

Họ tên học sinh:.....; Số báo danh:.....

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	3	-2	$+\infty$	

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

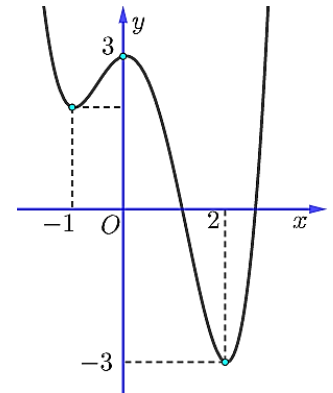
- A. $x = 4$. B. $x = 2$. C. $x = 3$. D. $x = -2$.

Câu 2. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng:

- A. 0. B. -2. C. 2. D. 3.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng về hàm số đó?

- A. Đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.
B. Nghịch biến trên khoảng $(-3; 0)$.
C. Đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.
D. Nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$.



Câu 4. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{2x-1}{x+1} \text{ trên đoạn } [0; 2]. \text{ Tính tổng } M + m.$$

- A. 0. B. 1. C. 2. D. -1.

Câu 5. Đồ thị hàm số $y = \frac{3x-2}{x+2}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng

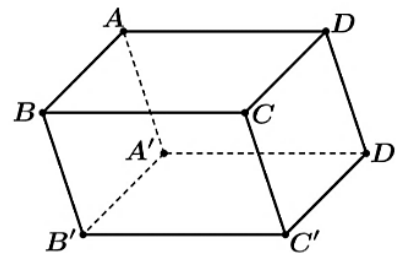
- A. $x = 3$. B. $y = 3$. C. $x = -2$. D. $y = -2$.

Câu 6. Đạo hàm của hàm số $y = 3^x$ là

- A. $y' = x \cdot 3^{x-1}$. B. $y' = \frac{3^x}{\ln 3}$. C. $y' = 3^x \ln 3$. D. $y' = 3^x$.

Câu 7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào là đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC}$.
 B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.
 C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB'}$.
 D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD'}$.



Câu 8. Đạo hàm của hàm số $y = x \cos x$ là

- A. $y' = \cos x + x \sin x$. B. $y' = -\sin x$. C. $y' = 1 - \sin x$. D. $y' = \cos x - x \sin x$.

Câu 9. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- A. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$. B. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.
 C. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$. D. $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

Câu 10. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_2(3^x - 9)$.

- A. $D = (0; +\infty)$. B. $D = [2; +\infty)$. C. $D = (2; +\infty)$. D. $D = \mathbb{R}$.

Câu 11. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

- A. $\frac{a^2}{2}$. B. $-\frac{a^2}{2}$. C. a^2 . D. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $V = a^3\sqrt{3}$.

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 1. Cho hàm số bậc ba $y = x^3 - 3x$.

Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:	Đúng	Sai
a) Tập xác định hàm số $D = \mathbb{R}$.	☐	☐
b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.	☐	☐
c) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bằng 4.	☐	☐
d) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A(2; 2)$ có hệ số góc bằng 3.	☐	☐

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = a \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$ ($a \neq 0$). Biết đồ thị hàm số đi qua điểm $A\left(\frac{1}{3}; 5\right)$.

Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:	Đúng	Sai
a) Đạo hàm của hàm số là $f'(x) = a\pi \cos\left(\pi x + \frac{\pi}{6}\right)$.	☐	☐
b) Chu kỳ của hàm số là $T = 1$.	☐	☐
c) Ta có $a = 2$.	☐	☐
d) Hiệu giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên tập xác định là 5.	☐	☐

.....

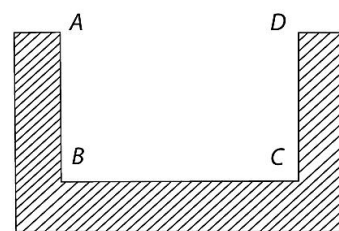
.....

.....

.....

.....

Câu 3. Mặt cắt ngang phần chứa nước của một mương dẫn nước là hình chữ nhật $ABCD$. Để đáp ứng yêu cầu thiết kế, diện tích mặt cắt ngang phần chứa nước trong mương luôn bằng $1,2 m^2$. Gọi $BC = x$ (m) là chiều rộng đáy mương, khi thiết kế người ta muốn tổng chiều dài thành và đáy mương $y = AB + BC + CD$ là ngắn



nhất, đồng thời phải thỏa mãn $BC < 10$ (m).

Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:	Đúng	Sai
a) Với $BC = x$, ta có $AB = CD = 1,2x$.	☐	☐
b) Khi đó $y = AB + BC + CD = \frac{1,2}{x} + x$.	☐	☐
c) Đặt $f(x) = AB + BC + CD$, với $0 < x < 10$, thì $f'(x) = 1 - \frac{2,4}{x^2}$.	☐	☐
d) Khảo sát hàm số $y = f(x)$, ta thấy y đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 2$ (m).	☐	☐

.....

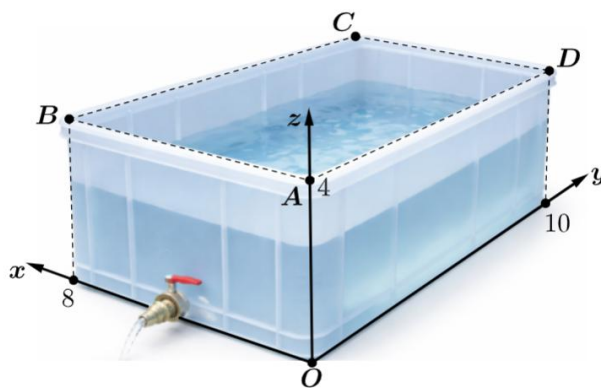
.....

.....

.....

.....

Câu 4. Một bể nước bằng nhựa với phần chứa nước có dạng hình hộp chữ nhật được đặt trong một hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho các tia Ox , Oy , Oz dọc theo ba cạnh của hình hộp như hình vẽ, miệng bể là hình chữ nhật $ABCD$. Biết đơn vị trên mỗi trục là dm và $x_B = 8$; $y_D = 10$; $z_A = 4$.



Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:	Đúng	Sai
a) Tọa độ điểm $A(0; 0; 4)$, $B(8; 0; 4)$, $C(8; 10; 4)$, $D(0; 10; 4)$.	☐	☐
b) Sức chứa tối đa của bể nước là 300 lít.	☐	☐
c) Giả sử α là góc giữa hai vector $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OD}$ thì $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{145}}$.	☐	☐
d) Ban đầu nước đầy bể, người ta xả nước sao cho thể tích nước trong bể giảm $10 \text{ dm}^3 / \text{phút}$. Sau 12 phút thì mực nước trong bể cách miệng bể 1,5 dm.	☐	☐

.....

.....

.....

.....

.....

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. Một hợp tác xã cần vận chuyển 3600 kg sầu riêng trong một mùa vụ. Hợp tác xã chia thành nhiều chuyến, mỗi chuyến chở x kg ($1 \leq x \leq 3600, x \in \mathbb{N}^*$), giả sử x là ước của 3600 để khối lượng hàng được chia đều cho các chuyến. Chi phí cho mỗi chuyến gồm:

- Phí xe cố định là 50 nghìn đồng/chuyến.
- Phí bảo quản lạnh được tính $0,005x^2$ (nghìn đồng/chuyến).

Hỏi mỗi chuyến nên chở bao nhiêu kg để tổng chi phí vận chuyển là nhỏ nhất?

Trả lời:



Câu 2. Giả sử một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng, chiều dương hướng lên. Tọa độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) là $y = t^3 - 12t + 3, t \geq 0$. Tính vận tốc của hạt tại thời điểm $t = 8$ giây theo đơn vị m/s.

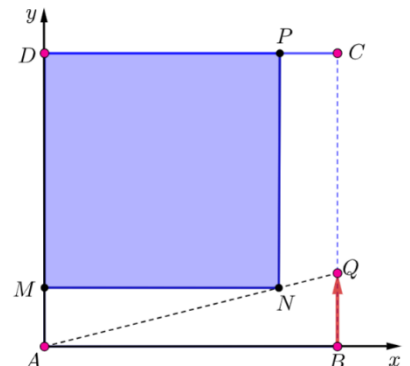
Trả lời:

Câu 3. Cho hình chóp cụt tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy lớn $ABCD$, đáy nhỏ $A'B'C'D'$. Biết $AB = 8a, C'D' = 4a, AA' = 4a$ ($a > 0$). Tính góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(CDD'C')$. Kết quả làm tròn đến hàng phần mười độ.

Trả lời:

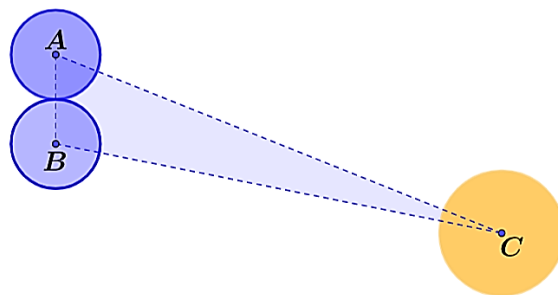
Câu 4. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 10 m, điểm Q chuyển động thẳng đều từ vị trí B đến vị trí C với tốc độ 1 m/s (thời điểm $t = 0$ giây được tính khi Q xuất phát từ B). Với mỗi vị trí của Q , luôn tồn tại hình vuông $DMNP$ với M thuộc đoạn AD , N thuộc AQ và P thuộc đoạn CD . Hỏi tại thời điểm $t = 5$ giây thì diện tích hình vuông $DMNP$ giảm với tốc độ bao nhiêu m^2/s ? Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Trả lời:



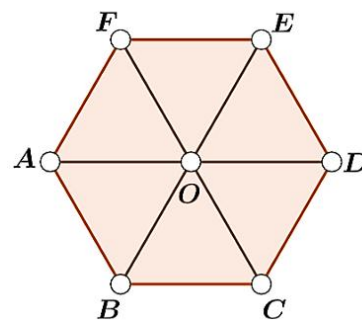
Câu 5. Trên một mặt sàn phẳng, có hai viên bi màu xanh đứng yên và tiếp xúc nhau. Gọi A, B lần lượt là các điểm tiếp xúc của hai viên bi xanh với mặt sàn; mỗi viên bi xanh có bán kính 2 cm. Một viên bi màu vàng có bán kính 3 cm, ban đầu tiếp xúc với mặt sàn tại điểm C , trong đó $AC = 26$ cm, $BC = 10\sqrt{5}$ cm.

Viên bi vàng lăn thẳng đều trên mặt sàn về phía hai viên bi xanh với tốc độ 2 cm/s. Hỏi sau bao nhiêu giây kể từ lúc xuất phát thì viên bi vàng tiếp xúc cùng lúc với hai viên bi xanh? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Trả lời:

Câu 6. Có 21 bóng đèn gồm 3 màu đỏ, xanh, vàng, mỗi màu gồm 7 bóng được đánh số từ 1 đến 7. Chọn ngẫu nhiên 7 bóng và gắn vào các vị trí O, A, B, C, D, E, F như hình vẽ, $ABCDEF$ là lục giác đều tâm O . Gọi P là xác suất để hai bóng đèn ở hai vị trí kề nhau luôn khác màu, đồng thời ba bóng đèn trên mỗi đường chéo qua tâm AD, BE, CF có số đôi một khác nhau. Biết $P = \frac{m}{n}$ (m, n nguyên dương và phân số $\frac{m}{n}$ tối giản). Hãy tính giá trị $n - 22m^2$.



Trả lời:

HẾT

Họ tên học sinh:.....; Số báo danh:.....

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	3	-2	$+\infty$	

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

- A. $x = 4$. B. $x = 2$. C. $x = 3$. D. $x = -2$.

Câu 2. Đồ thị hàm số $y = \frac{3x-2}{x+2}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng

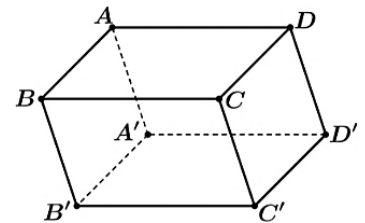
- A. $x = 3$. B. $y = 3$. C. $x = -2$. D. $y = -2$.

Câu 3. Đạo hàm của hàm số $y = 3^x$ là

- A. $y' = x \cdot 3^{x-1}$. B. $y' = \frac{3^x}{\ln 3}$. C. $y' = 3^x \ln 3$. D. $y' = 3^x$.

Câu 4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào là đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC}$.
B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.
C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB'}$.
D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD'}$.



Câu 5. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng:

- A. 0. B. -2. C. 2. D. 3.

Câu 6. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

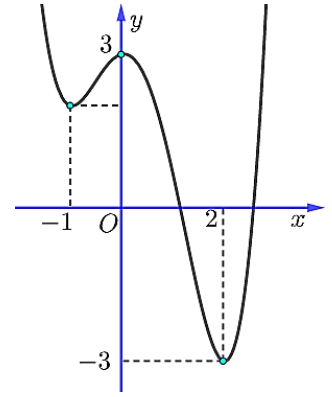
A. $\frac{a^2}{2}$.

B. $-\frac{a^2}{2}$.

C. a^2 .

D. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng về hàm số đó?

A. Đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.B. Nghịch biến trên khoảng $(-3; 0)$.C. Đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.D. Nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$.

Câu 8. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0; 2]$. Tính tổng $M + m$.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. -1.

Câu 9. Đạo hàm của hàm số $y = x \cos x$ là

A. $y' = \cos x + x \sin x$.

B. $y' = -\sin x$.

C. $y' = 1 - \sin x$.

D. $y' = \cos x - x \sin x$.

Câu 10. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

B. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

C. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$.

D. $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

Câu 11. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_2(3^x - 9)$.

A. $D = (0; +\infty)$.

B. $D = [2; +\infty)$.

C. $D = (2; +\infty)$.

D. $D = \mathbb{R}$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

D. $V = a^3\sqrt{3}$.

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 1. Cho hàm số bậc ba $y = x^3 - 3x$.

Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:	Đúng	Sai
a) Tập xác định hàm số $D = \mathbb{R}$.	☐	☐
b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.	☐	☐
c) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bằng 4.	☐	☐
d) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A(2; 2)$ có hệ số góc bằng 3.	☐	☐

.....

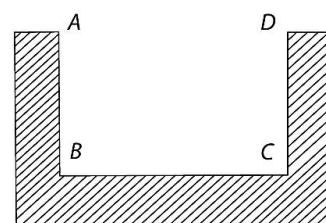
.....

.....

.....

.....

Câu 2. Mặt cắt ngang phần chứa nước của một mương dẫn nước là hình chữ nhật $ABCD$. Để đáp ứng yêu cầu thiết kế, diện tích mặt cắt ngang phần chứa nước trong mương luôn bằng $1,2 m^2$. Gọi $BC = x$ (m) là chiều rộng đáy mương, khi thiết kế người ta muốn tổng chiều dài thành và đáy mương $y = AB + BC + CD$ là ngắn nhất, đồng thời phải thỏa mãn $BC < 10$ (m).



Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:	Đúng	Sai
a) Với $BC = x$, ta có $AB = CD = 1,2x$.	☐	☐
b) Khi đó $y = AB + BC + CD = \frac{1,2}{x} + x$.	☐	☐
c) Đặt $f(x) = AB + BC + CD$, với $0 < x < 10$, thì $f'(x) = 1 - \frac{2,4}{x^2}$.	☐	☐
d) Khảo sát hàm số $y = f(x)$, ta thấy y đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 2$ (m).	☐	☐

.....

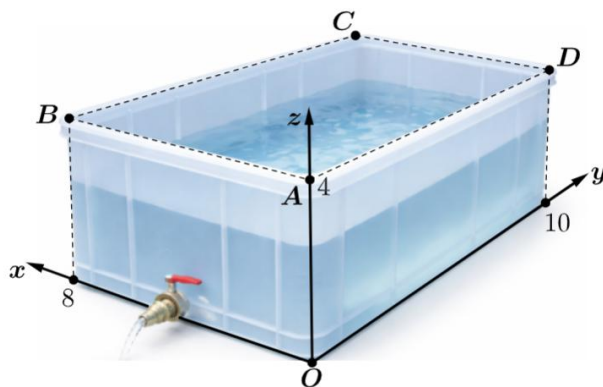
.....

.....

.....

.....

Câu 3. Một bể nước bằng nhựa với phần chứa nước có dạng hình hộp chữ nhật được đặt trong một hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho các tia Ox , Oy , Oz dọc theo ba cạnh của hình hộp như hình vẽ, miệng bể là hình chữ nhật $ABCD$. Biết đơn vị trên mỗi trục là dm và $x_B = 8$; $y_D = 10$; $z_A = 4$.



Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:	Đúng	Sai
a) Tọa độ điểm $A(0; 0; 4)$, $B(8; 0; 4)$, $C(8; 10; 4)$, $D(0; 10; 4)$.	☐	☐
b) Sức chứa tối đa của bể nước là 300 lít.	☐	☐
c) Giả sử α là góc giữa hai vector $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OD}$ thì $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{145}}$.	☐	☐
d) Ban đầu nước đầy bể, người ta xả nước sao cho thể tích nước trong bể giảm $10 \text{ dm}^3 / \text{phút}$. Sau 12 phút thì mực nước trong bể cách miệng bể 1,5 dm.	☐	☐

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = a \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$ ($a \neq 0$). Biết đồ thị hàm số đi qua điểm $A\left(\frac{1}{3}; 5\right)$.

Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:	Đúng	Sai
a) Đạo hàm của hàm số là $f'(x) = a\pi \cos\left(\pi x + \frac{\pi}{6}\right)$.	☐	☐
b) Chu kỳ của hàm số là $T = 1$.	☐	☐
c) Ta có $a = 2$.	☐	☐
d) Hiệu giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên tập xác định là 5.	☐	☐

.....

.....

.....

.....

.....

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. Giả sử một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng, chiều dương hướng lên. Tọa độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) là $y = t^3 - 12t + 3, t \geq 0$. Tính vận tốc của hạt tại thời điểm $t = 8$ giây theo đơn vị m/s.

Trả lời:

Câu 2. Cho hình chóp cụt tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy lớn $ABCD$, đáy nhỏ $A'B'C'D'$. Biết $AB = 8a$, $C'D' = 4a$, $AA' = 4a$ ($a > 0$). Tính góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(CDD'C')$. Kết quả làm tròn đến hàng phần mười độ.

Trả lời:

Câu 3. Một hợp tác xã cần vận chuyển 3600 kg sầu riêng trong một mùa vụ. Hợp tác xã chia thành nhiều chuyến, mỗi chuyến chở x kg ($1 \leq x \leq 3600, x \in \mathbb{N}^*$), giả sử x là ước của 3600 để khối lượng hàng được chia đều cho các chuyến. Chi phí cho mỗi chuyến gồm:

- Phí xe cố định là 50 nghìn đồng/chuyến.
- Phí bảo quản lạnh được tính $0,005x^2$ (nghìn đồng/chuyến).

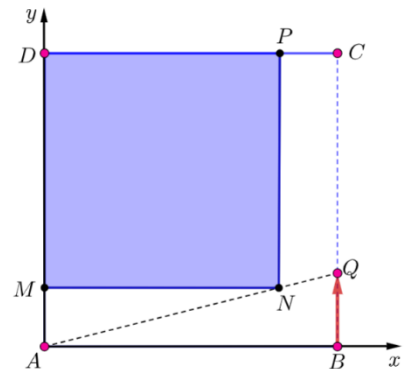
Hỏi mỗi chuyến nên chở bao nhiêu kg để tổng chi phí vận chuyển là nhỏ nhất?

Trả lời:

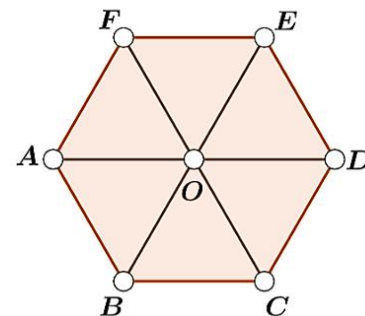


Câu 4. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 10 m, điểm Q chuyển động thẳng đều từ vị trí B đến vị trí C với tốc độ 1 m/s (thời điểm $t = 0$ giây được tính khi Q xuất phát từ B). Với mỗi vị trí của Q , luôn tồn tại hình vuông $DMNP$ với M thuộc đoạn AD , N thuộc AQ và P thuộc đoạn CD . Hỏi tại thời điểm $t = 5$ giây thì diện tích hình vuông $DMNP$ giảm với tốc độ bao nhiêu m^2/s ? Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Trả lời:



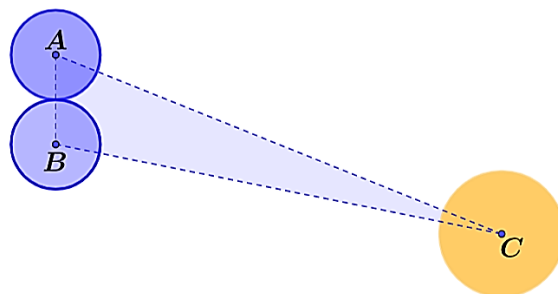
Câu 5. Có 21 bóng đèn gồm 3 màu đỏ, xanh, vàng, mỗi màu gồm 7 bóng được đánh số từ 1 đến 7. Chọn ngẫu nhiên 7 bóng và gắn vào các vị trí O, A, B, C, D, E, F như hình vẽ, $ABCDEF$ là lục giác đều tâm O . Gọi P là xác suất để hai bóng đèn ở hai vị trí kề nhau luôn khác màu, đồng thời ba bóng đèn trên mỗi đường chéo qua tâm AD, BE, CF có số đôi một khác nhau. Biết $P = \frac{m}{n}$ (m, n nguyên dương và phân số $\frac{m}{n}$ tối giản). Hãy tính giá trị $n - 22m^2$.



Trả lời:

Câu 6. Trên một mặt sàn phẳng, có hai viên bi màu xanh đứng yên và tiếp xúc nhau. Gọi A, B lần lượt là các điểm tiếp xúc của hai viên bi xanh với mặt sàn; mỗi viên bi xanh có bán kính 2 cm. Một viên bi màu vàng có bán kính 3 cm, ban đầu tiếp xúc với mặt sàn tại điểm C , trong đó $AC = 26$ cm, $BC = 10\sqrt{5}$ cm.

Viên bi vàng lăn thẳng đều trên mặt sàn về phía hai viên bi xanh với tốc độ 2 cm/s. Hỏi sau bao nhiêu giây kể từ lúc xuất phát thì viên bi vàng tiếp xúc cùng lúc với hai viên bi xanh? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Trả lời:

HẾT

ĐÁP ÁN MÃ ĐỀ 518**PHẦN I.**

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Chọn	A	C	C	A	C	C	B	D	C	C	A	A

PHẦN II.

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4
Đúng	Đúng	Sai	Đúng
Sai	Sai	Sai	Sai
Sai	Sai	Đúng	Đúng
Sai	Sai	Sai	Đúng

PHẦN III

Câu	1	2	3	4	5	6
Chọn	100	180	70,5	5,93	11,3	5378

ĐÁP ÁN MÃ ĐỀ 692**PHẦN I.**

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Chọn	A	C	C	B	C	A	C	A	D	C	C	A

PHẦN II.

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4
Đúng	Sai	Đúng	Đúng
Sai	Sai	Sai	Sai
Sai	Đúng	Đúng	Sai
Sai	Sai	Đúng	Sai

PHẦN III

Câu	1	2	3	4	5	6
Chọn	180	70,5	100	5,93	5378	11,3

ĐỀ KIỂM TRA ĐỊNH KÌ — TOÁN 12 — MÃ ĐỀ 518
LỜI GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$						
y'		+	0	-	0	+				
y				3						$+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

A. $x = 4$.

B. $x = 2$.

C. $x = 3$.

D. $x = -2$.

Lời giải

Theo bảng biến thiên, y' đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua giá trị 4, do đó $x = 4$ là điểm cực tiểu của hàm số. Khi x đi qua 2 thì y' đổi dấu từ dương sang âm nên $x = 2$ là điểm cực đại. Các giá trị 3 và -2 là giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số, không phải điểm cực trị.

Chọn đáp án A.

Câu 2. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng

A. 0.

B. -2 .

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Hàm số f liên tục trên đoạn $[0; 2]$ và $f'(x) = 3x^2 - 3$.

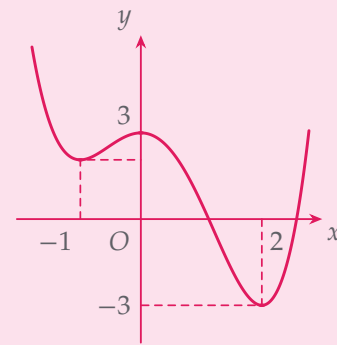
Trên đoạn $[0; 2]$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (giá trị $x = -1$ không thuộc đoạn đang xét).

So sánh các giá trị $f(0) = 0, f(1) = -2, f(2) = 2$, ta được $\max_{[0; 2]} f(x) = f(2) = 2$.

Chọn đáp án C.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng về hàm số đó?

- A. Đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.
- B. Nghịch biến trên khoảng $(-3; 0)$.
- C. Đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.
- D. Nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$.



Lời giải

Từ đồ thị, hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 2)$, đồng biến trên mỗi khoảng $(-1; 0)$ và $(2; +\infty)$.

Do đó phương án “đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$ ” là đúng.

Ba phương án còn lại không đúng: trên $(0; 2)$ hàm số nghịch biến; trên $(-3; 0)$ hàm số nghịch biến trên $(-3; -1)$ nhưng đồng biến trên $(-1; 0)$; trên $(0; 3)$ hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$ nhưng đồng biến trên $(2; 3)$.

Chọn đáp án C.

Câu 4. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$ trên đoạn $[0; 2]$. Tính tổng $M + m$.

- A. 0.
- B. 1.
- C. 2.
- D. -1.

Lời giải

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[0; 2]$. Ta có

$$y' = \frac{2(x+1) - (2x-1)}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2} > 0, \quad \forall x \in [0; 2].$$

Vậy hàm số đồng biến trên đoạn $[0; 2]$, suy ra

$$m = y(0) = -1, \quad M = y(2) = \frac{3}{3} = 1.$$

Do đó $M + m = 0$.

Chọn đáp án A.

Câu 5. Đồ thị hàm số $y = \frac{3x - 2}{x + 2}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng

- A. $x = 3$.
- B. $y = 3$.
- C. $x = -2$.
- D. $y = -2$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Vì $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{3x-2}{x+2} = -\infty$ nên đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án C.

Câu 6. Đạo hàm của hàm số $y = 3^x$ là

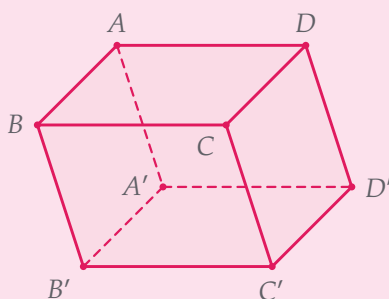
- A.** $y' = x \cdot 3^{x-1}$. **B.** $y' = \frac{3^x}{\ln 3}$. **C.** $y' = 3^x \ln 3$. **D.** $y' = 3^x$.

Lời giải

Áp dụng công thức đạo hàm của hàm số mũ $(a^x)' = a^x \ln a$ với $a = 3$, ta được $y' = 3^x \ln 3$.

Chọn đáp án C.

Câu 7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào là đúng?



- A.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC}$. **B.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.
C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB'}$. **D.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD'}$.

Lời giải

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Vì $ACC'A'$ là hình bình hành và $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'}$ nên

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC'}.$$

Đây chính là quy tắc hình hộp.

Chọn đáp án B.

Câu 8. Đạo hàm của hàm số $y = x \cos x$ là

- A.** $y' = \cos x + x \sin x$. **B.** $y' = -\sin x$.
C. $y' = 1 - \sin x$. **D.** $y' = \cos x - x \sin x$.

Lời giải

Áp dụng quy tắc đạo hàm của một tích $(uv)' = u'v + uv'$ với $u = x$, $v = \cos x$:

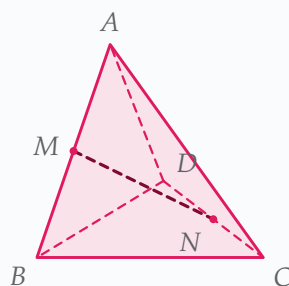
$$y' = (x)' \cos x + x(\cos x)' = \cos x - x \sin x.$$

Chọn đáp án D.

Câu 9. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Đẳng thức nào sau đây sai?

- A. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.
 B. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.
 C. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$.
 D. $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

Lời giải



• **Các đẳng thức đúng.** Vì M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD nên $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$.

Theo quy tắc ba điểm, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$ và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$. Cộng vế theo vế hai đẳng thức này ta được

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}, \quad \text{tức là} \quad \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}).$$

Lập luận tương tự với $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$ và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN}$, ta được $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

• **Đẳng thức sai.** Cũng theo quy tắc ba điểm, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$ và $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}$, do đó

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}.$$

Suy ra $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC})$, khác với $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$ vì $\overrightarrow{BC} \neq \vec{0}$.

Chọn đáp án C.

Câu 10. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_2(3^x - 9)$.

- A. $D = (0; +\infty)$. B. $D = [2; +\infty)$. C. $D = (2; +\infty)$. D. $D = \mathbb{R}$.

Lời giải

Hàm số xác định khi và chỉ khi

$$3^x - 9 > 0 \Leftrightarrow 3^x > 3^2 \Leftrightarrow x > 2$$

(vì cơ số $3 > 1$ nên hàm số mũ 3^x đồng biến trên $\mathbb{R}$).

Vậy $D = (2; +\infty)$.

Chọn đáp án C.

Câu 11. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

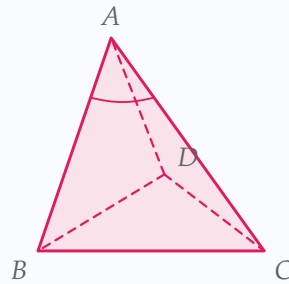
A. $\frac{a^2}{2}$.

B. $-\frac{a^2}{2}$.

C. a^2 .

D. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Vì $ABCD$ là tứ diện đều cạnh a nên tam giác ABC là tam giác đều cạnh a , do đó $AB = AC = a$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

Góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ chính là $\widehat{BAC}$, nên

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

Chọn đáp án A.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

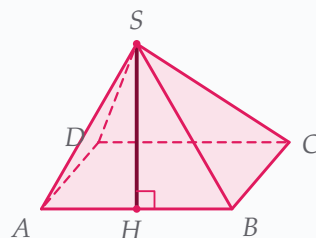
A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

D. $V = a^3\sqrt{3}$.

Lời giải



• **Xác định chiều cao.** Gọi H là trung điểm của AB . Tam giác SAB đều nên $SH \perp AB$.

Hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ vuông góc với nhau, cắt nhau theo giao tuyến AB ; mà $SH \subset (SAB)$

và $SH \perp AB$, do đó $SH \perp (ABCD)$. Vậy SH là chiều cao của khối chóp và $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (đường cao tam giác đều cạnh a).

- **Tính thể tích.** Diện tích đáy $S_{ABCD} = a^2$, do đó

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$

Chọn đáp án A.

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho hàm số bậc ba $y = x^3 - 3x$. Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:

- a) Tập xác định hàm số $D = \mathbb{R}$. ☐
- b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$. ☐
- c) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bằng 4. ☐
- d) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A(2; 2)$ có hệ số góc bằng 3. ☐

Lời giải

• **Khảo sát ban đầu.** Hàm số là hàm đa thức nên xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Ta có $y' = 3x^2 - 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 1$; $y' > 0$ trên $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$, $y' < 0$ trên $(-1; 1)$.

- **a) Đúng.** Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.
- **b) Sai.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$, trong đó có chứa các điểm thuộc $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$, nên hàm số không đồng biến trên hai khoảng đó.
- **c) Sai.** Hai điểm cực trị của đồ thị là $M(-1; 2)$ và $N(1; -2)$, do đó

$$MN = \sqrt{(1+1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \neq 4.$$

• **d) Sai.** Vì $y(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 = 2$ nên $A(2; 2)$ thuộc đồ thị. Hệ số góc của tiếp tuyến tại A là $y'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 9$.

Đáp số. a) Đ b) S c) S d) S

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = a \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$ ($a \neq 0$). Biết đồ thị hàm số đi qua điểm $A\left(\frac{1}{3}; 5\right)$. Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:

- a) Đạo hàm của hàm số là $f'(x) = a\pi \cos\left(\pi x + \frac{\pi}{6}\right)$. ☐
- b) Chu kỳ của hàm số là $T = 1$. ☐
- c) Ta có $a = 2$. ☐
- d) Hiệu giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên tập xác định là 5. ☐

Lời giải

- **Xác định tham số.** Vì đồ thị đi qua $A\left(\frac{1}{3}; 5\right)$ nên

$$a \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + 2 = 5 \Leftrightarrow a \sin \frac{\pi}{2} + 2 = 5 \Leftrightarrow a = 3.$$

- **a) Đúng.** Theo quy tắc đạo hàm của hàm số hợp, $f'(x) = a \cos\left(\pi x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \left(\pi x + \frac{\pi}{6}\right)' = a\pi \cos\left(\pi x + \frac{\pi}{6}\right)$.

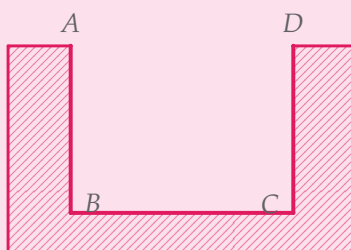
- **b) Sai.** Hàm số $y = \sin(\omega x + \varphi)$ với $\omega = \pi$ tuần hoàn với chu kì $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

- **c) Sai.** Theo trên $a = 3$.

- **d) Sai.** Với $a = 3$, do $-1 \leq \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$ nên $-1 \leq f(x) \leq 5$; hai dấu bằng đều xảy ra. Vậy giá trị lớn nhất bằng 5, giá trị nhỏ nhất bằng -1 và hiệu của chúng bằng 6.

Đáp số. a) Đ b) S c) S d) S

Câu 3. Mặt cắt ngang phần chứa nước của một mương dẫn nước là hình chữ nhật $ABCD$. Để đáp ứng yêu cầu thiết kế, diện tích mặt cắt ngang phần chứa nước trong mương luôn bằng $1,2 \text{ m}^2$. Gọi $BC = x$ (m) là chiều rộng đáy mương, khi thiết kế người ta muốn tổng chiều dài thành và đáy mương $y = AB + BC + CD$ là ngắn nhất, đồng thời phải thỏa mãn $BC < 10$ (m).



Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:

- a)** Với $BC = x$, ta có $AB = CD = 1,2x$. ☐

- b)** Khi đó $y = AB + BC + CD = \frac{2,4}{x} + x$. ☐

- c)** Đặt $f(x) = AB + BC + CD$, với $0 < x < 10$, thì $f'(x) = 1 - \frac{2,4}{x^2}$. ☐

- d)** Khảo sát hàm số $y = f(x)$, ta thấy y đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 2$ (m). ☐

Lời giải

- **Biểu diễn các cạnh.** Mặt cắt $ABCD$ là hình chữ nhật có $BC = x$ là cạnh đáy, $AB = CD$ là chiều cao. Từ $AB \cdot BC = 1,2$ suy ra $AB = CD = \frac{1,2}{x}$ với $0 < x < 10$.

- **a) Sai.** Theo trên $AB = CD = \frac{1,2}{x}$, không phải $1,2x$.

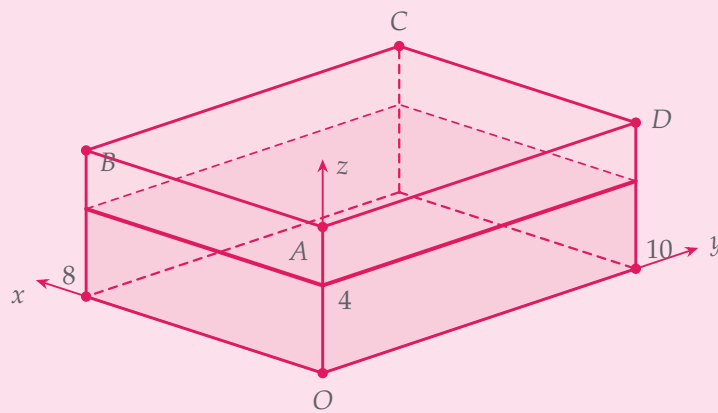
- **b) Đúng.** $y = AB + BC + CD = \frac{1,2}{x} + x + \frac{1,2}{x} = \frac{2,4}{x} + x$.

• **c) Đúng.** Với $f(x) = \frac{2,4}{x} + x$ trên khoảng $(0; 10)$ ta có $f'(x) = -\frac{2,4}{x^2} + 1 = 1 - \frac{2,4}{x^2}$.

• **d) Sai.** Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2,4 \Leftrightarrow x = \sqrt{2,4} = \frac{2\sqrt{15}}{5}$ (chỉ lấy nghiệm dương). Vì $f'(x) < 0$ trên $(0; \sqrt{2,4})$ và $f'(x) > 0$ trên $(\sqrt{2,4}; 10)$ nên f đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \sqrt{2,4} \approx 1,55$ (m), không phải tại $x = 2$ (m).

Đáp số. a) S b) Đ c) Đ d) S

Câu 4. Một bể nước bằng nhựa với phần chứa nước có dạng hình hộp chữ nhật được đặt trong một hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho các tia Ox, Oy, Oz dọc theo ba cạnh của hình hộp như hình vẽ, miệng bể là hình chữ nhật $ABCD$. Biết đơn vị trên mỗi trục là dm và $x_B = 8$; $y_D = 10$; $z_A = 4$.



Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:

a) Tọa độ điểm $A(0;0;4)$, $B(8;0;4)$, $C(8;10;4)$, $D(0;10;4)$.

☐

b) Sức chứa tối đa của bể nước là 300 lít.

☐

c) Giả sử α là góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OD}$ thì $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{145}}$.

☐

d) Ban đầu nước đầy bể, người ta xả nước sao cho thể tích nước trong bể giảm 10 $\text{dm}^3/\text{phút}$. Sau 12 phút thì mực nước trong bể cách miệng bể 1,5 dm.

☐

Lời giải

• **a) Đúng.** Điểm A thuộc tia Oz và $z_A = 4$ nên $A(0;0;4)$. Miệng bể $ABCD$ nằm trong mặt phẳng $z = 4$; từ $x_B = 8$ và $y_D = 10$ suy ra $B(8;0;4)$, $D(0;10;4)$ và $C(8;10;4)$.

• **b) Sai.** Ba kích thước của bể là 8 dm, 10 dm và 4 dm nên thể tích của bể bằng $8 \cdot 10 \cdot 4 = 320$ (dm^3), tức là 320 lít.

• **c) Đúng.** Ta có $\overrightarrow{OB} = (8;0;4)$ và $\overrightarrow{OD} = (0;10;4)$, do đó

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD}}{|\overrightarrow{OB}| \cdot |\overrightarrow{OD}|} = \frac{8 \cdot 0 + 0 \cdot 10 + 4 \cdot 4}{\sqrt{80} \cdot \sqrt{116}} = \frac{16}{8\sqrt{145}} = \frac{2}{\sqrt{145}}.$$

• **d) Đúng.** Sau 12 phút, thể tích nước đã xả là $10 \cdot 12 = 120$ (dm^3), thể tích nước còn lại là $320 - 120 = 200$ (dm^3). Diện tích đáy bể bằng $8 \cdot 10 = 80$ (dm^2) nên chiều cao cột nước là $\frac{200}{80} = 2,5$ (dm). Vậy mực nước cách miệng bể $4 - 2,5 = 1,5$ (dm).

Đáp số. a) Đ b) S c) Đ d) Đ

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Một hợp tác xã cần vận chuyển 3600 kg sầu riêng trong một mùa vụ. Hợp tác xã chia thành nhiều chuyến, mỗi chuyến chở x kg ($1 \leq x \leq 3600, x \in \mathbb{N}^*$), giả sử x là ước của 3600 để khối lượng hàng được chia đều cho các chuyến. Chi phí cho mỗi chuyến gồm:

- Phí xe cố định là 50 nghìn đồng/chuyến.
- Phí bảo quản lạnh được tính $0,005x^2$ (nghìn đồng/chuyến).

Hỏi mỗi chuyến nên chở bao nhiêu kg để tổng chi phí vận chuyển là nhỏ nhất?

KQ:

Lời giải

- **Lập hàm chi phí.** Số chuyến vận chuyển là $\frac{3600}{x}$. Tổng chi phí vận chuyển (đơn vị: nghìn đồng) là

$$T(x) = \frac{3600}{x} (50 + 0,005x^2) = \frac{180\,000}{x} + 18x.$$

- **Tìm giá trị nhỏ nhất.** Xét hàm số $f(x) = \frac{180\,000}{x} + 18x$ trên khoảng $(0; 3600]$. Ta có

$$f'(x) = -\frac{180\,000}{x^2} + 18, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 10\,000 \Leftrightarrow x = 100 \ (x > 0).$$

Vì $f'(x) < 0$ trên $(0; 100)$ và $f'(x) > 0$ trên $(100; 3600]$ nên f đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 100$, với $f(100) = 1800 + 1800 = 3600$ (nghìn đồng).

- **Kết luận.** Giá trị $x = 100$ thỏa mãn điều kiện $1 \leq x \leq 3600$ và 100 là ước của 3600 (vì $3600 = 100 \cdot 36$). Vậy mỗi chuyến nên chở 100 kg.

Đáp số. 100.

Câu 2. Giả sử một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng, chiều dương hướng lên. Tọa độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) là $y = t^3 - 12t + 3, t \geq 0$. Tính vận tốc của hạt tại thời điểm $t = 8$ giây theo đơn vị m/s.

KQ:

Lời giải

Vận tốc tức thời của hạt tại thời điểm t là đạo hàm của tọa độ theo thời gian:

$$v(t) = y'(t) = 3t^2 - 12.$$

Do đó $v(8) = 3 \cdot 8^2 - 12 = 192 - 12 = 180$ (m/s).

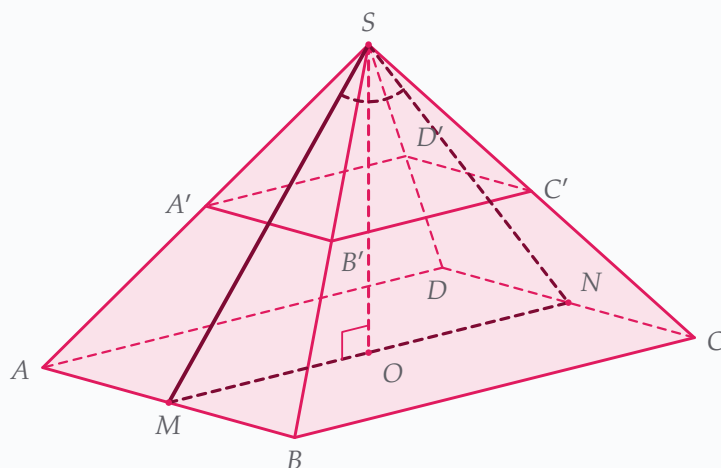
Đáp số. 180.

Câu 3. Cho hình chóp cắt tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy lớn $ABCD$, đáy nhỏ $A'B'C'D'$. Biết $AB = 8a$, $C'D' = 4a$, $AA' = 4a$ ($a > 0$). Tính góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(CDD'C')$. Kết quả làm tròn đến hàng phần mười độ.

KQ:

Lời giải

• **Dựng hình chóp sinh ra hình chóp cắt.** Kéo dài các cạnh bên AA' , BB' , CC' , DD' , chúng cắt nhau tại điểm S ; khi đó $ABCD.A'B'C'D'$ là phần của hình chóp đều $S.ABCD$ nằm giữa đáy $ABCD$ và mặt phẳng $(A'B'C'D')$.



Vì $A'B'C'D'$ và $ABCD$ là hai hình vuông có $A'B' = 4a = \frac{1}{2}AB$ nên A' là trung điểm của SA , do đó $SA' = AA' = 4a$ và $SA = 8a$.

• **Xác định góc phẳng.** Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$; M , N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Hình chóp $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Ta có $AB \perp OM$ và $AB \perp SO$ nên $AB \perp (SOM)$, suy ra $AB \perp SM$. Tương tự $CD \perp SN$.

Hai mặt phẳng $(ABB'A') = (SAB)$ và $(CDD'C') = (SCD)$ cắt nhau theo giao tuyến d đi qua S và song song với AB (vì $AB \parallel CD$). Do $SM \perp AB$ và $SN \perp CD$ nên $SM \perp d$, $SN \perp d$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng đã cho bằng góc giữa hai tia SM và SN , tức là $\widehat{MSN}$ nếu góc này không tù.

• **Tính số đo.** Đường chéo hình vuông $ABCD$ bằng $8a\sqrt{2}$ nên $AO = 4a\sqrt{2}$, do đó

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{64a^2 - 32a^2} = 4a\sqrt{2}.$$

Vì $OM = \frac{AD}{2} = 4a$ và $SO \perp OM$ nên $SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \sqrt{32a^2 + 16a^2} = 4a\sqrt{3}$; tương tự $SN = 4a\sqrt{3}$. Ngoài ra $MN = AD = 8a$. Trong tam giác SMN , theo định lí côsin:

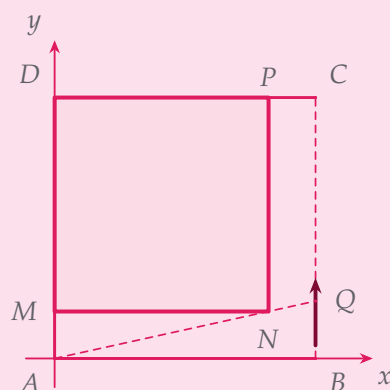
$$\cos \widehat{MSN} = \frac{SM^2 + SN^2 - MN^2}{2 \cdot SM \cdot SN} = \frac{48a^2 + 48a^2 - 64a^2}{2 \cdot 48a^2} = \frac{1}{3}.$$

Suy ra $\widehat{MSN} \approx 70,5^\circ$.

Đáp số. $70,5^\circ$.

Câu 4. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 10 m, điểm Q chuyển động thẳng đều từ vị trí B đến vị trí C với tốc độ 1 m/s (thời điểm $t = 0$ giây được tính khi Q xuất phát từ B). Với mỗi vị trí của Q , luôn tồn tại hình vuông $DMNP$ với M thuộc đoạn AD , N thuộc AQ và P thuộc đoạn CD . Hỏi tại thời điểm $t = 5$ giây thì diện tích hình vuông $DMNP$ giảm với tốc độ bao nhiêu m^2/s ? Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

KQ:



Lời giải

• **Thiết lập hàm diện tích.** Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ: $A(0;0)$, $B(10;0)$, $C(10;10)$, $D(0;10)$. Sau t giây, điểm Q ở vị trí $Q(10;t)$ với $0 \leq t \leq 10$.

Gọi s là độ dài cạnh của hình vuông $DMNP$. Khi đó $M(0;10-s)$, $N(s;10-s)$ và $P(s;10)$.

Đường thẳng AQ đi qua gốc tọa độ với hệ số góc $\frac{t}{10}$ nên có phương trình $y = \frac{t}{10}x$. Vì $N \in AQ$ nên

$$10 - s = \frac{t}{10} \cdot s \Leftrightarrow s(t + 10) = 100 \Leftrightarrow s = \frac{100}{t + 10}.$$

Diện tích hình vuông $DMNP$ là $S(t) = s^2 = \frac{10000}{(t + 10)^2}$.

• **Tốc độ thay đổi của diện tích.** Đạo hàm theo t :

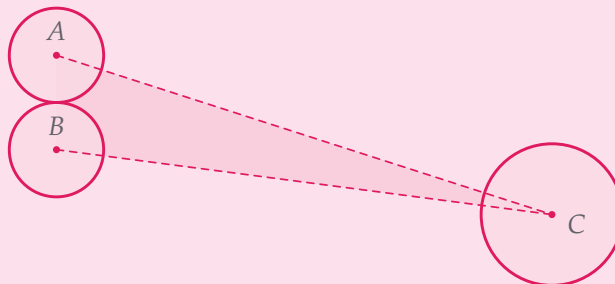
$$S'(t) = 10000 \cdot [(t + 10)^{-2}]' = -\frac{20000}{(t + 10)^3}.$$

$$\text{Tại } t = 5: S'(5) = -\frac{20000}{15^3} = -\frac{20000}{3375} = -\frac{160}{27} \approx -5,93.$$

Vì $S'(5) < 0$ nên diện tích đang giảm, với tốc độ khoảng $5,93 \text{ m}^2/\text{s}$.

Đáp số. 5,93.

Câu 5. Trên một mặt sàn phẳng, có hai viên bi màu xanh đứng yên và tiếp xúc nhau. Gọi A, B lần lượt là các điểm tiếp xúc của hai viên bi xanh với mặt sàn; mỗi viên bi xanh có bán kính 2 cm. Một viên bi màu vàng có bán kính 3 cm, ban đầu tiếp xúc với mặt sàn tại điểm C , trong đó $AC = 26$ cm, $BC = 10\sqrt{5}$ cm. Viên bi vàng lăn thẳng đều trên mặt sàn về phía hai viên bi xanh với tốc độ 2 cm/s. Hỏi sau bao nhiêu giây kể từ lúc xuất phát thì viên bi vàng tiếp xúc cùng lúc với hai viên bi xanh? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

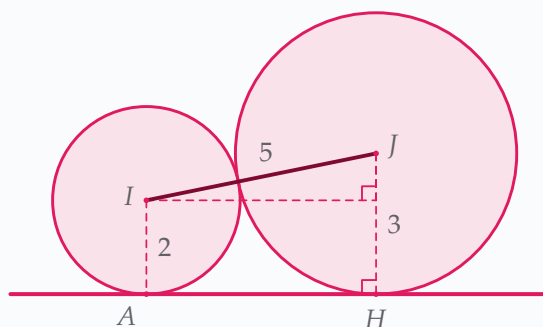


KQ:

Lời giải

• **Điều kiện tiếp xúc của hai viên bi.** Xét mặt phẳng đi qua tâm I của một viên bi xanh và tâm J của viên bi vàng, vuông góc với mặt sàn. Gọi A, H lần lượt là tiếp điểm của hai viên bi đó với mặt sàn, khi đó $IA = 2$, $JH = 3$ và IA, JH cùng vuông góc với mặt sàn. Hai viên bi tiếp xúc ngoài khi và chỉ khi $IJ = 2 + 3 = 5$. Hình chiếu của IJ xuống mặt sàn là AH và hiệu hai khoảng cách đến mặt sàn là $3 - 2 = 1$, do đó

$$AH = \sqrt{IJ^2 - (3 - 2)^2} = \sqrt{25 - 1} = 2\sqrt{6} \text{ (cm)}.$$



Như vậy, viên bi vàng tiếp xúc với một viên bi xanh khi và chỉ khi khoảng cách giữa hai tiếp điểm của chúng với mặt sàn bằng $2\sqrt{6}$ cm.

• **Xác định vị trí tiếp xúc đồng thời.** Hai viên bi xanh tiếp xúc nhau nên $AB = 2 + 2 = 4$ (cm).

Gọi P là tiếp điểm của viên bi vàng với mặt sàn tại thời điểm nó tiếp xúc cùng lúc với hai viên bi xanh, khi đó $PA = PB = 2\sqrt{6}$, nên P thuộc đường trung trực của đoạn AB .

Chọn hệ trục tọa độ Ixy trên mặt sàn với I là trung điểm của AB , trục Iy chứa AB : khi đó $A(0; 2)$, $B(0; -2)$. Gọi $C(x_0; y_0)$, từ $AC = 26$ và $BC = 10\sqrt{5}$ ta có hệ

$$\begin{cases} x_0^2 + (y_0 - 2)^2 = 676 \\ x_0^2 + (y_0 + 2)^2 = 500 \end{cases} \Rightarrow -8y_0 = 176 \Rightarrow y_0 = -22, \quad x_0^2 = 100.$$

Chọn $x_0 = 10$ (viên bi vàng nằm về một phía của đường thẳng AB), tức $C(10; -22)$.

Điểm P nằm trên trục Ix nên $P(p; 0)$ với $p^2 + 2^2 = (2\sqrt{6})^2 = 24$, suy ra $p = \pm 2\sqrt{5}$. Vì viên bi vàng đi từ phía $x > 0$ nên $P(2\sqrt{5}; 0)$.

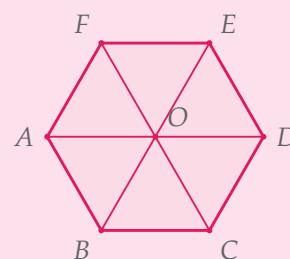
• **Tính thời gian.** Quãng đường viên bi vàng đi được là

$$CP = \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})^2 + 22^2} = \sqrt{604 - 40\sqrt{5}} \approx 22,684 \text{ (cm)}.$$

Với tốc độ 2 cm/s, thời gian cần tìm là $\frac{CP}{2} \approx 11,3$ (giây).

Đáp số. 11,3.

Câu 6. Có 21 bóng đèn gồm 3 màu đỏ, xanh, vàng, mỗi màu gồm 7 bóng được đánh số từ 1 đến 7. Chọn ngẫu nhiên 7 bóng và gắn vào các vị trí O, A, B, C, D, E, F như hình vẽ, $ABCDEF$ là lục giác đều tâm O . Gọi P là xác suất để hai bóng đèn ở hai vị trí kề nhau luôn khác màu, đồng thời ba bóng đèn trên mỗi đường chéo qua tâm AD, BE, CF có số đôi một khác nhau. Biết $P = \frac{m}{n}$ (m, n nguyên dương và phân số $\frac{m}{n}$ tối giản). Hãy tính giá trị $n - 22m^2$.



KQ:

Lời giải

• **Không gian mẫu.** Mỗi kết quả của phép thử là một cách chọn 7 bóng trong 21 bóng đôi một khác nhau rồi gắn vào 7 vị trí phân biệt, nên

$$n(\Omega) = A_{21}^7 = 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 = 586\,051\,200.$$

• **Điều kiện về màu.** Vị trí O kề với cả sáu vị trí A, B, C, D, E, F nên màu ở O khác màu ở cả sáu đỉnh. Vì chỉ có ba màu nên sáu đỉnh chỉ dùng hai màu còn lại; mặt khác A, B, C, D, E, F tạo thành một chu trình mà hai vị trí kề nhau khác màu, nên hai màu đó phải xen kẽ: A, C, E cùng một màu và B, D, F cùng màu kia.

Số cách chọn cách tô màu như vậy là $3 \cdot 2 = 6$ (chọn màu cho O , rồi chọn màu cho bộ A, C, E).

• **Điều kiện về số.** Ký hiệu a, c, e, b, d, f, o lần lượt là số ghi trên bóng đèn ở các vị trí A, C, E, B, D, F, O . Ba bóng ở A, C, E cùng màu và đôi một khác nhau nên a, c, e đôi một khác nhau; tương tự với b, d, f .

Điều kiện ba số trên mỗi đường chéo đôi một khác nhau tương đương với: o khác cả sáu số còn lại, đồng thời $a \neq d, b \neq e, c \neq f$.

Số o có 7 cách chọn. Đặt $S = \{1; 2; \dots; 7\} \setminus \{o\}$, khi đó $|S| = 6$ và bộ $(a; c; e)$ là một chỉnh hợp chập 3 của S : có $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ cách.

Với mỗi bộ $(a; c; e)$ đã chọn, ta đếm số chỉnh hợp chập 3 của S dạng $(d; b; f)$ thỏa mãn $d \neq a, b \neq e, f \neq c$; gọi số đó là N . Áp dụng nguyên lý bù trừ như sau.

• **Đếm số bộ $(d; b; f)$.** Gọi X_1, X_2, X_3 lần lượt là tập các chỉnh hợp có $d = a$, có $b = e$, có $f = c$. Ta có $|X_i| = 5 \cdot 4 = 20$, $|X_i \cap X_j| = 4$ và $|X_1 \cap X_2 \cap X_3| = 1$, nên

$$|X_1 \cup X_2 \cup X_3| = 3 \cdot 20 - 3 \cdot 4 + 1 = 49.$$

Vậy $N = 120 - 49 = 71$.

• **Tính xác suất.** Số kết quả thuận lợi là

$$6 \cdot 7 \cdot 120 \cdot 71 = 357\,840,$$

do đó $P = \frac{357\,840}{586\,051\,200} = \frac{71}{116\,280}$. Phân số này tối giản vì 71 là số nguyên tố và 116 280 không chia hết cho 71.

• **Kết luận.** Với $m = 71$ và $n = 116\,280$,

$$n - 22m^2 = 116\,280 - 22 \cdot 71^2 = 116\,280 - 110\,902 = 5378.$$

Đáp số. 5378.