PHAN NHẬT LINH

NẮM TRỌN CÁC CHUYÊN ĐỀ

HÀM SỐ

2023

File word dành cho giáo viên liên hệ Zalo: 0817.098.716

CÂU HỎI
Đa dạng, đầy đủ mức độ và thường xuất hiện trong đề thi của Bộ.

GIẢI CHI TIẾT
Được giải chi tiết 100%, dễ dàng phục vụ học tập và tra cứu.

TRÌNH BÀY
Khoa học, dễ hiểu và tiếp cận kiến thức

TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ

CHỦ ĐỀ 01: CƠ BẢN VỀ TÍNH ĐƠN ĐIỆU HÀM SỐ

LÝ THUYẾT

❖ **Điều kiện để hàm số đơn điệu trên khoảng K.**

- **Định nghĩa 1.**

Giả sử K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng và $y=f(x)$ là một hàm số xác định trên K, ta nói:

Hàm số $y=f(x)$ được gọi là **đồng biến** (tăng) trên K nếu

$$\forall x_1,x_2\in K, x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

Hàm số $y=f(x)$ được gọi là **nghịch biến** (giảm) trên K nếu

$$\forall x_1,x_2\in K, x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K gọi chung là **đơn điệu** trên K.

❖ **Nhận xét.**

- **Nhận xét 1.**
  - Nếu hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cùng đồng biến (nghịch biến) trên D thì hàm số $f(x)+g(x)$ cũng đồng biến *(nghịch biến)* trên D. Tính chất này có thể không đúng đối với hiệu $f(x)-g(x)$.
- **Nhận xét 2.**
  - Nếu hàm số $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số dương và cùng đồng biến (nghịch biến) trên D thì hàm số $f(x).g(x)$ cũng đồng biến (nghịch biến) trên D. Tính chất này có thể không đúng khi các hàm số $f(x),g(x)$ không là các hàm số dương trên D.
- **Nhận xét 3.**
  - Cho hàm số $u=u(x)$, xác định với $x\in(a;b)$ và $u(x)\in(c;d)$. Hàm số $f[u(x)]$ cũng xác định với $x\in(a;b)$. Ta có nhận xét sau:
  - Giả sử hàm số $u=u(x)$ đồng biến với $x\in(a;b)$. Khi đó, hàm số $f[u(x)]$ đồng biến với $x\in(a;b)\Leftrightarrow f(u)$ đồng biến với $u\in(c;d)$.
  - Giả sử hàm số $u=u(x)$ nghịch biến với $x\in(a;b)$. Khi đó, hàm số $f[u(x)]$ nghịch biến với $x\in(a;b)\Leftrightarrow f(u)$ nghịch biến với $u\in(c;d)$.

❖ **Định lí 1.**

- Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K. Khi đó:

Nếu hàm số đồng biến trên khoảng K thì $f'(x)\geq 0,\forall x\in K$.

Nếu hàm số nghịch biến trên khoảng K thì $f'(x)\leq 0,\forall x\in K$.

❖ **Định lí 2.**

- Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K. Khi đó:

Nếu $f'(x)>0,\forall x\in K$ thì hàm số f đồng biến trên K.

Nếu $f'(x)<0,\forall x\in K$ thì hàm số f nghịch biến trên K.

Nếu $f'(x)=0,\forall x\in K$ thì hàm số f không đổi trên K.

❖ **Định lý về điều kiện đủ để hàm số đơn điệu:**

- Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K. Khi đó:

  Nếu $f'(x)\geq 0,\ \forall x\in K$ và $f'(x)=0$ chỉ tại hữu hạn điểm thuộc K thì hàm số f đồng biến trên K.

  Nếu $f'(x)\leq 0,\ \forall x\in K$ và $f'(x)=0$ chỉ tại hữu hạn điểm thuộc K thì hàm số f nghịch biến trên K

Bài toán 1. Tìm tham số m để hàm số $y=f(x;m)$ đơn điệu trên khoảng $(\alpha;\beta)$.

- **Bước 1:** Ghi điều kiện để $y=f(x;m)$ đơn điệu trên $(\alpha;\beta)$. Chẳng hạn:
- Đề yêu cầu $y=f(x;m)$ đồng biến trên $(\alpha;\beta)\Rightarrow y'=f'(x;m)\geq 0$.
- Đề yêu cầu $y=f(x;m)$ nghịch biến trên $(\alpha;\beta)\Rightarrow y'=f'(x;m)\leq 0$.
- **Bước 2:** Độc lập m ra khỏi biến số và đặt vế còn lại là $g(x)$, có hai trường hợp thường gặp :
- $m\geq g(x),\ \forall x\in(\alpha;\beta)\Rightarrow m\geq \max\limits_{(\alpha;\beta)} g(x)$.
- $m\leq g(x),\ \forall x\in(\alpha;\beta)\Rightarrow m\leq \min\limits_{(\alpha;\beta)} g(x)$.
- **Bước 3:** Khảo sát tính đơn điệu của hàm số $g(x)$ trên D (hoặc sử dụng Cauchy) để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất. Từ đó suy ra m.

Bài toán 2. Tìm tham số m để hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ đơn điệu trên khoảng $(\alpha;\beta)$.

- Tìm tập xác định, chẳng hạn $x\neq -\dfrac{d}{c}$. Tính đạo hàm y'.
- Hàm số đồng biến $\Rightarrow y'>0$ (hàm số nghịch biến $\Rightarrow y'<0$). Giải ra tìm được m (1).
- Vì $x\neq -\dfrac{d}{c}$ và có $x\in(\alpha;\beta)$ nên $-\dfrac{d}{c}\notin(\alpha;\beta)$. Giải ra tìm được m (2).
- Lấy giao của (1) và (2) được các giá trị m cần tìm.

➢ **Cần nhớ**: "Nếu hàm số $f(t)$ đơn điệu một chiều trên miền D *(luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến)* thì phương trình $f(t)=0$ có tối đa một nghiệm và $\forall u,\ v\in D$ thì $f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v$.

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-9)(x-4)^2$. Khi đó hàm số $y=f(x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(-3;0)$. **C.** $(-\infty;-3)$. **D.** $(-2;2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=\left[f(x^2)\right]'=(x^2)'x^4(x^2-9)(x^2-4)^2=2x^5(x-3)(x+3)(x-2)^2(x+2)^2$.

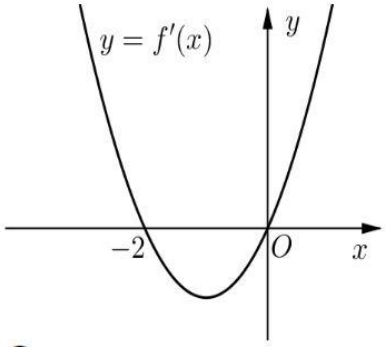
Cho $y'=0\Leftrightarrow x=-3$ hoặc $x=-2$ hoặc $x=0$ hoặc $x=2$ hoặc $x=3$.

Ta có bảng xét dấu của y'

x	$-\infty$		-3		-2		0		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, hàm số $y=f(x^2)$ nghịch biến trên $(-\infty;-3)$ và $(0;3)$.

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y=f(x^2-1)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(-1;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(0;+\infty)$.

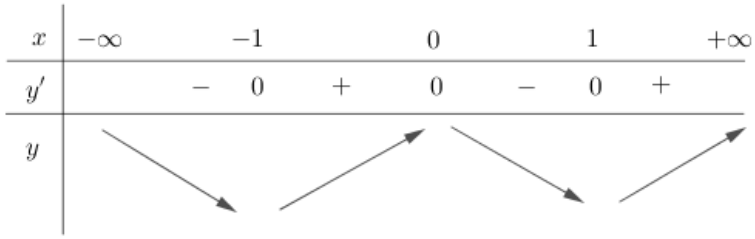
Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=2x.f'(x^2-1)$.

$$y'=0\Leftrightarrow 2x.f'(x^2-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-1=-2\\x^2-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=-1\\x^2=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-1\end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên



Nhìn bảng biến thiên hàm số $y=f(x^2-1)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+2)(x^2+mx+5)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Số giá trị nguyên âm của m để hàm số $g(x)=f(x^2+x-2)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=(2x+1).f'(x^2+x-2)$. Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow g'(x)\geq 0\ \forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow f'(x^2+x-2)\geq 0\ \forall x\in(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow (x^2+x-2)^2(x^2+x)\left((x^2+x-2)^2+m(x^2+x-2)+5\right)\geq 0\ \forall x\in(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow (x^2+x-2)^2+m(x^2+x-2)+5\geq 0\quad (1)\ \forall x\in(1;+\infty)$.

Đặt $t=x^2+x-2$, $x\in(1;+\infty)\Rightarrow t>0$.

Khi đó (1) trở thành $t^2+mt+5\geq 0\ \forall t\in(0;+\infty)\Leftrightarrow t+\dfrac{5}{t}\geq -m\quad (2)\ \forall t\in(0;+\infty)$

Để (1) nghiệm đúng với mọi $x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow(2)$ nghiệm đúng với mọi $t\in(0;+\infty)$.

Ta có $h(t)=t+\dfrac{5}{t}\geq 2\sqrt{5}$ với $\forall t\in(0;+\infty)$. Dấu bằng xảy ra khi $t=\dfrac{5}{t}\Leftrightarrow t=\sqrt{5}$.

Suy ra $\underset{t\in(0;+\infty)}{Min}\left(h(t)\right)=2\sqrt{5}\Rightarrow(2)$ nghiệm đúng $\forall t\in(0;+\infty)\Leftrightarrow -m\leq 2\sqrt{5}\Leftrightarrow m\geq -2\sqrt{5}$.

Vậy số giá trị nguyên âm của m là 4.

VÍ DỤ 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Bất phương trình $f(x)<e^{x^2}+m$ đúng với mọi $x\in(-1;1)$ khi và chỉ khi

A. $m\geq f(0)-1$. **B.** $m>f(-1)-e$. **C.** $m>f(0)-1$. **D.** $m\geq f(-1)-e$.

Lời giải

Chọn C

Có $f(x)<e^{x^2}+m,\forall x\in(-1;1)\Leftrightarrow m>g(x)=f(x)-e^{x^2},\forall x\in(-1;1)$ (1)

Ta có $g'(x)=f'(x)-2x.e^{x^2}$ có nghiệm $x=0\in(-1;1)$ và $\begin{cases}g'(x)>0,\forall x\in(-1;0)\\ g'(x)<0,\forall x\in(0;1)\end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	-1		0		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗	$f(0)-1$	↘	

Do đó $\max\limits_{(-1;1)}g(x)=g(0)=f(0)-1$. Ta được $(1)\Leftrightarrow m>f(0)-1$.

VÍ DỤ 5. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
y	4	↘	1	↗	3	↘	1	↗	3

Bất phương trình $f(x)<3e^{x+2}+m$ có nghiệm $x\in(-2;2)$ khi và chỉ khi:

A. $m\geq f(-2)-3$. **B.** $m>f(2)-3e^4$. **C.** $m\geq f(2)-3e^4$. **D.** $m>f(-2)-3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f(x)<3e^{x+2}+m\Leftrightarrow f(x)-3e^{x+2}<m$.

Đặt $h(x)=f(x)-3e^{x+2}\Rightarrow h'(x)=f'(x)-3e^{x+2}$.

Vì $\forall x\in(-2;2),f'(x)\leq 3$ và $x\in(-2;2)\Rightarrow x+2\in(0;4)\Rightarrow 3e^{x+2}\in(3;3e^4)$

Nên $h'(x)=f'(x)-3e^{x+2}<0,\forall x\in(-2;2)\Rightarrow f(2)-3e^4<h(x)<f(-2)-3$.

Vậy bất phương trình $f(x)<3e^{x+2}+m$ có nghiệm $x\in(-2;2)$ khi và chỉ khi $m>f(2)-3e^4$.

VÍ DỤ 6. Tổng các giá trị nguyên của tham số m trên khoảng $(-2020;2020)$ để hàm số $y=\dfrac{\sin x-3}{\sin x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

A. -2039187. **B.** 2022. **C.** 2093193. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định: $\sin x\neq m$

Ta có $y=\dfrac{\sin x-3}{\sin x-m}\Rightarrow y'=\dfrac{\cos x(\sin x-m)-(\sin x-3)\cos x}{(\sin x-m)^2}=\dfrac{\cos x(3-m)}{(\sin x-m)^2}$.

Vì $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ nên $\cos x>0;\ \sin x\in\left(0;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

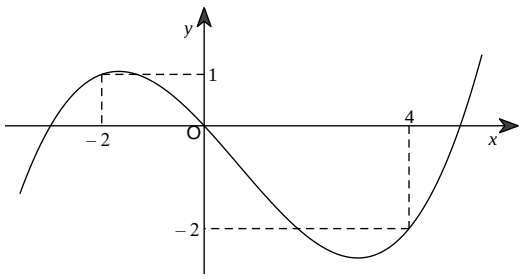
Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}3-m>0\\ \left[\begin{array}{l}m\le 0\\ m\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le 0\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\le m<3\end{array}\right.$.

Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-2019;-2018;...;-1;0\}\cup\{1;2\}$

Vậy tổng các giá trị của tham số m là: $S=\dfrac{-2019+0}{2}.2020+1+2=-2039187$.

VÍ DỤ 7. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên.

Hàm số $g(x)=f(1-2x)+x^2-x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?



A. $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(2;3)$.

Lời giải

Chọn A

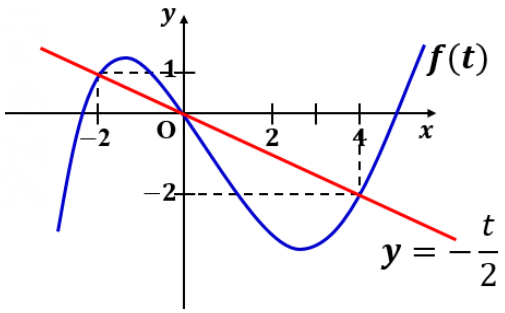
Cách 1:

Ta có: $g(x)=f(1-2x)+x^2-x\Rightarrow g'(x)=-2f'(1-2x)+2x-1$.

Hàm số nghịch biến $\Leftrightarrow g'(x)<0\Leftrightarrow f'(1-2x)>-\dfrac{1-2x}{2}$.

Xét sự tương giao của đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và $y=-\dfrac{t}{2}$.

Dựa vào đồ thị ta có: $f'(t)>-\dfrac{t}{2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}-2<t<0\\ t>4\end{array}\right.$.

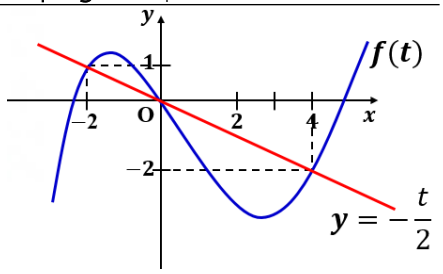


Khi đó: $g'(x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<1-2x<0\\ 1-2x>4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2}\\ x<-\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$.

Cách 2:

Ta có: $g(x)=f(1-2x)+x^2-x\Rightarrow g'(x)=-2f'(1-2x)+2x-1$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(1-2x)=-\dfrac{1-2x}{2}$.



Xét sự tương giao của đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và $y=-\dfrac{t}{2}$.

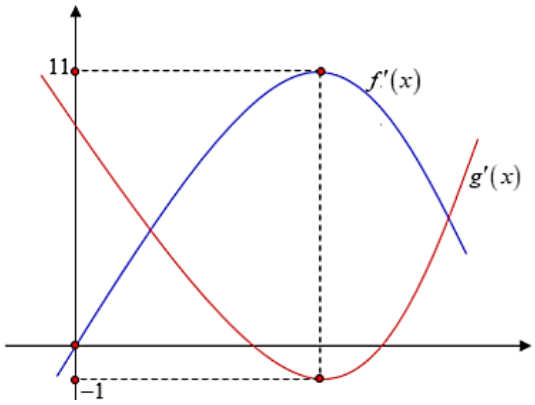
Từ đồ thị ta có: $f'(t)=-\dfrac{t}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=0 \\ t=4 \end{array}\right.$. Khi đó:

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-2x=-2 \\ 1-2x=0 \\ 1-2x=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2} \\ x=\dfrac{1}{2} \\ x=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$. Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy: hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

VÍ DỤ 7. Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có một phần đồ thị biểu diễn đạo hàm $f'(x)$ và $g'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Biết rằng hàm số $y=h(x)=f(x)-g(x)-a^2x+2021$ luôn tồn tại một khoảng đồng biến là $(m;n)$. Tổng các giá trị nguyên dương a thỏa mãn là?



A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Ta có đạo hàm: $h'(x)=f'(x)-g'(x)-a^2$. Để hàm số đồng biến thì $h'(x)\geq 0$.

$\Rightarrow a^2 \leq f'(x)-g'(x)$. Từ đồ thị, ta có $f'(x)-g'(x)\geq 12 \Rightarrow a^2 \leq 12$.

Suy ra số giá trị nguyên dương của a thỏa mãn là $a\in\{1;2;3\}$.

Vậy tổng các giá trị của a thỏa mãn là 6.

DẠNG 1 Cơ bản về tính đơn điệu của hàm số

Câu 1: Hàm số nào dưới đây luôn đồng biến trên tập $\mathbb{R}$?

A. $y=x^2+2x+1$ **B.** $y=x-\sin x.$ **C.** $y=\dfrac{3x+2}{5x+7}.$ **D.** $y=\ln(x+3).$

Câu 2: Hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{5}{2}x^2+6x$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(2;3).$ **B.** $(1;6).$ **C.** $(-6;-1).$ **D.** $(-3;-2).$

Câu 3: Kết luận nào sau đây về tính đơn điệu của hàm số $y=\dfrac{3x-1}{x-2}$ là đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty).$

B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}.$

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty).$

D. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}.$

Câu 4: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2).$ **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0).$

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2).$ **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty).$

Câu 5: Hàm số nào sau đây đồng biến trên $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$?

A. $y=\dfrac{x-1}{x+2}.$ **B.** $y=\dfrac{1}{x-2}$ **C.** $y=\dfrac{2x-5}{x-2}.$ **D.** $y=\dfrac{x-1}{x-2}.$

Câu 6: Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x+1$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3).$ **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty).$

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty).$ **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;3).$

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-6x+\dfrac{3}{4}$

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;3).$ **B.** Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-2).$

C. Hàm số đồng biến trên $(-2;+\infty).$ **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;3).$

Câu 8: Cho hàm số $y=\sqrt{x^2-1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty).$ **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0).$

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty).$ **D.** Hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty).$

Câu 9: Hàm số $z^2-4z+5=0$ đồng biến trên khoảng

A. $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$ **B.** $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ **C.** $(0;+\infty)$ **D.** $(-\infty;0)$

Câu 10: Trong các hàm sau đây, hàm số nào không nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $y=-\dfrac{1}{x^2+1}$. **B.** $y=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)^x$. **C.** $y=-x^3+2x^2-7x$. **D.** $y=-4x+\cos x$.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạp hàm $f'(x)=x^2+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$. **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Câu 12: Trong các hàm số sau, hàm số nào vừa có khoảng đồng biến vừa có khoảng nghịch biến trên tập xác định của nó. (I). $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$, (II). $y=-x^4+x^2-2$, (III). $y=x^3+3x-4$.

A. $(\mathrm{I});(\mathrm{III})$. **B.** (I) & (II). **C.** $(\mathrm{II});(\mathrm{III})$. **D.** (II).

Câu 13: Cho hàm số $y=-\dfrac{1}{3}x^3+x^2-x+1$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;1)$ và nghịch biến trên $(1;+\infty)$.

Câu 14: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{1-x}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

Câu 15: Cho các hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+2}$, $y=\tan x$, $y=x^3+x^2+4x-2017$. Số hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 16: Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y=mx^2-(m+6)x$ nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$

A. $-2\le m\le 0$. **B.** $-2\le m<0$. **C.** $m\le -2$. **D.** $m\ge -2$.

Câu 17: Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{-x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$

D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2-2x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=-2f(x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(-2;0)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Câu 19: Cho hàm số $y=\frac{1}{4}x^4-2x^2-1$. Chọn khẳng định đúng.

A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$.

B. Hàm đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 20: Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=x^4-2x^2-1$. **B.** $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+3x+1$.**C.** $y=\frac{x-1}{x+2}$. **D.** $y=x^3+4x^2+3x-1$.

Câu 21: Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $(1;+\infty)$?

A. $y=\log_3 x$. **B.** $y=\frac{x-1}{x^2+2}$. **C.** $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$. **D.** $y=\frac{x-3}{x-2}$.

Câu 22: Hàm số $y=-x^4+4x^2+1$ nghịch biến trên mỗi khoảng nào sau đây?

A. $(\sqrt{2};+\infty)$. **B.** $(-\sqrt{3};0);(\sqrt{2};+\infty)$.**C.** $(-\sqrt{2};0);(\sqrt{2};+\infty)$. **D.** $(-\sqrt{2};\sqrt{2})$.

Câu 23: Hàm số $y=x^3-3x^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;1)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 24: Hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. $y=-x^3+3x^2$. **B.** $y=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$. **C.** $y=\frac{2x-1}{x-1}$. **D.** $y=\frac{x}{\ln x}$.

Câu 25: Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $(1;3)$?

A. $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$.**B.** $y=\frac{x+1}{x+2}$. **C.** $y=\frac{x^2-2x+1}{x-2}$. **D.** $y=\sqrt{x^2+1}$.

Câu 26: Cho hàm số $y=\frac{2x+5}{x+1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số luôn luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

D. Hàm số luôn luôn đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Câu 27: Hàm số $y=x^4-2x^2+1$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $\forall x\in\mathbb{R}$. **B.** $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Câu 28: Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\frac{x}{x+1}$. **B.** $y=x+1$. **C.** $y=x^4+1$. **D.** $y=x^2+1$.

Câu 29: Hàm số $y=x^4-2$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Câu 30: Cho hàm số $f(x)=\frac{3x+1}{-x+1}$. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. **B.** $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

C. $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. **D.** $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 31: Cho hàm số $y=x^3-2x^2+x+1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3};1\right)$.

Câu 32: Cho hàm $y=\sqrt{x^2-6x+5}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

Câu 33: Hàm số $y=-x^4+2x^2+2$ nghịch biến trên.

A. $(-1;0);(1;+\infty)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $(-\infty;-1);(0;1)$.

Câu 34: Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=x^3+3x+1$. **B.** $y=x^3-3x+1$. **C.** $y=x^2+1$. **D.** $y=-x\sqrt{2}+1$.

Câu 35: Hàm số $y=\frac{x+2}{x-1}$ nghịch biến trên các khoảng:

A. $(-1;+\infty)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1);(1;+\infty)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Câu 36: Cho hàm số $y=\frac{x+3}{x-3}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;3)$ và $(3;+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;3)$ và $(3;+\infty)$.

Câu 37: Tìm tất cả các khoảng đồng biến của hàm số $y=\sqrt{9-x^2}$.

A. $(0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(-3;0)$. **D.** $(0;3)$.

Câu 38: Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên tập xác định của nó?

A. $y=x^4+2x^2+5$. **B.** $y=-2x^3-3x+5$. **C.** $y=-x^4-x^2$. **D.** $y=\dfrac{x+1}{-x+3}$.

Câu 39: Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=x^4+2x^2+3$ **B.** $y=\dfrac{x-1}{x+3}$ **C.** $y=-x^3-x-2$ **D.** $y=x^3+x^2+2x+1$

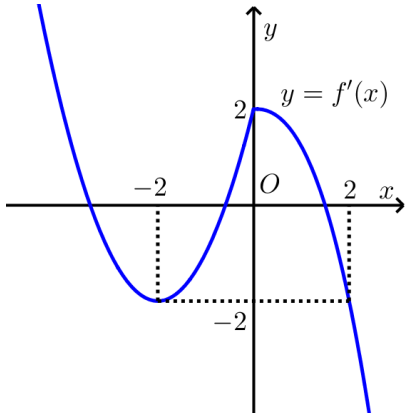
Câu 40: Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?.

A. $y=x^3-3x^2+3x-2$. **B.** $y=\dfrac{x-1}{x+1}$. **C.** $y=x^4+2x^2+1$. **D.** $y=-\dfrac{x^3}{3}+3x+2$.

Câu 41: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-9)(x-4)^2$. Khi đó hàm số $y=f(x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(-3;0)$. **C.** $(-\infty;-3)$. **D.** $(-2;2)$.

Câu 42: Cho $f(x)$ mà đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Hàm số $y=f(x-1)+x^2-2x$ đồng biến trên khoảng



A. $(1;2)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;-1)$.

Câu 43: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2-2x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f\left(2-\sqrt{x^2+1}\right)-\sqrt{x^2+1}-3$ đồng biến trên các khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(2;3)$.

Câu 44: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-2)(x^2-6x+m)$ với mọi $x\in R$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số $g(x)=f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$?

A. 2012. **B.** 2011. **C.** 2009. **D.** 2010.

Câu 45: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(x-2)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f\left(\dfrac{5x}{x^2+4}\right)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;4)$.

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		-1		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Xét hàm số $g(x)=f\left(\frac{x-1}{2}\right)-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2-2x+3$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-1;0)$.

B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-4;-1)$.

D. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$.

Câu 47: Tìm tập hợp S tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-(m+1)x^2+(m^2+2m)x-3$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

A. $S=[-1;0]$. **B.** $S=\varnothing$. **C.** $S=\{-1\}$. **D.** $S=\{1\}$.

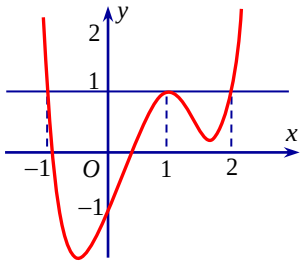
Câu 48: Tổng tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y=\frac{1}{5}m^2x^5-\frac{1}{3}mx^3+10x^2-(m^2-m-20)x+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** -2. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 49: Cho hàm số $y=f(x)$ có $f'(x)=(x-2)(x+5)(x+1)$. Hàm số $y=f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;1)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(-2;0)$.

Câu 50: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x)=f(x)-x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $g(1)<g(-1)<g(2)$. **B.** $g(-1)<g(1)<g(2)$.

C. $g(2)<g(1)<g(-1)$. **D.** $g(2)<g(-1)<g(1)$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.A	3.A	4.C	5.C	6.A	7.A	8.A	9.C	10.A
11.C	12.D	13.A	14.A	15.C	16.A	17.C	18.B	19.C	20.B
21.A	22.C	23.C	24.A	25.A	26.C	27.B	28.B	29.B	30.B
31.D	32.A	33.A	34.A	35.C	36.D	37.D	38.B	39.D	40.A
41.C	42.A	43.A	44.B	45.D	46.B	47.C	48.C	49.B	50.C

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: **Chọn B**

Ta có hàm số $y = x - \sin x$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$ và $y' = 1 - \cos x \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 2: **Chọn A**

Ta có: $y' = x^2 - 5x + 6$; $y' < 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$

Suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;3)$.

Câu 3: **Chọn A**

Ta có $y' = \dfrac{-5}{(x-2)^2} < 0, \forall x \neq 2$.

Do đó hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 4: **Chọn C**

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ và đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$; $(2;+\infty)$.

Câu 5: **Chọn C**

Câu 6: **Chọn A**

Câu 7: **Chọn A**

Ta có $f'(x) = x^2 - x - 6$ có hai nghiệm phân biệt là -2 và 3.

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2;3)$. Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;3)$.

Câu 8: **Chọn A**

Hàm số có tập xác định $D = (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$ nên loại **A**, **B**, **D**.

Câu 9: **Chọn C**

$y' = 8x^3 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y' > 0 \Leftrightarrow x > 0$; $y' < 0 \Leftrightarrow x < 0$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

Câu 10: **Chọn A**

Với $y=-\dfrac{1}{x^2+1}$ ta có $y'=\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$

$y'>0$ khi $x>0$ và $y'<0$ khi $x<0$ nên hàm số không nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Câu 11: Chọn C

Ta có $f'(x)=x^2+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Câu 12: Chọn D

(I): TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. $y'=\dfrac{1}{(x+1)^2}>0\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\Rightarrow (I)$ không thỏa.

(Nhận xét: đây là hàm nhất biến nên không thỏa).

(II): TXĐ: $D=\mathbb{R}$, $y'=-4x^3+2x$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu.

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

.

Vậy (II) thỏa.

(Nhận xét, $y'=0$ là phương trình bậc ba có đủ 3 nghiệm nên luôn đổi dấu trên $\mathbb{R}$ nên (II) thỏa).

(III): TXĐ: $D=\mathbb{R}$, $y'=3x^2+3>0\ \forall x\in\mathbb{R}$. Vậy (III) không thỏa.

Câu 13: Chọn A

$y'=-x^2+2x-1=-(x-1)^2\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 14: Chọn A

Hàm số $y=\dfrac{x+1}{1-x}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có đạo hàm $y'=\dfrac{2}{(x-1)^2}>0\ \forall x\in D$ nên khẳng định A đúng.

Câu 15: Chọn C

Loại hai hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+2}$, $y=\tan x$ vì không xác định trên $\mathbb{R}$.

Với hàm số $y=x^3+x^2+4x-2017$ ta có $y'=3x^2+2x+4>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 16: Chọn A

$y'=2mx-(m+6)$. Theo yêu cầu bài toán ta có $y'\le 0,\ \forall x\in(-1;+\infty)$.

Ta có $2mx-(m+6)\le 0 \Leftrightarrow m\le \dfrac{6}{2x-1}$.

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{6}{2x-1}$ với $x\in(-1;+\infty)$.

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
y'		$-$				$-$	
y	0	↘	$-\infty$		$+\infty$	↘	0

Vậy $-2\le m\le 0$.

Câu 17: Chọn C

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Ta có $y'=\dfrac{3}{(-x+1)^2}>0$ với mọi $x\ne 1$.

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 18: Chọn B

Ta có: $y'=-2f'(x)=-2x^2+4x>0\Leftrightarrow x\in(0;2)$.

Suy ra: Hàm số $y=-2f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$

Câu 19: Chọn C

Phân tích: Xét phương trình $y'=0\Leftrightarrow x^3-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm 2\end{array}\right.$.

Theo dạng đồ thị hàm bậc bốn trùng phương có hệ số $a=\dfrac{1}{4}>0$ nên ở đây ta có thể xác định nhanh hàm số đồng biến trên $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$, hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

Câu 20: Chọn B

Hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+3x+1$ có $y'=x^2-x+3=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 21: Chọn A

Ta có hàm số $y=a^x, y=\log_a x$ đồng biến trên tập xác định nếu $a>1$.

Do đó hàm số $y=\log_3 x$ đồng biến trên $(0;+\infty)$..

Câu 22: Chọn C

$y'=-4x^3+8x=4x(-x^2+2)=0\Rightarrow x=0, x=\pm\sqrt{2}$.

Câu 23: Chọn C

Ta có $y'=3x^2-6x=3x(x-2)$.

Do đó, $y'<0\Leftrightarrow x<0<2$.

Theo dấu hiệu nhận biết tính đơn điệu của hàm số, hàm số nghịch biến trên $(0;2)$.

Câu 24: Chọn A

Xét hàm số $y=-x^3+3x^2$ có $y'=-3x^2+6x$.

$y'=0\Leftrightarrow -3x^2+6x=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=2$.

Xét dấu y' ta có hàm số đồng biến trên $(0;2)$.

Câu 25: Chọn A

Xét hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$.Ta có $y'=x^2-4x+3$. $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$\frac{7}{3}$	↘	1	↗	$+\infty$

Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$.

Câu 26: Chọn C

$y'=\frac{-3}{(x+1)^2}<0\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Câu 27: Chọn B

x	-∞		-1		0		1		+∞
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y		↘		↗		↘		↗	

Hàm số $y=x^4-2x^2+1$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-1;0);\ (1;+\infty)$.

Câu 28: Chọn B

Hàm số $y=x+1$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y'=1>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 29: Chọn B

Ta có: $y'=x^3$. Hàm số nghịch biến $\Rightarrow y'=x^3<0\Leftrightarrow x<0$.

Câu 30: Chọn B

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. $f'(x)=\frac{4}{(-x+1)^2}>0,\ \forall x\neq 1$.

Vậy hàm đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 31: Chọn D

Ta có $y'=3x^2-4x+1$. $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\frac{1}{3}\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu y':

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta có $y'<0\forall x\in\left(\frac{1}{3};1\right)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3};1\right)$.

Câu 32: Chọn A

Tập xác định: $D=(-\infty;1]\cup[5;+\infty)$. Ta có $y'=\frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}}>0$, $\forall x\in(5;+\infty)$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$.

Câu 33: Chọn A

Ta có $y'=-4x^3+4x$. $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;0);(1;+\infty)$.

Câu 34: Chọn A

Hàm số $y=-x\sqrt{2}+1$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y=x^3-3x+1$ có $y'=x^2-3$ nên hàm số không thể đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y=x^2+1$ có $y'=2x$ nên hàm số không thể đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y=x^3+3x+1$ có: $y'=3x^2+3\geq0\ \forall x$.

Câu 35: Chọn C

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. $y'=\frac{-3}{(x-1)^2}<0,\forall x\in D$.

Suy ra: Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1);(1;+\infty)$.

Câu 36: Chọn D

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Ta có $y'=\frac{-6}{(x-3)^2}<0,\forall x\in D$ do đó hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;3)$ và $(3;+\infty)$.

Câu 37: Chọn C

Tập xác định $D=[-3;3]$.

Ta có $y'=\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$; $y'<0\ \ \forall x\in(0;3)$, suy ra hàm số đã cho đồng biến trên $(-3;0)$.

Câu 38: Chọn B

Hàm trùng phương không nghịch biến trên tập xác định của nó.

Với $y=\dfrac{x+1}{-x+3}$ ta có: $y'=\dfrac{4}{\left(-x+3\right)^2}>0,\ \forall x\neq 3$. Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

Với $y=-2x^3-3x+5$ ta có: $y'=-6x^2-3<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 39: Chọn D

Xét hàm: $y=x^3+x^2+2x+1$.

Ta có: $y'=3x^2+2x+2>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$, nên hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 40: Chọn A

Ta có $y=x^3-3x^2+3x-2\Rightarrow y'=3x^2-6x+3=3\left(x-1\right)^2\geq 0\,\forall x\in\mathbb{R}$ và $y'=0$ chỉ tại $x=1$.

Vậy $y=x^3-3x^2+3x-2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 41: Chọn C

Ta có $y'=\left[f\left(x^2\right)\right]'=\left(x^2\right)'x^4\left(x^2-9\right)\left(x^2-4\right)^2=2x^5\left(x-3\right)\left(x+3\right)\left(x-2\right)^2\left(x+2\right)^2$.

Cho $y'=0\Leftrightarrow x=-3$ hoặc $x=-2$ hoặc $x=0$ hoặc $x=2$ hoặc $x=3$.

Ta có bảng xét dấu của y'

x	$-\infty$		-3		-2		0		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, hàm số $y=f\left(x^2\right)$ nghịch biến trên $\left(-\infty;-3\right)$ và $\left(0;3\right)$.

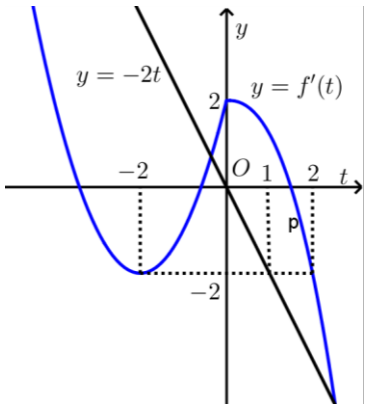
Câu 42: Chọn A

Ta có $y=f\left(x-1\right)+x^2-2x$

Khi đó $y'=f'\left(x-1\right)+2x-2$. Hàm số đồng biến khi $y'\geq 0\Leftrightarrow f'\left(x-1\right)+2\left(x-1\right)\geq 0\ (1)$

Đặt $t=x-1$ thì (1) trở thành: $f'\left(t\right)+2t\geq 0\Leftrightarrow f'\left(t\right)\geq -2t$.

Quan sát đồ thị hàm số $y=f'\left(t\right)$ và $y=-2t$ trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Khi đó ta thấy với $t\in\left(0;1\right)$ thì đồ thị hàm số $y=f'\left(t\right)$ luôn nằm trên đường thẳng $y=-2t$.

Suy ra $f'\left(t\right)+2t>0,\forall t\in\left(0;1\right)$. Do đó $\forall x\in\left(1;2\right)$ thì hàm số $y=f\left(x-1\right)+x^2-2x$ đồng biến.

Câu 43: Chọn A

Ta có $g'(x)=f'\left(2-\sqrt{x^2+1}\right).\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+1}}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+1}}\left[f'\left(2-\sqrt{x^2+1}\right)+1\right]$.

Vì $f'(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1$ nên $f'(x)\ge -1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ hay $f'(x)+1\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

$f'(x)=-1\Leftrightarrow x^2-2x=-1\Leftrightarrow x=1$. Do đó $f'\left(2-\sqrt{x^2+1}\right)+1+1\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Và $f'\left(2-\sqrt{x^2+1}\right)+1=0\Leftrightarrow f'\left(2-\sqrt{x^2+1}\right)=-1\Leftrightarrow 2-\sqrt{x^2+1}=1\Leftrightarrow x=0$.

BBT:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

Dựa vào BBT, suy ra hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên $(-2;-1)$.

Câu 44: Chọn B

Ta có:

$$g'(x)=f'(1-x).(1-x)'=-(1-x)^2(-x-1)\left(x^2+4x-5+m\right)=(1-x)^2(x+1)\left(x^2+4x-5+m\right).$$

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ thì $g'(x)\le 0$, bằng không tại một số điểm hữu hạn với mọi $x\in(-\infty;-1)$.

Do $(1-x)^2(x+1)<0$ với mọi $x\in(-\infty;-1)$, nên

$g'(x)\le 0$ với mọi $x\in(-\infty;-1)\Leftrightarrow x^2+4x-5+m\ge 0$ với mọi $x\in(-\infty;-1)\Leftrightarrow m\ge -x^2-4x+5$ với mọi $x\in(-\infty;-1)$.

Xét hàm số $h(x)=-x^2-4x+5$ trên $(-\infty;-1)$. Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		-1
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	9	↘	8

Từ bảng biến thiên suy ra $m\ge 9$, kết hợp với điều kiện m nguyên và thuộc đoạn $[-2019;2019]$ suy ra có 2011 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 45: Chọn D

Cho $f'(x)=0\Leftrightarrow x(x-1)^2(x-2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1(\text{nghiem\_kep})\\x=2\end{array}\right.$

Ta có $g'(x)=\dfrac{-5x^2+20}{\left(x^2+4\right)^2}f'\left(\dfrac{5x}{x^2+4}\right)$. Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{-5x^2+20}{\left(x^2+4\right)^2}f'\left(\dfrac{5x}{x^2+4}\right)=0$

Dựa và $f'(x)$ ta có: $\left[\begin{array}{l}-5x^2+20=0\\\dfrac{5x}{x^2+4}=0\\\dfrac{5x}{x^2+4}=1\\\dfrac{5x}{x^2+4}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm2\\x=0\\x=1(\text{nghiem\_kep})\\x=4(\text{nghiem\_kep})\end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		0		1		2		4		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(2;4)$.

Câu 46: Chọn B

Cách 1: Ta có $g'(x)=\dfrac{1}{2}f'\left(\dfrac{x-1}{2}\right)-\left(x^2-3x+2\right)$

$f'\left(\dfrac{x-1}{2}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{x-1}{2}=-\dfrac{5}{2}\\\dfrac{x-1}{2}=-1\\\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{1}{2}\\\dfrac{x-1}{2}=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-4\\x=-1\\x=2\\x=7\end{array}\right.$; $f'\left(\dfrac{x-1}{2}\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{x-1}{2}<-\dfrac{5}{2}\\\dfrac{1}{2}<\dfrac{x-1}{2}<3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-4\\2<x<7\end{array}\right.$

Bảng xét dấu cho các biểu thức

x	$-\infty$	-4		-1		0		1		2		7		$+\infty$
$f'\left(\dfrac{x-1}{2}\right)$	$+$	0	$-$	0	$-$	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		
$-\left(x^2-3x+2\right)$	$-$		$-$		$-$	$-$	0	$+$	0	$-$		$-$		
$g'(x)$			$-$		$-$	$-$						$-$		

Từ bảng xét dấu đáp án B sai, vì $x\in(0;1)\subset(0;2)$ thì $g'(x)<0$. Hàm số nghịch biến.

Cách 2: Thử trực tiếp

Ta có $g'(x)=\dfrac{1}{2}f'\left(\dfrac{x-1}{2}\right)-\left(x^2-3x+2\right)$

Đáp án A: chọn $x=-\dfrac{1}{2}\in(-1;0)$ thì $g'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}f'\left(-\dfrac{3}{4}\right)-\dfrac{15}{4}<0$

Đáp án B: chọn $x=\dfrac{1}{2}\in(0;2)$ thì $g'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}f'\left(-\dfrac{1}{4}\right)-\dfrac{3}{4}<0$, sai

Tương tự cho các đáp án còn lại.

Câu 47: Chọn C

Ta có $y' = x^2 - 2(m+1)x + (m^2+2m)$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ thì

$y' \le 0\ \forall x \in (-1;1) \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + (m^2+2m) \le 0\ \forall x \in (-1;1)$.

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + (m^2+2m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = m+2 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu y' :

x	$-\infty$		m		$m+2$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta thấy để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ thì

$\begin{cases} m \le -1 \\ m+2 \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le -1 \\ m \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$.

Câu 48: Chọn C

$y = \frac{1}{5}m^2x^5 - \frac{1}{3}mx^3 + 10x^2 - (m^2 - m - 20)x + 1 \Rightarrow y' = m^2x^4 - mx^2 + 20x - m^2 + m + 20 \ge 0$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = m^2x^4 - mx^2 + 20x - m^2 + m + 20 \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và dấu "$=$" xảy ra chỉ tại một số hữu hạn điểm.

Điều kiện cần:

Ta thấy phương trình $y' = 0$ có một nghiệm $x = -1$ nên để $y' \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ thì y' không đổi dấu khi qua $x = -1$, khi đó phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép là $x = -1$ ($x = -1$ không thể là nghiệm bội 4 của phương trình $y' = 0$ vì y' không chứa số hạng x^3).

Ta suy ra được $y''(-1) = 0 \Leftrightarrow -4m^2 + 2m + 20 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = \frac{5}{2} \end{array}\right.$.

Điều kiện đủ:

Với $m = -2$, ta có

$y' = 4x^4 + 2x^2 + 20x + 14 = 4(x+1)^2\left[(x-1)^2 + \frac{5}{2}\right] \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra $m = -2$ thỏa mãn điều kiện của đề bài.

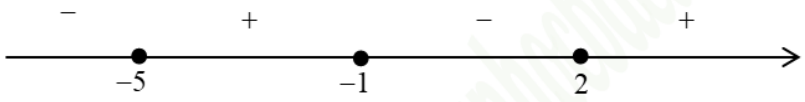
Với $m = \frac{5}{2}$, ta có

$y' = \frac{25}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + 20x + \frac{65}{4} = \frac{25}{4}(x+1)^2\left[(x-1)^2 + \frac{8}{5}\right] \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra $m = \frac{5}{2}$ thỏa mãn điều kiện của đề bài.

Vậy $m=-2$, $m=\dfrac{5}{2}$ là các giá trị cần tìm. Khi đó tổng các giá trị thực của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $-2+\dfrac{5}{2}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 49: Chọn B

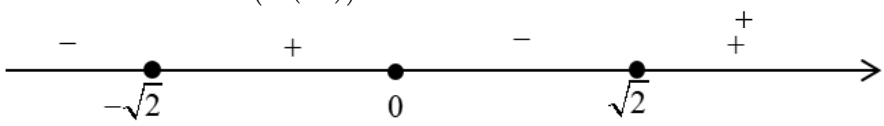
Xét dấu $f'(x)$:



Ta có: $y'=\left(f(x^2)\right)'=2x.f'\left(x^2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'\left(x^2\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=2\\x^2=-5\\x^2=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\sqrt{2}\\x=-\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Chọn $x=1\in\left(0;\sqrt{2}\right)$ ta có $y'(1)=2.1.f'\left(1^2\right)=2.f'(1)<0.$ Do đó, cả khoảng $\left(0;\sqrt{2}\right)$ âm.

Từ đó ta có trục xét dấu của $y'=\left(f\left(x^2\right)\right)'$ như sau:

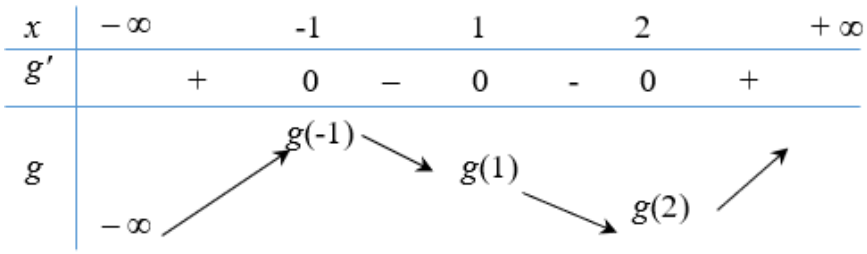


Từ trục xét dấu trên ta thấy: Hàm số $y=f\left(x^2\right)$ đồng biến trên $(-1;0)$.

Câu 50: Chọn C

Xét hàm số $g(x)=f(x)-x$, $\Rightarrow g'(x)=f'(x)-1$, $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=2\end{array}\right.$.

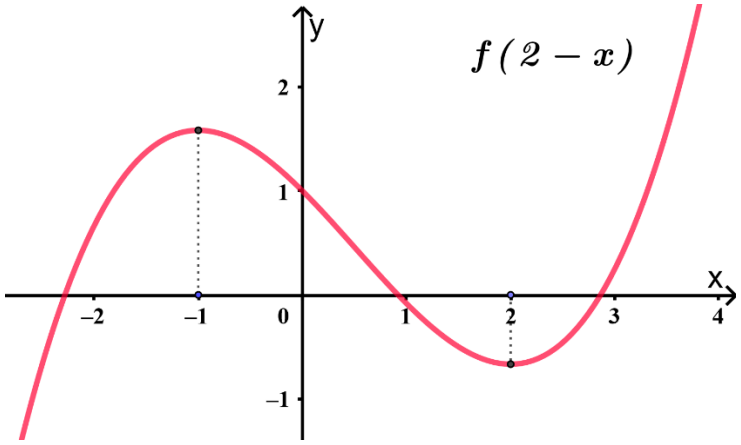
Bảng biến thiên



Vậy $g(2)<g(1)<g(-1)$.

DẠNG 2 Tính đơn điệu của hàm hợp số 01

Câu 1. Cho đồ thị hàm số $y=f(2-x)$ như hình vẽ



Hàm số $y=f(x^2-3)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;1)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(-1;0)$.

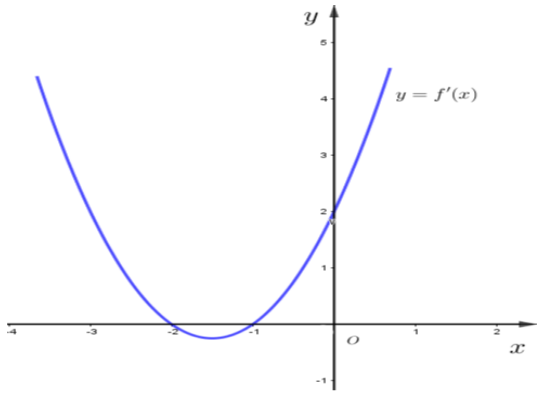
Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=f(x^2+2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;1)$. **B.** $(-4;-3)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;-1)$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y=g(x)=f(1+2x-x^2)+2020$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;5)$.

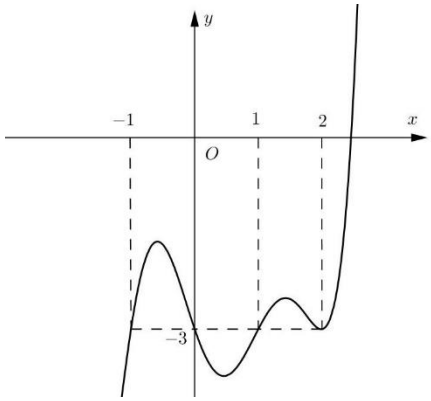
Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x.(x+2)^2(x-5)^3$. Hàm số $g(x)=f(10-5x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(1;3)$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(x-2)$ với mọi giá trị thực của x. Xét hàm số $g(x)=f\left(\dfrac{5x}{x^2+4}\right)$. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.
B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;4)$.
C. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$.
D. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=1$

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên.



Hỏi hàm số $g(x)=f\left(2x^2-x\right)+6x^2-3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\dfrac{1}{4};0\right)$.
B. $\left(\dfrac{1}{4};1\right)$.
C. $(0;1)$.
D. $(-\infty;0)$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(3-x)(10-3x)^2(x-2)^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(3-x)+\dfrac{1}{6}(x^2-1)^3$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-\infty;0)$.
B. $(0;1)$.
C. $(1;+\infty)$.
D. $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$.

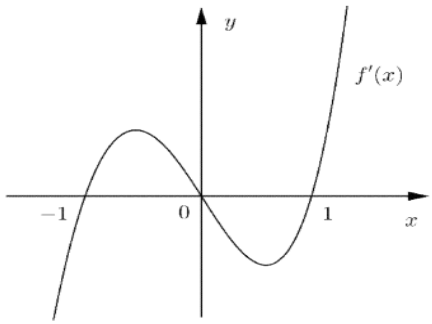
Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	1	↗	2	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số $y=\left(f(x)\right)^3-3\left(f(x)\right)^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2;3)$.
B. $(1;2)$.
C. $(3;4)$.
D. $(-\infty;-1)$.

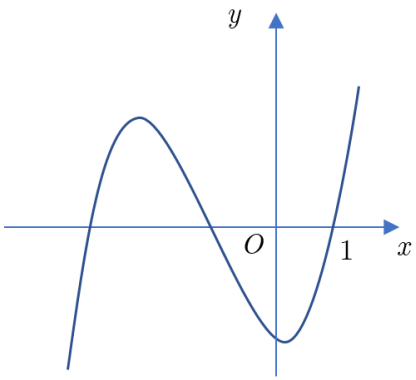
Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $f'(x)=x^3+ax^2+bx+c\left(a,b,c\in\mathbb{R}\right)$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $g(x)=f(f'(x))$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

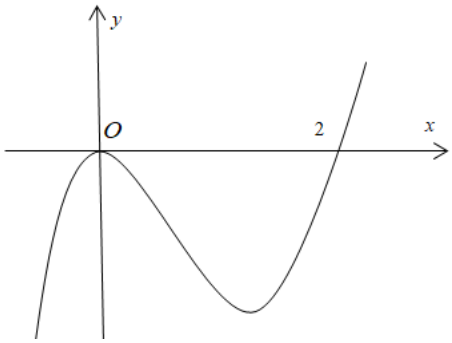
A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị cho như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $[-2019;2019]$ để hàm số $g(x)=f(2019^x)-mx+2$ đồng biến trên $[0;1]$



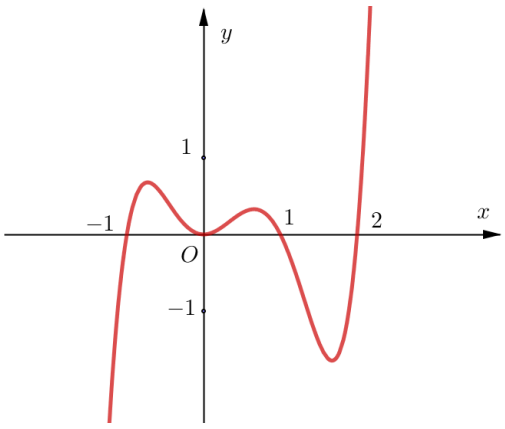
A. 2028. **B.** 2019. **C.** 2011. **D.** 2020

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm $f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Hàm số $g(x)=f(x^2-x)$ đồng biến trên khoảng nào?



A. $\left(\frac{1}{2};1\right)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

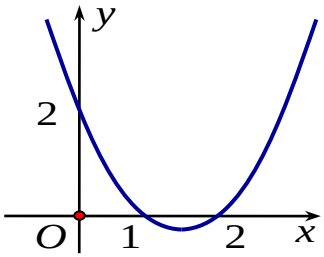
Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=f\left(\sqrt{x^2+1}\right)$ đồng biến trong khoảng nào dưới đây?



A. $(-\infty;-\sqrt{3}),(0;\sqrt{3})$. **B.** $(-\infty;-\sqrt{3}),(\sqrt{3};+\infty)$.

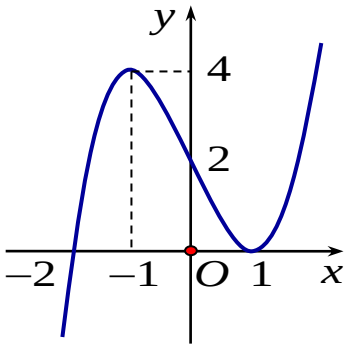
C. $(-\sqrt{3};0),(\sqrt{3};+\infty)$. **D.** $(-\infty;-\sqrt{3}),(0;+\infty)$.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y=f(x-x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây.



A. $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\frac{3}{2};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ($y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$). Xét hàm số $g(x)=f(x^2-3)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?



A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-1;0)$. **B.** Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-1)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(1;2)$. **D.** Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị nằm trên trục hoành và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, bảng xét dấu của biểu thức $f'(x)$ như bảng dưới đây.

x	$-\infty$		-2		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=g(x)=\dfrac{f(x^2-2x)}{f(x^2-2x)+1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $\left(-2;\frac{5}{2}\right)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(2;+\infty)$.

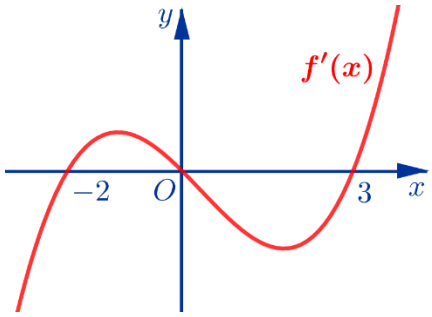
Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	1	↗	2	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số $y=\left(f(x)\right)^3-3.\left(f(x)\right)^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(3;4)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(2;3)$.

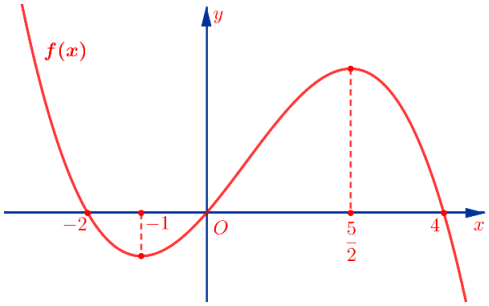
Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ



Hỏi hàm số $y=f(x^2-2x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-1;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(2;+\infty)$.

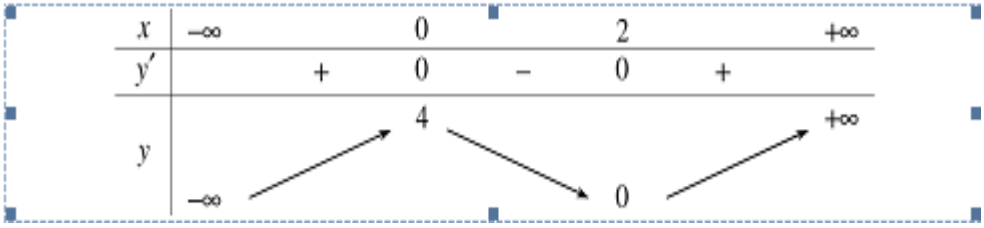
Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ



Hỏi hàm số $y=\left[f(x)\right]^2$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-1;1)$. **B.** $\left(0;\frac{5}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{5}{2};4\right)$. **D.** $(-2;-1)$.

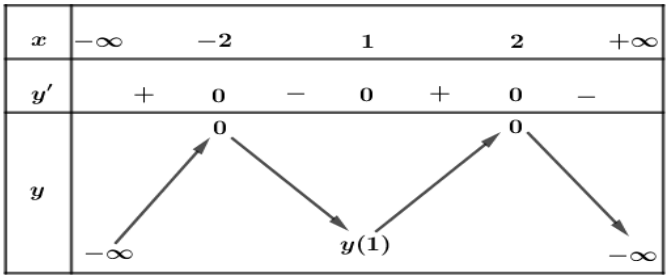
Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Có bao nhiêu số nguyên $m<2019$ để hàm số $g(x)=f(x^2-2x+m)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 2016. **B.** 2015. **C.** 2017. **D.** 2018.

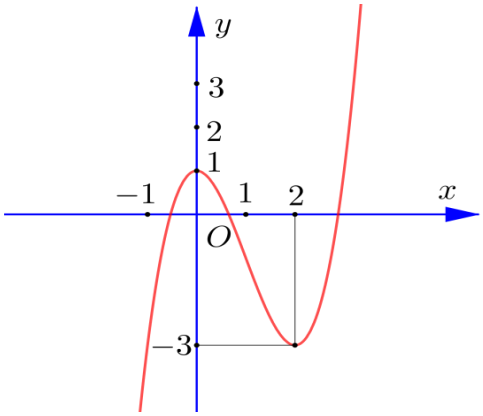
Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Hàm số $g(x)=\left[f(3-x)\right]^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

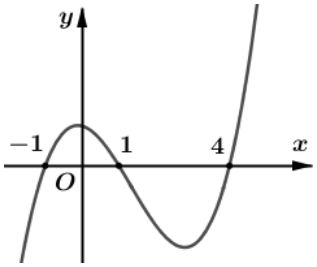
A. $(-2;5)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(2;5)$. **D.** $(5;+\infty)$.

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=\left|f\left(|x|\right)\right|$ đồng biến trong khoảng nào dưới đây ?



A. $(0;1)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(1;2)$.

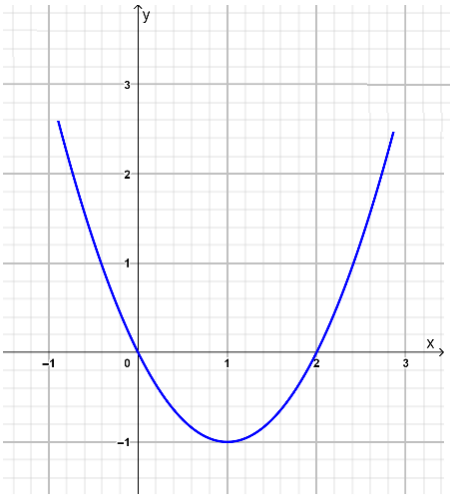
Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x)=f\left(|3-x|\right)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(4;7)$.

Câu 23. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi hàm số $g(x)=f\left(|x|+1\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

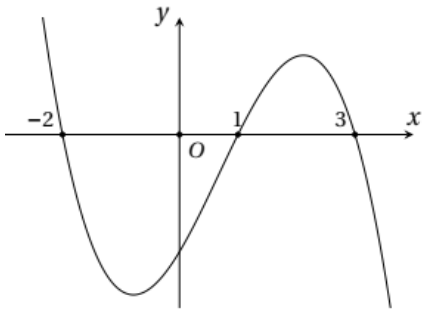


A. $(1,+\infty)$. **B.** $(-1,0)$. **C.** $(-1,2)$. **D.** $(-\infty,1)$.

Câu 24. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$?

A. 4 . **B.** 6 . **C.** 3 . **D.** 5 .

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau:



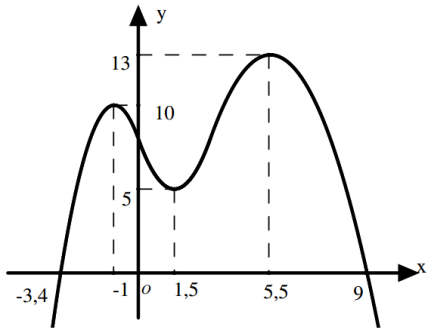
Hàm số $g(x)=f(|4-2x|)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $\left(\frac{5}{2};7\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$.

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x^2-2x)$, với $\forall x\in\mathbb{R}$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f(x^3-3x^2+m)$ có 8 điểm cực trị là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên R và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới và $f'(x)<0$ với mọi $x\in(-\infty;-3,4)\cup(9;+\infty)$. Đặt $g(x)=f(x)-mx+5$. Có bao nhiêu giá trị dương của tham số m để hàm số $g(x)$ có **đúng** hai điểm cực trị?



A. 4. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

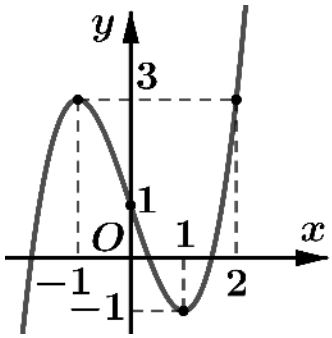
Câu 28. Cho hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$, biết hàm số có ba điểm cực trị $x=-3, x=3, x=5$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $g(x)=f\left(e^{x^3+3x^2}-m\right)$ có đúng 7 điểm cực trị

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^2-x)(x^2-4x+3)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f(x^2+m)$ có 3 cực trị.

A. 0. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ .



Xét hàm số $g(x)=f(2x^3+x-1)+m.$ Tìm m để $\max\limits_{[0;1]} g(x)=-10.$

A. $m=3$. **B.** $m=-12$.

C. $m=-13$. **D.** $m=6$.

Câu 31. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x)=(x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;20]$ để hàm số $y=f(x^2+3x-m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 18 . **B.** 17 . **C.** 16 . **D.** 20 .

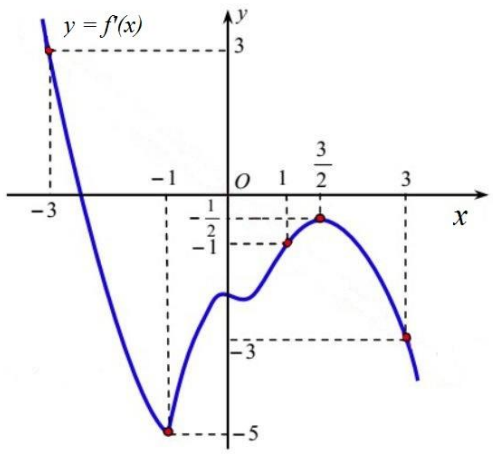
Câu 32. Cho các hàm số $f(x)=x^3+4x+m$ và $g(x)=(x^2+2018)(x^2+2019)^2(x^2+2020)^3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2020;2020]$ để hàm số $g(f(x))$ đồng biến trên $(2;+\infty)$?

A. 2005 . **B.** 2037 . **C.** 4016 . **D.** 4041 .

Câu 33. Cho hàm số $y=f\ x$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+1)^2(x^2+2mx+1)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x)=f(2x+1)$ đồng biến trên khoảng $(3;5)$?

A. 3 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 6

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên R . Hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x)=f(x-2m)+\frac{1}{2}(2m-x)^2+2020$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(3;4)$. Hỏi số phần tử của S bằng bao nhiêu?

A. 4 . **B.** 2 .

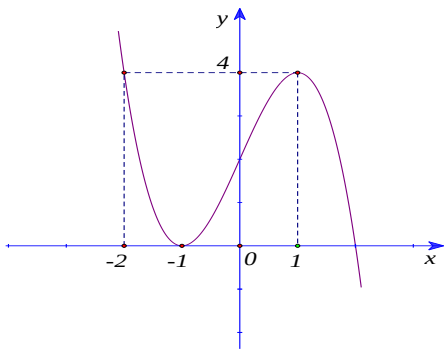
C. 3 . **D.** Vô số.

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-2)(x^2-6x+m)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2020;2020]$ để hàm số $g(x)=f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$?

A. 2016 . **B.** 2014 . **C.** 2012 .

D. 2010 .

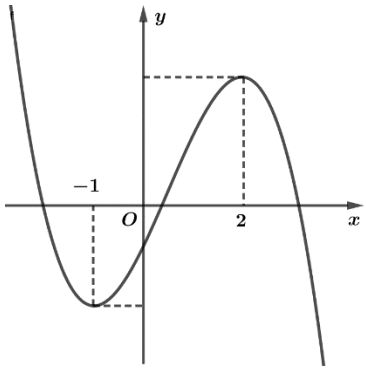
Câu 36. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in(-2020;2020)$ để hàm số $g(x)=f(2x-3)-\ln(1+x^2)-2mx$ đồng biến trên $\left(\frac{1}{2};2\right)$?



A. 2020 . **B.** 2019 .

C. 2021 . **D.** 2018 .

Câu 37. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=f\left(x^2+x\right)-4x^3+3x^2+6x+2020$ đồng biến trên khoảng nào sau đây ?

A. $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(-2;0)$.

C. $(1;+\infty)$. **D.** $(0;1)$.

Câu 38. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1		1		4	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Biết $f(x)>2,\forall x\in\mathbb{R}$. Xét hàm số $g(x)=f\left(3-2f(x)\right)-x^3+3x^2-2020$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;-1)$.

B. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

C. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;4)$.

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2;3)$.

Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=g(x)=f'(2x+3)+2$ có đồ thị là một parabol với tọa độ đỉnh $I(2;-1)$ và đi qua điểm $A(1;2)$. Hỏi hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(5;9)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-\infty;9)$. **D.** $(1;3)$.

Câu 40. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 3 liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x).f'''(x)=x(x-1)^2(x+4)^3$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $g(x)=\left[f'(x)\right]^2-2f(x).f''(x)$. Hàm số $h(x)=g\left(x^2-2x\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;2)$.

BẢNG ĐÁP ÁN

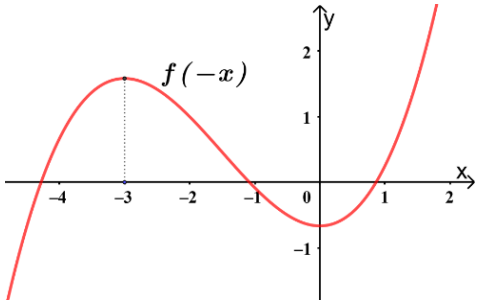
1.A	2.D	3.B	4.B	5.C	6.A	7.D	8.A	9.B	10.D
11.C	12.C	13.D	14.C	15.C	16.D	17.A	18.C	19.A	20.C
21.D	22.B	23.B	24.D	25.A	26.C	27.C	28.D	29.C	30.C
31.A	32.B	33.A	34.B	35.C	36.B	37.D	38.D	39.A	40.D
41.D	42.C	43.C	44.D	45.B	46.C	47.C	48.B	49.B	50.B
51.A	52.C	53.D	54.A	55.A	56.A	57.D	58.A	59.A	60.C
61.A	62.A								

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

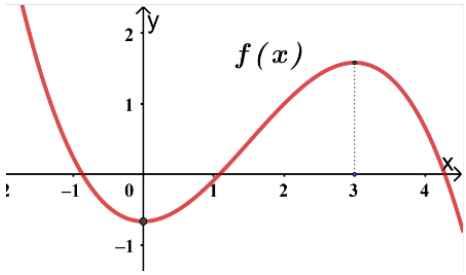
Câu 1. Chọn A

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y=g(x)=f(2-x)$.

Tịnh tiến (C) sang trái 2 đơn vị ta được đồ thị hàm số $y=g(x+2)=f(-x)$.



Lấy đối xứng đồ thị hàm số $y=f(-x)$ qua Oy ta được đồ thị hàm số $y=f(x)$.



Ta có $y=f(x^2-3)\Rightarrow y'=2x.f'(x^2-3)$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'(x^2-3)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-3=0\\x^2-3=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{3}\\x=\pm\sqrt{6}\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu y'

x	$-\infty$		$-\sqrt{6}$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$\sqrt{6}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy hàm số $y=f(x^2-3)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 2. Chọn D

Đặt: $y=g(x)=f\left(x^2+2x\right)$; $g'(x)=\left(f\left(x^2+2x\right)\right)'=(2x+2).f'\left(x^2+2x\right)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow(2x+2).f'\left(x^2+2x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+2=0\\f'\left(x^2+2x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x^2+2x=-2\,(vo\ nghiem)\\x^2+2x=1\\x^2+2x=3\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-1-\sqrt{2}\\x=-1+\sqrt{2}\\x=1\\x=-3\end{array}\right.$$ ($x=-1\pm\sqrt{2}$ là các nghiệm bội chẵn của phương trình: $x^2+2x=1$).

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		$-1-\sqrt{2}$		-1		$-1+\sqrt{2}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗		↘		↘		↗		↗		↘	

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;-1)$.

Chú ý: Cách xét dấu $g'(x)$:

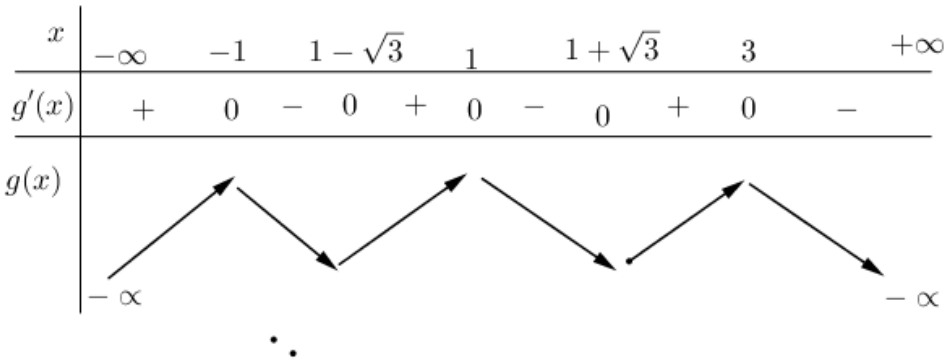
Chọn giá trị $x=0\in\left(-1;-1+\sqrt{2}\right)\Rightarrow x^2+2x=0\Rightarrow g'(0)=f'(0)>0$ (dựa theo bảng xét dấu của hàm $f'(x)$). Suy ra $g'(x)>0$, $\forall x\in\left(-1;-1+\sqrt{2}\right)$. Sử dụng quy tắc xét dấu đa thức "lẻ đổi, chẵn không" suy ra dấu của $g'(x)$ trên các khoảng còn lại.

Câu 3. Chọn B

Ta có $g'(x)=(2-2x).f'\left(1+2x-x^2\right)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-2x=0\\f'\left(1+2x-x^2\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\1+2x-x^2=-2\\1+2x-x^2=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\\x=3\\x=1-\sqrt{3}\\x=1+\sqrt{3}\end{array}\right.$$.

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1-\sqrt{3};1)$ và $(1+\sqrt{3};3)$.

Mà $(0;1)\subset(1-\sqrt{3};1)$ nên hàm số $y=g(x)=f(1+2x-x^2)+2020$ đồng biến trên $(0;1)$.

Câu 4. Chọn B

Ta có $g'(x)=(10-5x)'.f'(10-5x)=-5.f'(10-5x)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(10-5x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}10-5x=0\\10-5x=-2\\10-5x=5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=\dfrac{12}{5}\\x=1\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		1		2		$\frac{12}{5}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

Câu 5. Chọn C

Ta có: $$g'(x)=\left(\frac{5x}{x^2+4}\right)'f'\left(\frac{5x}{x^2+4}\right)=\frac{20-5x^2}{\left(x^2+4\right)^2}\left(\frac{5x}{x^2+4}\right)\left(\frac{5x}{x^2+4}-1\right)^2\left(\frac{5x}{x^2+4}-2\right),\forall x\in\mathbb{R}.$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{20-5x^2}{\left(x^2+4\right)^2}=0\\\dfrac{5x}{x^2+4}=0\\\dfrac{5x}{x^2+4}=1\\\dfrac{5x}{x^2+4}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm2\\x=0\\x=1\\x=4\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)$:

x	$-\infty$		-2		0		1		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	CT	$\nearrow$	CĐ	$\searrow$		$\searrow$	CT	$\nearrow$		$\nearrow$	

Vậy hàm số $y=g(x)$ đạt cực đại tại $x=0$.

Câu 6. Chọn A

Ta có: $g\left(x\right)=f\left(2x^2-x\right)+6x^2-3x$

$\Rightarrow g'\left(x\right)=\left(4x-1\right)f'\left(2x^2-x\right)+12x-3=\left(4x-1\right)\left[f'\left(2x^2-x\right)+3\right]$.

$$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x-1=0\\f'\left(2x^2-x\right)=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{4}\\2x^2-x=-1\left(vo\ nghiem\right)\\2x^2-x=1\\2x^2-x=0\\2x^2-x=2\left(nghiem\ kep\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{4}\\x=1\\x=-\dfrac{1}{2}\\x=0\\x=\dfrac{1}{2}\\x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}\left(nghiem\ kep\right)\\x=\dfrac{1-\sqrt{17}}{4}\left(nghiem\ kep\right)\end{array}\right.$$

Ta có : $g'\left(-2\right)=-9\left(f'(10)+3\right)$ dựa vào đồ thì $f'\left(x\right)$ ta thấy $f'\left(10\right)>-3\Rightarrow f'\left(10\right)+3>0$

$\Rightarrow g'\left(-2\right)<0$.

Ta có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		$\dfrac{1-\sqrt{17}}{4}$		$-\dfrac{1}{2}$		0		$\dfrac{1}{4}$		$\dfrac{1}{2}$		1		$\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}$		$+\infty$
$g'\left(x\right)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Xét dấu $g'\left(x\right)$ ta được $g'\left(x\right)>0,\forall x\in\left(-\dfrac{1}{2};0\right)\cup\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(1;\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}\right)\cup\left(\dfrac{1+\sqrt{17}}{4};+\infty\right)$.

Suy ra $g\left(x\right)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$ và $\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right)$ và $\left(1;\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}\right)$ và $\left(\dfrac{1+\sqrt{17}}{4};+\infty\right)$.

Mà $\left(-\frac{1}{4};0\right)\subset\left(-\frac{1}{2};0\right)$ nên hàm số $g(x)=f\left(2x^2-x\right)+6x^2-3x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{4};0\right)$.

Câu 7. Chọn D

Ta có $g'(x)=-f'(3-x)+x(x^2-1)^2$.

Theo giả thiết $f'(x)=(3-x)(10-3x)^2(x-2)^2$ nên $f'(3-x)=x(3x+1)^2(1-x)^2$

Từ đó suy ra $g'(x)=-x(3x+1)^2(1-x)^2+x(x^2-1)^2$

$=x(x-1)^2\left[-(3x+1)^2+(x+1)^2\right]=x(x-1)^2(-8x^2-4x)=x^2(x-1)^2(-8x-4)$

Khi đó $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0(nghiem\ \ kep)\\x=1(nghiem\ \ kep)\\x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$-$	
g		↗		↘		↘		↘	

Khi đó hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$.

Câu 8. Chọn A

Ta có $y'=3\left(f(x)\right)^2.f'(x)-6f(x).f'(x)$; $y'=3f'(x).f(x)\left[f(x)-2\right]$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f(x)=0\\f(x)=2\end{array}\right.$.

+ $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\\x=3\\x=4\end{array}\right.$; $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1<1\\x=4\end{array}\right.$; $f(x)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_2\in(x_1;1)\\x=x_3\in(1;2)\\x=x_4>4\\x=3\end{array}\right.$.

+ Bảng xét dấu của y'

x	$-\infty$		x_1		x_2		1		x_3		2		3		4		x_4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f(x)-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
	$+$		0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số $y=\left(f\left(x\right)\right)^3-3\left(f\left(x\right)\right)^2$ nghịch biến trên khoảng $\left(2;3\right)$.

Câu 9. Chọn B

Vì các điểm $\left(-1;0\right),\left(0;0\right),\left(1;0\right)$ thuộc đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases}-1+a-b+c=0\\c=0\\1+a+b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=-1\end{cases}\Rightarrow f'\left(x\right)=x^3-x\Rightarrow f''\left(x\right)=3x^2-1$$

Ta có: $g\left(x\right)=f\left(f'\left(x\right)\right)\Rightarrow g'\left(x\right)=f'\left(f'\left(x\right)\right).f''\left(x\right)$

Xét $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow g'\left(x\right)=f'\left(f'\left(x\right)\right).f''\left(x\right)=0\Leftrightarrow f'\left(x^3-x\right)\left(3x^2-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3-x=0\\x^3-x=1\\x^3-x=-1\\3x^2-1=0\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\x=0\\x=x_1(x_1\approx1,325\quad)\\x=x_2(x_2\approx-1,325)\\x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-1,325$		-1		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1		$1,325$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $g\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left(-\infty;-2\right)$

Câu 10. Chọn D

Ta có $g'\left(x\right)=2019^x\ln2019.f'\left(2019^x\right)-m$.

Ta lại có hàm số $y=2019^x$ đồng biến trên $\left[0;1\right]$.

Với $x\in\left[0;1\right]$ thì $2019^x\in\left[1;2019\right]$ mà hàm $y=f'\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(1;+\infty\right)$ nên hàm $y=f'\left(2019^x\right)$ đồng biến trên $\left[0;1\right]$

Mà $2019^x \ge 1; f'\left(2019^x\right) > 0 \forall x \in [0;1]$ nên hàm $h(x) = 2019^x \ln 2019 . f'\left(2019^x\right)$ đồng biến trên $[0;1]$

Hay $h(x) \ge h(0) = 0, \forall x \in [0;1]$

Do vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên đoạn $[0;1] \Leftrightarrow g'(x) \ge 0, \forall x \in [0;1]$

$\Leftrightarrow m \le 2019^x \ln 2019 . f'\left(2019^x\right), \forall x \in [0;1] \Leftrightarrow m \le \min\limits_{x \in [0;1]} h(x) = h(0) = 0$

Vì m nguyên và $m \in [-2019;2019] \Rightarrow$ có 2020 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 11. Chọn C

$g(x) = f\left(x^2 - x\right) \Rightarrow g'(x) = (2x-1) f'\left(x^2 - x\right)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=0 \\ f'\left(x^2-x\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x^2 - x = 0 \\ x^2 - x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right. .$$

Từ đồ thị $f'(x)$ ta có $f'\left(x^2 - x\right) > 0 \Leftrightarrow x^2 - x > 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < -1 \end{array}\right.$. Xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$2x-1$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$f'\left(x^2-x\right)$		$+$	0	$-$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

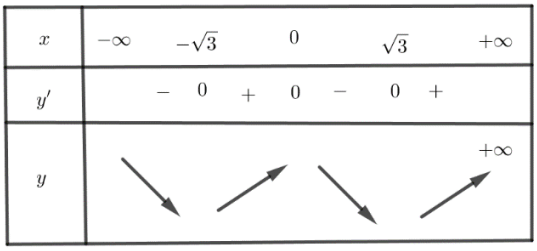
Từ bảng xét dấu ta có hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 12. Chọn C

Xét hàm số $y = f\left(\sqrt{x^2+1}\right) \Rightarrow y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} f'\left(\sqrt{x^2+1}\right)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'\left(\sqrt{x^2+1}\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \sqrt{x^2+1} = -1 \\ \sqrt{x^2+1} = 0 \\ \sqrt{x^2+1} = 1 \\ \sqrt{x^2+1} = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \sqrt{x^2+1} = 1 \\ \sqrt{x^2+1} = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2+1 = 1 \\ x^2+1 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên



Vậy hàm số $y=f\left(\sqrt{x^2+1}\right)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\sqrt{3};0\right),\left(\sqrt{3};+\infty\right)$.

Câu 13. Chọn D

Đặt $y=g(x)=f\left(x-x^2\right)\Rightarrow g'(x)=f'\left(x-x^2\right).\left(x-x^2\right)'=(1-2x)f'\left(x-x^2\right)$

Cho $g'(x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}1-2x=0\\f'\left(x-x^2\right)=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}1-2x=0\\x-x^2=1(\text{ptvn})\\x-x^2=2(\text{ptvn})\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$

Ta có $f'(x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<1\\x>2\end{array}\right.\Rightarrow f\left(x-x^2\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-x^2<1\\x-x^2>2\end{array}\right.$ (Luôn đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$)

Vậy $g'(x)<0\Leftrightarrow 1-2x<0\Leftrightarrow x>\frac{1}{2}.$

Hay hàm số $g(x)=f\left(x-x^2\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right).$

Câu 14. Chọn C

$g'(x)=\left(f\left(x^2-3\right)\right)'=\left(x^2-3\right)'f'\left(x^2-3\right)=2xf'\left(x^2-3\right)$

Ta có $f'(x)<0\Leftrightarrow x<-2$ nên $f'(x^2-3)<0\Leftrightarrow x^2-3<-2\Leftrightarrow x^2<1\Leftrightarrow -1<x<1.$

Ta có bảng xét dấu:

x	−∞		−2		−1		0		1		2		+∞
2x		-	|	-	|	-	0	+	|	+	|	+	
$f'(x^2-3)$		+	0	+	0	-	|	-	0	+	0	+	
$g'(x)$		-	0	-	0	+	0	-	0	+	0	+	

Từ bảng xét dấu ta thấy đáp án C đúng

Câu 15. Chọn C

$$g'(x)=\frac{\left(x^2-2x\right)'.f'\left(x^2-2x\right)}{\left(f\left(x^2-2x\right)+1\right)^2}=\frac{(2x-2).f'\left(x^2-2x\right)}{\left(f\left(x^2-2x\right)+1\right)^2}.$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-2=0\\ f'\left(x^2-2x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2-2x=-2\\ x^2-2x=-1\\ x^2-2x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1\\ x=3\end{array}\right.$$

Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta có hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;3)$.

Câu 16. Chọn D

Ta có $y'=3.\left(f(x)\right)^2.f'(x)-6.f(x).f'(x)$

$=3f(x).f'(x).\left[f(x)-2\right]$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\Leftrightarrow x\in\{x_1,4\mid x_1<1\}\\ f(x)=2\Leftrightarrow x\in\{x_2,x_3,3,x_4\mid x_1<x_2<1<x_3<2;4<x_4\}\\ f'(x)=0\Leftrightarrow x\in\{1,2,3,4\}\end{array}\right.$$

Lập bảng xét dấu ta có

x	- ∞		x_1		x_2		1		x_3		2		3		4		x_4		+ ∞
f (x)		-	0	+		+		+		+		+		+	0	+		+	
f (x) - 2		-		-	0	+		+	0	-		-	0	-		-	0	+	
f '(x)		+		+		+	0	-		-	0	+	0	-	0	+		+	
y'	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+		

Do đó ta có hàm số nghịch biến trên khoảng $(2\,;\,3)$.

Câu 17. Chọn A

Có $y'=(2x-2)f'\left(x^2-2x\right)$.

Do đó $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ f'\left(x^2-2x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2-2x=-2\\ x^2-2x=0\\ x^2-2x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=0\\ x=2\\ x=-1\\ x=3\end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		2		3		$+\infty$
x^2-2x		$+$	3	$+$	0	$-$	-1	$-$	0	$+$	3	$+$	
$f'\left(x^2-2x\right)$		$+$	0	$-$	0		$+$		0	$-$	0	$+$	
$2x-2$				$-$			0			$+$			
$\left(2x-2\right)f'\left(x^2-2x\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu đạo hàm, hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-1;0\right),\left(1;2\right),\left(3;+\infty\right)$.

Câu 18. Chọn C

Có $y'=2f'\left(x\right)f\left(x\right)$. Do đó $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'\left(x\right)=0 \\ f\left(x\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \\ x=\dfrac{5}{2} \\ x=4 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		-1		0		$\frac{5}{2}$		4		$+\infty$
$f'\left(x\right)$			$-$		0		$+$		0		$-$		
$f\left(x\right)$		$+$	0		$-$		0		$+$		0	$-$	
$2f'\left(x\right)f\left(x\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu đạo hàm, hàm số $y=\left[f\left(x\right)\right]^2$ nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;-2\right),\left(-1;0\right),\left(\dfrac{5}{2};4\right)$.

Câu 19. Chọn A

Ta có $g'\left(x\right)=\left(x^2-2x+m\right)'f'\left(x^2-2x+m\right)=2\left(x-1\right)f'\left(x^2-2x+m\right)$.

Hàm số $y=g\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$ khi và chỉ khi $g'\left(x\right)\ge 0,\forall x\in\left(1;+\infty\right)$ và

$g'\left(x\right)=0$ tại hữu hạn điểm $\Leftrightarrow 2\left(x-1\right)f'\left(x^2-2x+m\right)\ge 0,\forall x\in\left(1;+\infty\right)$

$\Leftrightarrow f'\left(x^2-2x+m\right)\ge 0,\forall x\in\left(1;+\infty\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x+m\ge 2,\forall x\in\left(1;+\infty\right) \\ x^2-2x+m\le 0,\forall x\in\left(1;+\infty\right) \end{array}\right.$

Xét hàm số $y=x^2-2x+m$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$ ↘	$m-1$	↗ $+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

Trường hợp 1: $x^2-2x+m\ge 2,\forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow m-1\ge 2\Leftrightarrow m\ge 3$.

Trường hợp 2: $x^2-2x+m\le 0,\forall x\in(1;+\infty)$: Không có giá trị m thỏa mãn.

Vậy có 2016 số nguyên $m<2019$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 20. Chọn C

Từ bảng biến thiên suy ra $f(x)\le 0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(3-x)\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

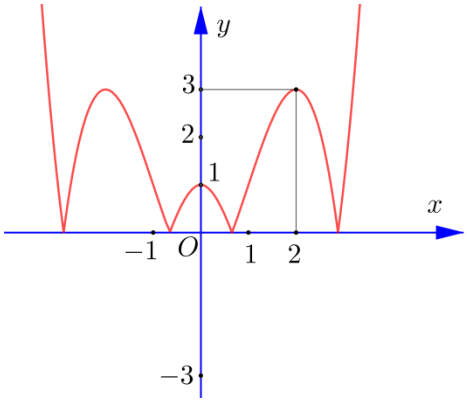
Ta có $g'(x)=-2f'(3-x).f(3-x)$.

Xét $g'(x)<0\Leftrightarrow -2f'(3-x).f(3-x)<0\Leftrightarrow f'(3-x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<3-x<1\\3-x>2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2<x<5\\x<1\end{array}\right.$.

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(2;5)$

Câu 21. Chọn D

Thực hiện liên hoàn biến đổi đồ thị $y=f(x)$ thành đồ thị $y=|f(x)|$, sau đó biến đổi đồ thị $y=|f(x)|$ thành đồ thị $y=|f(|x|)|$.



Dựa vào đồ thị hàm số $y=|f(|x|)|$ ta suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

Câu 22. Chọn B

Dựa vào đồ thị, suy ra $f'(x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x<1\\x>4\end{array}\right.$ và $f'(x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1\\1<x<4\end{array}\right.$.

- Với $x>3$ khi đó $g(x)=f(x-3)\longrightarrow g'(x)=f'(x-3)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1<x-3<1\\ x-3>4\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2<x<4\\ x>7\end{array}\right.$. Do đó hàm số $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(3;4)$, $(7;+\infty)$.

- Với $x<3$ khi đó $g(x)=f(3-x)\longrightarrow g'(x)=-f'(3-x)>0 \Leftrightarrow f'(3-x)<0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3-x<-1\\ 1<3-x<4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>4\ (loai)\\ -1<x<2\end{array}\right.$. Do đó hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.

Câu 23. Chọn B

Ta có: $g'(x)=\dfrac{x}{|x|}f'(|x|+1)$.

Xét $g'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{|x|}f'(|x|+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{x}{|x|}=0\\ f'(|x|+1)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ \left[\begin{array}{l}|x|+1=0\\ |x|+1=2\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ \left[\begin{array}{l}|x|=-1 \quad (L)\\ |x|=1\end{array}\right.\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=1\end{array}\right.\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↗		↘		↘		↗	

Từ bảng biến thiên thì ta có $g(x)=f(|x|+1)$ nghịch biến trên khoảng $(-1,1)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

Câu 24. Chọn D

Xét hàm số $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+m \Rightarrow f'(x)=12x^3-12x^2-24x$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=\dfrac{1}{2}\\ x=2\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	
			$m-5$						

Để hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ nghịch biến trên $\left(-\infty;-1\right)\Leftrightarrow m-5\ge 0\Leftrightarrow m\ge 5$

Do yêu cầu m là số nguyên nhỏ hơn 10 nên ta có $m\in\left\{5;6;7;8;9\right\}$. Vậy có 5 giá trị *m* thỏa yêu cầu..

Câu 25. Chọn A

Trường hợp 1: $x\le 2$. Khi đó $g\left(x\right)=f\left(4-2x\right)$.

Ta có $g'\left(x\right)=-2f'\left(4-2x\right)$, $g'\left(x\right)<0\Leftrightarrow f'\left(4-2x\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4-2x<-2\\1<4-2x<3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3\\\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$

So điều kiện $x\le 2$ ta được $g\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

Trường hợp 2: $x>2.$ Khi đó $g\left(x\right)=f\left(2x-4\right)$.

Ta có $g'\left(x\right)=2f'\left(2x-4\right)$, $g'\left(x\right)<0\Leftrightarrow f'\left(2x-4\right)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<2x-4<1\\2x-4>3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1<x<\dfrac{5}{2}\\x>\dfrac{7}{2}\end{array}\right.$

So điều kiện $x>2$ ta được $g\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left(2;\dfrac{5}{2}\right);\left(\dfrac{7}{2};+\infty\right)$.

Câu 26. Chọn C

Ta có $g'\left(x\right)=\left(3x^2-6x\right).f'\left(x^3-3x^2+m\right)$.

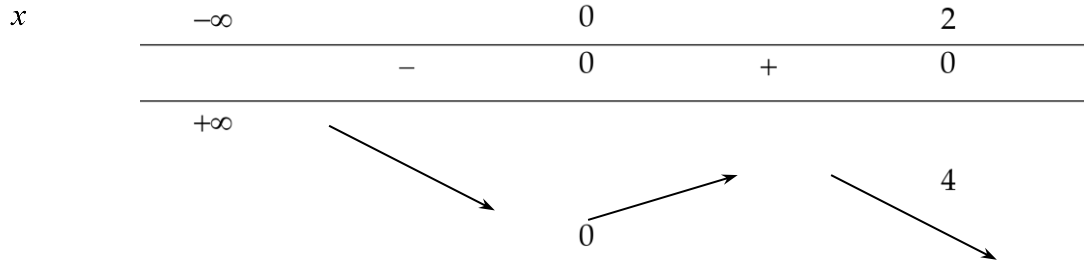
$$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2-6x=0\\x^3-3x^2+m=1\\x^3-3x^2+m=0\\x^3-3x^2+m=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\x^3-3x^2+m=1\\x^3-3x^2+m=0\\x^3-3x^2+m=2\end{array}\right..$$

Vì khi đi qua các nghiệm của phương trình $x^3-3x^2+m=1$ (nếu có) dấu của $f'\left(x^3-3x^2+m\right)$ không đổi nên dấu của $g'\left(x\right)$ chỉ phụ thuộc các nghiệm của hai phương trình còn lại.

Vậy hàm số $y=g\left(x\right)$ có 8 điểm cực trị khi và chỉ khi mỗi phương trình $x^3-3x^2+m=0$ và $x^3-3x^2+m=2$ phải có ba nghiệm phân biệt (khác 0 và khác 2).

Xét hàm số $h\left(x\right)=-x^3+3x^2$, ta có $h'\left(x\right)=-3x^2+6x$; $h'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=h\left(x\right)$



Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy điều kiện để mỗi phương trình $-x^3+3x^2=m$ và $-x^3+3x^2=m-2$ phải có ba nghiệm phân biệt (khác 0 và khác 2) là

$0<m-2<m<4 \Leftrightarrow 2<m<4$.

Vậy chỉ có một giá trị nguyên của m thỏa mãn là $m=3$.

Câu 27. Chọn C

Ta có $g'(x)=f'(x)-m$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)-m=0 \Leftrightarrow f'(x)=m$. Để hàm số $y=g(x)$ có đúng hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $g'(x)=0$ có hai nghiệm bội lẻ phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le 5 \\ 10\le m<13 \end{array}\right.$. Khi đó $m\in\{1,2,3,4,5,10,11,12\}$. Vậy có 8 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 28. Chọn D

Ta có: $g'(x)=\left(3x^2+6x\right)e^{x^3+3x^2}.f'\left(e^{x^3+3x^2}-m\right)$

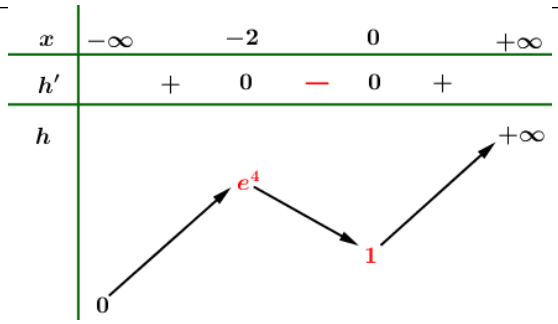
$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left(3x^2+6x\right)e^{x^3+3x^2}.f'\left(e^{x^3+3x^2}-m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \\ e^{x^3+3x^2}-m=-3 \\ e^{x^3+3x^2}-m=3 \\ e^{x^3+3x^2}-m=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \\ e^{x^3+3x^2}=m-3 \ (1) \\ e^{x^3+3x^2}=m+3 \ (2) \\ e^{x^3+3x^2}=m+5 \ (3) \end{array}\right.$$

Hàm số $g(x)$ có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi tổng số nghiệm đơn và bội lẻ, khác 0 và -2 của các phương trình $(1),(2),(3)$ là 5.

Xét hàm số $h(x)=e^{x^3+3x^2}$ có $h'(x)=\left(3x^2+6x\right)e^{x^3+3x^2}$.

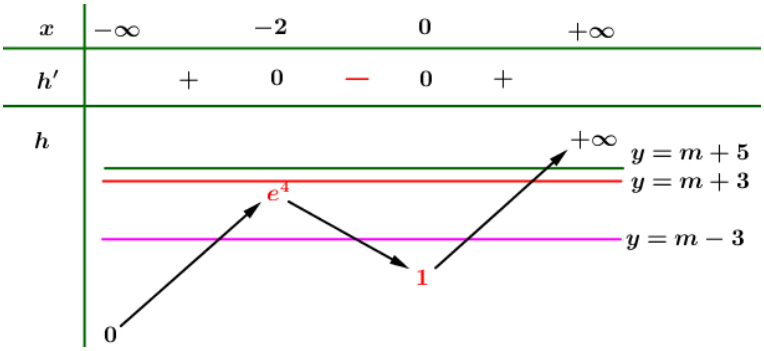
Ta có $h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:



Khi đó có 3 trường hợp sau:

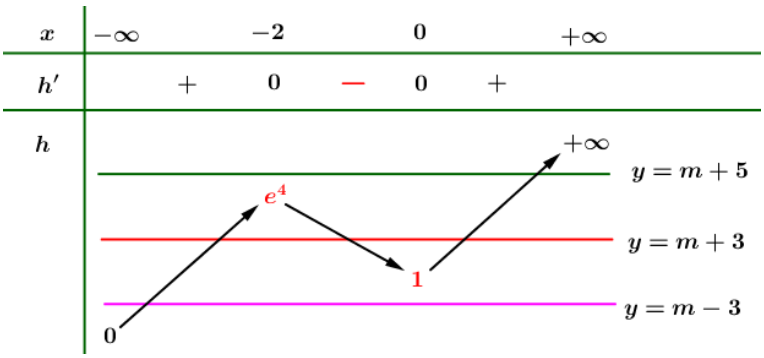
Trường hợp 1:



Khi đó: $\begin{cases} m+3 \ge e^4 \\ 1 < m-3 < e^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge e^4 - 3 \approx 51,6 \\ 4 < m < e^4 + 3 \approx 57,6 \end{cases}$

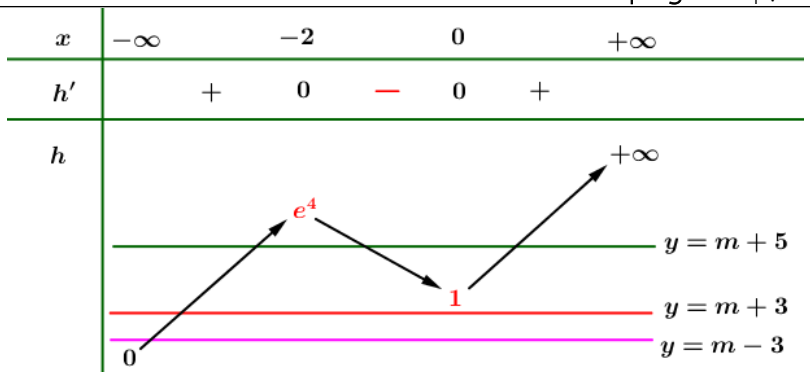
Do m nguyên nên $m \in \{52;53;54;55;56;57\}$.

Trường hợp 2:



Khi đó: $\begin{cases} m+5 \ge e^4 \\ 1 < m+3 < e^4 \\ 0 < m-3 \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > e^4 - 5 \approx 49,6 \\ -2 < m < e^4 - 3 \\ 3 < m \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing$.

Trường hợp 3:



Khi đó: $\begin{cases} 1 < m+5 < e^4 \\ m+3 \le 1 \\ m-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < m < e^4 - 5 \approx 49{,}6 \\ m \le -2 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing$.

Vậy có 6 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 29. Chọn C

Ta có $f'(x) = x(x-1)^2(x-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Lại có $g'(x) = 2x.f'(x^2+m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'(x^2+m) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2+m = 0 \\ x^2+m = 1 \\ x^2+m = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & \\ x^2 = -m & (1) \\ x^2 = 1-m & (2) \\ x^2 = 3-m & (3) \end{array}\right.$

Do (2) có nghiệm luôn là nghiệm bội chẵn ; các phương trình $(1),(3)$ có nghiệm không chung nhau và $-m < 3-m$ nên:

Hàm số $g(x)$ có 3 cực trị $\Leftrightarrow g'(x) = 0$ có 3 nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3-m > 0 \\ -m \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le m < 3$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0;1;2\}$. Vậy tổng các giá trị nguyên bằng 3.

Câu 30. Chọn C

Đặt $t(x) = 2x^3 + x - 1$ với $x \in [0;1]$. Ta có $t'(x) = 6x^2 + 1 > 0,\ \forall x \in [0;1]$.

Suy ra hàm số $t(x)$ đồng biến nên $x \in [0;1] \Rightarrow t \in [-1;2]$.

Từ đồ thị hàm số ta có $\max\limits_{[-1;2]} f(t) = 3 \Rightarrow \max\limits_{[-1;2]} [f(t) + m] = 3 + m$.

Theo yêu cầu bài toán ta cần có: $3 + m = -10 \Leftrightarrow m = -13$.

Câu 31. Chọn A

Ta có $y' = f'(x^2+3x-m) = (2x+3)f'(x^2+3x-m)$.

Theo đề bài ta có: $f'(x) = (x-1)(x+3)$

suy ra $f'(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-3 \\ x>1 \end{array}\right.$ và $f'(x)<0 \Leftrightarrow -3<x<1$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$ khi $y' \geq 0, \forall x \in (0;2)$

$\Leftrightarrow (2x+3) f'\left(x^2+3x-m\right) \geq 0, \forall x \in (0;2)$.

Do $x \in (0;2)$ nên $2x+3>0, \forall x \in (0;2)$. Do đó, ta có:

$$y' \geq 0, \forall x \in (0;2) \Leftrightarrow f'\left(x^2+3x-m\right) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+3x-m \leq -3 \\ x^2+3x-m \geq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq x^2+3x+3 \\ m \leq x^2+3x-1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq \max\limits_{[0;2]}\left(x^2+3x+3\right) \\ m \leq \min\limits_{[0;2]}\left(x^2+3x-1\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 13 \\ m \leq -1 \end{array}\right.$$.

Do $m \in [-10;20]$, $m \in \mathbb{Z}$ nên có 18 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 32. Chọn B

Ta có $f(x)=x^3+4x+m$,

$g(x)=\left(x^2+2018\right)\left(x^2+2019\right)^2\left(x^2+2020\right)^3=a_{12}x^{12}+a_{10}x^{10}+...+a_2x^2+a_0$.

Suy ra $f'(x)=3x^2+4$, $g'(x)=12a_{12}x^{11}+10a_{10}x^9+...+2a_2x$.

Và $\left[g\left(f(x)\right)\right]'=f'(x)\left[12a_{12}\left(f(x)\right)^{11}+10a_{10}\left(f(x)\right)^9+...+2a_2f(x)\right]$

$=f(x)f'(x)\left(12a_{12}\left(f(x)\right)^{10}+10a_{10}\left(f(x)\right)^8+...+2a_2\right)$.

Dễ thấy $a_{12};a_{10};...;a_2;a_0>0$ và $f'(x)=3x^2+4>0$, $\forall x>2$.

Do đó $f'(x)\left(12a_{12}\left(f(x)\right)^{10}+10a_{10}\left(f(x)\right)^8+...+2a_2\right)>0$, $\forall x>2$.

Hàm số $g\left(f(x)\right)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$ khi $\left[g\left(f(x)\right)\right]' \geq 0$, $\forall x>2 \Rightarrow f(x) \geq 0$, $\forall x>2$.

$\Leftrightarrow x^3+4x+m \geq 0$, $\forall x>3 \Leftrightarrow m \geq -x^3-4x$, $\forall x>2 \Rightarrow m \geq \max\limits_{[2;+\infty)}\left(-x^3-4x\right)=-16$.

Vì $m \in [-2020;2020]$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên có 2037 giá trị thỏa mãn m.

Câu 33. Chọn A

Ta có: $g'(x)=2f'(2x+1)=2(2x+1)(2x+2)^2[(2x+1)^2+2m(2x+1)+1]$

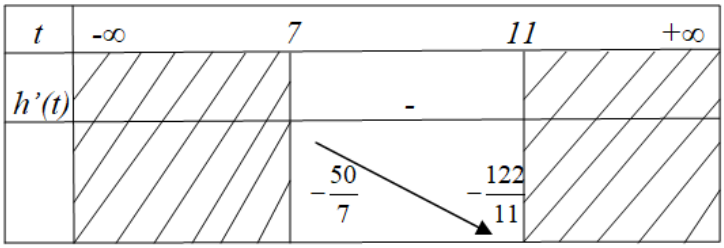
Đặt $t=2x+1$

Để hàm số $g\ x$ đồng biến trên khoảng $(3;5)$ khi và chỉ khi $g'(x) \geq 0$, $\forall x \in (3;5)$

$\Leftrightarrow t(t^2+2mt+1)\ge 0,\ \forall t\in(7;11)\Leftrightarrow t^2+2mt+1\ge 0,\ \forall t\in(7;11)\Leftrightarrow 2m\ge\dfrac{-t^2-1}{t},\ \forall t\in(7;11)$

Xét hàm số $h(t)=\dfrac{-t^2-1}{t}$ trên $[7;11]$, có $h'(t)=\dfrac{-t^2+1}{t^2}$

BBT:



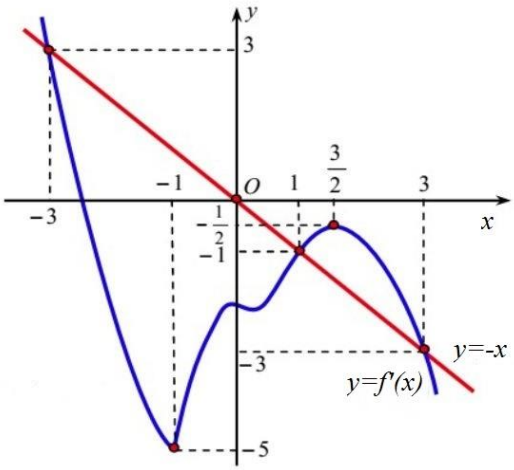
Dựa vào BBT ta có $2m\ge\dfrac{-t^2-1}{t},\ \forall t\in(7;11)\Leftrightarrow 2m\ge\max\limits_{[7;11]}h(t)\Leftrightarrow m\ge-\dfrac{50}{14}$

Vì $m\in\mathbb{Z}^-\Rightarrow m\in\{-3;-2;-1\}$.

Câu 34. Chọn B

Ta có $g'(x)=f'(x-2m)-(2m-x)$.

Đặt $h(x)=f'(x)-(-x)$. Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đồ thị hàm số $y=-x$ trên hình vẽ suy ra: $h(x)\le 0\Leftrightarrow f'(x)\le -x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-3\le x\le 1\\ x\ge 3\end{array}\right.$.



Ta có $g'(x)=h(x-2m)\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-3\le x-2m\le 1\\ x-2m\ge 3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2m-3\le x\le 2m+1\\ x\ge 2m+3\end{array}\right.$.

Suy ra hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(2m-3;2m+1)$ và $(2m+3;+\infty)$.

Do đó hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(3;4)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2m-3\le 3\\ 2m+1\ge 4\end{cases}\\ 2m+3\le 3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{3}{2}\le m\le 3\\ m\le 0\end{array}\right.$.

Mặt khác, do m nguyên dương nên $m\in\{2;3\}\Rightarrow S=\{2;3\}$. Vậy số phần tử của S bằng 2.

Từ đó chọn **đáp án B.**

Câu 35. Chọn C

Ta có: $g'(x)=f'(1-x)=-(1-x)^2(-x-1)\left[(1-x)^2-6(1-x)+m\right]$

$=(x-1)^2(x+1)(x^2+4x+m-5)$

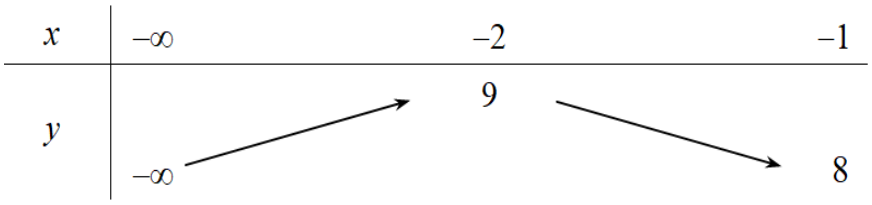
Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$

$\Leftrightarrow g'(x)\le 0, \forall x<-1\ (*)$, (dấu " = " xảy ra tại hữu hạn điểm).

Với $x<-1$ thì $(x-1)^2>0$ và $x+1<0$ nên $(*)\Leftrightarrow x^2+4x+m-5\ge 0, \forall x<-1$

$\Leftrightarrow m\ge -x^2-4x+5, \forall x<-1$.

Xét hàm số $y=-x^2-4x+5$ trên khoảng $(-\infty;-1)$, ta có bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên suy ra $m\ge 9$.

Kết hợp với m thuộc đoạn $[-2020;2020]$ và m nguyên nên $m\in\{9;10;11;...;2020\}$.

Vậy có 2012 số nguyên m thỏa mãn đề bài.

Câu 36. Chọn B

Ta có $g'(x)=2f'(2x-3)-\dfrac{2x}{1+x^2}-2m$. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\left(\dfrac{1}{2};2\right)$ khi và chỉ khi

$$g'(x)\ge 0, \forall x\in(-1;2)\Leftrightarrow m\le f'(2x-3)-\frac{x}{1+x^2}, \forall x\in\left(\frac{1}{2};2\right)\ \Leftrightarrow m\le \min_{x\in\left(\frac{1}{2};2\right)}\left[f'(2x-3)-\frac{x}{1+x^2}\right]$$

(1)

Đặt $t=2x-3$, khi đó $x\in\left(\dfrac{1}{2};2\right)\Leftrightarrow t\in(-2;1)$.

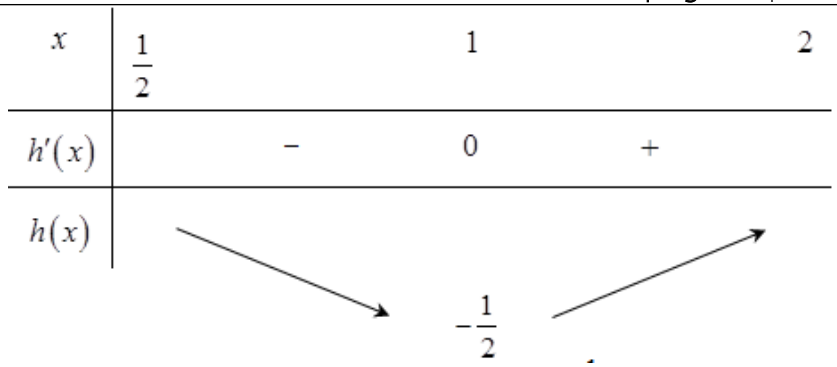
Từ đồ thị hàm $f'(x)$ suy ra $f'(t)\ge 0, \forall t\in(-2;1)$ và $f'(t)=0$ khi $t=-1$.

Tức là $f'(2x-3)\ge 0, \forall x\in\left(\dfrac{1}{2};2\right)\Rightarrow \min\limits_{x\in\left(\frac{1}{2};2\right)} f'(2x-3)=0$ khi $x=1$. (2)

Xét hàm số $h(x)=-\dfrac{x}{1+x^2}$ trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};2\right)$. Ta có $h'(x)=\dfrac{x^2-1}{(1+x^2)^2}$ và

$$h'(x)=0\Leftrightarrow x^2-1=0\Leftrightarrow x=\pm 1.$$

Bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ trên $\left(\dfrac{1}{2};2\right)$ như sau:



Từ bảng biến thiên suy ra $h(x) \ge -\frac{1}{2} \Rightarrow \min\limits_{x\in\left(\frac{1}{2};2\right)} h(x) = -\frac{1}{2}$ khi $x = 1$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $m \le -\frac{1}{2}$.

Kết hợp với $m \in \mathbb{Z}$, $m \in (-2020;2020)$ thì $m \in \{-2019;-2018;....;-2;-1\}$.

Vậy có tất cả 2019 giá trị m cần tìm.

Câu 37. Chọn D

Ta có $g'(x) = (2x+1)f'(x^2+x) - 12x^2 + 6x + 6$.

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 2$. Do đó

$$f'(x^2+x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x > -1 \\ x^2+x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x+1 > 0; \forall x \in \mathbb{R} \\ x^2+x-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x < 1.$$

Ta có bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x+1$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f'(x^2+x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
$(2x+1)f'(x^2+x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$-12x^2+6x+6$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g'(x)$		chưa biết dấu		$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2};1\right)$.

Câu 38. Chọn D

Ta có: $g'(x) = -2f'(x)f'(3-2f(x)) - 3x^2 + 6x$.

Vì $f(x) > 2, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $3 - 2f(x) < -1 \ \forall x \in \mathbb{R}$

Từ bảng xét dấu $f'(x)$ suy ra $f'(3-2f(x)) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Từ đó ta có bảng xét dấu sau:

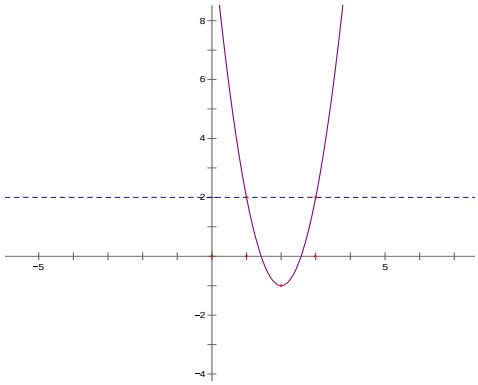
x	$-\infty$	-1		0		1		2		4		$+\infty$
$-f'(x)f'(3-2f(x))$		-	0	+	|	+	0	-	|	-	0	+	
$-3x^2+6x$		-	|	-	0	+	|	+	0	-	|	-	

Từ bảng xét dấu trên, loại trừ đáp án suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2;3)$.

Câu 39. Chọn A

Xét hàm số $g(x)=f'(2x+3)+2$ có đồ thị là một Parabol nên có phương trình dạng:

$y=g(x)=ax^2+bx+c\ \ (P)$



Vì (P) có đỉnh $I(2;-1)$ nên

$$\begin{cases}\dfrac{-b}{2a}=2\\ g(2)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-b=4a\\ 4a+2b+c=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a+b=0\\ 4a+2b+c=-1\end{cases}.$$

(P) đi qua điểm $A(1;2)$ nên $g(1)=2\Leftrightarrow a+b+c=2$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}4a+b=0\\ 4a+2b+c=-1\\ a+b+c=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\ b=-12\\ c=11\end{cases}$ nên $g(x)=3x^2-12x+11$.

Đồ thị của hàm $y=g(x)$ là

Theo đồ thị ta thấy $f'(2x+3)\le 0\Leftrightarrow f'(2x+3)+2\le 2\Leftrightarrow 1\le x\le 3$.

Đặt $t=2x+3\Leftrightarrow x=\dfrac{t-3}{2}$ khi đó $f'(t)\le 0\Leftrightarrow 1\le\dfrac{t-3}{2}\le 3\Leftrightarrow 5\le t\le 9$.

Vậy $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(5;9)$.

Câu 40. Chọn D

Ta có $g'(x)=2f''(x)f'(x)-2f'(x).f''(x)-2f(x).f'''(x)=-2f(x).f'''(x);$

Khi đó $\left(h(x)\right)'=(2x-2)g'(x^2-2x)=-2(2x-2)(x^2-2x)(x^2-2x-1)^2(x^2-2x+4)^3$

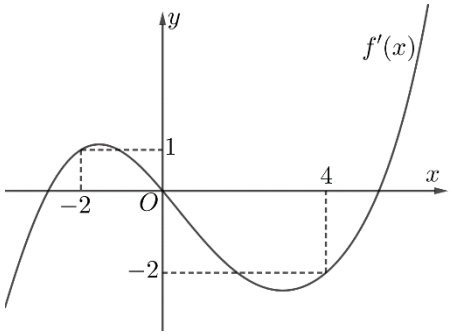
$h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\\ x=2\\ x=1\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$. Ta có bảng xét dấu của $h'(x)$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		0		1		2		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		+	0	+	0	−	0	+	0	−	0	−	

Suy ra hàm số $h(x)=g(x^2-2x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

DẠNG 3 Tính đơn điệu của hàm hợp số 02

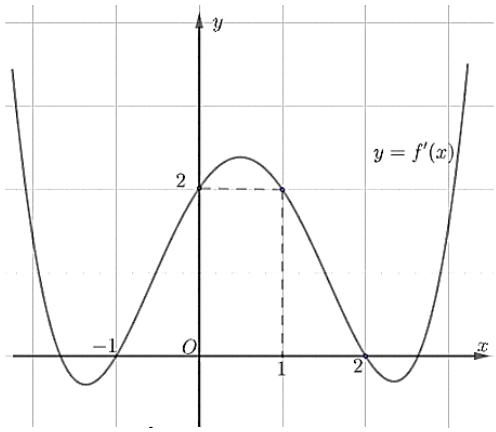
Câu 1: Cho hàm số đa thức $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết $f(0)=0$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình sau.



Hàm số $g(x)=\left|4f(x)+x^2\right|$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(4;+\infty)$. **B.** $(0;4)$. **C.** $(-\infty;-2)$. **D.** $(-2;0)$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số tham số m nguyên thuộc đoạn $[-20;20]$ để hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$ biết $g(x)=3f\left(-x^3-3x+m\right)+\left(x^3+3x-m\right)^2\left(-2x^3-6x+2m-6\right)$.



A. 23. **B.** 21. **C.** 5. **D.** 17.

Câu 3: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2021;2021]$ để hàm số $g(x)=\left|x^3-3mx^2-3(m+2)x-m+1\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$?

A. 4041. **B.** 4042. **C.** 2021. **D.** 4039.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=3f(2x-1)-4x^3+15x^2-18x+1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(3;+\infty)$. **B.** $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{5}{2};3\right)$. **D.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+4)(x^2+2mx+9)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Số giá trị nguyên âm của m để hàm số $g(x)=f(x^2+3x-4)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

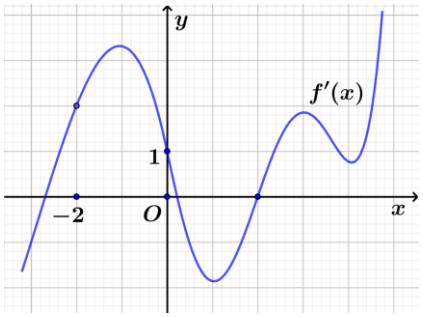
Câu 6: Cho hàm số $f(x)=-x^4-(4-m^2)x+2020$ và $g(x)=-x^3+5x^2-2020x+2021$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để $h(x)=g[f(x)]$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

A. 13. **B.** 12. **C.** 7. **D.** 6.

Câu 7: Cho hàm số $g(x)=f(1-x)$ có đạo hàm $g'(x)=(3-x)^{2021}(2+x)^{2020}\left[x^2+(m-2)x-3m+6\right]$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình bên dưới. Hỏi hàm số $g(x)=4f(x)+x^2-4x+2021$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

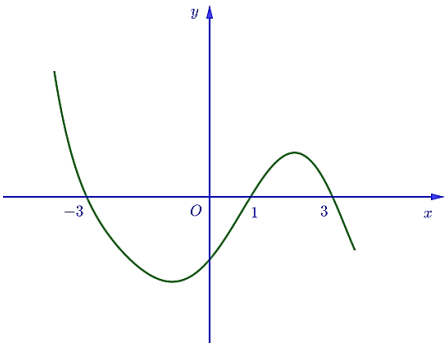


A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;+\infty)$

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, biết rằng $f'(x+2)=x^2-3x+2$. Hàm số $y=f(x^2+4x+7)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(-3;-1)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-2;0)$.

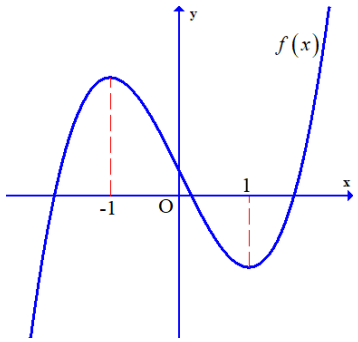
Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thoả $f(-3)=f(3)=\frac{1}{2}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ là một hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ sau:



Hỏi hàm số $g(x)=\left[f(3-x)\right]^2-f(3-x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây:

A. $(-3;1)$. **B.** $(-\infty;-3)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;6)$.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Biết rằng hàm số $f(x^3-3x-1)$ nghịch biến trên các khoảng lớn nhất $(a;b);(m;n);(p;q)$. Giá trị của biểu thức $(a^2+b^2+m^2+n^2+p^2+q^2)$ bằng:



A. 9. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 10.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét đấu đạo hàm $f'(x)$như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x)=f\left(4-\sqrt{4-x^2}\right)$ đồng biến trên:

x	$-\infty$		-3		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

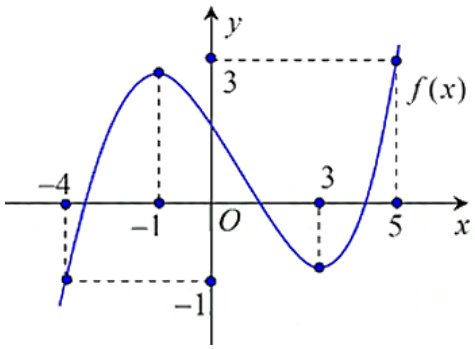
A. $(0;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(-3;-1)$.

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét đấu đạo hàm $f'(x)$như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x)=f\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)$ nghịch biến trên:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

A. $(5;6)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;5)$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ dưới đây. Hỏi hàm số $f(f(x))$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

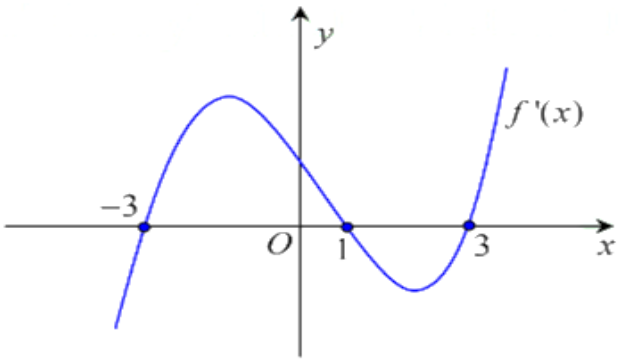


A. $(0;2)$. **B.** $(-3;-1)$. **C.** $(3;5)$. **D.** $(-5;-3)$.

Câu 15: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ có biểu thức đạo hàm được cho bởi $f'(x)=x(x-2)(x+1)$. Hỏi tham số thực m thuộc khoảng nào dưới đây thì hàm số $g(x)=f(x^3+m)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

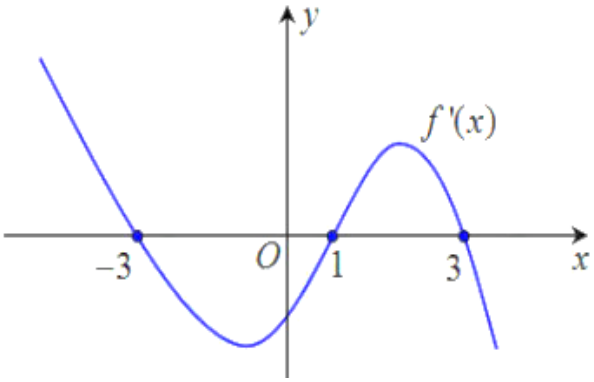
A. $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(1;4)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$. **D.** $(0;1)$.

Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-20;20]$ để hàm số $g(x)=f(x^2-2x-m)$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$?



A. 19. **B.** 23. **C.** 18. **D.** 17.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $g(x)=f(x^3-3x-m)$ đồng biến trên $[-2;-1]$.



A. 24. **B.** 25. **C.** 26. **D.** 31.

Câu 18: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-20;20]$ để hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-2x+2}+1}{2m-3-\sqrt{x^2-2x+2}}$ đồng biến trên $(-\infty;1)$?

A. 21. **B.** 19. **C.** 22. **D.** 20.

Câu 19: Cho hai hàm số $f(x)=\dfrac{x+4a}{x+b}$ và $g(x)=\dfrac{x+b}{x+a^2}$ cùng đồng biến trên từng khoảng xác

định của nó. Gọi a_o và b_o lần lượt là những số nguyên dương nhỏ nhất của *a* và *b* thỏa mãn. Giá trị của biểu thức $T = a_o + b_o$ tương ứng bằng:

A. 25. **B.** 26. **C.** 27. **D.** 28.

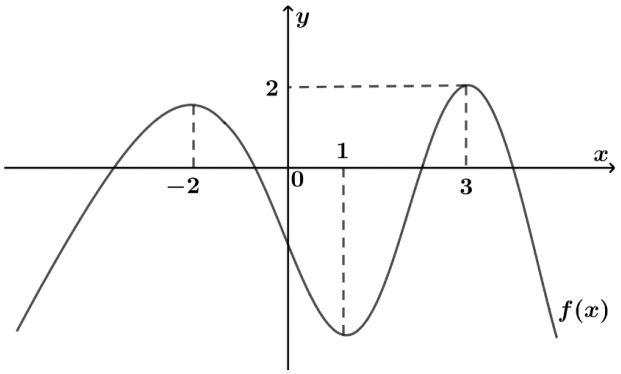
Câu 20: Cho hàm số $y = f(x) = (m-1)x^3 - 3(m^2+m-1)x^2 + 3(m-1)x - m - 1$ với *m* là tham số. Biết rằng với mọi tham số *m* thì hàm số luôn nghịch biến trên $(a;b)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $(b-a)$ bằng:

A. $4\sqrt{7}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 4. **D.** $4\sqrt{6}$.

Câu 21: Cho hàm số $f(x) = 3m^2x^4 - 8mx^3 + 6x^2 + 12(2m-1)x + 1$ với *m* là tham số. Biết rằng với mọi tham số *m* thì hàm số luôn đồng biến trên $[a;b]$; với *a, b* là những số thực. Giá trị lớn nhất của biểu thức $(2b-a)$ sẽ bằng:

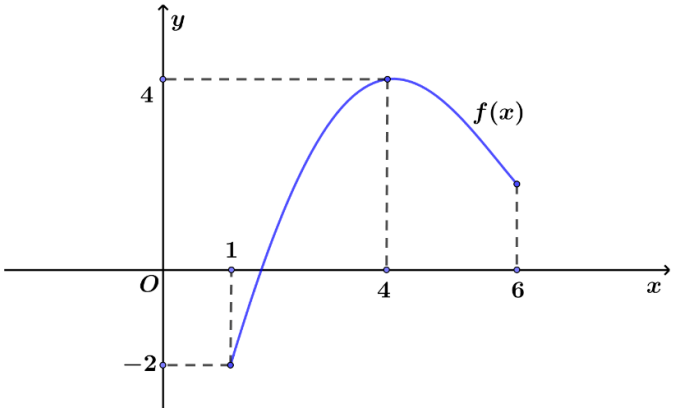
A. 2. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{6}$.

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = \dfrac{1}{f(x)-3}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



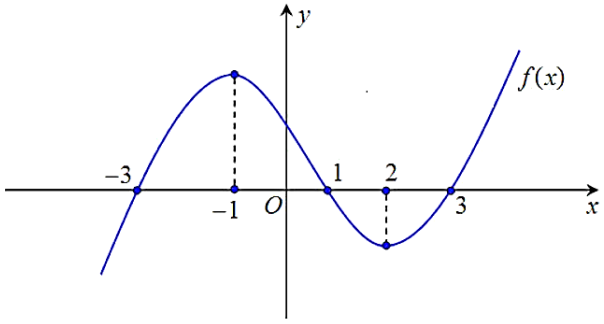
A. $(-3;-2)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(-1;2)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-20;2021)$ để hàm số $y = \dfrac{f(x)+5}{f(x)+m}$ nghịch biến trên $(1;4)$?



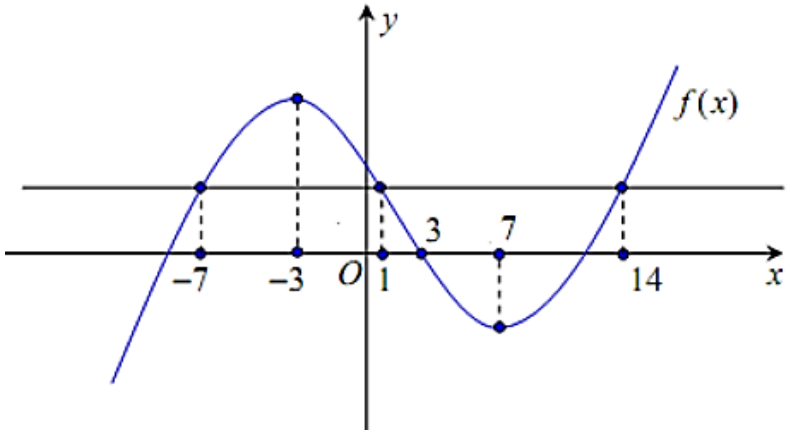
A. 19. **B.** 21. **C.** 20. **D.** 22.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = (f(x))^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



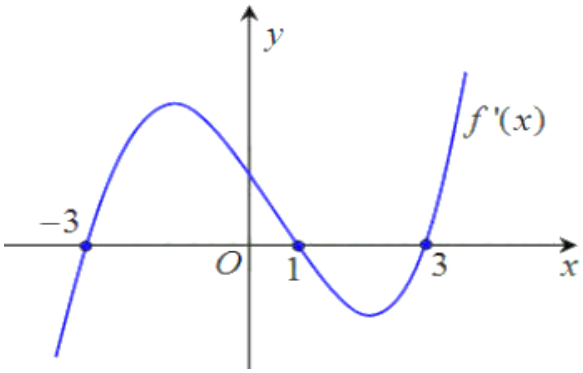
A. $(1;3)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(-3;-1)$.

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ. Hỏi hàm số $g(x)=[f(x)]^2-6f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



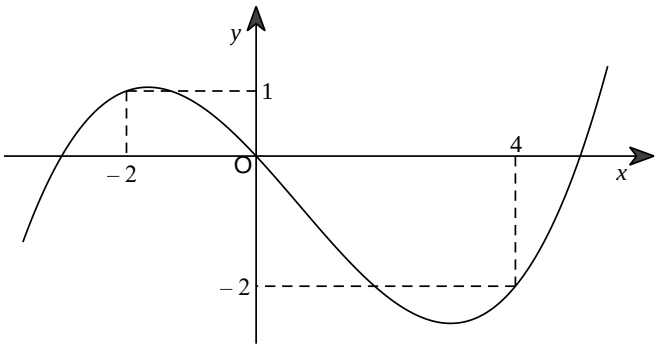
A. $(-3;1)$. **B.** $(7;14)$. **C.** $(14;+\infty)$. **D.** $(1;7)$.

Câu 26: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $g(x)=f(x^2-2x-m)$ nghịch biến trên $(-1;2)$.



A. 0. **B.** 1. **C.** 28. **D.** 23.

Câu 27: Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x)=f(1-2x)+x^2-x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

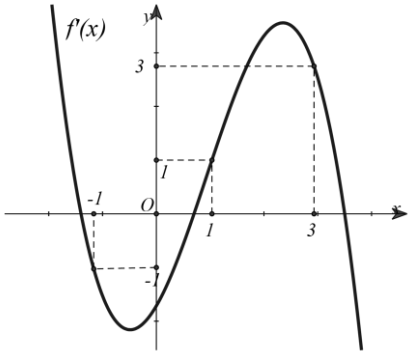


A. $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(2;3)$.

Câu 28: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-40;40]$ để hàm số $g(x)=\left|x^2-4mx+m-3\right|$ nghịch biến trên khoảng $(-2;-1)$.

A. 79. **B.** 39. **C.** 80. **D.** 40.

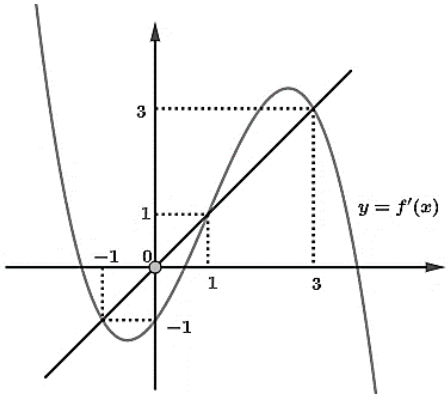
Câu 29: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho như hình vẽ



Hàm số $g(x)=2f\left(\left|x-1\right|\right)-x^2+2x+2020$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(0;1)$. **B.** $(-3;1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(-2;0)$.

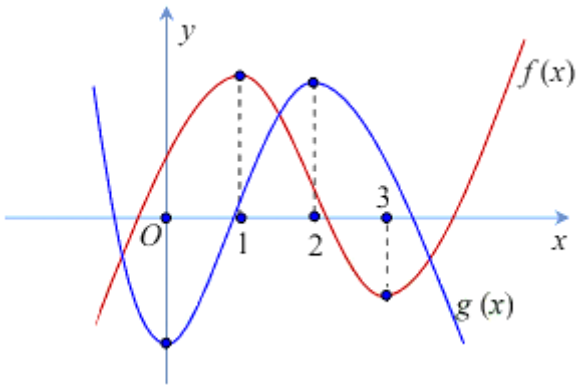
Câu 30: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=2f\left(\left|x-1\right|\right)-x^2+2x+2020$ đồng biến trên khoảng nào?

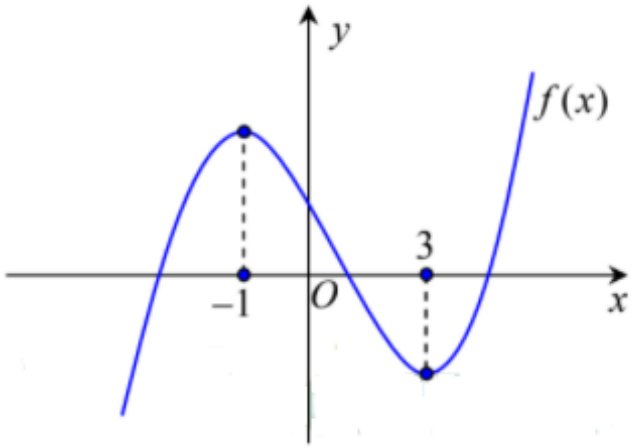
A. $(0;1)$. **B.** $(-3;1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(-2;0)$.

Câu 31: Cho hàm số $f(x)$, $g(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết hai hàm số $y=f(2x-1)$, $y=g(ax+b)$ có cùng khoảng nghịch biến lớn nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $(4a+b)$ bằng:



A. 0. **B.** -2. **C.** -4. **D.** 3.

Câu 32: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số như hình vẽ. Khi đó hàm số $f(x^3+3x-1)$ nghịch biến trên:



A. $(1;2)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

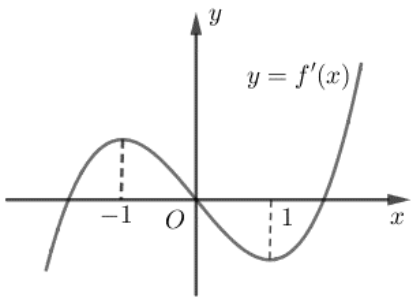
Câu 33: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị nằm trên trục hoành và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, bảng xét dấu của biểu thức $f'(x)$ như bảng dưới đây.

x	$-\infty$		-2		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=g(x)=\dfrac{f(x^2-2x)}{f(x^2-2x)+1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

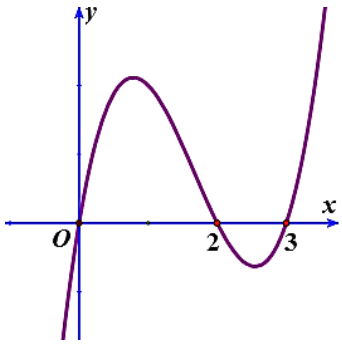
A. $(-\infty;1)$. **B.** $\left(-2;\frac{5}{2}\right)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 34: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f(1)=1$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên dương a để hàm số $y=\left|4f(\sin x)+\cos 2x-a\right|$ nghịch biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$?



A. 2 . **B.** 3 . **C.** Vô số. **D.** 5 .

Câu 35: Giả sử $f(x)$ là đa thức bậc 4. Đồ thị của hàm số $y=f'(1-x)$ được cho như hình bên. Hỏi hàm số $g(x)=f(x^2-3)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?



A. $(-2;1)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(0;1)$.

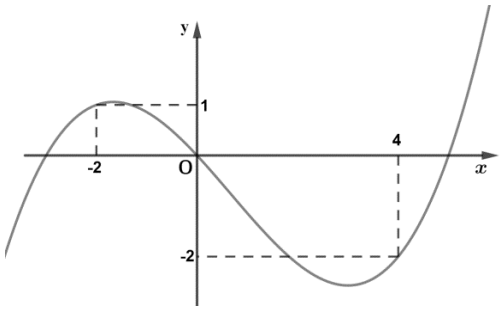
Câu 36: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn $-10<m<10$ và hàm số $y=f(x^2+2x+m)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

A. 5 . **B.** 4 . **C.** 6 **D.** 1 .

Câu 37: Cho hàm số $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,\ a\neq 0$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên thuộc khoảng $(-6;6)$ của tham số m để hàm số $g(x)=f(3-2x+m)+x^2-(m+3)x+2m^2$ nghịch biến trên $(0;1)$. Khi đó, tổng giá trị các phần tử của S là

A. 12. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 15.

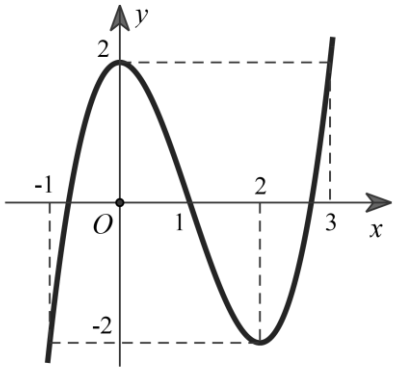
Câu 38: Có bao nhiêu giá trị thực của m để hàm số $y=mx^9+\left(m^2-3m+2\right)x^6+\left(2m^3-m^2-m\right)x^4+m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. Vô số. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 39: Cho hàm số $f\left(x\right)=\frac{2}{5}m^2x^5-\frac{8}{3}mx^3-\left(m^2-m-20\right)x+1$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 7. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 40: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ bên. Đặt $g\left(x\right)=f\left(x-m\right)-\frac{1}{2}\left(x-m-1\right)^2+2019$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=g\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(5;6\right)$. Tổng tất cả các phần tử trong S bằng:

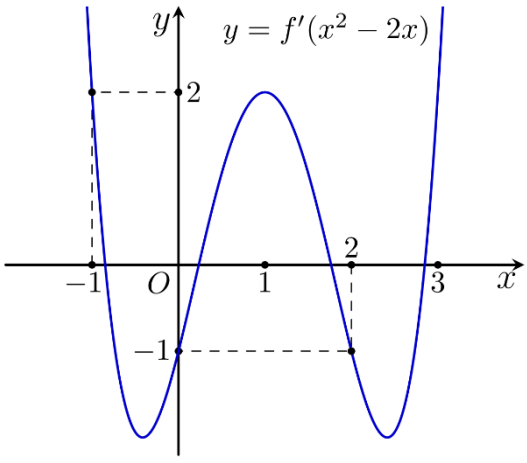


A. 4. **B.** 11. **C.** 14. **D.** 20.

Câu 41: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x)=2\left(m+1\right)x^3+3\left(m^2-5m-4\right)x^2-6\left(3m^2-6m-19\right)x-32\sqrt{\left(x+1\right)^3}+1$ đồng biến trên khoảng $\left(-1;+\infty\right)$. Số phần tử của tập hợp S là

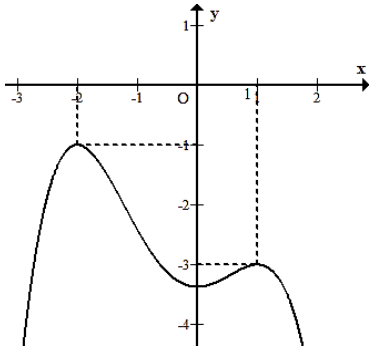
A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 42: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'\left(x^2-2x\right)$ như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-1\right)+\frac{2}{3}x^3+1$ đồng biến trên khoảng nào?



A. $\left(-3;-2\right)$. **B.** $\left(1;2\right)$. **C.** $\left(-2;-1\right)$. **D.** $\left(-1;0\right)$.

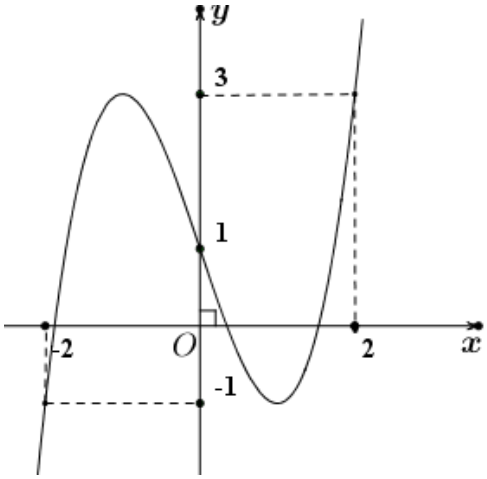
Câu 43: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=f(3x+1)-3(2x^3+2x^2-3x+5)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

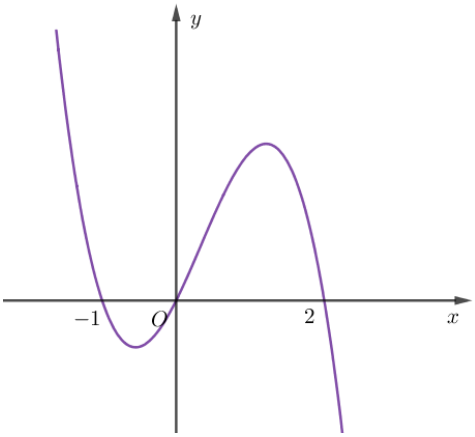
A. $(-\infty;-2),(1;+\infty)$. **B.** $(-3;0)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(-1;2)$.

Câu 44: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(2x+1)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x)-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x$. Đồng biến trên khoảng nào sau đây?



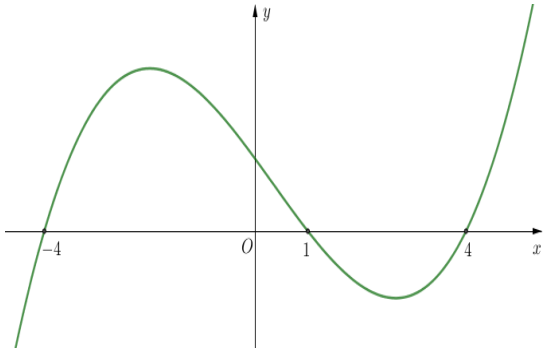
A. $(-\infty;-3)$. **B.** $(-3;0)$. **C.** $(1;4)$. **D.** $(4;+\infty)$.

Câu 45: Cho hàm số bậc bốn $f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(3-2x)$ được cho như hình bên. Hàm số $y=f(x^2+1)$ nghịch biến trên khoảng nào?



A. $(-\infty;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(-1;0)$.

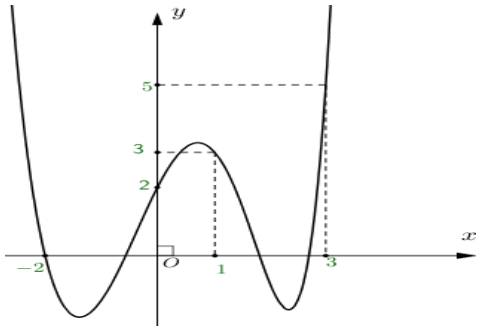
Câu 46: Cho hàm số $y=f(x), y=g(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, trong đó hàm số $g(x)=\left(f(2-x)\right)'$ là hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ như dưới



Hàm số $y=f\left(x^2+2\right)-x^3+2x^2-x+2021$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

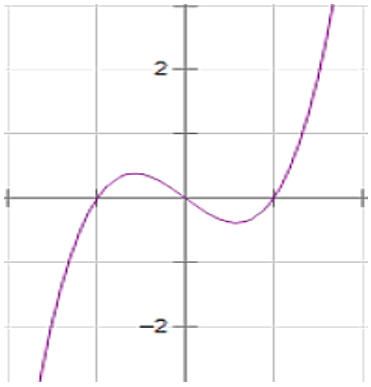
Câu 47: Cho hai hàm số $f(x);g(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị $y=f'\left(x^2+4x\right)$ như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=f\left(x^2-4\right)-\frac{2}{3}x^3+2021$ nghịch biến trong khoảng nào?

A. $(0;3)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(2,3)$. **D.** $(4;6)$

Câu 48: Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, trong đó $g(x)=\left[f\left(x^2-4\right)\right]'$ là hàm bậc ba có đồ thị như hình vẽ:



Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $h(x)=f\left(x^2+x+m\right)$ đồng biến trên $(0;1)$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 49: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức và hàm số $y=f\left(x^2-1\right)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Hàm số $g(x)=f\left(2x^3-x\right)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. **B.** $\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{\sqrt{6}};1\right)$. **D.** $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}};+\infty\right)$.

Câu 50: Cho hàm số $y=f(x^2-2)$ là hàm số bậc 4 có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	$f(-1)$	↘	$f(-2)$	↗	$f(-1)$	↘	$-\infty$

Hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x+3\right)$ đồng biến trong khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.A	3.A	4.B	5.B	6.D	7.C	8.C	9.C	10.D
11.B	12.C	13.D	14.A	15.B	16.C	17.C	18.A	19.B	20.D
21.C	22.A	23.C	24.D	25.B	26.A	27.A	28.C	29.A	30.A
31.B	32.B	33.C	34.B	35.D	36.C	37.B	38.B	39.B	40.C
41.D	42.C	43.C	44.D	45.D	46.C	47.B	48.D	49.A	50.C

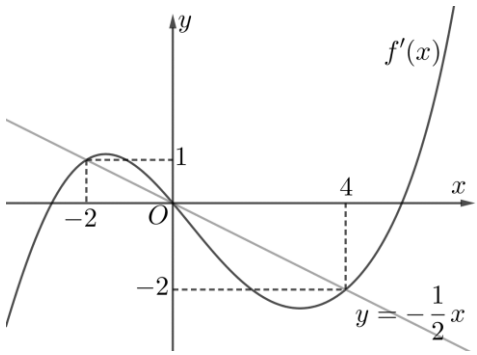
HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn B

Xét hàm số $h(x)=4f(x)+x^2$ trên $\mathbb{R}$.

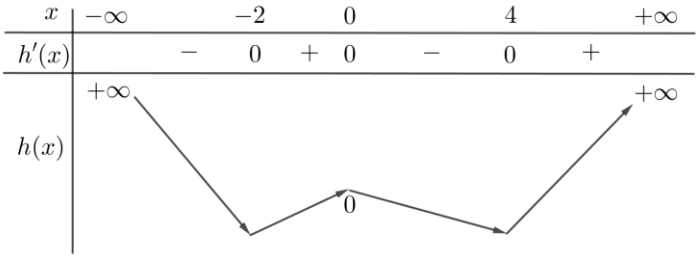
Vì $f(x)$ là hàm số đa thức nên $h(x)$ cũng là hàm số đa thức và $h(0)=4f(0)=0$.

Ta có $h'(x)=4f'(x)+2x$. Do đó $h'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=-\frac{1}{2}x$.

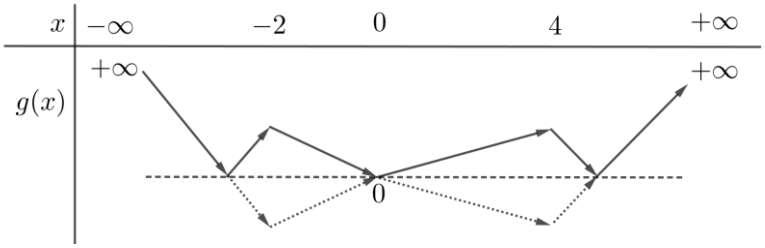


Dựa vào sự tương giao của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=-\frac{1}{2}x$, ta có $h'(x)=0\Leftrightarrow x\in\{-2;0;4\}$

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ như sau:



Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)=|h(x)|$ như sau:



Dựa vào bảng biến thiên trên, ta thấy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;4)$.

Câu 2: **Chọn A**

$g(x)=3f\left(-x^3-3x+m\right)+2\left(-x^3-3x+m\right)^2\left(-x^3-3x+m-3\right)$

$=3f\left(-x^3-3x+m\right)+2\left(-x^3-3x+m\right)^3-6\left(-x^3-3x+m\right)^2$

Ta có

$g'(x)=-9\left(x^2+1\right)f'\left(-x^3-3x+m\right)-18\left(x^2+1\right)\left(-x^3-3x+m\right)^2+36\left(x^2+1\right)\left(-x^3-3x+m\right)$

Để hàm số nghịch biến trên $(-1;2)$

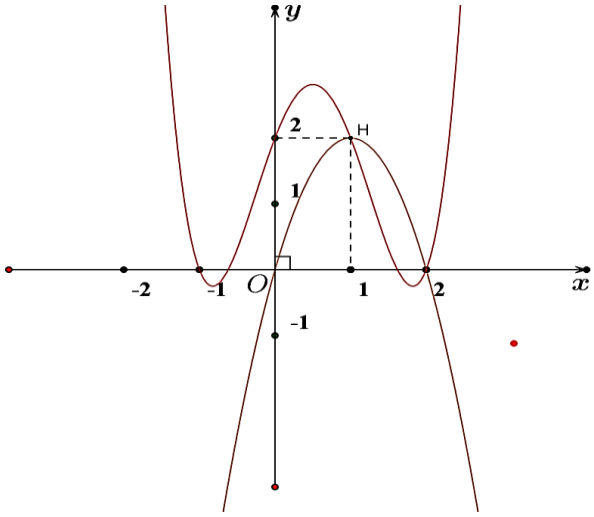
$g'(x)\le 0\ \forall x\in(-1;2)\Leftrightarrow f'\left(-x^3-3x+m\right)+2\left(-x^3-3x+m\right)^2-4\left(-x^3-3x+m\right)\ge 0\ \forall x\in(-1;2)$

$\Leftrightarrow f'\left(-x^3-3x+m\right)\ge -2\left(-x^3-3x+m\right)^2+4\left(-x^3-3x+m\right)\ \forall x\in(-1;2)$

Đặt $t=-x^3-3x+m$. Với $x\in(-1;2)$ có $t'=-3x^2-3<0\ \forall x\in(-1;2)\Rightarrow t\in(m-14;m+4)$

Xét bất phương trình (1) $f'(t)\ge -2t^2+4t\quad(1)$

Đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và $y=-2t^2+4t$ trên cùng hệ trục tọa độ:



Để (1) luôn đúng $\Leftrightarrow\begin{cases}t\in(m-14,m+4)\\ \left[\begin{array}{l}t\le 1\\ t\ge 2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}t\in(m-14,m+4)\\ t\le 1\end{cases}\\ \begin{cases}t\in(m-14,m+4)\\ t\ge 2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m+4\le 1\\ m-14\ge 2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le -3\\ m\ge 16\end{array}\right.$.

Do $m\in[-20;20]$ nên số giá trị của m là $(-3+20)+1+(20-16)+1=23$.

Câu 3: **Chọn A**

Xét hàm số $g(x)=\left|f(x)\right|=\left|x^3-3mx^2-3(m+2)x-m+1\right|$ có $f'(x)=3x^2-6mx-3(m+2)$

Để hàm số đồng biến trên $(0;3)$ thì:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\ge 0\\ f'(x)\ge 0\end{cases},\forall x\in(0;3)\\ \begin{cases}f(x)\le 0\\ f'(x)\le 0\end{cases},\forall x\in(0;3)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(0)\ge 0\\ 3x^2-6mx+3(m+2)\ge 0\end{cases},\forall x\in(0;3)\\ \begin{cases}f(0)\le 0\\ 3x^2-6mx+3(m+2)\le 0\end{cases},\forall x\in(0;3)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-m-2\ge 0\\ m\le \dfrac{x^2-2}{2x+1},\forall x\in(0;3)\end{cases}\\ \begin{cases}-m-2\le 0\\ m\ge \dfrac{x^2-2}{2x+1},\forall x\in(0;3)\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\le -2\\ m\le -2\end{cases}\\ \begin{cases}m\ge -2\\ m\ge 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\le -2\\ m\ge 1\end{array}\right.. \text{ Vì } m\in[-2021;2021]\Rightarrow \left[\begin{array}{l}-2021\le m\le -2\\ 1\le m\le 2021\end{array}\right.$$

Vậy có tất cả 4041 giá trị m thỏa mãn đề bài.

Câu 4: Chọn B

Ta đặt: $y=g(x)=f(2x-1)-4x^3+15x^2-18x+1$.

$\Rightarrow g'(x)=6f'(2x-1)-12x^2+30x-18=6\left[f'(2x-1)-2x^2+5x-3\right]$.

Có $f'(2x-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-1=1\\ 2x-1=2\\ 2x-1=3\\ 2x-1=4\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\dfrac{3}{2}\\ x=2\\ x=\dfrac{5}{2}\end{array}\right.$.

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		2		$\frac{5}{2}$		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0		$+$		0		$+$		0	$-$	0	$+$	
$f'(2x-1)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-2x^2+5x-3$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0		$?$	$-$		$?$		$?$		$?$	

Từ đó, ta có bảng xét dấu như sau:

Dựa vào bảng xét dấu trên, ta kết luận hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$.

Câu 5: Chọn B

Ta có $g'(x)=(2x+3)f'(x^2+3x-4)$.

Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ khi

$(2x+3)f'(x^2+3x-4)\ge 0,\ \forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow f'(x^2+3x-4)\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow (x^2+3x-4)^2(x^2+3x)\left[(x^2+3x-4)^2+2m(x^2+3x-4)+9\right]\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)(1)$

Đặt $t=x^2+3x-4\ (t>0)$ do $x\in(1;+\infty)$

$(1)\Rightarrow t^2(t+4)(t^2+2mt+9)\ge 0,\forall t>0\Leftrightarrow t^2+2mt+9\ge 0,\forall t>0$

$\Leftrightarrow m\ge -\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{9}{t}\right),\forall t>0\Leftrightarrow m\ge -3$

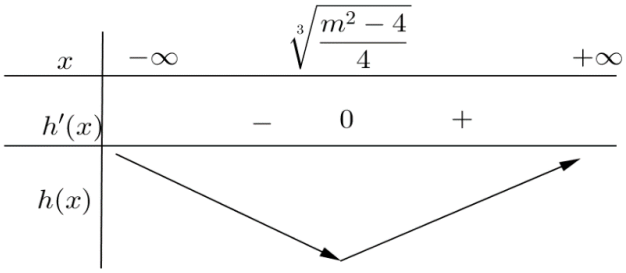
Do m nguyên âm nên $m\in\{-3;-2;-1\}$.

Câu 6: Chọn D

Ta có $h(x)=g\left[f(x)\right]\Rightarrow h'(x)=g'\left[f(x)\right].f'(x)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}g'\left[f(x)\right]=0\\f'(x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-3f^2(x)+10f(x)-2020=0(vn)\\-4x^3-(4-m^2)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x^3=\dfrac{m^2-4}{4}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\dfrac{m^2-4}{4}}$

Bảng biến thiên:



Hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi $\sqrt[3]{\dfrac{m^2-4}{4}}\le 2\Leftrightarrow -6\le m\le 6$.

Vậy có 6 giá trị nguyên dương m thỏa mãn.

Câu 7: Chọn C

Ta có $\forall x\in\mathbb{R}$, $g'(x)=-f'(1-x)\Rightarrow f'(1-x)=-g'(x)$.

Suy ra $f'(1-x)=-(3-x)^{2021}(2+x)^{2020}\left[x^2+(m-2)x-3m++6\right]$

$\Leftrightarrow f'(1-x)=-\left[2+(1-x)\right]^{2021}\left[3-(1-x)\right]^{2020}\left[(1-x)^2-m(1-x)-2m+5\right]$

Vậy $f'(x)=-(2+x)^{2021}(3-x)^{2020}(x^2-m.x-2m+5)$

Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$

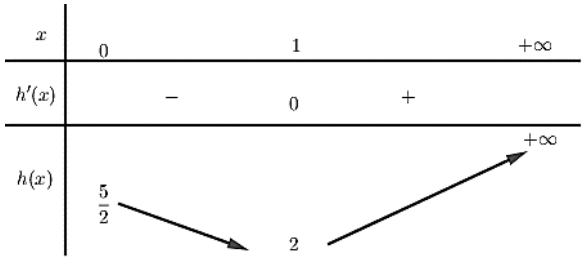
$\Leftrightarrow f'(x)=-(2+x)^{2021}(3-x)^{2020}(x^2-m.x-2m+5)\le 0\ \ \forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow x^2-mx-2m+5\ge 0$, $\forall x\in(0;+\infty)\Leftrightarrow m\le\dfrac{x^2+5}{x+2}\ \forall x\in(0;+\infty).(*)$

Xét $h(x)=\dfrac{x^2+5}{x+2}=x-2+\dfrac{9}{x+2}$, $x\in(0;+\infty)$

$\Rightarrow h'(x)=1-\dfrac{9}{(x+2)^2}\Rightarrow h'(x)=0\Leftrightarrow 1-\dfrac{9}{(x+2)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+2=3\\x+2=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-5\end{array}\right.$

Bảng biến thiên



$(*)\Leftrightarrow m\le 2$, mà m nguyên dương suy ra $m\in\{1;2\}$. Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 8: Chọn C

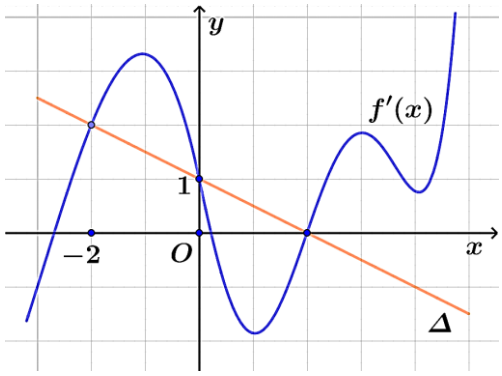
Xét hàm số: $g(x)=4f(x)+x^2-4x+2021\Rightarrow g'(x)=4.f'(x)+2x-4=4\cdot\left[f'(x)-\left(-\dfrac{x}{2}+1\right)\right]$

Để hàm số nghịch biến thì: $g'(x)=4\cdot\left[f'(x)-\left(-\frac{x}{2}+1\right)\right]\le 0\Leftrightarrow f'(x)\le\left(-\frac{x}{2}+1\right)$

Trên hệ trục ta nhận thấy đường thẳng $\Delta: y=-\frac{x}{2}+1$ đi qua ba điểm $(-2;2),(0;1),(2;0)$.

Để $f'(x)\le\left(-\frac{x}{2}+1\right)$ thì đồ thị hàm số $(y=f'(x))$ phải nằm dưới đường thẳng Δ.

Tương ứng với miền $\left[\begin{array}{l}x\le -2\\0\le x\le 2\end{array}\right.$.



Câu 9: Chọn C

Ta có: $f'(x+2)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)\Rightarrow f'(x)=(x-2-1)(x-2-2)=(x-3)(x-4)$.

Khi đó: $f'(x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=4\end{array}\right.$. Đặt $y=g(x)=f\left(x^2+4x+7\right)$.

Ta có: $g'(x)=(2x+4).f'\left(x^2+4x+7\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+4=0\\f'\left(x^2+4x+7\right)=0\end{array}\right.$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x^2+4x+7=3\\x^2+4x+7=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\(x+2)^2=0\\x=-1\\x=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=-1\\x=-3\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: hàm số $y=g(x)=f\left(x^2+4x+7\right)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

Câu 10: Chọn D

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$\frac{1}{2}$	↘	$f(1)$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	

Suy ra $f(x) \le \frac{1}{2} \forall x \in \mathbb{R}$

Mặt khác: $g'(x) = -2f'(3-x)f(3-x) + f'(3-x) = -f'(3-x)\left(2f(3-x)-1\right)$

Ta có $g'(x) \le 0 \Leftrightarrow -f'(3-x)\left(2f(3-x)-1\right) \le 0$

$$\Leftrightarrow f'(3-x) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-x > 3 \\ -3 < 3-x < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ 2 < x < 6 \end{array}\right.$$

Do đó hàm số g đồng biến trên khoảng $(2;6)$.

Câu 11: Chọn B

Đặt $u = x^3 - 3x - 1 \Rightarrow g(x) = f(u) = f\left(x^3 - 3x - 1\right) \Rightarrow g'(x) = \left(3x^2 - 3\right) f'\left(x^3 - 3x - 1\right)$

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x^3 - 3x - 1 = -1 \\ x^3 - 3x - 1 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \\ x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		2		$+\infty$
u'		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	$\|$	$+$	
$f'(u)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\sqrt{3};-1\right), (0;1), \left(\sqrt{3};2\right)$.

Vậy giá trị của biểu thức $\left(a^2 + b^2 + m^2 + n^2 + p^2 + q^2\right) = 12$

Câu 12: Chọn C

Cách 1: Tập xác định của hàm số $f\left(4 - \sqrt{4 - x^2}\right)$ là $[-2;2]$

Đạo hàm: $g'(x) = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} f'\left(4 - \sqrt{4 - x^2}\right)$

Hàm số đồng biến thì $g'(x) \ge 0$. Từ tập xác định ta có:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \in (0;2) \\ f'\left(4 - \sqrt{4 - x^2}\right) \ge 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x \in (-2;0) \\ f'\left(4 - \sqrt{4 - x^2}\right) \le 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \in (0;2) \\ \left[\begin{array}{l} -3 \le 4 - \sqrt{4 - x^2} \le 1 \\ 4 - \sqrt{4 - x^2} \ge 4 \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x \in (-2;0) \\ \left[\begin{array}{l} 1 \le 4 - \sqrt{4 - x^2} \le 4 \\ 4 - \sqrt{4 - x^2} \le -3 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \in (0;2) \\ \left[\begin{array}{l} 4 - \sqrt{4 - x^2} \le 1 \\ VN \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x \in (-2;0) \\ \left[\begin{array}{l} 1 \le 4 - \sqrt{4 - x^2} \\ VN \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \in (0;2) \\ \sqrt{4 - x^2} \ge 3 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x \in (-2;0) \\ \sqrt{4 - x^2} \le 3 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(0;2)\\ VN\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-2;0)\\ \forall x\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-2;0).$$

Cách 2: Sử dụng pp ghép trục: $g(x)=f\left(4-\sqrt{4-x^2}\right)=f(u), u=4-\sqrt{4-x^2}$, với $x\in[-2;2]$

Bảng biến thiên kép

x	-2		0		2
u	4	$\searrow$	2	$\nearrow$	4
$f(u)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

Câu 13: Chọn D

Cách 1:

Tập xác định của hàm số $g(x)=f\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)$ là $D=[-1;7]$

Đạo hàm: $g'(x)=\dfrac{3-x}{\sqrt{7+6x-x^2}}f'\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)$

Hàm số nghịch biến: $g'(x)\le 0$

Từ tập xác định, ta có các trường hợp sau:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-1;3)\\ f'\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(3;7)\\ f'\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-1;3)\\ -1\le -1+\sqrt{7+6x-x^2}\le 2\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(3;7)\\ \left[\begin{array}{l}-1+\sqrt{7+6x-x^2}\le -1\\ -1+\sqrt{7+6x-x^2}\ge 2\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-1;3)\\ \sqrt{7+6x-x^2}\le 3\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(3;7)\\ \sqrt{7+6x-x^2}\ge 3\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-1;3)\\ \left[\begin{array}{l}x\le 3-\sqrt{7}\\ x\ge 3+\sqrt{7}\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(3;7)\\ 3-\sqrt{7}\le x\le 3+\sqrt{7}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1<x\le 3-\sqrt{7}\\ 3<x\le 3+\sqrt{7}\end{array}\right..$$

Cách 2: Sử dụng phương pháp ghép trục

$g(x)=f\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)=f(u)$ với $u=-1+\sqrt{7+6x-x^2}$ và $x\in[-2;2]$

Bảng biến thiên kép

x	-1	$3-\sqrt{7}$	3	$3+\sqrt{7}$	7
u	-1	2	3	2	4
$f(u)$					

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-1;3-\sqrt{7}\right)$ và $\left(3;3+\sqrt{7}\right)$

Câu 14: Chọn A

Xét hàm số: $g(x)=f\left(f(x)\right)\Rightarrow g'(x)=f'(x).f'\left[f(x)\right]$

Hàm số đồng biến khi $g'(x)=f'(x).f'\left[f(x)\right]\geq 0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}f'(x)\geq 0\\ f'\left[f(x)\right]\geq 0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}f'(x)\leq 0\\ f'\left[f(x)\right]\leq 0\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x\leq -1\\ x\geq 3\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}f(x)\leq -1\\ f(x)\geq 3\end{array}\right.\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}-1\leq x\leq 3\\ -1\leq f(x)\leq 3\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x\leq -1\\ x\geq 3\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x\leq -4\\ x\geq 5\end{array}\right.\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}-1\leq\leq 3\\ -4\leq x\leq 5\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\leq -4\\ -1\leq x\leq 3\\ x\geq 5\end{array}\right.$$

Câu 15: Chọn B

Xét hàm số $g(x)=f\left(x^3+m\right)$ có biểu thức đạo hàm:

$$g'(x)=3x^2.f'\left(x^3+m\right)=3x^2.\left(x^3+m\right)\left(x^3+m-2\right)\left(x^3+m+1\right)$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\sqrt[3]{m+1}$		$-\sqrt[3]{m}$		$-\sqrt[3]{m-2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$								

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ thì ta phải có: $\sqrt[3]{m-2}\leq 1\Leftrightarrow m\geq 1\Leftrightarrow m\in\left[1;+\infty\right)$

Câu 16: Chọn C

Xét hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x-m\right)\Rightarrow g'(x)=2(x-1).f'\left(x^2-2x-m\right)$

Với $\forall x\in(1;3)\Rightarrow x-1\geq 0$

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;3)$ thì:

$$g'(x)=2(x-1).f'\left(x^2-2x-m\right)\geq 0\Leftrightarrow f'\left(x^2-2x-m\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x-m\geq 3\\ -3\leq x^2-2x-m\leq 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\leq x^2-2x-3\\ x^2-2x-1\leq m\leq x^2-2x+3\end{array}\right.,\forall x\in(1;3)$$

Suy ra với $\forall x\in(1;3)$ ta có:

$$\begin{bmatrix} m\le \min\left(x^2-2x-3\right) \\ \max\left(x^2-2x-1\right)\le m\le \min\left(x^2-2x+3\right)\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix} m\le 4 \\ 2\le m\le 2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} -20\le m\le -4 \\ m=2\end{bmatrix}$$

Do đó có 18 giá trị m nguyên thỏa mãn.

Câu 17: Chọn C

Ta có: $g'(x)=3\left(x^2-1\right)f'\left(x^3-3x-m\right)$. Với $\forall x\in[-2;-1]\Rightarrow x^2-1\ge 0$

Để hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x-m\right)$ đồng biến trên $[-2;-1]$ thì:

$3\left(x^2-1\right)f'\left(x^3-3x-m\right)\ge 0,\forall x\in[-2;-1]$

$\Leftrightarrow f'\left(x^3-3x-m\right)\ge 0,\forall x\in[-2;-1]\Leftrightarrow\begin{bmatrix} x^3-3x-m\le -3,\forall x\in[-2;-1] \\ 1\le x^3-3x-m\le 3,\forall x\in[-2;-1]\end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix} x^3-3x\le m-3,\forall x\in[-2;-1] \\ \begin{cases} m+1\le x^3-3x \\ m-3\ge x^3-3x\end{cases},\forall x\in[-2;-1]\end{bmatrix}\quad(1)$$

Xét hàm số $h(x)=x^3-3x\Rightarrow h'(x)=3x^2-3=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix} x=1\notin[-2;-1] \\ x=-1\in[-2;-1]\end{bmatrix}$

Ta có: $h(-2)=-2$ và $h(-1)=2\Rightarrow\max\limits_{[-2;-1]}h(x)=2$ và $\min\limits_{[-2;-1]}h(x)=-2$

Từ $(1)\Leftrightarrow\begin{bmatrix} \max\limits_{[-2;-1]}h(x)\le m-3 \\ \begin{cases} m+1\le \min\limits_{[-2;-1]}h(x) \\ m+3\ge \max\limits_{[-2;-1]}h(x)\end{cases}\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix} 2\le m-3 \\ \begin{cases} m+1\le -2 \\ m+3\ge 2\end{cases}\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix} m\ge 5 \\ \begin{cases} m\le -3 \\ m\ge -1\end{cases}\end{bmatrix}\Leftrightarrow m\ge 5.$

Mà $m\in[-30;30]\Rightarrow 5\le m\le 30$, do đó có 26 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 18: Chọn A

Đặt $u=\sqrt{x^2-2x+2}$. Xét trên $(-\infty;1)$ thì $u\in(1;+\infty)$

Để $(-\infty;1)$ nằm trong TXĐ của hàm số đã cho thì: $2m-3\ne\sqrt{x^2-2x+2},\forall x\in(-\infty;1)$

$\Leftrightarrow 2m-3\le 1\Leftrightarrow m\le 2$

Ta có hàm số $y=\dfrac{u+1}{2m-3-u}\longrightarrow y'=\dfrac{2m-2}{(2m-3-u)^2}\cdot u'=\dfrac{2m-2}{(2m-3-u)^2}\cdot\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$

Để hàm số đồng biến trên $(-\infty;1)$ thì $y'=\dfrac{2m-2}{(2m-3-u)^2}\cdot\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}>0,\forall x\in(-\infty;1)$

Suy ra $2m-2<0\Leftrightarrow m<1$

Từ, suy ra $m<1$, mà $m\in[-20;20],m\in\mathbb{Z}\longrightarrow m=\{-20,-19,...,0\}$.

Vậy có 21 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu.

Câu 19: Chọn B

Ta có: $\begin{cases} f'(x)=\dfrac{b-4a}{(x+b)^2}>0\Rightarrow b>4a(*) \\ g'(x)=\dfrac{a^2-b}{(x+a^2)}>0\Rightarrow a^2>b(**) \end{cases} \Rightarrow a^2>4a\Rightarrow a>4\Rightarrow a_o=5$

Từ $(*)\Rightarrow b>4a_0=20\Rightarrow b_o=21\Rightarrow T=26$.

Câu 20: Chọn D

Ta có $f'(x)=3(m-1)x^2-6(m^2+m-1)x+3(m-1)$

Hàm số luôn nghịch biến trên $(a;b)$ nên

$f'(x)=3(m-1)x^2-6(m^2+m-1)x+3(m-1)\le 0\ \forall x\in(a;b)$

$\Rightarrow (m-1)x^2-2(m^2+m-1)x+(m-1)\le 0\ \forall x\in(a;b)$

$\Rightarrow -2xm^2+(x^2-2x+1)m-x^2+2x-1\le 0\ \forall x\in(a;b)$

$\Rightarrow 2xm^2-(x^2-2x+1)m+x^2-2x+1\ge 0\ \forall x\in(a;b)$

$\Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ \Delta=(x-1)^4-8x(x-1)^2\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ (x-1)^2(x^2-10x+1)\le 0 \end{cases} \Rightarrow x\in\left[5-2\sqrt{6};5+2\sqrt{6}\right]$

$\Rightarrow (b-a)_{\max}=5+2\sqrt{6}-(5-2\sqrt{6})=4\sqrt{6}$

Câu 21: Chọn C

Hàm số luôn đồng biến trên $[a;b]$ suy ra:

$f'(x)=12m^2x^3-24mx^2+12x+12(2m-1)\ge 0\ \forall x\in[a;b]$

$\Leftrightarrow m^2x^3-2mx^2+x+(2m-1)\ge 0\ \forall x\in[a;b]$

$\Leftrightarrow m^2x^3+(2-2x^2)m+x-1\ge 0\ \forall x\in[a;b]$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\ne 0 \\ \Delta=(1-x^2)^2-x^3(x-1)=(x-1)(x^2-x-1)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ne 0 \\ \left[\begin{array}{l} x\le\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1\le x\le\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 1\le x\le\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Suy ra $1\le a\le b\le\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow(2b-a)_{\max}=\sqrt{5}$.

Câu 22: Chọn A

Ta luôn có: $f(x)\le 2<3\rightarrow$ phương trình mẫu số $f(x)-3=0$ vô nghiệm.

Suy ra hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-3}$ có tập xác đinh là $\mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y'=-\dfrac{f'(x)}{[f(x)-3]^2}$

Hàm số nghịch biến thì: $y'=-\dfrac{f'(x)}{[f(x)-3]^2}<0\Leftrightarrow f'(x)>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x\in(-\infty;-2) \\ x\in(1;3) \end{array}\right.$

Câu 23: Chọn C

Tập xác định của hàm số $y=g(x)=\dfrac{f(x)+5}{f(x)+m}$ là $D=\{x\in R|\ f(x)\neq -m\}$

Để khoảng $(1;4)\subset D\rightarrow$ phương trình $f(x)=-m$ phải không có nghiệm $x\in(1;4)$.

Suy ra: $\left[\begin{array}{l}-m\geq 4\\-m\leq -2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\leq -4\\m\geq 2\end{array}\right.\quad(1)$

Đạo hàm: $y'=g'(x)=f'(x)\cdot\dfrac{m-5}{\left(f(x)+m\right)^2}$; Để ý rằng trên luôn có $f'(x)>0$

Để hàm số $y=g(x)=\dfrac{f(x)+5}{f(x)+m}$ nghịch biến trên thì:

$g'(x)=f'(x)\cdot\dfrac{m-5}{\left(f(x)+m\right)^2}<0$ với $\forall x\in(1;4)$

Suy ra: $\dfrac{m-5}{\left(f(x)+m\right)^2}<0\Leftrightarrow m-5<0\Leftrightarrow m<5\quad(2)$

Kết hợp (1) và (2) và điều kiện m nguyên $m\in[-20;2021)$.

Ta suy ra: $\left[\begin{array}{l}-20\leq m\leq -4\\2\leq m<5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-20\leq m\leq -4\\2\leq m\leq 4\end{array}\right.$. Có 20 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 24: Chọn D

Đạo hàm: $y'=2f'(x).f(x)$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		-1		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$f'(x).f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số $y=\left(f(x)\right)^2$ đồng biến trên các khoảng $(-3;-1),(1;2),(3;+\infty)$.

Câu 25: Chọn B

Xét hàm số $g(x)=\left[f(x)\right]^2-6f(x)$.

$g'(x)=2f(x).f'(x)-6f'(x)=2f'(x)\left(f(x)-3\right).$

Hàm số nghịch biến khi $g'(x)=2f'(x)\left(f(x)-3\right)\leq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f'(x)\geq 0\\f(x)-3\leq 0\end{cases}\\\begin{cases}f'(x)\leq 0\\f(x)-3\geq 0\end{cases}\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le -3 \\ x \ge 7 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \le -7 \\ 1 \le x \le 14 \end{array}\right. \\ -3 \le x \le 7 \\ \left[\begin{array}{l} -7 \le x \le 1 \\ x \ge 14 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -7 \\ 7 \le x \le 14 \\ -3 \le x \le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -7 \\ 7 \le x \le 14 \\ -3 \le x \le 1 \end{array}\right. .$$

Câu 26: Chọn A

Ta có: $g'(x) = 2(x-1)f'(x^2-2x-m)$

Để hàm số $g(x) = f(x^3-3x-m)$ nghịch biến trên $(-1;2)$ thì:

$$g'(x) = 2(x-1)f'(x^2-2x-m) \le 0, \forall x \in (-1;2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-1)f'(x^2-2x-m) \le 0, \forall x \in (-1;1) \\ 2(x-1)f'(x^2-2x-m) \le 0, \forall x \in (1;2) \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x^2-2x-m) \ge 0, \forall x \in (-1;1) \\ f'(x^2-2x-m) \le 0, \forall x \in (1;2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2-2x-m \ge 3 \\ -3 \le x^2-2x-m \le 1 \end{array}\right., \forall x \in (-1;1) \\ \left[\begin{array}{l} 1 \le x^2-2x-m \le 3 \\ x^2-2x-m \le -3 \end{array}\right., \forall x \in (1;2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2-2x \ge m+3 \\ m-3 \le x^2-2x \le m+1 \end{array}\right., \forall x \in (-1;1) \\ \left[\begin{array}{l} m+1 \le x^2-2x \le m+3 \\ x^2-2x \le m-3 \end{array}\right., \forall x \in (1;2) \end{cases} \quad (2)$$

Xét hàm số $h(x) = x^2-2x \Rightarrow h'(x) = 2x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Với $\forall x \in (-1;1) \Rightarrow h'(x) = 2x-2 < 0 \Rightarrow h(1) < h(x) < h(-1) \Leftrightarrow -1 < h(x) < 3, \forall x \in (-1;1)$

Với $\forall x \in (1;2) \Rightarrow h'(x) = 2x-2 > 0 \Rightarrow h(1) < h(x) < h(2) \Leftrightarrow -1 < h(x) < 0, \forall x \in (1;2)$

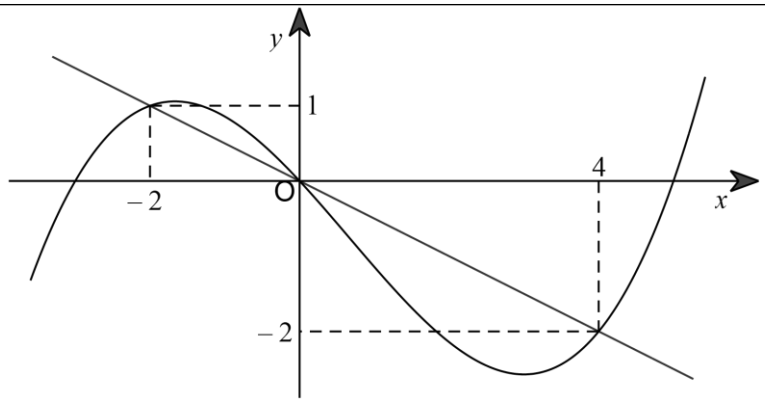
Câu 27: Chọn A

Ta có : $g(x) = f(1-2x) + x^2 - x \Rightarrow g'(x) = -2f'(1-2x) + 2x - 1$

Đặt $t = 1-2x \Rightarrow g'(x) = -2f'(t) - t$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow f'(t) = -\frac{t}{2}$$

Vẽ đường thẳng $y = -\frac{x}{2}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ trên cùng một hệ trục



Hàm số $g(x)$ nghịch biến $\Rightarrow g'(x)\le 0\Rightarrow f'(t)\ge -\dfrac{t}{2}\Rightarrow \left[\begin{array}{l}-2\le t\le 0\\ t\ge 4\end{array}\right.$

Như vậy $f'(1-2x)\ge \dfrac{1-2x}{-2}\Rightarrow \left[\begin{array}{l}-2\le 1-2x\le 0\\ 4\le 1-2x\end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{2}\le x\le \dfrac{3}{2}\\ x\le -\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$.

Vậy hàm số $g(x)=f(1-2x)+x^2-x$ nghịch biến trên các khoảng $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ và $\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right)$.

Mà $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)\subset\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ nên hàm số $g(x)=f(1-2x)+x^2-x$ nghịch biến trên khoảng $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$

Từ $(2)\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}-1\ge m+3\\ \left\{\begin{array}{l}m-3\le -1\\ 3\le m+1\end{array}\right.\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}m+1\le -1\\ 0\le m+3\end{array}\right.\\ 0\le m-3\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}-4\ge m\\ \left\{\begin{array}{l}m\le 2\\ 2\le m\end{array}\right.\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}m\le -2\\ -3\le m\end{array}\right.\\ 3\le m\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}m\le -4\\ m=2\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}-3\le m\le -2\\ m\ge 3\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow m\in\varnothing$.

Vậy không có giá trị nguyên của $m\in[-30;30]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 28: Chọn C

Xét hàm số $g(x)=|f(x)|=|x^2-4mx+m-3|$ có $f'(x)=2x-4m$

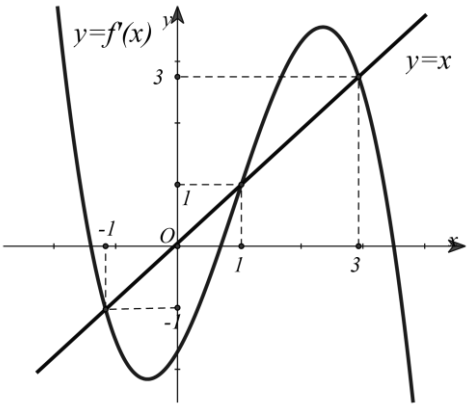
Để hàm số nghịch biến trên $(1;3)$ thì $\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}f(-1)\ge 0\\ f'(x)=2x-4m\le 0\end{array}\right.,\forall x\in(-2;-1)\\ \left\{\begin{array}{l}f(-1)\le 0\\ f'(x)=2x-4m\ge 0\end{array}\right.,\forall x\in(-2;-1)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}5m-2\ge 0\\ m\ge \dfrac{x}{2}\end{array}\right.,\forall x\in(-2;-1)\\ \left\{\begin{array}{l}5m-2\le 0\\ m\le \dfrac{x}{2}\end{array}\right.,\forall x\in(-2;-1)\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}m\ge \dfrac{2}{5}\\ m\ge -\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}m\le \dfrac{2}{5}\\ m\le -1\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\ge \dfrac{2}{5}\\ m\le -1\end{array}\right.\xrightarrow[m\in Z,m\in[-40;40]]{}\left[\begin{array}{l}1\le m\le 40\\ -40\le m\le -1\end{array}\right.$.

Vậy có 80 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 29: Chọn A

Ta có đường thẳng $y=x$ cắt đồ thị hàm số $y=f'(x)$ tại các điểm $x=-1; x=1; x=3$ như hình vẽ sau:



Dựa vào đồ thị của hai hàm số trên ta có $f'(x)>x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ 1<x<3 \end{array}\right.$ và $f'(x)<x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x<1 \\ x>3 \end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $x-1<0 \Leftrightarrow x<1$, khi đó ta có $g(x)=2f(1-x)-x^2+2x+2020$.

Ta có $g'(x)=-2f'(1-x)+2(1-x)$.

$$g'(x)>0 \Leftrightarrow -2f'(1-x)+2(1-x)>0 \Leftrightarrow f'(1-x)<1-x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<1-x<1 \\ 1-x>3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<2 \\ x<-2 \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện ta có $g'(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<1 \\ x<-2 \end{array}\right.$.

Trường hợp 2: $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$, khi đó ta có $g(x)=2f(x-1)-x^2+2x+2020$.

$g'(x)=2f'(x-1)-2(x-1)$

$$g'(x)>0 \Leftrightarrow 2f'(x-1)-2(x-1)>0 \Leftrightarrow f'(x-1)>x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1<-1 \\ 1<x-1<3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ 2<x<4 \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện ta có $g'(x)>0 \Leftrightarrow 2<x<4$.

Vậy hàm số $g(x)=2f(|x-1|)-x^2+2x+2020$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 30: Chọn A

Với $x>1$, ta có $g(x)=2f(x-1)-(x-1)^2+2021 \Rightarrow g'(x)=2f'(x-1)-2(x-1)$.

Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow 2f'(x-1)-2(x-1)>0 \Leftrightarrow f'(x-1)>x-1 \quad (*)$.

Đặt $t=x-1$, khi đó $(*) \Leftrightarrow f'(t)>t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1<t<3 \\ t<-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2<x<4 \\ x<0 \quad (loai) \end{array}\right.$.

Với $x<1$, ta có $g(x)=2f(1-x)-(1-x)^2+2021 \Rightarrow g'(x)=-2f'(1-x)+2(1-x)$

Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow -2f'(1-x)+2(1-x)>0 \Leftrightarrow f'(1-x)<1-x \quad (**)$.

Đặt $t=1-x$, khi đó $(**) \Leftrightarrow f'(t)<t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<t<1 \\ t>3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<2 \\ x<-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<1 \\ x<-2 \end{array}\right.$.

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2),(0;1),(2;4)$.

Câu 31: Chọn B

Xét hàm số $y=f(2x-1) \Rightarrow (f(2x-1))'=2f'(2x-1)$ nghịch biến khi $f'(x)<0$

$\Leftrightarrow \left(f(2x-1)\right)' = 2.f'(2x-1) < 0 \Leftrightarrow f'(2x-1) < 0 \Leftrightarrow 1 < 2x-1 < 3 \Leftrightarrow 1 < x < 2$.

Xét hàm số $y = g(ax+b) \Rightarrow \left(g(ax+b)\right)' = a.g'(ax+b)$ nghịch biến khi xảy ra hai trường hợp

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0\\ g'(ax+b)<0\end{cases}\\ \begin{cases}a<0\\ g'(ax+b)>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0\\ \left[\begin{array}{l}ax+b<0\\ ax+b>2\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}a<0\\ 0<ax+b<2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0\\ \left[\begin{array}{l}x<\dfrac{-b}{a}\\ x>\dfrac{2-b}{a}\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}a<0\\ -\dfrac{b-2}{a}<x<-\dfrac{b}{a}\end{cases}\end{array}\right.$$

Nếu $a>0$ thì hàm số $y = g(ax+b)$ nghịch biến trên $\left(-\infty;\dfrac{-b}{a}\right);\left(\dfrac{2-b}{a};+\infty\right)$ không thỏa mãn điều kiện có khoảng nghịch biến là $(1;2)$.

Nếu $a<0$ thì hàm số $y = g(ax+b)$ nghịch biến trên $\left(-\dfrac{b-2}{a};\dfrac{-b}{a}\right)$

Yêu cầu bài toán là hai hàm số $y = f(2x-1)$, $y = g(ax+b)$ có cùng khoảng nghịch biến lớn nhất nên $\begin{cases}-\dfrac{b-2}{a}=1\\ \dfrac{-b}{a}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-2\\ b=4\end{cases} \Rightarrow 4a+b=-4$.

Câu 32: Chọn B

Xét hàm số $g(x) = f\left(x^3+3x-1\right)$

Đạo hàm hàm hợp $g'(x) = \left(3x^2+3\right).f'\left(x^3+3x-1\right) = 3\left(x^2+1\right).f'\left(x^3+3x-1\right)$.

Để hàm số nghịch biến thì $g'(x) = 3\left(x^2+1\right).f'\left(x^3+3x-1\right) \le 0$

$f'\left(x^3+3x-1\right) \le 0 \Leftrightarrow -1 \le x^3+3x-1 \le 3$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x^3+3x \ge 0\\ x^3+3x-4 \le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\left(x^2+3\right) \ge 0\\ (x-1)\left(x^2+x+4\right) \le 0\end{cases} \Leftrightarrow 0 \le x \le 1.$

Câu 33: Chọn C

$$g'(x) = \frac{\left(x^2-2x\right)'.f'\left(x^2-2x\right)}{\left(f\left(x^2-2x\right)+1\right)^2} = \frac{(2x-2).f'\left(x^2-2x\right)}{\left(f\left(x^2-2x\right)+1\right)^2}.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-2=0\\ f'\left(x^2-2x\right)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2-2x=-2\\ x^2-2x=-1\\ x^2-2x=3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1\\ x=3\end{array}\right.$$

Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta có hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;3)$.

Câu 34: Chọn B

Đặt $g(x)=\left|4f(\sin x)+\cos 2x-a\right| \Rightarrow g(x)=\sqrt{\left[4f(\sin x)+\cos 2x-a\right]^2}$.

$\Rightarrow g'(x)=\dfrac{\left[4\cos x.f'(\sin x)-2\sin 2x\right]\left[4f(\sin x)+\cos 2x-a\right]}{\sqrt{\left[4f(\sin x)+\cos 2x-a\right]^2}}$.

Ta có $4\cos x.f'(\sin x)-2\sin 2x=4\cos x\left[f'(\sin x)-\sin x\right]$.

Với $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ thì $\cos x>0,\sin x\in(0;1)\Rightarrow f'(\sin x)-\sin x<0$.

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi $4f(\sin x)+\cos 2x-a\ge 0,\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 4f(\sin x)+1-2\sin^2 x\ge a,\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Đặt $t=\sin x$ được $4f(t)+1-2t^2\ge a,\forall t\in(0;1)$.

Xét $h(t)=4f(t)+1-2t^2\Rightarrow h'(t)=4f'(t)-4t=4\left[f'(t)-1\right]$.

Với $t\in(0;1)$ thì $h'(t)<0\Rightarrow h(t)$ nghịch biến trên $(0;1)$.

Do đó $\Leftrightarrow a\le h(1)=4f(1)+1-2.1^2=3$. Vậy có 3 giá trị nguyên dương của a thỏa mãn.

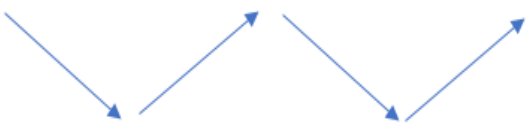
Câu 35: Chọn D

Đặt $t=1-x\Rightarrow f(t)=f(1-x)\Rightarrow f'(t)=-f'(1-x)$

Ta có $f'(t)=0\Rightarrow f'(1-x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\x=3\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-1\\t=-2\end{array}\right.$

$f'(t)>0\Leftrightarrow f'(1-x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<0\\2<x<3\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t>1\\-2<t<-1\end{array}\right.$

BBT của $f(t)$

t	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$									

Mặt khác $g'(x)=2x.f'(x^2-3)$

Nên $g'(x)=0\Leftrightarrow 2x.f'(x^2-3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'(x^2-3)=0\end{array}\right.$

Ta có $f'\left(x^2-3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-3=1\\x^2-3=-1\\x^2-3=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm2\\x=\pm\sqrt{2}\\x=\pm1\end{array}\right.$

$f'\left(x^2-3\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-3>1\\-2<x^2-3<-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>2\\x<-2\\-\sqrt{2}<x<-1\\1<x<\sqrt{2}\end{array}\right.$

Bảng xét dấu của $g'(x)$

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$f'\left(x^2-3\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $g'(x)$ suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0;1)$

Câu 36: Chọn C

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Xét $y=g(x)=f(x^2+2x+m)$

Ta có: $y'=g'(x)=2(x+1)f'(x^2+2x+m)$

Vì $x+1>0\forall x\in(0;1)$ nên để hàm số $y=f(x^2+2x+m)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$ khi và chỉ khi $f'(x^2+2x+m)>0\forall x\in(0;1)$, do hàm số x^2+2x+m luôn đồng biến trên $(0;1)$ nên

Đặt $t=x^2+2x+m$. Vì $x\in(0;1)$ nên $t\in(m;m+3)$

Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ ta có: $\left[\begin{array}{l}m+3\le-2\\\left\{\begin{array}{l}m\ge0\\m+3\le3\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le-5\\m=0\end{array}\right.$

Mà $-10<m<10$ nên $m=\{-9;-8;-7;-6;-5;0\}$

Vậy có tất cả 6 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn đề bài.

Câu 37: Chọn B

Xét $g'(x)=-2f'(3-2x+m)+2x-(m+3)$. Xét phương trình $g'(x)=0$

Đặt $t=3-2x+m$ thì phương trình trở thành $-2.\left[f'(t)-\dfrac{-t}{2}\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\\t=4\\t=0\end{array}\right.$.

Từ đó, $g'(x)=0\Leftrightarrow x_1=\dfrac{5+m}{2},x_2=\dfrac{m+3}{2},x_3=\dfrac{-1+m}{2}$. Lập bảng xét dấu, đồng thời lưu ý nếu $x>x_1$ thì $t<t_1$ nên $f(x)>0$. Và các dấu đan xen nhau do các nghiệm đều làm đổi dấu đạo hàm nên suy ra $g'(x)\le0\Leftrightarrow x\in\left[x_2;x_1\right]\cup\left(-\infty;x_3\right]$.

Vì hàm số nghịch biến trên $(0;1)$ nên $g'(x)\le 0,\forall x\in(0;1)$ từ đó suy ra $\left[\begin{array}{l}\frac{3+m}{2}\le 0<1\le\frac{5+m}{2}\\1\le\frac{-1+m}{2}\end{array}\right.$

và giải ra các giá trị nguyên thuộc $(-6;6)$ của m là -3; 3; 4; 5.

Câu 38: Chọn B

Ta có: $y'=9mx^8+6\left(m^2-3m+2\right)x^5+4\left(2m^3-m^2-m\right)x^3$

$=x^3\left(9mx^5+6\left(m^2-3m+2\right)x^2+4\left(2m^3-m^2-m\right)\right)$

Để hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Mặt khác ta thấy $y'=0$ có nghiệm bội lẻ $x=0$, do đó để $y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ thì phương trình $9mx^5+6\left(m^2-3m+2\right)x^2+4\left(2m^3-m^2-m\right)=0$ có nghiệm $x=0$

$\Rightarrow 2m^3-m^2-m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-\frac{1}{2}\\m=0\end{array}\right.$.

Thử lại:

Với $m=0\Rightarrow y'=12x^5$.

Với $m=1\Rightarrow y'=9x^8\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Với $m=-\frac{1}{2}\Rightarrow y'=-\frac{9}{2}x^8+\frac{45}{2}x^5$.

Vậy có 1 giá trị của m.

Câu 39: Chọn B

Ta có: $f(x)=\frac{2}{5}m^2x^5-\frac{8}{3}mx^3-\left(m^2-m-20\right)x+1$.

$\Rightarrow f'(x)=2m^2x^4-8mx^2-m^2+m+20$

Để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì

$f'(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 2m^2x^4-8mx^2-m^2+m+20\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Đặt $t=x^2,t\ge 0$ ta có: $2m^2t^2-8mt-m^2+m+20\ge 0\ (*),\ \forall t\ge 0$ nên ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $m=0$: khi đó bpt $(*)$ trở thành $20\ge 0$. Nên $m=0$ thỏa mãn.

Trường hợp 2: $\left\{\begin{array}{l}m\ne 0\\\Delta=64m^2+8m^4-8m^3-160m^2\le 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\ne 0\\m^2-m-12\le 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\ne 0\\-3\le m\le 4\end{array}\right.$.

Trường hợp 3: $\left\{\begin{array}{l}m\ne 0\\\Delta=64m^2+8m^4-8m^3-160m^2>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\ne 0\\m^2-m-12>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>4\\m<-3\end{array}\right.$.

Khi đó: Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $2m^2t^2-8mt-m^2+m+20=0$ có hai nghiệm phân biệt thoả mãn $t_1<t_2\le 0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}S<0\\P\ge 0\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{m} < 0 \\ \dfrac{-m^2+m+20}{2m^2} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -m^2+m+20 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -4 \le m \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \le m < 0 .$$

Kết hợp điều kiện ta có: $-4 \le m < -3$

Vậy để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì

$$\begin{bmatrix} -3 \le m \le 4 \\ -4 \le m < -3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow -4 \le m \le 4, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}.$$

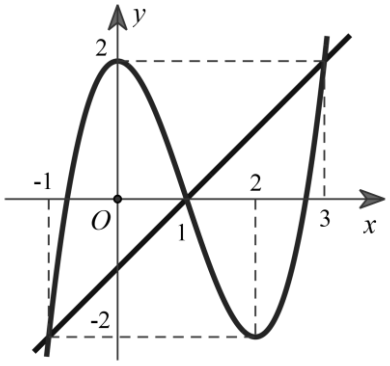
Câu 40: Chọn C

Ta có $g'(x) = f'(x-m) - (x-m-1)$

Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x-m) = x-m-1$

Đặt $x-m = t \Rightarrow f'(t) = t-1$

Khi đó nghiệm của phương trình là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và và đường thẳng $y = t-1$



Dựa vào đồ thị hàm số ta có được $f'(t) = t-1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = -1 \\ t = 1 \\ t = 3 \end{bmatrix}$

Bảng xét dấu của $g'(t)$

t	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta thấy hàm số $g(t)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ và $(3;+\infty)$

Hay $\begin{bmatrix} -1 < t < 1 \\ t > 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 < x-m < 1 \\ x-m > 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m-1 < x < m+1 \\ x > m+3 \end{bmatrix}$

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$ thì $\begin{bmatrix} m-1 \le 5 < 6 \le m+1 \\ m+3 \le 5 < 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 \le m \le 6 \\ m \le 2 \end{bmatrix}$

Vì m là các số nguyên dương nên $S = \{1;2;5;6\}$

Vậy tổng tất cả các phần tử của S là: $1+2+5+6 = 14$.

Câu 41: Chọn D

Ta có $f'(x) = 6.\left[(m+1)x^2 + (m^2-5m-4)x - 8\sqrt{x+1} - 3m^2 + 6m + 19\right]$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty) \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in (-1;+\infty)$

$(m+1)x^2+(m^2-5m-4)x-8\sqrt{x+1}-3m^2+6m+19 \geq 0, \forall x \in (-1;+\infty)$

$\Leftrightarrow [x-3].\left[(m+1)x+m^2-2m-1-\dfrac{8}{\sqrt{x+1}+2}\right] \geq 0 \Leftrightarrow (x-3).g(x) \geq 0, \forall x \in (-1;+\infty)$

Với $g(x)=(m+1)x+m^2-2m-1-\dfrac{8}{\sqrt{x+1}+2}$

Điều kiện cần: $g(3)=0 \Leftrightarrow 3(m+1)+m^2-2m-1-2=0 \Leftrightarrow m^2+m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-1 \end{array}\right.$

Điều kiện đủ:

Với $m=0$ ta có $f'(x)=(x-3)\left(x-1-\dfrac{8}{\sqrt{x+1}+2}\right)$

$=(x-3)\left[(x-3)+\left(2-\dfrac{8}{\sqrt{x+1}+2}\right)\right]=(x-3)\left[(x-3)+\dfrac{2\left(\sqrt{x+1}-2\right)}{\sqrt{x+1}+2}\right]$

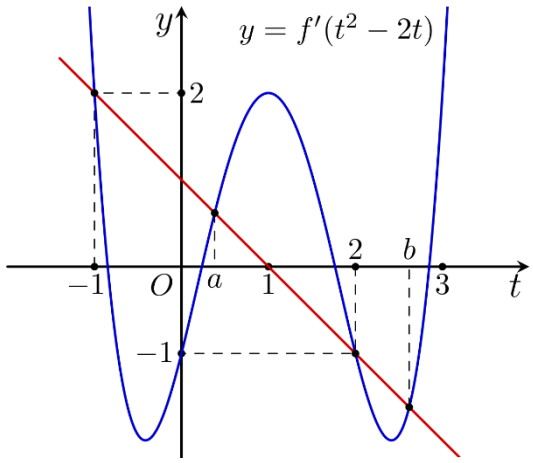
$=(x-3)^2\left[1+\dfrac{2}{\left(\sqrt{x+1}+2\right)^2}\right] \geq 0, \forall x \in (-1;+\infty) \Rightarrow m=0$ thỏa mãn

Với $m=-1$ ta có:

$f'(x)=(x-3)\left(2-\dfrac{8}{\sqrt{x+1}+2}\right)=(x-3).\dfrac{2\left(\sqrt{x+1}-2\right)}{\sqrt{x+1}+2}=\dfrac{2(x-3)^2}{\left(\sqrt{x+1}+2\right)^2} \geq 0, \forall x \in (-1;+\infty)$

$\Rightarrow m=-1$ thỏa mãn.

Câu 42: Chọn C



Đặt $t=x+1 \Leftrightarrow t-1=x$.

Khi đó $y(t)=f\left(t^2-2t\right)+\dfrac{2}{3}(t-1)^3+1$.

$y'(t)=2(t-1)f'\left(t^2-2t\right)+2(t-1)^2=2(t-1)\left[f'\left(t^2-2t\right)+t-1\right]$

$$y'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ f'\left(t^2-2t\right)=1-t\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=-1\\ t=a\in(0;1)\\ t=2\\ t=b\in(2;3)\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-2\\ x=a-1\in(-1;0)\\ x=1\\ x=b-1\in(1;2)\end{array}\right.$$

Với $x=2\Rightarrow t=3$, ta có $\begin{cases}t-1>0\\ f'\left(t^2-2t\right)>0\end{cases}\Rightarrow y'>0$. Ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$a-1$	0	1	$b-1$	2	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;-1)$.

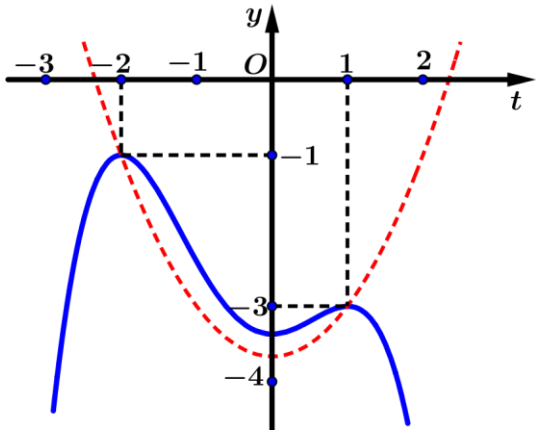
Câu 43: Chọn C

Ta có, $g'(x)=3f'(3x+1)-\left(18x^2+12x-9\right)<0$

$\Leftrightarrow f'(3x+1)<6x^2+4x-3=\frac{2}{3}\left(9x^2+6x+1\right)-\frac{11}{3}=\frac{2}{3}(3x+1)^2-\frac{11}{3}.$

Đặt $t=3x+1$, ta được $f'(t)<\frac{2}{3}t^2-\frac{11}{3}$.

Vẽ Parabol $(P):y=\frac{2}{3}t^2-\frac{11}{3}$ trên cùng hệ trục tọa độ Oty với đồ thị hàm số $y=f'(t)$ như hình vẽ sau.



Ta thấy, $f'(t)<\frac{2}{3}t^2-\frac{11}{3}$ với mọi $t\in(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}3x+1<-2\\ 3x+1>1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1\\ x>0\end{array}\right.$.

Câu 44: Chọn D

Ta có $g(x)=f(x)-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x$ có $g'(x)=f'(x)-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

Cho: $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ (1)

Đặt $x=2t+1$, phương trình $(1)\Leftrightarrow f'(2t+1)=\frac{1}{2}(2t+1)+\frac{1}{2}\Leftrightarrow f'(2t+1)=t+1$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(2x+1)$ phương trình có các nghiệm:

$$f'(2t+1)=t+1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\\t=0\\t=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=1\\x=5\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		1		5		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-3;1),(5;+\infty)$.

Câu 45: Chọn D

Đặt $t=3-2x\Rightarrow f'(t)=f'(3-2x)$. Cho $f'(t)=0\Leftrightarrow f'(3-2x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\Rightarrow t=5\\x=0\Rightarrow t=3\\x=2\Rightarrow t=-1\end{array}\right.$.

Từ đó ta có bảng biến thiên của $f(x)$:

x	$-\infty$		-1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(3)$	$\searrow$	$f(5)$	$\nearrow$	$+\infty$

Xét $g(x)=f(x^2+1)$, ta có $g'(x)=2xf'(x^2+1)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow 2xf'(x^2+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'(x^2+1)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2+1=-1\\x^2+1=3\\x^2+1=5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{2}\\x=\pm 2\end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(-2)$	$\nearrow$	$g(-\sqrt{2})$	$\searrow$	$g(0)$	$\nearrow$	$g(\sqrt{2})$	$\searrow$	$g(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó hàm số $f(x^2+1)$ nghịch biến trên $(-1;0)$.

Câu 46: Chọn C

Hàm số $g(x)$ là hàm số bậc 3 nên có dạng:

$g(x)=\left(f(2-x)\right)'=a(x+4)(x-1)(x-4), a>0 \Rightarrow f'(2-x)=-a(x+4)(x-1)(x-4)$

Đặt $t=2-x \Rightarrow f'(t)=a(t-6)(t+2)(t-1)$

Đạo hàm của hàm số $y=f\left(x^2+2\right)-x^3+2x^2-x+2021$ là

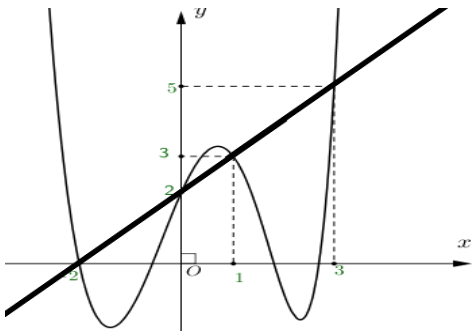
$y'=2xf'\left(x^2+2\right)-3x^2+4x-1=2ax\left(x^2-4\right)\left(x^2+4\right)\left(x^2+1\right)+\left[-3(x-1)\left(x-\frac{1}{3}\right)\right]$

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		0		$\frac{1}{3}$		1		2		$+\infty$
$2xf'\left(x^2+2\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$-3x^2+4x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	

Dựa vào bảng xét dấu trên ta có hàm số đã cho nghịch biến trên $(1;2)$.

Câu 47: Chọn B



Ta có $g'(x)=2xf'\left(x^2-4\right)-2x^2=2x\left[f'\left(x^2-4\right)-x\right]$. Đặt $t=x-2 \Rightarrow x=t+2$

Suy ra: $g'(t)=2(t+2)\left[f'\left(t^2+4t\right)-t-2\right]$; $g'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} f'\left(t^2+4t\right)=t+2 \\ t=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=0 \\ t=1 \\ t=3 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		-2		0		1		3		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\left[\begin{array}{l} t<0 \\ 1<t<3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2<0 \\ 1<x-2<3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<2 \\ 3<x<5 \end{array}\right.$

Câu 48: Chọn D

Ta có: $g(x)=\left[f\left(x^2-4\right)\right]'=2xf'\left(x^2-4\right)$

Dựa trên đồ thị ta có $g(x)=kx(x-1)(x+1)=kx\left(x^2-1\right)$; $k>0$

Vì vậy, $f'\left(x^2-4\right)=\frac{k}{2}\left(x^2-1\right)$; $k>0$. Đặt $t=x^2-4, t\geq -4$ ta có $f'(t)=\frac{k}{2}(t+3)$; $k>0$

Phương trình đạo hàm: $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=-3$. Bảng xét dấu

t	-4		-3		$+\infty$
$f'(t)$		-	0	+	

Hàm số $h(x)=f\left(x^2+x+m\right)$ đồng biến trên $(0;1)$ khi:

$h'(x)=(2x+1)f'\left(x^2+x+m\right)>0, \forall x\in(0;1)$ mà $2x+1>0,\ \forall x\in(0;1)$ nên:

$h'(x)>0,\ \forall x\in(0;1)\Leftrightarrow f'\left(x^2+x+m\right)>0, \forall x\in(0;1)\Leftrightarrow x^2+x+m>-3,\ \forall x\in(0;1)$

$\Leftrightarrow m>-x^2-x-3,\ \forall x\in(0;1)\Leftrightarrow m\geq \max\limits_{x\in[0;1]}\left(-x^2-x-3\right)=-3$ vì $\max\limits_{x\in[0;1]}\left(-x^2-x-3\right)=-3$ tại $x=0$

Kết luận: có 3 giá trị nguyên âm của m thỏa đề là $m=-1;-2;-3$.

Câu 49: Chọn A

Xét $y=f\left(x^2-2x\right)$ có $y'=2xf'\left(x^2-1\right);\ y'=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'\left(x^2-1\right)=0\end{array}\right.$.

Có $x=\pm\sqrt{2}$ là nghiệm bội lẻ của $f'\left(x^2-1\right)=0$ và $f'(1)=0$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

Xét $g(x)=f\left(2x^3-x\right)$, cho $g'(x)=\left(6x^2-1\right)f'\left(2x^3-x\right)$

Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}\\ 2x^3-x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}\\ x=1\end{array}\right.$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{6}}$		$\frac{1}{\sqrt{6}}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$\boxed{0}$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}};\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 50: Chọn C

Ta có $y'=2x.f'\left(x^2-2\right)$, dựa vào bảng biến thiên ta thấy $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=0\\ x=1\end{array}\right.$ do đó

$f'\left(x^2-2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=1\end{array}\right.$ và do đó $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Xét $g(x)=f\left(x^3-3x+3\right)$ ta có $g'(x)=\left(3x^2-3\right)f'\left(x^3-3x+3\right)$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(3x^2-3)=0\\ f'(x^3-3x+3)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm 1\\ x^3-3x+3=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm 1\\ x=1\\ x=-2\end{array}\right.$$

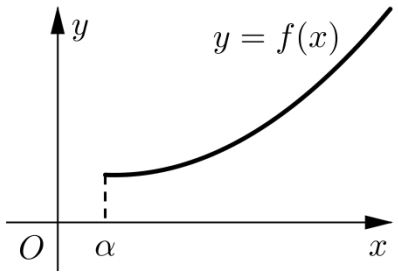
Ta có bảng xét dấu $g'(x)$

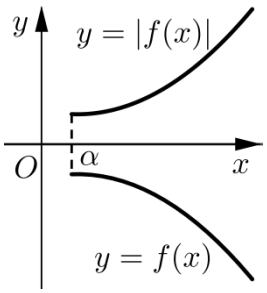
x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số đồng biến trên $(1;2)$.

DẠNG 4 Tính đơn điệu của hàm chứa GTTĐ

❖ Hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ đồng biến trên $\left[\alpha;+\infty\right)$ khi và chỉ khi

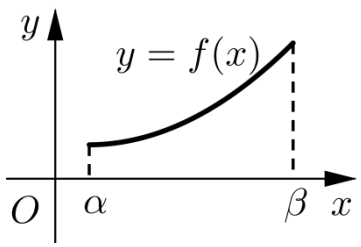


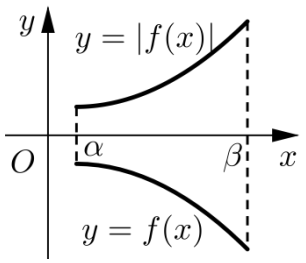


• $\begin{cases}y'\left(\alpha\right)\ge 0,\ \forall x\in\left[\alpha;+\infty\right)\\ y\left(\alpha\right)\ge 0\end{cases}$.

• $\begin{cases}y'\left(\alpha\right)\le 0,\ \forall x\in\left[\alpha;+\infty\right)\\ y\left(\alpha\right)\le 0\end{cases}$.

❖ Hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ đồng biến trên $\left(\alpha;\beta\right)$ khi và chỉ khi





• $\begin{cases}y'\left(\alpha\right)\ge 0,\ \forall x\in\left(\alpha;\beta\right)\\ y\left(\alpha\right)\ge 0\end{cases}$.

• $\begin{cases}y'\left(\alpha\right)\le 0,\ \forall x\in\left(\alpha;\beta\right)\\ y\left(\alpha\right)\le 0\end{cases}$.

❖ Các dạng đồng biến $y=\left|f\left(x\right)\right|$ trên $\left(-\infty;a\right],\left[\alpha;\beta\right]$ ta thực hiện tương tự.

❖ Hàm số hỏi nghịch biến làm ngược lại.

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|x^5-5x^2+5\left(m-1\right)x-8\right|$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;1\right)$?

A. 2. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 2: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|2x^3-mx+1\right|$ đồng biến trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$?

A. 2. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 3: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-1\right)$?

A. 6 . **B.** 4 . **C.** 3 . **D.** 5 .

Câu 4: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\left|x^4+2x^3+mx+2\right|$ đồng biến trên khoảng $\left(-1;+\infty\right)$?

A. $m \ge 1$. **B.** $m \in \varnothing$. **C.** $0 \le m \le 1$. **D.** $m \le 0$.

Câu 5: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham m thuộc đoạn $[-10;10]$ để hàm số $y = \left|-x^3 + 3(m+1)x^2 - 3m(m+2)x + m^2(m+3)\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

A. 21. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 2.

Câu 6: Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-4;4)$ để hàm số $y = \left|\frac{1}{3}x^3 - x^2 + mx + 1\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$?

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 7: Tổng tất cả các giá trị nguyên thuộc $[-5;5]$ của m để hàm số $g(x) = \left|\frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (2m-3)x - \frac{2}{3}\right|$ đồng biến trên $(1;5)$ là:

A. 1. **B.** -1. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 8: Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2019;2019]$ của tham số thực m để hàm số $y = \left|x^3 - 3(m+2)x^2 + 3m(m+4)x\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;4)$?

A. 4033. **B.** 4032. **C.** 2018. **D.** 2016.

Câu 9: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của $m < 5$ để hàm số $y = \left|\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + m\right|$ đồng biến trên $(0,+\infty)$?

A. 2 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 8

Câu 10: Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y = \left|x^5 - mx + 4\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 11: Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-10;10)$ để hàm số $y = \left|2x^3 - 2mx + 3\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 12. **B.** 8. **C.** 11. **D.** 7.

Câu 12: Cho hàm số $y = \left|x^5 - mx + 1\right|$. Gọi S là tập tất cả các số nguyên dương m sao cho hàm số đồng biến trên $[1;+\infty)$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 15 **B.** 14 **C.** 12 **D.** 13

Câu 13: Cho hàm số $f(x) = \left|x^2 - 2mx + m + 2\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-9;9]$ để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 3 **B.** 2 **C.** 16 **D.** 9

Câu 14: Cho hàm số $f(x) = \left|-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(2m+3)x^2 - (m^2+3m)x + \frac{2}{3}\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-9;9]$ để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 16. **D.** 9.

Câu 15: Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-20;20)$ để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

A. 4. **B.** 30. **C.** 8. **D.** 15.

Câu 16: Có bao nhiêu giá trị nguyên không âm m để hàm số $y = |x^4 - mx^2 + 9|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

A. 3. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 4.

Câu 17: Cho hàm số $y = \left|\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(m+3)x^2 + (2m+3)x - 1\right|$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$. Chọn mệnh đề **sai**?

A. S có 4 phần tử.
B. Tổng các giá trị của m thuộc S bằng 6.
C. Tích các giá trị của m thuộc S bằng 0.
D. Giá trị m lớn nhất thuộc S bằng 4.

Câu 18: Cho hàm số $f(x) = |x^3 - (2m-5)x + 2018|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2019;2019]$ để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;3)$?

A. 3032. **B.** 4039. **C.** 0. **D.** 2021.

Câu 19: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = g(x) = |x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x|$ đồng biến trên nửa đoạn $[0;+\infty)$ biết rằng $-2021 \le m \le 2021$?

A. 2020. **B.** 2021. **C.** 2022. **D.** 2019.

Câu 20: Gọi $S = [a;+\infty)$ là tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + mx + 3m + 1|$ đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$. Khi đó a bằng

A. -3. **B.** 19. **C.** 3. **D.** -2.

Câu 21: Tính tổng S tất cả các giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-10;10]$ để hàm số $y = \left|\frac{mx+3}{x+m+2}\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

A. $S = 55$. **B.** $S = 54$. **C.** $S = 3$. **D.** $S = 5$.

Câu 22: Tìm m để hàm số $y = \left|\frac{x-2m+1}{x+m}\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$

A. $\frac{1}{3} < m \le 1$. **B.** $m \in [-1;1] \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$. **C.** $-1 \le m < \frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{3} < m \le 1$.

Câu 23: Có bao nhiêu số nguyên của tham số m để hàm số $y = \left|\frac{x^2 - 2x + 2m + 2}{x-1}\right|$ đồng biến trên $[3;+\infty)$?

A. 4. **B.** 5. **C.** vô số. **D.** 6.

Câu 24: Tìm tất cả các giá thực của tham số m để hàm số $y = \left|x - \frac{2}{x} + m\right|$ đồng biến trên $[1;+\infty)$.

A. $m \le -1$. **B.** $-1 < m \le 1$. **C.** $m \ge 1$. **D.** $m > 0$.

Câu 25: Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho hàm số $y = \left| x+1+\dfrac{m^2-2m-1}{x+1} \right|$ đồng biến trên $(2;+\infty)$ là $[a;b]$.Tính $a.b$.

A. -10. **B.** -9. **C.** 2. **D.** -7.

Câu 26: Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho hàm số $y = \left| \dfrac{x+m}{x+1} \right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

A. $m < -1$. **B.** $m > 1$. **C.** $-1 \le m \le 1$. **D.** $-1 \le m < 1$

Câu 27: Tính tổng tất cả các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = \left| \dfrac{x^3-2mx+2}{x-1} \right|$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

A. 3 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 5

Câu 28: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = \left| \dfrac{x-m}{x+m+3} \right|$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 29: Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của m để hàm số $y = \left| x+5+\dfrac{1-m}{x-2} \right|$ đồng biến trên $[5;+\infty)$?

A. 11. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 30: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left| \dfrac{x^2+x+2m-3}{x-1} \right|$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$?

A. 7. **B.** 5. **C.** 4. **D.** Vô số.

Câu 31: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \left| \dfrac{x-m+1}{x+m} \right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

A. $m \le \dfrac{1}{2}$ hoặc $m \ge 2$. **B.** $\dfrac{1}{2} < m < 2$. **C.** $\dfrac{1}{2} < m \le 2$. **D.** $\dfrac{1}{2} \le m \le 2$.

Câu 32: Cho hàm số $y = \left| \sqrt{2-x}+\sqrt{x+2}+\dfrac{m}{2}x-1 \right|$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số nghịch biến trên $(0;1)$

A. 4 **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 33: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-5;5)$ để hàm số $y = \left| \sqrt{x^2-3}-2x-3m \right|$ nghịch biến trên $(2;3)$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 9.

Câu 34: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [0;10]$ để hàm số $y = \left| x+m\sqrt{x^2-2x+3} \right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 11. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 9.

Câu 35: Cho hàm số $f(x)=\left|\sqrt{x^2+2x+2}-x+m\right|$, trong đó m là tham số thực. S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m trên đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$. Số phần tử của tập S là

A. 2018. **B.** 2017. **C.** 2019. **D.** 4039.

Câu 36: Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y=\left|3\sqrt{x^2+1}+x+m\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** Vô số.

Câu 37: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|4\sqrt{x^2+2x+3}+5x-m^2+5\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 9 **B.** 6 **C.** 11 **D.** 8

Câu 38: Cho hàm số $y=f(x)=\left|\sqrt{x^2+3}+2x+m^2-5m\right|$.Hỏi m thuộc khoảng nào trong các khoảng sau để hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

A. $(-\infty;0]$. **B.** $(1;4)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $[3;+\infty)$.

Câu 39: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để hàm số $y=\left|\sqrt{-x^2+6x}+m\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$?

A. 6. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 10.

Câu 40: Tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|x^3-3x^2-9x-5+\frac{m}{2}\right|$ có 5 điểm cực trị là.

A. 2016. **B.** 1952. **C.** –2016. **D.** –496.

Câu 41: Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[-2020;2020]$ để hàm số $y=\left|\sqrt{x^2+1}-mx-1\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$

A. 4042 **B.** 4039 **C.** 4040 **D.** 4041

Câu 42: Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số $y=f(x)=\left|x^3-3x^2+3\left(m^2+5\right)x+\left(12-3m^2\right)\cos x\right|$ đồng biến trên $(0;\pi)$

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** Vô số

Câu 43: Các giá trị của tham số m để hàm số $y=\left|\sin x-\cos x+m\right|$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$ là

A. $m>\sqrt{2}$. **B.** $m\geq\sqrt{2}$. **C.** $m>1$. **D.** $m\geq 1$.

Câu 44: Cho hàm số $y=\left|\sin^3 x-m.\sin x+1\right|$. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên m sao cho hàm số đồng biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Tính số phần tử của S.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 45: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $[-5;5]$ để hàm số $y=\left|\cos^3 x-3m^2\cos x\right|$ nghịch biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

A. 1. **B.** 11. **C.** 5. **D.** 6

Câu 46: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để $y=\left|9^x+3^x-m+1\right|$ đồng biến trên đoạn $[0;1]$.

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 47: Có bao nhiêu giá trị m nguyên dương và nhỏ hơn 2020 để hàm số $y=\left|4^x-m.2^{x+1}+m+2\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

A. 2018. **B.** 2019. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 48: Cho hàm số $y=\left|e^{\frac{2x+2}{x-1}}+3e^{\frac{x+1}{x-1}}-2m+5\right|$ (1). Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;4)$?

A. 234. **B.** Vô số. **C.** 40. **D.** Không tồn tại m.

Câu 49: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương $m\in(-2019;2020)$, để hàm số $y=\left|e^{-x^2}-e^{x^2}-m\right|$ nghịch biến trên $(1;e)$?

A. 401. **B.** 0. **C.** 2019. **D.** 2016.

Câu 50: Giá trị lớn nhất của m để hàm số $y=\left|e^x+e^{2x}-m\right|$ đồng biến trên $(1;2)$ là

A. e. **B.** $e+e^2$. **C.** e^2. **D.** 2.

Câu 51: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\left|8^{\tan x}+3.2^{\tan x}-m+2\right|$ đồng biến trên $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $m\le\frac{29}{8}$. **B.** $m>\frac{29}{8}$. **C.** $m<\frac{29}{8}$. **D.** $m\ge\frac{29}{8}$.

Câu 52: Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(-100;100)$ của tham số m để hàm số $y=\left|\ln 3x-4x^2+m\right|$ đồng biến trên đoạn $\left[1;e^2\right]$?

A. 101. **B.** 102. **C.** 103. **D.** 100.

Câu 53: Có bao nhiêu số nguyên $m<2020$ để hàm số $y=\left|\ln(mx)-x+2\right|$ nghịch biến trên $(1;4)$?

A. 2018. **B.** 2019. **C.** 1. **D.** vô số.

Câu 54: Có bao nhiêu số nguyên m thuộc $(-2020;2020)$ để hàm số $y=\left|\ln\left(x^2+2x-m\right)-2mx^2-1\right|$ luôn đồng biến trên $(0;10)$.

A. 4038. **B.** 2020. **C.** 2017. **D.** 2017.

Câu 55: Có bao nhiêu số nguyên của tham số m trong đoạn $[-3;3]$ để hàm số $y=\left|\ln\left(x^3+mx+2\right)\right|$ đồng biến trên nửa khoảng $[1;3)$?

A. 7. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 56: Cho hàm số $y=\left|\ln\left(x^2-mx-m\right)-1\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(-10;10)$ của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2};1\right)$?

A. 10. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 5.

Câu 57: Tổng các giá trị m nguyên thuộc $[-5;5]$ sao cho hàm số $y=\left|\ln\left(x^3-3x+m\right)+1\right|$ nghịch biến trên $[0;1]$ bằng

A. 10. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 13.

Câu 58: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ để hàm số $y=\left|\log_3\left(x^3+x^2-mx+1\right)\right|$ đồng biến trên $[1;+\infty)$.

A. 13. **B.** 12. **C.** 11. **D.** 10.

Câu 59: Tổng các giá trị nguyên của m trên $[-10;10]$ để hàm số $y=g(x)=\left|\ln\left(x^2+x+m\right)+x\right|$ đồng biến trên $(-1;3)$ là

A. 50. **B.** 100. **C.** 52. **D.** 105.

Câu 60: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-2021;2021]$ để phương trình $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+3}{x+4}-|x+3|+x-m=0$ có đúng 3 nghiệm thực x. Số phần tử của tập S là:

A. 2018. **B.** 2021. **C.** 2019. **D.** 2022.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.C	3.D	4.C	5.B	6.A	7.B	8.A	9.B	10.B
11.A	12.A	13.A	14.B	15.D	16.A	17.D	18.A	19.A	20.B
21.B	22.D	23.A	24.C	25.A	26.D	27.A	28.A	29.C	30.A
31.C	32.A	33.B	34.A	35.A	36.A	37.A	38.A	39.D	40.A
41.D	42.B	43.B	44.A	45.B	46.C	47.A	48.C	49.A	50.B
51.C	52.B	53.A	54.C	55.C	56.D	57.C	58.A	59.C	60.D

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn D

Xét hàm số $f(x)=x^5-5x^2+5(m-1)x-8.$

Trường hợp 1: $f(x)=0$ có nghiệm $x_0\in(-\infty;1)$ thì hàm số $y=|f(x)|$ không thể nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

Trường hợp 2: $f(x)=0$ không có nghiệm $x_0\in(-\infty;1)$.

Ta có: $f'(x)=5x^4-10x+5(m-1).$

Khi đó $y=|x^5-5x^2+5(m-1)x-8|=|f(x)|=\sqrt{f^2(x)}$ nên $y'=\dfrac{f'(x).f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$.

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$ khi và chỉ khi $y'\le 0$ với $\forall x\in(-\infty;1)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}f'(x).f(x)\le 0\\ f(x)\ne 0\end{cases},\forall x\in(-\infty;1)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)<0\\ f'(x)\ge 0\end{cases},\forall x\in(-\infty;1)$ (vì $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$)

$\Leftrightarrow\begin{cases}f'(x)=5x^4-10x+5(m-1)\ge 0,\forall x\in(-\infty;1)\\ f(1)=5m-17\le 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge -x^4+2x+1,\forall x\in(-\infty;1)\\ m\le\dfrac{17}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge\max\limits_{(-\infty;1)}(-x^4+2x+1)=\dfrac{3}{2.\sqrt[3]{2}}+1\\ m\le\dfrac{17}{5}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\dfrac{3}{2.\sqrt[3]{2}}+1\le m\le\dfrac{17}{5}\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m=3.$

Câu 2: Chọn C

Xét hàm số $f(x)=2x^3-mx+1.$

Trường hợp 1: $f(x)=0$ có nghiệm $x_0\in(1;+\infty)$ thì hàm số $y=|f(x)|$ không thể đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Trường hợp 2: $f(x)=0$ không có nghiệm $x_0\in(1;+\infty)$. Ta có: $f'(x)=6x^2-m.$

Khi đó $y=|2x^3-mx+1|=|f(x)|=\sqrt{f^2(x)}$ nên $y'=\dfrac{f'(x).f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $y' \ge 0$ với $\forall x \in (1;+\infty)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x).f(x) \ge 0 \\ f(x) \ne 0 \end{cases}, \forall x \in (1;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f'(x) \ge 0 \end{cases}, \forall x \in (1;+\infty)$ (vì $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$)

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - mx + 1 > 0 \\ 6x^2 - m \ge 0 \end{cases}, \forall x \in (1;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) \ge 0 \\ f'(1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - m + 1 \ge 0 \\ 6 - m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \le 3 \Rightarrow m \in \{1;2;3\}$.

Câu 3: Chọn D

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m \Rightarrow f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2)$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{array} \right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		↘	$m-5$	↗		↘		↗	

Nhận thấy: hàm số $y = |f(x)|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1) \Leftrightarrow m - 5 \ge 0 \Leftrightarrow m \ge 5$.

Lại do $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m < 10 \end{cases} \Rightarrow m \in \{5;6;7;8;9\}$. Vậy có 5 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4: Chọn C

Đặt $f(x) = x^4 + 2x^3 + mx + 2 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + m$; $y = |x^4 + 2x^3 + mx + 2| = |f(x)|$.

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ nên hàm số đồng biến trên $(-1;+\infty)$ khi và chỉ khi

$\begin{cases} f'(x) \ge 0, \forall x \in (-1;+\infty) \\ f(-1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 + 6x^2 + m \ge 0, \forall x \in (-1;+\infty) \\ 1 - m \ge 0 \end{cases}$

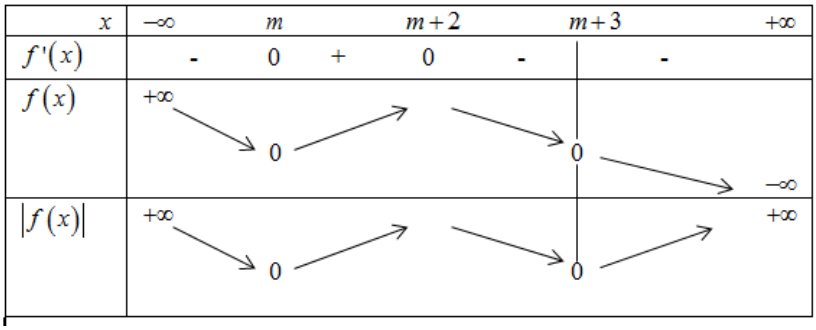
$\Leftrightarrow \begin{cases} m \ge -4x^3 - 6x^2, \forall x \in (-1;+\infty) \\ 1 - m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge \max\limits_{(-1;+\infty)} (-4x^3 - 6x^2) \\ m \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 0 \\ m \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le m \le 1$.

Câu 5: Chọn B

Xét hàm số $f(x) = -x^3 + 3(m+1)x^2 - 3m(m+2)x + m^2(m+3)$ trên khoảng $(0;2)$.

$f'(x) = -3x^2 + 6(m+1)x - 3m(m+2) = -3\left[x^2 - 2(m+1)x + m(m+2)\right]$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = m+2 \end{array} \right.$ $(m < m+2)$. **Nhận xét:** $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = m+3 \end{array} \right.$



Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ đồng biến trên khoảng $\left(0;1\right)$ khi

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(0;1\right)\subset\left(m;\ m+2\right)\\\left(0;1\right)\subset\left(m+3;\ +\infty\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le 0<1\le m+2\\m+3\le 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1\le m\le 0\\m\le -3\end{array}\right..$$

Mà m nguyên thuộc khoảng $\left[-10;10\right]$ nên có 10 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6: Chọn A

Xét hàm số: $f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3-x^2+mx+1\Rightarrow f'\left(x\right)=x^2-2x+m$. Ta có: $\Delta'=1-m$

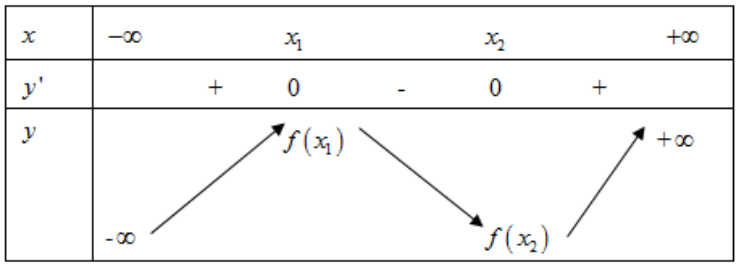
Trường hợp 1: $\Delta'\le 0\Leftrightarrow 1-m\le 0\Leftrightarrow m\ge 1$. Suy ra $f'\left(x\right)\ge 0,\forall x\in\left(1;+\infty\right)$.

Vậy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\ge 1\\f\left(1\right)\ge 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\ge 1\\\frac{1}{3}+m\ge 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\ge 1\\m\ge -\frac{1}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow m\ge 1.$

Kết hợp với điều kiện $m\in\mathbb{Z};m\in\left(-4;4\right)$ ta được $m\in\left\{-3;-2;-1;0;1\right\}$. Ta có 5 giá trị của m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: $\Delta'>0\Leftrightarrow m<1$. Suy ra $f'\left(x\right)=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1,x_2\ \left(x_1<x_2\right)$

Ta có bảng biến thiên:



Vậy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m<1\\x_1<x_2\le 1\\f\left(1\right)\ge 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m<1\\f'\left(1\right)>0\\\frac{S}{2}-1<0\\f(1)\ge 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m<1\\f'\left(1\right)>0\\1-1<0\\f(1)\ge 0\end{array}\right.\Leftrightarrow m=\varnothing$

Vậy tất cả có 5 giá trị của m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 7: Chọn B

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\left(m-1\right)x^2+\left(2m-3\right)x-\frac{2}{3}$

Ta có: $f'(x)=x^2+2\left(m-1\right)x+2m-3;\ f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3-2m\end{array}\right.$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\left(1;5\right)$ khi và chỉ khi xảy ra một trong hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\begin{cases} f(x) \text{ đồng biến trên } (1;5) \\ f(1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2m \le 1 \\ 3m-4-\dfrac{1}{3} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 1 \\ 3m \ge \dfrac{13}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m \ge \dfrac{13}{9}$

Kết hợp điều kiện m nguyên và thuộc $[-5;5]$ ta được $m \in \{2;3;4;5\}$

Trường hợp 2: $\begin{cases} f(x) \text{ nghịch biến trên } (1;5) \\ f(1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \le 3-2m \\ 3m-4-\dfrac{1}{3} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le -1 \\ 3m \le \dfrac{13}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m \le -1$

Kết hợp điều kiện m nguyên và thuộc $[-5;5]$ ta được $m \in \{-1;-2;-3;-4;-5\}$

Vậy tổng tất cả các số nguyên của m để hàm số đồng biến trên $[-5;5]$ là: -1.

Câu 8: **Chọn A**

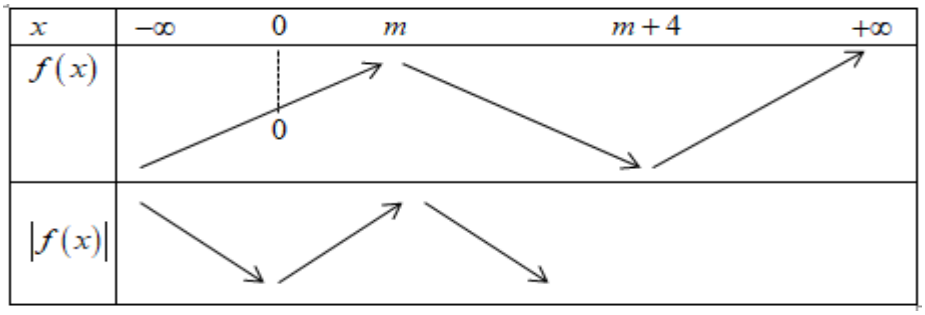
Xét hàm số $f(x)=x^3-3(m+2)x^2+3m(m+4)x$ trên khoảng $(0;4)$

$f'(x)=3x^2-6(m+2)x+3m(m+4) = 3\left[x^2-2(m+2)x+m(m+4)\right]$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=m+4 \end{array}\right. \quad (m<m+4)$

Nhận xét: Đồ thị hàm số $y=f(x)$ luôn đi qua điểm $O(0;0)$.

Trường hợp 1: Nếu $m>0$

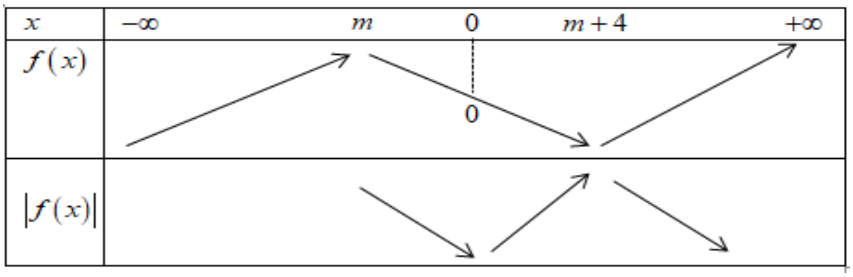


Từ bảng biến thiên, suy ra

hàm số $y=|f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0;4) \Leftrightarrow (0;4) \subset (0;m) \Leftrightarrow m \ge 4$

Kết hợp với $m>0$, ta có $m \ge 4$.

Trường hợp 2: Nếu $m \le 0 < m+4 \Leftrightarrow -4 < m \le 0$

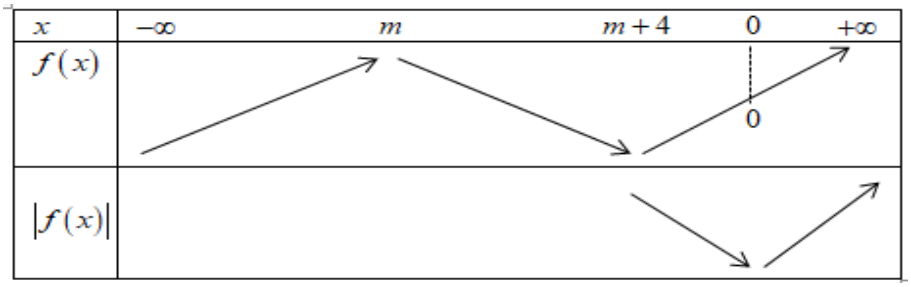


Từ bảng biến thiên, suy ra

hàm số $y=|f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0;4) \Leftrightarrow (0;4) \subset (0;m+4) \Leftrightarrow m+4 \ge 4 \Leftrightarrow m \ge 0$

Kết hợp với $-4 < m \le 0$, ta có $m=0$.

Trường hợp 3: Nếu $m+4\le 0 \Leftrightarrow m\le -4$



Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ luôn đồng biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$nên hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ đồng biến trên khoảng $\left(0;4\right)$ với mọi $m\le -4$ .Vậy $\left[\begin{array}{l} m\ge 4 \\ m=0 \\ m\le -4 \end{array}\right.$

Mà m nguyên thuộc khoảng $\left[-2019;2019\right]$ nên có 4033 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 9: Chọn B

Xét hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+m$ ta có $y'=x^2+x+1>0,\forall x\in R.$

Suy ra hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+m$ luôn đồng biến trên R .

Do đó điều kiện hàm số $y=\left|\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+m\right|$ đồng biến trên $(0,+\infty)$ là $y_{(0)}\ge 0 \Rightarrow m\ge 0.$

Lại có m nguyên dương và $m<5$ vậy có 4 giá trị của m

Câu 10: Chọn B

Ta có: $y=\begin{cases} x^5-mx+4 & khi\left(x^5-mx+4\ge 0\right) \\ -x^5+mx-4 & khi\left(x^5-mx+4<0\right) \end{cases}$; $y'=\begin{cases} 5x^4-m & khi\left(x^5-mx+4\ge 0\right) \\ -5x^4+m & khi\left(x^5-mx+4<0\right) \end{cases}$

Trường hợp 1: $y'=\begin{cases} 5x^4-m\ge 0 \\ x^5-mx+4\ge 0 \end{cases}, \forall x\ge 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m\le 5x^4 \\ m\le x^4+\frac{4}{x} \end{cases}, \forall x\ge 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m\le 5 \\ m\le 1+4 \end{cases} \Leftrightarrow m\le 5.$

Trường hợp 2: $y'=\begin{cases} -5x^4+m\ge 0 \\ x^5-mx+4<0 \end{cases}, \forall x\ge 1.$ Hệ vô nghiệm vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^5-mx+4\right)=+\infty.$

Vậy $\begin{cases} m\le 5 \\ m\in\mathbb{Z}^+ \end{cases} \Rightarrow m\in\left\{1,2,3,4,5\right\}.$

Câu 11: Chọn A

Xét hàm số: $f\left(x\right)=2x^3-2mx+3$ có $f'\left(x\right)=6x^2-2m$

Trường hợp 1: Hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$ và $f\left(1\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2-2m\ge 0 \\ 5-2m\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\le 3x^2\ \forall x\in\left(1;+\infty\right) \\ m\le \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\le 3 \\ m\le \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m\le \frac{5}{2}$

Suy ra có 12 giá trị m thỏa yêu cầu

Trường hợp 2: Hàm số $f\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$ và $f\left(1\right)\le 0$

Trường hợp này không xảy ra do $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Vậy có tất cả 12 giá trị m thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 12: Chọn A

Ta có : $y'=\dfrac{x^5-mx+1}{\left|x^5-mx+1\right|}.\left(5x^4-m\right)$

Để hàm số đồng biến trên $\left[1;+\infty\right)$ thì $g(x)=\left(x^5-mx+1\right)\left(5x^4-m\right)\geq 0$ (*), $\forall x\geq 1$.

Với $m=0$ ta có $g(0)=\left(x^5+1\right).5x^4>0, \forall x\geq 1$.

Với $m>0$. Do $m\in \mathrm{N}\ \Rightarrow\ (*)$ luôn có 1 nghiệm là $\sqrt[4]{\dfrac{m}{5}}$. Ta chú ý $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

Do vậy, điều kiện cần để $g(x)\geq 0$, $\forall x\geq 1$ là $\sqrt[4]{\dfrac{m}{5}}\leq 1\ \Leftrightarrow\ m\leq 5$.

Với $m=1$, $m=2$; $m=3$; $m=4$; $m=5$, thay vào (*) kiểm tra bảng xét dấu thấy đúng

$\Rightarrow$nhận $m=1; m=2$; $m=3$; $m=4$; $m=5$

Vậy $S=\{1;2;3;4;5\}$. Tổng các phần tử của S là 15.

Câu 13: Chọn A

Xét hàm $g(x)=x^2-2mx+m+2$. Ta có $g'(x)=2x-2m$.

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ khi và chỉ khi

$\begin{cases} g(0)\geq 0 \\ g'(x)\geq 0 \end{cases}, \forall x\in(0;2)$ hoặc $\begin{cases} g(0)\leq 0 \\ g'(x)\leq 0 \end{cases}, \forall x\in(0;2)$.

Trường hợp 1: $\begin{cases} g(0)\geq 0 \\ g'(x)\geq 0 \end{cases}, \forall x\in(0;2) \Leftrightarrow \begin{cases} m+2\geq 0 \\ -2m\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2\leq m\leq 0$.

Trường hợp 2: $\begin{cases} g(0)\leq 0 \\ g'(x)\leq 0 \end{cases}, \forall x\in(0;2) \Leftrightarrow \begin{cases} m+2\leq 0 \\ -2m\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\leq -2 \\ m\geq 0 \end{cases}$ vô nghiệm.

Do m là nguyên thuộc $[-9;9]$ nên $m\in\{-2, -1, 0\}$.

Câu 14: Chọn B

Xét hàm $g(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}(2m+3)x^2-(m^2+3m)x+\dfrac{2}{3}$. Ta có

$g'(x)=-x^2+(2m+3)x-(m^2+3m)=-(x-m)(x-m-3).$

Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ khi và chỉ khi

$\begin{cases} g(2)\leq 0 \\ g'(x)\geq 0 \end{cases}, \forall x\in(1;2)$ hoặc $\begin{cases} g(2)\geq 0 \\ g'(x)\leq 0 \end{cases}, \forall x\in(1;2)$.

Trường hợp 1.

$\begin{cases} g(2)\leq 0 \\ g'(x)\geq 0 \end{cases}, \forall x\in(1;2) \Leftrightarrow \begin{cases} -2m^2-2m+4\leq 0 \\ -(x-m)(x-m-3)\geq 0 \end{cases}, \forall x\in(1;2) \Leftrightarrow \begin{cases} m\in(-\infty;-2]\cup[1;+\infty) \\ m\in[-1;1] \end{cases} \Leftrightarrow m=1.$

Trường hợp 2.

$\begin{cases} g(2) \ge 0 \\ g'(x) \le 0 \end{cases}, \forall x \in (1;2) \Leftrightarrow \begin{cases} -2m^2 - 2m + 4 \ge 0 \\ -(x-m)(x-m-3) \le 0 \end{cases}, \forall x \in (1;2) \Leftrightarrow \begin{cases} m \in [-2;1] \\ m \in (-\infty,-2] \cup [2;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m = -2.$

Do m là nguyên thuộc $[-9;9]$ nên $m \in \{1, -2\}$.

Câu 15: Chọn D

Ta có $y = \begin{cases} 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m & \left(3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m \ge 0\right) \\ -3x^4 + 4x^3 + 12x^2 - m & \left(3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m < 0\right) \end{cases}$

Nên $y' = \begin{cases} 12x^3 - 12x^2 - 24x & \left(3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m \ge 0\right) \\ -12x^3 + 12x^2 + 24x & \left(3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m < 0\right) \end{cases}$

Yêu cầu bài toán tương đương với

Trường hợp 1: $\begin{cases} 12x^3 - 12x^2 - 24x \le 0 \\ 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m \ge 0 \end{cases}, \forall x > 1$

$m \ge -3x^4 + 4x^3 + 12x^2, \forall x < -1 \Leftrightarrow m \ge 5$

Trường hợp 1: $\begin{cases} -12x^3 + 12x^2 + 24x \le 0 \\ 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m < 0 \end{cases}, \forall x > 1 \Rightarrow$ Hệ này vô nghiệm.

Vậy $m \in \{5;6;...;19\}$. Có 15 số nguyên thỏa mãn.

Câu 16: Chọn A

Ta có $y = \begin{cases} x^4 - mx^2 + 9 & \left(x^4 - mx^2 + 9 \ge 0\right) \\ -x^4 + mx^2 - 9 & \left(x^4 - mx^2 + 9 < 0\right) \end{cases}$ nên $y' = \begin{cases} 4x^3 - 2mx & \left(x^4 - mx^2 + 9 \ge 0\right) \\ -4x^3 + 2mx & \left(x^4 - mx^2 + 9 < 0\right) \end{cases}$

Yêu cầu bài toán tương đương với

Trường hợp 1: $\begin{cases} 4x^3 - 2mx \ge 0 \\ x^4 - mx^2 + 9 \ge 0 \end{cases}, \forall x > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 2x^2 \\ m \le x^2 + \dfrac{9}{x^2} \end{cases}, \forall x > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 2x^2 \\ m \le x^2 + \dfrac{9}{x^2} \end{cases}, \forall x \ge 1$

$\Leftrightarrow m \le 2 \Rightarrow m \in \{0;1;2\}$

Trường hợp 2: $\begin{cases} -4x^3 + 2mx \ge 0 \\ x^4 - mx^2 + 9 < 0 \end{cases}, \forall x > 1$

Hệ này vô nghiệm vì khi $x \to +\infty$ thì $x^4 - mx^2 + 9 \to +\infty$.

Câu 17: Chọn D

Đặt $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}\left(m+3\right)x^2 + \left(2m+3\right)x - 1.$

Ta có: $f'(x) = x^2 - \left(m+3\right)x + 2m + 3.$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(4;+\infty\right)$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} f'(x) \ge 0, \forall x \in \left(4;+\infty\right) \\ f(4) \ge 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} f'(x) \le 0, \forall x \in \left(4;+\infty\right) \\ f(4) \le 0 \end{cases}$$

Trường hợp 1: $\begin{cases} f'(x) \ge 0, \forall x \in \left(4;+\infty\right) \\ f(4) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \left(m+3\right)x + \left(2m+3\right) \ge 0, \forall x \in \left(4;+\infty\right) \\ 16 - 4\left(m+3\right) + 2m + 3 \ge 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \le \dfrac{x^2-3x+3}{x-2}, \forall x \in (4;+\infty) \\ m \le \dfrac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le \min\limits_{[4;+\infty)} \dfrac{x^2-3x+3}{x-2} \\ m \le \dfrac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le \dfrac{7}{2} \\ m \le \dfrac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \le \frac{7}{2}$$

Trường hợp 2: $\begin{cases} f'(x) \le 0, \forall x \in (4;+\infty) \\ f(4) \le 0 \end{cases}$

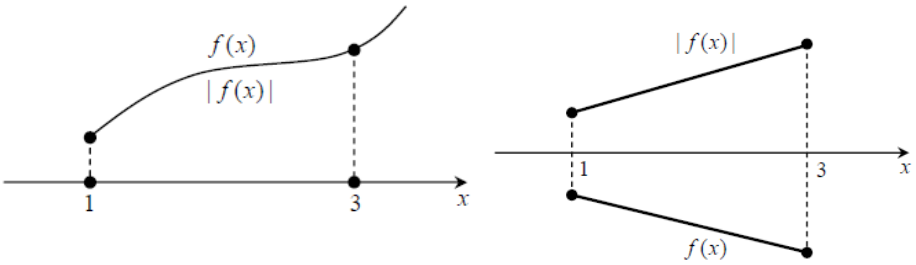
Hệ vô nghiệm vì $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - (m+3)x + (2m+3)\right) = +\infty$.

Vậy $m \le \dfrac{7}{2}, m$ nguyên dương nên $m \in \{0;1;2;3\}$.

Câu 18: Chọn A

Xét hàm số $f(x) = x^3 - (2m-5)x + 2018$, có đạo hàm $f(x) = 3x^2 - (2m-5)$.

Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$ thì đồ thì của hàm số trong khoảng $(1;3)$ phải có hình dạng như sau:



Trường hợp 1: Hàm số $f(x)$ đồng biến trong khoảng $(1;3)$ và không âm trên $(1;3)$ tức là:

$$\begin{cases} f(1) \ge 0 \\ f'(x) \ge 0 \ \forall x \in (1;3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m \le 3x^2 + 5 \forall x \in (1;3) \\ 2024 - 2m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 4 \\ m \le 1012 \end{cases} \Leftrightarrow m \le 4.$$

Trường hợp 2: Hàm số $f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(1;3)$ và không dương trên $(1;3)$ tức là:

$$\begin{cases} f(1) \le 0 \\ f'(x) \le 0 \ \forall x \in (1;3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m \ge 3x^2 + 5 \forall x \in (1;3) \\ 2024 - 2m \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 4 \\ m \ge 1012 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 1012.$$

Kết hợp với điều kiện ta được kết quả $m \in [-2019;4] \cup [1012;2019]$. Vậy có 3032 giá trị của m.

Câu 19: Chọn A

Xét hàm số: $y = f(x) = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x$. Tập xác định : $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 3m(m+2)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = m+2 \end{array}\right. (m < m+2, \forall m)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		m		$m+2$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗		↘		↗	$+\infty$

Gọi (C_1) là phần đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x$ nằm trên $0x$.

Gọi (C_2) là phần đồ thị của hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+3m(m+2)x$ nằm dưới $0x$.

Gọi (C_2') là phần đồ thị đối xứng với (C_2) qua $0x$.

Suy ra đồ thị hàm số $y=g(x)=\left|x^3-3(m+1)x^2+3m(m+2)x\right|$ gồm $(C_1)\cup(C_2')$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: hàm số $y=g(x)=\left|x^3-3(m+1)x^2+3m(m+2)x\right|$ đồng biến trên nửa đoạn $[0;+\infty)$ khi và chỉ khi $\begin{cases}m+2\le 0\\ f(0)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow m\le -2$.

Kết hợp với điều kiện $-2021\le m\le 2021$, ta suy ra có 2020 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 20: Chọn B

Đặt $f(x)=x^3-3x^2+mx+3m+1\Rightarrow f'(x)=3x^2-6x+m$.

Trường hợp 1: $\begin{cases}f'(x)\ge 0,\forall x\in(-2;+\infty)\\ f(-2)\ge 0\end{cases}$.

$$\begin{cases}f'(x)\ge 0,\forall x\in(-2;+\infty)\\ f(-2)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2-6x+m\ge 0,\forall x\in(-2;+\infty)\\ m\ge 19\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge -3x^2+6x,\forall x\in(-2;+\infty)\\ m\ge 19\end{cases}$$

$$\begin{cases}m\ge \max\limits_{x\in(-2;+\infty)}(-3x^2+6x)\\ m\ge 19\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge 3\\ m\ge 19\end{cases}\Leftrightarrow m\ge 19.$$

Trường hợp 1: $\begin{cases}f'(x)\le 0,\forall x\in(-2;+\infty)\\ f(-2)\le 0\end{cases}$.

$$\begin{cases}f'(x)\le 0,\forall x\in(-2;+\infty)\\ f(-2)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2-6x+m\le 0,\forall x\in(-2;+\infty)\\ m-19\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le -3x^2+6x,\forall x\in(-2;+\infty)\\ m\le 19\end{cases}$$

$$\begin{cases}m\le \min\limits_{(-2;+\infty)}(-3x^2+6x)\\ m\le 19\end{cases}.$$

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x^2+6x)=-\infty\Rightarrow$ hàm số $y=-3x^2+6x$ không có giá trị nhỏ nhất. Vì vậy TH2 không có giá trị m thỏa mãn. Vậy tập các giá trị m cần tìm là $S=[19;+\infty)$.

Câu 21: Chọn B

Xét hàm số $y=\dfrac{mx+3}{x+m+2}$ với $x\ne -m-2$, có $y'=\dfrac{m^2+2m-3}{(x+m+2)^2}$.

Hàm số $y=\left|\dfrac{mx+3}{x+m+2}\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$ khi xảy ra một trong hai trường hợp sau :

Trường hợp 1: $\begin{cases}y'=\dfrac{m^2+2m-3}{(x+m+2)^2}>0\\ y(1)\ge 0\\ -m-2\notin(1;+\infty)\end{cases},\forall x>1\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+2m-3>0\\ \dfrac{m+3}{m+3}\ge 0\\ -m-2\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<-3\\ m>1\end{array}\right.\\ m\ge -3\end{cases}\Leftrightarrow m>1.$

Trường hợp 2: $\begin{cases} y'=\dfrac{m^2+2m-3}{(x+m+2)^2}<0 \\ y(1)\le 0 \\ -m-2\notin(1;+\infty) \end{cases}, \forall x>1 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+2m-3<0 \\ \dfrac{m+3}{m+3}\le 0 \\ -m-2\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow m\in\varnothing.$

Vậy $m\in(1;+\infty)$, lại do $\begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ m\in[-10;10] \end{cases}$ suy ra $m\in\{2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$, vậy $S=54$.

Câu 22: Chọn B

Đặt $f(x)=\dfrac{x-2m+1}{x+m}$. Điều kiện: $x\neq -m$ khi đó $f'(x)=\dfrac{3m-1}{(x+m)^2}$

Để hàm số đồng biến trên $(1;+\infty) \Leftrightarrow y'=\dfrac{f'(x).f(x)}{|f(x)|}\ge 0, \forall x\in(1;+\infty)$

$\begin{cases} f'(x)>0, \forall x\in(1;+\infty) \\ f(1)\ge 0 \end{cases} (I)$ hoặc $\begin{cases} f'(x)<0, \forall x\in(1;+\infty) \\ f(1)\le 0 \end{cases} (II)$

Ta có $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-1>0 \\ -m\le 1 \\ \dfrac{2-2m}{1+m}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}<m\le 1$; $(II) \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-1<0 \\ -m\le 1 \\ \dfrac{2-2m}{1+m}\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\in\varnothing$. Vậy $\dfrac{1}{3}<m\le 1.$

Câu 23: Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2m+2}{x-1}$ có $f'(x)=\dfrac{x^2-2x-2m}{(x-1)^2}$

Khi đó $y=|f(x)|=\sqrt{f^2(x)} \Rightarrow y'=\dfrac{f'(x).f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$

Hàm số đồng biến trên $[3;+\infty) \Leftrightarrow y'\ge 0, \forall x\in[3;+\infty)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x).f(x)\ge 0 \\ f(x)\neq 0 \end{cases}, \forall x\in[3;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ f'(x)\ge 0 \end{cases}, \forall x\in[3;+\infty)$ (vì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$)

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-2x+2m+2}{x-1}>0 \\ \dfrac{x^2-2x-2m}{(x-1)^2}\ge 0 \end{cases}, \forall x\in[3;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+2m+2>0 \\ x^2-2x-2m\ge 0 \end{cases}, \forall x\in[3;+\infty)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m+2>-x^2+2x \\ 2m\le x^2-2x \end{cases}, \forall x\in[3;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+2>\max\limits_{[3;+\infty)}(-x^2+2x) \\ 2m\le \min\limits_{[3;+\infty)}(x^2-2x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+2>-3 \\ 2m\le 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m>-\dfrac{5}{2} \\ m\le \dfrac{3}{2} \end{cases}$. Vì $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{-2;-1;0;1\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số *m* thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 24: Chọn C

Ta có: $y=\left|x-\frac{2}{x}+m\right|=\sqrt{\left(x-\frac{2}{x}+m\right)^2} \Rightarrow y'=\frac{\left(x-\frac{2}{x}+m\right)\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{2}{x}+m\right)^2}}$

Hàm số đồng biến trên $\left[1;+\infty\right) \Leftrightarrow y'\geq 0, \forall \in \left[1;+\infty\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(x-\frac{2}{x}+m\right)\geq 0\\ \left(1+\frac{2}{x^2}\right)\geq 0\end{cases}, \forall \in \left[1;+\infty\right) \Leftrightarrow \left(x-\frac{2}{x}+m\right)\geq 0, \forall \in \left[1;+\infty\right)$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{2}{x}+m\right)\geq 0, \forall \in \left[1;+\infty\right) \Leftrightarrow m\geq -x+\frac{2}{x}, \forall \in \left[1;+\infty\right)$

$\Leftrightarrow m\geq \max\limits_{\left[1;+\infty\right)}\left(-x+\frac{2}{x}\right)(*)$

Xét hàm số $g(x)=-x+\frac{2}{x}, \forall x\in\left[1;+\infty\right) \Rightarrow g'(x)=-1-\frac{2}{x^2}<0, \forall x\in\left[1;+\infty\right)$

$\Rightarrow \max\limits_{\left[1;+\infty\right)} g(x)=\max\limits_{\left[1;+\infty\right)}\left(-x+\frac{2}{x}\right)=g(1)=1$. Vậy $(*) \Leftrightarrow m\geq 1.$

Câu 25: Chọn A

Xét hàm số $f(x)=x+1+\frac{m^2-2m-1}{x+1}$. Ta có $f'(x)=1-\frac{m^2-2m-1}{(x+1)^2}$

Khi đó $y=\left|x+1+\frac{m^2-2m-1}{x+1}\right|=\left|f(x)\right|=\sqrt{f^2(x)}$ nên $y'=\frac{f'(x).f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$

Hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$khi và chỉ khi $y'\geq 0$ với $\forall x\in(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}f'(x).f(x)\geq 0\\ f(x)\neq 0\end{cases}, \forall x\in(2;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases}f'(x)>0\\ f(x)\geq 0\end{cases}, \forall x\in(2;+\infty)$ (vì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$)

$\Leftrightarrow \begin{cases}x+1+\frac{m^2-2m-1}{x+1}>0\\ 1-\frac{m^2-2m-1}{(x+1)^2}\geq 0\end{cases}, \forall x\in(2;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases}m^2-2m-1>-(x+1)^2\\ m^2-2m-1\leq (x+1)^2\end{cases}, \forall x\in(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}m^2-2m-1\geq \max\limits_{(2;+\infty)}\left[-(x+1)^2\right]=-9\\ m^2-2m-1\leq \min\limits_{(2;+\infty)}(x+1)^2=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2-2m+8\geq 0\\ m^2-2m-10\leq 0\end{cases} \Leftrightarrow 1-\sqrt{11}\leq m\leq 1+\sqrt{11}$

Câu 26: Chọn D

Điều kiện xác định: $x\neq -1$. Đặt $f(x)=\frac{x+m}{x+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{1-m}{(x+1)^2}$.

Khi đó ta có $y=\left|f\left(x\right)\right|=\sqrt{f^2\left(x\right)}\Rightarrow y'=\dfrac{f'\left(x\right)f\left(x\right)}{\sqrt{f^2\left(x\right)}}$

Hàm số đồng biến trên $\left(1;+\infty\right)$ nếu $y'\ge 0\forall x\in\left(1;+\infty\right)\Leftrightarrow f'\left(x\right).f\left(x\right)\ge 0\forall x\in\left(1;+\infty\right)$

Trường hợp 1: $\begin{cases}f'\left(x\right)>0\forall x\in\left(1;+\infty\right)\\ f\left(1\right)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-m>0\\ \dfrac{1+m}{2}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<1\\ m\ge -1\end{cases}\Leftrightarrow -1\le m<1$

Trường hợp 2: $\begin{cases}f'\left(x\right)<0\forall x\in\left(1;+\infty\right)\\ f\left(1\right)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-m<0\\ \dfrac{1+m}{2}\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>1\\ m\le -1\end{cases}\Leftrightarrow m=\varnothing$

Vậy $m\in\left[-1;1\right)$ là giá trị cần tìm.

Câu 27: Chọn A

Xét hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x^3-2mx+2}{x-1}$. Ta có: $f'\left(x\right)=\dfrac{2x^3-3x^2+2m-2}{\left(x-1\right)^2}$.

Khi đó $y=\left|\dfrac{x^3-2mx+2}{x-1}\right|=\left|f\left(x\right)\right|=\sqrt{f^2\left(x\right)}$ nên $y'=\dfrac{f'\left(x\right).f\left(x\right)}{\sqrt{f^2\left(x\right)}}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(2;+\infty\right)$ khi và chỉ khi $y'\ge 0$ với $\forall x\in\left(2;+\infty\right)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}f'\left(x\right).f\left(x\right)\ge 0\\ f\left(x\right)\ne 0\end{cases},\forall x\in\left(2;+\infty\right)\Leftrightarrow\begin{cases}f\left(x\right)>0\\ f'\left(x\right)\ge 0\end{cases},\forall x\in\left(2;+\infty\right)$ (do $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=+\infty$)

$\Leftrightarrow\begin{cases}f\left(2\right)\ge 0\\ \dfrac{2x^3-3x^2+2m-2}{\left(x-1\right)^2}\ge 0,\forall x\in\left(2;+\infty\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10-4m\ge 0\\ 2x^3-3x^2+2m-2\ge 0,\forall x\in\left(2;+\infty\right)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m\le\dfrac{5}{2}\\ 2m\ge -2x^3+3x^2+2,\forall x\in\left(2;+\infty\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le\dfrac{5}{2}\\ 2m\ge\max\limits_{x\in\left[2;+\infty\right)}\left(-2x^3+3x^2+2\right)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m\le\dfrac{5}{2}\\ 2m\ge -2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le\dfrac{5}{2}\\ m\ge -1\end{cases}\Leftrightarrow -1\le m\le\dfrac{5}{2}$

Vì $m\in\mathbb{Z}^+$ nên $m\in\left\{1;2\right\}$. Vậy tổng các giá trị nguyên dương của m là 3.

Câu 28: Chọn A

Đặt $f\left(x\right)=\dfrac{x-m}{x+m+3}$. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-m-3\right\}$. Ta có $f'\left(x\right)=\dfrac{2m+3}{\left(x+m+3\right)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(2;+\infty\right)\Leftrightarrow y'=\dfrac{f\left(x\right).f'\left(x\right)}{\left|f\left(x\right)\right|}\le 0,\forall x\in\left(2;+\infty\right)$

$\Leftrightarrow f\left(x\right).f'\left(x\right)>0,\forall x\in\left(2;+\infty\right)$.

Trường hợp 1:

$$\begin{cases} f'(x)>0,\forall x\in(2;+\infty) \\ f(2)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+3>0 \\ -m-3\le 2 \\ \dfrac{2-m}{5+m}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-\dfrac{3}{2} \\ m\ge -1 \\ -5<m\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow -1\le m\le 2.$$

Trường hợp 2:

$$\begin{cases} f'(x)<0,\forall x\in(2;+\infty) \\ f(2)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+3<0 \\ -m-3\le 2 \\ \dfrac{2-m}{5+m}\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<-\dfrac{3}{2} \\ m\ge -1 \\ m\ge 2\vee m<-5 \end{cases}$$ (không có m thỏa mãn).

Vậy $-1\le m\le 2$, mà $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{-1;0;1;2\}$. Vậy có 4 số nguyên m thoả mãn.

Câu 29: Chọn C

Tập xác định: $D=R\setminus\{2\}$.

Xét hàm số $f(x)=x+5+\dfrac{1-m}{x-2}$. Đạo hàm: $f'(x)=1+\dfrac{m-1}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x+m+3}{(x-2)^2}$.

Khi đó $y=|f(x)|=\sqrt{f^2(x)}$ nên $y'=\dfrac{f'(x).f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$.

Hàm số đồng biến trên $[5;+\infty)$ khi và chỉ khi $y'\ge 0,\forall x\in[5;+\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x).f(x)\ge 0 \\ f(x)\ne 0 \end{cases},\forall x\in[5;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ f'(x)\ge 0 \end{cases},\forall x\in[5;+\infty)$$ (vì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+5+\dfrac{1-m}{x-2}>0 \\ 1+\dfrac{m-1}{(x-2)^2}\ge 0 \end{cases},\forall x\in[5;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} m<x^2+3x-9 \\ m\ge -x^2+4x-3 \end{cases},\forall x\in[5;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m<\min\limits_{[5;+\infty)}(x^2+3x-9) \\ m\ge \max\limits_{[5;+\infty)}(-x^2+4x-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<5^2+3.5-9 \\ m\ge -5^2+4.5-3 \end{cases} \Leftrightarrow -8\le m<31.$$

Mà m nguyên âm nên ta có: $m\in\{-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1\}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên âm của m để hàm số $y=\left|x+5+\dfrac{1-m}{x-2}\right|$ đồng biến trên $[5;+\infty)$.

Câu 30: Chọn A

Đặt $f(x)=\dfrac{x^2+x+2m-3}{x-1} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{x^2-2x+2-2m}{(x-1)^2}$

Khi đó $y=|f(x)|=\sqrt{f^2(x)} \Rightarrow y'=\dfrac{f'(x).f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$ khi $y'\ge 0,\forall x\in(3;+\infty) \Leftrightarrow \dfrac{f'(x).f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}\ge 0,\forall x\in(3;+\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x).f(x) \ge 0 \\ f(x) \ne 0 \end{cases}, \forall x \in (3;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ f'(x) \ge 0, \forall x \in (3;+\infty), \text{do } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \\ f(x) \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(3) \ge 0 \\ f'(x) \ge 0, \forall x \in (3;+\infty) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{9+2m}{2} \ge 0 \\ x^2 - 2x + 2 - 2m \ge 0, \forall x \in (3;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge -\dfrac{9}{2} \\ x^2 - 2x + 2 \ge 2m, \forall x \in (3;+\infty) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \ge -\dfrac{9}{2} \\ x^2 - 2x + 2 \ge 2m, \forall x \in (3;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge -\dfrac{9}{2} \\ m \le \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{9}{2} \le m \le \frac{5}{2}$$

Ta có $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-4;-3;-2;-1;0;1;2\}$.

Câu 31: Chọn C

Đặt $f(x) = \dfrac{x-m+1}{x+m}$, $(x \ne -m) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2m-1}{(x+m)^2}$

Để hàm số y đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ thì $y' \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{f'(x) \cdot f(x)}{|f(x)|} \ge 0$, $\forall x \in (1;+\infty)$

Trường hợp 1:

$$\begin{cases} f'(x) < 0, \forall x \in (1;+\infty) \\ f(1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1 < 0 \\ -m \le 1 \\ \dfrac{2-m}{m+1} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{1}{2} \\ m \ge -1 \\ m < -1 \vee 2 \le m \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing$$

Trường hợp 2:

$$\begin{cases} f'(x) > 0, \forall x \in (1;+\infty) \\ f(1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1 > 0 \\ -m \le 1 \\ \dfrac{2-m}{1+m} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{1}{2} \\ m \ge -1 \\ -1 < m \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m \le 2$$

Vậy để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ thì $\dfrac{1}{2} < m \le 2$.

Câu 32: Chọn A

Đặt $f(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{x+2} + \dfrac{m}{2}x - 1$. Ta có $f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{2-x}} + \dfrac{1}{2\sqrt{2+x}} + \dfrac{m}{2}$

Do hàm số liên tục tại $x = 0; x = 1$ nên để hàm số nghịch biến trên $(0;1)$ ta xét 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1:

$$\begin{cases} f'(x) \le 0, \forall x \in [0;1] \\ f(1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m}{2} \le \dfrac{1}{2\sqrt{2-x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}, \forall x \in [0;1] \\ f(1) \ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m}{2} \le \dfrac{1}{2\sqrt{2-x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}, \forall x \in [0;1] \\ \dfrac{m}{2} \ge -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m}{2} \le \min\limits_{x\in[0;1]} \left\{ \dfrac{1}{2\sqrt{2-x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{2+x}} \right\} \\ m \ge -2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow -2\sqrt{3} \le m \le 0$$

Trường hợp 2:

$$\begin{cases} f'(x) \ge 0, \forall x \in [0;1] \\ f(1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m}{2} \ge \dfrac{1}{2\sqrt{2-x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}, \forall x \in [0;1] \\ f(1) \le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m}{2} \ge \dfrac{1}{2\sqrt{2-x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}, \forall x \in [0;1] \\ \dfrac{m}{2} \le -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m}{2} \ge \max\limits_{x\in[0;1]} \left\{ \dfrac{1}{2\sqrt{2-x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{2+x}} \right\} \\ \dfrac{m}{2} \le -\sqrt{3} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ m \le -2\sqrt{3} \end{cases}$ (vô nghiệm). Do m nguyên nên m nhận các giá trị sau $-3;-2;-1;0$

Câu 33: Chọn B

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^2-3} - 2x - 3m$. Ta có: $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-3}} - 2 \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{x - 2\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{x^2-3}}$.

Cho $f'(x) = 0 \Rightarrow x - 2\sqrt{x^2-3} = 0 \Rightarrow x = 2$.

Ta thấy $f'(x) < 0, \forall x \in (2;3)$ nên hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(2;3)$.

Để $y = \left| \sqrt{x^2-3} - 2x - 3m \right|$ nghịch biến trên $(2;3)$ thì $f(3) \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{6} - 6 - 3m \ge 0 \Leftrightarrow m \le \dfrac{\sqrt{6}-6}{3}$

Do $m \in (-5;5)$ nên $m = \{-2;-3;-4\}$.

Câu 34: Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Xét hàm số $f(x) = x + m\sqrt{x^2-2x+3}$.

Ta có: $f'(x) = 1 + m\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f'(x) \ge 0, \forall x \in (1;+\infty) \\ f(1) \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f'(x) \le 0, \forall x \in (1;+\infty) \\ f(1) \le 0 \end{cases} \end{array} \right.$.

Trường hợp 1:

$f'(x) \ge 0, \forall x \in (1;+\infty) \Leftrightarrow 1 + m\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}} \ge 0, \forall x \in (1;+\infty)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x+3} + m(x-1) \ge 0, \forall x \in (1;+\infty)$.

Đặt $t = x-1, t > 0 \Rightarrow \sqrt{t^2+2} + mt \ge 0 \ \ \forall t > 0 \Leftrightarrow m \ge \dfrac{-\sqrt{t^2+2}}{t}, \forall t > 0$

Xét $f(t)=\dfrac{-\sqrt{t^2+2}}{t}$, $f'(t)=\dfrac{2}{t^2\sqrt{t^2+2}}>0\ \forall t>0$ .BBT:

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$+$	
$f(t)$	$-\infty$ ↗	-1

Từ bảng biến thiên, ta có $\begin{cases} f'(x)\ge 0,\forall x\in(1;+\infty) \\ f(1)\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m\ge -1 \\ 1+m.\sqrt{2}\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m\ge -1 \\ m\ge \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases}\Leftrightarrow m\ge\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$.

Trường hợp 2:

$f'(x)\le 0,\forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow 1+m\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}\le 0,\forall x\in(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow\sqrt{x^2-2x+3}+m(x-1)\le 0\,,\forall x\in(1;+\infty).$

Đặt $t=x-1,t>0\Rightarrow\sqrt{t^2+2}+mt\le 0\ (*),\forall t>0$

Mà $\lim\limits_{t\to 0^+}\left(\sqrt{t^2+2}+mt\right)=2>0$ nên với mỗi giá trị của m luôn có giá trị của t dương đủ nhỏ để VT của $(*)$ lớn hơn 0. Suy ra không có gía trị nào của m để TH2 thỏa mãn.

Vậy có 11 giá trị nguyên của m thỏa mãn là $\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$.

Câu 35: Chọn A

Xét hàm số $g(x)=\sqrt{x^2+2x+2}-x+m$ trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Ta có, $g'(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}-1=\dfrac{x+1-\sqrt{x^2+2x+2}}{\sqrt{x^2+2x+2}}<0,\forall x>-1$

(Do $x+1-\sqrt{x^2+2x+2}=(x+1)-\sqrt{(x+1)^2+1}<0,\forall x>-1$)

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Suy ra, hàm số $f(x)=|g(x)|$ đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)\Leftrightarrow g(x)\le 0,\forall x>-1\ (1)$

Do hàm số $g(x)$ liên tục trên $[-1;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$nên hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $[-1;+\infty)$.

Vậy $(1)\Leftrightarrow\max\limits_{[-1;+\infty)}g(x)\le 0\Leftrightarrow g(-1)=m+2\le 0\Leftrightarrow m\le -2$. Vậy $S=\{-2019\,;-2018;...;-2\}$

Câu 36: Chọn A

Xét hàm số $f(x)=3\sqrt{x^2+1}+x+m\Rightarrow f'(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+1}}+1$.

Trên $(1;+\infty)\Rightarrow f'(x)>0$.

Bảng biến thiên:

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$3\sqrt{2}+1+m$ ↗	$+\infty$

Nhận thấy: hàm số $y=\left|f(x)\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ $\Leftrightarrow 3\sqrt{2}+1+m\geq 0$

$\Leftrightarrow m\geq -3\sqrt{2}-1$ mà $\begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ m<0 \end{cases}\Rightarrow m\in\{-5;-4;-3;-2;-1\}$.

Vậy có 5 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 37: Chọn A

Xét hàm số $f(x)=4\sqrt{x^2+2x+3}+5x-m^2+5$ xác định trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(x)=\dfrac{4(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+3}}+5$

Với $x>1\Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Vậy để hàm số $y=\left|f(x)\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)\Leftrightarrow f(1)\geq 0\Leftrightarrow -m^2+10+4\sqrt{6}\geq 0$

$\Leftrightarrow m^2\leq 10+4\sqrt{6}\Leftrightarrow -2-\sqrt{6}\leq m\leq 2+\sqrt{6}$

Mà $m\in\mathbb{Z},\Rightarrow m\in\{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$ suy ra chọn đáp án A

Câu 38: Chọn A

Đặt $g(x)=\sqrt{x^2+3}+2x+m^2-5m$. Ta có $g'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}+2>0\,\forall x\in(1;+\infty).$

Dế thấy $g(x)$ liên tục trên $[1;+\infty)$ và $g'(x)>0\forall x\in(1;+\infty)$ nên $g(x)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$

$\Rightarrow g(1)\geq 0\Leftrightarrow m^2-5m+4\geq 0$ (*)

Nên $y=f(x)=|g(x)|$ đồng biến trên $[1;+\infty)\Rightarrow f(1)\geq 0$ kết hợp với (*) ta có:

$m^2-5m+4\geq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\leq 1 \\ m\geq 4 \end{array}\right.\cdot\left[\begin{array}{l} m\in(-\infty;1] \\ m\in[4;+\infty) \end{array}\right.$.Mà $m\in(-\infty;0]\subset(-\infty;1]$.

Câu 39: Chọn D

Tập xác định: $D=[0;6]$. Xét hàm số $f(x)=\sqrt{-x^2+6x}+m\Rightarrow f'(x)=\dfrac{-2x+6}{\sqrt{-x^2+6x}}=0\Leftrightarrow x=3.$

Bsngr biến thiên

x	0	3	6
f'(x)	+	0	-
f(x)	m	m+3 ↘	m

Hàm số $y=\left|f(x)\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;3)\Leftrightarrow m\geq 0$.

Lại do $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m < 10 \end{cases} \Rightarrow m \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.

Vậy có 10 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 40: Chọn A

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2}$. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{m}{2}$	↘	$\frac{m}{2} - 32$	↗	$+\infty$

Do $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), f(x) \geq 0 \\ -f(x), f(x) < 0 \end{cases}$ nên

- Nếu $\frac{m}{2} \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 0$ thì $f(x) = 0$ có nghiệm $x_0 > 3$, ta có bảng biến thiên của hàm số đã cho là

x	$-\infty$		-1		3		x_0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$		$+$	
y	$+\infty$	↘	$-\frac{m}{2}$	↗	$-\frac{m}{2} + 32$	↘	0	↗	$+\infty$

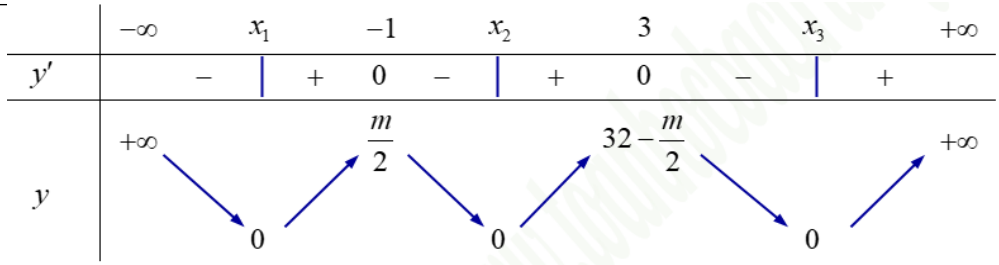
Trường hợp này hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

- Nếu $\frac{m}{2} - 32 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 64$ thì $f(x) = 0$ có nghiệm $x_0 < -1$,ta có bảng biến thiên của hàm số đã cho là

x	$-\infty$		x_0		-1		3		$+\infty$
y'		$-$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{m}{2}$	↘	$\frac{m}{2} - 32$	↗	$+\infty$

Trường hợp này hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

- Nếu $\begin{cases} \frac{m}{2} > 0 \\ \frac{m}{2} - 32 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 64$ thì $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2} = 0$ có ba nghiệm x_1; x_2; x_3 với $x_1 < -1 < x_2 < 3 < x_3$, ta có bảng biến thiên của hàm số đã cho là



Trường hợp này hàm số đã cho có 5 điểm cực trị.

Như vậy, các giá trị nguyên của m để hàm số đã cho có 5 điểm cực trị là $m \in \{1;2;3;...;63\}$.

Tổng các giá trị nguyên này là: $S = 1+2+3+...+63 = \dfrac{63(1+63)}{2} = 2016$.

Câu 41: Chọn D

Đặt $f(x) = \sqrt{x^2+1} - mx - 1$. Ta có $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - m$

Vì hàm số liên tục tại $x = 1;\ x = 2$ nên để hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(1;\ 2)$ ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\begin{cases} f'(x) \ge 0, \forall x \in [1;\ 2] \\ f(1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - m \ge 0, \forall x \in [1;\ 2] \\ m \le \sqrt{2} - 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \le \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \forall x \in [1;\ 2] \\ m \le \sqrt{2} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le \min\limits_{[1;\ 2]} \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) \\ m \le \sqrt{2} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \le \sqrt{2} - 1 \qquad (1)$

Trường hợp 2: $\begin{cases} f'(x) \le 0, \forall x \in [1;\ 2] \\ f(1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - m \le 0, \forall x \in [1;\ 2] \\ m \ge \sqrt{2} - 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \ge \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \forall x \in [1;\ 2] \\ m \ge \sqrt{2} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge \max\limits_{[1;\ 2]} \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) \\ m \ge \sqrt{2} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \qquad (2)$

Từ (1) và (2) ta có $\left[\begin{array}{l} m \ge \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \\ m \le \sqrt{2} - 1 \end{array} \right.$

Do $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-2020;\ 2020] \end{cases}$ nên có 4041 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 42:

Chọn B

Đặt $h(x) = x^3 - 3x^2 + 3(m^2+5)x + (12 - 3m^2)\cos x$.

Ta có $h'(x) = 3x^2 - 6x + 3(m^2+5) - (12 - 3m^2)\sin x$.

$\Leftrightarrow h'(x) = 3(x-1)^2 + 12(1 - \sin x) + 3m^2(1 + \sin x) \ge 0 \ \forall x \in (0;\pi)$.

Vậy hàm số $h(x)$ luôn đồng biến trên $(0;\pi)$.

Để $y=f(x)$ đồng biến trên $(0;\pi)$. Thì $h(0)\ge 0 \Leftrightarrow (12-3m^2)\ge 0 \Leftrightarrow m\in[-2;2]$.

Kết luận: có 5 giá trị m nguyên thỏa mãn.

Câu 43: Chọn B

Xét hàm số $f(x)=\sin x-\cos x+m=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+m \Rightarrow f'(x)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Khi đó $y=|\sin x-\cos x+m|=|f(x)|=\sqrt{f^2(x)}$. Nên $y'=\frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$.

Hàm số $y=|\sin x-\cos x+m|$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y'\ge 0;\forall x\in\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x).f'(x)\ge 0 \\ f(x)\ne 0 \end{cases}, \forall x\in\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$ (1).

Với $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2}<x-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0, \forall x\in\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$.

$\Rightarrow f'(x)>0, \forall x\in\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$.

Nên $(1)\Leftrightarrow f(x)>0, \forall x\in\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}.(-1)+m\ge 0 \Leftrightarrow m\ge\sqrt{2}$.

Câu 44: Chọn A

Trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, hàm số $y=\sin x$ đồng biến. Đặt $t=\sin x, x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow t\in(0;1)$.

Khi đó hàm số $y=|\sin^3 x-m.\sin x+1|$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi $y=g(t)=|t^3-mt+1|$ đồng biến trên $(0;1)$

Xét hàm số $y=f(t)=t^3-mt+1$ trên khoảng $(0;1)$ có $f'(t)=3t^2-m$.

Khi $m=0: f'(t)=3t^2>0, \forall t \Rightarrow y=f(t)=t^3+1$ đồng biến trên $(0;1)$ và đths $y=f(t)=t^3+1$ cắt trục hoành tại điểm duy nhất $t=-1$

$\Rightarrow y=g(t)=|t^3-mt+1|$ đồng biến trên $(0;1) \Rightarrow m=0$ thỏa mãn

Khi $m>0: f'(t)=0$ có 2 nghiệm phân biệt $t_1=-\sqrt{\frac{m}{3}}, t_2=\sqrt{\frac{m}{3}}$.

Hàm số $y=f(t)=t^3-mt+1$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\sqrt{\frac{m}{3}}\right)$ và $\left(\sqrt{\frac{m}{3}};+\infty\right)$

Trường hợp 1: $-\sqrt{\frac{m}{3}}<0<\sqrt{\frac{m}{3}}<1 \Leftrightarrow 0<m<3$

Hàm số $y=f(t)=t^3-mt+1$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\sqrt{\frac{m}{3}}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(\sqrt{\frac{m}{3}};1\right)$

$\Rightarrow$ Không có giá trị của m để $y=g(t)=\left|t^3-mt+1\right|$ đồng biến trên $(0;1)$

Trường hợp 2: $-\sqrt{\frac{m}{3}}<0<1\le\sqrt{\frac{m}{3}}\Leftrightarrow m\ge 3$

Để $y=g(t)=\left|t^3-mt+1\right|$ đồng biến trên $(0;1)$ thì $t^3-mt+1\le 0,\forall t\in(0;1)$

$\Leftrightarrow mt\le t^3+1,\forall t\in(0;1)\Leftrightarrow m\le t^2+\frac{1}{t},\forall t\in(0;1)\Leftrightarrow m\le\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\Rightarrow$ Không có giá trị của m thỏa mãn. Vậy chỉ có giá trị $m=0$ thỏa mãn

Câu 45: Chọn B

Đặt $t=\cos x$, vì $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow t\in(0;1)$. Vì $t=\cos x$ là hàm số nghịch biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ nên

Yêu cầu bài toán trở thành tìm m nguyên thuộc $[-5;5]$ để hàm số $y=\left|t^3-3m^2t\right|$ đồng biến trên $(0;1)$. Xét $f(t)=t^3-3m^2t^2;t\in(0;1)$; $f'(t)=3t^2-3m^2$.

Trường hợp 1: Nếu $m=0\Rightarrow f'(t)>0;\forall t\in(0;1)\Rightarrow f(t)$ luôn đồng biến trên $(0;1)$.

Mà $f(0)=0\Rightarrow y=\left|f(t)\right|$ luôn đồng biến trên $(0;+\infty)\Rightarrow y=\left|f(t)\right|$ đồng biến trên $(0;1)$.

Do đó $m=0$ thỏa mãn bài toán (1).

Trường hợp 2: $m\ne 0\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=m\\t=-m\end{array}\right.$; $f(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-m\sqrt{3}\\t=0\\t=m\sqrt{3}\end{array}\right.$

Với $m>0$, ta có BBT sau:

t	0		m		$m\sqrt{3}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$\lvert f(t)\rvert$	0	$\nearrow$	$2m^3$	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số $y=\left|f(t)\right|$ đồng biến trên $(0;m)$.

Yêu cầu bài toán tương đương $(0;1)\subset(0;m)\Leftrightarrow m\ge 1\,(2)$.

Với $m<0$, ta có bảng biến thiên sau:

t	0	$-m$	$-m\sqrt{3}$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$\lvert f(t)\rvert$	0	$-2m^3$	0

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y=|f(t)|$ đồng biến trên $(0;-m)$.

Yêu cầu bài toán tương đương $(0;1)\subset(0;-m)\Leftrightarrow m\le -1\ (3)$.

Từ $(1);(2);(3)$ vậy có 11 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 46: Chọn C

Đặt $3^x=t\Rightarrow t\in[1;3]$ vì $x\in[0;1]$.

$$\Rightarrow y=\left|t^2+t-m+1\right|=\sqrt{\left(t^2+t-m+1\right)^2}\Rightarrow y'=\frac{2.\left(t^2+t-m+1\right)'.\left(t^2+t-m+1\right)}{2.\left|t^2+t-m+1\right|}$$

Để hàm số đồng biến trên đoạn $t\in[1;3]$ thì $y'=\dfrac{(2t+1).\left(t^2+t-m+1\right)}{\left|t^2+t-m+1\right|}\ge 0\quad \forall t\in[1;3]$

Với mọi giá trị của $t\in[1;3]$ thì $2t+1>0$ nên

Để $y'\ge 0\ \forall t\in[1;3]$ thì: $t^2+t-m+1\ge 0\quad \forall t\in[1;3]\ \Rightarrow\ m-1\le t^2+t=g(t)\ \forall t\in[1;3]$

$\Rightarrow m-1\le \min\limits_{[1;3]} g(t)=2\Rightarrow m\le 3$. Vậy có 3 giá trị nguyên $\{1;2;3\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 47: Chọn A

Xét hàm số $f(x)=4^x-m.2^{x+1}+m+2$ (1) trên khoảng $(0;1)$. Đặt $t=2^x$, $t\in(1;2)$.

Hàm số (1) trở thành $h(t)=t^2-2m.t+m+2$ trên khoảng $(1;2)$. Suy ra $h'(t)=2t-2m$.

Ta có $y=\left|f(x)\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\ \text{ñoàng bieán treân}\ (0;1)\\ f(0)\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)\ \text{nghòch bieán treân}\ (0;1)\\ f(0)\le 0\end{cases}\end{array}\right.$ (*).

Vì hàm số $t=2^x$ đồng biến trên $(0;1)$.

Do đó, (*) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}h(t)\ \text{ñoàng bieán treân}\ (1;2)\\ 3-m\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}h(t)\ \text{nghòch bieán treân}\ (1;2)\\ 3-m\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2t-2m\ge 0\ \forall t\in(1;2)\\ 3-m\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}2t-2m\le 0\ \forall t\in(1;2)\\ 3-m\le 0\end{cases}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\le 1\\ m\le 3\end{cases}\\ \begin{cases}m\ge 2\\ m\ge 3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le 1\\ m\ge 3\end{array}\right.$. Vậy có 2018 số nguyên dương nhỏ hơn 2020 thỏa ycbt.

Câu 48: Chọn C

Đặt $t = e^{\frac{x+1}{x-1}}$, ta có $t' = e^{\frac{x+1}{x-1}}.\left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = e^{\frac{x+1}{x-1}}.\frac{-2}{(x-1)^2} < 0\ \forall x \in (2;3) \Rightarrow t \in (e^2;e^3)$, đồng thời x và t sẽ ngược chiều biến thiên.

Khi đó hàm số trở thành $y = \left|t^2+3t-2m+5\right| = \sqrt{\left(t^2+3t-2m+5\right)^2}$ (2)

Ta có: $y' = \frac{2\left(t^2+3t-2m+5\right).(2t+3)}{2\sqrt{\left(t^2+3t-2m+5\right)^2}} = \frac{\left(t^2+3t-2m+5\right).(2t+3)}{\sqrt{\left(t^2+3t-2m+5\right)^2}}$.

Hàm số (1) nghịch biến trên khoảng $(2;3) \Leftrightarrow$ hàm số (2) đồng biến trên khoảng $(e^2;e^3)$

$\Leftrightarrow \frac{2\left(t^2+3t-2m+5\right).(2t+3)}{2\sqrt{\left(t^2+3t-2m+5\right)^2}} \geq 0\ \forall t \in (e^2;e^3) \Leftrightarrow t^2+3t-2m+5 > 0\ \forall t \in (e^2;e^3)$

$\Leftrightarrow m < \frac{t^2+3t+5}{2} = g(t)\ \forall t \in (e^2;e^3)$.

Có $g'(t) = \frac{2t+3}{2} > 0\ \forall t \in (e^2;e^3) \Rightarrow \frac{e^4+3e^2+5}{2} < g(t) < \frac{e^6+3e^4+5}{2} \Rightarrow m \leq \frac{e^4+3e^2+5}{2}$.

Với điều kiện m là số nguyên dương ta tìm được 40 giá trị của m.

Câu 49: Chọn A

Đặt $f(x) = e^{-x^2}+e^{x^2}-m \Rightarrow f'(x) = -2xe^{-x^2}+2xe^{x^2}$

Ta có $y = \left|f(x)\right| = \sqrt{f^2(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (1;e)$. (*)

Vì $x \in (1;e)$ nên $-2xe^{-x^2}+2xe^{x^2} = \frac{2x\left(e^{2x^2}-1\right)}{e^{x^2}} > 0, \forall \in (1;e)$

Khi đó, $(*) \Leftrightarrow f(x) \leq 0, \forall x \in (1;e) \Leftrightarrow e^{-x^2}+e^{x^2}-m \leq 0, \forall x \in (1;e) \Leftrightarrow e^{-x^2}+e^{x^2} \leq m, \forall x \in (1;e)$

Ta có giá trị lớn nhất của hàm số $y = e^{-x^2}+e^{x^2}, x \in (1;e)$ là $e^{e^2}+e^{-e^2}$ nên $m \geq e^{e^2}+e^{-e^2} \approx 1618{,}18$

Vậy có 401 giá trị nguyên dương m thỏa mãn.

Câu 50: Chọn B

Đặt $f(x) = e^x+e^{2x}-m \Rightarrow y = \left|f(x)\right| = \sqrt{f^2(x)}$. Ta có $y' = \frac{f'(x)f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$

Hàm số đồng biến trên $(1;2) \Leftrightarrow y' \geq 0 \forall x \in (1;2) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)f'(x) \geq 0 \\ f(x) \neq 0 \end{cases} \forall x \in (1;2)$

Vì $f'(x) = e^x+2e^{2x} > 0 \forall x \in (1;2)$

Nên $y' \geq 0 \forall x \in (1;2) \Leftrightarrow f(x) > 0 \forall x \in (1;2) \Leftrightarrow m < e^x+e^{2x} \forall x \in (1;2) \Leftrightarrow m \leq e+e^2$

Câu 51: Chọn C

Đặt $2^{\tan x}=t$ vì $x\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$ suy ra $\tan x\ge -1$ nên $t\ge\frac{1}{2}$. Khi đó ta có hàm số: $y=\left|t^3+3t-m+2\right|$ (1).

Để hàm số ban đầu đồng biến trên $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$ thì hàm số (1) phải đồng biến trên $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Xét hàm số $f(t)=t^3+3t-m+2$. Ta có: $f'(t)=3t^2+3>0,\forall t$.

Khi đó $y=\left|f(t)\right|=\sqrt{f^2(t)}$ nên $y'=\frac{f'(t).f(t)}{\sqrt{f^2(t)}}$.

Hàm số đồng biến trên $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$ khi và chỉ khi $y'\ge 0,\forall t\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$.

$\Leftrightarrow f(t)\ge 0,\forall t\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right)\Leftrightarrow t^3+3t-m+2\ge 0,\forall t\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$

$\Leftrightarrow m\le t^3+3t+2,\forall t\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right),\ (*)$.

Xét hàm số: $g(t)=t^3+3t+2,\forall t\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$.

$g'(t)=3t^2+3>0,\ \forall t$. Vậy hàm số $g(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $g(t)\ge g\left(\frac{1}{2}\right)$.

Từ $(*)$ suy ra: $m\le g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{29}{8}$.

Câu 52: Chọn B

$y=\left|\ln 3x-4x^2+m\right|$. Điều kiện $x>0$. Xét hàm số $g(x)=\ln 3x-4x^2+m$ trên $\left[1;e^2\right]$.

$\Rightarrow g'(x)=\frac{1}{x}-8x=\frac{1-8x^2}{x}<0,\forall x\in\left[1;e^2\right]\Rightarrow g(x)$ nghịch biến trên $\left[1;e^2\right]$.

x	1		e^2
$g'(x)$		$-$	0
$g(x)$	$\ln 3-4+m$	↘	$\ln 3-4e^4+2+m$

$\Rightarrow$ hàm số $y=\left|g(x)\right|=\left|\ln 3x-4x^2+m\right|$ đồng biến trên đoạn $\left[1;e^2\right]$

$\Leftrightarrow \ln 3-4+m\le 0\Leftrightarrow m\le 4-\ln 3$.

Mà m nguyên thuộc khoảng $(-100;100)$ nên $m\in\{-99;-98;...;-1;0;1;2\}$.

Vậy có 102 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 53: Chọn A

Xét $f(x)=\ln(mx)-x+2$. Dễ thấy $\forall x\in(1;4):mx>0\Leftrightarrow m>0$.

Khi đó: $f'(x)=\frac{1}{x}-1<0,\forall x\in(1;4)$. Do đó $f(x)$ luôn nghịch biến trên $(1;4)$.

Yêu cầu bài toán tương đương với $f(4)\ge 0\Leftrightarrow \ln(4m)-2\ge 0\Leftrightarrow m\ge \frac{e^2}{4}\approx 1,6$.

Vậy $m\in[2;2019]$ có 2018 số nguyên thỏa mãn.

Câu 54: Chọn C

Ta xét hàm số $f(x)=\ln(x^2+2x-m)-2mx^2-1$ trên $(0;10)$.

Điều kiện hàm số có nghĩa là $x^2+2x-m>0,\forall x\in(0;10)\Leftrightarrow x^2+2x>m,\forall x\in(0;10)$ (1)

Ta lại có $x^2+2x=x(x+2)>0$ với mọi $x\in(0;10)$ nên điều kiện (1) cho ta $m\le 0$ (2)

Đạo hàm $f'(x)=\frac{2x+2}{x^2+2x-m}-4mx$ do $m\le 0$ và $x\in(0;10)$ nên $\frac{2x+2}{x^2+2x-m}>0;-4mx\ge 0$ suy ra $f'(x)>0$ hàm số đồng biến trên $(0;10)$.

Từ đó để hàm số $y=\left|\ln(x^2+2x-m)-2mx^2-1\right|=\left|f(x)\right|$ đồng biến trên $(0;10)$ điều kiện đủ là $f(x)\ge 0$ với mọi $x\in(0;10)$ (3).

Trường hợp 1 : $m=0$ khi đó $f(x)=\ln(x^2+2x)-1$ có $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$ không thỏa mãn (3)

Trường hợp 2 : Xét $m<0$, do hàm số $f(x)$ đồng biến nên ta chỉ cần $f(0)\ge 0$ $\Leftrightarrow \ln(-m)-1\ge 0\Leftrightarrow -m\ge e\Leftrightarrow m\le -e$.

Từ đó ta được: $\begin{cases}-2020<m\le -e\\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow m\in\{-2019;-2018;-2017;....;-3\}$ có 2017 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Câu 55: Chọn C

Điều kiện xác định: $x^3+mx+2>0$.

Xét hàm số $f(x)=\ln(x^3+mx+2)$. Ta có: $f'(x)=\frac{3x^2+m}{x^3+mx+2}$.

Hàm số đồng biến trên nửa khoảng $[1;3)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\ge 0\\ f'(x)\ge 0\end{cases},\forall x\in[1;3)\ (1)\\ \begin{cases}f(x)\le 0\\ f'(x)\le 0\end{cases},\forall x\in[1;3)\ (2)\end{array}\right.$.

Trường hợp 1:

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}\ln(x^3+mx+2)\ge 0\\ \frac{3x^2+m}{x^3+mx+2}\ge 0\end{cases},\forall x\in[1;3)\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+mx+2\ge 1\\ 3x^2+m\ge 0\\ x^3+mx+2>0\end{cases},\forall x\in[1;3)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge -x^2-\frac{1}{x},\forall x\in[1;3)\\ m\ge -3x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge \max\limits_{[1;3)}\left(-x^2-\frac{1}{x}\right)=-2\\ m\ge \max\limits_{[1;3)}(-3x^2)=-3\end{cases}\Leftrightarrow m\ge -2.$$

Trường hợp 2:

$$(2)\Leftrightarrow\begin{cases}\ln\left(x^3+mx+2\right)\le 0\\ \dfrac{3x^2+m}{x^3+mx+2}\le 0\end{cases},\forall x\in[1;3)\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+mx+2\le 1\\ 3x^2+m\le 0\\ x^3+mx+2>0\end{cases},\forall x\in[1;3)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\le -x^2-\dfrac{1}{x}\\ m\le -3x^2\\ m>-x^2-\dfrac{2}{x}\end{cases},\forall x\in[1;3)\Leftrightarrow\begin{cases}m<-\dfrac{28}{3}\\ m<-27\\ m>\max\limits_{[1;3)}\left(-x^2-\dfrac{2}{x}\right)=-3\end{cases}\Rightarrow m\in\varnothing.$$

Từ hai trường hợp suy ra $m\ge -2$. Vì chỉ lấy $m\in[-3;3]$ nên $m\in\{-2;-1;0;1;2;3\}$.

Câu 56: Chọn D

Đặt $f(x)=\ln\left(x^2-mx-m\right)-1$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{1}{2};1\right)\Leftrightarrow\left[\begin{cases}x^2-mx-m>0,\forall x\in\left(-\dfrac{1}{2};1\right)\\ f'(x)\ge 0,\ \forall x\in\left(-\dfrac{1}{2};1\right)\\ f(x)\ge 0,\ \forall x\in\left(-\dfrac{1}{2};1\right)\end{cases}\right.$ (1)

$\left.\begin{cases}x^2-mx-m>0,\forall x\in\left(-\dfrac{1}{2};1\right)\\ f'(x)\le 0,\ \forall x\in\left(-\dfrac{1}{2};1\right)\\ f(x)\le 0,\ \forall x\in\left(-\dfrac{1}{2};1\right)\end{cases}\right.$ (2)

Xét $x^2-mx-m>0,\forall x\in\left(-\dfrac{1}{2};1\right)\Leftrightarrow x^2>m(x+1),\forall x\in\left(-\dfrac{1}{2};1\right)\Leftrightarrow m<\dfrac{x^2}{x+1},\forall x\in\left(-\dfrac{1}{2};1\right)$.

Đặt $g(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$. Khi đó, $m<\dfrac{x^2}{x+1},\forall x\in\left(-\dfrac{1}{2};1\right)\Leftrightarrow g(x)>m,\ \forall x\in\left(-\dfrac{1}{2};1\right)$.

Ta có: $g(x)=x-1+\dfrac{1}{x+1}\Rightarrow g'(x)=1-\dfrac{1}{(x+1)^2}$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in\left(-\dfrac{1}{2};1\right)\\ x=-2\notin\left(-\dfrac{1}{2};1\right)\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)$ trên khoảng $\left(-\dfrac{1}{2};1\right)$.

x	$-\frac{1}{2}$		0		1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)$ suy ra $g(x)>m\ \forall x\in\left(-\frac{1}{2};1\right)\Leftrightarrow m<g(0)=0$.

Ta có: $f'(x)=\frac{2x-m}{x^2-mx-m}$.

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\2x\geq m,\ \forall x\in\left(-\frac{1}{2};1\right)\\\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^+}f(x)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\m\leq -1\\\ln\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}m\right)-1\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\leq -1\\\ln\left(\frac{1}{4}-\frac{m}{2}\right)\geq 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\leq -1\\\frac{1}{4}-\frac{m}{2}\geq e\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\leq -1\\m\leq\frac{1-4e}{2}\end{cases}\Leftrightarrow m\leq\frac{1-4e}{2}.$$

$$(2)\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\2x\leq m\ \forall x\in\left(-\frac{1}{2};1\right)\\\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^+}f(x)\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\m\geq 2\\\ln\left(\frac{1}{4}-\frac{m}{2}\right)-1\leq 0\end{cases}$$ suy ra không tồn tại m.

Vậy $m\leq\frac{1-4e}{2}$. Mà m nguyên, $-10<m<10$ nên có 5 giá trị m thỏa mãn bài toán

Câu 57: Chọn C

Đặt $f(x)=\ln\left(x^3-3x+m\right)+1$, ta có $f'(x)=\frac{3x^2-3}{x^3-3x+m}$.

Điều kiện xác định của $f(x)$ là $x^3-3x+m>0$.

Điều kiện cần để hàm số $y=|f(x)|$ nghịch biến trên $[0;1]$ là

$$x^3-3x+m>0,\forall x\in[0;1]\Leftrightarrow m>-x^3+3x,\forall x\in[0;1]\Leftrightarrow m>2\ (1).$$

Với mọi $x\in[0;1]$, ta có $3x^2-3\leq 0$. Do đó từ điều kiện (1) ta suy ra

$$f'(x)=\frac{3x^2-3}{x^3-3x+m}\leq 0,\forall x\in[0;1].$$

Điều kiện đủ để hàm số $y=|f(x)|$ nghịch biến trên $[0;1]$ là

$f(x)\geq 0,\forall x\in[0;1]\Leftrightarrow\ln\left(x^3-3x+m\right)+1\geq 0,\forall x\in[0;1]$

$\Leftrightarrow m-\frac{1}{e}\geq -x^3+3x,\forall x\in[0;1]\Leftrightarrow m\geq\frac{1}{e}+2\approx 2,37$.

Do m nguyên thuộc $[-5;5]\Rightarrow m\in\{3;4;5\}$. Vậy tổng các giá trị của m bằng 12.

Câu 58: Chọn A

Đặt $f(x)=\log_3\left(x^3+x^2-mx+1\right)$ nên $f'(x)=\frac{3x^2+2x-m}{\left(x^3+x^2-mx+1\right)\ln 3}$.

Hàm số đồng biến trên $y=\left|f\left(x\right)\right|$ đồng biến trên $\left[1;+\infty\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f\left(x\right)\ge 0\\ f'\left(x\right)\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}f\left(x\right)\le 0\\ f'\left(x\right)\le 0\end{cases}\end{array}\right., \forall x\in\left[1;+\infty\right).$

Trường hợp 1:

$$\begin{cases}f\left(x\right)\ge 0\\ f'\left(x\right)\ge 0\end{cases}, \forall x\in\left[1;+\infty\right) \Leftrightarrow \begin{cases}\log_3\left(x^3+x^2-mx+1\right)\ge 0\\ x^3+x^2-mx+1>0\\ 3x^2+2x-m\ge 0\end{cases}, \forall x\in\left[1;+\infty\right).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^3+x^2-mx+1\ge 1\\ 3x^2+2x\ge m\end{cases}, \forall x\in\left[1;+\infty\right) \Leftrightarrow \begin{cases}m\le x^2+x\\ m\le 3x^2+2x\end{cases}, \forall x\in\left[1;+\infty\right).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}m\le \min\limits_{\left[1;+\infty\right)}\left(x^2+x\right)\\ m\le \min\limits_{\left[1;+\infty\right)}\left(3x^2+2x\right)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\le 2\\ m\le 5\end{cases} \Leftrightarrow m\le 2.$$

Trường hợp 2:

$$\begin{cases}f\left(x\right)\le 0\\ f'\left(x\right)\le 0\end{cases}, \forall x\in\left[1;+\infty\right) \Leftrightarrow \begin{cases}\log_3\left(x^3+x^2-mx+1\right)\le 0\\ x^3+x^2-mx+1>0\\ 3x^2+2x-m\le 0\end{cases}, \forall x\in\left[1;+\infty\right).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^3+x^2-mx+1\le 1\\ x^3+x^2-mx+1>0\\ 3x^2+2x\le m\end{cases}, \forall x\in\left[1;+\infty\right) \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+x\le m\\ x^2+x+\dfrac{1}{x}>m\\ 3x^2+2x\le m\end{cases}, \forall x\in\left[1;+\infty\right).$$

Ta có: $m\ge x^2+x, \forall x\in\left[1;+\infty\right) \Leftrightarrow m\ge \max\limits_{\left[1;+\infty\right)}\left(x^2+x\right), \quad (*).$

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+x\right)=+\infty$ nên không tồn tại m thỏa mãn $(*)$. Do đó trường hợp 2 không tồn tại giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Suy ra $m\le 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Mặt khác $\begin{cases}m\in\mathbb{Z}\\ m\in\left[-10;10\right]\end{cases}$ nên có 13 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 59: Chọn C

Xét hàm số $f\left(x\right)=\ln\left(x^2+x+m\right)+x$ trên khoảng $\left(-1;3\right)$.

Điều kiện xác định là: $x^2+x+m>0$ với mọi $x\in\left(-1;3\right)$.

Khi đó $f'\left(x\right)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+m}+1=\dfrac{x^2+3x+m+1}{x^2+x+m}$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-1;3) \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x^2+x+m>0 \\ x^2+3x+m+1\geq 0 \\ \ln(x^2+x+m)+x\geq 0 \end{cases} (1)\right.$ với mọi $x\in(-1;3)$.

$\left.\begin{cases} x^2+x+m>0 \\ x^2+3x+m+1\leq 0 \\ \ln(x^2+x+m)+x<0 \end{cases} (2)\right.$

Xét hệ bất phương trình (1): $\begin{cases} x^2+x+m>0 \\ x^2+3x+m+1\geq 0 \\ \ln(x^2+x+m)+x\geq 0 \end{cases}$ đúng với mọi $x\in(-1;3)$.

Ta có: $x^2+x+m>0,\ \forall x\in(-1;3) \Leftrightarrow m>-x^2-x,\ \forall x\in(-1;3)$.

Khảo sát tính biến thiên của hàm số $y=-x^2-x$ trên khoảng $(-1;3)$ ta suy ra

Với $m>\max\limits_{(-1;3)}(-x^2-x) \Leftrightarrow m>\dfrac{1}{4}$

Lại có $x^2+3x+m+1\geq 0,\ \forall x\in(-1;3) \Leftrightarrow m\geq -x^2-3x-1,\ \forall x\in(-1;3)$.

Khảo sát tính biến thiên của hàm số $y=-x^2-3x-1$ trên khoảng $(-1;3)$ ta suy ra:

$$m\geq \max_{[-1;3]}(-x^2-3x-1) \Leftrightarrow m\geq 1$$

Ngoài ra $\ln(x^2+x+m)+x\geq 0, \forall x\in(-1;3) \Leftrightarrow m\geq -x^2-x+e^{-x}, \forall x\in(-1;3)$.

Đặt $k(x)=-x^2-x+e^{-x}$, $k'(x)=-e^{-x}-2x-1\leq 0, \forall x\in(-1;3)$.

Do đó $m\geq -x^2-x+e^{-x}, \forall x\in(-1;3) \Leftrightarrow m\geq e$.

Vậy (1) tương đương $m\geq e$.

Với hệ bất phương trình (2) ta cũng làm tương tự như trên thì được

$$\begin{cases} x^2+x+m>0 \\ x^2+3x+m+1\leq 0 \\ \ln(x^2+x+m)+x<0 \end{cases} \forall x\in(-1;3) \Leftrightarrow \begin{cases} m>\dfrac{1}{4} \\ m\leq -19 \\ \ln(x^2+x+m)+x<0 \end{cases} \Leftrightarrow m\in\varnothing.$$

Vậy hàm số $y=g(x)=\left|\ln(x^2+x+m)+x\right|$ đồng biến trên $(-1;3)$ khi và chỉ khi $m\geq e$, mà m là số nguyên thuộc $[-10;10]$ nên $m\in\{3;4;5;6;7;8;9;10\}$. Do đó tổng các giá trị nguyên của m thỏa mãn là 52.

Câu 61: Chọn D

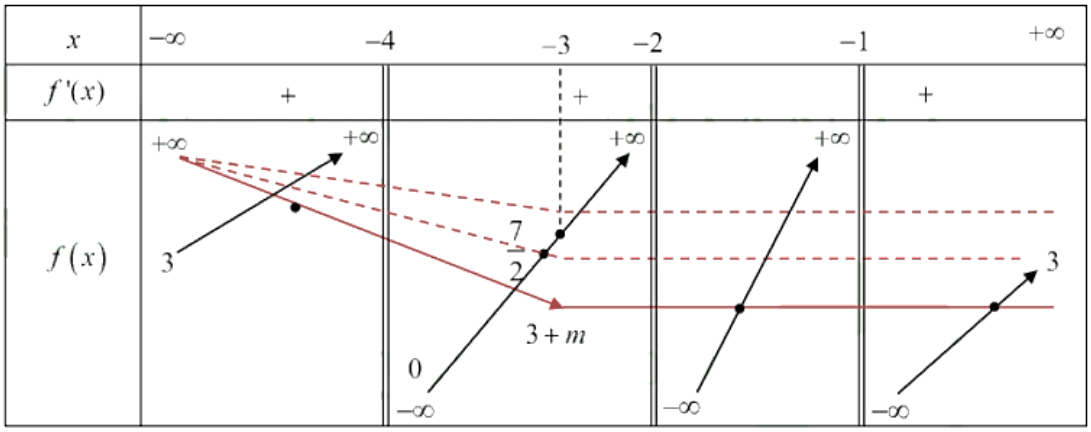
Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+3}{x+4}=|x+3|-x+m \Leftrightarrow f(x)=g(x)$.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+3}{x+4} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}+\dfrac{1}{(x+4)^2}>0$.

Hàm số $f(x)$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;-2;-4\}$ và có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=3\\ f(-3)=\dfrac{7}{2}\end{cases}$.

Xét hàm số $g(x)=|x+3|-x+m=\begin{cases}-2x-3+m & neu\ x<-3\\ 3+m & neu\ x\geq -3\end{cases}$.

Bảng biến thiên:



Để phương trình $f(x)=g(x)$ có 3 nghiệm thực x thì $3+m\geq 0\Leftrightarrow m\geq 0$.

Kết hợp $m\in\mathbb{Z}$, $m\in[-2021;2021]$ suy ra có 2022 giá trị nguyên m thỏa mãn.

DẠNG 5 Ứng dụng đơn điệu vào PT, BPT, HPT, BĐT

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Tập nghiệm của bất phương trình $f\left(\frac{1}{x}\right)>f(1)$ là

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-\infty;0)\cup(0;1)$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ luôn nghịch biến $\mathbb{R}$. Tập nghiệm của bất phương trình $f\left(\frac{1}{x}\right)>f(1)$

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$. **C.** $(0;1)$ **D.** $(-\infty;0)\cup(0;1)$.

Câu 3: Giá trị của tham số m để bất phương trình $(x-2-m)\sqrt{x-1}\le m-4$ có nghiệm là:

A. $m\le 3$. **B.** $m\ge 2$. **C.** $m\ge 0$. **D.** $m<2$.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y'=-x^2-1,\forall x\in\mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f(0)>f(2020)$. **B.** $f(-2)=f(2)$.

C. $f(-2020)<f(2020)$. **D.** $f(1)>f(0)$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có $f'(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để $f(22x)>f(x^2)$?

A. 23. **B.** 20. **C.** 21. **D.** 22.

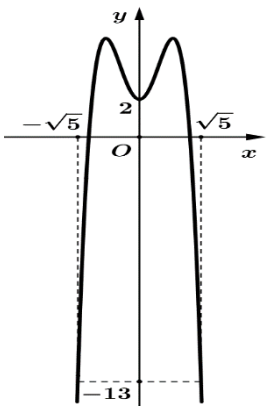
Câu 6: Tìm m để bất phương trình $x+\frac{4}{x-1}\ge m$ có nghiệm trên khoảng $(-\infty;1)$

A. $m\le 3$. **B.** $m\le -3$. **C.** $m\le 5$. **D.** $m\le -1$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=\log_3 x+3^x-3^{\frac{1}{x}}$. Tính tổng bình phương các giá trị của tham số m để phương trình $f\left(\frac{1}{4|x-m|+3}\right)+f\left(x^2-4x+7\right)=0$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt:

A. 14. **B.** 13. **C.** 10. **D.** 5.

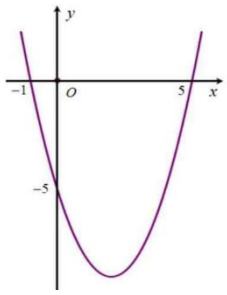
Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x)=2f(x)+2x^3-4x-3m-6\sqrt{5}$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $g(x)\le 0,\forall x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$



A. $m\ge\frac{2}{3}f\left(-\sqrt{5}\right)-4\sqrt{5}$. **B.** $m\ge\frac{2}{3}f\left(\sqrt{5}\right)$.

C. $m\le\frac{2}{3}f\left(\sqrt{5}\right)$. **D.** $m\le\frac{2}{3}f(0)-2\sqrt{5}$.

Câu 9: Cho hàm số bậc ba $y=f\ x$ có đồ thi hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Biết $f(-1)=\frac{8}{3}$ và a,b,c là các số thực thỏa mãn $a\in(-3;-1)$, $b\in(-1;2)$, $c\in(2;5)$. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $f\ a+f\ b-f\ c\le 7a-8\ b-c+\frac{44}{3}$. **B.** $f\ a+f\ b-f\ c\ge 7a-8\ b-c+\frac{44}{3}$.

C. $2f\ a+f\ b-f\ c\le 14a-8\ b-c+\frac{83}{3}$. **D.** $2f\ a+f\ b-f\ c\ge 14a-8\ b-c+\frac{83}{3}$.

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	0	↗	2	↘	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\frac{9\pi}{2}\right]$ của phương trình $f\left(f\left(\cos x\right)\right)=2$ là

A. 10. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)=x^3+x+2$. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f^3(x)+f(x)+m}\right)=-x^3-x+2$ có nghiệm $x\in[-1;2]$ là

A. 1746. **B.** 1750. **C.** 1747. **D.** 1748.

Câu 12: Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3+x+2$. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f^3\left(x\right)+f\left(x\right)+m}\right)=-x^3-x+2$ có nghiệm $x\in\left[-1;2\right]$ là

A. 1746. **B.** 1750. **C.** 1747. **D.** 1748.

Câu 13: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	0		1		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	8	↗	9	↘	5

Gọi S là tập hợp các số nguyên dương m để bất phương trình $f(x) \ge mx^2(x^2-2)+2m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;3]$. Số phần tử của tập S là

A. 9. **B.** 10. **C.** Vô số. **D.** 0.

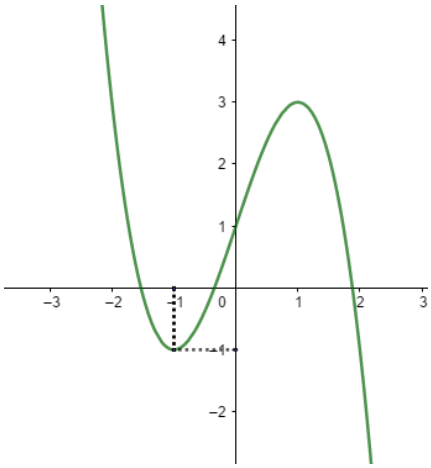
Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) > f'(x)+1$ với mọi số thực x. Bất phương trình $f(x) < me^x + 1$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0;+\infty)$ khi và chỉ khi

A. $m > f(e)-1$. **B.** $m \ge f(e)-1$. **C.** $m \ge f(0)-1$. **D.** $m > f(0)-1$.

Câu 15: Tổng các nghiệm thực của phương trình $x^6 + 2020x^2 = (5x-6)^3 - 2020(6-5x)$ là:

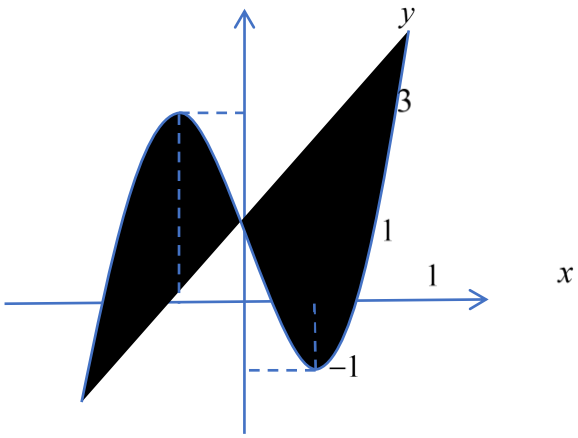
A. 2021. **B.** -6. **C.** 2020 **D.** 5.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$, hàm số $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Bất phương trình $f(x) < x+m$ (m là một số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (-1;0)$ khi và chỉ khi:



A. $m > f(0)$. **B.** $m \ge f(-1)+1$. **C.** $m > f(-1)+1$. **D.** $m \ge f(0)$.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(\cos x) = -2m+1$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ là



A. $(0;1)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(0;1]$. **D.** $(-1;1]$.

Câu 18: Cho phương trình $\sin 2x - \cos 2x + |\sin x + \cos x| - \sqrt{2\cos^2 x + m} - m = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm thực?

A. 9. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 19: Xét các số thực x, y thỏa mãn: $2^{x^2+y^2+1} \le \left(x^2+y^2-2x+2\right).4^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{4y}{2x+y+1}$ **gần nhất** với số nào dưới đây?

A. -2. **B.** -3. **C.** -5. **D.** -4.

Câu 20: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (m,n) sao cho $m+n\le 14$ và ứng với mỗi cặp (m,n) tồn tại đúng ba số thực $a\in(-1;1)$ thỏa mãn $2a^m = n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$?

A. 14. **B.** 12. **C.** 11. **D.** 13.

Câu 21: Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Bất phương trình $x.f(x)>mx+1$ nghiệm đúng với mọi $x\in[1;2020)$ khi

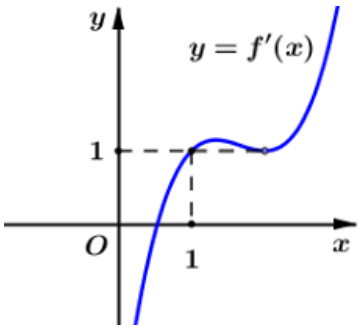
A. $m\ge f(2020)-\dfrac{1}{2020}$. **B.** $m> f(2020)-\dfrac{1}{2020}$.

C. $m\le f(1)-1$. **D.** $m< f(1)-1$.

Câu 22: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4\cos^3 x-\cos 2x+(m-3)\cos x-1=0$ có đúng bốn nghiệm khác nhau thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$?

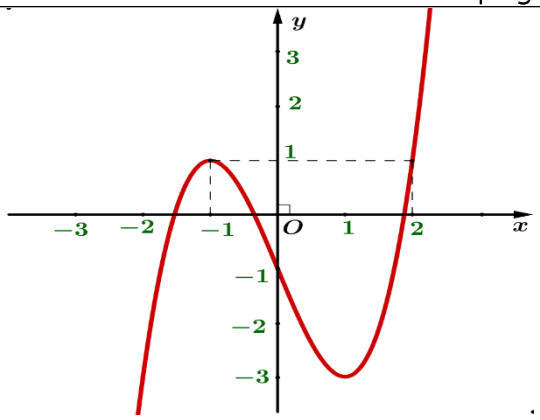
A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 23: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ được cho bởi hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong khoảng $(1;2021)$ để bất phương trình $f\left(1-m^2\right)-f\left(-x^2+2mx+1-3m^2\right)<x^2-2mx+2m^2$ có nghiệm?



A. 0. **B.** 1. **C.** 2019. **D.** 2020.

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc 4 thỏa mãn $f(-2)+f(1)=2f(0)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau:



Tìm m để bất phương trình $f(x-1)-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-x-\frac{1}{6}-m\geq 0$ có nghiệm thuộc $(-1;2)$.

A. $m\leq f(-1)-\frac{1}{6}$. **B.** $m<f(-1)-\frac{1}{6}$. **C.** $m<f(-2)+\frac{8}{3}$. **D.** $m\leq f(-2)+\frac{8}{3}$.

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)=\sqrt{1+x^2}+x$. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $(x-m)f(x-m)+\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{f\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}\leq 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-1;1]$. Biết $S=\left[a+\sqrt{b};+\infty\right)$. Khi đó khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a+2b\geq 10$. **B.** $a+2b=5$. **C.** $ab=3$. **D.** $a+b=4$.

Câu 26: Cho $f\ x\ =x+\sqrt{x^2+1}$.Tổng bình phương các giá trị của tham số m để phươngtrình $-x^2+2x-2\ f\ -x^2+2x-2\ +\frac{2|x-m|+1}{f\ 2\sqrt{x^2-2mx+m^2}+1}=0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt là:

A. $\frac{13}{4}$. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** 3.

Câu 27: Cho hàm số $f(x)=\left(1-m^3\right)x^3+3mx^2+\left(3m^2-2m+2\right)x+m^3+2m$ với m là tham số. Có bao nhiêu số nguyên $m\in[-2020;2021]$ sao cho $f(x)\geq 0$ với mọi $x\in[2020;2021]$?

A. 2023. **B.** 2022. **C.** 2021. **D.** 2020.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Tập nghiệm của bất phương trình $f\left(\frac{1}{x}\right)>f(1)$ là

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-\infty;0)\cup(0;1)$.

Lời giải

Chọn B

Vì hàm số $y=f(x)$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên

$$f\left(\frac{1}{x}\right)>f(1)\Leftrightarrow\frac{1}{x}<1\Leftrightarrow\frac{1-x}{x}<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<0\\x>1\end{array}\right.$$

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ luôn nghịch biến $\mathbb{R}$. Tập nghiệm của bất phương trình $f\left(\frac{1}{x}\right)>f(1)$

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$. **C.** $(0;1)$ **D.** $(-\infty;0)\cup(0;1)$.

Lời giải

Chọn B

Vì hàm số $y=f(x)$ luôn nghịch biến $\mathbb{R}$ nên ta có

$$f\left(\frac{1}{x}\right)>f(1)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\neq0\\\frac{1}{x}<1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x<0\\\frac{1}{x}<1\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}x>0\\\frac{1}{x}<1\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<0\\x>1\end{array}\right.\Rightarrow x\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty).$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $x\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$.

Câu 3: Giá trị của tham số m để bất phương trình $(x-2-m)\sqrt{x-1}\le m-4$ có nghiệm là:

A. $m\le3$. **B.** $m\ge2$. **C.** $m\ge0$. **D.** $m<2$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sqrt{x-1};t\ge0$.

Khi đó bất phương trình ban đầu trở thành: $(t^2-m-1)t\le m-4\Leftrightarrow m\ge\frac{t^3-t+4}{t+1}$.

Xét hàm số: $f(t)=\frac{t^3-t+4}{t+1},t\in[0;+\infty)$.

Có $f'(t)=\frac{2t^3+3t^2-5}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)(2t^2+5t+5)}{(t+1)^2}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=1$.

BBT của $f(t)=\frac{t^3-t+4}{t+1},t\in[0;+\infty)$:

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	4	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT suy ra để bất phương trình có nghiệm thì $m \geq 2$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y' = -x^2 - 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f(0) > f(2020)$. **B.** $f(-2) = f(2)$.

C. $f(-2020) < f(2020)$. **D.** $f(1) > f(0)$.

Lời giải

Chọn A

$y' = -x^2 - 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$, do đó hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Do $0 < 2020 \Rightarrow f(0) > f(2020)$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để $f(22x) > f(x^2)$?

A. 23. **B.** 20. **C.** 21. **D.** 22.

Lời giải

Chọn C

$f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra $f(22x) > f(x^2) \Leftrightarrow 22x > x^2 \Leftrightarrow 0 < x < 22$.

Vậy có 21 giá trị nguyên của x.

Câu 6: Tìm m để bất phương trình $x + \dfrac{4}{x-1} \geq m$ có nghiệm trên khoảng $(-\infty;1)$

A. $m \leq 3$. **B.** $m \leq -3$. **C.** $m \leq 5$. **D.** $m \leq -1$.

Lời giải

Chọn B

Bất phương trình $x + \dfrac{4}{x-1} \geq m$ có nghiệm trên khoảng $(-\infty;1) \Leftrightarrow m \leq \max\limits_{(-\infty;1]} g(x)$

Với $g(x) = x + \dfrac{4}{x-1}$

$g'(x) = 1 - \dfrac{4}{(x-1)^2}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \notin (-\infty;1) \\ x = -1 \in (-\infty;1) \end{array}\right.$

x	$-\infty$		-1		1
y'		$+$	0	$-$	0
y	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$

Vậy $m \leq -3$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=\log_3 x+3^x-3^{\frac{1}{x}}$. Tính tổng bình phương các giá trị của tham số m để phương trình $f\left(\dfrac{1}{4|x-m|+3}\right)+f\left(x^2-4x+7\right)=0$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt:

A. 14. **B.** 13. **C.** 10. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

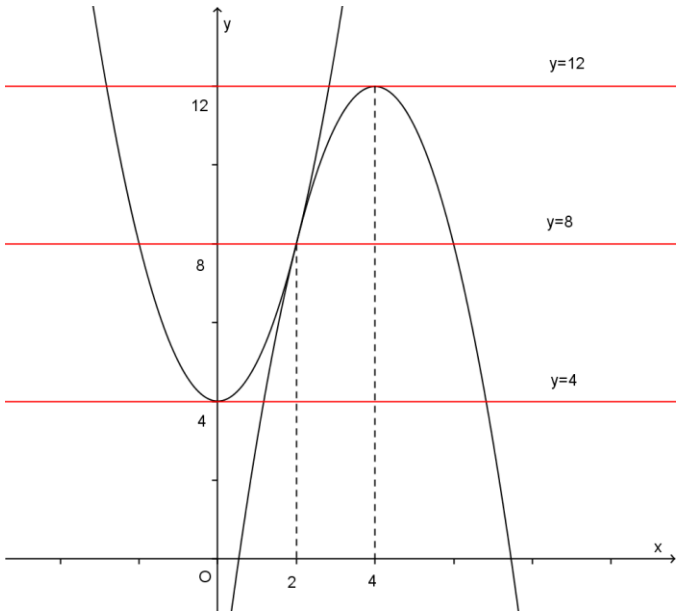
Ta có: $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\log_3\dfrac{1}{x}+3^{\frac{1}{x}}-3^x=-\left(\log_3 x+3^x-3^{\frac{1}{x}}\right)=-f(x)\forall x>0$

Lại có: $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln 3}+3^x.\ln 3+\dfrac{1}{x^2}.3^{\frac{1}{x}}.\ln 3>0\forall x>0\Rightarrow$Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

Do đó $f\left(\dfrac{1}{4|x-m|+3}\right)+f\left(x^2-4x+7\right)=0\Leftrightarrow f\left(4|x-m|+3\right)=f\left(x^2-4x+7\right)$

$\Leftrightarrow 4|x-m|+3=x^2-4x+7\Leftrightarrow 4|x-m|=x^2-4x+4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4m=-x^2+8x-4\\4m=x^2+4\end{array}\right.$

Vẽ hai parabol $y=-x^2+8x-4$ và $y=x^2+4$ trên cùng một hệ trục



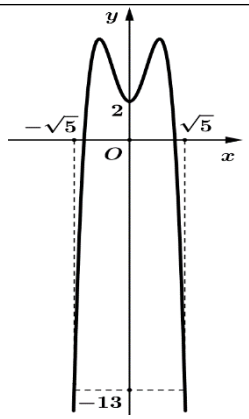
Hai parabol $y=-x^2+8x-4$ và $y=x^2+4$ tiếp xúc với nhau tại điểm $A(2;8)$

Parabol $y=-x^2+8x-4$ có đỉnh $I_1(4;12)$; parabol $y=x^2+4$ có đỉnh $I_2(0;4)$

Phương trình đã cho có đúng ba nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4m=4\\4m=8\\4m=12\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=2\\m=3\end{array}\right.$

Vậy tổng bình phương các giá trị của m là $1^2+2^2+3^2=14$.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x)=2f(x)+2x^3-4x-3m-6\sqrt{5}$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $g(x)\le 0,\forall x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$



A. $m \ge \frac{2}{3} f\left(-\sqrt{5}\right) - 4\sqrt{5}.$ **B.** $m \ge \frac{2}{3} f\left(\sqrt{5}\right).$

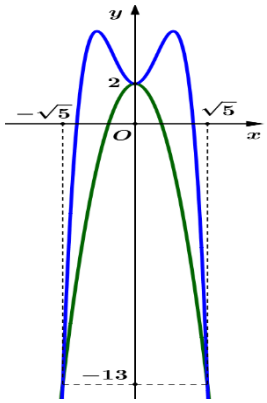
C. $m \le \frac{2}{3} f\left(\sqrt{5}\right).$ **D.** $m \le \frac{2}{3} f\left(0\right) - 2\sqrt{5}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = 2f'(x) + 6x^2 - 4; g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2 - 3x^2$

Vẽ parabol $(P): y = 2 - 3x^2$ lên cùng hệ trục với đồ thị $y = f'(x)$

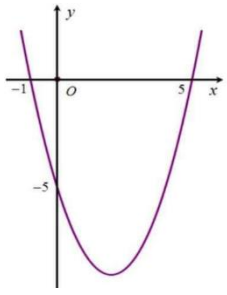


Dựa vào đồ thị, ta có $g'(x) \ge 0, \forall x \in \left[-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right] \Rightarrow g(x)$ luôn đồng biến trên $\left[-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right]$

$\Leftrightarrow 2f\left(\sqrt{5}\right) + 10\sqrt{5} - 4\sqrt{5} - 3m - 6\sqrt{5} \le 0 \Leftrightarrow 2f\left(\sqrt{5}\right) - 3m \le 0 \Leftrightarrow m \ge \frac{2}{3} f\left(\sqrt{5}\right)$

Do đó $g(x) \le 0, \forall x \in \left[-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right] \Leftrightarrow \max\limits_{\left[-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right]} g(x) = g\left(\sqrt{5}\right) \le 0$

Câu 9: Cho hàm số bậc ba $y = f\ x$ có đồ thi hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Biết $f(-1) = \frac{8}{3}$ và a, b, c là các số thực thỏa mãn $a \in (-3; -1)$, $b \in (-1; 2)$, $c \in (2; 5)$. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $f\ a+f\ b-f\ c\le 7a-8\ b-c+\frac{44}{3}$. **B.** $f\ a+f\ b-f\ c\ge 7a-8\ b-c+\frac{44}{3}$.

C. $2f\ a+f\ b-f\ c\le 14a-8\ b-c+\frac{83}{3}$. **D.** $2f\ a+f\ b-f\ c\ge 14a-8\ b-c+\frac{83}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị ta có $f'(x)=x^2-4x-5\Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-5x+C$

Mà $f(-1)=\frac{8}{3}\Rightarrow C=0$ nên $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-5x$

Cách 1:

$f(a)-7a-\frac{40}{3}=\frac{1}{3}a^3-2a^2-12a-\frac{40}{3}=\frac{1}{3}\left(a^3-6a^2-36a-40\right)$

$=\frac{1}{3}(a+2)\left(a^2-8a-20\right)=\frac{1}{3}(a+2)^2(a-10)\le 0,\forall a\in(-3;-1)$

$\Rightarrow f(a)\le 7a+\frac{40}{3},\forall a\in(-3;-1)$

Chứng minh tương tự ta có: $f(b)\le -8b+\frac{4}{3},\forall b\in(-1;2)$, $f(c)\ge -8c,\forall c\in(2;5)$

$\Rightarrow f(a)+f(b)-f(c)\le\left(7a+\frac{40}{3}\right)+\left(-8b+\frac{4}{3}\right)-8c=7a-8(b-c)+\frac{44}{3}$, dấu bằng xảy ra khi $a=-2;b=1;c=3$.

Cách 2:

Xét hàm số $g(x)=f(x)-7x=\frac{1}{3}x^3-2x^2-12x$ với $x\in(-3;-1)$.

$g'(x)=x^2-4x-12, g'(x)=0\Leftrightarrow x=-2,x=4$.

Bảng biến thiên

x	-3		-2		-1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	9	↗	$\frac{40}{3}$	↘	$\frac{29}{3}$

Từ bảng biến thiên ta suy ra $g(x)\le\frac{40}{3},\forall x\in(-3;-1)$, suy ra $f(a)\le 7a+\frac{40}{3},\forall a\in(-3;-1)$.

Xét hàm số $h(x)=f(x)+8x=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x$ với $x\in(-1;5)$.

$h'(x)=x^2-4x+3, h'(x)=0\Leftrightarrow x=1,x=3$.

Bảng biến thiên

x	-1		1		2		3		5
$h'(x)$		$+$	0	$-$			0	$+$	
$h(x)$	$-\frac{16}{3}$	↗	$\frac{4}{3}$	↘	$\frac{2}{3}$		0	↗	$\frac{20}{3}$

Từ bảng biến thiên ta suy ra $h(x)\le\frac{4}{3},\forall x\in(-1;2)$, suy ra $f(b)\le -8b+\frac{4}{3},\forall b\in(-1;2)$.

$-h(x)\le 0,\forall x\in(2;5)$, suy ra $-f(c)\le 8c,\forall c\in(2;5)$.

Từ các bất đăng thức trên ta suy ra

$$f(a)+f(b)-f(c)\le\left(7a+\frac{40}{3}\right)+\left(-8b+\frac{4}{3}\right)-8c=7a-8(b-c)+\frac{44}{3}.$$

Cách 3:

Sử dụng máy tính cầm tay, nhập vào màn hình các biểu thức

$f(A)+f(B)-f(C)-7A+8(B-C)-\frac{44}{3}$ và $2f(A)+f(B)-f(C)-14A+8(B-C)-\frac{83}{3}$

Sau đó tính giá trị các biểu thức trên tại một số giá trị $A\in(-3;-1)$, $B\in(-1;2)$, $C\in(2;5)$ từ đó suy ra đáp án đúng.

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	0	↗	2	↘	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\frac{9\pi}{2}\right]$ của phương trình $f\left(f\left(\cos x\right)\right)=2$ là

A. 10. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

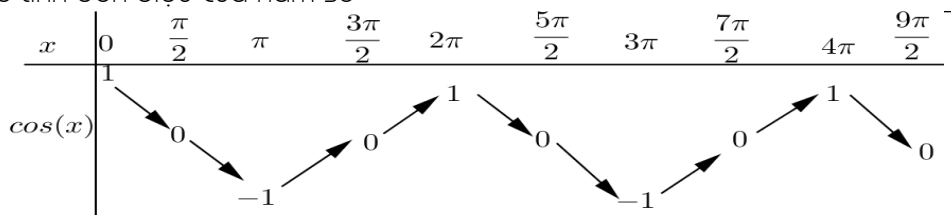
Chọn D

Từ bảng biến thiên ta có $f\left(f\left(\cos x\right)\right)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(\cos x\right)=-1\\f\left(\cos x\right)=1\end{array}\right.$

Phương trình $f\left(\cos x\right)=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=a_1,a_1<-1\\\cos x=a_2,a_2>1\end{array}\right.$.

Phương trình $f\left(\cos x\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=a,a<-1\\\cos x=b,b\in(-1;0)\\\cos x=c,c\in(0;1)\\\cos x=d,d>1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=b,b\in(-1;0)\\\cos x=c,c\in(0;1)\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=\cos x$ trên $\left[0;\frac{9\pi}{2}\right]$



Từ bảng biến thiên ta thấy $\cos x = b, b \in (-1;0)$ có 4 nghiệm phân biệt và phương trình $\cos x = c, c \in (0;1)$ có 5 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình có 9 nghiệm trên $\left[0;\frac{9\pi}{2}\right]$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x) = x^3 + x + 2$. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m}\right) = -x^3 - x + 2$ có nghiệm $x \in [-1;2]$ là

A. 1746. **B.** 1750. **C.** 1747. **D.** 1748.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f\left(\sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m}\right) = -x^3 - x + 2$,.

Đặt $t = \sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m}$, suy ra $(1) \Leftrightarrow f(t) = -x^3 - x + 2 \Leftrightarrow t^3 + t + 2 = (-x)^3 + (-x) + 2$,.

Xét hàm số $y = h(u) = u^3 + u + 2$ có $h'(u) = 3u^2 + 1 > 0, \forall u \in \mathbb{R}$ nên hàm số $y = h(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(2) \Leftrightarrow h(t) = h(-x) \Leftrightarrow t = -x$.

Suy ra $\sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m} = -x \Leftrightarrow f^3(x) + f(x) + m = (-x)^3 \Leftrightarrow m = -f^3(x) - f(x) - x^3$.

Mà $f(x) = x^3 + x + 2$, suy ra $m = -\left(x^3 + x + 2\right)^3 - \left(x^3 + x + 2\right) - x^3$,.

Xét hàm số $h(x) = -\left(x^3 + x + 2\right)^3 - \left(x^3 + x + 2\right) - x^3$ với $x \in [-1;2]$.

Suy ra $h'(x) = -3\left(x^3 + x + 2\right)^2\left(3x^2 + 1\right) - \left(3x^2 + 1\right) - 3x^2 < 0, \forall x \in [-1;2]$.

Do đó $h(-1) \geq h(x) \geq h(2) \Leftrightarrow 1 \geq h(x) \geq -1748$.

Vậy phương trình có nghiệm $x \in [-1;2]$ khi và chỉ khi phương trình có nghiệm $x \in [-1;2]$ $\Leftrightarrow -1748 \leq m \leq 1$.

Lại có $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-1748;-1747;...;-1;0;1\}$. Vậy có 1750 giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m}\right) = -x^3 - x + 2$ có nghiệm $x \in [-1;2]$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x) = x^3 + x + 2$. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m}\right) = -x^3 - x + 2$ có nghiệm $x \in [-1;2]$ là

A. 1746. **B.** 1750. **C.** 1747. **D.** 1748.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$, suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$\forall x \in [-1;2] \Rightarrow f(x) \in [0;12]$

Phương trình đã cho tương đương với: $f\left(\sqrt[3]{f^3(x)+f(x)+m}\right)=f(-x)$

$\sqrt[3]{f^3(x)+f(x)+m}=-x \Leftrightarrow f^3(x)+f(x)+m=-x^3$

$\Leftrightarrow f^3(x)+f(x)+x^3=-m \quad (*)$

Xét hàm số $g(x)=f^3(x)+f(x)+x^3$, ta có:

$g'(x)=3f^2(x).f'(x)+f'(x)+3x^2>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$, suy ra hàm số $g(x)$ đồng biến trên $[-1;2]$.

Vậy phương trình $(*)$ có nghiệm khi và chỉ khi

$\min\limits_{[-1;2]} g(x)\le -m\le \max\limits_{[-1;2]} g(x) \Leftrightarrow g(-1)\le -m\le g(2)$

$\Leftrightarrow f^3(-1)+f(-1)-1\le -m\le f^3(2)+f(2)+8$

$\Leftrightarrow -1\le -m\le 12^3+12+8$

$\Leftrightarrow -1748\le m\le 1$

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	0		1		3
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	8	↗	9	↘	5

Gọi S là tập hợp các số nguyên dương m để bất phương trình $f(x)\ge mx^2\left(x^2-2\right)+2m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;3]$. Số phần tử của tập S là

A. 9. **B.** 10. **C.** Vô số. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên suy ra $f(x)\in[5;9], \forall x\in[0;3]$ và $\max\limits_{[0;3]} f(x)=9$ tại $x=1$

$f(x)\ge mx^2\left(x^2-2\right)+2m \quad f(x)\ge m\left(x^4-2x^2+2\right)$

Xét hàm số $g(x)=x^4-2x^2+2$ trên đoạn $[0;3]$.

Ta có $g'(x)=4x^3-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=2 \\ x=\pm 1\Rightarrow y=1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của $g(x)$

x	0		1		3
$g'(x)$		−	0	+	
$g(x)$	2	↘	1	↗	65

Từ bảng biến thiên suy ra $g(x)\in[1;65], \forall x\in[0;3]$ và $\min\limits_{[0;3]} g(x)=1$ tại $x=1$.

Do đó $\frac{f(x)}{g(x)} \le 9, \forall x \in [0;3]$ và $\max\limits_{[0;3]} \frac{f(x)}{g(x)} = 3$ tại $x = 1$.

$f(x) \ge mx^2(x^2-2)+2m \Leftrightarrow m \le \frac{f(x)}{g(x)}$.

Khi đó có nghiệm thuộc đoạn $[0;3] \Leftrightarrow m \le \max\limits_{[0;3]} \frac{f(x)}{g(x)} \Leftrightarrow m \le 9$.

Vì m nguyên dương nên $m \in \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) > f'(x)+1$ với mọi số thực x. Bất phương trình $f(x) < me^x + 1$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0;+\infty)$ khi và chỉ khi

A. $m > f(e)-1$. **B.** $m \ge f(e)-1$. **C.** $m \ge f(0)-1$. **D.** $m > f(0)-1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x) < me^x + 1 \Leftrightarrow f(x)-1 < me^x \Leftrightarrow \frac{f(x)-1}{e^x} < m$

Xét hàm $g(x) = \frac{f(x)-1}{e^x}$ trên $(0;+\infty)$

Có $g'(x) = \frac{f'(x)-[f(x)-1]}{e^x} < 0, \quad \forall x \in (0;+\infty)$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$		$f(0)-1$ ↘	

Vậy bất phương trình $f(x) < me^x + 1$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0;+\infty)$ khi và chỉ khi $m \ge f(0)-1$

Câu 15: Tổng các nghiệm thực của phương trình $x^6 + 2020x^2 = (5x-6)^3 - 2020(6-5x)$ là:

A. 2021. **B.** -6. **C.** 2020 **D.** 5.

Lời giải

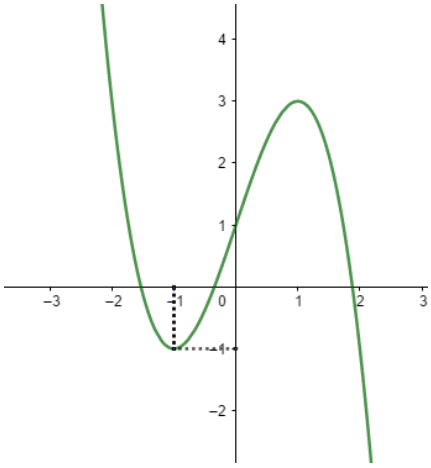
Chọn D

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2020t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 2020 > 0, \forall t \in R$ nên hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên khoảng R. Phương trình $x^6 + 2020x^2 = (5x-6)^3 + 2020(5x-6)$ có dạng:

$f(x^2) = f(5x-6) \Leftrightarrow x^2 = 5x-6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Vậy tổng các nghiệm là 5.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$, hàm số $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Bất phương trình $f(x)<x+m$ (m là một số thực) nghiệm đúng với mọi $x\in(-1;0)$ khi và chỉ khi:



A. $m>f(0)$. **B.** $m\geq f(-1)+1$. **C.** $m>f(-1)+1$. **D.** $m\geq f(0)$.

Lời giải

Chọn B

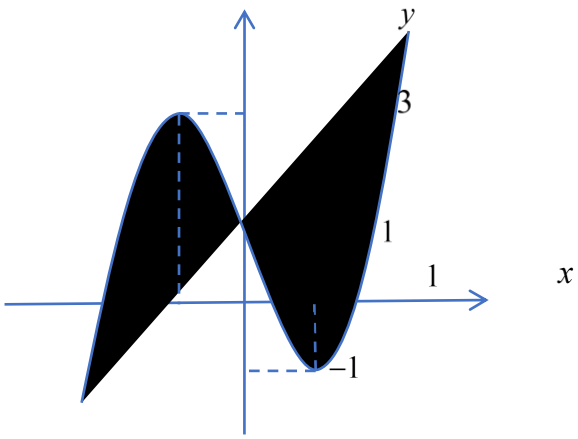
Ta có: $f(x)<x+m\Leftrightarrow f(x)-x<m$.

Xét $g(x)=f(x)-x$, ta có: $g'(x)=f'(x)-1$. Với mọi $x\in(-1;0)$ thì $-1<f'(x)<1$.

Từ đó $g'(x)=f'(x)-1<0$ nên hàm số nghịch biến trên $(-1;0)$.

Suy ra $g(x)=f(x)-x<f(-1)+1$. Yêu cầu bài toán tương đương với $m\geq f(-1)+1$.

Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(\cos x)=-2m+1$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ là



A. $(0;1)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(0;1]$. **D.** $(-1;1]$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\cos x=t, t\in(0;1)$.

Phương trình đã cho có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow$ phương trình $f(t)=-2m+1$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$. Dựa vào đồ thị trên suy ra $-1<-2m+1<1\Leftrightarrow 1>m>0$.

Câu 18: Cho phương trình $\sin 2x-\cos 2x+\left|\sin x+\cos x\right|-\sqrt{2\cos^2 x+m}-m=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm thực?

A. 9. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $2\cos^2 x+m\ge 0$.

Ta có: $\sin 2x-\cos 2x+\left|\sin x+\cos x\right|-\sqrt{2\cos^2 x+m}-m=0$

$\Leftrightarrow 2\sin x.\cos x-2\cos^2 x+1+\left|\sin x+\cos x\right|-\sqrt{2\cos^2 x+m}-m=0$

$\Leftrightarrow \left(\sin x+\cos x\right)^2+\left|\sin x+\cos x\right|=2\cos^2 x+m+\sqrt{2\cos^2 x+m}\ \ (1)$.

Xét hàm số $f\left(u\right)=u^2+u$ với $u\ge 0$ có $f'\left(u\right)=2u+1>0,\forall u\ge 0$.

Nên phương trình

$(1)\Leftrightarrow \left|\sin x+\cos x\right|=\sqrt{2\cos^2 x+m}\Leftrightarrow 1+\sin 2x=2\cos^2 x+m\Leftrightarrow \sin 2x-\cos 2x=m$.

Điều kiện để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 1^2+1^2\ge m^2\Leftrightarrow -\sqrt{2}\le m\le \sqrt{2}$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\left\{-1;0;1\right\}$.

Câu 19: Xét các số thực x,y thỏa mãn: $2^{x^2+y^2+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right).4^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{4y}{2x+y+1}$ **gần nhất** với số nào dưới đây?

A. -2. **B.** -3. **C.** -5. **D.** -4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2^{x^2+y^2+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right).4^x\Leftrightarrow\dfrac{2^{x^2+y^2+1}}{4^x}\le x^2+y^2-2x+2$

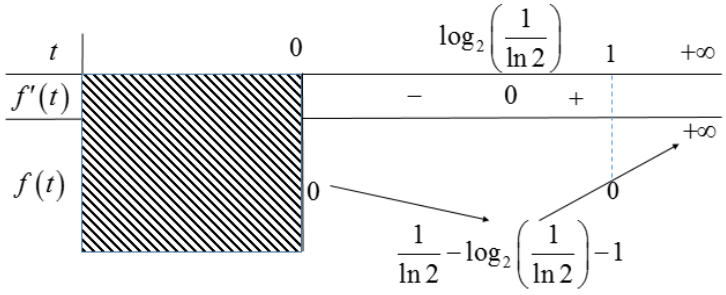
$\Leftrightarrow 2^{x^2+y^2-2x+1}-\left(x^2+y^2-2x+1\right)-1\le 0\ (*)$.

Đặt $t=x^2+y^2-2x+1\Leftrightarrow t=\left(x-1\right)^2+y^2\ge 0$. Khi đó $(*)$ trở thành $2^t-t-1\le 0$.

Xét hàm số: $f\left(t\right)=2^t-t-1$ trên $\left[0;+\infty\right)$

$f'\left(t\right)=2^t\ln 2-1\Rightarrow f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow t=\log_2\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right)$.

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên ta có $f\left(t\right)\le 0\Leftrightarrow 0\le t\le 1\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2+y^2\le 1$.

Khi đó $2x+y+1>0$ và $P=\dfrac{4y}{2x+y+1}\Leftrightarrow 2Px+(P-4)y+P=0$.

Các cặp $(x;y)$ thỏa mãn: $(x-1)^2+y^2\le 1$ là tọa độ các điểm $(x;y)$ thuộc hình tròn (C)

Tâm $I(1;0)$, bán kính $R=1$.

Các cặp $(x;y)$ thỏa mãn: $2Px+(P-4)y+P=0$ là tọa độ các điểm $(x;y)$ thuộc đường thẳng $(d):2Px+(P-4)y+P=0$.

Do đó tồn tại giá trị nhỏ nhất của P khi đường thẳng (d) phải có điểm chung với hình tròn (C)

$\Leftrightarrow d_{(I;d)}\le R\Leftrightarrow \dfrac{|3P|}{\sqrt{4P^2+(P-4)^2}}\le 1\Leftrightarrow P^2+2P-4\le 0\Leftrightarrow -1-\sqrt{5}\le P\le -1+\sqrt{5}$.

Vậy $\min P=-1-\sqrt{5}\approx -3,24$.

Dấu bằng xảy ra khi $(x;y)$ là tọa độ tiếp điểm của đường thẳng (d) với hình tròn (C).

Câu 20: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (m,n) sao cho $m+n\le 14$ và ứng với mỗi cặp (m,n) tồn tại đúng ba số thực $a\in(-1;1)$ thỏa mãn $2a^m=n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$?

A. 14. **B.** 12. **C.** 11. **D.** 13.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình: $2a^m=n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\quad(1)$.

Nhận xét: $a=0$ là một nghiệm của phương trình (1).

Với $a\ne 0$, phương trình $(1)\Leftrightarrow \dfrac{2}{n}=\dfrac{\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)}{a^m}\quad(*)$.

Xét hàm số: $f(a)=\dfrac{\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)}{a^m}$ trên $(-1;1)$; $f'(a)=\dfrac{\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}-m\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)}{a^{m+1}}$.

Xét phương trình $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}-m\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)=0\quad(2)$.

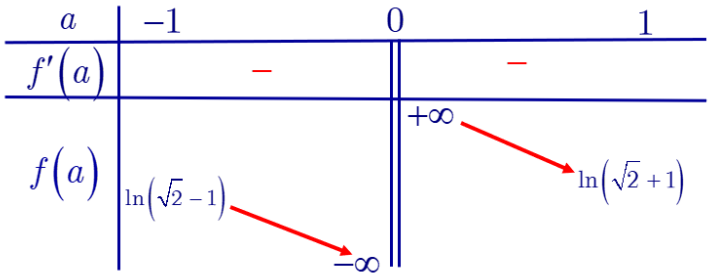
Xét hàm số $g(a)=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}-m\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$ trên $(-1;1)$.

$g'(a)=\dfrac{1-m}{\sqrt{a^2+1}}-\dfrac{a^2}{\left(\sqrt{a^2+1}\right)^3}\Rightarrow g'(a)\le 0,\forall a\in(-1;1);m\in\mathbb{N}^*$.

Suy ra hàm số $g(a)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Do đó, phương trình (2) có nghiệm duy nhất $a=0$.

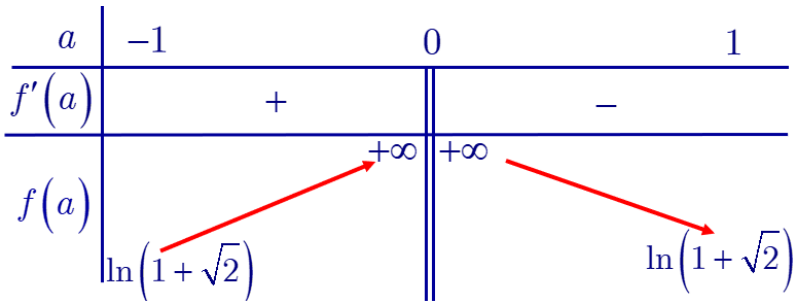
Trường hợp 1: m chẵn.



Phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-1;1)$ khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0 thuộc khoảng $(-1;1)$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy với n nguyên dương phương trình $f(a)=\frac{2}{n}$ không có hai nghiệm phân biệt. Suy ra loại trường hợp m chẵn.

Trường hợp 2: m lẻ và $m\neq 1$.



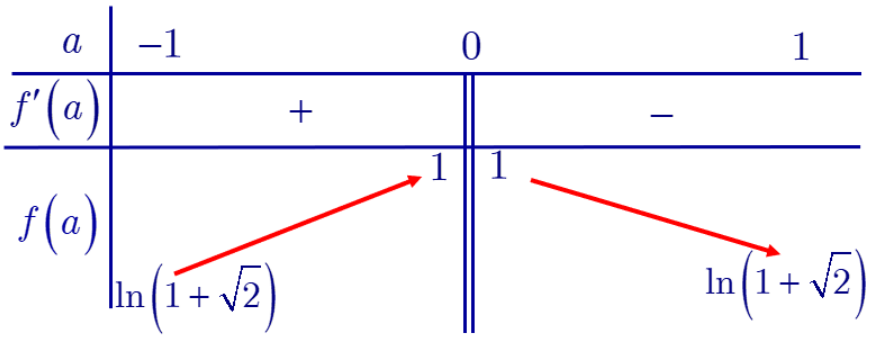
Phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-1;1)$ khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 thuộc khoảng $(-1;1)$

$\Leftrightarrow \frac{2}{n}>\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow n<\frac{2}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=1 \\ n=2 \end{array}\right.$.

Với $n=1$, m lẻ và $m\neq 1$, $m+1\leq 14$ suy ra $m\in\{3;5;7;9;11;13\}$.

Với $n=2$, m lẻ và $m\neq 1$, $m+2\leq 14$ suy ra $m\in\{3;5;7;9;11\}$.

Trường hợp 3: $m=1$.

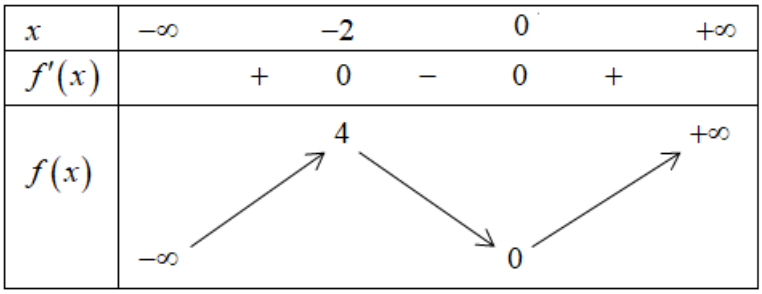


Phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-1;1)$ khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 thuộc khoảng $(-1;1)$

$\Leftrightarrow \ln\left(1+\sqrt{2}\right)<\frac{2}{n}<1\Leftrightarrow 2<n<\frac{2}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}$ suy ra không tồn tại số tự nhiên n thỏa mãn.

Vậy có 11 cặp $(m;n)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 21: Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới.



Bất phương trình $x.f(x)>mx+1$ nghiệm đúng với mọi $x\in[1;2020)$ khi

A. $m\ge f(2020)-\dfrac{1}{2020}$. **B.** $m>f(2020)-\dfrac{1}{2020}$.

C. $m\le f(1)-1$. **D.** $m<f(1)-1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $x.f(x)>mx+1$ nghiệm đúng với mọi $x\in[1;2020)$

$\Leftrightarrow f(x)>m+\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow m<f(x)-\dfrac{1}{x}$ nghiệm đúng với mọi $x\in[1;2020)$

Xét hàm số: $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{x}$ với $x\in[1;2020)$. Ta có: $g'(x)=f'(x)+\dfrac{1}{x^2}$

Do $\begin{cases}f'(x)\ge 0\\ \dfrac{1}{x^2}>0\end{cases}$ với mọi $x\in[1;2020)$ nên $g'(x)=f'(x)+\dfrac{1}{x^2}>0$ với mọi $x\in[1;2020)$.

Suy ra hàm số $g(x)$ đồng biến trên nửa khoảng $[1;2020)$.

Vậy yêu cầu bài toán tương đương $m<\min\limits_{[1;2020)}g(x)=g(1)=f(1)-1$.

Câu 22: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4\cos^3x-\cos 2x+(m-3)\cos x-1=0$ có đúng bốn nghiệm khác nhau thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $4\cos^3x-\cos 2x+(m-3)\cos x-1=0\Leftrightarrow 4\cos^3x-\left(2\cos^2x-1\right)+(m-3)\cos x-1=0$.

$\Leftrightarrow 4\cos^3x-2\cos^2x+(m-3)\cos x=0.$

$\Leftrightarrow \cos x\left(4\cos^2x-2\cos x+(m-3)\right)=0.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi. & (1)\\ 4\cos^2x-2\cos x+(m-3)=0. & (2)\end{array}\right.$

Ta thấy nghiệm không thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ nên phương trình đã cho có đúng bốn nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi phương trình có đúng bốn nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Xét: $4\cos^2 x-2\cos x+(m-3)=0$ (2).

Đặt $\cos x=t$, dễ thấy với mỗi $t, 0<t<1$ thì có 2 giá trị x thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Do đó phương trình có đúng 4 nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi phương trình $4t^2-2t+(m-3)=0$ có đúng 2 nghiệm $t, 0<t<1$.

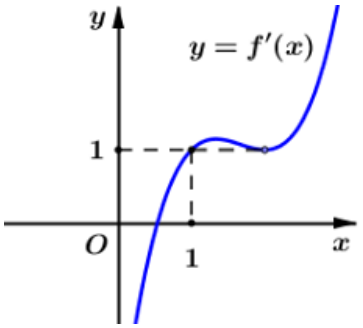
Ta tìm m để phương trình: $-4t^2+2t+3=m$ có đúng 2 nghiệm $t, 0<t<1$.

Xét $f(t)=-4t^2+2t+3$ có $f'(t)=-8t+2$.

t	0		$\frac{1}{4}$		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	3	↗	$\frac{13}{4}$	↘	1

Từ bảng biến thiên suy ra $1<m<\frac{13}{4}$. Do m nguyên nên $m=2; m=3$.

Câu 23: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ được cho bởi hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong khoảng $(1;2021)$ để bất phương trình $f(1-m^2)-f(-x^2+2mx+1-3m^2)<x^2-2mx+2m^2$ có nghiệm?



A. 0. **B.** 1. **C.** 2019. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn C

$f(1-m^2)-f(-x^2+2mx+1-3m^2)<x^2-2mx+2m^2$

$\Leftrightarrow -x^2+2mx+1-3m^2-f(-x^2+2mx+1-3m^2)<1-m^2-f(1-m^2)$ (*)

Ta có: $1-m^2<0, \forall m\in(1;2021)$.

$-x^2+2mx+1-3m^2=-(x-m)^2-2m^2+1<0, \forall m\in(1;2021), \forall x\in\mathbb{R}$.

Xét hàm số $g(t)=t-f(t), t<0$.

Có $g'(t)=1-f'(t)>0, \forall t<0$

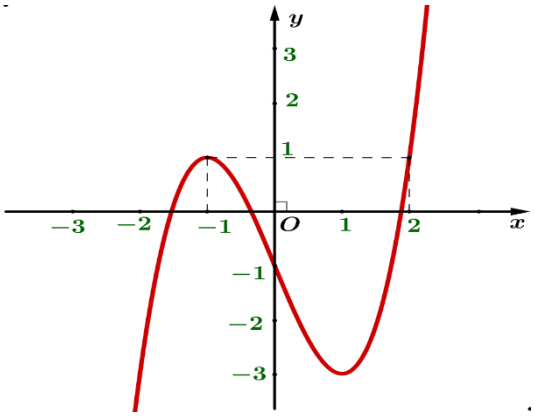
Vậy $g(t)$ là hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$.

$(*)$ có dạng $g(-x^2+2mx+1-3m^2)<g(1-m^2)$

$\Leftrightarrow -x^2+2mx+1-3m^2<1-m^2$

$\Leftrightarrow -x^2+2mx-m^2<m^2 \Leftrightarrow -(x-m)^2<m^2$

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc 4 thỏa mãn $f(-2)+f(1)=2f(0)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau:



Tìm m để bất phương trình $f(x-1)-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-x-\frac{1}{6}-m\geq 0$ có nghiệm thuộc $(-1;2)$.

A. $m\leq f(-1)-\frac{1}{6}$. **B.** $m<f(-1)-\frac{1}{6}$. **C.** $m<f(-2)+\frac{8}{3}$. **D.** $m\leq f(-2)+\frac{8}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x-1)-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-x-\frac{1}{6}-m\geq 0 \Leftrightarrow m\leq f(x-1)-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-x-\frac{1}{6}$ $(*)$

Gọi $g(x)=f(x-1)-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-x-\frac{1}{6}$

Đặt $t=x-1$ vì $x\in(-1;2)\Rightarrow t\in(-2;1)$

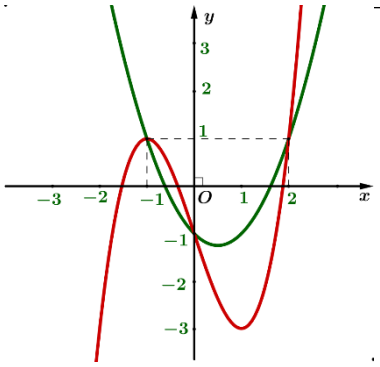
$(*) \Rightarrow m\leq f(t)-\frac{1}{3}(t+1)^3+\frac{3}{2}(t+1)^2-(t+1)-\frac{1}{6}$

Xét hàm số $g(t)=f(t)-\frac{1}{3}(t+1)^3+\frac{3}{2}(t+1)^2-(t+1)-\frac{1}{6}$

$g'(t)=f'(t)-(t+1)^2+3(t+1)-1$

$g'(t)=f'(t)-t^2+t+1$

$g'(t)=0 \Leftrightarrow f'(t)=t^2-t-1$



Dựa vào đồ thị ta thấy $f'(t)=t^2-t-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \Rightarrow x=0 \\ t=0 \Rightarrow x=1 \\ t=2(l) \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

x	-1		0		1		2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$g(-1)$	↘	$g(0)$	↗	$g(1)$	↘	$g(2)$

$g(-1)=f(-2)+\frac{8}{3}$; $g(1)=f(0)$

Lại có $f(-2)+f(1)=2f(0) \Leftrightarrow f(-2)-f(0)=f(0)-f(1)$

Xét $g(-1)-g(1)=f(-2)-f(0)+\frac{8}{3}=f(0)-f(1)+\frac{8}{3}>0$. Do đó $g(-1)>g(1)$

Vậy $m \le f(x-1)-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-x-\frac{1}{6} \Leftrightarrow m<g(-1)=f(-2)+\frac{8}{3}$.

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)=\sqrt{1+x^2}+x$. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $(x-m)f(x-m)+\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{f\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)} \le 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1;1]$. Biết $S=\left[a+\sqrt{b};+\infty\right)$. Khi đó khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a+2b \ge 10$. **B.** $a+2b=5$. **C.** $ab=3$. **D.** $a+b=4$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f(-x)=\sqrt{1+x^2}-x$;

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{1+x^2-x^2}=\sqrt{1+x^2}-x=f(-x)$$

BPT: $(x-m)f(x-m)+\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{f\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)} \le 0$

$$\Rightarrow (x-m)f(x-m)+\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)f\left(-1-\sqrt{1-x^2}\right) \le 0$$

$\Rightarrow (x-m)f(x-m)-\left(-1-\sqrt{1-x^2}\right)f\left(-1-\sqrt{1-x^2}\right)\le 0$

$\Rightarrow (x-m)f(x-m)\le\left(-1-\sqrt{1-x^2}\right)f\left(-1-\sqrt{1-x^2}\right)(*)$

Xét hàm số $g(t)=t.f(t)=t\sqrt{1+t^2}+t^2$;

$g'(t)=\sqrt{1+t^2}+\dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}+2t=\dfrac{1+t^2+2t\sqrt{1+t^2}+t^2}{\sqrt{1+t^2}}=\dfrac{\left(\sqrt{1+t^2}+t\right)^2}{\sqrt{1+t^2}}>0$ với mọi $t\in\mathbb{R}$

suy ra hàm số $g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó BPT $(*)$: $g(x-m)\le g\left(-1-\sqrt{1-x^2}\right)\Leftrightarrow x-m\le -1-\sqrt{1-x^2}$

$\Leftrightarrow x+1+\sqrt{1-x^2}\le m\ (**)$ với mọi $x\in[-1;1]$.

Xét hàm số: $h(x)=x+1+\sqrt{1-x^2}\ (-1\le x\le 1)$

$h'(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$; $h'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\in[-1;1]$

Nhận xét: $h(-1)=0, h\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=1+\sqrt{2}, h(1)=2$ nên $\max\limits_{[-1;1]}h(x)=1+\sqrt{2}$

Vậy BPT $(**)$ đúng với mọi $x\in[-1;1]$ khi và chỉ khi $\max\limits_{[-1;1]}h(x)\le m$ hay $m\ge 1+\sqrt{2}$.

Ta có: $a+\sqrt{b}=1+\sqrt{2}$ và $a,b\in\mathbb{N}$ nên $(a,b)=(1,2)$.

Câu 26: Cho $f\ x\ =x+\sqrt{x^2+1}$.Tổng bình phương các giá trị của tham số m để phươngtrình $-x^2+2x-2\ f\ -x^2+2x-2\ +\dfrac{2\left|x-m\right|+1}{f\ 2\sqrt{x^2-2mx+m^2}\ +1}=0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt là:

A. $\dfrac{13}{4}$. **B.** $\dfrac{7}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$\sqrt{x^2-2mx+m^2}=|x-m|; f'(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}>0$

$f(-x)=-x+\sqrt{x^2+1}\Rightarrow f(x).f(-x)=1\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{f(-x)}\Rightarrow f(-x^2+2x-2)=\dfrac{1}{f(x^2-2x+2)}$.

Phương trình tương đương $\dfrac{2|x-m|+1}{f(2|x-m|+1)}=\dfrac{x^2-2x+2}{f(x^2-2x+2)}$

Xét hàm số:

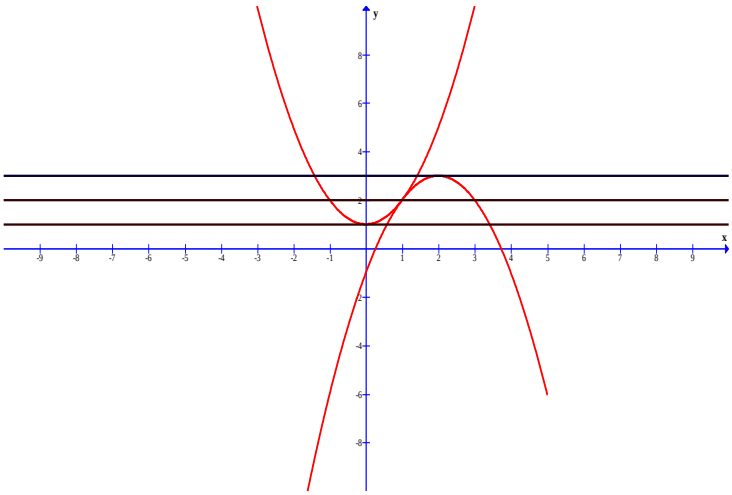
$g(t)=\dfrac{t}{f(t)}(t>0)\Rightarrow g'(t)=\dfrac{f(t)-t.f'(t)}{f^2(t)}=\dfrac{t+\sqrt{t^2+1}-t-\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}}{f^2(t)}=\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}.f^2(t)}>0$

Vậy hàm số $g(t)$ đồng biến, khi đó phương trình tương đương với pt

$$x^2-2x+2=2|x-m|+1 \Leftrightarrow \quad x^2-2x+1=2|x-m| \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x+1=2(x-m) \\ x^2-2x+1=-2(x-m) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m=-x^2+4x-1 \\ 2m=x^2+1 \end{array}\right..$$

Ta thấy hai parabol $y=-x^2+4x-1,\ y=x^2+1$ tiếp xúc với nhau tại điểm có tọa độ $(1;2)$ nên đồ thị của chúng trong cùng hệ tọa độ Oxy như sau.



Khi đó để phương trình có 3 nghiệm thì đường thẳng $y=2m$ cắt hai parabol tại 3 điểm phân biệt, từ đồ thị suy ra $\left[\begin{array}{l} 2m=3 \\ 2m=2 \\ 2m=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{3}{2} \\ m=1 \\ m=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Vậy tổng bình phương các giá trị của m bằng $\dfrac{7}{2}$.

Câu 27: Cho hàm số $f(x)=(1-m^3)x^3+3mx^2+(3m^2-2m+2)x+m^3+2m$ với m là tham số. Có bao nhiêu số nguyên $m\in[-2020;2021]$ sao cho $f(x)\geq 0$ với mọi $x\in[2020;2021]$?

A. 2023. **B.** 2022. **C.** 2021. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn B

$f(x)=(1-m^3)x^3+3mx^2+(3m^2-2m+2)x+m^3+2m\geq 0\ \forall x\in[2020;2021]$

$\Leftrightarrow (x+m)^3+2(x+m)\geq (mx)^3+2mx\ \forall x\in[2020;2021](1)$

Xét hàm số $f(t)=t^3+2t,\ f'(t)=3t^2+2>0\forall t$

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên R nên (1) suy ra

$$x+m\geq mx\ \forall x\in[2020;2021]\Leftrightarrow m\leq\frac{x}{x-1}\forall x\in[2020;2021]\Leftrightarrow m\leq\frac{2021}{2020}.$$

Vậy trên đoạn $[-2020;2021]$ có 2022 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

CHỦ ĐỀ 02: CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

LÝ THUYẾT

❖ **Định nghĩa**

- Giả sử hàm số f xác định trên tập K và $x_0 \in K$. Ta nói:
- x_0 là **điểm cực tiểu** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa x_0 sao cho $(a;b) \subset K$ và $f(x) > f(x_0), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số f.
- x_0 là **điểm cực đại** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa x_0 sao cho $(a;b) \subset K$ và $f(x) < f(x_0), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số f.
- Điểm cực đại và điểm cực tiểu gọi chung là **điểm cực trị**.
- Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu gọi chung là **cực trị**.
- Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị của hàm số** và điểm cực trị phải là một điểm trong tập hợp K.
- Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **giá trị cực trị (hay cực trị)** của hàm số.
- Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số thì điểm $(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực trị của đồ thị** hàm số f.

❖ **Quy tắc tìm cực trị**

➢ **Quy tắc 1:**

- **Bước 1:** Tìm tập xác định. Tìm $f'(x)$.
- **Bước 2:** Tìm các điểm x_i $(i = 1;2;...)$ mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm.
- **Bước 3:** Lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi đi qua x_i thì hàm số đạt cực trị tại x_i.

➢ **Định lý**

- Giả sử $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$ với $h > 0$. Khi đó:
- Nếu $f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại x_0.
- Nếu $f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại x_0.

Từ định lí trên, ta có một quy tắc khác để tìm cực trị của hàm số

➢ **Quy tắc 2:**

- **Bước 1:** Tìm tập xác định. Tìm $f'(x)$.
- **Bước 2:** Tìm các nghiệm x_i $(i = 1;2;...)$ của phương trình $f'(x) = 0$.
- **Bước 3:** Tính $f''(x)$ và tính $f''(x_i)$.

Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_i.

Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_i.

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1. Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+1$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x=-1$. **B.** $x=1$. **C.** $x=-3$. **D.** $x=3$.

Chọn B

Ta có hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+1$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=x^2+2x-3;\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3\end{array}\right.$.

$y''=2x+2;\ y''(-3)=-4<0;\ y''(1)=4>0$.

Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=1$.

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+3(7m-3)x$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số không có cực trị. Số phần tử của S là

A. 2. **B.** 4. **C.** 0. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+3(7m-3)x$ (1) $\Rightarrow y'=3x^2-6(m+1)x+3(7m-3)$.

Ta có: $y'=0\ \Leftrightarrow\ x^2-2(m+1)x+7m-3=0$ (2)

Hàm số đã cho không có cực trị

$\Leftrightarrow$ Phương trình $y'=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

$\Leftrightarrow\Delta'_{(2)}\le 0\Leftrightarrow(m+1)^2-1.(7m-3)\le 0\ \Leftrightarrow m^2-5m+4\le 0\Leftrightarrow 1\le m\le 4$.

Do m là số nguyên nên $m\in\{1;2;3;4\}$. Vậy tập S có 4 phần tử.

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^2-1)(x-4)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(3-x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết, ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

Ta có $g(x)=f(3-x)\Rightarrow g'(x)=-f'(3-x)$.

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta có

$$g'(x)\ge 0 \Leftrightarrow f'(3-x)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3-x\le -1\\ 1\le 3-x\le 4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge 4\\ -1\le x\le 2\end{array}\right.$$

Như thế ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên, ta nhận thấy hàm số $g(x)$ có một điểm cực đại.

VÍ DỤ 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-1 ‖ -1	↗	3	↘	2

Số điểm cực trị của hàm số $y=|f(x)|$ là

A. 7. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Gọi đồ thị của hàm số $y=f(x)$ là (C).

Đặt $g(x)=|f(x)|$ và gọi (C') là đồ thị của hàm số $y=g(x)$. Đồ thị (C') được suy ra từ đồ thị (C) như sau:

Giữ nguyên phần đồ thị của (C) phía trên Ox ta được phần I.

Với phần đồ thị của (C) phía dưới Ox ta lấy đối xứng qua Ox, ta được phần II.

Hợp của phần I và phần II ta được (C').

Từ cách suy ra đồ thị của (C') từ (C), kết hợp với bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)=|f(x)|$ như sau:

x	$-\infty$		a		-1		b		0		c		1		$+\infty$
$y=\lvert f(x)\rvert$	$+\infty$	↘	0	↗	2	↘	0	↗	1 ‖ 1	↘	0	↗	3	↘	$+\infty$ / 2

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có 5 điểm cực trị.

VÍ DỤ 5. Cho hàm số $y=\frac{x^5}{5}-\left(2m-1\right)x^4-\frac{m}{3}x^3+2019$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$?

A. Vô số . **B.** 1 . **C.** 2 . **D.** 0 .

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=x^4-4\left(2m-1\right)x^3-mx^2=x^2\left[x^2-4\left(2m-1\right)x-m\right]$.

Dễ thấy $x=0$ là một nghiệm của đạo hàm y'. Do đó hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ khi và chỉ khi y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua nghiệm $x=0$. Ta thấy dấu của y' là dấu của hàm số $g\left(x\right)=x^2-4\left(2m-1\right)x-m$. Hàm số $g\left(x\right)$ đổi dấu khi đi qua giá trị $x=0$ khi $x=0$ là nghiệm của $g\left(x\right)$. Khi đó $g\left(0\right)=0\Leftrightarrow m=0$.

Thử lại, với $m=0$ thì $g\left(x\right)=x^2+4x$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua giá trị $x=0$.

Vậy có 1 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

VÍ DỤ 6. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+2$ cắt đường tròn tâm $I\left(1;1\right)$, bán kính $R=1$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất?

A. $m=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$. **B.** $m=\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}$. **C.** $m=\frac{2\pm\sqrt{5}}{2}$. **D.** $m=\frac{2\pm\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

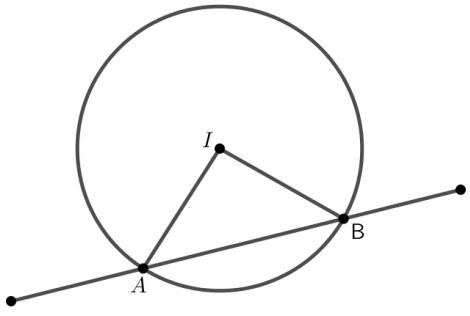
Chọn B

Ta có $y=x^3-3mx+2\Rightarrow y'=3x^2-3m$. Hàm số $y=x^3-3mx+2$ có 2 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ phương trình $y'=3x^2-3m=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m>0\ \left(1\right)$

Ta có: $y=\frac{1}{3}x.y'-2mx+2$.

Suy ra phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm cực đại và cực tiểu là $y=-2mx+2\Leftrightarrow 2mx+y-2=0$



Đường thẳng Δ cắt đường tròn tâm $I\left(1;1\right)$, bán kính $R=1$ tại hai điểm phân biệt A,B

$\Leftrightarrow d\left(I;\Delta\right)<R\Leftrightarrow \dfrac{\left|2m-1\right|}{\sqrt{4m^2+1}}<1 \Leftrightarrow \left|2m-1\right|<\sqrt{4m^2+1}\Leftrightarrow -4m<0$ luôn đúng do $m>0$

Ta có $S_{IAB}=\dfrac{1}{2}.IA.\text{IB}.\sin AIB=\dfrac{1}{2}.\sin AIB\le \dfrac{1}{2}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ $\sin AIB=1\Leftrightarrow AIB=90°$.

Khi đó tam giác IAB vuông cân tại I có $IA=1$ nên

$d\left(I;\Delta\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\left|2m-1\right|}{\sqrt{4m^2+1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow 4m^2-8m+1=0\Leftrightarrow m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$ thỏa mãn đk $\left(1\right)$

Vậy diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất khi $m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$.

VÍ DỤ 7. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y=x^4+2\left(m-2\right)x^2+3m-2$ có ba điểm cực trị.

A. $m\in\left(2;+\infty\right)$. **B.** $m\in\left(-2;2\right)$. **C.** $m\in\left(-\infty;2\right)$. **D.** $m\in\left(0;2\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y=x^4+2\left(m-2\right)x^2+3m-2$; $y'=4x^3+4\left(m-2\right)x=4x\left(x^2+m-2\right)$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=2-m\end{array}\right.$ (1)

Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác $0\Leftrightarrow 2-m>0\Leftrightarrow m<2$.

VÍ DỤ 8. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2\left(x^2-4x\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(2x^2-12x+m\right)$ có đúng 5 điểm cực trị ?

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 19.

Lời giải.

Chọn B

Ta có : $f'(x)=0\Leftrightarrow(x+1)^2\left(x^2-4x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=0\\x=4\end{array}\right.$, trong đó $x=-1$ là nghiệm kép.

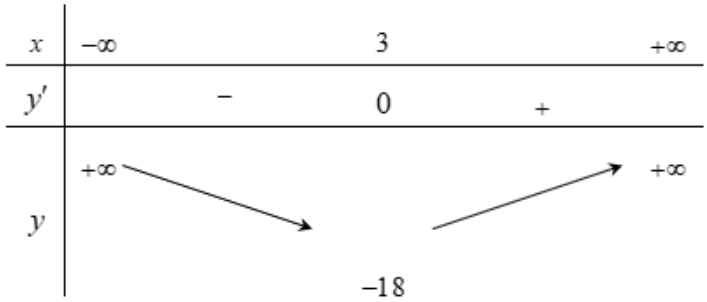
$g(x)=f\left(2x^2-12x+m\right)\Rightarrow g'\left(x\right)=\left(4x-12\right)f'\left(2x^2-12x+m\right)$

Xét $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left(4x-12\right)f'\left(2x^2-12x+m\right)=0$ (*)

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\2x^2-12x+m=-1\\2x^2-12x+m=0\\2x^2-12x+m=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\2x^2-12x+m=-1\ (l)\\2x^2-12x=-m\quad\left(1\right)\\2x^2-12x=4-m\quad\left(2\right)\end{array}\right.$

(Điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)$ là nghiệm bội lẻ của phương trình (*) nên ta loại phương trình $2x^2-12x+m=-1$). Xét hàm số $y=2x^2-12x$ có đồ thị (C) có $y'=4x-12$

Ta có bảng biến thiên



Để $g(x)$ có đúng 5 điểm cực trị thì mỗi phương trình $(1);(2)$ đều có hai nghiệm phân biệt $\neq 3$

Do đó, mỗi đường thẳng $y=4-m$ và $y=-m$ phải cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ khác 3. Nhận xét: đường thẳng $y=4-m$ luôn nằm trên đường thẳng $y=-m$.

Ta có: $-18<-m \Leftrightarrow m<18$. Vậy có 17 giá trị m nguyên dương .

VÍ DỤ 9. Cho hàm số $y=f(x)=\frac{1}{3}x^3-(2m-1)x^2+(8-m)x+2$ với $m\in\mathbb{R}$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số $y=f(|x|)$ có 5 cực trị là khoảng $(a;b)$. Tích $a.b$ bằng

A. 12. **B.** 16. **C.** 10. **D.** 14.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=x^2-2(2m-1)x+8-m$.

Vì $f(|x|)$ là hàm chẵn $(\text{do } f(|-x|)=f(|x|))$, nên đồ thị hàm $f(|x|)$ đối xứng qua trục Oy . Do đó, khi hàm $f(x)$ có hai cực trị dương thì hàm $f(|x|)$ sẽ có thêm hai cực trị đối xứng qua trục Oy và một cực trị còn lại chính là giao điểm của đồ thị hàm $f(|x|)$ và trục Oy .

Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $y'=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt.

Điều kiện tương đương là $\begin{cases}\Delta'>0\\ S>0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2m-1)^2-(8-m)>0\\ 2m-1>0\\ 8-m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4m^2-3m-7>0\\ m>\frac{1}{2}\\ m<8\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m<-1\vee m>\frac{7}{4}\\ m>\frac{1}{2}\\ m<8\end{cases}\Leftrightarrow m\in\left(\frac{7}{4};8\right)$. Vậy $a=\frac{7}{4}$, $b=8$ và $a.b=14$.

DẠNG 1 Cơ bản về cực trị hàm số

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x)=(x-2018)(x-2019)(x-2020)^4$. Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 2: Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+1$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x=-1$. **B.** $x=1$. **C.** $x=-3$. **D.** $x=3$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x-3)^3(2x+3), \forall x\in\mathbb{R}$. Số cực trị của hàm số đã cho là

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x)=x^2(x-1)(x+2)^5$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 5: Hàm số $y=2x^3-x^2+5$ có điểm cực đại là

A. $x=\frac{1}{3}$. **B.** $x=0$. **C.** $M(0;5)$. **D.** $y=5$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x)=x(x-1)(x+2)^2$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 7: Hàm số $y=\frac{2x+5}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 8: Đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-9x+1$ có hai điểm cực trị A và B. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB?

A. $M(0;-1)$. **B.** $Q(-1;10)$. **C.** $P(1;0)$. **D.** $N(1;-10)$.

Câu 9: Số nào sau đây là điểm cực đại của hàm số $y=x^4-2x^3+x^2+2$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 10: Cho $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-2)(x-3)^2$. Khi đó số cực trị của hàm số $y=f(2x+1)$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 11: Cho hàm số $y=x^4-2x^2+1$. Xét các mệnh đề sau đây

1) Hàm số có 3 điểm cực trị; 2) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$; $(1;+\infty)$

3) Hàm số có 1 điểm cực trị; 4) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$; $(0;1)$

Có bao nhiêu mệnh đề **đúng** trong bốn mệnh đề trên?

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 12: Hàm số $f(x)=C_{2019}^0+C_{2019}^1x+C_{2019}^2x^2+...+C_{2019}^{2019}x^{2019}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0. **B.** 2018. **C.** 1. **D.** 2019.

Câu 13: Cho hàm số $y=x^3-3x+2$. Tọa độ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là

A. $(-2;0)$. **B.** $(-1;4)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;0)$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)=1+C_{10}^1x+C_{10}^2x^2+...+C_{10}^{10}x^{10}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho bằng

A. 10. **B.** 0. **C.** 9. **D.** 1.

Câu 15: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-1)(x-2)(3^x-1), \forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^2-9)(x^2-3x)^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Gọi T là giá trị cực đại của hàm số đã cho. Chọn khẳng định đúng.

A. $T=f(0)$. **B.** $T=f(9)$. **C.** $T=f(-3)$. **D.** $T=f(3)$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^2-9)(x^2-3x)^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Gọi T là giá trị cực đại của hàm số đã cho. Chọn khẳng định đúng.

A. $T=f(0)$. **B.** $T=f(9)$. **C.** $T=f(-3)$. **D.** $T=f(3)$.

Câu 18: Gọi A, B, C là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng

A. $\sqrt{2}+1$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{2}-1$. **D.** 1.

Câu 19: Cho hàm số $y=x^4-2x^2+1$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác, gọi là ΔABC. Tính diện tích ΔABC.

A. $S=2$. **B.** $S=1$. **C.** $S=\frac{1}{2}$. **D.** $S=4$.

Câu 20: Cho hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+3(7m-3)x$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số không có cực trị. Số phần tử của S là

A. 2. **B.** 4. **C.** 0. **D.** Vô số.

Câu 21: Cho hàm số $y=f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2;-1;0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó hàm số $y=f(x^2-2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 6. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)=x^2(x-1)e^{3x}$ có một nguyên hàm là hàm số $F(x)$. Số điểm cực trị của hàm số $F(x)$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 23: Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|\sin x-\frac{x}{4}\right|$, $x\in(-\pi;\pi)$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 24: Biết phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a\neq 0)$ có đúng hai nghiệm thực. Hỏi đồ thị hàm số $y=\left|ax^3+bx^2+cx+d\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4 . **B.** 5 . **C.** 2 . **D.** 3 .

Câu 25: Số điểm cực trị của hàm số $f(x)=\int\limits_{2x}^{x^2}\frac{2t\mathrm{d}t}{1+t^2}$ là

A. 0 . **B.** 1 . **C.** 2 . **D.** 3 .

Câu 26: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(-2x^2+4x)$ là.

A. 3 . **B.** 4 . **C.** 2 . **D.** 5 .

Câu 27: Biết rằng đồ thị hàm số $y=\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{1}{x}$ có ba điểm cực trị thuộc một đường tròn (C). Bán kính của (C) gần đúng với giá trị nào dưới đây?

A. 12,4 . **B.** 6,4 . **C.** 4,4 . **D.** 27 .

Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(3-x)(x^2-1)+2x,\forall x\in\mathbb{R}$. Hỏi hàm số $y=f'(x)-x^2-1$ có bao nhiêu điểm cực tiểu.

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 29: Cho hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ. Chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau:

A. Hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị trái dấu.

B. Đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ cắt trục tung tại điểm có tung độ dương.

C. Đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị nằm bên phải trục tung.

D. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ nằm bên trái trục tung.

Câu 30: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ với $a>0$, $c>2018$ và $a+b+c<2018$. Số điểm cực trị của hàm số $y=|f(x)-2018|$ là

A. 1 . **B.** 3 . **C.** 5 . **D.** 7 .

Câu 31: Hàm số $f(x)=\left|\frac{x}{x^2+1}-m\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2 . **B.** 3 . **C.** 5 . **D.** 4 .

Câu 32: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^2-1)(x-4)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(3-x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 33: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=3f(-x^4+4x^2-6)+2x^6-3x^4-12x^2$ có tất cả bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.B	3.B	4.B	5.B	6.A	7.B	8.D	9.A	10
11	12.A	13.D	14.D	15.C	16.C	17.C	18.C	19.B	20.B
21	22.A	23.D	24.D	25.D	26.D	27.B	28.D	29.A	30.D
31	32.B	33.D							

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2018 \\ x=2019 \\ x=2020 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu của $f'(x)$:

x	$-\infty$		2018		2019		2020		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ ta thấy $f'(x)$ đổi dấu qua hai điểm $x=2018; x=2019$ nên hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

Câu 2: Chọn B

Ta có hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+1$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=x^2+2x-3;\ y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.;\ y''=2x+2;\ y''(-3)=-4<0;\ y''(1)=4>0$.

Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=1$.

Câu 3: Chọn B

Ta có $f'(x)$ đổi dấu khi qua các giá trị $x=3$ và $x=\frac{-3}{2}$ nên hàm số có 2 cực trị.

Câu 4: Chọn B

Xét phương trình $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	−	0	+	

Dễ thấy $f'(x)$đổi dấu khi qua $x=-2$ và $f'(x)$đổi dấu khi qua $x=1$ nên hàm số có 2 điểm cực trị.

Câu 5: Chọn B

Ta có $y' = 6x^2 - 2x,\ y'' = 12x - 2.;\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$.

$y''(0) = -2 < 0 \Rightarrow x = 0$ là điểm cực đại của hàm số $y = 2x^3 - x^2 + 5$.

Chú ý: phân biệt điểm cực đại của hàm số là $x_{cđ}$, còn điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(x_{cđ}; y_{cđ})$.

Câu 6: Chọn A

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Nhận thấy $(x+2)^2 > 0\ \forall x \neq -2 \Rightarrow f'(x)$ không đổi dấu khi qua nghiệm $x = -2$ nên $x = -2$ không phải là điểm cực trị hàm số.

Ngoài ra $f'(x)$ cùng dấu với tam thức bậc hai $x(x-1) = x^2 - x$ nên suy ra $x = 0; x = 1$ là hai điểm cực trị của hàm số.

Câu 7: Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ta có $y' = \dfrac{-3}{(x+1)^2} < 0\ \ \forall x \in D$.

Do y' không đổi dấu nên hàm số không có cực trị.

Câu 8: Chọn D

Cách 1: Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$, $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.

Ta có $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3}\right).f'(x) - 8x - 2$.

Đồ thị hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị A và B nên $f'(x_A) = f'(x_B) = 0$.

Suy ra $\begin{cases} y_A = f(x_A) = -8x_A - 2 \\ y_B = f(x_B) = -8x_B - 2 \end{cases}$

Do đó phương trình đường thẳng AB là $y = -8x - 2$.

Khi đó ta có $N(1;-10)$ thuộc đường thẳng AB.

Cách 2: Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$,

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Suy ra tọa độ hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(3;-26)$ và $B(-1;6)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}(-4;32)$ cùng phương với $\vec{u}(-1;8)$.

Phương trình đường thẳng AB đi qua $B(-1;6)$ và nhận $\vec{u}(-1;8)$ làm vecto chỉ phương là $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 6 + 8t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

Khi đó ta có $N(1;-10)$ thuộc đường thẳng AB.

Câu 9: Chọn A

Tập xác định : $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=4x^3-6x^2+2x$; $y'=0\Leftrightarrow 2x\left(2x^2-3x+1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		$\dfrac{1}{2}$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có điểm cực đại của hàm số đã cho là $x=\dfrac{1}{2}$.

Câu 10: Chọn C

$y'=2.f'\left(2x+1\right)=2\left(2x+1-2\right)\left(2x+1-3\right)^2=2\left(2x-1\right)\left(2x-2\right)^2$.

$y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x=1 \end{array}\right.$. Nên hàm số có một cực trị.

Câu 11: Chọn D

$y'=4x^3-4x\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=1 \\ x=1 \Rightarrow y=0 \\ x=-1 \Rightarrow y=0 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$		$+$		$-$		$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số có 3 điểm cực trị, đồng biến trên khoảng $\left(-1;0\right)$; $\left(1;+\infty\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-1\right)$; $\left(0;1\right)$. Vậy mệnh đề 1, 2, 4 đúng.

Câu 12: Chọn A

Ta có: $f\left(x\right)=C_{2019}^0+C_{2019}^1x+C_{2019}^2x^2+...+C_{2019}^{2019}x^{2019}=\left(1+x\right)^{2019}$

$\Rightarrow f'\left(x\right)=2019.(1+x)^{2018}\Rightarrow f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=-1$

Vì $x=-1$ là nghiệm bội chẵn nên $x=-1$ không phải là điểm cực trị của hàm số.

Câu 13: Chọn D

Ta có: $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$; $y'' = 6x \Rightarrow y''(1) = 6 > 0; y''(-1) = -6 < 0$.

Vậy điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(1;0)$.

Câu 14: Chọn D

Áp dụng khai triển nhị thức Niu tơn, ta có:

$f(x) = 1 + C_{10}^1 x + C_{10}^2 x^2 + ... + C_{10}^{10} x^{10} = (1+x)^{10} \Rightarrow f'(x) = 10(1+x)^9$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đã cho có duy nhất một điểm cực trị $x = -1$.

Câu 15: Chọn C

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1)(x-2)(3^x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Vậy hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Câu 16: Chọn C

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 9)(x^2 - 3x)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-3)^3(x+3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 3 \\ x = 0 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-3)$	$\searrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị cực đại của hàm số là $T = f(-3)$.

Câu 17: Chọn C

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 9)(x^2 - 3x)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-3)^3(x+3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 3 \\ x = 0 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-3)$	$\searrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị cực đại của hàm số là $T = f(-3)$.

Câu 18: Chọn C

Cách 1:

Ta có $y' = 4x^3 - 4x$. Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$.

Suy ra đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$ có ba điểm cực trị là $A(0;4)$, $B(1;3)$ và $C(-1;3)$.

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, ta có $BC.\overrightarrow{IA} + AC.\overrightarrow{IB} + AB.\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Mà $AB = AC = \sqrt{2}$ và $BC = 2$ nên suy ra $I\left(0; \dfrac{4+3\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)$.

Phương trình đường thẳng BC là $y = 3$.

Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là $r = d(I, BC) = \sqrt{2} - 1$.

Cách 2:

Áp dụng công thức tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC ta có:

$$r = \frac{S_{ABC}}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = \sqrt{2} - 1$$

trong đó $a = BC = 2$; $b = c = AB = AC = \sqrt{2}$; $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

Cách 3:

Áp dụng công thức tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC ta có:

$r = (p-a)\tan\dfrac{A}{2} = \sqrt{2} - 1$ với $\cos A = \dfrac{(-2)^3 + 8.1}{(-2)^3 - 8 - 1} = 0 \Rightarrow A = 90^0$.

Câu 19: Chọn B

Ta có $y' = 4x^3 - 4x; y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$

Tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(0;1)$, $B(-1;0)$, $C(1;0)$

$\overrightarrow{AB} = (-1;-1); \overrightarrow{AC} = (1;-1) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ AB = AC = \sqrt{2} \end{array}\right.$.

Suy ra ΔABC vuông cân tại A do đó $S = \dfrac{1}{2} AB.AC = 1.$

Câu 20: Chọn B

Xét hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(7m-3)x \Rightarrow y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 3(7m-3)$.

Ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + 7m - 3 = 0$. Hàm số đã cho không có cực trị

$\Leftrightarrow$ Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta'_{(2)} \le 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 1.(7m-3) \le 0 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 4 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le m \le 4$.

Do m là số nguyên nên $m \in \{1; 2; 3; 4\}$. Vậy tập S có 4 phần tử.

Câu 21: Chọn D

Do hàm số $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2; -1; 0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f'(x) = 0$ có ba nghiệm là $x = -2; x = -1; x = 0$.

Đặt $g(x) = f(x^2 - 2x) \Rightarrow g'(x) = (2x-2).f'(x^2-2x)$. Vì $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $g'(x)$ cũng liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó những điểm $g'(x)$ có thể đổi dấu thuộc tập các điểm thỏa mãn

$$\left[\begin{array}{l} 2x-2=0 \\ x^2-2x=-2 \\ x^2-2x=-1 \\ x^2-2x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Ba nghiệm trên đều là nghiệm đơn hoặc bội lẻ nên hàm số $g(x)$ có ba điểm cực trị.

Câu 22: Chọn A

Hàm số $f(x)$ có TXĐ là $\mathbb{R}$, có một nguyên hàm là hàm số $F(x) \Rightarrow F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1)e^{3x} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Ta có bảng xét dấu $F'(x)$ như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$F'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng trên, ta thấy hàm số $F(x)$ có một điểm cực trị.

Câu 23: Chọn D

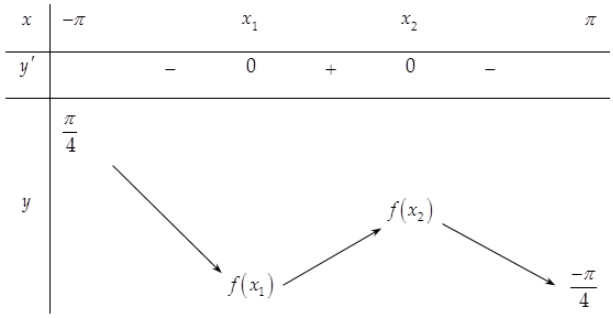
Xét hàm số $y = f(x) = \sin x - \frac{x}{4}$ với $x \in (-\pi; \pi)$.

Ta có $f'(x) = \cos x - \frac{1}{4}$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \\ x = x_2 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \end{array}\right.$.

$f(x_1) = \sin x_1 - \frac{x_1}{4} = -\frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{x_1}{4} < -\frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{\pi}{8} < 0$.

$f(x_2) = \sin x_2 - \frac{x_2}{4} = \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{x_2}{4} > \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{\pi}{8} > 0$.

Bảng biến thiên



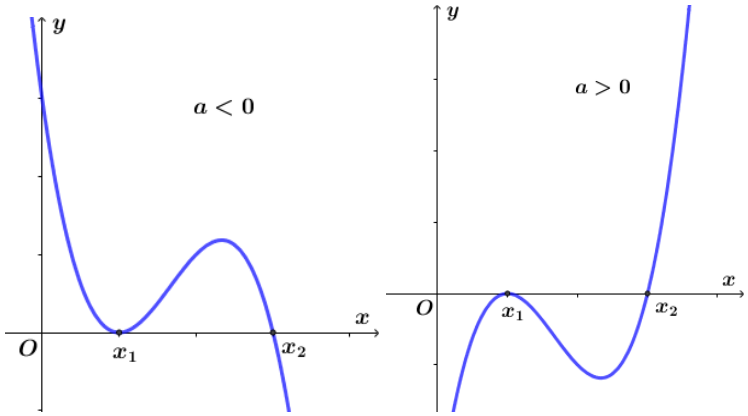
Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số có hai điểm cực trị và đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt khác x_1, x_2. Suy ra hàm số $y = \left|\sin x - \frac{x}{4}\right|$, với $x \in (-\pi;\pi)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 24: Chọn D

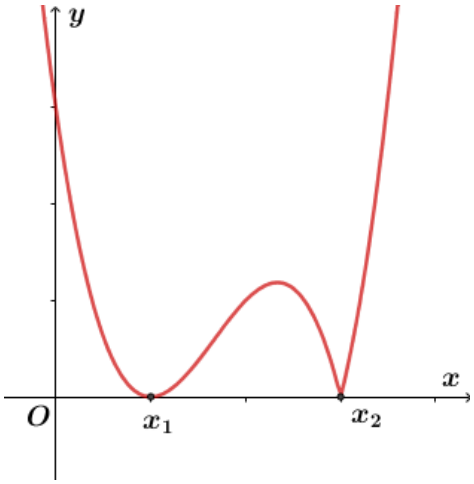
Phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$, $a\neq 0$ là sự tương giao của đồ thị hàm số $ax^3+bx^2+cx+d=0$, $a\neq 0$ và trục hoành.

Do phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$, $a\neq 0$ có đúng hai nghiệm thực nên phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ có thể viết dưới dạng $a(x-x_1)^2(x-x_2)=0$ với x_1, x_2 là hai nghiệm thực của phương trình . Khi đó đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ tiếp xúc trục hoành tại điểm có hoành độ x_1 và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ x_2.

Đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ ứng với từng trường hợp $a>0$ và $a<0$:



Đồ thị hàm số $y=\left|ax^3+bx^2+cx+d\right|\ (a\neq 0)$ tương ứng là



Vậy đồ thị hàm số $y=\left|ax^3+bx^2+cx+d\right|\ (a\neq 0)$ có tất cả 3 điểm cực trị.

Câu 25: Chọn D

Gọi $F(t)$ là nguyên hàm của hàm số $y=\dfrac{2t}{1+t^2}$.

Khi đó: $f(x)=F(t)\Big|_{2x}^{x^2}=F(x^2)-F(2x)\Rightarrow f'(x)=2x.F'(x^2)-2F'(2x)$

$=2x.\dfrac{2x^2}{1+x^4}-2.\dfrac{4x}{1+4x^2}\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{8x^5+4x^3-8x}{(1+x^4)(1+4x^2)}$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow 8x^5+4x^3-8x=0\Leftrightarrow 4x(2x^4+x^2-2)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}\\x^2=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{4}<0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=x_1=\dfrac{\sqrt{-1+\sqrt{17}}}{2}\\x=x_2=-\dfrac{\sqrt{-1+\sqrt{17}}}{2}\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		x_2		0		x_1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra: Hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 26: Chọn D

Quan sát đồ thị $f(x)$, ta thấy hàm số có hai điểm cực trị $x=-2;x=0$ vì vậy $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ có hai nghiệm $x=-2;x=0$ nên $f'(x)=3a(x+2)x$.

Ta có:

$y'=\left[f(-2x^2+4x)\right]'=(-4x+4)f'(-2x^2+2x)=(-4x+4)(-2x^2+4x)$

$=3a(-4x+4)(-2x^2+4x)(-2x^2+4x+2)$

$\Leftrightarrow y'=-48ax(x-2)(x-1)(x^2-2x-1)$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\\x=1+\sqrt{2}\\x=1-\sqrt{2}\end{array}\right.$ và dấu của y' đổi khi x qua mỗi nghiệm trên.

Vậy hàm số đã cho có 5 điểm cực trị.

Câu 27: Chọn B

TXĐ: $D=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

$y'=x-3+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^3-3x^2+1}{x^2}$

$$y'=0\Leftrightarrow x^3-3x^2+1=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1\approx 2,8794\\ x_2\approx 0,6527\\ x_3\approx -0,5321\end{cases}.$$

$\Rightarrow$ Tọa độ các điểm cực trị: $A\approx(2,879;-4,84), B\approx(0,653;-3,277), C\approx(-0,532;3,617)$.

Gọi $(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0\ (1)$ là đường tròn đi qua ba điểm cực trị.

Thay tọa độ ba điểm A,B,C vào (1) ta được hệ phương trình 3 ẩn sau:

$$\begin{cases}5,758a-9,68b-c\approx 31,71\\ 1,306a-6,554b-c\approx 11,17\\ -1,064a+7,234b-c\approx 13,37\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\approx 5,374\\ b\approx 1,0833\\ c\approx -11,25\end{cases}$$

$\Rightarrow R\approx\sqrt{a^2+b^2-c}\approx\sqrt{41,3}\approx 6,4$

Câu 28: Chọn D

Ta có $f'(x)=-x^3+3x^2+3x-3\Rightarrow y'=f''(x)-2x=-3x^2+4x+3$.

$y'=0\Leftrightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{13}}{3}$;

$y''=-6x+4$; $y''\left(\dfrac{2+\sqrt{13}}{3}\right)=-2\sqrt{13}<0$; $y''\left(\dfrac{2-\sqrt{13}}{3}\right)=2\sqrt{13}>0$

Suy ra hàm số có 1 điểm cực tiểu.

Câu 29: Chọn A

Từ đồ thị ta có: $\begin{cases}\dfrac{a}{c}<0\\ -\dfrac{d}{c}<0\\ \dfrac{b}{d}>0\\ -\dfrac{b}{a}>0\\ a.d-b.c<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a}{c}<0 & (1)\\ \dfrac{d}{c}>0 & (2)\\ \dfrac{b}{d}>0 & (3)\\ \dfrac{b}{a}<0 & (4)\\ a.d-b.c<0 & (5)\end{cases}$

A. Hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị trái dấu

$\Leftrightarrow y'=3ax^2+2bx+c$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow 3a.c<0\Leftrightarrow a.c<0$. Đúng với (1)

B. Đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ cắt trục tung tại điểm có tung độ dương.

Sai Suy ra $d>0$ Chưa đủ để kết luận $\dfrac{d}{c}>0$ vì ở đây $c>0$ hoặc $c<0$ ví dụ như hàm số

$y=\dfrac{-x-2}{-3x-5}; y=\dfrac{x+2}{3x+5}$ rõ ràng $\dfrac{-2}{-5}=\dfrac{2}{5}>0$.

C. Đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị nằm bên phải trục tung.

Sai vì

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{y'} > 0 \\ -\dfrac{2b}{3a} > 0 \\ \dfrac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{y'} > 0 \\ \dfrac{b}{a} < 0 \\ \dfrac{c}{a} > 0 \end{cases}$$ **Trái với** (1)

D. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ nằm bên trái trục tung.

Sai vì

Hoành độ tâm đối xứng là nghiệm của $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{3a}$

Yêu cầu của đề hoành độ tâm đối xứng âm nên $-\dfrac{b}{3a} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{b}{a} > 0$ Trái với (3)

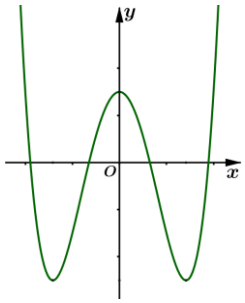
Câu 30: Chọn D

Xét hàm số $g(x) = f(x) - 2018 = ax^4 + bx^2 + c - 2018$.

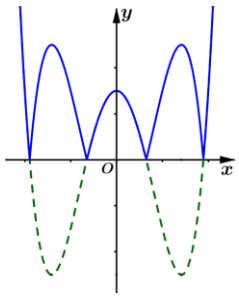
Ta có $\begin{cases} a > 0 \\ c > 2018 \\ a + b + c < 2018 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \\ c > 2018 \end{cases} \Rightarrow a.b < 0 \Rightarrow$ hàm số $y = g(x)$ là hàm trùng phương có 3 điểm cực trị.

Mà $g(0) = c - 2018 \Rightarrow g(0) > 0$, $g(1) = a + b + c - 2018 < 0 \Rightarrow g(x_{CT}) \le g(1) < 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = g(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có dáng điệu như sau



Từ đồ thị $y = g(x)$, ta giữ nguyên phần phía trên trục Ox, phần dưới trục Ox ta lấy đối xứng qua trục Ox, ta được đồ thị hàm số $y = |g(x)|$.



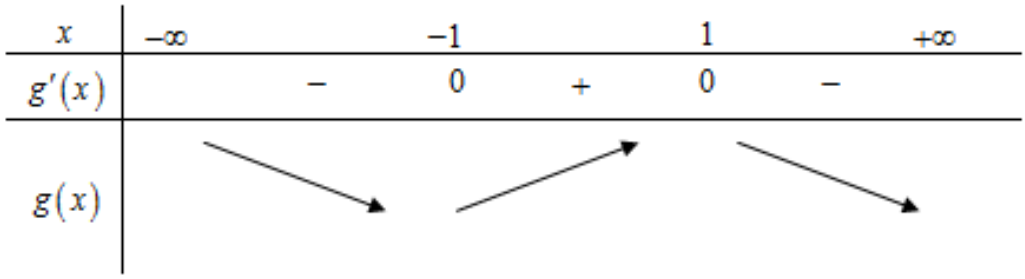
Từ đó ta nhận thấy đồ thị $y = |g(x)|$ có 7 điểm cực trị.

Câu 31: Chọn D

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1} - m$, TXĐ: $\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x)=\dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên



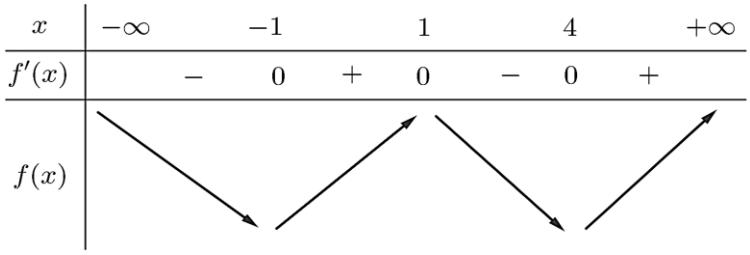
Từ bảng biến thiên ta có hàm số $y=g(x)$ luôn có hai điểm cực trị.

Xét phương trình $g(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x}{x^2+1}-m=0\Leftrightarrow mx^2-x+m=0$, phương trình này có nhiều nhất hai nghiệm.

Vậy hàm số $f(x)$ có nhiều nhất bốn điểm cực trị.

Câu 32: Chọn B

Từ giả thiết, ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

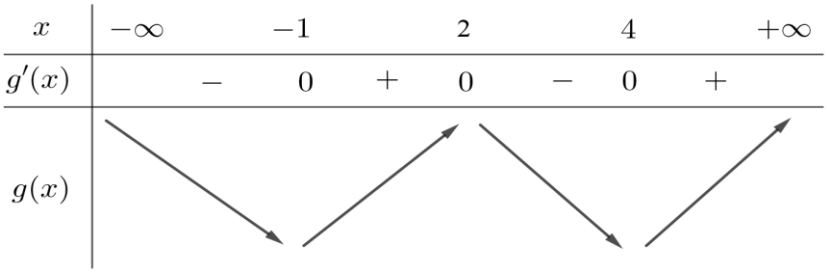


Ta có $g(x)=f(3-x)\Rightarrow g'(x)=-f'(3-x)$.

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta có

$$g'(x)\geq 0\Leftrightarrow f'(3-x)\leq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3-x\leq -1\\1\leq 3-x\leq 4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geq 4\\-1\leq x\leq 2\end{array}\right.$$

Như thế ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$



Từ bảng biến thiên, ta nhận thấy hàm số $g(x)$ có một điểm cực đại.

Câu 33: Chọn D

Có $y'=-(12x^3-24x).f'(-x^4+4x^2-6)+12x^5-12x^3-24x$

$= -12x(x^2-2).f'(-x^4+4x^2-6)+12x\left(x^4-x^2-2\right)$

$= -12x(x^2-2).\left(f'(-x^4+4x^2-6)-\left(x^2+1\right)\right).$

Khi đó $y'=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ f'(-x^4+4x^2-6)-(x^2+1)=0 \\ x^2-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \\ f'(-x^4+4x^2-6)=x^2+1 \end{cases}$.

Ta có $-x^4+4x^2-6=-(x^2-2)^2-2\le -2,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó $f'(-x^4+4x^2-6)\le f'\left(-2\right)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Mà $x^2+1\ge 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó phương trình $f'(-x^4+4x^2-6)=x^2+1$ vô nghiệm.

Hàm số $y=3f(-x^4+4x^2-6)+2x^6-3x^4-12x^2$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $y=3f(-x^4+4x^2-6)+2x^6-3x^4-12x^2$ có 2 điểm cực tiểu.

DẠNG 2 Cực trị hàm tổng và hàm hợp

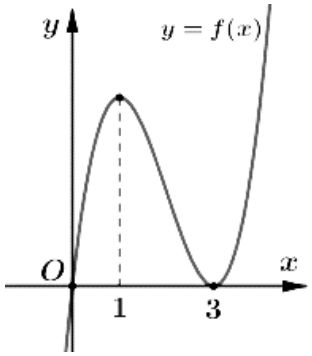
Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x+1-|x-1|\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 8. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 10.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ biết $f(1)>1$ và có đồ thị như hình vẽ dưới.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-2020;2021)$ để hàm số sau đây có tất cả 9 điểm cực trị $g(x)=\left|f^3(x)+\frac{3}{2}f^2(x)+m\right|$.

A. 1 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 4

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x		1		2		3		4	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	3		1		2		0	$+\infty$

Hàm số $y=2\left[f(x)\right]^3-9\left[f(x)\right]^2+12f(x)+2021$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 5. **B.** 10. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 4: Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$		3		-1		3		$-\infty$

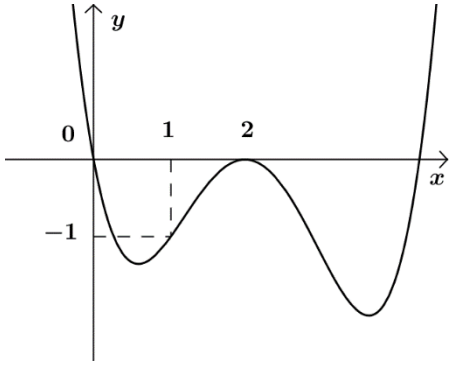
Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=\left[f(x-1)\right]^2+2021$ là

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 7.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\sqrt{3}\right\}$, thỏa mãn $1-x^3=2x^2f(x)+xf^2(x)-f'(x)$ và $f(1)=0$. Hàm số $g(x)=\left[f(2x-1)\right]^2$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 6: Cho hàm số bậc năm $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



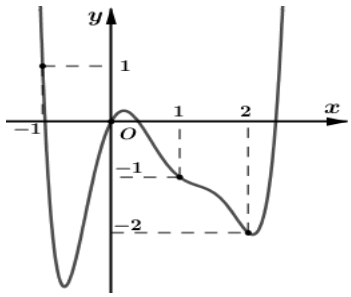
Tìm tất cả các giá trị của m để số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^2-3x+m\right)$ là 5.

A. $(2;+\infty)$. **B.** $\left(-\infty;\frac{17}{4}\right)$. **C.** $\left(-\infty;\frac{9}{4}\right)$. **D.** $\left(\frac{9}{4};\frac{17}{4}\right)$.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=(x-12)^{2020}\left(x^2-2x\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-2020;2020)$ để hàm số $y=f\left(x^2-2020x+2021m\right)$ có 3 điểm cực trị dương.

A. 4038. **B.** 2021. **C.** 2020. **D.** 2019.

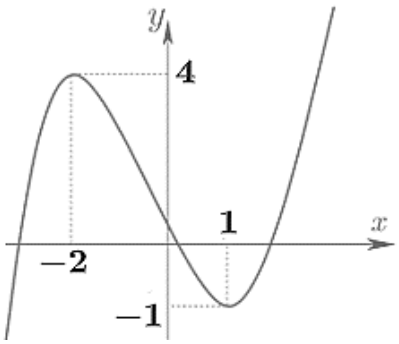
Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $g(-2)>0$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|g(x)\right|=\left|2f(x+2)+(x+1)(x+3)+\log_2 2021\right|$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số $y=f\left(\left|f^2(x)-2f(x)-m\right|\right)$ có 17 cực trị.

A. 4. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 6.

Câu 10: Cho $f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0)=0$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$\frac{13}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $g(x)=\left|f\left(x^3\right)+6x\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 3

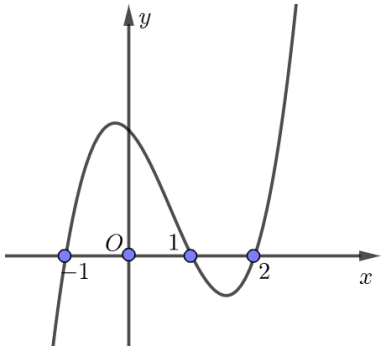
Câu 11: Cho $f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0)=0$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\frac{7}{6}$	$\searrow$	$-\infty$

Tìm m nguyên để hàm số $g(x)=\left|f\left(x^3\right)+3m^2x+m-1\right|$ có nhiều điểm cực trị nhất có thể. Thì giá trị m nhỏ nhất thỏa mãn thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;0)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{2};3\right)$.

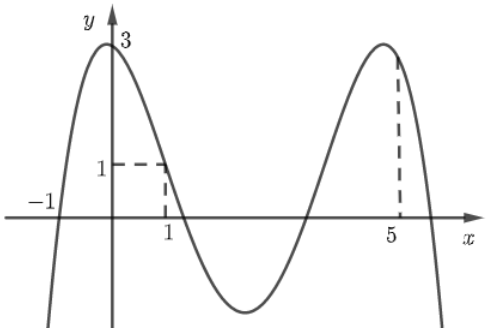
Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Hàm số $g(x)=\left(|x|+\left|x^2-1\right|\right)$ có bao nhiêu điểm cực đại

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 7.

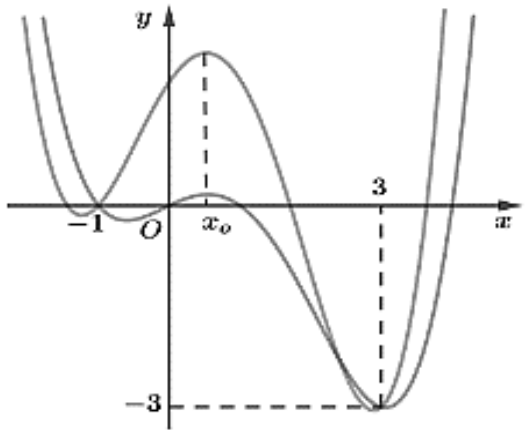
Câu 13: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$, có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=8f\left(x^3-3x+3\right)-\left(2x^6-12x^4+16x^3+18x^2-48x+1\right)$ là

A. 5 . **B.** 3 . **C.** 7 . **D.** 9 .

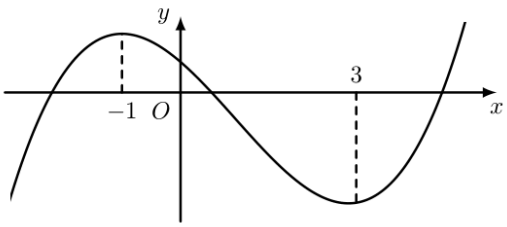
Câu 14: Cho hai hàm số bậc bốn $y=f(x)$ và $y=g(x)$ có các đồ thị như hình dưới đây.



Số điểm cực trị của hàm số $h(x)=f^2(x)+g^2(x)-2f(x)g(x)$ là

A. 5 . **B.** 4 . **C.** 6 . **D.** 3 .

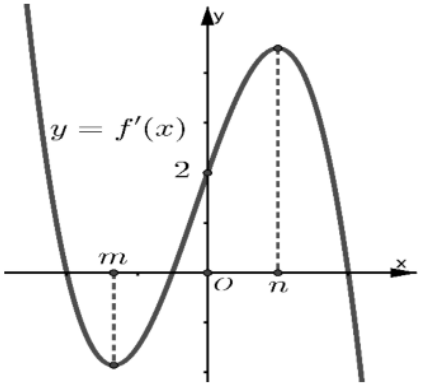
Câu 15: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(\left(x-1\right)^2+m\right)$ có 3 điểm cực trị. Tổng các phần tử của S là

A. 2. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,(a\neq 0)$ có đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ.



Biết rằng $e>n$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f'\left(f(x)-2x\right)$ bằng

A. 7 . **B.** 10 . **C.** 14 . **D.** 6 .

Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$ có bẳng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Số điểm cực đại của hàm số $g(x)=\left[f\left(2x^2+x\right)\right]^2$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

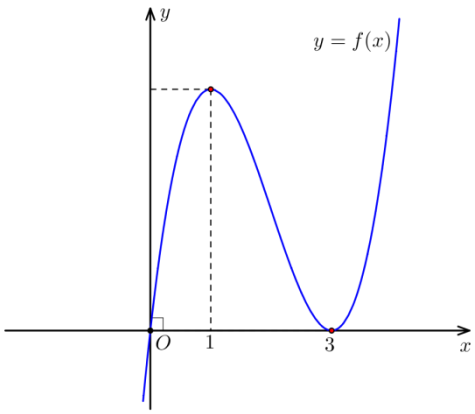
Câu 18: Cho hàm số bậc bốn trùng phương $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y=\dfrac{1}{x^4}\left[f(x)-1\right]^4$ là

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 19: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $h\left(x\right)=\left|f^2\left(x\right)+f\left(x\right)+m\right|$ có đúng 3 cực trị.

A. $m\ge\dfrac{1}{4}$. **B.** $m\le 1$. **C.** $m<1$. **D.** $m>\dfrac{1}{4}$.

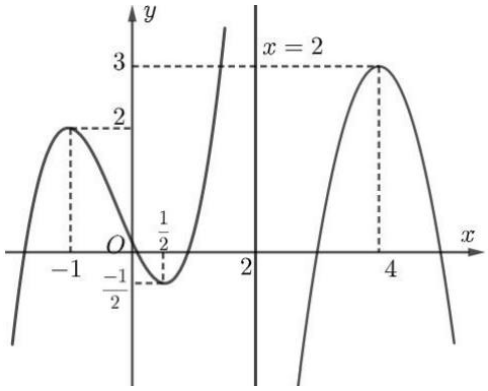
Câu 20: Cho hàm số bậc bốn $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\dfrac{(x-2)^4}{\left[f(x+1)\right]^3}$ là

A. 7 . **B.** 4 . **C.** 5 . **D.** 6 .

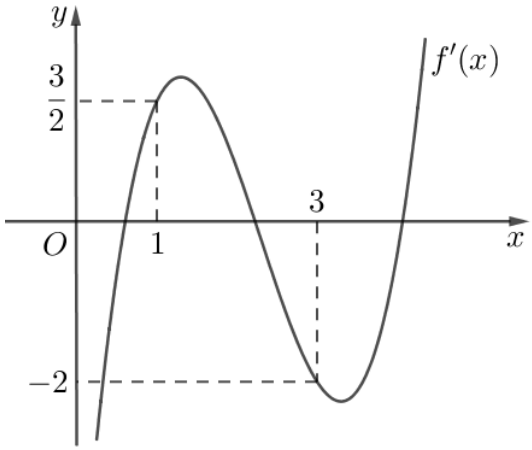
Câu 21: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(|2x-1|+2\right)$ là

A. 5 . **B.** 4 . **C.** 2 . **D.** 3 .

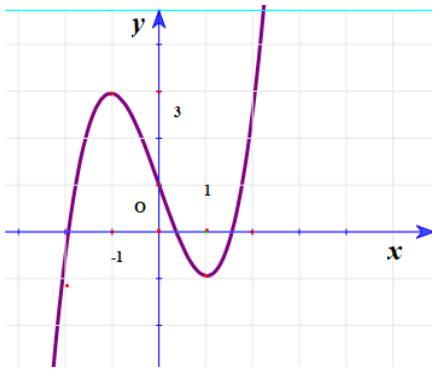
Câu 22: Cho hàm đa thức bậc bốn $y=f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f\left(x^4\right)-2x^3+1$ là

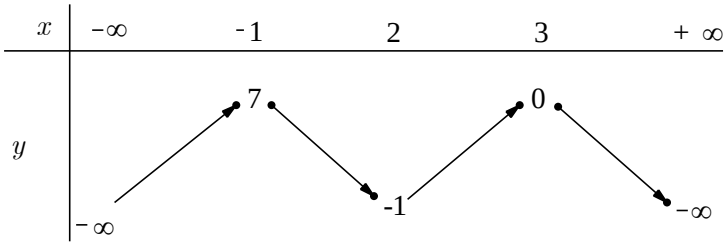
A. 3 . **B.** 6 . **C.** 4 . **D.** 5 .

Câu 23: Cho hàm bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y=\left[xf(x-1)\right]^2$ là



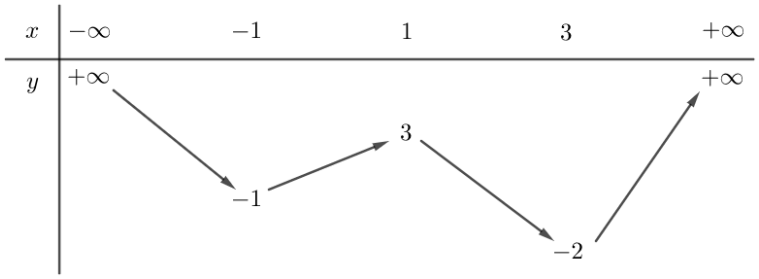
A. 9 . **B.** 7 . **C.** 6 . **D.** 5 .

Câu 24: Cho bảng biến thiên của hàm số $f(2x-1)$ như hình vẽ bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $f\left(4-3\sqrt{4x-x^2}\right)$ tương ứng là



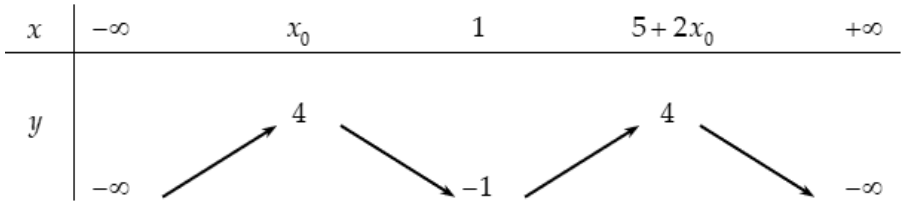
A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 7

Câu 25: Cho bảng biến thiên của hàm số $f(3-2x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi hàm số $f\left(x^2-2x\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



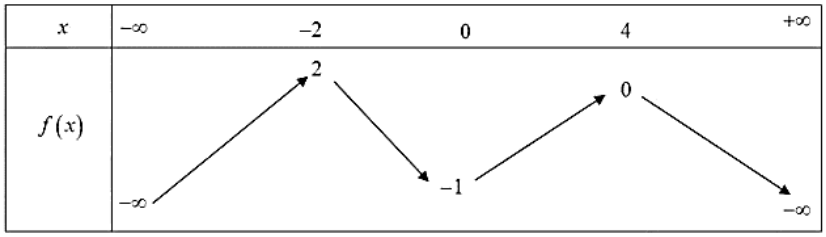
A. $(-2;0)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Câu 26: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị là $x=a; x=8-a$. Bên dưới cho bảng biến thiên của hàm số $f\left(x^2-2x+3\right)$. Số điểm cực trị của hàm số $f\left(x^3-3x^2+1\right)$ là



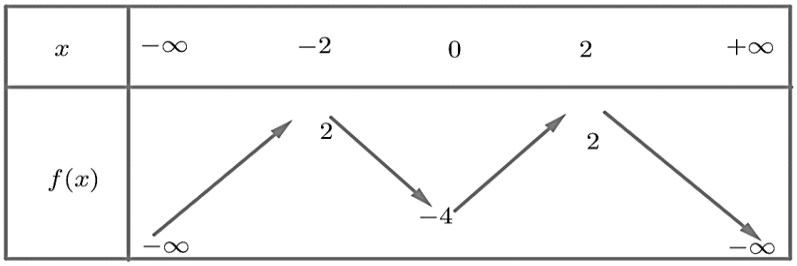
A. 3. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 6

Câu 27: Cho bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^4.\left[f(x)\right]^2$ là:



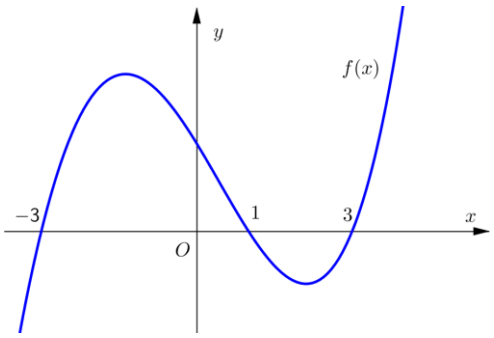
A. 9. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 7

Câu 28: Cho bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^2.\left[f(x+2)\right]^6$ là



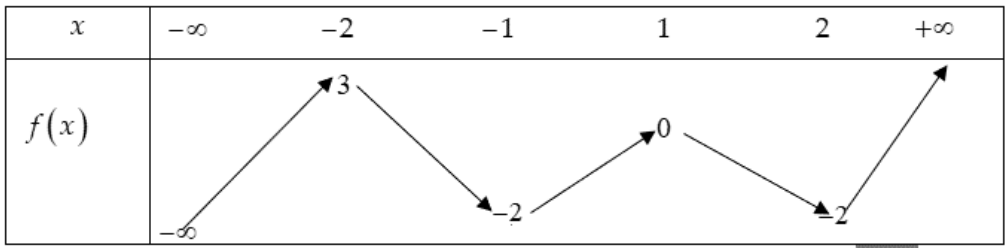
A. 5 . **B.** 12 . **C.** 7 . **D.** 9

Câu 29: Cho đồ thị hàm đa thức $y=f(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $g(x)=f(x).f(2x+1)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



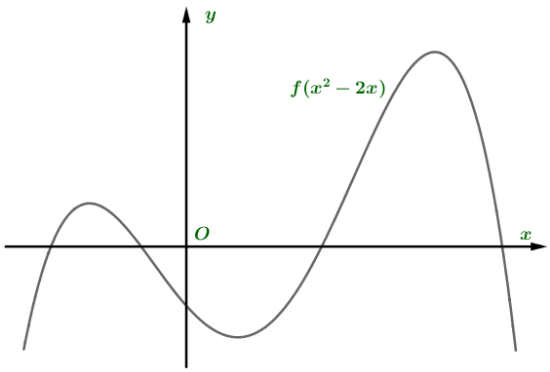
A. 5 . **B.** 6 . **C.** 7 . **D.** 9

Câu 30: Cho bảng biến thiên của hàm đa thức $f(x)$ như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=(x-2)^3\left[f(x-1)\right]^2$ là:



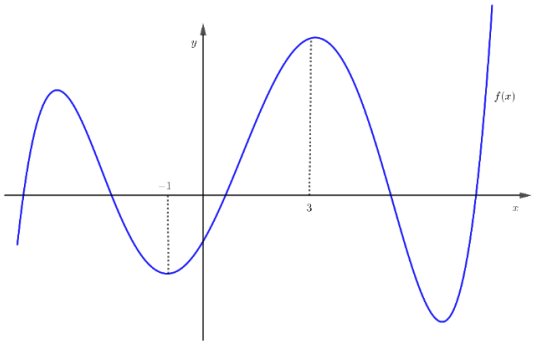
A. 8 . **B.** 5 . **C.** 7 . **D.** 6 .

Câu 31: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y=f(x^2-x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y=f(x^2-2mx-|x-m|+m^2)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị.



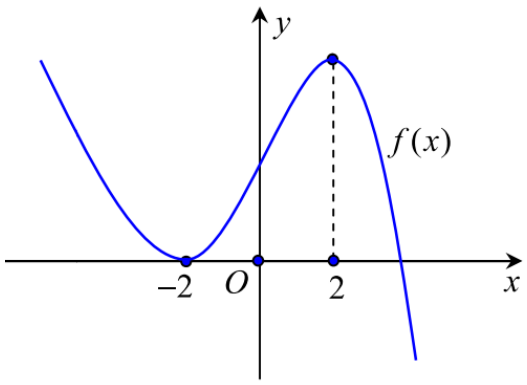
A. 7 . **B.** 3 . **C.** 5 . **D.** 9

Câu 32: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $f(x)$ được cho như hình vẽ. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số $m\in[-21;21]$ để hàm số $y=f\left(-|x+2021m|-2m+1\right)$ có đúng 5 điểm cực trị. Số phần tử của S là:



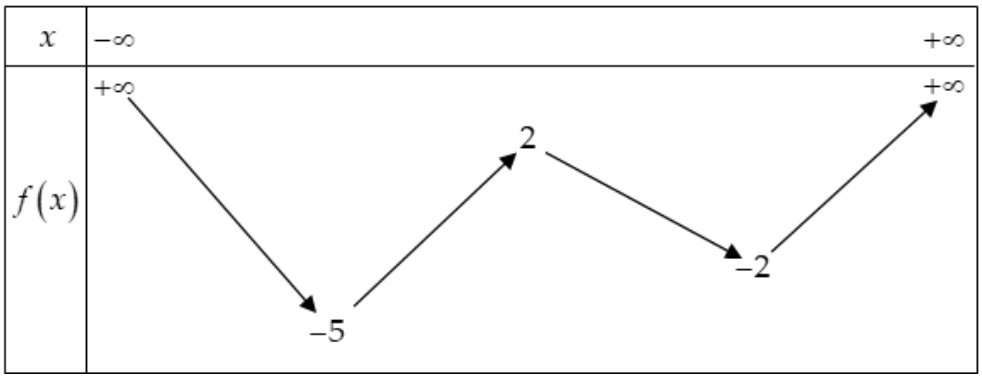
A. 5. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 33: Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=f\left(x^3-mx^2-5x+4m\right)$ có 6 điểm cực trị?



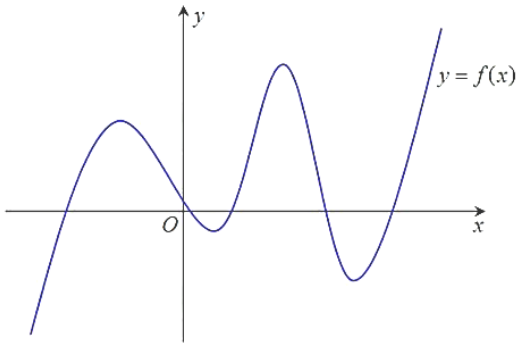
A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 34: Cho bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left[f(x)-m\right]^3-3f(x)$ có đúng 9 điểm cực trị?



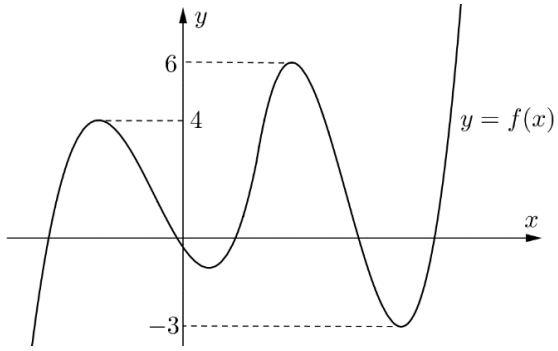
A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 3.

Câu 35: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục xác định trên $\mathbb{R}$, có đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên dưới. gọi S là tập hợp chứa các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left(f(x)\right)^3-m.\left(f(x)\right)^2-(2m-3)f(x)+2021$ có đúng 4 điểm cực trị. Số phần tử của tập S là:



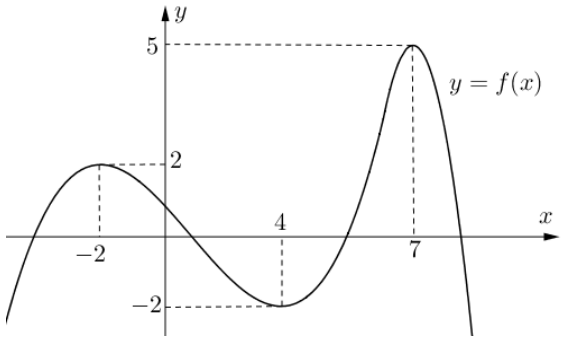
A. 11. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 9.

Câu 36: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên R, đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ dưới. gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số $m\in[-20;20]$ để hàm số $y=\left(f(x)\right)^2-2\left(m+2\right)f(x)-3m+12$ có đúng 5 điểm cực trị. Số phần tử của tập S là:



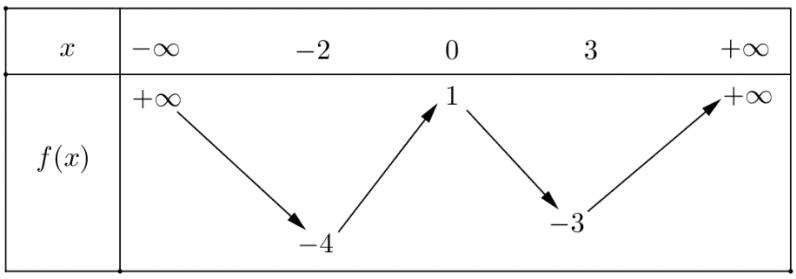
A. 35 **B.** 32 **C.** 33 **D.** 34

Câu 37: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên R, đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ dưới. gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số $m\in[-20;20]$ để hàm số $y=\left(f(x)+m\right)^2$ có đúng 5 điểm cực trị. Số phần tử của tập S là:



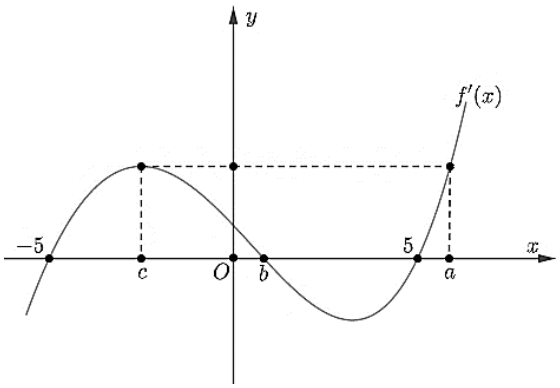
A. 20 **B.** 22 **C.** 21 **D.** 19

Câu 38: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên R và có bảng biến thiên của hàm số như hình vẽ. Hàm số $y=\left[f(x)\right]^3+6\left[f(x)\right]^2+2021$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?



A. 3 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 7

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Biết rằng $f(10)=30f(-6)=30f(5)=30$. Hỏi hàm số $y=f\left(f(x)-3x+9\right)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



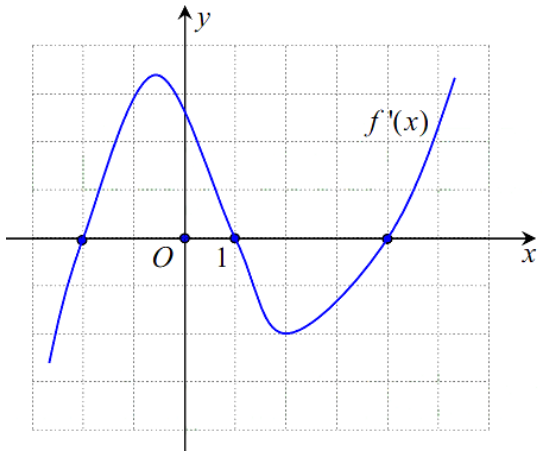
A. 7. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 9

Câu 40: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau. Hỏi hàm số $y=f\left(x^3-3x^2+1\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

x	$-\infty$		-3		0		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-6	↗	-2	↘	$-\infty$

A. 7. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 9

Câu 41: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f\left(2^{x^3-3x+2}+m\right)$ có đúng 9 điểm cực trị. Số phần tử của tập S là:



A. 8. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 10

Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên toàn $\mathbb{R}$. Biết rằng biểu thức đạo hàm $f'(x)=\left(x^2-5x+1-\frac{m}{4}\right)\left(x^2-4x+\frac{m}{4}+8\right)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f\left(|x|\right)$ có 5 điểm cực trị. Số phần tử của tập S là

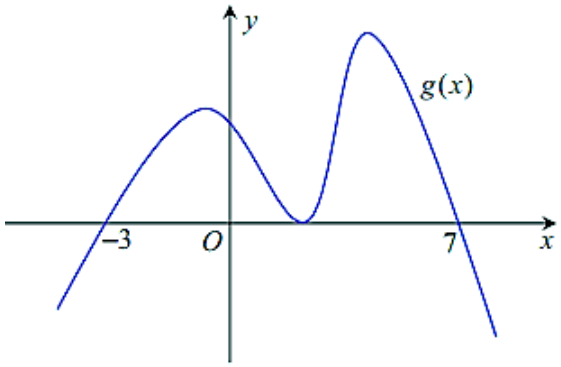
A. 31. **B.** 35. **C.** 33. **D.** 37

Câu 43: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá tị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f^3(x)-3mf(x)+11-2m$ có đúng 9 điểm cực trị?

x	$-\infty$		-3		0		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	-3	↗	1	↘	$-\infty$

A. 3. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 9

Câu 44: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Đặt $f(x)=\int\limits_{2018}^{x^2-2x} g(t)dt$. Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ tương ứng là:



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5

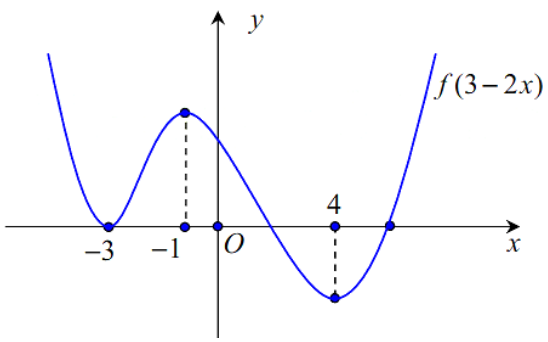
Câu 45: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x+1$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-60;60]$ để phương trình $f(x^2-2mx+1)$ có đúng 3 điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1

Câu 46: Cho hàm số $f(x)=|x^3-3mx^2+3(2m-1)x-m|$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2022;2022]$ để hàm số $f(x)$ có đúng 5 điểm cực trị nằm về phía bên phải của trục tung Oy?

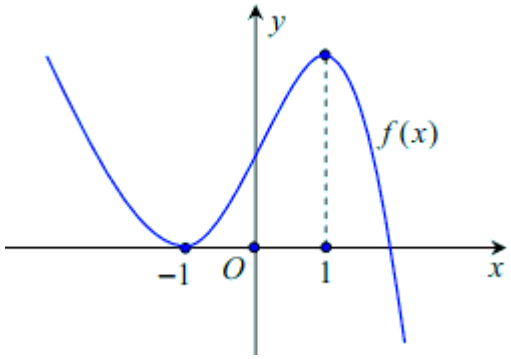
A. 2019. **B.** 2020. **C.** 2021. **D.** 2022

Câu 47: Cho hàm số $y=f(3-2x)$ như hình vẽ. Biết rằng tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x^2-2m|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị là $(a;b]$. Giá trị của biểu thức $P=2(a^2+b^2)$ là:



A. 5. **B.** 10. **C.** 15. **D.** 20

Câu 48: Cho hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f\left(x^3-mx^2-2x+m\right)$ có đúng 6 điểm cực trị?



A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2

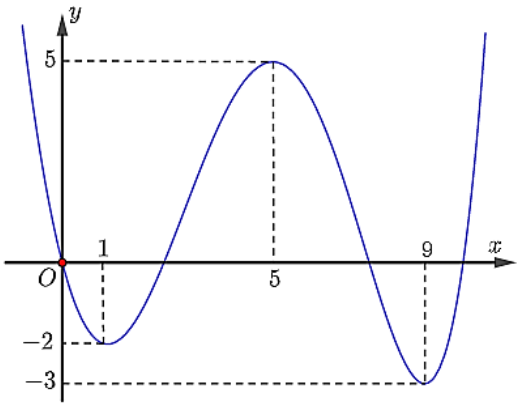
Câu 49: Cho hàm số bậc ba có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	-1	↗	$+\infty$

Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(x^3-3\left|x^2-1\right|+m\right)$ có 10 điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1

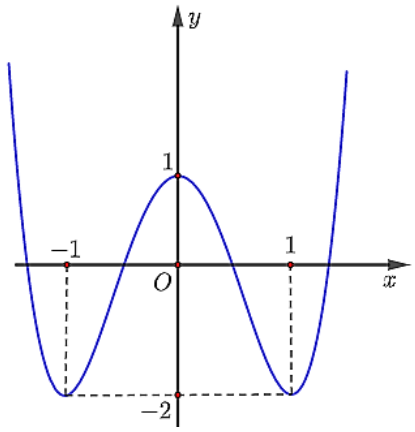
Câu 50: Cho hàm số bậc bốn có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(\left|f^2(x)-2f(x)-m\right|\right)$ có 51 điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1

Câu 51: Cho hàm số bậc bốn có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^2\left[f\left(x^2-1\right)\right]^3$ là

A. 5 . **B.** 7 . **C.** 9 . **D.** 1

Câu 52: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		2		3		$+\infty$
$u'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	
$u(x)$	-∞	↗		↘		↗		↘		↗		↘	
					0				-3		2		-∞

Số điểm cực đại của hàm số $g(x)=\left|f\left(\left|x^2-8x+7\right|+x^2-3\right)\right|$ là:

A. 6 . **B.** 7 . **C.** 8 . **D.** 9

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.C	3.A	4.B	5.D	6.C	7.D	8.C	9.C	10.D
11.D	12.A	13.A	14.A	15.A	16.A	17.C	18.C	19.D	20.C
21.C	22.C	23.B	24.A	25.B	26.B	27.D	28.D	29.A	30.D
31.C	32.B	33.B	34.A	35.D	36.C	37.B	38.D	39.A	40.A
41.B	42.C	43.C	44.C	45.A	46.C	47.B	48.D	49.C	50.D
51.B	52.B								

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn B

Ta có: $g'(x)=\left(2x-2-\dfrac{x-1}{|x-1|}\right).f'\left(x^2-2x+1-|x-1|\right)$

$=(x-1)\left(2-\dfrac{1}{|x-1|}\right).f'\left(x^2-2x+1-|x-1|\right)=(x-1)\left(\dfrac{2|x-1|-1}{|x-1|}\right).f'\left(x^2-2x+1-|x-1|\right)$

Phương trình + $x-1=0\Leftrightarrow x=1$

Khi: $2.|x-1|-1=0\Leftrightarrow|x-1|=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}\\x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Khi: $f'\left(x^2-2x+1-|x-1|\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x+1-|x-1|=-1\\x^2-2x+1-|x-1|=0\\x^2-2x+1-|x-1|=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|x-1|^2-|x-1|+1=0\\|x-1|^2-|x-1|=0\\|x-1|^2-|x-1|-1=0\end{array}\right.$

Giải các phương trình trên ta được $\left[\begin{array}{l}|x-1|=0\\|x-1|=1\\|x-1|=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\\x=0\\x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\\x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$

$\Rightarrow g'(x)=0$ có 7 lần đổi dấu . Vậy hàm số có 7 điểm cực trị.

Câu 2: Chọn C

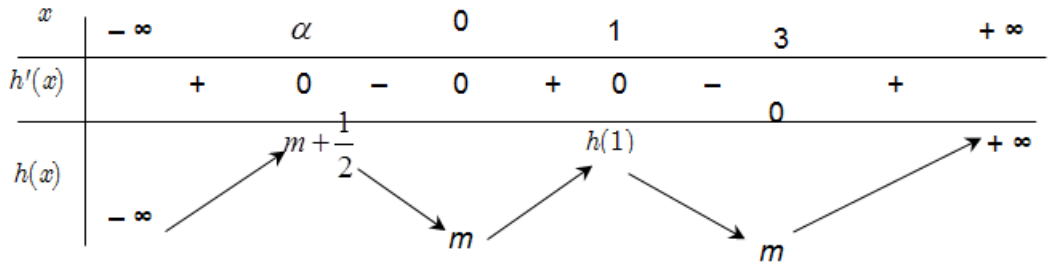
Số cực trị của hàm số $g(x)=\left|f^3(x)+\frac{3}{2}f^2(x)+m\right|$ bằng số cực trị của hàm số $h(x)=f^3(x)+\frac{3}{2}f^2(x)+m$ cộng với số giao điểm của đồ thị hàm số $h(x)=f^3(x)+\frac{3}{2}f^2(x)+m$ và đường thẳng: $y=0$.

Xét hàm số: $h(x)=f^3(x)+\frac{3}{2}f^2(x)+m$.

Có: $h'(x)=3f^2(x).f'(x)+3f(x).f'(x)=3f(x).f'(x)\left[f(x)+1\right]$

Giải phương trình: $h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\f'(x)=0\\f(x)=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\\x=1\\x=\alpha\ ,(\alpha<0)\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên



Ta có $h(1)>m+\frac{1}{2}$. Nên để đồ thị hàm số $g(x)$ có 9 điểm cực trị $\Leftrightarrow m<0<m+\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{-1}{2}<m<0$. Đối chiếu điều kiện suy ra không có giá trị nào của m.

Câu 3: **Chọn A**

Hàm số $y=g(x)=2\left[f(x)\right]^3-9\left[f(x)\right]^2+12f(x)+2021$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y'=6.f^2(x).f'(x)-18f(x).f'(x)+12f'(x)=6f'(x)\left[f^2(x)-3f(x)+2\right]$.

Giải phương trình đạo hàm: $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}f'(x)=0 & (1)\\f(x)=1 & (2)\\f(x)=2 & (3)\end{array}\right.$.

Từ (1), ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\\x=3\\x=4\end{array}\right.$.

Từ (2), ta có $f(x)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\in(-\infty;1)\\x=2\ (\text{nghiem}\ \ kep)\\x=b\in(3;4)\\x=c\in(4;+\infty)\end{array}\right.$.

Từ (3), ta có $f(x)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=d\in(a;1) \\ x=e\in(1;2) \\ x=3(nghiem\ \ kep) \\ x=u\in(c;+\infty) \end{array}\right.$.

Lập bảng xét dấu, ta có

x	$-\infty$	a	d	1	e	2	3	b	4	c	u	$+\infty$
$f'(x)$	+ |	+ |	+	0 |	0	0	| -	0	| +	|	+	
$f(x)-1$	-	0 |	|	+ |	0	|	0	- |	-	0	+ |	+	
$f(x)-2$	- |	-	0 |	0	- |	-	0	- |	-	|	-	0	+
y'	+	0	- 0	0	0	0	-	0	0	- 0	0	-	0	+

Dựa vào bảng biến thiên, ta có hàm số $y=g(x)$ có 5 điểm cực đại.

Câu 4: Chọn B

Ta có: $g'(x)=2f(x-1)f'(x-1)$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow 2f(x-1).f'(x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x-1)=0 \\ f'(x-1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x-1=a(a<-1) \\ x-1=b(-1<b<0) \\ x-1=c(0<c<1) \\ x-1=d(d>1) \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x-1=-1 \\ x-1=0 \\ x-1=1 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=1+a(x<0) \\ x=1+b(0<x<1) \\ x=1+c(1<x<2) \\ x=1+d(x>2) \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$f'(x-1)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1<-1 \\ 0<x-1<1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ 1<x<2 \end{array}\right.$$

x	$-\infty$	$1+a$	0	$1+b$	1	$1+c$	2	$1+d$	$+\infty$
$f(x-1)$	−	0 +	+	0 −	−	0 +	+	0 −	
$f'(x-1)$	+	+	0 −	−	0 +	+	0 −	−	
$g'(x)$	−	0 +	0 −	0 +	0 −	0 +	0 −	0 +	

Vậy hàm số $y=g(x)$ có 4 điểm cực tiểu.

Câu 5: Chọn D

Ta có:

$$1-x^3=2x^2f(x)+xf^2(x)-f'(x) \Leftrightarrow 1+f'(x)=x\left[x^2+2xf(x)+f^2(x)\right]=x\left[x+f(x)\right]^2$$

$$\Rightarrow \frac{1+f'(x)}{\left[x+f(x)\right]^2}=x \Rightarrow \int \frac{1+f'(x)}{\left[x+f(x)\right]^2}\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}x \Rightarrow -\frac{1}{x+f(x)}=\frac{x^2}{2}+C$$

Do $f(1)=0 \Rightarrow -\frac{1}{1+f(1)}=\frac{1}{2}+C \Rightarrow C=-\frac{3}{2}$

Khi đó: $-\dfrac{1}{x+f(x)}=\dfrac{x^2-3}{2}\Rightarrow f(x)=-\dfrac{2}{x^2-3}-x\Rightarrow f'(x)=\dfrac{4x}{\left(x^2-3\right)^2}-1$

Suy ra: $f(x)=0\Leftrightarrow -\dfrac{2}{x^2-3}=x\Leftrightarrow x^3-3x+2=0\Leftrightarrow (x-1)^2(x+2)=0\Leftrightarrow x=1\vee x=-2$

Và $f'(x)=0\Leftrightarrow 4x=\left(x^2-3\right)^2\Leftrightarrow 4x=x^4-6x^2+9\Leftrightarrow x^4-6x^2-4x+9=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\\ x=a>2\end{array}\right.$

Khi đó: $g'(x)=4f'(2x-1)f(2x-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=-2\\ 2x-1=1\\ 2x-1=a\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=-\dfrac{1}{2}\\ x=1\\ x=\dfrac{a+1}{2}>\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$

Ta có: $f(x)$ không xác định khi $x=\pm\sqrt{3}\Rightarrow g(x)$ không xác định khi $2x-1=\pm\sqrt{3}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pm\sqrt{3}+1}{2}$

Mặt khác: $g'(-1)=4.f'(-3).f(-3)=4.\left(-\dfrac{4}{3}\right).\dfrac{8}{3}<0$ và

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{-\sqrt{3}+1}{2}\right)^+}g(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to\left(\frac{-\sqrt{3}+1}{2}\right)^-}g(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^+}g(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to\left(\frac{-\sqrt{3}+1}{2}\right)^-}g(x)=+\infty,$

$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty,\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

Ta có bảng biến thiên:

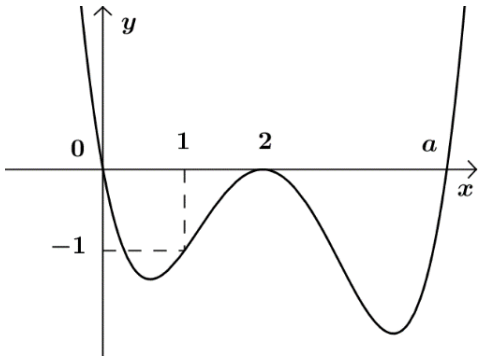
x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		$\dfrac{-\sqrt{3}+1}{2}$		1		$\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$		$\dfrac{a+1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$		$-$	0	$+$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘		↗	$+\infty$	↘		↗	$+\infty$	↘		↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $g(x)$ có 3 điểm cực tiểu

Câu 6: Chọn C

Ta có: $g'(x)=(2x-3).f'\left(x^2-3x+m\right)$. Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x-3=0 & (1)\\ f'\left(x^2-3x+m\right)=0 & (2)\end{array}\right.$.

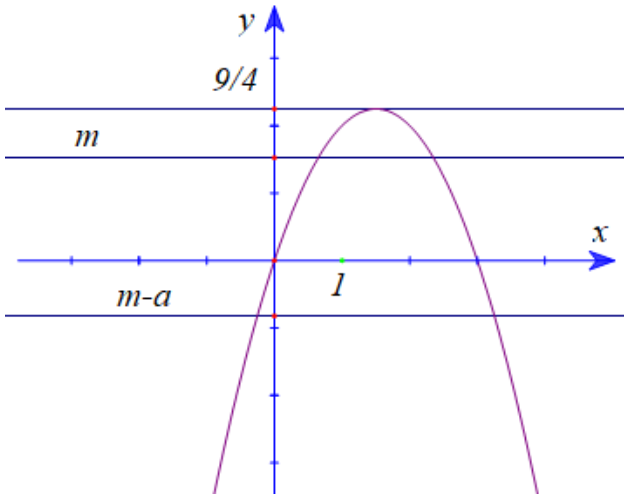
Ta có: $(1)\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$.



Và $(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-3x+m=0\\x^2-3x+m=2\\x^2-3x+m=a,\ a>2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-x^2+3x\\m-2=-x^2+3x\\m-a=-x^2+3x\end{array}\right.$.

Với $x^2-3x+m=2$ thì $g'(x)=0$ có nghiệm kép.

Xét hàm số $y=-x^2+3x$ ta có đồ thị



Do $a>2$, suy ra $m<\frac{9}{4}$ phương trình $g'(x)=0$ có 5 nghiệm đơn phân biệt nên $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $m<\frac{9}{4}$

Câu 7: Chọn D

Ta có: $y=f\left(x^2-2020x+2021m\right)\Rightarrow y'=(2x-2020)f'\left(x^2-2020x+2021m\right)$

$=(2x-2020)\left(x^2-2020x+2021m-12\right)^{2020}\left(x^2-2020x+2021m\right)\left(x^2-2020x+2021m-2\right)$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}2x-2020=0 & (1)\\x^2-2020x+2021m-12=0 & (2)\\x^2-2020x+2021m=0 & (3)\\x^2-2020x+2021m-2=0 & (4)\end{array}\right.$

Dễ thấy $(2),(3),(4)$ không có nghiệm chung, và $\left(x^2-2020x+2021m-12\right)^{2020}\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số $y=f\left(x^2-2020x+2021m\right)$ có 3 điểm cực trị dương khi hai phương trình $(3),(4)$ có 2 nghiệm trái dấu khác 1010 .

(3) có 2 nghiệm trái dấu khác 1010 $\Leftrightarrow\begin{cases}2021m<0\\1010^2-2020.1010+2021m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m<0$

(4) có 2 nghiệm trái dấu khác 1010 $\Leftrightarrow\begin{cases}2021m-2<0\\1010^2-2020.1010+2021m-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m<\frac{2}{2021}$

Vậy $m<0$ thì hàm số có 3 cực trị dương.

Do $m\in(-2020;2020)$ nên có 2019 số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

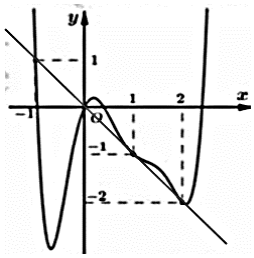
Câu 8: Chọn C

Xét hàm số $g(x)=2f(x+2)+(x+1)(x+3)+\log_2 2021$

Ta có $g'(x)=2f'(x+2)+2x+4$. Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x+2)=-(x+2)$.

Đặt $t=x+2$ ta được $f'(t)=-t$. (1)

(1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y=f'(t)$ và đường thẳng $d: y=-t$



Dựa vào đồ thị của $y=f'(t)$ và đường thẳng $y=-t$ ta có

$$f'(t)=-t\Leftrightarrow\begin{bmatrix}t=-1\\t=0\\t=1\\t=2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x+2=-1\\x+2=0\\x+2=1\\x+2=2\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=-3\\x=-2\\x=-1\\x=0\end{bmatrix}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	
$g(x)$		↗		↘				↗			

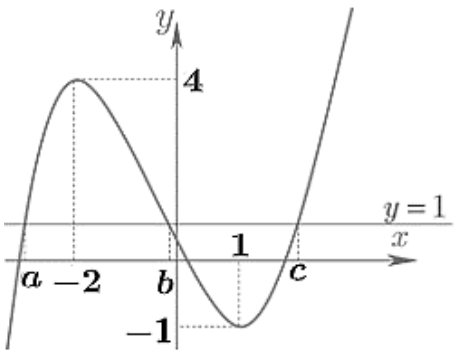
Suy ra hàm số $g(x)=2f(x+2)+(x+1)(x+3)+\log_2 2021$ có 2 điểm cực trị và $g(x)=0$ có 1 nghiệm bội lẻ .

Vậy hàm số $y=|g(x)|=|2f(x+2)+(x+1)(x+3)+\log_2 2021|$ có 3 điểm cực trị.

Câu 9: Ta thấy hàm số $y=f\ x$ đạt cực trị tại các điểm $x=-2$ và $x=1$

Ta có: $y'=\dfrac{\left(f^2(x)-2f(x)-m\right)'\left(f^2(x)-2f(x)-m\right)}{\left|f^2(x)-2f(x)-m\right|}f'\left(\left|f^2(x)-2f(x)-m\right|\right)$

$=\dfrac{2f'(x)\left(f(x)-1\right)\left(f^2(x)-2f(x)-m\right)}{\left|f^2(x)-2f(x)-m\right|}\left(\underbrace{\left|f^2(x)-2f(x)-m\right|+2}_{>0}\right)\left(\left|f^2(x)-2f(x)-m\right|-1\right)$

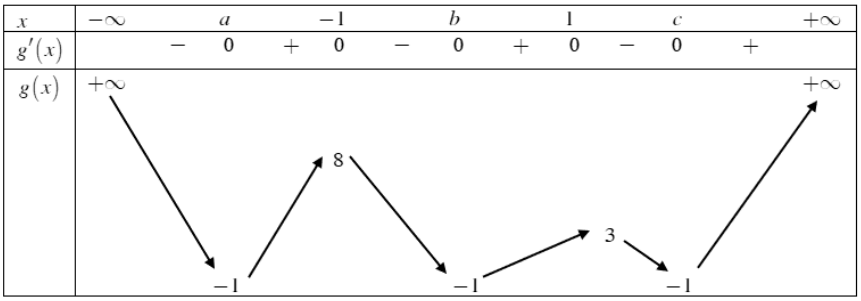


$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f'(x)=0\Leftrightarrow x=-2;x=1 \\ f(x)=1\Leftrightarrow x=a,\ x=b,\ x=c \\ f^2(x)-2f(x)-m=0\Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)=m \\ \left|f^2(x)-2f(x)-m\right|=1\Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)=m\pm1 \end{array}\right.$$

Xét hàm số $g(x)=f^2(x)-2f(x)$; $g'(x)=2f'(x)\left[f(x)-1\right]$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f'(x)=0\Leftrightarrow x=-2;x=1 \\ f(x)=1\Leftrightarrow x=a,\ x=b,\ x=c \end{array}\right.;\ \left\{\begin{array}{l} g(a)=g(b)=g(c)=1^2-2.1=-1 \\ g(-2)=4^2-2.4=8 \\ g(1)=(-1)^2-2.(-1)=3 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên hàm số $g(x)$



Số nghiệm bội lẻ của $y'=0$ phụ thuộc vào số giao điểm của đồ thị hàm số $g(x)$ với 3 đường thẳng $d_1:y=m+1,\ d_2:y=m,\ d_3:y=m-1$.

Yêu cầu bài toáng tương đương với 3 trường hợp sau.

Trường hợp 1: d_1,d_2,d_3 đều cắt đồ thị hàm số $g(x)$ tại 4 điểm phân biệt không trùng với các điểm $x\in\ -2;1;a;b;c$.

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} 3\le m+2<8 \\ 3\le m<8 \\ 3\le m-2<8 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} 1\le m<6 \\ 3\le m<8 \\ 5\le m<10 \end{array}\right.\Leftrightarrow 5\le m<6\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m=5.$$

Trường hợp 2: 2 đường thẳng d_1,d_2 cắt đồ thị hàm số $g(x)$ tại 6 điểm phân biệt và d_3 không cắt hoặc tiếp xúc đồ thị hàm số $g(x)$ tại điểm có tung độ bằng -1.

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} -1<m+2<3 \\ -1<m<3 \\ m-2\le-1 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} -3<m<1 \\ -1<m<3 \\ m\le1 \end{array}\right.\Leftrightarrow -1<m<1\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m=0\ (2).$$

Trường hợp 3: Hai đường thẳng d_1 cắt đồ thị hàm số $g(x)$ tại 2 điểm phân biệt và d_2 cắt đồ thị hàm số $g(x)$ tại hai điểm phân biệt, d_3 cắt $g(x)$ tại 6 điểm phân biệt.

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} m+2\ge8 \\ 3\le m<8 \\ -1<m-2<3 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} m\ge6 \\ 3\le m<8 \\ 1<m<5 \end{array}\right.\Leftrightarrow m\in\varnothing\ (3)$$

Từ $(1),(2)\&(3)\Rightarrow$ có 2 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 10: Chọn D

Xét hàm số $h(x)=f\left(x^3\right)+6x$ có $h'(x)=3x^2f'\left(x^3\right)+6$.

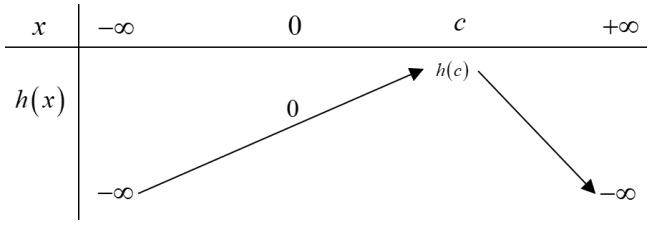
Ta có $h'(x)=0\Leftrightarrow f'\left(x^3\right)=\dfrac{-2}{x^2}$ $(*)$

Ta dễ dàng thấy được $f''(x)=a(x+1)(x+2)\Rightarrow f'(x)=a\left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3x^2}{2}+2x+C\right)$

Từ bảng biến thiên: $f'(-2)=3,\ f'(-1)=\dfrac{13}{4}$ ta tìm được $a=-\dfrac{3}{2},\ C=-\dfrac{4}{3}$, từ đó $f'(0)=2>0$

Với $x<0$, $f'(x)>0$ nên kéo theo $f'\left(x^3\right)>0$ mà $\dfrac{-2}{x^2}<0$ nên phương trình $(*)$ không có nghiệm và $h'(x)>0$.

Với $x>0$, $f'(x)$ là hàm sô nghịch biến, còn $\dfrac{-2}{x^2}$ là hàm số đồng biến nên phương trình $(*)$ có nhiều nhất 1 nghiệm. Ta có $h'(0)\approx+\infty$ và $h'(+\infty)\approx-\infty$ nên phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $x=c>0$. Từ đó ta có bảng biến thiên của $h(x)$



Do ta có $h(0)=f(0)+6.0=0$ nên $h(c)>0$

Từ đó suy ra hàm số $g(x)=\left|h(x)\right|$ có 3 cực trị.

Câu 11: Chọn D

Xét hàm số $h(x)=f\left(x^3\right)+3m^2x+m-1$ có $h'(x)=3x^2f'\left(x^3\right)+6m^2$.

Nếu $m=0$ thì $h(x)=f\left(x^3\right)$ nên $g(x)=\left|f\left(x^3\right)+3m^2x+m-1\right|$ có 3 cực trị

Xét với $m\neq0$

Ta có $h'(x)=0\Leftrightarrow f'\left(x^3\right)=\dfrac{-2m^2}{x^2}$ $(*)$

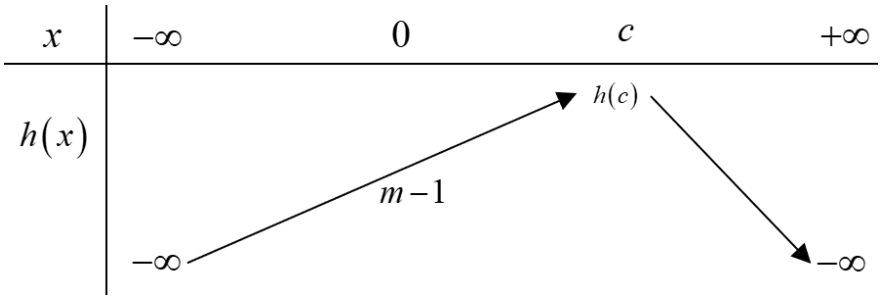
Ta dễ dàng thấy được $f''(x)=a(x+1)(x+2)\Rightarrow f'(x)=a\left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3x^2}{2}+2x+C\right)$

Từ bảng biến thiên: $f'(-2)=1,\ f'(-1)=\dfrac{7}{6}$ ta tìm được $a=-1,\ C=-\dfrac{1}{3}$, từ đó $f'(0)=\dfrac{1}{3}>0$

Với $x<0$, $f'(x)>0$ nên kéo theo $f'\left(x^3\right)>0$ mà $\dfrac{-2m^2}{x^2}<0$ nên phương trình $(*)$ không có nghiệm và $h'(x)>0$.

Với $x>0$, $f'(x)$ là hàm số nghịch biến, còn $\dfrac{-2m^2}{x^2}$ là hàm số đồng biến nên phương trình $(*)$ nhiều nhất 1 nghiệm. Ta có $\lim\limits_{x\to0}\left(f'\left(x^3\right)+\dfrac{2m^2}{x^2}\right)\approx+\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f'\left(x^3\right)+\dfrac{2m^2}{x^2}\right)\approx-\infty$ nên phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $x=c>0$.

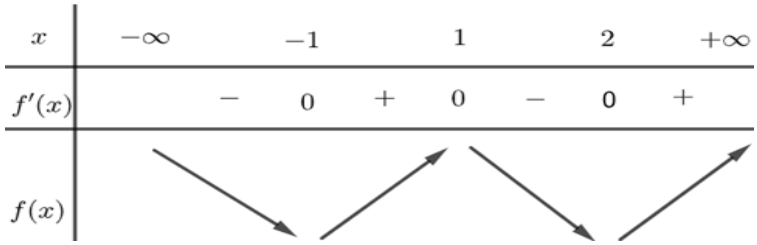
Từ đó ta có bảng biến thiên của $h(x)$



Dựa vào bảng biến thiên và $h(0)=f(0)+m-1=m-1$ nên hàm số $g(x)=|h(x)|$ có nhiều nhất 3 cực trị nếu $h(c)>0$. Từ đó ta cần $h(0)\geq 0\Rightarrow m\geq 1$. Vậy $m\geq 0$.

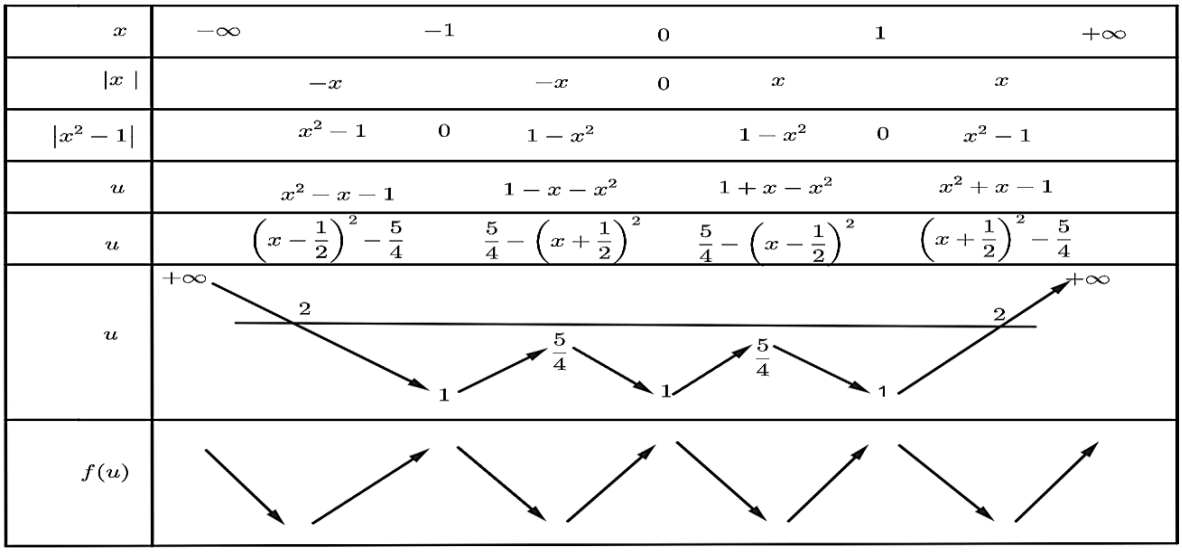
Câu 12: Chọn A

Từ đồ thị của $y=f'(x)$, suy ra bảng biến thiên của $y=f(x)$ như sau



Đặt $u=|x|+|x^2-1|$.

Ta có bảng ghép trục sau:



Vậy hàm số $g(x)=f\left(|x|+|x^2-1|\right)$ có ba điểm cực đại.

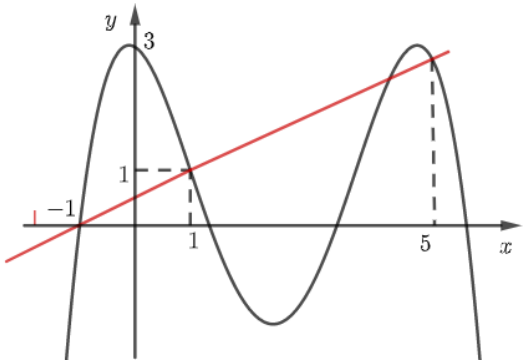
Câu 13: Chọn A

Ta có: $g'(x)=8(3x^2-3)f'(x^3-3x+3)-(12x^5-48x^3+48x^2+36x-48)$.

$$= 24\left(x^2-1\right)\left[f'\left(x^3-3x+3\right) - \frac{\left(x^3-3x+3\right)+1}{2}\right];$$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm 1. \\ f'\left(x^3-3x+3\right)=\dfrac{\left(x^3-3x+3\right)+1}{2} \quad (1). \end{array}\right.$$

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta có:



Đặt $t=x^3-3x+3$. Phương trình (1) trở thành: $f'(t)=\dfrac{t+1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=1 \\ t=5 \end{array}\right.$.

Với $t=-1$ ta có: $x^3-3x+3=-1$. Phương trình này có 1 nghiệm.

Với $t=1$ ta có: $x^3-3x+3=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$, trong đó $x=1$ là nghiệm kép.

Với $t=5$ ta có: $x^3-3x+3=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \end{array}\right.$, trong đó $x=-1$ là nghiệm kép.

Như vậy $g'(x)=0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt và 2 nghiệm bội ba.

Câu 14: Chọn A

Ta có: $h(x)=\left[f(x)-g(x)\right]^2 \Rightarrow h'(x)=2\left[f(x)-g(x)\right]\left[f'(x)-g'(x)\right]$.

$$h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)-g(x)=0 \quad (1) \\ f'(x)-g'(x)=0 \quad (2) \end{array}\right.$$

Từ đồ thị ta thấy phương trình (1) có đúng 3 nghiệm phân biệt là $x=-1$; $x=x_1\left(x_1\in(-1;3)\right)$; $x=3$, và $f(x)-g(x)$ đổi dấu khi đi qua các nghiệm này. Do đó các nghiệm trên là nghiệm bội lẻ của (1). Mà $f(x)$ và $g(x)$ đều là đa thức bậc 4 nên bậc của phương trình (1) nhỏ hơn hoặc bằng 4. Từ đó suy ra phương trình (1) là phương trình bậc 3.

Do phương trình (1) là phương trình bậc 3 có 3 nghiệm phân biệt nên phương trình (2) phải có 2 nghiệm phân biệt không trùng các nghiệm của phương trình (1).

Suy ra $h'(x)=0$ có 5 nghiệm phân biệt và $h'(x)$ đổi dấu khi đi qua các nghiệm đấy, nên hàm $h(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 15: Chọn A

Xét hàm số $y=f\left((x-1)^2+m\right)$ có đạo hàm $y'=2(x-1)f'\left((x-1)^2+m\right)$.

Cho $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\(x-1)^2+m=-1\\(x-1)^2+m=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\(x-1)^2=-1-m\\(x-1)^2=3-m\end{array}\right.$

Để hàm số có 3 điểm cực trị thì $-1-m\le 0<3-m\Leftrightarrow -1\le m<3\Rightarrow m\in\{-1;0;1;2\}$

Vậy tổng các phần tử của S là 2.

Câu 16: Chọn A

Ta có $y'=\left(f(x)-2x\right)'.f''\left(f(x)-2x\right)=\left(f'(x)-2\right).f''\left(f(x)-2x\right)$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)-2=0\\f''\left(f(x)-2x\right)=0\end{array}\right.$.

Khi $f'(x)-2=0\Leftrightarrow f'(x)=2$ có 3 nghiệm.

Khi $f''\left(f(x)-2x\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)-2x=m\ (1)\\f(x)-2x=n\ (2)\end{array}\right.$.

Xét phương trình (1): $f(x)-2x=m(m<0)$, đặt $g(x)=f(x)-2x\Rightarrow g'(x)=f'(x)-2$.

Phương trình đạo hàm $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1<m\\x=0\\x=x_2>n\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$x_1<m$		0		$x_2>n$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗		↘	e	↗		↘	

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow$phương trình (1) có 2 nghiệm.

Xét phương trình (2): $f(x)-2x=n(n<e)$, đặt $h(x)=f(x)-2x\Rightarrow h'(x)=f'(x)-2$.

$h'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1<m\\x=0\\x=x_2>n\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$x_1<m$		0		$x_2>n$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$		↗		↘	e	↗		↘	

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow$phương trình có 2 nghiệm.

Vậy hàm số $y=f'\left(f\left(x\right)-2x\right)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 17: Chọn C

Ta có $g'(x)=\left(\left[f\left(2x^2+x\right)\right]^2\right)'=2f\left(2x^2+x\right)(4x+1)f'\left(2x^2+x\right)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(2x^2+x\right)=0\\4x+1=0\\f'\left(2x^2+x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x^2+x=a\ \ (a>1)\\x=-\frac{1}{4}\\2x^2+x=1\\2x^2+x=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8a}}{4}(a>1)\\x=-\frac{1}{4}\\x=\frac{1}{2}\\x=-1\end{array}\right.$$

Vì $a>1$ nên có thứ tự các nghiệm của $g'(x)=0$ là:

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{1+8a}}{4}<x_2=-1<x_3=-\frac{1}{4}<x_4=\frac{1}{2}<x_5=\frac{-1+\sqrt{1+8a}}{4}.$$

Vậy $g'(x)=0$ có 5 nghiệm đơn như trên suy ra $g'(x)$ đổi dấu khi x chạy qua các nghiệm đơn.

Với $0\in\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)\left(0\in\left(x_3;x_4\right)\right)$. Xét $g'(0)=2.f\left(0\right)f'(0)>0$. Suy ra $g'(x)>0$ trên khoảng $\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$ hay khoảng $\left(x_3;x_4\right)$. Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$ như sau

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		x_4		x_5		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta có hàm $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $g\left(x\right)=\left[f\left(2x^2+x\right)\right]^2$ cũng liên tục trên $\mathbb{R}$.

Vậy hàm số $g\left(x\right)=\left[f\left(2x^2+x\right)\right]^2$ có 2 điểm cực đại là $x=x_2=-1$ và $x=x_4=\frac{1}{2}$.

Câu 18: Chọn C

Giả sử $f(x)=ax^4+bx^2+c$. Từ $\left\{\begin{array}{l}f'(0)=0\\f(0)=1\\f'(\pm1)=0\\f(\pm1)=0\end{array}\right.\leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=2\\b=-4\\c=1\end{array}\right.$. Suy ra $f(x)=2x^4-4x^2+1.$

Khi đó $y=\frac{1}{x^4}\left[2x^4-4x^2\right]^4=2^4x^4(x^2-2)^4$. Có $y'=2^4.4.x^3.(x^2-2)^3.(3x^2-2)$.

Và $y'=0\Leftrightarrow x=0$; $x=\pm\sqrt{2}$; $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. Do đó, hàm số y có 5 cực trị.

Câu 19: Chọn D

Xét $g(x)=f^2(x)+f(x)+m \Rightarrow g'(x)=2f(x)f'(x)+f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f(x)=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Ta có: $f'(x)=0 \Rightarrow$ có hai nghiệm là $x=0; x=3$ và $f(x)=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow$ có một nghiệm là $x=a<0$ nên hàm số $g(x)$ có ba cực trị. Do đó để đồ thị hàm số $h(x)=\left|f^2(x)+f(x)+m\right|$ có đúng 3 cực trị thì phương trình $f^2(x)+f(x)+m=0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta=1-4m<0 \Leftrightarrow m>\dfrac{1}{4}$.

Câu 20: Chọn C

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow$ phương trình $f'(x)=0$ có ba nghiệm là $x=-1;\ x=0;\ x=1$

$\Rightarrow f'(x)$ có dạng $f'(x)=kx(x-1)(x+1)=k\left(x^3-x\right)$, với $k\in\mathbb{R}$ và $k\neq 0$

$\Rightarrow f(x)=k\left(\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^2}{2}+C\right)$, C là một hằng số

Mà đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua $(1;3)$ và $(0;-1) \Rightarrow \begin{cases} k\left(-\dfrac{1}{4}+C\right)=3 \\ kC=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-16 \\ C=\dfrac{1}{16} \end{cases}$

$\Rightarrow f(x)=-16\left(\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{16}\right)=-4x^4+8x^2-1$

$\Rightarrow f(x+1)=-4(x+1)^4+8(x+1)^2-1$

$\Rightarrow f(x+1)=-4\left(x^4+4x^3+6x^2+4x+1\right)+8\left(x^2+2x+1\right)-1$

$\Rightarrow f(x+1)=-4x^4-16x^3-16x^2+3 \Rightarrow f'(x+1)=-16x^3-48x^2-32x$

Ta có: $g'(x)=\dfrac{4(x-2)^3\left[f(x+1)\right]^3-(x-2)^4.3\left[f(x+1)\right]^2.f'(x+1)}{\left[f(x+1)\right]^6}$

$\Rightarrow g'(x)=\dfrac{4(x-2)^3 f(x+1)-3(x-2)^4 f'(x+1)}{\left[f(x+1)\right]^4}=\dfrac{(x-2)^3\left[4f(x+1)-3(x-2)f'(x+1)\right]}{\left[f(x+1)\right]^4}$

Do đó: $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \\ 4f(x+1)-3(x-2)f'(x+1)=0 \end{array}\right.$

Phương trình: $4f(x+1)-3(x-2)f'(x+1)=0$

$\Leftrightarrow 4\left(-4x^4-16x^3-16x^2+3\right)-3(x-2)\left(-16x^3-48x^2-32x\right)=0$

$\Leftrightarrow -16x^4-64x^3-64x^2+12-3\left(-16x^4-16x^3+64x^2+64x\right)=0$

$\Leftrightarrow -16x^4-64x^3-64x^2+12+48x^4+48x^3-192x^2-192x=0$

$\Leftrightarrow 32x^4-16x^3-256x^2-192x+12=0 \Leftrightarrow 8x^4-4x^3-64x^2-48x+3=0$

Xét hàm số $h(x)=8x^4-4x^3-64x^2-48x+3$

Ta có: $h'(x)=32x^3-48x^2-128x+12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=x_2 \\ x=x_3 \end{array}\right.$ với $x_1<-1<0<x_2<1<2<x_3$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_1	-1	0	x_2	1	x_3	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$		0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$	$h(x_1)$	-1	3	$h(x_2)$	-105	$h(x_3)$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $h(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt

Mà $h(2)=-233 \Rightarrow x=2$ không là nghiệm của phương trình $h(x)=0$

$\Rightarrow$Phương trình $g'(x)=0$ có 5 nghiệm phân biệt

Vậy hàm số $g(x)=\dfrac{(x-2)^4}{\left[f(x+1)\right]^3}$ có 5 điểm cực trị.

Câu 21: Chọn C

$$g(x)=f\left(|2x-1|+2\right)\Rightarrow g'(x)=\frac{2(2x-1)}{|2x-1|}f'\left(|2x-1|+2\right)$$

Ta có: $g'(x)=0\Leftrightarrow f'\left(|2x-1|+2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|2x-1|+2=-1(VN)\\|2x-1|+2=\dfrac{1}{2}(VN)\\|2x-1|+2=4\end{array}\right.\Leftrightarrow|2x-1|+2=4$

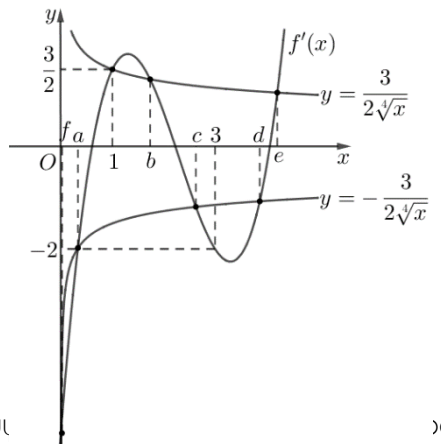
$$\Leftrightarrow|2x-1|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-1=2\\2x-1=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}\\x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

$g'(x)$ không xác định tại $x=\dfrac{1}{2}$ và $g'(x)$ đổi dấu tại $x=\dfrac{1}{2}$, nhưng tại $x=\dfrac{1}{2}$ thì $g(x)$ không xác định . Vậy hàm số có 2 điểm cực trị là $x=\dfrac{-1}{2}, x=\dfrac{3}{2}$.

Câu 22: Chọn C

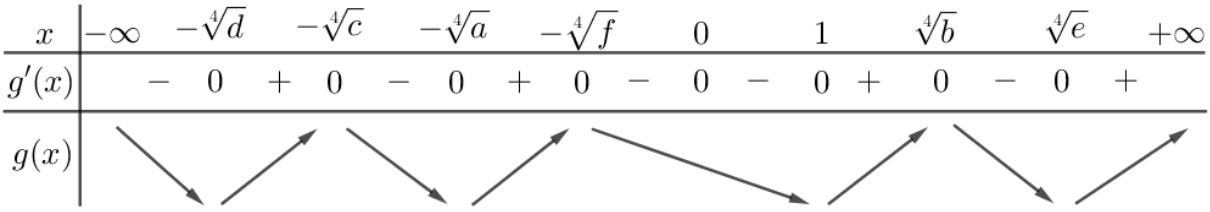
Ta có: $g(x)=f\left(x^4\right)-2x^3+1\Rightarrow g'(x)=4x^3.f'\left(x^4\right)-6x^2=2x^2.\left[2x.f'\left(x^4\right)-3\right]$

Xét $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=0\\f'\left(x^4\right)=\dfrac{3}{2x}\end{array}\right.\quad(*)$



$$(*)\Leftrightarrow\left[\begin{cases}x<0\\ f'\left(x^4\right)=-\dfrac{3}{2\sqrt[4]{x^4}}\end{cases}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{cases}x<0\\ x^4=f\ \vee x^4=a\ \vee x^4=c\ \vee x^4=d\end{cases}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\sqrt[4]{f}\\ x=-\sqrt[4]{a}\\ x=-\sqrt[4]{c}\\ x=-\sqrt[4]{d}\\ x=1\\ x=\sqrt[4]{b}\\ x=\sqrt[4]{e}\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:



Vậy hàm số $g\left(x\right)$ có 4 điểm cực tiểu.

Câu 23: Chọn B

Đặt: $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d\Rightarrow f'\left(x\right)=3ax^2+2bx+c$.

Ta có: đồ thị giao với trục Oy tại điểm $\left(0;1\right)\Rightarrow d=1$.

Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có hai điểm cực trị là $\left(-1;3\right);\left(1;-1\right)$ nên

$$\Rightarrow\begin{cases}3a-2b+c=0\\ 3a+2b+c=0\\ a+b+c+1=-1\\ -a+b-c+1=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=0\\ a=1\\ c=-3\end{cases}\Rightarrow f\left(x\right)=x^3-3x+1.$$

$$\Rightarrow f\left(x-1\right)=\left(x-1\right)^3-3\left(x-1\right)+1=x^3-3x^2+3\Rightarrow f'\left(x-1\right)=3x^2-6x.$$

Có $g\left(x\right)=\left[xf\left(x-1\right)\right]^2\Rightarrow g'\left(x\right)=2xf\left(x-1\right)\left[f\left(x-1\right)+xf'\left(x-1\right)\right]$.

$$\Rightarrow g'\left(x\right)=2x\left(x^3-3x^2+3\right)\left(4x^3-9x^2+3\right).$$

Suy ra $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^3-3x^2+3=0\\ 4x^3-9x^2+3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x\approx 2,532\\ x\approx 1,347\\ x\approx -0,879\\ x\approx 2,076\\ x\approx 0,694\\ x\approx -0,52\end{array}\right.$.

Phương trình $g'\left(x\right)$ là phương trình bậc 7 và có 7 nghiệm phân biệt nên hàm số $g\left(x\right)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 24: Chọn A

Ta có $\sqrt{4x-x^2}=\sqrt{4-\left(2-x\right)^2}\in\left[0;2\right]$

$$y=f\left(4-3\sqrt{4x-x^2}\right)\Rightarrow y'=3\frac{x-2}{\sqrt{4x-x^2}}f'\left(4-3\sqrt{4x-x^2}\right)$$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-2=0\\ f'\left(4-3\sqrt{4x-x^2}\right)=0\end{array}\right.$$

$$f'\left(4-3\sqrt{4x-x^2}\right)=f'\left[2\frac{5-3\sqrt{4x-x^2}}{2}-1\right]=0$$

Ta có $\sqrt{4x-x^2}=\sqrt{4-(2-x)^2}\in[0;2]$ nên $\frac{5-3\sqrt{4x-x^2}}{2}\in\left[-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right]$

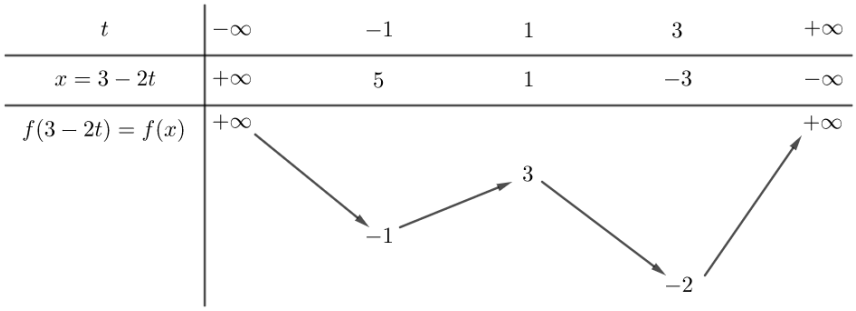
$$f'\left[2\frac{5-3\sqrt{4x-x^2}}{2}-1\right]=0\Leftrightarrow\frac{5-3\sqrt{4x-x^2}}{2}=2\Leftrightarrow\sqrt{4x-x^2}=\frac{1}{3}.$$

Phương trình này có 2 nghiệm

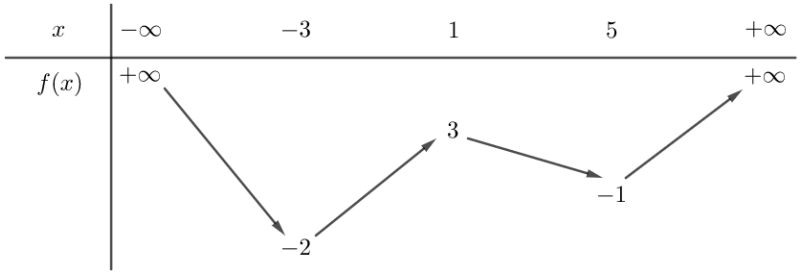
Vậy y' có 3 nghiệm, và qua mỗi nghiệm này thì y' đổi dấu, do đó hàm số có 3 cực trị.

Câu 25: Chọn B

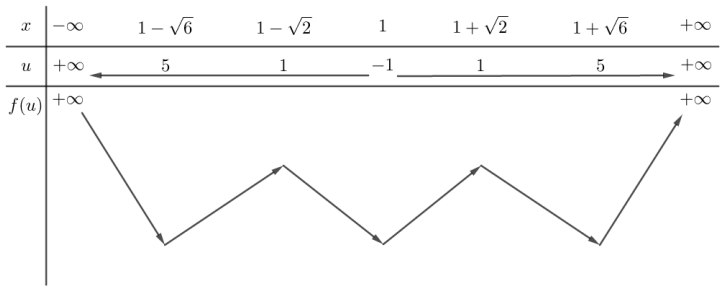
Trước hết ta khôi phục bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ từ bảng biến thiên của hàm $f(v(t))=f(3-2t)$ như sau:



Ta có thể vẽ lại bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ cho dễ nhìn như sau:



Xét hàm số $f\left(x^2-2x\right)=f(u);u=x^2-2x$. Ta có bảng biến thiên ghép $\left[x;u;f(u)\right]$ từ kỹ năng ghép trục như sau:



Suy ra hàm số đồng biến trên $\left(1-\sqrt{6};1-\sqrt{2}\right)$, $\left(1;1+\sqrt{2}\right)$, $\left(1+\sqrt{6};+\infty\right)$.

Mà $(1;2)\subset\left(1;1+\sqrt{2}\right)$. Nên hàm số đồng biến trên $(1;2)$.

Câu 26: Chọn B

Chọn hàm số $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+4x^2-12x+4$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $f'(x)=0\Leftrightarrow -x^2+8x-12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2=a\\x=6=8-a\end{array}\right.$

$\Rightarrow$ hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị là $x=a;x=8-a$.

Ta có $f\left(x^2-2x+3\right)=-\frac{1}{3}\left(x^2-2x+3\right)^3+4\left(x^2-2x+3\right)^2-12\left(x^2-2x+3\right)+4$

$\Rightarrow\left[f\left(x^2-2x+3\right)\right]'=0\Leftrightarrow\left(2x-2\right)f'\left(x^2-2x+3\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-2=0\\f'\left(x^2-2x+3\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-2x+3=2\\x^2-2x+3=6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1=x_0\\x=3=5+2x_0\end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $f\left(x^2-2x+3\right)$ thỏa đề bài.

Mặt khác: $\left[f\left(x^3-3x^2+1\right)\right]'=0\Leftrightarrow\left(3x^2-6x\right)f'\left(x^3-3x^2+1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2-6x=0\\f'\left(x^3-3x^2+1\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2-6x=0\\x^3-3x^2+1=2\\x^3-3x^2+1=6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\x\approx 3,103\\x\approx 3,425\end{array}\right.$ (4 nghiệm đơn)

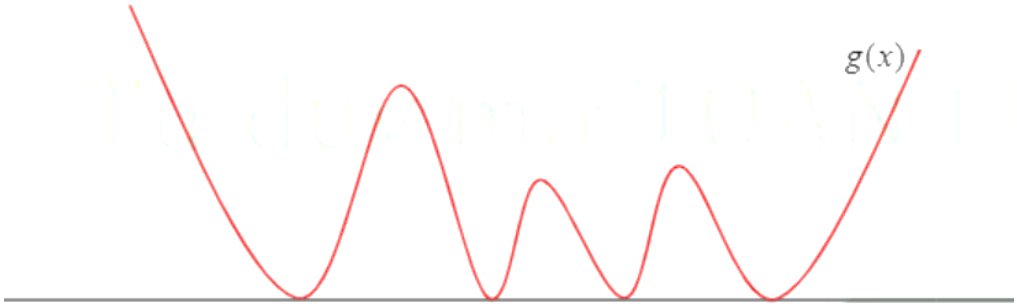
Vậy hàm số $f\left(x^3-3x^2+1\right)$ có 4 điểm cực trị.

Câu 27: Chọn D

Ta có :

$x^2.f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{c}x=0\\x=a,(a<-2)\\x=b,(-2<b<0)\\x=4\end{array}\right.$, trong đó $x=0$ là nghiệm bội chẵn, $x=a,x=b$ là nghiệm bội lẻ, $x=4$ là nghiệm bội chẵn.

Suy ra $g(x)=x^4.\left[f(x)\right]^2=0$ có bốn nghiệm bội chẵn suy ra ĐTHS $g(x)$ tiếp xúc với trục Ox tại bốn điểm. Mặt khác hàm số $g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to\pm\infty}g(x)=+\infty$ nên ta có thể phác họa đồ thị hàm số $g(x)$ như sau :



Vậy hàm số có 7 cực trị.

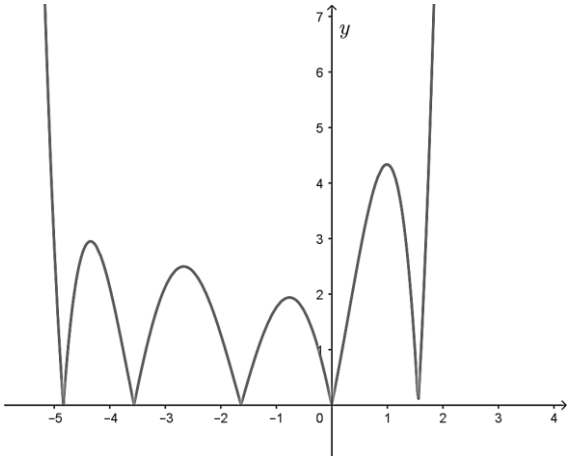
Câu 28: Chọn D

Ta có: $g\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=0\\\left[f\left(x+2\right)\right]^6=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f\left(x+2\right)=0\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x+2=a<-2\\x+2=b,\ b\in\left(-2;0\right)\\x+2=c,\ c\in\left(0;2\right)\\x+2=d>2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=a-2<-4\\x=b-2\in\left(-4;-2\right)\\x=c-2\in\left(-2;0\right)\\x=d-2>0\end{array}\right.$$

Suy ra đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ cắt trục hoành tại 5 điểm phân biệt, và cả 5 nghiệm đều là nghiệm kép.

Ta suy ra hình dáng đồ thị $y=g\left(x\right)$ như sau



Dựa vào đồ thị ta suy ra hàm số có 9 điểm cực trị.

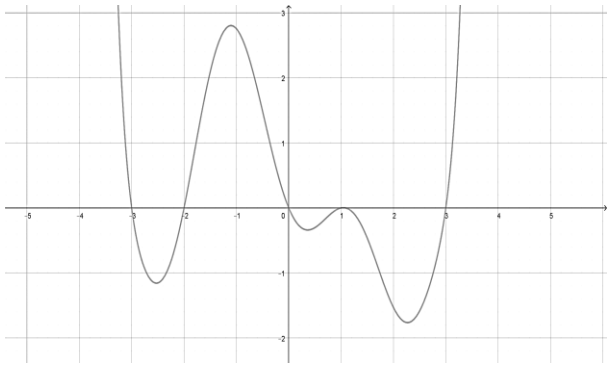
Câu 29: Chọn A

Ta có:

$$g\left(x\right)=0\Leftrightarrow f\left(x\right).f\left(2x+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=0\\f\left(2x+1\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=1\\x=3\\2x+1=-3\\2x+1=1\\2x+1=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=1\\x=3\\x=-2\\x=0\\x=1\end{array}\right.$$

Suy ra đồ thị hàm số $y=g(x)$ cắt trục hoành tại 6 điểm, trong đó các nghiệm $\{-3;3;-2;0\}$ là nghiệm đơn và $x=1$ là nghiệm kép

Ta có hình dáng đồ thị $y=g(x)$ như sau



Suy ra hàm số có 5 điểm cực trị.

Câu 30: Chọn D

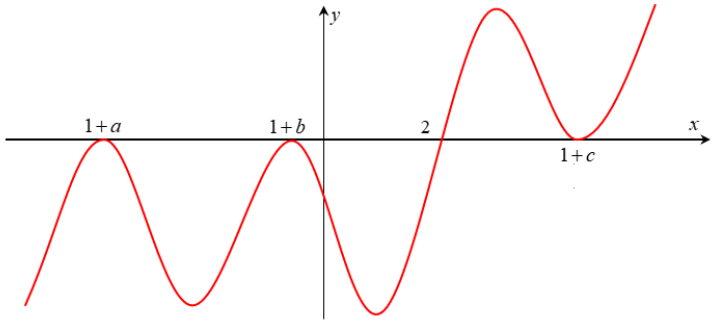
Nhận xét $\begin{cases} g(x)\ge 0,\forall x\ge 2 \\ g(x)<0,\forall x<2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty,\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty \end{cases}$,

Cho $g(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-2)^3=0 \\ \left[f(x-1)\right]^2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ f(x-1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x-1=a(a<-2) \\ x-1=b(-2<b<-1) \\ x-1=1 \\ x-1=c(c>2) \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=1+a<-1 \\ x=1+b\in(-1;2) \\ x=1+c>3 \end{array}\right.$.

Do đó $g(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt trong đó có ba nghiệm bội chẵn và 1 nghiệm bội lẻ

Hay đồ thị $g(x)$ có 3 điểm tiếp xúc với trục hoành và một điểm giao điểm với trục hoành mà tại đó hàm số đổi dấu



Vậy hàm số $g(x)$ có 6 cực trị.

Câu 31: Chọn C

Ta có $y=f\left(\left|x-m\right|^2-\left|x-m\right|\right)$

Đặt $g\left(x\right)=f\left(x^2-x\right)$. Suy ra $g\left(\left|x\right|\right)=f\left(x^2-\left|x\right|\right)$. Suy ra $g\left(\left|x-m\right|\right)=f\left(\left|x-m\right|^2-\left|x-m\right|\right)$

Ta biết số điểm cực trị của hàm $g\left(\left|x\right|\right)$ và $g\left(\left|x-m\right|\right)$ là như nhau.

Hàm số $g\left(x\right)$ có 2 điểm cực trị dương nên hàm $g\left(\left|x\right|\right)$ có 5 điểm cực trị.

Suy ra hàm $g\left(\left|x-m\right|\right)$ có tất cả là 5 điểm cực trị.

Câu 32: Chọn B

Hàm số $y=f\left(-\left|x+2021m\right|-2m+1\right)$ có cùng số điểm cực trị với hàm số $y=f\left(-\left|x\right|-2m+1\right)$.

Sơ đồ biến đổi đồ thị:

$f(x)\to f(-x)\to f\left(-\left(x+2m-1\right)\right)=f\left(-x-2m+1\right)\to f\left(-\left|x\right|-2m+1\right)$

Các điểm cực trị của hàm số $f\left(x\right)$ là: $(x_1=a<-1)$; $(x_2=-1)$; $\left(x_3=-3\right)$; $\left(x_4=-b<-3\right)$

Suy ra các điểm cực trị của hàm số $f\left(-\left(x+2m-1\right)\right)=f\left(-x-2m+1\right)$ là

$\left(x_1=-a-2m+1\right)$; $\left(x_2=1-2m+1\right)$;$\left(x_3=-3-2m+1\right)$;$\left(x_4=-b-2m+1\right)$

Để hàm số $y=\left(-\left|x\right|-2m+1\right)$ có đúng 5 điểm cực trị thì hàm số $y=f\left(-x-2m+1\right)$ có đúng 2 giá trị của m.

Câu 33: Chọn B

Ta có: $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=2\end{array}\right.$

$y=f\left(x^3-mx^2-5x+4m\right)\Leftrightarrow y'=\left(3x^2-2mx-5\right).f'\left(x^3-mx^2-5x+4m\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2-2mx-5=0\\f'\left(x^3-mx^2-5x+4m\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2-2mx-5=0\\x^3-mx^2-5x+4m=-2\\x^3-mx^2-5x+4m=2\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2-2mx-5=0\quad\left(1\right)\\\left(x-2\right)\left[x^2-\left(m-2\right)x-2m-1\right]=0\quad\left(2\right)\\\left(x+2\right)\left[x^2-\left(m+2\right)x+2m-1\right]=0\quad\left(3\right)\end{array}\right.$

Có $\left\{\begin{array}{l}\Delta_1=m^2+15>0\\\Delta_2=m^2-4m+8>0\\\Delta_3=m^2-4m+8>0\end{array}\right.$

Nên (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt, (2) luôn có 3 nghiệm phân biệt, (3) luôn có 3 nghiệm phân biệt.

Để hàm số $y=f\left(x^3-mx^2-5x+4m\right)$ có 6 điểm cực trị thì (1) có 2 nghiệm trùng với các nghiệm của (2) hoặc (3).

Trường hợp 1: Phương trình (1) nhận $x=-2$ là nghiệm $\Leftrightarrow m=\frac{7}{4}$ (thử lại thỏa mãn).

Trường hợp 2: Phương trình (1) nhận $x=2$ là nghiệm $\Leftrightarrow m=\frac{-7}{4}$ (thử lại thỏa mãn).

Vậy có 2 giá trị $m=\pm\frac{7}{4}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 34: Chọn A

Ta có: $y=\left[f(x)-m\right]^3-3\left[f(x)-m\right]-3m$

$$\Rightarrow y'=\left\{3\left[f(x)-m\right]^2-3\right\}.f'(x)\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3\left[f(x)-m\right]^2-3=0\\f'(x)=0\end{array}\right.$$

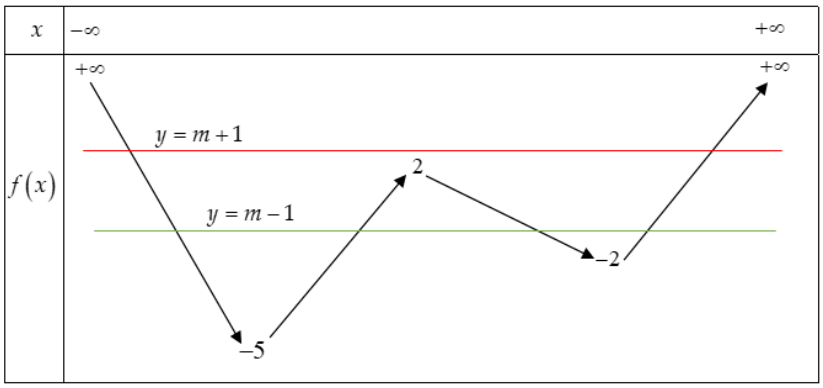
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left[f(x)-m\right]^2=1\\f'(x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=m+1(1)\\f(x)=m-1(2)\\f'(x)=0(3)\end{array}\right.$$

Nhận xét: số điểm cực trị của hàm số $y=\left[f(x)-m\right]^3-3f(x)$ là tổng số nghiệm bội lẻ của ba phương trình (1);(2);(3).

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra phương trình (3) có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy để hàm số $y=\left[f(x)-m\right]^3-3f(x)$ có 9 điểm cực trị thì phương trình (1) và (2) có 6 nghiệm phân biệt bội lẻ. Căn cứ vào bảng biến thiên, có 2 trường hợp sau:

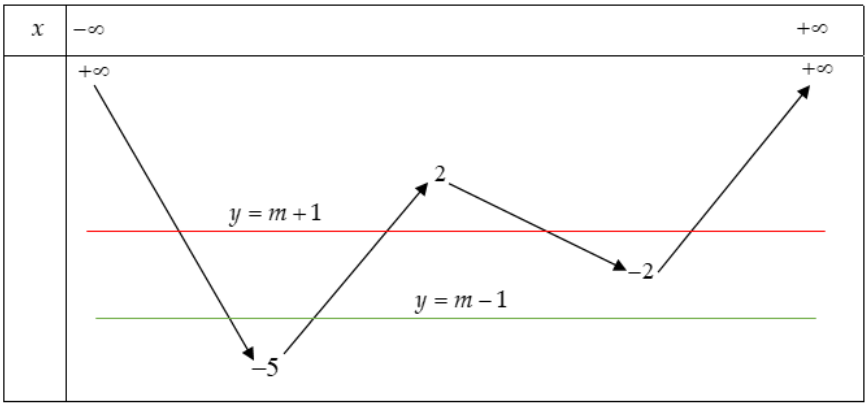
Trường hợp 1: Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt, phương trình (2) có 4 nghiệm phân biệt.



$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}m+1>2\\-2<m-1<2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m>1\\-1<m<3\end{array}\right.\Leftrightarrow 1<m<3\xrightarrow{m\in Z}\Rightarrow m=2.$$

Khi $m+1=2\Leftrightarrow m=1$ thì phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt, trong đó có 1 nghiệm bội chẵn nên $m=1$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2: Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt, phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt.



$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}-2<m+1<2\\-5<m-1<-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-3<m<1\\-4<m<-\end{array}\right.\Leftrightarrow -3<m<-1\xrightarrow{m\in Z}\Rightarrow m=-2.$$

Khi $m-1=-2\Leftrightarrow m=-1$ thì phương trình (2) có 3 nghiệm phân biệt, trong đó có 1 nghiệm bội chẵn nên $m=-1$ (thỏa mãn).

Vậy $m\in\{-2;-1;1;2\}$.

Câu 35: Chọn D

Ta có:

$$y'=3f'(x)\left[f(x)\right]^2-2m.f'(x).f(x)-(2m-3).f'(x)$$
$$=f'(x)\left[3\left(f(x)\right)^2-2mf(x)-(2m-3)\right]$$

Cho $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\3\left(f(x)\right)^2-2mf(x)-(2m-3)=0\end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị $\Rightarrow f'(x)=0$ có 4 nghiệm đơn phân biệt.

Để hàm số có 4 cực trị $\Rightarrow 3\left(f(x)\right)^2-2mf(x)-(2m-3)=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.

Đặt $t=f(x)\Rightarrow 3t^2-2mt-(2m-3)=0$

Phương trình vô nghiệm:

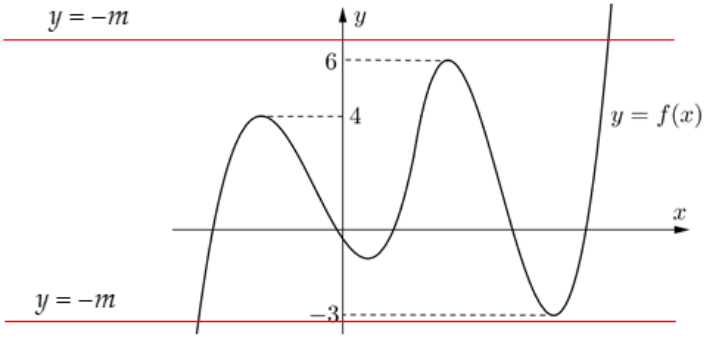
$\Leftrightarrow\Delta'\le 0\Leftrightarrow m^2+3(2m-3)\le 0\Leftrightarrow m^2+6m-9\le 0\Leftrightarrow -3-3\sqrt{2}\le m\le -3+3\sqrt{2}$

Vậy có 9 giá trị của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 36: Chọn C

Ta có $y'=2f(x)f'(x)-2(m+2)f'(x)=2f'(x)\left(f(x)-m-2\right)$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\ (*)\\f(x)=m+2\end{array}\right.$



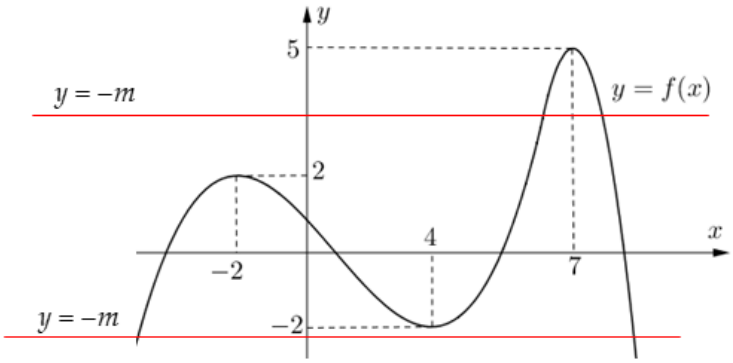
Dựa vào đồ thị thì $(*)$ có 4 nghiệm

Do đó để hàm số có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m+2\le -3\\m+2\ge 6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le -5\\m\ge 4\end{array}\right.$. Vậy có 33 giá trị m.

Câu 37: Chọn B

Ta có: $y'=2\left(f(x)+m\right).f'(x)$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=-m\\f'(x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=-m\\x=-2\\x=4\\x=7\end{array}\right.$$



Hàm số có 5 điểm cực trị khi

$\begin{bmatrix} -m \le -2 \\ 2 \le -m < 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m \ge 2 \\ -5 < m \le -2 \end{bmatrix}$. Vậy có 22 giá trị m

Câu 38: Chọn B

Ta có: $y' = 3f^2(x).f'(x) + 12f(x).f'(x) = 3f(x).f'(x)\big(f(x)+4\big)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \\ f(x) = -4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = a\,(a < -2) \\ x = b\,(-2 < b < 0) \\ x = c\,(0 < c < 3) \\ x = d\,(d > 3) \\ x = -2 \\ x = 0 \\ x = 3 \\ x = -2 \end{bmatrix}$$

x	$-\infty$	a	-2	b	0	c	3	d	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	-4	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

$y = 0$

Bảng xét dấu.

x	$-\infty$	a	-2	b	0	c	3	d	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu y' thì hàm số có 4 điểm cực tiểu

Câu 39: Chọn A

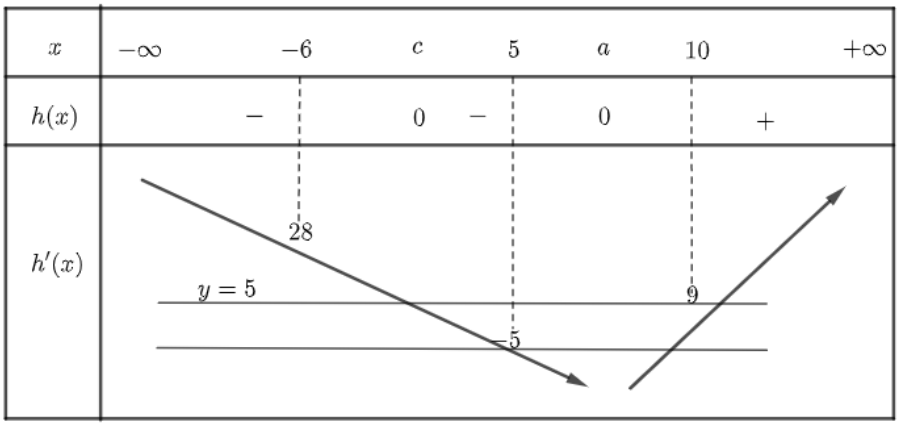
Xét hàm số $y = g(x) = f\big(f(x) - 3x + 9\big) \Rightarrow g'(x) = \big(f'(x) - 3\big) f'\big(f(x) - 3x + 9\big)$.

Giải phương trình đạo hàm: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f'(x) = 3 \quad (\text{co mot nghiem boi le}) \\ f'\big(f(x) - 3x + 9\big) = 0 \end{bmatrix}$

Để xét phương trình $f'\big(f(x) - 3x + 9\big) = 0$ thì ta cần khảo sát hàm số $h(x) = f(x) - 3x + 9$.

Ta có: $h'(x)=f'(x)-3=0\Leftrightarrow f'(x)=3\Leftrightarrow x=c;x=a$.

Bảng biến thiên:



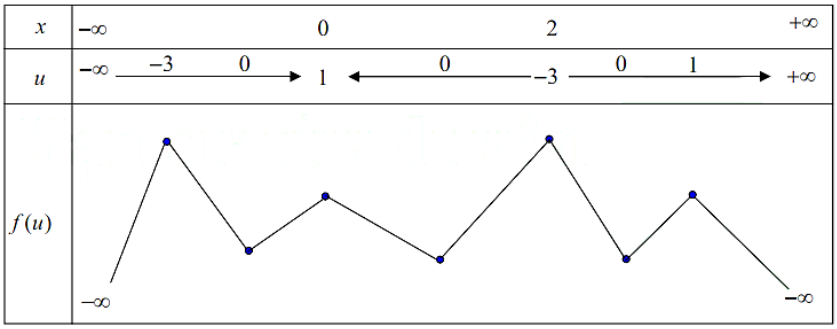
Xét $f'\left(f\left(x\right)-3x+9\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}h(x)=f\left(x\right)-3x+9=-5\Rightarrow 2\,nghiem\,boi\,le\\h(x)=f\left(x\right)-3x+9=b\in(0;5)\Rightarrow 2\,nghiem\,boi\,le\\h(x)=f\left(x\right)-3x+9=5\Rightarrow 2\,nghiem\,boi\,le\end{array}\right.$

Như vậy phương trình đạo hàm $g'(x)=0$ có 7 nghiệm bội lẻ ứng với 7 điểm cực trị.

Câu 40: Chọn A

Đặt $u=x^3-3x^2+1\Rightarrow u'=3x^2-6x$.

Sử dụng phương pháp ghép trục như sau:



Như vậy hàm số có tất cả 7 điểm cực trị.

Câu 41: Chọn B

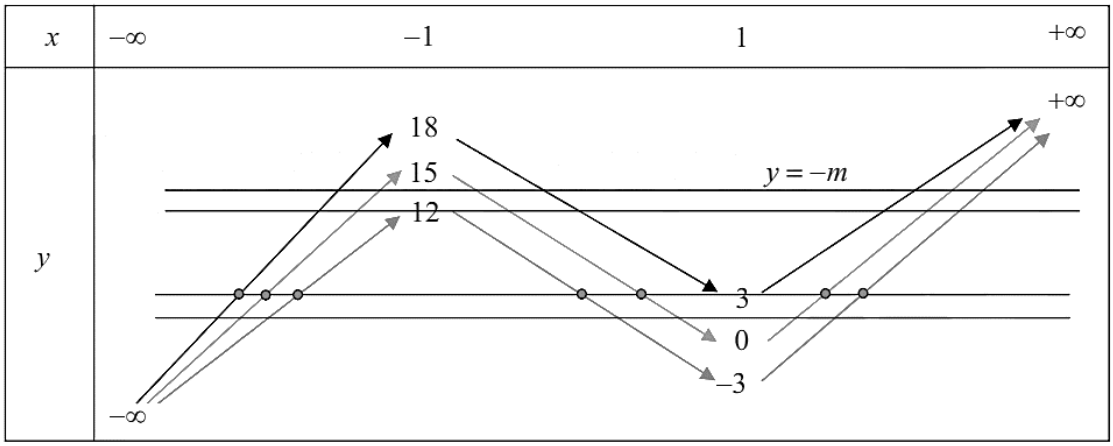
Xét hàm số $g\left(x\right)=f\left(2^{x^3-3x+2}+m\right)\Rightarrow g'\left(x\right)=3\left(x^2-1\right).2^{x^3-3x+2}.f'\left(2^{x^3-3x+2}+m\right).\ln 2$.

Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-1=0\Leftrightarrow x=\pm1\Rightarrow co\ 2\ nghiem\ boi\ le\\f'\left(2^{x^3-3x+2}+m\right)=0\end{array}\right.$.

Để thoả mãn yêu cầu bài toán thì phương trình $f'\left(2^{x^3-3x+2}+m\right)=0$ phải có 7 nghiệm bội lẻ.

Ta có: $f'\left(2^{x^3-3x+2}+m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^{x^3-3x+2}+m=-2\\2^{x^3-3x+2}+m=1\\2^{x^3-3x+2}+m=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^{x^3-3x+2}+2=-m\\2^{x^3-3x+2}-1=-m\\2^{x^3-3x+2}-4=m\end{array}\right.$

Xét sự biến thiên của ba hàm số $2^{x^3-3x+2}+2$, $2^{x^3-3x+2}-1$, $2^{x^3-3x+2}-4$ trên cùng một hệ trục toạ độ



Để phương trình $f'\left(2^{x^3-3x+2}+m\right)=0$ phải có 7 nghiệm bội lẻ thì

$$\left[\begin{array}{l}12\le -m<15\\0<-m\le 3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-15<m\le -12\\-3\le m<0\end{array}\right.\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m=\{-14;-13;-12;-3;-2;-1\}.$$

Vậy có 6 giá trị nguyên của tham số m thoả mãn.

Câu 42: Chọn C

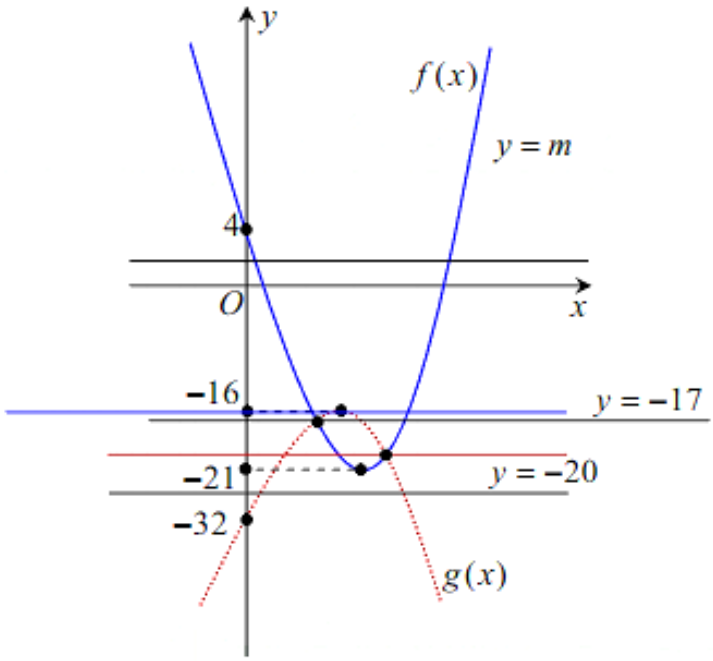
Hàm số liên tục và xác định trên toàn $\mathbb{R}$ và có đạo hàm không triệt tiêu trên một lân cận chứa điểm $x=0$ nên hàm số $f\left(|x|\right)$ đạt cực trị tại điểm $x=0$.

Để hàm số $f\left(|x|\right)$ có 5 điểm cực trị thì hàm số $f\left(x\right)$ phải có hai điểm cực trị dương.

Ta có: $f'\left(x\right)=\left(x^2-5x+1-\dfrac{m}{4}\right)\left(x^2-4x+\dfrac{m}{4}+8\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-5x+1-\dfrac{m}{4}=0\\x^2-4x+\dfrac{m}{4}+8=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4\left(x^2-5x+1\right)=m=f\left(x\right)\\-4\left(x^2-4x+8\right)=m=g\left(x\right)\end{array}\right.$$

Vẽ hai đồ thị hàm số $f\left(x\right),g\left(x\right)$ trên cùng một hệ trục toạ độ như sau:



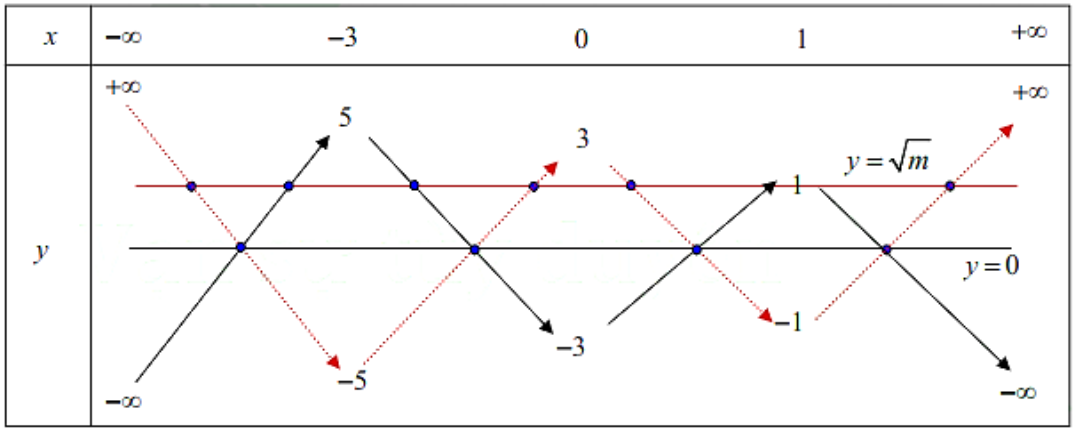
Để có đúng hai điểm cực trị dương thì $\left[\begin{array}{l}-16\le m<4\\-32<m\le -21\\m=-17\\m=-20\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-16\le m\le 3\\-31\le m\le -21\\m=-17\\m=-20\end{array}\right.\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}$ có tất cả 33 giá trị nguyên của tham số m thoả mãn.

Câu 43: Chọn C

Có: $g'(x)=3\left(f^2(x)-m\right).f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\Rightarrow co\ 3\ nghiem\ don: x=-3;x=0;x=1\\f^2(x)-m=0\end{array}\right.$

Để hàm số $g(x)$ có đúng 9 điểm cực trị thì phương trình $f^2(x)-m=0$ phải có 6 nghiệm bội lẻ.

Suy ra: $\left[\begin{array}{l}f(x)=\sqrt{m}\\-f(x)=\sqrt{m}\end{array}\right.$. Xét sự tương giao của hai hàm số $f(x)$ và $-f(x)$ trên cùng một bảng biến thiên như hình vẽ sau đây:



Suy ra $1\le\sqrt{m}<3\Leftrightarrow 1\le m<9\Rightarrow$ có 8 giá trị nguyên m thoả mãn.

Câu 44: Chọn C

Ta có: $f(x)=\int\limits_{2018}^{x^2-2x}g(t)dt=G(t)\Big|_{2018}^{x^2-2x}=G\left(x^2-2x\right)-G(2018)$.

Đạo hàm $f'(x)=G'\left(x^2-2x\right)(2x-2)=g\left(x^2-2x\right).2(x-1)$.

Xét phương trình $g\left(x^2-2x\right).2(x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\ \Rightarrow nghiem\ boi\ le\\g\left(x^2-2x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x=-3\ (vo\ nghiem)\\\left(x^2-2x\right)^2=a>0\Rightarrow co\ hai\ nghiem\ kep\\x^2-2x=7\Leftrightarrow x=1\pm2\sqrt{2}\Rightarrow hai\ nghiem\ boi\ le\end{array}\right.\end{array}\right.$

Suy ra phương trình đạo hàm có 3 nghiệm bội lẻ nên hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 45: Chọn A

Xét hàm số $g(x)=f\left(x^2-2mx+1\right)\Rightarrow g'(x)=2(x-m)f'\left(x^2-2mx+1\right)$.

Cho $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ f'\left(x^2-2mx+1\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x^2-2mx+1=1 \\ x^2-2mx+1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=m & (1) \\ x^2-2mx=0 & (2) \\ x^2-2mx+2=0 & (3) \end{array}\right. \quad (*)$

Bài toán yêu cầu phương trình $(*)$ phải có đúng 3 nghiệm bội lẻ. Đã có một nghiệm bội lẻ ở phương trình (1), vậy nên trong hai phương trình bậc hai còn lại phải có một phương trình có hai nghiệm phân biệt và phương trình còn lại không có nghiệm phân biệt.

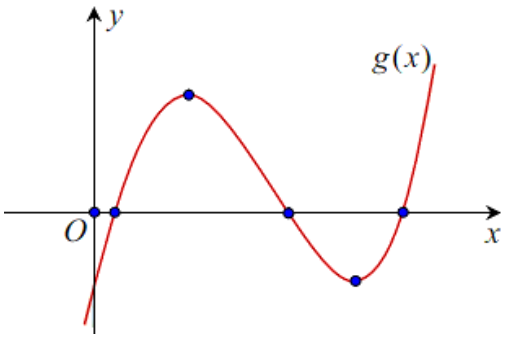
Ta có: $\Delta_2=4m^2$ và $\Delta_3=4m^2-8 \Rightarrow \begin{cases} \Delta_2=4m^2>0 \\ \Delta_3=4m^2-8\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ -\sqrt{2}\le m\le \sqrt{2} \end{cases} \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m=\{\pm 1\}.$

Vậy có hai giá trị nguyên của m thoả mãn.

Câu 46: Chọn C

Đặt $g(x)=x^3-3mx^2+3(2m-1)x-m$.

Hình vẽ minh hoạ:



Đạo hàm $g'(x)=3x^2-6mx+3(2m-1)=3\left(x^2-3mx+2m-1\right)=0 \Rightarrow x=1; x=2m-1$.

Yêu cầu bài toán tương đương với đồ thị hàm số $y=g(x)$ có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị này nằm phía bên phải Oy và nằm về hai phía của trục hoành, đồng thời $g(0)<0$. Suy ra:

$$\begin{cases} 2m-1\neq 1 \\ 2m-1>0 \\ g(1).g(2m-1)<0 \\ g(0)=-m<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1 \\ m>\dfrac{1}{2} \\ (2m-2)\left(-4m+12m^2-10m+2\right)<0 \\ m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1 \\ m>\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m<\dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \\ m>\dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow m>\dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \\ m>0 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện $\xrightarrow[m\in\mathbb{Z}]{m\in[-2022;2022]} 2\le m\le 2022$. Vậy có tất cả 2021 giá trị thoả mãn.

Câu 47: Chọn B

Hàm số $f(3-2x)$ đạt cực trị tại $\left[\begin{array}{l} x=-3 \Rightarrow 3-2x=9 \\ x=-1 \Rightarrow 3-2x=5 \\ x=4 \Rightarrow 3-2x=-5 \end{array}\right.$.

Vậy ta coi như hàm số $f(x)$ sẽ đạt cực trị tại các điểm $x=-5; x=5; x=9$.

Ta đặt $g(x)=f\left(x^2-2mx\right) \Rightarrow g(|x|)=f\left(x^2-2m|x|\right)$.

Nhận thấy hàm số $g(x)=f\left(x^2-2mx\right)$ xác định tại điểm $x=0$ và không phải là hằng số trong một khoảng chứa điểm $x=0$, nên hàm số $g\left(|x|\right)=f\left(x^2-2m|x|\right)$ sẽ đặt cực trị tại $x=0$.

Để hàm số $g\left(|x|\right)=f\left(x^2-2m|x|\right)$ có 7 điểm cực trị thì hàm số $g(x)=f\left(x^2-2mx\right)$ có 3 điểm cực trị dương.

Ta có: $g'(x)=(2x-2m)\,f'\left(x^2-2mx\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=m & (1)\\ x^2-2mx=9 & \\ x^2-2mx=5 & \\ x^2-2mx=-5 & \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=m & (1)\\ x^2-2mx-9=0 & (2)\\ x^2-2mx-5=0 & (3)\\ x^2-2mx+5=0 & (4)\end{array}\right.$

Dễ thấy phương trình (2) và (3) mỗi phương trình cho ta một nghiệm đơn và dương. Phương trình (4) nếu có nghiệm đơn và dương thì sẽ có hai nghiệm phân biệt. Vì vậy phương trình (4) không thể có hai nghiệm phân biệt dương, tức là phải có hai nghiệm phân biệt âm hoặc không có hai nghiệm phân biệt và phương trình (1) có nghiệm dương.

Suy ra:

$$\left\{\begin{array}{l}m>0\\ \left[\begin{array}{l}\Delta'_{(4)}=m^2-5\le 0\\ \left\{\begin{array}{l}\Delta'_{(4)}=m^2-5>0\\ 2m\le 0\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.\Rightarrow 0<m\le\sqrt{5}\to m\in\left(0;\sqrt{5}\right]\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}a=0\\ b=\sqrt{5}\end{array}\right.\Rightarrow P=2\left(a^2+b^2\right)=2\left(0^2+5\right)=10$$

Câu 48: Chọn D

Xét hàm số $g(x)=f\left(x^3-mx^2-2x+m\right)\Rightarrow g'(x)=\left(3x^2-2mx-2\right)f'\left(x^3-mx^2-2x+m\right)$.

Yêu cầu bài toán xảy ra khi phương trình đạo hàm phải có 6 nghiệm bội lẻ:

Ta có: $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2-2mx-2=0\\ f'\left(x^3-mx^2-2x+m\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2mx-2=0\\ \left[\begin{array}{l}x^3-mx^2-2x+m=-1\\ x^3-mx^2-2x+m=1\end{array}\right.\end{array}\right.$.

Phương trình $3x^2-2mx-2=0$ luôn cho hai nghiệm phân biệt. Suy ra hai phương trình còn lại phải cho đúng 4 nghiệm bội lẻ:

$$\left[\begin{array}{l}x^3-mx^2-2x+m=-1\\ x^3-mx^2-2x+m=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}(x-1)\left(x^2-(m-1)x-m-1\right)=0 & (1)\\ (x-1)\left(x^2-(m+1)x+m-1\right)=0 & (2)\end{array}\right.$$

Nhận thấy hai phương trình $(1),(2)$ luôn cho hai nghiệm phân biệt, và các nghiệm của hai phương trình này là không trùng nhau.

Để hai phương trình có đúng 4 nghiệm bội lẻ thì:

Trường hợp 1: $x=1$ là nghiệm của $(x-1)\left(x^2-(m-1)x-m-1\right)=0$ và $x=-1$ không phải là nghiệm của $(x-1)\left(x^2-(m+1)x+m-1\right)=0$.

Trường hợp 2: $x=-1$ là nghiệm của $(x-1)\left(x^2-(m+1)x+m-1\right)=0$ và $x=1$ không phải là nghiệm của $(x-1)\left(x^2-(m-1)x-m-1\right)=0$.

Suy ra: $\left[\begin{cases}1-(m-1)-m-1=0\\1+(m+1)+m-1\neq 0\end{cases}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{cases}m=\dfrac{1}{2}\\m\neq -\dfrac{1}{2}\end{cases}\right.\Leftrightarrow m=\pm\dfrac{1}{2}$.

Vậy có hai giá trị thực của m thoả mãn.

Câu 49: Chọn C

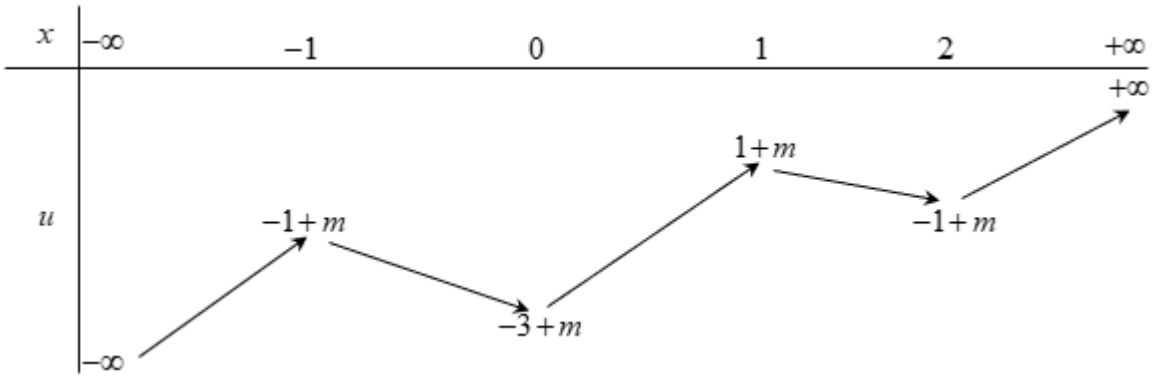
Ta có: $f'(x)=a(x+2)(x-1)\Rightarrow f(x)=a\left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-2x\right)+b$.

Đồ thị hàm số đi qua $A(-2;4)$, $B(1;-1)$ nên ta có: $\begin{cases}4=\dfrac{10}{3}a+b\\-1=-\dfrac{7}{6}a+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{10}{9}\\b=\dfrac{8}{27}\end{cases}$.

Hàm số ban đầu là $f(x)=\dfrac{10}{9}\left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-2x\right)+\dfrac{8}{27}$.

Đặt $\begin{cases}u=x^3-3\left|x^2-1\right|+m\\f(x)\to f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=1\end{array}\right.\end{cases}$.

Bảng biến thiên:



Yêu cầu bài toán xảy ra khi và chỉ khi: $\left[\begin{cases}-2>-3+m\\1<-1+m\end{cases}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{cases}m<1\\m>2\end{cases}\ (loai)\right.$

$\left[\begin{cases}-3+m<-2<-1+m\\-1+m<1<1+m\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{cases}-1<m<1\\0<m<2\end{cases}\right.\right.$.

$\left[\begin{cases}-2>-1+m\\1<1+m\end{cases}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{cases}m<-1\\m>0\end{cases}\ (loai)\right.$

Vậy $m\in(0;1)\Rightarrow$ không có giá trị nào của m thoả mãn.

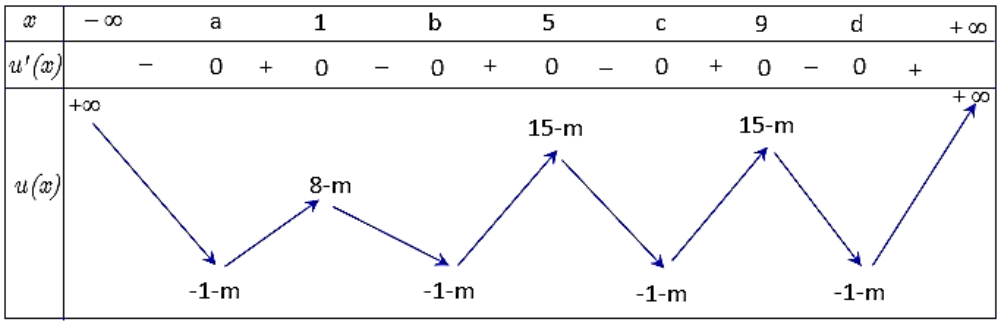
Câu 50: Chọn D

Đặt $\begin{cases} u = f^2(x) - 2f(x) - m \\ h(x) = f(|x|) \end{cases} \Rightarrow u'(x) = 2f'(x).f(x) - 2f'(x).$

Giải phương trình đạo hàm: $u'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1;5;9\} \\ f(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \{a;b;c;d\} \end{array} \right.$.

Lại có: $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \{\pm 9; \pm 5; \pm 1; 0\}$.

Bảng biến thiên:



Để hàm số $g(x)$ có 51 điểm cực trị thì $\begin{cases} -9 \le -1-m \\ -5 > -1-m \\ 1 < 8-m \\ 5 > 8-m \\ 9 < 15-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 8 \\ m > 4 \\ m < 7 \Leftrightarrow 4 < m < 6. \\ m > 3 \\ m < 6 \end{cases}$

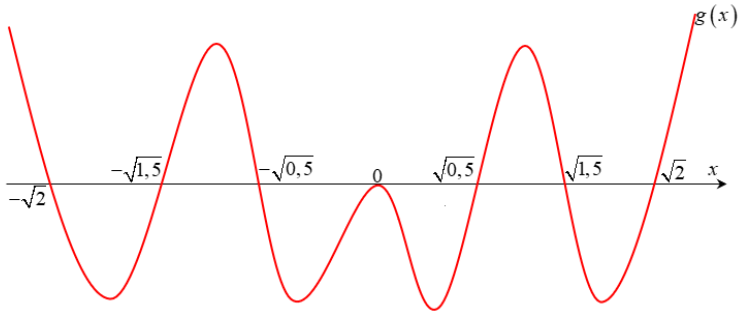
Vậy có một giá trị $m = 5$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 51: Chọn B

Ta có: $g(x) = x^2\left[f\left(x^2 - 1\right)\right]^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 0 \\ f\left(x^2 - 1\right) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 0 \\ x^2 - 1 = -1 \\ x^2 - 1 \approx -0,5 \\ x^2 - 1 \approx 0,5 \\ x^2 - 1 = 1 \end{array} \right.$.

$\Leftrightarrow x \in \left\{0; \pm\sqrt{0,5}; \pm\sqrt{1,5}; \pm\sqrt{2}\right\}$.

Phác họa nhanh đồ thị:



Câu 52: Chọn B

Xét hàm số $y = \left|x^2 - 8x + 7\right| + x^2 - 3$, tập xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y=\begin{cases}2x^2-8x+4 & neu\ x\le 1 hoac\ x\ge 7\\ 8x-10 & neu\ 1<x<7\end{cases}\Rightarrow y'=\begin{cases}4x-8 & neu\ x\le 1 hoac\ x\ge 7\\ 8 & neu\ 1<x<7\end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		7		$+\infty$
y'		-	‖	+	‖	+	

Suy ra hàm số có một điểm cực trị $x=1$.

Đặt $u=\left|x^2-8x+7\right|+x^2-3$. Sử dụng phương pháp ghép trục:

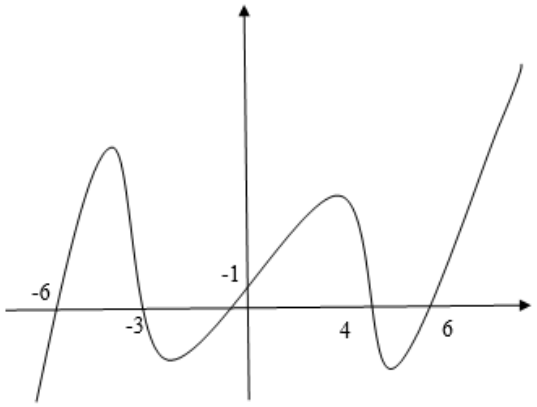
x	$-\infty$			1						$+\infty$
u	$+\infty$	3	2	1	-1	-2	-1	1	2	3	$+\infty$
$f(u)$	-∞	2	-3	2	0	2	0	2	-3	2	-∞

$y=0$

Suy ra hàm số $y=\left|f\left(u\right)\right|$ có 7 điểm cực đại.

DẠNG 3 Bài toán truy tìm hàm ngược

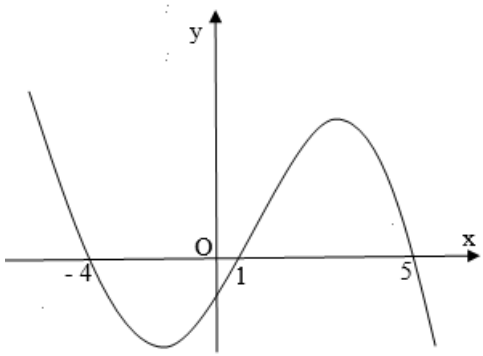
Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(3-x)$ như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-2x+3\right)$ là

A. 3. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(1+2x)$ như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[-2021;2021]$ để hàm số $y=f\left(-|x|^2+2|x|-2020+m\right)$ có 7 điểm cực trị

A. Không có giá trị nào. **B.** 5 giá trị. **C.** 6 giá trị. **D.** 7 giá trị.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $g(x)=f(3-x)$ có bảng biến thiên như bên dưới

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	-4	↗	0	↘	$-\infty$

Hàm số $h(x)=f\left(x^2+1\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $g(x)=f\left(-x^3-x\right)$

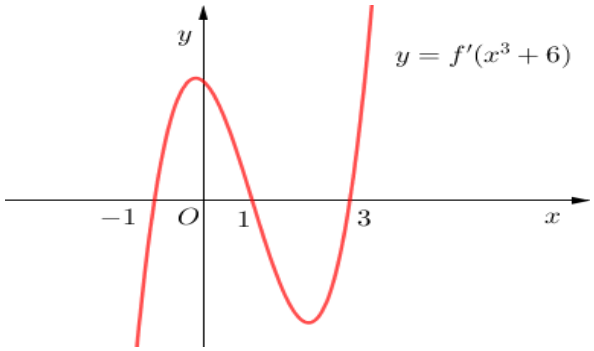
có bảng biến thiên như bên dưới

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$g(0)$	↗	$g(1)$	↘	$-\infty$

Hàm số $h(x)=f\left(2x^2-x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 5: Cho hàm đa thức bậc ba $y=f'\left(x^3+6\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Hỏi hàm số $g(x)=f\left(x^2+4x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 7.

Câu 6: Cho hàm số $y=f\left(2x^2-4x+3\right)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$ (bảng biến như hình sau)

x	$-\infty$		-5		1		6		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

Hỏi hàm số $g(x)=f\left(x^3+3x^2\right)$ có ít nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 7: Cho hàm đa thức $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng xét dấu của như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực đại của hàm số $y=f\left(x^2+|x|+1\right)$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

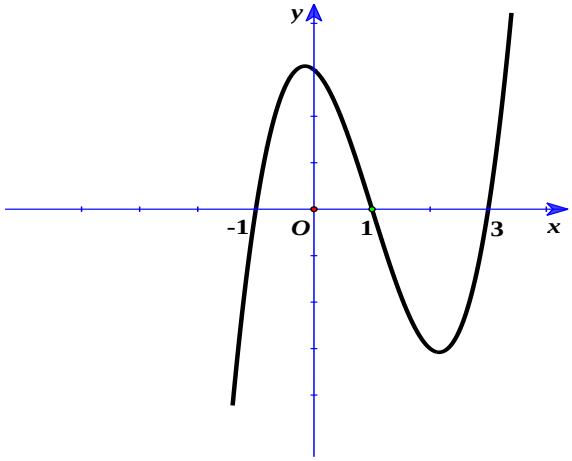
Câu 8: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f\left(3-4x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-2x-10\right)$ là

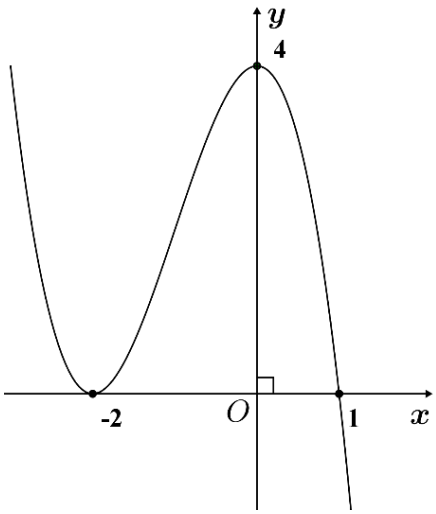
A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 9: Đồ thị của hàm $y=f'(1-4x)$ như hình vẽ đưới đây. Số các giá trị nguyên của $m\in[-2021;2021]$ để số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^2+4x-3m-2\right)$ nhiều nhất là



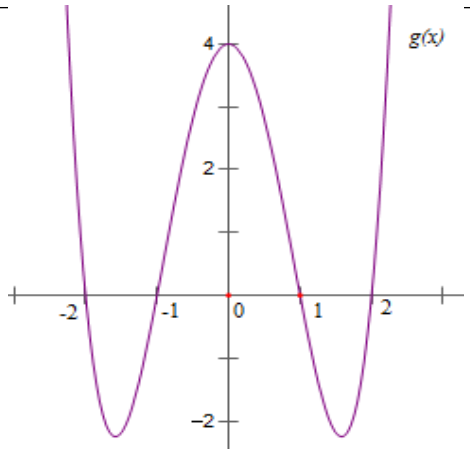
A. 4040. **B.** 2024. **C.** 4002. **D.** 2020.

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(3-2x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f\left(\left|x^2-3\right|\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?



A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 5.

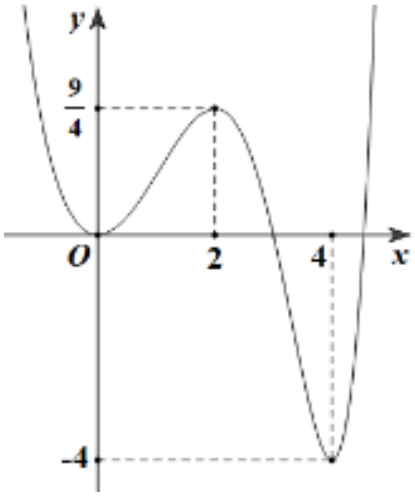
Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên R. Hàm số $g(x)=f'\left(1-x^2\right)$ là hàm số bậc bốn có đồ thị như hình vẽ như dưới



Hàm số $y=f\left(x^2-2|x|\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

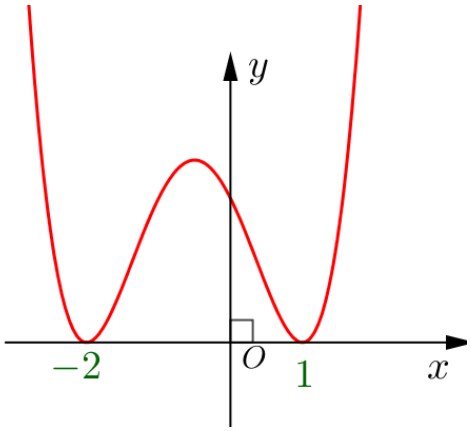
A. 3. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 12: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f\left(5-2x\right)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m thuộc khoảng $\left(-9;9\right)$ thoả mãn $2m\in\mathbb{Z}$ và hàm số $y=\left|2f\left(4x^3+1\right)+m-\dfrac{1}{2}\right|$ có 5 điểm cực trị?



A. 26. **B.** 25. **C.** 24. **D.** 27.

Câu 13: Giả sử $f\left(x\right)$ là một đa thức bậc bốn. Đồ thị hàm số $y=f\left(1-x\right)$ được cho như hình bên.



Hỏi hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2+2\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

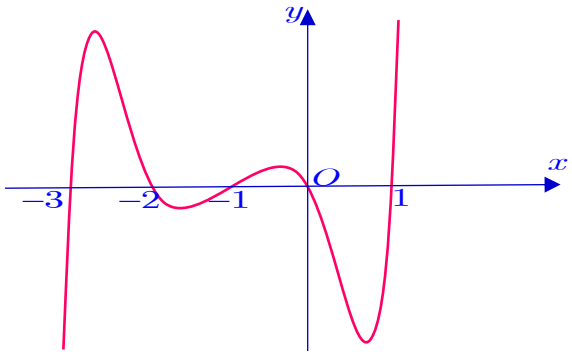
Câu 14: Cho hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới

x	$-\infty$	-3	1	5	$+\infty$
$f\left(x^2-2x\right)$	$+\infty$	$\searrow$ -1	$\nearrow$ 4	$\searrow$ -1	$\nearrow$ $+\infty$

Biết hàm số $f\left(x\right)$ có đúng hai điểm cực trị là $x=-2$ và $x=a$. Hàm số $f\left(x^2-4x+4\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

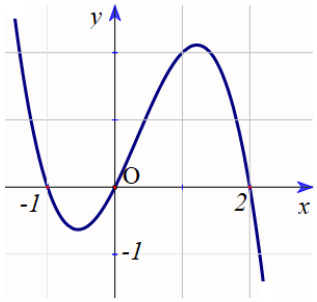
Câu 15: Cho hàm đa thức $y=\left[f\left(x^2+2x\right)\right]'$ có đồ thị như hình vẽ



Tổng giá trị nguyên của $m\in\left[-10;10\right]$ để hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|x-2\right|+m\right)$ có 5 cực trị

A. -52. **B.** 55. **C.** -55. **D.** 56.

Câu 16: Cho hàm số $y=f'\left(x^3-x^2-2x+3\right)$ là hàm số bậc 3 có đồ thị là đường cong như hình vẽ.



Biết $f(0)>0,\ f(-1)<0$. Hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(x^4-2x^2\right)\right|$ có mấy điểm cực tiểu?

A. 3. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 6.

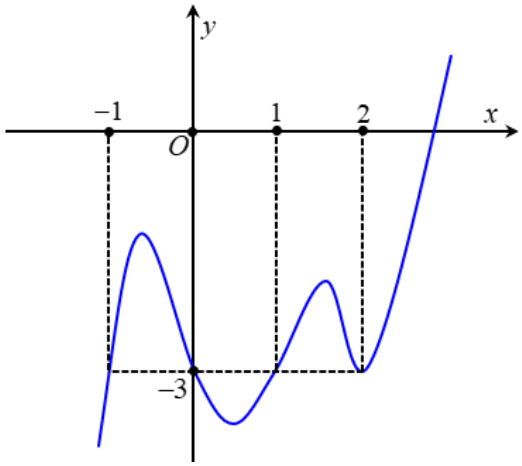
Câu 17: Cho hàm số $y=f\ x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'\ x$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'\left(x\right)$	$+\infty$	$\searrow$ -3	$\nearrow$ 2	$\searrow$ -1	$\nearrow$ $+\infty$

Hàm số $g\ x\ =f\ \left|e^{2x}-2x-2\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 9. **B.** 11. **C.** 5. **D.** 7.

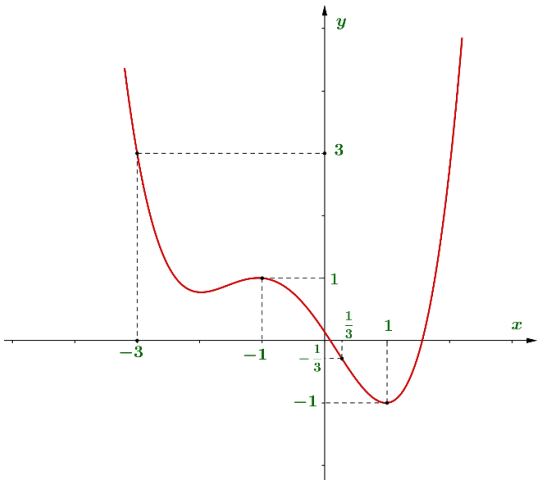
Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0)<0$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ dưới đây.



Hàm số $g(x)=\left|f\left(|x|\right)+3|x|\right|$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

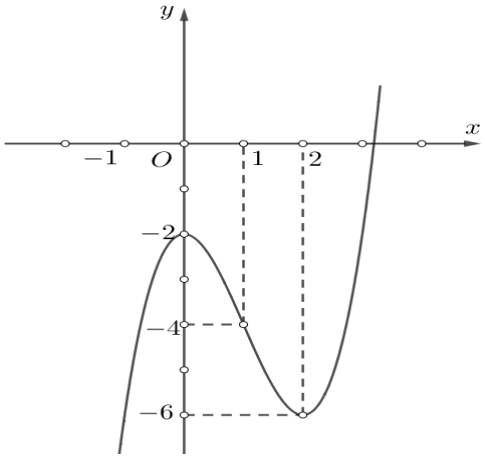
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 19: Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x)=2f\left(\dfrac{5\sin x-1}{2}\right)+\dfrac{(5\sin x-1)^2}{4}+3$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0;2\pi)$?



A. 9. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 20: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-20;20]$ để hàm số $g(x)=\left|f\left(1-|x|\right)+m\right|$ có 5 điểm cực trị?



A. 14. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 17.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.A	3.C	4.C	5.D	6.A	7.D	8.B	9.D	10.A
11.B	12.A	13.D	14.D	15.C	16.D	17.A	18.D	19.D	20.D

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Xét hàm số $y=f\left(x^2-2x+3\right)$ ta có

$$y'=(2x-2)\,f'\left(x^2-2x+3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ f'\left(x^2-2x+3\right)=0\end{array}\right.\cdot$$

Giải $f'\left(x^2-2x+3\right)=0$, đặt $x^2-2x+3=3-t$ từ đồ thị hàm số $y=f'(3-t)$ ta có

$$f'\left(x^2-2x+3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x+3=9\\ x^2-2x+3=6\\ x^2-2x+3=4\\ x^2-2x+3=-1\\ x^2-2x+3=-3\end{array}\right.$$

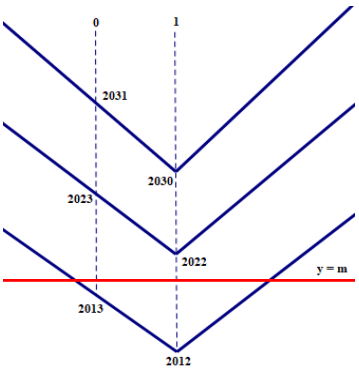
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x-6=0\\ x^2-2x-3=0\\ x^2-2x-1=0\\ x^2-2x+4=0\\ x^2-2x+6=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=3\\ x=1\pm\sqrt{2}\\ x=1\pm\sqrt{7}\end{array}\right.\cdot$$

Phương trình $f'\left(x^2-2x+3\right)=0$ có 7 nghiệm bội đơn phân biệt suy ra hàm số hàm số $y=f\left(x^2-2x+3\right)$ có đúng 7 điểm cực trị.

Câu 2: Xét hàm số $y=f\left(-x^2+2x-2020+m\right)$ ta có

$$h'(x)=(-2x+2).f'\left(-x^2+2x-2020+m\right).$$

$$h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ f'\left(-x^2+2x-2020+m\right)=0,(*)\end{array}\right.\cdot$$



Giải $(*)$, đặt $-x^2+2x-2020+m=1+2x$, ta có

$$f'\left(-x^2+2x-2020+m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-x^2+2x-2020+m=-7\\ -x^2+2x-2020+m=3\\ -x^2+2x-2020+m=11\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=x^2-2x+2013\\ m=x^2-2x+2023\\ m=x^2-2x+2031\end{array}\right.\cdot$$

hàm số $y=f\left(-|x|^2+2|x|-2020+m\right)$ có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y=f\left(-x^2+2x-2020+m\right)$ có 3 điểm cực trị dương, từ đồ thị hàm số ta suy ra $2012<m<2013$, do $m\in[-2021;2021]$ suy ra $m\in\varnothing$.

Câu 3: Ta có $g'(x)=-f'(3-x);\ g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$.

Suy ra $x=1;x=3$ là các nghiệm của phương trình $f'(3-x)=0$.

Do đó $f'(0)=0;\ f'(2)=0$.

Ta có $h'(x)=2xf'(x^2+1)$;

$$h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'(x^2+1)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2+1=0\\x^2+1=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x=1\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $h(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 4: Ta có $g'(x)=-(3x^2+1)f'(-x^3-x);\ g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Suy ra $x=0;x=1$ là các nghiệm của phương trình $f'(-x^3-x)=0$.

Do đó $f'(0)=0;\ f'(-2)=0$.

Ta có $h'(x)=(4x-1)f'(2x^2-x)$;

$$h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{4}\\f'(2x^2-x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{4}\\2x^2-x=0\\2x^2-x=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{4}\\x=0\\x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $h(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 5: Ta có: $f'(x^3+6)=a(x-1)(x+1)(x-3)$ (với $a>0$).

Với $x=-1$ thì $f'(5)=0$.

Với $x=1$ thì $f'(7)=0$.

Với $x=3$ thì $f'(33)=0$.

Suy ra $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5\\x=7\\x=33\end{array}\right.$.

Ta có: $g'(x)=(2x+4)f'(x^2+4x)$.

$$\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+4=0\\ f'\left(x^2+4x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\ x^2+4=5\\ x^2+4=7\\ x^2+4=33\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=\pm1\\ x=\pm\sqrt{3}\\ x=\pm\sqrt{29}\end{array}\right.$$

Vậy hàm số $g(x)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 6: Ta có $y'=(4x-4)\,f'\left(2x^2-4x+3\right)=0.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x-4=0\\ f'\left(2x^2-4x+3\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ f'\left(2x^2-4x+3\right)=0\quad(1)\end{array}\right.$$

Từ bảng biến thiên ta thấy $y'=0$ có 3 nghiệm bội lẻ $x=-5, x=1, x=6$.

Như vậy phương trình (1) có nghiệm bội lẻ $x=-5$ hoặc $x=6$.

Thay $x=-5$ vào (1) ta được: $f'(73)=0.$

Thay $x=6$ vào (1) ta được: $f'(51)=0.\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=73\\ x=51\end{array}\right.$

Ta có: $g'(x)=\left(3x^2+6x\right)f'\left(x^3+3x^2\right)=0.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2+6x=0\\ f'\left(x^3+3x^2\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2+6x=0\\ x^3+3x^2=73\\ x^3+3x^2=51\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-2\\ x\approx3,382....\\ x\approx-5,022...\end{array}\right.$$

Vậy hàm số $g(x)$ có ít nhất 4 điểm cực trị.

Câu 7: Từ bảng xét dấu của $f'(x+1)$ ta có:

$f'(x+1)=(x+1)x(x-1)h(x)$ với $h(x)\geq0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow f'(x+1)=(x+1-2)(x+1)(x+1-1)h(x).$

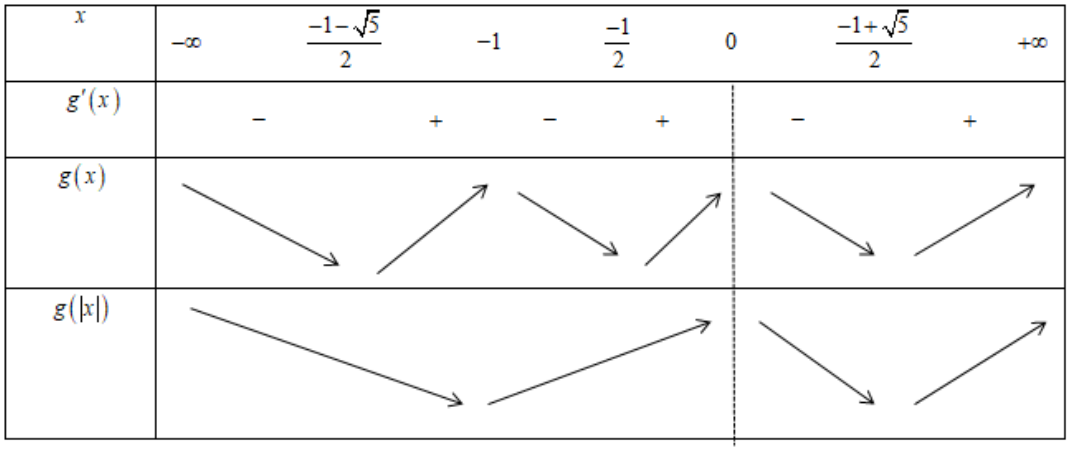
Đặt $t=x+1$ khi đó $f'(t)=t(t-1)(t-2).U(t)$ với $t=x+1\Rightarrow h(x)=U(t)>0$ với mọi t thỏa mãn điều kiện.

Vậy $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=1\\ t=2\end{array}\right.$.

Mặt khác ta có: $g(x)=f\left(x^2+x+1\right)\Rightarrow g'(x)=(2x+1)\,f'\left(x^2+x+1\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+1=0\\ x^2+x+1=0\\ x^2+x+1=1\\ x^2+x+1=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-1\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\\ x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.\\ x=\dfrac{-1}{2}\end{array}\right.$$

Ta có bảng biên thiên sau:



Vì $y=g(|x|)=f\left(x^2+|x|+1\right)$ và $g(x)=f\left(x^2+x+1\right)$ đối xứng nhau qua trục tung nên hàm số $y=f\left(x^2+|x|+1\right)$ có một điểm cực đại.

Vậy hàm số $|g(x)|=y=\left|f\left(\frac{x-1}{x-2}\right)\right|$ có tối đa 6 điểm cực trị.

Câu 8: $y=f\left(x^2-2x-10\right)\Rightarrow y'=(2x-2)\,f'\left(x^2-2x-10\right).$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ f'\left(x^2-2x-10\right)=0\end{array}\right.$$

Xét $f'\left(x^2-2x-10\right)=0$.

Đặt $x^2-2x-10=3-4t$.

Ta có $f'(3-4t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\Leftrightarrow 3-4t=-9\\ t=2\Leftrightarrow 3-4t=-5\end{array}\right.$.

Nên $f'\left(x^2-2x-10\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x-10=-9\\ x^2-2x-10=-5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1+\sqrt{2}\\ x=1-\sqrt{2}\\ x=1+\sqrt{6}\\ x=1-\sqrt{6}\end{array}\right.$.

Vậy hàm số $y=f\left(x^2-2x-10\right)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 9:

Từ giả thiết ta có $f'(1-4x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=1\\ x=3\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}1-4x=5\\ 1-4x=-3\\ 1-4x=-11\end{array}\right.$

Từ đó suy ra $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=5\\ t=-3\\ t=-11\end{array}\right.$.

Ta có $g(x)=f\left(x^2+4x-3m-2\right)\Rightarrow g'(x)=(2x+4)\,f'\left(x^2+4x-3m-2\right)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{c}x=-2\\x^2+4x-3m-2=5\\x^2+4x-3m-2=-3\\x^2+4x-3m-2=-11\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{c}x=-2\ \left((-2)^2+4(-2)=-4\right)\\x^2+4x=3m+7\\x^2+4x=3m-1\\x^2+4x=3m-9\end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên của hàm số $y=x^2+4x$ ta được $\underset{\mathbb{R}}{Min}\left(x^2+4x\right)=y(-2)=-4$.

Vậy hàm số $g(x)=f\left(x^2+4x-3m-2\right)$ có nhiều điểm cực trị nhất khi $3m-9>-4\Leftrightarrow m>\frac{5}{3}$.

Vì giá trị nguyên của $m\in[-2021;2021]$ nên $m\in\{2;3...;2021\}$. Vậy có 2020 số.

Câu 10: Ta có $y=f'(3-2x)=a(x+2)^2(x-1)$ với $a<0$

Với $x=-2$ ta có $f'(7)=0$

Với $x=1$ ta có $f'(1)=0$

Suy ra $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{c}x=7\\x=1\end{array}\right.$ trong đó $x=7$ là nghiệm bội hai.

Ta có: $g(x)=f\left(\left|x^2-3\right|\right)=f\left(\sqrt{\left(x^2-3\right)^2}\right)\Rightarrow g'(x)=\frac{x\left(x^2-3\right)}{\left|x^2-3\right|}.f'\left(\left|x^2-3\right|\right)$

$$g'(x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\\left|x^2-3\right|=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm2\\x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$$ và $x^2-3=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$ thì $g'(x)$ không xác định

Xét $g'(-3)=\frac{-3.6}{6}f'(6)$. Ta có $f'(6)=f'\left(3-2.\frac{-3}{2}\right)$

Nên $f'(6)=f'\left(3-2.\frac{-3}{2}\right)=a\left(-\frac{3}{2}+2\right)^2\left(-\frac{3}{2}-1\right)>0$ vì $a<0$ suy ra $g'(-3)<0$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$ ‖ $-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$ ‖ $-$	0	$+$

Hàm số có 4 điểm cực tiểu.

Câu 11:

Hàm số $g(x)$ là hàm số bậc 4 nên có dạng

$g(x)=a(x+2)(x+1)(x-1)(x-2),a>0\Rightarrow f'\left(1-x^2\right)=a\left(x^2-4\right)\left(x^2-1\right)$

Đặt $t=1-x^2\Rightarrow f'(t)=at(t+3)$

$$y=f\left(x^2-2|x|\right)\Rightarrow y'=\left(2x-\frac{2x}{\sqrt{x^2}}\right)f'\left(x^2-2|x|\right)=2ax\left(1-\frac{1}{\sqrt{x^2}}\right)\left(x^2-2|x|\right)\left(x^2-2|x|+3\right)$$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=-1\\x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right.$$

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số $y=f\left(x^2-2|x|\right)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 12:

Đặt $t=5-2x$. Khi $y=f(5-2x)$ có 3 điểm cực trị $x=0,x=2,x=4$ thì $y=f(t)$ có 3 điểm cực trị $t=5,t=1,t=-3$ và $f(5)=0, f(1)=\frac{9}{4}, f(-3)=-4$.

Bảng xét dấu $y=f(t)$ như sau:

t	$-\infty$		-3		1		5		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Xét $g(x)=2f\left(4x^3+1\right)+m-\frac{1}{2}\Rightarrow g'(x)=24x^2f'\left(4x^3+1\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=0\\4x^3+1=5\\4x^3+1=1\\4x^3+1=-3\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=0\\x=1\\x^3=0\\x=-1\end{array}\right.$

$\Rightarrow y=g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Xét phương trình $2f\left(4x^3+1\right)+m-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow f\left(4x^3+1\right)=\frac{1}{4}-\frac{m}{2}$.

Đặt $u=4x^3+1\Rightarrow u\in\mathbb{R}$.

Số nghiệm $f\left(4x^3+1\right)=\frac{1}{4}-\frac{m}{2}$ bằng số nghiệm phương trình $f(u)=f(t)=\frac{1}{4}-\frac{m}{2}$.

Để $y=\left|2f\left(4x^3+1\right)+m-\frac{1}{2}\right|$ có 5 điểm cực trị thì $f(t)=\frac{1}{4}-\frac{m}{2}$ có 2 nghiệm đơn phân biệt

Suy ra $\left[\begin{array}{l}\frac{1}{4}-\frac{m}{2}\ge\frac{9}{4}\\-4<\frac{1}{4}-\frac{m}{2}\le 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le-4\\\frac{1}{2}\le m<\frac{17}{2}\end{array}\right.$. Vì $m\in(-9;9)$ và $2m\in\mathbb{Z}$ nên có 26 giá trị.

Câu 13: Đồ thị hàm số $y=f(1-x)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ $x=-2$ và $x=1$.

Suy ra $y=f(1-x)=a(x+2)^2.(x-1)^2$ trong đó $a>0$.

$y=f(1-x)=a\left[3-(1-x)\right]^2.\left[-(1-x)\right]^2$.

Do đó, $f(x)=a(3-x)^2.x^2 \Rightarrow f'(x)=2ax.(3-x).(3-2x)$.

Ta có bảng xét dấu của $f'(x)$:

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$$g'(x)=2x.f'\left(x^2+2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+2=0 \\ x^2+2=\frac{3}{2} \\ x^2+2=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{array}\right. .$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên, ta thấy hàm số $g(x)=f\left(x^2+2\right)$ có 2 điểm cực tiểu.

Câu 14: Đặt $t=x^2-2x$.

Ta có một phần bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ như sau

x	$-\infty$		-3		1		5		$+\infty$
$t=x^2-2x$	$+\infty$		15		-1		15		$+\infty$
$f(t)=f\left(x^2-2x\right)$	$+\infty$	↘		↗	4	↘		↗	$+\infty$
			-1				-1		

Ta vẽ lại một phần bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau

x	-1		15	$+\infty$
$f(x)$	4	↘		$+\infty$
			-1	

Suy ra hàm số $f(x)$ có đúng hai điểm cực trị là $x=-2$ và $x=15$.

Xét hàm số $g(x)=f\left(x^2-4x+4\right) \Rightarrow g'(x)=(2x-4)\,f'\left(x^2-4x+4\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^2-4x+4=-2 \\ x^2-4x+4=15 \end{array}\right.$.

Phương trình $x^2-4x+4=-2$ vô nghiệm.

Phương trình $x^2-4x+4=15$ có hai nghiệm phân biệt khác 2.

Vậy hàm số $f\left(x^2-4x+4\right)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 15: Ta có: $\left[f\left(x^2+2x\right)\right]'=\left(2x+2\right)f'\left(x^2+2x\right)=a\left(x+3\right)\left(x+2\right)\left(x+1\right)\left(x\right)\left(x-1\right)\ \left(a>0\right)$

$\Rightarrow f'\left(x^2+2x\right)=\frac{a}{2}\left(x+3\right)\left(x+2\right)x\left(x-1\right)=\frac{a}{2}\left(x^2+2x-3\right)\left(x^2+2x\right)$

Đặt $t=x^2+2x\Rightarrow f'\left(t\right)=\frac{a}{2}\left(t-3\right)t$.

Ta có $g'=\frac{x-2}{\left|x-2\right|}f'\left(\left|x-2\right|+m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\f'\left(\left|x-2\right|+m\right)=0\end{array}\right.$

Để hàm số $g\left(x\right)$ có 5cực trị

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|x-2\right|+m=0\\\left|x-2\right|+m=3\end{array}\right.$ phải có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-m>0\\3-m>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m<0\\m<3\end{array}\right.\Leftrightarrow m<0$.

Suy ra $m\in\left\{-10;-9;...;-1\right\}$. Tổng giá trị m nguyên là -55.

Vậy hàm số $f\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(5;9\right)$.

Câu 16: Từ đồ thị ta thấy $f'\left(x^3-x^2-2x+3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=0\\x=2\end{array}\right.$ do đó ta có $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=3$.

Xét $h\left(x\right)=f\left(x^4-2x^2\right)$ ta có $h'\left(x\right)=\left(4x^3-4x\right)f'\left(x^4-2x^2\right)$,

$h'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left(4x^3-4x\right)f'\left(x^4-2x^2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\f'\left(x^4-2x^2\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\x^4-2x^2=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$

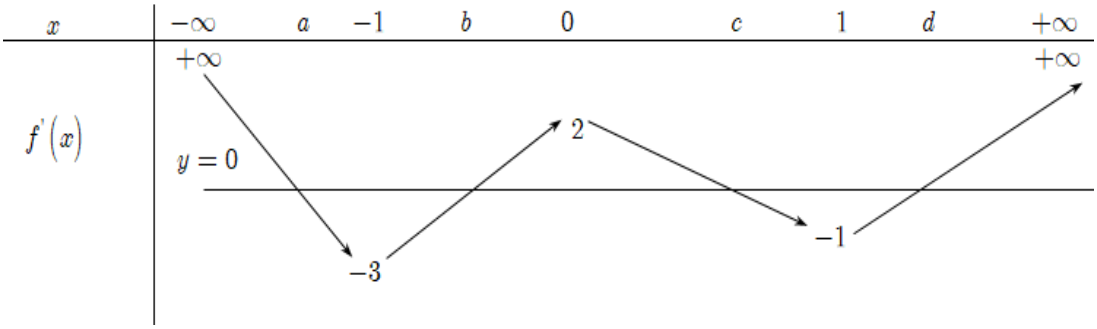
(Tất cả các nghiệm đều bội lẻ)

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h\left(x\right)=f\left(x^4-2x^2\right)$ như sau:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	$f(3)$	↘	$f(-1)$	↗	$f(0)$	↘	$f(-1)$	↗	$f(3)$	↘	$-\infty$

Do hàm số $y=f'\left(x^3-x^2-2x+3\right)$ là hàm bậc 3 suy ra $y=f'\left(x\right)$ là hàm bậc nhất có hệ số bậc nhất âm và $f'\left(3\right)=0$ do đó $f\left(3\right)>f\left(0\right)$, theo giả thiết $f\left(0\right)>0$, $f\left(-1\right)<0$ nên kết hợp với bảng biến thiên của hàm số $h\left(x\right)=f\left(x^4-2x^2\right)$ ta suy ra hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(x^4-2x^2\right)\right|$ có 6 điểm cực tiểu.

Câu 17: Dựa vào bảng biến thiên của $f'(x)$



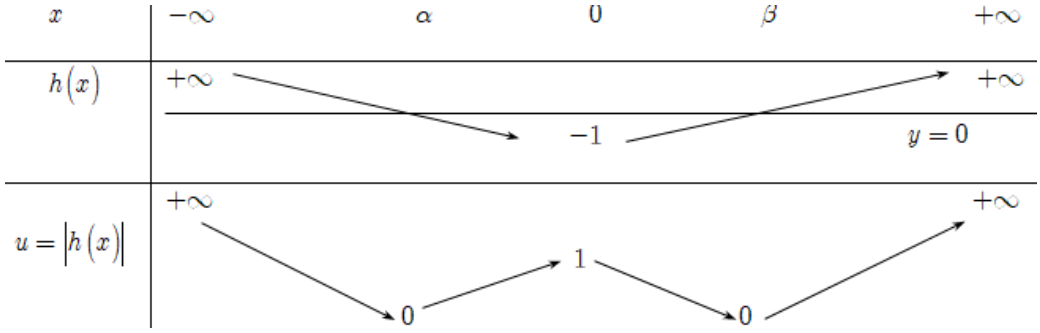
Ta thấy $f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=a \in (-\infty;-1) \\ x=b \in (-1;0) \\ x=c \in (0;1) \\ x=d \in (1;+\infty) \end{cases}$

Đặt $h(x)=e^{2x}-2x-2$

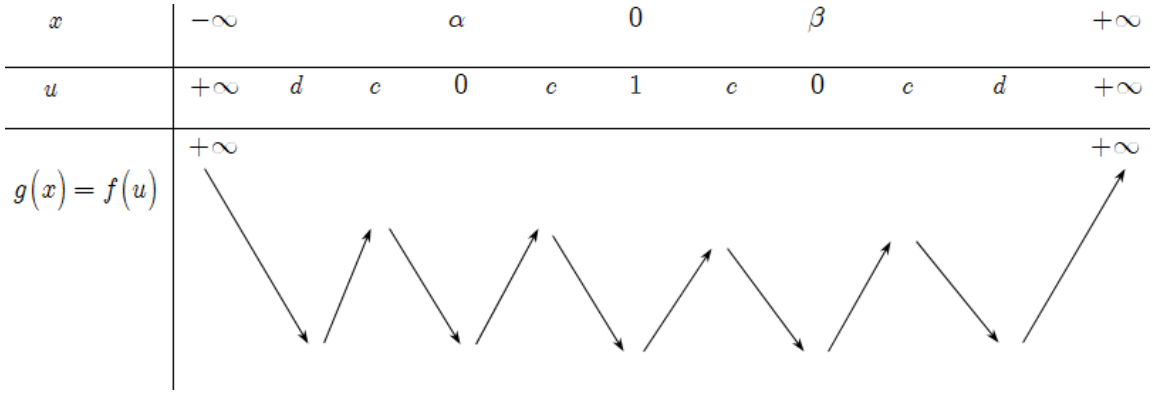
$h'(x)=2e^{2x}-2 \Rightarrow h'(x)=0 \Leftrightarrow e^{2x}=1 \Leftrightarrow x=0$

$h(x)=0 \Leftrightarrow e^{2x}-2x-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha \approx -0,92 \\ x=\beta \approx 0,57 \end{cases}$

Nên ta có bảng biến thiên sau:



Sử dụng phương pháp ghép trục, ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)=f\left|e^{2x}-2x-2\right|=f(u)$ như sau:



Vậy hàm số $g(x)=f\left|e^{2x}-2x-2\right|$ có 9 điểm cực trị.

Câu 18: Đặt: $h(x)=f(x)+3x \Rightarrow h'(x)=f'(x)-(-3)$

Từ đồ thị hàm $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	-	0 +	0	- 0	+
$h(x)$	Trục Ox		$h(0)$	0	

Số điểm cực trị dương của hàm $|h(x)|$ là 2.

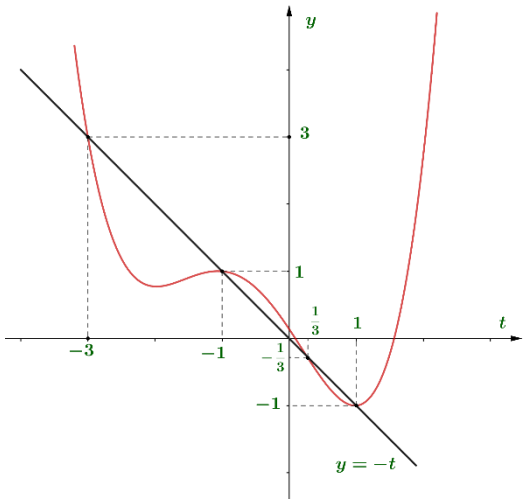
Do đó số điểm cực tiểu của $g(x)$ là: $2.2+1=5$.

Câu 19: Đặt $t=\dfrac{5\sin x-1}{2}$

Suy ra $g(t)=2f(t)+t^2+3$

Ta có $g'(t)=2f'(t)+2t=0 \Leftrightarrow f'(t)=-t$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\pm 1 \\ t=\dfrac{1}{3} \\ t=-3 \end{array}\right.$



Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	-3	-1	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$g'(t)$	+	0 −	0	+ 0	− 0	+
$g(t)$	$-\infty$	$g(-3)$	$g(-1)$	$g\left(\frac{1}{3}\right)$	$g(1)$	$+\infty$

Suy ra:

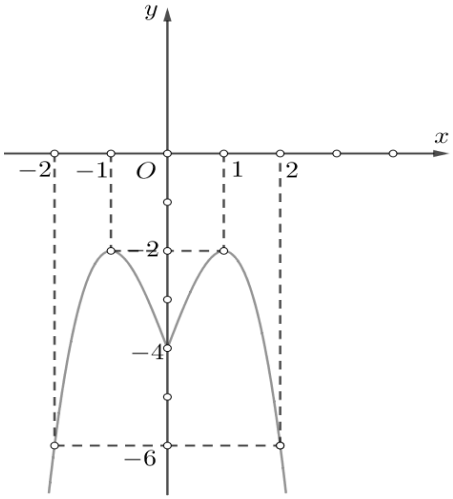
x	0		$\frac{\pi}{2}$			$\frac{3\pi}{2}$			2π
t	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1	2	1	$\frac{1}{3}$	-1	-3	-1	$-\frac{1}{2}$
$g(t)$	$g\left(-\frac{1}{2}\right)$	$g\left(\frac{1}{3}\right)$	$g(1)$	$g(2)$	$g(1)$	$g\left(\frac{1}{3}\right)$	$g(-1)$	$g(-3)$	$g(-1)$	$g\left(\frac{-1}{2}\right)$

Câu 20: $f(x)$ có hai cực trị là $x=0, x=2 \Rightarrow f'(x)=ax(x-2) \Rightarrow f(x)=\dfrac{a}{3}x^3-ax^2+C.$

$f(0)=-2,\ f(1)=-4\Rightarrow a=3,\ c=-2\Rightarrow f(x)=x^3-3x^2-2$.

$$f(1-|x|)=\begin{cases} f(1-x), \text{ khi } x\geq 0 \\ f(1+x), \text{ khi } x<0 \end{cases}\Rightarrow f(1-|x|)=\begin{cases} -x^3+3x-4, \text{ khi } x\geq 0 \\ x^3-3x-4, \quad \text{khi } x<0 \end{cases}.$$

Ta có đồ thị của $f(1-|x|)$ như sau:



Đặt $h(x)=f(1-|x|)+m$. Ta có $g(x)=|h(x)|$.

$g(x)$ có 5 cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $h(x)=0$ có 2 nghiệm đơn $\Leftrightarrow m\geq 4$.

Vậy có 17 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

DẠNG 4 Cực trị chứa dấu giá trị tuyệt đối

❖ Một số kiến thức cần nắm:

➢ **Cách vẽ đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$:**

- Cho đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$. Đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ được vẽ bằng cách:
- Giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ nằm phía trên trục hoành.
- Lấy đối xứng phần đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ nằm phía dưới trục hoành qua trục hoành đồng thời xóa phần phía dưới trục hoành.

➢ **Tính chất đặc biệt của đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$:**

- Số cực trị của hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ bằng tổng số cực trị hàm số $y=f\left(x\right)$ và số điểm cắt của $y=f\left(x\right)$ và trục Ox (không tính điểm tiếp xúc).
- Hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ là hàm số chẵn đồ thị đối xứng qua trục tung. Đồ thị được vẽ bằng cách:
- Giữ nguyên đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right),\left(C_1\right)$ ứng với $x\ge 0$.
- Với $x<0$ được vẽ bằng cách lấy đối xứng phần đồ thị $\left(C_1\right)$ qua trục tung.
- Gọi $\left(C_1\right)$ có số điểm cực trị là α.
- Nếu $\left(C_1\right)$ cắt trục tung thì số điểm cực trị của $y=f\left(\left|x\right|\right)$ là $2\alpha+1$ (một điểm cực trị là $x=0$)
- Nếu $\left(C_1\right)$ không cắt trục tung thì số điểm cực trị của $y=f\left(\left|x\right|\right)$ là 2α.
- Số điểm cực trị của hàm số $f\left(\left|x\right|\right)$ là: $2a+1$ với a là số điểm cực trị dương của hàm số $y=f\left(x\right)$ (số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ nằm phía bên phải trục tung).
- Số điểm cực trị (nếu có) của hàm số $y=f\left(ax+b\right)+c$ bằng số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x\right)$.

➢ Đồ thị hàm số có dạng $y=\left|u\left(x\right)\right|.v\left(x\right)$

- Từ đồ thị $\left(C\right):y=u\left(x\right).v\left(x\right)$ suy ra đồ thị $\left(C'\right):y=\left|u\left(x\right)\right|.v\left(x\right)$.
- Ta có: $y=\left|u\left(x\right)\right|.v\left(x\right)=\begin{cases}u\left(x\right).v\left(x\right)\ \ neu\ \ u\left(x\right)\ge 0\\-u\left(x\right).v\left(x\right)\ neu\ u\left(x\right)<0\end{cases}$

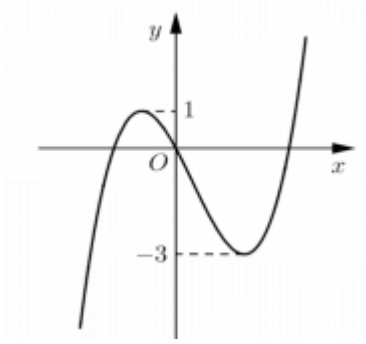
➢ Cách vẽ đồ thị hàm số $\left(C'\right)$ từ đồ thị $\left(C\right)$:

- Giữ nguyên miền đồ thị $u\left(x\right)\ge 0$ của đồ thị $\left(C\right):y=f\left(x\right)$.
- Bỏ phần đồ thị miền $u\left(x\right)<0$ của $\left(C\right)$, lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox.

Câu 1: Cho $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(x^2-4)$ số điểm cực trị của hàm số $y=f(|x|)$ là

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 2: Cho hàm bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có ba điểm cực trị.



A. $m\le -1$ hoặc $m\ge 3$. **B.** $m\le -3$ hoặc $m\ge 1$. **C.** $m=-1$ hoặc $m=3$. **D.** $-1\le m\le 3$.

Câu 3: Có tất cả bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2017;2017]$ để hàm số $y=|x^3-3x^2+m|$ có ba điểm cực trị?

A. 4032. **B.** 4034. **C.** 4030. **D.** 4028.

Câu 4: Tm tất cả các giá trị thực của tham số m đề hàm số $y=|x^4-mx^2+m|$ có 7 cực trị.

A. $(4;+\infty)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(0;4)$. **D.** $(1;+\infty)$

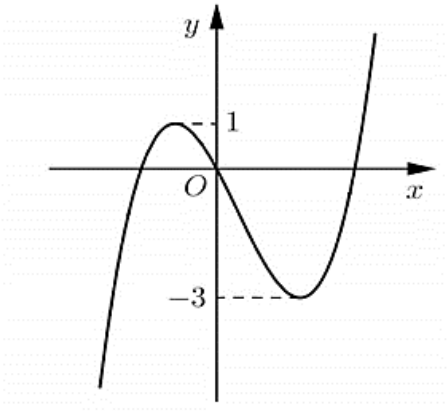
Câu 5: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ thõa mãn $a>0$, $d>2018$, $a+b+c+d-2018<0$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=|f(x)-2018|$.

A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 6: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=|3x^4-4x^3-12x^2+m|$ có 7 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 7: Cho hàm số bậc ba có đồ thị $y=f(x)$ như hình vẽ dưới đây. Tất cả các số thực của tham số m để hàm số $y=|f(x)+m|$ có 5 điểm cực trị là



A. $\left[\begin{array}{l} m\le -1 \\ m\ge 3 \end{array}\right.$. **B.** $-1<m<3$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=3 \end{array}\right.$. **D.** $1<m<3$.

Câu 8: Cho hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$ có ba điểm cực trị $x=-1;x=0;x=2$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=f(|x+m|)$ có 7 điểm cực trị.

A. $m<-1$. **B.** $m<0$. **C.** $-1<m<2$. **D.** $m<2$.

Câu 9: Cho hàm số $y=|x|^3-mx+5$. Gọi a là số điểm cực trị của hàm số đã cho. Mệnh đề nào dưới đây đúng

A. $a=0$. **B.** $a\le 1$. **C.** $1<a\le 3$. **D.** $a>3$.

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=|x|^3-(2m+1)x^2+3m|x|-5$ có 5 điểm cực trị:

A. $\left(-\infty;\frac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$. **B.** $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$.

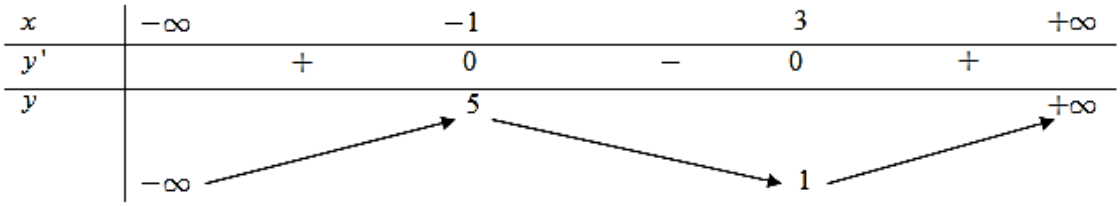
Câu 11: Cho hàm số $f(x)=x^3-(2m-1)x^2+(2-m)x+2$. Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị:

A. $-\frac{5}{4}<m<2$. **B.** $\frac{5}{4}<m<2$. **C.** $\frac{1}{2}<m<2$. **D.** $-2<m<\frac{5}{4}$.

Câu 12: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=|x|^3-(2m+1)x^2+3m|x|-5$ có 3 điểm cực trị:

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $\left[0;\frac{1}{4}\right)$.

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên



Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ bằng

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 14: Cho hàm số: $f(x)=\frac{1}{4}x^4-mx^3+\frac{3}{2}(m^2-1)x^2+(1-m^2)x+2019$ với m là tham số thực. Biết rằng hàm số $y=f(|x|)$ có số điểm cực trị lớn hơn 5 khi $a<m^2<b+2\sqrt{c}\,(a,b,c\in\mathbb{R})$. Giá trị $T=a+b+c$ bằng

A. 6. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 5.

Câu 15: Có bao nhiêu số nguyên $m\in[-10;10]$ để hàm số $y=|mx^3-3mx^2+(3m-2)x+2-m|$ có 5 điểm cực trị?

A. 7. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 11.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-20	↗	0	↘	-20	↗	$+\infty$

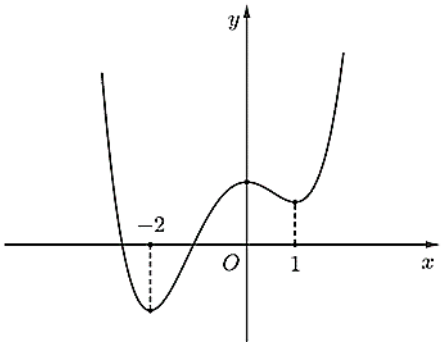
Có ban nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y=\left|f\left(x\right)+m\right|$ có 7 điểm cực trị?

A. 0. **B.** 21. **C.** 18. **D.** 19.

Câu 17: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x^3-2x^2\right)\left(x^3-2x\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=\left|f\left(1-2018x\right)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị

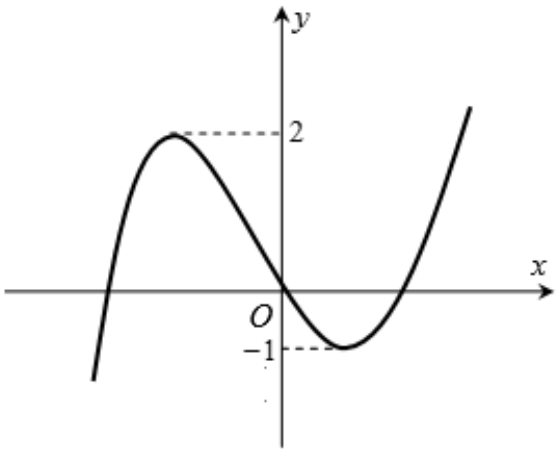
A. 9. **B.** 2022. **C.** 11. **D.** 2018.

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Các điểm $x=-2;x=0;x=1$ là các điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f\left(|x+1|-3\right)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



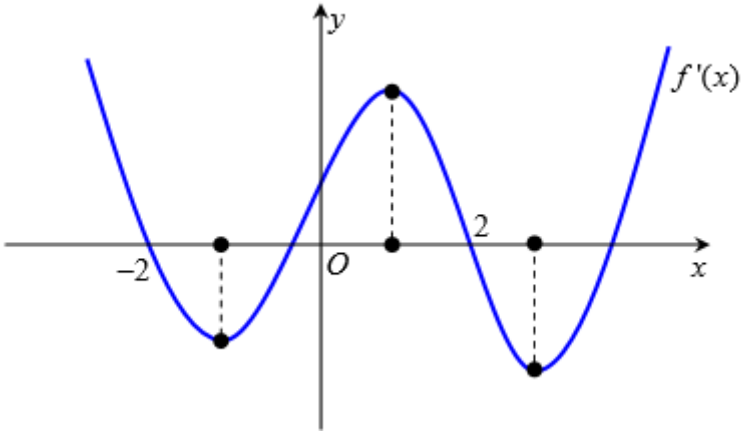
A. 5. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 19: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|2f\left(x\right)-3m\right|$ có 5 điểm cực trị là:



A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 20: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị đạo hàm $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y=\left|f\left(x^3-3x\right)+2\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?



A. 16 . **B.** 17 . **C.** 19 . **D.** 18

Câu 21: Biết phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0\ (a\neq 0)$ có đúng hai nghiệm thực. Hàm số $y=\left|ax^3+bx^2+cx+d\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 22: Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20;20)$ để hàm số $y=\left|x^2-2x+m\right|+2x+1$ có ba điểm cực trị?

A. 17. **B.** 16. **C.** 19. **D.** 18.

Câu 23: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=\left|x^3+(2m-1)x^2+(2m^2-2m-9)x-2m^2+9\right|$ có 5 điểm cực trị.

A. 7 . **B.** 5 . **C.** 6 . **D.** 4 .

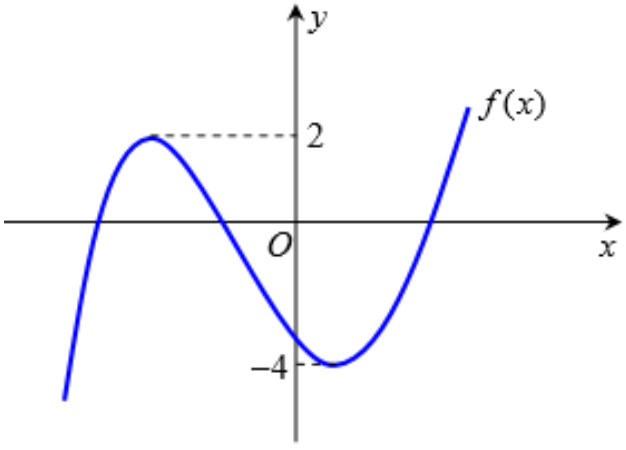
Câu 24: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=\left|x\right|^3-3mx^2+3(m^2-4)\left|x\right|+1$ có 3 điểm cực trị.

A. 3 . **B.** 5 . **C.** 6 . **D.** 4 .

Câu 25: Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-10;10)$ để hàm số $y=\left|x\right|^3-3mx^2+3(m^2-4)\left|x\right|+1$ có 5 điểm cực trị.

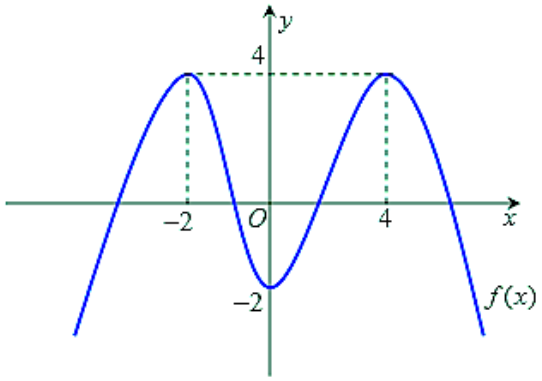
A. 3 . **B.** 6 . **C.** 8 . **D.** 7 .

Câu 26: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in\left[-2021;2012\right]$ để hàm số $y=\left|f^2\left(x\right)-2f\left(x\right)+m+4\right|$ có đúng 5 điểm cực trị?



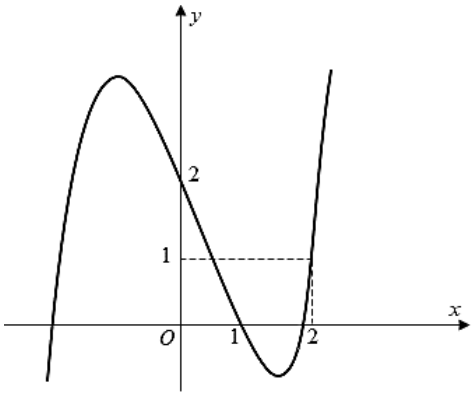
A. 2104 . **B.** 2016 . **C.** 2105 . **D.** 2017

Câu 27: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|4f^2(x)+8f(x)+m-1\right|$ có đúng 15 điểm cực trị?



A. 2 . **B.** 3 . **C.** 0 . **D.** 1.

Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



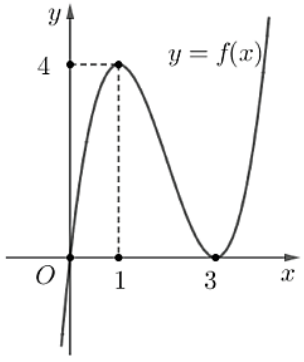
Hàm số $y=\left|4f(x)-2x^3+7x^2-8x+1\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị

A. 5 . **B.** 6 . **C.** 7 . **D.** 8 .

Câu 29: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^3\left(x^2+(4m-5)x+m^2-7m+6\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=f(|x|)$ có đúng 5 điểm cực trị.

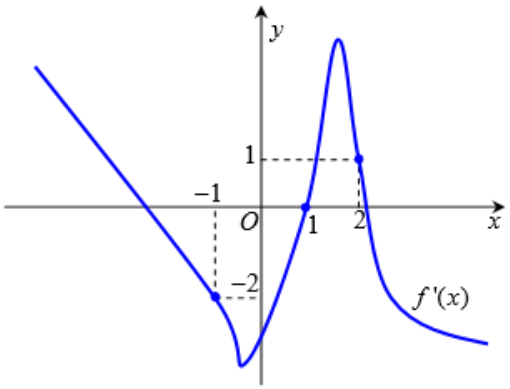
A. 4 . **B.** 2 . **C.** 5 . **D.** 3 .

Câu 30: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|\left(f(x)\right)^2+f(x)-2\right|$ là



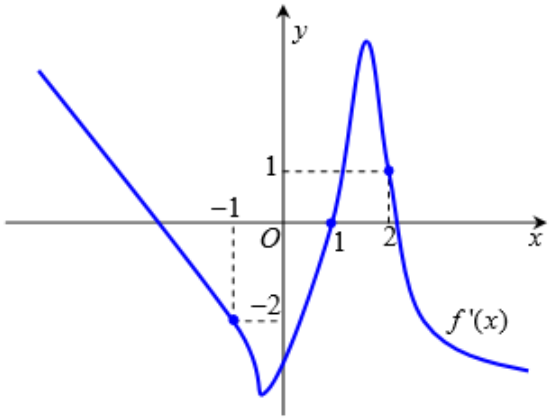
A. 6 . **B.** 9 . **C.** 5 . **D.** 7 .

Câu 31: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Hỏi hàm số $y=\left|2f(x)-x^2+2x+3\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?



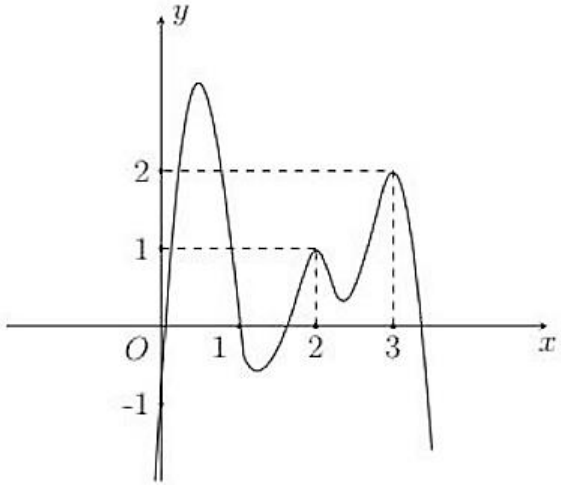
A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7

Câu 32: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Hỏi hàm số $y=\left|2f\left(x^2-2x\right)-x^4+4x^3-2x^2-4x+2021\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?



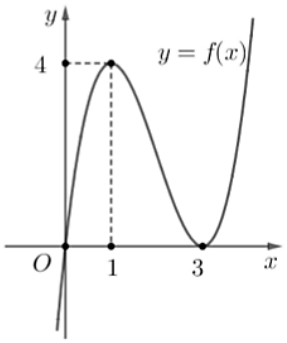
A. 9. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 12.

Câu 33: Cho $f(x)$ là một hàm đa thức và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y=\left|2f(x)-(x-1)^2\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?



A. 9. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 34: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Khi hàm số $y=\left|(f(x))^2+f(x)+m\right|$ có số điểm cực trị là ít nhất. Giá trị nhỏ nhất của tham số m thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $(0;1)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(1;+\infty)$.

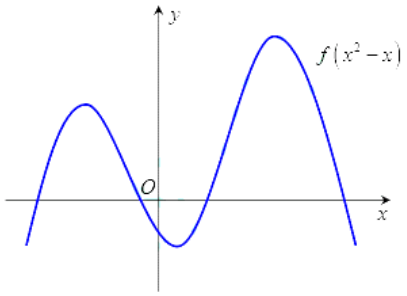
Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)=x^2-2mx+4m|x-m|+2$. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in(-21;21)$ để hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị. Số phần tử của S

A. 20. **B.** 16. **C.** 18. **D.** 19

Câu 36: Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3mx^2+6mx+m-1$. Số giá trị nguyên của tham số $m\in[-2021;2021]$ để hàm số $y=f(|x+2019m-2020|)$ có đúng 5 điểm cực trị

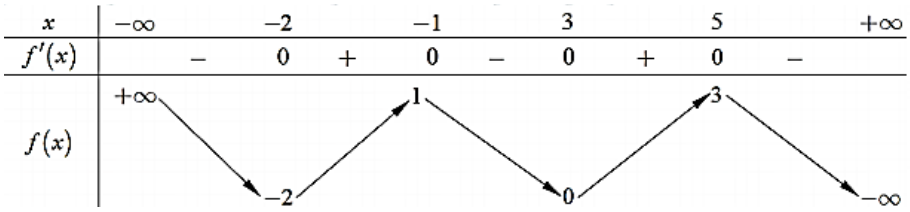
A. 2016. **B.** 2018. **C.** 2019. **D.** 2017

Câu 37: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y=f(x^2-x)$ được cho như hình vẽ dưới đây. Hỏi hàm số $y=f(x^2-2mx-|x-m|+m^2)$ có tất cả bao nhiêu cực trị?



A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 1.

Câu 38: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ



Xét hàm số $g(x)=f(|x-4|)+2018^{2019}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là:

A. 5. **B.** 1. **C.** 9. **D.** 2.

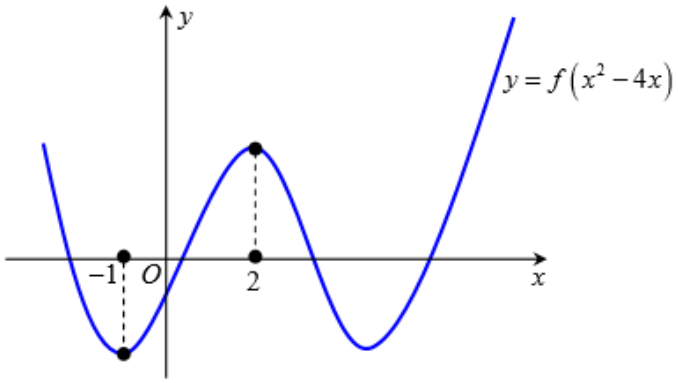
Câu 39: Cho hàm số $f(x)=\left|\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}+m\right|$. Hàm số có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 40: Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, với a,b,c là các số thực thỏa mãn $\begin{cases}a+b+c<-1\\4a-2b+c>8\\c<0\end{cases}$. Hàm số $y=\left|f(|x|)\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

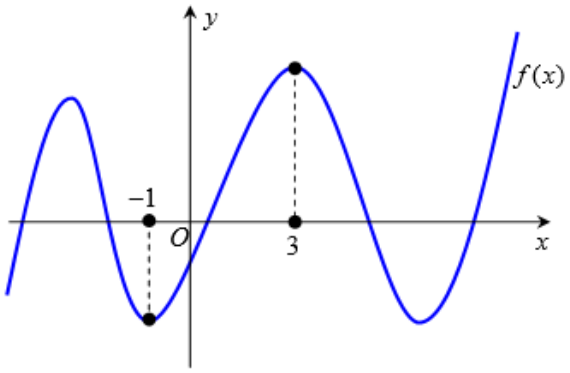
A. 7. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 5.

Câu 41: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y=f(x^2-4x)$ được cho như hình vẽ dưới đây. Hỏi hàm số $y=f(x^2-2|x|+12)$ có tất cả bao nhiêu cực trị?



A. 7. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 1.

Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-21;21]$ để hàm số $y=(-|x+2021m|-2m+1)$ có đúng 5 điểm cực trị. Số phần tử của tập S là



A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.A	3.A	4.B	5.B	6.D	7.B	8.A	9.B	10.D
11.B	12.C	13.C	14.B	15.B	16.D	17.A	18.C	19.A	20.B
21.A	22.C	23.B	24.D	25.D	26.B	27.B	28.C	29.D	30.D
31.D	32.B	33.D	34.A	35.A	36.C	37.C	38.A	39.B	40.D
41.A	42.A								

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn D

Ta có phương trình $f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=0 \\ x=1 \\ x=\pm 2 \end{bmatrix}$. Do nghiệm $x=1$ là nghiệm bội chẵn nên $x=1$ không phải là điểm cực trị. Vậy hàm số $f(x)$ đã cho có 3 cực trị nhưng chỉ có một cực trị $x=2>0$

$\Rightarrow$ hàm số $f(|x|)$ có 3 cực trị.

Câu 2: Chọn D

Hàm số $f(x)$ đã cho có hai điểm cực trị nên hàm số $f(x)+m$ cũng có hai cực trị. Vậy hàm số $y=|f(x)+m|$ ba cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình có tổng số nghiệm đơn và bội lẻ bằng 1

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -m \ge 1 \\ -m \le 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m \le -1 \\ m \le 3 \end{bmatrix}$.

Câu 3: Chọn A

Ta có $y=x^3-3x^2+m$ có $y'=3x^2-6x$; $y'=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=0 \\ x=2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y(0)=m \\ y(2)=m-4 \end{bmatrix}$.

Yêu cầu bài toán tương đương với: $y(0)y(2) \ge 0 \Leftrightarrow m(m-4) \ge 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m \ge 4 \\ m \le 0 \end{bmatrix}$.

Do đó $m \in \{-2017;-2016;...;0;4;...;2017\} \Rightarrow$ có $2018+2014=4032$ số nguyên thỏa mãn đầu bài.

Câu 4: Chọn B

Hàm số $g(x)=x^4-mx^2+m$ có tối đa là 3 cực trị và $g(x)=0$ có tối đa là 4 nghiệm

Vậy hàm số $y=|x^4-mx^2+m|$ có 7 cực trị $\Leftrightarrow g(x)=0$ có tối đa là 4 nghiệm phân biệt

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4m>0 \\ m>0 \\ m>0 \end{cases} \Leftrightarrow m>4$$

Câu 5: Chọn B

Xét $g(x)=f(x)-2018$, ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty; \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty \\ g(0)=f(0)-2018=d-2018>0 \\ g(1)=f(1)-2018=a+b+c+d-2018<0 \end{cases}$

Do đó đồ thị hàm số $y=g(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt suy ra hàm số $y=g(x)$ có hai điểm cực trị.

Do vậy số điểm cực trị của hàm số $y=|g(x)|=2+3=5$

Câu 6: Chọn D

Xét hàm số $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+m$ có ba điểm cực trị là nghiệm của phương trình

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 12x^3-12x^2-24x=0\Leftrightarrow 12\left(x^3-x^2-12x\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x=2\end{array}\right..$$

Phương trình $f(x)=0$ có tối đa bốn nghiệm thực. Do đó hàm số $y=|f(x)|$ có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $f(x)=0$ có 4 nghiệm thực phân biệt.

$\Leftrightarrow 3x^4-4x^3-12x^2=-m$ có 4 nghiệm thực phân biệt.

Lập bảng biến thiên của hàm số $y=3x^4-4x^3-12x^2$, ta có giá trị cần tìm của m thỏa mãn là $-5<-m<0\Leftrightarrow 0<m<5\Rightarrow m\in\{1;2;3;4\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 7: Chọn B

Yêu cầu bài toán tương đương với $f(x)+m=0\Leftrightarrow -m=f(x)$ có tổng số nghiệm đơn và bội lẻ bằng $3\Leftrightarrow -3<-m<1\Leftrightarrow -1<m<3.$

Câu 8: Chọn A

Hàm số $y=f(|x+m|)$ có 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow y=f(x+m)$ có 3 điểm cực trị dương.

Các điểm cực trị của hàm số $y=f(x+m)$ là $\left[\begin{array}{l}x+m=-1\\x+m=0\\x+m=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1-m\\x=-m\\x=2-m\end{array}\right.$

Vậy ta có điều kiện là $\left\{\begin{array}{l}-1-m>0\\-m>0\\2-m>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m<-1\\m<0\\m<2\end{array}\right.\Leftrightarrow m<-1$

Câu 9: Chọn B

Ta có $y=\begin{cases}x^3-mx+5\,(x\ge 0)\\-x^3-mx+5\,(x<0)\end{cases}\Rightarrow y'=\begin{cases}3x^2-m\,(x>0)\\-3x^2-m\,(x<0)\end{cases}$ và hàm số không có đạo hàm tại $x=0$

Nếu $m=0\Rightarrow y'=\begin{cases}3x^2>0\,(x>0)\\-3x^2<0\,(x<0)\end{cases}$

đổi dấu từ âm sang dương khi qua điểm x = 0 nên hàm số có duy nhất 1 điểm cực trị là x = 0

Nếu $m>0\Rightarrow y'=\begin{cases}3x^2-m\,(x>0)\\-3x^2-m\,(x<0)\end{cases}$; $y'=0\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{m}{3}}$

y' chỉ đổi dấu khi đi qua $x=\sqrt{\frac{m}{3}}$. Nên hàm số có duy nhất 1 điểm cực trị là $x=\sqrt{\frac{m}{3}}$

Nếu $m<0 \Rightarrow y'=\begin{cases}3x^2-m\ (x>0)\\ -3x^2-m\ (x<0)\end{cases}$; $y'=0 \Leftrightarrow x=-\sqrt{\dfrac{-m}{3}}$

y' chỉ đổi dấu khi đi qua $x=-\sqrt{\dfrac{-m}{3}}$ nên hàm số có duy nhất 1 điểm cực trị là $x=-\sqrt{\dfrac{-m}{3}}$

Vậy với mọi m, hàm số có duy nhất 1 điểm cực trị.

Câu 10: Chọn D

Yêu cầu bài toán tương đương với hàm số $y=x^3-(2m+1)x^2+3mx-5$ có hai điểm cực trị dương, tức là phương trình $y'=f'(x)=3x^2-2(2m+1)x+3m=0$ có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=(2m+1)^2-9m>0\\ S=\dfrac{2(2m+1)}{3}>0\\ P=\dfrac{3m}{3}>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>1\\ 0<m<\dfrac{1}{4}\end{array}\right.$.

Câu 11: Chọn B

Yêu cầu bài toán tương đương với hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị dương, tức là phương trình $y'=f'(x)=3x^2-2(2m-1)x+2-m=0$ có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=(2m-1)^2-3(2-m)>0\\ S=\dfrac{2(2m-1)}{3}>0\\ P=\dfrac{2-m}{3}>0\end{cases}\Leftrightarrow \dfrac{5}{4}<m<2$.

Câu 12: Chọn C

Yêu cầu bài toán tương đương với hàm số $y=f(x)=x^3-(2m+1)x^2+3mx-5$ có đúng một điểm cực trị dương, tức là phương trình $y'=f'(x)=3x^2-2(2m+1)x+3m=0$ có hai nghiệm thỏa mãn $x_1\le 0<x_2 \Leftrightarrow m\le 0$.

Câu 13: Chọn C

Ta có bảng biến thiên hàm số $y=f(|x|)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0		0	$+$	
y	$+\infty$	↘	1	↗	$f(0)$	↘	1	↗	$+\infty$

Hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 14: Chọn B

Ta có $f'(x)=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x+1-m^2$ là một đa thức bậc ba có tối đa 3 nghiệm, vậy hàm số $y=f(|x|)$ có số điểm cực trị lớn hơn 5 khi và chỉ khi $f(x)$ có 3 điểm cực trị dương, tức là $f'(x)=0$ có 3 nghiệm dương phân biệt.

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow x^3-3mx^2+3(m^2-1)x+1-m^2=0$ có ba nghiệm dương phân biệt.

Xét hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x+1-m^2$ có

$y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6mx+3(m^2-1)=m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m-1\\x=m+1\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x_{cd}=m-1, y_{cd}=m^3-m^2-3m+3\\x_{ct}=m+1, y_{ct}=m^3-m^2-3m-1\end{array}\right.$.

Do đó phương trình $y=0$ có 3 nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi:

$$\left\{\begin{array}{l}x_{cd>0}\\y(0)<0\\y_{cd}.y_{ct}<0\end{array}\right.\left\{\begin{array}{c}m-1>0\\1-m^2<0\\(m^3-m^2-3m+3).(m^3-m^2-3m+1)<0\end{array}\right.\Leftrightarrow\sqrt{3}<m<1+\sqrt{2}\Leftrightarrow 3<m^2<3+2\sqrt{2}.$$

Vì vậy $a=3$, $b=3$, $c=2$. Nên $a+b+c=8$.

Câu 15: Chọn B

Hàm số $y=|mx^3-3mx^2+(3m-2)x+2-m|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y=mx^3-3mx^2+(3m-2)x+2-m$ có hai điểm cực trị và phương trình $mx^3-3mx^2+(3m-2)x+2-m=0\Leftrightarrow(x-1)(mx^2-2mx+m-2)=0$ có 3 nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\neq 0\\\Delta'=m^2-m(m-2)>0\Leftrightarrow m>0\\m-2m+m-2\neq 0\end{array}\right.$

Vậy có 10 giá trị m thỏa mãn ycbt.

Câu 16: Chọn D

Hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị là $x=-2; x=0; x=2$ nên hàm số $y=f(x)+m$ cũng có 3 điểm cực trị $x=-2; x=0; x=2$.

Vậy điều kiện để hàm số $y=|f(x)+m|$ có 7 điểm cực trị là phương trình $f(x)+m=0\Leftrightarrow f(x)=-m$ có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -20<-m<0\Leftrightarrow 0<m<20$.

Vậy có 19 giá trị m thỏa mãn ycbt.

Câu 17: Chọn A

Ta có: $f'(x)=(x^3-2x^2)(x^3-2x)$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0(boi3)\\x=2\\x=\sqrt{2}\\x=-\sqrt{2}\end{array}\right.$

$$\Rightarrow f'(1-2018x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-2018x=0(boi3)\\1-2018x=2\\1-2018x=\sqrt{2}\\1-2018x=-\sqrt{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1/2018(boi3)\\x=-1/2018\\x=(1-\sqrt{2})/2018\\x=(1+\sqrt{2})/2018\end{array}\right.$$

Suy ra: Hàm số $f(1-2018x)$ có 4 điểm cực trị

Phương trình $f(1-2018x)=0$ có nhiều nhất 5 nghiệm

Vậy hàm số $y=|f(1-2018x)|$ có nhiều nhất $4+5=9$ điểm cực trị.

Câu 18: Chọn C

Ghi chú: Hàm số $y=f(|x+m|+n)$ có tất cả $2a+1$ điểm cực trị, trong đó a là số điểm cực trị lớn hơn $-m$ của hàm số $y=f(x+m+n)$.

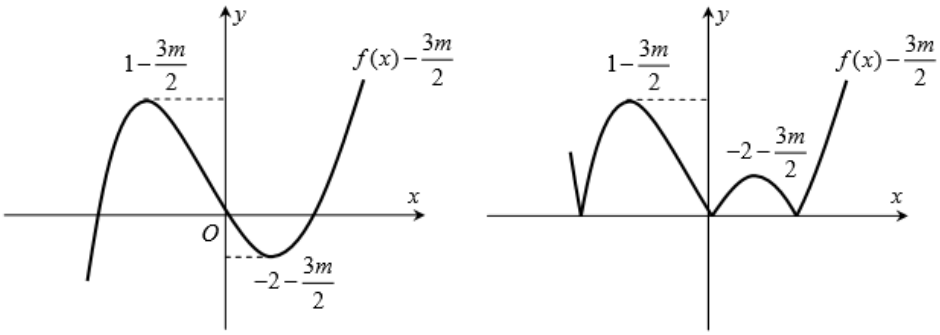
Ta có hàm số $y=f(x+1-3)=f(x-2)$ có các điểm cực trị là:

$x-2=-2;x-2=0;x-2=1\Leftrightarrow x=0;x=2;x=3$

Hàm số này có 3 điểm cực trị lớn hơn -1.Do đó hàm số $y=f\left(|x+1|-3\right)$ có tổng cộng 2.3+1=7 điểm cực trị.

Câu 19: Chọn A

Hàm số $y=\left|2f\left(x\right)-3m\right|=2\left|f\left(x\right)-\dfrac{3m}{2}\right|$ có cùng số điểm cực trị với hàm số $y=g\left(x\right)=\left|f\left(x\right)-\dfrac{3m}{2}\right|$.



Thực hiện biến đổ đồ thị: $f\left(x\right)\xrightarrow[mot\_doan\_3\_don\_vi]{Tinh\_tien\_len\_tren}f\left(x\right)-\dfrac{3m}{2}\xrightarrow{lay\_doi\_xung\_qua\_Ox}\left|f\left(x\right)-\dfrac{3m}{2}\right|$.

Hàm số $\left(f\left(x\right)-\dfrac{3m}{2}\right)$ có hai điểm cực trị tương ứng với hai giá trị cực trị là $\begin{cases}1\to\left(-2-\dfrac{3m}{2}\right)\\1\to\left(1-\dfrac{3m}{2}\right)\end{cases}$.

Để hàm số $y=g\left(x\right)=\left|f\left(x\right)-\dfrac{3m}{2}\right|$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị hàm số $\left(f\left(x\right)-\dfrac{3m}{2}\right)$ phải cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $\Rightarrow\begin{cases}\left(-2-\dfrac{3m}{2}\right)<0\\\left(1-\dfrac{3m}{2}\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow-\dfrac{4}{3}<m<\dfrac{2}{3}\Rightarrow m=\left\{1;0\right\}$.

Câu 20: Chọn B

Xét hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^3-3x\right)+2$ có $g'\left(x\right)=\left(3x^2-3\right)f'\left(x^3-3x\right).$

Phương trình đạo hàm $g'\left(x\right)=\left(3x^2-3\right)f'\left(x^3-3x\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2-3=0 \Leftrightarrow x=\pm 1. \\ f'\left(x^3-3x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3-3x=-2 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-2)=0 \\ x^3-3x=a\in(-2;0) \\ x^3-3x=2 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-2)=0 \\ x^3-3x=b>2. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Suy ra hàm số $y=f\left(x^3-3x\right)+2$ có 8 điểm cực trị có tối đa 17 điểm cực trị.

Câu 21: Chọn A

Ghi chú: *Hàm số* $y=|f(x)|$ *có* $m+n$ *điểm cực trị*

Trong đó m *là số điểm cực trị của hàm số* $y=f(x)$, n *là số nghiệm đơn và nghiệm bội lẻ của phương trình* $f(x)=0$.

Vì phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0\ (a\neq 0)$ có đúng hai nghiệm thực nên biểu thức có dạng:

$u=ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_1)^2(x-x_2)$

$u'=a(x-x_1)^2+2a(x-x_1)(x-x_2)=(x-x_1)(ax-ax_1+2ax-2ax_2)$.

Phương trinh $u'=0$ có hai nghiệm đơn nên ta suy ra hàm số ax^3+bx^2+cx+d có hai điểm cực trị. Từ đó hàm số $y=\left|ax^3+bx^2+cx+d\right|$ có tất cả $2+1=3$ cực trị.

Câu 22: Chọn C

Trường hợp 1: Phương trình $x^2+2x+m=0$ vô nghiệm.

Nếu $x^2+2x+m<0\ \forall x$ (vô lí)

Nếu $x^2+2x+m>0\ \forall x$

Khi đó $y=x^2-2x+m+2x+1=x^2+m+1$. Hàm số này có 1 điểm cực trị tại $x=0$. **Loại**

Trường hợp 2: Phương trình $x^2+2x+m=0$ có nghiệm.

Nếu phương trình có nghiệm kép thì x^2+2x+m có dạng $(x-x_0)^2\geq 0\forall x$. Lúc này hàm số cũng có 1 điểm cực trị tại $x=0$. **Loại**

Nếu phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1<x_2\Leftrightarrow \Delta'>0\Leftrightarrow 1-m>0\Leftrightarrow m<1$

$$y'=\frac{(2x-2)(x^2-2x+m)}{\left|x^2-2x+m\right|}+2$$

$$y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 2x-2+2=0 \\ x^2-2x+m>0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} -(2x-2)+2=0 \\ x^2-2x+m<0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-2x+m>0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x=2 \\ x^2-2x+m<0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ m>0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x=2 \\ m<0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Khi $0<m<1$, rõ ràng không tồn tại số nguyên

Khi $m<0$ ta có bảng xét dấu của y' như sau:

Vì $x_1+x_2=2; x_1x_2=m<0$ nên $x_1<2<x_2$.

x	$-\infty$		x_1		2		x_2		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

Lúc này hàm số có 3 điểm cực trị. Vậy $m \in \{-19;...;-1\}$ .Ta có 19 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 23: Chọn B

Ta có: $x^3+(2m-1)x^2+(2m^2-2m-9)x-2m^2+9=0$ (1)

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+2mx+2m^2-9)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2+2mx+2m^2-9=0 \end{array}\right.$

Ycbt $\Leftrightarrow$ (1) có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=m^2-(2m^2-9)>0 \\ 1+2m+2m^2-9\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3<m<3 \\ m\neq \dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2} \end{cases} \Rightarrow m\in\{-2,-1,0,1,2\}.$

Vậy có 5 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 24: Chọn D

Ycbt $\Leftrightarrow y=x^3-3mx^2+3(m^2-4)x+1$ có đúng một điểm cực trị dương

$\Leftrightarrow y'=3x^2-6mx+3(m^2-4)=0$ có đúng một nghiệm dương

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m-2 \\ x=m+2 \end{array}\right.$ có đúng một nghiệm dương $\Leftrightarrow m-2\le 0<m+2 \Leftrightarrow -2<m\le 2 \Rightarrow m\in\{-1,0,1,2\}$.

Vậy có 4 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 25: Chọn D

Ycbt $\Leftrightarrow y=x^3-3mx^2+3(m^2-4)x+1$ có đúng hai điểm cực trị dương

$\Leftrightarrow y'=3x^2-6mx+3(m^2-4)=0$ có đúng hai nghiệm dương

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m-2 \\ x=m+2 \end{array}\right.$ có đúng hai nghiệm dương $\Leftrightarrow m-2>0 \Leftrightarrow m>2 \Rightarrow m\in\{3,4,...,9\}$.

Vậy có 7 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 26: Chọn B

Xét hàm số $g(x)=f^2(x)-2f(x)+m+4 \Rightarrow g'(x)=f'(x).(2f(x)-2).$

Cho $g'(x)=f'(x).(2f(x)-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \Rightarrow co\_2\_cuc\_tri \\ f(x)=1 \Rightarrow co\_3\_cuc\_tri \end{array}\right.$.

$\Rightarrow y=g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Để hàm số $y=|g(x)|$ có 5 điểm cực trị thì phương trình $g(x)=f^2(x)-2f(x)+m+4$ vô nghiệm.

$\Rightarrow \Delta'=1-m-4=-m-3\le 0 \Leftrightarrow m\ge -3 \rightarrow -3\le m\le 2012 \Rightarrow$ có 2016 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 27: Chọn B

Xét hàm số $y=g(x)=4f^2(x)+8f(x)+m-1 \Rightarrow g'(x)=4f'(x).(2f(x)+2).$

Phương trình đạo hàm $g'(x)=4f'(x).(2f(x)+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \Rightarrow co\ 3\ diem\ cuc\ tri \\ f(x)=-1 \Rightarrow co\ 4\ diem\ cuc\ tri \end{array}\right.$.

Suy ra hàm số $y=g(x)$ có 7 điểm cực trị.

Để hàm số $y=\left|g(x)\right|$ có đúng 15 điểm cực trị thì pt $4f^2(x)+8f(x)+m-1$ phải có 8 nghiệm bội lẻ.

Dựa vào đồ thị ta thấy: phương trình $f(x)=a\in(-2;4)$ luôn có 4 nghiệm phân biệt.

Đặt $f(x)=u$ thì phương trình $4u^2+8u+m-1=0$ phải có 2 nghiệm phân biệt với $\forall u\in(-2;4)$.

Mặt khác: $4u^2+8u+m-1=0\Leftrightarrow m-1=-4u^2-8u$, ta có bảng biến thiên như sau:

u	-2		-1		4
y'		$-$	0	$+$	
y	0	↘	-96	↗	4 ; $m-1$

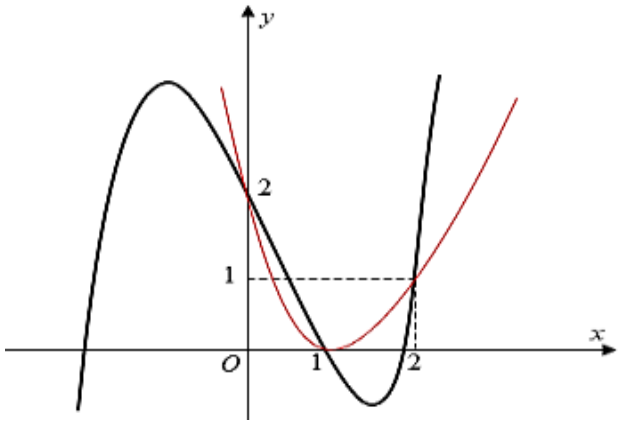
Từ bảng biến thiên $\Rightarrow 0<m-1<4\Leftrightarrow 1<m<5\Rightarrow m=\{2;3;4\}$.

Câu 28: Chọn C

Xét hàm số $g(x)=4f(x)-2x^3+7x^2-8x+1$ có:

$$g'(x)=0\Leftrightarrow 4f'(x)-6x^2+14x-8=0\Leftrightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{7}{2}x+2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right.$$

Đường cong $y=f'(x)$ cắt parabol $y=\frac{3}{2}x^2-\frac{7}{2}x+2$ tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $x=0;x=1;x=2$



Và $g'(x)$ đổi dấu khi đi qua các điểm $x=0;x=1;x=2$ nên $g(x)$ có ba điểm cực trị.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$g(0)$	↗	$g(1)$	↘	$g(2)$	↗	$+\infty$

Vậy phương trình $g(x)=0$ có tối đa bốn nghiệm (đơn hoặc bội lẻ)

Vậy hàm số $y=|g(x)|$ có tối đa $3+4=7$ điểm cực trị

Câu 29: Chọn D

Hàm số $y=f(|x|)$ có đúng 5 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y=f(x)$ có đúng hai điểm cực trị dương $\Leftrightarrow g(x)=x^2+(4m-5)x+m^2-7m+6=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn

$$x_1\le 0<x_2\ne 1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1<0<x_2\ne 1\\ x_1=0<x_2\ne 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a.g(0)<0\\ g(1)\ne 0\end{cases}\\ \begin{cases}g(0)=0\\ g(1)\ne 0\\ S>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m^2-7m+6<0\\ m^2-3m+2\ne 0\end{cases}\\ \begin{cases}m^2-7m+6=0\\ m^2-3m+2\ne 0\\ 5-4m>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}1<m<6\\ m\ne 2\end{cases}.$$

Vậy $m\in\{3,4,5\}$.

Câu 30: Chọn D

Xét hàm số $g(x)=(f(x))^2+f(x)-2$ có

$$g'(x)=0\Leftrightarrow 2f(x).f'(x)+f'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)(2f(x)+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\ f(x)=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

Quan sát đồ thị hàm số $f(x)$ hàm số có hai điểm cực trị $x=0;x=3$ do đó

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=0;x=3$ và kẻ đường thẳng $y=-\dfrac{1}{2}$ cắt đồ thị hàm số $f(x)$ tại duy nhất một điểm có hoành độ $x=a<0$. Vậy $f(x)=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=a$.

Vậy $g'(x)$ đổi dấu khi qua các điểm $x=a;x=0;x=3$ do đó $g(x)$ có ba điểm cực trị $x=a;x=0;x=3$.

Xét phương trình $g(x)=0\Leftrightarrow(f(x))^2+f(x)-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=1\\ f(x)=-2\end{array}\right.$;

Phương trình $f(x)=1$ có ba nghiệm phân biệt x_1,x_2,x_3 với $0<x_1<1<x_2<3<x_3$.

Phương trình $f(x)=-2$ có một nghiệm duy nhất $x_4<a$.

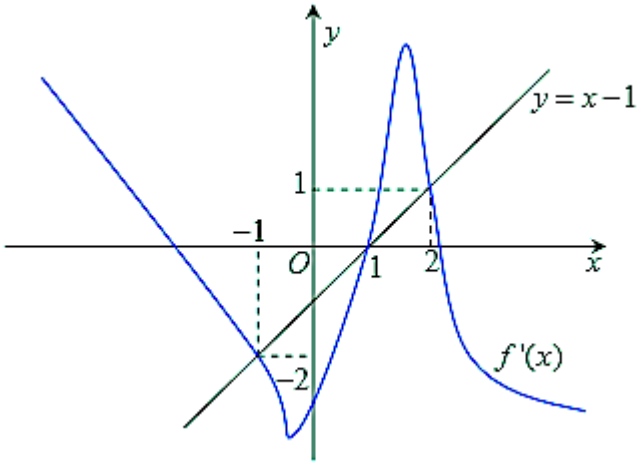
Vậy hàm số $y=|g(x)|$ có tất cả 7 điểm cực trị.

Câu 31: Chọn D

Xét hàm số $y=g(x)=2f(x)-x^2+2x+3\Rightarrow g'(x)=2f(x)-2x+2=2(f'(x)-x+1)$.

Cho $g'(x)=2f(x)-2x+2=2(f'(x)-x+1)=0\Leftrightarrow f'(x)=x-1$.

Ta có đồ thị:



Từ đồ thị ta thấy phương trình $f'(x)=x-1$ có ba nghiệm phân biệt là $x=\pm 1; x=2.$

Suy ra hàm số $y=g(x)=2f(x)-x^2+2x+3$ có ba điểm cực trị $\Rightarrow y=\left|2f(x)-x^2+2x+3\right|$ có tối đa 7 điểm cực trị.

Câu 32: Chọn B

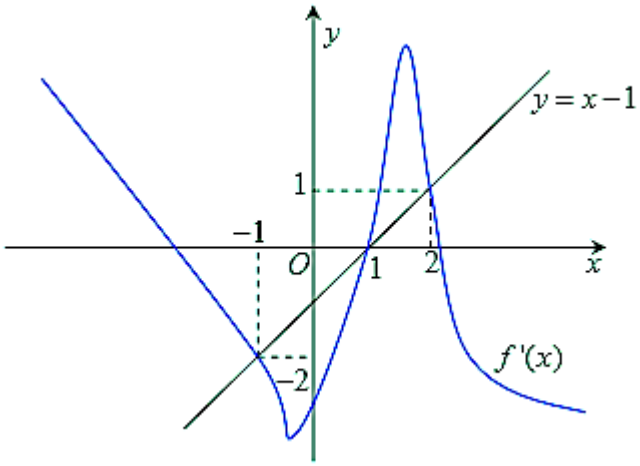
Xét hàm số $y=g(x)=2f\left(x^2-2x\right)-x^4+4x^3-2x^2-4x+2021$ có:

$g'(x)=2(2x-2)f'\left(x^2-2\right)-4x^3+12x^2-4x-4=4(x-1)\left(f'\left(x^2-2x\right)-\left(x^2-2x-1\right)\right).$

Cho $g'(x)=4(x-1)\left(f'\left(x^2-2x\right)-\left(x^2-2x-1\right)\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ f'\left(x^2-2x\right)=x^2-2x-1\end{array}\right.$.

Xét phương trình $f'\left(x^2-2x\right)=x^2-2x-1$. Đặt $x^2-2x=t\Rightarrow f'(t)=t-1.$

Ta có đồ thị như sau:



Dựa vào đồ thị, ta thấy đạo hàm $f'(t)$ cắt đường thẳng $y=t-1$ tại 3 điểm phân biệt

$t=\pm 1; t=2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=x^2-2x=-1\Rightarrow co\ nghiem\ kep\\ t=x^2-2x=1\Rightarrow co\ hai\ nghiem\ phan\ biet\\ t=x^2-2x=2\Rightarrow co\ hai\ nghiem\ phan\ biet\end{array}\right.$

Suy ra hàm số $y=g(x)=2f\left(x^2-2x\right)-x^4+4x^3-2x^2-4x+2021$ có 5 điểm cực trị.

Suy ra hàm số $y=\left|2f\left(x^2-2x\right)-x^4+4x^3-2x^2-4x+2021\right|$ có tối đa 11 điểm cực trị.

Câu 33: Chọn D

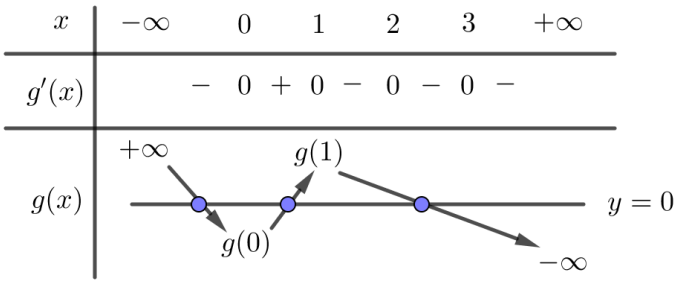
Xét $g(x)=2f(x)-(x-1)^2$. Tìm số điểm cực trị của $g(x)$:

Ta có $g'(x)=0\Leftrightarrow 2f'(x)-2(x-1)=0\Leftrightarrow f'(x)=x-1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\\x=3\end{array}\right.$

Kẻ đường thẳng $y=x-1$ cắt đồ thị $f'(x)$ tại bốn điểm phân biệt có hoành độ $x=0;x=1;x=2;x=3$ trong đó tại các điểm có hoành độ $x=2;x=3$ là các điểm tiếp xúc, do đó $g'(x)$ chỉ đổi dấu khi qua các điểm $x=0;x=1$. Vì vậy hàm số $g(x)$ có hai điểm cực trị $x=0;x=1$.

Ta tìm số nghiệm của phương trình $g(x)=0$.

Bảng biến thiên:



Suy ra phương trình $g(x)=0$ có tối đa ba nghiệm phân biệt.

+) Vậy hàm số $y=|g(x)|$ có tối đa 2+3=5 điểm cực trị.

Câu 34: Chọn A

Đặt $t=f(x);g(t)=t^2+t+m;y=|g(t)|=|t^2+t+m|$.

Hàm số $g(t)$ có 1 cực trị tại $t=-\frac{1}{2};f(x)=-\frac{1}{2}$ có nghiệm duy nhất vậy để hàm số ban đầu có ít cực trị nhất khi và chỉ khi t^2+t+m không đổi dấu khi và chỉ khi $\Delta=1-4m\le 0\Leftrightarrow m\ge\frac{1}{4}$;

Vậy giá trị nhỏ nhất cần tìm của m là $\frac{1}{4}$.

Câu 35: Chọn A

Ta có $y=f(x)=(x-m)^2+4m|x-m|-m^2+2.$

Mặt khác, hàm số $y=f(x)$ có cùng số điểm cực trị với hàm số $y=g(|x|)=x^2+4m|x|-m^2+2$

Có thể coi $y=f(x)=g(|x-m|).$

Để hàm số $y=f(x)=g(|x-m|)$ có ba điểm cực trị thì hàm số $y=g(|x|)$ phải có ba điểm cực trị.

Khi đó, hàm số $g(x)=x^2+4mx-m^2+2$ phải có 1 cực trị dương.

Suy ra hàm số $g(x)=x^2+4mx-m^2+2$ đạt cực trị tại $x=-2m>0\Leftrightarrow m<0.$

Suy ra $-21<m<0\Rightarrow m=\{-20;...;-1\}$. Vậy có 20 giá trị thỏa mãn.

Câu 36: Chọn C

Hàm số $y=f\left(\left|x+a\right|\right)$ có hình dạng giống đồ thị hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$. Tuy nhiên chỉ là tịnh tiến theo trục hoành Ox (theo chiều ngang), phụ thuộc vào giá trị của a.

Bài toán quy về tìm m để hàm số $y=f\left(x\right)=x^3-3mx^2+6mx+m-1$ có hai điểm cực trị dương.

Xứt đạo hàm $f'\left(x\right)=3x^2-6mx+6m=0$ có 2 nghiệm dương

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=9m^2-18m>0\\ \dfrac{6m}{3}>0\end{cases}\Leftrightarrow m>2\Rightarrow 3\le m\le 2021\rightarrow$ có 2019 giá trị thỏa mãn.

Câu 37: Chọn C

Xét hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(x^2-x\right)$.

Ta có $y=f\left(x^2-2mx-\left|x-m\right|+m^2\right)=f\left(\left(x-m\right)^2-\left|x-m\right|\right)=g\left(\left|x-m\right|\right).$

Mặt khác hàm số $y=g\left(\left|x-m\right|\right)$ và hàm số $y=g\left(\left|x\right|\right)$ có cùng số điểm cực trị.

Lại có, hàm số $y=f\left(x\right)$ có hai điểm cực trị dương $\Rightarrow$ hàm số $y=g\left(\left|x\right|\right)=f\left(x^2-\left|x\right|\right)$ có 5 điểm cực trị. Suy ra hàm số $y=g\left(\left|x-m\right|\right)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 38: Chọn A

Số điểm cực trị của hàm số $f\left(\left|x-4\right|\right)+2018^{2019}$ bằng số cực trị của hàm số $f\left(\left|x-4\right|\right)$.

Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(\left|x-4\right|\right)$ bằng $2a+12$, trong đó a là số điểm cực trị lớn hơn 4 của hàm số $y=f\left(x-4\right)$.

Hàm số $y=f\left(x\right)$ có bốn điểm cực trị là $x=-2;x=-1;x=3;x=5$ nên hàm số $y=f\left(x-4\right)$ có các điểm cực trị tương ứng là $x-4=-2;x-4=-1;x-4=3;x-4=5$ $\Leftrightarrow x=2;x=3;x=7;x=9$.

Có hai điểm cực trị lớn hơn 4 là $x=7;x=9$.

Vậy hàm số $y=f\left(\left|x-4\right|\right)$ có 5 điểm cực trị và $g\left(x\right)$ cũng có 5 điểm cực trị.

Câu 39: Chọn B

Xét $g\left(x\right)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}+m$ có $g'\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\left(x+1\right)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\dfrac{1-x}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^2}}=0\Leftrightarrow x=1.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$m-1$	↗	$m+\sqrt{2}$	↘	$m+1$

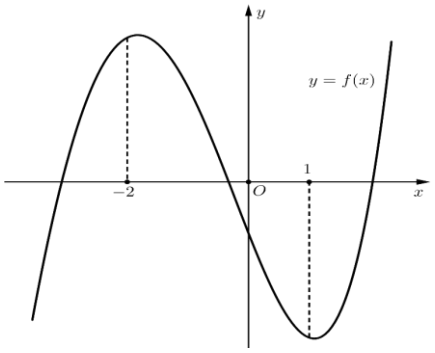
Suy ra $g(x)$ có một điểm cực trị $x=1$ và phương trình $g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} m+\sqrt{2}>0 \\ m-1<0 \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{2}<m<1.$

Vậy hàm số $f(x)=|g(x)|$ có tối đa 1+2=3 điểm cực trị.

Câu 40: Chọn D

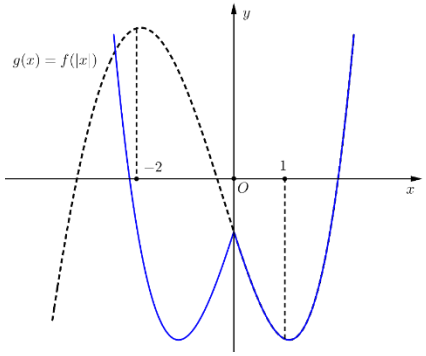
Cách 1:

Ta có: $\begin{cases} a+b+c<-1 \\ 4a-2b+c>8 \\ c<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1)<0 \\ f(-2)>0 \\ f(0)<0 \end{cases}$. Suy ra đồ thị hàm số $y=f(x)$ có dạng như sau:

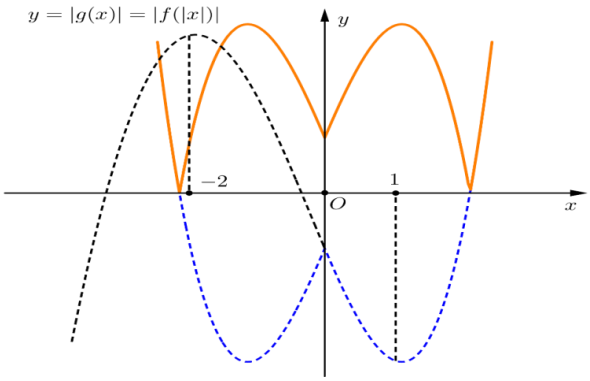


Ta sẽ dùng cách vẽ đồ thị hàm số $y=\left|f(|x|)\right|$ từ đồ thị hàm số $y=f(x)$. Bằng cách thực hiện từ trong ra ngoài:

Bước 1: Vẽ đồ thị hàm số $g(x)=f(|x|)$ bằng cách giữ nguyên phần bên phải trục tung của $y=f(x)$;; lấy đối xứng qua trục tung phần bên trái trục tung của $y=f(x)$.



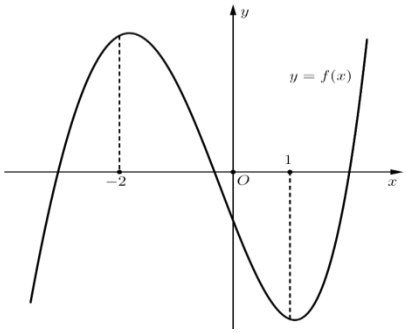
Bước 2: Vẽ đồ thị hàm số $y=|g(x)|$ bằng cách giữ nguyên phần trên trục hoành của $y=g(x)$; lấy đối xứng qua trục hoành phần bên dưới trục hoành của $y=g(x)$.



Từ đồ thị suy ra hàm số $y=\left|f\left(\left|x\right|\right)\right|$ có tất cả 5 điểm cực trị.

Cách 2:

Ta có: $\begin{cases}a+b+c<-1\\4a-2b+c>8\\c<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(1)<0\\f(-2)>0\\f(0)<0\end{cases}$. Suy ra đồ thị hàm số $y=f(x)$ có dạng như sau:



Hàm số này có 1 điểm cực trị dương và $f(x)=0$ có một nghiệm dương.

Đặt $g(x)=f\left(\left|x\right|\right)$ hàm số này có $2.1+1=3$ điểm cực trị và phương trình $g(x)=0$

$\Leftrightarrow f\left(\left|x\right|\right)=0$ có hai nghiệm (đơn hoặc bội lẻ). Do vậy hàm số $y=\left|g(x)\right|=\left|f\left(\left|x\right|\right)\right|$ có tất cả $3+2=5$ điểm cực trị.

Câu 41: Chọn A

Xét hàm số $y=g(x)=f\left(x^2-4x\right)$.

Ta có $y=f\left(x^2-8\left|x\right|+12\right)=f\left(x^2-4\left|x\right|+4-4\left|x\right|+8\right)=f\left(\left(\left|x\right|-2\right)^2-4\left(\left|x\right|-2\right)\right)=g\left(\left|x\right|-2\right).$

Mặt khác hàm số $y=g(x)$ có các điểm cực trị là $x=-1;x=2;x=c>2$.

$\Rightarrow$ hàm số $y=g(x-2)$ có các điểm cực trị là $x=1;x=4;x=c+2$ (có 3 cực trị dương).

Suy ra hàm số $y=g\left(\left|x\right|-2\right)=f\left(x^2-8\left|x\right|+12\right)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 42: Chọn A

Hàm số $y=f\left(-\left|x+2021m\right|-2m+1\right)$ có cùng số điểm cực trị với hàm số $y=f\left(-\left|x\right|-2m+1\right).$

Thực hiện biến đổi đồ thị $f(x)\to f(x-2m+1)\to f\left(-\left|x\right|-2m+1\right)$.

Các điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là $(x_1=a<0);(x_2=-1);(x_3=3);(x_4=b>3).$

Vậy các điểm cực trị của hàm số $y=f\left(-\left|x\right|-2m+1\right)$ là:

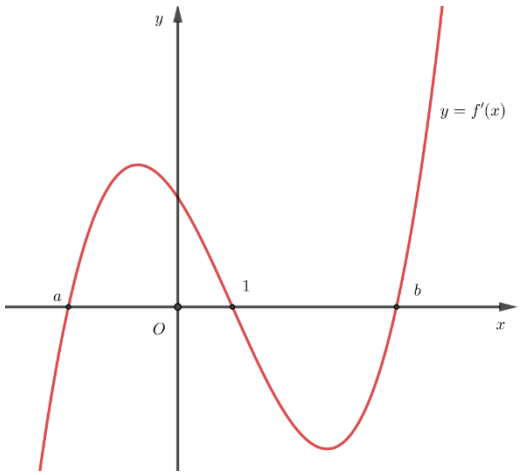
$(x_1=a+2m-1);(x_2=-1+2m-1);(x_3=3+2m-1);(x_4=b+2m-1).$

Để hàm số $y=f\left(-\left|x\right|-2m+1\right)$ có đúng 5 điểm cực trị thì hàm số $y=f(x-2m+1)$ có đúng 2 điểm cực trị âm.

Suy ra $\begin{cases}-1+2m-1<0\\3+2m-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow -1\le m<1\to m=\{-1;0\}$

DẠNG 5 Cực trị chứa dấu giá trị tuyệt đối

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ. Gọi tập S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên $m\in[-21;21]$ để hàm số $f\left(\left|x^2+2mx-1\right|\right)$ có đúng 7 điểm cực trị. Số phần tử của S là:



A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và xác định trên R và có đồ thị đạo hàm $y=f'(x)=x(x-1)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(|2x+1|-1\right)$ là:

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên R và có biểu thức đạo hàm $y=f'(x)=x(x-2)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(|2x+m|-m\right)$ có đúng ba điểm cực trị

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

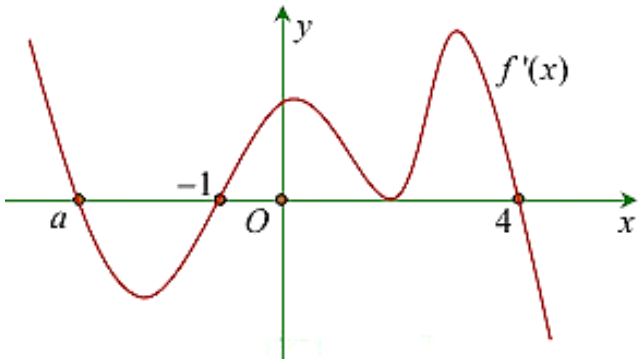
Câu 4: Cho hàm số $f\ x$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có biểu thức đạo hàm $f'\ x\ =x\ x-m\ \ x-6+m$, với m là tham số. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in\left[-30;30\right]$ để hàm số $f\ \left|3x-2\right|+1$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2

Câu 5: Cho hàm số $f\ x$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có biểu thức đạo hàm $f'\ x\ =x\ x^2-2mx+12+m$, với m là tham số. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in\left[-30;30\right]$ để hàm số $f\ \left|2x-m^2\right|+m$ có đúng 5 điểm cực trị?

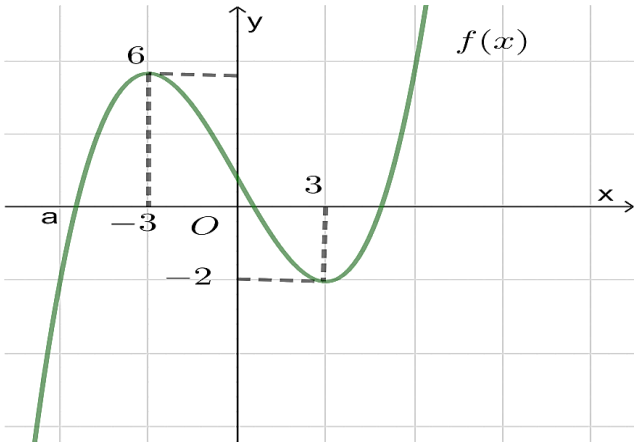
A. 27. **B.** 26. **C.** 25. **D.** 29

Câu 6: Cho đồ thị hàm số $y=f'\ x$ như hình vẽ. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in\left[-30;30\right]$ để hàm số $f\ \left|x^3-3m^2x\right|$ có đúng 11 điểm cực trị?



A. 29. **B.** 23. **C.** 21. **D.** 22

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(\left|f(x)-m\right|\right)$ có đúng 11 điểm cực trị?



A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases} x^2-2(m-4)x-1 & neu \begin{bmatrix} x\le 1 \\ x\ge 3 \end{bmatrix} \\ 4x^2-2(m-a)x+b & neu\, 1<x<3 \end{cases}$, với a và b là những số thực xác định và hàm số liên tục trên toàn $\mathbb{R}$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có đúng 3 điểm cực trị?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} mx+n & neu\ x<-1 \\ x^2+nx+m-9 & neu\ x\ge -1 \end{cases}$, với hai tham số thực m và n. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $f(x)$ có đúng 2 điểm cực trị?

A. 6. **B.** 36. **C.** 11. **D.** 5

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ có biểu thức đạo hàm $f'(x)=2x^2-3x+1$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $f\left(\left|x^2-4x+3\right|+mx\right)$ có 9 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 31

Câu 11: Cho hàm số $y=|x-1|+|x+1|+|x-2|-2x+1$. Hàm số đạt cực tiểu tại

A. $x=2$ **B.** $x=1$ **C.** $x=-1$ **D.** $x=0$

Câu 12: Cho hàm số $y=|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|+|x-5|-m^2x+1$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có cực trị?

A. 4 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 5

Câu 13: Cho hàm số $f(x)=|x-1|+3|x-2|+5|x-3|+mx$; với m là tham số. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có cực trị?

A. 17. **B.** 15. **C.** 16. **D.** vô số.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-3|+...+|x-n|$. với n là số nguyên dương không lớn hơn 2021. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số n để hàm số có cực trị?

A. 1010. **B.** 1011. **C.** 1009. **D.** 2020.

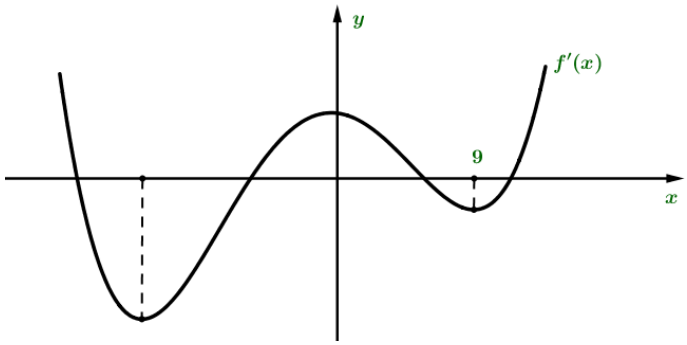
Câu 15: Số điểm cực trị của hàm số $f(x)=|x^2-4x+3|+|x+1|$ là:

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 16: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=f(x)=|x^2-2mx+1|+4x$ có điểm cực đại với giá trị cực đại tương ứng nằm trong khoảng $(3;4)$ và đồng thời thỏa mãn $10m$ là số nguyên. Số phần tử của tập S là

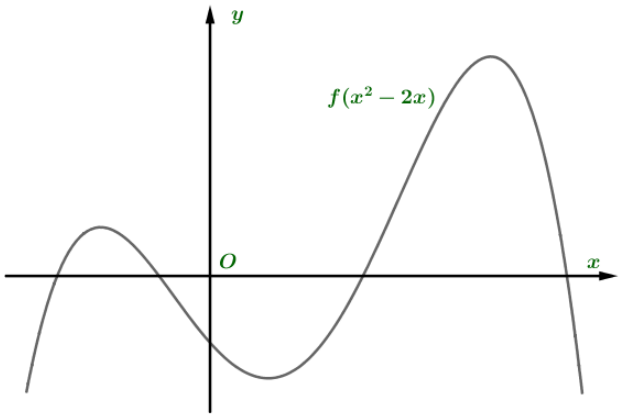
A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y=f(6|x|-x^2)$ có số điểm cực trị là.



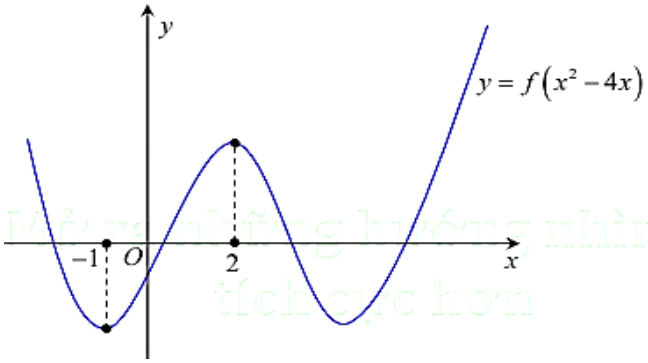
A. 9. **B.** 7. **C.** 13. **D.** 11

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y=f(x^2-x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y=f(x^2-2mx-|x-m|+m^2)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị.



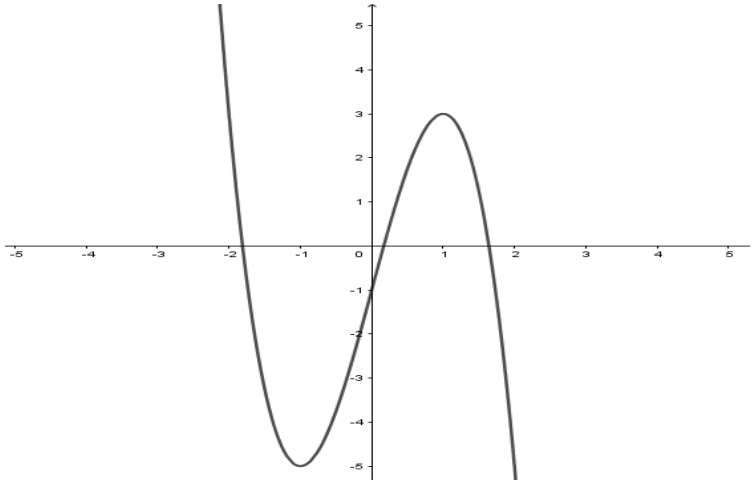
A. 7. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 9

Câu 19: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y=f\left(x^2-4x\right)$ được cho như hình vẽ. Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-8\left|x\right|+12\right)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



A. 3. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 7.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $f(\left|x\right|+\left|x-1\right|)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

BẢNG ĐÁP ÁN

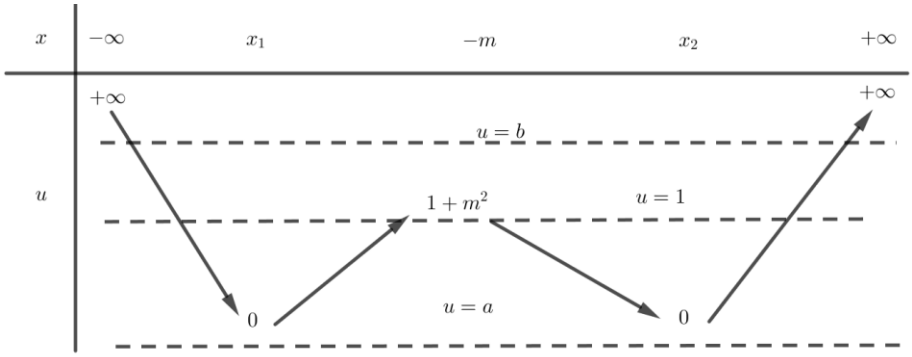
1. A	2. B	3. C	4.D	5.B	6.A	7. C	8. D	9.D	10.B
11.A	12.C	13.B	14.B	15.B	16.C	17.D	18.C	19.D	20.B

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: **Chọn A**

Hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị là: $x=a<0; x=1; x=b>1$

Xét hàm số $f\left(\left|x^2+2mx-1\right|\right)=f(u)$. Ta có bảng biến thiên của $u=\left|x^2+2mx-1\right|$ như sau:



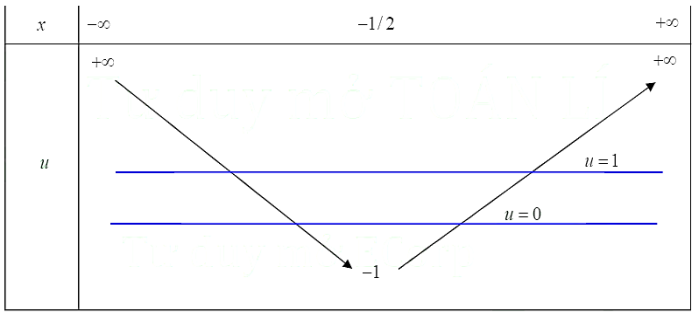
Do SĐCT $\{u\}=3$ nên để hàm số $f(u)$ có 7 điểm cực trị thì SNBL $\left\{\left[\begin{array}{l}u=a\\u=b\\u=1\end{array}\right.\right\}=4 \Rightarrow 1\geq 1+m^2$

$\Rightarrow m=0$. Vậy có 1 giá trị của tham số m.

Câu 2: **Chọn B**

Hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại 2 điểm $x=0; x=1.$

Xét hàm số $y=f\left(\left|2x+1\right|-1\right)=f(u)$. Bảng biến thiên của $u=\left|2x+1\right|-1$ như sau:

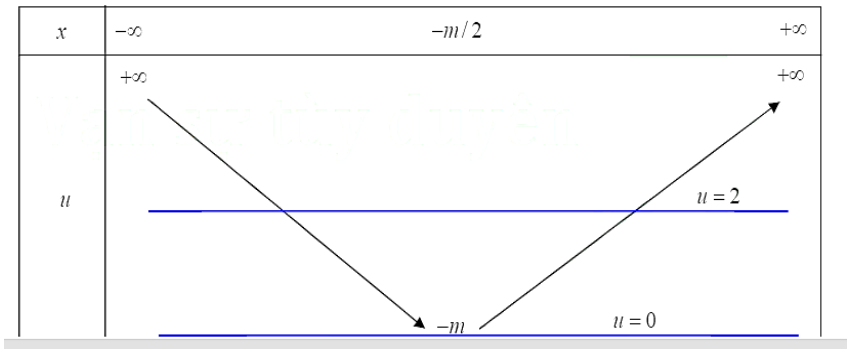


Ta có SĐCT $f(u)=\text{SĐCT}\{u\}+\text{SNBL}\left\{\left[\begin{array}{l}u=0\\u=1\end{array}\right.\right\}=4+1=5.$

Câu 3: **Chọn C**

Hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại 2 điểm $x=0; x=2.$

Xét hàm số $y=f\left(\left|2x+m\right|-m\right)=f(u)$. Bảng biến thiên của $u=\left|2x+m\right|-m$ như sau:



Ta có SĐCT $f(u)=$ SĐCT $\{u\}+$ SNBL $\left\{\left[\begin{array}{l}u=0\\u=2\end{array}\right.\right\}$

$\Leftrightarrow 3=1+SNBL\left\{\left[\begin{array}{l}u=1\\u=2\end{array}\right.\right\}\Leftrightarrow SNBL\left\{\left[\begin{array}{l}u=1\\u=2\end{array}\right.\right\}=2$

Suy ra $0\le -m<2$ hay $-2<m\le 0\to m\in\{-1;0\}$.

Câu 4: Chọn D

Nhận xét: Cho hàm số $y=f\ x$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi đó $y=f\ |ax+b|+c$ luôn có cực trị tại điểm $x=-\dfrac{b}{a}$.

$y=f\ |3x-2|+1\ =\begin{cases}f\ 3x-1 & khi\, x>\dfrac{2}{3}\\ f\ -3x+3 & khi\, x<\dfrac{2}{3}\end{cases}$, tại $x=\dfrac{2}{3}$ là một điểm cực trị của hàm số.

$y'=\begin{cases}3f'\ 3x-1 & khi\, x>\dfrac{2}{3}\\ -3f'\ -3x+3 & khi\, x<\dfrac{2}{3}\end{cases}$

$\Leftrightarrow y'=\begin{cases}3\ 3x-1\ \ 3x-1-m\ \ 3x-7+m & khi\ x>\dfrac{2}{3}\\ -3\ -3x+3\ \ -3x+3-m\ \ -3x-3+m & khi\ x<\dfrac{2}{3}\end{cases}$

Hàm số có đúng 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $y'=0$ có 4 nghiệm phân biệt khác $\dfrac{2}{3}$

Khi:

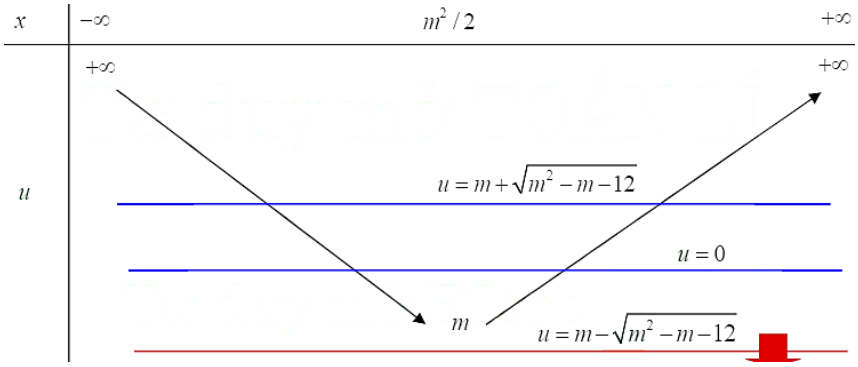
$x>\dfrac{2}{3}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=\dfrac{1+m}{3}>\dfrac{2}{3}\\ x_2=\dfrac{7-m}{3}>\dfrac{2}{3}\end{array}\right.\Rightarrow\begin{cases}1<m<5\\ x_1\ne x_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1<m<5\\ \dfrac{1+m}{3}\ne\dfrac{7-m}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1<m<5\\ m\ne 3\end{cases}$

Khi $x<\dfrac{2}{3}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_3=\dfrac{3-m}{3}<\dfrac{2}{3}\\ x_4=\dfrac{m-3}{3}<\dfrac{2}{3}\end{array}\right.\Rightarrow\begin{cases}1<m<5\\ x_3\ne x_4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1<m<5\\ m\ne 3\end{cases}$

Vậy $m\in\ 1;5\ \setminus\ 3$ và $m\in\mathbb{Z}$ nên có 2 giá trị nguyên thỏa yêu cầu.

Câu 5: Xét hàm số $f\left|2x-m^2\right|+m=f\ u$

Bảng biến thiên của hàm số $u=\left|2x-m^2\right|+m$ như sau



Ta có số điểm cực trị của hàm số u là 1 điểm.

Nhận xét, nếu hàm số $f\ x$ có đúng 1 điểm cực trị thì cùng lắm hàm số $f\ u$ có 3 điểm cực trị.

Do đó, xét trường hợp $m^2-m-12>0\Leftrightarrow m<-3\vee m>4$ thì hàm số $f\ x$ có 3 điểm cực trị là $x=0;x=m\pm\sqrt{m^2-m-12}$

Áp dụng công thức:

Số điểm cực trị $f\ u$ = số điểm cực trị u + số nghiệm bội lẻ của phương trình $\begin{bmatrix}u=0\\u=m-\sqrt{m^2-m-12}\\u=m+\sqrt{m^2-m-12}\end{bmatrix}$ suy ra $\begin{cases}m<0\\m\neq-12\end{cases}$ kết hợp với điều kiện $m<-3\vee m>4$ suy ra $\begin{cases}m<-3\\m\neq12\end{cases}$ và $\begin{cases}m\in[-30;30]\\m\in\mathbb{Z}\end{cases}$ suy ra có 26 giá trị nguyên.

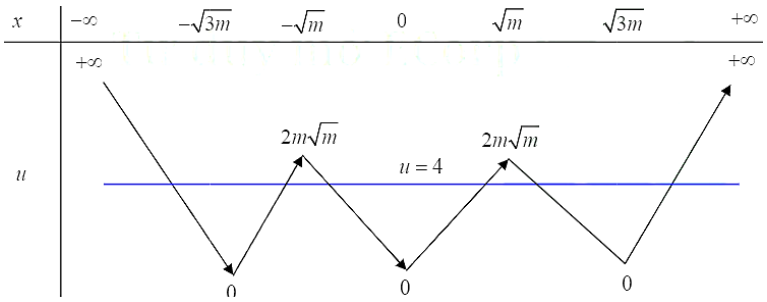
Câu 6: Hàm số đạt cực trị tại $x=a<-1;x=-1;x=4$

Xét hàm số $f\left|x^3-3mx\right|=f\ u$

Bảng biến thiên của hàm số $u=\left|x^3-3mx\right|\geq0$ suy ra chỉ có phương trình $u=\left|x^3-3mx\right|=4$ cho ta nghiệm bội lẻ.

Nếu $m\leq0$ suy ra số điểm cực trị u là 1, suy ra số nghiệm bội lẻ của phương trình $u=4$ tối đa 2 nghiệm bội lẻ. Không thỏa yêu cầu.

Khi $m>0$ số điểm cực trị u là 5, ta có bảng biến thiên của hàm số $u=\left|x^3-3mx\right|$



Áp dụng công thức:

Số điểm cực trị của hàm số $f\ u\ $ = Số nghiệm bội lẻ của phương trình $u=4$ + số điểm cực trị của u.

Suy ra $\begin{cases} m>0 \\ 2m\sqrt{m}>4 \end{cases} \Leftrightarrow m>\sqrt[3]{4}$ kết hợp $\begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ m\in[-30;30] \end{cases}$ suy ra có 29 giá trị nguyên thỏa yêu cầu.

Câu 7: Chọn C

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-3 \end{array}\right.$.

Ta lại có: $g'(x)=f'\left(\left|f(x)-m\right|\right)=\dfrac{f(x)-m}{\left|f(x)-m\right|}.f'(x).f'\left(\left|f(x)-m\right|\right)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ \left|f(x)-m\right|=0 \\ \left|f(x)-m\right|=3 \\ \left|f(x)-m\right|=-3\ (ptvn) \end{array}\right. \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\pm3 \\ f(x)=m \quad (1) \\ f(x)=m+3 \quad (2) \\ f(x)=m-3 \quad (3) \end{array}\right.$$

Để hàm số $g(x)=f\left(\left|f(x)-m\right|\right)$ có đúng 11 điểm cực trị thì các phương trình $(1);(2);(3)$ mỗi phương trình phải có 3 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow\begin{cases} -2<m<6 \\ -2<m+3<6 \\ -2<m-3<6 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -2<m<6 \\ -5<m<3 \\ 1<m<9 \end{cases}\Leftrightarrow 1<m<3.$$

Vì m nguyên nên $m=2$.

Câu 8: Chọn D

Tập xác định của hàm số đã cho là $D=\mathbb{R}$.

Khi đó:

+) $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=f(1)=-2m+8;\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=f(3)=-6m+32$

+) $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=2a+b-2m+4;\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=6a+b-6m+36$

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải liên tục tại $x=1;x=3$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=f(1) \\ \lim\limits_{x\to3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=f3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2a+b-2m+4=-2m+8 \\ 6a+b-6m+36=-6m+32 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 2a+b=4 \\ 6a+b=-4 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=-2 \\ b=8 \end{cases}.$$

Từ đó $y=f(x)=\begin{cases} x^2-2(m-4)x-1 \quad neu\left[\begin{array}{l} x\le1 \\ x\ge3 \end{array}\right. \\ 4x^2-2(m+2)x+8\ neu\ 1<x<3 \end{cases}$.

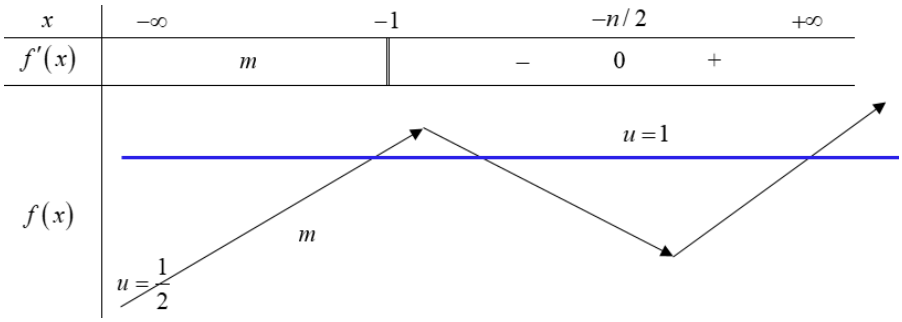
Để hàm số có đúng 3 điểm cực trị thì hoành độ đỉnh của các parabol phải thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m-4<1\\m-4>3\end{array}\right.\\1<\dfrac{m+2}{4}<3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<5\\m>7\end{array}\right.\\2<m<10\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2<m<5\\7<m<10\end{array}\right.$$

Vì m nguyên nên $m\in\{3;4;8;9\}$.

Câu 9: Đạo hàm: $f'(x)=\begin{cases}m & neu\ x<-1\\2x+n & neu\ x>-1\end{cases}$.

Khi đó, ta có bảng biến thiên của $f(x)$ như sau:



Hàm số $f(x)$ phải liên tục và xác định tại $x=-1$. Suy ra $\begin{cases}m>0\\f(-1)=-m+n=-n+m-8\\-\dfrac{n}{2}>-1\end{cases}$.

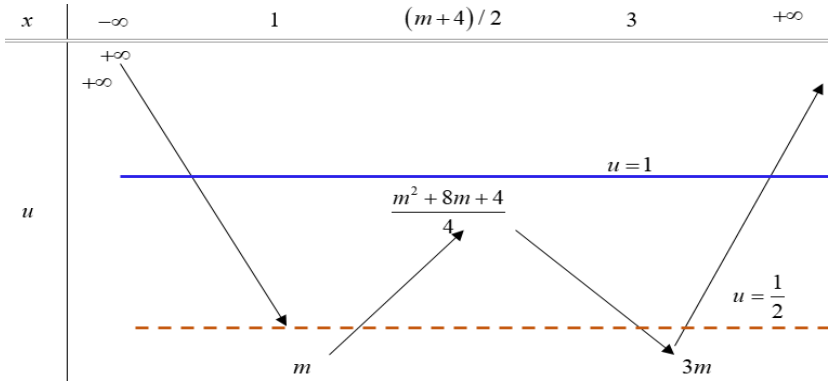
$$\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\n=m-4\\-\dfrac{n}{2}=-\dfrac{m}{2}+2>-1\end{cases}\Rightarrow 0<m<6\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}1\le m\le 5.$$

Vậy có tất cả 5 giá trị tự nhiên m thỏa mãn bài toán.

Câu 10: Ta có: $\begin{cases}SDCT\{u\}=1\\SNBL\left\{\left[\begin{array}{l}u=4\\u=2\end{array}\right.\right\}\le 4\end{cases}\Rightarrow SDCT\{u\}+SNBL\left\{\left[\begin{array}{l}u=1\\u=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\right\}\le 5$ {Không thỏa mãn}

Như vậy, bắt buộc u phải có 3 điểm cực trị. Khi đó phải có: $-2<m<\sqrt{4^2-4.3}=2$ (*)

Khi đó, ta có bảng biến thiên của $u=\left|x^2-4x+3\right|$ như sau:



Suy ra $SDCT\{u\}=3\Rightarrow SNBL\left\{\left[\begin{array}{l}u=1\\u=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\right\}=6$

Từ bảng biến thiên, suy ra: $\begin{cases}\dfrac{1}{2}>m\\\dfrac{1}{2}>3m\\\dfrac{1}{2}<\dfrac{m^2+8m+4}{4}\\1\geq\dfrac{m^2+8m+4}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-4+\sqrt{14}<m\leq 0\\m<-4-\sqrt{14}\end{array}\right.$ (**)

Kết hợp (*) và (**), suy ra: $-4+\sqrt{14}<m\leq 0\xrightarrow{m\in\mathbb{Z},m\in[-30;30]}m=\{0\}$.

Vậy có đúng 1 giá trị m nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 11: Chọn A

Với $x<-1\Leftrightarrow y=|x-1|+|x+1|+|x-2|-2x+1=1-x-x-1+2-x-2x+1=-5x+3$

Tương tự, ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-5x+3$	$-3x+5$	$-x+3$	$x-1$	
$f'(x)$	-5	-3	-1	1	
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$	

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$.

Câu 12: Chọn C

Với $x<-1\Leftrightarrow y=1-x+2-x+3-x+4-x+5-x-m^2x+1=\left(-5-m^2\right)x+16$

Tương tự, ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	2	3	4	5	$+\infty$
$f(x)$	$\left(-5-m^2\right)x+16$	$\left(-3-m^2\right)x+14$	$\left(-1-m^2\right)x+10$	$\left(1-m^2\right)x+4$	$\left(3-m^2\right)x-4$	$\left(5-m^2\right)x-14$	
$f'(x)$	$-5-m^2$	$-3-m^2$	$-1-m^2$	$1-m^2$	$3-m^2$	$5-m^2$	
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$				

Để hàm số có cực trị thì ít nhất phải có 1 đoạn $f'(x)$ phải đổi dấu từ âm sang dương:

$\Leftrightarrow 5-m^2\Leftrightarrow-\sqrt{5}\leq m\leq\sqrt{5}\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m\in\{0;\pm1;2\}$

Thử lại $m=\pm1$ thì $f(x)$ là hàm hằng (Loại)

Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn

Câu 13: Chọn B

Ta có bảng xét hàm và bảng biến thiên ghép làm một như sau:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f(x)$	$(-9+m)x+22$		$(-7+m)x+20$	$(-1+m)x+8$	$(9+m)x-22$
$f'(x)$	$-9+m$		$-7+m$	$-1+m$	$9+m$
$f'(x)$	$-$		$\neq 0$	$\neq 0$	$+$

Để hàm số có cực trị thì đạo hàm phải đổi dấu ít nhất một lần. Mà ta lại có :
$-9+m<-7+m<-1+m<9+m$. Suy ra số nhỏ nhất phải âm và số lớn nhất phải dương, đồng thời trên các khoảng $(1;2)$, $(2;3)$ đạo hàm phải khác 0. Tức là :

$$\Rightarrow \begin{cases} -9+m<0 \\ 9+m>0 \\ -7+m\neq 0 \\ -1+m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9<m<9 \\ m\neq 7 \\ m\neq 1 \end{cases} \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}$$ vậy có tất cả 15 giá trị m nguyên thỏa mãn.

Câu 14: Chọn B

Dạng bài toán này chúng ta xét một số giá trị cụ thể của số nguyên dương n rồi rút ra quy luật về những giá trị của tham số n để hàm số có cực trị như sau:

Trường hợp 1:

Xét $n=2$, ta có $y=f(x)=|x-1|+|x-2|$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-2x+3$	1		$2x-3$
$f'(x)$	-2	0		2
$f'(x)$	$\searrow$	1	$\rightarrow 1$	$\nearrow$

Hàm số không có cực trị.

Trường hợp 2:

Xét $n=3$, ta có $y=f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-3|$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f(x)$	$-3x+6$	$-x+4$		x	$3x-6$
$f'(x)$	-3	-1		1	3
$f'(x)$	$\searrow$		2		$\nearrow$

Hàm số có cực trị.

Nhận xét thấy khi n là số nguyên dương lẻ thì hàm số $y=|x-1|+|x-2|+|x-3|+...+|x-n|$ có điểm cực trị. Khi n là số nguyên dương chẵn thì không tồn tại điểm cực trị.

Suy ra $1\le n\le 2021$ và n lẻ nên có 1011 giá trị n nguyên dương thỏa mãn.

Câu 15: Chọn B

Những hàm trị tuyệt đối cụ thể luôn được tối ưu bằng bảng xét hàm như sau :

x	$-\infty$ -1 1 $5/2$ 3 $+\infty$			
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$	$x+1$
$\lvert x^2+2x-3\rvert$	x^2-4x+3	x^2-4x+3	$-x^2+4x-3$	x^2-4x+3
$f(x)$	x^2-5x+2	x^2-3x+4	$-x^2+5x-2$	x^2-3x+4
$f'(x)$	$2x-5$	$2x-3$	$-2x+5$	$2x-3$
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$ 0 $-$	$+$

Suy ra hàm số có một điểm cực tiểu tại $x=1$; $x=3$ và một điểm cực đại tại $x=\dfrac{5}{2}$.

Câu 16: Chọn C

Xét phương trình $x^2-2mx+1=0\,(*)$, có $\Delta'=m^2-1$.

Nếu $\Delta'=m^2-1\le 0$ thì hàm số $y=f(x)=x^2-2mx+1+4x=x^2-2(m-2)x+1$ không có điểm cực đại.

Nếu $\Delta'=m^2-1>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-1\\ m>1\end{array}\right.$ thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt là $x_1=m-\sqrt{m^2-1}$ và $x_2=m+\sqrt{m^2-1}$.

Với $\left[\begin{array}{l}x\le x_1\\ x\ge x_2\end{array}\right.$ thì $y=f(x)=x^2-2mx+1+4x=x^2-2(m-2)x+1$ không có điểm cực đại.

Với $x_1<x<x_2$ thì $y=-x^2+2mx-1+4x=-x^2+2(m+2)x-1$.

Hàm số này đạt cực đại tại $x=m+2$ và giá trị cực đại là $y_{CD}=m^2+4m+3$.

Vậy điều kiện để hàm số có cực đại là

$$\begin{cases}x_1<x=m+2<x_2\\ 3<m^2+4m+3<4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m-\sqrt{m^2-1}<m+2<m+\sqrt{m^2-1}\\ 0<m^2+4m<1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{m^2-1}>2\\ m^2+4m-1<0\\ m^2+4m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<-\sqrt{5}\\ m>\sqrt{5}\end{array}\right.\\ -2-\sqrt{5}<m<-2+\sqrt{5}\\ \left[\begin{array}{l}m<-4\\ m>0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow -2-\sqrt{5}<m<-4.$$

Do $10m$ là số nguyên nên có hai giá trị thỏa mãn là $m=-\dfrac{42}{10}$ và $m=-\dfrac{41}{10}$.

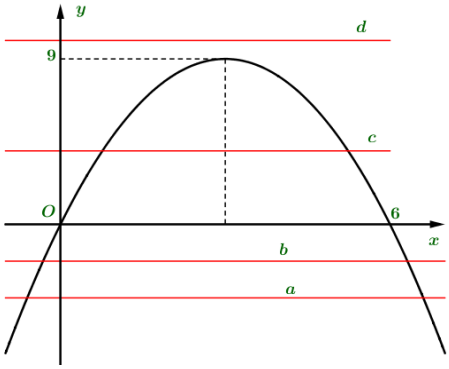
Câu 17: Chọn D

Từ đồ thị $f'(x)$, ta suy ra hàm số $y=f(x)$ có 4 điểm cực trị.

Đặt $g(x)=f(6x-x^2)$. Ta suy ra $y=g(|x|)$. Do đó số điểm cực trị của hàm y sẽ bằng số điểm cực trị dương của hàm số $g(x)$ cộng thêm 1.

Ta có $g'(x)=(6-2x)f'(6x-x^2)$, cho $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ 6x-x^2=a<0 \\ 6x-x^2=b<0 \\ 6x-x^2=c\ (0<c<9) \\ 6x-x^2=d>9 \end{array}\right.$

Dựa vào hình vẽ, ta nhận thấy phương trình $g'(x)=0$ có tất cả là 5 nghiệm dương phân biệt.



Suy ra số điểm cực trị của $g(x)$ là 5. Do đó số điểm cực trị của $y=g(|x|)$ là 11.

Câu 18: Chọn C

Ta có $y=f\left(|x-m|^2-|x-m|\right)$

Đặt $g(x)=f(x^2-x)$. Suy ra $g(|x|)=f(x^2-|x|)$. Suy ra $g(|x-m|)=f\left(|x-m|^2-|x-m|\right)$

Ta biết số điểm cực trị của hàm $g(|x|)$ và $g(|x-m|)$ là như nhau.

Hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị dương nên hàm $g(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Suy ra hàm $g(|x-m|)$ có tất cả là 5 điểm cực trị.

Câu 19: Chọn D

Ta có $y=f(x^2-8|x|+12)=f(x^2-4|x|+4-4|x|+8)=f\left((|x|-2)^2-4(|x|-2)\right)=g(|x|-2)$.

Ta thấy hàm số $y=g(x)$ có các điểm cực trị $x=-1, x=2, x=c>2$. Suy ra hàm số $y=g(x-2)$ có các điểm cực trị là $x=1, x=4, x=c+2$ (3 điểm cực trị dương).

Vậy hàm số $y=g(|x|-2)=f(x^2-8|x|+12)$ có 7 điểm cực trị.

Lí giải: $y=f(x^2-4x)\to g(|x|-2)$, với $(|x|+\alpha)^2-4(|x|+\alpha)=x^2-8|x|+12 \Rightarrow \alpha=-2$.

Câu 20: **Chọn B**

Hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại 3 điểm là $x=a<0; x=b\in(0;1); x=c>1$

Xét hàm số $f(u)=f(|x|+|x-1|)$ với $u=|x|+|x-1|$

Ta có bảng khảo sát hàm số $u=|x|+|x-1|$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\lvert x\rvert$	$-x$		0	x		x	
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$			$-x+1$	0	$x-1$	
u	$-2x+1$			1		$2x-1$	
u'	-2			0		2	
u'	-			0		+	
u		$\searrow$	1		1		$\nearrow$

Ta có: $(f(u))' = u'.f'(u)$ nên số điểm cực trị của hàm số $f(u)$ là: số điểm cực trị của u cộng với số nghiệm bội lẻ của phương trình $f'(u) = 0$ hay $\left[\begin{array}{l} u = a \\ u = b \\ u = c \end{array}\right.$

Hàm u không có điểm cực trị

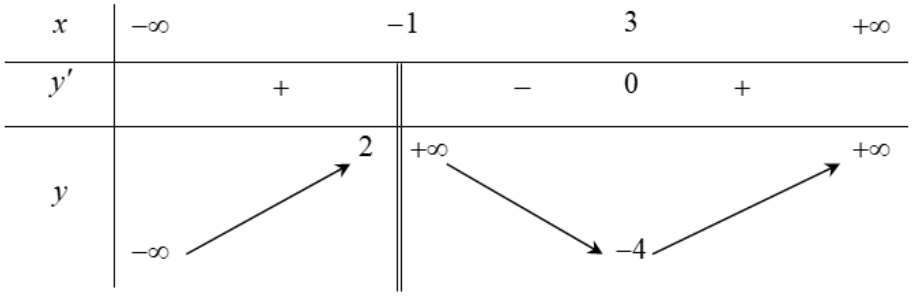
$u = a$ vô nghiệm; $u = b$ vô nghiệm; $u = c$ có 2 nghiệm; Vậy: $f(u)$ có hai điểm cực trị.

DẠNG 6 Cực trị tại một điểm cho trước

❖ **MỞ RỘNG:** Có thể áp dụng quy tắc thứ 2 để tìm cực trị của hàm số tại một điểm cho trước. Kiến thức này thuộc chương trình toán cao cấp của tác giả **Nguyễn Đình Trí**. Định lí được trình bày như sau:

- Giả sử hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục đến cấp n tại $x=a$
- Các đạo hàm $f'(a)=f''(a)=...=f^{(n-1)}(a)=0$, $f^{(n)}(a)\neq 0$ thì:
  - Nếu n chẵn và $f^{(n)}(a)<0$ thì $f(x)$ đạt cực đại tại a.
  - Nếu n chẵn và $f^{(n)}(a)>0$ thì $f(x)$ đạt cực tiểu tại a.
  - Nếu n lẻ thì $f(x)$ không đạt cực trị tại a.
  - Đặc biệt, khi $n=2$ thì có định lý trong SGK Toán 12.

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ



Hàm số $y=|f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 2: Tập hợp các số thực m để hàm số $y=x^3+(m+4)x^2+(5m+2)x+m+6$ đạt cực tiểu tại $x=-2$ là

A. $\varnothing$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\{2\}$. **D.** $\{-2\}$.

Câu 3: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx$ đạt cực đại tại $x=0$.

A. $m=1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=0$.

Câu 4: Tìm tập tất cả các giá trị của m để hàm số $y=x^3+(3m-1)x^2+m^2x-3$ đạt cực tiểu tại $x=-1$.

A. $\{5;1\}$. **B.** $\{5\}$. **C.** $\varnothing$. **D.** $\{1\}$.

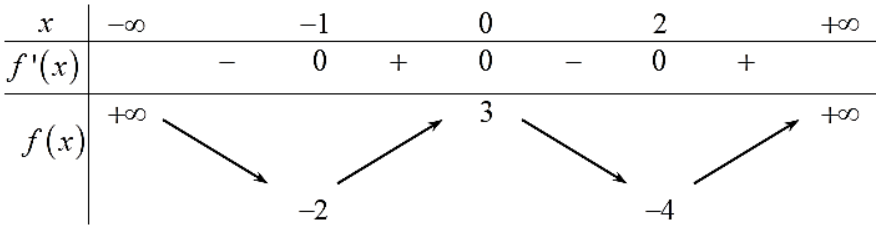
Câu 5: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-m+1)x+1$ đạt cực đại tại điểm $x=1$?

A. $m=2$ hoặc $m=-1$. **B.** $m=2$ hoặc $m=1$.
C. $m=1$. **D.** $m=2$.

Câu 6: Tìm m để hàm số $y=x^3-2mx^2+mx+1$ đạt cực tiểu tại $x=1$

A. không tồn tại m. **B.** $m=\pm 1$. **C.** $m=1$. **D.** $m\in\{1;2\}$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ với bảng biến thiên dưới đây



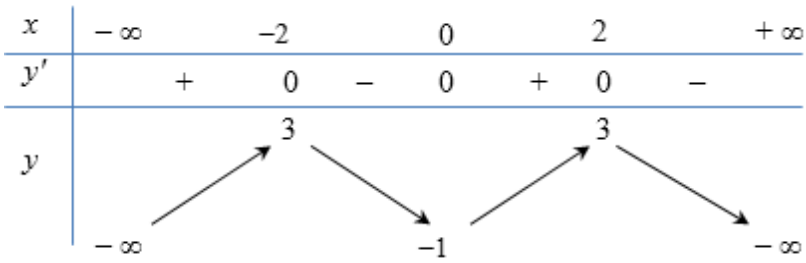
Hỏi hàm số $y=\left|f(|x|)\right|$ có bao nhiêu cực trị?

A. 3. **B.** 1. **C.** 7. **D.** 5.

Câu 8: Tìm m để hàm số $y=mx^4+(m^2-1)x+1$ đạt cực đại tại $x=0$

A. $m=0$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=1$. **D.** $-1<m<1$

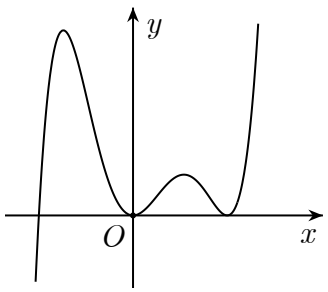
Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Giá trị cực đại của hàm số bằng

A. -2. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là:



A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 11: Tập hợp các số thực m để hàm số $y=x^3-3mx^2+(m+2)x-m$ đạt cực tiểu tại $x=1$ là

A. $\{1\}$. **B.** $\{-1\}$. **C.** $\varnothing$. **D.** $\mathbb{R}$.

Câu 12: Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-4)x+3$ đạt cực đại tại $x=3$

A. $m=1, m=5$. **B.** $m=5$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-1$.

Câu 13: Tìm m hàm số $y=x^3+mx^2-3(m+1)x+2m$ đạt cực trị tại điểm $x=-1$

A. $m=-1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=0$. **D.** $m=1$.

Câu 14: Tìm m để hàm số $y = mx^3 - \left(m^2+1\right)x^2 + 2x - 3$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $-\frac{3}{2}$. **C.** 0. **D.** -1.

Câu 15: Tìm tất cả tham số thực m để hàm số $y = \left(m-1\right)x^4 - \left(m^2-2\right)x^2 + 2019$ đạt cực tiểu tại $x = -1$

A. $m = 0$. **B.** $m = -2$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = 2$.

Câu 16: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^9 + (m-2)x^7 - (m^2-4)x^6 + 7$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A. 3. **B.** 4. **C.** Vô số. **D.** 5.

Câu 17: Cho hàm số $y = \frac{x^5}{5} - \left(2m-1\right)x^4 - \frac{m}{3}x^3 + 2019$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A. Vô số. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ là một hàm đa thức có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f\left(x^2 - |x|\right)$ là

A. 5. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 1.

Câu 19: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $\left(-2019;2019\right)$ để hàm số $y = \frac{m-1}{5}x^5 + \frac{m+2}{4}x^4 + m + 5$ đạt cực đại tại $x = 0$?

A. 110. **B.** 2016. **C.** 100. **D.** 10.

Câu 20: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = x^8 + \left(m-2\right)x^5 - \left(m^2-4\right)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** Vô số.

Câu 21: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^{2018} + \left(m-5\right)x^5 + \left(25-m^2\right)x^4 + 1$ đạt cực đại tại điểm $x = 0$.

A. 4. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 10.

Câu 22: Có bao nhiêu cặp số nguyên $\left(a,b\right)$ thỏa mãn $a,b \in \left(-20,20\right)$ để hàm số $y = x^8 + ax^7 + bx^6 + 1$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.

A. 722. **B.** 742. **C.** 703. **D.** 685.

Câu 23: Có bao nhiêu nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-3)x^5 - (m^2-9)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.

A. 7. **B.** Vô số. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 24: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = x^6 - mx^5 + \left(10m - m^2\right)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.

A. 9. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 8.

Câu 25: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=x^6+\left(m-1\right)x^4+\left(m^2-4\right)x^3+1$ đạt cực tiểu tại điểm $x=0$.

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 26: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^8+\left(m-4\right)x^5-\left(m^2-16\right)x^4+1$ đạt cực tiểu tại điểm $x=0$.

A. 7. **B.** Vô số. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 27: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\left|f\left(x+h\right)-f\left(x-h\right)\right|\le h^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \forall h>0.$ Đặt $g\left(x\right)=\left[x+f'\left(x\right)\right]^{2019}+\left[x+f'\left(x\right)\right]^{29-m}-\left(m^4-29m^2+100\right)\sin^2 x-1$, m là tham số nguyên và $m<27$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m sao cho hàm số $g\left(x\right)$ đạt cực tiểu tại $x=0$. Tính tổng bình phương các phần tử của S.

A. 108. **B.** 58. **C.** 100. **D.** 50.

Câu 28: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=x^9+\left(m-2\right)x^7-\left(m^2-4\right)x^6+7$ đạt cực tiểu tại điểm $x=0$.

A. 3. **B.** Vô số. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 29: Cho hàm số $y=x^5-mx^4+\left(m^3-3m^2-4m+12\right)x^3+1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho đạt cực đại tại $x=0$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

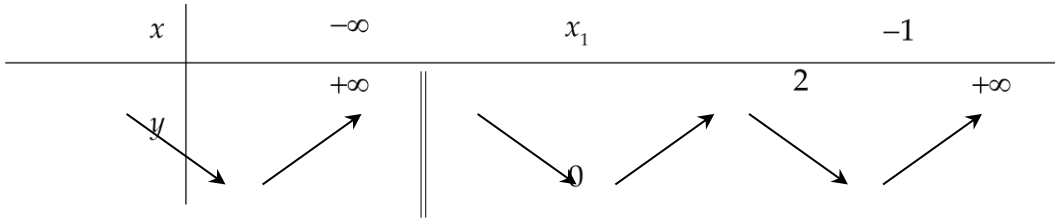
BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.A	3.D	4.B	5.D	6.C	7.C	8.B	9.D	10.C
11.C	12.B	13.C	14.A	15.D	16.A	17.B	18.A	19.B	20.C
21.D	22.B	23.C	24.B	25.B	26.D	27.C	28.A	29.C	

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn A

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$, suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=\left|f(x)\right|$ là



Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra hàm số có 4 điểm cực trị.

Câu 2: Chọn A

Ta có $y'=3x^2+2(m+4)x+5m+2$; $y''=6x+2(m+4)$

Để hàm số đạt cực tiểu tại $x=-2$ thì $\begin{cases}y'(-2)=0\\y''(-2)>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}12-4(m+4)+5m+2=0\\-12+2m+8>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=2\\m>2\end{cases}$

Vậy không có giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3: Chọn D

TXĐ: $D=\mathbb{R}$; $y'=3x^2-6x+m$, $y''=6x-6$.

Hàm số $y=x^3-3x^2+mx$ đạt cực đại tại $x=0\Rightarrow y'(0)=0\Leftrightarrow m=0$.

Với $m=0$ ta có: $y''(0)=-6<0\Rightarrow x=0$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số.

Vậy $m=0$ là giá trị cần tìm.

Câu 4: Chọn B

Kiến thức cần nhớ: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp một trên $(a;b)$ chứa điểm x_0 và $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai khác 0 tại x_0, khi đó:

Nếu $\begin{cases}f'(x_0)=0\\f''(x_0)>0\end{cases}$ thì hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0.

Nếu $\begin{cases}f'(x_0)=0\\f''(x_0)<0\end{cases}$ thì hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0.

Áp dụng ta có $y'=3x^2+2(3m-1)x+m^2$; $y''=6x+2(3m-1)$.

Xét phương trình $y'(-1)=0\Leftrightarrow 3(-1)^2-2(3m-1)+m^2=0\Leftrightarrow m^2-6m+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=5\end{array}\right.$

Với $m=1\Rightarrow y''=6x+4\Rightarrow y''(-1)=-2<0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=-1$.

Với $m=5\Rightarrow y''=6x+28\Rightarrow y''(-1)=22>0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$.

Vậy $m=5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5: Chọn D

TXĐ $D=\mathbb{R}$; $y'=x^2-2mx+m^2-m+1$.

Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-m+1)x+1$ đạt cực đại tại điểm $x=1$

$$\Rightarrow y'(1)=0\Leftrightarrow 1^2-2m.1+m^2-m+1=0\Leftrightarrow m^2-3m+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=2\end{array}\right.$$

Với $m=1$, $y'=x^2-2x+1=(x-1)^2\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}, y'=0\Leftrightarrow x=1$.

$\Rightarrow$Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-m+1)x+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $m=1$.

Vậy $m=1$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m=2$, $y'=x^2-4x+3, y'=0\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$.

$y''=2x-4.\Rightarrow y''(1)=2.1-4=-2<0$.

$\Rightarrow$Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-m+1)x+1$ đạt cực đại tại điểm $x=1$ khi $m=2$.

Câu 6: Chọn C

Để $x=1$ là điểm cực tiểu của hàm số $\Leftrightarrow\begin{cases}y'(1)=0\\y''(1)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3-4m+m=0\\6-4m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=1\\m<\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow m=1.$

Thử lại với $m=1$, ta có $y=x^3-2x^2+x+1$; $y'=3x^2-4x+1$.

$$y'=0\Leftrightarrow 3x^2-4x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\frac{1}{3}\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗		↘		↗	

Quan sát bảng biến thiên ta thấy $m=1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 7: Chọn C

Hàm số $y=f(|x|)$ trên $\mathbb{R}$ là hàm số chẵn nên đồ thị nhận trục Oy là trục đối xứng và gồm hai phần, phần 1 trùng với phần đồ thị hàm số $y=f(x)$ ứng với $x\geq 0$; phần 2 lấy đối xứng phần 1 qua trục tung.

Bảng biến thiên của hàm số $y=f(|x|)$.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên của hàm số $y=\left|f\left(\left|x\right|\right)\right|$

x	$-\infty$		x_1		-2		x_2		0		x_3		2		x_4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số $y=\left|f\left(\left|x\right|\right)\right|$ có 7 cực trị.

Câu 8: Chọn B

$y'=4mx^3+m^2-1$

Để hàm số đạt cực tại tại $x=0$ thì $y'(0)=0\Leftrightarrow m^2-1=0\Leftrightarrow m=\pm 1$

Với $m=1\Rightarrow y=x^4+1, y'=4x^3=0\Leftrightarrow x=0$. Khảo sát hàm số ta thấy, hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ suy ra $m=1$ không thỏa mãn.

Với $m=-1\Rightarrow y=-x^4+1, y'=-4x^3=0\Leftrightarrow x=0$. Khảo sát hàm số ta thấy, hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

Câu 9: Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên, giá trị cực đại của hàm số bằng 3 tại $x=-2$ hoặc $x=2$.

Câu 10: Chọn C

Hàm số xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Từ đồ thị ta thấy $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\\x=0\\x=x_2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	

Khi đó hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=x_1$ hay hàm số $y=f(x)$ có 1 điểm cực trị.

Câu 11: Chọn C

Ta có $y'=3x^2-6mx+m+2$ và $y''=6x-6m$.

Hàm số $y=x^3-3mx^2+(m+2)x-m$ đạt cực tiểu tại $x=1 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(1)=0 \\ y''(1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-6m+m+2=0 \\ 6-6m>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m<1 \end{cases} \Rightarrow$ không có giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 12: Chọn B

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=x^2-2mx+m^2-4$ và $y''=2x-2m$.

Hàm số đạt cực đại tại $x=3$ suy ra $y'(3)=0 \Leftrightarrow m^2-6m+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=5 \end{array}\right.$.

Thử lại:

Với $m=1$ thì $y''(3)=4>0$, suy ra $x=3$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Với $m=5$ thì $y''(3)=-4<0$, suy ra $x=3$ là điểm cực đại của hàm số.

Vậy $m=5$ là giá trị cần tìm.

Câu 13: Chọn C

Ta có $y'=3x^2+2mx-3(m+1)$

Điều kiện cần:- Giả sử hàm số này đạt cực trị tại $x=-1 \Rightarrow y'(-1)=0 \Leftrightarrow m=0$

Điều kiện đủ: Thử lại $m=0$ ta được $y=x^3-3x$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại $x=-1$.

Câu 14: Chọn A

Hàm số đã cho xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y'=3mx^2-2(m^2+1)x+2$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1 \Rightarrow y'(1)=0 \Leftrightarrow -2m^2+3m=0 \Leftrightarrow m \in \left\{0;\frac{3}{2}\right\}$.

Thử lại:

Với $m=0$ thì $y=-2x^2+2x-3$ và $y'=-2x+2 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x=1$ (KTM)

Với $m=\frac{3}{2}$ thì $y'=\frac{9}{2}x^2-\frac{13}{2}x+2$; $y'=0 \Leftrightarrow x \in \left\{1;\frac{4}{9}\right\}$. Hàm số y là hàm số bậc ba có $a=\frac{3}{2}>0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=\frac{4}{9}$ và đạt cực tiểu tại $x=1$ (Thỏa mãn).

Vậy $m=\frac{3}{2}$.

Câu 15: Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=4(m-1)x^3-2(m^2-2)x$

** Điều kiện cần:*

Điều kiện cần để hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$ là $f'(-1)=0 \Leftrightarrow -4(m-1)+2(m^2-2)=0$

$\Leftrightarrow 2m^2-4m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \end{array}\right.$.

** Điều kiện đủ:*

Trường hợp 1: $m=0$ hàm số trở thành $y=-x^4+2x^2+2019$

Ta có: $y'=0 \Leftrightarrow -4x^3+4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	0	−	
y	$-\infty$	↗	2020	↘	2019	↗	2020	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ nên loại $m=0$.

Trường hợp 2: $m=2$ hàm số trở thành $y=x^4-2x^2+2019$.

Ta có: $y'=0 \Leftrightarrow 4x^3-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	0	+	
y	$+\infty$	↘	2018	↗	2019	↘	2018	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$. Chọn $m=2$.

Vậy với $m=2$ thì hàm số $y=(m-1)x^4-(m^2-2)x^2+2019$ đạt cực tiểu tại $x=-1$.

Cách 2: Kiểm tra điều kiện đủ

- Với $m=0$, hàm số trở thành $y=-x^4+2x^2+2019$.

$y'=-4x^3+4x$, $y''=-12x^2+4$.

Ta có: $\left\{\begin{array}{l} y'(-1)=0 \\ y''(-1)=-8<0 \end{array}\right.$, suy ra hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ nên loại $m=0$.

- Với $m=2$, hàm số trở thành $y=x^4-2x^2+2019$.

$y'=4x^3-4x$, $y''=12x^2-4$.

Ta có: $\begin{cases} y'(-1)=0 \\ y''(-1)=8>0 \end{cases}$, suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$ nên chọn $m=2$.

Kết luận: $m=2$.

Câu 16: Chọn A

$y'=9x^8+7(m-2)x^6-6(m^2-4)x^5 \Rightarrow y'(0)=0, \forall m\in\mathbb{R}$.

$y''=9.8x^7+7.6(m-2)x^5-6.5(m^2-4)x^4 \Rightarrow y''(0)=0, \forall m\in\mathbb{R}$.

Ta nhận thấy $y'''(0)=y^{(4)}(0)=y^{(5)}(0)=0, \forall m\in\mathbb{R}$

Ta có $y^{(6)}=9.8.7.6.5.4x^3+7.6.5.4.3.2(m-2)x-6.5.4.3.2.1(m^2-4)$

$\Rightarrow y^{(6)}(0)=-6.5.4.3.2.1(m^2-4)$.

Trường hợp 1: $y^{(6)}(0)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-2 \end{array}\right.$ thì:

$+\ m=2 \Rightarrow y'=9x^8\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên không đạt cực trị tại $x=0$.

$+\ m=-2 \Rightarrow y'=x^6(9x^2-28)$ không đổi dấu khi qua $x=0$ nên không đạt cực trị tại $x=0$.

Trường hợp 2: $y^{(6)}(0)\neq 0 \Leftrightarrow m\neq \pm 2$

Khi đó để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ thì cần thêm

$y^{(6)}(0)>0 \Leftrightarrow -6.5.4.3.2.1(m^2-4)>0 \Leftrightarrow m^2-4<0 \Leftrightarrow -2<m<2 \Rightarrow m\in\{-1;0;1\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m.

Câu 17: Chọn B

Ta có $y'=x^4-4(2m-1)x^3-mx^2=x^2\left[x^2-4(2m-1)x-m\right]$.

Dễ thấy $x=0$ là một nghiệm của đạo hàm y'. Do đó hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ khi và chỉ khi y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua nghiệm $x=0$. Ta thấy dấu của y' là dấu của hàm số $g(x)=x^2-4(2m-1)x-m$. Hàm số $g(x)$ đổi dấu khi đi qua giá trị $x=0$ khi $x=0$ là nghiệm của $g(x)$. Khi đó $g(0)=0 \Leftrightarrow m=0$.

Thử lại, với $m=0$ thì $g(x)=x^2+4x$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua giá trị $x=0$.

Vậy có 1 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 18: Chọn A

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x)=x\left(2-\dfrac{1}{|x|}\right)f'\left(x^2-|x|\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-|x|=-1 \\ x^2-|x|=1 \\ x=0\ (l) \\ 2-\dfrac{1}{|x|}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\pm\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

$g'(x)$ không xác định tại $x=0$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 19: Chọn B

Ta có $y' = (m-1)x^4 + (m+2)x^3$.

Trường hợp 1: $m = 1$. Khi đó $y = \frac{3}{4}x^4 + 6 \Rightarrow y' = 3x^3$.

Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ (loại).

Trường hợp 2: $m \neq 1$. Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{m+2}{m-1} \end{array}\right.$.

Nhận thấy nếu $x_2 = x_1 = 0 \Rightarrow m = -2 \Rightarrow y' = -3x^4 \leq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên hàm số không có cực trị (loại)

Vì vậy yêu cầu bài toán tương đương với $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} m-1>0 \\ x_1 < x_2 \end{cases} \\ \begin{cases} m-1<0 \\ x_1 > x_2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m>1 \\ -2<m<1 \end{cases} \\ \begin{cases} m<1 \\ \left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>1 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m < -2$.

Suy ra số giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-2019;2019)$ là 2016.

Câu 20: Chọn C

Ta có $y'(0) = y''(0) = y^{(3)}(0) = 0$, $y^{(4)}(0) = -4!(m^2-4)$

Nếu $y^{(4)}(0) = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$ .Kiểm tra trực tiếp thấy với $m = 2$ thì hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = 0$ .Với $m = -2$ thì hàm số đã cho không đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Nếu $y^{(4)}(0) < 0$ thì hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = 0$.

Nếu $y^{(4)}(0) > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$ thì hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Tóm lại có 4 giá trị nguyên của *m* thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2: Có $y' = 8x^7 + 5(m-2)x^4 - 4(m^2-4)x^3 = x^3(8x^4 + 5(m-2)x - 4(m^2-4))$.Đặt $g(x) = 8x^4 + 5(m-2)x - 4(m^2-4)$; $g(0) = -4(m^2-4)$

Nếu $g(0) < 0$ thì tồn tại số $h > 0$ sao cho $g(x) < 0 \forall x \in (-h;h) \Rightarrow y'$ đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua $0 \Rightarrow$ Hàm số đã cho đạt cực đại tại 0.

Nếu $g(0) > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$ thì tồn tại số $h > 0$ sao cho $g(x) > 0 \forall x \in (-h;h) \Rightarrow y'$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua $0 \Rightarrow$ Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại 0.

Nếu $g(0) = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$ .Kiểm tra trực tiếp thấy với $m = 2$ thì hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = 0$ .Với $m = -2$ thì hàm số đã cho không đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Tóm lại có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 3: Ta có: $y' = 8x^7 + 5(m-2)x^4 - 4(m^2-4)x^3 = x^3\left[\underbrace{8x^4 + 5(m-2)x - 4(m^2-4)}_{g'(x)}\right]$.

Ta xét các trường hợp sau

* Nếu $m^2 - 4 = 0 \Rightarrow m = \pm 2$.

Khi $m = 2 \Rightarrow y' = 8x^7 \Rightarrow x = 0$ là điểm cực tiểu.

Khi $m = -2 \Rightarrow y' = x^4(8x^4 - 20) \Rightarrow x = 0$ không là điểm cực tiểu.

* Nếu $m^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow m \neq \pm 2$. Khi đó ta có

$$y' = x^2\left[8x^5 + 5(m-2)x^2 - 4(m^2-4)x\right]$$

Số cực trị của hàm $y = x^8 + (m-2)x^5 - (m^2-4)x^4 + 1$ bằng số cực trị của hàm $g'(x)$

$$\begin{cases} g'(x) = 8x^5 + 5(m-2)x^2 - 4(m^2-4)x \\ g''(x) = 40x^4 + 100(m-2)x - 4(m^2-4) \end{cases}$$

Nếu $x = 0$ là điểm cực tiểu thì $g''(0) > 0$. Khi đó

$$-4(m^2-4) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Rightarrow -2 < m < 2 \Rightarrow m = \{-1; 0; 1\}$$

Vậy có 4 giá trị nguyên của m.

Cách 4: Ta có: $y' = 8x^7 + 5(m-2)x^4 - 4(m^2-4)x^3 = x^3\left[\underbrace{8x^4 + 5(m-2)x - 4(m^2-4)}_{g'(x)}\right]$.

Ycbt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5(m-2) = -5(m^2-4) = 0 \\ -4(m^2-4) > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ -2 < m < 2 \end{array}\right.$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m.

Nhận xét: Ta thấy rằng, hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ khi $y'(0) = 0$ và y' đổi dấu từ $(-)$ sang $(+)$ khi qua $x = 0$ điều này tương đương số hạng bậc thấp nhất của y' phải bậc lẻ và dương.

Câu 21: Chọn D

Ta có $y'(0) = y''(0) = y^{(3)}(0) = 0, \forall m; y^{(4)}(0) = 4!(25 - m^2)$.

Nếu $y^{(4)}(0) > 0 \Leftrightarrow 25 - m^2 > 0 \Leftrightarrow -5 < m < 5$ hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ (thỏa mãn).

Nếu $y^{(4)}(0) < 0$,hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ (loại).

Nếu $y^{(4)}(0) = 0 \Leftrightarrow 25 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 5$.

Với $m = -5 \Rightarrow y' = 2018x^{2017} - 50x^4 = x^4(2018x^3 - 50)$ không đổi dấu khi đi qua $x = 0$ (loại).

Với $m = 5 \Rightarrow y' = 2018x^{2017}$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $x = 0$ (thỏa mãn).

Vậy $-5 < m \leq 5 \Rightarrow m \in \{-4, ..., 5\}$. Có 10 số nguyên thỏa mãn.

Câu 22: Chọn B

Ta có $y'(0)=y''(0)=y^{(3)}(0)=y^{(4)}(0)=y^{(5)}(0)=0, \forall a,b. y^{(6)}=6!b.$

Trường hợp 1: Nếu $y^{(6)}(0)>0 \Leftrightarrow b>0$ hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ (thỏa mãn).

Vậy trường hợp này $a \in \{-19,...,19\}$, có 39 cách chọn; $b \in \{1,...,19\}$, có 19 cách chọn

$\Rightarrow$ Có $39.19=741$ cặp.

Trường hợp 2: Nếu $y^{(6)}(0)<0 \Leftrightarrow b<0$ hàm số đạt cực đại tại $x=0$ (loại).

Trường hợp 3: Nếu $y^{6}(0) \Leftrightarrow b=0.$ Khi đó $y'=8x^7+7ax^6=x^6(8x+7a)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua điểm $x=0 \Leftrightarrow a=0$.

Vậy trường hợp này có duy nhất 1 cặp $(a;b)=(0;0)$.

Vậy có tất cả 742 cặp số nguyên thỏa mãn.

Câu 23: Chọn C

Ta có $f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0, f^{(4)}(0)=-4!(m^2-9).$

Nếu $f^{(4)}(0)=-4!(m^2-9)>0 \Leftrightarrow -3<m<3$ hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=0$ (thỏa mãn).

Nếu $f^{(4)}(0)<0 \Leftrightarrow -4!(m^2-9)<0 \Leftrightarrow m>3 \vee m<-3$ hàm số đạt cực đại tại điểm $x=0$ (loại).

Nếu $f^{(4)}(0)=0 \Leftrightarrow -4!(m^2-9)=0 \Leftrightarrow m=3 \vee m=-3.$

Với $m=3 \Rightarrow f'(x)=8x^7$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua điểm $x=0$ (thỏa mãn).

Với $m=-3 \Rightarrow f'(x)=8x^7-30x^4=2x^4(4x^3-15)$ không đổi dấu khi đi qua điểm $x=0$ (loại).

Vậy $-3<m\le 3 \Rightarrow m \in \{-2,...,3\}$. Có 6 số nguyên thỏa mãn.

Câu 24: Chọn B

Ta có $y'(0)=y''(0)=y'''(0)=0, \forall m$; $y^{(4)}=4!(10m-m^2)$.

Nếu $y^{(4)}(0)>0 \Leftrightarrow 4!(10m-m^2)>0 \Leftrightarrow 0<m<10$ hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=0$.

Nếu $y^{(4)}(0)<0 \Leftrightarrow 4!(10m-m^2)<0 \Leftrightarrow m \in (-\infty;0)\cup(10;+\infty)$ hàm số đạt cực đại tại điểm $x=0$ (loại).

Nếu $y^{(4)}(0)=0 \Leftrightarrow 4!(10m-m^2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=10 \end{array}\right.$.

Với $m=0 \Rightarrow y'=6x^5$. Ta có đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x=0$ (thỏa mãn).

Với $m=10 \Rightarrow y'=6x^5-50x^4=2x^4(3x-25)$. Ta có đạo hàm không đổi khi qua $x=0$ (loại).

Kết luận: Có 10 giá trị m nguyên thỏa mãn.

Câu 25: Chọn B

Ta có $y'(0)=y''(0)=0, \forall m$; $y'''=3!(m^2-4)$.

Nếu $y'''(0) \neq 0 \Leftrightarrow 3!\left(m^2-4\right) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$.

Hàm số không đạt đạt cực trị tại điểm $x=0$ (loại) vì $n=3$ lẻ.

Nếu $y'''(0)=0 \Leftrightarrow 3!\left(m^2-4\right)=0 \Leftrightarrow m=\pm 2$.

Với $m=-2 \Rightarrow y'=6x^5-12x^3=6x^3\left(x^2-2\right)$. Ta có đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm khi qua $x=0$ (loại).

Với $m=2 \Rightarrow y'=6x^5+4x^3=2x^3\left(3x^2+2\right)$. Ta có đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x=0$ (thỏa mãn). Vậy $m=2$ thỏa mãn.

Câu 26: Chọn D

Ta có $y'(0)=y''(0)=y'''(0)=0, \forall m$; $y^{(4)}=-4!\left(m^2-16\right)$.

Nếu $y^{(4)}(0)>0 \Leftrightarrow -4!\left(m^2-16\right)>0 \Leftrightarrow -4<m<4$ hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=0$.

Nếu $y^{(4)}(0)<0 \Leftrightarrow -4!\left(m^2-16\right)<0 \Leftrightarrow m \in (-\infty;-4) \cup (4;+\infty)$ hàm số đạt cực đại tại điểm $x=0$ (loại).

Nếu $y^{(4)}(0)=0 \Leftrightarrow -4!\left(m^2-16\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-4 \\ m=4 \end{array}\right.$.

Với $m=4 \Rightarrow y'=8x^7$. Ta có đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x=0$ (thỏa mãn).

Với $m=-4 \Rightarrow y'=8x^7-40x^4=8x^4\left(x^3-5\right)$. Ta có đạo hàm không đổi khi qua $x=0$ (loại).

Kết luận: Vậy $m \in \{-3;-2;...;4\}$ hay có 8 giá trị m nguyên thỏa mãn.

Câu 27: Chọn C

Chú ý: Định nghĩa đạo hàm tại điểm x_0: $f'\left(x_0\right)=\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall h>0$, $\left|f(x+h)-f(x-h)\right| \leq h^2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{h}\right| \leq h$.

Do đó $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x)-f(x-h)}{h}=0$

$\Leftrightarrow f'(x)+f'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $g(x)=x^{2019}+x^{29-m}-\left(m^4-29m^2+100\right)\sin^2 x-1$.

Khi đó: $\left\{\begin{array}{l} g'(x)=2019x^{2018}+(29-m)x^{28-m}-\left(m^4-29m^2+100\right)\sin 2x \\ g''(x)=2019.2018x^{2017}+(29-m)(28-m)x^{27-m}-\left(m^4-29m^2+100\right).2\cos 2x \end{array}\right.$

Có $g'(0)=0$, $g''(0)=-2\left(m^4-29m^2+100\right)$.

Trường hợp 1: $g''(0)<0 \Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x=0$.

Trường hợp 2: $g''(0)>0 \Leftrightarrow m^4-29m^2+100<0 \Leftrightarrow 4<m^2<25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2<m<5 \\ -5<m<-2 \end{array}\right.$.

Khi đó hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

Trường hợp 3: $g''(0)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\pm 5 \\ m=\pm 2 \end{array}\right.$. Thay lại ta có với $m=\pm 5$, $g'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $x=0$. Khi đó hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

Vậy $S=\{-5;-4;-3;3;4;5\}$. Tổng bình phương các phần tử của S bằng 100.

Câu 28: Chọn A

Ta có $y'=9x^8+7(m-2)x^6-6(m^2-4)x^5$

$y'(0)=y''(0)=...=y^{(5)}(0)=0, \forall m\in\mathbb{R}$, $y^{(6)}(0)=-6!(m^2-4)$.

Trường hợp 1: $y^{(6)}(0)<0 \Rightarrow y$ đạt cực đại tại $x=0$.

Trường hợp 2: $y^{(6)}(0)>0 \Leftrightarrow -2<m<2$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$. Do đó $m=0;\pm 1$ thỏa ycbt.

Trường hợp 3: $y^{(6)}(0)=0 \Leftrightarrow m=\pm 2$. Thay $m=\pm 2$ vào y', ta thấy y' không đổi dấu khi đi qua $x=0$. Do đó y không đạt cực tiểu tại $x=0$.

Vậy có 3 số nguyên m thỏa ycbt.

Câu 29: Chọn C

Ta có $y'=5x^4-4mx^3+3(m^3-3m^2-4m+12)x^2$

$y'(0)=y''(0)=0$, $\forall m$ và $y^{(3)}(0)=6(m^3-3m^2-4m+12)$.

Trường hợp 1: $y^{(3)}(0)\neq 0$ thì hàm số đã cho không đạt cực trị tại $x=0$.

Trường hợp 2: $y^{(3)}(0)=0 \Leftrightarrow m\in\{\pm 2;3\}$

Với $m=-2 \Rightarrow y'=5x^4+8x^3=x^3(5x+8)$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $x=0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

Với $m=2 \Rightarrow y'=5x^4-8x^3=x^3(5x-8)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $x=0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

Với $m=3 \Rightarrow y'=5x^4-12x^3=x^3(5x-12)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $x=0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa ycbt.

DẠNG 7 Cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước

Câu 1: Cho hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x-1$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2;3)$

A. $m\in(-1;4)\setminus\{3\}$. **B.** $m\in(3;4)$. **C.** $m\in(1;3)$. **D.** $m\in(-1;4)$.

Câu 2: Với m là một tham số thực sao cho đồ thị hàm số $y=x^4+2mx^2+1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m\geq 2$. **B.** $0\leq m<2$. **C.** $-2\leq m<0$. **D.** $m<-2$.

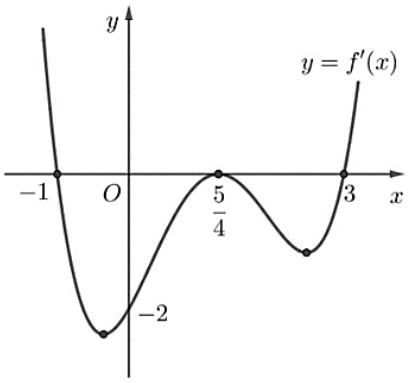
Câu 3: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=-\dfrac{x^3}{3}+mx^2-2mx+1$ có hai điểm cực trị.

A. $0<m<2$. **B.** $m>2$. **C.** $m>0$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<0 \end{array}\right.$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x^2-1)^3(x+2), \forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 5.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ là



A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 6: Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^4+(m-2019)x^2+2018$ có ba điểm cực trị là

A. $m<2019$. **B.** $m\leq 2019$. **C.** $m<2018$. **D.** $m\leq 1009$.

Câu 7: Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4+(m^2-4)x^2+1-m$ có một điểm cực trị

A. $(-2;2)$. **B.** $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

C. $[-2;2]$. **D.** $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$.

Câu 8: Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m$. Tất cả các giá trị thực của m để hàm số có 3 cực trị là

A. $m>0$. **B.** $m\geq 0$. **C.** $m<0$. **D.** $m\leq 0$.

Câu 9: Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=mx^4-(m-3)x^2+m^2$ không có điểm cực đại là

A. 2. **B.** vô số. **C.** 0. **D.** 4.

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=m^2x^4-\left(m^2-2019m\right)x^2-1$ có đúng một điểm cực trị.

A. 2019. **B.** 2020. **C.** 2018. **D.** 2017.

Câu 11: Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=\sin x-\cos^2 x$ trên $\left[0;2\pi\right]$.

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 12: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=mx^3-2mx^2+(m-2)x+1$ không có cực trị.

A. $m\in\left(-\infty;-6\right)\cup\left(0;+\infty\right)$. **B.** $m\in\left(-6;0\right)$. **C.** $m\in\left[-6;0\right)$. **D.** $m\in\left[-6;0\right]$.

Câu 13: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm $y=\frac{1}{3}x^3+\left(m+3\right)x^2+4\left(m+3\right)x+m^3-m$ đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $-1<x_1<x_2$.

A. $-3<m<1$. **B.** $-\frac{7}{2}<m<-3$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m<-3\\m>1\end{array}\right.$. **D.** $-\frac{7}{2}<m<-2$.

Câu 14: Tập hợp tất cả các giá trị tham số thực m để đồ thị hàm số $y=x^3+3mx^2+3\left(m^2-1\right)x+m^3$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành là $\left(a;b\right)$. Khi đó giá trị $a+2b$ bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** 1. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 15: Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y=x^4+2\left(m-2\right)x^2+3m-2$ có ba điểm cực trị.

A. $m\in\left(2;+\infty\right)$. **B.** $m\in\left(-2;2\right)$. **C.** $m\in\left(-\infty;2\right)$. **D.** $m\in\left(0;2\right)$.

Câu 16: Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+1\left(1\right)$. Tổng lập phương các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $\left(1\right)$ có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm này có bán kính $R=1$ bằng

A. $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **C.** $2+\sqrt{5}$. **D.** $-1+\sqrt{5}$.

Câu 17: Tìm số thực k để đồ thị hàm số $y=x^4-2kx^2+k$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận điểm $G\left(0;\frac{1}{3}\right)$ làm trọng tâm.

A. $k=-1;k=\frac{1}{2}$. **B.** $k=1;k=\frac{1}{3}$. **C.** $k=1;k=\frac{1}{2}$. **D.** $k=\frac{1}{3};k=\frac{1}{2}$.

Câu 18: Cho hàm số $y=x^4-2\left(m^2-m+1\right)x^2+m-1$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu là nhỏ nhất.

A. $m\ge 1$. **B.** $m\le 1$. **C.** $m=1$. **D.** $m=\frac{1}{2}$.

Câu 19: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+m$ nhỏ hơn hoặc bằng $\sqrt{5}$.

A. 5. **B.** 2. **C.** 11. **D.** 4.

Câu 20: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x$ có cực trị và giá trị của hàm số tại các điểm cực đại, điểm cực tiểu nhận giá trị dương.

A. $m>2$. **B.** $m\in\left(2;\frac{2+2\sqrt{7}}{3}\right)$. **C.** $\frac{2-2\sqrt{7}}{3}<m<-1$. **D.** $m<-1$.

Câu 21: Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+3m-2$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị đều nằm trên các trục tọa độ?

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 22: Biết $m=m_0$; $m_0\in\mathbb{R}$ là giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4+2mx^2+1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m_0\in(0;3)$. **B.** $m_0\in[-5;-3)$. **C.** $m_0\in(-3;0]$. **D.** $m_0\in(3;7)$.

Câu 23: Cho hàm số $y=x^4-2(m^2+m+1)x^2+m$ có đồ thị (C). Tìm m để đồ thị hàm số (C) có 3 điểm cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu nhỏ nhất.

A. $m=\frac{1}{2}$. **B.** $m=-\frac{1}{2}$. **C.** $m=\sqrt{3}$. **D.** $m=0$.

Câu 24: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+12mx+2019$ có 2 điểm cực trị x_1,x_2 thỏa mãn $x_1+x_2+2x_1x_2=-8$.

A. $m=-1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-2$.

Câu 25: Gọi x_1,x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}mx^2-4x-10$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S=(x_1^2-1)(x_2^2-1)$.

A. 9. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 8.

Câu 26: Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^3$ với m là tham số, gọi (C) là đồ thị của hàm số đã cho. Biết rằng, khi m thay đổi, điểm cực đại của đồ thị (C) luôn nằm trên một đường thẳng d cố định. Xác định hệ số góc k của đường thẳng d.

A. $k=-3$. **B.** $k=\frac{1}{3}$. **C.** $k=3$. **D.** $k=-\frac{1}{3}$.

Câu 27: Cho hàm số $y=x^3-(2m+1)x^2+(m+1)x+m-1$. Có bao nhiêu giá trị của số tự nhiên $m<20$ để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành?

A. 18. **B.** 19. **C.** 21. **D.** 20.

Câu 28: Tìm tất các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+3m^2$ có hai điểm cực trị là A,B mà $\triangle OAB$ có diện tích bằng 24.

A. $m=2$. **B.** $m=1$. **C.** $m=\pm2$. **D.** $m=\pm1$.

Câu 29: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-(m+1)x^2+(m^2-2)x-m^2+3$ có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị đó nằm về cùng một phía đối với trục hoành?

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 30: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2mx^2+(m-1)x+2m^2+1$ (m là tham số). Xác định khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ $O(0;0)$ đến đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số trên.

A. $\frac{2}{9}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{10}}{3}$.

Câu 31: Các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}|x|^3-mx^2+(m+6)|x|+2019$ có 5 điểm cực trị là

A. $m<-2$. **B.** $-2<m<0$. **C.** $0<m<3$. **D.** $m>3$.

Câu 32: Hỏi hàm số $y=|\sin 2x+x|$ có bao nhiêu điểm cực trị trên $(-\pi;\pi)$?

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 7.

Câu 33: Cho hàm số $y=x^3+2(m-2)x^2-5x+1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 $(x_1<x_2)$ thỏa mãn $|x_1|-|x_2|=-2$.

A. $\frac{7}{2}$. **B.** -1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 5.

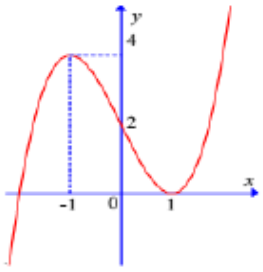
Câu 34: Xét các hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^2-x)(x^3-3x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=|f(1-2019x)|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 9. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 6.

Câu 35: Cho hàm số $y=-x^3+3mx^2-3m-1$ với m là tham số thực. Giá trị của m thuộc tập hợp nào để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: x+8y-74=0$.

A. $m\in(-1;1]$. **B.** $m\in(-3;-1]$. **C.** $m\in(3;5]$. **D.** $m\in(1;3]$.

Câu 36: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x-2018)-2019x+1$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 37: Cho hàm số $y=x^3-6mx+4$ có đồ thị (C_m). Gọi m_0 là giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, điểm cực tiểu của (C_m) cắt đường tròn tâm $I(1;0)$, bán kính $\sqrt{2}$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất. Chọn khẳng định đúng

A. $m_0\in(3;4)$. **B.** $m_0\in(1;2)$. **C.** $m_0\in(0;1)$. **D.** $m_0\in(2;3)$.

Câu 38: Biết hai hàm số $f(x)=x^3+ax^2+2x-1$ và $g(x)=-x^3+bx^2-3x+1$ có chung ít nhất một điểm cực trị. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|a|+|b|$

A. $\sqrt{30}$. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** $3+\sqrt{6}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

Câu 39: Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+2$ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R=1$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất?

A. $m=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$. **B.** $m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$. **C.** $m=\dfrac{2\pm\sqrt{5}}{2}$. **D.** $m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{3}$.

Câu 40: Tìm các giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+2$ cắt đường tròn $(C):(x-1)^2+y^2=2$ có tâm I tại hai điểm phân biệt A,B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất.

A. $m=\dfrac{3}{8}$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \\ m=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$. **C.** $m=\dfrac{8}{3}$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{3}{2} \\ m=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Câu 41: Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}(m-1)x^3-(m-1)x^2+2mx+m+3$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương nhỏ hơn 2019 của tham số m để hàm số trên không có cực trị?

A. 2018. **B.** 2019. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 42: Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx-1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=13$. Mệnh đề nào sau đấy đúng?

A. $m_0\in(-1;7)$. **B.** $m_0\in(7;10)$. **C.** $m_0\in(-7;-1)$. **D.** $m_0\in(-15;-7)$.

Câu 43: Cho hàm số $y=x^3+(1-2m)x^2+(2-m)x+m+2$. Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số có điểm cực đại, điểm cực tiểu, đồng thời hoành độ của điểm cực tiểu nhỏ hơn 1.

A. $\dfrac{5}{4}\le m\le\dfrac{7}{5}$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m<\dfrac{5}{4} \\ m>\dfrac{7}{5} \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ \dfrac{5}{4}<m<\dfrac{7}{5} \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m\le\dfrac{5}{4} \\ m\ge\dfrac{7}{5} \end{array}\right.$.

Câu 44: Cho hàm số $y=x^3-3mx+m-1$ có đồ thị (C), với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị (C) có hai điểm cực trị là A, B cùng với điểm $C(0;-1)$ tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 10 ?

A. 7. **B.** 9. **C.** 12. **D.** 4.

Câu 45: Đồ thị hàm số $y=2x^3-3(2m+1)x^2+6m(m+1)x+1$ có hai điểm cực trị A và B. Điểm $M(2m^3;m)$ tạo với hai điểm A và B một tam giác có diện tích nhỏ nhất. Khi đó giá trị tham số m thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(-7;-3)$. **B.** $(-3;3)$. **C.** $(3;7)$. **D.** $(7;13)$.

Câu 46: Cho hàm số $y=x^3+2x^2+(m-3)x+m$ (m là tham số), có đồ thị (C_m). Tìm tất cả các giá trị thực của m để (C_m) có hai điểm cực trị và điểm $M(9;-5)$ nằm trên đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C_m).

A. $m=-5$. **B.** $m=3$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-1$.

Câu 47: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y=(3m+1)x+3+m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-1$.

A. $m=\frac{1}{6}$. **B.** $m=\frac{-1}{3}$. **C.** $m=\frac{1}{3}$. **D.** $m=\frac{-1}{6}$.

Câu 48: Cho hàm số $y=(m+1)x^4-2x^2+1$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số đã cho có ba điểm cực trị đều nhỏ hơn 1.

A. $-1<m<0$. **B.** $m>-1$. **C.** $0<m<1$. **D.** $m>0$.

Câu 49: Cho hàm số $y=(m-2)x^4+(m-1)x^2-3$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số đã cho có đúng 1 điểm cực trị.

A. $m\in[2;+\infty)$. **B.** $m\in(-\infty;1]\cup(2;+\infty)$.

C. $m\in(-\infty;1]$. **D.** $m\in(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$.

Câu 50: Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để hoành độ các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+1$ đều thuộc khoảng $(-1;1)$.

A. $(-1;1)$. **B.** $\left(-\frac{4}{5};0\right)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-1;0)$.

Câu 51: Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2(m^2-m+1)x^2+m-1$ có 3 điểm cực trị, đồng thời hoành độ hai điểm cực tiểu x_1; x_2 thỏa điều kiện $|x_1-x_2|\le 2$.

A. $\left(0;\frac{\sqrt{13}+1}{2}\right]$. **B.** $\left[\frac{1-\sqrt{13}}{2};\frac{\sqrt{13}+1}{2}\right]$. **C.** $(0;1]$. **D.** $[0;1]$.

Câu 52: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2m^2x^2+2m$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho O, A, B, C là bốn đỉnh của một hình thoi.

A. $m=-1$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=3$.

Câu 53: Cho hàm số $y=x^4-2mx^2-2m^2+m^4$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có ba điểm cực trị A, B, C và $ABDC$ là hình thoi trong đó $D(0;-3)$, A thuộc trục tung. Khi đó m thuộc khoảng nào?

A. $m\in\left(\frac{9}{5};2\right)$. **B.** $m\in\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. **C.** $m\in(2;3)$. **D.** $m\in\left(\frac{1}{2};\frac{9}{5}\right)$.

Câu 54: Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{x^2+mx+m^2}{x-1}$ có hai điểm cực trị A,B. Khi $AOB=90°$ thì tổng bình phương tất cả các phần tử của S bằng:

A. $\frac{1}{16}$. **B.** 8. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** 16.

Câu 55: Cho hàm số $f(x)=x^4-(2m+1)x^3+(m+4)x^2+(5m-6)x+2m-12$, với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10;\,10]$ để hàm số $y=|f(x)|$ có số điểm cực trị nhiều nhất?

A. 15. **B.** 16. **C.** 13. **D.** 14.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.C	3.D	4.B	5.C	6.A	7.D	8.A	9.D	10.C
11.A	12.D	13.B	14.D	15.C	16.D	17.C	18.D	19.A	20.B
21.A	22.C	23.B	24.A	25.A	26.A	27.B	28.C	29.C	30.D
31.D	32.A	33.C	34.B	35.D	36.B	37.C	38.A	39.B	40.A
41.A	42.D	43.C	44.D	45.B	46.B	47.D	48.D	49.D	50.D
51.D	52.B	53.D	54.A	55.D					

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn A

Xét hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x-1$. Ta có $y'=6x^2+6(m-1)x+6(m-2)$.

$y'=0\Leftrightarrow x^2+(m-1)x+m-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2-m\end{array}\right.$.

Hàm số có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2-m\neq -1\Leftrightarrow m\neq 3$.

Hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2;3)$

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-2<-1<3\\-2<2-m<3\end{array}\right.\Leftrightarrow -1<m<4$.

Kết hợp điều kiện $m\neq 3$, ta được $m\in(-1;4)\setminus\{3\}$.

Câu 2: Chọn C

Cách 1:

Hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông khi và chỉ khi $b^3=-8a$. Áp dụng vào bài toán ta có: $(2m)^3=-8\Leftrightarrow m^3=-1\Leftrightarrow m=-1$.

Cách 2:

Ta có: $y'=4x^3+4mx$. $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2+m=0\end{array}\right.\quad(1)$.

Để đồ thị hàm số đã cho có ba điểm cực trị thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt khác 0, nghĩa là $m<0$. Khi đó $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=1\\x=\pm\sqrt{-m}\Rightarrow y=1-m^2\end{array}\right.$.

Gọi $A(0;1)$, $B\left(-\sqrt{-m};1-m^2\right)$ và $C\left(\sqrt{-m};1-m^2\right)$ lần lượt ba điểm cực trị của đồ thị hàm số. Theo tính chất của hàm số đã cho thì tam giác ABC luôn cân tại A, vậy tam giác ABC chỉ có thể vuông tại A. Ta có: $\overrightarrow{BA}=\left(\sqrt{-m};m^2\right)$, $\overrightarrow{CA}=\left(-\sqrt{-m};m^2\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA}=0\Leftrightarrow m+m^4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-1\end{array}\right.$. So với điều kiện ta nhận $m=-1$.

Câu 3: Chọn D

Ta có: $y'=-x^2+2mx-2m$

Hàm số $y=-\frac{x^3}{3}+mx^2-2mx+1$ có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta'=m^2-2m>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<0 \end{array}\right.$.

Câu 4: Chọn B

Xét $f'(x)=0 \Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-1\right)^3(x+2)=0 \Leftrightarrow (x+1)^4(x-1)^3(x+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		-1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$		↗		↘	↗

Vậy hàm số có hai điểm cực trị.

Lưu ý: có thể dùng tính chất nghiệm bội chẵn, nghiệm bội lẻ để giải bài toán nhanh hơn.

Câu 5: Chọn C

Từ đồ thị $f'(x)$ ta có bảng xét dấu của đạo hàm $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{4}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\frac{5}{4} \\ x=3 \end{array}\right.$.

Khi đi qua điểm $x=-1$, $f'(x)$ đổi dấu từ "+" sang "−" nên $x=-1$ điểm cực đại của $f(x)$.

Khi đi qua điểm $x=\frac{5}{4}$, $f'(x)$ không đổi dấu nên $x=\frac{5}{4}$ không là điểm cực trị của $f(x)$.

Khi đi qua điểm $x=3$, $f'(x)$ đổi dấu từ "−" sang "+" nên $x=3$ điểm cực tiểu của $f(x)$.

Do đó số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là 2.

Câu 6: Chọn A

Cách 1: Ta có $y'=4x^3+2(m-2019)x=2x\left(2x^2+m-2019\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=\frac{2019-m}{2} \quad (*) \end{array}\right.$.

Hàm số đã cho có 3 cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ PT có 2 nghiệm phân biệt khác $0 \Leftrightarrow m<2019$.

Cách 2: Sử dụng công thức tính nhanh hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có 3 cực trị $\Leftrightarrow a.b<0$. Do đó hàm số $y=x^4+(m-2019)x^2+2018$ có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow 1.(m-2019)<0 \Leftrightarrow m<2019$.

Câu 7: Chọn D

Ta có $y' = 4x^3 + 2\left(m^2 - 4\right)x = 2x\left(x^2 + m^2 - 4\right)$

Hàm số đã cho là hàm số trùng phương nên có đúng một cực trị khi $y' = 0$ có một nghiệm.

Hay $2x\left(x^2 + m^2 - 4\right) = 0$ có đúng một nghiệm $\Leftrightarrow m^2 - 4 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -2 \\ m \ge 2 \end{array}\right.$.

Chú ý: Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đúng một cực trị khi và chỉ khi $\begin{cases} ab \ge 0 \\ a^2 + b^2 > 0 \end{cases}$. (1)

Đặc biệt: Hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c\ (a \ne 0)$ có đúng một cực trị khi và chỉ khi $ab \ge 0$. Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba cực trị khi và chỉ khi $ab < 0.$ (2)

Câu 8: Chọn A

TXĐ: $D = \mathbb{R}$; $y' = 4x^3 - 4mx = 4x\left(x^2 - m\right)$. $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m\,(*) \end{array}\right.$.

Hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$ có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow m > 0$.

Câu 9: Chọn D

Trường hợp 1: $m = 0$ thì $y = 3x^2$. Hàm số không có điểm cực đại. Vậy $m = 0$.

Trường hợp 2: $m \ne 0$ Hàm số là hàm bậc bốn trùng phương

Ta có $y' = 4mx^3 - 2\left(m - 3\right)x = 2x\left(2mx^2 - m + 3\right)$

Để hàm số không có điểm cực đại thì $m > 0$ và $y' = 0$ có một nghiệm.

$y' = 0$ có một nghiệm $\Leftrightarrow 2mx^2 - m + 3 = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{m-3}{2m} \le 0 \Leftrightarrow 0 < m \le 3$. Vì m nguyên nên $m = \{1;2;3\}$. Vậy m có 4 giá trị nguyên.

Câu 10: Chọn C

Xét $m = 0$ thì $y = 1$ đồ thị hàm số không có cực trị.

Xét $m \ne 0$

Để đồ thị hàm số có 1 cực trị $\Leftrightarrow m^2\left(-m^2 + 2019m\right) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 2019$

Do m nguyên nên có 2018 giá trị của m.

Câu 11: Chọn A

Ta có $y' = \cos x + 2\sin x.\cos x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \cos x\left(1 + 2\sin x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Trên $\left[0;2\pi\right]$, phương trình $y' = 0$ có 4 nghiệm đơn $x = \dfrac{\pi}{2}; x = \dfrac{3\pi}{2}; x = \dfrac{11\pi}{6}; x = \dfrac{7\pi}{6}$.

Suy ra trên $\left[0;2\pi\right]$, hàm số đã cho có 4 điểm cực trị.

Câu 12: Chọn D

Ta có $y'=3mx^2-4mx+m-2$

• Nếu $m=0$ thì $y'=-2$ nên hàm số không có cực trị.

• Nếu $m\neq 0$ thì $y'=3mx^2-4mx+m-2$ là tam thức bậc hai.

Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow \Delta=\left(2m\right)^2-3m\left(m-2\right)\le 0 \Leftrightarrow m^2+6m\le 0 \overset{m\neq 0}{\Leftrightarrow} m\in\left[-6;0\right)$.

Kết hợp các trường hợp ta có $m\in\left[-6;0\right]$ thì hàm số không có cực trị.

Câu 13: Chọn B

Ta có $y'=x^2+2\left(m+3\right)x+4\left(m+3\right)$

Đặt $t=x+1\Leftrightarrow x=t-1$. Khi đó $y'=t^2+2\left(m+2\right)t+2m+7$

Hàm số đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $-1<x_1<x_2 \Leftrightarrow x^2+2\left(m+3\right)x+4\left(m+3\right)=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $-1<x_1<x_2 \Leftrightarrow t^2+2\left(m+2\right)t+2m+7=0$ có hai nghiệm phân biệt dương. Điều này tương đương với $\begin{cases}\Delta'=m^2+2m-3>0\\ S=-2\left(m+2\right)>0\\ P=2m+7>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<-3\\ m>1\end{array}\right.\\ m<-2\\ m>-\dfrac{7}{2}\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{7}{2}<m<-3$

.

Cách 2

Ta có $y'=f(\mathrm{x})=x^2+2\left(m+3\right)x+4\left(m+3\right)$

Hàm số đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $-1<x_1<x_2 \Leftrightarrow x^2+2\left(m+3\right)x+4\left(m+3\right)=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $-1<x_1<x_2$. Điều này tương đương với

$$\begin{cases}\Delta'>0\\ a.f(-1)>0\\ \dfrac{S}{2}>-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+2m-3>0\\ 1-2(m+3)+4(m+3)>0\\ \dfrac{-2(m+3)}{2}>-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<-3\\ m>1\end{array}\right.\\ m>-\dfrac{7}{2}\\ m<-3\end{cases}\Leftrightarrow\frac{-7}{2}<m<3.$$

Câu 14: Chọn D

Ta có $y'=3x^2+6mx+3(m^2-1)$. Xét $3x^2+6mx+3(m^2-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-m-1\\ x=-m+1\end{array}\right.$.

Hai nghiệm trên phân biệt với mọi m.

Đường thẳng qua 2 điểm cực trị của đồ thị là $y=-2x+m$.

Vậy nên các giá trị cực trị $y(-m-1)=3m+2$, $y(-m+1)=3m-2$.

Theo yêu cầu bài toán ta phải có $\left(3m+2\right)\left(3m-2\right)<0\Leftrightarrow -\frac{2}{3}<m<\frac{2}{3}$. Vậy $a+2b=\frac{2}{3}$.

Câu 15: Chọn C

Ta có: $y=x^4+2\left(m-2\right)x^2+3m-2$

$y' = 4x^3 + 4(m-2)x = 4x(x^2 + m - 2)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 2 - m \end{array}\right.$ (1)

y có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt khác $0 \Leftrightarrow 2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 2$.

Câu 16: Chọn D

$y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \pm\sqrt{m}$ với $m > 0$

Gọi $A(0;1), B(\sqrt{m}; -m^2 + 1), C(-\sqrt{m}; -m^2 + 1)$ là 3 điểm cực trị của hàm số; khi đó tam giác ΔABC cân tại A, I là tâm đường tròn đi qua A, B, C nên $I \in Oy$, gọi $I(0;b)$

Ta có: $IA = R = 1 \Leftrightarrow 1 - b = 1 \Leftrightarrow b = 0$; $IB = R = 1 \Leftrightarrow m + m^4 - 2m^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow m^4 - 2m^2 + m = 0$

$\Leftrightarrow m(m-1)(m^2 + m - 1) = 0 \Leftrightarrow m_1 = 0; m_2 = 1; m_{3,4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Kết hợp điều kiện $m > 0$ nên loại m_4 và m_1. Ta có $m_2^3 + m_3^3 = -1 + \sqrt{5}$.

Câu 17: Chọn C

Ta có: $y' = 4x^3 - 4kx = 4x(x^2 - k)$.; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = k \ (1) \end{array}\right.$.

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi x đi qua 3 nghiệm đó $\Leftrightarrow PT(1)$ có hai nghiệm phân biệt khác không $\Leftrightarrow k > 0$. Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là

$A(0;k), B(-\sqrt{k}; k - k^2), C(\sqrt{k}; k - k^2)$.

Từ yêu cầu bài toán ta có: $y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} = \dfrac{k + (k - k^2) + (k - k^2)}{3}$

$\Leftrightarrow -2k^2 + 3k - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Câu 18: Chọn D

$y' = 4x^3 - 4(m^2 - m + 1)x = 4x(x^2 - m^2 + m - 1)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m^2 + m - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m^2 - m + 1 \end{array}\right.$

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt hay phương trình $x^2 - m^2 + m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác không

$\Leftrightarrow m^2 - m + 1 > 0 \Leftrightarrow \left(m - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ luôn đúng $\forall m \in \mathbb{R}$.

Khi đó phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $x_1 = -\sqrt{m^2 - m + 1}, x_2 = \sqrt{m^2 - m + 1}, x_3 = 0$.

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$
y'	$-$	0 $+$	0	$-$	0 $+$
y	$+\infty$	$\searrow$ y_1	$\nearrow$ y_2	$\searrow$ y_1	$\nearrow$ $+\infty$

Khi đó đồ thị hàm số có hai điểm cực tiểu là $B\left(-\sqrt{m^2-m+1};y_1\right)$ và $C\left(\sqrt{m^2-m+1};y_1\right)$.

Khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu là $BC=2\sqrt{m^2-m+1}=2\sqrt{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\ge\sqrt{3}.$

Dấu " = " xảy ra khi $m=\frac{1}{2}$.

Câu 19: Chọn A

Ta có $y'=3x^2-3$; $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A\left(1;m-2\right)$, $B\left(-1;m+2\right)$

Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y=-2x+m$

Theo giả thiết $d\left(O;AB\right)\le\sqrt{5}\ \Leftrightarrow\ \frac{|-m|}{\sqrt{5}}\le\sqrt{5}\ \Leftrightarrow\ |-m|\le 5\ \Leftrightarrow -5\le m\le 5$.

Mà m nguyên dương nên có 5 giá trị.

Câu 20: Chọn B

Cách 1:

Ta có: $y'=x^2-2mx+m+2$; $y'=0\Leftrightarrow x^2-2mx+m+2=0\left(1\right)$.

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình $\left(1\right)$ có hai nghiệm phân biệt.

$\Delta'>0\Leftrightarrow m^2-m-2>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>2\end{array}\right.\left(*\right)$

Phương trình đường thẳng đi qua điểm CĐ, CT của hàm số là: $y=\left(-\frac{2}{3}m^2+\frac{2}{3}m+\frac{4}{3}\right)x+\frac{1}{3}m\left(m+2\right)$.

Gọi $A\left(x_1;y_1\right),B\left(x_2;y_2\right)$ là hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số, khi đó để hàm số có giá trị cực đại, và giá trị cực tiểu dương thì $y_1+y_2>0$ và đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất.

Theo định lý vi-et ta có $x_1+x_2=2m$

Nên $y_1+y_2>0\Leftrightarrow\left(-\frac{2}{3}m^2+\frac{2}{3}m+\frac{4}{3}\right)\left(x_1+x_2\right)+\frac{2}{3}m\left(m+2\right)>0$

$\Leftrightarrow \left(-\frac{2}{3}m^2+\frac{2}{3}m+\frac{4}{3}\right)(2m)+\frac{2}{3}m(m+2)>0 \Leftrightarrow 2m\left(-2m^2+3m+6\right)>0$

$\Leftrightarrow m\in\left(-\infty;\frac{3-\sqrt{57}}{4}\right)\cup\left(0;\frac{3+\sqrt{57}}{4}\right)(**)$.

Để đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất thì phương trình $y=0$ có 1 nghiệm đơn duy nhất, khi đó $\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x=0(2)$ có 1 nghiệm đơn duy nhất. Ta có: $\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-3mx+3m+6\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-3mx+3m+6=0\ (3)\end{array}\right.$

.

Để phương trình (1) có 1 nghiệm đơn duy nhất thì phương trình (3) vô nghiệm, khi đó điều kiện là $\Delta=9m^2-12m-24<0 \Leftrightarrow \frac{2-2\sqrt{7}}{3}<m<\frac{2+2\sqrt{7}}{3}(***)$.

Kết hợp $(*),(**),(***)$ ta được tập các giá trị của m thỏa mãn là $2<m<\frac{2+2\sqrt{7}}{3}$.

Cách 2:

Ta có: $y'=x^2-2mx+m+2$; $y'=0 \Leftrightarrow x^2-2mx+m+2=0\ (1)$.

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, khi đó

$\Delta'>0 \Leftrightarrow m^2-m-2>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>2\end{array}\right.(*)$

Để hàm số có giá trị cực đại, cực tiểu dương thì đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất và giá trị của hàm số tại điểm uốn luôn dương.

Để đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất thì phương trình $y=0$ có nghiệm duy nhất, khi đó $\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x=0(2)$ có 1 nghiệm đơn duy nhất.

Ta có: $\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-3mx+3m+6\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-3mx+3m+6=0\ (3)\end{array}\right.$.

Để phương trình (1) có nghiệm đơn duy nhất thì phương trình (3) vô nghiệm, khi đó điều kiện:

$\Delta=9m^2-12m-24<0 \Leftrightarrow \frac{2-2\sqrt{7}}{3}<m<\frac{2+2\sqrt{7}}{3}(**)$.

Để giá trị của hàm số tại điểm uốn luôn dương: $y'=x^2-2mx+m+2, y''=2x-2m$

$y''=0 \Leftrightarrow 2x-2m=0 \Leftrightarrow x=m$. Ta có: $y(m)>0 \Rightarrow \frac{m^3}{3}-m^3+m(m+2)>0$

$\Leftrightarrow m\left(-2m^2+3m+6\right)>0 \Leftrightarrow m\in\left(-\infty;\dfrac{3-\sqrt{57}}{4}\right)\cup\left(0;\dfrac{3+\sqrt{57}}{4}\right)(***)$

Kết hợp $(*),(**),(***)$ ta được tập các giá trị của m thỏa mãn là $2<m<\dfrac{2+2\sqrt{7}}{3}$

Câu 21: Chọn A

Ta có $y=x^4-2mx^2+3m-2\Rightarrow y'=4x^3-4mx$. Khi $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{m}\end{array}\right.$.

Với $m>0$ thì đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị và các điểm cực trị là $A\left(0;3m-2\right)$, $B\left(\sqrt{m};-m^2+3m-2\right)$ và $C\left(-\sqrt{m};-m^2+3m-2\right)$.

Điểm A đã nằm trên trục tung, vậy để các điểm cực trị đều nằm trên các trục tọa độ thì hai điểm B và C phải nằm trên trục hoành, suy ra $-m^2+3m-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=1\end{array}\right.$.

Vậy có 2 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 22: Chọn C

Cách 1.

Ta có $y'=4x^3+4mx$. Xét phương trình $y'=0\Leftrightarrow 4x^3+4mx=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=-m\end{array}\right.$.

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi $m<0$. Khi đó 3 điểm cực trị là $A\left(0;1\right)$, $B\left(\sqrt{-m};1-m^2\right)$, $C\left(-\sqrt{-m};1-m^2\right)$.

Ta thấy ΔABC cân tại A. Nên ΔABC vuông khi và chỉ khi ΔABC vuông cân tại A.

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow m+m^4=0\Leftrightarrow m\left(1+m^3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-1\end{array}\right.$. Kết hợp $m<0$ ta có $m=-1$.

Cách 2.

Gọi A,B,C là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

ΔABC vuông cân $\Rightarrow b^3=-8a\Rightarrow\left(2m\right)^3=-8\Rightarrow m^3=-1\Rightarrow m=-1$.

Câu 23: Chọn B

Ta có: $y'=4x^3-4\left(m^2+m+1\right)x=4x\left[x^2-\left(m^2+m+1\right)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=-\sqrt{m^2+m+1}\\x_2=0\\x_3=\sqrt{m^2+m+1}\end{array}\right.$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	y_{CT}	$\nearrow$	y_{CD}	$\searrow$	y_{CT}	$\nearrow$	$+\infty$

Khoảng cách giữa 2 điểm cực tiểu: $d=\left|x_3-x_1\right|=2\sqrt{m^2+m+1}=2\sqrt{\left(m+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}\geq\sqrt{3}$.

Dấu bằng xảy ra khi $m=-\frac{1}{2}$.

Câu 24: Chọn A

$y'=3x^2-6(m+1)x+12m$;

$y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6(m+1)x+12m=0\Leftrightarrow x^2-2(m+1)x+4m=0$ (1).

Để hàm số có 2 cực trị x_1,x_2 $\Leftrightarrow$ Phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow \Delta'>0\Leftrightarrow (m-1)^2>0\Leftrightarrow m\neq 1$.

Với điều kiện $m\neq 1$ ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2(m+1)\\ x_1x_2=4m\end{cases}$.

Do đó $x_1+x_2+2x_1x_2=-8\Leftrightarrow 2m+2+8m=-8\Leftrightarrow m=-1.$

Vậy $m=-1$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Câu 25: Chọn A

Ta có: $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}mx^2-4x-10\Rightarrow y'=x^2-mx-4$; $y'=0\Leftrightarrow x^2-mx-4=0$.

$\Delta=m^2+16>0,\forall m$ nên phương trình $y'=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2.

Áp dụng định lí viet: $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{-b}{a}=m\\ x_1.x_2=\frac{c}{a}=-4\end{cases}$.

$S=(x_1^2-1)(x_2^2-1)=(x_1x_2)^2-[(x_1+x_2)^2-2x_1.x_2]+1=16-(m^2+8)+1=9-m^2\leq 9$.

Câu 26: Chọn A

Ta có: $y'=3x^2-6mx+3(m^2-1)=3(x^2-2mx+m^2-1)$

$y'=0\Leftrightarrow x^2-2mx+m^2-1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=m-1\\ x=m+1\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$m-1$		$m+1$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$-3m+2$	↘	$-3m-2$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy điểm cực đại của đồ thị (C) là điểm $M(m-1;-3m+2)$.

Nhận xét: $y_M=-3m+2=-3(m-1)-1=-3x_M-1\Rightarrow M\in(d):y=-3x-1,\forall m.$

Vậy: khi m thay đổi, điểm cực đại của đồ thị (C) luôn nằm trên một đường thẳng d cố định có phương trình: $y=-3x-1$. Vậy đường thẳng d có hệ số góc $k=-3$.

Câu 27: Chọn B

Ta có: $y=(x-1)(x^2-2mx+1-m)$.

Hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành khi và chỉ khi đồ thị y cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt. $\Leftrightarrow y=(x-1)(x^2-2mx+1-m)=0$ có ba nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow x^2-2mx+1-m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2+m-1>0 \\ 2-3m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ m>\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \\ m\neq\dfrac{2}{3} \end{cases}.$$

Do $m\in N, m<20$ nên $1\le m<20$. Vậy có 19 số tự nhiên thỏa mãn bài toán.

Câu 28: Chọn C

Xét $y'=3x^2-6mx=3x\left(x-2m\right)$.

$$y'=0\Rightarrow 3x\left(x-2m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2m \end{array}\right.$$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $\Rightarrow m\neq 0$.

Tọa độ hai điểm cực trị là $A\left(0;3m^2\right), B\left(2m;3m^2-4m^3\right)$.

Phương trình đường thẳng OA : $x=0$.

Ta có: $S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}OA.d\left(B;OA\right)=\dfrac{1}{2}3m^2.\left|2m\right|=24\Rightarrow m^2\left|m\right|=8\Leftrightarrow m=\pm 2$.

Câu 29: Chọn C

Tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbb{R}$.

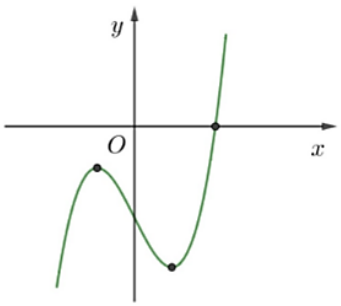
$y'=3x^2-2\left(m+1\right)x+m^2-2$ có $\Delta'=-2m^2+2m+7$.

Để đồ thị hàm số $y=x^3-(m+1)x^2+(m^2-2)x-m^2+3$ có hai điểm cực trị thì y' đổi dấu hai lần, tức là y' có hai nghiệm phân biệt, tương đương

$\Delta'>0\Leftrightarrow -2m^2+2m+7>0\Leftrightarrow \dfrac{1-\sqrt{15}}{2}<m<\dfrac{1+\sqrt{15}}{2}$. Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên được $m\in\left\{-1;0;1;2\right\}$.

Lúc này, hai nghiệm x_1, x_2 của y' lần lượt là hoành độ các điểm cực trị của hàm số.

Hai điểm cực trị đó nằm về cùng một phía đối với trục hoành khi và chỉ khi $f\left(x_1\right).f\left(x_2\right)>0$, tương đương đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại đúng một điểm, tức là, phương trình $x^3-(m+1)x^2+(m^2-2)x-m^2+3=0$ có duy nhất một nghiệm thực.



Xét $m=-1$ thì phương trình là $x^3-x+2=0$: phương trình này có đúng một nghiệm thực nên chọn $m=-1$.

Xét $m=0$ thì phương trình là $x^3-x^2-2x+3=0$: phương trình này có đúng một nghiệm thực nên chọn $m=0$.

Xét $m=1$ thì phương trình là $x^3-2x^2-x+2=0$: phương trình này có ba nghiệm thực phân biệt nên không chọn $m=1$.

Xét $m=2$ thì phương trình là $x^3-3x^2+2x-1=0$: phương trình này có đúng một nghiệm thực nên chọn $m=2$. Đáp số: $m\in\{-1;0;2\}$.

Câu 30: Chọn D

Ta có $y'=x^2-4mx+m-1$. Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'=4m^2-m+1>0 \Leftrightarrow \forall m\in\mathbb{R}$.

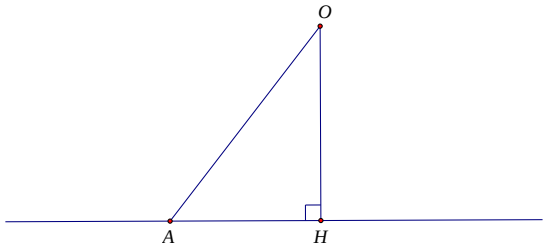
Mà $y(x)=y'(x).\left(\frac{1}{3}x-\frac{2m}{3}\right)-\left(\frac{8}{3}m^2-\frac{2}{3}m+\frac{2}{3}\right)x+\frac{8}{3}m^2-\frac{2}{3}m+1$.

Suy ra đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là đường thẳng Δ:

$y=-\left(\frac{8}{3}m^2-\frac{2}{3}m+\frac{2}{3}\right)x+\frac{8}{3}m^2-\frac{2}{3}m+1$.

Ta thấy đường thẳng Δ luôn qua điểm cố định $A\left(1;\frac{1}{3}\right)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên Δ. Khi đó ta có $d(O;\Delta)=OH\le OA$



Do đó khoảng cách lơn nhất khi $H\equiv A$ hay $\Delta\perp OA$.

Vậy khoảng cách lớn nhất là $OA=\frac{\sqrt{10}}{3}$.

Câu 31: Chọn D

Xét hàm số: $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+6)x+2019$.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=x^2-2mx+(m+6)$.

Để đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}|x|^3-mx^2+(m+6)|x|+2019$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+6)x+2019$ có 2 điểm cực trị nằm bên phải trục tung

$\Rightarrow$ phương trình $y'=x^2-2mx+(m+6)=0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\S>0\\P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-m-6>0\\2m>0\\m+6>0\end{cases}\Leftrightarrow m>3$.

Câu 32: Chọn A

Xét hàm số $f(x)=\sin 2x+x$ có $f'(x)=2\cos 2x+1$.

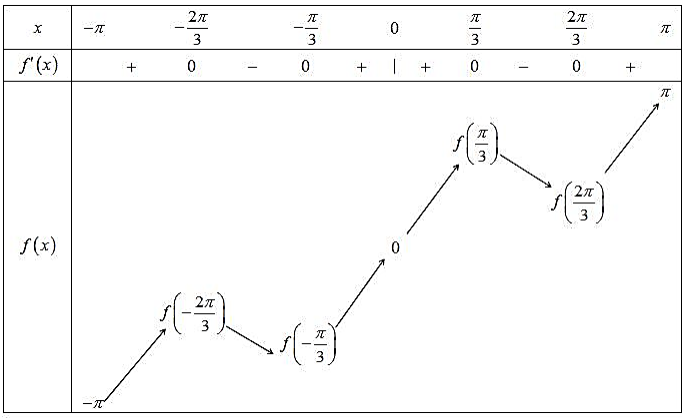
$f'(x)=0\Leftrightarrow\cos 2x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Vì $x\in(-\pi;\pi)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{\pi}{3}\\ x=\pm\dfrac{2\pi}{3}\end{array}\right.$.

$f\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{2\pi}{3}<0; f\left(\dfrac{-\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{3}<0.$

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\pi}{3}>0; f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{2\pi}{3}>0$.

Ta có bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta thấy: trên $(-\pi;\pi)$ đồ thị hàm số $f(x)=\sin 2x+x$ có 4 điểm cực trị và cắt trục hoành tại duy nhất một điểm có hoành độ $x=0$. Do đó hàm số $y=|\sin 2x+x|$ có 5 điểm cực trị trên $(-\pi;\pi)$.

Câu 33: Chọn C

Tính được: $y'=3x^2+4(m-2)x-5$.

Khi đó $\Delta'=4(m-2)^2+15>0$ nên hàm số luôn có hai điểm cực trị x_1, x_2 $(x_1<x_2)$.

Nhận xét $a.c<0$ nên $x_1<0<x_2$

Suy ra: $|x_1|-|x_2|=-2\Leftrightarrow -x_1-x_2=-2\Leftrightarrow\dfrac{b}{a}=-2\Leftrightarrow\dfrac{4(m-2)}{3}=-2\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$.

Câu 34: Chọn B

Nhận xét: Số cực trị của hàm số $y=|f(1-2019x)|$ bằng tổng số nghiệm của phương trình $f(1-2019x)=0$ và số cực trị của hàm số $y=f(1-2019x)$.

Ta có $f'(x)=x^2(x-1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$.

$[f(1-2019x)]'=-2019f'(1-2019x)$.

Do đó

$[f(1-2019x)]'=0\Leftrightarrow(1-2019x)^2(1-2019x-1)(1-2019x-\sqrt{3})(1-2019x+\sqrt{3})=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2019} \\ x=0 \\ x=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2019} \\ x=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2019} \end{array}\right. .$$

Bảng biến thiên của $y=f\left(1-2019x\right)$

x	$-\infty$		$\dfrac{1-\sqrt{3}}{2019}$		0		$\dfrac{1}{2019}$		$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2019}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↘		↗	

Do đó phương trình $f\left(1-2019x\right)=0$ có tối đa 4 nghiệm và hàm số $y=f\left(1-2019x\right)$ có ba điểm cực trị.

Vậy hàm số $y=\left|f\left(1-2019x\right)\right|$ có tối đa 7 điểm cực trị.

Câu 35: Chọn D

$y'=-3x^2+6mx$; $y'=0\Leftrightarrow x=0\vee x=2m$.

Hàm số có CĐ, CT khi và chỉ khi PT $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m\neq 0$.

Khi đó 2 điểm cực trị là: $A\left(0;-3m-1\right)$; $B\left(2m;4m^3-3m-1\right)\Rightarrow \overrightarrow{AB}=\left(2m;4m^3\right)$.

Trung điểm I của AB có toạ độ: $I\left(m;2m^3-3m-1\right)$.

Đường thẳng d : $x+8y-74=0$ có một VTCP $\vec{u}=\left(8;-1\right)$.

và B đối xứng với nhau qua d $\Leftrightarrow \begin{cases} I\in d \\ AB\perp d \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+8\left(2m^3-3m-1\right)-74=0 \\ \overrightarrow{AB}.\vec{u}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16m^3-23m-82=0 \\ 16m-4m^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16m^3-23m-82=0 \\ \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\pm 2 \end{array}\right. \end{cases}$$

$\Leftrightarrow m=2$. Suy ra $m\in\left(1;3\right]$.

Câu 36: Chọn B

$y=f\left(x-2018\right)-2019x+1\Rightarrow y'=f'\left(x-2018\right)-2019$.

Do đó $y'=0\Leftrightarrow f'\left(x-2018\right)=2019$.

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ với đường thẳng $y=2019$.

Từ đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ ta thấy chỉ có 1 nghiệm đơn. Vậy hàm số $y=f\left(x-2018\right)-2019x+1$ chỉ có 1 điểm cực trị.

Câu 37: Chọn C

Xét hàm số $y = x^3 - 6mx + 4$ có tập xác định $\mathbb{R}$. $y' = 3x^2 - 6m; y' = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2m$.

Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow y'$ đổi dấu 2 lần

$\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$. Ta có $y = \frac{1}{3}y'.x - 4mx + 4$.

Gọi $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Ta có $\begin{cases} y'(x_1) = y'(x_2) = 0 \\ y_1 = y(x_1) = \frac{1}{3}y'(x_1).x_1 - 4mx_1 + 4 \\ y_2 = y(x_2) = \frac{1}{3}y'(x_2).x_2 - 4mx_2 + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -4mx_1 + 4 \\ y_2 = -4mx_2 + 4 \end{cases}$.

Suy ra M, N thuộc đường thẳng d có phương trình $y = -4mx + 4$.

Vậy phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của (C_m) là: $y = -4mx + 4$.

Gọi (T) là đường tròn có tâm $I(1;0)$ và bán kính $R = \sqrt{2}$.

Đường thẳng d cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt A, B và tạo thành tam giác IAB

$\Leftrightarrow 0 < d(I,d) < R \Leftrightarrow 0 < d(I,d) < \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ \frac{|-4m+4|}{\sqrt{16m^2+1}} < \sqrt{2} \end{cases}$.

Cách 1:

Do đường thẳng d luôn đi qua điểm $K(0;4)$, $IK = \sqrt{17} > R \Rightarrow K$ nằm ngoài đường tròn nên tồn tại hai điểm A, B là giao điểm của d với đường tròn để tam giác IAB vuông tại I.

Do đó: $S_{IAB} = \frac{1}{2}IA.IB.\sin AIB \le \frac{1}{2}IA.IB$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow IA \perp IB \Leftrightarrow d(I,d) = \frac{R}{\sqrt{2}} = 1$).

$\Leftrightarrow \frac{|-4m+4|}{\sqrt{16m^2+1}} = 1 \Leftrightarrow m = \frac{15}{32}$.

Bình luận: Nếu đường thẳng d luôn đi qua điểm K cố định mà $IK < \frac{R}{\sqrt{2}}$ thì sẽ không có vị trí của đường thẳng d để tam giác IAB vuông tại I. Khi đó, nếu làm như trên sẽ bị sai. Trong

trường hợp đó thì ta phải đặt $d(I,d)=t\ (0<t\le l)$, với l là độ dài đoạn thẳng IK, rồi tính $S_{\Delta IAB}=f(t)$ và tìm giá trị lớn nhất của $f(t)$ trên nửa khoảng $(0;l]$.

Cách 2: Phương trình đường tròn là: $(x-1)^2+y^2=2\ (C)$

Xét hệ $\begin{cases}(x-1)^2+y^2=2\\ y=-4mx+4\end{cases}\Rightarrow(16m^2+1)x^2-2(16m+1)x+15=0\ (1)$.

d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A,B\ \Leftrightarrow(1)$ có 2 nghiệm phân biệt a,b $\Leftrightarrow(16m+1)^2-15(16m+1)>0$.

Khi đó $A(a;-4ma+4),B(b;-4mb+4)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\overrightarrow{IA}=(a-1;-4ma+4)\\ \overrightarrow{IB}=(b-1;-4mb+4)\end{array}\right.$

$\Rightarrow\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}=ab-(a+b)+16\left[m^2ab-m(a+b)+1\right]+1=0$

$\Leftrightarrow ab-(a+b)+16m^2ab-16m(a+b)+17=0\qquad\Leftrightarrow(16m^2+1)ab-(16m+1)(a+b)+17=0$

$\Leftrightarrow 15-\dfrac{2(16m+1)^2}{16m^2+1}+17=0\Leftrightarrow\dfrac{(16m+1)^2}{16m^2+1}=16\Leftrightarrow m=\dfrac{15}{32}$.

Câu 38: Chọn A

Ta có $f'(x)=3x^2+2ax+2$. Hàm số $y=f(x)$ có cực trị khi: $a^2-6>0\Leftrightarrow a<-\sqrt{6}\vee a>\sqrt{6}\ (1)$.

$g'(x)=-3x^2+2bx-3$. Hàm số $y=g(x)$ có cực trị khi $b^2-9>0\Leftrightarrow b<-3\vee b>3\ (2)$.

Giả sử x_0 là điểm cực trị của cả hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$

$$\Rightarrow\begin{cases}3x_0^2+2ax_0+2=0\\ -3x_0^2+2bx_0-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=\dfrac{1}{2x_0}\\ b=\dfrac{3}{2}\left(x_0+\dfrac{1}{x_0}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{1}{x_0}-\dfrac{3}{2}x_0\\ b=\dfrac{3}{2}\left(x_0+\dfrac{1}{x_0}\right)\end{cases}$$

$$P=|a|+|b|=\left|\frac{1}{x_0}+\frac{3}{2}x_0\right|+\left|\frac{3}{2}\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right)\right|\ge\left|\frac{5}{2x_0}+3x_0\right|$$

$$\Rightarrow P^2=\frac{25}{4x_0^2}+9x_0^2+15\ge 2\sqrt{\frac{25}{4x_0^2}.9x_0^2}+15=30\Rightarrow P\ge\sqrt{30}$$

Dấu "=" xảy ra khi:

$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{x_0}+\dfrac{3}{2}x_0\right)\left(x_0+\dfrac{1}{x_0}\right)>0\\ \dfrac{25}{4x_0^2}=9x_0^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\dfrac{1}{x_0}+\dfrac{3}{2}x_0\right)\left(x_0+\dfrac{1}{x_0}\right)>0\\ x_0=\pm\sqrt{\dfrac{5}{6}}\end{cases}\Rightarrow x_0=\pm\sqrt{\frac{5}{6}}.$$

Với hai giá trị x_0, ta tìm được hai cặp giá trị a,b thoả và. Vậy $\min P=\sqrt{30}$.

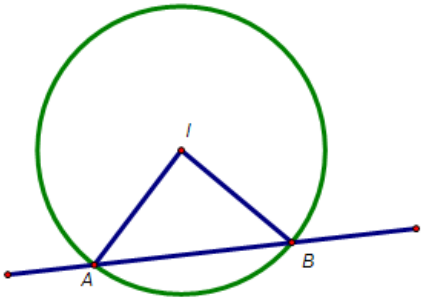
Câu 39: Chọn B

Ta có $y = x^3 - 3mx + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 3m$. Hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ có 2 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 3x^2 - 3m = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0 \ (1)$

Ta có $y = \frac{1}{3}x.y' - 2mx + 2$.

Suy ra phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm cực đại và cực tiểu là $y = -2mx + 2 \Leftrightarrow 2mx + y - 2 = 0$



Đường thẳng Δ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R = 1$ tại hai điểm phân biệt A, B

$\Leftrightarrow d(I;\Delta) < R \Leftrightarrow \frac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}} < 1 \Leftrightarrow |2m-1| < \sqrt{4m^2+1} \Leftrightarrow -4m < 0$ luôn đúng do $m > 0$

Ta có $S_{IAB} = \frac{1}{2}.IA.\text{IB}.\sin AIB = \frac{1}{2}.\sin AIB \le \frac{1}{2}$

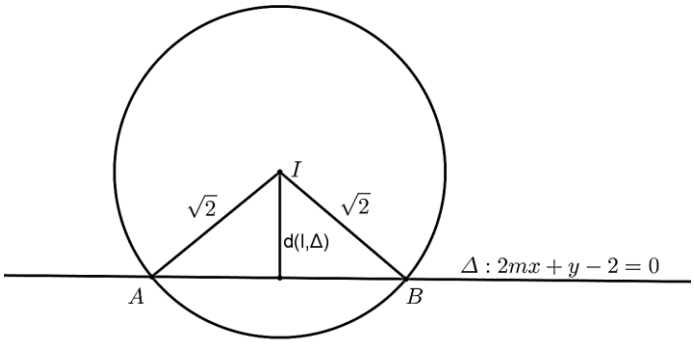
Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \sin AIB = 1 \Leftrightarrow AIB = 90°$.

Khi đó tam giác IAB vuông cân tại I có $IA = 1$ nên

$d(I;\Delta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 4m^2 - 8m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$ thỏa mãn đk (1)

Vậy diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất khi $m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$.

Câu 40: Chọn A



Ta có $y' = 3x^2 - 3m = 3(x^2 - m)$, $y' = 0 \Rightarrow x^2 = m$.

Suy ra hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $m > 0$.

Ta có $y = y'.\left(\frac{1}{3}x\right) - 2mx + 2$ nên đường thẳng đi qua hai điểm cựa trị của đồ thị hàm số là

$\Delta : y = -2mx + 2$ hay $\Delta : 2mx + y - 2 = 0$.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;0)$, bán kính $R=\sqrt{2}$.

Đường thẳng d cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A,B khi

$$\mathrm{d}(I,\Delta)=\frac{|2m-2|}{\sqrt{4m^2+1}}<\sqrt{2} \Leftrightarrow 4m^2-8m+4<8m^2+2 \Leftrightarrow 4m^2+8m-2>0.$$

Khi đó, diện tích tam giác IAB là $S_{\Delta IAB}=\frac{1}{2}IA.IB.\sin AIB$.

Mà $\frac{1}{2}IA.IB.\sin AIB\le\frac{1}{2}IA.IB=\frac{1}{2}R^2=1$.

Như thế diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất khi $\sin AIB=1\Leftrightarrow AIB=90^o$.

Từ đó $\mathrm{d}(I,\Delta)=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}.R\sqrt{2}=1 \Leftrightarrow \frac{|2m-2|}{\sqrt{4m^2+1}}=1\Leftrightarrow 4m^2-8m+4=4m^2+1\Leftrightarrow m=\frac{3}{8}$.

Vậy giá trị m cần tìm là $m=\frac{3}{8}$.

Câu 41: Chọn A

Trường hợp 1: Với $m=1\Rightarrow y=2x+4$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên không có cực trị.

Trường hợp 2: Với $m\neq 1(*)$, khi đó ta có: $y'=(m-1)x^2-2(m-1)x+2m$.

Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta'=(m-1)^2-2m(m-1)\le 0\Leftrightarrow -m^2+1\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 1\\ m\le -1\end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện $(*)$ ta có $\left[\begin{array}{l}m>1\\ m\le -1\end{array}\right.$.

Vậy $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m\ge 1\\ m\le -1\end{array}\right.\\ m\in\mathbb{N}^*, m<2019\end{cases}\Rightarrow m\in\{1;2;3;...;2018\}\Rightarrow$ có 2018 giá trị của tham số thực m.

Câu 42: Chọn D

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. $y'=3x^2-6x+m$.

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta'=9-3m>0\Leftrightarrow m<3$. Hệ thức Vi-ét: $\begin{cases}x_1+x_2=2\\ x_1x_2=\frac{m}{3}\end{cases}$.

Ta có $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=13\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-3x_1x_2=13$.

Thay hệ thức Vi-ét vào, ta được $4-m=13\Leftrightarrow m=-9$.

Câu 43: Chọn C

$y'=3x^2+2(1-2m)x+(2-m)$.

YCBT $\Leftrightarrow$ Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1<x_2<1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4m^2 - m - 5 > 0 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0 \\ x_1 + x_2 < 2 \end{cases} (1) \text{ Hệ thức Vi-ét: } \begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-2(1-2m)}{3} \\ x_1 x_2 = \dfrac{2-m}{3} \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1; m > \dfrac{5}{4} \\ \dfrac{2-m}{3} - \dfrac{-2(1-2m)}{3} + 1 > 0 \\ \dfrac{-2(1-2m)}{3} - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1; m > \dfrac{5}{4} \\ m < \dfrac{7}{5} \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ \dfrac{5}{4} < m < \dfrac{7}{5} \end{cases}.$$

Câu 44: Chọn D

Ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3m = 0 \Leftrightarrow x^2 = m \ (*)$

Để đồ thị (C) có 2 điểm cực trị thì $(*)$ phải có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$.

Khi đó: $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{m}$.

Đặt: $A\left(\sqrt{m}; -2m\sqrt{m} + m - 1\right)$ và $B\left(-\sqrt{m}; 2m\sqrt{m} + m - 1\right)$.

Và $\overrightarrow{CA} = \left(\sqrt{m}; -2m\sqrt{m} + m\right); \overrightarrow{CB} = \left(-\sqrt{m}; 2m\sqrt{m} + m\right)$.

Ta lại có: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\left|\sqrt{m}.\left(2m\sqrt{m} + m\right) - \left(-\sqrt{m}\right).\left(-2m\sqrt{m} + m\right)\right| = m\sqrt{m}$.

Theo đề: $S_{ABC} < 10 \Leftrightarrow m\sqrt{m} < 10 \Leftrightarrow m^3 < 100 \Leftrightarrow m < \sqrt[3]{100}$

Kết hợp với điều kiện $m > 0$ ta được $0 < m < \sqrt[3]{100}$. Suy ra $m \in \{1;2;3;4\}$.

Vậy: có 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu.

Câu 45: Chọn B

$$y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1); y' = 0 \Leftrightarrow 6(x-m)(x-m-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+1 \end{cases}.$$

Đồ thị hàm số luôn có hai điểm cực trị với $\forall m$.

Với $x = m \Rightarrow y = 2m^3 + 3m^2 + 1 \Rightarrow A\left(m; 2m^3 + 3m^2 + 1\right)$.

Với $x = m+1 \Rightarrow y = 2m^3 + 3m^2 \Rightarrow B\left(m+1; 2m^3 + 3m^2\right)$.

Có $\overrightarrow{AB} = (1;-1) \Rightarrow AB = \sqrt{2}$.

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A và B là: $x + y - 2m^3 - 3m^2 - m - 1 = 0$.

Diện tích tam giác MAB nhỏ nhất khi và chỉ khi $d(M, AB)$ nhỏ nhất.

$$d(M, AB) = \frac{\left|2m^3 + m - 2m^3 - 3m^2 - m - 1\right|}{\sqrt{2}} = \frac{\left|-3m^2 - 1\right|}{\sqrt{2}} = \frac{3m^2 + 1}{\sqrt{2}} \Rightarrow d(M, AB) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dấu = xảy ra $m = 0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $S_{MAB} = \dfrac{1}{2}d(M, AB).AB = \dfrac{1}{2}$, đạt khi $m = 0$.

Câu 46: Chọn B

Ta có $y' = 3x^2 + 4x + m - 3$.

(C_m) có hai điểm cực trị khi: phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

Hay: $\Delta'>0 \Leftrightarrow 4-3(m-3)>0 \Leftrightarrow m<\frac{13}{3}$.

Ta có: $y=y'.\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}\right)+\left(\frac{2m}{3}-\frac{26}{9}\right)x+\frac{7m}{9}+\frac{2}{3}$.

Nên phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm cực trị của (C_m) là: $y=\left(\frac{2m}{3}-\frac{26}{9}\right)x+\frac{7m}{9}+\frac{2}{3}$.

Đường thẳng d đi qua $M(9;-5)$ nên:

$\left(\frac{2m}{3}-\frac{26}{9}\right).9+\frac{7m}{9}+\frac{2}{3}=-5 \Leftrightarrow m=3$.

Câu 47: Chọn D

Ta có $y'=3x^2-6x$

Ta có: $y=\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)y'-2x-1$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho $\Rightarrow \Delta: y=-2x-1$

d vuông góc với Δ nên: $(3m+1).(-2)=-1 \Leftrightarrow m=-\frac{1}{6}$.

Câu 48: Chọn D

Trường hợp 1: Nếu $m+1=0 \Leftrightarrow m=-1$ thì hàm số đã cho trở thành: $y=2x^2+1$, hàm số này có một điểm cực trị, do đó ta loại trường hợp này.

Trường hợp 2: Nếu $m+1\neq 0 \Leftrightarrow m\neq -1$

Ta có $y'=4(m+1)x^3-4x=4x\left[(m+1)x^2-1\right]$.

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ (m+1)x^2-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=\frac{1}{m+1} \quad (1) \end{array}\right.$$

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị đều nhỏ hơn 1 khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0 và nhỏ hơn 1, hay: $0<\frac{1}{m+1}<1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{m+1}>0 \\ \frac{1}{m+1}<1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{m+1}>0 \\ \frac{-m}{m+1}<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m>-1 \\ \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow m>0$.

Câu 49: Chọn D

Trường hợp 1: Nếu $m-2=0 \Leftrightarrow m=2$ thì hàm số đã cho trở thành $y=x^2-3$, có 1 điểm cực trị.

Trường hợp 2: Nếu $m-2\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 2$.

Ta có $y'=4(m-2)x^3+2(m-1)x=2x\left[2(m-2)x^2+m-1\right]$

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2(m-2)x^2+m-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=\frac{1-m}{2(m-2)} \quad (1) \end{array}\right.$$

Hàm số đã cho có đúng 1 điểm cực trị khi phương trình $y'=0$ có nghiệm duy nhất hay phương trình (1) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x=0$, hay: $\frac{1-m}{2(m-2)}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m\le 1 \end{array}\right.$.

Kết hợp với trường hợp 1 ta được: $m\in(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$.

Cần nhớ:

Hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đúng một cực trị khi và chỉ khi $\begin{cases} ab\ge 0 \\ a^2+b^2>0 \end{cases}.(1)$

Hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có ba cực trị khi và chỉ khi $ab<0.(2)$

Câu 50: Chọn D

Hàm số đã cho có ba cực trị $\Leftrightarrow ab<0\Leftrightarrow -2(m+1)<0\Leftrightarrow m>-1$.

$y'=4x^3-4(m+1)x=4x(x^2-m-1)$.

$y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in(-1;1) \\ x=\pm\sqrt{m+1} \end{array}\right.$.

Hoành độ các điểm cực đại và cực tiểu đều thuộc khoảng $(-1;1)$ khi và chỉ khi $\pm\sqrt{m+1}\in(-1;1)$

$\Leftrightarrow \sqrt{m+1}<1\Leftrightarrow -1<m<0$.

Kết hợp điều kiện hàm số có 3 cực trị ta được tập hợp các giá trị của m là $(-1;0)$.

Câu 51: Chọn D

Hàm số đã cho có ba cực trị $\Leftrightarrow ab<0\Leftrightarrow -2(m^2-m+1)<0\Leftrightarrow m^2-m+1>0$, $\forall m\in\mathbb{R}$..

Ta có $y'=4x^3-4(m^2-m+1)x=4x(x^2-m^2+m-1)$.

Phương trình $y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m^2-m+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{m^2-m+1} \end{array}\right.$.

Nhận thấy $x=0$ là điểm cực đại của hàm số nên suy ra $x_{1,2}=\pm\sqrt{m^2-m+1}$.

Do đó $|x_1-x_2|\le 2\Leftrightarrow 2\sqrt{m^2-m+1}\le 2\Leftrightarrow \sqrt{m^2-m+1}\le 1\Leftrightarrow m^2-m\le 0\Leftrightarrow 0\le m\le 1$.

Vậy tập hợp các giá trị của m cần tìm là $[0;1]$.

Câu 52: Chọn B

Ta có $y'=4x^3-4m^2x=4x(x^2-m^2)=0$. Phương trình $y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm m \end{array}\right.$.

Vậy với điều kiện $m\ne 0$ hàm số có 3 điểm cực trị là $A(0;2m)$, $B(-m;-m^4+2m)$, $C(m;-m^4+2m)$.

Ta có $\overrightarrow{OB}=(-m;-m^4+2m)$; $\overrightarrow{CA}=(-m;m^4)$.

Vì tứ giác $ABOC$ có hai đường chéo AO và BC vuông góc và $AB=AC$ nên nó là hình bình hành khi và chỉ khi: $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CA}\Leftrightarrow -m^4+2m=m^4\Leftrightarrow 2m(m^3-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0\,(l) \\ m=1 \end{array}\right.$.

Câu 53: Chọn D

Ta có $y' = 4x\left(x^2 - m\right) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$.

Với điều kiện $m > 0$ đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $A\left(0; m^4 - 2m^2\right)$; $B\left(-\sqrt{m}; m^4 - 3m^2\right)$; $C\left(\sqrt{m}; m^4 - 3m^2\right)$. Để $ABDC$ là hình thoi điều kiện là $BC \perp AD$ và trung điểm I của BC trùng với trung điểm J của AD. Do tính đối xứng ta luôn có $BC \perp AD$ nên chỉ cần $I \equiv J$ với $I\left(0; m^4 - 3m^2\right)$, $J\left(0; \dfrac{m^4 - 2m^2 - 3}{2}\right)$.

Điều kiện: $m^4 - 2m^2 - 3 = 2m^4 - 6m^2 \Leftrightarrow m^4 - 4m^2 + 3 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \sqrt{3} \end{array}\right. \Rightarrow m \in \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{9}{5}\right)$.

Câu 54: Chọn A

$y' = \dfrac{\left(2x + m\right)\left(x - 1\right) - x^2 - mx - m^2}{\left(x - 1\right)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - \left(m + m^2\right)}{\left(x - 1\right)^2}$.

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B thì $y' = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 + m + m^2 > 0 \\ -1 - m - m^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}$.

Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực đại, cực tiểu là $y = \dfrac{\left(x^2 + mx + m^2\right)'}{\left(x - 1\right)'} = 2x + m$.

Gọi $x_A; x_B$ là hoành độ của A, B khi đó $x_A; x_B$ là nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - \left(m + m^2\right) = 0$.

Theo định lí Viet ta có $x_A + x_B = 2$; $x_A.x_B = -m^2 - m$.

$y_A = 2x_A + m$; $y_B = 2x_B + m$.

$AOB = 90° \Rightarrow x_A.x_B + y_A.y_B = 0 \Leftrightarrow x_A x_B + 4x_A x_B + 2m\left(x_A + x_B\right) + m^2 = 0$

$\Leftrightarrow 5\left(-m^2 - m\right) + 4m + m^2 = 0 \Leftrightarrow -4m^2 - m = 0 \Leftrightarrow m = 0; m = -\dfrac{1}{4}$.

Tổng bình phương tất cả các phần tử của S bằng: $0^2 + \left(-\dfrac{1}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{16}$.

Câu 55: Chọn D

Tập xác định của hàm số $y = f\left(x\right)$ là $\mathbb{R}$ và cũng là tập xác định của hàm số $y = \left|f\left(x\right)\right|$.

Ta có, hàm số $y = f\left(x\right)$ là hàm số bậc 4 nên nó có tối đa 3 điểm cực trị là x_1, x_2, x_3 và đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$ cắt trục hoành tại tối đa 4 điểm phân biệt có hoành độ là x_4, x_5, x_6, x_7.

Do đó, hàm số $y = \left|f\left(x\right)\right|$ có nhiều nhất là 7 điểm cực trị, chính là các điểm x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7.

Vậy để hàm số $y = \left|f\left(x\right)\right|$ có nhiều điểm cực trị nhất thì đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt hay $f\left(x\right) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Ta có

$f(x)=0 \Leftrightarrow x^4-(2m+1)x^3+(m+4)x^2+(5m-6)x+2m-12=0$

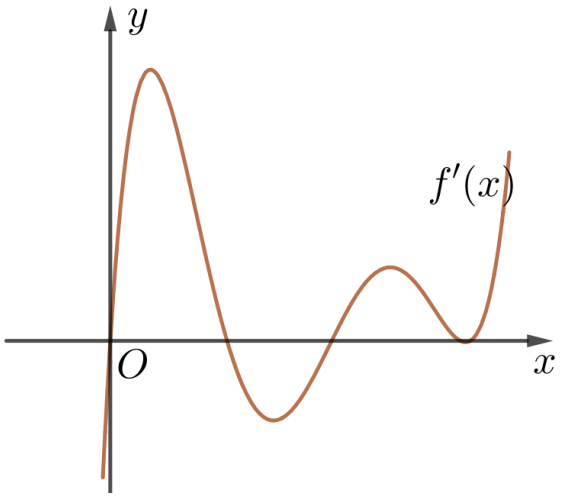
$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x^2-2mx+6-m)=0$

Suy ra $f(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $g(x)=x^2-2mx+6-m$ có hai nghiệm phân biệt khác -1 và khác 2 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=m^2+m-6>0 \\ g(-1)\neq 0 \\ g(2)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-3 \\ m>2 \end{array}\right. \\ m\neq -7 \end{cases}$.

Từ đó ta được $m\in\{-10;-9;-8;-6;-5;-4;3;4;5;6;7;8;9;10\}$. Có 14 số nguyên thỏa mãn.

DẠNG 8 Tìm cực trị của f(u) khi biết f(x) hoặc f'(x)

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y=f(x)$ có mấy điểm cực trị?



A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số $y=f(1-2x)$ đạt cực tiểu tại

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$ -2	$\nearrow$	1 $\searrow$

A. $x=-\frac{1}{2}$. **B.** $x=\frac{1}{2}$. **C.** $x=1$. **D.** $x=0$

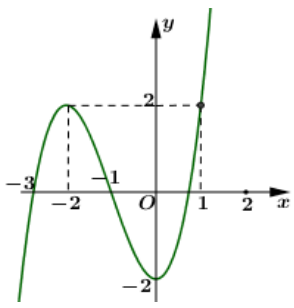
Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$ 0	$+$ 0	$-$

Hỏi hàm số $g(x)=f(x^2-2x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Hỏi hàm số $y=e^{f(x)}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'\ x$ như sau biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hỏi hàm số $y=f\ x^2-2x$ có bao nhiêu điểm cực tiểu

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

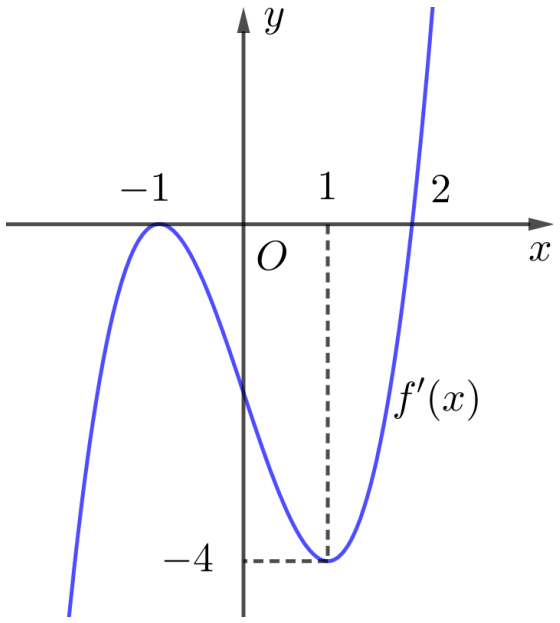
Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

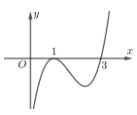
A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x\right)$ trên khoảng $(0;+\infty)$.



A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ



Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

A. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại $x=1$.

B. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực đại.

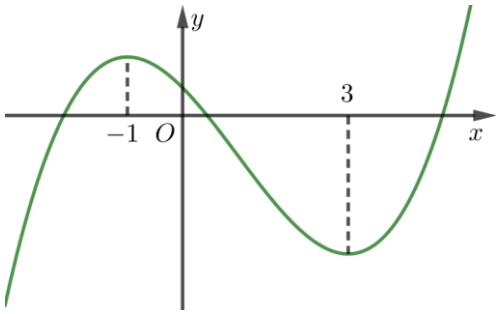
C. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=3$.

D. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+2)^4(x-3)^5(x+1)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ là

A. 1. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

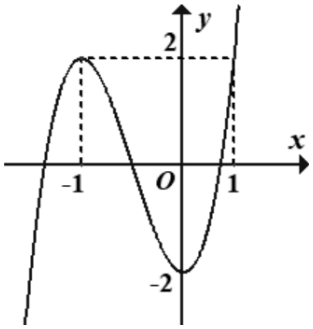
Câu 10: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left((x-1)^2+m\right)$ có 3 điểm cực trị. Tổng các phần tử của S là:

A. 2. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hỏi hàm số $y=\mathrm{e}^{f(x)}$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+2)(x-3)$. Điểm cực đại của hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x\right)$ là

A. $x=0$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=3$. **D.** $x=1$.

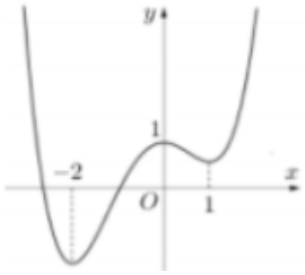
Câu 13: Cho hàm số $f(x)$. Bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ là :

A. 7. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 5.

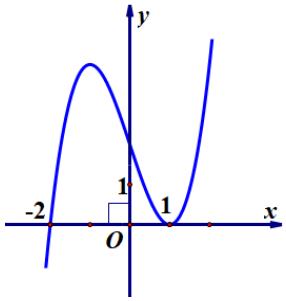
Câu 14: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số cực trị của hàm số $y=f\left(\left|x+1\right|-3\right)$ là

A. 3. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 4.

Câu 15: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Sô điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-3\right)$ là

A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

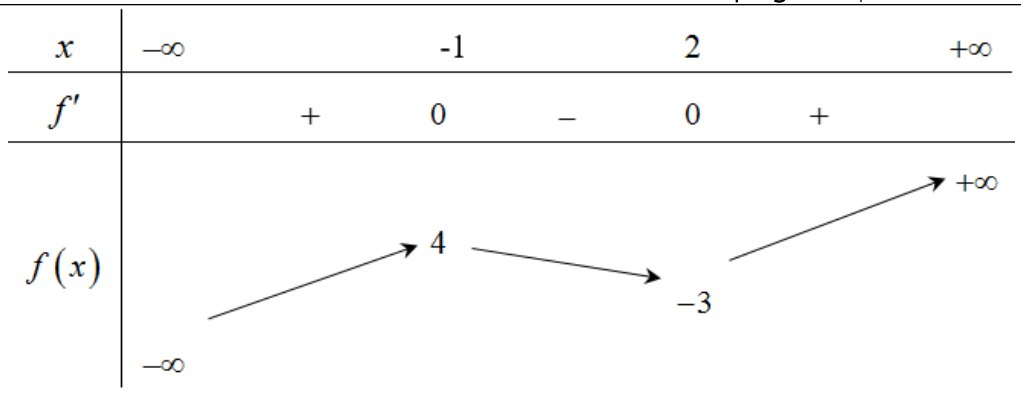
Câu 16: Cho hàm số bậc 4 có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=x^4\left[f\left(x-1\right)\right]^2$ là

A. 7. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 11.

Câu 17: Cho hàm số $y=f\ \ x$ có bảng biến thiên như sau:



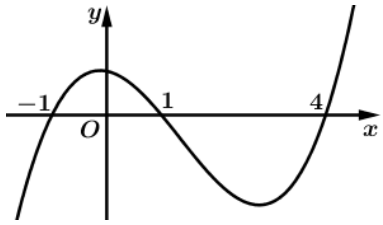
Điểm cực tiểu của hàm số $y=f\ 3x$ là

A. $y=-3$ **B.** $x=\frac{2}{3}$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-\frac{2}{3}$.

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)$, có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2(x-3)$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+2x+6}\right)$

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

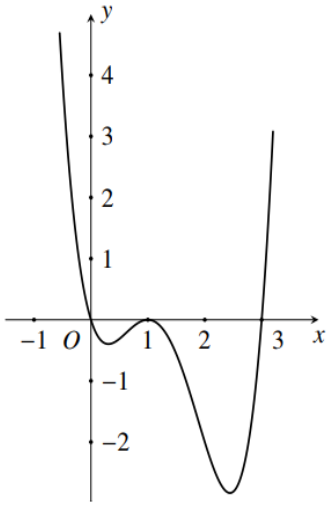
Câu 19: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình dưới đây:



Hàm số $y=f\left(x^2+x\right)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

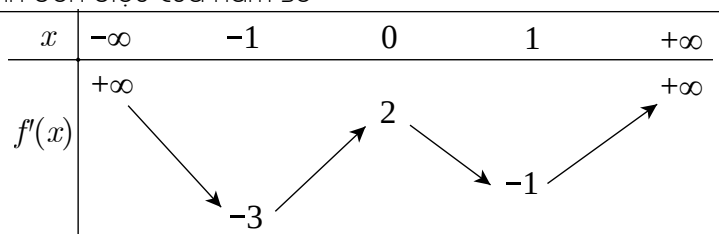
Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm $y=f'(x)$ hình vẽ sau



Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:



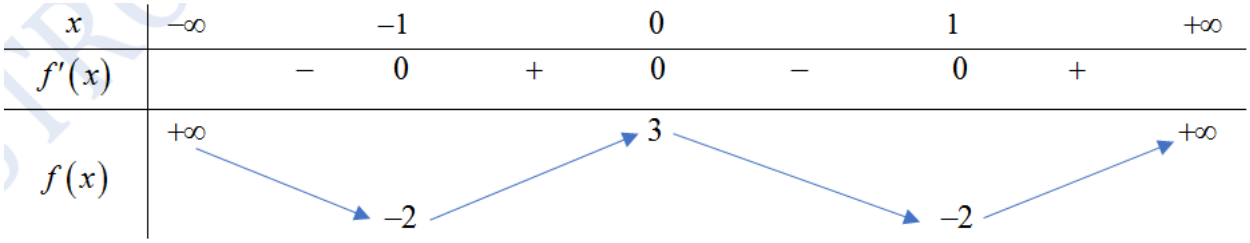
Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(3x^2-6x+2\right)$ là:

A. 3. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=4x^3+2x$ và $f(0)=1$. Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f^3(x)$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ bậc 4 có bảng biến thiên như sau:



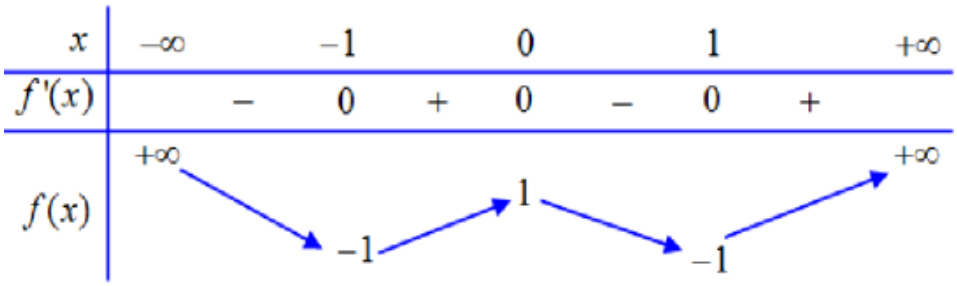
Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=x^4\left[f\left(x+1\right)\right]^2$ là

A. 11. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 5.

Câu 24: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x-1\right)^2\left(x-2\right)$. Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=f\left(\sqrt{x^2+2x+5}\right)$ là

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

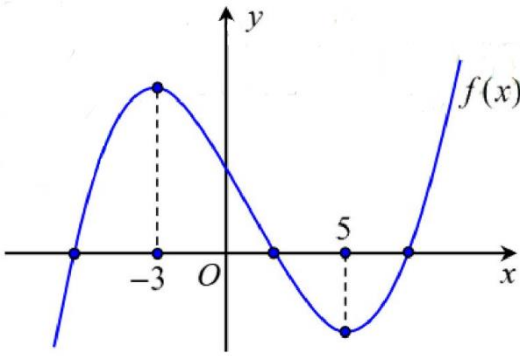
Câu 25: Cho hàm số trùng phương $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:



Hỏi hàm số $y=g\left(x\right)=\left[f\left(x^2\right)-1\right]^4$ có bao nhiêu cực trị?

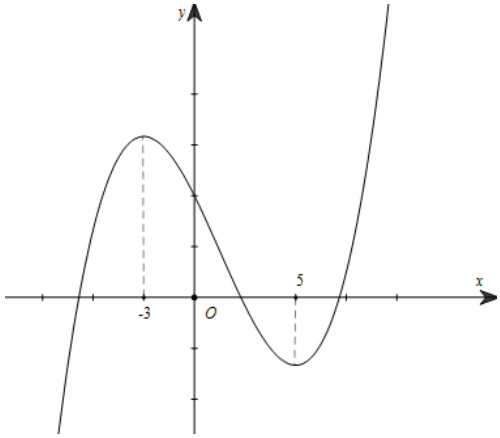
A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 26: Cho đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y=f\left(2x^3-6x\right)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



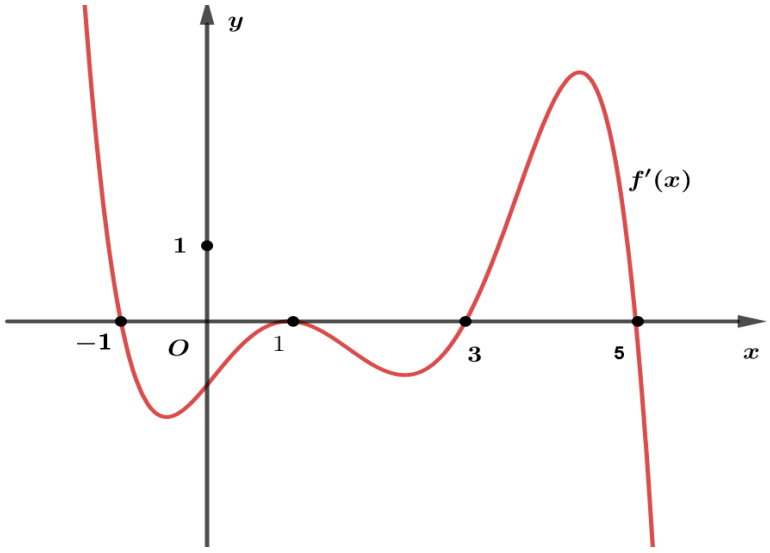
A. 5. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 27: Cho đồ thị hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y=f\left(2x^3-6x\right)$ có tất cả bao nhiêu cực trị?



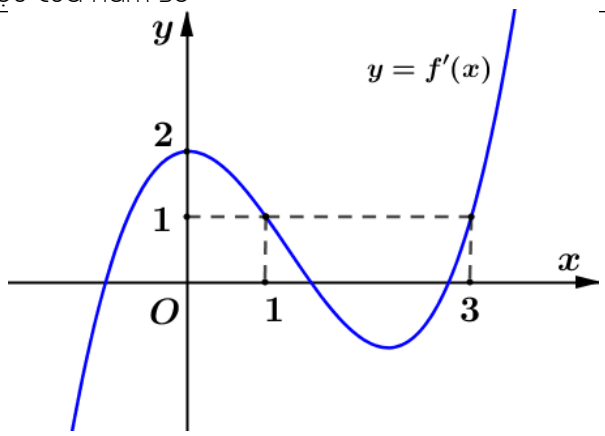
A. 5. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi hàm số $y=f\ 6-2\sqrt{6x-x^2}$ có tất cả bao nhiêu cực đại?



A. 1. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 7.

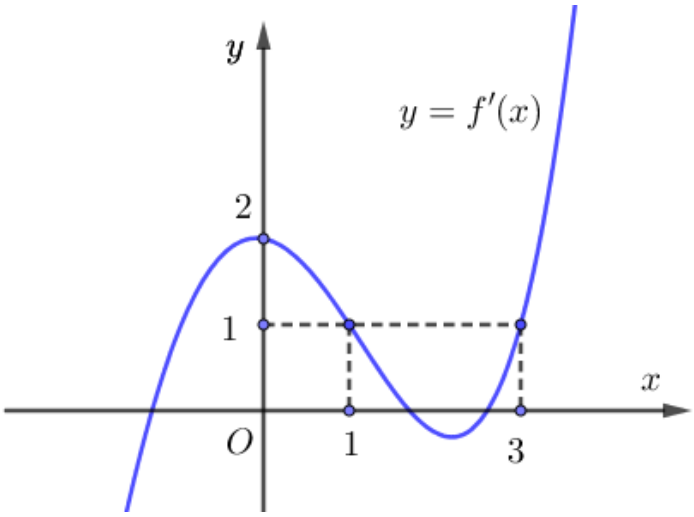
Câu 29: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Biết rằng hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực trị của hàm số $y=2021^{f(x)}+2020^{f(x)}$ là

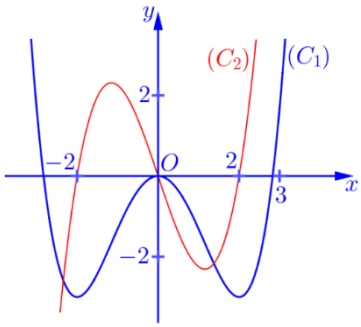
A. 2 **B.** 5 **C.** 3 **D.** 4

Câu 30: Cho hàm số $y=f(x)$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $y=2021^{f(x)}+2020^{f(x)}$ là



A. 2. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 31: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị (C_1) và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị (C_2) như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x)=f\left[e^{-x}.f(x)\right]$ trên khoảng $(-\infty;3)$ là



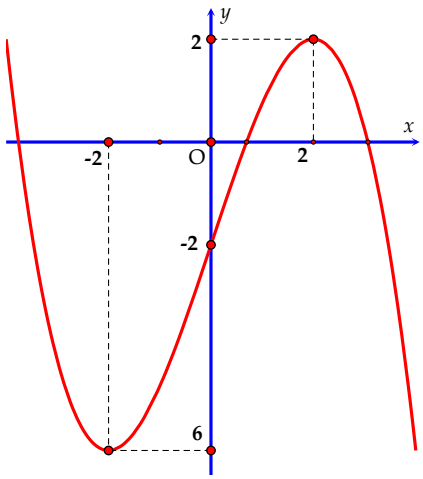
A. 9. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 32: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^2+x-2)(x-3)^3(2^x-8)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

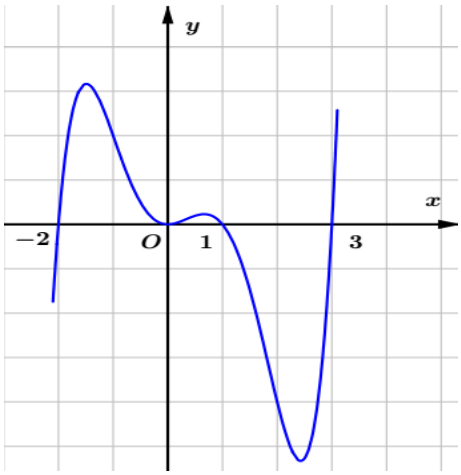
Câu 33: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ với $a\neq 0$ có đồ thị hàm số như hình bên. Điểm cực

đại của đồ thị hàm số $y=f\left(2-x\right)+3$ là



A. $\left(0;5\right)$. **B.** $\left(0;2\right)$. **C.** $\left(5;-6\right)$. **D.** $\left(5;3\right)$.

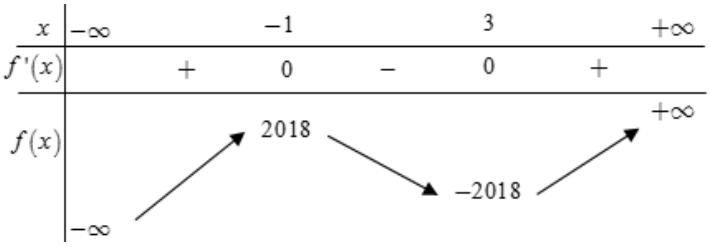
Câu 34: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ sau.



Hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

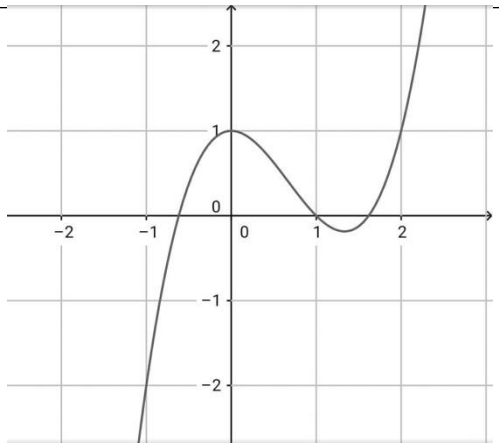
Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Xét hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(x-2017\right)+2018\right|$ có bao nhiêu cực trị?

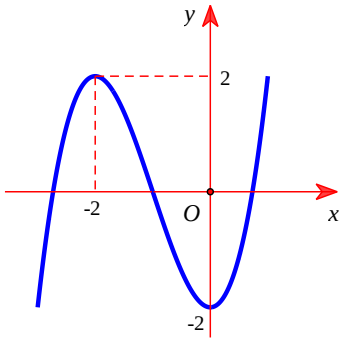
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 36: Cho hàm số $f\left(x\right)$ với đạo hàm $f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g\left(x\right)=f\left(x\right)-\frac{x^3}{3}+x^2-x+2$ đạt cực đại tại điểm nào?



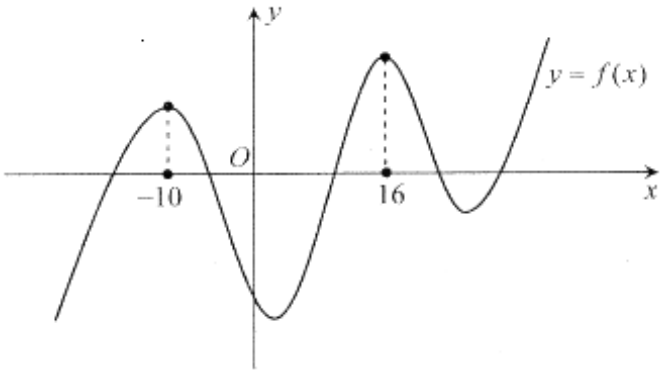
A. $x=2$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=1$. **D.** $x=0$.

Câu 37: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(-2x^2+4x\right)$ là



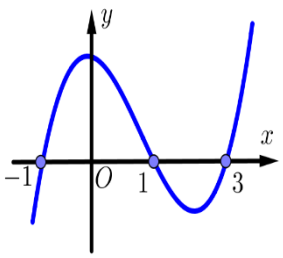
A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 38: Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}$ và có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi hàm số $y=f\left(x^3-12x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 11. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 9.

Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(xe^x\right)$ bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

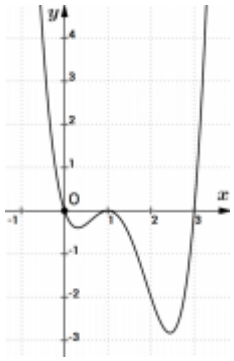
Câu 40: Cho hàm số bậc bốn trùng phương $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y=\frac{1}{x^4}\left[f(x)-1\right]^4$.

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 4.

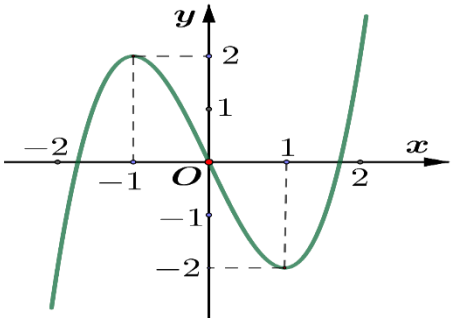
Câu 41: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây:



Hỏi hàm số $y=f\left(x^2\right)$ có bao nhiêu điểm cực đại và bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 2 điểm cực đại, 1 điểm cực tiểu. **B.** 2 điểm cực tiểu, 1 điểm cực đại.
C. 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu. **D.** 2 điểm cực tiểu, 3 điểm cực đại.

Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số bậc ba, có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Hàm số $g(x)=f\left(x^2-1\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

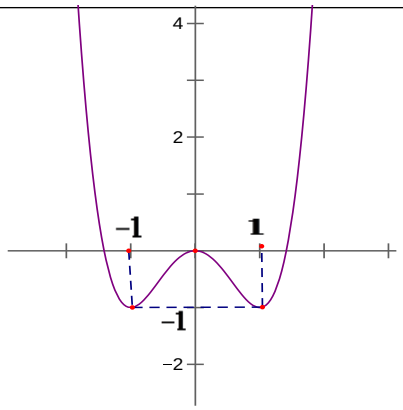
A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 43: Cho hàm số $y=f\ x$ xác định trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $y=f'\ x\ =\ x^2-4x-5\ \ x^2-1$. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f\ \ x^3-3x^2$ là

A. 2. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 4.

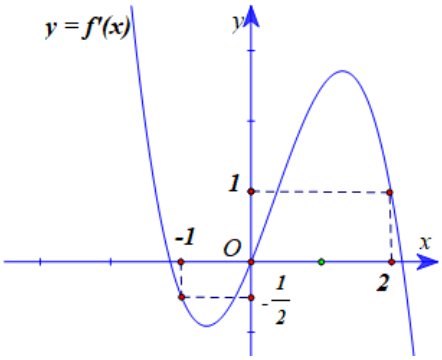
Câu 44: Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x^3+f(x))$ là



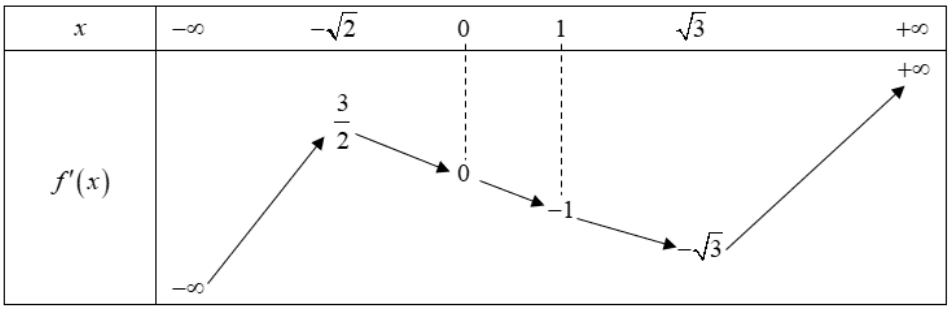
A. 11. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 45: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ $(ae<0)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Hàm số $y=\left|4f(x)-x^2\right|$ có bao nhiêu điểm cực tiểu



A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

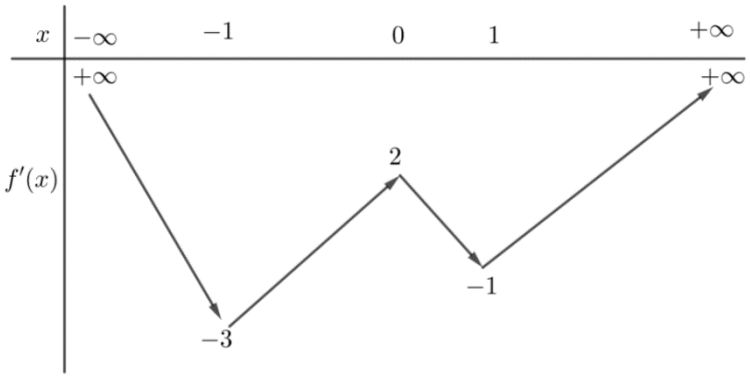
Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên của $f'(x)$ như sau:



Hỏi hàm số $g(x)=f\left(x^4\right)-4x$ có mấy điểm cực tiểu?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

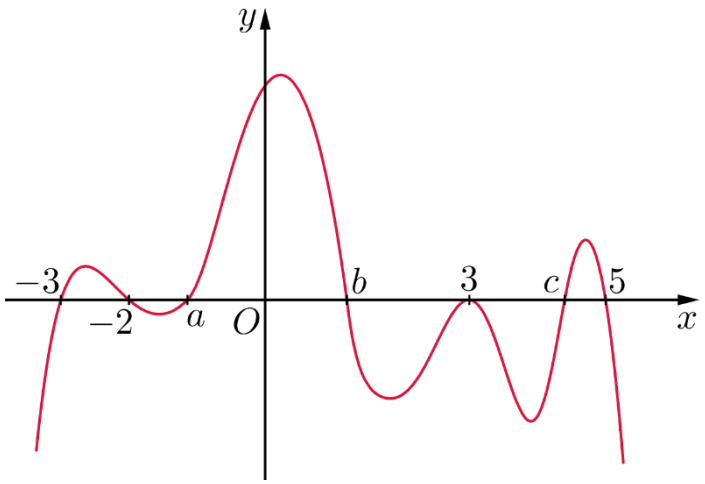
Câu 47: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau



Hỏi hàm số $g(x)=f\left(\left|\frac{\ln(x^2+1)-2}{2}\right|\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 9 **B.** 4 **C.** 7 **D.** 5

Câu 48: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ $-3;\ -2;\ a;\ b;\ 3;\ c;\ 5$ với $-\frac{4}{3}<a<-1;\ 1<b<\frac{4}{3};\ 4<c<5$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để hàm số $y=f\left(2|x|+m-3\right)$ có 7 điểm cực trị?



A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** Vô số.

Câu 49: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+2)(x-3)$. Điểm cực đại của hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x\right)$ là

A. $x=3$. **B.** $x=0$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-1$.

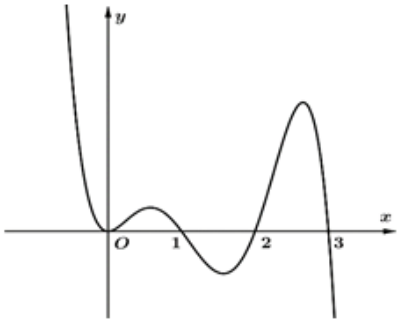
Câu 50: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-3	2	-1	$+\infty$

Hàm số $g(x)=f\left(\left|\frac{\ln\left(x^2+1\right)-2}{2}\right|\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 7.

Câu 51: Cho hàm đa thức $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau



Có bao nhiêu giá trị của $m\in[0;6];2m\in\mathbb{Z}$ để hàm số $g(x)=f\left(x^2-2|x-1|-2x+m\right)$ có đúng 9 điểm cực trị?

A. 7. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

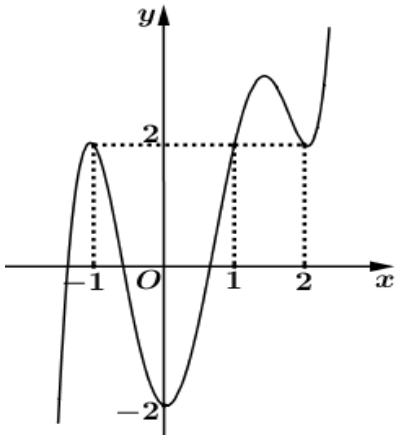
Câu 52: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực tiểu của hàm số $y=2021^{f(x)}-2020^{f(x)}$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

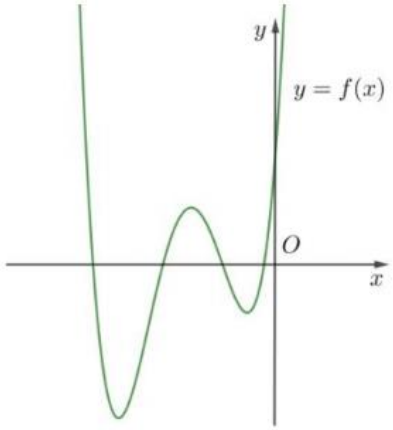
Câu 53: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x-1)$ như hình vẽ



Khi đó hàm số $y=e^{f\left(x+2x\right)}$ đạt cực tiểu tại điểm x_0. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $x_0\in(-1;0)$. **B.** $x_0\in(-4;-2)$. **C.** $x_0\in(0;1)$. **D.** $x_0\in(-2;-1)$.

Câu 54: Cho hàm số $F(x)$ có $F(0)=0$. Biết $y=F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $G(x)=\left|F\left(x^6\right)-x^3\right|$ là

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 3.

Câu 55: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-3		-1		1		2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	0	↗		↘	-3	↗	2	↘	$-\infty$

Số điểm cực đại của hàm số $g(x)=\left|f\left(\left|x^2-8x+7\right|+x^2-3\right)\right|$ là

A. 6. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 56: Cho hàm số $f(x)$ là hàm số bậc bốn thoả mãn $f(0)=0$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\frac{61}{3}$	↗	$+\infty$

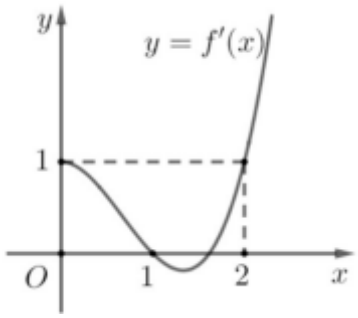
Hàm số $g(x)=\left|f\left(x^3\right)-3x\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 57: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=(x-2)^2\left(x^2-x\right), x\in\mathbb{R}$. Gói S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f\left(\frac{1}{2}x^2-6x+m\right)$ có 5 điểm cực trị. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 154. **B.** 17. **C.** 213. **D.** 153.

Câu 58: Cho hàm số đa thức $f(x)$ có đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng $(0;+\infty)$ như hình vẽ bên



Biết rằng $f(0)=-1; f(1)=1$. Trên khoảng $(0;+\infty)$ hàm số $g(x)=\left|3f(x)-\sqrt{2x^3+1}\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị.

A. 7. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 59: Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biế thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^2\left[f(x-1)\right]^4$ là

A. 7. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 9.

Câu 60: Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-2	↗	3	↘	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^2\left[f(x+1)\right]^4$ là

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 5.

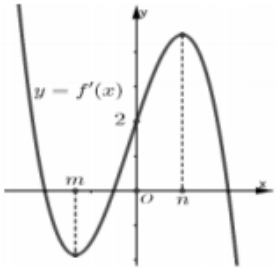
Câu 61: Cho hàm số $y=f\ x$ có bảng biến thiên như sau:



Số điểm cực đại của hàm số $g\ x=\left[f\ 2x^2+x\right]^2$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

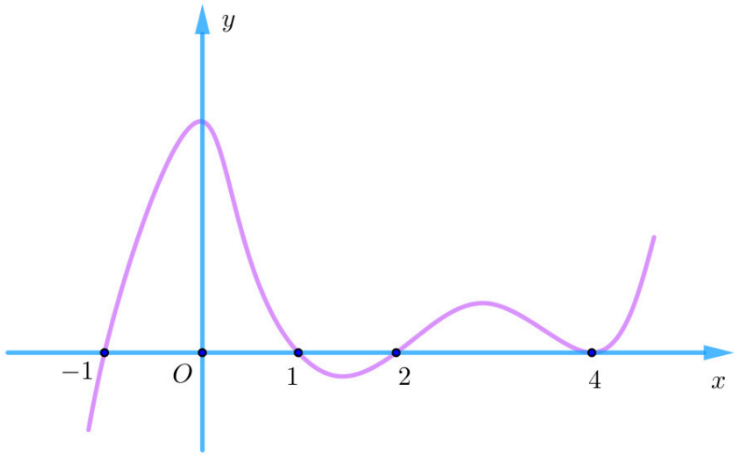
Câu 62: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,(a\neq 0)$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $e>n$



Số điểm cực trị của hàm số $y=f'\left(f(x)-2x\right)$ là

A. 7. **B.** 6. **C.** 10 **D.** 14.

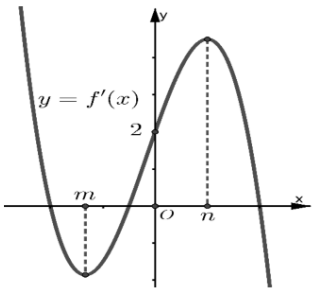
Câu 63: Vậy số điểm cực trị của hàm số $y=f'\left(f(x)-2x\right)$ là 7.Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có đúng 4 điểm chung với trục hoành như hình vẽ bên dưới:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=f\left(|x|^3-3|x|+m+2021\right)$ có đúng 11 điểm cực trị?

A. 0. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 1.

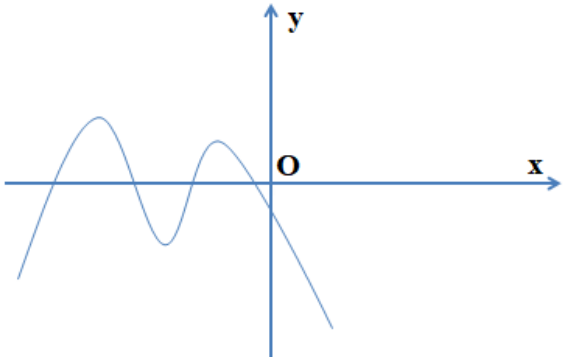
Câu 64: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,(a\neq 0)$ có đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ.



Biết rằng $e>n$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f'\left(f(x)-2x\right)$ bằng

A. 7. **B.** 10. **C.** 14. **D.** 6.

Câu 65: Cho hàm số $y=f(x)$ với $f(0)=0$. Biết $y=f'(x)$ là một hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong như hình dưới đây



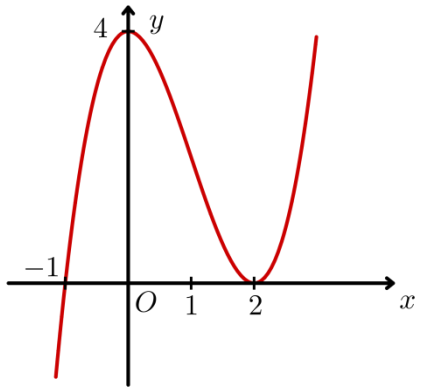
Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f\left(x^4\right)+x^2\right|$ là

A. 3. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 66: Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x)=\left(x^2-16\right)(x+1)\left(x^2-4x+m-4\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2021;2021]$ sao cho hàm số $g(x)=f\left(x^2\right)$ có 5 điểm cực trị?

A. 2025. **B.** 2026. **C.** 2021. **D.** 4043.

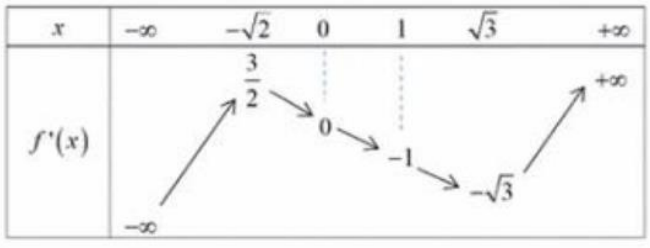
Câu 67: Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{4}x^4+ax^3+bx^2+cx$ có đồ thị (C) của hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ sau:



Đặt $g(x)=f\left(f'(x)\right)$, $h(x)=f'\left(f(x)\right)$. Tổng số điểm cực trị của $g(x)$ và $h(x)$ là:

A. 12. **B.** 11. **C.** 8. **D.** 13.

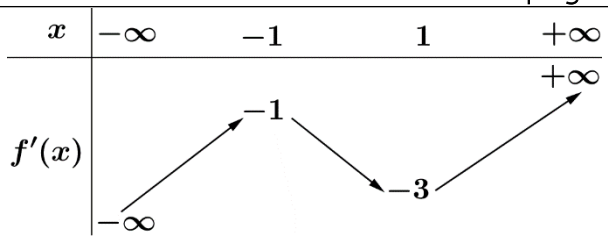
Câu 68: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên của $f'(x)$ như sau:



Hỏi hàm số $g(x)=f\left(x^4\right)-4x$ có mấy điểm cực tiểu?

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

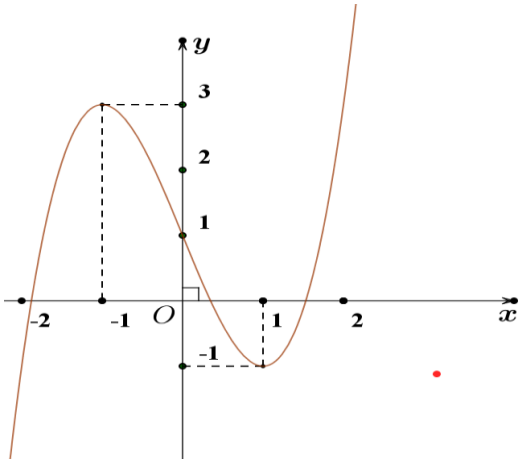
Câu 69: Cho $y=f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn thỏa mãn $f(1)\le 0$ và hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau



Hàm số $g(x)=\left|f\left(\sqrt{x^2+1}\right)+x^2\right|$ có mấy điểm cực trị?

A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

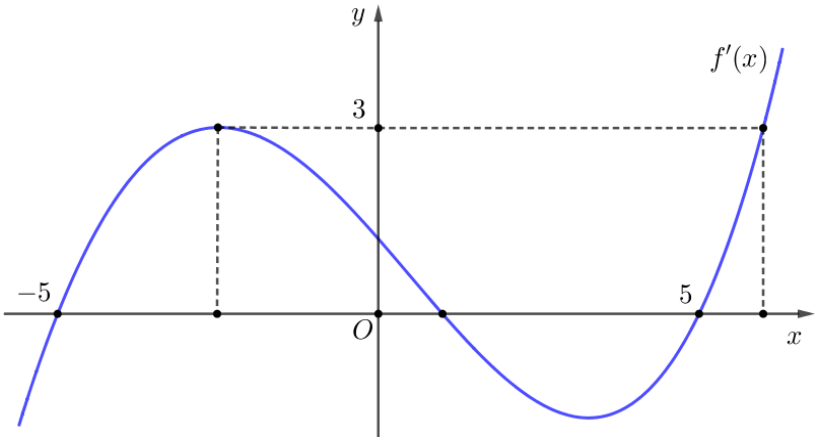
Câu 70: Cho hàm số $f(x)$. Biết $f'(x)$ là hàm bậc 3. Có đồ thị như hình vẽ sau



Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in[-10,10]$ để hàm số $g(x)=f(x)+mx+2021$ có đúng 1 cực trị?

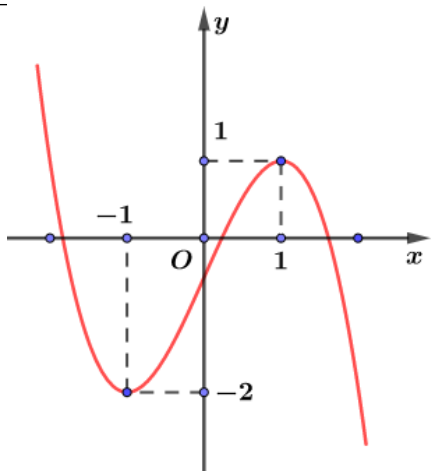
A. 20. **B.** 16. **C.** 15. **D.** 18.

Câu 71: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $f(10)=30\,f(-6)=30\,f(5)=30$. Hỏi đồ thị hàm số $y=f\left[f(x)-3x+9\right]$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



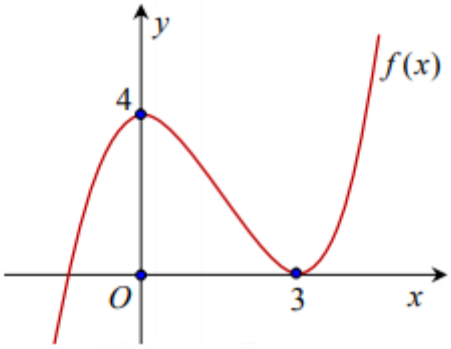
A. 7. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 72: Cho hàm số $y=f\ x$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y=f\left[e^{f\ x}-\frac{1}{2}\ f\ x\ ^2-f\ x\ \right]$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



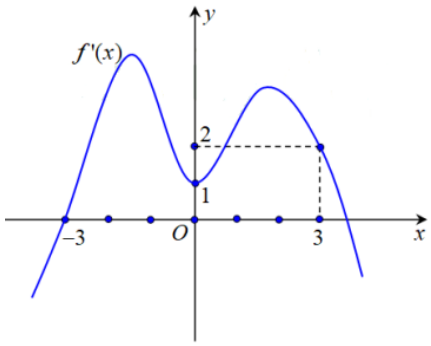
A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 9.

Câu 73: Cho đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(3f(x)-m)$ có đúng 6 điểm cực trị?



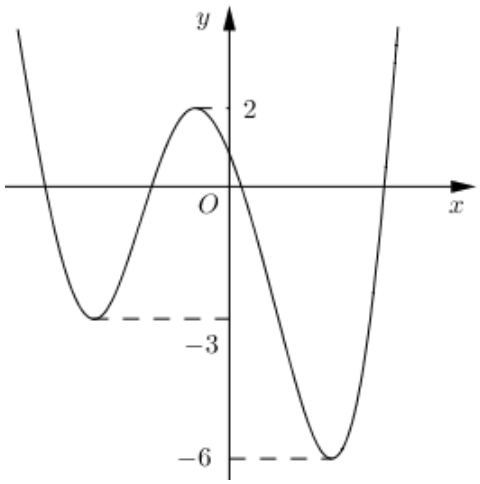
A. 7. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 74: Cho đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng hàm số $f'(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$; có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ và hàm số $g(x)=\left[f(x)\right]^2-\left(\dfrac{x^2+6x}{3}\right).f(x)+\left(\dfrac{x^2+6x}{6}\right)^2$ có đúng 5 điểm cực trị. Giá trị $\min\left(\min\limits_{x\in(-\infty;3]} f(x)\right)$ bằng



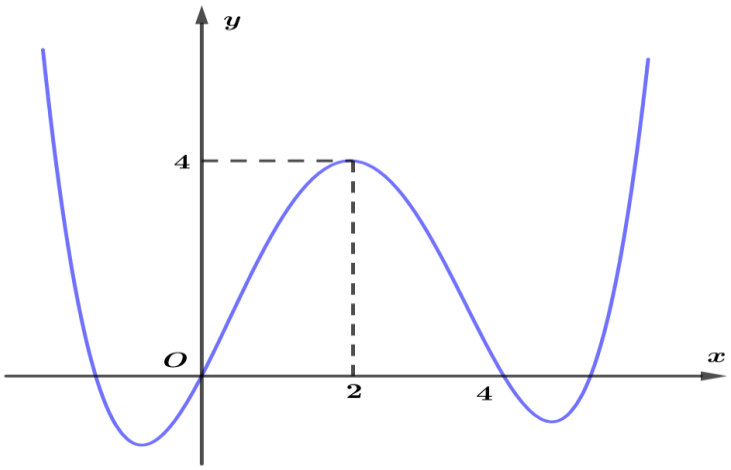
A. 0. **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** $\dfrac{11}{4}$. **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

Câu 75: Cho $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc 4 và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-12;12]$ để hàm số $g(x)=\left|2f(x-1)+m\right|$ có 5 điểm cực trị?



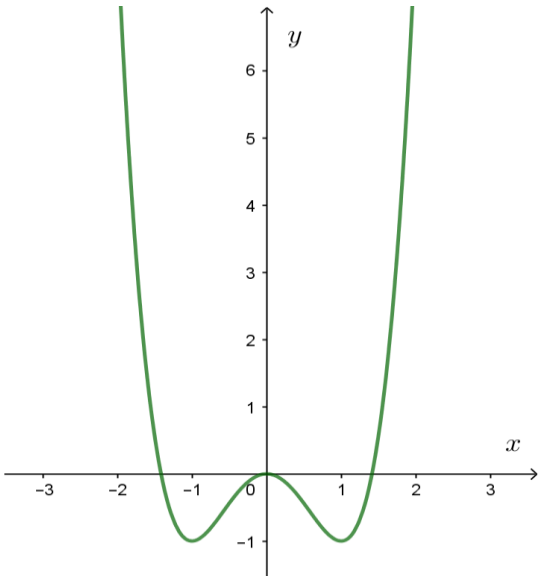
A. 12. **B.** 14. **C.** 15. **D.** 13.

Câu 76: Cho hàm số bậc năm $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^3+3x^2\right)-2x^3-6x^2$ là



A. 7. **B.** 10. **C.** 5. **D.** 11.

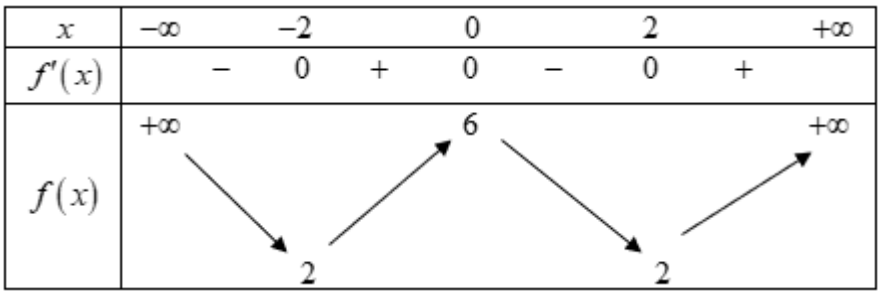
Câu 77: Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^3+f(x)\right)$ là

A. 11. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 10.

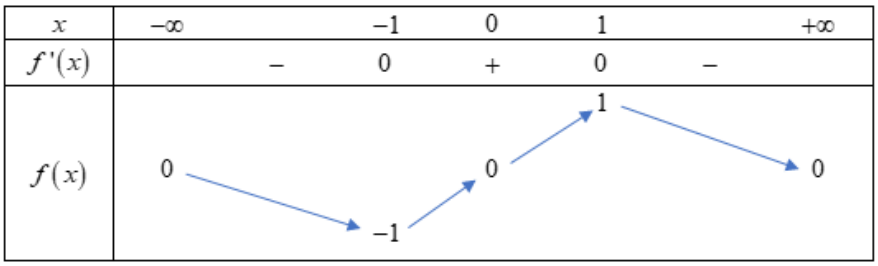
Câu 78: Cho hàm số bậc bốn trùng phương $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\frac{1}{x^2}\left(f(x)-6\right)^4$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

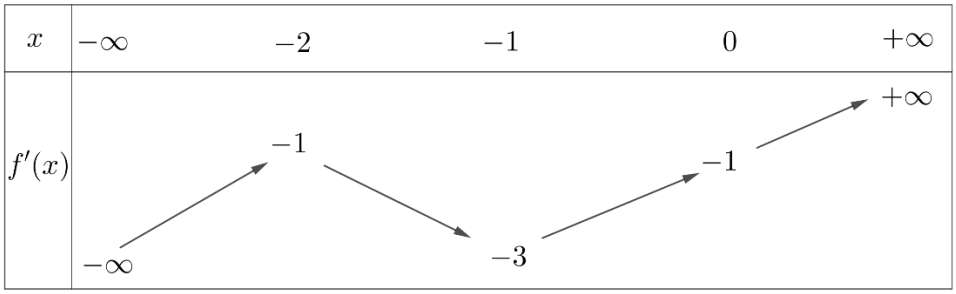
Câu 79: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ:



Số điểm cực đại của hàm số $y=f\left(\left|f(x)\right|\right)$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

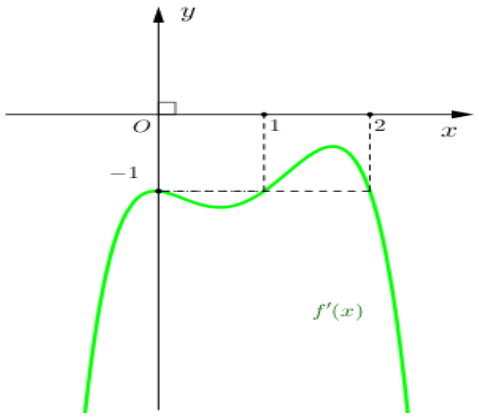
Câu 80: Cho $f(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của $f'(x)$ như sau:



Tìm số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f\left(\left|x^3\right|\right)-3|x|$.

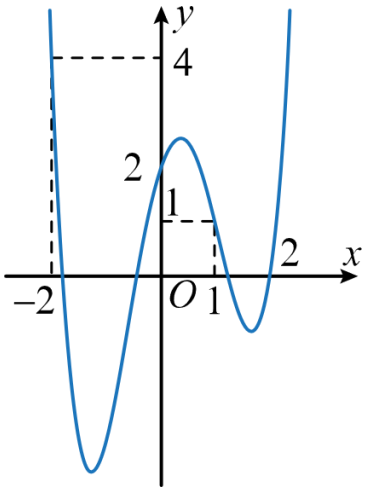
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 81: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f(x)+x$ là



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 82: Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



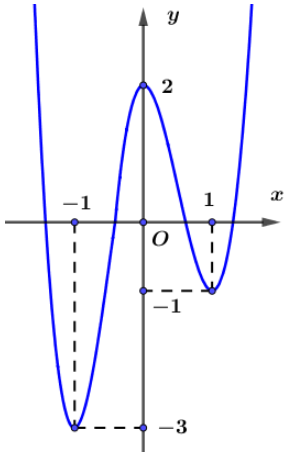
Số điểm cực đại của hàm số $g(x)=f(x^2-4x+3)-3(x-2)^2+\frac{1}{2}(x-2)^4$ là

A. 7. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 83: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x+1\right)^4\left(x-m\right)^5\left(x+3\right)^3$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in\left[-5;5\right]$ để hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|x\right|\right)$ có 3 điểm cực trị.

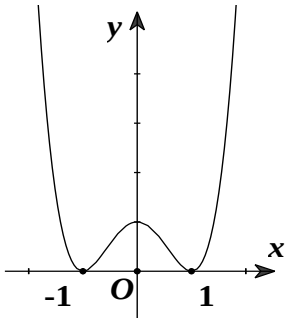
A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 84: Cho hàm số bậc năm $y=f\left(x\right)$ có đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ dưới đây. Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(4x^2-4x\right)-\frac{8}{3}x^3+6x^2-4x+1$ là



A. 4. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 7.

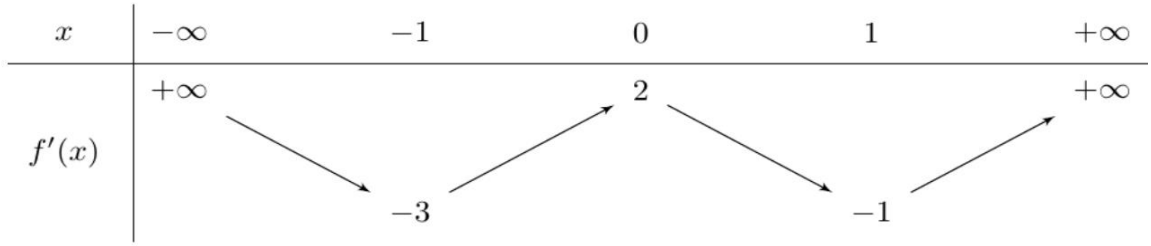
Câu 85: Vậy hàm số $y=f\left(4x^2-4x\right)-\frac{8}{3}x^3+6x^2-4x+1$ có 5 điểm cực trị.Cho $f(x)$ là một hàm đa thức bậc năm thoả mãn $f\left(0\right)=0$. Hàm số $f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên



Hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(\sin x\right)+\frac{1}{3}\sin^3 x-\sin^2 x\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $\left(0;3\pi\right)$?

A. 15. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 13.

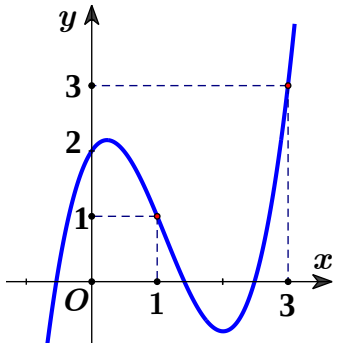
Câu 86: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên $f'\left(x\right)$ như hình vẽ:



Hàm số $y=f\left(\left|e^{2x}-2x-2\right|\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 9. **B.** 7. **C.** 11. **D.** 5.

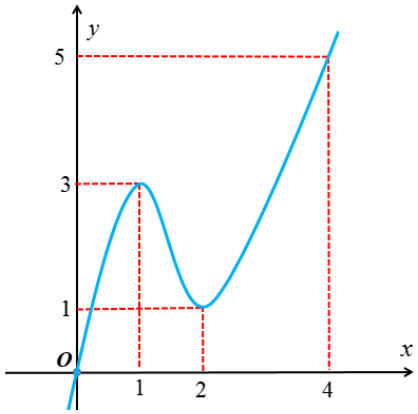
Câu 87: **[Mức độ 4]** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có $f\left(0\right)=-1$. Biết $y=f'\left(x\right)$ là hàm số bậc ba có đồ thị là đường cong dưới đây.



Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(x^4\right)-6x^2\right|$ là

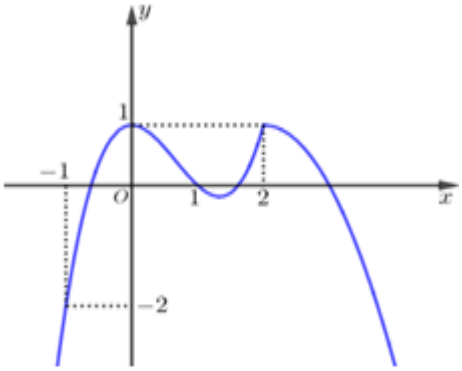
A. 3. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 88: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f\left(0\right)=0;f\left(4\right)>4$. Biết hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực tiểu của hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(x^2\right)-2x\right|$.



A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

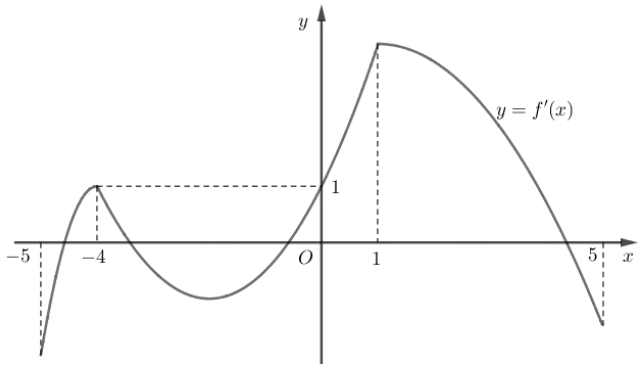
Câu 89: Cho hàm số $y=f(x)$ có $f(1)<0$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=\left|f\left(x^2\right)-\frac{x^6}{3}+x^4-x^2\right|$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

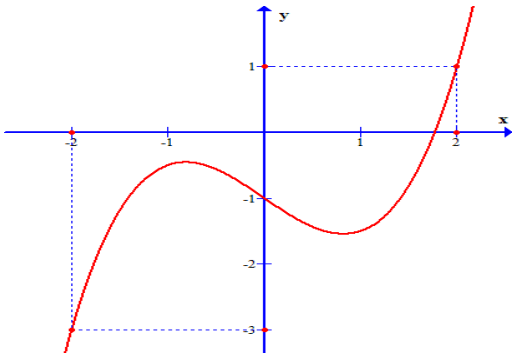
A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 90: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y=f\left(x^2+4x\right)-x^2-4x$ có bao nhiêu điểm cực trị thuộc khoảng $(-5;1)$?



A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

Câu 91: Cho $f(x)$ là hàm bậc bốn thỏa mãn $f(0)=0$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $g(x)=\left|2f\left(x^2+x\right)-x^4-2x^3+x^2+2x\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

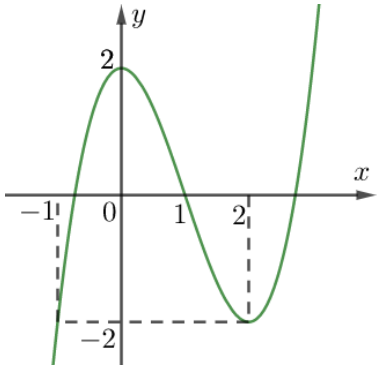
Câu 92: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0)=0$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	m	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$ ↗	-1	↘	↗ $+\infty$

Hàm số $g(x)=\left|f\left(x^2\right)-x^2\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7

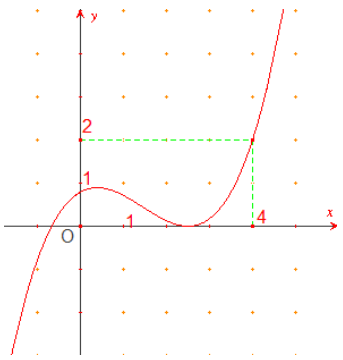
Câu 93: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn. Biết $f(0)=0$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có hình vẽ bên dưới.



Hàm số $g(x)=\left|5f\left(\left|2\sin x-1\right|-1\right)+4\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị trên đoạn $[0;3\pi]$?

A. 16. **B.** 32. **C.** 17. **D.** 33.

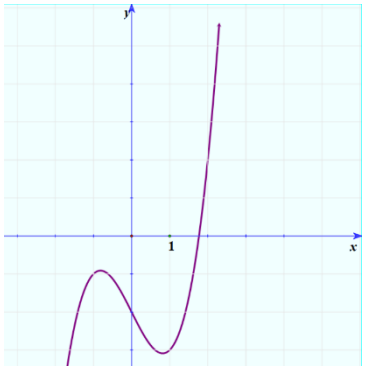
Câu 94: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(0)=0$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f\left(x^2\right)-\frac{2}{3}x^3\right|$.

A. 3. **B.** 7.
C. 6. **D.** 5.

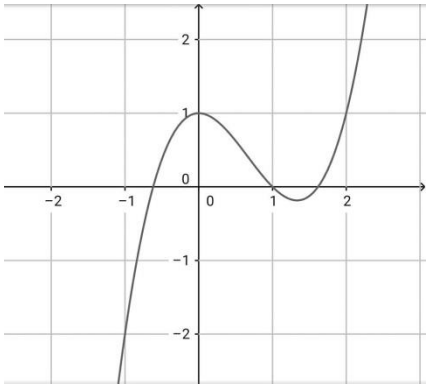
Câu 95: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có $f(0)=2021$ và đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ như hình bên dưới.



Hỏi hàm số $y=\left|f\left(x^2\right)-2|x|-2021\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 96: Cho $f(x)$ là một hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(1)=-\frac{5}{3}$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như sau:



Hàm số $g(x)=\left|f(x)-\frac{x^3}{3}+x^2-x+2\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 97: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(-3)=0$ đồng thời có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

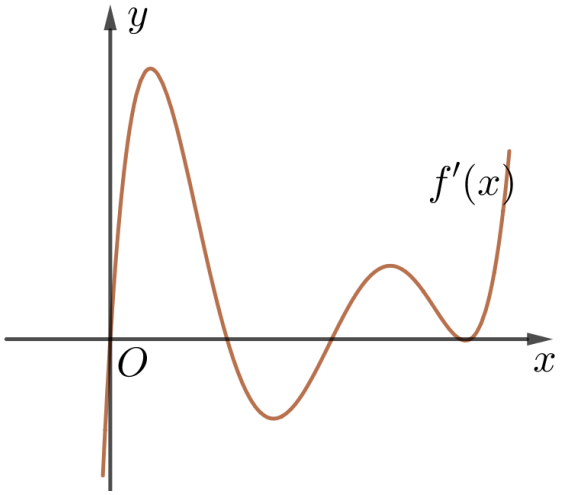
x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g(x)=\left|2(x+1)^6-6(x+1)^2-3f\left(-x^4-4x^3-4x^2-2\right)\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 7. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 5.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

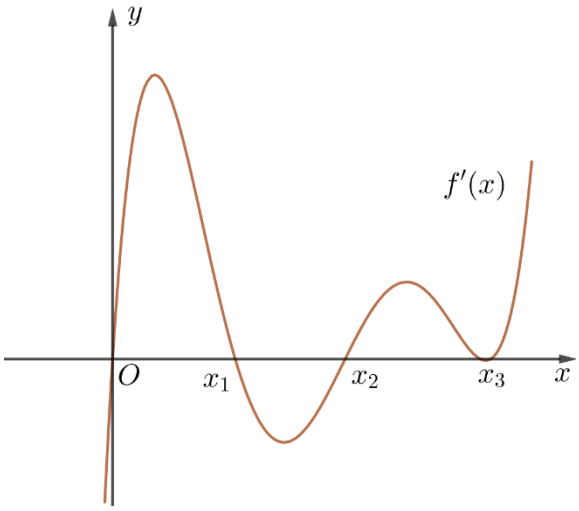
Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y=f(x)$ có mấy điểm cực trị?



A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A



Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ suy ra $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=x_1 \\ x=x_2 \\ x=x_3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	x_1	x_2	x_3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0 $+$	0	$-$ 0	$+$ 0	$+$
$f(x)$	↘	↗	↘	↗		

Suy ra hàm số $y=f\left(x\right)$ có 3 điểm cực trị

Câu 2: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số $y=f\left(1-2x\right)$ đạt cực tiểu tại

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f(x)$	↗	1	↘ -2	↗ 1	↘

A. $x=-\frac{1}{2}$. **B.** $x=\frac{1}{2}$. **C.** $x=1$. **D.** $x=0$

Lời giải

Chọn B.

$$g'\left(x\right)=-2f'\left(1-2x\right)=0\Leftrightarrow\Rightarrow-2f'\left(1-2x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-2x=-1\\1-2x=0\\1-2x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\frac{1}{2}\\x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0 $-$	0 $+$	0 $-$	
$g(x)$	↗	CĐ ↘	CT ↗	CĐ ↘	

Ta xét dấu bằng cách thay số

Với $x=2\Rightarrow g'\left(2\right)=-2f'\left(-3\right)<0$

Với $x=\frac{3}{4}\Rightarrow g'\left(\frac{3}{4}\right)=-2f'\left(-\frac{1}{2}\right)>0$

Với $x=\frac{1}{4}\Rightarrow g'\left(\frac{1}{4}\right)=-2f'\left(\frac{1}{2}\right)<0$

Với $x=-1\Rightarrow g'(-1)=-2f'(3)>0$

Vậy hàm số $y=f(1-2x)$ đạt cực tiểu tại $x=\dfrac{1}{2}$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2		1		3	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Hỏi hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=(2x-2)f'\left(x^2-2x\right)$.

Suy ra: $g'(x)=0\Leftrightarrow(2x-2)f'\left(x^2-2x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-2=0\\f'\left(x^2-2x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-2x=3\\x^2-2x=-2\\x^2-2x=1\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\\x=-1\\x=1\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Xét $g'(x)\ge 0\Leftrightarrow(2x-2)f'\left(x^2-2x\right)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}2x-2\ge 0\\f'\left(x^2-2x\right)\ge 0\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}2x-2\le 0\\f'\left(x^2-2x\right)\le 0\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x\ge 1\\-2\le x^2-2x\le 3\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}x\le 1\\\left[\begin{array}{l}x^2-2x\ge 3\\x^2-2x\le -2\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x\ge 1\\x^2-2x+2\ge 0\\x^2-2x-3\le 0\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}x\le 1\\\left[\begin{array}{l}x^2-2x-3\ge 0\\x^2-2x+2\le 0\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x\ge 1\\-1\le x\le 3\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}x\le 1\\\left[\begin{array}{l}x\ge 3\\x\le -1\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1\le x\le 3\\x\le -1\end{array}\right.$.

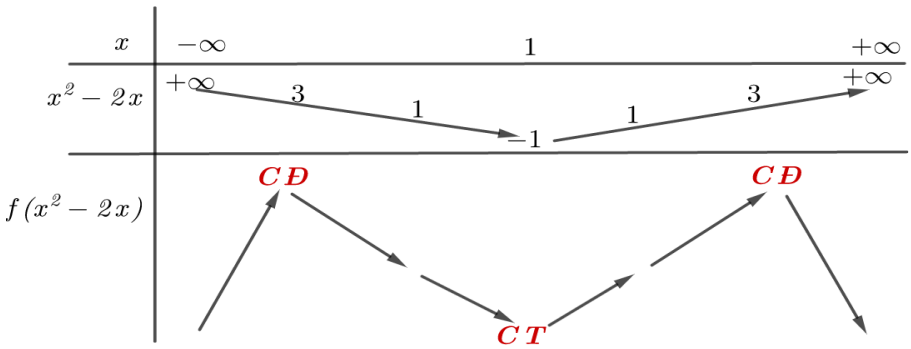
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$1-\sqrt{2}$	1	$1+\sqrt{2}$	3	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$		↗	↘		↗		↘				

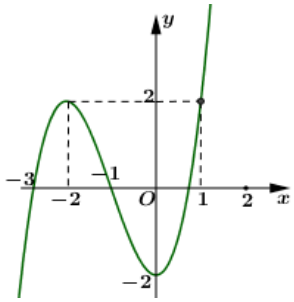
Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x\right)$ có 1 điểm cực tiểu.

Cách khác:

Từ BBT hàm $f\left(x^2-2x\right)$ được mô tả ở dưới ta suy ra hàm có 1 điểm cực tiểu.



Câu 4: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Hỏi hàm số $y=e^{f(x)}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=\left(e^{f(x)}\right)'=f'(x).e^{f(x)}$.

Xét phương trình $f'(x).e^{f(x)}=0\Leftrightarrow f'(x)=0,\left(e^{f(x)}>0,\forall x\right)$

Suy ra $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-3,x=-1,x=a,(0<a<1)$.

Các nghiệm này là các nghiệm đơn. Do vậy hàm số $y=e^{f(x)}$ có 3 điểm cực trị.

Câu 5: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'\ x$ như sau biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x\right)$:

$g'(x)=(2x-2)f'\left(x^2-2x\right)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-2=0\\x^2-2x=-2\\x^2-2x=1\\x^2-2x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=1+\sqrt{2}\\x=1-\sqrt{2}\\x=3\\x=-1\end{array}\right.$$ đều là các nghiệm bội lẻ.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Suy ra hàm số có hai điểm cực tiểu.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

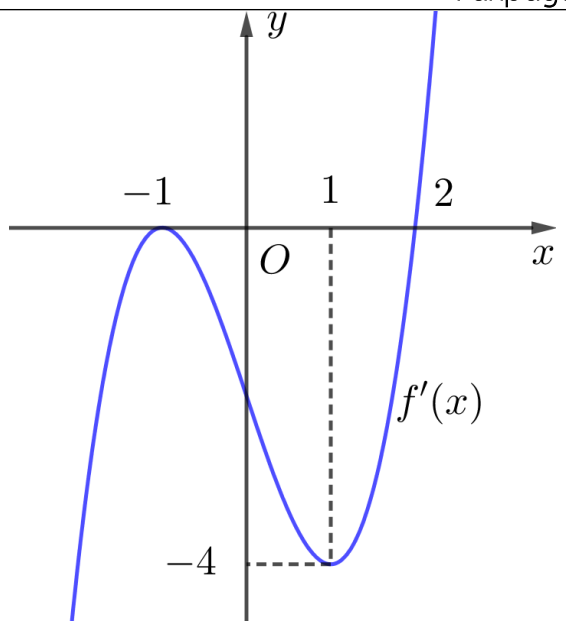
A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ ta thấy đạo hàm $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm 2 lần nên hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực đại.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x\right)$ trên khoảng $(0;+\infty)$.



A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g(x)=f\left(x^2-2x\right)\Rightarrow g'(x)=(2x-2).f'\left(x^2-2x\right).$

Suy ra $g'(x)=0\Leftrightarrow(2x-2).f'\left(x^2-2x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\f'\left(x^2-2x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-2x=-1\\x^2-2x=2\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-2x+1=0\\x^2-2x-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=1\\x=1\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$.

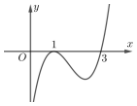
Nhận xét: $f'\left(x^2-2x\right)=0\Rightarrow x^2-2x=-1$ là nghiệm kép.

Bảng biến thiên

x	0		1		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2-2x\right)$ có 2 điểm cực trị trên khoảng $(0;+\infty)$

Câu 8: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ



Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

A. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại $x=1$.

B. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực đại.

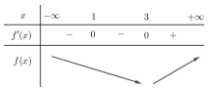
C. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=3$.

D. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị, ta có bảng biến thiên



Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=3$.

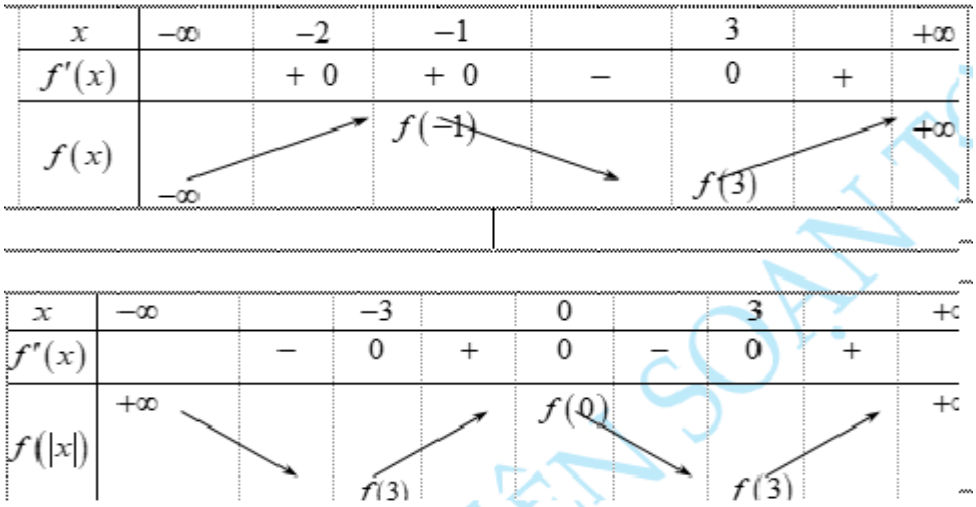
Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+2)^4(x-3)^5(x+1)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ là

A. 1. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

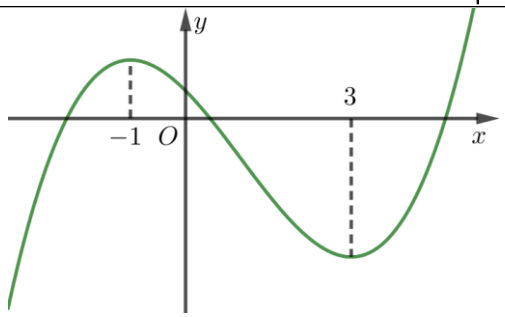
Chọn C

Ta có bảng biến thiên:



Vậy hàm số $f(|x|)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 10: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(\left(x-1\right)^2+m\right)$ có 3 điểm cực trị. Tổng các phần tử của S là:

A. 2. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=2\left(x-1\right)f'\left(\left(x-1\right)^2+m\right)$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\f'\left(\left(x-1\right)^2+m\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\\left(x-1\right)^2+m=-1\\\left(x-1\right)^2+m=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\\left(x-1\right)^2=-1-m\left(1\right).\\\left(x-1\right)^2=3-m\left(2\right)\end{array}\right.$$

+) Nếu $-1-m=0\Leftrightarrow m=-1$ khi đó phương trình $\left(2\right)\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2=4$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 nên $m=-1$ thỏa mãn.

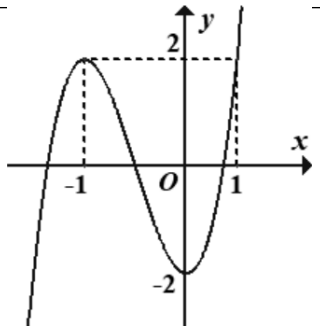
+) Nếu $3-m=0\Leftrightarrow m=3$ khi đó phương trình $\left(1\right)\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2=-4$ vô nghiệm. Do đó, $m=3$ không thỏa mãn.

+) Để hàm số $y=f\left(\left(x-1\right)^2+m\right)$ có 3 điểm cực trị thì phương $\left(1\right)$ có hai nghiệm phân biệt và $\left(2\right)$ vô nghiệm; hoặc $\left(1\right)$ vô nghiệm và $\left(2\right)$ có hai nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}-1-m>0\\3-m<0\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}-1-m<0\\3-m>0\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}m<-1\\m>3\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}m>-1\\m<3\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow-1<m<3.$$

Vậy $-1\le m<3\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m\in\left\{-1;0;1;2\right\}$. Chọn A.

Câu 11: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hỏi hàm số $y=\mathrm{e}^{f\left(x\right)}$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ suy ra $f'(x)=0$ có 3 nghiệm đơn.

Đặt $g(x)=\mathrm{e}^{f(x)} \Rightarrow g'(x)=f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}$.

Vì $\mathrm{e}^{f(x)}>0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow g'(x)=0$ có 3 nghiệm đơn chính là 3 nghiệm của $f'(x)=0$.

Do đó hàm số $y=\mathrm{e}^{f(x)}$ có 3 điểm cực trị.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+2)(x-3)$. Điểm cực đại của hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x\right)$ là

A. $x=0$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=3$. **D.** $x=1$.

Lời giải

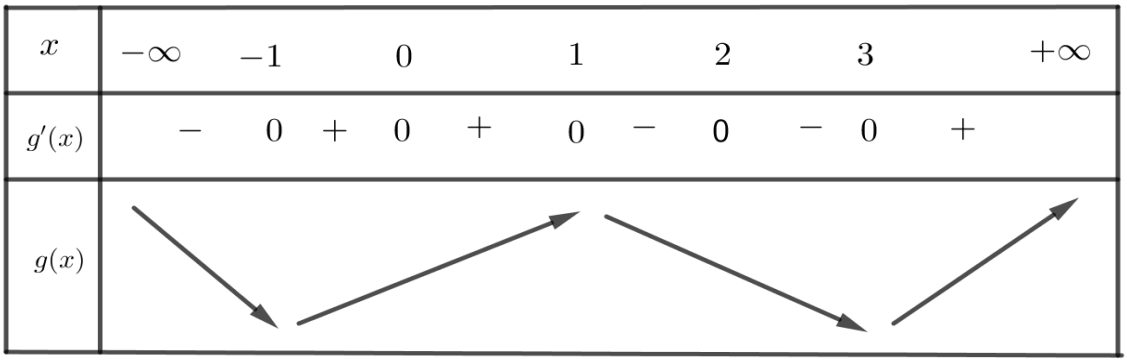
Chọn D

Theo giả thiết : $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Ta có $g'(x)=(2x-2)f'\left(x^2-2x\right)$, có $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-2=0 \\ f'\left(x^2-2x\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-2=0 \\ x^2-2x=0 \\ x^2-2x=-2 (vn) \\ x^2-2x=3 \end{array}\right.$

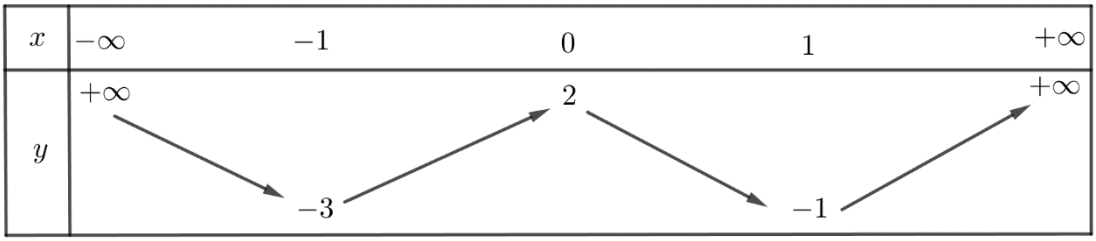
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \\ x=2 \\ x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$



Dựa vào BBT, hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x=1$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$. Bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ là :

A. 7. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 5.

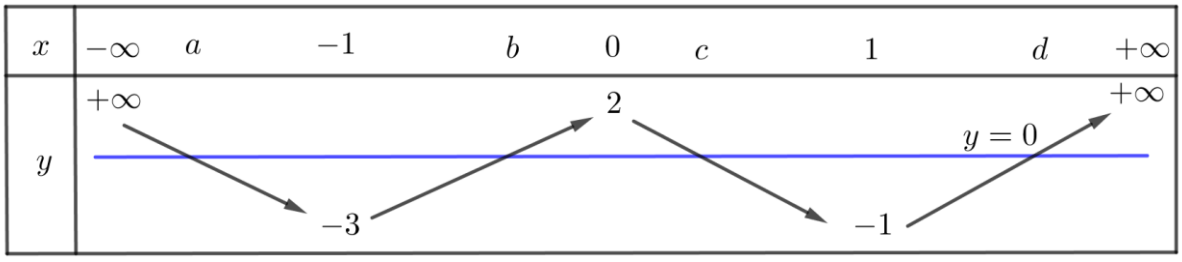
Lời giải

Chọn A

Ta có : $y'=(2x-2)\,f'\left(x^2-2x\right)$.

$$y'=0\Rightarrow(2x-2)\,f'\left(x^2-2x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ f'\left(x^2-2x\right)=0\end{array}\right.$$

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$



Ta có $f'\left(x^2-2x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x=a\in(-\infty;-1)\\ x^2-2x=b\in(-1;0)\\ x^2-2x=c\in(0;1)\\ x^2-2x=d\in(1;+\infty)\end{array}\right.$ $(*)$.

Nhận xét phương trình $x^2-2x=m\Leftrightarrow x^2-2x-m=0$:

+) Có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi: $1+m>0\Leftrightarrow m>-1$.

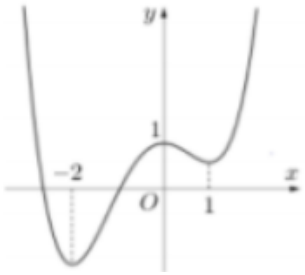
+) Có nghiệm kép khi và chỉ khi: $1+m=0\Leftrightarrow m=-1$ khi đó nghiệm kép $x=1$.

+) Có nghiệm $x=1$ khi và chỉ khi: $-1-m=0\Leftrightarrow m=-1$.

Suy ra $(*)$ có 6 nghiệm phân biệt và khác $x=1$. Do đó $y'=0$ có 7 nghiệm đơn.

Vậy: $y=f\left(x^2-2x\right)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 14: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số cực trị của hàm số $y=f\left(\left|x+1\right|-3\right)$ là

A. 3. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Xét $g\left(x\right)=f\left(\left|x+1\right|-3\right)$. Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $g'(x)=(|x+1|-3)'f'(|x+1|-3)=\dfrac{x+1}{|x+1|}f'(|x+1|-3)=\dfrac{1}{|x+1|}h(x)$

Với $h(x)=(x+1)\cdot f'(|x+1|-3)$

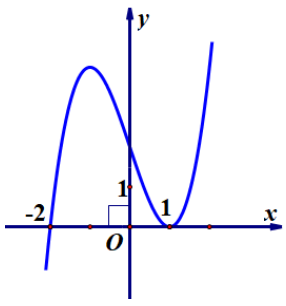
$$h(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=0\\f'(|x+1|-3)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\|x+1|-3=-2\\|x+1|-3=0\\|x+1|-3=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=0\\x=-2\\x=2\\x=-4\\x=3\\x=-5\end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ bảng xét dấu $g'\left(x\right)$

x	$-\infty$	-5	-4	-2	-1	0	2	3	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0 $+$	0	$-$	0	$+$	$\|\|$ $-$	0 $+$	0 $-$	0 $+$

Vậy hàm số $y=g\left(x\right)$ có 7 cực trị.

Câu 15: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Sô điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-3\right)$ là

A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Đặt $g(x)=f\left(x^2-3\right)$ ta có $g'(x)=2x.f'\left(x^2-3\right)$.

Từ đồ thị của $y=f'(x)$ ta có $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=0\\x^2-3=1\\x^2-3=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm2\\x=\pm1\end{array}\right.$.

Cũng từ đồ thị ta thấy $x=\pm2$ là nghiệm kép của phương trình, nên ta có $x=0, x=\pm1$ là các nghiệm đơn của $g'(x)=0$. Vậy hàm số $y=g(x)=f\left(x^2-3\right)$ có tất cả là 3 cực trị.

Câu 16: Cho hàm số bậc 4 có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=x^4\left[f\left(x-1\right)\right]^2$ là

A. 7. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

Cách 1. Từ giả thiết đề bài đã cho ta thấy rằng hàm số $f\left(x\right)$ có dạng $f\left(x\right)=ax^4+bx^2+c$.

Sử dụng giả thiết ta được

$$f\left(x\right)=4x^4-8x^2+3\Rightarrow f'\left(x-1\right)=16\left(x-1\right)^3-16\left(x-1\right)=16x\left(x-1\right)\left(x-2\right)$$

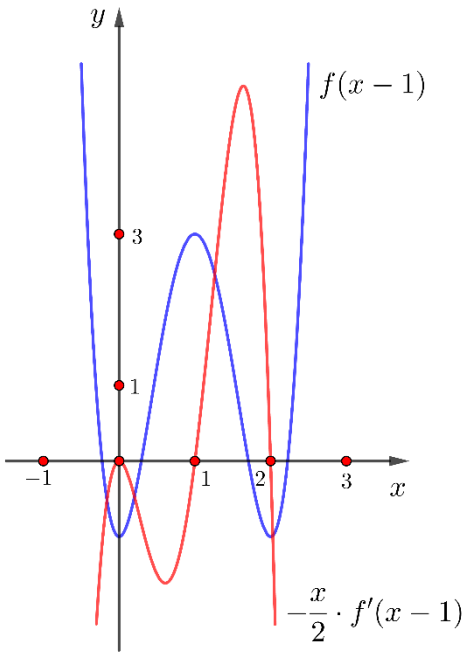
Ta có

$$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow4x^3\left[f\left(x-1\right)\right]^2+2x^4.f\left(x-1\right).f'\left(x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f\left(x-1\right)=0\\2f\left(x-1\right)+x.f'\left(x-1\right)=0\quad(*)\end{array}\right.$$

Xét phương trình $(*)\Leftrightarrow f\left(x-1\right)=-\frac{x}{2}.f'\left(x-1\right)$, ta có $-\frac{x}{2}.f'\left(x-1\right)=-8x^2\left(x-1\right)\left(x-2\right)$.

Biểu diễn hai hàm số $f\left(x-1\right)$ và $-\frac{x}{2}.f'\left(x-1\right)$ trên cùng một đồ thị đồ thị ta có



Như vậy phương trình $(*)$ có 4 nghiệm phân biệt.

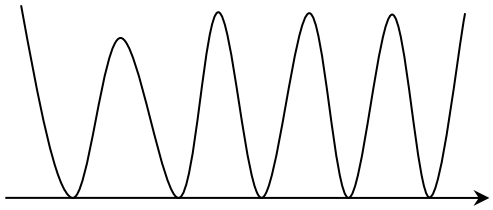
Xét phương trình $f(x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x-1)^2=\dfrac{3}{2}\\(x-1)^2=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}+1\\x=\dfrac{5}{4}\\x=\dfrac{3}{4}\end{array}\right.$.

Thay 4 nghiệm này vào phương trình $(*)$ thì ta thấy rằng các nghiệm của phương trình này không phải là nghiệm của phương trình $(*)$.

Vậy hàm số đã cho có tất cả 9 điểm cực trị.

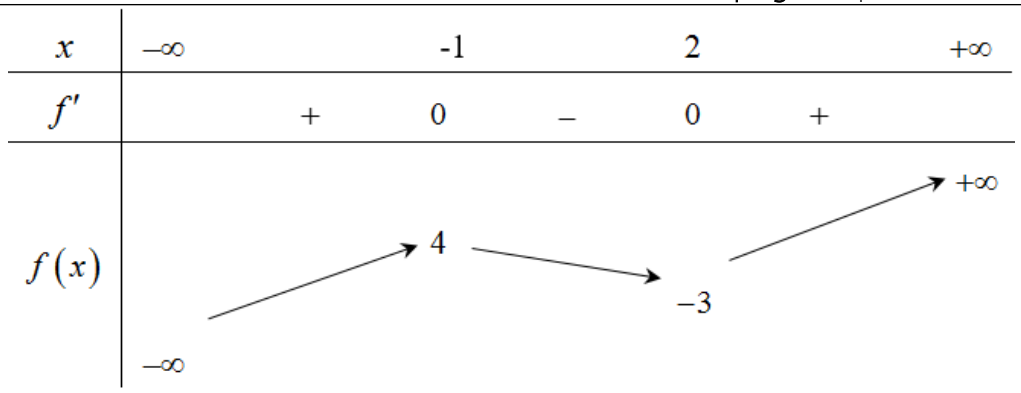
Cách 2.

Từ bảng biến thiên, ta nhận thấy rằng phương trình $f(x-1)=0$ có 4 nghiệm phân biệt khác 0, suy ra phương trình $g(x)=x^4\left[f(x-1)\right]^2=0$ có tất cả 5 nghiệm bội chẵn, khi đó đồ thị hàm số $g(x)$ sẽ có dạng như sau



Như vậy hàm $g(x)$ có 9 điểm cực trị.

Câu 17: Cho hàm số $y=f\ x$ có bảng biến thiên như sau:



Điểm cực tiểu của hàm số $y=f\ 3x$ là

A. $y=-3$ **B.** $x=\frac{2}{3}$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$y'=3f'\ 3x$

Từ BBT của hàm số $y=f\ x$ ta có:

$$y'=0\Leftrightarrow f'\ 3x\ =0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x=-1\\3x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{1}{3}\\x=\frac{2}{3}\end{array}\right.$$

$$y'>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x<-1\\3x>2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-\frac{1}{3}\\x>\frac{2}{3}\end{array}\right.$$

$$y'<0\Leftrightarrow -1<3x<2\Leftrightarrow -\frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}$$

Do đó, điểm cực tiểu của hàm số là $x=\frac{2}{3}$.

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)$, có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2(x-3)$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+2x+6}\right)$

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=0\\x-3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Xét hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+2x+6}\right)$ có $g'(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+6}}f'\left(\sqrt{x^2+2x+6}\right)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=0\\ f'\left(\sqrt{x^2+2x+6}\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ \sqrt{x^2+2x+6}=3\end{array}\right.$$

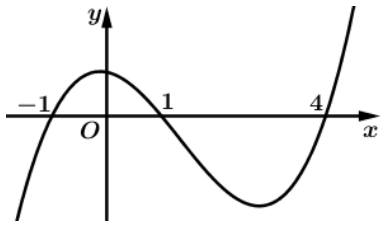
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x^2+2x-3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=-3\\ x=1\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'\left(\sqrt{x^2+2x+6}\right)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng biến thiên. Ta thấy hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 19: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình dưới đây:



Hàm số $y=f\left(x^2+x\right)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Bảng xét dấu của $f'(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Đặt $g(x)=f\left(x^2+x\right)$, ta có $g'(x)=(2x+1)f'\left(x^2+x\right)$,

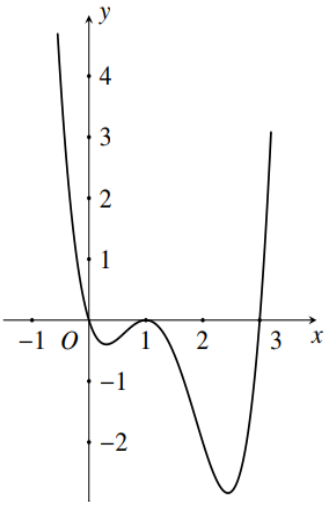
$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+1=0\\ x^2+x=-1\\ x^2+x=1\\ x^2+x=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-1}{2}\\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}\end{array}\right.$$

Đặt $a=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$, $b=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $c=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $d=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$; Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$

x	$-\infty$		a		b		$-\frac{1}{2}$		c		d		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu của $g'(x)$ ta có hàm số $g(x)=f\left(x^2+x\right)$ có 2 điểm cực đại.

Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm $y=f'(x)$ hình vẽ sau



Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

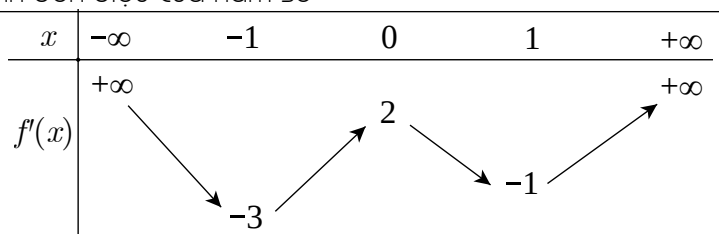
Ta có: $y'=(2x-2)\,f'\left(x^2-2x\right)$

$$y'=0\Leftrightarrow(2x-2)\,f'\left(x^2-2x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-2=0\\ f'\left(x^2-2x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-2=0\\ x^2-2x=0\\ x^2-2x=1\\ x^2-2x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=0\\ x=2\\ x=1\pm\sqrt{2}\\ x=3\\ x=-1\end{array}\right.$$

Dựa vào đồ thị ta suy ra $y'=0$ có đúng 5 nghiệm bội lẻ là: $x=-1;x=0;x=1;x=2;x=3$ nên hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ có 5 điểm cực trị.

Từ giả thiết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ có 5 điểm cực trị suy ra hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ có 3 điểm cực tiểu

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(3x^2-6x+2\right)$ là:

A. 3. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

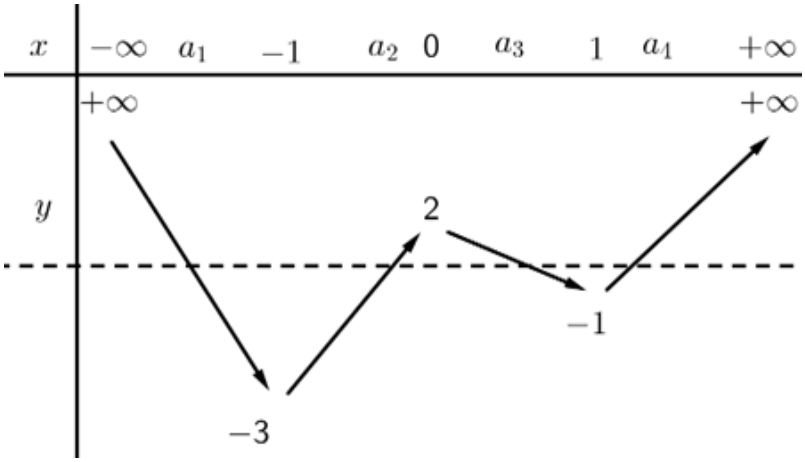
Lời giải

Chọn C

Ta có: $y'=\left(6x-6\right)f'\left(3x^2-6x+2\right)$

$$y'=0\Leftrightarrow\left(6x-6\right)f'\left(3x^2-6x+2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\f'\left(3x^2-6x+2\right)=0\ (1)\end{array}\right.$$

BBT:



$$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}3x^2-6x+2=a_1\in(-\infty;-1):(vn)\\3x^2-6x+2=a_2\in(-1;0) & (2n_0)\\3x^2-6x+2=a_3\in(0;1) & (2n_0)\\3x^2-6x+2=a_4\in(1;+\infty) & (2n_0)\end{array}\right.$$

Vì phương trình $y'=0$ có 7 nghiệm đơn phân biệt nên hàm số $y=f\left(3x^2-6x+2\right)$ có 7 cực trị.

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=4x^3+2x$ và $f(0)=1$. Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f^3(x)$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

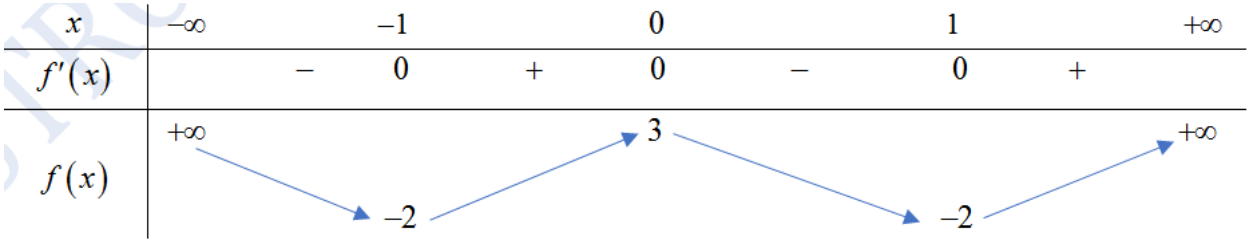
Từ $f'(x)=4x^3+2x\Rightarrow f(x)=x^4+x^2+C$. Do $f(0)=1\Rightarrow C=1\Rightarrow f(x)=x^4+x^2+1$.

Ta có $g(x)=f^3(x)\Rightarrow g'(x)=3f^2(x).f'(x)=3(x^4+x^2+1)^2.2x(2x^2+1)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^4+x^2+1=0\\x=0\\2x^2+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x=0$$

Đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm tại $x=0$ nên hàm số có đúng 1 điểm cực tiểu.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ bậc 4 có bảng biến thiên như sau:



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^4\left[f(x+1)\right]^2$ là

A. 11. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Ta chọn hàm bậc bốn $y=f(x)=5x^4-10x^2+3$ có bảng biến thiên như đề cho.

Ta có $g'(x)=4x^3\left[f(x+1)\right]^2+x^4.2.f(x+1)f'(x+1)=0$

$\Leftrightarrow 2x^3.f(x+1).\left[2f(x+1)+xf'(x+1)\right]=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} x^3=0 & (1)\\ f(x+1)=0 & (2)\\ 2f(x+1)+xf'(x+1)=0 & (3)\end{array}\right.$$

+ Phương trình có nghiệm bội $x=0$.

+ Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$, ta có phương trình $f(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt $x\neq 1\Rightarrow$Phương trình: $f(x+1)=0$ có 4 nghiệm phân biệt $x\neq 0$.

+ Giải: Đặt $x+1=t\Rightarrow x=t-1$, phương trình trở thành:

$$2f(t)+(t-1).f'(t)=0\Leftrightarrow 2\left(5t^4-10t^2+3\right)+(t-1)\left(20t^3-20t\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 30t^4-20t^3-40t^2+20t+6=0 \qquad (3')$$

Bấm MTCT thấy phương trình có 4 nghiệm phân biệt $t\neq 1$.

$\Rightarrow$Phương trình có 4 nghiệm phân biệt $x\neq 0$.

Ngoài ra, nghiệm của phương trình không phải là nghiệm của phương trình vì những giá trị x thỏa mãn $f(x+1)=0$ không thỏa mãn phương trình.

Do đó phương trình $g'(x)=0$ có 9 nghiệm phân biệt nên hàm số $g(x)=x^4\left[f(x+1)\right]^2$ có 9 điểm cực trị.

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x-2)$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+2x+5}\right)$ là

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x)=0\Leftrightarrow(x-1)^2(x-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2\end{array}\right.$.

$$g'(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}f'\left(\sqrt{x^2+2x+5}\right).$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}f'\left(\sqrt{x^2+2x+5}\right)=0$$

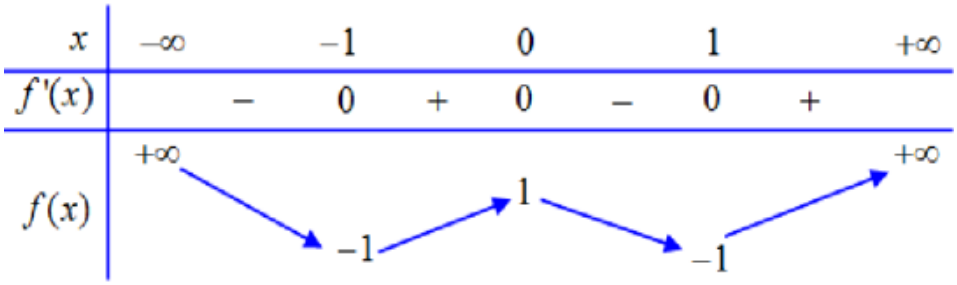
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ f'\left(\sqrt{x^2+2x+5}\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+2x+5}=1(VN)\\ \sqrt{x^2+2x+5}=2\Leftrightarrow x^2+2x+1=0\Leftrightarrow x=-1\end{array}\right.\quad .$$

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

Suy ra: Đáp án **C**

Câu 25: Cho hàm số trùng phương $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Hỏi hàm số $y=g(x)=\left[f\left(x^2\right)-1\right]^4$ có bao nhiêu cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $g'(x)=4.2x.f'\left(x^2\right)\left[f\left(x^2\right)-1\right]^3$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'\left(x^2\right)=0\\ f\left(x^2\right)=1\end{array}\right.$

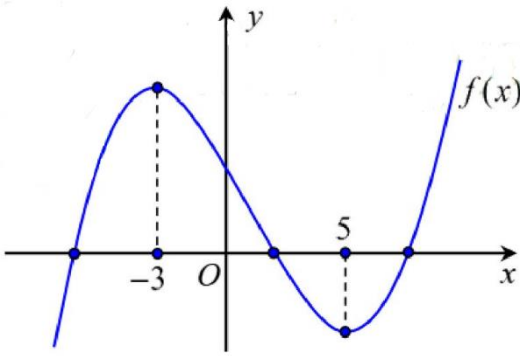
$$f'\left(x^2\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=-1\ (\text{VN})\\ x^2=0\\ x^2=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\\ x=-1\end{array}\right.$$

$$f\left(x^2\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=a<-1\ (\text{VN})\\ x^2=0\\ x^2=b>1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\sqrt{b}\\ x=-\sqrt{b}\end{array}\right.$$

Do đó các cực trị của hàm số $y=g(x)$ là $x=0, x=1, x=-1, x=\sqrt{b}, x=-\sqrt{b}$

Vậy hàm số có 5 cực trị.

Câu 26: Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y=f\left(2x^3-6x\right)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



A. 5. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị hàm số đã cho, ta thấy hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại các điểm $x=-3, x=5$.

Do đó: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=5 \end{array}\right.$.

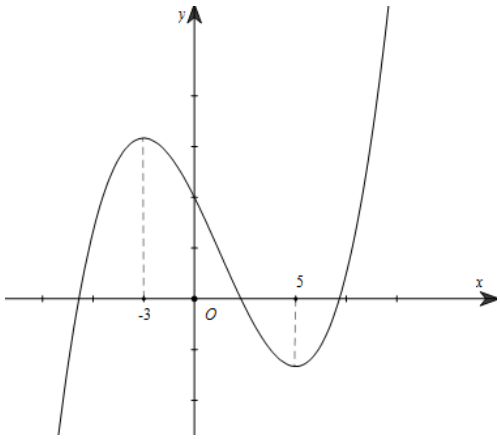
Đặt $g(x)=f\left(2x^3-6x\right)$. Ta có $g'(x)=\left(6x^2-6\right)f'\left(2x^3-6x\right)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6x^2-6=0 \\ f'\left(2x^3-6x\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \\ 2x^3-6x=-3 \\ 2x^3-6x=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \\ x\approx 1,38 \\ x\approx -1,94 \\ x\approx 0,56 \\ x\approx 2,05 \end{array}\right.$$

Các nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ đều là các nghiệm đơn phân biệt nên $g'(x)$ đổi dấu qua các nghiệm đó.

Vậy hàm số $y=f\left(2x^3-6x\right)$ có tất cả 6 điểm cực trị.

Câu 27: Cho đồ thị hàm số bậc ba $y=f(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y=f\left(2x^3-6x\right)$ có tất cả bao nhiêu cực trị?



A. 5. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

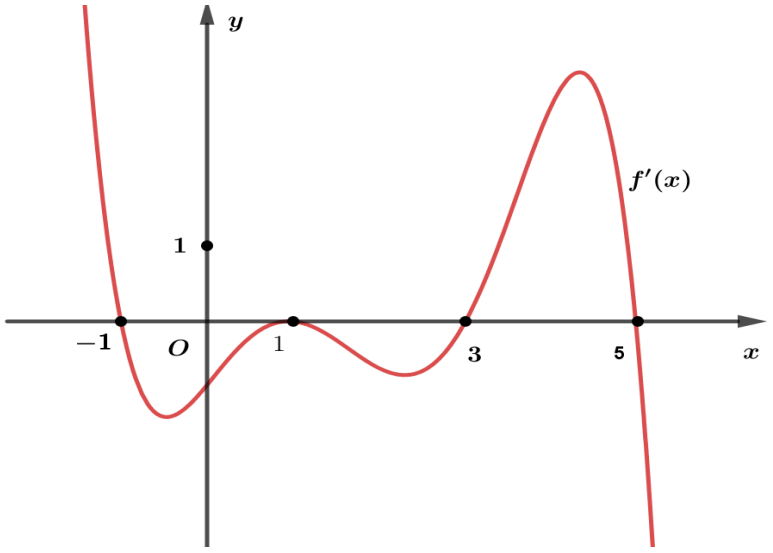
Chọn C

Hàm số $y=f\left(2x^3-6x\right)$ có $y'=\left(6x^2-6\right)f'\left(2x^3-6x\right)$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}6x^2-6=0\\2x^3-6x=-3\\2x^3-6x=5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\x\approx-1,942\\x\approx1,384\\x\approx0,558\\x\approx2,054\end{array}\right.$$

Ta thấy $y'=0$ có 6 nghiệm đơn nên hàm số đã cho có 6 cực trị.

Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi hàm số $y=f\left(6-2\sqrt{6x-x^2}\right)$ có tất cả bao nhiêu cực đại?



A. 1. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t(x)=6-2\sqrt{6x-x^2}$, $x\in[0;6]$

Ta có: $\forall x\in(0;6)$, $t'(x)=\dfrac{2x-6}{\sqrt{6x-x^2}}\Rightarrow t'(x)=0\Leftrightarrow x=3\Rightarrow \mathrm{t}_{CT}=t(3)=0$

Từ đồ thị có BBT cho $y=f(t)$:

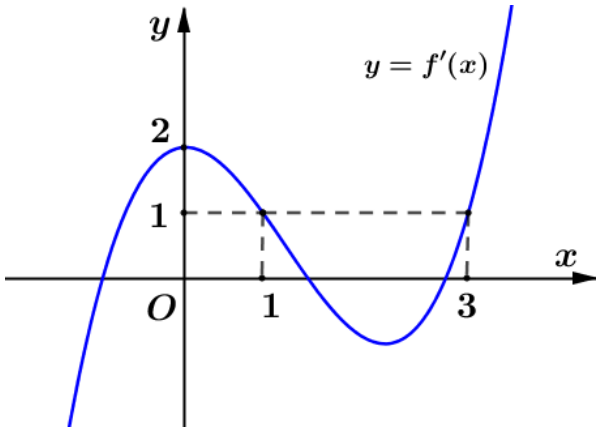
t	$-\infty$		-1		0		3		5		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$			0	$+$	0	$-$	
$y=f(t)$		↗	a	↘			c	↗	d	↘	

BBT ghép cho hàm $y=g(x)=f\left(6-2\sqrt{6x-x^2}\right)=f(t)$

x	0			3			6
t	6	5	3	0	3	5	6
$y=f(t)$		d	c	b	c	d	

Từ BBT ta có hàm số $y=f\ 6-2\sqrt{6x-x^2}$ có 3 cực đại.

Câu 29: Cho hàm số $y=f(x)$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực trị của hàm số $y=2021^{f(x)}+2020^{f(x)}$ là

A. 2 **B.** 5 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y'=f'(x)\left(2021^{f(x)}\ln 2021+2020^{f(x)}\ln 2020\right)$

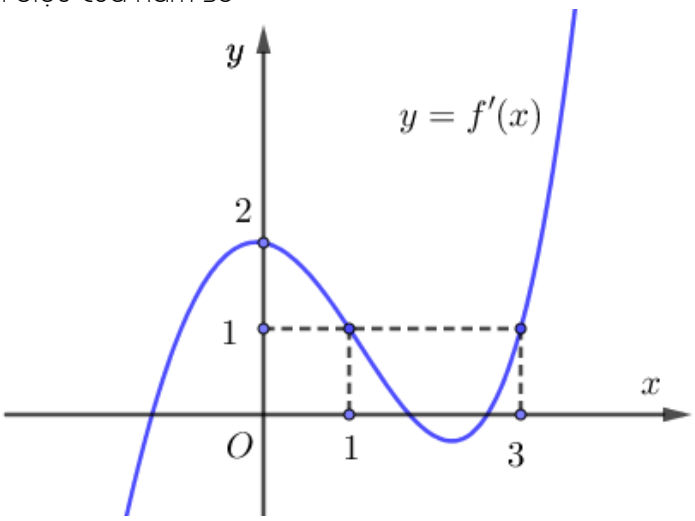
Do $2021^{f(x)}\ln 2021+2020^{f(x)}\ln 2020>0,\forall x$ nên $y'=0\Leftrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\in(-\infty;0)\\x=x_2\in(1;3)\\x=x_3\in(1;3),x_1<x_2\end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $y=2021^{f(x)}+2020^{f(x)}$

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$									

Dựa vào bảng biến thiên hàm số $y=2021^{f(x)}+2020^{f(x)}$ có 3 điểm cực trị.

Câu 30: Cho hàm số $y=f(x)$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $y=2021^{f(x)}+2020^{f(x)}$ là



A. 2. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

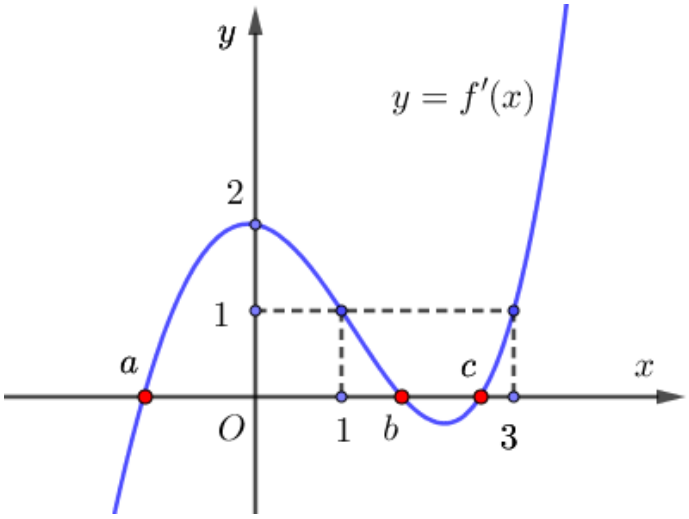
Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = f'(x).2021^{f(x)}.\ln 2021 + f'(x).2020^{f(x)}.\ln 2020.$

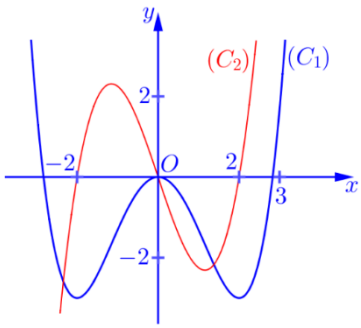
$= f'(x).\left[2021^{f(x)}.\ln 2021 + 2020^{f(x)}.\ln 2020\right].$

Do $2021^{f(x)}.\ln 2021 + 2020^{f(x)}.\ln 2020 > 0, \forall x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = a \\ x_2 = b. \\ x_3 = c \end{array}\right.$



Vậy hàm số $y = 2021^{f(x)} + 2020^{f(x)}$ có ba điểm cực trị.

Câu 31: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị (C_1) và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị (C_2) như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x) = f\left[e^{-x}.f(x)\right]$ trên khoảng $(-\infty;3)$ là

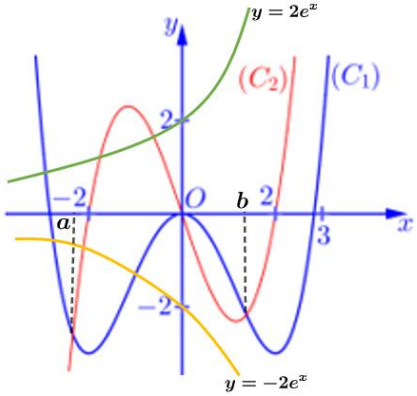


A. 9. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=\mathrm{e}^{-x}.\left[f'(x)-f(x)\right].f'\left(\mathrm{e}^{-x}-f(x)\right)$.



Xét $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)-f(x)=0\\ f\left(\mathrm{e}^{-x}.f(x)\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=f(x)\\ f\left(\mathrm{e}^{-x}.f(x)\right)=0\end{array}\right.$.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\\ x=0\\ x=b\\ \mathrm{e}^{-x}.f(x)=-2\\ \mathrm{e}^{-x}.f(x)=0\\ \mathrm{e}^{-x}.f(x)=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\\ x=0\\ x=b\\ f(x)=2\mathrm{e}^{-x}\\ f(x)=0\\ f(x)=2\mathrm{e}^{x}\end{array}\right.$$

Từ đồ thị ta suy ra được:

Phương trình $f(x)=-2\mathrm{e}^{x}$ có nghiệm đơn.

Phương trình $f(x)=0$ có 2 nghiệm đơn và 1 nghiệm bội chẵn $(x=0)$.

Phương tridnh $f(x)=2\mathrm{e}^{x}$ có 1 nghiệm đơn.

Vậy $g'(x)=0$ có 8 nghiệm đơn nên hàm số $g(x)$ có 8 điểm cực trị.

Câu 32: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\left(x^2+x-2\right)(x-3)^3\left(2^x-8\right)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

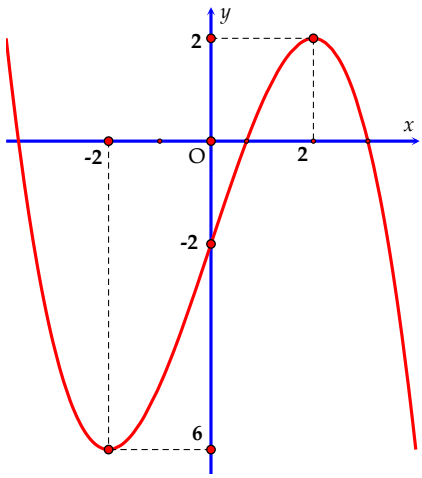
Chọn B

Ta có bảng xét dấu cho $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$(x-3)^3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
2^x-8		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu trên ta thấy rằng $y=f(x)$ có 2 điểm cực trị.

Câu 33: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ với $a\neq 0$ có đồ thị hàm số như hình bên. Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=f(2-x)+3$ là



A. $(0;5)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(5;-6)$. **D.** $(5;3)$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị hàm số đã cho ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.$ và $f'(x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-2\\x>2\end{array}\right.$.

Ta có $y'=-f'(2-x)$. Cho $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-x=-2\\2-x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=4\end{array}\right.$.

Giả sử $y'>0\Leftrightarrow -f'(2-x)>0\Leftrightarrow f'(2-x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-x<2\\2-x>2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>4\\x<0\end{array}\right.$.

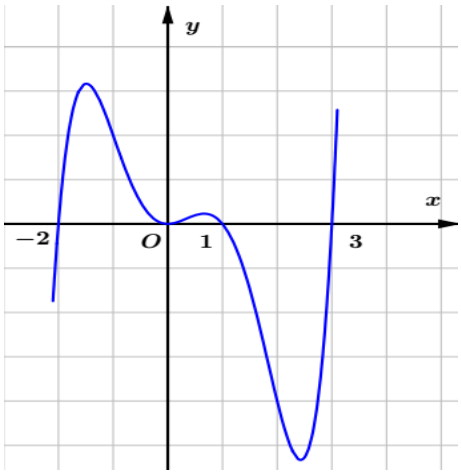
Do đó ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$y(0)$	↘	$y(4)$	↗	$+\infty$

Vậy hàm số $y=f(2-x)+3$ đặt cực tại tại $x=0$ khi $y(0)=f(2)+3=2+3=5$.

Vậy tọa độ điểm cực đại là $(0;5)$.

Câu 34: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau.



Hàm số $g(x)=f(x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Có $g'(x)=\left[f(x^2)\right]'=2xf'(x^2)$

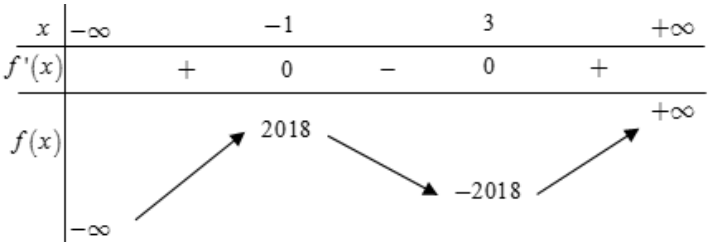
$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'(x^2)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x^2)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		

Từ bảng xét dấu của $g'(x)$ suy ra hàm số có 5 điểm cực trị.

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



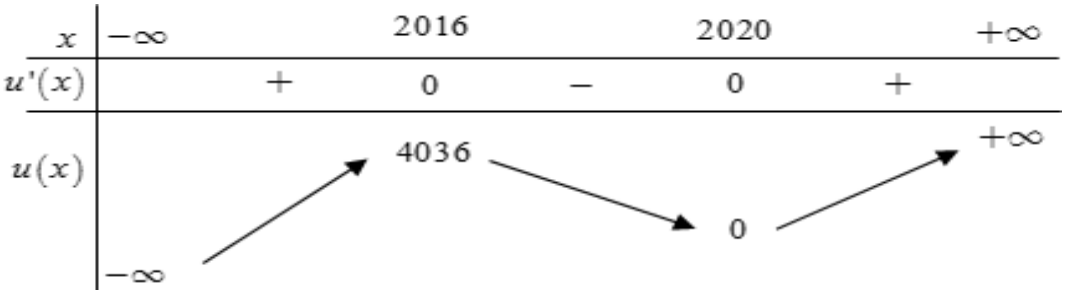
Xét hàm số $g(x)=\left|f(x-2017)+2018\right|$ có bao nhiêu cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

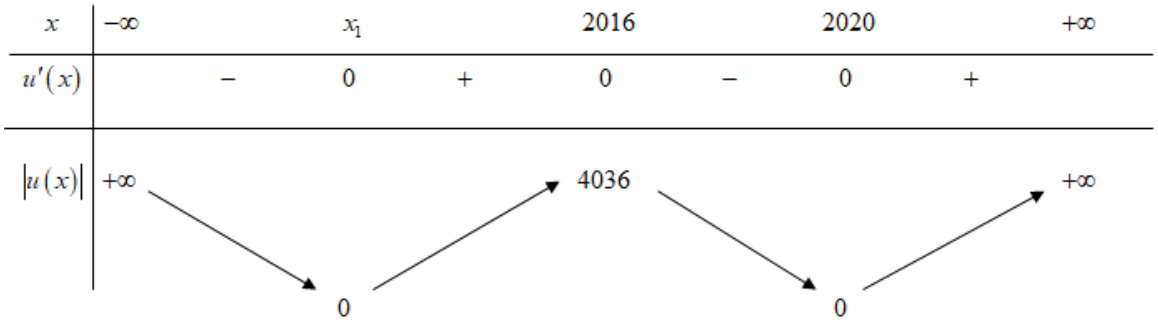
Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số $u(x)=f(x-2017)+2018$ có được từ đồ thị $f(x)$ bằng cách tịnh tiến đồ thị $f(x)$ sang phải 2017 đơn vị và lên trên 2018 đơn vị. Suy ra bảng biến thiên của $u(x)$.

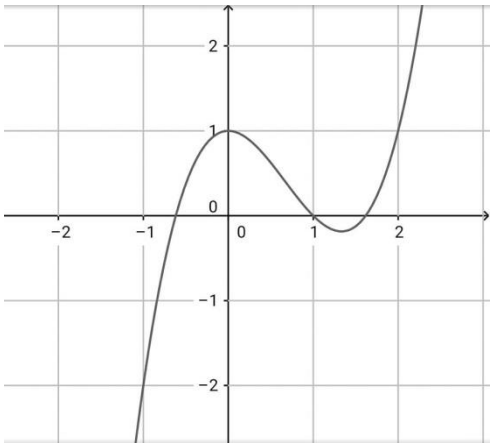


Dựa vào bảng biến thiên suy ra đồ thị hàm số $u(x)=f(x-2017)+2018$ ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)=|u(x)|$ như hình vẽ bên dưới



Từ BBT của hàm số $g(x)=|u(x)|$ ta thấy hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 36: Cho hàm số $f(x)$ với đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x)-\frac{x^3}{3}+x^2-x+2$ đạt cực đại tại điểm nào?



A. $x=2$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=1$. **D.** $x=0$.

Lời giải

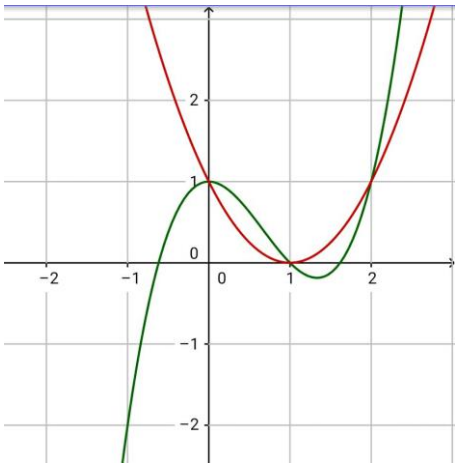
Chọn C

Ta có $g'(x)=f'(x)-(x-1)^2$

Do đó $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=(x-1)^2$

Đây là phương trình hoành độ giao điểm của các đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và $y=x^2-2x+1$.

Vẽ đồ thị của các hàm số $y=f'(x); y=x^2-2x+1$ trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ sau:



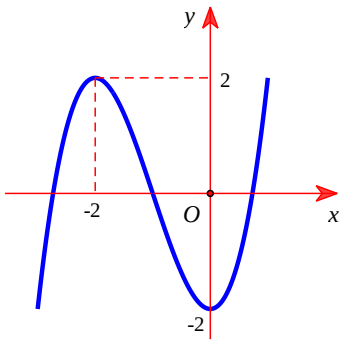
Suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

BBT của hàm số $y=g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào BBT ta thấy hàm số $y=g(x)$ có điểm cực đại $x=1$.

Câu 37: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(-2x^2+4x\right)$ là



A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=(-4x+4).f'\left(-2x^2+4x\right)$

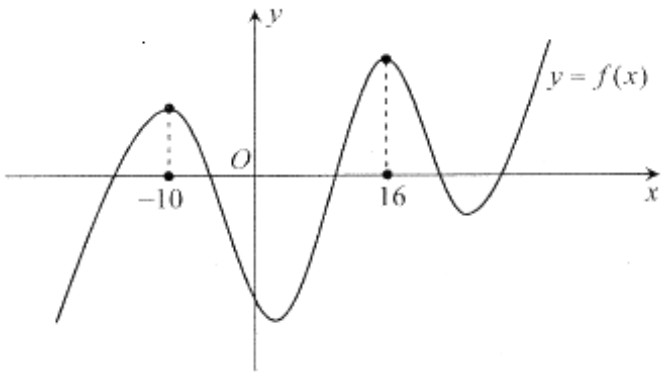
$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4x+4=0 \\ f'\left(-2x^2+4x\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ f'\left(-2x^2+4x\right)=0 \end{array}\right.$$

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \end{array}\right.$

Suy ra $f'\left(-2x^2+4x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2x^2+4x=-2 \\ -2x^2+4x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\pm\sqrt{2} \\ x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Phương trình $g'(x)=0$ có 5 nghiệm bội lẻ nên hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị

Câu 38: Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}$ và có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi hàm số $y=f\left(x^3-12x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 11. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

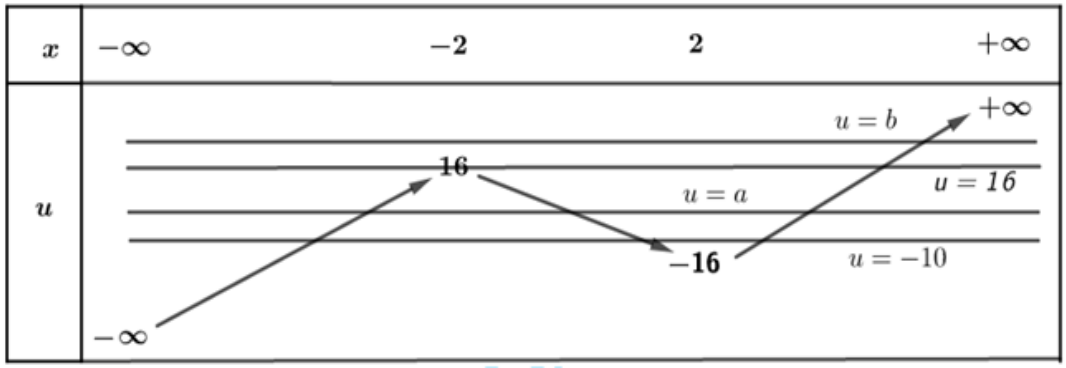
Hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại các điểm $x=-10;\ x=a\in(0;16);\ x=16;\ x=b>16$

Xét hàm số $g(x)=f(u)=f\left(x^3-12x\right)$ với $u=x^3-12x$

Công thức đếm nhanh SĐCT của một hàm hợp:

$$\text{SĐCT}\left\{f(u)\right\}=\text{SĐCT}\left\{u\right\}+\text{SNBL}\left\{\left[\begin{array}{l} u=b \\ u=16 \\ u=a \\ u=-10 \end{array}\right.\right\}$$

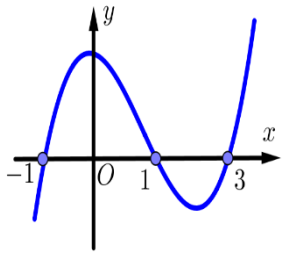
Ta có bảng biến thiên của $u=x^3-12x$



Suy ra: $\text{SĐCT}\{u\}=2$ và có: $\text{SNBL}\left\{\left[\begin{array}{l}u=b\\u=16\\u=a\\u=-10\end{array}\right.\right\}=8$

Suy ra: $\text{SĐCT}\{f(u)\}=\text{SĐCT}\{u\}+\text{SNBL}\left\{\left[\begin{array}{l}u=b\\u=16\\u=a\\u=-10\end{array}\right.\right\}=2+8=10$.

Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(xe^x\right)$ bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=\left(f\left(xe^x\right)\right)'=\left(xe^x\right)'.f'\left(xe^x\right)=e^x.(x+1).f'\left(xe^x\right)$.

Cho $y'=0\Leftrightarrow e^x.(x+1).f'\left(xe^x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=0\\xe^x=-1(VN)\\xe^x=1\\xe^x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=0,567...\\x=1,049...\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$0,567...$		$1,049...$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗	

Vậy hàm số $y=f\left(xe^x\right)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 40: Cho hàm số bậc bốn trùng phương $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	1	↘	-1	↗	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y=\dfrac{1}{x^4}\left[f(x)-1\right]^4$.

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=\frac{1}{x^4}\left[f\left(x\right)-1\right]^4=\left[\frac{f\left(x\right)-1}{x}\right]^4$.

Đặt $f\left(x\right)=ax^4+bx^2+c$.

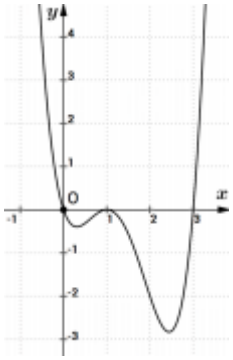
Dựa vào bảng biến thiên, ta có hệ $\begin{cases}c=1\\a+b+c=-1\\4a+2b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-4\\c=1\end{cases}\Rightarrow f\left(x\right)=2x^4-4x^2+1.$

Khi đó $y=\left[\frac{f\left(x\right)-1}{x}\right]^4=\left(\frac{2x^4-4x^2}{x}\right)^4=\left(2x^3-4x\right)^4$.

Suy ra $y'=8\left(3x^2-2\right).\left(2x^3-4x\right)^3\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}\\x=0\\x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Các nghiệm trên đều là các nghiệm bội lẻ nên hàm số đã cho có 5 điểm cực trị.

Câu 41: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ dưới đây:



Hỏi hàm số $y=f\left(x^2\right)$ có bao nhiêu điểm cực đại và bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 2 điểm cực đại, 1 điểm cực tiểu. **B.** 2 điểm cực tiểu, 1 điểm cực đại.
C. 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu. **D.** 2 điểm cực tiểu, 3 điểm cực đại.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$, ta thấy:

$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=3\end{array}\right.$.

$f'\left(x\right)>0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;0\right)\cup\left(3;+\infty\right)$

$f'\left(x\right)<0\Leftrightarrow x\in\left(0;1\right)\cup\left(1;3\right)$.

Ta có $y'=\left(f\left(x^2\right)\right)'=2x.f'\left(x^2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'\left(x^2\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$.

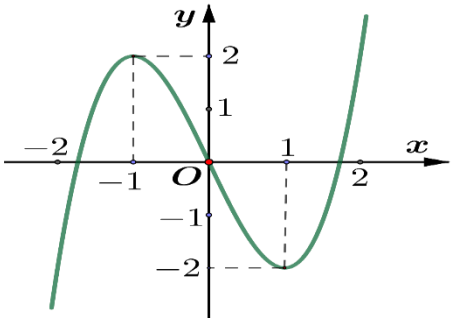
$f'\left(x^2\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2<0\\x^2>3\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x^2)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$2xf'(x^2)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x^2)$	↘		↗		↘		↗

Vậy hàm số $y=f\left(x^2\right)$ có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại.

Câu 42: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm số bậc ba, có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2-1\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Đạo hàm $g'\left(x\right)=2xf'\left(x^2-1\right)$

$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'\left(x^2-1\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-1=-1\\x^2-1=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$.

x	-∞		-√2		0		√2		+∞
g'(x)		-	0	+	0	-	0	+	

Ta có bảng xét dấu :

Từ BXD ta thấy hàm số $y=g\left(x\right)$ đạt cực tiểu tại 2 điểm $x=-\sqrt{2};x=\sqrt{2}$.

Câu 43: Cho hàm số $y=f\ x$ xác định trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $y=f'\ x\ =\ x^2-4x-5\ \ x^2-1$. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f\ x^3-3x^2$ là

A. 2. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

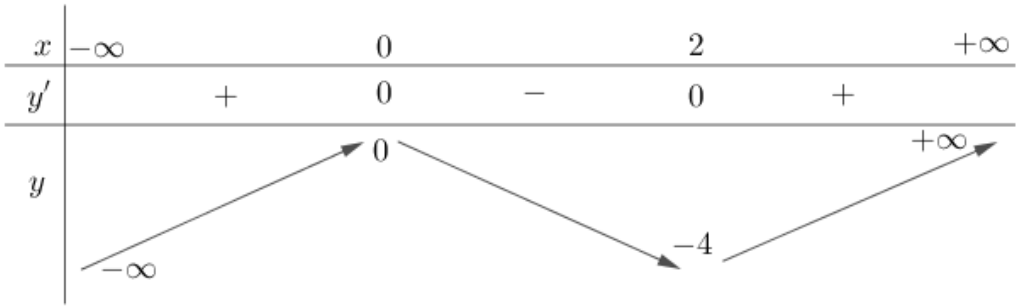
Chọn D

Giải phương trình $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=5\end{array}\right.$, trong đó $x=-1$ là nghiệm bội chẵn.

Xét hàm số $y=f\left(x^3-3x^2\right)\Rightarrow y'=\left(3x^2-6x\right)f'\left(x^3-3x^2\right)$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2-6x=0\\f'\left(x^3-3x^2\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=0\\x=2\\x^3-3x^2=-1 & 1.\\x^3-3x^2=1 & 2.\\x^3-3x^2=5 & 3.\end{array}\right.$$

Xét hàm số $y=x^3-3x^2$, ta có bảng biến thiên sau:



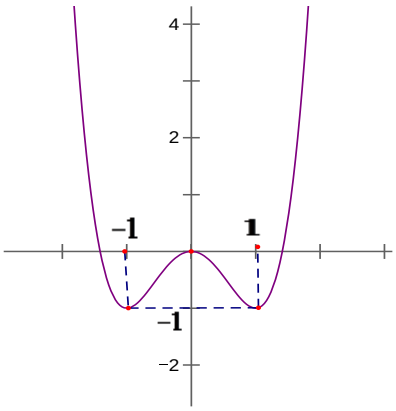
Từ bảng biến thiên của hàm số $y=x^3-3x^2$ suy ra phương trình $2;3$ có nghiệm duy nhất.

Và vì $x=-1$ là nghiệm kép của phương trình $f'\left(x\right)=0$ nên các nghiệm ở phương trình 1 đều là nghiệm bội chẵn.

Suy ra đồ thị hàm số $y=f\left(x^3-3x^2\right)$ có 4 điểm cực trị.

Câu 44: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới

Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^3+f\left(x\right)\right)$ là



A. 11. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x)=\left[3x^2+f'(x)\right]f'(x^3+f(x))$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[3x^2+f'(x)\right]f'(x^3+f(x))=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2+f'(x)=0 \quad (1)\\ f'(x^3+f(x))=0\ (2)\end{array}\right.$$

+) Xét phương trình (1)

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ 4ax^2+3x+2b=0\ (3)\end{array}\right.$$

Vì hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực trị nên $ab<0\Rightarrow\Delta_{(3)}=9-32ab>0\Rightarrow(3)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

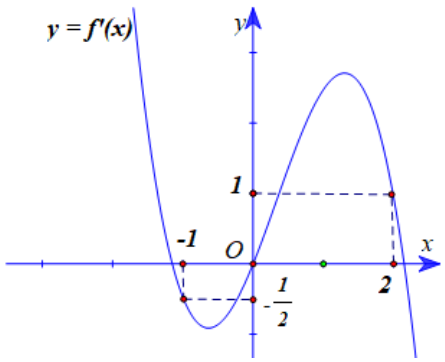
+) Xét phương trình (2): $f'(x^3+f(x))=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3+f(x)=-1\ (2a)\\ x^3+f(x)=0\quad (2b)\\ x^3+f(x)=1\quad (2c)\end{array}\right.$

Xét hàm số $h(x)=x^3+f(x)$; hàm số $h(x)$ có 3 điểm cực trị và hàm số đạt cực đại tại $x=0$ với $h(0)=0+f(0)=0$, do đó:

Phương trình $(2a)$ có 2 nghiệm, $(2b)$ có 2 nghiệm khác 0 và 1 nghiệm kép x = 0, $(2c)$ có 2 nghiệm.)

Vậy hàm số $y=g(x)$ có 9 điểm cực trị.

Câu 45: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ $(ae<0)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Hàm số $y=\left|4f(x)-x^2\right|$ có bao nhiêu điểm cực tiểu

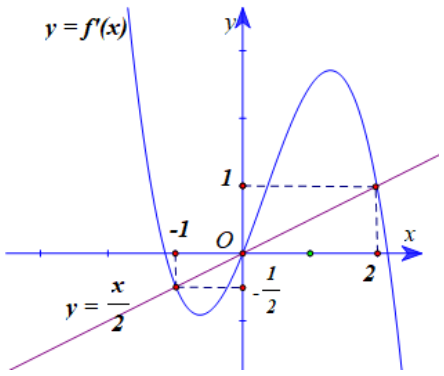


A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x)=4f(x)-x^2$. Ta có $g'(x)=4f'(x)-2x=2\left(2f'(x)-x\right)$.



Ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=\frac{x}{2}$. Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=\frac{x}{2}$ suy ra $f'(x)=\frac{x}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Theo hình vẽ ta có $a<0$, mà $ae<0 \Rightarrow e>0$ suy ra $g(0)=4f(0)=4e>0$.

Bảng biến thiên của $y=|g(x)|$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	–	0	+	0	–	
$g(x)$	$-\infty$	↗	g(-1)	↘	g(0)	↗	g(2)	↘	$-\infty$
$\lvert g(x)\rvert$	$+\infty$	↘	0	↗	g(0)	↘	0	↗	$+\infty$

Dựa vào đồ thị $y=|g(x)|$ suy ra hàm số $y=\left|4f(x)-x^2\right|$ có 3 điểm cực tiểu.

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{3}{2}$	↘	0	↘	-1	↘	$-\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

Hỏi hàm số $g(x)=f\left(x^4\right)-4x$ có mấy điểm cực tiểu?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

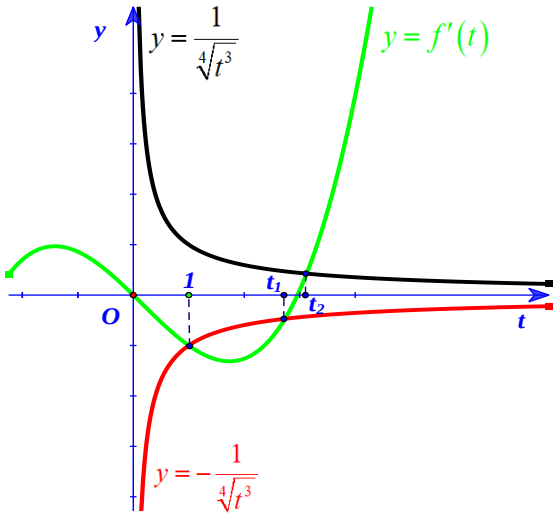
Ta có $g'(x)=4x^3f'\left(x^4\right)-4 \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow x^3f'\left(x^4\right)=1\ (*)$.

Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình $(*)$ nên chia 2 vế cho x^3, ta được $f'\left(x^4\right)=\dfrac{1}{x^3}$

Đặt $t=x^4;(t>0)\Rightarrow x^3=\begin{cases}\sqrt[4]{t^3},x>0\\-\sqrt[4]{t^3},x<0\end{cases}$. Khi đó ta có $\left[\begin{array}{l}f'(t)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{t^3}},\ (\text{khi } x>0)\\ f'(t)=-\dfrac{1}{\sqrt[4]{t^3}},\ (\text{khi } x<0)\end{array}\right.$ $(*)$.

Số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ tương ứng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và hai đồ thị hàm số $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt[4]{t^3}}$ khi $t>0$.

Dựa vào bảng biến thiên của $f'(x)$, ta vẽ mô phỏng đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và vẽ đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{t^3}}$, $y=-\dfrac{1}{\sqrt[4]{t^3}}$ khi $t>0$ như sau:



Khi đó $(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=t_1,t_1>1\\ t=t_2,t_2>t_1>1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x^4=1,\ x<0\\ x^4=t_1,\ x<0\\ x^4=t_2,\ x>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=-\sqrt[4]{t_1}\\ x=\sqrt[4]{t_2}\end{array}\right.$.

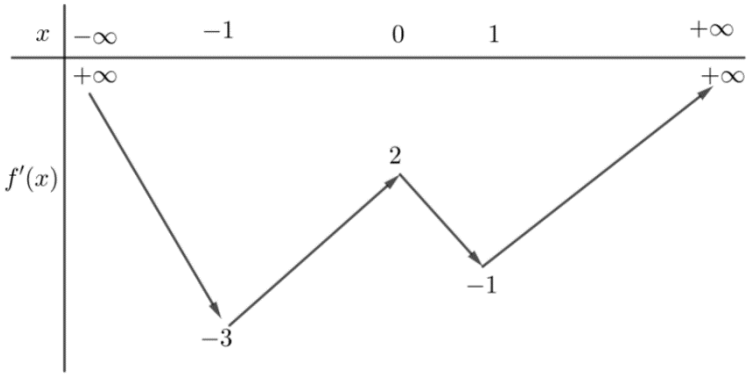
Dễ thấy $x>\sqrt[4]{t_2}$ thì $g'(x)=f'\left(x^4\right)-\dfrac{1}{x^3}>0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt[4]{t_1}$		-1		$\sqrt[4]{t_2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số đã cho có 2 điểm cực tiểu.

Câu 47: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau



Hỏi hàm số $g(x)=f\left(\left|\dfrac{\ln(x^2+1)-2}{2}\right|\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 9 **B.** 4 **C.** 7 **D.** 5

Lời giải

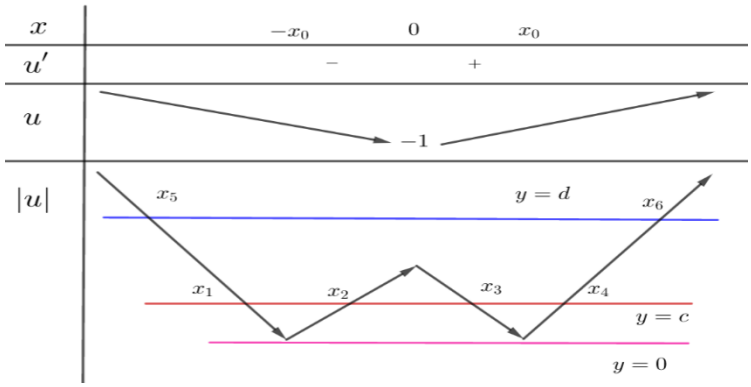
Chọn D

Đặt $u=\dfrac{\ln(x^2+1)-2}{2}\Rightarrow u'=\dfrac{x}{x^2+1};u'=0\Leftrightarrow x=0$.

Dựa theo bảng biến thiên đề bài ta có

$$f'(|u|)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}|u|=a\in(-\infty;-1)\\|u|=b\in(-1;0)\\|u|=c\in(0;1)\\|u|=d>1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}|u|=c\in(0;1) & (1)\\|u|=d>1 & (2)\end{bmatrix}$$

Với $|x_0|=\sqrt{e^2-1}$ thì $|u|$ có 3 cực trị, trong đó 1 cực đại, 2 cực tiểu. Bảng biến thiên mới theo biến u là

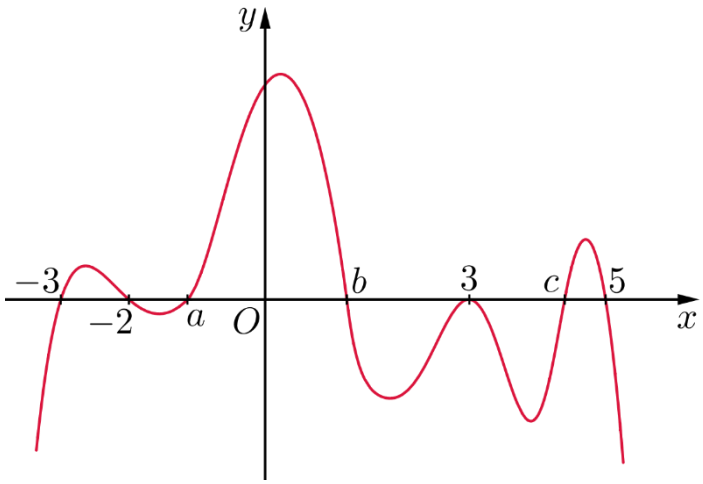


Hai phương trình lần lượt có 4 và 2 nghiệm như sau

Giải $|u|=c\in(0;1)\Rightarrow\begin{bmatrix}x_1<-x_0\\x_2\in(-x_0;0)\\x_3\in(0;x_0)\\x_4\in(0;+\infty)\end{bmatrix}$ và giải $|u|=d>1\Rightarrow\begin{bmatrix}x_5<x_1\\x_6>x_4\end{bmatrix}$

Chú ý c là điểm cực đại và d là điểm cực tiểu nên từ thu được 2 cực tiểu, từ thu được 1 cực tiểu. Kết luận tổng cộng 5 điểm cực tiểu.

Câu 48: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ -3; -2; a; b; 3; c; 5 với $-\frac{4}{3}<a<-1$; $1<b<\frac{4}{3}$; $4<c<5$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để hàm số $y=f\left(2|x|+m-3\right)$ có 7 điểm cực trị?



A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $h(x)=f\left(2x+m-3\right)$

Ta có: $h'(x)=2f'\left(2x+m-3\right)=0 \Leftrightarrow f'\left(2x+m-3\right)=0$

Từ đồ thị của hàm số $f'(x)$ suy ra $f'\left(2x+m-3\right)=0 \Leftrightarrow 2x+m-3=k \Leftrightarrow x=\frac{k+3-m}{2}$ với $k\in\{-3;-2;a;b;3;c;5\}$ $(-\frac{4}{3}<a<-1;\ 1<b<\frac{4}{3};\ 4<c<5)$

Hàm số $y=f\left(2|x|+m-3\right)$ có 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ hàm số $h(x)=f\left(2x+m-3\right)$ có 3 cực trị có hoành độ dương, mà 3 là nghiệm bội chẵn của $f'(x)$ nên hàm số $h(x)=f\left(2x+m-3\right)$ có 3 cực trị có hoành độ dương $\Leftrightarrow$ phương trình $h'(x)=0$ có 3 nghiệm dương phân biệt khác $\frac{6-m}{2}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{a+3-m}{2}<0\\ \frac{b+3-m}{2}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+3-m<0\\ b+3-m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>a+3\\ m<b+3\end{cases}\Leftrightarrow a+3<m<b+3$$

Do $-\frac{4}{3}<a<-1$ và $1<b<\frac{4}{3}$ nên $-1+3\le m\le 1+3$ hay $2\le m\le 4$

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là 2; 3; 4.

Câu 49: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+2)(x-3)$. Điểm cực đại của hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x\right)$ là

A. $x=3$. **B.** $x=0$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x)=\left(2x-2\right)f'\left(x^2-2x\right)$;

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-2=0 \\ f'\left(x^2-2x\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ (x^2-2x)^2=0 \\ x^2-2x=-2 \quad (\text{v« nghiÖm}) \\ x^2-2x=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \ (\text{kÐp}) \\ x=2 \ (\text{kÐp}). \\ x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$$

Bảng xét dấu của $f(x)$:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↗		↘		↘		↗	

Vậy điểm cực đại của hàm số là $x=1$.

Câu 50: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	2	↘	-1	↗	$+\infty$

Hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)-2}{2}\right|\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Xét $t\left(x\right)=\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)-2}{2}$, ta có bảng giá trị của $\left|t\left(x\right)\right|$

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
$\left\|t(x)\right\|$	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

Ta có $g\left(x\right)=f\left(\left|\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)-2}{2}\right|\right)=f\left(\left|t\left(x\right)\right|\right)$

Hàm số không có đạo hàm tại hai điểm $x=\pm\sqrt{e^2-1}$.

Tại mọi điểm $x\neq\pm\sqrt{e^2-1}$, ta có:

$$g'(x)=f'\left(\left|t(x)\right|\right).\left(\left|t(x)\right|\right)'=\begin{cases}\dfrac{f'\left(\left|t(x)\right|\right).x}{x^2+1} & khi\ x\in\left(-\infty;-\sqrt{e^2-1}\right)\cup\left(\sqrt{e^2-1};+\infty\right)\\ -\dfrac{f'\left(\left|t(x)\right|\right).x}{x^2+1} & khi\ x\in\left(-\sqrt{e^2-1};\sqrt{e^2-1}\right)\end{cases}\quad (*)$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ \left|t(x)\right|=t_1 \quad (t_1<-1) \quad (1)\\ \left|t(x)\right|=t_2 \quad (-1<t_2<0) \quad (2)\\ \left|t(x)\right|=t_3 \quad (0<t_3<1) \quad (3)\\ \left|t(x)\right|=t_4 \quad (t_4>1) \quad (4)\end{cases}$$

Dựa vào bảng giá trị hàm $|t|$, suy ra:

+) Phương trình (1), (2) vô nghiệm.

+) Phương trình (3) có 4 nghiệm phân biệt khác 0.

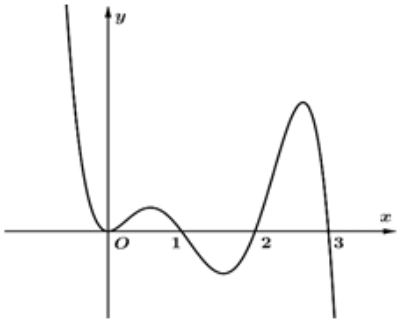
+) Phương trình (4) có 2 nghiệm phân biệt khác 0 và khác các nghiệm của phương trình (3).

$\Rightarrow g'(x)=0$ có 7 nghiệm và qua các nghiệm này $g'(x)$ đều đổi dấu.

Từ $(*)$, ta thấy $g'(x)$ cũng đổi dấu khi x đi qua 2 điểm $-\sqrt{e^2-1}$, $\sqrt{e^2-1}$.

Vậy hàm số $g(x)$ có 9 cực trị.

Câu 51: Cho hàm đa thức $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau



Có bao nhiêu giá trị của $m\in[0;6];2m\in\mathbb{Z}$ để hàm số $g(x)=f\left(x^2-2|x-1|-2x+m\right)$ có đúng 9 điểm cực trị?

A. 7. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

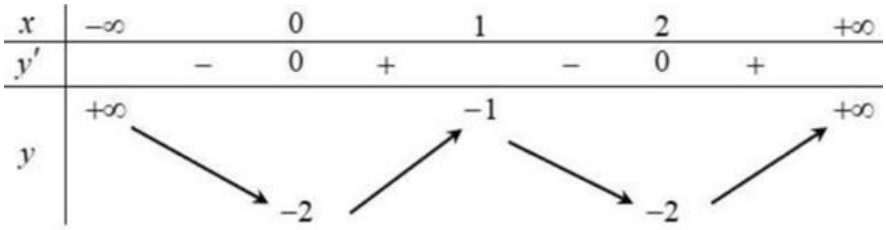
Ta có: $g'(x)=\dfrac{2(x-1)\left(|x-1|-1\right)}{|x-1|}f'\left(x^2-2|x-1|-2x+m\right)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ x=0\\ x=2\\ f'\left(x^2-2|x-1|-2x+m\right)=0\end{cases}$$

Dựa vào đồ thị hàm số

$$f'(x)\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\\x=3\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2|x-1|-2x+m=1\\x^2-2|x-1|-2x+m=2\\x^2-2|x-1|-2x+m=3\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2|x-1|-2x=1-m\\x^2-2|x-1|-2x=2-m\\x^2-2|x-1|-2x=3-m\end{array}\right.$$

Xét hàm số $h(x)=x^2-2|x-1|-2x$.Ta có



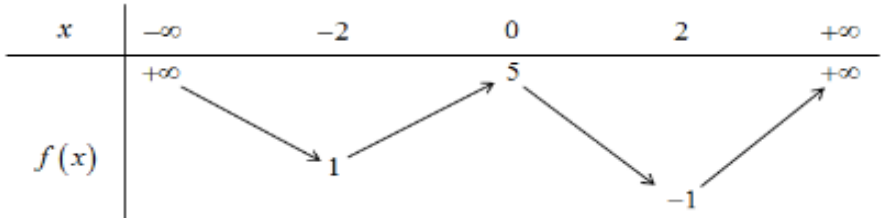
Để hàm số có 9 cực trị thì

TH1: $-2<2-m<-1\Leftrightarrow 3<m<4$

TH2: $1-m\geq -1\Leftrightarrow m\leq 2.$

Vậy có ba giá trị của m.

Câu 52: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có bảng biến thiên như sau:



Số điểm cực tiểu của hàm số $y=2021^{f(x)}-2020^{f(x)}$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

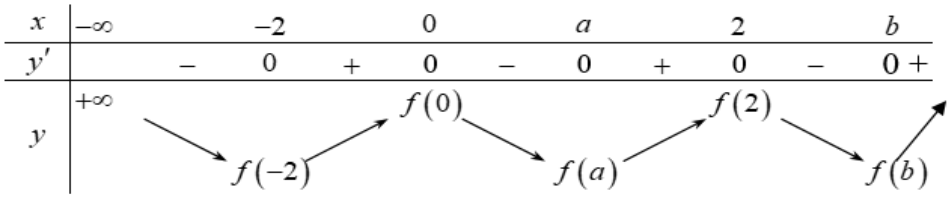
Chọn B

Xét hàm số $y=g(x)=2021^{f(x)}-2020^{f(x)}$

Ta có: $g'(x)=f'(x)\left(2021^{f(x)}\ln 2021-2020^{f(x)}\ln 2020\right).$

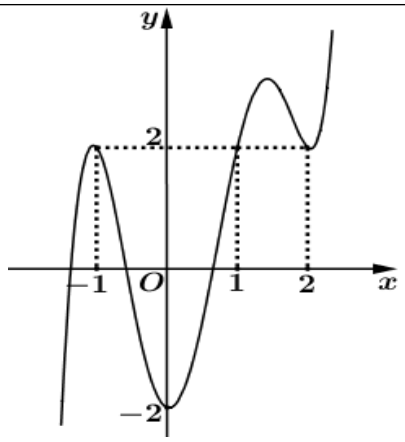
$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\Leftrightarrow x=0;x=\pm 2\\\log 2021^{f(x)}\ln 2021-2020^{f(x)}\ln 2020=0(*)\end{array}\right.$$

Ta có: $(*)\Leftrightarrow\left(\frac{2021}{2020}\right)^{f(x)}=\log_{2021}2020\Leftrightarrow f(x)=\log_{\frac{2021}{2020}}\left(\log_{2021}2020\right)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\in(0;2)\\x=b\in(2;+\infty)\end{array}\right.$



Vậy, từ bảng xét dấu ta thấy số điểm cực tiểu của hàm số $y=g(x)$ là 3.

Câu 53: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x-1)$ như hình vẽ



Khi đó hàm số $y=e^{f\left(x+2x\right)}$ đạt cực tiểu tại điểm x_0. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $x_0\in(-1;0)$. **B.** $x_0\in(-4;-2)$. **C.** $x_0\in(0;1)$. **D.** $x_0\in(-2;-1)$.

Lời giải

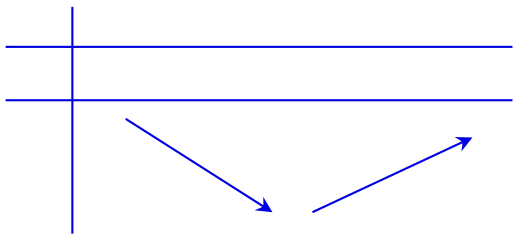
Chọn A

Ta có: $y'=e^{f\left(x+2x\right)}.\ f'\left(x+2\right)$

$y'\left(x\right)=0\Leftrightarrow f'\left(x+2\right)=0\Leftrightarrow f'\left(x\right)=-2$

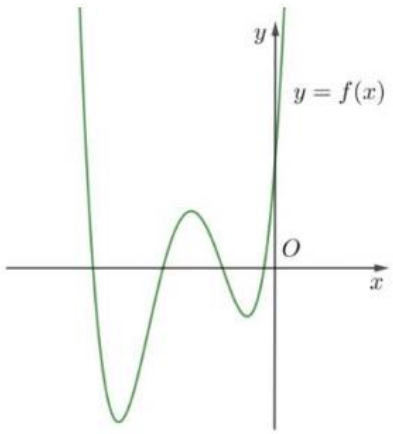
Đồ thị $y=f'\left(x-1\right)$ dời sang phải 1 đơn vị theo trục Ox ta được đồ thị $y=f'\left(x\right)$. Khi đó đường thẳng $y=2$ cắt đồ thị $y=f'\left(x\right)$ tại 2 điểm có hoành độ là 1 và a với $-1<a<0$ nên phương trình $y'\left(x\right)=0$ có 2 nghiệm là 1 và $-1<a<0$

Bảng biến thiên



Vậy hàm số đạt tiểu tại điểm $x_0=a\in\left(-1;0\right)$.

Câu 54: Cho hàm số $F\left(x\right)$ có $F\left(0\right)=0$. Biết $y=F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $G\left(x\right)=\left|F\left(x^6\right)-x^3\right|$ là

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

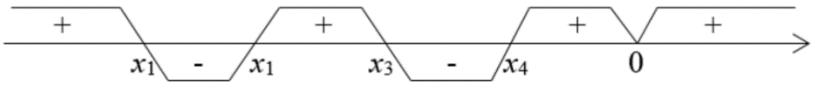
Chọn D

◆ Xét $g(x)=F\left(x^6\right)-x^3 \Rightarrow g'(x)=6x^5F'\left(x^6\right)-3x^2=3x^2\left[2x^3f\left(x^6\right)-1\right]$.

◆ Xét hàm số

$h(x)=2x^3f\left(x^6\right)-1 \Rightarrow h'(x)=6x^2f\left(x^6\right)+12x^8.f'\left(x^6\right)=3x^2\left[2f\left(x^6\right)+4x^6.f'\left(x^6\right)\right]$.

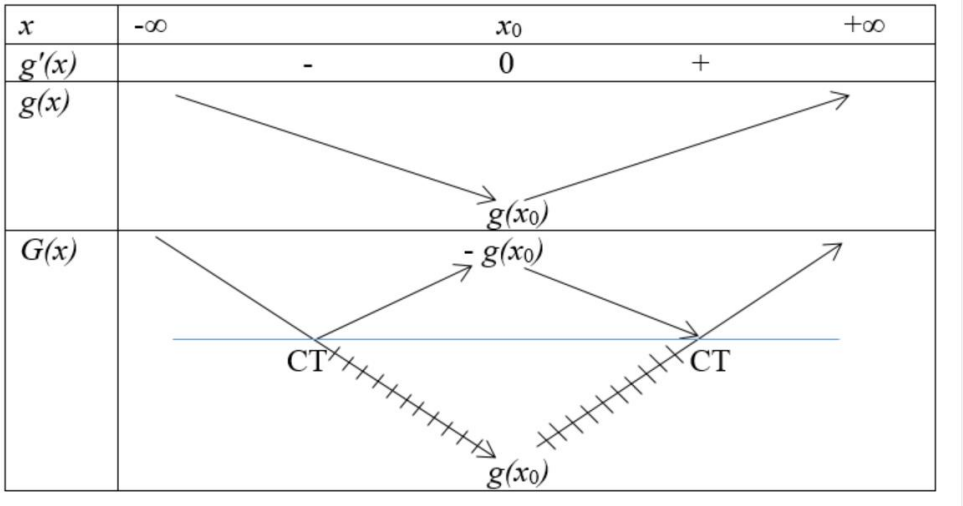
Từ đồ thị của $y=f(x)$ suy ra dấu của $f'(x)$



nên $\begin{cases} f\left(x^6\right)>0 \\ f'\left(x^6\right)>0 \end{cases} \Rightarrow h'(x)>0 \ \forall x$ nên hàm số $y=h(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và vì

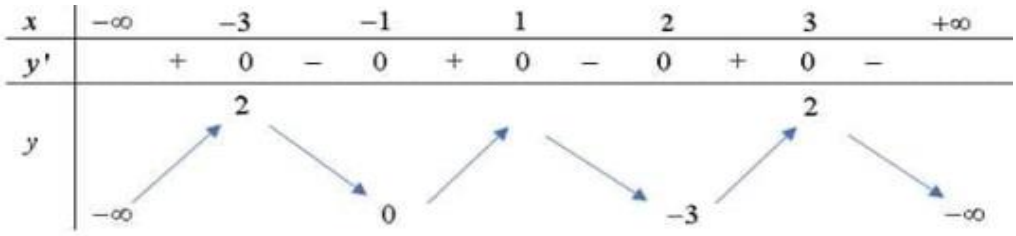
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x)=\pm\infty$ nên phương trình $h(x)=0$ có 1 nghiệm duy nhất x_0 và $y=h(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua x_0. Suy ra $g'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua x_0 nên x_0 là điểm cực tiểu.

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y=G(x)$ có 3 cực trị.

Câu 55: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau



Số điểm cực đại của hàm số $g(x)=\left|f\left(\left|x^2-8x+7\right|+x^2-3\right)\right|$ là

A. 6. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

◆ Đặt $u(x)=\left|x^2-8x+7\right|+x^2-3$, ta có $u(x)=\begin{cases}2x^2-8x+4 & khi\ x\le 1\vee x\ge 7\\ 8x-10 & khi\ 1<x<7\end{cases}$.

$\Rightarrow u'(x)=\begin{cases}4x-8 & khi\ \ x<1\vee x>7\\ 8 & khi\ \ 1<x<7\end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		7		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$		$+$	
$u(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

◆ Đặt $h(x)=f\left(u(x)\right)$, ta có $h'(x)=u'(x).f'\left(u(x)\right)$.

Ta có: $u'(x)$ chỉ đổi dấu qua $x=1$.

$$f'\left(u(x)\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u(x)=3\\ u(x)=2\\ u(x)=1\\ u(x)=-1\\ u(x)=-3\end{array}\right.$$

Từ bảng biến thiên của $u(x)$ ta có

$u(x)=3$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_8.

$u(x)=2$ có hai nghiệm phân biệt x_2,x_7

$u(x)=1$ có hai nghiệm phân biệt x_3,x_6

$u(x)=-1$ có hai nghiệm x_4,x_5

$u(x)=-3$ vô nghiệm

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		x_4		1		x_5		x_6		x_7		x_8		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\searrow$	-3	$\nearrow$	a	$\searrow$	0	$\nearrow$	a	$\searrow$	0	$\nearrow$	a	$\searrow$	-3	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng, dễ dàng suy ra hàm số $g(x)=\left|f\left(\left|x^2-8x+7\right|+x^2-3\right)\right|=\left|h(x)\right|$ có 7 điểm cực đại.

Câu 56: Cho hàm số $f(x)$ là hàm số bậc bốn thoả mãn $f(0)=0$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\frac{61}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $g(x)=\left|f\left(x^3\right)-3x\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Bảng biến thiên hàm số $f(x)$

x	$-\infty$	-3	-1	x_0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$		0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	↘		↗	$+\infty$

Đặt $h(x)=f\left(x^3\right)-3x \Rightarrow h'(x)=3x^2 f'\left(x^3\right)-3=0 \Leftrightarrow f'\left(x^3\right)=\dfrac{1}{x^2}$

Đặt $t=x^3 \Rightarrow x=\sqrt[3]{t}$ thế vào phương trình trên ta được $f'(t)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{t^2}}\ (1)$

Xét hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{t^2}} \Rightarrow y'=-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{t^5}}$, $\lim\limits_{t\to\pm\infty} y=0$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{t^2}}$

t	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$		$-$	
y	0	↗	$+\infty$	↘	0

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình (1) có một nghiệm $t=a>0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{a}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$		0		$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	0	↘	$f(a)-3\sqrt[3]{a}$	↗	$+\infty$
$g(x)=\lvert h(x)\rvert$	$+\infty$	↘	0	↗	$3\sqrt[3]{a}-f(a)$	↘	0 ↗ $+\infty$

Vậy hàm số $g(x)$ có 3 cực trị.

Câu 57: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=(x-2)^2\left(x^2-x\right), x\in\mathbb{R}$. Gói S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f\left(\dfrac{1}{2}x^2-6x+m\right)$ có 5 điểm cực trị. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 154. **B.** 17. **C.** 213. **D.** 153.

Lời giải

Chọn D

Ta có. Với $x=2$ là nghiệm kép, $x=0, x=1$ là nghiệm đơn. Dó đó hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị là $x=0, x=1$.

Đặt $g(x)=f\left(\frac{1}{2}x^2-6x+m\right)\Rightarrow g'(x)=(x-6)f'\left(\frac{1}{2}x^2-6x+m\right)$.

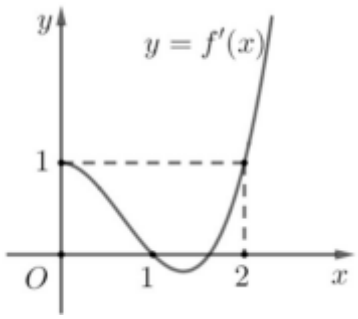
Khi đó $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=6\\ \frac{1}{2}x^2-6x+m=2\\ \frac{1}{2}x^2-6x+m=0(1)\\ \frac{1}{2}x^2-6x+m=1(2)\end{array}\right.$.

Để hàm số có 5 điểm cực trị thì $(1)\&(2)$ có hai nghiệm phân biệt không trùng nhau và khác 6

Suy ra $\begin{cases}\Delta_1>0\\ \Delta_2>0\\ \frac{1}{2}\cdot 6^2-6.6+m\neq 0\\ \frac{1}{2}\cdot 6^2-6.6+m\neq 1\end{cases}\begin{cases}9-\frac{m}{2}>0\\ 9-\left(\frac{m-1}{2}\right)>0\Leftrightarrow m<18\Rightarrow m\in\{1,2,\ldots,17\}.\\ m\neq 18, m\neq 19\end{cases}$

Vậy Tổng các giá trị của m là $1+2+\ldots+17=153$.

Câu 58: Cho hàm số đa thức $f(x)$ có đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng $(0;+\infty)$ như hình vẽ bên

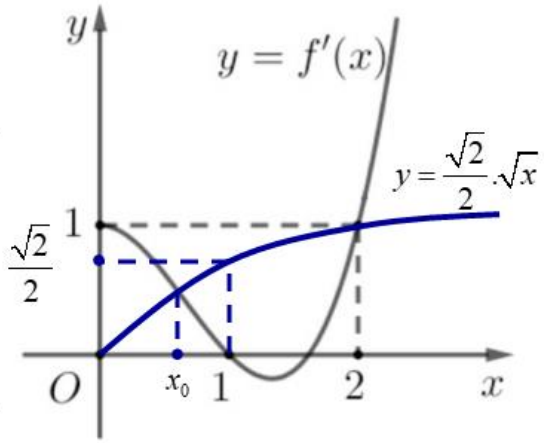


Biết rằng $f(0)=-1; f(1)=1$. Trên khoảng $(0;+\infty)$ hàm số $g(x)=\left|3f(x)-\sqrt{2x^3}+1\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị.

A. 7. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D



Xét hàm số $y=h(x)=3f(x)-\sqrt{2x^3}+1$ ta có: $h'(x)=3f'(x)-\dfrac{6x^2}{2\sqrt{2x^3}}=3\left(f'(x)-\sqrt{\dfrac{x}{2}}\right)$

$h'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=\sqrt{\dfrac{x}{2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_0\in(0;1)\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	0		x_0		1		2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
$h(x)$	-2	↗	$h(x_0)$	↘	$h(1)$	↗	$h(2)$	↗	$+\infty$

Ta thấy hàm số $y=h(x)$ có 2 điểm cực trị.

Ta có $f(0)=-1\Rightarrow h(0)=-2$; $f(1)=1\Rightarrow h(1)=4-\sqrt{2}>0\Rightarrow h(x_0)>0$.

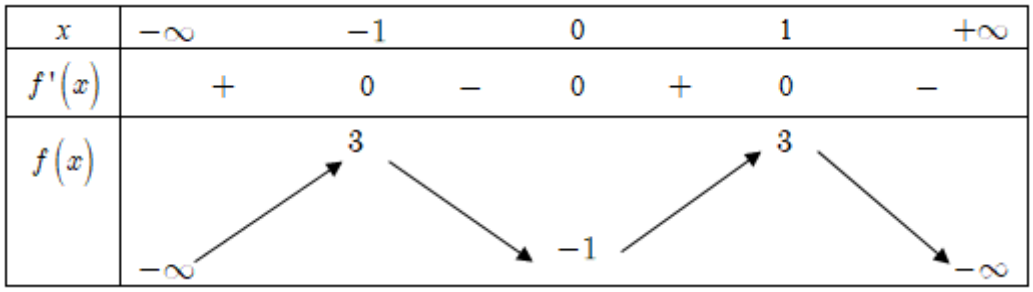
Dựa vào đồ thị bên trên ta có

$$\int_0^{x_0}|h'(x)|dx<\int_{x_0}^{2}|h'(x)|dx\Rightarrow h(x_0)-h(0)<-\left[h(2)-h(x_0)\right]\Leftrightarrow h(0)>h(2)\Rightarrow h(2)<0.$$

Khi đó đồ thị hàm số $y=h(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm.

Vậy hàm số $g(x)=|h(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 59: Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biế thiên như sau:



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^2\left[f(x-1)\right]^4$ là

A. 7. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D

Ta có hàm số $g(x)$ liên tục và có đạo hàm là

$$g'(x)=2x.\left[f(x-1)\right]^4+4.x^2.f'(x-1).\left[f(x-1)\right]^3=2x\left[f(x-1)\right]^3.\left(f(x-1)+2xf'(x-1)\right)$$

Cho $g(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1=0\\ f(x-1)=0\\ f(x-1)+2x.f'(x-1)=0\end{array}\right.$.

Với phương trình $f(x-1)=0$.

Vì $f(x)$ là hàm bậc bốn và có bảng biến thiên như trên ta thấy phương trình $f(x-1)=0$ có bốn nghiệm đơn phân biệt x_2,x_3,x_4,x_5 khác x_1.

Với phương trình $f(x-1)+2xf'(x-1)=0$

Ta thấy phương trình không nhận các số x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 làm nghiệm.

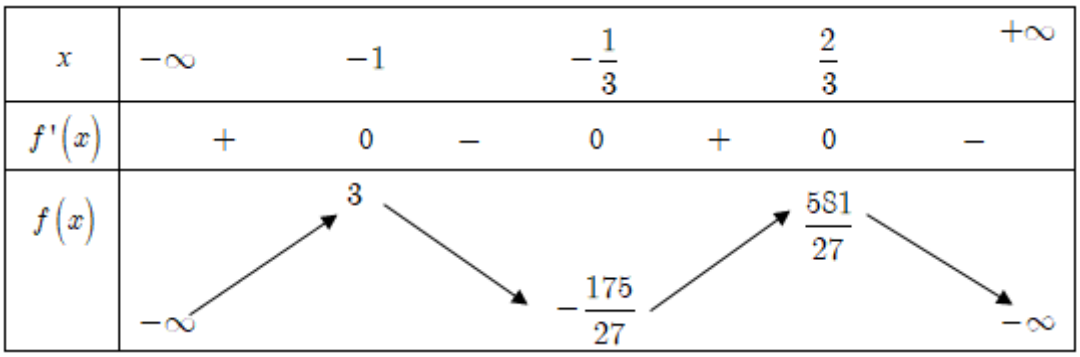
Gọi $f(x)=ax^4+bx^2+c$, vì $f'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt $-1;0;1$ và $f(0)=-1, f(1)=3$ nên $c=-1,a=-4,b=8$, suy ra $f(x)=-4x^4+8x^2-1$.

Đặt $t=x-1$, phương trình $f(x-1)+2xf'(x-1)=0$ trở thành $f(t)+2(t+1)f'(t)=0$

$\Leftrightarrow -4t^4+8t^2-1+2(t+1)(-16t^3+16t)=0\Leftrightarrow -36t^4-32t^3+40t^2+32t-1=0$.

Xét hàm số $h(t)=-36t^4-32t^3+40t^2+32t-1$ có $h'(t)=-144t^3-96t^2+80t+32$, cho $h'(x)=0\Leftrightarrow x=-1;x=-\frac{1}{3},x=\frac{2}{3}$.

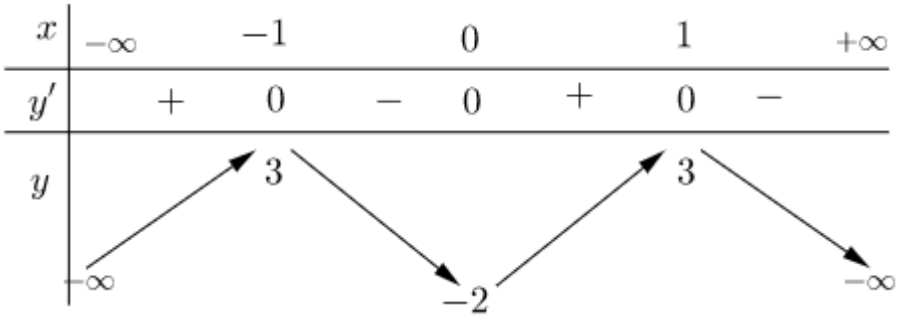
Ta có bảng biến thiên



Do đó phương trình $h(t)=0$ có 4 nghiệm đơn phân biệt hay phương trình $f(x-1)+2xf'(x-1)=0$ có 4 nghiệm đơn phân biệt x_6,x_7,x_8,x_9. Hay hàm số $g(x)$ có 9 điểm

cực trị là $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$.

Câu 60: Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên sau:



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^2\left[f(x+1)\right]^4$ là

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 5.

Lời giải

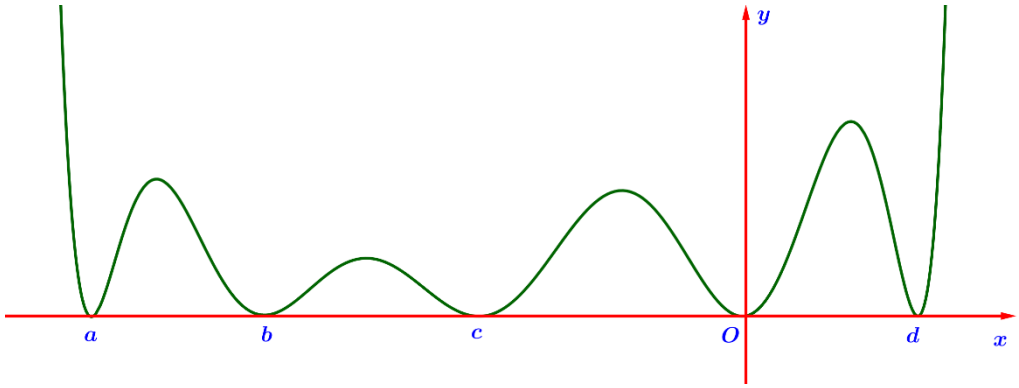
Chọn C

Nhận xét $\begin{cases} g(x)\geq 0, \forall x \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=+\infty \end{cases}$,

Cho $g(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ \left[f(x+1)\right]^4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x+1)=0 \end{array}\right.$

Nhận thấy: Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ sang trái 1 đơn vị ta thu được đồ thị của $f(x+1)$

Do đó $f(x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a,\ a<-2 \\ x=b,\ -2<b<-1 \\ x=c,\ -1<c<0 \\ x=d,\ d>0 \end{array}\right.$



Vì thế $g(x)=0$ có 5 nghiệm phân biệt

Hay đồ thị $g(x)$ có 5 điểm tiếp xúc với trục hoành

Vậy hàm số $g(x)$ có 9 cực trị.

Câu 61: Cho hàm số $y=f\ x$ có bảng biến thiên như sau:



Số điểm cực đại của hàm số $g\ x\ =\left[\ f\ \ 2x^2+x\ \right]^2$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g\ x\ =\left[\ f\ \ 2x^2+x\ \right]^2$; $g'\ x\ =2f\ \ 2x^2+x\ .f'\ 2x^2+x\ .\ 4x+1$.

$$g'\ x\ =0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}4x+1=0\\ f\ \ 2x^2+x\ =0\\ f'\ 2x^2+x\ =0\end{bmatrix}$$

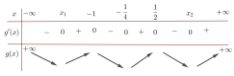
$4x+1=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{4}.$

Từ bảng biến thiên ta có: $f'\ 2x^2+x\ =0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}2x^2+x=-2\ \ VN\\ 2x^2+x=1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=-1\\ x=\frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có phương trình $f\ x\ =0$ chỉ có 1 nghiệm $x_0>1$. Khi đó

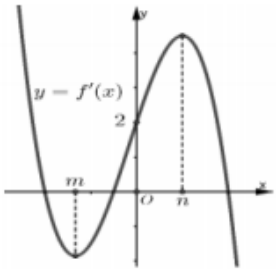
$$f\ \ 2x^2+x\ =0\Leftrightarrow 2x^2+x=x_0\ \Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=x_1\in\ -\infty;-1\\ x=x_2\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\end{bmatrix}.$$

Do $\lim\limits_{x\to+\infty}g\ x\ =\lim\limits_{x\to-\infty}g\ x\ =+\infty$ nên ta có bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên của hàm số $y=g\ x$ ta có số điểm cực đại của hàm số $g\ x\ =\left[\ f\ \ 2x^2+x\ \right]^2$ là 2.

Câu 62: Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,\left(a\neq 0\right)$ có đồ thị hàm số $f'\left(x\right)$ như hình vẽ. Biết rằng $e>n$



Số điểm cực trị của hàm số $y=f'\left(f\left(x\right)-2x\right)$ là

A. 7. **B.** 6. **C.** 10 **D.** 14.

Lời giải

Chọn A

Xét $y=f'\left(f\left(x\right)-2x\right)\Rightarrow y'=\left(f'\left(x\right)-2\right).f''\left(f\left(x\right)-2x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(x\right)=2\\f''\left(f\left(x\right)-2x\right)=0\end{array}\right.$.

Với $f'\left(x\right)=2$. Đường thẳng $y=2$ cắt đồ thị $f'\left(x\right)$ tại 3 điểm phân biệt.

Với $f''\left(f\left(x\right)-2x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}f\left(x\right)-2x=m,\left(m<0\right) & (1)\\f\left(x\right)-2x=n,\left(n<e\right) & (2)\end{array}\right.$

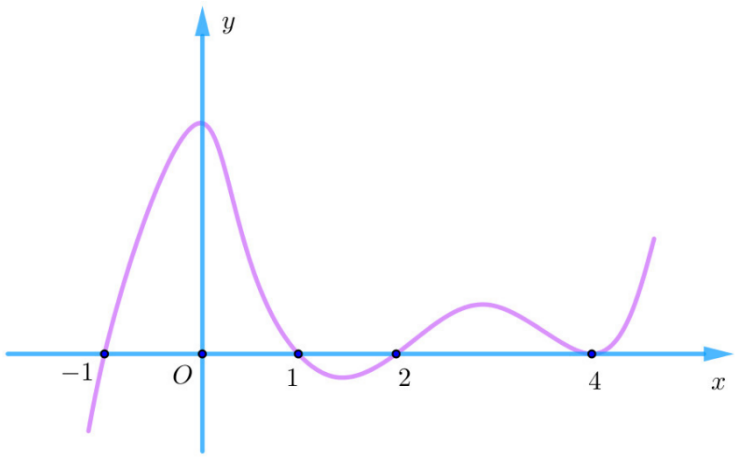
Đặt $h\left(x\right)=f\left(x\right)-2x\Rightarrow h'\left(x\right)=f'\left(x\right)-2=0\Leftrightarrow f'\left(x\right)=2$.

Bảng biến thiên của $h\left(x\right)$:

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$
$h'\left(x\right)$		0	0	0	
$h\left(x\right)$	↗	↘	$h\left(0\right)=e>n>m$	↗	↘

Vậy các phương trình (1) và (2) cho 4 nghiệm phân biệt.

Câu 63: Vậy số điểm cực trị của hàm số $y=f'\left(f\left(x\right)-2x\right)$ là 7.Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đúng 4 điểm chung với trục hoành như hình vẽ bên dưới:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=f\left(|x|^3-3|x|+m+2021\right)$ có đúng 11 điểm cực trị?

A. 0. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

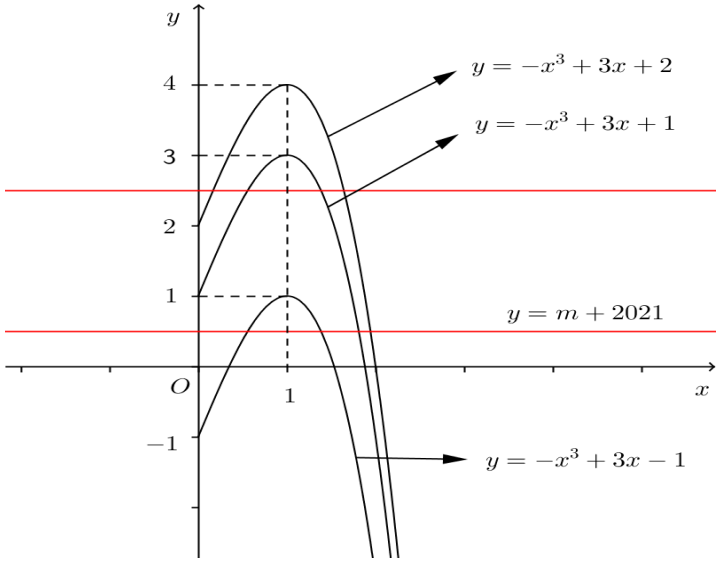
Xét $x>0$: Hàm số có dạng $y=f\left(x^3-3x+m+2021\right)$

$y'=\left(3x^2-3\right)f'\left(x^3-3x+m+2021\right)$

Do nghiệm của phương trình $x^3-3x+m+2021=4$ là các nghiệm bội bậc chẵn của phương trình $y'=0$ nên ta có:

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2-3=0\\ f'\left(x^3-3x+m+2021\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\ \left(\text{do } x>0\right)\\ x^3-3x+m+2021=-1\\ x^3-3x+m+2021=1\\ x^3-3x+m+2021=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\ \left(\text{do } x>0\right)\\ m+2021=-x^3+3x-1\\ m+2021=-x^3+3x+1\\ m+2021=-x^3+3x+2\end{array}\right.$$

Vẽ đồ thị ba hàm số $y=-x^3+3x-1$; $y=-x^3+3x+1$; $y=-x^3+3x+2$ với $x>0$ trên cùng một hệ trục.



Hàm số $y=f\left(|x|^3-3|x|+m+2021\right)$ có đúng 11 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ Hàm số $y=f\left(x^3-3x+m+2021\right)$ có đúng 5 điểm cực trị dương

$\Leftrightarrow$ Phương trình $f'\left(x^3-3x+m+2021\right)=0$ có đúng 4 nghiệm bội lẻ dương khác 1

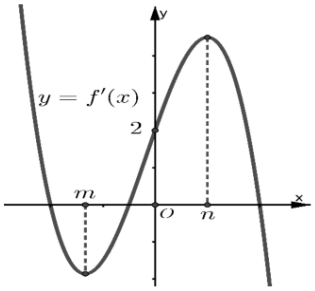
$\Leftrightarrow$ Đường thẳng $y=m+2021$ cắt đồ thị ba hàm số $y=-x^3+3x-1$; $y=-x^3+3x+1$; $y=-x^3+3x+2$ tại 4 điểm phân biệt có hoành độ dương khác 1

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<m+2021<1\\ 2<m+2021<3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2022<m<-2020\\ -2019<m<-2018\end{array}\right.$$

Do m nguyên nên $m=-2021$.

Vậy chỉ có 1 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 64: Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,\left(a\neq 0\right)$ có đồ thị của đạo hàm $f'\left(x\right)$ như hình vẽ.



Biết rằng $e>n$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f'\left(f\left(x\right)-2x\right)$ bằng

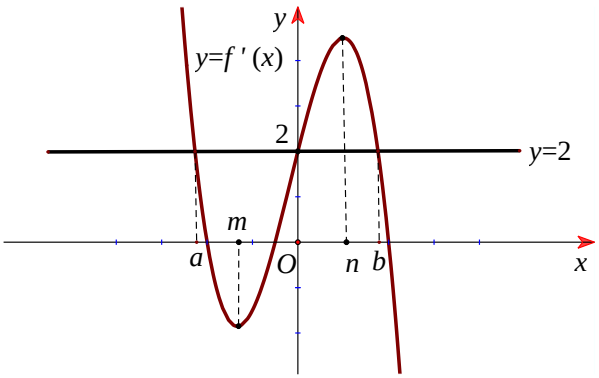
A. 7. **B.** 10. **C.** 14. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

$$g(x)=f'\left(f\left(x\right)-2x\right)\Rightarrow g'(x)=\left[f'\left(x\right)-2\right].f''\left(f\left(x\right)-2x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(x\right)=2\\f''\left(f\left(x\right)-2x\right)=0\end{array}\right.$$

$$+\ f'(x)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a<m\\x=0\\x=b>n\end{array}\right.,$$



+ Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta suy ra $f''(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\x=n\end{array}\right.$

Do đó $f''\left(f\left(x\right)-2x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)-2x=m\ ,\ (1)\\f\left(x\right)-2x=n\ ,\ (2)\end{array}\right.$

Lập BBT cho hàm số $h(x)=f\left(x\right)-2x$, với $h'(x)=f'(x)-2$.

Ta có $h(0)=f\left(0\right)=e,\ e>n>m$

x	$-\infty$		a		0		b		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$		↗		↘	e	↗		↘	

$y=n$

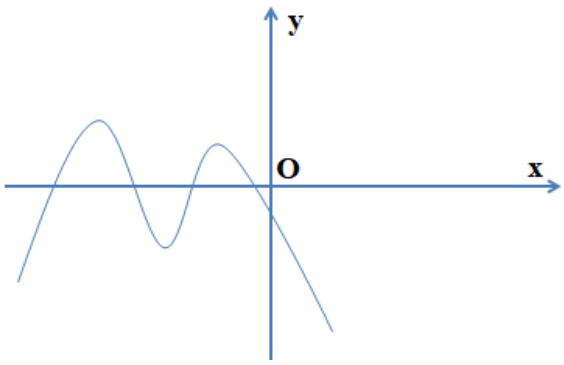
$y=m$

Do đó phương trình (1) và (2) có 4 nghiệm đơn.

Suy ra phương trình $g'(x)=0$ có 7 nghiệm đơn

nên hàm số $g(x)=f'\left(f\left(x\right)-2x\right)$ có 7 cực trị.

Câu 65: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ với $f\left(0\right)=0$. Biết $y=f'\left(x\right)$ là một hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong như hình dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(x^4\right)+x^2\right|$ là

A. 3. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $h\left(x\right)=f\left(x^4\right)+x^2\Rightarrow h'\left(x\right)=2x\left(2x^2.f'\left(x^4\right)+1\right)$

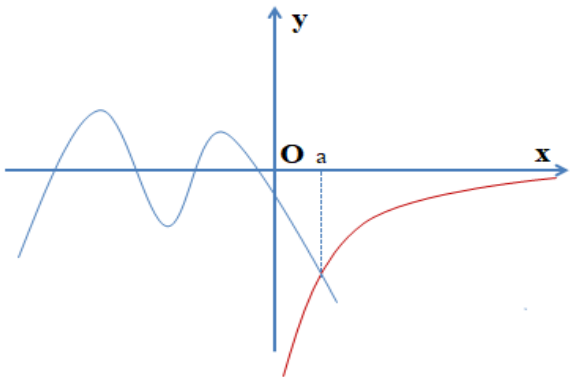
$$h'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\2x^2f'\left(x^4\right)+1=0\left(1\right)\end{array}\right.$$

Giải phương trình $\left(1\right)$

Đặt $x^4=t\left(t\geq0\right)$, ta có phương trình $2\sqrt{t}f'\left(t\right)+1=0\Leftrightarrow f'\left(t\right)=-\frac{1}{2\sqrt{t}}\left(2\right)$

Số nghiệm của phương trình $\left(2\right)$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'\left(t\right)$ và đồ thị hàm số $y=-\frac{1}{2\sqrt{t}}$

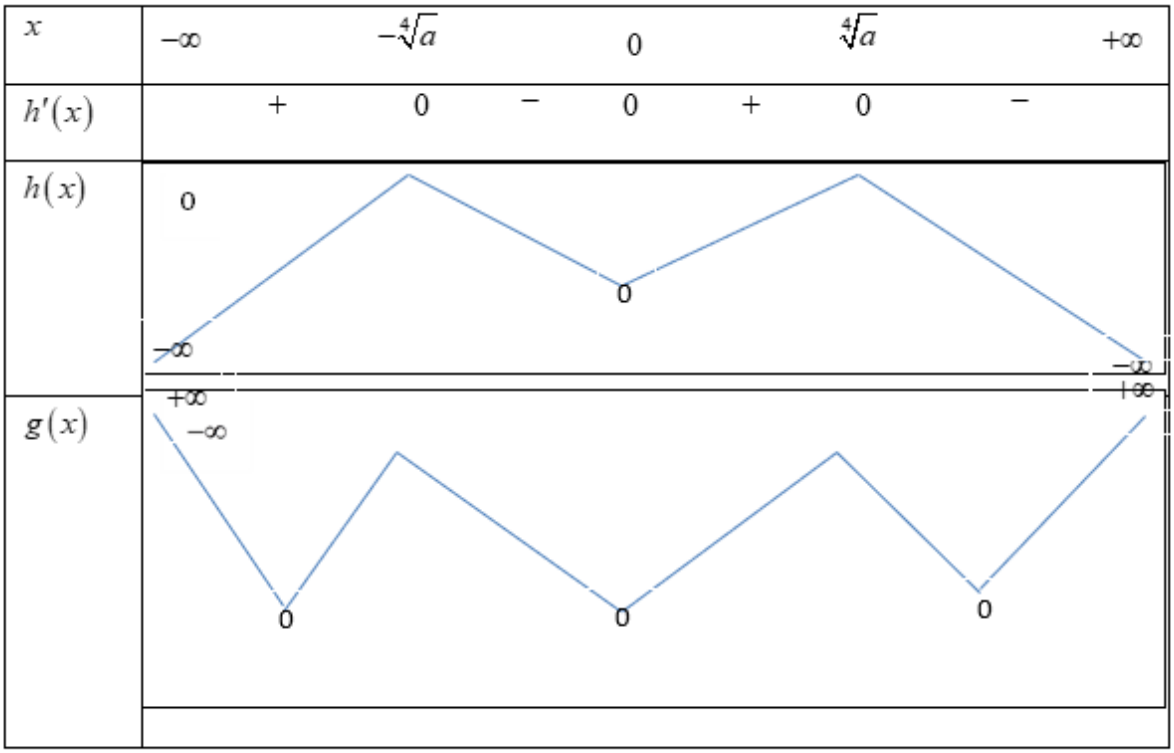
Ta có các đồ thị như sau



Căn cứ đồ thị, suy ra phương trình $\left(2\right)$ có nghiệm duy nhất $t=a>0\Rightarrow x^4=a\Leftrightarrow x=\pm\sqrt[4]{a}$

Căn cứ đồ thị hàm số $y=f'\left(t\right)\Rightarrow\lim\limits_{t\to+\infty}\left(f'\left(t\right)\right)=-\infty\Rightarrow\lim\limits_{t\to+\infty}\left(2\sqrt{t}f'\left(t\right)+1\right)=-\infty$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=h\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$ như sau:



Câu 66: Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x)=(x^2-16)(x+1)(x^2-4x+m-4)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2021;2021]$ sao cho hàm số $g(x)=f(x^2)$ có 5 điểm cực trị?

A. 2025. **B.** 2026. **C.** 2021. **D.** 4043.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g'(x)=2x.f'(x^2)=2x(x^4-16)(x^2+1)(x^4-4x^2+m-4)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^4-16=0\\x^4-4x^2+m-4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\x=-2\\x^4-4x^2+m-4=0\ (*)\end{array}\right.$$

TH1: Phương trình có nghiệm $x=0\Rightarrow m-4=0\Rightarrow m=4$.

Thay $m=4$ vào phương trình ta có: $x^4-4x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\x=-2\end{array}\right.$.

Khi đó $g'(x)=0$ có 3 nghiệm bội chẵn nên hàm số $g(x)$ không thể có 5 điểm cực trị nên $m=4$ loại.

TH2: Phương trình có nghiệm $x=\pm 2\Rightarrow m-4=0\Rightarrow m=4$.

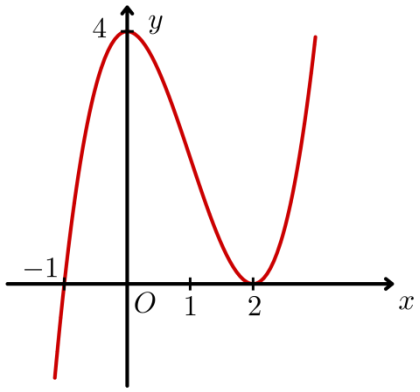
TH3: Phương trình có 2 nghiệm đơn phân biệt, khác 0 và khác ± 2 hay

$t^2-4t+m-4=0$ phải có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow m-4<0\Leftrightarrow m<4$.

Khi đó $g'(x)=0$ có 5 nghiệm phân biệt nên hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Kết hợp điều kiện m thuộc $[-2021;2021]$ suy ra $-2021\le m<4, m\in\mathbb{Z}$ nên có 2025 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 67: Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{4}x^4+ax^3+bx^2+cx$ có đồ thị (C) của hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ sau:



Đặt $g(x)=f\left(f'(x)\right)$, $h(x)=f'\left(f(x)\right)$. Tổng số điểm cực trị của $g(x)$ và $h(x)$ là:

A. 12. **B.** 11. **C.** 8. **D.** 13.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(x)=\frac{1}{4}x^4+ax^3+bx^2+cx \Rightarrow f'(x)=x^3+3ax^2+2bx+c$

Ta lại có: $\begin{cases} f'(0)=4 \\ f'(-1)=0 \\ f'(2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=4 \\ -1+3a-2b+4=0 \\ 8+12a+4b+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=4 \\ 3a-2b=-3 \\ 12a+4b=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=0 \\ c=4 \end{cases}$

hay $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+4x,\ f'(x)=x^3-3x^2+4 \to f''(x)=3x^2-6x$

$f''(x)=3x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Tìm số cực trị của hàm số: $g(x)=f\left(f'(x)\right)$

Ta có: $g'(x)=f''(x).f'(f'(x))=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f''(x)=0 \\ f'(f'(x))=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ f'(x)=-1 \\ f'(x)=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=x_1 \\ x=x_2 \\ x=x_3 \\ x=x_4 \end{array}\right.$

với x_1 là nghiệm của phương trình $f'(x)=-1$

và x_2, x_3, x_4 là ba nghiệm của phương trình $f'(x)=2$, $x_1<x_2<0<x_3<2<x_4$

Bảng xét dấu $y=g'(x)$

x	$-\infty$		x_1		x_2		0		x_3		2		x_4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

nhìn vào bảng trên, hàm số $g(x)=f\left(f'(x)\right)$ có 3 cực trị

Tìm số cực trị của hàm số $h(x)=f'\left(f(x)\right)$

BBT của hàm số $y=f(x)$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{11}{4}$	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Ta có: $h'(x)=f'(x).f''(f(x))=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f(x)=0 \\ f(x)=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \\ x=x_1 \\ x=x_2 \\ x=x_3 \\ x=x_4 \end{array}\right.$

Với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $f(x)=0$, x_3, x_4 là nghiệm của phương trình $f(x)=2$ và $x_3<x_1<-1<x_2<x_4<2$

Bảng xét dấu $y=h'(x)$

x	$-\infty$	x_3		x_1		-1		x_2		x_4		2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

nhìn vào bảng trên, hàm số $h(x)=f'(f(x))$ có 5 cực trị

Vậy tổng có 8 cực trị.

Câu 68: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi hàm số $g(x)=f(x^4)-4x$ có mấy điểm cực tiểu?

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

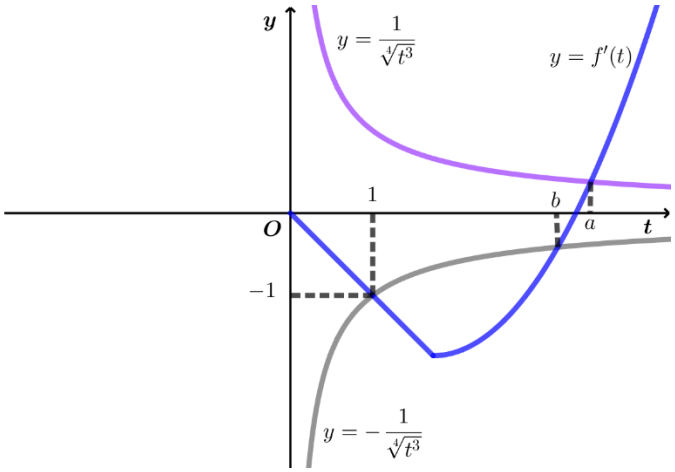
Có $g'(x)=4x^3f'(x^4)-4$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3f'(x^4)-4=0 \Leftrightarrow f'(x^4)=\frac{1}{x^3}\ (x\neq 0)\ (1)$.

Đặt $t=x^4>0 \Rightarrow x=\pm\sqrt[4]{t}$ phương trình trở thành:

$$\left[\begin{array}{l} f'(t)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{t^3}}\ (2) \\ f'(t)=-\dfrac{1}{\sqrt[4]{t^3}}\ (3) \end{array}\right.$$

Mô phỏng bằng đồ thị



Dựa vào đồ thị ta có:

(2) có nghiệm $t=a\Rightarrow x=\sqrt[4]{a}$

(3) có nghiệm $\left[\begin{array}{l} t=1\Rightarrow x=-1 \\ t=b\Rightarrow x=-\sqrt[4]{b} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt[4]{b}$		-1		$\sqrt[4]{a}$		$+\infty$
$g'(x)$		−	0	+	0	−	0	+	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	

Vậy hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực tiểu.

Câu 69: Cho $y=f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn thỏa mãn $f(1)\le 0$ và hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	-3	↗	$+\infty$

Hàm số $g(x)=\left|f\left(\sqrt{x^2+1}\right)+x^2\right|$ có mấy điểm cực trị?

A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f''(x)=a\left(x^2-1\right)\Rightarrow f'(x)=\frac{a}{3}x^3-ax+C$

$$\begin{cases} f'(-1)=-1 \\ f'(1)=-3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=-\frac{2}{3} \\ C=-\frac{2}{9} \end{cases}\Rightarrow f'(x)=-\frac{2}{9}x^3-\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}$$

Xét hàm số $u=\sqrt{x^2+1}$ có $u'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, u'=0\Leftrightarrow x=0$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
u'		$-$	0	$+$	
u	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Xét hàm số $h(u)=f(u)+u^2-1$ có $h'(u)=u'f'(u)+2u.u'=u'\left[f'(u)+2u\right]$

$$h'(u)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} u'=0 \\ f'(u)=-2u \end{array}\right.$$

$u'=0\Leftrightarrow x=0$

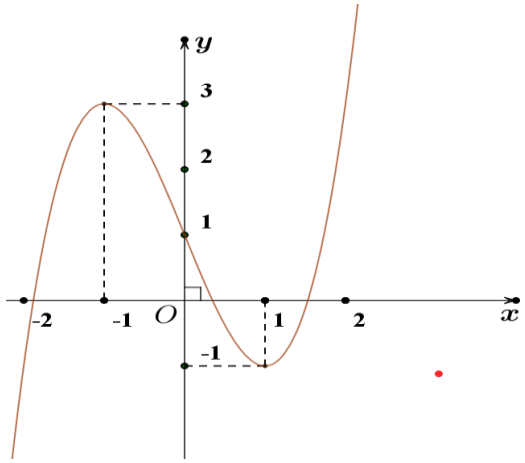
$f'(u)=-2u\Leftrightarrow u=a\in(1;2)\Rightarrow\sqrt{x^2+1}=a$ có 2 nghiệm trái dấu x_1, x_2

Do $f(1)\le 0$ nên ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
$h'(u)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(u)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
	$y=0$				1				

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đã cho có 5 điểm cực trị.

Câu 70: Cho hàm số $f(x)$. Biết $f'(x)$ là hàm bậc 3. Có đồ thị như hình vẽ sau



Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in[-10,10]$ để hàm số $g(x)=f(x)+mx+2021$ có đúng 1 cực trị?

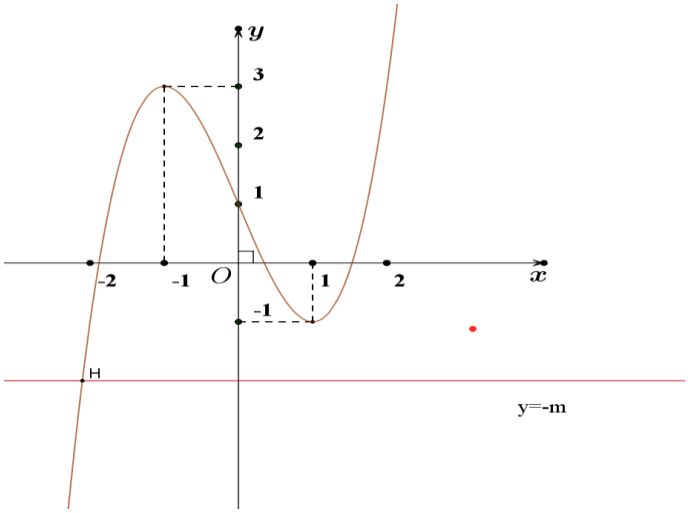
A. 20. **B.** 16. **C.** 15. **D.** 18.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=f'(x)+m \Leftrightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow g'(x)=-m \ (1)$

Số nghiệm của (1) là số giao điểm của 2 đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường $d: y=-m$



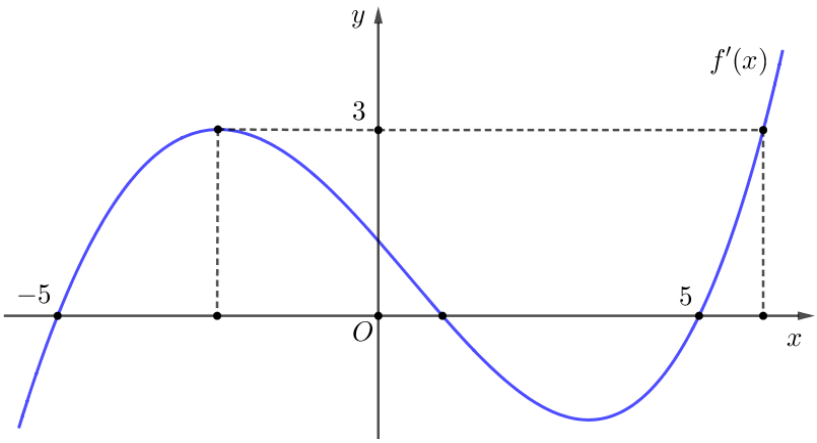
Dựa vào đồ thị trên. Để $g(x)$ có đúng 1 cực trị thì điều kiện là

$$\begin{cases} m \in [-10,10] \\ m<-1 \\ m>3 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \{4,5,6,7,8,9,10,-10,-9,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2\}$$

Số giá trị của m là 16.

------ HẾT ------

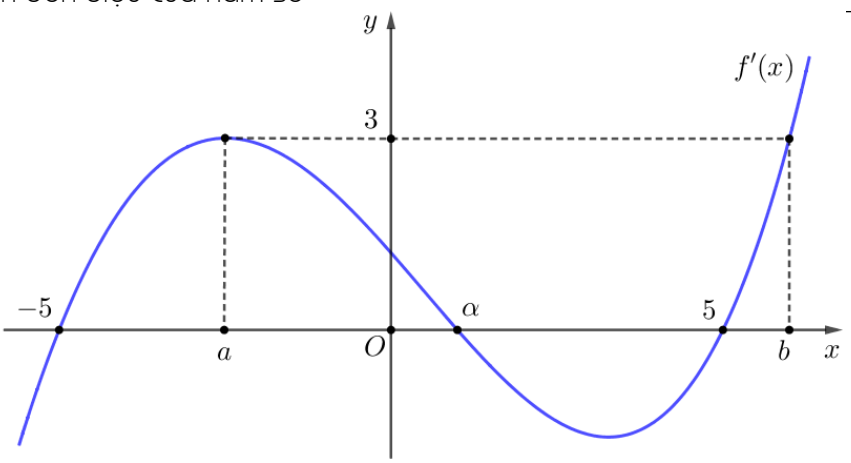
Câu 71: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $f(10)=30\, f(-6)=30\, f(5)=30$. Hỏi đồ thị hàm số $y=f\left[f(x)-3x+9\right]$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



A. 7. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $y'=\left[f'(x)-3\right]f'\left[f(x)-3x+9\right]=0$

Trường hợp 1: $f'(x)-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\ \ (nghieäm\ keùp)\\x=b\end{array}\right.$.

Trường hợp 2: $f'\left[f(x)-3x+9\right]=0\Leftrightarrow f'(u)=0$

Với $u=f(x)-3x+9\Rightarrow u'=f'(x)-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\ (nghieäm\ \text{keùp})\\x=b\end{array}\right.$.

Từ điều kiện suy ra $1=f(5)<f(6)$

Bảng biến thiên của u:

x	$-\infty$		-6		-5		a		5		b		10		$+\infty$
u'			$-$				0		$-$		0		$+$		
u		$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	
			28						-5		$u(b)=f(b)-9$		9		

$f'(u)=0\Leftrightarrow u\in\{-5;1;5\}$

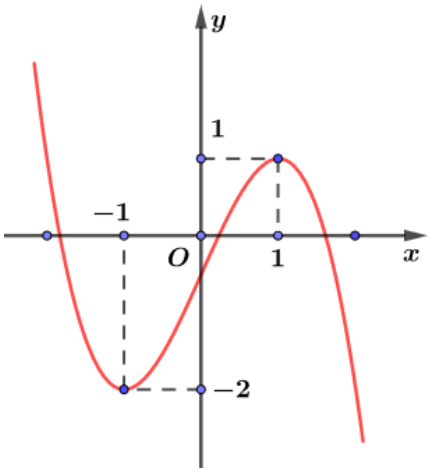
$u=-5$ có hai nghiệm bội lẻ.

$u=1$ có hai nghiệm bội lẻ.

$u=5$ có hai nghiệm bội lẻ.

Vậy có tất cả 7 điểm cực trị.

Câu 72: Cho hàm số $y=f\ x$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y=f\left[e^{f\ x}-\frac{1}{2}\ f\ x\ ^2-f\ x\ \right]$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

$y' = f'\left[e^{f(x)} - \frac{1}{2}f(x)^2 - f(x)\right].f'(x).\left[e^{f(x)} - f(x) - 1\right]$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ e^{f(x)} - f(x) - 1 = 0 \quad (1) \\ f'\left[e^{f(x)} - \frac{1}{2}f(x)^2 - f(x)\right] = 0 \quad (2) \end{array}\right.$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Đặt $t = f(x)$.

Giải (1): $e^t - t - 1 = 0$.

Xét $h(t) = e^t - t - 1 \Rightarrow h'(t) = e^t - 1$.

$h'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

BBT:

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(t)$		$-$	0	$+$	0
$h(t)$		↘	0	↗	

Do đó $h(t) \geq 0 \forall t \Rightarrow h(t)$ tiếp xúc với trục Ox. Pt (1) có nghiệm kép, nghiệm này không là cực trị.

Giải (2): $\left[\begin{array}{l} e^t - \frac{1}{2}t^2 - t = 1 \quad (3) \\ e^t - \frac{1}{2}t^2 - t = -1 \quad (4) \end{array}\right.$.

Giải (3): $e^t - \frac{1}{2}t^2 - t - 1 = 0$.

Xét $k\ t\ = e^t - \frac{1}{2}t^2 - t - 1 \Rightarrow k'\ t\ = e^t - t - 1 \geq 0 \forall t$.

$\Rightarrow k'\ t\ = 0 \Leftrightarrow t = 0$

BBT:

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$k'(t)$		$+$	0	$+$	
$k(t)$		↗	0	↗	

Pt 3 có nghiệm $t = 0 \Rightarrow f\ x\ = 0$.pt 3 có 3 nghiệm phân biệt $x_1 < -1, x_2 \in 0;1\ , x_3 > 1$.

Giải 4 : $e^t - \frac{1}{2}t^2 - t + 1 = 0.$

Xét $l\ t\ = e^t - \frac{1}{2}t^2 - t + 1 \Rightarrow l'\ t\ = e^t - t - 1 \geq 0 \forall t$.

$\Rightarrow l'\ t\ = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

BBT:

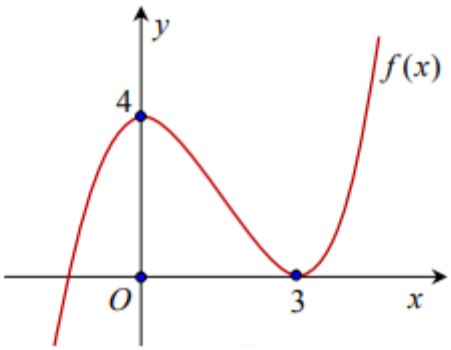
t	$-\infty$		0		$+\infty$
$l'(t)$		$+$	0	$+$	
$l(t)$		↗	2	↗	

Nhận xét: $l\ t\ = e^t - \frac{1}{2}t^2 - t + 1$ có $l\ -2\ .l\ -3\ < 0 \Rightarrow l\ t\ = 0$ có 1 nghiệm $t = t_1 \in -3;-2\ \Rightarrow f\ x\ = t_1$ có 1 nghiệm Pt 4 có 1 nghiệm.

Vậy $g'\ x\ = 0$ có 6 nghiệm phân biệt.

Do vậy hàm số có 6 cực trị.

Câu 73: Cho đồ thị của hàm số $y = f\left(x\right)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f\left(3f\left(x\right) - m\right)$ có đúng 6 điểm cực trị?



A. 7. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Đặt $g(x)=f\left(3f(x)-m\right)$.

Ta có $g'(x)=3f'(x).f'\left(3f(x)-m\right)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow 3f'(x).f'\left(3f(x)-m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f'\left(3f(x)-m\right)=0\end{array}\right.$$

Từ đồ thị ta thấy $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$ (1)

$$\text{Do } f'\left(3f(x)-m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3f(x)-m=0\\3f(x)-m=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=\dfrac{m}{3}\\f(x)=\dfrac{m}{3}+1\end{array}\right.$$

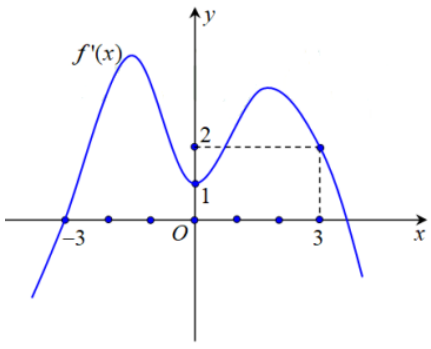
Từ (1) và dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$ điều kiện để hàm số $f\left(3f(x)-m\right)$ có đúng 6 điểm cực trị là số nghiệm của phương trình $f(x)=\dfrac{m}{3}$ và phương trình $f(x)=\dfrac{m}{3}+1$ cùng với 2 nghiệm ở (1) thỏa mãn $g'(x)$ đảo dấu 6 lần. Khi đó xảy ra các trường hợp sau:

TH1: $\begin{cases}0<\dfrac{m}{3}<4\\\dfrac{m}{3}+1\geq 4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\m<12\\m\geq 9\end{cases}\Leftrightarrow 9\leq m<12$. Do m nguyên nên $m\in\{9;10;11\}$.

TH2: $\begin{cases}\dfrac{m}{3}\leq 0\\0<\dfrac{m}{3}+1<4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\leq 0\\m<9\\m>-3\end{cases}\Leftrightarrow -3<m\leq 0$. Do m nguyên nên $m\in\{-2;-1;0\}$.

Vậy có 6 giá trị của m.

Câu 74: Cho đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng hàm số $f'(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$; có $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ và hàm số $g(x)=\left[f(x)\right]^2-\left(\dfrac{x^2+6x}{3}\right).f(x)+\left(\dfrac{x^2+6x}{6}\right)^2$ có đúng 5 điểm cực trị. Giá trị $\min\left(\min\limits_{x\in(-\infty;3]}f(x)\right)$ bằng

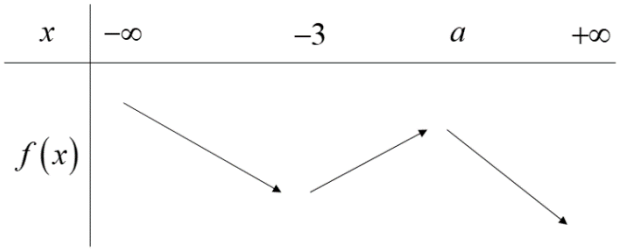


A. 0. **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** $\dfrac{11}{4}$. **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị $f'(x)$ suy ra bảng biến thiên của $f(x)$ với $a>3$



Ta có: $g(x)=\left(f(x)-\dfrac{x^2+6x}{6}\right)^2 \Rightarrow g'(x)=\left(f'(x)-\dfrac{x}{3}-1\right).\left(f(x)-\dfrac{x^2+6x}{6}\right).$

Cho $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=\dfrac{x}{3}+1 \\ f(x)=\dfrac{x^2+6x}{6} \end{array}\right.$.

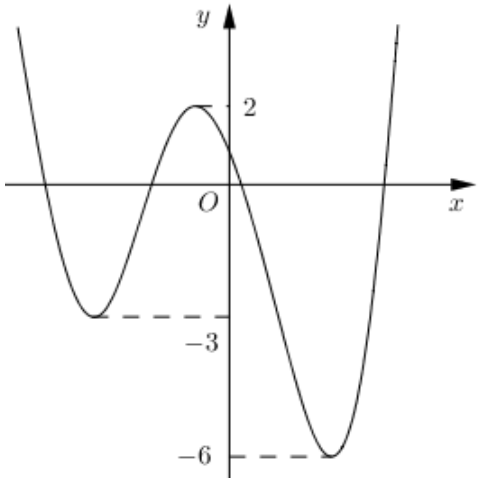
Xét $f'(x)=\dfrac{x}{3}+1$ có 3 nghiệm lần lượt là $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \\ x=-3 \end{array}\right.$.

Nhận xét: Hàm số $y=f(x)$ và $y=\dfrac{x^2+6x}{6}$ đều đạt cực tiểu tại $x=-3$.

Để hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực tiểu thì phương trình $f(x)=\dfrac{x^2+6x}{6}$ phải có nghiệm kép $x=-3$.

Nên $f(x)=f(-3)=\dfrac{-3}{2}$.

Câu 75: Cho $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc 4 và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-12;12]$ để hàm số $g(x)=\left|2f(x-1)+m\right|$ có 5 điểm cực trị?



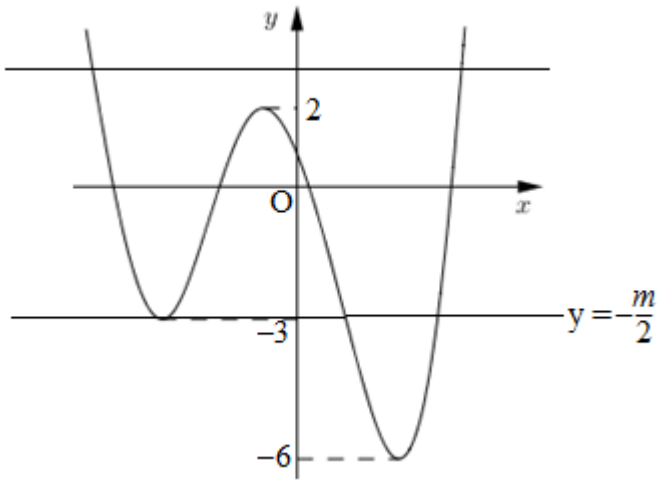
A. 12. **B.** 14. **C.** 15. **D.** 13.

Lời giải

Chọn C

Nhận xét: Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x-1\right)$ bằng số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên tập xác định $\mathbb{R}$

Dựa vào đồ thị, hàm số $y=f\left(x\right)$ có 3 điểm cực trị



Để hàm số $g\left(x\right)$ có 5 điểm cực trị

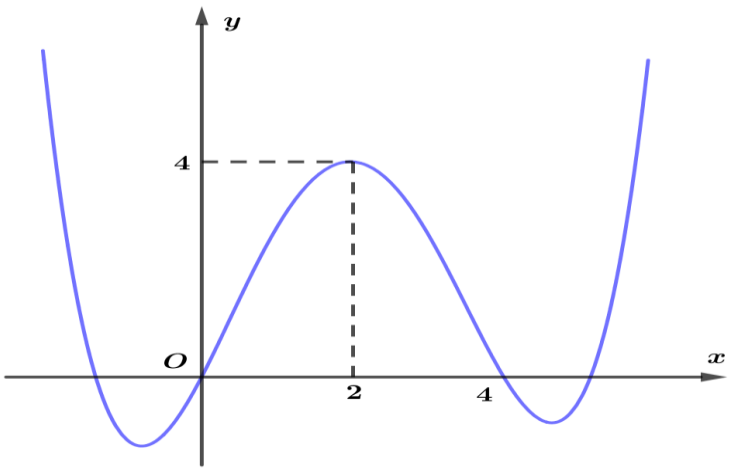
$\Leftrightarrow 2f\left(x\right)+m=0\Leftrightarrow f\left(x\right)=-\dfrac{m}{2}$ có 2 ngiệm phân biệt hoặc 3 nghiệm trong đó có 1 nghiệm bội chẵn và 2 nghiệm đơn

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{m}{2}\ge 2 \\ -6<-\dfrac{m}{2}\le -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le -4 \\ 6\le m<12 \end{array}\right.$$

Mà m là giá trị nguyên thuộc $\left[-12;12\right]$ nên $m\in\left\{-12;-11;...;-4;6;7;...;11\right\}$

Vậy có 15 giá trị nguyên m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 76: Cho hàm số bậc năm $y=f\left(x\right)$ có đồ thị $y=f'\left(x\right)$ như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^3+3x^2\right)-2x^3-6x^2$ là



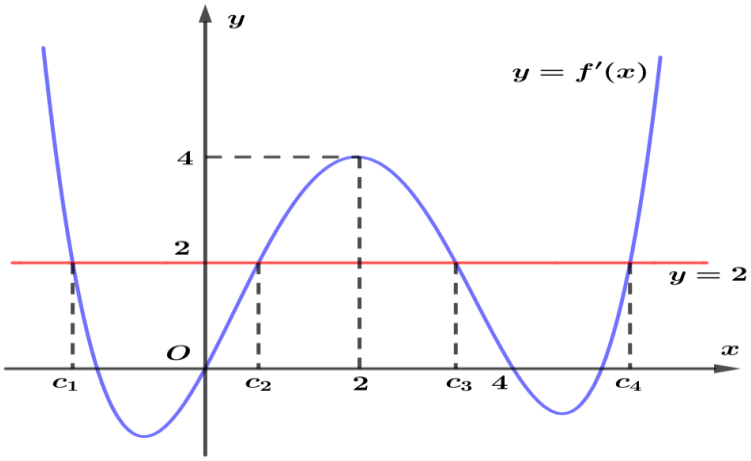
A. 7. **B.** 10. **C.** 5. **D.** 11.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^3+3x^2\right)-2x^3-6x^2$

Ta có $g'(x)=\left(3x^2+6x\right)f'\left(x^3+3x^2\right)-6x^2-12x=3x(x+2)\left[f'\left(x^3+3x^2\right)-2\right]$.



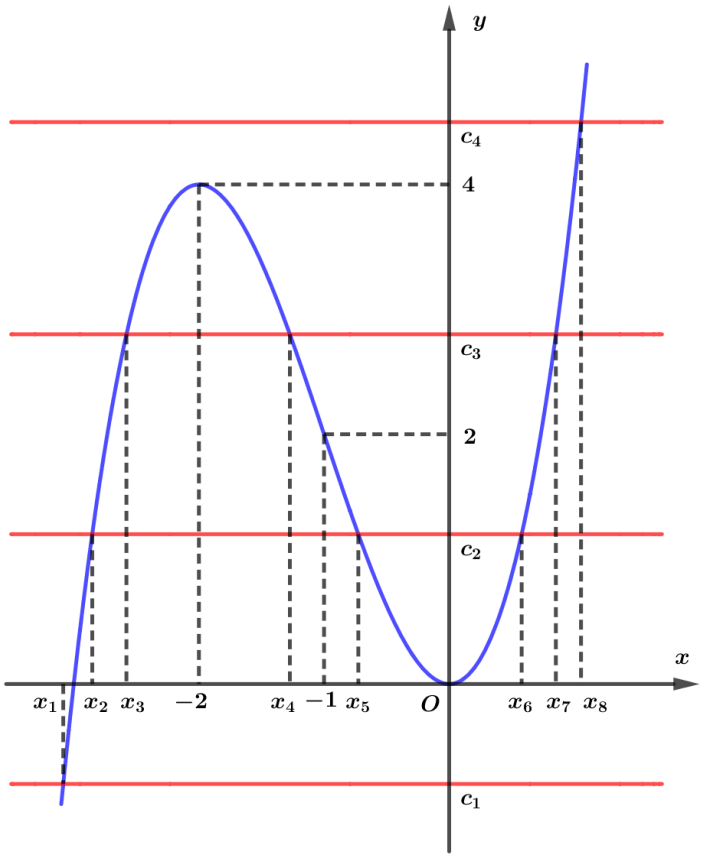
Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\\f'\left(x^3+3x^2\right)=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\\x^3+3x^2=c_1\ (c_1<0)\quad(1)\\x^3+3x^2=c_2\ (0<c_2<2)\ (2)\\x^3+3x^2=c_3\ (2<c_3<4)\ (3)\\x^3+3x^2=c_4\ (c_4>4)\quad(4)\end{array}\right.$.

Xét hàm số $h(x)=x^3+3x^2$, ta có $h'(x)=3x^2+6x$.

Bảng biến thiên $h(x)$:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Vẽ đồ thị của các hàm số $y=h(x)$, $y=c_1$, $y=c_2$, $y=c_3$, $y=c_4$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ ta được



$$(1) \Leftrightarrow x = x_1;\ (2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_2 \\ x = x_5 \\ x = x_6 \end{array}\right.;\ (3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_3 \\ x = x_4 \end{array}\right.;\ (4) \Leftrightarrow x = x_8$$

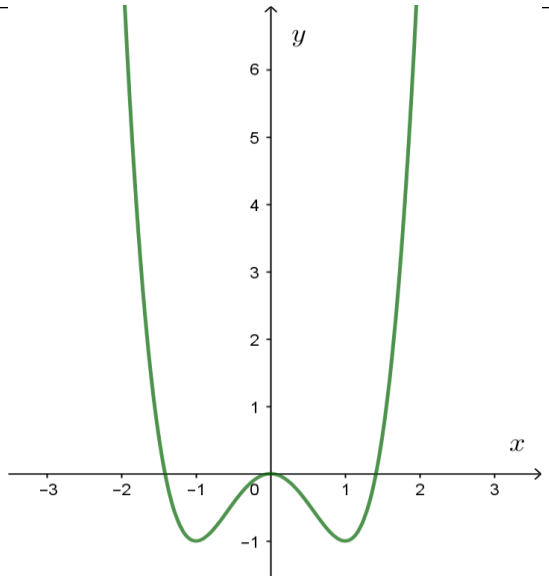
Trong đó $x_1 < x_2 < x_3 < -2 < x_4 < x_5 < 0 < x_6 < x_7 < x_8$.

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	-2	x_4	x_5	0	x_6	x_7	x_8	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu ta kết luận được hàm số $g(x)$ có 10 điểm cực trị.

Câu 77: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^3+f(x)\right)$ là

A. 11. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị ta thấy hàm số trên có phương trình là $y=x^4-2x^2$. Vậy ta có:

$f(x)=x^4-2x^2$ và $f'(x)=4x^3-4x$

$g'(x)=\left(f\left(x^3+f(x)\right)\right)'=\left(x^3+f(x)\right)'f'\left(x^3+f(x)\right)=\left(3x^2+f'(x)\right)f\left(x^3+f(x)\right)$.

Suy ra $g'(x)=\left(3x^2+f'(x)\right)f'\left(x^3+f(x)\right)=\left(3x^2+4x^3-4x\right)f'\left(x^3+x^4-2x^2\right)$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow\left(3x^2+4x^3-4x\right)f'\left(x^3+x^4-2x^2\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x^3+3x^2-4x=0\\x^4+x^3-2x^2=1\\x^4+x^3-2x^2=-1\\x^4+x^3-2x^2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x^3+3x^2-4x=0\\x^4+x^3-2x^2-1=0\\x^4+x^3-2x^2+1=0\\x^4+x^3-2x^2=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x\approx 0,6930\\x\approx -1,4430\\x\approx 1,21195\\x\approx -2,0754\\x\approx -0,6710\\x\approx -1,9051\\x=1\\x=-2\end{array}\right.$$

Phương trình $g'(x)=0$ có đúng 8 nghiệm đơn và 1 nghiệm bội lẻ $x=0$.

Vậy hàm số $g(x)$ có 9 điểm cực trị.

Câu 78: Cho hàm số bậc bốn trùng phương $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	6	↘	2	↗	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\frac{1}{x^2}\left(f(x)-6\right)^4$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Theo giả thiết ta có $f(x)=ax^4+bx^2+c \Rightarrow f'(x)=4ax^3+2bx$.

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $f(x)$ đi qua $A(-2;2), B(0;6), C(2;2)$ và có ba điểm cực trị

$$\Rightarrow \begin{cases} 16a+4b+c=2 \\ c=6 \\ 32a+4b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{4} \\ b=-2 \\ c=6 \end{cases}.$$ Vậy $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2+6$, $f'(x)=x^3-4x$

Ta có Hàm số $g(x)=\frac{1}{x^2}\left(f(x)-6\right)^4$ xác định trên $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$$g'(x)=-\frac{2}{x^3}\left(f(x)-6\right)^4+\frac{1}{x^2}.4\left(f(x)-6\right)^3.f'(x)$$

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{\left(f(x)-6\right)^3}{x^3}\left(4x.f'(x)-2f(x)+12\right)$$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)-6=0 & (1) \\ 4xf'(x)-2f(x)+12=0 & (2) \end{cases}$$

Ta có $(1) \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4-2x^2+6=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 2\sqrt{2} \end{array}\right.$.

$$(2) \Leftrightarrow 4x.\left(x^3-4x\right)-2\left(\frac{1}{4}x^4-2x^2+6\right)+12=0 \Leftrightarrow \frac{7}{2}x^4-12x^2=0 \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\frac{2\sqrt{42}}{7} \end{array}\right.$$

Vì $x\neq 0$ nên có $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 2\sqrt{2} \\ x=\pm\frac{2\sqrt{42}}{7} \end{array}\right.$ và các nghiệm đó đều là nghiệm bội lẻ.

Do đó hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực trị.

Câu 79: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0

Số điểm cực đại của hàm số $y=f\left(\left|f\left(x\right)\right|\right)$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g\left(x\right)=f\left(\left|f\left(x\right)\right|\right)\Rightarrow g'\left(x\right)=f'\left(\left|f\left(x\right)\right|\right).\dfrac{f'\left(x\right).f\left(x\right)}{\left|f\left(x\right)\right|}$

Do đó $g'\left(x\right)$ không xác định khi $f\left(x\right)=0$ hay $x=0$.

$$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(x\right)=0\\f'\left(\left|f\left(x\right)\right|\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(x\right)=0\\\left|f\left(x\right)\right|=1\\\left|f\left(x\right)\right|=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\f\left(x\right)=\pm1\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pm1.$$

Từ bảng biến thiên của $f\left(x\right)$ ta có: $\left|f\left(x\right)\right|\in\left[0;1\right],\forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra $f'\left(\left|f\left(x\right)\right|\right)\geq0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có bảng xét dấu $g'\left(x\right)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	

Từ bảng biến thiên suy ra số điểm cực đại của hàm số $y=f\left(\left|f\left(x\right)\right|\right)$ là 2..

Câu 80: Cho $f\left(x\right)$ là hàm số có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của $f'\left(x\right)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	-3	↗	-1	↗	$+\infty$

Tìm số điểm cực tiểu của hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|x^3\right|\right)-3\left|x\right|$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $h\left(x\right)=f\left(x^3\right)-3x$.

$h'\left(x\right)=3x^2.f'\left(x^3\right)-3.$

$h'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2.f'(x^3)-3=0$.

Dễ thấy $x=0$ không là nghiệm của nên $(1) \Leftrightarrow f'(x^3)=\dfrac{1}{x^2}$.

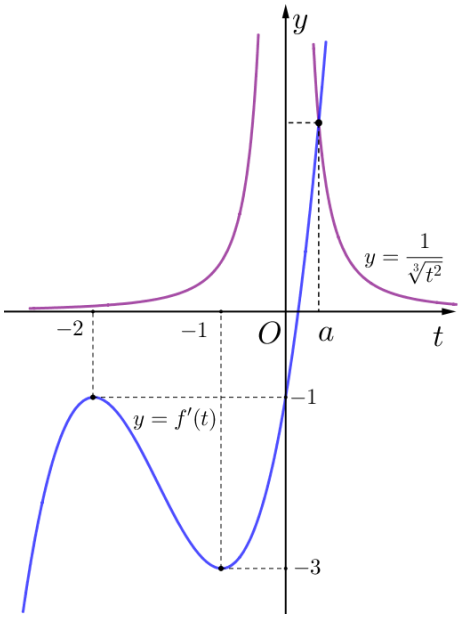
Đặt $t=x^3$ thì (2) trở thành $f'(t)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{t^2}}$ $(t\neq 0)$.

Xét hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{t^2}}$

+ $t>0$ thì $y=t^{-\frac{2}{3}}$ là hàm số lũy thừa, $y'=-\dfrac{2}{3}t^{-\frac{5}{3}}<0$ nên y nghịch biến trên $(0;+\infty)$ và đồ thị của y nhận hai trục tọa độ làm hai tiệm cận.

+ $y(t)=y(-t)$ nên y là hàm số chẵn. Do đó đồ thị của y nhận Oy làm trục đối xứng.

Vẽ đồ thị của $f'(t)$ và $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{t^2}}$ trên cùng hệ trục tọa độ ta có:



Từ đồ thị ta có $(3) \Leftrightarrow t=a>0$. Suy ra $x=\sqrt[3]{a}>0$

Bảng biến thiên của $h(x)$:

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{a}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	$h(0)$	↘	$h(\sqrt[3]{a})$	↗	$+\infty$

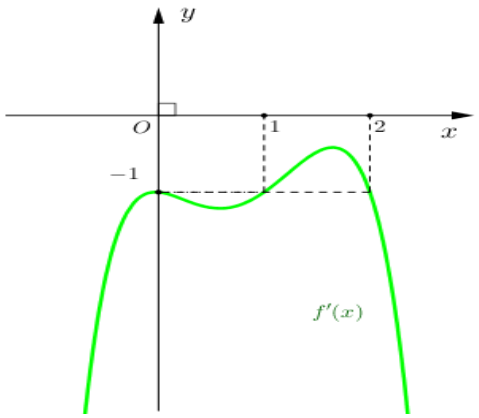
Ta thấy hàm số $g(x)=h(|x|)$ là hàm số chẵn nên đồ thị của $g(x)$ nhận Oy làm trục đối xứng.

Do đó ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$-\sqrt[3]{a}$		0		$\sqrt[3]{a}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$g(\sqrt[3]{a})$	↗	$g(0)$	↘	$g(\sqrt[3]{a})$	↗	$+\infty$

Vậy hàm số $g(x)$ có hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại.

Câu 81: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f(x)+x$ là



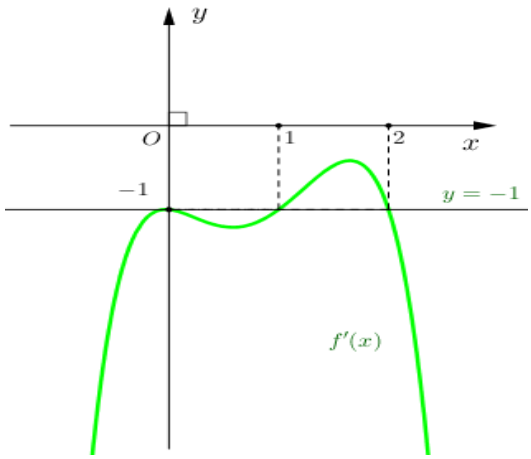
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g'(x)=f'(x)+1; g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-1$ (*).

Phương trình chính là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $f'(x)$ và đường thẳng $y=-1$.



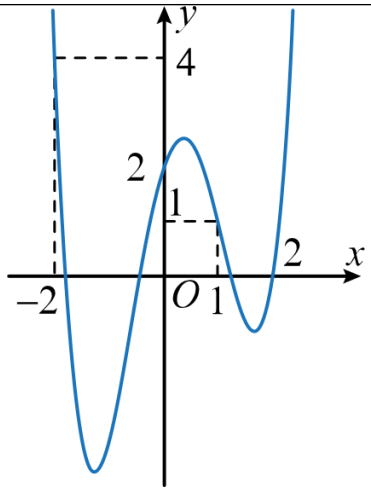
Dựa vào đồ thị, ta thấy có nghiệm $x=0$, $x=1$ và $x=2$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		↘			↗		↘		

Dựa vào BBT, hàm số $g(x)=f(x)+x$ có một điểm cực tiểu $x=1$.

Câu 82: Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực đại của hàm số $g(x)=f(x^2-4x+3)-3(x-2)^2+\frac{1}{2}(x-2)^4$ là

A. 7. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

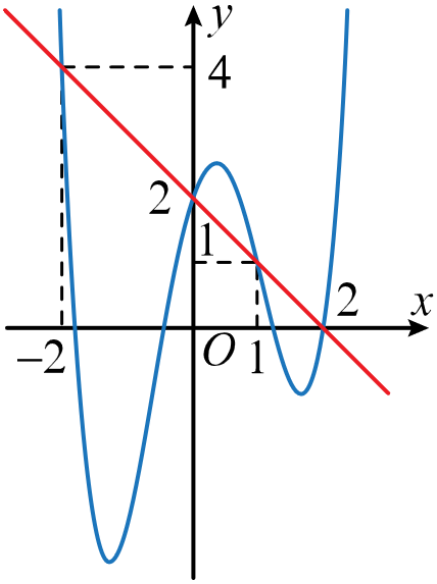
Ta có:

$g'(x)=(2x-4)f'(x^2-4x+3)-6(x-2)+2(x-2)^3=(2x-4)\left[f'(x^2-4x+3)-3+(x-2)^2\right]$

Ta có: $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-4=0\\ f'(x^2-4x+3)-3+(x-2)^2=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ f'(x^2-4x+3)=2-(x^2-4x+3)\quad (*)\end{array}\right.$

Đặt $x^2-4x+3=t$, ta có: $(*)\Leftrightarrow f'(t)=2-t$.



Từ đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và $y=2-t$ ta có:

$$f'(t)=2-t\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\\ t=0\\ t=1\\ t=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-4x+3=-2\\ x^2-4x+3=0\\ x^2-4x+3=1\\ x^2-4x+3=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=3\\ x=2\pm\sqrt{2}\\ x=2\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên hàm số $y=g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		$2-\sqrt{2}$		1		2		3		$2+\sqrt{2}$		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Vậy hàm số $y=g(x)$ có 3 điểm cực đại.

Câu 83: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x+1\right)^4\left(x-m\right)^5\left(x+3\right)^3$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in\left[-5;5\right]$ để hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|x\right|\right)$ có 3 điểm cực trị.

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

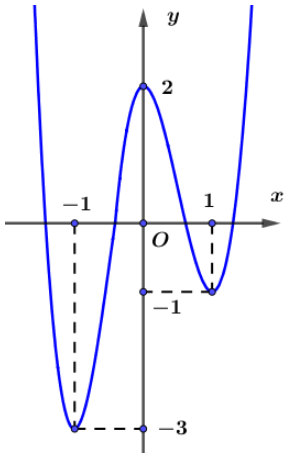
Chọn B

$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\left(\text{boäi chaün}\right)\\x=m\left(\text{boäi leû}\right)\\x=-3\left(\text{boäi leû}\right)\end{array}\right.$. Vậy hàm số $y=f\left(x\right)$ đạt cực trị tại $x=-3<0$; $x=m$.

Để hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|x\right|\right)$ có 3 điểm cực trị thì hàm số $y=f\left(x\right)$ phải có đúng 1 cực trị dương, nghĩa là $m>0$.

Vì $m\in\left[-5;5\right]$ nên $m\in\left\{1;2;3;4;5\right\}$. Vậy có 5 giá trị.

Câu 84: Cho hàm số bậc năm $y=f\left(x\right)$ có đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ dưới đây. Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(4x^2-4x\right)-\frac{8}{3}x^3+6x^2-4x+1$ là



A. 4. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=4\left(2x-1\right)f'\left(4x^2-4x\right)-4\left(2x-1\right)\left(x-1\right)$

$\Rightarrow y'=4\left(2x-1\right)\left[f'\left(4x^2-4x\right)-\left(x-1\right)\right]$.

$y'=0\Leftrightarrow y'=4\left(2x-1\right)\left[f'\left(4x^2-4x\right)-\left(x-1\right)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\f'\left(4x^2-4x\right)=x-1\end{array}\right.$

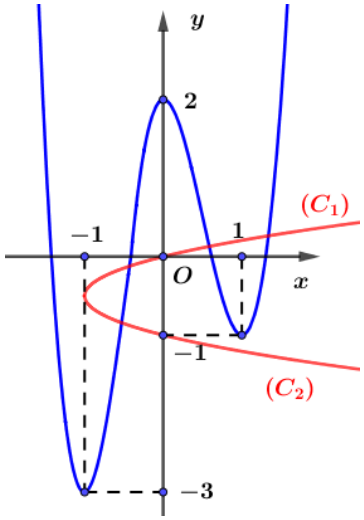
Xét phương trình: $f'\left(4x^2-4x\right)=x-1\ \left(1\right)$

Đặt $t=4x^2-4x \Rightarrow 4x^2-4x-t=0 \ \ \Delta'=4+4t\geq 0 \Leftrightarrow t\geq -1$.

Khi đó: $4x^2-4x-t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1-\sqrt{1+t}}{2} \\ x=\dfrac{1+\sqrt{1+t}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=\dfrac{-1-\sqrt{1+t}}{2} \\ x-1=\dfrac{-1+\sqrt{1+t}}{2} \end{array}\right.$

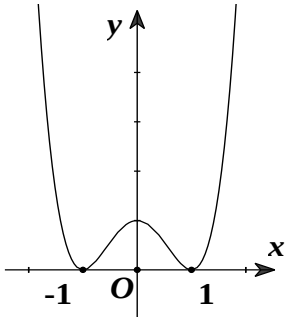
Phương trình (1) trở thành: $\left[\begin{array}{l} f'(t)=\dfrac{-1-\sqrt{1+t}}{2} \\ f'(t)=\dfrac{-1+\sqrt{1+t}}{2} \end{array}\right.$

Vẽ đồ thị 3 hàm số $y=f'(x), y=\dfrac{-1-\sqrt{1+x}}{2}(C_1), y=\dfrac{-1+\sqrt{1+x}}{2}(C_2)$ trên cùng hệ trục tọa độ ta thấy đồ thị (C_1) cắt đồ thị $y=f'(x)$ tại 3 điểm, đồ thị (C_2) cắt đồ thị $y=f'(x)$ tại 1 điểm.



Với mỗi nhánh, mỗi giao điểm t sẽ tương ứng với một giá trị duy nhất của x khác $\dfrac{1}{2}$.

Câu 85: Vậy hàm số $y=f\left(4x^2-4x\right)-\dfrac{8}{3}x^3+6x^2-4x+1$ có 5 điểm cực trị.Cho $f(x)$ là một hàm đa thức bậc năm thoả mãn $f(0)=0$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên



Hàm số $g(x)=\left|f(\sin x)+\dfrac{1}{3}\sin^3 x-\sin^2 x\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0;3\pi)$?

A. 15. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 13.

Lời giải

Chọn D

Do $f(x)$ là một hàm đa thức bậc năm nên $f'(x)$ là một hàm đa thức bậc bốn.

Dựa vào đồ thị hình vẽ ta nhận thấy $f'(x)$ có dạng $f'(x)=ax^4+bx^2+c$, đồ thị đi qua các điểm $A(0;1), B(1;0)$ và có điểm cực tiểu $x_{CT}=1$. Từ đó ta có:

$$\begin{cases} f'(0)=1 \\ f'(1)=0 \\ f''(1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=1 \\ a+b+c=0 \\ 4a+2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=1 \\ a=1 \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=x^4-2x^2+1$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x+c$$

Do $f(0)=0 \Rightarrow c=0 \Rightarrow f(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x$.

Xét hàm số $g(x)=\left|f(\sin x)+\frac{1}{3}\sin^3 x-\sin^2 x\right|$, ta đặt $h(x)=f(\sin x)+\frac{1}{3}\sin^3 x-\sin^2 x$

Tìm số cực trị của hàm số $y=h(x)$.

$h'(x)=\cos x.f'(\sin x)+\sin^2 x.\cos x-2\sin x.\cos x$

$$h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=0 \\ f'(\sin x)=-\sin^2 x+2\sin x \end{array}\right.$$

+)Với $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy phương trình $\cos x=0$ có 3 nghiệm đơn thuộc khoảng $(0;3\pi)$. (1)

+)Với $f'(\sin x)=-\sin^2 x+2\sin x$

Đặt $t=\sin x, t\in[-1;1] \Rightarrow f'(t)=-t^2+2t$

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$-t^2+2t=t^4-2t^2+1 \Leftrightarrow t^4-t^2-2t+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\alpha \ (\alpha\approx 1,3864) \ (l) \\ t=\beta \ (\beta\approx 0,4257) \ (n) \end{array}\right.$$

Với $t=\beta\in(0;1)$ thì $\sin x=\beta$, khi đó $f'(\sin x)=-\sin^2 x+2\sin x$ có 4 nghiệm đơn thuộc khoảng $(0;3\pi)$.(2)

Từ $(1),(2)$ suy ra hàm số $y=h(x)$ có 7 cực trị trên khoảng $(0;3\pi)$

Tìm số nghiệm của phương trình $h(x)=0$.

$t=\sin x \Rightarrow f(t)+\frac{1}{3}t^3-t^2=0$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+t+\frac{1}{3}t^3-t^2=0$$

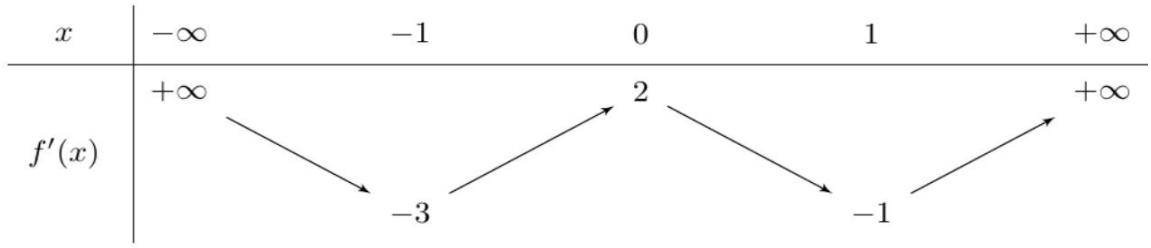
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ \frac{1}{5}t^4-\frac{1}{3}t^2-t+1=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=a \ (a\approx 1,69)(l) \\ t=b \ (b\approx 0,86) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=0 \\ \sin x=b \ (b\approx 0,86) \end{array}\right.$$

+ $\sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi, k\in\mathbb{Z} \Rightarrow$ phương trình $h(x)=0$ có 2 nghiệm thuộc khoảng $(0;3\pi)$.(3)

+ $\sin x=b \ (b\approx 0,86) \Rightarrow$ phương trình $h(x)=0$ có 4 nghiệm thuộc khoảng $(0;3\pi)$.(4)

Từ $(3),(4)$, suy ra $h(x)=0$ có 6 nghiệm đơn trên khoảng $(0;3\pi)$

Câu 86: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên $f'(x)$ như hình vẽ:



Hàm số $y=f\left(\left|e^{2x}-2x-2\right|\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 9. **B.** 7. **C.** 11. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x)=0$ tại $x_1;\ x_2;\ x_3; x_4$ trong đó $x_1<-1<x_2<0<x_3<1<x_4$

Xét hàm số $y=f\left(\left|e^{2x}-2x-2\right|\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$

$$y'=\frac{2\left(e^{2x}-1\right)\left(e^{2x}-2x-2\right)}{\left|e^{2x}-2x-2\right|}f'\left(\left|e^{2x}-2x-2\right|\right)$$

Với $e^{2x}-2x-2\neq 0$

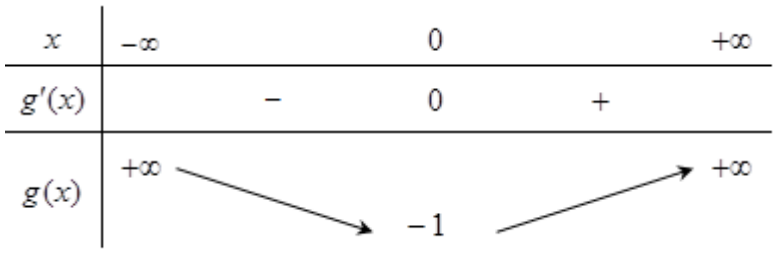
$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}e^{2x}-1=0\\ f'\left(\left|e^{2x}-2x-2\right|\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \left|e^{2x}-2x-2\right|=x_3\\ \left|e^{2x}-2x-2\right|=x_4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=0 & \\ e^{2x}-2x-2=x_3 & (1)\\ e^{2x}-2x-2=x_4 & (2)\\ e^{2x}-2x-2=-x_3 & (3)\\ e^{2x}-2x-2=-x_4 & (4)\end{array}\right.$$

Xét hàm số $g(x)=e^{2x}-2x-2$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

$g'(x)=2e^{2x}-2$

$g'(x)=0\Leftrightarrow x=0$

Ta có bảng biến thiên của hàm số



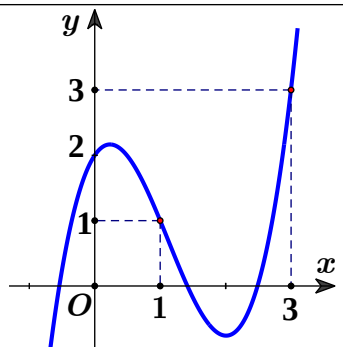
Dựa vào bảng biến thiên của hàm số ta có: phương trình,, có hai nghiệm phân biệt khác 0, phương trình vô nghiệm vì vậy phương trình $y'=0$ có 7 nghiệm phân biệt.

Mặt khác hàm số đạt cực trị tại các điểm thỏa mãn: $e^{2x}-2x-2=0$ (5).

Dựa vào bảng biến thiên hàm $g(x)$ suy ra phương trình (5) có hai nghiệm phân biệt khác 7 nghiệm của phương trình $y'=0$.

Vậy hàm số đã cho có 9 điểm cực trị.

Câu 87: **[Mức độ 4]** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=-1$. Biết $y=f'(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị là đường cong dưới đây.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f\left(x^4\right)-6x^2\right|$ là

A. 3. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

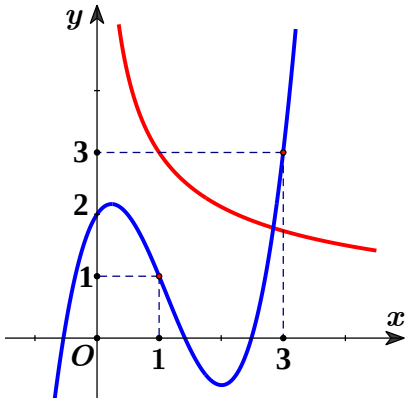
Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $h(x)=f\left(x^4\right)-6x^2$ có $h'(x)=4x^3f'\left(x^4\right)-12x=4x\left[x^2f'\left(x^4\right)-3\right]$.

$$h'(x)=0\Leftrightarrow 4x\left[x^2f'\left(x^4\right)-3\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'\left(x^4\right)=\dfrac{3}{x^2}\ (x\neq 0)\ (1)\end{array}\right.$$

Xét phương trình (1): đặt $t=x^4$ thì phương trình có dạng $f'(t)=\dfrac{3}{\sqrt{t}}$ với $t>0$ (2).



Dựa vào đồ thị, phương trình (2) có một nghiệm duy nhất $a>0$.

Khi đó ta được $x=\pm\sqrt[4]{a}$.

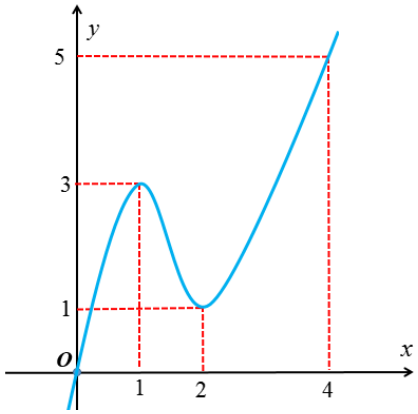
Bảng biến thiên của hàm số $h(x)=f\left(x^4\right)-6x^2$

x	$-\infty$		$-\sqrt[4]{a}$		0		$\sqrt[4]{a}$		$+\infty$
h'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	-1	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f\left(x^4\right)-6x^2\right|$ bằng số điểm cực trị của hàm số $h(x)=f\left(x^4\right)-6x^2$ cộng với số nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ của phương trình $h(x)=0$.

Do đó hàm số $g(x)$ có 5 cực trị.

Câu 88: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0)=0;f(4)>4$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=\left|f\left(x^2\right)-2x\right|$.



A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Đặt $h(x)=f\left(x^2\right)-2x \Rightarrow h'(x)=2x.f'\left(x^2\right)-2$.

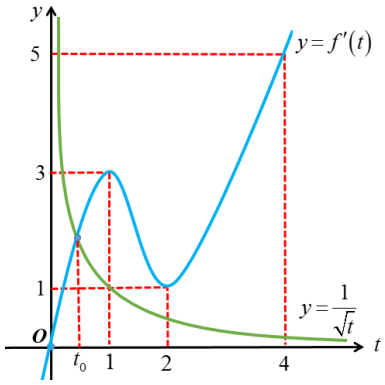
Vì $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên từ đồ thị ta thấy $f'\left(x^2\right) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Với $x \leq 0$ ta luôn có $h'(x)=2x.f'\left(x^2\right)-2<0$.

Với $x>0$, ta có $h'(x)=0 \Leftrightarrow f'\left(x^2\right)=\dfrac{1}{x} \quad (*)$.

Đặt $t=x^2$, phương trình $(*)$ trở thành $f'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}}(t>0)$.

Xét sự tương giao giữa hai đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và $y=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ ở hình vẽ dưới đây:



Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}} \Leftrightarrow t=t_0 \in(0;1)$. Khi đó $h'(x)=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{t_0}$.

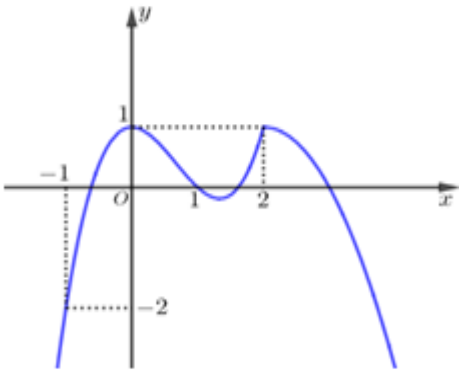
Mặt khác $h(0)=f(0)=0$ và $h(2)=f(4)-4>0$ nên ta có bảng biến thiên của hàm $y=h(x)$

.

x	$-\infty$		0		$\sqrt{t_0}$		2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$h\left(\sqrt{t_0}\right)$	$\nearrow$	$h(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $y=h(x)$ có một điểm cực trị và đồ thị hàm số $y=h(x)$ cắt Ox tại hai điểm phân biệt $\Rightarrow$ Hàm số $y=g(x)=|h(x)|$ có ba điểm cực trị trong đó có hai điểm cực tiểu.

Câu 89: Cho hàm số $y=f(x)$ có $f(1)<0$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=\left|f(x^2)-\frac{x^6}{3}+x^4-x^2\right|$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

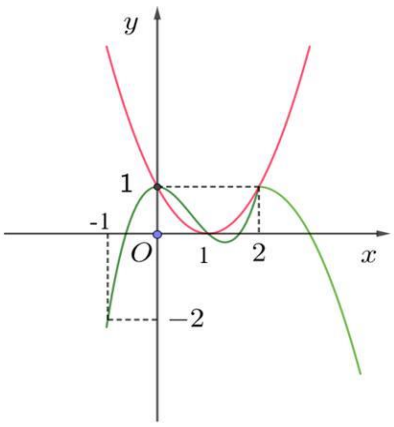
Chọn B

Ta có: $h(x)=f(x^2)-\frac{x^6}{3}+x^4-x^2 \Rightarrow h'(x)=2x\left[f'(x^2)-(x^4-2x^2+1)\right]$

$$h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \underbrace{f'(x^2)-(x^4-2x^2+1)}_{k(x)}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2)=(x^2)^2-2x^2+1 (*) \end{array}\right.$$

Đặt $t=x^2\,(t\geq 0)$,phương trình $(*)$ trở thành $f'(t)=t^2-2t^2+1(**)$.

Vẽ thêm đồ thị hàm số x^2-2x+1 trên đồ thị $f'(x)$ đề cho.



Dựa vào đồ thị, $(**)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=1 \\ t=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ x^2=1 \\ x^2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \text{(boäi chaün)} \\ x=\pm 1. \\ x=\pm\sqrt{2}. \end{array}\right.$.

Theo đồ thị ta thấy qua điểm $t=2$, đồ thị màu đỏ vẫn nằm trên đường màu xanh hay nói cách khác, dấu của biểu thức không bị đổi qua điểm này.

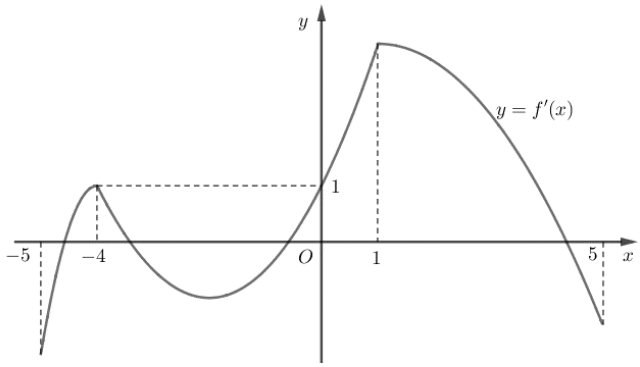
Vì vậy trong bảng biến thiên có thể bỏ qua xét tại hai điểm này.

Còn $x=0$ trở thành nghiệm bội lẻ của phương trình $h'(x)=0$, do đó ta vẫn xét.

Theo đó ta lập bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$		↗	$f(1)-\frac{1}{3}$	↘	$f(0)$	↗	$f(1)-\frac{1}{3}$	↘	
$g(x)$		↘	$f(1)-\frac{1}{3}$	↗	$f(0)$	↘	$f(1)-\frac{1}{3}$	↗	

Câu 90: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y=f\left(x^2+4x\right)-x^2-4x$ có bao nhiêu điểm cực trị thuộc khoảng $(-5;1)$?



A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x)=f\left(x^2+4x\right)-x^2-4x$

$\Rightarrow g'(x)=(2x+4)f'\left(x^2+4x\right)-(2x+4)=(2x+4)\left[f'\left(x^2+4x\right)-1\right]$.

Ta có $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}2x+4=0 & \\ x^2+4x=-4 & (1)\\ x^2+4x=0 & (2)\\ x^2+4x=a\in(1;5) & (3)\end{array}\right.$.

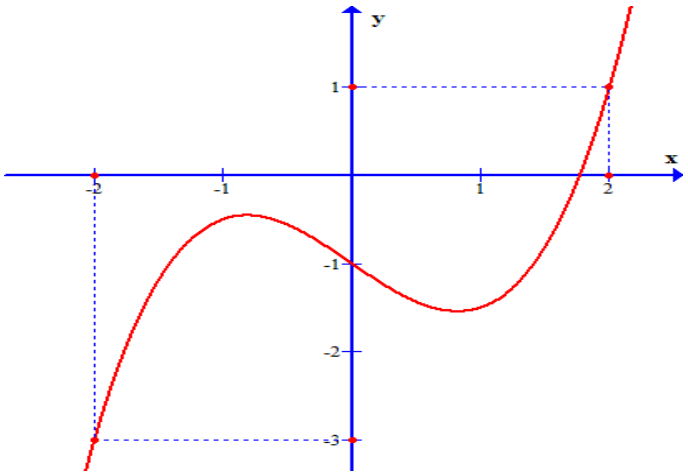
Xét phương trình $x^2+4x=a\in(1;5)$, ta có BBT của hàm số $y=x^2+4x$ trên $(-5;1)$ như sau:

x	-5		-4		-2		0		1
y'			$-$		0		$+$		
y	5	↘	0	↘	-4	↗	0	↗	5

Suy ra có nghiệm kép $x=-2$, có 2 nghiệm phân biệt $x=-4; x=0$, có 2 nghiệm phân biệt $x=x_1; x=x_2$ khác $-2;\ 0;\ -4$. Do đó phương trình $g'(x)=0$ có 5 nghiệm trong đó có $x=-2$ là nghiệm bội ba, các nghiệm $x=-4; x=0; x=x_1; x=x_2$ là các nghiệm đơn.

Vậy $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 91: Cho $f(x)$ là hàm bậc bốn thỏa mãn $f(0)=0$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $g(x)=\left|2f\left(x^2+x\right)-x^4-2x^3+x^2+2x\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Gọi $h(x)=2f\left(x^2+x\right)-x^4-2x^3+x^2+2x=2f\left(x^2+x\right)-\left(x^2+x\right)^2+2\left(x^2+x\right)$.

$\Rightarrow h'(x)=2(2x+1)f'\left(x^2+x\right)-2(2x+1)\left(x^2+x\right)+2(2x+1)$.

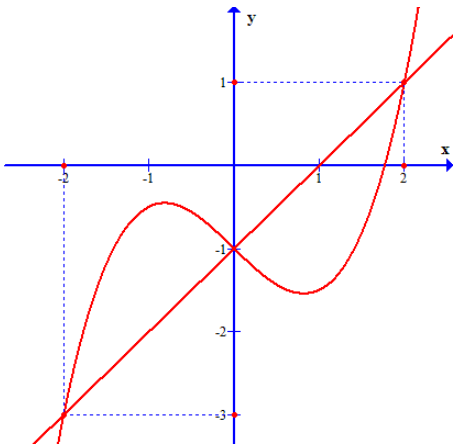
$$\Rightarrow h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+1=0\\ f'\left(x^2+x\right)-\left(x^2+x\right)+1=0\quad(*)\end{array}\right.$$

Đặt $t=x^2+x$. Khi đó phương trình trở thành $f'(t)-t+1=0$

$\Leftrightarrow f'(t)=t-1$

.

Ta vẽ đồ thị hai hàm số $y=f'(t)$ và $y=t-1$ trên cùng một hệ trục tọa độ



Dựa vào đồ thị ta thấy $f'(t)>t-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<t<0\\ t>2\end{array}\right.$.

Khi đó: $\left[\begin{array}{l}-2<x^2+x<0\\ x^2+x>2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x<0\\ x<-2\vee 1<x\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		-1		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
$2x+1$	$-$	$\|$	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	$\|$	$+$		
$f'(t)-t+1$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$		
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		
$h(x)$	$+\infty$			$h(-1)=0$				$h(0)=0$					$+\infty$
$g(x)$													Ox

Vậy hàm số $g(x)=|h(x)|$ có 7 điểm cực trị.

Câu 92: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0)=0$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		m		0		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$		-1				$+\infty$

Hàm số $g(x)=|f(x^2)-x^2|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7

Lời giải

Chọn C

Đặt $h(x)=f(x^2)-x^2 \Rightarrow h(0)=0.$

Ta có $h'(x)=2xf'(x^2)-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2)=1 \end{array}\right.$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $t=f'(x)$ ta có phương trình $f'(x)=1$ có duy nhất một nghiệm và nghiệm đó dương. Gọi x_0 là nghiệm của phương trình $f'(x)=1$.

Suy ra $f'(x^2)=1 \Leftrightarrow x^2=x_0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{x_0}$.

Ta có $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e \Rightarrow f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty \Rightarrow a>0.$

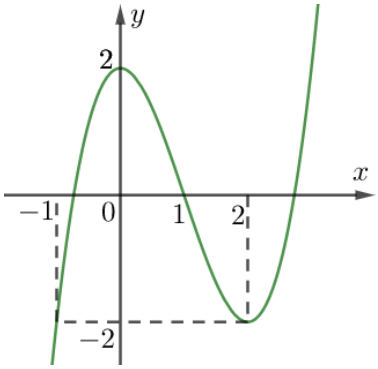
Khi đó $h(x)=f(x^2)-x^2$ là hàm bậc 8 và $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$

Lập bảng biến thiên của $h(x)$ ta có

x	$-\infty$		$-\sqrt{x_0}$		0		$\sqrt{x_0}$		$+\infty$
$h'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$h(x)$	$+\infty$	↘		↗	0	↘		↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số $g(x)=|h(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 93: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn. Biết $f(0)=0$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có hình vẽ bên dưới.



Hàm số $g(x)=\left|5f\left(\left|2\sin x-1\right|-1\right)+4\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị trên đoạn $[0;3\pi]$?

A. 16. **B.** 32. **C.** 17. **D.** 33.

Lời giải

Chọn D

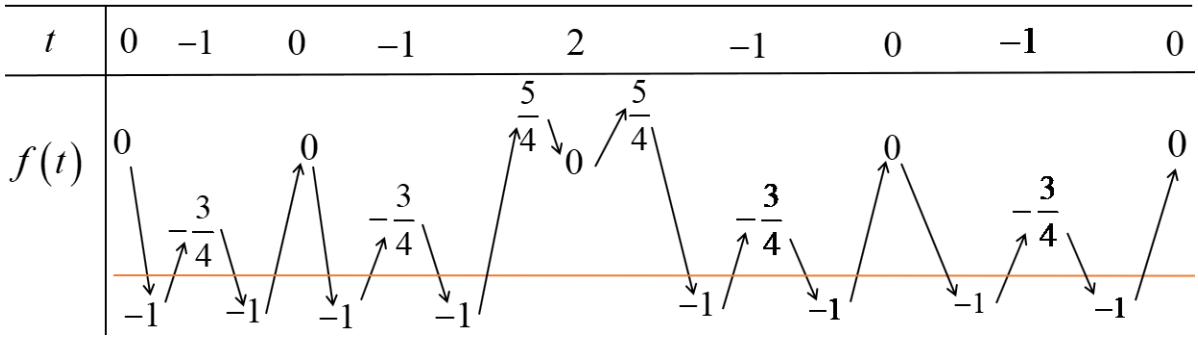
Ta có $f''(x)=ax(x-2)\Rightarrow f'(x)=a\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)+c$ qua $(0;2)$, $(-1;-2)$.

Nên $\begin{cases}c=2\\a=3\end{cases}\Rightarrow f'(x)=x^3-3x^2+2\Leftrightarrow f(x)=\frac{x^4}{4}-x^3+2x$.

x	$-\infty$		-1		$1-\sqrt{3}$		0		1		2		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$			−		0		+		0		−		0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{3}{4}$	↘	-1	↗	0	↗	$\frac{5}{4}$	↘	0	↘	-1	↗	$+\infty$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{17\pi}{6}$	3π
$2\sin x-1$	-1		1		-3		1		-1
$\left\|2\sin x-1\right\|-1$	0	$\longrightarrow -1$	$\longrightarrow \mathbf{0}$	$\longrightarrow \mathbf{-1}$	$\longrightarrow 2$	$\longrightarrow -1$	$\longrightarrow \mathbf{0}$	$\longrightarrow -1$	$\longrightarrow \mathbf{0}$

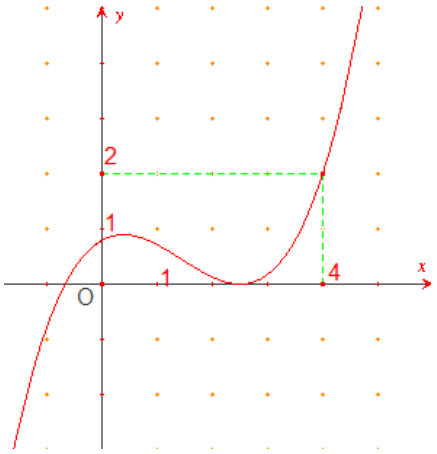
Bảng biến thiên của hàm số $y=f(t)$ với $t=\left|2\sin x-1\right|-1$



Suy ra phương trình có $f\left(\left|2\sin x-1\right|-1\right)=-\frac{4}{5}$ có 16 nghiệm trên đoạn $\left[0;3\pi\right]$ và hàm số $h(x)=5f\left(\left|2\sin x-1\right|-1\right)+4$ có 17 điểm cực trị trên đoạn $\left[0;3\pi\right]$.

Vậy hàm số $g(x)=\left|5f\left(\left|2\sin x-1\right|-1\right)+4\right|$ có $16+17=33$ điểm cực trị trên đoạn $\left[0;3\pi\right]$.

Câu 94: Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(0)=0$ và hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(x^2\right)-\frac{2}{3}x^3\right|$.

A. 3. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

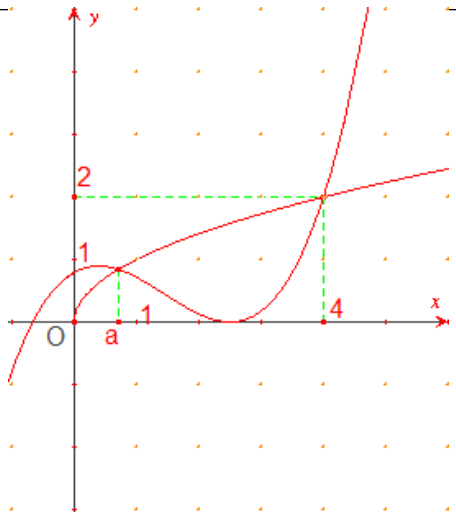
Đặt $h\left(x\right)=f\left(x^2\right)-\frac{2}{3}x^3$ liên tục trên R. Ta có: $h'\left(x\right)=f'\left(x^2\right).2x-2x^2=2x\left[f'\left(x^2\right)-x\right]$.

$$h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'(x^2)-x=0(*)\end{array}\right.$$

+ Nếu $x<0$ thì $x^2>0$. Ta có: $f'(x^2)\geq 0$; $-x>0$. Suy ra $(*)$ vô nghiệm.

+ Nếu $x\geq 0$ thì $(*)\Leftrightarrow f'(t)=\sqrt{t}$

Xét đồ thị hàm số $y=f'(t)$; $y=\sqrt{t}$



Ta thấy: $f'(t)=\sqrt{t}$ có 2 nghiệm dương phân biệt là a và 4.

Suy ra $(*)$ có 2 nghiệm dương phân biệt $\sqrt{a}$; 2.

Do đó $h'(x)$ có 3 nghiệm phân biệt là $0;\sqrt{a}$; 2.

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x)=+\infty$, $h(0)=f(0)-0=0$.

Nhìn vào lưới ô vuông và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta thấy: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$, trục Ox, Oy và đường thẳng $x=4$ nhỏ hơn 4. Do đó ta có:

$\int\limits_0^4 f'(x)dx<4\Leftrightarrow f(4)-f(0)<4\Leftrightarrow f(4)<4$.

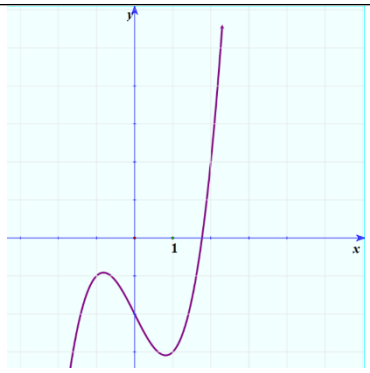
Suy ra $h(2)=f(4)-\dfrac{16}{3}<0$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=h(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		a		2		$+\infty$
$h'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$h(x)$	$+\infty$	↘	0	↗		↘	$h(2)<0$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $y=h(x)$ có 3 điểm cực trị và phương trình $h(x)=0$ có 2 nghiệm bội lẻ nên hàm số $g(x)=|h(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 95: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có $f(0)=2021$ và đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ như hình bên dưới.



Hỏi hàm số $y=\left|f\left(x^2\right)-2|x|-2021\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Đặt $g(x)=f\left(x^2\right)-2x-2021$ với $x>0$

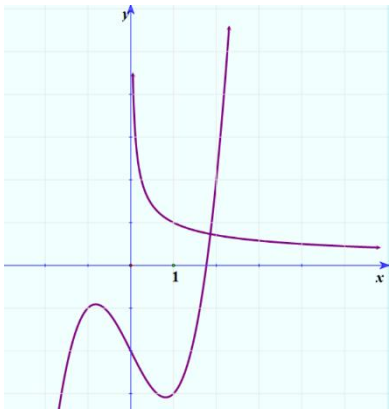
Ta có $g'(x)=2xf'\left(x^2\right)-2$

$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow f'\left(x^2\right)=\frac{1}{x}$,

Đặt $t=x^2$, do $x>0\Rightarrow x=\sqrt{x^2}=\sqrt{t}$

Do đó trở thành $f'\left(t\right)=\frac{1}{\sqrt{t}}$.

Vẽ đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và đồ thị hàm số $y=\frac{1}{\sqrt{t}}$ trên cùng 1 hệ trục tọa độ.



Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình có 1 nghiệm dương duy nhất $t=c$.

Từ đó có nghiệm dương duy nhất $x=\sqrt{c}$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)=f\left(x^2\right)-2x-2021$ với $x>0$

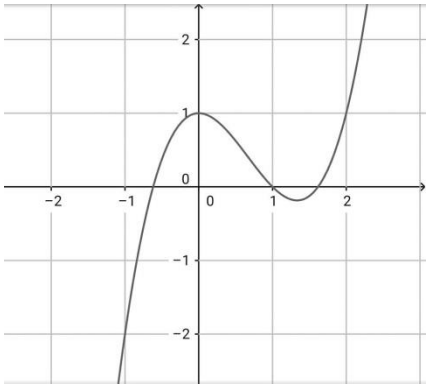
x	0		$\sqrt{c}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	↘		↗	$+\infty$

Do đó hàm số $y=g\left(|x|\right)=f\left(x^2\right)-2|x|-2021$ có bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$-\sqrt{c}$		0		$\sqrt{c}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘		↗	0	↘		↗	$+\infty$

Vậy hàm số $y=\left|f\left(x^2\right)-2|x|-2021\right|=\left|g\left(|x|\right)\right|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 96: Cho $f\left(x\right)$ là một hàm số bậc bốn thỏa mãn $f\left(1\right)=-\dfrac{5}{3}$. Hàm số $f'\left(x\right)$ có đồ thị như sau:



Hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(x\right)-\dfrac{x^3}{3}+x^2-x+2\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

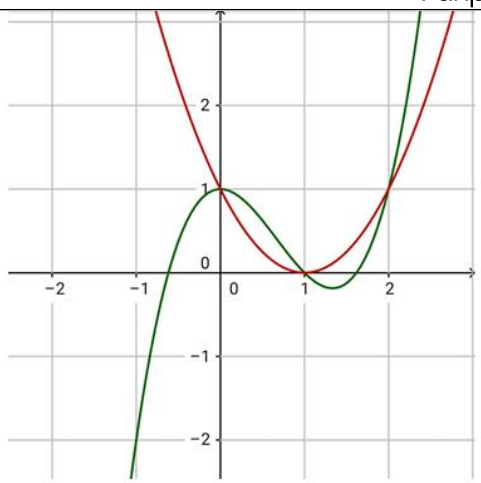
Chọn D

Xét hàm số $h\left(x\right)=f\left(x\right)-\dfrac{x^3}{3}+x^2-x+2$

Ta có $h'\left(x\right)=f'\left(x\right)-\left(x-1\right)^2$

Điểm cực trị của hàm số $y=h\left(x\right)$ là nghiệm của phương trình $h'\left(x\right)=0$ tức là nghiệm của phương trình $f'\left(x\right)=\left(x-1\right)^2$ suy ra điểm cực trị của hàm số $y=h\left(x\right)$ cũng là hoành độ giao điểm của các đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right);y=x^2-2x+1$.

Vẽ đồ thị của các hàm số $y=f'\left(x\right);y=x^2-2x+1$ trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ sau:



Dựa vào đồ thị trên ta có BBT của hàm số $y=h(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	
$h(x)$		↘		↗		↘		↗	

Hơn nữa, vì $f(x)$ là hàm số bậc bốn và $f(1)=-\dfrac{5}{3}$ nên $h(x)$ cũng là hàm số bậc bốn và $h(1)=0$, do đó ta có BBT của hàm số $y=h(x)$ chi tiết hơn như sau:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	a	↗	0	↘	b	↗	$+\infty$

trong đó a, b là các số âm.

Từ BBT suy ra đồ thị hàm số $h(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm, tiếp xúc với trục hoành tại điểm cực đại và hai điểm cực tiểu nằm phía dưới trục hoành nên hàm số $g(x)=\left|h(x)\right|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 97: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(-3)=0$ đồng thời có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g(x)=\left|2(x+1)^6-6(x+1)^2-3f\left(-x^4-4x^3-4x^2-2\right)\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 7. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Đặt $h(x)=2(x+1)^6-6(x+1)^2-3f\left(-x^4-4x^3-4x^2-2\right)$

$\Rightarrow h'(x)=12(x+1)^5-12(x+1)-3\left(-4x^3-12x^2-8x\right).f'\left(-x^4-4x^3-4x^2-2\right)$

$=12(x+1)\left(x^2+2x\right)\left(x^2+2x+2\right)+12(x+1)\left(x^2+2x\right).f'\left(-x^4-4x^3-4x^2-2\right)$

$=12(x+1)\left(x^2+2x\right)\left[x^2+2x+2+f'\left(-x^4-4x^3-4x^2-2\right)\right]$

Mà $-x^4-4x^3-4x^2-2=-\left[x(x+2)\right]^2-2\le -2$, $\forall x\in\mathbb{R}$ nên dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ ta suy ra $f'\left(-x^4-4x^3-4x^2-2\right)\ge 0$.

$\Rightarrow x^2+2x+2+f'\left(-x^4-4x^3-4x^2-2\right)>0,\forall x\in\mathbb{R}$

Do đó dấu của $h'(x)$ cùng dấu với $u(x)=12(x+1)\left(x^2+2x\right)$, tức là đổi dấu khi đi qua các điểm $x=-2;x=-1;x=0$.

Vậy hàm số $h(x)$ có 3 điểm cực trị.

Ta có $h(-1)=-3f(-3)=0$ nên đồ thị hàm số $y=h(x)$ tiếp xúc Ox tại $x=-1$ và cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt.

Vậy $y=g(x)$ có 5 điểm cực trị.

DẠNG 9 Tìm m để HS, ĐTHS bậc 3 có cực trị TMĐK

Câu 1: Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-m^3-m$, với m là tham số. Gọi A,B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số và $I\left(2;-2\right)$. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m sao cho ba điểm I,A,B tạo thành tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{5}$. Tính tổng các phần tử của S.

A. $\frac{20}{17}$. **B.** $\frac{15}{17}$. **C.** $\frac{3}{17}$. **D.** $\frac{4}{17}$.

Câu 2: Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-m+1\right)x+1$ đạt cực đại tại điểm $x=1$ khi

A. $m=1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=1$ hoặc $m=-1$. **D.** $m=2$.

Câu 3: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+1$. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là A,B thỏa $x_A^2+x_B^2=2$.

A. $m=0$. **B.** $m=2$. **C.** $m=\pm1$. **D.** $m=\pm3$.

Câu 4: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{m}{2}x^2-\left(3m^2-1\right)x+m$ đạt cực trị tại hai điểm x_1,x_2 thỏa mãn $x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)+4=0$. Số phần tử của S là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 5: Gọi m_1, m_2 là các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=2x^3-3x^2+m-1$ có hai điểm cực trị là B, C sao cho tam giác OBC có diện tích bằng 2,với O là gốc tọa độ. Tính $m_1.m_2$.

A. 6. **B.** -15. **C.** 12. **D.** -20.

Câu 6: Cho biết hàm số $y=x^3-3x^2+mx-1$ đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=3$. Khi đó

A. $m\in(0;1)$. **B.** $m\in(2;3)$. **C.** $m\in(1;2)$. **D.** $m\le-1$.

Câu 7: Tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+x^2+\left(m-1\right)x+2$ có hai điểm cực trị nằm bên trái trục tung là:

A. $(-\infty;1)$.. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-\infty;2)$.. **D.** $(1;+\infty)$.

Câu 8: Biết rằng đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}mx^2+x-2$ có giá trị tuyệt đối của hoành độ hai điểm cực trị là độ dài hai cạnh của tam giác vuông có cạnh huyền $\sqrt{7}$. Hỏi có mấy giá trị của m?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 9: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-\left(2m+1\right)x^2+\left(2m^2+2m-4\right)x-2m^2+4$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành?

A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 10: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-(m-2)x^2-9x+1$, với m là tham số. Gọi x_1, x_2 là các điểm cực trị của hàm số đã cho thì giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left|9x_1-25x_2\right|$ bằng

A. 15. **B.** 90. **C.** 450. **D.** 45.

Câu 11: Cho hàm số $y=x^3-mx^2-m^2x+8$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên đề hàm số có điểm cực tiểu nằm hoàn toàn phía trên trục hoành?

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 12: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(3m+2)x^2+\left(2m^2+3m+1\right)x-2$ có điểm cực đại x_{CD} và điểm cực tiểu x_{CT} thoả mãn $3x_{CD}^2=4x_{CT}$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 13: Gọi m_1, m_2 là các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=2x^3-3x^2+m-1$ có hai điểm cực trị là B, C sao cho tam giác OBC có diện tích bằng 2,với O là gốc tọa độ. Tính $m_1.m_2$.

A. 6. **B.** -15. **C.** 12. **D.** -20.

Câu 14: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-(m+2)x^2+\left(m^2+4m+3\right)x+6m+9$. Tìm giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (C) có cực đại tại x_1, đạt cực tiểu tại x_2 sao cho $x_1^{\,2}=2x_2$.

A. $m=4$. **B.** $m=-2$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m=4\\m=-2\end{array}\right.$. **D.** $m=\pm\sqrt{5}$.

Câu 15: Hàm số $y=x^3-3x^2+mx-1$ có hai điểm cực trị x_1,x_2 thỏa $x_1^{\,2}+x_2^{\,2}=3$ khi

A. $m=\frac{1}{2}$. **B.** $m=\frac{3}{2}$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=1$.

Câu 16: Cho $A=\{n\in\mathbb{Z}\,|\,0\le n\le 20\}$ và F là tập hợp các hàm số $f(x)=x^3+(2m^2-5)x^2+6x-8m^2$ có $m\in A$. Chọn ngẫu nhiên một hàm số $f(x)$ thuộc F. Tính xác suất để đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị nằm khác phía đối với trục Ox.

A. $\frac{18}{21}$. **B.** $\frac{19}{20}$. **C.** $\frac{9}{10}$. **D.** $\frac{19}{21}$.

Câu 17: Biết $\frac{a}{b}$ là giá trị của tham số m để hàm số $y=2x^3-3mx^2-6\left(3m^2-1\right)x+2020$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)=1$. Tính $P=a+2b$.

A. 6. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 7.

Câu 18: Cho hàm số $y=x^3-mx^2-m^2x+8$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số có điểm cực tiểu nằm hoàn toàn phía trên trục hoành?

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 19: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(3m+2)x^2+\left(2m^2+3m+1\right)x-2$ có điểm cực đại x_{CD} và điểm cực tiểu x_{CT} thoả mãn $3x_{CD}^2=4x_{CT}$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 20: Cho hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+9x-2m^2+1$. Hãy tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho có các điểm cực trị là $x_1;x_2$ sao cho $|x_1-x_2|=2$?

A. $m=1$. **B.** $m=-3$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-3\end{array}\right.$. **D.** $m\in\varnothing$.

Câu 21: Cho hàm số $y=x^3-3mx+1$ **(1)** và điểm $A(2;3)$. Biết m là một giá trị để đồ thị hàm số **(1)** có hai điểm cực trị B và C sao cho tam giác ABC cân tại A. Diện tích tam giác ABC bằng

A. 6. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 3. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 22: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-m^3+m$ có hai điểm cực trị A, B và $OA+OB$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. Vô số. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 23: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-m-1\right)x+1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2+2mx_2-3m^2+m-5\le 0$?

A. 9. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 4.

Câu 24: Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=-x^3+3x^2+3\left(m^2-1\right)x-3m^2-1$ có điểm cực đại và cực tiểu cùng với gốc tọa độ tạo thành tam giác vuông tại O. Tích tất cả các giá trị của tập S bằng

A. -1. **B.** $-\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** 1.

Câu 25: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}mx^2+x-2$ đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $x_1+x_2+x_1x_2=3$

A. $m=-4$. **B.** $m=2$.
C. $m=3$. **D.** Không có giá trị m.

Câu 26: Biết m_o là giá trị tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx-1$ có hai điểm cực trị x_1,x_2 sao cho ${x_1}^2+{x_2}^2-x_1x_2=13$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m_0\in(-7;-1)$. **B.** $m_0\in(7;10)$. **C.** $m_0\in(-1;7)$. **D.** $m_0\in(-15;-7)$.

Câu 27: Cho hàm số $y=(m-3)x^3+2\left(m^2-m-1\right)x^2+(m+4)x-1$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục Oy. Tổng các phần tử của S là

A. -3. **B.** -4. **C.** 0. **D.** -2.

Câu 28: Biết rằng $m_0=\frac{a}{b}, a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{N}^*$, $\frac{a}{b}$ tối giản là giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(m-1)x^2+(3m-2)x+1$ có 2 điểm cực trị trái dấu x_1, x_2 thoả mãn $\frac{1}{x_1}-2=\left|\frac{1}{x_2}\right|$.

Tính tổng $S=a+2b$?

A. 13. **B.** 8. **C.** 11. **D.** -11.

Câu 29: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác AOB là tam giác cân tại O.

Lời giải

Ta có $y'=3x^2-6x$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Suy ra đồ thị hàm số đã cho luôn có hai điểm cực trị.

Gọi $A\ 0;m$; $B\ 2;m-4$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Tam giác AOB cân tại O khi và chỉ khi $OA=OB$ hay $OA^2=OB^2$.

Mà $\overrightarrow{OA}\ 0;m$; $\overrightarrow{OB}\ 2;m-4$. Từ đó suy ra $m^2=2^2+\ m-4\ ^2\Leftrightarrow 20-8m=0\Leftrightarrow m=\frac{5}{2}$.

Vậy $m=\frac{5}{2}$ là giá trị cần tìm.

Câu 30: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}mx^3-(m-1)x^2+3(m-2)x+\frac{1}{6}$ đạt cực trị tại $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $x_1+2x_2=1$.

A. $\left[\begin{array}{l}m=\frac{2}{3}.\\m=2\end{array}\right.$ **B.** $1-\frac{\sqrt{6}}{2}<m<1+\frac{\sqrt{6}}{2}$.

C. $m\in\left(1-\frac{\sqrt{6}}{2};1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\backslash\{0\}$. **D.** $m=2$.

Câu 31: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{x^3}{3}-(5m^2-3m-1)x^2+(2m+1)x+1$ có hai điểm cực trị A và B sao cho A, B cách đều đường thẳng $x-1=0$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 32: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{x^3}{3}-(5m^2-3m-1)x^2+(2m+1)x+1$ có hai điểm cực trị A và B sao cho A, B cách đều đường thẳng $x-1=0$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 33: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số đối xứng nhau qua đường phân giác (d) của góc phần tư thứ nhất và thứ ba.

A. 1 **B.** 4 **C.** 2. **D.** 3

Câu 34: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số đối xứng nhau qua đường phân giác (d) của góc phần tư thứ nhất và thứ ba.

A. 1 **B.** 4 **C.** 2. **D.** 3

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-m^3-m$, với m là tham số. Gọi A,B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số và $I\left(2;-2\right)$. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m sao cho ba điểm I,A,B tạo thành tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{5}$. Tính tổng các phần tử của S.

A. $\frac{20}{17}$. **B.** $\frac{15}{17}$. **C.** $\frac{3}{17}$. **D.** $\frac{4}{17}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=3x^2-6mx+3m^2-3$.

Vì $\Delta'=1>0$ nên hàm số luôn có hai cực trị với mọi m. Gọi $A\left(m+1;-4m-2\right);B\left(m-1;-4m+2\right)$ suy ra $AB=2\sqrt{5}$ nên AB là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB.

Ta có $\overrightarrow{IA}=\left(m-1;-4m\right);\ \overrightarrow{IB}=\left(m-3;-4m+4\right)$

Vì $\overrightarrow{IA}\perp\overrightarrow{IB}\Rightarrow\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}=0\Leftrightarrow\left(m-1\right)\left(m-3\right)-4m\left(-4m+4\right)=0\Leftrightarrow17m^2-20m+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=\frac{3}{17}\end{array}\right.$

Tổng các phần tử của S là $\frac{20}{17}$.

Câu 2: Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-m+1\right)x+1$ đạt cực đại tại điểm $x=1$ khi

A. $m=1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=1$ hoặc $m=-1$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=x^2-2mx+m^2-m+1$ và $y''=2x-2m$

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=1$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases}y'\left(1\right)=0\\y''\left(1\right)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-3m+2=0\\2-2m<0\end{cases}\Leftrightarrow m=2.$$

Câu 3: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+1$. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là A,B thỏa $x_A^2+x_B^2=2$.

A. $m=0$. **B.** $m=2$. **C.** $m=\pm1$. **D.** $m=\pm3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=x^2-2mx-1\left(1\right)$.

Hàm số đã cho có hai điểm cực trị $A,B\Leftrightarrow\Delta'=m^2-1.\left(-1\right)=m^2+1>0,\forall m\in\mathbb{R}$.

Khi đó, x_A,x_B là hai nghiệm của tam thức $\left(1\right)$.

Suy ra $x_A + x_B = -\dfrac{b}{a} = 2m,\ x_A.x_B = \dfrac{c}{a} = -1.$

Ta có $x_A^2 + x_B^2 = 2 \Leftrightarrow \left(x_A + x_B\right)^2 - 2x_A x_B = 2 \Leftrightarrow 4m^2 - 2.\left(-1\right) = 2 \Leftrightarrow 4m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0.$

Vậy, $m = 0$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 4: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{m}{2}x^2 - \left(3m^2 - 1\right)x + m$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2 + 2\left(x_1 + x_2\right) + 4 = 0$. Số phần tử của S là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = x^2 - mx - 3m^2 + 1$.

Hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{m}{2}x^2 - \left(3m^2 - 1\right)x + m$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Khi đó $\Delta = m^2 - 4\left(-3m^2 + 1\right) > 0 \Leftrightarrow 13m^2 - 4 > 0$ (*).

Theo định lí Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = -3m^2 + 1 \end{cases}$.

Do đó $x_1x_2 + 2\left(x_1 + x_2\right) + 4 = 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 1 + 2m + 4 = 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 2m + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = \dfrac{5}{3} \end{array}\right.$.

Do điều kiện (*) nên giá trị của m cần tìm là $\left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = \dfrac{5}{3} \end{array}\right.$.

Vậy tập hợp S có 2 phần tử.

Câu 5: Gọi m_1, m_2 là các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + m - 1$ có hai điểm cực trị là B, C sao cho tam giác OBC có diện tích bằng 2 ,với O là gốc tọa độ. Tính $m_1.m_2$.

A. 6. **B.** -15. **C.** 12. **D.** -20.

Lời giải

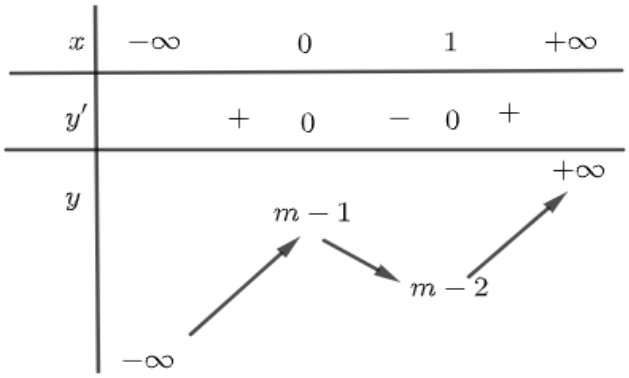
Chọn B

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$y' = 6x^2 - 6x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0; y = m - 1 \\ x = 1; y = m - 2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:



Vậy $B(0;m-1)$, $C(1;m-2)$.

$\overrightarrow{BC}=(1;-1)\Rightarrow BC=\sqrt{2}$.

(BC) đi qua $B(0;m-1)$ và nhận $\vec{n}=(1;1)$ làm một vectơ pháp tuyến nên có phương trình

$$1(x-0)+1(y-m+1)=0\Leftrightarrow x+y-m+1=0.$$

$d(O;BC)=\dfrac{|1-m|}{\sqrt{2}}$.

$$S_{OBC}=\frac{1}{2}d(O;BC).BC=\frac{1}{2}.\frac{|1-m|}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}=2\Leftrightarrow|1-m|=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-m=4\\1-m=-4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-3\\m=5\end{array}\right.$$

Vậy $m_1.m_2=-15$.

Câu 6: Cho biết hàm số $y=x^3-3x^2+mx-1$ đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=3$. Khi đó

A. $m\in(0;1)$. **B.** $m\in(2;3)$. **C.** $m\in(1;2)$. **D.** $m\le -1$.

Lời giải

Chọn C

$D=\mathbb{R}$.

$y'=3x^2-6x+m$, hàm số có hai cực trị x_1,x_2 khi và chỉ khi $\Delta>0\Leftrightarrow 9-3m>0\Leftrightarrow m<3$.

Khi đó $\begin{cases}x_1+x_2=2\\x_1.x_2=\dfrac{m}{3}\end{cases}$. Mặt khác

$$x_1^2+x_2^2=3\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=3\Leftrightarrow 2^2-\frac{2m}{3}=3\Leftrightarrow m=\frac{3}{2}(tm).$$

Câu 7: Tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3+x^2+(m-1)x+2$ có hai điểm cực trị nằm bên trái trục tung là:

A. $(-\infty;1)$.. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-\infty;2)$.. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có : $y'=x^2+2x+m-1$.

Đồ thị hàm số đã cho có 2 điểm cực trị nằm bên trái trục tung khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{y'}>0 \\ S<0 \\ P>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m+1>0 \\ -2<0 \\ m-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow 1<m<2.$

Câu 8: Biết rằng đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}mx^2+x-2$ có giá trị tuyệt đối của hoành độ hai điểm cực trị là độ dài hai cạnh của tam giác vuông có cạnh huyền $\sqrt{7}$. Hỏi có mấy giá trị của m?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=x^2-mx+1.$

$y'=0 \Leftrightarrow x^2-mx+1=0.$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'=m^2-4>0.$

Khi đó, gọi các nghiệm của là x_1, x_2 thì x_1, x_2 chính là hoành độ hai điểm cực trị. Theo Viet ta có $x_1+x_2=m; x_1.x_2=1.$

Theo bài ra ta có: $x_1^2+x_2^2=7 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=7 \Leftrightarrow m^2-2=7 \Leftrightarrow m^2=9 \Leftrightarrow m=\pm 3$).

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 9: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-(2m+1)x^2+(2m^2+2m-4)x-2m^2+4$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành?

A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-(2m+1)x^2+(2m^2+2m-4)x-2m^2+4=0 \ (1).$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-2mx+2m^2-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ f(x)=x^2-2mx+2m^2-4=0 \quad (2) \end{array}\right.$.

Đồ thị hàm số $y=x^3-(2m+1)x^2+(2m^2+2m-4)x-2m^2+4$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành khi và chỉ khi phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (2)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=m^2-(2m^2-4)>0 \\ f(1)=2m^2-2m-3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<2 \\ m\neq \frac{1\pm\sqrt{7}}{2} \end{cases}.$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-1;0;1\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 10: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-(m-2)x^2-9x+1$, với m là tham số. Gọi x_1, x_2 là các điểm cực trị của hàm số đã cho thì giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|9x_1-25x_2|$ bằng

A. 15. **B.** 90. **C.** 450. **D.** 45.

Lời giải

Chọn B

+ $y' = x^2 - 2(m-2)x - 9$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m-2)x - 9 = 0$.

+ Có $\Delta' = (m-2)^2 + 9 > 0, \forall m$ nên hàm số có hai cực trị.

Theo định lý Vi-et: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-2) \\ x_1.x_2 = -9 \end{cases}$.

Khi đó x_1, x_2 trái dấu.

+ Nếu $x_1 > 0$ thì $|9x_1 - 25x_2| = \left|9x_1 - 25.\left(-\frac{9}{x_1}\right)\right| = \left|9x_1 + \frac{225}{x_1}\right| \geq \left|2.\sqrt{9x_1.\frac{225}{x_1}}\right| = 90$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $9x_1 = \frac{225}{x_1} \Leftrightarrow x_1^2 = 25 \Leftrightarrow x_1 = 5$.

+ Nếu $x_1 < 0$ thì $-x_1 > 0$, khi đó

$|9x_1 - 25x_2| = \left|9x_1 - 25.\left(-\frac{9}{x_1}\right)\right| = \left|9(-x_1) + \frac{225}{-x_1}\right| \geq \left|2.\sqrt{9(-x_1).\frac{225}{(-x_1)}}\right| = 90$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $9x_1 = \frac{225}{x_1} \Leftrightarrow x_1^2 = 25 \Leftrightarrow x_1 = -5$.

Vậy GTNN $|9x_1 - 25x_2|$ là 90. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = \pm 5$.

Câu 11: Cho hàm số $y = x^3 - mx^2 - m^2x + 8$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên đề hàm số có điểm cực tiểu nằm hoàn toàn phía trên trục hoành?

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = 3x^2 - 2mx - m^2$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = -\frac{m}{3} \end{array}\right.$.

Để hàm số có hai điểm cực trị thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 0$.

Trường hợp 1: $m > 0 \Rightarrow y_{ct} = y(m) = -m^3 + 8 > 0 \Leftrightarrow m < 2$. Vậy $0 < m < 2 \Rightarrow$ có 1 giá trị nguyên $m = 1$.

Trường hợp 2: $m < 0 \Rightarrow y_{ct} = y\left(-\frac{m}{3}\right) = \frac{5}{27}m^3 + 8 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{6}{\sqrt[3]{5}}$. Vậy $-\frac{6}{\sqrt[3]{5}} < m < 0 \Rightarrow$ có 3 giá trị nguyên của m là $\{-3; -2; -1\}$.

Vậy tổng số có 4 giá trị nguyên của m.

Câu 12: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(3m+2)x^2 + (2m^2 + 3m + 1)x - 2$ có điểm cực đại x_{CD} và điểm cực tiểu x_{CT} thoả mãn $3x_{CD}^2 = 4x_{CT}$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(3m+2)x^2+(2m^2+3m+1)x-2 \Rightarrow y'=x^2-(3m+2)x+(2m^2+3m+1)$ có

$\Delta=m^2\geq 0, \forall m\in\mathbb{R}$ nên $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2m+1\\x=m+1\end{array}\right.$.

Hàm số có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi $m\neq 0$.

Trường hợp 1. $x_{CD}=2m+1; x_{CT}=m+1$.

Do $a=\frac{1}{3}>0$ nên suy ra $x_{CD}<x_{CT}\Leftrightarrow 2m+1<m+1\Leftrightarrow m<0$.

Lại có $3x_{CD}^2=4x_{CT}\Leftrightarrow 3(2m+1)^2=4(m+1)\Leftrightarrow 12m^2+8m-1=0\Leftrightarrow m=\frac{-2\pm\sqrt{7}}{6}$.

Với điều kiện $m<0\Rightarrow m=\frac{-2-\sqrt{7}}{6}$ thoả mãn.

Trường hợp 2: $x_{CD}=m+1; x_{CT}=2m+1$

Do $a=\frac{1}{3}>0$ nên suy ra $x_{CD}<x_{CT}\Leftrightarrow m+1<2m+1\Leftrightarrow m>0$.

Lại có $3x_{CD}^2=4x_{CT}\Leftrightarrow 3(m+1)^2=4(2m+1)\Leftrightarrow 3m^2-2m-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-\frac{1}{3}\end{array}\right.$.

Với điều kiện $m>0\Rightarrow m=1$ thoả mãn.

Kết luận: vậy có 2 giá trị thực của tham số m thoả mãn.

Câu 13: Gọi m_1, m_2 là các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=2x^3-3x^2+m-1$ có hai điểm cực trị là B, C sao cho tam giác OBC có diện tích bằng 2,với O là gốc tọa độ. Tính $m_1.m_2$.

A. 6. **B.** -15. **C.** 12. **D.** -20.

Lời giải

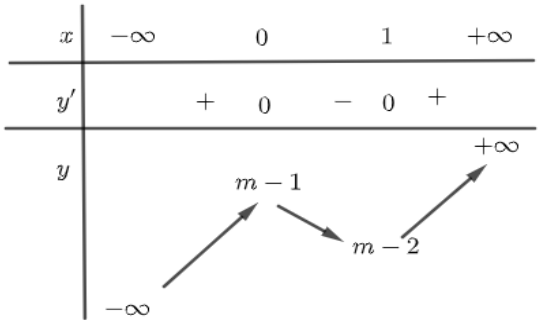
Chọn B

Hàm số xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$.

$y'=6x^2-6x$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0; y=m-1\\x=1; y=m-2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:



Vậy $B(0;m-1)$, $C(1;m-2)$.

$\overrightarrow{BC}=(1;-1)\Rightarrow BC=\sqrt{2}$.

(BC) đi qua $B(0;m-1)$ và nhận $\vec{n}=(1;1)$ làm một vectơ pháp tuyến nên có phương trình

$$1(x-0)+1(y-m+1)=0 \Leftrightarrow x+y-m+1=0.$$

$d(O;BC)=\dfrac{|1-m|}{\sqrt{2}}$.

$S_{OBC}=\dfrac{1}{2}d(O;BC).BC=\dfrac{1}{2}.\dfrac{|1-m|}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}=2\Leftrightarrow|1-m|=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-m=4\\1-m=-4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-3\\m=5\end{array}\right.$.

Vậy $m_1.m_2=-15$.

Câu 14: Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-(m+2)x^2+(m^2+4m+3)x+6m+9$. Tìm giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (C) có cực đại tại x_1, đạt cực tiểu tại x_2 sao cho $x_1^2=2x_2$.

A. $m=4$. **B.** $m=-2$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m=4\\m=-2\end{array}\right.$. **D.** $m=\pm\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=x^2-2(m+2)x+m^2+4m+3$.

Hàm số đạt cực đại tại x_1, đạt cực tiểu tại x_2 khi và chỉ khi

$\Delta'>0\Leftrightarrow(m+2)^2-(m^2+4m+3)>0\Leftrightarrow 1>0$, $\forall m\in\mathbb{R}$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m+3\\x=m+1\end{array}\right.$.

Theo đề bài ta có: $x_1^2=2x_2\Leftrightarrow(m+1)^2=2(m+3)\Leftrightarrow m^2-5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-\sqrt{5}\\m=\sqrt{5}\end{array}\right.$.

Câu 15: Hàm số $y=x^3-3x^2+mx-1$ có hai điểm cực trị x_1,x_2 thỏa $x_1^2+x_2^2=3$ khi

A. $m=\dfrac{1}{2}$. **B.** $m=\dfrac{3}{2}$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=x^3-3x^2+mx-1$

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=3x^2-6x+m,\ (a=3,b=-6,c=m,\Delta=36-12m)$.

Để hàm số có hai điểm cực trị x_1,x_2 thì $\Delta>0\Leftrightarrow m<3$.

Theo đề bài $x_1^2+x_2^2=3\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=3\Leftrightarrow 4-\dfrac{2}{3}m=3\Leftrightarrow m=\dfrac{3}{2}$. **(nhận)**

Người làm: Hoàng Tuấn Anh

Email: hoangtuananhgvtoan@gmail.com

Câu 16: Cho $A=\{n\in\mathbb{Z}\,|\,0\le n\le 20\}$ và F là tập hợp các hàm số $f(x)=x^3+(2m^2-5)x^2+6x-8m^2$ có $m\in A$. Chọn ngẫu nhiên một hàm số $f(x)$ thuộc F. Tính xác suất để đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị nằm khác phía đối với trục Ox.

A. $\frac{18}{21}$. **B.** $\frac{19}{20}$. **C.** $\frac{9}{10}$. **D.** $\frac{19}{21}$.

Lời giải

Chọn D

+ Không gian mẫu $|\Omega| = 21$

+ Ta có: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x^2 + (2m^2 - 3)x + 4m^2 = 0 (*) \end{array}\right.$

+ Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị nằm khác phía đối với trục Ox

$\Leftrightarrow$ **(*)** có hai nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \in A \\ (2m^2-3)^2 - 16m^2 > 0 \\ 2^2 + (2m^2-3).2 + 4m^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in A \\ \left[\begin{array}{l} m > \sqrt{\frac{7+2\sqrt{10}}{2}} \approx 2,58 \\ 0 \le m < \sqrt{\frac{7-2\sqrt{10}}{2}} \approx 0,58 \end{array}\right. \\ \forall m \end{cases} \Rightarrow m \in \{0;3;4;...;20\}$$

Vậy xác suất là: $P = \frac{19}{21}$.

Câu 17: Biết $\frac{a}{b}$ là giá trị của tham số m để hàm số $y = 2x^3 - 3mx^2 - 6\left(3m^2 - 1\right)x + 2020$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2 + 2\left(x_1 + x_2\right) = 1$. Tính $P = a + 2b$.

A. 6. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 7.

Lời giải

Xét hàm số $y = 2x^3 - 3mx^2 - 6\left(3m^2 - 1\right)x + 2020$, ta có $y' = 6x^2 - 6mx - 6\left(3m^2 - 1\right)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - mx - 3m^2 + 1 = 0 \ (1)$

Hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta = \left(-m\right)^2 - 4\left(-3m^2 + 1\right) > 0 \Leftrightarrow 13m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow m < -\frac{2}{\sqrt{13}}$ hoặc $m > \frac{2}{\sqrt{13}}$.

Khi đó, theo định lí Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1.x_2 = -3m^2 + 1 \end{cases}$.

Theo giả thiết, $x_1x_2 + 2\left(x_1 + x_2\right) = 1$ nên $-3m^2 + 1 + 2m = 1 \Leftrightarrow -3m^2 + 2m = 0$

$\Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = \frac{2}{3}$.

Suy ra $a = 2, b = 3$. Vậy $P = a + 2b = 8$.

Câu 18: Cho hàm số $y = x^3 - mx^2 - m^2x + 8$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số có điểm cực tiểu nằm hoàn toàn phía trên trục hoành?

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

$y' = 3x^2 - 2mx - m^2$

$\Delta' = m^2 + 3m^2 = 4m^2$.

Do đó phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm là $x_1 = \dfrac{m+2m}{3} = m$, $x_2 = \dfrac{m-2m}{3} = -\dfrac{m}{3}$.

Để hàm số có cực trị thì $m \neq 0$

Trường hợp 1: $m > 0$, khi đó $x_1 > x_2$, hàm số đạt cực tiểu tại $x_1 = m$.

Để hàm số có điểm cực tiểu nằm hoàn toàn phía trên trục hoành $f(x_1) > 0$.

Hay $m^3 - m^3 - m^3 + 8 > 0 \Leftrightarrow 8 - m^3 > 0 \Leftrightarrow m < 2$.

Kết hợp điều kiện ta được $0 < m < 2$. Do m nguyên nên $m = 1$.

Trường hợp 2: $m < 0$, khi đó $x_1 < x_2$, hàm số đạt cực tiểu tại $x_2 = -\dfrac{m}{3}$.

Để hàm số có điểm cực tiểu nằm hoàn toàn phía trên trục hoành $f(x_2) > 0$.

Hay $-\dfrac{m^3}{27} - \dfrac{m^3}{9} + \dfrac{m^3}{3} + 8 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{5}{27}m^3 + 8 > 0 \Leftrightarrow m > -\sqrt[3]{\dfrac{216}{5}}$.

Kết hợp điều kiện ta được $-\sqrt[3]{\dfrac{216}{5}} < m < 0$. Do m nguyên nên $m \in \{-3; -2; -1\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Câu 19: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}(3m+2)x^2 + (2m^2+3m+1)x - 2$ có điểm cực đại x_{CD} và điểm cực tiểu x_{CT} thoả mãn $3x_{CD}^2 = 4x_{CT}$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}(3m+2)x^2 + (2m^2+3m+1)x - 2 \Rightarrow y' = x^2 - (3m+2)x + (2m^2+3m+1)$ có $\Delta = m^2 \geq 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2m+1 \\ x = m+1 \end{array}\right.$.

Hàm số có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi $m \neq 0$.

Trường hợp 1. $x_{CD} = 2m+1; x_{CT} = m+1$.

Do $a = \dfrac{1}{3} > 0$ nên suy ra $x_{CD} < x_{CT} \Leftrightarrow 2m+1 < m+1 \Leftrightarrow m < 0$.

Lại có $3x_{CD}^2 = 4x_{CT} \Leftrightarrow 3(2m+1)^2 = 4(m+1) \Leftrightarrow 12m^2 + 8m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{-2 \pm \sqrt{7}}{6}$.

Với điều kiện $m < 0 \Rightarrow m = \dfrac{-2-\sqrt{7}}{6}$ thoả mãn.

Trường hợp 2: $x_{CD} = m+1; x_{CT} = 2m+1$

Do $a = \dfrac{1}{3} > 0$ nên suy ra $x_{CD} < x_{CT} \Leftrightarrow m+1 < 2m+1 \Leftrightarrow m > 0$.

Lại có $3x_{CD}^2 = 4x_{CT} \Leftrightarrow 3(m+1)^2 = 4(2m+1) \Leftrightarrow 3m^2 - 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$.

Với điều kiện $m>0 \Rightarrow m=1$ thoả mãn.

Kết luận: vậy có 2 giá trị thực của tham số m thoả mãn.

Câu 20: Cho hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+9x-2m^2+1$. Hãy tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho có các điểm cực trị là $x_1;x_2$ sao cho $|x_1-x_2|=2$?

A. $m=1$. **B.** $m=-3$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-3 \end{array}\right.$. **D.** $m\in\varnothing$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3x^2-6(m+1)x+9$.

Khi đó: $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6(m+1)x+9=0 \Leftrightarrow x^2-2(m+1)x+3=0$ (*)

Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$

$\Leftrightarrow \Delta'>0\Leftrightarrow (m+1)^2-3>0\Leftrightarrow m^2+2m-2>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>-1+\sqrt{3} \\ m<-1-\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Theo định lý vi-et ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2(m+1) \\ x_1x_2=3 \end{cases}$.

Theo bài ra: $|x_1-x_2|=2\Leftrightarrow (x_1-x_2)^2=4$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4\Leftrightarrow 4(m+1)^2-4.3=4\Leftrightarrow m^2+2m-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-3 \end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Vậy $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-3 \end{array}\right.$.

Câu 21: Cho hàm số $y=x^3-3mx+1$ **(1)** và điểm $A(2;3)$. Biết m là một giá trị để đồ thị hàm số **(1)** có hai điểm cực trị B và C sao cho tam giác ABC cân tại A. Diện tích tam giác ABC bằng

A. 6. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 3. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=3x^2-3m$.

Đồ thị hàm số **(1)** có hai điểm cực trị B và C khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt, suy ra $m>0$.

Khi đó, không giảm tổng quát suy ra $B(\sqrt{m};1-2m\sqrt{m});C\left(-\sqrt{m};2m\sqrt{m}+1\right);A(2;3)$.

Tam giác ABC cân tại A suy ra $AB=AC$.

$AB^2=AC^2\Leftrightarrow\left(\sqrt{m}-2\right)^2+\left(2+2m\sqrt{m}\right)^2=\left(\sqrt{m}+2\right)^2+\left(2-2m\sqrt{m}\right)^2$

$\Leftrightarrow 8\sqrt{m}-16m\sqrt{m}=0\Rightarrow\left[\begin{array}{ll} m=0 & \left(\text{lo¹i v× } m>0\right) \\ m=\dfrac{1}{2} & \left(\text{tháa m·n}\right) \end{array}\right.$

Với $m=\dfrac{1}{2}$ thì $BC=\sqrt{(2\sqrt{m})^2+(4m\sqrt{m})^2}=\sqrt{4m+16m^3}=\sqrt{4.\dfrac{1}{2}+16.\dfrac{1}{8}}=2$.

Thử lại thấy ba điểm A,B,C không thẳng hàng.

Gọi I là trung điểm của BC, suy ra $I(0;1)$ và $IA=\sqrt{2^2+(3-1)^2}=2\sqrt{2}$.

Vậy diện tích tam giác ABC bằng $\frac{1}{2}.IA.BC=\frac{1}{2}.2\sqrt{2}.2=2\sqrt{2}$.

Câu 22: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-m^3+m$ có hai điểm cực trị $A,\ B$ và $OA+OB$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. Vô số. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=\left(x-m\right)^3-3x+m\Rightarrow y'=3\left(x-m\right)^2-3.$

$y'=0\Leftrightarrow\left(x-m\right)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m+1\\x=m-1\end{array}\right.$

Đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow m+1\neq m-1\Leftrightarrow m\in\mathbb{R}$.

Với $x=m+1\Rightarrow y=1-3\left(m+1\right)+m=-2m-2\Rightarrow A\left(m+1;-2m-2\right).$

Với $x=m-1\Rightarrow y=-1-3\left(m-1\right)+m=-2m+2\Rightarrow B\left(m-1;-2m+2\right).$

Ta có $OA+OB=\sqrt{\left(m+1\right)^2+\left(-2m-2\right)^2}+\sqrt{\left(m-1\right)^2+\left(-2m+2\right)^2}$

$=\sqrt{5m^2+10m+5}+\sqrt{5m^2-10m+5}$

$=\sqrt{5}\left|m+1\right|+\sqrt{5}\left|-m+1\right|\geq\sqrt{5}.\left|\left(m+1\right)+\left(-m+1\right)\right|=2\sqrt{5}\Rightarrow\left(OA+OB\right)_{\min}=2\sqrt{5}.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\left(m+1\right)\left(-m+1\right)\geq0\Leftrightarrow-1\leq m\leq1\Rightarrow m\in\left\{0;\pm1\right\}.$

Câu 23: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-m-1\right)x+1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để hàm số đạt cực trị tại $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $x_1^2+2mx_2-3m^2+m-5\leq0$?

A. 9. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=x^2-2mx+m^2-m-1.$

Hàm số đạt cực trị tại $x_1,\ x_2$ khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow\Delta'=m+1>0\Leftrightarrow m>-1.\ (*)$

Khi đó $\begin{cases}x_1+x_2=2m\\x_1.x_2=m^2-m-1\end{cases}$

Theo đề bài: $x_1^2+2mx_2-3m^2+m-5\leq0$

$\Leftrightarrow x_1^2+\left(x_1+x_2\right)x_2-3m^2+m-5\leq0$

$\Leftrightarrow x_1^2+x_1x_2+x_2^2-3m^2+m-5\leq0$

$\Leftrightarrow \left(x_1+x_2\right)^2 - x_1x_2 - 3m^2 + m - 5 \le 0$

$\Leftrightarrow 4m^2 - m^2 + m + 1 - 3m^2 + m - 5 \le 0$

$\Leftrightarrow 2m - 4 \le 0 \Leftrightarrow m \le 2$.

Kết hợp với $(*)$ ta được $-1 < m \le 2$.

Do m nguyên nên $m \in \{0,1,2\}$.

Vậy có 3 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 24: Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3\left(m^2-1\right)x - 3m^2 - 1$ có điểm cực đại và cực tiểu cùng với gốc tọa độ tạo thành tam giác vuông tại O. Tích tất cả các giá trị của tập S bằng

A. -1. **B.** $-\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = -3x^2 + 6x + 3m^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + m^2 - 1 = 0 \ (1)$

Để hàm số có hai điểm cực đại và cực tiểu thì (1) phải có hai nghiệm phân biệt, nên $\Delta' = m^2 > 0$ suy ra $m \ne 0$.

Dễ thấy (1) có hai nghiệm $x_1 = 1-m$ và $x_2 = 1+m$ nên $A\left(1-m;-2-2m^3\right)$ và $B\left(1+m;-2+2m^3\right)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số

Tam giác OAB vuông ở $O \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow (1-m)(1+m) + \left(-2-2m^3\right)\left(-2+2m^3\right) = 0$

$\Leftrightarrow 1 - m^2 + 4\left(1-m^6\right) = 0 \Leftrightarrow \left(1-m^2\right)\left(4m^4+4m+5\right) = 0 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Do đó tích các giá trị thỏa mãn của m bằng -1.

Câu 25: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + x - 2$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_1x_2 = 3$

A. $m = -4$. **B.** $m = 2$.

C. $m = 3$. **D.** Không có giá trị m.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = x^2 - mx + 1$

Để hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty;-2) \cup (2;+\infty) \ (1)$

Khi đó, phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2.

theo hệ thức viet $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1.x_2 = 1 \end{cases}$.

Theo bài ra ta có: $x_1 + x_2 + x_1x_2 = 3 \Leftrightarrow m + 1 = 3 \Leftrightarrow m = 2 \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra không có giá trị m nào thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 26: Biết m_o là giá trị tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx-1$ có hai điểm cực trị x_1,x_2 sao cho $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=13$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m_0\in(-7;-1)$. **B.** $m_0\in(7;10)$. **C.** $m_0\in(-1;7)$. **D.** $m_0\in(-15;-7)$.

Lời giải

Chọn D

Để hàm số có 2 điểm cực trị thì $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow 3x^2-6x+m=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta=36-12m>0\Leftrightarrow m<3$

Theo bài ra: $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=13\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2-3x_1x_2=13$ $\boxed{*}$.

Mà theo định lý Viét ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2\\x_1.x_2=\dfrac{m}{3}\end{cases}$ thay vào $\boxed{*}$ ta được:

$4-3.\dfrac{m}{3}=13\Leftrightarrow m=-9$ (t/m).

Câu 27: Cho hàm số $y=(m-3)x^3+2(m^2-m-1)x^2+(m+4)x-1$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục Oy. Tổng các phần tử của S là

A. -3. **B.** -4. **C.** 0. **D.** -2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=3(m-3)x^2+4(m^2-m-1)x+m+4=0$.

Đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục Oy $\Leftrightarrow$ Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1<0<x_2$ $\Leftrightarrow 3(m-3)(m+4)<0\Leftrightarrow -4<m<3$.

Kết hợp điều kiện $m\in\mathbb{Z}$ ta được $m\in\{-3;-2;-1;0;1;2\}\Rightarrow S=\{-3;-2;-1;0;1;2\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là -3.

Câu 28: Biết rằng $m_0=\dfrac{a}{b},a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{a}{b}$ tối giản là giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}(m-1)x^2+(3m-2)x+1$ có 2 điểm cực trị trái dấu x_1,x_2 thoả mãn $\dfrac{1}{x_1}-2=\left|\dfrac{1}{x_2}\right|$.

Tính tổng $S=a+2b$?

A. 13. **B.** 8. **C.** 11. **D.** -11.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=x^2-(m-1)x+3m-2$

Hàm số có 2 điểm cực trị trái dấu x_1,x_2 $\Leftrightarrow PT:y'=0$ có hai nghiệm trái dấu x_1,x_2

$\Leftrightarrow 3m-2<0\Leftrightarrow m<\dfrac{2}{3}$ $(*)$.

Theo định lí Viet, ta có $\begin{cases} x_1+x_2=m-1 \\ x_1x_2=3m-2 \end{cases}$

Từ $\frac{1}{x_1}-2=\left|\frac{1}{x_2}\right|$ suy ra $\frac{1}{x_1}-2>0\Leftrightarrow\frac{1}{x_1}>2\Leftrightarrow 0<x_1<\frac{1}{2}\Rightarrow x_2<0$.

Ta có $\frac{1}{x_1}-2=\left|\frac{1}{x_2}\right|\Leftrightarrow\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=2\Leftrightarrow x_1+x_2=2x_1x_2\Leftrightarrow m-1=6m-4\Leftrightarrow m=\frac{3}{5}$

Suy ra $a=3,b=5\Rightarrow S=a+2b=13$.

Câu 29: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác AOB là tam giác cân tại O.

Lời giải

Ta có $y'=3x^2-6x$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Suy ra đồ thị hàm số đã cho luôn có hai điểm cực trị.

Gọi $A\ 0;m$; $B\ 2;m-4$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Tam giác AOB cân tại O khi và chỉ khi $OA=OB$ hay $OA^2=OB^2$.

Mà $\overrightarrow{OA}\ 0;m$; $\overrightarrow{OB}\ 2;m-4$. Từ đó suy ra $m^2=2^2+\ m-4\ ^2\Leftrightarrow 20-8m=0\Leftrightarrow m=\frac{5}{2}$.

Vậy $m=\frac{5}{2}$ là giá trị cần tìm.

Câu 30: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}mx^3-(m-1)x^2+3(m-2)x+\frac{1}{6}$ đạt cực trị tại $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $x_1+2x_2=1$.

A. $\left[\begin{array}{l} m=\frac{2}{3}. \\ m=2 \end{array}\right.$ **B.** $1-\frac{\sqrt{6}}{2}<m<1+\frac{\sqrt{6}}{2}$.

C. $m\in\left(1-\frac{\sqrt{6}}{2};1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\backslash\{0\}$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y=\frac{1}{3}mx^3-(m-1)x^2+3(m-2)x+\frac{1}{6}$

Tập xác định $D=R;\ y'=mx^2-2(m-1)x+3(m-2)$

Hàm số đạt cực trị tại $x_1,\ x_2\ \Leftrightarrow\ y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$

$\Leftrightarrow\begin{cases} m\neq 0 \\ \Delta'=(m-1)^2-m.3(m-2)>0 \end{cases}\Leftrightarrow\ m\in\left(1-\frac{\sqrt{6}}{2};1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\backslash\{0\}$

Khi đó theo định lý Viet ta có $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2(m-1)}{m} \\ x_1.x_2=\dfrac{3(m-2)}{m} \end{cases}$. Mà $x_1+2x_2=1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-2x_2+x_2=\dfrac{2(m-1)}{m} \\ (1-2x_2).x_2=\dfrac{3(m-2)}{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=\dfrac{2-m}{m} \\ \left(1-2.\dfrac{2-m}{m}\right).\dfrac{2-m}{m}=\dfrac{3(m-2)}{m} \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{2}{3} \\ m=2 \end{array}\right. \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy với $\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{2}{3} \\ m=2 \end{array}\right.$ thì hàm số đã cho đạt cực trị tại $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $x_1+2x_2=1$.

Câu 31: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-(5m^2-3m-1)x^2+(2m+1)x+1$ có hai điểm cực trị A và B sao cho A, B cách đều đường thẳng $x-1=0$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

$y'=x^2-2(5m^2-3m-1)x+2m+1$

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-(5m^2-3m-1)x^2+(2m+1)x+1$ có hai điểm cực trị A và B

$\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (5m^2-3m-1)^2-(2m+1)>0\ (1)$

Giả sử $A(x_1;y_1),\ B(x_2;y_2)$ với $x_1;x_2$ là hai nghiệm phân biệt của phương trình $y'=0$

A, B cách đều đường thẳng $x-1=0 \Rightarrow |x_1-1|=|x_2-1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=x_2\ (l) \\ x_1+x_2=2 \end{array}\right.$

$$\Rightarrow 2(5m^2-3m-1)=2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\dfrac{2}{5} \end{array}\right.$$

Thay vào (1) ta thấy $m=-\dfrac{2}{5}$ thảo yêu cầu

Câu 32: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-(5m^2-3m-1)x^2+(2m+1)x+1$ có hai điểm cực trị A và B sao cho A, B cách đều đường thẳng $x-1=0$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

$y'=x^2-2(5m^2-3m-1)x+2m+1$

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-(5m^2-3m-1)x^2+(2m+1)x+1$ có hai điểm cực trị A và B

$\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \left(5m^2-3m-1\right)^2-\left(2m+1\right)>0\ (1)$

Giả sử $A\left(x_1;y_1\right)$, $B\left(x_2;y_2\right)$ với $x_1;x_2$ là hai nghiệm phân biệt của phương trình $y'=0$

A, B cách đều đường thẳng $x-1=0 \Rightarrow \left|x_1-1\right|=\left|x_2-1\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=x_2\ (l) \\ x_1+x_2=2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow 2\left(5m^2-3m-1\right)=2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\dfrac{2}{5} \end{array}\right.$

Thay vào (1) ta thấy $m=-\dfrac{2}{5}$ thảo yêu cầu

Câu 33: Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^3$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số đối xứng nhau qua đường phân giác (d) của góc phần tư thứ nhất và thứ ba.

A. 1 **B.** 4 **C.** 2. **D.** 3

Lời giải

Chọn C

Ta có: TXĐ: $D=R$

$y'=3x^2-6mx$. Hàm số có 2 cực trị khi $m\neq 0$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=4m^3 \\ x=2m \Rightarrow y=0 \end{array}\right.$

Khi đó hai điểm cực trị của đồ thị là $A(0;4m^3)$, $B(2m;0)$. Gọi I là trung điểm AB

Các điểm cực trị này đối xứng nhau qua đường thẳng $(d):y=x$ khi

$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{AB}\perp(\mathrm{d}) \\ \mathrm{I}\in(\mathrm{d}) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{a_d}} \\ \mathrm{I(m;2m^3)}\in(\mathrm{d}) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\mathrm{m}-4\mathrm{m}^3=0 \\ \mathrm{m}-2\mathrm{m}^3=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ m=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$ thõa mãn điều kiện

Vậy có 2 giá trị của m

Câu 34: Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^3$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số đối xứng nhau qua đường phân giác (d) của góc phần tư thứ nhất và thứ ba.

A. 1 **B.** 4 **C.** 2. **D.** 3

Lời giải

Chọn C

Ta có: TXĐ: $D=R$

$y'=3x^2-6mx$. Hàm số có 2 cực trị khi $m\neq 0$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=4m^3 \\ x=2m \Rightarrow y=0 \end{array}\right.$

Khi đó hai điểm cực trị của đồ thị là $A(0;4m^3)$, $B(2m;0)$. Gọi I là trung điểm AB

Các điểm cực trị này đối xứng nhau qua đường thẳng $(d): y = x$ khi

$$\begin{cases} AB \perp (d) \\ I \in (d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{a_d} \\ I(m; 2m^3) \in (d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 4m^3 = 0 \\ m - 2m^3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ m = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right.$$ thõa mãn điều kiện

Vây có 2 giá trị của m

DẠNG 10 Tìm điều kiện để hàm trùng phương có 1 hoặc 3 cực trị

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m không vượt quá 2020 để hàm số $y=-x^4+(m-5)x^2+3m-1$ có ba điểm cực trị

A. 2017. **B.** 2019. **C.** 2016. **D.** 2015.

Câu 2: Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^4+2(m^2-m-6)x^2+m-1$ có ba điểm cực trị.

A. 3 **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 3: Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y=x^4+(2m-6)x^2-2020$ có 3 điểm cực trị?

A. $m>3$. **B.** $m\le 3$. **C.** $m\ge 3$. **D.** $m<3$.

Câu 4: Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^4+2(m^2-m-6)x^2+m-1$ có ba điểm cực trị.

A. 3 **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 5: Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^4-(m^2-9)x^2+2021$ có 1 cực trị. Số phần tử của tập S là

A. Vô số. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 6: Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^4-(m^2-9)x^2+2021$ có 1 cực trị. Số phần tử của tập S là

A. Vô số. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 5.

Câu 7: Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^4+mx^2-m-5$ có 3 điểm cực trị là

A. $m=1$. **B.** $m>8$. **C.** $m<0$. **D.** $4<m<5$.

Câu 8: Cho hàm số $y=-x^4+(m^2-m)x^2$. Tìm m để hàm số có đúng một cực trị.

A. $m\in(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$. **B.** $m\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$.

C. $m\in[0;1]$. **D.** $m\in(0;1)$.

Câu 9: Tìm điều kiện của tham số b để hàm số $y=x^4+bx^2+c$ có ba điểm cực trị.

A. $b=0$. **B.** $b\ne 0$. **C.** $b<0$. **D.** $b>0$.

Câu 10: Tìm điều kiện của tham số b để hàm số $y=x^4+bx^2+c$ có ba điểm cực trị.

A. $b=0$. **B.** $b\ne 0$. **C.** $b<0$. **D.** $b>0$.

Câu 11: Tìm tất cả giá trị thực của m để hàm số $y=x^4+(2m-6)x^2-2020$ có ba điểm cực trị.

A. $m>3$. **B.** $m\le 3$. **C.** $m\ge 3$. **D.** $m<3$.

Câu 12: Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=mx^4-(m-3)x^2+m^2$ không có điểm cực đại là

A. 3. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 13: Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^4+mx^2-m-5$ có 3 điểm cực trị là

A. $m=1$. **B.** $m>8$. **C.** $m<0$. **D.** $4<m<5$.

Câu 14: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=mx^4+(m-3)x^2+3m-5$ chỉ có cực tiểu mà không có cực đại.

A. $\left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m>3 \end{array}\right.$. **B.** $m\le 0$. **C.** $0\le m\le 3$. **D.** $m>3$.

Câu 15: Có bao nhiêu số nguyên m để đồ thị hàm số $y=(m-1)x^4+(6-m)x^2+m$ có đúng một điểm cực trị?

A. 6. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 16: Tập hợp các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=x^4-2(m+2)x^2+3m-1$ chỉ có điểm cực tiểu và không có điểm cực đại là

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $\{-2;2\}$. **C.** $(-2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2]$.

Câu 17: Tập hợp các giá tị thực của tham số m để hàm số $y=x^4-2(m+2)x^2+3m-1$ chỉ có điểm cực tiểu, không có điểm cực đại là

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $\{-2;2\}$. **C.** $(-2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;2]$.

Câu 18: Tập hợp các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=x^4-2(m+2)x^2+3m-1$ chỉ có điểm cực tiểu, không có điểm cực đại là

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $\{-2;2\}$. **C.** $(-2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2]$.

Câu 19: Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số $y=mx^4+(m-3)x^2+2021$ có 2 cực tiểu và một cực đại.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 20: Hãy tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=x^4-2xm^2$ có đúng 3 điểm cực trị?

A. $m>0$. **B.** $m\in\varnothing$. **C.** $m<0$. **D.** $\forall m\in R$.

Câu 21: Cho hàm số trùng phương $f(x)=x^4-2mx^2-1$. Hãy tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị.

A. $m>1$. **B.** $m\le 1$. **C.** $m>0$. **D.** $m\le 0$.

Câu 22: Hãy tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^4-2(m-1)x^2$ có đúng một điểm cực trị?

A. $m\le 1$. **B.** $m\ge 1$. **C.** $m<1$. **D.** $m=1$.

Câu 23: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m không vượt quá 2020 để hàm số $y=-x^4+(m-5)x^2+3m-1$ có ba điểm cực trị

A. 2017. **B.** 2019. **C.** 2016. **D.** 2015.

Câu 24: Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=mx^4+(m-1)x^2+2020$ có đúng một điểm cực đại.

A. $\left\{\begin{array}{l} m<1 \\ m\ne 0 \end{array}\right.$. **B.** $m\le 0$. **C.** $0\le m\le 1$. **D.** $m<1$.

Câu 25: Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số $y = mx^4 + (m-3)x^2 + 2021$ có 2 cực tiểu và một cực đại.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 26: Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = (m^2 - 9)x^4 - 2x^2 + 1$ có đúng một điểm cực trị là

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m không vượt quá 2020 để hàm số $y=-x^4+(m-5)x^2+3m-1$ có ba điểm cực trị

A. 2017. **B.** 2019. **C.** 2016. **D.** 2015.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $ab<0$.

Suy ra hàm số $y=-x^4+(m-5)x^2+3m-1$ có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $m-5>0\Leftrightarrow m>5.$

Mà m nguyên dương và không vượt quá 2020 nên $m\in\{6,7,...,2019,2020\}\Rightarrow$ có tất cả 2015 giá trị.

Câu 2: Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^4+2(m^2-m-6)x^2+m-1$ có ba điểm cực trị.

A. 3 **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=4x^3+4(m^2-m-6)x$

$$y'=0\Rightarrow 4x^3+4(m^2-m-6)x=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}4x=0\\x^2=-m^2+m+6\end{array}\right.$$

Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow -m^2+m+6>0\Rightarrow -2<m<3$

Do đó ta chọn B

Câu 3: Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y=x^4+(2m-6)x^2-2020$ có 3 điểm cực trị?

A. $m>3$. **B.** $m\le 3$. **C.** $m\ge 3$. **D.** $m<3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có : $y'=4x^3+2(2m-6)x=4x(x^2+m-3)$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x=0\\x^2+m-3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=3-m\end{array}\right.$$

Để hàm số có ba điểm cực trị thì phương trình $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow$ phương trình $x^2=3-m$ có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$\Leftrightarrow 3-m>0$

$\Leftrightarrow m<3$.

Câu 4: Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^4+2(m^2-m-6)x^2+m-1$ có ba điểm cực trị.

A. 3 **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 4x^3 + 4\left(m^2 - m - 6\right)x$

$y' = 0 \Rightarrow 4x^3 + 4\left(m^2 - m - 6\right)x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = 0 \\ x^2 = -m^2 + m + 6 \end{array}\right.$

Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow -m^2 + m + 6 > 0 \Rightarrow -2 < m < 3$

Câu 5: Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^4 - \left(m^2 - 9\right)x^2 + 2021$ có 1 cực trị. Số phần tử của tập S là

A. Vô số. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Để hàm số có 1 cực trị thì $-\left(m^2 - 9\right) \ge 0 \Leftrightarrow m^2 - 9 \le 0 \Leftrightarrow -3 \le m \le 3$.

Vậy có 7 giá trị nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6: Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^4 - \left(m^2 - 9\right)x^2 + 2021$ có 1 cực trị. Số phần tử của tập S là

A. Vô số. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Để hàm số $y = x^4 - \left(m^2 - 9\right)x^2 + 2021$ có 1 cực trị thì $y' = 4x^3 - 2\left(m^2 - 9\right)$

$\Leftrightarrow 2x\left(2x^2 - m^2 + 9\right) = 0$ có 1 nghiệm, suy ra: $2x^2 - m^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{9 - m^2}{2}$ vô nghiệm hoặc có nghiệm $x = 0$ nên $9 - m^2 \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -3 \\ m \ge 3 \end{array}\right.$.

Câu 7: Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 + mx^2 - m - 5$ có 3 điểm cực trị là

A. $m = 1$. **B.** $m > 8$. **C.** $m < 0$. **D.** $4 < m < 5$.

Lời giải

Chọn C

◆ Để hàm số có 3 cực trị thì $a.b < 0 \Leftrightarrow 1.m < 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Câu 8: Cho hàm số $y = -x^4 + \left(m^2 - m\right)x^2$. Tìm m để hàm số có đúng một cực trị.

A. $m \in \left(-\infty; 0\right] \cup \left[1; +\infty\right)$. **B.** $m \in \left(-\infty; 0\right) \cup \left(1; +\infty\right)$.

C. $m \in \left[0; 1\right]$. **D.** $m \in \left(0; 1\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = -4x^3 + 2\left(m^2 - m\right)x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 2\left(m^2 - m\right)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2x^2 = m^2 - m \end{array}\right.$.

Hàm số có đúng một điểm cực trị khi phương trình $2x^2 = m^2 - m$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x = 0$.

Điều kiện là $m^2 - m \le 0 \Leftrightarrow 0 \le m \le 1$.

Vậy $m \in [0;1]$.

Câu 9: Tìm điều kiện của tham số b để hàm số $y = x^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị.

A. $b = 0$. **B.** $b \neq 0$. **C.** $b < 0$. **D.** $b > 0$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R}$.

$y' = 4x^3 + 2bx = 2x\left(2x^2 + b\right)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -\dfrac{b}{2} \end{array}\right.$$

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow x^2 = -\dfrac{b}{2}$ có hai nghiệm phân biệt khác $0 \Leftrightarrow -\dfrac{b}{2} > 0 \Leftrightarrow b < 0$.

Câu 10: Tìm điều kiện của tham số b để hàm số $y = x^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị.

A. $b = 0$. **B.** $b \neq 0$. **C.** $b < 0$. **D.** $b > 0$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R}$.

$y' = 4x^3 + 2bx = 2x\left(2x^2 + b\right)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -\dfrac{b}{2} \end{array}\right.$$

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow x^2 = -\dfrac{b}{2}$ có hai nghiệm phân biệt khác $0 \Leftrightarrow -\dfrac{b}{2} > 0 \Leftrightarrow b < 0$.

Câu 11: Tìm tất cả giá trị thực của m để hàm số $y = x^4 + \left(2m - 6\right)x^2 - 2020$ có ba điểm cực trị.

A. $m > 3$. **B.** $m \leq 3$. **C.** $m \geq 3$. **D.** $m < 3$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số có ba điểm cực trị khi $2m - 6 < 0 \Leftrightarrow m < 3$.

Câu 12: Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = mx^4 - \left(m - 3\right)x^2 + m^2$ không có điểm cực đại là

A. 3. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = mx^4 - \left(m - 3\right)x^2 + m^2$ không có điểm cực đại

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ a.b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ -\left(m - 3\right) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 3.$$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0;1;2;3\}$. Vậy có bốn giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 13: Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^4+mx^2-m-5$ có 3 điểm cực trị là

A. $m=1$. **B.** $m>8$. **C.** $m<0$. **D.** $4<m<5$.

Lời giải

Chọn C

Để hàm số $y=x^4+mx^2-m-5$ có 3 điểm cực trị thì phương trình $y'=0\Leftrightarrow 4x^3+2mx=0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt.

Ta có $y'=4x^3+2mx=0\Leftrightarrow 2x\left(2x^2+m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\2x^2+m=0\end{array}\right.\quad(*)$

Theo yêu cầu bài toán thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0. Khi đó

$\begin{cases}2.0^2+m\neq 0\\m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\m<0\end{cases}\Leftrightarrow m<0.$

Vậy $m<0$ thì hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Câu 14: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=mx^4+\left(m-3\right)x^2+3m-5$ chỉ có cực tiểu mà không có cực đại.

A. $\left[\begin{array}{l}m\leq 0\\m>3\end{array}\right.$. **B.** $m\leq 0$. **C.** $0\leq m\leq 3$. **D.** $m>3$.

Lời giải

Chọn D

+) Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

+) Trường hợp 1: $m=0$.

$y=-3x^2-5$.

$y'=-6x=0\Leftrightarrow x=0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	-5	↘	$-\infty$

Hàm số chỉ có cực đại $\Rightarrow m=0$, không thỏa mãn.

+) Trường hợp 2: $m\neq 0$.

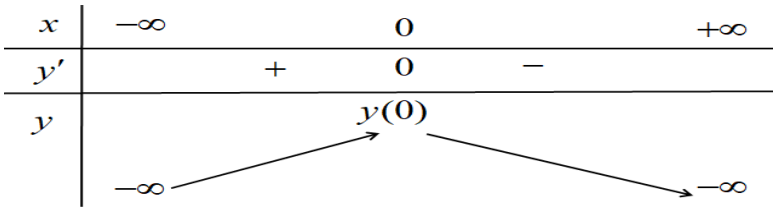
$y'=4mx^3+2\left(m-3\right)x$.

$y'=2x\left(2mx^2+m-3\right)$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=\dfrac{-m+3}{2m}\end{array}\right.\quad(1)$.

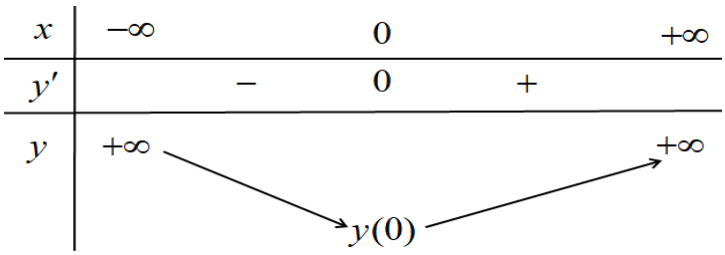
Nếu $\dfrac{-m+3}{2m}\leq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<0\\m\geq 3\end{array}\right.$ thì hàm số có 1 cực trị.

* $m<0$.



Suy ra hàm số chỉ có cực đại (không thỏa mãn).

* $m \ge 3$.



Suy ra hàm số chỉ có cực tiểu mà không có cực đại khi $m \ge 3$ thỏa mãn.

Nếu $\dfrac{-m+3}{2m} > 0 \Leftrightarrow 0 \le m < 3$ thì hàm số luôn có cả cực đại và cực tiểu.

Vậy $m \ge 3$.

Câu 15: Có bao nhiêu số nguyên m để đồ thị hàm số $y = (m-1)x^4 + (6-m)x^2 + m$ có đúng một điểm cực trị?

A. 6. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Ta có: $y' = 4(m-1)x^3 + 2(6-m)x = 2x\left[2(m-1)x^2 + 6 - m\right]$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2(m-1)x^2 + 6 - m = 0 \ (1) \end{array}\right.$.

Hàm số đã cho có đúng một cực trị $\Leftrightarrow$ $y' = 0$ có đúng một nghiệm $\Leftrightarrow (m-1)(m-6) \le 0$ $\Leftrightarrow 1 \le m \le 6$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1;2;3;4;5;6\}$.

Vậy có 6 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách khác:

Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đúng một điểm cực trị

$\Leftrightarrow a.b \ge 0 \Leftrightarrow (m-1)(6-m) \ge 0 \Leftrightarrow 1 \le m \le 6$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1;2;3;4;5;6\}$.

Vậy có 6 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 16: Tập hợp các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = x^4 - 2(m+2)x^2 + 3m - 1$ chỉ có điểm cực tiểu và không có điểm cực đại là

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $\{-2;2\}$. **C.** $(-2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2]$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định của hàm số đã cho là: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 4(m+2)x$

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4(m+2)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m+2 \end{array}\right.$

Để hàm số đã cho chỉ có điểm cực tiểu và không có điểm cực đại thì $m+2 \le 0 \Leftrightarrow m \le -2$.

Câu 17: Tập hợp các giá tị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2(m+2)x^2 + 3m - 1$ chỉ có điểm cực tiểu, không có điểm cực đại là

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $\{-2;2\}$. **C.** $(-2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;2]$.

Lời giải

Chọn A

Hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ chỉ có điểm cực tiểu, không có điểm cực đại khi $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0 \\ b > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a > 0 \\ ab > 0 \end{cases} \end{array}\right.$

Áp dụng cho bài toán này ta được: $-2(m+2) > 0 \Leftrightarrow m < -2$

Câu 18: Tập hợp các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = x^4 - 2(m+2)x^2 + 3m - 1$ chỉ có điểm cực tiểu, không có điểm cực đại là

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $\{-2;2\}$. **C.** $(-2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2]$.

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có $y' = 4x^3 - 4(m+2)x = 4x(x^2 - m - 2)$

Xét $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m+2 \end{array}\right.$

Để hàm số chỉ có cực tiểu và không có cực đại thì $\begin{cases} m+2 \le 0 \\ a = 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \le -2$

Vậy $m \in (-\infty;-2]$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 19: Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số $y = mx^4 + (m-3)x^2 + 2021$ có 2 cực tiểu và một cực đại.

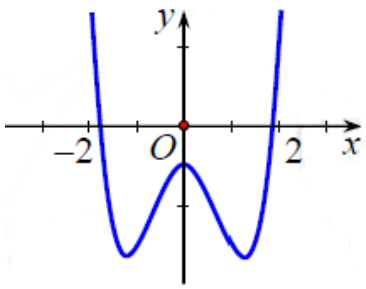
A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c (a \ne 0)$ có 3 cực trị khi $ab < 0$

Để hàm số $y = f(x)$ có 2 cực tiểu và 1 cực đại thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ có dạng



Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow$ Đồ thị nhánh ngoài của hàm số hướng lên, nên hàm số có hệ số $a>0$

.

Khi đó để thỏa mãn yêu cầu bài toán ta có:

$\begin{cases} a>0 \\ ab<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ m(m-3)<0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<m<3.$

Vậy có 2 giá trị m nguyên là $m\in\{1;2\}$.

Câu 20: Hãy tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=x^4-2xm^2$ có đúng 3 điểm cực trị?

A. $m>0$. **B.** $m\in\varnothing$. **C.** $m<0$. **D.** $\forall m\in R$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số đã cho có đúng 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow f'(x)=0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

Ta có $f'(x)=4x^3-2m^2$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 4x^3-2m^2=0\Leftrightarrow x^3=\dfrac{m^2}{2}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\dfrac{m^2}{2}}$.

Vậy không có giá trị nào của tham số m để hàm số có đúng 3 điểm cực trị.

Câu 21: Cho hàm số trùng phương $f(x)=x^4-2mx^2-1$. Hãy tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị.

A. $m>1$. **B.** $m\le 1$. **C.** $m>0$. **D.** $m\le 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=4x^3-4mx$. Phương trình $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m \end{array}\right.$.

Hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $f'(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m>0$.

Vậy $m>0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 22: Hãy tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^4-2(m-1)x^2$ có đúng một điểm cực trị?

A. $m\le 1$. **B.** $m\ge 1$. **C.** $m<1$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=x^4-2(m-1)x^2$ có đúng một điểm cực trị khi và chỉ khi $-2(m-1)\ge 0\Leftrightarrow m\le 1$.

Câu 23: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m không vượt quá 2020 để hàm số $y=-x^4+(m-5)x^2+3m-1$ có ba điểm cực trị

A. 2017. **B.** 2019. **C.** 2016. **D.** 2015.

Lời giải

Chọn D

Để hàm số có ba điểm cực trị thì: $ab=-1.(m-5)<0\Leftrightarrow m-5>0\Leftrightarrow m>5$ (1)

Theo giả thiết: $m\le 2020$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra có 2015 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn là: $m\in\{6;7;...;2020\}$

Câu 24: Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=mx^4+(m-1)x^2+2020$ có đúng một điểm cực đại.

A. $\begin{cases} m<1 \\ m\neq 0 \end{cases}$. **B.** $m\le 0$. **C.** $0\le m\le 1$. **D.** $m<1$.

Lời giải

Chọn D.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Xét các trường hợp:

+TH1: $m=0 \Rightarrow y=-x^2+2020$ là hàm bậc hai có đồ thị là parabol có bề lõm hướng xuống nên có đúng một điểm cực đại. Do đó $m=0$ là một giá trị cần tìm.

+TH2: $m\neq 0$: hàm số $y=mx^4+(m-1)x^2+2020$ là hàm trùng phương nên đồ thị có đúng một điểm cực đại khi $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} m>0 \\ m-1<0 \end{cases} \\ \begin{cases} m<0 \\ m-1\le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<m<1 \\ m<0 \end{array}\right.$

Kết hợp 2 trường hợp trên ta được $m<1$ là tất cả các giá trị cần tìm.

Câu 25: Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số $y=mx^4+(m-3)x^2+2021$ có 2 cực tiểu và một cực đại.

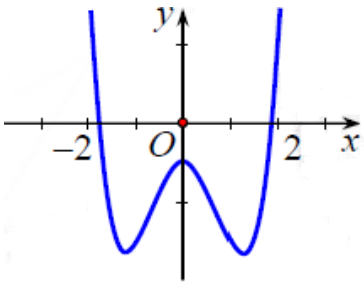
A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c(a\neq 0)$ có 3 cực trị khi $ab<0$

Để hàm số $y=f(x)$ có 2 cực tiểu và 1 cực đại thì đồ thị hàm số $y=f(x)$ có dạng



Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ $\Rightarrow$Đồ thị nhánh ngoài của hàm số hướng lên, nên hàm số có hệ số $a>0$.

Khi đó để thỏa mãn yêu cầu bài toán ta có: $\begin{cases} a>0 \\ ab<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ m(m-3)<0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<m<3$.

Vậy có 2 giá trị m nguyên là $m\in\{1;2\}$.

Câu 26: Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=(m^2-9)x^4-2x^2+1$ có đúng một điểm cực trị là

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

$y=\left(m^2-9\right)x^4-2x^2+1\ (1)$.

Xét các trường hợp:

TH1: $m^2-9=0 \Leftrightarrow m=\pm 3$.

Khi đó (1) trở thành: $y=-2x^2+1$ có đúng 1 điểm cực trị.

Vậy $m=\pm 3$ thỏa đề bài.

TH2: $m^2-9\neq 0 \Leftrightarrow m\neq \pm 3$.

Ta có:

$y'=4\left(m^2-9\right)x^3-4x$.

$$y'=0 \Leftrightarrow 4\left(m^2-9\right)x^3-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \left(m^2-9\right)x^2-1=0 (*) \end{array}\right.$$

Hàm số có đúng một điểm cực trị $\Leftrightarrow (*)$ có đúng một nghiệm $x=0$ hoặc vô nghiệm.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2-9<0 \\ \left(m^2-9\right).0^2-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow -3<m<3.$$

Vì m là số nguyên nên $m\in\{-2,-1,0,1,2\}$.

Từ TH1 và TH2 suy ra có 7 giá trị nguyên của m thỏa đề bài.

Cách 2. Tổng quát $y=ax^4+bx^2+c$ có đúng một cực trị

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} a=0 \\ b\neq 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a\neq 0 \\ \dfrac{b}{a}\geq 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Để hàm số $y=\left(m^2-9\right)x^4-2x^2+1$ có đúng một điểm cực trị

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2-9=0 \\ \left\{\begin{array}{l} m^2-9\neq 0 \\ \dfrac{-2}{m^2-9}\geq 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\pm 3 \\ -3<m<3 \end{array}\right. \Leftrightarrow -3\leq m\leq 3$$

Vì m là số nguyên nên $m\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$. Vậy có 7 giá trị nguyên của m thỏa đề bài.

DẠNG 11 Tìm m để hàm số, đồ thị hàm số trùng phương có cực trị TMĐK

Câu 1: Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+1$ có ba điểm cực trị $A(0;1)$, B, C thỏa mãn $BC=4$

A. $m=\sqrt{2}$. **B.** $m=\pm 4$. **C.** $m=\pm 2$. **D.** $m=4$.

Câu 2: Cho đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có điểm cực đại $A(0;-3)$ và điểm cực tiểu $B(-1;-5)$. Tính giá trị của $P=a+2b+3c$.

A. $P=3$. **B.** $P=-5$. **C.** $P=-9$. **D.** $P=-15$.

Câu 3: Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=mx^4+(2m-1)x^2+m-2$ chỉ có một điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu.

A. $\left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m>\frac{1}{2} \end{array}\right.$. **B.** $m\le 0$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m\ge \frac{1}{2} \end{array}\right.$. **D.** $m\le \frac{1}{2}$.

Câu 4: Để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+m-1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2, giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-1;0)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;2)$.

Câu 5: Cho hàm trùng phương $y=f(x)=x^4-2(m+1)x^2+m^2-8$ có đồ thị (C). Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị (C). Để tam giác ABC đều thì giá trị tham số m nằm trong khoảng nào sau đây?

A. $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{4}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$. **D.** $(1;2)$.

Câu 6: Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-20;20]$ để hàm số $y=x^4+2(m-2)x^2+1$ có duy nhất một điểm cực tiểu. Số phần tử của tập S bằng

A. 19. **B.** 21. **C.** 20. **D.** 41.

Câu 7: Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+2$. Tổng bình phương các giá trị m để hàm số có ba cực trị và đường tròn qua ba cực trị đó có bán kính bằng 4, gần với số nguyên nào nhất trong các số nguyên sau?

A. 8. **B.** 9. **C.** 16. **D.** 7.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)=x^4-2mx^2+2$. Tổng bình phương các giá trị m để hàm số có ba cực trị và đường tròn đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số có bán kính bằng 4, gần với số nguyên nào nhất trong các số nguyên sau?

A. 8. **B.** 9. **C.** 16. **D.** 7.

Câu 9: Cho hàm số $y=mx^4-(2m+1)x^2+1$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có một điểm cực đại

A. $-\frac{1}{2}\le m<0$. **B.** $m\le -\frac{1}{2}$. **C.** $-\frac{1}{2}\le m\le 0$. **D.** $m\ge -\frac{1}{2}$.

Câu 10: Tìm giá trị tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+2m+3$ có ba điểm cực trị A,B,C sao cho trục hoành chia tam giác ABC thành một tam giác và một hình thang biết rằng tỉ số diện tích tam giác nhỏ được chia ra và diện tích tam giác ABC bằng $\frac{4}{9}$

A. $m=\frac{5+\sqrt{3}}{2}$. **B.** $m=\frac{-1+\sqrt{15}}{2}$. **C.** $m=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. **D.** $m=\frac{1+\sqrt{15}}{2}$.

Câu 11: Với tất cả giá trị nào của m thì hàm số $y=mx^4+(m-2)x^2+1+2m$ chỉ có một cực trị:

A. $m\ge 2$. **B.** $0\le m\le 2$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m\ge 2 \end{array}\right.$. **D.** $m\le 0$.

Câu 12: Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y=-x^4+2(m^2+3)x^2+2$ có 3 điểm cực trị sao cho giá trị cực đại của hàm số đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $m=0$. **B.** $m=-3$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=-2$.

Câu 13: Cho hàm số $y=x^4-2(1-m^2)x^2+m+1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành tam giác có diện tích là lớn nhất.

A. $m=\frac{1}{2}$. **B.** $m=-\frac{1}{2}$. **C.** $m=0$. **D.** $m=1$.

Câu 14: Cho biết đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2-2m^2+m^4$ có 3 điểm cực trị A,B,C cùng với điểm $D(0;-3)$ là 4 đỉnh của một hình thoi. Gọi S là tổng các giá trị m thỏa mãn đề bài thì S thuộc khoảng nào sau đây?

A. $S\in(2;4)$. **B.** $S\in\left(\frac{9}{2};6\right)$. **C.** $S\in\left(1;\frac{5}{2}\right)$. **D.** $S\in\left(0;\frac{5}{2}\right)$.

Câu 15: Gọi A, B, C là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng?

A. $\sqrt{2}-1$. **B.** $\sqrt{2}+1$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 1.

Câu 16: **)** Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+m-1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1?

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 17: Gọi S tập hợp các giá trị m để đồ thị hàm số $y=x^4-2m^2x^2+1$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân. Tổng bình phương các phần tử của S bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 6.

Câu 18: Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=mx^4-(m-3)x^2+m^2$ không có điểm cực đại?

A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 0.

Câu 19: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^4-2mx^2+m+1$ có giá trị cực tiểu bằng -1. Tổng các phần tử thuộc S là

A. -2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** -1.

Câu 20: Gọi S tập hợp các giá trị m để đồ thị hàm số $y=x^4-2m^2x^2+1$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân. Tổng bình phương các phần tử của S bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 6.

Câu 21: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 3m^2$ có ba điểm cực trị lập thành một tam giác nhận $G\ 0;7$.

A. $m=1.$ **B.** $m=-\sqrt{\frac{3}{7}}.$ **C.** $m=-1.$ **D.** $m=-\sqrt{3}.$

Câu 22: Cho hai đường cong $(C_1): y=x^4-(m+1)x^2+2$ và $(C_2): y=2(x+1)^4-4x^2-8x+3m$. Biết rằng mỗi đường cong đều có 3 điểm cực trị tạo thành tam giác đồng thời các tam giác đồng dạng với nhau. Hỏi m thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;4)$.

Câu 23: Đồ thị của hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+2m+1$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m\in(6;9)$. **B.** $m\in(-6;-3)$. **C.** $m\in(-3;2)$. **D.** $m\in(2;6)$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+1$ có ba điểm cực trị $A(0;1)$, B, C thỏa mãn $BC=4$

A. $m=\sqrt{2}$. **B.** $m=\pm 4$. **C.** $m=\pm 2$. **D.** $m=4$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)$.

Để hàm số có 3 cực trị thì $m>0$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} x=0 & \Rightarrow y(0)=1 \\ x=\pm\sqrt{m} & \Rightarrow y\left(\pm\sqrt{m}\right)=1-m^2 \end{array}\right.$, suy ra $A(0;1)$, $B\left(\sqrt{m};1-m^2\right)$, $C\left(-\sqrt{m};1-m^2\right)$.

$BC=4\Leftrightarrow\sqrt{4m}=4\Leftrightarrow m=4$.

Câu 2: Cho đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có điểm cực đại $A(0;-3)$ và điểm cực tiểu $B(-1;-5)$. Tính giá trị của $P=a+2b+3c$.

A. $P=3$. **B.** $P=-5$. **C.** $P=-9$. **D.** $P=-15$.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;-3)$ và $B(-1;-5)\Rightarrow\begin{cases} c=-3 \\ a+b+c=-5 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a+b=-2 \\ c=-3. \end{cases}\quad(1)$

$y=ax^4+bx^2+c\Rightarrow y'=4ax^3+2bx$.

Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $B(-1;-5)\Rightarrow -4a-2b=0.\quad(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} a+b=-2 \\ -4a-2b=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=2 \\ b=-4. \end{cases}$

Với $\begin{cases} a=2 \\ b=-4 \\ c=-3 \end{cases}\Rightarrow y=2x^4-4x^2-3\Rightarrow y'=8x^3-8x\Rightarrow y''=24x^2-8$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1. \end{array}\right.$

$y''(0)=-8<0\Rightarrow A(0;-3)$ là điểm cực đại.

$y''(-1)=16>0\Rightarrow B(-1;-5)$ là điểm cực tiểu.

Vậy $\begin{cases} a=2 \\ b=-4 \\ c=-3 \end{cases}\Rightarrow P=a+2b+3c=-15$.

Câu 3: Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=mx^4+(2m-1)x^2+m-2$ chỉ có một điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu.

A. $\left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m > \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$. **B.** $m \le 0$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$. **D.** $m \le \dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Xét $m = 0$, khi đó $y = -x^2 - 2$ là hàm số bậc hai có $a = -1 < 0$ nên đồ thị là Parabol có bề lõm hướng xuống nên có 1 cực đại mà không có cực tiểu. Suy ra $m = 0$ thỏa mãn đề bài.

Xét $m \ne 0$, khi đó $y = mx^4 + (2m-1)x^2 + m - 2$ là hàm số bậc 4 dạng trùng phương.

Để đồ thị hàm số $y = mx^4 + (2m-1)x^2 + m - 2$ chỉ có một điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu thì $\begin{cases} m < 0 \\ m.(2m-1) \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow m < 0$.

Vậy $m \le 0$.

Câu 4: Để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2, giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-1;0)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

Chọn D

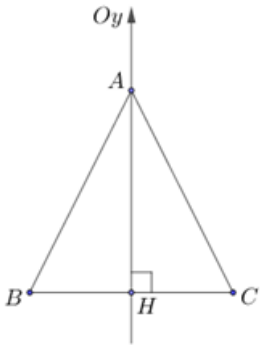
Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$

+) Đồ thị hàm số đã cho có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$ $(*)$.

+) Với $m > 0$, ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m} \end{array}\right.$

Gọi $A(0; m-1), B\left(-\sqrt{m}; -m^2 + m - 1\right), C\left(\sqrt{m}; -m^2 + m - 1\right)$ là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.



Vì $A \in Oy; B$ và C đối xứng nhau qua Oy nên tam giác ABC cân tại A (tham khảo hình vẽ).

Gọi $H = BC \cap Oy \Rightarrow AH \perp BC$

$\Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AH.BC = 2$

$\Leftrightarrow \left|(y_A - y_H)(x_C - x_B)\right| = 4$ (với $y_H = y_B = y_C$)

$\Leftrightarrow \left|m^2.2\sqrt{m}\right| = 4 \Leftrightarrow m^2\sqrt{m} = 2 \Rightarrow m = \sqrt[5]{4} \in (1;2)$.

Câu 5: Cho hàm trùng phương $y = f(x) = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2 - 8$ có đồ thị (C). Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị (C). Để tam giác ABC đều thì giá trị tham số m nằm trong khoảng nào sau đây?

A. $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{4}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$y' = 4x^3 - 4(m+1)x$; $y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m+1 \end{array}\right.$.

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m + 1 > 0$

$\Leftrightarrow m > -1$. Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt{m+1} \\ x = -\sqrt{m+1} \end{array}\right.$.

Đồ thị (C) có ba điểm cực trị là $A(0; m^2 - 8)$, $B\left(\sqrt{m+1}; -(m+1)^2 + m^2 - 8\right)$ và $C\left(-\sqrt{m+1}; -(m+1)^2 + m^2 - 8\right)$. Ta có $AB = AC = \sqrt{m+1+(m+1)^4}$.

Do đó tam giác ABC đều $\Leftrightarrow AB = BC \Leftrightarrow \sqrt{m+1+(m+1)^4} = \sqrt{4(m+1)}$

$\Leftrightarrow m+1+(m+1)^4 = 4(m+1) \Leftrightarrow (m+1)^4 - 3(m+1) = 0 \Leftrightarrow (m+1).\left[(m+1)^3 - 3\right] = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+1 = 0 \\ (m+1)^3 - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = -1 + \sqrt[3]{3} \end{array}\right.$. So điều kiện $m > -1$ ta nhận $m = -1 + \sqrt[3]{3}$.

Câu 6: Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-20; 20]$ để hàm số $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + 1$ có duy nhất một điểm cực tiểu. Số phần tử của tập S bằng

A. 19. **B.** 21. **C.** 20. **D.** 41.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện để hàm số $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + 1$ có duy nhất một điểm cực tiểu là $a = 1 > 0$ và phương trình $y' = 0$ có duy nhất một nghiệm. Ta có:

$y' = 4x^3 + 4(m-2)x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 + m - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 2 - m \quad (*) \end{array}\right.$

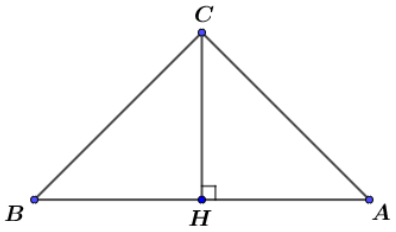
Để phương trình $y' = 0$ có duy nhất một nghiệm $x = 0$ thì phương trình (*) vô nghiệm hoặc có nghiệm duy nhất $x = 0 \Leftrightarrow 2 - m \le 0 \Leftrightarrow m \ge 2$. Vậy $m \in \{2, 3, ..., 20\}$ hay có 19 giá trị của tham số $m \in [-20; 20]$ thỏa mãn.

Câu 7: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2$. Tổng bình phương các giá trị m để hàm số có ba cực trị và đường tròn qua ba cực trị đó có bán kính bằng 4, gần với số nguyên nào nhất trong các số nguyên sau?

A. 8. **B.** 9. **C.** 16. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A



Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x\left(x^2 - m\right)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$.

Để hàm số có ba cực trị thì $m > 0$ (1). Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A\left(\sqrt{m}; 2 - m^2\right); B\left(-\sqrt{m}; 2 - m^2\right); C(0;2)$. Theo giả thiết ta có $4 = R = \dfrac{CA}{2\sin CBA} = \dfrac{AC.BC}{2CH}$ (2)

(Với H là trung điểm của AB và ta có $AC = BC$)

Hay $(2) \Leftrightarrow AC.BC = 8CH \Leftrightarrow AC^2 = 8CH \Leftrightarrow CH^2 + AH^2 = 8CH$

$8m^2 = m^4 + m \Leftrightarrow m^4 - 8m^2 + m = 0$

Khi đó với $m > 0$ sử dụng máy tính casio ta được tổng bình phương các giá trị m gần bằng $7,654$

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2mx^2 + 2$. Tổng bình phương các giá trị m để hàm số có ba cực trị và đường tròn đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số có bán kính bằng 4, gần với số nguyên nào nhất trong các số nguyên sau?

A. 8. **B.** 9. **C.** 16. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x) = 4x^3 - 4mx$

Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow m > 0$

Khi đó đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $A(0;2)$; $B\left(-\sqrt{m}; 2 - m^2\right)$; $C\left(\sqrt{m}; 2 - m^2\right)$

Ta có: $AB = \sqrt{m + m^4} = AC$; $BC = 2\sqrt{m}$

$\Rightarrow \cos BAC = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \dfrac{m^3 - 1}{m^3 + 1} \Rightarrow \sin BAC = \sqrt{1 - \cos^2 BAC} = \dfrac{2m\sqrt{m}}{m^3 + 1}$

Mà $BC = 2R\sin BAC \Leftrightarrow 2\sqrt{m} = 2.4.\dfrac{2m\sqrt{m}}{m^3 + 1} \Leftrightarrow m^3 - 8m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m \approx -2,889 & (loại) \\ m \approx 2,764 & (thỏa mãn) \\ m \approx 0,125 & (thỏa mãn) \end{array}\right.$

Vậy tổng bình phương các giá trị m là $2,764^2 + 0,125 \approx 7,655$.

Câu 9: Cho hàm số $y = mx^4 - (2m+1)x^2 + 1$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có một điểm cực đại

A. $-\frac{1}{2} \le m < 0$. **B.** $m \le -\frac{1}{2}$. **C.** $-\frac{1}{2} \le m \le 0$. **D.** $m \ge -\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 4mx^3 - 2(2m+1)x = 2x(2mx^2 - 2m - 1); y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2mx^2 = 2m+1 \end{array}\right.$

* $m = 0$ ta có $y = -x^2 + 1$. Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

* $m \neq 0$ để hàm số có một điểm cực đại khi $\begin{cases} m < 0 \\ 2m+1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le m < 0$.

Vậy $-\frac{1}{2} \le m \le 0$ thì hàm số có một điểm cực đại.

Câu 10: Tìm giá trị tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 3$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho trục hoành chia tam giác ABC thành một tam giác và một hình thang biết rằng tỉ số diện tích tam giác nhỏ được chia ra và diện tích tam giác ABC bằng $\frac{4}{9}$

A. $m = \frac{5+\sqrt{3}}{2}$. **B.** $m = \frac{-1+\sqrt{15}}{2}$. **C.** $m = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. **D.** $m = \frac{1+\sqrt{15}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 3$.

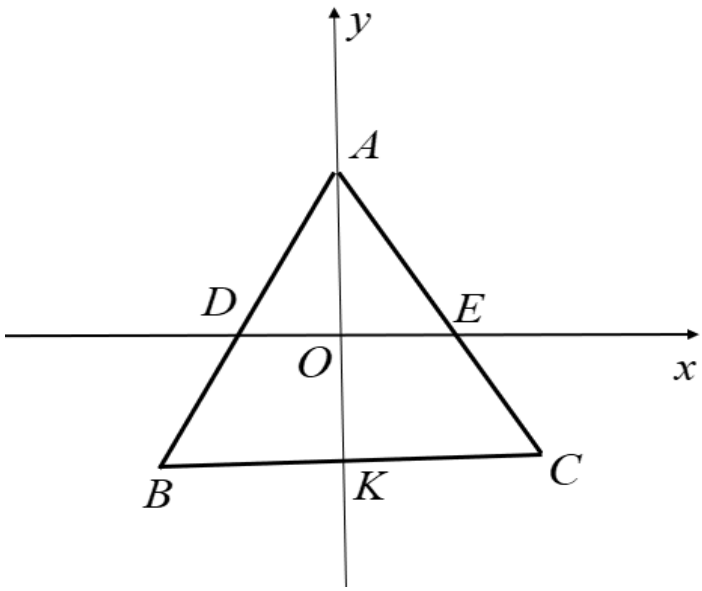
$y' = 4x^3 - 4(m+1)x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m+1 \end{array}\right.$.

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > -1$.

Khi $m > -1$, đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $A(0; 2m+3)$, $B\left(-\sqrt{m+1}; -m^2+2\right)$, $C\left(\sqrt{m+1}; -m^2+2\right)$.

Ta có $A \in Oy$, B, C đối xứng nhau qua $Oy \Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A.



Trục hoành chia tam giác ABC thành một tam giác và một hình thang $\Rightarrow \begin{cases} 2m+3>0 \\ -m^2+2<0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m>-\dfrac{3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m>\sqrt{2} \\ m<-\sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>\sqrt{2} \\ -\dfrac{3}{2}<m<-\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện $m>-1$ ta được $m>\sqrt{2}$.

Khi đó, gọi D,E lần lượt là giao điểm của trục Ox và các cạnh AB, AC, K là giao điểm của BC và Oy.

Ta có $\dfrac{S_{ADE}}{S_{ABC}}=\left(\dfrac{AO}{AK}\right)^2=\left(\dfrac{y_A}{y_A-y_B}\right)^2=\left(\dfrac{2m+3}{m^2+2m+1}\right)^2$.

Mà $\dfrac{S_{ADE}}{S_{ABC}}=\dfrac{4}{9} \Leftrightarrow \left(\dfrac{2m+3}{m^2+2m+1}\right)^2=\dfrac{4}{9}$.

Vì $m>\sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{2m+3}{\left(m^2+2m+1\right)}=\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow 2m^2-2m-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{1+\sqrt{15}}{2} \\ m=\dfrac{1-\sqrt{15}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow m=\dfrac{1+\sqrt{15}}{2}$.

Vậy $m=\dfrac{1+\sqrt{15}}{2}$ thoả mãn yêu cầu đề bài.

Câu 11: Với tất cả giá trị nào của m thì hàm số $y=mx^4+\left(m-2\right)x^2+1+2m$ chỉ có một cực trị:

A. $m\geq 2$. **B.** $0\leq m\leq 2$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m\leq 0 \\ m\geq 2 \end{array}\right.$. **D.** $m\leq 0$.

Lời giải

Chọn C

Nếu $m=0$ thì $y=-2x^2+1$ là hàm bậc hai nên chỉ có duy nhất một cực trị.

Khi $m \neq 0$, ta có: $y' = 4mx^3 + 2(m-2)x = 2x\left[2mx^2 + (m-2)\right]$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = \dfrac{2-m}{2m} \end{array}\right.$.

Để hàm số có một cực trị khi $\dfrac{2-m}{2m} \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 2 \\ m < 0 \end{array}\right.$.

Kết hợp hai trường hợp ta được $\left[\begin{array}{l} m \leq 0 \\ m \geq 2 \end{array}\right.$.

Câu 12: Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y = -x^4 + 2\left(m^2+3\right)x^2 + 2$ có 3 điểm cực trị sao cho giá trị cực đại của hàm số đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $m = 0$. **B.** $m = -3$. **C.** $m = -1$. **D.** $m = -2$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y = -x^4 + 2\left(m^2+3\right)x^2 + 2$

Ta có $y' = -4x^3 + 4\left(m^2+3\right)x$.

Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 4\left(m^2+3\right)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m^2+3} \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Hàm số luôn có 3 điểm cực trị với $\forall m$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{m^2+3}$		0		$\sqrt{m^2+3}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$y_{CĐ}$	$\searrow$	y_{CT}	$\nearrow$	$y_{CĐ}$	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại khi $x = \pm\sqrt{m^2+3}$.

Giá trị cực đại của hàm số: $y_{C§} = -\left(\sqrt{m^2+3}\right)^4 + 2\left(m^2+3\right)^2 + 2 = \left(m^2+3\right)^2 + 2$.

$\Rightarrow \min y_{C§} = 11$ khi $m = 0$.

Câu 13: Cho hàm số $y = x^4 - 2(1-m^2)x^2 + m + 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành tam giác có diện tích là lớn nhất.

A. $m = \dfrac{1}{2}$. **B.** $m = -\dfrac{1}{2}$. **C.** $m = 0$. **D.** $m = 1$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 4\left(1-m^2\right)x = 4x\left[x^2 - \left(1-m^2\right)\right]$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 1-m^2 \end{array}\right.$.

Hàm số có ba điểm cực trị khi $1 - m^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$.

Khi đó tọa độ ba điểm cực trị là: $A(0; m+1)$; $B\left(-\sqrt{1-m^2}; -m^4 + 2m^2 + m\right)$;

$C\left(\sqrt{1-m^2}; -m^4 + 2m^2 + m\right)$.

Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow H\left(0;-m^4+2m^2+m\right)$.

Khi đó: $\overrightarrow{AH}=\left(0;-\left(1-m^2\right)^2\right)$; $\overrightarrow{BC}=\left(2\sqrt{1-m^2};0\right)$.

Vì ΔABC cân tại A nên $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.AH.BC=\frac{1}{2}\left(1-m^2\right)^2.2\sqrt{1-m^2}=\left(1-m^2\right)^2.\sqrt{1-m^2}$.

Mà $m^2\ge 0;\forall m \Rightarrow 1-m^2\le 1\Rightarrow S\le 1$.

Dấu "=" xảy ra khi $m=0$ (thỏa mãn).

Vậy $m=0$.

Câu 14: Cho biết đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2-2m^2+m^4$ có 3 điểm cực trị A,B,C cùng với điểm $D\left(0;-3\right)$ là 4 đỉnh của một hình thoi. Gọi S là tổng các giá trị m thỏa mãn đề bài thì S thuộc khoảng nào sau đây?

A. $S\in\left(2;4\right)$. **B.** $S\in\left(\frac{9}{2};6\right)$. **C.** $S\in\left(1;\frac{5}{2}\right)$. **D.** $S\in\left(0;\frac{5}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

$y=x^4-2mx^2-2m^2+m^4$ (1)

Hàm số (1) có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow 2m>0\Leftrightarrow m>0$ (2)

Với $m>0$, ta có

$$y'=4x^3-4mx;\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=m^4-2m^2\\x=\sqrt{m}\Rightarrow y=m^4-3m^2\\x=-\sqrt{m}\Rightarrow y=m^4-3m^2\end{array}\right.$$

Vậy 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) là $A\left(0;m^4-2m^2\right);B\left(\sqrt{m};m^4-3m^2\right);C\left(-\sqrt{m};m^4-3m^2\right)$. Vì tứ giác $ABDC$ có hai đường chéo vuông góc, do đó $ABDC$ là hình thoi $\Leftrightarrow$ hai đường chéo của tứ giác $ABDC$ cắt nhau tại trung điểm mỗi đường $\Leftrightarrow y_A+y_D=y_B+y_C\Leftrightarrow m^4-2m^2-3=2m^4-6m^2$

$\Leftrightarrow m^4-4m^2+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\pm 1\\m=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$. Kết hợp với điều kiện (2) suy ra $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=\sqrt{3}\end{array}\right.$ là các giá trị m thỏa ycbt. $\Rightarrow S=1+\sqrt{3}\in\left(2;4\right)$

Câu 15: Gọi A, B, C là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng?

A. $\sqrt{2}-1$. **B.** $\sqrt{2}+1$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y=x^4-2x^2+4\Rightarrow y'=4x^3-4x=4x\left(x-1\right)\left(x+1\right)$

Nên $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=4\\x=1\Rightarrow y=3\\x=-1\Rightarrow y=3\end{array}\right.$ Vậy tọa độ các điểm cực trị: $A\left(0;4\right)$, $B\left(1;3\right)$, $C\left(-1;3\right)$

$AB = AC = \sqrt{2}$; $BC = 2$ $p = \dfrac{2+\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2}$

Diện tích tam giác: $S = \sqrt{p(p-BC)(p-AC)(p-AC)}$

$= \sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right).\left(1+\sqrt{2}-2\right)\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)} = \sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-1\right)} = 1$

Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác là: $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$.

Câu 16: **)** Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1?

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

$y' = 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow 4x\left(x^2 - m\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$

Theo yêu cầu bài toán ta có: $m > 0$

Ta có $A(0; m-1)$; $B\left(\sqrt{m}; -m^2 + m - 1\right)$; $C\left(-\sqrt{m}; -m^2 + m - 1\right)$

Gọi H là trung điểm của cạnh BC. Ta có $H\left(0; -m^2 + m - 1\right)$

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AH.BC = \dfrac{AB.AC.BC}{4R}$

$\Leftrightarrow AB^2 = 2AH.R$ trong đó $\begin{cases} AH = m^2 \\ AB = \sqrt{m + m^4} \end{cases}$

Suy ra $m + m^4 = 2m^2 \Leftrightarrow m\left(m^3 - 2m + 1\right) = 0 \Leftrightarrow m(m-1)\left(m^2 + m - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \\ m = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ m = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$. Đối chiếu điều kiện ta được $S = \left\{1; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Câu 17: Gọi S tập hợp các giá trị m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân. Tổng bình phương các phần tử của S bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

$y' = 4x^3 - 4m^2x$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm m \end{array}\right.$.

Để hàm số có 3 điểm cực trị thì $m \neq 0$.

Với $x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(0;1) \in Oy.$

Với $\Rightarrow t + 1 + t + 2 + t = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow H(-1;0;1)$.

$\Rightarrow \Delta ABC$ cân ở A

Để 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow -8m^6+8=0 \Leftrightarrow m=\pm 1$.

Vậy tổng bình phương các phần tử của S bằng 2.

Câu 18: Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=mx^4-(m-3)x^2+m^2$ không có điểm cực đại?

A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Với $m=0$ hàm số trở thành $y=3x^2$. Khi đó hàm số có một điểm cực tiểu, không có điểm cực đại. Vậy $m=0$ thỏa mãn.

Với $m\neq 0$ ta có: $y'=4mx^3-2(m-3)x=2x\left[2mx^2-(m-3)\right]$;

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=\dfrac{m-3}{2m}\end{array}\right.\cdot$$

Hàm số không có điểm cực đại khi: $\begin{cases}m>0\\\dfrac{m-3}{2m}\le 0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m\le 3$. Vì $m\in\mathbb{Z}\to m\in\{1;2;3\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 19: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^4-2mx^2+m+1$ có giá trị cực tiểu bằng -1. Tổng các phần tử thuộc S là

A. -2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=4x^3-4mx$.

TH1: Phương trình $y'=0\Leftrightarrow 4x\left(x^2-m\right)=0$ có 1 nghiệm thực, tức là hàm số $y=x^4-2mx^2+m+1$ có điểm cực tiểu là $x=0$. Khi đó $m\le 0$. Theo bài ra: $y(0)=m+1=-1\Leftrightarrow m=-2$ **(thỏa mãn đk $m\le 0$)**.

TH2: Phương trình $y'=0\Leftrightarrow 4x\left(x^2-m\right)=0$ có 3 nghiệm thực, tức là hàm số $y=x^4-2mx^2+m+1$ có điểm cực tiểu là $x=\pm\sqrt{m}$. Khi đó $m>0$. Theo bài ra: $y\left(\pm\sqrt{m}\right)=-m^2+m+1=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=-1\end{array}\right.$. So sánh với đk $m>0$, giá trị thỏa mãn là $m=2$.

Vậy $S=\{-2;2\}$, tổng các phần tử thuộc S bằng 0.

Câu 20: Gọi S tập hợp các giá trị m để đồ thị hàm số $y=x^4-2m^2x^2+1$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân. Tổng bình phương các phần tử của S bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Nhận xét: Hàm số trùng phương $y=ax^4+bx^2+c$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân $\Leftrightarrow 8a+b^3=0$

Đồ thị hàm số $y=x^4-2m^2x^2+1$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân

$\Leftrightarrow 8a+b^3=0\Leftrightarrow 8+\left(-2m^2\right)^3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=1 \end{array}\right.$

Tổng bình phương các phần tử của S bằng 2.

Câu 21: Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^4+2mx^2+3m^2$ có ba điểm cực trị lập thành một tam giác nhận $G\ 0;7$.

A. $m=1.$ **B.** $m=-\sqrt{\frac{3}{7}}.$ **C.** $m=-1.$ **D.** $m=-\sqrt{3}.$

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Xét hàm số $y=x^4+2mx^2+3m^2$

$\bullet y'=4x^3+4mx$

$\bullet y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{-m},(m<0) \end{array}\right.$

Khi đó ba điểm cực trị là $A\ 0;3m^2\ ,B\ -\sqrt{-m},2m^2\ ,C\ \sqrt{-m},2m^2\ .$

Tam giác ABC nhận điểm $G\ 0;7\ $ làm trọng tâm thì $\frac{7m^2}{3}=7\Leftrightarrow m^2=3\Leftrightarrow m=-\sqrt{3}.$

Câu 22: Cho hai đường cong $(C_1):y=x^4-(m+1)x^2+2$ và $(C_2):y=2(x+1)^4-4x^2-8x+3m$. Biết rằng mỗi đường cong đều có 3 điểm cực trị tạo thành tam giác đồng thời các tam giác đồng dạng với nhau. Hỏi m thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;4)$.

Lời giải

Chọn C

- Xét $(C_2):y=2(x+1)^4-4x^2-8x+3m$.

$y'=8(x+1)^3-8x-8=8x(x+1)(x+2)$.

$y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=4+3m \\ y=2+3m \\ y=2+3m \end{array}\right.\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A(-1;4+3m) \\ B(0;2+3m) \\ C(-2;2+3m) \end{array}\right.$.

Nhận thấy tam giác ABC cân tại A.

- Xét $(C_1):y=x^4-(m+1)x^2+2$, hàm số có 3 cực trị do đó $m>-1$.

$y'=4x^3-2(m+1)x$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\sqrt{\dfrac{m+1}{2}}\\ x=-\sqrt{\dfrac{m+1}{2}}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=2\\ y=2-\dfrac{(m+1)^2}{4}\\ y=2-\dfrac{(m+1)^2}{4}\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}A'(0;2)\\ B'\left(\sqrt{\dfrac{m+1}{2}};2-\dfrac{(m+1)^2}{4}\right)\\ C'\left(-\sqrt{\dfrac{m+1}{2}};2-\dfrac{(m+1)^2}{4}\right)\end{array}\right.$$

Nhận thấy tam giác $A'B'C'$ cân tại A'.

- Tam giác ABC đồng dạng với tam giác $A'B'C'\Leftrightarrow\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{B'C'}{BC}$.

Ta có: $A'B'=\sqrt{\dfrac{m+1}{2}+\dfrac{(m+1)^4}{16}}$; $B'C'=\sqrt{2(m+1)}$; $AB=\sqrt{5};BC=2$, suy ra

$$\frac{\sqrt{\dfrac{m+1}{2}+\dfrac{(m+1)^4}{16}}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2(m+1)}}{2}\Leftrightarrow\frac{\dfrac{m+1}{2}+\dfrac{(m+1)^4}{16}}{5}=\frac{2(m+1)}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2(m+1)+\frac{(m+1)^4}{4}=10(m+1)$$

$$\Leftrightarrow(m+1)\left[\frac{1}{4}(m+1)^3-8\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=-1+\sqrt[3]{32}\end{array}\right.\Rightarrow m=-1+\sqrt[3]{32}.$$

Câu 23: Đồ thị của hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+2m+1$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m\in(6;9)$. **B.** $m\in(-6;-3)$. **C.** $m\in(-3;2)$. **D.** $m\in(2;6)$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4-2(m+1)x^2+2m+1=0$. **(1)**

Đặt $t=x^2,t\ge 0$. Phương trình trở thành $t^2-2(m+1)t+2m+1=0$. **(2)**

Phương trình **(1)** có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình **(2)** có hai nghiệm dương phân biệt, nghĩa là

$$\begin{cases}\Delta'>0\\ S>0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m+1)^2-(2m+1)>0\\ m+1>0\\ 2m+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ne 0\\ m>-1\\ m>-\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-\dfrac{1}{2}\\ m\ne 0\end{cases}.$$

Cách 1. Gọi $x_1,x_2,x_3,x_4\,(x_1<x_2<x_3<x_4)$ là nghiệm của phương trình **(1)** và $t_1,t_2\,(t_1<t_2)$ là nghiệm của phương trình **(2)**.

Theo giả thiết, ta có

$x_4-x_3=x_3-x_2=x_2-x_1\Leftrightarrow x_4-x_3=x_3-x_2$

$\Leftrightarrow\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1}=\sqrt{t_1}+\sqrt{t_1}\Leftrightarrow t_2=9t_1>0$

Ta có hệ

$$\begin{cases} t_1+t_2=2(m+1) \\ t_1t_2=2m+1 \\ t_2=9t_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1=\dfrac{m}{5}+\dfrac{1}{5} \\ t_2=\dfrac{9m}{5}+\dfrac{9}{5} \\ t_1t_2=2m+1 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{m}{5}+\frac{1}{5}\right)\left(\frac{9m}{5}+\frac{9}{5}\right)=2m+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=4 \\ m=-\dfrac{4}{9} \end{array}\right. \textbf{(nhận)}$$

Cách 2. Với $\Delta'>0$, phương trình **(1)** có nghiệm $t_1=1, t_2=2m+1$. Biện luận như trên, ta có hai trường hợp $\left[\begin{array}{l} t_2=9t_1 \\ t_1=9t_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=4 \\ m=-\dfrac{4}{9} \end{array}\right.$ **(nhận)**.

CHỦ ĐỀ 03 : GIÁ TRỊ LỚN NHẤT-GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

LÍ THUYẾT

❖ **Định nghĩa.**

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập D.

- Số M gọi là **giá trị lớn nhất** của hàm số $y=f(x)$ trên D nếu: $\begin{cases} f(x)\le M, \forall x\in D \\ \exists x_0\in D, f(x_0)=M \end{cases}$.
- Kí hiệu: $M=\max\limits_{x\in D} f(x)$.
- Số m gọi là **giá trị nhỏ nhất** của hàm số $y=f(x)$ trên D nếu: $\begin{cases} f(x)\ge m, \forall x\in D \\ \exists x_0\in D, f(x_0)=m \end{cases}$.
- Kí hiệu: $m=\min\limits_{x\in D} f(x)$.

❖ **Phương pháp tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất**

○ **Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng cách khảo sát trực tiếp**

- **Bước 1:** Tính $f'(x)$ và tìm các điểm $x_1,x_2,...,x_n\in D$ mà tại đó $f'(x)=0$ hoặc hàm số không có đạo hàm.
- **Bước 2:** Lập bảng biến thiên và từ đó suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.

○ **Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn**

- **Bước 1:**

  Hàm số đã cho $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a;b]$.

  Tìm các điểm $x_1,x_2,...,x_n$ trên khoảng $(a;b)$, tại đó $f'(x)=0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.
- **Bước 2:** Tính $f(a),f(x_1),f(x_2),...,f(x_n),f(b)$.
- **Bước 3:** Khi đó: $\max\limits_{[a,b]} f(x)=\max\{f(x_1),f(x_2),...,f(x_n),f(a),f(b)\}$.

  $\min\limits_{[a,b]} f(x)=\min\{f(x_1),f(x_2),...,f(x_n),f(a),f(b)\}$.

○ **Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một khoảng**

- **Bước 1:** Tính đạo hàm $f'(x)$.
- **Bước 2:** Tìm tất cả các nghiệm $x_i\in(a;b)$ của phương trình $f'(x)=0$ và tất cả các điểm $\alpha_i\in(a;b)$ làm cho $f'(x)$ không xác định.
- **Bước 3.** Tính $A=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $B=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$, $f(x_i)$, $f(\alpha_i)$.
- **Bước 4.** So sánh các giá trị tính được và kết luận $M=\max\limits_{(a;b)} f(x)$, $m=\min\limits_{(a;b)} f(x)$.
- Nếu giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) là A hoặc B thì ta kết luận không có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất).

- Nếu $y=f(x)$ đồng biến trên $[a;b]$ thì $\begin{cases}\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(a)\\ \max\limits_{[a;b]} f(x)=f(b)\end{cases}$.
- Nếu $y=f(x)$ nghịch biến trên $[a;b]$ thì $\begin{cases}\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(b)\\ \max\limits_{[a;b]} f(x)=f(a)\end{cases}$.
- Hàm số liên tục trên một khoảng **có thể** không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên khoảng đó.

❖ Bất đẳng thức trị tuyệt đối:

- Cho hai số thực a,b khi đó ta có: $|a|+|b|\ge|a+b|\ge|a|-|b|$.
- Dấu " = " vế trái xảy ra khi a,b cùng dấu. Dấu " = " vế phải xảy ra khi a,b trái dấu.
- Tính chất của hàm trị tuyệt đối: $max\{|a|,|b|\}=\dfrac{|a-b|+|a+b|}{2}$.

❖ Phương pháp chung để giải các bài toán tìm GTLN – GTNN của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối.

- **Bước 1:** Xét hàm số $y=f(x)$ trên $[a,b]$.

  Tính đạo hàm $y'=f(x)$.

  Giải phương trình $f'(x)=0$ và tìm các nghiệm a_i thuộc $[a,b]$.
- **Bước 2:** Giải phương trình $f(x)=0$ và tìm các nghiệm b_j thuộc $[a,b]$.
- **Bước 3:** Tính các giá trị $|f(a)|;|f(b)|;|f(a_i)|;|f(b_j)|$. So sánh và kết luận.

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1: Cho hàm số $f(x)=m\sqrt{x-1}$ (m là tham số thực khác 0). Gọi m_1, m_2 là hai giá trị của m thỏa mãn $\min\limits_{[2;5]} f(x)+\max\limits_{[2;5]} f(x)=m^2-10$. Giá trị m_1+m_2 bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** 10. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Với mọi $x\in[2;5]$ có $f'(x)=\dfrac{m}{2\sqrt{x-1}}$. Ta thấy dấu của $f'(x)$ phụ thuộc vào dấu của m

$\forall m\neq 0$ thì $f(x)$ đơn điệu trên $[2;5]\Rightarrow \min\limits_{[2;5]} f(x)+\max\limits_{[2;5]} f(x)=f(2)+f(5)=m+2m$

Từ giả thiết ta được $m^2-10=m+2m\Leftrightarrow m^2-3m-10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=5\\m=-2\end{array}\right.$. Vậy $m_1+m_2=3$.

VÍ DỤ 2: Cho hàm số $y=\left(x^3-3x+m+1\right)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng 1 là

A. -2. **B.** 4. **C.** -4. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Đặt $y=f(x)=\left(x^3-3x+m+1\right)^2$ là hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[-1;1]$.

Ta có $y'=f'(x)=2\left(x^3-3x+m+1\right)\left(3x^2-3\right)$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\m=-x^3+3x-1=g(x)\end{array}\right.$.

Ta khảo sát hàm số $g(x)$ trên đoạn $[-1;1]$. Bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Nếu $m\in[-3;1]$ thì luôn tồn tại $x_0\in[-1;1]$ sao cho $m=g(x_0)$ hay $f(x_0)=0$. Suy ra $\min\limits_{[-1;1]} y=0$, tức là không tồn tại m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nếu $m\notin[-3;1]$ thì $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm1\in[-1;1]$.

Ta có: $\min\limits_{[-1;1]} f(x)=\min\{f(1);f(-1)\}=\min\{(m-1)^2;(m+3)^2\}$

Trường hợp 1: $m>1$ tức là $m+3>m-1>0\Rightarrow\min\limits_{[-1;1]} f(x)=(m-1)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\ (TM)\\m=0\ (KTM)\end{array}\right.$

Trường hợp 2: $m<-3$ tức là $m-1<m+3<0\Rightarrow\min\limits_{[-1;1]} f(x)=(m+3)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-4\ (TM)\\m=-2\ (KTM)\end{array}\right.$

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán: $m=2; m=-4$, từ đó tổng tất cả các giá trị của m là -2.

VÍ DỤ 3: Biết rằng giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=mx+\dfrac{36}{x+1}$ trên đoạn $\left[0;3\right]$ bằng 20 (với m là tham số). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $0<m\le 2$. **B.** $4<m\le 8$. **C.** $2<m\le 4$. **D.** $m>8$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Ta có: $\min\limits_{[0;3]} y=20 \Leftrightarrow \begin{cases} mx+\dfrac{36}{x+1}\ge 20, \forall x\in\left[0;3\right] \\ \exists x_0\in\left[0;3\right]: mx_0+\dfrac{36}{x_0+1}=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge \dfrac{20x-16}{x\left(x+1\right)}, \forall x\in\left(0;3\right] \\ \exists x_0\in\left(0;3\right]: m=\dfrac{20x_0-16}{x_0\left(x_0+1\right)} \end{cases}$ (*)

(vì $y\left(0\right)=36>20$).

Xét hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{20x-16}{x\left(x+1\right)}$ trên $\left(0;3\right]$.

Ta có: $g'\left(x\right)=\dfrac{-20x^2+32x+16}{\left[x\left(x+1\right)\right]^2}$; $g'\left(x\right)=0\Rightarrow -20x^2+32x+16=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \quad (tm) \\ x=-\dfrac{2}{5} \quad (l) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	0		2		3
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0
$g(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	$\frac{11}{3}$

Do đó, từ $\left(*\right)$ suy ra $m=4$. Vậy $2<m\le 4$.

Cách 2:

Ta có: $y\left(0\right)=36$, $y\left(3\right)=3m+9$; $y'=m-\dfrac{36}{\left(x+1\right)^2}, \forall x\in\left[0;3\right]$. $y'\left(0\right)=m-36$, $y'\left(3\right)=m-\dfrac{9}{4}$.

Mà $y''=\dfrac{72}{\left(x+1\right)^3}>0, \forall x\in\left[0;3\right]$. Bảng biến thiên

x	0		3
y''		$+$	0
y'	$m-36$	↗	$m-\frac{9}{4}$

Trường hợp 1: $m \le \frac{9}{4}$. Khi đó $y' \le 0, \forall x \in [0;3]$. Suy ra hàm số nghịch biến trên đoạn $[0;3]$.

Do đó, ta có $\min\limits_{[0;3]} y = 20 \Leftrightarrow y(3) = 20 \Leftrightarrow 3m + 9 = 20 \Leftrightarrow m = \frac{11}{3}$ (không thỏa mãn).

Trường hợp 2: $m \ge 36$. Khi đó $y' \ge 0, \forall x \in [0;3]$. Suy ra hàm số đồng biến trên đoạn $[0;3]$.

Do đó, ta có $\min\limits_{[0;3]} y = y(0) = 36$ (không thỏa mãn).

Trường hợp 3: $\frac{9}{4} < m < 36$. Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1 + \frac{6}{\sqrt{m}} \in (0;3)$.

x	0		$-1+\frac{6}{\sqrt{m}}$		3
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$	

Do đó, ta có $\min\limits_{[0;3]} y = 20 \Leftrightarrow y\left(-1+\frac{6}{\sqrt{m}}\right) = 20 \Leftrightarrow -m + 12\sqrt{m} = 20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m = 4 & (tm) \\ m = 100 & (l) \end{array}\right.$.

Do đó $m = 4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy $2 < m \le 4$.

VÍ DỤ 4: Cho hàm số $y = f(x) = x^6 + ax^2 + bx + 2a + b$ với a, b là các số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 1$. Giá trị nhỏ nhất có thể của $f(3)$ bằng bao nhiêu?

A. 128. **B.** 243. **C.** 81. **D.** 696.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x) = 6x^5 + 2ax + b$. Do hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 1$ nên $f'(1) = 0 \Rightarrow b = -2a - 6$

Do hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 1$ nên $f(x) \ge f(1), \forall x \in \mathbb{R}$.

$f(x) \ge f(1), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^6 + ax^2 + bx + 2a + b \ge 1 + 3a + 2b, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^6 + ax^2 + (-2a - 6)x + 2a - 2a - 6 \ge 1 + 3a + 2b, \forall x \in \mathbb{R}$ (do $b = -2a - 6$)

$\Leftrightarrow a(x^2 - 2x + 1) \ge -x^6 + 6x - 5, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow a(x-1)^2 \ge (x-1)^2(-x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x - 5), \forall x \in \mathbb{R}$ $(*)$

Mà $\max(-x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x - 5) = -3 \Leftrightarrow x = -1$ nên (*) xảy ra khi $a \ge -3$.

$f(3) = 3a + 705 \Rightarrow \min f(3) = 696$.

VÍ DỤ 5: Cho $y = f(x) = |x^2 - 5x + 4| + mx$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ lớn hơn 1. Tính số phần tử của S.

A. 7. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Vì $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x)>1$ nên $f(x)=\left|x^2-5x+4\right|+mx>1$ với $\forall x\in\mathbb{R}$

Với $x\in[4;+\infty)$, ta có $f(x)=mx+x^2-5x+4>1\Leftrightarrow m>-x-\dfrac{3}{x}+5,\forall x\ge 4$

Đặt $g(x)=-x-\dfrac{3}{x}+5,\forall x\ge 4$. Ta có $g'(x)=-1+\dfrac{3}{x^2}<0,\forall x\in[4;+\infty), g(4)=\dfrac{1}{4}$.

Do đó $g(x)\le g(4)=\dfrac{1}{4}$. Vì $m>g(x)\ \forall x\in[4;+\infty)\Leftrightarrow m>g(4)\Leftrightarrow m>\dfrac{1}{4}$. (1)

Tương tự, với $x\in[1;4)$. Ta có $f(x)=-x^2+5x-4+mx>1\ \forall x\in[1;4)\Leftrightarrow m>1$. (2)

Với $x\in(0;1)$. Ta có $f(x)=x^2-5x+4+mx>1\ \forall x\in(0;1)\Leftrightarrow m>-x-\dfrac{3}{x}+5\Leftrightarrow m\ge 1$ (3)

Với $x\in(-\infty;0)$. Ta có $f(x)=x^2-5x+4+mx>1\ \forall x\in(-\infty;0)$

$\Leftrightarrow m<-x-\dfrac{3}{x}+5\ \forall x\in(-\infty;0)\Leftrightarrow m<5+2\sqrt{3}$ (4)

Với $x=0$ luôn đúng.

Từ (1), (2), (3) và (4) ta có $1<m<5+2\sqrt{3}$

Vậy $S=\{2;3;4;5;6;7;8\}$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m thỏa mãn.

VÍ DỤ 6: Tìm tất cả các giá trị thực của m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{4^{\sin x}+m.6^{\sin x}}{9^{\sin x}+4^{1+\sin x}}$ không nhỏ hơn $\dfrac{1}{3}$.

A. $m>\dfrac{2}{3}$. **B.** $m\ge\dfrac{2}{3}$. **C.** $m\ge\dfrac{13}{18}$. **D.** $\dfrac{2}{3}\le m\le\dfrac{13}{18}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y=\dfrac{4^{\sin x}+m.6^{\sin x}}{9^{\sin x}+4^{1+\sin x}}=\dfrac{1+m.\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\sin x}}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2\sin x}+4}$.

Đặt $t=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\sin x}$ với $t\in\left[\dfrac{2}{3};\dfrac{3}{2}\right]$ khi đó $y=f(t)=\dfrac{mt+1}{t^2+4}$

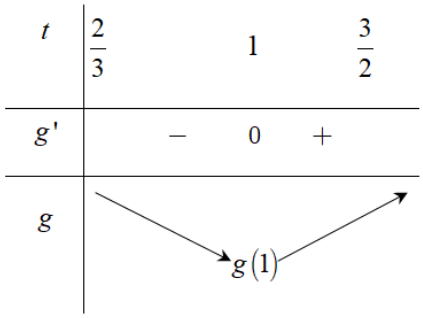
Yêu cầu bài toán tương đương với:

Tồn tại $\max\limits_{\left[\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right]} f(t)$ (điều này luôn đúng) và $f(t)\ge\dfrac{1}{3}$ có nghiệm $t\in\left[\dfrac{2}{3};\dfrac{3}{2}\right]$.

Xét $f(t)\ge\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow mt+1\ge\dfrac{1}{3}t^2+\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow 3m\ge\dfrac{t^2+1}{t}\quad(1)$.

Đặt $g(t)=\dfrac{t^2+1}{t}$, $g'(t)=1-\dfrac{1}{t^2}=0\Leftrightarrow t=1$.

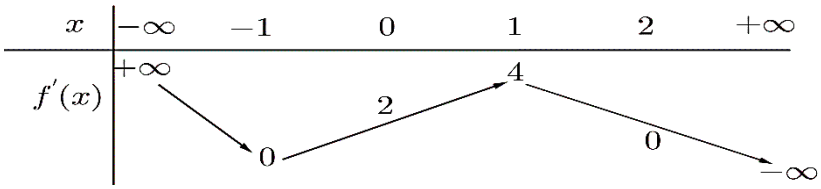
Bảng biến thiên của hàm $g(t)$:



Yêu cầu bài toán tương đương (1) có nghiệm hay $3m \ge g(t)$ có nghiệm $t \in \left[\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right]$

$\Leftrightarrow 3m \ge g(1) \Leftrightarrow 3m \ge 2 \Leftrightarrow m \ge \frac{2}{3}$.

VÍ DỤ 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên tập số thực và có bảng biến thiên như sau:



Biết rằng $f(-1) = \frac{10}{3}$, $f(2) = 6$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f^3(x) - 3f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

A. $\frac{10}{3}$. **B.** $\frac{820}{27}$. **C.** $\frac{730}{27}$. **D.** 198.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(x) = f^3(x) - 3f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$

$g'(x) = 3\left[f^2(x) - 1\right] \cdot f'(x)$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \quad (1) \\ f^2(x) = 1 \quad (2) \end{array}\right.$.

Từ bảng biến thiên, ta có: $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \in [-1;2] \\ x = 2 \in [-1;2] \end{array}\right.$

Và $f'(x) \ge 0$, $\forall x \in [-1;2]$ nên $f(x)$ đồng biến trên $[-1;2] \Rightarrow f(x) \ge f(-1) = \frac{10}{3}$

$\Rightarrow f(x) > 1 \Rightarrow f^2(x) > 1$, $\forall x \in [-1;2]$ nên (2) vô nghiệm.

Do đó, $g'(x) = 0$ chỉ có 2 nghiệm là $x = -1$ và $x = 2$.

Ta có $g(-1) = f^3(-1) - 3f(-1) = \left(\frac{10}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{730}{27}$.

$g(2) = f^3(2) - 3f(2) = (6)^3 - 3(6) = 198$. Vậy $\min\limits_{[-1;2]} g(x) = g(-1) = \frac{730}{27}$.

VÍ DỤ 8: Cho hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;2]$. Biết rằng hàm số $y=f(x)$ và thỏa mãn $(f(x)-x)f(x)=x^6+3x^4+2x^2, \forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $3M-m$ bằng

A. 4. **B.** -28. **C.** -3. **D.** 33.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $(f(x)-x)f(x)=x^6+3x^4+2x^2 \Leftrightarrow f^2(x)-xf(x)=x^6+3x^4+2x^2$

$\Leftrightarrow 4f^2(x)-4xf(x)=4x^6+12x^4+8x^2 \Leftrightarrow 4f^2(x)-4xf(x)+x^2=4x^6+12x^4+9x^2$

$\Leftrightarrow [2f(x)-x]^2=(2x^3+3x)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2f(x)-x=2x^3+3x \\ 2f(x)-x=-2x^3-3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=x^3+2x \\ f(x)=-x^3-x \end{array}\right.$

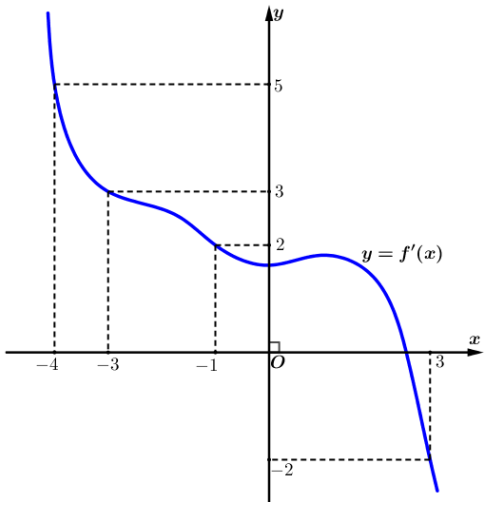
Với $f(x)=x^3+2x \Rightarrow f'(x)=3x^2+2>0, \forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Với $f'(x)=-x^3-x \Rightarrow f'(x)=-3x^2-1<0, \forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(x)=-x^3-x$. Vì $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên $M=\max\limits_{[1;2]} f(x)=f(1)=-2$

và $m=\min\limits_{[1;2]} f(x)=f(2)=-10$. Từ đây, ta suy ra: $3M-m=3.(-2)+10=4$.

VÍ DỤ 9: Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây. Trên đoạn $[-4;3]$, hàm số $g(x)=2f(x)+(1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm?



A. $x=-3$. **B.** $x=-4$. **C.** $x=3$. **D.** $x=-1$.

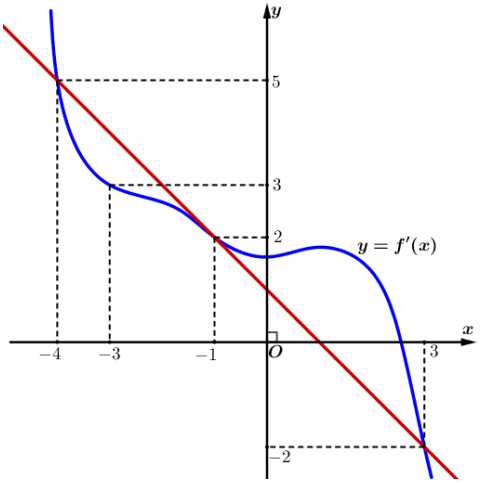
Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=2f'(x)-2(1-x)$.

Giải phương trình: $g'(x)=0 \Leftrightarrow 2f'(x)-2(1-x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=(1-x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3\in[-4;3] \\ x=-1\in[-4;3] \\ x=-4\in[-4;3] \end{array}\right.$

Tương giao đồ thị như sau



Bảng biến thiên:

x	-4		-1		3
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$g(x)$		↘		↗	

Vậy trên đoạn $[-4;3]$, hàm số $g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x=-1$.

ĐỀ VDC SỐ 1 Cơ bản về GTLN-GTNN của hàm số

Câu 1: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{-x^2+4x}$ trên khoảng $(0;3)$ là:

A. 4. **B.** 2. **C.** 0. **D.** -2.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-1	↗	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

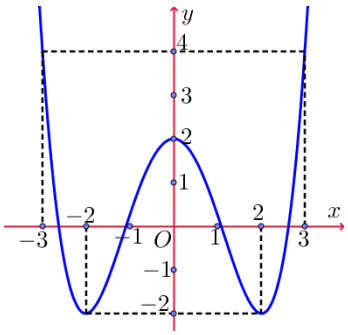
A. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng 1.

B. Hàm số có đúng một cực trị.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x=1$ và đạt cực tiểu tại $x=3$.

D. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 3.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới



Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2;3]$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2.

Câu 4: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+2019$ là

A. 2017. **B.** 2020. **C.** 2018. **D.** 2019.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ và có bảng biến thiên trên $[-5;7)$ như sau:

x	$-\infty$		-5		1		7		$+\infty$
y'				$-$	0	$+$			
y			6	↘	2	↗	9		

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\min\limits_{[-5;7)} f(x)=2$ và hàm số không đạt giá trị lớn nhất trên $[-5;7)$.

B. $\max\limits_{[-5;7)} f(x)=6$ và $\min\limits_{[-5;7)} f(x)=2$.

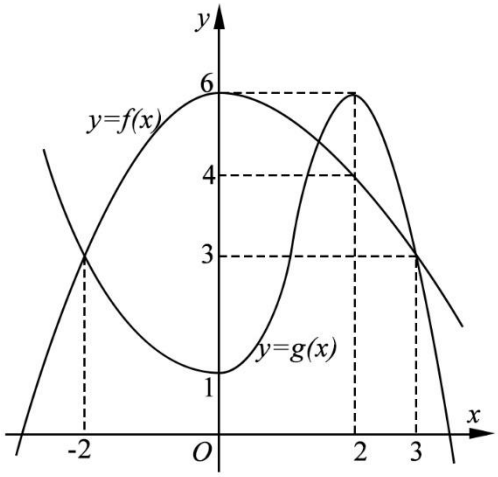
C. $\max\limits_{[-5;7)} f(x)=9$ và $\min\limits_{[-5;7)} f(x)=2$.

D. $\max\limits_{[-5;7)} f(x)=9$ và $\min\limits_{[-5;7)} f(x)=6$.

Câu 6: Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+\dfrac{4}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Tìm m

A. $m=4$. **B.** $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=3$.

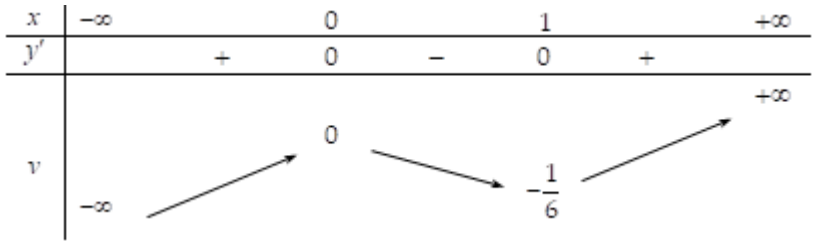
Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ và hàm số $y=g(x)$ có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số *m* để phương trình $\dfrac{f(x)}{g(x)}=m$ có nghiệm thuộc $[-2;3]$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 6.

Câu 8: Cho hàm số có bảng biến thiên như hình dưới đây. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên tập số thực bằng $-\dfrac{1}{6}$.

B. Giá trị cực đại của hàm số bằng 0.

C. Giá trị lớn nhất của hàm số trên tập số thực bằng 0.

D. Giá trị cực tiểu của hàm số bằng 0.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=3$. Xét $g(x)=f(3x-1)+m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $\max\limits_{[0;1]} g(x)=-10$.

A. 13. **B.** -7. **C.** -13. **D.** -1.

Câu 10: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=3\sin x-4\sin^3 x$ trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ bằng:

A. 1. **B.** 3. **C.** -1. **D.** 7.

Câu 11: Cho hàm số $y=\dfrac{\sin x+1}{\sin^2 x+\sin x+1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Chọn mệnh đề đúng.

A. $M=\dfrac{3}{2}m$. **B.** $M=m+\dfrac{3}{2}$. **C.** $M=m+\dfrac{2}{3}$. **D.** $M=m+1$.

Câu 12: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{2x-2}$ trên khoảng $(0;1)$

A. $\min\limits_{(0;1)} f(x)=\dfrac{54+25\sqrt{5}}{20}$. **B.** $\min\limits_{(0;1)} f(x)=\dfrac{11+5\sqrt{5}}{4}$.

C. $\min\limits_{(0;1)} f(x)=\dfrac{10+5\sqrt{5}}{4}$. **D.** $\min\limits_{(0;1)} f(x)=\dfrac{56+25\sqrt{5}}{20}$.

Câu 13: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$ trên tập $D=(-\infty;-1]\cup\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$. Tính giá trị T của $m.M$.

A. $T=\dfrac{3}{2}$. **B.** $T=0$. **C.** $T=-\dfrac{3}{2}$. **D.** $T=\dfrac{1}{9}$.

Câu 14: Cho hàm số $y=x^3-\dfrac{3}{2}x^2+1$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $\left(-25;\dfrac{11}{10}\right)$. Tìm M.

A. $M=1$. **B.** $M=\dfrac{129}{250}$. **C.** $M=0$. **D.** $M=\dfrac{1}{2}$.

Câu 15: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=-x^3+3x+1$ trên khoảng $(0;+\infty)$ bằng:

A. 3. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 5.

Câu 16: Trên khoảng $(0;\ +\infty)$ thì hàm số $y=-x^3+3x+1$.

A. Có giá trị lớn nhất là $\text{Max}\, y=-1$. **B.** Có giá trị nhỏ nhất là $\text{Min}\, y=-1$.

C. Có giá trị lớn nhất là $\text{Max}\, y=3$. **D.** Có giá trị nhỏ nhất là $\text{Min}\, y=3$.

Câu 17: Cho hàm số $y=x^4-2x^2+5$. Khẳng định nào sau đây đúng:

A. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất, không có giá trị lớn nhất.

B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất, có giá trị lớn nhất.

C. Hàm số có giá trị nhỏ nhất, không có giá trị lớn nhất.

D. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất, có giá trị lớn nhất.

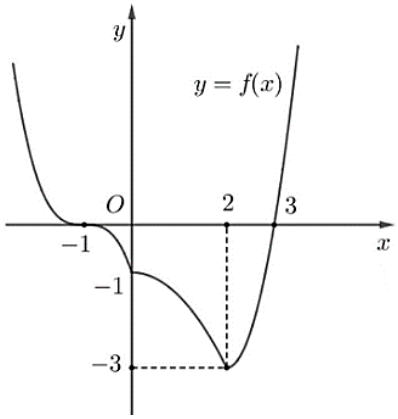
Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0)=3$, $f'(2)=-2018$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(x+2017)+2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-2017)$. **B.** $(2017;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-2017;0)$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $2f(x)+x^3>2m+3x^2$ nghiệm đúng với mọi $x\in(-1;3)$ khi và chỉ khi



A. $m<-10$. **B.** $m<-5$. **C.** $m<-3$. **D.** $m<-2$.

Câu 20: Có bao nhiêu số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2-4x+m+3\right|-4x$ bằng -5.

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.C	3.B	4.C	5.A	6.A	7.D	8.B	9.C	10.A
11.D	12.B	13.B	14.A	15.A	16.C	17.C	18.A	19.B	20.D

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn B

Tập xác định $D=\left[0;4\right]$. Xét hàm số $y=\sqrt{-x^2+4x}$ trên khoảng $\left(0;3\right)$

Ta có: $y'=\dfrac{-x+2}{\sqrt{-x^2+4x}}$ có $y'=0\Leftrightarrow x=2$.

Bảng biến thiên

x	0		2		3
y'		+	0	-	
y	0	↗	2	↘	$\sqrt{3}$

Trên khoảng $\left(0;3\right)$ giá trị lớn nhất của hàm số là $y=2$.

Câu 2: Chọn C

Từ bảng biến thiên, ta dễ dàng thấy được **A, B, D** sai, **C** đúng.

Câu 3: Chọn B

Từ đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ ta thấy rằng hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[-2;3\right]$ và ta có $f\left(x\right)\in\left[-2;4\right]$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Nên ta có $\max\limits_{\left[-2;3\right]}f\left(x\right)=f\left(3\right)=4$.

Câu 4: Chọn C

Tập xác định: D=$\mathbb{R}$.

Biến đổi: $f\left(x\right)=\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)\left(x+4\right)+2019=\left(x^2+5x+4\right)\left(x^2+5x+6\right)+2019.$

Đặt $t=x^2+5x+4\Rightarrow t=\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}\Rightarrow t\geq-\dfrac{9}{4}\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Hàm số đã cho trở thành $f\left(t\right)=t^2+2t+2019=\left(t+1\right)^2+2018\geq2018\ \forall t\geq-\dfrac{9}{4}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho bằng 2018 tại $t=-1\in\left[-\dfrac{9}{4};+\infty\right).$

Câu 5: Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên dễ dàng ta thấy $\min\limits_{\left[-5;7\right)}f\left(x\right)=2$ khi $x=1$.

$\max\limits_{\left[-5;7\right)}f\left(x\right)=6$ là sai vì $f\left(x\right)$ sẽ nhận các giá trị $7;8$ lớn hơn 6 khi $x\to7$.

$\max\limits_{\left[-5;7\right)}f\left(x\right)=9$ là sai vì $f\left(x\right)$ không bằng 9 mà chỉ tiến đến 9 khi $x\to7$, $\left(x\neq7\right)$.

Câu 6: Chọn A

Ta có: $y'=1-\frac{4}{x^2}$; $y'=0\Leftrightarrow x=\pm 2;\ \ x=2\in(0;+\infty)$.

Bảng biến thiên:

x	0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $y(2)=4\Rightarrow m=4$.

Câu 7: Chọn D

Xét hàm số $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$. Dựa vào đồ thị, ta thấy các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $[-2;3]$, do đó $h(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $[-2;3]$.

Ngoài ra với $x\in[-2;3]$, dễ thấy $f(x)\le 6$, $g(x)\ge 1$ nên $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\le 6$, mà $h(0)=\frac{f(0)}{g(0)}=\frac{6}{1}=6$ nên $\max\limits_{[-2;3]}h(x)=6$.

Lại có $h(x)>0$ với mọi $x\in[-2;3]$ và $h(-2)=1$ nên $0<\min\limits_{[-2;3]}h(x)\le 1$.

Phương trình $\frac{f(x)}{g(x)}=m$ có nghiệm trên $[-2;3]$ khi và chỉ khi $\min\limits_{[-2;3]}h(x)\le m\le\max\limits_{[-2;3]}h(x)$.

Từ (1), (2) và (3), kết hợp với $m\in\mathbb{Z}$, ta có $m\in\{1;2;3;4;5;6\}$. **Chọn D**

Câu 8: Chọn B

Từ bảng biên thiên ta nhận thấy đạo hàm của hàm số đổi dấu từ dương sang âm qua nghiệm 0 nên hàm số đạt cực đại tại 0 và giá trị cực đại của hàm số bằng 0.

Câu 9: Chọn C

Ta có: $\max\limits_{[0;1]}g(x)=\max\limits_{[0;1]}\left[f(3x-1)+m\right]=m+\max\limits_{[0;1]}f(3x-1)$.

Đặt $t=3x-1$. Ta có hàm số $t(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà $x\in[0;1]\Rightarrow t\in[-1;2]$.

Suy ra: $\max\limits_{[0;1]}f(3x-1)=\max\limits_{[-1;2]}f(t)=3$. Suy ra $\max\limits_{[0;1]}g(x)=m+3$.

Do đó $\max\limits_{[0;1]}g(x)=-10\Leftrightarrow m+3=-10\Leftrightarrow m=-13$.

Câu 10: Chọn A

Đặt $\sin x=t\ \ \Rightarrow t\in(-1;1)$ Khi đó $f'(t)=-12t^2+3$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\pm\frac{1}{2}$. So sánh $f\left(\frac{1}{2}\right)$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ ta thấy GTLN là $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$.

Câu 11: Chọn D

Đặt $t=\sin x, -1\le t\le 1 \Rightarrow y=f(t)=\dfrac{t+1}{t^2+t+1}$, $f'(t)=\dfrac{-t^2-2t}{\left(t^2+t+1\right)^2}$

$f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0\in[-1;1] \\ t=-2\notin[-1;1] \end{array}\right. \Rightarrow f(0)=1,\ f(-1)=0,\ f(1)=\dfrac{2}{3}$. Vậy $M=1, m=0$

Câu 12: Chọn B

Hàm số xác định và liên tục trên $(0;1)$ và có $f'(x)=-\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{1}{2(x-1)^2}$.

Giải phương trình $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^3-8x^2+16x-8=0 \Leftrightarrow (x-2)\left(x^2-6x+4\right)=0$

$\Rightarrow x=3-\sqrt{5}$.

Lập bảng biến thiên

x	0		$3-\sqrt{5}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{11+5\sqrt{5}}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $\min\limits_{(0;1)} f(x)=\dfrac{11+5\sqrt{5}}{4}$.

Câu 13: Chọn B

$y=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$. Tập xác định $(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)\setminus\{2\}$.

$y'=\dfrac{\dfrac{x(x-2)}{\sqrt{x^2-1}}-\sqrt{x^2-1}}{(x-2)^2}=\dfrac{-2x+1}{\sqrt{x^2-1}(x-2)^2}; y'=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

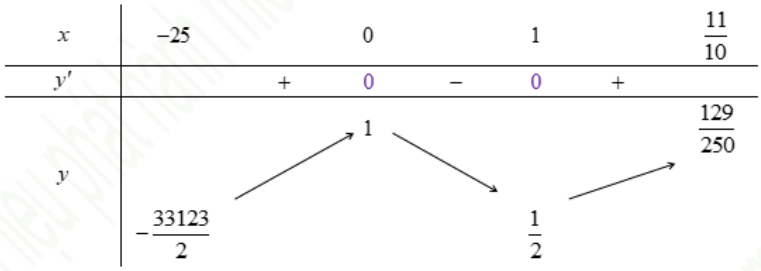
x	$-\infty$		-1		$\dfrac{1}{2}$		1		$\dfrac{3}{2}$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\sqrt{5}$

Từ bảng biến thiên suy ra $M=0;\ m=-\sqrt{5}$. Vậy $M.m=0$

Câu 14: Chọn A

Ta có $y'=3x^2-3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên ta có $M=1$.

Câu 15: Chọn A

Ta có: $y'=-3x^2+3$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1(l)\end{array}\right.$.

Từ bảng biến thiên ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số $y=-x^3+3x+1$ trên khoảng $(0;+\infty)$ bằng 3.

Câu 16: Chọn C

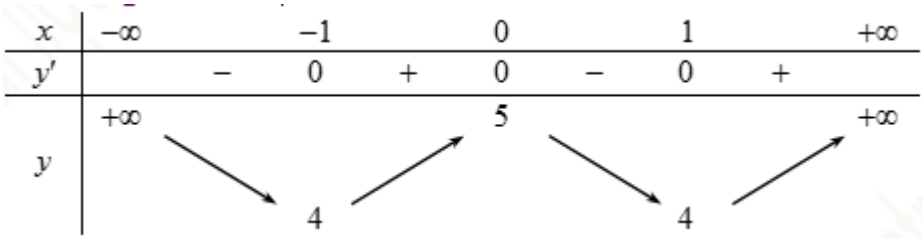
Ta có $y'=-3x^2+3$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên $\Rightarrow$ Hàm số có giá trị lớn nhất là $Max\, y=3$.

Câu 17: Chọn C

Ta có: TXĐ: $D=\mathbb{R}$ $y'=4x^3-4x$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-1\end{array}\right.$.

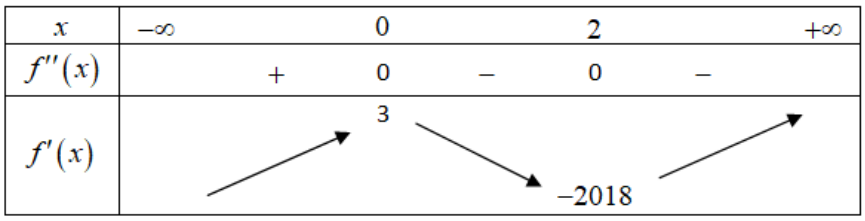
Ta có bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số có giá trị nhỏ nhất, không có giá trị lớn nhất.

Câu 18: Chọn A

Dựa vào bảng xét dấu của $f''(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$



Đặt $t=x+2017$.

Ta có $y=f(x+2017)+2018x=f(t)+2018t-2017.2018=g(t)$.

$g'(t)=f'(t)+2018$.

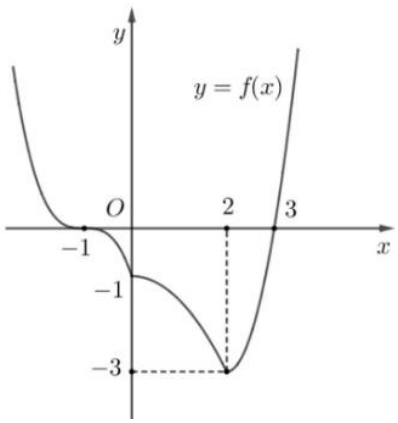
Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ suy ra phương trình $g'(t)$ có một nghiệm đơn $\alpha \in (-\infty;0)$ và một nghiệm kép $t=2$.

Ta có bảng biến thiên $g(t)$

Hàm số $g(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $t_0 = \alpha \in (-\infty;0)$.

Suy ra hàm số $y = f(x+2017)+2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 mà $x_0 + 2017 \in (-\infty;0) \Leftrightarrow x_0 \in (-\infty;-2017)$.

Câu 19: Chọn B



$2f(x)+x^3 > 2m+3x^2$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-1;3)$

$\Leftrightarrow f(x)+\dfrac{x^3}{2}-\dfrac{3x^2}{2} > m,\ \forall x \in (-1;3) \Leftrightarrow m < \min\limits_{(-1;3)} g(x)$

Quan sát đồ thị, ta thấy $\min\limits_{(-1;3)} f(x) = f(2) = -3$

Xét hàm $h(x) = \dfrac{x^3}{2}-\dfrac{3x^2}{2}$, $\forall x \in (-1;3)$. Ta có: $h'(x) = \dfrac{3x^2}{2}-3x$; $h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	-1		0		2		3
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		↗	0	↘		↗	0
	-2				-2		

Theo bảng biến thiên trên, ta suy ra $\min\limits_{(-1;3)} h(x) = h(2) = -2$

Từ và suy ra $\min\limits_{(-1;3)} g(x) = g(2) = -5$. Vậy $m < -5$ là giá trị thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 20: Chọn D

Xét $f(x) = x^2 - 4x + m + 3$ có $\Delta' = 1 - m$.

- **Trường hợp 1.** $m \ge 1$: $f(x) \ge 0\ \forall x \Leftrightarrow y = x^2 - 8x + m + 3$.

x	$-\infty$	4	$+\infty$
y	$+\infty$ ↘	$m-13$	↗ $+\infty$

$\min y = -5 \Leftrightarrow m = 8$.

- **Trường hợp 2.** $m < 1$: $f(x) = 0$ có hai nghiệm $x_1 = 2 - \sqrt{1-m}$; $x_2 = 2 + \sqrt{1-m}$.

  - Nếu $x \in (x_1; x_2)$: $y = -x^2 - 3 - m$ và $\begin{cases} y(x_1) = -8 + 4\sqrt{1-m} \\ y(x_2) = -8 - 4\sqrt{1-m} \end{cases}$.

  $\Rightarrow y(x_1) < y(x_2) \Rightarrow \min\limits_{(x_1;x_2)} y = -8 - 4\sqrt{1-m} < -8$.

  - Nếu $x \notin (x_1; x_2)$: $y = x^2 - 8x + 3 + m$.

  +) $x_2 < 4 \Leftrightarrow 1 > m > -3$:

x	$-\infty$	x_1	x_2	4	$+\infty$
y	$+\infty$ ↘			$m-13$	↗ $+\infty$

  $\Rightarrow \min y = m - 13 = -5 \Leftrightarrow m = 8$.

  +) $x_2 \geq 4 \Leftrightarrow m \leq -3$:

x	$-\infty$	x_1	4	x_2	$+\infty$
y	$+\infty$ ↘	$-8+4\sqrt{1-m}$		$-8-4\sqrt{1-m}$	↗ $+\infty$

  $\Rightarrow \min y = -8 - 4\sqrt{1-m} < -8$. Vậy có 1 giá trị của m.

DẠNG 2 Mín max của hàm đa thức và BPT

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=x^{20-m}-x^7+2$, với m là tham số nguyên dương. Hỏi có bao nhêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 10.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=x^{30-m}-x^6+1$, với m là tham số nguyên dương. Hỏi có bao nhêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$.

A. 6. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 3.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=(m^2-3m)x^{11}-mx^6+x^3-3$, với m là tham số. Hỏi có bao nhêu giá trị thực của tham số m để hàm số có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$.

A. 0. **B.** 2. **C.** Vô số. **D.** 1.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=(m^3-m)x^{13}-mx^6+x^4+1$, với m là tham số. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=x^4+x^3-(m-1)x^2+2mx+1$. Để hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=0$ thì giá trị của tham số m nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $(-3;-1)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $(-1;1)$.

Câu 6: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-21;21]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-2mx^3+4mx^2-(2m+2)x-2021$ đạt tại $x_0=2$. Số phần tử của tập S là

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 12.

Câu 7: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x)=-x^4-2m.x^3+3m.x^2-2mx-2021$ đạt giá trị lớn nhất tại $x_0=1$. Số phần tử của tập S là:

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 0

Câu 8: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-21;21]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^6+(m-2)x^5+(m^2-11)x^4+2021$ đạt tại $x_0=0$. Số phần tử của tập S là:

A. 34 **B.** 42 **C.** 35 **D.** 37

Câu 9: Cho hàm số $f(x)=(x-1)(x-2)(x^2-ax+b)+2021$. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2021. Giá trị của biểu thức $S=4a+b$ tương ứng bằng:

A. 5 **B.** 0 **C.** 10 **D.** 14

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=x^6+ax^2+bx+2a+b,$ với a,b là hai số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=1$. Giá trị nhỏ nhất có thể của $f(3)$ bằng bao nhiêu?

A. 128. **B.** 243. **C.** 81. **D.** 696.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)=x^4+x^3+ax^2+bx+b-1.$ Biết rằng hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=1$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $a\in[-20;20]$ thỏa mãn bài toán?

A. 30. **B.** 23. **C.** 22. **D.** 24.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)=(m+n-2)x^7+x^4+(m+2n-1)x^3+x^2+(2n-1)x+2.$ Với m và n là hai tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=2$. Giá trị của biểu thức $T=16m+2n$ bằng:

A. 22. **B.** 38. **C.** 46. **D.** 79.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)=x^4+ax^3+2bx^2+2cx+2b$ với a,b,c là những tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_1=1$ và $x_2=2$. Giá trị của biểu thức $T=a+2b$ bằng:

A. 7. **B.** 8. **C.** 3. **D.** 9.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+1$ với a,b,c là những tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_1=0$ và $x_2=1$. Giá trị của biểu thức $T=a+2b+c$ bằng:

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -3.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)=x^6-ax^5+2bx^4+1$ với a,b là hai tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_1=0$ và $x_2=1$. Giá trị của biểu thức $T=3a+4b$ bằng:

A. 7. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 0.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx-1$, với a, b, c là những tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng (b). Giá trị của biểu thức $T=a+3b+c$ bằng:

A. 3. **B.** 5. **C.** -6. **D.** -1.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)=x^8+ax^5+bx^4+cx+2021$, với a, b là những tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=a+b$ bằng:

A. -1. **B.** 1. **C.** -2. **D.** 3.

Câu 18: Cho hàm số $f(x)=x^6+ax^5+bx^4+1$, với a, b là những tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=2a-b$ bằng:

A. 4. **B.** 8. **C.** 16. **D.** -2.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)=x^4-4x^3+(m+1)x^2-mx+1$ với m là tham số thực. Biết rằng $\alpha=\min f(x)$ Giá trị lớn nhất của α bằng:

A. 1. **B.** -1. **C.** -2. **D.** 0.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)=x^4-4x^3+(m+1)x^2-mx+1$ với m là tham số thực. Biết rằng $\alpha=\min f(x)$. Khi α đạt giá trị lớn nhất thì $x=x_o; m=m_o$. Giá trị của biểu thức (x_o+m_o) bằng:

A. 0. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** -1. **D.** $-\frac{3}{4}$.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)=-x^4+2x^3+mx^2-(m+2)x$, với m là tham số thực. Biết rằng $\beta=\max f(x)$. Khi β đạt giá trị nhỏ nhất bằng:

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -1.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)=x^6-6a^5x-5b,$ với a và b là hai số thực không âm. Biết rằng hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng -5. Giá trị lớn nhất của biểu thức ab tương ứng bằng:

A. 1. **B.** $\frac{6}{7}$. **C.** $\frac{2}{7\sqrt{6}}$. **D.** $\frac{6}{7\sqrt[6]{7}}$.

Câu 23: Cho hai số thực x,y thỏa mãn $x^2+4y^2=4$. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x^2+2xy+1}{2y^2+2}$ lần lượt là M và m. Giá trị của biểu thức $T=4M-4m$ bằng:

A. $\sqrt{113}$. **B.** 36. **C.** 12. **D.** 64.

Câu 24: Biết rằng để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-mx+1$ trên đoạn $[1;2]$ bằng 4 thì giá trị thực của tham số $m=\frac{a}{b}$, trong đó a,b là những số nguyên dương và phân số $m=\frac{a}{b}$ tối giản. Giá trị của biểu thức $T=a+b$ bằng:

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 5

Câu 25: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m\in[-50;50]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^4-mx$ trên đoạn $[-1;3]$ nhỏ hơn hoặc bằng 60?

A. 53. **B.** 44. **C.** 58. **D.** 8

Câu 26: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m\in[-50;50]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-mx$ trên đoạn $[1;3]$ lớn hơn hoặc bằng 40?

A. 52. **B.** 51. **C.** 49. **D.** 50

Câu 27: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3+mx^2$ trên đoạn $[1;2]$ nằm trong $(6;20)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 28: Để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-mx^2$ trên đoạn $[1;2]$ bằng 1 thì giá trị thực của tham số m bằng:

A. -1. **B.** 1. **C.** -2. **D.** 0.

Câu 29: Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\frac{x\sqrt{x}-mx}{x+1}$ trên đoạn $[1;4]$ lớn hơn hoặc bằng 2.

A. 3. **B.** 27. **C.** 28. **D.** 33.

Câu 30: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-30;30]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\frac{x^2+mx+1}{x+1}$ trên đoạn $[1;2]$ nhỏ hơn hoặc bằng 3?

A. 35. **B.** 26. **C.** 11. **D.** 31

Câu 31: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-44;44)$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3+mx-1$ trên $[0;3]$ nằm trong $[-2;0]$. Số phần tử của tập S là:

A. 41. **B.** 45. **C.** 72. **D.** 5

Câu 32: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\frac{x^2+2mx}{x^2+x+1}$ bằng $-\frac{1}{2}$. Tổng bình phương tất cả các phần tử của tập S bằng:

A. $\frac{13}{8}$. **B.** 1. **C.** $\frac{11}{4}$. **D.** $\frac{5}{2}$

Câu 33: Gọi S là tập chứ tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-30;30]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\frac{x^2+m}{x^2+2x+2}$ lớn hơn $-\frac{1}{3}$. Số phần tử của tập S bằng:

A. 31. **B.** 32. **C.** 11. **D.** 2

Câu 34: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\frac{x^2-2mx+4}{x^2+2x+3}$ nhỏ hơn $\frac{1}{4}$. Số phần tử của tập S bằng :

A. 2. **B.** 3. **C.** 59. **D.** 58

Câu 35: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\frac{x^2-mx+3}{x^2+2x+2}$ bằng 2. Tổng bình phương các phần tử của tập S bằng :

A. 32. **B.** 36. **C.** 40. **D.** 48

Câu 36: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\frac{x^2-mx+2}{x^2+x+1}$ nhỏ hơn 4. Số phần tử của tập S bằng

A. 2. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 37: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-30;30]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\frac{2x^2-mx+3}{x^2-2x+2}$ lớn hơn 6. Số phần tử của tập S bằng

A. 17. **B.** 16. **C.** 43. **D.** 35.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. C	3. D	4. C	5. D	6. B	7. C	8. C	9. D	10.D
11.B	12.D	13.A	14.B	15.B	16.C	17.A	18.A	19.B	20.D
21.A	22.D	23.A	24.A	25.B	26.C	27.D	28..D	29.C	30.A
31.B	32.A	33.A	34.D	35.C	36.D	37.D			

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: **Trường hợp 1:** $m=13\Rightarrow f(x)=2\Rightarrow \min\limits_{\mathbb{R}} f(x)=2$. Vậy $m=13$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: $m\neq 13$ $(*)$

Khi đó một hàm đa thức có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow$ bậc cao nhất phải là bậc chẵn và hệ số của nó phải dương $\Leftrightarrow \begin{cases} 20-m>7 \\ 20-m=2k \\ m,k\in\mathbb{Z}^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\le m<13 \\ m=20-2k \\ m,k\in\mathbb{Z}^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\le m<13 \\ \dfrac{7}{2}<k\le\dfrac{19}{2} \\ m=20-2k \\ m,k\in\mathbb{Z}^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\le k\le 9 \\ m=20-2k \\ m,k\in\mathbb{Z}^+ \end{cases}$

$\Leftrightarrow m\in\{2;4;6;8;10;12\}$ (thỏa mãn điều kiện $(*)$).

Vậy có 7 giá trị m nguyên dương thỏa mãn.

Câu 2: **Chọn C**

Trường hợp 1: $m=24\Rightarrow f(x)=1\Rightarrow \max\limits_{\mathbb{R}} f(x)=1$. Vậy $m=24$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: $m\neq 24$ $(*)$

Khi đó một hàm đa thức có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow$ bậc cao nhất phải là bậc chẵn và hệ số của nó phải âm $\Leftrightarrow \begin{cases} 0\le 30-m\le 6 \\ m\in\mathbb{Z}^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24\le m\le 30 \\ m\in\mathbb{Z}^+ \end{cases} \Leftrightarrow m\in\{24;25;26;27;28;29;30\}$

Trong trường hợp này kết hợp với $(*)$ ta có $m\in\{25;26;27;28;29;30\}$.

Vậy $m\in\{24;25;26;27;28;29;30\}$. Suy ra có 7 giá trị m nguyên dương thỏa mãn.

Câu 3: **Chọn D**

Một hàm đa thức có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow$ bậc cao nhất phải là bậc chẵn và hệ số của nó phải âm, suy ra $m^2-3m=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=3 \end{array}\right.$.

Với $m=0\Rightarrow f(x)=x^3-3\Rightarrow$ không tồn tại giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Với $m=3\Rightarrow f(x)=-3x^6+x^3-3\Rightarrow$ tồn tại giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Vậy có duy nhất một giái trị thực của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4: **Chọn C**

Hàm đa thức $y=f(x)$ đạt giái trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi bậc cao nhất phải là bậc chẵn

suy ra $m^3-m=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\pm 1 \end{array}\right.$

Với $m=0\Rightarrow f(x)=x^4+1$, tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ nên $m=0$ thỏa mãn.

Với $m=1\Rightarrow f(x)=-x^6+x^4+1$, không tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ nên $m=1$ không thỏa mãn.

Với $m=-1\Rightarrow f(x)=x^6+x^4+1$, tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ nên $m=-1$ thỏa mãn.

Vậy có 2 giá trị thực của m thỏa mãn bài toán.

Câu 5: Chọn D

Ta có: $f'(x)=4x^3+3x^2-2(m-1)x+2m,\ f''(x)=12x^2+6x-2(m-1)$

Hàm đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x_0=0$ thì hàm số phải đạt cực tiểu tại $x_0=0$. Suy ra:

$$\begin{cases} f'(0)=2m=0 \\ f''(0)=-2m+2>0 \end{cases}\Leftrightarrow m=0$$

Thử lại: với $m=0\Rightarrow f(x)=x^4+x^3+x^2+1$ và $f(0)=1$

Xét $f(x)-f(0)=x^4+x^3+x^2=x^2(x^2+x+1)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$

Suy ra $m=0$ thỏa mãn bài toán.

Câu 6: Chọn B

$f'(x)=4x^3-6mx^2+28mx-2m-2$

$f''(x)=12x^2-12mx+8m$

Hàm đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x_0=2$ thì hàm số phải đạt cực tiểu tại $x_0=2$. Suy ra:

$$\begin{cases} f'(2)=30-10m=0 \\ f''(0)=48-16m>0 \end{cases}\Leftrightarrow m=3$$

Thử lại: với $m=3\Rightarrow f(x)=x^4-6x^3+12x^2-8x-2021$ và $f(2)=-2021$

Xét $f(x)-f(2)=x^4-6x^3+12x^2-8x=(x-2)^2(x^2-2x)$ không thảo mãn điều kiện không âm, $\forall x\in\mathbb{R}$

Suy ra không có giá trị nào của m thỏa mãn bài toán.

Câu 7: Chọn C

Ta có: $f'(x)=-4x^3-6mx^2+6mx-2m;f''(x)=-12x^2-12mx+6m$

Hàm đa thức đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x_0=1$ thì hàm số phải đạt cực đại tại $x_0=1$.Suy ra:

$$\begin{cases} f'(1)=-4-2m=0 \\ f''(1)=-12-6m\leq 0 \end{cases}\Leftrightarrow m=-2$$

Thử lại:

Với $m=-2\Rightarrow f(x)=-x^4+4x^3-6x^2+4x-2021$ và $f(1)=-2020$

Xét: $f(x)-f(1)=-x^4+4x^3-6x^2+4x-1=-(x-1)^4\leq 0$ đúng với $\forall x\in\mathbb{R}$

Suy ra: $m=-2$ thỏa mãn bài toán.

Câu 8: Chọn C

Cách 1: Lập luận bản chất theo tư duy bất phương trình:

Ta có: $f(x)=x^6+(m-2)x^5+(m^2-11)x^4+2021\geq f(0)=2021$ với $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^4.\left[x^2+(m-2)x+m^2-11\right]\geq 0\Leftrightarrow x^2+(m-2)x+m^2-11\geq 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \Delta = (m-2)^2 - 4(m^2-11) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le \dfrac{-2-2\sqrt{37}}{3} \\ m \ge \dfrac{-2+2\sqrt{37}}{3} \end{array}\right. \xrightarrow{m\in\mathbb{Z};m\in[-21;21]} \left[\begin{array}{l} -21 \le m \le -5 \\ 4 \le m \le 21 \end{array}\right.$$

Vậy có tất cả 35 giá trị nguyên m thỏa mãn bài toán.

Cách 2: Áp dụng kiến thức GTLN và GTNN hàm đa thức trên $\mathbb{R}$

Ta có: $f'(x) = 6x^5 + 5(m-2)x^4 + 4(m^2-11)x^3; f''(x) = 30x^4 + 20(m-2)x^3 + 12(m^2-11)x^2$

Hàm đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x_0 = 0$ thì: $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall m$

Thử lại. Xét: $f(x) - f(0) = x^6 + (m-2)x^5 + (m^2-11)x^4 = x^4.(x^2 + (m-2)x + m^2 - 11) \ge 0$

$x^2 + (m-2)^2 + m^2 - 11 \ge 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \Delta = (m-2)^2 - 4(m^2-11) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le \dfrac{-2-2\sqrt{37}}{3} \\ m \ge \dfrac{-2+2\sqrt{37}}{3} \end{array}\right. \xrightarrow{m\in\mathbb{Z};m\in[-21;21]} \left[\begin{array}{l} -21 \le m \le -5 \\ 4 \le m \le 21 \end{array}\right.$$

Vậy có tất cả 35 giá trị nguyên m thỏa mãn bài toán.

Câu 9: Chọn D

Cách 1: Áp dụng kiến thức GTLN và GTNN hàm đa thức trên $\mathbb{R}$

Ta có: $f'(x) = (2x-3)(x^2 - ax + b) + (x^2 - 3x + 2)(2x - a)$

$f''(x) = 2(x^2 - ax + b) + (2x-3)(2x-a) + (2x-3)(2x-a) + 2(x^2 - 3x + 2)$

Hàm đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x_0 = 1$ thì hàm số phải đạt cực tiểu tại x_0: $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) \ge 0 \end{cases}$

Nhận thấy rằng $\min f(x) = 2021 = f(1) = f(2)$. Tức là hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 1; x = 2$

Suy ra $\begin{cases} f'(1) = a - b - 1 = 0 \\ f'(2) = 4 - 2a + b = 0 \\ f''(1) = 2b - 2 \ge 0 \\ f''(2) = 16 - 6a + 2b \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$

Thử lại:

Với $a = 3; b = 2 \Rightarrow f(x) = (x-1)(x-2)(x^2 - 3x + 2) + 2021 = (x-1)^2(x-2)^2 + 2021 \ge 2021$ (TM)

Suy ra $a = 3; b = 2$ thỏa mãn.Suy ra: $4a + b = 14$.

Cách 2: Theo cách tư duy bất phương trình:

Ta có $f(x) = (x-1)(x-2)(x^2 - ax + b) + 2021 \ge 2021 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x^2 - ax + b) \ge 0$ với $\forall x$

Suy ra: $(x^2 - ax + b)\big|_{x=1;x=2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 - a + b = 0 \\ 4 - 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$

Thử lại:

Với $a = 3, b = 2$ thỏa mãn. Suy ra: $4a + b = 14$.

Câu 10: Chọn D

Có đạo hàm $f'(x)=6x^5+2ax+b; f''(x)=30x^4+2a$

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=1$, suy ra hàm số đạt giá trị cực tiểu tại $x_0=1$. Suy ra:

$$\begin{cases} f'(1)=6+2a+b=0 \\ f''(1)=30+2a\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2a-6 \\ a\ge -15 \end{cases}$$

Thử lại:

Với $\begin{cases} b=-2a-6 \\ a\ge -15 \end{cases} \Rightarrow f(x)=x^6+ax^2-2(a+3)x-6$ và $f(1)=-a-11$

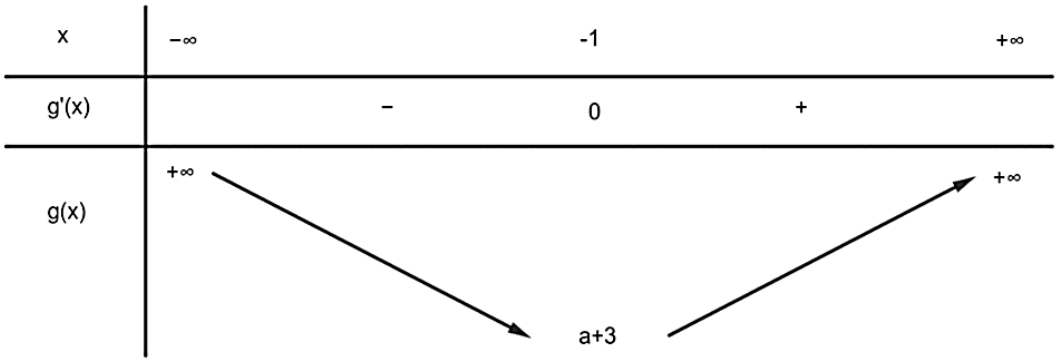
$f(x)-f(1)=x^6+ax^2-2(a+3)x+a+5=(x-1)^2(x^4+2x^3+3x^2+4x+a+5)\ge 0$ với $\forall x\in R$

$\Leftrightarrow x^4+2x^3+3x^2+4x+a+5\ge 0$ với $\forall x\in R$

Xét hàm số: $g(x)=x^4+2x^3+3x^2+4x+a+5$ có:

$g'(x)=4x^3+6x^2+6x+4=(x+1)(4x^2+2x+4)$

Khảo sát nhanh hàm số: $y=g(x)$ ta có bảng biến thiên:



Để $g(x)=x^4+2x^3+3x^2+4x+a+5\ge 0$ với $\forall x\in R$ thì $a+3\ge 0\Leftrightarrow a\ge -3$

Có $f(3)=11a+4b+729=11a+4(-2a-6)+729=3a+705\ge 3.(-3)+705=696$

Suy ra giá trị nhỏ nhất cùa $f(3)$ là 696.

Câu 11: Chọn B

Ta có: $f'(x)=4x^3+3x^2+2ax+b; f''(x)=12x^2+6x+2a$

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=1$, thì:

$$\begin{cases} f'(1)=2a+b+7=0 \\ f''(1)=2a+18\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2a-7 \\ a\ge -9 \end{cases}$$

Thử lại: Xét $\begin{cases} b=-2a-7 \\ a\ge -9 \end{cases}$ suy ra $f(x)=x^4+x^3+ax^2+(-2a-7)x-2a-8$ và $f(1)=-3a-13$

Xét $f(x)-f(1)=x^4+x^3+ax^2+(-2a-7)x+a+5=(x-1)^2(x^2+3x+a+5)\ge 0$ với $\forall x\in R$

$\Leftrightarrow x^2+3x+a+5\ge 0$ với $\forall x\in R$

$\Leftrightarrow \Delta=3^2-4(a+5)\ge 0\Leftrightarrow a\ge -\dfrac{11}{4}\xrightarrow{a\in Z;a\in[-20;20]}-2\le a\le 20$

Vậy có tất cả 23 giá trị a nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 12: Chọn D

Điều kiện để hàm số tồn tại giá trị nhỏ nhất là: $m+n-2=0\Leftrightarrow m=2-n.$

$f(x)=x^4+(n+1)x^3+x^2+(2n-1)x+2.$

$f'(x)=4x^3+3(n+1)x^2+2x+2n-1; f''(x)=12x^2+6(n+1)x+2$

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=2$, thì:

$\begin{cases} f'(2)=2n+47=0 \\ f''(1)=62+12n\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow n=-\frac{47}{14}.$

Thử lại: Thay $n=-\frac{47}{14}$ vào ta được

$f(x)-f(2)=x^4-\frac{33}{14}x^3+x^2-\frac{54}{7}x+\frac{100}{7}=(x-2)^2(x^2+\frac{23}{14}x+\frac{25}{7})\ge 0$ với $\forall x\in R$

Suy ra $n=-\frac{47}{14}; m=2-n=\frac{75}{14}\Rightarrow T=2n+3m=79.$

Câu 13: Chọn A

Ta có: $f'(x)=4x^3+3ax^2+4bx+2c$; $f''(x)=12x^2+6ax+4b$.

Để hàm đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại đồng thời hai điểm $x_1=1$ và $x_2=2$, thì phải có:

$\begin{cases} f(1)=f(2) \\ f'(1)=0 \\ f'(2)=0 \\ f''(1)\ge 0 \\ f''(2)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7a+6b+2c=-15 \\ 3a+4b+2c=-4 \\ 12a+8b+2c=-32 \\ 12+6a+4b\ge 0 \\ 48+12a+4b\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-6 \\ b=\frac{13}{2} \\ c=-6 \end{cases}.$

Thử lại, thay $a=-6; b=\frac{13}{2}; c=-6$ vào ta được $f(x)=x^4-6x^3+13x^2-12x+13$ và $f(1)=9$.

Xét $f(x)-f(1)=x^4-6x^3+13x^2-12x+4=(x-1)^2(x-2)^2\ge 0$ thỏa mãn.

Vậy $T=a+2b=7$.

Câu 14: Chọn B

Ta có: $f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$; $f''(x)=12x^2+6ax+2b$.

Để hàm đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại đồng thời hai điểm $x_1=0$ và $x_2=1$, thì phải có:

$\begin{cases} f(0)=f(1) \\ f'(0)=0 \\ f'(1)=0 \\ f''(0)\ge 0 \\ f''(1)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=-1 \\ c=0 \\ 3a+2b+c=-4 \\ 2b\ge 0 \\ 12+6a+2b\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \\ c=0 \end{cases}.$

Thử lại, thay $a=-2; b=1; c=0$ vào ta được $f(x)=x^4-2x^3+x^2+1$ và $f(0)=1$.

Xét $f(x)-f(1)=x^4-2x^3+x^2=x^2(x-1)^2\ge 0$ thỏa mãn.

Vậy $T=a+2b+c=0$.

Câu 15: Chọn B

Ta có: $f'(x)=6x^5-5ax^4+8bx^3$; $f''(x)=30x^4-20ax^3+24bx^2$.

Để hàm đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại đồng thời hai điểm $x_1=0$ và $x_2=1$, thì phải có:

$$\begin{cases} f(0)=f(1) \\ f'(0)=0 \\ f'(1)=0 \\ f''(0)\ge 0 \\ f''(1)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+2b=-1 \\ 0=0 \\ -5a+8b=-6 \\ 0\ge 0 \\ 30-20a+24b\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Thử lại, thay $a=2;b=\dfrac{1}{2}$ vào ta được $f(x)=x^6-2x^5+x^4+1$ và $f(0)=1$.

Xét $f(x)-f(1)=x^6-2x^5+x^4=x^4(x-1)^2\ge 0$ thỏa mãn.

Vậy $T=3a+4b=8$.

Câu 16: Chọn C

Dễ thấy: $\dfrac{f(-1)+f(1)}{2}=b$

Ta có $\begin{cases} \min f(x)=b\le f(-1) \\ \min f(x)=b\le f(1) \end{cases} \Rightarrow b\le \dfrac{f(-1)+f(1)}{2}$

Bài toán cho dấu " = " xảy ta nên $\min f(x)=f(-1)=f(1)$.

Ta có $f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c;\ f''(x)=12x^2+6ax+2b$

Để hàm số đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại đồng thời hai điểm $x_1=-1,x_2=1$ thì phải có:

$$\begin{cases} f(-1)=f(1) \\ f'(-1)=0 \\ f'(1)=0 \\ f''(-1)\ge 0 \\ f''(1)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+b-c=a+b+c \\ -4+3a-2b+c=0 \\ 4+3a+2b+c=0 \\ 12-6a+2b\ge 0 \\ 12+6a+2b\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-2 \\ c=0 \end{cases}$$

Thử lại, thay $a=0,b=-2,c=0$ vào ta được $f(x)=x^4-2x^2-1,\ f(1)=b=-2$

Xét $f(x)-b=x^4-2x^2+1=(x-1)^2(x+1)^2\ge 0$ thỏa mãn.

Vậy $a=0,b=-2,c=0\Rightarrow T=a+3b+c=-6$.

Câu 17: Chọn A

Ta có $\min f(x)=f(0)\Rightarrow f(x)\ge f(0)=2021,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Dễ thấy để xuất hiện $(a+b)$ thì ta xét $f(1)=1+a+b+2021\ge f(0)=2021\Leftrightarrow a+b\ge -1$.

Dấu " = " xảy khi $f(1)=f(0)$ tức là khi đó $\min f(x)=f(0)=f(1)$

Ta có $f'(x)=8x^7+5ax^4+4bx^3;\ f''(x)=56x^6+20ax^3+12bx^2$

Để hàm số đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại đồng thời hai điểm $x_1=0,x_2=1$ thì phải có:

$$\begin{cases} f(0)=f(1) \\ f'(0)=0 \\ f'(1)=0 \\ f''(0)\ge 0 \\ f''(1)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-1 \\ 0=0 \\ 5a+4b=-8 \\ 0\ge 0 \\ 56+20a+12b\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=3 \end{cases}$$

Thử lại, thay $a=4,b=-3$ vào ta được $f(x)=x^8-4x^5+3x^4+2021,\ f(0)=2021$

Xét $f(x)-f(0)=x^8-4x^5+3x^4=x^4(x-1)^2(x^2+2x+3)\ge 0$ thỏa mãn.

Vậy $a=4,b=-3\Rightarrow T_{\min}=(a+b)_{\min}=-1$.

Câu 18: Ta có $\min f(x)=f(0)\Rightarrow f(x)\ge f(0)=1,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Dễ thấy để xuất hiện $(2a-b)$ thì ta xét $f(-2)=64-32a+16b+1\ge f(0)=1\Leftrightarrow 2a-b\le 4$.

Dấu " = " xảy khi $f(-2)=f(0)$ tức là khi đó $\min f(x)=f(0)=f(-2)$

Ta có $f'(x)=6x^5+5ax^4+4bx^3;\ f''(x)=30x^4+20ax^3+12bx^2$

Để hàm số đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại đồng thời hai điểm $x_1=0,x_2=-2$ thì phải có:

$$\begin{cases} f(0)=f(-2)\\ f'(0)=0\\ f'(-2)=0\\ f''(0)\ge 0\\ f''(-2)\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2a-b=4\\ 0=0\\ 5a-2b=12\\ 0\ge 0\\ 480-160a+48b\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=4\\ b=4 \end{cases}$$

Thử lại, thay $a=4,b=4$ vào ta được $f(x)=x^6+4x^5+4x^4+1,\ f(0)=1$

Xét $f(x)-f(0)=x^6+4x^5+4x^4=x^4(x+2)^2\ge 0$ thỏa mãn.

Vậy $a=4,b=4\Rightarrow T_{\max}=(2a-b)_{\max}=4$.

Câu 19: Chọn B

Ta có: $f(x)=x^4-4x^3+(m+1)x^2-mx+1=m(x^2-x)+(x^4-4x^3+x^2+1)$

Dễ thấy: $x^2-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0\\ x=1 \end{array}\right.$

Biết rằng $\alpha=\min f(x)\le f(x),\forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra $\begin{cases}\alpha\le f(0)=1\\ \alpha\le f(1)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\alpha\le f(1)=-1$

Ta tìm điều kiện dấu bằng xảy ra: $\alpha=\min f(x)=f(1)=-1$

Tức là ta tìm điều kiện để hàm số *f(x)* đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_o=1$

Ta có: $f'(x)=4x^3-12x^2+2(m+1)x-m;f''(x)=12x^2-24x+2m+2$

$$\begin{cases} f'(1)=m-6=0\\ f''(1)=2m-10\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow m=6$$

Thay *m=6* ta được:

$f(x)=x^4-4x^3+7x^2-6x+1;f(1)=-1$

$f(x)-f(1)=x^4-4x^3+7x^2-6x+2=(x-1)^2(x^2-2x+2)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$

Vậy khi *m=6* thì $\alpha=\min f(x)=f(1)=-1$ là giá trị lớn nhất của α.

Câu 20: Chọn D

Ta có: $f(x)=x^4-4x^3+(m+1)x^2-mx+1=m(-x^2+2x+3)+(x^4+x^3)$

Dễ thấy: $-x^2+2x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-1\\ x=3 \end{array}\right.$

Biết rằng: $\alpha=\min f(x)\le f(x)\forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra: $\begin{cases}\alpha\le f(-1)=0\\ \alpha\le f(3)=108\end{cases}\Leftrightarrow\alpha\le f(-1)=0$

Dấu bằng xảy ra: $\alpha = \min f(x) = f(-1) = 0$ hay hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_o = -1$

Ta có: $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2mx + 2m; f''(x) = 12x^2 + 6x - 2m$

$$\begin{cases} f'(-1) = 4m - 1 = 0 \\ f''(-1) = 6 - 2m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$$

Thử lại: thay $m = \frac{1}{4}$ vào ta được $f(x) = x^4 + x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}; f(-1) = 0$

Xét: $f(x) - f(-1) = x^4 + x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} = (x+1)^2\left(x^2 - x + \frac{3}{4}\right) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Vậy khi $m = \frac{1}{4} = m_o \Rightarrow \alpha = \min f(x) = f(x_o) = f(-1) = 0$ là giá trị lớn nhất của α

Suy ra $(x_o + m_o) = -\frac{3}{4}$

Câu 21: Chọn A

Ta có: $f(x) = -x^4 + 2x^3 - 2x + m(x^2 - x)$,

$\forall x \in \mathbb{R}$ ta có $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = -1 \end{cases} \Rightarrow \max f(x) \ge 0$. Ta chỉ ra tồn tại m để $\max f(x) = 0$ tại $x = 0$. Khi đó hàm số đạt cực đại tại $x = 0 \Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow m = -2$.

Thử lại với $m = -2$ thì $f(x) = -x^4 + 2x^3 - 2x^2 \Rightarrow f'(x) = -4x^3 + 6x^2 - 4x$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$+\infty$

Vậy với $m = -2$ thì $\max f(x) = 0$.

Câu 22: Chọn D

Ta có $f(x) = x^6 - 6a^5x - 5b \Rightarrow f'(x) = 6x^5 - 6a^5; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = a$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↘	$-5a^6 - 5b$	↗	$+\infty$

Theo bài ra hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng $-5 \Leftrightarrow -5a^6 - 5b = -5 \Leftrightarrow b = 1 - a^6$.

Giả sử $h(a) = a.b = a(1 - a^6) = a - a^7 \Rightarrow h'(a) = 1 - 7a^6 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt[6]{7}}$.

Ta có bảng biến thiên

a	0	$\frac{1}{\sqrt[6]{7}}$	$+\infty$
$h'(a)$	$+$	0	$-$
$h(a)$	$-\infty$ ↗	$\frac{6}{7\sqrt[6]{7}}$	↘ $+\infty$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức ab bằng $\frac{6}{7\sqrt[6]{7}}$.

Câu 23: Chọn A

Nếu $y=0 \Rightarrow x^2=4$ khi đó $P=\frac{5}{2}$.

Nếu $y\neq 0$ ta có: $P=\frac{4x^2+8xy+4}{8y^2+8}=\frac{5x^2+8xy+4y^2}{2x^2+16y^2}=\frac{5\left(\frac{x}{y}\right)^2+8\left(\frac{x}{y}\right)+4}{2\left(\frac{x}{y}\right)^2+16}$.

Đặt $t=\frac{x}{y}$ ta được: $P=\frac{5t^2+8t+4}{2t^2+16} \Leftrightarrow (5-2P)t^2+8t+4-16P=0\ (2)$.

Nếu $P=\frac{5}{2}$ thì $t=\frac{9}{2}$.

Nếu $P\neq\frac{5}{2}$ thì phương trình (2) là phương trình bậc hai.

$\Delta=4^2-(5-2P)(4-16P)=16-(20-88P+32P^2)=-32P^2+88P-4$

$-32P^2+88P-4\geq 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{11-\sqrt{113}}{8}\leq y\leq\frac{11+\sqrt{113}}{8}$

$\Rightarrow \text{Max}P=\frac{11+\sqrt{113}}{8}=M$, $\text{Min}P=\frac{11-\sqrt{113}}{8}=m \Rightarrow T=4M-4m=\sqrt{113}$.

Câu 24: Chọn A

Ta có: $\underset{[1;2]}{Max}\{x^2-mx+1\}=4 \Leftrightarrow x^3-mx+1\leq 4, \forall x\in[1;2]$

$\Leftrightarrow m\geq\frac{x^3-3}{x}, \forall x\in[1;2]$; $m\geq\underset{[1;2]}{Max}\left\{\frac{x^3-3}{x}\right\}=\frac{5}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $m=\frac{5}{2}\Rightarrow a=5, b=2 \Rightarrow T=a+b=5+2=7$.

Câu 25: Chọn B

Ta có: $\underset{[1;2]}{Max}\{x^4-mx\}\leq 60 \Leftrightarrow x^4-mx+1\leq 60, \forall x\in[-1;3] \Leftrightarrow mx\geq x^4-60, \forall x\in[-1;3]$

Với $x=0$, thỏa mãn.

Với $x\neq 0$ ta xét

$$\begin{cases}\begin{cases}m\in[-1;0)\\ mx\ge x^4-60\end{cases}\Leftrightarrow m\le\dfrac{x^4-60}{x},\forall x\in[-1;0)\Leftrightarrow m\le\min\limits_{[-1;0)}\left\{\dfrac{x^4-60}{x}\right\}\Leftrightarrow m\le 59\\ \begin{cases}m\in(0;2]\\ mx\ge x^4-60\end{cases}\Leftrightarrow m\ge\dfrac{x^4-60}{x},\forall x\in(0;2]\Leftrightarrow m\ge\min\limits_{(0;2]}\left\{\dfrac{x^4-60}{x}\right\}\Leftrightarrow m\ge 7\end{cases}\Leftrightarrow 7\le m\le 59$$

Kết hợp với điều kiện $m\in\mathbb{Z}, m\in[-50;50]\Rightarrow m\in\{7;8;...;50\}$

Có 44 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 26: Chọn C

Ta có: $\max\limits_{[1;3]}\{x^3-3mx\}<\Leftrightarrow 40x^3-3mx<40,\forall x\in[1;3]$

$\Leftrightarrow m>\dfrac{x^3-40}{3x},\forall x\in[1;3]\Leftrightarrow m>\underset{[1;3]}{Max}\left\{\dfrac{x^3-40}{3x}\right\}=-\dfrac{13}{9}$

Suy ra, để giá trị lớn nhất của hàm số lớn hơn hoặc bằng 40 thì $m\le-\dfrac{13}{9}$

Kết hợp với $m\in\mathbb{Z}, m\in[-50;50]\Rightarrow m\in\{-50;-49;...;-2\}$ có 49 số thỏa mãn.

Câu 27: Chọn D

Đặt M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3+mx^2$ trên đoạn $[1;2]$. Ta có: $6<M<20$

Để $M<20$ thì $x^3+mx^2<20\ \forall x\in[1;2]$.

Từ đó suy ra: $m<\dfrac{20-x^3}{x^2}\ \forall x\in[1;2]\Rightarrow m<\min\limits_{[1;2]}\dfrac{20-x^3}{x^2}=3$.

Tương tự để $M\le 6$ thì $x^3+mx^2\le 6\ \forall x\in[1;2]\Rightarrow m\le\underset{[1;2]}{\text{Min}}\dfrac{6-x^3}{x^2}=\dfrac{-1}{2}$.

Do đó để $M>6$ thì $m>\dfrac{-1}{2}$. Vậy $\dfrac{-1}{2}<m<3$, do đó có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 28: Chọn D

Để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-mx^2$ trên đoạn $[1;2]$ bằng 1 thì:

$x^3-mx^2\ge 1\ \forall x\in[1;2]$ và dấu "=" phải xảy ra. Khi đó ta có: $m=\min\limits_{[1;2]}\dfrac{x^3-1}{x^2}=0.$

Câu 29: Chọn C

Để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}-mx}{x+1}$ trên đoạn $[1;4]$ lớn hơn hoặc bằng 2 thì:

$\dfrac{x\sqrt{x}-mx}{x+1}\ge 2\ \forall x\in[1;4]\Rightarrow mx\le x\sqrt{x}-2x-2\ \forall x\in[1;4]$

$\Rightarrow m\le\dfrac{x\sqrt{x}-2x-2}{x}\ \forall x\in[1;4]\Rightarrow m\le\min\limits_{[1;4]}\dfrac{x\sqrt{x}-2x-2}{x}$.

Lại có: đặt $g(x)=\dfrac{x\sqrt{x}-2x-2}{x}$ thì $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{2}{x^2}>0\ \forall x\in[1;4]$.

Do đó: $m\le\underset{[1;4]}{\text{Min}}\dfrac{x\sqrt{x}-2x-2}{x}=g(1)=-3$. Vậy có tất cả 28 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 30: Chọn A

Vì $f(x)=\dfrac{x^2+mx+1}{x+1}$ là hàm liên tục trên $[1;2]$ nên $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất trên $[1;2]$.

Ta có: $\min\limits_{[1;2]} f(x)\le 3 \Leftrightarrow \exists x\in[1;2]: \dfrac{x^2+mx+1}{x+1}\le 3 \Leftrightarrow \exists x\in[1;2]: m\le \dfrac{-x^2+3x+2}{x}(1)$

Đặt: $g(x)=\dfrac{-x^2+3x+2}{x}$. Khi đó $(1)\Leftrightarrow m\le \underset{[1;2]}{Max}\, g(x)\Leftrightarrow m\le 4.$

Như vậy có 35 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 31: Chọn B

Vì hàm số $f(x)=x^3+mx-1$ là hàm liên tục trên $[0;3]$ nên $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất trên $[0;3]$.

Ta có: $\min\limits_{[0;3]} f(x)\in[-2;0]\Leftrightarrow -2\le \min\limits_{[0;3]} f(x)\le 0(1)$.

Ta thấy: $f(0)=-1<0\forall m$ nên $\min\limits_{[0;3]} f(x)\le 0\forall m$. Suy ra:

$(1)\Leftrightarrow -2\le \min\limits_{[0;3]} f(x)\Leftrightarrow -2\le f(x)\forall x\in[0;3]\Leftrightarrow x^3+mx-1\ge -2\forall x\in[0;3]$

$\Leftrightarrow m\ge -x^2-\dfrac{1}{x}\forall x\in(0;3]\Leftrightarrow m\ge \max\limits_{(0;3]}\left(-x^2-\dfrac{1}{x}\right)\Leftrightarrow m\ge -\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}-\sqrt[3]{2}$

Vậy số giá trị nguyên của m thuộc $(-44;44)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là 45.

Câu 32: Chọn A

Ta có : Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+2mx}{x^2+x+1}$ bằng $-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow f(x)\ge -\dfrac{1}{2}\forall x\in\mathbb{R}$ và phương trình $f(x)=-\dfrac{1}{2}$ có nghiệm $\Leftrightarrow 3x^2+(4m+1)x+1\ge 0\forall x\in\mathbb{R}$ và phương trình $3x^2+(4m+1)x+1=0$ có nghiệm

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=(4m+1)^2-12\le 0\\ \Delta=(4m+1)^2-12\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \Delta=(4m+1)^2-12=0\Leftrightarrow 16m^2+8m-11=0$

Theo định lý Vi-et, ta có phương trình $16m^2+8m-11=0$ có hai nghiệm phân biệt m_1, m_2 thỏa mãn: $\begin{cases}m_1+m_2=-\dfrac{1}{2}\\ m_1.m_2=-\dfrac{11}{16}\end{cases}\Rightarrow {m_1}^2+{m_2}^2=(m_1+m_2)^2-2m_1.m_2=\dfrac{13}{8}$.

Vậy tổng bình phương tất cả các phần tử của tập S bằng $\dfrac{13}{8}$

Câu 33: Chọn A

Để hàm số có giá trị nhỏ nhất thì $\left[\begin{array}{l}\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\ge\dfrac{c}{c'}\\ \dfrac{a}{a'}\ne\dfrac{b}{b'}\end{array}\right.$. Dễ thấy $\dfrac{a}{a'}\ne\dfrac{b}{b'}$ nên hàm số luôn có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

Khi đó $f(x)=\dfrac{x^2+m}{x^2+2x+2}\ge \min f(x)>-\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow 3x^2+3m>-x^2-2x-2$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow 4x^2+2x+3m+2\ge 0$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $\Delta'=1-12m-8<0\Leftrightarrow m>-\dfrac{7}{12}\xrightarrow{m\in\mathbb{Z},\, m\in[-30;30]}0\le m\le 30$.

Vậy có 31 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 34: Chọn D

Để hàm số có giá trị nhỏ nhất thì $\left[\begin{array}{l}\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\ge\dfrac{c}{c'}\\ \dfrac{a}{a'}\ne\dfrac{b}{b'}\end{array}\right.$.

Trường hợp 1: Ta có $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}>\dfrac{c}{c'}\Leftrightarrow\dfrac{1}{1}=\dfrac{-2m}{2}>\dfrac{4}{3}$ nên vô nghiệm.

Trường hợp 2: $\dfrac{a}{a'}\ne\dfrac{b}{b'}\Leftrightarrow\dfrac{1}{1}\ne\dfrac{-2m}{2}\Leftrightarrow m\ne -1$. Khi đó hàm số có cả giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất. Ta sẽ đi tìm điều kiện để $\min f(x)\ge\dfrac{1}{4}$

Khi đó $f(x)=\dfrac{x^2-2mx+4}{x^2+2x+3}\ge\min f(x)\ge\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow 4x^2-8mx+16\ge x^2+2x+3$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $3x^2-2(4m+1)x+13\ge 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $\Delta'=(4m+1)^2-39\le 0\Leftrightarrow\dfrac{-1-\sqrt{39}}{4}\le m\le\dfrac{-1+\sqrt{39}}{4}$

Suy ra để $\min f(x)<\dfrac{1}{4}$ thì $\left[\begin{array}{l}m>\dfrac{-1+\sqrt{39}}{4}\\ m<\dfrac{-1-\sqrt{39}}{4}\end{array}\right.\xrightarrow{m\ne 1,\, m\in[-30;30],\, m\in\mathbb{Z}}\left[\begin{array}{l}-30\le m\le -2\\ 2\le m\le 30\end{array}\right.$

Có tất cả 58 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 35: Chọn C

Để hàm số có giá trị lớn nhất thì $\left[\begin{array}{l}\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\le\dfrac{c}{c'}\\ \dfrac{a}{a'}\ne\dfrac{b}{b'}\end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\le\dfrac{c}{c'}\Leftrightarrow\dfrac{1}{1}=\dfrac{-m}{2}\le\dfrac{3}{2}\Rightarrow m=-2$.

Trường hợp 2: $\dfrac{a}{a'}\ne\dfrac{b}{b'}\Rightarrow m\ne -2$.

Khi đó ta tìm điều kiện để $\max f(x)=2$.

Mặt khác : $f(x)=\dfrac{x^2-mx+3}{x^2+2x+2}\le\max f(x)=2$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Phải có điều kiện dấu bằng xảy ra.

Ta suy ra $x^2+(m+4)x+1\ge 0$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $\Delta=(m+4)^2-4\le 0\Leftrightarrow -6\le m\le -2$. Kết hợp điều kiện suy ra $m=-6$.

Kết hợp cả hai trường hợp, ta suy ra $m=\{-6;-2\}\Rightarrow S=\{-6;-2\}$.

Tổng bình phương các giá trị của S bằng 40.

Câu 36: Chọn D

Để hàm số có giá trị lớn nhất thì $\begin{cases}\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\le\dfrac{c}{c'}\\ \dfrac{a}{a'}\ne\dfrac{b}{b'}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{1}=\dfrac{-m}{1}\le\dfrac{2}{1}\\ \dfrac{1}{1}\ne\dfrac{-m}{1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-1\\ m\ne-1\end{cases}\Leftrightarrow\forall m$.

Ta có: $f(x)=\dfrac{x^2-mx+2}{x^2+x+1}\le\max f(x)<4$ đúng $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2-mx+2\le4\left(x^2+x+1\right)$ đúng $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow3x^2+(m+4)x+2\ge0$ đúng $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\Delta\le0\Leftrightarrow(m+4)^2-24\le0\Leftrightarrow-4-2\sqrt{6}\le m\le-4+2\sqrt{6}$

$\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m\in\{-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;0\}$

Vậy có tất cả 9 giá trị của m thỏa mãn điều kiện.

Câu 37: Chọn D

Để hàm số có giá trị lớn nhất thì $\begin{cases}\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\le\dfrac{c}{c'}\\ \dfrac{a}{a'}\ne\dfrac{b}{b'}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2}{1}=\dfrac{-m}{-2}\le\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{2}{1}\ne\dfrac{-m}{-2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}VN\\ m\ne-4\end{cases}\Leftrightarrow m\ne-4$.

Để tìm điều kiện của m để $\max f(x)>6$ ta đi tìm điều kện để $\max f(x)\le6$

Ta có: $f(x)=\dfrac{2x^2-mx+3}{x^2-2x+2}\le\max f(x)\le6$ đúng $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow2x^2-mx+3\le6\left(x^2-2x+2\right)$ đúng $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow4x^2+(m-12)x+9\ge0$ đúng $\forall x\in\mathbb{R}$

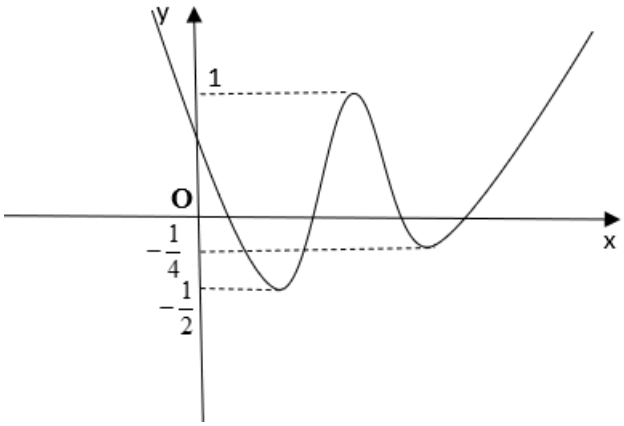
$\Leftrightarrow\Delta\le0\Leftrightarrow(m-12)^2-144\le0\Leftrightarrow0\le m\le24$

Vậy để $\max f(x)>6$ thì $\begin{cases}m<0\\ m>24\end{cases}\xrightarrow{m\in\mathbb{Z},m\ne-4,m\in[-30;30]}\begin{cases}m\ne-4\\ \begin{cases}-30\le m\le-1\\ 25\le m\le30\end{cases}\end{cases}$

Vậy có tất cả 35 giá trị của m thỏa mãn điều kiện.

DẠNG 3 Min max của hàm hợp

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau



Cho $a=\left|f(x)-\left|f(x)\right|\right|$, $b=-a^2+a+\frac{3}{4}$ và $S=\frac{3}{8}\sqrt[3]{(b+1)^2\left[1+b^2.(2-b)^2\right]}-\frac{2}{1+b.\sqrt{2-b}}$.

Có giá trị lớn nhất của S bằng $\frac{m}{n}$ và $k=\frac{(m+n)^2}{|mn|}$. Khẳng định đúng là

A. $k=1$. **B.** $\frac{49}{6}$ **C.** $\frac{25}{4}$. **D.** $\frac{9}{4}$.

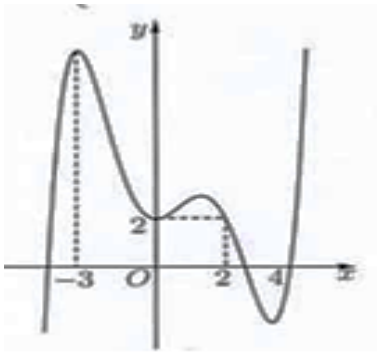
Câu 2: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|x^3-3x+m\right|$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 16. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -16. **B.** 16. **C.** -12. **D.** -2.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=(x-1)^2\left(x+m^2\right)-\frac{3}{2}m$ (m là số thực). Gọi tổng các giá trị của m sao cho $\max\limits_{[1;2]}\left|f(x)\right|+\min\limits_{[1;2]}\left|f(x)\right|=\frac{9}{4}$ là $S=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$ (với $a,b\in\mathbb{N}$). Giá trị $\frac{b}{a}$ bằng

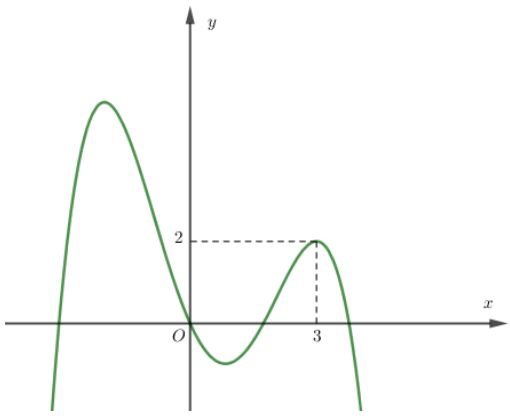
A. $\frac{5}{18}$. **B.** $\frac{9}{5}$. **C.** $\frac{36}{5}$. **D.** $\frac{18}{5}$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(2x)-4x$ trên đoạn $\left[-\frac{3}{2};2\right]$ bằng



A. $f(0)$. **B.** $f(-3)+6$. **C.** $f(2)-4$. **D.** $f(4)-8$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx$, $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$, biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ.



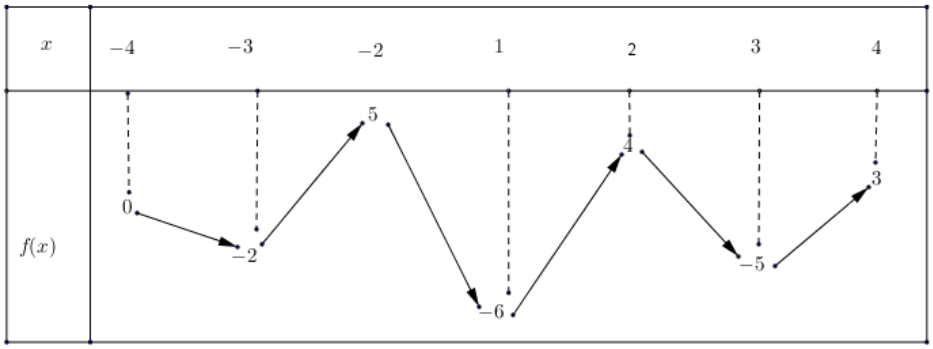
Gọi S là tập hợp các giá trị của x sao cho hàm số $g(x)=\dfrac{2f(x)-2}{f^2(x)-2f(x)+2}$ đạt giá trị lớn nhất hoặc đạt giá trị nhỏ nhất. Số phần tử của tập S là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=\left|\dfrac{x+m}{x+1}\right|$. Số giá trị của m thỏa mãn $\min\limits_{[1;2]}f(x)+\max\limits_{[1;2]}f(x)=\dfrac{16}{3}$ là

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 7: Cho hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-4;4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.



Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m thuộc đoạn $[-4;4]$ để hàm số $g(x)=\left|f\left(x^3+2x\right)+3f(m)\right|$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng 8?

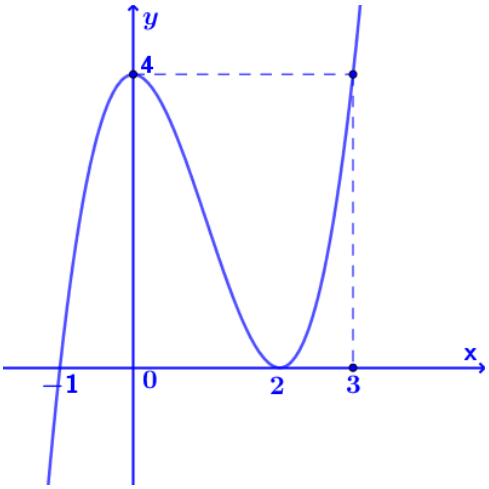
A. 12. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 10.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)=8x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ thỏa mãn $\left|f(x)\right|\le 1,\forall x\in[-1;1]$. Tính $S=a^2+b^2+c^2+d^2$?

A. 60. **B.** 75. **C.** 70. **D.** 65.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ và hàm số $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}+|4x-2|+|6-4x|}{|2x-1|+|2x-3|}$.

Đặt $h(x)=f(g(x))-f\left(3-2x+x^2\right)+f\left(2-\sqrt{4-m^2}\right)$. Gọi M là giá trị lớn nhất của $h(x)$. Giá trị lớn nhất của M thuộc khoảng nào sau đây:



A. $(0;2)$. **B.** $(2;4)$. **C.** $(4;5)$. **D.** $(5;10)$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x^4-mx-4}{x+2}$, với m là tham số. Tìm tham số m để $\min\limits_{[-1;1]}\left|f(x)\right|>\dfrac{3}{4}$?

A. $m>\dfrac{1}{4}$. **B.** $m<\dfrac{1}{5}$. **C.** $m\in\mathbb{R}$. **D.** $\dfrac{1}{4}<m<\dfrac{5}{4}$.

Câu 11: Cho các số thực x,y thỏa mãn $x-3\sqrt{x+1}=3\sqrt{y+2}-y$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y$ là

A. $\min P=\dfrac{9+3\sqrt{21}}{2}$. **B.** $\min P=9+3\sqrt{15}$. **C.** $\min P=-63$. **D.** $\min P=-91$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x$ và $g(x)=\left|f(2-\cos x)+m\right|$ (m là tham số thực) gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $3\max\limits_{\mathbb{R}}g(x)+\min\limits_{\mathbb{R}}g(x)=100$. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. -16. **B.** 12. **C.** -32. **D.** -28.

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{2x^2+2}$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x)$. Có bao nhiêu cặp số (a,b) với $a,b\in\mathbb{Z}$ sao cho $M^2+m^2\le 5$?

A. 51. **B.** 89. **C.** 198. **D.** 102.

Câu 14: Cho hàm số $y=\left|\dfrac{1}{3}x^3-(m+2)x^2+(3-3m^2)x+1\right|$. Tìm $m\in\left(-\dfrac{2}{3};0\right)$ để giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;1]$ bằng 4.

A. $m=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$. **B.** $m=\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$. **C.** $m=\dfrac{1-\sqrt{2}}{4}$. **D.** $m=\dfrac{1-\sqrt{5}}{6}$.

Câu 15: Tìm số giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-6mx^2+12mx+m\right|$ trên đoạn $[1;2]$ bằng 18.

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\left[f(x)-x\right].f(x)=x^6+3x^4+2x^2, \forall x\in\mathbb{R}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;2]$. Giá trị của $3M-m$ bằng

A. 33. **B.** -3. **C.** 4. **D.** -28.

Câu 17: Có bao nhiêu số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2-2x+m\right|+4x$ bằng -1.

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

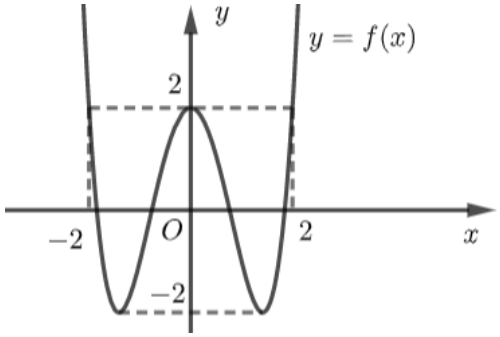
Câu 18: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|x^3-12x+m\right|$ trên $[1;3]$ không vượt quá 20.

A. 33. **B.** 34. **C.** 35. **D.** 36.

Câu 19: Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|x^2+ax+b\right|$ trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của biểu thức $a+2b$ khi M nhỏ nhất là

A. 3. **B.** -4. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 20: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0;20]$ sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=\left|\left|2f(x)+m+4\right|-f(x)-3\right|$ trên đoạn $[-2;2]$ không bé hơn 1?



A. 18. **B.** 19. **C.** 20. **D.** 21.

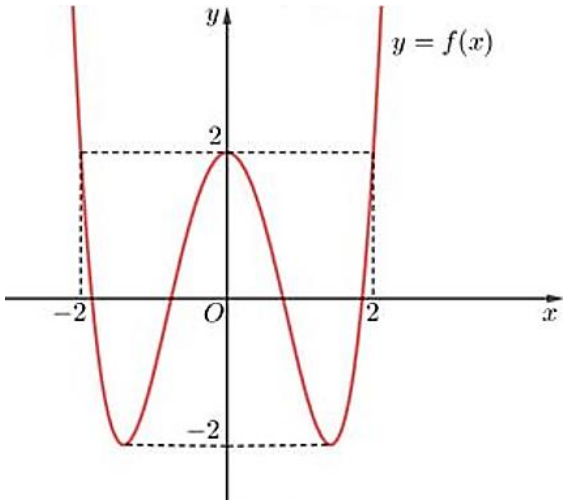
Câu 21: Tìm tất cả các giá trị của a để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=4ax+\left|x^2-4x+3\right|$ lớn hơn 2?

A. $a>\dfrac{1}{2}$ **B.** $a<-1$ **C.** $\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{3}{2}$ **D.** $a<0$

Câu 22: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f(x)=\left|\dfrac{2mx-2\sqrt{4x+8}}{x+2}\right|$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ là a thỏa mãn $0<a<1$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2.

Câu 23: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[1;20]$ sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=\left|2f(x)+m+4\right|+\left|f(x)+3m-2\right|$ trên đoạn $[-2;2]$ không bé hơn 2. Tổng tất cả các phần tử của S bằng:

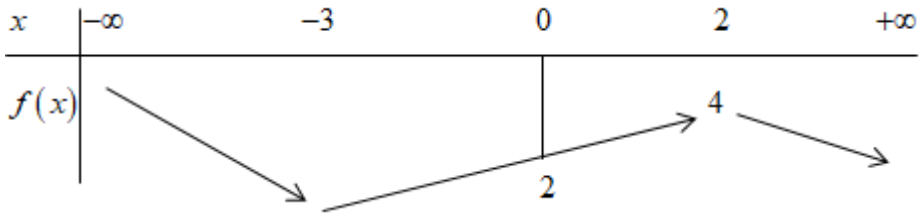


A. 207. **B.** 209. **C.** 210. **D.** 212.

Câu 24: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2-5x+4\right|+mx$ lớn hơn 1. Số phần tử của S là:

A. 7. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 3.

Câu 25: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$ như hình vẽ và $f''\left(x\right)<0,\forall x\in\left(0;+\infty\right)$.



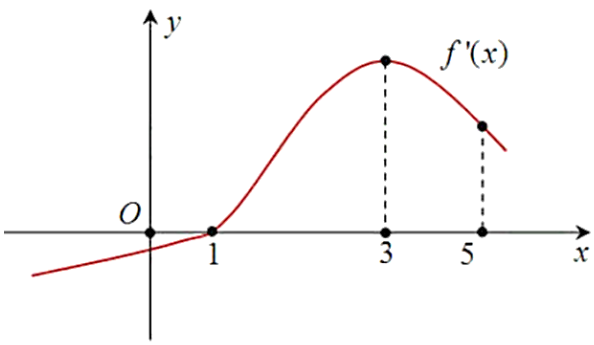
Biết a,x thay đổi trên đoạn $\left[0;2\right]$ và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$S=\dfrac{\left[\left(f'\left(x\right)\right)^2+1\right]\left[2f'\left(0\right)+\left(a-x\right)f'\left(a\right)+6\right]}{\left[f\left(2-\sqrt{4-2x}\right)+f\left(x\right)\right]^2\left[f\left(2-\sqrt{4-2x}\right)+f\left(a\right)\right]}$ bằng $\dfrac{m}{n}$ (phân số tối giản, $m,n\in\mathbb{Z}_+$).

Tổng $m+n$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(20;25\right)$. **B.** $\left(95;145\right)$. **C.** $\left(45;75\right)$. **D.** $\left(75;95\right)$.

Câu 26: Cho đồ thị hàm số $f\left(x\right)=f'\left(x\right)$ như hình vẽ. Biết rằng $f\left(0\right)-f\left(3\right)=f\left(5\right)-f\left(1\right)$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)$ trênđoạn $\left[0;5\right]$. Đáp án đúng là



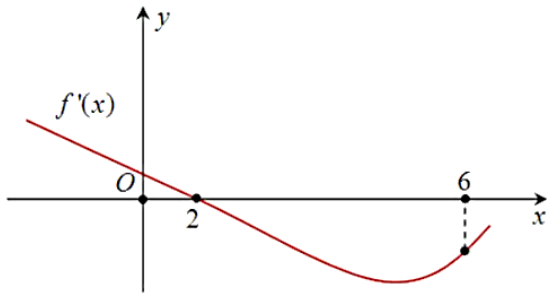
A. $M=f(5);m=f(1)$. **B.** $M=f(0);m=f(1)$.

C. $M=f(3);m=f(0)$. **D.** $M=f(1);m=f(5)$.

Câu 27: Đặt $M=max\left|\sqrt{4x-x^2}-mx\right|$. Giá trị nhỏ nhất của M là

A. 1. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** 2.

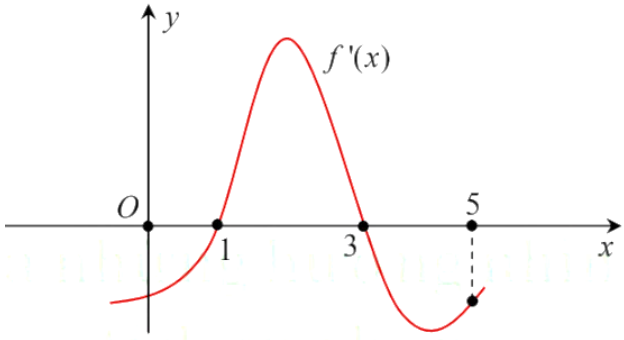
Câu 28: Cho đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $2f(6)=f(0)+f(2)$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;6]$. Đáp án đúng là



A. $M=f(6);m=f(0)$. **B.** $M=f(2);m=f(6)$.

C. $M=f(2);m=f(0)$. **D.** $M=f(6);m=f(0)$.

Câu 29: Cho đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $f(0)+f(2)=f(1)+f(3)$ và $f(0)+f(1)=f(3)+f(5)$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$. Đáp án đúng là



A. $M=f(3);m=f(1)$. **B.** $M=f(0);m=f(1)$.

C. $M=f(0);m=f(5)$. **D.** $M=f(3);m=f(5)$.

Câu 30: Cho hàm số $y=f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ tương ứng là m. Khi đó giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=3f(x)+x^2-2x$ thỏa mãn điều kiện nào dưới đây?

A. $\min g(x)\ge 3m$. **B.** $\min g(x)=3m-2$.

C. $\min g(x)\le 3m-2$. **D.** $\min g(x)\ge 3m-1$.

Câu 31: Cho hàm số $y=f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ tương ứng là 3 và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=4f(x)+x^2-4x$ tương ứng bằng 8. Kết luận nào dưới đây luôn đúng?

A. $f(2)=3$. **B.** $f(2)>3$. **C.** $f(3)<3$. **D.** $f(3)\ge 4$.

Câu 32: Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, có giá trị lớn nhất lần lượt là 3 và 6. Khi đó giá trị lớn nhất của hàm số $y=3f(x)+2g(x)$ luôn thỏa mãn điều kiện nào dưới đây?

A. $\max\left(3f(x)+2g(x)\right)\le 21$. **B.** $\max\left(3f(x)+2g(x)\right)\ge 24$.

C. $\max\left(3f(x)+2g(x)\right)\le 30$. **D.** $\max\left(3f(x)+2g(x)\right)\ge 21$.

Câu 33: Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, có giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ là 6 và giá trị nhỏ nhất $y=g(x)$ là 3. Khi đó giá trị lớn nhất của hàm số $y=2f(x)-3g(x)+2$ luôn thỏa mãn điều kiện nào dưới đây?

A. $\max\left(2f(x)-3g(x)+2\right)\ge 5$. **B.** $\max\left(2f(x)-3g(x)+2\right)\le 3$.

C. $\max\left(2f(x)-3g(x)+2\right)\le 5$. **D.** $\max\left(2f(x)-3g(x)+2\right)\ge 2$.

Câu 34: Cho hàm số $y=f(x)$liên tục trên $\mathbb{R}$, có giá trị lớn nhất là 2. Biết hàm số $y=2f(x)-x^2+6x$ có giá trị lớn nhất bằng 8. Chọn đáp án đúng trong các đáp án sau?

A. $f(0)\le 4$. **B.** $f(3)\le -1$. **C.** $f(2)\ge 0$. **D.** $f(2)\le -2$.

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, có $\min f(x)=4$. Khi đó kết luận đúng về nghiệm của bất phương trình $f(x)>4$ sẽ là:

A. luôn có nghiệm. **B.** luôn vô nghiệm.

C. có thể có nghiệm có thể vô nghiệm. **D.** luôn có đúng một nghiệm duy nhất.

Câu 36: Cho hàm số $y=f(x)=x^4-2ax+6a-3$ có giá trị nhỏ nhất bằng m. Nhận xét nào trong các đáp án dưới đây luôn đúng?

A. $m\ge -3$. **B.** $m<-3$. **C.** $m\le 78$. **D.** $m\le 3$.

Câu 37: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có giá trị lớn nhất và nhỏ bằng M và m. Biết rằng $f(a)+2f(b)=18$, trong đó a và b là hai số thực dương. Nhận xét nào trong các đáp án dưới đây là **luôn đúng?**

A. $m\le 3$. **B.** $M\ge 9$. **C.** $m\le 5$. **D.** $M\ge 6$.

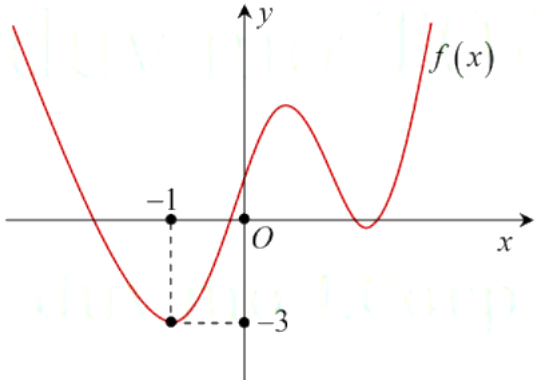
Câu 38: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất lần lượt là M và m. Biết rằng $f(a)+2f(b)=12$, trong đó a và b là hai số thực dương. Khi đó giá trị biểu thức $(M-2)(m-5)$ có thể bằng

A. -1. **B.** -3. **C.** 0. **D.** 10.

Câu 39: Cho hàm số $f(x)=x^4-2ax+4a-7$, có giá trị nhỏ nhất là m. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương mà m có thể nhận?

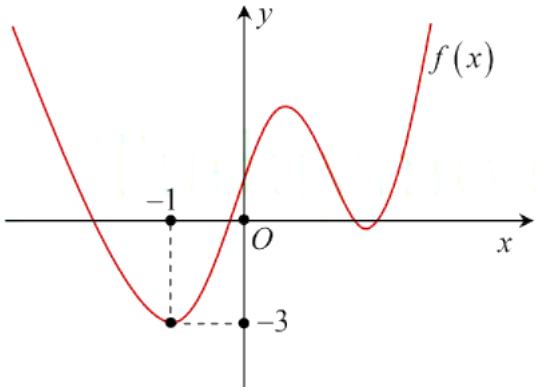
A. 11. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

Câu 40: Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Biết rằng m là tham số thực, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)+x^2-2mx+m^2+1$ tương ứng bằng:



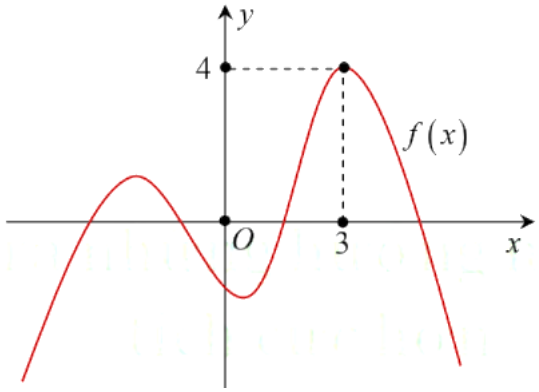
A. 1. **B.** 3. **C.** –1. **D.** –2.

Câu 41: Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Biết rằng m là tham số thực, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(2x+3)+x^2-4mx+4m^2-1$ bằng -4 thì tham số m bằng:



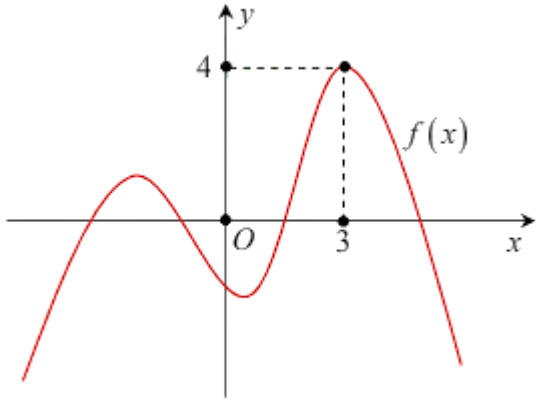
A. –1. **B.** 0. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** 2.

Câu 42: Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Biết rằng m là tham số thực. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(3x-m)+2f(x^2-2x)$ đạt giá trị lớn nhất. Tổng các giá trị của tất cả các phần tử thuộc tập S bằng:



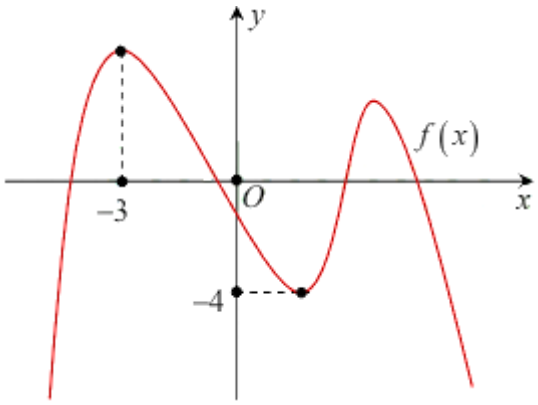
A. 6. **B.** 3. **C.** 0. **D.** –2.

Câu 43: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Biết rằng m, n là hai số thực. Để hàm số $3f(3x-m)+f(x+n)-x^2+4x$ đạt giá trị lớn nhất thì $(2m-n)$ bằng



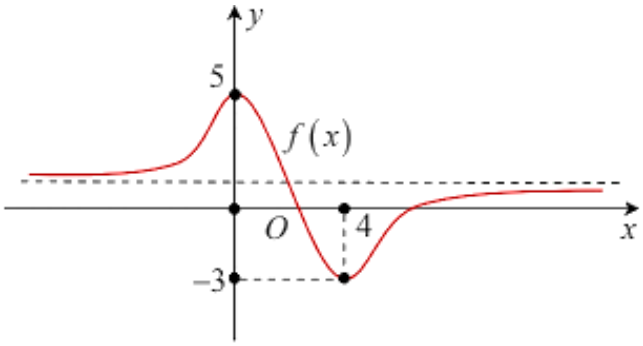
A. 3 . **B.** 0 . **C.** 5 . **D.** 1 .

Câu 44: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x)=x^2-2m^2x+m^4-f(f(x))$ đạt giá trị nhỏ nhất?



A. 6 . **B.** 4 . **C.** 3 . **D.** 8 .

Câu 45: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Biết rằng m, n là hai số thực. Để hàm số $2f(2x-m)-f(3x+n)+x^2-2x$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $T=2m+3n$ bằng



A. −11 . **B.** −7 . **C.** −13 . **D.** 5 .

Câu 46: Cho hàm số $f(x)=x^2-2mx$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $(-1;3)$?

A. 3 . **B.** 2 . **C.** 5 . **D.** 4 .

Câu 47: Cho hàm số $f(x)=-x^2+2(2m-1)x$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $(-3;11]$?

A. 6 . **B.** 31 . **C.** 4 . **D.** 5 .

Câu 48: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30;30]$ để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị nhỏ nhất nhất trên $(1;3)$?

A. 8. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 11.

Câu 49: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30;30]$ để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $(-2;3)$?

A. 30. **B.** 18. **C.** 32. **D.** 1.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.A	3.A	4.C	5.D	6.D	7.C	8.D	9.D	10.D
11.A	12.A	13.B	14.D	15.D	16.A	17.D	18.B	19.B	20.B
21.C	22.D	23.C	24.A	25.C	26.B	27.B	28.C	29.D	30.D
31.A	32.A	33.C	34.A	35.C	36.C	37.D	38.B	39.D	40.D
41.A	42.C	43.C	44.A	45.C	46A	47B	48.C	49.C	

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Ta có: $f(x)-|f(x)|=\begin{cases}0 & khi\ f(x)\ge 0\\ 2f(x) & khi\ f(x)<0\end{cases}$

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)\Rightarrow a=\left|f(x)-|f(x)|\right|\in[0;1],\forall x\in\mathbb{R}$.

Có $b=-a^2+a+\frac{3}{4}\in\left[\frac{3}{4};1\right],\forall a\in[0;1]$. Xét $g(b)=(b+1)^2\left[1+b^2.(2-b)^2\right]$

$\Rightarrow g'(b)=2(b+1)\left[1+b^2.(2-b)^2\right]+(b+1)^2\left[2b.(2-b)^2-2b^2.(2-b)\right]$

$=2(b+1)\left[1+b^2.(4-4b+b^2)+(b+1).(4b-4b^2+b^3)-(b+1).(2b^2-b^3)\right]$

$=2(b+1)\left[1+4b^2-4b^3+b^4+4b^2-4b^3+b^4+4b-4b^2+b^3-2b^3+b^4-2b^2+b^3\right]$

$=2(b+1)\left[3b^4-8b^3+2b^2+4b+1\right]$

$=2(b+1)\left[b(b-2)(3b^2-2b-2)+1\right]$

Ta có $b\in\left[\frac{3}{4};1\right]\Rightarrow b-2<0;3b^2-2b-2<0\Rightarrow g'(b)>0,\forall b\in\left[\frac{3}{4};1\right]$

$\Rightarrow$Hàm số $g(b)=(b+1)^2\left[1+b^2.(2-b)^2\right]$ đồng biến trên $\left[\frac{3}{4};1\right]$

$\Rightarrow g(b)\le g(1)=8,\forall b\in\left[\frac{3}{4};1\right]$

Xét $h(b)=-\frac{2}{1+b.\sqrt{2-b}}\Rightarrow h'(b)=-\frac{4-3b}{\sqrt{2-b}\left(1+b.\sqrt{2-b}\right)^2}$

$\Rightarrow h'(b)>0,\forall b\in\left[\frac{3}{4};1\right]$ $\Rightarrow h(b)\le h(1)=-1,\forall b\in\left[\frac{3}{4};1\right]$

$\Rightarrow S=\frac{3}{8}\sqrt[3]{(b+1)^2\left[1+b^2.(2-b)^2\right]}-\frac{2}{1+b.\sqrt{2-b}}\le\frac{3}{8}\sqrt[3]{8}-1=-\frac{1}{4}$. Đẳng thức xảy ra khi $b=1$.

$\Rightarrow$Giá trị lớn nhất của S bằng $-\frac{1}{4}$ và $k=\frac{9}{4}$.

Câu 2: Ta có :

$|x^3-3x+m|\le 16\ \forall x\in[0;3]$

$\Leftrightarrow -16\le x^3-3x+m\le 16\ \forall x\in[0;3]$

$\Leftrightarrow -16-m\le x^3-3x\le 16-m\ \forall x\in[0;3]$

Xét hàm số $g(x)=x^3-3x$ với $x\in[0;3]$. Khi đó : $\begin{cases}\max\limits_{[0;3]} g(x)=18\\ \min\limits_{[0;3]} g(x)=-2\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}18\le 16-m\\ -2\ge -16-m\end{cases}\Leftrightarrow -14\le m\le -2$.

Dấu ‘ = ’ xảy ra khi $\left[\begin{array}{l}m=-14\\ m=-2\end{array}\right.$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng -16.

Câu 3: $f'(x)=(x-1)\left(3x+2m^2-1\right)$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow(x-1)\left(3x+2m^2-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\notin(1;2)\\ x=\dfrac{1-2m^2}{3}\notin(1;2)\ \forall m\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	1		2
$f'(x)$	0	+	
$f(x)$	$-\frac{3}{2}m$	↗	$m^2+2-\frac{3}{2}m$

Từ bảng biến thiên ta có: $\min\limits_{[1;2]} f(x)=-\dfrac{3}{2}m$ và $\max\limits_{[1;2]} f(x)=m^2-\dfrac{3}{2}m+2>0\ \forall m$.

Xét phương trình $\max\limits_{[1;2]}\left|f(x)\right|+\min\limits_{[1;2]}\left|f(x)\right|=\dfrac{9}{4}\ (1)$.

Trường hợp 1: $-\dfrac{3}{2}m>0\Leftrightarrow m<0$.

$(1)\Leftrightarrow m^2-\dfrac{3}{2}m+2-\dfrac{3}{2}m=\dfrac{9}{4}\Leftrightarrow m^2-3m-\dfrac{1}{4}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{3+\sqrt{10}}{2}\\ m=\dfrac{3-\sqrt{10}}{2}\end{array}\right.$.

Do $m<0$ nên $m=\dfrac{3-\sqrt{10}}{2}$.

Trường hợp 2: $-\dfrac{3}{2}m\le 0\Leftrightarrow m\ge 0$.

$(1)\Leftrightarrow \max\left|f(x)\right|=\dfrac{9}{4}$

$$\max\left|f(x)\right| = \max\left\{\frac{3m}{2}; m^2 - \frac{3m}{2} + 2\right\}$$

$$\max\left|f(x)\right| = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3m}{2} = \dfrac{9}{4} \\ \dfrac{3m}{2} \geq m^2 - \dfrac{3m}{2} + 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{3}{2} \text{(nhận)}$$

$$\max\left|f(x)\right| = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - \dfrac{3m}{2} + 2 = \dfrac{9}{4} \\ \dfrac{3m}{2} \leq m^2 - \dfrac{3m}{2} + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{3+\sqrt{13}}{4} (ktm) \\ m = \dfrac{3-\sqrt{13}}{4} (ktm) \end{array}\right.$$

Vậy $S = \frac{3-\sqrt{10}}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{36} - \sqrt{10}\right)$ nên $a = 36, b = 10$ giá trị $\frac{b}{a} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

Câu 4: Xét $g(x) = f(2x) - 4x$ $(*)$

Đặt $u = 2x, x \in \left[-\frac{3}{2}; 2\right] \Rightarrow u \in [-3; 4]$

Khi đó theo cách đặt $(*)$ trở thành: $g_1(u) = f(u) - 2u \quad \Rightarrow g_1'(u) = f'(u) - 2$,

$$g_1'(u) = 0 \Leftrightarrow f'(u) = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 0 \in [-3; 4] \\ u = 2 \in [-3; 4] \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g_1(u)$ trên $[-3; 4]$

u	-3		0		2		4
$g'(u)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$g(u)$		↗		↗	$g(2)$	↘	

Từ bảng biến thiên suy ra $\max\limits_{[-3;4]} g_1(u) = g_1(2) = f(2) - 4$.

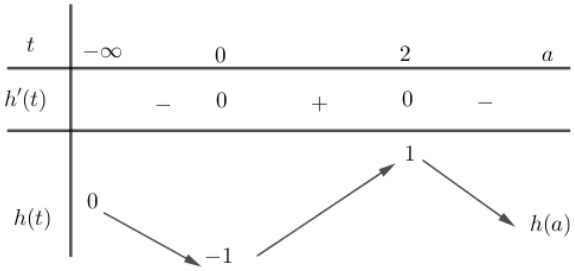
Câu 5: Đặt $f(x) = t$, $t \in (-\infty; a], a > 2$

Ta có $g(x) = \dfrac{2f(x) - 2}{f^2(x) - 2f(x) + 2} = \dfrac{2t - 2}{t^2 - 2t + 2}$.

Đặt $h(t) = \dfrac{2t - 2}{t^2 - 2t + 2}$, $t \in (-\infty; a], a > 2$.

$$h'(t) = \frac{-2\left(t^2 - 2t\right)}{\left(t^2 - 2t + 2\right)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 2 \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(t)$.



Ta có $h(a)=\dfrac{2a-2}{a^2-2a+2}>0\ \ \forall a>2$ nên từ bảng biến thiên suy ra:

$\max\limits_{\mathbb{R}} g(x)=\max\limits_{(-\infty;a]} h(t)=1\Leftrightarrow t=2$ hay $f(x)=2$ (phương trình này có 3 nghiệm).

$\min\limits_{\mathbb{R}} g(x)=\min\limits_{(-\infty;a]} h(t)=-1\Leftrightarrow t=0$ hay $f(x)=0$ (phương trình này có 4 nghiệm).

Vậy có tất cả 7 giá trị của x sao cho hàm số $g(x)$ đạt giá trị lớn nhất hoặc đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 6: Ta có: $\min\limits_{[1;2]} f(x)+\max\limits_{[1;2]} f(x)=\dfrac{16}{3}$ (1). Đặt $h(x)=\dfrac{x+m}{x+1}$ có đạo hàm: $h'(x)=\dfrac{1-m}{(x+1)^2}$.

Nếu $m=1$ thì $\min\limits_{[1;2]} f(x)=\max\limits_{[1;2]} f(x)=1$ (loại)

Nếu $m=1$ thì $h'(x)\neq 0,\forall x\neq 1$ và $h(1)=\dfrac{m+1}{2};h(2)=\dfrac{m+2}{3}$

Trường hợp 1: $h(1),h(2)\geq 0$ khi đó $m\geq -1$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \dfrac{m+1}{2}+\dfrac{m+2}{3}=\dfrac{16}{3}\Rightarrow m=5$ (TM)

Trường hợp 2: $h(1),h(2)\leq 0$ khi đó $m\leq -2$

Phương trình 1 (1) $\Leftrightarrow \dfrac{m+1}{2}+\dfrac{m+2}{3}=-\dfrac{16}{3}\Rightarrow m=\dfrac{-39}{5}$ (TM)

Trường hợp 3: $\begin{cases} h(1).h(2)<0 \\ \left|\dfrac{m+1}{2}\right|\leq\left|\dfrac{m+2}{3}\right| \end{cases}$ khi đó $-\dfrac{7}{5}<m<-1$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \dfrac{m+2}{3}=\dfrac{16}{3}\Rightarrow m=14$ (không TM)

Trường hợp 4: $\begin{cases} h(1).h(2)<0 \\ \left|\dfrac{m+2}{3}\right|<\left|\dfrac{m+1}{2}\right| \end{cases}$ khi đó $-2<m<\dfrac{-7}{5}$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow -\dfrac{m+1}{2}=\dfrac{16}{3}\Rightarrow m=-\dfrac{35}{3}$ (không TM)

Vậy $m=5,m=\dfrac{-39}{5}$ nên có 2 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 7: **Cách 1:**

Đặt $t=f\left(x^3+2x\right)$. Vì $x\in[-1;1]$ nên $t\in[-6;5]$. Khi đó, $g(x)=|t+n|$ với $n=3f(m)$.

Do đó, $\max\limits_{[-1;1]} g(x) = \max\left\{|n+5|;|n-6|\right\} = 8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}|n+5|=8\\|n+5|\geq|n-6|\end{cases}\Leftrightarrow n=3\\\begin{cases}|n-6|=8\\|n-6|>|n+5|\end{cases}\Leftrightarrow n=-2\end{array}\right.$

Với $n=3\Leftrightarrow 3.f(m)=3\Leftrightarrow f(m)=1$, suy ra có 5 giá trị của m.

Với $n=-2\Leftrightarrow 3.f(m)=-2\Leftrightarrow f(m)=\dfrac{-2}{3}$, suy ra có 6 giá trị của m.

Vậy có 11 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Cách 2:

Vì $x\in[-1;1]$ nên $-3\leq x^3+3x\leq 3\Rightarrow -6\leq f\left(x^3+3x\right)\leq 5$..

Ta có : $\left|f\left(x^3+3x\right)+3f(m)\right|\leq 8,\forall x\in[-1;1]\Leftrightarrow -8\leq f\left(x^3+3x\right)+3f(m)\leq 8,\ \forall x\in[-1;1]$

$\Leftrightarrow\begin{cases}f\left(x^3+3x\right)\leq 8-3f(m)\\-8-3f(m)\leq f\left(x^3+3x\right)\end{cases}\forall x\in[-1;1]\Rightarrow\begin{cases}5\leq 8-3f(m)\\-8-3f(m)\leq -6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(m)\leq 1\\f(m)\geq -\dfrac{2}{3}\cdot\end{cases}$

Do đó $\max\left|f\left(x^3+3x\right)+3f(m)\right|=8\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(m)=1\\f(m)=-\dfrac{2}{3}\cdot\end{array}\right.$

Với $f(m)=1$, có 5 giá trị của m. Với $f(m)=\dfrac{-2}{3}$, có 6 giá trị của m.

Vậy có 11 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 8: Ta có: $\begin{cases}|f(-1)|\leq 1\\\left|f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right|\leq 1\\|f(0)|\leq 1\\\left|f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right|\leq 1\\|f(1)|\leq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|8-a+b-c+d|\leq 1\\\left|2-\dfrac{a}{2\sqrt{2}}+\dfrac{b}{2}-\dfrac{c}{\sqrt{2}}+d\right|\leq 1\\|d|\leq 1\\\left|2+\dfrac{a}{2\sqrt{2}}+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{\sqrt{2}}+d\right|\leq 1\\|8+a+b+c+d|\leq 1\end{cases}$

$|4+b+2d|\leq\left|2-\dfrac{a}{2\sqrt{2}}+\dfrac{b}{2}-\dfrac{c}{\sqrt{2}}+d\right|+\left|2+\dfrac{a}{2\sqrt{2}}+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{\sqrt{2}}+d\right|\leq 2\Rightarrow\left|2+\dfrac{b}{2}+d\right|\leq 1$

Tương tự: $|16+2b+2d|\leq 2\Rightarrow|8+b+d|\leq 1$

Dấu "=" xảy ra kết hợp với $|d|\leq 1$ khi: $\begin{cases}2+\dfrac{b}{2}+d=-1\\8+b+d=1\\d=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}d=1\\b=-8\end{cases}$

Khi đó: $\begin{cases} \left|-a-c+1\right| \le 1 \\ \left|-\dfrac{a}{2\sqrt{2}}-\dfrac{c}{\sqrt{2}}-1\right| \le 1 \\ \left|\dfrac{a}{2\sqrt{2}}+\dfrac{c}{\sqrt{2}}-1\right| \le 1 \\ \left|a+c+1\right| \le 1 \end{cases}$ dấu "=" xảy ra khi $a=c=0$

Vậy $f(x)=8x^4-8x^2+1$

Suy ra: $a^2+b^2+c^2+d^2=65$

Chú ý: Ta có thể suy luận như sau để được nhanh đáp số:

Vì $\cos(4t)=8\cos^4 t-8\cos^2 t+1$ nên nếu đặt $x=\cos t$ thì $\cos(4t)=8x^4-8x^2+1$ và như vậy hàm $f(x)=8x^4-8x^2+1$ thỏa mãn $\left|f(x)\right| \le 1, \forall x \in [-1;1]$

Câu 9: Điều kiện: $x \in [0;2]$. Ta có: $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}+\left|4x-2\right|+\left|6-4x\right|}{\left|2x-1\right|+\left|2x-3\right|}=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}}{\left|2x-1\right|+\left|2x-3\right|}+2$.

Do $\left(\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\right)^2=2+2\sqrt{x(2-x)} \le 4$ vì $\sqrt{x(2-x)} \le 1, \forall x \in [0;2]$.

$\Rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{2-x} \le 2 \le \left|2x-1\right|+\left|3-2x\right| \Rightarrow 2 < g(x) \le 3 \Rightarrow f(g(x)) \le 4 \quad (1)$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=1$.

Ta có: $3-2x+x^2 \in [2;3], \forall x \in [0;2] \Rightarrow -f\left(3-2x+x^2\right) \le 0 \quad (2)$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=1$.

Ta có: $2-\sqrt{4-m^2} \in [0;2] \Rightarrow f\left(2-\sqrt{4-m^2}\right) \le 4 \quad (3)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m=0$.

Từ $(1),(2),(3) \Rightarrow h(x) \le 4-0+4=8 \Rightarrow \max h(x)=8 \Leftrightarrow x=1; m=0$.

Câu 10: Ta có: $\min\limits_{[-1;1]}\left|f(x)\right| > \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow \left|f(x)\right| > \dfrac{3}{4}, \forall x \in [-1;1] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > \dfrac{3}{4}, \forall x \in [-1;1] \quad (1) \\ f(x) < -\dfrac{3}{4}, \forall x \in [-1;1] \quad (2) \end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $f(x) > \dfrac{3}{4}, \forall x \in [-1;1]$.

Nhận thấy $f(0)=-2 < \dfrac{3}{4}$. Nên trường hợp (1) không tìm được m.

Trường hợp 2: $f(x) < -\dfrac{3}{4}, \forall x \in [-1;1]$.

Ta có: $f(x) < -\dfrac{3}{4}, \forall x \in [-1;1]$.

$\Leftrightarrow \dfrac{2x^4-mx-4}{x+2} < -\dfrac{3}{4}, \forall x \in [-1;1] \Leftrightarrow 8x^4-4mx-16 < -3x-6, \forall x \in [-1;1]$

$$\Leftrightarrow 4mx > 8x^4+3x-10, \forall x \in [-1;1] \Leftrightarrow \begin{cases} 0 > -10, khi\ x = 0 \\ 4m > 8x^3+3-\dfrac{10}{x}, \forall x \in (0;1] \quad (*) \\ 4m < 8x^3+3-\dfrac{10}{x}, \forall x \in [-1;0) \end{cases}$$

Xét hàm số $g(x) = 8x^3+3-\dfrac{10}{x}$ có $g'(x) = 24x^2+\dfrac{10}{x^2} = \dfrac{24x^4+10}{x^2} > 0, \forall x \neq 0$.

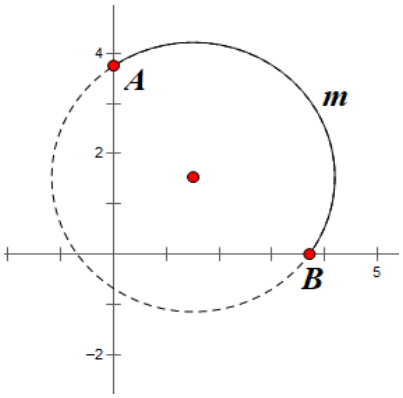
Bảng biến thiên:

x	-1		0		1
$g'(x)$		$+$	‖	$+$	
$g(x)$	5	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall m \in \mathbb{R}\ khi\ x = 0 \\ 4m > \max\limits_{(0;1]} g(x) \\ 4m < \min\limits_{[-1;0)} g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m > 1 \\ 4m < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{1}{4} \\ m < \dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{4} < m < \frac{5}{4}.$$

Câu 11: Cách 1:



Đặt $X = \sqrt{x+1}, Y = \sqrt{y+2}$ với $X, Y \geq 0$ suy ra: $x = X^2-1, y = Y^2-2$

Ta có: $x-3\sqrt{x+1} = 3\sqrt{y+2}-y \Rightarrow X^2+Y^2-3X-3Y-3 = 0$ (1)

Tập hợp các điểm $M(X,Y)$ thỏa mãn phương trình (1) là đường tròn (C) có tâm $I\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right)$, bán kính $R = \dfrac{\sqrt{30}}{2}$. Gọi $A = (C) \cap (Oy) \Rightarrow A\left(0;\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}\right)$; $B = (C) \cap (Ox) \Rightarrow B\left(\dfrac{3+\sqrt{21}}{2};0\right)$. Vì $X, Y \geq 0$ nên ta chỉ xét các điểm $M \in AmB$.

Ta có: $P = x+y = X^2+Y^2-3 = OM^2-3$ suy ra $P_{\min} \Leftrightarrow OM_{\min} = OA = OB$.

Mặt khác: $OA = \sqrt{0^2+\left(\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}\right)^2} = \dfrac{3+\sqrt{21}}{2}$.

Vậy $\min P = OA^2 - 3 = \left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)^2 - 3 = \frac{9+3\sqrt{21}}{2}$.

Cách 2:

ĐK: $x \ge 1; y \ge -2$. Ta có: $x - 3\sqrt{x+1} = 3\sqrt{y+2} - y \Leftrightarrow x + y = 3\sqrt{x+1} + 3\sqrt{y+2}$, $(x+y>0)$.

$\Rightarrow (x+y)^2 = 9(x+y+3) + 18\sqrt{(x+1)(y+2)}$

$\Rightarrow (x+y)^2 - 9(x+y) - 27 \ge 0 \Rightarrow x + y \ge \frac{9+3\sqrt{21}}{2}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{11+3\sqrt{21}}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y = -2 \\ x = \frac{13+3\sqrt{21}}{2} \end{cases}$

Vậy $\min P = \frac{9+3\sqrt{21}}{2}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{11+3\sqrt{21}}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y = -2 \\ x = \frac{13+3\sqrt{21}}{2} \end{cases}$.

Câu 12: Đặt $t = 2 - \cos x, t \in [1;3]$. Ta có $f(t) = t^3 - 3t$; $g_1(t) = |t^3 - 3t + m|$

Xét hàm số $h(t) = t^3 - 3t + m$ trên đoạn $[1;3]$; $h'(t) = 3t^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \quad (tm) \\ t = -1 \ (l) \end{array}\right.$.

$h(1) = m - 2,\ h(3) = m + 18.$

Trường hợp 1 : $m > 2 \Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{[1;3]} g_1(t) = m - 2 \\ \max\limits_{[1;3]} g_1(t) = m + 18 \end{cases}$

Từ giả thiết bài toán ta có : $3(m+18) + m - 2 = 100 \Leftrightarrow m = 12$ (tm)

Trường hợp 2 : $m < -18 \Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{[1;3]} g_1(t) = -m - 18 \\ \max\limits_{[1;3]} g_1(t) = -m + 2 \end{cases}$

Từ giả thiết bài toán ta có : $3(-m+2) - m - 18 = 100 \Leftrightarrow m = -28$ (tm)

Trường hợp 3 : $-18 \le m \le 2 \Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{[1;3]} g_1(t) = 0 \\ \max\limits_{[1;3]} g_1(t) = \max\{|m-2|; |m+18|\} \end{cases}$

Nếu $|m-2| \ge |m+18| \Leftrightarrow m \le -8.$

Từ giả thiết bài toán ta có : $3|m-2| = 100 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \frac{106}{3} \ (l) \\ m = \frac{-94}{3} \ (l) \end{array}\right.$ vì $-18 \le m \le -8$

Nếu $|m+18| \ge |m-2| \Leftrightarrow m \ge -8.$

Từ giả thiết bài toán ta có : $3|m+18| = 100 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \frac{-154}{3} \ (l) \\ m = \frac{46}{3} \ (l) \end{array}\right.$ vì $-8 \le m \le 2$

Vậy $S=\{12;-28\}\Rightarrow 12-28=-16$

Câu 13: Cách 1:

Tập xác định $D=\mathbb{R}\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}: y=\dfrac{ax+b}{2x^2+2}\Leftrightarrow 2yx^2-ax+2y-b=0 \quad (1)$

Để có $\max y, \min y$ thì phương trình (1) phải có nghiệm x

Trường hợp 1: $y=0$, khi đó $(1)\Leftrightarrow -ax-b=0$. Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=0 \\ a\neq 0 \end{array}\right.$.

Với $a=b=0$ thì $y=0, \forall x\in\mathbb{R}$, do đó $\min y+\max y=0\le 5$ (thoả mãn).

Với $a\neq 0$ thì $y=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{b}{a}$.

Trường hợp 2: $y\neq 0$. Xét $\Delta=-16y^2+8by+a^2$.

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta\ge 0\Leftrightarrow -16y^2+8by+a^2\ge 0\Leftrightarrow \dfrac{b-\sqrt{a^2+b^2}}{4}\le y\le \dfrac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{4}$

$\Rightarrow M=\dfrac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{4}; m=\dfrac{b-\sqrt{a^2+b^2}}{4}$

$M^2+m^2=\dfrac{a^2+2b^2}{8}\le 5\Rightarrow a^2+2b^2\le 40(*)$.

Suy ra $b^2\le 20\Rightarrow -4\le b\le 4$ (do $b\in\mathbb{Z}$).

Nhận xét nếu $a^2\le M$ thì có $2\times\left[\sqrt{M}\right]+1$ số nguyên a thoả mãn.

Với $b=\pm 4\Rightarrow a^2\le 8$. Có 5 số nguyên a thoả mãn.Vậy có 10 cặp $(a;b)$.

Với $b=\pm 3\Rightarrow a^2\le 22$. Có 9 số nguyên a thoả mãn.Vậy có 18 cặp $(a;b)$.

Với $b=\pm 2\Rightarrow a^2\le 32$. Có 11 số nguyên a thoả mãn.Vậy có 22 cặp $(a;b)$.

Với $b=\pm 1\Rightarrow a^2\le 38$. Có 13 số nguyên a thoả mãn.Vậy có 26 cặp $(a;b)$.

Với $b=0\Rightarrow a^2\le 40$. Có 13 số nguyên a thoả mãn.Vậy có 13 cặp $(a;b)$.

Tổng cộng có 89 cặp $(a;b)$ cần tìm.

Cách 2:

$(C): y=\dfrac{ax+b}{2x^2+2}\Rightarrow y'=\dfrac{-ax^2-2bx+a}{2\left(x^2+1\right)^2}$

Nếu $a=b=0$ thì $y=0, \forall x\in\mathbb{R}$, do đó $M=m=0\Rightarrow M^2+m^2\le 5$ (thoả mãn).

Xét a,b không đồng thời bằng 0. Khi đó $y'=0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

Ta có $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-2b}{a} \\ x_1.x_2=-1 \end{cases}$ (Giả sử $x_1<x_2$)

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=0$ nên (C) có dạng



hoặc



M, m nhận $y(x_1)$, $y(x_2)$.

Ta có công thức cực trị của hàm số $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ là $y(x_{ct})=\dfrac{u'}{v'}=\dfrac{a}{4x_{ct}}$

$$\Rightarrow M^2+m^2=\frac{a^2}{4^2x_1^{\,2}}+\frac{a^2}{4^2x_2^{\,2}}=\frac{a^2}{16}\left(\frac{4b^2}{a^2}+2\right)\le 5\Leftrightarrow 2b^2+a^2\le 40.$$

(đến đây thực hiện tương tự cách 1.)

Câu 14: Đặt $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-(m+2)x^2+(3-3m^2)x+1$. Suy ra

$$f'(x)=x^2-2(m+2)x+3-3m^2=(x+m-1)(x-3m-3).$$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=1-m\\x_2=3+3m.\end{array}\right.$. Vì $m\in\left(-\dfrac{2}{3};0\right)$ nên $\left\{\begin{array}{l}x_1\in\left(1;\dfrac{5}{3}\right)\\x_2\in(1;3)\end{array}\right.\Rightarrow x_1,x_2\notin[-1;1].$

Do đó hàm số $f(x)$ đơn điệu trên đoạn $[-1;1]$. Suy ra $\max\limits_{[-1;1]}|f(x)|=\max\limits_{[-1;1]}\{|f(-1)|;|f(1)|\}$.

$$|f(1)|=\left|-3m^2-m+\frac{7}{3}\right|=-3m^2-m+\frac{7}{3}\Leftrightarrow|f(-1)|=\left|3m^2-m-\frac{13}{3}\right|=-3m^2+m+\frac{13}{3}.$$

$$\max_{[-1;1]}y=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}|f(1)|=4\\|f(-1)|\le 4\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}|f(1)|\le 4\\|f(-1)|=4\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}-3m^2-m+\dfrac{7}{3}=4\\-3m^2+m+\dfrac{13}{3}\le 4\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}-3m^2-m+\dfrac{7}{3}\le 4\\-3m^2+m+\dfrac{13}{3}=4\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow m=\frac{1-\sqrt{5}}{6}.$$

Câu 15: Đặt $f(x)=3x^4-4x^3-6mx^2+12mx+m$. Ta có: $f(1)=7m-1$ và $f(2)=m+16$.

Điều kiện cần: giả sử $\max\limits_{[1;2]}|f(x)|=18\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}|f(1)|=|7m-1|\le 18\\|f(2)|=|m+16|\le 18\end{array}\right.\Rightarrow-\dfrac{17}{7}\le m\le 2$.

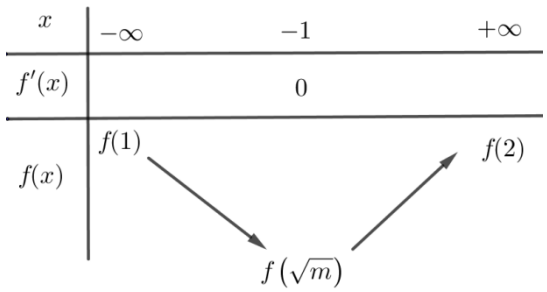
Vậy chỉ cần xét $m\in\left[-\dfrac{17}{7};2\right]$.

Điều kiện đủ: Ta có: $f'(x)=12(x-1)(x^2-m)$.

Trường hợp 1: $-\frac{17}{7} \le m \le 1$, khi đó: $f'(x) \ge 0, \forall x \in [1;2]$ suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[1;2]$, mà $f(2) = m+16 \in (0;17)$ nên yêu cầu bài toán tương đương $f(1) = 7m-1 = -18 \Leftrightarrow m = -\frac{17}{7}$.

Trường hợp 2: $1 < m \le 2$, khi đó: $f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = \sqrt{m} \in [1;2]$

Bảng biến thiên:



Với: $f(\sqrt{m}) = 3m^2 - 4m\sqrt{m} - 6m^2 + 12m\sqrt{m} + m = 3m\sqrt{m}(2-\sqrt{m}) + 2m\sqrt{m} + m > 0$.

Do đó YCBT $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(1) = 7m-1 = 18 \\ f(2) = m+16 = 18 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \frac{19}{7} \ (l) \\ m = 2 \end{array}\right.$.

Vậy có hai giá trị m thỏa mãn là: $m = -\frac{17}{7}, m = 2$.

Câu 16: $\left[f(x) - x\right].f(x) = x^6 + 3x^4 + 2x^2 \Leftrightarrow \left[f(x) - x\right].f(x) = \left(x^3 + 2x\right)\left[x^3 + 2x - x\right], \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \left[f(x) - x^3 - 2x\right].\left[f(x) + x^3 - x\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = x^3 + 2x \\ f(x) = -x^3 + x \end{array}\right.$

Vì $f(x)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên loại $f(x) = -x^3 + x$.

$\Rightarrow f(x) = x^3 + 2x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(1) = 3 = \min\limits_{[1;2]} f(x) = m; f(2) = 12 = \max\limits_{[1;2]} f(x) = M$

Suy ra: $3M - m = 3.12 - 3 = 33$

Câu 17: Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y \ge -1, \forall x \in \mathbb{R}$ và $y = -1$ có nghiệm.

Ta có $y \ge -1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left|x^2 - 2x + m\right| + 4x \ge -1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left|x^2 - 2x + m\right| \ge -4x - 1, \forall x \in \mathbb{R} (*)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x + m \le 4x + 1, \forall x \le -\frac{1}{4} \\ x^2 - 2x + m \ge -4x - 1, \forall x \le -\frac{1}{4} \end{array}\right.$ (vì $x > -\frac{1}{4}$ thì (*) luôn đúng)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -x^2+6x+1, \forall x \le -\dfrac{1}{4} \\ m \ge -x^2-2x-1, \forall x \le -\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow m \ge 0 \ (1).$$

Ta có $y=-1$ có nghiệm $\Leftrightarrow \left|x^2-2x+m\right|=-4x-1$ có nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x+m=4x+1 \\ x^2-2x+m=-4x-1 \end{array}\right.$ có nghiệm $x \le -\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-x^2+6x+1 \\ m=-x^2-2x-1 \end{array}\right.$ có nghiệm $x \le -\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -\dfrac{9}{16} \\ m \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m \le 0 \ (2).$

Từ (1) và (2) suy ra $m=0$

Câu 18: Đặt $g(x)=x^3-12x+m \Rightarrow g'(x)=3x^2-12$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \in (1;3) \\ x=-2 \notin (1;3) \end{array}\right.$

Ta có: $g(1)=m-11$; $g(2)=m-16$; $g(3)=m-9 \Rightarrow \min\limits_{[1;3]} g(x)=m-16; \max\limits_{[1;3]} g(x)=m-9$

Do đó: $\max\limits_{[1;3]} f(x)=\max\left\{\left|m-9\right|;\left|m-16\right|\right\}$

$$\begin{cases} |m-9| \le 20 \\ |m-16| \le 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -20 \le m-9 \le 20 \\ -20 \le m-16 \le 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -11 \le m \le 29 \\ -4 \le m \le 36 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \le m \le 29.$$

Vậy có 34 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 19: M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|x^2+ax+b\right|$ trên đoạn $[-1;3]$

$$\Rightarrow \begin{cases} M \ge f(-1) \\ M \ge f(3) \\ 2M \ge 2f(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \ge |1-a+b| \\ M \ge |9+3a+b| \\ 2M \ge 2|1+a+b| \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4M \ge |1-a+b|+|9+3a+b|+2|-1-a-b| \ge |1-a+b+9+3a+b-2-2a-2b|$$

$$\Rightarrow 4M \ge 8 \Rightarrow M \ge 2 \Rightarrow M_{\min}=2.$$

Dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases} -a+b+1=2 \\ 3a+b+9=2 \\ -1-a-b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \end{cases}.$

Thử lại thấy thỏa $M=2$ là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;3]$.

Vậy $a+2b=-4$.

Câu 20: Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy $f(x) \in [-2;2]$ với $x \in [-2;2]$.

Đặt $t=f(x)+2$ với $x \in [-2;2] \Rightarrow t \in [0;4]$ với $x \in [-2;2]$.

Xét $h(t)=\left||2t+m|-t-1\right|=|2t+m-t-1|=|t+m-1|$ (vì $2t+m \ge 0$ do $t \in [0;4]$, $m \in [0;20]$).

Trường hợp 1: Xét $m-1 \ge 0 \Leftrightarrow m \ge 1 \Rightarrow \underset{[-2;2]}{Min}\, g(x)=\underset{[0;4]}{Min}\, h(t)=m-1 \ge 1 \Rightarrow m \ge 2$ *(tm)*

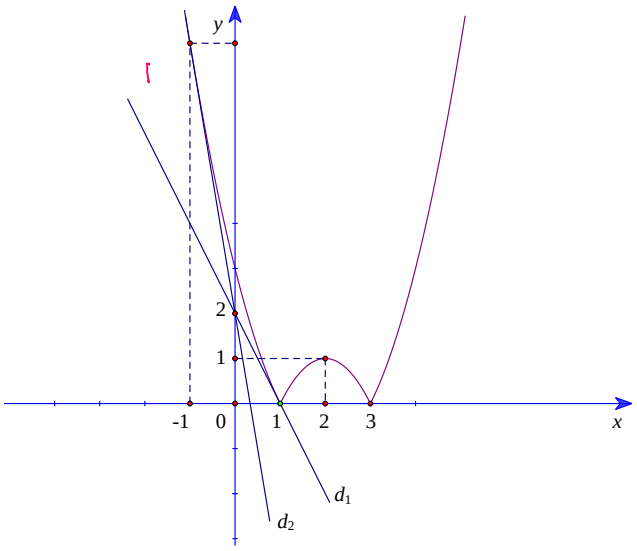
Trường hợp 2: Xét $\begin{cases} m-1\le 0 \\ m+3\ge 0 \end{cases} \Rightarrow 0\le m\le 1$ (do $m\in[0;20]$) $\Rightarrow \underset{x\in[-2;2]}{Min}\, g(x)=\underset{t\in[0;4]}{Min}\left|h(t)\right|=0\ge 1$ *(ktm).*

Trường hợp 3: Xét $m+3\le 0\Rightarrow m\le -3$ (không thõa mãn $m\in[0;20]$).

Ta có $\underset{[-2;2]}{Min}\, g(x)\ge 1\Leftrightarrow m-1\ge 1\Leftrightarrow m\ge 2$ mà $m\in\mathbb{Z}$, $m\in[0;20]$ nên $m\in\{2;3;...;20\}$.

Suy ra có 19 giá trị nguyên m thỏa mãn đề bài.

Câu 21:



Để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=4ax+\left|x^2-4x+3\right|$ lớn hơn 2 thì:

$4ax+\left|x^2-4x+3\right|>2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$

Suy ra $\left|x^2-4x+3\right|>2-4ax$ với mọi $x\in\mathbb{R}$

Hàm số $y=\left|x^2-4x+3\right|$ có đồ thị (C)

Đường thẳng $d:\ y=2-4ax$ đi qua điểm cố định $(0;2)$.

Đường thẳng $d:\ y=2-4ax$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^2-4x+3$ $(x\le 1)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 2-4ax=x^2-4x+3 \\ -4a=2x-4 \end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}\Rightarrow d_1: y=2-2x \\ x=-1\Rightarrow a=\dfrac{3}{2}\Rightarrow d_2: y=2-6x \end{array}\right.$$

Để $\left|x^2-4x+3\right|>2-4ax$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ thì $d:\ y=2-4ax$ nằm giữa $d_1,d_2\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}<a<\dfrac{3}{2}$.

Câu 22: Đặt $t=\sqrt{x+2}$ với $x\in[-1;1]\Rightarrow t\in\left[1;\sqrt{3}\right]$ và $x=t^2-2$.

Hàm số đã cho trở thành $g(t)=\left|\dfrac{2mt^2-4t-4m}{t^2}\right|$. Khi đó: $\min\limits_{[-1;1]} f(x)=\min\limits_{[1;\sqrt{3}]} g(t)$.

Xét hàm số $h(t)=\dfrac{2mt^2-4t-4m}{t^2}$ trên đoạn $\left[1;\sqrt{3}\right]$.

$h'(t)=\dfrac{4t^2+8mt}{t^4}>0,\forall t\in\left[1;\sqrt{3}\right]$ và $m>0$.

suy ra $\min\limits_{\left[1;\sqrt{3}\right]}h(t)=-2m-4$ và $\max\limits_{\left[1;\sqrt{3}\right]}h(t)=\dfrac{2m-4\sqrt{3}}{3}$

Điều kiện cần: Ta có: $\min\limits_{\left[1;\sqrt{3}\right]}g(t)=a\in(0;1)\Rightarrow h(1).h\left(\sqrt{3}\right)>0\Leftrightarrow(-2m-4)\left(\dfrac{2m-4\sqrt{3}}{3}\right)>0$

$\Leftrightarrow -2<m<2\sqrt{3}$.

Vì m nguyên dương nên $m\in\{1;2;3\}$.

Điều kiện đủ: $m\in\{1;2;3\}$

Khi đó: $\min\limits_{\left[1;\sqrt{3}\right]}g(t)=\min\left\{g(1);g\left(\sqrt{3}\right)\right\}=\min\left\{|2m+4|;\left|\dfrac{2m-4\sqrt{3}}{3}\right|\right\}$.

+ $m=1$: $\min\limits_{\left[1;\sqrt{3}\right]}g(t)=\min\left\{6;\dfrac{4\sqrt{3}-2}{3}\right\}=\dfrac{4\sqrt{3}-2}{3}>1$ (loại).

+ $m=2$: $\min\limits_{\left[1;\sqrt{3}\right]}g(t)=\min\left\{8;\dfrac{4\sqrt{3}-4}{3}\right\}=\dfrac{4\sqrt{3}-4}{3}\in(0;1)$ (nhận).

+ $m=3$: $\min\limits_{\left[1;\sqrt{3}\right]}g(t)=\min\left\{10;\dfrac{4\sqrt{3}-6}{3}\right\}=\dfrac{4\sqrt{3}-6}{3}\in(0;1)$ (nhận).

Vậy $m\in\{2;3\}$ nên có 2 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 23: Với $m\in\mathbb{N}^*$, $m\le 20$, ta có $x\in[-2;2]\Rightarrow t=f(x)\in[-2;2]$.

Khi đó $h(t)=|2t+m+4|+|t+3m-2|-2\ge 0,\forall t\in[-2;2]$

$\Rightarrow h(t)=2t+m+2+|t+3m-2|\ge 0,\forall t\in[-2;2]$

Trường hợp 1: $t\ge 2-3m\Rightarrow h(t)=3t+4m$

+) $\begin{cases}2-3m\in[-2;2]\\ \min\limits_{[-2;2]}h(t)=h(2-3m)=6-5m\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 0\le m\le\dfrac{6}{5}\Rightarrow m=1$

+) $\begin{cases}2-3m\le -2\\ \min\limits_{[-2;2]}h(t)=h(-2)=4m-6\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow m\ge\dfrac{3}{2}\Rightarrow m\in\{2;3;...;20\}\Rightarrow m\in\{1;2;...;20\}$

Trường hợp 2: $t<2-3m$ không cần xét nữa vì đã lấy tất cả các giá trị m nguyên thuộc đoạn cho trong đề bài.

Vậy tổng các phần tử của S là $1+2+....+20=\dfrac{(1+20)20}{2}=210$.

Câu 24: Ta có $y=\left|x^2-5x+4\right|+mx=\begin{cases}x^2-(5-m)x+4, & x\in(-\infty;1]\cup[4;+\infty)\\ -x^2+(5+m)x+4, & x\in[1,4]\end{cases}$

Trường hợp 1: $0<m<3\Rightarrow 1<\dfrac{5-m}{2}<\dfrac{m+5}{2}<4$

Bảng biến thiên của hàm số đã cho

x	$-\infty$	1	$\dfrac{5-m}{2}$	$\dfrac{m+5}{2}$	4	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$ m	$\nearrow$	$\searrow$ $4m$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2-5x+4\right|+mx$ lớn hơn 1 thì $m>1$, kết hợp với điều kiện $m<3$ và m nguyên dương ta được $m=2$.

Trường hợp 2: $m\ge 3\Rightarrow \begin{cases}\dfrac{m+5}{2}\ge 4\\ \dfrac{5-m}{2}\le 1\end{cases}$

Bảng biến thiên của hàm số đã cho

x	$-\infty$	$\dfrac{5-m}{2}$	1	4	$\dfrac{m+5}{2}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$ $\dfrac{-m^2+10m-9}{4}$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2-5x+4\right|+mx$ lớn hơn 1 thì $\dfrac{-m^2+10m-9}{4}>1\Leftrightarrow -m^2+10m-9>4\Leftrightarrow m^2-10m+13<0\Leftrightarrow 5-2\sqrt{3}<m<5+2\sqrt{3}$. Kết hợp với điều kiện $m\ge 3$ và m nguyên dương ta được $m\in\{3;4;5;6;7;8\}$.

Gộp hai trường hợp ta được tập các giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán $S=\{2;3;4;5;6;7;8\}$.

Câu 25: Do $f''(x)<0,\forall x\in(0;+\infty)$ nên $f(x)$ có đồ thị lồi trên $(0;+\infty)$, tức là tiếp tuyến ở phía trên đồ thị. Suy ra $f(x)\le f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0),\forall x\in(0;+\infty)$

$\Rightarrow f(a)\le f'(0)(a-0)+f(0)=af'(0)+2$.

Xét trên $[0;2]$, ta có

x	0	2
$f''(x)$	$-$	
$f'(x)$	$\searrow$ 0	
$f(x)$	2 $\nearrow$	4

Suy ra $f\left(2-\sqrt{4-2x}\right)\le f(2)=4$, do đó $f(a)+f\left(2-\sqrt{4-2x}\right)\le af'(0)+6$.

Ta chứng minh $2f'(0)+(a-x)f'(a)+6\ge af'(0)+6\Leftrightarrow(2-a)f'(0)\ge(x-a)f'(a)(*)$

Thật vậy:

Nếu $x\le a$ thì $VT(*)\ge 0\ge VP(*)$.

Nếu $x\ge a$ thì $\begin{cases}2-a\ge x-a>0\\ f'(0)\ge f'(a)\end{cases}$ nên $(*)$ đúng.

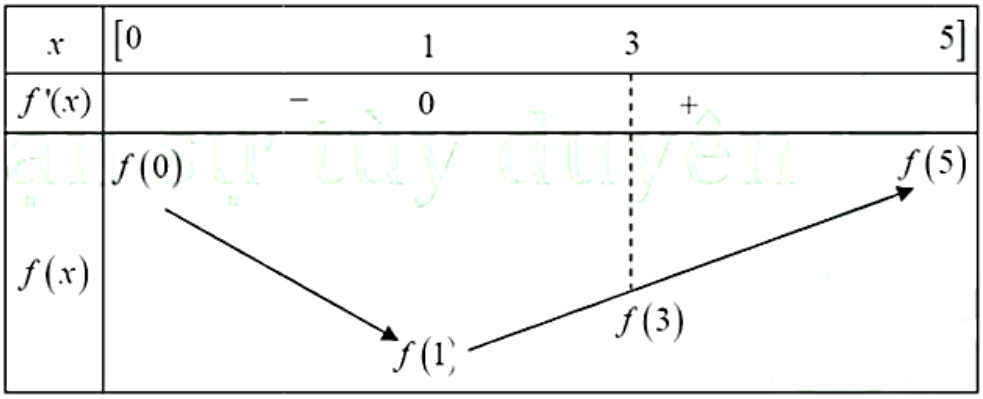
Do đó $\dfrac{2f'(0)+(a-x)f'(a)+6}{f\left(2-\sqrt{4-2x}\right)+f(a)}\ge 1$.

Lại có $\left[f'(x)\right]^2+1\ge 1$ và $f\left(2-\sqrt{4-2x}\right)+f(x)\le 2f(2)=8$ nên suy ra $S\ge\dfrac{1}{64}$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=0;x=2$. Như vậy $m=1,n=64\Rightarrow m+n=65$.

Câu 26: Chọn B

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$ như sau:



Suy ra: $\min\limits_{x\in[0;5]}f(x)=f(1)=m$ và $\begin{bmatrix}\max\limits_{x\in[0;5]}f(x)=f(0)\\ \max\limits_{x\in[0;5]}f(x)=f(5)\end{bmatrix}$.

Từ giả thiết: $f(0)-f(3)=f(5)-f(1)\Leftrightarrow f(5)-f(0)=f(1)-f(3)<0\Leftrightarrow f(5)<f(0)$.

Suy ra, $\max\limits_{x\in[0;5]}f(x)=f(0)=M$.

Câu 27: Ta có: $\left|\sqrt{4x-x^2}-mx\right|\le M,\forall x\in[0;4]$ và $M\ge 0$

Với $x=0$ thỏa mãn.

Với $x\in(0;4]$ ta có:

$$-M\le\sqrt{4x-x^2}-mx\le M\Leftrightarrow\begin{cases}m\le\sqrt{\dfrac{4}{x}-1}+\dfrac{M}{x}=g(x)\\ m\ge\sqrt{\dfrac{4}{x}-1}-\dfrac{M}{x}=h(x)\end{cases},\forall x\in(0;4]$$

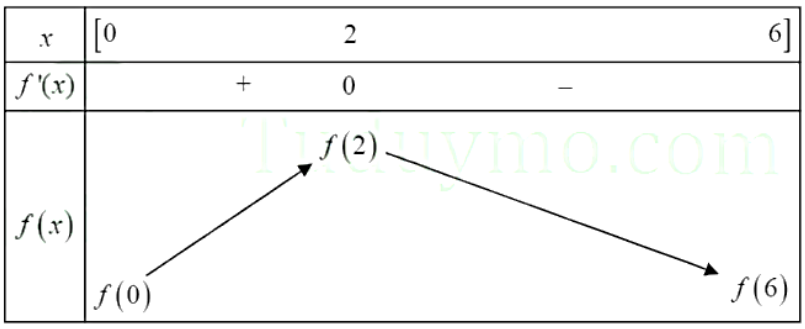
+ Ta có $g\ x$ nghịch biến trên $0;4$ nên: $m\le\min\limits_{0;4}g\ x=g\ 4=\dfrac{M}{4}$

+Ta có $h'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{4M^2}{4+M^2}<4 \Rightarrow \text{Max}\, h(x)=\dfrac{4-M^2}{4M}$

Vậy: $\dfrac{4-M^2}{4M} \le m \le \dfrac{M}{4} \Leftrightarrow M^2 \ge 2 \Leftrightarrow M \ge \sqrt{2} \Rightarrow M_{Min}=\sqrt{2}$

Câu 28: Chọn C

Bảng biến thiên của $f(x)$ trên đoạn $[0;6]$ như sau:



Suy ra: $\max\limits_{x\in[0;6]} f(x)=f(2)=M$

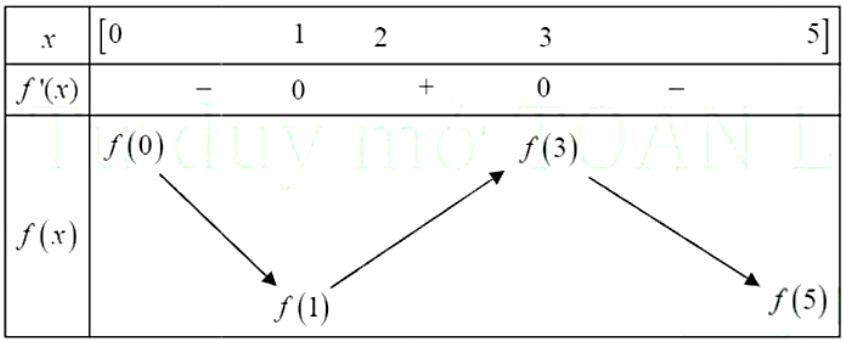
Và $\min\limits_{x\in[0,6]} f(x)=f(0)$; $\min\limits_{x\in[0;6]} f(x)=f(6)$

Từ giả thiết: $2f(6)=f(0)+f(2) \Leftrightarrow f(6)-f(0)=f(2)-f(6)>0 \Leftrightarrow f(6)>f(0)$

Suy ra: $\min\limits_{x\in[0;6]} f(x)=f(0)=m$

Câu 29: Chọn D

Bảng biến thiên của $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$ như sau:



Suy ra: $\left[\begin{array}{l}\max\limits_{x\in[0,5]} f(x)=f(0)\\ \max\limits_{x\in[0,5]} f(x)=f(3)\end{array}\right.$ và $\left[\begin{array}{l}\min\limits_{x\in[0,5]} f(x)=f(1)\\ \min\limits_{x\in[0,5]} f(x)=f(5)\end{array}\right.$

Từ giả thiết: $f(0)+f(2)=f(1)+f(3) \Leftrightarrow f(0)-f(3)=f(1)-f(2)<0 \Leftrightarrow f(0)<f(3)$

Suy ra: $\max\limits_{x\in[0,5]} f(x)=f(3)=M$

Từ giả thiết: $f(0)+f(1)=f(3)+f(5) \Leftrightarrow f(1)-f(5)=f(3)-f(0)>0 \Leftrightarrow f(1)>f(5)$

Suy ra: $\min\limits_{x\in[0,5]} f(x)=f(5)=m$

Câu 30: Chọn D

Tồn tại một giá trị $x_0 \in R$ sao cho: $f(x) \ge f(x_0)=m$ với $\forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra: $3f(x) \ge 3f(x_0)=3m$ với $\forall x \in \mathbb{R}$

Lại có: $x^2-2x=(x-1)^2-1\ge -1$

Suy ra: $y=3f(x)+x^2-2x\ge 3.m+(-1)=3m-1$. Suy ra $\min f(x)\ge 3m-1$

Câu 31: Chọn A

Ta có: $f(x)\ge 3,\forall x\in\mathbb{R}$

Mà: $g(x)=4f(x)+x^2-4x=4f(x)+(x-2)^2-4\ge 4.3-4=8$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=3\\(x-2)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=3\\x=2\end{cases}\Rightarrow f(2)=3$.

Câu 32: Chọn A

Ta có: $f(x)\le 3,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $g(x)\le 6,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow y=3f(x)+2g(x)\le 3.3+2.6=21\Rightarrow \max\left(3f(x)+2g(x)\right)\le 21$.

Câu 33: Chọn C

Ta có: $f(x)\le 6,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $g(x)\ge 3,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow y=2f(x)-3g(x)+2\le 2.6-3.3+2=5\Rightarrow \max\left(2f(x)-3g(x)+2\right)\le 5$.

Câu 34: Chọn A

Theo giả thiết ta có: $y=g(x)=2f(x)-x^2+6x\le 8$.

Do đó: $g(0)=2f(0)\le 8\Leftrightarrow f(0)\le 4.$

$g(3)=2f(3)+9\le 8\Leftrightarrow f(3)\le -\frac{1}{2}.$

$g(2)=2f(2)+8\le 8\Leftrightarrow f(2)\le 0.$

Câu 35: Chọn C

Nếu $f(x)=4$ là hàm hằng trên $\mathbb{R}$ thì bất phương trình $f(x)>4$ vô nghiệm.(Đáp án A sai)

Nếu $f(x)=x^2+4$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ thì bất phương trình $f(x)>4\Leftrightarrow x^2>0\Leftrightarrow x\ne 0$ có vô số nghiệm.(Đáp án B, D sai)

Câu 36: Chọn C

Ta có $y=f(x)=x^4-2ax+6a-3\ge m,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Suy ra $f(3)=3^4-2a.3+6a-3\ge m\Leftrightarrow 78\ge m$.

Câu 37: Chọn D

Ta có: $m\le y=f(x)\le M,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Từ giả thiết ta có $\begin{cases}f(a)\ge m\\f(b)\ge m\end{cases}\Rightarrow 18=f(a)+2f(b)\ge m+2m=3m\Rightarrow m\le 6$.

Tương tự ta cũng có $\begin{cases}f(a)\le M\\f(b)\le M\end{cases}\Rightarrow 18=f(a)+2f(b)\le M+2M=3M\Rightarrow M\ge 6$.

Câu 38: Chọn B

Ta có $m \le y = f(x) \le M,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} f(a) \ge m \\ f(b) \ge m \end{cases} \Rightarrow 12 = f(a) + 2f(b) \ge m + 2m = 3m \Rightarrow m \le 4 \Leftrightarrow (m-5) \le -1$.

Tương tự, ta cũng có được:

$\begin{cases} f(a) \le M \\ f(b) \le M \end{cases} \Rightarrow 12 = f(a) + 2f(b) \le M + 2M = 3M \Rightarrow M \ge 4 \Rightarrow M - 2 \ge 2$.

Suy ra $(M-2)(m-5) \le -2$.

Câu 39: Chọn D

Ta có: $m \le f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $m \le f(2) = 9$. Suy ra các giá trị nguyên dương của m thỏa $1 \le m \le 9$.

Có 9 giá trị.

Câu 40: Chọn D

Ta thấy $\min f(x) = f(-1) = -3$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) + x^2 - 2mx + m^2 + 1 = f(x) + (x-m)^2 + 1$.

Có $\begin{cases} f(x) \ge f(-1) = -3 \\ (x-m)^2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) = f(x) + (x-m)^2 + 1 \ge (-3) + 0 + 1 = -2$.

Dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases} x = -1 \\ x = m \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$. Khi đó $\min g(x) = g(-1) = -2$.

Câu 41: Chọn A

Ta thấy $\min f(x) = f(-1) = -3$.

Xét hàm số $g(x) = f(2x+3) + (x-2m)^2 - 1 \ge -3 + 0 - 1 = -4$.

Dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases} f(2x+3) = -3 \\ x - 2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 = -1 \\ x = 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ m = -1 \end{cases}$.

Câu 42: Chọn C

+) Ta thấy $\max f(x) = f(3) = 4 \Leftrightarrow f(x) \le f(3) = 4, x \in \mathbb{R}$.

+) Ta có $\begin{cases} f(3x-m) \le f(3) = 4 \\ f(x^2 - 2x) \le f(3) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow 2f(x^2-2x) + f(3x-m) \le 2.4 + 4 = 12$.

Dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases} 3x - m = 3 \\ x^2 - 2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3x - 3 \\ \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow m \in \{-6; 6\} = S$.

Vậy tổng các phần tử thuộc tập S bằng 0.

Câu 43: Chọn C

Ta thấy $\max f(x) = f(3) = 4$ nên

$$\begin{cases} f(3x-m) \le 4 \\ f(x+n) \le 4 \\ -x^2+4x \le 4 \end{cases} \Rightarrow 3f(3x-m) + f(x+n) - x^2 + 4x \le 20.$$

Để xảy ra dấu bằng thì $\begin{cases} x = 2 \\ 3x-m = 3 \\ x+n = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ m = 3 \\ n = 1 \end{cases}.$

Vậy $2m - n = 5$.

Câu 44: Chọn A

Ta thấy $\max f(x) = f(-3)$ nên $-f(f(x)) \ge -f(-3)$.

Mặt khác, $x^2 - 2m^2x + m^4 = (x-m^2)^2 \ge 0$.

Từ đó, ta có $g(x) = x^2 - 2m^2x + m^4 - f(f(x)) \ge -f(-3)$

Để xảy ra dấu bằng thì $\begin{cases} x = m^2 \\ f(x) = -3 \end{cases} \Rightarrow f(m^2) = -3$ (*)

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ và (*) tồn tại $a < 0 < b < c < d$ để $\begin{cases} m^2 = a \\ m^2 = b \\ m^2 = c \\ m^2 = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm\sqrt{b} \\ m = \pm\sqrt{c} \\ m = \pm\sqrt{d} \end{cases}.$

Vậy có 6 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 45: Chọn C

Ta thấy $\begin{cases} \max f(x) = f(0) = 5 \\ \min f(x) = f(4) = -3 \end{cases}$ nên $\begin{cases} f(2x-m) \ge -3 \\ f(3x+n) \le 5 \\ x^2 - 2x \ge -1 \end{cases} \Rightarrow 2f(2x-m) - f(3x+n) + x^2 - 2x \ge -12$

.

Để xảy ra dấu bằng thì $\begin{cases} x = 1 \\ 2x-m = 4 \\ 3x+n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ m = -2 \\ n = -3 \end{cases}$

Vậy $T = 2m + 3n = -13$.

Câu 46: Chọn A

Ta có đạo hàm: $f'(x) = 2x - 2m$.

Bảng biến thiên:

x	$(-1$		m		$3)$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(-1)$	↘	$f(m)$	↗	$f(3)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \in (-1;3) \xrightarrow{m\in\mathbb{Z};\ m\in[-30;30]} 0 \le m \le 2$.

Vậy có tất cả 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 47: Chọn B

Ta có đạo hàm: $f'(x) = -2x + 4m - 2$.

Bảng biến thiên:

x	$(-3$		$2m-1$		$11]$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(-3)$	↗	$f(2m-1)$	↘	$f(11)$

x	$(-3$		$11]$		$2m-1$
$f'(x)$		$+$			$0\ -$
$f(x)$	$f(-3)$	↗	$f(11)]$		

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -3 < 2m-1 \Leftrightarrow -1 < m \xrightarrow{m\in\mathbb{Z};\ m\in[-30;30]} 0 \le m \le 30$.

Vậy có tất cả 31 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 48: Ta có đạo hàm: $y' = 3x^2 - 3m$. Hàm số $y = x^3 - 3mx$ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $(1;3)$ khi có điểm cực tiểu trên $(1;3)$ và giá trị cực tiểu nhỏ hơn giá trị của hàm số tại hai đầu mút.

Nhận thấy, khi $m \le 0$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ (cũng đồng biến trên $(1;3)$) nên không tồn tại giá trị nhỏ nhất nhất trên $(1;3)$.

Khi $m > 0$, hàm số có điểm cực tiểu là $x = \sqrt{m}$

x		$-\sqrt{m}$	$(1$		$\sqrt{m}$		$3)$
$f'(x)$	$+$	0		$-$	0	$+$	
$f(x)$	↗		$f(1)$	↘	$f(\sqrt{m})$	↗	$f(3)$

Khi đó, ta phải có: $\begin{cases}\sqrt{m}\in(1;3)\\ f\left(\sqrt{m}\right)\le f(1)\\ f\left(\sqrt{m}\right)\le f(3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1<m<9\\ f\left(\sqrt{m}\right)\le f(1)\\ f\left(\sqrt{m}\right)\le f(3)\end{cases}$.

Yêu cầu bài toán tương đương với $\sqrt{m}\in(1;3)\Leftrightarrow 1<m<9\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}2\le m\le 8$.

Vậy có tất cả 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 49: Ta có đạo hàm: $y'=3x^2-6mx$. Hàm số $y=x^3-3mx^2$ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $(1;3)$ khi có điểm cực đại trên $(-2;3)$ và giá trị cực đại lớn hơn giá trị của hàm số tại hai đầu mút.

Nhận thấy, khi $m=0$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ (cũng đồng biến trên $(-2;3)$) nên không tồn tại giá trị lớn nhất nhất trên $(-2;3)$.

Khi $m>0$ thì $y'=3x^2-6mx=0\Leftrightarrow x=0;x=2m\Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại $x=0$

Khi đó ta phải có: $\begin{cases}m>0\\ 0\in(-2;3)\\ f(0)\ge f(-2)\\ f(0)\ge f(3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ 0\ge -8-12m\Leftrightarrow m\ge 1\\ 0\ge 27-27m\end{cases}$

Khi $m<0$ thì $y'=3x^2-6mx=0\Leftrightarrow x=0;x=2m\Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại $x=2m$

Khi đó ta phải có: $\begin{cases}m<0\\ 2m\in(-2;3)\\ f(2m)\ge f(-2)\\ f(2m)\ge f(3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<m<0\\ -4m^3\ge -8-12m\Leftrightarrow vo\ nghiem\\ -4m^3\ge 27-27m\end{cases}$

Kết hợp lại ta được: $m\ge 1\xrightarrow{m\in\mathbb{Z};\ m\in[-30;30]}1\le m\le 30$.

Vậy có tất cả 30 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

DẠNG 4 GTLN-GTNN của hàm chứa dấu GTTĐ

DẠNG 3: GTLN – GTNN CỦA HÀM SỐ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Câu 1. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2+4x-5\right|$ trên đoạn $\left[-3;0\right]$. Khi đó tổng $M+m$ là

A. 5. **B.** 9. **C.** 14. **D.** 8.

Câu 2. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x^2-7\right|$ trên đoạn $\left[0;4\right]$ là

A. 0. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 7.

Câu 3. Cho hàm số $y=\left|x^4-16x^2-7\right|$, gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[0;4\right]$. Tính giá trị biểu thức $M-2m$.

A. 14. **B.** 57. **C.** 64. **D.** 60.

Câu 4. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)=\left|\dfrac{2x-1}{x+2}\right|$ trên đoạn $\left[-1;1\right]$. Giá trị của biểu thức $2M-3m$ là

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** 0. **D.** 6.

Câu 5. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}\right|$ trên đoạn $\left[-2;\dfrac{1}{2}\right]$. Giá trị của biểu thức $3M+m$ bằng

A. $\dfrac{27}{2}$. **B.** 10. **C.** $-\dfrac{40}{3}$. **D.** 16.

Câu 6. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=\left|\mathrm{e}^{3x}-4\mathrm{e}^{2x}+4\mathrm{e}^{x}-10\right|$ trên đoạn $\left[0\,;\ln 4\right]$

A. 9. **B.** 6. **C.** 10. **D.** 5.

Câu 7. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)=\left|\ln^2 x-2\ln x-3\right|$ trên đoạn $\left[1;e^2\right]$. Giá trị $M+m$ bằng

A. 4. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 8. Giả sử M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|\cos 2x+2\sin x-3\right|$ trên $\left[0;\dfrac{3\pi}{2}\right]$. Tính $M-4m$.

A. 6. **B.** 0. **C.** -2. **D.** 3.

Câu 9. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2-1+\sqrt{3-x^2}\right|$. Khi đó $M+m=\dfrac{a}{4}+b\sqrt{c}$, với a, b, c nguyên. Tính $T=a+bc$.

A. 7. **B.** 9. **C.** 12. **D.** 8.

Câu 10. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=|x-1|+x^2-5x+3$ trên đoạn $[-2;4]$. Tính giá trị biểu thức $T=M+m$.

A. $T=18$. **B.** $T=19$. **C.** $T=20$. **D.** $T=2$.

Câu 11. Tích giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=|x^2-4x+3|+x^2-1$ trên $[-4;2]$ bằng

A. -200. **B.** 200. **C.** 50. **D.** 0.

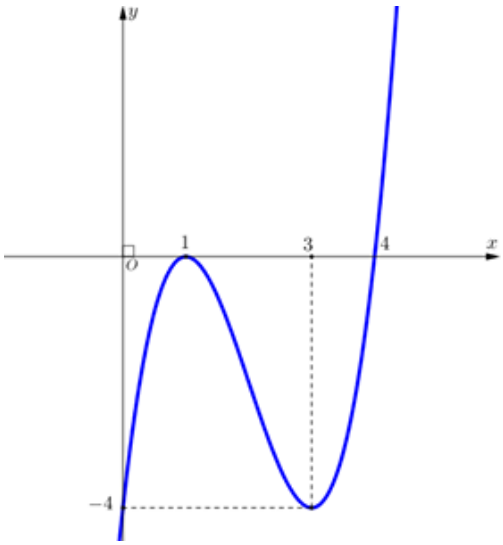
Câu 12. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=|x^2-3x+2|+|x+3|$ là 2^a. Tìm a.

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 13. Cho hàm số $y=||3x-1|-1|+|x^2-2|$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[0;\frac{3}{2}\right]$. Giả sử $\frac{M}{m}=\frac{a}{b}$ ($\frac{a}{b}$ là phân số tối giản), biểu thức $T=a+b$ có giá trị bằng

A. 37. **B.** 40. **C.** 13. **D.** 20.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị (C) như hình vẽ sau



Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=|f(x)|$ trên đoạn $[0;4]$. Khi đó biểu thức $M+2m$ có giá trị

A. 4. **B.** 1. **C.** 8. **D.** 0.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=|f(|x|+1)-1|$ trên đoạn $[-2;2]$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 16. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=|x^2-2x+m|$ trên $[-1;2]$ bằng 5.

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 17. Tính tích tất cả các số thực m để hàm số $y=\left|\frac{4}{3}x^3-6x^2+8x+m\right|$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;3\right]$ bằng 18 là.

A. 432. **B.** −216. **C.** −432. **D.** 288.

Câu 18. Cho hàm số $f\left(x\right)=\left|x^4-2x^2+m-1\right|$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[0;2\right]$ bằng 18. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. −5. **B.** 4. **C.** −14. **D.** −10.

Câu 19. Cho hàm số $f\left(x\right)=\frac{2x-m}{1-x}$. Gọi S là tập hợp tất các giá trị của m để $\min\limits_{\left[-2;0\right]}\left|f\left(x\right)\right|=2$.Tổng các phần tử của tập S là

A. 2. **B.** −8. **C.** −5. **D.** 3.

Câu 20. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\frac{x^2}{x-1}+m$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp các giá trị của m sao cho $\min\limits_{\left[2;3\right]}\left|f\left(x\right)\right|=5$. Số phần tử của S là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 21. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(x\right)+m\right|$ trên đoạn $\left[0;4\right]$ bằng 9.

A. −10. **B.** −6. **C.** 4. **D.** 8.

Câu 22. Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|f\left(\sin x+1\right)+m\right|$ bằng 4. Tổng các phần tử của S bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 6.

Câu 23. Biết đồ thị hàm số $f\left(x\right)=ax^4+bx^2+c$ có đúng ba điểm chung với trục hoành và $f\left(1\right)=-1;f'\left(1\right)=0$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $\left|f\left(x\right)-m\right|\le 12$ nghiệm đúng $\forall x\in\left[0;2\right]$. Số phần tử của S là

A. 10. **B.** 16. **C.** 11. **D.** 0.

Câu 24. Cho hàm số $f\left(x\right)=\frac{x+2020}{x-m}$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m sao cho $\max\limits_{\left[0;2019\right]}\left|f\left(x\right)\right|=2020$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 25. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=\left|\frac{x^2+2mx+4m}{x+2}\right|$ trên đoạn $\left[-1;1\right]$ bằng 3. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 1. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{3}{2}$.

Câu 26. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên lớn hơn 6 của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2-\left(m+1\right)x+m\right|$ trên $\left[2;m-1\right]$ nhỏ hơn 2020.

A. 2043210. **B.** 2034201. **C.** 3421020 **D.** 3412020.

Câu 27. Cho hàm số $y=\left|x^3-\frac{9}{2}x^2+6x-3+m\right|$. Tổng các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;3]$ không bé hơn 5.

A. 1. **B.** –1. **C.** 0. **D.** –7.

Câu 28. Cho hàm số $y=\left|\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2+m\right|$. Tính tổng tất cả các số nguyên m để $\max\limits_{[-1;2]} y \le 11$.

A. –19. **B.** –37. **C.** –30. **D.** –11.

Câu 29. Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|-4\cos^2 x+2\sin x+m+4\right|$ trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ nhỏ hơn hoặc bằng 4?

A. 12. **B.** 14. **C.** 13. **D.** 15.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)=\left|x^2-2mx+3\right|$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[1;2]$ không lớn hơn 3 ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 31. Cho hàm số $y=\left|x^3-3x^2-9x+m\right|$ (với m là tham số thực). Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để $\max\limits_{[-2;3]} y<50$. Tổng các phần tử của M là

A. 0. **B.** 737. **C.** 759. **D.** –215.

Câu 32. Cho hàm số $y=\left|x^4-2x^3+x^2+a\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để $\max\limits_{[-1;2]} y \le 100$.

A. 197. **B.** 196. **C.** 200. **D.** 201.

Câu 33. Cho hàm số $y=\left|\sin x+\cos x+m\right|$, có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số có giá trị lớn nhất bé hơn 2.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 34. Gọi M là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2+2x+m\right|$ trên đoạn $[-2;1]$. Với $m\in[-3;3]$, giá trị lớn nhất của M bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 35. Gọi M là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^3+3x^2+m-1\right|$ trên đoạn $[-1;1]$. Với $m\in[-4;3]$, giá trị lớn nhất của M bằng

B. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 36. Cho hàm số $f(x)=\left|x^4-4x^3+4x^2+m\right|$. Khi m thuộc $[-3;3]$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;2]$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 37. Cho hàm số $y=\left|x^2-4x+2m-3\right|$ với m là tham số thực. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[1;3]$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng a khi $m=b$. Tính $P=2b-a$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{13}{4}$. **C.** $\frac{-9}{4}$. **D.** 6.

Câu 38. Cho hàm số $y=\left|x^3+x^2+\left(m^2+1\right)x+27\right|$. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $\left[-3;-1\right]$ có giá trị nhỏ nhất. Khi đó tích các phần tử của S là

A. 4. **B.** -4. **C.** 8. **D.** -8.

Câu 39. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{1}{4}x^4-\frac{19}{2}x^2+30x+m\right|$ trên đoạn $\left[0;2\right]$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 40. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^2-2x+m\right|$ trên đoạn $\left[0;2\right]$ bằng 3. Số phần tử của S là

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 4.

Câu 41. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^3-mx^2-9x+9m\right|$ trên đoạn $\left[-2;2\right]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 42. Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x\right)=\left|-x^4+8x^2+m\right|$ trên đoạn $\left[-1;\,3\right]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 23. **B.** 24. **C.** 25. **D.** 26.

Câu 43. Cho hàm số $y=\left|x^4-2x^3+x^2+a\right|$. Có bao nhiêu số thực a để $\min\limits_{\left[-1;2\right]}y+\max\limits_{\left[-1;2\right]}y=10$

A. 1. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 44. Cho hàm số $y=\left|\frac{x^2+ax-4}{x}\right|$ (a là tham số). Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $\left[1;4\right]$. Có bao nhiêu giá trị thực của a để $M+2m=7$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4

Câu 45. Cho hàm số $f(x)=x^4-2x^3+m$ (m là tham số thực). Tìm tổng tất cả các giá trị của m sao cho $\max\limits_{\left[0;1\right]}\left|f(x)\right|+2\min\limits_{\left[0;1\right]}\left|f(x)\right|=10$.

A. 4. **B.** -3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 46. Cho hàm số $f\left(x\right)=\left|x^3-3x^2+m\right|$. Tìm tất cả các giá trị của m thỏa mãn $3\max\limits_{\left[1;3\right]}f\left(x\right)-2\min\limits_{\left[1;3\right]}f\left(x\right)=17$.

A. $m\in\left\{9;-5;29\right\}$. **B.** $m\in\left\{9;-5;\frac{-5}{3}\right\}$. **C.** $m\in\left\{9;-5\right\}$. **D.** $m\in\left\{9;-5;5\right\}$.

Câu 47. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=x^3-3x+m$. Tích tất cả các giá trị của tham số m để $\min\limits_{\left[0;2\right]}\left|f\left(x\right)\right|+\max\limits_{\left[0;2\right]}\left|f\left(x\right)\right|=6$ là

A. -16 **B.** -9 **C.** 16 **D.** 144

Câu 48. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x+m}{x+2}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp các giá trị của m sao cho $2\max\limits_{[0;1]}\left|f(x)\right|+3\min\limits_{[0;1]}\left|f(x)\right|=6$. Số phần tử của S là

A. 6. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

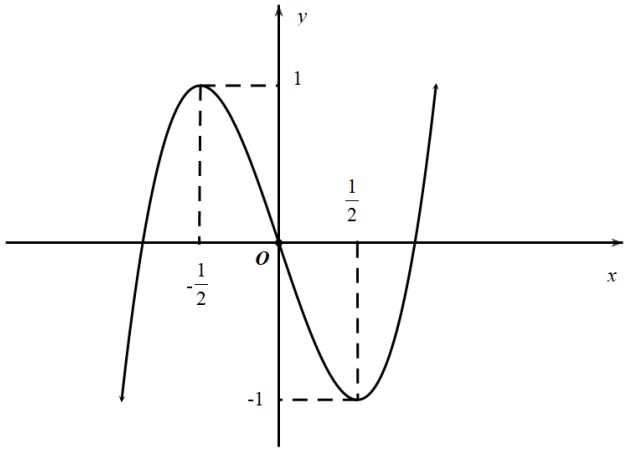
Câu 49. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên trên đoạn $[-4;4]$ như sau

x	-4		-3		-1		0		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-4	↗	4	↘	2	↗	3	↘	-3	↗	1

Có bao nhiêu giá trị của tham số $m\in[-4;4]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f\left(\left|x^3\right|+3\left|x\right|\right)+f(m)$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng $\dfrac{11}{2}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 50. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Đặt $g(x)=\left|f(x)\right|-\sqrt{1-2\left|x\right|}+f\left(\dfrac{\sqrt{1+2m}-\sqrt{1-2m}}{2\sqrt{2}}\right)$. Với giá trị nào của m thì giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ là 0.

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** Không tồn tại.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.B	3.B	4.D	5.D	6.C	7.B	8.B	9.D	10.A
11.D	12.B	13.D	14.A	15.C	16.C	17.C	18.A	19.B	20.B
21.B	22.C	23.B	24.A	25.B	26.A	27.D	28.C	29.D	30.A
31.B	32.A	33.B	34.B	35.B	36.B	37.D	38.D	39.D	40.A
41.B	42.D	43.D	44.B	45.C	46.C	47.B	48.B	49.C	50.A

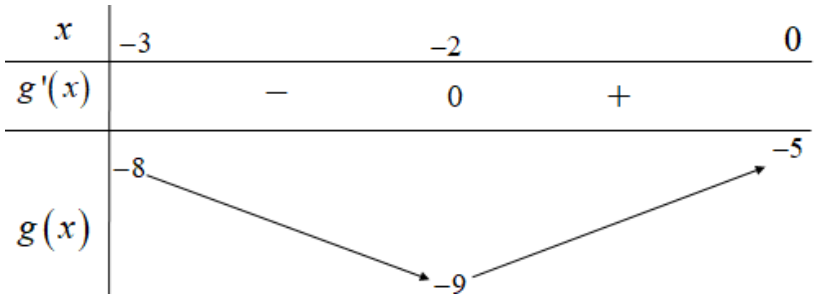
HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. **Chọn C**

Xét $g(x)=x^2+4x-5$ liên tục trên đoạn $[-3;0]$.

Ta có $g'(x)=2x+4$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=-2\in[-3;0]$.

Bảng biến thiên của hàm số trên đoạn $[-3;0]$



Dựa vào bảng biến thiên của hàm số suy ra $M=\max\limits_{[-3;0]}|g(x)|=\max\{|-8|;|-9|;|-5|\}=9$,

$m=\min\limits_{[-3;0]}|g(x)|=\min\{|-8|;|-9|;|-5|\}=5$. Vậy $M+m=14$.

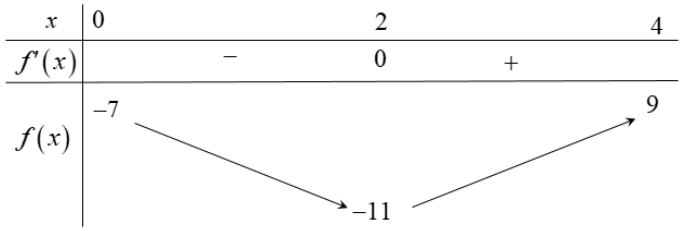
Câu 2. **Chọn B**

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2-7$ liên tục trên đoạn $[0;4]$.

Ta có: $f'(x)=3x^2-6x$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in[0;4] \\ x=2\in[0;4] \end{array}\right.$.

Ta có: $f(0)=-7$, $f(2)=-11$, $f(4)=9$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;4]$



Khi đó $\max\limits_{[0;4]}f(x)=9$, $\min\limits_{[0;4]}f(x)=-11$. Suy ra $\max\limits_{[0;4]}|f(x)|=11$.

Câu 3 . **Chọn B**

Xét hàm số $y=x^4-16x^2-7$ liên tục trên $[0;4]$.

Ta có $f'(x)=4x^3-32x$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in 4[0;4]\\x=2\sqrt{2}\in[0;4]\\x=-2\sqrt{2}\notin[0;4]\end{array}\right.$

Có bảng biến thiên

x	0	$2\sqrt{2}$	4
$f'(x)$		$-$ $\quad$ $+$	
$f(x)$	-7	$\searrow$ -71 $\nearrow$	-7

Từ bảng biến thiên suy ra: $\min\limits_{[0;4]}\left|f(x)\right|=\left|f(0)\right|=\left|f(4)\right|=7;\ \max\limits_{[0;4]}\left|f(x)\right|=\left|f\left(2\sqrt{2}\right)\right|=71$.

Vậy $M-2m=57$.

Câu 4. **Chọn D**

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$.

$g'(x)=\dfrac{5}{(x+2)^2}>0$, $\forall x\in[-1;1]$. Do đó hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên đoạn $[-1;1]$.

$g(-1)=-3$; $g(1)=\dfrac{1}{3}$.

Ta có bảng biến thiên của $g(x)$ và $f(x)$ trên đoạn $[-1;1]$:

x	-1		$\frac{1}{2}$		1
$g'(x)$		$+$			
$g(x)$	-3	$\nearrow$		$\nearrow$	$\frac{1}{3}$
$f(x)=\lvert g(x)\rvert$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$

Suy ra $M=\max\limits_{[-1;1]}f(x)=\max\limits_{[-1;1]}\left|g(x)\right|=\max\limits_{[-1;1]}\left\{\left|-3\right|;\left|\dfrac{1}{3}\right|\right\}=3$ khi $x=-1$.

Và $m=\min\limits_{[-1;1]}f(x)=\min\limits_{[-1;1]}\left|g(x)\right|=\min\limits_{[-1;1]}\left\{\left|-3\right|;0;\left|\dfrac{1}{3}\right|\right\}=0$ khi $x=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $2M-3m=2.3-3.0=6$.

Câu 5. **Chọn D**.

Đặt $y=f(x)=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$. Hàm số xác định và liên tục trên $D=\left[-2;\dfrac{1}{2}\right]$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in D \\ x=2\notin D \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	-2		0		$\frac{1}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{13}{3}$	↗	-3	↘	$-\frac{7}{2}$

Ta có $f(-2)=-\dfrac{13}{3}$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{7}{2}$, $f(0)=-3$.

Suy ra $\max\limits_{\left[-2;\frac{1}{2}\right]} f(x)=-3$ tại $x=0$, $\min\limits_{\left[-2;\frac{1}{2}\right]} f(x)=\dfrac{-13}{3}$ tại $x=-2$.

Từ đó ta có, $M=\max\limits_{\left[-2;\frac{1}{2}\right]}\left|f(x)\right|=\dfrac{13}{3}$ tại $x=-2$, $m=\min\limits_{\left[-2;\frac{1}{2}\right]}\left|f(x)\right|=3$ tại $x=0$.

Vậy $3M+m=16$.

Câu 6. Chọn C

Đặt $e^x=t$. Ta có $0\le x\le \ln 4 \Leftrightarrow e^0\le e^x\le e^{\ln 4} \Rightarrow 1\le t\le 4$.

Khi đó hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;\ln 4]$ trở thành $g(t)=\left|t^3-4t^2+4t-10\right|$, với $t\in[1;4]$.

Xét hàm số $h(t)=t^3-4t^2+4t-10$. Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[1;4]$.

$h'(t)=3t^2-8t+4$; $h'(t)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2\in[1;4] \\ t=\dfrac{2}{3}\notin[1;4] \end{array}\right.$; $h(1)=-9$, $h(2)=-10$, $h(4)=6$.

Khi đó $\max\limits_{[1;4]} h(t)=6$, $\min\limits_{[1;4]} h(t)=-10$.

Suy ra $\max\limits_{[0;\ln 4]} f(x)=\max\limits_{[1;4]}\left|h(t)\right|=10$ khi $t=2\Leftrightarrow x=\ln 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;\ln 4]$ là 10.

Câu 7. Chọn B

Xét $u(x)=\ln^2 x-2\ln x-3$ trên $[1;e^2]$; $u(x)$ xác định và liên tục trên $[1;e^2]$.

Ta có $u'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}-\dfrac{2}{x}$, $u'(x)=0\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow x=e\in(1;e^2)$.

Ta có $u(1)=-3, u(e)=-4, u(e^2)=-3$.

$M=\max\limits_{[1;e^2]} f(x)=\max\limits_{[1;e^2]}\left|u(x)\right|=\max\left\{\left|u(1)\right|,\left|u(e)\right|,\left|u(e^2)\right|\right\}=4$ khi $x=e$.

$m=\min\limits_{[1;e^2]} f(x)=\min\limits_{[1;e^2]}\left|u(x)\right|=\min\left\{\left|u(1)\right|,\left|u(e)\right|,\left|u(e^2)\right|\right\}=3$ khi $x=1$.

Vậy $M+m=4+3=7.$

Câu 8 . Chọn B

Xét hàm số $u(x)=\cos 2x+2\sin x-3$ với $x\in\left[0;\dfrac{3\pi}{2}\right]$. $u(x)$ liên tục trên $\left[0;\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

+) $u'(x)=-2\sin 2x+2\cos x$.

+) $u'(x)=0\Leftrightarrow -2\sin 2x+2\cos x=0\Leftrightarrow \cos x(2\sin x-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ 2\sin x-1=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$. Mà $x\in\left[0;\dfrac{3\pi}{2}\right]$ nên $x\in\left\{\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2};\dfrac{\pi}{6};\dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

+) $u(0)=-2$, $u\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=-6$, $u\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-2$, $u\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{3}{2}$, $u\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=-\dfrac{3}{2}$.

Khi đó: $\max\limits_{\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]}u(x)=-\dfrac{3}{2}$, $\min\limits_{\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]}u(x)=-6$.

Suy ra: $M=\max\limits_{\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]}|u(x)|=6$ khi $x=\dfrac{3\pi}{2}$, $m=\min\limits_{\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]}|u(x)|=\dfrac{3}{2}$ khi $x\in\left\{\dfrac{\pi}{6};\dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

Vậy $M-4m=0$.

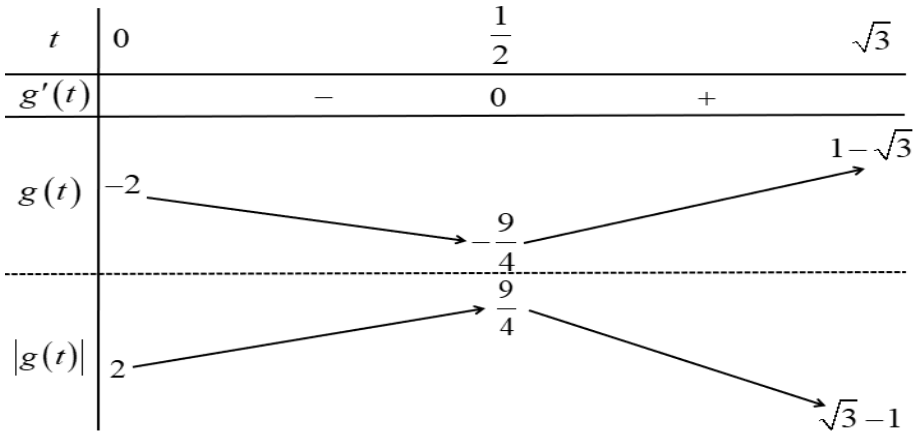
Câu 9. Chọn D

Tập xác định: $D=\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$. Đặt $t=\sqrt{3-x^2}, t\in\left[0;\sqrt{3}\right]$.

Khi đó hàm số đã cho trở thành: $y=\left|-t^2+t+2\right|=\left|t^2-t-2\right|$.

Xét $g(t)=t^2-t-2$ liên tục trên đoạn $\left[0;\sqrt{3}\right]$ ta có: $g'(t)=2t-1=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên của $y=g(t)$ và $y=|g(t)|$ trên đoạn $\left[0;\sqrt{3}\right]$.



Từ bảng biến thiên ta có: $M=\left|g\left(\dfrac{1}{2}\right)\right|=\dfrac{9}{4}$; $m=\left|g\left(\sqrt{3}\right)\right|=\sqrt{3}-1$.

$\Rightarrow M+m=\frac{5}{4}+\sqrt{3} \Rightarrow a=5;\ b=1;\ c=3$. Vậy $T=a+bc=5+1.3=8$.

Câu 10. Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $f(x)=|x-1|+x^2-5x+3=\begin{cases}x^2-4x+2 & khi\ x\geq 1\\ x^2-6x+4 & khi\ x<1\end{cases}$.

Với $x\geq 1$: Ta có $f(x)=x^2-4x+2$. Đạo hàm: $f'(x)=2x-4$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$ (nhận).

Với $x<1$: Ta có $f(x)=x^2-6x+4$. Đạo hàm: $f'(x)=2x-6$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=3$ (loại).

$f(-2)=20$; $f(2)=-2$; $f(4)=2$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)=|x-1|+x^2-5x+3$ trên đoạn $[-2;4]$.

x	-2		1		2		4
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	20	↘	-1	↘	-2	↗	2

Ta có $M=\max\limits_{x\in[-2;4]} f(x)=f(-2)=20$; $m=\min\limits_{x\in[-2;4]} f(x)=f(2)=-2$. Vậy $T=M+m=18$.

Câu 11. Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y=\begin{cases}2x^2-4x+2 \text{ khi } x\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)\\ 4x-4 \qquad \text{khi } x\in(1;3)\end{cases}\Rightarrow y'=\begin{cases}4x-4 & khi\ x\in(-\infty;1]\cup[3;+\infty)\\ 4 & khi\ x\in(1;3)\end{cases}$.

Có $y'=0$ (Vô nghiệm).

Bảng biến thiên

x	-4		1		2
y'		$-$	‖	$+$	
y	50	↘	0	↗	4

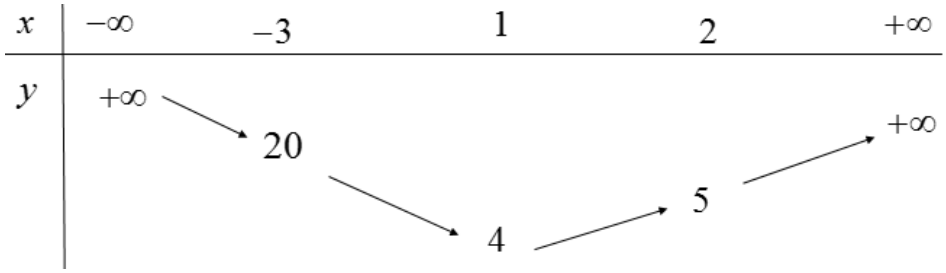
Ta có: $\begin{cases}y(-4)=50\\ y(1)=0\\ y(2)=4\end{cases}$. Suy ra $\max\limits_{[-4;2]} y=50$ tại $x=-4$; $\min\limits_{[-4;2]} y=0$ tại $x=0$.

Vậy $\left(\max\limits_{[-4;2]} y\right).\left(\min\limits_{[-4;2]} y\right)=0$.

Câu 12 Chọn B

Ta có $y=\left|x^2-3x+2\right|+\left|x+3\right|=\begin{cases}x^2-4x-1 & \text{khi } x<-3\\ x^2-2x+5 & \text{khi } -3\le x<1\\ -x^2+4x+1 & \text{khi } 1\le x<2\\ x^2-2x+5 & \text{khi } x\ge 2\end{cases}$.

Bảng biến thiên:



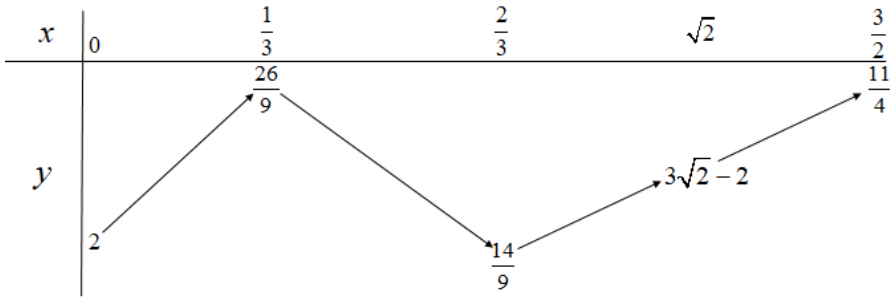
Từ bảng biến thiên suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số là $4\Rightarrow 2^a=4\Rightarrow a=2$.

Câu 13. Chọn D

Ta có $y=\begin{cases}\left|3x\right|+x^2-2 & \text{khi } x\le -\sqrt{2}\\ \left|3x\right|+2-x^2 & \text{khi } -\sqrt{2}<x\le \dfrac{1}{3}\\ \left|3x-2\right|+2-x^2 & \text{khi } \dfrac{1}{3}\le x<\sqrt{2}\\ \left|3x-2\right|+x^2-2 & \text{khi } x\ge\sqrt{2}\end{cases}$.

Xét trên đoạn $\left[0;\dfrac{3}{2}\right]$ ta có: $y=\begin{cases}-x^2+3x+2 & \text{khi } 0\le x\le \dfrac{1}{3}\\ -x^2-3x+4 & \text{khi } \dfrac{1}{3}<x\le \dfrac{2}{3}\\ -x^2+3x & \text{khi } \dfrac{2}{3}<x\le\sqrt{2}\\ x^2+3x-4 & \text{khi } \sqrt{2}<x\le\dfrac{3}{2}\end{cases}$.

Bảng biến thiên của hàm số trên đoạn $\left[0;\dfrac{3}{2}\right]$



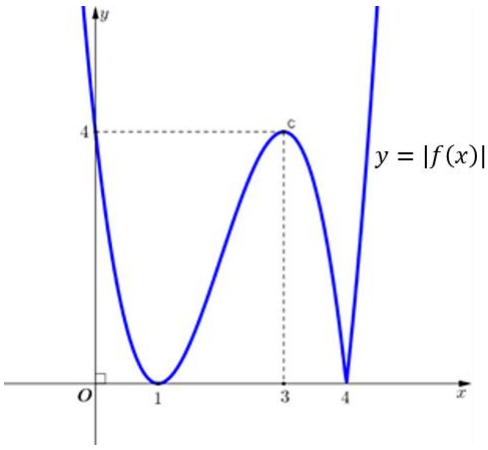
Từ bảng biến thiên của hàm số suy ra $M=\max\limits_{\left[0;\frac{3}{2}\right]}y=\dfrac{26}{9};m=\min\limits_{\left[0;\frac{3}{2}\right]}y=\dfrac{14}{9}$.

Vậy $\dfrac{M}{m}=\dfrac{13}{7}$ hay $a=13;b=7\Rightarrow T=a+b=20$.

Câu 14 . Chọn A

Từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ ta suy ra đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ như sau:

Giữ nguyên phần đồ thị trên trục hoành và phía trên trục hoành của (C) (ứng với $f(x)\ge 0$), lấy đối xứng qua trục hoành phần đồ thị phía dưới trục hoành của (C) (ứng với $f(x)<0$). Bỏ phần đồ thị phía dưới trục hoành của (C).



Dựa vào đồ thị ta suy ra $M=\max\limits_{[0;4]}\left|f(x)\right|=4$, đạt được khi $x=0$ hoặc $x=3$.

$m=\min\limits_{[0;4]}\left|f(x)\right|=0$, đạt được khi $x=1$ hoặc $x=4$. Vậy $M+2m=4$.

Câu 15. Chọn C

Xét hàm số $g(x)=f(x+1)$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

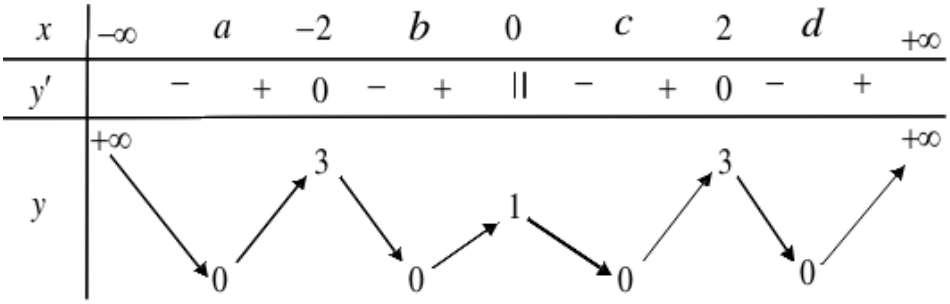
Khi đó hàm số $p(x)=g(|x|)=f(|x|+1)$ là hàm chẵn nên có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$p'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$p(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Xét hàm số $h(x)=f(|x|+1)-1=g(|x|)-1=p(x)-1$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y=\left|f\left(\left|x\right|+1\right)-1\right|=\left|h\left(x\right)\right|$



Từ bảng biến thiên suy ra giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|f\left(\left|x\right|+1\right)-1\right|$ trên đoạn $\left[-2;2\right]$ là 3 tại $x=2$.

Câu 16. Chọn C

Đặt $g\left(x\right)=x^2-2x+m$. Ta có: $g'\left(x\right)=2x-2\Rightarrow g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 2x-2=0\Leftrightarrow x=1$.

Ta có: $\begin{cases}g\left(-1\right)=m+3\\ g\left(1\right)=m-1\\ g\left(2\right)=m\end{cases}$. Suy ra $\begin{cases}\min\limits_{\left[-1;2\right]}g\left(x\right)=m-1\\ \max\limits_{\left[-1;2\right]}g\left(x\right)=m+3\end{cases}$.

Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $m-1>0\Leftrightarrow m>1$ suy ra $\min\limits_{\left[-1;2\right]}f\left(x\right)=m-1\Leftrightarrow m-1=5\Leftrightarrow m=6$ (thoả mãn).

Trường hợp 2: $m+3<0\Leftrightarrow m<-3$ suy ra $\min\limits_{\left[-1;2\right]}f\left(x\right)=-m-3\Leftrightarrow -m-3=5\Leftrightarrow m=-8$ (tm).

Trường hợp 3: $m-1\le 0\le m+3\Leftrightarrow -3\le m\le 1$ suy ra $\min\limits_{\left[-1;2\right]}f\left(x\right)=0$ mà theo bài $\min\limits_{\left[-1;2\right]}f\left(x\right)=5$ nên không có m thỏa mãn.

Vậy có hai giá trị của tham số m thỏa mãn.

Câu 17. Chọn C

Xét hàm số $f\left(x\right)=\frac{4}{3}x^3-6x^2+8x+m$ liên tục trên đoạn $\left[0;3\right]$.

Ta có $f'\left(x\right)=4x^2-12x+8$; $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 4x^2-12x+8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in\left[0;3\right]\\ x=2\in\left[0;3\right]\end{array}\right.$.

Mặt khác: $f\left(0\right)=m;\ f\left(1\right)=\frac{10}{3}+m;\ f\left(2\right)=\frac{8}{3}+m;\ f\left(3\right)=6+m$.

Khi đó $\begin{cases}\max\limits_{\left[0;3\right]}f\left(x\right)=\max\left\{f\left(0\right);f\left(1\right);f\left(2\right);f\left(3\right)\right\}=f\left(3\right)=m+6\\ \min\limits_{\left[0;3\right]}f\left(x\right)=\min\left\{f\left(0\right);f\left(1\right);f\left(2\right);f\left(3\right)\right\}=f\left(0\right)=m\end{cases}$.

Suy ra $\min\limits_{\left[0;3\right]}y=\min\left\{0;\left|m\right|;\left|m+6\right|\right\}$.

Trường hợp 1. $m>0$ suy ra $\min\limits_{\left[0;3\right]}y=m\Leftrightarrow m=18$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2. $m+6<0\Leftrightarrow m<-6$ suy ra $\min\limits_{\left[0;3\right]}y=-m-6\Leftrightarrow -m-6=18\Leftrightarrow m=-24$ (tm).

Trường hợp 3. $m\left(m+6\right)\le 0\Leftrightarrow -6\le m\le 0\Rightarrow\min\limits_{\left[0;3\right]}y=0$ (loại).

Kết luận: tích các số thực m thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $-24.18 = -432$.

Câu 18. Chọn A

Xét hàm số $g(x) = x^4 - 2x^2 + m - 1$ liên tục trên đoạn $[0;2]$ có $g'(x) = 4x^3 - 4x$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \notin [0;2] \\ x = 0 \in [0;2] \\ x = 1 \in [0;2] \end{array}\right.$; $g(0) = m - 1$, $g(1) = m - 2$, $g(2) = m + 7$.

$\Rightarrow \min\limits_{x\in[0;2]} g(x) = m - 2$, $\max\limits_{x\in[0;2]} g(x) = m + 7 \Rightarrow \min\limits_{x\in[0;2]} f(x) = \min\{0, |m-2|, |m+7|\}$.

Trường hợp 1: $m > 2$ suy ra $\min\limits_{x\in[0;2]} f(x) = m - 2 \Leftrightarrow m - 2 = 18 \Leftrightarrow m = 20$ (nhận).

Trường hợp 2: $m + 7 < 0 \Leftrightarrow m < -7 \Rightarrow \min\limits_{x\in[0;2]} f(x) = -m - 7 \Leftrightarrow -m - 7 = 18 \Leftrightarrow m = -25$ (nhận).

Trường hợp 3: $(m-2)(m+7) \le 0 \Leftrightarrow -7 \le m \le 2 \Rightarrow \min\limits_{x\in[0;2]} f(x) = 0$ (loại).

Suy ra $m \in \{20; -25\}$. Vậy tổng tất cả các phần tử của S bằng -5.

Câu 19. Chọn B

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Với $m = 2$. Ta có $f(x) = \dfrac{2x-2}{1-x} = -2$ nên $\min\limits_{[-2;0]} |f(x)| = 2$. Vậy $m = 2$ (nhận).

Với $m \ne 2$. Khi đó, $f'(x) = \dfrac{2-m}{(1-x)^2}$, $\forall x \ne 1$.

Ta có $f(-2) = \dfrac{-m-4}{3}$, $f(0) = -m$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - m \Leftrightarrow x = \dfrac{m}{2}$. Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại một điểm có hoành độ thuộc $[-2; 0]$ tức là $-2 \le \dfrac{m}{2} \le 0 \Leftrightarrow -4 \le m \le 0$. Khi đó $\min\limits_{[-2;0]} |f(x)| = 0$ (loại).

Trường hợp 2: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không cắt trục hoành hoặc cắt trục hoành tại một điểm có hoành độ nằm ngoài đoạn $[-2; 0]$, tức là $\left[\begin{array}{l} \dfrac{m}{2} < -2 \\ \dfrac{m}{2} > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -4 \\ m > 0 \end{array}\right.$ (*).

Khi đó: $\min\limits_{[-2;0]} |f(x)| = \min\{|f(-2)|; |f(0)|\} = \min\left\{\left|\dfrac{-m-4}{3}\right|; |-m|\right\} = \min\left\{\left|\dfrac{m+4}{3}\right|; |m|\right\}$.

Nếu $\left|\dfrac{m+4}{3}\right| \le |m| \Leftrightarrow |m+4| \le 3|m| \Leftrightarrow (m+4)^2 \le (3m)^2 \Leftrightarrow (4-2m)(4m+4) \le 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 2 \\ m \le -1 \end{array}\right.$ (**) thì $\min\limits_{[-2;0]} |f(x)| = \left|\dfrac{m+4}{3}\right|$.

Ta có $\left|\dfrac{m+4}{3}\right| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+4 = 6 \\ m+4 = -6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \text{ (loai, } m \ne 2) \\ m = -10 \text{ (nhan)} \end{array}\right.$ (do điều kiện (*) và (**)).

Nếu $\left|\dfrac{m+4}{3}\right| > |m| \Leftrightarrow -1 < m < 2$ thì $\min\limits_{[-2;0]} |f(x)| = |m|$.

Ta có $|m|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \text{ (loai)} \\ m=-2 \text{ (loai)} \end{array}\right.$. Suy ra $S=\{2;-10\}$. Vậy tổng các phần tử của S là -8.

Câu 20. Chọn B

Hàm số $y=f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}+m$ liên tục trên đoạn $[2;3]$ có $f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$.

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$; $x=0, x=2 \notin (2;3)$ và $f(2)=m+4$, $f(3)=m+\dfrac{9}{2}$.

Nếu $f(2).f(3) \le 0 \Leftrightarrow -\dfrac{9}{2} \le m \le -4$ thì $\min\limits_{[2;3]}|f(x)|=0$. Trường hợp này không thoả yêu cầu bài toán.

Ta xét trường hợp $f(2).f(3)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-\dfrac{9}{2} \\ m>-4 \end{array}\right.$.

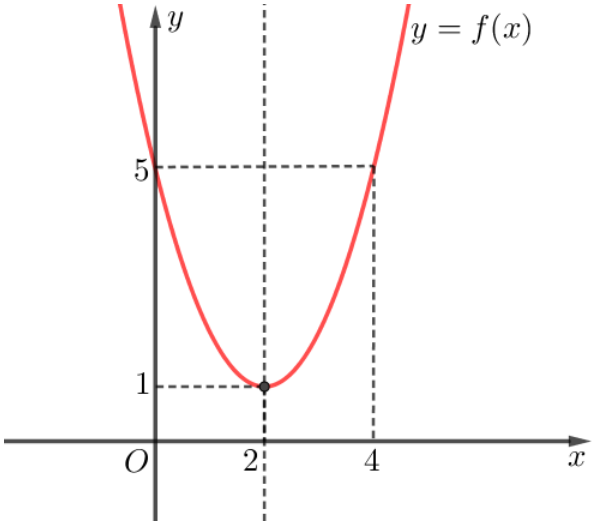
Khi đó $\min\limits_{[2;3]}|f(x)|=\min\left\{|f(2)|;|f(3)|\right\}=\min\left\{|m+4|;\left|m+\dfrac{9}{2}\right|\right\}$.

Trường hợp 1: $\min\limits_{[2;3]}|f(x)|=|m+4|=5 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} |m+4|=5 \\ \left|m+\dfrac{9}{2}\right| \ge 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-9 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m \le -\dfrac{19}{2} \\ m \ge \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow m=1$ (thoả mãn).

Trường hợp 2: $\min\limits_{[2;3]}|f(x)|=\left|m+\dfrac{9}{2}\right|=5 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left|m+\dfrac{9}{2}\right|=5 \\ |m+4| \ge 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{1}{2} \\ m=-\dfrac{19}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow m=-\dfrac{19}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m \le -9 \\ m \ge 1 \end{array}\right. \end{array}\right.$ (thoả mãn).

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu 21. Chọn B



Từ đồ thị hàm số $y=f(x)=ax^2+bx+c$ ta có đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x=2$ là trục đối xứng, mà $f(0)=5\Rightarrow f(4)=5$. Suy ra: $1\le f(x)\le 5, \forall x\in[0;4]$.

Xét hàm số $g(x)=|f(x)+m|$, $\forall x\in[0;4]$.

Ta có: $\max\limits_{[0;4]} g(x)=\max\{|m+1|;|m+5|\}$.

Trường hợp 1: $\begin{cases}|m+1|\ge|m+5|\\ \max\limits_{[0;4]} g(x)=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le -3\\ |m+1|=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le -3\\ \left[\begin{array}{l}m=8\\ m=-10\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m=-10$.

Trường hợp 2: $\begin{cases}|m+1|<|m+5|\\ \max\limits_{[0;4]} g(x)=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-3\\ |m+5|=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-3\\ \left[\begin{array}{l}m=4\\ m=-14\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m=4$.

Vậy tổng tất cả giá trị nguyên của m là: $-10+4=-6$.

Câu 22. Chọn C

Đặt $t=\sin x+1\ (t\in[0;2])$, khi đó $y=|f(\sin x+1)+m|=|f(t)+m|=|t^3-3t+m|$.

Xét hàm số $u(t)=t^3-3t+m$ liên tục trên đoạn $[0;2]$ có $u'(t)=3t^2-3$.

$u'(t)=0\Leftrightarrow 3t^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\in[0;2]\\ t=-1\notin[0;2]\end{array}\right.$.

Ta có $u(0)=m; u(1)=m-2; u(2)=m+2\Rightarrow\max\limits_{[0;2]}u(x)=m+2$, $\min\limits_{[0;2]}u(x)=m-2$.

Khi đó $\max y=\max\{|m-2|;|m+2|\}$.

Trường hợp 1: $\begin{cases}|m-2|=4\\ |m-2|\ge|m+2|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=6\\ m=-2\end{array}\right.\\ m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow m=-2$.

Trường hợp 2: $\begin{cases}|m+2|=4\\ |m+2|\ge|m-2|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=2\\ m=-6\end{array}\right.\\ m\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow m=2$.

Vậy $S\in\{-2;2\}\Rightarrow -2+2=0$.

Câu 23. Chọn B

Đồ thị hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đúng ba điểm chung với trục hoành nên đồ thị hàm số tiếp xúc với trục hoành tại gốc toạ độ, suy ra $f(0)=0\Rightarrow c=0\ (I)$.

Ta có $f'(x)=4ax^3+2bx$.

Theo giả thiết $\begin{cases}f(1)=-1\\ f'(1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+c=-1\\ 4a+2b=0\end{cases}(II)$.

Từ (I) và (II) suy ra $a=1; b=-2; c=0\Rightarrow f(x)=x^4-2x^2$.

Xét hàm số $y=x^4-2x^2-m$ trên đoạn $[0;2]$.

Dễ thấy hàm số đã cho liên tục trên đoạn $\left[0;2\right]$ và có $y'=0\Leftrightarrow 4x^3-4x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in\left[0;2\right] \\ x=1\in\left[0;2\right] \\ x=-1\notin\left[0;2\right] \end{array}\right.$.

Khi đó $y\left(0\right)=-m;\ y\left(1\right)=-m-1;\ y\left(2\right)=-m+8$. $\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \max\limits_{\left[0;2\right]} y=-m+8 \\ \min\limits_{\left[0;2\right]} y=-m-1 \end{array}\right.$.

Theo bài ra $\left|x^4-2x^2-m\right|\le 12,\forall x\in\left[0;2\right]\Leftrightarrow \max\left\{\left|-m-1\right|;\left|-m+8\right|\right\}\le 12\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \left|-m+8\right|\le 12 \\ \left|-m+8\right|\ge\left|-m-1\right| \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \left|-m-1\right|\le 12 \\ \left|-m-1\right|\ge\left|-m+8\right| \end{array}\right. \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} -4\le m\le 20 \\ m\le\dfrac{7}{2} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} -13\le m\le 11 \\ m\ge\dfrac{7}{2} \end{array}\right. \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4\le m\le\dfrac{7}{2} \\ \dfrac{7}{2}\le m\le 11 \end{array}\right.\Leftrightarrow -4\le m\le 11$. Suy ra S có 11 phần tử.

Câu 24. Chọn A

Hàm số $f\left(x\right)$ xác định với mọi $x\ne m$.

Nếu $m=-2020$ thì $f\left(x\right)=1,\forall x\ne -2020$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nếu $m\ne -2020$ thì $f\left(x\right)$ đơn điệu trên mỗi khoảng $\left(-\infty;m\right)$ và $\left(m;+\infty\right)$ nên yêu cầu bài toán $\max\limits_{\left[0;2019\right]}\left|f\left(x\right)\right|=2020\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m\notin\left[0;2019\right] \\ \max\left\{\left|f\left(0\right)\right|;\left|f\left(2019\right)\right|\right\}=2020 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m\notin\left[0;2019\right] \\ \max\left\{\dfrac{2020}{\left|m\right|};\dfrac{4039}{\left|m-2019\right|}\right\}=2020 \end{array}\right.$. Ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\left\{\begin{array}{l} m\notin\left[0;2019\right] \\ \dfrac{2020}{\left|m\right|}=2020 \\ \dfrac{4039}{\left|m-2019\right|}\le 2020 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>2019 \end{array}\right. \\ m=\pm 1 \\ \dfrac{4039}{\left|m-2019\right|}\le 2020 \end{array}\right.\Leftrightarrow m=-1$.

Trường hợp 2: $\begin{cases} m \notin [0;2019] \\ \dfrac{4039}{|m-2019|} = 2020 \\ \dfrac{2020}{|m|} \le 2020 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>2019 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{4082419}{2020} \approx 2021 \\ m = \dfrac{4074341}{2020} \approx 2017 \end{array}\right. \\ \dfrac{2020}{|m|} \le 2020 \end{cases} \Leftrightarrow m = \dfrac{4082419}{2020} \approx 2021.$

Vậy có 2 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 25. Chọn B

Tập xác định $D = R \setminus \{-2\}$.

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{x^2+2mx+4m}{x+2}$ trên đoạn $[-1;1]$. Hàm số xác định và liên tục trên $[-1;1]$.

Ta có $g'(x) = \dfrac{x^2+4x}{(x+2)^2}$. $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2+4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-1;1] \\ x = -4 \notin [-1;1] \end{array}\right.$.

Ta có $g(0) = 2m$; $g(-1) = 2m+1$; $g(1) = 2m + \dfrac{1}{3}$.

$\Rightarrow \max\limits_{[-1;1]} g(x) = 2m+1$; $\min\limits_{[-1;1]} g(x) = 2m$.

Suy ra $\max\limits_{[-1;1]} f(x) = \max\{|2m+1|;|2m|\}$. Ta có $\max\limits_{[-1;1]} f(x) = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |2m+1| = 3 \\ |2m+1| \ge |2m| \end{cases} \\ \begin{cases} |2m| = 3 \\ |2m| \ge |2m+1| \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$.

Suy ra $S = \left\{1; -\dfrac{3}{2}\right\}$. Vậy tổng các phần tử thuộc tập S bằng $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 26. Chọn A

Cách 1:

Xét hàm số $f(x) = x^2 - (m+1)x + m$ liên tục trên $[2;m-1]$ với $m > 6$.

Ta có: $f'(x) = 2x - (m+1)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{m+1}{2} \in [2;m-1]$.

Khi đó: $f(2) = 2-m$; $f\left(\dfrac{m+1}{2}\right) = -\dfrac{(m-1)^2}{4}$; $f(m-1) = 2-m.$

Vì $-\dfrac{(m-1)^2}{4} \le 2-m < 0, \forall m > 6$ nên

$\max\limits_{[2;m-1]} f(x) = \max\left\{f(2); f\left(\dfrac{m+1}{2}\right); f(m-1)\right\} = 2-m$;

và $\min\limits_{[2;m-1]} f(x) = \min\left\{f(2); f\left(\dfrac{m+1}{2}\right); f(m-1)\right\} = -\dfrac{(m-1)^2}{4}$.

Do đó: $\min\limits_{[2;m-1]} y = \min\left\{\left|2-m\right|;\left|-\dfrac{(m-1)^2}{4}\right|\right\} = \left|2-m\right|$

Theo yêu cầu bài toán: $\left|2-m\right| < 2020 \Leftrightarrow -2020 < 2-m < 2020 \Leftrightarrow -2018 < m < 2022$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ và $m > 6$ nên $m \in \{7;8;9;\cdots;2021\}$.

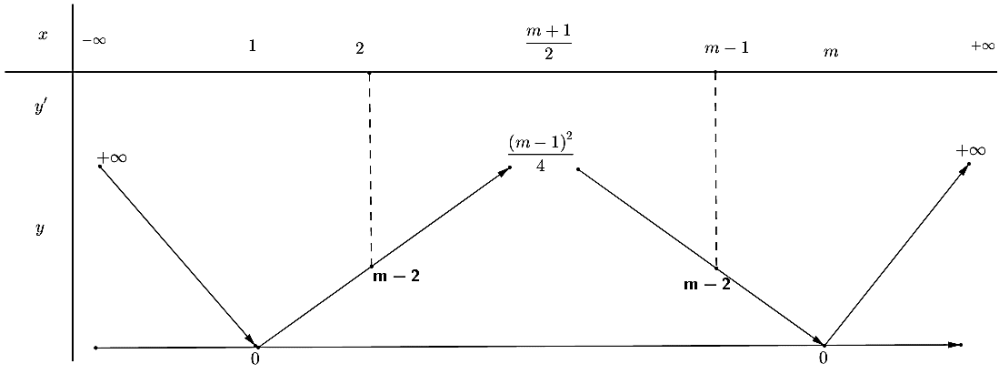
Vậy tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m là: $\sum\limits_{n=7}^{2021} n = \dfrac{(7+2021)2015}{2} = 2043210$.

Cách 2:

Xét hàm số $f(x) = x^2 - (m+1)x + m$ liên tục trên $[2;m-1]$ với $m > 6$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - (m+1)x + m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = m \end{array}\right.$. Do $m > 6$ nên ta có: $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{m+1}{2} > 2 \\ \dfrac{m+1}{2} < m-1 \end{array}\right.$.

$f(2) = 2-m; f\left(\dfrac{m+1}{2}\right) = -\dfrac{(m-1)^2}{4}; f(m-1) = 2-m.$



Từ bảng biến thiên suy ra: $\min\limits_{[2;m-1]} \left|f(x)\right| = m-2$

Theo bài ra ta có: $\min\limits_{[2;m-1]} \left|f(x)\right| < 2020 \Leftrightarrow m-2 < 2020 \Leftrightarrow m < 2022$.

Kết hợp với điều kiện $m > 6$ suy ra $m \in \{7;8;...;2021\}$.

Vậy tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m là: $\sum\limits_{n=7}^{2021} n = \dfrac{(7+2021)2015}{2} = 2043210$.

Câu 27. Chọn D

Xét hàm số $f(x) = x^3 - \dfrac{9}{2}x^2 + 6x - 3 + m$ liên tục trên đoạn $[0;3]$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 9x + 6$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [0;3] \\ x = 2 \in [0;3] \end{array}\right.$.

$f(0) = -3 + m$; $f(1) = -\dfrac{1}{2} + m$; $f(2) = -1 + m$; $f(3) = \dfrac{3}{2} + m$.

Suy ra $\max\limits_{[0;3]} f(x) = \dfrac{3}{2} + m$; $\min\limits_{[0;3]} f(x) = -3 + m$.

Trường hợp 1: $\left(\frac{3}{2}+m\right)\left(-3+m\right)\le 0$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của hàm số y trên đoạn $\left[0;3\right]$ là 0 (loại).

Trường hợp 2: $\left(\frac{3}{2}+m\right)\left(-3+m\right)>0$. Khi đó: $\min\limits_{[0;3]} y=\min\left\{\left|\frac{3}{2}+m\right|;\left|-3+m\right|\right\}$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[0;3\right]$ không bé hơn 5

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left|\frac{3}{2}+m\right|\ge\left|-3+m\right|\\ \left|-3+m\right|\ge 5\end{cases}\\ \begin{cases}\left|\frac{3}{2}+m\right|\le\left|-3+m\right|\\ \left|\frac{3}{2}+m\right|\ge 5\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\ge\frac{3}{4}\\ \left[\begin{array}{l}m\ge 8\\ m\le -2\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}m\le\frac{3}{4}\\ \left[\begin{array}{l}m\ge\frac{7}{2}\\ m\le -\frac{13}{2}\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 8\\ m\le -\frac{13}{2}\end{array}\right.\cdot$$

Suy ra các giá trị $m\in\left[-10;10\right]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $S=\left\{-10;-9;-8;-7;8;9;10\right\}$.

Vậy tổng các giá trị m cần tìm là -7.

Câu 28. Chọn C

Xét hàm số $f\left(x\right)=\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2+m$ liên tục trên đoạn $\left[-1;2\right]$.

Ta có $f'\left(x\right)=x^3-3x^2+2x$.

$$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x^3-3x^2+2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in\left[-1;2\right]\\ x=1\in\left[-1;2\right]\\ x=2\in\left[-1;2\right]\end{array}\right.\cdot$$

$f\left(-1\right)=\frac{9}{4}+m;\ f\left(0\right)=m;\ f\left(1\right)=\frac{1}{4}+m;\ f\left(2\right)=m$.

Khi đó $\begin{cases}\max\limits_{[-1;2]} f\left(x\right)=\max\left\{f\left(-1\right);f\left(0\right);f\left(1\right);f\left(2\right)\right\}=f\left(-1\right)=m+\frac{9}{4}\\ \min\limits_{[-1;2]} f\left(x\right)=\min\left\{f\left(-1\right);f\left(0\right);f\left(1\right);f\left(2\right)\right\}=f\left(0\right)=f\left(2\right)=m\end{cases}$.

Vậy $\max\limits_{[0;3]} y=\max\left\{\left|m+\frac{9}{4}\right|,\left|m\right|\right\}$, theo yêu cầu bài toán $\max\limits_{[0;3]} y\le 11\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left|m+\frac{9}{4}\right|\le 11\\ \left|m+\frac{9}{4}\right|\ge\left|m\right|\end{cases}\\ \begin{cases}\left|m\right|\le 11\\ \left|m\right|\ge\left|m+\frac{9}{4}\right|\end{cases}\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} -\dfrac{53}{4} \le m \le \dfrac{35}{4} \\ m \ge -\dfrac{9}{8} \end{cases} \right. \left. \begin{cases} -11 \le m \le 11 \\ m \le -\dfrac{9}{8} \end{cases} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{9}{8} \le m \le \dfrac{35}{4} \\ -11 \le m \le -\dfrac{9}{8} \end{array} \right. \Leftrightarrow -11 \le m \le \frac{35}{4}.$$

Vì m nguyên nên $m = \{-11;-10;...;8\}$.

Kết luận: tổng các số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $-11-10-9-...+8=-30$.

Câu 29 . Chọn D

Ta có: $y = \left|-4\cos^2 x + 2\sin x + m + 4\right| = \left|4\left(1-\cos^2 x\right) + 2\sin x + m\right| = \left|4\sin^2 x + 2\sin x + m\right|$.

Đặt $t = \sin x$, do $x \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ nên suy ra $t \in [0;1]$.

Ta tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \left|4t^2 + 2t + m\right|$ trên đoạn $[0;1]$.

Xét hàm số $f(t) = 4t^2 + 2t + m$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, ta có:

$f'(t) = 8t + 2$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{4} \notin [0;1]$.

$f(0) = m$; $f(1) = m + 6$.

Trường hợp 1: Nếu $m \ge 0 \Rightarrow \min\limits_{[0;1]} y = m$. Kết hợp với giả thiết ta có $0 \le m \le 4$. (1)

Trường hợp 2: Nếu $m + 6 \le 0 \Leftrightarrow m \le -6 \Rightarrow \min\limits_{[0;1]} y = -m - 6$. Kết hợp với giả thiết ta có

$\begin{cases} -m - 6 \le 4 \\ m \le -6 \end{cases} \Leftrightarrow -10 \le m \le -6$. (2)

Trường hợp 3: Nếu $m(m+6) < 0 \Leftrightarrow -6 < m < 0 \Rightarrow \min\limits_{[0;1]} y = 0 \le 4$. Trường hợp này thỏa mãn. (3)

Từ $(1),(2)$ và (3) ta được $m \in [-10;4]$. Vì m là số nguyên nên $m \in \{-10,-9,-8,...,2,3,4\}$.

Vậy có 15 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 30. Chọn A

Ta có giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[1;2]$ không lớn hơn 3, tức là $\max\limits_{[1;2]} f(x) \le 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2mx + 3 \le 3, \forall x \in [1;2] \\ x^2 - 2mx + 3 \ge -3, \forall x \in [1;2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m \ge x, \forall x \in [1;2] \\ 2m \le \dfrac{x^2+6}{x}, \forall x \in [1;2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m \ge \max\limits_{[1;2]}(x) & (1) \\ 2m \le \min\limits_{[1;2]}\left(\dfrac{x^2+6}{x}\right) & (2) \end{cases}.$$

$(1) \Leftrightarrow 2m \ge 2 \Leftrightarrow m \ge 1.$

Xét hàm $g(x) = \dfrac{x^2+6}{x} = x + \dfrac{6}{x}$ với $x \in [1;2]$ có $g'(x) = 1 - \dfrac{6}{x^2}$.

Suy ra: $g'(x) < 0, \forall x \in [1;2] \Rightarrow \min\limits_{[1;2]} g(x) = g(2) = 5$. Do đó $(2) \Leftrightarrow m \le \dfrac{5}{2}$.

Vậy $1 \le m \le \dfrac{5}{2}$, mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1;2\}$.

Câu 31. Chọn B

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + m$ liên tục trên đoạn $[-2;3]$. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$. Có $f(-2) = m - 2;\ f(-1) = m + 5;\ f(3) = m - 27$.

Suy ra $\max\limits_{[-2;3]} f(x) = m + 5$; $\min\limits_{[-2;3]} f(x) = m - 27$.

Do đó $M = \max\limits_{[-2;3]} y = \max\{|m+5|; |m-27|\}$.

$$M < 50 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |m+5| \ge |m-27| \\ |m+5| < 50 \end{cases} \\ \begin{cases} |m+5| < |m-27| \\ |m-27| < 50 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2m - 22 \ge 0 \\ -50 < m + 5 < 50 \end{cases} \\ \begin{cases} 2m - 22 < 0 \\ -50 < m - 27 < 50 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \in [11;45) \\ m \in (-23;11) \end{array}\right. \Leftrightarrow m \in (-23;45).$$

Do đó $S = \{-22;-21;-20;...;-1;0;1;2;...;44\}$.

Vậy tổng các phần tử của M là 737.

Câu 32: Chọn A

Xét $u = x^4 - 2x^3 + x^2 + a$ liên tục trên đoạn $[-1;\ 2]$ có $u' = 4x^3 - 6x^2 + 2x$.

Giải phương trình $u' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-1;2] \\ x = 1 \in [-1;2] \\ x = \dfrac{1}{2} \in [-1;2] \end{array}\right.$

Suy ra $\begin{cases} M = \max\limits_{[-1;\ 2]} u = \max\left\{u(-1), u(0), u\left(\dfrac{1}{2}\right), u(1), u(2)\right\} = u(-1) = u(2) = a + 4 \\ m = \min\limits_{[-1;\ 2]} u = \min\left\{u(-1), u(0), u\left(\dfrac{1}{2}\right), u(1), u(2)\right\} = u(0) = u(1) = a \end{cases}$.

Vậy $\max\limits_{[-1;\ 2]} y = \max\{|a+4|, |a|\} \le 100 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |a+4| \le |a| \le 100 \\ |a| \le |a+4| \le 100 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -100 \le a \le -2 \\ -2 \le a \le 96 \end{array}\right.$.

Vậy $a \in \{-100, -99, ..., 96\}$ có 197 số nguyên thỏa mãn.

Câu 33. Chọn B

Xét hàm số $f(x) = \sin x + \cos x + m$, có tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $-\sqrt{2} + m \le \sin x + \cos x + m \le \sqrt{2} + m$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $-\sqrt{2} + m \le f(x) \le \sqrt{2} + m$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy: $\max\limits_{D} y = |m + \sqrt{2}|$ hoặc $\max\limits_{D} y = |m - \sqrt{2}|$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left|m+\sqrt{2}\right|<2\\ \left|m-\sqrt{2}\right|\le\left|m+\sqrt{2}\right|\end{cases}\\ \begin{cases}\left|m-\sqrt{2}\right|<2\\ \left|m+\sqrt{2}\right|\le\left|m-\sqrt{2}\right|\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-2-\sqrt{2}<m<2-\sqrt{2}\\ m\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}-2+\sqrt{2}<m<2+\sqrt{2}\\ m\le 0\end{cases}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0\le m<2-\sqrt{2}\\ -2+\sqrt{2}<m\le 0\end{array}\right. \Leftrightarrow -2+\sqrt{2}<m<2-\sqrt{2}$.

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=0$. Vậy chỉ có một giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 34. Chọn B

Xét $f(x)=x^2+2x+m$ liên tục trên $[-2;1]$. Ta có: $f'(x)=2x+2$;

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1\in(-2;1)$; $f(-2)=m$; $f(1)=m+3$; $f(-1)=m-1$;

Trường hợp 1: $(m-1)(m+3)\le 0\Leftrightarrow -3\le m\le 1$, lúc đó $M=\min\limits_{[-2;1]}y=0$.

Trường hợp 2: $(m-1)(m+3)>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m<-3\\ m>1\end{array}\right.$ (*).

Do đó: $M=\min\limits_{[-2;1]}y=\min\{|m-1|;|m+3|\}$.

Khi $|m-1|\le|m+3|\Leftrightarrow(m-1)^2\le(m+3)^2\Leftrightarrow m\ge -1$, kết hợp với điều kiện (*) ta được $m>1$, lúc đó: $M=\min\limits_{[-2;1]}y=|m-1|$.

Khi $|m-1|>|m+3|\Leftrightarrow m<-1$, kết hợp với điều kiện (*) ta được $m<-3$, lúc đó:

$M=\min\limits_{[-2;1]}y=|m+3|$.

Xét các giá trị $m\in[-3;3]$

$M=\begin{cases}0 & \text{khi } -3\le m\le 1\\ |m-1| & \text{khi } 1<m\le 3\end{cases}=\begin{cases}0 & \text{khi } -3\le m\le 1\\ m-1 & \text{khi } 1<m\le 3\end{cases}$.

Dễ dàng nhận thấy M đạt giá trị lớn nhất bằng 2 khi $m=3$.

Câu 35. Chọn B

Xét $f(x)=x^3+3x^2+m-1$ trên $[-1;1]$.

Ta có: $f'(x)=3x^2+6x$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in[-1;1]\\ x=-2\notin[-1;1]\end{array}\right.$.

$f(-1)=m+1$; $f(0)=m-1$; $f(1)=m+3$;

Trường hợp 1: $(m-1)(m+3)\le 0\Leftrightarrow -3\le m\le 1$, $M=\min\limits_{[-1;1]}y=0$.

Trường hợp 2: $(m-1)(m+3)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>1\\ m<-3\end{array}\right.$ (*).

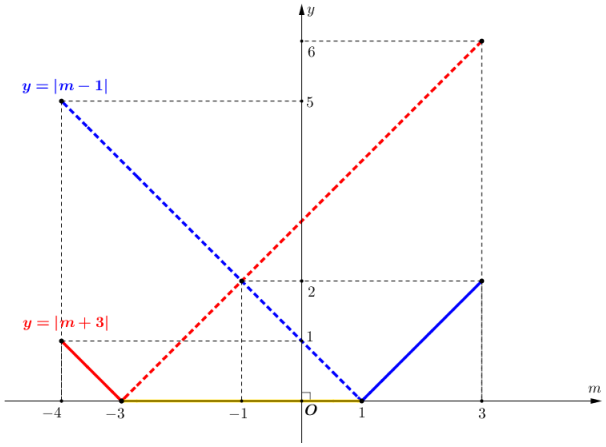
Do đó: $M=\min\limits_{[-1;1]}y=\min\{|m-1|;|m+3|\}$.

Khi $|m-1| \le |m+3| \Leftrightarrow (m-1)^2 \le (m+3)^2 \Leftrightarrow m \ge -1$, kết hợp với điều kiện (*) ta được $m > 1$, lúc đó: $M = \min\limits_{[-1;1]} y = |m-1|$.

Khi $|m-1| > |m+3| \Leftrightarrow m < -1$, kết hợp với điều kiện (*) ta được $m < -3$, lúc đó: $M = \min\limits_{[-1;1]} y = |m+3|$.

Xét các giá trị $m \in [-4;3]$:

$$M = \begin{cases} |m+3| \ khi \ -4 \le m < -3 \\ 0 \quad khi \ -3 \le m \le 1 \\ |m-1| \ khi \ 1 < m \le 3 \end{cases}$$



Dựa vào đồ thị, M đạt giá trị lớn nhất bằng 2 khi $m = 3$.

Câu 36. Chọn B

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Xét $u(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + m$ liên tục trên $[0;2]$.

Ta có $u'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$, $u'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$. Ta có: $\begin{cases} u(0) = m \\ u(1) = m+1 \\ u(2) = m \end{cases}$.

Suy ra: $\begin{cases} \min\limits_{[0;2]} u(x) = m \\ \max\limits_{[0;2]} u(x) = m+1 \end{cases}$.

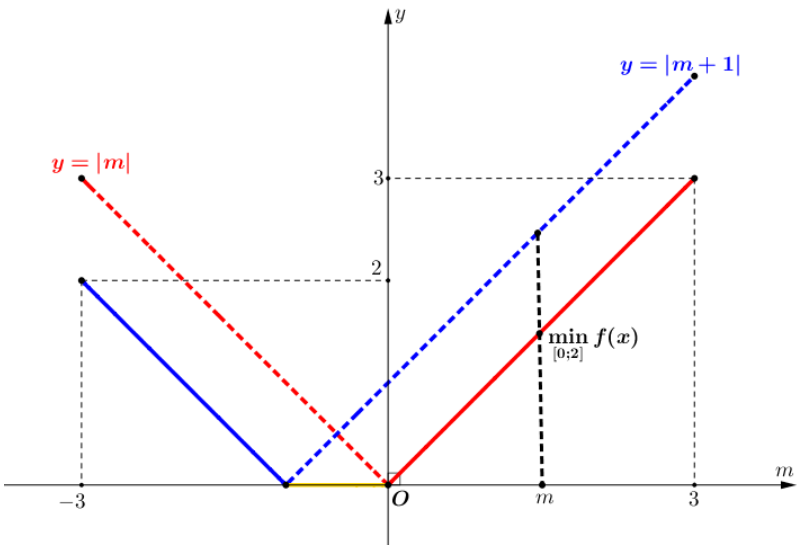
$\min\limits_{[0;2]} f(x) = \min\{0; |m|; |m+1|\}$ hoặc $\min\limits_{[0;2]} f(x) = 0$, với $m \in [-3;3]$ (*).

Trường hợp 1: $m(m+1) \le 0 \Leftrightarrow -1 \le m \le 0$ suy ra $\min\limits_{[0;2]} f(x) = 0$

Trường hợp 2: $m > 0$ kết hợp với (*) ta có: $0 < m \le 3$ suy ra $\min\limits_{[0;2]} f(x) = |m|$.

Trường hợp 3: $m+1 < 0 \Leftrightarrow m < -1$ kết hợp với (*) ta có $-3 \le m < -1$ suy ra $\min\limits_{[0;2]} f(x) = |m+1|$.

Khi đó: $\min\limits_{[0;2]} f(x) = \begin{cases} |m| & , m \in (0;3] \\ |m+1| & , m \in [-3;-1) \\ 0 & , m \in [-1;0] \end{cases}$.



Dựa vào đồ thị ta thấy $\min\limits_{[0;2]} f(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 3 khi $m=3$.

Câu 37. Chọn D

Xét hàm số $y=f(x)=x^2-4x+2m-3$ liên tục trên đoạn $[1;3]$.

$f'(x)=2x-4$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=2\in[1;3]$; $f(1)=2m-6$, $f(2)=2m-7$, $f(3)=2m-6$.

Khi đó $\max\limits_{[1;3]}|f(x)|=\max\{|2m-6|;|2m-7|\}=M$.

Ta có: $\begin{cases}M\ge|2m-6|\\M\ge|2m-7|=|7-2m|\end{cases}\Rightarrow 2M\ge|2m-6|+|7-2m|\ge|2m-6+7-2m|=1\Rightarrow M\ge\dfrac{1}{2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}|2m-6|=|2m-7|=\dfrac{1}{2}\\(2m-6)(7-2m)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow m=\dfrac{13}{4}$.

Do đó $M=\dfrac{1}{2}=a$ khi $m=\dfrac{13}{4}=b\Rightarrow P=2b-a=6$.

Câu 38. Chọn D

Xét hàm số $f(x)=x^3+x^2+(m^2+1)x+27$ liên tục trên đoạn $[-3;-1]$.

Ta có $f'(x)=3x^2+2x+m^2+1>0$ với $\forall x\in[-3;-1]$.

Ta có $f(-3)=6-3m^2$; $f(-1)=26-m^2$.

Khi đó $\max\limits_{[-3;-1]}|f(x)|=\max\{|6-3m^2|;|26-m^2|\}=M$.

Lại có $\begin{cases}M\ge|6-3m^2|\\M\ge|26-m^2|\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}M\ge|6-3m^2|\\3M\ge|3m^2-78|\end{cases}\Rightarrow 4M\ge 72\Leftrightarrow M\ge 18$.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}|6-3m^2|=|26-m^2|=18\\(6-3m^2)(3m^2-78)>0\end{cases}\Leftrightarrow m^2=8\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\sqrt{2}\\m=-2\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Vậy với $\left[\begin{array}{l}m=2\sqrt{2}\\m=-2\sqrt{2}\end{array}\right.$ thì giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-3;-1]$ có giá trị nhỏ nhất.

Khi đó tích các giá trị là $2\sqrt{2}.\left(-2\sqrt{2}\right)=-8$.

Câu 39. Chọn D

Xét hàm số $f\left(x\right)=\frac{1}{4}x^4-\frac{19}{2}x^2+30x+m$ liên tục trên đoạn $\left[0;2\right]$.

Ta có $f'\left(x\right)=x^3-19x+30$; $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-5\notin\left[0;2\right]\\x=3\notin\left[0;2\right]\\x=2\in\left[0;2\right]\end{array}\right.$.

Ta có : $f\left(0\right)=m; f\left(2\right)=m+26$.

Khi đó $\max\limits_{\left[0;2\right]}f\left(x\right)=\max\left\{m;m+26\right\}=m+26$; $\min\limits_{\left[0;2\right]}f\left(x\right)=\min\left\{m;m+26\right\}=m$.

Suy ra $\max\limits_{\left[0;2\right]}\left|f\left(x\right)\right|=\max\left\{\left|m\right|;\left|m+26\right|\right\}=M$.

Ta có $\begin{cases}M\ge\left|m\right|=\left|-m\right|\\M\ge\left|m+26\right|\end{cases}\Rightarrow 2M\ge\left|-m\right|+\left|m+26\right|\Leftrightarrow M\ge\frac{\left|-m\right|+\left|m+26\right|}{2}\ge\frac{\left|-m+m+26\right|}{2}=13$.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}\left|m\right|=\left|m+26\right|=13\\-m\left(m+26\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow m=-13$.

Do đó giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{1}{4}x^4-\frac{19}{2}x^2+30x+m\right|$ trên đoạn $\left[0;2\right]$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 13 khi $m=-13$. Vậy có 1 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 40. Chọn A

Xét $u=x^2-2x+m$ liên tục trên trên đoạn $\left[0;2\right]$.

Ta có: $u'=2x-2$; $u'=0\Leftrightarrow 2x-2=0\Leftrightarrow x=1\in\left[0;2\right]$.

$u\left(0\right)=m, u\left(1\right)=m-1, u\left(2\right)=m$

Khi đó: $\max\limits_{\left[0;2\right]}u=\max\left\{u\left(0\right),u\left(1\right),u\left(2\right)\right\}=m\max\left\{m,m-1,m\right\}=m$.

$\min\limits_{\left[0;2\right]}u=\min\left\{u\left(0\right),u\left(1\right),u\left(2\right)\right\}=\min\left\{m,m-1,m\right\}=m-1$.

Suy ra $\max\limits_{\left[0;2\right]}y=\max\left\{\left|m-1\right|,\left|m\right|\right\}=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left|m\right|=3\\\left|m\right|\ge\left|m-1\right|\end{cases}\\\begin{cases}\left|m-1\right|=3\\\left|m-1\right|\ge\left|m\right|\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=3\\m=-3\end{array}\right.\\\left|m\right|\ge\left|m-1\right|\end{cases}\\\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=4\\m=-2\end{array}\right.\\\left|m-1\right|\ge\left|m\right|\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow m=3, m=-2$.

Vậy số phần tử của S là 2.

Câu 41. Chọn B

Đặt $f\left(x\right)=x^3-mx^2-9x+9m$. Dễ thấy $\min\limits_{\left[-2;2\right]}\left|f\left(x\right)\right|\ge 0$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi phương trình $f\left(x\right)=0$ có nghiệm $x\in\left[-2;2\right]$.

Ta có: $f(x)=x^2(x-m)-9(x-m)=(x^2-9)(x-m)$; $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-3\\x=m\end{array}\right.$.

Do đó điều kiện cần và đủ để $f(x)=0$ có nghiệm $x\in[-2;2]$ là $m\in[-2;2]$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0;1;2\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 42. Chọn D

Ta có $y=f(x)=\left|-x^4+8x^2+m\right|=\left|x^4-8x^2-m\right|=\left|\left(x^2-4\right)^2-16-m\right|$.

Đặt $t=\left(x^2-4\right)^2$, vì $x\in[-1;3]$, suy ra $t\in[0;25]$.

Khi đó $y=g(t)=|t-16-m|$.

Ta có $\min\limits_{[-1;3]}f(x)=\min\limits_{[-0;25]}g(t)=\min\{|m-9|,|m+16|\}$.

Nếu $m-9\ge0\Leftrightarrow m\ge9$, khi đó $\min\limits_{[-1;3]}f(x)=m-9\ge0$, khi đó $\min\left(\min\limits_{[-1;3]}f(x)\right)=0$, khi $m=9$.

Nếu $m+16\ge0\Leftrightarrow m\ge-16$, khi đó $\min\limits_{x\in[-1;3]}f(x)=-m-16\ge0$, khi đó $\min\left(\min\limits_{[-1;3]}f(x)\right)=0$, khi $m=-16$.

Nếu $(m-9)(m+16)<0\Leftrightarrow-16<m<9$, khi đó $\min\limits_{x\in[-1;3]}f(x)=0$, khi đó $\min\left(\min\limits_{[-1;3]}f(x)\right)=0$.

Vậy $\min\left(\min\limits_{[-1;3]}f(x)\right)=0$, khi $-16\le m\le9$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$, nên có 26 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 43. Chọn D

Xét hàm số $u=x^4-2x^3+x^2+a$ liên tục trên đoạn $[-1;2]$ có $u'=4x^3-6x^2+2x$.

$$u'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in[-1;2]\\x=1\in[-1;2]\\x=\dfrac{1}{2}\in[-1;2]\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}M=\max\limits_{[-1;2]}u=\max\left\{u(-1),u(2),u(0),u\left(\dfrac{1}{2}\right),u(1)\right\}=u(-1)=u(2)=a+4.\\m=\min\limits_{[-1;2]}u=\min\left\{u(-1),u(2),u(0),u\left(\dfrac{1}{2}\right),u(1)\right\}=u(0)=u(1)=a\end{array}\right.$$

Trường hợp 1: Nếu $m\ge0\Leftrightarrow a\ge0\Rightarrow\min\limits_{[-1;2]}y=m;\ \max\limits_{[-1;2]}y=M.$

Ta có điều kiện $\left\{\begin{array}{l}a\ge0\\a+a+4=10\end{array}\right.\Leftrightarrow a=3$(thoả mãn).

Trường hợp 2: Nếu $M\le0\Leftrightarrow a\le-4$. Khi đó: $\min\limits_{[-1;2]}y=-M;\ \max\limits_{[-1;2]}y=-m$.

Ta có điều kiện $\begin{cases} a \le -4 \\ -(a+4) - a = 10 \end{cases} \Leftrightarrow a = -7$ (thoả mãn).

Trường hợp 3: $m < 0 < M \Leftrightarrow -4 < a < 0$.

Khi đó: $\min\limits_{[-1;2]} y = 0; \max\limits_{[-1;2]} y = \max\{|a+4|, |a|\} = \max\{a+4; -a\} < 10$.

Suy ra $\min\limits_{[-1;2]} y + \max\limits_{[-1;2]} y < 0 + 10 = 10$ (loại).

Vậy có 2 giá trị của tham số a thỏa mãn đề bài là $\left[\begin{array}{l} a = 3 \\ a = -7 \end{array}\right.$.

Câu 44. Chọn B

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{x^2 + ax - 4}{x}$ liên tục trên đoạn $[1;4]$.

Ta có $g'(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x^2} > 0 \quad \forall x \in [1;4] \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $[1;4]$

$\Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{[1;4]} g(x) = g(1) = a - 3 \\ \max\limits_{[1;4]} g(x) = g(4) = a + 3 \end{cases}$.

Trường hợp 1: $a - 3 > 0 \Leftrightarrow a > 3$.

Ta có $\begin{cases} |a-3| = a-3 \\ |a+3| = a+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \min\limits_{[1;4]} |g(x)| = a - 3 \\ M = \max\limits_{[1;4]} |g(x)| = a + 3 \end{cases}$.

Khi đó $M + 2m = 7 \Leftrightarrow a + 3 + 2(a-3) = 7 \Leftrightarrow a = \dfrac{10}{3}$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2: $a + 3 < 0 \Leftrightarrow a < -3$.

Ta có $\begin{cases} |a-3| = -a+3 \\ |a+3| = -a-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \min\limits_{[1;4]} |g(x)| = -a - 3 \\ M = \max\limits_{[1;4]} |g(x)| = -a + 3 \end{cases}$.

Khi đó $M + 2m = 7 \Leftrightarrow -a + 3 + 2(-a-3) = 7 \Leftrightarrow a = -\dfrac{10}{3}$ (thỏa mãn).

Trường hợp 3: $a - 3 \le 0 \le a + 3 \Leftrightarrow -3 \le a \le 3$.

Ta có $\begin{cases} |a+3| = a+3 \\ |a-3| = -a+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \min\limits_{[1;4]} |g(x)| = 0 \\ M = \max\limits_{[1;4]} |g(x)| = \max\{a+3; -a+3\} \end{cases}$

Khi đó $M + 2m = 7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a + 3 + 2.0 = 7 \\ a + 3 \ge -a + 3 \end{cases} \\ \begin{cases} -a + 3 + 2.0 = 7 \\ -a + 3 > a + 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 4 \\ a \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -4 \\ a < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow a = \pm 4$ (không thỏa mãn).

Vậy có 2 giá trị của a thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $a = \pm\dfrac{10}{3}$.

Câu 45. Chọn C

Ta xét $f(x)=x^4-2x^3+m$ liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$, $f'(x)=4x^3-6x^2$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in\left[0;1\right]\\x=\dfrac{3}{2}\notin\left[0;1\right]\end{array}\right.$$

$f(0)=m;f(1)=m-1$.

Ta xét các trường hợp sau:

Nếu $m\le 0$ thì $\max\limits_{\left[0;1\right]}\left|f(x)\right|=1-m;\min\limits_{\left[0;1\right]}\left|f(x)\right|=-m$.

Khi đó: $\max\limits_{\left[0;1\right]}\left|f(x)\right|+2\min\limits_{\left[0;1\right]}\left|f(x)\right|=10\Leftrightarrow(1-m)+2(-m)=10\Leftrightarrow m=-3$ (thỏa điều kiện).

Nếu $m\ge 1$ thì $\max\limits_{\left[0;1\right]}\left|f(x)\right|=m;\min\limits_{\left[0;1\right]}\left|f(x)\right|=m-1$.

Khi đó: $\max\limits_{\left[0;1\right]}\left|f(x)\right|+2\min\limits_{\left[0;1\right]}\left|f(x)\right|=10\Leftrightarrow m+2(m-1)=10\Leftrightarrow m=4$ (thỏa điều kiện).

Nếu $\dfrac{1}{2}\le m<1$ thì $\max\limits_{\left[0;1\right]}\left|f(x)\right|=m;\min\limits_{\left[0;1\right]}\left|f(x)\right|=0$.

Khi đó: $\max\limits_{\left[0;1\right]}\left|f(x)\right|+2\min\limits_{\left[0;1\right]}\left|f(x)\right|=10\Leftrightarrow m=10$ (không thỏa điều kiện).

Nếu $0<m<\dfrac{1}{2}$ thì $\max\limits_{\left[0;1\right]}\left|f(x)\right|=1-m;\min\limits_{\left[0;1\right]}\left|f(x)\right|=0$.

Khi đó: $\max\limits_{\left[0;1\right]}\left|f(x)\right|+2\min\limits_{\left[0;1\right]}\left|f(x)\right|=10\Leftrightarrow 1-m=10\Leftrightarrow m=-9$ (không thỏa điều kiện).

Do đó có hai giá trị $m=-3$ và $m=4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy tổng tất cả các giá trị của m sao cho $\max\limits_{\left[0;1\right]}\left|f(x)\right|+2\min\limits_{\left[0;1\right]}\left|f(x)\right|=10$ là 1.

Câu 46: Chọn C

Hàm số $f\left(x\right)=\left|x^3-3x^2+m\right|$ liên tục trên đoạn $\left[1;3\right]$.

Xét hàm số $y=x^3-3x^2+m$

Ta có $y'=3x^2-6x$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\notin\left[1;3\right]\\x=2\in\left[1;3\right]\end{array}\right.$

Khi đó

$$\begin{cases}\min\limits_{\left[1;3\right]}y=\min\left\{y\left(1\right);y\left(3\right);y\left(2\right)\right\}=\min\left\{m-2;m;m-4\right\}=m-4\\\max\limits_{\left[1;3\right]}y=\max\left\{y\left(1\right);y\left(3\right);y\left(2\right)\right\}=\max\left\{m-2;m;m-4\right\}=m\end{cases}$$

Nếu $m-4\ge 0\Leftrightarrow m\ge 4\Rightarrow\begin{cases}\min\limits_{\left[1;3\right]}f\left(x\right)=m-4\\\max\limits_{\left[1;3\right]}f\left(x\right)=m\end{cases}$.

Ta có $3\max\limits_{\left[1;3\right]}f\left(x\right)-2\min\limits_{\left[1;3\right]}f\left(x\right)=17\Leftrightarrow 3m-2\left(m-4\right)=17\Leftrightarrow m=9$ (thoả mãn).

Nếu $m\le 0\Rightarrow\begin{cases}\min\limits_{\left[1;3\right]}f\left(x\right)=-m\\\max\limits_{\left[1;3\right]}f\left(x\right)=4-m\end{cases}$.

Ta có $3\max\limits_{[1;3]} f(x)-2\min\limits_{[1;3]} f(x)=17 \Leftrightarrow 3(4-m)+2m=17 \Leftrightarrow m=-5$ (thoả mãn).

Nếu $0<m<2 \Rightarrow \begin{cases}\min\limits_{[1;3]} f(x)=0\\ \max\limits_{[1;3]} f(x)=4-m\end{cases}$.

Ta có $3\max\limits_{[1;3]} f(x)-2\min\limits_{[1;3]} f(x)=17 \Leftrightarrow 3(4-m)=17 \Leftrightarrow m=\dfrac{-5}{3}$ (không thoả mãn).

Nếu $2\le m<4 \Rightarrow \begin{cases}\min\limits_{[1;3]} f(x)=0\\ \max\limits_{[1;3]} f(x)=m\end{cases}$.

Ta có $3\max\limits_{[1;3]} f(x)-2\min\limits_{[1;3]} f(x)=17 \Leftrightarrow 3m=17 \Leftrightarrow m=\dfrac{17}{3}$ (không thoả mãn).

Vậy $m\in\{9;-5\}$.

Câu 47. Chọn B

Xét hàm số: $f(x)=x^3-3x+m$ trên $[0;2]$

Ta có: $f'(x)=3x^2-3$.

Khi đó $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1\end{array}\right.$.

Ta có: $\begin{cases}f(0)=m\\ f(1)=-2+m\\ f(2)=2+m\end{cases}$ suy ra $\begin{cases}\min\limits_{[0;2]} f(x)=-2+m\\ \max\limits_{[0;2]} f(x)=2+m\end{cases}$.

Trường hợp 1: $(-2+m)(2+m)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m<-2\\ m>2\end{array}\right.$.

Khi đó: $\min\limits_{[0;2]}|f(x)|+\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=6 \Leftrightarrow |-2+m|+|2+m|=6$.

Nếu $m<-2$ ta có: $2-m-2-m=6 \Leftrightarrow m=-3$ (thỏa).

Nếu $m>2$ ta có: $-2+m+2+m=6 \Leftrightarrow m=3$ (thỏa).

Trường hợp 2: $(-2+m)(2+m)\le 0 \Leftrightarrow -2\le m\le 2$ (*)

Khi đó: $\min\limits_{[0;2]}|f(x)|=0$ và

$\min\limits_{[0;2]}|f(x)|+\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=6 \Leftrightarrow \max\limits_{[0;2]}|f(x)|=6$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}|m+2|\ge|-2+m|\\ |m+2|=6\end{cases}\\ \begin{cases}|m+2|\le|-2+m|\\ |-2+m|=6\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}|m+2|\ge|-2+m|\\ m=4\vee m=-8\end{cases}\\ \begin{cases}|m+2|\le|-2+m|\\ m=-4\vee m=8\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=4\\ m=-4\end{array}\right. \text{(không thỏa (*))}$$

Vậy tích các giá trị của tham số m thỏa yêu cầu bài toán là: $-3.3=-9$.

Câu 48. Chọn B

Ta thấy hàm số $f(x)=\dfrac{x+m}{x+2}$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, $f(0)=\dfrac{m}{2}; f(1)=\dfrac{m+1}{3}$ và đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x=-m$.

Trường hợp 1: Nếu $0\le -m\le 1\Leftrightarrow -1\le m\le 0$ thì $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|=\max\left\{\left|\dfrac{m}{2}\right|;\left|\dfrac{m+1}{3}\right|\right\}$;

$\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=0$.

Do đó $2\max\limits_{[0;1]}|f(x)|+3\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=6\Rightarrow\left[\begin{array}{l}2\left|\dfrac{m}{2}\right|=6\\2\left|\dfrac{m+1}{3}\right|=6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\pm 6\\m=8\\m=-10\end{array}\right.$ (không thỏa mãn).

Trường hợp 2: Nếu $-m<0\Leftrightarrow m>0$ thì $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|=\max\left\{\dfrac{m}{2};\dfrac{m+1}{3}\right\}$;

$\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=\min\left\{\dfrac{m}{2};\dfrac{m+1}{3}\right\}$.

Ta có $\dfrac{m}{2}-\dfrac{m+1}{3}=\dfrac{m-2}{6}$ suy ra $\left\{\begin{array}{l}\dfrac{m}{2}\ge\dfrac{m+1}{3}\text{ khi }m\ge 2\\\dfrac{m}{2}<\dfrac{m+1}{3}\text{ khi }0<m<2\end{array}\right.$.

Với $m\ge 2$, ta có

$$2\max_{[0;1]}|f(x)|+3\min_{[0;1]}|f(x)|=6\Leftrightarrow m+m+1=6\Leftrightarrow m=\frac{5}{2}\text{ (thỏa mãn).}$$

Với $0<m<2$, ta có

$$2\max_{[0;1]}|f(x)|+3\min_{[0;1]}|f(x)|=6\Leftrightarrow 2.\frac{m+1}{3}+3.\frac{m}{2}=6\Leftrightarrow m=\frac{32}{13}\text{ (không thỏa mãn).}$$

Trường hợp 3: Nếu $-m>1\Leftrightarrow m<-1$ thì

$$\max_{[0;1]}|f(x)|=\max\left\{-\frac{m}{2};-\frac{m+1}{3}\right\};\ \min_{[0;1]}|f(x)|=\min\left\{-\frac{m}{2};-\frac{m+1}{3}\right\}.$$

Ta có $-\dfrac{m}{2}+\dfrac{m+1}{3}=\dfrac{-m+2}{6}>0,\forall m<-1$ suy ra $-\dfrac{m}{2}>-\dfrac{m+1}{3}$ khi $m<-1$. Do đó:

$$2\max_{[0;1]}|f(x)|+3\min_{[0;1]}|f(x)|=6\Leftrightarrow 2.\frac{-m}{2}+3.\frac{-m-1}{3}=6\Leftrightarrow m=-\frac{7}{2}\text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu 49. Chọn C

Xét hàm số $y=g(x)$ trên đoạn $[-4;4]$.

Ta có $\left\{\begin{array}{l}x\in[-4;4]\Rightarrow -x\in[-4;4]\\g(-x)=g(x)\end{array}\right.\Rightarrow y=g(x)$ là hàm số chẵn trên $[-4;4]$.

Do đó: $\max\limits_{[-1;1]}g(x)=\max\limits_{[0;1]}g(x)=\dfrac{11}{2}$.

Xét $x\in[0;1]$ khi đó: $g(x)=f(x^3+3x)+f(m)$

Đặt $u=x^3+3x$, $u'=3x^2+3>0,\forall x\in[0;1]$. Suy ra $u(0)\le u\le u(1)\Leftrightarrow 0\le u\le 4$.

Hàm số trở thành $h(u)=f(u)+f(m)$ với $u\in[0;4]$.

$\max\limits_{[0;1]} g(x)=\max\limits_{[0;4]} h(u)=f(0)+f(m)=3+f(m)$

Mà $\max\limits_{[0;1]} g(x)=\dfrac{11}{2} \Rightarrow 3+f(m)=\dfrac{11}{2}\Leftrightarrow f(m)=\dfrac{5}{2}$.

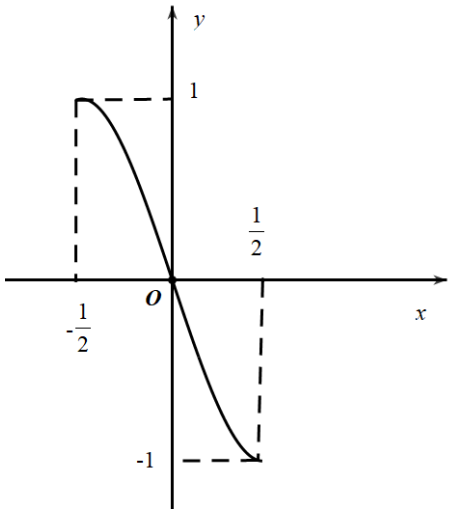
x	-4		-3		-1		0		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-4	↗	4	↘	2	↗	3	↘	-3	↗	1

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ suy ra có 4 giá trị của m.

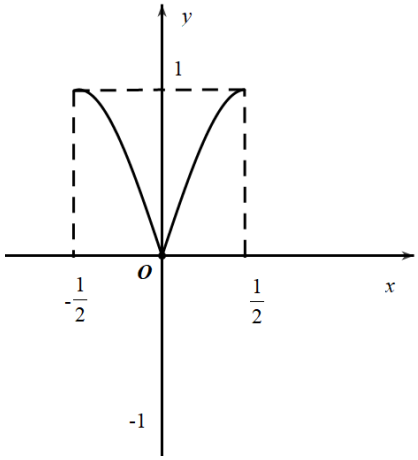
Câu 50. Chọn A

Với $m\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$ điều kiện xác định của $g(x)$ là: $1-2|x|\ge 0\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}\le x\le\dfrac{1}{2}$.

Trên tập $D=\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$ hàm số $f(x)$ có đồ thị



Do đó đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ có dạng :



Ta có $0 \le \left| f\left(x \right) \right| \le 1, \forall x \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2} \right]$ và $0 \le 1-2\left| x \right| \le 1 \Rightarrow -1 \le -\sqrt{1-2\left| x \right|} \le 0$

$\Rightarrow -1 \le \left| f\left(x \right) \right| - \sqrt{1-2\left| x \right|} \le 1$.

Do đó $\min\limits_{\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2} \right]} g\left(x \right) = -1 + f\left(\frac{\sqrt{1+2m}-\sqrt{1-2m}}{2\sqrt{2}} \right)$ vị trí $x = 0$.

Theo yêu cầu bài toán $\min\limits_{\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2} \right]} g\left(x \right) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{\sqrt{1+2m}-\sqrt{1-2m}}{2\sqrt{2}} \right) = 1$.

Đặt $t = \frac{\sqrt{1+2m}-\sqrt{1-2m}}{2\sqrt{2}}$, $m \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2} \right]$.

Ta có $t' = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+2m}} + \frac{1}{\sqrt{1-2m}} \right) > 0, \forall m \in \left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2} \right) \Rightarrow t$ đồng biến trên $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2} \right]$

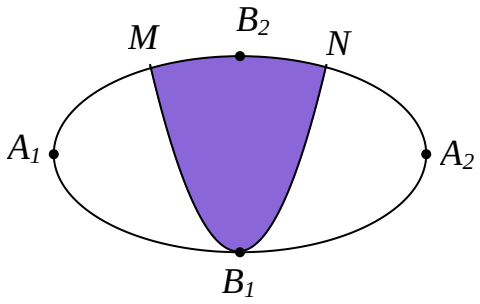
$\Rightarrow -\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2}$.

Khi đó $f\left(t \right) = 1 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1+2m}-\sqrt{1-2m}}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$.

Vậy $m = -\frac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

DẠNG 5 Ứng dụng của min-max

Câu 1: Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Người ta chia elip bởi parabol có đỉnh B_1, trục đối xứng B_1B_2 và đi qua các điểm M, N. Sau đó sơn phần tô đậm với giá 200.000 đồng/m^2 và trang trí đèn led phần còn lại với giá 500.000 đồng/m^2. Hỏi kinh phí sử dụng gần nhất với giá trị nào dưới đây? Biết rằng $A_1A_2 = 4m, B_1B_2 = 2m, MN = 2m$.



A. 2.341.000 đồng. **B.** 2.057.000 đồng. **C.** 2.760.000 đồng. **D.** 1.664.000 đồng.

Câu 2: Một chất điểm chuyển động thẳng với quãng đường biến thiên theo thời gian bởi quy luật $s(t) = t^3 - 4t^2 + 12$, trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Vận tốc của chất điểm đó đạt giá trị bé nhất khi t bằng bao nhiêu?

A. 2. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** 0. **D.** $\frac{4}{3}$.

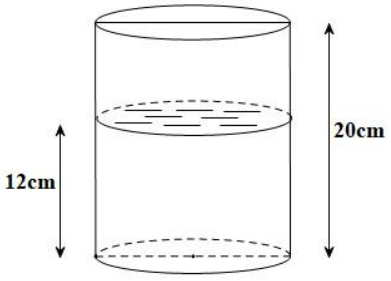
Câu 3: Tính diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp trong nửa đường tròn có bán kính $10cm$.

A. $160cm^2$. **B.** $100cm^2$. **C.** $80cm^2$. **D.** $200cm^2$.

Câu 4: Người ta muốn xây một cái bể hình hộp đứng có thể tích $V = 18(m^3)$, biết đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp 3 lần chiều rộng và bể không có nắp. Hỏi cần xây bể có chiều cao h bằng bao nhiêu mét để nguyên vật liệu xây dựng là ít nhất?

A. $2(m)$. **B.** $\frac{5}{2}(m)$. **C.** $1(m)$. **D.** $\frac{3}{2}(m)$.

Câu 5: Một cốc hình trụ có bán kính đáy là $2cm$, chiều cao $20cm$. Trong cốc đang có một ít nước, khoảng cách giữa đáy cốc và mặt nước là $12cm$. Một con quạ muốn uống được nước trong cốc thì mặt nước phải cách miệng cốc không quá $6cm$. Con quạ thông minh mổ những viên đá hình cầu có bán kính $0,6cm$ thả vào cốc để mực nước dâng lên. Để uống được nước thì con quạ cần thả vào cốc ít nhất bao nhiêu viên đá?



A. 30. **B.** 27. **C.** 28. **D.** 29.

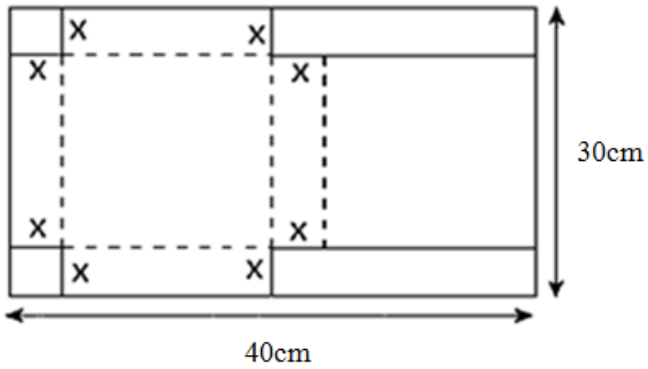
Câu 6: Một sợi dây có chiều dài $28m$ được cắt thành hai đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất?

A. $\frac{56}{4+\pi}$. **B.** $\frac{112}{4+\pi}$. **C.** $\frac{84}{4+\pi}$. **D.** $\frac{92}{4+\pi}$.

Câu 7: Để chuẩn bị cho đợt phát hành sách giáo khoa mới, một nhà xuất bản yêu cầu xưởng in phải đảm bảo các yêu cầu sau: Mỗi cuốn sách giáo khoa cần một trang chữ có diện tích là $384cm^2$, lề trên và lề dưới là $3\,cm$, lề trái và lề phải là $2\,cm$. Muốn chi phí sản xuất là thấp nhất thì xưởng in phải in trang sách có kích thước tối ưu nhất, với yêu cầu chất lượng giấy và mực in vẫn đảm bảo. Tìm chu vi của trang sách.

A. $82\,cm$. **B.** $100\,cm$. **C.** $90\,cm$. **D.** $84\,cm$.

Câu 8: Với tấm nhôm hình chữ nhật có kích thước $30cm;\ 40cm$. Người ta phân chia tấm nhôm như hình vẽ và cắt bỏ một phần để được gấp lên một cái hộp có nắp. Tìm x để thể tích hộp lớn nhất.



A. $\frac{35+5\sqrt{13}}{3}cm$. **B.** $\frac{35-4\sqrt{13}}{3}cm$. **C.** $\frac{35-5\sqrt{13}}{3}cm$. **D.** $\frac{35+4\sqrt{13}}{3}cm$.

Câu 9: Ông A dự định sử dụng hết $6,5\,\mathrm{m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng khối hình hộp chữ nhật chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng. Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. $2,26\,\mathrm{m}^3$. **B.** $1,01\,\mathrm{m}^3$. **C.** $1,33\,\mathrm{m}^3$. **D.** $1,50\,\mathrm{m}^3$.

Câu 10: Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\frac{1}{3}t^3+6t^2$ với t là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. 243. **B.** 144. **C.** 27. **D.** 36.

Câu 11: Một bác nông dân cần xây dựng một hố ga không có nắp dạng hình hộp chữ nhật có thể tích $3200\,\mathrm{cm}^2$, tỉ số giữa chiều cao của hố và chiều rộng của đáy bằng 2. Hãy xác định diện tích của đáy hố ga để khi xây tiết kiệm nguyên vật liệu nhất?

A. $1200\,\mathrm{cm}^2$. **B.** $120\,\mathrm{cm}^2$. **C.** $160\,\mathrm{cm}^2$. **D.** $1600\,\mathrm{cm}^2$.

Câu 12: Ông An có một khu đất hình elip với độ dài trục lớn 10 m và độ dài trục bé 8 m. Ông An muốn chia khu đất thành hai phần, phần thứ nhất là một hình chữ nhật nội tiếp elip dùng để xây bể cá

cảnh và phần còn lại dùng để trồng hoa. Biết chi phí xây bể cá là 1000000 đồng trên $1m^2$ và chi phí trồng hoa là 1200000 đồng trên $1m^2$. Hỏi ông An có thể thiết kế xây dựng như trên với tổng chi phí thấp nhất gần nhất với số nào sau đây?

A. 67398224 đồng. **B.** 67593346 đồng. **C.** 63389223 đồng. **D.** 67398228 đồng.

Câu 13: Một cái hồ rộng có hình chữ nhật. Tại một góc nhỏ của hồ người ta đóng một cái cọc ở vị trí K cách bờ AB là 1 m và cách bờ AC là 8 m, rồi dùng một cây sào ngăn một góc nhỏ của hồ để thả bèo. Tính chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB, AC và cây cọc K.

A. $\frac{5\sqrt{65}}{4}$. **B.** $5\sqrt{5}$. **C.** $9\sqrt{2}$. **D.** $\frac{5\sqrt{71}}{4}$.

Câu 14: Một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 25\text{m}$, chiều rộng $AD = 20\text{m}$ được chia thành hai phần bằng nhau bởi vạch chắn MN (M, N lần lượt là trung điểm BC và AD). Một đội xây dựng làm một con đường đi từ A đến C qua vạch chắn MN, biết khi làm đường trên miền $ABMN$ mỗi giờ làm được 15m và khi làm trong miền $CDNM$ mỗi giờ làm được 30m. Tính thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C.

A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\frac{10+2\sqrt{725}}{30}$. **C.** $\frac{20+\sqrt{725}}{30}$. **D.** 5.

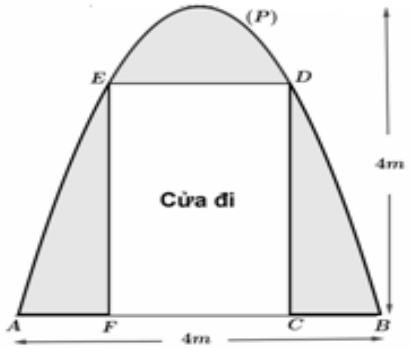
Câu 15: Để thiết kế một chiếc bể cá không có nắp đậy hình hộp chữ nhật có chiều cao 60cm, thể tích là 96.000cm^3, người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành là 70.000 đồng/m^2 và loại kính để làm mặt đáy có giá thành là 100.000 đồng/m^2. Chi phí thấp nhất để làm bể cá là

A. 283.000 đồng. **B.** 382.000 đồng. **C.** 83.200 đồng. **D.** 832.000 đồng.

Câu 16: Một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích bằng 48 và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chất liệu làm đáy và 4 mặt bên của hộp có giá thành gấp ba lần giá thành của chất liệu làm nắp hộp. Gọi h là chiều cao của hộp để giá thành của hộp là thấp nhất. Biết $h = \frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tổng $m+n$ là

A. 12. **B.** 13. **C.** 11. **D.** 10.

Câu 17: Một chiếc cổng có hình dạng là một Parabol (P) có kích thước như hình vẽ, biết chiều cao cổng bằng 4 m, $AB = 4$ m. Người ta thiết kế cửa đi là một hình chữ nhật $CDEF$, phần còn lại dùng để trang trí. Biết chi phí để trang trí phần tô đậm là $1.000.000$ đồng/m^2. Hỏi số tiền ít nhất dùng để trang trí phần tô đậm gần với số tiền nào dưới đây?



A. 4.450.000 đồng. **B.** 4.605.000 đồng. **C.** 4.505.000 đồng. **D.** 4.509.000 đồng.

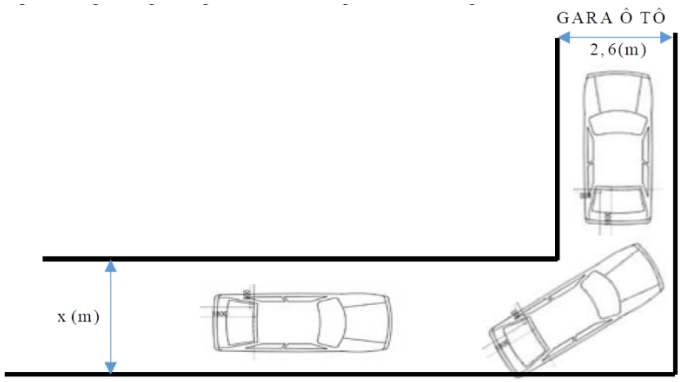
Câu 18: Một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích bằng 48 và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chất liệu làm đáy và 4 mặt bên của hộp có giá thành gấp ba lần giá thành của chất liệu làm nắp hộp. Gọi h là chiều cao của hộp để giá thành của hộp là thấp nhất. Biết $h=\frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tổng $m+n$ là

A. 12. **B.** 13. **C.** 11. **D.** 10.

Câu 19: Một trang trại rau sạch mỗi ngày thu hoạch được một tấn rau. Mỗi ngày, nếu bán rau với giá 30000 đồng/kg thì hết rau sạch, nếu giá bán rau tăng 1000 đồng/kg thì số rau thừa tăng thêm 20 kg. Số rau thừa này được thu mua làm thức ăn chăn nuôi với giá 2000 đồng/kg. Hỏi tiền bán rau nhiều nhất trang trại có thể thu được mỗi ngày là bao nhiêu?

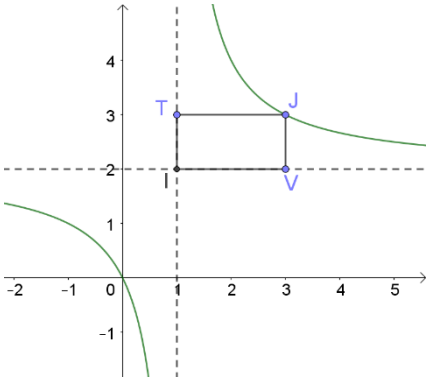
A. 32400000 đồng. **B.** 34400000 đồng. **C.** 32420000 đồng. **D.** 34240000 đồng.

Câu 20: Hình vẽ bên dưới mô tả đoạn đường đi vào GARA Ô TÔ nhà cô Hiền. Đoạn đường đầu tiên có chiều rộng bằng $x\,(\text{m})$, đoạn đường thẳng vào cổng GARA có chiều rộng $2,6\,(\text{m})$. Biết kích thước xe ô tô là $5\text{m}\times 1,9\text{m}$. Để tính toán và thiết kế đường đi cho ô tô người ta coi ô tô như một khối hộp chữ nhật có kích thước chiều dài $5\,(\text{m})$, chiều rộng $1,9\,(\text{m})$. Hỏi chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên gần nhất với giá trị nào trong các giá trị bên dưới để ô tô có thể đi vào GARA được?



A. $x=3,7\,(\text{m})$. **B.** $x=2,6\,(\text{m})$. **C.** $x=3,55\,(\text{m})$. **D.** $x=4,27\,(\text{m})$.

Câu 21: Cho hàm số $y=\frac{2x}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm J thay đổi thuộc (C) như hình vẽ bên. Hình chữ nhật $ITJV$ có chu vi nhỏ nhất bằng:



A. $2\sqrt{2}$. **B.** 6. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** 4.

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0)=3$, $f'(2)=-2018$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(x+2017)+2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(0;2)$. **B.** $(\infty;-2017)$. **C.** $(-2017;0)$. **D.** $S=(2017;+\infty)$.

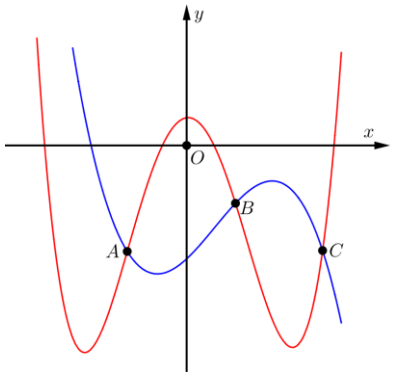
Câu 23: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x^2+4}$ với $a\neq 0$ và a,b là các số thực. Biết rằng $\max\limits_{x\in R} y=5$ và $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} y=-2$. Giá trị của biểu thức $P=a^2b$ bằng

A. 7680. **B.** 1920. **C.** 3840. **D.** -1920.

Câu 24: L;,Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{34}{\sqrt{\left(x^3-3x+2m\right)^2+1}}$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 2. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

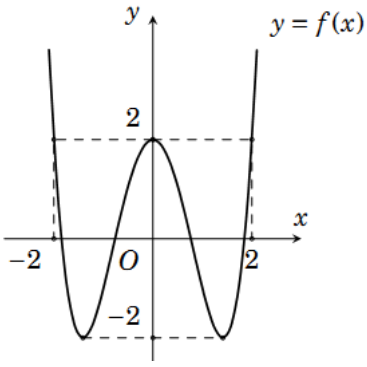
A. 8. **B.** -8. **C.** -6. **D.** -1.

Câu 25: Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là hai hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong nét đậm, đồ thị hàm số $y=g'(x)$ là đường cong nét mảnh như hình vẽ. Gọi ba giao điểm A,B,C của $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ trên hình vẽ lần lượt có hoành độ là a,b,c. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x)=f(x)-g(x)$ trên đoạn $[a;c]$?



A. $\min\limits_{[a;c]} h(x)=h(0)$. **B.** $\min\limits_{[a;c]} h(x)=h(a)$. **C.** $\min\limits_{[a;c]} h(x)=h(b)$. **D.** $\min\limits_{[a;c]} h(x)=h(c)$.

Câu 26: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[0;20]$ sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=\left|\left|2f(x)+m+4\right|-f(x)-3\right|$ trên đoạn $[-2;2]$ không bé hơn 1?



A. 18. **B.** 19.
C. 20. **D.** 21.

Câu 27: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x+2m}{x+1}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m sao cho $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|+\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=3$. Số phần tử của S là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 28: Cho hàm số $y=\left|x^4-2x^2+3m\right|$ với m là tham số. Biết rằng có đúng hai giá trị m_1,m_2 của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[-1;2\right]$ bằng 2021. Tính giá trị $\left|m_1-m_2\right|$

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{4052}{3}$. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** $\frac{4051}{3}$.

Câu 29: Cho hàm số $f\left(x\right)=\frac{2x^4-mx-4}{x+2}$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m sao cho $\min\limits_{\left[-1;1\right]}\left|f\left(x\right)\right|>\frac{3}{4}$. Số phần tử của S là

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

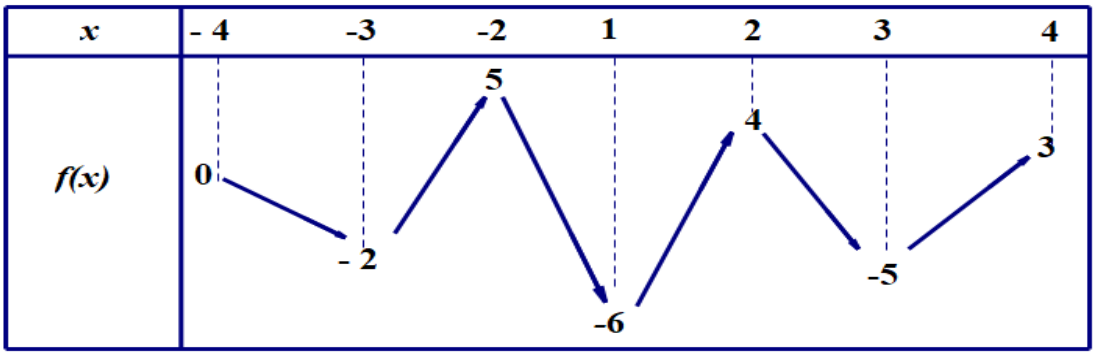
Câu 30: Cho hàm số $f\left(x\right)=\frac{\log x+m}{\log x+2}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\min\limits_{\left[\frac{1}{10};1\right]}\left|f\left(x\right)\right|+\max\limits_{\left[\frac{1}{10};1\right]}\left|f\left(x\right)\right|=2$. Tổng số phần tử của S bằng

A. $-\frac{2}{3}$. **B.** 2. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{10}{3}$.

Câu 31: Cho hàm số $f(x)=\left|3e^{4x}-4e^{3x}-24e^{2x}+48e^{x}+m\right|$. Gọi A,B lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $\left[0;\ln 2\right]$. Gọi S là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số m thuộc $\left[-23;-10\right]$ thỏa mãn $A\le 3B$. Tổng các phần tử của tập S bằng

A. -33. **B.** 0. **C.** -111. **D.** -74.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[-4;4\right]$ và có bản biến thiên như hình vẽ bên dưới



Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số $m\in\left[-4;4\right]$ để hàm số $g(x)=\left|f(x^3+2x)+3f(m)\right|$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $\left[-1;1\right]$ bằng 8 ?

A. 12. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 10.

Câu 33: Cho a,b,c. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $H=\frac{3a^4+12b^4+25c^3+2}{\left(a+\sqrt{2}b+c\right)^3}$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $A\left(\frac{5}{6};2\right)$. **B.** $\left[\frac{13}{18};2\right]$. **C.** $\left[\frac{2}{3};2\right]$. **D.** $\left[0;\frac{1}{3}\right]$.

Câu 34: Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số *m* sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{mx-\sqrt{x+2019}}{x+2020}$ trên tập $D=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,1\le|x|\le 2018\right\}$ không vượt quá $\dfrac{1}{2}$. Số các phần tử của *S* là:

A. 2110. **B.** 2108. **C.** 1054. **D.** 1009.

Câu 35: Cho hàm số $f(t)=\dfrac{2t+1}{t-2}$ và x,y là các số thực thỏa mãn $5x^2+2xy+y^2=9$. Giá trị lớn nhất của $f\left(\dfrac{6x-6}{4x-y-9}\right)$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** -3. **D.** $\dfrac{-1}{3}$.

Câu 36: Cho hàm số $y=\left(x^2+x+m\right)^2$. Tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để $\min\limits_{[-2;2]} y=4$ bằng

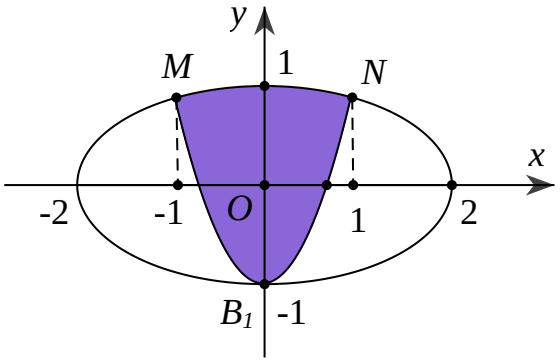
A. $-\dfrac{23}{4}$. **B.** $-\dfrac{31}{4}$. **C.** -8. **D.** $\dfrac{9}{4}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.D	3.B	4.D	5.C	6.B	7.B	8.C	9.D	10.D
11.C	12.A	13.B	14.A	15.C	16.C	17.D	18.C	19.C	20.A
21.C	22.B	23.B	24.B	25.C	26.B	27.A	28.D	29.C	30.C
31.A	32.B	33.C	34.A	35.A	36.A				

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn A



Phương trình đường Elip là: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$. Diện tích hình Elip là $S_{(E)}=\pi a.b=2\pi\left(m^2\right)$

Tọa độ giao điểm M,N là nghiệm hệ: $\begin{cases}x=\pm1\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm1\\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$.

Vậy $M\left(-1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\mathrm{N}\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Parabol (P) đối xứng qua Oy có dạng $y=ax^2+c\left(a\neq0\right)$.

Vì $B_1(0;-1),N\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\in(P)\Rightarrow\begin{cases}c=-1\\ a=\frac{\sqrt{3}}{2}+1\end{cases}\Rightarrow(P):y=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)x^2-1$.

Diện tích phần tô đậm là: $S_1=2\int_0^1\left[\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)x^2+1\right]dx$

• Tính $I_1=\int_0^1\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}dx$. Đặt $\frac{x}{2}=\sin t\Rightarrow\frac{dx}{2}=\cos tdx.$ Đổi cận $\begin{cases}x=0\to t=0\\ x=1\to t=\frac{\pi}{6}\end{cases}$.

Suy ra $I_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1-\sin^2 t}.2\cos t dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}2\cos^2 t dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\left(1+\cos 2t\right)dt=\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}$.

• Tính $I_2=\int\limits_0^1\left[-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)x^2+1\right]dx=\left[-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)\frac{x^3}{3}+x\right]\Big|_0^1=-\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{2}{3}$.

Vậy $S_1=2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{4}{3}\ \text{m}^2$.

Tổng số tiền sử dụng là: $S_1.200000+\left(S_{(E)}-S_1\right).500000\approx 2.341.000$ đồng

Câu 2: Chọn D

$v(t)=s'(t)=3t^2-8t$. $v'(t)=6t-8$. Có $v'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{4}{3}$.

t	0		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
v'		$-$	0	$+$	
v	0	↘	$-\frac{16}{3}$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{[0;+\infty)}v=v\left(\frac{4}{3}\right)=-\frac{16}{3}$.

Vậy vận tốc của chất điểm đó đạt giá trị bé nhất khi $t=\frac{4}{3}$.

Câu 3: Chọn B

Đặt $OA=x\ \ (0<x<10)$. Suy ra: $AB=2x;\ AD=\sqrt{OD^2-OA^2}=\sqrt{100-x^2}$.

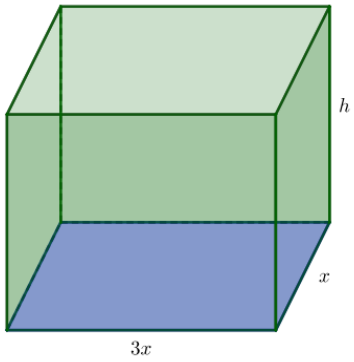
Khi đó: $S_{ABCD}=S=AB.AD=2x.\sqrt{100-x^2}=2\sqrt{100x^2-x^4}$

Suy ra: $S'=\frac{200x-4x^3}{\sqrt{100x^2-x^4}}\Rightarrow S'=0\Leftrightarrow 200x-4x^3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=5\sqrt{2}\\x=-5\sqrt{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=5\sqrt{2}$

x	0		$5\sqrt{2}$		10
$S(x)$		$+$	0	$-$	
$S'(x)$		↗	100	↘	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $ABCD$ bằng $100\,\text{cm}^2$ khi $x=5\sqrt{2}\,\text{cm}$.

Câu 4: Chọn D



Gọi $x\ (x>0)$ là chiều rộng hình chữ nhật đáy bể, suy ra chiều dài hình chữ nhật đáy bể là $3x$.

$V=h.x.3x=h.3x^2=18\ \ (x>0)$.

$\Rightarrow h=\dfrac{18}{3x^2}=\dfrac{6}{x^2}$,

Gọi P là diện tích xung quanh cộng với diện tích một đáy bể của hình hộp chữ nhật.

Nguyên vật liệu ít nhất khi P nhỏ nhất.

$P=2hx+2.h.3x+3x^2=2.\dfrac{6}{x^2}.x+2.\dfrac{6}{x^2}.3x+3x^2=\dfrac{48}{x}+3x^2$.

Đặt $f(x)=\dfrac{48}{x}+3x^2$, $(x>0)$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{-48}{x^2}+6x$, $f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{-48}{x^2}+6x=0\Leftrightarrow x^3=8\Leftrightarrow x=2$.

Bảng biến thiên:

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	36	↗	

Suy ra vật liệu ít nhất khi $h=\dfrac{6}{x^2}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}(m)$.

Câu 5: **Chọn C**

Gọi bán kính hình trụ là r, bán kính viên đá hình cầu là R.

Thể tích một viên đá là $\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi.(0,6)^3$.

Gọi n là số viên đá con quạ thả vào cốc, n nguyên dương.

Thể tích nước cần đổ thêm vào cốc để mực nước cách miệng cốc $6cm$ là $\pi.r^2.2=8\pi$.

Để con quạ uống được nước thì lượng đá bỏ vào cốc phải làm mực nước dâng lên cách miệng cốc không quá $6cm$ nên ta phải có: $n.\dfrac{4}{3}.\pi.(0,6)^3\ge 8\pi\Leftrightarrow n\ge\dfrac{24}{4.(0,6)^3}\Leftrightarrow n\ge\dfrac{250}{9}$.

Do n nguyên dương nên suy ra $n\ge 28$.

Vậy con quạ cần thả vào cốc ít nhất 28 viên đá.

Câu 6: **Chọn B**

Gọi l_1, l_2 (m) lần lượt là chu vi hình vuông và hình tròn. $(0<l_1,l_2<28)$

Gọi a, R (m) lần lượt là cạnh của hình vuông và bán kính của hình tròn. Khi đó ta có:

$l_1+l_2=28$; $l_1=4a\Leftrightarrow a=\frac{l_1}{4}$; $l_2=2\pi R\Leftrightarrow R=\frac{l_2}{2\pi}=\frac{28-l_1}{2\pi}$

Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là:

$S=a^2+\pi.R^2=\frac{l_1^2}{16}+\pi.\left(\frac{28-l_1}{2\pi}\right)^2$, $0<l_1<28$

Yêu cầu bài toán tương đương với tìm $l_1\in(0,28)$ để S đạt giá trị nhỏ nhất. Ta có:

$S'=\frac{l_1}{8}-\left(\frac{28-l_1}{2\pi}\right)=0\Leftrightarrow l_1=\frac{112}{\pi+4}$

Lập bảng biến thiên ta được S đạt giá trị nhỏ nhất tại $l_1=\frac{112}{\pi+4}$.

Câu 7: Chọn B

Ta thấy muốn chi phí sản xuất nhỏ nhất thì kích thước tối ưu là khi diện tích mỗi trang sách phải nhỏ nhất đồng thời vẫn bảo đảm yêu cầu đề ra.

Gọi x, y thứ tự là chiều dài và chiều rộng của trang sách, đơn vị cm, điều kiện: $x>6; y>4$.

Diện tích phần chữ trên mỗi trang là:

$(x-6)(y-4)=384\Leftrightarrow xy=4x+6y+360\geq 2\sqrt{4x.6y}+360$.

Khi đó $xy-4\sqrt{6xy}-360\geq 0\Rightarrow\sqrt{xy}\geq 10\sqrt{6}\Rightarrow xy\geq 600$, dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}xy=600\\4x=6y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=30\\y=20\end{cases}$.

Vậy chu vi trang sách khi sản xuất theo kích thước tối ưu là $2(x+y)=100\,(cm)$.

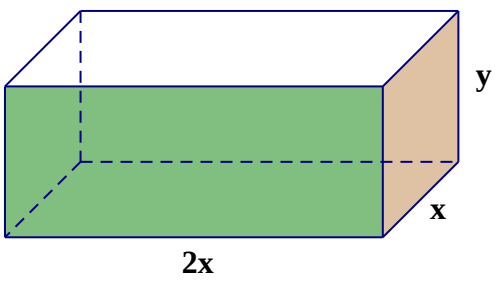
Câu 8: Chọn C

Khối hộp chữ nhật thu được có kích thước là $30-2x;20-x;x$ với $x\in[0;15]$.

Khi đó $V=x(30-2x)(20-x)=f(x)\leq\max_{[0;15]}f(x)=f\left(\frac{35-5\sqrt{13}}{3}\right)$.

Dấu $"="$ đạt tại $x=\frac{35-5\sqrt{13}}{3}$.

Câu 9: Chọn D



Gọi chiều rông của bể cá là $x(\mathrm{m})$, chiều cao là $y(\mathrm{m})(x,y>0)$, khi đó chiều dài bể cá là $2x(\mathrm{m})$. Diên tích kính sử dụng là $S=2x^2+2xy+4xy(\mathrm{m}^2)$.

Theo bài ra ta có: $2x^2+2xy+4xy=6,5\Rightarrow y=\dfrac{6.5-2x^2}{6x}=\dfrac{13-4x^2}{12x}$.

Thể tích bể cá là $V(x)=2x^2.\dfrac{13-4x^2}{12x}=\dfrac{x(13-4x^2)}{6}(\mathrm{m}^3)$.

Ta xét hàm số $V(x)=\dfrac{x(13-4x^2)}{6}$ với $x\in\left(0;\dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)$.

Suy ra $V'(x)=\dfrac{13-12x^2}{6}\Rightarrow V'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{39}}{6}$.

Ta có $V'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $x=\dfrac{\sqrt{39}}{6}$ nên hàm số đạt cực đại tại điểm $x=\dfrac{\sqrt{39}}{6}$.

Trên khoảng $\left(0;\dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)$hàm số $V(x)$ chỉ có một điểm cực đại nên hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=\dfrac{\sqrt{39}}{6}$.

Thể tích của bể cá có giá trị lớn nhất là $\max\limits_{\left(0;\frac{\sqrt{13}}{2}\right)}V(x)=V\left(\dfrac{\sqrt{39}}{6}\right)=\dfrac{13\sqrt{39}}{54}\approx 1,50(\mathrm{m}^3)$.

Vậy bể cá có dung tích lớn nhất bằng $1,50\ \mathrm{m}^3$.

Cách 2: Xử lý tìm giá trị lớn nhất của $V(x)$ bằng bất đẳng thức Cauchy.

Theo cách 1, ta tính được $V(x)=\dfrac{x(13-4x^2)}{6}$ với $x\in\left(0;\dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)$.

Ta có $V(x)=\dfrac{x(13-4x^2)}{6}=\dfrac{1}{6}\sqrt{\dfrac{8x^2(13-4x^2)(13-4x^2)}{8}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$8x^2(13-4x^2)(13-4x^2)\le\left(\frac{8x^2+13-4x^2+13-4x^2}{3}\right)^3=\frac{26^3}{27}.$$

Suy ra $V(x) \le \frac{1}{6}\sqrt{\frac{26^3}{8.27}} = \frac{13\sqrt{39}}{54} \approx 1,50$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $8x^2 = 13 - 4x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{13}{12}} = \frac{\sqrt{39}}{6}$.

Vậy bể cá có dung tích lớn nhất bằng $1,50\ \ m^3$.

Câu 10: Chọn D

Ta có $v(t) = s'(t) = \left(-\frac{1}{3}t^3 + 6t^2\right)' = -t^2 + 12t$. Tập xác định $\mathrm{D} = \mathbb{R}$.

Vì $-t^2 + 12t = -(t-6)^2 + 36 \le 36$ với mọi $t > 0$.

Suy ra $\max\limits_{t>0} v(t) = 36$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(t-6)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 6$.

Vậy trong khoảng thời gian 9 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng 36.

Câu 11: Chọn C

Gọi x, y lần lượt là chiều rộng và chiều dài của đáy hố ga; h là chiều cao của hố ga $(x, y, h > 0)$

Ta có: $h = 2x$

$$V = xyh = 2x^2y = 3200 \Rightarrow y = \frac{1600}{x^2}$$

Diện tích bề mặt sử dụng của hố ga không nắp là $S = xy + 2xh + 2yh = 4x^2 + 5xy = 4x^2 + \frac{8000}{x}$

Đặt $f(x) = 4x^2 + \frac{8000}{x}$. Ta có $f'(x) = 8x - \frac{8000}{x^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$

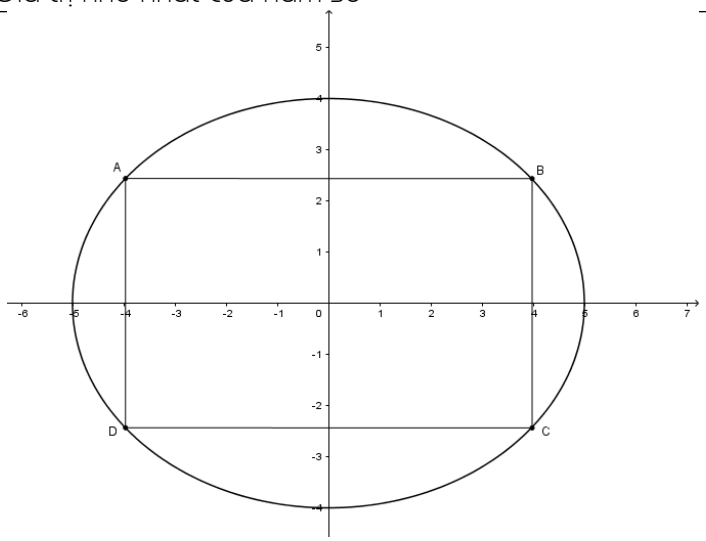
Bảng biến thiên

x	0		10		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	1200	↗	

Vậy S nhỏ nhất khi $x = 10 \Rightarrow y = 16$.

Diện tích đáy hố ga khi đó là $160\,\mathrm{cm}^2$.

Câu 12: Chọn A



Gắn mảnh vườn hình elip của ông An vào hệ trục tọa độ như hình vẽ. Độ dài trục lớn 10m và độ dài trục bé bằng 8m nên ta có $a=5$ và $b=4$.

Phương trình của elip là: $(E):\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1.$

Diện tích của elip là: $S_{(E)}=\pi ab=20\pi$.

Hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp elip. Đặt $AB=2x\ (0<x<5)\Rightarrow AD=8\sqrt{1-\dfrac{x^2}{25}}$.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là: $S_{ABCD}=16x\sqrt{1-\dfrac{x^2}{25}}$.

Diện tích phần còn lại trồng hoa là: $S_{hoa}=20\pi-16x\sqrt{1-\dfrac{x^2}{25}}$.

Tổng chi phí xây dựng là:

$$T=16000000.x\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}+1200000.\left(20\pi-16x\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}\right)=24000000\pi-3200000x\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}.$$

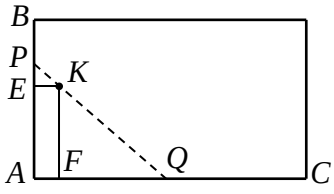
Mặt khác ta có: $16000000.\dfrac{x}{5}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{25}}\le 16000000.\dfrac{\dfrac{x^2}{25}+1-\dfrac{x^2}{25}}{2}=8000000$.

$$\Rightarrow T=24000000\pi-3200000x\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}\ge 24000000\pi-8000000=67398223.69.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{x}{5}=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{25}}\Leftrightarrow x=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Vậy tổng chi phí thiết kế xây dựng thấp nhất gần với số 67398224.

Câu 13: Chọn B



Đặt $AP=a$, $AQ=b\ (a,b>0)$. Gọi E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của K xuống AB và AC. Suy ra $KE=1$, $KF=8$.

Ta có: $\frac{KE}{AQ}=\frac{PK}{PQ};\frac{KF}{AP}=\frac{QK}{PQ}\Rightarrow\frac{KF}{AP}+\frac{KE}{AQ}=1$ hay $\frac{8}{a}+\frac{1}{b}=1$.

Cách 1:

Ta có: $PQ^2=a^2+b^2$. Vì $\frac{8}{a}+\frac{1}{b}=1\Rightarrow\frac{8k}{a}+\frac{k}{b}=k\ \forall k>0$.

$$a^2+b^2+k=\left(a^2+\frac{8k}{a}\right)+\left(b^2+\frac{k}{b}\right)=\left(a^2+\frac{4k}{a}+\frac{4k}{a}\right)+\left(b^2+\frac{k}{2b}+\frac{k}{2b}\right)\ge 3\sqrt[3]{16k^2}+3\sqrt[3]{\frac{k^2}{4}}.$$

Suy ra PQ nhỏ nhất $\Leftrightarrow a^2+b^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=\frac{4k}{a}\\ b^2=\frac{k}{2b}\\ \frac{8}{a}+\frac{1}{b}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=250\\ a=10\\ b=5\end{cases}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của PQ là $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$. Từ đó suy ra chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB, AC và cây cọc K là $5\sqrt{5}$.

Cách 2:

Vì $\frac{8}{a}+\frac{1}{b}=1\Rightarrow b=\frac{a}{a-8}$ với $a>8$. Khi đó $PQ^2=a^2+b^2=a^2+\left(\frac{a}{a-8}\right)^2$ với $a>8$.

Xét hàm số $f(a)=a^2+\left(\frac{a}{a-8}\right)^2$ với $a>8$.

Ta có $f'(a)=2a+\frac{2a}{a-8}.\frac{-8}{(a-8)^2}=\frac{2a\left[(a-8)^3-8\right]}{(a-8)^3}$; $f'(a)=0\Rightarrow a=10$.

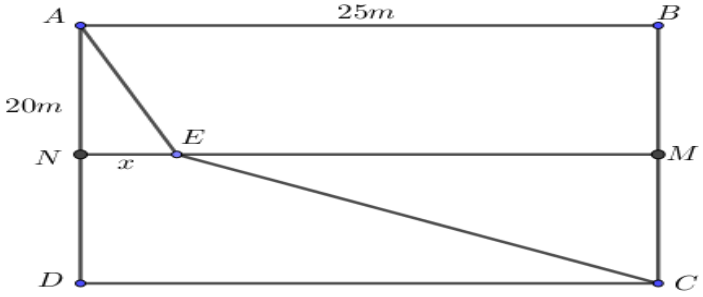
Bảng biến thiên của $f(a)$:

a	8		10		$+\infty$
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	$+\infty$	↘	125	↗	$+\infty$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(a)$ là 125 khi $a=10$.

Từ đó suy ra chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB, AC và cây cọc K là $\sqrt{125}=5\sqrt{5}$.

Câu 14: Chọn A



Do cần thời gian xây là ngắn nhất nên con đường làm trên mỗi miền phải là những đường thẳng.
Gọi AE và EC lần lượt là đoạn đường cần làm. Với $NE = x(\text{m})$.

$\Rightarrow EM = 25 - x(\text{m})$.

Ta được $\begin{cases} AE = \sqrt{AN^2 + EN^2} = \sqrt{100 + x^2} \\ EC = \sqrt{MC^2 + EM^2} = \sqrt{100 + (25-x)^2} \end{cases}$.

$\Rightarrow$ Thời gian để làm đoạn đường từ A đến C là:

$$t(x) = \frac{AE}{15} + \frac{EC}{30} = \frac{\sqrt{100+x^2}}{15} + \frac{\sqrt{(25-x)^2+100}}{30}(\text{h})$$

$$\Rightarrow t'(x) = \frac{x}{15\sqrt{100+x^2}} - \frac{25-x}{30.\sqrt{(25-x)^2+100}}.$$

Xét $t'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{15\sqrt{100+x^2}} - \frac{25-x}{30.\sqrt{(25-x)^2+100}} = 0$

$$\Leftrightarrow 2x\sqrt{(25-x)^2+100} = (25-x)\sqrt{100+x^2} \Leftrightarrow 4x^2\left((25-x)^2+100\right) = (25-x)^2\left(100+x^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2(25-x)^2 + 400x^2 - 100(25-x)^2 - (25-x)^2x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(25-x)^2\left(x^2-25\right) + x^2\left(20^2 - (25-x)^2\right) = 0 \quad .$$

$$\Leftrightarrow (x-5)\left(4(25-x)^2(x+5) + x^2(45-x)\right) = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

Ta được $\begin{cases} t(0) = \frac{4+\sqrt{29}}{6} \\ t(5) = \frac{2\sqrt{5}}{3} \\ t(25) = \frac{1+\sqrt{29}}{3} \end{cases}$.

Vậy thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C là $\frac{2\sqrt{5}}{3}(\text{h})$.

Cách 2:

Xét $t(x) = \frac{\sqrt{10^2+x^2}}{15} + \frac{\sqrt{(25-x)^2+10^2}}{30} = \frac{\sqrt{20^2+(2x)^2} + \sqrt{(25-x)^2+10^2}}{30}$.

Lại có $\sqrt{20^2+(2x)^2} + \sqrt{(25-x)^2+10^2} \geq \sqrt{(45-x)^2+(2x+10)^2}$ $\left(\text{do } |\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u}+\vec{v}|\right)$.

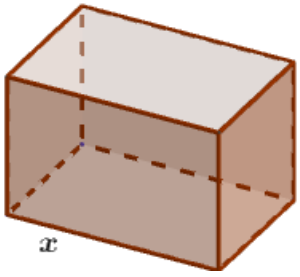
$\Leftrightarrow \sqrt{20^2+(2x)^2}+\sqrt{(25-x)^2+10^2} \ge \sqrt{5(x-5)^2+2000}$.

Do đó $t(x) \ge \dfrac{\sqrt{5(x-5)^2+2000}}{30} \ge \dfrac{\sqrt{2000}}{30} = \dfrac{2\sqrt{5}}{3}$.

Vậy $t(x)_{\min} = \dfrac{2\sqrt{5}}{3}(\text{h})$ khi và chỉ khi $x = 5(\text{m})$.

Vậy thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C là $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}(\text{h})$.

Câu 15: Chọn C



Gọi $x(\text{m})$ là chiều dài của hình chữ nhật đáy $(x>0)$.

Khi đó chiều rộng là: $\dfrac{0,096}{0,6x} = \dfrac{4}{25x}$.

Khi đó diện tích mặt xung quanh là: $1,2\left(x+\dfrac{4}{25x}\right)$.

Chi phí để làm mặt xung quanh là: $70.1,2\left(x+\dfrac{4}{25x}\right) = 84\left(x+\dfrac{4}{25x}\right)$.

Diện tích mặt đáy là: $x.\dfrac{4}{25x} = \dfrac{4}{25}$.

Cho phí để làm mặt đáy là: $100.\dfrac{4}{25} = 16$.

Chi phí để làm bể cá thấp nhất khi và chỉ khi chi phí làm mặt bên thấp nhất

Xét hàm số $f(x) = x+\dfrac{4}{25x}, x>0; f'(x) = 1-\dfrac{4}{25x^2} = \dfrac{25x^2-4}{25x^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 25x^2-4 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{5}$.

Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{2}{5}$		$-\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{4}{5}$	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó chi phí thấp nhất là: $84.\dfrac{4}{5}+16 = 83.200$ đồng.

Câu 16: Chọn C

Gọi chiều rộng của hộp là x $(x>0) \Rightarrow$ Chiều dài của hình hộp là $2x$.

Thể tích của hộp là $V = x.2x.h = 48 \Leftrightarrow h = \dfrac{24}{x^2}$.

Tổng diện tích mặt đáy và 4 mặt bên của hộp là $2x^2 + 6xh = 2x^2 + 6x.\dfrac{24}{x^2} = 2x^2 + \dfrac{144}{x}$.

Diện tích nắp hộp là $2x^2$.

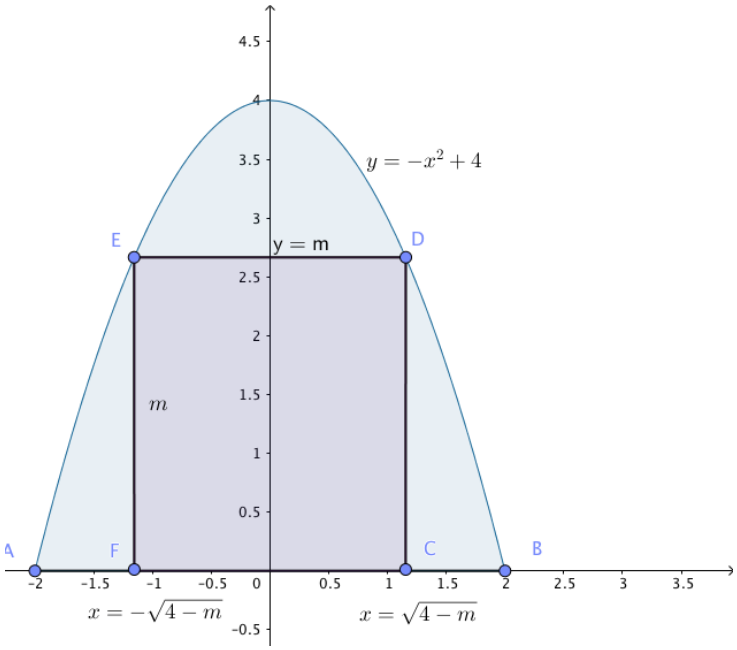
Giá thành hộp thấp nhất $\Leftrightarrow f(x) = 3\left(2x^2 + \dfrac{144}{x}\right) + 2x^2$ đạt giá trị nhỏ nhất với $x > 0$.

Ta có $f(x) = 8x^2 + \dfrac{432}{x} = 8x^2 + \dfrac{216}{x} + \dfrac{216}{x} \geq 3.\sqrt[3]{8x^2.\dfrac{216}{x}.\dfrac{216}{x}} = 216$.

Vậy $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x) = 216$ xảy ra khi và chỉ khi $8x^2 = \dfrac{216}{x} \Leftrightarrow x^3 = 27 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow h = \dfrac{24}{9} = \dfrac{8}{3}$.

Vậy $m = 8$; $n = 3 \Rightarrow m + n = 8 + 3 = 11$.

Câu 17: Chọn D



Xét $(P): y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ có toạ độ đỉnh $(0;4)$ và qua điểm có toạ độ $(2;0)$.

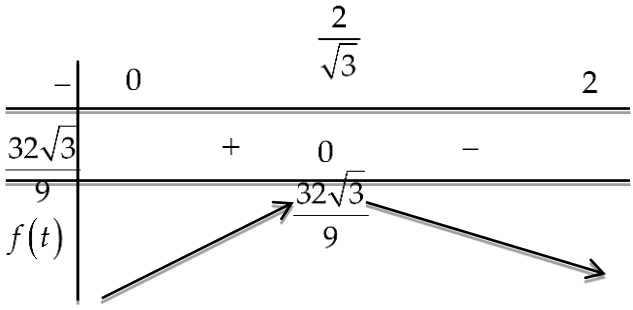
Ta có hoành độ đỉnh: $\dfrac{-b}{2a} = 0 \Rightarrow b = 0$; (P) qua điểm $(0;4) \Rightarrow c = 4$ và (P) qua điểm $(2;0)$ $\Rightarrow a = -1$. Suy ra: $(P): y = -x^2 + 4$

Xét đường thẳng qua E, D: $y = m$. Khi đó $E\left(-\sqrt{4-m}; m\right)$ và $D\left(\sqrt{4-m}; m\right)$ là giao điểm của (P) và đường thẳng $y = m$. Suy ra: $ED = 2\sqrt{4-m}$, $EF = m$.

Yêu cầu của bài toán đạt được khi diện tích hình chữ nhật $CDEF$ phải lớn nhất.

Ta có: $S_{CDEF} = ED.EF = 2\sqrt{4-m}.m$. Đặt $t = \sqrt{4-m} \Rightarrow t^2 = 4 - m \Rightarrow m = 4 - t^2$

Khi đó: $S_{CDEF} = f(t) = 2t\left(4 - t^2\right) = -2t^3 + 8t$; $f'(t) = -6t^2 + 8 = 0 \Rightarrow t = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$



Suy ra: $MaxS_{CDEF}=\dfrac{32\sqrt{3}}{9}$ khi $t=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Rightarrow m=\dfrac{8}{3}$

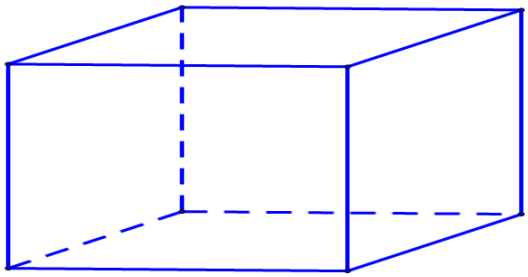
Mặt khác diện tích của chiếc cổng: $S=\int\limits_{-2}^{2}\left|-x^2+4\right|=\dfrac{32}{3}$ (m^2)

Suy ra diện tích nhỏ nhất của phần dùng để trang trí là: $S-MaxS_{CDEF}=\dfrac{32}{3}-\dfrac{32\sqrt{3}}{9}\approx 4,5083$ (m^2)

Vậy số tiền ít nhất dùng để trang trí phần tô đậm: $4,5083\times 1.000.000=4.508.300$.

.

Câu 18: Chọn C



Gọi chiều dài, chiều rộng của hộp là $2x$ và x $(x>0)$. Khi đó, ta có thể tích của cái hộp là

$$V=2x^2.h\Rightarrow 2x^2.h=48\Leftrightarrow x^2.h=24$$

Do giá thành làm đáy và mặt bên hộp là 3, giá thành làm nắp hộp là 1 nên giá thành làm hộp là

$$L=3\left(2x^2+2xh+4xh\right)+2x^2$$

Áp dụng bất đẳng thức côsi cho ba số không âm, ta được

$$L=8x^2+9xh+9xh\geq 3\sqrt[3]{8x^2.9xh.9xh}=3\sqrt[3]{648\left(x^2h\right)^2}=216$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}8x^2=9xh\\ x^2h=24\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{9h}{8}\\ \dfrac{9^2}{8^2}.h^3=24\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\ h=\dfrac{8}{3}\end{cases}$

Vậy $m=8$, $n=3$ và $m+n=11$.

Câu 19: Chọn C

Gọi số lần tăng giá là $y\left(y\geq 0\right)$

Giá bán rau sau mỗi lần tăng giá là $30000+1000y$ đồng/kg.

Số rau thừa được thu mua cho chăn nuôi là $20y\left(y\leq 50\right)$ kg.

Số rau bán được trước khi thu mua cho chăn nuôi là $1000-20y$ kg.

Tổng số tiền bán rau thu được mỗi ngày là:

$P=\left(1000-20y\right).(30000+1000y)+20y.2000 \Leftrightarrow P=-20000y^2+440000y+30000000.$

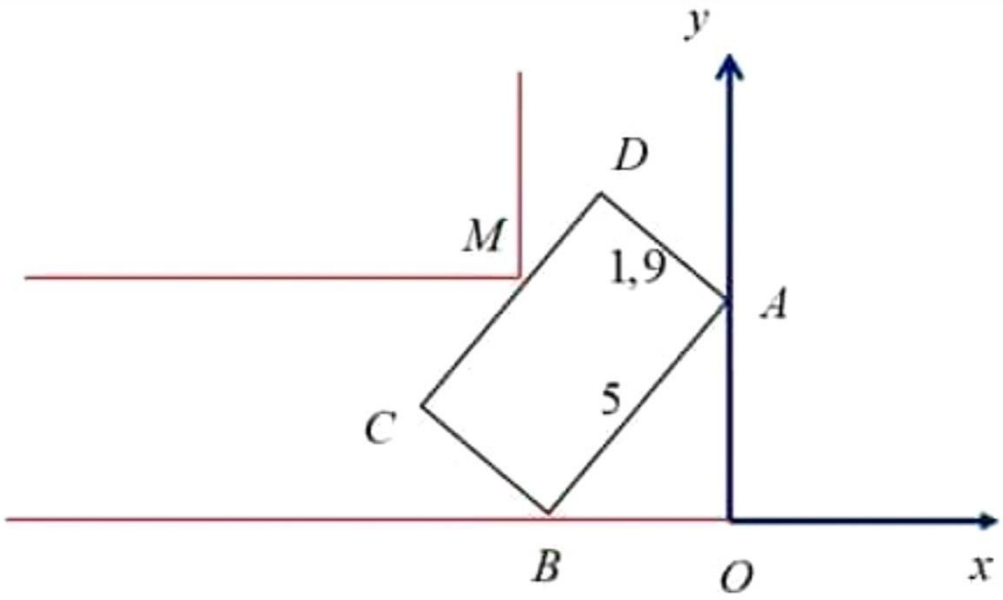
$P=32420000-20000\left(y-11\right)^2.$

Ta có:

$32420000-20000\left(y-11\right)^2\le 32420000 \Rightarrow P_{\max}=324200000$ khi $y=11\left(N\right).$

$\Rightarrow P\le 32420000.$

Câu 20: Chọn A



Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ. Khi đó $M\left(-2,6\,;\,x\right)$.

Gọi $B\left(-a\,;\,0\right)$ suy ra $A\left(0\,;\,\sqrt{25-a^2}\right)$. Phương trình $AB:\dfrac{x}{-a}+\dfrac{y}{\sqrt{25-a^2}}-1=0$.

Do CD // AB nên phương trình $CD:\dfrac{x}{-a}+\dfrac{y}{\sqrt{25-a^2}}-T=0$.

Mà khoảng cách giữa AB và CD bằng $1,9(m)$ nên

$$\frac{\left|T-1\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{25-a^2}}\right)^2}}=1,9\Rightarrow T=1+\frac{9,5}{a\sqrt{25-a^2}}.$$

Điều kiện để ô tô đi qua được là M,O nằm khác phía đối với bờ là đường thẳng CD.

Suy ra: $\dfrac{-2,6}{-a}+\dfrac{x}{\sqrt{25-a^2}}-1-\dfrac{9,5}{a\sqrt{25-a^2}}\ge 0\Leftrightarrow x\ge \sqrt{25-a^2}+\dfrac{9,5}{a}-\dfrac{2,6\times\sqrt{25-a^2}}{a}$

Để cho nhanh, chúng ta dùng chức năng **TABLE** trong máy tính **Casio570ES PLUS**.

$f(X)=\sqrt{25-X^2}+\dfrac{9,5}{X}-\dfrac{2,6\times\sqrt{25-X^2}}{X}$ với STEP = $\dfrac{5}{29}$; START = 0; END = 5.

Thấy giá trị lớn nhất của $f(X)=\sqrt{25-X^2}+\dfrac{9,5}{X}-\dfrac{2,6\times\sqrt{25-X^2}}{X}$ xấp xỉ $3,698$.

Vậy chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên gần nhất với giá trị ở câu **A.**

Câu 21: Chọn C

Đồ thị (C) có tiệm cận đứng là $x=1$ và tiệm cận ngang là $y=2$

với $J\left(x;\dfrac{2x}{x-1}\right)\in(C)\Rightarrow TJ=d(J;\text{TCD})=|x-1|, JV=d(J,TCN)=\left|\dfrac{2x}{x-1}-2\right|=\dfrac{2}{|x-1|}$

Khi đó, chu vi hình chữ nhật $ITJV$ là:

$$P=2(TJ+JV)=2\left(|x-1|+\frac{2}{|x-1|}\right)\ge 2.2\sqrt{|x-1|.\frac{2}{|x-1|}}=4\sqrt{2}$$

Dấu " = " xảy ra khi: $|x-1|=\dfrac{2}{|x-1|}\Leftrightarrow(x-1)^2=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1+\sqrt{2}\\x=1-\sqrt{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}J\left(1+\sqrt{2};2+\sqrt{2}\right)\\J\left(1-\sqrt{2};2-\sqrt{2}\right)\end{array}\right.$

Vậy hình chữ nhật $ITJV$ có chu vi nhỏ nhất bằng $4\sqrt{2}$.

Câu 22: Chọn B

Ta có $y'=f'(x+2017)+2018$; $y'=0\Leftrightarrow f'(x+2017)=-2018$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-2018	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $f'(x+2017)=-2018\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+2017=t(t<0)\\x+2017=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=t-2017\\x=-2015.\end{array}\right.$

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x+2017)+2018x$

x	$-\infty$		$t-2017$		-2015		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘		↗		↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=t-2017<-2017$.

Vậy $x_0\in(\infty;-2017)$. x_0

Câu 23: Chọn B

Xét phương trình ẩn x : $y=\dfrac{ax+b}{x^2+4}\Leftrightarrow yx^2-ax+4y-b=0\ (1)$.

Trường hợp 1: $y=0\Rightarrow$ phương trình (1) trở thành: $x=-\dfrac{b}{a}$.

Trường hợp 2: $y\neq 0\Rightarrow$ phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta\geq 0\Leftrightarrow a^2-4y(4y-b)\geq 0\Leftrightarrow 16y^2-4by-a^2\leq 0\Leftrightarrow y^2-\frac{b}{4}y-\frac{a^2}{16}\leq 0\ (*).$$

Vì $\max\limits_{x\in R}y=5,\min\limits_{x\in R}y=-2$ nên $-2\leq y\leq 5\Leftrightarrow (y+2)(y-5)\leq 0\Leftrightarrow y^2-3y-10\leq 0\ (*)'$.

Từ $(*)$ và $(*)'$ suy ra $\begin{cases}\dfrac{b}{4}=3\\ \dfrac{a^2}{16}=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=12\\ a^2=160\end{cases}\Rightarrow P=a^2b=1920$.

Câu 24: Chọn B

Hàm số $f(x)=\dfrac{34}{\sqrt{\left(x^3-3x+2m\right)^2+1}}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng 2 khi và chỉ khi hàm số $y=\left|x^3-3x+2m\right|$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng 16.

Xét hàm số $g(x)=x^3-3x+2m$ trên đoạn $[0;3]$, ta có $g'(x)=3(x^2-1)$.

Ta có bảng biến thiên:

x	0		1		3
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$2m$	↘	$2m-2$	↗	$2m+18$

Suy ra $\max\limits_{[0;3]}\left|g(x)\right|=\max\left\{\left|2m-2\right|,\left|2m+18\right|\right\}$.

Do đó $\max\limits_{[0;3]}\left|g(x)\right|=16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left|2m-2\right|=16\\ \left|2m+18\right|\leq 16\end{cases}\\ \begin{cases}\left|2m-2\right|\leq 16\\ \left|2m+18\right|=16\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-7\\ m=-1\end{array}\right.$. Vậy $S=\{-7;-1\}$.

Câu 25: Chọn C

Ta có: $h'(x)=f'(x)-g'(x)$. Theo bài ra ta có: $h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\\ x=b\\ x=c\end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $h(x)$:

x	a		b		c
$h'(x)$	0	-	0	+	0
$h(x)$		↘		↗	

Suy ra: $\min\limits_{[a;c]} h(x) = h(b)$.

Câu 26: Chọn B

Dựa vào đồ thị, ta có $-2 \le f(x) \le 2, \forall x \in [-2;2] (*) \Rightarrow 2f(x) + 4 \ge 0, \forall x \in [-2;2]$.

Vì $m \in [0;20]$ nên $2f(x) + m + 4 \ge 0 \Rightarrow |2f(x) + m + 4| = 2f(x) + m + 4, \forall x \in [-2;2]$

Khi đó $g(x) = \big||2f(x) + m + 4| - f(x) - 3\big| = |2f(x) + m + 4 - f(x) - 3| = |f(x) + m + 1|$

Với $m = 0 \Rightarrow g(x) = |f(x) + 1|, \forall x \in [-2;2]$.

$(*) \Leftrightarrow -1 \le f(x) + 1 \le 3 \Leftrightarrow 0 \le |f(x) + 1| \le 3 \Leftrightarrow 0 \le g(x) \le 3, \forall x \in [-2;2]$

$\Rightarrow \min\limits_{[-2;2]} g(x) = 0 \Rightarrow m = 0$ không thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Với $m \in [1;20] \Rightarrow f(x) + m + 1 \ge 0 \Rightarrow g(x) = f(x) + m + 1$.

Từ (*) ta có $f(x) + m + 1 \ge m - 1 \Rightarrow \min\limits_{[-2;2]} g(x) = m - 1$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \min\limits_{[-2;2]} g(x) \ge 1 \Leftrightarrow m - 1 \ge 1 \Leftrightarrow m \ge 2 \Rightarrow m \in [2;20]$.

Vậy có 19 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 27: Chọn A

Với $m = \dfrac{1}{2}$: ta có $f(x) = 1, \forall x \in [0;1]$.

Do đó $\max\limits_{[0;1]} |f(x)| = \min\limits_{[0;1]} |f(x)| = 1 \Rightarrow \max\limits_{[0;1]} |f(x)| + \min\limits_{[0;1]} |f(x)| = 2$ (không thỏa mãn đề bài).

Với $m \ne \dfrac{1}{2}$, ta có: $f'(x) = \dfrac{1 - 2m}{(x+1)^2} \ne 0, \forall x \in [0;1]$. Có $f(0) = 2m; f(1) = \dfrac{2m+1}{2}$.

Nếu $2m(2m+1) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m < -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$. Khi đó $\max\limits_{[0;1]} |f(x)|$ và $\min\limits_{[0;1]} |f(x)|$ là một trong 2 giá trị

$|2m|; \left|\dfrac{2m+1}{2}\right|$. Khi đó: $\max\limits_{[0;1]} |f(x)| + \min\limits_{[0;1]} |f(x)| = 3 \Leftrightarrow |2m| + \left|\dfrac{2m+1}{2}\right| = 3 \Leftrightarrow 2|2m| + |2m+1| = 6$.

Xét $m > 0$: phương trình $\Leftrightarrow 4m + 2m + 1 = 6 \Leftrightarrow m = \dfrac{5}{6}$ (thỏa mãn).

Xét $m<-\frac{1}{2}$: phương trình $\Leftrightarrow -4m-(2m+1)=6\Leftrightarrow m=\frac{-7}{6}$ (thỏa mãn).

Nếu $2m(2m+1)\le 0\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le m\le 0$.

Khi đó: $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|=\left\{\left|\frac{2m+1}{2}\right|;|2m|\right\}$ và $\min\limits_{[0;1]}f(x)=0$.

Ta xét $\left[\begin{array}{l}|2m|=3\\ \frac{|2m+1|}{2}=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\pm\frac{2}{3}\\ m=\frac{5}{2}\\ m=-\frac{7}{2}\end{array}\right.$. Ta thấy các giá trị này không thỏa mãn $-\frac{1}{2}\le m\le 0$.

Vậy, ta có tập $S=\left\{-\frac{7}{6};\frac{5}{6}\right\}$, do đó số phần tử của tập S bằng 2.

Câu 28: Chọn D

Xét hàm số $f(x)=x^4-2x^2+3m$

Ta có: $f'(x)=4x^3-4x\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=0\vee x=\pm 1$

x	-1		0		1		2
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	3m-1	↗	3m	↘	3m-1	↗	8+3m

$\Rightarrow \underset{[-1;2]}{Max}\, f(x)=8+3m=A;\underset{[-1;2]}{Min}\, f(x)=3m-1=a$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow A.a>0\Leftrightarrow (3m-1)(8+3m)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>\frac{1}{3}\\ m<-\frac{8}{3}\end{array}\right.$

Khi đó: $\underset{[-1;2]}{Min}|f(x)|=\frac{|A+a|-|A-a|}{2}=2021$

$\Leftrightarrow\frac{|7+6m|-|9|}{2}=2021\Leftrightarrow|7+6m|=4051\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\frac{4044}{6}\\ m=-\frac{4058}{6}\end{array}\right.(t/m)\Rightarrow|m_1-m_2|=\frac{4051}{3}$.

Câu 29: Chọn C

Ta có $\min\limits_{[-1;1]}\left|f(x)\right|>\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{2x^4-mx-4}{x+2}>\dfrac{3}{4},\forall x\in[-1;1]\ (1)\\ \dfrac{2x^4-mx-4}{x+2}<\dfrac{-3}{4},\forall x\in[-1;1]\ (2)\end{array}\right.$

$(1)\Leftrightarrow m\in\varnothing$ do (1) không thỏa với $x=0$.

$(2)\Leftrightarrow 8x^4-4mx+3x-10<0(*),\forall x\in[-1;1]$

Nhận xét $x=0$ thỏa (*) nên $(2)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}4m>8x^3+3-\dfrac{10}{x},\forall x\in(0;1]\\ 4m<8x^3+3-\dfrac{10}{x},\forall x\in[-1;0)\end{array}\right.\ (3)$

Xét $g(x)=8x^3+3-\dfrac{10}{x},x\in[-1;1]\setminus\{0\}$ có $g'(x)=24x^2+\dfrac{10}{x^2}>0,\forall x\neq 0$

x	-1		0		1
g'		$+$		$+$	
g	5	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	1

$(3)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}4m>1\\ 4m<5\end{array}\right.\Leftrightarrow\dfrac{1}{4}<m<\dfrac{5}{4}$. Do $m\in\mathbb{Z}$ suy ra $m=1$.

Câu 30: Chọn C

Đặt $t=\log x$, vì $x\in\left[\dfrac{1}{10};1\right]$ nên miền giá trị của t là $[-1;0]$.

Khi đó bài toán trở thành tìm m để hàm số $y=\dfrac{t+m}{t+2}$ thỏa $\max\limits_{[-1;0]}\left|f(t)\right|+\min\limits_{[-1;0]}\left|f(t)\right|=2$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ ta có $f'(x)=\dfrac{2-m}{(t-2)^2}$.

Trường hợp 1: $m=2$. Ta có $f(t)=1$, khi đó $\max\limits_{[-1;0]}\left|f(t)\right|+\min\limits_{[-1;0]}\left|f(t)\right|=2$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2: $m\neq 2\Rightarrow$hàm số đơn điệu trên mỗi khoảng của tập xác định nên đơn điệu trên $[-1;0]$. Ta có $f(0)=\dfrac{m}{2},f(-1)=m-1$ và đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm $(-m;0)$.

Khi $\dfrac{m}{2}.(m-1)\le 0\Leftrightarrow 0\le m\le 1$, ta có $\min\limits_{[-1;0]}\left|f(t)\right|=0$, $\left[\begin{array}{l}\max\limits_{[-1;0]}\left|f(t)\right|=\dfrac{m}{2}\\ \max\limits_{[-1;0]}\left|f(t)\right|=1-m\end{array}\right.$.

Khi đó $\max\limits_{[-1;0]}\left|f(t)\right|+\min\limits_{[-1;0]}\left|f(t)\right|=2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\left|\dfrac{m}{2}\right|=2\\ |m-1|=2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=4\\ m=-4\\ m=3\\ m=-1\end{array}\right.$ (không thỏa mãn $0\le m\le 1$).

Khi $\frac{m}{2}.(m-1)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<0 \end{array}\right.$ khi đó $\max\limits_{[-1;0]}|f(t)|+\min\limits_{[-1;0]}|f(t)|=2 \Leftrightarrow \left|\frac{m}{2}\right|+|m-1|=2$.

Với $m<0$, ta có $\left|\frac{m}{2}\right|+|m-1|=2 \Leftrightarrow -\frac{m}{2}+1-m=2 \Leftrightarrow -3m=2 \Leftrightarrow m=-\frac{2}{3}$

Với $m>1, m\neq 2$, ta có $\left|\frac{m}{2}\right|+|m-1|=2 \Leftrightarrow \frac{m}{2}+m-1=2 \Leftrightarrow 3m=6 \Leftrightarrow m=2$ (không thỏa mãn $m>1, m\neq 2$).

Kết hợp **trường hợp 1** và **trường hợp 2** ta có $S=\left\{-\frac{2}{3};\ 2\right\}$.

Tổng số phần tử của S bằng $-\frac{2}{3}+2=\frac{4}{3}$.

Câu 31: Chọn A

Đặt $t=e^x$ thì $t\in[1;2]$. Khi đó $f(x)=g(t)=\left|3t^4-4t^3-24t^2+48t+m\right|$.

Xét $h(t)=3t^4-4t^3-24t^2+48t+m, t\in[1;2]$ có $h'(t)=12t^3-12t^2-48t+48$.

$\left\{\begin{array}{l} h'(t)=0 \\ t\in[1;2] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=2 \end{array}\right. \Rightarrow h(t)$ nghịch biến trên $[1;2]$; $g(1)=|m+23|, g(2)=|m+16|$.

Nếu $(m+16)(m+23)\le 0$ thì $\min g(t)=0$, suy ra $0\le \max g(t)\le 3\min g(t)=0$ hay $g(t)=0$ $\forall t\in[1;2]$ (vô lý).

Nếu $\left\{\begin{array}{l} m+16>0 \\ m+23>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m>-16$.

Khi đó $\max g(t)\le 3\min g(t) \Leftrightarrow m+23\le 3(m+16) \Leftrightarrow m\ge -12,5 \Rightarrow m\ge -12,5$ (1).

Nếu $\left\{\begin{array}{l} m+16<0 \\ m+23<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m<-23$

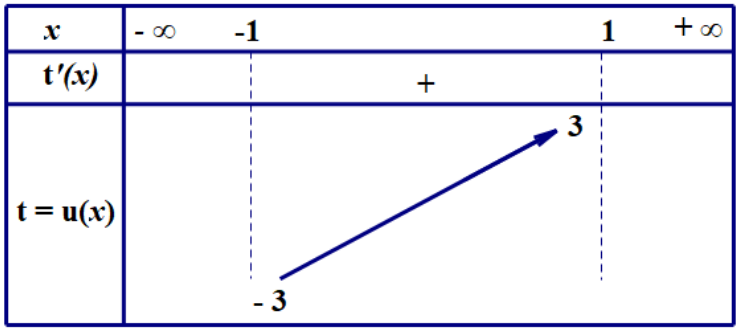
Ta không cần xét tiếp trường hợp này do đề bài chỉ yêu cầu tìm $m\ge -23$.

Từ (1) và $m\in\mathbb{Z}\cap[-23;10]$ ta có $m\in\{-12;-11;-10;-9;...;8;9;10\}$.

Vậy tổng các giá trị m thỏa là -33.

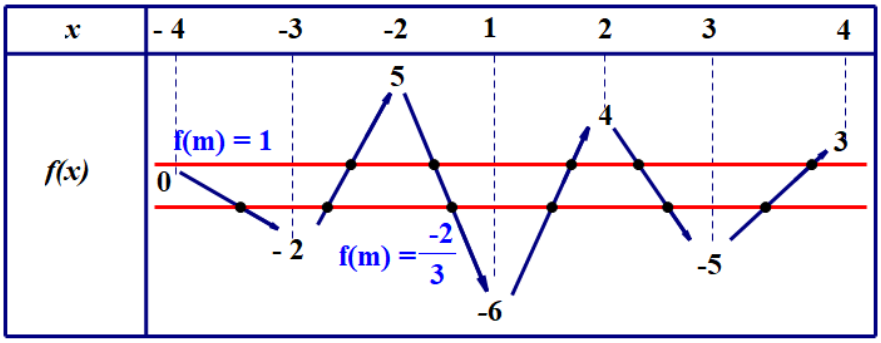
Câu 32: Chọn B

Đặt $t=u(x)=x^3+2x$ ta có $t'=u'(x)=3x^2+2>0, \forall x$ do đó $t=x^3+2x$ là một hàm số tăng vì vậy $x\in[-1;1]$ thì $t\in[-3;3]$.



Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên đoạn $\left[-3;3\right]$ ta có $\max\limits_{\left[-3;3\right]} f(t)=5$ và $\min\limits_{\left[-3;3\right]} f(t)=-6$.

Từ đây ta có $\max\limits_{\left[-1;1\right]} g(x)=\left|\max\limits_{\left[-3;3\right]} f(t)+3f(m)\right|$ hoặc $\max\limits_{\left[-1;1\right]} g(x)=\left|\min\limits_{\left[-3;3\right]} f(t)+3f(m)\right|$



Trường hợp 1: $\begin{cases}\left|\max\limits_{\left[-3;3\right]} f(t)+3f(m)\right|=8\\ \left|\max\limits_{\left[-3;3\right]} f(t)+3f(m)\right|\geq\left|\min\limits_{\left[-3;3\right]} f(t)+3f(m)\right|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left|5+3f(m)\right|=8\\ \left|5+3f(m)\right|\geq\left|-6+3f(m)\right|\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}f(m)=1\\ f(m)=-\dfrac{13}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow f(m)=1\\ f(m)\geq\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Từ bảng biến thiên phương trình $f(m)=1$ có 5 nghiệm, như vậy trường hợp này có 5 giá trị thực của m thỏa mãn.

Trường hợp 2: $\begin{cases}\left|\min\limits_{\left[-3;3\right]} f(t)+3f(m)\right|=8\\ \left|\min\limits_{\left[-3;3\right]} f(t)+3f(m)\right|>\left|\max\limits_{\left[-3;3\right]} f(t)+3f(m)\right|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left|-6+3f(m)\right|=8\\ \left|-6+3f(m)\right|>\left|5+3f(m)\right|\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(m)=-\dfrac{2}{3} \\ f(m)=\dfrac{14}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow f(m)=-\dfrac{2}{3} \\ f(m)<\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Từ bảng biến thiên phương trình $f(m)=-\dfrac{2}{3}$ có 6 nghiệm, như vậy trường hợp này có 6 giá trị thực của m thỏa mãn.

Vậy có tất cả là 11 giá trị thực của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 33: Chọn C

Ta có: $3a^4+1=a^4+a^4+a^4+1\geq 4\sqrt[4]{a^4.a^4.a^4}=4a^3$

$12b^4+1=4b^4+4b^4+4b^4+1\geq 4\sqrt[4]{4b^4.4b^4.4b^4}=4\left(\sqrt{2}b\right)^3$

Suy ra

$$H=\frac{3a^4+12b^4+25c^3+2}{\left(a+\sqrt{2}b+c\right)^3}\geq\frac{4a^3+4\left(\sqrt{2}b\right)^3+25c^3}{\left(a+\sqrt{2}b+c\right)^3}=\frac{4\left(a+\sqrt{2}b\right)\left(a^2+\left(\sqrt{2}b\right)^2-\sqrt{2}ab\right)+25c^3}{\left(a+\sqrt{2}b+c\right)^3}$$

$$\geq\frac{4\left(a+\sqrt{2}b\right)\left(\dfrac{\left(a+\sqrt{2}b\right)^2}{2}-\dfrac{\left(a+\sqrt{2}b\right)^2}{4}\right)+25c^3}{\left(a+\sqrt{2}b+c\right)^3}=\frac{\left(a+\sqrt{2}b\right)^3+25c^3}{\left(a+\sqrt{2}b+c\right)^3}=\frac{\left(\dfrac{a+\sqrt{2}b}{c}\right)^3+25}{\left(\dfrac{a+\sqrt{2}b}{c}+1\right)^3}$$

Đặt $x=\dfrac{a+\sqrt{2}b}{c}, x>0$. Xét $f(x)=\dfrac{x^3+25}{(x+1)^3}$ với $x\in(0;+\infty)$

$$f'(x)=\frac{3x^2(x+1)^3-3(x+1)^2(x^3+25)}{(x+1)^6}=\frac{3x^2(x+1)-3(x^3+25)}{(x+1)^4}=\frac{3(x^2-25)}{(x+1)^4}$$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=5$

x	0		5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		↘	$\dfrac{25}{36}$	↗	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x)=\dfrac{25}{36}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức H là $\frac{25}{36}\in\left[\frac{2}{3};2\right]$.

Câu 34: Chọn A

Xét hàm số $f(x)=\frac{mx-\sqrt{x+2019}}{x+2020}$ với $D=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,1\le|x|\le 2018\right\}$.

Đặt $t=\sqrt{x+2019}\Rightarrow t\in\left[1;\sqrt{2018}\right]\cup\left[\sqrt{2020};\sqrt{4037}\right]$

Ta được hàm số mới: $h(t)=\frac{m\left(t^2-2019\right)-t}{t^2+1}\Rightarrow h'(x)=\frac{t^2+4040mt-1}{\left(t^2+1\right)^2}$

$h'(t)=0$ cho ta hai nghiệm $\begin{cases}t_1=-2020m-\sqrt{(2020m)^2+1}\\ t_2=-2020m+\sqrt{(2020m)^2+1}\end{cases}$

Trường hợp 1: $m\ge 0\Rightarrow t_1<0;\ t_2=\frac{1}{2020m+\sqrt{(2020m)^2+1}}\le 1$

Ta có bảng biến thiên sau:

t	t_2	1	$\sqrt{2018}$	$\sqrt{2020}$	$\sqrt{4037}$
$h'(t)$	0		+		
$h(t)$		$\frac{-2018m-1}{2}$ ↗	$\frac{-m-\sqrt{2018}}{2019}$ ↗	$\frac{m-\sqrt{2020}}{2021}$ ↗	$\frac{2018m-\sqrt{4037}}{4038}$

Theo đề, giá trị nhỏ nhất của $h(t)$ không vượt quá $\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow h(t)\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{m+\sqrt{2018}}{2019}\le\frac{1}{2}\\ \frac{m-\sqrt{2020}}{2021}\le\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le\sqrt{2018}+\frac{2019}{2}\\ m\le\sqrt{2020}+\frac{2021}{2}\end{array}\right.\Rightarrow m\le 1055$$

Kết hợp điều kiện: $0\le m\le 1055$ (1)

Trường hợp 2: $m\le -1\Rightarrow t_1<0;\ t_2>\sqrt{4037}$

Ta có bảng biến thiên sau:

t	t_2	1	$\sqrt{2018}$	$\sqrt{2020}$	$\sqrt{4037}$
$h'(t)$	0		–		
$h(t)$		$\frac{-2018m-1}{2}$	$\frac{-m-\sqrt{2018}}{2019}$	$\frac{m-\sqrt{2020}}{2021}$	$\frac{2018m-\sqrt{4037}}{4038}$

Theo đề, giá trị nhỏ nhất của $h(t)$ không vượt quá $\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow h(t)\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{-m-\sqrt{2018}}{2019}\le\frac{1}{2}\\ \frac{-m+\sqrt{2020}}{2021}\le\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge-\sqrt{2018}-\frac{2019}{2}\\ m\ge\sqrt{2020}-\frac{2021}{2}\end{array}\right.\Rightarrow m\ge-1054$$

Kết hợp điều kiện: $-1054\le m\le -1$ (2)

Từ (1) và (2) ta được $-1054\le m\le 1055$. Do đó tập nghiệm tổng cộng 2110 phần tử.

Câu 35: Chọn A

Ta có: $5x^2+2xy+2y^2=9\Leftrightarrow(2x+y)^2+(x-y)^2=9$.

Đặt $2x+y=3\sin t,\ x-y=3\cos t$ với $t\in[-2\pi;2\pi]$.

$\Rightarrow x=\sin t+\cos t$ và $y=\sin t-2\cos t$.

$$K=\frac{6x-6}{4x-y-9}=\frac{6\sin t+6\cos t-6}{4(\sin t+\cos t)-\sin t+2\cos t-9}=\frac{6\sin t+6\cos t-6}{3\sin t+6\cos t-9}.$$

$\Rightarrow(3K-6)\sin t+(6K-6)\cos t=9K-6$.

Điều kiện để phương trình trên có nghiệm là $(3K-6)^2+(6K-6)^2\ge(9K-6)^2\Leftrightarrow -1\le K\le 1$

Xét hàm số $f(t)=\frac{2t+1}{t-2}$ trên $[-1;1]$

Ta có: $f'(t)=\frac{-5}{(t-2)^2}<0,\forall t\ne 2$. Suy ra $\underset{[-1;1]}{Max}\,f(t)=f(-1)=\frac{1}{3}$.

Câu 36: Chọn A

Đặt $t=x^2+x$, vì $x\in[-2;2]\Rightarrow t\in\left[-\frac{1}{4};6\right]$.

Khi đó $y=(t+m)^2$, $\forall t\in\left[-\frac{1}{4};6\right]\Rightarrow y'=2(t+m)$. Ta có $y'=0\Leftrightarrow t=-m$.

Biện luận theo tham số m:

Trường hợp 1 : $-m \ge 6 \Leftrightarrow m \le -6$, khi đó y nghịch biến trên $\left[-\frac{1}{4};6\right]$ nên

$\min\limits_{\left[-\frac{1}{4};6\right]} y = y(6) = (6+m)^2$. Ta có $(6+m)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-8 \\ m=-2 \end{array}\right.$. Nhận $m=-8$.

Trường hợp 2: $-m \le -\frac{1}{4} \Leftrightarrow m \ge \frac{1}{4}$, khi đó y đồng biến trên $\left[-\frac{1}{4};6\right]$ nên

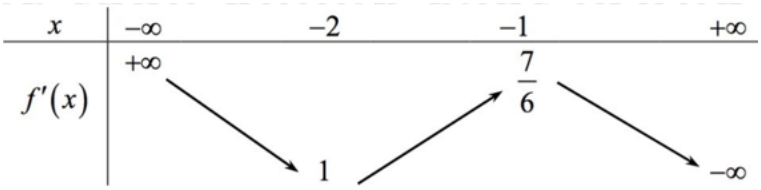
$\min\limits_{\left[-\frac{1}{4};6\right]} y = y\left(-\frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{1}{4}+m\right)^2$. Ta có $\left(-\frac{1}{4}+m\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\frac{9}{4} \\ m=-\frac{7}{4} \end{array}\right.$. Nhận $m=\frac{9}{4}$.

Trường hợp 3: $-\frac{1}{4} < -m < 6 \Leftrightarrow -6 < m < \frac{1}{4}$, khi đó y đồng biến trên $(-m;6)$ và nghịch biến trên $\left(-\frac{1}{4};-m\right)$, nên $\min\limits_{\left[-\frac{1}{4};6\right]} y = y(-m) = 0$. Do đó không $y=g(x)$ có giá trị m thỏa $\min\limits_{\left[-\frac{1}{4};6\right]} y = 4$.

Vậy tổng giá trị của tham số m thỏa $\min\limits_{[-2;2]} y = 4$ là $-8+\frac{9}{4} = -\frac{23}{4}$.

DẠNG 5 GTNN-GTLN của hàm số liên quan đến tích phân

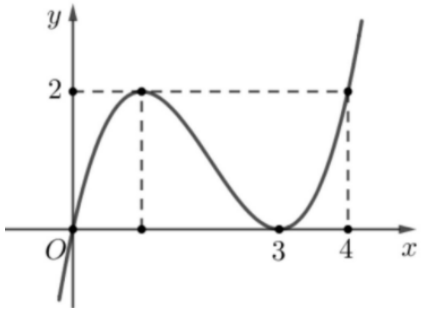
Câu 1: Cho hàm số đa thức bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên của đạo hàm như sau:



Biết $f(-2)=-1$, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $[-2;0]$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{13}{12}$. **C.** $\frac{1}{12}$. **D.** 2.

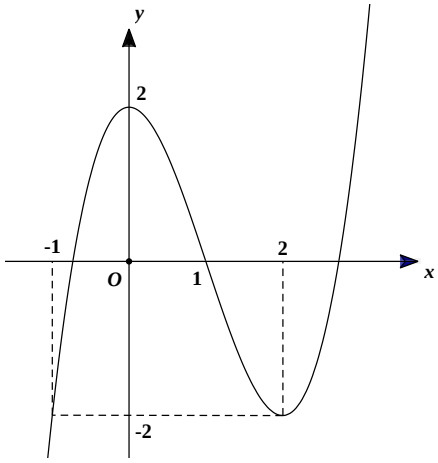
Câu 2: Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ như sau



Hàm số $g(x)=f(x^2)-\frac{1}{16}x^4$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$ bằng

A. $f(4)-1$. **B.** $f(2)-\frac{1}{4}$. **C.** $f\left(\frac{7}{2}\right)-\frac{49}{64}$. **D.** $f\left(\frac{5}{2}\right)-\frac{25}{64}$.

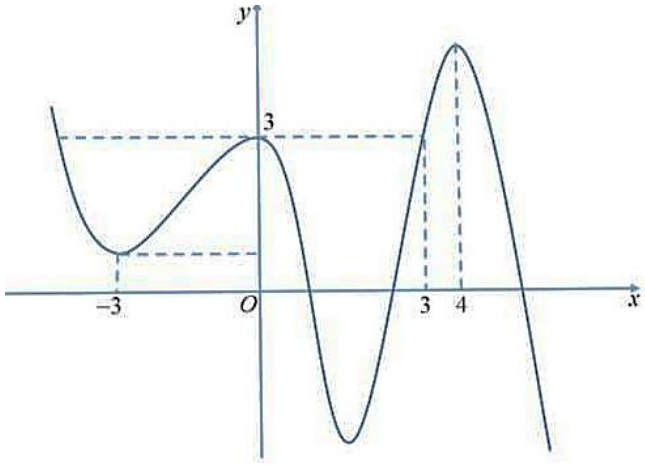
Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ bậc bốn. Biết $f(0)=0$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên:



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(2x)-4x^2+4x$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$ bằng

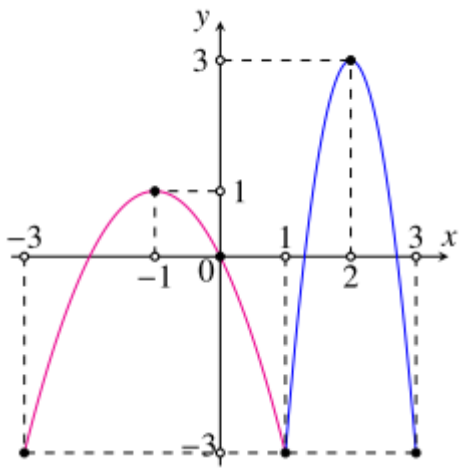
A. $-\frac{63}{4}$. **B.** $\frac{9}{4}$. **C.** $-\frac{15}{4}$. **D.** $-\frac{1}{4}$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(3x)-9x$ trên đoạn $\left[-1;\frac{4}{3}\right]$ bằng



A. $f(3)-9$. **B.** $f(-3)+9$. **C.** $f(0)$. **D.** $f(4)-12$.

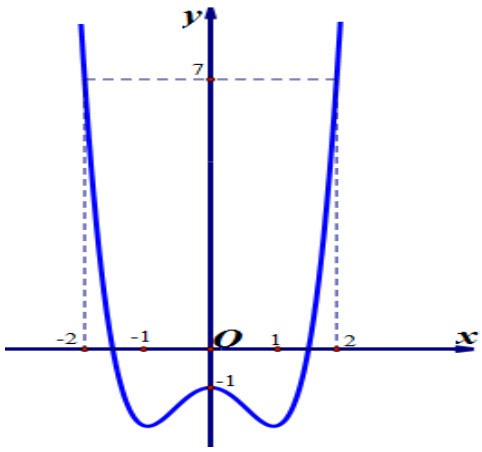
Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$, đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên dưới.



Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(2x)-4x^2-6x-2$ trên đoạn $[-1;1]$ là

B. $f(-2)-12$. **B.** $f(-1)$. **C.** $f(2)-12$. **D.** $f(4)-30$.

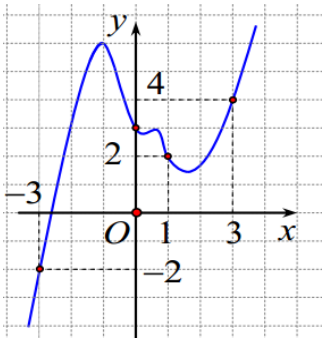
Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên dưới.



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(x)-\frac{2}{3}x^3+x$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng

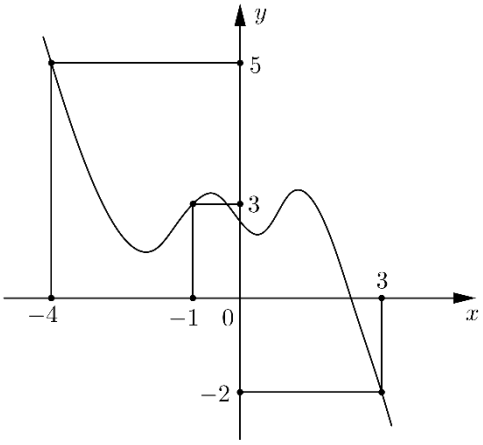
A. $g(2)$ **B.** $g(-2)$. **C.** $g(0)+g(2)$. **D.** $g(2)-g(0)$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=2f(x)-(x+1)^2$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng



A. $f(0)-1$. **B.** $f(-3)-4$. **C.** $2f(1)-4$. **D.** $f(3)-16$.

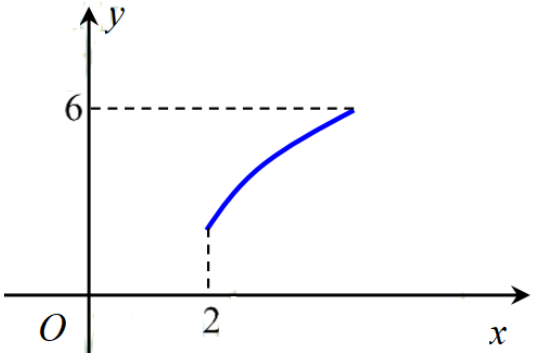
Câu 8: Cho hàm số $f(x)$, biết $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=2f(x)+(x-1)^2$ trên đoạn $[-4;3]$ là.Kết luận nào sau đây đúng?

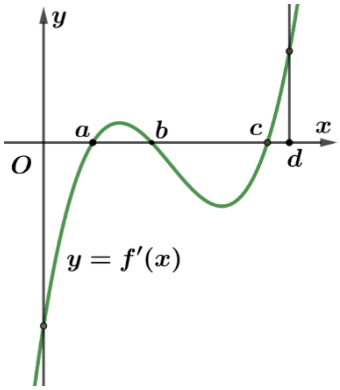
A. $m=g(-1)$. **B.** $m=g(-4)$. **C.** $m=g(3)$. **D.** $m=g(-3)$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{x-d}$ có một phần đồ thị như hình vẽ bên dưới, biết rằng các hệ số a,b,d nguyên và $ad>0$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T=a+b+d$ bằng



A. -1. **B.** -2. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 28: Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $0<a<b<c<d$ và hàm số $y=f(x)$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ lần lượt là a, b, c như hình vẽ. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $[0;d]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

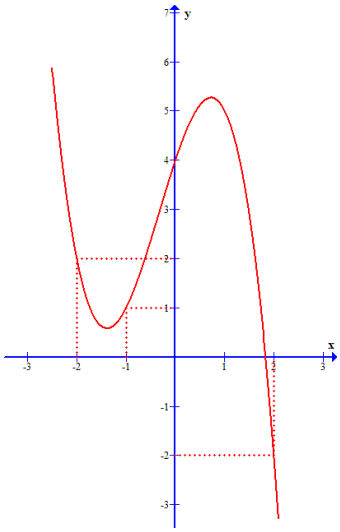


A. $M+m=f(b)+f(a)$.
B. $M+m=f(0)+f(a)$.
C. $M+m=f(0)+f(c)$.
D. $M+m=f(d)+f(c)$.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(x^2)-2x^2$ trên đoạn $[-1;2]$ lần lượt là

A. $f(0)$ và $f(4)-8$.
B. $f(0)$ và $f(-1)-2$.
C. $f(4)-8$ và $f(1)-2$.
D. $f(16)-32$ và $f(-1)-2$.

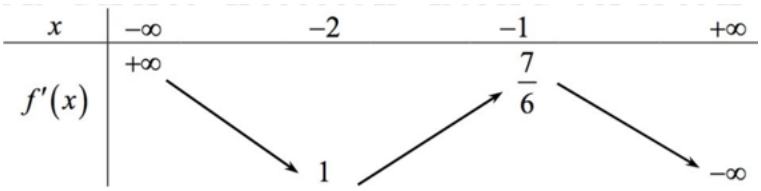
Câu 36: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn. Đồ thị hàm số $y=f'(x-1)$ được cho trong hình vẽ bên. Hàm số $g(x)=f(2x)+2x^2+2x$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[-3;\frac{1}{2}\right]$ bằng



A. $f(2)+12$.
B. $f(-2)$.
C. $f(-6)+12$.
D. $f(1)+\frac{3}{2}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho hàm số đa thức bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên của đạo hàm như sau:



Biết $f(-2)=-1$, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $[-2;0]$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{13}{12}$. **C.** $\frac{1}{12}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Vì $f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn nên $f'(x)$ là hàm bậc ba có dạng $y=ax^3+bx^2+cx+d$.

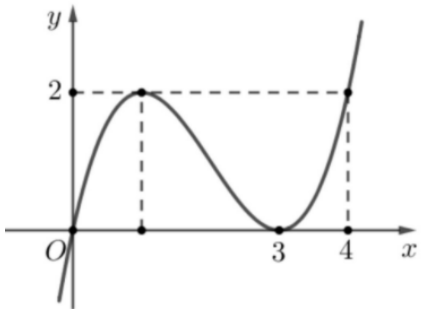
Ta có $y'=3ax^2+2bx+c$. Dựa vào BBT ta có hệ sau:

$$\begin{cases} y'(-2)=0 \\ y'(-1)=0 \\ y(-2)=1 \\ y(-1)=\frac{7}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12a-4b+c=0 \\ 3a-2b+c=0 \\ -8a+4b-2c+d=1 \\ -a+b-c+d=\frac{7}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{3} \\ b=-\frac{3}{2} \\ c=-2 \\ d=\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Suy ra $f'(x)=-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{1}{3}$. Ta có $f'(0)=\frac{1}{3}$. Dựa vào bảng biến thiên ta có $f'(x)>0, \forall x\in[-2;0]$. Ta có $\int\limits_{-2}^{0} f'(x)dx=f(0)-f(-2)$.

Suy ra $\underset{[-2;0]}{Max}\, f(x)=f(0)=\int\limits_{-2}^{0} f'(x)dx+f(-2)=\int\limits_{-2}^{0}\left(-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{1}{3}\right)dx-1=2-1=1.$

Câu 2: Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ như sau



Hàm số $g(x)=f(x^2)-\frac{1}{16}x^4$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$ bằng

A. $f(4)-1$. **B.** $f(2)-\frac{1}{4}$. **C.** $f\left(\frac{7}{2}\right)-\frac{49}{64}$. **D.** $f\left(\frac{5}{2}\right)-\frac{25}{64}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=x^2$. Vì $x\in\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$ nên $t\in[0;3]$. Khi đó, bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $h(t)=f(t)-\frac{1}{16}t^2$ với $t\in[0;3]$.

Vì $f(x)$ là hàm số bậc bốn nên $f'(x)$ là hàm số bậc ba.

Dựa vào đồ thị ta thấy $f'(x)$ có nghiệm $x=0$ và nghiệm kép $x=3$. Suy ra $f'(x)=ax(x-3)^2$.

Mặt khác, ta có $f'(4)=2\Rightarrow 2=4a\Rightarrow a=\frac{1}{2}$.

Suy ra $f'(x)=\frac{1}{2}x(x-3)^2=\frac{1}{2}\left(x^3-6x^2+9x\right)$.

Suy ra $f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4-2x^3+\frac{9}{2}x^2\right)+C=\frac{1}{8}x^4-x^3+\frac{9}{4}x^2+C$.

Suy ra $f(t)=\frac{1}{8}t^4-t^3+\frac{9}{4}t^2+C$.

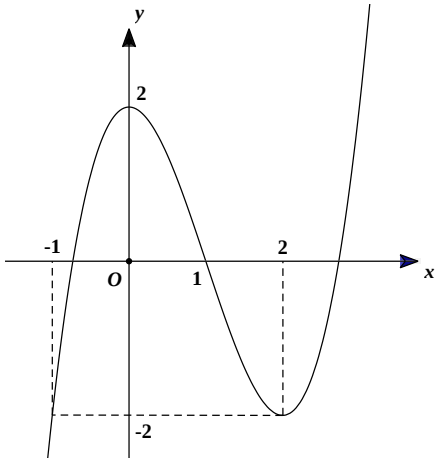
Suy ra $h(t)=\frac{1}{8}t^4-t^3+\frac{35}{16}t^2+C$.

Suy ra $h'(t)=\frac{t^3}{2}-3t^2+\frac{35}{8}t$.

Ta có $h'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=\frac{5}{2}\end{array}\right.$ (vì $t\in[0;3]$).

Khi đó dễ thấy giá trị lớn nhất của hàm số $h(t)$ trên đoạn $[0;3]$ là $h\left(\frac{5}{2}\right)=f\left(\frac{5}{2}\right)-\frac{25}{64}$ đạt được khi $t=\frac{5}{2}$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ bậc bốn. Biết $f(0)=0$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên:



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(2x)-4x^2+4x$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$ bằng

A. $-\frac{63}{4}$. **B.** $\frac{9}{4}$. **C.** $-\frac{15}{4}$. **D.** $-\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C

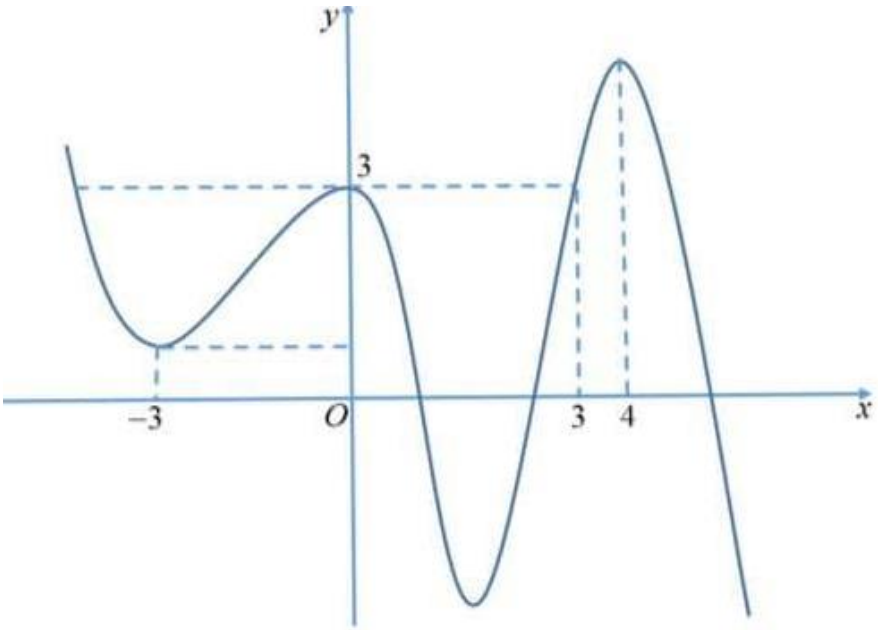
Đặt $t=2x,\ t\in[-1;3]$. Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(t)=f(t)-t^2+2t$ trên đoạn $[-1;3]$.

Dựa vào bốn điểm $(-1;-2);\ (0;2);\ (1;0);\ (2;-2)$ mà đồ thị $f'(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ đi qua lập hệ phương trình $\begin{cases}-a+b-c+d=-2\\ d=2\\ a+b+c+d=0\\ 8a+4b+2c+d=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-3\\ c=0\\ d=2\end{cases}$ nên

$f'(x)=x^3-3x^2+2\Rightarrow f(x)=\dfrac{x^4}{4}-x^3+2x,\ f(0)=0$.

Khi đó $h(t)=\dfrac{t^4}{4}-t^3+2t-t^2+2t\Rightarrow\min\limits_{[-1;3]}h(t)=h(3)=-\dfrac{15}{4}$.

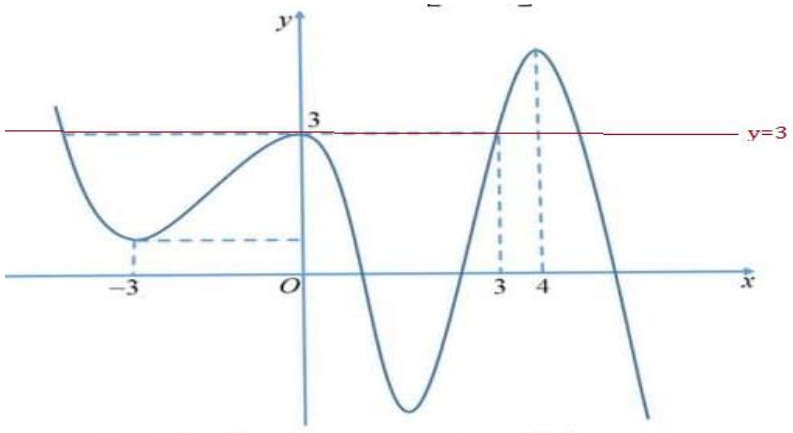
Câu 4: Cho hàm số $f(x)$, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(3x)-9x$ trên đoạn $\left[-1;\dfrac{4}{3}\right]$ bằng



A. $f(3)-9$. **B.** $f(-3)+9$. **C.** $f(0)$. **D.** $f(4)-12$.

Lời giải

Chọn A



Đặt $t=3x$ vì $x\in\left[-1;\dfrac{4}{3}\right]\Rightarrow t\in[-3;4]$.

$\Rightarrow h(t)=f(t)-3t$ với $t\in[-3;4]$

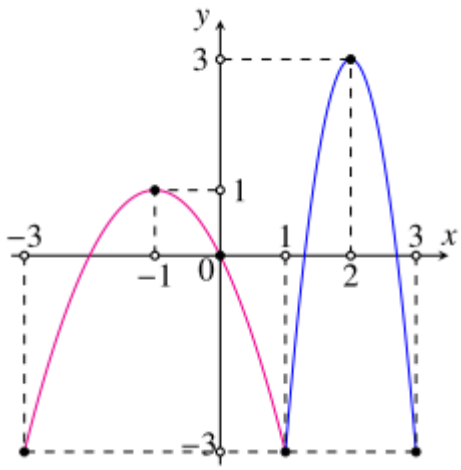
Ta có: $h'(t)=f'(t)-3\Rightarrow h'(t)=0\Leftrightarrow f'(t)=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=a<-3(L)\\t=0\\t=3\\t=b>4(L)\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=3\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

t	-3		0		3		4
$g'(t)$	‖	$-$	0	$-$	0	$+$	‖
$g(t)$	‖	↘		↘ $g(3)$		↗	‖

Dựa vào bảng biến thiên: $\min\limits_{\left[-1;\frac{4}{3}\right]}h(x)=\min\limits_{[-3;4]}h(t)=h(3)=f(3)-9$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$, đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên dưới.



Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(2x)-4x^2-6x-2$ trên đoạn $[-1;1]$ là

B. $f(-2)-12$. **B.** $f(-1)$. **C.** $f(2)-12$. **D.** $f(4)-30$.

Lời giải

Chọn B

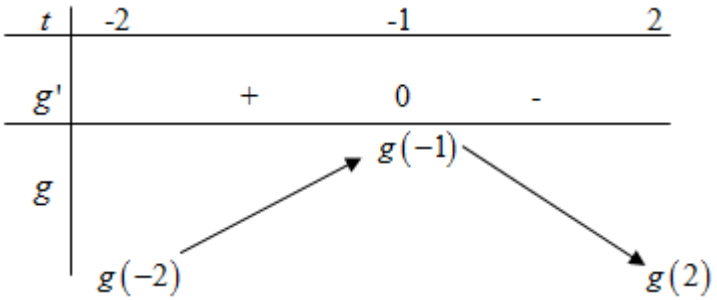
$g'(x)=2f'(2x)-8x-6$

$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(2x)=4x+3(*)$.

Đặt $t=2x$. Với $x\in[-1;1]$ thì $t\in[-2;2]$;

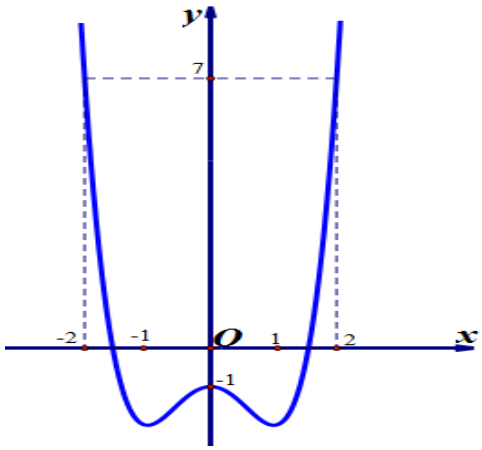
$(*)\Leftrightarrow f'(t)=2t+3(**)$

Số nghiệm phương trình $(**)$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và đường thẳng $y=2t+3$ dựa vào đồ thị ta có bảng biến thiên



$\max\limits_{[-2;2]} g(t) = g(-1) \Leftrightarrow \max\limits_{[-1;1]} g(x) = g\left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \max\limits_{[-1;1]} g(x) = f(-1)$

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên dưới.



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(x) - \frac{2}{3}x^3 + x$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng

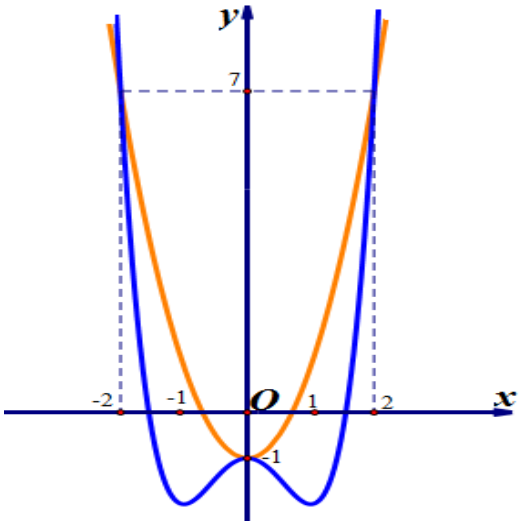
A. $g(2)$ **B.** $g(-2)$. **C.** $g(0)+g(2)$. **D.** $g(2)-g(0)$.

Lời giải

Chọn A

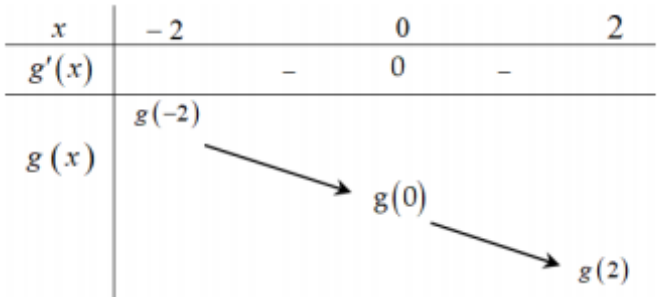
Ta có $g'(x) = f'(x) - 2x^2 + 1 = f'(x) - \left(2x^2 - 1\right)$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2x^2 - 1$. Ta có đồ thị của hàm số $y = 2x^2 - 1$ là một parabol có đỉnh $I(0;-1)$ và đi qua hai điểm $A(-2;7)$ và $B(2;7)$. Khi đó đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $y = 2x^2 - 1$ có dạng



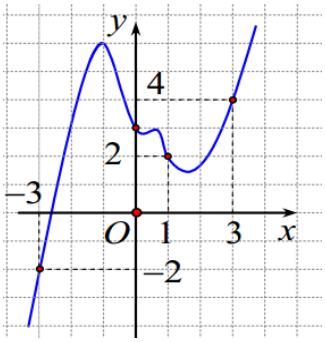
Từ đồ thị ta có $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm 2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm $g(x)$



Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(x)-\frac{2}{3}x^3+x$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng $g(2)$.

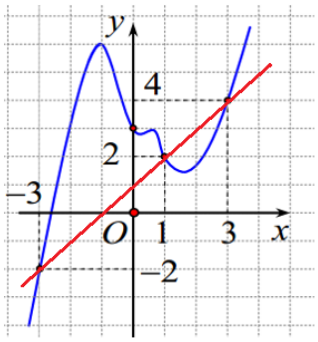
Câu 7: Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=2f(x)-(x+1)^2$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng



A. $f(0)-1$. **B.** $f(-3)-4$. **C.** $2f(1)-4$. **D.** $f(3)-16$.

Lời giải

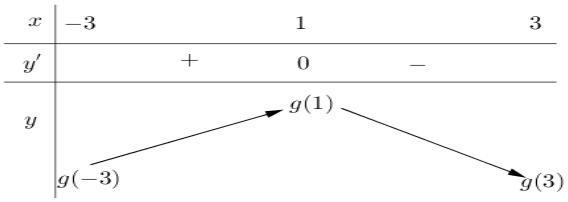
Chọn C



Ta có $g'(x)=2f'(x)-2x-2$.

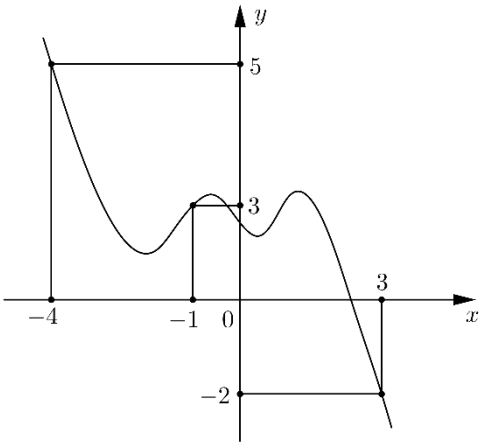
$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=x+1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=1\\x=3\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên, suy ra $\max\limits_{[-3;3]} g(x) = g(1) = 2f(1) - 4$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$, biết $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = 2f(x) + (x-1)^2$ trên đoạn $[-4;3]$ là.Kết luận nào sau đây đúng?

A. $m = g(-1)$. **B.** $m = g(-4)$. **C.** $m = g(3)$. **D.** $m = g(-3)$.

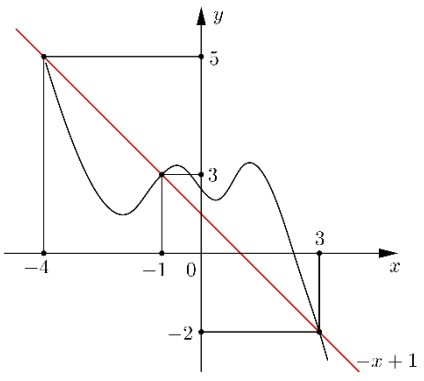
Lời giải

Chọn A

Ta có: $g(x) = 2f(x) + (x-1)^2$

$\Rightarrow g'(x) = 2f'(x) + 2(x-1)$

Xét $g'(x) = 2f'(x) + 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - (-x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -4; x = -1; x = 3$

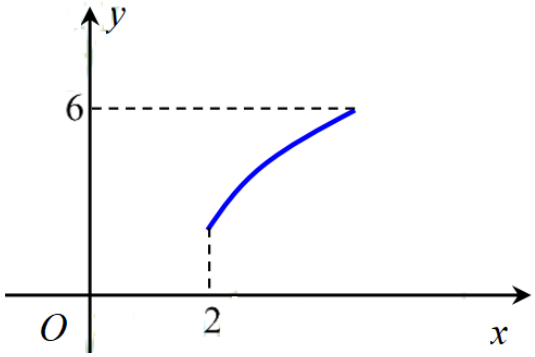


$\Rightarrow$Ta có BBT:

x	$-\infty$		-4		-1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗		↘	$g(-1)$	↗		↘	

$\Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=2f(x)+(x-1)^2$ trên đoạn $[-4;3]$ là: $g(-1)$

Câu 9: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{x-d}$ có một phần đồ thị như hình vẽ bên dưới, biết rằng các hệ số a,b,d nguyên và $ad>0$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T=a+b+d$ bằng



A. -1. **B.** -2. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=\dfrac{-ad-b}{(x-d)^2}$.

Từ hình vẽ suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên các khoảng của tập xác định $\Rightarrow ad+b<0$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{a+\dfrac{b}{x}}{1-\dfrac{d}{x}}=a$ $\Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=a$ $\Rightarrow a>0$

.

Mà $ad>0$ $\Rightarrow d>0$ (1).

Từ hình vẽ suy ra tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x=d<2(2)$.

Từ (1), (2) và do $d\in\mathbb{Z}\Rightarrow d=1$ $\Rightarrow a+b<0$.

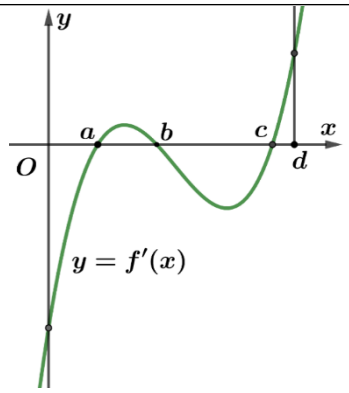
Do $a,b\in\mathbb{Z}\Rightarrow a+b\le -1$.

Khi đó $T=a+b+d\le -1+1\Rightarrow T\le 0$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a+b=-1$ và $d=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $T=a+b+d$ bằng 0.

Câu 28: Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $0<a<b<c<d$ và hàm số $y=f(x)$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ lần lượt là a, b, c như hình vẽ. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $[0;d]$. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $M+m=f(b)+f(a)$.

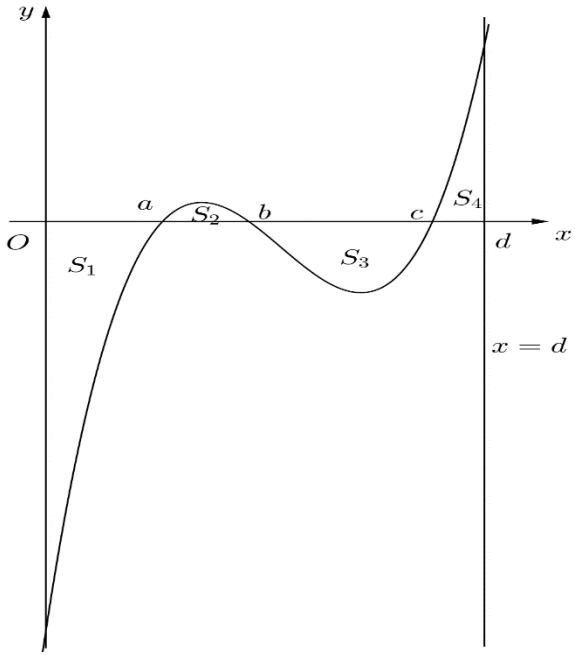
B. $M+m=f(0)+f(a)$.

C. $M+m=f(0)+f(c)$.

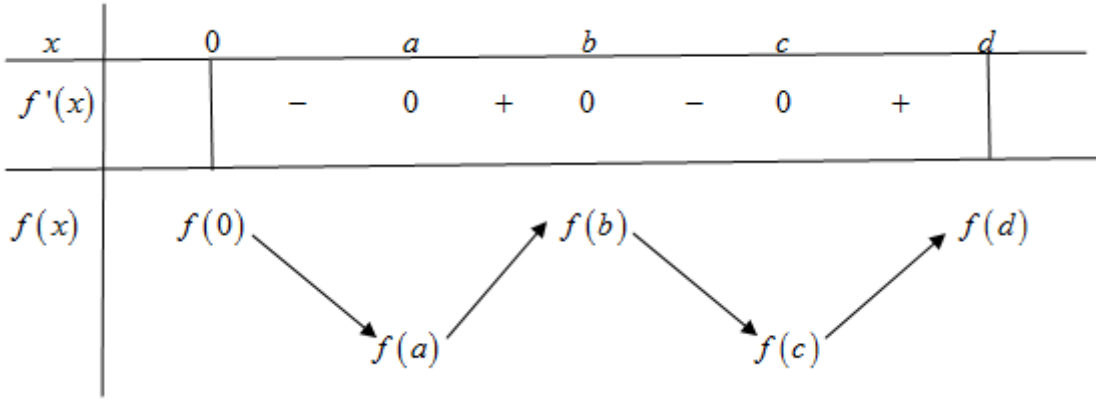
D. $M+m=f(d)+f(c)$.

Lời giải

Chọn C



◆ Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm $y=f(x)$



◆ Dựa vào bảng biến thiên ta có $M=\max\{f(0),\ f(b),\ f(d)\}$, $m=\min\{f(a),\ f(c)\}$

◆ Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0,\ x=a$.

◆ Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a,\ x=b.$

◆ Gọi S_3 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=b,\ x=c.$

Gọi S_4 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=c,\ x=d.$

◆ Dựa vào hình vẽ ta có;

$$S_1>S_2\Leftrightarrow\int_a^0 f'(x)\mathrm{d}x>\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow f(0)-f(a)>f(b)-f(a)\Leftrightarrow f(0)>f(b).$$

$$S_3>S_4\Leftrightarrow\int_c^b f'(x)\mathrm{d}x>\int_c^d f'(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow f(b)-f(c)>f(d)-f(c)\Leftrightarrow f(b)>f(d).$$

◆ Suy ra $M=f(0).$

$$S_3>S_2\Leftrightarrow\int_c^b f'(x)\mathrm{d}x>\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow f(b)-f(c)>f(b)-f(a)\Leftrightarrow f(c)<f(a).$$

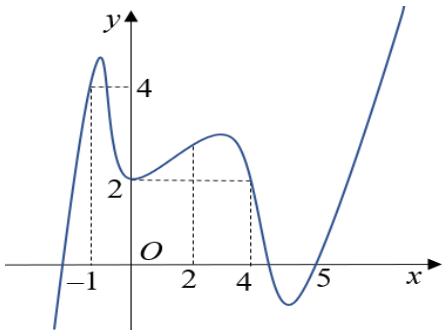
Suy ra $m=f(c).$

◆ Vậy $M+m=f(0)+f(c).$

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(x^2)-2x^2$ trên đoạn $[-1;2]$ lần lượt là

A. $f(0)$ và $f(4)-8$. **B.** $f(0)$ và $f(-1)-2$.

C. $f(4)-8$ và $f(1)-2$. **D.** $f(16)-32$ và $f(-1)-2$.



Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x)=f(x^2)-2x^2$ với $x\in[-1;2]\Rightarrow x^2\in[0;4]$

Ta có: $g'(x)=2x.f'(x^2)-4x=2x\left[f'(x^2)-2\right].$

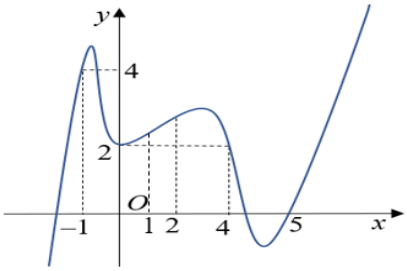
$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'(x^2)=2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=0\\x^2=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\notin[-1;2]\\x=2\end{array}\right.$$

Với $x^2\in[0;4]$ thì $f'(x^2)\geq 2\Rightarrow f'(x^2)-2\geq 0.$

Bảng biến thiên của $g(x)$

x	-1		0		2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$f(1)-2$	↘	$f(0)$	↗	$f(4)-8$

So sánh: $f(1)-2$ với $f(4)-8$



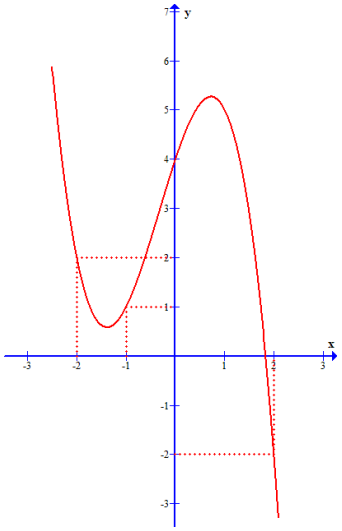
Hình phẳng (H) giới hạn bởi: $y=f'(x)$, $y=2$, $x=1$, $x=4$ có diện tích là S.

$S=\int_1^4|f'(x)-2|.dx=\int_1^4[f'(x)-2].dx=(f(x)-2x)\Big|_1^4=f(4)-8-(f(1)-2).$

$S>0\Rightarrow f(4)-8-(f(1)-2)>0\Leftrightarrow f(4)-8>f(1)-2.$

Vậy: $\min\limits_{[-1;2]}g(x)=f(0)$ và $\max\limits_{[-1;2]}g(x)=f(4)-8.$

Câu 36: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn. Đồ thị hàm số $y=f'(x-1)$ được cho trong hình vẽ bên. Hàm số $g(x)=f(2x)+2x^2+2x$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[-3;\frac{1}{2}\right]$ bằng



A. $f(2)+12$. **B.** $f(-2)$. **C.** $f(-6)+12$. **D.** $f(1)+\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

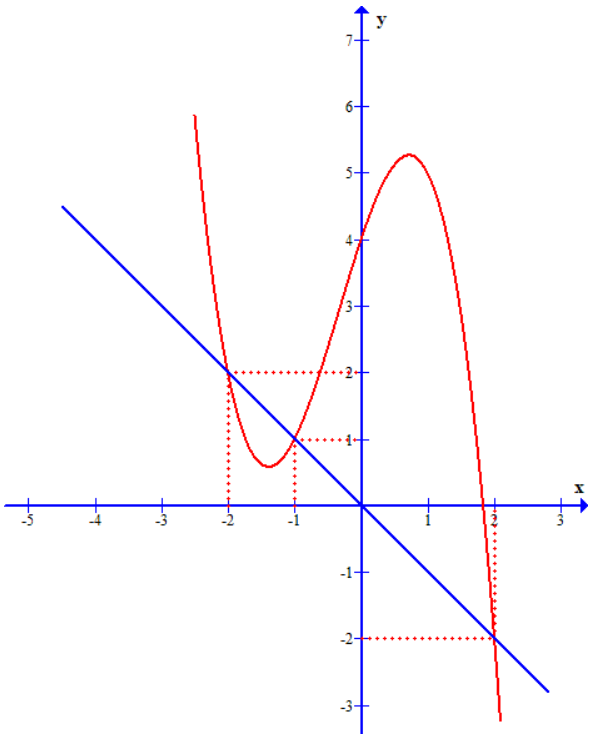
Đặt $t-1=2x$, $x\in\left[-3;\frac{1}{2}\right]\Rightarrow t\in[-5;2]$

Khi đó, hàm số $g(x)=f(2x)+2x^2+2x$ thành

$h(t)=f(t-1)+\frac{(t-1)^2}{2}+(t-1)$

$h'(t)=f'(t-1)+t \Rightarrow h'(t)=0 \Leftrightarrow f'(t-1)=-t$

Xét tương giao giữa đồ thị hai hàm số $y=f'(t-1), y=-t$



Do vậy $h'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=-1 \\ t=2 \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(t)$:

t	-5		-2		-1		2
$h'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0
$h(t)$	$h(-5)$	↗	$h(-2)$	↘	$h(-1)$	↗	$h(2)$

Do vậy, $\min\limits_{\left[-3;\frac{1}{2}\right]} g(x)=\min\limits_{[-5;2]} h(t)=\min\{h(-5);h(-1)\}$.

Trong đó $h(-5)=f(-6)+12, h(-1)=f(-2)$.

Từ đồ thị ta cũng thấy: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f'(t-1), y=-t$ và các đường thẳng $t=-5, t=-2$ lớn hơn diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f'(t-1), y=-t$ và các đường thẳng $t=-2, t=-1$.

Do đó:

$$\int_{-2}^{-1}\left[-t-f'(t-1)\right]\mathrm{d}t<\int_{-5}^{-2}\left[f'(t-1)+t\right]\mathrm{d}t$$

$$\Leftrightarrow\left[-\frac{t^2}{2}-f(t-1)\right]\Big|_{-2}^{-1}<\left[\frac{t^2}{2}+f(t-1)\right]\Big|_{-5}^{-2}$$

$$\Leftrightarrow-\frac{1}{2}-f(-2)+2+f(-3)<2+f(-3)-\frac{25}{2}-f(-6)$$

$$\Leftrightarrow f(-2)>f(-6)+12$$

Vậy, $\min\limits_{\left[-3;\frac{1}{2}\right]}g(x)=f(-6)+12.$

CHỦ ĐỀ 04: TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

LÝ THUYẾT

❖ **Đường tiệm cận ngang**

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a;+\infty),(-\infty;b)$ hoặc $(-\infty;+\infty)$). Đường thẳng $y=y_0$ là đường **tiệm cận ngang** *(hay tiệm cận ngang)* của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=y_0, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=y_0$.

❖ **Đường tiệm cận đứng**

- Đường thẳng $x=x_0$ được gọi là đường **tiệm cận đứng** (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$$

Lưu ý:

- Với đồ thị hàm phân thức dạng $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0;\ ad-bc\neq 0)$ luôn có tiệm cận ngang là $y=\dfrac{a}{c}$ và tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$.

❖ **Dấu hiệu nhận biết các đường tiệm cận của đồ thị hàm số**

- Hàm phân thức mà nghiệm của mẫu không là nghiệm của tử có tiệm cận đứng.
- Hàm phân thức mà bậc của tử $\leq$ bậc của mẫu có TCN.
- Hàm căn thức dạng: $y=\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}, y=\sqrt{f(x)}-g(x), y=g(x)-\sqrt{f(x)}$ có tiệm cận ngang. (dùng liên hợp)
- Hàm $y=a^x,(0<a\neq 1)$ có tiệm cận ngang $y=0$.
- Hàm số $y=\log_a x,(0<a\neq 1)$ có tiệm cận đứng $x=0$.

❖ **Cách tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số**

- Tiệm cận đứng: ta đi tìm nghiệm của mẫu không là nghiệm của tử.
- Tiệm cận ngang: tính 2 giới hạn: $\lim\limits_{x\to+\infty} y$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty} y$

❖ **Một số chú ý trong quá trình tìm tiệm cận.**

- Nếu $x\to+\infty\Rightarrow x>0\Rightarrow\sqrt{x^2}=|x|=x$.
- Nếu $x\to-\infty\Rightarrow x<0\Rightarrow\sqrt{x^2}=|x|=-x$.

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.
B. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$.
C. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận.
D. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=2$.

Lời giải

Chọn B

Vì $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$ nên đồ thi hàm số có tiệm cận đứng $x=1$.

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-x}{x^2+5x+4}$. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là:

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $x^2+5x+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-4\end{array}\right.$, hai nghiệm này đều không là nghiệm của tử số nên đây là hai đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2-x}{x^2+5x+4}=2$, nên đường $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-3x+2}$. Đồ thị hàm số có bao nhiêu đường tiệm cận.

A. 3 **B.** 1 **C.** 4 **D.** 2

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-3x+2}=\dfrac{x-1}{(x-1)(x-2)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\dfrac{1}{(x-2)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$, $\forall x\neq 1$.

Khi đó ta thấy $x=2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{(x-2)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=0$, nên đồ thị hàm số nhận $y=0$ làm tiệm cận ngang.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

VÍ DỤ 4. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x^2-5x}-\sqrt{2x^2-3x}}$

A. $y=2;y=-2$. **B.** $y=\sqrt{2};y=-\sqrt{2}$. **C.** $y=\sqrt{2}$. **D.** $y=2$.

Lời giải

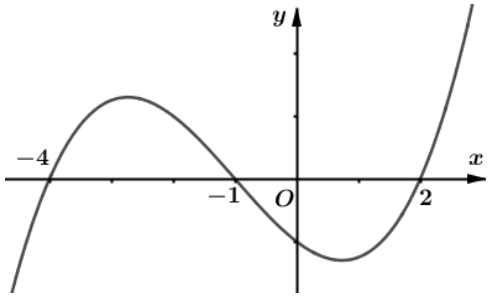
Chọn B

Tập xác định $D=(-\infty;0)\cup\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$. Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2-5x}+\sqrt{2x^2-3x}}{-2x}=-\sqrt{2}$

Và $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2-5x}+\sqrt{2x^2-3x}}{-2x}=\sqrt{2}$.

Vậy đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\pm\sqrt{2}$

VÍ DỤ 5. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên dưới.



Hỏi đồ thị hàm số $y=g(x)=\frac{2x}{f(x)}$ có bao nhiêu đường **tiệm cận đứng**?

A. 3 **B.** 1 **C.** 4 **D.** 2

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định: $f(x)\neq 0$.

Từ đồ thị ta thấy $f(x)=0$ khi $x=-4$, $x=-1$ và $x=2$.

Khi đó $f(x)=a(x+4)(x+1)(x-2)$ có 3 nghiệm.

Do đó đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng.

VÍ DỤ 6. Biết đồ thị hàm số $y=\frac{\sqrt{3x-5}+ax+b}{(x-2)^2}$ không có tiệm cận đứng. Khi đó $4a-b$ bằng:

A. -8. **B.** 10. **C.** -4. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $y=\frac{\sqrt{3x-5}+ax+b}{(x-2)^2}$ không có tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{3x-5}+ax+b=0$ có nghiệm kép $x=2$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}f(2)=0\\f'(2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+2a+b=0\\\frac{3}{2\sqrt{2.3-5}}+a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{3}{2}\\b=2\end{cases}$.

Vậy $4a-b=4.\left(-\frac{3}{2}\right)-2=-8$.

VÍ DỤ 7. Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{(x-1)(x^2+3x+3)}}{mx^2+2x-3}$ có đúng 3 đường tiệm cận.

A. $m\in\left(-\dfrac{1}{3};0\right)$. **B.** $m\in\left(-\dfrac{1}{3};+\infty\right)$ **C.** $m\in\left[-\dfrac{1}{3};0\right)$. **D.** $m\in\left(-\dfrac{1}{3};0\right]$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $(x-1)(x^2+3x+3)\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$

Trường hợp 1:

Nếu $m=0$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang. Do đó đồ thị hàm số không thể có ba đường tiệm cận.

Trường hợp 2:

Nếu $m\neq 0$ thì đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y=0$.

Do đó đồ thị hàm số có đúng ba đường tiệm cận $\Leftrightarrow mx^2+2x-3=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thuộc nửa khoảng $[1;+\infty)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\(x_1-1)(x_2-1)\ge 0\\(x_1-1)+(x_2-1)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+3m>0\\\dfrac{-1}{m}\ge 0\\\dfrac{1+m}{m}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-\dfrac{1}{3}\\m<0\\m>-1\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{1}{3}<m<0.$$ Vậy $m\in\left(-\dfrac{1}{3};0\right)$

VÍ DỤ 8. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+2}$ có đồ thị (C), gọi d là tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ bằng $m-2$. Biết đường thẳng d cắt tiệm cận đứng của (C) tại điểm $A(x_1;y_1)$ và cắt tiệm cận ngang của (C) tại điểm $B(x_2;y_2)$. Gọi S là tập hợp các số m sao cho $x_2+y_1=-5$. Tính tổng bình phương các phần tử của S.

A. 0. **B.** 4. **C.** 10. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=\dfrac{3}{(x+2)^2}$.

Với $x=m-2\Rightarrow y=1-\dfrac{3}{m}$: $A\left(m-2;1-\dfrac{3}{m}\right)(m\neq 0)$.

Phương trình tiếp tuyến d của (C): $y=\dfrac{3}{m^2}(x-m+2)+1-\dfrac{3}{m}$.

Đồ thị (C) có tiệm cận ngang $y=1$ và tiệm cận đứng $x=-2$.

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y = \dfrac{3}{m^2}\left(x - m + 2\right) + 1 - \dfrac{3}{m} \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - \dfrac{6}{m} \\ x = -2 \end{cases}$ nên $y_1 = 1 - \dfrac{6}{m}$.

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y = \dfrac{3}{m^2}\left(x - m + 2\right) + 1 - \dfrac{3}{m} \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2m - 2 \end{cases}$ nên $x_2 = 2m - 2$.

Suy ra $x_2 + y_1 = 2m - \dfrac{6}{m} - 1 = -5 \Leftrightarrow 2m^2 + 4m - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -3 \end{array}\right.$.

Vậy tổng bình phương các phần tử của S là $1^2 + \left(-3\right)^2 = 10$.

DẠNG 1 Cơ bản về tiệm cận của đồ thị hàm số

Câu 1: Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 2: Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}$.

A. 2 **B.** 3 **C.** 0 **D.** 1

Câu 3: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ có mấy tiệm cận.

A. 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 0

Câu 4: Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là

A. 1 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 3

Câu 5: Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$.

A. $x=3$ và $x=2$. **B.** $x=3$. **C.** $x=-3$ và $x=-2$. **D.** $x=-3$.

Câu 6: Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+x}$ là

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 0

Câu 7: Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 8: Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x(4x+6)}-2}{x+2}$ là?

A. 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 4

Câu 9: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}}$. Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 10: Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2}$ là

A. 4 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 2

Câu 11: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 12: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2-2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 13: Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 14: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}}$. Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 15: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 16: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2-6x+2m}}$ có hai đường tiệm cận đứng. Số phần tử của S là

A. vô số. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 13.

Câu 17: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-8x+m}$ có 3 đường tiệm cận?

A. 14. **B.** 8. **C.** 15. **D.** 16.

Câu 18: Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x^3-3mx^2+\left(2m^2+1\right)x-m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $\left[-2020;2020\right]$ để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận?

A. 4039. **B.** 4040. **C.** 4038. **D.** 4037.

Câu 19: Có bao nhiêu số nguyên của m thuộc đoạn $\left[-100;100\right]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{\left(x-m\right)\sqrt{2x-x^2}}$ có đúng hai đường tiệm cân?

A. 200. **B.** 2. **C.** 199. **D.** 0.

Câu 20: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+m}{x^2-3x+2}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A. $m=-1$ **B.** $m\in\{1;4\}$ **C.** $m=4$ **D.** $m\in\{-1;-4\}$

Câu 21: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\dfrac{x+1}{x^2-2mx+4}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị có ba đường tiệm cận

A. $m>2$ **B.** $\begin{cases}m<-2\\ m\neq-\dfrac{5}{2}\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>2\\ m<-2\end{array}\right.\\ m\neq-\dfrac{5}{2}\end{cases}$ **D.** $\left[\begin{array}{l}m<-2\\ m>2\end{array}\right.$

Câu 22: Biết rằng đồ thị của hàm số $y=\dfrac{(n-3)x+n-2017}{x+m+3}$ (m,n là các số thực) nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung là tiệm cận đứng. Tính tổng $m+n$.

A. 0 **B.** -3 **C.** 3 **D.** 6

Câu 23: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{mx^2-8x+2}}$ có đúng bốn đường tiệm cận?

A. 8 **B.** 6 **C.** 7 **D.** Vô số

Câu 24: Với giá trị nào của hàm số m để đồ thị hàm số $y=x-\sqrt{mx^2-3x+7}$ có tiệm cạn ngang.

A. $m=1$ **B.** $m=-1$ **C.** $m=\pm 1$ **D.** Không có m

Câu 25: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$. Tìm a,b để đồ thị hàm số có $x=1$ là tiệm cận đứng và $y=\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang.

A. $a=-1;b=2$. **B.** $a=4;b=4$. **C.** $a=1;b=2$. **D.** $a=-1;b=-2$.

Câu 26: Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in[-10;10]$ sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{2x^2+6x-m-3}$ có hai đường tiệm cận đứng?

A. 19. **B.** 15. **C.** 17. **D.** 18.

Câu 27: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}$ bằng 3?

A. 4. **B.** 2. **C.** Vô số. **D.** 3.

Câu 28: Tổng các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2+2(m-1)x+m^2-2}$ có đúng một tiệm cận đứng.

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** -3. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 29: Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x^3-3mx^2+\ 2m^2+1\ x-m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $-6;6$ của tham số m để đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận?

A. 12. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 11.

Câu 30: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2+3x+m}{x-m}$ không có tiệm cận đứng.

A. $m=1$. **B.** $m>1$. **C.** $m=1$ và $m=0$. **D.** $m\neq 0$.

Câu 31: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $-2017;2017$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-4x+m}}$ có hai tiệm cận đứng.

A. 2019. **B.** 2021. **C.** 2018. **D.** 2020.

Câu 32: Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2019m$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2020m^4$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị của m để đồ thị của hàm số $y=f(x)$ có duy nhất một tiệm cận ngang?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 33: Cho hàm số $y=\dfrac{1}{\left[x^2-(2m+1)x+2m\right]\sqrt{x-m}}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

A. $\begin{cases}0<m<1\\ m\neq\dfrac{1}{2}\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}m<1\\ m\neq\dfrac{1}{2}\end{cases}$. **C.** $m>1$. **D.** $\begin{cases}0\le m\le 1\\ m\neq\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

Câu 34: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{6x-3}{\left(mx^2-6x+3\right)\left(9x^2+6mx+1\right)}$ có đúng 1 đường tiệm cận?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Câu 35: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x+\sqrt{mx^2+1}$ có tiệm cận ngang.

A. $0<m<1$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-1$. **D.** $m>1$.

Câu 36: Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{mx^2-2x+4}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 37: Gọi S là tập các giá trị nguyên của m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{2019x}{\sqrt{17x^2-1}-m|x|}$ có bốn đường tiệm cận. Tính số phần tử của tập S.

A. Vô số **B.** 3 **C.** 5 **D.** 4

Câu 38: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^3+mx+1}-\sqrt[3]{x^4+x+1}+m^2x}$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng. Khi đó tổng các phần tử của S bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

Câu 39: Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc khoảng $-10;10$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2}$ có đúng ba đường tiệm cận?

A. 12. **B.** 11. **C.** 0. **D.** 10.

Câu 40: Cho hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^3-3x^2+m-1}}$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có 4 đường thẳng tiệm cận.

A. $1<m<5$. **B.** $-1<m<2$. **C.** $m<1$ hoặc $m>5$. **D.** $m>2$ hoặc $m<-1$.

Câu 41: Hàm số $y=\dfrac{\sqrt{3x+1}+ax+b}{(x-1)^2}$ không có tiệm cận đứng. Khi đó hiệu $a-b$ bằng:

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $-\dfrac{3}{4}$. **C.** $-\dfrac{5}{4}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 42: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham để m đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{-x^2+2016x+2017}-24\sqrt{7}}{x-m}$ có tiệm cận đứng?

A. vô số. **B.** 2. **C.** 2017 **D.** 2019.

Câu 43: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^3+mx+1}-\sqrt[3]{x^4+x+1}+m^2x}$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng. Khi đó tổng các phần tử của S bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

Câu 44: Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc khoảng $-10;10$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2}$ có đúng ba đường tiệm cận?

A. 12. **B.** 11. **C.** 0. **D.** 10.

Câu 45: Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1}$ có đúng một đường tiệm cận.

A. $-1\le m<0$. **B.** $-1\le m\le 0$. **C.** $m<-1$. **D.** $m>0$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.A	3.C	4.A	5. B	6.C	7.C	8.C	9.A	10.D
11.A	12.C	13.A	14.B	15.C	16.B	17.A	18.D	19.A	20.D
21.C	22.A	23.B	24.A	25.C	26.C	27.B	28.A	29.B	30.C
31.D	32.B	33.A	34.C	35.B	36.D	37.C	38.B	39.A	40.A
41.C	42.C	43.B	44.A	45.A					

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: **Chọn C**

Tiệm cận ngang:

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2\left(5-\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5-\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}} = 5$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $y=5$.

Tiệm cận đứng:

Cho $x^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Ta có: $\lim\limits_{x\to1} y = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{(5x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{5x+1}{x+1} = \dfrac{6}{2} = 3$ nên $x=1$ không là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} y = \lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{5x^2-4x-1}{(x+1)(x-1)} = \lim\limits_{x\to(-1)^+} \left(\dfrac{1}{x+1}.\dfrac{5x^2-4x-1}{x-1}\right) = -\infty$

vì $\begin{cases} \lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{1}{x+1} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{5x^2-4x-1}{x-1} = -4 < 0 \end{cases}$.

Khi đó, đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng $x=-1$.

Tổng cộng đồ thị hàm số có 2 tiệm cận.

Câu 2: **Chọn A**

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm1\}$

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}} = 1 \Rightarrow y=1$ là đường tiệm cận ngang.

Mặc khác:

$\lim\limits_{x\to1} y = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{(x-4)}{(x+1)} = -\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow x=1$ không là đường tiệm cận đứng.

$$\lim_{x\to(-1)^+} y=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x^2-5x+4}{x^2-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{(x-4)}{(x+1)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to(-1)^-} y=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x^2-5x+4}{x^2-1}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{(x-4)}{(x+1)}=+\infty$$

$\Rightarrow x=-1$ là đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận

Câu 3: Chọn C

Ta có $x^2-4=0\Leftrightarrow x=\pm2$

$\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{x-2}{x^2-4}\right)=\frac{1}{4}$ nên đường thẳng $x=2$ không phải là tiệm cân đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to-2^+}\left(\frac{x-2}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to-2^+}\frac{1}{x+2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\left(\frac{x-2}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to(-2)^-}\frac{1}{x+2}=-\infty$, nên đường thẳng $x=-2$ là tiệm cân đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x-2}{x^2-4}\right)=0$ nên đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy có đồ thị có hai đường tiệm cận.

Câu 4: Chọn A

Tập xác định của hàm số: $D=[-9;+\infty)\setminus\{0;-1\}$

Ta có: $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}=-\infty$.

$\Rightarrow$ TCĐ: $x=-1$.

$$\lim_{x\to0^+} y=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{\left(x^2+x\right)\left(\sqrt{x+9}+3\right)}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+9}+3\right)}=\frac{1}{6}.$$

$$\lim_{x\to0^-} y=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{\left(x^2+x\right)\left(\sqrt{x+9}+3\right)}=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+9}+3\right)}=\frac{1}{6}.$$

$\Rightarrow$ $x=0$ không là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng.

Câu 5: Chọn B

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$

$$\lim_{x\to2^+}\frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to2^+}\frac{(2x-1)^2-\left(x^2+x+3\right)}{\left(x^2-5x+6\right)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to2^+}\frac{(2x-1)^2-\left(x^2+x+3\right)}{\left(x^2-5x+6\right)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to2^+}\frac{(3x+1)}{(x-3)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)}=-\frac{7}{6}$$

Tương tự $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}=-\frac{7}{6}$. Suy ra đường thẳng $x=2$ **không** là tiệm cận đứng của

đồ thị hàm số đã cho.

$\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}=+\infty;\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}=-\infty$. Suy ra đường thẳng $x=3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 6: **Chọn C**

Tập xác định hàm số $D=[-16;+\infty)\setminus\{-1;0\}$.

Ta có

$$\lim_{x\to 0}y=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+16}-4}{(x+1)x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(x+1)\left(\sqrt{x+16}+4\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+16}+4\right)}=\frac{1}{8}.$$

$$\lim_{x\to(-1)^+}y=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\sqrt{x+16}-4}{(x+1)x}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+16}+4\right)}=+\infty.$$

vì $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(\sqrt{x+16}+4\right)=\sqrt{15}+4>0$, $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)=0$ và $x\to(-1)^+$ thì $x>-1\Rightarrow x+1>0$.

Tương tự $\lim\limits_{x\to(-1)^-}y=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+16}+4\right)}=-\infty$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng là $x=-1$.

Câu 7: TXĐ: $D=[-4;+\infty)\setminus\{-1;0\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to(-1)^+}y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}=-\infty$

Nên đường thẳng $x=-1$ là một đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$$\lim_{x\to 0}y=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x(x+1)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\frac{1}{4}$$

Nên đường thẳng $x=0$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận đứng $x=-1$.

Câu 8: **Chọn C**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x(4x+6)}-2}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4+\dfrac{6}{x}}-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{2}{x}}=2$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x(4x+6)}-2}{x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4+\dfrac{6}{x}}-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{2}{x}}=-2$$

$$\lim_{x\to-2^\pm}\frac{\sqrt{x(4x+6)}-2}{x+2}=\lim_{x\to-2^\pm}\frac{(x+2)(4x-2)}{(x+2)\left(\sqrt{x(4x+6)}+2\right)}=\lim_{x\to-2^\pm}\frac{4x-2}{\sqrt{x(4x+6)}+2}=\frac{-5}{2}$$

Vậy hàm số có hai tiệm cận ngang $y=\pm 2$.

Câu 9: Điều kiện: $x \in \left(-\infty;-\sqrt{2}\right) \cup (-1;1) \cup \left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Do $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{\sqrt{1-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x^4}}} = 1 \Rightarrow y = 1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Có $\lim\limits_{x\to 1^-} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = 1$ là đường tiệm cận đứng.

Có $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y = \lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{(x+1)(x+2)}{\sqrt{(x+1)\left(x+\sqrt{2}\right)(x-1)\left(x-\sqrt{2}\right)}} = \lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{\sqrt{(x+1)}(x+2)}{\sqrt{\left(x+\sqrt{2}\right)(x-1)\left(x-\sqrt{2}\right)}} = 0$ nên đường thẳng $x = -1$ không là đường tiệm cận đứng.

Có $\lim\limits_{x\to\left(\sqrt{2}\right)^+} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = \sqrt{2}$ là đường tiệm cận đứng.

Có $\lim\limits_{x\to\left(-\sqrt{2}\right)^-} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = -\sqrt{2}$ là đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận (1 tiệm cận ngang, 3 tiệm cận đứng).

Câu 10: **Chọn D**

Đkxđ: $\begin{cases} x-2 \ge 0 \\ x^2-3x+2 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x \ne 2, x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2}\right) = +\infty$ nên đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2}\right) = 0$ nên đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 11: **Chọn A**

Xét hàm số $y = \dfrac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}$ có tập xác định $D = (-\infty;0] \cup [1;+\infty) \setminus \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$.

Ta có

$\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}} \dfrac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1} = \lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}} \dfrac{3x^2+x}{(3x+1)\left(2x-\sqrt{x^2-x}\right)} = \lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}} \dfrac{x}{2x-\sqrt{x^2-x}} = \dfrac{1}{4}$;

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1} = 0$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1} = \dfrac{1}{2}$ nên đồ thị không có tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1} = \lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}} \dfrac{2x-x\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}}{3x+1} = \lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}} \dfrac{2-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}}{3+\dfrac{1}{x}} = \dfrac{1}{3}$,

và $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1} = \lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}} \dfrac{2x+x\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}}{3x+1} = \lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}} \dfrac{2+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}}{3+\dfrac{1}{x}} = 1$ nên đồ thị có hai tiệm cận ngang là $y = \dfrac{1}{3}$ và $y = 1$.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả hai đường tiệm cận.

Câu 12: Chọn C

Tập xác định của hàm số là $D=[-1;0)\cup(2;+\infty)$. Ta có

$$\lim_{x\to 0-} y=\lim_{x\to 0-}\frac{25x^2+9x}{\left(x^2-2x\right)\left(5x+1+\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{x\to 0-}\frac{25x+9}{\left(x-2\right)\left(5x+1+\sqrt{x+1}\right)}=-\frac{9}{4}.$$

$$\lim_{x\to 2+} y=+\infty .$$

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}-\sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}}}{1-\frac{2}{x}}=0.$$

Vậy đồ thị của hàm số có hai đường tiệm cận có phương trình $x=2$ và $y=0$.

Câu 13: Chọn A

Tập xác định: $D=\left[-\frac{1}{3};+\infty\right)\setminus\{1\}$

+ Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(x-1)\left(4\sqrt{3x+1}+3x+5\right)}{-9(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{4\sqrt{3x+1}+3x+5}{-9(x-1)}=-\infty$

do đó đường thẳng $x=1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{4\sqrt{\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-3-\frac{5}{x}}=-\frac{1}{3}$ do đó đường thẳng $y=-\frac{1}{3}$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Câu 14: Chọn B

Tập xác định $D=\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup(-1;1)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

$$\lim_{x\to\left(-\sqrt{2}\right)^-} y=\lim_{x\to\left(\sqrt{2}\right)^+} y=\lim_{x\to(-1)^+} y=\lim_{x\to(1)^-} y=+\infty .$$

$\Rightarrow$Các đường tiệm cận đứng của đồ thị là $x=\pm\sqrt{2}$, $x=\pm 1$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty} y=1\Rightarrow$đồ thị có một tiệm cận ngang $y=1$.

Câu 15: Chọn C

Hàm số $y=\frac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1}$ xác định $\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2+2x-1\ge 0\\ x+1\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\le\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\\ x\ge\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\end{array}\right.\\ x\ne -1\end{cases}$.

Tập xác định của hàm số đã cho là $D=(-\infty;-1)\cup\left(-1;\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right]\cup\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{4};+\infty\right)$.

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+x}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+x}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+1}{1+\frac{1}{x}} = -1.$$

$\Rightarrow y=-1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x\to-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+x}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+x}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+1}{1+\frac{1}{x}} = 3.$$

$\Rightarrow y=3$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x\to+\infty$.

$$\lim_{x\to-1} y = \lim_{x\to-1} \frac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1} = \lim_{x\to-1} \frac{4x^2+2x-1-x^2}{(x+1)\left(\sqrt{4x^2+2x-1}-x\right)} = \lim_{x\to-1} \frac{(x+1)(3x-1)}{(x+1)\left(\sqrt{4x^2+2x-1}-x\right)} = -2.$$

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1}$ có 2 đường tiệm cận.

Câu 16: Chọn B

Điều kiện xác định $\begin{cases} x+2\ge 0 \\ x^2-6x+2m>0 \end{cases}$.

Để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng thì phương trình $x^2-6x+2m=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 lớn hơn $-2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=9-2m>0 \\ x_1+x_2>-2 \\ (-2)^2-6\cdot(-2)+2m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<\dfrac{9}{2} \\ 3>-2 \\ 4+12+2m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<\dfrac{9}{2} \\ m>-8 \end{cases}$.

Do đó tập $S=\{-7;-6;-5;...;4\}$ có 12 giá trị.

Câu 17: Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-1}{x^2-8x+m} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x^2-8x+m} = 0$ nên hàm số có một tiện cận ngang $y=0$.

Hàm số có 3 đường tiệm cận khi và chỉ khi hàm số có hai đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình $x^2-8x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=16-m>0 \\ m-7\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<16 \\ m\ne 7 \end{cases}$.

Kết hợp với điều kiện m nguyên dương ta có $m\in\{1;2;3;...;6;8;...;15\}$. Vậy có 14 giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Câu 18: Chọn D

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=0,\ \lim\limits_{x\to-\infty} y=0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận ngang.

Do đó đồ thị hàm số đã cho có 4 đường tiệm cận khi và chỉ khi nó có 3 tiệm cận đứng $(*)$.

Có $x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m=(x-m)(x^2-2mx+1)$

$x^3-3mx^2+\left(2m^2+1\right)x-m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\x^2-2mx+1=0\end{array}\right.\qquad(2)$

$(*)\Leftrightarrow x^3-3mx^2+\left(2m^2+1\right)x-m=0$ có 3 nghiệm phân biệt khác 3.

$\Leftrightarrow$ $m\neq 3$ và (2) có 2 nghiệm phân biệt khác m và khác 3.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 3\\m^2-2m.m+1\neq 0\\3^2-2m.3+1\neq 0\\\Delta_2'=m^2-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 3,m\neq\dfrac{5}{3}\\\left[\begin{array}{l}m>1\\m<-1\end{array}\right.\end{cases}$$

Do đó tập tất cả giá trị nguyên của m thỏa ycbt là $\{-2020;-2019;...;-2;2;4;5;...;2020\}$.

Vậy có 4037 giá trị m thỏa ycbt.

Câu 19: Chọn A

Ta có điều kiện xác định là $\begin{cases}x\neq m\\x\in(0;2)\end{cases}$, khi đó đồ thị hàm số sẽ không có tiệm cận ngang.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+}y=\infty,\ \lim\limits_{x\to 2^-}y=\infty$

Suy ra $x=0,\ x=2$ là hai đường tiệm cận đứng

Vậy để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận thì $\left[\begin{array}{l}m\leq 0\\m\geq 2\end{array}\right.$, theo bài m thuộc đoạn $[-100;100]$

. Vậy có 200 số nguyên của m thỏa mãn đầu bài.

Câu 20: $y=\dfrac{x^2+m}{x^2-3x+2}=\dfrac{x^2+m}{(x-1)(x-2)}$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=1\Rightarrow y=1$ là đường tiệm cận ngang.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+m}{x^2-3x+2}$ có đúng hai đường tiệm cận $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ pt $x^2+m=0$ nhận nghiệm $x=1$ hoặc $x=2$.

Khi đó: $\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=-4\end{array}\right.$.

Với $m=-1$ có một tiệm cận đứng $x=2$.

Với $m=-4$ có một tiệm cận đứng $x=1$.

Vậy $m\in\{-1;-4\}$.

Câu 21: Chọn C

Để đồ thị có ba đường tiệm cận thì $x^2-2mx+4=0$ có hai nghiệm phân biệt $\neq -1$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\(-1)^2-2m(-1)+4\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>2\\m<-2\end{array}\right.\\m\neq-\dfrac{5}{2}.\end{cases}$$

Câu 22: Chọn A

Theo công thức tìm nhanh tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ta có

Đồ thị hàm số nhận $x=-\dfrac{d}{c}=-m-3=0$ làm TCĐ $\Rightarrow m=-3$

Đồ thị hàm số nhận $y=\dfrac{a}{c}=n-3=0$ làm TCN $\Rightarrow n=3$.

Vậy $m+n=0$.

Câu 23: **Trường hợp 1:** $m<0$ suy ra tập xác định của hàm số là $D=(x_1;x_2)$, ($x_1;x_2$ là nghiệm của phương trình $mx^2-8x+2=0$). Do đó $m<0$ không thỏa yêu cầu của bài toán.

Trường hợp 2: $m=0 \Rightarrow y=\dfrac{x-1}{\sqrt{-8x+2}}$ suy ra tập xác định của hàm số là $D=(-\infty;4)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty;\ \lim\limits_{x\to4^-} y=-\infty$. Khi đó ta có $x=-4$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Do đó $m=0$ không thỏa yêu cầu của bài toán

Trường hợp 3: $m>0$ suy ra tập xác định của hàm số là $D=(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$ ($x_1;x_2$ là nghiệm của phương trình $mx^2-8x+2=0$). Do đó đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận khi phương trình $mx^2-8x+2=0$ có hai nghiệm phân biệt khác

$1\Leftrightarrow\begin{cases}16-2m>0\\ m>0;m\in\mathbb{Z}\\ m-8+2\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<8\\ m>0;m\in\mathbb{Z}\\ m\neq6\end{cases}\Rightarrow m=\{1;2;3;4;5;7\}$. Suy ra có tất cả 6 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Câu 24: **Chọn A**

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang

$\Rightarrow$Hàm số xác định trên một trong các miền $(-\infty;a),(-\infty;a],(a,+\infty)$ hoặc $[a;+\infty)$

$m\geq0$

Trường hợp 1: $m=0\Rightarrow y=x-\sqrt{-3x+7}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\pm\infty$ đồ thị không có tiệm cận ngang

Trường hợp 2: $m>0, y=x-\sqrt{mx^2-3x+7}$

Khi $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-x\sqrt{m-\dfrac{3}{x}+\dfrac{7}{x^2}}\right)=\dfrac{3}{2}$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi và chỉ khi $m=1$.

Vậy $m=1$

Cách trắc nghiệm:

Thay $m=1\Rightarrow y=x-\sqrt{x^2-3x+7}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-3x+7}\right)=\dfrac{3}{2}$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2-3x+7}\right)=-\infty$ không có tiệm cận ngang.

Thay $m=-1\Rightarrow y=x-\sqrt{-x^2-3x+7}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{-x^2-3x+7}\right)$ không xác định.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{-x^2-3x+7}\right)$ không xác định. Vậy $m=1$

Câu 25: **Chọn C**

+ $b=0\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+1}{-2}$ không có tiệm cận.

+ $b \neq 0$, tập xác định của hàm số $y = \dfrac{ax+1}{bx-2}$ là $D = R \setminus \left\{\dfrac{2}{b}\right\}$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{ax+1}{bx-2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a+\dfrac{1}{x}}{b-\dfrac{2}{x}} = \dfrac{a}{b}$.

$\Rightarrow$đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \dfrac{a}{b} \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow b = 2a$.

$\lim\limits_{x\to\frac{2^+}{b}} y = \lim\limits_{x\to\frac{2^+}{b}} \dfrac{ax+1}{bx-2} = \left[\begin{array}{l} +\infty \\ -\infty \end{array}\right.$.

$\Rightarrow$đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = \dfrac{2}{b} \Rightarrow \dfrac{2}{b} = 1 \Leftrightarrow b = 2 \Rightarrow a = 1$.

Vậy $a = 1; b = 2$.

Câu 26: Chọn C

Ta có đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{2x^2+6x-m-3}$ có hai đường tiệm cận đứng khi phương trình $2x^2+6x-m-3=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} 3^2-2(-m-3)>0 \\ 2.1^2+6.1-m-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{15}{2} \\ m \neq 5 \end{cases}$

Từ đó ta suy ra tập các giá trị nguyên của m thỏa mãn là $\{-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,6,7,8,9,10\}$. Vậy có 17 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 27: Chọn B

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}$ có nhiều nhất một tiệm cận đứng và hai tiệm cận ngang.

Điều kiện để đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}$ có 3 tiệm cận là nó có đúng 1 tiệm cận đứng và 2 tiệm cận ngang.

Xét điều kiện tồn tại $\lim\limits_{x\to+\infty} y$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y$

Trường hợp 1: $g(x) = mx^2+3mx+4 \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ \begin{cases} m > 0 \\ \Delta = 9m^2-16m \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \dfrac{16}{9}$

Trường hợp 2: $g(x) = mx^2+3mx+4 \geq 0$ với $\forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ với x_1; x_2 là nghiệm của $g(x)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta = 9m^2-16m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \dfrac{16}{9}$

Vậy $m \geq 0$ thì tồn tại $\lim\limits_{x\to+\infty} y$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y$

Khi đó: $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{m+\dfrac{3m}{x}+\dfrac{4}{x^2}}}{1+\dfrac{2}{x}} = \sqrt{m}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-\sqrt{m+\dfrac{3m}{x}+\dfrac{4}{x^2}}}{1+\dfrac{2}{x}} = -\sqrt{m}$

Vậy điều kiện để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $m>0$

Xét trường hợp $x=-2$ là nghiệm của tử số $\Rightarrow x=-2$ là nghiệm của $g(x)=mx^2+3mx+4$

$\Rightarrow g(-2)=0 \Rightarrow m=2$

Khi đó $y=\dfrac{\sqrt{2x^2+6x+4}}{x+2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-2^-} y = \dfrac{\sqrt{2(x+1)(x+2)}}{x+2} = \lim\limits_{x\to-2^-}\left[-\sqrt{\dfrac{2(x+1)}{x+2}}\right] = -\infty$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng $x=-2 \Rightarrow m=2$ thỏa mãn

Xét trường hợp $x=-2$ không là nghiệm của tử số, để $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số thì $\begin{cases} g(-2)\neq 0 \\ g(-2)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow g(-2)>0 \Leftrightarrow 4-2m>0 \Leftrightarrow m<2$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng $x=-2$ với $\forall m\in(0;2]$

Vậy điều kiện để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}$ có 3 tiệm cận là $\forall m\in(0;2]$

Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài là $m=1;\ m=2$.

Câu 28: Chọn A

Đặt $f(x)=x^2+2(m-1)x+m^2-2$

Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng khi và chỉ khi $f(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm $x=1$ hoặc $f(x)=0$ có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases}\Delta'>0 \\ f(1)=0\end{cases} \\ \Delta'=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases}(m-1)^2-(m^2-2)>0 \\ 1+2(m-1)+m^2-2=0\end{cases} \\ m=\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases}m<\dfrac{3}{2} \\ m=1; m=-3\end{cases} \\ m=\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-3. \\ m=\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

Vậy tổng các giá trị m thỏa mãn là: $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 29: Chọn B

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} y = 0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=0$.

Do đó, đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận khi phương trình $x^3-3mx^2+\ 2m^2+1\ x-m=0$ có 3 nghiệm phân biệt $x\neq 3$.

Xét phương trình $x^3-3mx^2+\ 2m^2+1\ x-m=0$ ta có

$$x^3-3mx^2+\ 2m^2+1\ x-m=0 \Leftrightarrow\ x-m\ \ x^2-2mx+1\ =0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x^2-2mx+1=0 \end{array}\right.$$

Phương trình có ba nghiệm phân biệt $x \neq 3$ khi và chỉ khi $m \neq 3$ và phương trình $x^2 - 2mx + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x \neq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m^2 - 1 > 0 \\ 3^2 - 2.3.m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -1 \end{array}\right. \\ m \neq \dfrac{5}{3} \end{cases}$.

Do m nguyên và $m \in -6;6$ nên $m \in -6;-5;-4;-3;-2;2;4;5;6$.

Vậy có 9 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Câu 30: Chọn C

Tập xác định: $\mathbb{R}\backslash\{m\}$.

Có $\lim\limits_{x\to m}\dfrac{2x^2-3x+m}{x-m} = \lim\limits_{x\to m}\left(2x+2m-3+\dfrac{2m^2-2m}{x-m}\right)$.

Để đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng thì phải tồn tại $\lim\limits_{x\to m}\dfrac{2x^2-3x+m}{x-m}$,

$\Rightarrow 2m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right.$

Câu 31: Chọn D

Để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-4x+m}}$ có hai tiệm cận đứng thì phương trình $x^2 - 4x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -2

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m > 0 \\ 12 + m \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2017 \leq m < 4 \\ m \neq -12 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m \in -2017;-2016;..;3 \setminus -12$.

Do đó số giá trị nguyên của tham số m thỏa đề bài là: $3-(-2017)+1-1 = 2020$ giá trị.

Câu 32: Chọn B

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có duy nhất một tiệm cận ngang

$\Leftrightarrow 2019m = 2020m^4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \sqrt[3]{\dfrac{2019}{2020}} \end{array}\right.$.

Vậy có 2 giá trị của m thỏa bài toán

Câu 33: Chọn A

Điều kiện $x > m$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Xét phương trình $\left[x^2 - (2m+1)x + 2m\right]\sqrt{x-m} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x^2 - (2m+1)x + 2m = 0\,(*) \end{array}\right.$

Để hàm số có 4 đường tiệm cận thì phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt $m < x_1 < x_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2m-1)^2 > 0 \\ (x_1 - m)(x_2 - m) > 0 \\ x_1 + x_2 > 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{1}{2} \\ x_1 x_2 - m(x_1 + x_2) - m^2 > 0 \\ 2m + 1 > 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{1}{2} \\ m - m^2 > 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{1}{2} \\ 0 < m < 1 \end{cases}.$$

Câu 34: Chọn C

Đặt $f(x) = mx^2 - 6x + 3$ và $g(x) = 9x^2 + 6mx + 1$. Ta xét các trường hợp:

Trường hợp 1: $m = 0$ khi đó ta có $y = \dfrac{6x-3}{(-6x+3)(9x^2+1)}$ đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 0$ do đó $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: $m \neq 0$ và cả hai tam thức $f(x)$ và $g(x)$ đều vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_f < 0 \\ \Delta'_g < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 3m < 0 \\ 9m^2 - 9 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ -1 < m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing$.

Trường hợp 3: Tam thức $g(x)$ nhận $x = \dfrac{1}{2}$ làm nghiệm $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{13}{12}$ khi đó $f(x)$ luôn có 2 nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số đã cho có nhiều hơn 1 đường tiệm cận.

Vậy có 1 giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{6x-3}{(mx^2-6x+3)(9x^2+6mx+1)}$ có đúng 1 đường tiệm cận

Câu 35: Chọn B

Điều kiện cần và đủ để đồ thị hàm số: $y = x + \sqrt{mx^2+1}$ có tiệm cận ngang là tồn tại số thực k sao cho: $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (x + \sqrt{mx^2+1}) = \mathrm{k} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} (x + \sqrt{mx^2+1}) = \mathrm{k} \end{cases}$

Hiển nhiên nếu $m \leq 0$ thì giới $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (x + \sqrt{mx^2+1})$ không hữu hạn

Nếu $m > 0$ ta có

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \sqrt{mx^2+1}) = +\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{y} = \lim_{x \to -\infty} (x + \sqrt{mx^2+1}) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2(1-m)-1}{x - \sqrt{mx^2+1}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\mathrm{x}(1-m) - \frac{1}{x}}{1 + \sqrt{m + \frac{1}{x^2}}}$$

Để giới hạn trên hữu hạn khi và chỉ khi m=1.

Câu 36: Chọn D

Với $m = 0$; ta có hàm số $y = \dfrac{x-2}{-2x+4} = -2 \Rightarrow$ Không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m \neq 0$, ta có: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x-2}{mx^2-2x+4} = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số có đúng 1 tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ $mx^2-2x+4=0$ có nghiệm duy nhất hoặc $mx^2-2x+4=0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $x=2$.

$mx^2-2x+4=0$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta'=0 \Leftrightarrow 1-4m=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{4}$.

$mx^2-2x+4=0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $x=2$. $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ 4m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<\dfrac{1}{4} \\ m=0 \end{cases}$

$\Rightarrow m=0$ không thỏa mãn điều kiện.

Vậy chỉ có một giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 37: Chọn C

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=\dfrac{2019}{m-\sqrt{17}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\dfrac{2019}{\sqrt{17}-m}$.

Với $m\neq\sqrt{17}$ thì đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y=\dfrac{2019}{m-\sqrt{17}}$, $y=\dfrac{2019}{\sqrt{17}-m}$.

Khi đó đồ thị hàm số đã cho có 4 đường tiệm cận khi và chỉ khi phương trình $\sqrt{17x^2-1}-m|x|=0$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0.

Ta có: $(1)\Leftrightarrow \sqrt{17x^2-1}=m|x| \Leftrightarrow \begin{cases} m\geq 0 \\ 17x^2-1=m^2x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\geq 0 \\ \left(17-m^2\right)x^2=1 \ (2) \end{cases}$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt khác 0 khi và chỉ khi phương trình có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} m\geq 0 \\ 17-m^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0\leq m<\sqrt{17}$.

Suy ra $S=\{0,1,2,3,4\}$.

Câu 38: Chọn B

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{x^3+mx+1}-\sqrt[3]{x^4+x+1}+m^2x}{x}}$.

Mà $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^3+mx+1}-\sqrt[3]{x^4+x+1}+m^2x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sqrt{x^3+mx+1}-1}{x}-\dfrac{\sqrt[3]{x^4+x+1}-1}{x}+\dfrac{m^2x}{x}\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x^3+mx}{x(\sqrt{x^3+mx+1}+1)}-\dfrac{x^4+x}{x(\sqrt[3]{(x^4+x+1)^2}+\sqrt[3]{x^4+x+1}+1)}+m^2\right]$.

Đồ thị hàm số $f(x)$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(x^2+m)}{(\sqrt{x^3+mx+1}+1)}-\dfrac{(x^3+1)}{\sqrt[3]{(x^4+x+1)^2}+\sqrt[3]{x^4+x+1}+1}+m^2\right)=0 \Leftrightarrow \dfrac{m}{2}-\dfrac{1}{3}+m^2=0$.

$\Leftrightarrow 6m^2+3m-2=0$ Vậy $m_1+m_2=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 39: Chọn A

Xét $g\ x\ =\sqrt{x\ x-m\ }-1$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2}=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2}=-1$. Nên đồ thị hàm số luôn có hai đường tiệm cận ngang $y=1$ và $y=-1$.

Trường hợp 1: $m=0$ khi đó hàm số là $y=\dfrac{|x|-1}{x+2}$. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-2$

.

Vậy $m=0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Trường hợp 2: $m>0$. Hàm số $g\ x$ có tập xác định là $D=\ -\infty;0\cup m;+\infty$.

$x=-2\in D$. $g(-2)=\sqrt{2\ m+2\ }-1\neq 0$ nên $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

Vậy $m=1$, $m=2$,.$m=9$ thỏa mãn. Nên có 9 giá trị m.

Trường hợp 3: $m<0$. Hàm số $g\ x$ có tập xác định là $D=\ -\infty;m\cup 0;+\infty$.

Để $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số thì trước hết $x=-2\in D$ hay $m\geq -2$. Nên chỉ có $m=-2$, $m=-1$ thỏa mãn

Với $m=-1$ ta có $g(x)=\sqrt{x\ x+1\ }-1$, $g(-2)=\sqrt{2}-1\neq 0$nên $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Với $m=-2$ ta có $g(x)=\sqrt{x\ x+2\ }-1$, $g(-2)=\sqrt{x\ x+2\ }-1=-1\neq 0$ nên $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy 12 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu.

Câu 40: Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^3-3x^2+m-1}}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^3-3x^2+m-1}}$ không tồn tại. Suy ra $y=0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Do đó, để đồ thị hàm số đã cho có 4 đường thẳng tiệm cận thì phương trình $x^3-3x^2+m-1=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $g\left(x\right)=x^3-3x^2+m-1$. Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$g'\left(x\right)=3x^2-6x$; $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$m-1$	↘	$m-5$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy phương trình $x^3-3x^2+m-1=0$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m-5<0<m-1\Leftrightarrow 1<m<5$.

Câu 41: Chọn A

Do hàm số không có tiệm cận đứng nên $f\left(x\right)=\sqrt{3x+1}+ax+b=\left(x-1\right)^2g\left(x\right)$.

Suy ra $\begin{cases} f(1)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+2=0 \\ a+\dfrac{3}{4}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{3}{4} \\ b=-\dfrac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow a-b=\dfrac{1}{2} \rightarrow$ đáp án **A.**

Chú ý: Với $f(x)=(x-x_0)^n g(x)$ thì ta luôn có $f(x_0)=f'(x_0)=f''(x_0)=...=f^{(n-1)}(x_0)=0$.

Câu 42: Chọn C

Biểu thức: $\sqrt{-x^2+2016x+2017}$ có nghĩa khi $-x^2+2016x+2017\geq 0 \Leftrightarrow -1\leq x\leq 2017$.

Đặt $f(x)=\sqrt{-x^2+2016x+2017}$.

Xét $x-m=0\Leftrightarrow x=m$. Vậy đồ thị nếu có tiệm cận đứng chỉ có thể là $x=m$, khi đó điều kiện là: $\begin{cases} -1\leq x\leq 2017 \\ f(m)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\in[-1;2017] & (1) \\ \sqrt{-m^2+2016m+2017}\neq 24\sqrt{7} & (*) \end{cases}$

Ta có $(*)\Leftrightarrow m^2-2016m+2015\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1 \\ m\neq 2015 \end{cases} (2)$

Từ $(1),(2)\Rightarrow m\in[-1;2017]\setminus\{1;2015\} \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}$ có $2019-2=2017$ số nguyên m thỏa mãn bài toán $\rightarrow$ đáp án **C.**

Câu 43: Chọn B

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{x^3+mx+1}-\sqrt[3]{x^4+x+1}+m^2x}{x}}$.

Mà $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^3+mx+1}-\sqrt[3]{x^4+x+1}+m^2x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sqrt{x^3+mx+1}-1}{x}-\dfrac{\sqrt[3]{x^4+x+1}-1}{x}+\dfrac{m^2x}{x}\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x^3+mx}{x(\sqrt{x^3+mx+1}+1)}-\dfrac{x^4+x}{x(\sqrt[3]{(x^4+x+1)^2}+\sqrt[3]{x^4+x+1}+1)}+m^2\right]$.

Đồ thị hàm số $f(x)$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(x^2+m)}{(\sqrt{x^3+mx+1}+1)}-\dfrac{(x^3+1)}{\sqrt[3]{(x^4+x+1)^2}+\sqrt[3]{x^4+x+1}+1}+m^2\right)=0 \Leftrightarrow \dfrac{m}{2}-\dfrac{1}{3}+m^2=0$.

$\Leftrightarrow 6m^2+3m-2=0$ Vậy $m_1+m_2=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 44: Chọn A

Xét $g\ x\ =\sqrt{x\ x-m\ }-1$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2}=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2}=-1$. Nên đồ thị hàm số luôn có hai đường tiệm cận ngang $y=1$ và $y=-1$.

Trường hợp 1: $m=0$ khi đó hàm số là $y=\dfrac{|x|-1}{x+2}$. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-2$.

Vậy $m=0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Trường hợp 2: $m>0$. Hàm số $g\ x$ có tập xác định là $D=\ -\infty;0\cup m;+\infty$.

$x=-2\in D$. $g(-2)=\sqrt{2\ m+2\ }-1\neq 0$ nên $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

Vậy $m=1,\ m=2,.m=9$ thỏa mãn. Nên có 9 giá trị m.

Trường hợp 3: $m<0$. Hàm số $g\ x$ có tập xác định là $D=\ -\infty;m\cup 0;+\infty$.

Để $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số thì trước hết $x=-2\in D$ hay $m\geq -2$. Nên chỉ có $m=-2,\ m=-1$ thỏa mãn

Với $m=-1$ ta có $g(x)=\sqrt{x\ x+1\ }-1,\ g(-2)=\sqrt{2}-1\neq 0$nên $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Với $m=-2$ ta có $g(x)=\sqrt{x\ x+2\ }-1$, $g(-2)=\sqrt{x\ x+2\ }-1=-1\neq 0$ nên $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy 12 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu.

Câu 45: Chọn A

Nếu $m=0$ thì $y=\dfrac{1}{x+1}$. Hàm số này có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=0$.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{1}{x+1}=+\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-1$.

Vậy với $m=0$ thì đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.

Nếu $m>0$ thì $mx^2+1>0$ với mọi x và tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}}=\sqrt{m}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}}=-\sqrt{m}$. Suy ra đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y=\sqrt{m}$ và $y=-\sqrt{m}$.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1}=+\infty$ nên $x=-1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy $m>0$ không thỏa mãn.

Nếu $m<0$ thì tập xác định của hàm số là $D=\left[-\sqrt{-\dfrac{1}{m}};\sqrt{-\dfrac{1}{m}}\right]\setminus\{-1\}$.

Trường hợp này đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang. Để đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận thì đồ thị hàm số phải có một tiệm cận đứng. Điều này xảy ra khi

$-\sqrt{-\dfrac{1}{m}}\leq -1\ \Leftrightarrow\sqrt{-\dfrac{1}{m}}\geq 1\Leftrightarrow -\dfrac{1}{m}\geq 1\Leftrightarrow m\geq -1$.

Vậy với $-1\leq m<0$ thì đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận.

DẠNG Bài tập tiệm cận của đồ thị hàm số nâng cao

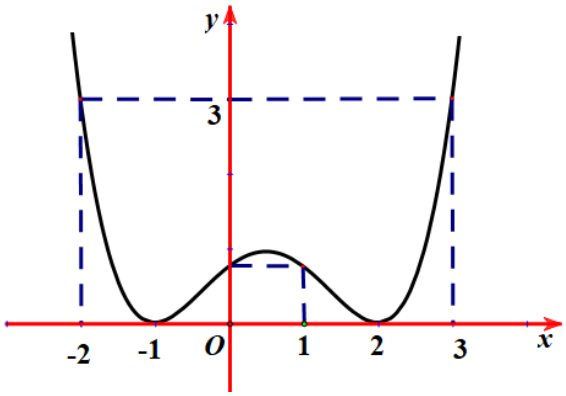
Câu 1: Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x^3-3mx^2+(2m^2+1)\text{x}-\text{m}}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2020;2020]$ của tham số m để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận?

A. 4039. **B.** 4040. **C.** 4038. **D.** 4037.

Câu 2: Cho hàm số $y=\dfrac{20+\sqrt{6x-x^2}}{\sqrt{x^2-8x+2m}}$. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận đứng

A. $m\in[6;8)$. **B.** $m\in(6;8)$. **C.** $m\in[12;16)$. **D.** $m\in(0;16)$.

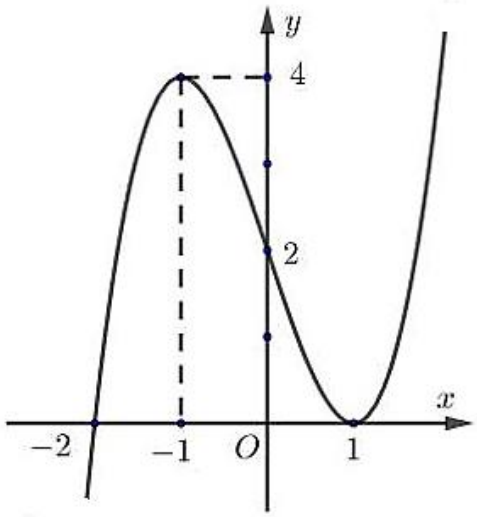
Câu 3: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{(x^2-4)^4(x-3)(x^3+1)}{f(f(x)-1)}$ là

A. 6. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 4: Cho đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ như hình vẽ dưới đây:



Đồ thị của hàm số $g(x)=\dfrac{3x^2-x-2}{3f^2(x)-6f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

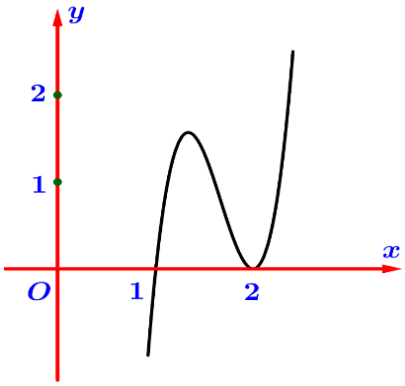
Câu 5: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2x+7-3\sqrt{4x+5}}{|f(x)|-1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang

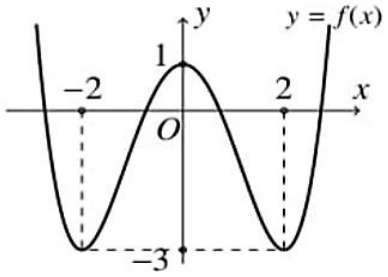
A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 6: Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?



A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 7: Cho hàm trùng phương $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{\left(x^2-4\right)\left(x^2+2x\right)}{\left[f(x)\right]^2+2f(x)-3}$ có tổng cộng bao nhiêu tiệm cận đứng?



A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 8: Biết đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{3x+1}+ax+b}{(x-5)^2}$ không có tiệm cận đứng. Tính a^2+b^3

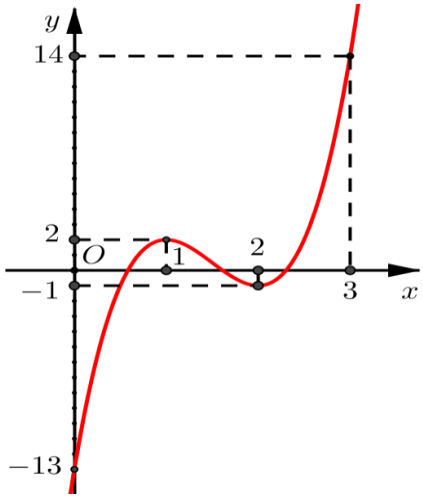
A. $\dfrac{-4841}{152}$. **B.** $\dfrac{-4814}{152}$. **C.** $\dfrac{4841}{152}$. **D.** $\dfrac{4814}{152}$.

Câu 9: Biết rằng tích phân $I=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}\left(1+x+\frac{4}{x^2}\right).e^{x-\frac{2}{x^2}}\mathrm{d}x=3.e^{\frac{a}{b}}-\frac{1}{3}e^{\frac{-c}{d}}$, trong đó các phân số $\frac{a}{b};\frac{c}{d}$ tối giản.

Hãy xác định phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$.

A. $y=\frac{25}{3}$. **B.** $y=\frac{25}{53}$. **C.** $y=\frac{25}{9}$. **D.** $y=3$.

Câu 10: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tổng các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $g(x)=\frac{2020}{f\left(f(x)+1\right)-m}$ có 4 đường tiệm cận bằng

A. 15. **B.** 1. **C.** 13. **D.** 11.

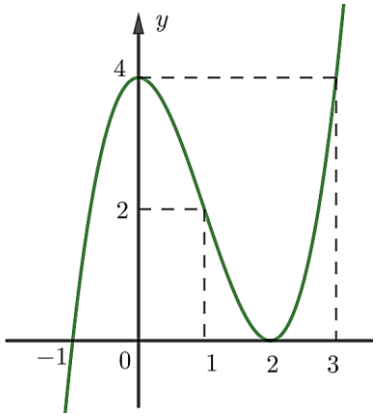
Câu 11: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=f(x)=\frac{\sqrt{6x-3}+mx-2m-3}{3x^3-14x^2+20x-8}$ có đúng hai đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Câu 12: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số: $f(x)=\frac{\left(\sqrt[3]{9-x^2}-2\right)\ln(x+1)}{x^3-x}$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 13: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như sau



Gọi M,m lần lượt là số tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\left(x^2-2x-3\right).\sqrt{x^2-x}.\sqrt{x^4-17x^2+16}}{\left|f\left(x\right)-2\right|.\left(2x^2-3x\right)}$. Khi đó mệnh đề nào đúng?

A. $2M=3m$. **B.** $M=3m$. **C.** $M=2m$. **D.** $M=m$.

Câu 14: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\left(2x-3\right)\sqrt{x^2+2x-8}}{\left(\left|x+2\right|-1\right).\left(\sqrt{4x^2+x+4}+2x\right)}$ có tổng số đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 15: Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2\sqrt{x+2}}{x\left(x-2\right)^2} & khi \quad x>2\\ \sqrt{4x^2+x+1}+2x & khi \quad x\le 2\end{cases}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 16: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\dfrac{4x^3-20x^2+\left(m+24\right)x-2m}{20x^2+14x+9-\left(14x+11\right)\sqrt{2x^2+1}}$ có đồ thị là $\left(C\right)$. Gọi S là tập hợp các giá trị của m để $\left(C\right)$ có đúng một tiệm cận đứng. Tổng các giá trị trong S là

A. -1. **B.** -3. **C.** -5. **D.** -7.

Câu 17: Cho đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đúng hai đường tiệm cận ngang $y=-5, y=1$. Tìm giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)+m\right|$ có đúng một đường tiệm cận ngang.

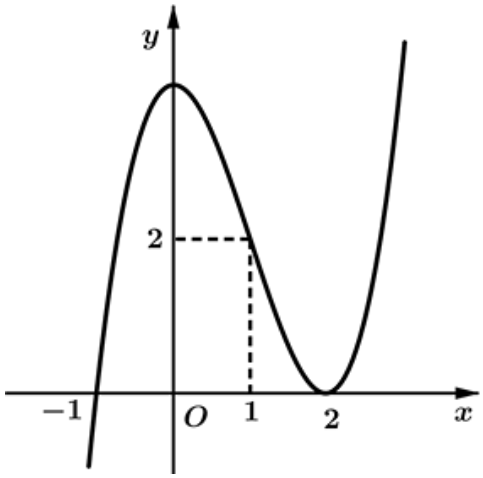
A. $m=1$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=2$. **D.** $m=3$.

Câu 18: Cho hàm số $f\left(x\right)=x.\left(\sqrt[3]{ax^3+bx^2-1}-2\sqrt{x^2-x+1}\right)$. Biết rằng đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang bằng $y=\dfrac{5}{4}$. Giá trị $a+b$ **thuộc** khoảng nào trong các khoảng sau?

.

A. $\left(-5;-3\right)$. **B.** $\left(-3;0\right)$. **C.** $\left(0;3\right)$. **D.** $\left(3;5\right)$.

Câu 19: Cho hàm số bậc ba $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ $\left(a,b,c,d\in\mathbb{R}\right)$ có đồ thị như hình vẽ sau đây:



Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}(x-2)}{f^2(x)-2f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 2 **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

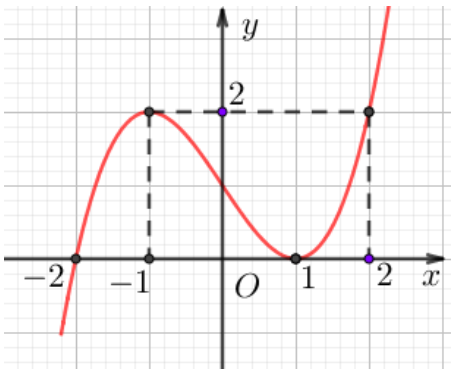
Câu 20: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-2mx+4}$ có 3 đường tiệm cận.

A. $m<2$. **B.** $-2<m<2$. **C.** $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>2\\m<-2\end{array}\right.\\ m\neq\dfrac{5}{2}\end{cases}$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m>2\\m<-2\end{array}\right.$.

Câu 21: Gọi S là tập các giá trị của m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-2mx+m^2-2m-6}$ có đúng hai đường tiệm cận. Số phần tử của S là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ có đồ thị như hình dưới đây.

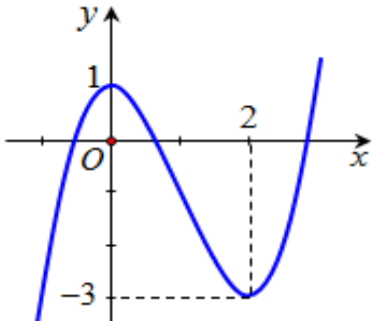


Gọi S là tập các giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019;2020)$ để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x+1)\sqrt{f(x)}}{\left(f(x)-2\right)\left(x^2-2mx+m+2\right)}$ có 5 đường tiệm cận (tiệm cận đứng hoặc tiệm cận ngang).

Số phần tử của tập S là

A. 2016. **B.** 4034. **C.** 4036. **D.** 2017.

Câu 23: Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\left(x^2-2x\right)\sqrt{1-x}}{(x-3)\left[f^2(x)+3f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.B	3.A	4.C	5.B	6.C	7.D	8.A	9.B	10.D
11.B	12.C	13.C	14.A	15.C	16.C	17.C	18.D	19.	20.
21.	22.	23.							

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn B

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} y = 0$, suy ra $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận khi và chỉ khi đồ thị hàm số có đúng 3 đường tiệm cận đứng, hay khi $x^3 - 3mx^2 + (2m^2+1)\text{x} - \text{m} = 0(1)$ có 3 nghiệm phân biệt khác 3.

Ta có $x^3 - 3mx^2 + (2m^2+1)\text{x} - \text{m} = 0 \Leftrightarrow (x-m)\left(x^2 - 2mx + 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ f(x) = x^2 - 2mx + 1 = 0 (2) \end{array}\right.$

Để phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khác 3 khi phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 3 và m khi $\left\{\begin{array}{l} \Delta' > 0 \\ f(3) \neq 0 \\ f(m) \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m^2 - 1 > 0 \\ 3^2 - 6m + 1 \neq 0 \\ m^2 - 2m^2 + 1 \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -1 \end{array}\right. \\ m \neq \dfrac{5}{3} \\ m \neq \pm 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 1 \end{array}\right.$.

Vì m là số nguyên thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ nên có 4038 giá trị của tham số m.

Câu 2: Chọn B

Ta có tập xác định của hàm số phải thỏa mãn $6x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 6$.

Điều kiện để đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng là phương trình $x^2 - 8x + 2m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $0 < x_1 < x_2 < 6$.

Ta có: $x^2 - 8x = -2m$. Đặt $f(x) = x^2 - 8x$.

Ta có bảng biến thiên của hàm $f(x)$ trên đoạn $[0;6]$.

x	0		4		6
$f(x)$	0	$\searrow$	-16	$\nearrow$	-12

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -16 < -2m < -12 \Leftrightarrow 6 < m < 8$.

Câu 3: Chọn A

Hàm số bậc bốn có dạng $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e\ (a \neq 0)$. Ta có: $y' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$.

Từ đồ thị trong hình vẽ đã cho ta thấy: Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $(-1;0),(x_0;y_0),(2;0)$ với $0<x_0<1; y_0>0$. Ngoài ra đồ thị hàm số đi qua các điểm $(-2;3),(3;3)$.

Từ đó ta có: $\begin{cases} y'(-1)=0 \\ y'(2)=0 \\ y(-1)=0 \\ y(2)=0 \\ y(-2)=3 \\ y(3)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a+3b-2c+d=0 \\ 32a+12b+4c+d=0 \\ a-b+c-d+e=0 \\ 16a+8b+4c+2d+e=0 \\ 16a-8b+4c-2d+e=3 \\ 81a+27b+9c+3d+e=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=-3 \\ d=4 \\ e=4 \end{cases}$.

Suy ra bậc bốn $y=f(x)=x^4-2x^3-3x^2+4x+4$.

Ta có: $f(x)=x^4-2x^3-3x^2+4x+4=(x+1)^2(x-2)^2$.

Từ đó ta có hàm số $y=\dfrac{(x^2-4)^4(x-3)(x^3+1)}{f(f(x)-1)} \Leftrightarrow y=\dfrac{(x^2-4)^4(x-3)(x^3+1)}{f\left((x+1)^2(x-2)^2-1\right)}$

$$\Leftrightarrow y=\frac{(x-2)^4(x+2)^4(x-3)(x+1)(x^2-x+1)}{\left((x+1)^2(x-2)^2\right)^2\left((x+1)^2(x-2)^2-3\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{(x-2)^4(x+2)^4(x-3)(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)^4(x-2)^4\left((x+1)^2(x-2)^2-3\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow y=g(x)=\frac{(x-2)^4(x+2)^4(x-3)(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)^4(x-2)^4\left(x^2-x-2-\sqrt{3}\right)^2\left(x^2-x-2+\sqrt{3}\right)^2}.$$

Xét $(x+1)^4(x-2)^4\left(x^2-x-2-\sqrt{3}\right)^2\left(x^2-x-2+\sqrt{3}\right)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \\ x=\dfrac{1+\sqrt{9+4\sqrt{3}}}{2}=x_1 \\ x=\dfrac{1-\sqrt{9+4\sqrt{3}}}{2}=x_2 \\ x=\dfrac{1+\sqrt{9-4\sqrt{3}}}{2}=x_3 \\ x=\dfrac{1-\sqrt{9-4\sqrt{3}}}{2}=x_4 \end{array}\right.$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to -1} g(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=\dfrac{-256}{81}$; $\lim\limits_{x\to x_1} g(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to x_2} g(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to x_3} g(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to x_4} g(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to \pm\infty} g(x)=0$.

Suy ra đồ thị hàm số có 5 tiệm cận đứng và 1 tiệm cận ngang.

Câu 4: Chọn C

Xét phương trình $3f^2(x)-6f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\f(x)=2\end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị ta suy ra:

Phương trình $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=1\end{array}\right.$, với $x=-2$ là nghiệm đơn và $x=1$ là nghiệm kép.

Suy ra: $f(x)=a(x+2)(x-1)^2,(a\neq 0)$.

Phương trình $f(x)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=m(-2<m<-1)\\x=n(n>1)\end{array}\right.$, các nghiệm đều là nghiệm đơn.

Suy ra $f(x)-2=ax(x-m)(x-n),(a\neq 0)$.

Khi đó: $g(x)=\dfrac{(x-1)(3x+2)}{3f(x)\left[f(x)-2\right]}=\dfrac{(x-1)(3x+2)}{3a^2(x+2)(x-1)^2x(x-m)(x-n)}$

$=\dfrac{(3x+2)}{3a^2x(x+2)(x-1)(x-m)(x-n)},(a\neq 0)$

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 5 đường tiệm cận đứng

Cách 2: Chọn hàm số $f(x)$. Ta có $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

Đồ thị hàm số qua 4 điểm $A(-2;0),B(-1;4),C(0;2),D(1;0)$.

suy ra $\begin{cases}a=1\\b=0\\c=-3\\d=2\end{cases}$ hay $f(x)=x^3-3x+2$

◆ Khi đó:

$g(x)=\dfrac{3x^2-x-2}{3f^2(x)-6f(x)}=\dfrac{3x^2-x-2}{3f(x)(f(x)-2)}=\dfrac{3x^2-x-2}{3(x^3-3x+2)(x^3-3x)}$

$=\dfrac{(x-1)(3x+2)}{3(x+2)(x-1)^2x(x^2-3)}$

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 5 đường tiệm cận đứng

Câu 5: Chọn B

Hàm số $g(x)$ xác định khi $\begin{cases}x\geq -\dfrac{5}{4}\\f(x)\neq\pm 1\end{cases}$

Ta có $y=f(x)$ là hàm bậc ba và dựa vảo bảng biến thiên ta có $y'=a(x^2-1)$

$\Rightarrow y=\dfrac{a}{3}x^3-ax+b$.

$$\begin{cases} y(-1)=3 \\ y(1)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{a}{3}+a+b=3 \\ \frac{a}{3}-a+b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow y=x^3-3x+1$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+7-3\sqrt{4x+5}}{|x^3-3x+1|-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^3}-3\sqrt{\frac{4}{x^5}+\frac{5}{x^6}}}{\left|1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right|-\frac{1}{x^3}}=0$$

$\Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$g(x)=\frac{2x+7-3\sqrt{4x+5}}{|f(x)|-1}=\frac{(4x^2-8x+4)(|f(x)|+1)}{(f^2(x)-1)(2x+7+3\sqrt{4x+5})}$$

$$=\frac{4(x-1)^2(|f(x)|+1)}{(f(x)-1)(f(x)+1)(2x+7+3\sqrt{4x+5})}$$

$$=\frac{4(x-1)^2(|f(x)|+1)}{x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+2)(x-1)^2(2x+7+3\sqrt{4x+5})}$$

$$=\frac{4(|f(x)|+1)}{x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+2)(2x+7+3\sqrt{4x+5})}$$

$$x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+2)(2x+7+3\sqrt{4x+5})\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt{3} \end{array}\right. \text{ (vì } x\ge-\frac{5}{4}$$

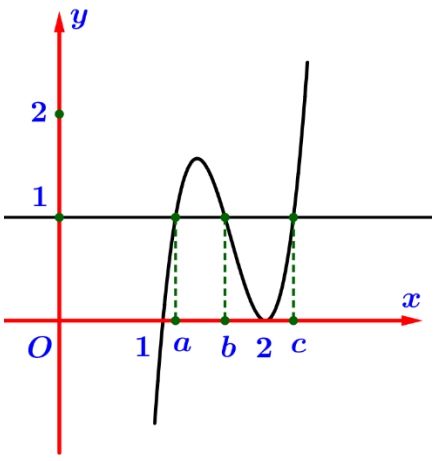
$\begin{cases} \lim\limits_{x\to0^+} g(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to0^-} g(x)=+\infty \end{cases} \Rightarrow x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\sqrt{3}^+} g(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to\sqrt{3}^-} g(x)=-\infty \end{cases} \Rightarrow x=\sqrt{3}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có tiện cận ngang là $y=0$ và tiệm cận đứng là $y=\sqrt{3}$

Câu 6: Chọn C

Điều kiện xác định của hàm số $g(x)$ là $x\ge1$.



Xét phương trình $x\left[f^2(x)-f(x)\right]=0 \Leftrightarrow x.f(x).\left[f(x)-1\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=0. \\ f(x)=1 \end{array}\right.$

Xét phương trình $f(x)=0$ có nghiệm kép $x=2$ và nghiệm đơn $x=1$.

Xét phương trình $f(x)=1$ có ba nghiệm đơn $\left[\begin{array}{l} x=a,\ 1<a<2 \\ x=b,\ 1<b<2,\ b\neq a \\ x=c,\ c>2 \end{array}\right.$. Ta thấy $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \end{array}\right.$

Nên không mất tính tổng quát, ta có

+ $f(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)^2=0$

+ $f(x)=1 \Leftrightarrow (x-a)(x-b)(x-c)=0$

Do đó:

$$g(x)=\frac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x)-f(x)\right]}=\frac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)}$$

Khi đó

+ $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to0^+} g(x) \\ \lim\limits_{x\to0^-} g(x) \end{array}\right.$ không tồn tại giới hạn $\Rightarrow x=0$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$

+ $\lim\limits_{x\to1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)}=+\infty$.

$\Rightarrow x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$.

+ $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to2^+} g(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\frac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\frac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)}=+\infty \end{array}\right.$

$\Rightarrow x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$.

+ $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a^+} g(x)=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to a^-} g(x)=\lim\limits_{x\to a^-}\frac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)}=+\infty \end{array}\right.$

$\Rightarrow x=a$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$.

+ $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to b^+} g(x)=\lim\limits_{x\to b^+}\frac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to b^-} g(x)=\lim\limits_{x\to b^-}\frac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)}=-\infty \end{array}\right.$

$\Rightarrow x=b$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$.

$$+\begin{cases}\lim\limits_{x\to c^+} g(x)=\lim\limits_{x\to c^+}\dfrac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to c^-} g(x)=\lim\limits_{x\to c^-}\dfrac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)}=-\infty\end{cases}$$

$\Rightarrow x=c$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$.

$+\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)}=0$.

$\Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $g(x)$.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 6 đường tiệm cận.

Câu 7: Chọn D

Ta có: $y=\dfrac{(x^2-4)(x^2+2x)}{[f(x)]^2+2f(x)-3}=\dfrac{(x-2)(x+2)x(x+2)}{[f(x)]^2+2f(x)-3}=\dfrac{(x-2)(x+2)^2x}{[f(x)]^2+2f(x)-3}$.

Xét $[f(x)]^2+2f(x)-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=1\\ f(x)=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m,\ m<-2\\ x=0\\ x=n,\ n>2\\ x=2\\ x=-2\end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị ta thấy các nghiệm $x=0;\ x=\pm2$ là các nghiệm kép (nghiệm bội 2).

Do đó đa thức $[f(x)]^2+2f(x)-3$ có bậc là 8.

Suy ra $y=\dfrac{(x-2)(x+2)^2x}{a^2x^2(x+2)^2(x-2)^2(x-m)(x-n)}=\dfrac{1}{a^2x(x-2)(x-m)(x-n)}$.

Vậy đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận đứng là $x=0,\ x=2,\ x=m,\ x=n$.

Câu 8: Chọn A

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{3x+1}+ax+b$ có $f'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}+a$

Để hàm số không có tiệm cận đứng: $f(x)=(x-5)^2.g(x)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}f(5)=0\\ f'(5)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{3.5+1}+a.5+b=0\\ \dfrac{3}{2\sqrt{3.5+1}}+a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5a+b=-4\\ a=\dfrac{-3}{8}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\dfrac{-17}{8}\\ a=\dfrac{-3}{8}\end{cases}$$

Nên $a^2+b^3=\left(\dfrac{-1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{-3}{2}\right)^3=\dfrac{-4814}{152}$

Câu 9: Chọn B

Ta có $I=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}e^{x-\frac{2}{x^2}}dx+\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}\left(x+\dfrac{4}{x^2}\right).e^{x-\frac{2}{x^2}}dx=I_1+I_2$, với $I_1=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}e^{x-\frac{2}{x^2}}dx$; $I_2=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}\left(x+\dfrac{4}{x^2}\right).e^{x-\frac{2}{x^2}}dx$.

Tính $I_1=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}\mathrm{e}^{x-\frac{2}{x^2}}\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=e^{x-\frac{2}{x^2}}\\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\left(1+\dfrac{4}{x^3}\right)e^{x-\frac{2}{x^2}}\mathrm{d}x\\ v=x\end{cases}$.

Ta có $I_1=x.e^{x-\frac{2}{x^2}}\Big|_{\frac{1}{3}}^{3}-\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}\left(x+\dfrac{4}{x^2}\right).e^{x-\frac{2}{x^2}}\mathrm{d}x=3e^{\frac{25}{9}}-\dfrac{1}{3}e^{\frac{-53}{3}}-I_2$.

Do vậy $I=I_1+I_2=3e^{\frac{25}{9}}-\dfrac{1}{3}e^{\frac{-53}{3}}$.

Ta có $a=25;b=9;c=53;d=3.$ Suy ra hàm số $y=\dfrac{25x+9}{53x+3}$.

Khi đó đồ thị hàm số $y=\dfrac{25x+9}{53x+3}$ có phương trình đường tiệm cận ngang $y=\dfrac{25}{53}$.

Câu 10: Chọn D

Ta thấy đồ thị hàm số $g(x)$ có 1 đường tiệm cận ngang là $y=0$.

Để đồ thị hàm số $g(x)$ có 4 đường tiệm cận thì phương trình $f\left(f(x)+1\right)-m=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Đặt $h(x)=f\left(f(x)+1\right)$. Khi đó, $h'(x)=f'(x).f'\left(f(x)+1\right)$.

$$h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\ f'\left(f(x)+1\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\ f(x)+1=1\\ f(x)+1=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\ f(x)=0\\ f(x)=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\in\{1,2\}\\ x\in\{x_1;x_2;x_3\}\\ x\in\{x_4;x_5;x_6\}\end{array}\right.$$

$\left(x_1<x_4<1<x_5<x_2<2<x_3<x_6\right)$

Ta có $h(x_1)=h(x_2)=h(x_3)=f\left(f(x_1)+1\right)=2$;

$h(x_4)=h(x_5)=h(x_6)=f\left(f(x_4)+1\right)=-1$; $h(1)=f\left(f(1)+1\right)=14$; $h(2)=f\left(f(2)+1\right)=-13$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_1	x_4	1	x_5	x_2	2	x_3	x_6	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$		2		14		2		2									
			-1		-1		-13		-1								

Căn cứ vào bảng biến thiên để phương trình $f\left(f(x)+1\right)-m=0$ có ba nghiệm phân biệt thì:

$\left[\begin{array}{l}2<m<14\\ -13<m<-1\end{array}\right.$.

Câu 11: Chọn B

Điều kiện xác định: $\begin{cases}x\ge\dfrac{1}{2}\\ x\ne 2\\ x\ne\dfrac{2}{3}\end{cases}$. Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{6x-3}+mx-2m-3}{3x^3-14x^2+20x-8}=0$ với mọi $m\in\mathbb{R}$.

Suy ra đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y=0$.

Ta có $y=f(x)=\dfrac{\sqrt{6x-3}+mx-2m-3}{(x-2)^2(3x-2)}$.

Yêu cầu bài toán trở thành, tìm m để đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận đứng $x=2$ hoặc $x=\dfrac{2}{3}$.

Nếu $\sqrt{6x-3}+mx-2m-3$ nhận $x=\dfrac{2}{3}$ là nghiệm thì $m=-\dfrac{3}{2}$. Khi đó

$$\lim_{x\to\frac{2}{3}}\frac{\sqrt{6x-3}-\frac{3}{2}x}{(x-2)^2(3x-2)}=\lim_{x\to\frac{2}{3}}\frac{-3}{4(x-2)\left(\sqrt{6x-3}+\frac{3}{2}x\right)}=\frac{9}{32}$$

$$\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{6x-3}-\frac{3}{2}x}{(x-2)^2(3x-2)}=\lim_{x\to2^+}\frac{-3}{4(x-2)\left(\sqrt{6x-3}+\frac{3}{2}x\right)}=-\infty.$$

Suy ra $x=2$ là đường tiệm cận đứng duy nhất của đồ thị hàm số.

Nếu $\sqrt{6x-3}+mx-2m-3=(x-2)\left(\dfrac{6}{\sqrt{6x-3}+3}+m\right)$ nhận $x=2$ là nghiệm kép thì $m=-1$.

Khi đó $\lim\limits_{x\to\left(\frac{2}{3}\right)^+}\dfrac{\sqrt{6x-3}-x-1}{(x-2)^2(3x-2)}=\lim\limits_{x\to\left(\frac{2}{3}\right)^+}\dfrac{-1}{(3x-2)\left(\sqrt{6x-3}+x+1\right)}=-\infty$

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{6x-3}-x-1}{(x-2)^2(3x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{-1}{(3x-2)\left(\sqrt{6x-3}+x+1\right)}=-\frac{1}{24}$$

Suy ra $x=\dfrac{2}{3}$ là đường tiệm cận đứng duy nhất của đồ thị hàm số.

Vậy có hai giá trị của $m\in\left\{-1;-\dfrac{3}{2}\right\}$ thỏa mãn bài toán.

Câu 12: Chọn C

Tập xác định: $D=(-1;+\infty)\setminus\{0;1\}$.

Ta có :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{9-x^2}-2\right)\ln(x+1)}{x^3-x}=0.$$

$$\lim_{x\to0+}\frac{\left(\sqrt[3]{9-x^2}-2\right)\ln(x+1)}{x^3-x}=\lim_{x\to0+}\frac{\left(\sqrt[3]{9-x^2}-2\right)}{x^2-1}.\frac{\ln(x+1)}{x}=2-\sqrt[3]{9}.$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{\left(\sqrt[3]{9-x^2}-2\right)\ln(x+1)}{x^3-x}=\lim_{x\to0-}\frac{\left(\sqrt[3]{9-x^2}-2\right)}{x^2-1}.\frac{\ln(x+1)}{x}=2-\sqrt[3]{9}$$

$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\left(\sqrt[3]{9-x^2}-2\right)\ln(x+1)}{x^3-x}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\left(1-x^2\right)\ln(x+1)}{\left(x^2-1\right)x\left(\sqrt[3]{\left(9-x^2\right)^2}+2\sqrt[3]{9-x^2}+4\right)}$$

$$=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{-\ln(x+1)}{x\left(\sqrt[3]{\left(9-x^2\right)^2}+2\sqrt[3]{9-x^2}+4\right)}=-\infty.$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\left(\sqrt[3]{9-x^2}-2\right)\ln(x+1)}{x^3-x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\left(1-x^2\right)\ln(x+1)}{\left(x^2-1\right)x\left(\sqrt[3]{\left(9-x^2\right)^2}+2\sqrt[3]{9-x^2}+4\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{-\ln(x+1)}{x\left(\sqrt[3]{\left(9-x^2\right)^2}+2\sqrt[3]{9-x^2}+4\right)}=\frac{1}{12}\ln 2.$$

Tương tự $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\left(\sqrt[3]{9-x^2}-2\right)\ln(x+1)}{x^3-x}=\dfrac{1}{12}\ln 2$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 tiệm cận $y=0$ và $x=-1$.

Câu 13: ChọnC

Từ giả thiết, ta có $f(x)=x^3-3x^2+4$.

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{\left(x^2-2x-3\right).\sqrt{x^2-x}.\sqrt{x^4-17x^2+16}}{\left|x^3-3x^2+2\right|.\left(2x^2-3x\right)}$.

Điều kiện xác định: $\begin{cases}x^2-x\ge 0\\ x^4-17x^2+16\ge 0\\ \left|x^3-3x^2+2\right|.\left(2x^2-3x\right)\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le -4\\ -1\le x\ne 1-\sqrt{3}<0\\ x\ge 4\end{cases}$.

Ta có: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right).\sqrt{1-\frac{1}{x}}.\sqrt{1-\frac{17}{x^2}+\frac{16}{x^4}}}{\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}\right).\left(2-\frac{3}{x}\right)}=\dfrac{1}{2}\\ \lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right).\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right).\sqrt{1-\frac{17}{x^2}+\frac{16}{x^4}}}{-\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}\right).\left(2-\frac{3}{x}\right)}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

$\Rightarrow$ đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của (C).

$$\lim_{x\to 0^-}g(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\left(x^2-2x-3\right).\sqrt{1-x}.\sqrt{x^4-17x^2+16}}{\left(x^3-3x^2+2\right).\left(-\sqrt{x}\right).(2x-3)}=-\infty$$

$\Rightarrow$ đường thẳng $x=0$ là tiệm cận đứng của (C).

$$\lim_{x\to(1-\sqrt{3})^-} g(x)=\lim_{x\to(1-\sqrt{3})^-}\frac{(x^2-2x-3).\sqrt{x^2-x}.\sqrt{x^4-17x^2+16}}{|x^3-3x^2+2|.(2x^2-3x)}=-\infty$$

$\Rightarrow$ đường thẳng $x=1-\sqrt{3}$ là tiệm cận đứng của (C). Vậy $M=2;m=1$ nên $M=2m$.

Câu 14: Chọn A

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y=f(x)=\dfrac{(2x-3)\sqrt{x^2+2x-8}}{(|x+2|-1).(\sqrt{4x^2+x+4}+2x)}$.

Ta có $(|x+2|-1).(\sqrt{4x^2+x+4}+2x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|x+2|=1\\ \sqrt{4x^2+x+4}=-2x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+2=\pm1\\ \begin{cases}x\le0\\ x+4=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=-3\\ x=-4\end{array}\right.$.

Suy ra tập xác định của hàm số $y=f(x)$ là: $D=(-\infty;-4)\cup[2;+\infty)$.

+) $$\lim_{x\to(-4)^-} y=\lim_{x\to(-4)^-}\frac{(2x-3)\sqrt{x^2+2x-8}}{(|x+2|-1).(\sqrt{4x^2+x+4}+2x)}$$

$$=\lim_{x\to(-4)^-}\frac{(2x-3)\sqrt{(-x+2)(-x-4)}(\sqrt{4x^2+x+4}-2x)}{(-x-3).(x+4)}$$

$$=\lim_{x\to(-4)^-}\frac{(2x-3)\sqrt{-x+2}(\sqrt{4x^2+x+4}-2x)}{(x+3).\sqrt{-x-4}}=+\infty$$

Suy ra đường thẳng $x=-4$ là tiệm cận đứng của (C).

+) $$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x-3)\sqrt{x^2+2x-8}}{(x+1).(\sqrt{4x^2+x+4}+2x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2-\frac{3}{x}\right)\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2}}}{\left(1+\frac{1}{x}\right).\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}+2\right)}=\frac{1}{2}.$$

+) $$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x-3)\sqrt{x^2+2x-8}}{(-x-3).(\sqrt{4x^2+x+4}+2x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x-3)\sqrt{x^2+2x-8}(\sqrt{4x^2+x+4}-2x)}{(-x-3)(x+4)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[(2x-3).\frac{\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2}}\right)\left(-\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}-2\right)}{\left(-1-\frac{3}{x}\right)\left(1+\frac{4}{x}\right)}\right]=+\infty.$$

Suy ra đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của (C).

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận.

Câu 15: Chọn C

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y=f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2\sqrt{x+2}}{x(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}-2\sqrt{\dfrac{1}{x^5}+\dfrac{2}{x^6}}}{\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^2}=0$.

Suy ra (C) nhận đường thẳng $y=0$ là đường tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}+2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{4x^2+x+1}-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{4+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-2}=-\dfrac{1}{4}$.

Suy ra (C) nhận đường thẳng $y=-\dfrac{1}{4}$ là tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to2^+} y=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2-2\sqrt{x+2}}{x(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^4-4(x+2)}{x(x-2)^2\left(x^2+2\sqrt{x+2}\right)}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^3+2x^2+4x+4}{x(x-2)\left(x^2+2\sqrt{x+2}\right)}=+\infty$.

Suy ra (C) nhận đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận.

Câu 16: Chọn C

Ta có $20x^2+14x+9+(14x+11)\sqrt{2x^2+1}=0\ (1)$

$\Leftrightarrow 350x^2+245x+\dfrac{315}{2}+\dfrac{35}{2}(14x+11)\sqrt{2x^2+1}=0$

$\Leftrightarrow\left(14x+\dfrac{35}{4}\right)^2+2\left(14x+\dfrac{35}{4}\right).\dfrac{35}{4}\sqrt{2x^2+1}+\dfrac{1225}{16}(2x^2+1)+\dfrac{7}{8}x^2+\dfrac{315}{8}\sqrt{2x^2+1}+\dfrac{35}{8}=0$

$\Leftrightarrow\left(14x+\dfrac{35}{4}+\dfrac{35}{4}\sqrt{2x^2+1}\right)^2+\dfrac{7}{8}x^2+\dfrac{315}{8}\sqrt{2x^2+1}+\dfrac{35}{8}=0\ (2)$.

Nhận thấy phương trình (2) vô nghiệm nên phương trình (1) vô nghiệm.

Do đó $20x^2+14x+9-(14x+11)\sqrt{2x^2+1}=\dfrac{(20x^2+14x+9)^2-(14x+11)^2(2x^2+1)}{20x^2+14x+9+(14x+11)\sqrt{2x^2+1}}$

$=\dfrac{8x^4-56x^3+118x^2-5x-40}{20x^2+14x+9+(14x+11)\sqrt{2x^2+1}}=\dfrac{2(x-2)^2(4x^2-12x-5)}{20x^2+14x+9+(14x+11)\sqrt{2x^2+1}}$.

Khi đó hàm số $y=f(x)=\dfrac{(x-2)(4x^2-12x+m)}{2(x-2)^2(4x^2-12x-5)}.\left[20x^2+14x+9+(14x+11)\sqrt{2x^2+1}\right]$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{4x^2-12x+m}{2(x-2)(4x^2-12x-5)}.\left[20x^2+14x+9+(14x+11)\sqrt{2x^2+1}\right]$.

Hàm số $y=f(x)$ có TXĐ là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{2;\dfrac{3\pm\sqrt{14}}{2}\right\}$.

Dễ thấy để đồ thị (C) của hàm số $y=f(x)$ có đúng 1 tiệm cận đứng thì phương trình $4x^2-12x+m=0\ (1)$ phải có đúng hai trong ba nghiệm $2;\dfrac{3\pm\sqrt{14}}{2}$.

Nếu (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì $x_1 + x_2 = 3 \in \mathbb{Q}$. Do đó, (1) phải có hai nghiệm là $\frac{3 \pm \sqrt{14}}{2}$, suy ra $m = -5$. Do đó $S = \{-5\}$.

Vậy tổng các giá trị trong S là -5.

Câu 17: Chọn C

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai đường tiệm cận ngang $y = -5, y = 1$.

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y = f(x) + m$ có hai đường tiệm cận ngang $y = -5 + m, y = 1 + m$

Do đó đồ thị hàm số $y = |f(x) + m|$ có đúng một đường tiệm cận ngang khi và chỉ khi hai đường thẳng $y = -5 + m, y = 1 + m$ đối xứng qua trục Ox

$\Leftrightarrow -5 + m + 1 + m = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

Câu 18: Chọn D

Trường hợp 1: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{5}{4} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \left[x.\left(\sqrt[3]{ax^3 + bx^2 - 1} - 2\sqrt{x^2 - x + 1} \right) \right] = \frac{5}{4}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} x^2.\left(\sqrt[3]{a + \frac{b}{x} - 1} - 2\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) = \frac{5}{4}$

Suy ra $\sqrt[3]{a} - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 8$. Thay lại ta được

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left[x.\left(\sqrt[3]{8x^3 + bx^2 - 1} - 2\sqrt{x^2 - x + 1} \right) \right] = \frac{5}{4}$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \left[x.\left(\sqrt[3]{8x^3 + bx^2 - 1} - (2x - 1) + (2x - 1) - \sqrt{4x^2 - 4x + 4} \right) \right] = \frac{5}{4}$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{(b + 12)x^3 - 6x^2}{\left(\sqrt[3]{8x^3 + bx^2 - 1} \right)^2 + (2x - 1)\sqrt[3]{8x^3 + bx^2 - 1} + (2x - 1)^2} + \frac{-3x}{(2x - 1) + \sqrt{4x^2 - 4x + 4}} \right) = \frac{5}{4}$

Do $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{-3x}{(2x - 1) + \sqrt{4x^2 - 4x + 4}} \right) = \frac{-3}{4}$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{5}{4}$ nên

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{(b + 12)x^3 - 6x^2}{\left(\sqrt[3]{8x^3 + bx^2 - 1} \right)^2 + (2x - 1)\sqrt[3]{8x^3 + bx^2 - 1} + (2x - 1)^2} \right)$ phải hữu han.

Do đó $(b + 12) = 0 \Rightarrow b = -12$ thay lại ta được

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{-6x^2}{\left(\sqrt[3]{8x^3 - 12x^2 - 1} \right)^2 + (2x - 1)\sqrt[3]{8x^3 - 12x^2 - 1} + (2x - 1)^2} \right) = \frac{-1}{2}$

Thay lai được $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\frac{5}{4}$ không thỏa mãn

Trường hợp 2: Xét $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{5}{4} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} \left[x.\left(\sqrt[3]{ax^3 + bx^2 - 1} - 2\sqrt{x^2 - x + 1} \right) \right] = \frac{5}{4}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} x^2.\left(\sqrt[3]{a + \frac{b}{x} - 1} + 2\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) = \frac{5}{4}$

Suy ra $\sqrt[3]{a}+2=0\Leftrightarrow a=-8$.

Thay lại ta được

$$\lim_{x\to-\infty}\left[x.\left(\sqrt[3]{-8x^3+bx^2-1}-2\sqrt{x^2-x+1}\right)\right]=\frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty}x.\left[\left(\sqrt[3]{-8x^3+bx^2-1}+(2x-1)-(2x-1)-\sqrt{4x^2-4x+4}\right)\right]=\frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{(b-12)x^3+6x^2}{\left(\sqrt[3]{-8x^3+bx^2-1}\right)^2-(2x-1)\sqrt[3]{-8x^3+bx^2-1}+(2x-1)^2}-\frac{-3x}{(2x-1)-\sqrt{4x^2-4x+4}}\right)=\frac{5}{4}$$

Do $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-3x}{(2x-1)-\sqrt{4x^2-4x+4}}\right)=-\frac{3}{4}$ và $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\frac{5}{4}$

nên $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{(b-12)x^3+6x^2}{\left(\sqrt[3]{-8x^3+bx^2-1}\right)^2+(2x-1)\sqrt[3]{-8x^3+bx^2-1}+(2x-1)^2}\right)$ hữu han.

Do đó $(b-12)=0\Rightarrow b=12$ thay lại ta được

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{6x^2}{\left(\sqrt[3]{-8x^3+12x^2-1}\right)^2+(2x-1)\sqrt[3]{-8x^3+12x^2-1}+(2x-1)^2}\right)=\frac{1}{2}$$

Từ đó suy ra $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\frac{5}{4}$ thỏa mãn. Vậy ta được $a+b=4\in(3;5)$.

Câu 19: Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases}x\ge 0\\ f^2(x)-2f(x)\ne 0\end{cases}$. Xét phương trình: $f^2(x)-2f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\ f(x)=2\end{array}\right.$

Từ đồ thị $\Rightarrow$ phương trình $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=2\end{array}\right.$

$x=-1$ không là tiệm cận đứng do đk $x\ge 0$.

$x=2$ là nghiệm kép và tử số có một nghiệm $x=2\Rightarrow x=2$ là một đường tiệm cận đứng.

Từ đồ thị $\Rightarrow$ phương trình $f(x)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a<0\\ x=1\\ x=b\ (b>2)\end{array}\right.$

$x=a$ không là tiệm cận đứng (vì $x\ge 0$)

$x=1, x=b$ là hai đường tiệm cận đứng.

Vậy tổng số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$ là 3.

Câu 20: Chọn C

$\lim_{x\to-\infty}y=0, \lim_{x\to+\infty}y=0$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=0$, $\forall m$.

Do đó đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận

$\Leftrightarrow$ phương trình $x^2-2mx+4=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ m\neq\dfrac{5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m^2-4>0\\ m\neq\dfrac{5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m\neq\dfrac{5}{2}\\ \left[\begin{array}{l}m>2\\ m<-2\end{array}\right.\end{cases}.$$

Câu 21: Chọn B

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{2m}{x}+\dfrac{m^2-2m-6}{x^2}}=0$.

Nên đồ thị hàm số luôn có một đường tiệm cận ngang là $y=0$.

Do đó để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận thì phương trình: $x^2-2mx+m^2-2m-6=0$ có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm bằng 1.

Khi đó $\left[\begin{array}{l}2m+6=0\\ \begin{cases}2m+6>0\\ m^2-4m-5=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-3\\ \begin{cases}m>-3\\ \left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=5\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-3\\ m=-1\\ m=5\end{array}\right.$.

Vậy $S=\{-3;-1;5\}$. Nên tập S có 3 phần tử.

Câu 22: Chọn A

Điều kiện. $\begin{cases}f(x)\geq 0\\ f(x)\neq 2\\ x^2-2mx+m+2\neq 0\end{cases}$

Nếu $f(x)\geq 0\Leftrightarrow x\geq -2$

Nếu $f(x)=2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-1\end{array}\right.$ ($x=1$ là nghiệm kép).

Nếu $f(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=1\end{array}\right.$ ($x=1$ là nghiệm kép).

Khi đó. $g(x)=\dfrac{(x+1)\sqrt{a(x+2)(x-1)^2}}{a(x-2)(x+1)^2(x^2-2mx+m+2)}=\dfrac{|x-1|\sqrt{a(x+2)}}{a(x-2)(x+1)(x^2-2mx+m+2)}\ (a>0)$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, nên hàm số có 1 tiện cận ngang $y=0$

$\lim\limits_{x\to 2} g(x)=\infty$, nên hàm số có tiện cận đứng $x=2$

$\lim\limits_{x\to -1} g(x)=\infty$, nên hàm số có tiện cận đứng $x=-1$

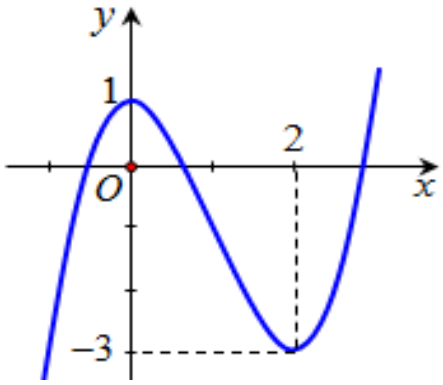
Để hàm số $g(x)$ có 5 đường tiệm cận (tiệm cận đứng hoặc tiệm cận ngang). Thì phương trình $h(x)=x^2-2mx+m+2=0$ có 2 nghiệm phân biệt lớn hơn -2 và $x\neq\{-1;1;2\}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ a_{h(x)}.h(-2) > 0 \\ \dfrac{S}{2} > -2 \\ h(-1) \neq 0 \\ h(1) \neq 0 \\ h(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 > 0 \\ 5m + 6 > 0 \\ m > -2 \\ 3m + 3 \neq 0 \\ 3 - m \neq 0 \\ 6 - 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 2 \end{array}\right. \\ m > -\dfrac{6}{5} \\ m > -2 \\ m \neq -1 \\ m \neq 3 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{6}{5} < m < -1 \\ \begin{cases} m > 2 \\ m \neq 3 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Do m có giá trị là nguyên và m thuộc khoảng $(-2019;2020)$

Vậy có 2016 giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019;2020)$ là $\{4;5;6.....;2019\}$

Câu 23:



Điều kiện: $\begin{cases} x \le 1 \\ x - 3 \neq 0 \\ f^2(x) + 3f(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ f^2(x) + 3f(x) \neq 0 \end{cases}$.

Ta có $(x-3)\left[f^2(x) + 3f(x)\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 3 & (\text{L}) \\ f(x) = 0 & \\ f(x) = -3 & \end{array}\right.$. Dựa vào đồ thị ta có

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \in (-1;0) \\ x = x_2 \in (0;1) \\ x = x_3 \in (2;+\infty) \end{array}\right.$ (loại $x_3 > 2$), do đó có 2 tiệm cân đứng $x = x_1$, $x = x_2$.

$f(x) = -3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = x_4,\ x_4 < 0 & \\ x = 2 & (\text{L}) \end{array}\right.$, do đó có 1 tiệm cận đứng $x = x_4$.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng.

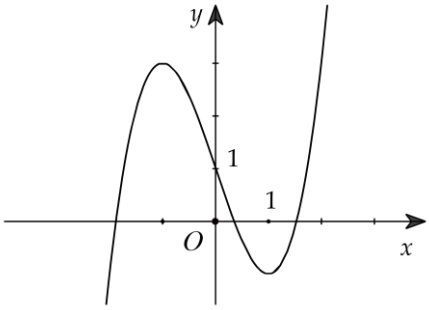
CHỦ ĐỀ 05 : ĐỌC VÀ BIẾN ĐỔI ĐỒ THỊ

LÍ THUYẾT

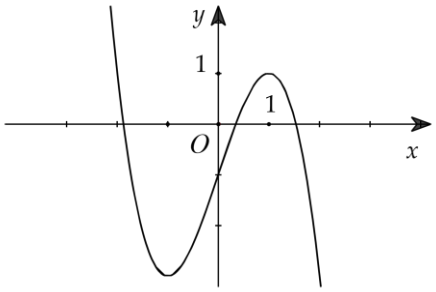
➢ Khảo sát một số hàm đa thức và phân thức

1. Hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d\ \ (a\neq 0)$

- **Trường hợp 1:** phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

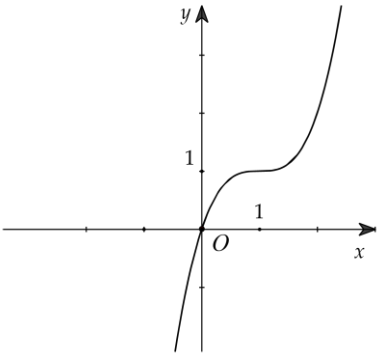


Với $a>0.$

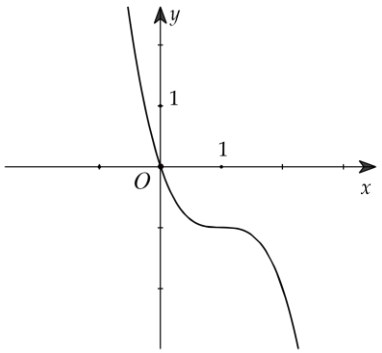


Với $a<0.$

- **Trường hợp 2:** phương trình $y'=0$ có nghiệm kép

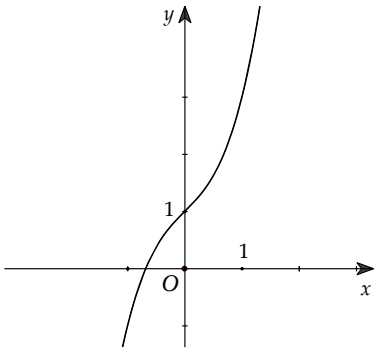


Với $a>0.$

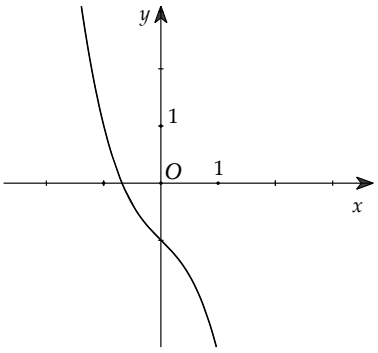


Với $a<0.$

- **Trường hợp 2:** phương trình $y'=0$ vô nghiệm



Với $a>0.$

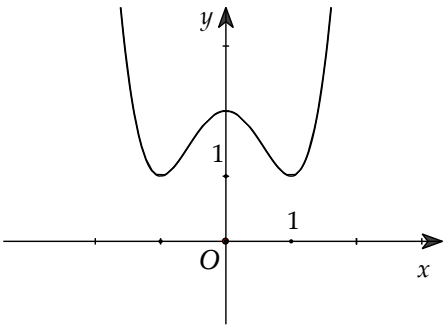


Với $a<0.$

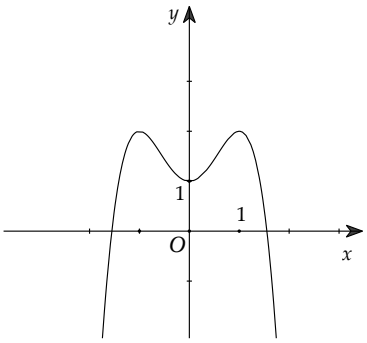
2. Hàm số trùng phương $y=ax^4+bx^2+c\ \ (a\neq 0)$

- Đạo hàm: $y'=4ax^3+2bx=2x\left(2ax^2+b\right),\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\2ax^2+b=0\end{array}\right.$
- Để hàm số có 3 cực trị: $ab<0$

- Nếu $\begin{cases} a<0 \\ b>0 \end{cases}$ hàm số có 2 cực đại và 1 cực tiểu
- Nếu $\begin{cases} a>0 \\ b<0 \end{cases}$ hàm số có 1 cực đại và 2 cực tiểu
- Để hàm số có 1 cực trị $ab \ge 0$
- Nếu $\begin{cases} a>0 \\ b\ge 0 \end{cases}$ hàm số có 1 cực tiểu và không có cực đại
- Nếu $\begin{cases} a<0 \\ b\le 0 \end{cases}$ hàm số có 1 cực đại và không có cực tiểu
- **Trường hợp 1:** phương trình $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt $(ab<0)$.

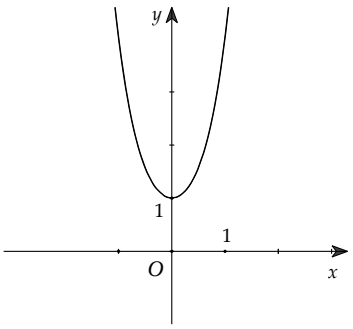


Với $a>0$.

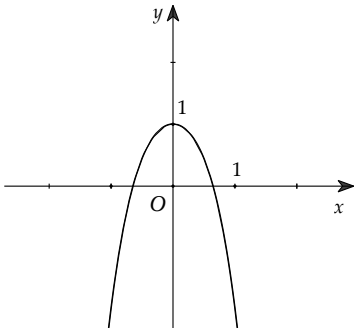


Với $a<0$.

- **Trường hợp 2:** phương trình $y'=0$ có 1 nghiệm



Với $a>0$.



Với $a<0$.

3. Hàm số bậc nhất $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\left(c\ne 0,\ ad-bc\ne 0\right)$

- Tập xác định: $D=R\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ Đạo hàm: $y=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$
- Nếu $ad-bc>0$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định. Đồ thị nằm góc phần tư 2 và 4.
- Nếu $ad-bc<0$ hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định. Đồ thị nằm góc phần tư 1 và 3.
- Đồ thị hàm số có: TCĐ: $x=-\dfrac{d}{c}$ và TCN: $y=\dfrac{a}{c}$
- Đồ thị có tâm đối xứng: $I\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$

❖ **Các phép biến đổi đồ thị**

1. Dạng 1: Từ đồ thị $(C): y = f(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y = f(|x|)$.

Ta có: $y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

và $y = f(|x|)$ là *hàm chẵn* nên đồ thị (C') nhận *Oy* làm trục đối xứng.

- Cách vẽ (C') từ (C):

  Giữ nguyên phần đồ thị bên phải Oy của đồ thị $(C): y = f(x)$.

  Bỏ phần đồ thị bên trái Oy của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị** được giữ qua Oy.

2. Dạng 2: Từ đồ thị $(C): y = f(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y = |f(x)|$.

Ta có: $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x) < 0 \end{cases}$

- **Cách vẽ (C') từ (C):**

  Giữ nguyên phần đồ thị phía trên Ox của đồ thị (C): $y = f(x)$.

  Bỏ phần đồ thị phía dưới Ox của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ** qua Ox.

3. Dạng 3: Từ đồ thị $(C): y = u(x).v(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y = |u(x)|.v(x)$.

Ta có: $y = |u(x)|.v(x) = \begin{cases} u(x).v(x) = f(x) & \text{khi } u(x) \geq 0 \\ -u(x).v(x) = f(x) & \text{khi } u(x) < 0 \end{cases}$

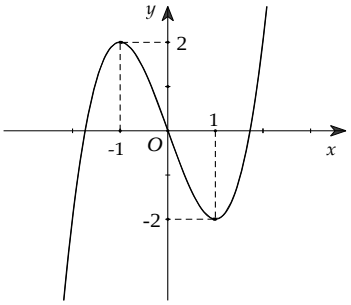
- **Cách vẽ (C') từ (C):**

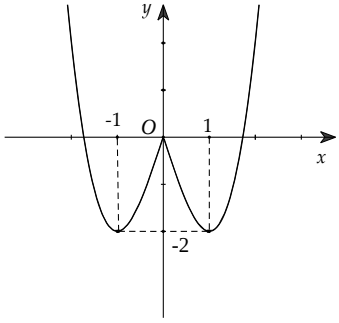
  Giữ nguyên phần đồ thị trên miền $u(x) \geq 0$ của đồ thị $(C): y = f(x)$.

  Bỏ phần đồ thị trên miền $u(x) < 0$ của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ** qua Ox.

VÍ DỤ 1: Từ đồ thị $(C): y = f(x) = x^3 - 3x$ suy ra đồ thị $(C'): y = |x|^3 - 3|x|$.

- Bỏ phần đồ thị của (C) bên trái Oy, giữ nguyên (C) bên phải Oy.
- Lấy đối xứng phần đồ thị được giữ qua Oy.

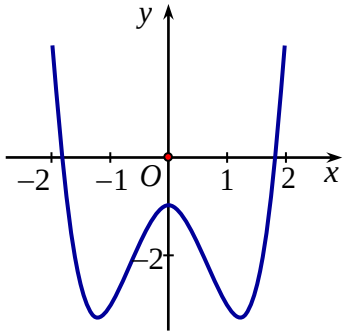




$(C'): y = |x|^3 - 3|x|$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

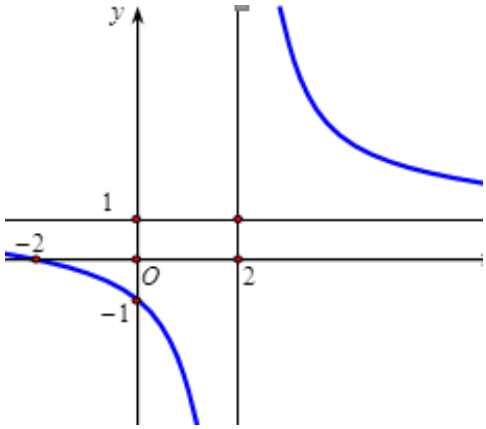
Câu 1: Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình bên.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a>0,b<0,c<0$. **B.** $a>0,b>0,c<0$. **C.** $a<0,b>0,c<0$. **D.** $a>0,b<0,c>0$.

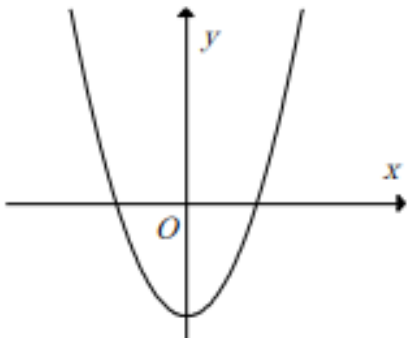
Câu 2: Tìm a, b, c để hàm số $y=\dfrac{ax+2}{cx+b}$ có đồ thị như hình vẽ sau:



A. $a=1;\ b=1;\ c=-1$. **B.** $a=1;\ b=-2;\ c=1$.

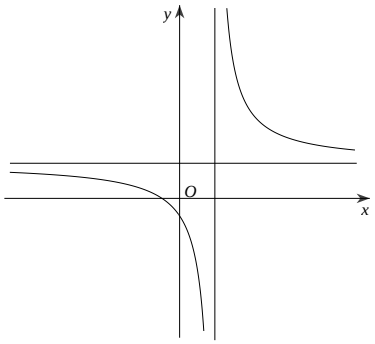
C. $a=1;\ b=2;\ c=1$. **D.** $a=2;\ b=-2;\ c=-1$.

Câu 3: Hàm số $y=ax^4+bx^2+c,\left(a\neq 0\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $a>0,b<0,c\leq 0$. **B.** $a<0,b<0,c<0$. **C.** $a>0,b\geq 0,c>0$. **D.** $a>0,b\geq 0,c<0$.

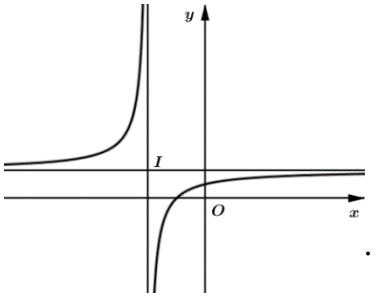
Câu 4: Cho hàm số $y=\dfrac{bx-c}{x-a}$ ($a\neq 0$ và a, b, $c\in\mathbb{R}$) có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào dưới đây đúng?



A. $a>0$, $b>0$, $c-ab<0$. **B.** $a<0$, $b>0$, $c-ab<0$. **C.** $a<0$, $b<0$, $c-ab>0$. **D.** $a>0$, $b<0$, $c-ab<0$.

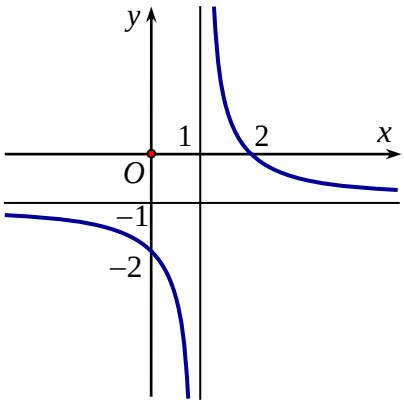
Câu 5: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+1}{x-b}$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $a>0>b$. **B.** $a>b>0$. **C.** $a<b<0$. **D.** $a<0<b$.

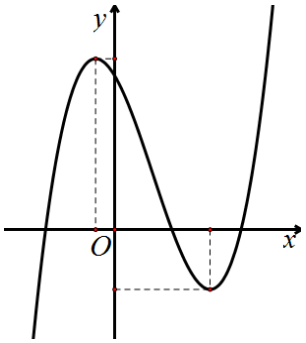
Câu 6: Cho hàm số $y=\dfrac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình dưới.



Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $b<0<a$. **B.** $0<b<a$. **C.** $b<a<0$. **D.** $0<a<b$.

Câu 7: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

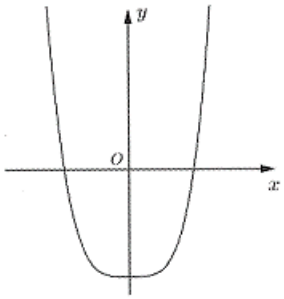


A. $a>0,b<0,c>0,d>0$. **B.** $a>0,b>0,c<0,d>0$.

C. $a>0,b<0,c<0,d>0$. **D.** $a<0,b>0,c<0,d>0$.

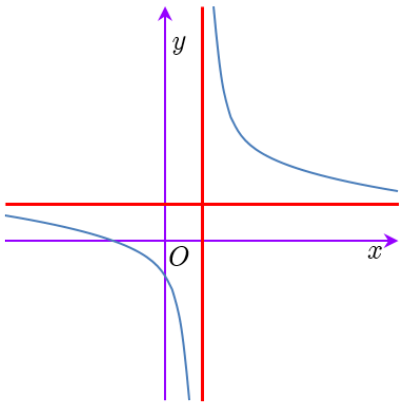
Câu 8: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ (với $ab\neq 0$).

Chọn điều kiện đúng của $a,\ b$ để hàm số đã cho có dạng đồ thị như hình bên.



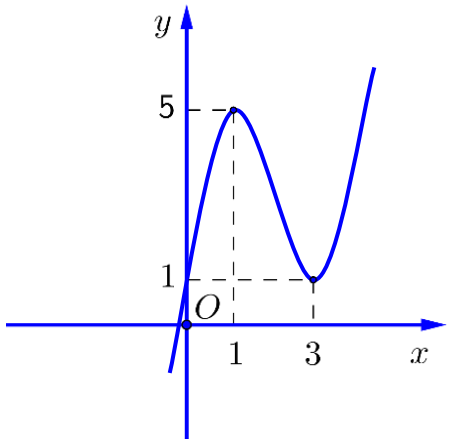
A. $\begin{cases}a<0\\b>0\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}a>0\\b<0\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}a<0\\b<0\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}a>0\\b>0\end{cases}$.

Câu 9: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $ab<0,\ cd<0$. **B.** $bc>0,\ ad<0$. **C.** $ac>0,\ bd>0$. **D.** $bd<0,\ ad>0$.

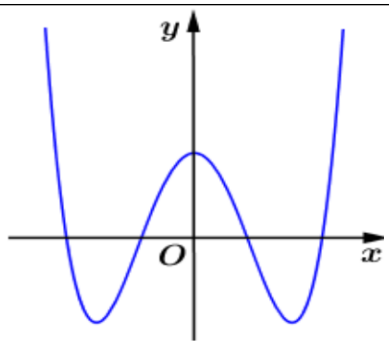
Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ ở bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0$. **B.** $a>0,\ b<0,\ c>0,\ d>0$.

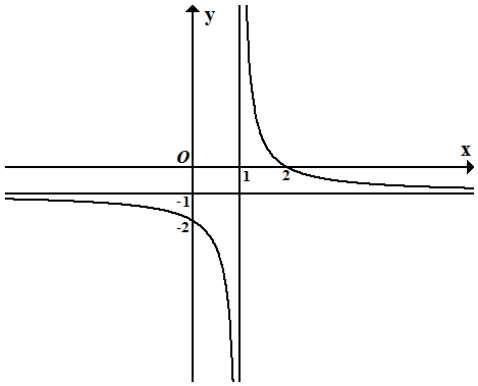
C. $a<0,\ b<0,\ c>0,\ d<0$. **D.** $a>0,\ b>0,\ c<0,\ d>0$.

Câu 11: Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**



A. $a>0,b<0,c<0$. **B.** $a>0,b>0,c>0$. **C.** $a>0,b<0,c>0$. **D.** $a<0,b>0,c>0$.

Câu 12: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình bên với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $T=a-3b+2c$?

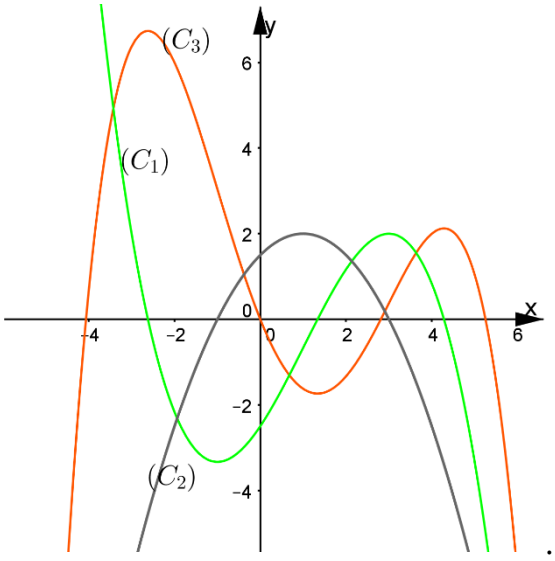


A. $T=-9$. **B.** $T=-7$. **C.** $T=12$. **D.** $T=10$.

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R},a\neq 0)$ có đồ thị là (C). Biết rằng đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tính giá trị $H=f(4)-f(2)$?

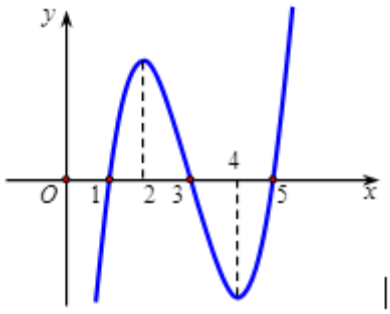
A. $H=64$. **B.** $H=51$. **C.** $H=58$. **D.** $H=45$.

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của các hàm số $y=f(x),y=f'(x),y=f''(x)$ lần lượt là đường cong nào trong hình bên?



A. $(C_3),(C_2),(C_1)$. **B.** $(C_1),(C_3),(C_2)$. **C.** $(C_3),(C_1),(C_2)$. **D.** $(C_1),(C_2),(C_3)$.

Câu 15: Cho hàm số $y=f(x)$. Biết $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau. Kết luận nào sau đây là đúng?



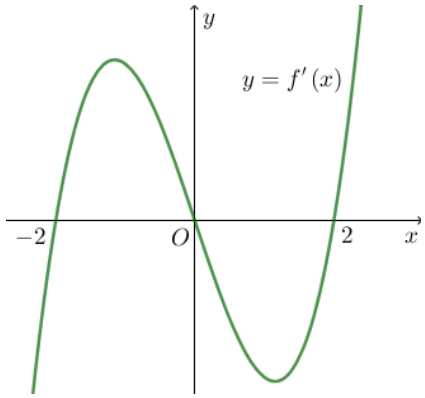
A. Hàm số $y=f(x)$ chỉ có hai điểm cực trị.

B. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ chỉ có hai điểm cực trị và chúng nằm về hai phía của trục hoành.

C. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

D. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$.

Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Khẳng định nào sau đây là đúng?

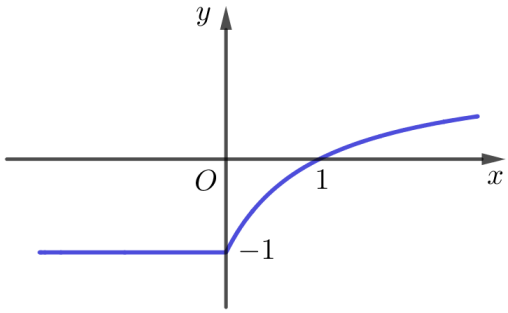
A. $f(x)$ đạt cực đại tại $x=0$.

B. $f(x)$ đạt cực đại tại $x=-1$.

C. $f(x)$ đạt cực đại tại $x=\pm 2$.

D. $f(x)$ đạt cực đại tại $x=1$.

Câu 17: Hình vẽ bên là một phần của đồ thị hàm số nào?



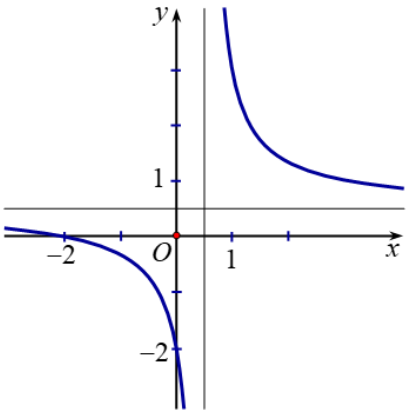
A. $y=\dfrac{-x-1}{|x|+1}$.

B. $y=\dfrac{x-1}{|x|+1}$.

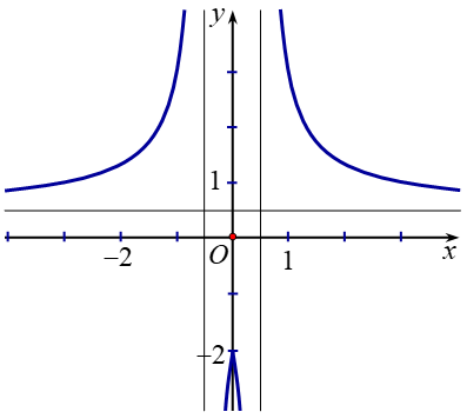
C. $y=\dfrac{x-1}{|x+1|}$.

D. $y=\dfrac{x}{|x|+1}$.

Câu 18: Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x-1}$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là đồ thị của hàm số nào sau đây?



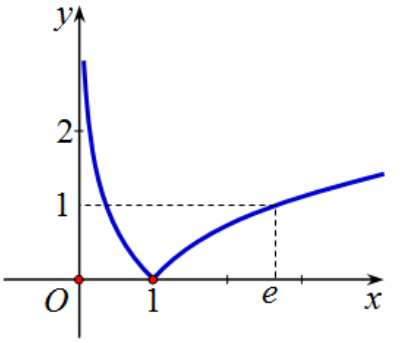
Hình 1



Hình 2

A. $y=\dfrac{x+2}{|2x-1|}$. **B.** $y=\dfrac{|x+2|}{2x-1}$. **C.** $y=\dfrac{|x|+2}{2|x|-1}$. **D.** $y=\left|\dfrac{x+2}{2x-1}\right|$.

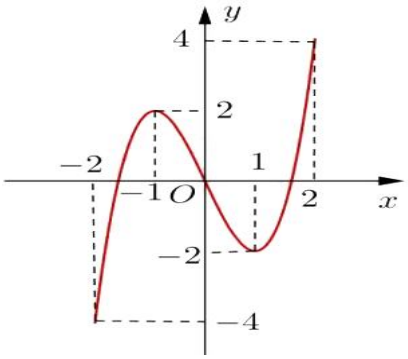
Câu 19: Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=\left|\ln(x+1)\right|-\ln 2$. **B.** $y=\left|\ln x\right|$.

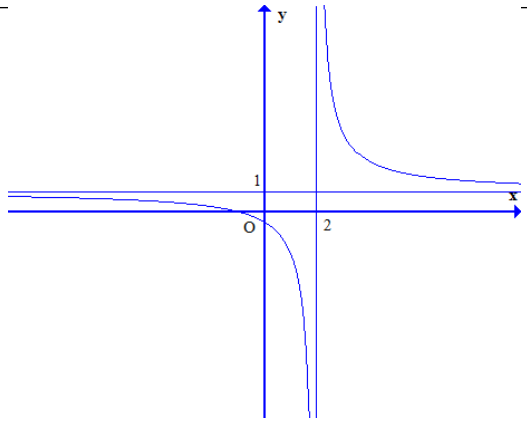
C. $y=\ln|x+1|-\ln 2$. **D.** $y=\ln|x|$.

Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Các giá trị của tham số m để phương trình $|f(x)|=m$ có 6 nghiệm thực phân biệt là



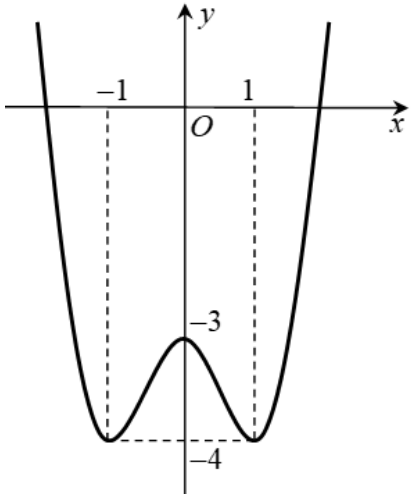
A. $0<m<2$. **B.** $m<0$. **C.** $m>2$. **D.** $0\le m\le 2$.

Câu 21: Đường cong ở hình bên dưới là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với a,b,c,d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?.



A. $y'<0,\forall x\neq 2$. **B.** $y'<0,\forall x\neq 1$. **C.** $y'>0,\forall x\neq 2$. **D.** $y'>0,\forall x\neq 1$.

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



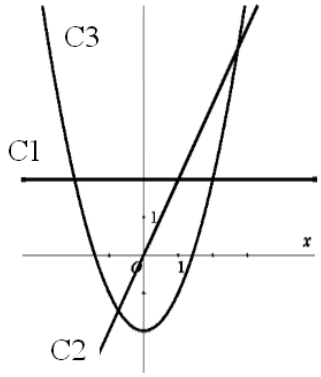
Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $|f(x)|=m$ có 6 nghiệm phân biệt.

A. $3<m<4$. **B.** $0<m<3$. **C.** $-4<m<-3$. **D.** $0<m<4$.

Câu 23: Cho đồ thị (C) có phương trình $y=\dfrac{x+2}{x-1}$, biết rằng ĐTHS $y=f(x)$ đối xứng với (C) qua trục tung. Khi đó $f(x)$ là

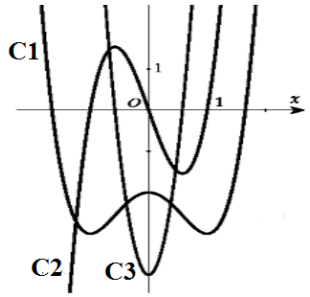
A. $f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}$. **B.** $f(x)=-\dfrac{x+2}{x-1}$. **C.** $f(x)=-\dfrac{x-2}{x+1}$. **D.** $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$.

Câu 24: Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?



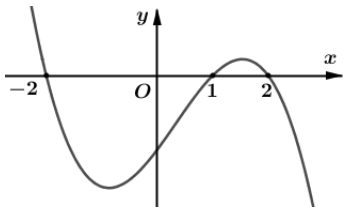
A. $(C_3);(C_2);(C_1)$. **B.** $(C_2);(C_1);(C_3)$. **C.** $(C_2);(C_3);(C_1)$. **D.** $(C_1);(C_3);(C_2)$.

Câu 25: Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?



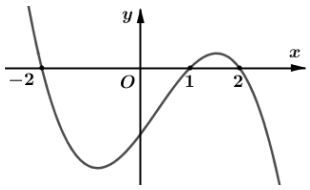
A. $(C_3);(C_2);(C_1)$. **B.** $(C_2);(C_1);(C_3)$. **C.** $(C_2);(C_3);(C_1)$. **D.** $(C_1);(C_2);(C_3)$.

Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên R và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đặt $g(x)=f(|x+m|)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị?



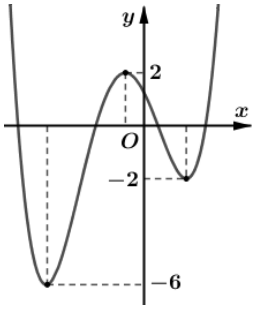
A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** Vô số.

Câu 27: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên R và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Đặt $g(x)=f(|x|+m)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)$ có **đúng** 5 điểm cực trị?



A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** Vô số.

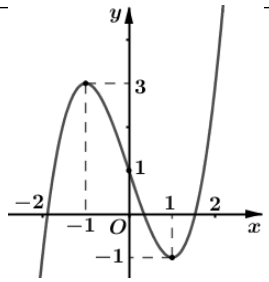
Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Đồ thị hàm số $g(x)=\left|f(x+2018)+m^2\right|$ có 5 điểm cực trị khi

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

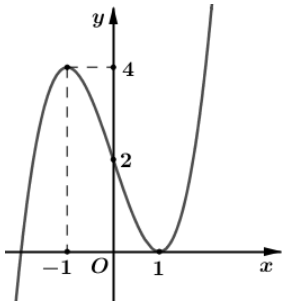
Câu 29: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Với $m<-1$ thì hàm số $g(x)=f\left(|x+m|\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

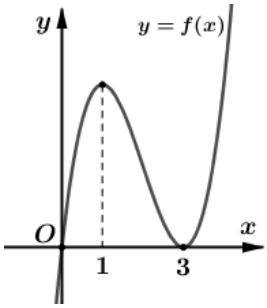
Câu 30: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(|x|+m\right)$ có 5 điểm cực trị.

A. $m<-1$. **B.** $m>-1$. **C.** $m>1$. **D.** $m<1$.

Câu 31: Cho hàm số $y=f\ x$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $h\ x=\left|f^2\ x+f\ x+m\right|$ có đúng 3 điểm cực trị.

A. $m>\frac{1}{4}$. **B.** $m\geq\frac{1}{4}$. **C.** $m<1$. **D.** $m\leq 1$.

Câu 32: Cho hàm số $y=\frac{ax+1}{bx+c}$ (với a,b,c là các tham số) có bảng biến thiên như sau:

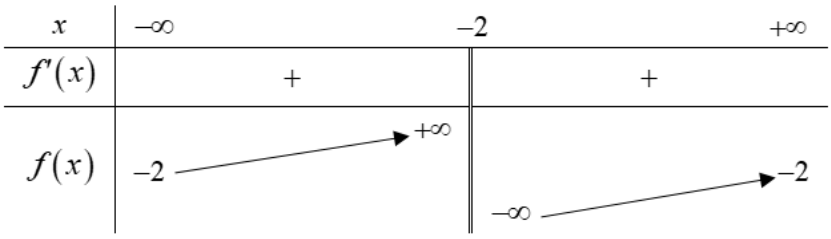
x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	
$f(x)$	1 ↗ $+\infty$	$-\infty$ ↗ 1	

Xét bốn phát biểu sau: $(1)\ c>1$ $(2)\ a+b<0$ $(3)\ a+b+c=0$ $(4)\ a>0$.

Số phát biểu đúng trong bốn phát biểu đã nêu là

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

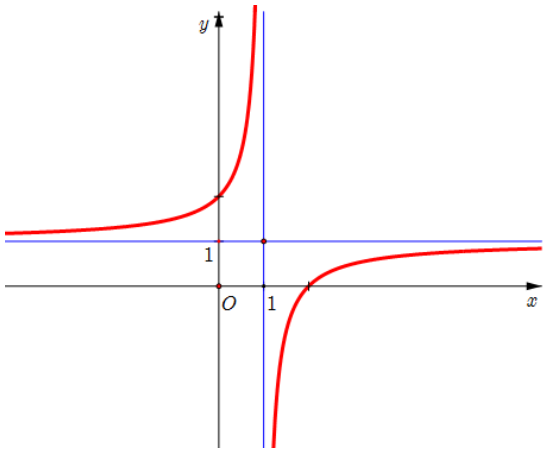
Câu 33: Cho hàm số $f(x)=\frac{ax-5}{bx+c}$, $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:



Trong các số a, b và c có bao nhiêu số âm?

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 34: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx-1}(a,b,c\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ:



Trong các số a,b,c có bao nhiêu số dương?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	**2.B**	**3.D**	**4.A**	**5.A**	**6.C**	**7.B**	**8.D**	**9.B**	**10.B**

11.C	**12.A**	**13.C**	**14.C**	**15.D**	**16.A**	**17.B**	**18.C**	**19.B**	**20.A**
21.A	**22.A**	**23.D**	**24.A**	**25.D**	**26.D**	**27.B**	**28.B**	**29.C**	**30.A**
31.B	**32.C**	**33.B**	**34.B**						

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn A

Do đồ thị cắt Oy tại $M(0;c)$ nằm dưới trục Ox nên $c<0$.

Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=+\infty$ nên $a>0$.

Hàm số có ba điểm cực trị nên $ab<0\Rightarrow b<0$

Câu 2: Chọn B

Để đường tiệm cận đứng là $x=2$ thì $-\dfrac{b}{c}=2\Leftrightarrow b=-2c$.

Để đường tiệm cận ngang là $y=1$ thì $\dfrac{a}{c}=1\Leftrightarrow a=c$.

Khi đó $y=\dfrac{cx+2}{cx-2c}$. Để đồ thị hàm số đi qua điểm $(-2\,;0)$ thì $c=1$. Vậy ta có $a=1;b=-2;c=1$

.

Câu 3: Chọn D

Dựa vào đồ thị ta có $\begin{cases}a>0\\a.b\ge 0\\c<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\b\ge 0\\c<0\end{cases}$.

Câu 4: Chọn A

Dựa vào hình vẽ, đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=b>0$, tiệm cận đứng $x=a>0$.

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng của tập xác định nên $c-ab<0$, đáp án **B** đúng.

Câu 5: Chọn A

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=b$. Theo như hình vẽ thì $b<0$.

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=a$. Theo như hình vẽ thì $a>0$.

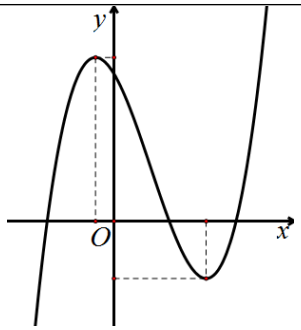
Do đó ta có $a>0>b$.

Câu 6: Chọn C

Nhìn vào đồ thị ta thấy: Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=a$ và tiệm cận đứng $x=1$.Đồ thị

cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x=\dfrac{b}{a}>1$. Ta có: $\begin{cases}\dfrac{a}{-1}=1\\\dfrac{b}{a}>1\end{cases}\Leftrightarrow b<a=-1<0$.

Câu 7: Chọn B



Đồ thị đã cho là hàm bậc 3. Vì khi $x \to +\infty, y \to +\infty \Rightarrow a > 0$.

(hay phía bên phải đồ thị hàm bậc 3 đồ thị đi lên nên $a > 0$).

Xét $y' = 3ax^2 + 2bx + c, y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu nên suy ra $a.c < 0 \Rightarrow c < 0$.

Loại được đáp án C và D.

Xét $y'' = 6ax + 2b = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-b}{3a}$, dựa vào đồ thị ta thấy hoành độ của điểm uốn dương.

$\Rightarrow \dfrac{-b}{3a} > 0 \Rightarrow b < 0.$ Suy ra $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

Câu 8: Chọn D

Hàm bậc 4 trùng phương có hướng quay lên thì $a > 0$. Đồ thị chỉ có một cực trị nên phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2ax^2 + b = 0 \end{array}\right.$ chỉ có một nghiệm, do đó $ab > 0 \Rightarrow b > 0$.

Câu 9: Chọn B

Vì hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định nên $ad - bc < 0$, với mọi $x \neq -\dfrac{d}{c}$ nên $ad < bc$

Mặt khác $(C) \cap Ox = A\left(-\dfrac{b}{a}; 0\right)$ và $-\dfrac{b}{a} < 0$ nên $ab > 0$ (1) $\Rightarrow$**Loại A**

Và $(C) \cap Oy = B\left(0; \dfrac{b}{d}\right)$ và $\dfrac{b}{d} < 0$ nên $bd < 0$ (2) $\Rightarrow$**Loại C**

Từ (1) và (2) ta có $ad < 0$ $\Rightarrow$**Loại D**

Mặt khác, phương trình đường tiệm cận đứng $x = -\dfrac{d}{c} > 0$ nên $cd < 0$. Suy ra $bc > 0$.

Câu 10: Chọn B

Dựa vào đồ thị ta thấy nhánh cuối cùng bên phải hướng lên trên suy ra $a > 0$.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm $x = 1 \Rightarrow d = 1 > 0$.

Hàm số có 2 điểm cực trị $x_1 = 1 > 0, x_2 = 3 > 0 \Rightarrow x_1 + x_2 > 0 \Rightarrow -\dfrac{2b}{3a} > 0 \Rightarrow b < 0$.

$x_1 x_2 > 0 \Rightarrow \dfrac{c}{3a} > 0 \Rightarrow c > 0$. Vậy $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$, $d > 0$.

Câu 11: Chọn C

Do đồ thị hàm số có ba điểm cực trị và $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow a > 0, b < 0$.

Mặt khác điểm cực đại của đồ thị hàm số có tung độ dương $\Rightarrow c > 0$.

Câu 12: Chọn A

Đồ thị hàm số có $x = 1$ là tiệm cận đứng nên $c = -1$.

Đồ thị hàm số có $y=-1$ là tiệm cận ngang nên $a=-1$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2 nên $\frac{b}{c}=-2$ do đó $b=2$.

Vậy $T=a-3b+2c=-1-3.2+2(-1)=-9$.

Câu 13: Chọn C

Theo bài ra $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R},a\neq 0)$ do đó $y=f'(x)$ là hàm bậc hai có dạng $y=f'(x)=a'x^2+b'x+c'$.

Dựa vào đồ thị ta có: $\begin{cases}c'=1\\a'-b'+c'=4\\a'+b'+c'=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a'=3\\b'=0\\c'=1\end{cases}\Rightarrow y=f'(x)=3x^2+1.$

Gọi S là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'(x)$, trục Ox, $x=4$, $x=2$.

Ta có $S=\int_2^4(3x^2+1)\mathrm{d}x=58$. Lại có: $S=\int_2^4 f'(x)\mathrm{d}x=f(x)\Big|_2^4=f(4)-f(2)$.

Do đó: $H=f(4)-f(2)=58$.

Câu 14: Chọn C

Gọi hàm số của các đồ thị $(C_1);(C_2);(C_3)$ tương ứng là $f_1(x),f_2(x),f_3(x)$.

Ta thấy đồ thị (C_3) có các điểm cực trị có hoành độ là nghiệm của phương trình $f_1(x)=0$ nên hàm số $y=f_1(x)$ là đạo hàm của hàm số $y=f_3(x)$.

Đồ thị (C_1) có các điểm cực trị có hoành độ là nghiệm của phương trình $f_2(x)=0$ nên hàm số $y=f_1(x)$ là đạo hàm của hàm số $y=f_2(x)$.

Vậy, đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong $(C_3);(C_1);(C_2)$.

Câu 15: Chọn D

Vì $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt nên hàm số hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị. Do đó loại hai phương án **A** và **D.**

Vì trên $(-\infty;2)$ thì $f'(x)$ có thể nhận cả dầu âm và dương nên loại phương án **C.**

Vì trên $(1;3)$ thì $f'(x)$ chỉ mang dấu dương nên $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$.

Câu 16: Chọn A

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗	

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

Câu 17: Chọn B

Từ đồ thị, ta có tập xác định hàm số $D=\mathbb{R}$ nên loại phương án **B.**

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(1;0)$ nên loại phương án **C**, **D.**

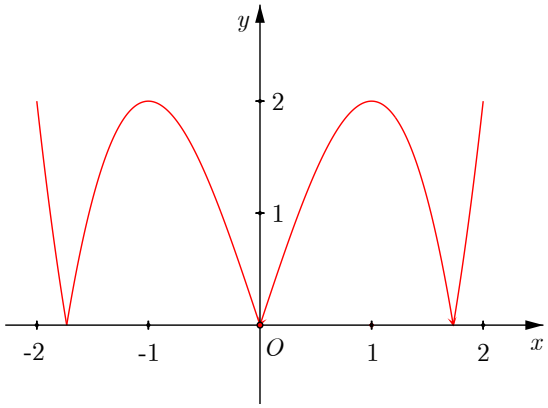
Câu 18: Chọn C

Sử dụng cách suy đồ thị của hàm số $y=f\left(|x|\right)$ từ đồ thị $f\left(x\right)$.

Câu 19: Chọn B

Ta có $y=|\ln x|=\begin{cases}\ln x, & x\geq 1\\ -\ln x, & x<1\end{cases}$.

Câu 20: Chọn A



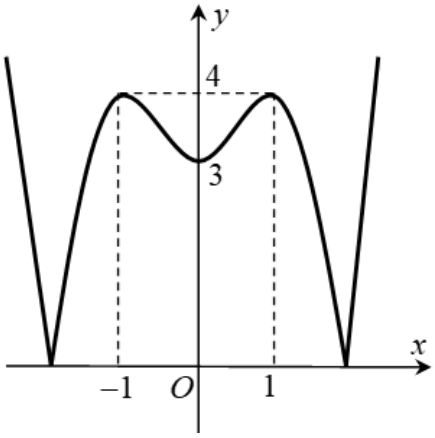
Từ đồ thị của hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ ta có phương trình $\left|f\left(x\right)\right|=m$ có 6 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $0<m<2$.

Câu 21: Chọn A

Hàm số giảm trên $\left(-\infty;2\right)$ và $\left(2;+\infty\right)$ nên $y'<0,\forall x\neq 2$.

Câu 22: Chọn A

Từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ ta suy ra được đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ như hình bên dưới.



Dựa và đồ thị suy ra để phương trình $\left|f\left(x\right)\right|=m$ có 6 nghiệm phân biệt thì $3<m<4$.

Câu 23: Chọn D

Gọi $M(x;y)\in f(x)\Rightarrow N(-x;y)\in(C)$, ta có $y=\dfrac{-x+2}{-x-1}=\dfrac{x-2}{x+1}$.

Câu 24: Chọn A

Trong khoảng $\left(0;+\infty\right)$ thì $\left(C_2\right)$ nằm trên trục hoành và $\left(C_3\right)$ "đi lên".

Trong khoảng $\left(-\infty;0\right)$ thì $\left(C_2\right)$ nằm dưới trục hoành và $\left(C_3\right)$ "đi xuống".

Đồ thị $\left(C_1\right)$ nằm hoàn toàn trên trục hoành và $\left(C_2\right)$ "đi lên".

Hoặc:

Từ hình vẽ ta thấy: đồ thị (C_2) cắt trục Ox tại 1 điểm là điểm cực trị của của đồ thị hàm số (C_3).

Đồ thị (C_2) đồng biến trên $\mathbb{R}$ mà đồ thị (C_1) lại nằm hoàn toàn trên trục hoành.

Câu 25: Chọn D

Từ hình vẽ ta thấy: đồ thị (C_2) cắt trục Ox tại 3 điểm là 3 điểm cực trị của của đồ thị hàm số (C_1).

Đồ thị (C_3) cắt trục Ox tại 2 điểm là 2 điểm cực trị của của đồ thị hàm số (C_2).

Câu 26: Chọn D

Từ đồ thị hàm số $f'x$ ta thấy $f'x$ cắt trục hoành tại 2 điểm có hoành độ dương (và 1 điểm có hoành độ âm)

$\longrightarrow f\ x$ có 2 điểm cực trị dương

$\longrightarrow f\ |x|$ có 5 điểm cực trị

$\longrightarrow f\ |x+m|$ có 5 điểm cực trị với mọi m (vì tịnh tiến sang trái hay sang phải không ảnh hưởng đến số điểm cực trị của hàm số). Chọn D

Chú ý: Đồ thị hàm số $f\ |x+m|$ có được bằng cách lấy đối xứng trước rồi mới tịnh tiến.

Đồ thị hàm số $f\ |x|+m$ có được bằng cách tịnh tiến trước rồi mới lấy đối xứng.

Câu 27: Chọn B

Từ đồ thị $f'x$ ta có $f'x=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=-2\\x=1\\x=2\end{bmatrix}$. Suy ra bảng biến thiên của $f\ x$

x	$-\infty$	-2		1		2	$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
f		↗		↘		↗		↘

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ hàm số $f\ x+m$ có 2 điểm cực trị dương (vì khi đó lấy đối xứng qua Oy ta được đồ thị hàm số $f\ |x|+m$ có đúng 5 điểm cực trị).

Từ bảng biến thiên của $f\ x$, suy ra $f\ x+m$ luôn có 2 điểm cực trị dương $\Leftrightarrow$ tịnh tiến $f\ x$ (sang trái hoặc sang phải) phải thỏa mãn

Tịnh tiến sang trái nhỏ hơn 1 đơn vị $\longrightarrow m<1$.

Tịnh tiến sang phải không vượt quá 2 đơn vị $\longrightarrow m\geq -2$.

Suy ra $-2\leq m<1\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m\in\ -2;-1;0$.

Câu 28: Chọn B

Vì hàm $f\ x$ đã cho có 3 điểm cực trị nên $f\ x+2018\ +m^2$ cũng luôn có 3 điểm cực trị (do phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị).

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị $f\ x+2018\ +m^2$ với trục hoành là 2.

Để số giao điểm của đồ thị $f\ x+2018\ +m^2$ với trục hoành là 2, ta cần

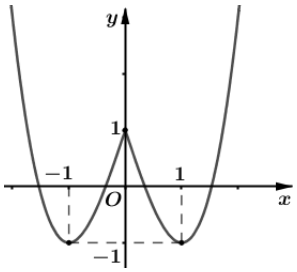
Tịnh tiến đồ thị $f\ x$ xuống dưới tối thiểu 2 đơn vị $\longrightarrow m^2\leq -2$: vô lý

Hoặc tịnh tiến đồ thị $f\ x$ lên trên tối thiểu 2 đơn vị nhưng phải nhỏ hơn 6 đơn vị

$\longrightarrow 2\leq m^2<6\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\sqrt{2}\leq m<\sqrt{6}\\-\sqrt{6}<m\leq -\sqrt{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m\in\ -2;2$.

Câu 29: Chọn C

Đồ thị hàm số $f\left|x+m\right|$ được suy ra từ đồ thị hàm số $f\ x$ bằng cách lấy đối xứng trước rồi mới tịnh tiến. Lấy đối xứng trước ta được đồ thị hàm số $f\left|x\right|$ như hình bên dưới



Dựa vào đồ thị hàm số $f\left|x\right|$ ta thấy có 3 điểm cực trị $\longrightarrow f\left|x+m\right|$ cũng luôn có 3 điểm cực trị (vì phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị). **Chọn C**

Câu 30: Chọn A

Nhận xét: Hàm $g\ x\ =f\left|x\right|+m$ là hàm số chẵn nên đồ thị đối xứng qua trục $Oy\longrightarrow x=0$ là một điểm cực trị của hàm số.

Ta có $g'\ x\ =\frac{x}{\left|x\right|}.f'\left|x\right|+m$ với $x=0.$

$$\longrightarrow g'\ x\ =0\Leftrightarrow f'\left|x\right|+m\ =0\xleftarrow{\text{theo do thi}f\ x}\begin{bmatrix}\left|x\right|+m=1\\\left|x\right|+m=-1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\left|x\right|=1-m\\\left|x\right|=-1-m\end{bmatrix}.\ *$$

Để hàm số $g\ x$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ * có 4 nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1-m>0\\-1-m>0\\1-m\neq-1-m\end{cases}\Leftrightarrow m<-1.$$

Cách 2.

Đồ thị hàm số $f\left|x\right|+m$ được suy ra từ đồ thị hàm số $f\ x$ bằng cách tịnh tiến trước rồi mới lấy đối xứng.

Để hàm số $f\left|x\right|+m$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ hàm số $f\ x+m$ có 2 điểm cực trị dương. Do đó ta phải tịnh tiến điểm cực đại của đồ thị hàm số $f\ x$ qua phía bên phải trục tung nghĩa là tịnh tiến đồ thị hàm số $f\ x$ sang phải lớn hơn 1 đơn vị $\longrightarrow m<-1.$

Câu 31: Chọn B

Xét $g\ x\ =f^2\ x\ +f\ x\ +m\longrightarrow g'\ x\ =f'\ x\ \left[2f\ x\ +1\right].$

$$g'\ x\ =0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}f'\ x\ =0\\2f\ x\ =-1\end{bmatrix}\xleftarrow{\text{theo do thi}f\ x}\begin{bmatrix}x=1\\x=3\\x=a\quad a<0\end{bmatrix}.\ \text{Ta tính được}\begin{cases}g\ 1\ =f^2\ 1\ +f\ 1\ +m>m\\g\ 3\ =m\\g\ a\ =m-\frac{1}{2}\end{cases}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $g\ x$

x	$-\infty$	a		1		3	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
g		$g(a)$		$g(1)$		m	

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra đồ thị hàm số $g\ x$ có 3 điểm cực trị.

Suy ra đồ thị hàm số $h\left(x\right)=\left|f^2\left(x\right)+f\left(x\right)+m\right|=\left|\left[f\left(x\right)+\frac{1}{2}\right]^2+m-\frac{1}{4}\right|$ có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $g\left(x\right)$ nằm hoàn toàn phía trên trục Ox (kể cả tiếp xúc)

$\longrightarrow m\geq\frac{1}{4}$. Chọn B

Câu 32: Chọn C

Đồ thị $y=\frac{ax+1}{bx+c}$ có tiệm cận đứng $x=2$, tiệm cận ngang $y=1$. Hàm số $y=\frac{ax+1}{bx+c}$ đồng biến trên các khoảng xác định.

Suy ra $\begin{cases}\lim\limits_{x\to2^+}y=-\infty\\\lim\limits_{x\to+\infty}y=1\\y'=\frac{ac-b}{\left(bx+c\right)^2}>0,\ x\neq-\frac{b}{c}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2b+c=0\\\frac{a}{b}=1\\ac-b>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\c=-2b\\-2b^2-b>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\c=-2b\\-\frac{1}{2}<b<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\frac{1}{2}<b<0\Rightarrow0<-b<\frac{1}{2}\\a=b\Rightarrow a+b<0\\c=-2b\Rightarrow a+b+c=0\\c<1\end{cases}\Rightarrow\left(2\right),\left(3\right)$ đúng.

Câu 33: Chọn B

Theo bảng biến thiên ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{ax-5}{bx+c}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{a-\frac{5}{x}}{b+\frac{c}{x}}=\frac{a}{b}=-2\Rightarrow a=-2b\ \left(1\right)$.

Theo bảng biến thiên, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-2$ nên suy ra $-\frac{c}{b}=-2\Leftrightarrow c=2b$ $\left(2\right)$.

Mặt khác hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định nên $y'=\frac{ac+5b}{\left(bx+c\right)^2}>0$ hay $ac+5b>0$ $\left(3\right)$.

Thay $\left(1\right)$, $\left(2\right)$ vào $\left(3\right)$ ta có: $-4b^2+5b>0\Leftrightarrow0<b<\frac{5}{4}$. Từ đó ta có $c>0$, $a<0$.

Câu 34: Chọn B

Đồ thị hàm số $y=\frac{ax+b}{cx-1}$ có các tính chất:

Đường tiệm cận ngang là $y=\frac{a}{c}\Rightarrow\frac{a}{c}=1\Rightarrow a=c$

Đường tiệm cận đứng là $x=\frac{1}{c}\Rightarrow\frac{1}{c}=1\Rightarrow c=1$

Cắt trục tung tại điểm có tung độ $y=-b\Rightarrow-b>0\Rightarrow b<0$

Vậy có $a,c>0$ và $b<0$ tức là trong các số a,b,c có hai giá trị dương.

CHỦ ĐỀ 06 : TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

LÍ THUYẾT

❖ **Tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số:**

- **Phương pháp:** Cho 2 hàm số $y=f(x), y=g(x)$ có đồ thị lần lượt là (C) và (C').
  - Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (C'): $f(x)=g(x)$ $(*)$
  - Giải phương trình tìm x từ đó suy ra y và tọa độ giao điểm.
  - Số nghiệm của (*) là số giao điểm của (C) và (C').

❖ **Tương giao của đồ thị hàm bậc 3**

- **Phương pháp 1: Bảng biến thiên (phương pháp đồ thị)**
  - Lập phương trình hoành độ giao điểm dạng $F(x,m)=0$ (phương trình ẩn x tham số m)
  - Cô lập m đưa phương trình về dạng $m=f(x)$
  - Lập bảng biến thiên cho hàm số $y=f(x)$.
  - Dựa và giả thiết và bảng biến thiên từ đó suy ra m.

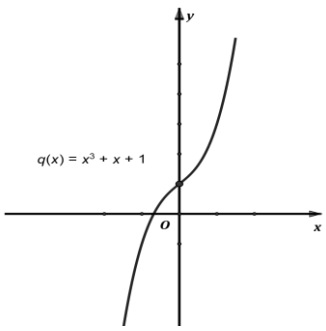
➢ **Dấu hiệu:** Sử dụng phương pháp bảng biến thiên khi m độc lập với x.

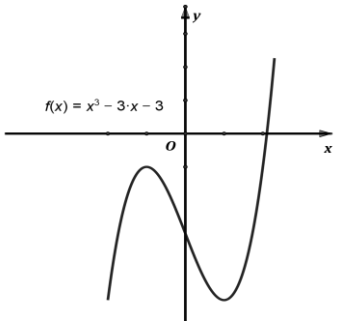
❖ **Phương pháp 2: Nhẩm nghiệm – tam thức bậc 2.**

- Lập phương trình hoành độ giao điểm $F(x,m)=0$
- Nhẩm nghiệm: (Khử tham số). Giả sử $x=x_0$ là 1 nghiệm của phương trình.
- Phân tích: $F(x,m)=0 \Leftrightarrow (x-x_0).g(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_0 \\ g(x)=0 \end{array}\right.$ (là $g(x)=0$ là phương trình bậc hai ẩn x tham số m).
- Dựa vào yêu cầu bài toán đi xử lý phương trình bậc hai $g(x)=0$.

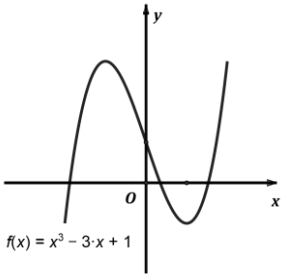
❖ **Phương pháp 3: Cực trị**

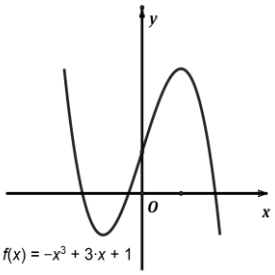
- **Nhận dạng:** Khi bài toán không cô lập được m và cũng không nhẩm được nghiệm.
- **Quy tắc:**
  - Lập phương trình hoành độ giao điểm $F(x,m)=0$ (1). Xét hàm số $y=F(x,m)$
  - Để (1) có đúng 1 nghiệm thì đồ thị $y=F(x,m)$ cắt trục hoành tại đúng 1 điểm.
  - Hoặc hàm số luôn đơn điệu trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ hoặc vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta_{y'} \le 0$
  - Hoặc hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{cd}.y_{ct}>0$ (tham khảo hình vẽ)



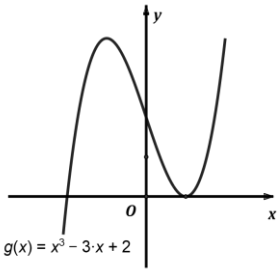


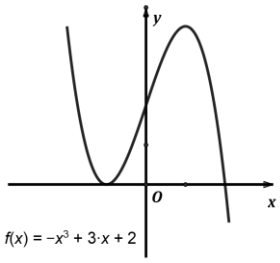
- Để (1) có đúng 3 nghiệm thì đồ thị $y=F(x,m)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{cd}.y_{ct}<0$ (tham khảo hình vẽ).





- Để (1) có đúng 2 nghiệm thì đồ thị $y=F(x,m)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{cd}.y_{ct}=0$ (tham khảo hình vẽ)





❖ **Tương giao của hàm số phân thức**

- Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(C)$ và đường thẳng $d: y=px+q$. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d): $\dfrac{ax+b}{cx+d}=px+q \Leftrightarrow F(x,m)=0$ (phương trình bậc 2 ẩn x tham số m).
- Các câu hỏi thường gặp:
  - Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{d}{c}$.
  - Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt cùng thuộc nhánh phải của (C) $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 và thỏa mãn $:-\dfrac{d}{c}<x_1<x_2$.
  - Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt cùng thuộc nhánh trái của $(C)\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 và thỏa mãn $x_1<x_2<-\dfrac{d}{c}$.
  - Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt thuộc hai nhánh của $(C)\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 và thỏa mãn $x_1<-\dfrac{d}{c}<x_2$.
  - Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A và B thỏa mãn điều kiện hình học cho trước:
    - ✓ Đoạn thẳng $AB=kS$
    - ✓ Tam giác ABC vuông.
    - ✓ Tam giác ABC có diện tích S_0

- **Quy tắc:**
  - Tìm điều kiện tồn tại A, B $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt.
  - Xác định tọa độ của A và B (chú ý Vi ét)
  - Dựa vào giả thiết xác lập phương trình ẩn m. Từ đó suy ra m.
- **Chú ý:** Công thức khoảng cách:
  - $A\left(x_A;y_A\right),B\left(x_B;y_B\right):AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$
  - $\begin{cases}M\left(x_0;y_0\right)\\ \Delta:Ax_0+By_0+C=0\end{cases}\Rightarrow d\left(M,\Delta\right)=\dfrac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

❖ **Tương giao của hàm số bậc 4**

- Nghiệm của phương trình bậc bốn trùng phương: $ax^4+bx^2+c=0\ \left(1\right)$
- **Nhẩm nghiệm:**
  - Nhẩm nghiệm: Giả sử $x=x_0$ là một nghiệm của phương trình.
  - Khi đó ta phân tích: $f\left(x,m\right)=\left(x^2-x_0^2\right)g\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm x_0\\ g\left(x\right)=0\end{array}\right.$
  - Dựa vào giả thiết xử lý phương trình bậc hai $g\left(x\right)=0$
- **Ẩn phụ - tam thức bậc 2:**
  - Đặt $t=x^2,\left(t\geq0\right)$. Phương trình: $at^2+bt+c=0\ \left(2\right)$.
  - Để $\left(1\right)$ có đúng 1 nghiệm thì $\left(2\right)$ có nghiệm t_1,t_2 thỏa mãn: $\left[\begin{array}{l}t_1<0=t_2\\ t_1=t_2=0\end{array}\right.$
  - Để $\left(1\right)$ có đúng 2 nghiệm thì $\left(2\right)$ có nghiệm t_1,t_2 thỏa mãn: $\left[\begin{array}{l}t_1<0<t_2\\ 0<t_1=t_2\end{array}\right.$
  - Để $\left(1\right)$ có đúng 3 nghiệm thì $\left(2\right)$ có nghiệm t_1,t_2 thỏa mãn: $0=t_1<t_2$
  - Để $\left(1\right)$ có đúng 4 nghiệm thì $\left(2\right)$ có nghiệm t_1,t_2 thỏa mãn: $0<t_1<t_2$

- Bài toán: tìm m để $\left(C\right):y=ax^4+bx^2+c\ \left(1\right)$ cắt Ox tại bốn điểm có hoành độ lập thành một cấp số cộng.
  - Đặt $t=x^2,\left(t\geq0\right)$. Phương trình: $at^2+bt+c=0$ (2).
  - Để $\left(1\right)$ cắt Ox tại 4 điểm phân biệt thì $\left(2\right)$ phải có 2 nghiệm dương $t_1,t_2\left(t_1<t_2\right)$ thỏa mãn $t_2=9t_1$.
  - Kết hợp $t_2=9t_1$ vơi định lý vi – ét tìm được m.

VÍ DỤ MINH HỌA

Lời giải

VÍ DỤ 1: Gọi m là số thực dương sao cho đường thẳng $y=m+1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^4-3x^2-2$ tại hai điểm phân biệt M,N thỏa mãn tam giác OMN vuông tại O (O là gốc tọa độ). Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $m\in\left(\frac{11}{4};\frac{15}{4}\right)$. **B.** $m\in\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$. **C.** $m\in\left(\frac{7}{4};\frac{9}{4}\right)$. **D.** $m\in\left(\frac{3}{4};\frac{5}{4}\right)$.

Chọn D

Ta có $y=m+1\ (d)$ và $y=x^4-3x^2-2\ (C)$.

Xét phương trình tương giao: $x^4-3x^2-2=m+1\Leftrightarrow x^4-3x^2-(m+3)=0$. (1)

Đặt $t=x^2\ge 0$, phương trình (1) trở thành: $t^2-3t-(m+3)=0$. (2)

Phương trình (2) có tích $a.c=-m-3<0$ khi m là số thực dương.

Suy ra phương trình (2) luôn có hai nghiệm trái dấu $t_1<0<t_2$.

Từ đó suy ra phương trình (1) có hai nghiệm đối nhau $x_1=-\sqrt{t_2},x_2=\sqrt{t_2}$ đồng thời (d) và (C) cắt nhau tại hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua Oy là $M\left(-\sqrt{t_2};m+1\right),N\left(\sqrt{t_2},m+1\right)$.

Mặt khác tam giác OMN vuông tại O thì $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}=0\Leftrightarrow t_2=(m+1)^2$.

Thay $t_2=(m+1)^2$ vào phương trình (2) ta được:

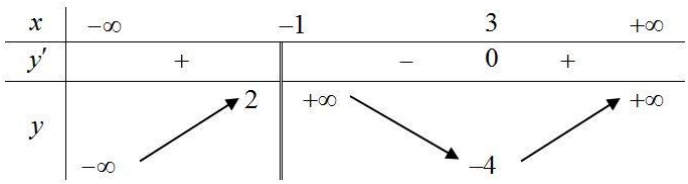
$(m+1)^4-3(m+1)^2-(m+3)=0\Leftrightarrow(m+1)^4-3(m+1)^2-(m+1)-2=0$.

Đặt $a=m+1>1$ ta được phương trình

$a^4-3a^2-a-2=0\Leftrightarrow(a-2)(a^3+2a^2+a+1)=0\Leftrightarrow a=2$ (do $a>1$ nên $a^3+2a^2+a+1>0$).

Từ đó ta được $m+1=2\Leftrightarrow m=1$ (thỏa mãn $m>0$). Vậy $m=1$.

VÍ DỤ 2: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:



Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $f(x)+1=m$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt.

A. $(-4;2)$. **B.** $(-\infty;2]$. **C.** $[-4;2)$. **D.** $(-3;3)$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $f(x)+1=m \Leftrightarrow f(x)=m-1$ có đúng ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=m-1$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt.

Căn cứ vào bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ ta được $-4<m-1<2 \Leftrightarrow -3<m<3$.

Vậy $m \in (-3;3)$.

VÍ DỤ 3: Cho hàm số $f(x)=x^3+3x^2+mx+1$. Gọi S là tổng tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt đường thẳng $y=1$ tại ba điểm phân biệt $A(0;1)$, B, C sao cho các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại B, C vuông góc với nhau. Gía trị của S bằng

A. $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{9}{5}$. **C.** $\frac{9}{4}$. **D.** $\frac{11}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoàn độ giao điểm của $y=x^3+3x^2+mx+1$ và $y=1$ là:

$$x^3+3x^2+mx+1=1 \Leftrightarrow x\left(x^2+6x+m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+6x+m=0 \ (*) \end{array}\right.$$

Để đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt đồ thị hàm số $y=1$ tại ba điểm phân biệt $A(0;1)$, $B(x_1;y_1)$, $C(x_2;y_2)$ thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Rightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = 9-4m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m<\frac{9}{4} \end{cases}$$. Theo hệ thức Viet ta có $\begin{cases} x_1+x_2=-3 \\ x_1.x_2=m \end{cases}$.

Để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại B, C vuông góc với nhau thì

$$f'(x_1).f'(x_2)=-1 \Leftrightarrow \left(3x_1^2+6x_1+m\right).\left(3x_2^2+6x_2+m\right)=-1$$

$$\Leftrightarrow 9x_1^2x_2^2+18x_1x_2\left(x_1+x_2\right)+3m\left(x_1^2+x_2^2\right)+6m\left(x_1+x_2\right)+36x_1x_2+m^2+1=0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2-9m+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\frac{9+\sqrt{65}}{8} \\ m=\frac{9-\sqrt{65}}{8} \end{array}\right. \Rightarrow S=\frac{9+\sqrt{65}}{8}+\frac{9-\sqrt{65}}{8}=\frac{9}{4}.$$

VÍ DỤ 4: Cho hàm số $y=\frac{x}{1-x}$ (C) và điểm $A(-1;1)$. Tìm m để đường thẳng $d: y=mx-m-1$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M,N sao cho AM^2+AN^2 đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $m=-1$. **B.** $m=0$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=-\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là: $\frac{x}{1-x}=mx-m-1$ (đk: $x\neq 1$)

$\Rightarrow x=(1-x)(mx-m-1)\Leftrightarrow x=mx-m-1-mx^2+mx+x\Leftrightarrow mx^2-2mx+m+1=0$ (*)

Để (C) và d cắt nhau tại hai điểm phân biệt M,N thì (*) phải có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ \Delta'=m^2-m(m+1)=-m>0\Leftrightarrow m<0\\ m-2m+m+1\neq 0\end{cases}$$

Giả sử $M(x_1;y_1),N(x_2;y_2)$. Theo hệ thức viét : $x_1+x_2=2;\ x_1x_2=\frac{m+1}{m}$

$\Rightarrow y_1+y_2=m(x_1+x_2)-2m-2=2m-2m-2=-2$

và $y_1.y_2=(mx_1-m-1)(mx_2-m-1)=m^2x_1x_2-m(m+1)(x_1+x_2)+(m+1)^2$

$=m(m+1)-2m(m+1)+(m+1)^2=m+1$

Ta có: $AM^2+AN^2=(x_1+1)^2+(y_1-1)^2+(x_2+1)^2+(y_2-1)^2$

$=(x_1+x_2+2)^2-2(x_1+1)(x_2+1)+(y_1+y_2-2)^2-2(y_1-1)(y_2-1)$

$=(x_1+x_2+2)^2-2(x_1x_2+x_1+x_2+1)+(y_1+y_2-2)^2-2(y_1y_2-(y_1+y_2)+1)$

$=(2+2)^2-2\left(\frac{m+1}{m}+2+1\right)+(-2-2)^2-2(m+1-(-2)+1)$

$=18-2\left(\frac{m+1}{m}\right)-2m=18-2-2.\frac{1}{m}-2m=16+2.\left[\frac{1}{-m}+(-m)\right]\geq 16+2.2=20$ (BĐT Cauchy)

Suy ra: AM^2+AN^2 đạt giá trị nhỏ nhất là 20 khi $\frac{1}{-m}=-m\Leftrightarrow m^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=-1\end{array}\right.$

Vậy $m=-1$ (vì $m<0$)

VÍ DỤ 5: Cho hàm số $y=x^4-2x^2$ có đồ thị (C), có bao nhiêu đường thẳng d có đúng 3 điểm chung với đồ thị (C) và các điểm chung có hoành độ x_1,x_2,x_3 thỏa mãn $x_1^{\,3}+x_2^{\,3}+x_3^{\,3}=-1$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Vì đường thẳng d cắt đồ thị hàm số (C) tại 3 điểm phân biệt nên đường thẳng d là đường thẳng có hệ số góc dạng $y=ax+b$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $x^4-2x^2=ax+b$.

Mà phương trình là phương trình bậc 4 nên phương trình muốn có 3 nghiệm phân biệt thì trong đó sẽ có 1 nghiệm kép gọi là x_1, hai nghiệm còn lại là x_2,x_3.

Suy ra đường thẳng d là tiếp tuyến của đồ thị (C), không mất tính tổng quát giả sử đường thẳng d tiếp xúc với đồ thị hàm số (C) tại x_1.

Gọi d là tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ x_1, d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ $x_2, x_3 (\neq x_1)$ thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -1$. Ta có: $d: y = (4x_1^3 - 4x_1)(x - x_1) + x_1^4 - 2x_1^2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là:

$x^4 - 2x^2 = (4x_1^3 - 4x_1)(x - x_1) + x_1^4 - 2x_1^2 (1)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (1)$ có 3 nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -1$.

$$(1) \Leftrightarrow (x - x_1)^2 (x^2 + 2x_1 x + 3x_1^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ f(x) = x^2 + 2x_1 x + 3x_1^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

Để phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -1$ thì phương trình $f(x) = 0$ phải có 2 nghiệm phân biệt x_2, x_3 khác x_1 và thỏa mãn định lí Vi – ét: $\begin{cases} x_2 + x_3 = -2x_1 \\ x_2 . x_3 = 3x_1^2 - 2 \end{cases}$

Ta có: $\begin{cases} \Delta' = x_1^2 - 3x_1^2 + 2 > 0 \\ x_1^2 + 2x_1^2 + 3x_1^2 - 2 \neq 0 \\ x_1^3 + (x_2 + x_3)^3 - 3x_2 x_3 (x_2 + x_3) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x_1 < 1 \\ 3x_1^2 - 1 \neq 0 \\ x_1^3 + (-2x_1)^3 - 3(3x_1^2 - 2).(-2x_1) = -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x_1 = \dfrac{-11 + \sqrt{165}}{22}$. Vậy có đúng 1 đường thẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán.

VÍ DỤ 6: Có bao nhiêu số thực của tham số m để đường thẳng $y = (m-6)x - 4$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 - 3x - 1$ tại ba điểm phân biệt có tung độ y_1, y_2, y_3 thỏa mãn $\dfrac{1}{y_1 + 4} + \dfrac{1}{y_2 + 4} + \dfrac{1}{y_3 + 4} = \dfrac{2}{3}$.

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng và đồ thị hàm bậc ba đã cho là

$x^3 + x^2 - 3x - 1 = (m-6)x - 4 \Leftrightarrow x^3 + x^2 + (3-m)x + 3 = 0 \ (1)$.

Giả sử x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm phân biệt của phương trình (1).

Theo hệ thức viet đối với phương trình bậc ba ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = 3 - m \\ x_1 x_2 x_3 = -3 \end{cases}$.

Nhận thấy tung độ của ba giao điểm thỏa mãn phương trình $y = (m-6)x - 4$ nên ta có được $y_1 + 4 = (m-6)x_1$, $y_2 + 4 = (m-6)x_2$ và $y_3 + 4 = (m-6)x_3$.

Khi đó $\dfrac{1}{y_1 + 4} + \dfrac{1}{y_2 + 4} + \dfrac{1}{y_3 + 4} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{(m-6)x_1} + \dfrac{1}{(m-6)x_2} + \dfrac{1}{(m-6)x_3} = \dfrac{2}{3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{m-6} . \dfrac{x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1}{x_1 x_2 x_3} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{m-6} . \dfrac{3-m}{-3} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow m = 9$.

Thử lại với $m=9$ suy ra phương trình hoành độ giao điểm $x^3+x^2-6x+3=0$ có ba nghiệm phân biệt thỏa mãn giả thiết cho (Dùng casio để kiểm tra) . Vậy có một số thực m thỏa mãn .

VÍ DỤ 7: Một đường thẳng cắt đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2$ tại bốn điểm phân biệt có hoành độ là 0 , 1, m và n. Tính $S=m^2+n^2$.

A. $S=0$. **B.** $S=1$. **C.** $S=2$. **D.** $S=3$.

Lời giải

Chọn D

Do đường thẳng cắt đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2$ tại điểm có hoành độ là 0 nên phương trình đường thẳng có dạng $y=ax$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y=ax$ với đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2$ là :

$x^4-2x^2=ax \Leftrightarrow x^4-2x^2-ax=0 \Leftrightarrow x\left(x^3-2x-a\right)=0$.

Do phương trình có bốn nghiệm là 0 , 1, m, n nên ta có :

$x\left(x^3-2x-a\right)=x\left(x-1\right)\left(x-m\right)\left(x-n\right) \Rightarrow x^3-2x-a=\left(x^2-mx-x+m\right)\left(x-n\right)$

$\Leftrightarrow x^3-2x-a=x^3-nx^2-mx^2+mnx-x^2+nx+mx-mn$

$\Leftrightarrow x^3-2x-a=x^3+\left(-n-m-1\right)x^2+\left(m+n+mn\right)x-mn$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -m-n-1=0 \\ m+n+mn=-2 \\ -mn=-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+n=-1 \\ mn=-1 \end{cases} \Rightarrow S=m^2+n^2=\left(m+n\right)^2-2mn=3$.

VÍ DỤ 7: Cho phương trình $\left(x^2-3x+m\right)^2+x^2-8x+2m=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $\left[-20;20\right]$ để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt?

A. 19. **B.** 18. **C.** 17. **D.** 20.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\left(x^2-3x+m\right)^2+x^2-8x+2m=0 \Leftrightarrow \left[\left(x^2-3x+m\right)^2-x^2\right]+\left(2x^2-8x+2m\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-4x+m\right)\left(x^2-2x+m\right)+2\left(x^2-4x+m\right)=0 \Leftrightarrow \left(x^2-4x+m\right)\left(x^2-2x+m+2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2-4x+m=0 & (1) \\ x^2-2x+m+2=0 & (2) \end{array}\right.$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ mỗi phương trình (1) và (2) có 2 nghiệm phân biệt không trùng nhau.

Phương trình (1) và (2) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1' > 0 \\ \Delta_2' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m > 0 \\ 1 - m - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1$.

Giả sử phương trình (1) và (2) có nghiệm x_0 trùng nhau

$\Rightarrow$ Hệ sau có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + m = 0 & (1) \\ x^2 - 2x + m + 2 = 0 & (2) \end{cases}$

$\Rightarrow {x_0}^2 - 4x_0 + m - \left({x_0}^2 - 2x_0 + m + 2\right) = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1$.

Với $x_0 = -1$ thay vào (1) ta được $m = -5$.

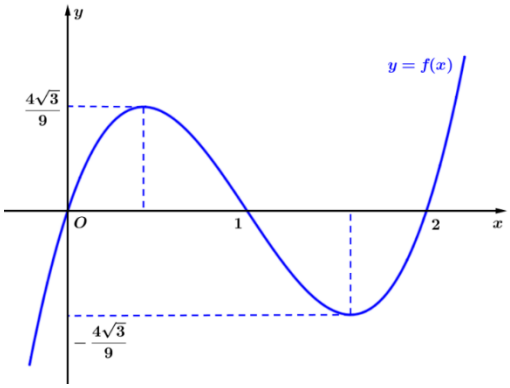
$\Rightarrow$ Với $m \neq -5$ phương trình (1) và (2) không có nghiệm trùng nhau.

Kết hợp m là số nguyên thuộc đoạn $[-20;20] \Rightarrow m \in [-20;-1) \setminus \{-5\}$.

Vậy có 18 số nguyên m thoả mãn yêu cầu bài toán.

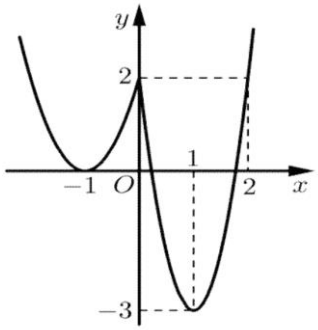
DẠNG 1 Bài toán tương giao đồ thị hàm số 01

Câu 1: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(\left|\sqrt{4-x^2}-\left|x^2-1\right|\right|\right)=\dfrac{1}{2021}$ là



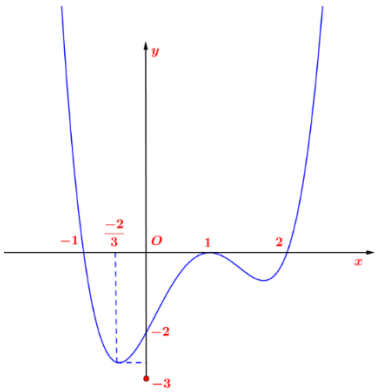
A. 24. **B.** 14. **C.** 12. **D.** 10.

Câu 2: Cho hai hàm số $u(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+3}}$ và $f(x)$, trong đó đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên. Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(u(x))=m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt?



A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

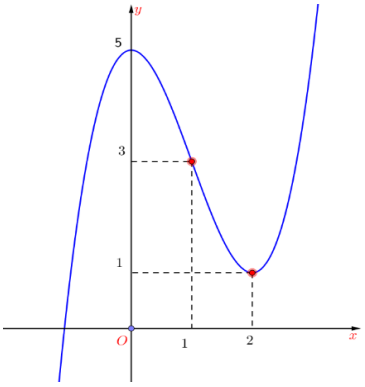
Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên R và có đồ thị $y=f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên.



Đặt $g(x)=f(f'(x)-1)$. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $g'(x)=0$. Số phần tử của tập S là

A. 8 **B.** 6 **C.** 10 **D.** 9

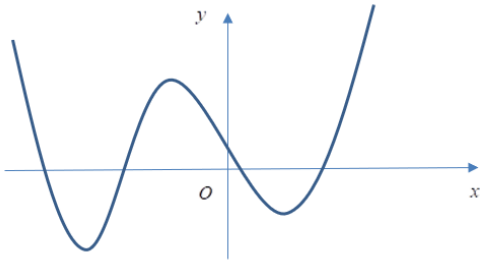
Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|\frac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\right|+2\right)=f\left(\sqrt{(m+2)^2+4}\right)$ có nghiệm?

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.Gọi (C_1) và (C_2) lần lượt là đồ thị của hai hàm số $y=f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2$ và $y=2021^x$.Số giao điểm của (C_1) và (C_2) là

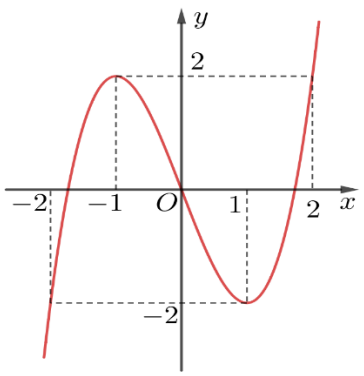


A. 1 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 4

Câu 6: Biết hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ đạt cực trị tại $x=1$ và $x=2021$. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(x)=f(m)$ có ba nghiệm phân biệt?

A. 4037. **B.** 2019. **C.** 4001. **D.** 2021.

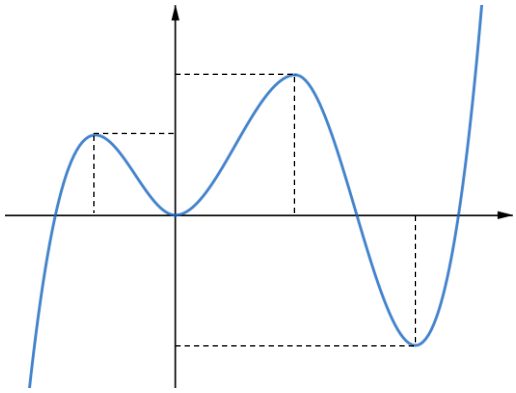
Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{4+2f(\cos x)}\right)=m$ có nghiệm $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

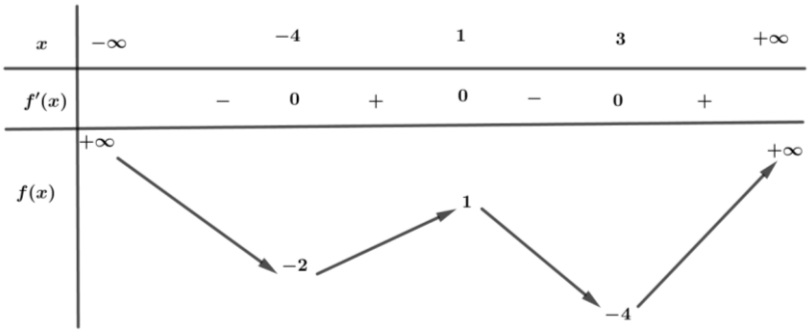
Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f\left(2x^3-6x+2\right)=\frac{1}{2}m-5$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

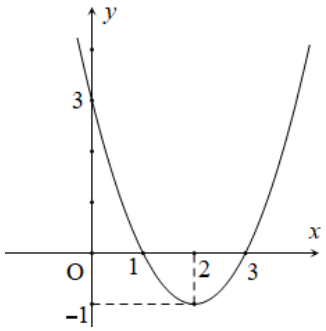
Câu 9: Cho hàm số $y=f\ x$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ



Số nghiệm của phương trình $\left|f\ \ f\ \ x\ \right|=2$ là

A. 4. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 7.

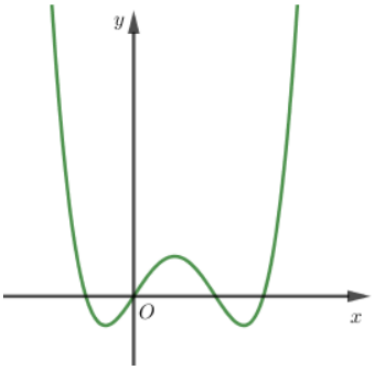
Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)=ax^2+bx+c$ có đồ thị (C)



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2\left(|x|\right)+(m-2)\,f\left(|x|\right)+m-3=0$ có 6 nghiệm phân biệt?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 11: Biết đồ thị hàm số bậc bốn $y=f(x)$ được cho bởi hình vẽ bên dưới. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y=g(x)=\left[f'(x)\right]^2-f(x).f''(x)$ và trục hoành:



A. 4. **B.** 0. **C.** 6. **D.** 2.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $xf(x)-\dfrac{1+\sqrt{4x+m-1}}{f\left(-1-\sqrt{4x+m-1}\right)}=0$ có hai nghiệm phân biệt là

A. 2. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 13: Cho hàm số $f\left(x\right)=\left(1-m^3\right)x^3+3mx^2+\left(3m^2-2m+2\right)x+m^3+2m$ với m là tham số. Có bao nhiêu số nguyên $m\in\left[-2020;2021\right]$ sao cho $f\left(x\right)\geq 0$ với mọi $x\in\left[2020;2021\right]$?

A. 2023. **B.** 2022. **C.** 2021. **D.** 2020.

Câu 14: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=2x^3-3x^2+1$. Tập hợp các giá trị m để phương trình $f\left(f\left(\dfrac{2\sin x+1}{2}\right)\right)=f\left(m\right)$ có nghiệm là đoạn $\left[a;b\right]$. Khi đó giá trị $4a^2+8b$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(7;\dfrac{23}{2}\right)$. **B.** $\left(-2;5\right)$. **C.** $\left(\dfrac{43}{3};\dfrac{39}{2}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{37}{3};\dfrac{65}{4}\right)$.

Câu 15: Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+5x+2}{2x+1}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $2021f\left(\sqrt{3x^2-18x+28}\right)-m\sqrt{3x^2-18x+28}\geq m+4042$ nghiệm đúng với mọi x thuộc đoạn $\left[2;4\right]$.

A. 673. **B.** 808. **C.** 135. **D.** 898.

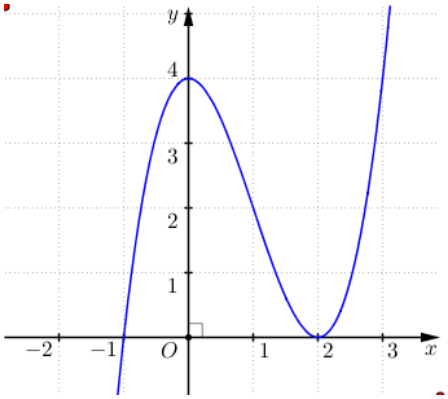
Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		5		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↘	1	↗	-1	↘	3	↗	$-\infty$

Số nghiệm của phương trình $f\left(2^{3x^4-4x^2+2}\right)+1=0$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như bên dưới



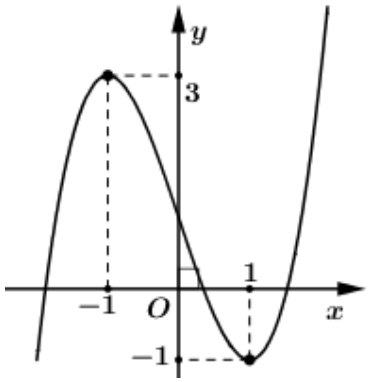
Số nghiệm phương trình $2f\left(x+1-\sqrt{6x+3}\right)=1$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 18: Cho hàm số $f(x)=x^3-\frac{1}{2}mx+m-8, x\in\mathbb{R}$ với m là một hằng số khác 0. Biết rằng phương trình $f(x)=0$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của k thỏa mãn phương trình $f(x)=k$ có 3 nghiệm phân biệt ?

A. 3. **B.** 34. **C.** 6. **D.** 34.

Câu 19: Cho hàm đa thức $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Đặt $g(x)=\left|f\left(x^2\right)\right|$. Số nghiệm của phương trình $g(x).\left[2g(x)-1\right]=0$ là

A. 11. **B.** 10. **C.** 13. **D.** 12.

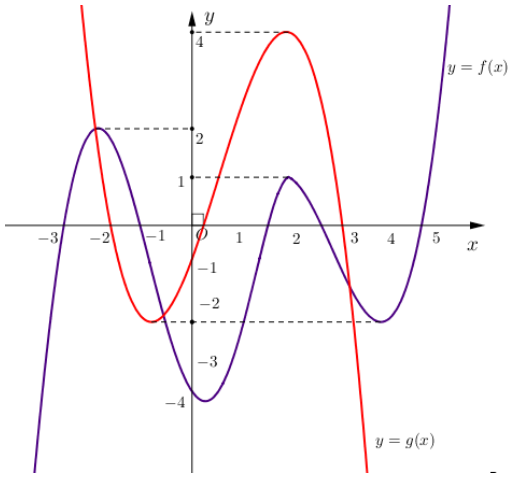
Câu 20: Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	5	↘	-3	↗	$+\infty$

Phương trình $\left|f\left(2x^2+3\right)-2\right|=5$ có bao nhiêu nghiệm?

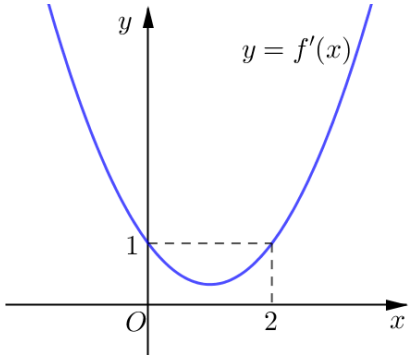
A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 21: Cho hai hàm $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Khi đó tổng số nghiệm của phương trình $f(g(x))=0$ và $g(f(x))=0$ là



A. 25. **B.** 22. **C.** 21. **D.** 26.

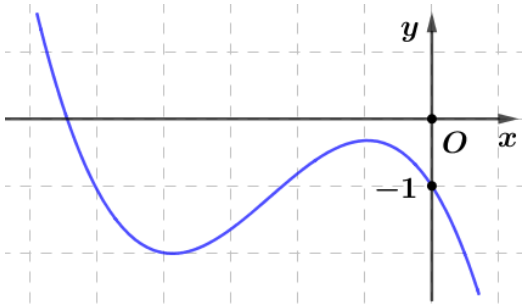
Câu 22: Cho $f(x)$ là hàm số bậc ba. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như sau:



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(e^x+1)-x-m=0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $m>f(2)$. **B.** $m>f(2)-1$. **C.** $m<f(1)-\ln 2$. **D.** $m>f(1)+\ln 2$.

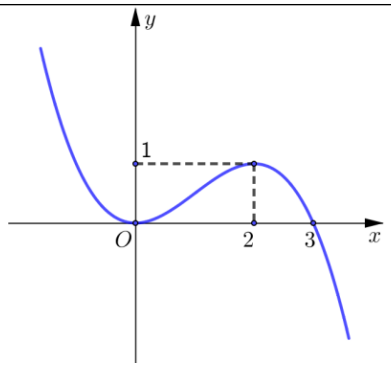
Câu 23: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(x^3 f(x))+1=0$ là

A. 6. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 4.

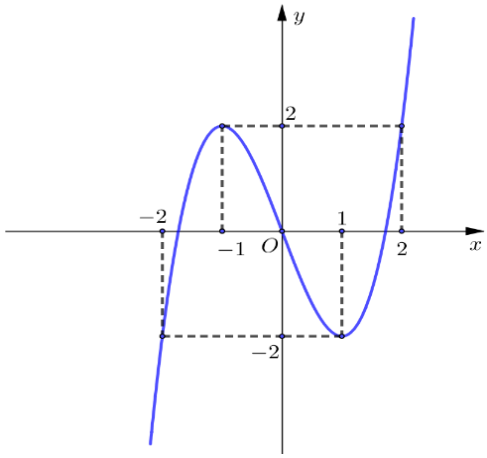
Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ với $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trên $[-5;5]$ để phương trình $f\left(-x^2+2x+m\right)=e$ có bốn nghiệm phân biệt.

A. 0. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{4+2f\left(\cos x\right)}\right)=m$ có nghiệm $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

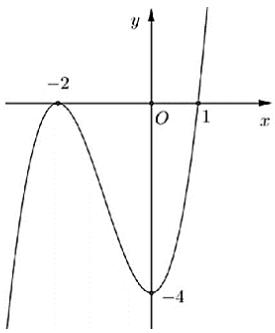


A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 26: Cho hàm số $f(x)=x^3+x-2^m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(f(x)\right)=x$ có nghiệm thuộc đoạn $[1;2]$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 2.

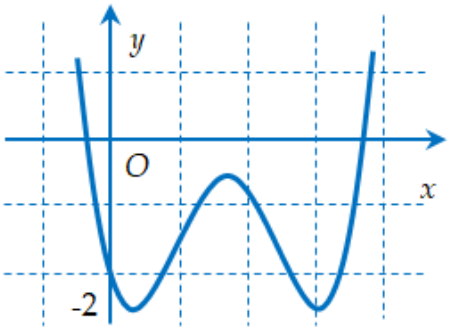
Câu 27: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình dưới đây



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-5;5)$ để phương trình $f^2(x)-(m+4)\left|f(x)\right|+2m+4=0(*)$ có 6 nghiệm phân biệt

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 28: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^2 f\left(x\right)\right)+2=0$ là

A. 8. **B.** 12. **C.** 6. **D.** 9.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.C	3.C	4.B	5.B	6.A	7.A	8.B	9.D	10.B
11.B	12.D	13.B	14.D	15.A	16.C	17.B	18.D	19.D	20.A
21.C	22.A	23.A	24.B	25.A	26.B	27.C	28.D		

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

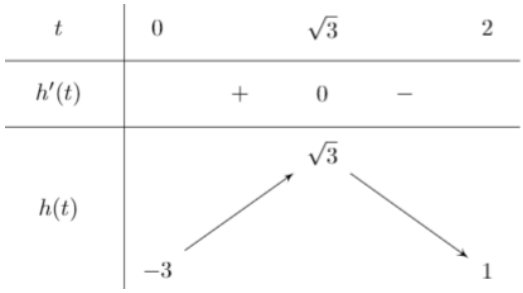
Câu 1: **Chọn D**

$y = g(x) = f\left(\left|\sqrt{4-x^2} - \left|x^2-1\right|\right|\right)$ với $g(x) = \dfrac{1}{2021}$

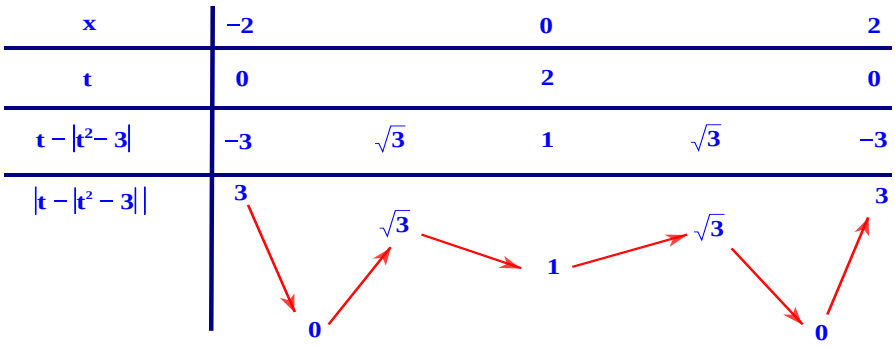
Ta đặt: $t = \sqrt{4-x^2}, \forall x \in [-2;2]$ thì suy ra $y = g(t) = f\left(\left|t - \left|t^2-3\right|\right|\right), \forall t \in [0;2]$

Suy ra: $h(t) = t - \left|t^2-3\right| = \begin{cases} t^2+t-3, t \in \left[0;\sqrt{3}\right] \\ -t^2+t+3, t \in \left[\sqrt{3};2\right] \end{cases}$.

Từ đó ta có BBT của hàm số $h(t)$ như hình vẽ bên:



Đặt $u = \left|t - \left|t^2-3\right|\right|$ thì ta cũng có BBT của u như sau:



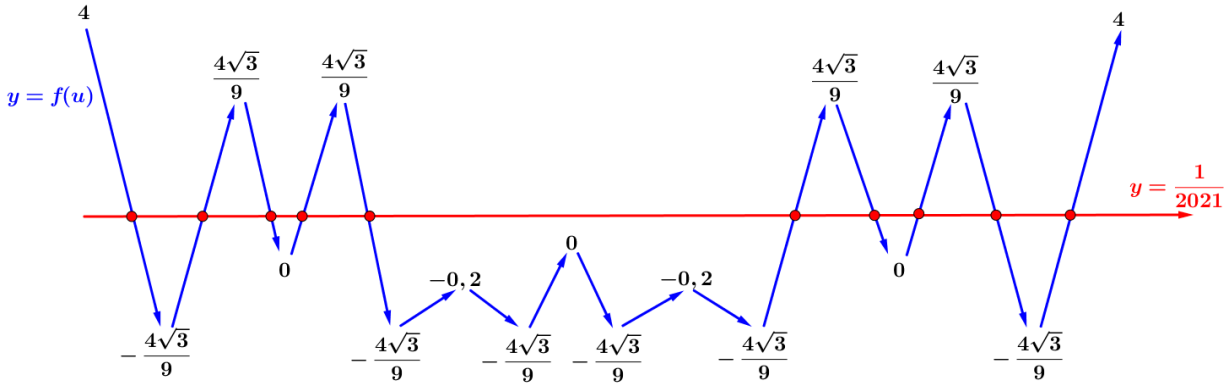
Nhìn vào đồ thị $y = f(x)$ trên ta có được:

$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = ax^3+bx^2+cx, a \neq 0 \\ f(1) = f(2) = 0, f''(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \dfrac{2}{3} > 0$

Như vậy ta suy ra $f(x) = \dfrac{2}{3}x(x-1)(x-2)$. Mà hàm số đó có cực trị bằng $-\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$ tại $x = x_0$ nên suy ra $f(x_0) = \dfrac{-4\sqrt{3}}{9} \Rightarrow x_0 = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$

Như vậy: $f(3) = 4, f\left(\sqrt{3}\right) = -0,2, f\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{-4\sqrt{3}}{9}$

Từ đó, ta phác họa được đồ thị $y=f(u)$ với $u=\left|t-\left|t^2-3\right|\right|$ như sau:



Dựa vào hình vẽ trên, ta kết luận phương trình $g(x)=\dfrac{1}{2021}$ có tất cả 10 nghiệm phân biệt.

Câu 2: Chọn C

Đặt $t=u(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+3}}$; $u'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3}-\dfrac{x(x+3)}{\sqrt{x^2+3}}}{x^2+3}=\dfrac{3-3x}{\sqrt{x^2+3}(x^2+3)}$; $u'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
u′(x)		+	0	−	
u(x)	−1	↗	2	↘	1

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $u(x)\in(-1;2]$.

Phương trình $f(u(x))=m$ trở thành $f(t)=m$, $t\in(-1;2]$.

Dựa vào đồ thị đã cho ta có:

Khi $m=2$: phương trình $f(t)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=2\end{array}\right.\Rightarrow$ phương trình $f(u(x))=m$ có 2 nghiệm phân biệt.

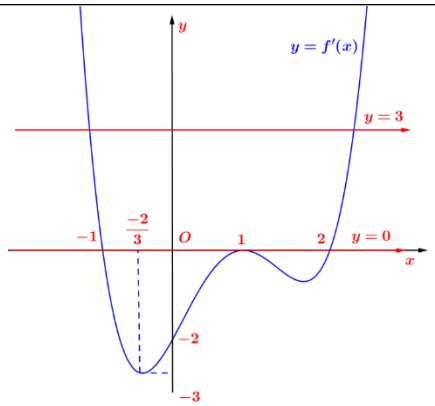
Khi $m=1$: phương trình $f(t)=1$ có 3 nghiệm $t_1\in(-1;0),t_2\in(0;1),t_3\in(1;2)\Rightarrow$ phương trình $f(u(x))=m$ có 4 nghiệm phân biệt.

Khi $m\in\{0;-1;-2\}$: phương trình $f(t)=m$ có 2 nghiệm $t_1\in(0;1),t_2\in(1;2)\Rightarrow$ phương trình $f(u(x))=m$ có 3 nghiệm phân biệt.

Khi $m=-3$: phương trình $f(t)=m$ có 1 nghiệm $t=1\Rightarrow$ phương trình $f(u(x))=m$ có 1 nghiệm.

Vậy $m\in\{0;-1;-2\}$.

Câu 3: Chọn C



Ta có: $g(x)=f(f'(x)-1)\Rightarrow g'(x)=f''(x).f'(f'(x)-1)$

Phương trình $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f'(f'(x)-1)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f''(x)=0\\f'(x)-1=-1\\f'(x)-1=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f''(x)=0\\f'(x)=0\\f'(x)=3\end{array}\right.$

Ta có đồ thị $y=f'(x)$ có cực trị tại $\left\{\begin{array}{l}x=1\\x=\dfrac{-2}{3}\\x=x_0\in(1;2)\end{array}\right.$

$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}f''(1)=0\\f''\left(\dfrac{-2}{3}\right)=0\\f''(x_0)=0\end{array}\right.\Rightarrow f''(x)=0$ có 3 nghiệm $\left\{\begin{array}{l}x=1\\x=\dfrac{-2}{3};x=x_0\end{array}\right.$ cùng với $x=1$ là nghiệm bội chẵn

Tại phương trình $f'(x)=0$ ta thấy có 2 nghiệm bội lẻ $x=-1,x=2$ và nghiệm bội chẵn $x=1$

Tại phương trình $f'(x)=3$ ta thấy có 2 nghiệm mà đường thẳng $y=3$ cắt đồ thị $y=f(x)$ đó là hai điểm $x=x_1\in(-\infty;-1)$ và $x=x_2\in(2;+\infty)$

Vậy từ đó ta thấy phương trình $g'(x)=0$ tổng cộng có tất cả 10 nghiệm.

Câu 4: **Chọn B**

Ta có: $-1\le\sin x\le 1,\ -1\le\cos x\le 1$ nên suy ra $2\cos x-\sin x+4>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Đặt $t=\dfrac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\Rightarrow t(2\cos x-\sin x+4)=3\sin x-\cos x-1$

$\Leftrightarrow(2t+1)\cos x-(t+3)\sin x=-(4t+1)$.

Phương trình trên có nghiệm khi $(2t+1)^2+(t+3)^2\ge(4t+1)^2\Leftrightarrow\dfrac{-9}{11}\le t\le 1\Rightarrow 2\le|t|+2\le 3$.

Nhìn vào hình trên ta thấy hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên $[2;3]$ nên phương trình $f\left(\left|\dfrac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\right|+2\right)=f\left(\sqrt{(m+2)^2+4}\right)$ hay phương trình $f\left(|t|+2\right)=f\left(\sqrt{(m+2)^2+4}\right)$ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $|t|+2=\sqrt{(m+2)^2+4}$ có nghiệm t thỏa mãn điều kiện $2\le|t|+2\le 3\Leftrightarrow 2\le\sqrt{(m+2)^2+4}\le 3\Rightarrow m^2+4m-1\le 0\Leftrightarrow 2-\sqrt{5}\le m\le 2+\sqrt{5}$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên có tất cả 5 giá trị m thỏa mãn.

Câu 5: **Chọn B**

Số giao điểm (C_1) và (C_2) là nghiệm của phương trình

$f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2=2021^x\,(*)$

Từ đồ thị ta thấy $f(x)$ cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x_1;x_2;x_3;x_4$ nên phương trình $f(x)=0$ có bốn nghiệm phân biệt $x_1;x_2;x_3;x_4$

$\Rightarrow f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$

Nếu $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\\x=x_2\\x=x_3\\x=x_4\end{array}\right.$ thay vào $(*)$ ta thấy vế trái âm,vế phải dương nên phương trình $(*)$ vô nghiệm

Nếu $f(x)\neq 0$ nên ta có phương trình ta có phương trình $(*)$ tương đương với

$$\frac{f''(x)\cdot f(x)-\left[f'(x)\right]^2}{[f(x)]^2}=\frac{2021^x}{[f(x)]^2}\Leftrightarrow\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'=\frac{2021^x}{[f(x)]^2}$$

Ta có:

$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$

$$\Rightarrow f'(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\left[\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}+\frac{1}{x-x_4}\right]$$

$$\Rightarrow f'(x)=f(x)\left[\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}+\frac{1}{x-x_4}\right]\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}+\frac{1}{x-x_4}$$

Khi đó: $\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'=\left(\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}+\frac{1}{x-x_4}\right)'$

$$=-\left(\frac{1}{(x-x_1)^2}+\frac{1}{(x-x_2)^2}+\frac{1}{(x-x_3)^2}+\frac{1}{(x-x_4)^2}\right)<0$$

Mà $\frac{2021^x}{[f(x)]^2}>0$ nên phương trình $\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'=\frac{2020^x}{[f(x)]^2}$ vô nghiệm,do đó phương trình vô nghiệm.

Câu 6: Chọn A

Ta có $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+cx$

Do hàm số có 2 điểm cực trị là: $x_1=1$ và $x_2=2021$.

Nên: $\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{2b}{3a}=2022\\x_1.x_2=\frac{3}{3a}=2021\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-3033a\\c=6063a\end{cases}$

Xét phương trình: $f(x)=f(m)$

$$ax^3+bx^2+cx+d=am^3+bm^2+cm+d\Leftrightarrow a\left(x^3-m^3\right)+b\left(x^2-m^2\right)+c(x-m)=0$$

$$\Leftrightarrow a\left(x^3-m^3\right)-3033a\left(x^2-m^2\right)+6063(x-m)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-m)\left(x^2+mx+m^2-3033x-3033m+6063\right)=0$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-m=0 \\ x^2+mx+m^2-3033x-3033m+6063=0 \quad (*) \end{array}\right.$

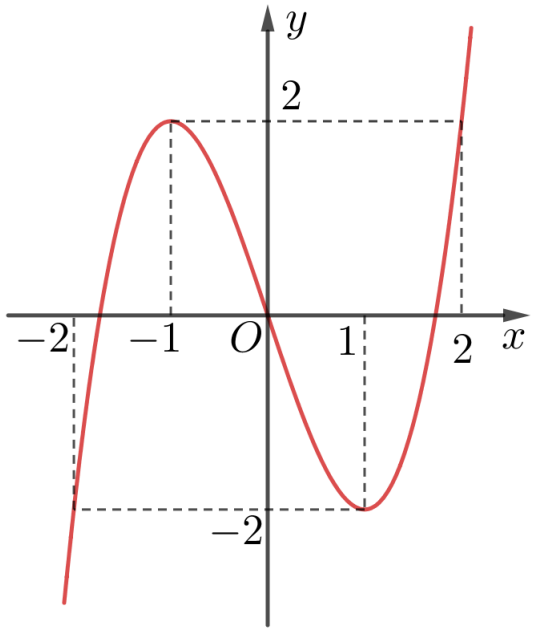
Để phương trình $f(x)=f(m)$ có 3 nghiệm phân biệt thì pt có 2 nghiệm phân biệt khác m.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=(m-3033)^2-4\left(m^2-3033m+6063\right)>0 \\ m^2+(m-3033)m+m^2-3033m+6063\neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-6063m+3033^2-4m^2+4.3033m-4.6063>0 \\ m^2+(m-3033)m+m^2-3033m+6063\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1009<m<3031 \\ m\neq 2021;\ m\neq 1 \end{cases}$

Vậy: $m\in(-1009;3031)\setminus\{1;2021\}$ có 4037 giá trị m nguyên.

Câu 7: Chọn A



Đặt $t=\cos x$, với $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow t\in(0;1)$.

Từ đồ thị suy ra $f(t)\in(-2;0)\Rightarrow 4+2f(t)\in(0;4)\Rightarrow u=\sqrt{4+2f(t)}\in(0;2)$.

Ta có $f(u)=m$ với $u\in(0;2)$.

Phương trình đã cho có nghiệm $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi phương trình $f(u)=m$ có nghiệm $u\in(0;2)\Leftrightarrow -2\le m<2$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0;1\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 8: Chọn B

Đặt: $g(x)=f\left(2x^3-6x+2\right);\ g'(x)=\left(6x^2-6\right).f'\left(2x^3-6x+2\right)$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2-6=0 & (1) \\ f'\left(2x^3-6x+2\right)=0 & (2) \end{cases}$

Giải: $6x^2-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$

Giải: $f'\left(2x^3-6x+2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^3-6x+2=-2 \\ 2x^3-6x+2=0 \\ 2x^3-6x+2=3 \\ 2x^3-6x+2=6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=-2\notin[-1;2] \\ x=1 \text{ (nghiệm kép)} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x\approx -1,87\notin[-1;2] \\ x\approx 0,34 \\ x\approx 1,53 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x\approx -1,64\notin[-1;2] \\ x\approx -0,16 \\ x\approx 1.81 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \text{ (nghiệm kép)} \\ x=2 \end{array}\right. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của $g(x)$ trên đoạn $[-1;2]$

x	-1		-0.16		0.34		1		$1,53$		$1,81$		2
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$g(x)$	$-\frac{13}{4}$	↗	$\frac{7}{2}$	↘	0	↗	2	↘	0	↗	$\frac{7}{2}$	↘	$-\frac{13}{4}$

$y=\frac{1}{2}m-5$

Số nghiệm của phương trình $f\left(2x^3-6x+2\right)=\frac{1}{2}m-5$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $g(x)=f\left(2x^3-6x+2\right)$ và đường thẳng $y=\frac{1}{2}m-5$.

Kẻ đường thẳng $y=\frac{1}{2}m-5$ trên cùng bảng biến thiên của $g(x)$. Điều kiện để đường thẳng $y=\frac{1}{2}m-5$ cắt đồ thị hàm số $g(x)=f\left(2x^3-6x+2\right)$ tại 6 điểm phân biệt là:

$0<\frac{1}{2}m-5<2 \Leftrightarrow 10<m<14$. Vì $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{11;12;13\}$

Vậy có 3 số nguyên m thỏa mãn ycbt.

Câu 9: Chọn D

Ta có: $\left|f\ f\ x\right|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\ f\ x=2 \\ f\ f\ x=-2 \end{array}\right.$. Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

$f\ f\ x=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\ x=a\ \ a\in(-\infty;-4) \\ f\ x=b\ \ b\in(3;+\infty) \end{array}\right.$.

$f\ f\ x=-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\ x=-4 \\ f\ x=d\ \ d\in(1;3) \\ f\ x=e\ \ e\in(3;+\infty) \end{array}\right.$.

$f\ x\ =a\ \ a\in\ -\infty;-4$ vô nghiệm; $f\ x\ =b\ \ b\in\ 3;+\infty$ có 2 nghiệm.

$f\ x\ =-4$ có 1 nghiệm; $f\ x\ =d\ \ d\in\ 1;3$ có 2 nghiệm.

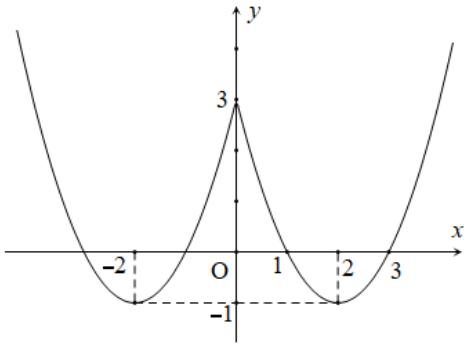
$f\ x\ =e\ \ e\in\ 3;+\infty$ có 2 nghiệm $\Rightarrow\left|f\ \ f\ \ x\ \right|=2$ có 7 nghiệm.

Câu 10: Chọn B

Xét phương trình $f^2\left(|x|\right)+\left(m-2\right)f\left(|x|\right)+m-3=0$.

Nhận thấy $1-\left(m-2\right)+\left(m-3\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(|x|\right)=-1\\f\left(|x|\right)=3-m\end{array}\right.$.

Từ đồ thị hàm số $f\left(x\right)$, suy ra đồ thị hàm số $f\left(|x|\right)$ như sau:



Với $f\left(|x|\right)=-1$, ta được 2 nghiệm x.

Để phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt, tức là phương trình $f\left(|x|\right)=3-m$ có 4 nghiệm phân biệt.

Hay $-1<3-m<3\Leftrightarrow 0<m<4\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m\in\left\{1;2;3\right\}$.

Như vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 11: Chọn B

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y=g\left(x\right)$ và Ox là:

$$\left[f'\left(x\right)\right]^2-f\left(x\right).f''\left(x\right)=0\Leftrightarrow f\left(x\right).f''\left(x\right)-\left[f'\left(x\right)\right]^2=0\Leftrightarrow\left[\frac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}\right]'=0$$

Ta thấy đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3,x_4.

Giả sử $f\left(x\right)=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)\left(x-x_4\right),a\neq 0,x_1<x_2<x_3<x_4$

Ta có: $f'\left(x\right)=a\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)\left(x-x_4\right)+a\left(x-x_1\right)\left(x-x_3\right)\left(x-x_4\right)$

$+a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_4\right)+a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)$

Ta có: $\frac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}=\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}+\frac{1}{x-x_4}$

Ta có: $\left[\frac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}\right]'=0\Leftrightarrow-\frac{1}{\left(x-x_1\right)^2}-\frac{1}{\left(x-x_2\right)^2}-\frac{1}{\left(x-x_3\right)^2}-\frac{1}{\left(x-x_4\right)^2}=0$ vô nghiệm.

Vậy số giao điểm của đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ và trục hoành bằng 0.

Câu 12: Chọn D

Ta có: $f(x)=x+\sqrt{1+x^2} \Rightarrow f'(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}>0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác, ta lại có: $f(-x)=-x+\sqrt{1+x^2}=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1}{f(x)}$.

Nên phương trình tiếp theo tương đương với: $xf(x)-\dfrac{1+\sqrt{4x+m-1}}{f\left(-1-\sqrt{4x+m-1}\right)}=0$.

$\Leftrightarrow xf(x)-\left(1+\sqrt{4x+m-1}\right)f\left(1+\sqrt{4x+m-1}\right)=0$.

$\Leftrightarrow xf(x)=\left(1+\sqrt{4x+m-1}\right)f\left(1+\sqrt{4x+m-1}\right)$.

Đến đây ta xét hàm đặc trưng $y=g(t)=tf(t)=t.\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)=t^2+t\sqrt{t^2+1}$.

Có $g'(t)=2t+\sqrt{t^2+1}+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}>0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên suy ra $g(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow g(x)=g\left(1+\sqrt{4x+m-1}\right) \Leftrightarrow x=1+\sqrt{4x+m-1} \Leftrightarrow \sqrt{4x+m-1}=x-1$.

Do $\sqrt{4x+m-1} \geq 0$ nên suy ra $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 4x+m-1=(x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ m=x^2-6x+2 \end{cases}$.

Xét hàm $y=p(x)=x^2-6x+2, \forall x \geq 1 \Rightarrow p'(x)=2x-6=0 \Leftrightarrow x=3$.

Ta có bảng biến thiên của hàm $p(x)$ như sau:

x	1		3		$+\infty$
$p'(x)$		$-$	0	$+$	
$p(x)$	-3	$\searrow$	-7	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT trên để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $m \in (p(3); p(1)] \Leftrightarrow m \in (-7;-3]$.

Như vậy, ta kết luận có tất cả 4 giá trị nguyên thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 13: Chọn B

$f(x)=\left(1-m^3\right)x^3+3mx^2+\left(3m^2-2m+2\right)x+m^3+2m \geq 0 \ \forall x \in [2020;2021]$

$\Leftrightarrow (x+m)^3+2(x+m) \geq (mx)^3+2mx \ \forall x \in [2020;2021] (1)$

Xét hàm số $f(t)=t^3+2t,\ f'(t)=3t^2+2>0 \forall t$

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên (1) suy ra

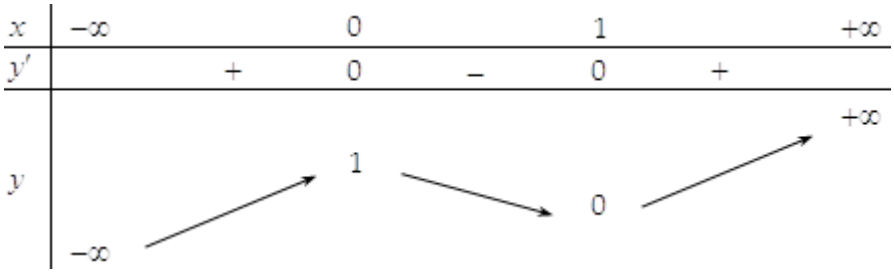
$x+m \geq mx \ \forall x \in [2020;2021] \Leftrightarrow m \leq \dfrac{x}{x-1} \forall x \in [2020;2021] \Leftrightarrow m \leq \dfrac{2021}{2020}$.

Vậy trên đoạn $[-2020;2021]$ có 2022 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 14: Chọn D

Ta có: $y' = 6x^2 - 6x;\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:



Ta có: $\frac{2\sin x+1}{2} = \sin x + \frac{1}{2} \in \left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$ suy ra $f\left(\frac{2\sin x+1}{2}\right) \in [0;1]$ nên $f\left(f\left(\frac{2\sin x+1}{2}\right)\right) \in [0;1]$.

Phương trình $f\left(f\left(\frac{2\sin x+1}{2}\right)\right) = f(m)$ có nghiệm $\Leftrightarrow 0 \le f(m) \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^3 - 3m^2 + 1 \ge 0 \\ 2m^3 - 3m^2 \le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le m \le \frac{3}{2}$.

Vậy $4a^2 + 8b = 4.\frac{1}{4} + 8.\frac{3}{2} = 13$.

Câu 15: Chọn A

Đặt $u = \sqrt{3x^2 - 18x + 28} = \sqrt{3(x-3)^2 + 1} = \sqrt{3(x-2)(x-4) + 4}$ do đó ta có với $\forall x \in [2;4]$ thì $u \in [1;2]$.

Biến đổi BPT ta được $2021 f(u) - m.u \ge m + 4042 \Leftrightarrow 2021\left[f(u) - 2\right] \ge m(u+1)$.

Ta có $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 2}{2x+1}$ nên $f(u) - 2 = \frac{u^2 + 5u + 2}{2u+1} - 2 = \frac{u^2 + u}{2u+1}$ do vậy bất phương trình được biến đổi tiếp $\frac{2021\left(u^2 + u\right)}{2u+1} \ge m(u+1) \Leftrightarrow m \le \frac{2021u}{2u+1}$.

Lúc này yêu cầu bài toán tương đương $m \le \frac{2021u}{2u+1}, \forall u \in [1;2] \Leftrightarrow m \le \min\limits_{u \in [1;2]} g(u)$.

Xét hàm số $g(u) = \frac{2021u}{2u+1}, u \in [1;2]$ ta có $g'(u) = \frac{2021}{(2u+1)^2} > 0, \forall u \in [1;2]$ do vậy hàm số $g(u)$ tăng trên đoạn $[1;2]$. Vì vậy $\min\limits_{u \in [1;2]} g(u) = \frac{2021u}{2u+1} = g(1) = \frac{2021}{3}$.

Kết hợp với m là các số nguyên dương ta được $m \in \{1;2;3;...;673\}$.

Vậy tìm được 673 số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 16: Chọn C

Câu 17: Chọn B

Đặt $t = x + 1 - \sqrt{6x+3}$, $x \ge -\frac{1}{2}$.

Ta có $t'=1-\dfrac{3}{\sqrt{6x+3}}=0\Leftrightarrow x=1$. Khi đó bảng biến thiên của hàm số là

x	$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
t'		$-$	0	$+$	
t	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình đã cho trở thành $f\left(t\right)=\dfrac{1}{2}$. Dựa và đồ thị ta thấy phương trình có 3 nghiệm là

$$\left[\begin{array}{l} t=a\in\left(-1;0\right) \\ t=b\in\left(1;2\right) \\ t=c\in\left(2;3\right) \end{array}\right. .$$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $t=x+1-\sqrt{6x+3}$ ta có

Phương trình $t=a\Leftrightarrow x+1-\sqrt{6x+3}=a$ có 2 nghiệm và phương trình $t=b\Leftrightarrow x+1-\sqrt{6x+3}=b$ có 1 nghiệm và Phương trình $t=c\Leftrightarrow x+1-\sqrt{6x+3}=c$ có 1 nghiệm.

Vậy phương trình $2f\left(x+1-\sqrt{6x+3}\right)=1$ có 4 nghiệm.

Câu 18: Chọn D

Ta có: hệ số $a=1>0$ và $f\left(x\right)=0$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

$\Rightarrow$Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị và 1 điểm thuộc trục hoành.

$f'\left(x\right)=3x^2-\dfrac{m}{2}$. $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{m}{6}}\left(m>0\right)$.

Trường hợp 1 : $\left(\sqrt{\dfrac{m}{6}}\right)^3-\dfrac{1}{2}m\sqrt{\dfrac{m}{6}}+m-8=0\Leftrightarrow m=24$.

$m=24$: $f\left(x\right)=x^3-12x+16$.

$f\left(x\right)=k$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow k\in\left(0;32\right)$.

Có 31 giá trị nguyên của k thỏa mãn.

Trường hợp 1 : $-\left(\sqrt{\dfrac{m}{6}}\right)^3+\dfrac{1}{2}m\sqrt{\dfrac{m}{6}}+m-8=0\Leftrightarrow m=6$.

$m=6$: $f\left(x\right)=x^3-3x-2$.

$f\left(x\right)=k$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow k\in\left(-4;0\right)$.

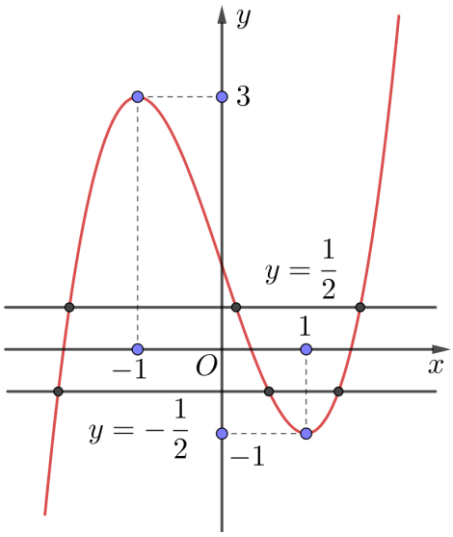
Có 3 giá trị nguyên của k thỏa mãn.

Vậy có 34 giá trị nguyên của k thỏa mãn.

Câu 19: Chọn D

Ta có $g(x).\left[2g(x)-1\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x)=0 \\ g(x)=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|f\left(x^2\right)\right|=0 \\ \left|f\left(x^2\right)\right|=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f\left(x^2\right)=0 & (1) \\ f\left(x^2\right)=\dfrac{1}{2} & (2) \\ f\left(x^2\right)=-\dfrac{1}{2} & (3) \end{array}\right.$.

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ suy ra



+) $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=a<-1 \\ x^2=b\in(0;1) \\ x^2=c>1 \end{array}\right.$. Suy ra phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

+) $(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=d<-1,(d\neq a) \\ x^2=e\in(0;1),(e\neq b) \\ x^2=f>1,(f\neq c) \end{array}\right.$. Suy ra phương trình có 4 nghiệm phân biệt khác 4 nghiệm phân biệt của phương trình.

+) $(3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=m<-1,(m\neq d,a) \\ x^2=n\in(0;1),(n\neq e,b) \\ x^2=p>1,(p\neq f,c) \end{array}\right.$. Suy ra phương trình có 4 nghiệm phân biệt khác 4 nghiệm phân biệt của phương trình và 4 nghiệm phân biệt của phương trình.

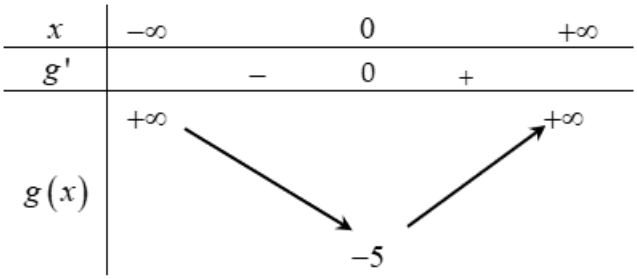
Vậy phương trình $g(x).\left[2g(x)-1\right]=0$ có tất cả 12 nghiệm

Câu 20: Chọn A

Gọi $g(x)=f\left(2x^2+3\right)-2$. Ta có: $g'(x)=4x.f'\left(2x^2+3\right)$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2x^2+3=-1 \Leftrightarrow x=0 \\ 2x^2+3=3 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên:



Mà $\left|g\left(x\right)\right|=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}g\left(x\right)=5\\g\left(x\right)=-5\end{array}\right.$. Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình có 3 nghiệm.

Câu 21: Chọn C

Ta có $g\left(f\left(x\right)\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=-2\ \ (1)\\f\left(x\right)=\alpha,\left(\alpha\in\left(0;1\right)\right)\ (2)\\f\left(x\right)=3\ \ (3)\end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị hàm số $g\left(x\right)$ suy ra phương trình $\left(1\right)$ có 4 nghiệm; phương trình $\left(2\right)$ có 5 nghiệm và phương trình $\left(3\right)$ có 1 nghiệm. Vậy phương trình $g\left(f\left(x\right)\right)=0$ có 10 nghiệm.

Ta có $f\left(g\left(x\right)\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}g\left(x\right)=-3\ \ (4)\\g\left(x\right)=-1\ \ (5)\\g\left(x\right)=1\ \ (6)\\g\left(x\right)=a,\left(a\in\left(1;2\right)\right)\ (7)\\g\left(x\right)=b,\left(b\in\left(4;5\right)\right)\ \ (8)\end{array}\right.$.

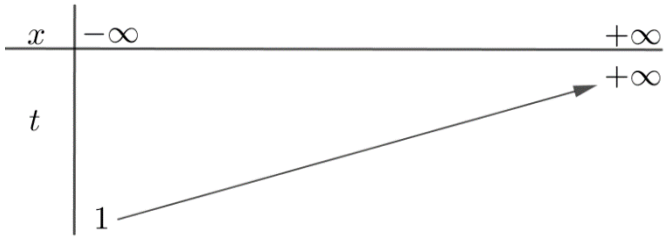
Dựa vào đồ thị hàm số $g\left(x\right)$ suy ra phương trình $\left(4\right)$ có 1 nghiệm; phương trình $\left(5\right);\left(6\right);\left(7\right)$ mỗi phương trình có 3 nghiệm và phương trình $\left(8\right)$ có 1 nghiệm. suy ra phương trình $f\left(g\left(x\right)\right)=0$ có 11 nghiệm.

Vậy tổng số nghiệm của phương trình $f\left(g\left(x\right)\right)=0$ và $g\left(f\left(x\right)\right)=0$ là 21.

Câu 22: Chọn A

Ta có: $f\left(e^{x}+1\right)-x-m=0\Leftrightarrow f\left(e^{x}+1\right)-x=m\ \left(1\right)$.

Đặt $t=e^{x}+1\Rightarrow t'=e^{x}>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Ta có bảng biến thiên:

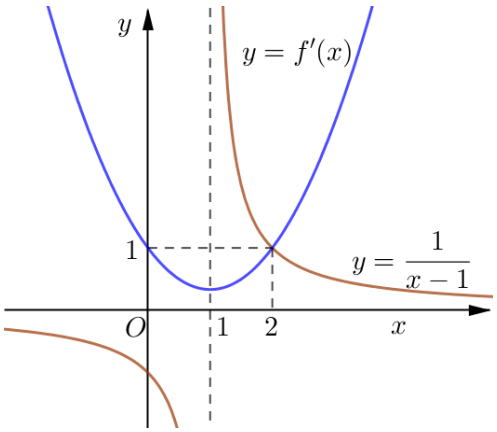


Với $t=e^{x}+1\Rightarrow x=\ln\left(t-1\right)$. Ta có: $\left(1\right)\Leftrightarrow f\left(t\right)-\ln\left(t-1\right)=m\ \left(2\right)$.

Khi đó, phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi phương trình $\left(2\right)$ có hai nghiệm thực phân biệt lớn hơn 1.

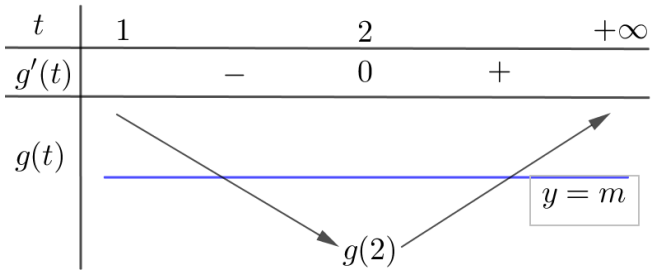
Xét hàm số $g\left(t\right)=f\left(t\right)-\ln\left(t-1\right),\forall t>1$ ta có:

$g'(t)=f'(t)-\frac{1}{t-1}$, $g'(t)=0\Leftrightarrow f'(t)=\frac{1}{t-1}$.



Dựa vào đồ thị các hàm số $y=f'(x)$ và $y=\frac{1}{x-1}$ ta có: $f'(t)=\frac{1}{t-1}\Leftrightarrow t=2$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(t)$:



Số nghiệm của phương trình (2) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $g(t)$ và đường thẳng $y=m$.

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình (2) có hai nghiệm thực phân biệt lớn hơn 1

$\Leftrightarrow m>g(2)\Leftrightarrow m>f(2)-\ln 1\Leftrightarrow m>f(2)$.

Câu 23: Phương trình $f\left(x^3f(x)\right)+1=0\Leftrightarrow f\left(x^3f(x)\right)=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} x^3f(x)=a\ (-3<a<-1) & (1)\\ x^3f(x)=b\ (-5<b<-3) & (2)\\ x^3f(x)=0 & (3)\end{array}\right.$.

Xét phương trình $x^3f(x)=k\Leftrightarrow f(x)=\frac{k}{x^3}$.

Đặt $g(x)=\frac{k}{x^3}$, $g'(x)=\frac{-3k}{x^4}>0,\forall x\neq 0$ và $k<0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=-\infty$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$	$+$		$\|\|$	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên và đề bài, suy ra trong mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$ phương trình $f(x)=g(x)$ có đúng một nghiệm.

Vì $a,b<0$ nên phương trình (1) và (2) mỗi phương trình có 2 nghiệm phân biệt khác nhau.

Xét phương trình $(3): x^3 f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=c<0 \end{array}\right.$, với c khác các nghiệm của (1) và (2).

Vậy phương trình $f\left(x^3 f(x)\right)+1=0$ có đúng 6 nghiệm.

Câu 24: Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$, suy ra hàm số $y=f'(x)$ là hàm số bậc 3 qua 0 không đổi dấu và đi qua 3 đổi dấu từ + sang -. Mặt khác $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=-\infty$ nên $k<0$.

Do đó, hàm số $y=f'(x)$ có dạng $f'(x)=k.x^2.(x-3)$.

Vì $f'(2)=1$ nên $k=-\dfrac{1}{4}$. Suy ra $f'(x)=-\dfrac{1}{4}x^3+\dfrac{3}{4}x^2 \Rightarrow f(x)=-\dfrac{1}{16}x^4+\dfrac{1}{4}x^3+e$

Xét phương trình

$$f\left(-x^2+2x+m\right)=e \Leftrightarrow -\frac{1}{16}\left(-x^2+2x+m\right)^4+\frac{1}{4}\left(-x^2+2x+m\right)^3=0$$

$$\Leftrightarrow \left(-x^2+2x+m\right)^3\left(-x^2+2x+m-4\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x^2+2x+m=0\ (1) \\ -x^2+2x+m-4=0\ (2) \end{array}\right.$$

Phương trình $f\left(-x^2+2x+m\right)=e$ có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1), (2) đều có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} 1+m>0 \\ 1+m-4>0 \end{cases} \Leftrightarrow m>3$.

Mặt khác, m là số nguyên trên $[-5;5]$ nên $m\in\{4;5\}$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thoả yêu cầu bài toán.

Câu 25: Chọn A

Đặt $t=\cos x$. Do $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ nên $t\in(0;1] \Rightarrow f(t)\in[-2;0)$

$$\Rightarrow \sqrt{4+2f(\cos x)}=\sqrt{4+2f(t)}\in[0;2) \Rightarrow f\left(\sqrt{4+2f(\cos x)}\right)\in[-2;2)$$

Vậy phương trình $f\left(\sqrt{4+2f(\cos x)}\right)=m$ có nghiệm $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow -2\le m<2$

Do m nguyên nên $m\in\{-2;-1;0;1\}$

Vậy có bốn giá trị của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{4+2f\left(\cos x\right)}\right)=m$ có nghiệm $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 26: Chọn B

Đặt: $y=f\left(x\right)$ ta có hệ: $\begin{cases}y=f\left(x\right)\\f\left(y\right)=x\end{cases}\Rightarrow f\left(y\right)+y=f\left(x\right)+x\ \ (*)$

Xét hàm số: $g\left(t\right)=f\left(t\right)+t=t^3+2t-2^m\Rightarrow g'\left(t\right)=3t^2+2>0\ \forall t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow g\left(t\right)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

Từ phương trình $(*)$ ta có $g\left(y\right)=g\left(x\right)\Leftrightarrow y=x\Leftrightarrow f\left(x\right)=x\Leftrightarrow x^3+x-2^m=x\Leftrightarrow x^3=2^m$

Để phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=x$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[1;2\right]$ thì $\underset{x\in[1;2]}{Min}\,x^3\le 2^m\le\underset{x\in[1;2]}{Max}\,x^3$

$\Leftrightarrow 1\le 2^m\le 8\Leftrightarrow 0\le m\le 3$, m là số nguyên nên $m\in\left\{0;1;2;3\right\}$

Vậy **Chọn B**

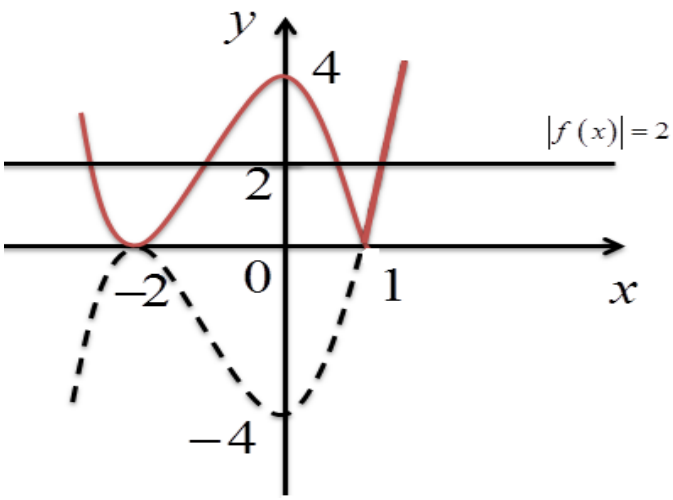
Câu 27: Chọn C

Ta có

$f^2(x)-(m+4)\left|f(x)\right|+2m+4=0$

$\Leftrightarrow\left(\left|f(x)\right|-2\right)\left(\left|f(x)\right|-2-m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|f(x)\right|=2\left(1\right)\\\left|f(x)\right|=2+m\left(2\right)\end{array}\right.$

Phương trình $\left(1\right)$ có 4 nghiệm phân biệt



Vậy để phương trình $(*)$ có 6 nghiệm phân biệt thì phương trình $\left(2\right)$ có 2 nghiệm phân biệt khác nghiệm của phương trình $\left(1\right)$.

Phương trình $\left(2\right)$ có hai nghiệm phân biệt khác nghiệm của phương $\left(1\right)$ khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l}m+2=0\\m+2>4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2\\m>2\end{array}\right.$. Vì $m\in Z;m\in\left(-5;5\right)$ nên $m=\left\{-2;3;4\right\}$

Vậy m có 3 giá trị.

Câu 28: Ta có: $f\left(x^2 f\left(x\right)\right)+2=0 \Leftrightarrow f\left(x^2 f\left(x\right)\right)=-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 f\left(x\right)=0 \\ x^2 f\left(x\right)=\alpha \in (0;1) \\ x^2 f\left(x\right)=\beta \in (2;3) \\ x^2 f\left(x\right)=\gamma \in (3;4) \end{array}\right.$.

$x^2 f\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f\left(x\right)=0 \end{array}\right.$. Phương trình $f\left(x\right)=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

Xét phương trình $x^2 f\left(x\right)=m$ với $m>0$. Rõ ràng $x=0$ không là nghiệm của phương trình.

Do đó ta có: $x^2 f\left(x\right)=m \Leftrightarrow f\left(x\right)=\dfrac{m}{x^2}$.

Xét hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{m}{x^2}$ có $g'\left(x\right)=\dfrac{-2m}{x^3}$. Từ đó ta có BBT của $g\left(x\right)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	‖	$-$	
$g(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

Suy ra đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ luôn cắt đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại 2 điểm phân biệt có hoành độ khác 0 và khác hai nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=0$.

Vậy mỗi phương trình $x^2 f\left(x\right)=\alpha \in (0;1)$, $x^2 f\left(x\right)=\beta \in (2;3)$, $x^2 f\left(x\right)=\gamma \in (3;4)$ có hai nghiệm phân biệt. Các nghiệm của các phương trình này không trùng nhau, khác 0 và khác hai nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=0$.

Do đó phương trình $f\left(x^2 f\left(x\right)\right)+2=0$ có 9 nghiệm thực phân biệt.

DẠNG 2 Bài toán tương giao đồ thị hàm số 02

Câu 1: Cho hai hàm số $y=\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}$ và $y=|x+2|-x-m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là $(C_1),(C_2)$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

A. $(-2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2]$. **C.** $[-2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Câu 2: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hai hàm số $y=\left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}$ và $y=\frac{11}{3x-4}-\frac{1}{2-x}+11+m$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-\infty;1]$. **D.** $(-\infty;2]$.

Câu 3: Có bao nhiêu cặp số thực $(a;b)$ để bất phương trình $(x-1)(x+2)\left(ax^2+bx+2\right)\geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 4: Cho 2 hàm số $y=x^7+x^5+x^3+3m-1$ và $y=|x-2|-x-2m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1), (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) cắt (C_2) là

A. $m\in\mathbb{R}$. **B.** $m\in(2;+\infty)$. **C.** $m\in(-\infty;2)$. **D.** $m\in[2;+\infty)$.

Câu 5: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ để phương trình $\sqrt{3+x}\left(2\sqrt{3+x}-m\right)+\sqrt{1-x}\left(5\sqrt{1-x}+2m\right)=4\sqrt{-x^2-2x+3}$ có nghiệm thực?

A. 2019. **B.** 4032. **C.** 4039. **D.** 4033.

Câu 6: Có bao nhiêu m nguyên dương để hai đường cong $(C_1):y=\left|2+\frac{2}{x-10}\right|$ và $(C_2):y=\sqrt{4x-m}$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ dương?

A. 35. **B.** 37. **C.** 36. **D.** 34.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=(x-1).(x-2)...(x-2020).$ Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2020;2020]$ để phương trình $f'(x)=m.f(x)$ có 2020 nghiệm phân biệt?

A. 2020. **B.** 4040. **C.** 4041. **D.** 2020.

Câu 8: Cho hai hàm số $y=\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|$ và $y=\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x}+4m-2020$, Tổng tất các các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hai hàm số cắt nhau tại một điểm duy nhất là

A. 506. **B.** 1011. **C.** 2020. **D.** 1010.

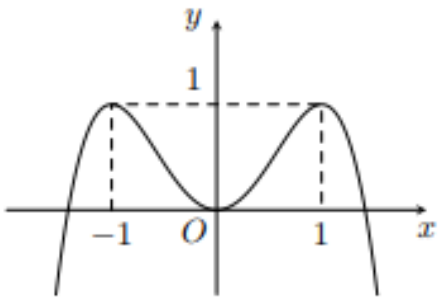
Câu 9: Cho hai hàm số $y=(x+1)(2x+1)(3x+1)(m+2|x|)$; $y=-12x^4-22x^3-x^2+10x+3$ có đồ thị lần lượt là (C_1), (C_2). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trên đoạn $[-2020;2020]$ để (C_1) cắt (C_2) tại 3 điểm phân biệt?

A. 4040. **B.** 2020. **C.** 2021. **D.** 4041.

Câu 10: Cho hai hàm số $y=x^6+6x^4+6x^2+1$ và $y=x^3\sqrt{m-15x}(m+3-15x)$ có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt. Số phần tử của tập hợp S bằng

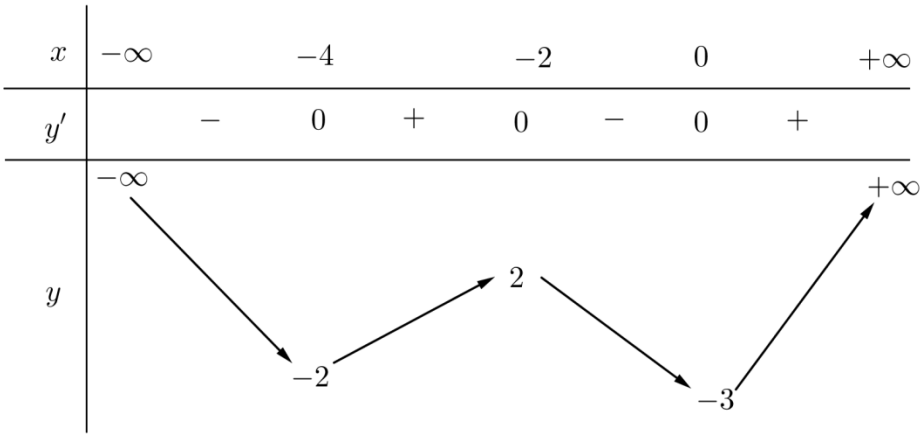
A. 2006. **B.** 2005. **C.** 2007. **D.** 2008.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ có đồ thị như hình vẽ bên đây, trong đó a,b,c,d,e là các hệ số thực. Số nghiệm của phương trình $f\left(\sqrt{f(x)}\right)+f(x)+2\sqrt{f(x)}-1=0$ là



A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 0.

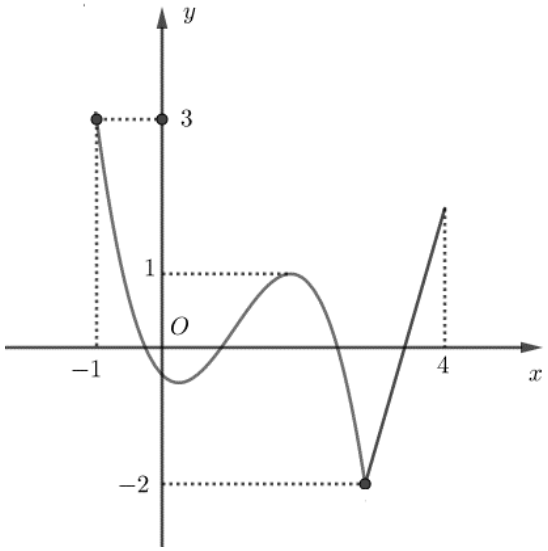
Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $6f(x^2-4x)=m$ có ít nhất ba nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$?

A. 25. **B.** 30. **C.** 29. **D.** 24.

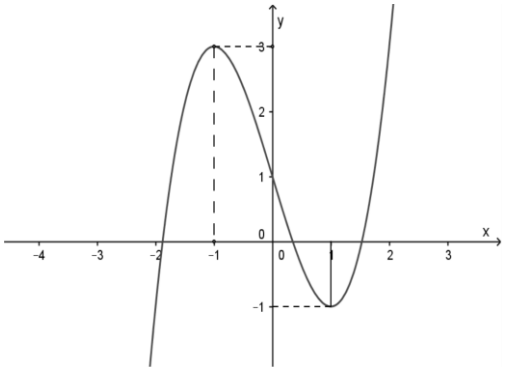
Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;4]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10;10]$ để bất phương trình $|f(x)+m|<2m$ đúng với mọi x thuộc đoạn $[-1;4]$.

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sin x)-m+2=2\sin x$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$. Tổng các phần tử của S bằng

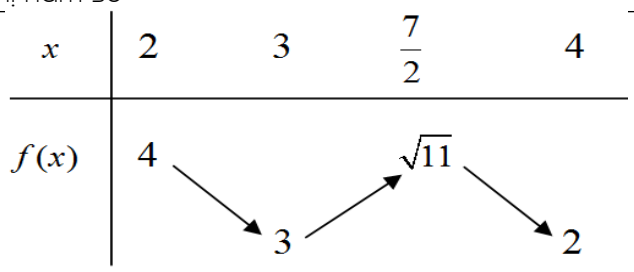


A. 4. **B.** −1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)=x^3+x+2$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f^3(x)+f(x)+m}\right)=-x^3-x+2$ có nghiệm $x\in[-1;2]$?

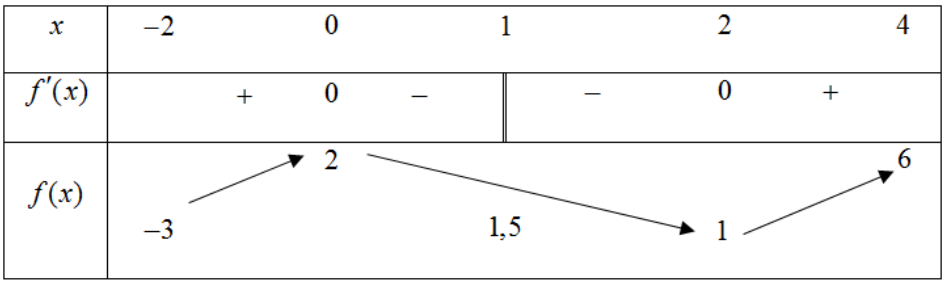
A. 1750. **B.** 1748. **C.** 1747. **D.** 1746.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[2;4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x+2\sqrt{x^2-2x}=m.f(x)$ có nghiệm thuộc đoạn $[2;4]$?



A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[-2;4]$ và có bảng biến thiên như sau



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hệ phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{9}{x^2}-4\ge 0\\ 6f\left(-2x+1\right)-8x^3+6x-m=0\end{cases}$$

có ba nghiệm phân biệt?

A. 9. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 8.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.C	3.C	4.A	5.B	6.C	7.B	8.A	9.C	10.A
11.B	12.B	13.C	14.D	15.A	16.C	17.D			

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm

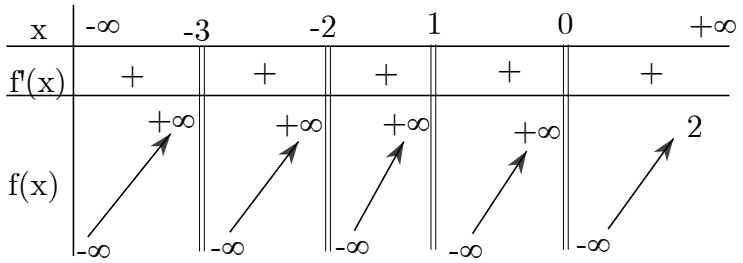
$$\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}=|x+2|-x-m \Leftrightarrow \frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}-|x+2|+x=-m \ (1)$$

Xét $f(x)=\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}-|x+2|+x, x\in D=\mathbb{R}\setminus\{-3;-2;-1;0\}$

Ta có $f(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}-2, x\in(-2;+\infty)\cup D=D_1\\ \frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}+2x+2, x\in(-\infty;-2)\cup D=D_2\end{cases}$

Có $f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}, \forall x\in D_1\\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}+2, \forall x\in D_2\end{cases}$

Dễ thấy $f'(x)>0, \forall x\in D_1\cup D_2$, ta có bảng biến thiên



Hai đồ thị cắt nhau tại đúng 4 điểm phân biện khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng 4 nghiệm phân biệt, từ bảng biến thiên ta có: $-m\geq 2\Leftrightarrow m\leq -2$.

Câu 2: Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $(2x^2+1)\sqrt{x-1}=\frac{11}{3x-4}-\frac{1}{2-x}+11+m \quad (*)$

Điều kiện: $\begin{cases}x-1\geq 0\\ x\neq\frac{4}{3}\\ x\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\ x\neq\frac{4}{3}\\ x\neq 2\end{cases}$

Ta có:

$$(*)\Leftrightarrow (2x^2+1)\sqrt{x-1}-\frac{11}{3x-4}+\frac{1}{2-x}-11=m$$

Xét hàm số $f(x)=\left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}-\dfrac{11}{3x-4}+\dfrac{1}{2-x}-11$ trên $\left[1;+\infty\right)\setminus\left\{\dfrac{4}{3};2\right\}$

Nhận thấy, hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên các khoảng $\left[1;\dfrac{4}{3}\right),\left(\dfrac{4}{3};2\right),\left(2;+\infty\right)$

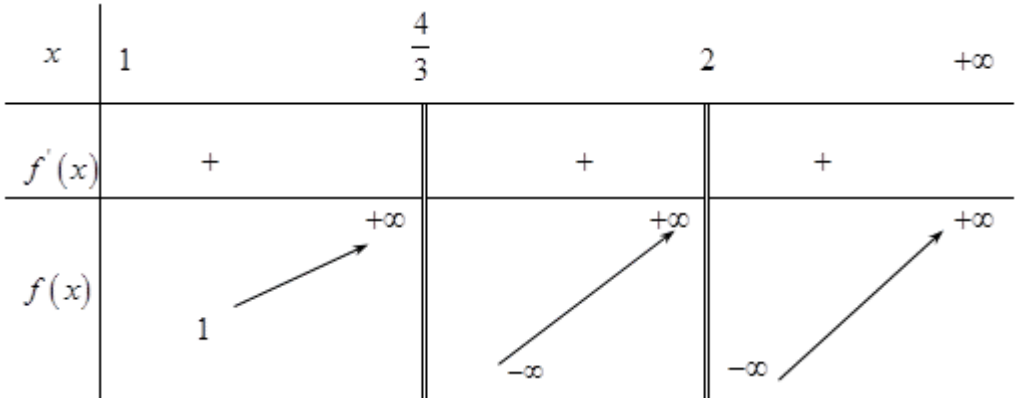
Ta có, $f'(x)=\left(\left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}-\dfrac{11}{3x-4}+\dfrac{1}{2-x}-11\right)'$

$=4x\sqrt{x-1}+\left(2x^2+1\right)\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}+\dfrac{33}{\left(3x-4\right)^2}+\dfrac{1}{\left(2-x\right)^2}=\dfrac{10x^2-8x+1}{2\sqrt{x-1}}+\dfrac{33}{\left(3x-4\right)^2}+\dfrac{1}{\left(2-x\right)^2}>0$

với $\forall x\in\left[1;+\infty\right)\setminus\left\{\dfrac{4}{3};2\right\}$

Suy ra, hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left[1;+\infty\right)\setminus\left\{\dfrac{4}{3};2\right\}$.

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên ta suy ra đồ thị hai hàm số $y=\left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}$ và $y=\dfrac{11}{3x-4}-\dfrac{1}{2-x}+11+m$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt khi $m\in\left(-\infty;1\right]$.

Câu 3: **Chọn C**

Đặt $f\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(x+2\right)\left(ax^2+bx+2\right)$

Giả sử $x=1$ không phải là nghiệm của phương trình $g\left(x\right)=\left(x+2\right)\left(ax^2+bx+2\right)=0$ thì hàm số $f\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(x+2\right)\left(ax^2+bx+2\right)$ sẽ đổi dấu khi qua điểm $x=1$, nghĩa là $\left(x-1\right)\left(x+2\right)\left(ax^2+bx+2\right)\ge 0$ không có nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Do đó, để yêu cầu bài toán được thỏa mãn thì một điều kiện cần là $g\left(x\right)=\left(x+2\right)\left(ax^2+bx+2\right)=0$ có nghiệm $x=1$ suy ra $a+b+2=0$

Lí luận tương tự có $h\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(ax^2+bx+2\right)=0$ cũng phải nhận $x=-2$ là nghiệm, suy ra $4a-2b+2=0$

Từ và ta có hệ $\begin{cases}a+b+2=0\\4a-2b+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-1\end{cases}$

Điều kiện đủ:

Với $\begin{cases}a=-1\\b=-1\end{cases}$ có $f\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(x+2\right)\left(-x^2-x+2\right)=-\left(x-1\right)^2\left(x+2\right)^2\le 0$, $x\in\mathbb{R}$.

Vậy không tồn tại cặp số thực $(a;b)$ nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4: Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$x^7+x^5+x^3+3m-1=|x-2|-x-2m \Leftrightarrow x^7+x^5+x^3-|x-2|+x=-5m+1$ (1).

Xét hàm số $f(x)=x^7+x^5+x^3-|x-2|+x$.

Ta có $f(x)=\begin{cases}x^7+x^5+x^3+2 & \text{khi } x\in[2;+\infty)\\ x^7+x^5+x^3+2x-2 & \text{khi } x\in(-\infty;2)\end{cases}$.

$f'(x)=\begin{cases}7x^6+5x^4+3x^2>0 & \text{khi } x\in(2;+\infty)\\ 7x^6+5x^4+3x^2+2>0 & \text{khi } x\in(-\infty;2)\end{cases}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗		↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi $m\in\mathbb{R}$. Vậy để (C_1) cắt (C_2) thì $m\in\mathbb{R}$.

Câu 5: Chọn B

Đk: $x\in[-3;1]$.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 11-3x-4\sqrt{(3+x)(1-x)}+m\left(2\sqrt{1-x}-\sqrt{3+x}\right)=0$.

Đặt $t=2\sqrt{1-x}-\sqrt{3+x}=g(x)$, với $x\in[-3;1]\Rightarrow 11-3x-4\sqrt{(3+x)(1-x)}=t^2+4$.

Có $g'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{3+x}}<0, \forall x\in(-3;1)$. Suy ra $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$.

$\Rightarrow \min\limits_{[-3;1]} g(x)=g(1)=-2$; $\max\limits_{[-3;1]} g(x)=g(-3)=4\Rightarrow t\in[-2;4]$.

Từ $\Rightarrow t^2+mt+4=0$.

Nếu $t=0\Rightarrow 0+4=0$.

Nếu $t\in[-2;4]\setminus\{0\}$, ta có $m=\dfrac{-t^2-4}{t}=-t-\dfrac{4}{t}=f(t)$.

Có $f'(t)=\dfrac{4-t^2}{t^2}$, $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\pm 2$.

Bảng biến thiên

t	-2		0		2		4
$f'(t)$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(t)$	4	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-4	↘	-5

Từ bảng biến thiên, suy ra phương trình có nghiệm thực khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l}m\ge 4\\ m\le -4\end{array}\right.$.

Do đó $\begin{cases} m \in [-2019;2019] \\ \left[\begin{array}{l} m \ge 4 \\ m \le -4 \end{array}\right. \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m \in \{-2019;-2018;....;-4;4;...;2018;2019\}$.

Vậy có $(2019-4+1).2 = 4032$ giá trị nguyên của tham số thực m.

Câu 6: **ChọnC**

Điều kiện: $\begin{cases} x \ne 10 \\ x \ge \dfrac{m}{4} \end{cases}$.

Xét trên $(0;+\infty)\setminus\{10\}$, phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là

$\left|2+\dfrac{2}{x-10}\right| = \sqrt{4x-m} \Leftrightarrow m = 4x-\left(\dfrac{2x-18}{x-10}\right)^2$.

Đặt $g(x) = 4x-\left(\dfrac{2x-18}{x-10}\right)^2$ với $x \in (0;+\infty)\setminus\{10\}$.

Ta có: $g'(x) = 4\left(1+\dfrac{2x-18}{(x-10)^3}\right)$; $g''(x) = \dfrac{-4x+34}{(x-10)^4}$.

$g'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	0		$\frac{17}{2}$		10		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	
$g'(x)$	$4{,}072$	↗		↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

Suy ra phương trình $g'(x) = 0$ có một nghiệm duy nhất $\alpha \in \left(\dfrac{17}{2};10\right)$. Lại có $g'(9,22) > 0$ nên $\alpha \in (9,22;10)$. Ta có bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(0;+\infty)\setminus\{10\}$:

x	0		9		α		10		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$g(x)$	$\frac{-81}{25}$	↗	36	↗	$g(\alpha)$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Từ đó suy ra phương trình $m = g(x)$ có 3 nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi $\dfrac{-81}{25} < m < g(\alpha)$.

Trên khoảng $(9,22;10)$ thì $\begin{cases} 4x < 40 \\ 3 < \left(\dfrac{2x-18}{x-10}\right)^2 \end{cases}$ nên $g(x) < 37 \Rightarrow g(\alpha) \in (36;37)$.

Vậy những giá trị m nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán là 1; 2; 3; …; 36 hay có 36 giá trị của m cần tìm.

Câu 7: Chọn B

Ta có nhận xét: khi $f(x)=0$ thì phương trình $f'(x)=m.f(x)$ vô nghiệm.

Do đó: $f'(x)=m.f(x)\Leftrightarrow m=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}+\ldots+\dfrac{1}{x-2020}$.

Ta có $g'(x)=\dfrac{-1}{(x-1)^2}+\dfrac{-1}{(x-2)^2}+\dfrac{-1}{(x-3)^2}+\ldots+\dfrac{-1}{(x-2020)^2}<0,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1;2;3...;2020\}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		2		3	$\cdots$	2020		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$\cdots$	$\|\|$	$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\searrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\searrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\cdots$	$+\infty$ $\|\|$	$\searrow$	0

Dựa vào BBT, phương trình $f'(x)=m.f(x)$ có 2020 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m>0$ hoặc $m<0$.

Kết hợp với điều kiện m là số nguyên thuộc $[-2020;2020]$ nên $m\in\{n\in\mathbb{Z}\,|\,-2020\le n\le 2020, n\ne 0\}$.

Vậy có tất cả 4040 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 8: Chọn A

+ Phương trình hoành độ điểm chung của hai đồ thị hàm số là

$$\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|=\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x}+4m-2020\Leftrightarrow \ln\left|\frac{x-2}{x}\right|-\frac{3}{x-2}+\frac{1}{x}=4m-2020 \quad (*)$$

Đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại một điểm duy nhất khi và chỉ khi có duy nhất một nghiệm.

+ Xét hàm số $y=\ln\left|\dfrac{x-2}{x}\right|-\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{1}{x}=\begin{cases} g_1(x)=\ln(x-2)-\ln x-\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{1}{x} & \text{khi } x>2 \\ g_2(x)=\ln(2-x)-\ln x-\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{1}{x} & \text{khi } 0<x<2 \\ g_3(x)=\ln(2-x)-\ln(-x)-\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{1}{x} & \text{khi } x<0 \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} g_1'(x)=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{(x-2)^2}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{4(x^2-1)}{x^2(x-2)^2} & \text{khi } x>2 \\ g_2'(x)=\dfrac{-1}{2-x}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{(x-2)^2}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{4(x^2-1)}{x^2(x-2)^2} & \text{khi } 0<x<2 \\ g_3'(x)=\dfrac{-1}{2-x}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{(x-2)^2}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{4(x^2-1)}{x^2(x-2)^2} & \text{khi } x<0 \end{cases}$, do vậy $y=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$

bảng biến thiên hàm số như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
y	0	↗	$\ln 3$	↘	$+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$	↗	0
				$-\infty$						$-\infty$	

+ Qua bảng biến thiên này ta có có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} 4m-2020=4 \\ 4m-2020=\ln 3 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=506\in\mathbb{Z} \\ m=\dfrac{2020+\ln 3}{4}\notin\mathbb{Z} \end{array}\right.$

+ Tư đây yêu cầu bài toán xãy ra khi và chỉ khi $m=506$.

Câu 9: Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị (C_1) và (C_2):

$(x+1)(2x+1)(3x+1)(m+2|x|)=-12x^4-22x^3-x^2+10x+3$

Để đồ thị (C_1) cắt (C_2) tại 3 điểm phân biệt thì phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Với $x\in\left\{-1;-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3}\right\}$: Không là nghiệm của phương trình.

Với $x\notin\left\{-1;-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3}\right\}$ ta có:

$(1)\Leftrightarrow m=\dfrac{-12x^4-22x^3-x^2+10x+3}{(x+1)(2x+1)(3x+1)}-2|x|\Leftrightarrow m=-2x-2|x|+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{2x+1}+\dfrac{1}{3x+1}$.

Xét hàm số $f(x)=-2x-2|x|+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{2x+1}+\dfrac{1}{3x+1}$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-1;-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3}\right\}$.

Suy ra: $f'(x)=-2-\dfrac{2x}{\sqrt{x^2}}-\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{2}{(2x+1)^2}-\dfrac{3}{(3x+1)^2}$.

Ta có: $f'(x)=\begin{cases} -4-\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{2}{(2x+1)^2}-\dfrac{3}{(3x+1)^2} & \text{khi } x\in(0;+\infty) \\ -\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{2}{(2x+1)^2}-\dfrac{3}{(3x+1)^2} & \text{khi } x(-\infty;0)\setminus\left\{-1;-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3}\right\} \end{cases}$ và $f'(x)$ không xác định tại $x=0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\searrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\searrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thì $m \ge 0$. Do đó có 2021 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 10: Chọn A

Ta biết (C_1) cắt (C_2) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $x^6+6x^4+6x^2+1=x^3\sqrt{m-15x}\left(m+3-15x\right)$ (1) có hai nghiệm phân biệt.

Điều kiện: $m-15x\ge 0 \Leftrightarrow m\ge 15x$ $(*)$.

Nếu $x=0$ thì phương trình (1) vô nghiệm. Suy ra $x\ne 0$.

Khi đó $(1)\Leftrightarrow x^3+6x^2+6x+\dfrac{1}{x^3}=\sqrt{m-15x}\left(m+3-15x\right)$

$\Leftrightarrow\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3+3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\left(\sqrt{m-15x}\right)^3+3\sqrt{m-15x}$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=t^3+3t$. Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$f'\left(t\right)=3t^2+3>0,\forall t\in\mathbb{R}$. Suy ra hàm số $f\left(t\right)=t^3+3t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(1)\Leftrightarrow x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{m-15x}$ (2).

Nếu $x<0\Rightarrow x+\dfrac{1}{x}<0\Rightarrow$ Phương trình (2) vô nghiệm $\Rightarrow x>0$.

Khi đó $\begin{cases}m>0\\ x+\dfrac{1}{x}>0\end{cases}$ nên $(2)\Leftrightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}+2=m-15x\Leftrightarrow m=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2+15x$.

Đặt $g\left(x\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2+15x, x>0$. $g'\left(x\right)=2x-\dfrac{2}{x^3}+15$.

Phương trình $g'\left(x\right)=0$ có một nghiệm $x=\dfrac{1}{2}$ trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
g'		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$+\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{55}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m > \frac{55}{4}$.

Kết hợp với m nguyên và $m \in [-2019; 2019]$ ta có được m nguyên và $m \in [14; 2019]$.

Khi đó S có $2019 - 14 + 1 = 2006$ phần tử.

Câu 11: Chọn B

Từ hình vẽ ta có dạng đồ thị của hàm trùng phương nên $b = d = 0 \Rightarrow f(x) = ax^4 + cx^2 + e$

Ta có $f'(x) = 4ax^3 + 2cx$.

Từ đồ thị $\Rightarrow \begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2c = 0 \\ e = 0 \\ a + c + e = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ e = 0 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^4 + 2x^2$.

$\Rightarrow f(\sqrt{x}) = x^2 + 2x$ và $f(\sqrt{f(x)}) = f^2(x) + 2f(x)$.

Như vậy phương trình $f(\sqrt{f(x)}) + f(x) + 2\sqrt{f(x)} - 1 = 0$.

$\Leftrightarrow f^2(x) + 2f(x) + f(x) + 2\sqrt{f(x)} - 1 = 0$ với $f(x) \geq 0$.

Đặt $t = f(x)(t \geq 0)$ ta được phương trình $g(t) = 0$ với $g(t) = t^2 - 3t - 2\sqrt{t} + 1$.

Nhận thấy: Hàm số $g(t)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $g(0).g(1) < 0$

$\Rightarrow g(t) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(0;1)$.

Hàm số $g(t)$ liên tục trên đoạn $[1;4]$ và $g(1).g(4) < 0$

$\Rightarrow g(t) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(1;4)$.

Mà $g(t) = 0$ là phương trình bậc hai chỉ có tối hai nghiệm nên $g(t) = 0$ có duy nhất một nghiệm thuộc $(0;1)$. Suy ra $f(\sqrt{f(x)}) + f(x) + 2\sqrt{f(x)} - 1 = 0$ có duy nhất một nghiệm $f(x) \in (0;1)$. Suy ra phương trình $f(x) = a$ với $a \in (0;1)$ luôn có 4 nghiệm x phân biệt.

Câu 12: Chọn B

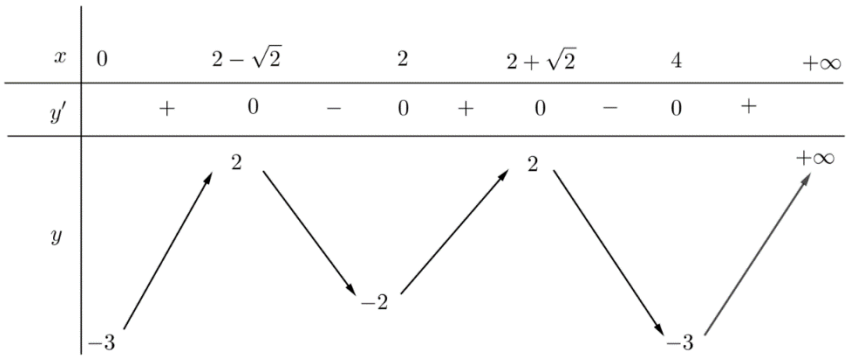
Ta đặt: $g(x) = f(x^2 - 4x)$.

$g'(x) = (2x-4) f'(x^2 - 4x) = 2(x-2)(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 2)(x^2 - 4x)$

$= 2(x-2)^3 (x^2 - 4x + 2) x(x-4)$.

Mặt khác: $g(0) = f(0) = -3$; $g(2 - \sqrt{2}) = g(2 + \sqrt{2}) = f(-2) = 2$; $g(2) = f(-4) = -2$;

$g(4) = f(0) = -3$. Ta có bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta được: yêu cầu bài toán tương đương $-3<\frac{m}{6}\le 2$

$\Leftrightarrow -18<m\le 12$. Vậy có tất cả 30 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 13: Chọn C

Để bất phương trình $\left|f\left(x\right)+m\right|<2m$ có nghiệm ta suy ra điều kiện $m>0$.

$\left|f\left(x\right)+m\right|<2m\Leftrightarrow -2m<f\left(x\right)+m<2m\Leftrightarrow \begin{cases} f\left(x\right)>-3m \\ f\left(x\right)<m \end{cases}$.

Bất phương trình $\left|f\left(x\right)+m\right|<2m$ đúng với mọi x thuộc đoạn $\left[-1;4\right]\Leftrightarrow \begin{cases} f\left(x\right)>-3m \\ f\left(x\right)<m \end{cases}$ đúng

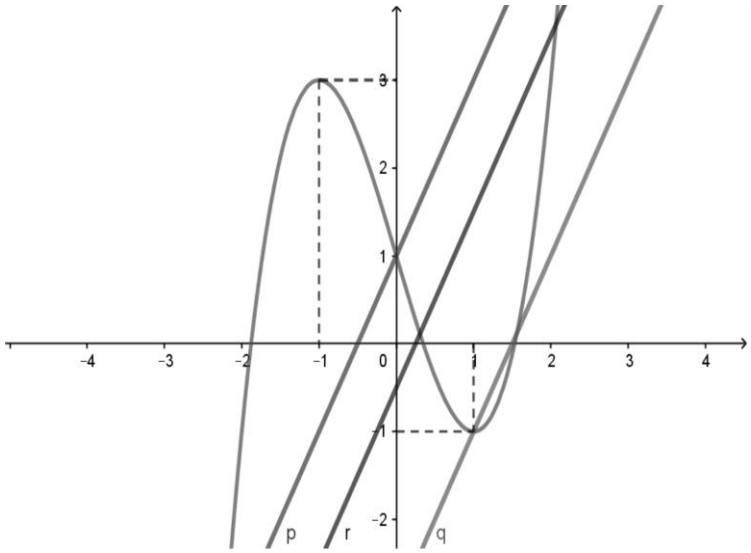
với mọi x thuộc đoạn $\left[-1;4\right]\Leftrightarrow \begin{cases} -3m<\min\limits_{[-1;4]} f\left(x\right) \\ m>\max\limits_{[-1;4]} f\left(x\right) \end{cases}$.

Từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ ta suy ra $\min\limits_{[-1;4]} f\left(x\right)=-2;\ \max\limits_{[-1;4]} f\left(x\right)=3$.

$\Rightarrow \begin{cases} -3m<\min\limits_{[-1;4]} f\left(x\right) \\ m>\max\limits_{[-1;4]} f\left(x\right) \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} -3m<-2 \\ m>3 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m>\frac{2}{3} \\ m>3 \end{cases}\Leftrightarrow m>3$

Vậy trên đoạn $\left[-10;10\right]$ có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 14: Chọn D



Đặt $t=\sin x$, với $x\in\left(0;\pi\right)\Rightarrow t\in\left(0;1\right]$.

Ta được phương trình: $f\left(t\right)-2t=m-2\Leftrightarrow f\left(t\right)=2t+m-2$

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(t\right)$ và đường thẳng $y=2t+m-2\ \ \left(r\right)$.

Gọi $\left(p\right):y=2x+1$ song song với đường thẳng $\left(\Delta\right):y=2t$ và đi qua điểm $A\left(0;1\right)$.

Gọi $q:y=2x-3$ song song với đường thẳng $\left(\Delta\right):y=2t$ và đi qua điểm $B\left(1;-1\right)$.

Để phương trình $f\left(\sin x\right)-m+2=2\sin x$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\pi\right)$ thì phương trình phải có nghiệm $t\in\left(0;1\right]$, suy ra đường thẳng r nằm trong miền nằm giữa hai đường thẳng q và p

$\Rightarrow -3\le m-2<1\Leftrightarrow -1\le m<3\Rightarrow m\in\left\{-1;0;1;2\right\}\Rightarrow S=\left\{-1;0;1;2\right\}$.

Do đó tổng các phần tử là: $-1+0+1+2=2$.

Câu 15: Chọn A

Xét hàm số $f(t)=t^3+t+2$, ta có $f'(t)=3t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số f đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f\left(\sqrt[3]{f^3(x)+f(x)+m}\right)=f(-x)$

$\Leftrightarrow -x=\sqrt[3]{f^3(x)+f(x)+m}\Leftrightarrow f^3(x)+f(x)+x^3+m=0$ (1)

Xét $h(x)=f^3(x)+f(x)+x^3+m$ trên đoạn $[-1;2]$.

Ta có $h'(x)=3f'(x)\cdot f^2(x)+f'(x)+3x^2=f'(x)\left[3f^2(x)+1\right]+3x^2$.

Ta có $f'(x)=3x^2+1>0,\forall x\in[-1;2]\Rightarrow h'(x)>0,\forall x\in[-1;2]$.

Hàm số $h(x)$ đồng biến trên $[-1;2]$ nên $\min\limits_{[-1;2]}h(x)=h(-1)=m-1,\ \ \max\limits_{[-1;2]}h(x)=h(2)=m+1748.$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\min_{[-1;2]}h\left(x\right)\cdot\max_{[-1;2]}h\left(x\right)\le 0\ \Leftrightarrow\ h\left(-1\right)\cdot h\left(2\right)$$
$$\Leftrightarrow\ \left(m-1\right)\left(1748+m\right)\le 0$$
$$\Leftrightarrow\ -1748\le m\le 1.$$

Do m nguyên nên tập các giá trị m thỏa mãn là $S=\{-1748;-1747;\ldots;0;1\}$.

Vậy có tất cả 1750 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 16: Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\underset{[2;4]}{Min}\,f\left(x\right)=f(4)=2$ và $\underset{[2;4]}{Max}\,f\left(x\right)=f(2)=4$

Hàm số $g(x)=x+2\sqrt{x^2-2x}$ liên tục và đồng biến trên $\left[2;4\right]$

Suy ra $\underset{[2;4]}{Min}\,g\left(x\right)=g(2)=2$ và $\underset{[2;4]}{Max}\,g\left(x\right)=g(4)=4+4\sqrt{2}$

Ta có $x+2\sqrt{x^2-2x}=m.f(x)\Leftrightarrow\dfrac{x+2\sqrt{x^2-2x}}{f(x)}=m\Leftrightarrow\dfrac{g(x)}{f(x)}=m$

Xét hàm số $h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$ liên tục trên $\left[2;4\right]$

Vì $g(x)$ nhỏ nhất và $f(x)$ lớn nhất đồng thời xảy ra tại $x=2$ nên

$$\underset{[2;4]}{Min}\, h(x)=\frac{\underset{[2;4]}{Min}\, g(x)}{\underset{[2;4]}{Max}\, f(x)}=\frac{g(2)}{f(2)}=h(2)=\frac{1}{2}$$

Vì $g(x)$ lớn nhất và $f(x)$ nhỏ nhất đồng thời xảy ra tại $x=4$ nên

$$\underset{[2;4]}{Max}\, h(x)=\frac{\underset{[2;4]}{Max}\, g(x)}{\underset{[2;4]}{Min}\, f(x)}=\frac{g(4)}{f(4)}=h(4)=2+2\sqrt{2}$$

Từ đó suy ra phương trình $h(x)=m$ có nghiệm khi và chỉ khi $\frac{1}{2}\le m\le 2+2\sqrt{2}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm.

Câu 17: Chọn D

Ta có: $\frac{9}{x^2}-4\ge 0\Leftrightarrow\frac{9-4x^2}{x^2}\ge 0\Leftrightarrow\begin{cases}9-4x^2\ge 0\\ x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{3}{2}\le x\le\frac{3}{2}\\ x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]\setminus\{0\}$.

Xét phương trình $6f(-2x+1)-8x^3+6x-m=0\Leftrightarrow m=6f(-2x+1)-8x^3+6x$

Xét hàm số $g(x)=6f(-2x+1)-8x^3+6x$, với $x\in\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]\setminus\{0\}$.

Ta có $g'(x)=-12f'(-2x+1)-24x^2+6=-6\left[2f'(-2x+1)+4x^2-1\right]$

Từ giả thiết ta suy ra $f'(-2x+1)<0\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+1<2\\ -2x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$;

$$f'(-2x+1)>0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}-2<-2x+1<0\\ 2<-2x+1<4\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\\ -\frac{3}{2}<x<-\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)=6f(-2x+1)-8x^3+6x$ trên $\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]\setminus\{0\}$.

x	$-\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$
$f'(-2x+1)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$4x^2-1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	54	$\searrow$	4	$\nearrow$	9	$\nearrow$	14	$\searrow$	-36

Từ bảng biến thiên ta suy ra hệ có đúng ba nghiệm $\Leftrightarrow$ có đúng ba nghiệm $x\in\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]\setminus\{0\}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}4<m<14\\ m\neq 9\end{cases}$. Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=5;6;7;8;10;11;12;13$. Vậy có 8 số nguyên m.

DẠNG 3 Tìm m liên quan đến tương giao hàm bậc 3

Câu 1: Cho hàm số $y=x^3-2x^2-1$ có đồ thị (C), đường thẳng $(d): y=mx-1$ và điểm $K(4;11)$. Biết rằng (C) và (d) cắt nhau tại ba điểm phân biệt A, B, C trong đó $A(0;-1)$ còn trọng tâm tam giác KBC nằm trên đường thẳng $y=2x+1$. Mệnh đề nào sau đây **đúng?**

A. $m=4$. **B.** $m=2$. **C.** $m=3$. **D.** Không có m.

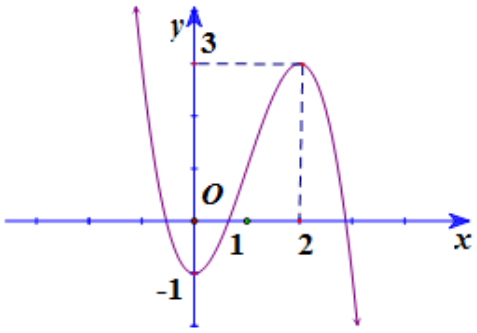
Câu 2: Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=3x+m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=x^3+1$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** -1.

Câu 3: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=2x^3-(2+m)x+m$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt

A. $m>\frac{1}{2}$. **B.** $m\le\frac{1}{2}$. **C.** $m>-\frac{1}{2}$. **D.** $m>-\frac{1}{2}; m\neq 4$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a, b, c, d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2020;2020]$ của tham số m để phương trình $2f(|x|)-m=0$ có đúng 2 nghiệm thực phân biệt?

A. 2020. **B.** 2022. **C.** 2021. **D.** 2019.

Câu 5: Biết đường thẳng $y=(3m-1)x+6m+3$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ tại ba điểm phân biệt sao cho một giao điểm cách đều hai giao điểm còn lại. Khi đó m thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};2\right)$. **D.** $(-1;0)$.

Câu 6: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-(2m+1)x^2+(3m+1)x-m+1$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 7: Cho đồ thị $(C_m): y=x^3-2x^2+(1-m)x+m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa $x_1^2+x_2^2+x_3^2=4$

A. $m\neq 0$. **B.** $m\in(0;2)$. **C.** $m=1$. **D.** $m>-\frac{1}{4}$ và $m\neq 0$.

Câu 8: Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2$ tại 3 điểm phân biệt A,B,C (B nằm giữa A,C) sao cho $AB=2BC$. Tính tổng các phần tử thuộc S.

A. -4. **B.** $\frac{7-\sqrt{7}}{7}$. **C.** -2. **D.** 0.

Câu 9: Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của a để đồ thị hàm số $y=x^3+(a+10)x^2-x+1$ cắt trục hoành tại đúng một điểm?

A. 10. **B.** 8. **C.** 11. **D.** 9.

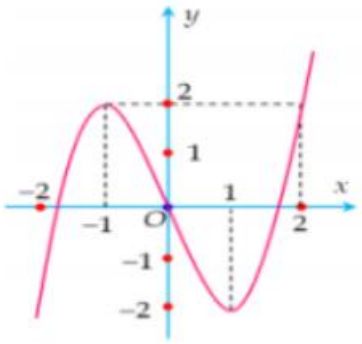
Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc $[-2020;2021]$ của hàm số m để đường thẳng $y=mx-m-1$ cắt đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2+x$ tại ba điểm phân biệt A,B,C sao cho $AB=BC$.

A. 2021. **B.** 2023. **C.** 2024. **D.** 2022.

Câu 11: Cho bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số $y=-x^3+mx^2-2m$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 12: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{2f(\cos x)}\right)=m$ có nghiệm $x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right)$

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** -2.

Câu 13: Gọi S là tập hợp các số nguyên m để phương trình $x^3-(2m+1)x^2+2(3m-2)x-8=0$ có ba nghiệm lập thành một cấp số nhân. Tổng các phần tử của S bằng

A. 0. **B.** -2. **C.** 3. **D.** -1.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)=x^3-\frac{1}{2}mx+m-8$, $x\in\mathbb{R}$ với m là một hằng số khác 0. Biết rằng phương trình $f(x)=0$ có đúng 2 nghiệm phân biệt thì có bao nhiêu giá trị nguyên dương k thỏa mãn phương trình $f(x)=k$ có 3 nghiệm phân biệt?

A. 3. **B.** 6. **C.** 34. **D.** 31.

Câu 15: Cho hàm số $y=x^3-(m+2)x^2-(2m+13)x-m-2$ có đồ thị (C_m), đường thẳng $d:y=mx+m+8$ và điểm $I(1;4)$. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m, biết rằng đường

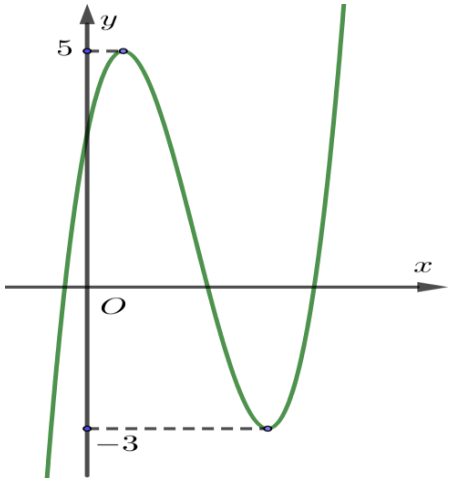
thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt A,B,C với A có hoành độ bằng -2 và tam giác IBC cân tại I.

A. -12. **B.** -6. **C.** -4. **D.** -10.

Câu 16: Gọi d là đường thẳng đi qua $A(2;0)$ có hệ số góc $m(m>0)$ cắt đồ thị $(C): y=-x^3+6x^2-9x+2$ tại ba điểm phân biệt A,B,C. Gọi B',C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của B,C lên trục tung. Biết rằng hình thang $BB'C'C$ có diện tích bằng 8, giá trị của m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(5;8)$. **B.** $(-5;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(1;5)$.

Câu 17: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^3(x)-2mf^2(x)+\left(m^2-3m-9\right)f(x)+3m^2+9m=0$ có đúng 8 nghiệm phân biệt?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 18: Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $f(x)=x^3-6(m+1)x^2+3(2m+1)x+2$ cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn -1. Biết rằng $S=\left(\frac{-a}{b};+\infty\right)$; trong đó a,b là các số nguyên dương và phân số $\frac{a}{b}$ là tối giản. Giá trị biểu thức $T=a+b$ tương ứng bằng

A. 4. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 19: Điều kiện cần và đủ của tham số thực m để đường thẳng $y=3x+m-2$ cắt đồ thị hàm số $y=(x-1)^3$ tại ba điểm phân biệt là

A. $-3\le m\le 1$. **B.** $-3<m<1$. **C.** $-1<m<3$. **D.** $-1\le m\le 3$.

Câu 20: Cho hàm số $y=x^3+3x^2+m$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt A,B,C sao cho B là trung điểm AC. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. $m\in(-4;0)$. **B.** $m\in(0;+\infty)$. **C.** $m\in(-\infty;-4)$. **D.** $m\in(-4;-2)$.

Câu 21: Cho hàm số $y=x^3-2x^2-1$ có đồ thị (C), đường thẳng $(d): y=mx-1$ và điểm $K(4;11)$. Biết rằng (C) và (d) cắt nhau tại ba điểm phân biệt A,B,C trong đó $A(0;-1)$ còn trọng tâm tam giác KBC nằm trên đường thẳng $y=2x+1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m=4$. **B.** $m=2$. **C.** $m=3$. **D.** Không tồn tại m

Câu 22: Cho hàm số $y=x^3-2x^2+(1-m)x+m$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1^2+x_2^2+x_3^2<4$.

A. $\begin{cases}-\frac{1}{4}<m<1\\ m\neq 0\end{cases}$. **B.** $m<1$. **C.** $-\frac{1}{4}<m<1$. **D.** $\frac{1}{4}<m<1$.

Câu 23: Cho hàm số $y=x^3-2x^2+(1-m)x+m$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1^2+x_2^2+x_3^2<4$.

A. $\begin{cases}-\frac{1}{4}<m<1\\ m\neq 0\end{cases}$. **B.** $m<1$. **C.** $-\frac{1}{4}<m<1$. **D.** $\frac{1}{4}<m<1$.

Câu 24: Cho hàm số $y=x^3-(m+2)x^2-(2m+13)x-m-2$ có đồ thị là (C_m), đường thẳng $d: y=mx+m+8$ và điểm $I(1;4)$. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m, biết rằng đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt A, B, C với A có hoành độ bằng -2 và tam giác IBC cân tại I.

A. -12. **B.** -6. **C.** -4. **D.** -10.

Câu 25: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2021.f(f(x))=m$ có 7 nghiệm phân biệt?

A. 8078. **B.** 0. **C.** 4041. **D.** 8076.

Câu 26: Cho hàm số $f(x)=(1-m^3)x^3+3x^2+(4-m)x+2$ với m là tham số. Có bao nhiêu số tự nhiên m sao cho phương trình $f(x)=0$ có nghiệm trên đoạn $\left[\frac{1}{5};5\right]$.

A. 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 27: Cho hàm số $y=f(x)=2x^3-3x^2+1$. Tập hợp các giá trị m để phương trình $f\left(f\left(\frac{2\sin x+1}{2}\right)\right)=f(m)$ có nghiệm là đoạn $[a;b]$. Khi đó giá trị $4a^2+8b$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(7;\frac{23}{2}\right)$. **B.** $(-2;5)$. **C.** $\left(\frac{43}{3};\frac{39}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{37}{3};\frac{65}{4}\right)$.

Câu 28: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2x^3-3x^2+2-2^{1-2m}=0$ có 3 nghiệm thực phân biệt.

A. $\frac{1}{2}<m<1$. **B.** $-1<m<0$. **C.** $0<m<\frac{1}{2}$. **D.** $-1<m<\frac{1}{2}$.

Câu 29: Cho hàm số $y=x^3-2(m+1)x^2+(5m+1)x-2m-2$ có đồ thị là (C_m), với m là tham số. Tập S là tập hợp các giá trị nguyên của m $(m\in(-2021;2021))$ để (C_m) cắt trục hoành tại

ba điểm phân biệt $A(2;0), B, C$ sao cho trong hai điểm B, C có một điểm nằm trong và một điểm nằm ngoài đường tròn có phương trình $x^2+y^2=1$. Tính số các phần tử của S ?

A. 4041. **B.** 2020. **C.** 2021. **D.** 4038.

Câu 30: Cho hàm số $f(x)=x^3-mx^2+(m-2)x+1$ với m là tham số. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình sau có 3 nghiệm thực phân biệt $f'(x).e^{f(x)}+f(x).\pi^{f'(x)}=f'(x)+f(x)$

A. 1. **B.** vô số. **C.** 2. **D.** 0.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho hàm số $y=x^3-2x^2-1$ có đồ thị (C), đường thẳng $(d): y=mx-1$ và điểm $K(4;11)$. Biết rằng (C) và (d) cắt nhau tại ba điểm phân biệt A,B,C trong đó $A(0;-1)$ còn trọng tâm tam giác KBC nằm trên đường thẳng $y=2x+1$. Mệnh đề nào sau đây **đúng?**

A. $m=4$. **B.** $m=2$. **C.** $m=3$. **D.** Không có m.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là:

$$x^3-2x^2-1=mx-1\Leftrightarrow x^3-2x^2-mx=0\Leftrightarrow x\left(x^2-2x-m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-2x-m=0(1)\end{array}\right.$$

Để (C) và (d) cắt nhau tại ba điểm phân biệt thì **(1)** có hai nghiệm phân biệt khác 0. Ta có:

$$\begin{cases}\Delta'>0\\0^2-0-m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+m>0\\m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-1\\m\neq 0\end{cases}$$

Gọi x_1,x_2 là nghiệm của **(1)**, ta có $B\left(x_1;mx_1-1\right);C\left(x_2;mx_2-1\right)$. Trọng tâm G của tam giác KBC, ta có

$$\begin{cases}x_G=\dfrac{4+x_1+x_2}{3}=2\\y_G=\dfrac{11+mx_1+mx_2-2}{3}=\dfrac{2m+9}{3}\end{cases}$$

Theo giả thiết G thuộc đường thẳng $(d): y=2x+1$ nên ta có: $\dfrac{2m+9}{3}=2.2+1\Rightarrow m=3(tm)$

Câu 2: Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=3x+m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=x^3+1$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** -1.

Lời giải

Chọn C

$y'=3x^2$.

Giả sử đường thẳng $y=3x+m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=x^3+1$ tại điểm x_0 thì $y'(x_0)=3\Leftrightarrow x_0=\pm 1$.

Đk đủ: $x_0=1\Rightarrow y_0=2$ thì PTTT là $y=3x-2\Rightarrow m=-1$.

$x_0=-1\Rightarrow y_0=0$ thì PTTT là $y=3x+3\Rightarrow m=3$.

Tổng các phần tử của S bằng 2.

Cách 2: Điều kiện tiếp xúc $\begin{cases}x^3+1=3x+m\\3x^2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+1-3x=m\\x=\pm 1\end{cases}\Leftrightarrow m=-1;m=3.$

Câu 3: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=2x^3-(2+m)x+m$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt

A. $m>\frac{1}{2}$. **B.** $m\le\frac{1}{2}$. **C.** $m>-\frac{1}{2}$. **D.** $m>-\frac{1}{2}; m\neq 4$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị với trục Ox:

$2x^3-(2+m)x+m=0\Leftrightarrow 2x^3-2x-mx+m=0\Leftrightarrow (x-1)\left[2x^2+2x-m\right]=0 \quad (1)$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\2x^2+2x-m=0 \quad (2)\end{array}\right.$

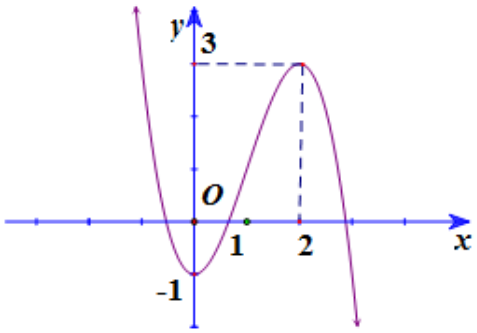
Để đồ thị hàm số cắt Ox tại 3 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow (1)$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (2)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1.

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=1+2m>0\\g(1)=2+2-m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-\frac{1}{2}\\m\neq 4\end{cases}$

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2020;2020]$ của tham số m để phương trình $2f(|x|)-m=0$ có đúng 2 nghiệm thực phân biệt?

A. 2020. **B.** 2022. **C.** 2021. **D.** 2019.

Lời giải

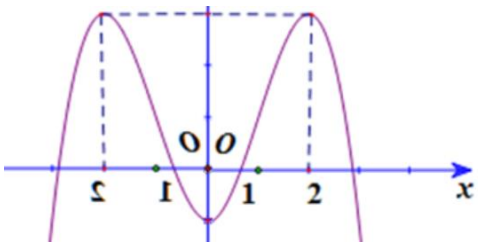
Chọn D

$2f(|x|)-m=0\Leftrightarrow f(|x|)=\frac{m}{2}\ (1)$

Dựa vào đồ thị hàm $y=f(|x|)$ ta có: để phương trình (1) có đúng 2 nghiệm thực phân biệt

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{m}{2}=3\\\frac{m}{2}<-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=6\\m<-2\end{array}\right.$

Vì $m\in[-2020;2020]\Leftrightarrow m\in\{-2020;-2019;.....-3;6\}$. Vậy có 2019 số.



Câu 5: Biết đường thẳng $y=(3m-1)x+6m+3$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ tại ba điểm phân biệt sao cho một giao điểm cách đều hai giao điểm còn lại. Khi đó m thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};2\right)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm là $(3m-1)x+6m+3=x^3-3x^2+1$

$\Leftrightarrow x^3-3x^2-(3m-1)x-6m-2=0\ \ (1)$.

Xét hàm số $g(x)=x^3-3x^2-(3m-1)x-6m-2\ \ (C_m)$.

$g'(x)=3x^2-6x-3m+1\Rightarrow g''(x)=6x-6;\ g''(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Đồ thị (C_m) có điểm uốn là $I(1;-9m-3)$.

Để đường thẳng $y=(3m-1)x+6m+3$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ tại ba điểm phân biệt sao cho một giao điểm cách đều hai giao điểm còn lại

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=(-3)^2-3.(-3m+1)>0\\ I\in Ox\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-\frac{2}{3}\\ m=-\frac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow m=-\frac{1}{3}\in(-1;0).$$

Câu 6: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-\ 2m+1\ x^2+\ 3m+1\ x-\ m+1$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

◆ Xét phương trình

$$x^3-\ 2m+1\ x^2+\ 3m+1\ x-\ m+1\ =0\Leftrightarrow\ x-1\left[x^2-2mx+m+1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=1\\ x^2-2mx+m+1=0\end{bmatrix}\quad *$$

◆ Theo yêu cầu bài toán phương trình $*$ xảy ra 2 trường hợp

TH1: phương trình có nghiệm kép khác 1, tức là $\begin{cases}\Delta'=m^2-m-1=0\\ 1-2m+m+1\neq 0\end{cases}$ loại, do nghiệm không nguyên.

TH2: phương trình có 2 nghiệm phân biệt trong đó 1 là một nghiệm, tức là $\begin{cases}\Delta' = m^2 - m - 1 > 0 \\ 1 - 2m + m + 1 = 0\end{cases} \Leftrightarrow m = 2$.

Nhận xét: cụm từ "cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt" được người ra đề hiểu là "có đúng 2 điểm chung với trục hoành". Theo ý kiến chủ quan của người giải, ta nên phát biểu rõ ràng hơn.

Câu 7: Cho đồ thị $(C_m): y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$

A. $m \neq 0$. **B.** $m \in (0;2)$. **C.** $m = 1$. **D.** $m > -\frac{1}{4}$ và $m \neq 0$.

Lời giải

Chọn C

◆ Để hàm số đã cho cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt thì phương trình hoành độ giao điểm phải có 3 nghiệm phân biệt:

$x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m = 0$

$(x-1)\left(x^2 - x - m\right) = 0$

◆ Ta đặt $x_1 = 1$. Khi đó, để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thì phương trình sau phải có 2 nghiệm phân biệt khác 1.

$x^2 - x - m = 0$

◆ Do có nghiệm khác 1 nên $1 - 1 - m \neq 0$ hay $m \neq 0$.

Ta có $\Delta = 1 + 4m$

◆ Để có 2 nghiệm phân biệt thì $\Delta > 0$ hay $m > -\frac{1}{4}$.

◆ Theo điều kiện của đề bài ta có $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$

$\Leftrightarrow 1 + \left(x_2 + x_3\right)^2 - 2x_2x_3 = 4$

$\Leftrightarrow \left(x_2 + x_3\right)^2 - 2x_2x_3 = 3$

với x_2, x_3 là nghiệm của phương trình bậc 2 trên.

◆ Áp dụng Viet ta có

$1^2 - 2(-m) = 3 \Leftrightarrow m = 1$

◆ Kết hợp các điều kiện ta có $\Leftrightarrow m = 1$.

Câu 8: Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ tại 3 điểm phân biệt A, B, C (B nằm giữa A, C) sao cho $AB = 2BC$. Tính tổng các phần tử thuộc S.

A. -4. **B.** $\frac{7-\sqrt{7}}{7}$. **C.** -2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

◆ Ta có BBT của hàm số $y = x^3 - 3x^2$ như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

◆ Suy ra đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2$ tại 3 điểm phân biệt A,B,C $\Leftrightarrow -4<m<0$.

◆ Khi đó $x_A+x_B+x_C=3, x_Ax_B+x_Bx_C+x_Cx_A=0, x_Ax_Bx_C=m$.

◆ Để B nằm giữa A,C và $AB=2BC$ thì $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_A<x_B<x_C\\ x_B-x_A=2\left(x_C-x_B\right)\end{cases}\\ \begin{cases}x_C<x_B<x_A\\ x_A-x_B=2\left(x_B-x_C\right)\end{cases}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow 3x_B=x_A+2x_C \Leftrightarrow 4x_B-3=x_C \Rightarrow x_A=6-5x_B$.

◆ Suy ra $\begin{cases}\left(6-5x_B\right).x_B+x_B.\left(4x_B-3\right)+\left(4x_B-3\right).\left(6-5x_B\right)=0 \quad (*)\\ \left(4x_B-3\right).x_B.\left(6-5x_B\right)=m \qquad\qquad\qquad\qquad (**)\end{cases}$.

◆ Từ **(*)** được $x_B=\dfrac{7\pm\sqrt{7}}{7}$. Thay vào **(**)** được $m=-\dfrac{98+20\sqrt{7}}{49}$ và $m=\dfrac{-98+20\sqrt{7}}{49}$.

◆ Vậy $S=\left\{-\dfrac{98+20\sqrt{7}}{49};\dfrac{-98+20\sqrt{7}}{49}\right\}$.

Câu 9: Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của a để đồ thị hàm số $y=x^3+\left(a+10\right)x^2-x+1$ cắt trục hoành tại đúng một điểm?

A. 10. **B.** 8. **C.** 11. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

◆ Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và trục hoành là:

$x^3+\left(a+10\right)x^2-x+1=0\left(1\right)$

$\Leftrightarrow x^3+10x^2-x+1=-ax^2$.

Ta thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình nên

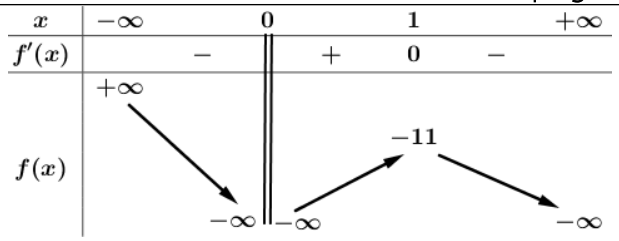
$\left(1\right)\Leftrightarrow -\dfrac{x^3+10x^2-x+1}{x^2}=a$.

◆ Xét hàm số $f\left(x\right)=-\dfrac{x^3+10x^2-x+1}{x^2}$ với $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$

Ta có $f'\left(x\right)=-\dfrac{x^3+x-2}{x^3}=-\dfrac{\left(x-1\right).\left(x^2+x+2\right)}{x^3}$

$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên của hàm số $f\left(x\right)$ như sau:



◆ Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại đúng một điểm khi (1) có đúng 1 nghiệm $\Leftrightarrow a>-11$.

Do a nguyên âm nên $a\in\{-10,-9,-8,...,-1\}$. Vậy có 10 giá trị của a thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc $[-2020;2021]$ của hàm số m để đường thẳng $y=mx-m-1$ cắt đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2+x$ tại ba điểm phân biệt A,B,C sao cho $AB=BC$.

A. 2021. **B.** 2023. **C.** 2024. **D.** 2022.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3-3x^2+x=mx-m-1\Leftrightarrow x^3-3x^2+(1-m)x+m+1=0$.

$$(x-1)\left(x^2-2x-1-m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-2x-1-m=0\quad(1)\end{array}\right.$$

Để để đường thẳng $y=mx-m-1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+x$ tại ba điểm phân biệt A, B, C thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow\begin{cases}2+m>0\\-2-m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m>-2$.

Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $x_1+x_2=2$ với mọi tham số m.

Trường hợp 1: $x_B=1$.

Khi đó yêu cầu bài toán trở thành $\begin{cases}x_A+x_C=2x_B\\y_A+y_C=2y_B\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2=2\\y_1+y_2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2=2\\m(x_1+x_2)-2m+2=2\end{cases}$.

Điều này thỏa mãn với mọi $m>-2$.

Trường hợp 2: $x_B\neq 1$ và giả sử $x_1<x_2$.

Khi đó yêu cầu bài toán trở thành

$$\begin{cases}x_A+x_C=2x_B\\y_A+y_C=2y_B\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+1=2x_2\\y_1+1=2y_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+1=2x_2\\mx_1-m+2=2(mx_2-m+1)\end{cases}(*).$$

Ta có hệ $\begin{cases}x_1+1=2x_2\\x_1+x_2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=1\\x_1=1\end{cases}$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy giá trị m cần tìm là $m>-2$.

Vì $m\in\mathbb{Z},m\in[-2020;2021]\Rightarrow m\in[-1;2021]\Rightarrow$ có 2023 giá trị của m.

Câu 11: Cho bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số $y=-x^3+mx^2-2m$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

◆ Xét phương trình hoành độ giao điểm: $-x^3+mx^2-2m=0$ **(*)**.

◆ Giả sử phương trình **(*)** có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng, theo tính chất của cấp số cộng ta có: $x_1+x_3=2x_2$.

◆ Áp dụng định lí Vi-et ta có: $x_1+x_2+x_3=m \Rightarrow 3x_2=m \Leftrightarrow x_2=\dfrac{m}{3}$.

◆ Vì $x_2=\dfrac{m}{3}$ là một nghiệm của phương trình **(*)** nên ta có:

$$-\left(\frac{m}{3}\right)^3+m.\left(\frac{m}{3}\right)^2-2m=0 \Leftrightarrow 2m^3-54m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=3\sqrt{3} \\ m=-3\sqrt{3} \end{array}\right. .$$

◆ Thử lại:

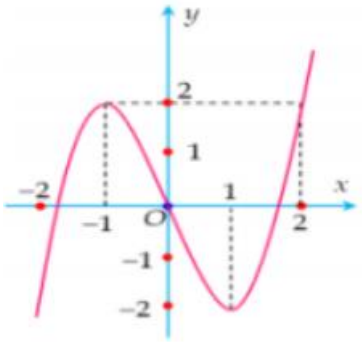
+ Với $m=0$, phương trình trở thành: $-x^3=0 \Leftrightarrow x=0$ **(loại)**.

+ Với $m=3\sqrt{3}$, phương trình trở thành: $-x^3+3\sqrt{3}x^2-6\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-3+\sqrt{3} \\ x_2=\sqrt{3} \\ x_3=3+\sqrt{3} \end{array}\right.$ và 3 nghiệm này lập thành 1 CS**C.**

+ Với $m=-3\sqrt{3}$, phương trình trở thành: $-x^3-3\sqrt{3}x^2+6\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-3-\sqrt{3} \\ x_2=-\sqrt{3} \\ x_3=3-\sqrt{3} \end{array}\right.$ và 3 nghiệm này lập thành 1 CS**C.**

◆ Vậy có 2 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán là $m=3\sqrt{3}$ và $m=-3\sqrt{3}$.

Câu 12: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{2f(\cos x)}\right)=m$ có nghiệm $x\in\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** -2.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\cos x$, do $x\in\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ nên suy ra $t\in(-1;0]$.

Trên khoảng $(-1;0)$ hàm số nghịch biến nên suy ra

Với $t \in (-1;0]$ thì $f(0) \le f(t) < f(-1)$ hay $0 \le f(t) < 2$.

Đặt $u = \sqrt{2f(\cos x)}$ thì $u = \sqrt{2f(t)}, u \in [0;2)$. Khi đó bài toán trở thành:

Tìm m để phương trình $f(u) = m$ có nghiệm $u \in [0;2)$.

Quan sát đồ thị ta thấy rằng với $u \in [0;2)$ thì $f(u) \in [-2;2) \Rightarrow -2 \le m < 2$.

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2;-1;0;1\} \Rightarrow \sum m = -2$.

Câu 13: Gọi S là tập hợp các số nguyên m để phương trình $x^3 - (2m+1)x^2 + 2(3m-2)x - 8 = 0$ có ba nghiệm lập thành một cấp số nhân. Tổng các phần tử của S bằng

A. 0. **B.** -2. **C.** 3. **D.** -1.

Lời giải

Chọn C

Giả sử x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình $x^3 - (2m+1)x^2 + 2(3m-2)x - 8 = 0$.

Khi đó ta có $x^3 - (2m+1)x^2 + 2(3m-2)x - 8 = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

Ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2m+1 \\ x_1x_2x_3 = 8 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 2(3m+2) \end{cases}$

Do x_1, x_2, x_3 lập thành một cấp số nhân nên ta có $x_1x_2x_3 = 8 \Leftrightarrow x_2 = 2$.

Thay $x_2 = 2$ vào phuognw trình $x^3 - (2m+1)x^2 + 2(3m-2)x - 8 = 0$ ta có

$8 - (2m+1).4 + 4(3m-2) - 8 = 0 \Leftrightarrow 4m = 12 \Leftrightarrow m = 3$.

Thử lại với $m = 3$ ta thấy thỏa mãn. Vậy $m = 3$. Dó đó tổng tất cả các giá trị của m bằng 3

Câu 14: Cho hàm số $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}mx + m - 8$, $x \in \mathbb{R}$ với m là một hằng số khác 0. Biết rằng phương trình $f(x) = 0$ có đúng 2 nghiệm phân biệt thì có bao nhiêu giá trị nguyên dương k thỏa mãn phương trình $f(x) = k$ có 3 nghiệm phân biệt?

A. 3. **B.** 6. **C.** 34. **D.** 31.

Lời giải

Chọn D

$pt\ f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)\left(x^2 + 2x + 4 - \frac{m}{2}\right) = 0$ có đúng 2 nghiệm phân biệt

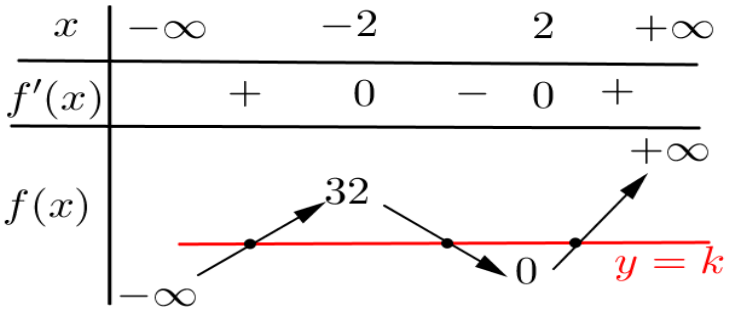
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ \underbrace{x^2 + 2x + 4 - \frac{m}{2} = 0}_{g(x)} \quad (1) \end{array}\right.$ có đúng 2 nghiệm phân biệt

+ $g(2) = 0 \Rightarrow m = 24$ **(nhận)**

$f(x) = x^3 - 12x + 16 \to f'(x) = 3x^2 - 12$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

BBT



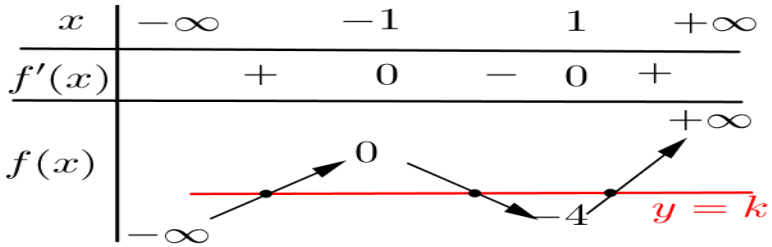
Phương trình $f(x)=k$ có 3 nghiệm phân biệt khi $0<k<32$ và $k\in\mathbb{N}^*\to k=\{1;2;3;....;31\}$

+ $Pt\ (1)$ có nghiệm kép và khác 2 $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=0\\ g(2)\neq 0\end{cases}\Rightarrow m=6$ **(nhận)**

$f(x)=x^3-3x-2\to f'(x)=3x^2-3$

$f'(x)=0\Rightarrow x=\pm 1$

BBT



Phương trình $f(x)=k$ có 3 nghiệm phân biệt khi $-4<k<0$ và $k\in\mathbb{N}^*\to k\in\varnothing$

Vậy có 31 giá trị k thỏa điều kiện bài toán.

Câu 15: Cho hàm số $y=x^3-(m+2)x^2-(2m+13)x-m-2$ có đồ thị (C_m), đường thẳng $d:y=mx+m+8$ và điểm $I(1;4)$. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m, biết rằng đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt A,B,C với A có hoành độ bằng -2 và tam giác IBC cân tại I.

A. -12. **B.** -6. **C.** -4. **D.** -10.

Lời giải

Chọn B

+ Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C_m) là:

$$x^3-(m+2)x-(3m+13)x-2m-10=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=-2\\ x=-1\\ x=m+5\end{bmatrix}$$

+ Để đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt A,B,C thì $\begin{cases}m\neq -7\\ m\neq -6\end{cases}$

+ Giả sử $B(-1;8),C(m+5;m^2+6m+8)$. Để tam giác IBC cân tại I

thì $IB^2=IC^2\Leftrightarrow 20=(m+4)^2+(m^2+6m+4)^2\Leftrightarrow\begin{bmatrix}m=-2\\ m=-6\,(l)\\ m=-2\pm\sqrt{3}\end{bmatrix}$

Vậy có ba giá trị của m thỏa mãn nên tổng các giá trị của m bằng -6.

Câu 16: Gọi d là đường thẳng đi qua $A(2;0)$ có hệ số góc $m(m>0)$ cắt đồ thị $(C): y=-x^3+6x^2-9x+2$ tại ba điểm phân biệt A,B,C. Gọi B',C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của B,C lên trục tung. Biết rằng hình thang $BB'C'C$ có diện tích bằng 8, giá trị của m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(5;8)$. **B.** $(-5;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(1;5)$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình đường thẳng $d: y=m(x-2)$. Phương trình hoành độ giao điểm

$$-x^3+6x^2-9x+2=m(x-2)\Leftrightarrow (x-2)\left(x^2-4x+m+1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\Rightarrow A(2;0) \\ x^2-4x+m+1=0 \end{array}\right.$$

Để (C) cắt d tại 3 điểm phân biệt thì $\Delta>0\Leftrightarrow 4-m-1>0\Leftrightarrow m<3$.

Giả sử $B(x_1,mx_1-2m), C(x_2,mx_2-2m)\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=4 \\ x_1x_2=m+1 \end{cases}$.

Ta có $B'(0,mx_1-2m), C'(0,mx_2-2m)$.

$$S_{BB'C'C}=\frac{1}{2}B'C'\left(BB'+CC'\right)=8\Leftrightarrow B'C'\left(BB'+CC'\right)=16.$$

Mà $B'C'=\left|m\left(x_1-x_2\right)\right|, BB'=\left|x_1\right|, CC'=\left|x_2\right|$.

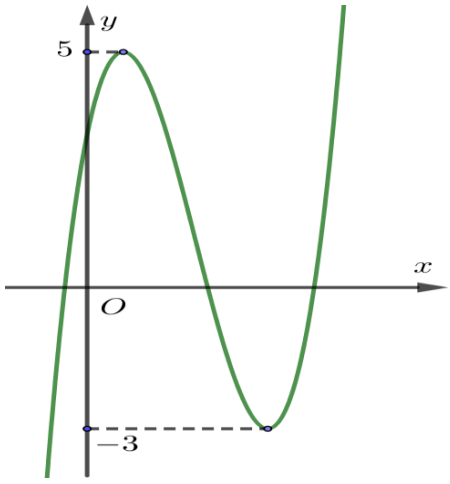
Do m dương nên $x_1x_2=m+1>0$ mà $x_1+x_2=4>0\Rightarrow x_1>0, x_2>0$.

$$\Rightarrow B'C'=m\left|x_1-x_2\right|, BB'=x_1, CC'=x_2\Rightarrow m\left|x_1-x_2\right|\left(x_1+x_2\right)=16\Leftrightarrow m\left|x_1-x_2\right|=4$$

$$\Leftrightarrow m^2\left(x_1-x_2\right)^2=16\Leftrightarrow m^2\left[\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2\right]=16\Leftrightarrow m^2\left(16-4m-4\right)=16$$

$$\Leftrightarrow m^3-3m^2+4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1(l) \\ m=2 \end{array}\right.$$

Câu 17: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^3(x)-2mf^2(x)+\left(m^2-3m-9\right)f(x)+3m^2+9m=0$ có đúng 8 nghiệm phân biệt?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

$f^3(x)-2mf^2(x)+\left(m^2-3m-9\right)f(x)+3m^2+9m=0$

Đặt $t=f(x)$, phương trình trở thành:

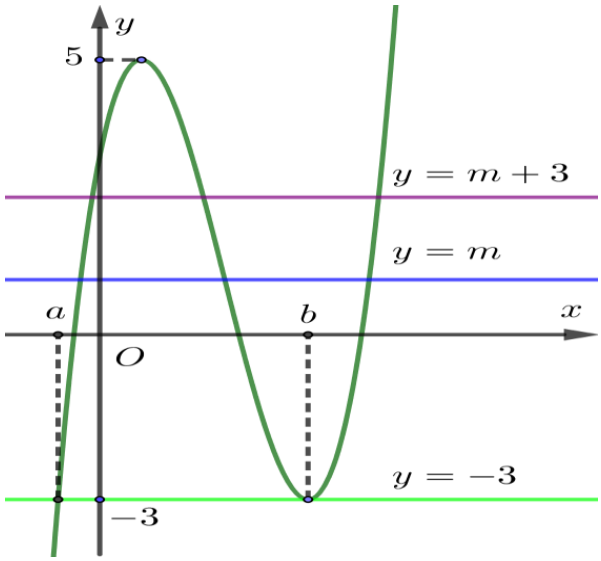
$t^3-2mt^2+\left(m^2-3m-9\right)t+3m^2+9m=0$

$\Leftrightarrow (t+3)\left[t^2-(2m+3)t+m^2+3m\right]=0$

$\Leftrightarrow (t+3)(t-m)(t-m-3)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-3 \\ t=m \\ t=m+3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x)=-3 & (1) \\ f(x)=m & (2) \\ f(x)=m+3 & (3) \end{array}\right.$

Nhận xét các phương trình (2) và (3) không có nghiệm chung.



Dựa vào đồ thị, ta thấy:

$(1)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \\ x=b \end{array}\right.$

$YCBT \Leftrightarrow$ Các phương trình (2) và (3) đều có 3 nghiệm phân biệt khác a, b

$\Leftrightarrow \begin{cases} m+3<5 \\ m>-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<2 \\ m>-3 \end{cases} \Leftrightarrow -3<m<2$

Mà m là số nguyên nên $m\in\{-2;-1;0;1\}$.

Câu 18: Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $f(x)=x^3-6(m+1)x^2+3(2m+1)x+2$ cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn -1.

Biết rằng $S=\left(\dfrac{-a}{b};+\infty\right)$; trong đó a,b là các số nguyên dương và phân số $\dfrac{a}{b}$ là tối giản. Giá trị biểu thức $T=a+b$ tương ứng bằng

A. 4. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$x^3-6(m+1)x^2+3(2m+1)x+2=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-(6m+5)x-2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-(6m+5)x-2=0(*) \end{array}\right.$

Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ lớn hơn -1 và khác 1.Ta có:

$$\begin{cases} \Delta>0 \\ x_1+x_2>-2 \\ (x_1+1)(x_2+1)>0 \\ 1^2-(6m+5)-2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36m^2+60m+33>0 \\ 6m+5>-2 \\ 6m+4>0 \\ m\neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m>\frac{-2}{3}$$

Do đó $a=2;b=3\Rightarrow T=a+b=5$

Câu 19: Điều kiện cần và đủ của tham số thực m để đường thẳng $y=3x+m-2$ cắt đồ thị hàm số $y=(x-1)^3$ tại ba điểm phân biệt là

A. $-3\le m\le 1$. **B.** $-3<m<1$. **C.** $-1<m<3$. **D.** $-1\le m\le 3$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình: $(x-1)^3=3x+m-2\Leftrightarrow x^3-3x^2+1=m$ **(*).**

Đường thẳng $y=3x+m-2$ cắt đồ thị $y=(x-1)^3$ tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt.

Đặt $f(x)=x^3-3x^2+1\Rightarrow f'(x)=3x^2-6x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $f(x)=x^3-3x^2+1$ tại ba điểm phân biệt. Vậy $-3<m<1$.

Câu 20: Cho hàm số $y=x^3+3x^2+m$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt A,B,C sao cho B là trung điểm AC. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. $m\in(-4;0)$. **B.** $m\in(0;+\infty)$. **C.** $m\in(-\infty;-4)$. **D.** $m\in(-4;-2)$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành là $x^3+3x^2+m=0(1)$.

Giả sử (1) có 3 nghiệm phân biệt $x_1;x_2;x_3\left(x_1<x_2<x_3\right)$ thì $x_1;x_2;x_3$ lần lượt là hoành độ của A,B,C và $x^3+3x^2+m=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

$\Leftrightarrow x^3+3x^2+m=x^3-\left(x_1+x_2+x_3\right)x^2+\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\right)x-x_1x_2x_3$

Nên ta có $x_1+x_2+x_3=-3$.

Để B là trung điểm AC thì $x_1+x_3=2x_2$ nên $3x_2=-3\Leftrightarrow x_2=-1$.

Tức là (1) có 1 nghiệm là $x=-1$. Suy ra $-1+3+m=0\Leftrightarrow m=-2$.

Thử lại với $m=-2$ thì (1) trở thành $x^3+3x^2-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1-\sqrt{3}\\x=-1\\x=-1+\sqrt{3}\end{array}\right.$ (thỏa điều kiện bài toán).

Cách 2: Ta có $y'=3x^2+6x$ và $y''=6x+6$ nên (C) có điểm uốn $I(-1;m+2)$.

Để (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt A,B,C sao cho B là trung điểm AC thì $I\in Ox$

$\Leftrightarrow m+2=0\Leftrightarrow m=-2$.

Câu 21: Cho hàm số $y=x^3-2x^2-1$ có đồ thị (C), đường thẳng $(d):y=mx-1$ và điểm $K(4;11)$. Biết rằng (C) và (d) cắt nhau tại ba điểm phân biệt A,B,C trong đó $A(0;-1)$ còn trọng tâm tam giác KBC nằm trên đường thẳng $y=2x+1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m=4$. **B.** $m=2$. **C.** $m=3$. **D.** Không tồn tại m

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ:

$$x^3-2x^2-1=mx-1\Leftrightarrow x^3-2x^2-mx=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-2x-m=0(1)\end{array}\right.$$

Suy ra $A(0;-1)$ và hoành độ của điểm B và C là nghiệm của phương trình (1)

Để (C) và (d) cắt nhau tại ba điểm phân biệt A,B,C khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0

Khi và chỉ khi: $\begin{cases}\Delta'_{(1)}>0\\ \mathrm{m}\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+\mathrm{m}>0\\ \mathrm{m}\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{m}>-1\\ \mathrm{m}\neq 0\end{cases}(*)$

Giả sử: $B(x_1;\mathrm{m}\,x_1-1)$, $C(x_2;\mathrm{m}\,x_2-1)$. Theo Vi–ét ta có $x_1+x_2=2$

Gọi G là trọng tâm của tam giác KBC :

$$\begin{cases}\mathrm{x_G}=\dfrac{4+\mathrm{x_1}+\mathrm{x_2}}{3}\\ \mathrm{y_G}=\dfrac{11+\mathrm{mx_1}-1+\mathrm{mx_2}-1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{x_G}=2\\ \mathrm{y_G}=\dfrac{2\mathrm{m}+9}{3}\end{cases}\Rightarrow \mathrm{G}\left(2;\dfrac{2\mathrm{m}+9}{3}\right)$$

Trọng tâm G nằm trên đường thẳng $y=2x+1$ suy ra $\dfrac{2m+9}{3}=2.2+1\Leftrightarrow m=3$ thỏa mãn $(*)$

Câu 22: Cho hàm số $y=x^3-2x^2+(1-m)x+m$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1^2+x_2^2+x_3^2<4$.

A. $\begin{cases}-\dfrac{1}{4}<m<1\\ m\neq 0\end{cases}$. **B.** $m<1$. **C.** $-\dfrac{1}{4}<m<1$. **D.** $\dfrac{1}{4}<m<1$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành là:

$$x^3-2x^2+(1-m)x+m=0\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-x-m\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2-x-m=0\ \ (*)\end{array}\right.$$

(C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases}1+4m>0\\ 1^2-1-m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m>-\dfrac{1}{4}\\ m\neq 0\end{cases}.$$

Khi đó $x_1=1$, x_2 và x_3 là hai nghiệm của $(*)$.

$x_1^2+x_2^2+x_3^2<4\Leftrightarrow (x_2+x_3)^2-2x_2x_3<3\Leftrightarrow 1+2m<3\Leftrightarrow m<1$.

Vậy các giá trị cần tìm của m là $\begin{cases}-\dfrac{1}{4}<m<1\\ m\neq 0\end{cases}$.

Câu 23: Cho hàm số $y=x^3-2x^2+(1-m)x+m$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt x_1,x_2,x_3 sao cho $x_1^2+x_2^2+x_3^2<4$.

A. $\begin{cases}-\dfrac{1}{4}<m<1\\ m\neq 0\end{cases}$. **B.** $m<1$. **C.** $-\dfrac{1}{4}<m<1$. **D.** $\dfrac{1}{4}<m<1$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm:

$x^3-2x^2+(1-m)x+m=0\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-x-m\right)=0\ (1)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_3=1\\ x^2-x-m=0\ (2)\end{array}\right.$. Điều kiện để phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt là phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases}x\neq 1\\ \Delta=1+4m>0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m\neq 0\\ m>-\dfrac{1}{4}\end{cases}$.

Khi đó phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2.

Ta có $x_1^2+x_2^2+x_3^2<4\Leftrightarrow x_1^2+x_2^2<3\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2<3\Leftrightarrow 1^2+2m<3\Leftrightarrow m<1$.

Vậy $\begin{cases} -\dfrac{1}{4} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$.

Câu 24: Cho hàm số $y = x^3 - (m+2)x^2 - (2m+13)x - m - 2$ có đồ thị là (C_m), đường thẳng $d: y = mx + m + 8$ và điểm $I(1;4)$. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m, biết rằng đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt A, B, C với A có hoành độ bằng -2 và tam giác IBC cân tại I.

A. -12. **B.** -6. **C.** -4. **D.** -10.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) với đường thẳng $d: y = mx + m + 8$ là

$x^3 - (m+2)x^2 - (2m+13)x - m - 2 = mx + m + 8$

$\Leftrightarrow x^3 - (m+2)x^2 - (3m+13)x - 2m - 10 = 0$

$\Leftrightarrow (x+2)\left[x^2 - (m+4)x - (m+5)\right] = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ g(x) = 0 \end{array}\right.$ (với $g(x) = x^2 - (m+4)x - (m+5)$)

Đồ thị (C_m) cắt đường thẳng d tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi $g(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt khác -2, nghĩa là $\begin{cases} g(-2) \neq 0 \\ \Delta_g > 0 \end{cases}$.

Ta có $\Delta_g = (m+4)^2 + 4(m+5) = m^2 + 12m + 36 > 0, \forall m \neq -6.$ và $g(-2) = m + 7$ do vậy

$\begin{cases} g(-2) \neq 0 \\ \Delta_g > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 7 \neq 0 \\ m \neq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -6 \\ m \neq -7 \end{cases}$ (*).

Với điều kiện (*) ta có đồ thị (C_m) cắt đường thẳng d tại 3 điểm phân biệt $A(-2; 8-m)$ và hai điểm $B(x_1; y_1), C(x_2; y_2)$ trong đó x_1, x_2 là hai nghiệm của $g(x) = 0$ và $x_1 + x_2 = m + 4$.

Gọi K là trung điểm của BC ta có $K\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}; \dfrac{m(x_1 + x_2) + 2m + 16}{2}\right)$ hay $K\left(\dfrac{m+4}{2}; \dfrac{m^2 + 6m + 16}{2}\right)$.

Tam giác IBC cân tại I nên ta có $IK \perp BC$ hay $\overrightarrow{IK}$ cùng phương với pháp tuyến của đường thẳng d.

Ta có $\overrightarrow{IK} = \left(\dfrac{m+2}{2}; \dfrac{m^2 + 6m + 8}{2}\right)$ và $\vec{n} = (m; -1)$ là một pháp tuyến của đường thẳng d, do đó ta cần có $\dfrac{m+2}{m} = \dfrac{m^2 + 6m + 8}{-1} \Leftrightarrow m^3 + 6m^2 + 9m + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = -2 \pm \sqrt{3} \end{array}\right.$.

Kiểm tra lại thấy $m = -2$ không thỏa do khi đó $I \in d$.

Vậy có 2 giá trị của tham số m để thỏa mãn bài toán và tổng tất cả các giá trị đó bằng -4.

Câu 25: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2021.f\left(f(x)\right)=m$ có 7 nghiệm phân biệt?

A. 8078. **B.** 0. **C.** 4041. **D.** 8076.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $2021.f\left(f(x)\right)=m \Leftrightarrow f\left(f(x)\right)=\dfrac{m}{2021}$.

Khảo sát hàm số $y=f\left(f(x)\right)$ trên $\mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y'=f'(x).f'\left(f(x)\right)=\left(3x^2-6x\right)\left(3\left(f(x)\right)^2-6f(x)\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0=x_1 \\ x=2=x_2 \\ f(x)=0 \\ f(x)=2 \end{array}\right.$.

Chú ý rằng: $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_3\approx 2,879 \\ x=x_4\approx 0,653 \\ x=x_5\approx -0,532 \end{array}\right.$ và $f(x)=2 \Leftrightarrow x=x_6\approx 3,104$.

Do 6 nghiệm trên đều là nghiệm đơn nên hàm số $y=f\left(f(x)\right)$ có 6 cực trị là x_i, $i=1,2,...,6$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_5	x_1	x_4	x_2	x_3	x_6	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình $2021.f\left(f(x)\right)=m$ có 7 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow -1<\dfrac{m}{2021}<1 \Leftrightarrow -2021<m<2021$

Do m nguyên nên $m\in\{-2020,-2019,...,2019,2020\}$, do đó có 4041 số thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 26: Cho hàm số $f(x)=\left(1-m^3\right)x^3+3x^2+(4-m)x+2$ với m là tham số. Có bao nhiêu số tự nhiên m sao cho phương trình $f(x)=0$ có nghiệm trên đoạn $\left[\dfrac{1}{5};5\right]$.

A. 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f(x)=0 \Leftrightarrow (x+1)^3+x+1=(mx)^3+mx$ (*).

Xét $f(t)=t^3+t$ với $t\in\mathbb{R}$.

$f'(t)=3t^2+1>0 \ \forall t\in\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow x+1=mx \Leftrightarrow (m-1)x=1$.

Để phương trình có nghiệm trên đoạn $\left[\frac{1}{5};5\right]$ thì $\begin{cases} m-1\neq 0 \\ \frac{1}{5}\le \frac{1}{m-1}\le 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1 \\ \frac{6}{5}\le m\le 6 \end{cases}$.

Vì m là số tự nhiên nên $m\in\{2;3;4;5;6\}$. Vậy có 5 giá trị m thỏa đề.

Câu 27: Cho hàm số $y=f(x)=2x^3-3x^2+1$. Tập hợp các giá trị m để phương trình $f\left(f\left(\frac{2\sin x+1}{2}\right)\right)=f(m)$ có nghiệm là đoạn $[a;b]$. Khi đó giá trị $4a^2+8b$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(7;\frac{23}{2}\right)$. **B.** $(-2;5)$. **C.** $\left(\frac{43}{3};\frac{39}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{37}{3};\frac{65}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=6x^2-6x$.

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

Ta có: $\frac{2\sin x+1}{2}=\sin x+\frac{1}{2}\in\left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$ suy ra $f\left(\frac{2\sin x+1}{2}\right)\in[0;1]$ nên $f\left(f\left(\frac{2\sin x+1}{2}\right)\right)\in[0;1]$.

Phương trình $f\left(f\left(\frac{2\sin x+1}{2}\right)\right)=f(m)$ có nghiệm $\Leftrightarrow 0\le f(m)\le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^3-3m^2+1\ge 0 \\ 2m^3-3m^2\le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le m\le \frac{3}{2}$.

Vậy $4a^2+8b=4.\frac{1}{4}+8.\frac{3}{2}=13$.

Câu 28: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2x^3-3x^2+2-2^{1-2m}=0$ có 3 nghiệm thực phân biệt.

A. $\frac{1}{2}<m<1$. **B.** $-1<m<0$. **C.** $0<m<\frac{1}{2}$. **D.** $-1<m<\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$2x^3-3x^2+2-2^{1-2m}=0\Leftrightarrow 2x^3-3x^2+2=2^{1-2m}\,(1)$

Xét hàm số $f(x)=2x^3-3x^2+2$

$f'(x)=6x^2-6x$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 6x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	1	↗	$+\infty$

Phương trình (1) có 3 nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow 1<2^{1-2m}<2\Leftrightarrow 0<1-2m<1\Leftrightarrow 0<m<\dfrac{1}{2}$

Câu 29: Cho hàm số $y=x^3-2(m+1)x^2+(5m+1)x-2m-2$ có đồ thị là (C_m), với m là tham số. Tập S là tập hợp các giá trị nguyên của m $(m\in(-2021;2021))$ để (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt $A(2;0),B,C$ sao cho trong hai điểm B,C có một điểm nằm trong và một điểm nằm ngoài đường tròn có phương trình $x^2+y^2=1$. Tính số các phần tử của S ?

A. 4041. **B.** 2020. **C.** 2021. **D.** 4038.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $x^3-2(m+1)x^2+(5m+1)x-2m-2=0(1)$

$(1)\Leftrightarrow(x-2)(x^2-2mx+m+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\g(x)=x^2-2mx+m+1=0\end{array}\right.\quad(2)$

C_m) cắt trục *Ox* tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow(2)$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ khác 2

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\g(2)\neq 0\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}m^2-m-1>0\\4-4m+m+1\neq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\in\left(-\infty;\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)\\m\neq\dfrac{5}{3}\end{cases}(*)$$

Khi đó: $A(2;0),B(x_1;0),C(x_2;0)$;

Hai điểm B,C thỏa mãn điều kiện đầu bài $\Leftrightarrow(OB-1)(OC-1)<0$

$\Leftrightarrow(|x_1|-1)(|x_2|-1)<0\Leftrightarrow|x_1x_2|+1<|x_1|+|x_2|$

$\Leftrightarrow(x_1x_2)^2+1<(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

$$\Leftrightarrow 3m^2-4m-4>0 \Leftrightarrow m\in(-\infty;\frac{-2}{3})\cup(2;+\infty)$$

Kết hợp với đk ta có $m\in(-\infty;\frac{-2}{3})\cup(2;+\infty)$ thỏa mãn ycbt.

Vậy số các phần tử của S là 4038.

Câu 30: Cho hàm số $f(x)=x^3-mx^2+(m-2)x+1$ với m là tham số. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình sau có 3 nghiệm thực phân biệt $f'(x).e^{f(x)}+f(x).\pi^{f'(x)}=f'(x)+f(x)$

A. 1. **B.** vô số. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Xét $f'(x).e^{f(x)}+f(x).\pi^{f'(x)}=f'(x)+f(x)$ $(*)$.

Ta có $f(x)=x^3-mx^2+(m-2)x+1=(x-1)\left[x^2+(1-m)x-1\right]=(x-1).g(x)$.

Với $g(x)=x^2+(1-m)x-1$ và $g(1)=1-m$ và $g(m-1)=-1$.

Lại có $f'(x)=3x^2-2mx+m-2$ với $\begin{cases}f'(1)=1-m\\ f(1)=0\end{cases}$.

Với $f(1)$ nếu $f'(1)>0\Leftrightarrow m<1$ thì $f(x)\ge 0,\forall x\ge 1$ suy ra $\begin{cases}e^{f(x)}\ge f(x)+1\\ \pi^{f(x)}\ge f(x)+1\end{cases}$.

Khi đó $(*)\Rightarrow f(x)+f'(x)\ge f'(x)\left[f(x)+1\right]+f(x)\left[f'(x)+1\right]\Leftrightarrow 2f(x).f'(x)\le 0$ $(**)$.

Trường hợp 1. Nếu $f(x)=0$ thì $f'(x)=0$.

Trường hợp 2. Nếu $f(x)>0$ thì $(**)\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}\le 0$.

Mặt khác $\Delta'_{f'(x)}=m^2-3m+6=\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0,\forall m\Rightarrow f'(x)=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt hay hàm số luôn có 2 điểm cực trị.

Giả sử rằng $f(x)=0$ có các nghiệm $x=(x_1;x_2;...)$, ta có $\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i}\le 0$ (1).

Do $f(x)=0$ có ba nghiệm nên (1) có 2 nghiệm **(vô lí)**.

Như vậy $\begin{cases}f(x)=0\\ f'(x)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1\\ g(x)=x^2+(1-m)x-1=0;\Delta_{g(x)}=(1-m)^2+4>0\end{array}\right.\\ h(x)=3x^2-2mx+m-2=0;\Delta_{h(x)}=m^2-3m+6>0\end{cases}$.

Với $g(1)=0\Leftrightarrow 1-m=0\Leftrightarrow m=1$ và $h(1)=0\Leftrightarrow -m+1=0\Leftrightarrow m=1$.

Do đó với $m\ne 1$, phương trình $f'(x).e^{f(x)}+f(x).\pi^{f'(x)}=f'(x)+f(x)$ luôn có 3 nghiệm thực phân biệt.

Vậy có vô số giá trị của m thỏa đề.

DẠNG 4 Tìm m liên quan đến tương giao hàm trùng phương

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^4-3x^2+m=0$ có 4 nghiệm thực phân biệt?

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 2: Biết đồ thị hàm số $y=(x-1)(x+1)(x^2-7)-m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ là x_1,x_2,x_3,x_4. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để $\frac{1}{1-x_1}+\frac{1}{1-x_2}+\frac{1}{1-x_3}+\frac{1}{1-x_4}>1.$

A. 9. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 3: Đường thẳng $y=m^2$ cắt đồ thị hàm số $y=x^4-x^2-10$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho tam giác OAB vuông (với O là gốc tọa độ). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m^2\in(5;7)$. **B.** $m^2\in(3;5)$. **C.** $m^2\in(0;1)$. **D.** $m^2\in(1;3)$.

Câu 4: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^4-2x^2+3-2m=0$ có nghiệm thuộc $(-2;2)$?

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 5: Đường thẳng $y=m^2$ cắt đồ thị hàm số $y=x^4-x^2-10$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho tam giác OAB vuông (với O là gốc tọa độ). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m^2\in(5;7)$. **B.** $m^2\in(3;5)$. **C.** $m^2\in(0;1)$. **D.** $m^2\in(1;3)$.

Câu 6: Đồ thị của hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+2m+1$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m\in(6;9)$. **B.** $m\in(-6;-3)$. **C.** $m\in(-3;2)$. **D.** $m\in(2;6)$.

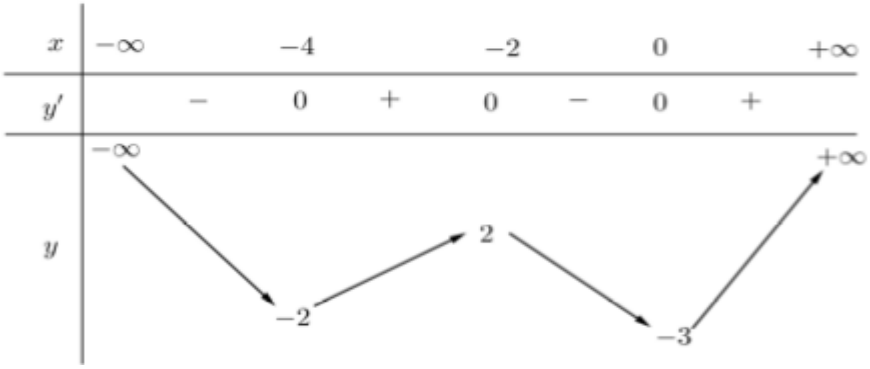
Câu 7: Cho hàm số $y=x^4-(3m+2)x^2+3m$ có đồ thị (C_m). Xác định tất cả các giá trị của tham số thực m để (C_m) cắt đường thẳng $y=-1$ tại bốn điểm phân biệt

A. $\begin{cases}m\neq 0\\ m<-\frac{1}{3}\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}m\neq 0\\ m>-\frac{1}{3}\end{cases}$. **C.** $m>-\frac{1}{3}$. **D.** $m<-\frac{1}{3}$.

Câu 8: Tập các giá trị của tham số m để phương trình $x^4-2x^2-3m+1=0$ có hai nghiệm phân biệt là

A. $(1;+\infty)\cup\{0\}$. **B.** $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)\cup\{0\}$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(1;+\infty)$.

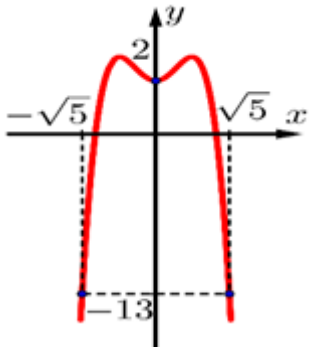
Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $6f\left(x^2-4x\right)=m$ có ít nhất 3 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $\left(0;+\infty\right)$?

A. 25. **B.** 30. **C.** 29. **D.** 24.

Câu 10: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ



Xét hàm số $g\left(x\right)=2f\left(x\right)+2x^3-4x-3m-6\sqrt{5}$ với m là tham số thực. Điều kiện cần và đủ để $g\left(x\right)\le 0,\forall x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$ là:

A. $m\ge\frac{2}{3}f\left(0\right)$. **B.** $m\ge\frac{2}{3}f\left(-\sqrt{5}\right)$. **C.** $m\le\frac{2}{3}f\left(\sqrt{5}\right)$. **D.** $m\ge\frac{2}{3}f\left(\sqrt{5}\right)$.

Câu 11: Cho hàm số $y=x^4-\left(3m+2\right)x^2+3m$ có đồ thị $\left(C_m\right)$. Xác định tất cả các giá trị của tham số thực m để $\left(C_m\right)$ cắt đường thẳng $y=-1$ tại bốn điểm phân biệt

A. $\begin{cases}m\ne 0\\ m<-\frac{1}{3}\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}m\ne 0\\ m>-\frac{1}{3}\end{cases}$. **C.** $m>-\frac{1}{3}$. **D.** $m<-\frac{1}{3}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^4-3x^2+m=0$ có 4 nghiệm thực phân biệt?

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=x^2\left(t\ge 0\right)$. Ta được phương trình $t^2-3t+m=0,\quad (1)$.

Phương trình đã cho có 4 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\S>0\\P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9-4m>0\\3>0\\m>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<\dfrac{9}{4}$.

Do m nguyên nên $m\in\{1;2\}$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của tham số m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2: Biết đồ thị hàm số $y=\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x^2-7\right)-m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ là x_1,x_2,x_3,x_4. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để $\dfrac{1}{1-x_1}+\dfrac{1}{1-x_2}+\dfrac{1}{1-x_3}+\dfrac{1}{1-x_4}>1.$

A. 9. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x^2-7\right)-m=x^4-8x^2+7-m$.

Mặc khác ta có $y'=4x^3-16x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm 2\end{array}\right.$. Ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-9-m$	$\nearrow$	$7-m$	$\searrow$	$-9-m$	$\nearrow$	$+\infty$

Để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì $-9<m<7$. Vì hàm số chẵn nên có 2 cặp nghiệm đối xứng. Giả sử $x_1+x_2=0$ và $x_3+x_4=0$.

Theo đề bài ta có: $\dfrac{1}{1-x_1}+\dfrac{1}{1+x_1}+\dfrac{1}{1-x_3}+\dfrac{1}{1+x_3}=\dfrac{2}{1-x_1^2}+\dfrac{2}{1-x_3^2}=\dfrac{4-2\left(x_3^2+x_1^2\right)}{1-\left(x_3^2+x_1^2\right)+x_3^2.x_1^2}>1$

$\dfrac{4-2.8}{1-8+\left(7-m\right)}>1\Leftrightarrow 0<m<12.$ Kết hợp điều kiện suy ra $0<m<7\Rightarrow m\in\{1;2;3;4;5;6\}$.

Câu 3: Đường thẳng $y=m^2$ cắt đồ thị hàm số $y=x^4-x^2-10$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho tam giác OAB vuông (với O là gốc tọa độ). Mệnh đề nào sau đây đúng?

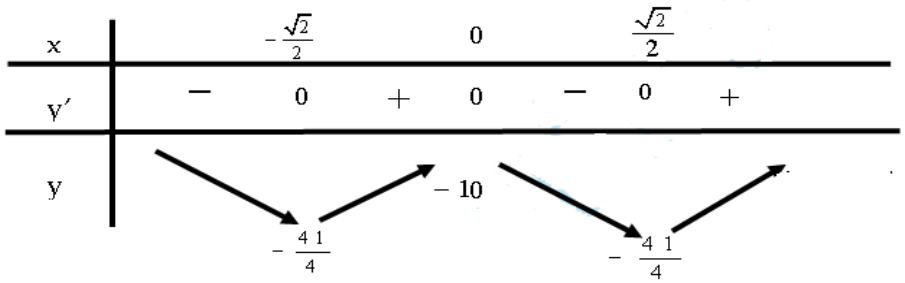
A. $m^2\in(5;7)$. **B.** $m^2\in(3;5)$. **C.** $m^2\in(0;1)$. **D.** $m^2\in(1;3)$.

Lời giải

Chọn D

Xét: $y = x^4 - x^2 - 10$

$$y' = 4x^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$



Vì $m^2 \geq 0$ với mọi m nên từ bảng biến thiên thấy đường thẳng $y = m^2$ luôn cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2 - 10$ tại những cặp điểm đối xứng nhau qua Oy. Giả sử $A(x_1; m^2); B(-x_1; m^2)$. Tam giác OAB vuông **(với O là gốc tọa độ)**

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \vec{0} \Rightarrow -x_1^{\,2} + m^4 = 0 \Rightarrow x_1^{\,2} = m^4 \Rightarrow x_1 = m^2$

$\Rightarrow A(m^2; m^2)$ vì $A(m^2; m^2)$ thuộc đồ thị hàm số nên $m^8 - m^4 - 10 = m^2 \Rightarrow m^2 = 2$.

Câu 4: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^4 - 2x^2 + 3 - 2m = 0$ có nghiệm thuộc $(-2;2)$?

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

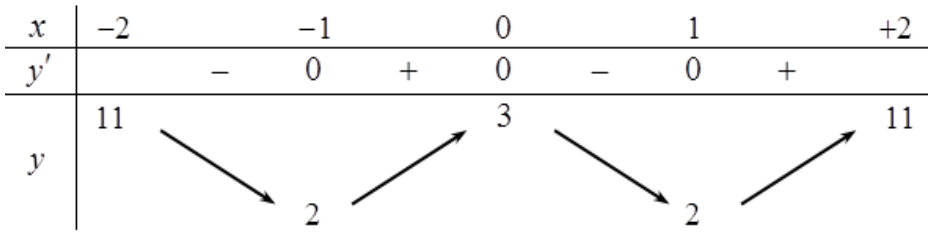
Chọn C

$x^4 - 2x^2 + 3 - 2m = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 3 = 2m$

Xét $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3, x \in (-2;2)$

$$\Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên



Theo yêu câu bài toán, có: $2 \leq 2m < 11 \Leftrightarrow 1 \leq m < 5,5$

$m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1,2,3,4,5\}$.

Câu 5: Đường thẳng $y = m^2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2 - 10$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông (với O là gốc tọa độ). Mệnh đề nào sau đây đúng?

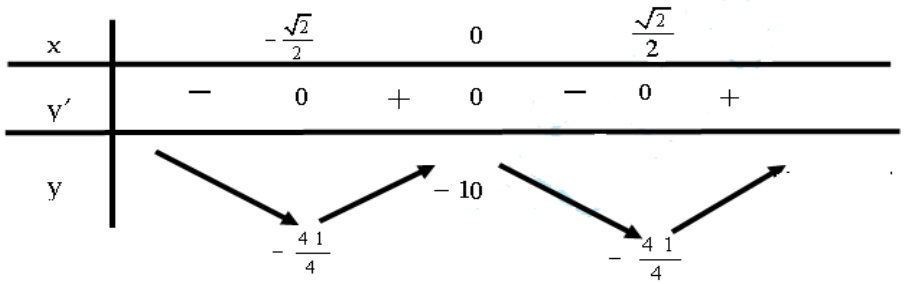
A. $m^2 \in (5;7)$. **B.** $m^2 \in (3;5)$. **C.** $m^2 \in (0;1)$. **D.** $m^2 \in (1;3)$.

Lời giải

Chọn D

Xét: $y = x^4 - x^2 - 10$

$$y' = 4x^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$



Vì $m^2 \geq 0$ với mọi m nên từ bảng biến thiên thấy đường thẳng $y = m^2$ luôn cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2 - 10$ tại những cặp điểm đối xứng nhau qua Oy. Giả sử

$A(x_1; m^2); B(-x_1; m^2)$. Tam giác OAB vuông **(với O là gốc tọa độ)**

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \vec{0} \Rightarrow -x_1^{\,2} + m^4 = 0 \Rightarrow x_1^{\,2} = m^4 \Rightarrow x_1 = m^2$

$\Rightarrow A(m^2; m^2)$ vì $A(m^2; m^2)$ thuộc đồ thị hàm số nên $m^8 - m^4 - 10 = m^2 \Rightarrow m^2 = 2$.

Câu 6: Đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m \in (6;9)$. **B.** $m \in (-6;-3)$. **C.** $m \in (-3;2)$. **D.** $m \in (2;6)$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1 = 0$. (1)

Đặt $t = x^2, t \geq 0$. Phương trình trở thành $t^2 - 2(m+1)t + 2m + 1 = 0$. (2)

Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt, nghĩa là

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - (2m+1) > 0 \\ m + 1 > 0 \\ 2m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -1 \\ m > -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{1}{2}. \\ m \neq 0 \end{cases}$$

Cách 1. Gọi $x_1, x_2, x_3, x_4 (x_1 < x_2 < x_3 < x_4)$ là nghiệm của phương trình (1) và $t_1, t_2 (t_1 < t_2)$ là nghiệm của phương trình (2).

Theo giả thiết, ta có

$x_4 - x_3 = x_3 - x_2 = x_2 - x_1 \Leftrightarrow x_4 - x_3 = x_3 - x_2$

$\Leftrightarrow \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = \sqrt{t_1} + \sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1 > 0$

Ta có hệ

$$\begin{cases} t_1+t_2=2(m+1) \\ t_1t_2=2m+1 \\ t_2=9t_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1=\dfrac{m}{5}+\dfrac{1}{5} \\ t_2=\dfrac{9m}{5}+\dfrac{9}{5} \\ t_1t_2=2m+1 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{m}{5}+\frac{1}{5}\right)\left(\frac{9m}{5}+\frac{9}{5}\right)=2m+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=4 \\ m=-\dfrac{4}{9} \end{array}\right. \text{(nhận)}$$

Cách 2. Với $\Delta'>0$, phương trình (1) có nghiệm $t_1=1, t_2=2m+1$. Biện luận như trên, ta có hai trường hợp $\left[\begin{array}{l} t_2=9t_1 \\ t_1=9t_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=4 \\ m=-\dfrac{4}{9} \end{array}\right.$ (nhận).

Câu 7: Cho hàm số $y=x^4-(3m+2)x^2+3m$ có đồ thị (C_m). Xác định tất cả các giá trị của tham số thực m để (C_m) cắt đường thẳng $y=-1$ tại bốn điểm phân biệt

A. $\begin{cases} m\neq 0 \\ m<-\dfrac{1}{3} \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} m\neq 0 \\ m>-\dfrac{1}{3} \end{cases}$. **C.** $m>-\dfrac{1}{3}$. **D.** $m<-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm $x^4-(3m+2)x^2+3m=-1$

$\Leftrightarrow x^4-2x^2+1-3m(x^2-1)=0$

$\Leftrightarrow (x^2-1)^2-3m(x^2-1)=0$

$\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-3m-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-1=0 \\ x^2-3m-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, x=-1 \\ x^2=3m+1 \end{array}\right.$

Đồ thị (C_m) cắt $y=-1$ tại bốn điểm phân biệt khi và chỉ khi $x^2=3m+1$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 và -1.

Khi đó, ta có $\begin{cases} 3m+1>0 \\ 3m+1\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-\dfrac{1}{3} \\ m\neq 0 \end{cases}$.

Câu 8: Tập các giá trị của tham số m để phương trình $x^4-2x^2-3m+1=0$ có hai nghiệm phân biệt là

A. $(1;+\infty)\cup\{0\}$. **B.** $\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)\cup\{0\}$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

- Ta có: $x^4-2x^2-3m+1=0 \Leftrightarrow 3m=x^4-2x^2+1$.
- Xét hàm số $y=f(x)=x^4-2x^2+1$.
- Tập xác định $D=\mathbb{R}$, $y'=4x^3-4x$.
- $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$.
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

◆ Yêu cầu bài toán tương đương đường thẳng $(d): y = 3m$ cắt đường cong $(C): y = f(x)$ tại hai điểm phân biệt.

◆ Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $\left[\begin{array}{l} 3m = 0 \\ 3m > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m > \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $6f\left(x^2-4x\right)=m$ có ít nhất 3 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$?

A. 25. **B.** 30. **C.** 29. **D.** 24.

Lời giải

Chọn B

Đặt $g(x)=f\left(x^2-4x\right)\Rightarrow g'(x)=(2x-4).f'\left(x^2-4x\right).$

$$\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow(2x-4).f'\left(x^2-4x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-4=0\\ f'\left(x^2-4x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-4=0\\ x^2-4x=-4\\ x^2-4x=-2\\ x^2-4x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=2+\sqrt{2}\\ x=2-\sqrt{2}\\ x=0\\ x=4\end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên:

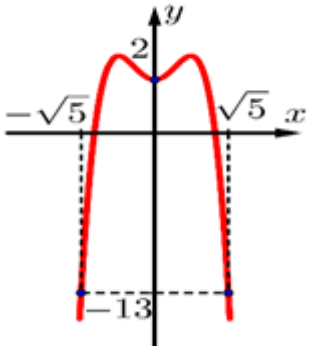
x	0		$2-\sqrt{2}$		2		$2+\sqrt{2}$		4		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow g(x)=\dfrac{m}{6}$ có ít nhất 3 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow -3<\dfrac{m}{6}\le 2\Leftrightarrow -18<m\le 12$ mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-17;-16;...;11;12\}$.

Vậy có 30 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



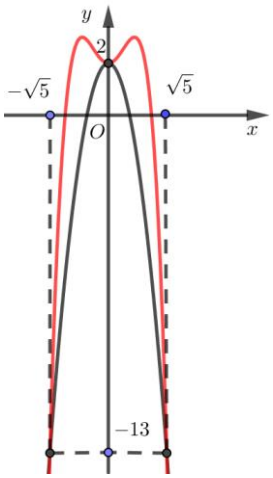
Xét hàm số $g(x)=2f(x)+2x^3-4x-3m-6\sqrt{5}$ với m là tham số thực. Điều kiện cần và đủ để $g(x)\le 0,\forall x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$ là:

A. $m\ge\dfrac{2}{3}f(0)$. **B.** $m\ge\dfrac{2}{3}f\left(-\sqrt{5}\right)$. **C.** $m\le\dfrac{2}{3}f\left(\sqrt{5}\right)$. **D.** $m\ge\dfrac{2}{3}f\left(\sqrt{5}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $g'(x)=2f'(x)+6x^2-4$, $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=-3x^2+2(1)$.



Vẽ parabol $y=-3x^2+2$ ta thấy phương trình (1) có 3 nghiệm $x=-\sqrt{5},x=0,x=\sqrt{5}$.

BBT

x	$-\sqrt{5}$		0		$\sqrt{5}$
$g'(x)$	0	$+$	0	$+$	0
$g(x)$	$2f(-\sqrt{5})-3m-12\sqrt{5}$	↗		↗	$2f(\sqrt{5})-3m$

$g(x)\le 0,\forall x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]\Leftrightarrow 2f\left(\sqrt{5}\right)-3m\le 0\Leftrightarrow m\ge\dfrac{2}{3}f\left(\sqrt{5}\right)$.

Câu 11: Cho hàm số $y=x^4-(3m+2)x^2+3m$ có đồ thị (C_m). Xác định tất cả các giá trị của tham số thực m để (C_m) cắt đường thẳng $y=-1$ tại bốn điểm phân biệt

A. $\begin{cases} m\neq 0 \\ m<-\frac{1}{3} \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} m\neq 0 \\ m>-\frac{1}{3} \end{cases}$. **C.** $m>-\frac{1}{3}$. **D.** $m<-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm $x^4-(3m+2)x^2+3m=-1$

$\Leftrightarrow x^4-2x^2+1-3m(x^2-1)=0$

$\Leftrightarrow (x^2-1)^2-3m(x^2-1)=0$

$\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-3m-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-1=0 \\ x^2-3m-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, x=-1 \\ x^2=3m+1 \end{array}\right.$

Đồ thị (C_m) cắt $y=-1$ tại bốn điểm phân biệt khi và chỉ khi $x^2=3m+1$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 và -1.

Khi đó, ta có $\begin{cases} 3m+1>0 \\ 3m+1\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-\frac{1}{3} \\ m\neq 0 \end{cases}$.

CHỦ ĐỀ 07 : TIẾP TUYẾN – SỰ TIẾP XÚC

LÍ THUYẾT

❖ **Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(x_0;y_0)$ thuộc đồ thị hàm số:**

- Cho hàm số $(C): y=f(x)$ và điểm $M(x_0;y_0)\in(C)$. Viết phương trình tiếp tuyến với đường cong (C) tại điểm M.
  - **Bước 1:** Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm hệ số góc của tiếp tuyến là $f'(x_0)$.
  - **Bước 2:** Phương trình tiếp tuyến tại điểm M là: $y=f'(x)(x-x_0)+y_0$.

❖ **Viết phương trình tiếp tuyến có hệ số góc k cho trước.**

- Bước 1: Gọi (Δ) là tiếp tuyến cần tìm có hệ số góc k.
- Giả sử $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm. Khi đó x_0 thỏa mãn: $f'(x_0)=k \quad (1)$.
- Giải (1) tìm x_0. Suy ra $y_0=f(x_0)$.
- Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=k(x-x_0)+y_0$

❖ **Điều kiện để hai hàm số tiếp xúc**

- Cho hai hàm số $(C): y=f(x)$ và $(C'): y=g(x)$. Đồ thị (C) và (C') **tiếp xúc nhau** khi chỉ khi hệ phương trình: $\begin{cases} f(x)=g(x) \\ f'(x)=g'(x) \end{cases}$ có nghiệm.

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ (C). Điểm M thuộc (C) có hoành độ lớn hơn1 , tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai tiệm cận của (C) lần lượt tại A, B. Diện tích nhỏ nhất của tam giác OAB bằng

A. $4+2\sqrt{2}$. **B.** 4. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** $4+\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Ta có: $y'=-\dfrac{2}{(x-1)^2}$, $\forall x\neq 1$.

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=1$ và đường tiệm cận đứng $x=1$.

Giả sử $M(m;y_M)\in(C)$ $(m>1)$ $\Rightarrow y_M=\dfrac{m+1}{m-1}=1+\dfrac{2}{m-1}$; $y'(m)=-\dfrac{2}{(m-1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến Δ là: $y=-\dfrac{2}{(m-1)^2}(x-m)+1+\dfrac{2}{m-1}$

$\Leftrightarrow 2x+(m-1)^2y-m^2-2m+1=0$.

Gọi A là giao điểm của Δ và đường tiệm cận ngang. Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}y=1\\ y=-\dfrac{2}{(m-1)^2}(x-m)+1+\dfrac{2}{m-1}\end{cases}\Rightarrow x=2m-1\Rightarrow A(2m-1;1)$.

Gọi B là giao điểm của Δ và đường tiệm cận đứng. Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}x=1\\ y=-\dfrac{2}{(m-1)^2}(x-m)+1+\dfrac{2}{m-1}\end{cases}\Rightarrow y=\dfrac{m+3}{m-1}=1+\dfrac{4}{m-1}\Rightarrow B\left(1;1+\dfrac{4}{m-1}\right)$.

Suy ra: $AB=\sqrt{(2-2m)^2+\left(\dfrac{4}{m-1}\right)^2}=\sqrt{4(m-1)^2+\dfrac{16}{(m-1)^2}}=\dfrac{2}{|m-1|}\sqrt{(m-1)^4+4}$.

$d(O;\Delta)=\dfrac{|-m^2-2m+1|}{\sqrt{4+(m-1)^4}}$.

$\Rightarrow S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}d(O;\Delta).AB=\dfrac{1}{2}.\dfrac{|-m^2-2m+1|}{\sqrt{4+(m-1)^4}}.\dfrac{2}{|m-1|}\sqrt{(m-1)^4+4}$

$=\dfrac{|-m^2-2m+1|}{|m-1|}=\dfrac{m^2+2m-1}{m-1}$ (vì $m>1$) $=m+3+\dfrac{2}{m-1}=4+m-1+\dfrac{2}{m-1}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số $m-1$ và $\dfrac{2}{m-1}$: $(m-1)+\dfrac{2}{m-1}\geq 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 4+(m-1)+\dfrac{2}{m-1}\geq 4+2\sqrt{2}$.

Vậy diện tích nhỏ nhất của tam giác OAB bằng $4+2\sqrt{2}$ khi $\begin{cases} m-1=\dfrac{2}{m-1} \Leftrightarrow m=1+\sqrt{2}. \\ m>1 \end{cases}$

VÍ DỤ 2: Cho hàm số $y=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+2$ (C). Xét hai điểm $A(a;y_A)$ và $B(b;y_B)$ phân biệt của đồ thị (C) mà tiếp tuyến tại A và B song song. Biết rằng đường thẳng AB đi qua. Phương trình của đường thẳng AB là

A. $x-y-2=0$. **B.** $x+y-8=0$. **C.** $x-3y+4=0$. **D.** $x-2y+1=0$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $A\left(a;\frac{1}{2}a^3-\frac{3}{2}a^2+2\right)$ và $B\left(b;\frac{1}{2}b^3-\frac{3}{2}b^2+2\right)$ với $a\neq b$ là hai điểm phân biệt thuộc đồ thị (C) mà tiếp tuyến tại A và B song song với nhau.

Ta có $f'(a)=f'(b)\Leftrightarrow\frac{3}{2}a^2-3a=\frac{3}{2}b^2-3b\Leftrightarrow a^2-b^2=2(a-b)\Leftrightarrow a+b=2$.

Gọi $I\left(\frac{a+b}{2};\frac{1}{4}(a^3+b^3)-\frac{3}{4}(a^2+b^2)+2\right)$ là trung điểm của đoạn AB.

Với $a+b=2$ ta có $I\left(1;\frac{8-6ab}{4}-\frac{3(4-2ab)}{4}+2\right)$ hay $I(1;1)$.

Lại có $\overrightarrow{AB}\left(b-a;\frac{1}{2}(b^3-a^3)-\frac{3}{2}(b^2-a^2)\right)$ cùng phương với $\vec{u}\left(2;(a^2+b^2+ab)-3(a+b)\right)$.

Hay $\vec{u}(2;-2-ab)$. Nên đường thẳng AB có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}(2+ab;2)$.

Suy ra phương trình đường thẳng AB là $(2+ab)(x-1)+2(y-1)=0$.

Do đường thẳng AB đi qua $D(5;3)$ nên $4(2+ab)+4=0\Leftrightarrow 4ab+12=0\Leftrightarrow ab=-3$.

Thay $ab=-3$ vào phương trình AB ta được: $x-2y+1=0$.

Cách 2 – trắc nghiệm: Đồ thị hàm số $y=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+2$ (C) có điểm uốn là $I(1;1)$.

Do đó đường thẳng AB đi qua $D(5;3)$ và $I(1;1)$ có phương trình là $x-2y+1=0$.

VÍ DỤ 3: Cho hàm số $y=\frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(0;a)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của a trong đoạn $[-2018;2018]$ để từ điểm A kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía của trục hoành?

A. 2020. **B.** 2018. **C.** 2017. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=\frac{-3}{(x-1)^2}$, $x\neq 1$.

Phương trình đường tiếp tuyến tại điểm x_0: $y=\dfrac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\dfrac{x_0+2}{x_0-1}$.

Tiếp tuyến tại điểm $A(0;a)$ là: $a=\dfrac{3x_0+(x_0+2)(x_0-1)}{(x_0-1)^2}$ $y'=\dfrac{-3}{(x-1)^2}$.

$\Rightarrow (a-1){x_0}^2-2(a+2)x_0+a+2=0 \quad (1)$.

Để từ điểm A kẻ được 2 tiếp tuyến đến (C) $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Rightarrow \Delta'>0\Rightarrow (a+2)^2-(a-1)(a+2)>0\Rightarrow a>-2$.

Theo định lí Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2(a+2)}{a-1} \\ x_1x_2=\dfrac{a+2}{a-1} \end{cases}$.

Để hai tiếp điểm nằm về hai phía trục hoành thì: $y(x_1)y(x_2)<0$

$\Rightarrow \dfrac{(x_1+2)(x_2+2)}{(x_1-1)(x_2-1)}<0\Rightarrow \dfrac{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}<0\Rightarrow \dfrac{9a+6}{-3}<0\Leftrightarrow a>\dfrac{-2}{3}$

Mà $a\in[-2018;2018]$; $a\in\mathbb{Z}\Rightarrow a\in[0;2018]$.

VÍ DỤ 4: Cho parabol (P): $y=x^2-2px+q$. Biết rằng qua $A(2;1)$ luôn kẻ được tiếp tuyến đến (P) và tập hợp tất cả các điểm $M(p;q)$ là miền nghiệm của bất phương trình $ax+by+c\le 0$. Biểu thức $T=3a-2b^2+c$ không thể nhận giá trị nào sau đây?

A. 10. **B.** 9. **C.** 11. **D.** -2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=2x-2p$.

Gọi $M(x_0;{x_0}^2-2px_0+q)$ là tiếp điểm, tiếp tuyến với (P) tại M có phương trình: $y=(2x_0-2p)(x-x_0)+x_0^2-2px_0+q\Leftrightarrow x_0^2-2xx_0+2px-q+y=0$.

Tiếp tuyến đi qua $A(2;1)$ nên: $x_0^2-4x_0+4p-q+1=0$ (1).

Vì qua $A(2;1)$ luôn kẻ được tiếp tuyến đến (P) nên phương trình (1) luôn có nghiệm.

Do đó: $\Delta'\ge 0\Leftrightarrow 4p-q-3\le 0$ (2).

$M(p;q)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình $ax+by+c\le 0$ nên $ap+bq+c\le 0$ (3).

Từ (2) và (3) suy ra $\dfrac{a}{4}=\dfrac{b}{-1}=\dfrac{c}{-3}=m$, điều kiện: $(m>0)\Rightarrow \begin{cases} a=4m \\ b=-m \\ c=-3m \end{cases}$

$\Rightarrow T=-2m^2+9m=\dfrac{81}{8}-2\left(m-\dfrac{9}{4}\right)^2\le\dfrac{81}{8}$.

Vậy T không thể nhận giá trị bằng 11 nên ta chọn đáp án **C.**

VÍ DỤ 5: Cho hàm số $y=f(x)=x^2-4x+4m-m^2$. Có bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số $g(x)=f\left[f(x)\right]$ tiếp xúc với Ox.

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x)=0\Leftrightarrow(x-m)(x+m-4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\x=4-m\end{array}\right.$.

Suy ra $g(x)=0\Leftrightarrow f\left[f(x)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=m\\f(x)=4-m\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-4x+4m-m^2=m\quad(1)\\x^2-4x+4m-m^2=4-m\quad(2)\end{array}\right.$.

Trường hợp 1: Nếu $m=4-m\Leftrightarrow m=2$.

Từ $(1);(2)$ suy ra $g(x)=0\Leftrightarrow\left(x^2-4x+2\right)^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2-\sqrt{2}\\x=2+\sqrt{2}\end{array}\right.$. Hai nghiệm này là hai nghiệm kép của phương trình $g(x)=0$ nên đồ thị hàm số $y=g(x)$ tiếp xúc với Ox.

Trường hợp 2: Nếu $m\neq4-m\Leftrightarrow m\neq2$.Khi đó $(1);(2)$ không có nghiệm chung.

Để đồ thị hàm số $y=g(x)$ tiếp xúc với $Ox\Leftrightarrow(1)$ có nghiệm kép hoặc (2) có nghiệm kép

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^2-3m+4=0\quad(VN)\\m^2-5m+8=0\quad(VN)\end{array}\right.$. Tức không có giá trị nào của m thỏa mãn trong trường hợp này.

Vậy $m=2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

VÍ DỤ 6: Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2+2(C)$. Và $A(a;-2)$. Từ A kẻ được ít nhất hai tiếp tuyến đến đồ thị (C). Gọi S là tập các hợp các giá trị của a để tổng các hệ số góc bằng 9. Tính tổng các phần tử trong S.

A. $2\sqrt{6}$. **B.** 2. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi Δ là đường thẳng qua $A(a;-2)$ và có hệ số góc là k.

Đường thẳng Δ có phương trình: $y=k(x-a)-2$.

Vì Δ là tiếp tuyến của đồ thị (C) nên hệ sau có nghiệm: $\begin{cases}x^3-3x^2+2=k(x-a)-2\\k=3x^2-6x\end{cases}$.

Suy ra $x^3-3x^2+2=\left(3x^2-6x\right)(x-a)-2\Leftrightarrow(x-2)^2(x+1)=(x-2)3x(x-a)$

$\left[\begin{array}{l}x=2\\2x^2-(3a-1)x+2=0\quad(*)\end{array}\right.$

Trường hợp 1**:** Phương trình $(*)$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow9a^2-6a-15=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\frac{5}{3}\\a=-1\end{array}\right.$.

Với $a=\dfrac{5}{3}$ thì có hai tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $x=1$ và $x=2$ có tổng hệ số góc của hai tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $x=1$ và $x=2$ là: $\left(3.2^2-6.2\right)+\left(3.1^2-6.1\right)=-3$ (không thỏa mãn).

Với $a=-1$ thì có hai tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $x=-1$ và $x=2$ có tổng hệ số góc của hai tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $x=-1$ và $x=2$ là: $\left(3.2^2-6.2\right)+\left(3.(-1)^2+6.1\right)=9$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2 **:** Phương trình $(*)$ có nghiệm bằng 2 khi $a=2$ khi đó phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt là $x=2$ hoặc $x=\dfrac{1}{2}$

Với $a=2$ thì có hai tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $x=\dfrac{1}{2}$ và $x=2$ có tổng hệ số góc của hai tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $x=\dfrac{1}{2}$ và $x=2$ là: $\left(3.2^2-6.2\right)+\left(3.\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-6.\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{9}{4}$ (không tm).

Trường hợp 3 **:** Phương trình $(*)$ có nghiệm khác 2

$$\Leftrightarrow\begin{cases}9a^2-6a-15>0\\ a\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a>\dfrac{5}{3}\\ a<-1\end{array}\right.\\ a\neq 2\end{cases}\ (**).$$

Khi đó có ba tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $x_1;x_2$ và $x=2$ với $x_1;x_2$ là nghiệm phương trình $(*)$, có tổng hệ số góc của ba tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $x_1;x_2$ và $x=2$ là:

$$3x_1^2-6x_1+3x_2^2-6x_2=9\Leftrightarrow 3(x_1+x_2)^2-6(x_1+x_2)-6x_1x_2=9$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{3a-1}{2}\right)^2-6\left(\frac{3a-1}{2}\right)-6=9\Leftrightarrow 27a^2-54a-45=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\dfrac{3+2\sqrt{6}}{3}\\ a=\dfrac{3-2\sqrt{6}}{3}\end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện (**) ta có $a=\dfrac{3+2\sqrt{6}}{3}$. Vậy tổng các phần tử của S bằng $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

VÍ DỤ 7: Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^4-\dfrac{14}{3}x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M\left(x_1;y_1\right)$, $N\left(x_2;y_2\right)$ (M , N khác A) thỏa mãn $y_1-y_2=8\left(x_1-x_2\right)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B.

Gọi $A\left(a;\dfrac{1}{3}a^4-\dfrac{14}{3}a^2\right)$ là tọa độ tiếp điểm.

Phương trình tiếp tuyến tại A là $d:y=\left(\dfrac{4}{3}a^3-\dfrac{28}{3}a\right)(x-a)+\dfrac{1}{3}a^4-\dfrac{14}{3}a^2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là:

$$\frac{1}{3}x^4-\frac{28}{3}x^2=\left(\frac{4}{3}a^3-\frac{28}{3}a\right)(x-a)+\frac{1}{3}a^4-\frac{14}{3}a^2$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2\left(x^2+2ax+3a^2-14\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\\x^2+2ax+3a^2-14=0(1)\end{array}\right.$$

Đồ thị (C) cắt d tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác a

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\6a^2-14\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow a\in\left(-\sqrt{7};\sqrt{7}\right)\setminus\left\{\pm\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right\}.$$

Theo đề bài: $y_1-y_2=8(x_1-x_2)\Leftrightarrow\left(\frac{4}{3}a^3-\frac{28}{3}a\right)(x_1-x_2)=8(x_1-x_2)$

$$\Leftrightarrow\frac{4}{3}a^3-\frac{28}{3}a=8\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=3\\a=-1\\a=-2\end{array}\right..$$

Đối chiếu điều kiện: $\left[\begin{array}{l}a=-1\\a=-2\end{array}\right.$. Vậy có 2 điểm A thỏa đề bài.

DẠNG 1 Bài toán về tiếp tuyến và sự tiếp xúc

Câu 1. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x + 2019$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ là

A. $y = 8x + 2016$. **B.** $y = 8x + 2007$. **C.** $y = 8x + 2014$. **D.** $y = 8x + 2023$.

Câu 2. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = x(4-x)^2$ tại điểm $M_0(1\,;\,9)$ là

A. $y = 3x + 12$. **B.** $y = 3x + 8$. **C.** $y = 3x - 3$. **D.** $y = 3x + 6$.

Câu 3. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 1$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -2$ là

A. $y = -40x - 80$. **B.** $y = -40x - 57$. **C.** $y = -40x + 103$. **D.** $y = -40x + 25$.

Câu 4. Cho hàm số $y = x^4 + 2x^2 + 3$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(1\,;\,6)$ là

A. $y = 8x - 2$. **B.** $y = 8x + 5$. **C.** $y = 8x - 8$. **D.** $y = 8x + 14$.

Câu 5. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng 4 là

A. $y = 3x - 5$. **B.** $y = -3x + 13$. **C.** $y = 3x + 13$. **D.** $y = -3x + 5$.

Câu 6. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{x-1}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng 1 tạo với hai trục tọa độ Ox, Oy một tam giác có diện tích bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 9. **D.** $\dfrac{9}{2}$.

Câu 7. Cho hàm số $y = \ln(x+1) + \ln x$ có đồ thị (C), điểm $M \in (C)$ có tung độ bằng $\ln 2$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M là

A. $y = -\dfrac{3}{2}x + 3 + \ln 2$. **B.** $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2} + \ln 2$. **C.** $y = 3x - 1$. **D.** $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}$.

Câu 8. Cho hàm số $y = x\ln(x-1)$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành là

A. $y = 0$. **B.** $y = x - 1$. **C.** $y = 2x - 4$. **D.** $y = 2x + 4$.

Câu 9. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng $y_0 = -15$ là

A. $y = 24x + 9$. **B.** $y = 24x + 39$. **C.** $y = -15$. **D.** $y = 24x - 39$.

Câu 10. Cho hàm số $y = x^3 - x^2 + 2x + 5$ có đồ thị (C). Trong các tiếp tuyến của (C), thì tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất tiếp xúc với (C) tại điểm có tung độ bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{151}{27}$. **C.** $\dfrac{113}{27}$. **D.** $\dfrac{5}{3}$.

Câu 11. Cho hàm số $y = \log_2 \dfrac{x+3}{2-x}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến đồ thị hàm số tại giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng $d : y = 2$ là:

A. $y=\dfrac{5}{4\ln 2}x-\dfrac{5}{4\ln 2}$. **B.** $y=\dfrac{1}{4\ln 2}x+2-\dfrac{5}{4\ln 2}$.

C. $y=x+2-\dfrac{5}{4\ln 2}$. **D.** $y=\dfrac{5}{4\ln 2}x+2-\dfrac{5}{4\ln 2}$.

Câu 12. Biết đường thẳng $y=2\ln 4.x+m$ là tiếp tuyến của đường cong $y=4^{2x}$ khi đó giá trị tham số m bằng

A. $2\ln 4-1$. **B.** 1 hoặc 3. **C.** 1. **D.** 1 hoặc $2\ln 4-1$.

Câu 13. Cho hàm số $y=x^3-4x^2+3x-3$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $\Delta:\ 2x+y+1=0$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 14. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-7x+2$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số có hệ số góc lớn nhất có phương trình là

A. $y=4x-1$. **B.** $y=4x+1$. **C.** $y=-4x-1$. **D.** $y=-4x+1$.

Câu 15. Biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+23$ tại điểm $A(2;-5)$ vuông góc với đường thẳng $x+4y-2019=0$. Tình $2a+b-4$.

A. 15. **B.** 23. **C.** –23. **D.** –15.

Câu 16. Đường thẳng $y=m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $(C):f(x)=x^4-8x^2+35$ tại hai điểm phân biệt. Tìm tung độ tiếp điểm.

A. –35. **B.** 35. **C.** –19. **D.** 19.

Câu 17. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{2}x^2-\ln(2x-2)$ có đồ thị (C). Số tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số vuông góc với đường thẳng $y=-x+2$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 18. Cho hàm số $y=e^x-e^{-x}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của đồ thị (C) có hệ số góc nhỏ nhất là

A. $y=0$. **B.** $y=2x+1$. **C.** $y=x+2$. **D.** $y=2x$.

Câu 19. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-6x+1$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm $N(0;1)$.

A. $y=-\dfrac{33}{4}x+11$. **B.** $y=-\dfrac{33}{4}x+12$. **C.** $y=-\dfrac{33}{4}x+1$. **D.** $y=-\dfrac{33}{4}x+2$.

Câu 20. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Có tất cả bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1;0)$

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 21. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-x-2}{x-3}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) đi qua điểm $A(4;1)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 22. Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x+1}$ có đồ thị (C). Biết rằng có hai tiếp tuyến của đồ thị (C) đi qua điểm $A(0;1)$. Tích hệ số góc của hai tiếp tuyến đó bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** -2. **D.** 2.

Câu 23. Gọi S là tập các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3+mx^2-9x-9m$ tiếp xúc với trục hoành. Tổng các phần tử của S bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** -3.

Câu 24. Xét đồ thị (C) của hàm số $y=x^3+3ax+b$ với a,b là các số thực. Gọi M, N là hai điểm phân biệt thuộc (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại hai điểm đó có hệ số góc bằng 3. Biết khoảng cách từ gốc tọa độ tới đường thẳng MN bằng 1. Khi đó giá trị lớn nhất của a^2-b^2 bằng

A. 0. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** -2. **D.** $\dfrac{-2}{3}$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=x-\sqrt{x^2+1}$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Gọi Δ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0=\dfrac{1}{2}$. Giả sử Δ cắt Ox tại điểm A và cắt Oy tại điểm B. Khi đó diện tích của tam giác OAB bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 8.

Câu 26. Cho hàm số: $y=\dfrac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến tại điểm $M(x_0;y_0)\in(C)$ thỏa mãn phương trình $|x_0|-2=0$ là

A. $y=-\dfrac{4}{9}x-\dfrac{1}{9}, y=4x+14$. **B.** $y=-\dfrac{4}{9}x-\dfrac{2}{9}$, $y=4x+1$.

C. $y=-\dfrac{4}{9}x-\dfrac{1}{9}$, $y=4x+1$. **D.** $y=-\dfrac{4}{9}x-\dfrac{2}{9}$, $y=-4x+14$.

Câu 27. Cho hàm số $y=4x^2(1-x)+x^4$ (C). Phương trình tiếp tuyến tại giao điểm của (C) với parabol (P): $y=x^2$ là

A. $y=0; y=1; y=24x-6$. **B.** $y=9; y=1; y=24x-6$.

C. $y=0; y=5; y=24x-63$. **D.** $y=0; y=1; y=24x-63$.

Câu 28. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị là (C). Gọi I là giao điểm 2 đường tiệm cận. Gọi $M(x_0,y_0)$, $x_0<-3$ là một điểm trên (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại M cắt hai đường tiệm cận lần lượt tại A,B thỏa mãn $AI^2+IB^2=40$. Khi đó tích x_0y_0 bằng

A. -1. **B.** -12. **C.** 7. **D.** 12.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (H). Tìm trên Oy tất cả các điểm từ đó kẻ được duy nhất một tiếp tuyến tới (H).

A. $M(0;1)$. **B.** $M_1(0;1)$ và $M_2(0;-1)$.

C. Không tồn tại. **D.** $M(0;-1)$.

Câu 30. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến này cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại các điểm A, B phân biệt thỏa mãn $AB=\sqrt{82}.OB$.

A. $y=-\dfrac{1}{9}x+\dfrac{13}{9}$ và $y=-\dfrac{1}{9}x+\dfrac{25}{9}$.

B. $y=-\dfrac{1}{9}x+\dfrac{25}{9}$.

C. $y=-\dfrac{1}{9}x+\dfrac{13}{9}$.

D. $y=-\dfrac{1}{9}x+\dfrac{17}{9}$ và $y=\dfrac{1}{9}x+\dfrac{25}{9}$.

Câu 31. Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ tại điểm có hoành độ x_0 là nghiệm của phương trình $16x^2-2x-8=6\sqrt{2x-1}$ là

A. $y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{4}$.

B. $y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{9}{4}$.

C. $y=\dfrac{9}{2}$.

D. $y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{1}{4}$.

Câu 32. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x-2}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M có hoành độ không nhỏ hơn 3, biết tiếp tuyến cắt hai tia Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB cân.

A. $y=x-5$.

B. $y=-x+5$.

C. $y=x-1$.

D. $y=-x+1$.

Câu 33. Cho hàm số $y=\dfrac{3x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Biết $y=ax+b$ là phương trình tiếp tuyến của (C) có hệ số góc nhỏ nhất trong các tiếp tuyến có hoành độ tiếp điểm là số nguyên dương. Tính $2a+b$.

A. -2.

B. 9.

C. 7.

D. 5.

Câu 34. Cho hàm số $y=\dfrac{3-x}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $\Delta: y=-4x+m$. Tính tổng tất cả các giá trị của m thỏa mãn Δ là tiếp tuyến của (C).

A. 10.

B. 3.

C. -13.

D. -10.

Câu 35. Cho hàm số $y=x^2\left(x^2-2\right)$ có đồ thị (C). Gọi $M(0;b)$ là điểm thuộc trục Oy mà từ đó kẻ được 4 tiếp tuyến đến (C). Giá trị của b là

A. $0<b<1$.

B. $\left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$.

C. $-1<b<1$.

D. $0<b<\dfrac{1}{3}$.

Câu 36. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số a để có hai tiếp tuyến của (C) qua $A(a;2)$ với hệ số góc k_1, k_2 thỏa mãn $k_1+k_2+10k_1^2.k_2^2=0$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 7.

B. $\dfrac{7}{2}$.

C. $\dfrac{7-\sqrt{5}}{2}$.

D. $\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$.

Câu 37. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+4$ có đồ thị là (C). Có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên thuộc trục hoành sao cho từ đó có thể kẻ đến (C) duy nhất một tiếp tuyến?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. Vô số.

Câu 38. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ có đồ thị là (C). Tìm a để từ điểm $A(0;a)$ có thể kẻ đến (C) hai tiếp tuyến sao cho hai tiếp điểm tương ứng nằm về hai phía trục hoành.

A. $\begin{cases} a>-2 \\ a\neq 1 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} a>-\dfrac{2}{3} \\ a\neq 1 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} a>-\dfrac{2}{3} \\ a\neq 1 \end{cases}$. **D.** $-2<a<-\dfrac{2}{3}$.

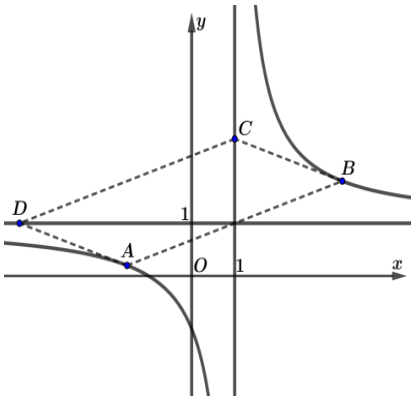
Câu 39. Cho hàm số $y=-x^3+mx^2-x-4m$ có đồ thị (C_m) và A là điểm cố định có hoành độ âm của (C_m). Giá trị của m để tiếp tuyến tại A của (C_m) vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ nhất là

A. $m=-6$. **B.** $m=2$. **C.** $m=-3$. **D.** $m=\dfrac{-7}{2}$.

Câu 40. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{2x-2}$ có đồ thị (C). Gọi $M(x_0;y_0)$ (với $x_0>1$) là điểm thuộc (C), biết tiếp tuyến của (C) tại M cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại A và B sao cho $S_{\Delta OIB}=8S_{\Delta OIA}$ (trong đó O là gốc tọa độ, I là giao điểm hai tiệm cận). Tính giá trị của $S=x_0+4y_0$.

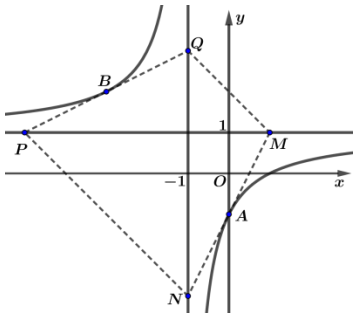
A. $S=8$. **B.** $S=\dfrac{17}{4}$. **C.** $S=\dfrac{23}{4}$. **D.** $S=2$.

Câu 41. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ là hai điểm thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A, B song song với nhau $(x_A<x_B)$. Tiếp tuyến tại A cắt đường tiệm cận ngang của (C) tại D, tiếp tuyến tại B cắt đường tiệm cận đứng của (C) tại C (tham khảo hình vẽ bên dưới). Chu vi tứ giác $ABCD$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng



A. 16. **B.** 8.
C. 20. **D.** 12.

Câu 42. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi A, B là hai điểm thuộc hai nhánh của (C) và các tiếp tuyến của (C) tại A, B cắt các đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của (C) lần lượt tại các điểm M, N, P, Q (tham khảo hình vẽ bên dưới). Diện tích tứ giác $MNPQ$ có giá trị nhỏ nhất bằng



A. 16. **B.** 32. **C.** 8. **D.** 4.

Câu 43. Hỏi có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+3m$ tiếp xúc với trục hoành tại hai điểm phân biệt?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2 **D.** Vô số.

Câu 44. Cho hàm số $y=\dfrac{x^4-x^3-m^2x^2+m^2x}{x^2+1}$. Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho tiếp xúc với trục hoành?

A. 2. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 45. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\mathrm{e}^x+m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=\ln(x+1)$.

A. $m=\mathrm{e}$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-\mathrm{e}$. **D.** $m=-1$.

Câu 46. Số tiếp tuyến chung của hai đồ thị $(C_1): y=\dfrac{x^4}{4}-2x^2+4$ và $(C_2): y=x^2+4$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 47. Cho hai hàm số $y=x^2$ (C_1) và $y=\sqrt{5-x^2}-\dfrac{41}{16}$ (C_2). Phương trình tiếp tuyến chung của hai đồ thị (C_1), (C_2) có hệ số góc dương là

A. $y=\dfrac{-1}{2}x-\dfrac{1}{16}$. **B.** $y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{16}$. **C.** $y=\dfrac{-1}{4}x-\dfrac{1}{16}$. **D.** $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{16}$.

Câu 48. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$, biết $f^2(1+2x)=x-f^3(1-x)$ là đường thẳng nào sau đây?

A. $3x-7y+6=0$. **B.** $x-7y-6=0$. **C.** $x+7y+6=0$. **D.** $3x+7y+6=0$.

Câu 49. Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ đều có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f^3(2-x)-2.f^2(2+3x)+x^2.g(x)+36x=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại $x_o=2$ là

A. $y=-3x$. **B.** $y=2x-4$. **C.** $y=-x+2$. **D.** $y=x$.

Câu 50. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Gọi điểm I là giao của hai đường tiệm cận của (C). M là một điểm bất kì trên (C) và tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai tiệm cận tại A,B. Biết chu vi tam giác IAB có giá trị nhỏ nhất bằng $a+\sqrt{b}$ với $a,b\in\mathbb{N}$. Hỏi mệnh đề nào sau đây ***đúng***?

A. $a-b+4=0$. **B.** $2a-b<0$. **C.** $a^2+b^2=100$. **D.** $\log_a b=2$.

Câu 51. Cho hàm số $y=x^4-(m+1)x^2+4m$ có đồ thị (C_m). Tìm tham số m để (C_m) tiếp xúc với đường thẳng $(d): y=3$ tại hai điểm phân biệt

A. $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=3\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=16\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m=2\\m=13\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=13\end{array}\right.$.

Câu 52. Giá trị m để đường thẳng $\Delta: y=m(2-x)+2$ cắt đồ thị $(C): y=-x^3+3x^2-2$ tại 3 điểm phân biệt $A(2;2), B, C$ sao cho tích các hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại B và C đạt giá trị nhỏ nhất là:

A. $m=1$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-1$.

Câu 53. Cho hàm số $y=\left(-x^2-2x-2\right)e^{-x}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến với đồ thị (C) cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B (với A, B khác O) sao cho $\cos ABO=\dfrac{5}{\sqrt{26}}$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

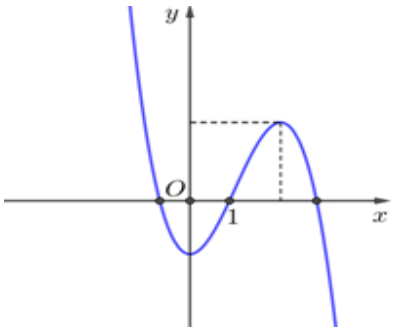
Câu 54. Biết rằng tồn tại duy nhất một giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^2-6x+m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=\sqrt{5-x^2}$. Giá trị m thuộc khoảng nào được cho dưới đây?

A. $(-\infty;-6)$. **B.** $(-6;0)$. **C.** $(0;6)$. **D.** $(6;+\infty)$.

Câu 55. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f'(x)+\dfrac{f(x)}{x}=4x^2+3x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là

A. $y=-16x-20$. **B.** $y=16x-20$. **C.** $y=16x+20$. **D.** $y=-16x+20$.

Câu 56. Cho hàm đa thức bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị (C). Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Gọi đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 1. Hỏi Δ và (C) có bao nhiêu điểm chung?



A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 57. Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-1}$ có đồ thị là (C), điểm M thay đổi thuộc đường thẳng $d:y=1-2x$ sao cho qua M có hai tiếp tuyến của (C) với hai tiếp điểm tương ứng là A, B. Biết rằng đường thẳng AB luôn đi qua điểm cố định là H. Độ dài đoạn OH là

A. $\sqrt{34}$. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{29}$. **D.** $\sqrt{58}$.

Câu 58. Cho hàm số $y=(m+1)x^3-(2m+1)x-m+1$ có đồ thị (C_m), biết rằng đồ thị (C_m) luôn đi qua ba điểm cố định A, B, C thẳng hàng. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-10;10]$ để (C_m) có tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng chứa ba điểm A, B, C?

A. 19. **B.** 1. **C.** 20. **D.** 10.

Câu 59. Cho đồ thị $(C):y=x^3-3x^2$. Có bao nhiêu số nguyên $b\in(-10;10)$ để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $B(0;b)$?

A. 2. **B.** 9. **C.** 17. **D.** 16.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.D	3.B	4.A	5.B	6.D	7.B	8.C	9.A	10.B
11.D	12.C	13.A	14.D	15.D	16.D	17.B	18.D	19.C	20.A
21.B	22.A	23.B	24.D	25.B	26.D	27.D	28.B	29.B	30.A
31.A	32.B	33.D	34.D	35.D	36.C	37.B	38.C	39.C	40.A
41.D	42.A	43.B	44.D	45.D	46.D	47.D	48.C	49.D	50.A
51.D	52.D	53.B	54.D	55.B	56.B	57.D	58.C	59.C	

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. **Chọn D**

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 2015$. Ta có $y' = 3x^2 - 4x + 1 \Rightarrow y'(-1) = 8$.

Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ có phương trình $y = 8(x+1) + 2015$ hay $y = 8x + 2023$.

Câu 2. **Chọn D**

Ta có $y = x(4-x)^2 = x^3 - 8x^2 + 16x \Rightarrow y' = 3x^2 - 16x + 16$ nên hệ số góc của tiếp tuyến cần tìm là: $y'(1) = 3$.

Tiếp tuyến tại điểm $M_0(1\,;\,4)$ có phương trình $y = 3(x-1) + 9$ hay $y = 3x + 6$.

Câu 3. **Chọn B**

Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 23$. Ta có $y' = 4x^3 + 4x \Rightarrow y'(-2) = -40$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0 = -2$ là $y = -40(x+2) + 23$ hay $y = -40x - 57$.

Câu 4. **Chọn A**

Ta có $y' = 4x^3 + 4x$

Với $x_0 = 1 \Rightarrow y'(x_0) = y'(1) = 8$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(1\,;\,6)$ là $y = 8(x-1) + 6$ hay $y = 8x - 2$.

Câu 5. **Chọn B**

Điều kiện $x \neq 2$. **Hoành độ** tiếp điểm là nghiệm của phương trình

$\dfrac{x+1}{x-2} = 4 \Rightarrow x + 1 = 4(x-2) \Leftrightarrow x = 3$ (thỏa mãn)

Ta có: $y' = \dfrac{-3}{(x-2)^2} \Rightarrow y'(3) = -3$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm $y = -3(x-3) + 4$ hay $y = -3x + 13$.

Câu 6. **Chọn D**

Điều kiện $x \neq 1$.

Hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến là nghiệm của phương trình

$\frac{1}{x-1}=1\Rightarrow x-1=1\Leftrightarrow x=2$ (thỏa mãn)

Ta có: $y'=\frac{-1}{(x-1)^2}\Rightarrow y'(2)=-1$.

Phương trình tiếp tuyến $y=-1(x-2)+1$ hay $y=-x+3$.

Tiếp tuyến cắt Ox, Oy lần lượt tại hai điểm $A(3;0); B(0;3)$.

Do đó diện tích tam giác OAB là $\frac{9}{2}$.

Câu 7. Chọn B

Điều kiện: $x>0$.

Hoành độ tiếp điểm M là nghiệm phương trình $\ln x+\ln(x+1)=\ln 2\ ,(x>0)$

$\ln x+\ln(x+1)=\ln 2\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x-2=0\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$

$y=\ln x+\ln(x+1)\Rightarrow y'=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\Rightarrow y'(1)=\frac{3}{2}$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm $y=\frac{3}{2}(x-1)+\ln 2$ hay $y=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}+\ln 2$.

Câu 8. Chọn C

Điều kiện: $x>1$. **Tung độ** tiếp điểm bằng 0.

Hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến là nghiệm phương trình

$x\ln(x-1)=0\Leftrightarrow\ln(x-1)=0\Leftrightarrow x=2$ (do $x>1$)

$y'=\ln(x-1)+\frac{x}{x-1}\Rightarrow y'(2)=2$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=2(x-2)$ hay $y=2x-4$

Câu 9. Chọn A

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm, do $y_0=-15$ nên hoành độ x_0 là nghiệm của phương trình

$y_0=-15\Leftrightarrow x_0^3-6x_0^2+9x_0+1=-15\Leftrightarrow x_0^3-6x_0^2+9x_0+16=0\Leftrightarrow x_0=-1$

Ta có $y'=3x^2-12x+9$ nên $y'(-1)=24$

Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=24(x+1)-15=24x+9$.

Câu 10. Chọn B

Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm trên (C). Khi đó tiếp tuyến của (C) tại M có hệ số góc k là

$k=y'(x_0)=3x_0^2-2x_0+2=3\left(x_0^2-\frac{2}{3}x_0+\frac{1}{9}\right)+\frac{5}{3}=3\left(x_0-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5}{3}\ge\frac{5}{3}$

Do đó ta có $\min k=\frac{5}{3}$ đạt được khi $x_0=\frac{1}{3}\Rightarrow y_0=\frac{151}{27}$.

Câu 11. Chọn D

Gọi $M(a,b)$ là giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng d.

Ta có $M\in(C)\Rightarrow b=\log_2\frac{a+3}{2-a},(-3<a<2)$ và $M\in(d)\Rightarrow b=2\Rightarrow a=1\Rightarrow M(1;2)$.

Phương trình cần là $y = y'(1).(x-1)+2$.

Lại có $y' = \dfrac{5}{(2-x)(x+3)\ln 2} \Rightarrow y'(1) = \dfrac{5}{4\ln 2}$. Vậy $y = \dfrac{5}{4\ln 2}x + 2 - \dfrac{5}{4\ln 2}$.

Câu 12. Chọn C

Đường thẳng $y = 2\ln 4.x + m$ là tiếp tuyến của đường cong $y = 4^{2x}$ khi và chỉ khi hệ phương trình $\begin{cases} 4^{2x} = 2\ln 4.x + m \\ 2.4^{2x}\ln 4 = 2\ln 4 \end{cases}$ có nghiệm.

Ta có $\begin{cases} 4^{2x} = 2\ln 4.x + m \\ 2.4^{2x}\ln 4 = 2\ln 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{2x} = 2\ln 4.x + m \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 1$.

Câu 13. Chọn A

Ta có : $y' = 3x^2 - 8x + 3$.

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta:\ 2x + y + 1 = 0$ nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k = -2$, hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình $3x^2 - 8x + 3 = -2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{5}{3} \end{array}\right.$.

Với $x = 1 \Rightarrow y = -3$ ta có phương trình tiếp tuyến là $y = -2(x-1) - 3 \Leftrightarrow y = -2x - 1$ (loại vì trùng với đường thẳng Δ).

Với $x = \dfrac{5}{3} \Rightarrow y = -\dfrac{121}{27}$ ta có phương trình tiếp tuyến là $y = -2\left(x - \dfrac{5}{3}\right) - \dfrac{121}{27} \Leftrightarrow y = -2x - \dfrac{31}{27}$.

Câu 14. Chọn D

Ta có: $y' = -3x^2 + 6x - 7 = -3(x-1)^2 - 4 \le -4$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 1 \Rightarrow y = -3$.

Do đó, tiếp tuyến của đồ thị có hệ số góc lớn nhất bằng -4 và là tiếp tuyến tại điểm $M(1;-3)$.

Phương trình tiếp tuyến là $y = -4(x-1) - 3 \Leftrightarrow y = -4x + 1$.

Câu 15. Chọn D

Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$.

Đường thẳng $x + 4y - 2019 = 0$ có hệ số góc $k = -\dfrac{1}{4}$.

Suy ra $f'(2) = 4 \Leftrightarrow 4(8a + b) = 4 \Leftrightarrow 8a + b = 1$.

$A(2;-5)$ thuộc đồ thị hàm số nên $16a + 4b + 23 = -5 \Leftrightarrow 4a + b = -7$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 8a + b = 1 \\ 4a + b = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -15 \end{cases} \Rightarrow 2a + b - 4 = -15$.

Câu 16. Chọn D

Cách 1 :

Đường thẳng $y = m$ tiếp xúc với đường cong $(C): f(x) = x^4 - 8x^2 + 35$ khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^4 - 8x^2 - 35 = m \\ (x^4 - 8x^2 - 13)' = m' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 8x^2 - 35 = m & (1) \\ 4x^3 - 16x = 0 & (2) \end{cases}.$$

Từ (2) $\Rightarrow 4x^3-16x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Với $x=0$ thay vào (1) ta được $m=35$.

Với $x=2$ thay vào (1) ta được $m=19$.

Với $x=-2$ thay vào (1) ta được $m=19$.

Vì đường thẳng $y=m$ tiếp xúc với đồ thị $(C): f(x)=x^4-8x^2+35$ tại hai điểm phân biệt, tức là phương trình (2) có 2 nghiệm kép. Thử lại, ta có $m=19$ thỏa mãn.

Khi đó, tung độ tiếp điểm là $y=19$.

Cách 2:

Dựa vào dạng đồ thị của hàm trùng phương ta thấy đường thẳng $y=m$ (song song với trục Ox) tiếp xúc với đồ thị hàm số $(C): f(x)=x^4-8x^2+35$ chỉ có thể tại hai điểm cực tiểu hoặc điểm cực đại. Do đường thẳng $y=m$ tiếp xúc tại hai điểm phân biệt nên $y=m$ đi qua hai điểm cực tiểu.

Ta có $f'(x)=4x^3-16x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	19	↗	35	↘	19	↗	$+\infty$

Kết luận: Đường thẳng $y=19$ tiếp xúc với (C) tại hai điểm cực tiểu hay tung độ tiếp điểm là 19.

Câu 17. Chọn B

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln(2x-2)$. Điều kiện $x>1$.

Đường thẳng $y=-x+2$ có hệ số góc $k_1=-1$, suy ra hệ số góc của tiếp tuyến là $k_2=1$.

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình $f'(x)=1$.

Ta có $f'(x)=1 \Leftrightarrow x-\frac{1}{x-1}=1 \Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow x=2$ (do điều kiện $x>1$).

Vậy có 1 tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 18. Chọn D

Gọi $M(a;e^a-e^{-a})$ là tọa độ tiếp điểm. Ta có $y'=e^x+e^{-x}$.

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm M là $y'(a)=e^a+e^{-a}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi: $e^a+e^{-a} \geq 2\sqrt{e^a e^{-a}}=2$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $e^a=e^{-a} \Leftrightarrow a=0$.

Vậy tiếp tuyến tại điểm $M(0;0)$ có hệ số góc nhỏ nhất $k=2$.

Khi đó, phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=2x$.

Câu 19. Chọn C

Gọi $M\left(x_0;x_0^3+3x_0^2-6x_0+1\right)$ là tọa độ tiếp điểm. Ta có: $y'=3x^2+6x-6$.

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M có dạng: $y=(3x_0^2+6x_0-6)(x-x_0)+x_0^3+3x_0^2-6x_0+1$.

Tiếp tuyến đi qua $N(0;1)\Rightarrow 1=(3x_0^2+6x_0-6)(-x_0)+x_0^3+3x_0^2-6x_0+1$

$\Leftrightarrow 2x_0^3+3x_0^2=0\Leftrightarrow x_0=0$ hoặc $x_0=-\dfrac{3}{2}$.

Với $x_0=0$, suy ra phương trình tiếp tuyến: $y=-6x+1$.

Với $x_0=-\dfrac{3}{2}$, suy ra phương trình tiếp tuyến: $y=-\dfrac{33}{4}x+1$.

Câu 20. Chọn A

Gọi $M\left(x_0;x_0^3-3x_0^2+2\right)$ là tọa độ tiếp điểm. Ta có $y'=3x^2-6x$.

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M có dạng: $y=\left(3x_0^2-6x_0\right)\left(x-x_0\right)+x_0^3-3x_0^2+2$.

Tiếp tuyến đi qua $A(1;0)\Rightarrow\left(3x_0^2-6x_0\right)\left(1-x_0\right)+x_0^3-3x_0^2+2=0$

$\Leftrightarrow -2x_0^3+6x_0^2-6x_0+2=0\Leftrightarrow x_0=1$. Vậy có duy nhất một tiếp tuyến cần tìm.

Câu 21. Chọn B

Ta có $y'=\dfrac{x^2-6x+5}{\left(x-3\right)^2}$. Gọi $M\left(x_0;\dfrac{{x_0}^2-x_0-2}{x_0-3}\right)$ là tọa độ tiếp điểm.

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M có dạng: $y=\dfrac{{x_0}^2-6x_0+5}{\left(x_0-3\right)^2}\left(x-x_0\right)+\dfrac{{x_0}^2-x_0-2}{x_0-3}$

Tiếp tuyến đi qua $A(4;1)\Rightarrow 1=\dfrac{{x_0}^2-6x_0+5}{\left(x_0-3\right)^2}\left(4-x_0\right)+\dfrac{{x_0}^2-x_0-2}{x_0-3}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0\neq 3\\ 5{x_0}^2-22x_0+17=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1\\ x_0=\dfrac{17}{5}\end{array}\right.$. Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm.

Câu 22. Chọn A

Ta có $y'=\dfrac{2}{\left(x+1\right)^2}$. Gọi $M\left(x_0;\dfrac{2x_0}{x_0+1}\right)$ là tọa độ tiếp điểm.

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M có dạng: $y=\dfrac{2}{\left(x_0+1\right)^2}\left(x-x_0\right)+\dfrac{2x_0}{x_0+1}$

Tiếp tuyến đi qua $A(0;1)\Rightarrow 1=\dfrac{2}{\left(x_0+1\right)^2}\left(-x_0\right)+\dfrac{2x_0}{x_0+1}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0\neq -1\\ \left(x_0+1\right)^2=-2x_0+2x_0\left(x_0+1\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0\neq -1\\ {x_0}^2-2x_0-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1-\sqrt{2}\\ x_0=1+\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Suy ra tích hệ số góc cần tìm là: $y'\left(1-\sqrt{2}\right).y'\left(1+\sqrt{2}\right)=\dfrac{2}{\left(1-\sqrt{2}+1\right)^2}.\dfrac{2}{\left(1+\sqrt{2}+1\right)^2}=1$.

Câu 23. Chọn B

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}x^3+mx^2-9x-9m=0\ (1)\\3x^2+2mx-9=0\qquad(2)\end{cases}$

Giải $(1)\Leftrightarrow(x-3)(x+3)(x+m)=0$.

Với $x=3$, thay vào (2) ta được $m=-3$.

Với $x=-3$, thay vào (2) ta được $m=3$.

Với $x=-m$, thay vào (2) ta được $m=\pm3$.

Vậy $S=\{-3;3\}$. Khi đó tổng các phần tử của S bằng 0.

Câu 24. Chọn D

Giả sử $M(x_1;y_1),N(x_2;y_2)$.

Ta có $y'=3x^2+3a$ suy ra $3x_1^2+3a=3x_2^2+3a=3\Rightarrow x_1^2+a=x_2^2+a=1$.

Mặt khác, $y_1=x_1^3+3ax_1+b=x_1^3+ax_1+2ax_1+b=x_1\left(x_1^2+a\right)+2ax_1+b=(2a+1)x_1+b$.

Tương tự $y_2=(2a+1)x_2+b$.

Suy ra phương trình đường thẳng MN là $(2a+1)x-y+b=0$.

Giả thiết có $d(O,MN)=1\Leftrightarrow\dfrac{|b|}{\sqrt{(2a+1)^2+1}}=1\Leftrightarrow b^2=4a^2+4a+2$.

Vậy $a^2-b^2=-3a^2-4a-2=-3\left(a+\dfrac{2}{3}\right)^2-\dfrac{2}{3}\le\dfrac{-2}{3}$.

Giá trị lớn nhất của a^2-b^2 bằng $\dfrac{-2}{3}$ khi $a=\dfrac{-2}{3},b=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{3}$.

Câu 25. Chọn B

Đặt $t=x+\sqrt{x^2+1}$ suy ra $t>0$ (vì $\sqrt{x^2+1}>|x|$ với mọi x và $|x|+x\ge0$ với mọi x).

Ta có $\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=-1$ suy ra $x-\sqrt{x^2+1}=\dfrac{-1}{t}$.

Vậy $f(t)=\dfrac{-1}{t}$ với $t>0$ hay $f(x)=\dfrac{-1}{x}$ với $x>0$.

Có $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}\Rightarrow f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=4$ suy ra tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0=\dfrac{1}{2}$ là đường thẳng Δ có phương trình: $y=f'\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=4x-4$.

Khi đó Δ cắt Ox tại điểm $A(1;0)$ và cắt Oy tại điểm $B(0;-4)$ nên diện tích của ΔOAB là $S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}.OA.OB=\dfrac{1}{2}|1|.|-4|=2$.

Câu 26. Chọn D

Hàm số đã cho xác định với $\forall x \neq 1$. Ta có: $y' = \dfrac{-4}{(x-1)^2}$

Gọi $M(x_0\,;y_0) \in (C), (x_0 \neq 1)$ là tiếp điểm, suy ra phương trình tiếp tuyến của (C):

$y = \dfrac{-4}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \dfrac{2x_0+2}{x_0-1}$ với $y'(x_0) = \dfrac{-4}{(x_0-1)^2}$ và $y_0 = \dfrac{2x_0+2}{x_0-1}$

Do $|x_0| - 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2$, hay $M\left(-2;\dfrac{2}{3}\right)$, $M(2;6)$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M\left(-2;\dfrac{2}{3}\right)$ là $y = -\dfrac{4}{9}x - \dfrac{2}{9}$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M(2;6)$ là $y = -4x + 14$.

Vậy có 2 tiếp tuyến thỏa đề bài $y = -\dfrac{4}{9}x - \dfrac{2}{9}$, $y = -4x + 14$.

Câu 27. Chọn D

Ta có: $y = 4x^2(1-x) + x^4 = x^4 - 4x^3 + 4x^2 \Rightarrow y' = 4x^3 - 12x^2 + 8x$. Gọi $M(x_0;y_0) \in (C)$ là tiếp điểm.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(x_0;y_0)$ là $y = (4x_0^3 - 12x_0^2 + 8x_0)(x-x_0) + x_0^4 - 4x_0^3 + 4x_0$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và parabol (P): $y = x^2$:

$$x_0^4 - 4x_0^3 + 4x_0^2 = x_0^2 \Leftrightarrow x_0^2(x_0^2 - 4x_0 + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 1 \\ x_0 = 3 \end{array}\right.$$

- $x_0 = 0$ ta có phương trình tiếp tuyến là: $y = 0$.
- $x_0 = 1$ ta có phương trình tiếp tuyến là: $y = 1$.
- $x_0 = 3$ ta có phương trình tiếp tuyến là: $y = 24x - 63$.

Câu 28. Chọn B

Ta có $y = \dfrac{2x-1}{x+1} \Rightarrow y' = \dfrac{3}{(x+1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến tiếp xúc với đồ thị tại $M(x_0, y_0)$ là $y = \dfrac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0) + \dfrac{2x_0-1}{x_0+1}$.

Giao điểm của tiếp tuyến với tiệm cận ngang $y = 2$ là $A(2x_0+1;2)$, $IA = 2|x_0+1|$.

Giao điểm của tiếp tuyến với tiệm cận đứng $x = -1$ là $B\left(-1;\dfrac{2x_0-4}{x_0+}\right)$, $IB = \dfrac{6}{|x_0+1|}$.

Theo bài ra $AI^2 + IB^2 = 40 \Leftrightarrow 4(x_0+1)^2 + \dfrac{36}{(x_0+1)^2} = 40 \Leftrightarrow 4(x_0+1)^4 - 40(x_0+1)^2 + 36 = 0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x_0+1)^2 = 9 \\ (x_0+1)^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0+1 = \pm 3 \\ x_0+1 = \pm 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2; x_0 = -4 \\ x_0 = 0; x_0 = -2 \end{array}\right.$$

Do $x_0 < -3$ nên $x_0 = -4$ suy ra điểm $M(-4;3)$. Vậy $x_0 y_0 = -12$.

Câu 29. Chọn B

Ta gọi $M(0;a)$ là điểm cần tìm. Phương trình đường thẳng d đi qua M có dạng $y=kx+a$.

Đường thẳng d là tiếp tuyến duy nhất của $(H) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1}=kx+a \ (1) \\ \dfrac{-2}{(x-1)^2}=k \quad (2) \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Thế (2) vào (1) ta có phương trình $\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{-2}{(x-1)^2}x+a \ (*)$

Điều kiện $x \neq 1$.

Ta có $(*) \Leftrightarrow (a-1)x^2-2(a+1)x+a+1=0 \Leftrightarrow g(x)=0$ (**)

Yêu cầu bài toán dẫn đến phương trình (**) có một nghiệm $x \neq 1$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} a \neq 1 \\ \Delta=0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2}; a=1 \\ \begin{cases} x=0; a=-1 \\ -2 \neq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2}; a=1 \\ x=0; a=-1 \end{array}\right.$$

Vậy có hai điểm thỏa mãn là $M_1(0;1)$ và $M_2(0;-1)$.

Câu 30. Chọn A

Ta có $y'=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$. Gọi $M\left(a;\dfrac{2a-1}{a-1}\right),(a \neq 1)$ là tiếp điểm.

Phương trình tiếp tuyến tại M là $y=\dfrac{-1}{(a-1)^2}(x-a)+\dfrac{2a-1}{a-1}$.

Tiếp tuyến cắt trục Ox tại $A(2a^2-2a+1;0)$; cắt trục Oy tại $B\left(0;\dfrac{2a^2-2a+1}{(a-1)^2}\right)$.

Tam giác OAB vuông tại $O \Leftrightarrow OA^2+OB^2=AB^2$. Mặt khác $AB=\sqrt{82}.OB$

$\Rightarrow OA^2+OB^2=82.OB^2 \Leftrightarrow OA=9OB \ (1)$.

Từ (1) ta có $2a^2-2a+1=9.\dfrac{2a^2-2a+1}{(a-1)^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-2 \\ a=4 \end{array}\right.$

Với $a=-2$ ta có phương trình tiếp tuyến là $y=-\dfrac{1}{9}x+\dfrac{13}{9}$.

Với $a=4$ ta có phương trình tiếp tuyến là $y=-\dfrac{1}{9}x+\dfrac{25}{9}$.

Câu 31. Chọn A

Điều kiện $x \geq \dfrac{1}{2}$. Ta có $16x^2-2x-8=6\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow 16x^2=\left(3+\sqrt{2x-1}\right)^2$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x-1}+3-4x\right)\left(\sqrt{2x-1}+3+4x\right)=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1}=4x-3$ vì $\sqrt{2x-1}+3+4x>0 \ \forall x \geq \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 16x^2-26x+10=0 \\ x \ge \dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x=1$. Lại có $y'=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$.

Với $x=1 \Rightarrow y=\dfrac{1}{2}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ tại $M\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$ là $y=\dfrac{3}{4}(x-1)+\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{4}$.

Câu 32. Chọn B

Ta có $y'=f'(x)=\dfrac{-1}{(x-2)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(x_0;y_0)\in(C)$ ($x_0 \ge 3$) có dạng $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$.

Do tiếp tuyến cắt hai tia Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A, B và tam giác OAB cân nên tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=x$.

Suy ra $\dfrac{-1}{(x_0-2)^2}=\dfrac{-1}{1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1 \\ x_0=3 \end{array}\right.$. So điều kiện thì ta loại $x_0=1$.

Với $x_0=3$ ta có phương trình tiếp tuyến là $y=-x+5$.

Câu 33. Chọn D

Ta có $y'=f'(x)=\dfrac{-2}{(x-1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(x_0;y_0)\in(C)$ có dạng $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$.

Ta có $f'(x_0)=\dfrac{-2}{(x_0-1)^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $(x_0-1)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất mà x_0 phải là số nguyên dương khác 1 nên $x_0=2$ thỏa mãn yêu cầu.

Suy ra phương trình tiếp tuyến là: $y=-2(x-2)+5 \Leftrightarrow y=-2x+9$.

Câu 34. Chọn D

Ta có $y'=f'(x)=\dfrac{-4}{(x+1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(x_0;y_0)\in(C)$ có dạng $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$.

Đường thẳng $\Delta: y=-4x+m$ là tiếp tuyến của (C) suy ra $f'(x_0)=-4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=-2 \end{array}\right.$.

Với $x_0=0$ ta có phương trình tiếp tuyến là $y=-4(x-0)+3 \Leftrightarrow y=-4x+3$.

Với $x_0=-2$ ta có phương trình tiếp tuyến là $y=-4(x+2)-5 \Leftrightarrow y=-4x-13$.

Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn yêu cầu là $m=3; m=-13$ suy ra tổng các giá trị m là -10.

Câu 35. Chọn D

Phương trình đường thẳng d qua $M(0;b)$ có hệ số góc k là $d: y=kx+b$.

d là tiếp tuyến với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^4-2x^2=kx+b \\ 4x^3-4x=k \end{cases} \Rightarrow b=-3x^4+2x^2 \ (1).$$

Xét hàm số: $g(x)=-3x^4+2x^2$.

$$g'(x)=-12x^3+4x;\ g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{-1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{3}$	↘	0	↗	$\frac{1}{3}$	↘	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y=b$ là đường thẳng song song với trục hoành.

Qua $M(0;b)$ kẻ được 4 tiếp tuyến đến (C) khi phương trình (1) có 4 nghiệm hay đường thẳng $y=b$ cắt đồ thị hàm số $g(x)$ tại 4 điểm.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra yêu cầu bài toán được thỏa mãn khi $0<b<\dfrac{1}{3}$.

Câu 36. Chọn C

Đường thẳng d đi qua $A(a;2)$ với hệ số góc k có phương trình $y=k(x-a)+2$.

(d) tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} k(x-a)+2=\dfrac{x+1}{x-1} \\ k=\dfrac{-2}{(x-1)^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{-2(x-a)}{(x-1)^2}+2=\frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x^2-6x+2a+3=0\,(1) \end{cases}.$$

Có 2 tiếp tuyến của (C) qua A suy ra phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ 2a-2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<3 \\ a\neq 1 \end{cases} (*).$$

Hệ số góc của các tiếp tuyến là $k_1=\dfrac{-2}{(x_1-1)^2}$, $k_2=\dfrac{-2}{(x_2-1)^2}$ với x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình (1). Ta có:

$$k_1+k_2=-2\left[\frac{1}{(x_1-1)^2}+\frac{1}{(x_2-1)^2}\right]=-2\left[\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-2(x_1+x_2)+2}{(x_1x_2-x_1-x_2+1)^2}\right]=\frac{2a-10}{(a-1)^2}.$$

$$k_1.k_2=\frac{4}{\left[(x_1-1)(x_2-1)\right]^2}=\frac{4}{\left[x_1x_2-(x_1+x_2)+1\right]^2}=\frac{1}{(a-1)^2}.$$

Từ giả thiết: $k_1+k_2+10k_1^2.k_2^2=0 \Leftrightarrow \dfrac{2a-10}{(a-1)^2}+\dfrac{10}{(a-1)^4}=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 1 \\ 2a^3-14a^2+22a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=\dfrac{7\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện $(*)$ ta đươc: $a=0$ hoặc $a=\dfrac{7-\sqrt{5}}{2}$.

Vậy tổng các phần tử của S bằng $\dfrac{7-\sqrt{5}}{2}$.

Câu 37. Chọn B

Đường thẳng (d) qua $A(a;0)\in Ox$, $a\in\mathbb{Z}$ có hệ số góc k có phương trình là $y=k(x-a)$.

(d) là tiếp tuyến duy nhất với (C) khi hệ phương trình sau có duy nhất nghiệm

$\begin{cases} x^3-3x^2+4=k(x-a) \\ 3x^2-6x=k \end{cases} \quad (I)$.

$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x^2-x-2)=k(x-a) \\ 3x(x-2)=k \end{cases} \Rightarrow (x-2)\left[2x^2-(3a-1)x+2\right]=0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ 2x^2-(3a-1)x+2=0 \quad (*) \end{array}\right.$.

Hệ (I) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình $(*)$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x=2$

Trường hợp 1: Phương trình $(*)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta<0 \Leftrightarrow -1<a<\dfrac{5}{3}$. Vì $a\in\mathbb{Z}$ nên $\left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=1 \end{array}\right.$

Trường hợp 2: Phương trình $(*)$ có nghiệm kép $x=2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=0 \\ \dfrac{3a-1}{4}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=\dfrac{5}{3} \end{array}\right. \\ a=3 \end{cases} \Leftrightarrow a\in\varnothing$.

Vậy tồn tại hai điểm có tọa độ nguyên thỏa mãn là $A(0;0)$ hoặc $A(1;0)$.

Câu 38. Chọn C

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Ta có $y'=\dfrac{-3}{(x-1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm $M\left(x_0;\dfrac{x_0+2}{x_0-1}\right)$ có phương trình:

$y=-\dfrac{3}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\dfrac{x_0+2}{x_0-1}$.

Tiếp tuyến đi qua $A(0;a)$ nên $\dfrac{3x_0}{(x_0-1)^2}+\dfrac{x_0+2}{x_0-1}=a$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq 1 \\ 3x_0 + (x_0+2)(x_0-1) = a(x_0-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq 1 \\ (a-1)x_0^2 - 2(a+2)x_0 + a + 2 = 0 \ (1) \end{cases}$.

Để từ $A(0;a)$ kẻ đến (C) hai tiếp tuyến thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 1.

$\Leftrightarrow \begin{cases} a-1 \neq 0 \\ \Delta' = (a+2)^2 - (a-1)(a+2) > 0 \\ (a-1) - 2(a+2) + a + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ a > -2 \end{cases} . (*)$

Gọi $x_1; x_2$ là các nghiệm của phương trình (1).

Khi đó tọa độ các tiếp điểm là $E\left(x_1; \frac{x_1+2}{x_1-1}\right); F\left(x_2; \frac{x_2+2}{x_2-1}\right)$.

Để các tiếp điểm tương ứng nằm về hai phía trục hoành khi và chỉ khi $\frac{x_1+2}{x_1-1}.\frac{x_2+2}{x_2-1} < 0$

$\Leftrightarrow \frac{x_1x_2 + 2(x_1+x_2)+4}{x_1x_2 - (x_1+x_2)+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{\frac{a+2}{a-1} + 2\frac{2(a+2)}{a-1} + 4}{\frac{a+2}{a-1} - \frac{2(a+2)}{a-1} + 1}$

$\Leftrightarrow \frac{9a+6}{-3} < 0 \Leftrightarrow 9a+6 > 0 \Leftrightarrow a > -\frac{2}{3}$. Kết hợp với điều kiện $(*)$ suy ra $\begin{cases} a > -\frac{2}{3} \\ a \neq 1 \end{cases}$.

Câu 39. Chọn C

Gọi $A(x_0;y_0)$ với $x_0 < 0$ là điểm cố định cần tìm.

$\Rightarrow y_0 = -x_0^3 + mx_0^2 - x_0 - 4m, \forall m \Leftrightarrow (x_0^2-4)m - x_0^3 - x_0 - y_0 = 0, \forall m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - 4 = 0 \\ -x_0^3 - x_0 - y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \ (\text{vì } x_0 < 0) \\ y_0 = 10 \end{cases} \Rightarrow A(-2;10)$.

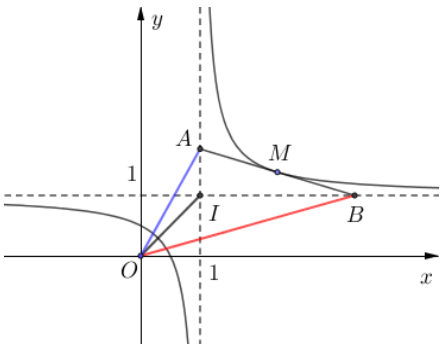
Ta có $y' = -3x^2 + 2mx - 1 \Rightarrow y'(-2) = -4m - 13$.

Phương trình tiếp tuyến của (C_m) tại $A(-2;10)$ là $y = (-4m-13)(x+2)+10$ hay $y = (-4m-13)x - 8m - 16 \ (\Delta)$.

Đường phân giác góc phần tư thứ nhất có phương trình $d: y = x$.

Vì $\Delta \perp d \Leftrightarrow -4m - 13 = -1 \Leftrightarrow m = -3$.

Câu 40. Chọn A



Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Tiệm cận đứng: $x = 1 \ (d_1)$, tiệm cận ngang: $y = 1 \ (d_2) \Rightarrow I(1;1)$.

Ta có $y' = \frac{-2}{(2x-2)^2}$

Phương trình tiếp tuyến Δ tại điểm $M(x_0;y_0)$ có dạng $y=\dfrac{-2}{(2x_0-2)^2}(x-x_0)+\dfrac{2x_0-1}{2x_0-2}$

$A=\Delta\cap d_1\Rightarrow A\left(1;\dfrac{x_0}{x_0-1}\right)$; $B=\Delta\cap d_2\Rightarrow B(2x_0-1;1)$; $\overrightarrow{IB}=(2x_0-2;0)$, $\overrightarrow{IA}=\left(0;\dfrac{1}{x_0-1}\right)$.

Ta có $S_{\Delta OIB}=8S_{\Delta OIA}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}.OI.IB.\sin OIB=8.\dfrac{1}{2}.OI.IA.\sin OIA$

$\Leftrightarrow IB=8IA$ (vì $OIB=OIA=135^0$) $\Leftrightarrow|2x_0-2|=8\left|\dfrac{1}{x_0-1}\right|$

$\Leftrightarrow(x_0-1)^2=4\Rightarrow x_0=3$ (do $x_0>1$) $\Rightarrow y_0=\dfrac{5}{4}\Rightarrow S=x_0+4y_0=3+4.\dfrac{5}{4}=8$

Câu 41. Chọn D

Tiệm cận đứng: $x=1$ (d_1), tiệm cận ngang: $y=1$ (d_2).

Gọi Δ_1, Δ_2 lần lượt là tiếp tuyến của (C) tại A, B. Ta có $y'=\dfrac{-2}{(x-1)^2}$.

$\Delta_1//\Delta_2\Rightarrow y'(x_A)=y'(x_B)\Leftrightarrow\dfrac{-2}{(x_A-1)^2}=\dfrac{-2}{(x_B-1)^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_A=x_B\ (l)\\x_A+x_B=2\end{array}\right.$.

Đặt $x_A=m$ với $m<1$. Suy ra $A\left(m;\dfrac{m+1}{m-1}\right)$, $B\left(2-m;\dfrac{m-3}{m-1}\right)$.

Tiếp tuyến tại A là $\Delta_1:y=\dfrac{-2}{(m-1)^2}(x-m)+\dfrac{m+1}{m-1}$.

Tiếp tuyến tại B là $\Delta_2:y=\dfrac{-2}{(m-1)^2}(x+m-2)+\dfrac{m-3}{m-1}$.

$D=\Delta_1\cap d_2\Rightarrow D(2m-1;1)$; $C=\Delta_2\cap d_1\Rightarrow C\left(1;\dfrac{m-5}{m-1}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\left(2-2m;\dfrac{-4}{m-1}\right)\Rightarrow ABCD$ là hình bình hành.

$\overrightarrow{BC}=\left(m-1;\dfrac{-2}{m-1}\right)$. Chu vi P hình bình hành $ABCD$ bằng

$P=2(AB+BC)=2\left(\sqrt{4(m-1)^2+\dfrac{16}{(m-1)^2}}+\sqrt{(m-1)^2+\dfrac{4}{(m-1)^2}}\right)=6\sqrt{(m-1)^2+\dfrac{4}{(m-1)^2}}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm $(m-1)^2$ và $\dfrac{4}{(m-1)^2}$, ta có:

$P\geq6\sqrt{2\sqrt{(m-1)^2.\dfrac{4}{(m-1)^2}}}=12$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow(m-1)^2=\dfrac{4}{(m-1)^2}\Leftrightarrow m=1-\sqrt{2}$.

Câu 42. Chọn A

Tiệm cận đứng: $x=-1$ (d_1), tiệm cận ngang: $y=1$ (d_2). Ta có $y'=\dfrac{2}{(x+1)^2}$.

Xét điểm $A\left(a-1;\dfrac{a-2}{a}\right)\in(C)$, $a>0$. Tiếp tuyến tại A là Δ_1: $y=\dfrac{2}{a^2}(x-a+1)+\dfrac{a-2}{a}$

$M=\Delta_1\cap d_2\Rightarrow M(2a-1;1)$; $N=\Delta_1\cap d_1\Rightarrow N\left(-1;\dfrac{a-4}{a}\right)$.

Xét điểm $B\left(b-1;\dfrac{b-2}{b}\right)\in(C)$, $b<0$. Tiếp tuyến tại B là $\Delta_2: y=\dfrac{2}{b^2}(x-b+1)+\dfrac{b-2}{b}$

$P=\Delta_2\cap d_2\Rightarrow P(2b-1;1)$; $Q=\Delta_1\cap d_1\Rightarrow Q\left(-1;\dfrac{b-4}{b}\right)$.

$\overrightarrow{MP}=(2b-2a;0)$, $\overrightarrow{NQ}=\left(0;\dfrac{4}{a}-\dfrac{4}{b}\right)$

Ta có $MP\perp NQ\Rightarrow S_{MNPQ}=\dfrac{1}{2}MP.NQ=\dfrac{1}{2}.2|a-b|.4\left|\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right|=\dfrac{4(a-b)^2}{-ab}=\dfrac{4(a^2+b^2-2ab)}{-ab}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm a^2 và b^2, ta có: $a^2+b^2\ge 2\sqrt{a^2.b^2}=-2ab$

$\Rightarrow S_{MNPQ}\ge\dfrac{4(-4ab)}{-ab}=16$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=-b$.

Câu 43. Chọn B

Tập xác định $D=\mathbb{R}$; $y'=4x^3-4mx=4x(x^2-m)$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m\end{array}\right.$.

Đồ thị hàm số đã cho tiếp xúc với trục hoành tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi đồ thị đó có hai điểm cực trị (trong bài toán này là hai cực tiểu) thuộc trục hoành.

Khi đó ta có $\begin{cases}m>0\\f(\sqrt{m})=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\m^2-2m^2+3m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\m(3-m)=0\end{cases}\Rightarrow m=3.$

Vậy có 1 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 44. Chọn D

Đồ thị hàm số tiếp xúc với trục hoành khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases}\dfrac{x^4-x^3-m^2x^2+m^2x}{x^2+1}=0\\\dfrac{(4x^3-3x^2-2m^2x+m^2).(x^2+1)-(x^4-x^3-m^2x^2+m^2x).2x}{(x^2+1)^2}=0\end{cases}(I).$$

Ta có $(I)\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x^4-x^3-m^2x^2+m^2x}{x^2+1}=0\\\dfrac{(4x^3-3x^2-2m^2x+m^2)(x^2+1)}{(x^2+1)^2}-\dfrac{(x^4-x^3-m^2x^2+m^2x).2x}{(x^2+1)^2}=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^4-x^3-m^2x^2+m^2x=0\ \ (1)\\4x^3-3x^2-2m^2x+m^2=0\ (2)\end{cases}$.

$(1)\Leftrightarrow x(x^2-m^2)(x-1)=0\Leftrightarrow x\in\{0;1;\pm m\}$

Khi $x=0$ thay vào (2) suy ra $m=0$.

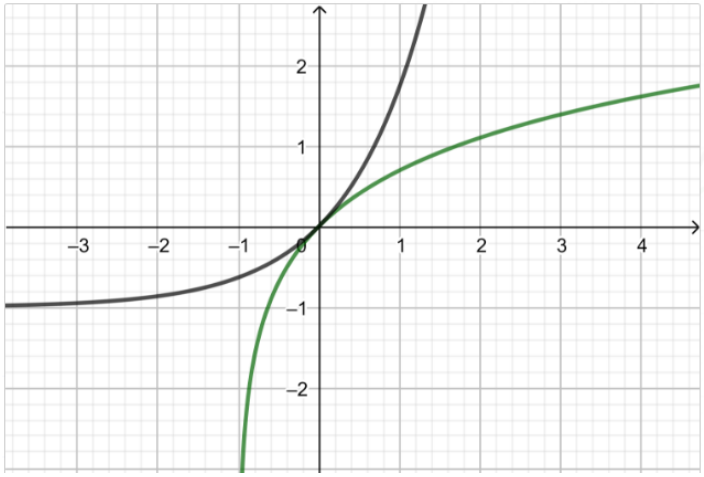
Khi $x=1$ thay vào (2) suy ra $m^2=1\Rightarrow m=\pm 1$.

Khi $x=m$ thay vào (2) suy ra $2m^3-2m^2=0\Rightarrow m=1, m=0$.

Khi $x=-m$ thay vào (2) suy ra $-2m^3-2m^2=0\Rightarrow m=-1, m=0$.

Vậy có ba giá trị của m. Chọn đáp án D

Câu 45. Chọn D



Đồ thị hàm số $y=\mathrm{e}^x+m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=\ln(x+1)$ khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} \mathrm{e}^x+m=\ln(x+1) \\ \left(\mathrm{e}^x+m\right)'=\left[\ln(x+1)\right]' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{e}^x+m=\ln(x+1) & (1) \\ \mathrm{e}^x=\dfrac{1}{x+1} & (2) \end{cases}$$

Dễ thấy rằng hàm số $y=\mathrm{e}^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, hàm số $y=\dfrac{1}{x+1}$ nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$ và $x=0$ là nghiệm của phương trình (2) nên phương trình (2) có nghiệm duy nhất là $x=0$.

Thay $x=0$ vào phương trình (1) ta được $m=-1$.

Câu 46. Chọn D

Gọi phương trình tiếp tuyến chung của hai đồ thị là $y=ax+b$, hoành độ tiếp điểm của $(C_1),(C_2)$ lần lượt là x_1, x_2. Ta có $\begin{cases} \dfrac{x_1^4}{4}-2x_1^2+4=ax_1+b & (1) \\ x_1^3-4x_1=a & (2) \\ x_2^2+4=ax_2+b & (3) \\ 2x_2=a & (4) \end{cases}$.

Từ (4) ta có $x_2=\dfrac{a}{2}$, thế vào (3) suy ra $b=4-\dfrac{a^2}{4}$ (5).

Thế (2) vào (5) ta được $b=4-\dfrac{\left(x_1^3-4x_1\right)^2}{4}$ (6).

Thế (2) và (6) vào (1) ta có

$\frac{x_1^4}{4}-2x_1^2+4=x_1\left(x_1^3-4x_1\right)+4-\frac{\left(x_1^3-4x_1\right)^2}{4}\Leftrightarrow x_1^2\left(-x_1^2+8+4x_1^2-16-x_1^4+8x_1^2-16\right)=0$

$\Leftrightarrow x_1^2\left(-x_1^4+11x_1^2-24\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=0\\x_1=\pm\sqrt{3}\\x_1=\pm\sqrt{8}\end{array}\right.$. Thế vào (2) ta được 5 giá trị của a là $a=0$, $a=\mp\sqrt{3}$, $a=\pm8\sqrt{2}$. Do vậy hai đồ thị có 5 tiếp tuyến chung.

Câu 47. Chọn D

Gọi d là phương trình tiếp tuyến chung của (C_1), (C_2) và $x_0=a$ là hoành độ tiếp điểm của d với (C_1) thì phương trình d là

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0=2a(x-a)+a^2=2ax-a^2.$$

d tiếp xúc với (C_2) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm: $\begin{cases}\sqrt{5-x^2}-\dfrac{41}{16}=2ax-a^2 & (1)\\ \dfrac{-x}{\sqrt{5-x^2}}=2a & (2)\end{cases}$

Thế (2) vào (1) ta có $\sqrt{5-x^2}-\frac{41}{16}=\frac{-x^2}{\sqrt{5-x^2}}-\frac{x^2}{4(5-x^2)}$. Đặt $t=\sqrt{5-x^2}$ (ĐK: $t>0$)

Ta có phương trình $t-\frac{41}{16}=\frac{t^2-5}{t}+\frac{t^2-5}{4t^2}\Leftrightarrow 45t^2-80t-20=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=\frac{-2}{9}\end{array}\right.$.

Do điều kiện: $t>0$ nên nhận $t=2$. Với $t=2$ suy ra $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$, thế vào (2) ta có $\left[\begin{array}{l}a=\frac{1}{4}\\a=\frac{-1}{4}\end{array}\right.$.

Do đó (C_1), (C_2) có hai tiếp tuyến chung là $\left[\begin{array}{l}y=\frac{-1}{2}x-\frac{1}{16}\\y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{16}\end{array}\right.$. Vậy phương trình tiếp tuyến chung của hai đồ thị (C_1), (C_2) có hệ số góc dương là $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{16}$.

Câu 48. Chọn C

Ta có: $f^2(1+2x)=x-f^3(1-x)\Leftrightarrow f^2(2x+1)+f^3(1-x)=x$.

Đạo hàm hai vế $f^2(2x+1)+f^3(1-x)=x$, ta có

$$4.f(2x+1).f'(2x+1)-3f^2(1-x).f'(1-x)=1.$$

Cho $x=0$ ta được $4f(1).f'(1)-3.f^2(1).f'(1)=1\Leftrightarrow f(1).f'(1).\left[4-3f(1)\right]=1.\ (1)$

Từ $f^2(2x+1)+f^3(1-x)=x$, cho $x=0$ ta có

$$f^2(1)+f^3(1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(1)=0\\f(1)=-1\end{array}\right.$$

Nếu $f(1)=0$ thì mâu thuẫn với (1), do đó $f(1)=-1$, khi đó

$$(1)\Leftrightarrow -f'(1).(4+3)=1\Leftrightarrow f'(1)=-\frac{1}{7}.$$

Phương trình tiếp tuyến $y=-\frac{1}{7}(x-1)-1\Leftrightarrow y=-\frac{1}{7}x-\frac{6}{7}$ hay $x+7y+6=0$.

Câu 49. Chọn D

$f^3(2-x)-2f^2(2+3x)+x^2.g(x)+36x=0,\ \forall x\in\mathbb{R}\ (1)$.

Vì (1) đúng $\forall x\in\mathbb{R}$ nên cũng đúng với $x=0\Rightarrow f^3(2)-2f^2(2)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}f(2)=0\\f(2)=2\end{array}\right.$.

Lấy đạo hàm hai vế của (1) ta có:

$-3f^2(2-x).f'(2-x)-12f(2+3x).f'(2+3x)+2x.g(x)+x^2.g'(x)+36=0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Cho $x=0\Rightarrow -3f^2(2).f'(2)-12f(2).f'(2)+36=0\ (2)$.

Ta thấy $f(2)=0$ không thỏa mãn (2) nên $f(2)=2$, khi đó $f'(2)=1$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại $x_o=2$ là

$y=f'(2)(x-2)+f(2)\Leftrightarrow y=x$.

Câu 50. Chọn A

Ta có $y'=\frac{-1}{(x-1)^2}$. Giả sử $M(x_0;y_0)\in(C),(x_0\neq 1)$ suy ra tiếp tuyến của (C) tại điểm M có

phương trình $y=\frac{-1}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0-1}{x_0-1}$.

Vì $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2x-1}{x-1}=+\infty,\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2x-1}{x-1}=-\infty$ nên đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của (C).

Mà $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x-1}=2$ nên đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của (C), suy ra $I(1;2)$.

Điểm $A\left(1;\frac{2x_0}{x_0-1}\right)$ là giao điểm của tiệm cận đứng và tiếp tuyến, điểm $B(2x_0-1;2)$ là giao điểm của tiệm cận ngang và tiếp tuyến.

Ta có chu vi của tam giác IAB bằng $IA+IB+AB=\frac{2}{|x_0-1|}+2|x_0-1|+\sqrt{4(x_0-1)^2+\frac{4}{(x_0-1)^2}}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có $IA+IB+AB\geq 2\sqrt{4}+\sqrt{4.2}=4+\sqrt{8}$.

Đẳng thức xảy ra khi $|x_0-1|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=2\end{array}\right.$

Vậy chu vi tam giác IAB đạt giá trị nhỏ nhất bằng $4+\sqrt{8}$ khi $M(0;1)$ hoặc $M(2;3)$.

Suy ra $a=4,b=8$ nên $a-b+4=0$.

Câu 51. Chọn D

Ta có (C_m) tiếp xúc với đường thẳng (d) tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ $\begin{cases} x_0^4-(m+1)x_0^2+4m=3 \ (1) \\ 4x_0^3-2(m+1)x_0=0 \quad (2) \end{cases}$ có nghiệm x_0.

Từ phương trình $(2) \Leftrightarrow x_0=0$ hoặc $x_0^2=\dfrac{m+1}{2}$.

Nếu $x_0=0$ thay vào (1) ta được $m=\dfrac{3}{4}$.

-Nếu $x_0^2=\dfrac{m+1}{2}$ thay vào (1) ta được $\left(\dfrac{m+1}{2}\right)^2-\dfrac{(m+1)^2}{2}+4m=3$

$\Leftrightarrow m^2-14m+13=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=13 \end{array}\right.$

Thử lại:

Khi $m=\dfrac{3}{4}$ thì (C_m) tiếp xúc với (d) tại chỉ một điểm $(0;3)$ nên $m=\dfrac{3}{4}$ không thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Khi $m=1$ thì $x_0^2=1 \Leftrightarrow x_0=\pm 1$, suy ra (C_m) tiếp xúc với (d) tại hai điểm $(1;3);(-1;3)$

Khi $m=13$ thì $x_0^2=7 \Leftrightarrow x_0=\pm\sqrt{7}$, suy ra (C_m) tiếp xúc với (d) tại hai điểm $\left(\sqrt{7};3\right),\left(-\sqrt{7};3\right)$

Vậy các giá trị m cần tìm là $m=1;m=13$.

Câu 52. Chọn D

Ta có : $y=-x^3+3x^2-2$; $y'=-3x^2+6x$

Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và (C):

$$-x^3+3x^2-2=m(2-x)+2 \ (1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \quad (y=2) \\ x^2-x-2-m=0 \ (2) \end{array}\right.$$

Đường thẳng Δ cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt $A(2;2),B,C$

$\Leftrightarrow$ (1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ (2)^2-(2)-2-m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m+9>0 \\ -m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-\dfrac{9}{4} \ (*) \\ m\neq 0 \end{cases}.$$

Với điều kiện (*), phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt x_B và x_C.

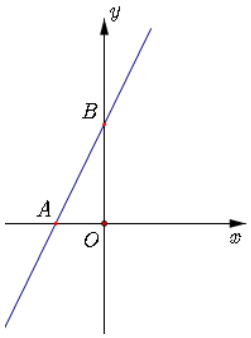
Theo định lý Viet, ta có: $\begin{cases} x_B+x_C=1 \\ x_B.x_C=-m-2 \end{cases}$.

Tích hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại B và C là

$$k_B.k_C=f'(x_B)f'(x_C)=(-3x_B^2+6x_B)(-3x_C^2+6x_C)=9(x_B^2-2x_B)(x_C^2-2x_C).$$
$$=9\left[x_B^2x_C^2-2x_Bx_C(x_B+x_C)+4x_Bx_C\right]=9\left[(m+2)^2-2(m+2)\right]$$
$$=9\left[(m+1)^2-1\right]=9(m+1)^2-9\geq -9.$$

Dấu "=" xảy ra khi $m=-1$ (thỏa điều kiện (*)). Vậy $m=-1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 53. Chọn B



Từ $\dfrac{1}{\cos^2 ABO}=1+\tan^2 ABO \Rightarrow \tan^2 ABO=\dfrac{1}{\cos^2 ABO}-1=\dfrac{26}{25}-1=\dfrac{1}{25}$.

$\Rightarrow \tan ABO=\dfrac{1}{5}$ hay $\tan OAB=5$ (do $OAB+ABO=90°$).

Suy ra hệ số góc của tiếp tuyến là $k=\pm\tan OAB=\pm 5$.

Ta có $y'=x^2e^{-x}\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình $y'=5\Leftrightarrow x^2e^{-x}=5$.

Xét hàm số $g(x)=x^2e^{-x}$. Ta có $g'(x)=(2x-x^2)e^{-x}$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$.

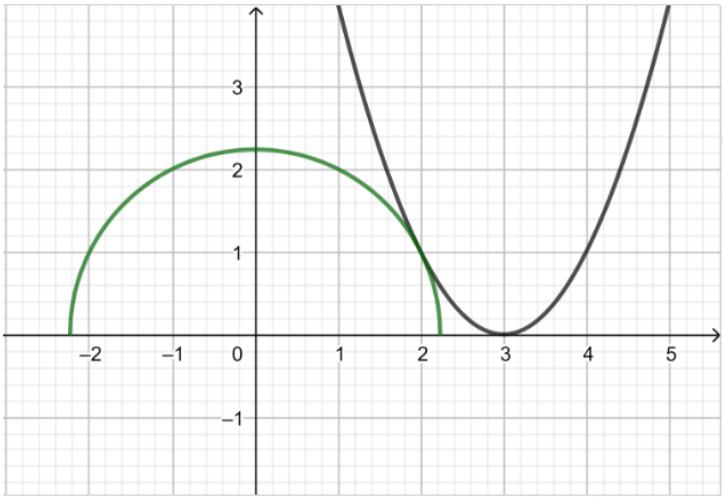
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4.e^{-2}$	$\searrow$	0

Nhận thấy $4.e^{-2}<5$ nên suy ra phương trình $x^2e^{-x}=5$ có một nghiệm duy nhất.

Vậy có duy nhất một tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 54. Chọn D



Đồ thị hàm số $y=x^2-6x+m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=\sqrt{5-x^2}$ khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} \sqrt{5-x^2} = x^2-6x+m \\ \left(\sqrt{5-x^2}\right)' = \left(x^2-6x+m\right)' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5-x^2} = x^2-6x+m & (1) \\ \dfrac{-x}{\sqrt{5-x^2}} = 2x-6 & (2) \end{cases}$$

Phương trình (2) tương đương với $\dfrac{x}{\sqrt{5-x^2}}+2x-6=0$. (3)

Xét hàm số $y=f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{5-x^2}}+2x-6$ xác định, liên tục trên khoảng $\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$ và $f'(x)=\dfrac{5}{\left(\sqrt{5-x^2}\right)^3}+2>0,\ \forall x\in\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$. Suy ra, hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$. Lúc đó, phương trình (3) tương đương với $f(x)=f(2)\Leftrightarrow x=2.$

Thay $x=2$ vào phương trình (1) ta được $m=9$.

Câu 55. Chọn B

Ta có $f'(x)+\dfrac{f(x)}{x}=4x^2+3x \Leftrightarrow x.f'(x)+f(x)=4x^3+3x^2$.

$\Leftrightarrow \left(x.f(x)\right)' = 4x^3+3x^2 \Leftrightarrow x.f(x)=\int\left(4x^3+3x^2\right)\mathrm{d}x \Leftrightarrow x.f(x)=x^4+x^3+C$.

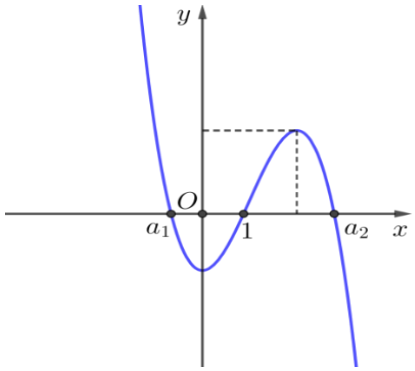
Vì $f(1)=2\Rightarrow 1.f(1)=2+C\Leftrightarrow 2=2+C\Leftrightarrow C=0$.

Suy ra $x.f(x)=x^4+x^3\Rightarrow f(x)=x^3+x^2$.

Khi đó: $f'(x)=3x^2+2x; f'(2)=16; f(2)=12$.

Do đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là $y=16(x-2)+12\Leftrightarrow y=16x-20$.

Câu 56. Chọn B



Ta có tiếp tuyến Δ của (C) tại $x=1$ là $y=f'(1)(x-1)+f(1)$.

Dựa vào đồ thị của hàm số $f'(x)$, ta có $f'(1)=0$.

Vậy $\Delta: y=f(1)$.

Gọi a_1, a_2 là hai nghiệm còn lại của $f'(x)$. Dựa vào đồ thị hàm số ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	a_1		1		a_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(a_1)$	↘	$f(1)$	↗	$f(a_2)$	↘ $-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\Delta : y = f(1)$ và (C) có ba điểm chung.

Câu 57. Chọn D

Gọi $M(m;1-2m) \in d$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua M có hệ số góc là k, khi đó phương trình đường thẳng $\Delta : y = k(x-m)+1-2m$.

Để Δ là tiếp tuyến của đồ thị (C) thì hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x+3}{x-1} = k(x-m)+1-2m \\ -\dfrac{4}{(x-1)^2} = k \end{cases}$ có nghiệm.

Thay $k = -\dfrac{4}{(x-1)^2}$ vào phương trình $\dfrac{x+3}{x-1} = k(x-m)+1-2m$ ta được $mx^2 + 2(2-m)x - m - 2 = 0$ $(*)$.

Qua M kẻ được hai tiếp tuyến với (C) khi và chỉ khi phương trình $g(x) = mx^2 + 2(2-m)x - m - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x \neq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = m \neq 0 \\ \Delta' = (2-m)^2 + m(m+2) > 0 \\ g(1) = m + 4 - 2m - m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}.$$

Gọi $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ là hai tiếp điểm, với x_A, x_B là hai nghiệm của phương trình $(*)$.

Theo định lý Vi-et ta có $\begin{cases} x_A + x_B = \dfrac{2(m-2)}{m} \\ x_A x_B = -\dfrac{m+2}{m} \end{cases}$.

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $I\left(\dfrac{m-2}{m}; \dfrac{m+3}{m-1}\right)$.

Mặt khác $\overrightarrow{AB} = \left(x_B - x_A; \dfrac{2m(x_B - x_A)}{m-1}\right) \Rightarrow$ một vectơ pháp tuyến của đường thẳng AB là $\vec{n} = (2m; 1-m)$.

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm AB có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2m;1-m)$ và đi qua điểm $I\left(\frac{m-2}{m};\frac{m+3}{m-1}\right)$ là $2mx+(1-m)y+7-m=0$.

Gọi $H(x_H;y_H)$ là điểm cố định mà đường thẳng AB đi qua.

Khi đó, $2mx_H+(1-m)y_H-m+7=0 \Leftrightarrow m(2x_H-y_H-1)+y_H+7=0$ với mọi $m\neq 0$ và $m\neq 1$.

Suy ra $\begin{cases}2x_H-y_H-1=0\\ y_H+7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_H=-3\\ y_H=-7\end{cases}\Rightarrow H(-3;-7)$. Vậy $OH=\sqrt{(-3)^2+(-7)^2}=\sqrt{58}$.

Câu 58. Chọn C

Gọi $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$, $C(x_C;y_C)$

Ta có: A là điểm cố định mà đồ thị (C_m) luôn đi qua nên $A\in(C_m)$, $\forall m$

$\Leftrightarrow y_A=(m+1)x_A^3-(2m+1)x_A-m+1,\ \forall m$

$\Leftrightarrow m(x_A^3-2x_A-1)+x_A^3-x_A+1-y_A=0,\ \forall m$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x_A^3-2x_A-1=0\\ x_A^3-x_A+1-y_A=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_A^3-2x_A-1=0\\ y_A=x_A^3-2x_A-1+x_A+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_A^3-2x_A-1=0\\ y_A=x_A+2\end{cases}$

Tương tự ta cũng chứng minh được: $y_B=x_B+2$ và $y_C=x_C+2$.

Hay ba điểm A, B, C thuộc đường thẳng $\Delta: y=x+2$.

Ta lại có: $y'=3(m+1)x^2-(2m+1)$ và gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm

Khi đó để (C_m) có tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng Δ thì phương trình $y'(x_o)=\frac{-1}{k_\Delta}=-1$

phải có nghiệm $\Leftrightarrow 3(m+1)x_0^2-2m=0$ $(*)$ phải có nghiệm

Xét $m=-1:(*)\Leftrightarrow 2=0$ (vô lí) nên loại $m=-1$

Xét $m\neq -1:(*)\Leftrightarrow x_0^2=\frac{2m}{3(m+1)}$

Để $(*)$ có nghiệm thì $\frac{2m}{3(m+1)}\geq 0\Leftrightarrow m\in(-\infty;-1)\cup[0;+\infty)$

So với điều kiện $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in[-10;10]$ ta được $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in[-10;-1)\cup[0;10]$

Hay $m\in\{-10;-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$

Vậy có 20 số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 59. Chọn C

Gọi $M_0(x_0;x_0^3-3x_0^2)$ là tiếp điểm.

Tiếp tuyến Δ của (C) tại M_0 có dạng $y=(3x_0^2-6x_0)(x-x_0)+x_0^3-3x_0^2$

Δ qua $B(0;b)\Leftrightarrow b=(3x_0^2-6x_0)(0-x_0)+x_0^3-3x_0^2\Leftrightarrow -b=2x_0^3-3x_0^2$ (*).

Có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $B(0;b)\Leftrightarrow$ (*) có đúng 1 nghiệm x_0.

Đặt $g(x)=2x^3-3x^2$; $g'(x)=6x^2-6x$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên của hàm $g(x)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-1	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $(*)$ có đúng 1 nghiệm $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-b>0\\-b<-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b<0\\b>1\end{array}\right.$.

Vì b nguyên và $b\in(-10;10)$, suy ra $b\in\{-9;-8;...;-1;2;3;....;9\}$, có 17 giá trị của b.

DẠNG 2 Bài toán về tiếp tuyến thường gặp

Câu 1: Cho hàm số $y=x^3+(m-1)x^2-3mx+2m+1$ có đồ thị (C_m), biết rằng đồ thị (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định A,B. Có bao số nguyên dương m thuộc $[-2020;2020]$ để (C_m) có tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng AB?

A. 4041. **B.** 2021. **C.** 2019 **D.** 2020.

Câu 2: Cho biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là $y=2x-1$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(2x^2-1)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là

A. $y=4x-3$. **B.** $y=5x-4$. **C.** $y=8x-7$. **D.** $y=6x-5$.

Câu 3: Cho đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. Viết tất cả các phương trình tiếp tuyến của (C), biết khoảng cách từ điểm $I(1;2)$ đến tiếp tuyến bằng $\sqrt{2}$.

A. $x+y-5=0$. **B.** $x+y-1=0$ và $x+y-5=0$.

C. $x+y+1=0$ và $x+y+5=0$. **D.** $x+y-1=0$.

Câu 4: Cho hàm số $y=\dfrac{(2m-1)x-m}{x+m}(m\neq 0)$ có đồ thị (C_m). Biết rằng tồn tại duy nhất một đường thẳng (d) có phương trình $y=ax+b$ sao cho (C_m) luôn tiếp xúc với (d). Giá trị của $a+b$ là

A. -3. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 2.

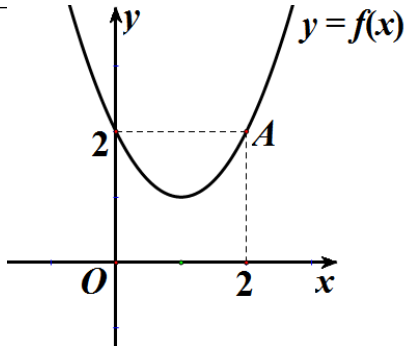
Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn: $\left[f(1+x)\right]^3+2.f(1+x)-21x-3=0$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0=1$.

A. $y=3x+1$. **B.** $y=3x+2$. **C.** $y=3x-2$. **D.** $y=3x-1$.

Câu 6: Xét điểm M có hoành độ là số nguyên thuộc đồ thị $(C): y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M cắt đường tiệm cận ngang của (C) tại điểm A. Hỏi có bao nhiêu điểm M thỏa điều kiện A cách gốc tọa độ một khoảng cách nhỏ hơn $2\sqrt{10}$?

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 4.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (P) như hình bên và đường thẳng $\Delta: y=2x-2$ là tiếp tuyến của (P) tại điểm A. Xét hàm số $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$. Tính $g'(2)$.



A. $g'(2)=\frac{1}{2}$. **B.** $g'(2)=\frac{1}{4}$. **C.** $g'(2)=-\frac{1}{4}$. **D.** $g'(2)=-\frac{1}{2}$.

Câu 8: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, giả sử đồ thị (G) của hàm số $y=\frac{(\sqrt{3})^x}{\ln 3}$ cắt trục tung tại điểm A và tiếp tuyến của (G) tại A cắt trục hoành tại điểm B. Tính diện tích của tam giác OAB.

A. $0,603$. **B.** $0,414$ **C.** $0,829$. **D.** $1,207$.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3x$ có đồ thị (C) và hàm số $y=g(x)=x^2$ có đồ thị (P). Hỏi hai đồ thị (C) và (P) có tất cả bao nhiêu tiếp tuyến chung?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

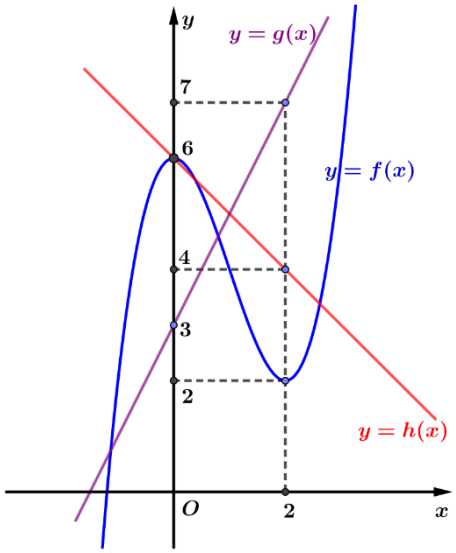
Câu 10: Cho hàm số $y=\frac{x+1}{x+2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=-2x+m-1$ (m là tham số thực). Gọi k_1, k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của d và (C). Tính tích $k_1.k_2$.

A. $k_1.k_2=2$. **B.** $k_1.k_2=\frac{1}{4}$. **C.** $k_1.k_2=4$. **D.** $k_1.k_2=3$.

Câu 11: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=\frac{x^2-3x+4}{x-1}$ và (P) là Parabol có phương trình $y=ax^2+bx-8$. Biết từ điểm $A(4;1)$ kẻ được hai tiếp tuyến với (C). Gọi $k_1;k_2$ là hệ số góc của hai tiếp tuyến đó và gọi I là đỉnh của (P). Khi (P) đi qua $M(k_1;0), N(k_2;0)$, tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN.

A. $R=\frac{47}{100}$. **B.** $R=\frac{9}{2}$. **C.** $R=\frac{12}{25}$. **D.** $R=\frac{161}{36}$.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hai đường thẳng $\Delta_1: y=h(x)$ và $\Delta_2: y=g(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



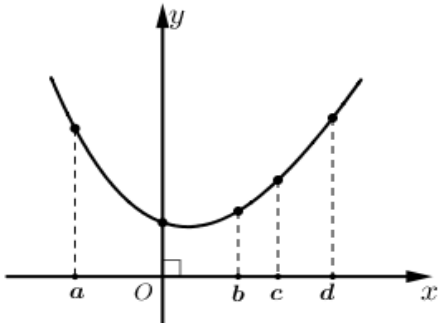
Hệ số góc k của tiếp tuyến với đồ thị $(C'): y = \dfrac{f(x).h(x)}{g(x)}$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ có dạng $k = \dfrac{a}{b}$. Khi đó $a + b$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(15;25)$. **B.** $(-20;10)$. **C.** $(60;80)$. **D.** $(-30;-21)$.

Câu 13: Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = 3x + m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 3.

Câu 14: Cho $f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi $S = \{f'(a), f'(b), f'(c), f'(d), f'(0)\}$. Phần tử lớn nhất trong tập hợp S là:



A. $f'(a)$. **B.** $f'(b)$. **C.** $f'(0)$. **D.** $f'(d)$.

Câu 15: Cho biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là $y = 2x - 1$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(2x^2 - 1)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là

A. $y = 4x - 3$. **B.** $y = 5x - 4$. **C.** $y = 8x - 7$. **D.** $y = 6x - 5$.

Câu 16: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại $B(x_2; y_2)$ với B khác A thỏa $y_2 - y_1 = -24(x_2 - x_1)$. Số điểm A thỏa mãn là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 17: Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(0;a)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của a trong đoạn $[-2018;2018]$ để từ A kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía của trục hoành

A. 2019. **B.** 2020. **C.** 2017. **D.** 2018.

Câu 18: Cho hàm số $y=x^4-2x^2$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại $B(x_2;y_2)$ với B khác A thỏa $y_2-y_1=-24(x_2-x_1)$. Số điểm A thỏa mãn là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 19: Tìm điểm M có hoành độ âm trên đồ thị $(C):y=\dfrac{1}{3}x^3-x+\dfrac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $d:y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$.

A. $M(-2;-4)$. **B.** $M\left(-1;\dfrac{4}{3}\right)$. **C.** $M(-2;0)$. **D.** $M\left(2;-\dfrac{4}{3}\right)$.

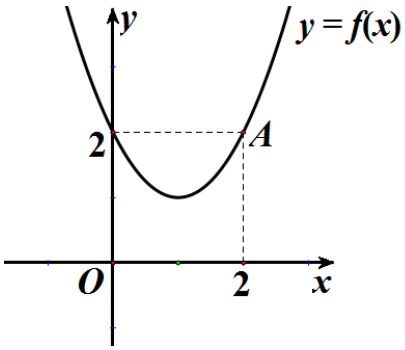
Câu 20: Cho đa thức $f(x)$ với hệ số thực và thỏa mãn điều kiện $2f(x)+f(1-x)=x^2,\forall x\in\mathbb{R}$. Biết tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=1$ của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác. Tính diện tích của tam giác đó?

A. $\dfrac{1}{6}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Câu 21: Xét điểm M có hoành độ là số nguyên thuộc đồ thị $(C):y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M cắt đường tiệm cận ngang của (C) tại điểm A. Hỏi có bao nhiêu điểm M thỏa điều kiện A cách gốc tọa độ một khoảng cách nhỏ hơn $2\sqrt{10}$?

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 4.

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (P) như hình bên và đường thẳng $\Delta:y=2x-2$ là tiếp tuyến của (P) tại điểm A. Xét hàm số $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$. Tính $g'(2)$.



A. $g'(2)=\dfrac{1}{2}$. **B.** $g'(2)=\dfrac{1}{4}$. **C.** $g'(2)=-\dfrac{1}{4}$. **D.** $g'(2)=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 23: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, giả sử đồ thị (G) của hàm số $y=\dfrac{(\sqrt{3})^x}{\ln 3}$ cắt trục tung tại điểm A và tiếp tuyến của (G) tại A cắt trục hoành tại điểm B. Tính diện tích của tam giác OAB.

A. $0,603$. **B.** $0,414$ **C.** $0,829$. **D.** $1,207$.

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3x$ có đồ thị (C) và hàm số $y=g(x)=x^2$ có đồ thị (P). Hỏi hai đồ thị (C) và (P) có tất cả bao nhiêu tiếp tuyến chung?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

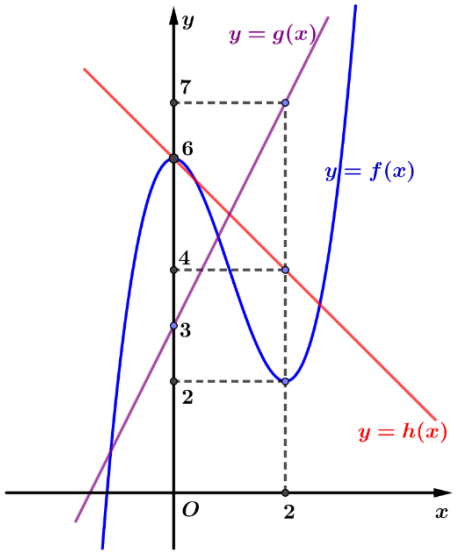
Câu 25: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=-2x+m-1$ (m là tham số thực). Gọi k_1, k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của d và (C). Tính tích $k_1.k_2$.

A. $k_1.k_2=2$. **B.** $k_1.k_2=\dfrac{1}{4}$. **C.** $k_1.k_2=4$. **D.** $k_1.k_2=3$.

Câu 26: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+4}{x-1}$ và (P) là Parabol có phương trình $y=ax^2+bx-8$. Biết từ điểm $A(4;1)$ kẻ được hai tiếp tuyến với (C). Gọi $k_1;k_2$ là hệ số góc của hai tiếp tuyến đó và gọi I là đỉnh của (P). Khi (P) đi qua $M(k_1;0), N(k_2;0)$, tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN.

A. $R=\dfrac{47}{100}$. **B.** $R=\dfrac{9}{2}$. **C.** $R=\dfrac{12}{25}$. **D.** $R=\dfrac{161}{36}$.

Câu 27: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hai đường thẳng $\Delta_1: y=h(x)$ và $\Delta_2: y=g(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



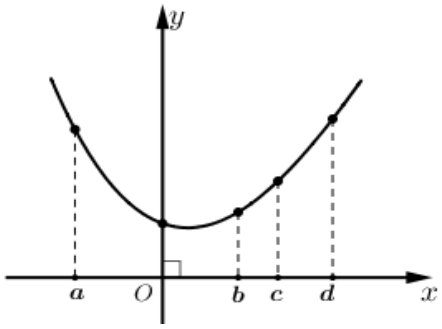
Hệ số góc k của tiếp tuyến với đồ thị $(C'): y=\dfrac{f(x).h(x)}{g(x)}$ tại điểm có hoành độ $x=2$ có dạng $k=\dfrac{a}{b}$. Khi đó $a+b$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(15;25)$. **B.** $(-20;10)$. **C.** $(60;80)$. **D.** $(-30;-21)$.

Câu 28: Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=3x+m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=x^3+1$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 3.

Câu 29: Cho $f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi $S=\{f'(a), f'(b), f'(c), f'(d), f'(0)\}$. Phần tử lớn nhất trong tập hợp S là:



A. $f'(a)$. **B.** $f'(b)$. **C.** $f'(0)$. **D.** $f'(d)$.

Câu 30: Cho biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là $y=2x-1$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f\left(2x^2-1\right)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là

A. $y=4x-3$. **B.** $y=5x-4$. **C.** $y=8x-7$. **D.** $y=6x-5$.

Câu 31: Cho hàm số $y=x^4-2x^2$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại $B(x_2;y_2)$ với B khác A thỏa $y_2-y_1=-24(x_2-x_1)$. Số điểm A thỏa mãn là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 32: Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(0;a)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của a trong đoạn $[-2018;2018]$ để từ A kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía của trục hoành

A. 2019. **B.** 2020. **C.** 2017. **D.** 2018.

Câu 33: Cho hàm số $y=x^4-2x^2$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại $B(x_2;y_2)$ với B khác A thỏa $y_2-y_1=-24(x_2-x_1)$. Số điểm A thỏa mãn là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 34: Tìm điểm M có hoành độ âm trên đồ thị $(C): y=\dfrac{1}{3}x^3-x+\dfrac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $d: y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$.

A. $M(-2;-4)$. **B.** $M\left(-1;\dfrac{4}{3}\right)$. **C.** $M(-2;0)$. **D.** $M\left(2;-\dfrac{4}{3}\right)$.

Câu 35: Cho đa thức $f(x)$ với hệ số thực và thỏa mãn điều kiện $2f(x)+f(1-x)=x^2, \forall x\in\mathbb{R}$. Biết tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=1$ của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác. Tính diện tích của tam giác đó?

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 36: Gọi (P) là đồ thị của hàm số $y=x^2+2x+2$ và điểm M di chuyển trên (P). Gọi $(d_1),(d_2)$ là các đường thẳng qua M sao cho (d_1) song song với trục tung và $(d_1),(d_2)$ đối xứng nhau qua tiếp tuyến của (P) tại M. Biết rằng M di chuyển trên (P) thì (d_2) luôn đi qua điểm cố định $I(a;b)$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $3a+2b=0$. **B.** $a+b=0$. **C.** $an=-1$. **D.** $5a+4b=0$.

Câu 37: Cho hàm số $f(x)=x+\frac{1}{x}$. Cho điểm $M(a;b)$ sao cho có đúng hai tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua M, đồng thời hai tiếp tuyến này vuông góc với nhau. Biết điểm M luôn thuộc một đường tròn cố định, bán kính của đường tròn đó là

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 38: Cho hàm số $y=f(x)=x^4-2x^3+x^2$ có đồ thị (C). Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số a để có đúng 2 tiếp tuyến kẻ từ $A=(a;0)$ đến (C). Số phần tử của S là

A. 0. **B.** 4. **C.** 2. **D.** Vô số.

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)=x^4-2x^3+x^2$ có đồ thị (C). Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số a để có đúng 2 tiếp tuyến kẻ từ $A(a;0)$ đến (C). Số phần tử của S là

A. 0. **B.** 4. **C.** 2. **D.** vô số.

Câu 40: Gọi m là giá trị để đồ thị (C_m) của hàm số $y=\frac{x^2+2mx+2m^2-1}{x-1}$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và các tiếp tuyến với (C_m) tại hai điểm này vuông góc với nhau. Khi đó ta có :

A. $m\in(1;2)$. **B.** $m\in(-2;-1)$. **C.** $m\in(0;1)$. **D.** $m\in(-1;0)$.

Câu 41: Trên đường thẳng $d:y=2x+1$ có bao nhiêu điểm có thể kẻ được đến đồ thị $(C):y=\frac{x+3}{x-1}$ đúng một tiếp tuyến.

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D. Vô số**.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho hàm số $y=x^3+(m-1)x^2-3mx+2m+1$ có đồ thị (C_m), biết rằng đồ thị (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định A,B. Có bao số nguyên dương m thuộc $[-2020;2020]$ để (C_m) có tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng AB ?

A. 4041. **B.** 2021. **C.** 2019 **D.** 2020.

Lời giải

Chọn C

Ta tìm toạ độ hai điểm cố định A,B.

Ta có $y=x^3+(m-1)x^2-3mx+2m+1\Leftrightarrow m(x^2-3x+2)+x^3-x^2+1-y=0$. Toạ độ hai điểm cố định A,B là nghiệm hệ

$$\begin{cases}x^2-3x+2=0\\ x^3-x^2+1=y\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,y=1\\ x=2,y=5\end{array}\right.\Rightarrow A(1;1),B(2;5).$$

Khi đó ta có: $(AB):-4x+y+3=0\Leftrightarrow(AB):y=4x-3$.

Hệ số góc của tiếp tuyến với (C_m) tại $M(x_0;y_0)$ là $y'(x_0)=3x_0^2+2x_0(m-1)-3m$.

Vì tiếp tuyến vuông góc với AB nên $y'(x_0).4=-1$.

Suy ra: $4.(3x_0^2+2x_0(m-1)-3m)=-1\Leftrightarrow 12x_0^2+8(m-1)x_0-12m+1=0\quad(*)$

Để phương trình $(*)$ có nghiệm thì

$$\Delta'=\left[4(m-1)\right]^2-12(1-12m)\geq 0\Leftrightarrow 16m^2+112m+4\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\leq -6,69\\ m\geq -0,036\end{array}\right.$$

Vì $m\in[-2020;2020]$ và $m\in\mathbb{Z}^+$ nên $1\leq m\leq 2020$.

Vậy có 2019 giá trị m nguyên dương.

Câu 2: Cho biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là $y=2x-1$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(2x^2-1)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là

A. $y=4x-3$. **B.** $y=5x-4$. **C.** $y=8x-7$. **D.** $y=6x-5$.

Lời giải

Chọn C

Vì tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại $x=1$ có phương trình là $y=2x-1$

$$\Rightarrow\begin{cases}f'(1)=2\\ f(1)=1\end{cases}.$$

Đặt $g(x)=f(2x^2-1)$; $g'(x)=4x.f'(2x^2-1)$; $g'(1)=4.f'(1)=4.2=8$; $g(1)=f(1)=1$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=g'(1)(x-1)+g(1)$

$\Leftrightarrow y=8(x-1)+1\Leftrightarrow y=8x-7$.

Câu 3: Cho đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. Viết tất cả các phương trình tiếp tuyến của (C), biết khoảng cách từ điểm $I(1;2)$ đến tiếp tuyến bằng $\sqrt{2}$.

A. $x+y-5=0$. **B.** $x+y-1=0$ và $x+y-5=0$.

C. $x+y+1=0$ và $x+y+5=0$. **D.** $x+y-1=0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) có dạng:

$$y=\frac{-1}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0-1}{x_0-1}\Leftrightarrow x+(x_0-1)^2y-2x_0^2+2x_0-1=0$$

Theo đề $d(I,\Delta)=\sqrt{2}\Leftrightarrow\dfrac{\left|1+2(x_0-1)^2-2x_0^2+2x_0-1\right|}{\sqrt{1+(x_0-1)^4}}=\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow(x_0-1)^4-2(x_0-1)^2+1=0\Leftrightarrow(x_0-1)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=2\\x_0=0\end{array}\right.$$

Với $x_0=2$ ta có phương trình tiếp tuyến: $y=-(x-2)+3\Leftrightarrow x+y-5=0$.

Với $x_0=0$ ta có phương trình tiếp tuyến: $y=-(x-0)+1\Leftrightarrow x+y-1=0$.

Câu 4: Cho hàm số $y=\dfrac{(2m-1)x-m}{x+m}(m\neq0)$ có đồ thị (C_m). Biết rằng tồn tại duy nhất một đường thẳng (d) có phương trình $y=ax+b$ sao cho (C_m) luôn tiếp xúc với (d). Giá trị của $a+b$ là

A. -3. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=\dfrac{2m^2}{(x+m)^2}$.

Đường thẳng (d) luôn tiếp xúc với đồ thị (C_m) suy ra hệ phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị $m\neq0$.

$$\begin{cases}\dfrac{2m^2}{(x+m)^2}=a\\\dfrac{(2m-1)x-m}{x+m}=ax+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2m^2}{(x+m)}=a(x+m)\\\dfrac{(2m-1)(x+m)-2m^2}{x+m}=ax+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2m^2}{(x+m)}=ax+am & (1)\\(2m-1)-\dfrac{2m^2}{x+m}=ax+b & (2)\end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) theo vế ta được: $-(2m-1)+\dfrac{4m^2}{x+m}=am-b\Leftrightarrow\dfrac{m}{x+m}=\dfrac{(a+2)m-b-1}{4m}$

Thay vào (1) ta được: $\left(\dfrac{(a+2)m-(b+1)}{4m}\right)^2=\dfrac{a}{2}\Leftrightarrow((a+2)m-(b+1))^2=8am^2$

$$\Leftrightarrow(a-2)^2m^2-2(b+1)(a+2)m+(b+1)^2=0\ (*)$$

Vì đồ thị (C_m) luôn tiếp xúc với đường thẳng (d) nên $(*)$ luôn xảy ra với mọi giá trị $m \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2 = 0 \\ 2(b+1)(a+2) = 0 \\ (b+1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}.$$

Vậy $a+b=1$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn: $\left[f(1+x)\right]^3 + 2.f(1+x) - 21x - 3 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$.

A. $y=3x+1$. **B.** $y=3x+2$. **C.** $y=3x-2$. **D.** $y=3x-1$.

Lời giải

Chọn C

- Xét phương trình: $\left[f(1+x)\right]^3 + 2.f(1+x) - 21x - 3 = 0$.
- Từ cho $x=0$ ta có: $f^3(1) + 2.f(1) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(1) = 3$.
- Đạo hàm hai vế của ta có $3f^2(1+x)\,f'(1+x) + 4f'(1+2x) - 21 = 0$.
- Từ cho $x=0$ ta được: $3f^2(1)\,f'(1) + 4f'(1) - 21 = 0$

$\Leftrightarrow 3f'(1) + 4f'(1) - 21 = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 3$.

- Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là:

$y = f'(1).(x-1) + f(1) = 3.(x-1) + 1 = 3x - 2$.

Câu 6: Xét điểm M có hoành độ là số nguyên thuộc đồ thị $(C): y = \dfrac{2x+1}{x-1}$. Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M cắt đường tiệm cận ngang của (C) tại điểm A. Hỏi có bao nhiêu điểm M thỏa điều kiện A cách gốc tọa độ một khoảng cách nhỏ hơn $2\sqrt{10}$?

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = -\dfrac{3}{(x-1)^2}, \forall x \neq 1.$

Giả sử $M(a;b) \in (C)$. Khi đó $b = \dfrac{2a+1}{a-1}$ với $a \in \mathbb{Z}, a \neq 1$.

Tiếp tuyến với (C) tại điểm M có phương trình là

$$\Delta: y = -\frac{3}{(a-1)^2}.(x-a) + \frac{2a+1}{a-1}.$$

Đồ thị (C) có TCN là đường thẳng $d: y = 2$.

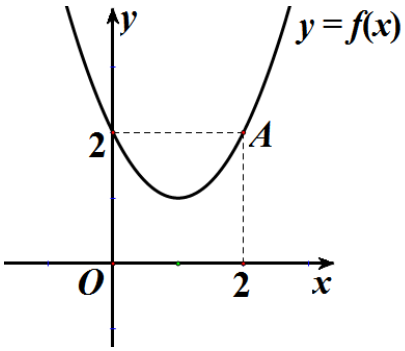
Ta có $\Delta \cap d = A(2a-1;2)$.

Theo bài ra ta có $OA < 2\sqrt{10} \Leftrightarrow (2a-1)^2 + 4 < 40$

$\Leftrightarrow 4a^2-4a-35<0 \Leftrightarrow a\in\left(-\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right)$.

Do $a\in\mathbb{Z}, a\neq 1 \Rightarrow a\in\{-2;-1;0;2;3\}$. Vậy có 5 điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (P) như hình bên và đường thẳng $\Delta: y=2x-2$ là tiếp tuyến của (P) tại điểm A. Xét hàm số $g(x)=\frac{f(x)}{x}$. Tính $g'(2)$.



A. $g'(2)=\frac{1}{2}$. **B.** $g'(2)=\frac{1}{4}$. **C.** $g'(2)=-\frac{1}{4}$. **D.** $g'(2)=-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $y=f(x)=ax^2+bx+c$, với a,b,c là các số thực và $a>0$.

Vì (P) đi qua các điểm $A(2;2), B(0;2)$ nên ta có hệ phương trình

$\begin{cases}2=4a+2b+c\\2=c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+b=0\\c=2\end{cases}, (1)$.

Vì đường thẳng $\Delta: y=2x-2$ là tiếp tuyến của (P) tại điểm A nên ta có

$f'(2)=2\Leftrightarrow 4a+b=2, (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases}a=1\\b=-2\\c=2\end{cases}$.

Ta có $y=f(x)=x^2-2x+2$ suy ra $g(x)=\frac{f(x)}{x}=\frac{x^2-2x+2}{x}=x-2+\frac{2}{x}$.

Ta có $g'(x)=1-\frac{2}{x^2}\Rightarrow g'(2)=1-\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

Câu 8: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, giả sử đồ thị (G) của hàm số $y=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^x}{\ln 3}$ cắt trục tung tại điểm A và tiếp tuyến của (G) tại A cắt trục hoành tại điểm B. Tính diện tích của tam giác OAB.

A. $0,603$. **B.** $0,414$ **C.** $0,829$. **D.** $1,207$.

Lời giải

Chọn C

Cho $x=0\Rightarrow y=\frac{1}{\ln 3}=\log_3 e$. Khi đó $A(0;\log_3 e)$.

Ta có $y' = \dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^x \ln\sqrt{3}}{\ln 3} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right)^x$.

Tiếp tuyến của (G) tại A có phương trình dạng:

$y = y'(0)(x-0) + y(0) = \dfrac{1}{2}x + \log_3 e$.

Tiếp tuyến của (G) tại A cắt trục hoành tại điểm B nên $B(-2\log_3 e; 0)$.

Diện tích tam giác OAB là:

$S = \dfrac{1}{2}.OA.OB = \dfrac{1}{2}.\log_3 e.|-2\log_3 e| \approx 0,829$.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x$ có đồ thị (C) và hàm số $y = g(x) = x^2$ có đồ thị (P). Hỏi hai đồ thị (C) và (P) có tất cả bao nhiêu tiếp tuyến chung?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Gọi $A(a; a^2)$ thuộc đồ thị (P). Phương trình tiếp tuyến tại A có dạng $y = g'(a)(x-a) + a^2$.

Hay $y = 2a(x-a) + a^2 = 2ax - a^2\ (d)$.

Để (d) là tiếp tuyến của (C) thì (d) và (C) phải tiếp xúc với nhau.

Ta có điều kiện tiếp xúc: $\begin{cases} x^3 - 3x = 2ax - a^2 & (1) \\ 3x^2 - 3 = 2a & (2) \end{cases}$.

Thế (2) vào (1) ta được $x^3 - 3x = \left(3x^2 - 3\right)x - \left(\dfrac{3x^2-3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^3 - 3x = 3x^3 - 3x - \dfrac{9x^4 - 18x^2 + 9}{4}$

$\Leftrightarrow 9x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \approx 1,82 \\ x \approx 0,68 \end{array}\right.$.

Vậy hai đồ thị (C) và (P) có tất cả hai tiếp tuyến chung.

Câu 10: Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x+2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = -2x + m - 1$ (m là tham số thực). Gọi k_1, k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của d và (C). Tính tích $k_1.k_2$.

A. $k_1.k_2 = 2$. **B.** $k_1.k_2 = \dfrac{1}{4}$. **C.** $k_1.k_2 = 4$. **D.** $k_1.k_2 = 3$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $\dfrac{x+1}{x+2} = -2x + m - 1 \Leftrightarrow 2x^2 + (6-m)x + 3 - 2m = 0\ (x \neq -2)\ (1)$

Đặt $f(x) = 2x^2 + (6-m)x + 3 - 2m$. Ta có $f(-2) = -1 \neq 0$. $\Delta = m^2 + 4m + 12 > 0, \forall m$.

Vậy phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2. Theo Viet ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{m-6}{2} \\ x_1.x_2 = \dfrac{3-2m}{2} \end{cases}$$

Từ $y=\dfrac{x+1}{x+2}$ ta có $y'=\dfrac{1}{(x+2)^2}$. Do đó ta có $k_1=\dfrac{1}{(x_1+2)^2};k_2=\dfrac{1}{(x_2+2)^2}$.

$k_1.k_2=\dfrac{1}{(x_1+2)^2(x_2+2)^2}=\dfrac{1}{\left[x_1.x_2+2(x_1+x_2)+4\right]^2}=$

Mà $\left[x_1.x+2(x_1+x_2)+4\right]^2=\left(\dfrac{3-2m}{2}+\dfrac{2m-12}{2}+4\right)^2=\dfrac{1}{4}$.

Vậy $k_1.k_2=4$. Chọn đáp án **C.**

Câu 11: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+4}{x-1}$ và (P) là Parabol có phương trình $y=\mathrm{a}x^2+bx-8$. Biết từ điểm $A(4;1)$ kẻ được hai tiếp tuyến với (C). Gọi $k_1;k_2$ là hệ số góc của hai tiếp tuyến đó và gọi I là đỉnh của (P). Khi (P) đi qua $M(k_1;0),N(k_2;0)$, tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN.

A. $R=\dfrac{47}{100}$. **B.** $R=\dfrac{9}{2}$. **C.** $R=\dfrac{12}{25}$. **D.** $R=\dfrac{161}{36}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có

$y=\dfrac{x^2-3x+4}{x-1}=x-2+\dfrac{2}{x-1}$

$\Rightarrow y'=1-\dfrac{2}{(x-1)^2}$

Gọi $Q(x_0;y_0),y_0=x_0-2+\dfrac{2}{x_0-1}$

Giả sử phương trình tiếp tuyến của (C) tại Q có dạng $y=f'(x_0).(x-x_0)+y_0$.

Vì tiếp tuyến đi qua $A(4;1)$ nên

$1=f'(x_0).(4-x_0)+y_0.$

$\Leftrightarrow 1=\left[1-\dfrac{2}{(x_0-1)^2}\right].(4-x_0)+x_0-2+\dfrac{2}{x_0-1}$

$\Leftrightarrow x_0^2-2x_0+1=\left(x_0^2-2x_0-1\right).(4-x_0)+\left(x_0^2-3x_0+4\right)(x_0-1)$

$\Leftrightarrow x_0^2-2x_0+1=-x_0^3+6x_0^2-7x_0-4+x_0^3-4x_0^2+7x_0-4$

$\Leftrightarrow x_0^2+2x_0-9=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1+\sqrt{10}\Rightarrow k_1=\dfrac{2-2\sqrt{10}}{9} \\ x_0=-1-\sqrt{10}\Rightarrow k_1=\dfrac{2+2\sqrt{10}}{9} \end{array}\right.$

$\Rightarrow M\left(\dfrac{2-2\sqrt{10}}{9};0\right),N\left(\dfrac{2+2\sqrt{10}}{9};0\right)$

Vì (P) đi qua $M\left(\frac{2-2\sqrt{10}}{9};0\right), N\left(\frac{2+2\sqrt{10}}{9};0\right)$ nên

$$\begin{cases} a\left(\frac{2-2\sqrt{10}}{9}\right)^2+b\left(\frac{2-2\sqrt{10}}{9}\right)-8=0 \\ a\left(\frac{2+2\sqrt{10}}{9}\right)^2+b\left(\frac{2+2\sqrt{10}}{9}\right)-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=18 \\ b=-8 \end{cases}$$

Do đó Parabol cần tìm là $y=18x^2-8x-8$.

Tọa độ đỉnh $I\left(\frac{2}{9};\frac{-80}{9}\right)$.

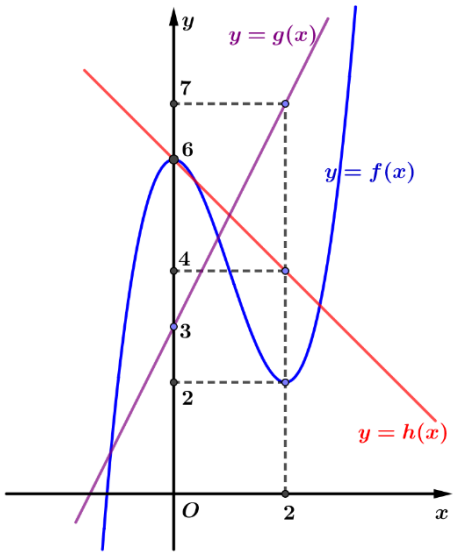
Phương trình đường thẳng $MN: y=0$.

$$d(I,MN)=\frac{80}{9}; MN=\frac{4\sqrt{10}}{9},\ MI=\frac{\sqrt{664}}{9}, NI=\frac{\sqrt{664}}{9}$$

$$S_{IMN}=\frac{1}{2}.MN.d(I,MN)=\frac{1}{2}.\frac{4\sqrt{10}}{9}.\frac{80}{9}=\frac{160\sqrt{10}}{81}$$

$$R=\frac{MN.MI.NI}{4S_{IMN}}=\frac{161}{36}$$

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hai đường thẳng $\Delta_1: y=h(x)$ và $\Delta_2: y=g(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hệ số góc k của tiếp tuyến với đồ thị $(C'): y=\frac{f(x).h(x)}{g(x)}$ tại điểm có hoành độ $x=2$ có dạng $k=\frac{a}{b}$. Khi đó $a+b$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(15;25)$. **B.** $(-20;10)$. **C.** $(60;80)$. **D.** $(-30;-21)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $(C'): y=\frac{f(x).h(x)}{g(x)} \Rightarrow y'=\frac{\left[f'(x).h(x)+f(x).h'(x)\right].g(x)-f(x).h(x).g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$.

Dựa vào đồ thị ta có $g(x)=2x+3$, $h(x)=-x+6$ và $\begin{cases} f(2)=2; g(2)=7; h(2)=4 \\ f'(2)=0; g'(2)=2; h'(2)=-1 \end{cases}$.

Hệ số góc k của tiếp tuyến với đồ thị $(C'): y=\dfrac{h(x).g(x)}{f(x)}$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là

$$k=y'(2)=\frac{\left[f'(2).h(2)+f(2).h'(2)\right].g(2)-f(2).h(2).g'(2)}{\left[g(2)\right]^2}=\frac{-30}{49}.$$

Như vậy $k=\dfrac{-30}{49}=\dfrac{a}{b}\Rightarrow\begin{cases} a=-30 \\ b=49 \end{cases}\Rightarrow a+b=19$.

Câu 13: Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=3x+m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=x^3+1$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 3.

Lời giải

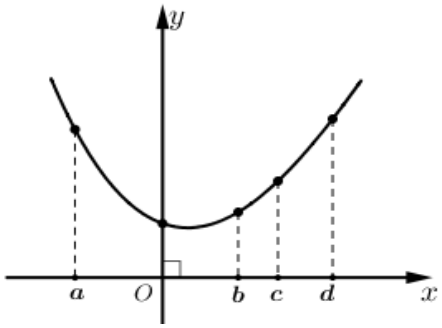
Chọn B

Để đường thẳng $y=3x+m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=x^3+1$ khi và chỉ khi $\begin{cases} x^3+1=3x+m \\ 3x^2=3 \end{cases}$ có nghiệm.

Giải hệ $\begin{cases} x^3+1=3x+m \\ 3x^2=3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m=x^3-3x+1 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right. \end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=3 \end{array}\right.$

Vậy tổng các giá trị m là: $-1+3=2$.

Câu 14: Cho $f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi $S=\left\{f'(a), f'(b), f'(c), f'(d), f'(0)\right\}$. Phần tử lớn nhất trong tập hợp S là:



A. $f'(a)$. **B.** $f'(b)$. **C.** $f'(0)$. **D.** $f'(d)$.

Lời giải

Gọi α, β lần lượt là góc tạo bởi tiếp tuyến tại c, d.

$$\Rightarrow\begin{cases} f'(c)=\tan\alpha \\ f'(d)=\tan\beta\Rightarrow 0<f'(c)<f'(d). \\ \alpha<\beta \end{cases}$$

Vậy phần tử lớn nhất trong tập hợp S là: $f'(d)$.

Câu 15: Cho biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là $y=2x-1$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f\left(2x^2-1\right)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là

A. $y=4x-3$. **B.** $y=5x-4$. **C.** $y=8x-7$. **D.** $y=6x-5$.

Lời giải

Chọn C

Theo đề, ta có $f'(1)=2$ và tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=1$ là $y=2(x-1)+f(1)=2x+f(1)-2$, suy ra $f(1)=1$.

Xét hàm số $y=f\left(2x^2-1\right)$. Ta có $y'=4xf'\left(2x^2-1\right)$. Suy ra $y'(1)=4f'(1)=8$.

Từ đây ta loại ba đáp án A,B, **D.**

Câu 16: Cho hàm số $y=x^4-2x^2$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại $B(x_2;y_2)$ với B khác A thỏa $y_2-y_1=-24(x_2-x_1)$. Số điểm A thỏa mãn là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Tiếp tuyến của (C) tại A có phương trình $y-y_1=y'(x_1).(x-x_1)$

Do B thuộc tiếp tuyến của (C) tại A nên $y_2-y_1=y'(x_1)(x_2-x_1)$

$\Rightarrow y'(x_1)=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-24$.

Do đó x_1 là nghiệm của phương trình $4x^3-4x=-24\Leftrightarrow x^3-x+6=0\Leftrightarrow x=-2$

Từ đó suy ra có duy nhất điểm A thỏa mãn bài toán.

Câu 17: Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(0;a)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của a trong đoạn $[-2018;2018]$ để từ A kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía của trục hoành

A. 2019. **B.** 2020. **C.** 2017. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=-\dfrac{3}{(x-1)^2}$.

Tiếp tuyến với đồ thị (C) qua $A(0;a)$ là $(\Delta):y=kx+a$.

(Δ) tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{x+2}{x-1}=kx+a\\ -\dfrac{3}{(x-1)^2}=k\end{cases}$ $(*)$ có nghiệm.

Từ hệ $(*)$ ta có $\dfrac{x+2}{x-1}=-\dfrac{3x}{(x-1)^2}+a\Leftrightarrow(a-1)x^2-2(2+a)x+2+a=0$ $(**)$.

Yêu cầu bài toán là tìm a để phương trình $(**)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $\frac{x_1+2}{x_1-1}.\frac{x_2+2}{x_2-1}<0$.

Ta có $\begin{cases} S=x_1+x_2=\dfrac{2+a}{a-1} \\ P=x_1x_2=\dfrac{2(2+a)}{a-1} \end{cases}$.

Yêu cầu bài toán tương đương $\begin{cases} a\neq 1 \\ \Delta'>0 \\ \dfrac{P+2S+4}{P-S+1}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 1 \\ 3a+6>0 \\ \dfrac{9a+6}{-3}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 1 \\ a>-2 \\ a>-\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 1 \\ a>-\dfrac{2}{3} \end{cases}$.

Do m nguyên thuộc đoạn $[-2018;2018]$ nên $m\in\{0;2;3;4;\ldots;2018\}$.

Vậy có 2018 giá trị thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 18: Cho hàm số $y=x^4-2x^2$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại $B(x_2;y_2)$ với B khác A thỏa $y_2-y_1=-24(x_2-x_1)$. Số điểm A thỏa mãn là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Tiếp tuyến của (C) tại A có phương trình $y-y_1=y'(x_1).(x-x_1)$

Do B thuộc tiếp tuyến của (C) tại A nên $y_2-y_1=y'(x_1)(x_2-x_1)$

$\Rightarrow y'(x_1)=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-24$.

Do đó x_1 là nghiệm của phương trình $4x^3-4x=-24\Leftrightarrow x^3-x+6=0\Leftrightarrow x=-2$

Từ đó suy ra có duy nhất điểm A thỏa mãn bài toán.

Câu 19: Tìm điểm M có hoành độ âm trên đồ thị $(C): y=\frac{1}{3}x^3-x+\frac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $d: y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$.

A. $M(-2;-4)$. **B.** $M\left(-1;\frac{4}{3}\right)$. **C.** $M(-2;0)$. **D.** $M\left(2;-\frac{4}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng $d: y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ có hệ số góc $-\frac{1}{3}$ cho nên tiếp tuyến có hệ số góc bằng 3.

Gọi tọa độ của M là $M(x_0;y_0)$ thì hệ số góc của tiếp tuyến tại M bằng $y'(x_0)=x_0^2-1$.

Từ đó ta có $x_0^2-1=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x_0=2 \\ x_0=-2 \end{array}\right.$.

Theo giả thiết, điểm M có hoành độ âm nên $x_0=-2$. Vậy tọa độ $M(-2;0)$.

Câu 20: Cho đa thức $f(x)$ với hệ số thực và thỏa mãn điều kiện $2f(x)+f(1-x)=x^2, \forall x\in\mathbb{R}$. Biết tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=1$ của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác. Tính diện tích của tam giác đó?

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $2f(x)+f(1-x)=x^2, \forall x\in\mathbb{R}\ \ (1)$.

Đặt $t=1-x\Rightarrow 2f(1-t)+f(t)=(1-t)^2, \forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow 2f(1-t)+f(x)=(1-x)^2, \forall t\in\mathbb{R}\ \ (2)$.

Từ và ta có: $\begin{cases}2f(x)+f(1-x)=x^2\\ 2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2\end{cases}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}\left(x^2+2x-1\right)$.

Suy ra: $f(1)=\frac{2}{3}; f'(1)=\frac{4}{3}$

Suy ra phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là:

$$y=\frac{4}{3}(x-1)+\frac{2}{3}\Leftrightarrow y=\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}$$

Tiếp tuyến cắt trục hoành tại $A\left(\frac{1}{2};0\right)$ và cắt trục tung tại $B\left(0;-\frac{2}{3}\right)$

Suy ra diện tích tam giác OAB là: $S=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\left|-\frac{2}{3}\right|=\frac{1}{6}$.

Câu 21: Xét điểm M có hoành độ là số nguyên thuộc đồ thị $(C): y=\frac{2x+1}{x-1}$. Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M cắt đường tiệm cận ngang của (C) tại điểm A. Hỏi có bao nhiêu điểm M thỏa điều kiện A cách gốc tọa độ một khoảng cách nhỏ hơn $2\sqrt{10}$?

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=-\frac{3}{(x-1)^2}, \forall x\neq 1$.

Giả sử $M(a;b)\in(C)$. Khi đó $b=\frac{2a+1}{a-1}$ với $a\in\mathbb{Z}, a\neq 1$.

Tiếp tuyến với (C) tại điểm M có phương trình là

$$\Delta: y=-\frac{3}{(a-1)^2}.(x-a)+\frac{2a+1}{a-1}.$$

Đồ thị (C) có TCN là đường thẳng $d: y=2$.

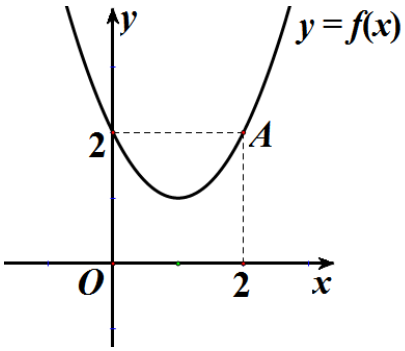
Ta có $\Delta\cap d=A(2a-1;2)$.

Theo bài ra ta có $OA<2\sqrt{10}\Leftrightarrow(2a-1)^2+4<40$

$\Leftrightarrow 4a^2-4a-35<0 \Leftrightarrow a\in\left(-\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right)$.

Do $a\in\mathbb{Z}, a\neq 1 \Rightarrow a\in\{-2;-1;0;2;3\}$. Vậy có 5 điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (P) như hình bên và đường thẳng $\Delta: y=2x-2$ là tiếp tuyến của (P) tại điểm A. Xét hàm số $g(x)=\frac{f(x)}{x}$. Tính $g'(2)$.



A. $g'(2)=\frac{1}{2}$. **B.** $g'(2)=\frac{1}{4}$. **C.** $g'(2)=-\frac{1}{4}$. **D.** $g'(2)=-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $y=f(x)=ax^2+bx+c$, với a,b,c là các số thực và $a>0$.

Vì (P) đi qua các điểm $A(2;2), B(0;2)$ nên ta có hệ phương trình

$\begin{cases}2=4a+2b+c\\2=c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+b=0\\c=2\end{cases}$, (1).

Vì đường thẳng $\Delta: y=2x-2$ là tiếp tuyến của (P) tại điểm A nên ta có

$f'(2)=2\Leftrightarrow 4a+b=2, (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases}a=1\\b=-2\\c=2\end{cases}$.

Ta có $y=f(x)=x^2-2x+2$ suy ra $g(x)=\frac{f(x)}{x}=\frac{x^2-2x+2}{x}=x-2+\frac{2}{x}$.

Ta có $g'(x)=1-\frac{2}{x^2}\Rightarrow g'(2)=1-\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

Câu 23: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, giả sử đồ thị (G) của hàm số $y=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^x}{\ln 3}$ cắt trục tung tại điểm A và tiếp tuyến của (G) tại A cắt trục hoành tại điểm B. Tính diện tích của tam giác OAB.

A. $0,603$. **B.** $0,414$ **C.** $0,829$. **D.** $1,207$.

Lời giải

Chọn C

Cho $x=0\Rightarrow y=\frac{1}{\ln 3}=\log_3 e$. Khi đó $A(0;\log_3 e)$.

Ta có $y' = \dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^x \ln\sqrt{3}}{\ln 3} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right)^x$.

Tiếp tuyến của (G) tại A có phương trình dạng:

$y = y'(0)(x-0) + y(0) = \dfrac{1}{2}x + \log_3 e$.

Tiếp tuyến của (G) tại A cắt trục hoành tại điểm B nên $B(-2\log_3 e; 0)$.

Diện tích tam giác OAB là:

$S = \dfrac{1}{2}.OA.OB = \dfrac{1}{2}.\log_3 e.|-2\log_3 e| \approx 0,829$.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x$ có đồ thị (C) và hàm số $y = g(x) = x^2$ có đồ thị (P). Hỏi hai đồ thị (C) và (P) có tất cả bao nhiêu tiếp tuyến chung?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Gọi $A(a; a^2)$ thuộc đồ thị (P). Phương trình tiếp tuyến tại A có dạng $y = g'(a)(x-a) + a^2$.

Hay $y = 2a(x-a) + a^2 = 2ax - a^2\ (d)$.

Để (d) là tiếp tuyến của (C) thì (d) và (C) phải tiếp xúc với nhau.

Ta có điều kiện tiếp xúc: $\begin{cases} x^3 - 3x = 2ax - a^2 & (1) \\ 3x^2 - 3 = 2a & (2) \end{cases}$.

Thế (2) vào (1) ta được $x^3 - 3x = \left(3x^2 - 3\right)x - \left(\dfrac{3x^2-3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^3 - 3x = 3x^3 - 3x - \dfrac{9x^4 - 18x^2 + 9}{4}$

$\Leftrightarrow 9x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \approx 1,82 \\ x \approx 0,68 \end{array}\right.$.

Vậy hai đồ thị (C) và (P) có tất cả hai tiếp tuyến chung.

Câu 25: Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x+2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = -2x + m - 1$ (m là tham số thực). Gọi k_1, k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của d và (C). Tính tích $k_1.k_2$.

A. $k_1.k_2 = 2$. **B.** $k_1.k_2 = \dfrac{1}{4}$. **C.** $k_1.k_2 = 4$. **D.** $k_1.k_2 = 3$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $\dfrac{x+1}{x+2} = -2x + m - 1 \Leftrightarrow 2x^2 + (6-m)x + 3 - 2m = 0\ (x \neq -2)\ (1)$

Đặt $f(x) = 2x^2 + (6-m)x + 3 - 2m$. Ta có $f(-2) = -1 \neq 0$. $\Delta = m^2 + 4m + 12 > 0, \forall m$.

Vậy phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2. Theo Viet ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{m-6}{2} \\ x_1.x_2 = \dfrac{3-2m}{2} \end{cases}$$

Từ $y=\dfrac{x+1}{x+2}$ ta có $y'=\dfrac{1}{(x+2)^2}$. Do đó ta có $k_1=\dfrac{1}{(x_1+2)^2};k_2=\dfrac{1}{(x_2+2)^2}$.

$k_1.k_2=\dfrac{1}{(x_1+2)^2(x_2+2)^2}=\dfrac{1}{\left[x_1.x_2+2(x_1+x_2)+4\right]^2}=$

Mà $\left[x_1.x+2(x_1+x_2)+4\right]^2=\left(\dfrac{3-2m}{2}+\dfrac{2m-12}{2}+4\right)^2=\dfrac{1}{4}$.

Vậy $k_1.k_2=4$. Chọn đáp án **C.**

Câu 26: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+4}{x-1}$ và (P) là Parabol có phương trình $y=\mathrm{a}x^2+bx-8$. Biết từ điểm $A(4;1)$ kẻ được hai tiếp tuyến với (C). Gọi $k_1;k_2$ là hệ số góc của hai tiếp tuyến đó và gọi I là đỉnh của (P). Khi (P) đi qua $M(k_1;0),N(k_2;0)$, tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN.

A. $R=\dfrac{47}{100}$. **B.** $R=\dfrac{9}{2}$. **C.** $R=\dfrac{12}{25}$. **D.** $R=\dfrac{161}{36}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có

$y=\dfrac{x^2-3x+4}{x-1}=x-2+\dfrac{2}{x-1}$

$\Rightarrow y'=1-\dfrac{2}{(x-1)^2}$

Gọi $Q(x_0;y_0),y_0=x_0-2+\dfrac{2}{x_0-1}$

Giả sử phương trình tiếp tuyến của (C) tại Q có dạng $y=f'(x_0).(x-x_0)+y_0$.

Vì tiếp tuyến đi qua $A(4;1)$ nên

$1=f'(x_0).(4-x_0)+y_0.$

$\Leftrightarrow 1=\left[1-\dfrac{2}{(x_0-1)^2}\right].(4-x_0)+x_0-2+\dfrac{2}{x_0-1}$

$\Leftrightarrow x_0^2-2x_0+1=\left(x_0^2-2x_0-1\right).(4-x_0)+\left(x_0^2-3x_0+4\right)(x_0-1)$

$\Leftrightarrow x_0^2-2x_0+1=-x_0^3+6x_0^2-7x_0-4+x_0^3-4x_0^2+7x_0-4$

$\Leftrightarrow x_0^2+2x_0-9=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1+\sqrt{10}\Rightarrow k_1=\dfrac{2-2\sqrt{10}}{9} \\ x_0=-1-\sqrt{10}\Rightarrow k_1=\dfrac{2+2\sqrt{10}}{9} \end{array}\right.$

$\Rightarrow M\left(\dfrac{2-2\sqrt{10}}{9};0\right),N\left(\dfrac{2+2\sqrt{10}}{9};0\right)$

Vì (P) đi qua $M\left(\frac{2-2\sqrt{10}}{9};0\right), N\left(\frac{2+2\sqrt{10}}{9};0\right)$ nên

$$\begin{cases} a\left(\frac{2-2\sqrt{10}}{9}\right)^2+b\left(\frac{2-2\sqrt{10}}{9}\right)-8=0 \\ a\left(\frac{2+2\sqrt{10}}{9}\right)^2+b\left(\frac{2+2\sqrt{10}}{9}\right)-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=18 \\ b=-8 \end{cases}$$

Do đó Parabol cần tìm là $y=18x^2-8x-8$.

Tọa độ đỉnh $I\left(\frac{2}{9};\frac{-80}{9}\right)$.

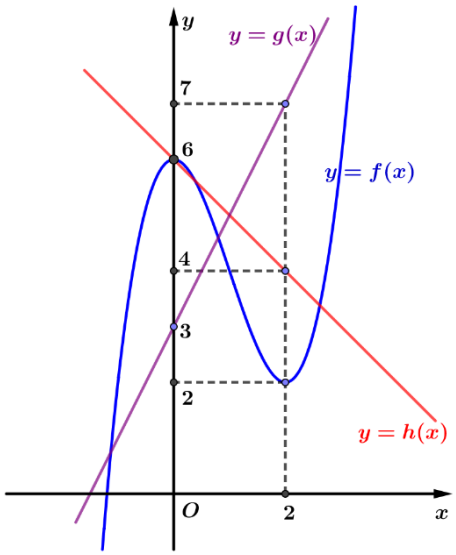
Phương trình đường thẳng $MN: y=0$.

$$d(I,MN)=\frac{80}{9}; MN=\frac{4\sqrt{10}}{9},\ MI=\frac{\sqrt{664}}{9}, NI=\frac{\sqrt{664}}{9}$$

$$S_{IMN}=\frac{1}{2}.MN.d(I,MN)=\frac{1}{2}.\frac{4\sqrt{10}}{9}.\frac{80}{9}=\frac{160\sqrt{10}}{81}$$

$$R=\frac{MN.MI.NI}{4S_{IMN}}=\frac{161}{36}$$

Câu 27: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hai đường thẳng $\Delta_1: y=h(x)$ và $\Delta_2: y=g(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hệ số góc k của tiếp tuyến với đồ thị $(C'): y=\frac{f(x).h(x)}{g(x)}$ tại điểm có hoành độ $x=2$ có dạng $k=\frac{a}{b}$. Khi đó $a+b$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(15;25)$. **B.** $(-20;10)$. **C.** $(60;80)$. **D.** $(-30;-21)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $(C'): y=\frac{f(x).h(x)}{g(x)} \Rightarrow y'=\frac{\left[f'(x).h(x)+f(x).h'(x)\right].g(x)-f(x).h(x).g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$.

Dựa vào đồ thị ta có $g(x)=2x+3$, $h(x)=-x+6$ và $\begin{cases} f(2)=2; g(2)=7; h(2)=4 \\ f'(2)=0; g'(2)=2; h'(2)=-1 \end{cases}$.

Hệ số góc k của tiếp tuyến với đồ thị $(C'): y=\dfrac{h(x).g(x)}{f(x)}$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là

$$k=y'(2)=\frac{\left[f'(2).h(2)+f(2).h'(2)\right].g(2)-f(2).h(2).g'(2)}{\left[g(2)\right]^2}=\frac{-30}{49}.$$

Như vậy $k=\dfrac{-30}{49}=\dfrac{a}{b}\Rightarrow\begin{cases} a=-30 \\ b=49 \end{cases}\Rightarrow a+b=19$.

Câu 28: Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=3x+m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=x^3+1$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 3.

Lời giải

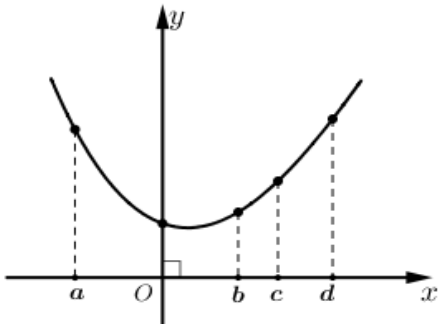
Chọn B

Để đường thẳng $y=3x+m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=x^3+1$ khi và chỉ khi $\begin{cases} x^3+1=3x+m \\ 3x^2=3 \end{cases}$ có nghiệm.

Giải hệ $\begin{cases} x^3+1=3x+m \\ 3x^2=3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m=x^3-3x+1 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right. \end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=3 \end{array}\right.$

Vậy tổng các giá trị m là: $-1+3=2$.

Câu 29: Cho $f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi $S=\left\{f'(a), f'(b), f'(c), f'(d), f'(0)\right\}$. Phần tử lớn nhất trong tập hợp S là:



A. $f'(a)$. **B.** $f'(b)$. **C.** $f'(0)$. **D.** $f'(d)$.

Lời giải

Gọi α, β lần lượt là góc tạo bởi tiếp tuyến tại c, d.

$$\Rightarrow\begin{cases} f'(c)=\tan\alpha \\ f'(d)=\tan\beta\Rightarrow 0<f'(c)<f'(d). \\ \alpha<\beta \end{cases}$$

Vậy phần tử lớn nhất trong tập hợp S là: $f'(d)$.

Câu 30: Cho biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là $y=2x-1$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f\left(2x^2-1\right)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là

A. $y=4x-3$. **B.** $y=5x-4$. **C.** $y=8x-7$. **D.** $y=6x-5$.

Lời giải

Chọn C

Theo đề, ta có $f'(1)=2$ và tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=1$ là $y=2(x-1)+f(1)=2x+f(1)-2$, suy ra $f(1)=1$.

Xét hàm số $y=f\left(2x^2-1\right)$. Ta có $y'=4xf'\left(2x^2-1\right)$. Suy ra $y'(1)=4f'(1)=8$.

Từ đây ta loại ba đáp án A,B, **D.**

Câu 31: Cho hàm số $y=x^4-2x^2$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại $B(x_2;y_2)$ với B khác A thỏa $y_2-y_1=-24(x_2-x_1)$. Số điểm A thỏa mãn là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Tiếp tuyến của (C) tại A có phương trình $y-y_1=y'(x_1).(x-x_1)$

Do B thuộc tiếp tuyến của (C) tại A nên $y_2-y_1=y'(x_1)(x_2-x_1)$

$\Rightarrow y'(x_1)=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-24$.

Do đó x_1 là nghiệm của phương trình $4x^3-4x=-24\Leftrightarrow x^3-x+6=0\Leftrightarrow x=-2$

Từ đó suy ra có duy nhất điểm A thỏa mãn bài toán.

Câu 32: Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(0;a)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của a trong đoạn $[-2018;2018]$ để từ A kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía của trục hoành

A. 2019. **B.** 2020. **C.** 2017. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=-\dfrac{3}{(x-1)^2}$.

Tiếp tuyến với đồ thị (C) qua $A(0;a)$ là $(\Delta):y=kx+a$.

(Δ) tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{x+2}{x-1}=kx+a\\ -\dfrac{3}{(x-1)^2}=k\end{cases}$ $(*)$ có nghiệm.

Từ hệ $(*)$ ta có $\dfrac{x+2}{x-1}=-\dfrac{3x}{(x-1)^2}+a\Leftrightarrow(a-1)x^2-2(2+a)x+2+a=0$ $(**)$.

Yêu cầu bài toán là tìm a để phương trình $(**)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $\frac{x_1+2}{x_1-1}.\frac{x_2+2}{x_2-1}<0$.

Ta có $\begin{cases} S=x_1+x_2=\dfrac{2+a}{a-1} \\ P=x_1x_2=\dfrac{2(2+a)}{a-1} \end{cases}$.

Yêu cầu bài toán tương đương $\begin{cases} a\neq 1 \\ \Delta'>0 \\ \dfrac{P+2S+4}{P-S+1}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 1 \\ 3a+6>0 \\ \dfrac{9a+6}{-3}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 1 \\ a>-2 \\ a>-\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 1 \\ a>-\dfrac{2}{3} \end{cases}$.

Do m nguyên thuộc đoạn $[-2018;2018]$ nên $m\in\{0;2;3;4;\ldots;2018\}$.

Vậy có 2018 giá trị thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 33: Cho hàm số $y=x^4-2x^2$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại $B(x_2;y_2)$ với B khác A thỏa $y_2-y_1=-24(x_2-x_1)$. Số điểm A thỏa mãn là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Tiếp tuyến của (C) tại A có phương trình $y-y_1=y'(x_1).(x-x_1)$

Do B thuộc tiếp tuyến của (C) tại A nên $y_2-y_1=y'(x_1)(x_2-x_1)$

$\Rightarrow y'(x_1)=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-24$.

Do đó x_1 là nghiệm của phương trình $4x^3-4x=-24\Leftrightarrow x^3-x+6=0\Leftrightarrow x=-2$

Từ đó suy ra có duy nhất điểm A thỏa mãn bài toán.

Câu 34: Tìm điểm M có hoành độ âm trên đồ thị $(C): y=\frac{1}{3}x^3-x+\frac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $d: y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$.

A. $M(-2;-4)$. **B.** $M\left(-1;\dfrac{4}{3}\right)$. **C.** $M(-2;0)$. **D.** $M\left(2;-\dfrac{4}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng $d: y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ có hệ số góc $-\frac{1}{3}$ cho nên tiếp tuyến có hệ số góc bằng 3.

Gọi tọa độ của M là $M(x_0;y_0)$ thì hệ số góc của tiếp tuyến tại M bằng $y'(x_0)=x_0^2-1$.

Từ đó ta có $x_0^2-1=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x_0=2 \\ x_0=-2 \end{array}\right.$.

Theo giả thiết, điểm M có hoành độ âm nên $x_0=-2$. Vậy tọa độ $M(-2;0)$.

Câu 35: Cho đa thức $f(x)$ với hệ số thực và thỏa mãn điều kiện $2f(x)+f(1-x)=x^2, \forall x\in\mathbb{R}$. Biết tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=1$ của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác. Tính diện tích của tam giác đó?

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $2f(x)+f(1-x)=x^2, \forall x\in\mathbb{R}\ \ (1)$.

Đặt $t=1-x\Rightarrow 2f(1-t)+f(t)=(1-t)^2, \forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow 2f(1-t)+f(x)=(1-x)^2, \forall t\in\mathbb{R}\ \ (2)$.

Từ và ta có: $\begin{cases}2f(x)+f(1-x)=x^2\\ 2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2\end{cases}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}\left(x^2+2x-1\right)$.

Suy ra: $f(1)=\frac{2}{3}; f'(1)=\frac{4}{3}$

Suy ra phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là:

$$y=\frac{4}{3}(x-1)+\frac{2}{3}\Leftrightarrow y=\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}$$

Tiếp tuyến cắt trục hoành tại $A\left(\frac{1}{2};0\right)$ và cắt trục tung tại $B\left(0;-\frac{2}{3}\right)$

Suy ra diện tích tam giác OAB là: $S=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\left|-\frac{2}{3}\right|=\frac{1}{6}$.

Câu 36: Gọi (P) là đồ thị của hàm số $y=x^2+2x+2$ và điểm M di chuyển trên (P). Gọi $(d_1),(d_2)$ là các đường thẳng qua M sao cho (d_1) song song với trục tung và $(d_1),(d_2)$ đối xứng nhau qua tiếp tuyến của (P) tại M. Biết rằng M di chuyển trên (P) thì (d_2) luôn đi qua điểm cố định $I(a;b)$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $3a+2b=0$. **B.** $a+b=0$. **C.** $an=-1$. **D.** $5a+4b=0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y=x^2+2x+2\Rightarrow y'=2x+2$.

Gọi $M\left(m;m^2+2m+2\right)$, phương trình tiếp tuyến tại M có dạng:

$\Delta: y=(2m+2)(x-m)+m^2+2m+2=(2m+2)x-m^2+2$.

Ta có $d_1: x=m\Rightarrow \cos(d_1;\Delta)=\frac{|2m+2|}{\sqrt{(2m+2)^2+1}}$

Gọi $d_2: y=kx+n\Rightarrow \cos(d_2;\Delta)=\frac{|k(2m+2)+1|}{\sqrt{(2m+2)^2+1}.\sqrt{a^2+1}}$

$\Rightarrow |k(2m+2)+1|=|2m+2|\sqrt{a^2+1}$

$\Leftrightarrow k=\dfrac{4m^2+8m+3}{2(2m+2)}\Rightarrow n=\dfrac{4m^2+13m+8}{4m+4}.$

$\Rightarrow d_2: y=\dfrac{4m^2+8m+3}{4m+4}x+\dfrac{4m^2+13m+8}{4m+4}$

Với $x=-1\Rightarrow y=\dfrac{5m+5}{4m+4}=\dfrac{5}{4}\Rightarrow d_2$ luôn đi qua điểm $I\left(-1;\dfrac{5}{4}\right)$ cố định.

Câu 37: Cho hàm số $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$. Cho điểm $M(a;b)$ sao cho có đúng hai tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua *M*, đồng thời hai tiếp tuyến này vuông góc với nhau. Biết điểm *M* luôn thuộc một đường tròn cố định, bán kính của đường tròn đó là

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Giả sử điểm $A\left(t;\dfrac{t^2+1}{t}\right),(t\neq 0)$ thuộc đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Ta có $f(x)=x+\dfrac{1}{x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}$

Phương trình tiếp tuyến tại *A* của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là:

$y=\dfrac{t^2-1}{t^2}(x-t)+\dfrac{t^2+1}{t}$

Mà tiếp tuyến này đi qua điểm *M* nên ta có:

$b=\dfrac{t^2-1}{t^2}(a-t)+\dfrac{t^2+1}{t}\Leftrightarrow (a-b)t^2+2t-a=0.$ (1)

Qua M kẻ được hai tiếp tuyến tới đồ thị hàm số $y=f(x)$, đồng thời hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau nên phương trình phải có hai nghiệm phân biệt $t_1,t_2\neq 0$ thỏa mãn $f'(t_1).f'(t_2)=-1$

hay $\begin{cases} a\neq b \\ a\neq 0 \\ \Delta'=1+a(a-b)>0 \\ \dfrac{t_1^2-1}{t_1^2}.\dfrac{t_2^2-1}{t_2^2}=-1 \end{cases}$

Theo định lý Vi-et, ta có $\begin{cases} t_1+t_2=\dfrac{2}{b-a} \\ t_1.t_2=\dfrac{a}{b-a} \end{cases}$

nên $\dfrac{t_1^2-1}{t_1^2}.\dfrac{t_2^2-1}{t_2^2}=-1\Leftrightarrow 2t_1^2t_2^2-(t_1^2+t_2^2)+1=0$

$\Leftrightarrow 2t_1^2t_2^2-(t_1+t_2)^2+2t_1t_2+1=0$

$\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{a}{b-a}\right)^2-\left(\dfrac{2}{b-a}\right)^2+2\dfrac{a}{b-a}+1=0$

$\Leftrightarrow a^2+b^2=4.$

Do $a\neq 0$ nên từ $a^2+b^2=4$ suy ra $|b|<2$, do đó $a^2+1\geq 2|a|>|ab|\geq ab.$

Suy ra $\begin{cases} a^2+b^2=4 \\ a\neq b \\ a\neq 0 \end{cases}$

Như vậy, tập hợp tất cả các điểm $M(a;b)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài là đường tròn tâm O, bán kính

bằng 2, bỏ đi các điểm $B(0;2)$, $C(0;2)$, $D\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right), E\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$..

Câu 38: Cho hàm số $y=f(x)=x^4-2x^3+x^2$ có đồ thị (C). Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số a để có đúng 2 tiếp tuyến kẻ từ $A=(a;0)$ đến (C). Số phần tử của S là

A. 0. **B.** 4. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Gọi Δ là đường thẳng đi qua $A(a;0)$ và có hệ số góc là k, khi đó phương trình đường thẳng Δ là $y=k(x-a)$.

Do Δ là tiếp tuyến của (C), xét hệ phương trình (I): $\begin{cases} x^4-2x^3+x^2=k(x-a) & (1) \\ 4x^3-6x^2+2x=k & (2) \end{cases}$

Thế (2) vào (1), ta có:

$x^4-2x^3+x^2=\left(4x^3-6x^2+2x\right)(x-a)\Leftrightarrow x(x-1)\left[3x^2-(4a+1)x+2a\right]=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ 3x^2-(4a+1)x+2a=0 \quad (3) \end{cases}$.

Do $\begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}\Rightarrow k=0$**, ta xét** $k=0\Leftrightarrow 4x^3-6x^2+2x=0\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\dfrac{1}{2} \\ x=1 \end{cases}$.

Khi $\begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$**, ta thu được một phương trình tiếp tuyến là** $\Delta: y=0$**.**

Khi $x=\dfrac{1}{2}$ **phương trình tiếp tuyến là** $\Delta: y=\dfrac{1}{16}$**, tiếp tuyến không đi qua** $A(a;0)$**.**

Bài toán trở thành tìm a để (3) **có 2 nghiệm phân biệt trong đó có đúng 1 nghiệm thuộc** $\{0;1\}$ **hoặc** (3) **có nghiệm kép khác** $0;1;\dfrac{1}{2}$.

Trường hợp 1: (3) **có 2 nghiệm phân biệt trong đó có đúng 1 nghiệm thuộc** $\{0;1\}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = \left[-(4a+1)\right]^2 - 4.3.2a > 0 \\ \left[\begin{array}{l} 2a = 0 \\ 3-(4a+1)+2a = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 1 \end{array}\right..$$

Trường hợp 2: Phương trình (3) **có nghiệm kép khác** $0;\ 1;\ \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 16a^2 - 16a + 1 = 0 \\ 2a \neq 0 \\ 3-4(a+1)+2a \neq 0 \\ \frac{3}{4} - \frac{1}{2}(4a+1)+2a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \\ a = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \end{array}\right..$$

Vậy đáp án của bài toán là $S = \left\{0;1;\frac{2-\sqrt{3}}{4};\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right\}$.

Câu 39: Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$ có đồ thị (C). Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số a để có đúng 2 tiếp tuyến kẻ từ $A(a;0)$ đến (C). Số phần tử của S là

A. 0. **B.** 4. **C.** 2. **D.** vô số.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$, suy ra $y' = f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$.

Đường thẳng d đi qua $A(a;0)$ với hệ số góc k có phương trình $y = k(x-a)$.

Đường thẳng d là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^4 - 2x^3 + x^2 = k(x-a) & (1) \\ 4x^3 - 6x^2 + 2x = k & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta được

$$x^4 - 2x^3 + x^2 = (4x^3 - 6x^2 + 2x)(x-a) \Leftrightarrow 3x^4 - (4a+4)x^3 + (6a+1)x^2 - 2ax = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)\left[3x^2 - (4a+1)x + 2a\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & \\ x = 1 & \\ g(x) = 3x^2 - (4a+1)x + 2a = 0 & (3) \end{array}\right.$$

Nhận xét: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow k = 0 \\ x = 1 \Rightarrow k = 0 \end{cases}$ và phương trình tiếp tuyến tại các điểm có hoành độ $x = 0$, $x = 1$ đều có dạng $y = 0$.

Khi đó để có đúng 2 tiếp tuyến kẻ từ $A(a;0)$ đến (C) thì xảy ra 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1: Phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm hoặc bằng 0 hoặc bằng 1

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\ \left[\begin{array}{l}g(0)=0\\ g(1)=0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}16a^2-16a+1>0\\ \left[\begin{array}{l}2a=0\\ 3.1^2-(4a+1).1+2a=0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}16a^2-16a+1>0\\ \left[\begin{array}{l}a=0\\ a=1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\ a=1\end{array}\right.$$

Trường hợp 2: Phương trình (3) có nghiệm kép không thuộc tập hợp $\{0;1\}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=0\\ g(0)\neq 0\\ g(1)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}16a^2-16a+1=0\\ a\neq 0\\ a\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}\\ a=\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}\end{array}\right.$$

Do đó $S=\left\{0;1;\dfrac{2+\sqrt{3}}{4};\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}\right\}$.

Vậy tập S có 4 phần tử.

Câu 40: Gọi m là giá trị để đồ thị (C_m) của hàm số $y=\dfrac{x^2+2mx+2m^2-1}{x-1}$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và các tiếp tuyến với (C_m) tại hai điểm này vuông góc với nhau. Khi đó ta có :

A. $m\in(1;2)$. **B.** $m\in(-2;-1)$. **C.** $m\in(0;1)$. **D.** $m\in(-1;0)$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) với trục hoành là : $f(x)=x^2+2mx+2m^2-1=0(x\neq 1)(1)$.

(C_m) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ f(1)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-m^2+1>0\\ 2m+2m^2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<m<1\\ m\neq 0\end{cases}$.

Gọi x_1,x_2 là 2 nghiệm của phương trình (1), theo vi et ta có : $\begin{cases}x_1+x_2=-2m\\ x_1x_2=2m^2-1\end{cases}$

Ta có : $y'=\dfrac{x^2-2x-2m^2-2m+1}{(x-1)^2}$.

Tiếp tuyến tại hai giao điểm vuông góc với nhau $\Leftrightarrow y'(x_1).y'(x_2)=-1$

$\Leftrightarrow\left(x_1^2-2x_1-2m^2-2m+1\right)\left(x_2^2-2x_2-2m^2-2m+1\right)+(x_1-1)^2(x_2-1)^2=0$

$\Leftrightarrow 2\left(x_1x_2-(x_1+x_2)+1\right)^2-\left(2m^2+2m\right)\left((x_1+x_2)^2-2x_1x_2-2(x_1+x_2)+2\right)+\left(2m^2+2m\right)^2=0$

$\Leftrightarrow 2\left(2m^2+2m\right)^2-\left(2m^2+2m\right)\left(4m^2-4m^2+2+4m+2\right)+\left(2m^2+2m\right)^2=0$

$\Leftrightarrow 3\left(2m^2+2m\right)-4m-4=0\Leftrightarrow 6m^2+2m-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1(l)\\ m=\dfrac{2}{3}(tm)\end{array}\right.$. Vậy $m=\dfrac{2}{3}$.

Câu 41: Trên đường thẳng $d:y=2x+1$ có bao nhiêu điểm có thể kẻ được đến đồ thị $(C):y=\dfrac{x+3}{x-1}$ đúng một tiếp tuyến.

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D. Vô số.**

Lời giải

Chọn B

Gọi $M \in d \Rightarrow M(a;2a+1)$.

Gọi $A(x_0;y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến d_1 kẻ từ M với (C).

Phương trình tiếp tuyến $d_1: y = y'(x_0)(x-x_0)+y_0 \Leftrightarrow y = \dfrac{-4}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\dfrac{x_0+3}{x_0-1}$

Vì $M \in d_1$ nên $2a+1 = \dfrac{-4}{(x_0-1)^2}(a-x_0)+\dfrac{x_0+3}{x_0-1}$

$\Rightarrow (2a+1)(x_0-1)^2 = -4(a-x_0)+(x_0+3)(x_0-1),\ (x_0 \neq 1).$

$\Leftrightarrow a.x_0^2 - 2(a+2)x_0 + 3a + 2 = 0$

Từ M kẻ đến (C) đúng 1 tiếp tuyến $\Leftrightarrow (1)$ có đúng 1 nghiệm $x_0 \neq 1$.

TH1: $a = 0$

$(1) \Leftrightarrow x_0 = \dfrac{1}{2}$. Suy ra $a = 0$ thỏa mãn.

TH2: $a \neq 0$, PT có nghiệm kép $x_0 \neq 1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (a+2)^2 - a(3a+2) = 0 \\ -\dfrac{2(a+2)}{2a} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = 2 \end{array}\right. \\ \dfrac{a+2}{a} \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = 2 \end{array}\right.$$

TH3: $a \neq 0$, PT có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = -2a^2 + 2a + 4 > 0 \\ a.1^2 - 2(a+2).1 + 3a + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < a < 2 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1.$$

Kết hợp 3 trường hợp suy ra có 4 điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán.

TOÀN TẬP VỀ PHƯƠNG PHÁP GHÉP TRỤC

LÍ THUYẾT

❖ Cơ sở của phương pháp ghép trục giải quyết bài toán hàm hợp $g=f\left(u\left(x\right)\right)$. Ta thực hiện theo các bước sau đây:

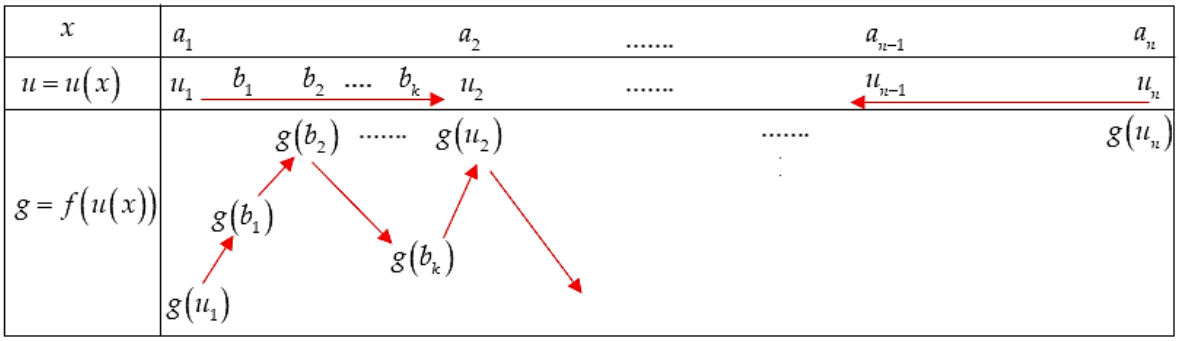
- **Bước 1:** Tìm tập xác định của hàm $g=f\left(u\left(x\right)\right)$. Giả sử tập xác định tìm được như sau:

  $D=\left(a_1;a_2\right)\cup\left(a_3;a_4\right)\cup....\cup\left(a_{n-1};a_n\right)$, ở đây có thể $a_1\equiv-\infty;\ a_n\equiv+\infty$

- **Bước 2:** Xét sự biến thiên của hàm $u=u\left(x\right)$ và hàm $y=f\left(x\right)$

  Lập bảng biến thiên kép, xét sự tương quan giữa $\left[x;u=u\left(x\right)\right]$ và $\left[u;g=f\left(u\right)\right]$

  (Bảng biến thiên này thường có 3 dòng)



- **Dòng 1:** Xác định các điểm đặc biệt của hàm $u=u\left(x\right)$, sắp xếp các điểm này theo thứ tự tăng dần từ trái qua phải, giải sử như sau: $a_1<a_2<....<a_{n-1}<a_n$ (xem chú ý số 1).

- **Dòng 2:** Điền các giá trị $u_i=u\left(a_i\right)$, với $\left(i=\overline{1,.....,n}\right)$.

  Trên mỗi khoảng $\left(u_i;u_{i+1}\right)$, với $\left(i=\overline{1,n-1}\right)$ cần bổ sung các điểm kì dị $b_1,b_2,....b_k$ của hàm số $y=f\left(x\right)$.

  Trên mỗi khoảng $\left(u_i;u_{i+1}\right)$, với $\left(i=\overline{1,n-1}\right)$, sắp xếp các điểm $u_i;b_k$ theo thứ tự, chẳng hạn: $u_i<b_1<b_2<....<b_k<u_{i+1}$ hoặc $u_i>b_1>b_2>....>b_k>u_{i+1}$ (xem chú ý số 2).

- **Dòng 3:** Xét chiều biến thiên của hàm $g=f\left(u\left(x\right)\right)$ dựa vào bảng biến thiên của hàm $y=f\left(x\right)$ bằng cách hoán đổi u đóng vai trò của x; $f\left(u\right)$ đóng vai trò của $f\left(x\right)$.

  Sau khi hoàn thiện bảng biến thiên $g=f\left(u\left(x\right)\right)$ ta sẽ thấy được hình dạng của đồ thị hàm số này.

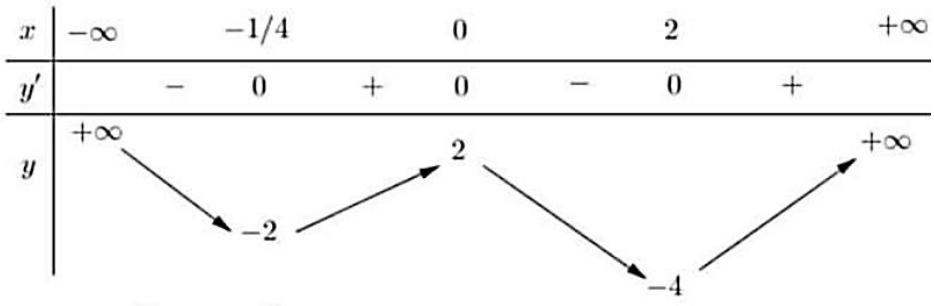
- **Bước 4:** Dùng bảng biến thiên hàm hợp $g=f\left(u\left(x\right)\right)$ để giải quyết các yêu cầu của bài toán và đưa ra kết luận.

❖ Một số chú ý quan trọng khi sử dụng phương pháp ghép trục để giải quyết các bài toán về hàm hợp.

- **CHÚ Ý 1:**
  - Các điểm đặc biệt của $u=u(x)$ gồm: các điểm biên của tập xác định D, các điểm cực trị của hàm số $u=u(x)$.
  - Nếu xét hàm $u=|u(x)|$ thì ở **dòng 1** các điểm đặc biệt còn có nghiệm của phương trình $u(x)=0$ (là hoành độ giao điểm của hàm số $u=u(x)$ với trục Ox).
  - Nếu xét hàm $u=u(|x|)$ thì ở **dòng 1** các điểm đặc biệt còn có số 0 (là hoành độ giao điểm của $u=u(x)$ và trục Oy).
- **CHÚ Ý 2:**
  - Có thể dùng thêm các mũi tên để thể hiện chiều biến thiên của $u=u(x)$.
  - Điểm đặc biệt của hàm số $y=f(x)$ gồm: các điểm tại đó $f(x)$ và $f'(x)$ không xác định, các điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$.
  - Nếu xét hàm $g=|f(u(x))|$ thì trong **dòng 2** các điểm đặc biệt còn có nghiệm của phương trình $f(x)=0$.
  - Nếu xét hàm $g=f(u(|x|))$ thì trong **dòng 2** các điểm đặc biệt còn có số 0.

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$ của hàm số $5f\left(\cos^2x-\cos x\right)=1$ là

A. 11. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 12.

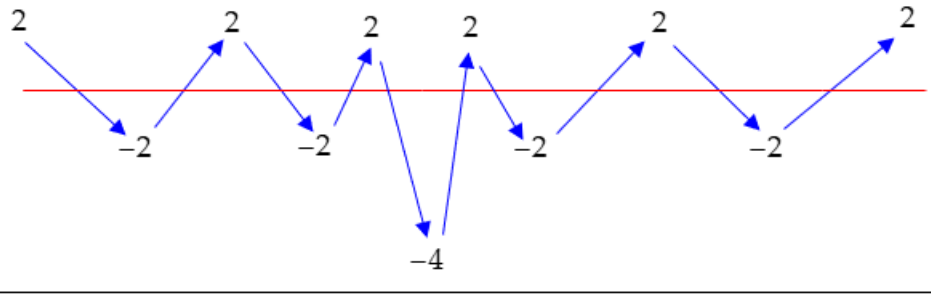
Lời giải

Chọn B

Tiến hành đặt $u=\cos^2x-\cos x$. Đạo hàm $u'=-2.\cos x.\sin x+\sin x=\sin x\left(1-2\cos x\right)$.

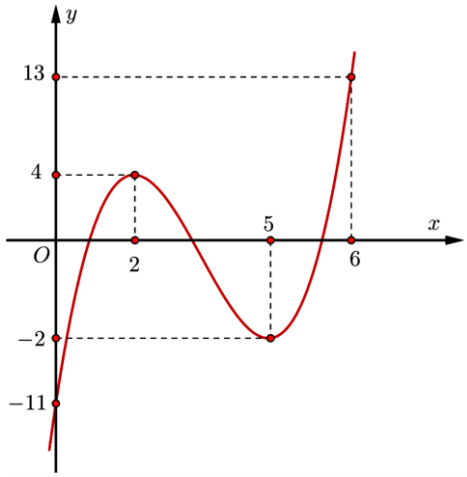
Giải phương trình: $u'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi\Rightarrow x=0;\pi;2\pi\\ \cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3};\frac{7\pi}{3}\end{array}\right.$

Sử dụng phương pháp ghép trục:

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{5\pi}{3}$	2π	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{2}$
u	0	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	2	0	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0
$f(u)$									

Từ bảng biến thiên ta có phương trình $f\left(u\right)=\frac{1}{5}$ có tất cả 10 nghiệm phân biệt.

VÍ DỤ 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(f(x)+2\right)=\dfrac{m}{2}$ có 3 nghiệm phân biệt. Số phần tử của tập S là?

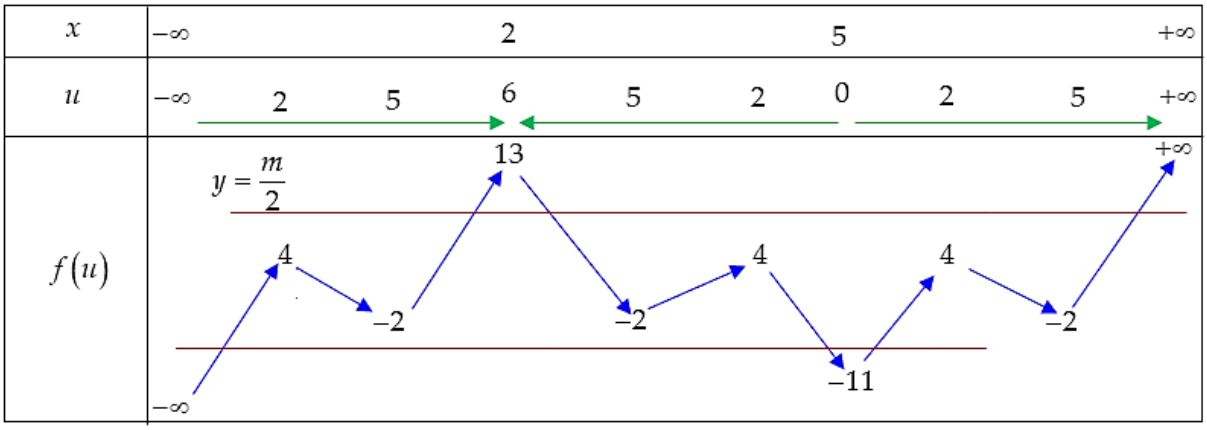
A. 10. **B.** 32. **C.** 9. **D.** 34.

Lời giải

Chọn D

Đặt $u=f(x)+2$. Từ đồ thị ta thấy hàm số đạt cực trị tại $x=2$ và $x=5$.

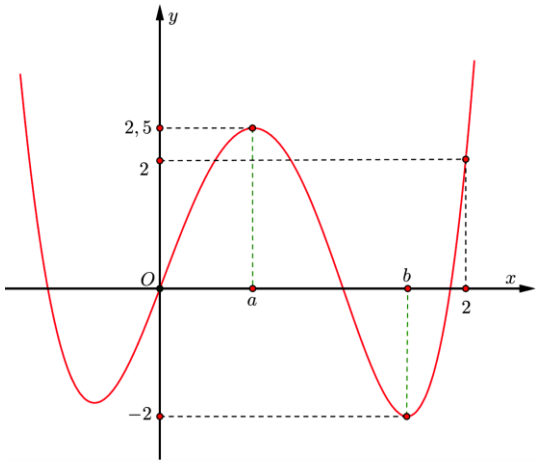
Sử dụng phương pháp ghép trục:



Từ bảng biến thiên, phương trình có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -11<\dfrac{m}{2}<-2 \\ 4<\dfrac{m}{2}<13 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8<m<26 \\ -22<m<-4 \end{array}\right.$

Vậy có 34 giá trị của m thỏa mãn.

VÍ DỤ 3: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Hỏi phương trình $f\left(\left|x^3-3x\right|\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị thuộc đoạn $[-2;2]$?

A. 10. **B.** 17. **C.** 12. **D.** 15.

Lời giải

Chọn B

Đặt $u=\left|x^3-3x\right|=\sqrt{\left(x^3-3x\right)^2} \Rightarrow u'=\dfrac{\left(x^3-3x\right)\left(3x^2-3\right)}{\sqrt{\left(x^3-3x\right)^2}}$.

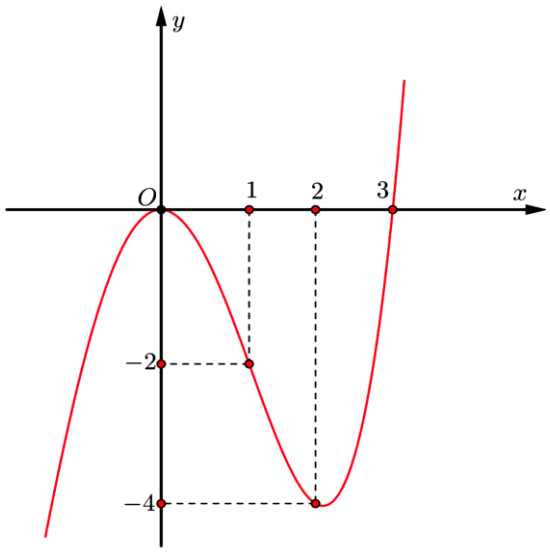
Giải phương trình đạo hàm $u'=\dfrac{\left(x^3-3x\right)\left(3x^2-3\right)}{\sqrt{\left(x^3-3x\right)^2}}=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Sử dụng phương pháp ghép trục:

x	-2		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		2
u	2	b	a	0	a	b	2	b	a	0	a	b	2	b	a	0	a	b	2
$f(u)$	2	−2	2,5	0	2,5	−2	2	−2	2,5	0	2,5	−2	2	−2	2,5	0	2,5	−2	2

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số $[-2;2]$ có 17 điểm cực trị.

VÍ DỤ 4: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $7f\left(5-2\sqrt{1+3\cos x}\right)=3m-10$ có đúng ba nghiệm phân biệt thuộc $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

A. 10. **B.** 1. **C.** 15. **D.** 2.

Lời giải

Phương trình đã cho tướng tương với $f\left(5-2\sqrt{1+3\cos x}\right)=\frac{3m-10}{7}$.

Đặt $u=5-2\sqrt{1+3\cos x}\Rightarrow u'=\frac{3\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}$.

Giải phương trình đạo hàm $u'=\frac{3\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}=0\Leftrightarrow x=0$.

Sử dụng phương pháp ghép trục:

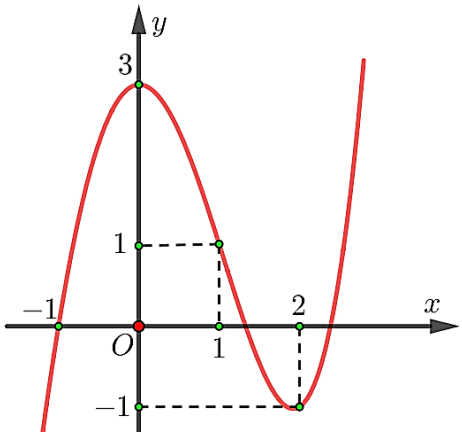
x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
u	3	2	1	2	3
$f(u)$	0	-4	-2	-4	0

($y=\frac{3m-10}{7}$)

Từ bảng biến thiên, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\frac{3m-10}{7}=-2\Leftrightarrow m=-\frac{4}{3}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

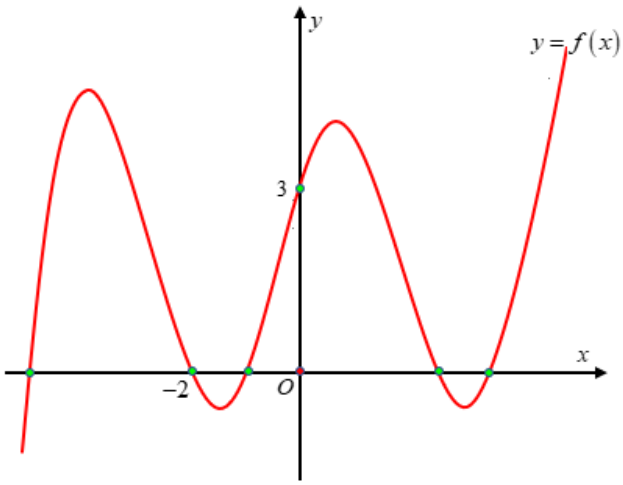
Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ



Số nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{3\pi}{2};3\pi\right)$ của phương trình $f^2(\sin x)-5\left|f(\sin x)\right|+6=0$ là

A. 13. **B.** 12. **C.** 11. **D.** 10

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$ có đồ thị như hình vẽ



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(|4x+5|-2\right)-3=0$ là:

A. 8. **B.** 4. **C.** 10. **D.** 6

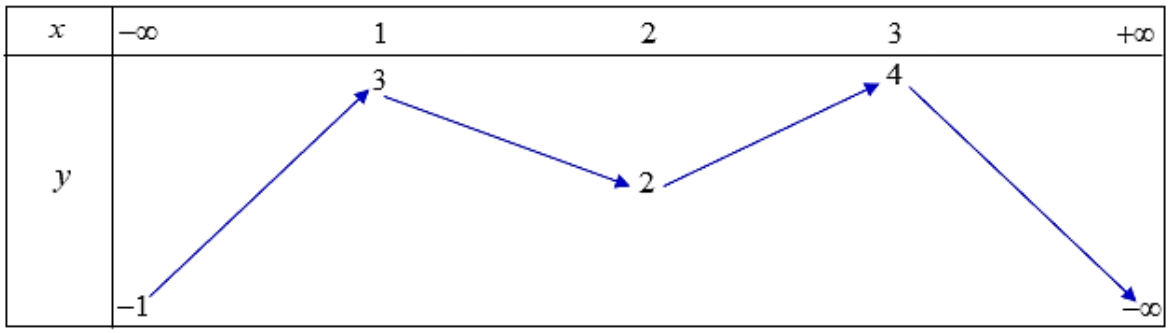
Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$			0		0		0		
$f(x)$		$\nearrow$	2	$\searrow$		$\nearrow$	2	$\searrow$	
	$-\infty$				0				$-\infty$

Hỏi phương trình $\left|f\left(x-1-2\sqrt{x-1}\right)\right|=1$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 12. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 8

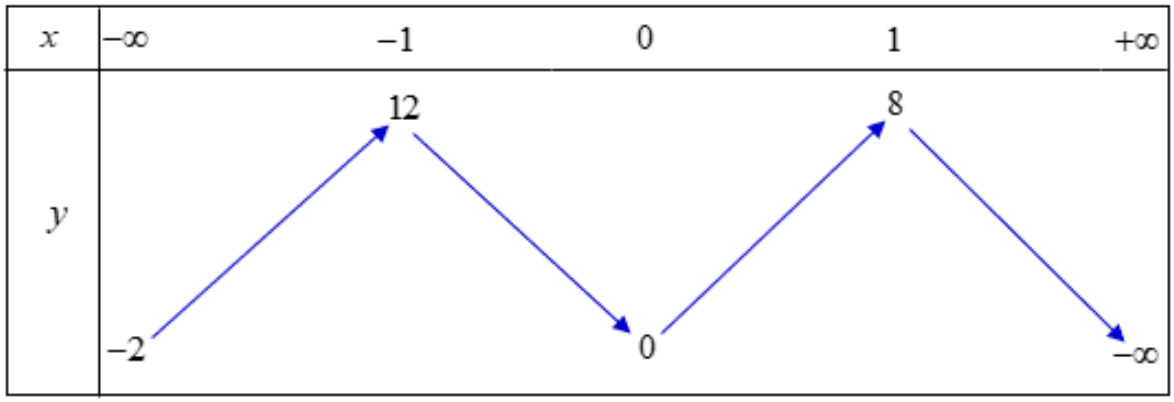
Câu 4: Cho bảng biến thiên hàm số $f\left(5-2x\right)$ như hình vẽ dưới.



Hỏi phương trình $\left|2f\left(x^2-4x+3\right)-1\right|=3$ có bao nhiêu nghiệm thực x tương ứng?

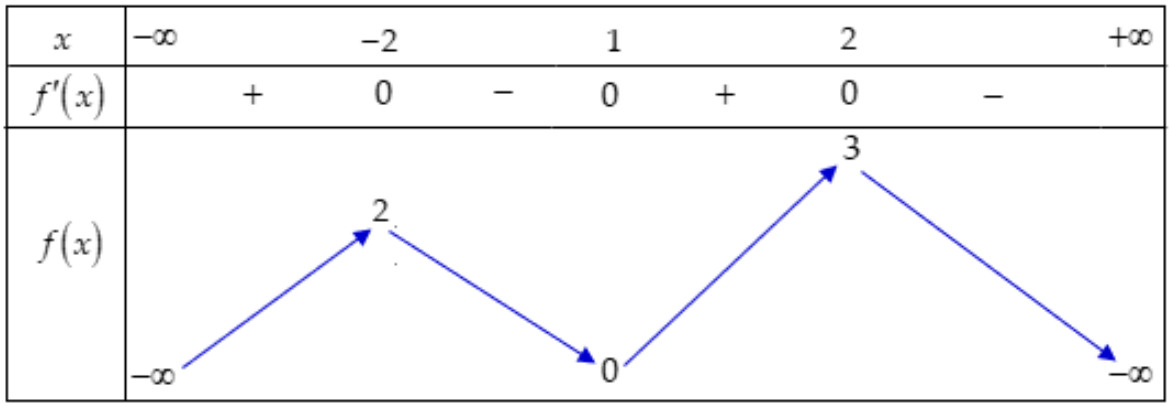
A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 4

Câu 5: Cho bảng biến thiên của hàm số $f\left(3-2x\right)$ như hình vẽ. Biết $f\left(4\right)=3;f\left(0\right)=0$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\left|f\left(x^3-3x+2\right)-m\right|=2$ có nhiều nghiệm nhất?



A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 2

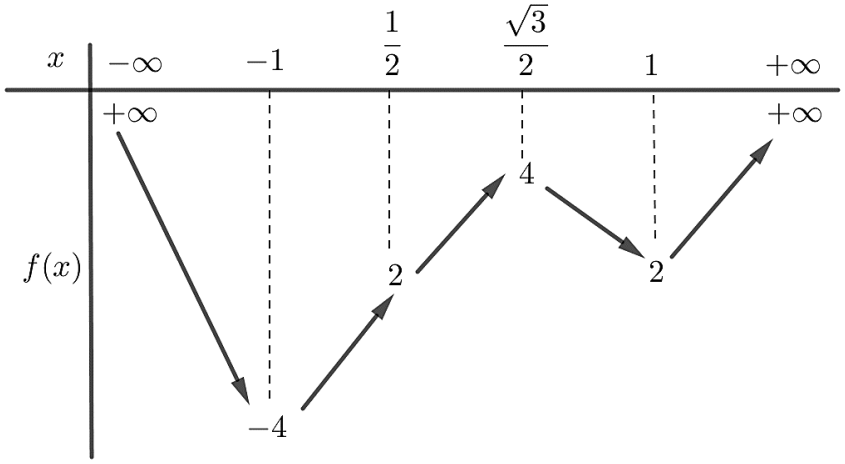
Câu 6: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f\left(-1\right)<2<f\left(5\right)$ và có bảng biến thiên như sau:



Số nghiệm của phương trình $f\left(\sqrt{2\cos^3\left(x\right)+2\cos x+5}+2\cos x\right)=2$ trên khoảng $\left(0;\frac{5\pi}{2}\right)$ là?

A. 2. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 3

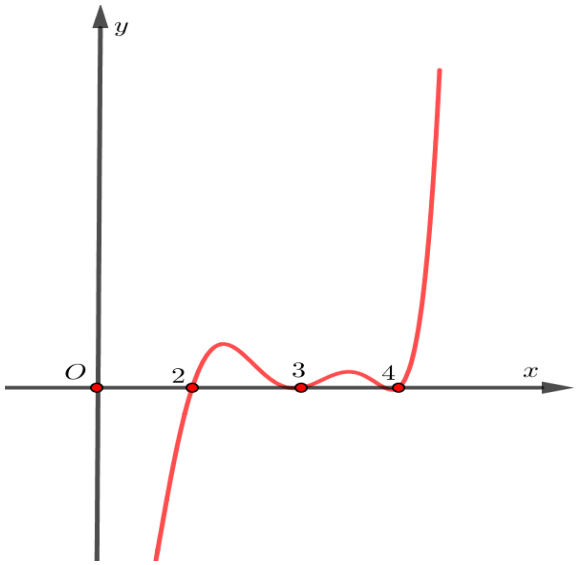
Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên.



Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x)+(3-m)f(\cos x)+2m-10=0$ có đúng 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{3};\pi\right]$ là

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 4.

Câu 8: Cho $f(x)$ là hàm đa thức bậc 6 và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



Hỏi hàm số $y=g(x)=f\left(x^2+4x+5\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét đấu đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x)=f\left(4-\sqrt{4-x^2}\right)$ đồng biến trên:

x	$-\infty$		-3		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

A. $(0;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(-3;-1)$.

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét đấu đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x)=f\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)$ nghịch biến trên:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

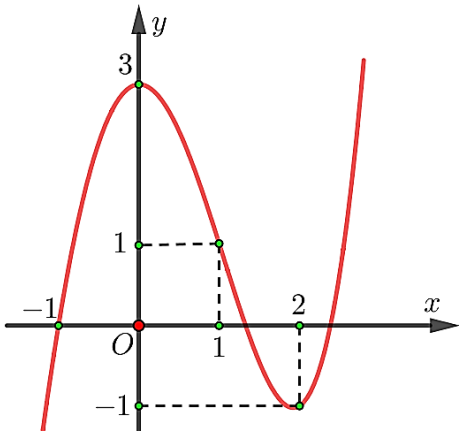
A. $(5;6)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;5)$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.D	3.C	4.D	5.D	6.A	7.B	8.C	9.C	10.D

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ



Số nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{3\pi}{2};3\pi\right)$ của phương trình $f^2(\sin x)-5\left|f(\sin x)\right|+6=0$ là

A. 13. **B.** 12. **C.** 11. **D.** 10

Bài làm:

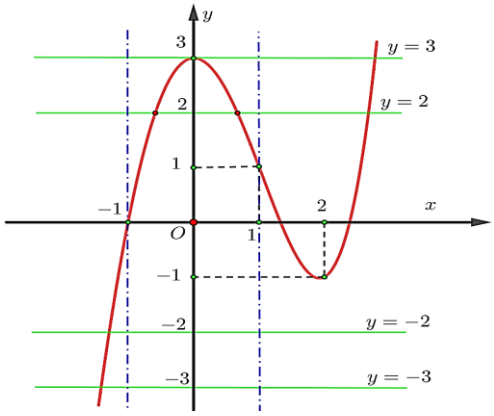
Chọn A

Ta giải phương trình: $f^2(\sin x)-5\left|f(\sin x)\right|+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|f(\sin x)\right|=3\\\left|f(\sin x)\right|=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(\sin x)=3\\f(\sin x)=-3\\f(\sin x)=-2\\f(\sin x)=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π
$\sin x$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0

Kết hợp bảng biến thiên và đồ thị tương giao:



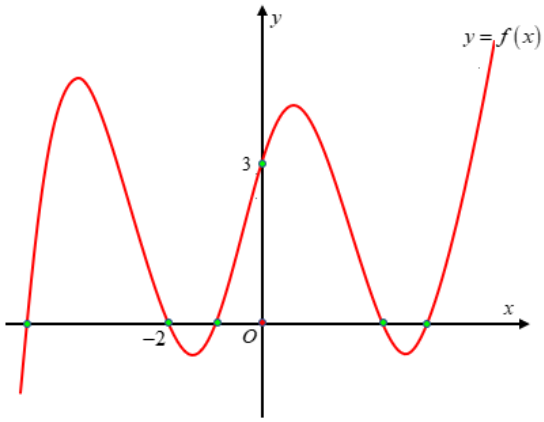
Ta thấy:

Với mọi $x\in[-1;1]$ thì phương trình luôn có 3 nghiệm.

Với mọi $x\in[0;1]$ thì phương trình có duy nhất 1 nghiệm.

Vậy số nghiệm của phương trình thuộc khoảng $\left(-\frac{3\pi}{2};3\pi\right)$ là $3.4+1=13$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$ có đồ thị như hình vẽ



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(|4x+5|-2\right)-3=0$ là:

A. 8. **B.** 4. **C.** 10. **D.** 6

Bài làm:

Đặt $g(x)=|4x+5|-2=\sqrt{(4x+5)^2}-2\Rightarrow g'(x)=\dfrac{4(4x+5)}{\sqrt{(4x+5)^2}}$.

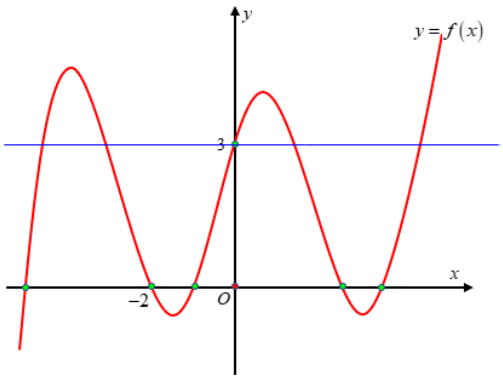
Giải phương trình $g'(x)=\dfrac{4(4x+5)}{\sqrt{(4x+5)^2}}=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{5}{4}$.

Ta lập bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$-\frac{5}{4}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

Yêu cầu bài toán trở thành: tìm số nghiệm phân biệt của phương trình $f\left(g(x)\right)-3=0$.

Kẻ đường thẳng $y=3$ lên đồ thị như sau:



Từ bảng biến thiên ta thấy, số nghiệm của phương trình thuộc $[-2;+\infty]$ bằng số nghiệm của phương trình thuộc $[-\infty;-2]$. Mà trên $[-2;+\infty]$ phương trình có 3 nghiệm nên trên $[-\infty;-2]$ cũng có 3 nghiệm. Vậy phương trình có $3+3=6$ nghiệm phân biệt.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$			0		0		0		
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	0	↗	2	↘	$-\infty$

Hỏi phương trình $\left|f\left(x-1-2\sqrt{x-1}\right)\right|=1$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 12. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 8

Lời giải

Chọn C

Điều kiện xác định: $x\ge 1$. Ta có: $\left|f\left(x-1-2\sqrt{x-1}\right)\right|=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l} f\left(x-1-2\sqrt{x-1}\right)=1 \\ f\left(x-1-2\sqrt{x-1}\right)=-1 \end{array}\right.$.

Đặt $u=x-1-2\sqrt{x-1}\Rightarrow u'=1-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}=0\Leftrightarrow x=2.$

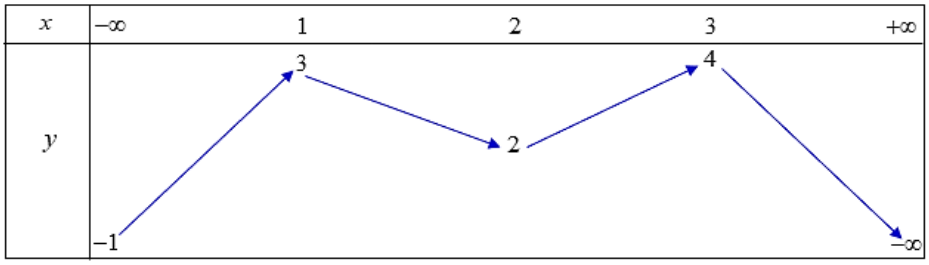
Sử dụng phương pháp ghép trục:

x	1		2		$+\infty$
u	0	←	-1	→	$+\infty$
$f(u)$	0	↗	2	↘	$-\infty$

x	1		2		$+\infty$
u	0	←	-1	→	$+\infty$
$f(u)$	0	↗	2	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình có 5 nghiệm phân biệt.

Câu 4: Cho bảng biến thiên hàm số $f(5-2x)$ như hình vẽ dưới.



Hỏi phương trình $\left|2f\left(x^2-4x+3\right)-1\right|=3$ có bao nhiêu nghiệm thực x tương ứng?

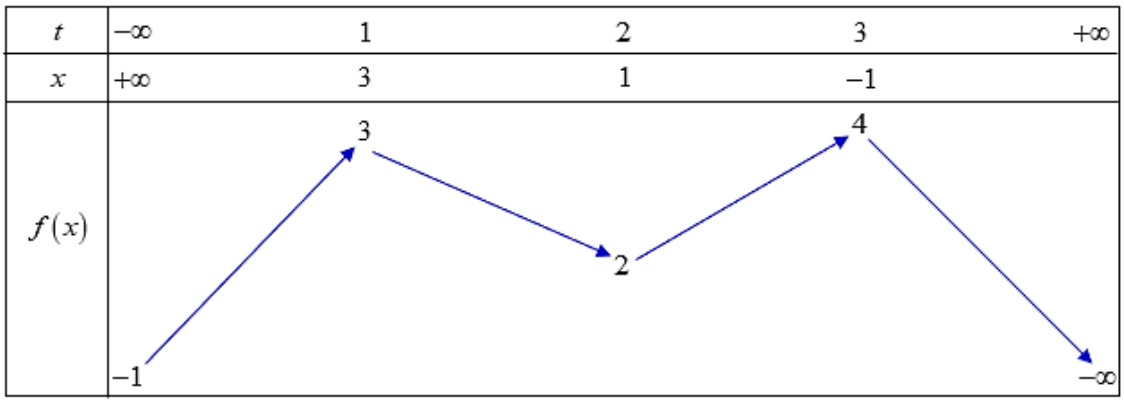
A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 4

Lời giải

Chọn D

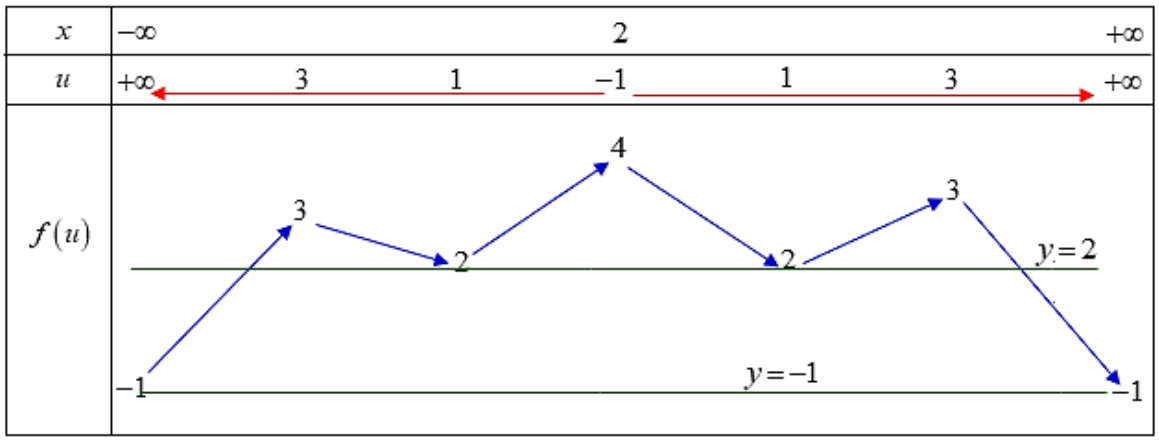
Đặt $x=5-2t$, đưa bảng biến thiên hàm số $f\left(5-2x\right)$ về bảng biến thiên hàm số $f\left(x\right)$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f\left(x\right)$ như sau:



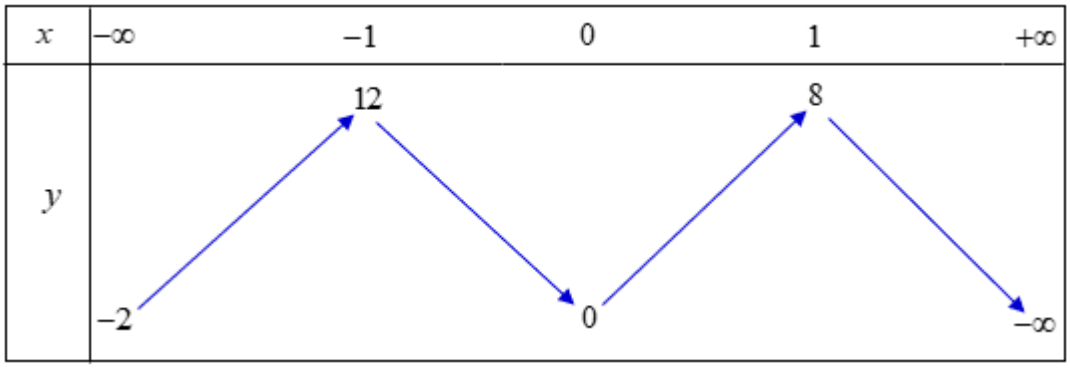
Đặt $u=x^2-4x+3$, phương trình trở thành $\left|2f\left(u\right)-1\right|=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(u\right)=2\\f\left(u\right)=-1\end{array}\right.$.

Sử dụng phương pháp ghép trục:



Từ bảng biến thiên suy ra, phương trình có tất cả 4 nghiệm thực x.

Câu 5: Cho bảng biến thiên của hàm số $f(3-2x)$ như hình vẽ. Biết $f(4)=3; f(0)=0$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\left|f\left(x^3-3x+2\right)-m\right|=2$ có nhiều nghiệm nhất?



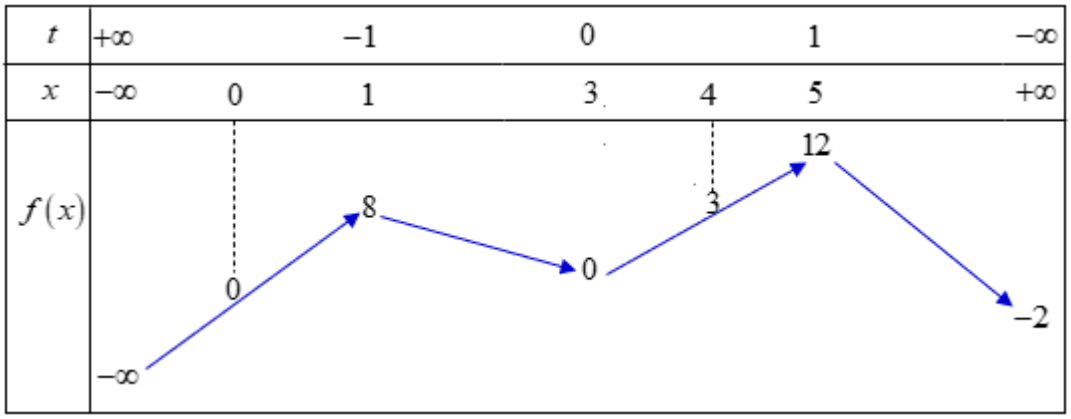
A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 2

Lời giải

Chọn D

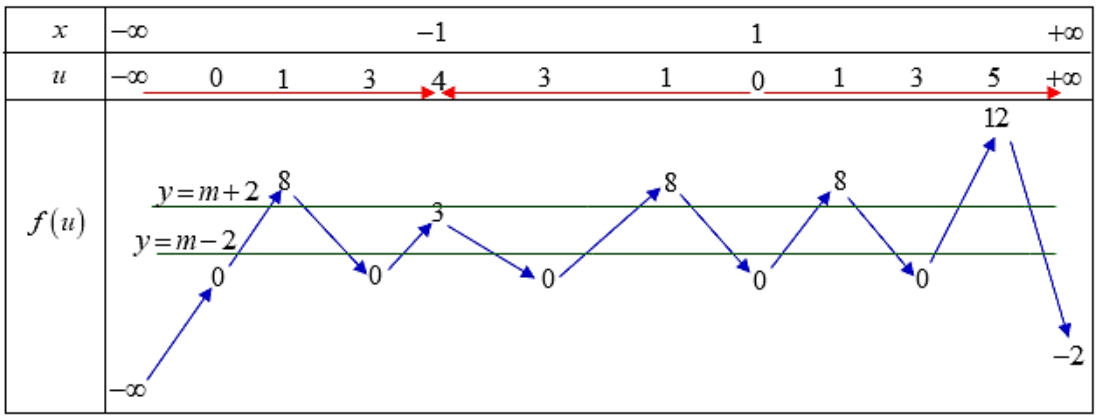
Đưa về bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ bằng cách đặt $x=3-2t \Rightarrow f(x)=f(3-2t)$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:



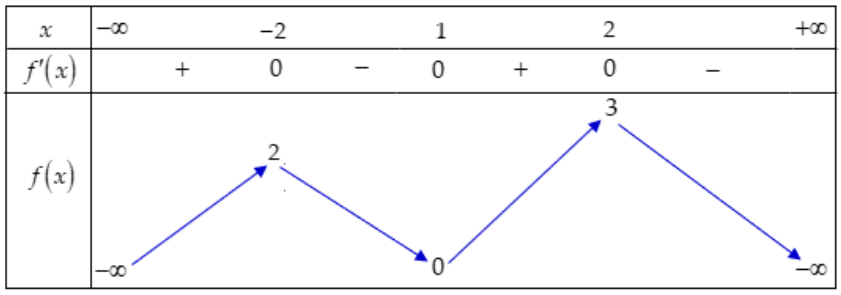
Đặt $u=x^3-3x+2$ thì phương trình trở thành $\left|f(u)-m\right|=2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(u)=m+2 \\ f(u)=m-2 \end{array}\right.$.

Sử dụng phương pháp ghép trục



Để phương trình có nhiều nghiệm nhất $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3<m+2<8 \\ 0<m-2<3 \end{array}\right. \Leftrightarrow 2<m<5 \Rightarrow m=\{3;4\}$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(-1)<2<f(5)$ và có bảng biến thiên như sau:



Số nghiệm của phương trình $f\left(\sqrt{2\cos^3(x)+2\cos x+5}+2\cos x\right)=2$ trên khoảng $\left(0;\frac{5\pi}{2}\right)$ là?

A. 2. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 3

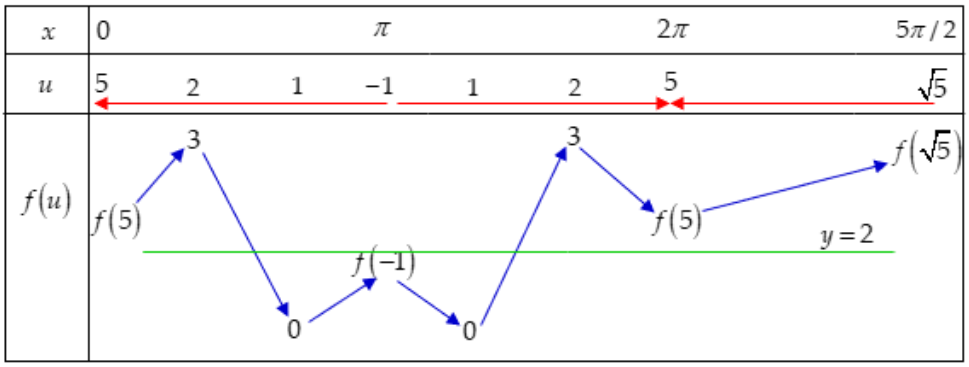
Lời giải

Chọn A

Ta đặt $u=\sqrt{2\cos^3(x)+2\cos x+5}+2\cos x \Rightarrow u'=\sin x\left(\frac{-3\cos^2 x-1}{\sqrt{2\cos^3(x)+2\cos x+5}}-2\right)=0$

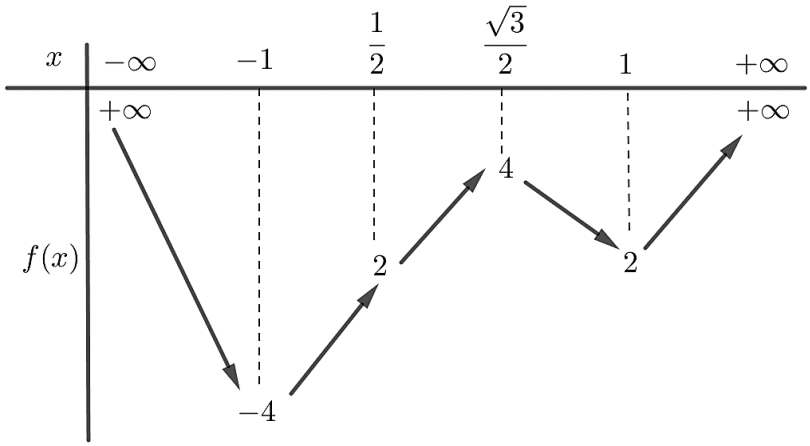
Giải phương trình $u'=0$ $\left[\begin{array}{l}\sin x=0 \xrightarrow{voi\ x\in\left(0;\frac{5\pi}{2}\right)} x=\pi;2\pi.\\ \frac{-3\cos^2 x-1}{\sqrt{2\cos^3(x)+2\cos x+5}}-2=0\ (vo\ nghiem)\end{array}\right.$

Sử dụng phương pháp ghép trục:



Từ bảng biến thiên suy ra phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên.



Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x)+(3-m)f(\cos x)+2m-10=0$ có đúng 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{3};\pi\right]$ là

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 4.

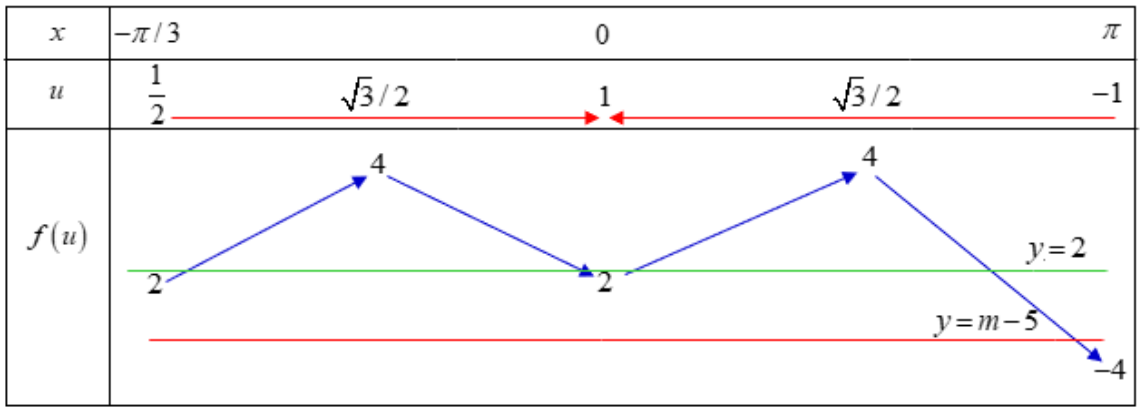
Lời giải

Chọn B

Đặt $u=\cos x \Rightarrow u'=-\sin x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pi \end{array}\right.$ (với $x\in\left[-\frac{\pi}{3};\pi\right]$).

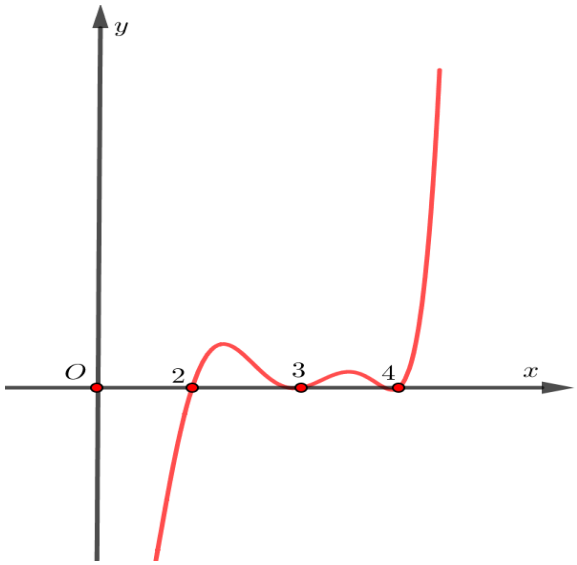
Khi đó phương trình đã cho trở thành $f(u)^2+(3-m)f(u)+2m-10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(u)=2 \\ f(u)=m-5 \end{array}\right.$.

Sử dụng phương pháp ghép trục:



Do phương trình $f(u)=2$ có 3 nghiệm nên yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $f(u)=m-5$ có duy nhất một nghiệm $-4\le m-5<2 \Leftrightarrow 1\le m<7 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{1;2;3;4;5;6\}$.

Câu 8: Cho $f(x)$ là hàm đa thức bậc 6 và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



Hỏi hàm số $y=g(x)=f\left(x^2+4x+5\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

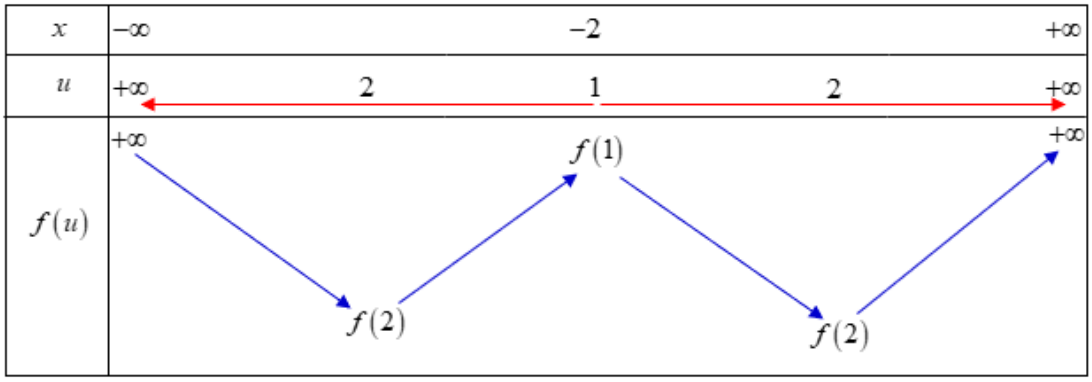
A. 2. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Đặt $u=x^2+4x+5 \Rightarrow u'=2x+4=0 \Leftrightarrow x=-2.$

Sử dụng phương pháp ghép trục:



Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét đấu đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x)=f\left(4-\sqrt{4-x^2}\right)$ đồng biến trên:

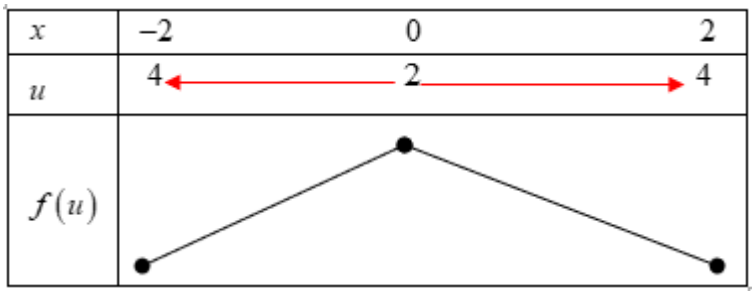
x	$-\infty$		-3		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

A. $(0;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(-3;-1)$.

Lời giải

Đặt $g(x)=f\left(4-\sqrt{4-x^2}\right)=f(u), u=4-\sqrt{4-x^2}$, với $x\in[-2;2]$

Sử dụng phương pháp ghép trục:



Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét đấu đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x)=f\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)$ nghịch biến trên:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

A. $(5;6)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;5)$.

Lời giải

Đặt: $g(x)=f\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)=f(u)$ với $u=-1+\sqrt{7+6x-x^2}$ và $x\in[-2;2]$

Sử dụng phương pháp ghép trục:

x	-1	$3-\sqrt{7}$	3	$3+\sqrt{7}$	7
u	-1	2	3	2	4
$f(u)$					

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-1;3-\sqrt{7}\right)$ và $\left(3;3+\sqrt{7}\right)$.

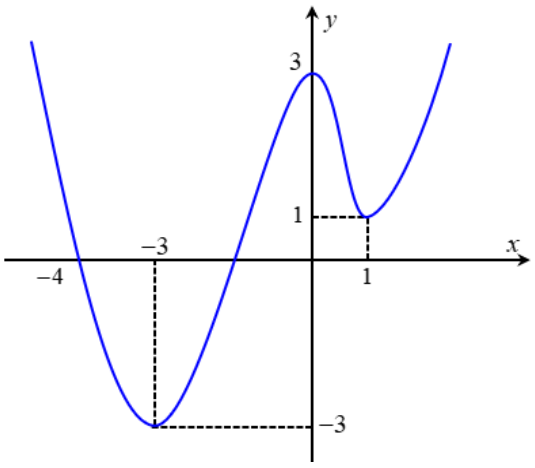
Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(-2)=7$ và có bảng biến thiên như dưới đây

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|x^2-1\right|-2\right)=m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt?

A. 9. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 6.

Câu 2: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|x+3\right|(x-1)\right)=\log m$ có ít nhất năm nghiệm phân biệt?

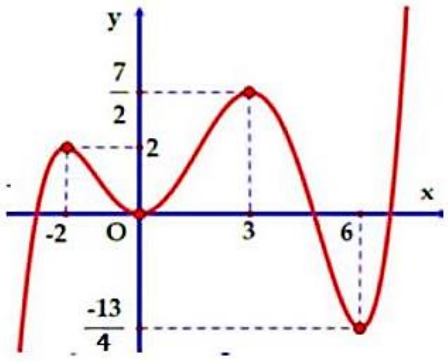


A. 990. **B.** 991. **C.** 989. **D.** 913.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)=x^3+ax^2+bx-3, a, b$ là các tham số thực thỏa mãn $\begin{cases} a+b-2>0 \\ 24+3(3a+b)<0 \end{cases}$. Hỏi phương trình $2.f(x).f''(x)=\left[f'(x)\right]^2$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

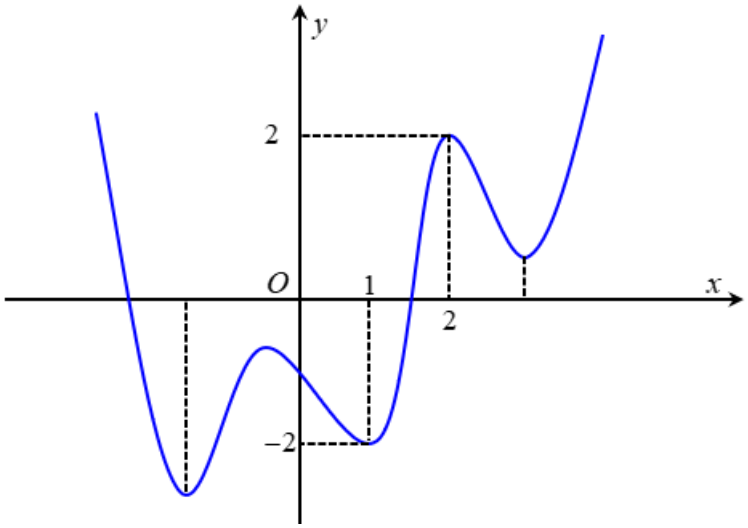
Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(2x^3-6x+2\right)\right|=2$ là

A. 15. **B.** 14. **C.** 12. **D.** 13.

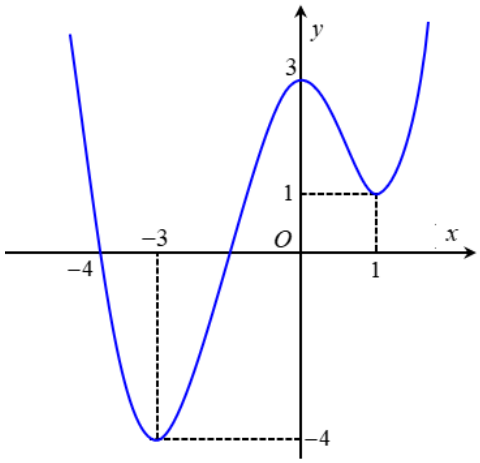
Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$,có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[-10;10]$ để hàm số $g(x)=f\left(\frac{x^3+1}{2}\right)-(2m-1)(x^4+2x^2+2019)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

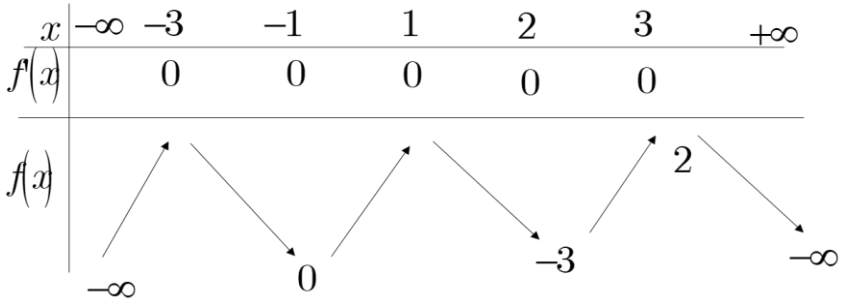
A. 8. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 10.

Câu 6: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|x+3\right|\left(x-1\right)\right)=\log m$ có ít nhất năm nghiệm phân biệt ?



A. 990. **B.** 991. **C.** 989. **D.** 913.

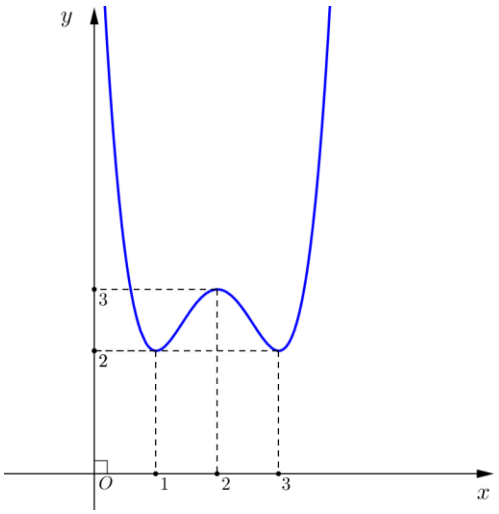
Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau



Số điểm cực đại của hàm số $g(x)=\left|f\left(\left|x^2-8x+7\right|+x^2-3\right)\right|$ là

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-2\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right]$ của phương trình $2f(\sin x+2)-5=0$ là



A. 11. **B.** 15. **C.** 7. **D.** 9.

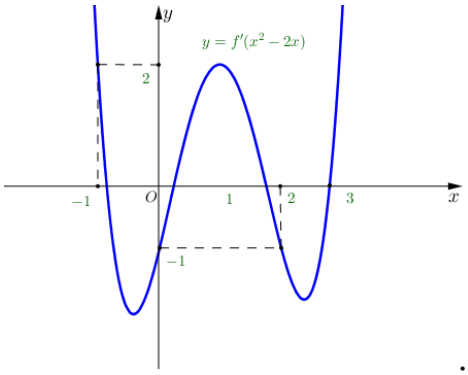
Câu 9: Cho hàm số $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$, biết $f(1)=\dfrac{-1}{2}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x)=\left|2f(x)-x^2+2x\right|$ đồng biến trên khoảng

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Câu 10: Cho hàm số bậc bốn $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$, biết $f(1)=-\dfrac{1}{2}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x)=\left|2f(x)-x^2+2x\right|$ đồng biến trên khoảng

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x^2-2x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y=f(x^2-1)+\dfrac{2}{3}x^3+1$ đồng biến trên khoảng nào?

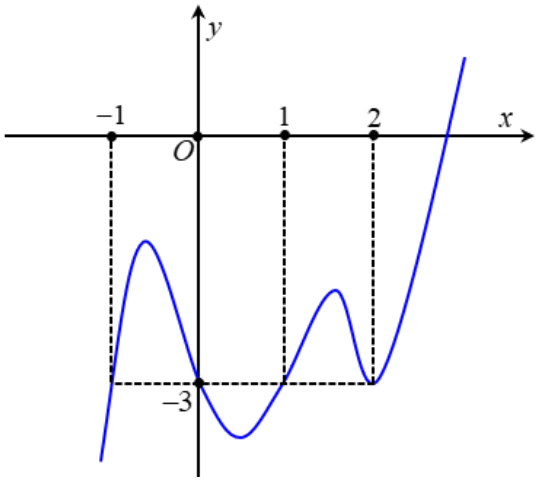


A. $(-3;-2)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(-1;0)$.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trơn (không bị gãy khúc), tham khảo hình vẽ bên. Gọi hàm số $g(x)=f[f(x)]$. Hỏi phương trình $g'(x)=0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

A. 14. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 8.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0)<0$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ dưới đây.



Hàm số $g(x)=\left|f\left(|x|\right)+3|x|\right|$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{9^x}{9^x+3}$. Tìm m để phương trình $f\left(3m+\dfrac{1}{4}\sin x\right)+f(\cos^2 x)=1$ có đúng 8 nghiệm phân biệt thuộc $[0;3\pi]$

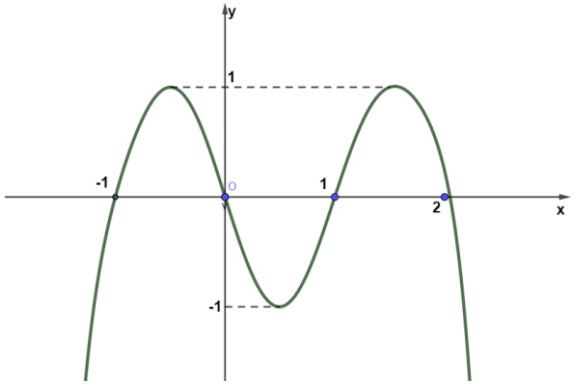
Câu 15: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	0	↗	2	↘	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{9\pi}{2}\right]$ phương trình $f\left(f\left(\cos x\right)\right)=2$ là

A. 9. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ với $a\neq 0$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $\left|f\left(f\left(x\right)\right)\right|=\log_2 m$ (với m là tham số thực dương), có tối đa bao nhiêu nghiệm?

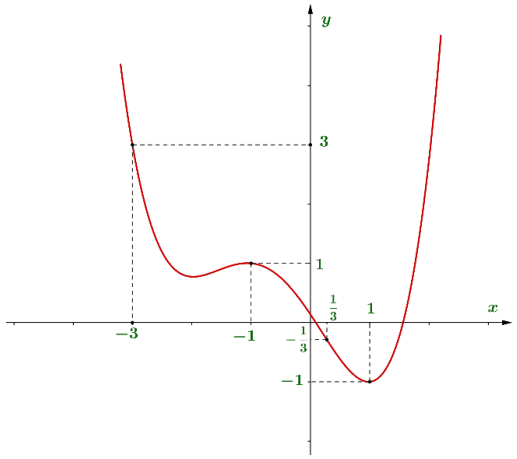


A. 18. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình dưới. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f\left(2x^3-6x+2\right)=2m-1$ có 6 nghiệm phân biện thuộc đoạn $[-1;2]$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x)=2f\left(\frac{5\sin x-1}{2}\right)+\frac{(5\sin x-1)^2}{4}+3$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0;2\pi)$?



A. 9. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 8.

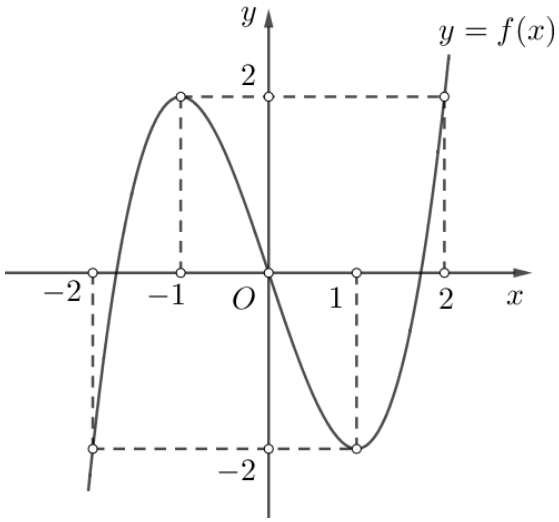
Câu 19: Cho $f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0)=0$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$ ↗	-1 ↘	$\frac{-61}{3}$ ↗	$+\infty$

Hàm số $g(x)=\left|f\left(x^3\right)-3x\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị

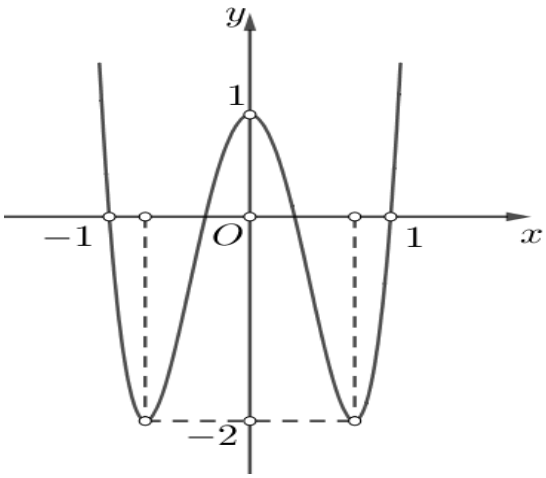
A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3

Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(f(x)\right)=x$ là



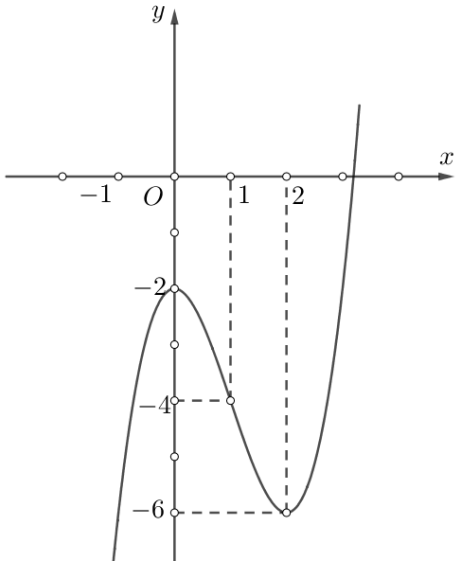
A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ bậc bốn có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)$, biết $g'(x)=x^2\left[f\left(x^2-1\right)\right]^3$.



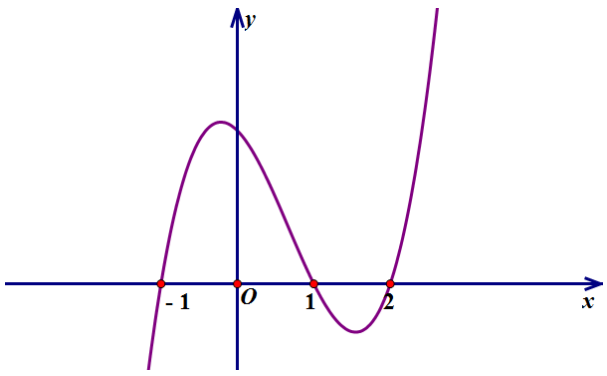
A. 5. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 10.

Câu 22: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-20;20]$ để hàm số $g(x)=\left|f\left(1-|x|\right)+m\right|$ có 5 điểm cực trị?



A. 14. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 17.

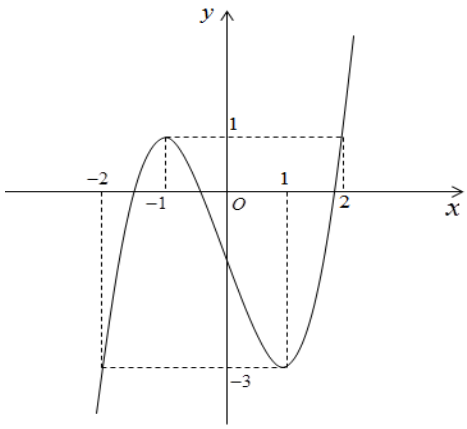
Câu 23: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Hàm số $g(x)=f\left(|x|+\left|x^2-1\right|\right)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 7.

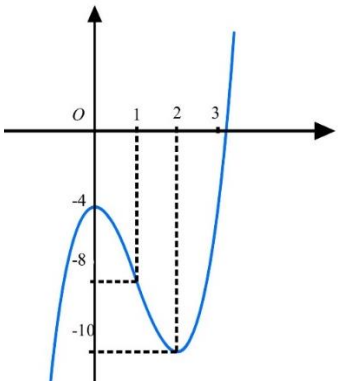
Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên dưới.



Số giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $f(2\sin x)=f(m)$ có 5 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{3\pi}{2}\right]$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 25: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-20;20]$ để hàm số $g(x)=\left|f\left(1-|x|\right)+m\right|$ có 5 điểm cực trị.



A. 14. **B.** 13. **C.** 11. **D.** 12.

Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3x$. Số điểm cực tiểu của hàm số $f\left(\sin 3x-\dfrac{3}{2}(\sin x+\sqrt{3}\cos x)\right)$ trên $\left[-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{13\pi}{6}\right]$ là?

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 8

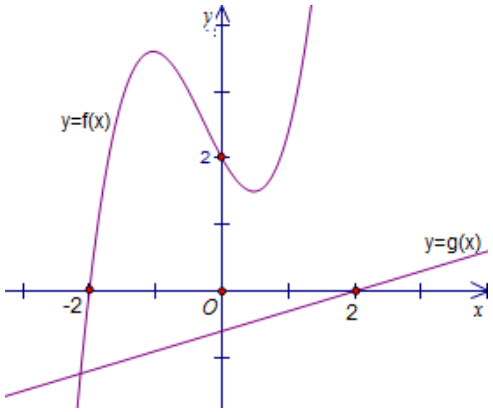
Câu 27: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(-2)=7$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|x^2-1\right|-2\right)=m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt?

A. 9. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 6

Câu 28: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ và hàm số bậc nhất $y=g(x)$ có đồ thị như hình dưới đây



Hàm số $h(x)=\int_0^{f(x)} g(t)\,dt$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-3;-2)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(1;3)$.

BẢNG ĐÁP ÁN

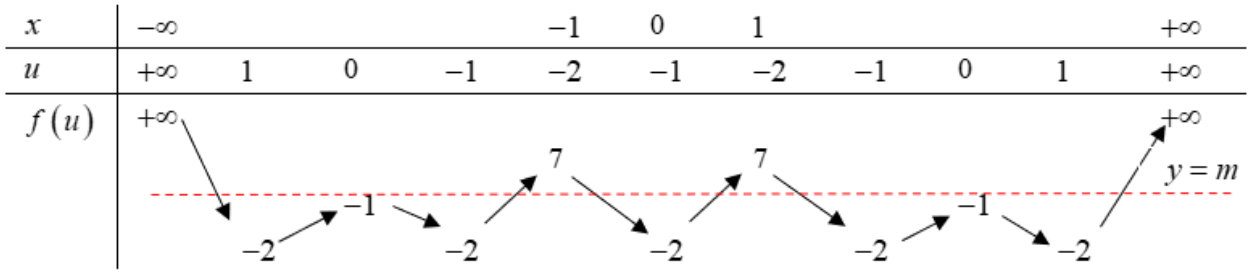
1.C	2.B	3.A	4.B	5.C	6.B	7.B	8.C	9.C	10.C
11.C	12.C	13.D	14	15.A	16.A	17.D	18.D	19.D	20.D
21.B	22.D	23.A	24.A	25.B	26.A	27.C	28.A		

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Đặt $u=\left|x^2-1\right|-2\Rightarrow u'=\dfrac{2x\left(x^2-1\right)}{\left|x^2-1\right|}$ với $x\neq\pm1$.

Ta có: $u'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-1\end{array}\right.$.

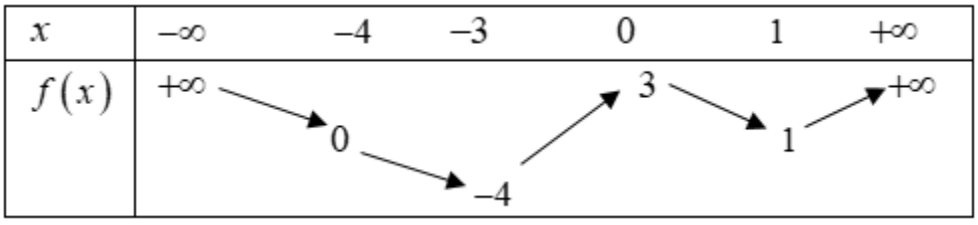
Ghép trục ta được:



Để phương trình $f\left(\left|x^2-1\right|-2\right)=m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt thì $-1<m<7$.

Suy ra $m\in\{0;1;2;3;4;5;6\}$.

Câu 2: Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$



Đặt $u=\left|x+3\right|(x-1)=\sqrt{(x+3)^2}.(x-1)$

$\Rightarrow u'=\dfrac{x+3}{\sqrt{(x+3)^2}}.(x-1)+\sqrt{(x+3)^2}=\dfrac{(x+3)(2x+2)}{\sqrt{(x+3)^2}}$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $u=u(x)$

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
u'		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
u	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

Ghép trục ta được:

x	$-\infty$		-3		-1				$+\infty$
u	$-\infty$	-3	0	-3	-4	-3	0	1	$+\infty$
$f(u)$	$+\infty$ ↘	-4 ↗	3 ↘	-4 ↗	0 ↘	-4 ↗	3 ↘	1 ↗	$+\infty$

$f(u)=\log m$ có ít nhất 5 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4<\log m\le 0 \\ 1\le \log m<3 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 10^{-4}<m\le 1 \\ 10\le m<10^{3} \end{array}\right.$ và $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{1;10;11;...;999\}$.

Câu 3: Ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \\ f(1)=a+b-2>0 \\ f(3)=9a+3b+24=24+3(3a+b)<0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \end{cases}$

Suy ra $f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt $x_1<1<x_2<3<x_3$.

Mặt khác: $2.f(x).f''(x)=\left[f'(x)\right]^2\Leftrightarrow 2.f(x).f''(x)-\left[f'(x)\right]^2=0$

Xét $g(x)=2.f(x).f''(x)-\left[f'(x)\right]^2$

$\Rightarrow g'(x)=2.f'(x).f''(x)+2f(x).f'''(x)-2f'(x).f''(x)=2f(x).f'''(x)=12f(x).$

Khi đó $g'(x)=0\Leftrightarrow 12f(x)=0\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1\in(-\infty;1) \\ x=x_2\in(1;3) \\ x=x_3\in(3;+\infty) \end{array}\right.$.

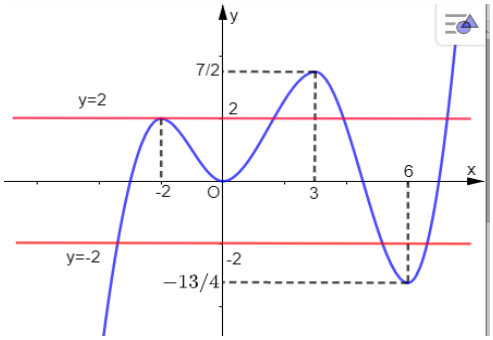
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$g(x_1)$	↗	$g(x_2)$	↘	$g(x_3)$	↗	$+\infty$

$y=0$

Do $g(x_2)=2.f(x_2).f''(x_2)-\left[f'(x_2)\right]^2=-\left[f'(x_2)\right]^2<0$ nên $g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt.

Câu 4:



Ta có: $\left|f\left(2x^3-6x+2\right)\right|=2\Leftrightarrow\begin{cases}f\left(2x^3-6x+2\right)=2 & khi\ f\left(2x^3-6x+2\right)\ge 0\\ f\left(2x^3-6x+2\right)=-2 & khi\ f\left(2x^3-6x+2\right)<0\end{cases}$

Theo đồ thị: $f(-2)=2\ (1)$

$f(a)=2\ (0<a<3)\ (2)$

$f(b)=2\ (3<b<6)\ (3)$

$f(c)=2\ (c>6)\ (4)$

Với (1) thì $2x^3-6x+2=-2\Leftrightarrow 2x^3-6x+4=0\Leftrightarrow x=-2;x=1$ (2 nghiệm).

Với (2) thì $2x^3-6x+2=a\Leftrightarrow 2x^3-6x+2-a=0$ (3 nghiệm).

Với (3) thì $2x^3-6x+2=b\Leftrightarrow 2x^3-6x+2-b=0$ (3 nghiệm).

Với (4) thì $2x^3-6x+2=c$ (1 nghiệm).

Vậy $f\left(2x^3-6x+2\right)=2$ có 2+3+3+1 = 9 nghiệm.

Với $f\left(2x^3-6x+2\right)=-2$ thì có 3 trường hợp là $f(d)=-2$ với $d<-2$; $f(e)=-2$ với $3<e<6$ và $f(f)=-2$ với $f>6$.

Với $d<-2$ thì $2x^3-6x+2=d$ có 1 nghiệm.

Với $3<e<6$ thì $2x^3-6x+2=e$ có 3 nghiệm.

Với $f>6$ thì $2x^3-6x+2=f$ có 1 nghiệm.

Trường hợp $f\left(2x^3-6x+2\right)=-2$ có 1+3+1 = 5 nghiệm.

Vậy tổng cộng $\left|f\left(2x^3-6x+2\right)\right|=2$ có 9 + 5 = 14 nghiệm.

Câu 5: **Chọn C**

Ta có $g'(x)=\frac{3}{2}x^2 f'\left(\frac{x^3+1}{2}\right)-(2m-1)(4x^3+4x)$.

Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x)\ge 0,\forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 f'\left(\frac{x^3+1}{2}\right)-(2m-1)(4x^3+4x)\ge 0,\forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow 2m-1\le \frac{3x}{8x^2+8}.f'\left(\frac{x^3+1}{2}\right),\forall x\in(0;+\infty)$

Với $x>0$ thì $\frac{x^3+1}{2}>0\Rightarrow f'\left(\frac{x^3+1}{2}\right)\ge -2.$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{x^3+1}{2}=1\Leftrightarrow x=1.$ Mặt khác, $0<\frac{3x}{8x^2+8}=\frac{3}{8(x+\frac{1}{x})}\le\frac{3}{16}$

Suy ra $\frac{3x}{8x^2+8}.f'\left(\frac{x^3+1}{2}\right)\ge(-2).\frac{3}{16}\Leftrightarrow\frac{3x}{8x^2+8}.f'\left(\frac{x^3+1}{2}\right)\ge\frac{-3}{8}.$

Đẳng thức xảy ra khi $x=1$. Như vậy: $2m-1\le\frac{-3}{8}\Leftrightarrow m\le\frac{5}{16}.$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in[-10;10]$ nên $m\in\{-10;-9;-8;...-1;0\}$. Có 11 giá trị.

Câu 6: Đặt $u(x)=|x+3|(x-1)=\sqrt{(x+3)^2}(x-1)$

$u'(x)=\frac{(x+3)(x-1)}{\sqrt{(x+3)^2}}+\sqrt{(x+3)^2}=\frac{(x+3)(x-1)+(x+3)^2}{\sqrt{(x+3)^2}}=\frac{(x+3)(2x+2)}{\sqrt{(x+3)^2}}$

$u'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=-1\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-1				$+\infty$
$u(x)$	$-\infty$	-3	0	-3	-4	-3	0	1	$+\infty$
$f(u(x))$	$+\infty$	-4	3	-4	0	-4	3	1	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy, phương trình đã cho có ít nhất năm nghiệm khi :

$\left[\begin{array}{l}-4<\log m\le 0\\1\le\log m<3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}10^{-4}<m\le 1\\10\le m<10^3\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=10,11,12,....,999\end{array}\right.$

Vậy có 991 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 7: Xét hàm số $y=|x^2-8x+7|+x^2-3$

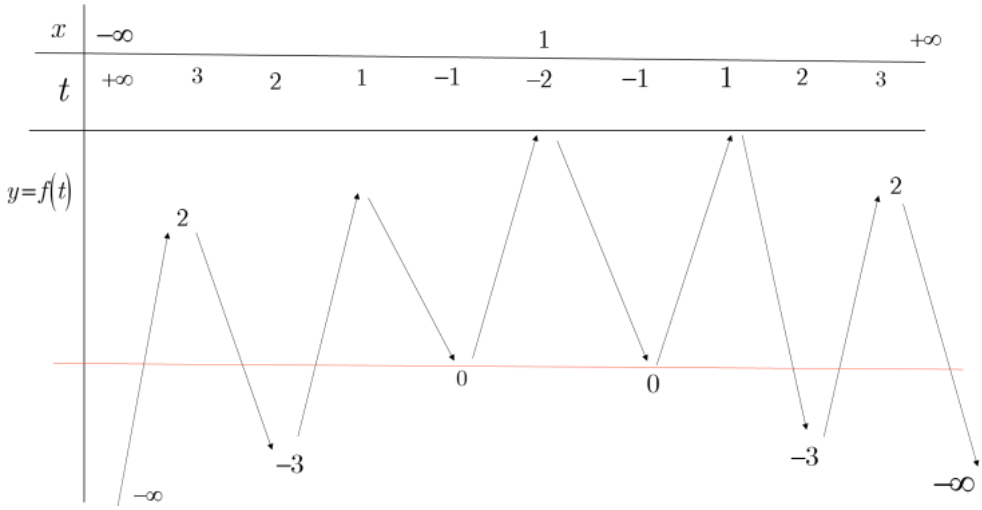
Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

Ta có $y=|x^2-8x+7|+x^2-3=\begin{cases}2x^2-8x+4, & x\le 1\vee x\ge 7\\8x-10, & 1<x<7\end{cases}$

$$y'=\begin{cases}4x-8, & x<1\vee x>7\\ 8 \quad , & 1<x<7\end{cases}$$

x	$-\infty$		1		7		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	‖	$+$	

Đặt $t=\left|x^2-8x+7\right|+x^2-3$. Khi đó bảng biến thiên của hàm số $y=f(t)$ là



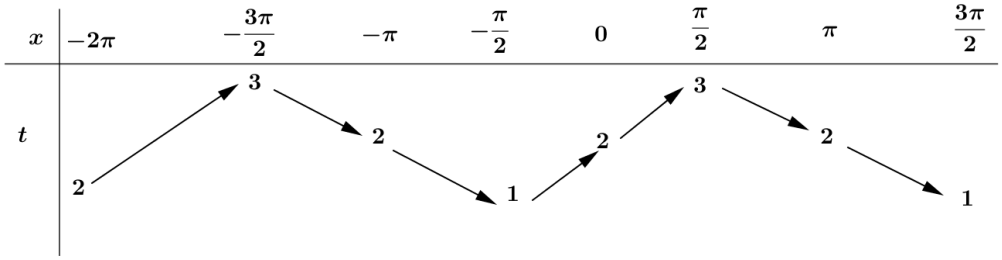
Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số $y=\left|f(t)\right|$ cho có 7 điểm cực đại.

Câu 8: Đặt $t=\sin x+2, 1\le t\le 3$

Phương trình $2f(\sin x+2)-5=0$ trở thành:

$$f(t)=\frac{5}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}t=t_1\in(0;1)\to PTVN\\ t=t_2\in(1;2)\\ t=t_3\in(2;3)\\ t=t_4\in(3;4)\to PTVN\end{cases}$$

BBT:



Dựa vào bảng biến thiên ta có:

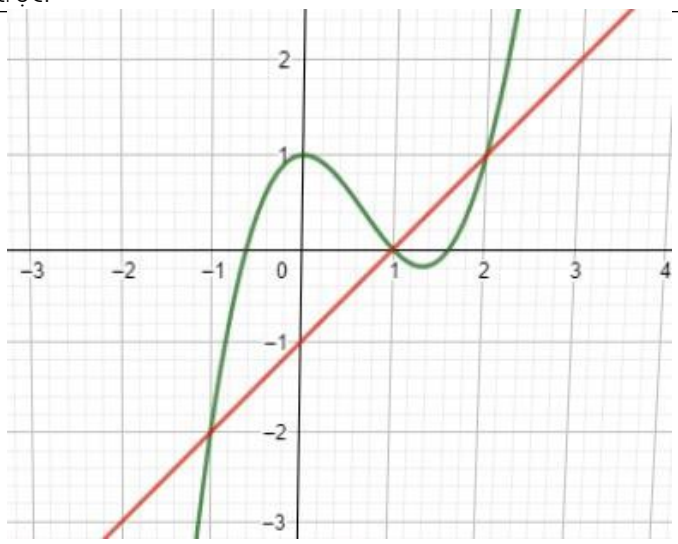
+. $t=t_2$ có 3 nghiệm phân biệt x thuộc $\left[-2\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$

+. $t=t_3$ có 4 nghiệm phân biệt x thuộc $\left[-2\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$

Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm phân biệt.

Câu 9: Xét hàm số $h(x)=2f(x)-x^2+2x\Rightarrow h'(x)=2f'(x)-2x+2$

$h'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=x-1$ (1)



Vẽ đường thẳng $y=x-1$. Từ đồ thị hàm số ta thấy đường thẳng $y=x-1$ cắt đồ thị hàm số $y=f'(x)$ tại ba điểm. Khi đó phương trình $(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=2\end{array}\right.$

$h(1)=2f(1)-x^2+2x=0$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘		↗		↘		↗	

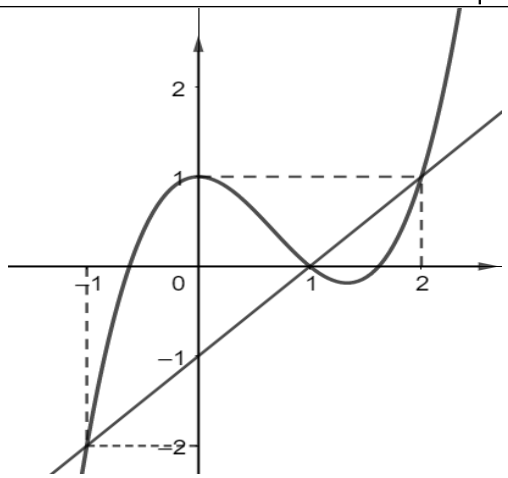
Khi đó ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)=\left|h(x)\right|$

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$h(x)$	↘	0	↗	↘	0	↗	↘	0	↗

Câu 10: Xét $h(x)=2f(x)-x^2+2x$

$\Rightarrow h'(x)=2f'(x)-2x+2$

$h'(x)=0\Leftrightarrow 2f'(x)-2x+2=0\Leftrightarrow f'(x)=x-1$



Dựa vào đồ thị ta thấy, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = x-1$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ là $x=-1; x=1; x=2$

Do đó phương trình $f'(x) = x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$h'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$h(x)$		↘	$h(-1)$	↗	0	↘	$h(2)$	↗	

Bảng biến thiên của hàm số $g(x) = \left|h(x)\right|$

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$h'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$h(x)$		↘	$h(-1)$	↗	0	↘	$h(2)$	↗	
$g(x)$		↘		↗	0	↘		↗	

Vậy hàm số $g(x) = \left|2f(x) - x^2 + 2x\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

Câu 11: Xét hàm số $g\ x\ = f\ x^2-1\ + \frac{2}{3}x^3+1$

Ta có: $g'\ x\ = 2x.f'\ x^2-1\ + 2x^2 = 2x\left[f'\ x^2-1\ + x\right]$

$g'\ x\ = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'\ x^2-1\ = -x\ \ 1 \end{array}\right.$

Xét 1 : Đặt $x = t-1$

Khi đó ta có: $f'\left(t^2-2t\right)=-t+1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=a\quad a\in(0;1)\\t=2\\t=b\quad b\in(2;3)\end{array}\right.$

$1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=a-1\quad a-1\in(-1;0)\\x=1\\x=b-1\quad b-1\in(1;2)\end{array}\right.$

Ta có:

x	$-\infty$		-2		$a-1$		0		1		$b-1$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu trên ta thấy hàm số $g\ x$ đồng biến trên khoảng $-2;-1$.

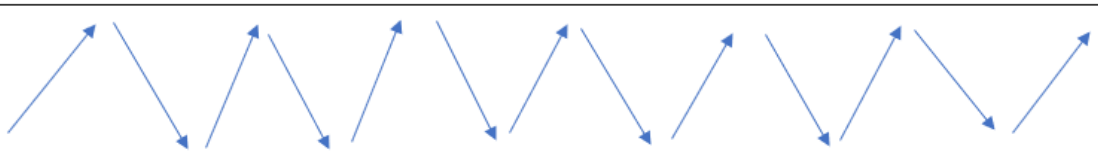
Câu 12: Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\in(-2;-1)\\x=0\\x=b\in(1;2)\\x=2\end{array}\right.$

Từ đồ thị ta có $f(a)=M, M>3$ và $f(b)=m, m\in(0;1)$.

Đặt $u=f(x)$, ta có hàm số $g(x)=f(u)$.

Số nghiệm phân biệt của phương trình $g'(x)=0$ chính là số cực trị của hàm số $g(x)=f(u)$.

Dựa vào đồ thi hàm số $y=f(x)$ ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$														$+\infty$
u	$-\infty$	a	0	b	2	M	2	b	0	m	0	b	2		$+\infty$
$f(u)$															

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $g(x)=f(u)$ có 12 cực trị.

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có 12 nghiệm phân biệt.

Câu 13: Đặt: $h(x)=f(x)+3x\Rightarrow h'(x)=f'(x)-(-3)$

Từ đồ thị hàm $y = f'(x)$ ta có BBT:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$h'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$h(x)$	Trục 0x	↘		↗	$h(0)$	↘	0	↗	

Số điểm cực trị dương của hàm $|h(x)|$ là 2.

Do đó số điểm cực tiểu của $g(x)$ là: $2.2+1=5$.

Câu 14: Ta có $f(x)+f(1-x)=\dfrac{9^x}{9^x+3}+\dfrac{9^{1-x}}{9^{1-x}+3}=\dfrac{9^x}{9^x+3}+\dfrac{3}{9^x+3}=1\ \forall x$

Do đó

$$f\left(3m+\frac{1}{4}\sin x\right)+f(\cos^2 x)=1$$

$$\Leftrightarrow 3m+\frac{1}{4}\sin x+\cos^2 x=1\Leftrightarrow 3m=\sin^2 x-\frac{1}{4}\sin x.$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{2}$		3π
$t=\sin x$	0	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{1}{8}$	-1	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{1}{8}$	0
$y=t^2-\frac{1}{4}t$	0	$\frac{-1}{64}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{-1}{64}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{-1}{64}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{-1}{64}$	0

y=3m

Kết luận: $\dfrac{-1}{64}<3m\le 0\Leftrightarrow \dfrac{-1}{192}<m\le 0$.

Câu 15: Đặt $u=\cos x, t=f(u)$

Phương trình trở thành: $f(t)=2$.

Ta có bảng biến thiên hàm số $y=f(t)$

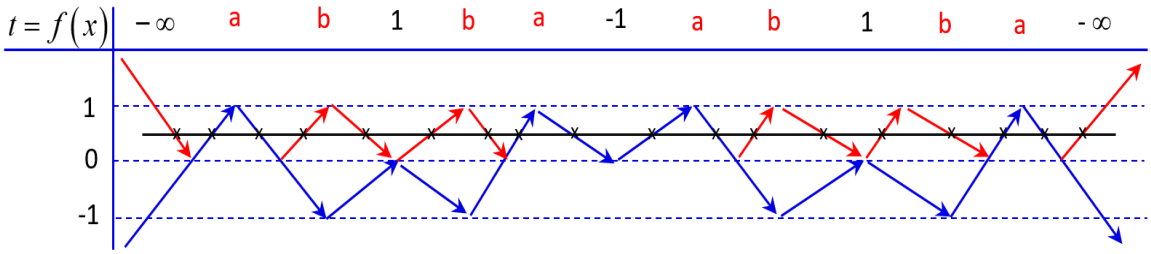
x	0		π		2π		3π		4π	$\frac{9\pi}{2}$
$u=\cos x$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0
$t=f(u)$	2 1 0	1 2	1 0	1 2	1 0	1 2	1 0	1 2	1 2	1 0
$y=f(t)$	2	0 2	0 2	0 2	0 2	0 2	0 2	0 2	0 2	0

Số nghiệm phương trình $f\left(f\left(\cos x\right)\right)=2$ bằng số giao điểm của đường thẳng $y=2$ và đồ thị hàm số $y=f(t)$, từ bảng biến thiên $\Rightarrow$phương trình $f(t)=2$ có 9 nghiệm.

Vậy phương trình $f\left(f\left(\cos x\right)\right)=2$ có 9 nghiệm.

Câu 16: Đặt $t=f\left(x\right)$

Phương trình trở thành: $\left|f\left(t\right)\right|=\log_2 m$



Số nghiệm phương trình $\left|f\left(f\left(x\right)\right)\right|=\log_2 m$ bằng số giao điểm của đường thẳng $y=\log_2 m$ và đồ thị hàm số $y=\left|f(t)\right|$, từ bảng biến thiên $\Rightarrow$phương trình có tối đa 18 nghiệm.

Câu 17: Đặt $t=2x^3-6x+2$

Khi đó $t'=6x^2-6$, $t'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$

x	$-\infty$		-1		1		2	$+\infty$
$t=2x^3-6x+2$	$-\infty$ -2 0 3		6	3	0	-2	0 3 6	$+\infty$
$y=f(2x^3-6x+2)$			$-\frac{13}{4}$	$\frac{7}{2}$ 0	2	0	$\frac{7}{2}$ $-\frac{13}{4}$	

$f\left(2x^3-6x+2\right)=2m-1$ có 6 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 0<2m-1<2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}<m<\frac{3}{2}$

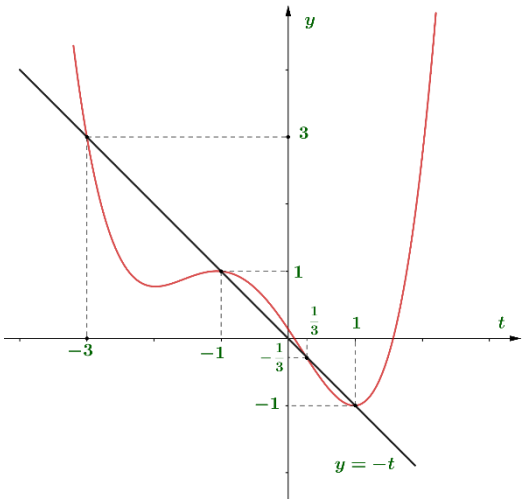
Lại có $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=1$. Vậy có duy nhất 1 số nguyên m thoả mãn bài toán.

Câu 18: Đặt $t=\frac{5\sin x-1}{2}$. Suy ra $g(t)=2f(t)+t^2+3$

Ta có $g'(t)=2f'(t)+2t=0\Leftrightarrow f'(t)=-t$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\pm 1 \\ t=\frac{1}{3} \\ t=-3 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:



t	$-\infty$		-3		-1		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$	$-\infty$	↗	$g(-3)$	↘	$g(-1)$	↗	$g\left(\frac{1}{3}\right)$	↘	$g(1)$	↗	$+\infty$

Suy ra:

x	0			$\frac{\pi}{2}$				$\frac{3\pi}{2}$			2π
t	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$	1	2	1	$\frac{1}{3}$	-1	-3	-1	$-\frac{1}{2}$
$g(t)$	$g\left(\frac{-1}{2}\right)$	↗	$g\left(\frac{1}{3}\right)$	↘ $g(1)$	↗ $g(2)$	↘ $g(1)$	↗ $g\left(\frac{1}{3}\right)$	↘ $g(-1)$	↗ $g(-3)$	↘ $g(-1)$	↗ $g\left(\frac{-1}{2}\right)$

Câu 19: Đặt $t=x^3\Rightarrow x=\sqrt[3]{t}$ .Ta có $h(x)=f\left(x^3\right)-3x\Rightarrow h(t)=f(t)-3\sqrt[3]{t}$

$$\Rightarrow h'(x)=f'(t)-\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}=0\Leftrightarrow t=a$$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra

$t=a\Rightarrow x=\sqrt[3]{a}$

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{a}$		$+\infty$
$h'(x)$		-		-	0	$+$	
$\lvert h(x)\rvert$	↘		0	↗		↘ ↗	

Suy ra hàm số $g(x)=|h(x)|$ có 3 cực trị

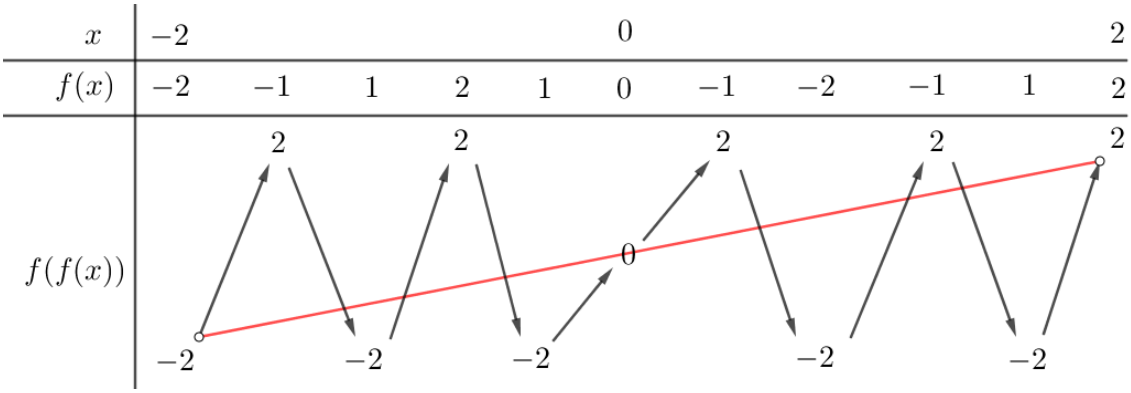
Câu 20: Xét phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=x\ \ (1)$

Nhận xét:

$x>2\Rightarrow f\left(x\right)>x>2\Rightarrow f\left(f\left(x\right)\right)>f\left(x\right)>x\Rightarrow (1)$ không có nghiệm $x>2$.

$x<-2\Rightarrow f\left(x\right)<x<-2\Rightarrow f\left(f\left(x\right)\right)<f\left(x\right)<x\Rightarrow (1)$ không có nghiệm $x<-2$.

Ta xét bảng biến thiên của $f\left(f\left(x\right)\right)$ với $-2\le x\le 2$ như sau:



Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=x$ có 9 nghiệm.

Câu 21: $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=0\\f\left(x^2-1\right)=0\end{array}\right.$. $x^2=0\Leftrightarrow x=0$ (nghiệm kép, loại).

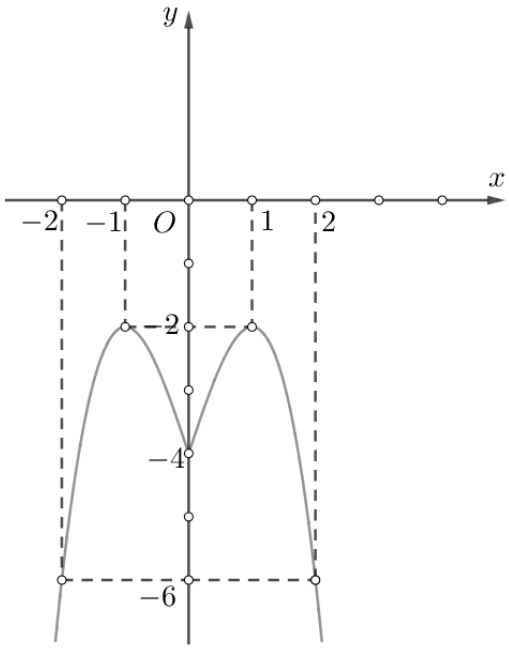
$f\left(x^2-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-1=-1\ (l)\\x^2-1=a\ (-1<a<0)\\x^2-1=b\ (0<b<1)\\x^2-1=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\sqrt{a+1}\\x=\pm\sqrt{b+1}\\x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$. Vậy $g\left(x\right)$ có 6 cực trị.

Câu 22: $f\left(x\right)$ có hai cực trị là $x=0,x=2\Rightarrow f'\left(x\right)=ax\left(x-2\right)\Rightarrow f\left(x\right)=\frac{a}{3}x^3-ax^2+C.$

$f\left(0\right)=-2,\ f\left(1\right)=-4\Rightarrow a=3,\ c=-2\Rightarrow f\left(x\right)=x^3-3x^2-2$.

$f\left(1-|x|\right)=\left\{\begin{array}{l}f\left(1-x\right),\text{ khi }x\ge 0\\f\left(1+x\right),\text{ khi }x<0\end{array}\right.\Rightarrow f\left(1-|x|\right)=\left\{\begin{array}{l}-x^3+3x-4,\text{ khi }x\ge 0\\x^3-3x-4,\quad\text{khi }x<0\end{array}\right.$.

Ta có đồ thị của $f\left(1-|x|\right)$ như sau:



Đặt $h(x)=f\left(1-|x|\right)+m$. Ta có $g(x)=|h(x)|$.

$g(x)$ có 5 cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $h(x)=0$ có 2 nghiệm đơn $\Leftrightarrow m\geq 4$.

Vậy có 17 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 23: Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực trị là $x=-1;\ x=1;\ x=2$.

Đặt $u(x)=|x|+|x^2-1|=\begin{cases}x^2+x-1, & x\geq 1\\ -x^2+x+1, & 0\leq x\leq 1\\ -x^2-x+1, & -1\leq x\leq 0\\ x^2-x-1, & x\leq -1\end{cases}$; $u'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên ghép trục

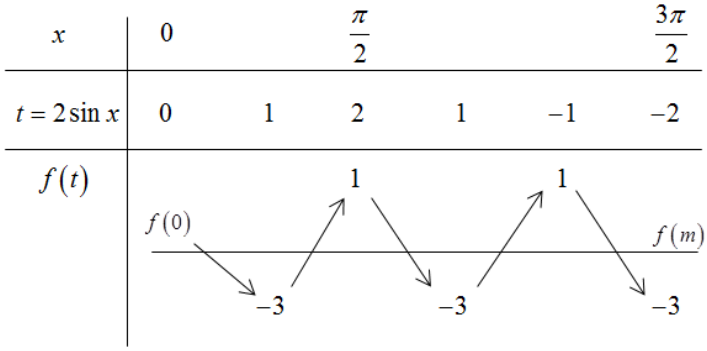
x	$-\infty$		-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1		$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$	(2)	1	$\frac{5}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	1	(2)	$+\infty$
$f(u(x))$									

Hàm số $g(x)=f\left(u(x)\right)$ có 3 điểm cực đại và 4 điểm cực tiểu.

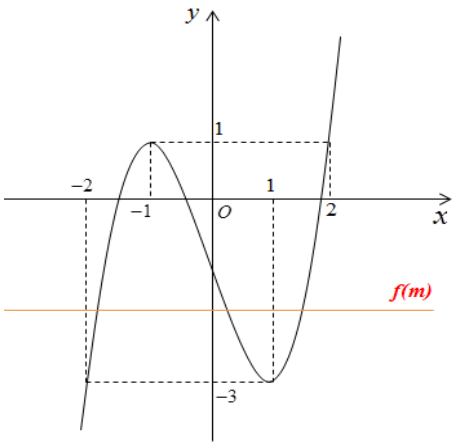
Câu 24: Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta thấy hàm số có các cực trị $x=-1;x=1$.

Đặt $t=2\sin x\Rightarrow t'=2\cos x$; $t'=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Ta có bảng ghép trục.



Phương trình $f\left(2\sin x\right)=f\left(m\right)$ có 5 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{3\pi}{2}\right]$ khi $-3<f\left(m\right)\le f\left(0\right).$

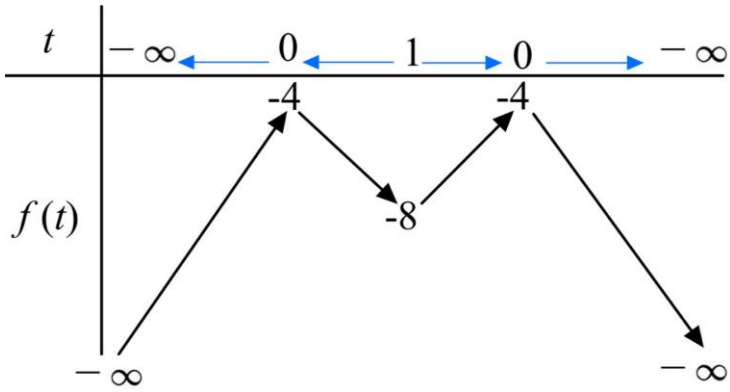


Từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ ta thấy

$-3<f\left(m\right)\le f\left(0\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=a\in\left(-2;-1\right)\\m=b\in\left[0;1\right)\\m=c\in\left(1;2\right)\end{array}\right.$. Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m=0.$

Câu 25: Đặt $t=1-\left|x\right|\Leftrightarrow f\left(1-\left|x\right|\right)=f\left(t\right)$

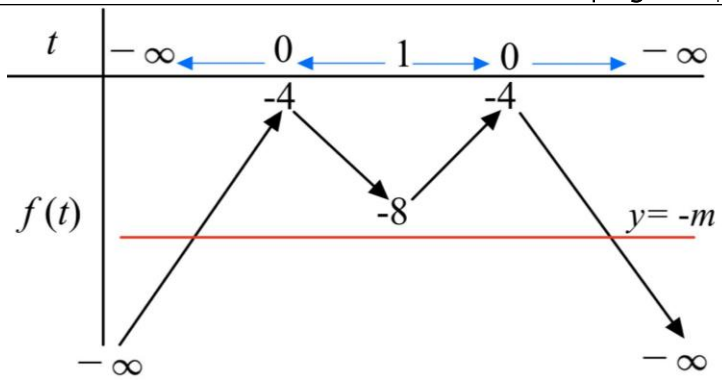
Bảng ghép trục:



Phương trình $g\left(x\right)$ trở thành $g\left(t\right)=\left|f\left(t\right)+m\right|$

YCBT trở thành: $f\left(t\right)+m=0$ có 2 nghiệm phân biệt

Để $f\left(t\right)+m=0$ có 2 nghiệm phân biệt thì: $-m\le-8\Leftrightarrow m\ge8\xrightarrow[m\in\left[-20;20\right]]{m\in\mathbb{Z}}$ có 13 giá trị m



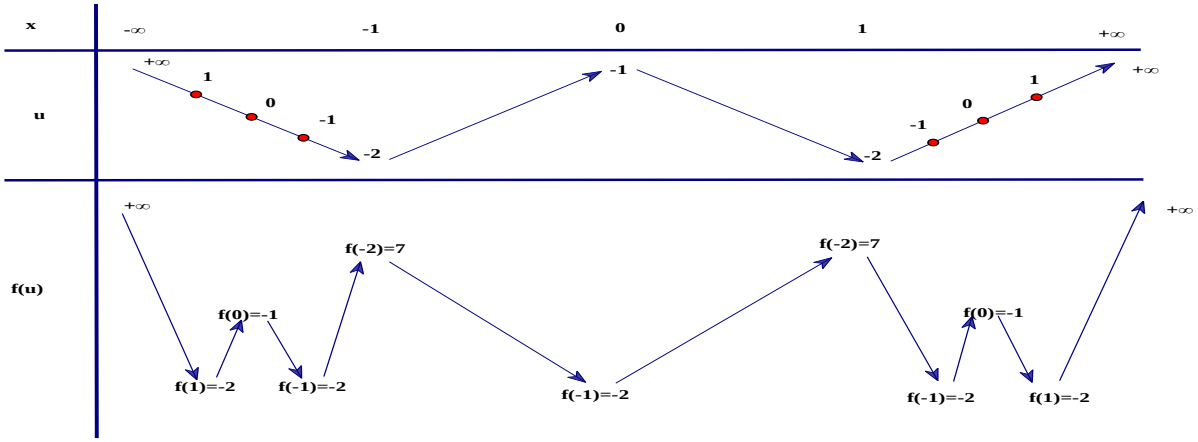
Câu 26: Ta có: $y = f\left[-\sin(3x+\pi)-3\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right] = f\left(4\sin^3\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-6\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]$

x	$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{6}$			$\frac{7\pi}{6}$					$\frac{13\pi}{6}$
$u=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
	1										
$t=4u^3-6u$	$-\frac{5}{2}$	$-2\sqrt{2}$	-2	$-2\sqrt{2}$	-1 1	$2\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$	1	-1	$-2\sqrt{2}$ -2
$y=f(t)$											

Vậy hàm số trên có 6 điểm cực tiểu.

Câu 27: Đặt $u = \left|x^2-1\right|-2 \Rightarrow u' = \frac{2x.\left(x^2-1\right)}{\left|x^2-1\right|}$

Ta có bảng biến thiên như sau



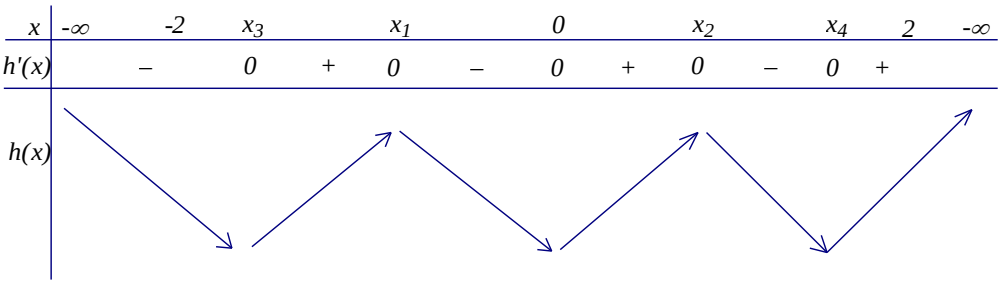
Từ bảng biến thiên để phương trình có đúng 6 nghiệm thực phân biệt khi $-1 < m < 7$

Suy ra $m \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$.

Câu 28: Đặt $g(x) = k.(x-2),\ k>0 \Rightarrow h(x) = \int_0^{f(x)} g(t)\,dt = k\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_0^{f(x)} = k\left(\frac{f^2(x)}{2}-2f(x)\right).$

$$\Rightarrow h'(x)=k.f'(x)\left(f(x)-2\right)\Rightarrow h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f(x)=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\in(-2;0)\\x=x_2\in(0;2)\\x=x_3\in(-2;x_1)\\x=x_4\in(x_2;2)\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên



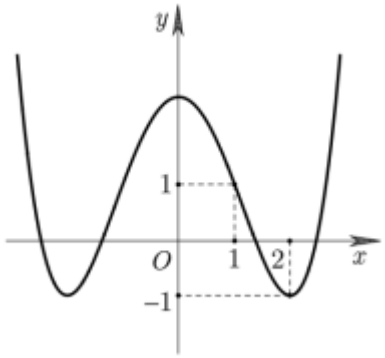
Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số *h(x)* nghịch biến trên khoảng $(-3;-2)$.

.
.

ĐỀ VDC SỐ 01 **Đề tổng hợp mức VD-VDC số 01**

I. PHẦN ĐỀ BÀI

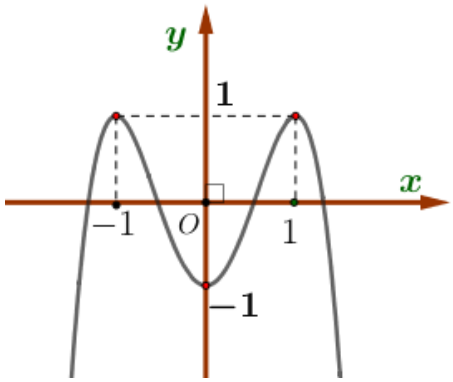
Câu 1: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$. Biết rằng hàm số $y=f'\left(1-x^2\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)+\dfrac{2}{x}$ là

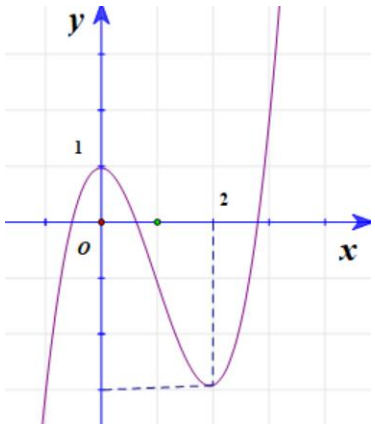
A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 7.

Câu 2: Hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(e^{f(x)}+f\left(x\right)\right)=1$ là:



A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 3: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $\left[-2021;2021\right]$ để hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|x^5+4x\right|+m\right)$ có ít nhất 5 điểm cực trị.



A. 2022. **B.** 2023. **C.** 2021. **D.** 1012.

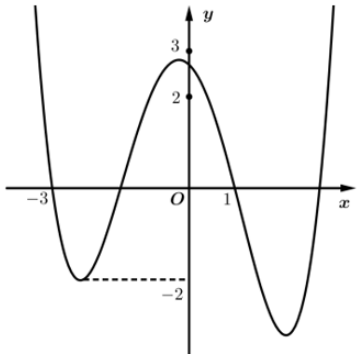
Câu 4: Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{2x-1}$ có đồ thị (C). Gọi Δ là tiếp tuyến thay đổi của đồ thị (C). Khoảng cách từ giao điểm hai đường tiệm cận của đồ thị (C) đến đường thẳng Δ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** 1. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=\left(x^2+9x\right)\left(x^2-9\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=g(x)=f\left(\left|x^3+3x\right|+2m-m^2\right)$ có không quá 6 điểm cực trị?

A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 7.

Câu 6: Cho hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Có bao nhiêu số nguyên a để phương trình $f\left(\left|x^2-4x\right|-3\right)=a$ có không ít hơn 10 nghiệm thực phân biệt?

A. 4. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 8.

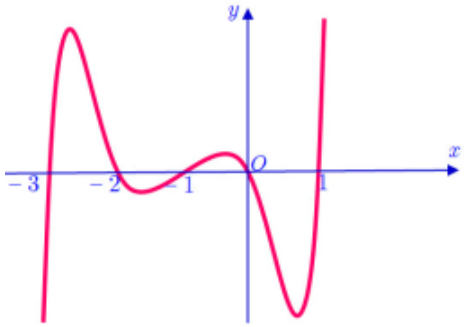
Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-1)^2(x-2)$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{3}x^3-x-2$ có đạo hàm trên đoạn $[-1;2]$ bằng

A. $f(2)-\dfrac{3}{4}$. **B.** $f(1)-\dfrac{8}{3}$. **C.** $f(0)-2$. **D.** $f(-1)-\dfrac{4}{3}$.

Câu 8: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $\sqrt[3]{m+3\sqrt[3]{m+3\log x}}=\log x$ có 3 nghiệm phân biệt?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 9: Cho hàm đa thức $y=\left[f\left(x^2+2x\right)\right]'$ có đồ thị cắt trục Ox tại 5 điểm phân biệt như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu giá trị của tham số m với $2022m\in\mathbb{Z}$ để hàm số $g(x)=f\left(x^2-2|x-1|-2x+m\right)$ có 9 điểm cực trị?



A. 2020. **B.** 2023. **C.** 2021. **D.** 2022.

Câu 10: Cho $f(x)=x^3-3x^2+1$. Phương trình $\sqrt{f(f(x)+1)+1}=f(x)+2$ có số nghiệm thực là

A. 7. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 9.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $6f\left(x^2-4x\right)=m$ có it nhất 3 nghiệm
thực phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$?

A. 29. **B.** 25. **C.** 24. **D.** 30.

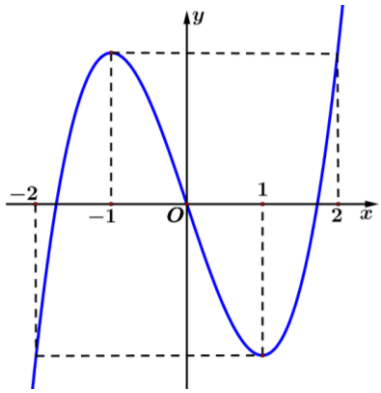
Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2\left(x^2-4x\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(2x^2-12x+m\right)$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 17. **B.** 16. **C.** 18. **D.** 19.

Câu 13: Cho các hàm số $y=f\left(x\right)$; $y=f\left(f\left(x\right)\right)$; $y=f\left(x^2+2x-1\right)$ có đồ thị lần lượt là $\left(C_1\right);\left(C_2\right);\left(C_3\right)$. Đường thẳng $x=2$ cắt $\left(C_1\right);\left(C_2\right);\left(C_3\right)$ lần lượt tại A,B,C. Biết rằng phương trình tiếp tuyến của $\left(C_1\right)$ tại A và của $\left(C_2\right)$ tại B lần lượt là $y=2x+3$ và $y=8x+5$. Phương trình tiếp tuyến của $\left(C_3\right)$ tại C là

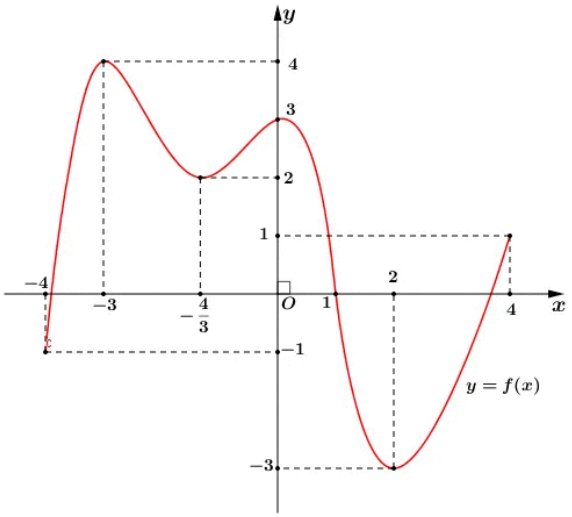
A. $y=8x-9$. **B.** $y=12x+3$. **C.** $y=24x-27$. **D.** $y=4x+1$.

Câu 14: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=\sqrt{4-f^2\left(x\right)}$ có bao nhiêu điểm cực trị?



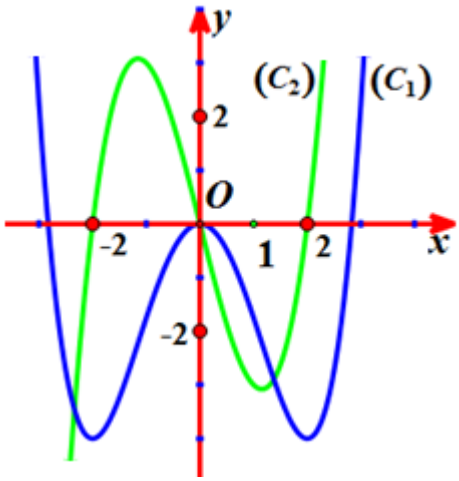
A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 15: Hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\left[-4;4\right]$, có các điểm cực trị trên $\left(-4;4\right)$ là $-3;-\frac{4}{3};0;2$ và có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g\left(x\right)=f\left(x^3+3x\right)+m$ với m là tham số. Gọi m_1 là giá trị của m để $\max\limits_{[0;1]}g\left(x\right)=2022$, m_2 là giá trị của m để $\min\limits_{[-1;0]}g\left(x\right)=2004$. Giá trị của m_1-m_2 bằng



A. 12. **B.** 13. **C.** 11. **D.** 14.

Câu 16: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị (C_1) và $y = f'(x)$ có đồ thị (C_2) như hình vẽ dưới.



Số điểm cực đại của đồ thị hàm số $g(x) = f\left[e^{-x} f(x)\right]$ trên khoảng $(-\infty;3)$ là

A. 5. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 17: Cho hàm số $f(x) = x^4 - 14x^3 + 36x^2 + (16-m)x$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 7 điểm cực trị?

A. 33. **B.** 31. **C.** 32. **D.** 34.

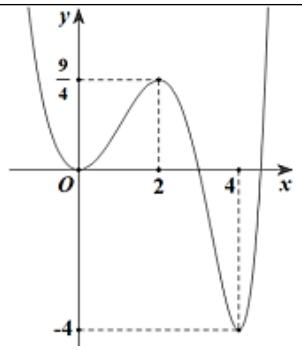
Câu 18: Cho hàm số $y = f(x) = 2022^x - 2022^{-x} + x + \sin x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(x+3) + f\left(x^3 - 4x + m\right) = 0$ có ba nghiệm phân biệt?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x) = \left(x^2-4\right)(x-5), \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x) = \left|f\left(x^2+1\right) - m\right|$ có nhiều điểm cực trị nhất?

A. 6. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 7.

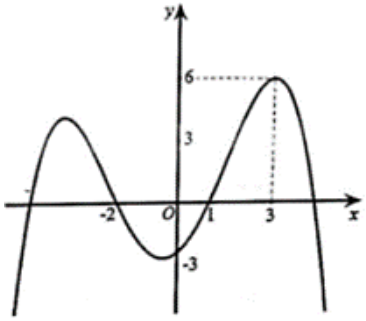
Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f(5-2x)$ như hình vẽ bên dưới:



Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m thuộc khoảng $(-9;9)$ thỏa mãn $2m \in \mathbb{Z}$ và hàm số $y = \left|2f\left(4x^3+1\right)+m-\frac{1}{2}\right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 26. **B.** 25. **C.** 27. **D.** 24.

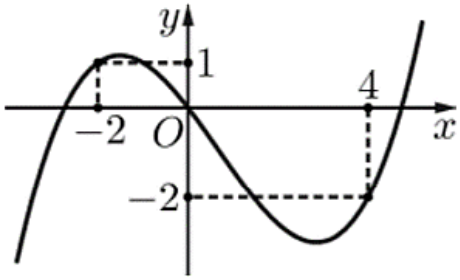
Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ:



Xét $T = 103f\left(a^2+a+1\right)+234f(af(b)+bf(a)),(a,b\in\mathbb{R})$. Biết T có giá trị lónn nhát bằng M đạt tại m cặp $(a;b)$, khi đó $\frac{M}{m}$ bằng

A. $\frac{1011}{4}$. **B.** $\frac{1011}{8}$. **C.** $\frac{337}{2}$. **D.** $\frac{674}{3}$.

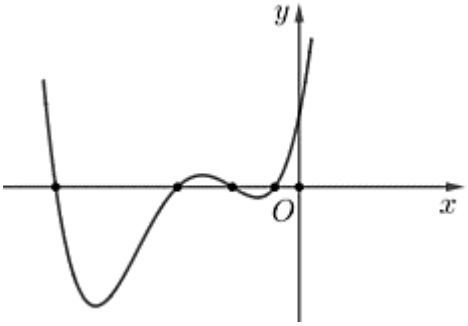
Câu 22: Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có đồ thị của đạo hàm như hình vẽ:



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = 4f\left(x^2-4\right)+x^4-8x^2$ là

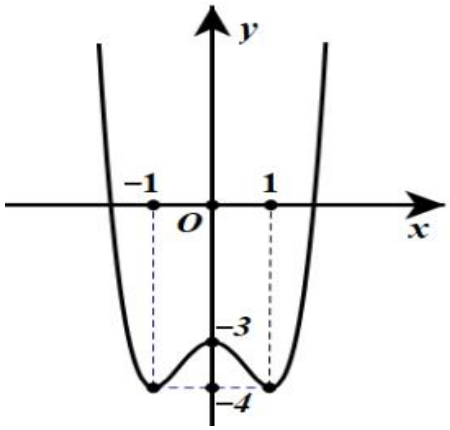
A. 4. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 23: Biết rằng $f(0)=0$. Hỏi hàm số $g(x) = \left|f\left(x^6\right)-x^3\right|$ có bao nhiêu điểm cực đại?



A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

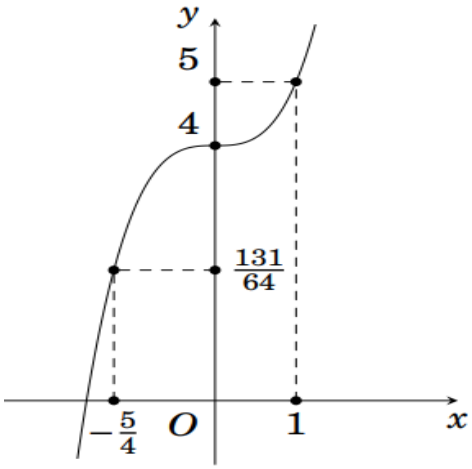
Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Đặt $g(x)=f\left(\sqrt{x^2-4x+6}\right)-2\left(x^2-4x\right)\sqrt{x^2-4x+6}-12\sqrt{x^2-4x+6}+1$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[1;4]$ bằng

A. $12-2\sqrt{4}$. **B.** $-12-12\sqrt{6}$. **C.** $-12-2\sqrt{4}$. **D.** $12-12\sqrt{6}$.

Câu 25: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có $f'(1)=3$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m và $m\in[-10;10]$ để phương trình $\ln\dfrac{f(x)}{3mx^2}+x[f(x)-3mx]=3mx^3-f(x)$ có hai nghiệm dương phân biệt?



A. 18. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 15.

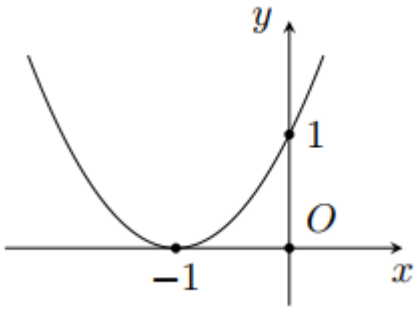
Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Tìm m để phương trình $\left|f(x-1)+2\right|=m$ có 4 nghiệm thỏa mãn $x_1<x_2<x_3<1<x_4$.

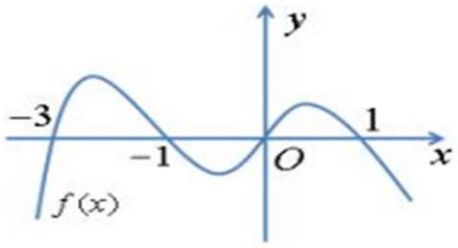
A. $4<m<6$. **B.** $3<m<6$. **C.** $2<m<6$. **D.** $2<m<4$.

Câu 27: Cho $f(x)$ là hàm số bậc ba. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(e^x-1\right)-x-m=0$ có hai nghiệm thực phân biệt?



A. $m < f(2)$. **B.** $m > f(0)$. **C.** $m < f(0)$. **D.** $m > f(2)$.

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị có 3 điểm cực trị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f\left(x^3 - 3x + 2\right)$ là

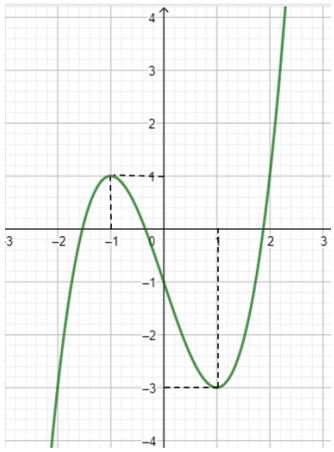
A. 5. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 7.

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn và có bảng biến thiên như hình bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = 2^{-\frac{1}{x^4}}\left[f(2x+1)\right]^3$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	3	↘	-2	↗	$+\infty$

A. 7. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(1-2\sin x\right)=m$ có đúng hai nghiệm trên $\left[0;\pi\right]$

A. -3. **B.** -2. **C.** 0. **D.** -6.

Câu 31: Biết rằng tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $m\left(x+4\right)\sqrt{x^2+2}=5x^2+8x+24$ có bốn nghiệm thực phân biệt là khoảng $\left(a;b\right)$. Giá trị $a+b$ bằng

A. $\frac{28}{3}$. **B.** $\frac{25}{3}$. **C.** 4. **D.** 9.

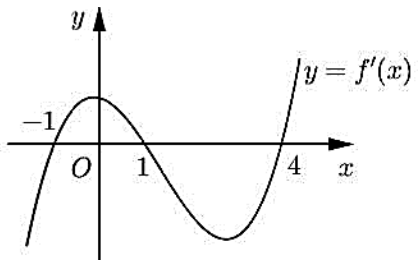
Câu 32: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	1	↗	2	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số $y=\left[f\left(x\right)\right]^3-3\left[f\left(x\right)\right]^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\infty;1\right)$. **B.** $\left(1;2\right)$. **C.** $\left(3;4\right)$. **D.** $\left(2;3\right)$.

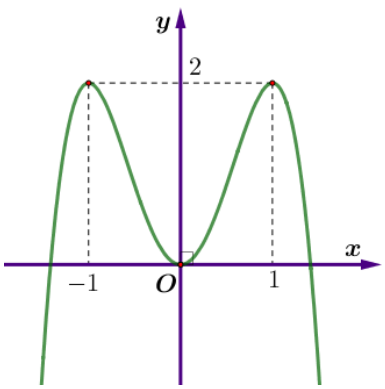
Câu 33: Cho hàm bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(\left|4-2x\right|+m-6\right)$ có đúng 3 điểm cực tiểu. Tổng các phần tử của S bằng

A. 18. **B.** 11. **C.** 2. **D.** 13.

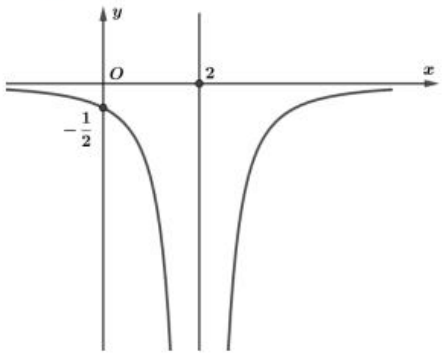
Câu 34: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $2\left|f\left(x-1-2\sqrt{x-1}\right)\right|=3$ là

A. 12. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 4.

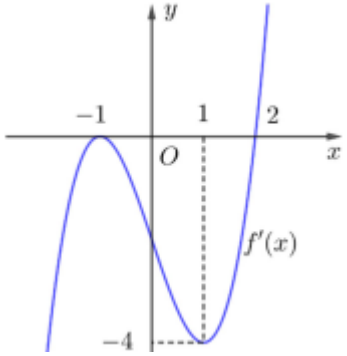
Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như trong hình vẽ sau:



Biết rằng đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua điểm $A(0;2)$. Giá trị $f(3)$ bằng

A. -2. **B.** -1. **C.** 3. **D.** 5.

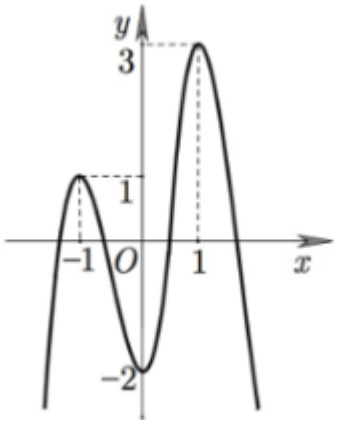
Câu 36: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(2x^2-4|x|+m-3\right)$ có 7 điểm cực trị.

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 37: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y=f(1-x)$ như hình vẽ bên:



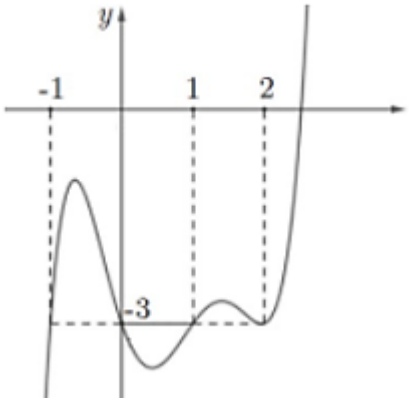
Số giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(\dfrac{1-x}{x+2}\right)-\dfrac{2x+1}{x+2}+m=0$ có 4 nghiệm phân biệt là

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 38: Cho hàm số bậc ba $f(x)$ và hàm số $g(x)=f(x+1)$ thoả mãn $(x-1)g'(x+3)=(x+1)g'(x+2)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(2x^2-4x+5\right)$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

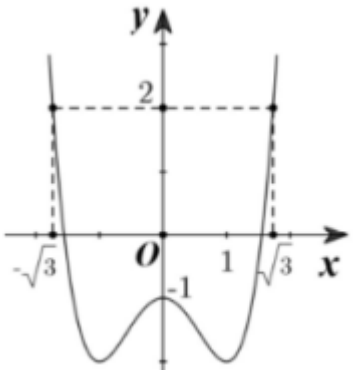
Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0)<0$, đồ thị của $f'(x)$ như hình vẽ:



Gọi m,n lần lượt là số điểm cực đại, số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=\left|f\left(|x|\right)+3|x|\right|$. Giá trị của m^n bằng

A. 4. **B.** 8. **C.** 27. **D.** 16.

Câu 40: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị của đạo hàm như hình vẽ:

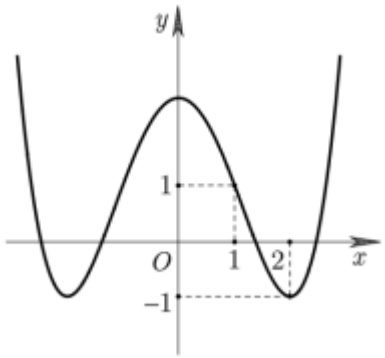


Giá trị lớn nhất của hàm số $h(x)=3f(x)-x^3+3x$ trên đoạn $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$ bằng

A. $3f(1)+2$. **B.** $3f(0)$. **C.** $3f(-\sqrt{3})$. **D.** $3f(\sqrt{3})$.

II. PHẦN HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$. Biết rằng hàm số $y=f'\left(1-x^2\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)+\frac{2}{x}$ là

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

$$g'(x)=\frac{2}{x^3}\cdot f'\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)-\frac{2}{x^2}=\frac{2}{x^2}\left[\frac{1}{x}\cdot f'\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)-1\right]$$

$$\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow \frac{1}{x}\cdot f'\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)-1=0\Rightarrow f'\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)=x\Leftrightarrow f'\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=x$$

Đặt ta được $f'\left(1-t^2\right)=\frac{1}{t}$.

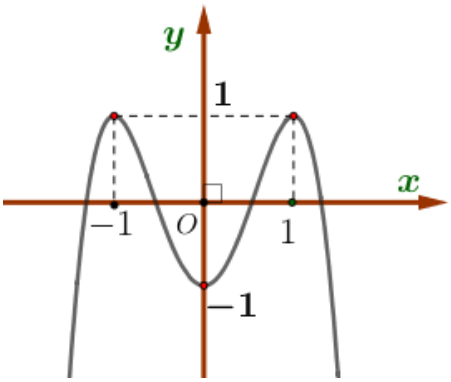
Xét hàm số $h(t)=\frac{1}{t}(t\neq 0)\Rightarrow h'(t)=-\frac{1}{t^2}<0,\forall t\neq 0$

Vẽ đồ thị hàm $h(t)=\frac{1}{t}$ trên cùng hệ trục toạ độ với hàm số $y=f'\left(1-t^2\right)$

Từ đồ thị suy ra $g'\left(x\right)=0$ có 5 nghiệm đơn.

Vậy hàm số $g\left(x\right)=f\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)+\frac{2}{x}$ có 5 điểm cực trị

Câu 2: Hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(e^{f(x)}+f\left(x\right)\right)=1$ là:



A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

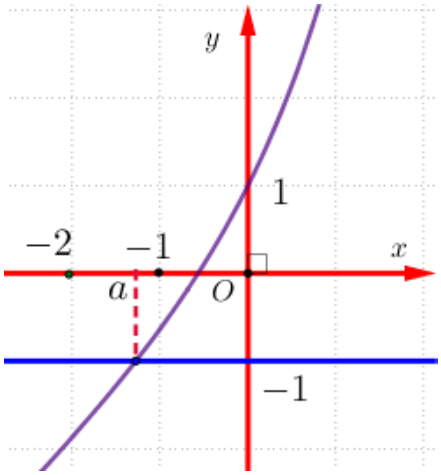
Chọn C

Dựa vào đồ thị hàm số ta có $f(x)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\end{array}\right.$

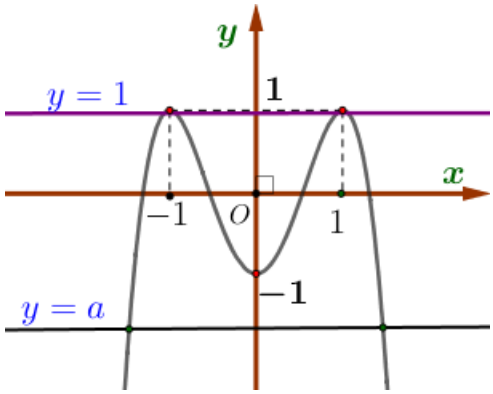
Đặt $f(x)=t$, khi đó ta có phương trình $f\left(e^{f(x)}+f(x)\right)=1$ trở thành $f\left(e^{t}+t\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}e^{t}+t=-1\\e^{t}+t=1\end{array}\right.$

Xét hàm số $g(t)=e^{t}+t$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên ta có phương trình $e^{t}+t=1$ có nghiệm duy nhất $t=0$.

Xét phương trình $e^{t}+t=-1$, dựa vào sự tương giao của đồ thị hàm số $g(t)=e^{t}+t$ và đường thẳng $y=-1$ ta có phương trình có nghiệm duy nhất $t=a\in(-2;-1)$.



Dựa vào sự tương giao của đồ thị ta có:

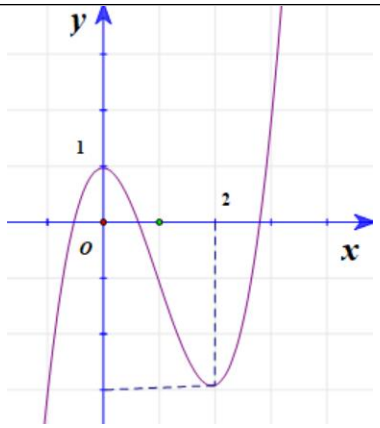


Với $t=0\Rightarrow f(x)=0$ nên phương trình có 2 nghiệm thì phương trình có 4 nghiệm.

Với $t=a\in(-2;-1)\Rightarrow f(x)=a\in(-2;-1)$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2021;2021]$ để hàm số $g(x)=f\left(\left|x^{5}+4x\right|+m\right)$ có ít nhất 5 điểm cực trị.



A. 2022. **B.** 2023. **C.** 2021. **D.** 1012.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = x^5 + 4x \Rightarrow y' = 5x^4 + 4 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó $y = x^5 + x$ là hàm số lẻ và đồng biến trên $\mathbb{R}$, $x^5 + 4x > 0 \Leftrightarrow x > 0; x^5 + 4x < 0 \Leftrightarrow x < 0$.

Vậy hàm số $g(x) = f\left(\left|x^5 + 4x\right| + m\right)$ là hàm số chẵn, có đồ thị nhận trục Oy là trục đối xứng.

Hàm số $g(x) = f\left(\left|x^5 + 4x\right| + m\right)$ có ít nhất 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow h(x) = f\left(x^5 + 4x + m\right)$ có ít nhất hai điểm cực trị dương.

Ta có $h'(x) = \left(5x^4 + 4\right) f'\left(x^5 + 4x + m\right) \Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^5 + 4x + m = 0 \\ x^5 + 4x + m = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^5 + 4x = -m \\ x^5 + 4x = 2 - m \end{array}\right.$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ tổng số giao điểm có hoành độ dương khác nhau của đồ thị hàm số $y = x^5 + 4x$ với hai đường thẳng $y = -m; y = 2 - m$ ít nhất là 2

$\Leftrightarrow \begin{cases} -m > 0 \\ 2 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0$.

Do m nguyên và thuộc đoạn $[-2021; 2021]$ nên có 2021 giá trị m thỏa mãn đề bài.

Câu 4: Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{2x-1}$ có đồ thị (C). Gọi Δ là tiếp tuyến thay đổi của đồ thị (C). Khoảng cách từ giao điểm hai đường tiệm cận của đồ thị (C) đến đường thẳng Δ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** 1. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Tọa độ giao điểm của hai đường tiệm cận là $I\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.

Gọi tọa độ tiếp điểm là $M\left(a; \dfrac{a-1}{2a-1}\right)$, $a \neq \dfrac{1}{2}$. Khi đó phương trình tiếp tuyến Δ với đồ thị hàm số tại điểm M là: $y = \dfrac{1}{(2a-1)^2}(x-a) + \dfrac{a-1}{2a-1} \Leftrightarrow x - (2a-1)^2 y + 2a^2 - 4a \,|\, +1 = 0$.

Khi đó: $d\left(I,\Delta\right)=\dfrac{\left|\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\left(2a-1\right)^2+2a^2-4a+1\right|}{\sqrt{1+\left(2a-1\right)^4}}=\dfrac{\left|-2a+1\right|}{\sqrt{1+\left(2a-1\right)^4}}\le\dfrac{\left|2a-1\right|}{\sqrt{2}\left|2a-1\right|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\left(2a-1\right)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2a-1=1\\2a-1=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\a=0\end{array}\right.$.

Vậy $\max d\left(I,\Delta\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=\left(x^2+9x\right)\left(x^2-9\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=g(x)=f\left(\left|x^3+3x\right|+2m-m^2\right)$ có không quá 6 điểm cực trị?

A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Do $g(-x)=f\left(\left|-x^3-3x\right|+2m-m^2\right)=f\left(\left|x^3+3x\right|+2m-m^2\right)=g(x)$ nên hàm số này là hàm số chẵn tức để hàm số $g(x)$ có không quá 6 điểm cực trị (cụ thể là tối đa 5 cực trị) thì hàm $h(x)=f\left(x^3+3x+2m-m^2\right)$ có tối đa 2 điểm cực trị dương.

Tức phương trình $h'(x)=\left(3x^2+3\right)f'\left(x^3+3x+2m-m^2\right)=0$ có tối đa 2 nghiệm bội lẻ dương.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3+3x+2m-m^2=0\\x^3+3x+2m-m^2=-9\\x^3+3x+2m-m^2=-3\\x^3+3x+2m-m^2=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3+3x=m^2-2m=y_3\\x^3+3x=m^2-2m-9=-y_1\\x^3+3x=m^2-2m-3=y_2\\x^3+3x=m^2-2m+3=y_4\end{array}\right.(*)$$

Như vậy để thỏa mãn đề bài thì bốn đường thẳng lần lượt là y_1,y_2,y_3,y_4 phải cắt đồ thị $y=x^3+3x$ tại tối đa hai nghiệm dương. Xét hàm số $y=x^3+3x$ có $y'=3x^2+3>0,\forall x\in\mathbb{R}$ và $y(0)=0$.

Nhận thấy $m^2-2m+3=(m-1)^2+2>0$ luôn đúng nên hệ $(*)$ có tối thiểu 1 nghiệm, từ đó ta có:

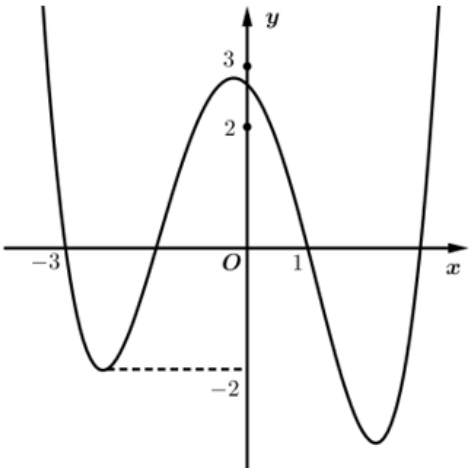
Trường hợp 1: $m^2-2m\le0\Leftrightarrow m\in[0;2]$ thì hệ $(*)$ có 1 nghiệm tức hàm số luôn có 3 điểm cực trị

Trường hợp 2: $m^2-2m>0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m<0\\m>2\end{array}\right.$ thì hệ $(*)$ đang có 2 nghiệm dương. Do hàm số có tối đa 5 điểm cực trị nên chỉ có tối đa 2 nghiệm dương tức ta có điều kiện đủ là: $\left\{\begin{array}{l}m^2-2m-9\le0\\m^2-2m-3\le0\end{array}\right.\Leftrightarrow m\in[-1;3]$

So với điều kiện ta suy ra $m\in\{-1;3\}$.

Từ hai trường hợp ta suy ra $m\in\{-1;0;1;2;3\}$ tức có 5 giá trị nguyên m thỏa.

Câu 6: Cho hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Có bao nhiêu số nguyên a để phương trình $f\left(\left|x^2-4x\right|-3\right)=a$ có không ít hơn 10 nghiệm thực phân biệt?

A. 4. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

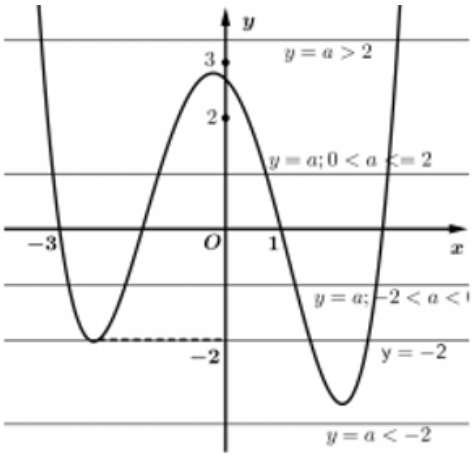
Đặtt $t=\left|x^2-4x\right|-3$; ta có $t'(x)=\dfrac{x^2-4x}{\left|x^2-4x\right|}\cdot(2x-4);t'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-4x=0\\2x-4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0;4\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$t'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
$t(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

Nhận thấy: - Với $t<-3$ thì vô nghiệm x.

- Với $t=-3$ thì có 2 nghiệm x.
- Với $t\in(-3;1)$ thì có 4 nghiệm x.
- Với $t=1$ thì có 3 nghiệm x.
- Với $t>1$ thì có 2 nghiệm x.



Khi đó ta có phương trình $f(t)=a$ (1). Từ đồ thị hàm số $f(x)$ ta có

+ Nếu $a<-2$ thì (1) có 2 nghiệm phân biệt $t>1$ hoặc vô nghiệm $\Rightarrow$ Phương trình đã cho có số nghiệm không lớn hơn 4.

+ Nếu $a=-2$ thì (1) có 3 nghiệm phân biệt trong đó 1 nghiệm $t\in(-3;0)$ và có 2 nghiệm

$t>1$. $\Rightarrow$ Phương trình đã cho có 8 nghiệm.

+ Nếu $a\in(-2;0)$ thì (1) có 4 nghiệm phân biệt trong đó có 2 nghiệm $t\in(-3;1)$ và 2 nghiệm $t>1\Rightarrow$ Phương trình đã cho có 12 nghiệm phân biệt.

+ Nếu $a=0$ thì (1) có 4 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm $t\in(-3;1)$ và 1 nghiệm $t>1$ và nghiệm $t=1;t=-3\Rightarrow$ Phương trình đã cho có 11 nghiệm phân biệt.

+ Nếu $a\in(0;2]$ thì (1) có 4 nghiệm phân biệt trong đó có 2 nghiệm $t\in(-3;1)$ và 1 nghiệm $t<-3$ và 1 nghiệm $t>1\Rightarrow$ Phương trình đã cho có 10 nghiệm phân biệt.

+ Nếu $\begin{cases}a>2\\a\in\mathbb{Z}\end{cases}$ thì (1) có 2 nghiệm phân biệt trong đó 1 nghiệm $t<-3$ và 1 nghiệm $t>1$

$\Rightarrow$ Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy với $-2<a\le 2$ thì phương trình đã cho có không it hơn 10 nghiệm thực phân biệt, do đó có 4 số nguyên a cần tìm.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-1)^2(x-2)$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(x)+\frac{1}{3}x^3-x-2$ có đạo hàm trên đoạn $[-1;2]$ bằng

A. $f(2)-\frac{3}{4}$. **B.** $f(1)-\frac{8}{3}$. **C.** $f(0)-2$. **D.** $f(-1)-\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x)=f'(x)+x^2-1=(x+1)(x-1)^2(x-2)+x^2-1=(x+1)(x-1)(x^2-3x+3)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow(x+1)(x-1)(x^2-3x+3)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\x=1\\x^2-3x+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\x=1\end{cases}.$$

Bảng xét dấu cho y'.

x	-1		1		2
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$	$\searrow$			$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=1$ suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ là $g(1)=f(1)-\frac{8}{3}$.

Câu 8: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $\sqrt[3]{m+3\sqrt[3]{m+3\log x}}=\log x$ có 3 nghiệm phân biệt?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x>0$.

Đặt: $t=\sqrt[3]{m+3\log x}\Rightarrow t^3=m+3\log x\Rightarrow m=t^3-3\log x$.

Phương trình đã cho trở thành: $\sqrt[3]{t^3-3\log x+3t}=\log x$

$\Leftrightarrow t^3-3\log x+3t=\log^3 x$

$\Leftrightarrow t^3+3t=\log^3 x+3\log x\ (1)$.

Xét hàm số $f(u)=u^3+3u$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow f'(u)=3u^2+3>0,\ \forall u\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$Hàm số $y=f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. (2)

Khi đó, phương trình (1) trở thành: $f(t)=f(\log x)\ (3)$

Từ (2) và (3) $\Leftrightarrow t=\log x\Leftrightarrow \sqrt[3]{m+3\log x}=\log x\Leftrightarrow m=\log^3 x-3\log x\ (4)$.

Đặt: $v=\log x$

x	0	$+\infty$
$v=\log x$	$-\infty$	$+\infty$

Ta thấy: ứng với một nghiệm v thuộc $\mathbb{R}$ sẽ cho ra một nghiệm x thuộc $(0;+\infty)$.

Phương trình (4) trở thành: $m=v^3-3v$. Đặt: $g(v)=v^3-3v\Rightarrow g'(v)=3v^2-3=0\Leftrightarrow v=\pm1$.

Bảng biến thiên:

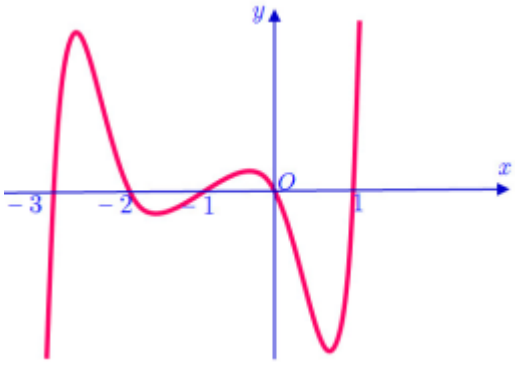
v	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(v)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(v)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m=g(v)$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow -2<m<2$. Mà $m\in\mathbb{Z}$, nên $m\in\{-1;0;1\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 9: Cho hàm đa thức $y=\left[f\left(x^2+2x\right)\right]'$ có đồ thị cắt trục Ox tại 5 điểm phân biệt như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu giá trị của tham số m với $2022m\in\mathbb{Z}$ để hàm số $g(x)=f\left(x^2-2|x-1|-2x+m\right)$ có 9 điểm cực trị?



A. 2020. **B.** 2023. **C.** 2021. **D.** 2022.

Lời giải.

Ta có:

$\left[f\left(x^2+2x\right)\right]' = (2x+2) f'\left(x^2+2x\right) = a(x+3)(x+2)(x+1)(x)(x-1) \quad (a>0)$

$\Rightarrow f'\left(x^2+2x\right) = \frac{a}{2}(x+3)(x+2)x(x-1) = \frac{a}{2}\left(x^2+2x-3\right)\left(x^2+2x\right).$

Đặt $t = x^2+2x \Rightarrow f'(t) = \frac{a}{2}(t-3)t$.

Ta có $g(x) = f\left(x^2-2|x-1|-2x+m\right) = f\left(|x-1|^2-2|x-1|+m-1\right).$

Ta thấy $g(2-x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$ nên đồ thị hàm số $y = g(x)$ nhận đường thẳng $x=1$ làm trục đối xứng. Do đó số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ bằng $2a+1$ với a là số điểm cực trị lớn hơn 1 của hàm số $g(x)$. Theo bài ra ta có $2a+1=9 \Leftrightarrow a=4$. Vi vậy ta cần tìm m để hàm số $g(x)$ có đúng 4 điểm cực trị lớn hơn 1.

Khi $x>1$ thì $g(x) = f\left(x^2-4x+m+2\right)$.

$$g'(x) = (2x-4) f'\left(x^2-4x+m+2\right), g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^2-4x+m+2=0 (1). \\ x^2-4x+m+2=3 \ (2) \end{array}\right.$$

Đặt $u(x) = x^2-4x+m+2$, ta có bảng biến thiên

x	1		2		$+\infty$
$u(x)$	$m-1$	$\searrow$	$m-2$	$\nearrow$	$+\infty$

Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để 2 phương trình (1), (2) có đúng 3 nghiệm phân biệt khác 2, điều này xảy ra khi và chỉ khi $m-2<0<m-1 \Leftrightarrow 1<m<2$,

suy ra $2022<2022m<4044 \Rightarrow 2022m \in \{2023;2024;\ldots;4043\}$,

do đó có 2021 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu 10: Cho $f(x) = x^3-3x^2+1$. Phương trình $\sqrt{f(f(x)+1)+1} = f(x)+2$ có số nghiệm thực là

A. 7. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 9.

Lời giải.

Đặt $t = f(x)+1 \Rightarrow t = x^3-3x^2+2 \quad (*)$

Suy ra $t' = 3x^2-6x$. Khi đó $t'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$. Ta có, bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
t'		$+$	0	$-$	0	$+$	
t	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó $\sqrt{f(f(x)+1)+1}=f(x)+2$ trở thành:

$$\sqrt{f(t)+1}=t+1\Leftrightarrow\begin{cases}t\geq -1\\ f(t)+1=t^2+2t+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\geq -1\\ t^3-4t^2-2t+1=0\end{cases}$$

Từ bảng biến thiên ta có

+) Với $t=a\in(-1;0)$, phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt.

+) Với $t=b\in(0;1)$, phương trình (*) có 3 nghiệm phần biệt khác 3 nghiệm trên.

+) Với $t=c\in(4;5)$, phương trình (*) có 1 nghiệm khác 6 nghiệm trên.

Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $6f\left(x^2-4x\right)=m$ có it nhất 3 nghiệm

thực phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$?

A. 29. **B.** 25. **C.** 24. **D.** 30.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $6f\left(x^2-4x\right)=m\Leftrightarrow f\left(x^2-4x\right)=\dfrac{m}{6}$

Đặt $u=x^2-4x\Rightarrow u'=0\Leftrightarrow x=2$.

x	0		2		$+\infty$
u	0	-2	-4	-2	0 $+\infty$
$f(u)$	-3	$\nearrow$ 2	$\searrow$ -2	$\nearrow$ 2	$\searrow$ -3 $\nearrow$ $+\infty$

Để phương trình $f\left(x^2-4x\right)=\dfrac{m}{6}$ có ít nhất 3 nghiệm phân biệt thuộc $(0;+\infty)$:

$$\Leftrightarrow -3<\frac{m}{6}\leq 2\Leftrightarrow -18<m\leq 12$$

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2\left(x^2-4x\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(2x^2-12x+m\right)$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 17. **B.** 16. **C.** 18. **D.** 19.

Lời giải

Ta có $g(x)=f\left(2x^2-12x+m\right)\Rightarrow g'(x)=(4x-12)\cdot f'\left(2x^2-12x+m\right)$.

Suy ra $g'(x)=0\Leftrightarrow(4x-12)\cdot f'\left(2x^2-12x+m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ f'\left(2x^2-12x+m\right)=0\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ 2x^2-12x+m=0 \\ 2x^2-12x+m=4 \\ 2x^2-12x+m=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ 2x^2-12x+m=0(1) \\ 2x^2-12x+m-4=0(2) \\ 2x^2-12x+m+1=0(3) \end{array}\right.$$

Vì phương trình (3) có nghiệm kép nên ta chỉ xét 2 phương trình (1) và (2).

Nhận xét: phương trình (1) và (2) không có nghiệm chung.

Yêu cầu bài toán suy ra phương trình (1) va (2) đều có 2 nghiệm phân biệt khác nhau và khác 3.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{(1)}>0 \\ 2.3^2-12.3+m\neq 0 \\ \Delta'_{(2)}>0 \\ 2.3^2-12.3+m-4\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36-2m>0 \\ m\neq 18 \\ 36-2(m-4)>0 \\ m\neq 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<18 \\ m\neq 18 \\ m<22 \\ m\neq 22 \end{cases} \Leftrightarrow m<18$$

Vì m nguyên dương nên $m\in\{1;2;3;\ldots;17\}$.

Câu 13: Cho các hàm số $y=f(x)$; $y=f(f(x))$; $y=f(x^2+2x-1)$ có đồ thị lần lượt là $(C_1);(C_2);(C_3)$. Đường thẳng $x=2$ cắt $(C_1);(C_2);(C_3)$ lần lượt tại A,B,C. Biết rằng phương trình tiếp tuyến của (C_1) tại A và của (C_2) tại B lần lượt là $y=2x+3$ và $y=8x+5$. Phương trình tiếp tuyến của (C_3) tại C là

A. $y=8x-9$. **B.** $y=12x+3$. **C.** $y=24x-27$. **D.** $y=4x+1$.

Lời giải

Chọn C

+ Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $x=2$:

$y=f'(2)(x-2)+f(2)=f'(2)x-2f'(2)+f(2)$.

Thực hiện phép đồng nhất thức với phương trình tiếp tuyến $y=2x+3$ ta được:

$$\begin{cases} f'(2)=2 \\ -2f'(2)+f(2)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(2)=2 \\ f(2)=7 \end{cases}.$$

+ Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(f(x))$ tại điểm $x=2$:

$y=f'(2)f'(f(2))(x-2)+f(f(2))=2f'(7)(x-2)+f(7)=2f'(7)x-4f'(7)+f(7)$.

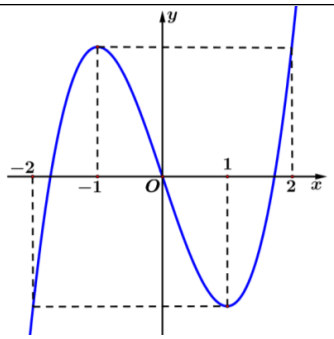
Thực hiện phép đồng nhất thức với phương trình tiếp tuyến $y=8x+5$ ta được:

$$\begin{cases} 2f'(7)=8 \\ -4f'(7)+f(7)=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(7)=4 \\ f(7)=21 \end{cases}.$$

+ Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x^2+2x-1)$ tại điểm $x=2$ là

$y=6f'(7)(x-2)+f(7)=24(x-2)+21=24x-27$.

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=\sqrt{4-f^2(x)}$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

$$y=\sqrt{4-f^2(x)}\Rightarrow y'=\frac{\left[4-f^2(x)\right]'}{2\sqrt{4-f^2(x)}}=\frac{-2f(x).f'(x)}{2\sqrt{4-f^2(x)}}=\frac{-f(x).f'(x)}{\sqrt{4-f^2(x)}}$$

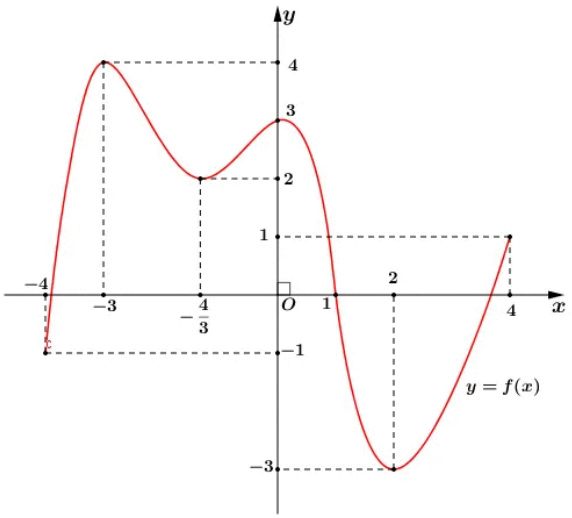
Xét $y'=0\Leftrightarrow f(x).f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\f'(x)=0\end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị hàm số ta có: $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\in(-2;-1)\\x=b\in(1;2)\\x=0\end{array}\right.$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\end{array}\right.$$

Vậy $y'=0$ có 5 nghiệm phân biệt. Nên hàm số $y=\sqrt{4-f^2(x)}$ có 5 điểm cực trị.

Câu 15: Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $[-4;4]$, có các điểm cực trị trên $(-4;4)$ là $-3;-\frac{4}{3};0;2$ và có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x)=f\left(x^3+3x\right)+m$ với m là tham số. Gọi m_1 là giá trị của m để $\max\limits_{[0;1]}g(x)=2022$, m_2 là giá trị của m để $\min\limits_{[-1;0]}g(x)=2004$. Giá trị của m_1-m_2 bằng

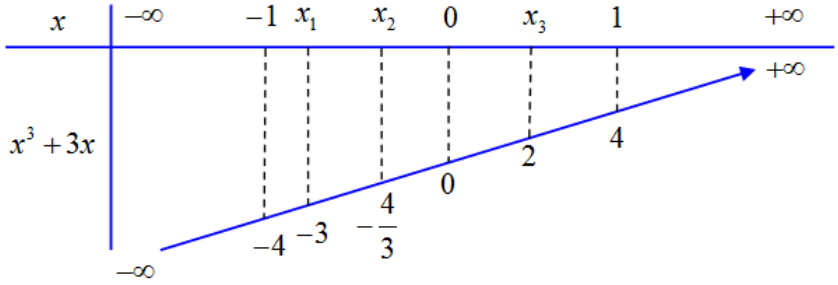


A. 12. **B.** 13. **C.** 11. **D.** 14.

Lời giải

Chọn D

Trước tiên, xét hàm $y=x^3+3x$, có BBT như sau:



Có $g'(x)=\left(3x^2+3\right)f'\left(x^3+3x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3+3x=-3\\x^3+3x=-\dfrac{4}{3}\\x^3+3x=0\\x^3+3x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\in[-1;0]\\x=x_2\in[-1;0]\\x=0\\x=x_3\in[0;1]\end{array}\right.$

Trên $[0;1]$, có $g(0)=f(0)+m=3+m;\ g(x_3)=f(2)+m=-3+m;\ g(1)=f(4)+m=1+m$

Dễ thấy $\max\limits_{[0;1]}g(x)=3+m=2022$, suy ra $m_1=m=2022-3=2019.$

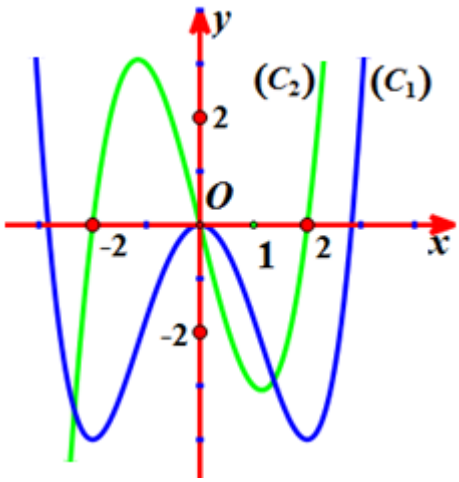
Trên $[-1;0]$, có $g(0)=f(0)+m=3+m;\ g(-1)=f(-4)+m=-1+m;$

$g(x_1)=f(-3)+m=4+m;\ g(x_2)=f\left(-\dfrac{4}{3}\right)+m=2+m.$

Dễ thấy $\min\limits_{[-1;0]}g(x)=-1+m=2004$, suy ra $m_2=m=2004+1=2005.$

Vậy $m_1-m_2=2019-2005=14.$

Câu 16: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị (C_1) và $y=f'(x)$ có đồ thị (C_2) như hình vẽ dưới.



Số điểm cực đại của đồ thị hàm số $g(x)=f\left[e^{-x}f(x)\right]$ trên khoảng $(-\infty;3)$ là

A. 5. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

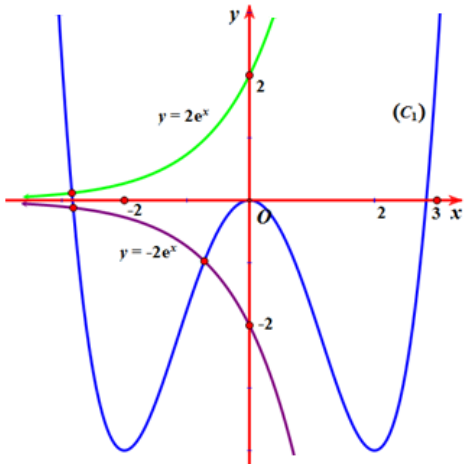
Lời giải

Chọn D

$$g'(x)=\left[-e^{-x}f(x)+e^{-x}f'(x)\right].f'\left[e^{-x}f(x)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-f(x)+f'(x)=0\\e^{-x}f(x)=-2\\e^{-x}f(x)=0\\e^{-x}f(x)=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=f'(x)\\f(x)=0\\f(x)=-2e^{x}\\f(x)=2e^{x}\end{array}\right..$$

+ $f(x)=f'(x)$ có bốn nghiệm đơn trong đó 3 nghiệm phân biệt nhỏ hơn 3 (có một nghiệm $x=0$) và một nghiệm lớn hơn 3.

+ $f(x)=0$ có hai nghiệm đơn phân biệt và một nghiệm bội chẵn $x=0$.



+ $f(x)=2e^x$ có một nghiệm đơn.

+ $f(x)=-2e^x$ có hai nghiệm đơn phân biệt.

Như vậy, trên khoảng $(-\infty;3)$ đạo hàm $g'(x)$ đổi dấu qua 8 điểm nên số điểm cực đại và cực tiểu bằng nhau và bằng 4.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)=x^4-14x^3+36x^2+(16-m)x$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 7 điểm cực trị?

A. 33. **B.** 31. **C.** 32. **D.** 34.

Lời giải

Xét hàm số: $f(x)=x^4-14x^8+36x^2+(16-m)x$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$f'(x)=4x^8-42x^2+72x+16-m$

Hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị dương.

$\Leftrightarrow$ Phương trình $f'(x)=0$ có 3 nghiệm dương phân biệt.

Xét phương trình $f'(x)=0\Leftrightarrow 4x^3-42x^2+72x+16=m$ (1)

Đặt $h(x)=4x^8-42x^2+72x+16\Rightarrow h'(x)=12x^2-84x+72\Rightarrow h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=6\end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

x	0		1		6		$+\infty$
$h'(x)$		+	0	−	0	+	
$h(x)$		↗	50	↘		↗	$+\infty$
	16				-200		

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (1) có 3 nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=h(x)$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ dương.

Dựa vào BBT ta có $16 < m < 50$.

Vì m là số nguyên nên $m \in \{17;18...49\}$ nên có 33 số nguyên.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x) = 2022^x - 2022^{-x} + x + \sin x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(x+3) + f\left(x^3 - 4x + m\right) = 0$ có ba nghiệm phân biệt?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số

$y = f(x) = 2022^x - 2022^{-x} + x + \sin x$

$\Rightarrow f'(x) = 2022^x \ln 2022 + 2022^{-x} \ln 2022 + 1 + \cos x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Ta có $f(-x) = 2022^{-x} - 2022^x - x - \sin x = -\left(2022^x - 2022^{-x} + x + \sin x\right) = -f(x)$

Xét phương trình

$f(x+3) + f\left(x^3 - 4x + m\right) = 0 \Leftrightarrow f\left(x^3 - 4x + m\right) = -f(x+3) = f(-x-3).$

Vì $f(x)$ đồng biến nên

$f\left(x^3 - 4x + m\right) = f(-x-3) \Leftrightarrow x^3 - 4x + m = -x - 3 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 3 = -m$ (1)

YCBT phương trình (1) phải có ba nghiệm phân biệt

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 3$, ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		↘	5	↗	1	↘	$+\infty$
	$-\infty$						

Dựa vào BBT suy ra $1 < -m < 5 \Leftrightarrow -5 < m < -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -4 \\ m = -3 \\ m = -2 \end{array}\right.$

Vậy có 3 giá trị nguyên của m

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x) = \left(x^2 - 4\right)(x-5), \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x) = \left|f\left(x^2+1\right) - m\right|$ có nhiều điểm cực trị nhất?

A. 6. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Xét $k(x) = f\left(x^2+1\right) - m \Rightarrow k'(x) = 2xf'\left(x^2+1\right)$.

$$k'(x)=0 \Leftrightarrow 2xf'\left(x^2+1\right)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=0 \\ x^2+1=2 \\ x^2+1=-2 \\ x^2+1=5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \\ x=-2 \\ x=2 \end{bmatrix}.$$

Lại có $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\left(x^2-4\right)(x-5)\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}-\frac{5}{3}x^3-2x^2+20x+C$.

Vì $f(1)=0$ nên $f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{5}{3}x^3-2x^2+20x-\frac{199}{12}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$k(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1219}{12}-m$	$\nearrow$	$-\frac{461}{6}-m$	$\searrow$	$-\frac{995}{12}-m$	$\nearrow$	$-\frac{461}{6}-m$	$\searrow$	$-\frac{1219}{12}-m$	$\nearrow$	$+\infty$

Nhận xét:

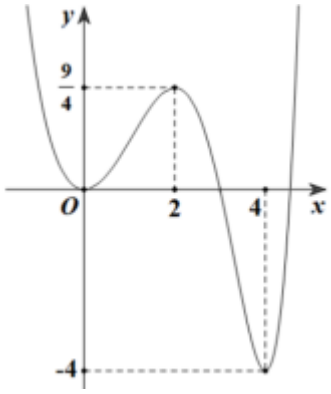
Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f(x)\right|$ bằng số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ cộng với số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với trục Ox.

+) Hàm số $g(x)=\left|f\left(x^2+1\right)-m\right|$ có nhiều điểm cực trị nhất khi và chỉ khi $g(x)=f\left(x^2+1\right)-m$ cắt Ox nhiều điểm nhất

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{995}{12}-m<0 \\ -\frac{461}{6}-m>0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{995}{12}<m<-\frac{461}{6}.$$

Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-82;-81;\ldots;-76\}$. Vậy có 7 giá trị nguyên của m.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f(5-2x)$ như hình vẽ bên dưới:

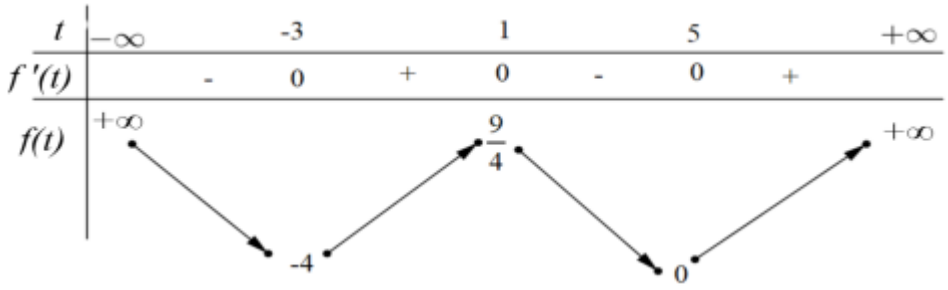


Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m thuộc khoảng $(-9;9)$ thỏa mãn $2m\in\mathbb{Z}$ và hàm số $y=\left|2f\left(4x^3+1\right)+m-\frac{1}{2}\right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 26. **B.** 25. **C.** 27. **D.** 24.

Lời giải

Đặt $t=5-2x\Rightarrow x=\dfrac{5-t}{2}$. Bảng biến thiên của hàm số $f(t)$:



Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y=f(t)$ có 3 điểm cực trị.

Đặt: $g(x)=f\left(4x^3+1\right)\Rightarrow g'(x)=12x^2f'\left(4x^3+1\right)$

$g'(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ f'\left(4x^3+1\right)=0(*)\end{cases}$ (có 3 nghiệm đơn)

$\Rightarrow$ hàm số $y=f\left(4x^3+1\right)$ có 3 điểm cực trị.

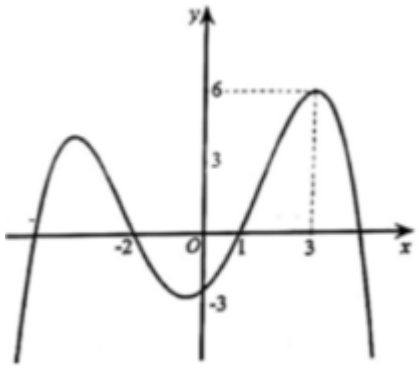
Hàm số $y=\left|2f\left(4x^3+1\right)+m-\dfrac{1}{2}\right|$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Hàm số $\dfrac{y}{2}=\left|f\left(4x^3+1\right)+\dfrac{m}{2}-\dfrac{1}{4}\right|$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $f\left(4x^3+1\right)+\dfrac{m}{2}-\dfrac{1}{4}=0$ (1) có 2 nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ.

Đặt $t=4x^3+1\Rightarrow t'=12x^2$. Suy ra t là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Ứng với mỗi giá trị của t ta có một giá trị của x. Số nghiệm của phương trình bằng số nghiệm của phương trình $f(t)+\dfrac{m}{2}-\dfrac{1}{4}=0.$

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $f(t)+\dfrac{m}{2}-\dfrac{1}{4}=0$ có 2 nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{4}-\dfrac{m}{2}\ge\dfrac{9}{4}\\ -4<\dfrac{1}{4}-\dfrac{m}{2}\le 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le -4\\ \dfrac{1}{2}\le m<\dfrac{17}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2m\le -8\\ 1\le 2m<17\end{array}\right.$.

Kết hợp yêu cầu m thuộc khoảng $(-9;9)$ và $2m\in\mathbb{Z}$ ta có 26 giá trị thực của m thỏa mãn đề bài.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ:



Xét $T=103f\left(a^2+a+1\right)+234f(af(b)+bf(a)),(a,b\in\mathbb{R})$. Biết T có giá trị lónn nhát bằng M đạt tại m cặp $(a;b)$, khi đó $\dfrac{M}{m}$ bằng

A. $\frac{1011}{4}$. **B.** $\frac{1011}{8}$. **C.** $\frac{337}{2}$. **D.** $\frac{674}{3}$.

Lời giải

Quan sát đồ thị đã cho ta có $\max_{\mathbb{R}} f(x) = f(3) = 6$.

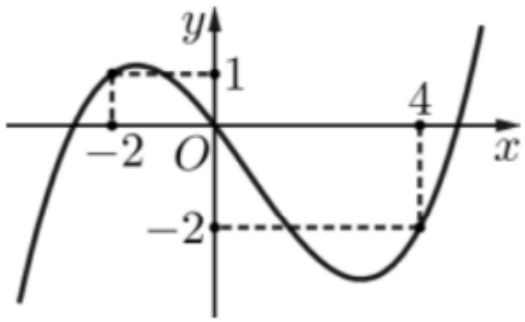
$$\Rightarrow \begin{cases} \max f\left(a^2+a+1\right)=6 \\ \max f(af(b)+bf(a))=6 \end{cases} \Rightarrow T_{\max} = (103+234)\times 6 = 2022.$$

Dấu bằng đạt tại $\begin{cases} a=1 \\ a^2+a+1=3 \\ af(b)+bf(a)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(b)=3-bf(1)=3 \Rightarrow \mathbf{4n}_0 \\ a=-2 \end{cases} \\ f(b)=\dfrac{3-bf(-2)}{-2}=-\dfrac{3}{2} \Rightarrow \mathbf{4n}_0 \end{array}\right.$,,$(f(1)=f(-2)=0)$

tức có 8 cặp $(a;b)$.

Vậy $\frac{M}{m}=\frac{2022}{8}=\frac{1011}{4}$.

Câu 22: Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có đồ thị của đạo hàm như hình vẽ:



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=4f\left(x^2-4\right)+x^4-8x^2$ là

A. 4. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 5.

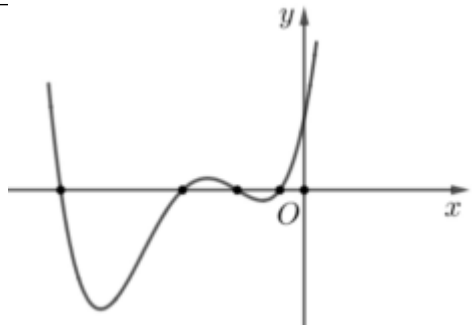
Lời giải

Có $g'(x)=8xf'\left(x^2-4\right)+4x^3-16x=8x\left(f'\left(x^2-4\right)+\dfrac{x^2-4}{2}\right)$.

Xét $f'(x)+\frac{x}{2}=0 \Leftrightarrow f'(x)=-\frac{x}{2} \Leftrightarrow x=-2; x=0; x=4$. Suy ra $f'(x)+\frac{x}{2}$ là đa thức bậc ba có 3 nghiệm là $x=-2; x=0; x=4$ nên $f'(x)+\frac{x}{2}=a(x+2)x(x-4), \left(a>0; \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty\right)$.

Do đó $g'(x)=8ax\left(x^2-4+2\right)\left(x^2-4\right)\left(x^2-4-4\right)=8ax\left(x^2-2\right)\left(x^2-4\right)\left(x^2-8\right)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua các điểm $x=-2\sqrt{2}; x=-\sqrt{2}; x=\sqrt{2}; x=2\sqrt{2}$ nên $g(x)$ có 4 điểm cực tiểu.

Câu 23: Biết rằng $f(0)=0$. Hỏi hàm số $g(x)=\left|f\left(x^6\right)-x^3\right|$ có bao nhiêu điểm cực đại?



A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

$h(x)=f\left(x^6\right)-x^3 \Rightarrow h'(x)=6x^5 f'\left(x^6\right)-3x^2=3x^2\left(2x^3 f'\left(x^6\right)-1\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ 2x^3 f'\left(x^6\right)-1=0 \end{array}\right.$

Đặt: $u(x)=2x^3 f'\left(x^6\right)-1 \Rightarrow u'(x)=6x^2 f'\left(x^6\right)+12x^8 f''\left(x^6\right) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

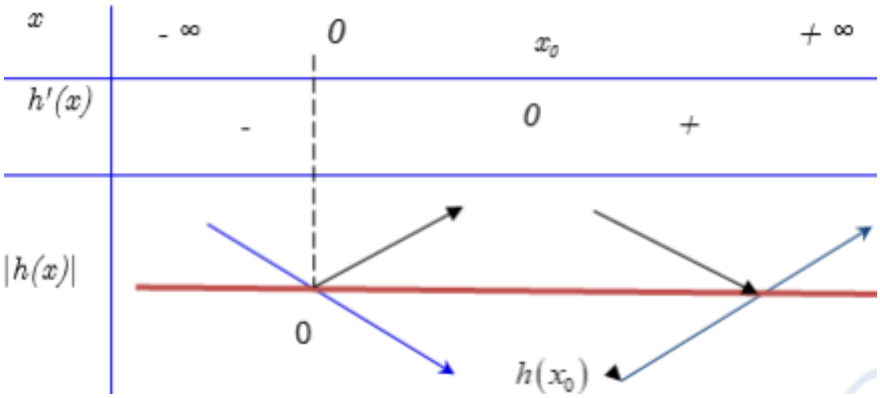
(Từ đồ thị ta có $x^6 \geq 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f'\left(x^6\right)>0 \\ f''\left(x^6\right)>0 \end{array}\right.$ do đó $\left\{\begin{array}{l} 6x^2 f'\left(x^6\right) \geq 0 \\ 12x^8 f''\left(x^6\right) \geq 0 \end{array}\right.$, $\forall x \in \mathbb{R}$)

Nên $u(x)=2x^3 f'\left(x^6\right)-1$ đồng biến và liên tục trên $\mathbb{R}$

(do $f(x)$ là hàm đa thức $\Rightarrow u(x)$ là hàm đa thức) và $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} u(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} u(x)=+\infty \end{array}\right.$

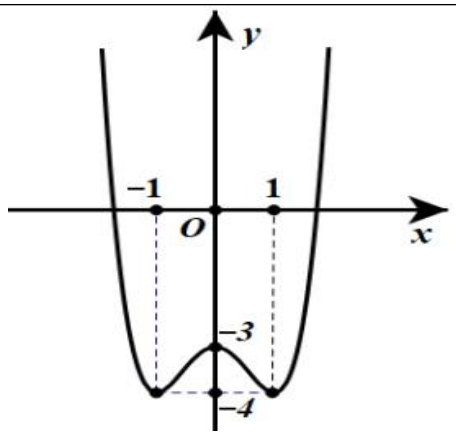
suy ra phương trình $u(x)=2x^3 f'\left(x^6\right)-1=0$ có nghiệm duy nhất.

Giả sử $2x^3 f'\left(x^6\right)-1=0 \Leftrightarrow x^3 f'\left(x^6\right)=\dfrac{1}{2}$ có nghiệm là x_0 (do $f'\left(x_0^6\right)>0) \Rightarrow x_0^3>0 \Rightarrow x_0>0$.



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $g(x)=\left|h(x)\right|$ có 1 điểm cực đại.

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Đặt $g(x)=f\left(\sqrt{x^2-4x+6}\right)-2\left(x^2-4x\right)\sqrt{x^2-4x+6}-12\sqrt{x^2-4x+6}+1$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[1;4]$ bằng

A. $12-2\sqrt{4}$. **B.** $-12-12\sqrt{6}$. **C.** $-12-2\sqrt{4}$. **D.** $12-12\sqrt{6}$.

Lời giải

Từ đồ thị suy ra $f(x)=x^4-2x^2-3\Rightarrow f'(x)=4x^3-4x$

Đặt $t=\sqrt{x^2-4x+6}, x\in[1;4]\Rightarrow t\in[\sqrt{2};\sqrt{6}]$.

Ta có: $g(x)=f\left(\sqrt{x^2-4x+6}\right)-2\left(x^2-4x+6\right)\sqrt{x^2-4x+6}+1$

Suy ra hàm số đã cho trở thành

$h(t)=f(t)-2t^3+1\Rightarrow h'(t)=f'(t)-6t^2$

$$h(t)=0\Leftrightarrow f'(t)-6t^2=0\Leftrightarrow 4t^3-6t^2-4t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\notin(\sqrt{2};\sqrt{6})\\t=-\dfrac{1}{2}\notin(\sqrt{2};\sqrt{6})\\t=2\in(\sqrt{2};\sqrt{6})\end{array}\right.$$

Ta có:

$h(\sqrt{2})=f(\sqrt{2})-2\cdot(\sqrt{2})^3+1=-2-4\sqrt{2}$

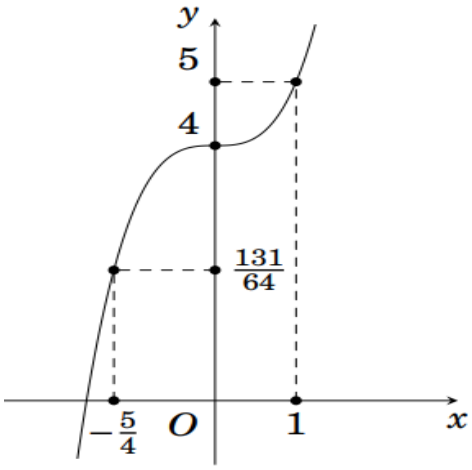
$h(2)=f(2)-2\cdot(2)^3+1=-10$

$h(\sqrt{6})=f(\sqrt{6})-2\cdot(\sqrt{6})^3+1=22-12\sqrt{6}$

Suy ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(t)$ trên đoạn $[\sqrt{2};\sqrt{6}]$ lần lượt là $22-12\sqrt{6}$ và -10.

Vậy tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $g(x)$ trên $[1;4]$ là tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $h(t)$ trên $[\sqrt{2};\sqrt{6}]$ và bằng $12-12\sqrt{6}$.

Câu 25: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có $f'(1)=3$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m và $m\in[-10;10]$ để phương trình $\ln\dfrac{f(x)}{3mx^2}+x[f(x)-3mx]=3mx^3-f(x)$ có hai nghiệm dương phân biệt?



A. 18. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 15.

Lời giải.

Do yêu cầu bài toán là phương trình có hai nghiệm dương phân biệt nên ta chỉ xét $x>0$. Giả sử $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Vi đồ thị đi qua các điểm $A\left(-\frac{5}{4};\frac{131}{64}\right), B(0;4), C(1;5)$ nên ta có

$$\begin{cases} -\frac{125}{64}a+\frac{25}{16}b-\frac{5}{4}c+d=\frac{131}{64} \\ d=4 \\ a+b+c+d=5 \end{cases} \quad (1)$$

Ta có $f'(1)=3\Leftrightarrow 3a+2b+c=3$.(2)

Từ (1) và (2) ta có $a=1,b=0,c=0,d=4$, suy ra $f(x)=x^3+4$.

Điều kiện $\frac{f(x)}{3mx^2}>0\Rightarrow m>0$.

$$\ln\frac{f(x)}{3mx^2}+x[f(x)-3mx]=3mx^3-f(x)$$

$$\Leftrightarrow \ln f(x)-\ln\left(3mx^2\right)+x\left[f\left(x-3mx^2\right)\right]+f(x)-3mx^2=0$$

Nếu $f(x)>mx^2$ thì $\log f(x)>\log\left(mx^2\right)$ và $xf(x)>x\left(mx^2\right),\forall x>0\Rightarrow$ (3) vô nghiệm.

Tương tự nếu $f(x)<mx^2$ thì phương trình (3) vô nghiệm.

Do đó $f(x)=3mx^2\Leftrightarrow x^3+4=3mx^2\Leftrightarrow\frac{x^3+4}{3x^2}=m$, vì $x>0$.

Xét hàm số $g(x)=\frac{x^3+4}{3x^2}$ với $x>0$.

$$g'(x)=\frac{3x^4-24x}{9x^4}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2. \end{array}\right.$$

Vì $x>0$ nên ta nhận $x=2$. Ta có bảng biến thiên

x	0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Để phương trình $\dfrac{x^3+4}{3x^2}=m$ có hai nghiệm dương phân biệt thì $m>1$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in[-10;10]$ nên $m\in\{2;3;\ldots;10\}$. Vậy có 9 giá trị nguyên của tham số m thoả yêu cầu bài toán.

Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm m để phương trình $|f(x-1)+2|=m$ có 4 nghiệm thỏa mãn $x_1<x_2<x_3<1<x_4$.

A. $4<m<6$. **B.** $3<m<6$. **C.** $2<m<6$. **D.** $2<m<4$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y=|f(x-1)+2|$ thu được bằng cách biến đổi đồ thị như sau

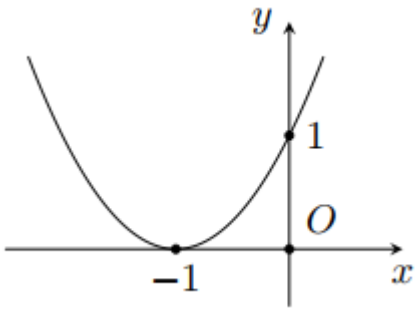
- Tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f(x)$ sang phải 1 đơn vị, sau đó tịnh tiến lên trên 2 đơn vị ta được đồ thị hàm số $y=f(x-1)+2$;

- Với đồ thị hàm số $y=|f(x-1)+2|$: Giữ nguyên phần nằm bên trên trục hoành, lấy đối xứng phần nằm bên dưới trục hoành qua trục hoành rồi xóa phần nằm bên dưới trục hoành đi.

Do đó ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	6	$\searrow$	4	$\searrow$	$+\infty$
							2		

Câu 27: Cho $f(x)$ là hàm số bậc ba. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(e^x-1\right)-x-m=0$ có hai nghiệm thực phân biệt?



A. $m<f(2)$. **B.** $m>f(0)$. **C.** $m<f(0)$. **D.** $m>f(2)$.

Lời giải.

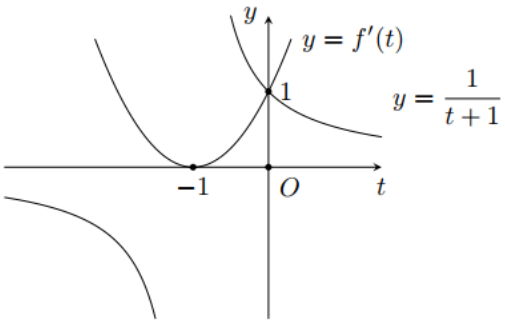
Cách 1.

Ta có: $f\left(e^x-1\right)-x-m=0\Leftrightarrow f\left(e^x-1\right)-x=m.$

Đặt $h(x)=f\left(e^x-1\right)-x$ thì $h'(x)=e^x f'\left(e^x-1\right)-1$. Suy ra

$h'(x)=0\Leftrightarrow e^x f'\left(e^x-1\right)-1=0\Leftrightarrow f'\left(e^x-1\right)=\dfrac{1}{e^x}.$

Đặt $t=e^x-1, t>-1$ thì (1) trở thành $f'(t)=\dfrac{1}{t+1}$. Ta có đồ thị sau



x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Từ đồ thị ta có nghiệm của phương trình (2) là $t=0$, suy ra $e^x-1=0$ hay $x=0$. Ta có bảng của $h(x)$ như trên. Từ đó, phương trình $h(x)=m$ có hai nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $m>f(0)$.

Cách 2. Từ đồ thị ta có $f'(x)=(x+1)^2$. Suy ra

$f(x)=\dfrac{1}{3}(x+1)^3+C.$

Thay vào phương trình, ta được: $\dfrac{e^{3x}}{3}+C-x-m=0\Leftrightarrow m=\dfrac{e^{3x}}{3}-x+C.$

Đặt $g(x)=\dfrac{e^{3x}}{3}-x+C$. Ta có

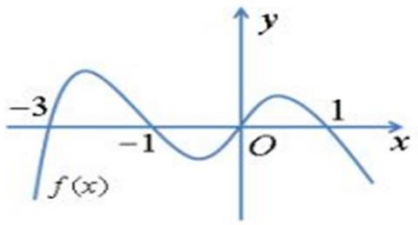
$g'(x)=0\Leftrightarrow e^{3x}-1=0\Leftrightarrow x=0.$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	↘	$g(0)=f(0)$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, phương trình có hai nghiệm thực khi và chỉ khi $m > f(0)$.

Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị có 3 điểm cực trị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x+2\right)$ là

A. 5. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=\left(3x^2-3\right)f'\left(x^3-3x+2\right)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2-3=0\\ f'\left(x^3-3x+2\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1\\ x^3-3x+2=a\in(-3;-1)\\ x^3-3x+2=a\in(-1;0)\\ x^3-3x+2=a\in(0;1)\end{array}\right.$$

Đặt $h(x)=x^3-3x+2\Rightarrow h'(x)=3x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0
$h(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Với $x^3-3x+2=a\in(-3;-1)$ có 1 nghiệm.

Với $x^3-3x+2=a\in(-1;0)$ có 1 nghiệm.

Với $x^3-3x+2=a\in(0;1)$ có 3 nghiệm.

Vậy $g(x)=f\left(x^3-3x+2\right)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 29: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn và có bảng biến thiên như hình bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)=2^{-\frac{1}{x^4}}\left[f(2x+1)\right]^3$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	3	↘	-2	↗	$+\infty$

A. 7. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x)=\frac{4}{x^5}.2^{-\frac{1}{x^4}}.\ln 2.\left[f(2x+1)\right]^3+2^{-\frac{1}{x^4}}.6.\left[f(2x+1)\right]^2.f'(2x+1)$

$=2.2^{-\frac{1}{x^4}}.\left[f(2x+1)\right]^2\left[\frac{2\ln 2}{x^5}f(2x+1)+3f'(2x+1)\right]$

$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left[f(2x+1)\right]^2=0\ (1)\\ \frac{2\ln 2}{x^5}f(2x+1)+3f'(2x+1)=0\ (2)\end{array}\right.$.

Xét phương trình $\left[f(2x+1)\right]^2=0$ có các nghiệm đều là nghiệm bội chẵn do đó $g'(x)$ không đổi dấu khi qua các nghiệm đó.

Xét phương trình $\frac{2\ln 2}{x^5}f(2x+1)+3f'(2x+1)=0$. Đặt $2x+1=t$; phương trình tương đương

$\frac{64\ln 2}{(t-1)^5}f(t)+3f'(t)=0\ (*)$.

Do $f(t)$ và $f'(t)$ không đồng thời bằng 0 nên $\frac{64\ln 2}{(t-1)^5}+3\frac{f'(t)}{f(t)}=0\ (*)$.

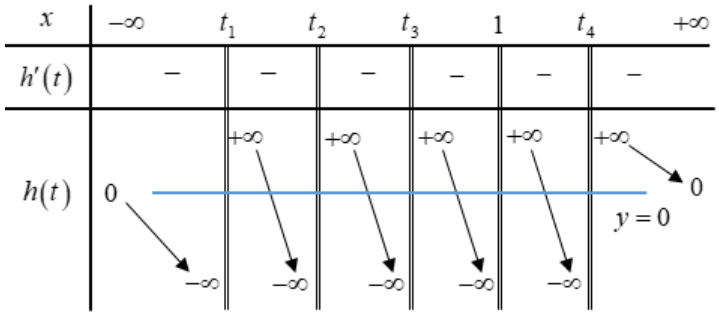
Dựa vào bảng biến thiên ta có: $f(t)=a(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)(t-t_4)$.

Tính $f'(t)$ thay vào $(*)$ ta được phương trình: $\frac{64\ln 2}{(t-1)^5}+\frac{3}{t-t_1}+\frac{3}{t-t_2}+\frac{3}{t-t_3}+\frac{3}{t-t_4}=0$

Xét hàm số: $h(t)=\frac{64\ln 2}{(t-1)^5}+\frac{3}{t-t_1}+\frac{3}{t-t_2}+\frac{3}{t-t_3}+\frac{3}{t-t_4}$;

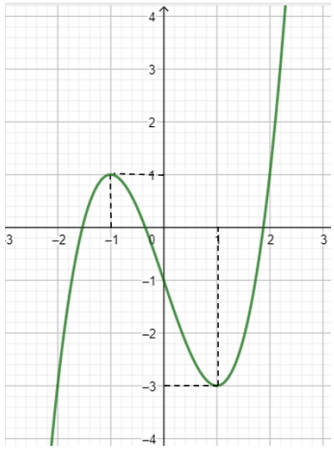
$h'(t)=-\frac{320\ln 2}{(t-1)^6}-\frac{3}{(t-t_1)^2}-\frac{3}{(t-t_2)^2}-\frac{3}{(t-t_3)^2}-\frac{3}{(t-t_4)^2}<0;\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Ta có bảng biến thiên của $h(t)$:



Phương trình có 4 nghiệm nên hàm số có 4 điểm cực trị.

Câu 30: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $f(1-2\sin x)=m$ có đúng hai nghiệm trên $[0;\pi]$

A. -3. **B.** -2. **C.** 0. **D.** -6.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $f(1-2\sin x)=m$.

Có $-2\le -2\sin x\le 2\Rightarrow -1\le 1-2\sin x\le 1; x\in[0;\pi]\Rightarrow 1-2\sin x\in[-1;1]$.

Mỗi giá trị $t=1-2\sin x\in(-1;1]$ ứng với hai giá trị x phân biệt thuộc $[0;\pi]$.

Từ đồ thị suy ra $-3\le f(1-2\sin x)\le 1\Rightarrow -3\le m<1$ thì $f(1-2\sin x)=m$ có hai nghiệm phân biệt.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-3;-2;-1;0\}$. Tổng tất cả các giá trị nguyên của m là -6.

Câu 31: Biết rằng tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $m(x+4)\sqrt{x^2+2}=5x^2+8x+24$ có bốn nghiệm thực phân biệt là khoảng $(a;b)$. Giá trị $a+b$ bằng

A. $\frac{28}{3}$. **B.** $\frac{25}{3}$. **C.** 4. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $m(x+4)\sqrt{x^2+2}=5x^2+8x+24\Leftrightarrow m(x+4)\sqrt{x^2+2}=(x+4)^2+4(x^2+2)$ (1).

*) Với $x+4=0\Leftrightarrow x=-4$.

Khi đó $(1)\Leftrightarrow 4(x^2+2)=0$ vô nghiệm.

*) Với $x+4\neq 0\Leftrightarrow x\neq -4$.

$$(1)\Leftrightarrow m=\frac{(x+4)^2+4(x^2+2)}{(x+4)\sqrt{x^2+2}}\Leftrightarrow m=\frac{x+4}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{4\sqrt{x^2+2}}{(x+4)} \qquad (2)$$

Đặt $t=\dfrac{x+4}{\sqrt{x^2+2}}$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x+4}{\sqrt{x^2+2}}$ có $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+2}-(x+4)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2}=\dfrac{2-4x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$

$f'(x)=0\Rightarrow 2-4x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên hàm số $f(x)$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↗	3	↘	1

Từ bảng biến thiên ta được điều kiện của t là $-1<t\leq 3$

Vậy để có 2 nghiệm x ứng với 1 giá trị t thì $1<t<3$

(2) suy ra $m=t+\dfrac{4}{t}, t\in(1;3)$.

Xét hàm số $g(t)=t+\dfrac{4}{t}$ trên $(1;3)$ có $g'(t)=1-\dfrac{4}{t^2}$; $g'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2(\text{n})\\t=-2(\text{l})\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên thu gọn

x	1		2		3
y'		$-$	0	$+$	
y	5	↘	4	↗	$\frac{13}{3}$

Từ BBT để phương trình (1) có 4 nghiệm thực thì $4<m<\dfrac{13}{3}$. Nên $a=4; b=\dfrac{13}{3}$.

Vậy $a+b=\dfrac{25}{3}$.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	1	↗	2	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số $y=\left[f(x)\right]^3-3\left[f(x)\right]^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

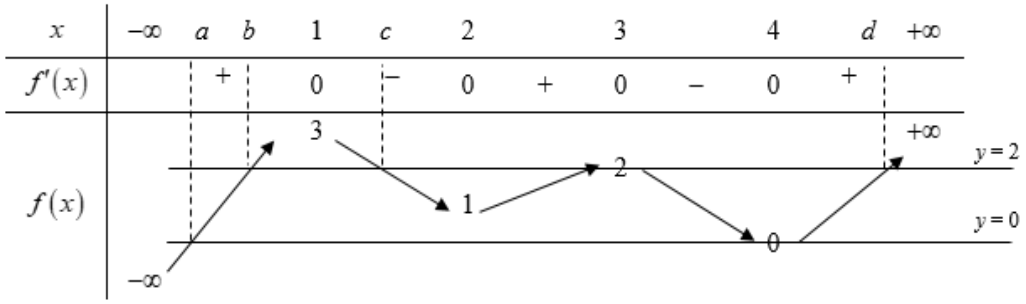
A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $(2;3)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=3f'(x)\left[f^2(x)-2f(x)\right]$.

Phương trình $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f(x)=0\\f(x)=2\end{array}\right.$.



Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy: $f'(x)=0\Leftrightarrow x\in\{1;2;3;4\}$;

$f(x)=0\Leftrightarrow x=a<1$ hoặc $x=4$;

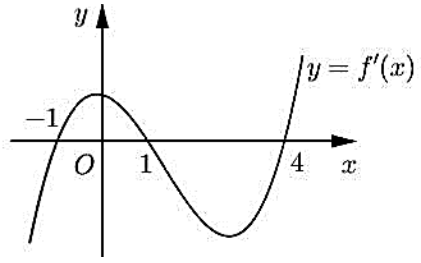
$f(x)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=b\,(a<b<1)\\x=c\in(1;2)\\x=3\\x=d>4\end{array}\right.$.

Ta lập được bảng xét dấu của y':

x	$-\infty$		a		b		1		c		2		3		4		d		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	

Từ bảng xét dấu, ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;a)$; $(b;1)$; $(c;2)$; $(3;4)$ và $(d;+\infty)$.

Câu 33: Cho hàm bậc bốn $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(\left|4-2x\right|+m-6\right)$ có đúng 3 điểm cực tiểu. Tổng các phần tử của S bằng

A. 18. **B.** 11. **C.** 2. **D.** 13.

Lời giải

Chọn B

+ Đồ thị của hàm số $y=f\left(\left|4-2x\right|+m-6\right)$ đối xứng qua đường thẳng $x=2$.

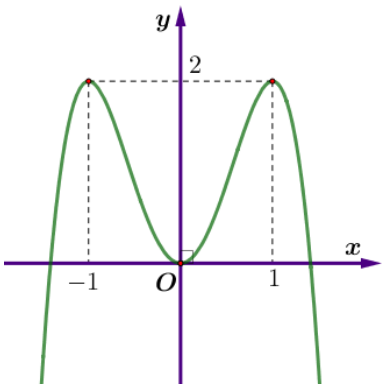
+ Xét hàm số $y=f\left(2x+m-10\right)$.

$$y'=2f'\left(2x+m-10\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+m-10=-1\\2x+m-10=1\\2x+m-10=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{9-m}{2}=a\\x=\dfrac{11-m}{2}=b\\x=\dfrac{14-m}{2}=c\end{array}\right.$$

x	$-\infty$		a	2	b		c		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘		↗		↘		↗	$+\infty$

+ Hàm số $y=f\left(\left|4-2x\right|+m-6\right)$ có ba điểm cực tiểu khi và chỉ khi:

Câu 34: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $2\left|f\left(x-1-2\sqrt{x-1}\right)\right|=3$ là

A. 12. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình $2\left|f\left(x-1-2\sqrt{x-1}\right)\right|=3\ \ (1)$.

Đặt $t=x-1-2\sqrt{x-1}$, với $x\geq 1$.

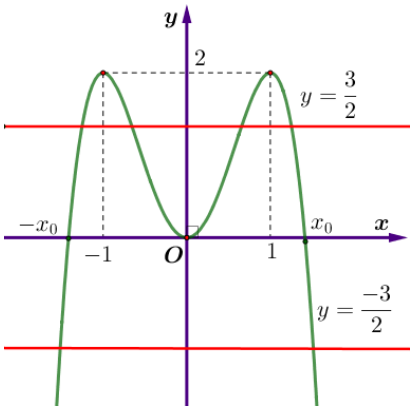
Ta có $t'=1-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}};t'=0\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=1\Leftrightarrow x=2$

Bảng biến thiên của hàm $t=t\left(x\right)$

x	$-\infty$	1		2		$+\infty$
t'		‖	$-$	0	$+$	
t		‖ 0	↘	-1	↗	$+\infty$

Suy ra với $x\geq 1$ thì $t\geq -1$.

Khi đó, phương trình (1) trở thành $2\left|f\left(t\right)\right|=3\Leftrightarrow\left|f\left(t\right)\right|=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(t\right)=\dfrac{3}{2}\\f\left(t\right)=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$



*) Trường hợp 1: $f\left(t\right)=\dfrac{3}{2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=a\in\left(-x_0;-1\right)\\t=b\in\left(-1;0\right)\\t=c\in\left(0;1\right)\\t=d\in\left(1;x_0\right)\end{array}\right.$

*) Trường hợp 2: $f\left(t\right)=-\dfrac{3}{2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=e\in\left(-\infty;-x_0\right)\\t=f\in\left(x_0;+\infty\right)\end{array}\right.$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số t ta có

Với $t=a\in\left(-x_0;-1\right)\Rightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm.

Với $t=b\in\left(-1;0\right)\Rightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Với $t=c\in\left(0;1\right)\Rightarrow$ phương trình (1) có 1 nghiệm x_3.

Với $t=d\in\left(1;x_0\right)\Rightarrow$ phương trình (1) có 1 nghiệm x_4.

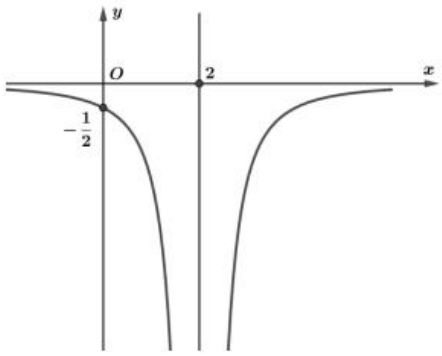
Với $t=e\in\left(-\infty;-x_0\right)\Rightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm.

Với $t=f\in\left(x_0;+\infty\right)\Rightarrow$ phương trình (1) có 1 nghiệm x_5.

Các nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 không trùng nhau.

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm.

Câu 35: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị hàm số $f'\left(x\right)$ như trong hình vẽ sau:



Biết rằng đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua điểm $A(0;2)$. Giá trị $f(3)$ bằng

A. -2. **B.** -1. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

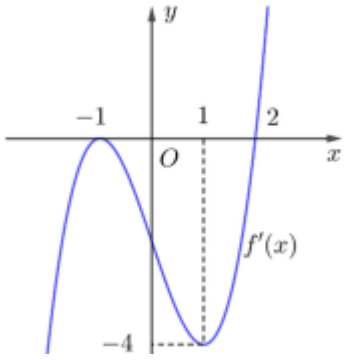
Vì đồ thị thị hàm số $f(x)$ đi qua điểm $A(0;2)$ suy ra $f(0)=2\Rightarrow\dfrac{b}{d}=2\Leftrightarrow b=2d\ (1)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có: $\begin{cases} f'(0)=-\dfrac{1}{2} \\ x=-\dfrac{d}{c}=2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \dfrac{ad-bc}{d^2}=-\dfrac{1}{2}\ (2) \\ d=-2c\ (3) \end{cases}$.

Thay (1) vào (2): $\dfrac{ad-2dc}{d^2}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{a-2c}{d}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow a=-\dfrac{1}{2}d+2c=-\dfrac{1}{2}.(-2c)+2c=3c$.

Vậy, $f(3)=\dfrac{3a+b}{3c+d}=\dfrac{3.3c-4c}{3c-2c}=\dfrac{5c}{c}=5$.

Câu 36: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(2x^2-4|x|+m-3\right)$ có 7 điểm cực trị.

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $g'(x)=\left(2x^2-4|x|+m-3\right)'\cdot f'\left(2x^2-4|x|+m-3\right)$.

Suy ra $g'(x)=0\Leftrightarrow\left(2x^2-4|x|+m-3\right)'\cdot f'\left(2x^2-4|x|+m-3\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(2x^2-4|x|+m-3)'=0\\ f'(2x^2-4|x|+m-3)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(2x^2-4|x|+m-3\right)'=0\\ 2x^2-4|x|+m-3=-1\\ 2x^2-4|x|+m-3=2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\left(2x^2-4|x|+m-3\right)'=0 & (1)\\ 2x^2-4|x|-3=-m-1 & (2)\\ 2x^2-4|x|-3=-m+2 & (3)\end{array}\right.$$

$+)$ Xét phương trình $\left(2x^2-4|x|+m-3\right)'=0$ (1)

Với $x\geq 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 4x-4=0 \Leftrightarrow x=1$ (thoả mãn).

Với $x<0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 4x+4=0 \Leftrightarrow x=-1$ (thoả mãn).

Khi đó $x=-1; x=0; x=1$ là 3 điểm cực trị của hàm số.

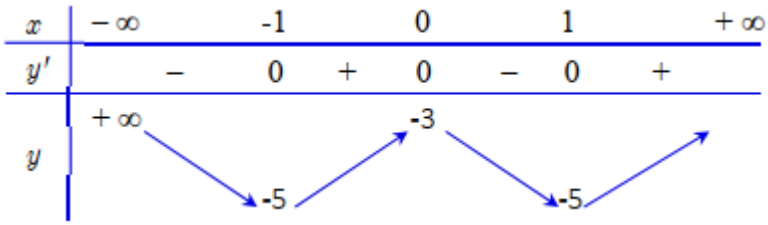
+) Xét phương trình $2x^2-4|x|-3=-m-1$ (2).

Từ đồ thị suy ra phương trình (2) nếu có nghiệm thì nghiệm là bội chẵn nên hàm số $g'(x)$ không đổi dấu nên không phải là cực trị.

+) Xét phương trình $2x^2-4|x|-3=-m+2$

Yêu cầu bài toán suy ra phương trình (3) có 4 nghiệm phân biệt khác $0, \pm 1$.

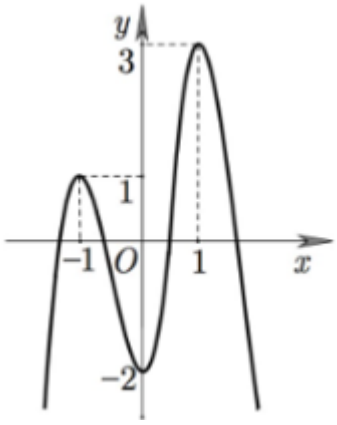
Xét hàm số $y=2x^2-4|x|-3$ có bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên suy ra $-5<-m+2<-3 \Leftrightarrow 5<m<7$.

Vì m nguyên nên $m=6$. Vậy có 1 giá trị nguyên của tham số m thoả mãn.

Câu 37: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y=f(1-x)$ như hình vẽ bên:



Số giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(\dfrac{1-x}{x+2}\right)-\dfrac{2x+1}{x+2}+m=0$ có 4 nghiệm phân biệt là

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

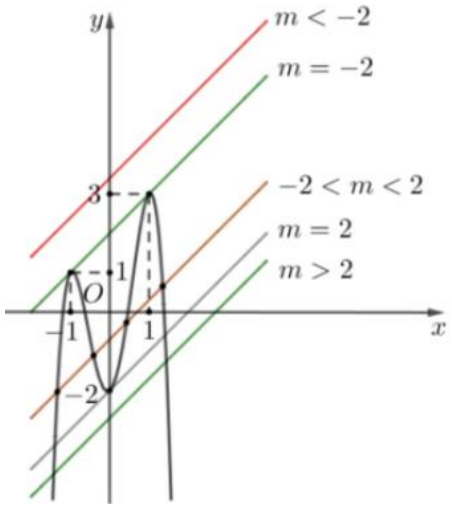
Đặt $\frac{1-x}{x+2}=1-t\Leftrightarrow t=1-\frac{1-x}{x+2}=\frac{2x+1}{x+2}$. Phương trình trở thành $f(1-t)-t+m=0\Leftrightarrow f(1-t)=t-m(*)$.

Yêu cầu bài toán tương đương với (*) có 4 nghiệm phân biệt.

Điều này tương đương với đồ thị của hai hàm số $(C):y=f(1-x);d:y=x-m$ cắt nhau tại bốn điểm phân biệt.

Chú ý đường thẳng $y=x-m$ qua hai điểm $(m;0);(0;-m)$ và song song hoặc trùng với đường thẳng $y=x$.

Vẽ đường thẳng $d:y=x-m$ trên cùng hệ trục toạ độ với đồ thị (C) như hình vẽ:



Từ đồ thị suy ra $d\cap(C)$ tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi $-2<m<2\Rightarrow m\in\{-1;0;1\}$

Câu 38: Cho hàm số bậc ba $f(x)$ và hàm số $g(x)=f(x+1)$ thoả mãn $(x-1)g'(x+3)=(x+1)g'(x+2)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(2x^2-4x+5\right)$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Có $g(x)=f(x+1)\Rightarrow g'(x)=f'(x+1)\Rightarrow g'(x+3)=f'(x+4);g'(x+2)=f'(x+3)$.

Thay vào giả thiết đã cho có:

$(x-1)g'(x+3)=(x+1)g'(x+2)\Leftrightarrow(x-1)f'(x+4)=(x+1)f'(x+3)(*)$.

Thay $x=-1$ vào hai vế của (*) có $f'(3)=0$; thay $x=1$ vào hai vế của (*) có $f'(4)=0$.

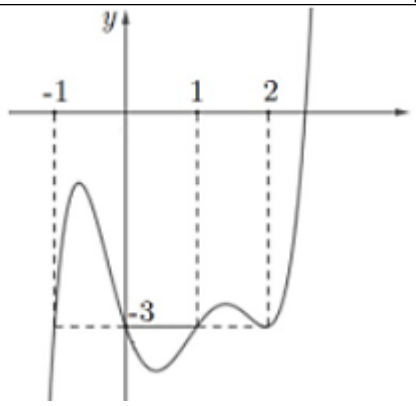
Do đó $f'(x)$ là đa thức bậc hai có 2 nghiệm $x_1=3;x_2=4$ nên $f'(x)=a(x-3)(x-4)$.

Khi đó hàm số $y=f\left(2x^2-4x+5\right)$ có đạo hàm

$y'=(4x-4)f'\left(2x^2-4x+5\right)=4a(x-1)\left(2x^2-4x+5-3\right)\left(2x^2-4x+5-4\right)=8a(x-1)^3\left(2x^2-4x+1\right)$

đổi dấu 3 lần nên hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0)<0$, đồ thị của $f'(x)$ như hình vẽ:



Gọi m,n lần lượt là số điểm cực đại, số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=|f(|x|)+3|x||$. Giá trị của m^n bằng

A. 4. **B.** 8. **C.** 27. **D.** 16.

Lời giải

Xét hàm số $u(x)=f(|x|)+3|x|$ là một hàm số chẵn nên chỉ cần xét trên $[0;+\infty)$ để suy ra bảng biến thiên của $u(x)$ trên cả $\mathbb{R}$.

Với $x\ge 0\Rightarrow u(x)=f(x)+3x\Rightarrow u'(x)=f'(x)+3=0\Leftrightarrow f'(x)=-3\xleftrightarrow{x\ge 0}x=0;x=1;x=2$.

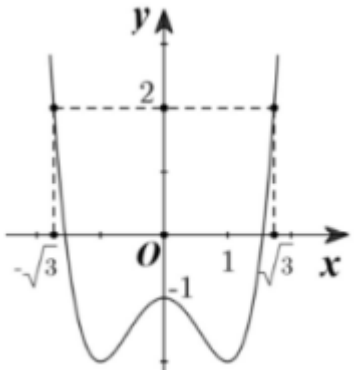
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$u(x)$	$+\infty$	$\searrow$			$u(-1)$	$\nearrow$	$f(0)<0$	$\searrow$	$u(1)$	$\nearrow$			$+\infty$

Trong đó $u(-1)=u(1)=f(1)+3;u(0)=f(0)<0$.

Suy $g(x)=|u(x)|$ có tất cả 5 điểm cực trị trong đó 2 điểm cực đại và 3 điểm cực tiểu.

Câu 40: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị của đạo hàm như hình vẽ:

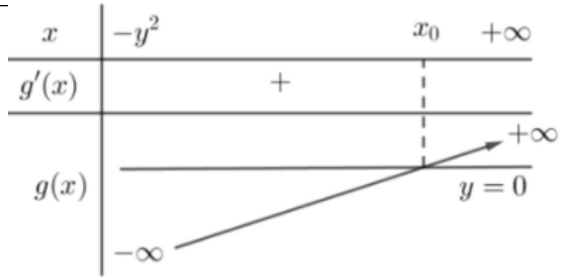


Giá trị lớn nhất của hàm số $h(x)=3f(x)-x^3+3x$ trên đoạn $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$ bằng

A. $3f(1)+2$. **B.** $3f(0)$. **C.** $3f(-\sqrt{3})$. **D.** $3f(\sqrt{3})$.

Lời giải

Ta có $h'(x)=3f'(x)-3x^2+3=3\left[f'(x)-\left(x^2-1\right)\right]\le 0,\forall x\in[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$. Vì vẽ thêm parabol $y=x^2-1$ qua các điểm $(0;-1);(-\sqrt{3};2);(\sqrt{3};2)$. Nhận thấy $f'(x)$ nằm dưới parabol trên đoạn $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$.



Vậy $\max\limits_{\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]} h(x) = h(-\sqrt{3}) = 3f(-\sqrt{3})$.

ĐỀ VDC SỐ 02

Đề tổng hợp VDC số 02

I. PHẦN ĐỀ BÀI

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)\left(2x^2-3x-9\right),\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(x)+x^3-3x^2-9x+6$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 2: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho $\left|2x^3-3x^2+m\right|\le 16,\forall x\in[0;3]$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -65. **B.** -74. **C.** -42. **D.** 87.

Câu 3: Cho hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left(x^3-x\right)\left[f(x+1)\right]^2$ là

A. 11. **B.** 8. **C.** 13. **D.** 10.

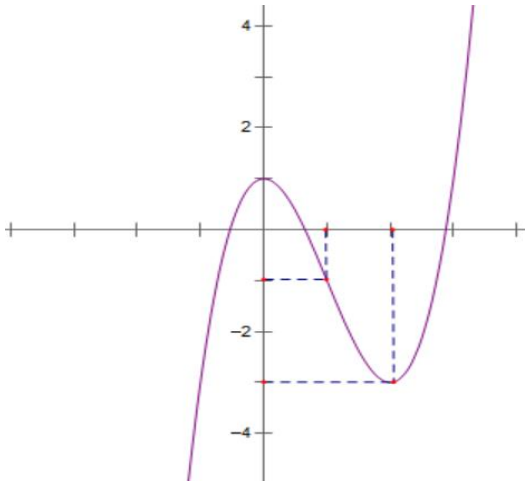
Câu 4: Cho hàm số $f(x)=\log_3 x+3^x-3^{\frac{1}{x}}$. Tổng bình phương các giá trị của tham số m để phương trình $f\left(\dfrac{1}{4|x-m|+3}\right)+f\left(x^2-4x+7\right)=0$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt bằng

A. 14. **B.** 13. **C.** 10. **D.** 5.

Câu 5: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-(2m+1)x+m^2-3}$ có đúng hai đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Bất phương trình $f(x)-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x-m>0$ nghiệm đúng với mọi $x\in(0;2)$ khi và chỉ khi

A. $m<f(0)$. **B.** $m<f(2)+\frac{22}{3}$. **C.** $m\le f(0)$. **D.** $m\le f(2)+\frac{22}{3}$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=\frac{2x-m^2}{x+1}$, với m là tham số. Gọi $m_1,m_2\,(m_1<m_2)$ là các giá trị của tham số m thỏa mãn $2\max\limits_{[0;2]}f(x)-\min\limits_{[0;2]}f(x)=8$. Tổng $2m_1+3m_2$ bằng

A. 1. **B.** -2. **C.** 4. **D.** -1.

Câu 8: Một người thợ cần thiết kế một bể cá hình hộp chữ nhật bằng kính, có chiều cao là $0,8m$, thể tích $576dm^3$. Biết rằng phần nắp phía trên của bể cá người thợ đó để trống một ô có diện tích bằng 30% diện tích đáy bể. Biết rằng loại kính mà người thợ sử dụng làm mặt bên và nắp bể có giá thành 1000000 đồng/m^2 và kính để làm mặt đáy có giá thành 1200000 đồng/m^2. Giả sử phần tiếp xúc giữa các mặt là không đáng kể. Số tiền mua kính ít nhất để hoàn thành bể cá gần nhất với số tiền nào dưới đây?

A. $4,1$ triệu đồng. **B.** $3,2$ triệu đồng. **C.** $2,8$ triệu đồng. **D.** $3,8$ triệu đồng.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như hình sau. Hàm số $g(x)=f\left(x^2+3x+1\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

A. $(0;1)$. **B.** $(-4;-2)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(-2;-1)$.

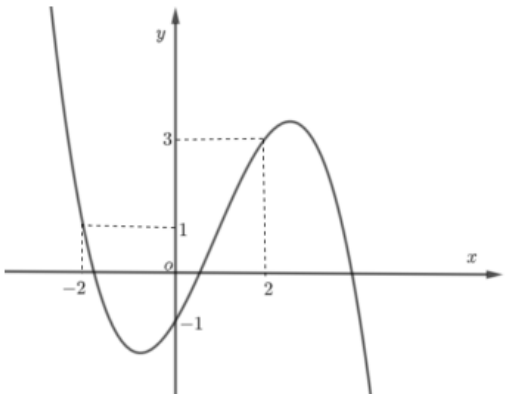
Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^3+2|x|-4\right)$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 10.

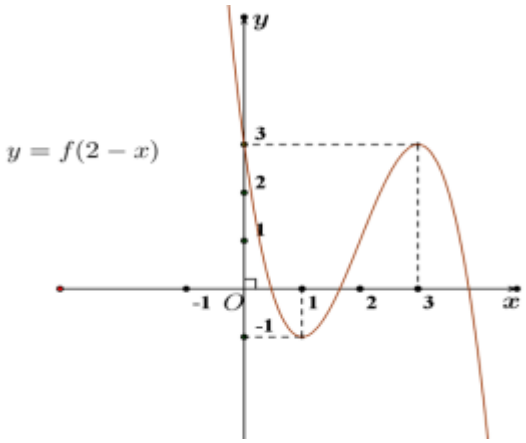
Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn. Đồ thị hàm số $f'(x+2)$ được cho trong hình vẽ bên



Hàm số $g(x)=4f\left(x^2\right)-x^6+5x^4-4x^2+1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-4;-3)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-\sqrt{2};\sqrt{2})$. **D.** $(-2;-1)$.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số bậc ba và có đồ thị $y=f(2-x)$ như hình vẽ.



Hỏi phương trình $\left|f\left(\left|x^2-2x\right|\right)\right|=1$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A. 8. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 6.

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2\left(x^2-2x\right)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f\left(x^2-8x+m\right)$ có 5 điểm cực trị?

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

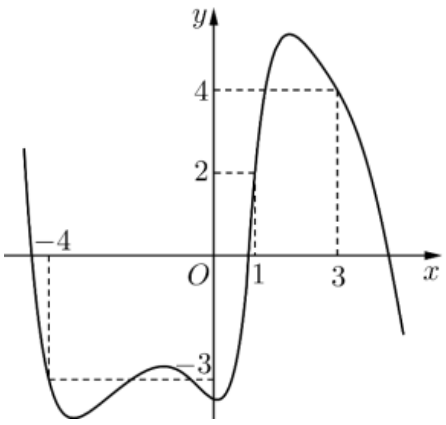
Câu 14: Cho các số thực x,y thoả mãn $\begin{cases}\max\{5;9x+7y-20\}\le x^2+y^2\le 2x+8\\ y\le 1\end{cases}$.Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x-2y$. Tính $M-m$

A. $1+3\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $1+2\sqrt{2}$. **D.** $2+3\sqrt{5}$.

Câu 15: Cho hàm số $y=\dfrac{mx^2+(m+2)x+5}{x^2+1}$. Gọi S là tập hợp các giá trị của m sao cho đồ thị hàm số đã cho có đúng hai điểm cực trị và đường thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số cắt hai trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng $\dfrac{25}{4}$. Tính tổng các phần tử của S

A. 0. **B.** 1 **C.** -4 **D.** -2.

Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-4)=4$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



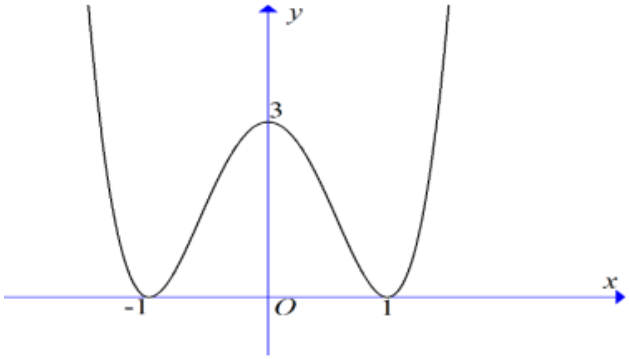
Để giá trị lớn nhất của hàm số $h(x)=f(x)-\frac{x^2}{2}-x+3m$ trên đoạn $[-4;3]$ không vượt quá 2022 thì tập giá trị của m là

A. $(-\infty;2022]$. **B.** $(674;+\infty)$. **C.** $(-\infty;674]$. **D.** $(2022;+\infty)$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)=x^4-2x^3+(m-1)x^2+2x-m+2022$, với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2021;2022]$ để hàm số $y=|f(x-2021)-2022|$ có số điểm cực trị nhiều nhất?

A. 2021. **B.** 2022. **C.** 4040. **D.** 2023.

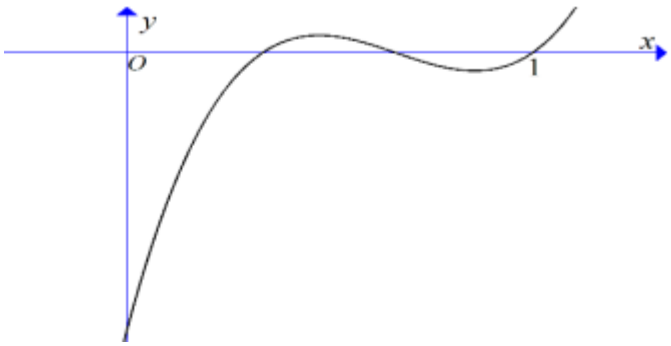
Câu 18: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2021;2021]$ để phương trình $\left(f^2(x)+x^2\right)^2-\left(m^2+2m+14\right)\left(f^2(x)+x^2\right)+4(m+1)^2+36=0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt.

A. 2022. **B.** 4043. **C.** 4042. **D.** 2021.

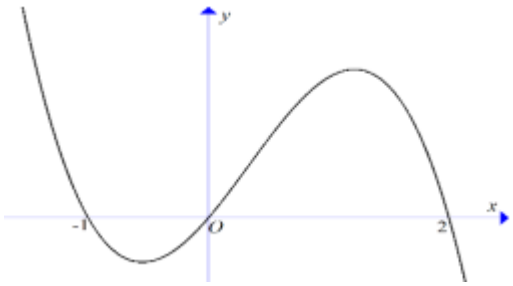
Câu 19: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f^2(g(x))$ với $g(x)=x^2-4x+2\sqrt{4x-x^2}$

A. 17. **B.** 21. **C.** 23. **D.** 19.

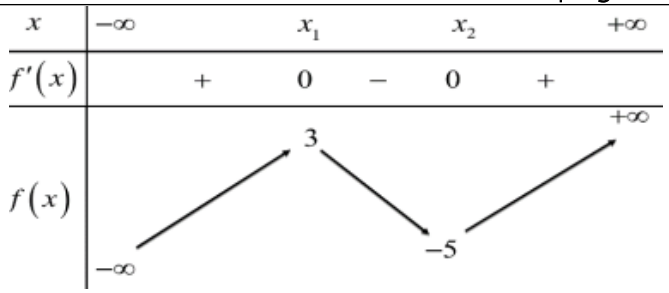
Câu 20: Cho hàm đa thức bậc bốn $y=f(x)$. Biết đồ thị của hàm số $y=f'(3-2x)$ được cho như hình vẽ



Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(1;5)$. **D.** $(5;+\infty)$.

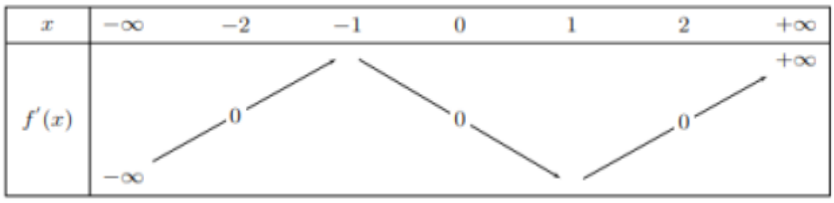
Câu 21: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ



Đặt $g(x)=|m+f(2022+x)|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=g(x)$ có đúng 5 điểm cực trị?

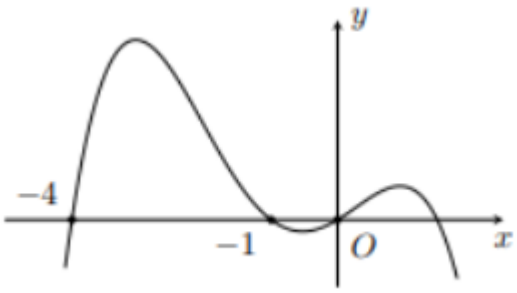
A. 6. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 7.

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(2x)-\sin^2 x$ trên đoạn $[-1;1]$ là



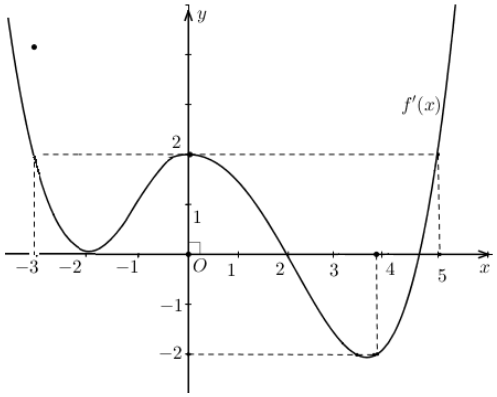
A. $f(1)$. **B.** $f(0)$. **C.** $f(2)$. **D.** $f(-1)$.

Câu 23: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị có 3 điểm cực trị như hình dưới đây. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x+2\right)$ là



A. 5. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 7.

Câu 24: Cho hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $f(3)=2f(5)=4$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\frac{1}{2}f(x)-m\right)=2x+2m$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.



A. 8. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 7.

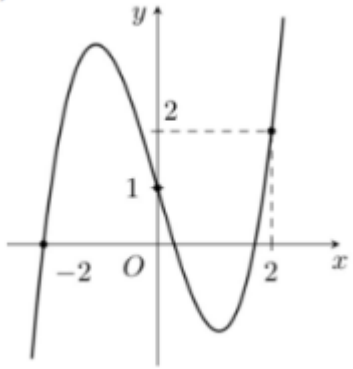
Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+3)\left(x^2-2\right)\forall x\in\mathbb{R}$. Tìm tất cả các giá trị thực không âm của tham số m để hàm số $g(x)=f(|\sin x+\sqrt{3}\cos x|+m)$ có nhiều điểm cực trị nhất trên $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{11\pi}{12}\right]$.

A. $m\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$. **B.** $m\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$. **C.** $m\in(\sqrt{2}-1,\sqrt{2})$ **D.** $m\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right)$.

Câu 26: Hàm số $f(x)=10^x+x$ và $g(x)=x^3-mx^2+\left(m^2+1\right)x-2$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y=g(x+f(x))$ trên đoạn $[0;1]$. Khi M đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của m bằng?

A. $\frac{21}{2}$. **B.** 6. **C.** 21. **D.** 5.

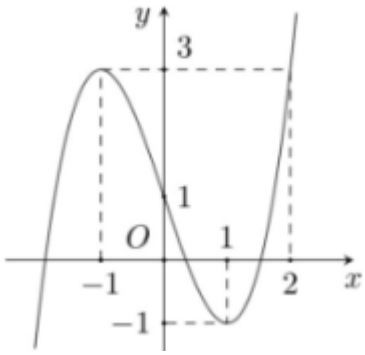
Câu 27: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $f'(\sqrt[3]{x})$ được cho trong hình bên:



Hàm số $g(x)=\left|f(x)-\frac{1}{8}x^4-x\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực đại?

A. 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

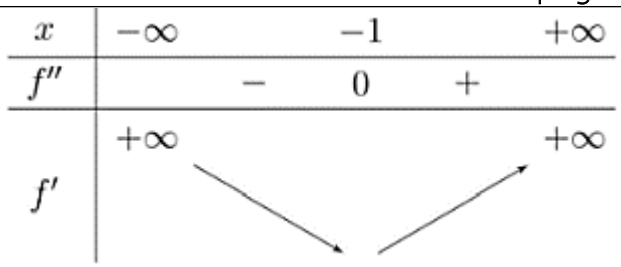
Câu 28: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(3-\sqrt{4-x^2}\right)=m$ có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$. Số phần tử của S là

A. 1. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 29: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-3;2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để hàm số $y=f\left(x^2+2x-m\right)$ đồng biến trên $(-1;1)$.

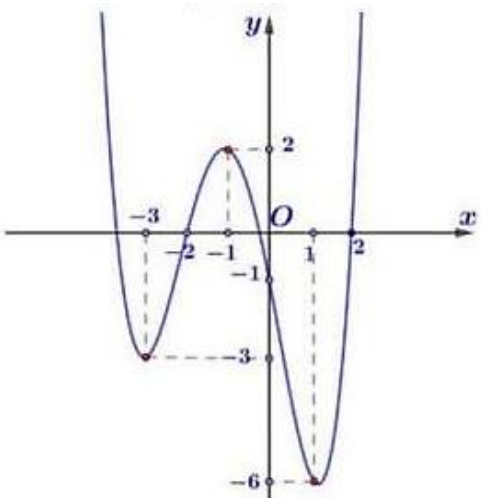


A. 12. **B.** 14. **C.** 11. **D.** 13.

Câu 30: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x)=(x+3)(x-4)$. Tính tổng các giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;5]$ để hàm số $y=f\left(\left|x^2-3x+m\right|\right)$ có nhiều điểm cực trị nhất?

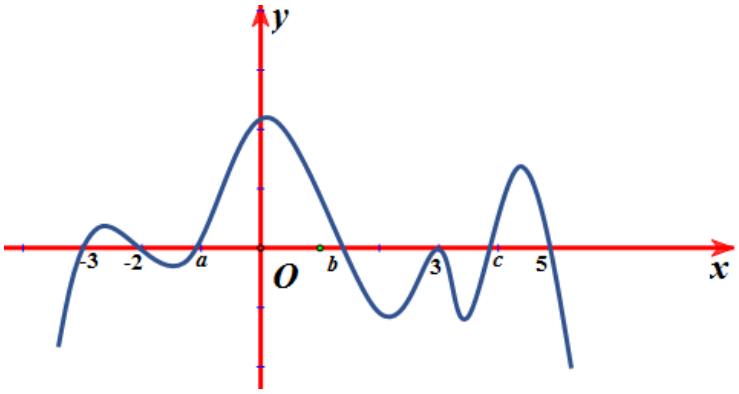
A. 54. **B.** 9. **C.** −52. **D.** −54.

Câu 31: Cho hàm số $y=f(x)$, đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(3x)+3x^2-4x+1$ trên đoạn $\left[\frac{-2}{3};\frac{2}{3}\right]$ bằng



A. $f(0)+1$. **B.** $f(6)$. **C.** $f(2)-\frac{1}{3}$. **D.** $f(-3)+8$.

Câu 32: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ $-3;-2;a;b;3;c;5$ với $-\frac{4}{3}<a<-1;1<b<\frac{4}{3};4<c<5$ có dạng như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=f\left(2|x|+m-2022\right)$ có 5 điểm cực trị?



A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Câu 33: Tìm m để đường thẳng $y=2x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+1}$ tại hai điểm A,B sao cho độ dài AB là nhỏ nhất.

A. 2. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 3.

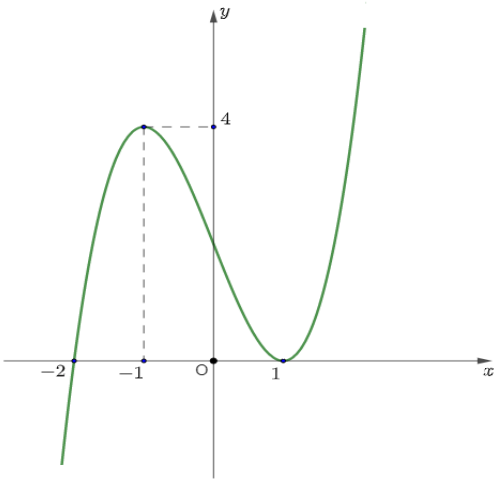
Câu 34: Cho hàm số $y=f(x)=2x^3+bx^2+cx+d$ thỏa mãn $4b+2c+d+16<0$ và $9b-3c+d>54$. Hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các ía trị của tham số m sao cho phương trình $f(\sin x)=f(m+1)$ có nghiệm.

A. $-1\le m\le 3$. **B.** $-2\le m\le 0$. **C.** $-3\le m\le 1$. **D.** $-2\le m\le 2$.

Câu 36: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



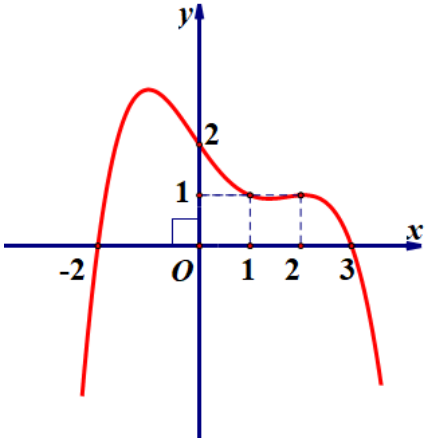
Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[0;20]$ để hàm số $g(x)=\left|f^2(x)-2f(x)-m\right|$ có 9 điểm cực trị?

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

Câu 37: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)=-x^3+6x^2-32$. Khi đó hàm số $g(x)=f(x^2-3x)$ nghịch biến trên khoảng

A. $(-\infty;+\infty)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Câu 38: Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên.



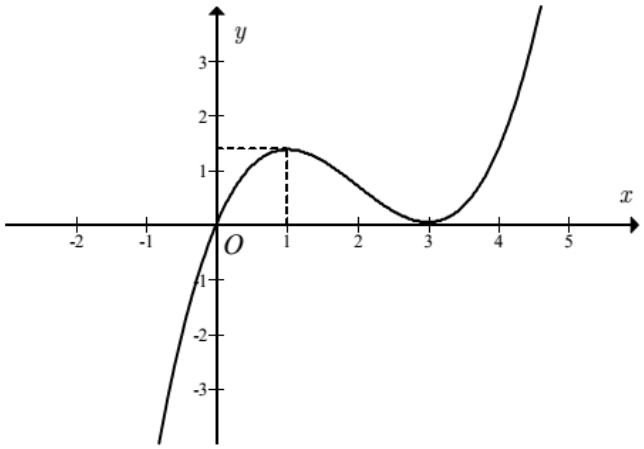
Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $f\left(2x\right)+\frac{8x^3}{3}-4x-m<0$ đúng với mọi $x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$

A. $m>f\left(1\right)-\frac{5}{3}$. **B.** $m>f\left(0\right)$. **C.** $m\geq f\left(0\right)$. **D.** $m>f\left(3\right)$.

Câu 39: Cho x,y là các số thực dương và thỏa mãn $\frac{x^2+1}{\sqrt{y}}=\frac{y+1}{x}$. Giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $P=\frac{y+4}{x}$ là

A. $m=3$ **B.** $m=2\sqrt{2}$ **C.** $m=4$ **D.** $m=8$

Câu 40: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm đa thức bậc 3 có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in\left[-100;100\right]$ để hàm số $h\left(x\right)=\left|f^2\left(x\right)+4f\left(x\right)+3m\right|$ có đúng 3 điểm cực trị. Tổng tất cả các phần tử của S bằng



A. 5047. **B.** 5049. **C.** 5043. **D.** 5050.

Câu 41: Cho hàm số $f\left(x\right)=-x^4-\left(4-m^2\right)x+2020$ và $g\left(x\right)=-x^3+5x^2-2020x+2021$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để $h\left(x\right)=g\left[f\left(x\right)\right]$ đồng biến trên $\left(2;+\infty\right)$?

A. 7. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 13.

Câu 42: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ đồng thời thỏa điều kiện $f\left(0\right)>0$ và $\left[f\left(x\right)+6x\right]f\left(x\right)=9x^4+3x^2+4,\forall x\in\mathbb{R}$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(2x^2-3x+1\right)$ trên đoạn $\left[0;1\right]$.

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{17}{7}$. **C.** $\frac{155}{64}$. **D.** $\frac{167}{69}$.

II. PHẦN HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(2x^2-3x-9), \forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(x)+x^3-3x^2-9x+6$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Vì hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $g(x)=f(x)+x^3-3x^2-9x+6$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $g'(x)=f'(x)+3x^2-6x-9=(x+1)(2x^2-3x-9)+3(x+1)(x-3)$

$=(x+1)(x-3)(2x-6)$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\\x=-3\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 2: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho $\left|2x^3-3x^2+m\right|\le 16, \forall x\in[0;3]$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -65. **B.** -74. **C.** -42. **D.** 87.

Lời giải

Chọn A

Xét $f(x)=2x^3-3x^2+m$, với $x\in[0;3]$.

Ta có: $f'(x)=6x^2-6x$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

$f(0)=m$; $f(1)=m-1$; $f(3)=27+m$.

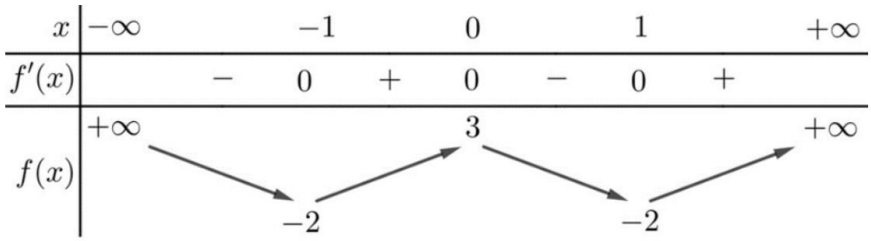
Do đó: $f(x)\in[m-1;m+27]$.

Vậy: $\left|f(x)\right|\le 16\Leftrightarrow\begin{cases}m-1\ge -16\\m+27\le 16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge -15\\m\le -11\end{cases}\Leftrightarrow m\in[-15;-11]$.

$m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=-15;-14;-13;-12;-11$.

Ta có: $(-15)+(-14)+(-13)+(-12)+(-11)=-65$.

Câu 3: Cho hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left(x^3-x\right)\left[f\left(x+1\right)\right]^2$ là

A. 11. **B.** 8. **C.** 13. **D.** 10.

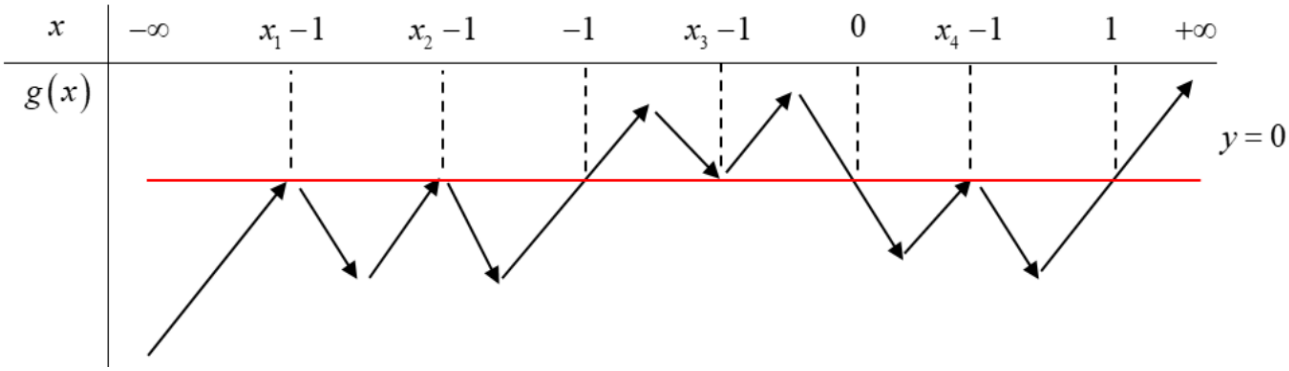
Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên ta thấy rằng $f(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt, gọi 4 nghiệm đó lần lượt là x_1,x_2,x_3,x_4 với $x_1<-1<x_2<0<x_3<1<x_4$. Khi đó:

$g(x)=\left(x^3-x\right)\left[a\left(x+1-x_1\right)\left(x+1-x_2\right)\left(x+1-x_3\right)\left(x+1-x_4\right)\right]^2$ (với $a>0$).

Ta có $g(x)=0\Leftrightarrow x\in\left\{0;\pm1;x_1-1;x_2-1;x_3-1;x_4-1\right\}$, trong đó x_1-1, x_2-1, x_3-1, x_4-1 là các nghiệm kép. Ta có bảng biến thiên của $g\left(x\right)$ như sau:



Vậy $g(x)$ có 10 điểm cực trị.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=\log_3 x+3^x-3^{\frac{1}{x}}$. Tổng bình phương các giá trị của tham số m để phương trình $f\left(\dfrac{1}{4|x-m|+3}\right)+f\left(x^2-4x+7\right)=0$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt bằng

A. 14. **B.** 13. **C.** 10. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x\ln 3}+3^x\cdot\ln 3+\dfrac{1}{x^2}\cdot3^{\frac{1}{x}}\cdot\ln 3>0,\forall x>0$

$\Rightarrow$ Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)(1)$.

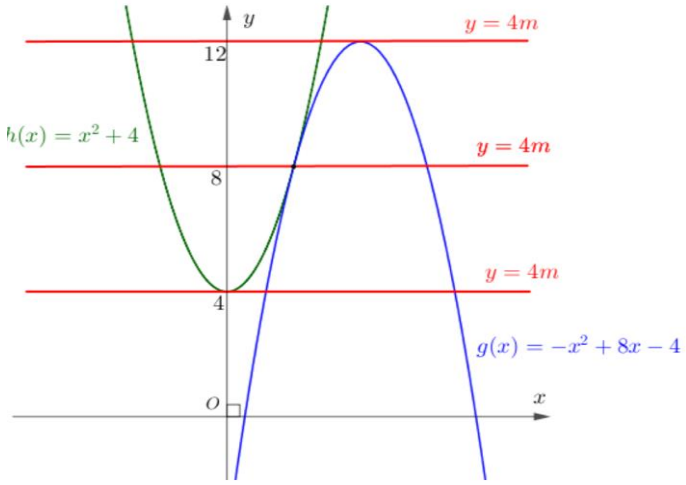
Mặt khác $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\log_3\dfrac{1}{x}+3^{\frac{1}{x}}-3^x=-\left(\log_3 x-3^{\frac{1}{x}}+3^x\right)=-f\left(x\right)$, khi đó

$f\left(\dfrac{1}{4|x-m|+3}\right)+f\left(x^2-4x+7\right)=0\Leftrightarrow-f\left(4|x-m|+3\right)+f\left(x^2-4x+7\right)=0$

$\Leftrightarrow f\left(4|x-m|+3\right)=f\left(x^2-4x+7\right)(2)$.

Từ $(1),(2) \Rightarrow 4|x-m|+3=x^2-4x+7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4m=-x^2+8x-4 \\ 4m=x^2+4 \end{array}\right.$.

Ta có đồ thị sau:



Theo yêu cầu bài toán tương đương $\left[\begin{array}{l} 4m=4 \\ 4m=8 \\ 4m=12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=2 \\ m=3 \end{array}\right.$. Vậy $1^2+2^2+3^2=14$.

Câu 5: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-(2m+1)x+m^2-3}$ có đúng hai đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-(2m+1)x+m^2-3}$ có 1 tiệm cận ngang là $y=0$.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-(2m+1)x+m^2-3}$ có đúng hai đường tiệm cận

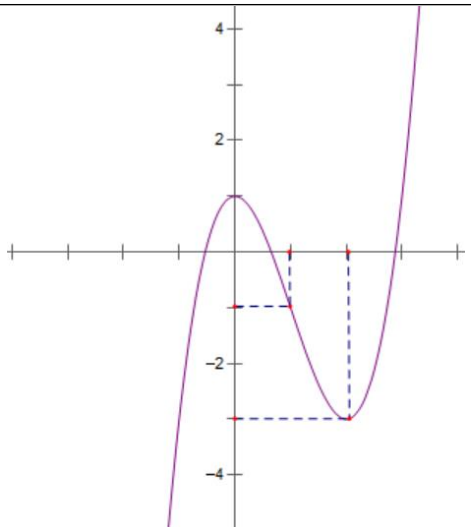
$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-(2m+1)x+m^2-3}$ có đúng 1 tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow$ Phương trình $x^2-(2m+1)x+m^2-3=0$ có nghiệm kép hoặc phương trình $x^2-(2m+1)x+m^2-3=0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 1.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \Delta=0 \\ \left\{\begin{array}{c} \Delta>0 \\ 1-(2m+1)+m^2-3=0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2m+1)^2-4(m^2-3)=0 \\ \left\{\begin{array}{l} (2m+1)^2-4(m^2-3)>0 \\ m^2-2m-3=0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-\dfrac{13}{4} \\ m=3 \\ m=-1 \end{array}\right.$$

Vậy có ba giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Bất phương trình $f(x)-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x-m>0$ nghiệm đúng với mọi $x\in(0;2)$ khi và chỉ khi

A. $m<f(0)$. **B.** $m<f(2)+\frac{22}{3}$. **C.** $m\le f(0)$. **D.** $m\le f(2)+\frac{22}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình $f(x)-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x-m>0\Leftrightarrow f(x)-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x>m(1)$

Xét $g(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x, x\in(0;2)$ có $g'(x)=f'(x)-x^2+2x+3$.

Ta thấy trên khoảng $(0;2)$ thì $f'(x)>-3$ và $-x^2+2x+3>3\Rightarrow g'(x)>0,\forall x\in(0;2)$.

Do đó $g(x)$ là hàm đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x\in(0;2)$ khi và chỉ khi $m\le g(0)=f(0)$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=\frac{2x-m^2}{x+1}$, với m là tham số. Gọi $m_1, m_2\ (m_1<m_2)$ là các giá trị của tham số m thỏa mãn $2\max\limits_{[0;2]}f(x)-\min\limits_{[0;2]}f(x)=8$. Tổng $2m_1+3m_2$ bằng

A. 1. **B.** -2. **C.** 4. **D.** -1.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x)=\frac{2+m^2}{(x+1)^2}>0,\forall x\in[0;2]$.

$\Rightarrow \underset{[0;2]}{Min}\, f(x)=f(0)=-m^2; \underset{[0;2]}{Max}\, f(x)=f(2)=\frac{4-m^2}{3}$

Do đó:

$2\max\limits_{[0;2]}f(x)-\min\limits_{[0;2]}f(x)=8\Leftrightarrow 2\left(\frac{4-m^2}{3}\right)+m^2=8$.

$\Leftrightarrow m^2-16=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-4\\m=4\end{array}\right.$

Vậy $2m_1+3m_2=2.(-4)+3.4=4$.

Câu 8: Một người thợ cần thiết kế một bể cá hình hộp chữ nhật bằng kính, có chiều cao là $0,8m$, thể tích $576dm^3$. Biết rằng phần nắp phía trên của bể cá người thợ đó để trống một ô có diện tích bằng 30% diện tích đáy bể. Biết rằng loại kính mà người thợ sử dụng làm mặt bên và nắp bể có giá thành 1000000 đồng/m^2 và kính để làm mặt đáy có giá thành 1200000 đồng/m^2. Giả sử phần tiếp xúc giữa các mặt là không đáng kể. Số tiền mua kính ít nhất để hoàn thành bể cá gần nhất với số tiền nào dưới đây?

A. $4,1$ triệu đồng. **B.** $3,2$ triệu đồng. **C.** $2,8$ triệu đồng. **D.** $3,8$ triệu đồng.

Lời giải

Chọn A

Đặt $x, y(m)(x, y>0)$ lần lượt là chiều dài và chiều rộng của đáy bể cá.

Ta có: $V = x.y.h = 0,8xy = 0,576\left(m^3\right) \Rightarrow y = \dfrac{18}{25x}$.

Số tiền cần để mua kính là: $\left[2.0,8(x+y)+\dfrac{70}{100}xy\right].1+xy.1,2$

$=1,6x+\dfrac{144}{125x}+\dfrac{171}{125}=f(x)$ (triệu đồng).

Ta có: $f'(x)=1,6-\dfrac{144}{125x^2}=\dfrac{200x^2-144}{125x^2}$; $f'(x)=0 \Rightarrow x=\dfrac{3\sqrt{2}}{5}(m)$.

Lập BBT của hàm $f(x)$, ta thấy $\min f(x)=f\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{5}\right)\approx 4,1$ triệu đồng.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như hình sau. Hàm số $g(x)=f\left(x^2+3x+1\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

A. $(0;1)$. **B.** $(-4;-2)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(-2;-1)$.

Lời giải

Chọn A

$g'(x)=(2x+3)\,f'\left(x^2+3x+1\right)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow (2x+3)\,f'\left(x^2+3x+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{3}{2} \\ x^2+3x+1=-1 \\ x^2+3x+1=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{3}{2} \\ x=-1 \\ x=-2 \\ x=0 \\ x=-3 \end{array}\right. .$$

Bảng xét dấu $g'(x)=(2x+3)\,f'\left(x^2+3x+1\right)$

x	$-\infty$	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0 $+$ 0	$-$	0	$+$	0 $-$ 0	$+$

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số $g(x)=f\left(x^2+3x+1\right)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	1	4	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0 $-$ 0	$-$	0	$+$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^3+2|x|-4\right)$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng xét dấu $f'(x)$ ta có hàm số $f(x)$ có 2 cực trị tại $x=-1$ và $x=4$.

Xét $g(x)=f\left(x^3+2|x|-4\right)=\begin{cases} f\left(x^3+2x-4\right) \text{ khi } x\geq 0 \\ f\left(x^3-2x-4\right) \text{ khi } x<0 \end{cases}$

$g'(x)=\begin{cases} \left(3x^2+2\right).f'\left(x^3+2x-4\right) \text{ khi } x\geq 0 \\ \left(3x^2-2\right).f'\left(x^3-2x-4\right) \text{ khi } x<0 \end{cases}$.

Xét $g'(x)=0$

TH1: $x\geq 0$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left(3x^2+2\right).f'\left(x^3+2x-4\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x^3+2x-4=-1 \\ x^3+2x-4=4 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x^3+2x-3=0 \\ x^3+2x-8=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1>0 \\ x\simeq 1,67>0 \end{array}\right.$$

Với $x\geq 0$ có 2 cực trị.

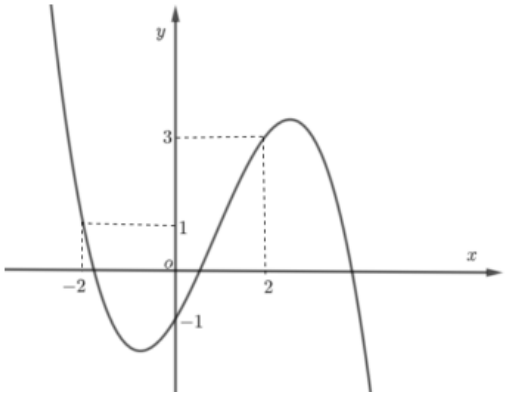
TH2: $x<0$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left(3x^2-2\right).f'\left(x^3-2x-4\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 3x^2-2=0 \\ x^3-2x-4=-1 \\ x^3-2x-4=4 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x^2=\frac{2}{3} \\ x^3-2x-3=0 \\ x^3-2x-8=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-\sqrt{\frac{2}{3}} \\ x=\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ (loại)} \\ x\simeq 1.89 \text{ (loại)} \\ x\simeq 2,33 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Với $x<0$ có 1 cực trị.

Vậy hàm số $g(x)=f\left(x^3+2|x|-4\right)$ có 3 cực trị.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn. Đồ thị hàm số $f'(x+2)$ được cho trong hình vẽ bên



Hàm số $g(x)=4f\left(x^2\right)-x^6+5x^4-4x^2+1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-4;-3)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-\sqrt{2};\sqrt{2})$. **D.** $(-2;-1)$.

Lời giải

$g(x)=4f\left(x^2\right)-x^6+5x^4-4x^2+1\Rightarrow g'(x)=8xf'\left(x^2\right)-6x^5+20x^3-8x$

$g'(x)=0\Leftrightarrow 8xf'\left(x^2\right)-6x^5+20x^3-8x=0\Leftrightarrow 2x\left[4f'\left(x^2\right)-3x^4+10x^2-4\right]=0$

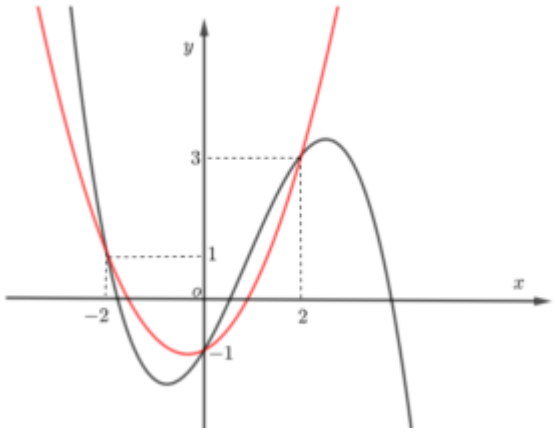
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=0\\4f'(x^2)-3x^4+10x^2-4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'\left(x^2\right)=\dfrac{3}{4}x^4-\dfrac{5}{2}x^2+1\end{array}\right.$$

Xét: $f'\left(x^2\right)=\dfrac{3}{4}x^4-\dfrac{5}{2}x^2+1$. Đặt $x^2=t+2$, ta có:

$$f'(t+2)=\frac{3}{4}(t+2)^2-\frac{5}{2}(t+2)+1=\frac{3}{4}\left(t^2+4t+4\right)-\frac{5}{2}(t+2)-1=\frac{3}{4}t^2+\frac{1}{2}t-1$$

Khi đó số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(t+2)$ và $y=\dfrac{3}{4}t^2+\dfrac{1}{2}t-1$

Ta có đồ thị ta có:



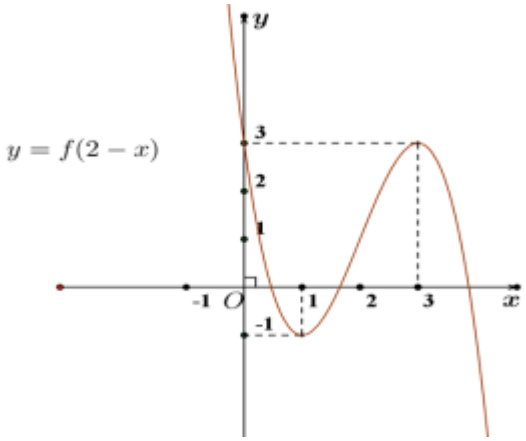
Dựa vào đồ thị ta có: $f'(t+2)=\dfrac{3}{4}t^2+\dfrac{1}{2}t-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\\t=0\\t=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+2=-2\\x+2=0\\x+2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-4\\x=-2\\x=0\end{array}\right.$

Ta có bảng xét dấu $g'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-4		-2		0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$		0	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy hàm số $g(x)=4f\left(x^2\right)-x^6+5x^4-4x^2+1$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

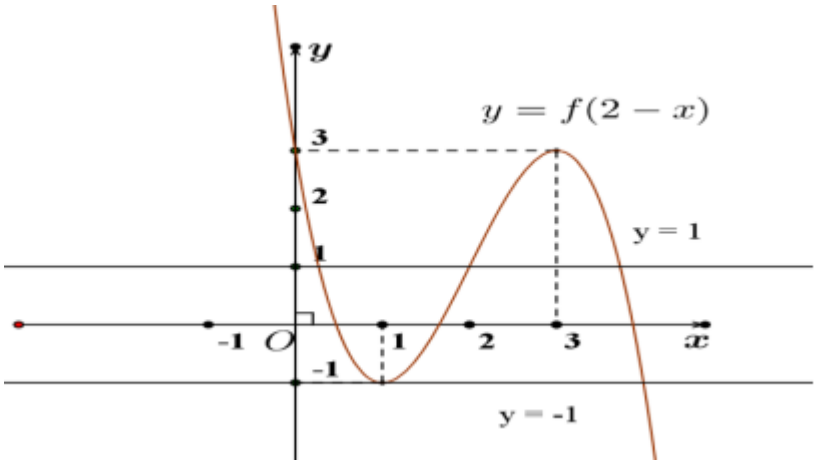
Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số bậc ba và có đồ thị $y=f(2-x)$ như hình vẽ.



Hỏi phương trình $\left|f\left(\left|x^2-2x\right|\right)\right|=1$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A. 8. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 6.

Lời giải



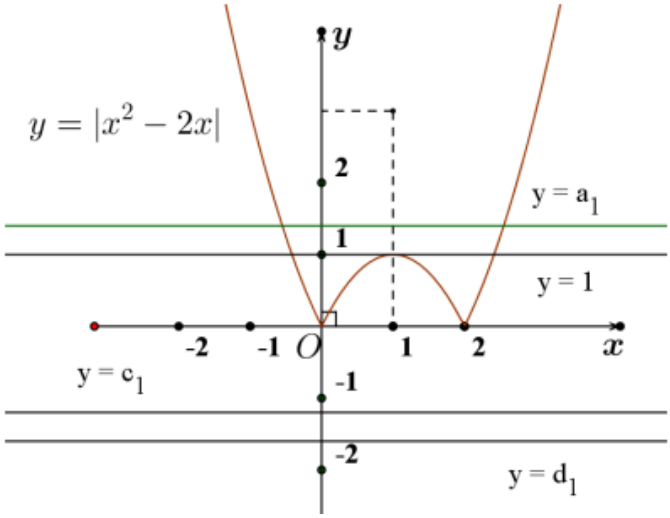
$$f(2-x)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-x=a(0<a<1)\\2-x=2\\2-x=c(c>3)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2-a=a_1\left(1<a_1<2\right)\\x=0\\x=2-c=c_1\left(c_1<-1\right)\end{array}\right.$$

$$f(2-x)=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-x=1\\2-x=d(d>c>3)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2-c=d_1\left(d_1<c_1<-1\right)\end{array}\right.$$

$$\left|f\left(\left|x^2-2x\right|\right)\right|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=1(1)\\f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=-1(2)\end{array}\right.$$

$$f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|x^2-2x\right|=a_1,(3)\left(1<a_1<2\right)\\\left|x^2-2x\right|=0(4)\\\left|x^2-2x\right|=c_1\left(c_1<-1\right)(VN)\end{array}\right.$$

$$f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|x^2-2x\right|=1(5)\\\left|x^2-2x\right|=d_1\left(d_1<c_1<-1\right)(VN)\end{array}\right.$$



Dựa vào đồ thị thì (3) có 2 nghiệm phân biệt, (4) có 2 nghiệm, (5) có 3 nghiệm.

Các nghiệm này khác nhau đôi 1. Vậy phương trình $\left|f\left(\left|x^2-2x\right|\right)\right|=1$ có 7 nghiệm.

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2\left(x^2-2x\right)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f\left(x^2-8x+m\right)$ có 5 điểm cực trị?

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Đặt $g(x)=f\left(x^2-8x+m\right)\Rightarrow g'(x)=(2x-4)\cdot f'\left(x^2-8x+m\right)$.

$f'(x)=(x-1)^2\left(x^2-2x\right)\Rightarrow g'(x)=(2x-8)\left(x^2-8x+m-1\right)^2\left(x^2-8x+m\right)\left(x^2-8x+m-2\right)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x^2-8x+m-1=0\\x^2-8x+m=0\\x^2-8x+m-2=0\end{array}\right.$$

Các phương trình $(1),(2),(3)$ không có nghiệm chung từng đôi một và $\left(x^2-8x+m-1\right)^2\geq 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$

Suy ra $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi (2) và (3) có hai nghiệm phân biệt khác 4

$$\Leftrightarrow\begin{cases}16-m>0\\16-m+2>0\\16-32+m\neq 0\\16-32+m-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<16\\m<18\\m\neq 16\\m\neq 18\end{cases}\Leftrightarrow m<16.$$

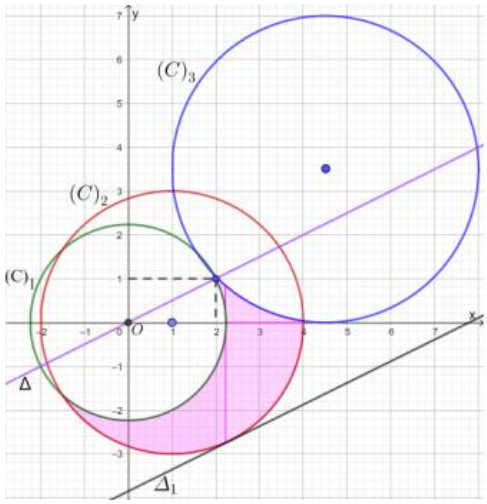
m nguyên dương và $m<16$ nên có 15 giá trị m cần tìm.

Câu 14: Cho các số thực x,y thoả mãn $\begin{cases}\max\{5;9x+7y-20\}\leq x^2+y^2\leq 2x+8\\y\leq 1\end{cases}$.Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x-2y$. Tính $M-m$

A. $1+3\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $1+2\sqrt{2}$. **D.** $2+3\sqrt{5}$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} x^2+y^2 \ge 5 \\ (x-1)^2+y^2 \le 9 \\ \left(x-\dfrac{9}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{7}{2}\right)^2 \ge \dfrac{25}{2} \end{cases}$.



Tập hợp điểm (x,y) thoả mãn yêu cầu bài là phần được tô trên hình vẽ kể cả biên. Ta thấy (C_1) cắt (C_3) tại hai điểm phân biệt trong đó có điểm $(2,1)$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Xét đường thẳng Δ đi qua (x,y) thoả mãn yêu cầu bài toán: $x-2y=c$.

$x-2y$ đạt GTNN khi Δ đi qua $(2,1)$ nên $m=0$.

$(C_2): x^2+y^2=2x+8 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=9$.

$+x-2y=(x-1)+(-2)y+1 \le \sqrt{\left(1+(-2)^2\right)\cdot 9}+1=3\sqrt{5}+1$.

$\Delta_1: x-2y-1-3\sqrt{5}=0.\Delta_1$ cắt (C_2) tại điểm thoả mãn bài toán.

Khi đó $M=3\sqrt{5}+1$.

Vậy $M-m=3\sqrt{5}+1$.

Câu 15: Cho hàm số $y=\dfrac{mx^2+(m+2)x+5}{x^2+1}$. Gọi S là tập hợp các giá trị của m sao cho đồ thị hàm số đã cho có đúng hai điểm cực trị và đường thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số cắt hai trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng $\dfrac{25}{4}$. Tính tổng các phần tử của S

A. 0. **B.** 1 **C.** -4 **D.** -2.

Lời giải

Ta có: $y=m+\dfrac{(m+2)x+5-m}{x^2+1} \Rightarrow y'=\dfrac{-(m+2)x^2+2(m-5)x+m+2}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Với $\forall m \ne -2$ ta có $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $\begin{cases} x_1x_2=-1 \\ x_1+x_2=\dfrac{2(m-5)}{m+2} \end{cases}$.

Mặt khác, đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là

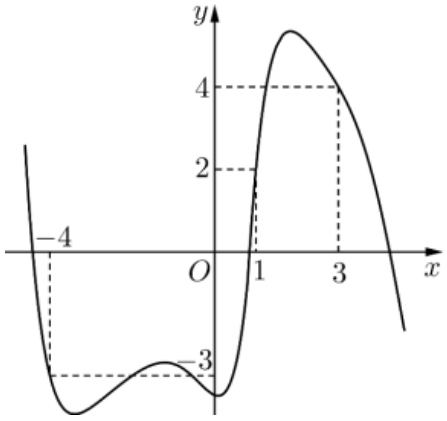
$\Delta: y=\dfrac{-2(m+2)x-4.5.1}{-4.1}=\dfrac{m+2}{2}x+5$.

Gọi $A=\Delta\cap Ox\Rightarrow A\left(-\dfrac{10}{m+2};0\right)$ và $B=\Delta\cap Oy\Rightarrow B(0;5)$.

Do đó: $S_{\Delta O.4B}=\dfrac{25}{4}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\cdot OB.OA=\dfrac{25}{4}\Leftrightarrow\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{10}{|m+2|}=\dfrac{25}{4}\Leftrightarrow|m+2|=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=-6\end{array}\right.$.

Do đó $m_1+m_2=-4$.

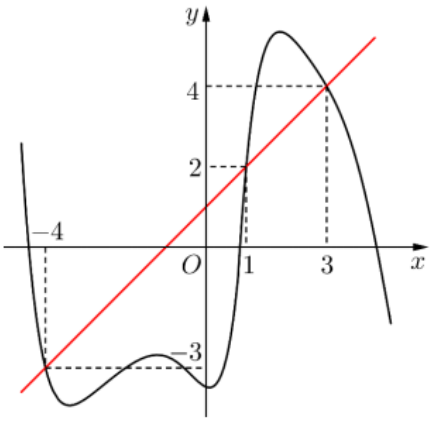
Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-4)=4$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Để giá trị lớn nhất của hàm số



$h(x)=f(x)-\dfrac{x^2}{2}-x+3m$ trên đoạn $[-4;3]$ không vượt quá 2022 thì tập giác trị của m là

A. $(-\infty;2022]$. **B.** $(674;+\infty)$. **C.** $(-\infty;674]$. **D.** $(2022;+\infty)$.

Lời giải



$h'(x)=f'(x)-(x+1)$

Trên $(-4;1), h'(x)<0$, trên $(1;3), h'(x)>0, h'(1)=0$

Hàm số $h(x)$ đạt cực tiểu trên đoạn $[-4;3]$ tại $x=1$

$a=h(-4)=3m; b=h(3)=f(3)-\dfrac{15}{2}+3m$

Gọi $S_1=\int_{-4}^{1}\left[(x-1)-f'(x)\right]dx; S_2=\int_{1}^{3}\left[f(x)-(x-1)\right]dx$

Nhận thấy

$S_1 > S_2 \Rightarrow \left(\frac{x^2}{2}+x-f(x)\right)\Big|_{-4}^{1} > \left(f(x)-\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_{1}^{3}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}-f(1)-4+f(-4) > f(3)-\frac{12}{2}-f(1) \Leftrightarrow f(-4) > f(3)-\frac{7}{2} \Rightarrow f(3) < \frac{15}{2}$

Vậy, $b < a, \max\limits_{x\in[-4;3]} h(x) = a \Rightarrow 3m \le 2022 \Leftrightarrow m \le 674$

Vậy, tập giá trị của m, là $(-\infty;674]$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2x^3 + (m-1)x^2 + 2x - m + 2022$, với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2021;2022]$ để hàm số $y = |f(x-2021) - 2022|$ có số điểm cực trị nhiều nhất?

A. 2021. **B.** 2022. **C.** 4040. **D.** 2023.

Lời giải

Hàm số $y = |f(x-2021) - 2022|$ có số điểm cực trị nhiều nhất là 7 khi và chỉ khi phương trình $f(x-2021) = 2022$ có 4 nghiệm phân biệt hay phương trình $f(x) = 2022$ có 4 nghiệm phân biệt

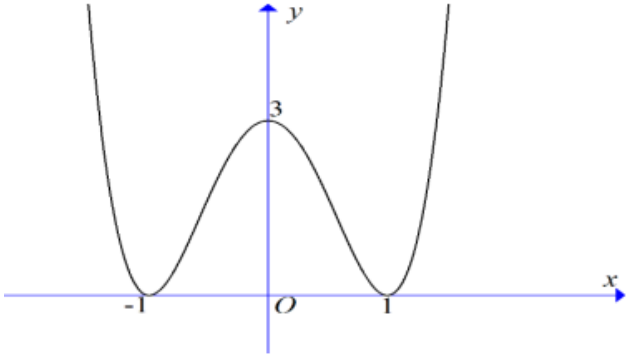
Ta có $f(x) = 2022 \Leftrightarrow x^4 - 2x^3 + (m-1)x^2 + 2x - m = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-1)\left[x^2 - 2x + m\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x^2 - 2x + m = 0 (*) \end{array}\right.$

Suy ra $f(x) = 2022$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác -1 và 1 tức là

$\begin{cases} 1 - m > 0 \\ 1^2 - 2 + m \ne 0 \\ 1^2 + 2 + m \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \ne -3 \end{cases}$ do m nguyên thuộc $[-2021;2022]$ nên có 2021 giá trị thỏa mãn.

Câu 18: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2021;2021]$ để phương trình $\left(f^2(x)+x^2\right)^2 - \left(m^2+2m+14\right)\left(f^2(x)+x^2\right) + 4(m+1)^2 + 36 = 0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt.

A. 2022. **B.** 4043. **C.** 4042. **D.** 2021.

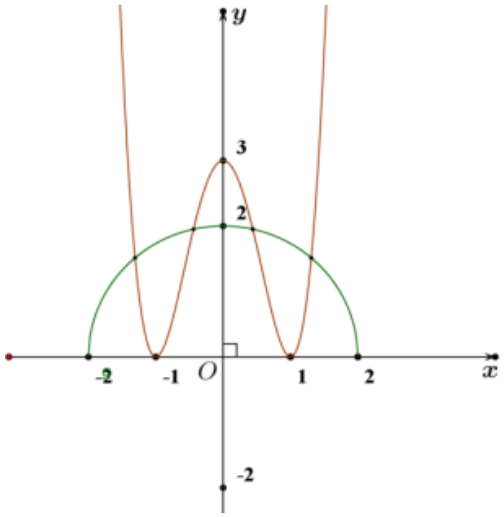
Lời giải

Đặt $t = f^2(x) + x^2, (t \ge 0)$ ta có phương trình

$t^2-\left(m^2+2m+14\right)t+4(m+1)^2+36=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=4\\t=m^2+2m+10\end{array}\right.$

+ Với $t=4$ hay $f^2(x)+x^2=4\Leftrightarrow f^2(x)=4-x^2\Rightarrow f(x)=\sqrt{4-x^2}$ (Do $f(x)\ge 0$).

Số nghiệm của phương trình $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ là số giao điểm của đường cong $y=f(x)$ và nửa đường tròn $C(O;2)$

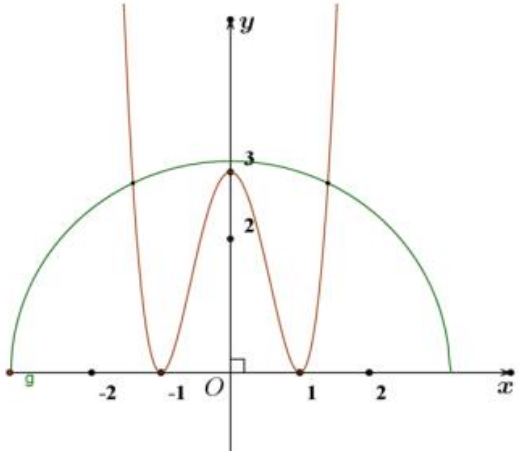


Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

$t=m^2+2m+10$ hay $f^2(x)+x^2=m^2+2m+10\Leftrightarrow f^2(x)=m^2+2m+10-x^2$

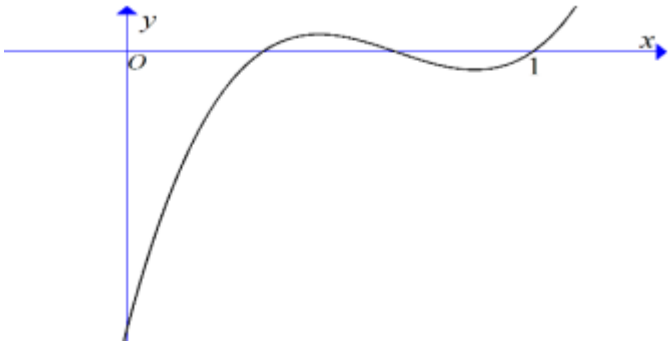
$\Rightarrow f(x)=\sqrt{m^2+2m+10-x^2}$ (Do $f(x)\ge 0$).

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đường cong $y=f(x)$ và nửa đường tròn $C\left(O;\sqrt{m^2+2m+10}\right)$



$\left(f^2(x)+x^2\right)^2-\left(m^2+2m+14\right)\left(f^2(x)+x^2\right)+4(m+1)^2+36=0$ chỉ có 6 nghiệm phân biệt thì phương trình $f(x)=\sqrt{m^2+2m+10-x^2}$ chỉ có 2 nghiệm phân biệt.Dựa vào đồ thị ta có điều kiện $m^2+2m+10>9\Leftrightarrow m^2+2m+1>0\Leftrightarrow m\ne -1$. Vậy có 4042 giá trị của $m\in[-2021;2021]$.

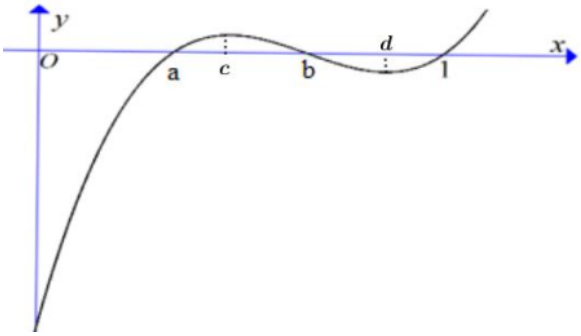
Câu 19: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f^2(g(x))$ với $g(x)=x^2-4x+2\sqrt{4x-x^2}$

A. 17. **B.** 21. **C.** 23. **D.** 19.

Lời giải



Xét hàm số $g(x)=x^2-4x+2\sqrt{4x-x^2}$:

TXĐ: $[0;4]$

$$g'(x)=2x-4+\frac{2(2-x)}{\sqrt{4x-x^2}}=2(x-2)\frac{\sqrt{4x-x^2}-1}{\sqrt{4x-x^2}},\forall x\in(0;4);$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\\sqrt{4x-x^2}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=2\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$$

$$y=f^2(g(x))\Rightarrow y'=2f(g(x))\cdot g'(x)f'(g(x));$$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(g(x))=0(1)\\g'(x)=0(2)\\f'(g(x))=0(3)\end{array}\right.$$

$$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}g(x)=a(4)\\g(x)=b(5)(0<a<b<1)\\g(x)=1(6)\end{array}\right.$$

$$(3)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}g(x)=c(7)\\g(x)=d(8)\end{array}\right.(0<a<c<b<d<1)$$

Mỗi phương trình $(4),(5),(7),(8)$ có 4 nghiệm phân biệt

Phương trình (6) có nghiệm kép $x=1$

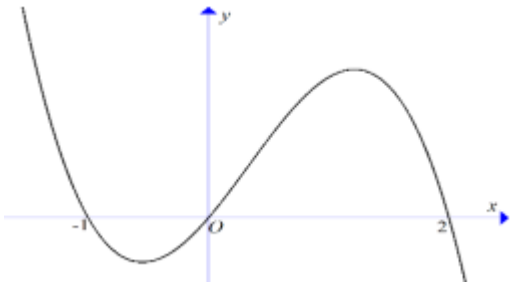
Phương trình (2) có 3 nghiệm phân biệt

Tất cả các nghiệm của các phương trình $(2),(4),(5),(7),(8)$ là phân biệt và y' đổi dấu qua các nghiệm đó.

y' không đổi dấu qua $x=1$.

Vậy hàm số đã cho có 19 điểm cực trị.

Câu 20: Cho hàm đa thức bậc bốn $y=f(x)$. Biết đồ thị của hàm số $y=f'(3-2x)$ được cho như hình vẽ



Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(1;5)$. **D.** $(5;+\infty)$.

Lời giải

Ta có: $f'(3-2x)=ax(x-1)(x-2)\quad (a<0)$.

Với $x=0$ thì $f'(3)=0$.

Với $x=1$ thì $f'(1)=0$.

Với $x=2$ thì $f'(-1)=0$.

Suy ra: $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=1\\x=-1\end{array}\right.$.

Với $x=-\dfrac{1}{2}$ thì $f'(4)>0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

Vậy hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;3)$.

Câu 21: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-5	↗	$+\infty$

Đặt $g(x)=|m+f(2022+x)|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=g(x)$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 6. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải

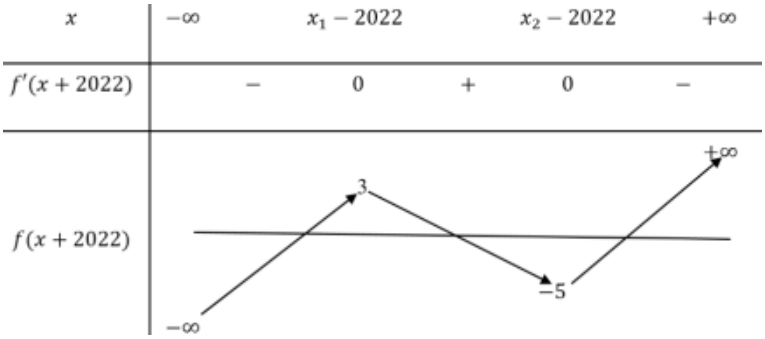
Đặt $h(x)=m+f(2022+x)$

Số điểm cực trị của $g(x)$ sẽ bằng số điểm cực trị của $h(x)$ cộng với số nghiệm bội lẻ của phương trình $h(x)=0$ (Nghiệm bội lẻ này phải khác điểm cực trị của hàm số).

Số điểm CT của $h(x)$ bằng số điểm CT của $f(x)$. Nên hàm số $h(x)$ có 2 điểm cực trị. Vậy để hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị thì pt $h(x)=0$, phải có 3 nghiệm lẻ phân biệt.

$h(x)=0 \Leftrightarrow f(x+2022)=-m.$

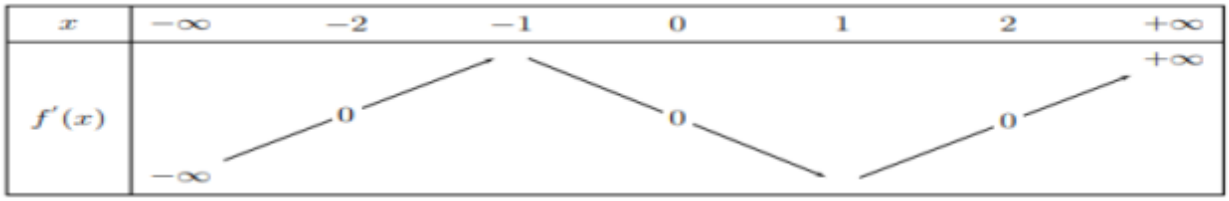
BBT của hàm số $y=f(x+2022)$:



Ycbt $-5<-m<3 \Leftrightarrow -3<m<5$. Do $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{-2;-1;\ldots;4\}$.

Vậy có 7 giá trị m thỏa mãn ycbt.

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(2x)-\sin^2 x$ trên đoạn $[-1;1]$ là

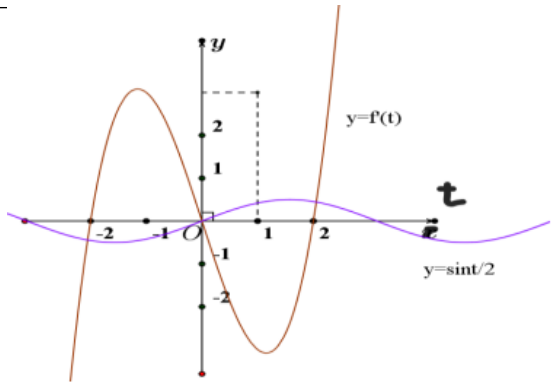


A. $f(1)$. **B.** $f(0)$. **C.** $f(2)$. **D.** $f(-1)$.

Lời giải

$g'(x)=2f'(2x)-2\sin x\cdot\cos x=2f'(2x)-\sin 2x.$ Đặt $t=2x \Rightarrow t\in[-2;2].$

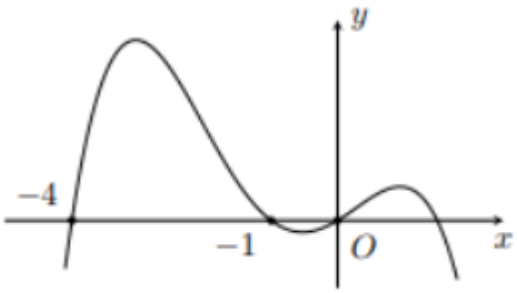
$g'(t)=0 \Leftrightarrow 2f'(t)-\sin t=0 \Leftrightarrow f'(t)=\dfrac{\sin t}{2}, \forall t\in[-2;2].$



t	-2		-1		0		1		2
$g'(t)$		+	|	+	0	-	|	-	
$g(t)$	$g(-2)$	↗		↗	$g(0)$	↘		↘	$g(2)$

Vậy giá trị lớn nhất là $g(0)=f(0)$

Câu 23: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị có 3 điểm cực trị như hình dưới đây. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x+2\right)$ là



A. 5. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 7.

Lời giải

Ta có $g'(x)=\left(3x^2-3\right)f'\left(x^3-3x+2\right)$, $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\x^3-3x+2=m_1\,(1)\\x^3-3x+2=m_2\,(2)\\x^3-3x+2=m_3\,(3)\end{array}\right.$

$m_1\in(-4;-1);m_2\in(-1;0);m_3\in(0;1)$

Xét hàm số $y=x^3-3x+2$, có $y'=3x^2-3$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

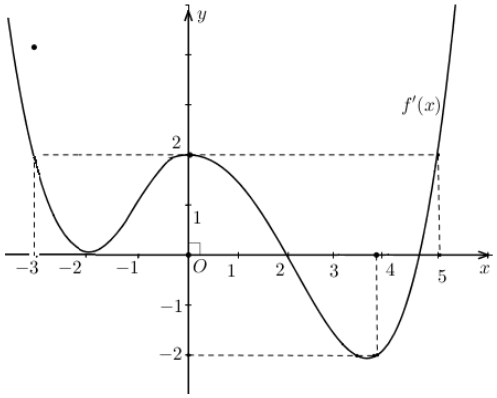
Với $m_1\in(-4;-1)\Rightarrow(1)$ có 1 nghiệm

Với $m_2 \in (-1;0) \Rightarrow (2)$ có 1 nghiệm

Với $m_3 \in (0;1) \Rightarrow (3)$ có 3 nghiệm phân biệt

Vậy $g'(x)=0$ có 7 nghiệm bội lẻ, nên có 7 điểm cực trị.

Câu 24: Cho hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $f(3)=2f(5)=4$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\frac{1}{2}f(x)-m\right)=2x+2m$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.



A. 8. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 7.

Lời giải

Đặt $\frac{1}{2}f(x)-m=u \Rightarrow \begin{cases} f(x)=2u+2m \\ f(u)=2x+2m \end{cases} \Rightarrow f(u)+2u=f(x)+2x$.

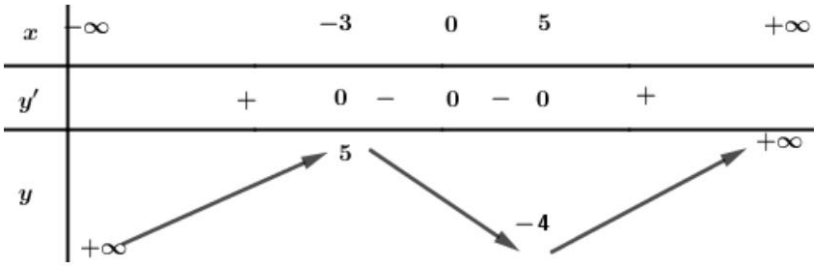
Xét hàm số $g(t)=f(t)+2t \Rightarrow g'(t)=f'(t)+2 \geq -2+2=0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow u=x \Leftrightarrow \frac{1}{2}f(x)-m=x \Leftrightarrow h(x)=\frac{1}{2}f(x)-x=m$.

Xét hàm số $h(x)=\frac{1}{2}f(x)-x \Rightarrow h'(x)=\frac{1}{2}f'(x)-1$.

$$\Rightarrow h'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}f'(x)=1 \Leftrightarrow f'(x)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \Rightarrow h(-3)=\frac{1}{2}f(-3)-(-3)=5 \\ x=0 \\ x=5 \Rightarrow h(5)=\frac{1}{2}f(5)-(5)=-4 \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)=\frac{1}{2}f(x)-x$ như sau:



Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra phương trình có 3 nghiệm khi $-4<m<5$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$

Vậy có 8 giá trị nguyên của m.

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+3)\left(x^2-2\right)\forall x\in\mathbb{R}$. Tìm tất cả các giá trị thực không âm của tham số m để hàm số $g(x)=f(|\sin x+\sqrt{3}\cos x|+m)$ có nhiều điểm cực trị nhất trên $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{11\pi}{12}\right]$.

A. $m\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$. **B.** $m\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$. **C.** $m\in(\sqrt{2}-1,\sqrt{2})$ **D.** $m\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right)$.

Lời giải

Có $f'(x)=0\Leftrightarrow(x+3)\left(x^2-2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=\sqrt{2}\\x=-\sqrt{2}\end{array}\right.$

$\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

$g'(x)=\left(\sqrt{\left[2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]^2}+m\right)'f'(|\sin x+\sqrt{3}\cos x|+m)$

$g'(x)=\frac{2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot 2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{\left[2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]^2}}\cdot f'\left(\left|2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|+m\right)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0\\f'\left(\left|2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|+m\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0\\\left|2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|+m=-3\\\left|2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|+m=\sqrt{2}\\\left|2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|+m=-\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Xét $u=\left|2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|$

x	$\frac{-\pi}{2}$		$\frac{-\pi}{3}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{11\pi}{12}$
$u=\left\|2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right\|$	1	↘	0	↗	2	↘	0	↗	$\sqrt{2}$

Để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì các phương trình $(1),(2),(3),(4)$ có nhiều nghiệm nhất $x\in\left[\frac{-\pi}{2};\frac{11\pi}{12}\right]$, suy ra $u=\left|2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|\in(0,1)$.

Khi đó $\begin{cases}0<-m-3<1\\0<\sqrt{2}-m<1\\0<-\sqrt{2}-m<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4<m<-3\\\sqrt{2}-1<m<\sqrt{2}\\-\sqrt{2}-1<m<-\sqrt{2}\end{cases}$. Vì $m\ge 0\Rightarrow m\in(\sqrt{2}-1,\sqrt{2})$.

Do đó $m\in(\sqrt{2}-1,\sqrt{2})$.

Câu 26: Hàm số $f(x)=10^x+x$ và $g(x)=x^3-mx^2+\left(m^2+1\right)x-2$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y=g(x+f(x))$ trên đoạn $[0;1]$. Khi M đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của m bằng?

A. $\frac{21}{2}$. **B.** 6. **C.** 21. **D.** 5.

Lời giải

Ta có: $f'(x)=10^x\ln 10+1>0,\forall x$

$g'(x)=3x^2-2mx+\left(m^2+1\right)>0,\forall x$ do $\Delta'=-2m^2-3<0.$

$y=g(x+f(x))=g\left(10^x+2x\right).$

$y'=\left[g\left(10^x+2x\right)\right]'=\left(10^x\ln 10+2\right)\cdot g'\left(10^x+2x\right)>0,\forall x\in[0;1].$

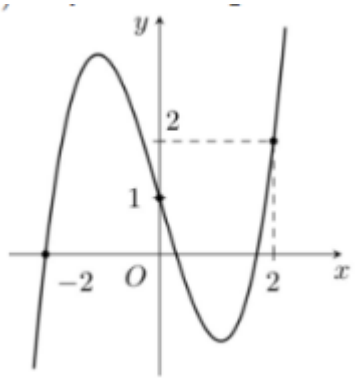
Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=1$ khi đó

$M=\underset{[0,1]}{\text{Max}}y=y(1)=g(12)=12^3-m\cdot 12^2+\left(m^2+1\right)\cdot 12-2$

$=12m^2-144m+1738=12\cdot(m-6)^2+1306\ge 1306$

M đạt giá trị nhỏ nhất khi $m=6$.

Câu 27: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $f'(\sqrt[3]{x})$ được cho trong hình bên:

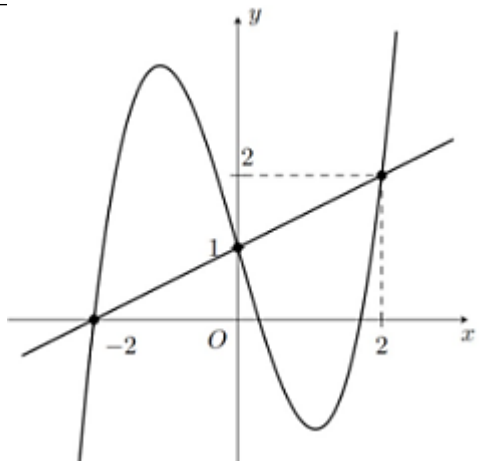


Hàm số $g(x)=\left|f(x)-\frac{1}{8}x^4-x\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực đại?

A. 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Xét hàm số $h(x)=f(x)-\frac{1}{8}x^4-x$ có $h'(x)=f'(x)-\frac{1}{2}x^3-1\Rightarrow h'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{2}x^3+1$.

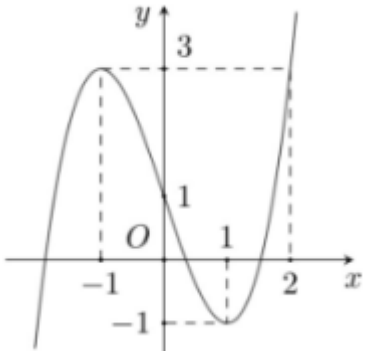


Đặt $x=\sqrt[3]{t}\Rightarrow f'(\sqrt[3]{t})=\frac{1}{2}t+1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\\t=0\\t=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\sqrt[3]{2}\\x=0\\x=\sqrt[3]{2}\end{array}\right.$ (đường thẳng $y=\frac{1}{2}x+1$ cắt đồ thị $f'(\sqrt[3]{x})$ tại 3 điểm có hoành độ $-2;0;2$). Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt[3]{2}$		0		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$		$h\left(-\sqrt[3]{2}\right)$		$h(0)$		$h\left(-\sqrt[3]{2}\right)$		$+\infty$

Suy ra $g(x)=|h(x)|$ có tối đa 3 điểm cực đại.

Câu 28: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(3-\sqrt{4-x^2}\right)=m$ có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$. Số phần tử của S là

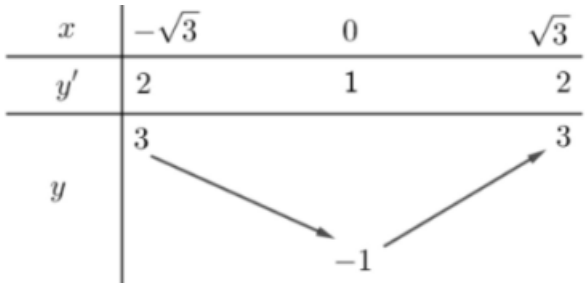
A. 1. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Xét $y=f\left(3-\sqrt{4-x^2}\right)\Rightarrow y'=\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}f'\left(3-\sqrt{4-x^2}\right)=0$

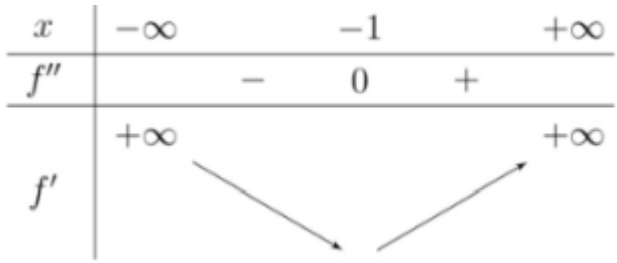
$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'(3-\sqrt{4-x^2})=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\3-\sqrt{4-x^2}=-1\\3-\sqrt{4-x^2}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow x=0$

Bảng biến thiên:



Vậy ycbt $\Leftrightarrow -1 < m \le 3 \Rightarrow m \in \{0,1,2,3\}$.

Câu 29: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-3; 2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để hàm số $y = f\left(x^2 + 2x - m\right)$ đồng biến trên $(-1;1)$.



A. 12. **B.** 14. **C.** 11. **D.** 13.

Lời giải

Từ bảng biến thiên của $f'(x)$ và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3; x = 2$ ta có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0

ycbt $\Leftrightarrow (2x+2) f'\left(x^2+2x-m\right) \ge 0, \forall x \in [-1;1]$

$\Leftrightarrow f'\left(x^2+2x-m\right) \ge 0, \forall x \in [-1;1]$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2x-m \ge 2, \forall x \in [-1;1] \\ x^2+2x-m \le -3, \forall x \in [-1;1] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le g(x) = x^2+2x-2, \forall x \in [-1;1] \\ m \ge h(x) = x^2+2x+3, \forall x \in [-1;1] \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le \min_{[-1;1]} g(x) = g(-1) = -3 \\ m \ge \max_{[-1;1]} h(x) = h(1) = 6 \end{array}\right. \Rightarrow m \in \{-10,\ldots,-3,6,\ldots,10\}$$

Câu 30: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'\left(x\right) = \left(x+3\right)\left(x-4\right)$. Tính tổng các giá trị nguyên của tham số $m \in \left[-10;5\right]$ để hàm số $y = f\left(\left|x^2-3x+m\right|\right)$ có nhiều điểm cực trị nhất?

A. 54. **B.** 9. **C.** -52. **D.** -54.

Lời giải

Chọn D

Theo bài: $y = f\left(\left|x^2-3x+m\right|\right) = f\left(\sqrt{\left(x^2-3x+m\right)^2}\right)$.

Ta có $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{\left(x^2-3x+m\right)^2}}(2x-3) f'\left(\sqrt{\left(x^2-3x+m\right)^2}\right) = \dfrac{(2x-3)}{2\left|x^2-3x+m\right|} f'\left(\left|x^2-3x+m\right|\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-3=0 \\ f'\left(\left|x^2-3x+m\right|\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2} \\ \left|x^2-3x+m\right|=-3 \ (\text{vô lí}) \\ \left|x^2-3x+m\right|=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2} \\ x^2-3x+m=4 \\ x^2-3x+m=-4 \end{array}\right.$$

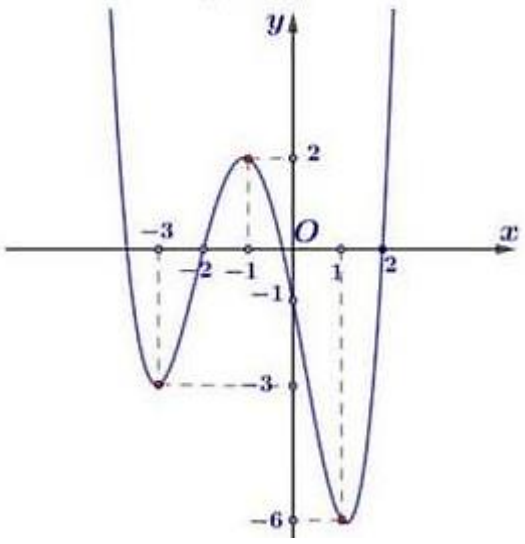
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2} \\ \left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{25}{4}-m \quad (1) \\ \left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2=-\dfrac{7}{4}-m \quad (2) \end{array}\right. .$$

Để hàm số $y=f\left(\left|x^2-3x+m\right|\right)$ có nhiều điểm cực trị nhất thì phương trình (1) và (2) có nhiều nghiệm nhất $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{25}{4}-m>0 \\ -\dfrac{7}{4}-m>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<\dfrac{25}{4} \\ m<-\dfrac{7}{4} \end{array}\right. \Rightarrow m<-\dfrac{7}{4}.$

Mặt khác m nguyên và $m\in[-10;5] \Rightarrow m\in\{-10;-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2\}$.

Vậy tổng các giá trị của m bằng -54.

Câu 31: Cho hàm số $y=f(x)$, đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(3x)+3x^2-4x+1$ trên đoạn $\left[\dfrac{-2}{3};\dfrac{2}{3}\right]$ bằng



A. $f(0)+1$. **B.** $f(6)$. **C.** $f(2)-\dfrac{1}{3}$. **D.** $f(-3)+8$.

Lời giải

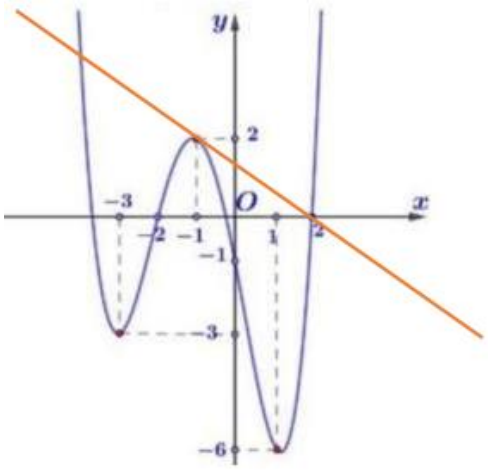
Chọn C

Ta có $g'(x)=3f'(3x)+6x-4 \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(3x)=-2x+\dfrac{4}{3} \Leftrightarrow f'(3x)=\dfrac{-2}{3}(3x)+\dfrac{4}{3}\ (1)$.

Đặt $3x=t \Leftrightarrow x=\dfrac{t}{3}$ vì $x\in\left[\dfrac{-2}{3};\dfrac{2}{3}\right]$ nên $t\in[-2;2]$.

Phương trình (1) trở thành $f'(t)=\frac{-2}{3}t+\frac{4}{3}$.

Vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ ta được:



Xét trên $[-2;2]$, $f'(t)=\frac{-2}{3}t+\frac{4}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=2\end{array}\right.$.

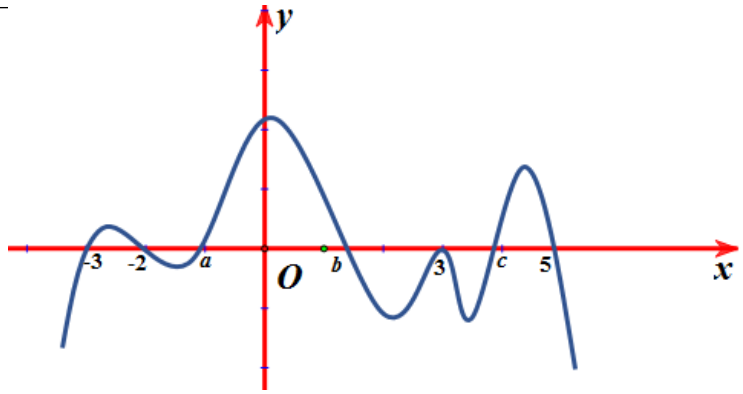
Do đó, trên $\left[-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right]$ có $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x=-1\\3x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{1}{3}\\x=\frac{2}{3}\end{array}\right.$

Bảng biến thiên hàm số $g(x)$ trên $\left[-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right]$

x	$-\frac{2}{3}$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
$g(x)$	$g\left(-\frac{2}{3}\right)$	↘		↘	$g\left(\frac{2}{3}\right)$

Từ bảng biến thiên, suy ra $\min\limits_{\left[\frac{-2}{3};\frac{2}{3}\right]}g(x)=g\left(\frac{2}{3}\right)=f(2)-\frac{1}{3}$.

Câu 32: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ $-3;-2;a;b;3;c;5$ với $-\frac{4}{3}<a<-1;1<b<\frac{4}{3};4<c<5$ có dạng như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=f\left(2|x|+m-2022\right)$ có 5 điểm cực trị?



A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

Hàm $y=f\left(2|x|+m-2022\right)$ là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$ nên số điểm cực trị của hàm đã cho bằng $2.n+1$, trong đó n là số điểm cực trị trên khoảng $(0;+\infty)$ của hàm $y=f\left(2x+m-2022\right)$

Xét hàm $y=f\left(2x+m-2022\right)$.

$$y'=2f'\left(2x+m-2022\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+m-2022=-3\\2x+m-2022=-2\\2x+m-2022=a\\2x+m-2022=b\\2x+m-2022=3\\2x+m-2022=c\\2x+m-2022=5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2019-m}{2}=x_1\\x=\dfrac{2020-m}{2}=x_2\\x=\dfrac{2022+a-m}{2}=x_3\\x=\dfrac{2022+b-m}{2}=x_4\\x=\dfrac{2025-m}{2}=x_5\\x=\dfrac{2022+c-m}{2}=x_6\\x=\dfrac{2027-m}{2}=x_7\end{array}\right.$$

Vì $x=3$ là nghiệm bội chẵn của phương trình $f'(x)=0$ nên $x=x_5$ cũng là nghiệm bội chẵn của phương trình $f'\left(2x+m-2022\right)=0$.

Hàm $y=f\left(2x+m-2022\right)$ có 6 điểm cực trị $x_1<x_2<x_3<x_4<x_6<x_7$.

Hàm $y=f\left(2|x|+m-2022\right)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow x_4\le 0<x_6\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{2022+b-m}{2}\le 0\\\dfrac{2022+c-m}{2}>0\end{array}\right.$

Vì $1<b<\dfrac{4}{3},4<c<5,m\in\mathbb{Z}\Rightarrow 2024\le m\le 2026\Rightarrow m\in\{2024;2025;2026\}$.

Câu 33: Tìm m để đường thẳng $y=2x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+1}$ tại hai điểm A,B sao cho độ dài AB là nhỏ nhất.

A. 2. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Gọi hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+1}$ có đồ thị là (C) và đường thẳng $y=2x+m$ có đồ thị là (d).

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d): $\dfrac{x+3}{x+1}=2x+m,\ \forall x\neq -1.$

$\Leftrightarrow x+3=2x^2+2x+mx+m \Leftrightarrow 2x^2+(m+1)x+m-3=0,\ \forall x\neq 1\ \ (1)$

Để (d) cắt (C) tại hai điểm $A,B \Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ g(-1)\neq 0\end{cases}$ với $g(x)=2x^2+(m+1)x+m-3$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(m+1)^2-4.2.(m-3)>0\\ -2\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow m^2-6m+25>0,\ \forall m.$

Giả sử hoành độ giao điểm của (C) và (d) là x_1,x_2. Khi đó $A(x_1;2x_1+m)\ B(x_2;2x_2+m)$.

Theo hệ thức Vi-ét ta có $x_1+x_2=-\dfrac{m+1}{2};\ x_1x_2=\dfrac{m-3}{2}$

Ta có $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(2x_2-2x_1)^2}=\sqrt{5(x_1-x_2)^2}=\sqrt{5(x_1+x_2)^2-20x_1x_2}$

$AB=\sqrt{5.\left(\dfrac{m+1}{2}\right)^2-20.\dfrac{m-3}{2}}=\sqrt{\dfrac{5m^2+10m+5-40m+120}{4}}=\dfrac{\sqrt{5(m-3)^2+80}}{2}\geq 2\sqrt{5}.$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m=3.$

Vậy $m=3$ thì độ dài AB đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt{5}.$

Câu 34: Cho hàm số $y=f(x)=2x^3+bx^2+cx+d$ thỏa mãn $4b+2c+d+16<0$ và $9b-3c+d>54$. Hàm số $y=|f(x)|$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=f(x)=2x^3+bx^2+cx+d$ liên tục trên $\mathbb{R}$ .Vì $f(2)=4b+2c+d+16<0$, $f(-3)=9b-3c+d-54>0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ nên phương trình $f(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt $x_1<-3<x_2<2<x_3$

Suy ra $y=f(x)$ có hai điểm cực trị $x_1<m<x_2<n<x_3$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	x_1	m	x_2	n	x_3	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$\lvert f(x)\rvert$	$\searrow$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

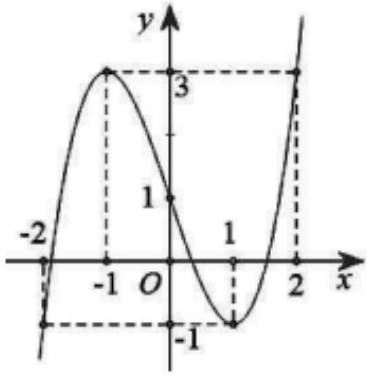
Vậy hàm số $y=|f(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các ía trị của tham số m sao cho phương trình $f(\sin x)=f(m+1)$ có nghiệm.

A. $-1\le m\le 3$. **B.** $-2\le m\le 0$. **C.** $-3\le m\le 1$. **D.** $-2\le m\le 2$.

Lời giải

Chọn C

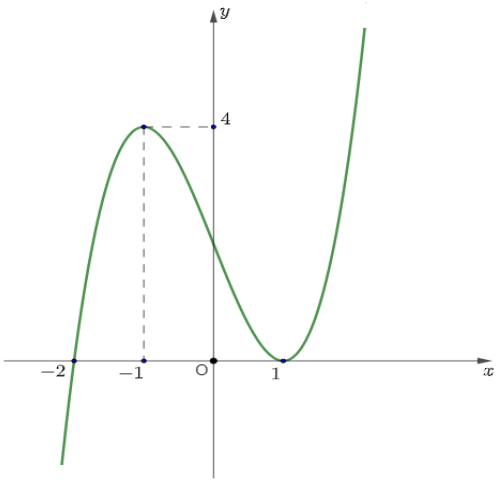


Ta có: $\sin x\in[-1;1]$ nên $f(\sin x)\in[-1;3]$.

nên $f(m+1)\in[-1;3]$. Do đó, phương trình phương trình $f(\sin x)=f(m+1)$ có nghiệm

$-1\le f(m+1)\le 3\Leftrightarrow -2\le m+1\le 2\Leftrightarrow -3\le m\le 1$.

Câu 36: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[0;20]$ để hàm số $g(x)=\left|f^2(x)-2f(x)-m\right|$ có 9 điểm cực trị?

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

Lời giải

Chọn A

Đặt $h(x)=f^2(x)-2f(x)-m\Rightarrow g(x)=\left|h(x)\right|$.

$h'(x)=2.f(x)f'(x)-2f'(x)=2.f'(x)\left[f(x)-1\right]$.

$$h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f(x)=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=a\in(-2;-1) \\ x=b\in(0;1) \\ x=c\in(1;+\infty) \end{array}\right.$$

Ta có $f(1)=0$, $f(-1)=4$, $f(a)=f(b)=f(c)=1$.

$\Rightarrow h(a)=h(b)=h(c)=-1-m$, $h(1)=-m$, $h(-1)=8-m$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} f^2(x)\left[1-\dfrac{2}{f(x)}-\dfrac{m}{f^2(x)}\right]=+\infty$.

Ta có BBT của $y=h(x)$:

x	$-\infty$		a		-1		b		1		c		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	$-1-m$	↗	$8-m$	↘	$-1-m$	↗	$-m$	↘	$-1-m$	↗	$+\infty$

Dựa vào BBT ta thấy hàm số $y=h(x)$ có 5 cực trị.

Hàm số $y=g(x)$ có 9 điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y=h(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt hoặc điểm $(1;-m)$ nằm trên trục hoành.

$\Leftrightarrow -m\le 0<8-m \Leftrightarrow 0\le m<8$.

Với m là số nguyên thì $m\in\{0;1;2;3;4;5;6;7\}$.

Suy ra có 8 giá trị của tham số m thỏa mãn điều kiện đề bài.

Câu 37: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)=-x^3+6x^2-32$. Khi đó hàm số $g(x)=f(x^2-3x)$ nghịch biến trên khoảng

A. $(-\infty;+\infty)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

+) $f'(t)=-(t+2)(t-4)^2$.

+) $g'(x)=\left[f(x^2-3x)\right]'=(x^2-3x)'.f'(x^2-3x)=(2x-3).f'(x^2-3x)$.

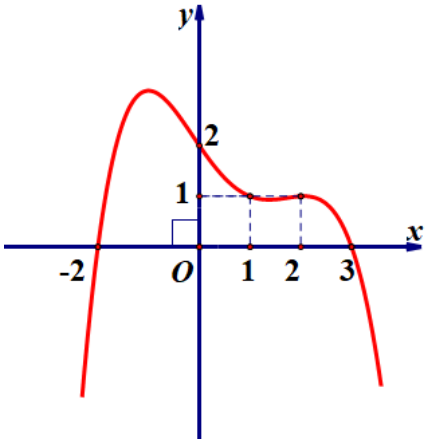
Suy ra:

*) $g'(x)=0\Leftrightarrow(2x-3).f'(x^2-3x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-3=0\\f'(x^2-3x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=3\\x^2-3x=-2\\x^2-3x=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}\\x=\pm1\\x=2\\x=4\end{array}\right.$

*) $g'(x)<0\Leftrightarrow(2x-3).f'(x^2-3x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-3<0\\f'(x^2-3x)>0\end{cases}\\\begin{cases}2x-3>0\\f'(x^2-3x)<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<\dfrac{3}{2}\\x^2-3x<-2\end{cases}\\\begin{cases}x>\dfrac{3}{2}\\x^2-3x>-2\end{cases}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<\dfrac{3}{2}\\1<x<2\end{cases}\\\begin{cases}x>\dfrac{3}{2}\\\left[\begin{array}{l}x<1\\x>2\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1<x<\dfrac{3}{2}\\x>2\end{array}\right.$.

Câu 38: Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên.



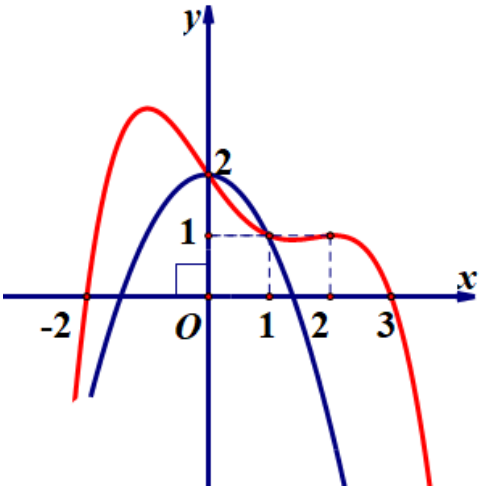
Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $f(2x)+\dfrac{8x^3}{3}-4x-m<0$ đúng với mọi $x\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$

A. $m>f(1)-\dfrac{5}{3}$. **B.** $m>f(0)$. **C.** $m\geq f(0)$. **D.** $m>f(3)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $g(x)=f(2x)+\dfrac{8x^3}{3}-4x$ ta có $g'(x)=2f'(2x)+8x^2-4$, giải phương trình $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(2x)=2-(2x)^2$.



Theo giả thiết chỉ xét $x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ nên $2x\in[-1;1]$, trên đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta vẽ thêm parabol $y=2-x^2$ ta có $f'(2x)=2-(2x)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=1\\2x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\x=0\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên $x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ như sau

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$		↗	$g(0)$	↘	$g(0.5)$	↗	$+\infty$

Ta có: $g(0)=f(2.0)+\frac{8.0^3}{3}-4.0=f(0)$ và $g\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(2.\frac{1}{2}\right)+\frac{8.\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3}-4.\frac{1}{2}=f(1)-\frac{5}{3}$

Nên ta có

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$		↗	$f(0)$	↘	$f(1)-\frac{5}{3}$	↗	$+\infty$

Từ YCBT cho ta mệnh đề

$$f(2x)+\frac{8x^3}{3}-4x-m<0,x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\Leftrightarrow g(x)<m,x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\Leftrightarrow m>f(0)$$

Câu 39: Cho x, y là các số thực dương và thỏa mãn $\frac{x^2+1}{\sqrt{y}}=\frac{y+1}{x}$. Giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $P=\frac{y+4}{x}$ là

A. $m=3$ **B.** $m=2\sqrt{2}$ **C.** $m=4$ **D.** $m=8$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\frac{x^2+1}{\sqrt{y}}=\frac{y+1}{x}\Leftrightarrow x^3+x=\left(\sqrt{y}\right)^3+\sqrt{y}$ (1).

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$, $t>0$ có $f'(t)=3t^2+1>0, \forall t>0$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

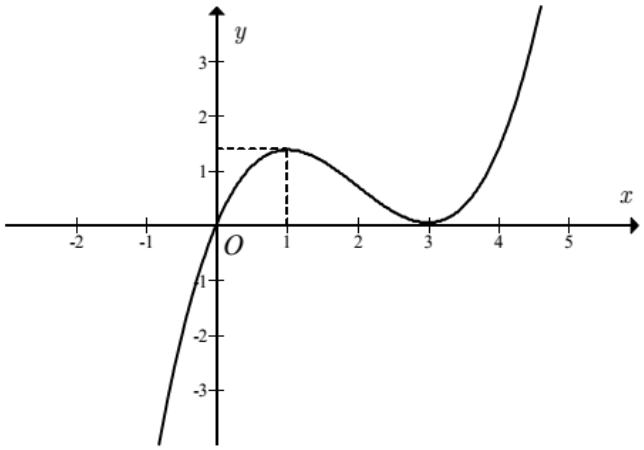
Do đó $(1)\Leftrightarrow x=\sqrt{y}\Leftrightarrow x^2=y$.

Khi đó: $P=\frac{y+4}{x}=\frac{x^2+4}{x}=x+\frac{4}{x}\geq 2.\sqrt{x.\frac{4}{x}}=4$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=\frac{4}{x}\Leftrightarrow x=2; y=4$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 4.

Câu 40: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc 3 có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-100;100]$ để hàm số $h(x)=\left|f^2(x)+4f(x)+3m\right|$ có đúng 3 điểm cực trị. Tổng tất cả các phần tử của S bằng



A. 5047. **B.** 5049. **C.** 5043. **D.** 5050.

Lời giải

Chọn B

Đặt $g(x)=f^2(x)+4f(x)+3m$; $g'(x)=2f(x).f'(x)+4f'(x)$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow 2f'(x)\left[f(x)+2\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f(x)=-2 \end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị ta thấy:

- Với $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$ (là 2 điểm cực trị của đồ thị $f(x)$)

- Với $f(x)=-2\Leftrightarrow x=a$ với $a\in(-1;0)$.

Suy ra hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Vậy để hàm số $h(x)=|g(x)|$ có đúng 3 điểm cực trị thì $\left[\begin{array}{l} g(x)\ge 0;\forall x\in\mathbb{R} \\ g(x)<0;\forall x\in\mathbb{R} \end{array}\right.$.

Đặt $t=f(x)$; $t\in\mathbb{R}$. Khi đó $\left[\begin{array}{l} g(x)\ge 0;\forall x\in\mathbb{R} \\ g(x)<0;\forall x\in\mathbb{R} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t^2+4t+3m\ge 0;\forall t\in\mathbb{R} & (1) \\ t^2+4t+3m<0;\forall t\in\mathbb{R} & (2) \end{array}\right.$

$(1)\Leftrightarrow \begin{cases} 1>0 \\ \Delta=16-12m\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\ge \dfrac{4}{3}$.

Vậy tập hợp tất cả các giá trị của m thỏa mãn là $\{2;3;4;...;100\}$.

(2) không xảy ra.

Tổng của tất cả các phần tử là $2+3+4+...+100=5049$.

Câu 41: Cho hàm số $f(x)=-x^4-(4-m^2)x+2020$ và $g(x)=-x^3+5x^2-2020x+2021$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để $h(x)=g[f(x)]$ đồng biến trên $(2;+\infty)$?

A. 7. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 13.

Lời giải

Chọn B

+) $h'(x)=f'(x)g'[f(x)]$.

Xét hàm $g(t)=-t^3+5t^2-2020t+2021\Rightarrow g'(t)=-3t^2+10t-2020<0,\quad \forall t\in\mathbb{R}$.

Suy ra $g'[f(x)]<0,\ \forall f(x)\in\mathbb{R}$.

$h(x)=g[f(x)]$ đồng biến trên $(2;+\infty)\Leftrightarrow h'(x)\ge 0$ với $\forall x\in(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow f'(x).g'[f(x)]\ge 0,\forall x\in(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow f'(x)g'[f(x)]\ge 0,\forall x\in(2;+\infty)$ (vì $g'[f(x)]<0\forall f(x)\in\mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow f'(x)\le 0,\forall x\in(2;+\infty)\ \Leftrightarrow -4x^3-4+m^2\le 0,\forall x\in(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow m^2\le 4x^3+4,\forall x\in(2;+\infty)\Rightarrow m^2\le \min\limits_{(2;+\infty)} f(x)$.

+) Xét hàm số $k(x)=4x^3+4$, $\forall x\in(2;+\infty)$

Bảng biến thiên của hàm số $k(x)=4x^3+4\Rightarrow k'(x)=12x^2\ge 0$ trên $(2;+\infty)$.

x	2		$+\infty$
$k'(x)$		$+$	
$k(x)$	36	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT suy ra $m^2\le 36\Leftrightarrow -6\le m\le 6$ thì hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Do m nguyên dương nên $m=\{1;2;3;4;5;6\}$ suy ra có 6 giá trị nguyên của tham số m.

Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ đồng thời thỏa điều kiện $f(0)>0$ và $\left[f(x)+6x\right]f(x)=9x^4+3x^2+4, \forall x\in\mathbb{R}$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(2x^2-3x+1\right)$ trên đoạn $[0;1]$.

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{17}{7}$. **C.** $\frac{155}{64}$. **D.** $\frac{167}{69}$.

Lời giải

Chọn C

Có $\left[f(x)+6x\right]f(x)=9x^4+3x^2+4 \Leftrightarrow \left[f(x)+3x\right]^2=\left(3x^2+2\right)^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)+3x=3x^2+2 \\ f(x)+3x=-3x^2-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=3x^2-3x+2 \\ f(x)=-3x^2-3x-2\ (l) \end{array}\right.$.

Đặt $t=2x^2-3x+1$, với $x\in[0;1]$ thì $t\in\left[-\frac{1}{8};1\right]$.

Xét hàm $g(t)=f(t)$ trên $\left[-\frac{1}{8};1\right]$, có $g'(t)=f'(t)=0 \Leftrightarrow 6t-3=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2}\in\left[-\frac{1}{8};1\right]$.

Có $g\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{155}{64}; g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}; g(1)=2$.

Suy ra, $\max\limits_{[0;1]} y=\max\limits_{\left[-\frac{1}{8};1\right]} g(t)=\frac{155}{64}$.