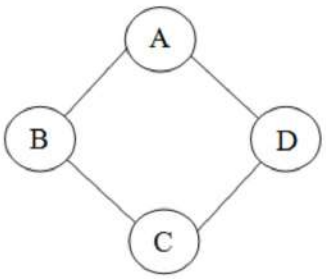
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO NINH BÌNH
NHÓM 4 TRƯỜNG THPT
(BLB,NQ,NBB,NB)
ĐỀ THI THỬ
Đề thi gồm 06 trang.

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2026 – 2027
Môn: **Toán** – Lớp**12**
Thời gian làm bài: 90 phút.

Mã Đề: 1234

Phần I. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Bốn hình tròn được nối với nhau bởi các đường thẳng như hình vẽ. Mỗi hình tròn được tô một trong ba màu: đỏ, cam, vàng. Hỏi có bao nhiêu cách tô màu các hình tròn sao cho không có hai hình tròn nào được nối với nhau bởi một đường thẳng có màu giống nhau?



A. 12. **B.** 18. **C.** 20. **D.** 30.

Câu 2. Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (mét) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm t (giờ) trong một ngày($0<t\le 24$) bởi công thức $h=3\cos\left(\frac{\pi t}{8}+\frac{\pi}{4}\right)+12$. Mực nước của kênh cao nhất khi:

A. $t=13$ (giờ). **B.** $t=14$ (giờ). **C.** $t=15$ (giờ). **D.** $t=16$ (giờ).

Câu 3. Cho hàm số $y=2^{x+1}-8$ có đồ thị C. Gọi điểm M là giao điểm của C và trục hoành. Hệ số góc k của tiếp tuyến của C tại M là

A. $k=2\ln 2$. **B.** $k=\frac{8}{\ln 2}$. **C.** $k=\frac{6}{\ln 2}$. **D.** $k=8\ln 2$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0=2$. Tìm $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2f(x)-xf(2)}{x-2}$.

A. $2f'(2)-2f(2)$. **B.** $f'(2)$. **C.** $2f'(2)-f(2)$. **D.** $f(2)-2f'(2)$.

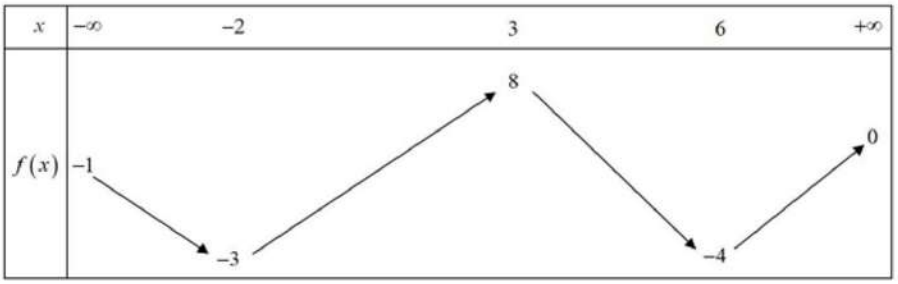
Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x+e}$ có bảng biến thiên như hình dưới đây

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-5	↘	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

Tính giá trị của biểu thức $T=a+2b$.

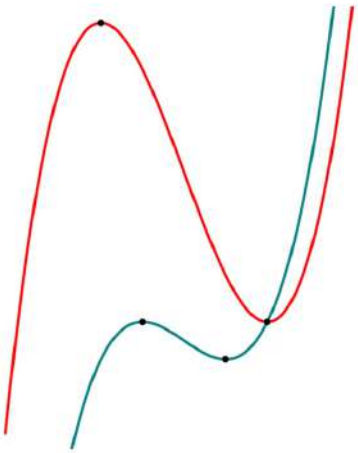
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{1}{2-\sqrt{f(x)}}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng.



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(x)-x+2$ và hàm số $h(x)=f(x)+4x-8$ có đồ thị minh họa như hình vẽ.



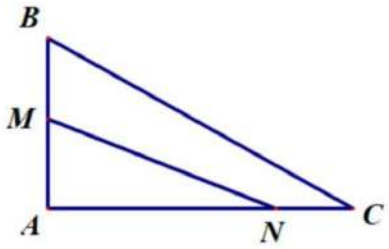
Giá trị của $f'(2)$ bằng bao nhiêu?

A. $f'(2)=0$. **B.** $f'(2)=1$. **C.** $f'(2)=-1$. **D.** $f'(2)=\dfrac{1}{2}$.

Câu 8. Giả sử doanh số bán hàng (đơn vị triệu đồng) của một sản phẩm mới trong vòng một số năm nhất định tuân theo quy luật logistic được mô hình hóa bằng hàm số $f(t)=500\left(t^2+me^{-t}\right)$, với $t\geq 0$ là thời gian tính bằng năm kể từ khi phát hành sản phẩm mới, $m\leq 0$ là tham số. Khi đó đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Biết rằng tốc độ bán hàng luôn tăng trong khoảng thời gian 10 năm đầu phát hành sản phẩm, khi đó giá trị nhỏ nhất của m bằng bao nhiêu?

A.1 **B.** 0 **C.** -2 **D.** -1

Câu 9. Ông Hiệp có một mảnh đất hình tam giác ABC với $AB=30m, BC=50m, CA=40m$. Ông muốn chia mảnh đất thành hai phần có diện tích bằng nhau cho hai người con. Tuy nhiên phần đất phía AB, AC đều tiếp giáp mặt đường nên người đó muốn chia theo đoạn thẳng MN (như hình vẽ) để hai người con đều có đất "hai mặt tiền" (thửa đất có hai mặt tiếp giáp với đường). Người cha muốn xây đoạn tường MN cao $1,5m$ để chia đất với chi phí mỗi mét vuông tường là 250000 đồng. Chi phí ít nhất để xây đoạn tường MN (tính theo đơn vị triệu đồng) là (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)



A. $8,66$. **B.** $10,26$. **C.** $9,19$. **D.** $12,99$.

Câu 10. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, tam giác $A'BC$ đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC). Tính $\overrightarrow{A'B}\cdot\overrightarrow{B'C}$.

A. $\frac{a^2}{2}$. **B.** $\frac{3a^2}{4}$. **C.** $\frac{a^2}{4}$. **D.** a^2.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;3), B(-6;3;3)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn $MA^2+MB^2=2MO^2$. Giá trị nhỏ nhất của $T=a^2+b^2+c^2$ bằng

A. $\frac{17}{2}$. **B.** 13. **C.** 17. **D.** $\frac{13}{2}$.

Câu 12. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA\perp(ABCD)$, $SA=a$ với M là trung điểm cạnh SD. Co-sin góc giữa đường thẳng AC và đường thẳng BM bằng

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{6}$.

Câu 13. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ biết tam giác ABC vuông tại A, $AB=3AC$ .Trên cạnh CC' lấy điểm E sao cho $2EC'=3EC$. Khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng $(A'BE)$ bằng $6cm$. Gọi $d=(A'BE)\cap(ABC)$, số đo của góc nhị diện $[A',d,A]$ bằng $30°$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng bao nhiêu cm^3 (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

A. 3264. **B.** 9792. **C.** 294. **D.** 816.

Câu 14. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a\perp(P)$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Nếu $b//(P)$ thì $b\perp a$. **B.** Nếu $b//a$ thì $b\perp(P)$.

C. Nếu $b\perp a$ thì $b//(P)$. **D.** Nếu $b\perp(P)$ thì $b//a$.

Câu 15. Có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau và hai chữ số tận cùng có cùng tính chẵn lẻ?

A. 60480. **B.** 30240. **C.** 54432. **D.** 45360.

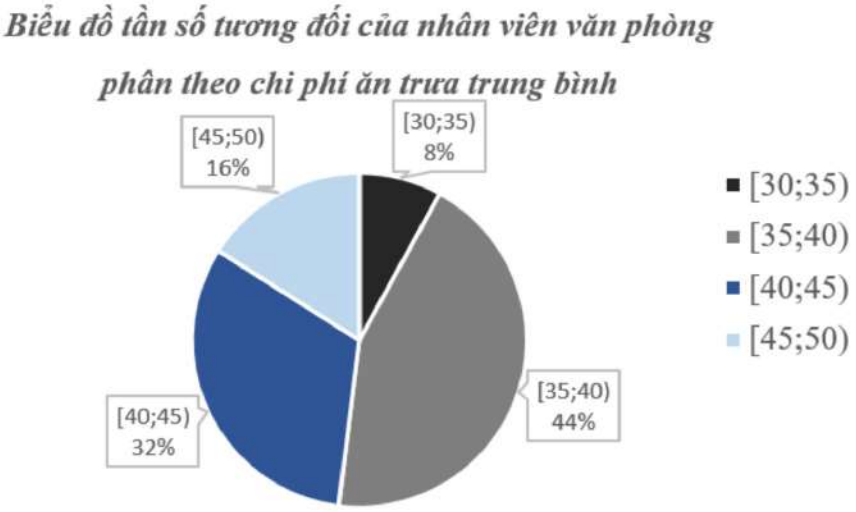
Câu 16. Dũng là học sinh rất giỏi chơi rubik, bạn có thể giải nhiều loại khối rubik khác nhau. Trong một lần luyện tập giải khối rubik 3×3, bạn Dũng đã tự thống kê lại thời gian giải rubik trong 25 lần giải liên tiếp ở bảng sau:

Thời gian giải rubik (giây)	$[8;10)$	$[10;12)$	$[12;14)$	$[14;16)$	$[16;18)$
Số lần	4	6	8	4	3

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm bằng $\frac{a}{b}$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b$.

A. 43. **B.** 30. **C.** 25. **D.** 37.

Câu 17. Kết quả khảo sát 175 nhân viên văn phòng về chi phí trung bình cho mỗi suất ăn trưa của họ được tổng kết lại ở biểu đồ sau (đơn vị: nghìn đồng).



Tính trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm này (làm tròn đến hàng phần nghìn).

A. 36,932. **B.** 39,773. **C.** 42,614. **D.** 38,752.

Câu 18. Cho hai biến cố A và B, với $P(B)=0,8$, $P(A\mid B)=0,7$, $P(A\mid \overline{B})=0,45$. Tính $P(B\mid A)$.

A. 0,65. **B.** 0,25. **C.** 0,5. **D.** $\frac{56}{65}$.

Câu 19. Trong một giải thi đấu bóng chuyền, đội bóng chuyền của Hà Nội sẽ thi đấu hai trận. Trận thứ nhất đội bóng chuyền của Hà Nội có xác suất thắng là 0,6. Trận tiếp theo, xác suất chiến thắng của họ phụ thuộc vào kết quả trận trước đó. Nếu đội bóng chuyền của Hà Nội thắng trận trước đó, họ sẽ hưng phấn và xác suất để họ thắng là 0,7. Nếu đội bóng chuyền của Hà Nội thua trận trước thì họ sẽ mất tinh thần và xác suất để họ thắng là 0,5. Tính xác suất để đội bóng chuyền của Hà Nội thắng trận thứ hai.

A. 0,7. **B.** 0,62. **C.** 0,5. **D.** 0,41.

Câu 20. Có hai hộp bi, hộp I có 5 bi trắng và 7 bi đỏ, hộp II có 10 bi trắng và 15 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên hai viên bi từ hộp I chuyển sang hộp II. Sau đó, từ hộp II lấy ngẫu nhiên 1 viên bi thì được bi trắng. Xác suất để 2 bi chuyển từ hộp I sang hộp II không cùng màu là $\frac{a}{b}$ *(là phân số tối giản)*. Tính $a+b$.

A. 20. **B.** 197. **C.** 227. **D.** 6.

Phần II. Câu trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+d}$ có đồ thị hàm số $g(x)=f'(x)$ là hai nhánh đường cong cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -5, nhận đường thẳng $x=-1$ làm tiệm cận đứng và đường thẳng $y=-2$ là tiệm cận ngang. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $g(x)<-2$ với mọi $x\in R\setminus\{-1\}$.

b) Phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt.

c) Nếu $\max\limits_{[0;1]} f(x)=4$ thì tổng khoảng cách từ điểm bất kì trên đồ thị (C) của hàm số $y=f(x)$ đến hai đường tiệm cận của đồ thị (C) có giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt[4]{5}$.

d) Nếu đồ thị (C) của hàm số $y=f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2 thì phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có tọa độ nguyên với hoành độ nguyên dương là $y=\dfrac{-7}{3}x+\dfrac{2}{3}$

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm O và $AB=2a, AD=a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của OA và $SH=\dfrac{3a}{2}$.

a) Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V=a^3$.

b) Hình chiếu vuông góc của tam giác SCH trên mặt phẳng (SBC) là tam giác SCI, với I là hình chiếu của H trên BC

c) Số đo góc phẳng nhị diện $[S,BC,A]$ là $45°$

d) Khoảng cách từ điểm C đến $mp(SAD)$ là $\dfrac{3\sqrt{10}}{20}a$

Câu 3: Chọn ngẫu nhiên đồng thời sáu số tự nhiên khác nhau thuộc đoạn $[1;25]$. Gọi A là biến cố "Chọn được sáu số tự nhiên cùng là số chẵn"; B là biến cố "Chọn được sáu số tự nhiên cùng chia hết cho 3"; C là biến cố "Chọn được sáu số tự nhiên sao cho tổng bình phương của sáu số đó chia hết cho 3".

a) Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega)=A_{25}^6$.

b) Xác suất của biến cố A là $P(A)=\dfrac{12}{25}$.

c) Xác suất của biến cố B là $P(B)=\dfrac{1}{6325}$.

d) Xác suất của biến cố C là $P(C)=\dfrac{1803}{6325}$.

Câu 4: Giả sử trong một nhóm người có 10 người nhiễm bệnh, 90 người còn lại là không nhiễm bệnh. Để phát hiện ra người nhiễm bệnh, người ta tiến hành xét nghiệm tất cả mọi người của nhóm đó. Biết rằng đối với người nhiễm bệnh thì xác suất xét nghiệm có kết quả dương tính là 80%, nhưng đối với người không

nhiễm bệnh thì xác suất xét nghiệm có phản ứng dương tính là 9%. Gọi X là một người trong nhóm được xét nghiệm.

a) Giả sử X có kết quả xét nghiệm dương tính. Xác suất để X là người nhiễm bệnh là $\frac{1}{2}$.

b) Giả sử X có kết quả xét nghiệm dương tính. Xác suất để X là người không bị nhiễm bệnh là $\frac{81}{161}$.

c) Giả sử X có kết quả xét nghiệm âm tính. Xác suất để X là người nhiễm bệnh là $\frac{20}{839}$.

d) Giả sử X có kết quả xét nghiệm âm tính. Xác suất để X là người không bị nhiễm bệnh là $\frac{800}{839}$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=\left(\frac{\cos 2x+\sin x}{\sin x-1}-1\right)\left(\cos^2\frac{x}{2}-\frac{3m+1}{2}\right)$ với m là tham số. Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

b) Hàm số $f(x)+\sin x.\cos x$ tuần hoàn với chu kỳ 4π.

c) $\forall m\in\mathbb{R}$, phương trình $f(x)=0$ luôn có nghiệm $x=-\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

d) $\forall m\in\left(0;\frac{1}{3}\right)$ thì phương trình $f(x)=0$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;2;-3)$, $B(1;-1;0)$, $C(-1;0;1)$, $D(-3;0;3)$.

a) Điểm đối xứng của D qua Ox là $D'(3;0;-3)$.

b) $AC=2BC$.

c) Với điểm $M\in(Oxy)$ thỏa mãn ΔMBC vuông cân tại M và $x_M>0$ thì $\left(x_M+\frac{2}{5}\right)y_M=\frac{2}{5}$.

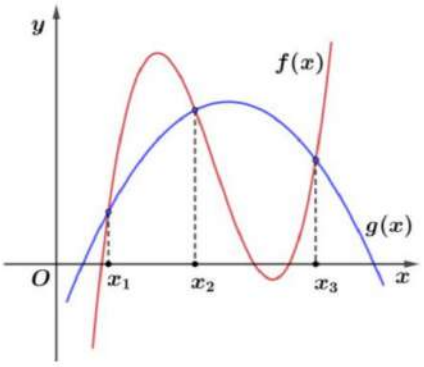
d) Với điểm N bất kì thì giá trị nhỏ nhất của biểu thức $NA^2+2NB^2-6NC^2+2ND^3$ bằng 60.

Phần III. Câu hỏi trắc nghiệm điền đáp án

Câu 1: Gọi x là số thực dương sao cho tồn tại số thực y không bé hơn 1 thỏa mãn $\left(xy^2+x-2y-1\right)\log y=\log\frac{2y-x+3}{x}$. Có bao nhiêu số nguyên trong tập các giá trị của biểu thức $P=\sqrt{6}\sin\left(\frac{\pi x}{5}-\frac{\pi}{4}\right)-3\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi x}{5}+\frac{\pi}{4}\right)$?

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng 6. Gọi I là điểm bất kì trong không gian sao cho biểu thức $P=4IA^2+IB^2+IC^2+ID^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó thể tích khối chóp $I.ABC$ bằng bao nhiêu? Kết quả làm tròn đến một chữ số thập phân.

Câu 3: Cho hai hàm số $f(x)=ax^3-11x^2+cx-33$ và $g(x)=-3x^2+bx-25$ có dạng đồ thị như hình vẽ. Biết rằng x_1, x_2, x_3 dương



Khi biểu thức $P=\log_{\frac{1}{2}}\left[a^3(c-b)\right]+3a(b-c)$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T=81a^2+(b-c)^2$

Câu 4: Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA'B'C'D'$. Khoảng cách giữa AB và $B'C$ là $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$, giữa BC và AB' là $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$, giữa AC và BD' là $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Thể tích của khối hộp Thể tích của khối hộp $ABCDA'B'C'D'$ khi $a=3$.

Câu 5: Gọi S là tập tất cả các số tự nhiên có 8 chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc S. Tính xác suất để chọn được số chia hết cho 45. (Tính gần đúng đến hàng phần trăm)

Câu 6: Một trường đại học kĩ thuật có 80% sinh viên nam và 20% sinh viên nữ. Trong số sinh viên nam có 85% là người bản địa, số còn lại là sinh viên quốc tế. Trong số sinh viên nữ có 90% là người bản địa, số còn lại là sinh viên quốc tế. Chọn ngẫu nhiên một sinh viên nam và một sinh viên nữ. Biết rằng trong hai sinh viên được chọn ra có một sinh viên là người bản địa và một là sinh viên quốc tế, tính xác suất để sinh viên quốc tế được chọn ra là nữ. (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

----------HẾT---------

Họ và tên thí sinh:.Số báo danh:.

Họ, tên và chữ ký của GT 1:.Họ, tên và chữ ký của GT 2:

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO NINH BÌNH
NHÓM 4 TRƯỜNG THPT

(BLB,NQ,NBB,NB)

ĐỀ THI THỬ

Đề thi gồm 06 trang.

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2026 – 2027
Môn: **Toán** – Lớp**12**
Thời gian làm bài: 90 phút.

Mã Đề: 1234

MA TRẬN ĐỀ THI

CHỦ ĐỀ/ NỘI DUNG	DẠNG THỨC CÂU HỎI - CẤP ĐỘ TƯ DUY - NĂNG LỰC TOÁN HỌC												Tổng
	DẠNG THỨC 1			DẠNG THỨC 2			DẠNG THỨC 3			TỔNG			
	Hiểu	VD	VDC	Hiểu	VD	VDC	Hiểu	VD	VDC	Hiểu	VD	VDC	
1. Đại số tổ hợp, lượng giác	1	1									1	1	0
2. Cấp số, giới hạn, hàm số liên tục, mũ loga		1		2	1	1			1	2	2	2	6
3. Đạo hàm, ứng dụng đạo hàm	2	3		1	2	1		1		3	6	1	10
4. Hệ thức lượng giác		1									1	0	1
4. Vecto và toạ độ vecto 12		2		2	1	1		1		2	4	1	7
5. Quan hệ vuông góc, góc, khoảng cách, thể tích	1	2		1	2	1			1	2	4	2	8
6. Xác suất 10,11		1		1	2	1			1	1	3	2	6
7. Xác suất có điều kiện	2	1		1	2	1		1		3	4	1	8
8. Thống kê 10,11,12	1	1								1	1	0	2
Tổng số lệnh hỏi	**7**	**13**	**0**	**8**	**10**	**6**	**0**	**3**	**3**	**15**	**26**	**9**	**50**
Tổng số câu theo dạng thức	**20**			**6**			**6**						**32**

BẢNG ĐÁP ÁN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20.

(Mỗi câu trả lời đúng thí sinh được 0,4 điểm)

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Chon	B	B	D	C	B	B	B	C	D	C
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Chọn	C	C	A	C	A	D	B	D	B	A

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

- Thí sinh chỉ lựa chọn chính xác 01 ý trong 01 câu hỏi được 0,3 điểm;
- Thí sinh chỉ lựa chọn chính xác 02 ý trong 01 câu hỏi được 0,6 điểm;
- Thí sinh chỉ lựa chọn chính xác 03 ý trong 01 câu hỏi được 1,0 điểm;
- Thí sinh lựa chọn chính xác cả 04 ý trong 01 câu hỏi được 1,5 điểm.

Câu	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Đáp án	a) Đ	a) Đ	a) S	a) S	a) Đ	a) S
	b) Đ	b) S	b) S	b) Đ	b) S	b) Đ
	c) S	c) Đ	c) Đ	c) Đ	c) S	c) Đ
	d) Đ	d) S	d) Đ	d) S	d) Đ	d) S

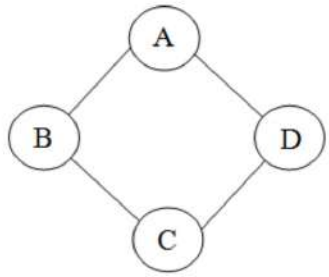
PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Mỗi câu trả lời đúng thí sinh được 0,5 điểm.

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp án	6	3,6	384	54	0.02	0,39

HƯỚNG DẪN CHẤM

Phần I. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Bốn hình tròn được nối với nhau bởi các đường thẳng như hình vẽ. Mỗi hình tròn được tô một trong ba màu: đỏ, cam, vàng. Hỏi có bao nhiêu cách tô màu các hình tròn sao cho không có hai hình tròn nào được nối với nhau bởi một đường thẳng có màu giống nhau?



A. 12. B. 18. C. 20. D. 30.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

TH1: tô bởi 2 màu

Chọn 2 màu có C_3^2 cách.

Tô 2 màu vừa chọn cho 4 hình tròn có 2 cách. (hai hình đối diện thì cùng màu).

TH2: tô bởi 3 màu (sẽ có hai hình tròn đối diện cùng màu, hai màu còn lại tô cho hai hình đối diện còn lại).

Chọn 1 màu có C_3^1 cách.

Tô màu vừa chọn cho hai hình tròn đối diện có 2 cách.

Tô hai hình còn lại có 2 cách.

Vậy tổng số cách tô màu thỏa bài toán là $C_3^2.2+3.2.2=18$ cách.

Cách 2:

Tô màu A có 3 cách.

TH1: Nếu C cùng màu A thì C có 1 cách tô còn B, D có 2^2 cách tô.

TH2: Nếu C không cùng màu A thì C có 2 cách tô còn B, D có 1 cách tô.

Vậy tổng số cách tô màu thỏa bài toán là $3.(4+2)=18$ cách.

Câu 2. Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (mét) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm t (giờ) trong một ngày($0<t\le 24$) bởi công thức $h=3\cos\left(\frac{\pi t}{8}+\frac{\pi}{4}\right)+12$. Mực nước của kênh cao nhất khi:

A. $t=13$ (giờ). B. $t=14$ (giờ). C. $t=15$ (giờ). D. $t=16$ (giờ).

Lời giải.

Chọn B

Mực nước của kênh cao nhất khi h lớn nhất

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{8}+\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow \frac{\pi t}{8}+\frac{\pi}{4}=k2\pi$ với $0<t\le 24$ và $k\in\mathbb{Z}$.

Lần lượt thay các đáp án, ta được đáp án B thỏa mãn.

Vì với $t=14$ thì $\frac{\pi t}{8}+\frac{\pi}{4}=2\pi$ (đúng với $k=1\in\mathbb{Z}$).

Câu 3. Cho hàm số $y=2^{x+1}-8$ có đồ thị C. Gọi điểm M là giao điểm của C và trục hoành. Hệ số góc k của tiếp tuyến của C tại M là

A. $k=2\ln 2$. **B.** $k=\frac{8}{\ln 2}$. **C.** $k=\frac{6}{\ln 2}$. **D.** $k=8\ln 2$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0=2$. Tìm $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2f(x)-xf(2)}{x-2}$.

A. $2f'(2)-2f(2)$. **B.** $f'(2)$. **C.** $2f'(2)-f(2)$. **D.** $f(2)-2f'(2)$.

Lời giải

Do hàm 2018 $y=f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0=2$ suy ra $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$.

Ta có $I=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2f(x)-xf(2)}{x-2}\Leftrightarrow I=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2f(x)-2f(2)+2f(2)-xf(2)}{x-2}$

$\Leftrightarrow I=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2\left(f(x)-f(2)\right)}{x-2}-\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(2)(x-2)}{x-2}\Leftrightarrow I=2f'(2)-f(2)$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x+e}$ có bảng biến thiên như hình dưới đây

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-5	↘	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

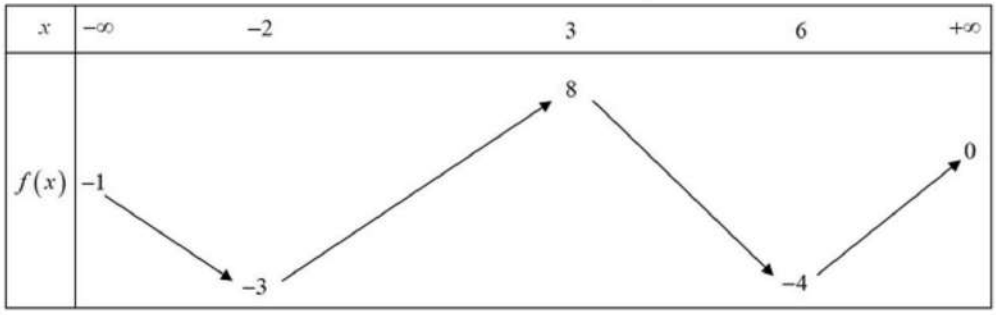
Tính giá trị của biểu thức $T=a+2b$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y=2ax+b$. Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(-3;-5)$ và $B(1;3)$. Phương trình đường thẳng $AB: y=2x+1$. Suy ra $\begin{cases}2a=2\\ b=1\end{cases}\Rightarrow a+2b=3$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Đồ thị hàm số $g(x)=\frac{1}{2-\sqrt{f(x)}}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng.



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Điều kiện xác định: $\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ 2 - \sqrt{f(x)} \ne 0 \end{cases}$

Xét tiệm cận ngang:

* Khi $x \to -\infty$ thì $f(x) \to -1 < 0$ do đó $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ không tồn tại.

* Khi $x \to +\infty$ thì $f(x) \to 0^-$ do đó $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ không tồn tại.

Vậy đồ thị hàm số không có đường tiệm cận ngang.

Xét tiệm cận đứng:

* Ta có phương trình $\sqrt{f(x)} = 2 \Leftrightarrow f(x) = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \in (-2;3) \\ x = b \in (3;6) \end{array} \right.$

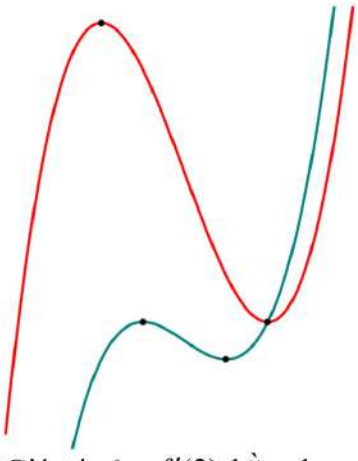
Mặt khác:

$\lim\limits_{x \to a^{\pm}} g(x) = \pm\infty$ nên $x = a$ là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x \to b^{\pm}} g(x) = \mp\infty$ nên $x = b$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(x) - x + 2$ và hàm số $h(x) = f(x) + 4x - 8$ có đồ thị minh họa như hình vẽ.



Giá trị của $f'(2)$ bằng bao nhiêu?

A. $f'(2)=0$. **B.** $f'(2)=1$. **C.** $f'(2)=-1$. **D.** $f'(2)=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $g(x)=h(x)\Leftrightarrow f(x)-x+2=f(x)+4x-8 \Leftrightarrow x=2$.

Vậy đồ thị hàm số $y=g(x)$ và $y=h(x)$ cắt nhau tại điểm có hoành độ $x=2$.

Lại có $\begin{cases} g(0)=f(0)+2 \\ h(0)=f(0)-8 \end{cases} \Rightarrow g(0)>h(0)$.

Vậy trên khoảng $(-\infty;2)$, đồ thị hàm số $y=g(x)$ là đường nằm bên trên.

Suy ra hàm số $y=g(x)$ đạt cực trị tại $x=2$.

Do đó $g'(2)=0$ hay $f'(2)-1=0\Leftrightarrow f'(2)=1$.

Câu 8. Giả sử doanh số bán hàng (đơn vị triệu đồng) của một sản phẩm mới trong vòng một số năm nhất định tuân theo quy luật logistic được mô hình hóa bằng hàm số $f(t)=500\left(t^2+me^{-t}\right)$, với $t\ge 0$ là thời gian tính bằng năm kể từ khi phát hành sản phẩm mới, $m\le 0$ là tham số. Khi đó đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Biết rằng tốc độ bán hàng luôn tăng trong khoảng thời gian 10 năm đầu phát hành sản phẩm, khi đó giá trị nhỏ nhất của m bằng bao nhiêu?

A. 1 **B.** 0 **C.** -2 **D.** -1

Lời giải

Ta có $f'(t)=500\left(2t-me^{-t}\right)$. Đạo hàm cấp hai $f''(t)=500\left(2+me^{-t}\right)$

Tốc độ bán hàng luôn tăng trong khoảng thời gian 10 năm đầu phát hành sản phẩm. $\Leftrightarrow f'(t)$. là hàm số đồng biến trên $[0;10]\Leftrightarrow f''(t)\ge 0,\ \forall t\in[0;10]$

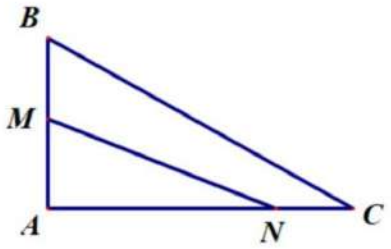
$\Leftrightarrow 500\left(2+me^{-t}\right)\ge 0,\ \forall t\in[0;10]\Leftrightarrow 2+me^{-t}\ge 0,\ \forall t\in[0;10]$

$\Leftrightarrow me^{-t}\ge -2,\ \forall t\in[0;10]\Leftrightarrow m\ge -2e^{t},\ \forall t\in[0;10]$

$\Leftrightarrow m\ge -2e^{0}=-2$ (do hàm số $y=-2e^{t}$ nghịch biến trên $[0;10]$).

Vậy giá trị nhỏ nhất của m là -2.

Câu 9. Ông Hiệp có một mảnh đất hình tam giác ABC với $AB=30m, BC=50m, CA=40m$. Ông muốn chia mảnh đất thành hai phần có diện tích bằng nhau cho hai người con. Tuy nhiên phần đất phía AB, AC đều tiếp giáp mặt đường nên người đó muốn chia theo đoạn thẳng MN (như hình vẽ) để hai người con đều có đất "hai mặt tiền" (thửa đất có hai mặt tiếp giáp với đường). Người cha muốn xây đoạn tường MN cao $1,5m$ để chia đất với chi phí mỗi mét vuông tường là 250000 đồng. Chi phí ít nhất để xây đoạn tường MN (tính theo đơn vị triệu đồng) là (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)



A. $8,66$. **B.** $10,26$. **C.** $9,19$. **D.** $12,99$.

Lời giải

Chọn D

Do $BC^2 = AB^2 + AC^2$ nên tam giác ABC vuông tại A.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB.AC = \frac{1}{2}.30.40 = 600 m^2$.

Gọi $x\left(0 < x < 30\right)$ là độ dài cạnh AM. Khi đó

$S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2}.AM.AN \Leftrightarrow 300 = \frac{1}{2} x.AN \Leftrightarrow AN = \frac{600}{x}$.

Độ dài đoạn $MN = \sqrt{AM^2 + AN^2} = \sqrt{x^2 + \frac{600^2}{x^2}} = \sqrt{1200} = 20\sqrt{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi $x^2 = \frac{600^2}{x^2} \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{600^2} = 10\sqrt{6}$.

Yêu cầu bài toán là chi phí xây đoạn tường MN ít nhất tương ứng với độ dài đoạn MN phải ngắn nhất.

Hay đoạn tường MN ngắn nhất là $20\sqrt{3} m$.

Chi phí thấp nhất để xây đoạn tường MN là $T = 20\sqrt{3}.1,5.0,25 = \frac{15\sqrt{3}}{2} \approx 12,99$ (triệu đồng).

Câu 10. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, tam giác $A'BC$ đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với $\left(ABC\right)$. Tính $\overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{B'C}$.

A. $\frac{a^2}{2}$. **B.** $\frac{3a^2}{4}$. **C.** $\frac{a^2}{4}$. **D.** a^2.

Lời giải

Gọi H là trung điểm của BC. Ta có $\begin{cases} AH \perp BC \\ A'H \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp \left(A'AH\right) \Rightarrow BC \perp AA'.$

Do đó $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AA'} = 0$. Ta có

$$\overrightarrow{A'B}\cdot\overrightarrow{B'C}=\left(\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AB}\right)\left(\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AB}\right)\left(\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{BC}\right)$$
$$=\overrightarrow{A'A}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{A'A}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$$
$$=\overrightarrow{A'A}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$$

Xét $\triangle A'AB$ có $\cos A'AB=\dfrac{A'A}{2AB}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

Do đó $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A'A}=-AB\cdot A'A\cdot\cos A'AB=-a\cdot\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{4}=-\dfrac{3a^2}{4}$. Và $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=a\cdot a\cdot\cos 120^\circ=-\dfrac{a^2}{2}$.

Vậy $\overrightarrow{A'B}\cdot\overrightarrow{B'C}=A'A^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{6a^2}{4}-\dfrac{3a^2}{4}-\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{a^2}{4}$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;3), B(-6;3;3)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn $MA^2+MB^2=2MO^2$. Giá trị nhỏ nhất của $T=a^2+b^2+c^2$ bằng

A. $\dfrac{17}{2}$. **B.** 13. **C.** 17. **D.** $\dfrac{13}{2}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{OA}=(2;1;3)$, $\overrightarrow{OB}=(-6;3;3)\Rightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$. Do đó tam giác OAB vuông tại O, gọi I là trung điểm $AB\Rightarrow I(-2;2;3)$. Ta có

$$MA^2+MB^2=2MO^2$$
$$\Leftrightarrow(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2+(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2=2(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IO})^2$$
$$\Leftrightarrow IA^2+IB^2=4\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IO}+2IO^2$$
$$\Leftrightarrow\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IO}=0\ (\text{vì } IA=IB=IO)$$
$$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OI}\right)\cdot\overrightarrow{IO}=0$$
$$\Leftrightarrow OI^2=\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OI}\le OM\cdot OI$$
$$\Leftrightarrow OM\ge OI.$$

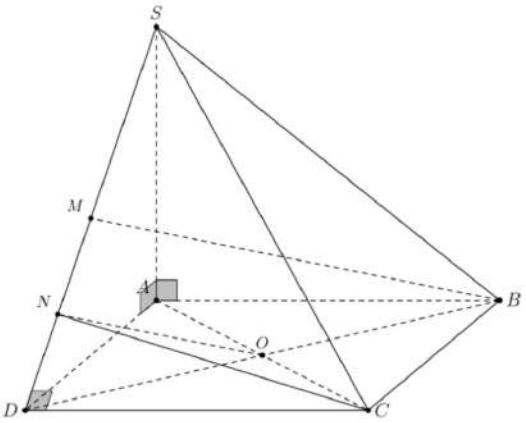
Suy ra $T=a^2+b^2+c^2=OM^2\ge OI^2=17$, dấu "=" xảy ra khi $M\equiv I$.

Vậy $T_{\min}=17$.

Câu 12. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA\perp(ABCD)$, $SA=a$ với M là trung điểm cạnh SD. Co-sin góc giữa đường thẳng AC và đường thẳng BM bằng

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

Lời giải



Gọi O, N lần lượt là trung điểm đoạn AC và MD. Suy ra $ON//BM$.

Khi đó Co-sin góc giữa đường thẳng AC và đường thẳng BM là Co-sin góc giữa đường thẳng AC và đường thẳng ON hay là $\left|\cos NOC\right|$.

Ta có $\left.\begin{matrix} CD\perp AD \\ CD\perp SA \end{matrix}\right\}\Rightarrow CD\perp (SAD)\Rightarrow CD\perp SD$.

Trong ΔCDN vuông tại D ta có $CD=a$; $DN=\frac{1}{4}SD=\frac{1}{4}.a\sqrt{2}=\frac{a\sqrt{2}}{4}$;

$CN=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2+a^2}=\sqrt{\frac{18a^2}{16}}=\frac{3\sqrt{2}a}{4}$.

Trong ΔSBD ta có $SD=SB=BD=a\sqrt{2}$ nên $BM=\frac{a\sqrt{2}.\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{6}}{2}\Rightarrow ON=\frac{BM}{2}=\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Trong ΔOCN ta có $OC=\frac{AC}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Áp dụng định lý cos ta có

$\cos NOC=\frac{ON^2+OC^2-CN^2}{2.ON.OC}=\frac{\left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{3\sqrt{2}a}{4}\right)^2}{2.\frac{a\sqrt{6}}{4}.\frac{a\sqrt{2}}{2}}=\frac{-\frac{a^2}{4}}{\frac{a^2\sqrt{12}}{4}}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Suy ra Co-sin góc giữa đường thẳng AC và đường thẳng BM bằng là

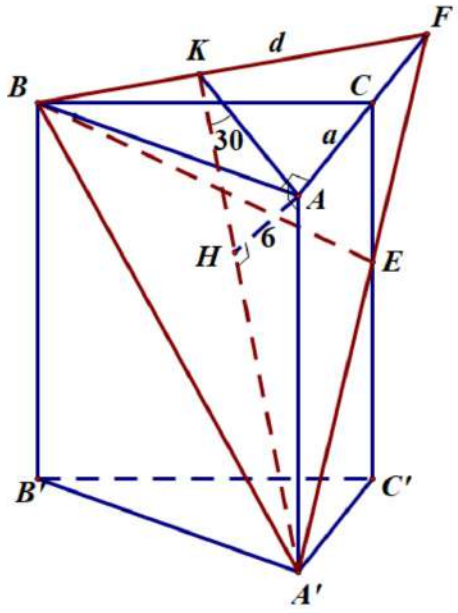
$\cos(AC,DN)=\left|\cos NOC\right|=\left|-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 13. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ biết tam giác ABC vuông tại A, $AB=3AC$. Trên cạnh CC' lấy điểm E sao cho $2EC'=3EC$. Khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng $(A'BE)$ bằng $6cm$. Gọi $d=(A'BE)\cap(ABC)$, số đo của góc nhị diện $[A',d,A]$ bằng $30°$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng bao nhiêu cm^3 (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

A. 3264. **B.** 9792. **C.** 294. **D.** 816.

Lời giải

Chọn A



* Đặt $AC = a \Rightarrow AB = 3a$.

Xét tam giác $A'AF$ có $EC // A'A \Rightarrow \dfrac{CF}{AF} = \dfrac{EC}{A'A} = \dfrac{2}{5} \Rightarrow \dfrac{CF}{AC} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow CF = \dfrac{2a}{3}; AF = \dfrac{5a}{3}$.

* Gọi $F = A'E \cap AC \Rightarrow (A'BE) \cap (ABC) = BF \Rightarrow d \equiv BF$.

Dựng $AK \perp BF$ tại K.

Có $AA' \perp (ABC) \Rightarrow AA' \perp BF$, suy ra $(AA'K) \perp BF \Rightarrow A'K \perp BF$. Do đó $A'KA = [A', d, A] = 30°$.

* Trong tam giác ABF có $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AF^2} = \dfrac{1}{9a^2} + \dfrac{9}{25a^2} = \dfrac{106}{225a^2} \Rightarrow AK = \dfrac{15a}{\sqrt{106}}$.

Trong tam giác $AA'K$ có $AA' = AK.\tan 30^0 \Rightarrow AA' = \dfrac{15a}{\sqrt{318}}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V = S_{\Delta ABC}.A'A = \dfrac{3a^2}{2}.\dfrac{15a}{\sqrt{318}} = \dfrac{45a^3}{2\sqrt{318}}$.

* Ta có

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d(C';(A'BE))}{d(C;(A'BE))} = \dfrac{C'E}{CE} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{d(C;(A'BE))}{d(A;(A'BE))} = \dfrac{CF}{AF} = \dfrac{2}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{d(C';(A'BE))}{d(A;(A'BE))} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow d(A;(A'BE)) = \dfrac{5}{3}.d(C';(A'BE)) = \dfrac{5}{3}.6 = 10$$ *Từ A hạ $AH \perp A'K$ tại H.

Có $BF \perp (AA'K) \Rightarrow BF \perp AH$, suy ra $AH \perp (A'BE) \Rightarrow AH = d(A,(A'BE))$.

Xét $\Delta AHK: AH = AK.\sin 30° = \dfrac{15a}{2\sqrt{106}}$.

Do đó $\dfrac{15a}{2\sqrt{106}} = 10 \Leftrightarrow a = \dfrac{4}{3\sqrt{106}}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V=\dfrac{45a^3}{2\sqrt{318}}=\dfrac{45}{2\sqrt{318}}\left(\dfrac{4}{3}\sqrt{106}\right)^3\approx 3264cm^3$..

Câu 14. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a\perp(P)$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Nếu $b//(P)$ thì $b\perp a$.

B. Nếu $b//a$ thì $b\perp(P)$.

C. Nếu $b\perp a$ thì $b//(P)$.

D. Nếu $b\perp(P)$ thì $b//a$.

Lời giải

Chọn C

Câu 15. Có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau và hai chữ số tận cùng có cùng tính chẵn lẻ?

A. 60480. **B.** 30240. **C.** 54432. **D.** 45360.

Lời giải

Chọn A

Gọi số cần lập là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$, $a_i\in\{0,1,...,9\};i=\overline{1,6};a_1\neq 0$.

Trường hợp 1: a_1 chẵn và hai chữ số tận cùng chẵn.

Số cách lập: $4.A_4^2.A_7^3=10080$.

Trường hợp 2: a_1 chẵn và hai chữ số tận cùng lẻ.

Số cách lập: $4.A_5^2.A_7^3=16800$.

Trường hợp 3: a_1 lẻ và hai chữ số tận cùng chẵn.

Số cách lập: $5.A_5^2.A_7^3=21000$.

Trường hợp 4: a_1 lẻ và hai chữ số tận cùng lẻ.

Số cách lập: $5.A_4^2.A_7^3=12600$.

Vậy có 60480 số

Câu 16. Dũng là học sinh rất giỏi chơi rubik, bạn có thể giải nhiều loại khối rubik khác nhau. Trong một lần luyện tập giải khối rubik 3×3, bạn Dũng đã tự thống kê lại thời gian giải rubik trong 25 lần giải liên tiếp ở bảng sau:

Thời gian giải rubik (giây)	$[8;10)$	$[10;12)$	$[12;14)$	$[14;16)$	$[16;18)$
Số lần	4	6	8	4	3

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm bằng $\dfrac{a}{b}$, với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b$.

A. 43. **B.** 30. **C.** 25. **D.** 37.

Lời giải

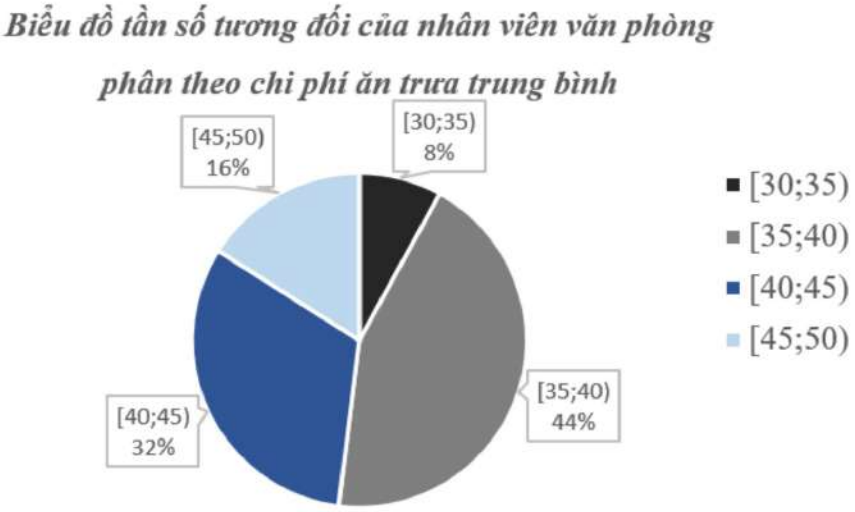
Chọn D

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là $\frac{x_6+x_7}{2}\in[10;12)$, do đó tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là: $Q_1=10+\frac{\frac{1.25}{4}-4}{6}.(12-10)=\frac{43}{4}$.

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $\frac{x_{19}+x_{20}}{2}\in[14;16)$, do đó tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là: $Q_3=14+\frac{\frac{3.25}{4}-(4+6+8)}{4}.(16-14)=\frac{115}{8}$.

Vậy khoảng tứ phân vị vủa mẫu số liệu ghép nhóm là: $\Delta_Q=\frac{115}{8}-\frac{43}{4}=\frac{29}{8}=\frac{a}{b}\Rightarrow P=a+b=37$.

Câu 17. Kết quả khảo sát 175 nhân viên văn phòng về chi phí trung bình cho mỗi suất ăn trưa của họ được tổng kết lại ở biểu đồ sau (đơn vị: nghìn đồng).



Tính trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm này (làm tròn đến hàng phần nghìn).

A. $36,932$. **B.** $39,773$. **C.** $42,614$. **D.** $38,752$.

Lời giải

Chọn B

Câu 18. Cho hai biến cố A và B, với $P(B)=0,8$, $P(A|B)=0,7$, $P(A|\overline{B})=0,45$. Tính $P(B|A)$.

A. $0,65$. **B.** $0,25$. **C.** $0,5$. **D.** $\frac{56}{65}$.

Lời giải

Chọn D

Theo công thức xác suất toàn phần:

$P(A)=P(B).P(A|B)+P(\overline{B}).P(A|\overline{B})=0,8.0,7+0,2.0,45=0,65$.

Theo công thức Bayes:

$$P(B|A)=\frac{P(B).P(A|B)}{P(A)}=\frac{0,8.0,7}{0,65}=\frac{56}{65}.$$

Câu 19. Trong một giải thi đấu bóng chuyền, đội bóng chuyền của Hà Nội sẽ thi đấu hai trận. Trận thứ nhất đội bóng chuyền của Hà Nội có xác suất thắng là $0,6$. Trận tiếp theo, xác suất chiến thắng của họ phụ thuộc vào kết quả trận trước đó. Nếu đội bóng chuyền của Hà Nội thắng trận trước đó, họ sẽ hưng phấn và xác suất để họ thắng là $0,7$. Nếu đội bóng chuyền của Hà Nội thua trận trước thì họ sẽ mất tinh thần và xác suất để họ thắng là $0,5$. Tính xác suất để đội bóng chuyền của Hà Nội thắng trận thứ hai.

A. $0,7$. **B.** $0,62$. **C.** $0,5$. **D.** $0,41$.

Lời giải

Chọn B

Gọi A là biến cố: "Đội bóng chuyền của Hà Nội thắng trận thứ 1"

Gọi B là biến cố: "Đội bóng chuyền của Hà Nội thắng trận thứ 2"

Ta có $P(A)=0,6\Rightarrow P(\overline{A})=0,4$.

Nếu đội bóng chuyền của Hà Nội thắng trận trước đó, họ sẽ hưng phấn và xác suất để họ thắng là $0,7$ hay $P(B|A)=0,7$.

Nếu đội bóng chuyền của Hà Nội thua trận trước thì họ sẽ mất tinh thần và xá suất để họ thắng là $0,5$ hay $P(B|\overline{A})=0,5$.

Ta có: $P(B)=P(A).P(B|A)+P(\overline{A}).P(B|\overline{A})=0,7.0,6+0,4.0,5=0,62$.

Vậy xác xuất để đội bóng chuyền Hà Nội thắng trận thứ 2 là $0,62$.

Câu 20. Có hai hộp bi, hộp I có 5 bi trắng và 7 bi đỏ, hộp II có 10 bi trắng và 15 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên hai viên bi từ hộp I chuyển sang hộp II. Sau đó, từ hộp II lấy ngẫu nhiên 1 viên bi thì được bi trắng. Xác suất để 2 bi chuyển từ hộp I sang hộp II không cùng màu là $\frac{a}{b}$ *(là phân số tối giản)*. Tính $a+b$.

A. 20. **B.** 197. **C.** 227. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Gọi A là biến cố lấy 2 bi từ hộp I sang hộp II không cùng màu

Gọi B là biến cố lấy bi từ hộp II là bi trắng

Khi đó AB là biến cố lấy 2 bi khác màu từ hộp 1 sau đó lấy 1 bi trắng từ hộp II.

Ta có

$$P(B)=\frac{C_5^2}{C_{12}^2}.\frac{12}{27}+\frac{C_7^2}{C_{12}^2}.\frac{10}{27}+\frac{5.7}{C_{12}^2}.\frac{11}{27}=\frac{65}{162}$$

$$P(AB)=\frac{5.6.11}{C_{12}^2.27}=\frac{35}{162}$$

$$\Rightarrow P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{7}{13}$$

Phần II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Trong mỗi ý a),b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x+d}$ có đồ thị hàm số $g(x)=f'(x)$ là hai nhánh đường cong cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -5, nhận đường thẳng $x=-1$ làm tiệm cận đứng và đường thẳng $y=-2$ là tiệm cận ngang. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $g(x)<-2$ với mọi $x\in R\setminus\{-1\}$.

b) Phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt.

c) Nếu $\max\limits_{[0;1]} f(x)=4$ thì tổng khoảng cách từ điểm bất kì trên đồ thị (C) của hàm số $y=f(x)$ đến hai đường tiệm cận của đồ thị (C) có giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt[4]{5}$.

d) Nếu đồ thị (C) của hàm số $y=f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2 thì phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có tọa độ nguyên với hoành độ nguyên dương là $y=\frac{-7}{3}x+\frac{2}{3}$

Lời giải

a) Đúng.

Ta có đạo hàm của $f(x)$ có dạng $g(x)=\frac{h(x)}{(x+d)^2}$.

Do đó hàm số $y=g(x)$ có tiệm cận đứng là $x=-d\Rightarrow -d=-1\Rightarrow d=1$.

Suy ra $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{ax^2+2ax+b-c}{(x+1)^2}$.

Do đó đồ thị hàm số $f'(x)$ có tiệm cận ngang: $y=a\Rightarrow a=-2$.

Giao của đồ thị hàm số $f'(x)$ với trục tung: $x=0\Rightarrow y=b-c\Rightarrow b-c=-5$.

Suy ra $f'(x)=\frac{-2x^2-4x-5}{(x+1)^2}$. Khi đó $f'(x)+2=\frac{-3}{(x+1)^2}<0$ với mọi $x\in R\setminus\{-1\}$.

Vậy $f'(x)<-2$ với mọi $x\in R\setminus\{-1\}$.

b) Đúng.

Do $f'(x)<0$ với mọi $x\in R\setminus\{-1\}$ nên ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\mid$ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y=f(x)$ luôn cắt đường thẳng $y=0$ tại hai điểm phân biệt. Do đó phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt.

c) Sai.

Do hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $[0;4]$ nên $\max\limits_{[0;1]} f(x)=f(0)=c\Rightarrow c=4$.

Mà $b-c=-5\Rightarrow b=-1$.

Do đó $f(x)=\dfrac{-2x^2-x+4}{x+1}=-2x+1+\dfrac{3}{x+1}$.

Vậy đường thẳng $y=-2x+1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

TCĐ $\Delta_1: x+1=0$; TCX $\Delta_2: 2x+y-1=0$.

Xét $M\left(m;-2m+1+\dfrac{3}{m+1}\right)\in(C)\ (m\neq -1)$. Ta có: $d(M,\Delta_1)=|m+1|$; $d(M,\Delta_2)=\dfrac{3}{\sqrt{5}|m+1|}$.

$$d(M,\Delta_1)+d(M,\Delta_2)=|m+1|+\frac{3}{\sqrt{5}|m+1|}\geq 2\sqrt{|m+1|\frac{3}{\sqrt{5}|m+1|}}=2\sqrt[4]{\frac{9}{5}}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow |m+1|=\dfrac{3}{\sqrt{5}|m+1|}\Leftrightarrow m=-1\pm\sqrt[4]{\dfrac{9}{5}}$.

Vậy $\min\left(d(M,\Delta_1)+d(M,\Delta_2)\right)=2\sqrt[4]{\dfrac{9}{5}}$.

d) Đúng.

Do đồ thị (C) của hàm số $y=f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2 nên $c=2$

Mà $b-c=-5\Rightarrow b=-3$.

Do đó $f(x)=\dfrac{-2x^2-3x+2}{x+1}=-2x-1+\dfrac{3}{x+1}$.

Điểm $M\left(m;-2m-1+\dfrac{3}{m+1}\right)\in(C)\ (m\neq -1)$ có tọa độ nguyên khi

$\left[\begin{array}{l} m+1=\pm 3 \\ m+1=\pm 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow m\in\{-4;-2;0;2\}$

Tiếp tuyến của (C) tại $M(2;-4)$ là $y=\dfrac{-7}{3}x+\dfrac{2}{3}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm O và $AB=2a, AD=a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của OA và $SH=\dfrac{3a}{2}$.

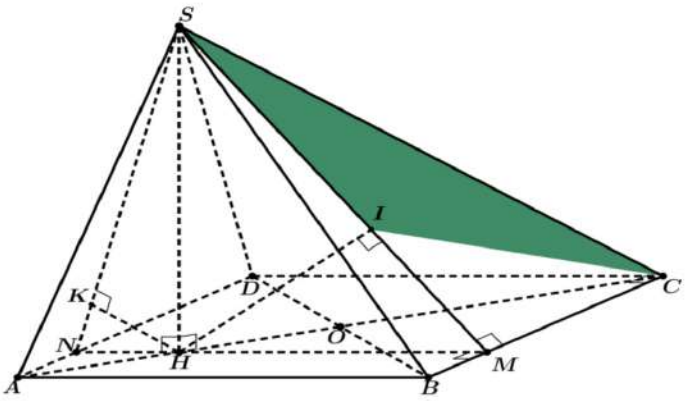
a) Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V=a^3$.

b) Hình chiếu vuông góc của tam giác SCH trên mặt phẳng (SBC) là tam giác SCI, với I là hình chiếu của H trên BC

c) Số đo góc phẳng nhị diện $[S,BC,A]$ là $45°$

d) Khoảng cách từ điểm C đến $mp(SAD)$ là $\dfrac{3\sqrt{10}}{20}a$

Lời giải



a) Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V=\dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{3}{2}a.2a.a=a^3$.

Chọn ĐÚNG.

b) Kẻ $HM\perp BC$ và $HI\perp SM$. Từ đó suy ra $HI\perp(SBC)$.

Vậy hình chiếu vuông góc của tam giác SCH trên mặt phẳng (SBC) là tam giác SCI,

với I là hình chiếc của H trên SM.

Chọn SAI.

c) Do $\begin{cases} HM\perp BC \\ SM\perp BC \end{cases}$ nên góc phẳng nhị diện $[S,BC,A]$ là SMH.

Ta có: $HM \,//\, AB \Rightarrow \dfrac{HM}{AB} = \dfrac{CH}{CA} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow HM = \dfrac{3}{2}a$.

Tính $\tan SMH = \dfrac{SH}{HM} = 1 \Rightarrow SMH = 45°$.

Chọn ĐÚNG.

d) Kẻ $HN \perp AD$ và $HK \perp SN$. Từ đó suy ra $HK \perp (SAD)$.

Ta có: $d\left(C,(SAD)\right) = 4d\left(H,(SAD)\right) = 4HK$.

Tính $HK = \dfrac{HN.HS}{\sqrt{HN^2 + HS^2}} = \dfrac{\dfrac{a}{2}.\dfrac{3a}{2}}{\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3a}{2}\right)^2}} = \dfrac{3\sqrt{10}}{20}a$.

Vậy $d\left(C,(SAD)\right) = 4d\left(H,(SAD)\right) = 4HK = \dfrac{3\sqrt{10}}{5}a$.**Chọn** SAI.

Câu 3: Chọn ngẫu nhiên đồng thời sáu số tự nhiên khác nhau thuộc đoạn $[1;25]$. Gọi A là biến cố "Chọn được sáu số tự nhiên cùng là số chẵn"; B là biến cố "Chọn được sáu số tự nhiên cùng chia hết cho 3"; C là biến cố "Chọn được sáu số tự nhiên sao cho tổng bình phương của sáu số đó chia hết cho 3".

a) Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = A_{25}^6$.

b) Xác suất của biến cố A là $P(A) = \dfrac{12}{25}$.

c) Xác suất của biến cố B là $P(B) = \dfrac{1}{6325}$.

d) Xác suất của biến cố C là $P(C) = \dfrac{1803}{6325}$.

Lời giải

a) Mệnh đề sai.

Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{25}^6 = 177100$.

b) Mệnh đề sai.

Có 12 số chẵn thuộc đoạn $[1;25]$. Suy ra $n(A) = \mathrm{C}_{12}^6 = 924$.

Xác suất của biến cố A là $P(A) = \dfrac{924}{177100} = \dfrac{3}{575}$.

c) Mệnh đề đúng.

Có 8 số tự nhiên chia hết cho 3 thuộc đoạn $[1;25]$. Suy ra $n(B) = \mathrm{C}_8^6$.

Xác suất của biến cố B là $P(B) = \dfrac{\mathrm{C}_8^6}{177100} = \dfrac{1}{6325}$.

d) Mệnh đề đúng.

Nhận xét: Số chính phương chia 3 luôn dư 0 hoặc dư 1.

Thật vậy, xét số chính phương n^2 $(n \in \mathbb{N})$, ta có 3 trường hợp:

Trường hợp 1: $n = 3k$ $(k \in \mathbb{N})$. Khi đó $n^2 = 9k^2 \vdots 3$.

Trường hợp 2: $n = 3k+1$ $(k \in \mathbb{N})$. Khi đó $n^2 = (3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1$ chia 3 dư 1.

Trường hợp 3: $n = 3k+2$ $(k \in \mathbb{N})$. Khi đó $n^2 = (3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = (9k^2 + 12k + 3) + 1$ chia 3 dư 1.

Vậy số chính phương chia 3 luôn dư 0 hoặc 1.

Ta chia 25 số tự nhiên trong đoạn $[1;25]$ thành 2 nhóm

- Nhóm 1: Gồm các số tự nhiên chia hết cho 3. Có 8 số tự nhiên thuộc nhóm 1.

- Nhóm 2 : Gồm các số tự nhiên không chia hết cho 3. Có 17 số tự nhiên thuộc nhóm 2.

Để chọn được sáu số tự nhiên sao cho tổng bình phương của sáu số đó chia hết cho 3 thì chỉ có thể thực hiện 1 trong 3 cách chọn:

Cách 1: Cả 6 số tự nhiên được chọn đều nằm trong nhóm 1.

Cách 2: Cả 6 số tự nhiên được chọn đều nằm trong nhóm 2.

Cách 3: Chọn 3 số tự nhiên trong nhóm 1 và 3 số tự nhiên trong nhóm 2.

Xác suất của biến cố C là $\mathrm{P}(C) = \dfrac{\mathrm{C}_8^6 + \mathrm{C}_{17}^6 + \mathrm{C}_8^3 \cdot \mathrm{C}_{17}^3}{177100} = \dfrac{1803}{6325}$.

Câu 4: Giả sử trong một nhóm người có 10 người nhiễm bệnh, 90 người còn lại là không nhiễm bệnh. Để phát hiện ra người nhiễm bệnh, người ta tiến hành xét nghiệm tất cả mọi người của nhóm đó. Biết rằng đối với người nhiễm bệnh thì xác suất xét nghiệm có kết quả dương tính là 80%, nhưng đối với người không nhiễm bệnh thì xác suất xét nghiệm có phản ứng dương tính là 9%. Gọi X là một người trong nhóm được xét nghiệm.

a) Giả sử X có kết quả xét nghiệm dương tính. Xác suất để X là người nhiễm bệnh là $\dfrac{1}{2}$.

b) Giả sử X có kết quả xét nghiệm dương tính. Xác suất để X là người không bị nhiễm bệnh là $\dfrac{81}{161}$.

c) Giả sử X có kết quả xét nghiệm âm tính. Xác suất để X là người nhiễm bệnh là $\dfrac{20}{839}$.

d) Giả sử X có kết quả xét nghiệm âm tính. Xác suất để X là người không bị nhiễm bệnh là $\dfrac{800}{839}$.

Lời giải

Xét các biến cố

A : "X có kết quả xét nghiệm dương tính"

$\overline{A}$: "X có kết quả xét nghiệm âm tính"

B : "X là người nhiễm bệnh"

$\overline{B}$: "X là người không bị nhiễm bệnh"

Xác suất X là người bị nhiễm bệnh là $\mathrm{P}(B)=\dfrac{10}{100}=0,1$.

Xác suất X là người không bị nhiễm bệnh là $\mathrm{P}\left(\overline{B}\right)=\dfrac{90}{100}=0,9$.

Đối với người nhiễm bệnh thì xác suất xét nghiệm có kết quả dương tính là 80% nên ta có

$\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{80}{100}=0,8$.

$\Rightarrow \mathrm{P}\left(\overline{A}|B\right)=1-\mathrm{P}(A|B)=1-0,8=0,2$.

Đối với người không nhiễm bệnh thì xác suất xét nghiệm có phản ứng dương tính là 9% nên ta có

$\mathrm{P}\left(A|\overline{B}\right)=\dfrac{9}{100}=0,09$.

$\Rightarrow \mathrm{P}\left(\overline{A}|\overline{B}\right)=1-\mathrm{P}\left(A|\overline{B}\right)=1-0,09=0,91$.

a) Xác suất X là người nhiễm bệnh, biết X có kết quả xét nghiệm dương tính là

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(B).\mathrm{P}(A|B)}{\mathrm{P}(B).\mathrm{P}(A|B)+\mathrm{P}\left(\overline{B}\right).\mathrm{P}\left(A|\overline{B}\right)}=\dfrac{0,1.0,8}{0,1.0,8+0,9.0,09}=\dfrac{80}{161}$. **Vậy mệnh đề SAI.**

b) Xác suất để X là người không bị nhiễm bệnh, biết X có kết quả xét nghiệm dương tính là

$\mathrm{P}\left(\overline{B}|A\right)=1-\mathrm{P}(B|A)=1-\dfrac{80}{161}=\dfrac{81}{161}$. **Vậy mệnh đề ĐÚNG.**

c) Xác suất để X là người nhiễm bệnh, biết X có kết quả xét nghiệm âm tính là

$\mathrm{P}\left(B|\overline{A}\right)=\dfrac{\mathrm{P}(B).\mathrm{P}\left(\overline{A}|B\right)}{\mathrm{P}(B).\mathrm{P}\left(\overline{A}|B\right)+\mathrm{P}\left(\overline{B}\right).\mathrm{P}\left(\overline{A}|\overline{B}\right)}=\dfrac{0,1.0,2}{0,1.0,2+0,9.0,91}=\dfrac{20}{839}$. **Vậy mệnh đề ĐÚNG.**

d) Xác suất để X là người không bị nhiễm bệnh, biết X có kết quả xét nghiệm âm tính là

$\mathrm{P}\left(\overline{B}|\overline{A}\right)=1-\mathrm{P}\left(B|\overline{A}\right)=1-\dfrac{20}{839}=\dfrac{819}{839}$. **Vậy mệnh đề SAI.**

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=\left(\dfrac{\cos 2x+\sin x}{\sin x-1}-1\right)\left(\cos^2\dfrac{x}{2}-\dfrac{3m+1}{2}\right)$ với m là tham số. Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

b) Hàm số $f(x)+\sin x.\cos x$ tuần hoàn với chu kỳ 4π.

c) $\forall m \in \mathbb{R}$, phương trình $f(x)=0$ luôn có nghiệm $x=-\frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

d) $\forall m \in \left(0;\frac{1}{3}\right)$ thì phương trình $f(x)=0$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$.

Lời giải

a) Điều kiện xác định của hàm số $f(x)$ là $\sin x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2}+k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Vậy **a) đúng.**

b) Ta có: $f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos 2x+1}{\sin x-1}\right)\left(2\cos^2\frac{x}{2}-3m-1\right)=\frac{\cos^2 x}{\sin x-1}.(\cos x-3m)=(-1-\sin x)(\cos x-3m)$

Do đó hàm số $f(x)+\sin x.\cos x=3m\sin x-\cos x+3m$

Chu kì tuần hoàn của hàm số $y=\sin x$ và hàm số $y=\cos x$ đều bằng 2π nên chu kì tuần hoàn của hàm số $f(x)=(-1-\sin x)(\cos x-3m)$ cũng bằng 2π. Vậy **b) sai.**

c) $\forall m \in \mathbb{R}$, phương trình $f(x)=0 \Rightarrow \sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Vậy **c) sai.**

d) Ta có $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-1 \quad (1)\\ \cos x=3m \quad (2)\end{array}\right.$.

$(1) \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi, k \in \mathbb{Z}$, suy ra (1) có 2 nghiệm phân biệt thuộc $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$.

PT $f(x)=0$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$ khi và chỉ khi PT (2) có 4 nghiệm phân biệt thuộc $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$ khi và chỉ khi $0<3m<1 \Leftrightarrow 0<m<\frac{1}{3}$. Vậy **d) đúng.**

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;2;-3)$, $B(1;-1;0)$, $C(-1;0;1)$, $D(-3;0;3)$.

a) Điểm đối xứng của D qua Ox là $D'(3;0;-3)$.

b) $AC=2BC$.

c) Với điểm $M \in (Oxy)$ thỏa mãn ΔMBC vuông cân tại M và $x_M>0$ thì $\left(x_M+\frac{2}{5}\right)y_M=\frac{2}{5}$.

d) Với điểm N bất kì thì giá trị nhỏ nhất của biểu thức $NA^2+2NB^2-6NC^2+2ND^3$ bằng 60.

Lời giải

a) Điểm đối xứng của D qua Ox là $D'(-3;0;-3)$.

Chọn SAI.

b) Ta có $\overrightarrow{AC}=(-2;-2;4) \Rightarrow AC=2\sqrt{6}$; $\overrightarrow{BC}=(-2;1;1) \Rightarrow BC=\sqrt{6} \Rightarrow AC=2BC$.

Chọn ĐÚNG.

c) Ta có $M \in (Oxy) \Leftrightarrow M(x;y;0) \Rightarrow \overrightarrow{MB} = (1-x;-1-y;0)$, $\overrightarrow{MC} = (-1-x;-y;1)$.

Theo bài ra, ta có :

$$\begin{cases} MB^2 = MC^2 \\ \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x^2 + y^2 + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow 5x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{6}}{5}$$

Vì $x_M > 0 \Rightarrow x = \frac{-1+\sqrt{6}}{5} \Rightarrow y = \frac{-2+2\sqrt{6}}{5} \Rightarrow \left(x_M + \frac{2}{5}\right) y_M = \frac{2}{5}$.

Chọn ĐÚNG.

d) Lấy điểm $I(x;y;z)$ thỏa mãn

$$\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - 6\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x+2(1-x)-6(-1-x) = 0 \\ 2-y+2(-1-y)-6(-y) = 0 \\ -3-x+2(-z)-6(1-z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow I(-3;0;3) \equiv D.$$

Khi đó : $DA^2 + 2DB^2 - 6DC^2 = 60$.

Ta có

$$NA^2 + 2NB^2 - 6NC^2 + 2ND^3 = \left(\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DN}\right)^2 + 2\left(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DN}\right)^2 - 6\left(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DN}\right)^2 + 2ND^3$$
$$= 2ND^3 - 3ND^2 + DA^2 + 2DB^2 - 6DC^2 = 2ND^3 - 3ND^2 + 60$$

Ta có $2ND^3 - 3ND^2 + 60 = 2ND\left(ND^2 - 2ND + 1\right) + ND^2 - 2ND + 60$

$$= 2ND(ND-1)^2 + (ND-1)^2 + 59 \geq 59, \ \forall ND \geq 0.$$

Vậy $NA^2 + 2NB^2 - 6ND^2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $59 \Leftrightarrow ND = 1$.**Chọn** SAI.

PHẦN III. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Gọi x là số thực dương sao cho tồn tại số thực y không bé hơn 1 thỏa mãn $\left(xy^2 + x - 2y - 1\right)\log y = \log\frac{2y - x + 3}{x}$. Có bao nhiêu số nguyên trong tập các giá trị của biểu thức $P = \sqrt{6}\sin\left(\frac{\pi x}{5} - \frac{\pi}{4}\right) - 3\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi x}{5} + \frac{\pi}{4}\right)$?

Lời giải

Đáp số: 6

Xét $y = 1, \left(xy^2 + x - 2y - 1\right)\log y = \log\frac{2y - x + 3}{x} \Leftrightarrow x = \frac{5}{11}$ suy ra P không nguyên.

Xét $y > 1$, ta có

$\left(xy^2+x-2y-1\right)\log y=\log\dfrac{2y-x+3}{x}\Leftrightarrow\left(xy^2+x-2y-1\right)\log y=\log\dfrac{\left(2y-x+3\right)\log y}{x\log y}$

$\Leftrightarrow xy^2\log y+\log\left(xy^2\log y\right)=\left(2y-x+3\right)\log y+\log\left[\left(2y-x+3\right)\log y\right](*)$

Xét hàm số $f\left(x\right)=x+\log x,(x>0)$. Ta có $f'\left(x\right)=1+\dfrac{1}{x\ln 10}>0,\forall x>0$ nên

$(*)\Leftrightarrow f\left(xy^2\log y\right)=f\left[\left(2y-x+3\right)\log y\right]$

$\Leftrightarrow xy^2\log y=\left(2y-x+3\right)\log y\Leftrightarrow xy^2-2y+x-3=0$

Tồn tại số thực y khi và chỉ khi $\Delta'\ge 0\Leftrightarrow 1-x\left(x-3\right)\ge 0\Leftrightarrow\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}\le x\le\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

Vì x là số thực dương nên $0<x\le\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

Biểu thức $P=\sqrt{6}\sin\left(\dfrac{\pi x}{5}-\dfrac{\pi}{4}\right)-3\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi x}{5}+\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{6}\sin\left(\dfrac{\pi x}{5}-\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

Ta có $P'=\dfrac{2\sqrt{6}\pi}{5}\cos\left(\dfrac{\pi x}{5}-\dfrac{7\pi}{12}\right),P'=0\Leftrightarrow\dfrac{\pi x}{5}-\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{65}{12}+5k\Rightarrow x=\dfrac{5}{12}$.

Khi đó $P(0)=-3-\sqrt{3},P\left(\dfrac{5}{12}\right)=-2\sqrt{6},P\left(\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right)\approx 1{,}18$.

Suy ra $-2\sqrt{6}\le P\left(x\right)\le 1{,}18$.

Có 6 số nguyên trong tập các giá trị của biểu thức P.

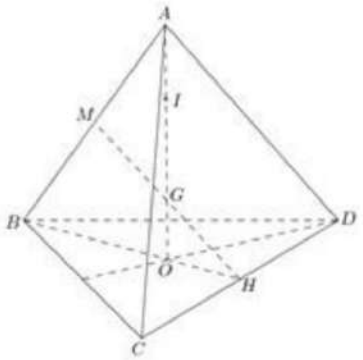
Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng 6. Gọi I là điểm bất kì trong không gian sao cho biểu thức $P=4IA^2+IB^2+IC^2+ID^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó thể tích khối chóp $I.ABC$ bằng bao nhiêu? Kết quả làm tròn đến một chữ số thập phân.

Lời giải

Trả lời: 3,6

Gọi G là trọng tâm của tứ diện đều $ABCD$. Khi đó: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

Gọi K thỏa $4\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{KA}+4\overrightarrow{KG}=\vec{0}$



$P = 4IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 = 4\left(\overrightarrow{IK} + \overrightarrow{KA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{IK} + \overrightarrow{KB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{IK} + \overrightarrow{KC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{IK} + \overrightarrow{KD}\right)^2$

$= 7IK^2 + KA^2 + KB^2 + KC^2 + KD^2$

$P_{\min} \Leftrightarrow I \equiv K$.

$V_{ABCD} = \dfrac{6^3\sqrt{2}}{12} = 18\sqrt{2} \Rightarrow V_{OABC} = 6\sqrt{2}$

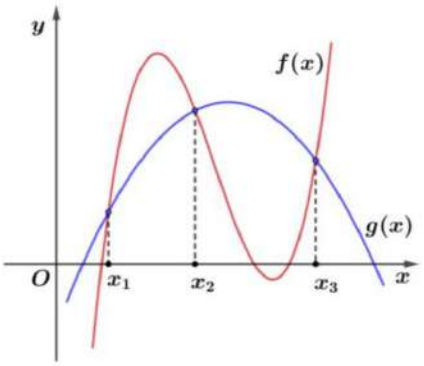
$BO = 6\dfrac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$; $AO = \sqrt{6^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{6}$

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác ABO, cho ta:

$\dfrac{GO}{GA}.\dfrac{MA}{MB}.\dfrac{HB}{HO} = 1 \Rightarrow \dfrac{GO}{GA}.1.3 = 1 \Leftrightarrow GA = 3GO$

Khi đó: $IA = \dfrac{3}{7}OA \Rightarrow V_{IABC} = \dfrac{3}{7}V_{OABC} = \dfrac{3}{7}.6\sqrt{2} = \dfrac{18\sqrt{2}}{7} \approx 3,6$.

Câu 3: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 - 11x^2 + cx - 33$ và $g(x) = -3x^2 + bx - 25$ có dạng đồ thị như hình vẽ. Biết rằng x_1, x_2, x_3 dương



Khi biểu thức $P = \log_{\frac{1}{2}}\left[a^3(c-b)\right] + 3a(b-c)$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T = 81a^2 + (b-c)^2$

Lời giải

Đáp số 384

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là

$ax^3 - 11x^2 + cx - 33 = -3x^2 + bx - 25 \Leftrightarrow ax^3 - 8x^2 + (c-b)x - 8 = 0$ (*)

Dựa vào đồ thị ta có $a > 0$ và phương trình (*) có 3 nghiệm dương x_1, x_2, x_3.

Theo hệ thức Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{8}{a} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \dfrac{c-b}{a} \\ x_1x_2x_3 = \dfrac{8}{a} \end{cases}$.

+ Mà $x_1x_2x_3 \le \left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)^3 \Leftrightarrow \dfrac{8}{a} \le \dfrac{\left(\dfrac{8}{a}\right)^3}{27} \Leftrightarrow 27 \le \left(\dfrac{8}{a}\right)^2 \Rightarrow 0 < a \le \dfrac{8\sqrt{3}}{9}$.

$+\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 \le \dfrac{\left(x_1+x_2+x_3\right)^2}{3} \Leftrightarrow \dfrac{c-b}{a} \le \dfrac{64}{3a^2} \Leftrightarrow a\left(c-b\right) \le \dfrac{64}{3}$.

Khi đó: $P=\log_{\frac{1}{2}}\left[a^3\left(c-b\right)\right]+3a\left(b-c\right) \ge \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{64a^2}{3}\right)-64=-70+\log_2 3-\log_2 a^2$.

Có $0<a^2 \le \dfrac{64}{27} \Leftrightarrow \log_2 a^2 \le \log_2 \dfrac{64}{27} \Leftrightarrow \log_2 a^2 \le 6-3\log_2 3$

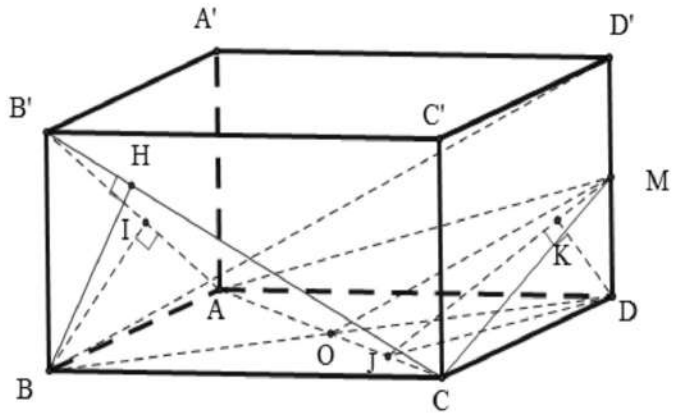
Suy ra $P \ge 4\log_2 3-76$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{8\sqrt{3}}{9} \\ c-b=8\sqrt{3} \end{cases}$. Khi đó $T=81a^2+\left(b-c\right)^2=384$

Câu 4: Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA'B'C'D'$. Khoảng cách giữa AB và $B'C$ là $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$, giữa BC và AB' là $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$, giữa AC và BD' là $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Thể tích của khối hộp Thể tích của khối hộp $ABCDA'B'C'D'$ khi $a=3$.

Lời giải

Đáp án: 54



Đặt $AB=x$, $AD=y$, $AA'=z$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên $B'C$, ta có BH là đoạn vuông góc chung của AB và $B'C$ nên $d\ AB,B'C\ =BH=\dfrac{2a\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \dfrac{1}{BH^2}=\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{5}{4a^2}$. (1)

Gọi I là hình chiếu vuông góc của B trên AB', ta có BI là đoạn vuông góc chung của BC và AB' nên $d\ BC,AB'\ =BI \Rightarrow \dfrac{1}{BI^2}=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{z^2}=\dfrac{5}{4a^2}$. (2)

Gọi M là trung điểm của DD', O là giao điểm của AC và BD, ta có mặt phẳng ACM chứa AC và song song với BD' nên $d\ AC,BD'\ =d\ BD',\ ACM\ =d\ D',\ ACM\ $.

Gọi J là hình chiếu vuông góc của D trên AC, K là hình chiếu vuông góc của D trên MJ, ta có $d\ D',\ ACM\ =d\ D,\ ACM\ =DK \Rightarrow \dfrac{1}{DK^2}=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{4}{z^2}=\dfrac{3}{a^2}$. (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có $\frac{2}{z^2}=\frac{1}{2a^2}\Leftrightarrow z=2a\Rightarrow x=y=a$.

Thể tích khối hộp là $V=xyz=2a^3=54$.

Câu 5: Gọi S là tập tất cả các số tự nhiên có 8 chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc S. Tính xác suất để chọn được số chia hết cho 45. (Tính gần đúng đến hàng phần trăm)

Lời giải

Đáp án: 0,02

Số phần tử của không gian mẫu $|\Omega|=A_{10}^8-A_9^7$.

Gọi A là biến cố chọn được số chia hết cho 45.

Gọi $B=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Số chia hết cho 45 khi và chỉ khi số đó chia hết cho 9 và chia hết cho 5. Do $0+1+2+...+9=45\vdots 9$ nên ta có các bộ số mà tổng chia hết cho 9 là: $B\setminus\{0,9\};B\setminus\{1,8\};B\setminus\{2,7\};B\setminus\{3,6\};B\setminus\{4,5\}$.

TH1: Số có 8 chữ số lấy từ tập $B\setminus\{0,9\}$ có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$ và chia hết cho 5 nên $a_8=5$, suy ra có $7!$ số

TH2: Số có 8 chữ số lấy từ tập $B\setminus\{4,5\}$ có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$ và chia hết cho 5 nên $a_8=0$, suy ra có $7!$ số

TH3 :Số có 8 chữ số lấy từ tập $B\setminus\{1,8\}$ có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$ và chia hết cho 5 nên có 2 trường hợp:

* $a_8=0$ có $7!$ số.

* $a_8=5$ có $6.6!$ số.

Suy ra trong trường hợp này có $7!+6.6!$ số.

Tương tự các trường hợp $B\setminus\{2,7\},B\setminus\{3,6\}$ mỗi trường hợp có $7!+6.6!$ số.

Số kết quả thuận lợp cho biến cố A là $|\Omega_A|=2.7!+3.(7!+6.6!)=38160$.

Vậy xác suất biến cố A là $p(A)=\frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\frac{38160}{A_{10}^8-A_9^7}=\frac{53}{2268}\approx 0,02$.

Câu 6: Một trường đại học kĩ thuật có 80% sinh viên nam và 20% sinh viên nữ. Trong số sinh viên nam có 85% là người bản địa, số còn lại là sinh viên quốc tế. Trong số sinh viên nữ có 90% là người bản địa, số còn lại là sinh viên quốc tế. Chọn ngẫu nhiên một sinh viên nam và một sinh viên nữ. Biết rằng trong hai sinh viên được chọn ra có một sinh viên là người bản địa và một là sinh viên quốc tế, tính xác suất để sinh viên quốc tế được chọn ra là nữ. (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Đáp số: 0,39

Gọi A là biến cố: "Sinh viên quốc tế được chọn là nữ".

B là biến cố: "Trong 2 sinh viên được chọn, một người là người bản địa, một người là người quốc tế".

C là biến cố: "Chọn được 1 sinh viên nữ".

D là biến cố: "Chọn được 1 sinh viên quốc tế".

Khi đó, ta cần đi tính $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$

Theo đề bài: $P(C)=0,2\Rightarrow P(\overline{C})=0,8$, $P(D|C)=0,1\Rightarrow P(\overline{D}|C)=0,9$.

$P(D|\overline{C})=0,15\Rightarrow P(\overline{D}|\overline{C})=0,85$.

$\Rightarrow P(AB)=P(C).P(D|C).P(\overline{C}).P(\overline{D}|\overline{C})=0,2.0,1.0,8.0,85=\dfrac{17}{1250}$.

$P(B)=P(C).P(D|C).P(\overline{C}).P(\overline{D}|\overline{C})+P(C).P(\overline{D}|C).P(\overline{C}).P(D|\overline{C})=\dfrac{22}{625}$.

$P(A|B)\approx 0,39$.

----------HẾT---------

Họ và tên thí sinh:.Số báo danh:.
Họ, tên và chữ ký của GT 1:.Họ, tên và chữ ký của GT 2:.