

Phương pháp chung:

Bước 1. Tìm tập xác định D của hàm số.

Bước 2. Tính đạo hàm $y' = f'(x)$.
Tìm các điểm x_i , ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.

Bước 3. Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.

Bước 4. Nêu kết luận về các khoảng đồng biến và nghịch biến đưa vào bảng biến thiên.

$$\begin{array}{l} \frac{y' > 0}{\text{trên}(a;b)} \rightarrow f(x) \text{ đồng biến}(a;b) \\ \frac{y' < 0}{\text{trên}(a;b)} \rightarrow f(x) \text{ nghịch biến}(a;b) \end{array}$$

Nhớ công thức tính đạo hàm:

$$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

Bài toán 1. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số

Bài tập trắc nghiệm

- Cho hàm số $y = x^3 + 3x + 2$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?
 - Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
 - Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
 - Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
 - Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- Hàm số $y = \frac{2}{x^2 + 1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?
 - $(0; +\infty)$
 - $(-1; 1)$
 - $(-\infty; +\infty)$
 - $(-\infty; 0)$
- Hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?
 - $y = \frac{x+1}{x+3}$
 - $y = x^3 + x$
 - $y = \frac{x-1}{x-2}$
 - $y = -x^3 - 3x$
- Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
 - Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$
 - Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$
 - Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$
 - Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$
- Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
 - Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
 - Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
 - Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
 - Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
- Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?
 - Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$
 - Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$
 - Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$
 - Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$

7. Cho hàm số $y = \sqrt{2x^2 + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$

8. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
y'		+	0	-	0	+

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$

9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như bên
Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; 1)$.
- B. $(-\infty; 0)$.
- C. $(1; +\infty)$.
- D. $(-1; 0)$.

10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như bên
Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1; 0)$.
- B. $(1; +\infty)$.
- C. $(-\infty; 1)$.
- D. $(0; 1)$.

11. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như bên

- A. $(-2; +\infty)$.
- B. $(-2; 3)$.
- C. $(3; +\infty)$.
- D. $(-\infty; -2)$.

12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như bên
Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1; +\infty)$.
- B. $(1; +\infty)$.
- C. $(-1; 1)$.
- D. $(-\infty; 1)$.

y' mang dấu + trên $(a; b)$	$\rightarrow f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$
y' mang dấu - trên $(a; b)$	$\rightarrow f(x)$ nghịch biến trên $(a; b)$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$		
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$		0		4	$-\infty$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$		3		-2	$+\infty$

Bài toán 2. Tìm tham số m để hàm số $y = f(x, m)$ đơn điệu trên miền xác định

Xét hàm số bậc ba

$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Bước 1. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Bước 2. Tính đạo hàm

$$y' = f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

+ Để $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} y' = f'(x) &\geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a_{f'(x)} = 3a > 0 \\ \Delta_{f'(x)} = 4b^2 - 12ac \leq 0 \end{cases} &\Rightarrow m? \end{aligned}$$

+ Để $f(x)$ nghịch biến trên

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \Leftrightarrow y' = f'(x) &\leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a_{f'(x)} = 3a < 0 \\ \Delta_{f'(x)} = 4b^2 - 12ac \leq 0 \end{cases} &\Rightarrow m? \end{aligned}$$

Xét hàm số $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}.$

Bước 1. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}.$

Bước 2. Tính đạo hàm

$$y' = f'(x) = \frac{a.d - b.c}{(cx + d)^2}.$$

+ Để $f(x)$ đồng biến trên

$$\begin{aligned} D \Leftrightarrow y' = f'(x) &> 0, \forall x \in D \\ \Leftrightarrow a.d - b.c &> 0 \Rightarrow m? \end{aligned}$$

+ Để $f(x)$ nghịch biến trên

$$\begin{aligned} D \Leftrightarrow y' = f'(x) &< 0, \forall x \in D \\ \Leftrightarrow a.d - b.c &< 0 \Rightarrow m? \end{aligned}$$

★ **Lưu ý:** Đối với hàm

$$y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \text{ thì không có dấu}$$

"=" xảy ra tại vị trí $y'.$

13. Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. 7 B. 4 C. 6 D. 5

14. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số

$$y = \frac{1}{3}x^3 + (m+1)x^2 - (m+1)x + 1 \text{ đồng biến trên tập xác định.}$$

- A. $\begin{cases} m \geq -1 \\ m \leq -2 \end{cases}$ B. $-2 < m < -1$ C. $-2 \leq m \leq -1$ D. $\begin{cases} m > -1 \\ m < -2 \end{cases}$

15. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số

$$y = \frac{1}{3}(m^2 - m)x^3 - (m^2 - m)x^2 + mx + 1 \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}?$$

- A. 1. B. 2. C. 3. D. vô số

16. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số

$$y = \frac{1}{3}(m^2 - m)x^3 - (m^2 - m)x^2 + mx + 1 \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}?$$

- A. 1. B. 2. C. 3. D. vô số

17. Cho hàm số $y = \frac{mx - 2m - 3}{x - m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S .

- A. 5 B. 4 C. Vô số D. 3

18. Cho hàm số $y = \frac{mx + 4m}{x + m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S .

- A. 5 B. 4. C. Vô số D. 3

19. Tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{mx + 3}{3x + m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của hàm số là:

- A. $m < -3$ hoặc $m > 3$. B. $-3 \leq m \leq 3$.
C. $m \leq -3$ hoặc $m \geq 3$. D. $-3 < m < 3$

Bài toán 3. Tìm tham số m để hàm số $y = f(x, m)$ đơn điệu trên D . Trong đó $D = (a; b), [a; b), (a; b], [a; b] \dots$

Dạng: $y = f(x, m) = \frac{ax + b}{cx + d}$

$$\Rightarrow \begin{cases} ad - bc > 0 (< 0) \\ x = -\frac{d}{c} \notin D \end{cases}$$

Dạng: $y = f(x, m)$: đa thức

Bước 1. Ghi điều kiện để $y = f(x, m)$ đơn điệu trên D . Chẳng hạn:

Đề yêu cầu $y = f(x, m)$ đồng biến trên $D \Leftrightarrow y' = f'(x, m) \geq 0$.

Đề yêu cầu $y = f(x, m)$ nghịch biến trên $D \Leftrightarrow y' = f'(x, m) \leq 0$.

Bước 2. Độc lập m ra khỏi biến số và đặt về còn lại là $g(x)$ được: $\begin{cases} m \geq g(x) \\ m \leq g(x) \end{cases}$.

Bước 3. Khảo sát tính đơn điệu của hàm số $g(x)$ trên D .

Bước 4. Dựa vào bảng biến thiên kết

luận: $\begin{cases} \text{Khi } m \geq g(x) \Rightarrow m \geq \max_D g(x) \\ \text{Khi } m \leq g(x) \Rightarrow m \leq \min_D g(x) \end{cases}$.

20. Giá trị của m để hàm số $y = \frac{mx - 16}{x - m}$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 5)$ là

- A. $\begin{cases} m < -4 \\ m \geq 5 \end{cases}$ B. $\begin{cases} m < -4 \\ m > 4 \end{cases}$ C. $\begin{cases} m \leq -1 \\ m > 4 \end{cases}$ D. $4 < m \leq 5$.

21. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x + 2}{x + 3m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -6)$?

- A. 2. B. 6. C. Vô số. D. 1.

22. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x + 6}{x + 5m}$ nghịch biến trên khoảng $(10; +\infty)$.

- A. 3. B. Vô số. C. 4. D. 5.

23. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x + 1}{x + 3m}$ nghịch biến trên khoảng $(6; +\infty)$?

- A. 3. B. Vô số. C. 0. D. 6.

24. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x + 2}{x + 5m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -10)$?

- A. 2. B. Vô số. C. 1. D. 3.

25. Trong tất cả các giá trị của m để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + (m - 1)x^2 + (m + 3)x - 10$ đồng biến trên khoảng $(0; 3)$ thì $m = m_0$ là giá trị nhỏ nhất. Giá trị m_0 là

- A. 1,5. B. 1,6. C. 1,7. D. 1,8.

26. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - (2m - 3)x^2 + 2(m^2 - 3m)x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$.

- A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.

27. Trong tất cả các giá trị của m để hàm số $y = -2x^3 + 3(m + 1)x^2 - 6mx - 1$ đồng biến trên $(-2; 0)$ thì $m = m_0$ là giá trị lớn nhất. Hỏi các số sau đâu là số gần m_0 nhất:

- A. 2. B. -1. C. 4. D. -4.

Bài toán 4. Tìm tham số m để hàm số $y = f(x, m)$ đơn điệu trên D . Trong đó $D = (a; b), [a; b), (a; b], [a; b] \dots$ bằng phương pháp đặt ẩn phụ

-Kiểm tra tính đồng biến, nghịch biến của hàm đối biến (là hàm biến cũ là biến và biến mới là hàm).

□ Nếu hàm đối biến đồng biến thì bài toán ban đầu giữ nguyên tính đơn điệu

□ Hàm cũ (với biến cũ) đồng biến chuyển về hàm mới (với biến mới) vẫn đồng biến.

□ Hàm cũ (với biến cũ) nghịch biến chuyển về hàm mới (với biến mới) vẫn nghịch biến.

□ Nếu hàm đối biến nghịch biến thì bài toán ban đầu đổi lại tính đơn điệu

□ Hàm cũ (với biến cũ) đồng biến chuyển về hàm mới (với biến mới) đổi thành nghịch biến.

□ Hàm cũ (với biến cũ) nghịch biến chuyển về hàm mới (với biến mới) đổi thành đồng biến.

Ví dụ như ở câu hỏi 29 trên do hàm đối biến do $t = \sin x$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Nên hàm số ban đầu $y = \frac{\sin x - m}{\sin x + m}$ nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ sẽ chuyển về hàm số mới $y = \frac{t - m}{t + m}$ đồng biến trên $(0; 1)$

28. Cho hàm số $y = \frac{(m-1)\sqrt{x-1} + 2}{\sqrt{x-1} + m}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số

m để hàm số đồng biến trên $(1; 27)$.

A. $m \in [-4; -1)$.

B. $m \in (-\infty; -6] \cup [-4; -1) \cup (2; +\infty)$.

C. $m \in (-\infty; -4] \cup (2; +\infty)$.

D. $m \in (-1; 2)$.

29. Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $\frac{\sin x + m}{\sin x - m}$ nghịch biến trong $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ là:

A. $m < 0$.

B. $\begin{cases} m < 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$.

C. $0 < m \leq 1$.

D. $m > -1$.

30. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$:

A. $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m < 2$

B. $m \leq 0$.

C. $1 \leq m < 2$.

D. $m \geq 2$.

31. Cho hàm số

$$y = \left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)^3 - m\left(2x^2 - 2\sqrt{x^2 + 1} + 1\right) - \frac{(m-6)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} - 1.$$

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$:

A. 5.

B. Vô số.

C. 2.

D. 3.

32. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{m - \sin x}{\cos^2 x}$ nghịch biến trên

$\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$:

A. $m > 1$.

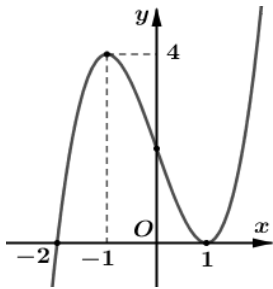
B. $m \leq \frac{5}{2}$.

C. $m \leq \frac{5}{4}$.

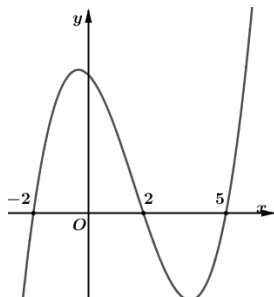
D. $m < 2$.

Bài toán 5. Những vấn đề liên quan đến sử dụng tính đơn điệu để giải toán hàm ẩn.

Vấn đề 1. Cho đồ thị $f'(x)$. Hỏi khoảng đơn điệu của hàm số $f[u(x)]$.



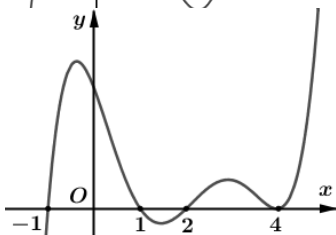
- Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Khẳng định nào sau đây sai ?
 - Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-2; 1)$.
 - Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.
 - Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 2.
 - Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$.



- Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới

Hàm số $g(x) = f(3 - 2x)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

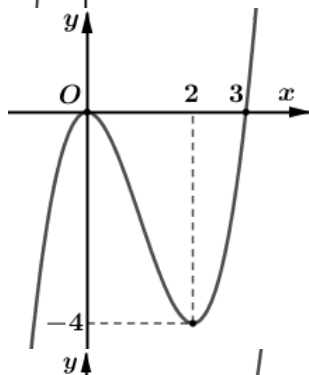
- $(0; 2)$.
- $(1; 3)$.
- $(-\infty; -1)$.
- $(-1; +\infty)$.



- Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới

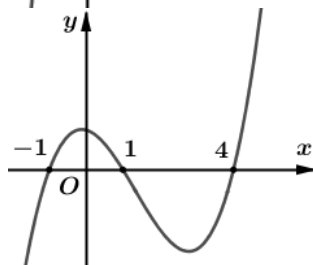
Hàm số $g(x) = f(1 - 2x)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- $(-1; 0)$.
- $(-\infty; 0)$.
- $(0; 1)$.
- $(1; +\infty)$.



- Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới. Hàm số $g(x) = f(2 + e^x)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây ?

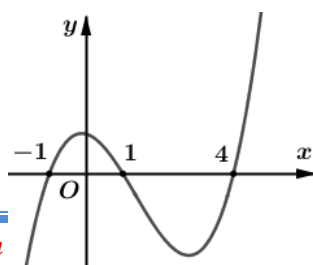
- $(-\infty; 0)$.
- $(0; +\infty)$.
- $(-1; 3)$.
- $(-2; 1)$.



- Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới

Hàm số $g(x) = 2^{f(3-2x)}$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

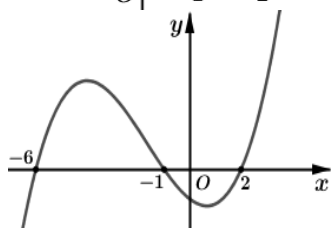
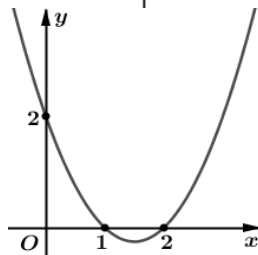
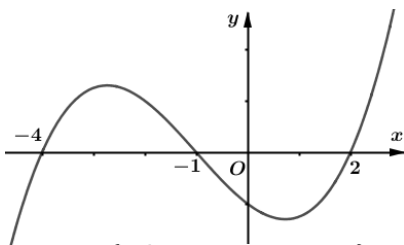
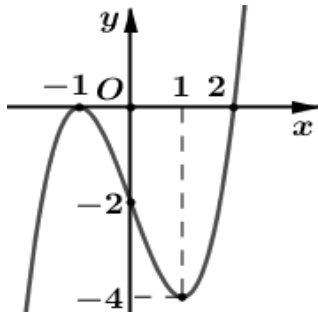
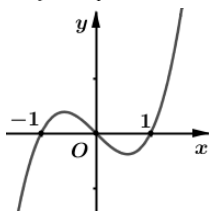
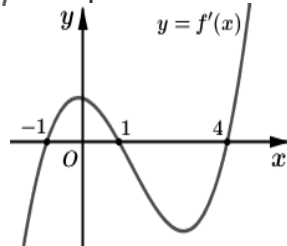
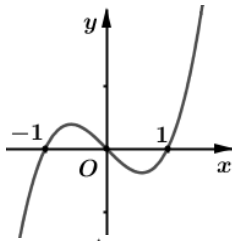
- $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$.
- $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.
- $(1; 2)$.
- $(-\infty; 1)$.



- Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới

Hàm số $g(x) = f(|3 - x|)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-1; 2)$. C. $(2; 3)$. D. $(4; 7)$.



7. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-1; +\infty)$.

- C. $(-1; 0)$. D. $(0; 1)$.

8. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $(-\infty; -2)$. B. $(-2; -1)$.

- C. $(-1; 0)$. D. $(1; 2)$.

9. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới

Hàm số $g(x) = f(x^3)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-1; 1)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(0; 1)$.

10. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = f(x^2 - 2)$. Mệnh đề nào dưới đây sai ?

- A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

- B. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

- C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.

- D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

11. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới

Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 - 5)$ có bao nhiêu khoảng nghịch biến ?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

12. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hỏi hàm số $g(x) = f(1 - x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

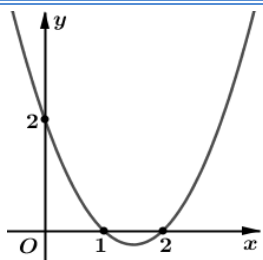
- A. $(1; 2)$. B. $(0; +\infty)$.

- C. $(-2; -1)$. D. $(-1; 1)$.

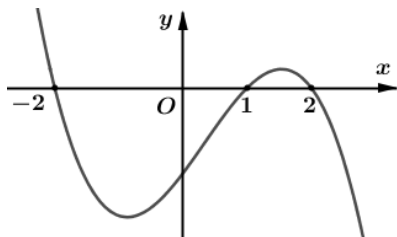
13. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hỏi hàm số $g(x) = f(3 - x^2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $(2; 3)$. B. $(-2; -1)$.

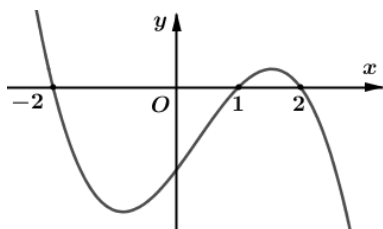
- C. $(0; 1)$. D. $(-1; 0)$.



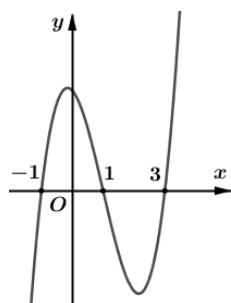
14. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hỏi hàm số $g(x) = f(x - x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?
- A. $(1; 2)$. B. $(-\infty; 0)$.
C. $(-\infty; 2)$. D. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.



15. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới và $f(-2) = f(2) = 0$. Hàm số $g(x) = [f(x)]^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?
- A. $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$. B. $(-2; -1)$. C. $(-1; 1)$. D. $(1; 2)$.



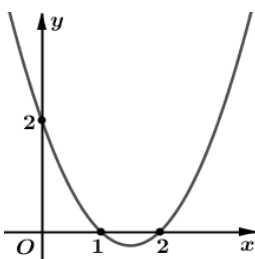
16. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới và $f(-2) = f(2) = 0$. Hàm số $g(x) = [f(3-x)]^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?
- A. $(-2; -1)$. B. $(1; 2)$. C. $(2; 5)$. D. $(5; +\infty)$.



17. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới

Hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 2})$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

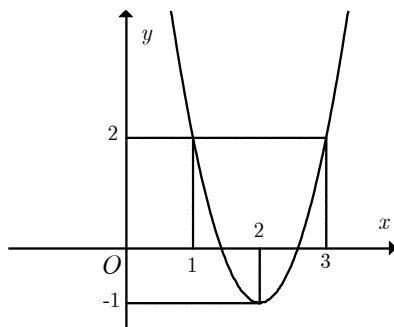
A. $(-\infty; -1 - 2\sqrt{2})$. B. $(-\infty; 1)$. C. $(1; 2\sqrt{2} - 1)$. D. $(2\sqrt{2} - 1; +\infty)$.



18. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới

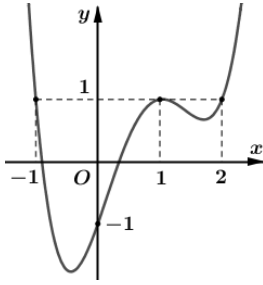
Hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt{x^2 + 2x + 2})$ đồng biến trên khoảng nào sau đây ?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$. C. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. D. $(-1; +\infty)$.



19. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $g(x) = f'(x - 2) + 2$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?
- A. $(-1; 1)$. B. $\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$.
C. $(-\infty; 2)$. D. $(2; +\infty)$.

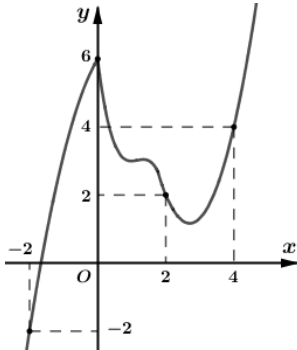
Vấn đề 2. Cho đồ thị $f'(x)$. Hỏi khoảng đơn điệu của hàm số $f[u(x)] + g(x)$.



20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới

Đặt $g(x) = f(x) - x$, khẳng định nào sau đây là đúng ?

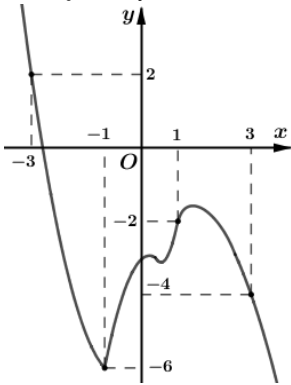
- A. $g(2) < g(-1) < g(1)$. B. $g(-1) < g(1) < g(2)$.
C. $g(-1) > g(1) > g(2)$. D. $g(1) < g(-1) < g(2)$.



21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới

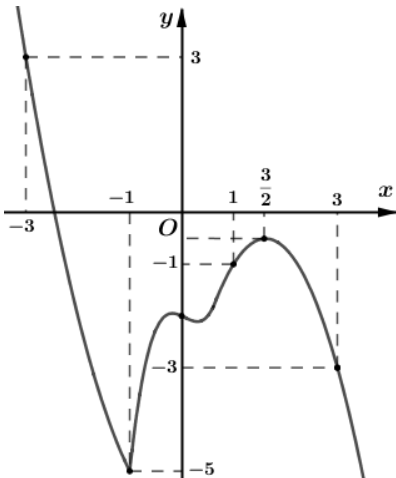
Hàm số $g(x) = 2f(x) - x^2$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây ?

- A. $(-\infty; -2)$. B. $(-2; 2)$. C. $(2; 4)$. D. $(2; +\infty)$.



22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hỏi hàm số $g(x) = 2f(x) + (x+1)^2$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $(-3; 1)$.
B. $(1; 3)$.
C. $(-\infty; 3)$.
D. $(3; +\infty)$.



23. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới

Hỏi hàm số $g(x) = f(1-x) + \frac{x^2}{2} - x$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $(-3; 1)$. B. $(-2; 0)$.
C. $\left[-1; \frac{3}{2}\right]$. D. $(1; 3)$.

Vấn đề 3. Cho bảng biến thiên $f'(x)$. Hỏi khoảng đơn điệu của hàm số $f[u(x)]$.

24. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	4	-2	$+\infty$	

Hàm số $g(x) = f\left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $\left(-1; \frac{1}{4}\right)$. B. $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$. C. $\left(1; \frac{5}{4}\right)$. D. $\left(\frac{9}{4}; +\infty\right)$.

25. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ

x	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	3	1	-1	2	4

Hàm số $g(x) = f\left(1 - \frac{x}{2}\right) + x$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $(-4; -2)$. B. $(-2; 0)$. C. $(0; 2)$. D. $(2; 4)$.

Vấn đề 4. Cho biểu thức $f'(x)$. Hỏi khoảng đơn điệu của hàm số $f[u(x)]$.

26. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số

$g(x) = f\left(1 - \frac{x}{2}\right) + 4x$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $(-\infty; -6)$. B. $(-6; 6)$. C. $(-6\sqrt{2}; 6\sqrt{2})$. D. $(-6\sqrt{2}; +\infty)$.

27. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-9)(x-4)^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Hàm số $g(x) = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $(-2; 2)$. B. $(-\infty; -3)$. C. $(-\infty; -3) \cup (0; 3)$. D. $(3; +\infty)$.

28. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hỏi số

thực nào dưới đây thuộc khoảng đồng biến của hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x + 2)$?

- A. -2 . B. -1 . C. $\frac{3}{2}$. D. 3 .

29. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x-2)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm

số $g(x) = f\left(\frac{5x}{x^2+4}\right)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $(-\infty; -2)$. B. $(-2; 1)$. C. $(0; 2)$. D. $(2; 4)$.

30. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-1)(x-4).t(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

và $t(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $(-\infty; -2)$. B. $(-2; -1)$. C. $(-1; 1)$. D. $(1; 2)$.

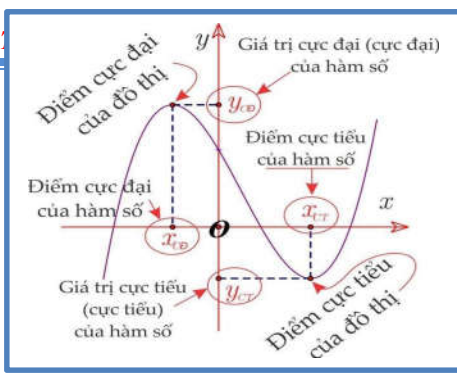
31. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (1-x)(x+2).t(x) + 2018$ với mọi

$x \in \mathbb{R}$ và $t(x) < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(1-x) + 2018x + 2019$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $(-\infty; 3)$. B. $(0; 3)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(3; +\infty)$.

Vấn đề 5. Cho biểu thức $f'(x, m)$. Tìm m để hàm số $f[u(x)]$ đồng biến, nghịch biến.

32. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2 - 2x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m < 100$ để hàm số $g(x) = f(x^2 - 8x + m)$ đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$?
 A. 18. B. 82. C. 83. D. 84.
33. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x^2 + mx + 9)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $g(x) = f(3-x)$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$?
 A. 5. B. 6. C. 7. D. 8.
34. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-1)(x^2 + mx + 5)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x) = f(x^2)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$?
 A. 3. B. 4. C. 5. D. 7.
35. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(3x^4 + mx^3 + 1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x) = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?
 A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.



BÀI 2. CỰC TRỊ HÀM SỐ

Bài toán 1. Xác định cực trị thông qua đồ thị, bảng biến thiên.

Bài tập trắc nghiệm

1. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên.

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 2. B. 0. C. 3. D. 1.

2. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên.

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

3. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 0. B. 1. C. 3. D. 2.

4. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như bên:

Mệnh đề nào dưới đây là **sai** ?

- A. Hàm số có ba điểm cực trị. B. Hàm số có giá trị cực đại bằng 3.
C. Hàm số có giá trị cực đại bằng 0. D. Hàm số có hai điểm cực tiểu

6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như bên:

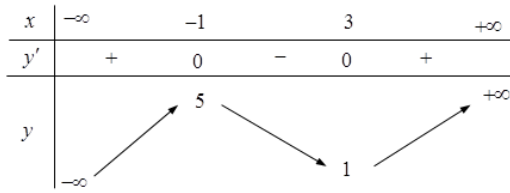
Tìm giá trị cực đại y_{CD} và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số đã cho.

- A. $y_{CD} = 3$ và $y_{CT} = -2$ B. $y_{CD} = 2$ và $y_{CT} = 0$.
C. $y_{CD} = -2$ và $y_{CT} = 2$. D. $y_{CD} = 3$ và $y_{CT} = 0$.

7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên bên:

Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. Hàm số có bốn điểm cực trị B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.



Cách 1.

- **Bước 1.** Tìm tập xác định D của hàm số.
- **Bước 2.** Tính đạo hàm $y' = f'(x)$.
Tìm các điểm x_i , ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- **Bước 3.** Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
- **Bước 4.** Từ bảng biến thiên, suy ra các điểm cực trị

Đối với hàm số bậc 3. Thì phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là phần dư của phép chia $\frac{y}{y'}$

Cách 2.

- **Bước 1.** Tìm tập xác định D của hàm số.
- **Bước 2.** Tính đạo hàm $y' = f'(x)$.
Giải phương trình $f'(x) = 0$ và kí hiệu x_i , ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) là các nghiệm của nó.
- **Bước 3.** Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$.
- **Bước 4.** Dựa vào dấu của $y''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của điểm x_i :
+ Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_i .
+ Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_i .

- C. Hàm số không có cực đại. D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -5$.

8. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

Đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 4 B. 2 C. 3 D. 5

Bài toán 2. Tìm các điểm cực đại, cực tiểu (nếu có) của hàm số $y = f(x)$

9. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$ có:

1. Điểm cực đại là:

- A. $y = \frac{11}{3}$ B. $x = -1$ C. $x = 3$ D. $M\left(-1; \frac{11}{3}\right)$

2. Cực tiểu là:

- A. -1 B. 3 C. $\frac{11}{3}$ D. -7

3. Đồ thị là (C) . Khi đó M là điểm cực tiểu của (C) có tọa độ

- A. $M\left(-1; \frac{11}{3}\right)$ B. $M(3; -7)$ C. $M(-7; 3)$ D. $M\left(\frac{11}{3}; -1\right)$

10. Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai điểm cực trị A và B . Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB ?

- A. $P(1; 0)$ B. $M(0; -1)$ C. $N(1; -10)$ D. $Q(-1; 10)$

11. Đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 5$ có hai điểm cực trị A và B . Tính diện tích S của tam giác OAB với O là gốc tọa độ.

- A. $S = 9$ B. $S = \frac{10}{3}$ C. $S = 5$ D. $S = 10$

12. Hàm số $y = \frac{2x+3}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 3 B. 0 C. 2 D. 1

13. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (2m-1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

- A. $m = \frac{3}{2}$ B. $m = \frac{3}{4}$ C. $m = -\frac{1}{2}$ D. $m = \frac{1}{4}$

- **Bước 1.** Tìm tập xác định D của hàm số.
- **Bước 2.** Tính đạo hàm y' và y'' .
- **Bước 3.** Dựa vào yêu cầu bài toán, ghi điều kiện và giải hệ tìm tham số.
Cụ thể:
 - Hàm số đạt cực đại tại điểm

$$x = x_0 \Rightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) < 0 \end{cases}.$$
 - Hàm số đạt cực tiểu tại điểm

$$x = x_0 \Rightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) > 0 \end{cases}.$$
 - Hàm số đạt cực trị tại điểm

$$x = x_0 \Rightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) \neq 0 \end{cases}.$$
- **Bước 4.** Với m vừa tìm được, thế vào hàm số và thử lại (vẽ bảng biến thiên và nhận, loại).

Bài toán 3. Tìm tham số m , để hàm số đạt cực trị tại điểm $x = x_0$

14. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số

$$y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3 \text{ đạt cực đại tại } x = 3.$$

- A. $m = 1$ B. $m = -1$ C. $m = 5$ D. $m = -7$

15. Với giá trị nào của m thì hàm số $y = x^3 - m^2x^2 - (4m - 3)x - 1$ đạt cực đại tại $x_0 = 1$?

- A. $m = 1$ hoặc $m = -3$. B. $m = 1$
C. $m = -3$ D. $m = -1$

16. Gọi $m = m_0$ là số nguyên nhỏ nhất để hàm số $y = x^4 + (m - 1)x^2 - 3$ đạt cực tiểu tại $x = 0$. Trong các số sau, đâu là giá trị gần m_0 nhất?

- A. 3 B. 0 C. 5 D. -3

17. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m - 2)x^5 - (m^2 - 4)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

- A. 3. B. 5. C. 4. D. Vô số.

18. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm $y = x^8 + (m - 1)x^5 - (m^2 - 1)x^4 + 1$ số đạt cực tiểu tại $x = 0$?

- A. 3. B. 2. C. Vô số. D. 1.

19. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m - 3)x^5 - (m^2 - 9)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

- A. 4. B. 7. C. 6. D. Vô số.

20. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m - 4)x^5 - (m^2 - 16)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

- A. 8. B. Vô số. C. 7. D. 9.

Vấn đề tổng quát: Cho hàm số

$y = f(x; m) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tìm tham số m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện K cho trước ?

— **Bước 1.** Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Tính đạo hàm: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

— **Bước 2.** Để hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_y = 3a \neq 0 \\ \Delta_y = (2b)^2 - 4.3ac > 0 \end{cases} \text{ và giải hệ}$$

này sẽ tìm được $m \in D_1$.

— **Bước 3.** Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $y' = 0$. Theo Viét,

$$\text{ta có: } \begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

— **Bước 4.** Biến đổi điều kiện K về dạng tổng S và tích P . Từ đó giải ra tìm được $m \in D_2$.

— **Bước 5.** Kết luận các giá trị m thỏa mãn: $m = D_1 \cap D_2$.

Vấn đề 1. Tìm m để hàm số có 2 điểm cực trị A, B sao cho $AB \parallel d$ hoặc $AB \perp d$?

— **Bước 1.** Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu $\Rightarrow m \in D_1$.

— **Bước 2.** Viết phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị AB .

— **Bước 3.** Để

$$\begin{cases} AB \parallel d \Leftrightarrow k_{AB} = k_d \Rightarrow m \in D_2 \\ AB \perp d \Leftrightarrow k_{AB} \cdot k_d = -1 \Rightarrow m \in D_2 \end{cases}$$

— **Bước 4.** Kết luận các giá trị $m \in D_1 \cap D_2$.

Bài toán 4. Một số vấn đề liên quan đến cực trị hàm bậc 3

21. Cho hàm số $y = mx^3 + 2(m-1)x^2 + 3x - 3$ có đồ thị hàm số (C). Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để (C) có 2 điểm cực trị. Tập S là

A. $S = \left(-\infty; \frac{1}{4}\right) \cup (4; +\infty)$

B. $S = \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right) \cup (4; +\infty)$

C. $S = \left(\frac{1}{4}; 4\right)$

D. $S = \left(-\infty; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{4}\right) \cup (4; +\infty)$

22. Gọi $m = m_0$ là một giá trị để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + 1$ có 2 điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) = -3. \text{ Trong các giá trị dưới đây, giá trị nào gần } m_0 \text{ nhất}$$

A. -1

B. -4

C. 0

D. 1

23. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số

$y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có hai điểm cực trị A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 4 với O là gốc tọa độ.

A. $m = -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; m = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

B. $m = -1, m = 1$

C. $m = 1$

D. $m \neq 0$

24. $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx$ có 2 điểm cực trị là A và B sao cho đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng $d: y = x + 2$.

A. $m = \emptyset$

B. $m = 0$

C. $m = 0 \vee m = 2$.

D. $m = 2$.

25. $y = x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$ có 2 cực trị A và B sao cho đường thẳng AB song song với đường thẳng $d: y = 1 - 4x$.

A. $m = 2 \vee m = 3$.

B. $m = 2 \vee m = 0$.

C. $m = 1 \vee m = 0$.

D. $m = 1 \vee m = 3$.

26. $y = x^3 + 2(m-1)x^2 + (m^2 - 4m + 1)x - 2(m^2 + 1)$ có 2 cực trị A và B sao cho đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng $d: 9x - 2y + 5 = 0$.

A. $m = 0 \vee m = -4$.

B. $m = 2 \vee m = 0$.

C. $m = 1 \vee m = 0$.

D. $m = 1 \vee m = 3$.

27. $y = x^3 + mx^2 + 7x + 3$ có 2 cực trị A và B sao cho đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng $d: 3x - y - 7 = 0$.

A. $m = \pm \frac{3\sqrt{10}}{2}$.

B. $m = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

C. $m = \sqrt{2}$.

D. $m = 1 \vee m = 3$.

Vấn đề 2. Tìm m để hàm số có cực trị thỏa điều kiện cho trước (**cần tìm đâu là cực đại, đâu cực tiểu**)?

Bước 1. Điều kiện để có 2 cực trị

Bước 2: Tìm cực trị theo m .

Bước 3: So sánh nghiệm, lập bảng biến thiên, kết luận cực trị (tiểu, đại)

Bước 4: Thay vào điều kiện K để tìm m .

Vấn đề 3. Tìm tham số m để hàm số có cực trị thỏa điều kiện cho trước (**tọa độ, độ dài**).

Nhớ: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

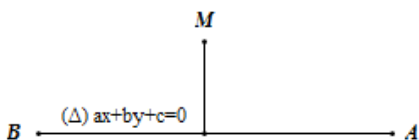
Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là phần dư của phép

chia $\frac{y}{y'}$

Vấn đề 4. Tìm tham số m để hàm số có cực trị thỏa điều kiện cho trước (**diện tích tam giác**).

Nhớ công thức khoảng cách từ 1 điểm đến 1 đường thẳng:

$$d(M, \Delta) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



28. $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ có 2 cực trị A và B sao cho đường thẳng AB song song với đường thẳng $d: 4x + y - 3 = 0$.

A. $m = 0$. B. $m = 3$. C. $m = 4$. D. $m = 2$.

29. $y = -x^3 + 3(m+1)x^2 - (3m^2 + 7m - 1)x + m^2 - 1$ có điểm cực tiểu tại một điểm có hoành độ nhỏ hơn 1 ? ĐS: $m < 1$.

30. $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + 2$ đạt cực đại tại điểm có hoành độ x_1 , đạt cực tiểu tại điểm có hoành độ là x_2 sao cho: $x_1^2 + x_2 = 14$?

ĐS: $m = -3 \vee m = 4$.

31. $y = \frac{1}{3}x^3 - (2m-1)x^2 + (1-4m)x + 1$ có cực đại và cực tiểu, đồng thời hoành độ cực trị thỏa mãn điều kiện: $x_{CD}^2 = x_{CT}$? ĐS: $m = -2$.

32. $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$ có cực đại và cực tiểu, đồng thời hoành độ cực tiểu bé hơn 1 ? ĐS: $m < -1 \vee m \in \left(\frac{5}{4}; \frac{7}{5}\right)$.

33. $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx + m^3$ có 2 điểm cực trị A, B với $AB = \sqrt{2}$. ĐS: $m = 0 \vee m = 2$.

34. $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + mx + m$ có 2 điểm cực trị A, B với $AB = 2\sqrt{15}$. ĐS: $m = -2$.

35. $y = 2x^3 + 3(m-3)x^2 + 11-3m$ đạt cực trị tại 2 điểm A và B sao cho ba điểm $A, B, C(0; -1)$ thẳng hàng ? ĐS: $m = 4$.

36. $y = x^3 - 3mx^2 + 2$ có hai điểm cực trị A, B và đường thẳng AB đi qua điểm $I(1; 0)$? ĐS: $m = \pm 1$.

37. $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m+6)x + 1$ có hai điểm cực trị A, B và đường thẳng AB đi qua điểm $A(3; 5)$? ĐS: $m = 4$.

38. $y = x^3 - 3mx + 2$ có 2 điểm cực trị A, B và $S_{\Delta ABC} = 3\sqrt{2}$, với $C(1; 1)$. ĐS: $m = 2$.

39. $y = x^3 - 3x^2 + m^2 - m + 1$ có 2 điểm cực trị A, B và $S_{\Delta ABC} = 7$, với $C(-2; 4)$. ĐS: $m = -2 \vee m = 3$.

40. $y = x^3 + 3mx^2 + 2$ có 2 điểm cực trị A, B sao cho $S_{\Delta OAB} = 2$, với O là gốc tọa độ. ĐS: $m = \pm 1$.

41. $y = x^3 - 3mx^2 + m$ 2 điểm cực trị A, B sao cho $S_{\Delta OAB} = 4$, với O là gốc tọa độ. ĐS: $m = \pm 2$.

42. $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^2$ có hai điểm cực trị A, B sao cho $S_{\Delta OAB} = 48$, với O là gốc tọa độ ? ĐS: $m = \pm 2$.

Vấn đề 5. Tìm m để các hàm số sau có cực trị thỏa điều kiện cho trước (góc và hình dáng tam giác).

Nhớ: Tích vô hướng của hai véc tơ

$$\vec{a} = (x; y), \vec{b} = (m; n) \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = x \cdot m + y \cdot n$$

Hai véc tơ vuông góc, tích vô hướng bằng 0.

Vấn đề 6. Tìm m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị A, B đối xứng nhau qua đường d :

Bước 1. Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu $\Rightarrow m \in D_1$.

Bước 2. Tìm tọa độ 2 điểm cực trị A, B . Có 2 tình huống thường gặp:

+ Một là $y' = 0$ có nghiệm đẹp x_1, x_2 , tức có $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.

+ Hai là $y' = 0$ không giải ra tìm được nghiệm. Khi đó ta cần viết phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị là Δ và lấy $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2) \in \Delta$.

Bước 3. Gọi $I\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Do A, B đối xứng qua d nên thỏa hệ
$$\begin{cases} \Delta \perp d \\ I \in d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_d = 0 \\ I \in d \end{cases} \Rightarrow m \in D_2.$$

Bước 4. Kết luận $m = D_1 \cap D_2$.

Đề 2 điểm A, B đối xứng nhau qua điểm $I \Leftrightarrow I$ là trung điểm AB .

Vấn đề 7. Tìm m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị A, B cách đều đường thẳng d :

Giống **Vấn đề 6** trên. Nhưng khác ở bước 3: Do A, B cách đều đường thẳng d nên

$$d(A; d) = d(B; d) \Rightarrow m \in D_2.$$

43. $y = -x^3 + 3mx + 1$ có 2 điểm cực trị A, B sao cho ΔOAB vuông tại O .

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad m = \frac{1}{2}.$$

44. $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + 4m - 1$ có 2 điểm cực trị A, B sao cho ΔOAB vuông tại O với O là gốc tọa độ. $\underline{\text{ĐS:}} \quad m = -1 \vee m = 2$.

45. $y = 2x^3 - 3(m + 1)x^2 + 6mx + m^3$ có 2 điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABC vuông tại C với $C(4; 0)$? $\underline{\text{ĐS:}} \quad m = -1$.

46. $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ có hai điểm cực trị và đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số tạo với hai trục tọa độ một tam giác cân?

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad m = -\frac{3}{2}.$$

47. $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$ có các điểm cực đại, cực tiểu và các điểm này đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: x + 8y - 74 = 0$. $\underline{\text{ĐS:}} \quad m = 2$.

48. $y = x^3 - 3x^2 + mx$ có các điểm cực đại, cực tiểu và các điểm này đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: x - 2y - 5 = 0$. $\underline{\text{ĐS:}} \quad m = 0$.

49. $y = x^3 - 3(m + 1)x^2 + 9x + m - 2$ có các điểm cực đại, cực tiểu và các điểm này đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: x - 2y = 0$. $\underline{\text{ĐS:}} \quad m = 1$.

50. $y = x^3 - 3x^2 + m^2x + m$ có các điểm cực đại, cực tiểu và các điểm này đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$. $\underline{\text{ĐS:}} \quad m = 0$.

51. $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có các điểm cực đại, cực tiểu và các điểm này đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: y = x$. $\underline{\text{ĐS:}} \quad m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

52. $y = x^3 - 3(m - 1)x^2 + 3m(m - 2)x + 1$ có hai điểm cực trị A, B đối xứng nhau qua đường thẳng $d: y = \frac{1}{2}x + 1$? $\underline{\text{ĐS:}} \quad m = 1 \vee m = \frac{2 \pm \sqrt{14}}{2}$.

53. $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ có các điểm cực đại, cực tiểu và các điểm này cách đều đường thẳng d có phương trình $y = x - 1$.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad m = -\frac{3}{2} \vee m = 0.$$

Vấn đề 8. Tìm tham số m để các hàm số sau có cực trị thỏa điều kiện cho trước (cùng phía, khác phía d):

Vị trí tương đối giữa 2 điểm với đường thẳng:

Cho 2 điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ và đường thẳng $d: ax + by + c = 0$. Khi đó:

• Nếu

$(ax_A + by_A + c) \cdot (ax_B + by_B + c) < 0$ thì A, B nằm về 2 phía so với đường thẳng d .

• Nếu

$(ax_A + by_A + c) \cdot (ax_B + by_B + c) > 0$ thì A, B nằm cùng phía so với đường thẳng d .

Trường hợp đặc biệt:

• Để hàm số bậc ba $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị nằm cùng phía so với trục tung $Oy \Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm trái dấu và ngược lại.

• Để hàm số bậc ba $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị nằm cùng phía so với trục hoành $Ox \Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt (áp dụng khi nhằm được nghiệm).

54. $y = x^3 - 2(2m+1)x^2 + (5m^2 + 10m - 3)x - 10m^2 - 4m + 6$ có các điểm cực đại, cực tiểu, với hoành độ của chúng trái dấu nhau? ĐS:

$$m \in (-3; 1) \setminus \left\{ \frac{1}{5} \right\}.$$

55. $y = x^3 - (2m+1)x^2 + (m^2 - 3m + 2)x + 4$ có các điểm cực đại, cực tiểu, đồng thời các điểm này nằm về 2 phía so với trục tung? ĐS: $1 < m < 2$.

56. $y = x^3 - 3mx^2 + (m^2 + 2m - 3)x + 4$ có các điểm cực đại, cực tiểu, đồng thời các điểm này nằm về 2 phía so với trục tung? ĐS: $-3 < m < 1$.

57. $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x - 3$ có các điểm cực đại, cực tiểu nằm về

cùng một phía so với trục tung? ĐS: $m \in \left(\frac{1}{2}; +\infty \right) \setminus \{1\}$.

58. $y = x^3 + 3x^2 + mx + m - 2$ có các điểm cực đại, cực tiểu nằm về cùng hai phía so với trục hoành Ox ? ĐS: $m < 3$.

59. $y = x^3 - 3x^2 - 3m(m+2)x - 1$ có các điểm cực đại, cực tiểu nằm về cùng

hai phía so với trục hoành Ox ? ĐS: $m \in \left(-\infty; -\frac{5}{2} \right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty \right)$.

60. $y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1-m^2)x + m^3 - m^2$ có các điểm cực đại, cực tiểu nằm về cùng một phía so với trục hoành Ox ?

$$\text{ĐS: } \begin{cases} m \in \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{17}}{2} \right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}; +\infty \right) \\ m \in (1; 2) \end{cases}$$

61. $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + x + \frac{m}{3}$ có 2 điểm cực trị nằm cùng phía so với đường thẳng $d: 2x + y = 0$. ĐS: $|m| > 0, m \neq \pm 2$.

62. $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$. Tìm m để hàm số có cực đại và cực tiểu, đồng thời hai điểm này cùng nằm về một phía đối với đường thẳng $d: 3x - 2y + 8 = 0$?

63. $y = x^3 - 3mx^2 + (m^2 - m)x + 4$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của đường thẳng $x = 1$? ĐS: $\frac{7-\sqrt{37}}{2} < m < \frac{7+\sqrt{37}}{2}$.

Bài toán 5. Một số vấn đề liên quan đến cực trị hàm bậc 4

Vấn đề 1. Tìm m để hàm số có 3 điểm cực trị.

Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b \neq 0 \\ a.b < 0 \end{cases} \cdot \text{ Khi đó:}$$

◦ Hàm số có 2 điểm cực tiểu, 1

$$\text{điểm cực đại} \Leftrightarrow \begin{cases} b \neq 0 \\ a.b < 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

◦ Hàm số có 2 điểm cực đại, 1

$$\text{điểm cực tiểu} \Leftrightarrow \begin{cases} b \neq 0 \\ a.b < 0 \\ a < 0 \end{cases}$$

Vấn đề 2. Tìm m để hàm số có 1 điểm cực trị.

• Hàm số có 1 cực trị $\Leftrightarrow g(x) = 0$ vô nghiệm hoặc có 1 nghiệm

$$x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a.b > 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

◦ Khi đó hàm số chỉ có cực tiểu (có điểm cực tiểu mà không có cực

$$\text{đại}) \Leftrightarrow \begin{cases} a.b > 0 \\ b = 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

◦ Khi đó hàm số chỉ có cực đại (có điểm cực đại mà không có cực tiểu)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a.b > 0 \\ b = 0 \\ a < 0 \end{cases}$$

• Hàm số luôn nhận điểm $A(0;c)$ làm điểm cực trị.

• Khi hàm số có 3 điểm cực trị $A(0;c)$, $B(x_1;y_1)$, $C(x_2;y_2)$ thì ta luôn có $\triangle ABC$ cân tại A .

64. Tìm tham số m để các đồ thị của các hàm số sau có ba điểm cực trị ?

a) $y = 2x^4 + 8mx^3 + (8m+1)x^2 + 2015$.

b) $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$.

c) $y = (m-2)x^4 + 2mx^2 + m-1$.

d) $y = x^4 + 2(m+1)x^2 + 1$.

e) $y = x^4 + (m^2 - 4)x^2 + 3$.

f) $y = x^4 + (m-1)x^2 + 2$.

65. Cho hàm số $y = mx^4 + (m-1)x^2 + 1 - 2m$. Tìm m để đồ thị hàm số có đúng 1 cực trị ?

66. Cho hàm số $y = x^4 + 4mx^3 + 3(m+1)x^2$ Tìm m để hàm số có cực tiểu mà không có cực đại ?

67. Cho hàm số $y = (m-1)x^4 - 3mx^2 + 5$. Tìm m để hàm số có cực đại mà không có cực tiểu ?

68. Cho hàm số $y = (m-1)x^4 - 2mx^2 + 1$. Tìm m để hàm số có cực tiểu mà không có cực đại ?

Vấn đề 3. Bài toán liên quan đến tam giác cực trị. $y = ax^4 + bx^2 + c$

$$A(0; c), B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right),$$

$$C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

$$\Rightarrow AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}},$$

$$BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$$

$$\text{với } \Delta = b^2 - 4ac$$

69. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông ? ĐS: $m = 0$.
70. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị này tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông cân ? ĐS: $m = \pm 1$.
71. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + (3m+1)x^2 - 3$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác cân sao cho độ dài cạnh đáy bằng $\frac{2}{3}$ lần độ dài cạnh bên ? ĐS: $m = -\frac{5}{3}$.
72. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5$ có cực đại, cực tiểu tạo thành một tam giác đều ? ĐS: $m = 2 - \sqrt[3]{3}$.
73. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx + 2m + m^4$ có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị này tạo thành một tam giác đều ? ĐS: $m = \sqrt[3]{3}$.
74. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 4(m-1)x^2 + 2m - 1$ có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị này tạo thành tam giác đều ? ĐS: $m = 1 + \sqrt[3]{3}/2$.
75. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + m^2 + m$ có ba điểm cực trị và ba điểm cực trị đó tạo thành tam giác có 1 góc bằng 120° ? ĐS: $m = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.
76. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^2 - m$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có góc bằng 30° ? ĐS: $m = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, m = \sqrt[3]{7 + 4\sqrt{3}}$.
77. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có cực đại, cực tiểu mà các cực đại, cực tiểu tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1 ? ĐS: $m = 1$.
78. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 8m^2x^2 + 1$ có ba cực trị A, B, C , đồng thời ba điểm này tạo thành một tam giác có diện tích bằng 64 ? ĐS: $m = \pm\sqrt[5]{2}$.
79. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = 2x^4 - m^2x^2 + m^2 - 1$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho bốn điểm O, A, B, C là bốn đỉnh của một hình thoi ? ĐS: $m = \pm\sqrt{2}$.
80. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - (m+1)x^2 + 2m + 1$ có điểm cực đại là A , hai điểm cực tiểu là B và C sao cho tứ giác $ABIC$ là hình thoi với $I\left(0; -\frac{5}{2}\right)$? ĐS: $m = \frac{1}{2}$.

81. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 1$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho bốn điểm A, B, C, O cùng nằm trên một đường tròn ? ĐS: $m = \pm 1$.

82. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$ có ba điểm cực trị A, B, C , sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có bán kính bằng 1 ?

$$\text{ĐS: } m = 1 \vee m = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

83. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2$ có ba điểm cực trị A, B, C tạo thành một tam giác có đường tròn ngoại tiếp đi qua điểm

$$A\left(\frac{3}{5}; \frac{9}{5}\right) ? \quad \text{ĐS: } m = 1.$$

84. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn hơn 1 ?

$$\text{ĐS: } m \in (2; +\infty).$$

85. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 - 4$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho ba điểm này nằm trên các trục tọa độ ? ĐS:

$$m \in (-\infty; 0] \cup \{2\}.$$

86. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho độ dài $OA = BC$ với A là cực trị thuộc trục tung ?

$$(\text{ĐH B} - 2011) \quad \text{ĐS: } m = 2 \pm 2\sqrt{2}.$$

87. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + m + 2$ có ba điểm cực trị A, B, C , đồng thời O là trọng tâm của tam giác ABC ? ĐS: $m = -\frac{4}{3}$.

88. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m^2 - m + 1)x^2 + m - 1$ có khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu của đồ thị là nhỏ nhất ? ĐS:

$$m = \frac{1}{2}.$$

89. Chứng minh rằng với mọi m thì đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m^2 + 1)x^2 + 1$ luôn có ba điểm cực trị. Tìm m để khoảng cách từ điểm cực đại đến đường thẳng đi qua hai điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho là nhỏ nhất ?

$$\text{ĐS: } m = 0.$$

90. Cho đồ thị hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1$, (C) và đường thẳng d đi qua điểm cực đại của (C) có hệ số góc m . Tìm m để tổng các khoảng cách từ hai điểm cực tiểu của đồ thị (C) đến đường thẳng d đạt giá trị nhỏ nhất ?

$$\text{ĐS: } m = \pm \frac{1}{4}.$$

91. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(1 - m^2)x^2 + m + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích lớn nhất ? ĐS: $m = 0$.

92. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có ba điểm cực trị tạo thành 1 tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính nhỏ nhất ?

$$\text{ĐS: } m = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

93. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $(C_m): y = x^4 - 2(m^2 - m + 1)x + m - 1$ có khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu ngắn nhất ?

94. Xác định tham số m để đồ thị hàm số $(C_m): y = x^4 - 4(m - 1)x^2 + 2m - 1$ có ba cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác đều.

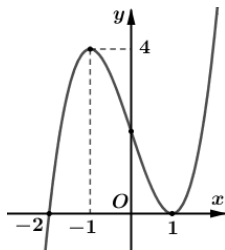
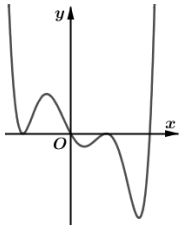
95. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $(C_m): y = x^4 + 2mx^2 + m^2 + m$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có một góc bằng 120°

MỘT SỐ CÔNG THỨC GIẢI NHANH CHO CÁC BÀI TOÁN TRÊN

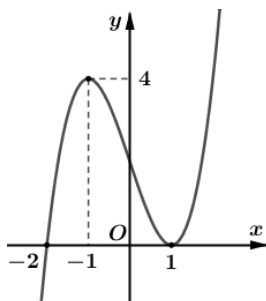
Dữ kiện	Công thức thỏa $ab < 0$
1). Tam giác ABC vuông cân tại A	$8a + b^3 = 0$
2). Tam giác ABC đều	$24a + b^3 = 0$
3). Tam giác ABC có góc $\widehat{BAC} = \alpha$	$8a + b^3 \cdot \tan^2 \frac{\alpha}{2} = 0$
4). Tam giác ABC có diện tích $S_{\Delta ABC} = S_0$	$32a^3(S_0)^2 + b^5 = 0$
5). Tam giác ABC có diện tích $\max(S_0)$	$S_0 = \sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}}$
6). Tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp $r_{\Delta ABC} = r_0$	$r_0 = \frac{b^2}{ a \left(1 + \sqrt{1 - \frac{b^3}{a}} \right)}$
7). Tam giác ABC có độ dài cạnh $BC = m_0$	$am_0^2 + 2b = 0$
8). Tam giác ABC có độ dài $AB = AC = n_0$	$16a^2n_0^2 - b^4 + 8ab = 0$
9). Tam giác ABC có cực trị $B, C \in Ox$	$b^2 - 4ac = 0$
10). Tam giác ABC có 3 góc nhọn	$b(8a + b^3) > 0$
11). Tam giác ABC có trọng tâm O	$b^2 - 6ac = 0$
12). Tam giác ABC có trực tâm O	$b^3 + 8a - 4ac = 0$

13). Tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R_{\Delta ABC} = R_0$	$R = \left \frac{b^3 - 8a}{8ab} \right $
14). Tam giác ABC cùng điểm O tạo hình thoi	$b^2 - 2ac = 0$
15). Tam giác ABC có O là tâm đường tròn nội tiếp	$b^3 - 8a - 4abc = 0$
16). Tam giác ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp	$b^3 - 8a - 8abc = 0$
17). Tam giác ABC có cạnh $BC = kAB = kAC$	$b^3 \cdot k^2 - 8a(k^2 - 4) = 0$
18). Trục hoành chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau	$b^2 = 4\sqrt{2} ac $
19). Tam giác ABC có điểm cực trị cách đều trục hoành	$b^2 - 8ac = 0$

Bài toán 6. Một số vấn đề liên quan đến cực trị hàm ẩn



x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$



Vấn đề 1. Cho đồ thị $f'(x)$. Hỏi số điểm cực trị của hàm số $f[u(x)]$.

96. Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị hàm số $y = f'(x)$.

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

97. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - 3)$.

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

98. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $y = f'(x)$ như sau

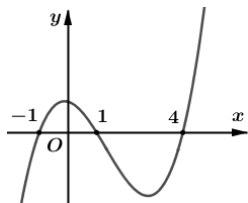
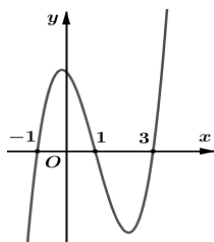
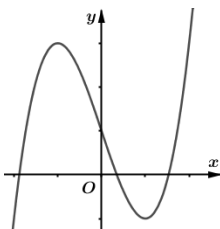
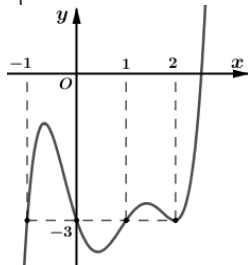
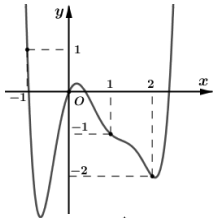
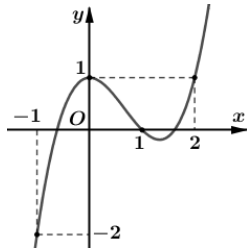
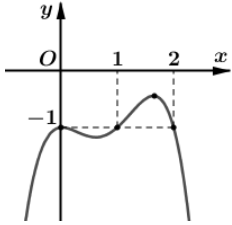
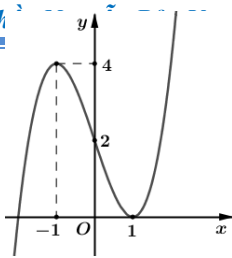
Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu ?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

99. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(0) < 0$, đồng thời đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f^2(x)$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.



100. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x - 2017) - 2018x + 2019$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

101. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi hàm số $g(x) = f(x) + x$ đạt cực tiểu tại điểm nào dưới đây?

- A. $x = 0$. B. $x = 1$.
C. $x = 2$. D. Không có điểm cực tiểu.

102. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.

Hàm số $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$ đạt cực đại tại

- A. $x = -1$. B. $x = 0$. C. $x = 1$. D. $x = 2$.

103. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x) = 2f(x) + x^2$ đạt cực tiểu tại điểm

- A. $x = -1$. B. $x = 0$. C. $x = 1$. D. $x = 2$.

104. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = f(x) + 3x$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 7.

105. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới

Hỏi hàm số $g(x) = f(|x|) + 2018$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 2. B. 3. C. 5. D. 7.

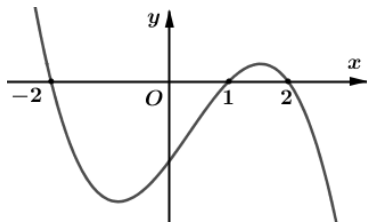
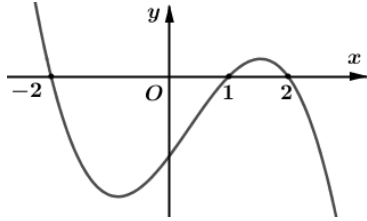
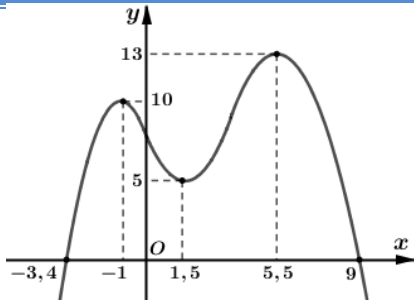
106. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 2})$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

107. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = e^{2f(x)+1} + 5^{f(x)}$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.



108. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (-\infty; -3,4) \cup (9; +\infty)$. Đặt $g(x) = f(x) - mx + 5$. Có bao nhiêu giá trị dương của tham số m để hàm số $g(x)$ có đúng hai điểm cực trị?

- A. 4. B. 7. C. 8. D. 9.

109. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x + m|)$ có 5 điểm cực trị?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. Vô số.

110. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x| + m)$ có 5 điểm cực trị?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. Vô số.

Vấn đề 2. Cho biểu thức $f'(x)$. Hỏi số điểm cực trị của hàm số $f[u(x)]$.

111. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(3-x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại

- A. $x = 0$. B. $x = 1$. C. $x = 2$. D. $x = 3$.

112. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x-1)^2(x-2) + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(x) - x$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

113. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)(x - 4)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(3 - x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

114. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-1)(x-4)^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

115. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(x^2 - 8x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

116. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 3 liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(x) \cdot f'''(x) = x(x-1)^2(x+4)^3 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Hàm số $g(x) = [f'(x)]^2 - 2f(x) \cdot f''(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 6.

117. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 15x^4 + 12x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(x) \cdot f'(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

118. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^4(x-2)^5(x+3)^3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(|x|)$ là

- A. 1. B. 3. C. 5. D. 7.

119. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x-2)^4(x^2-4)$ với mọi

$x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(|x|)$ là

- A. 1. B. 3. C. 5. D. 7.

120. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+2)^4(x^2+4)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(|x|)$ là

- A. 0. B. 1. C. 3. D. 5.

Vấn đề 3. Cho biểu thức $f'(x, m)$. Tìm m để hàm số $f[u(x)]$ có n điểm cực trị

121. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m > -10$ để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị ?

- A. 6. B. 7. C. 8. D. 9.

122. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x^2+m^2-3m-4)^3(x+3)^5$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 3 điểm cực trị ?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

123. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^4(x-m)^5(x+3)^3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-5; 5]$ để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 3 điểm cực trị ?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

124. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$ với mọi

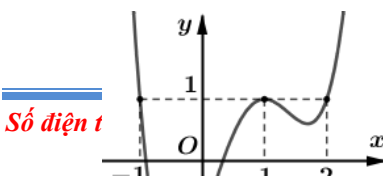
$x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 1 điểm cực trị ?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

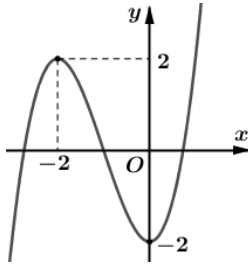
125. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^2-8x+m)$ có 5 điểm cực trị ?

- A. 15. B. 16. C. 17. D. 18.

Vấn đề 4. Cho đồ thị $f(x)$. Hỏi số điểm cực trị của hàm số $f[u(x)]$.



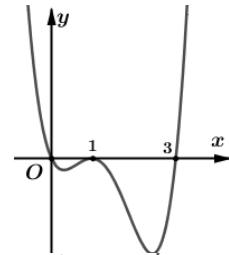
126. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x) = f(x) - x$ đạt cực đại tại



- A. $x = -1$. B. $x = 0$. C. $x = 1$. D. $x = 2$.

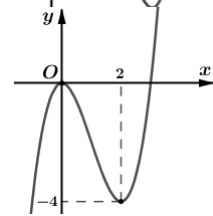
127. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình bên. Hàm số $g(x) = f(-x^2 + 3x)$ có bao nhiêu điểm cực đại ?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.



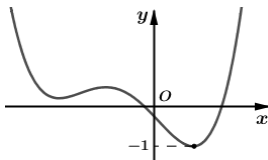
128. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Đồ thị của hàm số $g(x) = [f(x)]^2$ có bao nhiêu điểm cực đại, bao nhiêu điểm cực tiểu ?

- A. 1 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.
B. 2 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.
C. 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.
D. 3 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.



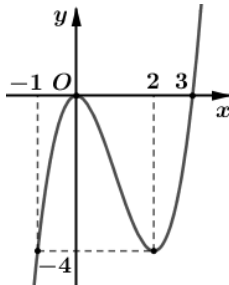
129. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = f[f(x)]$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 3. B. 4.
C. 5. D. 6.



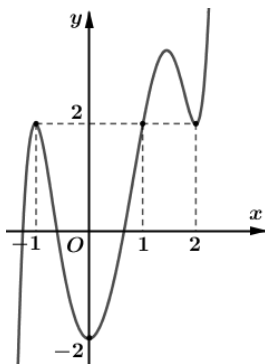
130. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = 2^{f(x)} - 3^{f(x)}$.

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.



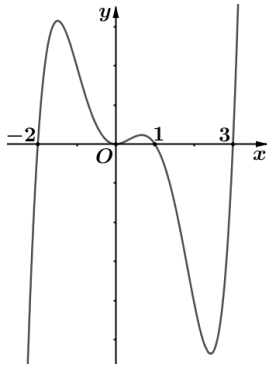
131. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Đồ thị hàm số $g(x) = |f(x) + 4|$ có tổng tung độ của các điểm cực trị bằng

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.



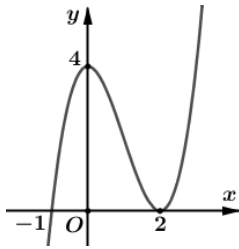
132. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình bên. Đồ thị hàm số $h(x) = |2f(x) - 3|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 4.
B. 5.
C. 7.
D. 9.



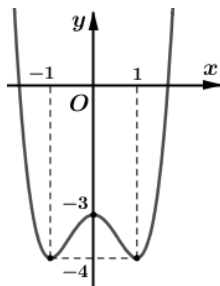
133. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(|x|) + 2018$ là

- A. 2. B. 3. C. 5. D. 7.



134. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(|x| - 2)$ là

- A. 1. B. 3. C. 5. D. 7.



135. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đồ thị hàm số $g(x) = f(|x - 2|) + 1$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 2. B. 3.
C. 5. D. 7.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
f'	$-$	$ $	$+$	0	$-$	0	$+$		
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Vấn đề 5. Cho bảng biến thiên của hàm $f(x)$. Hỏi số điểm cực trị của hàm $f[u(x)]$.

136. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

Hàm số $g(x) = 3f(x) + 1$ đạt cực tiểu tại điểm nào sau đây ?

- A. $x = -1$. B. $x = 1$. C. $x = \pm 1$. D. $x = 0$.

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$			
f'	$-$	0	$+$	0	$+$		
f	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

137. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới

Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 + 1)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$				
y'	$+$	0	$-$	$ $	$+$	0	$-$		
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

138. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(3 - x)$.

- A. 2. B. 3. C. 5. D. 6.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2018	-2018	$+\infty$	

139. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = |f(x - 2017) + 2018|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

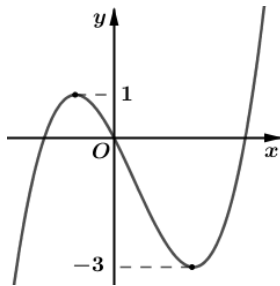
- A. 2. B. 3.
C. 4. D. 5.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$f(-1)$	$f(3)$	$+\infty$	

140. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ sau

Hỏi số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(|x|)|$ nhiều nhất là bao nhiêu ?

- A. 5. B. 7. C. 11. D. 13.



Vấn đề 6. Cho đồ thị $f(x)$. Hỏi số điểm cực trị của hàm số $f[u(x, m)]$.

141. Cho hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x) = |f(x) + m|$ có 3 điểm cực trị là

- A. $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$. B. $m \leq -3$ hoặc $m \geq 1$.
C. $m = -1$ hoặc $m = 3$. D. $1 \leq m \leq 3$.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f		11		4	
	$-\infty$				$+\infty$

142. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới

Đồ thị hàm số $g(x) = |f(x) - 2m|$ có 5 điểm cực trị khi

- A. $m \in (4; 11)$. B. $m \in \left[2; \frac{11}{2}\right]$. C. $m \in \left(2; \frac{11}{2}\right)$. D. $m = 3$.

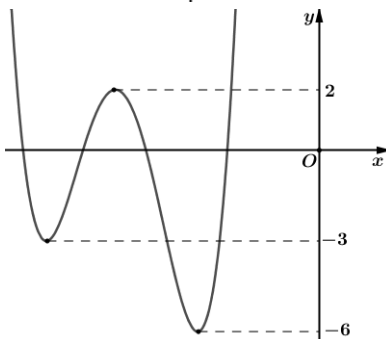
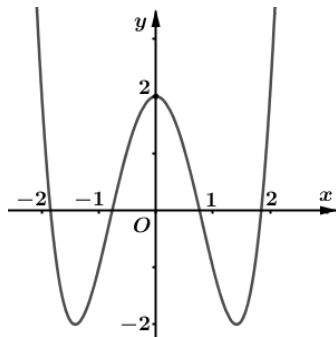
143. Tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left|x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2}\right|$ có 5 điểm cực trị bằng

- A. -2016. B. -496. C. 1952. D. 2016.

144. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ bên dưới

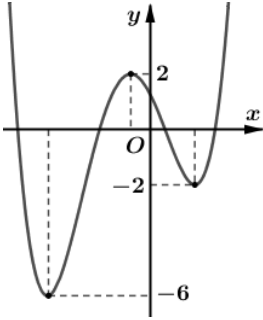
Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $g(x) = |f(x) - m|$ có 5 điểm cực trị.

- A. $-2 < m < 2$. B. $m > 2$. C. $m \geq 2$. D. $\begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 2 \end{cases}$.



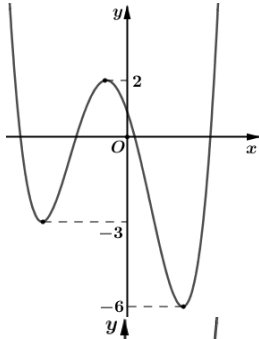
145. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu số nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = |f(x + 2018) + m|$ có 7 điểm cực trị ?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 6.



146. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = |f(x + 2018) + m^2|$ có 5 điểm cực trị ?

- A. 1. B. 2.
C. 4. D. 5.

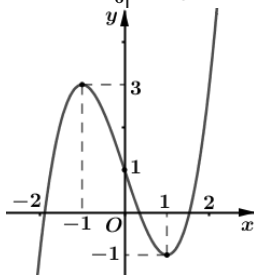


147. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-4; 4]$ để hàm số

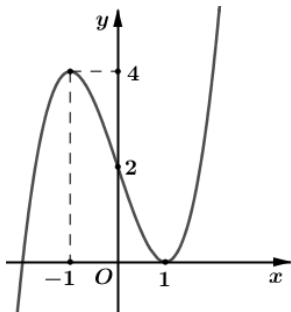
$g(x) = |f(x - 1) + m|$ có 5 điểm cực trị ?

- A. 3. B. 5. C. 6. D. 7.



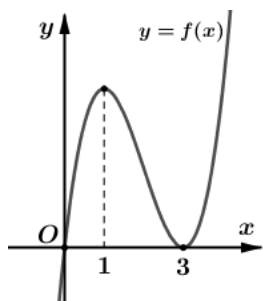
148. Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Với $m < -1$ thì hàm số $g(x) = f(|x + m|)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 1. B. 2.
C. 3. D. 5.



149. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x| + m)$ có 5 điểm cực trị.

- A. $m < -1$. B. $m > -1$. C. $m > 1$. D. $m < 1$.



150. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $h(x) = |f^2(x) + f(x) + m|$ có đúng 3 điểm cực trị.

- A. $m > \frac{1}{4}$. B. $m \geq \frac{1}{4}$. C. $m < 1$. D. $m \leq 1$.

Vấn đề 7. Cho biểu thức $f(x, m)$. Tìm m để hàm số $f[u(x)]$ có n điểm cực trị

151. Hàm số $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2; -1$ và 0 . Hàm số

$g(x) = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

152. Cho hàm số $f(x) = x^3 - (2m - 1)x^2 + (2 - m)x + 2$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

A. $-2 < m < \frac{5}{4}$.

B. $-\frac{5}{4} < m < 2$.

C. $\frac{5}{4} < m < 2$. D.

$\frac{5}{4} < m \leq 2$.

153. Cho hàm số $f(x) = mx^3 - 3mx^2 + (3m-2)x + 2 - m$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để hàm số $g(x) = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị ?

A. 7.

B. 9.

C. 10.

D. 11.

154. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị nhận hai điểm $A(0; 3)$ và $B(2; -1)$ làm hai điểm cực trị. Khi đó số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x) = |ax^2|x + bx^2 + c|x| + d|$.

A. 5.

B. 7.

C. 9.

D. 11.

155. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ và

$\begin{cases} a > 0 \\ d > 2018 \\ a + b + c + d - 2018 < 0 \end{cases}$

. Hàm số $g(x) = |f(x) - 2018|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 5.

156. Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $\begin{cases} -8 + 4a - 2b + c > 0 \\ 8 + 4a + 2b + c < 0 \end{cases}$.

Hàm số $g(x) = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 5.

157. Cho hàm số $f(x) = x^3 + mx^2 + nx - 1$ với $m, n \in \mathbb{R}$ và $\begin{cases} m + n > 0 \\ 7 + 2(2m + n) < 0 \end{cases}$.

Hàm số $g(x) = |f(|x|)|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 2.

B. 5.

C. 9.

D. 11.

158. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \in (-1; 0), x_2 \in (1; 2)$. Biết hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1; x_2)$. Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

A. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

B. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.

C. $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

D. $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$.

159. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ biết $a > 0, c > 2018$ và $a + b + c < 2018$. Số cực trị của hàm số $g(x) = |f(x) - 2018|$ là

A. 1.

B. 3.

C. 5.

D. 7.

160. Cho hàm số $f(x) = (m^4 + 1)x^4 + (-2^{m+1}.m^2 - 4)x^2 + 4^m + 16$ với m là tham số thực. Hàm số $g(x) = |f(x) - 1|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 3.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

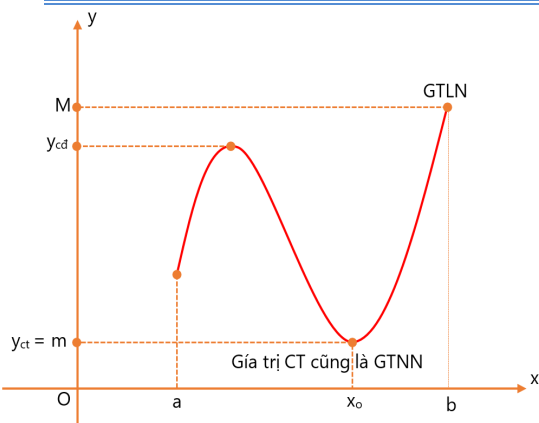
Biên soạn và tổng hợp: Nguyễn Bảo Vương

Để hoàn thành được tài liệu này. Đầu tiên tôi xin cảm ơn thầy giáo **Lê Văn Đoàn**, cảm quý thầy cô giáo trong Diễn Đàn Giáo Viên Toán đã chia sẻ các file word liên quan. Trong quá trình tổng hợp và biên soạn sai sót chắc chắn có, kính mong đọc giả hồi âm để kịp thời chỉnh sửa.

Kính mong, tài liệu này là một nguồn tham khảo cho bạn đọc, quý thầy cô cùng học sinh trên cả nước tham khảo.

Các tài liệu tiếp theo sẽ tiếp tục ra, bạn đọc theo dõi link facebook dưới để nhận tài liệu nhé.

<https://www.facebook.com/phong.baovuong>



BÀI 3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Bài toán 1. Những vấn đề liên quan đến tìm giá trị lớn nhất - giá trị nhỏ nhất mà hàm không chứa tham số.

Vấn đề 1. Tìm GTLN - GTNN của hàm số trên $D = [a; b]$

Bài tập trắc nghiệm

- Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^3 - 7x^2 + 11x - 2$ trên đoạn $[0; 2]$
 - $m = 11$
 - $m = 0$
 - $m = -2$
 - $m = 3$
- Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$ trên đoạn $[0; \sqrt{3}]$
 - $M = 9$
 - $M = 8\sqrt{3}$
 - $M = 1$
 - $M = 6$
- Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-2; 3]$
 - $m = \frac{51}{4}$
 - $m = \frac{49}{4}$
 - $m = 13$
 - $m = \frac{51}{2}$
- Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$
 - $m = \frac{17}{4}$
 - $m = 10$
 - $m = 5$
 - $m = 3$
- Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 2x^2 - 7x$ trên đoạn $[0; 4]$ bằng
 - -259
 - 68
 - 0
 - -4
- Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 3x^2$ trên đoạn $[-4; -1]$ bằng
 - -4
 - -16
 - 0
 - 4
- Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng
 - 25
 - $\frac{51}{4}$
 - 13
 - 85
- Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 9$ trên đoạn $[-2; 3]$ bằng
 - 201
 - 2
 - 9
 - 54

Bước 1. Tính

$$f'(x); f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_i$$

Bước 2: Tính $f(a); f(b); f(x_i)$

$$(x_i \in D)$$

$$m = \min \{f(a); f(b); f(x_i)\} \min_D y = m$$

$$M = \max \{f(a); f(b); f(x_i)\} \max_D y = M$$

Để giải toán vấn đề 2, chúng ta cần phải lập bảng biến thiên. Sau đó thông qua bảng biến thiên đưa ra kết luận GTLN-GTNN

Nếu xét trên $[a; b)$ thì phải tính

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$$

Nếu xét trên $(a; b]$ thì phải tính

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

Nếu xét trên $(a; b)$ phải tính $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$

và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

Vấn đề 2. Tìm GTLN – GTNN của hàm số trên $D \neq [a; b]$

9. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^3 + 9x^2 - 24x + 1$ trên nửa khoảng $(0; 2]$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\frac{M}{m} = -\frac{5}{12}$. B. $\frac{M}{m} = \frac{5}{12}$. C. $\frac{M}{m} = \frac{1}{12}$. D. $\frac{M}{m} = -\frac{1}{12}$.

10. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là

- A. -3. B. -2. C. 1. D. 3.

11. Xét hàm số $f(x) = 3x + 1 + \frac{3}{x + 2}$ trên tập $D = (-2; 1]$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên D bằng 5.
B. Hàm số $f(x)$ có một điểm cực trị trên D .
C. Giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên D bằng 1.
D. Không tồn tại giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên D .

12. Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$

- A. $\min_{(0; +\infty)} y = 3\sqrt[3]{9}$. B. $\min_{(0; +\infty)} y = 7$. C. $\min_{(0; +\infty)} y = \frac{33}{5}$. D. $\min_{(0; +\infty)} y = 2\sqrt[3]{9}$.

Vấn đề 3. Tìm GTLN – GTNN của hàm số phức tạp hoặc chứa lượng giác.

13. Hàm số $y = 4\sqrt{x^2 - 2x + 3} + 2x - x^2$ đạt giá trị lớn nhất tại hai giá trị x_1, x_2 . Tích $x_1 x_2$ là

- A. -1. B. 0. C. 1. D. 2.

14. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{1 - x^2} - 2\sqrt[3]{(1 - x^2)^2}$ là

- A. 0. B. $\frac{1}{81}$. C. $\frac{27}{2048}$. D. $\frac{29}{2017}$.

15. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2\sin x - \frac{4}{3}\sin^3 x$ trên đoạn $[0; \pi]$ là

- A. 0. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.

Có thể sử dụng BẤT ĐẲNG THỨC

AM-GM $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$

Đối với các bài toán hàm phức tạp hoặc chứa lượng giác. Có thể đặt ẩn phụ, đưa về dạng toán ở vấn đề 1. 2

16. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^6 x + \cos^6 x + \sin x \cos x$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. $M - m = \frac{5}{6}$. B. $M - m = \frac{4}{3}$. C. $M - m = 1$. D. $M - m = \frac{1}{2}$.

Nếu $f(x)$ tăng trên $[a; b]$ Thì
 $\min y = f(a), \max y = f(b)$

Nếu $f(x)$ giảm trên $[a; b]$ Thì
 $\min y = f(b), \max y = f(a)$

Vấn đề 4. Sử dụng tính đơn điệu của hàm số để tìm GTLN – GTNN.

17. Cho hàm số $y = \frac{3x+1}{x-2}$. Ta có các mệnh đề sau:

- I. Hàm số nghịch biến với $\forall x \neq 2$.
 II. Hàm số nghịch biến trên tập xác định của nó.
 III. Hàm số không có cực trị.

IV. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 0$ trên đoạn $[0; 3]$

Có bao nhiêu mệnh đề sai?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

18. Gọi giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$ trên đoạn $[0; 1]$ lần lượt là a, b . Khi đó giá trị của $a - b$ bằng:

- A. -1. B. -2. C. -3. D. 2.

19. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^3+20}{3} + 2\sqrt{x}$ trên đoạn $[1; 4]$ là:

- A. 9. B. 32. C. 33. D. 42.

20. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{ax-b^2-1}{x+a}$ trên đoạn $[a; b]$ (với $0 < a < b$) đạt tại giá trị x bằng

- A. a . B. b . C. $b - a$. D. $\frac{a+b}{2}$.

Bài toán 2. Những vấn đề liên quan đến tìm giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất mà hàm số chứa tham số.

21. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x) = x^3 + m^2x + 18$ trên đoạn $[1; 3]$ có giá trị nhỏ nhất không lớn hơn 20?

- A. 3. B. 4. C. 2. D. 5.

22. Biết giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x-m^2+m}{x+1}$ trên đoạn $[0;1]$ bằng -2 , với m là tham số thực dương. Trong có giá trị sau, đâu là giá trị gần m nhất?

- A. $\frac{1}{2}$. B. 3. C. $\frac{7}{2}$. D. 5.

23. Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

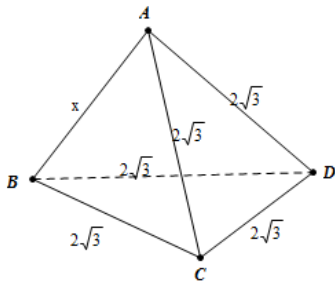
- A. $m \leq 0$. B. $m > 4$. C. $0 < m \leq 2$. D. $2 < m \leq 4$.

24. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x) = \frac{mx+1}{x-m}$ có giá trị lớn nhất trên $[1;2]$ bằng -2 .

- A. $m = -3$. B. $m = 2$. C. $m = 4$. D. $m = 3$.

25. Cho m là tham số thực âm. Với giá trị nào của m thì hàm số $y = x^3 - 2mx - m - 1$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[1;2]$ bằng 3.

- A. $m = \frac{4}{9}$. B. $m = 3$. C. $m = 1$. D. $m = -1$.



Bài toán 3. ứng dụng cách tìm giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất vào bài toán thực tế và liên chương.

26. Xét khối tứ diện $ABCD$ có cạnh $AB = x$ và các cạnh còn lại đều bằng $2\sqrt{3}$. Tìm x để thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất

- A. $x = \sqrt{6}$ B. $x = \sqrt{14}$ C. $x = 3\sqrt{2}$ D. $x = 2\sqrt{3}$

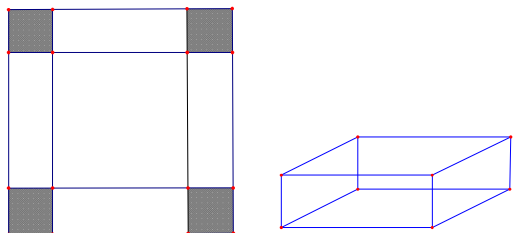
27. Ông A dự định sử dụng hết $6,7m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

- A. $1,57m^3$. B. $1,11m^3$. C. $1,23m^3$. D. $2,48m^3$.

28. Ông A dự định sử dụng hết $6,5m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

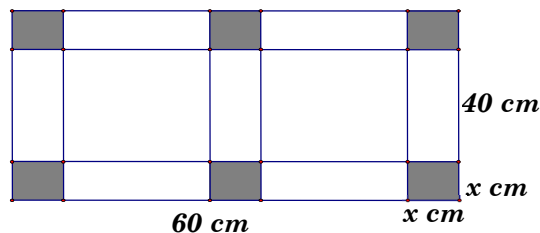
- A. $2,26m^3$. B. $1,61m^3$. C. $1,33m^3$. D. $1,50m^3$.





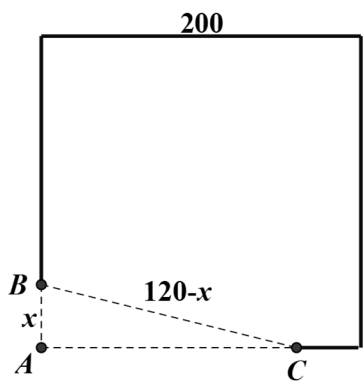
29. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh $12cm$. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x (cm)$, rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.

- A. $x = 6$ B. $x = 3$ C. $x = 2$ D. $x = 4$



30. Cho một tấm bìa hình chữ nhật chiều dài $AB = 60cm$ chiều rộng $BC = 40cm$. Người ta cắt 6 hình vuông bằng nhau như hình vẽ, mỗi hình vuông cạnh bằng xcm , rồi gập tấm bìa lại như hình vẽ dưới đây để được một hộp quà có nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất

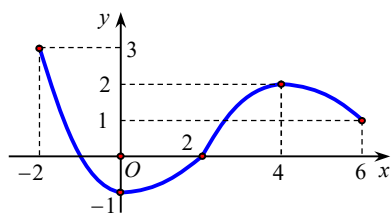
- A. $\frac{20}{3}cm$. B. $4cm$. C. $5cm$. D. $\frac{10}{3}cm$.



31. Cho một tấm gỗ hình vuông cạnh $200cm$. Người ta cắt một tấm gỗ có hình một tam giác vuông ABC từ tấm gỗ hình vuông đã cho như hình vẽ sau. Biết $AB = x (0 < x < 60cm)$ là một cạnh góc vuông của tam giác ABC và tổng độ dài cạnh góc vuông AB với cạnh huyền BC bằng $120cm$. Tìm x để tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

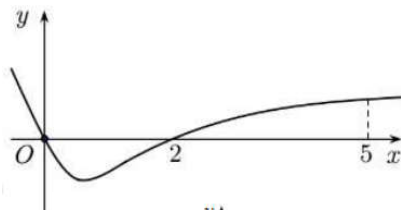
- A. $x = 40cm$. B. $x = 50cm$. C. $x = 30cm$. D. $x = 20cm$.

Bài toán 4. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất thông qua đồ thị hàm ẩn.



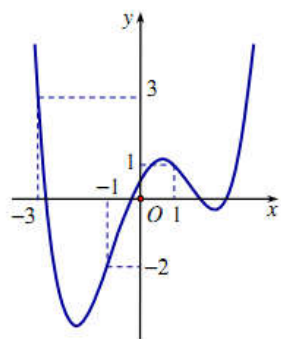
32. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2; 6]$ như hình vẽ bên. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- A. $\max_{x \in [-2; 6]} f(x) = f(-2)$. B. $\max_{x \in [-2; 6]} f(x) = f(2)$.
C. $\max_{x \in [-2; 6]} f(x) = f(6)$. D. $\max_{x \in [-2; 6]} f(x) = f(-1)$.



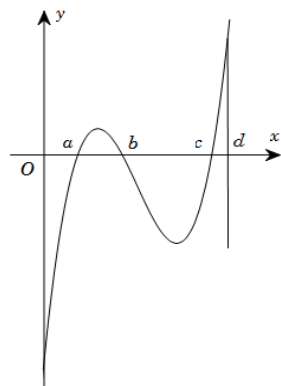
33. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn của $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$ lần lượt là:

- A. $f(2); f(0)$ B. $f(0); f(5)$ C. $f(2); f(5)$ D. $f(1); f(3)$



34. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\min_{[-3; 1]} g(x) = g(-1)$ B. $\min_{[-3; 1]} g(x) = g(1)$



C. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-3)$

D. $\min_{[-3;1]} g(x) = \frac{g(-3) + g(1)}{2}$

35. Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $0 < a < b < c < d$ và hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[0; d]$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $M + m = f(0) + f(c)$.

B. $M + m = f(d) + f(c)$.

C. $M + m = f(b) + f(a)$.

D. $M + m = f(0) + f(a)$.

Bài toán 5. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số chứa trị tuyệt đối.

36. Cho hàm số $y = |x^2 + 2x + a - 4|$. Tìm a để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 1]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $a = 3$

B. $a = 2$

C. $a = 1$

D. $a = 4$

37. Với m để hàm số $y = |x^2 + mx + 1|$ trên $[-1; 2]$ đạt giá trị nhỏ nhất là 1 thì mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $2 < |m| < 4$

B. $1 < |m| < 2$

C. $0 < |m| < 1$

D. $|m| > 4$

38. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{\ln x + 1}{\sqrt{\ln^2 x + 1}} + m \right|$ trên $[1; e^2]$ đạt giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

A. $\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$

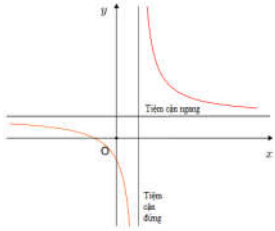
B. $\frac{\sqrt{2} - 1}{4}$

C. $\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$

D. $\frac{1 + \sqrt{2}}{4}$

Biên soạn và tổng hợp: Nguyễn Bảo Vương

Theo dõi facebook: <https://www.facebook.com/phong.baovuong> để nhận các tài liệu tiếp theo



BÀI 4. TIỆM CẬN ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Bài toán 1. Xác định tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

Cho $y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

Điều kiện cần: giải $Q(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$ là TCD khi thỏa mãn **đk đủ**.

Điều kiện đủ:

→ **Điều kiện 1:** x_0 làm cho $P(x)$ và $Q(x)$ xác định

→ **Điều kiện 2:**

→ ① x_0 không phải nghiệm $P(x) \Rightarrow x = x_0$ là TCD

→ ② x_0 là nghiệm $P(x) \Rightarrow x = x_0$ là TCD nếu

Cần nhớ:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (c \neq 0, ad - bc \neq 0)$$

luôn có đường tiệm cận đứng là: $x = -\frac{d}{c}$

— Kỹ năng sử dụng máy tính (**tham khảo**):

+ Tính $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và
CALC $x = x_0 + 10^{-9}$.

+ Tính $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và
CALC $x = x_0 - 10^{-9}$.

1. Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16}$.

A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

2. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

A. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ B. $y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$ C. $y = \frac{1}{x^4 + 1}$ D. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

3. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x^2 + x}$ là

A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

4. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 - 25} - 5}{x^2 + x}$ là

A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

5. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+16} - 4}{x^2 + x}$ là

A. 0. B. 3. C. 2. D. 1.

6. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x^2 + x}$ là

A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

7. Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$$y = \frac{2x + 1}{x + 1} ?$$

A. $x = 1$. B. $y = -1$. C. $y = 2$. D. $x = -1$.

8. Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$$y = \frac{2x - 1 - \sqrt{x^2 + x + 3}}{x^2 - 5x + 6}$$

A. $x = -3$ và $x = -2$. B. $x = -3$.
C. $x = 3$ và $x = 2$. D. $x = 3$.

9. Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3 - 3x^2 + 20}{x^2 - 5x - 14}$.

A. $x = -2$ và $x = 7$. B. $x = -2$.
C. $x = 2$ và $x = -7$. D. $x = 7$.

Bài toán 2. Xác định tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

Hàm số $y = f(x)$ có TXD: D

Điều kiện cần: D phải chứa $+\infty$ hoặc $-\infty$

Điều kiện đủ:

Dạng 1: $y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

+ Bậc của $P(x)$ nhỏ hơn bậc của $Q(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0 \Rightarrow$ Tiệm cận ngang $Ox : y = 0$.

+ Bậc của $P(x)$ bằng bậc của $Q(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y =$

$$\frac{\text{Hệ số } x \text{ bậc cao của } P(x)}{\text{Hệ số } x \text{ bậc cao của } Q(x)} = \alpha.$$

Suy ra tiệm cận ngang $y = \alpha$.

+ Bậc của $P(x)$ lớn hơn bậc của $Q(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty \Rightarrow$ Không có tiệm cận ngang.

Dạng 2: $y = f(x) = u - \sqrt{v}$ (hoặc $\sqrt{u} - \sqrt{v}$): Nhân liên hợp

$$\Rightarrow y = f(x) = \frac{u^2 - v}{u + \sqrt{v}} \text{ (hoặc } \frac{u - v}{\sqrt{u} + \sqrt{v}})$$

Kĩ thuật "ước lượng bậc nhỏ hơn"

Ví dụ câu 13

$$y = \frac{\sqrt{x^2 + x + 4}}{x - 3} \approx \frac{|x|}{x} = \pm 1 \text{ khi}$$

$x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow y = \pm 1$ là hai đường

TCN

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (c \neq 0, ad - bc \neq 0)$$

luôn có đường tiệm cận ngang là: $y = \frac{a}{c}$

10. Đồ thị hàm số $y = \frac{3x + 2}{2x + 3}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng nào trong các đường thẳng sau ?

A. $y = -\frac{3}{2}$. B. $y = \frac{2}{3}$. C. $y = \frac{3}{2}$. D. $y = -\frac{3}{2}$.

11. Tìm tất cả các đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$.

A. $y = -1$. B. $y = 1$. C. $y = 1, y = -1$. D. $y = 0$.

12. Đồ thị hàm số $y = \frac{x + 2017}{\sqrt{x^2 - 1}}$ có số đường tiệm cận ngang là:

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

13. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 + x + 4}}{x - 3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

A. 3. B. 1. C. 2. D. 0.

14. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số a để đồ thị hàm số

$$y = ax + b - \sqrt{x^2 + x - 1} \text{ có TCN?}$$

A. 1 B. 2 C. 0 D. Vô số

15. Gọi n, d lần lượt là số tiệm cận ngang, tiệm cận đứng của đồ thị hàm

$$số y = \frac{x - 1}{\sqrt{2x^2 - 1} - 1}. \text{ Mệnh đề nào đúng ?}$$

A. $n + d = 1$. B. $n + d = 2$. C. $n + d = 3$. D. $n + d = 4$.

16. Cho hàm số $y = \frac{x + 1 - \sqrt{1 - x}}{\sqrt{x^2 - x - 2}}$. Chọn khẳng định đúng ?

- A. Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 0$.
B. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = -1$ và $y = 1$.
C. Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là đường thẳng $y = -1$.
D. Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

17. Biết các đường tiệm cận của đường cong

$(C) : y = \frac{6x + 1 - \sqrt{x^2 - 2}}{x - 5}$ và trục tung cắt nhau tạo thành một đa giác (H) . Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. (H) là một hình vuông có diện tích bằng 25.

MÁY TÍNH THAM KHẢO

+ Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ thì nhập $f(x)$
và CALC $x = 10^{10}$.

+ Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ thì nhập $f(x)$
và CALC $x = -10^{10}$.

- B. (H) là một hình chữ nhật có diện tích bằng 8.
C. (H) là một hình vuông có diện tích bằng 4.
D. (H) là một hình chữ nhật có diện tích bằng 10.

Bài toán 3. Xác định tiệm cận đồ thị hàm số thông qua bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'			+	-
y		$-\infty$	$+\infty$	0

18. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Hỏi đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu tiệm cận?

- A. 1 B. 3 C. 2 D. 4

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'		-	+
y	2	$+\infty$	2

19. Hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

Chọn mệnh đề **đúng** ?

- A. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 1$ và không có đường tiệm cận ngang.
B. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 2$ và không có đường tiệm cận ngang.
C. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 2$, tiệm cận đứng $x = 1$.
D. Đồ thị hàm số không có các đường tiệm cận.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	0	2	$-\infty$	5

20. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

Hỏi mệnh đề nào dưới đây **đúng** ?

- A. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y = 0$, $y = 5$ và tiệm cận đứng là $x = 1$
B. Giá trị cực tiểu của hàm số là $y_{CT} = 3$.
C. Giá trị cực đại của hàm số là $y_{CD} = 5$.
D. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 5.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	0
$f(x)$	$-\infty$	2	$+\infty$	0

21. Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

Hỏi khẳng định nào sau đây là **sai** ?

- A. Hàm số không có đạo hàm tại $x = -1$.
B. Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = 1$.
C. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
D. Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Bài toán 4. Bài toán tiệm cận liên quan đến tham số

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (c \neq 0, \quad ad - bc \neq 0)$$

luôn có đường tiệm cận đứng là: $x = -\frac{d}{c}$

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (c \neq 0, \quad ad - bc \neq 0)$$

luôn có đường tiệm cận ngang là: $y = \frac{a}{c}$

22. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y = \frac{mx - 1}{2x + m}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$?

- A. $m = 2$. B. $m = \frac{1}{2}$. C. $m = 0$. D. $m = -2$.

23. Tìm tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{(2m - 1)x + 1}{x - m}$ có đường tiệm cận ngang là $y = 3$.

- A. $m = 2$. B. $m = 3$. C. $m = 1$. D. $m = 0$.

24. Tìm giá trị thực của tham số m sao cho tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x + 1}{2x + m}$ đi qua $A(1; 2)$.

- A. $m = 2$. B. $m = -2$. C. $m = 4$. D. $m = -4$.

25. Cho hàm số $y = \frac{2mx + m}{x - 1}$. Với giá trị nào của tham số m thì đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cùng hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 8.

- A. $m = 2$. B. $m = \pm \frac{1}{2}$. C. $m = \pm 4$. D. $m \neq \pm 2$.

26. Biết rằng trong các tiệm cận của đồ thị hàm số

$$y = \frac{(m - n)x^2 + mx + 1}{x^2 + mx + n - 2}$$

có hai tiệm cận là trục hoành và trục tung.

Hãy tính tổng $m + n$.

- A. $m + n = 6$. B. $m + n = 4$.
C. $m + n = 2$. D. $m + n = 8$.

27. Biết đồ thị của hàm số $y = \frac{(a - 2b)x^2 + bx + 1}{x^2 + x - b}$ có tiệm cận đứng là

$x = 1$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 0$. Tính $a + 2b$.

- A. $a + 2b = 6$. B. $m + n = 7$.
C. $m + n = 8$. D. $m + n = 10$.

28. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số

$$y = \frac{x - 2}{x^2 - mx + 1}$$

có hai đường tiệm cận đứng ?

- A. $m \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. B. $m \neq \frac{5}{2}$.

- C. $m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. D. $m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \setminus \left\{ \frac{5}{2} \right\}$.

29. Tìm các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số

$$y = \sqrt{mx^2 + 2x} - x$$

có đường tiệm cận ngang.

- A. $m = 1$. B. $m \in \{-2; 2\}$. C. $m \in \{-1; 1\}$. D. $m \in (0; +\infty)$.

Bậc của $P(x)$ nhỏ hơn bậc của

$$Q(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0 \Rightarrow \text{Tiệm cận}$$

ngang $Ox : y = 0$.

$$y = f(x) = u - \sqrt{v} \quad (\text{hoặc } \sqrt{u} - \sqrt{v}):$$

$$\text{Nhân liên hợp} \Rightarrow y = f(x) = \frac{u^2 - v}{u + \sqrt{v}}$$

$$(\text{hoặc } \frac{u - v}{\sqrt{u} + \sqrt{v}})$$

30. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số

$$y = \sqrt{x^2 + 1} - \frac{m}{2}x \text{ có tiệm cận ngang.}$$

- A. Không tồn tại m . B. $m = 2$ và $m = -2$.
C. $m = -1$ và $m = 2$. D. $m = -2$.

31. Biết đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ đi qua điểm $A(-1;7)$ và giao điểm hai đường tiệm cận của (C) là $I(-2;3)$. Biết c là số nguyên dương và a, c là các số nguyên tố cùng nhau. Khi đó tổng $a+b+c+d$ là:

- A. 32. B. 16. C. -24. D. -34.

32. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số

$$y = \frac{\sqrt{x} - m}{x-1} \text{ có đúng hai đường tiệm cận}$$

- A. $m \neq 1$. B. $m \in \mathbb{R}$. C. $m \neq 1$ và $m \neq 0$. D. $m \neq 0$.

33. Hàm số $y = \frac{\sqrt{3x+1} + ax + b}{(x-1)^2}$ không có tiệm cận đứng. Khi đó hiệu

$a-b$ bằng:

- A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{3}{4}$. C. $-\frac{5}{4}$. D. $-\frac{1}{2}$.

Bài toán 5. Một số câu hỏi liên quan đến yếu tố đồ thị và tiệm cận

34. Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x-2}(C)$. Gọi M là điểm bất kỳ trên (C) , d là tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của đồ thị (C) . Giá trị nhỏ nhất của d là

- A. 5. B. 10. C. 6. D. 2.

35. Số điểm thuộc đồ thị (H) của hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có tổng các khoảng cách đến hai tiệm cận của (H) nhỏ nhất là

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

36. Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị hàm số (C) tạo với hai đường tiệm cận một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất. Khi đó, khoảng cách từ tâm đối xứng của đồ thị (C) đến Δ bằng?

- A. $\sqrt{3}$. B. $2\sqrt{6}$. C. $2\sqrt{3}$. D. $\sqrt{6}$.

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (c \neq 0, ad-bc \neq 0)$$

$$\text{luôn có đường tiệm cận đứng là: } x = -\frac{d}{c}$$

$$\text{luôn có đường tiệm cận ngang là: } y = \frac{a}{c}$$

$$y = \frac{(x-x_0)^m f(x)}{(x-x_0)^n} \text{ mà } m < n \text{ và}$$

$x = x_0$ làm cho $f(x)$ xác định thì $x = x_0$ vẫn là tiệm cận đứng của đồ thị.

Với $f(x) = (x-x_0)^n g(x)$ thì ta

$$\text{luôn có } \begin{aligned} f(x_0) &= f'(x_0) = f''(x_0) \\ &= \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{aligned}$$

Khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0)$ đến đường thẳng $d: ax + by + c = 0$:

$$d[M; d] = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm

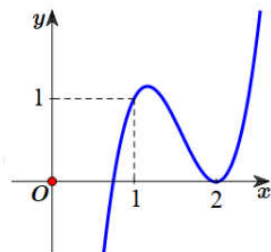
$M(x_0; y_0)$ của đồ thị hàm số $y = f(x)$ có phương trình

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$S_{LAB} = pr$$

37. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$, có đồ thị (C). Gọi P, Q là 2 điểm phân biệt nằm trên (C) sao cho tổng khoảng cách từ P hoặc Q tới 2 đường tiệm cận là nhỏ nhất. Độ dài đoạn thẳng PQ là:

A. $4\sqrt{2}$ B. $5\sqrt{2}$ C. 4 D. $2\sqrt{2}$



38. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ

bên. Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-1}}{x[f^2(x) - f(x)]}$ có bao nhiêu đường

tiệm cận đứng?

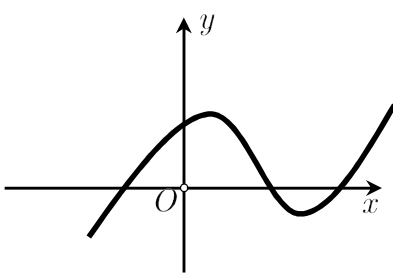
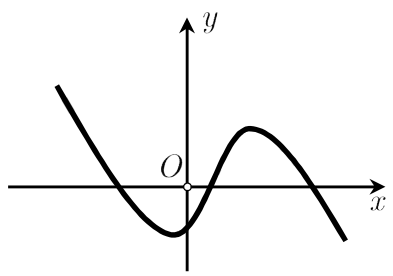
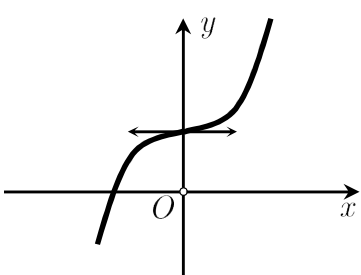
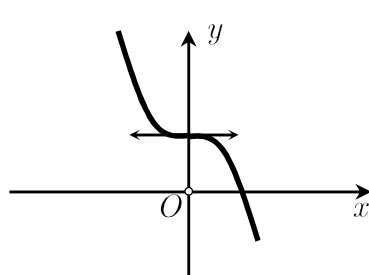
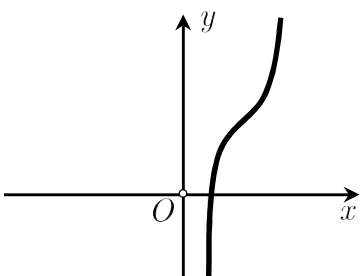
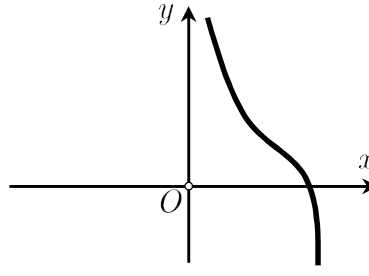
A. 5. B. 3. C. 6. D. 4.

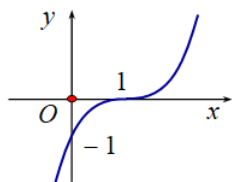
Biên soạn và tổng hợp: Nguyễn Bảo Vương

Theo dõi facebook <https://www.facebook.com/phong.baovuong> để nhận các bài học tiếp theo nhé!

BÀI 5. ĐỌC ĐỒ THỊ (P.1)

Bài toán 1. Nhận dạng hình dáng đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a \neq 0$).

	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt		
Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép		
Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm		



x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	+	0	-	+
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$

1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Hỏi (C) là đồ thị của hàm số nào ?

- A. $y = x^3 + 1$. B. $y = (x-1)^3$. C. $y = (x+1)^3$. D. $y = x^3 - 1$.

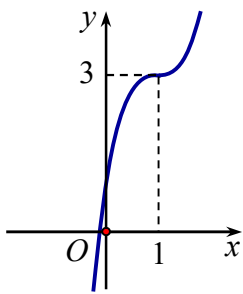
2. Hàm số nào trong bốn hàm số sau có bảng biến thiên như hình vẽ sau?

A. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

B. $y = x^3 + 3x^2 - 1$.

C. $y = x^3 - 3x + 2$.

D. $y = x^3 - 3x^2 + 2$.



3. Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số ở dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = -2x^3 - 6x^2 - 6x + 1$. B. $y = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 1$.
C. $y = 2x^3 - 6x^2 - 6x + 1$. D. $y = 2x^3 - x^2 + 6x + 1$.

4. Xác định đồ thị sau của hàm số nào ?

A. $y = x^3 + 3x + 2$. B. $y = -x^3 - 3x + 2$.
C. $y = x^3 - 3x + 2$. D. $y = x^3 - 3x - 2$.

5. Cho hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ dưới đây

Hỏi $f(x)$ là hàm số nào trong các hàm số dưới đây?

A. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$. B. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.
C. $f(x) = x^3 - 3x + 1$. D. $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$.

6. Đồ thị trong hình dưới là đồ thị của một trong bốn hàm số cho trong các phương án sau đây, đó là hàm số nào ?

A. $y = -x^3 + 3x^2 + 2$. B. $y = x^3 - 3x^2 + 2$.
C. $y = x^3 - 3x + 2$. D. $y = x^3 - 3x^2 - 2$.

7. Biết rằng đồ thị cho ở hình vẽ dưới đây là đồ thị của một trong 4 hàm số cho trong 4 phương án A, B, C, D.

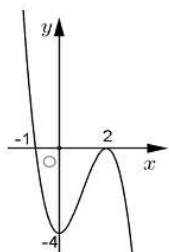
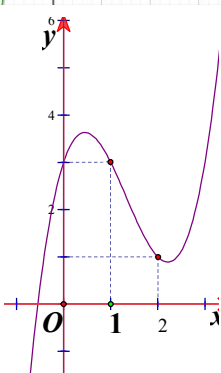
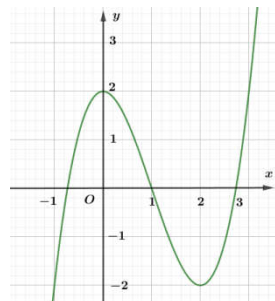
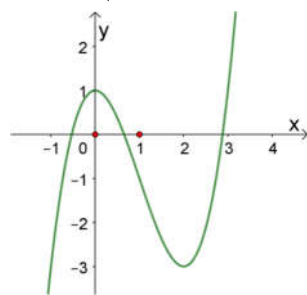
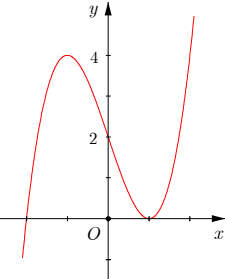
Đó là hàm số nào?

A. $y = 2x^3 + 9x^2 - 11x + 3$. B. $y = x^3 - 4x^2 + 3x + 3$.
C. $y = 2x^3 - 6x^2 + 4x + 3$. D. $y = x^3 - 5x^2 + 4x + 3$.

8. Đường cong ở hình dưới đây của một đồ thị hàm số.

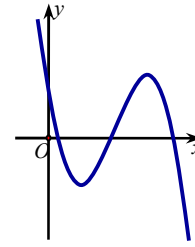
Hỏi hàm số đó là hàm số nào trong các hàm số sau đây:

A. $y = -x^3 - 4$. B. $y = x^3 - 3x^2 - 4$.
C. $y = -x^3 + 3x - 2$. D. $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.



Bài toán 1.2. Xét dấu hệ số của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a \neq 0$).

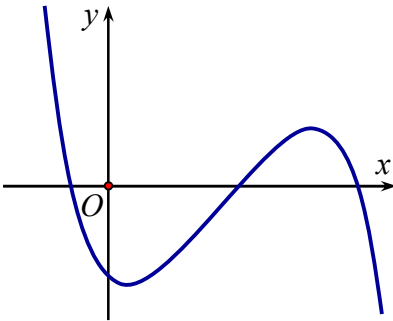
9. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ



Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$. B. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.
C. $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$. D. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

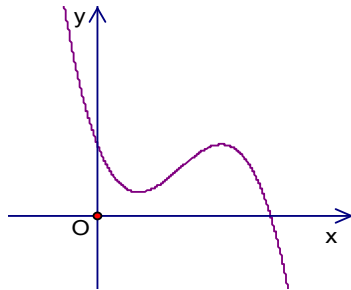
10. Cho hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a > 0; b > 0; c > 0; d < 0$. B. $a < 0; b > 0; c > 0; d < 0$.
C. $a < 0; b < 0; c > 0; d < 0$. D. $a < 0; b < 0; c < 0; d < 0$.

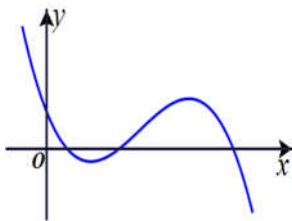
11. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới đây. Mệnh đề nào sau đây đúng?



- A. $a > 0, c > 0, d > 0$. B. $a < 0, c > 0, d > 0$.
C. $a < 0, c < 0, d < 0$. D. $a < 0, c < 0, d > 0$.

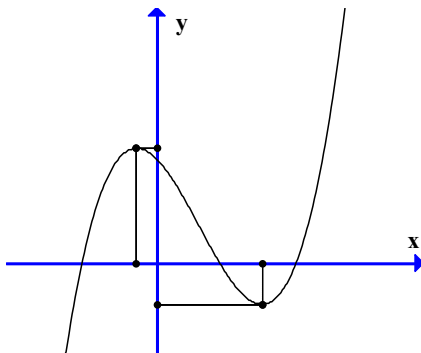
12. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.

Mệnh đề nào sau đây đúng?



- A. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$. B. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.
C. $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$. D. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

13. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?



- A. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$ B. $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$
C. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$ D. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$

Bài toán 1.3. Tính biểu thức hệ số của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a \neq 0$).

14. Ta xác định được các số a, b, c để đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $(1;0)$ và có điểm cực trị $(-2;0)$. Tính giá trị biểu thức $T = a^2 + b^2 + c^2$.

A. 25. B. -1. C. 7. D. 14.

15. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ.

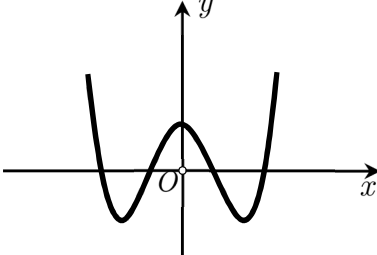
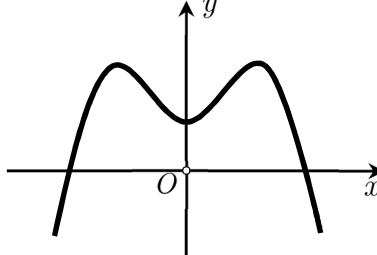
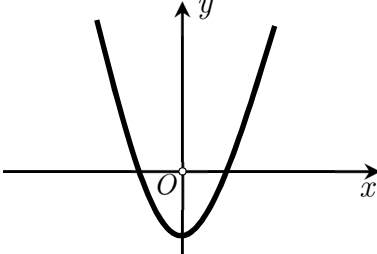
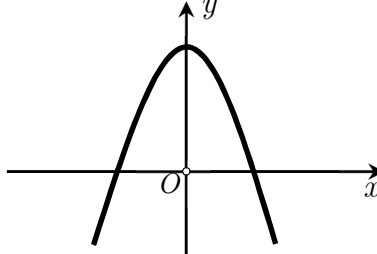
Tính tổng $S = a + b + c + d$.

A. $S = 0$. B. $S = 6$. C. $S = -4$. D. $S = 2$.

16. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ sau. Tính $S = a + b$.

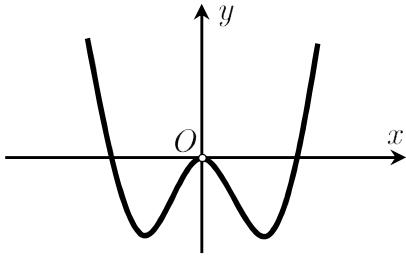
A. $S = -1$. B. $S = 0$. C. $S = 1$. D. $S = -2$.

Bài toán 2. Nhận dạng hình dáng đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, ($a \neq 0$).

	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt		
Phương trình $y' = 0$ có 1 nghiệm		

17. Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào ?

A. $y = -x^3 + x^2 - 1$. B. $y = x^4 - x^2 - 1$.



C. $y = x^3 - x^2 - 1$.

D. $y = -x^4 + x^2 - 1$.

18. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?

A. $y = -x^4 + 2x^2$.

B. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

C. $y = -x^4 - 2x^2$.

D. $y = x^4 - 2x^2$.

19. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?

A. $f(x) = x^4 - 2x^2$.

B. $f(x) = x^4 + 2x^2$.

C. $f(x) = -x^4 + 2x^2 - 1$.

D. $f(x) = -x^4 + 2x^2$.

20. Đường cong trong hình sau là đồ thị của hàm số nào?

A. $y = x^4 + 2x^2 - 3$.

B. $y = x^4 - 2x^2 - 3$.

C. $y = -x^4 - 2x^2 + 3$.

D. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.

21. Đường cong trong hình sau là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$.

B. $y = -x^4 + x^2 - 1$.

C. $y = -x^4 + 3x^2 - 3$.

D. $y = -x^4 + 3x^2 - 2$.

22. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A. $y = x^4 - x^2 + 1$.

B. $y = x^4 - 4x^2 + 1$.

C. $y = -x^4 + 4x^2 + 1$.

D. $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$.

23. Đồ thị hình bên là đồ thị hàm số nào trong các hàm số sau:

A. $y = x^3 + 3x^2 - 3$.

B. $y = -x^2 + 2x + 3$.

C. $y = x^4 + 2x^2 - 3$.

D. $y = -x^4 - 2x^2 + 3$.

24. Đồ thị cho ở hình vẽ sau đây, là đồ thị của hàm số cho bởi một trong bốn số phương án A,B,C,D dưới đây?

A. $y = x^4 + 2x^2 - 1$.

B. $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

C. $y = -\frac{1}{4}x^4 + 3x^2 - 1$.

D. $y = x^4 - 3x^2 - 1$.

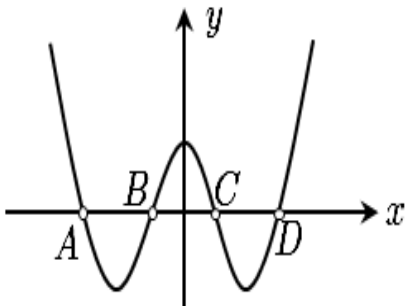
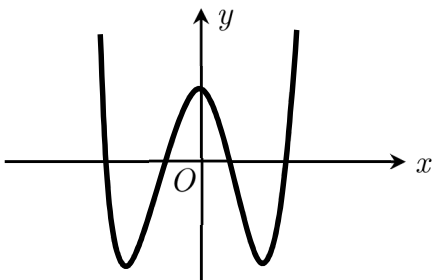
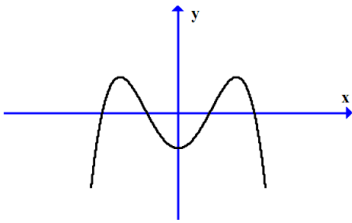
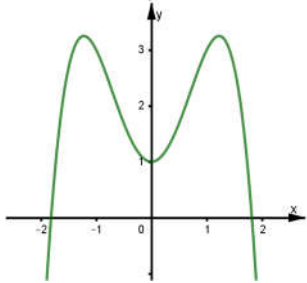
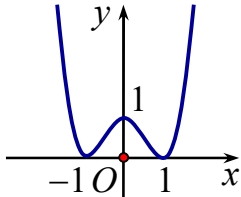
a: Dựa vào hướng đi điểm cuối nhánh ngoài cùng
đi lên $a > 0$
đi xuống $a < 0$

c: dựa vào giao điểm với trục Oy: $\left\{ \begin{array}{l} \text{trên Ox: } d > 0 \\ \text{dưới Ox: } d < 0 \\ \text{tại Ox: } d = 0 \end{array} \right.$

b: dựa vào cực trị

1 cực trị: $ab \geq 0$ (dấu của a) $\Rightarrow$ dấu b

3 cực trị: $ab < 0$ (dấu của a) $\Rightarrow$ dấu b



Bài toán 2.1. Xét dấu hệ số đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, ($a \neq 0$).

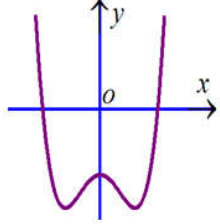
25. Đường cong hình bên là đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ với a, b, c là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a < 0, b > 0, c < 0$.

B. $a < 0, b < 0, c < 0$.

C. $a > 0, b < 0, c < 0$.

D. $a > 0, b < 0, c > 0$.



26. Giả sử hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là hình bên dưới. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $a > 0, b < 0, c = 1$.

B. $a > 0, b > 0, c = 1$.

C. $a < 0, b > 0, c = 1$.

D. $a > 0, b > 0, c > 0$.

27. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ với $a \neq 0$ có đồ thị như hình vẽ: Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

A. $a < 0; b > 0; c > 0$.

B. $a > 0; b < 0; c > 0$.

C. $a < 0; b < 0; c > 0$.

D. $a < 0; b > 0; c < 0$.

28. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, với $a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0$ có đồ thị như hình vẽ sau: Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a > 0, b < 0, c < 0$.

B. $a > 0, b < 0, c > 0$.

C. $a < 0, b < 0, c < 0$.

D. $a < 0, b > 0, c < 0$.

29. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a > 0, b < 0, c > 0, b^2 - 4ac > 0$.

B. $a > 0, b < 0, c > 0, b^2 - 8ac > 0$.

C. $a > 0, b < 0, c > 0, b^2 - 4ac < 0$.

D. $a < 0, b > 0, c > 0, b^2 - 8ac < 0$.

30. Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt A, B, C, D như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $AB = BC = CD$, hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

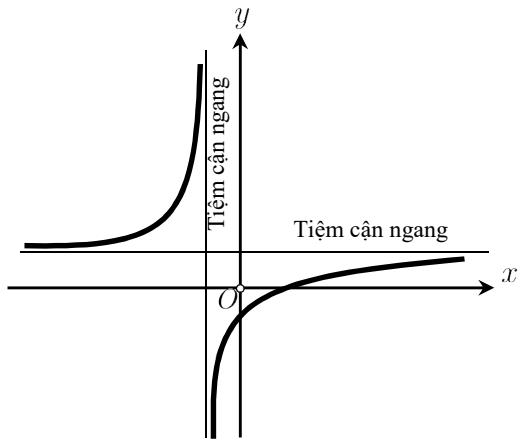
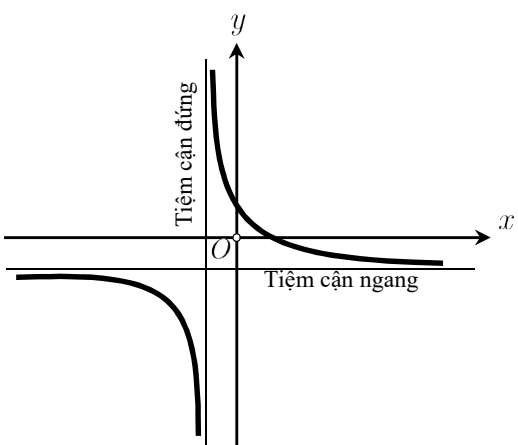
A. $a > 0, b < 0, c > 0, 100b^2 = 9ac$.

B. $a > 0, b > 0, c > 0, 9b^2 = 100ac$.

C. $a > 0, b < 0, c > 0, 9b^2 = 100ac$.

D. $a > 0, b > 0, c > 0, 100b^2 = 9ac$.

Bài toán 3. Nhận dạng hình dáng đồ thị hàm $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ($c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$).

$D = ad - bc > 0$, hàm số đồng biến	$D = ad - bc < 0$, hàm số nghịch biến
	

31. Đồ thị (hình bên) là đồ thị của hàm số nào ?

- A. $y = \frac{x+2}{x+1}$. B. $y = \frac{2x+1}{x+1}$. C. $y = \frac{x-1}{x+1}$. D. $y = \frac{x+3}{1-x}$.

32. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là đồ thị của hàm số nào?

- A. $y = \frac{x-2}{x+1}$. B. $y = \frac{x-2}{x-1}$. C. $y = \frac{x+2}{x-2}$. D. $y = \frac{x+2}{x-1}$.

33. Đường cong của hình bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào **đúng** ?

- A. $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. B. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
C. $y' > 0, \forall x \neq 1$. D. $y' < 0, \forall x \neq 1$.

34. Đồ thị sau là đồ thị của hàm số nào sau?

- A. $y = \frac{2x-3}{2x-2}$. B. $y = \frac{x}{x-1}$. C. $y = \frac{x-1}{x+1}$. D. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

Dựa vào giao điểm đồ thị và Ox $\Rightarrow$ dấu ab (1)

Dựa vào TCN: $y = \frac{c}{a} \Rightarrow$ dấu ac (2)

Dựa vào giao điểm đồ thị với Oy $\Rightarrow$ dấu bd (3)

Dựa vào TCD: $y = \frac{-d}{c} \Rightarrow$ dấu dc (4)

Dựa vào tính đơn điệu:

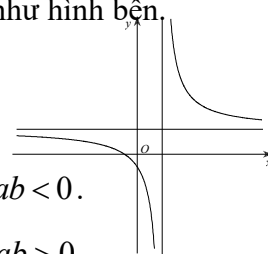
Đồng biến: $ad - bc > 0$, Nghịch biến: $ad - bc < 0$

(1):(2) $\Rightarrow$ dấu bc (3):(4) $\Rightarrow$ dấu bc

(1):(3) hoặc (2):(4) $\Rightarrow$ ad

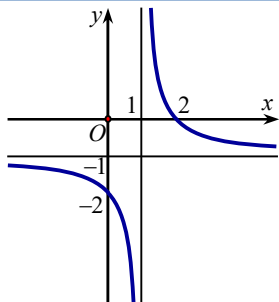
Bài toán 3.1. Xét dấu hệ số đồ thị hàm $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad-bc \neq 0$).

35. Cho hàm số $y = \frac{bx-c}{x-a}$ ($a \neq 0$ và $a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào dưới đây đúng?



- A. $a > 0, b < 0, c - ab < 0$. B. $a > 0, b > 0, c - ab < 0$.
C. $a < 0, b > 0, c - ab < 0$. D. $a < 0, b < 0, c - ab > 0$.

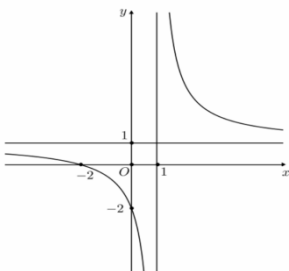
36. Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình dưới.



Khẳng định nào dưới đây là đúng?

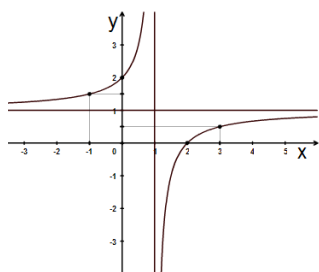
- A. $b < 0 < a$. B. $0 < b < a$. C. $b < a < 0$. D. $0 < a < b$.

37. Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



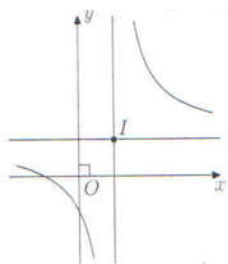
- A. $a < 0; b < 0$. B. $0 < b < a$. C. $b < 0 < a$. D. $a < b < 0$.

38. Hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị cho trong hình sau. Tìm mệnh đề đúng.



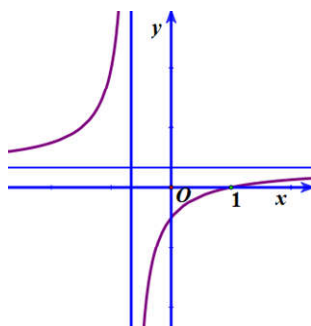
- A. $ad > bc, cd < ac$. B. $ad > bc, cd > ac$.
C. $ad < bc, cd < ac$. D. $ad < bc, cd > ac$.

39. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. $ab < 0, cd < 0$. B. $bc > 0, ad < 0$. C. $ac > 0, bd > 0$. D. $bd < 0, ad > 0$.

40. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là đúng?

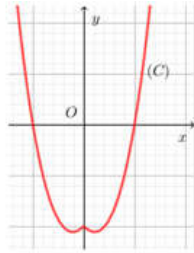
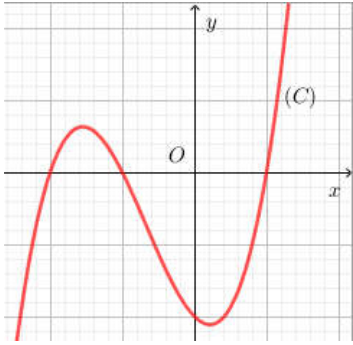


- A. $\begin{cases} ad < 0 \\ bc < 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} ad > 0 \\ bc < 0 \end{cases}$. C. $\begin{cases} ad > 0 \\ bc > 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} ad < 0 \\ bc > 0 \end{cases}$.

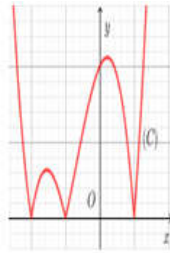
Bài toán 4. Đồ thị chứa trị tuyệt đối.

41. Cho hàm số $y = x^3 + 2x^2 - x - 2$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên.

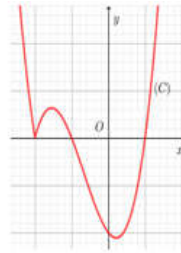
Biết đồ thị của hàm số $y = |x^3 + 2x^2 - x - 2|$ là một trong các hình dưới, đó là hình nào?



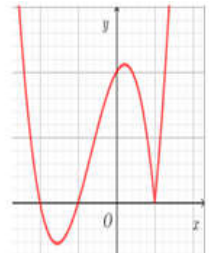
A. Hình 1



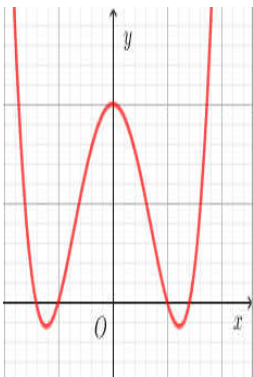
B. Hình 2.



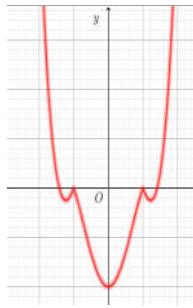
C. Hình 3.



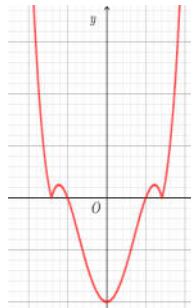
D. Hình 4.



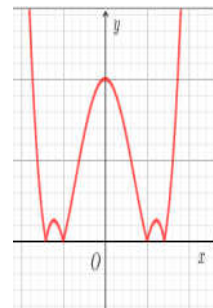
42. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$?



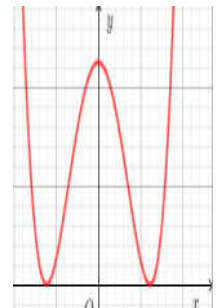
A. Hình 1



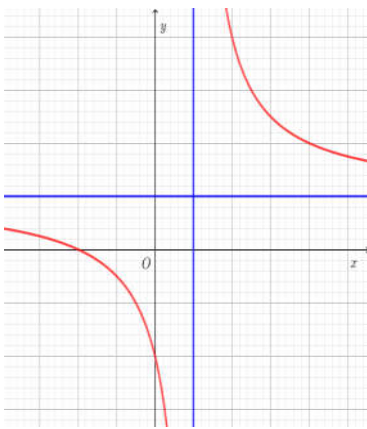
B. Hình 2.



C. Hình 3.

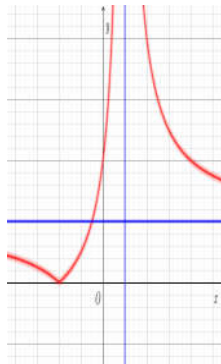


D. Hình 4.

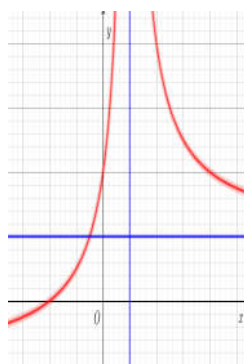


43. Hàm số $y = f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Biết đồ thị hàm số

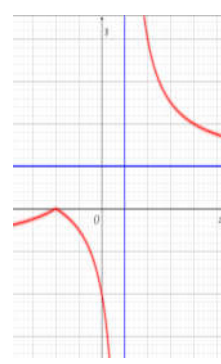
$y = \left| \frac{x+2}{x-1} \right|$ là một trong các hình dưới đây, đó là hình nào?



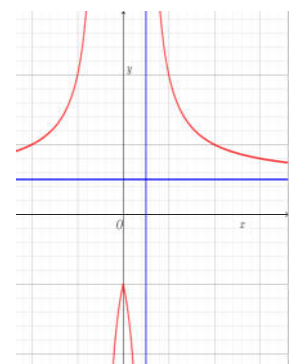
A. Hình 1.



B. Hình 2.

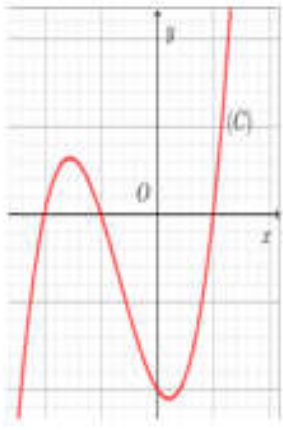


C. Hình 3



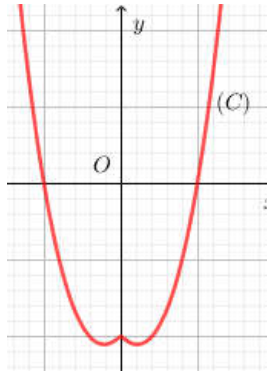
D. Hình 4.

Cách vẽ đồ thị hàm số $y = |f(x)|$: Giữ nguyên phần đồ thị bên trên trục Ox, lấy đối xứng phần đồ thị bên dưới trục Ox qua trục Ox và xóa phần đồ thị bên dưới đi.

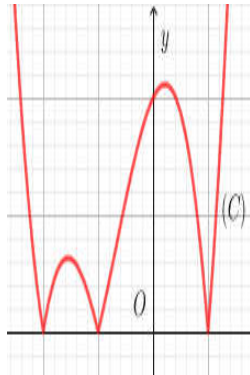


44. Cho hàm số $y = x^3 + 2x^2 - x - 2$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên.

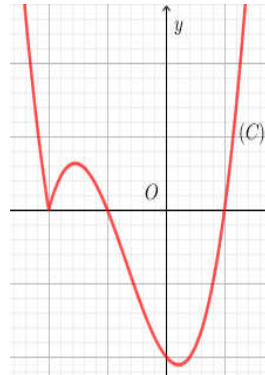
Biết đồ thị của hàm số $y = |x^3 + 2x^2 - x| - 2$ là một trong các hình dưới, đó là hình nào?



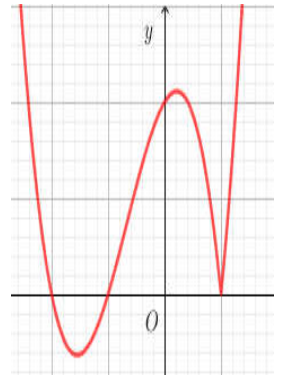
A. Hình 1.



B. Hình 2.



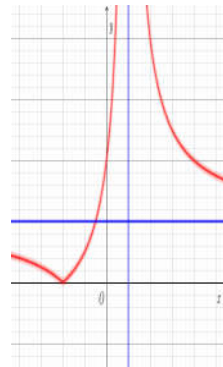
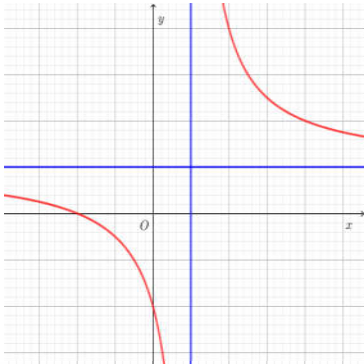
C. Hình 3.



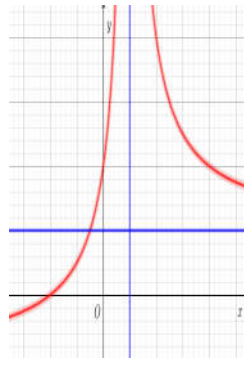
D. Hình 4.

45. Hàm số $y = f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên.

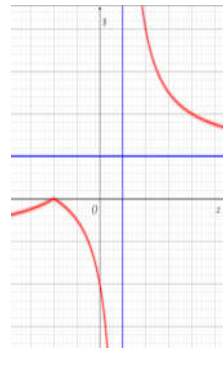
Biết đồ thị hàm số $y = \frac{|x|+2}{|x|-1}$ là một trong các hình dưới đây, đó là hình nào?



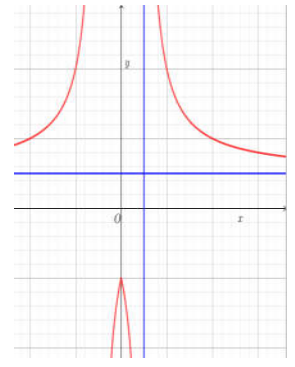
A. Hình 1.



B. Hình 2.



C. Hình 3.



D. Hình 4.

Cách vẽ đồ thị hàm số $y = f(|x|)$: Giữ nguyên phần đồ thị bên phải trục Oy, lấy đối xứng phần đồ thị bên trái trục Oy qua trục Oy rồi xóa phần đồ thị bên trái đi.

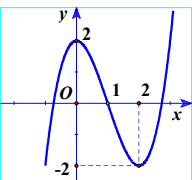
46. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?

A. $y = |x^3 - 3x^2 + 2|$.

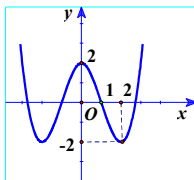
B. $y = |x|^3 - 3x^2 + 2$

C. $y = |x-1|(x^2 - 2x - 2)$.

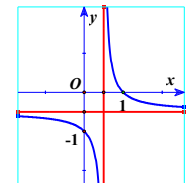
D. $y = (x-1)|x^2 - 2x - 2|$.



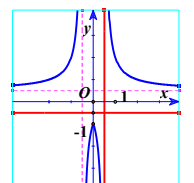
Hình 1



Hình 2



Hình 1



Hình 2

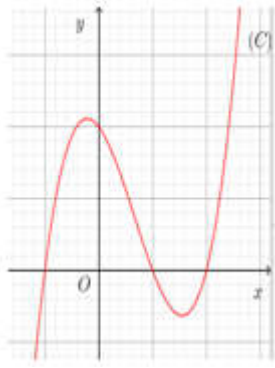
47. Cho hàm số $y = \frac{-x+1}{2x-1}$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?

A. $y = \left| \frac{-x+1}{2x-1} \right|$

B. $y = \frac{|x|+1}{2|x|-1}$

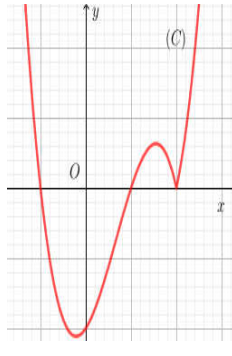
C. $y = \frac{|-x+1|}{2x-1}$

D. $y = \frac{-x+1}{|2x-1|}$

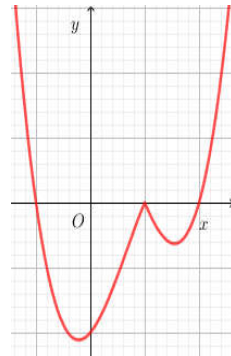


Hàm số $y = f(x)$ và $y = -f(x)$
đối xứng nhau qua Ox

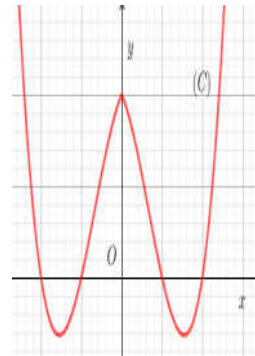
48. Hàm số $y = (x-2)(x^2-1)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = |x-2|(x^2-1)$?



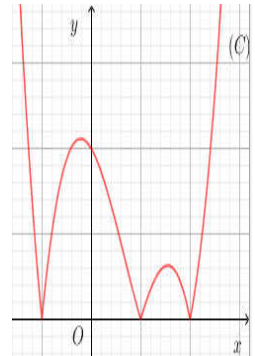
A. Hình 1.



B. Hình 2.

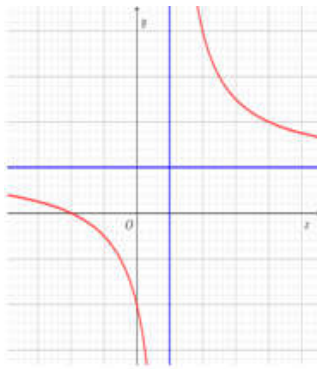


C. Hình 3.



D. Hình 4.

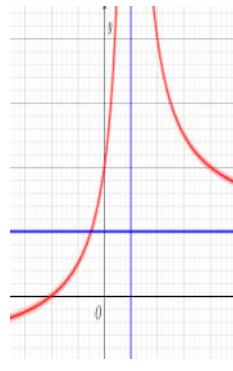
49. Hàm số $y = f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Biết đồ thị hàm số $y = \frac{|x+2|}{x-1}$ là một trong các hình dưới đây, đó là hình nào?



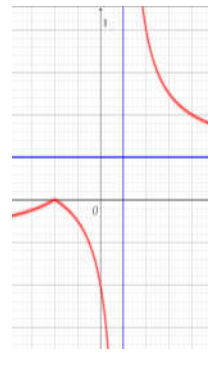
$$|u| = \begin{cases} u & \text{khi } u > 0 \\ -u & \text{khi } u < 0 \end{cases}$$



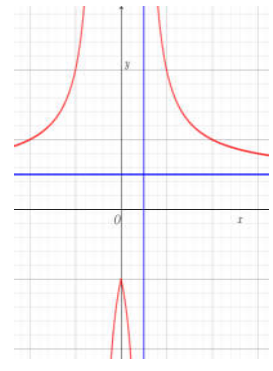
A. Hình 1.



B. Hình 2.

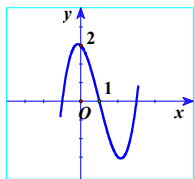


C. Hình 3.

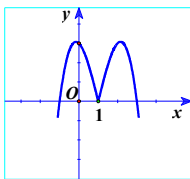


D. Hình 4.

50. Cho hàm số $y = (x-1)(x^2-2x-3)$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



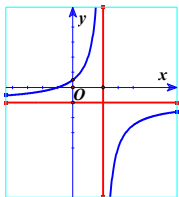
Hình 1



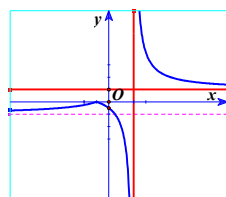
Hình 2

- A. $y = |(x-1)(x^2-2x-3)|$. B. $y = |x-1|(x^2-2x-3)$.
C. $y = -|x-1|(x^2-2x-3)$ D. $y = (x-1)|x^2-2x-3|$

51. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{-x+2}$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1

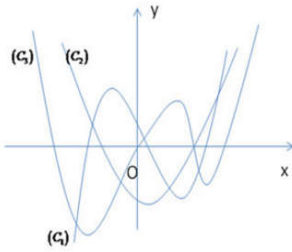


Hình 2

- A. $y = \left| \frac{x+1}{x+2} \right|$. B. $y = \frac{|x+1|}{x-2}$. C. $y = \frac{|x+1|}{-x+2}$. D. $y = \frac{x+1}{|x+2|}$.

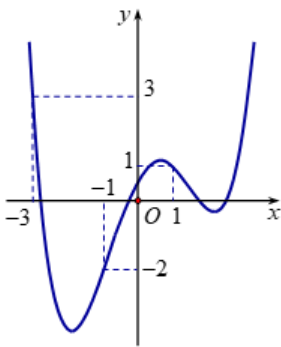
BÀI 5. ĐỌC ĐỒ THỊ (P.2)

Bài toán 5. Liên quan đến đồ thị đạo hàm



1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của các hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ lần lượt là các đường cong trong hình vẽ bên

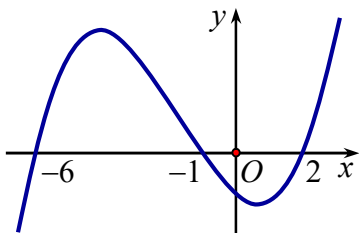
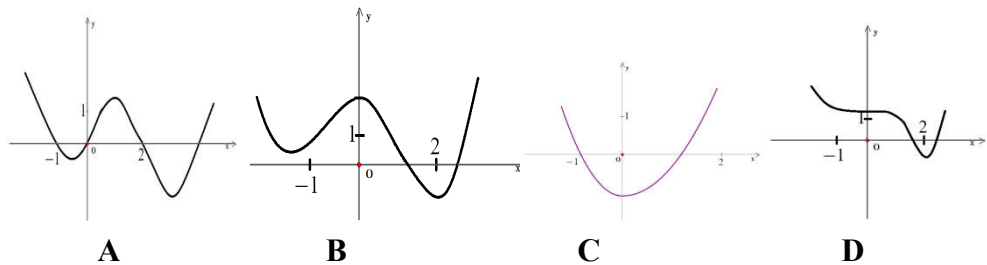
- A. $(C_1), (C_2), (C_3)$.
B. $(C_1), (C_3), (C_2)$.
C. $(C_3), (C_2), (C_1)$.
D. $(C_3), (C_1), (C_2)$.



2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

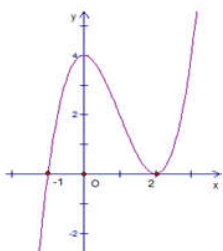
- A. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(1)$.
B. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$.
C. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-3)$.
D. $\min_{[-3;1]} g(x) = \frac{g(-3) + g(1)}{2}$.

3. Một trong các đồ thị dưới đây là đồ thị của hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(0) = 0$ và $f''(x) < 0, \forall x \in (-1; 2)$. Hỏi đó là đồ thị nào?



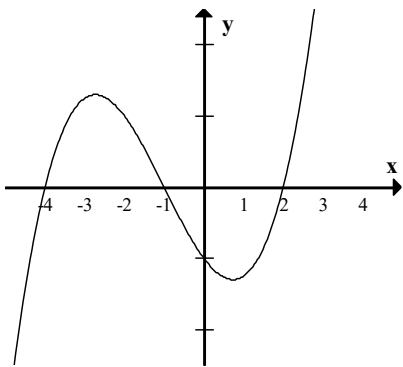
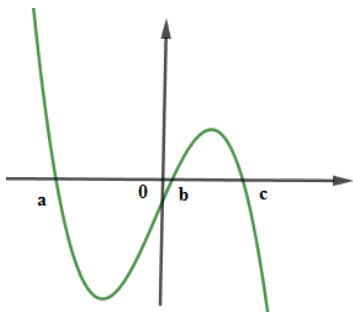
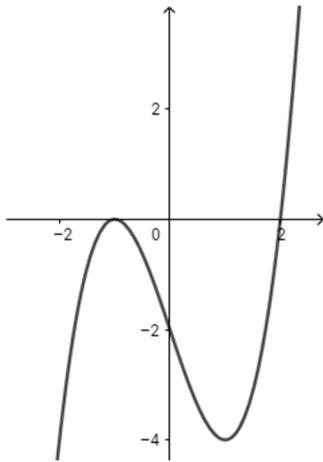
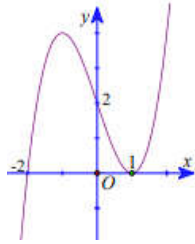
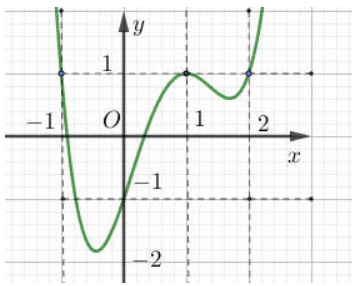
- Cho hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $y = f(3 - x^2)$ đồng biến trên khoảng

- A. $(2; 3)$.
B. $(-2; -1)$.
C. $(-1; 0)$.
D. $(0; 1)$.

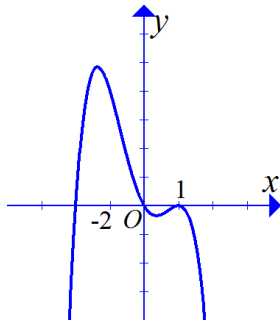
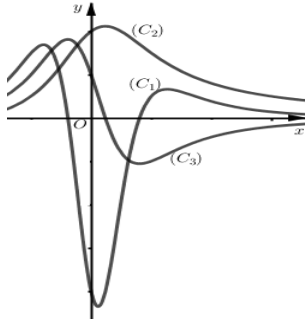
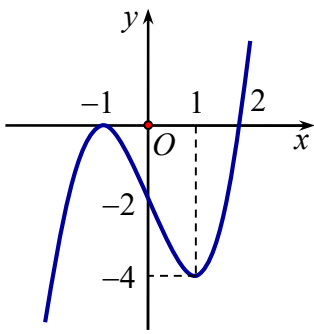


4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(2 - x^2)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(1; +\infty)$.
B. $(-1; 0)$.
C. $(-2; 1)$.
D. $(0; 1)$.



5. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình sau
- Đặt $g(x) = f(x) - x$, hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng
- A. $(1; +\infty)$. B. $(-1; 2)$. C. $(2; +\infty)$. D. $(-\infty; -1)$.
6. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình dưới. Hàm số $y = f(x^2)$ có bao nhiêu điểm cực đại?
- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.
7. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$. Mệnh đề nào sau đây sai?
- A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1; 0)$.
- B. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$.
- C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0; 2)$.
- D. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.
8. Cho hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ a, b, c như hình vẽ dưới. Mệnh đề nào sau đây là đúng?
- A. $f(a) < f(b) < f(c)$. B. $f(c) < f(a) < f(b)$.
- C. $f(b) < f(c) < f(a)$. D. $f(b) < f(a) < f(c)$.
9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.
- Hàm số $y = f(x^2 - 5)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?
- A. $(-1; 0)$. B. $(-1; 1)$. C. $(0; 1)$. D. $(1; 2)$.
10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị hàm số $y = f'(x)$, ($y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$). Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$. Mệnh đề nào dưới đây sai?
- A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.



B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp một $f'(x)$ và đạo hàm cấp hai $f''(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị của hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ là một trong các đường cong (C_1) , (C_2) , (C_3) ở hình vẽ bên. Hỏi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ lần lượt theo thứ tự nào dưới đây?

A. (C_2) , (C_1) , (C_3) .

B. (C_1) , (C_3) , (C_2) .

C. (C_2) , (C_3) , (C_1) .

D. (C_3) , (C_1) , (C_2) .

12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x+1)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.

Kết luận nào sau đây sai đối với hàm số $y = f(x)$

A. Hàm số nghịch biến trên $(0; 1)$. B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

C. Hàm số có hai điểm cực trị. D. Hàm số nghịch biến trên $(2; +\infty)$.

Các bạn có thể tham khảo thêm câu hỏi phần này ở các bài toán hàm ẩn của **12.GT.1.1, 12.GT.12**

BÀI 6. TƯƠNG GIAO (PHẦN 1)**Bài toán 1. Tương giao của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với $y = g(x)$**

Cho hai đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ và $(C'): y = g(x)$. Tọa độ giao điểm (nếu có) của (C) và (C') là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \quad (*)$$

— Phương trình $(*)$ được gọi là phương trình hoành độ điểm chung của (C) và (C') .

— Số nghiệm của $(*)$ chính là số điểm chung của hai đồ thị.

— Nếu $(*)$ vô nghiệm thì hai đồ thị không có điểm chung.

- (Thpt Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - Lần 1 - 2018)** Đường thẳng $y = 2x - 1$ có bao nhiêu điểm chung với đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1}$.
A. 3. B. 1. C. 0. D. 2.
- (Toán Học Và Tuổi Trẻ Số 1 - 2018)** Biết đường thẳng $y = -\frac{9}{4}x - \frac{1}{24}$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$ tại một điểm duy nhất; ký hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ điểm đó. Tìm y_0 .
A. $y_0 = \frac{13}{12}$. B. $y_0 = \frac{12}{13}$. C. $y_0 = -\frac{1}{2}$. D. $y_0 = -2$.
- (Xuân Trường - Nam Định - Lần 1 - 2018)** Đường thẳng $y = x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$ tại các điểm có tọa độ là:
A. $(0; -1), (2; 1)$. B. $(0; 2)$. C. $(1; 2)$. D. $(-1; 0), (2; 1)$.
- (Thpt Kiến An - Hải Phòng - Lần 1 - 2018)** Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 5$ và trục hoành.
A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.
- (Sở Gd&ĐT Quảng Nam - 2018)** Parabol $(P): y = x^2$ và đường cong $(C): y = x^4 - 3x^2 - 2$ có bao nhiêu giao điểm.
A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.
- (Thpt Lương Khắc Bằng - Thanh Hóa - Lần 1 - 2018)** Biết đường thẳng $54x + 24y + 1 = 0$ cắt đồ thị $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$ tại điểm duy nhất, kí hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0 .
A. $y_0 = -\frac{1}{2}$. B. $y_0 = \frac{12}{13}$. C. $y_0 = \frac{13}{12}$. D. $y_0 = -2$.
- (SGD&ĐT Hà Nội - 2018)** Đồ thị hàm số $y = 15x^4 - 3x^2 - 2018$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm?
A. 4 điểm. B. 3 điểm. C. 1 điểm. D. 2 điểm.
- (Thpt Lương Thế Vinh - Hn - Lần 1 - 2018)** Đường thẳng $y = x + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x + 3}{x - 1}$ tại hai điểm phân biệt A, B . Tính độ dài đoạn thẳng AB .

$$A(x_A; y_A), B(x_B; y_B) \\ \Rightarrow AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

- A. $AB = \sqrt{34}$. B. $AB = 8$. C. $AB = 6$. D. $AB = \sqrt{17}$.

Bài toán 2. Tương giao của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với đường thẳng $y = a$ dựa vào bảng biến thiên, đồ thị

9. (Thpt Chuyên Nguyễn Quang Diêu - Đồng Tháp - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
y'	+	0	-	+
y	$-\infty$	2	-1	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(x) + 1 = 0$.

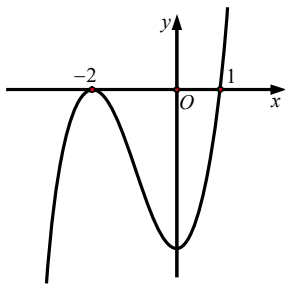
- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

10. (Thpt Chuyên Đh Vinh - Lần 3 - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = -2018$ tại bao nhiêu điểm?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+	0	-	0	-
y	$-\infty$	3	-1	3	$-\infty$

- A. 2. B. 4. C. 1. D. 0.

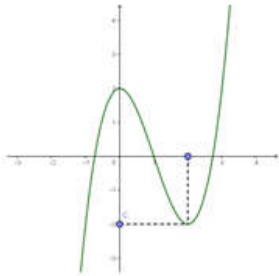
11. (Cụm 5 Trường Chuyên - Đbsh - Lần 1 - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Tìm số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(x) = 1$.

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

12. (Thpt Thái Phiên - Hải Phòng - Lần 1 - 2018) Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ:



Số nghiệm của phương trình $f(x) + 1 = 0$ là:

- A. 3 B. 2 C. 0 D. 1

13. (Thpt Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai - Sóc Trăng - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+	0	-	0	-
y	0	1	-2	3	1

Số nghiệm của phương trình $f(x) - 1 = 0$ là

- A. 3. B. 4. C. 2. D. 1.

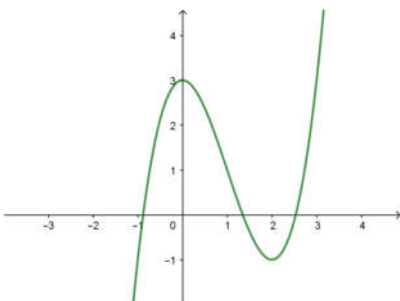
14. (Thpt Chuyên Ngã - Hà Nội - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Số nghiệm của phương trình $f(x) + 3 = 0$ là:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	+	0	-	+
y	$-\infty$	2	-3	$+\infty$

- A. 0. B. 3. C. 2. D. 1.

Bài toán 3. Biện luận giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với đường thẳng $y = m$ (m là tham số)

15. (Thpt Phan Đình Phùng - Hà Nội - HkII - 2018) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 + 3 = m$ có hai nghiệm thực.



- A. 5. B. 3. C. 2. D. 1.

16. (SGD&ĐT Đồng Tháp - 2018) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ tại 4 điểm phân biệt.

- A. $-1 < m < 1$. B. $m < -4$. C. $-4 < m < -3$. D. $m > -1$.

17. (Thpt Xuân Hòa - Vp - Lần 1 - 2018) Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ cắt đường thẳng $y = m$ tại ba điểm phân biệt thì tất cả các giá trị tham số m thỏa mãn là

- A. $m > 1$. B. $-3 \leq m \leq 1$. C. $-3 < m < 1$. D. $m < -3$.

18. (Thpt Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - Lần 1 - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình sau. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $f(x) = m$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'		+	-	0	+
y	$-\infty$	2	$+\infty$	-4	$+\infty$

- A. $(-4; 2)$. B. $[-4; 2)$. C. $(-4; 2]$. D. $(-\infty; 2]$.

19. (Toán Học Và Tuổi Trẻ Số 1 - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau. Tìm điều kiện của m để phương trình $f(x) = m$ có 3 nghiệm phân biệt.

x	$-\infty$	0			1	3			$+\infty$
y'		+	0	+		-	0	+	
y	$-\infty$					$+\infty$	$+\infty$	 $\frac{27}{4}$ 	$+\infty$

- A. $m < 0$. B. $m > 0$. C. $0 < m < \frac{27}{4}$. D. $m > \frac{27}{4}$.

20. (TT Diệu Hiền - Cần Thơ - 2018) Giá trị của tham số m để phương trình $x^3 - 3x = 2m + 1$ có ba nghiệm phân biệt là:

- A. $-\frac{3}{2} < m < \frac{1}{2}$. B. $-2 < m < 2$. C. $-\frac{3}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}$. D. $-2 \leq m \leq 2$.

21. (Xuân Trường - Nam Định - Lần 1 - 2018) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = 4m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 3$ tại bốn điểm phân biệt ?

- A. $-\frac{13}{4} < m < \frac{3}{4}$. B. $-\frac{13}{4} \leq m \leq \frac{3}{4}$. C. $m \leq \frac{3}{4}$. D. $m \geq -\frac{13}{4}$.

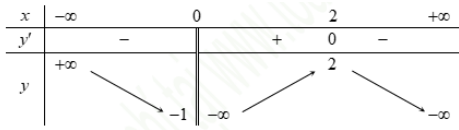
22. (Hồng Quang - Hải Dương - Lần 1 - 2018) Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x^3 - 6x^2 + m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

- A. 31. B. 32. C. 21. D. 34

23. (Hồng Bàng - Hải Phòng - Lần 1 - 2018) Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ cắt đường thẳng $y = m - 1$ tại ba điểm phân biệt.

- A. $0 < m < 4$. B. $1 < m \leq 5$. C. $1 < m < 5$. D. $1 \leq m < 5$.

24. (Chuyên KHTN - Lần 1 - 2018) Cho hàm số H có bảng biến thiên như sau:



Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) + m = 0$ có ba nghiệm phân biệt là:

- A. $(-2; 1)$. B. $[-1; 2)$. C. $(-1; 2)$. D. $(-2; 1]$.

Bài toán 4. Biện luận giao điểm của đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ với đường thẳng $y = m$ (m là tham số)

25. (Toán Học Tuổi Trẻ Số 6) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như đường cong trong hình dưới đây. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $|f(x)| = m$ có 6 nghiệm phân biệt:

- A. $-4 < m < -3$. B. $0 < m < 3$. C. $m > 4$. D. $3 < m < 4$.

26. (Thpt Hoa Lư A - Lần 1 - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $|f(x)| = 2 - 3m$ có bốn nghiệm phân biệt.

- A. $m \leq -\frac{1}{3}$. B. $-1 < m \leq -\frac{1}{3}$. C. $-1 < m < -\frac{1}{3}$. D. $3 < m < 5$.

27. (Chuyên Trần Phú - Hải Phòng - Lần 2 - 2018) Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$ có đồ thị như hình dưới. Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $|x^4 - 8x^2 + 12| = m$ có 8 nghiệm phân biệt là:

- A. 3. B. 6. C. 10. D. 0.

28. (Thpt Chu Văn An - Thái Nguyên - 2018) Cho hàm số $y = |x^3| - 4x^2 + 5|x| - 1$ có đồ thị (C) và đường thẳng (d): $y = 2m - 2$. Số giá trị thực của tham số m để đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại 6 điểm phân biệt:

- A. 0. B. 2. C. Vô số. D. 3.

29. (Thpt Chuyên Hùng Vương - Bình Dương - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Xác định tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $|f(x)| = m$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt.

- A. $m > -3$. B. $-4 < m < 0$. C. $m > 4$. D. $m > 4; m = 0$.

30. (Thpt Cầu Giấy - Hki - 2018) Hình vẽ bên là đồ thị hàm trùng phương. Giá trị m để phương trình $|f(x)| = m$ có 4 nghiệm đôi một khác nhau là:

- A. $m = 0, m = 3$. B. $-3 < m < 1$. C. $m = 0$. D. $1 < m < 3$.

31. (Chuyên Long An - Lần 1 - 2018) Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $\frac{|x|-2}{|x|+1} = m$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt.

A. $[0; 2)$. B. $[1; 2] \cup \{0\}$. C. $[1; 2)$. D. $[1; 2) \cup \{0\}$.

Bài toán 5. Biện luận giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(u(x))$ với đường thẳng $y = a$ (a là hằng số)

32. (Thpt Chuyên Thái Bình - Lần 5 - 2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $3|f(2x-1)| - 10 = 0$ là.

A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

33. (Thpt Thuận Thành - Bắc Ninh - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Số nghiệm của phương trình $2f(x) + 3 = 0$ là:

A. 4. B. 2. C. 0. D. 3.

34. (Thpt Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau. Số nghiệm của phương trình $2|f(x-1)| - 3 = 0$ là:

A. 1. B. 4. C. 3. D. 2.

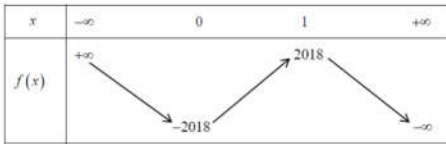
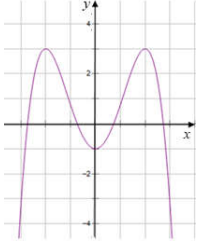
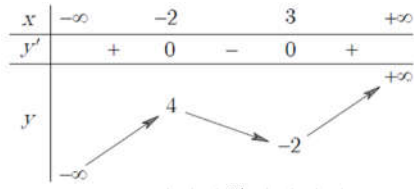
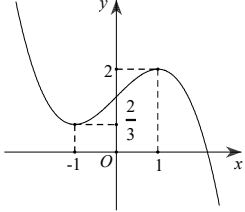
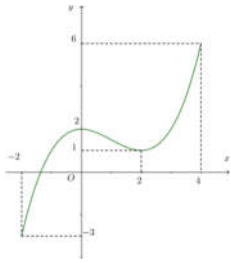
35. (Mã đề 101-THPTQG 2018) Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$). Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) + 4 = 0$ là

A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

36. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $3f(x) - 4 = 0$ trên đoạn $[-2; 2]$ là

A. 3. B. 4. C. 2. D. 1.

37. (Thpt Quốc Gia 2018 - Mã Đề 102) Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$). Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $4f(x) - 3 = 0$ là



- A. 4. B. 3. C. 2. D. 0.

38. (Thptqg 2018 - Mã Đề 104) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 4]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 5 = 0$ trên đoạn $[-2; 4]$ là

- A. 0. B. 3. C. 2. D. 1.

39. (Thpt Chuyên Hạ Long - Lần 2 - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Tìm số nghiệm của phương trình $f(x + 2018) = 1$.

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

40. (Chuyên Vinh - Lần 2 - 2018) Cho hàm số có bảng biến thiên như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $|f(x - 1)| = 2$ là

- A. 5. B. 4. C. 2. D. 3.

41. (Thpt Nguyễn Trãi - Đà Nẵng - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình sau: Số nghiệm của phương trình $\frac{1 - f(x)}{1 + f(x)} = 2$ là:

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.

42. (Thpt Thăng Long - Hà Nội - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Hỏi phương trình $|f(x + 2017) - 2018| = 2019$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 6. B. 2. C. 4. D. 3.

43. (Thpt Thanh Chương - Nghệ An - 2018) Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Số nghiệm của phương trình $[f(x)]^3 - 3f(x) + 1 = 0$ là

- A. 3. B. 7. C. 5. D. 6.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.A	3.A	4.D	5.C	6.C	7.D	8.A	9.D	10.A
11.B	12.A	13.C	14.C	15.C	16.C	17.C	18.A	19.D	20.A
21.A	22.A	23.C	24.A	25.D	26.C	27.B	28.C	29.D	30.A
31.D	32.C	33.A	34.B	35.A	36.A	37.A	38.B	39.C	40.A
41.D	42.C	43.B							

BÀI 6. TƯƠNG GIAO (P.2)

Bài toán 6. Tương giao của hàm số nhất biến $y = \frac{Cx + D}{Ex + F}$ với đường thẳng $d: y = Ax + B$.

- (Xuân Trường - Nam Định - Lần 1 - 2018)** Đường thẳng $y = x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ tại các điểm có tọa độ là:
A. $(0; -1), (2; 1)$. **B.** $(0; 2)$. **C.** $(1; 2)$. **D.** $(-1; 0), (2; 1)$.
- (Thpt Lương Thế Vinh - HN - Lần 1 - 2018)** Đường thẳng $y = x + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B . Tính độ dài đoạn thẳng AB .
A. $AB = \sqrt{34}$. **B.** $AB = 8$. **C.** $AB = 6$. **D.** $AB = \sqrt{17}$.
- (Thpt Chuyên Thái Bình - Lần 1 - 2018)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = -2x + m$ cắt đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ tại hai điểm phân biệt là.
A. $(-\infty; 5 - 2\sqrt{6}) \cup (5 + 2\sqrt{6}; +\infty)$. **B.** $(-\infty; 5 - 2\sqrt{6}] \cup [5 + 2\sqrt{6}; +\infty)$.
C. $(5 - 2\sqrt{3}; 5 + 2\sqrt{3})$. **D.** $(-\infty; 5 - 2\sqrt{3}) \cup (5 + 2\sqrt{3}; +\infty)$.
- (Thpt Xuân Hòa - Vp - Lần 1 - 2018)** Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = 2x - 3$. Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm A và B . Khoảng cách giữa A và B là
A. $AB = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. **B.** $AB = \frac{5}{2}$. **C.** $AB = \frac{5\sqrt{5}}{2}$. **D.** $AB = \frac{2}{5}$.
- (Hồng Linh - Hà Tĩnh - Lần 1 - 2018)** Gọi M, N là giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ và đường thẳng $d: y = x + 2$. Hoành độ trung điểm I của đoạn MN là
A. $-\frac{5}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** 1 . **D.** $\frac{1}{2}$.
- (Kim Liên - Hà Nội - Lần 1 - 2018)** Tìm m để đường thẳng $y = mx + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ tại hai điểm thuộc hai nhánh của đồ thị.

Bài toán tổng quát: Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = Ax + B$ cắt đồ thị hàm số $(C): y = \frac{Cx + D}{Ex + F}$ tại 2 điểm phân biệt.

Phương pháp giải:

Bước 1. Lập phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $\frac{Cx + D}{Ex + F} = Ax + B$.

Biến đổi phương trình này về dạng phương trình bậc hai $g(x) = ax^2 + bx + c = 0$.

Bước 2. Để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt và khác

$$-\frac{F}{E} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{g(x)} \neq 0, \Delta_{g(x)} = b^2 - 4ac > 0 \\ g\left(-\frac{F}{E}\right) \neq 0 \end{cases}$$

Giải hệ này tìm được giá trị m .

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2}; y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0$$

A. $m \in \left(-\frac{1}{4}; +\infty\right) \setminus \{0\}$.

B. $m \in (0; +\infty)$.

C. $m \in (-\infty; 0)$.

D. $m = 0$.

7. (Thpt Lê Xoay - Lần 3 - 2018) Đồ thị của hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ cắt hai trục Ox và Oy tại A và B . Khi đó diện tích tam giác OAB (O là gốc tọa độ bằng)

A. 1.

B. $\frac{1}{4}$.

C. 2.

D. $\frac{1}{2}$.

8. (Thpt Yên Lạc - Lần 3 - 2018) Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: 2x - y - 1 = 0$. Biết d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1)$ và $N(x_2; y_2)$. Tính $y_1 + y_2$.

A. -2.

B. -4.

C. 2.

D. 5.

9. (Thpt Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - Lần 2 - 2018) Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 4$.

A. $m = -1$.

B. $\begin{cases} m = 0 \\ m = 3 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases}$.

D. $m = 4$.

10. (Sở Gd&ĐT Nam Định - HKII - 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-14; 15]$ sao cho đường thẳng $y = mx + 3$ cắt đồ thị của hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt

A. 16.

B. 15.

C. 20.

D. 17.

11. (Sgd&ĐT Bắc Ninh - 2018) Gọi S là tập các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = x + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{4x-m^2}{x-1}$ tại đúng một điểm. Tìm tích các phần tử của S .

A. $\sqrt{5}$.

B. 4.

C. 5.

D. 20.

12. (Thpt Chuyên Bắc Ninh - Lần 1 - 2018) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = -2x + m$ cắt đồ thị (H) của hàm số

Gọi $A(x_1; px_1 + q)$, $B(x_2; py_2 + q)$ là 2 tọa độ giao điểm của d và (C) , trong đó x_1, x_2 là 2 nghiệm của $g(x) = 0$. Theo Viét:
 $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ và $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

$y = \frac{2x+3}{x+2}$ tại hai điểm A, B phân biệt sao cho $P = k_1^{2018} + k_2^{2018}$ đạt giá trị nhỏ nhất, với k_1, k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến tại A, B của đồ thị (H) .

- A.** $m = 3$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = -3$. **D.** $m = -2$.

- 13. (Thpt Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình - 2018)** Với giá trị thực nào của tham số m thì đường thẳng $y = 2x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt M, N sao cho MN ngắn nhất.

- A.** $m = -3$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = -1$.

- 14. (Chuyên Khtn - Lần 1 - 2018)** Có bao nhiêu số nguyên dương m sao cho đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B và $AB \leq 4$?

- A.** 7. **B.** 6. **C.** 1. **D.** 2.

- 15. (Thpt Hà Huy Tập - Hà Tĩnh - Lần 1 - 2018)** Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x+1}$ có đồ thị (C) . Tìm m sao cho đường thẳng $d: y = x - m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B thỏa mãn điểm $G(2; -2)$ là trọng tâm của tam giác OAB .

- A.** $m = 2$. **B.** $m = 5$. **C.** $m = 6$. **D.** $m = 3$.

- 16. (Thpt Lý Thái Tổ - Bắc Ninh - 2018)** Cho hàm số $y = \frac{2x-4}{x+1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(-5; 5)$. Tìm m để đường thẳng $y = -x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt M và N sao cho tứ giác $OAMN$ là hình bình hành (O là gốc tọa độ).

- A.** $m = 0$. **B.** $\begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = -2$.

- 17. (Sở Gd&ĐT Yên Bái - 2018)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: x + 3y + m = 0$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x-1}$ tại hai điểm M, N sao cho tam giác AMN vuông tại điểm $A(1; 0)$.

- A.** $m = -6$. **B.** $m = 4$. **C.** $m = 6$. **D.** $m = -4$.

- 18. (Sở Gd&ĐT Hưng Yên - 2018)** Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ (C) . Tìm k để đường thẳng $d: y = kx + 2k + 1$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_O}{3}$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_O}{3}$$

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{NM}$$

Để tam giác AMN vuông tại $A \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 0$

$$d(A; O_x) = d(B; O_x) \Leftrightarrow |y_A| = |y_B|$$

khoảng cách từ A và B đến trục hoành bằng nhau

- A. 1. B. 12. C. -3 D. -4.

19. (Thpt Chuyên Lê Hồng Phong - ND - Lần 1 - 2018) Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$. Số các giá trị tham số m để đường thẳng $y = x + m$ luôn cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trọng tâm tam giác OAB nằm trên đường tròn $x^2 + y^2 - 3y = 4$ là

- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Bài toán 7. Tương giao của hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và đường thẳng $d: y = px + q$.

20. (Thpt Thạch Thanh 2 - Thanh Hóa - Lần 1 - 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^3 + (m+2)x^2 + (m^2 - m - 3)x - m^2$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt?

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.

21. Tìm tham số m để đường thẳng d cắt đồ thị hàm số (C) tại 3 điểm phân biệt:

a) (C): $y = x^3 - 3x$, $d: y = m(x+1) + 2$.

ĐS: $m \in \left(-\frac{9}{4}; +\infty\right) \setminus \{0\}$.

b) (C): $y = -2x^3 + 6x + 2$, $d: y = 2mx - 2m + 6$.

ĐS: $m \in \left(-\infty; \frac{9}{4}\right) \setminus \{0\}$.

c) (C): $y = 2x^3 - 6x + 1$, $d: y = mx - 2m + 5$.

ĐS: $m \in (0; +\infty) \setminus \{18\}$.

22. (Thpt Nguyễn Huệ - Ninh Bình - 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (1-m)x + m + 1$ cắt Ox tại 3 điểm phân biệt.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Bài toán tổng quát 1: Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị đường thẳng $d: y = px + q$ cắt đồ thị hàm số (C): $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tại 3 điểm phân biệt? (dạng không có điều kiện)

Phương pháp giải:

Bước 1. Lập phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = px + q$$

- Nếu $d = q$, thì phương trình

$$\Leftrightarrow x \cdot (ax^2 + bx + c - p) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 = 0 \\ g(x) = ax^2 + bx + c - p = 0 \end{cases}$$

- Nếu $d \neq q$, ta đưa về phương trình bậc ba và nhằm nghiệm đặc biệt $x = x_0$ để chia Hoocner thì phương

$$\Leftrightarrow (x - x_0) \cdot (ax^2 + b'x + c') = 0$$

$$\text{trình} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ g(x) = ax^2 + b'x + c' = 0 \end{cases}$$

Bước 2. Để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác

$$x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{g(x)} > 0 \\ g(x_0) \neq 0 \end{cases} \cdot \text{Giải hệ này, tìm}$$

được giá trị m cần tìm.

Nguyên tắc nhằm nghiệm

- Nếu tổng các hệ số bằng 0 thì phương trình sẽ có 1 nghiệm $x = 1$.
- Nếu tổng các hệ số bậc chẵn bằng tổng các hệ số bậc lẻ thì PT có 1 nghiệm $x = -1$.
- Nếu phương trình chứa tham số, ta sẽ chọn nghiệm x sao cho triệt tiêu đi tham số m và thử lại tính đúng sai.

Bài toán tổng quát 2: Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = px + q$ cắt đồ thị hàm số $(C): y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tại 3 điểm phân biệt thỏa điều kiện K ? (dạng có điều kiện)

Phương pháp giải:

Bước 1. Lập phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = px + q$$

Đưa về phương trình bậc ba và nhận nghiệm đặc biệt $x = x_0$ để chia Hoocner được:

$$(x - x_0) \cdot (ax^2 + b'x + c') = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ g(x) = ax^2 + b'x + c' = 0 \end{cases}$$

Bước 2. Để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{g(x)} > 0 \\ g(x_0) \neq 0 \end{cases}$. Giải hệ này, tìm được giá trị $m \in D_1$.

$$A(x_0; px_0 + q),$$

Bước 3. Gọi $B(x_1; px_1 + q)$, với

$$C(x_2; px_2 + q)$$

x_1, x_2 là hai nghiệm của $g(x) = 0$.

Theo Viét, ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{b'}{a}$ và

$$x_1 x_2 = \frac{c'}{a} \quad (1)$$

Bước 4. Biến đổi điều kiện K về dạng tổng và tích của x_1, x_2

(2). Thế (1) vào (2) sẽ thu được phương trình hoặc bất phương trình với biến là m . Giải chúng sẽ tìm được giá trị $m \in D_2$.

Kết luận: $m \in D_1 \cap D_2$.

23. (CTN - LẦN 1 - 2018) Biết đường thẳng $y = (3m - 1)x + 6m + 3$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ tại ba điểm phân biệt sao cho một giao điểm cách đều hai giao điểm còn lại. Khi đó m thuộc khoảng nào dưới đây ?

- A. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$. B. $(0; 1)$. C. $(-1; 0)$. D. $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

24. (Thpt Chu Văn An - Thái Nguyên - 2018) Tìm tất cả các giá trị tham số m sao cho đồ thị $(C_m): y = x^3 + 3mx^2 - m^3$ cắt đường thẳng $d: y = m^2x + 2m^3$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2; x_3$ thỏa mãn $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 83$.

- A. $m = 2$. B. $\begin{cases} m = -1 \\ m = 1 \end{cases}$. C. $m = -1$. D. $m = 1$.

25. (Thpt Xuân Hòa - Vp - Lần 1 - 2018) Cho hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + 3(m - 1)x + 2$ có đồ thị (C) . Đường thẳng $d: y = -x + 2$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt $A(0; 2)$, B và C . Với $M(3; 1)$, giá trị của tham số m để tam giác MBC có diện tích bằng $2\sqrt{6}$ là

- A. $m = -1$. B. $m = -1$ hoặc $m = 4$. C. $m = 4$. D. Không tồn tại m .

26. (Thpt Chuyên Bắc Ninh - Lần 1 - 2018) Tìm giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ cắt đường thẳng $d: y = m(x - 1)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 5$.

- A. $m \geq -3$. B. $m \geq -2$. C. $m > -3$. D. $m > -2$.

27. (Thpt Chuyên Thái Bình - Lần 4 - 2018) Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $x^3 - mx^2 - 6x - 8 = 0$ có ba nghiệm thực lập thành một cấp số nhân ?

- A. $m = 1$. B. $m = -3$. C. $m = 3$. D. $m = -4$.

28. (Thpt Thanh Miện I - Hải Dương - Lần 1 - 2018) Cho hàm số $y = x^3 - mx^2 + 3x + 1$ và $M(1; -2)$. Biết có 2 giá trị của m là m_1 và m_2 để đường thẳng $\Delta: y = x + 1$ cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt $A(0; 1)$, B và C sao cho tam giác MBC có diện tích bằng $4\sqrt{2}$. Hỏi tổng $m_1^2 + m_2^2$ thuộc khoảng nào trong các khoảng sau:

- A. $(15; 17)$. B. $(3; 5)$. C. $(31; 33)$. D. $(16; 18)$.

29. (Thpt Kiến An - Hải Phòng - Lần 1 - 2018) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ tại 3 điểm phân biệt A, B, C (B nằm giữa A và C) sao cho $AB = 2BC$. Tính tổng các phân tử thuộc S

A. -2 . B. -4 . C. 0 . D. $\frac{7-\sqrt{7}}{7}$.

30. (Chuyên Trần Phú - Hải Phòng - Lần 1 - 2018) Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đường thẳng $(d): y = mx - m - 1$ cắt đồ thị $(C): y = x^3 - 3x^2 + 1$ tại 3 điểm A, B, C phân biệt (B thuộc đoạn AC), sao cho tam giác AOC cân tại O (với O là gốc tọa độ).

A. $m = -2$. B. $m = 2$. C. $m = -1$. D. $m = 1$.

31. (Chuyên Bắc Ninh - Lần 1 - 2018) Tìm giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ cắt đường thẳng $d: y = m(x-1)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 5$.

A. $m \geq -3$. B. $m \geq -2$. C. $m > -3$. D. $m > -2$.

$$\Leftrightarrow y'(x_1) \cdot y'(x_2) = -1$$

32. (Thpt Trần Phú - Đà Nẵng - 2018) Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị (C) . Gọi S là tập hợp tất cả giá trị thực của k để đường thẳng $d: y = k(x+1) + 2$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt M, N, P sao cho các tiếp tuyến của (C) tại N và P vuông góc với nhau. Biết $M(-1; 2)$, tính tích tất cả các phân tử của tập S .

A. $\frac{1}{9}$. B. $-\frac{2}{9}$. C. $\frac{1}{3}$. D. -1 .

33. (Thpt Trần Quốc Tuấn - Lần 1 - 2018) Cho hàm số $y = x^3 - 2(m-1)x^2 + 2(m^2 - 2m)x + 4m^2$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = 4x + 8$. Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 . Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.

A. $P_{\max} = 16\sqrt{2} - 6$. B. $P_{\max} = 16\sqrt{2} - 8$.

C. $P_{\max} = 23 - 6\sqrt{2}$. D. $P_{\max} = 24 - 6\sqrt{2}$.

34. (Thpt Thanh Chương - Nghệ An - 2018) Cho hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 + mx + 1$. Gọi S là tổng tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = 1$ tại ba điểm phân biệt

$A(0;1)$, B , C sao cho tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại B , C vuông góc với nhau. Giá trị của S bằng

- A. $\frac{11}{5}$. B. $\frac{9}{2}$. C. $\frac{9}{5}$. D. $\frac{9}{4}$.

Bài toán 8. Tương giao của hàm số bậc bốn $y = ax^4 + bx^2 + c$ và đường thẳng $d: y = \alpha$

Bài toán tổng quát: Tìm m để đường thẳng $d: y = \alpha$ cắt đồ thị $(C): y = f(x; m) = ax^4 + bx^2 + c$ tại n điểm phân biệt thỏa mãn điều kiện K cho trước ?

Phương pháp giải:

Bước 1. Lập phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $ax^4 + bx^2 + c - \alpha = 0$ (1)

$$\text{Đặt } t = x^2 \geq 0 \text{ thì (1)} \Leftrightarrow at^2 + bt + c - \alpha = 0 \quad (2)$$

Tùy vào số giao điểm n mà ta biện luận để tìm giá trị $m \in D_1$. Cụ thể:

- Để $d \cap (C) = n = 4$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 4 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow (2) \text{ có 2 nghiệm } t_1, t_2 \text{ thỏa điều kiện: } 0 < t_1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Rightarrow m \in D_1.$$

- Để $d \cap (C) = n = 3$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 3 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow (2) \text{ có nghiệm } t_1, t_2 \text{ thỏa điều kiện: } 0 = t_1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} c - \alpha = 0 \\ \frac{b}{a} < 0 \end{cases} \Rightarrow m \in D_1.$$

- Để $d \cap (C) = n = 2$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow (2) \text{ có 2 nghiệm trái dấu hoặc có nghiệm kép dương} \Leftrightarrow \begin{cases} ac < 0 \\ \Delta = 0 \\ S > 0 \end{cases} \Rightarrow m \in D_1.$$

- Để $d \cap (C) = n = 1$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có đúng 1 nghiệm

$$\Leftrightarrow (2) \text{ có nghiệm kép } = 0 \text{ hoặc } \begin{cases} t_1 < 0 \\ t_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ c - \alpha = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} c - \alpha = 0 \\ \frac{b}{a} > 0 \end{cases} \Rightarrow m \in D_1.$$

Bước 2. Biến đổi điều kiện K về dạng có chứa tổng và tích của t_1, t_2 (3)

Thế biểu thức tổng, tích vào (3) sẽ thu được phương trình hoặc bất phương trình với biến số là m . Giải chúng ta sẽ tìm được $m \in D_2$.

Kết luận: $m \in D_1 \cap D_2$.

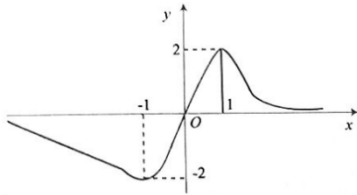
35. (Thpt Lương Thế Vinh - Hn - Lần 1 - 2018) Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 2$. Tìm số thực dương m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O , trong đó O là gốc tọa độ.

- A. $m = 2$. B. $m = \frac{3}{2}$. C. $m = 3$. D. $m = 1$.

- 36. (SGD THANH HÓA - LẦN 1 - 2018)** Cho hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + m$ (với m là tham số thực). Tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số đã cho cắt đường thẳng $y = -3$ tại bốn điểm phân biệt, trong đó có một điểm có hoành độ lớn hơn 2 còn ba điểm kia có hoành độ nhỏ hơn 1, là khoảng $(a; b)$ (với $a, b \in \mathbb{Q}$, a, b là phân số tối giản). Khi đó, $15ab$ nhận giá trị nào sau đây?
- A. -63. B. 63. C. 95. D. -95.
- 37. (Thpt Vân Nội - Hà Nội - HKI - 2018)** Tất cả các giá trị thực của tham số m , để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(2-m)x^2 + m^2 - 2m - 2$ không cắt trục hoành.
- A. $m \geq \sqrt{3} + 1$. B. $m < 3$. C. $m > \sqrt{3} + 1$. D. $m > 3$.
- 38. (Sở Gd&Đt Nam Định - HKI I - 2018)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = (m+1)x^4 - 2(2m-3)x^2 + 6m+5$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có các hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $x_1 < x_2 < x_3 < 1 < x_4$.
- A. $m \in \left(-1; \frac{-5}{6}\right)$. B. $m \in (-3; -1)$. C. $m \in (-3; 1)$. D. $m \in (-4; -1)$.
- 39.** Tìm tham số m để đồ thị hàm số $(C_m): y = -x^4 + 2(m+2)x^2 - 2m - 3$ cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng (cách đều)?
- Đáp số: $m = 3 \vee m = -\frac{13}{9}$.
- 40.** Tìm tham số m để đường thẳng $d: y = m$ cắt đồ thị của hàm số $(C): y = -x^4 + 5x^2 - 4$ tại bốn điểm phân biệt A, B, C, D sao cho $AB = BC = CD$
- Đáp số: $m = -\frac{7}{4}$.
- 41.** Tìm m để $(C_m): y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m+1$ cắt trục hoành tại bốn điểm A, B, C, D phân biệt sao cho $S_{\Delta KAC} = 4$ với $K(3; -2)$ (A, B, C, D được xếp theo thứ tự hoành độ tăng dần)? Đáp số: $m = 4$.
- 42.** Tìm tham số m để đồ thị hàm số $(C_m): y = x^4 + 2(m+1)x^2 + 2m+4$ cắt đường thẳng $d: y = 3$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho độ dài đoạn thẳng $AB = 6$
- Đáp số: $m = -5$.
- 43.** Tìm tham số m để đồ thị hàm số $(C_m): y = x^4 - 4x^2 + m$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt sao cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C_m) và trục hoành Ox có diện tích phần phía trên và phần phía dưới trục hoành bằng nhau?

Đáp số: $m = \frac{20}{9}$.

Bài toán 9. Một số câu hỏi khác về vấn đề tương giao.



44. **(Toán Học Tuổi Trẻ Số 6)** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình dưới. Biết rằng trục hoành là tiệm cận ngang của đồ thị. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = 4^{m+2\log_4 \sqrt{2}}$ có hai nghiệm phân biệt dương

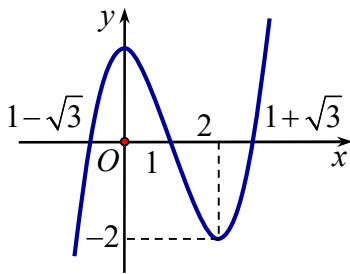
A. $m > 1$. B. $0 < m < 1$. C. $m < 0$. D. $0 < m < 2$.

45. **(Toán Học Tuổi Trẻ Số 6)** Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x+1 = m\sqrt{2x^2+1}$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $-\frac{\sqrt{2}}{2} < m < \frac{\sqrt{6}}{6}$. B. $m < \frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $m > \frac{\sqrt{6}}{6}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{2} < m < \frac{\sqrt{6}}{2}$.

46. **(Thpt Lương Thế Vinh - Hn - Lần 1 - 2018)** Biết rằng phương trình $\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} - \sqrt{4-x^2} = m$ có nghiệm khi m thuộc $[a; b]$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Khi đó giá trị của $T = (a+2)\sqrt{2} + b$ là ?

A. $T = 3\sqrt{2} + 2$. B. $T = 6$. C. $T = 8$. D. $T = 0$.



47. **(Thpt Chuyên Thái Bình - Lần 1 - 2018)** Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hỏi phương trình $(x^3 - 3x^2 + 2)^3 - 3(x^3 - 3x^2 + 2)^2 + 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?
- A. 7. B. 9. C. 6. D. 5.

48. **(Thpt Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - Lần 1 - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $y = m(x-4)$ cắt đồ thị của hàm số $y = (x^2-1)(x^2-9)$ tại bốn điểm phân biệt?

A. 1. B. 5. C. 3. D. 7.

49. **(Thpt Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình: $\sqrt{1+2\cos x} + \sqrt{1+2\sin x} = \frac{m}{2}$ có nghiệm thực.

A. 3. B. 5. C. 4. D. 2

50. (Thpt Chuyên Nguyễn Quang Diêu - Đồng Tháp - 2018) Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $x+1=3m\sqrt{2x^2+1}$ có hai nghiệm thực phân biệt.

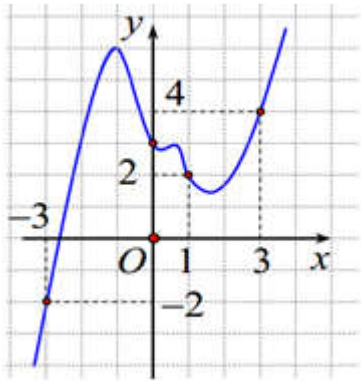
A. $\frac{\sqrt{2}}{6} < m < \frac{\sqrt{6}}{6}$.

B. $-\frac{\sqrt{2}}{6} < m < \frac{\sqrt{6}}{6}$.

C. $m < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $m > \frac{\sqrt{6}}{2}$.

51. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-3; 3]$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.



Biết $f(1) = 6$ và $g(x) = f(x) - \frac{(x+1)^2}{2}$. Kết luận nào sau đây là **đúng**?

A. Phương trình $g(x) = 0$ có đúng hai nghiệm thuộc $[-3; 3]$.

B. Phương trình $g(x) = 0$ không có nghiệm thuộc $[-3; 3]$.

C. Phương trình $g(x) = 0$ có đúng một nghiệm thuộc $[-3; 3]$.

D. Phương trình $g(x) = 0$ có đúng ba nghiệm thuộc $[-3; 3]$.

52. (Xuân Trường - Nam Định - Lần 1 - 2018) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $2\sqrt{x+1} = x + m$ có nghiệm thực ?

A. $m \leq 3$.

B. $m \leq 2$.

C. $m \geq 3$.

D. $m \geq 2$.

53. Cho các hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên mỗi khoảng xác định của chúng và có bảng biến thiên được cho như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	0

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$		$-$
$g(x)$	0	$-\infty$	$+\infty$

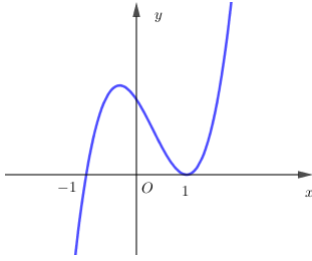
A. Phương trình $f(x) = g(x)$ không có nghiệm thuộc khoảng $(-\infty; 0)$.

B. Phương trình $f(x) + g(x) = m$ có 2 nghiệm với mọi $m > 0$.

C. Phương trình $f(x) + g(x) = m$ có nghiệm với mọi m .

D. Phương trình $f(x) = g(x) - 1$ không có nghiệm.

54. (Lê Quý Đôn - Hải Phòng - Lần 1 - 2018) Cho hàm số $y = f(x)(x-1)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình 4 dưới đây.



Tìm tất cả các giá trị của m đường thẳng $y = m^2 - m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)|x-1|$ tại 2 điểm có hoành độ nằm ngoài đoạn $[-1; 1]$.

A. $m > 0$.

B. $m > 1$ hoặc $m < 0$.

C. $m < 1$.

D. $0 < m < 1$.

55. (Thpt Trần Phú - Đà Nẵng - 2018) Cho phương trình $3\sqrt{\tan x + 1}(\sin x + 2\cos x) = m(\sin x + 3\cos x)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên tham số m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để phương trình trên có nghiệm duy nhất $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

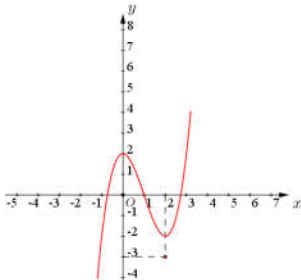
A. 2018.

B. 2015.

C. 4036.

D. 2016.

56. (Thpt Phan Đình Phùng - Hà Tĩnh - Lần 1 - 2018) Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên dưới



Phương trình $(x^3 - 3x^2 + 2)^3 - 3(x^3 - 3x^2 + 2) + 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 6.

B. 5.

C. 7.

D. 9.

57. (Thpt Can Lộc - Hà Tĩnh - Lần 1 - 2018) Cho biết hàm số $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ đạt cực trị tại điểm $x = 1$, $f(3) = 29$ và đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ là 2. Tính giá trị của hàm số tại $x = -2$.

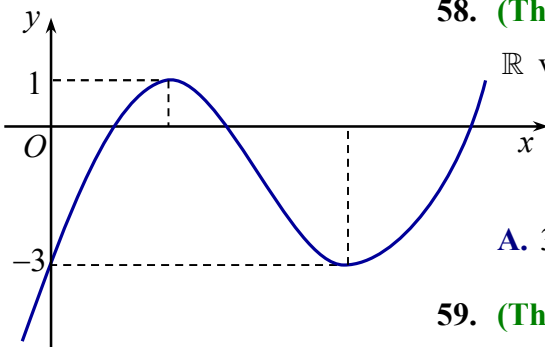
A. $f(-2) = 4$.

B. $f(-2) = 24$.

C. $f(-2) = 2$.

D. $f(-2) = 16$.

58. (Thcs - Thpt Nguyễn Khuyến - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $|f(x)| = \log_2 \sqrt{m-2}$ có sáu nghiệm là

A. $3 < m < 9$.

B. $2 \leq m \leq 6$.

C. $m \in \emptyset$.

D. $3 < m < 6$.

59. (Thpt Thanh Chương - Nghệ An - 2018) Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Số nghiệm của phương trình $[f(x)]^3 - 3f(x) + 1 = 0$ là

A. 3.

B. 7.

C. 5.

D. 6.

x	-1	2	5	8
$f'(x)$	-	0	+	0
$f(x)$	4	-3	4	2

60. (Thpt Chuyên Hùng Vương - Bình Dương - 2018) Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên đoạn $[-1; 8]$, biết $f(1) = f(3) = f(8) = 2$ có bảng biến thiên như sau: Tìm m để phương trình $f(x) = f(m)$ có ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 8]$.

A. $m \in (-1; 8] \setminus \{-1; 3; 5\}$.

B. $m \in (-1; 8] \setminus (1; 3)$ và $m \neq 5$.

C. $m \in [-1; 8]$.

D. $m \in [-1; 8] \setminus [1; 3]$ và $m \neq 5$.

61. (Thpt Chuyên Hùng Vương - Bình Dương - 2018) Biết đồ thị hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 . Tính giá trị của biểu thức $T = \frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} + \frac{1}{f'(x_3)}$.

A. $T = \frac{1}{3}$.

B. $T = 3$.

C. $T = 1$.

D. $T = 0$.

62. (Thpt Chuyên Khtn - Lần 3 - 2018) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn

$$f'(x) \cdot [f(x)]^{2018} = x \cdot e^x \text{ với mọi } x \in \mathbb{R} \text{ và } f(1) = 1. \text{ Hỏi phương trình } f(x) = -\frac{1}{e} \text{ có bao nhiêu nghiệm?}$$

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

63. (SGD&ĐT Bắc Ninh - 2018) Cho hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. Đặt $f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$ (với k là số tự nhiên lớn hơn 1). Tính số nghiệm của phương trình $f^6(x) = 0$.

A. 729.

B. 365.

C. 730.

D. 364.

64. (Thpt Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2018) Cho hàm số $y = f(x) = 2^{2018}x^3 + 3 \cdot 2^{2018}x^2 - 2018$ có đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 . Tính giá trị biểu thức:

$$P = \frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} + \frac{1}{f'(x_3)}$$

A. $P = 3 \cdot 2^{2018} - 1$.

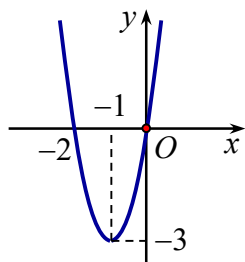
B. $P = 2^{2018}$.

C. $P = 0$.

D. $P = -2018$.

65. (THPT HOA LƯU A - LẦN 1 - 2018) Cho hàm số

$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ có đạo hàm là hàm số } y = f'(x) \text{ với đồ thị}$$



như hình vẽ bên. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ âm. Khi đó đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ là bao nhiêu?

- A.** -4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

- 66. (Thpt Hậu Lộc 2 - Th - 2018)** Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$, $b \neq 0$) cắt trục hoành Ox tại 4 điểm phân biệt. Khi đó đồ thị hàm số $y = g(x) = (4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d)^2 - 2(6ax^2 + 3bx + c) \cdot (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e)$ cắt trục hoành Ox tại bao nhiêu điểm?

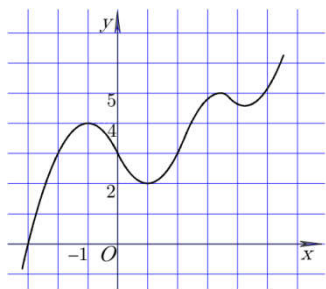
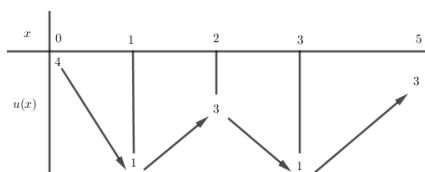
- A.** 6. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 2.

- 67. (Thpt Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình - 2018)** Số các giá trị nguyên của m để phương trình $\cos^2 x + \sqrt{\cos x + m} = m$ có nghiệm là:

- A.** 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

- 68. (Thpt Chuyên Đh Vinh - Lần 3 - 2018)** Cho hàm số $u(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 5]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình $\sqrt{3x} + \sqrt{10 - 2x} = m \cdot u(x)$ có nghiệm trên đoạn $[0; 5]$?

- A.** 6. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

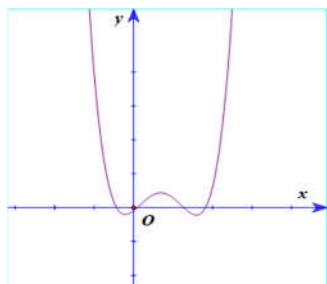


- 69. (Chuyên Vinh - Lần 2 - 2018)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số giá trị nguyên của m để phương trình $f(x^2 - 2x) = m$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$.

- A.** 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

- 70. (Cụm 5 Trường Chuyên - Đbsh - Lần 1 - 2018)** Biết rằng đồ thị hàm số bậc 4: $y = f(x)$ được cho như hình vẽ sau: Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = g(x) = [f'(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x)$ và trục Ox .

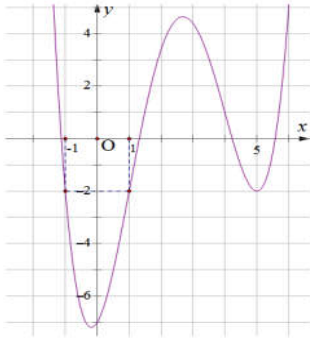
- A.** 4. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 0.



- 71.** Cho hàm số đa thức bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị đi qua các điểm $A(2; 4)$, $B(3; 9)$, $C(4; 16)$. Các đường thẳng AB , AC , BC lại cắt đồ thị tại lần lượt tại các điểm D , E , F (D khác A và B , E khác A và C , F khác B và C). Biết rằng tổng các hoành độ của D , E , F bằng 24. Tính $f(0)$.

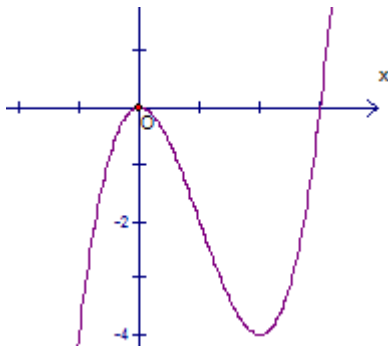
- A. -2. B. 0. C. $\frac{24}{5}$. D. 2.

72. (Thpt Phan Chu Trinh - Đắk Lắk - 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị.



- A. 44. B. 27. C. 26. D. 16.

73. (Thpt Mộ Đức - Quảng Ngãi - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tồn tại bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sin x) = m$ có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $[0; \pi]$?



- A. 4. B. 7. C. 5. D. 6.

74. (THPT HAI BÀ TRUNG - HUẾ - 2018) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Dựa vào đồ thị (C) , tìm m để phương trình $(\sqrt{2-x} + \sqrt{x+1})^3 - 6\sqrt{2+x-x^2} = m$ có nghiệm thực.

- A. $-9 \leq m \leq 6\sqrt{6} - 9$. B. $3\sqrt{3} - 9 \leq m \leq 6\sqrt{6} - 9$.
C. $5 \leq m \leq 3\sqrt{6} - 9$. D. $5 \leq m \leq 6\sqrt{6} - 9$.

75. (Thpt Ngô Quyền - Hải Phòng - 2018) Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $m(x+3) = (x^2 - 2)(x^2 - 4)$ có 4 nghiệm thực phân biệt.

- A. 4. B. 2. C. 3. D. 5.

76. (Thpt Nam Trực - Nam Định - 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = m \cdot 4^x - (m+2)2^{x+1} + 3m - 5$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ trái dấu?

- A. 2. B. 3. C. 5. D. 4.

BÀI 7. BÀI TOÁN TIẾP TUYẾN, SỰ TIẾP XÚC

Bài toán tổng quát: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ tại $M(x_0; y_0)$.

Phương pháp giải:

Bước 1. Tính đạo hàm $y' = f'(x)$. Suy ra hệ số góc tiếp tuyến $k = y'(x_0) = f'(x_0)$.

Bước 2. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $M(x_0; y_0)$ có dạng $d: y = k.(x - x_0) + y_0$.

Lưu ý:

- Nếu đề bài yêu cầu viết phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ x_0 , thì khi đó ta tìm y_0 bằng cách thế vào hàm số ban đầu, tức $y_0 = f(x_0)$. Tương tự cho trường hợp đề cho y_0 .

- Nếu đề bài yêu cầu viết phương trình tiếp tuyến tại các giao điểm của đồ thị $(C): y = f(x)$ và đường thẳng $d: y = ax + b$. Khi đó các hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm giữa d và (C) . Đặc biệt: trục hoành $Ox: y = 0$, trục tung $Oy: x = 0$.

Điểm uốn có hoành độ là nghiệm của $f''(x) = 0$

Bài toán 1. Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0)$

- (Quảng Xương - Thanh Hóa - Lần 1 - 2018)** Cho hàm số $y = x^3 - 2x + 1$ có đồ thị (C) . Hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại điểm $M(-1; 2)$ bằng:

A. 3. B. -5. C. 25. D. 1.
- (Ptnk Cơ Sở 2 - Tphcm - Lần 1 - 2018)** Trong 3 đường thẳng $(d_1): y = 7x - 9$, $(d_2): y = 5x + 29$, $(d_3): y = -5x - 5$ có bao nhiêu đường thẳng là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2x - 4$.

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.
- (Chuyên Hà Tĩnh - Lần 1 - 2018)** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6$ tại điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$ có hệ số góc bằng

A. -4. B. $\frac{47}{12}$. C. $-\frac{13}{4}$. D. $-\frac{17}{4}$.
- Tiếp tuyến tại điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 5$

A. Có hệ số góc dương. B. Song song với trục hoành.
C. Có hệ số góc bằng -1. D. Song song với đường thẳng $x = 1$.
- (Thpt Lý Thái Tổ - Bắc Ninh - 2018)** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ tại điểm có hoành độ bằng 3 là

A. $y = 3x + 13$. B. $y = 3x - 5$. C. $y = -3x - 5$. D. $y = -3x + 13$.
- (Thpt Thăng Long - Hà Nội - 2018)** Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x+1}$ có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại giao điểm của đồ thị (C) với trục tung là

A. $y = -x + 2$. B. $y = -x + 1$. C. $y = x - 2$. D. $y = -x - 2$.
- (Thpt Lê Hoàn - Thanh Hóa - Lần 1 - 2018)** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$. Tiếp tuyến tại điểm uốn của đồ thị hàm số có phương trình là:

A. $y = x + \frac{11}{3}$. B. $y = -x + \frac{11}{3}$. C. $y = x + \frac{1}{3}$. D. $y = -x - \frac{1}{3}$.
- (Sở Gd&ĐT Nam Định - HKI I - 2018)** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ tại điểm $A(3; 1)$ là:

A. $y = -9x - 26$. B. $y = 9x - 26$. C. $y = -9x - 3$. D. $y = 9x + 2$

Bài toán tổng quát: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ biết hệ số góc tiếp tuyến là k cho trước.

Phương pháp giải:

Bước 1. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm và tính $y' = f'(x)$.

Bước 2. Ta có hệ số tiếp tuyến $k = f'(x_0)$ và giải phương trình này tìm được x_0 , suy ra y_0 .

Bước 3. Ứng với mỗi tiếp điểm, tìm được các tiếp tuyến $d: y = k(x - x_0) + y_0$.

Lưu ý. Đề bài thường cho hệ số góc tiếp tuyến dưới các dạng sau:

• Nếu tiếp tuyến $d // \Delta: y = ax + b \Rightarrow k = a$.

• Nếu tiếp tuyến $d \perp \Delta: y = ax + b \Rightarrow k = -\frac{1}{a}$.

• Nếu tiếp tuyến tạo với trục hoành Ox một góc α thì $k = \pm \tan \alpha$.

Bài toán 2. Viết phương trình tiếp tuyến khi biết hệ số góc k cho trước

9. (Thpt Chuyên Nguyễn Quang Diêu - Đồng Tháp - 2018) Biết trên đồ thị $(C): y = \frac{x-1}{x+2}$ có hai điểm mà tiếp tuyến tại các điểm đó đều song song với đường thẳng $d: 3x - y + 15 = 0$. Tìm tổng S các tung độ tiếp điểm.

A. $S = 3$. B. $S = 6$. C. $S = -4$. D. $S = 2$.

10. (Chuyên Trần Phú - Hải Phòng - Lần 1 - 2018) Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 2$ có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến của (C) mà có hệ số góc lớn nhất là:

A. $y = 3x + 1$. B. $y = -3x - 1$. C. $y = -3x + 1$. D. $y = 3x - 1$.

11. (Thpt Hà Huy Tập - Lần 2 - 2018) Cho hàm $y = \frac{5-x}{x+2}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $d: x + 7y - 5 = 0$.

A. $y = -\frac{1}{7}x - \frac{23}{7}$.

B. $\begin{cases} y = -\frac{1}{7}x + \frac{5}{7} \\ y = -\frac{1}{7}x - \frac{23}{7} \end{cases}$.

C. $\begin{cases} y = -\frac{1}{7}x + \frac{5}{7} \\ y = -\frac{1}{7}x + \frac{23}{7} \end{cases}$.

D. $y = -\frac{1}{7}x + \frac{23}{7}$.

12. (Thpt Nguyễn Đức Thuận - Nam Định - Lần 1 - 2018) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{9}x$ là

A. $y = -\frac{1}{9}x + 18$, $y = -\frac{1}{9}x + 5$. B. $y = \frac{1}{9}x + 18$; $y = \frac{1}{9}x - 14$.

C. $y = 9x + 18$; $y = 9x - 14$. D. $y = 9x + 18$; $y = 9x + 5$.

13. (Thpt Hàm Rồng - Thanh Hóa - 2018) Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ (C) và đường thẳng $d: y = -3x + 1$. Gọi $M(p; q)$ là điểm có hoành độ dương nằm trên d thỏa mãn các tiếp tuyến của (C) kẻ từ M vuông góc với nhau. Khi đó $p^2 + q^2$ bằng:

A. $\frac{481 - 108\sqrt{10}}{81}$. B. $\frac{720 + 54\sqrt{80}}{81}$. C. $\frac{720 - 54\sqrt{80}}{81}$. D. $\frac{481 + 108\sqrt{10}}{81}$.

Bài toán tổng quát: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ biết tiếp tuyến đi qua (kể từ) điểm $A(x_A; y_A)$.

Phương pháp giải:

Bước 1. Gọi $M(x_0; f(x_0))$ là tiếp điểm và tính hệ số góc $k = y'(x_0) = f'(x_0)$ theo x_0 .

Bước 2. Phương trình tiếp tuyến có dạng: $d: y = f'(x_0).(x - x_0) + y(x_0)$ (*)

Do điểm $A(x_A; y_A) \in d$ nên $y_A = f'(x_0).(x_A - x_0) + y(x_0)$ và giải phương trình này với ẩn là x_0 sẽ tìm được x_0 .

Bước 3. Thế x_0 vào (*) được tiếp tuyến cần tìm.

Lưu ý. Ta có thể giải bằng điều kiện tiếp xúc nhau sau:

• Phương trình tiếp tuyến đi qua $A(x_A; y_A)$ có hệ số góc k dạng:

$$y = k.(x - x_A) + y_A \quad (**)$$

• Áp dụng điều kiện tiếp xúc:

$$\begin{cases} f(x) = k.(x - x_A) + y_A \\ f'(x) = k \end{cases} \text{ và giải hệ}$$

này tìm được x , suy ra k và thế vào phương trình (**), thu được tiếp tuyến cần tìm.

Bài toán 3. Viết phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $A(x_A; y_A)$

14. (Thpt Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên - 2018) Cho đồ thị hàm số $(C): y = \frac{-x+1}{x-2}$. Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua điểm $A(2; -1)$ là

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.

15. (Thpt Nguyễn Huệ - Ninh Bình - 2018) Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị là (C) . Số tiếp tuyến của đồ thị (C) mà đi qua điểm $M(1; 2)$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

16. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến với (C) đi qua điểm $A(0; 2)$ là

- A. $y = 2x - 3$. B. $y = -2x + 3$. C. $y = -3x - 2$. D. $y = -3x + 2$.

17. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $A(-1; 0)$ là:

- A. $y = \frac{3}{4}x$ B. $y = \frac{3}{4}(x+1)$ C. $y = 3(x+1)$ D. $y = 3x + 1$

18. Qua điểm $A(0; 2)$ có thể kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến với đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$

- A. 2 B. 3 C. 0 D. 1

19. (Thcs - Thpt Nguyễn Khuyến - 2018) Qua điểm $A(1; -4)$ kẻ được hai tiếp tuyến với đồ thị $(C): y = \frac{1}{x+1}$ tại hai tiếp điểm $M(x_1; y_1)$ và $N(x_2; y_2)$.

Khẳng định đúng là

- A. $x_1 x_2 = 1$. B. $x_1 x_2 = -1$. C. $x_1 x_2 = -5$. D. $x_1 x_2 = 5$.

Bài toán 4. Một số vấn đề tiếp tuyến liên quan đến tham số và điều kiện.

Vấn đề 1. Tìm m để đồ thị $y = f(x)$ tiếp xúc với đường thẳng $y = ax + b$

20. (Toán Học Tuổi Trẻ Số 5) Đường thẳng $y = m$ tiếp xúc với đồ thị $(C): y = -2x^4 + 4x^2 - 1$ tại hai điểm phân biệt. Tìm tung độ tiếp điểm.

- A. 1. B. -1. C. 0. D. 3.

21. (Chuyên ĐHSphn - 2018) Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = -2x + m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ là

- A. $m \in \{6; -1\}$. B. $m = -1$. C. $m = 6$. D. $m \in \{7; -1\}$.

22. (Toán Học Tuổi Trẻ - Tháng 4 - 2018) Đường thẳng $x + y = 2m$ là tiếp tuyến của đường cong $y = -x^3 + 2x + 4$ khi m bằng

Để tiếp xúc thì hệ

$$\begin{cases} f(x) = ax + b \\ f'(x) = a \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

- A.** -3 hoặc 1 . **B.** 1 hoặc 3 . **C.** -1 hoặc 3 . **D.** -3 hoặc -1 .
- 23. (Thpt Hòa Vang - Đà Nẵng - 2018)** Giá trị của m để đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3(m+3)x^2 + 18mx - 8$ tiếp xúc với trục hoành?
- A.** $m = 5$. **B.** $m = 7$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = 6$.
- 24. (Thpt Chuyên Lê Quý Đôn - Đà Nẵng - Lần 1 - 2018)** Với giá trị nào của m thì đường thẳng $y = 2x + m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x-1}$.
- A.** $m \neq 2\sqrt{2}$. **B.** $m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$. **C.** $m \neq \pm 2$. **D.** $m = \pm 2\sqrt{2}$.
- 25. (Sgd&Đt Bắc Ninh - 2018)** Gọi S là tập các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + m - 2$ có đúng một tiếp tuyến song song với trục Ox . Tìm tổng các phần tử của S .
- A.** -2 . **B.** 5 . **C.** -5 . **D.** 3 .
- 26. (Thpt Quỳnh Lưu - Nghệ An - 2018)** Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (m-1)x + 2m$ có đồ thị là (C_m) . Tìm m để tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị (C_m) vuông góc với đường thẳng $\Delta: y = 3x + 2018$.
- A.** $m = \frac{7}{3}$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = -\frac{1}{3}$.
- Vấn đề 2. Tìm m để đồ thị $y = f(x)$ tiếp xúc với đường thẳng $y = ax + b$ đi qua $A(x_m; y_m)$**
- 27. (Thpt Chuyên Vĩnh Phúc - Lần 4 - 2018)** Cho hàm số $y = \frac{x-2}{1-x}$ có đồ thị (C) và điểm $A(m; 1)$. Gọi S là tập các giá trị của m để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua A . Tính tổng bình phương các phần tử của tập S .
- A.** $\frac{13}{4}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{9}{4}$. **D.** $\frac{25}{4}$.
- 28. (Ptnk Cơ Sở 2 - Tphcm - Lần 1 - 2018)** Cho đồ thị $(C): y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ và điểm $A(m; -10)$. Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của m để có đúng 2 tiếp tuyến của (C) qua A . Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng
- A.** 3 . **B.** 5 . **C.** $\frac{19}{4}$. **D.** $\frac{5}{2}$.
- 29. (THPT Thuận Thành - Bắc Ninh - 2018)** Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$ có đồ thị (C) và điểm $A(1; a)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để có đúng hai tiếp tuyến của (C) đi qua A ?
- A.** 1 . **B.** 4 . **C.** 3 . **D.** 2 .

- 30. (THTP Lê Quý Đôn - Hà Nội - Lần 1 - 2018)** Cho hàm số $y = \frac{x^4}{2} - 3x^2 + \frac{5}{2}$, có đồ thị là (C) và điểm $M \in (C)$ có hoành độ $x_M = a$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) tại hai điểm phân biệt khác M .

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

- 31. (THPT Phan Chu Trinh - Đắk Lắk - 2018)** Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2$ có đồ thị (C) và điểm $M(m; 0)$ sao cho từ M vẽ được ba tiếp tuyến đến đồ thị (C) , trong đó có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau. Khi đó khẳng định nào sau đây đúng.

A. $m \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$. **B.** $m \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$. **C.** $m \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$. **D.** $m \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$.

Vấn đề 3. Một số bài toán chứa tham số, hoặc loại có điều kiện khác

- 32. (Thpt Trần Nhân Tông - Qn - Lần 1 - 2018)** Đường thẳng $y = k(x + 2) + 3$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 1$ (1) tại 3 điểm phân biệt, tiếp tuyến với đồ thị (1) tại 3 giao điểm đó lại cắt nhau tại 3 điểm tạo thành một tam giác vuông. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $k \leq -2$. **B.** $-2 < k \leq 0$. **C.** $0 < k \leq 3$. **D.** $k > 3$.

- 33. (Thpt Chuyên Đh Vinh - Lần 3 - 2018)** Cho đồ thị $(C): y = \frac{x-1}{2x}$ và d_1, d_2 là hai tiếp tuyến của (C) song song với nhau. Khoảng cách lớn nhất giữa d_1 và d_2 là

A. 3. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 2. **D.** $2\sqrt{2}$.

- 34. (Hồng Lĩnh - Hà Tĩnh - Lần 1 - 2018)** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ có đồ thị (C) . Từ một điểm bất kì trên đường thẳng nào dưới đây luôn kẻ được đúng một tiếp tuyến đến đồ thị (C) .

A. $x = -1$. **B.** $x = 0$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = 1$.

- 35. (Hồng Lĩnh - Hà Tĩnh - Lần 1 - 2018)** Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có đồ thị (C) . Gọi $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ với $x_A < x_B$ là các điểm thuộc (C) sao cho tiếp tuyến tại A, B song song với nhau và $AB = 4\sqrt{2}$. Tính $S = 3x_A - 5x_B$

A. $S = -16$. **B.** $S = 16$. **C.** $S = 15$. **D.** $S = -9$.

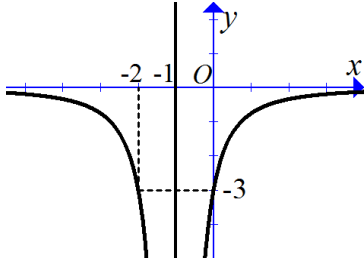
- 36. (SGD - Hà Tĩnh - Hk 2 - 2018)** Cho các hàm số $y = f(x), y = f(f(x)), y = f(x^2 + 4)$ có đồ thị lần lượt là $(C_1), (C_2), (C_3)$. Đường thẳng $x = 1$ cắt $(C_1), (C_2), (C_3)$ lần lượt tại M, N, P . Biết phương trình tiếp tuyến của (C_1) tại M và của (C_2) tại N lần lượt là $y = 3x + 2$ và $y = 12x - 5$. Phương trình tiếp tuyến của (C_3) tại P là

A. $y = 8x - 1$. **B.** $y = 4x + 3$. **C.** $y = 2x + 5$. **D.** $y = 3x + 4$.

37. (Thpt Yên Lạc - Lần 4 - 2018) Gọi S là tập hợp các điểm thuộc đường thẳng $y = 2$ mà qua mỗi điểm thuộc S đều kẻ được hai tiếp tuyến phân biệt tới đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{x-1}$ đồng thời hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau. Tính tổng hoành độ T của tất cả các điểm thuộc S .

A. $T = 2\sqrt{3}$. B. $T = 3$. C. $T = -1$. D. $T = 2$.

38. (THPT Thái Phiên - Hải Phòng - Lần 1 - 2018) Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}; c \neq 0; d \neq 0$) có đồ thị (C) . Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Biết (C) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2. Tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành có phương trình là:

A. $x + 3y - 2 = 0$. B. $x + 3y + 2 = 0$.
C. $x - 3y - 2 = 0$. D. $x - 3y + 2 = 0$.

39. (Quảng Xương - Thanh Hóa - Lần 1 - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -e^x \cdot f^2(x) \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = \frac{1}{2}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ $x_0 = \ln 2$ là

A. $2x + 9y - 2 \ln 2 - 3 = 0$. B. $2x - 9y - 2 \ln 2 + 3 = 0$.
C. $2x - 9y + 2 \ln 2 - 3 = 0$. D. $2x + 9y + 2 \ln 2 - 3 = 0$.

40. (Thpt Yên Lạc - Lần 3 - 2018) Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + 8(m-1)x + 2$, (m là tham số) có đồ thị là (C_m) . Biết rằng tập hợp các giá trị của m để (C_m) tồn tại hai điểm phân biệt $A(x_a; y_a), B(x_b; y_b)$ sao cho mỗi tiếp tuyến của (C_m) tại A, B vuông góc với đường thẳng $\Delta: x - 4y + 4 = 0$ đồng thời $\sqrt{x_a} + \sqrt{x_b} \leq 2\sqrt{2}$ là $S = [u; v]$. Tính $u + v$.

A. $\frac{3}{2}$. B. 5. C. 3. D. $\frac{5}{2}$.

41. (Thpt Quỳnh Lưu - Nghệ An - 2018) Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (m-1)x + 2m$ có đồ thị là (C_m) . Tìm m để tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị (C_m) vuông góc với đường thẳng $\Delta: y = 3x + 2018$.

A. $m = \frac{7}{3}$. B. $m = 1$. C. $m = 2$. D. $m = -\frac{1}{3}$.

42. (SỞ Gd&ĐT Quảng Nam - 2018) Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C) . Một tiếp tuyến của (C) cắt hai tiệm cận của (C) tại hai điểm A, B

- và $AB = 2\sqrt{2}$. Hệ số góc của tiếp tuyến đó bằng
- A.** $-\sqrt{2}$. **B.** -2 . **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** -1 .
- 43. (THPT Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2018)** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $[f(1+2x)]^2 = x - [f(1-x)]^3$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1.
- A.** $y = -\frac{1}{7}x - \frac{6}{7}$. **B.** $y = \frac{1}{7}x - \frac{8}{7}$. **C.** $y = -\frac{1}{7}x + \frac{8}{7}$. **D.** $y = -x + \frac{6}{7}$.
- 44. (THPT Lê Hoàn - Thanh Hóa - Lần 1 - 2018)** Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x+1}$ có đồ thị (C) . Gọi d là khoảng cách từ giao điểm hai tiệm cận của đồ thị (C) đến một tiếp tuyến của (C) . Giá trị lớn nhất của d có thể đạt được là:
- A.** $\sqrt{2}$. **B.** $3\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $2\sqrt{2}$.
- 45. [Hồng Lĩnh - Hà Tĩnh - Lần 1 - 2018]** Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có đồ thị (C) . Gọi $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ với $x_A < x_B$ là các điểm thuộc (C) sao cho tiếp tuyến tại A , B song song với nhau và $AB = 4\sqrt{2}$. Tính $S = 3x_A - 5x_B$
- A.** $S = -16$. **B.** $S = 16$. **C.** $S = 15$. **D.** $S = -9$.
- 46. (Mã đề 101-THPTQG 2018)** Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{2}x^2$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1 - y_2 = 6(x_1 - x_2)$?
- A.** 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.
- 47.** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^4 - \frac{14}{3}x^2$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ (M, N khác A) sao cho $y_2 - y_1 = 8(x_2 - x_1)$.
- A.** 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.
- 48. (THPT Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai - Sóc Trăng - 2018)** Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}$ có đồ thị là (C) và điểm $A\left(-\frac{27}{16}; -\frac{15}{4}\right)$. Biết có ba điểm $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2), M_3(x_3; y_3)$ thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại mỗi điểm đó đều đi qua A . Tính $S = x_1 + x_2 + x_3$.
- A.** $S = -\frac{7}{4}$. **B.** $S = -3$. **C.** $S = -\frac{5}{4}$. **D.** $S = \frac{5}{4}$.
- 49. (THPT Nam Trực - Nam Định - 2018)** Cho hàm số $y = \frac{2t}{t+1}(C)$. Các điểm $M \in (C)$ sao cho tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M cắt hai trục tọa độ

tại A, B với diện tích tam giác OAB bằng $\frac{1}{4}$ có dạng $M_1(a;b), M_2(c;d)$.

Khi đó tổng $a+b+c+d$ là

- A. $-\frac{1}{5}$. B. $-\frac{1}{4}$. C. $-\frac{1}{3}$. D. $-\frac{1}{2}$.

50. (THPT Chu Văn An - Hà Nội - 2018) Cho hàm số $y = x^3 + x^2 + 3x + 1$ có đồ thị là (C) . Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để từ điểm $M(0;m)$ kẻ được ít nhất một tiếp tuyến đến đồ thị (C) mà hoành độ tiếp điểm thuộc đoạn $[1;3]$.

- A. vô số. B. 0. C. 61. D. 60.

51. (SỞ Gd&ĐT Nam Định - Hki I - 2018) Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ tại điểm có hoành độ bằng 0 cắt hai trục tọa độ lần lượt tại A và B . Diện tích tam giác OAB bằng:

- A. 2. B. 3. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{4}$.

52. (SỞ Gd&ĐT Nam Định - Hki I - 2018) Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Gọi A, B ($x_A > x_B \geq 0$) là 2 điểm trên (C) có tiếp tuyến tại A, B song song với nhau và $AB = 2\sqrt{5}$. Hiệu $x_A - x_B$ bằng.

- A. 2. B. 4. C. $2\sqrt{2}$. D. $\sqrt{2}$.

53. (THPT CAO BÁ QUÁT - HKI - 2018) Tìm điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ sao cho tiếp tuyến của đồ thị tại M vuông góc với đường thẳng IM với I là giao điểm hai tiệm cận của đồ thị.

- A. $M\left(3; \frac{5}{2}\right), M(0;1)$. B. $M\left(-2; \frac{5}{3}\right), M(2;3)$.
C. $M\left(-2; \frac{5}{3}\right), M\left(3; \frac{5}{2}\right)$. D. $M(2;3), M(0;1)$.

54. (Thpt Cao Bá Quát - Hki - 2018) Cho hàm số $y = x^3 + 3x + 1$ có đồ thị là (C) . Gọi d là tiếp tuyến của (C) tại điểm $A(1;5)$ và B là giao điểm thứ hai của d với (C) . Diện tích tam giác OAB bằng:

- A. $\frac{3}{2}$. B. 6. C. 12. D. $6\sqrt{82}$.

55. (Thpt Cao Bá Quát - Hki - 2018) Cho hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 2m + 1$ có đồ thị là (C) . Tập tất cả các giá trị của tham số m để tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với đường thẳng $d: x=1$ song song với đường thẳng $\Delta: y = -12x + 4$ là:

- A. $m=0$. B. $m=1$. C. $m=\pm 2$. D. $m=3$.**
- 56. (Thpt Kim Liên - Hà Nội - Hki - 2018)** Cho Parabol $(P): y = x^2 + 2x - 1$, qua điểm M thuộc (P) kẻ tiếp tuyến với (P) cắt hai trục Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A, B . Có bao nhiêu điểm M để tam giác ABO có diện tích bằng $\frac{1}{4}$.
- A. 3. B. 6. C. 2. D. 8.**
- 57. (Thpt Chu Văn An - Hà Nội - Hki - 2018)** Cho hàm số $y = \frac{2x+3}{x-2}$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đường thẳng $(d_m): y = 2x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt mà tiếp tuyến của (C) tại hai điểm đó song song với nhau?
- A. Vô số. B. 1. C. 0. D. 2.**
- 58. (Cụm 5 Trường Chuyên - Đbsh - Lần 1 - 2018)** Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$, gọi d là tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng $m-2$. Biết đường thẳng d cắt tiệm cận đứng của đồ thị hàm số tại điểm $A(x_1; y_1)$ và cắt tiệm cận ngang của đồ thị hàm số tại điểm $B(x_2; y_2)$. Gọi S là tập hợp các số m sao cho $x_2 + y_1 = -5$. Tính tổng bình phương các phần tử của S .
- A. 0. B. 4. C. 10. D. 9.**
- 59. (Chuyên Hà Tĩnh - Lần 1 - 2018)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $2f(2x) + f(1-2x) = 12x^2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là:
- A. $y = 2x + 2$. B. $y = 4x - 6$. C. $y = 2x - 6$. D. $y = 4x - 2$.**
- 60. (Thpt Lê Quý Đôn - Hà Nội - Lần 1 - 2018)** Cho hàm số $y = x^3 - 2009x$ có đồ thị là (C) . M_1 là điểm trên (C) có hoành độ $x_1 = 1$. Tiếp tuyến của (C) tại M_1 cắt (C) tại điểm M_2 khác M_1 , tiếp tuyến của (C) tại M_2 cắt (C) tại điểm M_3 khác $M_2, \dots$, tiếp tuyến của (C) tại M_{n-1} cắt (C) tại M_n khác M_{n-1} ($n=4;5;\dots$), gọi $(x_n; y_n)$ là tọa độ điểm M_n . Tìm n để: $2009x_n + y_n + 2^{2013} = 0$.
- A. $n=685$. B. $n=679$. C. $n=672$. D. $n=675$.**
- 61. (SGD&ĐT BRVT - 2018)** Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x-1}$ có đồ thị là (C) , điểm M thay đổi thuộc đường thẳng $d: y = 1 - 2x$ sao cho qua M có hai tiếp tuyến của (C) với hai tiếp điểm tương ứng là A, B . Biết rằng đường thẳng AB luôn đi qua điểm cố định là K . Độ dài đoạn thẳng OK là
- A. $\sqrt{34}$. B. $\sqrt{10}$. C. $\sqrt{29}$. D. $\sqrt{58}$.**

62. (THPT Lý Thái Tổ - Bắc Ninh - 2018) Cho hàm số $y = x^3 + 3x$ có đồ thị là (C) . M_1 là điểm trên (C) có hoành độ bằng 1. Tiếp tuyến tại điểm M_1 cắt (C) tại điểm M_2 khác M_1 . Tiếp tuyến tại điểm M_2 cắt (C) tại điểm M_3 khác M_2 . Tiếp tuyến tại điểm M_{n-1} cắt (C) tại điểm M_n khác M_{n-1} ($n \geq 4, n \in \mathbb{N}$)? Tìm số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện $y_n - 3x_n + 2^{21} = 0$.
- A. $n = 7$. B. $n = 8$. C. $n = 22$. D. $n = 21$.
63. (Đề Thi Giữa Kỳ Ii Yên Phong 1 - 2018) Khi đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2mx + 2m^2 - 1}{x - 1}$ cắt trục hoành tại hai điểm sao cho tiếp tuyến với đồ thị tại hai giao điểm đó vuông góc với nhau thì số các giá trị của tham số m là
- A. 3. B. 4. C. 2. D. 1.
64. (Sở Gd&Đt Hà Tĩnh - 2018) Cho các hàm số $y = f(x)$, $y = f(f(x))$, $y = f(x^2 + 4)$ có đồ thị lần lượt là (C_1) , (C_2) , (C_3) . Đường thẳng $x = 1$ cắt (C_1) , (C_2) , (C_3) lần lượt tại M , N , P . Biết phương trình tiếp tuyến của (C_1) tại M và của (C_2) tại N lần lượt là $y = 3x + 2$ và $y = 12x - 5$. Phương trình tiếp tuyến của (C_3) tại P là
- A. $y = 4x + 3$. B. $y = 8x - 1$. C. $y = 2x + 5$. D. $y = 3x + 4$.

BÀI 8. ĐIỂM ĐẶC BIỆT

 **Bài toán tổng quát:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C). Tìm tọa độ điểm $M \in (C)$ thỏa mãn điều kiện K cho trước ?

 **Phương pháp giải:**

Bước 1. Gọi điểm $M(x_o; f(x_o)) \in (C)$.

Bước 2. Từ điều kiện K cho trước, biến đổi dẫn đến phương trình (hoặc bất phương trình) theo x_o , giải tìm $x_o \longrightarrow y_o = f(x_o) \longrightarrow M(x_o; f(x_o))$.

★ **Một số kiến thức cần nhớ:**

- Khoảng cách giữa hai điểm A và B là: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
- Khoảng cách $M(x_o; y_o)$ đến $\Delta: ax + by + c = 0$ là $d(M; \Delta) = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
 - Nếu $\Delta: x = a \Rightarrow d(M; \Delta) = |x_o - a|$.
 - Nếu $\Delta: y = b \Rightarrow d(M; \Delta) = |y_o - b|$.
 - Tổng khoảng cách từ điểm $M(x_o; y_o)$ đến hai trục tọa độ là: $|x_o| + |y_o|$.
- Để hai điểm A, B đối xứng nhau qua điểm $I \Leftrightarrow I$ là trung điểm AB $\Rightarrow \begin{cases} x_A + x_B = 2x_I \\ y_A + y_B = 2y_I \end{cases}$.
- Để hai điểm A, B đối xứng nhau qua đường thẳng $\Delta \Leftrightarrow \begin{cases} AB \perp \Delta \\ I \in \Delta \end{cases}$ (với I là trung điểm AB).
 - Để hai điểm A, B đối xứng nhau qua trục hoành Ox $\Leftrightarrow \begin{cases} x_A = x_B \\ y_A = -y_B \end{cases}$.
 - Để hai điểm A, B đối xứng nhau qua trục tung Oy $\Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -x_B \\ y_A = y_B \end{cases}$.
- Khoảng cách giữa đường thẳng Δ với đường cong (C) bằng khoảng cách nhỏ nhất giữa một điểm $M \in \Delta$ và một điểm $N \in (C)$.
- Điểm $M(x; y)$ được gọi là có tọa độ nguyên nếu x và y đều là số nguyên.

Ta đã biết đối với hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất thì giao điểm hai tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị, đối với hàm bậc ba thì điểm uốn chính là tâm đối xứng của đồ thị.

Bài toán 1. Tâm đối xứng của đồ thị

1. (Toán Học Tuổi Trẻ Số 5) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số nào sau đây cách gốc tọa độ một khoảng lớn nhất ?

A. $y = \frac{2x-1}{x+3}$.

B. $y = \frac{1-x}{1+x}$.

C. $y = 2x^3 - 3x^2 - 2$.

D. $y = -x^3 + 3x - 2$.

2. (Thpt Chuyên Khtn - Lần 3 - 2018) Đồ thị hàm số nào dưới đây có tâm đối xứng là điểm $I(1; -2)$?

A. $y = \frac{2x-3}{2x+4}$.

B. $y = 2x^3 - 6x^2 + x + 1$.

C. $y = -2x^3 + 6x^2 + x - 1$.

D. $y = \frac{2-2x}{1-x}$.

Bài toán 2. Tìm tọa độ điểm mà đồ thị hàm số $y = f(x, m)$ luôn đi qua với mọi m .

Đưa về dạng:

$$m(f(x)) + g(x) - y = 0$$

Giải hệ:

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) - y = 0 \end{cases} \longrightarrow M(x; y)$$

3. (Thpt Cầu Giấy - Hki - 2018) Đồ thị hàm số $y = x^2 + 2mx - m + 1$ (m là tham số) luôn đi qua điểm M cố định có tọa độ là
 A. $M\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. B. $M(-1; 0)$. C. $M\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right)$. D. $M(0; 1)$.
4. (Thpt Xuân Hòa - Vp - Lần 1 - 2018) Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + m$ (m là tham số) luôn đi qua một điểm M cố định có tọa độ là
 A. $M(-1; -4)$. B. $M(1; -4)$. C. $M(-1; 2)$. D. $M(1; -2)$.
5. (Thpt Hà Huy Tập - Lần 2 - 2018) Biết đồ thị (C_m) của hàm số $y = x^4 - mx^2 + m + 2018$ luôn luôn đi qua hai điểm M và N cố định khi m thay đổi. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng MN là
 A. $I(1; 2018)$. B. $I(0; 1)$. C. $I(0; 2018)$. D. $I(0; 2019)$.
6. (Thpt Chu Văn An - Thái Nguyên - 2018) Số điểm cố định của đồ thị hàm số $y = x^3 + (m-3)x^2 - (2m-1)x - 3m - 3$ là
 A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.
7. (Thpt Chuyên Thái Bình - Lần 4 - 2018) Họ parabol $(P_m): y = mx^2 - 2(m-3)x + m - 2$ ($m \neq 0$) luôn tiếp xúc với đường thẳng d cố định khi m thay đổi. Đường thẳng d đó đi qua điểm nào dưới đây?
 A. $(0; -2)$. B. $(0; 2)$. C. $(1; 8)$. D. $(1; -8)$.
8. (Thpt Chuyên Thái Bình - Lần 4 - 2018) Gọi M, N là hai điểm di động trên đồ thị (C) của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - x + 4$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại M và N luôn song song với nhau. Khi đó đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định nào dưới đây?
 A. $(-1; 5)$. B. $(1; -5)$. C. $(-1; -5)$. D. $(1; 5)$.

Bước 1. $y = \frac{f(x)}{g(x)} = h(x) + \frac{a}{g(x)}$

Bước 2. Để M là có tọa độ nguyên thì x nguyên và y cũng nguyên. Có nghĩa là $a: g(x)$. Suy ra $g(x)$ là ước của a .

Vì a là hằng số. Nên chúng ta dễ dàng tìm được các ước của nó. Thông qua đó ta sẽ tìm được x .

Bài toán 3. Tìm điểm có tọa độ nguyên.

9. (Toán Học Tuổi Trẻ Số 5) Trên đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{3x+4}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên?
 A. 1. B. 2. C. 0. D. 4.
10. (Thpt Lương Thế Vinh - Hn - Lần 1 - 2018) Trên đồ thị hàm số $y = \frac{2x-5}{3x-1}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ là các số nguyên?
 A. 4. B. Vô số. C. 2. D. 0.

11. (Thpt Xuân Hòa - Vp - Lần 1 - 2018) Trên đồ thị (C) của hàm số

$$y = \frac{x+10}{x+1} \text{ có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên?}$$

- A.** 4. **B.** 2. **C.** 10. **D.** 6.

12. (Thpt Nghen - Hà Tĩnh - Lần 1 - 2018) Số điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ

$$\text{thị hàm số } y = \frac{2x^2 + 3x + 10}{x+2} \text{ là:}$$

- A.** 16. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 8.

13. (Thpt Cầu Giấy - HKI - 2018) Số điểm trên đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có tọa

độ nguyên là:

- A.** 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Bài toán 4. Tìm tọa độ điểm thông qua điều kiện khoảng cách.

14. (Thpt Hoa Lư A - Lần 1 - 2018) Tìm tọa độ điểm M có hoành độ dương

$$\text{thuộc đồ thị (C) của hàm số } y = \frac{x+2}{x-2} \text{ sao cho tổng khoảng cách từ } M \text{ đến}$$

hai đường tiệm cận của đồ thị (C) đạt giá trị nhỏ nhất.

- A.** $M(1; -3)$. **B.** $M(3; 5)$. **C.** $M(0; -1)$. **D.** $M(4; 3)$

15. (Thpt Chuyên Khtn - Lần 3 - 2018) Cho hàm số $y = \frac{1-3x}{3-x}$ có đồ thị là (C).

Điểm M nằm trên đồ thị (C) sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng gấp hai lần khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang của (C). Khoảng cách từ M đến tâm đối xứng của (C) bằng

- A.** $3\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** 4. **D.** 5.

16. (Thpt Chuyên Lê Quý Đôn - Đà Nẵng - Lần 1 - 2018) Cho đồ thị (C) của

$$\text{hàm số } y = \frac{2x+2}{x-1}. \text{ Tọa độ điểm } M \text{ nằm trên (C) sao cho tổng khoảng cách}$$

từ M đến hai tiệm cận của (C) nhỏ nhất là

- A.** $M(-1; 0)$ hoặc $M(3; 4)$. **B.** $M(-1; 0)$ hoặc $M(0; -2)$.
C. $M(2; 6)$ hoặc $M(3; 4)$. **D.** $M(0; -2)$ hoặc $M(2; 6)$.

17. (Chuyên Bắc Ninh - Lần 2 - 2018) Gọi $M(a; b)$ là điểm trên đồ thị hàm số

$$y = \frac{2x+1}{x+2} \text{ mà có khoảng cách đến đường thẳng } d: y = 3x+6 \text{ nhỏ nhất. Khi}$$

đó

- A.** $a+2b=1$. **B.** $a+b=2$. **C.** $a+b=-2$. **D.** $a+2b=3$.

18. (Toán Học Tuổi Trẻ - Tháng 4 - 2018) A và B là hai điểm thuộc hai nhánh

$$\text{khác nhau của đồ thị hàm số } y = \frac{x}{x-2}. \text{ Khi đó độ dài đoạn } AB \text{ ngắn nhất}$$

bằng

- ### Bài toán 5. Một số vấn đề khác liên quan đến điểm đặc biệt

BT 3. Tìm các điểm $A, B \in (C): y = \frac{2x}{x-1}$ sao cho tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) tại A, B song song với nhau và $\triangle OAB$ vuông tại O ?

Đáp số: $A(-1;1)$, $B(3;3)$ hoặc $A(-3;3)$, $B(-1;1)$.

BT 4. Tìm trên đồ thị $(C): y = \frac{2x}{x-1}$ hai điểm B, C thuộc hai nhánh khác nhau, sao cho tam giác ABC vuông cân tại đỉnh A với $A(2;0)$?

Đáp số: $B(-1;1)$, $C(3;3)$.

BT 5. Tìm điểm $M \in (C): y = x^3 - 3x + 2$ sao cho $\triangle ABM$ cân tại M với $A(0;4)$, $B\left(\frac{7}{2}; \frac{9}{4}\right)$?

Đáp số: $M_1\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{8}\right)$, $M_2\left(\frac{-1+\sqrt{77}}{4}; \frac{-7+4\sqrt{77}}{4}\right)$, $M_3\left(\frac{-1-\sqrt{77}}{4}; \frac{-7-4\sqrt{77}}{4}\right)$.

BT 6. Tìm trên đồ thị hàm số $(C): y = \frac{2x-4}{x+1}$ hai điểm A, B đối xứng nhau qua đường thẳng MN với tọa độ các điểm $M(-3;0)$, $N(-1;-1)$?

Đáp số: $A(2;0)$, $B(0;-4)$ hoặc $A(0;-4)$, $B(2;0)$.

BT 7. Tìm những điểm $M \in (C): y = \frac{x-1}{2x+2}$ sao cho tiếp tuyến với (C) tại M tạo với hai trục tọa độ một tam giác có trọng tâm nằm trên đường thẳng $d: 4x + y = 0$?

Đáp số: $M_1\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right) \vee M_2\left(-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

BT 8. Tìm $A \in (C): y = x^3 - 3x + 1$ biết rằng tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm A , cắt đồ thị (C) tại B (khác điểm A) thỏa: $x_A + x_B = 1$?

Đáp số: $A(-1;3)$.

BT 9. Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận $(C): y = \frac{2x-1}{x+1}$. Tìm trên đồ thị (C) điểm M có hoành độ dương, sao cho tiếp tuyến tại M với (C) cắt hai đường tiệm cận tại A và B thỏa mãn điều kiện: $IA^2 + IB^2 = 40$?

Đáp số: $M(2;1)$.

BT 10. Tìm các điểm $M \in (C): y = \frac{2x-1}{x-1}$ sao cho tiếp tuyến tại M của đồ thị hàm số (C) tạo với hai tiệm cận một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $\sqrt{2}$?

Đáp số: $M_1(0;1)$, $M_2(2;3)$.

BT 11. Gọi $I(1;-1)$ là tâm đối xứng của đồ thị hàm số $(C): y = \frac{x}{1-x}$. Tìm hai điểm $A, B \in (C)$ để tứ giác $OABI$ là hình thang có đáy $AB = 3OI$?

Đáp số: $A\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right); B\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{5}-5}{2}\right)$ hoặc $A\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right); B\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}; -\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$.

BT 12. Gọi M là điểm bất kì trên $(C): y = \frac{2x-3}{x-2}$, I là giao điểm của các đường tiệm cận. Tiếp tuyến d của (C) tại M cắt các đường tiệm cận tại A và B .

Tìm tọa độ điểm M sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất ?

Đáp số: $M_1(1;1), M_2(3;3)$.

BT 13. Tìm các điểm $M \in (C): y = \frac{2x}{x+1}$, biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) tại

M cắt trục Ox, Oy tại A, B sao cho $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{4}$?

Đáp số: $M\left(-\frac{1}{2}; -2\right) \vee M(1;1)$.

BT 14. Tìm các điểm $A, B \in (C): y = -x^3 + 3x$ sao cho tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) tại A, B song song với nhau và $AB = 4\sqrt{2}$?

Đáp số: $A(2;-2), B(-2;2)$ hoặc $A(-2;2), B(2;-2)$.

BT 15. Gọi A, B là hai điểm cực trị của $(C): y = x^3 - 3x + 2$. Tìm tọa độ các điểm $M \in (C)$ sao cho ΔMAB cân tại điểm M ?

Đáp số: $M\left(-\frac{\sqrt{14}}{2}; 2 - \frac{\sqrt{14}}{4}\right) \vee M\left(\frac{\sqrt{14}}{2}; 2 + \frac{\sqrt{14}}{4}\right)$.

BT 16. Tìm các điểm $A, B \in (C): y = \frac{4-2x}{x-1}$ sao cho tiếp tuyến với (C) tại các điểm đó song song với nhau, đồng thời ba điểm O, A, B tạo thành tam giác vuông tại O với O là gốc tọa độ ?

Đáp số: $A(-1;1), B(3;3)$ hoặc $A(3;3), B(-1;1)$.

BT 17. Tìm điểm $M \in (C): y = \frac{2x+1}{x-1}$, sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt tiệm cận ngang (C) tại F và ΔEFM vuông tại F với $E(1;0)$?

Đáp số: $M(1+\sqrt[3]{3}; 2+\sqrt[3]{9})$.

BT 18. Tìm điểm $M \in (C): y = x^3 - 3x + 2$ để tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) tại điểm M cắt đồ thị hàm số (C) tại điểm thứ hai là N thỏa mãn $|x_M - x_N| = 6$?

Đáp số: $M(2;4) \vee M(-2;0)$.

BT 19. Tìm trên hai nhánh của đồ thị $(C): y = \frac{2x+1}{x-1}$, các điểm M, N sao cho các tiếp tuyến tại M và N cắt hai đường tiệm cận tại bốn điểm lập thành một hình thang ?

Đáp số: $\forall M, N \in (C)$ đều thỏa mãn đề bài.

BT 20. Tìm các điểm trên $(C): y = \frac{2x-3}{x+1}$, sao cho tiếp tuyến tại đó tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{18}{5}$ (đvdt) ?

Hướng dẫn: $\Delta \cap Ox = A\left(\frac{7x_o^2 - x_o - 3}{5x_o}; 0\right), \Delta \cap Oy = B\left(0; \frac{2x_o^2 - 6x_o - 3}{(x_o + 1)^2}\right)$.

BÀI 9. MỘT SỐ BÀI TOÁN TỔNG HỢP KIẾN THỨC HÀM SỐ

1. (Thpt Lương Thế Vinh - Hn - Lần 1 - 2018) Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-2}$. Khẳng

định nào dưới đây là đúng?

- A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 2$.
- B. Hàm số có cực trị.
- C. Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1;3)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

2. (Thpt Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - Lần 2 - 2018) Cho hàm số

$$y = \frac{x+3}{1-x}. \text{ Mệnh đề nào sau đây sai?}$$

- A. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
- B. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$.
- C. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = -1$.
- D. Hàm số không có cực trị.

3. (Thpt Kiến An - Hải Phòng - Lần 1 - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định

trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -1 .
- B. Đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận đứng.
- C. Đồ thị hàm số và trục hoành có hai điểm chung.
- D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$

4. (Thpt Chuyên Thăng Long - Đà Lạt - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng

biến thiên cho bởi bảng sau. Câu **sai** trong các kết luận sau:

- A. Giá trị cực tiểu của hàm số bằng 3 .
- B. $f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1); (3; 5)$.
- C. Điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(1; 2); (5; 3)$.
- D. $f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(1; 3); (5; +\infty)$.

x	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$
y'	+	0	-	0	-
y	$-\infty$	2	0	3	$-\infty$

5. (Thpt Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên - 2018) Cho hàm số $f(x) = 2017e^{x^2-1}$

và biểu thức $T = f'(x) - 2xf'(x) + \frac{1}{2017}f(1) - f'(1)$. Chọn mệnh đề đúng?

- A. $T = -4033$.
- B. $T = -4035$.
- C. $T = 4033$.
- D. $T = -1$.

6. (Hồng Bàng - Hải Phòng - Lần 1 - 2018) Cho hàm số

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c. \text{ Mệnh đề nào sau đây sai?}$$

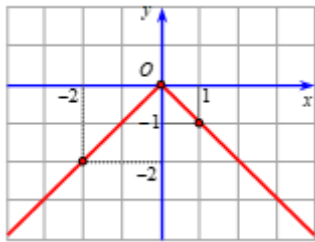
- A. Đồ thị của hàm số luôn có tâm đối xứng.
- B. Đồ thị hàm số luôn cắt trục hoành.
- C. Hàm số luôn có cực trị.
- D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

7. (Chuyên Bắc Ninh - Lần 2 - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^{2017}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(1;2)$ và $(3;+\infty)$.
 B. Hàm số có ba điểm cực trị.
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$.
 D. Hàm số đạt cực đại tại $x=2$ và đạt cực tiểu tại $x=1$ và $x=3$.

8. (Chuyên Bắc Ninh - Lần 1 - 2018) Xét hàm số $y = x + 1 - \frac{3}{x+2}$ trên đoạn $[-1;1]$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số có cực trị trên khoảng $(-1;1)$.
 B. Hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$.
 C. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=-1$ và đạt giá trị lớn nhất tại $x=1$.
 D. Hàm số nghịch biến trên đoạn $[-1;1]$.



9. (Thpt Phan Đình Phùng - Hà Tĩnh - Lần 1 - 2018) Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ
 Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ lần lượt là $f(-2)$, $f(0)$.
 B. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ lần lượt là $f(-2)$, $f(1)$.
 C. Hàm số không có cực trị.
 D. Hàm số nhận giá trị âm với mọi $x \in \mathbb{R}$.

10. (Thpt Chuyên Hùng Vương - Bình Dương - 2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$. Trong các khẳng định:

(I): Tồn tại một số $c \in (a;b)$ sao cho $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

(II): Nếu $f(a) = f(b)$ thì luôn tồn tại $c \in (a;b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

(III): Nếu $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(a;b)$ thì giữa hai nghiệm đó luôn tồn tại một nghiệm của $f'(x)$.

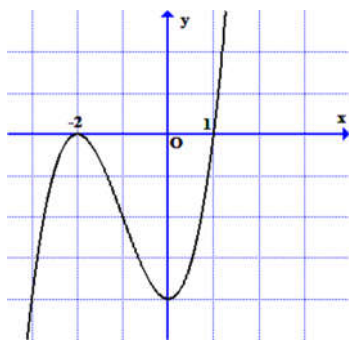
Số khẳng định đúng trong ba khẳng định trên là:

A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Định lý Lagrange: Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$, có đạo hàm trong $(a;b)$ thì tồn tại ít nhất một số $c \in (a;b)$ sao

cho: $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

11. (Thpt Hậu Lộc 2 - Th - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 3)$ và các mệnh đề sau:



- I. Hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.
 II. Hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.
 III. Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x = 2$.
 IV. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.
 V. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
 Có bao nhiêu mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề trên?

A. 1. B. 4. C. 3. D. 2.

12. (Toán Học Tuổi Trẻ - Tháng 4 - 2018) Cho hàm số $f(x) = x^x$ với $x > 0$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

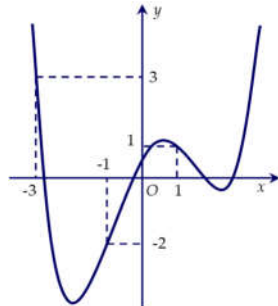
A. $f'(x) = x \cdot x^{x-1}$. B. $f'(1) = 1$.

C. hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{1}{e}$. D. hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $e^{-\frac{1}{e}}$.

13. (Thpt Ngô Quyền - Hải Phòng - 2018) Một chuyển động thẳng có vận tốc và gia tốc tại thời điểm t lần lượt là $v(t)$ m/s và $a(t)$ m/s². Biết rằng 1 giây sau khi chuyển động, vận tốc của vật là 1 m/s đồng thời $a(t) + v^2(t) \cdot (2t - 1) = 0$. Tính vận tốc của vật sau 3 giây.

A. $v(3) = \frac{1}{13}$ m/s. B. $v(3) = \frac{1}{7}$ m/s. C. $v(3) = \frac{1}{12}$ m/s. D. $v(3) = \frac{1}{6}$ m/s.

14. (Thpt Bình Giang - Hải Dương - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 1$. Trong 4 mệnh đề sau đây:

- (I). $g(-3) < g(-1)$.
 (II). Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-3; 1)$.
 (III). $\min_{x \in [-1; 0]} g(x) = g(-1)$.
 (IV). $\max_{x \in [-3; 1]} g(x) = \max\{g(-3), g(1)\}$

Số mệnh đề **đúng** là :

A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

15. (Thpt Hòa Vang - Đà Nẵng - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Tính $A = f'(1) - f'(2) - f'(3)$.

A. $A = 0$. B. $A = -6$. C. $A = -12$. D. $A = 6$.

16. (Thcs - Thpt Nguyễn Khuyến - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $S = f(0) + f(6) - f(a) - f(b)$. Khẳng định đúng là

A. $S \geq 25 + 2a - 4b$. B. $S \leq 26 + 2a - 4b$.
 C. $S < 25 + 2a - 4b$. D. $S > 26 + 2a - 4b$.

