0), B(0;4;0), C(0;0;6)$. Gọi (P) là mặt phẳng không chứa gốc tọa độ và song song với $mp(ABC)$, biết khoảng cách giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABC) bằng $\frac{12}{7}$. Phương trình của (P) là

- A.** $6x + 3y + 2z - 12 = 0$. **B.** $6x + 3y + 2z = 0$.
C. $6x + 3y + 2z - 24 = 0$. **D.** $6x + 3y + 2z - 36 = 0$.

Lời giải

$$(ABC): \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 12 = 0.$$

$$(P) // (ABC) \Rightarrow (P): 6x + 3y + 2z + m = 0 \quad (m \neq 0; m \neq -12).$$

Ta có

$$d((P), (ABC)) = \frac{12}{7} \Leftrightarrow d(A, (P)) = \frac{12}{7} \Leftrightarrow \frac{|6 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + m|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{12}{7} \Leftrightarrow |m + 12| = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -24 \end{cases}$$

Vậy phương trình của (P) là $6x + 3y + 2z - 24 = 0$.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;1;0), B(1;-1;2), C(1;-2;1)$.

- a) Một vecto pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$.
 b) Vecto $\vec{n} = (1;2;3)$ là một vecto pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) .
 c) Vecto $\vec{u} = (1;1;0)$ là một vecto pháp tuyến của mặt phẳng đi qua O và chứa đường thẳng AB .
 d) Vecto $\vec{v} = (1;2;3)$ là một vecto pháp tuyến của mặt phẳng song song với hai đường thẳng AB và OC .

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
----------------	---------------	----------------	---------------

+ Ta có một vecto pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$.

+ Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2; -2; 2) \\ \overrightarrow{AC} = (2; -3; 1) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (4; 2; -2)$ là một vecto pháp tuyến của mặt phẳng

(ABC) . Mà $\vec{n} = (1;2;3)$ không cùng phương với $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$ do $\frac{4}{1} \neq \frac{2}{2}$ nên $\vec{n} = (1;2;3)$ không là một vecto pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) .

+ Ta có một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng đi qua O và chứa đường thẳng AB là $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = (2; 2; 0)$. Mà $\vec{n} = (1; 1; 0)$ cùng phương với $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}]$ nên $\vec{n} = (1; 1; 0)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng đi qua O và chứa đường thẳng AB .

+ Ta có một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng song song với hai đường thẳng AB và OC là $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}] = (2; 0; -2)$. Mà $\vec{v} = (1; 2; 3)$ không cùng phương với $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}]$ nên $\vec{v} = (1; 2; 3)$ không phải là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng song song với hai đường thẳng AB và OC .

Câu 2: Cho các điểm $A(1; -2; 0); B(2; -1; 1); C(1; 1; 2)$.

a) Phương trình mặt phẳng (ABC) là $x + 2y - 3z - 3 = 0$.

b) Phương trình mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với BC là $x - 2y - z - 5 = 0$.

c) Phương trình mặt phẳng trung trực (β) của đoạn AC là $6y + 4z - 1 = 0$.

d) Phương trình mặt phẳng (γ) chứa trục Ox và điểm C là $2y + z = 0$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 1); \overrightarrow{AC} = (0; 3; 2)$

Vectơ pháp tuyến của (ABC) là $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-1; -2; 3)$.

PT mặt phẳng (ABC) là: $-1(x-1) - 2(y+2) + 3z = 0$ hay $x + 2y - 3z + 3 = 0$

b) Vectơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n} = \overrightarrow{BC} = (-1; 2; 1)$.

PT mặt phẳng (α) là: $-1(x-1) + 2(y+2) + 1z = 0$ hay $x - 2y - z - 5 = 0$

c) Ta có trung điểm của đoạn AC là $M\left(1; \frac{-1}{2}; 1\right)$

Vectơ pháp tuyến của (β) là $\vec{n} = \overrightarrow{AC} = (0; 3; 2)$.

PT mặt phẳng (β) là: $0(x-1) + 3\left(y + \frac{1}{2}\right) + 2(z-1) = 0$ hay $6y + 4z - 1 = 0$

d) Ta có $\vec{i} = (1; 0; 0); \overrightarrow{OC} = (1; 1; 2)$

Vectơ pháp tuyến của (γ) là $\vec{n} = [\vec{i}, \overrightarrow{OC}] = (0; -2; 1)$.

PT mặt phẳng (ABC) là: $0x - 2y + 1z = 0$ hay $2y - z = 0$

Câu 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 5)$ và mặt phẳng $(\alpha): x + 2y + 2z - 6 = 0$.

a) Véc tơ $\vec{n} = (1; 2; 2)$ là một vectơ pháp tuyến của (α) .

b) Phương trình mặt phẳng (β) đi qua điểm A và song song với mặt phẳng (α) có phương trình $x + 2y + 2z + 15 = 0$

c) Phương trình mặt phẳng (γ) đi qua hai điểm O và A đồng thời vuông góc với mặt phẳng (α) có phương trình $2x - y = 0$.

d) Điểm $M \in (\alpha)$ sao cho A, O, M thẳng hàng thì tọa độ $M\left(\frac{2}{5}; \frac{4}{5}; 2\right)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) Đúng.

Theo định nghĩa véc tơ $\vec{n} = (1; 2; 2)$ là một vector pháp tuyến của (α) .

b) Sai.

Phương trình mặt phẳng (β) đi qua điểm A và song song với mặt phẳng (α) nên:

$\vec{n}_\beta = (1; 2; 2)$, do đó (β) có phương trình: $x - 1 + 2(y - 2) + 2(z - 5) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 2z - 15 = 0$.

c) Đúng.

Phương trình mặt phẳng (γ) đi qua hai điểm O và A đồng thời vuông góc với mặt phẳng (α)

nên $\begin{cases} \vec{n}_\beta \perp \vec{OA} = (1; 2; 5) \\ \vec{n}_\beta \perp \vec{n} = (1; 2; 2) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_\beta = [\vec{OA}, \vec{n}] = (-6; 3; 0) = -3(2; -1; 0)$, do đó (β) có phương trình:

$$2x - y = 0.$$

d) Đúng.

Điểm $M \in (\alpha)$ sao cho A, O, M thẳng hàng

Do $M \in (\alpha): x = 6 - 2y - 2z \Rightarrow M(6 - 2b - 2c; b; c)$

Vì A, O, M thẳng hàng nên

$$\vec{OM}(6 - 2b - 2c; b; c) = k \cdot \vec{OA} = (k; 2k; 5k)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 2b - 2c = k \\ b = 2k \\ c = 5k \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{4}{5} \\ c = 2 \\ k = \frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{2}{5}; \frac{4}{5}; 2\right)$$

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -2); B(2; 1; 2); C(3; -2; 1)$.

a) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A, B, C có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\vec{AB}, \vec{AC}]$

.

b) Phương trình mặt phẳng (P) là $13x + 5y - 2z + 27 = 0$.

c) Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1; 2; -2)$ và nhận $\vec{BC}$ làm véc tơ pháp tuyến có dạng:
 $1(x + 1)x - 3(y + 2) - 1(z - 2) = 0$.

d) Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $E; F; K$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên trục $Ox; Oy; Oz$ có phương trình $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} - \frac{z}{2} = 1$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) Đúng.

$$\text{Vì } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1; -1; 4) \\ \overrightarrow{AC} = (2; -4; 3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \neq k\overrightarrow{AC} \Rightarrow \vec{n}_p = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (13; 5; -2).$$

b) Sai.

Phương trình mặt phẳng (P) là $13(x-1) + 5(y-2) - 2(z+2) = 0 \Leftrightarrow 13x + 5y - 2z - 27 = 0$.

c) Sai.

Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1; 2; -2)$ và nhận $\overrightarrow{BC} = (1; -3; -1)$ làm véc tơ pháp tuyến có dạng: $1(x-1) - 3(y-2) - 1(z+2) = 0$.

d) Đúng.

Tọa độ ba điểm $E(1; 0; 0); F(0; 2; 0); K(0; 0; -2)$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $A(1; 2; -2)$

lên trục, nên mặt phẳng (EFK) có phương trình $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} - \frac{z}{2} = 1$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Trong hệ trục tọa độ không gian $Oxyz$, cho $A(1; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$, biết $b, c > 0$, phương trình mặt phẳng $(P): y - z + 1 = 0$. Tính $M = c + b$ biết $(ABC) \perp (P)$, $d[O; (ABC)] = \frac{1}{3}$.

Lời giải

Phương trình mặt phẳng $(ABC): \frac{x}{1} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Ta có:

$$(ABC) \perp (P) \Rightarrow \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0 \Leftrightarrow b = c.$$

$$d[O; (ABC)] = \frac{|-1|}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 9 = 1 + 2\left(\frac{1}{b}\right)^2, (b = c).$$

$$\Leftrightarrow b = \pm \frac{1}{2}, \text{ do } b, c > 0 \text{ nên } b = c = \frac{1}{2}. \text{ Vậy } M = c + b = 1.$$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(-1; 2; 0), B(1; 1; 3)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 3z - 5 = 0$. Phương trình của mặt phẳng đi qua hai điểm A, B , đồng thời vuông góc (P) là $2x - ay - bz + c = 0$. Giá trị của biểu thức $a + 2b + 3c$ bằng

Lời giải

Gọi $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B , đồng thời vuông góc (P) . Khi đó, $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ và $\vec{n} \perp \vec{n}_p$ với $\overrightarrow{AB}(2; -1; 3)$ và $\vec{n}_p(1; -2; 3)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

Suy ra, chọn $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}; \vec{n}_p] = (3; -3; -3)$. Do đó, $\vec{n}_Q(1; -1; -1)$ cũng là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) . Mà mặt phẳng (Q) đi qua điểm $A(-1; 2; 0)$ nên có phương trình là

$$(x+1)-(y-2)-z=0 \Leftrightarrow x-y-z+3=0 \Leftrightarrow 2x-2y-2z+6=0.$$

Suy ra $a=2, b=2, c=6$ nên $a+2b+3c=24$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) qua hai điểm $A(1;2;0)$, $B(4;1;2)$ và cách đều hai điểm $C(-2;1;-1)$, $D(0;-3;1)$ có dạng $ax+by+cz+1=0$ ($a < 0$). Tính $P=a+b+c$.

Lời giải

Mp (α) cách đều hai điểm C, D khi và chỉ khi $CD // (\alpha)$ hoặc (α) đi qua trung điểm I của CD .

Trường hợp 1: $(\alpha) // CD$.

$$\overrightarrow{AB} = (3; -1; 2), \overrightarrow{CD} = (2; -4; 2).$$

Vì mặt phẳng (α) qua hai điểm A, B và song song với CD nên (α) có vector pháp tuyến là $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] = (6; -2; -10)$.

Mà mp (α) qua điểm $A(1;2;0)$ nên phương trình của mặt phẳng (α) là:
 $6(x-1)-2(y-2)-10z=0 \Leftrightarrow 6x-2y-10z-2=0 \Leftrightarrow -3x+y+5z+1=0$ (thỏa mãn).

Vậy $P=a+b+c=-3+1+5=3$.

Trường hợp 2: (α) đi qua trung điểm $I(-1;-1;0)$ của CD .

$$\overrightarrow{AB} = (3; -1; 2), \overrightarrow{AI} = (-2; -3; 0).$$

Mặt phẳng (α) qua điểm $A(1;2;0)$ và có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}] = (6; -4; -11)$.

$\Rightarrow$ phương trình mặt phẳng (α) là: $6(x-1)-4(y-2)-11z=0 \Leftrightarrow 6x-4y-11z+2=0$
 $\Leftrightarrow 3x-2y-\frac{11}{2}z+1=0$ (loại vì $a > 0$).

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x+3y+z+1=0$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với (α) , cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng 6. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Đáp án: 1,60

Do (P) song song với (α) nên (P) có phương trình: $2x+3y+z+m=0$, điều kiện $m \neq -1$.

Khi đó: (P) cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm là: $A\left(-\frac{m}{2}; 0; 0\right)$, $B\left(0; -\frac{m}{3}; 0\right)$,
 $C(0; 0; -m)$, với $m < 0$.

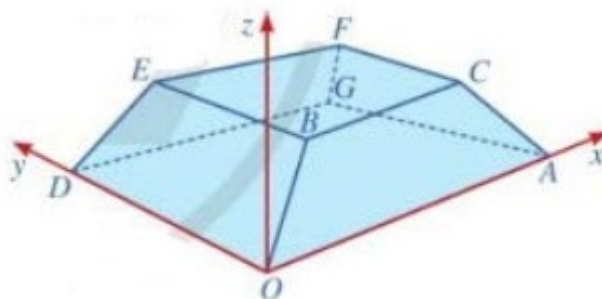
Thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng 6 nên $\frac{1}{6}OA \cdot OB \cdot OC = 6$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6} \cdot \left|-\frac{m}{2}\right| \cdot \left|-\frac{m}{3}\right| \cdot |-m| = 6 \Leftrightarrow -\frac{m^3}{36} = 6 \text{ (do } m < 0)$$

$$\Leftrightarrow m^3 = -216 \Leftrightarrow m = -6 \text{ (thỏa mãn)}.$$

$$\text{Ta có: } (P): 2x + 3y + z - 6 = 0 \Rightarrow d(O; (P)) = \frac{|2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0 - 6|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{14}} \approx 1,60.$$

Câu 5: Một sân vận động được xây dựng theo mô hình là hình chóp cắt $OAGD.BCFE$ có hai đáy song song với nhau. Mặt sân $OAGD$ là hình chữ nhật và được gắn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Mặt sân $OAGD$ có chiều dài $OA = 100m$, chiều rộng $OD = 60m$ và tọa độ điểm $B(10; 10; 8)$. Giả sử phương trình tổng quát của mặt phẳng $(OACB)$ có dạng $ax + y + cz + d = 0$. Tính giá trị biểu thức $a + c + d$.



Lời giải

Đáp án: -10

Gắn hình chóp cắt vào hệ trục $Oxyz$, ta có:

$$O(0; 0; 0), A(100; 0; 0), G(100; 60; 0), D(0; 60; 0), B(10; 10; 8)$$

$$\text{Do } \overrightarrow{OA} = (100; 0; 0), \overrightarrow{OB} = (10; 10; 8) \text{ nên } \vec{n} = [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = (0; -100; 1000).$$

$$\text{Suy ra mặt phẳng } (OACB) \text{ có vector pháp tuyến là } \vec{n}_1 = (0; 1; -10).$$

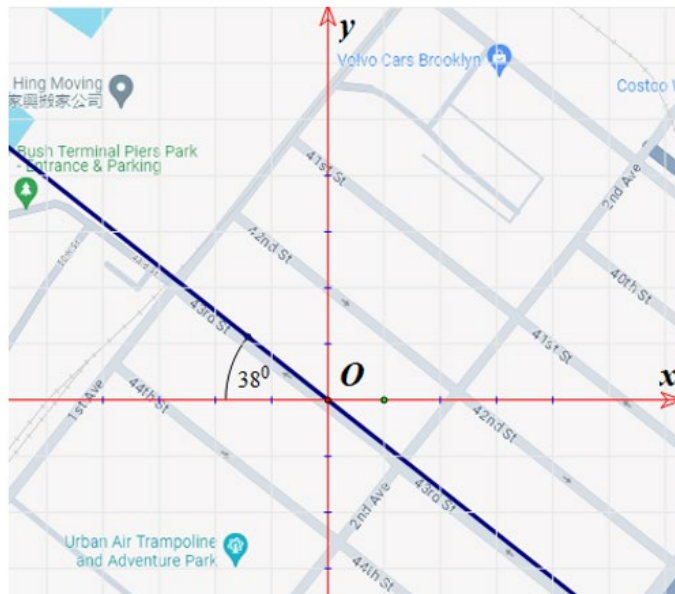
$$\text{Phương trình tổng quát của mặt phẳng } (OACB) \text{ là } y - 10z = 0.$$

$$\text{Do đó } a = 0, c = -10, d = 0. \text{ Vậy } a + c + d = 0 - 10 + 0 = -10.$$

Câu 6: Manhattanhenge (Hình 1) là một sự kiện diễn ra khi Mặt Trời mọc hoặc khi Mặt Trời lặn nằm thẳng hàng với các tuyến phố Đông - Tây thuộc mạng lưới đường phố chính tại quận Manhattan của thành phố New York. Khi mặt trời lặn, tia sáng song song mặt đất lệch một góc khoảng 38° so với hướng tây (Hình 2).



Hình 1



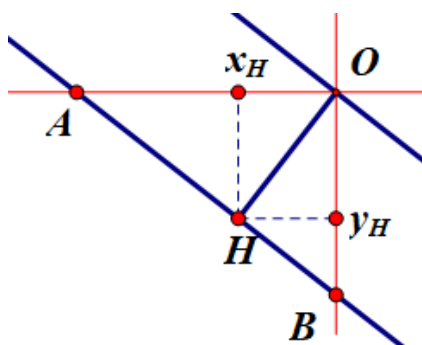
Hình 2

Giả sử mặt tiền các tòa nhà hai bên đường nằm trong 2 mặt phẳng song song cách nhau $30m$ và vuông góc với mặt đất. Biết rằng mặt phẳng phía bắc đi qua gốc O của hệ trục $Oxyz$, với tia Oz vuông góc với mặt đất và hướng lên trên. Phương trình mặt phẳng thứ hai có dạng $(Q): x + ay + bz + c = 0$, với $c = \frac{m}{\sin n^\circ}$. Tính $m + n$.

Lời giải

Đáp án: 68

Gọi A, B là giao điểm của mp (Q) với trục Ox và Oy , H là hình chiếu vuông góc của O lên AB .



Vì khoảng cách giữa hai mặt phẳng bằng $30m$ nên $OH = 30$

Theo giả thiết, ta có góc $\widehat{OAH} = 38^\circ$, khi đó $OA = \frac{OH}{\sin 38^\circ} = \frac{30}{\sin 38^\circ}$,

$$x_H = -OH \cos 52^\circ = -30 \cos 52^\circ, \quad y_H = -OH \cos 38^\circ = -30 \cos 38^\circ$$

Tọa độ điểm $A\left(-\frac{30}{\sin 38^\circ}; 0; 0\right)$, $H(-30 \cos 52^\circ; -30 \cos 38^\circ; 0)$ chọn VTPT $\vec{n} = \left(1; \frac{\cos 38^\circ}{\cos 52^\circ}; 0\right)$

Mặt phẳng (Q) đi qua A vuông góc OH nhận $\vec{n}$ làm véc tơ pháp tuyến có phương trình

$$\left(x + \frac{30}{\sin 38^\circ}\right) + \frac{\cos 38^\circ}{\cos 52^\circ} y = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\cos 38^\circ}{\cos 52^\circ} y + \frac{30}{\sin 38^\circ} = 0$$

Vậy $m + n = 68$.



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

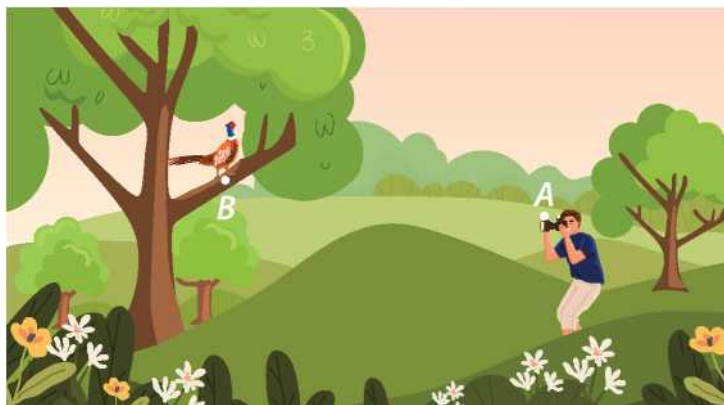
BÀI: PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG ĐỀ TEST SỐ 01

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng nào dưới đây đi qua $A(3;5;7)$ và song song với $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$.

- A. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 5t \\ z = 3 + 7t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + 5t \\ z = 4 + 7t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -5 + 3t \\ z = -7 + 4t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = 7 + 4t \end{cases}$

Câu 2: Anh Toán là một nhiếp ảnh gia chuyên săn ảnh chim hoang dã. Giả sử với hệ trục $Oxyz$ cho trước, anh Toán đang ngắm vào ống kính ở vị trí A có tọa độ $(200;685;436)$ thì có một con gà lôi tía xuất hiện ở vị trí B có tọa độ $(640;550;474)$. Nếu một quả đồi có tọa độ đỉnh C là $(420;617,5;450)$. Hỏi C có thuộc đường ngắm AB không? Anh Toán có ngắm thấy con gà lôi tía này không?



- A. Điểm C không thuộc, Toán nhìn thấy con gà.
B. Điểm C thuộc, Toán nhìn thấy con gà.
C. Điểm C không thuộc, Toán không thấy con gà.
D. Điểm C không thuộc, Toán nhìn thấy con gà.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, một quả tên lửa được phóng ra từ bệ phóng đặt tại điểm $A(2;1;3)$ và trong 5 giây, tên lửa chuyển động với vận tốc không đổi, vector vận tốc (trên giây) là $\vec{v} = (2,4,5)$. Mục tiêu nào sau đây nằm trên quỹ đạo chuyển động của tên lửa?

- A. $M(4;5;8)$ B. $N(4;5;-8)$ C. $P(2;1;0)$ D. $Q(-4;5;2)$

- Câu 4:** Trong không gian $Oxyz$, Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết rằng: $B(-1;1;3), C(-1;-1;2), D(1;0;-2), D'(2;-2;-3)$. Tìm một véc tơ chỉ phương của đường thẳng AA'
- A. $\vec{u} = (1;-2;1)$. B. $\vec{u} = (1;2;1)$. C. $\vec{u} = (-1;-2;1)$. D. $\vec{u} = (1;-2;-1)$.
- Câu 5:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+2t \\ y=2-2t \\ z=t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x=-2t' \\ y=-5+3t' \\ z=4+t' \end{cases}$. Xét vị trí tương đối giữa 2 đường thẳng d và d' ?
- A. Cắt nhau. B. song song. C. Trùng nhau. D. Chéo nhau.
- Câu 6:** Cho $d_1: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{3}$ và $d_2: \begin{cases} x=-1+t \\ y=-t \\ z=2+mt \end{cases}$. Tìm m để d_1 và d_2 vuông góc với nhau
- A. -1 . B. 1 . C. -2 . D. 2 .
- Câu 7:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}$ và $d': \frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}$. Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng trên
- A. $A(-3;5;-5)$. B. $B(5;9;11)$. C. $C(9;-3;-1)$. D. $N(0;3;-4)$.
- Câu 8:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(-1;-1;2)$ và $N(1;3;4)$. Đường thẳng MN có phương trình chính tắc là
- A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+2}{2}$. B. $\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$.
 C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{1}$. D. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+4}{2}$.
- Câu 9:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+7}{-2}$. Đường thẳng đi qua A và song song với đường thẳng d có phương trình là:
- A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-2}$. B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$.
 C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{-2}$. D. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-2}$.
- Câu 10:** Trong không gian $Oxyz$, cho d là đường thẳng đi qua điểm $A(1;2;3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 4x+3y-7z+1=0$. Phương trình chính tắc của d là
- A. $\frac{x-1}{-4} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-7}$. B. $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-7}$.
 C. $\frac{x-4}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+7}{3}$. D. $\frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+3}{-7}$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, một viên đạn được bắn ra từ điểm $A(1;2;4)$ và trong ba giây, đầu đạn có vận tốc không đổi; véc tơ vận tốc (km/s) là $\vec{v} = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$. Hỏi tại thời điểm sau 3 giây viên đạn có thể trúng mục tiêu là điểm nào trong các điểm sau đây?

- A.** $P(1;3;5)$. **B.** $M(2;3;6)$. **C.** $N(-1;-3;5)$. **D.** $Q(-2;-3;5)$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-2}$ và $d': \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}$. Phương trình mặt phẳng (α) chứa hai đường (d), (d')

- A.** $-2x + 3y - 4z + 8 = 0$. **B.** $x - 2y + 5 = 0$.
C. $2x - 5y - 4z - 5 = 0$. **D.** $2x - 5y - 4z + 8 = 0$.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-4}{1}$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{-1}$.

- a)** Đường thẳng d có một vector chỉ phương $\vec{u} = (1; -3; 4)$.
b) Đường thẳng Δ có một vector chỉ phương $\vec{v} = (2; -1; -1)$.
c) Đường thẳng d và đường thẳng Δ vuông góc với nhau.
d) Đường thẳng d và đường thẳng Δ chéo nhau.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;3;4)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - 2u \\ y = 2 + u \\ z = 1 - u \end{cases}, u \in \mathbb{R}$.

- a)** Điểm $M(1;2;1)$ thuộc đường thẳng d .
b) Đường thẳng d có một vector chỉ phương $\vec{u} = (2; -1; 1)$.
c) Đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với đường thẳng d có phương trình tham số là:

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 4 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

d) Đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với đường thẳng d có phương trình chính tắc là:

$$\frac{x}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-3}{1}.$$

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;1)$ và hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=3+t \\ y=1 \\ z=2-t \end{cases}$,

$d_2: \begin{cases} x=3+2t' \\ y=3+t' \\ z=0 \end{cases}$. Gọi d là đường thẳng đi qua A , vuông góc với d_1 và cắt d_2 .

a) Đường thẳng d_1 có vector chỉ phương là $\vec{u}_1 = (1;1;-1)$.

b) Một điểm M tùy ý nằm trên đường thẳng d_2 có dạng $M(3+2m;3+m;0)$.

c) Giao điểm của d và d_2 là điểm $B(5;4;0)$.

d) Biết rằng d đi qua điểm $M(2;a;b)$. Khi đó $T = 2a + b = 3$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-5); B(-1;0;2)$, mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$.

a) Đường thẳng d vuông góc mặt phẳng (P) .

b) Đường thẳng Δ đi qua A và vuông góc với (P) có phương trình là $\Delta: \begin{cases} x=2+t \\ y=1+2t \\ z=-1-2t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$.

c) Tọa độ giao điểm của d và (P) là điểm $C(\frac{1}{3}; \frac{-5}{3}; 6)$.

d) Gọi $M \in d$ sao cho biểu thức $T = |MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất là $T_{\max}$. Khi đó, $T_{\max} = \sqrt{57}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;3)$, đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{2}$ và mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 2 = 0$. Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua A , song song với mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng d có dạng: $\frac{x+a}{b} = \frac{y-5}{c} = \frac{z+d}{3}$. Giá trị của biểu thức $M = a + b + c + d$ bằng bao nhiêu?

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{4}$ và $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{4}$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa d và Δ có dạng: $ax + by + z + c = 0$. Tính giá trị của $a + b + c$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, một viên đạn được bắn ra từ điểm $A(1;2;3)$ và trong 3 giây, đầu đạn đi với vận tốc không đổi; véctơ vận tốc (trên giây) là $\vec{v} = (2;1;5)$. Khi viên đạn trúng mục tiêu tại điểm $B(-5;a;b)$ thì giá trị của biểu thức b^a bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Câu 4: Một phần mềm mô phỏng vận động viên tập bắn bia mục tiêu có kích thước nhỏ ($42 \times 42 \text{cm}$) bằng súng tiểu liên AK trong không gian $Oxyz$. Cho biết vận động viên đó sử dụng thước ngắm 3 và đứng cách xa bia mục tiêu là 100m , trục d của nòng súng và cọc đỡ bia d' lần lượt có

phương trình $d: \begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ z = 4 \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 + 3t \end{cases}$. Để bắn trúng hồng tâm (điểm 10) thì vận động viên

phải ngắm bắn vào điểm $N(a; b; c) \in d'$ và cách giao điểm của d và d' một khoảng 6cm . Khi $c < 0$, tính giá trị biểu thức $a - b + c$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$. Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua $A(1; 1; 3)$, nằm trong

mặt phẳng $(P): x + 2y + z - 6 = 0$ và cắt đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ có dạng $\begin{cases} x = 1 + at \\ y = 1 \\ z = 3 + bt \end{cases}$. Tính

giá trị của biểu thức $M = 2024a - b$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, đài kiểm soát không lưu sân bay có tọa độ $O(0; 0; 0)$, đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét. Một máy bay chuyển động hướng về đài kiểm soát không lưu, bay qua hai vị trí $A(-500; -250; 150)$, $B(-200; -200; 100)$. Khi máy bay ở gần đài kiểm soát nhất, tọa độ của vị trí máy bay là $(a; b; c)$. Giá trị của biểu thức $-3a - b - c$ là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

----- **HẾT** -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng nào dưới đây đi qua $A(3;5;7)$ và song song với $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$.

A. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 5t \\ z = 3 + 7t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + 5t \\ z = 4 + 7t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -5 + 3t \\ z = -7 + 4t \end{cases}$

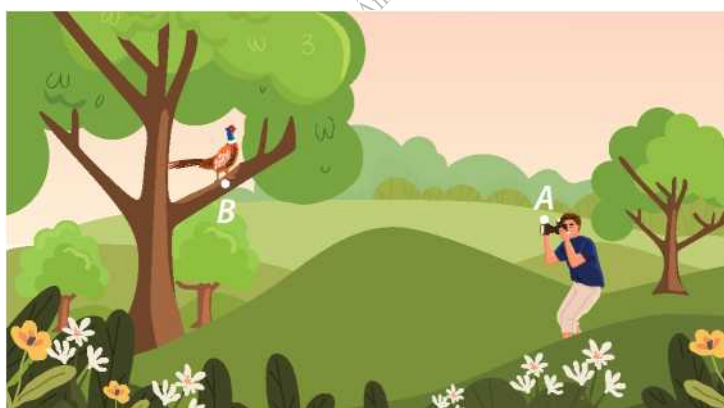
D. $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = 7 + 4t \end{cases}$

Lời giải

Gọi Δ là đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán.

Ta có: Δ có vector chỉ phương là $\vec{u} = (2;3;4)$ và qua $A(3;5;7) \Rightarrow (\Delta): \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = 7 + 4t \end{cases}$

Câu 2: Anh Toán là một nhiếp ảnh gia chuyên săn ảnh chim hoang dã. Giả sử với hệ trục $Oxyz$ cho trước, anh Toán đang ngắm vào ống kính ở vị trí A có tọa độ $(200;685;436)$ thì có một con gà lôi tía xuất hiện ở vị trí B có tọa độ $(640;550;474)$. Nếu một quả đồi có tọa độ đỉnh C là $(420;617,5;450)$. Hỏi C có thuộc đường ngắm AB không? Anh Toán có ngắm thấy con gà lôi tía này không?



A. Điểm C không thuộc, Toán nhìn thấy con gà.

B. Điểm C thuộc, Toán nhìn thấy con gà.

C. Điểm C không thuộc, Toán không thấy con gà.

D. Điểm C không thuộc, Toán nhìn thấy con gà.

Lời giải

Đường thẳng AB đi qua điểm $A(200;685;436)$ và có một vector chỉ phương là

$$\overrightarrow{AB} = (440; -135; 38) \text{ nên có phương trình tham số là: } \begin{cases} x = 200 + 440t \\ y = 685 - 135t \\ z = 436 + 38t \end{cases}$$

Thay tọa độ điểm $C(420; 617,5; 450)$ vào phương trình đường thẳng AB ta được hệ phương

$$\text{trình (ẩn } t): \begin{cases} 420 = 200 + 440t \\ 617,5 = 685 - 135t \\ 450 = 436 + 38t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{7}{19} \end{cases} . \text{ Hệ phương trình này vô nghiệm nên điểm } C \text{ không}$$

thuộc đường thẳng AB . Do đó anh Toán nghĩ rằng con gà lôi tía này.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, một quả tên lửa được phóng ra từ bộ phóng đặt tại điểm $A(2; 1; 3)$ và trong 5 giây, tên lửa chuyển động với vận tốc không đổi, vector vận tốc (trên giây) là $\vec{v} = (2, 4, 5)$. Mục tiêu nào sau đây nằm trên quỹ đạo chuyển động của tên lửa?

- A.** $M(4; 5; 8)$ **B.** $N(4; 5; -8)$ **C.** $P(2; 1; 0)$ **D.** $Q(-4; 5; 2)$

Lời giải.

$$+ \text{ Phương trình quỹ đạo chuyển động của tên lửa là } (d): \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = 3 + 5t \end{cases} .$$

Vì $M(4; 5; 8)$ thuộc phương trình đường thẳng nên mục tiêu tại nằm trên quỹ đạo chuyển động của tên lửa.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết rằng: $B(-1; 1; 3), C(-1; -1; 2), D(1; 0; -2), D'(2; -2; -3)$. Tìm một véc tơ chỉ phương của đường thẳng AA'

- A.** $\vec{u} = (1; -2; 1)$. **B.** $\vec{u} = (1; 2; 1)$. **C.** $\vec{u} = (-1; -2; 1)$. **D.** $\vec{u} = (1; -2; -1)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{DD'} = (1; -2; -1)$$

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = -2t' \\ y = -5 + 3t' \\ z = 4 + t' \end{cases}$. Xét vị trí

tương đối giữa 2 đường thẳng d và d' ?

- A.** Cắt nhau. **B.** song song. **C.** Trùng nhau. **D.** Chéo nhau.

Lời giải

d có VTCP $\vec{u} = (2; -2; 1)$ và đi qua $M(1; 2; 0)$.

d' có VTCP $\vec{u}' = (-2; 3; 1)$ và đi qua $M'(0; -5; 4)$.

Từ đó ta có:

$$\overrightarrow{MM'} = (-1; -7; 4) \text{ và } [\vec{u}, \vec{u}'] = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = (-5; -4; 2) \neq \vec{0}.$$

$$\text{Lại có } [\vec{u}, \vec{u}'] \cdot \overrightarrow{MM'} = (-1) \cdot (-5) + (-7) \cdot (-4) + 4 \cdot 2 = 41 \neq 0.$$

Suy ra d chéo nhau với d' .

Câu 6: Cho $d_1: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{3}$ và $d_2: \begin{cases} x = -1+t \\ y = -t \\ z = 2+mt \end{cases}$. Tìm m để d_1 và d_2 vuông góc với nhau

A. -1.

B. 1.

C. -2.

D. 2.

Lời giải

Ta có $\vec{n}_1 = (-2; 1; 3), \vec{u}_2 = (1; -1; m)$

$$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0 \Leftrightarrow -2 - 1 + 3m = 0 \Leftrightarrow m = 1$$

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}$ và $d': \frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}$. Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng trên

A. $A(-3; 5; -5)$.

B. $B(5; 9; 11)$.

C. $C(9; -3; -1)$.

D. $N(0; 3; -4)$.

Lời giải

Ta có Tọa độ của A thỏa mãn cả hai phương trình đường thẳng. Do đó A là giao điểm của hai đường thẳng

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(-1; -1; 2)$ và $N(1; 3; 4)$. Đường thẳng MN có phương trình chính tắc là

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+2}{2}$. **B. $\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$.**

C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{1}$. D. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+4}{2}$.

Lời giải

Ta có đường thẳng MN đi qua điểm $M(-1; -1; 2)$ và nhận $\vec{MN} = (2; 4; 2)$ làm véc tơ chỉ phương nên có phương trình chính tắc là: $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{2} \Leftrightarrow \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+7}{-2}$. Đường thẳng đi qua A và song song với đường thẳng d có phương trình là:

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-2}$. B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$.

C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{-2}$. D. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-2}$.

Lời giải

Đường thẳng đi qua A và song song với d nên có một vector chỉ phương là $\vec{u} = (2; 1; -2)$.

Phương trình đường thẳng cần tìm: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-2}$

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho d là đường thẳng đi qua điểm $A(1; 2; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 4x + 3y - 7z + 1 = 0$. Phương trình chính tắc của d là

A. $\frac{x-1}{-4} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-7}$. B. $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-7}$.

C. $\frac{x-4}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+7}{3}$. **D.** $\frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+3}{-7}$.

Lời giải

Ta có $(\alpha): 4x + 3y - 7z + 1 = 0 \Rightarrow \vec{n}_{(\alpha)} = (4; 3; -7)$ là VTPT của mặt phẳng (α) .

Mà đường thẳng $d \perp (\alpha) \Rightarrow \vec{n}_{(\alpha)} = (4; 3; -7)$ là VTCP của đường thẳng d .

Ta lại có $A(1; 2; 3) \in d$.

Suy ra phương trình chính tắc của đường thẳng d là: $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-7}$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, một viên đạn được bắn ra từ điểm $A(1; 2; 4)$ và trong ba giây, đầu đạn có vận tốc không đổi; véc tơ vận tốc (km/s) là $\vec{v} = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$. Hỏi tại thời điểm sau 3 giây viên đạn có thể trúng mục tiêu là điểm nào trong các điểm sau đây?

A. $P(1; 3; 5)$. **B.** $M(2; 3; 6)$. **C.** $N(-1; -3; 5)$. **D.** $Q(-2; -3; 5)$.

Lời giải

Cách 1:

Ta có: Trong thời gian từ 0 đến 3 giây phương trình mô tả quỹ đạo chuyển động của viên đạn là:

$$d: \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{3}t \\ y = 2 + \frac{1}{3}t \\ z = 4 + \frac{2}{3}t \end{cases}$$

với $t = 3$ ta được điểm $M(2; 3; 6)$.

Cách 2: Sau 3 giây viên đạn sẽ tới mục tiêu là điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = 3\vec{v}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_M = 1 + 1 = 2 \\ y_M = 2 + 1 = 3 \\ z_M = 4 + 2 = 6 \end{cases} \Rightarrow M(2; 3; 6)$$

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-2}$ và $d': \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}$.

Phương trình mặt phẳng (α) chứa hai đường $(d), (d')$

A. $-2x + 3y - 4z + 8 = 0$. **B.** $x - 2y + 5 = 0$.

C. $2x - 5y - 4z - 5 = 0$. **D.** $2x - 5y - 4z + 8 = 0$.

Lời giải

Ta có $(d) \parallel (d')$ và $\vec{u}_d = (1; 2; -2), M_0(-1; 2; -1) \in d: M_{0'}(1; 2; 0) \in d'$

$$\Rightarrow \vec{n}_{\alpha} = [\vec{u}_d, \overrightarrow{M_0M_{0'}}] = (2; -5; -4)$$

Mặt khác (α) qua $M_0(-1; 2; -1) \Rightarrow (\alpha): 2(x+1) - 5(y-2) - 4(z+1) = 0$

$$\Leftrightarrow (\alpha): 2x - 5y - 4z + 8 = 0.$$

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-4}{1}$ và đường thẳng

$$\Delta: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{-1}.$$

a) Đường thẳng d có một vector chỉ phương $\vec{u} = (1; -3; 4)$.

b) Đường thẳng Δ có một vector chỉ phương $\vec{v} = (2; -1; -1)$.

c) Đường thẳng d và đường thẳng Δ vuông góc với nhau.

d) Đường thẳng d và đường thẳng Δ chéo nhau.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
---------------	----------------	----------------	----------------

a) Sai.

b) Đúng.

c) Đúng.

Đường thẳng d có một vector chỉ phương $\vec{u} = (2; 3; 1)$ và đường thẳng Δ có một vector chỉ phương $\vec{v} = (2; -1; -1)$

Ta có $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = 0$ do đó $d \perp \Delta$.

d) Đúng.

Gọi A là giao điểm (nếu có) của d và Δ , tọa độ A là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} 1+2t = -2+2u \\ -3+3t = 1-u \\ 4+t = -2-u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{5}{8} \\ u = \frac{17}{8} \\ t+u = -6 \end{cases} \text{ vô nghiệm}$$

Do đó d và Δ không cắt nhau.

Lại có $\vec{u} = (2; 3; 1)$ và $\vec{v} = (2; -1; -1)$ không cùng phương nên hai đường thẳng đó không song song hoặc trùng nhau.

Vậy đường thẳng d và đường thẳng Δ chéo nhau.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; 3; 4)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - 2u \\ y = 2 + u \\ z = 1 - u \end{cases}, u \in \mathbb{R}.$

a) Điểm $M(1; 2; 1)$ thuộc đường thẳng d .

b) Đường thẳng d có một vector chỉ phương $\vec{u} = (2; -1; 1)$.

c) Đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với đường thẳng d có phương trình tham số là:

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 4 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

d) Đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với đường thẳng d có phương trình chính tắc là: $\frac{x}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-3}{1}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

* Phương án a) đúng.

* Phương án b) đúng.

* Phương án c) sai: Đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với đường thẳng d nên có một vector chỉ phương $\vec{u}_\Delta = \vec{u} = (2; -1; 1)$. Suy ra phương trình tham số đường thẳng Δ là:

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 4 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

* Phương án d) đúng: Đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với đường thẳng d có phương trình chính tắc là: $\frac{x}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-3}{1}$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;1)$ và hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 \\ z = 2 - t \end{cases}$,

$$d_2: \begin{cases} x = 3 + 2t' \\ y = 3 + t' \\ z = 0 \end{cases}. \text{ Gọi } d \text{ là đường thẳng đi qua } A, \text{ vuông góc với } d_1 \text{ và cắt } d_2.$$

a) Đường thẳng d_1 có vector chỉ phương là $\vec{u}_1 = (1; 1; -1)$.

b) Một điểm M tùy ý nằm trên đường thẳng d_2 có dạng $M(3+2m; 3+m; 0)$.

c) Giao điểm của d và d_2 là điểm $B(5; 4; 0)$.

d) Biết rằng d đi qua điểm $M(2; a; b)$. Khi đó $T = 2a + b = 3$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

a) SAI

Đường thẳng d_1 có vector chỉ phương là $\vec{u}_1 = (1; 0; -1)$.

b) ĐÚNG

Một điểm M tùy ý nằm trên đường thẳng d_2 có dạng $M(3+2m; 3+m; 0)$.

c) SAI

Gọi d là đường thẳng cần tìm, d cắt d_2 tại B . Do $B \in d_2 \Rightarrow B(3+2t'; 3+t'; 0)$.

Đường thẳng d có vector chỉ phương là $\vec{AB} = (1+2t'; 2+t'; -1)$.

Ta có $d \perp d_1 \Leftrightarrow \vec{AB} \perp \vec{u}_1 \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{u}_1 = 0 \Leftrightarrow 1+2t'+0+1=0 \Leftrightarrow t' = -1$. Vậy $B(1; 2; 0)$.

d) ĐÚNG

Đường thẳng d cần tìm đi qua $B(1; 2; 0)$ và có VTCP là $\vec{AB} = (-1; 1; -1)$ nên có phương trình là

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}. \text{ Thay tọa độ } M(2; a; b) \text{ vào phương trình } d, \text{ ta có: } \frac{2-1}{-1} = \frac{a-2}{1} = \frac{b}{-1}.$$

Suy ra $a = 1, b = 1$ hay $T = 2.1 + 1 = 3$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-5); B(-1;0;2)$, mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$.

a) Đường thẳng d vuông góc mặt phẳng (P) .

b) Đường thẳng Δ đi qua A và vuông góc với (P) có phương trình là $\Delta: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 - 2t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$.

c) Tọa độ giao điểm của d và (P) là điểm $C\left(\frac{1}{3}; \frac{-5}{3}; 6\right)$.

d) Gọi $M \in d$ sao cho biểu thức $T = |MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất là $T_{\max}$. Khi đó, $T_{\max} = \sqrt{57}$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------------	----------------	---------------	----------------

a) Sai

Đường thẳng d có VTCP $\vec{u} = (1;1;1)$, mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n} = (1;2;-2)$.

Ta thấy $\vec{u} = (-1;2;-2)$ và $\vec{n} = (1;2;-2)$ không cùng phương nên đường thẳng d không vuông góc mặt phẳng (P) .

b) Đúng

Đường thẳng Δ đi qua $A(1;2;-5)$ và vuông góc với (P) có VTCP là $\vec{u} = (1;2;-2)$

Vậy phương trình là $\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -5 - 2t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$.

c) Sai

Phương trình tham số của đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$

Thay tọa độ của đường thẳng d vào phương trình mặt phẳng (P) ta được:

$$t + 2 + 2t - 2t = 0 \Leftrightarrow t = -2.$$

$$C(-2; -1; -2).$$

d) Đúng

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2; -2; 7)$. Phương trình đường thẳng $AB: \begin{cases} x = -1 - 2t' \\ y = -2t' \\ z = 2 + 7t' \end{cases}$.

Xét vị trí tương đối của d và AB ta thấy d cắt AB tại $N\left(\frac{-1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{-1}{3}\right)$.

$$\overrightarrow{AN}\left(\frac{-4}{3}; \frac{-4}{3}; \frac{14}{3}\right); \frac{3}{2}\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} \text{ nên } B \text{ nằm giữa } A \text{ và } N$$

$$T = |MA - MB| \leq AB.$$

Dấu “=” xảy ra khi M trùng N . Vậy, $T_{\max} = AB = \sqrt{57}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;3)$, đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{2}$ và mặt phẳng $(P): x+y-2z+2=0$. Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua A , song song với mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng d có dạng: $\frac{x+a}{b} = \frac{y-5}{c} = \frac{z+d}{3}$. Giá trị của biểu thức $M = a+b+c+d$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: -5

Đường thẳng d có 1 VTCP $\vec{u}_d = (1; -2; 2)$

Mặt phẳng (P) có 1 VTPT $\vec{n} = (1; 1; -2)$, gọi $\vec{u}$ là 1 VTCP của đường thẳng Δ

Ta có: $\begin{cases} \Delta \perp d \\ \Delta // (P) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u} \perp \vec{u}_d \\ \vec{u} \perp \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = [\vec{u}_d, \vec{n}] = (2; 4; 3).$

Suy ra PTTS của đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$. Chọn $t = 1 \Rightarrow \Delta$ đi qua điểm $M(5; 5; 6)$

Suy ra PTCT của đường thẳng $\Delta: \frac{x-5}{2} = \frac{y-5}{4} = \frac{z-6}{3} \Rightarrow a = -5, b = 2, c = 4, d = -6 \Rightarrow M = -5$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{4}$ và $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{4}$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa d và Δ có dạng: $ax+by+z+c=0$. Tính giá trị của $a+b+c$

Lời giải

Trả lời: -2

$d: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{4} \Rightarrow d$ qua $M(2; 0; 0)$ và nhận $\vec{u} = (2; -1; 4)$ làm một VTCP

$\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{4} \Rightarrow \Delta$ qua $N(1; 2; -1)$ và nhận $\vec{u} = (2; -1; 4)$ làm một VTCP

Thế tọa độ điểm $M(2; 0; 0)$ vào đường thẳng Δ , ta được: $\frac{1}{2} \neq \frac{-2}{-1} \neq \frac{1}{4} \Rightarrow d // \Delta$.

$\vec{MN} = (-1; 2; -1)$. (P) chứa d và $\Delta \Rightarrow \vec{n}_p = [\vec{u}, \vec{MN}] = (7; -7; 7)$

Suy ra phương trình mặt phẳng $(P): x - y + z - 2 = 0$

$\Rightarrow a = 1, b = -1; c = -2 \Rightarrow a+b+c = -2$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, một viên đạn được bắn ra từ điểm $A(1; 2; 3)$ và trong 3 giây, đầu đạn đi với vận tốc không đổi; vectơ vận tốc (trên giây) là $\vec{v} = (2; 1; 5)$. Khi viên đạn trúng mục tiêu tại điểm $B(-5; a; b)$ thì giá trị của biểu thức b^a bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Lời giải

Trả lời: -0,1

Phương trình mô tả quỹ đạo chuyển động của viên đạn là :
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + 5t \end{cases} \quad (1).$$

Khi viên đạn trúng mục tiêu tại điểm $B(-5; a; b)$ thì tọa độ của điểm B thỏa (1), tức là

$$\begin{cases} -5 = 1 + 2t \\ a = 2 + t \\ b = 3 + 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ a = 2 + t \\ b = 3 + 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ a = -1 \\ b = -12 \end{cases} \Rightarrow b^a = -0,1.$$

Câu 4: Một phần mềm mô phỏng vận động viên tập bắn bia mục tiêu có kích thước nhỏ ($42 \times 42 \text{ cm}$) bằng súng tiểu liên AK trong không gian $Oxyz$. Cho biết vận động viên đó sử dụng thước ngắm 3 và đứng cách xa bia mục tiêu là 100 m , trục d của nòng súng và cọc đỡ bia d' lần lượt có

phương trình $d: \begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ z = 4 \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 + 3t' \end{cases}$. Để bắn trúng hồng tâm (điểm 10) thì vận động viên

phải ngắm bắn vào điểm $N(a; b; c) \in d'$ và cách giao điểm của d và d' một khoảng 6 cm . Khi $c < 0$, tính giá trị biểu thức $a - b + c$.

Lời giải

Trả lời: -5

Gọi $M = d \cap d' \Rightarrow M(1; 2; 4)$.

Ta có $N \in d' \Rightarrow N(1; 2; 1 + 3t') \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (0; 0; 3t' - 3)$. Theo giả thiết $MN = 6$

Suy ra $|3t' - 3| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 3 \\ t' = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(1; 2; 7) \\ N(1; 2; -2) \end{cases}$. Vì $c < 0 \Rightarrow$ nhận $N(1; 2; -2)$

Vậy $a = 1, b = 2, c = -2 \Rightarrow a - b + c = -5$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$. Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua $A(1; 1; 3)$, nằm trong

mặt phẳng $(P): x + 2y + z - 6 = 0$ và cắt đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ có dạng $\begin{cases} x = 1 + at \\ y = 1 \\ z = 3 + bt \end{cases}$. Tính

giá trị của biểu thức $M = 2024a - b$.

Lời giải

Trả lời: 2025

Gọi $B = \Delta \cap (P) \Rightarrow$ tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 2y + z - 6 = 0 \\ \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow B(2; 1; 2)$$

Vì $d \subset (P)$ và d cắt $\Delta \Rightarrow B \in d \Rightarrow d$ đi qua $A(1; 1; 3)$ và nhận $\overrightarrow{AB} = (1; 0; -1)$ làm một VTCP.

Suy ra PTTS của $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = 3 - t \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = -1 \Rightarrow M = 2025$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, đài kiểm soát không lưu sân bay có tọa độ $O(0;0;0)$, đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét. Một máy bay chuyển động hướng về đài kiểm soát không lưu, bay qua hai vị trí $A(-500;-250;150)$, $B(-200;-200;100)$. Khi máy bay ở gần đài kiểm soát nhất, tọa độ của vị trí máy bay là $(a;b;c)$. Giá trị của biểu thức $-3a-b-c$ là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải**Trả lời: 3150**

Vector $\overrightarrow{AB} = (300; 50; -50)$ nên $\vec{u} = (6; 1; -1)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng AB .

Phương trình đường thẳng AB là: $\frac{x+500}{6} = \frac{y+250}{1} = \frac{z-150}{-1}$.

Gọi H là hình chiếu của điểm O trên đường thẳng AB thì OH là khoảng cách ngắn nhất giữa máy bay và đài kiểm soát. Khi đó $H(6t-500; t-250; -t+150)$.

Ta có $\overrightarrow{OH} \cdot \vec{u} = (6t-500) \cdot 6 + t - 250 + (-t+150) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{775}{9}$.

Suy ra tọa độ của vị trí máy bay khi đó là $\left(-\frac{3050}{3}; -\frac{3025}{9}; \frac{2125}{9}\right)$.

Vậy $-3a-b-c = 3150$.

Huỳnh Văn Ánh



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG ĐỀ TEST SỐ 02

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{-5} = \frac{z+5}{3}$. Điểm nào sau đây thuộc đường thẳng d ?

- A.** $M(3;4;-5)$. **B.** $N(2;-5;3)$. **C.** $P(-3;-4;5)$. **D.** $Q(2;5;-3)$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$ có một vector chỉ phương là:

- A.** $\vec{u}_1 = (2; -1; 3)$. **B.** $\vec{u}_2 = (-1; 2; 3)$. **C.** $\vec{u}_3 = (2; 1; 3)$. **D.** $\vec{u}_4 = (1; 2; 3)$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$ và $d_2: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$. Khẳng

định nào sau đây đúng?

- A.** d_1 và d_2 cắt nhau **B.** d_1 và d_2 chéo nhau
C. $d_1 \equiv d_2$. **D.** $d_1 \parallel d_2$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$ và $d: \begin{cases} x = 6 - t' \\ y = 1 - t' \\ z = 3 + 2t' \end{cases}$. Tọa độ giao điểm

của hai đường thẳng Δ và d là

- A.** $I(4; -1; 7)$. **B.** $H(3; 2; 5)$. **C.** $K(6; 1; 3)$. **D.** $J(3; -1; -2)$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1; 0; 1)$ và $N(2; 1; 0)$. Đường thẳng MN có phương trình tham số là

- A.** $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;-3;5)$ và song song với đường thẳng

$$d: \begin{cases} x=1+2t \\ y=3-t \\ z=4+t \end{cases} \text{ có phương trình tham số là}$$

A. $\begin{cases} x=2+t \\ y=-3+3t \\ z=5+4t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=-2+t \\ y=3+3t \\ z=-5+4t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=-2+2t \\ y=3-t \\ z=-5+t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3-t \\ z=5+t \end{cases}$

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1;-2;0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): 2x-3y-z+2=0$ có phương trình tham số là

A. $\begin{cases} x=2+t \\ y=-3-2t \\ z=-t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-3t \\ z=-t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=1-t \\ y=-2+2t \\ z=-3t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=2t \\ y=-3t \\ z=-t \end{cases}$

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, một viên đạn được bắn ra từ điểm $A(2;1;-1)$ và trong 3 giây đầu đạn đi với vận tốc không đổi, vectơ vận tốc (trên giây) là $\vec{v} = (1;3;-2)$. Hỏi viên đạn bắn trúng mục tiêu nằm ở điểm nào sau đây?

A. $M(4;0;-2)$ **B.** $N(-1;1;-3)$ **C.** $P(4;7;-5)$ **D.** $Q(3;9;-6)$

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng cắt nhau

$$d: \begin{cases} x=1+t \\ y=-1-t \\ z=12-3t \end{cases} \text{ và } d': \begin{cases} x=1-t \\ y=2+2t \\ z=3 \end{cases}$$

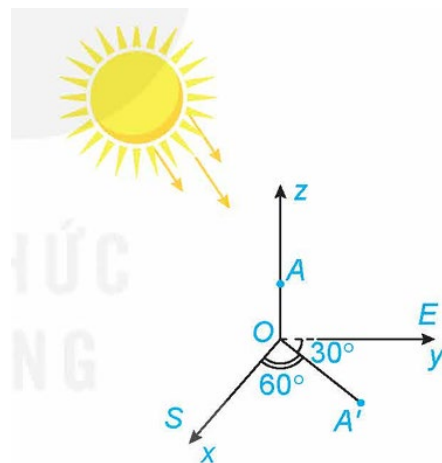
A. $x-y+12z-15=0$. **B.** $6x+3y+z+15=0$. **C.** $x-y+12z+15=0$. **D.** $6x+3y+z-15=0$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng: $d: \begin{cases} x=3+t \\ y=-1-2t \\ z=-1+t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x=t \\ y=-2t \\ z=1+t \end{cases}$. Phương trình mặt

phẳng (P) chứa d và d' là:

A. $x+y+z-1=0$. **B.** $x+2y+z-2=0$. **C.** $x-y+z-1=0$. **D.** $x+y+z-4=0$.

Câu 11: Trên mặt đất phẳng, người ta dựng một cây cột thẳng cao 6m vuông góc với mặt đất, có chân cột đặt tại vị trí O trên mặt đất. Tại một thời điểm, dưới ánh nắng mặt trời cách chân cột 3m về hướng $S60^\circ E$ (hướng tạo với hướng nam góc 60° và tạo với hướng đông góc 30°) (hình bên dưới). Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc tọa độ là O , tia Ox chỉ hướng nam, tia Oy chỉ hướng đông, tia Oz chứa cây cột, đơn vị đo là mét. phương trình đường thẳng chứa tia nắng mặt trời đi qua đỉnh cột tại thời điểm đang xét.



A. $\frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+6}{-4}$. **B.** $\frac{x}{1} = \frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{z+6}{-4}$.
C. $\frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z-6}{-4}$. **D.** $\frac{x}{1} = \frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{z-6}{-4}$.

Câu 12: Trong một khu du lịch, người ta cho du khách trải nghiệm thiên nhiên bằng cách đu theo đường trượt zipline từ vị trí A cao 15 m của tháp 1 này sang vị trí B cao 10 m của tháp 2 trong khung cảnh tuyệt đẹp xung quanh. Với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho trước (đơn vị: mét), tọa độ của A và B lần lượt là $(3;2,5;15)$ và $(21;27,5;10)$. Xác định tọa độ của du khách khi ở độ cao 12 mét.



- A. $(19;5;13)$. B. $\left(12;15;\frac{35}{2}\right)$. C. $(3;2,5;15)$. D. $\left(\frac{69}{5};\frac{35}{2};12\right)$.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{2}$ và điểm $A(3;2;0)$.

- a) Đường thẳng (d) đi qua điểm $A(3;2;0)$.
 b) Đường thẳng (d) có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (-1; -3; -2)$.
 c) $H(1;1;2)$ là hình chiếu của A lên đường thẳng d .
 d) $A'(-1;0;4)$ là điểm đối xứng với A qua đường thẳng d .

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 4 - 5t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

- a) Một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ là: $\vec{u} = (1;3;4)$.
 b) Điểm $A(5;5;-6)$ thuộc đường thẳng Δ .

c) Đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4t \\ z = 3 + 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ vuông góc với đường thẳng Δ .

- d) Đường thẳng Δ cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm $M(-5;0;19)$.

Câu 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;1;1)$, $B(-3;-1;2)$ và đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+5}{-2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau.

a) Phương trình tham số của đường thẳng AB là $AB: \begin{cases} x = -2 - t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

b) Phương trình đường thẳng đi qua A và song song với d là $d': \begin{cases} x = -2 - t \\ y = 1 - 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$.

c) Đường thẳng đi qua $M(1;2;3)$ đồng thời vuông góc với hai đường thẳng AB và d có phương trình: $d'': \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-1}$.

d) Đường thẳng Δ đi qua điểm A và cắt đường thẳng d tại điểm M thỏa mãn $S_{\Delta ABM} = 3\sqrt{5}$ với $B(-3;-1;2)$. Phương trình của đường thẳng Δ là $\frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-1}{3}$.

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}$,

$d_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-2}{4}$, mặt phẳng $(P): 2x - 3y + z - 2025 = 0$ và điểm $M(0;-1;2)$. Khi đó:

a) Hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau.

b) đường thẳng đi qua $M(0;-1;2)$ vuông góc với d_1 đồng thời song song với mặt phẳng (P) có phương trình là $\frac{x}{5} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-1}$.

c) Mặt phẳng cách đều hai đường thẳng d_1 và d_2 là có phương trình $(P): -4x + 2z + 5 = 0$.

d) Phương trình đường thẳng đi qua điểm M và cắt cả d_1 và d_2 là $\frac{x}{9} = \frac{y+1}{-9} = \frac{z-2}{16}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hãy tìm số véc tơ chỉ phương của đường thẳng AB có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của hình hộp.

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{-1}$ và cho các điểm $A(0;1;-2), B(2;4;-3), C(4;7;1), D(-2;-2;-1)$. Trong các điểm đã cho có bao nhiêu điểm thuộc đường thẳng Δ ?

Câu 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 2 + t \end{cases}$ và cho các điểm

$A(1;0;2), B(3;-1;1), C(5;-2;4), D(-1;1;-1)$. Trong các điểm đã cho có bao nhiêu điểm không thuộc đường thẳng Δ ?

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 2 - mt \\ y = 2mt \\ z = 1 - 4t \end{cases}$ và đường thẳng

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = z. \text{ Tìm } m \text{ để } \Delta \perp d.$$

Câu 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$ và đường thẳng

$$d: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-6}{2} = \frac{z+3}{-2}. \text{ Gọi giao điểm của hai đường thẳng } \Delta \text{ và } d \text{ là } M(a;b;c). \text{ Tính } a+b+c.$$

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$. đường thẳng

$$\text{đi qua 2 điểm } A, B \text{ có phương trình dạng } \Delta: \begin{cases} x = 2t \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}. \text{ Tính } y_0 + z_0 + b + c.$$

----- **HẾT** -----

Huỳnh Văn Ánh

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{-5} = \frac{z+5}{3}$. Điểm nào sau

đây thuộc đường thẳng d ?

- A.** $M(3;4;-5)$. **B.** $N(2;-5;3)$. **C.** $P(-3;-4;5)$. **D.** $Q(2;5;-3)$.

Lời giải

Thay tọa độ của điểm $M(3;4;-5)$ vào phương trình đường thẳng d ta có $\frac{3-3}{2} = \frac{4-4}{-5} = \frac{-5+5}{3}$.

Do đó $M \in d$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$ có một vector chỉ phương là:

- A.** $\vec{u}_1 = (2; -1; 3)$. **B.** $\vec{u}_2 = (-1; 2; 3)$. **C.** $\vec{u}_3 = (2; 1; 3)$. **D.** $\vec{u}_4 = (1; 2; 3)$.

Lời giải

Đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$ có một vector chỉ phương là $\vec{u}_2 = (-1; 2; 3)$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$ và $d_2: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$. Khẳng

định nào sau đây đúng?

- A.** d_1 và d_2 cắt nhau **B.** d_1 và d_2 chéo nhau
C. $d_1 \equiv d_2$. **D.** $d_1 // d_2$.

Lời giải

Đường thẳng $d_1: \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$ có vector chỉ phương $\vec{u}_1 = (-2; 1; 1)$ và đi qua điểm $A(0; -1; 3)$.

Đường thẳng $d_2: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ có vector chỉ phương $\vec{u}_2 = (-4; 2; 2)$.

Ta có $\vec{u}_1 = \frac{1}{2}\vec{u}_2$ và $A \notin d_2$. Do đó $d_1 // d_2$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$ và $d: \begin{cases} x = 6 - t' \\ y = 1 - t' \\ z = 3 + 2t' \end{cases}$. Tọa độ giao điểm

của hai đường thẳng Δ và d là

- A.** $I(4; -1; 7)$. **B.** $H(3; 2; 5)$. **C.** $K(6; 1; 3)$. **D.** $J(3; -1; -2)$.

Lời giải

Xét hệ phương trình
$$\begin{cases} 3+t=6-t' \\ 2-3t=1-t' \\ 5+2t=3+2t' \end{cases}$$
 có nghiệm $(t;t')=(1;2)$.

Vậy tọa độ giao điểm của hai đường thẳng Δ và d là $I(4;-1;7)$

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;0;1)$ và $N(2;1;0)$. Đường thẳng MN có phương trình tham số là

A. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2t \\ z=1+t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$. **D. $\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=1-t \end{cases}$.**

Lời giải

Đường thẳng MN có vector chỉ phương $\overrightarrow{MN}=(1;1;-1)$ và đi qua $M(1;0;1)$ nên có phương trình

tham số là
$$\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=1-t \end{cases}$$

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;-3;5)$ và song song với đường thẳng

$d: \begin{cases} x=1+2t \\ y=3-t \\ z=4+t \end{cases}$ có phương trình tham số là

A. $\begin{cases} x=2+t \\ y=-3+3t \\ z=5+4t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x=-2+t \\ y=3+3t \\ z=-5+4t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x=-2+2t \\ y=3-t \\ z=-5+t \end{cases}$. **D. $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3-t \\ z=5+t \end{cases}$.**

Lời giải

Đường thẳng Δ song song với đường thẳng d nên có vector chỉ phương $\overrightarrow{u}_{\Delta}=\overrightarrow{u}_d=(2;-1;1)$, và

đi qua $M(2;-3;5)$ nên có phương trình tham số là
$$\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3-t \\ z=5+t \end{cases}$$

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1;-2;0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P):2x-3y-z+2=0$ có phương trình tham số là

A. $\begin{cases} x=2+t \\ y=-3-2t \\ z=-t \end{cases}$. **B. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-3t \\ z=-t \end{cases}$.** C. $\begin{cases} x=1-t \\ y=-2+2t \\ z=-3t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x=2t \\ y=-3t \\ z=-t \end{cases}$.

Lời giải

Đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) nên có vector chỉ phương $\overrightarrow{u}_{\Delta}=\overrightarrow{n}_{(P)}=(2;-3;-1)$

, và đi qua $M(1;-2;0)$ nên có phương trình tham số là
$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-3t \\ z=-t \end{cases}$$

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, một viên đạn được bắn ra từ điểm $A(2;1;-1)$ và trong 3 giây đầu đạn đi với vận tốc không đổi, vectơ vận tốc (trên giây) là $\vec{v} = (1;3;-2)$. Hỏi viên đạn bắn trúng mục tiêu nằm ở điểm nào sau đây?

- A.** $M(4;0;-2)$ **B.** $N(-1;1;-3)$ **C.** $P(4;7;-5)$ **D.** $Q(3;9;-6)$

Lời giải

Phương trình mô tả quỹ đạo chuyển động của viên đạn là
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$$

Lần lượt thay tọa độ các điểm vào phương trình quỹ đạo chuyển động của viên đạn ta thấy tọa độ các điểm M, N, Q không thỏa mãn phương trình. Do đó viên đạn không bắn trúng mục tiêu ở các điểm này.

Thay tọa độ điểm P vào phương trình mô tả quỹ đạo chuyển động của viên đạn ta có

$$\begin{cases} 4 = 2 + t \\ 7 = 1 + 3t \\ -5 = -1 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow t = 2.$$

Vậy viên đạn bắn trúng mục tiêu đặt ở điểm P .

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng cắt nhau

$$d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 12 - 3t \end{cases} \text{ và } d': \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 \end{cases} \text{ là:}$$

- A.** $x - y + 12z - 15 = 0$. **B.** $6x + 3y + z + 15 = 0$. **C.** $x - y + 12z + 15 = 0$. **D.** $6x + 3y + z - 15 = 0$.

Lời giải

Đường thẳng d và d' có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_d = (1; -1; -3)$ và $\vec{u}_{d'} = (-1; 2; 0)$

Mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng cắt nhau d và d' nên có vectơ pháp tuyến là

$$\vec{n}_P = [\vec{u}_d; \vec{u}_{d'}] = (6; 3; 1).$$

Mặt khác, mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 12 - 3t \end{cases}$ nên mặt phẳng (P) chứa điểm

$$M(1; -1; 12).$$

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là: $6(x-1) + 3(y+1) + 1(z-12) = 0 \Leftrightarrow 6x + 3y + z - 15 = 0$

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng: $d: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = 1 + t \end{cases}$. Phương trình mặt

phẳng (P) chứa d và d' là:

- A.** $x + y + z - 1 = 0$. **B.** $x + 2y + z - 2 = 0$. **C.** $x - y + z - 1 = 0$. **D.** $x + y + z - 4 = 0$.

Lời giải

Đường thẳng d và d' lần lượt chứa hai điểm $M(3; -1; -1)$ và $N(0; 0; 1)$.

Ta có $\vec{MN} = (-3; 1; 2)$, vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}_d = (1; -2; 1)$.

Mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng d và d' nên có vector pháp tuyến là

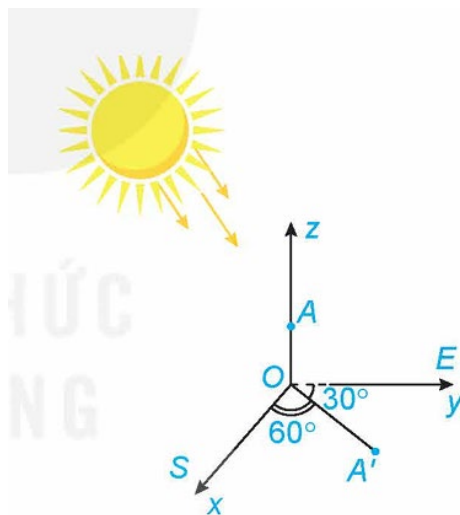
$$\vec{n}_P = [\vec{u}_d; \vec{MN}] = (-5; -5; -5) \text{ hay có vector pháp tuyến là } \vec{n}_P = (1; 1; 1).$$

Mặt khác, mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $d: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$ nên mặt phẳng (P) chứa điểm

$$M(3; -1; -1).$$

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là: $x + y + z - 1 = 0$.

Câu 11: Trên mặt đất phẳng, người ta dựng một cây cột thẳng cao 6m vuông góc với mặt đất, có chân cột đặt tại vị trí O trên mặt đất. Tại một thời điểm, dưới ánh nắng mặt trời cách chân cột 3m về hướng $S60^\circ E$ (hướng tạo với hướng nam góc 60° và tạo với hướng đông góc 30°)(hình bên dưới). Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc tọa độ là O , tia Ox chỉ hướng nam, tia Oy chỉ hướng đông, tia Oz chứa cây cột, đơn vị đo là mét. phương trình đường thẳng chứa tia nắng mặt trời đi qua đỉnh cột tại thời điểm đang xét.



A. $\frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+6}{-4}$.

B. $\frac{x}{1} = \frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{z+6}{-4}$.

C. $\frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z-6}{-4}$.

D. $\frac{x}{1} = \frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{z-6}{-4}$.

Lời giải

Ta có $A(0; 0; 6)$, $A'\left(\frac{3}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}; 0\right) \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \left(\frac{3}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}; -6\right) = \frac{3}{2}(1; \sqrt{3}; -4)$ là 1 VTCP của đường

thẳng AA' nên phương trình đường thẳng chứa tia nắng tại thời điểm đang xét là $\frac{x}{1} = \frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{z-6}{-4}$.

Câu 12: Trong một khu du lịch, người ta cho du khách trải nghiệm thiên nhiên bằng cách đu theo đường trượt zipline từ vị trí A cao 15 m của tháp 1 này sang vị trí B cao 10 m của tháp 2 trong khung cảnh tuyệt đẹp xung quanh. Với hệ trục tọa độ Oxyz cho trước (đơn vị: mét), tọa độ của A và B lần lượt là $(3; 2, 5; 15)$ và $(21; 27, 5; 10)$. Xác định tọa độ của du khách khi ở độ cao 12 mét.



- A. $(19; 5; 13)$. B. $\left(12; 15; \frac{35}{2}\right)$. C. $(3; 2, 5; 15)$. D. $\left(\frac{69}{5}; \frac{35}{2}; 12\right)$.

Lời giải

Đường thẳng chứa đường trượt zipline (đường thẳng AB) đi qua điểm $A(3; 2, 5; 15)$ và có một

vector chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (18; 25; -5)$ nên có phương trình tham số là:
$$\begin{cases} x = 3 + 18t \\ y = 2, 5 + 25t \\ z = 15 - 5t \end{cases}$$

Khi ở độ cao 12 mét, ta có $z = 12$, suy ra $15 - 5t = 12 \Leftrightarrow t = \frac{3}{5}$.

Thay $t = \frac{3}{5}$ vào phương trình tham số của đường thẳng AB ta được tọa độ của du khách ở độ cao 12 mét là: $\left(\frac{69}{5}; \frac{35}{2}; 12\right)$.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{2}$ và điểm $A(3; 2; 0)$.

- a) Đường thẳng (d) đi qua điểm $A(3; 2; 0)$.
b) Đường thẳng (d) có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (-1; -3; -2)$.
c) $H(1; 1; 2)$ là hình chiếu của A lên đường thẳng d .
d) $A'(-1; 0; 4)$ là điểm đối xứng với A qua đường thẳng d .

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

Dễ thấy tọa độ điểm A không thỏa mãn phương trình đường thẳng (d) nên đường thẳng (d) không đi qua điểm $A(3; 2; 0)$.

Đường thẳng (d) có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; 2; 2)$.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng d . Phương trình của mặt phẳng (P) là: $1(x-3) + 2(y-2) + 2(z-0) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 2z - 7 = 0$.

Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng d , khi đó $H = d \cap (P)$

Suy ra $H \in d \Rightarrow H(-1+t; -3+2t; -2+2t)$, mặt khác $H \in (P) \Rightarrow -1+t-6+4t-4+4t-7=0 \Rightarrow t=2$. Vậy $H(1;1;2)$.

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua đường thẳng d , khi đó H là trung điểm của AA' suy ra $A'(-1;0;4)$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=1+2t \\ y=3+t \\ z=4-5t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

a) Một vector chỉ phương của đường thẳng Δ là: $\vec{u} = (1;3;4)$.

b) Điểm $A(5;5;-6)$ thuộc đường thẳng Δ .

c) Đường thẳng $d: \begin{cases} x=2+3t \\ y=4t \\ z=3+2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ vuông góc với đường thẳng Δ .

d) Đường thẳng Δ cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm $M(-5;0;19)$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------

Đường thẳng Δ có một VTCP là $\vec{u} = (2;1;-5)$. Vậy mệnh đề a) Sai.

Ta có: $\begin{cases} 5=1+2t \\ 5=3+t \\ -6=4-5t \end{cases} \Leftrightarrow t=2$. Vậy mệnh đề b) Đúng.

Ta có: $\vec{u}_\Delta = (2;1;-5)$ và $\vec{u}_d = (3;4;2)$. Dễ thấy: $\vec{u}_\Delta \cdot \vec{u}_d = 0$. Vậy mệnh đề c) Đúng.

Ta có: $y=0 \Leftrightarrow 3+t=0 \Leftrightarrow t=-3$ nên điểm $M(-5;0;19)$ là giao điểm của đường thẳng Δ và mặt phẳng (Oxz) . Vậy mệnh đề d) Đúng.

Câu 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;1;1)$, $B(-3;-1;2)$ và đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+5}{-2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau.

a) Phương trình tham số của đường thẳng AB là $AB: \begin{cases} x=-2-t \\ y=1-2t \\ z=1+t \end{cases}$.

b) Phương trình đường thẳng đi qua A và song song với d là $d': \begin{cases} x=-2-t \\ y=1-3t \\ z=1+2t \end{cases}$.

c) Đường thẳng đi qua $M(1;2;3)$ đồng thời vuông góc với hai đường thẳng AB và d có phương trình: $d'': \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-1}$.

d) Đường thẳng Δ đi qua điểm A và cắt đường thẳng d tại điểm M thỏa mãn $S_{\Delta ABM} = 3\sqrt{5}$ với $B(-3; -1; 2)$. Phương trình của đường thẳng Δ là $\frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-1}{3}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
----------------	----------------	----------------	---------------

a. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1; -2; 1)$

Phương trình đường thẳng AB đi qua điểm $A(-2; 1; 1)$ và có một véc tơ chỉ phương

$$\vec{u} = (-1; -2; 1) \text{ có phương trình: } AB: \begin{cases} x = -2 - t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \text{ nên a đúng.}$$

b. Phương trình đường thẳng d' đi qua điểm $A(-2; 1; 1)$ và song song với đường thẳng d có một

$$\text{véc tơ chỉ phương } \vec{u}' = (1; 3; -2) \text{ có phương trình: } d': \begin{cases} x = -2 - t \\ y = 1 - 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \text{ nên b đúng.}$$

$$\text{c. Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-1; -2; 1) \\ \vec{u}_d = (1; 3; -2) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \vec{u}_d] = (1; -1; -1)$$

Đường thẳng đi qua $M(1; 2; 3)$ đồng thời vuông góc với hai đường thẳng AB và d có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; -1; -1)$ có phương trình $d'': \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-1}$ nên c đúng.

d. Ta có: $M = \Delta \cap d \Rightarrow M(-2+t; 1+3t; -5-2t)$.

$$\overrightarrow{AB} = (-1; -2; 1); \overrightarrow{AM} = (t; 3t; -6-2t).$$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}] = (12+t; -6-t; -t)$$

$$\text{Ta có: } S_{\Delta ABM} = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}]| = 3\sqrt{5}.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(12+t)^2 + (-6-t)^2 + t^2} = 6\sqrt{5} \Leftrightarrow 3t^2 + 36t + 180 = 180.$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 12t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -12 \end{cases}.$$

$$+ \text{ Với } t = 0 \Rightarrow M(-2; 1; -5) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (0; 0; -6) \Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \\ z = 1 - t \end{cases} \text{ (Với } t \text{ là tham số).}$$

$$+ \text{ Với } t = -12 \Rightarrow M(-14; -35; 19) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (-12; -36; 18) \Rightarrow \text{VTCP của } \Delta \text{ là } \vec{u}_\Delta = (2; 6; -3).$$

$$\Rightarrow \text{Phương trình đường thẳng } \Delta \text{ là: } \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-1}{-3} \text{ nên d sai.}$$

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}$,

$d_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-2}{4}$, mặt phẳng $(P): 2x - 3y + z - 2025 = 0$ và điểm $M(0; -1; 2)$. Khi đó:

- a) Hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau.
 b) đường thẳng đi qua $M(0; -1; 2)$ vuông góc với d_1 đồng thời song song với mặt phẳng (P) có phương trình là $\frac{x}{5} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-1}$.
 c) Mặt phẳng cách đều hai đường thẳng d_1 và d_2 là có phương trình $(P): -4x + 2z + 5 = 0$.
 d) Phương trình đường thẳng đi qua điểm M và cắt cả d_1 và d_2 là $\frac{x}{9} = \frac{y+1}{-9} = \frac{z-2}{16}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
----------------	----------------	---------------	----------------

- a. Ta có : d_1 đi qua điểm $M(1; -2; 3)$ và có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (1; -1; 2)$
 d_2 đi qua điểm $N(-1; 4; 2)$ và có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_2 = (2; -1; 4)$
 Khi đó: $[\vec{u}_1; \vec{u}_2] \cdot \vec{MN} = 3 \neq 0$ suy ra hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau nên a đúng.
 b. Ta có : $[\vec{u}_1; \vec{n}_{(P)}] = (5; 3; -1)$
 đường thẳng đi qua $M(0; -1; 2)$ vuông góc với d_1 đồng thời song song với mặt phẳng (P) có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = (5; 3; -1)$ có dạng: $\frac{x}{5} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-1}$ nên b đúng.
 c. Mặt phẳng cách đều hai đường thẳng d_1 và d_2 là mặt phẳng đi qua trung điểm $I(0; 1; \frac{5}{2})$ của MN và có một véc tơ chỉ phương $\vec{u}' = [\vec{u}_1; \vec{u}_2] = (-2; 0; 1)$ có phương trình:
 $(P): -2(x-0) + 0(y-1) + 1(z-\frac{5}{2}) = 0 \Rightarrow (P): -4x + 2z - 5 = 0$ nên c sai.
 d. Gọi Δ là đường thẳng cần tìm và A, B lần lượt là giao điểm của Δ với d_1 và d_2 .
 Khi đó $A(1+a; -2-a; 3+2a)$ và $B(-1+2b; 4-b; 2+4b)$.
 Suy ra $\vec{MA} = (a+1; -a-1; 2a+1)$ và $\vec{MB} = (2b-1; -b+5; 4b)$.

$$\text{Vì } A, B, M \text{ thẳng hàng nên } \exists k : \vec{MA} = k\vec{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} a+1 = k(2b-1) \\ -a-1 = k(-b+5) \\ 2a+1 = k(4b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{2} \\ k = -\frac{1}{2} \\ kb = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{2} \\ b = -4 \end{cases}$$

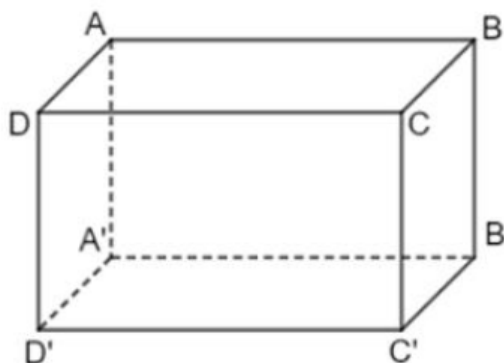
- Do đó $\vec{MB} = (-9; 9; -16)$ là một véc-tơ chỉ phương của Δ .
 Đường thẳng Δ đi qua M và có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (9; -9; 16)$ nên có phương trình chính tắc là $\frac{x}{9} = \frac{y+1}{-9} = \frac{z-2}{16}$ nên d đúng.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

- Câu 1:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hãy tìm số véc tơ chỉ phương của đường thẳng AB có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của hình hộp.

Lời giải

Trả lời: 8



Các véc tơ chỉ phương của đường thẳng AB có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của hình hộp gồm: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{B'A'}, \overrightarrow{D'C'}, \overrightarrow{C'D'}$. Có tất cả là 8 véc tơ.

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{-1}$ và cho các điểm $A(0;1;-2), B(2;4;-3), C(4;7;1), D(-2;-2;-1)$. Trong các điểm đã cho có bao nhiêu điểm thuộc đường thẳng Δ ?

Lời giải

Trả lời: 3

+) Thay tọa độ của điểm A vào phương trình đường thẳng Δ ta được:

$$\frac{0}{2} = \frac{1-1}{3} = \frac{-2+2}{-1} \Leftrightarrow 0 = 0 = 0 \text{ điều này là đúng, do đó } A \in \Delta.$$

+) Thay tọa độ của điểm B vào phương trình đường thẳng Δ ta được:

$$\frac{2}{2} = \frac{4-1}{3} = \frac{-3+2}{-1} \Leftrightarrow 1 = 1 = 1 \text{ điều này là đúng, do đó } B \in \Delta.$$

+) Thay tọa độ của điểm C vào phương trình đường thẳng Δ ta được:

$$\frac{4}{2} = \frac{7-1}{3} = \frac{1+2}{-1} \Leftrightarrow 2 = 2 = -3 \text{ điều này là vô lí, do đó } C \notin \Delta.$$

+) Thay tọa độ của điểm D vào phương trình đường thẳng Δ ta được:

$$\frac{-2}{2} = \frac{-2-1}{3} = \frac{-1+2}{-1} \Leftrightarrow -1 = -1 = -1 \text{ điều này là đúng, do đó } D \in \Delta.$$

Vậy có 3 điểm thuộc đường thẳng Δ là A, B, D .

Câu 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 2 + t \end{cases}$ và cho các điểm

$A(1;0;2), B(3;-1;1), C(5;-2;4), D(-1;1;-1)$. Trong các điểm đã cho có bao nhiêu điểm không thuộc đường thẳng Δ ?

Lời giải

Trả lời: 2

+) Thay tọa độ của điểm A vào phương trình đường thẳng Δ ta được:

$$\begin{cases} 1 = 1 + 2t \\ 0 = -t \\ 2 = 2 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 0. \text{ Hệ có nghiệm, do đó } A \in \Delta.$$

+) Thay tọa độ của điểm B vào phương trình đường thẳng Δ ta được:

$$\begin{cases} 3 = 1 + 2t \\ -1 = -t \\ 1 = 2 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = -1 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow t \in \emptyset. \text{ Hệ vô nghiệm, do đó } B \notin \Delta.$$

+) Thay tọa độ của điểm C vào phương trình đường thẳng Δ ta được:

$$\begin{cases} 5 = 1 + 2t \\ -2 = -t \\ 4 = 2 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2. \text{ Hệ có nghiệm, do đó } C \in \Delta.$$

+) Thay tọa độ của điểm D vào phương trình đường thẳng Δ ta được:

$$\begin{cases} -1 = 1 + 2t \\ 1 = -t \\ -1 = 2 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \\ t = -3 \end{cases} \Leftrightarrow t = -1 \Leftrightarrow t \in \emptyset. \text{ Hệ vô nghiệm, do đó } D \notin \Delta.$$

Vậy có 2 điểm không thuộc đường thẳng Δ là B, D .

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 2 - mt \\ y = 2mt \\ z = 1 - 4t \end{cases}$ và đường thẳng

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = z. \text{ Tìm } m \text{ để } \Delta \perp d.$$

Lời giải

Trả lời: -0,5

+) Δ có VTCP $\vec{u} = (-m; 2m; -4)$, d có VTCP $\vec{v} = (2; -3; 1)$.

+) $\Delta \perp d \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (-m) \cdot 2 + 2m \cdot (-3) + (-4) \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2} = -0,5.$

Câu 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$ và đường thẳng

$$d: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-6}{2} = \frac{z+3}{-2}. \text{ Gọi giao điểm của hai đường thẳng } \Delta \text{ và } d \text{ là } M(a; b; c). \text{ Tính } a + b + c.$$

Lời giải

Trả lời: 3

+) d có PTTS $\begin{cases} x = -1 - s \\ y = 6 + 2s \\ z = -3 - 2s \end{cases}.$

+) Để xét VTTĐ của Δ và d ta xét hệ: $\begin{cases} 2 - t = -1 - s \\ 2t = 6 + 2s \\ 1 - t = -3 - 2s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - s = 3 \\ t - s = 3 \\ t - 2s = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ s = -1 \end{cases}.$

Hệ có nghiệm duy nhất nên Δ và d cắt nhau. Thay $t = 2$ vào phương trình Δ (hoặc thay $s = -1$ vào phương trình của d) ta được tọa độ giao điểm của Δ và d là $M(0; 4; -1) \Rightarrow a + b + c = 0 + 4 + (-1) = 3.$

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$. đường thẳng

đi qua 2 điểm A, B có phương trình dạng $\Delta: \begin{cases} x = 2t \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$. Tính $y_0 + z_0 + b + c$.

Lời giải

Trả lời: 2

+) Δ có VTCP là $\overrightarrow{AB} = (1; -3; 4) = \frac{1}{2}(2; -6; 8) \Rightarrow b = -6, c = 8$.

+) Thay tọa độ điểm B vào phương trình Δ ta được:

$$\begin{cases} 2 = 2t \\ -1 = y_0 - 6t \\ 3 = z_0 + 8t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ y_0 = 5 \\ z_0 = -5 \end{cases}$$

Từ đó ta có: $y_0 + z_0 + b + c = 5 - 5 - 6 + 8 = 2$.

Huỳnh Văn Ánh



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: CÔNG THỨC TÍNH GÓC TRONG KHÔNG GIAN ĐỀ TEST SỐ 01

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cosin của góc giữa hai mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 1 = 0$ và $(Q): x + y + z - 1 = 0$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{9}$. C. $-\frac{\sqrt{3}}{9}$. D. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 2: Trong hệ tọa độ $(Oxyz)$. Gọi φ là góc giữa mặt phẳng (Oxz) và mặt phẳng $(\alpha): x + y - 10z + 2025 = 0$. Khi đó $\cos\varphi$ là:

- A. 0. B. $\frac{1}{\sqrt{102}}$. C. $\frac{1}{10}$. D. $\frac{1}{\sqrt{120}}$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, góc giữa trục Oz và đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-2}$ bằng (kết quả làm tròn đến độ)

- A. 30° . B. 48° . C. 60° . D. 132° .

Câu 4: Trong hệ tọa độ $(Oxyz)$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng chứa Ox và mặt phẳng $(\alpha): x + y + 12 = 0$. Khi đó φ bằng:

- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai mặt phẳng $(P): x + 2y - 3z + 5 = 0$ và $(Q): 2x + y - 3z - 1 = 0$ bằng (kết quả làm tròn đến độ)

- A. 20° . B. 22° . C. 25° . D. 27° .

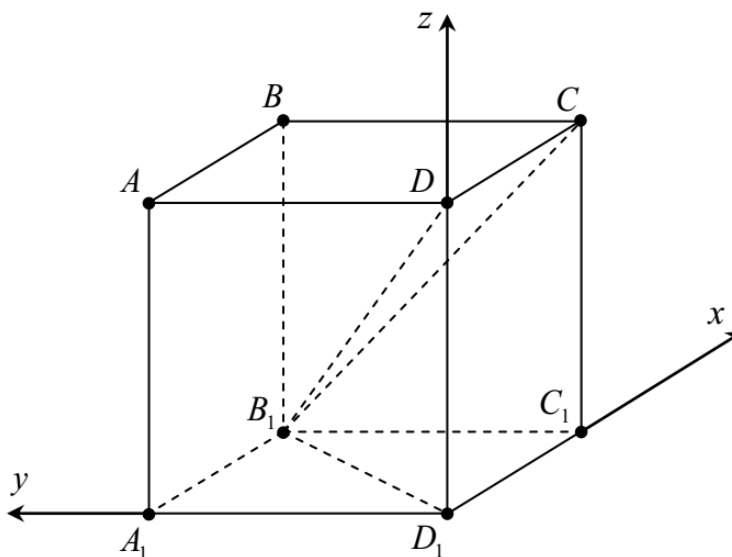
Câu 6: Trong hệ tọa độ $(Oxyz)$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -4 + 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = 2 - 2m \\ y = 2 - 2m \\ z = 3 + m \end{cases}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng. Tính $\cos\varphi$?

- A. $\frac{5}{6}$. B. $\frac{1}{9}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{4}{9}$.

- Câu 7:** Trong không gian $Oxyz$, góc giữa đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=1+2t \\ y=3-t \\ z=2+3t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): x-y-2z+4=0$ bằng (kết quả làm tròn đến độ)
- A. 161° . B. 109° . C. 71° . D. 19° .
- Câu 8:** Trong hệ tọa độ $(Oxyz)$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=3+2t \end{cases}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng. Tính $\cos \varphi$?
- A. $\frac{5}{6}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{1}{6}$.
- Câu 9:** Trong không gian $Oxyz$, góc giữa đường thẳng $\Delta: \frac{x-8}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{2}$ và mặt phẳng $(P): \frac{x}{1} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$ bằng (kết quả làm tròn đến độ)
- A. 83° . B. 7° . C. 41° . D. 49° .
- Câu 10:** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=1+2t \\ y=2+t \\ z=-2-t \end{cases}$ và $(P): -x+2y+2z+5=0$. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(-1;0;-1)$ cắt đường thẳng Δ và tạo với mặt phẳng (P) một góc nhỏ nhất. Vector chỉ phương $\vec{u}_d = (a;b;1)$. Tính tổng $a+2b$?
- A. 8. B. 7. C. -6. D. 11.
- Câu 11:** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(C'BD)$ bằng
- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $a\sqrt{3}$. C. $a\sqrt{2}$. D. $a\sqrt{6}$.
- Câu 12:** Trong không gian $Oxyz$, đường băng của một sân bay thuộc mặt phẳng (Oxy) . Một máy bay sau khi chạy đà trên đường băng đó đã cất cánh tại điểm $A(1;2;0)$ với vận tốc không đổi trong khoảng thời gian ngắn ban đầu, vector vận tốc $\vec{v} = (0;\sqrt{3};1)$. Trong khoảng thời gian ngắn nói trên, góc cất cánh của máy bay bằng:
- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho lăng trụ tứ diện đều $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh đáy bằng 1 và chiều cao bằng x sao cho $O \equiv D_1$, C_1 thuộc tia Ox , A_1 thuộc tia Oy , D thuộc tia Oz .



- a)** Một vector pháp tuyến của $(A_1B_1C_1D_1)$ là $\vec{n}_1 = (1; 0; -1)$.
- b)** Với $x = 3$ thì góc của B_1D mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$ bằng 60° .
- c)** Với $x = 2$ thì góc giữa mặt phẳng (CB_1D_1) và mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$ bằng 45° .
- d)** Với $x = 4$ thì góc giữa đường thẳng B_1D mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$ là lớn nhất.

Câu 2: Cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$ và $\Delta_2: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-5}{-2}$.

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	Vector $\vec{u}_1 = (2, 1, 2)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng Δ_1 .		
b)	Vector $\vec{u}_2 = (-1, 2, 2)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng Δ_2 .		
c)	Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 xấp xỉ 64° .		
d)	Góc giữa đường thẳng Δ_1 và trục Ox xấp xỉ 40° .		

Câu 3: Cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y + z - 4 = 0$.

- a) $\vec{u} = (-1; 1; -1)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng Δ .
b) $M(0; 3; -2)$ không thuộc đường thẳng Δ .
c) Đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) .
d) Đường thẳng Δ cắt mặt phẳng (P) tại $N(-1; 4; 1)$.

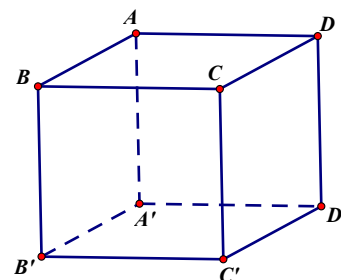
Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(3; 0; 0)$, $D(0; 3; 0)$, $D'(0; 3; -3)$ như hình vẽ:

a) Tọa độ điểm $C(3; -3; 0)$.

b) Phương trình đường thẳng $A'C$ có phương trình là:
$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -3 + t \end{cases}$$

c) $\cos(A'C; (A'BD)) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

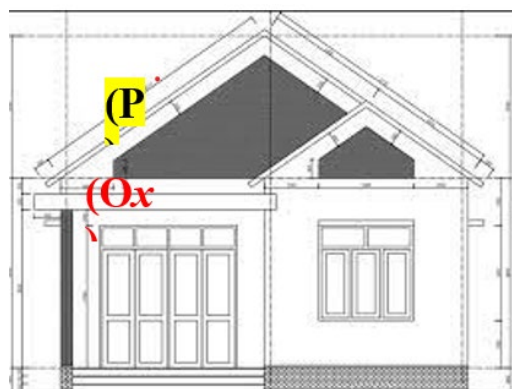
d) $\cos((C'BD); (A'BD)) = \frac{1}{\sqrt{3}}$



PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Khi gán hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét) vào một sân bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sân bay. Một máy bay bay theo đường thẳng từ vị trí $A(2; -1; 3)$ đến vị trí $B(8; 7; 1)$. Góc giữa đường bay (một phần của đường thẳng AB) và sân bay (một phần của mặt phẳng (Oxy)) bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Câu 2: Khi gán hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo mét) vào một căn nhà (hình minh họa bên dưới) sao cho mặt phẳng $(P): -\sqrt{3}x + y + 1 = 0$. Tính góc tạo bởi (P) với trục Ox .



Câu 3: Khi gán hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo mét) vào một căn nhà (hình minh họa bên dưới) sao cho điểm $H(2; 1; 2)$. Điểm H là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O xuống mặt phẳng (P) , số đo góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(Q): x + y - 11 = 0$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Câu 4: Khi gắn hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét) vào một sân bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sân bay. Một máy bay bay theo đường thẳng từ vị trí $A(1; -2; 3)$ đến vị trí $B(2; 8; 7)$. Góc giữa đường bay (một phần của đường thẳng AB và sân bay (một phần của mặt phẳng (Oxy)) bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Câu 5: Khi gắn hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét) vào một sân bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sân bay. Một máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ $A(800; 500; 7)$ đến điểm $B(940; 550; 8)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay 5 phút tiếp theo là điểm $C(x; y; z)$. Quan sát tại điểm $D(2; 10; 0)$ trên mặt đất, hỏi số đo góc $\widehat{DCA}$ bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Câu 6: Trong một khung lưới ô vuông gồm các hình lập phương, xét các đường thẳng đi qua hai nút lưới (mỗi nút lưới là đỉnh của hình lập phương), người ta đưa ra một cách kiểm tra độ lệch về phương của hai đường thẳng bằng cách gắn hệ tọa độ $Oxyz$ vào khung lưới ô vuông và tìm vector chỉ phương của hai đường thẳng đó. Giả sử, đường thẳng a đi qua hai nút lưới $M(1; 1; 2)$ và $N(0; 3; 0)$, đường thẳng b đi qua hai nút lưới $P(1; 0; 3)$ và $Q(3; 3; 9)$. Sau khi làm tròn đến hàng đơn vị của độ thì góc giữa hai đường thẳng a và b bằng n° (n là số tự nhiên). Giá trị của n bằng bao nhiêu?

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cosin của góc giữa hai mặt phẳng $(P): x+2y-2z+1=0$ và $(Q): x+y+z-1=0$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{9}$. C. $-\frac{\sqrt{3}}{9}$. D. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Hai mặt phẳng $(P), (Q)$ có các vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_P = (1; 2; -2)$ và $\vec{n}_Q = (1; 1; 1)$.

$$\text{Ta có: } \cos((P), (Q)) = \left| \cos(\vec{n}_P, \vec{n}_Q) \right| = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Câu 2: Trong hệ tọa độ $(Oxyz)$. Gọi φ là góc giữa mặt phẳng (Oxz) và mặt phẳng $(\alpha): x+y-10z+2025=0$. Khi đó $\cos\varphi$ là:

- A. 0. B. $\frac{1}{\sqrt{102}}$. C. $\frac{1}{10}$. D. $\frac{1}{\sqrt{120}}$.

Lời giải

Ta có mặt phẳng (Oxz) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (0; 1; 0)$, mặt phẳng $(\alpha): x+y-10z+2025=0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (1; 1; -10)$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng thì $\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{102}}$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, góc giữa trục Oz và đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-2}$ bằng (kết quả làm tròn đến độ)

- A. 30° . B. 48° . C. 60° . D. 132° .

Lời giải

Trục Oz có vectơ chỉ phương là $\vec{j} = (0; 0; 1)$; đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; 1; -2)$;

$$\text{Ta có: } \cos(\Delta, Oz) = \left| \cos(\vec{u}, \vec{j}) \right| = \frac{|2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{2}{3}.$$

Nên $(\Delta, Oz) \approx 48^\circ$.

Câu 4: Trong hệ tọa độ $(Oxyz)$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng chứa Ox và mặt phẳng $(\alpha): x+y+12=0$. Khi đó φ bằng:

- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .

Lời giải

Ta có đường thẳng chứa Ox có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; 0; 0)$, mặt phẳng $(\alpha): x + y + 12 = 0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 1; 0)$. Gọi φ là góc giữa đường và mặt thì

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^\circ.$$

- Câu 5:** Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai mặt phẳng $(P): x + 2y - 3z + 5 = 0$ và $(Q): 2x + y - 3z - 1 = 0$ bằng (kết quả làm tròn đến độ)
- A. 20° . B. 22° . C. 25° . D. 27° .

Lời giải

Hai mặt phẳng $(P), (Q)$ có các vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_P = (1; 2; -3)$ và $\vec{n}_Q = (2; 1; -3)$.

Ta có: $\cos((P), (Q)) = \left| \cos(\vec{n}_P, \vec{n}_Q) \right| = \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-3)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2}} = \frac{13}{14}.$

Nên $((P), (Q)) \approx 22^\circ$.

- Câu 6:** Trong hệ tọa độ $(Oxyz)$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -4 + 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = 2 - 2m \\ y = 2 - 2m \\ z = 3 + m \end{cases}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng. Tính $\cos \varphi$?
- A. $\frac{5}{6}$. B. $\frac{1}{9}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{4}{9}$.

Lời giải

Ta có đường $\Delta_1: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -4 + 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (1; 2; 2)$, đường $\Delta_2: \begin{cases} x = 2 - 2m \\ y = 2 - 2m \\ z = 3 + m \end{cases}$ có

vectơ chỉ phương là $\vec{u}_2 = (-2; -2; 1)$. Ta có $\cos \varphi = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| |\vec{u}_2|} = \frac{4}{9}.$

- Câu 7:** Trong không gian $Oxyz$, góc giữa đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): x - y - 2z + 4 = 0$ bằng (kết quả làm tròn đến độ)
- A. 161° . B. 109° . C. 71° . D. 19° .

Lời giải

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; -1; 3)$; Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; -1; -2)$.

Ta có: $\sin(\Delta, (P)) = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}) \right| = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{21}}{14}.$

Nên $(\Delta, (P)) \approx 19^\circ.$

Câu 8: Trong hệ tọa độ $(Oxyz)$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=3+2t \end{cases}$. Gọi

φ là góc giữa hai đường thẳng. Tính $\cos \varphi$?

- A.** $\frac{5}{6}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Ta có đường $\Delta_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (1; 2; 1)$, đường $\Delta_2: \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=3+2t \end{cases}$

có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_2 = (1; 1; 2)$. Ta có $\cos \varphi = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| |\vec{u}_2|} = \frac{5}{6}.$

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, góc giữa đường thẳng $\Delta: \frac{x-8}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{2}$ và mặt phẳng $(P): \frac{x}{1} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$ bằng (kết quả làm tròn đến độ)

- A.** 83° . **B.** 7° . **C.** 41° . **D.** 49° .

Lời giải

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (-1; 1; 2)$; Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (6; 2; 3)$.

Ta có: $\sin(\Delta, (P)) = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}) \right| = \frac{|-1 \cdot 6 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{6}}{21}.$

Nên $(\Delta, (P)) \approx 7^\circ.$

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=1+2t \\ y=2+t \\ z=-2-t \end{cases}$ và $(P): -x+2y+2z+5=0$. Gọi d là

đường thẳng đi qua điểm $A(-1; 0; -1)$ cắt đường thẳng Δ và tạo với mặt phẳng (P) một góc nhỏ nhất. Vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = (a; b; 1)$. Tính tổng $a+2b$?

- A.** 8. **B.** 7. **C.** -6. **D.** 11.

Lời giải

Giả sử đường thẳng d cắt đường thẳng Δ tại B , ta có: $B(1+2t; 2+t; -2-t) \in \Delta$.

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương là: $\overrightarrow{AB} = (2t+2; t+2; -t-1)$, mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (-1; 2; 2)$.

Gọi φ là góc giữa d và (P) , ta có: $\sin \varphi = \frac{|-2t-2+2t+4-2t-2|}{3\sqrt{6t^2+14t+9}} = \frac{|2t|}{3\sqrt{6t^2+14t+9}} \geq 0$

$\Rightarrow d$ tạo với mặt phẳng (P) một góc φ nhỏ nhất khi $\varphi = 0^\circ$ hay $\sin \varphi = 0 \Rightarrow t = 0$.

Khi đó đường thẳng d đi qua điểm $A(-1; 0; -1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (2; 2; -1)$

$\Rightarrow \vec{u}_d = (-2; -2; 1)$

Vậy $a = -2, b = -2, \Rightarrow a + 2b = -6$.

Câu 11: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(C'BD)$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

B. $a\sqrt{3}$.

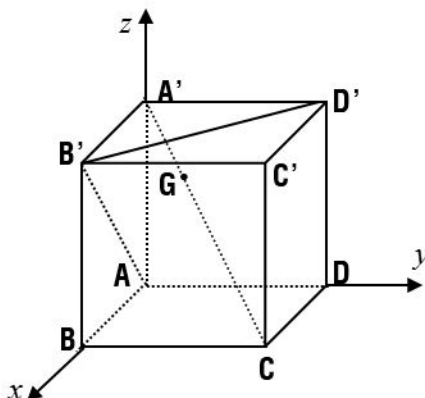
C. $a\sqrt{2}$.

D. $a\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ Đề các vuông góc $Oxyz$ như sau: $O \equiv A(0; 0; 0)$; $A'(0; 0; a)$

$B(a; 0; 0)$; $B'(a; 0; a)$; $C(a; a; 0)$; $C'(a; a; a)$; $D(0; a; 0)$; $D'(0; a; a)$.



Ta có $(AB'D') \parallel (C'BD)$

Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(C'BD)$ là $\vec{n}_2 = [\overrightarrow{C'B}, \overrightarrow{C'D}] = (-a^2; -a^2; a^2)$ hay $\vec{n}_2 = (1; 1; -1)$

Phương trình tổng quát của mặt phẳng $(C'BD)$ là $x + y - z - a = 0$.

Phương trình tổng quát của mặt phẳng $(AB'D')$ là $x + y - z = 0$.

$$\Rightarrow d((AB'D'), (C'BD)) = d(B, (AB'D')) = \frac{|a + 0 - 0|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, đường băng của một sân bay thuộc mặt phẳng (Oxy) . Một máy bay sau khi chạy đà trên đường băng đó đã cất cánh tại điểm $A(1; 2; 0)$ với vận tốc không đổi trong

khoảng thời gian ngắn ban đầu, vector vận tốc $\vec{v} = (0; \sqrt{3}; 1)$. Trong khoảng thời gian ngắn nói trên, góc cất cánh của máy bay bằng:

A. 30°

B. 45°

C. 60°

D. 90°

Lời giải

Trong khoảng thời gian ngắn đó, máy bay chuyển động trên đường thẳng Δ đi qua A nhân $\vec{v} = (0; \sqrt{3}; 1)$ làm vector chỉ phương.

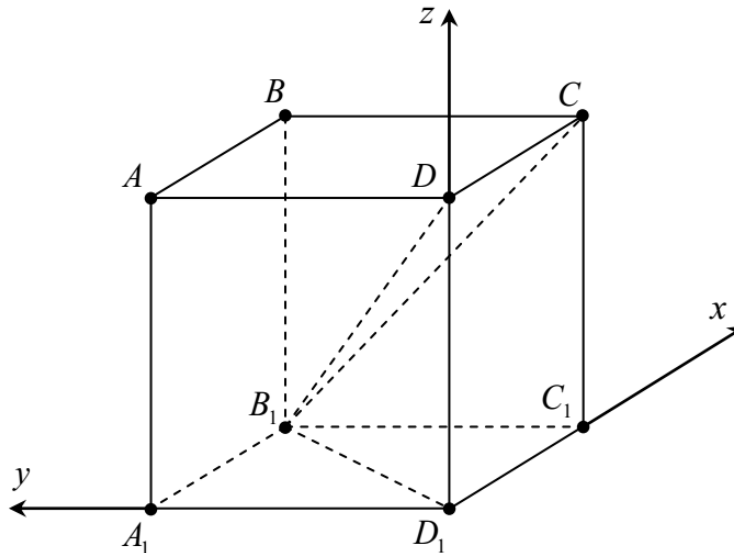
Mặt phẳng (Oxy) có một vector pháp tuyến là $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

$$\sin(\Delta; (Oxy)) = |\cos(\vec{v}; \vec{k})| = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{k}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{1}{2}$$

Nên $(\Delta; (Oxy)) = 30^\circ$.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho lăng trụ tứ diện đều $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh đáy bằng 1 và chiều cao bằng x sao cho $O \equiv D_1$, C_1 thuộc tia Ox , A_1 thuộc tia Oy , D thuộc tia Oz .



- a) Một vector pháp tuyến của $(A_1B_1C_1D_1)$ là $\vec{n}_1 = (1; 0; -1)$.
- b) Với $x = 3$ thì góc của B_1D mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$ bằng 60° .
- c) Với $x = 2$ thì góc giữa mặt phẳng (CB_1D_1) và mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$ bằng 45° .
- d) Với $x = 4$ thì góc giữa đường thẳng B_1D mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$ là lớn nhất.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Sai	d) Sai
---------------	---------------	---------------	---------------

a) Sai.

Ta có $D_1(0; 0; 0)$, $A_1(0; 1; 0)$, $C_1(1; 0; 0)$, $B_1(1; 1; 0)$.

$$\overrightarrow{D_1A_1} = (0; 1; 0), \overrightarrow{D_1C_1} = (1; 0; 0).$$

Một vector pháp tuyến của $(A_1B_1C_1D_1)$ là $\vec{n}_1 = [\overrightarrow{D_1A_1}; \overrightarrow{D_1C_1}] = (0; 0; -1)$.

b) Sai.

Ta có $D(0;0;x)$, $\overrightarrow{DB_1} = (1;1;-x)$.

Vì góc của B_1D mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$ bằng 60° .

$$\text{Suy ra } \sin(B_1D; (A_1B_1C_1D_1)) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left| \cos(\overrightarrow{n_1}; \overrightarrow{DB_1}) \right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|x|}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{6}.$$

c) Sai.

Ta có $C(1;0;x)$, $\overrightarrow{D_1B_1} = (1;1;0)$, $\overrightarrow{D_1C} = (1;0;x)$.

Mặt phẳng (CB_1D_1) có một vector pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2} = [\overrightarrow{D_1B_1}, \overrightarrow{D_1C}] = (x; -x; -1)$.

Vì góc giữa mặt phẳng (CB_1D_1) và mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$ bằng 45° .

$$\text{Suy ra } \left| \cos(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{|1|}{\sqrt{2x^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

d) Sai

Gọi góc giữa đường thẳng B_1D mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$ là α .

$$\text{Khi đó } \sin \alpha = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} < 1.$$

Không tồn tại x để góc giữa đường thẳng B_1D mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$ lớn nhất.

Câu 2: Cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$ và $\Delta_2: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-5}{-2}$.

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	Vector $\overrightarrow{u_1} = (2,1,2)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng Δ_1 .		
b)	Vector $\overrightarrow{u_2} = (-1,2,2)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng Δ_2 .		
c)	Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 xấp xỉ 64° .		
d)	Góc giữa đường thẳng Δ_1 và trục Ox xấp xỉ 40° .		

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
----------------	---------------	----------------	---------------

a) Vector $\overrightarrow{u_1} = (2,1,2)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng Δ_1 .

b) Vector $\overrightarrow{u_2} = (-1,2,-2)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng Δ_2 .

$$\text{c) Ta có } \cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-2)|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{9} \Rightarrow (\Delta_1, \Delta_2) \approx 64^\circ.$$

d) Trục Ox có vector chỉ phương $\vec{i} = (1,0,0)$.

$$\text{Ta có } \cos(\Delta_1, Ox) = \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{2}{3} \Rightarrow (\Delta_1, Ox) \approx 48^\circ.$$

Câu 3: Cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 3+t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y + z - 4 = 0$.

- a) $\vec{u} = (-1; 1; -1)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng Δ .
 b) $M(0; 3; -2)$ không thuộc đường thẳng Δ .
 c) Đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) .
 d) Đường thẳng Δ cắt mặt phẳng (P) tại $N(-1; 4; 1)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
----------------	----------------	---------------	---------------

- a) Dựa vào phương trình đường thẳng, một vector chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{x} = (1; -1; 1)$.
 Ta thấy $\vec{x}, \vec{u}$ cùng phương. Do đó, $\vec{u} = (-1; 1; -1)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng Δ ;
 b) Thay tọa độ của điểm M vào x, y, z của đường thẳng Δ , ta thấy:

$$\begin{cases} 0 = 1+t \\ 3 = 2-t \\ -2 = 3+t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \\ t = -5 \end{cases}$$

Do vậy, $M(0; 3; -2)$ không thuộc đường thẳng Δ ;

c) Đường thẳng Δ có vector chỉ phương là $\vec{x} = (1; -1; 1)$

Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 2; 1)$.

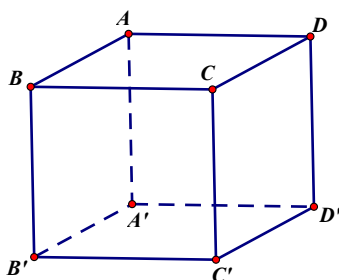
Ta thấy $\vec{x}, \vec{n}$ không cùng phương. Do vậy, đường thẳng Δ không vuông góc với mặt phẳng (P) .

d) $\Delta: \begin{cases} x = 1+t & (1) \\ y = 2-t & (2) \\ z = 3+t & (3) \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y + z - 4 = 0$ (4)

Thay (1), (2), (3) vào (4), ta được: $1+t+2(2-t)+3+t-4=0 \Leftrightarrow 0t+4=0$ - phương trình vô nghiệm

Do vậy, đường thẳng Δ không cắt mặt phẳng (P) .

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(3; 0; 0)$, $D(0; 3; 0)$, $D'(0; 3; -3)$ như hình vẽ:



- a) Tọa độ điểm $C(3; -3; 0)$.

b) Phương trình đường thẳng $A'C$ có phương trình là:
$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -3 + t \end{cases}$$

c) $\cos(A'C; (A'BD)) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

d) $\cos((C'BD); (A'BD)) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; 0; 0); \overrightarrow{DC} = (x_c; y_c - 3; z_c)$. Mà

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \begin{cases} x_c = 3 \\ y_c - 3 = 0 \\ z_c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_c = 3 \\ y_c = 3 \\ z_c = 0 \end{cases} \Rightarrow C(3; 3; 0)$$

b) $\overrightarrow{DD'} = (0; 0; -3); \overrightarrow{AA'} = (x_{A'}; y_{A'}; z_{A'})$. Mà ta lại có $\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AA'} \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 0 \\ y_{A'} = 0 \\ z_{A'} = -3 \end{cases} \Rightarrow A'(0; 0; -3)$

$\overrightarrow{A'C} = (3; 3; 3)$ nên chọn $\vec{u}_{A'C} = (1; 1; 1)$. Phương trình đường thẳng $A'C$ đi qua $A'(0; 0; -3)$ và

có $\vec{u}_{A'C} = (1; 1; 1)$ là:
$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -3 + t \end{cases}$$

c) $[\overrightarrow{A'B}; \overrightarrow{A'D}] = (-9; -9; 9)$. Chọn $\vec{n}_{(A'BD)} = (1; 1; -1)$. Nên phương trình mặt phẳng $(A'BD)$ đi qua điểm $A'(0; 0; -3)$ và có $\vec{n}_{(A'BD)} = (1; 1; -1)$ là: $x + y - z - 3 = 0$

$$\sin(A'C; (A'BD)) = \left| \cos(\vec{u}_{A'C}; \vec{n}_{(A'BD)}) \right| = \frac{|1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{3}$$

Nên $\cos(A'C; (A'BD)) = \sqrt{1 - \sin^2(A'C; (A'BD))} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

d) Ta có $\overrightarrow{DC'} = (3; 0; -3); \overrightarrow{BC'} = (0; 3; -3) \Rightarrow [\overrightarrow{DC'}; \overrightarrow{BC'}] = (9; 9; 9)$.

Chọn $\vec{n}_{(C'BD)} = (1; 1; 1) \Rightarrow \cos((C'BD); (A'BD)) = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{3}$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Khi gán hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét) vào một sân bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sân bay. Một máy bay bay theo đường thẳng từ vị trí $A(2; -1; 3)$ đến vị trí $B(8; 7; 1)$. Góc giữa đường bay (một phần của đường thẳng AB) và sân bay (một phần của mặt phẳng (Oxy)) bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

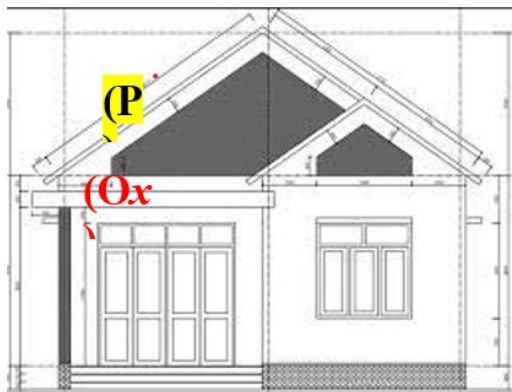
Trả lời: 11

Đường thẳng AB có vector chỉ phương là $\vec{u} = (3; 4; -1)$, mặt phẳng (Oxy) có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (0; 0; 1)$.

Từ đó, góc α giữa đường bay (một phần của đường thẳng AB) và sân bay (một phần của mặt phẳng (Oxy)) có $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$.

Suy ra $\alpha \approx 11^\circ$.

Câu 2: Khi gán hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo mét) vào một căn nhà (hình minh họa bên dưới) sao cho mặt phẳng $(P): -\sqrt{3}x + y + 1 = 0$. Tính góc tạo bởi (P) với trục Ox .



Lời giải

Trả lời: 60

Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (-\sqrt{3}; 1; 0)$;

trục Ox có vector chỉ phương $\vec{i} = (1; 0; 0)$.

$$\text{Ta có: } \sin((P); Ox) = \left| \cos(\vec{n}; \vec{i}) \right| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{i}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{i}|} = \frac{|-\sqrt{3}|}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{1}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow ((P); Ox) = 60^\circ.$$

Câu 3: Khi gán hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo mét) vào một căn nhà (hình minh họa bên dưới) sao cho điểm $H(2; 1; 2)$. Điểm H là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O xuống mặt phẳng (P) , số đo góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(Q): x + y - 11 = 0$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Lời giải

Trả lời: 45

Ta có H là hình chiếu vuông góc của O xuống mặt phẳng (P) nên $OH \perp (P)$. Do đó $\overrightarrow{OH} = (2; 1; 2)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

Mặt phẳng (Q) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 1; 0)$.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P) , (Q) .

$$\text{Ta có } \cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{OH} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{OH}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (P) , (Q) là 45° .

Câu 4: Khi gắn hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét) vào một sân bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sân bay. Một máy bay bay theo đường thẳng từ vị trí $A(1; -2; 3)$ đến vị trí $B(2; 8; 7)$. Góc giữa đường bay (một phần của đường thẳng AB và sân bay (một phần của mặt phẳng (Oxy)) bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Trả lời: 22

Đường thẳng AB có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; 10; 4)$, mặt phẳng (Oxy) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (0; 0; 1)$.

Từ đó, gọi α là góc giữa đường bay (một phần của đường thẳng AB) và sân bay (một phần của mặt phẳng (Oxy)). Ta có $\sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{117}}$.

Suy ra $\alpha \approx 22^\circ$.

Câu 5: Khi gắn hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét) vào một sân bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sân bay. Một máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ $A(800; 500; 7)$ đến điểm $B(940; 550; 8)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay 5 phút tiếp theo là điểm $C(x; y; z)$. Quan sát tại điểm

$D(2;10;0)$ trên mặt đất, hỏi số đo góc $\widehat{DCA}$ bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Lời giải

Trả lời: 10

Vì hướng của máy bay không đổi nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng. Do vận tốc của máy bay không đổi và thời gian máy bay di chuyển từ A đến B gấp đôi thời gian di chuyển từ B đến C nên $AB = 2BC$.

$$\text{Do đó } \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = \left(\frac{940-800}{2}; \frac{550-500}{2}; \frac{8-7}{2} \right) = (70; 25; 0,5)$$

$$\text{Lại có } \overrightarrow{BC} = (x-940; y-550; z-8) \text{ nên } \begin{cases} x-940=70 \\ y-550=25 \\ z-8=0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1010 \\ y=575 \\ z=8,5 \end{cases} \Rightarrow C(1010; 575; 8,5)$$

$$\text{Và } \overrightarrow{DC} = (1008; 565; 8,5), \overrightarrow{CA} = (210; 75; 1,5),$$

$$\Rightarrow \cos(\widehat{DCA}) = \frac{|1008 \cdot 210 + 565 \cdot 75 + 8,5 \cdot 1,5|}{\sqrt{1008^2 + 565^2 + 8,5^2} \sqrt{210^2 + 75^2 + 1,5^2}}$$

$$\text{Vậy } \widehat{DCA} \approx 10^\circ$$

Câu 6: Trong một khung lưới ô vuông gồm các hình lập phương, xét các đường thẳng đi qua hai nút lưới (mỗi nút lưới là đỉnh của hình lập phương), người ta đưa ra một cách kiểm tra độ lệch về phương của hai đường thẳng bằng cách gán hệ tọa độ $Oxyz$ vào khung lưới ô vuông và tìm vector chỉ phương của hai đường thẳng đó. Giả sử, đường thẳng a đi qua hai nút lưới $M(1;1;2)$ và $N(0;3;0)$, đường thẳng b đi qua hai nút lưới $P(1;0;3)$ và $Q(3;3;9)$. Sau khi làm tròn đến hàng đơn vị của độ thì góc giữa hai đường thẳng a và b bằng n° (n là số tự nhiên). Giá trị của n bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 68

Ta có: $\overrightarrow{MN} = (-1; 2; -2)$, $\overrightarrow{PQ} = (2; 3; 6)$. Khi đó:

$$\cos(a, b) = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{PQ}|} = \frac{8}{21}, \text{ suy ra } (a, b) \approx 68^\circ.$$



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: CÔNG THỨC TÍNH GÓC TRONG KHÔNG GIAN ĐỀ TEST SỐ 02

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1 và đường thẳng d_2 lần lượt có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_{d_1} = (1; -2; -3)$ và $\vec{u}_{d_2} = (-4; 1; 5)$. Góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 là
A. 30° . **B.** 45° . **C.** 90° . **D.** 60° .

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d có VTCP $\vec{u} = (2; 2; 1)$. Gọi α là góc giữa d và trục Ox . Tính $\cos \alpha$.
A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x - y - z - 3 = 0$ và $(Q): x - z - 2 = 0$. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng
A. 30° . **B.** 45° . **C.** 60° . **D.** 90° .

Câu 4: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - z - 5 = 0$. Hãy tính cosin góc tạo bởi đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) .
A. $\frac{1}{\sqrt{6}}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{30}}{6}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): \frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{2}$. Biết rằng trong mặt phẳng (P) có hai đường thẳng d_1, d_2 cùng đi qua điểm $A(1; -1; 1)$ và cùng cách đường thẳng d một khoảng bằng 1. Tính $\sin \varphi$ với φ là góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 .
A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1 **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{3}{7}$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 1 = 0$ và mặt phẳng $(Q): 4x - 4y + 3z - 2 = 0$. Đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (P) , có một vector chỉ phương $\vec{u} = (m; n; 1)$. Khi Δ tạo với (Q) một góc lớn nhất thì sin của góc tạo bởi đường thẳng Δ và mặt phẳng (Q) bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{2\sqrt{41}}{41}$. B. 1. C. $\frac{\sqrt{41}}{41}$. D. $\frac{\sqrt{205}}{41}$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính góc giữa mặt phẳng $(P): 2x - 3y - 4 = 0$ và mặt phẳng (Oxy) .

- A. 30° . B. 90° . C. 60° . D. 0° .

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, góc giữa đường thẳng d chứa trục Ox và mặt phẳng $(P): 3y - z + 5 = 0$ bằng

- A. 90° . B. 60° . C. 0° . D. 30° .

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính góc giữa hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = 5 \end{cases}$ và

$$d_2: \begin{cases} x = -2t' \\ y = -3 + t' \\ z = 1 - 2t' \end{cases}.$$

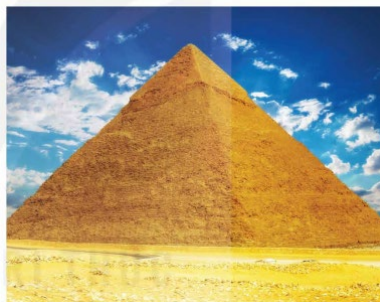
- A. 60° . B. 45° . C. 30° . D. 90° .

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính góc giữa hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z}{4}$ và

$$d_2: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -3 \\ z = 2 - 2t \end{cases}.$$

- A. 60° . B. 90° . C. 30° . D. 45° .

Câu 11: Kim tự tháp Kheops ở Ai Cập có dạng hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình vuông với cạnh dài 230 m, các cạnh bên bằng nhau và dài 219 m (theo *britannica.com*) (hình vẽ). Gọi G là trọng tâm tam giác SCD . Tính góc giữa hai đường thẳng BG và SA (làm tròn tới hàng đơn vị độ).



- A. 66° . B. 69° . C. 70° . D. 71° .

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B có $AB = BC = 4$. Gọi H là trung điểm của AB , $SH \perp (ABC)$. Mặt phẳng (SBC) tạo với mặt đáy một góc 60° . Côsin góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) bằng

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{\sqrt{5}}{4}$. C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$. D. $\frac{1}{\sqrt{7}}$.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABC$ có ba điểm $S(0;0;3)$, $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;2;0)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$.

- a) Côsin góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (ABC) bằng 0.
b) Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (ABC) bằng 90° .
c) Côsin góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) bằng $\frac{3}{7}$.
d) Côsin góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (P) bằng $\frac{10\sqrt{3}}{21}$.

Câu 2: Trong không gian, cho mặt phẳng $(P): x - y + 3z - 1 = 0$ và đường thẳng $(d): \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$.

- a) đường thẳng d có một vector chỉ phương là $\vec{u}(1; -2; 1)$ và mặt phẳng $(P): x - y + 3z - 1 = 0$ có một vector pháp tuyến là $\vec{n}(1; -1; 3)$.
b) $\cos(d, (P)) = \sqrt{\frac{6}{11}}$.
c) Gọi (Q) là mặt phẳng song song với (P) , khi đó giá trị sin của góc giữa d và (Q) bằng $\frac{\sqrt{66}}{11}$.
d) Có đúng một mặt phẳng đi qua gốc toạ độ, vuông góc với (P) và tạo với d một góc 30° .

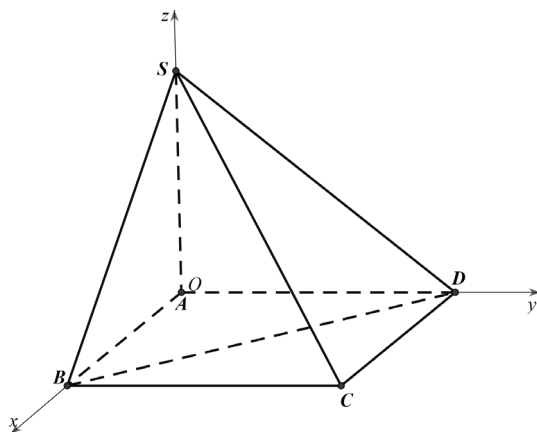
Câu 3: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x + y - z - 3 = 0$, điểm $M(3; 1; 1)$

và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 + 3t \\ z = -3 - 2t \end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng thay đổi sao luôn đi qua điểm $M(3; 1; 1)$

, và nằm trong mp (α) .

- a) Đường thẳng d và mp (α) cắt nhau.
b) Tồn tại vô số đường thẳng d' đi qua M và $d' \parallel d$.
c) Nếu Δ tạo với d một góc nhỏ nhất thì Sin của góc giữa chúng bằng $\frac{5\sqrt{39}}{39}$.
d) Nếu Δ tạo với d một góc nhỏ nhất thì nó đi qua điểm $(8; -3; 2)$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 1$, $BC = \sqrt{3}$, $SA = 1$ và SA vuông góc với mặt đáy. Đặt hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ sau:

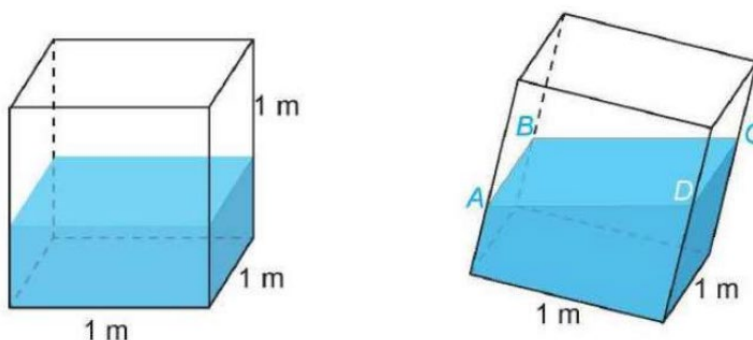


- a) Tọa độ các điểm B, C là $B(1; 0; 0), C(1; \sqrt{3}; 0)$.
- b) Một vector chỉ phương của đường thẳng SB là $\vec{u} = (1; -1; 1)$.
- c) Một vector pháp tuyến của mặt phẳng (SBD) là $\vec{n} = (\sqrt{3}; 1; \sqrt{3})$.
- d) Gọi α là góc giữa hai đường thẳng BD và (SBC) . Khi đó $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Khi gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị mỗi trục tính theo km) vào mỗi sân bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sân bay. Một máy bay ở vị trí $A\left(7; -4; \frac{4}{5}\right)$ sẽ hạ cánh ở vị trí $B(7; 1; 0)$ trên đường băng. Góc giữa đường bay (một phần của đường thẳng AB) và sân bay (một phần của mặt phẳng (Oxy)) bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

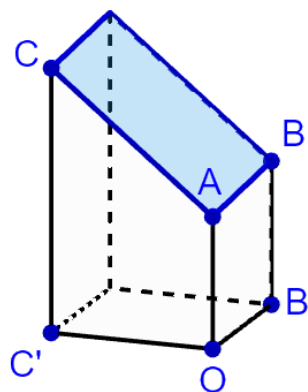
Câu 2: Trong một bể hình lập phương cạnh 1 m có chứa một ít nước. Người ta đặt đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang. Biết rằng, lúc đó mặt nước có dạng hình bình hành $ABCD$ và khoảng cách từ các điểm A, C đến đáy bể tương ứng là 25 cm, 75 cm.



Tìm khoảng cách từ điểm B đến mặt đáy bể khi góc giữa mặt nước và mặt đáy bể đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $(P): x - y + z - 2 = 0$, $d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$ và điểm $A(2; 1; 1) \in (P)$. Đường thẳng Δ qua A , nằm trong (P) và tạo với d một góc nhỏ nhất. Biết $\Delta \cap (Oxy) = B(m; n; p)$. Giá trị $T = 7m + 7n + p$ bằng

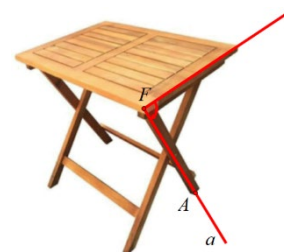
- Câu 4:** Một căn gác có chiếc cửa sổ trời như hình vẽ. Tính góc (theo đơn vị độ, làm tròn đến hàng phần mười) giữa mặt nghiêng của chiếc cửa sổ trời với mặt sàn. Biết rằng khi mặt trời chiếu vuông góc với mặt sàn thì hình chiếu của chiếc cửa sổ là một hình vuông có cạnh 1,5 m và chiều cao so với mặt sàn của các điểm A, B, C lần lượt là 1,2 m, 1,3 m và 2,4 m (xem hình vẽ minh họa).



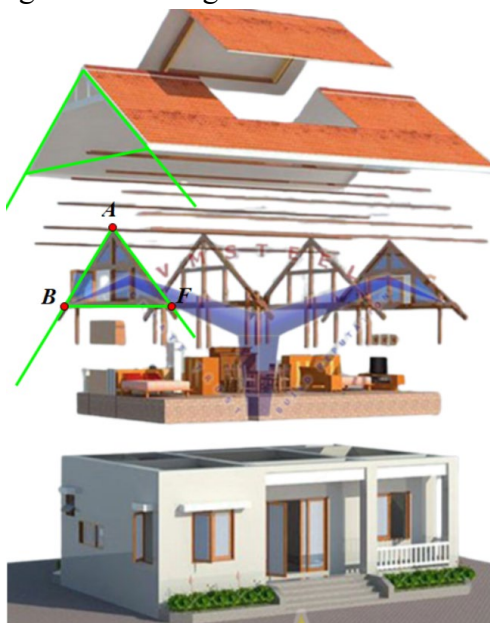
- Câu 5:** Một chiếc bàn gấp gọn đã được thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$. Điểm A là chân bàn tiếp xúc với mặt

đất thuộc đường thẳng $a: \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 + t \\ z = -2 + 4t \end{cases}$ cắt mặt bàn

$(P): x + y - 2z + 6 = 0$ tại điểm F . Độ dài chân bàn $FA = 40\sqrt{3} \text{ cm}$, khi đó độ cao của mặt bàn tính từ mặt đất là bao nhiêu cm ?



- Câu 6:** Một kỹ sư Strong thiết lập một hệ tọa độ $Oxyz$ để theo dõi vị trí lắp đặt của 2 mái nhà đã được gắn với nhau tạo thành hình chữ V vào các thanh đà sao cho chuẩn xác nhất. Biết phương trình mặt phẳng chứa 2 mái là $(P): x + 2y - 2z + 6 = 0$ và $(Q): x + 2y + z - 5 = 0$, điểm A là nóc ngói, 2 điểm B, F là rìa đuôi ngói của mỗi mái tiếp xúc giữa mái và thanh đà như hình vẽ (các thanh đà dài như nhau) khi cố định phần dưới của ngôi nhà. Khoảng cách $BF = 20 \text{ m}$, khi đó tỉ số độ dài của thanh đà AF và khoảng cách BF bằng



----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1 và đường thẳng d_2 lần lượt có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_{d_1} = (1; -2; -3)$ và $\vec{u}_{d_2} = (-4; 1; 5)$. Góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 là

A. 30° .

B. 45° .

C. 90° .

D. 60° .

Lời giải

Ta có
$$\begin{cases} \vec{u}_{d_1} = (1; -2; -3) \\ \vec{u}_{d_2} = (-4; 1; 5) \end{cases}$$

$$\cos(d_1; d_2) = \frac{|\vec{u}_{d_1} \cdot \vec{u}_{d_2}|}{|\vec{u}_{d_1}| \cdot |\vec{u}_{d_2}|} = \frac{|-4 - 2 - 15|}{\sqrt{1+4+9} \cdot \sqrt{16+1+25}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Suy ra $(d_1; d_2) = 30^\circ$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d có VTCP $\vec{u} = (2; 2; 1)$. Gọi α là góc giữa d và trục Ox . Tính $\cos \alpha$.

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Trục Ox có VTCP $\vec{i} = (1; 0; 0)$.

Đường thẳng d có VTCP $\vec{u} = (2; 2; 1)$.

Vậy $\cos \alpha = \left| \cos(\vec{i}, \vec{u}) \right| = \frac{|2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{2}{3}.$

Câu 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x - y - z - 3 = 0$ và $(Q): x - z - 2 = 0$. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Ta có $(P): 2x - y - z - 3 = 0 \Rightarrow$ VTPT $\vec{n}_1 = (2; -1; -1)$.

$(Q): x - z - 2 = 0 \Rightarrow$ VTPT $\vec{n}_2 = (1; 0; -1)$.

Khi đó $\cos((P), (Q)) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Do đó $((P), (Q)) = 30^\circ$.

Câu 4: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - z - 5 = 0$. Hãy tính cosin góc tạo bởi đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) .

A. $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{30}}{6}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; -1; 2)$.

(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; -1; -1)$.

Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) ($0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$), ta có:

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|4 + 1 - 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

$$\text{Khi đó } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6}.$$

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{2}$. Biết rằng trong mặt phẳng (P) có hai đường thẳng d_1, d_2 cùng đi qua điểm $A(1; -1; 1)$ và cùng cách đường thẳng d một khoảng bằng 1. Tính $\sin \varphi$ với φ là góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 .

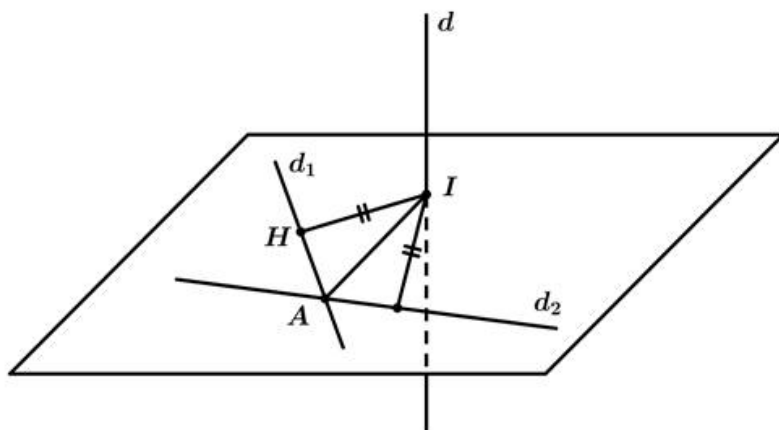
A. $\frac{1}{2}$.

B. 1

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{3}{7}$.

Lời giải



Theo bài ra ta có: (P) $\perp$ d . Và (P) $\cap$ $d = I(1; 0; 0) \Rightarrow AI = \sqrt{2}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng d_1 ta có $HI = 1$

Trong tam giác vuông HAI ta có $\sin \hat{A} = \frac{HI}{AI} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \hat{A} = 45^\circ \Rightarrow 2\hat{A} = 90^\circ$

$\Rightarrow \varphi = 180^\circ - 2\hat{A} = 90^\circ$.

Vậy ta có $\sin \varphi = 1$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $2x - y + 2z - 1 = 0$ và mặt phẳng (Q): $4x - 4y + 3z - 2 = 0$. Đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (P), có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (m; n; 1)$. Khi Δ tạo với (Q) một góc lớn nhất thì sin của góc tạo bởi đường thẳng Δ và mặt phẳng (Q) bằng bao nhiêu?

A. $\frac{2\sqrt{41}}{41}$.

B. 1.

C. $\frac{\sqrt{41}}{41}$.

D. $\frac{\sqrt{205}}{41}$.

Lời giải

Ta có $\vec{n}_p = (2; -1; 2)$ và $\vec{n}_Q = (4; -4; 3)$.

Vì $\Delta // (P)$ nên $\vec{u} \perp \vec{n}_p \Rightarrow 2m - n + 2 = 0 \Leftrightarrow n = 2m + 2$.

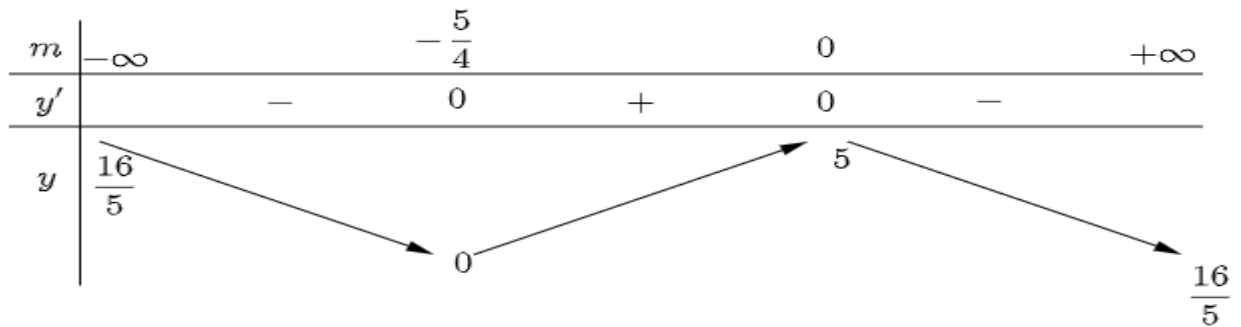
$$\text{Mặt khác: } \sin(\Delta, (Q)) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}_Q|}{|\vec{u}| |\vec{n}_Q|} = \frac{|4m - 4n + 3|}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1} \cdot \sqrt{41}} = \frac{|4m + 5|}{\sqrt{41} \sqrt{5m^2 + 8m + 5}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{41}} \cdot \sqrt{\frac{16m^2 + 40m + 25}{5m^2 + 8m + 5}}.$$

Vì $0^\circ \leq (\Delta, (Q)) \leq 90^\circ$ nên $(\Delta, (Q))$ lớn nhất khi $\sin(\Delta, (Q))$ lớn nhất.

$$\text{Xét hàm số } f(m) = \frac{16m^2 + 40m + 25}{5m^2 + 8m + 5} \Rightarrow f'(m) = \frac{-72m^2 - 90m}{(5m^2 + 8m + 5)^2}.$$

BBT



Dựa vào BBT ta có $\max_{m \in \mathbb{R}} f(m) = 5$ tại $m = 0$.

Do đó $(\Delta, (Q))$ lớn nhất khi $m = 0$. Suy ra $\sin(\Delta, (Q)) = \frac{\sqrt{205}}{41}$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính góc giữa mặt phẳng $(P): 2x - 3y - 4 = 0$ và mặt phẳng (Oxy) .

A. 30° .

B. 90° .

C. 60° .

D. 0° .

Lời giải

Mặt phẳng $(P): 2x - 3y - 4 = 0$ có vector pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (2; -3; 0)$.

Mặt phẳng (Oxy) có phương trình $z = 0$ nên có vector pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (0; 0; 1)$.

$$\text{Do đó, } \cos((P), (Oxy)) = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = 0, \text{ suy ra } ((P), (Oxy)) = 90^\circ.$$

Vậy góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Oxy) bằng 90° .

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, góc giữa đường thẳng d chứa trục Ox và mặt phẳng $(P): 3y - z + 5 = 0$ bằng

A. 90° .

B. 60° .

C. 0° .

D. 30° .

Lời giải

Đường thẳng d chứa trục Ox có vector chỉ phương $\vec{u} = (1; 0; 0)$; mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (0; 3; -1)$.

Gọi α là góc tạo bởi d và (P) . Ta có $\sin \alpha = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}) \right| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = 0$, suy ra $\alpha = 0^\circ$.

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính góc giữa hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = 5 \end{cases}$ và

$$d_2: \begin{cases} x = -2t' \\ y = -3 + t' \\ z = 1 - 2t' \end{cases}$$

A. 60° .

B. 45° .

C. 30° .

D. 90° .

Lời giải

Ta có $\vec{u}_1 = (-1; 1; 0)$ là vector chỉ phương của đường thẳng d_1 ;

$\vec{u}_2 = (-2; 1; -2)$ là vector chỉ phương của đường thẳng d_2 .

$$\text{Suy ra } \cos(d_1, d_2) = \left| \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \right| = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{|-1 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-2)|}{\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy $(d_1, d_2) = 45^\circ$.

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính góc giữa hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z}{4}$ và

$$d_2: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -3 \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

A. 60° .

B. 90° .

C. 30° .

D. 45° .

Lời giải

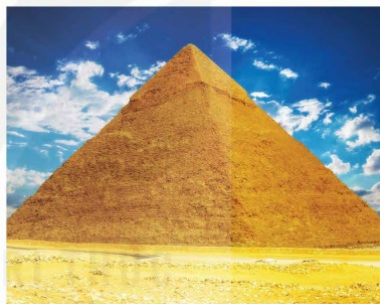
Ta có $\vec{u}_1 = (1; -1; 4)$ là vector chỉ phương của đường thẳng d_1 ;

$\vec{u}_2 = (2; 0; -2)$ là vector chỉ phương của đường thẳng d_2 .

$$\text{Suy ra } \cos(d_1, d_2) = \left| \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \right| = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{6}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}} = \frac{1}{2}.$$

Vậy $(d_1, d_2) = 60^\circ$.

Câu 11: Kim tự tháp Kheops ở Ai Cập có dạng hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình vuông với cạnh dài 230 m, các cạnh bên bằng nhau và dài 219 m (theo *britannica.com*) (hình vẽ). Gọi G là trọng tâm tam giác SCD . Tính góc giữa hai đường thẳng BG và SA (làm tròn tới hàng đơn vị độ).



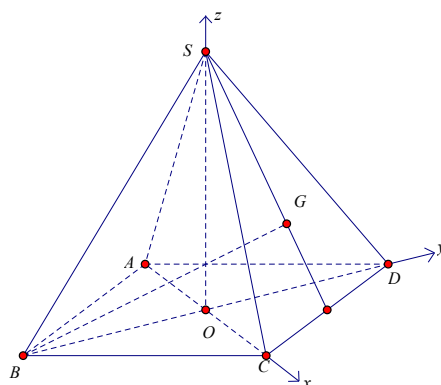
A. 66° .

B. 69° .

C. 70° .

D. 71° .

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD$. Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên ta chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Đặt $AB = 230 = a$, $SA = 219 = b$.

Ta có $OA = OB = OC = OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SAO vuông tại O có $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{b^2 - \frac{2a^2}{4}} = \frac{\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{2}$.

Do đó: $A\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$, $B\left(0; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $C\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$, $D\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$,
 $S\left(0; 0; \frac{\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{2}\right)$.

Vì G là trọng tâm tam giác SCD nên $G\left(\frac{a\sqrt{2}}{6}; \frac{a\sqrt{2}}{6}; \frac{\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{6}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{SA} = \left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; -\frac{\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{2}\right)$, $\overrightarrow{BG} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{6}; \frac{2a\sqrt{2}}{3}; \frac{\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{6}\right)$.

Suy ra $\cos(SA, BG) = \frac{|\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{BG}|}{|\overrightarrow{SA}| \cdot |\overrightarrow{BG}|} = \frac{\left|-\frac{a^2}{6} - \frac{4b^2 - 2a^2}{12}\right|}{b \cdot \frac{\sqrt{b^2 + 8a^2}}{3}} = \frac{\left|-\frac{a^2}{6} - \frac{2b^2 - a^2}{6}\right|}{b \cdot \frac{\sqrt{b^2 + 8a^2}}{3}} = \frac{\frac{b^2}{3}}{b \cdot \frac{\sqrt{b^2 + 8a^2}}{3}}$

$= \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8a^2}} = \frac{219}{\sqrt{471161}}$.

Vậy $(SA, BG) \approx 71^\circ 23' 40''$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B có $AB = BC = 4$. Gọi H là trung điểm của AB , $SH \perp (ABC)$. Mặt phẳng (SBC) tạo với mặt đáy một góc 60° . Côsin góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) bằng

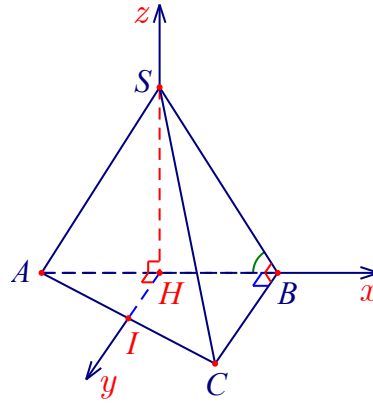
A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

B. $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

D. $\frac{1}{\sqrt{7}}$.

Lời giải



Ta có $\begin{cases} AB \perp BC \\ SH \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB).$

Vì $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ (SAB) \perp BC \\ (SAB) \cap (SBC) = SB \\ (SAB) \cap (ABC) = AB \end{cases}$ nên $((SBC), (ABC)) = (SB, AB) = \widehat{SBA} = 60^\circ.$

Suy ra $SH = BH \tan 60^\circ = 2\sqrt{3}.$

Chọn hệ tọa độ $Hxyz$ như hình vẽ.

Ta có $H(0;0;0)$, $A(-2;0;0)$, $B(2;0;0)$, $C(2;4;0)$, $S(0;0;2\sqrt{3})$, $I(0;2;0)$ với I là trung điểm của AC .

Mặt phẳng (ABC) có phương trình là $z = 0$.

Mặt phẳng (SAC) cắt ba trục Hx , Hy , Hx lần lượt tại các điểm $A(-2;0;0)$, $I(0;2;0)$,

$S(0;0;2\sqrt{3})$ nên có phương trình: $\frac{x}{-2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2\sqrt{3}} = 1 \Leftrightarrow -3x + 3y + \sqrt{3}z - 6 = 0.$

Gọi φ là góc giữa (SAC) và (ABC) , ta có $\cos \varphi = \frac{|1 \cdot \sqrt{3}|}{1 \cdot \sqrt{9+9+3}} = \frac{1}{\sqrt{7}}.$

Vậy côsin góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) bằng $\frac{1}{\sqrt{7}}.$

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABC$ có ba điểm $S(0;0;3)$, $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;2;0)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$.

- a) Côsin góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (ABC) bằng 0 .
- b) Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (ABC) bằng 90° .
- c) Côsin góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) bằng $\frac{3}{7}$.
- d) Côsin góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (P) bằng $\frac{10\sqrt{3}}{21}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
----------------	----------------	---------------	---------------

a) Đúng.

Bốn điểm $S(0;0;3)$, $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;2;0)$ thuộc một tứ diện vuông $S.ABC$ nên dễ thấy $(SAB) \perp (ABC) \Rightarrow \cos((SAB);(ABC)) = 0^\circ$.

b) Đúng

Bốn điểm $S(0;0;3)$, $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;2;0)$ thuộc một tứ diện vuông $S.ABC$ nên dễ thấy $(SAC) \perp (ABC) \Rightarrow ((SAB);(ABC)) = 90^\circ$.

c) Sai. Ta có: $(SBC): \frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \Rightarrow (SBC): 6x + 3y + 2z - 6 = 0$. Suy ra $\vec{n}_{(SBC)} = (6;3;2)$.

(ABC) có $\vec{n}_{(ABC)} = \vec{SA} = (0;0;3)$

$$\cos((SBC);(ABC)) = \frac{|\vec{n}_{(ABC)} \cdot \vec{n}_{(SBC)}|}{|\vec{n}_{(ABC)}| \cdot |\vec{n}_{(SBC)}|} = \frac{|6 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 3|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 3^2} \cdot \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{2}{7}.$$

d) Sai. Ta có:
$$\begin{cases} \vec{n}_{(SBC)} = (6;3;2) \\ \vec{n}_{(P)} = (1;1;1) \end{cases}$$

$$\text{Nên } \cos((SBC);(P)) = \frac{|\vec{n}_{(SBC)} \cdot \vec{n}_{(P)}|}{|\vec{n}_{(SBC)}| \cdot |\vec{n}_{(P)}|} = \frac{|6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{11\sqrt{3}}{21}.$$

Câu 2: Trong không gian, cho mặt phẳng $(P): x - y + 3z - 1 = 0$ và đường thẳng $(d): \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$.

a) đường thẳng d có một vector chỉ phương là $\vec{u}(1;-2;1)$ và mặt phẳng $(P): x - y + 3z - 1 = 0$ có một vector pháp tuyến là $\vec{n}(1;-1;3)$.

b) $\cos(d,(P)) = \sqrt{\frac{6}{11}}$.

c) Gọi (Q) là mặt phẳng song song với (P) , khi đó giá trị sin của góc giữa d và (Q) bằng $\frac{\sqrt{66}}{11}$.

d) Có đúng một mặt phẳng đi qua gốc toạ độ, vuông góc với (P) và tạo với d một góc 30° .

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
----------------	---------------	----------------	---------------

a) đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}(1; -2; 1)$ và mặt phẳng $(P): x - y + 3z - 1 = 0$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}(1; -1; 3)$.

$$b) \sin(d, (P)) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|} = \sqrt{\frac{6}{11}}.$$

c) Vì (Q) song song với (P) nên $\vec{n}(1; -1; 3)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của (Q) . Do đó:

$$\sin(d, (Q)) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|} = \sqrt{\frac{6}{11}} = \frac{\sqrt{66}}{11}.$$

d) Gọi $(R): Ax + By + Cz = 0$ là mặt phẳng đi qua gốc toạ độ, vuông góc với (P) và tạo với d một góc 30° .

Ta có: $(R) \perp (P) \Rightarrow A - B + 3C = 0 \Rightarrow A = B - 3C$.

$$\text{Mặt khác: } \sin(d, (R)) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|A - 2B + C|}{\sqrt{6(A^2 + B^2 + C^2)}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4(-B - 2C)^2 = 6(2B^2 + 10C^2 - 6BC)$$

$$\Leftrightarrow 8B^2 - 52BC + 44C^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} B = C \\ B = \frac{11}{2}C \end{cases}$$

Với $B = C$, chọn $\vec{n}_1 = (-2; 1; 1)$ là vectơ pháp tuyến của (R)

Với $B = \frac{11}{2}C$, chọn $\vec{n}_2 = (5; 11; 2)$ là vectơ pháp tuyến của (R)

Có hai cặp vectơ pháp tuyến nên có hai mặt phẳng (R) thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x + y - z - 3 = 0$, điểm $M(3; 1; 1)$

và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 + 3t \\ z = -3 - 2t \end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng thay đổi sao luôn đi qua điểm $M(3; 1; 1)$

, và nằm trong $\text{mp}(\alpha)$.

a) Đường thẳng d và $\text{mp}(\alpha)$ cắt nhau.

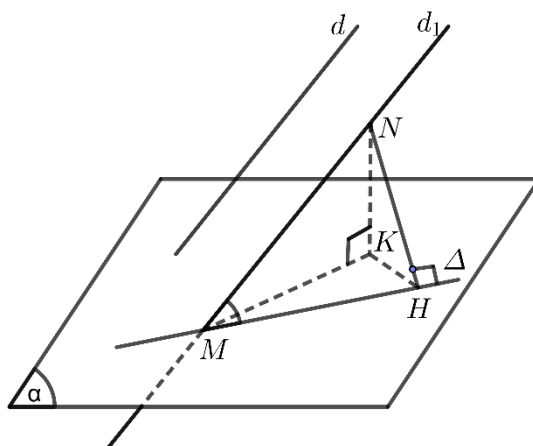
b) Tồn tại vô số đường thẳng d' đi qua M và $d' \parallel d$.

c) Nếu Δ tạo với d một góc nhỏ nhất thì Sin của góc giữa chúng bằng $\frac{5\sqrt{39}}{39}$.

d) Nếu Δ tạo với d một góc nhỏ nhất thì nó đi qua điểm $(8; -3; 2)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------



a) Đúng. Đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (0; 3; -2)$.

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 1; -1)$.

Vì $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) = 5 \neq 0$ nên d cắt (α) .

b) Sai. Để kiểm tra được $M \notin d$ nên tồn tại duy nhất đường thẳng d' đi qua M và $d' \parallel d$.

c) Đúng. Gọi d' là đường thẳng đi qua M và $d' \parallel d$, suy ra d' có phương trình:
$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

Lấy $N(3; 4; -1) \in d'$. Gọi K, H lần lượt là hình chiếu vuông góc của N trên mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ (Hình minh họa bên trên).

Ta có: $(d, \Delta) = \widehat{NMH}$ và $\sin \widehat{NMH} = \frac{NH}{MN} \geq \frac{NK}{MN} \left(= \frac{5\sqrt{39}}{39} \right)$.

Do vậy (d, Δ) nhỏ nhất khi $K \equiv H$ hay Δ là đường thẳng MK .

d) Đúng. Đường thẳng NK có phương trình:
$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

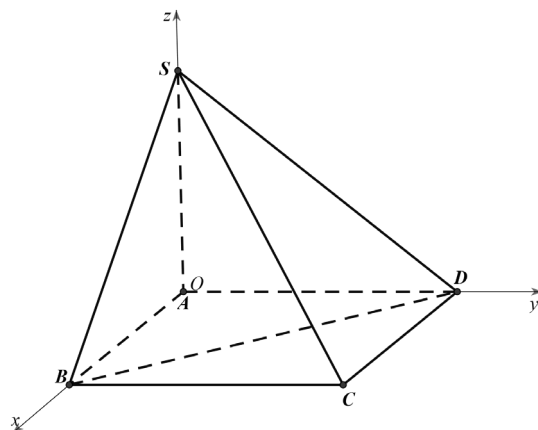
Tọa độ điểm K ứng với t là nghiệm của phương trình:

$(3+t) + (4+t) - (-1-t) - 3 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{5}{3}$. Suy ra $K\left(\frac{4}{3}; \frac{7}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{MK} = \left(-\frac{5}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}(5; -4; 1)$.

Vậy phương trình của Δ :
$$\begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = 1 - 4t \\ z = 1 + t \end{cases}$$
, dễ thấy nó đi qua điểm $(8; -3; 2)$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 1$, $BC = \sqrt{3}$, $SA = 1$ và SA vuông góc với mặt đáy. Đặt hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ sau:



- a) Tọa độ các điểm B, C là $B(1; 0; 0), C(1; \sqrt{3}; 0)$.
- b) Một vector chỉ phương của đường thẳng SB là $\vec{u} = (1; -1; 1)$.
- c) Một vector pháp tuyến của mặt phẳng (SBD) là $\vec{n} = (\sqrt{3}; 1; \sqrt{3})$.
- d) Gọi α là góc giữa hai đường thẳng BD và (SBC) . Khi đó $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

Ta có: $A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), C(1; \sqrt{3}; 0), D(0; \sqrt{3}; 0), S(0; 0; 1)$

* Phương án a) đúng: $B(1; 0; 0), C(1; \sqrt{3}; 0)$

* Phương án b) sai: Đường thẳng SB có vector chỉ phương là $\vec{SB} = (1; 0; -1)$

* Phương án c) đúng:

Ta có $\vec{SB} = (1; 0; -1), \vec{BD} = (-1; \sqrt{3}; 0) \Rightarrow [\vec{SB}, \vec{BD}] = (\sqrt{3}; 1; \sqrt{3})$

Vậy mặt phẳng (SBD) có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (\sqrt{3}; 1; \sqrt{3})$.

* Phương án d) đúng:

Ta có $\vec{SB} = (1; 0; -1), \vec{BC} = (0; \sqrt{3}; 0) \Rightarrow [\vec{SB}, \vec{BC}] = (\sqrt{3}; 0; \sqrt{3})$. Suy ra mặt phẳng (SBC) có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 0; 1)$.

Đường thẳng BD có vector chỉ phương là $\vec{u} = \vec{BD} = (-1; \sqrt{3}; 0)$

Ta có $\sin \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Khi gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị mỗi trục tính theo km) vào mỗi sân bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sân bay. Một máy bay ở vị trí $A\left(7; -4; \frac{4}{5}\right)$ sẽ hạ cánh ở vị trí $B(7; 1; 0)$ trên đường băng. Góc giữa đường bay (một phần của đường thẳng AB) và sân bay (một phần của mặt phẳng (Oxy)) bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Trả lời: 2

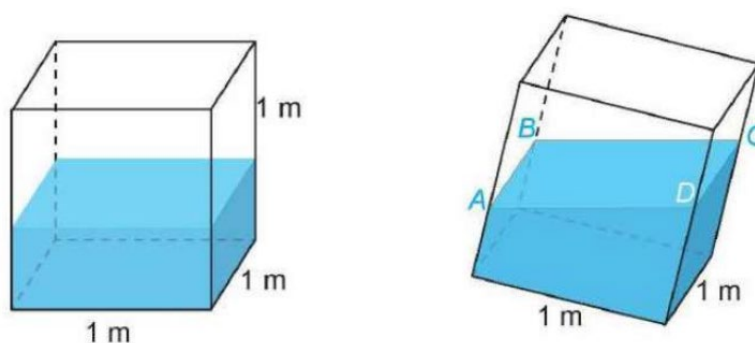
Ta có: $\overrightarrow{AB} = \left(0; 15; \frac{-4}{5}\right)$, mặt phẳng (Oxy) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (0; 0; 1)$.

$$\sin(AB, (Oxy)) = \frac{\left|0 \cdot 0 + 15 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{-4}{5}\right|}{\sqrt{0^2 + 15^2 + \left(\frac{-4}{5}\right)^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1}} = \frac{4\sqrt{5641}}{5641}$$

$$\Rightarrow (AB, (Oxy)) \approx 3^\circ$$

Vậy góc giữa đường bay và sân bay khoảng 3° .

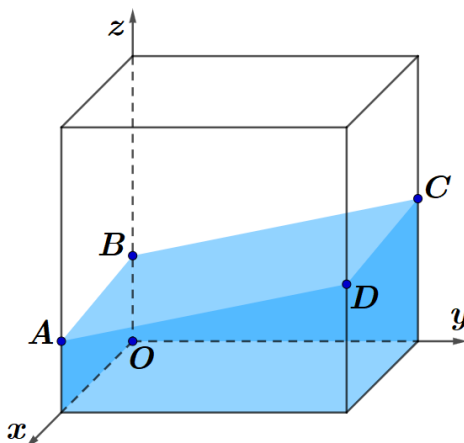
Câu 2: Trong một bể hình lập phương cạnh 1 m có chứa một ít nước. Người ta đặt đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang. Biết rằng, lúc đó mặt nước có dạng hình bình hành $ABCD$ và khoảng cách từ các điểm A, C đến đáy bể tương ứng là 25 cm, 75 cm.



Tìm khoảng cách từ điểm B đến mặt đáy bể khi góc giữa mặt nước và mặt đáy bể đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Trả lời: 50



Chọn hệ trục tọa độ (đơn vị trên mỗi trục là centimet) sao cho các cạnh của hình hộp trùng với các trục tọa độ như hình trên.

Do hình hộp có kích thước đáy là $1\text{m} \times 1\text{m}$ nên $A(100; 0; 25)$, $B(0; 0; b)$, $C(0; 100; 75)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-100; 0; b - 25)$ và $\overrightarrow{AC} = (-100; 100; 50)$.

Nên $\vec{n}_{(ABC)} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (2500 - 100b; 7500 - 100b; -10000) = 100(25 - b; 75 - b; -100)$.

Để góc giữa mặt nước và mặt đáy bể đạt giá trị nhỏ nhất thì $\cos((ABC), (Oxy))$ đạt giá trị lớn nhất.

$$\text{Khi đó } \cos((ABC), (Oxy)) = \left| \cos(\vec{n}_{(ABC)}, \vec{k}) \right| = \frac{|\vec{n}_{(ABC)} \cdot \vec{k}|}{|\vec{n}_{(ABC)}| |\vec{k}|}.$$

$$= \frac{100}{\sqrt{(25-b)^2 + (75-b)^2 + (-100)^2}} = \frac{100}{\sqrt{2b^2 - 200b + 16250}}.$$

Để $\cos((ABC), (Oxy)) = \frac{100}{\sqrt{2b^2 - 200b + 16250}}$ đạt giá trị lớn nhất

thì biểu thức $P = 2b^2 - 200b + 16250$ đạt giá trị nhỏ nhất.

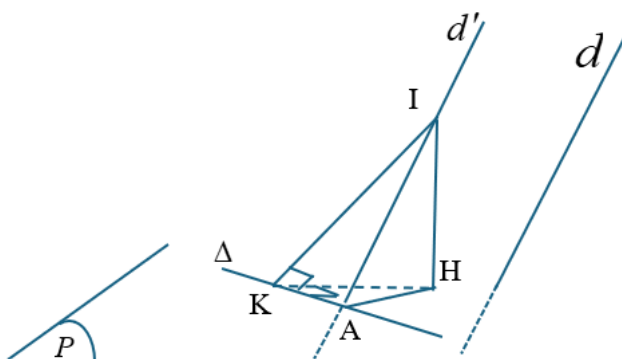
Dễ thấy biểu thức $P = 2b^2 - 200b + 16250$ là một hàm số bậc hai nên đạt giá trị nhỏ nhất là $P = 11250$

tại $b = 50$ hay giá trị $\cos((ABC), (Oxy))$ đạt giá trị lớn nhất là $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ khi $b = 50$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $(P): x - y + z - 2 = 0$, $d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$ và điểm $A(2;1;1) \in (P)$. Đường thẳng Δ qua A , nằm trong (P) và tạo với d một góc nhỏ nhất. Biết $\Delta \cap (Oxy) = B(m; n; p)$. Giá trị $T = 7m + 7n + p$ bằng

Lời giải

Trả lời: 18



Gọi d' là đường thẳng qua A và song song với d . Trên d' lấy điểm I ; H là hình chiếu vuông góc của I trên (P) và K là hình chiếu vuông góc của H trên Δ .

Khi đó $(d, \Delta) = (d', \Delta) = \widehat{IAK} = \alpha$.

mà $\sin \alpha = \frac{IK}{IA} \geq \frac{IH}{IA}$ suy ra $\alpha_{\min} \Leftrightarrow H \equiv K$ hay Δ qua A và H , hay Δ là hình chiếu vuông góc của d' trên (P) .

Ta có: (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)} = (1; -1; 1)$, d có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = (-1; 2; 2)$, suy ra

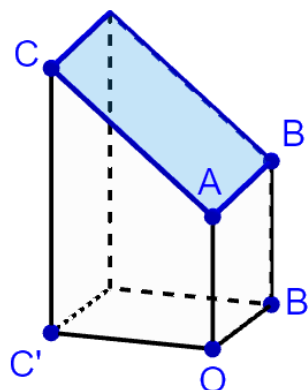
$$[\vec{n}_{(P)}, \vec{u}_d] = (4; 3; -1).$$

$$\vec{u}_{\Delta} = [\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(AIH)}] = [\vec{n}_{(P)}, [\vec{n}_{(P)}, \vec{u}_d]] = (-2; 5; 7) \Rightarrow \Delta: \frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-1}{7}$$

Khi đó $\Delta \cap (Oxy) = B \Rightarrow B\left(\frac{16}{7}; \frac{2}{7}; 0\right)$, do đó $m = \frac{16}{7}, n = \frac{2}{7}, p = 0$.

Vậy $T = 7m + 7n + p = 18$.

Câu 4: Một căn gác có chiếc cửa sổ trời như hình vẽ. Tính góc (theo đơn vị độ, làm tròn đến hàng phần mười) giữa mặt nghiêng của chiếc cửa sổ trời với mặt sàn. Biết rằng khi mặt trời chiếu vuông góc với mặt sàn thì hình chiếu của chiếc cửa sổ là một hình vuông có cạnh 1,5 m và chiều cao so với mặt sàn của các điểm A, B, C lần lượt là 1,2 m, 1,3 m và 2,4 m (xem hình vẽ minh họa).



Lời giải

Trả lời: 38,8

Gọi O, B', C' lần lượt là hình chiếu của A, B, C lên sàn nhà.

Ta gán trục tọa độ như sau: Tia Ox trùng với OB' , Oy trùng với OC' , Oz trùng với OA , mỗi đơn vị trên trục tọa độ ứng với 10 cm trong thực tế. Khi đó ta có tọa độ của các điểm như sau:

$$O(0;0;0), A(0;0;12), B(15;0;13), C(0;15;24) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(15;0;1), \overrightarrow{AC}(0;15;12).$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-15; -180; 225).$$

$$\text{Mặt nghiêng của cửa sổ có vector pháp tuyến: } \vec{n}_2 = \frac{1}{15} [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-1; -12; 15)$$

Mặt sàn trùng với mặt phẳng Oxy suy ra có vector pháp tuyến $\vec{n}_1 = (0;0;1)$.

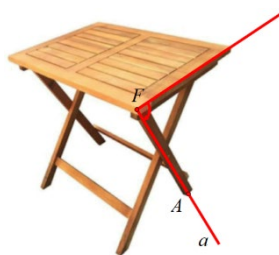
$$\Rightarrow \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{|15|}{\sqrt{(-1)^2 + (-12)^2 + 15^2} \cdot \sqrt{1^2}} = \frac{3\sqrt{370}}{74}$$

$$\Rightarrow (\vec{n}_1, \vec{n}_2) \approx 38,8^\circ.$$

Câu 5: Một chiếc bàn gấp gọn đã được thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$. Điểm A là chân bàn tiếp xúc với mặt

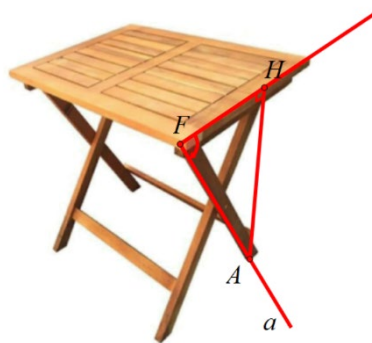
$$\text{đất thuộc đường thẳng } a: \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 + t \\ z = -2 + 4t \end{cases} \text{ cắt mặt bàn } (P): x + y - 2z + 6 = 0 \text{ tại điểm } F. \text{ Độ dài}$$

chân bàn $FA = 40\sqrt{3} \text{ cm}$, khi đó độ cao của mặt bàn tính từ mặt đất là bao nhiêu cm?



Lời giải

Trả lời: 40



Đường thẳng $a: \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 + t \\ z = -2 + 4t \end{cases}$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 1; 4)$.

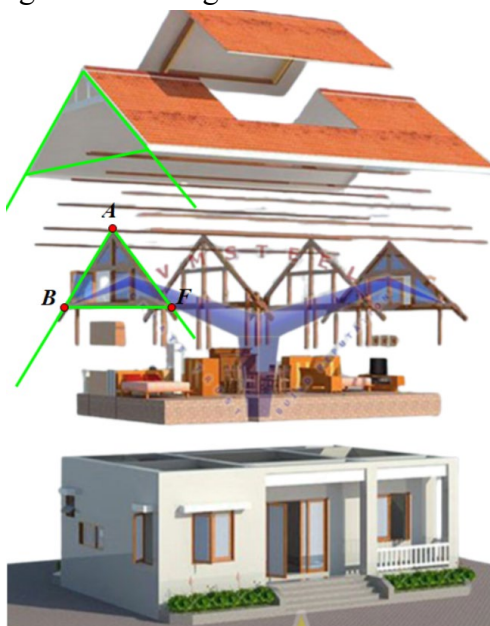
Mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 6 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 1; -2)$.

$$\sin(a, (P)) = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}) \right| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \sin \varphi$$

Độ cao của mặt bàn tính từ mặt đất là khoảng cách từ chân bàn A đến mặt phẳng (P)

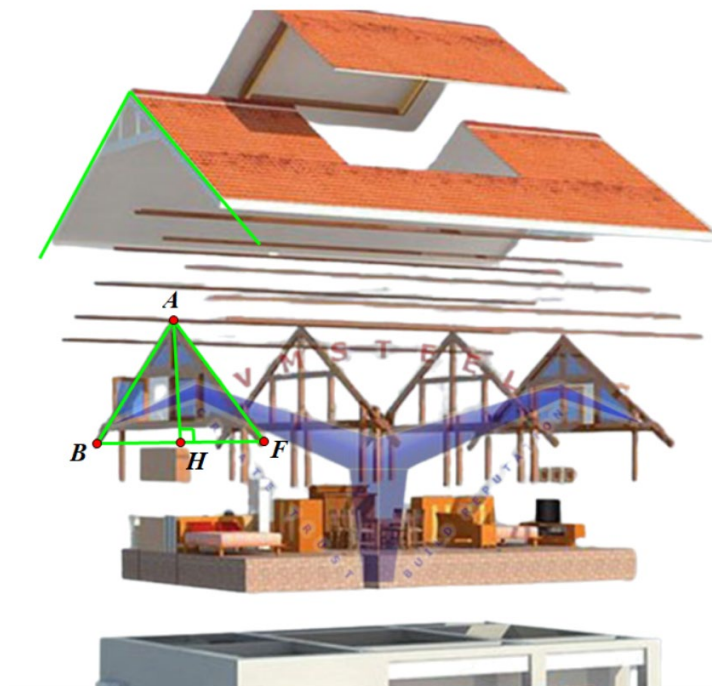
$$\text{Suy ra } d(A, (P)) = AH = FA \cdot \sin \varphi = 40\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = 40 \text{ cm}.$$

Câu 6: Một kỹ sư Strong thiết lập một hệ tọa độ $Oxyz$ để theo dõi vị trí lắp đặt của 2 mái nhà đã được gắn với nhau tạo thành hình chữ V vào các thanh đà sao cho chuẩn xác nhất. Biết phương trình mặt phẳng chứa 2 mái là $(P): x + 2y - 2z + 6 = 0$ và $(Q): x + 2y + z - 5 = 0$, điểm A là nóc ngôi, 2 điểm B, F là rìa đuôi ngói của mỗi mái tiếp xúc giữa mái và thanh đà như hình vẽ (các thanh đà dài như nhau) khi cố định phần dưới của ngôi nhà. Khoảng cách $BF = 20 \text{ m}$, khi đó tỉ số độ dài của thanh đà AF và khoảng cách BF bằng



Lời giải

Trả lời: 0,92



Mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 6 = 0$ có vector pháp tuyến $\vec{n} = (1; 2; -2)$.

Mặt phẳng $(Q): x + 2y + z - 5 = 0$ có vector pháp tuyến $\vec{n} = (1; 2; 1)$.

$$\cos((P), (Q)) = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow ((P); (Q)) \approx 66^\circ$$

Khi ráp 2 mái tiếp xúc với các thanh đà bên dưới ta được $\widehat{BAF} = ((P); (Q)) \approx 66^\circ$.

Theo đề tam giác ABF cân tại A vì $AB = AF \Rightarrow \widehat{AFB} = 57^\circ$

Gọi H là trung điểm BF , khi đó AH cũng là đường cao trong tam giác cân ABF .

$$AF = \frac{HF}{\cos \widehat{AFH}} \approx 18,4m$$

$$\text{Tỉ số } \frac{AF}{BF} = 0,92.$$



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU ĐỀ TEST SỐ 01

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Một vệ tinh quay quanh Trái Đất với độ cao so với mặt đất là 18900 km. Ta xét trong không gian $Oxyz$ với tâm O là tâm Trái Đất, 1 đơn vị dài trong không gian $Oxyz$ tương ứng với 6300 km trên thực tế. Biết bán kính Trái Đất khoảng 6300 km. Phương trình biểu diễn quỹ đạo chuyển động của vệ tinh đó là

- A. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. B. $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. C. $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. D. $x^2 + y^2 + z^2 = 5$.

Câu 2: Một máy Rađa có tầm hoạt động với bán kính tối đa là 20 km. Ta xét trong không gian $Oxyz$ với tâm O là vị trí máy Rađa, 1 đơn vị dài trong không gian $Oxyz$ tương ứng với 10 km trên thực tế. Hỏi trong không gian $Oxyz$ trên, vật thể có tọa độ tương ứng với đáp án nào dưới đây sẽ bị Rađa phát hiện?

- A. $M(1;0;2)$. B. $N(2;-1;1)$. C. $P(1;1;\sqrt{2})$. D. $Q(3;0;0)$.

Câu 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 4z - 5 = 0$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) lần lượt là

- A. $I(0;-2;4)$, $R = 5$. B. $I(0;-1;2)$, $R = \sqrt{10}$.
C. $I(0;2;-4)$, $R = 5$. D. $I(0;1;-2)$, $R = \sqrt{10}$.

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu có tâm $I(2;3;-3)$ và có bán kính $R = 3$ là

- A. $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 9$. B. $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 3$.
C. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = 3$. D. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = 9$.

Câu 5: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(1;0;-3)$, bán kính bằng $R = \sqrt{10}$ có phương trình là:

- A. $(x-1)^2 + y^2 + (z+3)^2 = \sqrt{10}$. B. $(x-1)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 10$.
C. $(x+1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 10$. D. $(x-1)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 40$.

- Câu 6:** Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm là $K(4; -2; 1)$ và đi qua điểm $B(3; -4; -1)$. Phương trình của mặt cầu (S) là:
- A. $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y - 2z - 21 = 0$. B. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 4y + 2z + 12 = 0$.
 C. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - z + 21 = 0$. D. $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y - 2z + 12 = 0$.
- Câu 7:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; 3)$, $B(3; 4; 5)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là
- A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 11$. B. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = \sqrt{11}$.
 C. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 11$. D. $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+4)^2 = 11$.
- Câu 8:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; 2)$ và $B(0; 2; -2)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là
- A. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{\sqrt{33}}{2}$. B. $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{33}{4}$.
 C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 9$. D. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{33}{4}$.
- Câu 9:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(-2; 2; 1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $x = 0$ là
- A. $(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4$. B. $(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 2$.
 C. $(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 5$. D. $(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 5$.
- Câu 10:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + x - 2y + 4z - 3 = 0$. Tìm tâm và bán kính của mặt cầu (S) .
- A. $I\left(-\frac{1}{2}; 1; -2\right); R = \frac{\sqrt{33}}{2}$. B. $I\left(-\frac{1}{2}; 1; -2\right); R = \frac{3}{2}$.
 C. $I\left(\frac{1}{2}; -1; 2\right); R = \frac{\sqrt{33}}{2}$. D. $I\left(\frac{1}{2}; -1; 2\right); R = \frac{3}{2}$.
- Câu 11:** Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là km), một thiết bị phát sóng đặt ở vị trí $I(-1; 2; 4)$ và được thiết kế bán kính phủ sóng là 4000m. Máy thu sóng của thiết bị đó ở vị trí nào sau đây thì thu được sóng?
- A. $M(1; -2; 3)$. B. $N(1; 4; 5)$. C. $P(3; 1; -1)$. D. $Q(-1; 3; -1)$.
- Câu 12:** Hệ thống định vị toàn cầu GPS là một hệ thống cho phép xác định chính xác vị trí của một vật trong không gian. Cách thức hoạt động của GPS như sau: Trong cùng một thời điểm, vị trí M của một vật sẽ được xác định bằng 4 vệ tinh cho trước, các vệ tinh này có gắn máy thu tín hiệu, bằng cách so sánh thời gian từ lúc tín hiệu được phát đi với thời gian nhận tín hiệu phản hồi thì sẽ xác định được khoảng cách từ các vệ tinh đến vị trí M . Như vậy, vị trí M là giao điểm của 4 mặt cầu có tâm là 4 vệ tinh đã cho. Giả sử trong không gian $Oxyz$, 4 vệ tinh có tọa độ là $A(-1; 6; 3)$, $B(4; 8; 1)$, $C(9; 6; 7)$, $D(-15; 18; 7)$. Tìm vị trí M của vật biết khoảng cách từ M đến các vệ tinh lần lượt là $MA = 6$, $MB = 7$, $MC = 12$, $MD = 24$.
- A. $M(1; -2; -1)$. B. $M(-1; 2; -1)$. C. $M(1; 2; -1)$. D. $M(1; -2; 1)$.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

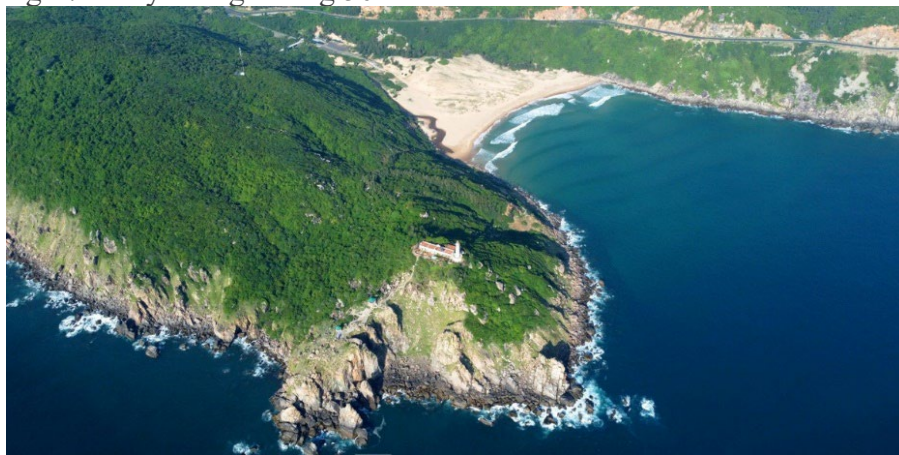
Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 14$ và điểm $M(-1; -3; -2)$.

- a) Mặt cầu (S) có tâm là $I(-1; -2; -3)$.
- b) Khoảng cách từ tâm I đến điểm M là $IM = 2$.
- c) Điểm M nằm trong mặt cầu (S) .
- d) Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Khi đó phương trình mặt phẳng (P) là $y - z + 5 = 0$.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; 3; -4)$ và $B(4; -1; 0)$

- a) Khoảng cách giữa hai điểm A và B bằng 36.
- b) Phương trình mặt cầu (S) đường kính AB có dạng: $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$.
- c) Mặt cầu (S) đường kính AB tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 15 = 0$.
- d) Giả sử đặt hai trạm thu phát sóng tại hai điểm A và B , với bán kính phủ sóng của mỗi trạm bằng bán kính mặt cầu (S) thì người sử dụng điện thoại tại điểm $M(2; 1; -1)$ sử dụng được dịch vụ của trạm phát thu phát sóng.

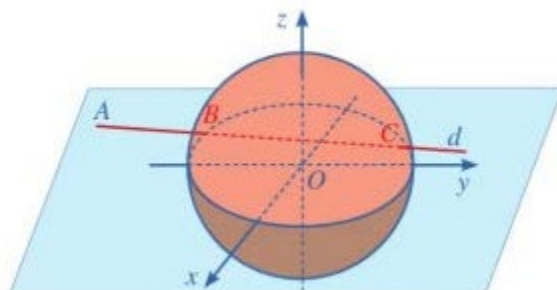
Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), tháp hải đăng Mũi Điện - Phú Yên (là nơi đón ánh bình minh đầu tiên trên đất liền Tổ Quốc), chân tháp được đặt vuông góc với mặt đất (chiều từ chân tháp lên đỉnh tháp cùng hướng với chiều dương của trục Oz) ở vị trí điểm $A(12.040.271; 1.418.620; 84)$. Ngọn đèn của hải đăng được đặt trên đỉnh của tháp hải đăng hình trụ cao 26 m so với mặt đất và sử dụng pin năng lượng mặt trời, có thể phát tín hiệu ánh sáng xa khoảng 27 hải lý tương đương 50 km.



- a) Mặt cầu mô tả ranh giới vùng phủ sóng trên biển của hải đăng có tâm $I(12.040.271; 1.418.620; 110)$ bán kính $R = 50000(m)$.
- b) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới vùng phủ sóng trên biển của hải đăng là $(S): (x-12.040.271)^2 + (y-1.418.620)^2 + (z-84)^2 = 50.000^2$.
- c) Người đi biển ở trên Cù lao Mái nhà tại vị trí $B(12.026.000; 1.461.000; 0)$ nhìn thấy ánh đèn của ngọn hải đăng.
- d) Điểm cực đông của mũi Điện là điểm $C(12.040.452; 1.418.462; 0)$. Từ điểm C một chiếc tàu di chuyển trên mặt biển (mặt phẳng (Oxy)) theo hướng của vector đơn vị $\vec{i}$, để vẫn nhìn thấy ánh đèn của hải đăng thì khoảng cách tối đa tàu di chuyển là 50.000 mét.

Câu 4: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), đài kiểm soát không lưu của một sân bay ở vị trí $O(0;0;0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa $600km$. Một máy bay đang chuyển động với vận tốc $900km/h$ theo đường thẳng d có phương

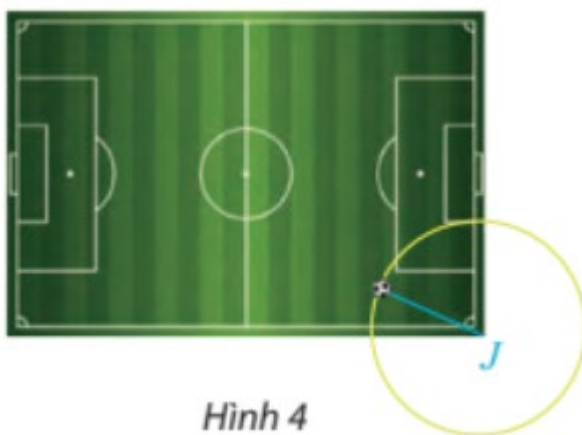
$$\text{trình} \begin{cases} x = -1000 + 100t \\ y = -300 + 80t \\ z = 100\sqrt{11} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ và hướng về đài kiểm soát không lưu (như hình vẽ).}$$



- Ranh giới vùng phát sóng bên ngoài của đài kiểm soát không lưu trong không gian là mặt cầu có bán kính bằng $300km$.
- Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian là $x^2 + y^2 + z^2 = 360000$.
- Máy bay đang chuyển động theo đường thẳng d đến vị trí điểm $M(-500;100;100\sqrt{11})$. Vị trí này nằm ngoài vùng kiểm soát không lưu của đài kiểm soát không lưu sân bay.
- Thời gian kể từ khi đài kiểm soát không lưu phát hiện máy bay đến khi máy ra khỏi vùng kiểm soát không lưu là $\frac{4}{3}$ giờ.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Công nghệ hỗ trợ trọng tài VAR (Video Assistant Referee) thiết lập một hệ tọa độ $Oxyz$ để theo dõi vị trí của quả bóng M . Cho biết M đang nằm trên mặt sân có phương trình $z = 0$, đồng thời thuộc mặt cầu (S): $(x-22)^2 + (y-4)^2 + (z-13)^2 = 194$ (đơn vị độ dài tính theo mét). Gọi J là hình chiếu tâm I của mặt cầu (S) xuống mặt sân bóng. Khoảng cách từ vị trí M của quả bóng đến điểm J là:



Hình 4

Câu 2: Phía trước của một sân vận động, người ta có đặt một quả bóng đá khổng lồ. Cách đó không xa, có một bóng đèn. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị đo là mét), giả sử mặt ngoài quả bóng (S) có phương trình $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9$ và bóng đèn ở vị trí $M(15;1;6)$. Khi đó, khoảng cách xa nhất mà bóng đèn có thể chiếu đến một điểm trên quả bóng bằng MA , với MA chính là tiếp tuyến kẻ từ M đến (S) và A là tiếp điểm. Vậy MA bằng bao nhiêu mét?

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là mét), một thiết bị phát sóng wifi đặt tại vị trí $A(3;1;1)$ như hình vẽ. Vùng phủ sóng tốt nhất của thiết bị có bán kính bằng $11(m)$. Hỏi số giá trị nguyên của tham số m để một người sử dụng điện thoại tại điểm $E(-3;8;m)$ có thể bắt được tín hiệu wifi tốt nhất của thiết bị nói trên.



Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(-2;3;0)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-4}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{2}$. Biết đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 8$. Tính bán kính của mặt cầu (S) .

Câu 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ và hai điểm $A(1;3;4)$, $B(4;1;9)$; M là điểm thay đổi trên (S) . Gọi m, n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2MA^2 - MB^2$. Xác định $(m+n)$.

Câu 6: Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;3)$, mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y - 10z + 2 = 0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A , nằm trong mặt phẳng (P) và cắt (S) tại hai điểm M, N . Độ dài đoạn MN nhỏ nhất bằng a . Tính giá trị a^2 .

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Một vệ tinh quay quanh Trái Đất với độ cao so với mặt đất là 18900 km. Ta xét trong không gian $Oxyz$ với tâm O là tâm Trái Đất, 1 đơn vị dài trong không gian $Oxyz$ tương ứng với 6300 km trên thực tế. Biết bán kính Trái Đất khoảng 6300 km. Phương trình biểu diễn quỹ đạo chuyển động của vệ tinh đó là

- A. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. B. $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. C. $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. D. $x^2 + y^2 + z^2 = 5$.

Lời giải

Khoảng cách từ tâm Trái Đất đến vệ tinh là $18900 + 6300 = 25200$ tương ứng bằng 4 đơn vị. Ta thấy quỹ đạo chuyển động của vệ tinh quanh Trái Đất là một mặt cầu có tâm là tâm Trái Đất có tọa độ là $O(0;0;0)$ và bán kính $R = 4$.

Do đó phương trình mặt cầu là: $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

Câu 2: Một máy Rađa có tầm hoạt động với bán kính tối đa là 20 km. Ta xét trong không gian $Oxyz$ với tâm O là vị trí máy Rađa, 1 đơn vị dài trong không gian $Oxyz$ tương ứng với 10 km trên thực tế. Hỏi trong không gian $Oxyz$ trên, vật thể có tọa độ tương ứng với đáp án nào dưới đây sẽ bị Rađa phát hiện?

- A. $M(1;0;2)$. B. $N(2;-1;1)$. C. $P(1;1;\sqrt{2})$. D. $Q(3;0;0)$.

Lời giải

Ta thấy quỹ đạo của Rađa là một khối cầu giới hạn bởi mặt cầu (S) có tâm là vị trí máy Rađa có tọa độ là $O(0;0;0)$ và bán kính $R = 2$.

Do đó ta có phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Vật thể bắt đầu bị phát hiện khi nó nằm trong hoặc trên mặt cầu (S) .

Trong 4 đáp án trên ta thấy có đáp án C thỏa mãn phương trình mặt cầu (S) các đáp án còn lại đều nằm ngoài (S) .

Câu 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 4z - 5 = 0$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) lần lượt là

- A. $I(0;-2;4)$, $R = 5$. B. $I(0;-1;2)$, $R = \sqrt{10}$.
C. $I(0;2;-4)$, $R = 5$. D. $I(0;1;-2)$, $R = \sqrt{10}$.

Lời giải

Ta xác định các hệ số tương ứng như sau : $a = 0; b = \frac{2}{-2} = -1; c = \frac{-4}{-2} = 2; d = -5$.

Tọa độ tâm $I(0;-1;2)$.

Bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{10}$.

Vậy tâm $I(0;-1;2)$ và $R = \sqrt{10}$.

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu có tâm $I(2;3;-3)$ và có bán kính $R = 3$ là

A. $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 9.$

B. $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 3.$

C. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = 3.$

D. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = 9.$

Lời giải

Phương trình mặt cầu tâm $I(2;3;-3)$ và có bán kính $R=3$ là

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = 9.$$

Câu 5: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(1;0;-3)$, bán kính bằng $R=\sqrt{10}$ có phương trình là:

A. $(x-1)^2 + y^2 + (z+3)^2 = \sqrt{10}.$

B. $(x-1)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 10.$

C. $(x+1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 10.$

D. $(x-1)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 40.$

Lời giải

Phương trình mặt cầu cần tìm có dạng: $(x-1)^2 + (y-0)^2 + (z-(-3))^2 = 5^2.$

Hay $(x-1)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 5^2.$

Câu 6: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm là $K(4;-2;1)$ và đi qua điểm $B(3;-4;-1)$. Phương trình của mặt cầu (S) là:

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y - 2z - 21 = 0.$

B. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 4y + 2z + 12 = 0.$

C. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - z + 21 = 0.$

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y - 2z + 12 = 0.$

Lời giải

Bán kính mặt cầu thỏa mãn $R^2 = KB^2 = (3-4)^2 + (-4+2)^2 + (-1-1)^2 = 9$

Phương trình mặt cầu cần tìm có dạng: $(x-4)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9.$

Hay $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y - 2z + 12 = 0.$

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;3)$, $B(3;4;5)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 11.$

B. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = \sqrt{11}.$

C. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 11.$

D. $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+4)^2 = 11.$

Lời giải

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(2;1;4)$, bán kính $R = IA = \sqrt{11}.$

Phương trình mặt cầu cần tìm có dạng: $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 11.$

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;2)$ và $B(0;2;-2)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{\sqrt{33}}{2}.$

B. $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{33}{4}.$

C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 9.$

D. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{33}{4}.$

Lời giải

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$ là tâm của mặt cầu.

Bán kính của mặt cầu là $R = IA = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-2)^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{33}}{2}$.

Vậy phương trình mặt cầu đường kính AB là $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{33}{4}$.

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(-2; 2; 1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $x = 0$ là

A. $(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4$.

B. $(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 2$.

C. $(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 5$.

D. $(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 5$.

Lời giải

Vì mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng nên bán kính $R = d(I, (Oyz)) = \frac{|-2|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = 2$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + x - 2y + 4z - 3 = 0$. Tìm tâm và bán kính của mặt cầu (S) .

A. $I\left(-\frac{1}{2}; 1; -2\right); R = \frac{\sqrt{33}}{2}$.

B. $I\left(-\frac{1}{2}; 1; -2\right); R = \frac{3}{2}$.

C. $I\left(\frac{1}{2}; -1; 2\right); R = \frac{\sqrt{33}}{2}$.

D. $I\left(\frac{1}{2}; -1; 2\right); R = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Từ phương trình của mặt cầu (S) , suy ra $a = -\frac{1}{2}; b = 1; c = -2; d = -3$.

Nên $a^2 + b^2 + c^2 - d = \frac{33}{4} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{33}}{2}$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là km), một thiết bị phát sóng đặt ở vị trí $I(-1; 2; 4)$ và được thiết kế bán kính phủ sóng là 4000m. Máy thu sóng của thiết bị đó ở vị trí nào sau đây thì thu được sóng?

A. $M(1; -2; 3)$.

B. $N(1; 4; 5)$.

C. $P(3; 1; -1)$.

D. $Q(-1; 3; -1)$.

Lời giải

Khu vực phủ sóng của thiết bị là một vùng không gian có dạng hình cầu có tâm là $I(-1; 2; 4)$, bán kính $R = 4$.

Ta có: $IM = \sqrt{21} > R; IP = \sqrt{42} > R; IQ = \sqrt{26} > R$ nên 3 vị trí M, P, Q không thu được sóng từ thiết bị; còn $IN = 3 < R$ nên ở vị trí N sẽ thu được sóng.

- Câu 12:** Hệ thống định vị toàn cầu GPS là một hệ thống cho phép xác định chính xác vị trí của một vật trong không gian. Cách thức hoạt động của GPS như sau: Trong cùng một thời điểm, vị trí M của một vật sẽ được xác định bằng 4 vệ tinh cho trước, các vệ tinh này có gắn máy thu tín hiệu, bằng cách so sánh thời gian từ lúc tín hiệu được phát đi với thời gian nhận tín hiệu phản hồi thì sẽ xác định được khoảng cách từ các vệ tinh đến vị trí M . Như vậy, vị trí M là giao điểm của 4 mặt cầu có tâm là 4 vệ tinh đã cho. Giả sử trong không gian $Oxyz$, 4 vệ tinh có tọa độ là $A(-1;6;3)$, $B(4;8;1)$, $C(9;6;7)$, $D(-15;18;7)$. Tìm vị trí M của vật biết khoảng cách từ M đến các vệ tinh lần lượt là $MA = 6$, $MB = 7$, $MC = 12$, $MD = 24$.
- A.** $M(1;-2;-1)$. **B.** $M(-1;2;-1)$. **C.** $M(1;2;-1)$. **D.** $M(1;-2;1)$.

Lời giải

Gọi $M(a;b;c)$. Khi đó ta có:

$$(a+1)^2 + (b-6)^2 + (c-3)^2 = 36 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2a - 12b - 6c + 10 = 0 \quad (1)$$

$$(a-4)^2 + (b-8)^2 + (c-1)^2 = 49 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 8a - 16b - 2c + 32 = 0 \quad (2)$$

$$(a-9)^2 + (b-6)^2 + (c-7)^2 = 144 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 18a - 12b - 14c + 22 = 0 \quad (3)$$

$$(a+15)^2 + (b-18)^2 + (c-7)^2 = 576 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 30a - 36b - 14c + 22 = 0 \quad (4)$$

Giải hệ gồm 4 phương trình trên ta được $a = 1; b = 2; c = -1$. Nên $M(1;2;-1)$.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

- Câu 1:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 14$ và điểm $M(-1;-3;-2)$.

- a) Mặt cầu (S) có tâm là $I(-1;-2;-3)$.
 b) Khoảng cách từ tâm I đến điểm M là $IM = 2$.
 c) Điểm M nằm trong mặt cầu (S) .
 d) Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Khi đó phương trình mặt phẳng (P) là $y - z + 5 = 0$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
----------------	---------------	----------------	---------------

a) Đúng.

Mặt cầu (S) có tâm là $I(-1;-2;-3)$.

b) Sai.

Ta có: $IM = \sqrt{(-1+1)^2 + (-3+2)^2 + (-2+3)^2} = \sqrt{2}$.

c) Đúng.

Ta có $IM = \sqrt{2}$ và mặt cầu (S) có bán kính $R = \sqrt{14} \Rightarrow IM < R$.

Vậy điểm M nằm trong mặt cầu (S) .

d) Sai.

Do điểm M nằm trong mặt cầu (S) nên mặt phẳng (P) đi qua M luôn cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn.

Gọi H là tâm của đường tròn giao tuyến $\Rightarrow IH \perp (P)$, do đó bán kính đường tròn giao tuyến là $r = \sqrt{R^2 - IH^2} = \sqrt{14 - IH^2}$. Suy ra bán kính r nhỏ nhất khi IH lớn nhất.

Ta có: $IH \leq IM \Leftrightarrow IH \leq \sqrt{2} \Rightarrow \max IH = \sqrt{2}$ khi M trùng H , khi đó $IM \perp (P)$.

Mặt phẳng (P) đi qua M và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{IM} = (0; -1; 1)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $0.(x+1) - (y+3) + (z+2) = 0 \Leftrightarrow y - z + 1 = 0$.

Câu 2: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; 3; -4)$ và $B(4; -1; 0)$

a) Khoảng cách giữa hai điểm A và B bằng 36.

b) Phương trình mặt cầu (S) đường kính AB có dạng: $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$.

c) Mặt cầu (S) đường kính AB tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 15 = 0$.

d) Giả sử đặt hai trạm thu phát sóng tại hai điểm A và B , với bán kính phủ sóng của mỗi trạm bằng bán kính mặt cầu (S) thì người sử dụng điện thoại tại điểm $M(2; 1; -1)$ sử dụng được dịch vụ của trạm thu phát sóng.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------------	----------------	---------------	----------------

a) Sai.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; -4; 4)$ suy ra $AB = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = 6$.

b) Đúng.

Gọi I là trung điểm của AB suy ra $I(3; 1; -2)$.

Mặt cầu (S) đường kính AB có tâm $I(3; 1; -2)$ và bán kính $R = 3$.

Phương trình mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$.

c) Sai.

Ta có $d(I; (P)) = \frac{|3 - 2.1 + 2.(-2) - 15|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 6 > R$

Suy ra mặt cầu (S) không tiếp xúc mặt phẳng (P) .

d) Đúng.

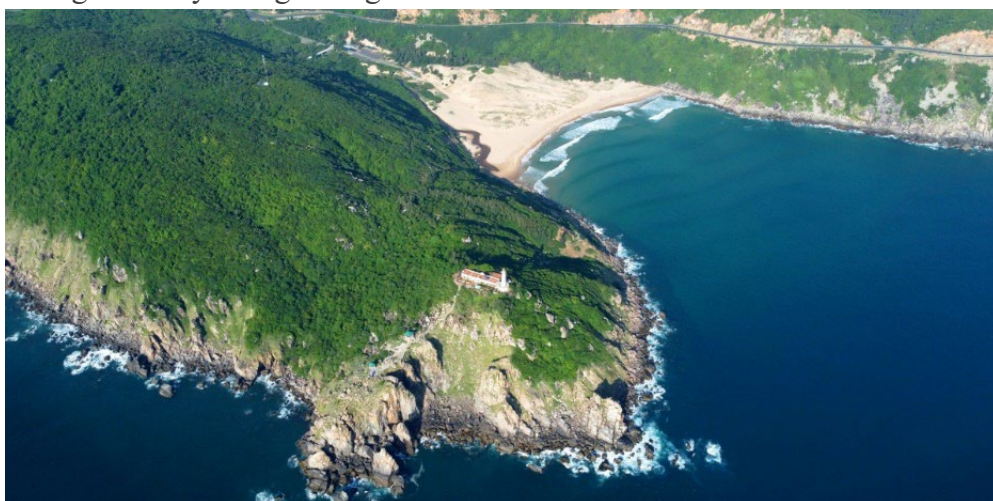
Bán kính mặt cầu (S) là $R = 3$.

Ta có $\overrightarrow{AM} = (0; -2; 3)$, $AM = \sqrt{13} > R$ suy ra không sử dụng được dịch vụ ở trạm thu phát sóng vị trí A .

Ta có $\overrightarrow{BM} = (-2; 2; -1)$, $BM = 3 = R$ suy ra sử dụng được dịch vụ ở trạm thu phát sóng vị trí B .

Vậy người sử dụng có thể sử dụng được dịch vụ.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), tháp hải đăng Mũi Điện - Phú Yên (là nơi đón ánh bình minh đầu tiên trên đất liền Tổ Quốc), chân tháp được đặt vuông góc với mặt đất (chiều từ chân tháp lên đỉnh tháp cùng hướng với chiều dương của trục Oz) ở vị trí điểm $A(12.040.271; 1.418.620; 84)$. Ngọn đèn của hải đăng được đặt trên đỉnh của tháp hải đăng hình trụ cao 26 m so với mặt đất và sử dụng pin năng lượng mặt trời, có thể phát tín hiệu ánh sáng xa khoảng 27 hải lý tương đương 50 km.



- Mặt cầu mô tả ranh giới vùng phủ sáng trên biển của hải đăng có tâm $I(12.040.271; 1.418.620; 110)$ bán kính $R = 50000(m)$.
- Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới vùng phủ sáng trên biển của hải đăng là $(S): (x - 12.040.271)^2 + (y - 1.418.620)^2 + (z - 84)^2 = 50.000^2$.
- Người đi biển ở trên Cù lao Mái nhà tại vị trí $B(12.026.000; 1.461.000; 0)$ nhìn thấy ánh đèn của ngọn hải đăng.
- Điểm cực đông của mũi Điện là điểm $C(12.040.452; 1.418.462; 0)$. Từ điểm C một chiếc tàu di chuyển trên mặt biển (mặt phẳng (Oxy)) theo hướng của vectơ đơn vị $\vec{i}$, để vẫn nhìn thấy ánh đèn của hải đăng thì khoảng cách tối đa tàu di chuyển là 50.000 mét.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
----------------	---------------	----------------	---------------

a) Đúng

Khoảng cách từ tâm đèn đến mặt biển là $84 + 26 = 110 m$.

Mặt cầu mô tả ranh giới vùng phủ sáng trên biển của hải đăng có tâm $I(12.040.271; 1.418.620; 110)$, bán kính $R = 50000(m)$.

b) Sai

Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới vùng phủ sáng trên biển của hải đăng là

$$(S) \quad (x - 12.040.271)^2 + (y - 1.418.620)^2 + (z - 110)^2 = 50.000^2.$$

c) Đúng

Ta có

$$IB^2 = (12.026.000 - 12.040.271)^2 + (1.461.000 - 1.418.620)^2 + (0 - 110)^2 = 1999.737.941 < R^2$$

Nên điểm B nằm trong mặt cầu (S) . Vậy người đi biển nhìn thấy ánh đèn của ngọn hải đăng.

d) Sai

Đường thẳng Δ đi qua C và có vector chỉ phương là vector $\vec{i} = (1; 0; 0)$ có PTTS là

$$\begin{cases} x = 12.040.452 + t \\ y = 1.418.462 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Tìm điểm N là giao điểm của Δ và mặt cầu (S) :

$$(12.040.452 + t - 12.040.271)^2 + (1.418.462 - 1.418.620)^2 + (0 - 110)^2 = 50.000^2$$

$$\Leftrightarrow (181 + t)^2 = 2.499.962.936 \Rightarrow \begin{cases} t \approx 49.818,6 \\ t \approx -50.180 \end{cases}.$$

Do tàu chuyển động cùng hướng với hướng của vector đơn vị $\vec{i}$ nên $t > 0 \Rightarrow t \approx 49.818,6$

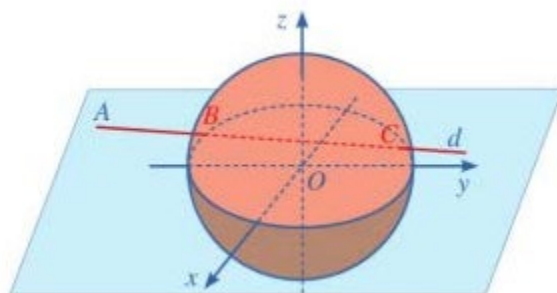
$$\Rightarrow N(12.090.270,6; 1.418.620; 0) \Rightarrow CN \approx 49.818,6 \text{ m}.$$

Vậy tàu di chuyển tối đa 49.818 m để có thể nhìn thấy đèn của ngọn hải đăng.

Câu 4: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), đài kiểm soát không lưu của một sân bay ở vị trí $O(0; 0; 0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa 600 km . Một máy bay đang chuyển động với vận tốc 900 km/h theo đường thẳng d có phương

$$\text{trình } \begin{cases} x = -1000 + 100t \\ y = -300 + 80t \\ z = 100\sqrt{11} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ và hướng về đài kiểm soát không lưu (như hình vẽ). Các mệnh}$$

đề sau đây **đúng** hay **sai**?



a) Ranh giới vùng phát sóng bên ngoài của đài kiểm soát không lưu trong không gian là mặt cầu có bán kính bằng 300 km .

b) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian là $x^2 + y^2 + z^2 = 360000$.

c) Máy bay đang chuyển động theo đường thẳng d đến vị trí điểm $M(-500; 100; 100\sqrt{11})$. Vị trí này nằm ngoài vùng kiểm soát không lưu của đài kiểm soát không lưu sân bay.

d) Thời gian kể từ khi đài kiểm soát không lưu phát hiện máy bay đến khi máy ra khỏi vùng kiểm soát không lưu là $\frac{4}{3}$ giờ.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------------	----------------	----------------	---------------

a) Sai.

Vì đài kiểm soát không lưu của một sân bay ở vị trí $O(0;0;0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa $600km$ nên ranh giới vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian là mặt cầu có bán kính bằng $600km$.

b) Đúng.

Ranh giới vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian là mặt cầu tâm $O(0;0;0)$ có bán kính bằng $R = 600$ có phương trình là: $x^2 + y^2 + z^2 = 360000$

c) Đúng.

Ta có $OM = \sqrt{(-500)^2 + (100)^2 + (100\sqrt{11})^2} \approx 608 > 600 = R$.

Vậy, tại vị trí điểm $M(-500;100;100\sqrt{11})$ máy bay nằm ngoài vùng kiểm soát không lưu của đài kiểm soát không lưu sân bay.

d) Sai.

Thay $d: \begin{cases} x = -1000 + 100t \\ y = -300 + 80t \\ z = 100\sqrt{11} \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ vào phương trình mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 360000$, ta có:

$$(100t - 1000)^2 + (80t - 300)^2 + (100\sqrt{11})^2 = 360000$$

$$\Leftrightarrow 164t^2 - 2480t + 8400 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 10 \Rightarrow B(0;500;100\sqrt{11}) \\ t = \frac{210}{41} \Rightarrow C\left(-\frac{20000}{41}; \frac{4500}{41}; 100\sqrt{11}\right) \end{cases}$$

Quãng đường máy bay di chuyển trong vùng kiểm soát không lưu là:

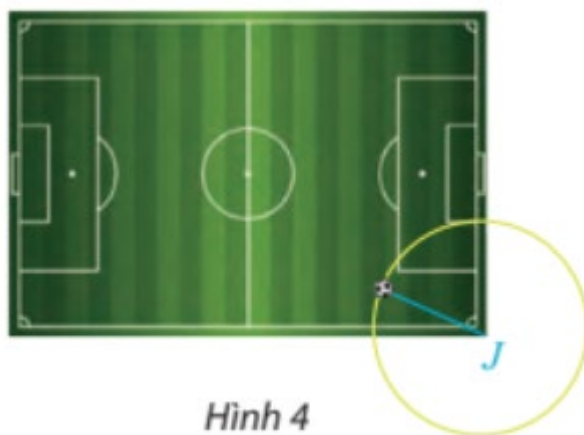
$$BC = \sqrt{\left(-\frac{20000}{41}\right)^2 + \left(\frac{4500}{41} - 500\right)^2 + (100\sqrt{11} - 100\sqrt{11})^2} \approx 625 km.$$

Vậy thời gian máy bay di chuyển theo đường thẳng d và trong phạm vi kiểm soát không lưu của sân bay là: $\frac{625}{900} = \frac{25}{36}$ giờ.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Công nghệ hỗ trợ trọng tài VAR (Video Assistant Referee) thiết lập một hệ toạ độ Oxyz để theo dõi vị trí của quả bóng M . Cho biết M đang nằm trên mặt sân có phương trình $z = 0$, đồng thời thuộc mặt cầu (S): $(x - 22)^2 + (y - 4)^2 + (z - 13)^2 = 194$ (đơn vị độ dài tính theo mét). Gọi J là

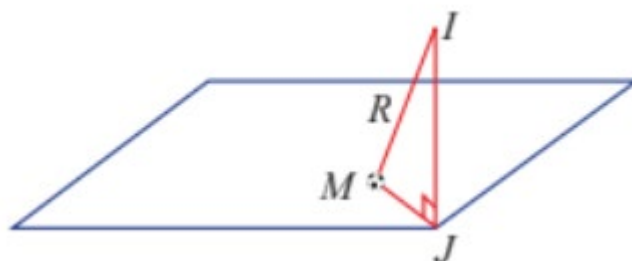
hình chiếu tâm I của mặt cầu (S) xuống mặt sân bóng. Khoảng cách từ vị trí M của quả bóng đến điểm J là:



Hình 4

Lời giải

Trả lời: 5



Mặt cầu (S) có phương trình

$$(x - 22)^2 + (y - 4)^2 + (z - 13)^2 = 194$$

nên có tâm $I(22; 4; 13)$ và bán kính $R = \sqrt{194}$.

Trong không gian $Oxyz$, mặt sân có phương trình $z = 0$ trùng với mặt phẳng tọa độ (Oxy) , suy ra hình chiếu vuông góc của điểm $I(22; 4; 13)$ xuống mặt sân có tọa độ $J(22; 4; 0)$.

Trong tam giác vuông IJM , ta có $IJ = 13, IM = R = \sqrt{194}$, suy ra

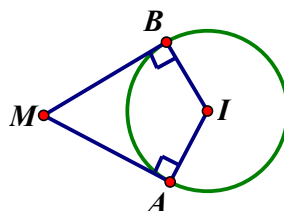
$$JM = \sqrt{IM^2 - IJ^2} = \sqrt{194 - 169} = 5$$

Vậy khoảng cách từ vị trí M của quả bóng đến điểm J là 5 m.

Câu 2: Phía trước của một sân vận động, người ta có đặt một quả bóng đá khổng lồ. Cách đó không xa, có một bóng đèn. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị đo là mét), giả sử mặt ngoài quả bóng (S) có phương trình $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 9$ và bóng đèn ở vị trí $M(15; 1; 6)$. Khi đó, khoảng cách xa nhất mà bóng đèn có thể chiếu đến một điểm trên quả bóng bằng MA , với MA chính là tiếp tuyến kẻ từ M đến (S) và A là tiếp điểm. Vậy MA bằng bao nhiêu mét?

Lời giải

Trả lời: 14



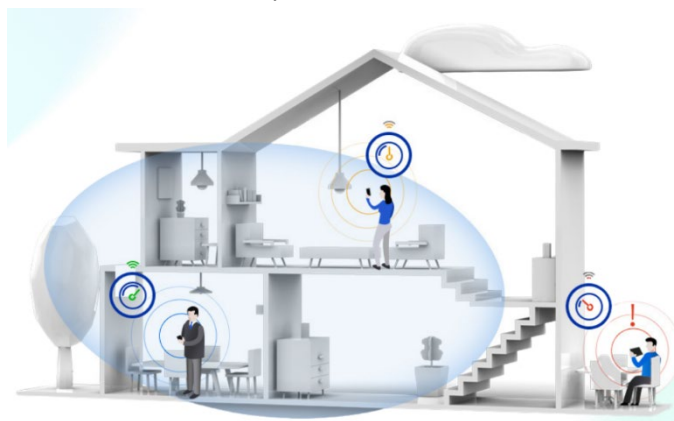
Bề mặt ngoài của quả bóng (S) là một mặt cầu có tâm $I(1;1;3)$ và bán kính $R = 3$

Ta có: $MI = \sqrt{(1-15)^2 + (1-1)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{205}$

Suy ra $MA = \sqrt{MI^2 - IA^2} = \sqrt{205 - 9} = \sqrt{196} = 14$

Vậy $MA = 14 \text{ m}$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là mét), một thiết bị phát sóng wifi đặt tại vị trí $A(3;1;1)$ như hình vẽ. Vùng phủ sóng tốt nhất của thiết bị có bán kính bằng 11 (m) . Hỏi số giá trị nguyên của tham số m để một người sử dụng điện thoại tại điểm $E(-3;8;m)$ có thể bắt được tín hiệu wifi tốt nhất của thiết bị nói trên.



Lời giải

Trả lời: 13

Vùng phủ sóng của thiết bị đã cho là mặt cầu (S) tâm $A(3;1;1)$, bán kính $R = 11$.

Ta có $AE = \sqrt{6^2 + 7^2 + (m-1)^2} = \sqrt{m^2 - 2m + 86}$,

Để điện thoại của người đó bắt được tín hiệu wifi tốt nhất của thiết bị nói trên thì

$$AE \leq R \Leftrightarrow \sqrt{m^2 - 2m + 86} \leq 11 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m + 86 \geq 0 \\ m^2 - 2m + 86 \leq 121 \end{cases} \Leftrightarrow -5 \leq m \leq 7.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-5; -4; -3; \dots; 7\}$.

Vậy có 13 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(-2;3;0)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-4}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{2}$. Biết đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 8$. Tính bán kính của mặt cầu (S).

Lời giải

Trả lời: 5

Giả sử mặt cầu (S) có phương trình $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2m = 0$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2; 3; 0)$ và bán kính $R = \sqrt{13 - 2m}$ với $m < \frac{13}{2}$.

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(4; 3; 3)$ và có một vtcp là $\vec{u} = (2; 1; 2)$.

Khoảng cách từ tâm I đến đường thẳng Δ bằng

$$d = d(I; \Delta) = \frac{|\overrightarrow{IM}, \vec{u}|}{|\vec{u}|} = 3.$$

Vì đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 8$ nên ta có

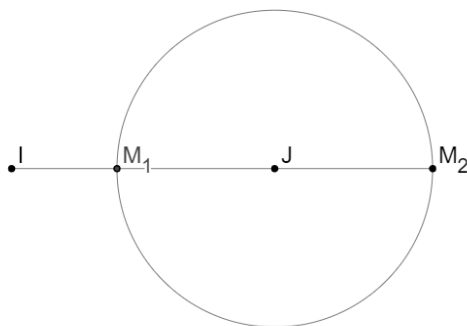
$$d^2 + \frac{AB^2}{4} = R^2 \Leftrightarrow 3^2 + 16 = 13 - 2m \Leftrightarrow m = -6. \text{ (thỏa điều kiện).}$$

Suy ra bán kính mặt cầu là $R = \sqrt{13 - 2 \cdot (-6)} = 5$.

Câu 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ và hai điểm $A(1; 3; 4)$, $B(4; 1; 9)$; M là điểm thay đổi trên (S) . Gọi m, n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2MA^2 - MB^2$. Xác định $(m+n)$.

Lời giải

Trả lời: 68



Gọi I là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

$$\Rightarrow I(2x_A - x_B; 2y_A - y_B; 2z_A - z_B)$$

$$\Rightarrow I(-2; 5; -1).$$

Suy ra I là điểm cố định.

Suy ra P đạt giá trị nhỏ nhất khi MI đạt giá trị nhỏ nhất, P đạt giá trị lớn nhất khi MI đạt giá trị lớn nhất.

$(S): (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ có tâm $J(2; 2; -1)$ và bán kính $R = 3$

Suy ra $IJ = 5$

Mà M là điểm thay đổi trên (S)

Do đó:

$$n = \min MI = IM_1 = JI - R = 5 - 3 = 2$$

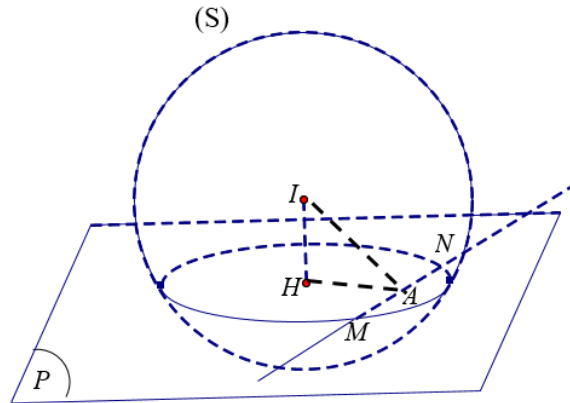
$$m = \max MI = IM_2 = JI + R = 5 + 3 = 8$$

$$\text{Suy ra } m + n = 8^2 + 2^2 = 68$$

Câu 6: Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;3)$, mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y - 10z + 2 = 0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A , nằm trong mặt phẳng (P) và cắt (S) tại hai điểm M, N . Độ dài đoạn MN nhỏ nhất bằng a . Tính giá trị a^2 .

Lời giải

Trả lời: 20



Điểm A thỏa mãn $2.2 + 2.1 - 3 - 3 = 0$ nên $A \in (P)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;5)$, $R = 6$ và $d(I, (P)) = \frac{2}{3}$ nên $(P) \cap (S) = (C)$.

Mặt khác $IA = \sqrt{6} < R$ nên điểm A nằm trong mặt cầu (S) và A thuộc đoạn MN .

Gọi H là hình chiếu của I trên (P) thì H là tâm của đường tròn (C) .

Bán kính đường tròn (C) là $r = \sqrt{36 - \frac{4}{9}} = \frac{8\sqrt{5}}{3}$.

Ta có $MN = 2\sqrt{r^2 - d^2}$ với $d = d(H, \Delta)$.

Do đó $MN_{\min} \Leftrightarrow d(H, \Delta)_{\max} \Leftrightarrow d(H, \Delta) = AH \Leftrightarrow AH \perp MN$

Khi đó $\begin{cases} MN \perp IH \\ MN \perp AH \end{cases} \Rightarrow MN \perp (AIH) \Rightarrow MN \perp AI$.

Suy ra $MN = 2AN = 2\sqrt{IN^2 - IA^2} = 2\sqrt{6^2 - (\sqrt{6})^2} = 2\sqrt{30}$.

Do đó $a = 2\sqrt{30} \Rightarrow a^2 = 120$.

CHƯƠNG



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU ĐỀ TEST SỐ 02

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 9$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu đó.

A. $I(-1;3;0); R=3$. **B.** $I(1;-3;0); R=9$. **C.** $I(1;-3;0); R=3$. **D.** $I(-1;3;0); R=9$.

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(3;-1;0)$, bán kính $R=5$ có phương trình là

A. $(x+3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 5$. **B.** $(x-3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 5$.

C. $(x-3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 25$. **D.** $(x+3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$. Phương trình mặt cầu tâm I , tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) là:

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$. **B.** $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 13$.

C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 14$. **D.** $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 1$.

Câu 4: Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;0)$ và (S) đi qua $A(2;-2;1)$ là

A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 3\sqrt{2}$. **B.** $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 18$.

C. $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 18$. **D.** $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 3\sqrt{2}$.

Câu 5: Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và (S) đi qua $M(1;0;-1)$ là

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 6 = 0$. **B.** $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z - 6 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z + 6 = 0$. **D.** $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 6 = 0$.

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;0;-1)$, $B(5;0;-3)$. Viết phương trình của mặt cầu (S) đường kính AB .

A. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4z + 18 = 0$. **B.** $(S): (x-4)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 8$.

C. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4z + 12 = 0$. **D.** $(S): (x-2)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 4$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -1; 1)$, $B(5; -2; 4)$. Viết phương trình của mặt cầu (S) đường kính AB .

- A.** $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 7x + 3y - 5z + 15 = 0$. **B.** $(S): \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = 19$.
C. $(S): (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = \frac{19}{4}$. **D.** $(S): \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{19}{4}$.

Câu 8: Mặt cầu có tâm $I(1; -2; 3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) là

- A.** $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$. **B.** $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 12 = 0$.
C. $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 1$. **D.** $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 4$.

Câu 9: Trong không gian $(Oxyz)$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 2z - 7 = 0$. Tọa độ tâm I và bán kính R của (S) lần lượt là

- A.** $I(-2; 2; -1), R = 4$. **B.** $I(-2; 2; -1), R = 8$. **C.** $I(2; -2; 1), R = 4$. **D.** $I(2; -2; 1), R = 8$.

Câu 10: Trong không gian $(Oxyz)$, một thiết bị phát sóng đặt tại vị trí $I(1; 0; -1)$. Vùng phủ sóng của thiết bị có ranh giới là một mặt cầu bán kính bằng $\sqrt{2}$. Điểm nào sau đây thuộc vùng phủ sóng của thiết bị?

- A.** $A(1; 0; 1)$. **B.** $B(1; 1; -1)$. **C.** $C(-2; 0; 1)$. **D.** $D(1; -2; -1)$.

Câu 11: Trong không gian $(Oxyz)$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $A(2; 3; 5)$. Biết rằng vùng phủ sáng (theo thiết kế) của ngọn hải đăng có ranh giới là một mặt cầu bán kính 3 km. Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới của vùng phủ sáng trên biển của hải đăng là

- A.** $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 9$. **B.** $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z+5)^2 = 9$.
C. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 9000$. **D.** $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 3000^2$.

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là km), một máy bay đang ở vị trí $A(3; -2; 1)$ và sẽ hạ cánh ở vị trí $B(2; -5; 0)$ trên đường băng. Có một đám mây được mô phỏng bởi mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 16$ tại $M\left(\frac{10}{9}; -\frac{25}{9}; \frac{7}{9}\right)$. Tính độ cao của máy bay khi đi xuyên qua đám mây để hạ cánh (Giả sử mặt đất ở vị trí máy bay đang bay được coi là mặt phẳng mặt phẳng (Oxy))

- A.** $\frac{3}{5}$ km. **B.** $\frac{4}{5}$ km. **C.** $\frac{1}{5}$ km. **D.** $\frac{2}{5}$ km.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có đường kính AB với tọa độ các điểm $A(1; 2; -4)$, $B(3; -2; 0)$ và mặt cầu $(S'): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$.

- a) Mặt cầu (S) có tâm $I(2; 0; -2)$.
b) Phương trình mặt cầu $(S): (x+2)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9$.

- c) Điểm $M(0;1;-5)$ nằm trong mặt cầu (S) .
 d) Mặt cầu (S') có cùng bán kính với mặt cầu (S) .

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + \frac{9}{2} = 0$ và hai điểm

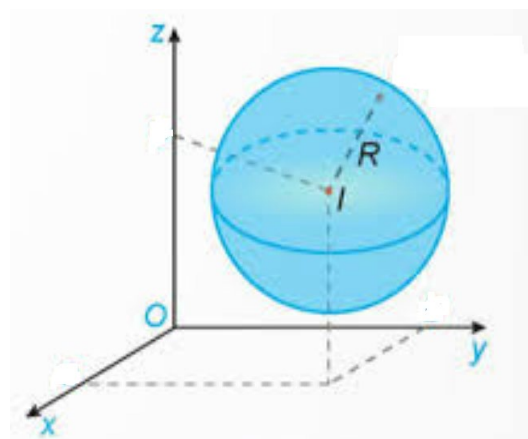
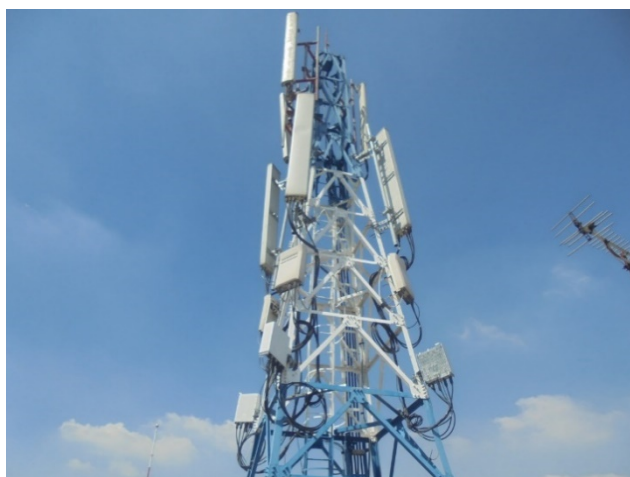
$A(0;2;0)$, $B(2;-6;-2)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc (S) thỏa mãn $\overline{MA} \cdot \overline{MB}$ có giá trị nhỏ nhất.

- a) Tâm của mặt cầu (S) là $I(-1;2;1)$.
 b) Điểm A nằm trong mặt cầu (S) .
 c) Phương trình mặt cầu (S') tâm A đi qua điểm B là: $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 72$.
 d) Tổng $a+b+c$ bằng 1.

Câu 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(10; 20; 30)$ với bán kính phủ sáng là 3 km.

- a) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sáng trên biển của hải đăng là $(x-10)^2 + (y-20)^2 + (z-30)^2 = 3000^2$.
 b) Người đi biển ở vị trí $A(50;20;0)$ nhìn thấy được ánh sáng của ngọn hải đăng.
 c) Người đi biển ở vị trí $B(4030; 50; 40)$ nhìn thấy được ánh sáng của ngọn hải đăng.
 d) Nếu hai người đi biển có thể nhìn thấy ánh sáng của ngọn hải đăng thì khoảng cách giữa hai người đó không quá 6 km.

Câu 4: Hình 1 mô phỏng một trạm thu phát sóng điện thoại di động đặt ở vị trí $I(1; 2; 2)$ trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) và được thiết kế với đường kính phủ sóng là 10000 m.



Hình 1

- a) Bán kính vùng phủ sóng của trạm phát sóng điện thoại là 5 km.
 b) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới miền bên trong và bên ngoài vùng phủ sóng của trạm phát sóng điện thoại là $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 25$.
 c) Điểm $A(1;2;6)$ nằm trong vùng phủ sóng của trạm phát sóng điện thoại.
 d) Nhà bạn Mai và bạn Nam có vị trí tọa độ lần lượt là $M(1;2;7)$ và $N(5;5;5)$. Nếu cả hai bạn Mai và Nam dùng điện thoại tại nhà thì đều có thể sử dụng dịch vụ của trạm phát sóng điện thoại này.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

- Câu 1:** Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;2)$ và đi qua điểm $A(-1;1;3)$ có phương trình dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$. Tính $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.
- Câu 2:** Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có đường kính AB với $A(-1;2;-1)$ và $B(1;1;-2)$ có phương trình dạng $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$. Tính $a + b + c + R^2$.
- Câu 3:** Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(2;0;24)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 3x + 4y - z - 8 = 0$ có phương trình dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$. Hỏi $d = ?$
- Câu 4:** Trong không gian $Oxyz$, biết phương trình mặt cầu (S) đi qua 4 điểm A, B, C, D , biết rằng: $A(-3;0;0)$, $B(0;0;8)$, $C(0;-9;0)$ và $D(0;0;0)$ có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$. Tính $4 \cdot (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$.
- Câu 5:** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{2}$ và điểm $A(3;2;0)$. Gọi (S) mặt cầu tâm A và tiếp xúc với đường thẳng d , phương trình của (S) có dạng $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$. Tính $a^2 + 2b^2 + 3c^2 + 4R^2$.
- Câu 6:** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{1}$. Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;-1)$ và cắt đường thẳng Δ tại hai điểm A, B với $AB = 16$. Gọi R là bán kính của mặt cầu (S) . Tính R^2 .

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 9$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu đó.

- A. $I(-1;3;0); R=3$. B. $I(1;-3;0); R=9$. C. $I(1;-3;0); R=3$. D. $I(-1;3;0); R=9$.

Lời giải

Từ phương trình đã cho, ta thấy tọa độ tâm là $I(1;-3;0)$ và bán kính là $R=3$.

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(3;-1;0)$, bán kính $R=5$ có phương trình là

- A. $(x+3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 5$. B. $(x-3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 5$.
C. $(x-3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 25$. D. $(x+3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;-1;0)$, bán kính $R=5$ có phương trình là $(x-3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 25$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$. Phương trình mặt cầu tâm I , tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) là:

- A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$. B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 13$.
C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 14$. D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 1$.

Lời giải

Gọi M là hình chiếu vuông góc của tâm $I(1;-2;3)$ lên mặt phẳng (Oyz) , suy ra $M(0;-2;3)$.

Vì mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) nên có bán kính $R=IM=1$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 1$.

Câu 4: Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;0)$ và (S) đi qua $A(2;-2;1)$ là

- A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 3\sqrt{2}$. B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 18$.
C. $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 18$. D. $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 3\sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có $R=IA=\sqrt{(2-1)^2 + (-2-2)^2 + (1-0)^2} = 3\sqrt{2}$.

Vậy phương trình mặt cầu $I(1;2;0)$ và có bán kính $R=3\sqrt{2}$ là $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 18$

Câu 5: Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và (S) đi qua $M(1;0;-1)$ là

- A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 6 = 0$. B. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z - 6 = 0$.
C. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z + 6 = 0$. D. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 6 = 0$.

Lời giải

Ta có $R=IM=\sqrt{(1-1)^2 + (0-2)^2 + (-1-3)^2} = 2\sqrt{5}$.

Vậy phương trình mặt cầu $I(1;2;3)$ và có bán kính $R = 2\sqrt{5}$ là

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 20 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 6 = 0$$

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;0;-1)$, $B(5;0;-3)$. Viết phương trình của mặt cầu (S) đường kính AB .

A. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4z + 18 = 0.$

B. $(S): (x-4)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 8.$

C. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4z + 12 = 0.$

D. $(S): (x-2)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 4.$

Lời giải

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB .

$$\Rightarrow \begin{cases} x_I = \frac{3+5}{2} = 4 \\ y_I = \frac{0+0}{2} = 0 \\ z_I = \frac{(-1)+(-3)}{2} = -2 \end{cases} \quad \text{Vậy } I(4;0;-2).$$

$$AB = \sqrt{(5-3)^2 + (0-0)^2 + (-3+1)^2} = 2\sqrt{2}.$$

$$R = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

Phương trình mặt cầu (S) là: $(x-4)^2 + y^2 + (z+2)^2 = (\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4z + 18 = 0.$

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-1;1)$, $B(5;-2;4)$. Viết phương trình của mặt cầu (S) đường kính AB .

A. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 7x + 3y - 5z + 15 = 0.$

B. $(S): \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = 19.$

C. $(S): (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = \frac{19}{4}.$

D. $(S): \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{19}{4}.$

Lời giải

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB .

$$\Rightarrow \begin{cases} x_I = \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2} \\ y_I = \frac{-1+(-2)}{2} = -\frac{3}{2} \\ z_I = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2} \end{cases} \quad \text{Vậy } I\left(\frac{7}{2}; -\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right).$$

$$AB = \sqrt{(5-2)^2 + (-2+1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{19}.$$

$$R = \frac{1}{2} AB = \frac{\sqrt{19}}{2}.$$

Phương trình mặt cầu (S) là:

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{19}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 7x + 3y - 5z + 16 = 0.$$

Câu 8: Mặt cầu có tâm $I(1; -2; 3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) là

A. $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9.$

B. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 12 = 0.$

C. $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 1.$

D. $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 4.$

Lời giải

Phương trình mặt phẳng $(Oyz): x = 0.$

$$R = d(I, (Oyz)) = \frac{|1|}{\sqrt{1}} = 1.$$

Phương trình mặt cầu (S) là:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 13 = 0.$$

Câu 9: Trong không gian $(Oxyz)$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 2z - 7 = 0$. Tọa độ tâm I và bán kính R của (S) lần lượt là

A. $I(-2; 2; -1), R = 4.$

B. $I(-2; 2; -1), R = 8.$

C. $I(2; -2; 1), R = 4.$

D. $I(2; -2; 1), R = 8.$

Lời giải

$$\text{Ta có } (S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 2z - 7 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 4^2.$$

Vậy (S) là mặt cầu có tâm $I(2; -2; 1)$ và bán kính $R = 4$.

Câu 10: Trong không gian $(Oxyz)$, một thiết bị phát sóng đặt tại vị trí $I(1; 0; -1)$. Vùng phủ sóng của thiết bị có ranh giới là một mặt cầu bán kính bằng $\sqrt{2}$. Điểm nào sau đây thuộc vùng phủ sóng của thiết bị?

A. $A(1; 0; 1).$

B. $B(1; 1; -1).$

C. $C(-2; 0; 1).$

D. $D(1; -2; -1).$

Lời giải

Ta có: $\overline{IB} = (0; 1; 0) \Rightarrow IB = 1 \Rightarrow IB < R$ nên điểm $B(1; 1; -1)$ nằm bên trong mặt cầu trên, suy ra điểm B thuộc vùng phủ sóng của thiết bị.

Câu 11: Trong không gian $(Oxyz)$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $A(2; 3; 5)$. Biết rằng vùng phủ sáng (theo thiết kế) của ngọn hải đăng có ranh giới là một mặt cầu bán kính 3 km. Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới của vùng phủ sáng trên biển của hải đăng là

A. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 9.$

B. $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z+5)^2 = 9.$

C. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 9000.$

D. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 3000^2.$

Lời giải

Ta có $R = 3\text{km} = 3000\text{m}.$

Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới của vùng phủ sáng trên biển của hải đăng là

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 3000^2.$$

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là km), một máy bay đang ở vị trí $A(3; -2; 1)$ và sẽ hạ cánh ở vị trí $B(2; -5; 0)$ trên đường băng. Có một đám mây được mô phỏng bởi mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 16$ tại

$M\left(\frac{10}{9}; -\frac{25}{9}; \frac{7}{9}\right)$. Tính độ cao của máy bay khi đi xuyên qua đám mây để hạ cánh (Giả sử mặt đất ở vị trí máy bay đang bay được coi là mặt phẳng mặt phẳng (Oxy))

- A. $\frac{3}{5}$ km. B. $\frac{4}{5}$ km. C. $\frac{1}{5}$ km. **D. $\frac{2}{5}$ km.**

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(2; -1; -1)$; $\overrightarrow{IM} = \left(-\frac{8}{9}; -\frac{16}{9}; \frac{16}{9}\right) = -\frac{8}{9}(1; 2; -2)$.

Vì (P) tiếp xúc với (S) tại M nên có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 2; -2)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là $x - \frac{10}{9} + 2\left(y + \frac{25}{9}\right) - 2\left(z - \frac{7}{9}\right) = 0$ hay (P): $x + 2y - 2z + 6 = 0$.

Giả sử điểm $C(a; b; c)$ là vị trí mà máy bay xuyên qua đám mây để hạ cánh, suy ra $C \in (P)$ và ba điểm A, B, C thẳng hàng, C nằm giữa A và B .

Do đó $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ với $k > 0$.

Ta có: $\overrightarrow{AC} = (a - 3; b + 2; c - 1)$, $\overrightarrow{AB} = (-1; -3; -1)$.

$$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 3 = -k \\ b + 2 = -3k \\ c - 1 = -k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 - k \\ b = -2 - 3k \\ c = 1 - k \end{cases} \Rightarrow C(3 - k; -2 - 3k; 1 - k).$$

$$C \in (P) \Rightarrow 3 - k + 2(-2 - 3k) - 2(1 - k) + 6 = 0 \Rightarrow k = \frac{3}{5}.$$

$$\text{Suy ra } C\left(\frac{12}{5}; -\frac{19}{5}; \frac{2}{5}\right).$$

Vậy tại vị trí C , độ cao của máy bay là $\frac{2}{5}$ km.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có đường kính AB với tọa độ các điểm $A(1; 2; -4)$, $B(3; -2; 0)$ và mặt cầu (S'): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$.

- a) Mặt cầu (S) có tâm $I(2; 0; -2)$.
b) Phương trình mặt cầu (S): $(x + 2)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 9$.
c) Điểm $M(0; 1; -5)$ nằm trong mặt cầu (S).
d) Mặt cầu (S') có cùng bán kính với mặt cầu (S).

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

a) Đúng.

Gọi I là tâm mặt cầu (S) có đường kính AB , suy ra I là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Vậy $I(2; 0; -2)$.

b) Sai.

Ta có bán kính của mặt cầu (S) là $R = IA = \sqrt{(1-2)^2 + (2-0)^2 + (-4+2)^2} = 3$.

Suy ra phương trình mặt cầu $(S): (x-2)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 9$.

c) Sai.

Ta có $(0-2)^2 + (1-0)^2 + (-5+2)^2 = 14 > 3^2$.

Vậy điểm $M(0;1;-5)$ nằm ngoài mặt cầu (S) .

d) Đúng.

Phương trình mặt cầu (S') tương ứng với $a=1, b=-2, c=3, d=5$, do đó (S') là phương trình của mặt cầu có tâm $I'(1;-2;3)$ và bán kính $R' = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2 - 5} = 3$.

Vậy mặt cầu (S') có cùng bán kính với mặt cầu (S) .

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + \frac{9}{2} = 0$ và hai điểm

$A(0;2;0), B(2;-6;-2)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc (S) thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ có giá trị nhỏ nhất.

a) Tâm của mặt cầu (S) là $I(-1;2;1)$.

b) Điểm A nằm trong mặt cầu (S) .

c) Phương trình mặt cầu (S') tâm A đi qua điểm B là: $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 72$.

d) Tổng $a+b+c$ bằng 1.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) Đúng.

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow (S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = \frac{3}{2}.$$

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1)$.

b) Sai.

Mặt cầu (S) có bán kính $R = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Vì $AI^2 = (0+1)^2 + (2-2)^2 + (0-1)^2 = 2 > \frac{3}{2} = R^2$ nên điểm A nằm ngoài mặt cầu (S) .

c) Đúng.

Vì mặt cầu (S') tâm A đi qua điểm B nên mặt cầu (S') có bán kính

$$R = AB = \sqrt{(2-0)^2 + (-6-2)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{72}.$$

Do đó, phương trình mặt cầu $(S'): x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 72$.

d) Đúng.

Vì $BI^2 = (2+1)^2 + (-6-2)^2 + (-2-1)^2 = 82 > \frac{3}{2} = R^2$ nên điểm B nằm ngoài mặt cầu (S) .

Ta có hai điểm A, B nằm ngoài mặt cầu (S) .

Gọi K là trung điểm đoạn thẳng AB thì $K(1;-2;-1)$ và K nằm ngoài mặt cầu (S) .

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA}) \cdot (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KB}) \\ &= MK^2 + \overrightarrow{MK} \cdot (\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB}) + \overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{KB} = MK^2 - KA^2. \end{aligned}$$

Suy ra $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất khi MK^2 nhỏ nhất, tức là MK nhỏ nhất.

Đánh giá: $IM + MK \geq IK \Rightarrow R + MK \geq IK \Rightarrow MK \geq IK - R$.

Suy ra MK nhỏ nhất bằng $IK - R$, xảy ra khi I, M, K thẳng hàng và M nằm giữa hai điểm I, K . Như vậy M là giao điểm của đoạn thẳng IK và mặt cầu (S) .

$$\text{Có } \overrightarrow{IK} = (2; -4; -2), IK = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{6} = 4R = 4IM.$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{IK} = 4\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 4(a+1) \\ -4 = 4(b-2) \\ -2 = 4(c-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 1 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy $a + b + c = 1$.

Câu 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(10; 20; 30)$ với bán kính phủ sáng là 3 km.

a) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sáng trên biển của hải đăng là $(x-10)^2 + (y-20)^2 + (z-30)^2 = 3000^2$.

b) Người đi biển ở vị trí $A(50; 20; 0)$ nhìn thấy được ánh sáng của ngọn hải đăng.

c) Người đi biển ở vị trí $B(4030; 50; 40)$ nhìn thấy được ánh sáng của ngọn hải đăng.

d) Nếu hai người đi biển có thể nhìn thấy ánh sáng của ngọn hải đăng thì khoảng cách giữa hai người đó không quá 6 km.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
----------------	----------------	----------------	----------------

a) Đúng.

Mặt cầu (S) tâm $I(10; 20; 30)$, bán kính $R = 3 \text{ km} = 3000 \text{ m}$ có phương trình

$$(x-10)^2 + (y-20)^2 + (z-30)^2 = 3000^2$$

b) Đúng.

Ta có $\overrightarrow{IA} = (40; 0; -30) \Rightarrow IA = \sqrt{40^2 + 0^2 + 30^2} = 50 \text{ m} < R = 3000 \text{ m}$ nên điểm A nằm trong mặt cầu (S) nên người đi biển ở vị trí $A(50; 20; 0)$ nhìn thấy được ánh sáng của ngọn hải đăng.

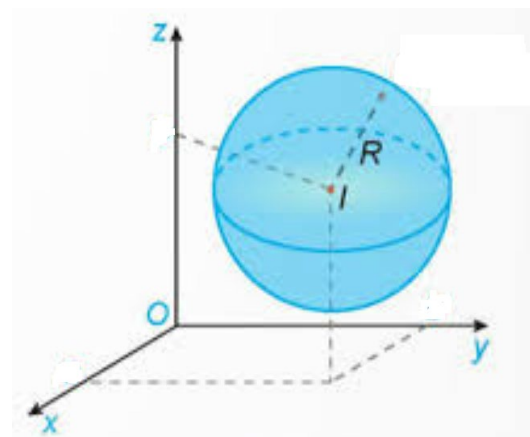
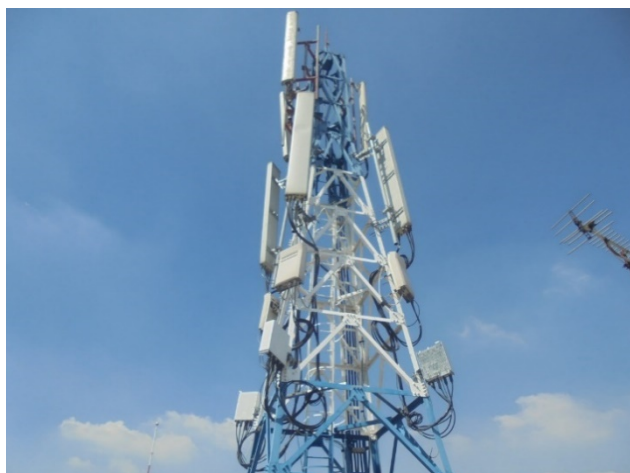
c) Sai.

Ta có $\overrightarrow{IB} = (4020; 30; 10) \Rightarrow IB = \sqrt{4020^2 + 30^2 + 10^2} \approx 4020,12 \text{ m} > R = 3000 \text{ m}$ nên điểm B nằm ngoài mặt cầu (S) nên người đi biển ở vị trí $B(4030; 50; 40)$ không nhìn thấy được ánh sáng của ngọn hải đăng.

d) Đúng.

Vì bán kính phủ sáng là 3 km nên đường kính phủ sáng là 6 km nên nếu hai người đi biển có thể nhìn thấy ánh sáng của ngọn hải đăng thì hai người đó nằm trong mặt cầu, do đó khoảng cách giữa hai người đó không quá 6 km.

Câu 4: Hình 1 mô phỏng một trạm thu phát sóng điện thoại di động đặt ở vị trí $I(1; 2; 2)$ trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) và được thiết kế với đường kính phủ sóng là 10000 m.



Hình 1

- Bán kính vùng phủ sóng của trạm phát sóng điện thoại là 5 km.
- Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới miền bên trong và bên ngoài vùng phủ sóng của trạm phát sóng điện thoại là $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 25$.
- Điểm $A(1; 2; 6)$ nằm trong vùng phủ sóng của trạm phát sóng điện thoại.
- Nhà bạn Mai và bạn Nam có vị trí tọa độ lần lượt là $M(1; 2; 7)$ và $N(5; 5; 5)$. Nếu cả hai bạn Mai và Nam dùng điện thoại tại nhà thì đều có thể sử dụng dịch vụ của trạm phát sóng điện thoại này.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
----------------	----------------	----------------	---------------

a) Đúng.

Đường kính 10000 m = 10 km.

Bán kính phủ sóng của trạm phát sóng điện thoại là $R = \frac{10}{2} = 5$ km.

b) Đúng.

Mặt cầu mô tả ranh giới miền bên trong và bên ngoài vùng phủ sóng của trạm phát sóng điện thoại có:

+ Tâm $I(1; 2; 2)$.

+ Bán kính $R = 5$ km.

Phương trình mặt cầu: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 25$.

c) Đúng.

+ Ta có: $AI^2 = (1-1)^2 + (2-2)^2 + (6-2)^2 = 16 < 25 = R^2$.

+ Vậy điểm $A(1; 2; 6)$ nằm trong vùng phủ sóng của trạm phát sóng điện thoại.

d) Sai.

+ Ta có: $MI^2 = (1-1)^2 + (2-2)^2 + (7-2)^2 = 25 = R^2$.

Vậy điểm M nằm trong vùng phủ sóng của trạm phát sóng điện thoại nên bạn Mai có thể sử dụng dịch vụ của trạm này.

+ Ta có: $NI^2 = (5-1)^2 + (5-2)^2 + (5-2)^2 = 34 > 25 = R^2$.

Vậy điểm N không nằm trong vùng phủ sóng của trạm phát sóng điện thoại nên nên bạn Nam không thể sử dụng dịch vụ của trạm này.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;2)$ và đi qua điểm $A(-1;1;3)$ có phương trình dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$. Tính $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Lời giải

Trả lời: 6

Ta có $\overrightarrow{IA} = (-2;1;1)$

$R = IA = \sqrt{6}$

Phương trình của (S) là: $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 6$ hay $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z - 1 = 0$

Vậy $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1^2 + 2^2 + (-1)^2 = 6$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có đường kính AB với $A(-1;2;-1)$ và $B(1;1;-2)$ có phương trình dạng $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$. Tính $a + b + c + R^2$.

Lời giải

Trả lời: 1,5

Đoạn thẳng AB có trung điểm $I\left(0; \frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$

Mặt cầu (S) có tâm I và bán kính $R = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(1+1)^2 + (1-2)^2 + (-2+1)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Phương trình của (S) là: $x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$

Vậy $a + b + c + R^2 = 0 + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(2;0;24)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 3x + 4y - z - 8 = 0$ có phương trình dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$. Hỏi $d = ?$

Lời giải

Trả lời: 554

Ta có: $R = d(I; (P)) = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 0 - 24 - 8|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + (-1)^2}} = \sqrt{26}$

Ta có $a = 2; b = 0; c = 24$ và $d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2 = 554$

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, biết phương trình mặt cầu (S) đi qua 4 điểm A, B, C, D , biết rằng: $A(-3;0;0)$, $B(0;0;8)$, $C(0;-9;0)$ và $D(0;0;0)$ có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$. Tính $4 \cdot (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$.

Lời giải

Trả lời: 154

Phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.

$$\text{Vì } A, B, C, D \text{ thuộc } (S) \text{ nên ta có: } \begin{cases} d = 0 \\ 9 + 6a + d = 0 \\ 64 - 16c + d = 0 \\ 81 + 18b + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = -\frac{9}{2} \\ c = 4 \\ d = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } 4 \cdot (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = 154.$$

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{2}$ và điểm $A(3;2;0)$. Gọi (S) mặt cầu tâm A và tiếp xúc với đường thẳng d , phương trình của (S) có dạng $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$. Tính $a^2 + 2b^2 + 3c^2 + 4R^2$.

Lời giải

Trả lời: 53

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng d . Phương trình của mặt phẳng (P) là: $1(x-3) + 2(y-2) + 2(z-0) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 2z - 7 = 0$.

Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng d , khi đó $H = d \cap (P)$

Suy ra $H \in d \Rightarrow H(-1+t; -3+2t; -2+2t)$, mặt khác $H \in (P) \Rightarrow -1+t-6+4t-4+4t-7=0 \Rightarrow t=2$. Vậy $H(1;1;2)$.

Vì (S) tiếp xúc với d nên $R = d(A, d) = AH = 3$.

Phương trình mặt cầu (S) là $(x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9$. Suy ra $a=3, b=2, c=0, R^2=9$

$$\text{Vậy } a^2 + 2b^2 + 3c^2 + 4R^2 = 53.$$

Câu 6: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{1}$. Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;-1)$ và cắt đường thẳng Δ tại hai điểm A, B với $AB=16$. Gọi R là bán kính của mặt cầu (S) . Tính R^2 .

Lời giải

Trả lời: 76

Theo giả thiết, ta suy ra Δ đi qua $M(-1;1;0)$ và có VTCP $\vec{u} = (1; -4; 1)$.

Gọi H là hình chiếu của I lên đường thẳng Δ .

Vì $H \in \Delta$ nên $H(-1+t; 1-4t; t) \Rightarrow \overrightarrow{IH}(t-3; -2-4t; t+1)$.

Ta có $\overrightarrow{IH} \perp \vec{u}$ suy ra $\overrightarrow{IH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 1(t-3) - 4(-2-4t) + 1(t+1) = 0 \Leftrightarrow 18t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3}$.

Suy ra $H\left(-\frac{4}{3}; \frac{7}{3}; -\frac{1}{3}\right) \Rightarrow d(I, \Delta) = IH = 2\sqrt{3}$.

Suy ra $R^2 = AI^2 + IH^2 = 8^2 + (2\sqrt{3})^2 = 76$. Vậy $R^2 = 76$.

Huỳnh Văn Ánh

CHƯƠNG



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

ÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG 5

ĐỀ TEST SỐ 01

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 3x + 2y - 4z + 1 = 0$. Vector nào dưới đây là một vector pháp tuyến của (α) ?

- A. $\vec{n}_2 = (3; 2; 4)$. B. $\vec{n}_3 = (2; -4; 1)$. C. $\vec{n}_1 = (3; -4; 1)$. D. $\vec{n}_4 = (3; 2; -4)$.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1; 2; -3)$ và có một vector pháp tuyến $\vec{n} = (1; -2; 3)$.

A. $x - 2y + 3z + 12 = 0$. B. $x - 2y - 3z - 6 = 0$.

C. $x - 2y + 3z - 12 = 0$. D. $x - 2y - 3z + 6 = 0$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+2}{3}$. Vector nào dưới đây là vector chỉ phương của đường thẳng d

- A. $\vec{u} = (1; 3; -2)$. B. $\vec{u} = (2; 5; 3)$. C. $\vec{u} = (2; -5; 3)$. D. $\vec{u} = (1; 3; 2)$.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(1; -2; 1)$, $N(0; 1; 3)$. Phương trình đường thẳng qua hai điểm M, N là

A. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{2}$.

B. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{1}$.

C. $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}$.

D. $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{1}$.

Câu 5: Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$ và đi qua điểm $A(1; -1; 7)$ là

A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$.

B. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 25$.

C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 5$.

D. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 5$.

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - z + 6 = 0$. Phương trình mặt phẳng (Q) đối xứng với (P) qua gốc tọa độ O là

A. $(Q): -x - y + z - 6 = 0$.

B. $(Q): x + y - z - 6 = 0$.

C. $(Q): x + y + z - 6 = 0$.

D. $(Q): x - y - z + 6 = 0$.

Câu 7: Cho ba điểm $A(3;0;0), B(0;-6;0), C(0;2;-3)$. Tính khoảng cách d từ trọng tâm G của tam giác ABC đến mặt phẳng (Oxy) .

- A. $d = 2$. B. $d = 3$. C. $d = 1$. D. $d = 4$.

Câu 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z - 1 = 0$ và $(\beta): x + 2y - 2z - 3 = 0$. Cosin góc giữa mặt phẳng (α) và mặt phẳng (β) bằng:

- A. $\frac{4}{9}$. B. $-\frac{4}{9}$. C. $\frac{4}{3\sqrt{3}}$. D. $-\frac{4}{3\sqrt{3}}$.

Câu 9: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 4t \\ z = -3 + 6t \end{cases}$ và

$$d_2: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3t \end{cases}.$$

Khẳng định nào sau đây **đúng** ?

- A. d_1 và d_2 chéo nhau. B. $d_1 \equiv d_2$. C. $d_1 \perp d_2$. D. $d_1 \parallel d_2$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x+24}{3} = \frac{y-25}{4} = \frac{z}{-5}$ và $\Delta_2: \frac{x-26}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$.

Góc giữa hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

- A. 81° . B. 82° . C. 62° . D. 83° .

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(1;4;-7)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 2024 = 0$ có phương trình là

- A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+7}{-2}$. B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+7}{-2}$.
C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-7}{-2}$. D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+4}{4} = \frac{z-7}{-7}$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-2024}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2025}{-2}$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 1 = 0$. Tính góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) (làm tròn đến hàng đơn vị của độ).

- A. 64° . B. 63° . C. 62° . D. 65° .

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;1), B(0;1;-3)$ và mặt phẳng $(P): x - y - 3 = 0$.

- a) Điểm A thuộc mặt phẳng (P) .
b) Mặt phẳng (P) song song với trục Oz .
c) Mặt phẳng (α) đi qua A, B vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình $2x + 2y + z - 1 = 0$

d) Mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) , cách (P) một khoảng bằng $2\sqrt{2}$ và cắt trục Ox tại điểm có hoành độ dương có phương trình: $(Q): x - y - 1 = 0$

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $M(1; -3; 4)$, đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 2 = 0$.

a) Điểm M thuộc đường thẳng d .

b) Đường thẳng Δ đi qua M và vuông góc với (P) có phương trình tham số là
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = 2 + 4t \end{cases}$$

c) Đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) .

d) Hình chiếu vuông góc của đường thẳng d lên mặt phẳng (P) có phương trình

$$d': \frac{x}{14} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{8}.$$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z = 0$ và điểm $A(4; 4; 0)$. Gọi B là điểm thuộc (S) sao cho tam giác OAB là tam giác đều.

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(2; 2; 2)$, bán kính $R = 2$.

b) Điểm A nằm ngoài mặt cầu (S) .

c) Điểm O nằm trên mặt cầu (S) .

d) Mặt phẳng (OAB) có phương trình là $x - y + z = 0$ hoặc $x - y - z = 0$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0); B(3; 0; 0); D(0; 2; 0); A'(0; 0; 5)$.

a) Điểm C có tọa độ là $(3; 2; 0)$.

b) Khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 5.

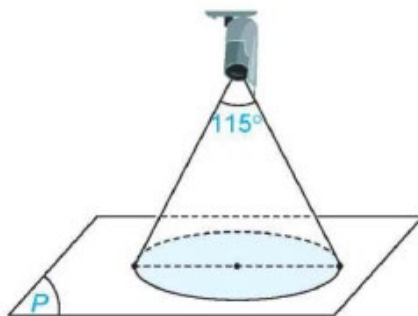
c) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng 2.

d) Cosin góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(CB'D')$ bằng $\frac{289}{361}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

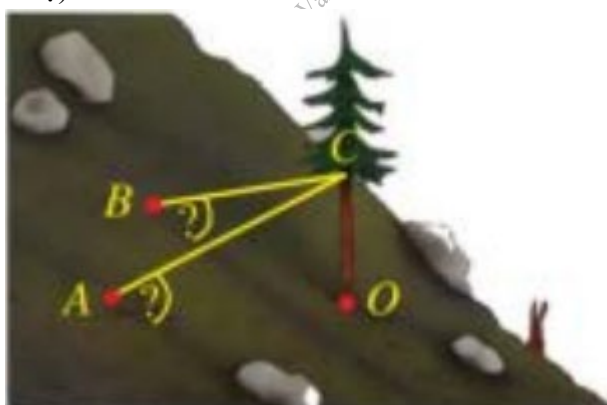
Câu 1: Khi gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là decimét) vào một ngôi nhà 1 tầng, người ta thấy rằng mặt trên và mặt dưới của mái nhà thuộc các mặt phẳng vuông góc với trục Oz . Biết rằng các vị trí $A(3; 4; 33), D(9; 8; 35)$ lần lượt thuộc mặt dưới, mặt trên của mái nhà. Độ dày của mái nhà được tính bằng khoảng cách giữa mặt trên và mặt dưới của mái nhà đó. Hãy cho biết độ dày của mái nhà đó là bao nhiêu decimét?

Câu 2: Góc quan sát ngang của một camera là 115° . Trong không gian $Oxyz$, camera được đặt tại điểm $C(4; 2; 3)$ và chiếu thẳng về phía mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 3 = 0$. Biết vùng quan sát được trên mặt phẳng (P) của camera là hình tròn. Tính diện tích của vùng quan sát đó (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).



Câu 3: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là ki – lô – mét), đài kiểm soát không lưu sân bay có tọa độ $(-64; 128; 64)$. Máy bay bay trong phạm vi cách đài kiểm soát không quá 500 km thì sẽ hiển thị trên màn hình radar. Một máy bay N xuất hiện trên màn hình radar và một máy bay M nằm trong mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 1458 = 0$ sao cho hai máy bay M, N thuộc đường thẳng có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; 1; 1)$. Khoảng cách nhỏ nhất giữa hai máy bay M, N là bao nhiêu km? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

Câu 4: Trên một sườn núi (có độ nghiêng đều), người ta trồng một cây thông và muốn giữ nó không bị nghiêng bằng hai sợi dây neo như hình vẽ. Giả thiết cây thông mọc thẳng đứng và trong một hệ tọa độ phù hợp, các điểm gốc O (gốc cây thông) và A, B (nơi buộc dây neo) có tọa độ tương ứng là $O(0; 0; 0)$, $A(5; -3; 1)$, $B(-3; -4; 2)$, đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét. Biết rằng hai dây neo đều được buộc vào cây thông tại điểm $C(0; 0; 5)$ và được kéo căng tạo thành các đoạn thẳng. Khi đó, góc tạo bởi dây neo CA và mặt phẳng sườn núi là bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ)?



Câu 5: Trong một khu du lịch, người ta cho du khách trải nghiệm thiên nhiên bằng cách đu theo đường trượt zipline từ vị trí A cao 15 m của tháp 1 này sang vị trí B cao 10 m của tháp 2 trong khung cảnh tuyệt đẹp xung quanh. Với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho trước (đơn vị: mét), tọa độ của A và B lần lượt là $(3; 2; 5; 15)$ và $(21; 27; 5; 10)$. Biết tọa độ du khách khi ở độ cao 12 mét là $(a; b; c)$. Tính $P = 5a + b + c$.



Câu 6: Hệ thống định vị toàn cầu (tên tiếng Anh là: Global Positioning System, viết tắt là GPS) là một hệ thống cho phép xác định chính xác vị trí của một vật thể trong không gian. Ta có thể mô phỏng cơ chế hoạt động của hệ thống GPS trong không gian như sau: Trong cùng một thời điểm, tọa độ của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước, trên mỗi vệ tinh có một máy thu tín hiệu. Bằng cách so sánh sự sai lệch về thời gian từ lúc tín hiệu được phát đi với thời gian nhận phản hồi tín hiệu đó, mỗi máy thu tín hiệu xác định được khoảng cách từ vệ tinh đến vị trí M cần tìm tọa độ. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn vệ tinh $A(0;4;5)$, $B(-3;-1;3)$, $C(-2;8;9)$, $D(-7;2;-3)$. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến điểm M biết rằng khoảng cách từ các vệ tinh đến điểm M lần lượt là $MA = 3$, $MB = 5$, $MC = 9$, $MD = 10$. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 3x + 2y - 4z + 1 = 0$. Vector nào dưới đây là một vector pháp tuyến của (α) ?

- A. $\vec{n}_2 = (3; 2; 4)$. B. $\vec{n}_3 = (2; -4; 1)$. C. $\vec{n}_1 = (3; -4; 1)$. D. $\vec{n}_4 = (3; 2; -4)$

Lời giải

Mặt phẳng $(\alpha): 3x + 2y - 4z + 1 = 0$ có vector pháp tuyến $\vec{n} = (3; 2; -4)$.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1; 2; -3)$ và có một vector pháp tuyến $\vec{n} = (1; -2; 3)$.

- A. $x - 2y + 3z + 12 = 0$ B. $x - 2y - 3z - 6 = 0$.
C. $x - 2y + 3z - 12 = 0$. D. $x - 2y - 3z + 6 = 0$.

Lời giải

Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1; 2; -3)$ và có một vector pháp tuyến $\vec{n} = (1; -2; 3)$ là $1(x-1) - 2(y-2) + 3(z+3) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 3z + 12 = 0$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+2}{3}$. Vector nào dưới đây là vector chỉ phương của đường thẳng d

- A. $\vec{u} = (1; 3; -2)$. B. $\vec{u} = (2; 5; 3)$. C. $\vec{u} = (2; -5; 3)$. D. $\vec{u} = (1; 3; 2)$.

Lời giải

Đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+2}{3}$ có một vector chỉ phương là $\vec{u} = (2; -5; 3)$.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(1; -2; 1)$, $N(0; 1; 3)$. Phương trình đường thẳng qua hai điểm M, N là

- A. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{2}$. B. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{1}$.
C. $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}$. D. $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{1}$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{MN} = (-1; 3; 2)$.

Đường thẳng MN qua N nhận $\overrightarrow{MN} = (-1; 3; 2)$ làm vector chỉ phương có phương trình là

$$\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}.$$

Câu 5: Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$ và đi qua điểm $A(1; -1; 7)$ là

- A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$. B. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 25$.

C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 5.$

D. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 5.$

Lời giải

Bán kính mặt cầu $R = IA = 5.$

Phương trình mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25.$

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - z + 6 = 0$. Phương trình mặt phẳng (Q) đối xứng với (P) qua gốc tọa độ O là

A. $(Q): -x - y + z - 6 = 0.$

B. $(Q): x + y - z - 6 = 0.$

C. $(Q): x + y + z - 6 = 0.$

D. $(Q): x - y - z + 6 = 0.$

Lời giải

Cách 1:

Theo tính chất đối xứng qua O thì $(P) \parallel (Q)$, suy ra (Q) có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 1; -1).$

Lấy điểm $M(0, 0, 6) \in (P).$

Điểm đối xứng với M qua O là $M'(0; 0; -6).$

Mà $M' \in (Q)$, suy ra $(Q): x + y - z - 6 = 0.$

Cách 2: Gọi M' là điểm đối xứng với M qua O .

Giả sử $M(x; y; z) \in (P) \Leftrightarrow (P): x + y - z + 6 = 0. \Leftrightarrow (-x) + (-y) + (-z) - 6 = 0.$

$\Rightarrow M'(-x; -y; -z) \in (Q): x + y - z - 6 = 0.$

Câu 7: Cho ba điểm $A(3; 0; 0), B(0; -6; 0), C(0; 2; -3)$. Tính khoảng cách d từ trọng tâm G của tam giác ABC đến mặt phẳng (Oxy) .

A. $d = 2.$

B. $d = 3.$

C. $d = 1.$

D. $d = 4.$

Lời giải

Cách 1: Theo định lý Thales ta có

$$d = d(G, (Oxy)) = \frac{1}{3} d(C, (Oxy)) = \frac{|-3|}{3} = 1.$$

Cách 2: Cao độ của trọng tâm G là $z_G = -1.$

Khoảng cách $d = d(G, (Oxy)) = |-1| = 1.$

Câu 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z - 1 = 0$ và $(\beta): x + 2y - 2z - 3 = 0$. Cosin góc giữa mặt phẳng (α) và mặt phẳng (β) bằng:

A. $\frac{4}{9}.$

B. $-\frac{4}{9}.$

C. $\frac{4}{3\sqrt{3}}.$

D. $-\frac{4}{3\sqrt{3}}.$

Lời giải

Gọi $\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta$ lần lượt là vector pháp tuyến của mặt phẳng (α) và $(\beta).$

Ta có $\vec{n}_\alpha(2; -1; 2); \vec{n}_\beta(1; 2; -2).$

Áp dụng công thức

$$\cos((\alpha), (\beta)) = \left| \cos(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta) \right| = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{9}.$$

Câu 9: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 4t \\ z = -3 + 6t \end{cases}$ và

$$d_2: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3t \end{cases}. \text{ Khẳng định nào sau đây đúng?}$$

- A. d_1 và d_2 chéo nhau. B. $d_1 \equiv d_2$. C. $d_1 \perp d_2$. D. $d_1 \parallel d_2$.

Lời giải

Đường thẳng d_1 có một vector chỉ phương là $\vec{u}_1 = (-2; 4; 6)$, đường thẳng d_2 có một vector chỉ phương là $\vec{u}_2 = (-1; 2; 3)$.

Ta có $\vec{u}_1 = 2\vec{u}_2$, $M(2; 0; -3) \in d_1$ và $M(2; 0; -3) \in d_2$ nên $d_1 \equiv d_2$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x+24}{3} = \frac{y-25}{4} = \frac{z}{-5}$ và $\Delta_2: \frac{x-26}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$.

Góc giữa hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

- A. 81° . B. 82° . C. 62° . D. 83° .

Lời giải

Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 lần lượt có vector chỉ phương là $\vec{u}_1 = (3; 4; -5)$ và $\vec{u}_2 = (5; 3; 4)$.

$$\text{Ta có: } \cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|3 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + (-5) \cdot 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + (-5)^2} \cdot \sqrt{5^2 + 3^2 + 4^2}} = \frac{7}{50}.$$

Suy ra $(\Delta_1, \Delta_2) \approx 82^\circ$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(1; 4; -7)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 2024 = 0$ có phương trình là

- A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+7}{-2}$. B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+7}{-2}$.
C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-7}{-2}$. D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+4}{4} = \frac{z-7}{-7}$.

Lời giải

Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1; 4; -7)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 2024 = 0$.

Mặt phẳng (P) có VTPT là: $\vec{n}_{(P)} = (1; 2; -2)$.

Vì Δ vuông góc mặt phẳng (P) nên nhận $\vec{u} = \vec{n}_{(P)} = (1; 2; -2)$ làm VTCP.

$$\text{Phương trình đường thẳng } \Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+7}{-2}.$$

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-2024}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2025}{-2}$ và mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+1=0$. Tính góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) (làm tròn đến hàng đơn vị của độ).

A. 64° .

B. 63° .

C. 62° .

D. 65° .

Lời giải

Ta có: $\vec{u}$ là một vector chỉ phương của đường thẳng và $\vec{n}$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

$$\text{Khi đó, } \sin(\Delta, (P)) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1)|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{9}.$$

$$\text{Suy ra } \cos(\Delta, (P)) = \sqrt{1 - \sin^2(\Delta, (P))} = \sqrt{1 - \left(\frac{8}{9}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{9}.$$

Vậy góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) bằng khoảng 63° (làm tròn đến hàng đơn vị của độ).

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; 1)$, $B(0; 1; -3)$ và mặt phẳng $(P): x - y - 3 = 0$.

a) Điểm A thuộc mặt phẳng (P) .

b) Mặt phẳng (P) song song với trục Oz .

c) Mặt phẳng (α) đi qua A, B vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình $2x + 2y + z - 1 = 0$

d) Mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) , cách (P) một khoảng bằng $2\sqrt{2}$ và cắt trục Ox tại điểm có hoành độ dương có phương trình: $(Q): x - y - 1 = 0$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) Thay tọa độ điểm A vào phương trình (P) ta có: $(P): 1 + 2 - 3 = 0$ (đẳng thức đúng)

Vậy điểm A thuộc mặt phẳng (P) nên a) đúng.

b) Ta có phương trình mặt phẳng $(P): x - y - 3 = 0$ khuyết ẩn z nên (P) song song hoặc chứa trục Oz . Mặt khác điểm O không thuộc (P) nên (P) song song với trục Oz . Nên b) đúng

c)

$$\left. \begin{array}{l} \vec{AB} = (-1; 3; -4) \\ \vec{n}_P = (1; -1; 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n}_\alpha = [\vec{AB}, \vec{n}_P] = (-4; -4; -2) = -2(2; 2; 1)$$

Mặt phẳng (α) đi qua $A(1; -2; 1)$ và nhận $\vec{n}_\alpha$ làm VTPT có phương trình

$2x + 2y + z + 1 = 0$ nên c) sai

d)

Ta có, (Q) song song (P) nên phương trình mặt phẳng $(Q): x - y + C = 0$; $C \neq -3$

Chọn $M(3;0;0) \in (P)$

Ta có $d((P);(Q)) = d(M;(Q)) = \frac{|3+C|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} C=1 \\ C=-7 \end{cases}$ (thỏa mãn)

$C=1 \Rightarrow (Q): x-y+1=0$ khi đó (Q) cắt Ox tại điểm $M_1(-1;0;0)$ có hoành độ âm nên trường hợp này (Q) không thỏa đề bài.

$C=-7 \Rightarrow (Q): x-y-7=0$ khi đó (Q) cắt Ox tại điểm $M_2(7;0;0)$ có hoành độ dương do đó $(Q): x-y-7=0$ thỏa đề bài.

Vậy phương trình mặt phẳng $(Q): x-y-7=0$. **d) sai**

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $M(1;-3;4)$, đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z+2=0$.

a) Điểm M thuộc đường thẳng d .

b) Đường thẳng Δ đi qua M và vuông góc với (P) có phương trình tham số là $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-3t \\ z=2+4t \end{cases}$

c) Đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) .

d) Hình chiếu vuông góc của đường thẳng d lên mặt phẳng (P) có phương trình

$d': \frac{x}{14} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{8}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
----------------	----------------	----------------	----------------

a) Thay tọa độ điểm M vào phương trình đường thẳng d ta có: $d: \frac{1}{1} = \frac{-3}{-1} = \frac{4-1}{2}$ (không thỏa mãn). Vậy $M \notin d$ nên **a sai**.

b) Đường thẳng Δ vuông góc với (P) nên Δ có VTCP là $\vec{u}_\Delta = \vec{n}_P = (1;2;-2)$

Δ đi qua M nên phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x=1+t \\ y=-3+2t \\ z=4-2t \end{cases}$ suy ra **b) sai**

c) Đường thẳng d có VTCP $\vec{u}_d = (1;-1;2)$, (P) có VTPT là $\vec{n}_P = (1;2;-2)$

$\Rightarrow \vec{u}_d \cdot \vec{n}_P = 1-2-4 = -5 \neq 0$ nên d cắt (P) suy ra **c) sai**

d)

Gọi d' là hình chiếu của d lên (P) ;

• Tọa độ $A = d \cap (P)$ thỏa $\begin{cases} x+2y-2z+2=0 \\ \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow A(0;0;1)$.

• Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với (P)

Đường thẳng d có vector chỉ phương $\vec{u}_d = (1;-1;2)$.

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_p = (1; 2; -2)$.

Suy ra (Q) có VTPT là $\vec{n}_Q = [\vec{u}_d, \vec{n}_p] = (-2; 4; 3)$.

• Khi đó do $d' = (P) \cap (Q)$ nên $\vec{u}_{d'} = [\vec{n}_p, \vec{n}_Q] = (14; 1; 8)$ là vectơ chỉ phương của (d') .

• Đường thẳng d' đi qua $A(0; 0; 1)$ và có VTCP là $\vec{u}_{d'} = (14; 1; 8)$ có phương trình chính tắc là

$$d': \frac{x}{14} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{8}.$$

Vậy **d) đúng**.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z = 0$ và điểm $A(4; 4; 0)$.

Gọi B là điểm thuộc (S) sao cho tam giác OAB là tam giác đều.

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(2; 2; 2)$, bán kính $R = 2$.

b) Điểm A nằm ngoài mặt cầu (S) .

c) Điểm O nằm trên mặt cầu (S) .

d) Mặt phẳng (OAB) có phương trình là $x - y + z = 0$ hoặc $x - y - z = 0$.

Lời giải.

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

a) Sai

Các hệ số $a = 2; b = 2; c = 2; d = 0$ nên mặt cầu (S) có tâm $I(2; 2; 2)$, bán kính $R = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}$.

b) Sai

$IA = \sqrt{(4-2)^2 + (4-2)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{3} = R$ nên điểm A nằm trên mặt cầu (S) .

c) Đúng

$OI = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3} = R$ nên điểm O nằm trên mặt cầu (S) .

d) Đúng

Theo kết quả câu (b) và (c), điểm O và A cùng thuộc (S) .

Tam giác OAB đều, có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R' = \frac{OA}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

$$d(I; (OAB)) = \sqrt{R^2 - (R')^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Mặt phẳng (OAB) đi qua O nên có phương trình dạng: $ax + by + cz = 0$ ($a^2 + b^2 + c^2 > 0$) (*)

Do (OAB) đi qua A , suy ra: $4a + 4b = 0 \Leftrightarrow b = -a$.

$$\text{Lúc đó: } d(I; (OAB)) = \frac{|2(a+b+c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|2c|}{\sqrt{2a^2 + c^2}} \Leftrightarrow \frac{|2c|}{\sqrt{2a^2 + c^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + c^2 = 3c^2 \Leftrightarrow a^2 = c^2 \Leftrightarrow \begin{cases} c = a \\ c = -a \end{cases}. \text{ Theo (*), suy ra } (OAB): x - y + z = 0 \text{ hoặc}$$

$$x - y - z = 0.$$

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0); B(3;0;0); D(0;2;0); A'(0;0;5)$.

a) Điểm C có tọa độ là $(3;2;0)$.

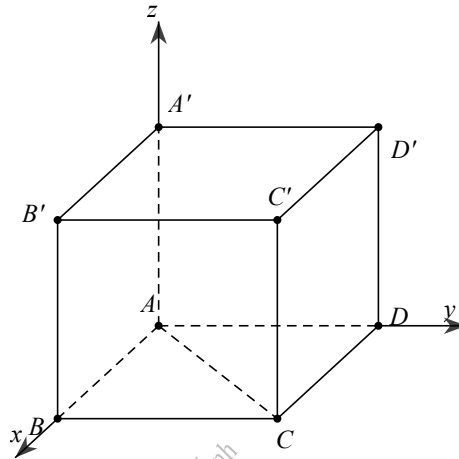
b) Khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 5.

c) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng 2.

d) Cosin góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(CB'D')$ bằng $\frac{289}{361}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------



a) Đúng

Hình chiếu của điểm C trên các trục Ox, Oy, Oz lần lượt là B, D, A nên $C(3;2;0)$.

b) Sai

Ta có $AB = 3; AD = 2; AA' = 5$.

$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB \cdot AD \cdot AA' = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30.$$

c) Sai

Phương trình mặt phẳng $(A'BD)$ là: $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{5} = 1 \Leftrightarrow 10x + 15y + 6z - 30 = 0$.

$$d(A; (A'BD)) = \frac{|-30|}{\sqrt{10^2 + 15^2 + 6^2}} = \frac{30}{19}.$$

d) Đúng

$$B'(3;0;5); D'(0;2;5) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB'} = (3;0;5) \\ \overrightarrow{AD'} = (0;2;5) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AD'}] = (-10; -15; 6).$$

Vậy mặt phẳng $(AB'D')$ có 1 VTPT $\vec{n}(10;15;-6)$.

$$C(3;2;0) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{B'C} = (0;2;-5) \\ \overrightarrow{D'C} = (3;0;-5) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{D'C}] = (-10; -15; -6).$$

Vậy mặt phẳng $(CB'D')$ có 1 VTPT $\vec{n}'(10;15;6)$.

$$\cos((AB'D'); (CB'D')) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}'|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'|} = \frac{289}{361}.$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Khi gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là decimét) vào một ngôi nhà 1 tầng, người ta thấy rằng mặt trên và mặt dưới của mái nhà thuộc các mặt phẳng vuông góc với trục Oz . Biết rằng các vị trí $A(3;4;33), D(9;8;35)$ lần lượt thuộc mặt dưới, mặt trên của mái nhà. Độ dày của mái nhà được tính bằng khoảng cách giữa mặt trên và mặt dưới của mái nhà đó. Hãy cho biết độ dày của mái nhà đó là bao nhiêu decimét?

Lời giải

Trả lời: 2

Do mặt dưới của mái nhà thuộc mặt phẳng vuông góc với trục Oz và đi qua điểm $A(3;4;33)$ nên phương trình mặt phẳng chứa mặt dưới của mái nhà là:

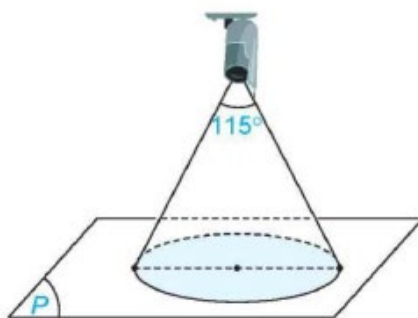
$$z - 33 = 0.$$

Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng chứa mặt dưới của mái nhà bằng:

$$\frac{|35 - 33|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = 2.$$

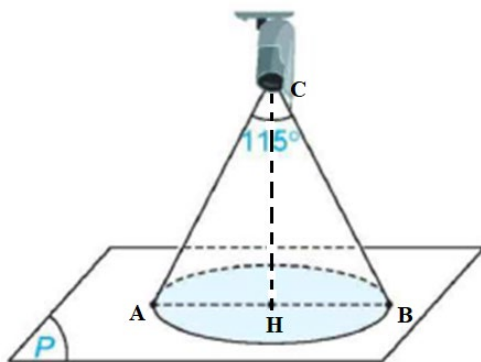
Vậy độ dày của mái nhà là 2 dm.

Câu 2: Góc quan sát ngang của một camera là 115° . Trong không gian $Oxyz$, camera được đặt tại điểm $C(4;2;3)$ và chiếu thẳng về phía mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 3 = 0$. Biết vùng quan sát được trên mặt phẳng (P) của camera là hình tròn. Tính diện tích của vùng quan sát đó (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).



Lời giải

Trả lời: 69,7



Kẻ $CH \perp (P)$, ta có: $CH = d(C; (P)) = \frac{|2.4 - 1.2 + 2.3 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 3$.

Do tam giác CAB cân tại C nên $\widehat{ACH} = 57,5^\circ$.

Xét tam giác vuông CAH có $AH = CH \cdot \tan \widehat{ACH} = 3 \cdot \tan 57,5^\circ$.

Vậy diện tích của vùng quan sát được của camera là $S = \pi \cdot r^2 \approx \pi \cdot (3 \cdot \tan 57,5^\circ)^2 \approx 69,7$ (đvdt).

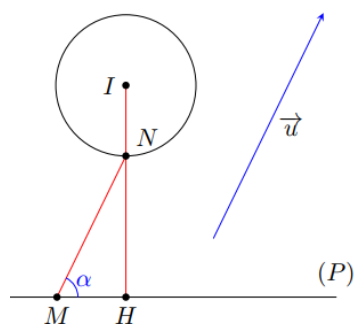
Câu 3: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là ki – lô – mét), đài kiểm soát không lưu sân bay có tọa độ $(-64; 128; 64)$. Máy bay bay trong phạm vi cách đài kiểm soát không quá 500 km thì sẽ hiển thị trên màn hình ra đa. Một máy bay N xuất hiện trên màn hình ra đa và một máy bay M nằm trong mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 1458 = 0$ sao cho hai máy bay M, N thuộc đường thẳng có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; 1; 1)$. Khoảng cách nhỏ nhất giữa hai máy bay M, N là bao nhiêu km? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

Lời giải

Trả lời: 260

Máy bay N xuất hiện trên màn hình ra đa nên N thuộc khối cầu (S) có tâm $I(-64; 128; 64)$, bán kính $R = 500$.

Ta có $d(I, (P)) = \frac{|x_I - 2y_I + 2z_I - 1458|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 550 > R$ nên (P) và (S) không giao nhau.



Gọi α là góc tạo bởi MN và mặt phẳng (P) .

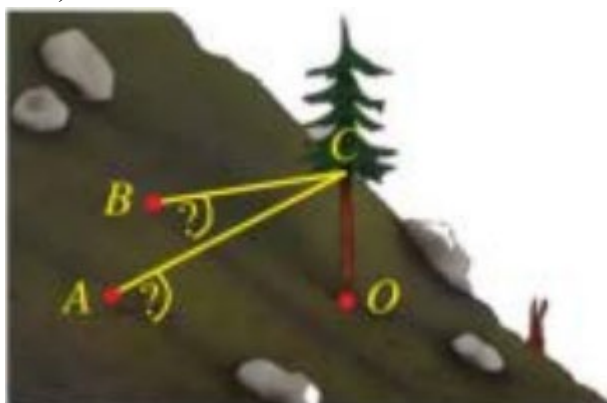
Gọi H là hình chiếu của N lên mặt phẳng (P) .

Mặt khác $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với véc-tơ $\vec{u} = (1; 1; 1)$ và $\vec{n}_p = (1; -2; 2)$ suy ra

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}_p|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}_p|} = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

$$\text{Khi đó } MN = \frac{NH}{\sin \alpha} \geq \frac{NH_{\min}}{\sin \alpha} = \frac{d(I, (P)) - R}{\sin \alpha} = \frac{550 - 500}{\frac{1}{3\sqrt{3}}} = 150\sqrt{3} \approx 260$$

Câu 4: Trên một sườn núi (có độ nghiêng đều), người ta trồng một cây thông và muốn giữ nó không bị nghiêng bằng hai sợi dây neo như hình vẽ. Giả thiết cây thông mọc thẳng đứng và trong một hệ tọa độ phù hợp, các điểm gốc O (gốc cây thông) và A, B (nơi buộc dây neo) có tọa độ tương ứng là $O(0; 0; 0)$, $A(5; -3; 1)$, $B(-3; -4; 2)$, đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét. Biết rằng hai dây neo đều được buộc vào cây thông tại điểm $C(0; 0; 5)$ và được kéo căng tạo thành các đoạn thẳng. Khi đó, góc tạo bởi dây neo CA và mặt phẳng sườn núi là bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ)?



Lời giải

Trả lời: 37

$$\text{Ta có } \overrightarrow{OA} = (5; -3; 1), \overrightarrow{OB} = (-3; -4; 2) \text{ nên } [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\ = (-2; -13; -11)$$

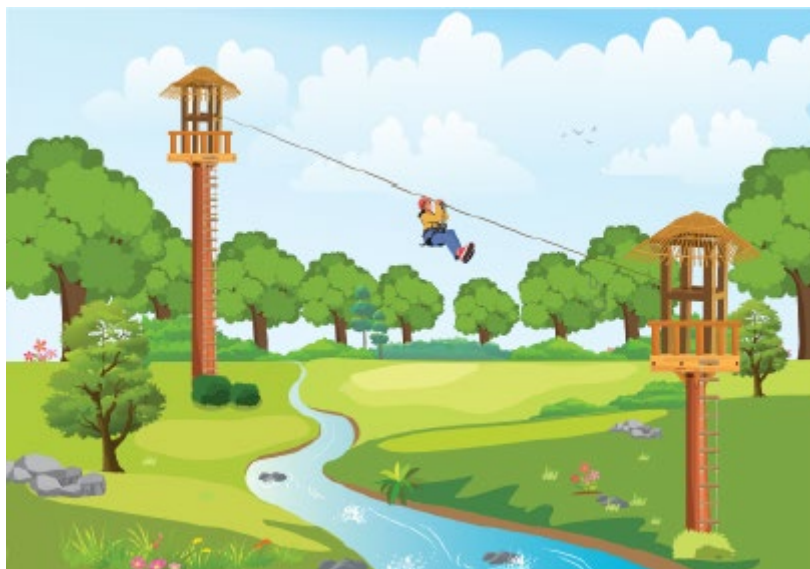
Suy ra vectơ $\vec{n} = [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = (-2; -13; -11)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (OAB) .

Mặt khác $\overrightarrow{CA} = (5; -3; -4)$ nên ta có

$$\sin(CA, (OAB)) = \left| \cos(\overrightarrow{CA}, \vec{n}) \right| = \frac{|\overrightarrow{CA} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|5 \cdot (-2) + (-3) \cdot (-13) + (-4) \cdot (-11)|}{\sqrt{5^2 + (-3)^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + (-13)^2 + (-11)^2}} = \frac{73}{70\sqrt{3}}$$

Suy ra $(CA, (OAB)) \approx 37^\circ$. Vậy góc tạo bởi dây neo CA và mặt phẳng sườn núi khoảng 37° .

Câu 5: Trong một khu du lịch, người ta cho du khách trải nghiệm thiên nhiên bằng cách đu theo đường trượt zipline từ vị trí A cao 15 m của tháp 1 này sang vị trí B cao 10 m của tháp 2 trong khung cảnh tuyệt đẹp xung quanh. Với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho trước (đơn vị: mét), tọa độ của A và B lần lượt là $(3; 2; 5; 15)$ và $(21; 27; 5; 10)$. Biết tọa độ du khách khi ở độ cao 12 mét là $(a; b; c)$. Tính $P = 5a + b + c$.



Lời giải

Trả lời: 98,5

Ta có $\overrightarrow{AB} = (18; 25; -5)$.

Phương trình tham số chứa đường zipline là $d : \begin{cases} x = 3 + 18t \\ y = 2,5 + 25t \\ z = 15 - 5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Gọi $C(x_C; y_C; 12)$ là tọa độ của du khách đang ở độ cao 12 mét.

Ta có $C \in d$ và $z_C = 12$ khi đó $12 = 15 - 5t \Rightarrow t = \frac{3}{5}$.

$x_C = 3 + 18 \cdot \frac{3}{5} = \frac{69}{5}$; $y_C = 2,5 + 25 \cdot \frac{3}{5} = 17,5$.

Vậy tọa độ của du khách là $C\left(\frac{69}{5}; 17,5; 12\right)$. Khi đó $P = 5a + b + c = 5 \cdot \frac{69}{5} + 18 + 12 = 98,5$.

Câu 6: Hệ thống định vị toàn cầu (tên tiếng Anh là: Global Positioning System, viết tắt là GPS) là một hệ thống cho phép xác định chính xác vị trí của một vật thể trong không gian. Ta có thể mô phỏng cơ chế hoạt động của hệ thống GPS trong không gian như sau: Trong cùng một thời điểm, tọa độ của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước, trên mỗi vệ tinh có một máy thu tín hiệu. Bằng cách so sánh sự sai lệch về thời gian từ lúc tín hiệu được phát đi với thời gian nhận phản hồi tín hiệu đó, mỗi máy thu tín hiệu xác định được khoảng cách từ vệ tinh đến vị trí M cần tìm tọa độ. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn vệ tinh $A(0; 4; 5)$, $B(-3; -1; 3)$, $C(-2; 8; 9)$, $D(-7; 2; -3)$. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến điểm M biết rằng khoảng cách từ các vệ tinh đến điểm M lần lượt là $MA = 3$, $MB = 5$, $MC = 9$, $MD = 10$. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: 3,74

$MA = 3 \Rightarrow$ Điểm M thuộc mặt cầu tâm A , bán kính $R = 3$ có phương trình $x^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2 = 9$.

$MB = 5 \Rightarrow$ Điểm M thuộc mặt cầu tâm B , bán kính $R = 5$ có phương trình $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 25$.

$MC = 9 \Rightarrow$ Điểm M thuộc mặt cầu tâm C , bán kính $R = 9$ có phương trình $(x+2)^2 + (y-8)^2 + (z-9)^2 = 81$.

$MD = 10 \Rightarrow$ Điểm M thuộc mặt cầu tâm D , bán kính $R = 10$ có phương trình $(x+7)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 100$.

Ta có M là giao điểm của bốn mặt cầu với tâm lần lượt là bốn vệ tinh A, B, C, D .

Toạ độ M là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 9 \\ (x+3)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 25 \\ (x+2)^2 + (y-8)^2 + (z-9)^2 = 81 \\ (x+7)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 100 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được $x = 1, y = 2, z = 3 \Rightarrow M(1; 2; 3)$.

Khoảng cách từ gốc toạ độ O đến điểm M là $OM = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \approx 3,74$.

Huỳnh Văn Ánh

CHƯƠNG



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

ÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG 5 ĐỀ TEST SỐ 02

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, tìm tọa độ của $2\vec{i}$.

- A. $(2; 0; 0)$. B. $(1; 0; 0)$. C. $(0; 2; 0)$. D. $(2; 1; 1)$

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 9 = 0$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là

- A. $I(1; -2; -3)$ và $R = 5$. B. $I(-1; 2; 3)$ và $R = \sqrt{5}$.
C. $I(1; -2; -3)$ và $R = \sqrt{5}$. D. $I(-2; 4; 6)$ và $R = 5$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0$. Tìm tọa độ tâm và bán kính mặt cầu (S) .

- A. $I(-4; 1; 0), R = 2$. B. $I(-4; 1; 0), R = 4$. C. $I(4; -1; 0), R = 2$. D. $I(4; -1; 0), R = 4$.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 2)$, $B(2; -1; 3)$. Viết phương trình đường thẳng AB .

- A. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1}$ B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{1}$
C. $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}$ D. $\frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}$

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 0; -3)$. Chọn khẳng định đúng có tọa độ là

- A. $A \in (Oxy)$. B. $A \in (Oyz)$. C. $A \in (Oxz)$. D. $A \in Oy$.

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$. Tìm tọa độ của vector $\vec{a}$.

- A. $(0; -2; 3)$. B. $(2; 0; -3)$. C. $(2; -3; 0)$. D. $(-2; -3; 0)$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 3z + 1 = 0$. Một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) có tọa độ là

- A. $(1; -3; 1)$. B. $(1; 0; -3)$. C. $(-1; 3; 1)$. D. $(-1; 0; -3)$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4$ có bán kính bằng

- A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có phương trình chính tắc $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{1}$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ là?

- A.** $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -3 - t \\ z = t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = -3 - 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = t \end{cases}$

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 4$. Tâm của (S) có tọa độ là

- A.** $(2; 1; 3)$. **B.** $(-2; 1; 3)$. **C.** $(2; -1; 3)$. **D.** $(4; -2; 6)$.

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cặp vectơ $\vec{a} = (2; 1; -2)$, $\vec{b} = (1; 0; 2)$ có giá song song với mặt phẳng (P) . Phương trình mặt phẳng (P) qua $C(1; 1; 3)$ là

- A.** $2x + 6y - z - 7 = 0$. **B.** $2x - 6y - z + 5 = 0$.
C. $2x + 6y + z + 5 = 0$. **D.** $2x - 6y - z + 7 = 0$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, số đo góc giữa hai đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{1}$ và

$d': \frac{x}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-1}$ là

- A.** 30° . **B.** 45° . **C.** 60° . **D.** 90° .

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $x + 2y - z + 3 = 0$ và điểm $A(1; 1; 2)$. Trong mỗi ý a), b), c), d) dưới đây chọn đúng hoặc sai.

- a) Tọa độ của một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $(1; 2; -1)$.
b) Điểm A thuộc mặt phẳng (P) .
c) Phương trình mặt cầu tâm A và có bán kính bằng khoảng từ điểm A đến mặt phẳng (P) là $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 8$
d) Gọi (Q) mặt phẳng đi qua điểm A và song song với mặt phẳng (P) , mặt phẳng (Q) có phương trình là $x + 2y - z - 1 = 0$

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 6; 2)$, $B(5; 1; 3)$, $C(4; 0; 6)$.

- a) Hình chiếu vuông góc của điểm B lên mặt phẳng (Oxz) có tọa độ là $(0; 1; 0)$
b) Tọa độ trọng tâm tam giác ABC là $G\left(\frac{10}{3}; \frac{7}{3}; \frac{11}{3}\right)$
c) Một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB là $\vec{u} = (4; -5; 1)$
d) Phương trình mặt phẳng (ABC) là $14x + 13y + 9z - 110 = 0$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; -1; -2)$ và đường thẳng (d) có phương trình $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Vectơ chỉ phương của đường thẳng (d) là $\vec{u} = (-1; 1; -1)$.
- b) Đường thẳng đi qua điểm A và song song với đường thẳng (d) có phương trình là $\frac{x-5}{1} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-1}{1}$.
- c) Đường thẳng (d) nằm trong mặt phẳng $(\alpha): 3x + y - 2z - 2 = 0$.
- d) Biết (P) là mặt phẳng đi qua điểm A , song song với đường thẳng (d) và khoảng cách từ d tới mặt phẳng (P) là lớn nhất. Khi đó mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng $3x + z + 2 = 0$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 16$ và điểm $A(-1; -1; -1)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

- a) Mặt cầu (S) có tâm $I(2; 3; -1)$ và bán kính $R = 4$.
- b) Với I là tâm của mặt cầu (S) , phương trình đường thẳng IA là $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + 4t \\ z = -1 + t \end{cases}$.
- c) Phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại $B(2; 3; 3)$ là $z = 3$.
- d) Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S) , M luôn thuộc một mặt phẳng cố định có phương trình là $3x + 4y - 2 = 0$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10; 0; 3)$ và chuyển động theo đường cáp có vectơ chỉ phương $\vec{u}(2; 2; 1)$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là m). Hai cột trụ cáp treo đặt tại điểm B, C biết $x_B = 20; y_C = 120$. Thời gian cabin đi từ điểm B đến điểm C là 55s. Hỏi vận tốc của cabin bằng bao nhiêu m/s ?

Câu 2: Khi gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là decimet) vào một ngôi nhà 1 tầng có diện tích $50m^2$, người ta thấy rằng mặt trên và mặt dưới của mái nhà thuộc các mặt phẳng vuông góc với trục Oz . Biết rằng các vị trí $A(3; 4; 33)$ và $B(9; 8; 35)$ lần lượt thuộc mặt dưới, mặt trên của mái nhà. Độ dày của mái nhà được tính bằng khoảng cách giữa mặt trên và mặt dưới của mái nhà đó. Biết giá tiền $1m^3$ bê tông tươi là 1.100.000 (đồng), tiền công đổ mái là 100.000 đồng trên $1m^2$. Chi phí chủ nhà phải trả để đổ được mái bằng bao nhiêu (đơn vị tính triệu đồng).

Câu 3: Khi gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo mét) vào một căn nhà sao cho nền nhà thuộc mặt phẳng (Oxy) , người ta coi mỗi mái nhà là một phần của mặt phẳng và thấy ba vị trí A, B, C ở mái nhà bên phải lần lượt có tọa độ $(2; 0; 4)$, $(4; 0; 3)$ và $(4; 9; 3)$. Góc giữa mái nhà bên phải và nền nhà bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Câu 4: Một người đứng ở mặt đất điều khiển hai flycam để phục vụ trong một chương trình của đài truyền hình. Flycam I ở vị trí A cách vị trí điều khiển 150m về phía nam và 200m về phía đông, đồng thời cách mặt đất 50m. Flycam II ở vị trí B cách vị trí điều khiển 180m về phía bắc và 240m về phía tây, đồng thời cách mặt đất 60m.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O là vị trí người điều khiển, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox có hướng trùng với hướng nam, trục Oy có hướng trùng với hướng đông, trục Oz vuông góc với mặt đất hướng lên bầu trời, đơn vị trên mỗi trục tính theo mét. Khoảng cách giữa hai flycam đó bằng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Câu 5: Người ta muốn thiết kế một bồn chứa khí hóa lỏng hình cầu bằng phần mềm 3D (hình vẽ minh họa). Biết phương trình bề mặt của bồn chứa là $(S): (x-5)^2 + (y-5)^2 + (z-5)^2 = 36$. Nắp của bồn chứa nằm trên mặt phẳng $(P): z = 9$. Khoảng cách từ đáy đến nắp bồn chứa bằng.



Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$, mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 24 = 0$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến (P) nhỏ nhất. Khi đó $a+b+c$ có giá trị bằng

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, tìm tọa độ của $2\vec{i}$.

- A.** $(2; 0; 0)$. **B.** $(1; 0; 0)$. **C.** $(0; 2; 0)$. **D.** $(2; 1; 1)$

Lời giải

$$\vec{i} = (1; 0; 0) \Rightarrow 2\vec{i} = (2; 0; 0)$$

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 9 = 0$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là

- A.** $I(1; -2; -3)$ và $R = 5$. **B.** $I(-1; 2; 3)$ và $R = \sqrt{5}$.
C. $I(1; -2; -3)$ và $R = \sqrt{5}$. **D.** $I(-2; 4; 6)$ và $R = 5$.

Lời giải

$$\text{Tâm của } (S) \text{ có tọa độ là } I(-1; 2; 3). \text{ Bán kính } R = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2 - 9} = \sqrt{5}.$$

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0$. Tìm tọa độ tâm và bán kính mặt cầu (S) .

- A.** $I(-4; 1; 0), R = 2$. **B.** $I(-4; 1; 0), R = 4$. **C.** $I(4; -1; 0), R = 2$. **D.** $I(4; -1; 0), R = 4$.

Lời giải

$$\text{Ta có } (S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow I(4; -1; 0); \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 0 - 1} = 4.$$

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 2)$, $B(2; -1; 3)$. Viết phương trình đường thẳng AB .

- A.** $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1}$ **B.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{1}$
C. $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}$ **D.** $\frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}$

Lời giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (1; -2; 1).$$

Đường thẳng AB đi qua điểm $A(1; 1; 2)$ và nhận vectơ $\overrightarrow{AB} = (1; -2; 1)$ làm vectơ chỉ phương.

$$\text{Vậy phương trình của } AB \text{ là } \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{1}.$$

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 0; -3)$. Chọn khẳng định đúng có tọa độ là

- A.** $A \in (Oxy)$. **B.** $A \in (Oyz)$. **C.** $A \in (Oxz)$. **D.** $A \in Oy$.

Lời giải

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{a}$.

- A.** $(0; -2; 3)$. **B.** $(2; 0; -3)$. **C.** $(2; -3; 0)$. **D.** $(-2; -3; 0)$.

Lời giải

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 3z + 1 = 0$. Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) có tọa độ là

- A. $(1; -3; 1)$. B. $(1; 0; -3)$. C. $(-1; 3; 1)$. D. $(-1; 0; -3)$.

Lời giải

Mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a; b; c)$

Nên $(P): x - 3z + 1 = 0$ có VTPT là $\vec{n}(1; 0; -3)$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 4$ có bán kính bằng

- A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Lời giải

Bán kính của mặt cầu (S) là $R = \sqrt{4} = 2$

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có phương trình chính tắc $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{1}$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ là?

- A. $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -3 - t \\ z = t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = -3 - 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = t \end{cases}$.

Lời giải

Cách 1:

Δ đi qua điểm $A(3; -1; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}_\Delta = (2; -3; 1)$

Vậy phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = t \end{cases}$

Cách 2:

Giả sử: $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{1} = t \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-3}{2} = t \\ \frac{y+1}{-3} = t \\ \frac{z}{1} = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = t \end{cases}$.

Vậy phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = t \end{cases}$

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 4$. Tâm của (S) có tọa độ là

- A. $(2; 1; 3)$. B. $(-2; 1; 3)$. C. $(2; -1; 3)$. D. $(4; -2; 6)$.

Lời giải

Mặt cầu $(S): (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 4$ có tâm $I(2; -1; 3)$.

- Câu 11:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cặp vectơ $\vec{a} = (2; 1; -2)$, $\vec{b} = (1; 0; 2)$ có giá song song với mặt phẳng (P) . Phương trình mặt phẳng (P) qua $C(1; 1; 3)$ là
- A. $2x + 6y - z - 7 = 0$. B. $2x - 6y - z + 5 = 0$.
 C. $2x + 6y + z + 5 = 0$. D. $2x - 6y - z + 7 = 0$.

Lời giải

Ta có $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = (2; -6; -1)$.

Mặt phẳng (P) đi qua $C(1; 1; 3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; -6; -1)$ nên có phương trình $2(x-1) - 6(y-1) - (z-3) = 0 \Leftrightarrow 2x - 6y - z + 7 = 0$.

Vậy mặt phẳng cần tìm có phương trình: $2x - 6y - z + 7 = 0$.

- Câu 12:** Trong không gian $Oxyz$, số đo góc giữa hai đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{1}$ và $d': \frac{x}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-1}$ là
- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Lời giải

Đường thẳng d và d' lần lượt có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; -2; 1)$ và $\vec{u}' = (3; 1; -1)$.

Ta có $\cos(d, d') = \frac{|1 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot (-1)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2}} = 0$.

Vậy $(d, d') = 90^\circ$

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

- Câu 1:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $x + 2y - z + 3 = 0$ và điểm $A(1; 1; 2)$. Trong mỗi ý a), b), c), d) dưới đây chọn đúng hoặc sai.
- a) Tọa độ của một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $(1; 2; -1)$.
 b) Điểm A thuộc mặt phẳng (P) .
 c) Phương trình mặt cầu tâm A và có bán kính bằng khoảng từ điểm A đến mặt phẳng (P) là $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 8$
 d) Gọi (Q) mặt phẳng đi qua điểm A và song song với mặt phẳng (P) , mặt phẳng (Q) có phương trình là $x + 2y - z - 1 = 0$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) Đúng.

Từ phương trình của (P) ta có tọa độ của một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $(1; 2; -1)$.

b) Sai

Do $1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 3 \neq 0$ nên điểm A không thuộc mặt phẳng (P) .

c) Sai

Ta có $d(A, (P)) = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, nên phương trình mặt cầu tâm $A(1;1;2)$ và có bán kính bằng khoảng từ điểm A đến mặt phẳng (P) là $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = \frac{8}{3}$

d) Đúng

+ Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến của là $\vec{n} = (1;2;-1)$, nên mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến của là $\vec{n} = (1;2;-1)$

+ Điểm A không thuộc mặt phẳng (P) .

+ Phương trình mặt phẳng (Q) là $1 \cdot (x-1) + 2(y-1) - 1(z-2) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - z - 1 = 0$

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;6;2)$, $B(5;1;3)$, $C(4;0;6)$.

a) Hình chiếu vuông góc của điểm B lên mặt phẳng (Oxz) có tọa độ là $(0;1;0)$

b) Tọa độ trọng tâm tam giác ABC là $G\left(\frac{10}{3}; \frac{7}{3}; \frac{11}{3}\right)$

c) Một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB là $\vec{u} = (4;-5;1)$

d) Phương trình mặt phẳng (ABC) là $14x + 13y + 9z - 110 = 0$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
---------------	----------------	----------------	----------------

a) Sai.

Hình chiếu vuông góc của điểm B lên mặt phẳng (Oxz) có tọa độ là $(5;0;3)$

b) Đúng

$$G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \text{ thì } \begin{cases} x_G = \frac{1+5+4}{3} = \frac{10}{3} \\ y_G = \frac{6+1+0}{3} = \frac{7}{3} \\ z_G = \frac{2+3+6}{3} = \frac{11}{3} \end{cases}$$

Vậy tọa độ trọng tâm tam giác ABC là $G\left(\frac{10}{3}; \frac{7}{3}; \frac{11}{3}\right)$

c) Đúng

Có $\overrightarrow{AB} = (4;-5;1)$ nên một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB là $\vec{u} = (4;-5;1)$

d) Đúng

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4;-5;1)$ và $\overrightarrow{AC} = (3;-6;4) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-14;-13;-9)$.

Gọi $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) . Chọn $\vec{n} = (-14;-13;-9)$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng:

$$-14(x-1) - 13(y-6) - 9(z-2) = 0.$$

$$\Leftrightarrow -14x - 13y - 9z + 110 = 0.$$

$$\Leftrightarrow 14x + 13y + 9z - 110 = 0.$$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho cho điểm $A(2;-1;-2)$ và đường thẳng (d) có phương trình $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Vectơ chỉ phương của đường thẳng (d) là $\vec{u} = (-1;1;-1)$.
- b) Đường thẳng đi qua điểm A và song song với đường thẳng (d) có phương trình là $\frac{x-5}{1} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-1}{1}$.
- c) Đường thẳng (d) nằm trong mặt phẳng $(\alpha): 3x + y - 2z - 2 = 0$.
- d) Biết (P) là mặt phẳng đi qua điểm A , song song với đường thẳng (d) và khoảng cách từ d tới mặt phẳng (P) là lớn nhất. Khi đó mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng $3x + z + 2 = 0$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
----------------	----------------	----------------	----------------

a) Đúng

Ta thấy ngay vectơ chỉ phương của đường thẳng (d) là $\vec{u} = (-1;1;-1)$.

b) Đúng

Ta thấy đường thẳng $(\Delta): \frac{x-5}{1} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-1}{1}$ có VTCP là $\vec{u} = (1;-1;1)$ nên (Δ) song song với (d)

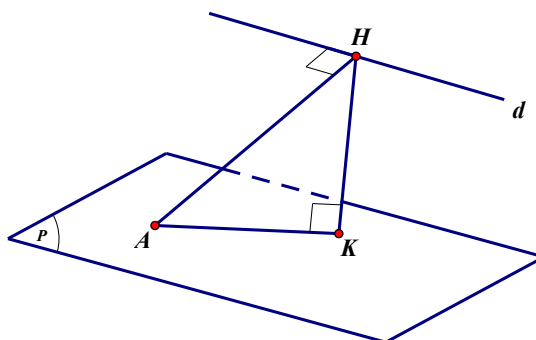
Thay tọa độ điểm A vào phương trình (Δ) ta thấy $(\Delta): \frac{2-5}{1} = \frac{-1+4}{-1} = \frac{-2-1}{1}$ (luôn đúng) nên $A \in (\Delta)$

c) Đúng

Lấy $M(1;1;1), N(2,0,2) \in (d)$. Thay tọa độ điểm $M(1;1;1), N(2,0,2)$ vào phương mặt phẳng $(\alpha): 3x + y - 2z - 2 = 0$ ta thấy thỏa mãn.

Vậy đường thẳng (d) nằm trong mặt phẳng $(\alpha): 3x + y - 2z - 2 = 0$.

d) Đúng



Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng d . Ta tìm được điểm $H(1;1;1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A và (P) song song với đường thẳng d . Gọi K là hình chiếu của H lên mặt phẳng (P) . Do $d \parallel (P)$ nên ta có $d(d, (P)) = d(H, (P)) = HK$.

Ta luôn có bất đẳng thức $HK \leq HA$. Như vậy khoảng cách từ (d) đến (P) lớn nhất bằng AH .

Và khi đó (P) nhận $\overrightarrow{AH} = (-1; 2; 3)$ làm vectơ pháp tuyến.

Do (P) đi qua $A(2; -1; -2)$ nên ta có phương trình của (P) là: $x - 2y - 3z - 10 = 0$.

Do đó (P) vuông góc với mặt phẳng có phương trình: $3x + z + 2 = 0$.

Câu 4: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 16$ và điểm $A(-1; -1; -1)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(2; 3; -1)$ và bán kính $R = 4$.

b) Với I là tâm của mặt cầu (S) , phương trình đường thẳng IA là
$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + 4t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

c) Phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại $B(2; 3; 3)$ là $z = 3$.

d) Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S) , M luôn thuộc một mặt phẳng cố định có phương trình là $3x + 4y - 2 = 0$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
----------------	---------------	----------------	----------------

a) Đúng

Mặt cầu (S) có tâm $I(2; 3; -1)$ và bán kính $R = 4$.

b) Sai

Với I là tâm của mặt cầu (S) , phương trình đường thẳng IA là

Ta có: $\overrightarrow{IA} = (-3; -4; 0)$

Đường thẳng IA đi qua điểm $I(2; 3; -1)$ và nhận vectơ $\overrightarrow{IA} = (-3; -4; 0)$ làm vectơ chỉ phương.

Vậy phương trình của IA là
$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 3 - 4t \\ z = -1 \end{cases}$$

c) Đúng

Phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại $B(2; 3; 3)$ là $z = 3$.

Ta có: $\overrightarrow{IB} = (0; 0; 4)$.

Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại $B(2; 3; 3)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \overrightarrow{IB} = (0; 0; 4)$.

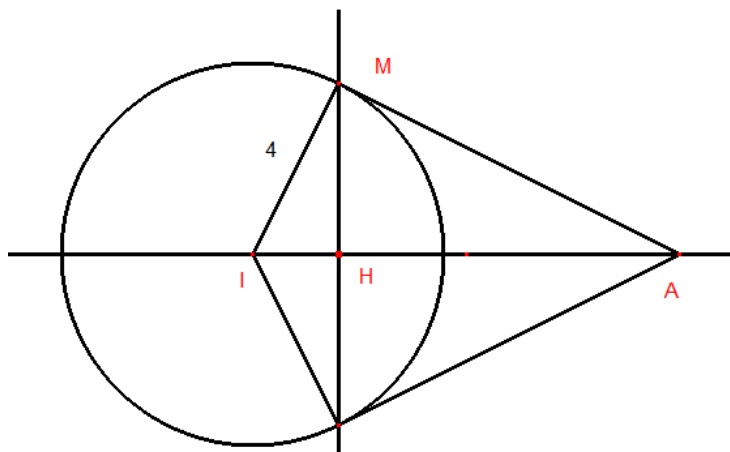
Suy ra phương trình mặt phẳng là: $0(x-2) + 0(y-3) + 4(z-3) = 0 \Leftrightarrow z = 3$.

d) Đúng

Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S) . M luôn thuộc một mặt phẳng cố định có phương trình là $3x + 4y - 2 = 0$.

(S) có tâm $I(2; 3; -1)$; bán kính $R = 4$

$A(-1; -1; -1) \Rightarrow \overrightarrow{IA} = (-3; -4; 0)$, tính được $IA = 5$.



Mặt phẳng cố định đi qua điểm H là hình chiếu của M xuống IA và nhận $\overrightarrow{IA} = (-3; -4; 0)$ làm vector pháp tuyến.

Do hai tam giác MHI và AMI đồng dạng nên tính được $IM^2 = IH \cdot IA \Rightarrow IH = \frac{IM^2}{IA} = \frac{16}{5}$, từ đó

tính được $\overrightarrow{IH} = \frac{16}{25} \overrightarrow{IA}$ tìm được $H\left(\frac{2}{25}; \frac{11}{25}; -1\right)$

Mặt phẳng cần tìm có phương trình là: $-3\left(x - \frac{2}{25}\right) - 4\left(y - \frac{11}{25}\right) + 0(z + 1) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 2 = 0$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10; 0; 3)$ và chuyển động theo đường cáp có vector chỉ phương $\vec{u}(2; 2; 1)$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là m). Hai cột trụ cáp treo đặt tại điểm B, C biết $x_B = 20; y_C = 120$. Thời gian cabin đi từ điểm B đến điểm C là 55s. Hỏi vận tốc của cabin bằng bao nhiêu m/s ?

Lời giải

Trả lời: 3

Phương trình tham số của đường cáp treo là: $d: \begin{cases} x = 10 + 2t \\ y = 2t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

$x_B = 20 \Rightarrow B(20; 10; 8), y_C = 120 \Rightarrow C(130; 120; 63)$.

$BC = \sqrt{110^2 + 110^2 + 55^2} = 165(m)$.

Vậy vận tốc của cabin đi là $v = \frac{165}{55} = 3(m/s)$.

Câu 2: Khi gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là decimet) vào một ngôi nhà 1 tầng có diện tích $50m^2$, người ta thấy rằng mặt trên và mặt dưới của mái nhà thuộc các mặt phẳng vuông góc với trục Oz . Biết rằng các vị trí $A(3; 4; 33)$ và $B(9; 8; 35)$ lần lượt thuộc mặt dưới, mặt trên của mái nhà. Độ dày của mái nhà được tính bằng khoảng cách giữa mặt trên và mặt dưới của mái nhà đó. Biết giá tiền $1m^3$ bê tông tươi là 1.100.000 (đồng), tiền công đổ mái là 100.000 đồng trên $1m^2$. Chi phí chủ nhà phải trả để đổ được mái bằng bao nhiêu (đơn vị tính triệu đồng).

Lời giải

Trả lời: 16

Vì mặt dưới mái nhà vuông góc với trục Oz và đi qua điểm $A(3;4;33)$ nên có phương trình là $(P): z - 33 = 0$.

Khoảng cách giữa mặt trên và mặt dưới của mái nhà bằng khoảng cách từ $B(9;8;35)$ đến (P) .

$$\text{Ta có } d(B, (P)) = \frac{|35 - 33|}{1} = 2.$$

Suy ra độ dày của mái nhà bằng $2 \text{ dm} = 0,2 \text{ m}$.

Thể tích beton cần đổ mái là $50.0,2 = 10 \text{ m}^3$.

Tiền beton cần trả là $10.1100000 = 11000000$ (đồng).

Tiền công cần trả là $50.100000 = 5000000$ (đồng).

Vậy tổng số tiền chủ nhà cần trả là $16.000.000$ (đồng).

Câu 3: Khi gắn hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo mét) vào một căn nhà sao cho nền nhà thuộc mặt phẳng (Oxy) , người ta coi mỗi mái nhà là một phần của mặt phẳng và thấy ba vị trí A, B, C ở mái nhà bên phải lần lượt có tọa độ $(2; 0; 4)$, $(4; 0; 3)$ và $(4; 9; 3)$. Góc giữa mái nhà bên phải và nền nhà bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Trả lời: 27

Ta có: mặt phẳng (ABC) và (Oxy) có vectơ pháp tuyến lần lượt là: $\vec{n}_1 = (1; 0; 2)$, $\vec{n}_2 = (0; 0; 1)$.

Từ đó, góc có α giữa mái nhà bên phải và nền nhà có $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Suy ra $\alpha \approx 27^\circ$.

Câu 4: Một người đứng ở mặt đất điều khiển hai flycam để phục vụ trong một chương trình của đài truyền hình. Flycam I ở vị trí A cách vị trí điều khiển 150 m về phía nam và 200 m về phía đông, đồng thời cách mặt đất 50 m . Flycam II ở vị trí B cách vị trí điều khiển 180 m về phía bắc và 240 m về phía tây, đồng thời cách mặt đất 60 m .

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O là vị trí người điều khiển, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox có hướng trùng với hướng nam, trục Oy có hướng trùng với hướng đông, trục Oz vuông góc với mặt đất hướng lên bầu trời, đơn vị trên mỗi trục tính theo mét. Khoảng cách giữa hai flycam đó bằng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Trả lời: 2

Ta có: Vị trí A, B có tọa độ lần lượt là: $(150; 200; 50)$, $(-180; -240; 60)$. Suy ra khoảng cách giữa hai flycam đó bằng:

$$AB = \sqrt{(-180 - 150)^2 + (-240 - 200)^2 + (60 - 50)^2} \approx 550(\text{m})$$

Vậy $a + b + c = 2$

Câu 5: Người ta muốn thiết kế một bồn chứa khí hóa lỏng hình cầu bằng phần mềm 3D (hình vẽ minh họa). Biết phương trình bề mặt của bồn chứa là $(S): (x - 5)^2 + (y - 5)^2 + (z - 5)^2 = 36$. Nắp của bồn chứa nằm trên mặt phẳng $(P): z = 9$. Khoảng cách từ đáy đến nắp bồn chứa bằng.



Lời giải

Trả lời: 10

Bồn chứa có tâm $I(5;5;5)$, bán kính $R = 6$.

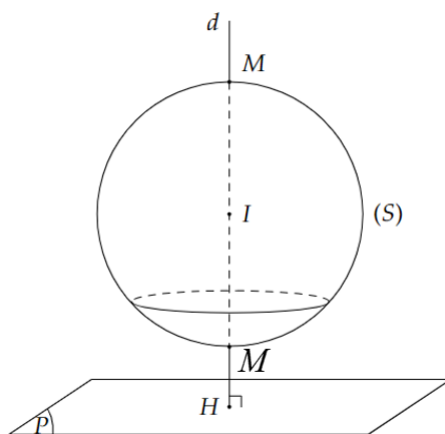
Khoảng cách từ tâm đến nắp bồn chứa là $d = \frac{|5-9|}{\sqrt{1}} = 4$.

Vậy khoảng cách từ đáy đến nắp bồn chứa là $h = d + R = 4 + 6 = 10$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$, mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 24 = 0$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến (P) nhỏ nhất. Khi đó $a+b+c$ có giá trị bằng

Lời giải

Trả lời: 3



$$(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9 \text{ có } \begin{cases} I(1;2;3) \\ R=3 \end{cases}.$$

Ta có $d(I, (P)) = 9 > R$ nên mặt phẳng (P) và (S) không có điểm chung.

Gọi d là đường thẳng đi qua tâm I và vuông góc với mặt phẳng (P) .

$$d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Điểm M cần tìm là giao điểm của d và (S) .

Tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - t \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - t \\ t^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ x = 3 \\ y = 4 \\ z = 2 \\ t = -1 \\ x = -1 \\ y = 0 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_1(3; 4; 2) \\ M_2(-1; 0; 4) \end{cases}$$

$$d(M_1, (P)) > d(M_2, (P)).$$

Vậy điểm $M_2(-1; 0; 4)$ là điểm cần tìm.

Suy ra $a + b + c = 3$.

Huỳnh Văn Anh