LỚP TOÁN THẦY CƯ- XÃ TẮC- TP HUẾ
Trung tâm Ứng dụng CN và dạy học MTC
SĐT: 0834 332 133



BÀI GIẢNG TOÁN 10

CHÂN TRỜI SÁNG TẠO

Phần | ĐẠI SỐ VÀ MỘT SỐ YẾU TỐ GIẢI TÍCH

Chương I MỆNH ĐỀ VÀ TẬP HỢP

Mệnh đề và tập hợp được coi là ngôn ngữ của toán học, là công cụ giúp con người diễn đạt các phát biểu toán học trở nên thống nhất, ngắn gọn, rõ ràng và chính xác.

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu về hai khái niệm mệnh đề và tập hợp, cũng như một số khái niệm cơ bản liên quan và làm quen với việc sử dụng chúng trong học tập và cuộc sống.



Sách ở thư viện được sắp xếp như thế nào để thuận tiện cho việc quản lí và tìm kiếm?

Học xong chương này, bạn có thể:

- Nhận biết và lấy được ví dụ về mệnh đề, mệnh đề phủ định, mệnh đề kéo theo, mệnh đề đảo, mệnh đề tương đương, mệnh đề chứa kí hiệu $\forall$ và $\exists$; sử dụng đúng các thuật ngữ điều kiện cần, điều kiện đủ, điều kiện cần và đủ.
- Xác định được tính đúng sai của mệnh đề trong những trường hợp đơn giản.
- Nhận biết được các khái niệm cơ bản về tập hợp (tập hợp, phần tử, tập con, hai tập hợp bằng nhau, tập rỗng); sử dụng đúng các kí hiệu $\in$, $\subset$, $\supset$, $\varnothing$.
- Thực hiện được phép toán trên tập hợp (hợp, giao, hiệu của hai tập hợp, phần bù của tập con); minh hoạ được bằng biểu đồ Ven.
- Giải quyết được một số vấn đề thực tiễn liên quan đến số phần tử của tập hợp và các phép toán trên tập hợp.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Bài 1. Mệnh đề

Từ khoá: Mệnh đề; Mệnh đề phủ định; Mệnh đề kéo theo; Mệnh đề đảo; Mệnh đề tương đương; Mệnh đề chứa kí hiệu ∀, ∃; Điều kiện cần; Điều kiện đủ; Điều kiện cần và đủ.

Hãy theo dõi tình huống sau đây:



Bạn có thể phát biểu định lí theo cách khác?

Sau bài học này, bạn còn có thể đưa ra những cách phát biểu khác nữa.

1. Mệnh đề

1 Xét các câu sau đây:

(1) $1 + 1 = 2$.

(2) Dân ca Quan họ là di sản văn hoá phi vật thể đại diện của nhân loại.

(3) Dơi là một loài chim.

(4) Nấm có phải là một loài thực vật không?

(5) Hoa hồng đẹp nhất trong các loài hoa.

(6) Trời ơi, nóng quá!

Trong những câu trên,



Hình 1. Hát đối Quan họ

a) Câu nào là khẳng định đúng, câu nào là khẳng định sai?

b) Câu nào không phải là khẳng định?

c) Câu nào là khẳng định, nhưng không thể xác định nó đúng hay sai?

Trong khoa học cũng như trong đời sống hằng ngày, người ta thường dùng các câu nêu lên một khẳng định. Những khẳng định có tính hoặc đúng hoặc sai, như các câu (1), (2), (3) ở trên, được gọi là mệnh đề logic (hay mệnh đề).

Mệnh đề là một khẳng định đúng hoặc sai.

Một khẳng định đúng gọi là ***mệnh đề đúng***.

Một khẳng định sai gọi là ***mệnh đề sai***.

Một mệnh đề không thể vừa đúng vừa sai.

Chú ý: Người ta thường sử dụng các chữ cái in hoa $P, Q, R, \ldots$ để kí hiệu mệnh đề.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Ví dụ 1

Trong các câu sau đây, câu nào là mệnh đề?

a) 3 là số lẻ; b) $1 + 2 > 3$;

c) π là số vô tỉ phải không? d) 0,0001 là số rất bé;

e) Đến năm 2050, con người sẽ đặt chân lên Sao Hoả.

Giải

a) "3 là số lẻ" là mệnh đề (là mệnh đề đúng).

b) "$1 + 2 > 3$" là mệnh đề (là mệnh đề sai).

c) "π là một số vô tỉ phải không?" là câu hỏi, không phải mệnh đề.

d) Câu "0,0001 là số rất bé" không có tính hoặc đúng hoặc sai (do không đưa ra tiêu chí thế nào là số rất bé). Do đó, nó không phải là mệnh đề.

e) "Đến năm 2050, con người sẽ đặt chân lên Sao Hoả" là một khẳng định chưa thể chắc chắn là đúng hay sai. Tuy nhiên, nó chắc chắn chỉ có thể hoặc đúng hoặc sai. Do đó, nó là một mệnh đề.

Chú ý: Những mệnh đề liên quan đến toán học (như các mệnh đề ở câu a) và b) trong Ví dụ 1) còn được gọi là ***mệnh đề toán học***.

1 Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề?

a) $\sqrt{2}$ là số vô tỉ; b) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{10}}>2$;

c) 100 tỉ là số rất lớn; d) Trời hôm nay đẹp quá!

2 Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Vịnh Hạ Long là di sản thiên nhiên thế giới;

b) $\sqrt{(-5)^2}=-5$;

c) $5^2+12^2=13^2$.



Hình 2. Vịnh Hạ Long

2. Mệnh đề chứa biến

2 Xét câu "n chia hết cho 5" (n là số tự nhiên).

a) Có thể khẳng định câu trên là đúng hay sai không?

b) Tìm hai giá trị của n sao cho câu trên là khẳng định đúng, hai giá trị của n sao cho câu trên là khẳng định sai.

Câu "n chia hết cho 5" là một khẳng định, nhưng không là mệnh đề, vì khẳng định này có thể đúng hoặc sai, tuỳ theo giá trị của n. Tuy vậy, khi thay n bằng một số tự nhiên cụ thể thì ta nhận được một mệnh đề. Người ta gọi "n chia hết cho 5" là một ***mệnh đề chứa biến*** (biến n), kí hiệu $P(n)$. Ta viết $P(n)$: "n chia hết cho 5" (n là số tự nhiên).

Một mệnh đề chứa biến có thể chứa một biến hoặc nhiều biến.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đinh Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Ví dụ 2

Cho các mệnh đề chứa biến:

a) $P(x)$: "$2x = 1$";

b) $R(x, y)$: "$2x + y = 3$" (mệnh đề này chứa hai biến x và y);

c) $T(n)$: "$2n + 1$ là số chẵn" (n là số tự nhiên).

Với mỗi mệnh đề chứa biến trên, tìm những giá trị của biến để nhận được một mệnh đề đúng và một mệnh đề sai.

Giải

a) Với $x = \frac{1}{2}$ thì $P\left(\frac{1}{2}\right)$: "$2 \cdot \frac{1}{2} = 1$" là mệnh đề đúng.

Với $x = 1$ thì $P(1)$: "$2 \cdot 1 = 1$" là mệnh đề sai.

b) Với $x = 1, y = 1$ thì $R(1, 1)$: "$2 \cdot 1 + 1 = 3$" là mệnh đề đúng.

Với $x = 1, y = 2$ thì $R(1, 2)$: "$2 \cdot 1 + 2 = 3$" là mệnh đề sai.

c) Lấy số tự nhiên n_0 bất kì ta đều được $2n_0 + 1$ là một số lẻ, nghĩa là $T(n_0)$: "$2n_0 + 1$ là số chẵn" là mệnh đề sai. Do đó, không có giá trị n_0 của n để $T(n_0)$ là mệnh đề đúng. $T(n_0)$ là mệnh đề sai với số tự nhiên n_0 bất kì.

Với mỗi mệnh đề chứa biến sau, tìm những giá trị của biến để nhận được một mệnh đề đúng và một mệnh đề sai.

a) $P(x)$: "$x^2 = 2$";

b) $Q(x)$: "$x^2 + 1 > 0$";

c) $R(n)$: "$n + 2$ chia hết cho 3" (n là số tự nhiên).

3. Mệnh đề phủ định

Xét các cặp mệnh đề nằm cùng dòng của bảng (có hai cột P và $\overline{P}$) sau đây:

P	$\overline{P}$
Dơi là một loài chim.	Dơi không phải là một loài chim.
π không phải là một số hữu tỉ.	π là một số hữu tỉ.
$\sqrt{2} + \sqrt{3} > \sqrt{5}$.	$\sqrt{2} + \sqrt{3} \le \sqrt{5}$.
$\sqrt{2}.\sqrt{18} = 6$.	$\sqrt{2}.\sqrt{18} \ne 6$.

Nêu nhận xét về tính đúng sai của hai mệnh đề cùng cặp.

Với từng cặp mệnh đề P và $\overline{P}$ ở , ta thấy chúng có tính đúng sai trái ngược nhau (P đúng thì $\overline{P}$ sai và ngược lại). Ta nói mệnh đề $\overline{P}$ là ***mệnh đề phủ định*** (hoặc ***phủ định***) của mệnh đề P.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Nhận xét: Thông thường, để phủ định một mệnh đề, người ta thường thêm (hoặc bớt) từ "không" hoặc "không phải" vào trước vị ngữ của mệnh đề đó, như hai cặp mệnh đề đầu tiên ở 3. Tuy nhiên, ta cũng thường gặp cách diễn đạt khác, như hai cặp mệnh đề sau ở 3.

Mỗi mệnh đề P có mệnh đề phủ định, kí hiệu là $\overline{P}$.

Mệnh đề P và mệnh đề phủ định $\overline{P}$ của nó có tính đúng sai trái ngược nhau. Nghĩa là khi P đúng thì $\overline{P}$ sai, khi P sai thì $\overline{P}$ đúng.

Ví dụ 3

Phát biểu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau:

P: "Tháng 12 dương lịch có 31 ngày";

Q: "$9^{10} \geq 10^9$";

R: "Phương trình $x^2 + 1 = 0$ có nghiệm".

Giải

Mệnh đề phủ định của các mệnh đề trên là:

$\overline{P}$: "Không phải tháng 12 dương lịch có 31 ngày";

$\overline{Q}$: "$9^{10} < 10^9$";

$\overline{R}$: "Phương trình $x^2 + 1 = 0$ vô nghiệm".

4 Phát biểu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau. Xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề và mệnh đề phủ định của nó.

a) Paris là thủ đô của nước Anh;

b) 23 là số nguyên tố;

c) 2021 chia hết cho 3;

d) Phương trình $x^2 - 3x + 4 = 0$ vô nghiệm.

4. Mệnh đề kéo theo

4 Xét hai mệnh đề sau:

(1) Nếu ABC là tam giác đều thì nó là tam giác cân;

(2) Nếu $2a - 4 > 0$ thì $a > 2$.

a) Xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề trên.

b) Mỗi mệnh đề trên đều có dạng "Nếu P thì Q". Chỉ ra P và Q ứng với mỗi mệnh đề đó.

Chân trời sáng tạo

Mỗi mệnh đề ở 4 đều có dạng "Nếu P thì Q". Chúng là những mệnh đề kéo theo.

Cho hai mệnh đề P và Q. Mệnh đề "Nếu P thì Q" được gọi là ***mệnh đề kéo theo***, kí hiệu là $P \Rightarrow Q$.

Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng và Q sai.

Nhận xét:

a) Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ còn được phát biểu là "P kéo theo Q" hoặc "Từ P suy ra Q".

b) Để xét tính đúng sai của mệnh đề $P \Rightarrow Q$, ta chỉ cần xét trường hợp P đúng. Khi đó, nếu Q đúng thì mệnh đề đúng, nếu Q sai thì mệnh đề sai. Ta đã quen với điều này khi chứng minh nhiều định lí ở Trung học cơ sở.

Ví dụ 4

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) R: "Nếu tam giác ABC có hai góc bằng $60°$ thì nó là tam giác đều";

b) T: "Từ $-3 < -2$ suy ra $(-3)^2 < (-2)^2$".

Giải

a) R là mệnh đề có dạng $P \Rightarrow Q$, với P: "Tam giác ABC có hai góc bằng $60°$" và Q: "Tam giác ABC là tam giác đều". Ta thấy khi P đúng thì Q cũng đúng. Do đó, $P \Rightarrow Q$ đúng hay R đúng.

b) T là mệnh đề có dạng $P \Rightarrow Q$, với P: "$-3 < -2$" và Q: "$(-3)^2 < (-2)^2$" (hay "$9 < 4$"). Ta thấy mệnh đề P đúng, còn mệnh đề Q sai. Do đó, $P \Rightarrow Q$ sai. Vậy T là mệnh đề sai.

Trong toán học, ***định lí*** là mệnh đề đúng. Các định lí trong toán học thường có dạng $P \Rightarrow Q$.

Khi mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là định lí, ta nói:

P là ***giả thiết***, Q là ***kết luận*** của định lí;

P là ***điều kiện đủ*** để có Q;

Q là ***điều kiện cần*** để có P.

Ví dụ 5

Sử dụng các thuật ngữ "điều kiện cần", "điều kiện đủ" để phát biểu lại định lí: "Nếu tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật thì hai đường chéo bằng nhau".

Giải

Ta có thể phát biểu lại định lí đã cho như sau:

"Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo bằng nhau là điều kiện cần để nó là hình chữ nhật" hoặc "Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật là điều kiện đủ để hai đường chéo bằng nhau".

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Xét hai mệnh đề:

P: "Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ bằng nhau";

Q: "Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có diện tích bằng nhau".

a) Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

b) Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ có phải là một định lí không? Nếu có, sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần", "điều kiện đủ" để phát biểu định lí này theo hai cách khác nhau.

5. Mệnh đề đảo. Hai mệnh đề tương đương

Xét hai mệnh đề dạng $P \Rightarrow Q$ sau:

"Nếu tam giác ABC là đều thì nó có hai góc bằng 60°";

"Nếu $a^2 - 4 = 0$ thì $a = 2$".

a) Chỉ ra P, Q và xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề trên.

b) Với mỗi mệnh đề đã cho, phát biểu mệnh đề $Q \Rightarrow P$ và xét tính đúng sai của nó.

Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là ***mệnh đề đảo*** của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

Chú ý: Mệnh đề đảo của một mệnh đề đúng không nhất thiết là đúng.

Nếu cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng thì ta nói P và Q là ***hai mệnh đề tương đương***, kí hiệu là $P \Leftrightarrow Q$ (đọc là "*P tương đương Q*" hoặc "*P khi và chỉ khi Q*").

Khi đó, ta cũng nói P là ***điều kiện cần và đủ*** để có Q (hay Q là điều kiện cần và đủ để có P).

Nhận xét: Hai mệnh đề P và Q tương đương khi chúng cùng đúng hoặc cùng sai.

Ví dụ 6

Xét hai mệnh đề:

P: "Tam giác ABC vuông tại A";

Q: "Tam giác ABC có $AB^2 + AC^2 = BC^2$".

Hai mệnh đề P và Q có tương đương không? Nếu có, hãy phát biểu một định lí thể hiện điều này, trong đó có sử dụng thuật ngữ "khi và chỉ khi" hoặc "điều kiện cần và đủ".

Giải

Theo định lí Pythagore, hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng. Do đó, P và Q là hai mệnh đề tương đương. Ta có thể phát biểu thành định lí như sau:

"Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $AB^2 + AC^2 = BC^2$"

hoặc "Để tam giác ABC vuông tại A, điều kiện cần và đủ là $AB^2 + AC^2 = BC^2$".

6 Xét hai mệnh đề:

P: "Tứ giác $ABCD$ là hình vuông";

Q: "Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau".

a) Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và mệnh đề đảo của nó.

b) Hai mệnh đề P và Q có tương đương không? Nếu có, sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần và đủ" hoặc "khi và chỉ khi" để phát biểu định lí $P \Leftrightarrow Q$ theo hai cách khác nhau.

6. Mệnh đề chứa kí hiệu ∀, ∃

6 Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

(1) Với mọi số tự nhiên x, $\sqrt{x}$ là số vô tỉ;

(2) Bình phương của mọi số thực đều không âm;

(3) Có số nguyên cộng với chính nó bằng 0;

(4) Có số tự nhiên n sao cho $2n - 1 = 0$.

Trong toán học, để ngắn ngọn, người ta dùng các kí hiệu $\forall$ (đọc là *với mọi*) và $\exists$ (đọc là *tồn tại*) để phát biểu những mệnh đề như ở **6**. Chẳng hạn, có thể viết lại các mệnh đề trên lần lượt như sau:

(1) $\forall x \in \mathbb{N}$, $\sqrt{x}$ là số vô tỉ;

(2) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$;

(3) $\exists x \in \mathbb{Z}, x + x = 0$;

(4) $\exists n \in \mathbb{N}, 2n - 1 = 0$.

Ta nói (1), (2) là ***mệnh đề chứa kí hiệu*** $\forall$; (3), (4) là ***mệnh đề chứa kí hiệu*** $\exists$.

Tổng quát hơn, có thể phát biểu hai loại mệnh đề này như sau:

"$\forall x \in M, P(x)$" và "$\exists x \in M, P(x)$",

với M là một tập hợp, $P(x)$ là một mệnh đề chứa biến nào đó.

Mệnh đề "$\forall x \in M, P(x)$" đúng nếu với mọi $x_0 \in M$, $P(x_0)$ là mệnh đề đúng.

Mệnh đề "$\exists x \in M, P(x)$" đúng nếu có $x_0 \in M$ sao cho $P(x_0)$ là mệnh đề đúng.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Ví dụ 7

Xét tính đúng sai và viết mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau:

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 2 > 0$; b) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 4 = 0$.

Giải

a) Mệnh đề đúng, vì $x^2 + 2x + 2 = (x^2 + 2x + 1) + 1 = (x + 1)^2 + 1 > 0$ với mọi số thực x.

Mệnh đề phủ định của mệnh đề này là: $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 2 \le 0$.

b) Mệnh đề sai, vì phương trình $x^2 + 3x + 4 = 0$ vô nghiệm ($\Delta = -7 < 0$).

Mệnh đề phủ định của mệnh đề này là: $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 4 \ne 0$.

7 Sử dụng kí hiệu $\forall$, $\exists$ để viết các mệnh đề sau:

a) Mọi số thực cộng với số đối của nó đều bằng 0;

b) Có một số tự nhiên mà bình phương bằng 9.

8 Xét tính đúng sai và viết mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau:

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$; b) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 5x - 4$; c) $\exists x \in \mathbb{Z}, 2x + 1 = 0$.

Dạng 1: Nhận biết mệnh đề, mệnh đề chứa biến

1. Phương pháp

Mệnh đề là một câu khẳng định đúng hoặc một câu khẳng định sai.

- Một câu khẳng định đúng được gọi là một mệnh đề đúng, một câu khẳng định sai được gọi là mệnh đề sai.
- Câu hỏi, câu cảm tháng, câu mệnh lệnh hoặc câu chưa xác định được tính đúng sai thì không phải là mệnh đề.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Các câu sau đây, câu nào là mệnh đề, câu nào không phải là mệnh đề? Nếu là mệnh đề hãy cho biết mệnh đề đó đúng hay sai.

(1) Ở đây đẹp quá!

(2) Phương trình $x^2 - 3x + 1 = 0$ vô nghiệm

(3) 16 không là số nguyên tố

(4) Hai phương trình $x^2 - 4x + 3 = 0$ và $x^2 - \sqrt{x + 3} + 1 = 0$ có nghiệm chung.

(5) Số π có lớn hơn 3 hay không?

(6) Italia vô địch Worldcup 2006

(7) Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng có diện tích bằng nhau.

Lời giải

Câu (1) và (5) không là mệnh đề(vì là câu cảm thán, câu hỏi)

Các câu (3), (4), (6), là những mệnh đề đúng

Câu (2) và (7) là những mệnh đề sai.

Ví dụ 1: Cho các phát biểu sau, có bao nhiêu phát biểu là mệnh đề?

a) Hà Nội là thủ đô của Việt Nam.
b) $x \in \mathbb{R}, x+2>5.$
c) $x-6 \le 5.$
d) Phương trình $x^2-6x+5=0$ có nghiệm.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B.

Câu b), c) là mệnh đề chứa biến.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Phát biểu nào sau đây là một mệnh đề?

A. Mùa thu Hà Nội đẹp quá!

B. Bạn có đi học không?

C. Đề thi môn Toán khó quá!

D. Hà Nội là thủ đô của Việt Nam.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phát biểu ở A, B, C là câu cảm và câu hỏi nên không là mệnh đề.

Câu 2. Câu nào sau đây không là mệnh đề?

A. Tam giác đều là tam giác có ba cạnh bằng nhau.

B. $3<1.$

C. $4-5=1.$

D. Bạn học giỏi quá!

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Vì "Bạn học giỏi quá!" là câu cảm thán không có khẳng định đúng hoặc sai.

Câu 3. Cho các phát biểu sau đây:

1. "17 là số nguyên tố"
2. "Tam giác vuông có một đường trung tuyến bằng nửa cạnh huyền"
3. "Các em C14 hãy cố gắng học tập thật tốt nhé !"
4. "Mọi hình chữ nhật đều nội tiếp được đường tròn"

Hỏi có bao nhiêu phát biểu là một đề?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

- Câu 1 là mệnh đề.
- Câu 2 là mệnh đề.
- Câu 3 không phải là mệnh đề.
- Câu 4 là mệnh đề.

Câu 4. Cho các câu sau đây:

1. "Phan-xi-păng là ngọn núi cao nhất Việt Nam".
2. "$\pi^2 < 9,86$".
3. "Mệt quá!".
4. "Chị ơi, mấy giờ rồi?".

Hỏi có bao nhiêu câu là mệnh đề?

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Mệnh đề là một khẳng định có tính đúng hoặc sai, không thể vừa đúng vừa sai.

Do đó 1,2 là mệnh đề và 3,4 không là mệnh đề.

Câu 5. Câu nào trong các câu sau không phải là mệnh đề?

A. π có phải là một số vô tỷ không?. **B.** $2+2=5$.

C. $\sqrt{2}$ là một số hữu tỷ. **D.** $\frac{4}{2}=2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Câu 6. Trong các câu sau, câu nào không phải là mệnh đề?

A. Buồn ngủ quá!

B. Hình thoi có hai đường chéo vuông góc với nhau.

C. 8 là số chính phương.

D. Băng Cốc là thủ đô của Mianma.

Lời giải.

Chọn A

Câu cảm thán không phải là mệnh đề.

Câu 7. Trong các câu sau, có bao nhiêu câu là không phải là mệnh đề?

a) Huế là một thành phố của Việt Nam.

b) Sông Hương chảy ngang qua thành phố Huế.

c) Hãy trả lời câu hỏi này!

d) $5+19=24$.

e) $6+81=25$.

f) Bạn có rỗi tối nay không?

g) $x+2=11$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Chọn C

Các câu c), f), g) không phải là mệnh đề

Câu 8: Trong các câu sau, có bao nhiêu câu là mệnh đề?

a) Hãy đi nhanh lên!

b) Hà Nội là thủ đô của Việt Nam.

c) $5+7+4=15$.

d) Năm 2018 là năm nhuận.

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.

Chọn B

Câu a) là câu cảm thán không phải là mệnh đề.

Câu 9: Trong các câu sau, có bao nhiêu câu là mệnh đề?

a) Cố lên, sắp đói rồi!

b) Số 15 là số nguyên tố.

c) Tổng các góc của một tam giác là $180°$.

d) x là số nguyên dương.

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải.

Chọn B

Câu a), d) không là mệnh đề.

Câu 10: Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề?

A. Đi ngủ đi!

B. Trung Quốc là nước đông dân nhất thế giới.

C. Bạn học trường nào?

D. Không được làm việc riêng trong giờ học.

Lời giải.

Chọn B

Câu 11: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

A. Tổng của hai số tự nhiên là một số chẵn khi và chỉ khi cả hai số đều là số chẵn.

B. Tích của hai số tự nhiên là một số chẵn khi và chỉ khi cả hai số đều là số chẵn.

C. Tổng của hai số tự nhiên là một số lẻ khi và chỉ khi cả hai số đều là số lẻ.

D. Tích của hai số tự nhiên là một số lẻ khi và chỉ khi cả hai số đều là số lẻ.

Lời giải.

Chọn D

A là mệnh đề sai: Ví dụ: $1+3=4$ là số chẵn nhưng $1,3$ là số lẻ.

B là mệnh đề sai: Ví dụ: $2.3=6$ là số chẵn nhưng 3 là số lẻ.

C là mệnh đề sai: Ví dụ: $1+3=4$ là số chẵn nhưng $1,3$ là số lẻ.

Câu 12: Mệnh đề $\forall x\in\mathbb{R}, x^2-2+a>0$ với a là số thực cho trước. Tìm a để mệnh đề đúng

A. $a\le 2$. **B.** $a<2$. **C.** $a=2$. **D.** $a>2$.

Lời giải

Chọn A

Vì $\forall x\in\mathbb{R}, x^2-2+a>0\Leftrightarrow x^2>2-a\Leftrightarrow 2-a\le 0\Leftrightarrow a\le 2$.

Câu 13: Với giá trị nào của x thì "$x^2-1=0, x\in\mathbb{N}$" là mệnh đề đúng.

A. $x=1$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=\pm 1$. **D.** $x=0$.

Lời giải

Chọn A

B. Không hiểu rõ câu hỏi và tập $\mathbb{N}$.

C. Không hiểu rõ câu hỏi và tập $\mathbb{N}$.

D. Không biết giải phương trình.

Dạng 2: Xét tính đúng sai của mệnh đề

1. Phương pháp

Một câu khẳng định đúng là mệnh đề đúng, một câu khẳng định sai là mệnh đề sai.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho mệnh đề chứa biến $P(x):"3x+5\le x^2"$ với x là số thực. Mệnh đề nào sau đây là đúng:

A. $P(3)$. **B.** $P(4)$. **C.** $P(1)$. **D.** $P(5)$.

Hướng dẫn giải

$P(3):\ "3.3+5\le 3^2" \Leftrightarrow "14\le 9"$ là mệnh đề sai.

$P(4):\ "3.4+5\le 4^2" \Leftrightarrow "17\le 16"$ là mệnh đề sai.

$P(1):"3.1+5\le 1^2" \Leftrightarrow "8\le 1"$ là mệnh đề sai.

$P(5):\ "3.5+5\le 5^2" \Leftrightarrow "20\le 25"$ là mệnh đề đúng.

Ví dụ 2: Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề đúng?

A. Nếu $a\ge b$ thì $a^2\ge b^2$.

B. Nếu a chia hết cho 9 thì a chia hết cho 3.

C. Nếu em chăm chỉ thì em thành công.

D. Nếu một tam giác có một góc bằng 60^0 thì tam giác đó đều.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Mệnh đề A là một mệnh đề sai vì $b\le a<0$ thì $b^2\ge a^2$.

Mệnh đề B là mệnh đề đúng. Vì $a\vdots 9 \Rightarrow \begin{cases} a=9n,\ n\in\mathbb{Z} \\ 9\vdots 3 \end{cases} \Rightarrow a\vdots 3.$

Câu C chưa là mệnh đề vì chưa khẳng định được tính đúng, sai.

Mệnh đề D là mệnh đề sai vì chưa đủ điều kiện để khẳng định một tam giác là đều.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $\forall x\in\mathbb{R}$ sao cho $x+1>x$. **B.** $\forall x\in\mathbb{R}$ sao cho $|x|=x$.

C. $\exists x\in\mathbb{R}$ sao cho $x-3=x^2$. **D.** $\exists x\in\mathbb{R}$ sao cho $x^2<0$.

Lời giải

Chọn A

A: Đúng vì VT luôn lớn hơn VP 1 đơn vị.

B: HS nhầm trong tập hợp số tự nhiên.

C: HS nhầm là tìm được x ở VT để được số chính phương ở VP.

D: HS nhầm ở số 0.

Câu 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\forall x\in\mathbb{R},\ x^2>1\Rightarrow x>-1$.

B. $\forall x\in\mathbb{R},\ x^2>1\Rightarrow x>1$.

C. $\forall x\in\mathbb{R},\ x>-1\Rightarrow x^2>1$.

D. $\forall x\in\mathbb{R},\ x>1\Rightarrow x^2>1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $\forall x\in\mathbb{R},\ x^2>1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1\\x>1\end{array}\right.$. Ta xét theo một chiều của mệnh đề ta thấy D đúng.

Câu 3. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $6\sqrt{2}$ là số hữu tỷ.

B. Phương trình $x^2+7x-2=0$ có 2 nghiệm trái dấu.

C. 17 là số chẵn.

D. Phương trình $x^2+x+7=0$ có nghiệm.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình $x^2+7x-2=0$ có $a.c=1.(-2)<0$ nên nó có 2 nghiệm trái dấu.

Vậy mệnh đề ở phương án B là mệnh đề đúng. Các mệnh đề còn lại đều sai.

Câu 4: Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề đúng?

A. Nếu $a\ge b$ thì $a^2\ge b^2$.

B. Nếu a chia hết cho 9 thì a chia hết cho 3.

C. Nếu em chăm chỉ thì em thành công.

D. Nếu một tam giác có một góc bằng 60° thì tam giác đó đều.

Lời giải.

Chọn B

Mệnh đề A là một mệnh đề sai vì $b\le a<0$ thì $a^2\le b^2$.

Mệnh đề B là mệnh đề đúng. Vì $a\vdots 9\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}a=9n,\ n\in\mathbb{Z}\\9\vdots 3\end{array}\right.\Rightarrow a\vdots 3$.

Câu C chưa là mệnh đề vì chưa khẳng định được tính đúng, sai.

Mệnh đề D là mệnh đề sai vì chưa đủ điều kiện để khẳng định một tam giác là đều.

Câu 5: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề **sai**?

A. $-\pi<-2\Leftrightarrow\pi^2<4$.

B. $\pi<4\Leftrightarrow\pi^2<16$.

C. $\sqrt{23}<5\Rightarrow 2\sqrt{23}<2.5.$ **D.** $\sqrt{23}<5\Rightarrow -2\sqrt{23}>-2.5.$

Lời giải.

Chọn A

Xét đáp án A. Ta có: $\pi^2<4\Leftrightarrow|\pi|<2\Leftrightarrow -2<\pi<2.$ Suy ra A sai.

Câu 6: Trong các mệnh đề dưới đây mệnh đề nào đúng?

A. $\forall\, x\in\mathbb{R}, x^2+1>0.$ **B.** $\forall x\in\mathbb{R},\ x^2>x.$

C. $\exists\, r\in\mathbb{Q},\ r^2=7.$ **D.** $\forall\, n\in\mathbb{N}, n+4$ chia hết cho 4.

Lời giải

Chọn A

A: Đúng vì $x^2\geq 0$ nên $x^2+1>0.$

B: HS hiểu nhầm mọi số bình phương đều lớn hơn chính nó.

C: HS hiểu nhầm $\sqrt{7}\in\mathbb{Q}.$

Câu 7: Hỏi trong các mệnh đề sau đây mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

A. $"\forall x\in\mathbb{R}, x>3\Rightarrow x^2>9".$ **B.** $"\forall x\in\mathbb{R}, x>-3\Rightarrow x^2>9".$

C. $"\forall x\in\mathbb{R}, x^2>9\Rightarrow x>3".$ **D.** $"\forall x\in\mathbb{R}, x^2>9\Rightarrow x>-3".$

Lời giải

Chọn A

B, C, D sai là không biết mệnh đề kéo theo.

Dạng 3: Phủ định của mệnh đề

1. Phương pháp

Cho mệnh đề P. Mệnh đề "Không phải P" gọi là mệnh đề phủ định của P. Ký hiệu là $\overline{P}$. Nếu P đúng thì $\overline{P}$ sai, nếu P sai thì $\overline{P}$ đúng.

Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$ với $x\in X$

- Mệnh đề phủ định của mệnh đề $"\forall x\in X, P(x)"$ là $"\exists x\in X, P(x)"$
- Mệnh đề phủ định của mệnh đề $"\exists x\in X, P(x)"$ là $"\forall x\in X, P(x)"$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Nêu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau, cho biết mệnh đề này đúng hay sai?

P : " Hình thoi có hai đường chéo vuông góc với nhau"

Q : " 6 là số nguyên tố"

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

R : " Tổng hai cạnh của một tam giác lớn hơn cạnh còn lại"

S : " $5 > -3$ "

K : " Phương trình $x^4 - 2x^2 + 2 = 0$ có nghiệm "

H : " $\left(\sqrt{3} - \sqrt{12}\right)^2 = 3$ "

Lời giải

Ta có các mệnh đề phủ định là

$\overline{P}$: " Hai đường chéo của hình thoi không vuông góc với nhau", mệnh đề này sai

$\overline{Q}$: " 6 không phải là số nguyên tố", mệnh đề này đúng

$\overline{R}$: " Tổng hai cạnh của một tam giác nhỏ hơn hoặc bằng cạnh còn lại", mệnh đề này sai

$\overline{S}$: " $5 \le -3$ ", mệnh đề này sai

Ví dụ 2: Cho mệnh đề chứa biến " $P(x) : x > x^3$ " , xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $P(1)$ b) $P\left(\frac{1}{3}\right)$ c) $\forall x \in N,\ P(x)$ d) $\exists x \in N,\ \overline{P(x)}$

Lời giải

a) Ta có $P(1) : 1 > 1^3$ đây là mệnh đề sai

b) Ta có $P\left(\frac{1}{3}\right) : \frac{1}{3} > \left(\frac{1}{3}\right)^3$ đây là mệnh đề đúng

c) Ta có $\forall x \in N,\ x > x^3$ là mệnh đề sai vì $P(1)$ là mệnh đề sai

d) Ta có $\exists x \in N,\ x \le x^3$ là mệnh đề đúng vì $x - x^3 = x(1-x)(1+x) \le 0$ với mọi số tự nhiên.

Ví dụ 3: Dùng các kí hiệu để viết các câu sau và viết mệnh đề phủ định của nó.

a) Tích của ba số tự nhiên liên tiếp chia hết cho sáu

b) Với mọi số thực bình phương của nó là một số không âm.

c) Có một số nguyên mà bình phương của nó bằng chính nó.

d) Có một số hữu tỉ mà nghịch đảo của nó lớn hơn chính nó.

Lời giải

a) Ta có $P : \forall n \in N,\ n(n+1)(n+2) \vdots 6$, mệnh đề phủ định là $\overline{P} : \exists n \in N,\ n(n+1)(n+2) \not\vdots 6$.

b) Ta có $Q : \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \ge 0$, mệnh đề phủ định là $\overline{Q} : \exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0$

c) Ta có $R:\exists n\in Z,\ n^2=n$, mệnh đề phủ định là $\overline{R}:\forall n\in Z,\ n^2\neq n$.

d) $\exists q\in Q,\ \frac{1}{q}>q$, mệnh đề phủ định là $\forall q\in Q,\ \frac{1}{q}\leq q$.

Ví dụ 4: Xác định tính đúng sai của mệnh đề sau và tìm phủ định của nó :

a) A : "$\forall x\in R,\ x^2\geq 0$ "

b) B: " Tồn tại số tự nhiên đều là số nguyên tố".

c) C : " $\exists x\in N$, x chia hết cho $x+1$ "

d) D: "$\forall n\in N,\ n^4-n^2+1$ là hợp số "

e) E: " Tồn tại hình thang là hình vuông ".

f) F: " Tồn tại số thực a sao cho $a+1+\frac{1}{a+1}\leq 2$"

Lời giải

a) Mệnh đề A đúng và $\overline{A}:\exists x\in R,\ x^2<0$

b) Mệnh đề B đúng và $\overline{B}$: "Với mọi số tự nhiêu đều không phải là số nguyên tố"

c) Mệnh đề C đúng vì cho $x=0$ và $\overline{C}$: "$\forall x\in N, x\not|\left(x+1\right)$"

d) Mệnh đề D sai vì với $n=2$ ta có $n^4-n^2+1=13$ không phải là hợp số

Mệnh đề phủ định là $\overline{D}$: "$\exists n\in N,\ n^4-n^2+1$ là số số nguyên tố"

e) Mệnh đề E đúng và $\overline{E}$: " Với mọi hình thang đều không là hình vuông ".

f) Mệnh đề F đúng và mệnh đề phủ định là $\overline{F}$: " Với mọi số thực a thì $a+1+\frac{1}{a+1}>2$"

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho mệnh đề: "$\forall x\in\mathbb{R},x^2+3x+5>0$". Mệnh đề phủ định của mệnh đề trên là

A. $\forall x\in\mathbb{R},x^2+3x+5\leq 0$.

B. $\exists x\in\mathbb{R},x^2+3x+5\leq 0$.

C. $\forall x\in\mathbb{R},x^2+3x+5<0$.

D. $\exists x\in\mathbb{R},x^2+3x+5>0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Chú ý: Phủ định của mệnh đề "$\forall x\in\mathbb{R},p\left(x\right)$" là "$\exists x\in\mathbb{R},\overline{p\left(x\right)}$".

Câu 2. Cho mệnh đề "Có một học sinh trong lớp C4 không chấp hành luật giao thông". Mệnh đề phủ định của mệnh đề này là

A. Không có học sinh nào trong lớp C4 chấp hành luật giao thông.

B. Mọi học sinh trong lớp C4 đều chấp hành luật giao thông.

C. Có một học sinh trong lớp C4 chấp hành luật giao thông.

D. Mọi học sinh trong lớp C4 không chấp hành luật giao thông.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Mệnh đề phủ định là " Mọi học sinh trong lớp C4 đều chấp hành luật giao thông".

Câu 3. Cho mệnh đề: " Có một học sinh trong lớp 10A không thích học môn Toán". Mệnh đề phủ định của mệnh đề này là:

A. " Mọi học sinh trong lớp 10A đều thích học môn Toán".

B. " Mọi học sinh trong lớp 10A đều không thích học môn Toán".

C. " Mọi học sinh trong lớp 10A đều thích học môn Văn".

D. " Có một học sinh trong lớp 10A thích học môn Toán".

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Câu 4. Mệnh đề phủ định của mệnh đề " 2018 là số tự nhiên chẵn" là

A. 2018 là số chẵn.

B. 2018 là số nguyên tố.

C. 2018 không là số tự nhiên chẵn.

D. 2018 là số chính phương.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Câu 5. Mệnh đề: "Mọi động vật đều di chuyển" có mệnh đề phủ định là

A. Có ít nhất một động vật di chuyển.

B. Mọi động vật đều đứng yên.

C. Có ít nhất một động vật không di chuyển.

D. Mọi động vật đều không di chuyển.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Câu 6: Cho mệnh đề " $\forall x \in R, x^2 - x + 7 < 0$ ". Hỏi mệnh đề nào là mệnh đề phủ định của mệnh đề trên?

A. $\exists x \in R, x^2 - x + 7 \geq 0$.

B. $\forall x \in R, x^2 - x + 7 > 0$.

C. $\forall x \in R, x^2 - x + 7 < 0$.

D. $\nexists x \in R, x^2 - x + 7 < 0$.

Lời giải

Chọn A

B : sai là gì không dùng đúng kí hiệu của phủ định.

C : sai là gì không dùng đúng $\geq$.

D : sai kí hiệu không tồn tại.

Câu 7: Cho mệnh đề: $"\exists x \in \mathbb{R} \left| 2x^2 - 3x - 5 < 0"$. Mệnh đề phủ định sẽ là

A. $"\forall x \in \mathbb{R} \left| 2x^2 + 3x - 5 \geq 0"$.

B. $"\forall x \in \mathbb{R} \left| 2x^2 + 3x - 5 > 0"$.

C. $"\exists x \in \mathbb{R} \left| 2x^2 + 3x - 5 > 0"$.

D. $"\exists x \in \mathbb{R} \left| 2x^2 + 3x - 5 \geq 0"$.

Lời giải

Chọn A

Đáp án A đúng vì phủ định của $"\exists"$ là $"\forall"$ và phủ định của dấu $"<"$ là dấu $"\geq"$.

Đáp án B sai vì học sinh nhầm phủ định của dấu $"<"$ là dấu $">"$.

Đáp án C sai vì học sinh không nhớ phủ định của $"\exists"$ là $"\forall"$ và phủ định dấu $"<"$ là dấu $"\geq"$.

Đáp án D sai vì học sinh không nhớ phủ định của $"\exists"$ là $"\forall"$.

Câu 8: Mệnh đề phủ định của mệnh đề: $\forall x \in R, x^2 + x + 5 > 0$ là

A. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 \leq 0$.

B. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 \leq 0$.

C. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 < 0$.

D. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 < 0$.

Lời giải

Chọn A

B: HS quên biến đổi lượng từ.

C: HS quên trường hợp dấu bằng.

D: HS quên cả đổi lượng từ và dấu bằng.

Câu 9: Mệnh đề phủ định của mệnh đề "Phương trình $ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$ vô nghiệm" là mệnh đề nào sau đây?

A. Phương trình $ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$ có nghiệm.

B.. Phương trình $ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$ có 2 nghiệm phân biệt.

C. Phương trình $ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$ có nghiệm kép.

D. Phương trình $ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$ không có nghiệm.

Lời giải

Chọn A

Đáp án A đúng vì phủ định vô nghiệm là có nghiệm.

Đáp án B sai vì học sinh nhầm phủ định vô nghiệm là phương trình sẽ có 2 nghiệm phân biệt.

Đáp án C sai vì học sinh nhầm phủ định vô nghiệm là có 1 nghiệm tức nghiệm kép.

Đáp án D sai vì học sinh không hiểu câu hỏi của đề, học sinh nghỉ vô nghiệm là không có nghiệm.

Câu 10. Tìm mệnh đề phủ định của mệnh đề: $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 > 0$.

A. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 < 0$.
B. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 < 0$.
C. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 \le 0$.
D. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 \le 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 > 0$. Suy ra mệnh đề phủ định là $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 \le 0$.

Câu 11. Tìm mệnh đề phủ định của mệnh đề $"\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > x"$.

A. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \le x$.
B. $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 > x$.
C. $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \le x$.
D. $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 < x$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Mệnh đề $A : "\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > x" \Rightarrow \overline{A} : "\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \le x"$.

Câu 12. Cho x là số tự nhiên. Phủ định của mệnh đề "$\forall x$ chẵn, $x^2 + x$ là số chẵn" là mệnh đề:

A. $\exists x$ lẻ, $x^2 + x$ là số lẻ.
B. $\exists x$ lẻ, $x^2 + x$ là số chẵn.
C. $\forall x$ lẻ, $x^2 + x$ là số lẻ.
D. $\exists x$ chẵn, $x^2 + x$ là số lẻ.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Mệnh đề phủ định là "$\exists x$ lẻ, $x^2 + x$ lẻ".

Câu 13. Phủ định của mệnh đề $"\exists x \in \mathbb{Q} : 2x^2 - 5x + 2 = 0"$ là

A. $"\exists x \in \mathbb{Q} : 2x^2 - 5x + 2 > 0"$.
B. $"\exists x \in \mathbb{Q} : 2x^2 - 5x + 2 \ne 0"$.
C. $"\forall x \in \mathbb{Q} : 2x^2 - 5x + 2 \ne 0"$.
D. $"\forall x \in \mathbb{Q} : 2x^2 - 5x + 2 = 0"$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Vì phủ định của mệnh đề $"\exists x \in \mathbb{Q} : 2x^2 - 5x + 2 = 0"$ là $"\forall x \in \mathbb{Q} : 2x^2 - 5x + 2 \ne 0"$.

Câu 14. Cho mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0$". Hỏi mệnh đề nào là mệnh đề phủ định của mệnh đề trên?

A. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 > 0$.

B. $\nexists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0$.

C. $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 - x + 7 \geq 0$.

D. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 \leq 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phủ định của mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0$" là mệnh đề "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 \geq 0$".

Câu 15. Mệnh đề phủ định của mệnh đề "$\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + x + 13 = 0$" là

A. "$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + x + 13 \neq 0$".

B. "$\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + x + 13 > 0$".

C. "$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + x + 13 = 0$".

D. "$\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + x + 13 \neq 0$".

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Mệnh đề phủ định của mệnh đề "$\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + x + 13 = 0$" là "$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + x + 13 \neq 0$".

Câu 16. Tìm mệnh đề phủ định của mệnh đề $P: "\forall x \in \mathbb{N}; x^2 + x - 1 > 0"$.

A. $\overline{P}: "\forall x \in \mathbb{N}; x^2 + x - 1 > 0"$.

B. $\overline{P}: "\exists x \in \mathbb{N}; x^2 + x - 1 \leq 0"$.

C. $\overline{P}: "\exists x \in \mathbb{N}; x^2 + x - 1 > 0"$.

D. $\overline{P}: "\forall x \in \mathbb{N}; x^2 + x - 1 \leq 0"$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Dạng 4: Mệnh đề kéo theo, mệnh đề đảo và hai mệnh đề tương đương

1. Phương pháp

Cho 2 mệnh đề P và Q.

- Mệnh đề "Nếu P thì Q" gọi là mệnh đề kéo theo. Ký hiệu là $P \Rightarrow Q$. Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng Q sai, và đúng trong các trường hợp con lại.
- Cho mệnh đề $P \Rightarrow Q$. Khi đó mệnh đề $Q \Rightarrow P$ gọi là mệnh đề đảo của $P \Rightarrow Q$.
- Mệnh đề "P nếu và chỉ nếu Q" gọi là mệnh đề tương đương, ký hiệu $P \Leftrightarrow Q$. Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng khi cả hai mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng và sai trong các trường hợp còn lại.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và phát biểu mệnh đề đảo, xét tính đúng sai của nó.

a) P : " Tứ giác $ABCD$ là hình thoi" và Q : " Tứ giác $ABCD$ AC và BD cắt nhau tại trung điểm mỗi đường"

b) P : "$2 > 9$" và Q : "$4 < 3$"

c) P : " Tam giác ABC vuông cân tại A" và Q : " Tam giác ABC có $\widehat{A} = 2\widehat{B}$ "

d) P :" Ngày 2 tháng 9 là ngày Quốc Khánh của nước Việt Nam" và Q :" Ngày 27 tháng 7 là ngày thương binh liệt sĩ"

Lời giải

a) Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là " Nếu tứ giác $ABCD$ là hình thoi thì AC và BD cắt nhau tại trung điểm mỗi đường", mệnh đề này đúng.

Mệnh đề đảo là $Q \Rightarrow P$: "Nếu tứ giác $ABCD$ có AC và BD cắt nhau tại trung điểm mỗi đường thì $ABCD$ là hình thoi ", mệnh đề này sai.

b) Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là " Nếu $2 > 9$ thì $4 < 3$ ", mệnh đề này đúng vì mệnh đề P sai.

Mệnh đề đảo là $Q \Rightarrow P$: " Nếu $4 < 3$ thì $2 > 9$ ", mệnh đề này đúng vì mệnh đề Q sai.

c) Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là " Nếu tam giác ABC vuông cân tại A thì $\widehat{A} = 2\widehat{B}$ ", mệnh đề này đúng

Mệnh đề đảo là $Q \Rightarrow P$: " Nếu tam giác ABC có $\widehat{A} = 2\widehat{B}$ thì nó vuông cân tại A", mệnh đề này sai

d) Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là " Nếu ngày 2 tháng 9 là ngày Quốc Khánh của nước Việt Nam thì ngày 27 tháng 7 là ngày thương binh liệt sĩ"

Mệnh đề đảo là $Q \Rightarrow P$: " Nếu ngày 27 tháng 7 là ngày thương binh liệt sĩ thì ngày 2 tháng 9 là ngày Quốc Khánh của nước Việt Nam"

Hai mệnh đề trên đều đúng vì mệnh đề P, Q đều đúng

Ví dụ 2: Phát biểu mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ bằng hai cách và và xét tính đúng sai của nó

a) P : "Tứ giác $ABCD$ là hình thoi" và Q :" Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau"

b) P : " Bất phương trình $\sqrt{x^2 - 3x} > 1$ có nghiệm" và Q : " $\sqrt{(-1)^2 - 3.(-1)} > 1$ "

Lời giải

a) Ta có mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng vì mệnh đề $P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow P$ đều đúng và được phát biểu bằng hai cách như sau:

"Tứ giác $ABCD$ là hình thoi khi và chỉ khi tứ giác $ABCD$ là hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau" và

"Tứ giác $ABCD$ là hình thoi nếu và chỉ nêu tứ giác $ABCD$ là hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau"

b) Ta có mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng vì mệnh đề P, Q đều đúng(do đó mệnh đề $P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow P$ đều đúng) và được phát biểu bằng hai cách như sau:

" Bất phương trình $\sqrt{x^2-3x} > 1$ có nghiệm khi và chỉ khi $\sqrt{(-1)^2-3.(-1)} > 1$ " và

" Bất phương trình $\sqrt{x^2-3x} > 1$ có nghiệm nếu và chỉ nếu $\sqrt{(-1)^2-3.(-1)} > 1$ "

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho định lí "Nếu hai tam giác bằng nhau thì diện tích chúng bằng nhau". Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hai tam giác bằng nhau là điều kiện cần để diện tích chúng bằng nhau.

B. Hai tam giác bằng nhau là điều kiện cần và đủ để chúng có diện tích bằng nhau.

C. Hai tam giác có diện tích bằng nhau là điều kiện đủ để chúng bằng nhau.

D. Hai tam giác bằng nhau là điều kiện đủ để diện tích chúng bằng nhau.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

- "Hai tam giác bằng nhau" là điều kiện đủ.
- "Diện tích bằng nhau" là điều kiện cần.

Câu 2: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào có **mệnh đề đảo** là đúng?

A. Nếu a và b cùng chia hết cho c thì $a+b$ chia hết cho c.

B. Nếu hai tam giác bằng nhau thì diện tích bằng nhau.

C. Nếu a chia hết cho 3 thì a chia hết cho 9.

D. Nếu một số tận cùng bằng 0 thì số đó chia hết cho 5.

Lời giải

Chọn C

Nếu a chia hết cho 9 thì a chia hết cho 3 là mệnh đề đúng.

Câu 3: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào không phải là định lí?

A. $\exists x \in \mathbb{N}$, x^2 chia hết cho $3 \Rightarrow x$ chia hết cho 3.

B. $\exists x \in \mathbb{N}$, x^2 chia hết cho $6 \Rightarrow x$ chia hết cho 3.

C. $\forall x \in \mathbb{N}$, x^2 chia hết cho $9 \Rightarrow x$ chia hết cho 9.

D. $\exists x \in \mathbb{N}$, x chia hết cho 4 và $6 \Rightarrow x$ chia hết cho 12.

Lời giải

Chọn D

Định lý sẽ là: $\forall x \in \mathbb{N}$, x chia hết cho 4 và $6 \Rightarrow x$ chia hết cho 12.

Câu 4: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là định lí?

A. $\forall x \in \mathbb{R}, x > -2 \Rightarrow x^2 > 4$.

B. $\forall x \in \mathbb{R}, x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$.

C. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$.

D. Nếu $a+b$ chia hết cho 3 thì a, b đều chia hết cho 3.

Lời giải

Chọn B

Dạng 5: Mệnh đề với kí hiệu với mọi, tồn tại

1. Phương pháp

- Kí hiệu $\forall$: đọc là với mọi, $\exists$: đọc là tồn tại
- Mệnh đề phủ định của mệnh đề "$\forall x \in X$, $P(x)$" là "$\exists x \in X$, $\overline{P(x)}$".
- Mệnh đề phủ định của mệnh đề "$\exists x \in X$, $P(x)$" là "$\forall x \in X$, $\overline{P(x)}$".

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Câu 1: Mệnh đề "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 3$" khẳng định rằng:

A. Bình phương của mỗi số thực bằng 3.

B. Có ít nhất một số thực mà bình phương của nó bằng 3.

C. Chỉ có một số thực có bình phương bằng 3.

D. Nếu x là số thực thì $x^2 = 3$.

Lời giải

Chọn B.

Câu 2: Kí hiệu X là tập hợp các cầu thủ x trong đội tuyển bóng rổ, $P(x)$ là mệnh đề chứa biến "x cao trên 180 cm". Mệnh đề "$\forall x \in X, P(x)$"khẳng định rằng:

A. Mọi cầu thủ trong đội tuyển bóng rổ đều cao trên 180 cm.

B. Trong số các cầu thủ của đội tuyển bóng rổ có một số cầu thủ cao trên 180 cm.

C. Bất cứ ai cao trên 180 cm đều là cầu thủ của đội tuyển bóng rổ.

D. Có một số người cao trên 180 cm là cầu thủ của đội tuyển bóng rổ.

Lời giải

Chọn A.

Câu 3: Mệnh đề nào sau đây là phủ định của mệnh đề: "Mọi động vật đều di chuyển".

A. Mọi động vật đều không di chuyển.

B. Mọi động vật đều đứng yên.

C. Có ít nhất một động vật không di chuyển.

D. Có ít nhất một động vật di chuyển.

Lời giải

Chọn C.

Phủ định của "mọi" là "có ít nhất"

Phủ định của "đều di chuyển" là "không di chuyển".

Câu 4: Phủ định của mệnh đề: "Có ít nhất một số vô tỷ là số thập phân vô hạn tuần hoàn" là mệnh đề nào sau đây:

A. Mọi số vô tỷ đều là số thập phân vô hạn tuần hoàn.

B. Có ít nhất một số vô tỷ là số thập phân vô hạn không tuần hoàn.

C. Mọi số vô tỷ đều là số thập phân vô hạn không tuần hoàn.

D. Mọi số vô tỷ đều là số thập phân tuần hoàn.

Lời giải

Chọn C.

Phủ định của "có ít nhất" là "mọi"

Phủ định của "tuần hoàn" là "không tuần hoàn".

Câu 5: Cho mệnh đề A : "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0$" Mệnh đề phủ định của A là:

A. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 > 0$.

B. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 > 0$.

C. Không tồn tại $x : x^2 - x + 7 < 0$.

D. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 \geq 0$.

Lời giải

Chọn D.

Phủ định của $\forall$ là $\exists$

Phủ định của $<$ là $\geq$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Tìm mệnh đề **sai.**

A. "$\forall x; x^2 + 2x + 3 > 0$".

B. "$\forall x; x^2 \geq x$".

C. $"\exists x; x^2+5x+6=0"$. **D.** $"\exists x; x<\frac{1}{x}"$.

Lời giải.

Chọn B.

Chọn $x=\frac{1}{2}\Rightarrow x^2<x$. Vậy mệnh đề B sai

Câu 2: Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\forall x\in\mathbb{R}, x^2-x+1>0$. **B.** $\exists n\in\mathbb{N}, n<0$.

C. $\exists n\in\mathbb{Q}, x^2=2$. **D.** $\forall x\in\mathbb{Z}, \frac{1}{x}>0$.

Lời giải

Chọn A

Chọn A Vì $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 3. Mệnh đề nào sau là mệnh đề **sai**?

A. $\forall x\in\mathbb{R}: x^2>0$. **B.** $\exists x\in\mathbb{R}: x>x^2$

C. $\exists n\in\mathbb{N}: n^2=n$. **D.** $\forall n\in\mathbb{N}$ thì $n\le 2n$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $0\in\mathbb{R}$ và $0^2=0$ nên mệnh đề $\forall x\in\mathbb{R}: x^2>0$ là mệnh đề sai.

Câu 4. Chọn mệnh đề **sai.**

A. "$\forall x\in\mathbb{R}: x^2>0$". **B.** " $\exists n\in\mathbb{N}: n^2=n$". **C.** "$\forall n\in\mathbb{N}: n\le 2n$". **D.** "$\exists x\in\mathbb{R}: x<1$".

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Với $x=0\in\mathbb{R}$ thì $x^2=0$ nên "$\forall x\in\mathbb{R}: x^2>0$" sai.

Câu 5. Tìm mệnh đề đúng.

A. $"\exists x; x^2+3=0"$ **B.** $"\exists x; x^4+3x^2+2=0"$

C. $"\forall x\in\mathbb{Z}; x^5>x^2$ ". **D.** $"\forall n\in\mathbb{N}; \left((2n+1)^2-1\right)\vdots 4"$

Lời giải.

Chọn C.

$(2n+1)^2-1=4n^2+4n=4(n^2+n)\vdots 4;\forall n\in\mathbb{N}$. Vậy mệnh đề C đúng

Câu 6. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\exists n\in\mathbb{N}$, $n^2+11n+2$ chia hết cho 11.

B. $\exists n\in\mathbb{N}$, n^2+1 chia hết cho 4.

C. Tồn tại số nguyên tố chia hết cho 5.

D. $\exists n\in\mathbb{Z}$, $2x^2-8=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

+ Xét đáp án A. Khi $n=3$ thì giá trị của $(n^2+11n+2)$ bằng $44\vdots 11$ nên đáp án A đúng

+ Xét đáp án B. Khi $n=2k,k\in\mathrm{N}\Rightarrow n^2+1=4k^2+1$ không chia hết cho 4, $k\in\mathrm{N}$.

Khi $n=2k+1,k\in\mathrm{N}\Rightarrow n^2+1=(2k+1)^2+1=4k^2+4k+2$ không chia hết cho 4, $k\in\mathrm{N}$.

+ Xét đáp án C. Tồn tại số nguyên tố 5 chia hết cho 5 nên đáp án C đúng

+ Xét đáp án D. Phương trình $2x^2-8=0\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=-2;\ x=2\in Z$ nên đáp án D đúng.

Câu 7. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\forall x\in\mathbb{R}$, $(x-1)^2\neq x-1$.

B. $\forall x\in\mathbb{R}$, $|x|<3\Leftrightarrow x<3$.

C. $\exists n\in\mathbb{N}, n^2+1$ chia hết cho 4.

D. $\forall n\in\mathbb{N}$, n^2+1 không chia hết cho 3.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

A sai vì với $x=1$ thì $(x-1)^2=x-1$.

B sai vì khi $x=-4<3$ nhưng $|x|=4>3$.

C sai vì

- Nếu $n=2k\ (k\in\mathbb{N})$ thì $n^2+1=4k^2+1$ số này không chia hết cho 4.
- Nếu $n=2k+1\ (k\in\mathbb{N})$ thì $n^2+1=4k^2+4k+2$ số này cũng không chia hết cho 4.

D đúng vì

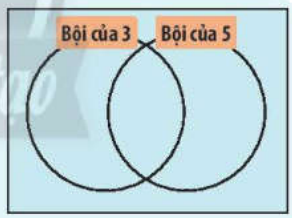
- Nếu $n=3k\ (k\in\mathbb{N})$ thì $n^2+1=9k^2+1$ số này không chia hết cho 3.
- Nếu $n=3k\pm1\ (k\in\mathbb{N}^*)\lim\limits_{x\to\infty}$ thì $n^2+1=9k^2\pm6k+2$ số này không chia hết cho 3.

Bài 3. Các phép toán trên tập hợp

Từ khoá: Hợp; Giao; Hiệu; Phần bù.

Có hai đường tròn chia một hình chữ nhật thành các miền như hình bên.
Hãy đặt mỗi thẻ số sau đây vào miền thích hợp trên hình chữ nhật và giải thích cách làm.

65 75 78 82 90 94 100 120 231



1. Hợp và giao của các tập hợp

1 Bảng sau đây cho biết kết quả vòng phỏng vấn tuyển dụng vào một công ty (dấu "+" là đạt, dấu "–" là không đạt):

Mã số ứng viên	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
Chuyên môn	+	+	–	–	+	+	+	+	–	+
Ngoại ngữ	+	–	+	–	+	+	–	+	–	+

a) Xác định tập hợp A gồm các ứng viên đạt yêu cầu về chuyên môn, tập hợp B gồm các ứng viên đạt yêu cầu về ngoại ngữ.

b) Xác định tập hợp C gồm các ứng viên đạt yêu cầu cả về chuyên môn và ngoại ngữ.

c) Xác định tập hợp D gồm các ứng viên đạt ít nhất một trong hai yêu cầu về chuyên môn và ngoại ngữ.



Hình 1

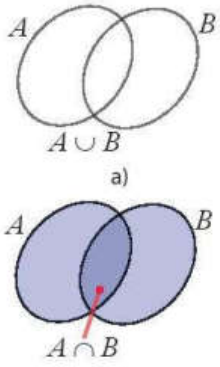
Cho hai tập hợp A và B.

Tập hợp các phần tử thuộc A hoặc thuộc B gọi là ***hợp*** của hai tập hợp A và B, kí hiệu $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}.$$

Tập hợp các phần tử thuộc cả hai tập hợp A và B gọi là ***giao*** của hai tập hợp A và B, kí hiệu $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}.$$



Hình 2

Ví dụ 1

Xác định $A \cup B$ và $A \cap B$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $A = \{2; 3; 5; 7\}$, $B = \{1; 3; 5; 15\}$;

b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x(x + 2) = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$;

c) A là tập hợp các hình bình hành, B là tập hợp các hình thoi.

Giải

a) $A \cup B = \{1; 2; 3; 5; 7; 15\}$, $A \cap B = \{3; 5\}$.

Chân trời sáng tạo

b) Phương trình $x(x+2)=0$ có hai nghiệm là 0 và –2, nên $A=\{-2;0\}$.

Phương trình $x^2+2=0$ vô nghiệm, nên $B=\varnothing$.

Từ đó, $A\cup B=A\cup\varnothing=A=\{-2;0\}$, $A\cap B=A\cap\varnothing=\varnothing$.

c) Vì mỗi hình thoi cũng là hình bình hành nên $B\subset A$. Từ đó, $A\cup B=A$, $A\cap B=B$.

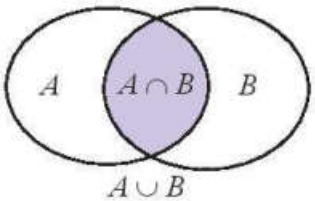
Ví dụ 2

Lớp 10D có 22 bạn chơi bóng đá, 25 bạn chơi cầu lông và 15 bạn chơi cả hai môn thể thao này. Hỏi lớp 10D có bao nhiêu học sinh chơi ít nhất một trong hai môn thể thao bóng đá và cầu lông?

Giải

Kí hiệu A, B lần lượt là tập hợp các học sinh của lớp 10D chơi bóng đá, chơi cầu lông.

Theo giả thiết, $n(A)=22$, $n(B)=25$, $n(A\cap B)=15$.



$A\cup B$

Hình 3

Nhận thấy rằng, nếu tính tổng $n(A)+n(B)$ thì ta được số học sinh lớp 10D chơi bóng đá hoặc cầu lông, nhưng số bạn chơi cả hai môn được tính hai lần. Do đó, số bạn chơi ít nhất một trong hai môn là:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=22+25-15=32.$$

Vậy lớp 10D có 32 học sinh chơi ít nhất một trong hai môn thể thao bóng đá và cầu lông.

Nhận xét:

- Nếu A và B là hai tập hợp hữu hạn thì $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$.
- Đặc biệt, nếu A và B không có phần tử chung, tức $A\cap B=\varnothing$, thì $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$.



Xác định các tập hợp $A\cup B$ và $A\cap B$, biết:

a) $A=\{a;b;c;d;e\}$, $B=\{a;e;i;u\}$;

b) $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2+2x-3=0\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}\mid |x|=1\}$.



Cho $A=\{(x;y)\mid x,y\in\mathbb{R},\ 3x-y=9\}$, $B=\{(x;y)\mid x,y\in\mathbb{R},\ x-y=1\}$.

Hãy xác định $A\cap B$.



Tại vòng chung kết của một trò chơi trên truyền hình, có 100 khán giả tại trường quay có quyền bình chọn cho hai thí sinh A và B. Biết rằng có 85 khán giả bình chọn cho thí sinh A, 72 khán giả bình chọn cho thí sinh B và 60 khán giả bình chọn cho cả hai thí sinh này. Có bao nhiêu khán giả đã tham gia bình chọn? Có bao nhiêu khán giả không tham gia bình chọn?

2. Hiệu của hai tập hợp, phần bù của tập con



Trở lại bảng thông tin về kết quả phỏng vấn tuyển dụng ở  .

a) Xác định tập hợp E gồm những ứng viên đạt yêu cầu về chuyên môn nhưng không đạt yêu cầu về ngoại ngữ.

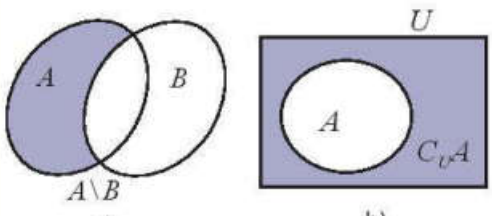
b) Xác định tập hợp F gồm những ứng viên không đạt yêu cầu về chuyên môn.

Cho hai tập hợp A và B.

Tập hợp các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B gọi là ***hiệu*** của A và B, kí hiệu $A\setminus B$.

$$A\setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}.$$

Nếu A là tập con của U thì hiệu $U\setminus A$ gọi là ***phần bù*** của A trong U, kí hiệu $C_U A$.



Hình 4

Ví dụ 3

Cho $U = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 10\}$, $A = \{0; 2; 4; 6; 8\}$, $B = \{0; 3; 6; 9\}$.

Xác định các tập hợp $A\setminus B$, $B\setminus A$, $C_U A$, $C_U B$.

Giải

Ta có: $A\setminus B = \{2; 4; 8\}$, $B\setminus A = \{3; 9\}$, $C_U A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$, $C_U B = \{1; 2; 4; 5; 7; 8\}$.

Cho các tập hợp $U = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 8\}$, $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$, $B = \{3; 4; 5\}$.

Xác định các tập hợp sau đây:

a) $A\setminus B$, $B\setminus A$ và $(A\setminus B)\cap(B\setminus A)$;

b) $C_U(A\cap B)$ và $(C_U A)\cup(C_U B)$;

c) $C_U(A\cup B)$ và $(C_U A)\cap(C_U B)$.

Chú ý: Trong các chương sau, để tìm các tập hợp là hợp, giao, hiệu, phần bù của những tập con của tập số thực, ta thường vẽ sơ đồ trên trục số.

Ví dụ 4

Xác định các tập hợp sau đây:

a) $A = [-2; 1)\cup(0; 3]$;

b) $B = (-\infty; 1]\cup(-2; 2)$;

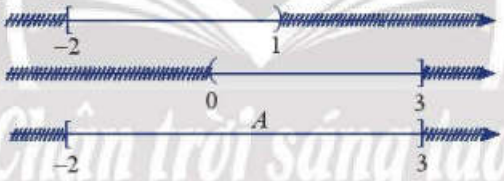
c) $C = (-1; 4]\cap(-3; 2)$;

d) $D = (-3; 2)\setminus(1; 4)$;

e) $E = C_{\mathbb{R}}(-\infty; 2)$.

Giải

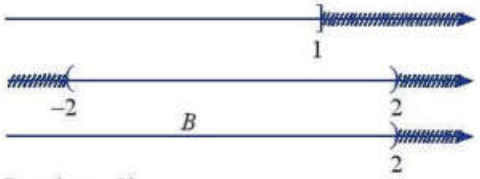
a) Để xác định tập hợp A, ta vẽ sơ đồ sau đây:



Từ sơ đồ, ta thấy $A = [-2; 3]$.

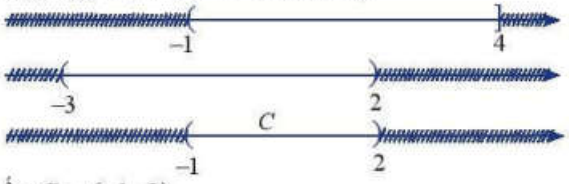
Chân trời sáng tạo

b) Để xác định tập hợp B, ta vẽ sơ đồ sau đây:



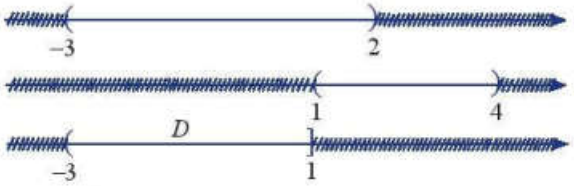
Từ sơ đồ, ta thấy $B = (-\infty; 2)$.

c) Để xác định tập hợp C, ta vẽ sơ đồ sau đây:



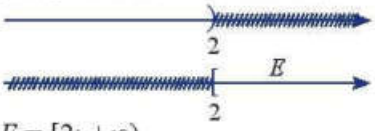
Từ sơ đồ, ta thấy $C = (-1; 2)$.

d) Để xác định tập hợp D, ta vẽ sơ đồ sau đây:



Từ sơ đồ, ta thấy $D = (-3; 1]$.

e) Để xác định tập hợp E, ta vẽ sơ đồ sau đây:



Từ sơ đồ, ta thấy $E = [2; +\infty)$.

Xác định các tập hợp sau đây:

a) $(1; 3) \cup [-2; 2]$; b) $(-\infty; 1) \cap [0; \pi]$; c) $[\frac{1}{2}; 3) \setminus (1; +\infty)$; d) $C_{\mathbb{R}}[-1; +\infty)$.

Dạng 1: Giao và hợp của hai tập hợp

1. Phương pháp

Cần nắm chắc các định nghĩa

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$; $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho các tập hợp sau $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x - 2x^2)(x^2 - 3x + 2) = 0\}$ và $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 3 < n(n+1) < 31\}$.

Tìm $A \cap B$

Lời giải

Ta có: $A = \{0;1;2\}$ và $B = \{2;3;4;5\}$. Vậy: $A \cap B = \{2\}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho $A=\{a;b;c\}$ và $B=\{a;c;d;e\}$. Hãy chọn khẳng định đúng.

A. $A\cap B=\{a;c\}$.

B. $A\cap B=\{a;b;c;d;e\}$.

C. $A\cap B=\{b\}$.

D. $A\cap B=\{d;e\}$.

Lời giải

Chọn A

A. Đúng vì $\{a;c\}$ vừa thuộc tập A, vừa thuộc tập B.

B. HS nhầm là vừa thuộc A hoặc B.

C. HS nhầm là thuộc A và không thuộc B.

D. HS nhầm là thuộc B và không thuộc A.

Câu 2: Cho hai tập hợp $A=\{0;2;3;5\}$ và $B=\{2;7\}$. Khi đó $A\cap B$

A. $A\cap B=\{2;5\}$.

B. $A\cap B=\{2\}$.

C. $A\cap B=\varnothing$.

D. $A\cap B=\{0;2;3;5;7\}$.

Lời giải

Chọn B

$A\cap B=\{2\}$.

Câu 3. Cho hai tập hợp $X=\{1;2;4;7;9\}$ và $Y=\{-1;0;7;10\}$. Tập hợp $X\cup Y$ có bao nhiêu phần tử?

A. 9. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 10.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $X\cup Y=\{-1;0;1;2;4;7;9;10\}$. Do đó $X\cup Y$ có 8 phần tử.

Câu 4. Cho $A=\{x\in\mathbb{N}\,|\,x\le 3\}$, $B=\{0;1;2;3\}$. Tập $A\cap B$ bằng

A. $\{1;2;3\}$.

B. $\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$.

C. $\{0;1;2\}$.

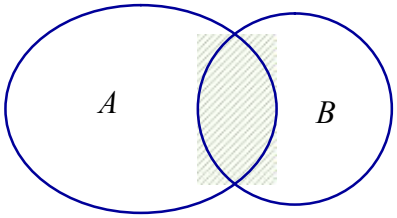
D. $\{0;1;2;3\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$A=\{x\in\mathbb{N}\,|\,x\le 3\}=\{0;\ 1;\ 2;\ 3\}\ \Rightarrow A\cap B=\{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$.

Câu 5. Cho A, B là hai tập hợp bất kì. Phần gạch sọc trong hình vẽ bên dưới là tập hợp nào sau đây?



A. $A\cup B$. **B.** $B\setminus A$. **C.** $A\setminus B$. **D.** $A\cap B$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Theo biểu đồ Ven thì phần gạch sọc trong hình vẽ là tập hợp $A\cap B$.

Câu 6. Cho 2 tập hợp $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,\left(2x-x^2\right)\left(2x^2-3x-2\right)=0\right\}$, $B=\left\{n\in\mathbb{N}\,|\,3<n^2<30\right\}$, chọn mệnh đề đúng?

A. $A\cap B=\{2\}$. **B.** $A\cap B=\{5;4\}$. **C.** $A\cap B=\{2;4\}$. **D.** $A\cap B=\{3\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Xét tập hợp $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,\left(2x-x^2\right)\left(2x^2-3x-2\right)=0\right\}$ ta có: $\left(2x-x^2\right)\left(2x^2-3x-2\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-x^2=0\\2x^2-3x-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-\dfrac{1}{2}\\x=2\end{array}\right.\Rightarrow A=\left\{0;2;-\frac{1}{2}\right\}.$$

Xét tập hợp $B=\left\{n\in\mathbb{N}\,|\,3<n^2<30\right\}=\{2;3;4;5\}$.

Vậy $A\cap B=\{2\}$.

Câu 7. Cho hai tập hợp $A=\{1;2;a;b\}$, $B=\{1;x;y\}$ với x,y khác $a,b,2,1$. Kết luận nào sau đây đúng?

A. $A\cap B=B$. **B.** $A\cap B=\varnothing$. **C.** $A\cap B=A$. **D.** $A\cap B=\{1\}$.

Lời giải

Chọn D

Hai tập hợp A, B có 1 phần tử chung là 1 nên $A\cap B=\{1\}$.

Câu 8: Cho hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$. Xét các tập hợp $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,f(x)=0\right\}$, $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,g(x)=0\right\}$, $C=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,f^2(x)+g^2(x)=0\right\}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $C=A\cup B$. **B.** $C=A\cap B$. **C.** $C=A\setminus B$. **D.** $C=B\setminus A$.

Lời giải.

Chọn B.

Ta có $f^2(x)+g^2(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)=0 \end{cases}$ nên $C=\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)=0, g(x)=0\}$ nên $C=A\cap B$.

Câu 9: Cho hai tập hợp $E=\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)=0\}$, $F=\{x\in\mathbb{R}\mid g(x)=0\}$. Tập hợp $H=\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)g(x)=0\}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $H=E\cap F$. **B.** $H=E\cup F$. **C.** $H=E\setminus F$. **D.** $H=F\setminus E$.

Lời giải.

Chọn B.

Ta có $f(x)g(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ g(x)=0 \end{array}\right.$ nên $H=\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)=0 \vee g(x)=0\}$ nên $H=E\cup F$.

Dạng 2: Hiệu và phần bù của hai tập hợp

1. Phương pháp

Cần nắm chắc các định nghĩa

$A\setminus B=\{x\mid x\in A \text{ và } x\notin B\}$

Nếu $A\subset E$ thì $E\setminus A=C_E^A$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Cho $A=\{2;4;6;9\}$ và $B=\{1;2;3;4\}$. Tìm $A\setminus B$

Lời giải

$A\setminus B=\{6;9\}$

Ví dụ 2. Cho hai tập hợp $A=\{1;2;4;6\}, B=\{1;2;3;4;5;6;7;8\}$. Tìm khi $C_B A$

Lời giải

$C_B A=B\setminus A=\{3;5;7;8\}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho hai tập hợp $A=\{2;\ 4;\ 6;\ 9\}$, $B=\{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$. Tập hợp $A\setminus B$ bằng tập hợp nào sau đây?

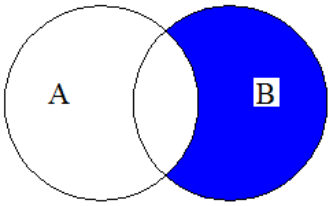
A. $\{2;\ 4\}$. **B.** $\{1;\ 3\}$. **C.** $\{6;\ 9\}$. **D.** $\{6;\ 9;1;\ 3\}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $A\setminus B=\{6;9\}$.

Câu 2: Phần tô đậm trong hình vẽ sau biểu diễn tập hợp nào?



A. $B \setminus A$. **B.** $A \setminus B$. **C.** $A \cap B$. **D.** $A \cup B$.

Lời giải

Chọn A

Câu 3. Cho hai tập hợp $A = \{2;4;6;9\}, B = \{1;2;3;4\}$. Tập $A \setminus B$ bằng tập hợp nào sau đây?

A. $\{2;4\}$. **B.** $\{1;3\}$. **C.** $\{6;9\}$. **D.** $\{6;9;1;3\}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $A \setminus B = \{x | x \in A; x \notin B\} = \{6;9\}$.

Câu 4. Cho A là tập hợp các hình thoi, B là tập hợp các hình chữ nhật và C là tập hợp các hình vuông. Khi đó

A. $B \setminus A = C$. **B.** $A \cup B = C$. **C.** $A \setminus B = C$. **D.** $A \cap B = C$.

Lời giải

Chọn D

Theo tính chất của hình thoi, hình chữ nhật và hình vuông, ta có:

$C \subset A$ và $C \subset B$ nên $B \setminus A = C$, $A \setminus B = C$ là các mệnh đề sai.

Vì hình vuông vừa là hình thoi và cũng là hình chữ nhật nên $A \cap B = C$ là mệnh đề đúng và $A \cup B = C$ là mệnh đề sai.

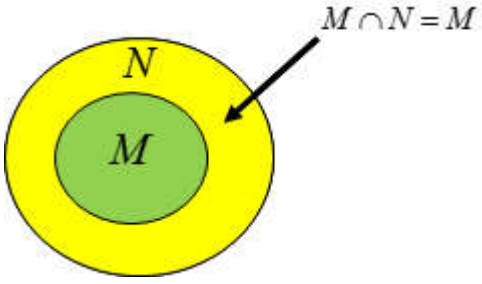
Câu 5. Cho hai tập hợp $M, N, M \subset N$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $M \cap N = N$. **B.** $M \setminus N = N$. **C.** $M \cap N = M$. **D.** $M \setminus N = M$.

Lời giải

Chọn C

Theo giả thiết ta có $M \subset N$. Ta có sơ đồ Ven



Câu 6 . Cho hai tập hợp: $A=\{0;1;2;3;4\}$ và $B=\{2;4;6;8;10\}$. Tập $A\setminus B$ bằng

A. $\{6;8;10\}$. **B.** $\{0;1;3\}$.

C. $\{2;4\}$. **D.** $\{0;1;2;3;4;6;8;10\}$.

Lời giải

Chọn B

Tập $A\setminus B=\{0;1;3\}$.

Câu 7. Cho A: "Tập hợp các học sinh khối 10 học giỏi", B: "Tập hợp các học sinh nữ học giỏi", C: "Tập hợp các học sinh nam khối 10 học giỏi". Vậy tập hợp C là:

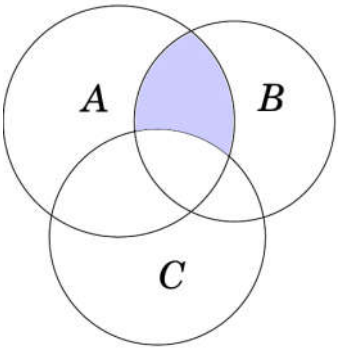
A. $A\subset B$. **B.** $B\setminus A$. **C.** $A\cap B$. **D.** $A\setminus B$.

Lời giải

Chọn D

Vì tập hợp B có chứa cả các học sinh nữ khối 10 học giỏi nên tập hợp C gồm những phần tử thuộc tập hợp A mà không thuộc tập hợp B. Do đó, $C=A\setminus B$.

Câu 8. Cho các tập hợp A,B,C được minh họa bằng biểu đồ Ven như hình vẽ. Phần tô màu xám trong hình là biểu diễn của tập hợp nào sau đây?



A. $A\cap B\cap C$. **B.** $(A\setminus C)\cup(A\setminus B)$. **C.** $(A\cup B)\setminus C$. **D.** $(A\cap B)\setminus C$.

Lời giải

Chọn D

Phần tô xám trong hình là biểu diễn tập hợp các điểm vừa thuộc A, B mà không thuộc C.

Chính là tập $(A\cap B)\setminus C$.

Câu 9: Cho $A=\{0;1;2;3;4\}$, $B=\{2;3;4;5;6\}$. Tính phép toán $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

A. $\{0;1;5;6\}$. **B.** $\{1;2\}$. **C.** $\{2;3;4\}$. **D.** $\{5;6\}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 10: Cho hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$. Xét các tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)=0\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}\mid g(x)=0\}$, $C=\left\{x\in\mathbb{R}\mid \dfrac{f(x)}{g(x)}=0\right\}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $C=A\cup B$. **B.** $C=A\cap B$. **C.** $C=A\setminus B$. **D.** $C=B\setminus A$.

Lời giải.

Chọn C.

Ta có $\dfrac{f(x)}{g(x)}=0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=0\\ g(x)\neq 0\end{cases}$ hay $C=\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)=0, g(x)\neq 0\}$ nên $C=A\setminus B$.

Dạng 3: Bài toán sử dụng biểu đồ Ven

1. Phương pháp

- Chuyển bài toán về ngôn ngữ tập hợp
- Sử dụng biểu đồ ven để minh họa các tập hợp
- Dựa vào biểu đồ ven ta thiết lập được đẳng thức(hoặc phương trình hệ phương trình) từ đó tìm được kết quả bài toán

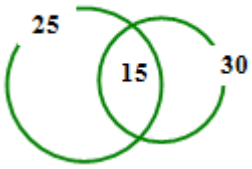
Trong dạng toán này ta kí hiệu $n(X)$ là số phần tử của tập X.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Mỗi học sinh của lớp $10A_1$ đều biết chơi đá cầu hoặc cầu lông, biết rằng có 25 em biết chơi đá cầu , 30 em biết chơi cầu lông, 15 em biết chơi cả hai . Hỏi lớp $10A_1$ có bao nhiêu em chỉ biết đá cầu? bao nhiêu em chỉ biết đánh cầu lông?Sĩ số lớp là bao nhiêu?

Lời giải

Dựa vào biểu đồ ven ta suy ra số học sinh chỉ biết đá cầu là
$25-15=10$



Số học sinh chỉ biết đánh cầu lông là $30-15=15$

Do đó ta có sĩ số học sinh của lớp $10A_1$ là $10+15+15=40$

Ví dụ 2: Trong lớp 10C có 45 học sinh trong đó có 25 em thích môn Văn, 20 em thích môn Toán, 18 em thích môn Sử, 6 em không thích môn nào, 5 em thích cả ba môn. Hỏi số em thích chỉ một môn trong ba môn trên.

Lời giải

Gọi a,b,c theo thứ tự là số học sinh chỉ thích môn Văn, Sử, Toán;

x là số học sịnh chỉ thích hai môn là văn và toán

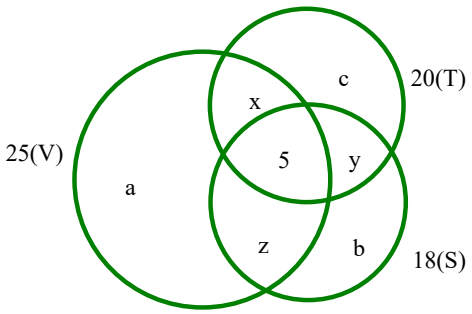
y là số học sịnh chỉ thích hai môn là Sử và toán

z là số học sịnh chỉ thích hai môn là văn và Sử

Ta có số em thích ít nhất một môn là $45-6=39$

Sựa vào biểu đồ ven ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a+x+z+5=25 & (1) \\ b+y+z+5=18 & (2) \\ c+x+y+5=20 & (3) \\ x+y+z+a+b+c+5=39 & (4) \end{cases}$$



Cộng vế với vế (1), (2), (3) ta có

$a+b+c+2\left(x+y+z\right)+15=63$ (5)

Từ (4) và (5) ta có

$a+b+c+2\left(39-5-a-b-c\right)+15=63$

$\Leftrightarrow a+b+c=20$

Vậy chỉ có 20 em thích chỉ một môn trong ba môn trên.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Lớp 10A có 51 bạn học sinh trong đó có 31 bạn học tiếng Anh và 27 bạn học tiếng Nhật. Lớp 10A có bao nhiêu bạn học cả tiếng Anh và tiếng Nhật?

A. 7. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 12.

Lời giải

Chọn A

Số học sinh học cả tiếng Anh và tiếng Nhật của lớp 10A là $31+27-51=7$ bạn.

Câu 2. Lớp 10A có 45 học sinh, trong đó có 15 học sinh được xếp loại học lực giỏi, 20 học sinh được xếp loại hạnh kiểm tốt, 10 em vừa được xếp loại học lực giỏi , vừa có hạnh kiểm tốt. Hỏi có bao nhiêu học sinh xếp loại học lực giỏi hoặc xếp loại hạnh kiểm tốt?

A. 10. **B.** 35. **C.** 25. **D.** 45.

Lời giải

Chọn C

Gọi A là tập hợp học sinh được xếp loại học lực giỏi .

Gọi B là tập hợp học sinh được xếp loại hạnh kiểm tốt .

Khi đó $A\cap B$ là tập hợp học sinh vừa được xếp loại học lực giỏi , vừa có hạnh kiểm tốt .

$A\cup B$ là tập hợp học sinh xếp loại học lực giỏi hoặc xếp loại hạnh kiểm tốt .

Ta có $n\left(A\cup B\right)=n\left(A\right)+n\left(B\right)-n\left(A\cap B\right)=15+20-10=25$.

Câu 3. Trong số 50 học sinh của lớp 10A có 15 bạn được xếp loại học lực giỏi, 25 bạn được xếp loại hạnh kiểm tốt, trong đó có 10 bạn vừa được học sinh giỏi vừa được hạnh kiểm tốt. Khi đó, lớp 10A có bao nhiêu bạn được khen thưởng, biết rằng muốn được khen thưởng bạn đó phải có học lực giỏi hay hạnh kiểm tốt.

A. 20 . **B.** 30. **C.** 35. **D.** 25.

Lời giải

Chọn B

Đề có sự không thống nhất trong diễn đạt nên tôi sửa đề bài toán lại thành:

Trong số 50 học sinh của lớp 10A có 15 bạn được xếp loại học lực giỏi, 25 bạn được xếp loại hạnh kiểm tốt, trong đó có 10 bạn vừa được xếp loại học lực giỏi vừa được xếp loại hạnh kiểm tốt. Khi đó, lớp 10A có bao nhiêu bạn được khen thưởng, biết rằng muốn được khen thưởng bạn đó phải có học lực giỏi hoặc hạnh kiểm tốt.

Từ giả thiết bài toán, ta có:

Số các học sinh chỉ có học lực giỏi là: $15-10=5$.

Số các học sinh chỉ được xếp loại hạnh kiểm tốt là: $25-10=15$.

Tổng số học sinh có học lực giỏi hoặc hạnh kiểm tốt là $10+5+15=30$.

Vậy có 30 học sinh được khen thưởng.

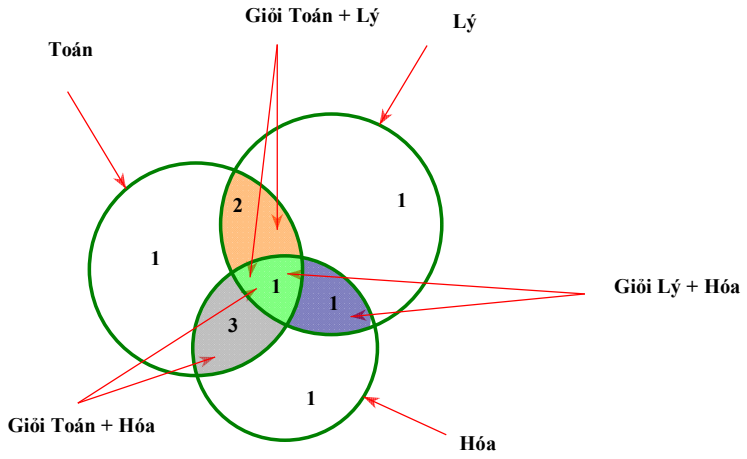
Câu 4: Lớp $10B_1$ có 7 học sinh giỏi Toán, 5 học sinh giỏi Lý, 6 học sinh giỏi Hóa, 3 học sinh giỏi cả Toán và Lý, 4 học sinh giỏi cả Toán và Hóa, 2 học sinh giỏi cả Lý và Hóa, 1 học sinh giỏi cả 3 môn Toán, Lý, Hóa. Số học sinh giỏi ít nhất một môn của lớp $10B_1$ là:

A. 9. **B.** 10. **C.** 18. **D.** 28.

Lời giải.

Chọn B.

Ta dùng biểu đồ Ven để giải:



Nhìn vào biểu đồ, số học sinh giỏi ít nhất 1 trong 3 môn là: $1+2+1+3+1+1+1=10$

Dạng 4: Tìm giao và hợp các khoảng, nửa khoảng, đoạn

1. Phương pháp

- Để tìm $A\cap B$ ta làm như sau

- Sắp xếp theo thứ tự tăng dần các điểm đầu mút của các tập hợp A, B lên trục số

- Biểu diễn các tập A, B trên trục số (phần nào không thuộc các tập đó thì gạch bỏ)

- Phần không bị gạch bỏ chính là giao của hai tập hợp $A,\ B$

• Để tìm $A \cup B$ ta làm như sau

- Sắp xếp theo thứ tự tăng dần các điểm đầu mút của các tập hợp $A,\ B$ lên trục số

- Tô đậm các tập $A,\ B$ trên trục số

- Phần tô đậm chính là hợp của hai tập hợp $A,\ B$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho hai tập hợp $A=(-7\ ;\ 3),\ B=(-4\ ;\ 5)$. Tìm $A\cap B$, $A\cup B$

Lời giải

Ta có: $A\cap B=(-4\ ;\ 3)$, $A\cup B=(-7\ ;\ 5)$

Ví dụ 2: Cho số thực $a<0$. Tìm a để $(-\infty;9a)\cap\left(\frac{4}{a};+\infty\right)\neq\varnothing$

Hướng dẫn giải

$$(-\infty;9a)\cap\left(\frac{4}{a};+\infty\right)\neq\varnothing \Leftrightarrow 9a>\frac{4}{a}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} a>\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3}<a<0 \end{array}\right.$$

Vì $a<0$ nên giá trị của a cần tìm là $-\frac{2}{3}<a<0$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Tập $(-\infty;-3)\cap[-5;2)$ bằng

A. $[-5;-3)$. **B.** $(-\infty;-5]$. **C.** $(-\infty;-2)$. **D.** $(-3;-2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $(-\infty;-3)\cap[-5;2)=[-5;-3)$.

Câu 2. Hình vẽ sau đây là biểu diễn của tập hợp nào?



A. $(-\infty;-2)\cup[5;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)\cup(5;+\infty)$.

C. $(-\infty;-2]\cup(5;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2]\cup[5;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Câu 3. Kết quả của $[-4;1)\cup(-2;3]$ là

A. $(-2;1)$ **B.** $[-4;3]$ **C.** $(-4;2]$ **D.** $(1;3]$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Cách 1: Gọi $x\in[-4;1)\cup(-2;3]$, ta có: $\left[\begin{array}{l}-4\le x<1\\-2<x\le 3\end{array}\right.\Leftrightarrow -4\le x\le 3\Rightarrow$ Chọn B.

Cách 2: Biểu diễn hai tập hợp $[-4;1)$ và $(-2;3]$ trên trục số rồi tìm hợp của hai tập hợp, Chọn B.

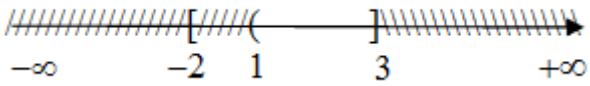
Câu 4. Cho hai tập hợp $A=[-2;3]$ và $B=(1;+\infty)$. Tìm $A\cap B$.

A. $A\cap B=[-2;+\infty)$. **B.** $A\cap B=(1;3]$. **C.** $A\cap B=[1;3]$. **D.** $A\cap B=(1;3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Biểu diễn hai tập hợp A và B ta được:



Vậy $A\cap B=(1;3]$.

Câu 5. Cho các tập hợp $M=[-3;6]$ và $N=(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$. Khi đó $M\cap N$ là

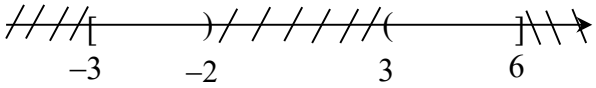
A. $(-\infty;-2)\cup[3;6]$. **B.** $(-\infty;-2)\cup[3;+\infty)$.

C. $[-3;-2)\cup(3;6]$. **D.** $(-3;-2)\cup(3;6)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Biểu diễn trục số:



$M=[-3;6]$ và $N=(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$.

Khi đó: $M\cap N=[-3;-2)\cup(3;6]$.

Câu 6. Cho $A=(-\infty;2]$, $B=[2;+\infty)$, $C=(0;3)$. Chọn phát biểu **sai.**

A. $A\cap C=(0;2]$. **B.** $B\cup C=(0;+\infty)$.

C. $A\cup B=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **D.** $B\cap C=[2;3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $A\cup B=\mathbb{R}$.

Câu 7. Cho $A=(-\infty;-2]$, $B=[3;+\infty)$, $C=(0;4)$. Khi đó tập $(A\cup B)\cap C$ là

A. $(-\infty;-2]\cup(3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)\cup[3;+\infty)$.

C. $[3;4)$. **D.** $[3;4]$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $A\cup B=(-\infty;-2]\cup[3;+\infty)$. Suy ra $(A\cup B)\cap C=[3;4)$.

Câu 8. Cho $A=(-\infty;5]$, $B=(0;+\infty)$. Tìm $A\cap B$.

A. $A\cap B=[0;5)$. **B.** $A\cap B=(0;5)$.

C. $A\cap B=(0;5]$. **D.** $A\cap B=(-\infty;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$A\cap B=(0;5]$.

Câu 9. Cho $A=(1;9)$, $B=[3;+\infty)$, câu nào sau đây đúng?

A. $A\cap B=[1;+\infty)$. **B.** $A\cap B=(9;+\infty)$. **C.** $A\cap B=(1;3)$. **D.** $A\cap B=[3;9)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$A\cap B=(1;9)\cap[3;+\infty)=[3;9)$.

Câu 10. Cho ba tập hợp: $X=(-4;3)$, $Y=\{x\in\mathbb{R}:2x+4>0,x<5\}$, $Z=\{x\in\mathbb{R}:(x+3)(x-4)=0\}$.

Chọn câu đúng nhất:

A. $X\subset Y$. **B.** $Z\subset X$. **C.** $Z\subset X\cup Y$. **D.** $Z\subset Y$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có:

$\square$ $Y=\{x\in\mathbb{R}:2x+4>0,x<5\}=(-2;5)$; $Z=\{-3;4\}$.

$\square$ $\begin{cases}-3\in X\\-3\notin Y\end{cases}\Rightarrow X\not\subset Y\Rightarrow$A sai.

$\square$ $\begin{cases}4\in Z\\4\notin X\end{cases}\Rightarrow Z\not\subset X\Rightarrow$B sai.

$\square$ $\begin{cases}-3\in Z\\-3\notin Y\end{cases}\Rightarrow Z\not\subset Y\Rightarrow$D sai.

$\square$ $X\cup Y=(-4;5)\Rightarrow\{-3;4\}\subset(-4;5)$. Vậy $Z\subset X\cup Y$

Vậy C đúng.

Câu 11. Tập hợp nào dưới đây là giao của hai tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}:-1\le x<3\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}:|x|<2\}$?

A. $(-1;2)$. **B.** $[0;2)$. **C.** $(-2;3)$. **D.** $[-1;2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta viết lại hai tập hợp như sau: $A=\{x\in\mathbb{R}:-1\le x<3\}=[-1;3)$.

$B=\{x\in\mathbb{R}:|x|<2\}=(-2;2)$.

Suy ra: $A\cap B=[-1;2)$.

Câu 12. Cho $A=[1;+\infty)$, $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2+1=0\}$, $C=(0;4)$. Tập $(A\cup B)\cap C$ có bao nhiêu phần tử là số nguyên.

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A.

Ta có : $(A\cup B)\cap C=[1;4)$ có 3 phần tử là số nguyên.

Câu 13. Cho hai tập hợp $A=(-3;3)$ và $B=(0;+\infty)$. Tìm $A\cup B$.

A. $A\cup B=(-3;+\infty)$. **B.** $A\cup B=[-3;+\infty)$.

C. $A\cup B=[-3;0)$. **D.** $A\cup B=(0;3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Thực hiện phép hợp trên hai tập hợp A và B ta được: $A\cup B=(-3;+\infty)$.

Câu 14. Kết quả của phép toán $(-\infty;1)\cap[-1;2)$ là

A. $(1;2)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $[-1;1)$. **D.** $(-1;1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

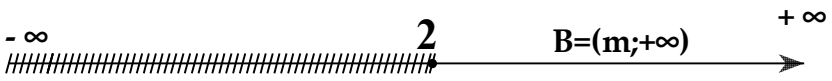
Ta có $(-\infty;1)\cap[-1;2)=[-1;1)$.

Câu 15. Cho $A=(2;+\infty)$, $B=(m;+\infty)$. Điều kiện cần và đủ của m sao cho B là tập con của A là

A. $m\le 2$. **B.** $m=2$. **C.** $m>2$. **D.** $m\ge 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Ta có: $B\subset A$ khi và chỉ khi $\forall x\in B\Rightarrow x\in A\Rightarrow m\ge 2$.

Câu 16. Cho $A=(-\infty;m+1]$; $B=(-1;+\infty)$. Điều kiện để $(A\cup B)=\mathbb{R}$ là

A. $m>-1$. **B.** $m\ge -2$. **C.** $m\ge 0$. **D.** $m>-2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $(A\cup B)=\mathbb{R}\Leftrightarrow -1\le m+1\Leftrightarrow m\ge -2$.

Câu 17. Cho các tập hợp khác rỗng $\left[m-1;\dfrac{m+3}{2}\right]$ và $B=(-\infty;-3)\cup[3;+\infty)$. Tập hợp các giá trị thực của m để $A\cap B\ne\varnothing$ là

A. $(-\infty;-2)\cup[3;+\infty)$. **B.** $(-2;3)$.

C. $(-\infty;-2)\cup[3;5)$. **D.** $(-\infty;-9)\cup(4;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Để $A\cap B\ne\varnothing$ thì điều kiện là $\begin{cases} m-1<\dfrac{m+3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m-1<-3 \\ \dfrac{m+3}{2}\ge 3 \end{array}\right. \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m<5 \\ \left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m\ge 3 \end{array}\right. \end{cases}$.

Vậy $m\in(-\infty-2)\cup[3;5)$.

Câu 18. Cho hai tập hợp $A=[1;3]$ và $B=[m;m+1]$. Tìm tất cả giá trị của tham số m để $B\subset A$.

A. $m=1$. **B.** $1<m<2$. **C.** $1\le m\le 2$. **D.** $m=2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $B\subset A\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge 1\\ m+1\le 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge 1\\ m\le 2\end{cases}$. Vậy $1\le m\le 2$.

Câu 19. Cho m là một tham số thực và hai tập hợp $A=[1-2m;m+3]$, $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\ge 8-5m\}$. Tất cả các giá trị m để $A\cap B=\varnothing$ là

A. $m\ge\dfrac{5}{6}$. **B.** $m<-\dfrac{2}{3}$. **C.** $m\le\dfrac{5}{6}$. **D.** $-\dfrac{2}{3}\le m<\dfrac{5}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $A=[1-2m;m+3]$, $B=[8-5m;+\infty)$.

$$A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow\begin{cases}m+3<8-5m\\ 1-2m\le m+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6m<5\\ 3m\ge -2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<\dfrac{5}{6}\\ m\ge-\dfrac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow-\frac{2}{3}\le m<\frac{5}{6}.$$

Câu 20. Cho hai tập $A=[0;5]$; $B=(2a;3a+1]$, với $a>-1$. Tìm tất cả các giá trị của a để $A\cap B\ne\varnothing$.

A. $\left[\begin{array}{l}a<\dfrac{5}{2}\\ a\ge-\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}a\ge\dfrac{5}{2}\\ a<-\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$. **C.** $-\dfrac{1}{3}\le a<\dfrac{5}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{3}\le a\le\dfrac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$A\cap B\ne\varnothing\Leftrightarrow\begin{cases}2a<3a+1\\ \left[\begin{array}{l}3a+1\ge 0\\ 2a<5\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>-1\\ \left[\begin{array}{l}a\ge-\dfrac{1}{3}\\ a<\dfrac{5}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\ge-\dfrac{1}{3}\\ -1<a<\dfrac{5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow-\frac{1}{3}\le a<\frac{5}{2}.$$

Dạng 5: Xác định hiệu và phần bù các khoảng, đoạn, nửa khoảng

1. Phương pháp

• Để tìm $A \setminus B$ ta làm như sau

- Sắp xếp theo thứ tự tăng dần các điểm đầu mút của các tập hợp $A,\ B$ lên trục số

- Biểu diễn tập A trên trục số(gạch bỏ phần không thuộc tập A), gạch bỏ phần thuộc tập B trên trục số
- Phần không bị gạch bỏ chính là $A \setminus B$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho các tập hợp:

$A = \{x \in R \,|\, x < 3\}$ $B = \{x \in R \,|\, 1 < x \le 5\}$ $C = \{x \in R \,|\, -2 \le x \le 4\}$

a) Hãy viết lại các tập hợp $A,\ B,\ C$ dưới kí hiệu khoảng, nửa khoảng, đoạn.

b) Tìm $A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B$.

c) Tìm $(B \cup C) \setminus (A \cap C)$

Lời giải

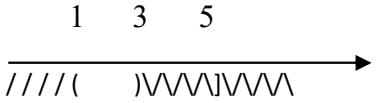
a) Ta có: $A = (-\infty;3)$ $B = (1;5]$ $C = [-2;4]$.

b) • Biểu diễn trên trục số



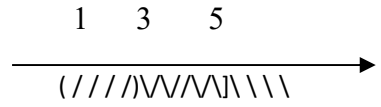
Suy ra $A \cup B = (-\infty;5]$

• Biểu diễn trên trục số



Suy ra $A \cap B = (1;3)$

• Biểu diễn trên trục số



Suy ra $A \setminus B = (-\infty;1]$

c) Bằng cách biểu diễn trên trục số ta có

$A \cap C = [-2;3)$ và $B \cup C = [-2;5]$

Suy ra ta có $(B \cup C) \setminus (A \cap C) = [3;5]$

Nhận xét: Việc biểu diễn trên trục số để tìm các phép toán tập hợp ta làm trên giấy nháp và trình bày kết quả vào.

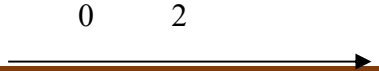
Ví dụ 2: Xác định các tập số sau và biểu diễn trên trục số:

a) $(-4;2] \cap [0;4)$ b) $(0;3) \cup [1;4]$

c) $[-4;3] \setminus [-2;1]$ d) $\mathbb{R} \setminus [1;3]$

Lời giải

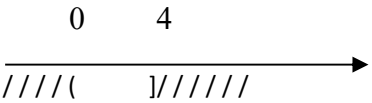
a) Ta có $(-4;2] \cap [0;4) = [0;2]$



Biểu diễn tập đó trên trục số là

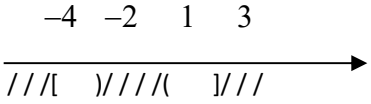
b) Ta có $(0;3)\cup[1;4]=(0;4]$

Biểu diễn tập đó trên trục số là



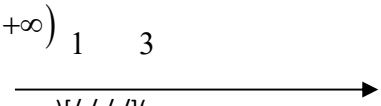
c) Ta có $[-4;3]\setminus[-2;1]=[-4;-2)\cup(1;3]$

Biểu diễn tập đó trên trục số là



d) Ta có $\mathbb{R}\setminus[1;3]=(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$

Biểu diễn tập đó trên trục số là



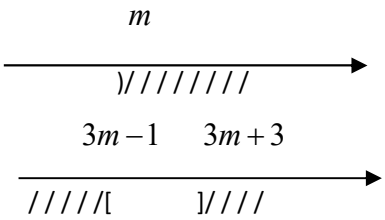
Ví dụ 3: Cho các tập hợp $A=(-\infty;m)$ và $B=[3m-1;3m+3]$. Tìm m để

a) $A\cap B=\varnothing$ b) $B\subset A$

c) $A\subset C_{\mathbb{R}}B$ d) $C_{\mathbb{R}}A\cap B\neq\varnothing$

Lời giải

Ta có biểu diễn trên trục số các tập A và B trên hình vẽ



a) Ta có $A\cap B=\varnothing$

$\Leftrightarrow m\le 3m-1\Leftrightarrow m\ge\dfrac{1}{2}$

Vậy $m\ge\dfrac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

b) Ta có $B\subset A\Leftrightarrow 3m+3<m\Leftrightarrow m<-\dfrac{3}{2}$

Vậy $m<-\dfrac{3}{2}$ là giá trị cần tìm.

c) Ta có $C_{\mathbb{R}}B=(-\infty;3m-1)\cup(3m+3;+\infty)$

Suy ra $A\subset C_{\mathbb{R}}B\Leftrightarrow m\le 3m-1\Leftrightarrow m\ge\dfrac{1}{2}$

Vậy $m\ge\dfrac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

d) Ta có $C_{\mathbb{R}}A=[m;+\infty)$ suy ra $C_{\mathbb{R}}A\cap B\neq\varnothing\Leftrightarrow m\le 3m+3\Leftrightarrow m\ge-\dfrac{3}{2}$

Vậy $m\ge-\dfrac{3}{2}$ là giá trị cần tìm.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho tập hợp $A=[-\sqrt{3};\sqrt{5})$. Tập hợp $C_{\mathbb{R}}A$ bằng

A. $(-\infty;-\sqrt{3}]\cup(\sqrt{5};+\infty)$.

B. $(-\infty;-\sqrt{3})\cup(\sqrt{5};+\infty)$.

C. $(-\infty;-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{5};+\infty)$.

D. $(-\infty;-\sqrt{3})\cup[\sqrt{5};+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $C_{\mathbb{R}}A=\mathbb{R}\setminus A=\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right)$.

Câu 2. Phần bù của $[-2;1)$ trong $\mathbb{R}$ là

A. $(-\infty;1]$. **B.** $(-\infty;-2)\cup[1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$C_{\mathbb{R}}B=\mathbb{R}\setminus B=(-\infty;-2)\cup[1;+\infty)$.

Câu 3. Tập hợp nào sau đây chỉ gồm các số vô tỷ?

A. $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{N}^*$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. **C.** $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Tập hợp chỉ gồm các số vô tỷ là $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Câu 4. Cho các tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<3\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,1<x\le 5\}$, $C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-2\le x\le 4\}$. Khi đó $(B\cup C)\setminus(A\cap C)$ bằng

A. $[-2;3)$. **B.** $[3;5]$. **C.** $(-\infty;1]$. **D.** $[-2;5]$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$A=(-\infty;3)$, $B=(1;5]$, $C=[-2;4]$.

$(B\cup C)\setminus(A\cap C)=\{(1;5]\cup[-2;4]\}\setminus\{(-\infty;3)\cap[-2;4]\}=[-2;5]\setminus[-2;3)=[3;5]$.

Câu 5. Cho $A=(-\infty;1]$; $B=[1;+\infty)$; $C=(0;1]$. Câu nào sau đây **sai**?

A. $(A\cup B)\setminus\mathrm{C}=(-\infty;0]\cup(1;+\infty)$. **B.** $A\cap B\cap\mathrm{C}=\{-1\}$.

C. $A\cup B\cup\mathrm{C}=(-\infty;+\infty)$. **D.** $(A\cap B)\setminus\mathrm{C}=\varnothing$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $A\cap B=\{1\}\Rightarrow A\cap B\cap\mathrm{C}=\{1\}$.

Câu 6. Cho $A=[-1;3]$; $B=(2;5)$. Tìm mệnh đề **sai**.

A. $B\setminus A=[3;5)$. **B.** $A\cap B=(2;3]$.

C. $A\setminus B=[-1;2]$. **D.** $A\cup B=[-1;5]$.

Lời giải

Chọn D.

Mệnh đề đúng: $A\cup B=[-1;5)$.

Câu 7. Cho các tập $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\geq -1\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<3\}$. Tập $\mathbb{R}\setminus(A\cap B)$ là :

A. $(-\infty;-1)\cup[3;+\infty)$. **B.** $(-1;3]$.

C. $[-1;3)$. **D.** $(-\infty;-1]\cup(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có : $A=[-1;+\infty)$; $B=(-\infty;3)$. Khi đó $A\cap B=[-1;3)\Rightarrow\mathbb{R}\setminus(A\cap B)=(-\infty;-1)\cup[3;+\infty)$.

Câu 8. Cho hai tập hợp $A=(\sqrt{2};+\infty)$ và $B=\left(-\infty;\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right]$. Khi đó $(A\cap B)\cup(B\setminus A)$ là

A. $\left[\dfrac{\sqrt{5}}{2};\sqrt{2}\right]$. **B.** $(\sqrt{2};+\infty)$. **C.** $\left(-\infty;\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right]$. **D.** $\left(-\infty;\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $A\cap B=\varnothing$, $B\setminus A=\left(-\infty;\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

Do đó $(A\cap B)\cup(B\setminus A)=\left(-\infty;\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$

Câu 9. Cho $A=(-1;3)$ và $B=[0;5]$. Khi đó $(A\cap B)\cup(A\setminus B)$ là

A. $(-1;3)$. **B.** $[-1;3]$. **C.** $(-1;3)\setminus\{0\}$. **D.** $(-1;3]$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

C1: Ta có: $A\cap B=[0;3)$ và $A\setminus B=(-1;0)$. Do đó:

$(A\cap B)\cup(A\setminus B)=[0;3)\cup(-1;0)=(-1;3)$.

C2: Ta có: $(A\cap B)\cup(A\setminus B)=A$ nên $(A\cap B)\cup(A\setminus B)=(-1;3)$.

Câu 10. Xác định phần bù của tập hợp $(-\infty;-2)$ trong $(-\infty;4)$.

A. $(-2;4)$. **B.** $(-2;4]$. **C.** $[-2;4)$. **D.** $[-2;4]$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $C_{(-\infty;4)}(-\infty;-2)=(-\infty;4)\setminus(-\infty;-2)=[-2;4)$.

Câu 11. Xác định phần bù của tập hợp $(-\infty;-10)\cup(10;+\infty)\cup\{0\}$ trong $\mathbb{R}$.

A. $[-10;\ 10)$. **B.** $[-10;\ 10]\setminus\{0\}$.

C. $[-10;\ 0)\cup[0;\ 10)$. **D.** $[-10;\ 0)\cup(0;\ 10)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$\mathbb{R}\setminus(-\infty;-10)\cup(10;+\infty)\cup\{0\}=[-10;\ 10]\setminus\{0\}$.

Câu 12. Cho hai tập hợp X, Y thỏa mãn $X\setminus Y=\{7;15\}$ và $X\cap Y=(-1;2)$. Xác định số phần tử là số nguyên của X.

A. 2. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

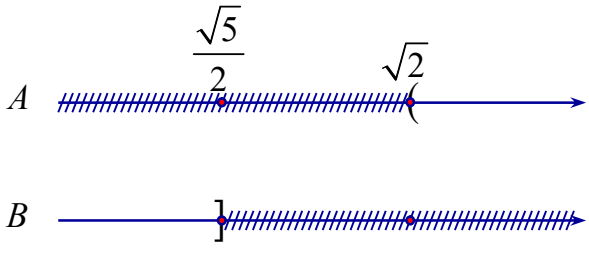
Hướng dẫn giải

Chọn D.

Do $X\setminus Y=\{7;15\}\Rightarrow\{7;15\}\subset X$.

Mà $X\cap Y=(-1;2)\Rightarrow(-1;2)\subset X$.

Suy ra $X=(-1;2)\cup\{7;15\}$.



Vậy số phần tử nguyên của tập X là 4.

Câu 13. Cho $A=(-\infty;2]$ và $B=(0;+\infty)$. Tìm $A\setminus B$.

A. $A\setminus B=(-\infty;0]$. **B.** $A\setminus B=(2;+\infty)$.

C. $A\setminus B=(0;2]$. **D.** $A\setminus B=(-\infty;0)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Biểu diễn hai tập hợp A và B lên trục số ta có kết quả $A\setminus B=(-\infty;0]$.

Câu 14. Cho hai tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-3<x\le 2\}$, $B=(-1;\ 3)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $A\cap B=(-1;\ 2]$.

B. $A\setminus B=(-3;-1)$.

C. $C_{\mathbb{R}}B=(-\infty;-1)\cup[3;+\infty)$.

D. $A\cup B=\{-2;-1;0;1;2\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-3<x\le 2\}=(-3;\ 2]\Rightarrow(-3;\ 2]\cap(-1;\ 3)=(-1;\ 2]$.

Câu 15. Cho $A=[a;a+1)$. Lựa chọn phương án đúng.

A. $C_{\mathbb{R}}A=(-\infty;a]\cup[a+1;+\infty)$.

B. $C_{\mathbb{R}}A=(-\infty;a)\cup[a+1;+\infty)$.

C. $C_{\mathbb{R}}A=(-\infty;a]\cup(a+1;+\infty)$.

D. $C_{\mathbb{R}}A=(-\infty;a)\cup(a+1;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $C_{\mathbb{R}}A=\mathbb{R}\setminus A=(-\infty;a)\cup[a+1;+\infty)$.

Câu 16. Cho các tập hợp khác rỗng $A=(-\infty;m)$ và $B=[2m-2;2m+2]$. Tìm $m\in\mathbb{R}$ để $C_{\mathrm{R}}A\cap B\neq\varnothing$.

A. $m\ge 2$.

B. $m<-2$.

C. $m\ge -2$.

D. $m<2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $C_{\mathrm{R}}A=[m;+\infty)$.

Để $C_{\mathrm{R}}A\cap B\neq\varnothing\Leftrightarrow 2m+2\ge m\Leftrightarrow m\ge -2$.

Câu 17. Cho $A=\{x\in\mathbb{R}\,\|mx-3|=mx-3\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2-4=0\}$. Tìm m để $B\setminus A=B$.

A. $-\frac{3}{2}\le m\le\frac{3}{2}$.

B. $m<\frac{3}{2}$.

C. $-\frac{3}{2}<m<\frac{3}{2}$.

D. $m\ge-\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $x\in A\Leftrightarrow mx-3\ge 0$.

$$x \in B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right.$$

Ta có: $B \setminus A = B \Leftrightarrow B \cap A = \varnothing \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ \left\{\begin{array}{l} m > 0 \\ \dfrac{3}{m} > 2 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} m < 0 \\ \dfrac{3}{m} < -2 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ 0 < m < \dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{3}{2} < m < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow -\dfrac{3}{2} < m < \dfrac{3}{2}.$

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

A. TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Dùng kí hiệu khoảng, đoạn để viết lại tập hợp sau: $B=\left\{x\in\mathbb{R}\left|-\frac{1}{2}<x\le 3\right.\right\}$.

A. $B=\left[-\frac{1}{2};3\right)$. **B.** $B=\left(-\frac{1}{2};3\right]$. **C.** $B=\left[-\frac{1}{2};3\right]$. **D.** $B=\left(-\frac{1}{2};3\right)$.

Lời giải

Chọn B

Câu 2. Cho tập hợp $A=\{2;5;6;7;8\}$ và $B=\{1;2;3;4;5;6;7\}$. Tập $A\setminus B$ có bao nhiêu phần tử?

A. 8. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 12.

Lời giải

Chọn B

$A\setminus B=\{8\}$

Vậy tập $A\setminus B$ có 1 phần tử.

Câu 3. Cho hai tập hợp $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\left|-1\le x\le 3\right.\right\};B=\left\{x\in\mathbb{N}\left|x\le 4\right.\right\}$. Tìm $A\setminus B$.

A. $A\setminus B=\{-1;0;1;2;3;4;6;8\}$.. **B.** $A\setminus B=[-1;0)$.

C. $A\setminus B=(-1;0)$. **D.** $A\setminus B=\{-1\}$.

Lời giải

Chọn D

$A=\{-1;0;1;2;3\},B=\{0;1;2;3;4\}$

$\Rightarrow A\setminus B=\{-1\}$

Câu 4. Viết tập hợp $A=\left\{x\in\mathbb{N}\left|(2x+1)\left(x^2-5x+6\right)=0\right.\right\}$ bằng cách liệt kê phần tử.

A. $A=\left\{\frac{-1}{2};2;3\right\}$. **B.** $A=\{2;3\}$. **C.** $A=\{-1;2\}$. **D.** $A=\{-1;2;3\}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $(2x+1)\left(x^2-5x+6\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+1=0\\x^2-5x+6=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{-1}{2}\\x=2\\x=3\end{array}\right.$.

Do $x\in\mathbb{N}$ nên $\left[\begin{array}{l}x=2\\x=3\end{array}\right.$.

Câu 5. Cho tập hợp $A=[-3;5]$.Viết lại tập hợp A bằng cách chỉ ra tính chất đặc trưng.

A. $A=\left\{x\in\mathbb{R}\left|-3\le x\le 5\right.\right\}$. **B.** $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\left|-3\le x\le 5\right.\right\}$.

C. $A=\left\{x\in\mathbb{N}\left|-3\le x\le 5\right.\right\}$. **D.** $A=\left\{x\in\mathbb{R}\left|-3<x<5\right.\right\}$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Lời giải

Chọn A

Lý thuyết về tập con của các tập hợp số.

Câu 6. Lập mệnh đề phủ định của mệnh đề: "$\forall n \in \mathbb{N}; 2^n \geq n+1$".

A. "$\exists n \in \mathbb{N}; 2^n < n+1$". **B.** "$\forall n \in \mathbb{N}; 2^n < n+1$".

C. "$\exists n \in \mathbb{N}; 2^n \leq n+1$". **D.** "$\forall n \in \mathbb{N}; 2^n \leq n+1$".

Lời giải

Chọn A

Lý thuyết về mệnh đề phủ định cảu mệnh đề và cách sử dụng các ký hiệu $\forall; \exists$.

Câu 7. Trong các phát biểu sau, có bao nhiêu phát biểu là mệnh đề?

1/ Hải Phòng là một thành phố của Việt Nam.

2/ Bạn có đi xem phim không?

3/ $2^{10}-1$ chia hết cho 11.

4/ 2763 là hợp số.

5/ $x^2-3x+2=0$.

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Phát biểu 2/ không phải là mệnh đề, vì phát biểu này không phải là một khẳng định.

Phát biểu 5/ không phải là mệnh đề, vì đây là mệnh đề chứa biến.

Câu 8. Cho tập hợp $X=\{0;1;2;3\}$ và $Y=\{-1;0;1;2;3;5\}$. Tìm $C_Y X$.

A. $C_Y X=\{-1;5\}$. **B.** $C_Y X=\{0;1;2;3\}$.

C. $C_Y X=\varnothing$. **D.** $C_Y X=\{-1;0;1;2;3;5\}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $C_Y X = Y \setminus X = \{-1;5\}$.

Câu 9. Cho tập hợp $A=(-\infty;5], B=[5;+\infty)$. Tìm $A \cup B$.

A. $A \cup B=(-\infty;5)$. **B.** $A \cup B=\{5\}$. **C.** $A \cup B=[5;+\infty)$ **D.** $A \cup B=\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $A \cup B=(-\infty;5] \cup [5;+\infty)=\mathbb{R}$.

Câu 10. Cho tập $A=\{1;2;3;4\}$. Tìm các tập con của A.

A. 10. **B.** 12. **C.** 16. **D.** 8.

Lời giải.

Chọn C

Số tập con của A là

$\{\varnothing;A;\{1\};\{2\};\{3\};\{4\};\{1;2\};\{1;3\};\{1;4\};\{2;3\};\{2;4\};\{3;4\};\{1;2;3\};\{1;2;4\};\{2;3;4\};\{1;3;4\}$.

Vậy A có 16 tập con.

Câu 11. Trong các tập hợp dưới đây, tập hợp nào là tập hợp rỗng?

A. $N=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,2\le m\le 15\}$.

B. $M=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2+4=5\}$.

C. $P=\{n\in\mathbb{N}\,|\,3n+9=6\}$.

D. $Q=\{x\in\mathbb{N}\,||x|\le 1\}$.

Lời giải

Chọn C

Xét $P=\{n\in\mathbb{N}\,|\,3n+9=6\}$. Ta có : $3n+9=6\Leftrightarrow n=-1\notin\mathbb{N}$ nên P là tập rỗng.

Câu 12. Cho tập $A=\{x\in\mathbb{N}\,|\,(x^2-3x+2)(x+3)=0\}$ và $B=\{0;1;2;3;4;5\}$. Có bao nhiêu tập X thỏa mãn $A\cup X=B$?

A. 4. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $(x^2-3x+2)(x+3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-3x+2=0\\x+3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,x=2\\x=-3\end{array}\right.$, suy ra $A=\{1;2\}$ vì $-3\notin\mathbb{N}$.

Để $A\cup X=B$ thì $X=B, X=B\setminus\{1\}, X=B\setminus\{2\}, X=B\setminus\{1;2\}$.

Vậy có tất cả 4 tập X thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 13. Trong mặt phẳng, cho A là tập hợp các tam giác đều, B là tập hợp các tam giác vuông, C là tập hợp các tam giác cân. Chọn khẳng định đúng.

A. $C\subset A$. **B.** $A\subset B$. **C.** $B\subset C$. **D.** $A\subset C$.

Lời giải

Chọn D

Vì tam giác đều được xem là một tam giác cân nên tập hợp các tam giác đều là tập con của tam giác cân hay $A\subset C$.

Câu 14. Tìm mệnh đề đúng.

A. Điều kiện cần và đủ để một số tự nhiên chia hết cho 15 là số đó chia hết cho 5.

B. Điều kiện cần để $a+b$ là một số hữu tỉ là a và b đều là số hữu tỉ.

C. Điều kiện đủ để có ít nhất một trong hai số a, b là số dương là $a+b>0$.

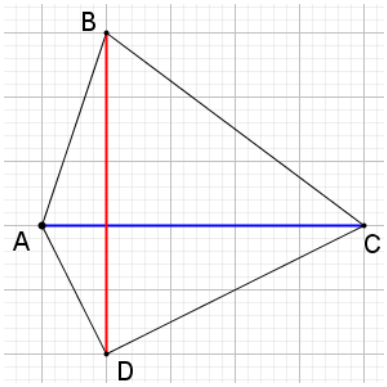
D. Điều kiện cần và đủ để một tứ giác là hình chữ nhật là nó có hai đường chéo bằng nhau.

Lời giải

Chọn C

- A sai; Vì $10\vdots 5$ mà $10\not\vdots 15$.
- B sai; Vì $-\sqrt{2}+\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$, mà $\left\{\begin{array}{l}-\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}\\\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}\end{array}\right.$.

• D sai; Vì giả sử tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo bằng nhau $AC=BD=5$, nhưng $ABCD$ không là hình chữ nhật.



• Xét C. Nếu $a+b>0$ thì có ít nhất một trong hai số a, b là số dương. Thật vậy;

Giả sử cả hai số a, b đều không dương ($\forall a\le 0, b\le 0$), suy ra $a+b\le 0$ (trái giả thiết).

• Vậy C đúng.

Câu 15. Cho tập $A=[m+1;m+2]$ và tập $B=[0;1]$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $C_{\mathbb{R}}A\cap B=\varnothing$.

A. $m\ge 0$. **B.** $m=-1$. **C.** $0<m<1$. **D.** $m<-1$.

Lời giải

Chọn B

• $C_{\mathbb{R}}A=(-\infty;m+1)\cup(m+2;+\infty)$.

• Ycbt $\Leftrightarrow$ Tìm m : $m+1\le 0<1\le m+2$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}m\le -1\\ m\ge -1\end{cases}\Leftrightarrow m=-1$.

• Vậy $m=-1$.

Câu 16. Cho tập $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x-1|\le 2\}$ và $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x-1<0\}$. Tìm $A\cap B$.

A. $A\cap B=[-1;3]$. **B.** $A\cap B=[-1;1)$. **C.** $A\cap B=(-\infty;1)$. **D.** $A\cap B=(-1;2)$.

Lời giải

Chọn B

• Vì $|x-1|\le 2\Leftrightarrow -2\le x-1\le 2\Leftrightarrow -1\le x\le 3$ nên $A=[-1;3]$.

• Vì $x-1<0\Leftrightarrow x<1$ nên $B=(-\infty;1)$.

• Vậy $A\cap B=[-1;1)$.

Câu 17. Lớp 10A có 45 học sinh. Trong đó có 12 học sinh có học lực giỏi, 30 học sinh có hạnh kiểm tốt, trong đó có 10 học sinh vừa lực giỏi vừa hạnh kiểm tốt. Học sinh được khen thưởng nếu được học lực giỏi hoặc hạnh kiểm tốt. Tìm số học sinh không được khen thưởng.

A. 13. **B.** 35. **C.** 23. **D.** 32.

Lời giải

Chọn A

Gọi $A=$"Học sinh chỉ xếp học lực giỏi", $B=$"Học sinh chỉ có hạnh kiểm tốt ".

Khi đó: $A\cup B=$"Học sinh xếp chỉ học lực giỏi hoặc chỉ có hạnh kiểm tốt".

$A\cap B=$" Học sinh vừa học lực giỏi vừa hạnh kiểm tốt": Có 10 học sinh.

Số phần tử của $A\cup B$ là: $12+30-10=32$.

Số học sinh được khen thưởng là 32.

Vậy số học sinh không được khen thưởng là: $45-32=13$.

Câu 18. Tìm mệnh đề **sai.**

A. $\forall n\in\mathbb{N};\ n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 6.

B. $\forall n\in\mathbb{N};n^2+1$ không chia hết cho 4.

C. $\exists n\in\mathbb{N};\ n^2+1$ chia hết cho 3.

D. $\exists x\in\mathbb{R};\ x^2\le 0$.

Lời giải

Chọn C

- Xét đáp án A : $\forall n\in\mathbb{N};\ n(n+1)(n+2)$ là tích của ba số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 2 và chia hết cho 3 do đó chia hết cho 6. Vậy đáp án A đúng.

- Xét đáp án B: $\forall n\in\mathbb{N};n^2+1$ không chia hết cho 4.

Giả sử mệnh đề trên sai tức là : $\forall n\in\mathbb{N};n^2+1$ chia hết cho 4.

+ Nếu n chẵn $\Rightarrow n=2k,(k\in\mathbb{N})\Rightarrow n^2+1=4k^2+1$ số này không chia hết cho 4.

+ Nếu n lẻ $\Rightarrow n=2k+1,(k\in\mathbb{N})\Rightarrow n^2+1=4k^2+4k+2=4(k^2+k)+2$ không chia hết cho 4.

Suy ra $\forall n\in\mathbb{N};n^2+1$ không chia hết cho 4 (trái với giả thiết). Do đó đáp án B đúng.

- Xét đáp án C: $\exists n\in\mathbb{N};\ n^2+1$ chia hết cho 3.

$\forall n\in\mathbb{N}$, ta có các trường hợp:

$n=3k\ (k\in\mathbb{N})\Rightarrow n^2+1=9k^2+1$ số này không chia hết cho 3.

$n=3k+1\ (k\in\mathbb{N})\Rightarrow n^2+1=(3k+1)^2+1=9k^2+6k+2$ số này không chia hết cho 3.

$n=3k+2\ (k\in\mathbb{N})\Rightarrow n^2+1=(3k+2)^2+1=9k^2+12k+5$ số này không chia hết cho 3.

Do đó $\forall n\in\mathbb{N};\ n^2+1$ không chia hết cho 3. Nên đáp án C sai.

- Đáp án D đúng với $x=0$.

Câu 19. Cho hai tập hợp $A=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,x=15k;k\in\mathbb{Z}\}$ và $B=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,x=5m;m\in\mathbb{Z}\}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $B\subset A$.

B. $A\subset B$.

C. $A\not\subset B$.

D. $A=B$.

Lời giải

Chọn B

Ta có : $\forall x\in A\Rightarrow x=15k=5.(3k)=5\,\mathrm{n}$ (với $\mathrm{n}=3\mathrm{k}$). Do $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow 3k\in\mathbb{Z}\Rightarrow n=3\mathrm{k}\in\mathbb{Z}$.

Suy ra $x\in B\Rightarrow A\subset B$.

Câu 20. Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$: "$x^3-3x^2+2x=0$". Tìm tất cả các phần tử của x để $P(x)$ là một mệnh đề đúng ?

A. $x=-1, x=-2$. **B.** $x=-2, x=-3$. **C.** $x=0, x=1, x=2$. **D.** $x=4, x=-2, x=3$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $x^3-3x^2+2x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-3x+2\right)=0 \Leftrightarrow x(x-1)(x-2)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x-1=0 \\ x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right. .$$

Câu 21. Tìm mệnh đề **sai.**

A. $A \subset (A \cup B)$, với mọi tập A, B.

B. $A \setminus B \subset A$, với mọi tập A, B.

C. $(A \cap B) \subset B$, với mọi tập A, B.

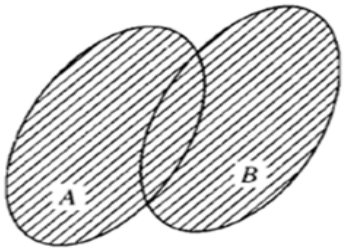
D. $(A \cup B) \subset (A \cap B)$, với mọi tập A, B.

Lời giải

Chọn D.

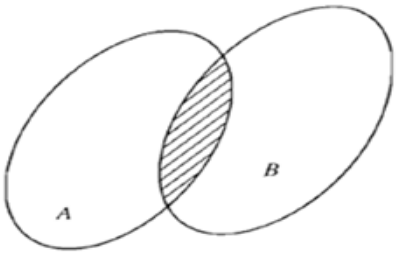
Theo biểu đồ Ven ta có:

$(A \cup B)$ là phần gạch sọc bên dưới



$A \cup B$

$A \cap B$ là phần gạch sọc bên dưới.



$A \cap B$

Do đó $(A \cup B) \subset (A \cap B)$, với mọi tập A, B là mệnh đề sai.

Câu 24: Cho tập $A=\left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{1}{|x-2|}>\dfrac{1}{2}\right\}$ và $B=\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le |x| \le 2\}$. Tìm $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

A. $[-2;-1] \cup [0;1] \cup [2;4)$.

B. $[-2;-1] \cup (0;1] \cup (2;4)$

C. $[-2;-1] \cup [0;1] \cup [2;4]$

D. $[-2;-1] \cup (0;1) \cup [2;4)$.

Lời giải

Chọn D

+ Với $x \neq 2$, ta có: $\dfrac{1}{|x-2|}>\dfrac{1}{2} \Rightarrow |x-2|<2 \Rightarrow 0<x<4$, suy ra $A=(0;4) \setminus \{2\}$.

+ Ta có: $1 \le |x| \le 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \le x \le 2 \\ -2 \le x \le -1 \end{array}\right.$, suy ra $B=[-2;-1] \cup [1;2]$.

$A \cup B=[-2;-1] \cup (0;4)$, $A \cap B=[1;2)$

Suy ra: $(A \cup B) \setminus (A \cap B)=[-2;-1] \cup (0;1) \cup [2;4)$.

Câu 25: Tìm mệnh đề **sai**.

A. $A\setminus\varnothing=\varnothing$, với mọi tập A.

B. $A\cup\varnothing=A$, với mọi tập A.

C. $A\cap\varnothing=\varnothing$, với mọi tập A.

D. $A\cap A=A$, với mọi tập A.

Lời giải

Chọn A

Vì $A\setminus\varnothing=A$ nên A là mệnh đề sai

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Xác định các tập hợp sau bằng cách nêu tính chất đặc trưng

$A=\{-4;-3;-2;-1;0\ ;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\}$, $B=\{1\ ;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9\}$, $C=\{0;1;4;9;16;25\}$

Hướng dẫn giải

Ta có các tập hợp A,B,C được viết dưới dạng nêu các tính chất đặc trưng là

$A=\{x\in N\ |\ |x|\le 4\}$, $B=\{x\in N\ |x$ là số lẻ nhỏ hơn $10\}$, $C=\{n^2\ |\ n$ là số tự nhiên nhỏ hơn $6\}$

Bài 2.

a) Trong các tập sau đây, tập nào là tập con của tập nào

$A=\{1;2;3\}$ $\quad$ $B=\{n\in N|n<4\}$

$C=(0;+\infty)$ $\quad$ $D=\{x\in R|2x^2-7+3=0\}$

b) Tìm tất cả các tập X thoả mãn bao hàm thức sau;

$\{1;2\}\subset X\subset\{1;2;3;4;5\}$.

Hướng dẫn giải

a) $A\subset B,\quad A\subset C,\quad D\subset C$.

b) $\{1;2\}$, $\{1;2;3\}$, $\{1;2;4\}$, $\{1;2;5\}$, $\{1;2;3;4\}$, $\{1;2;3;5\}$, $\{1;2;4;5\}$, $\{1;2;3;4;5\}$.

Bài 3: Cho tập hợp $A=\left\{x\in\mathbb{R}\ |\ \dfrac{14}{3\sqrt{x}+6}\in \mathrm{Z}\right\}$

a) Hãy xác định tập A bằng cách liệt kê các phần tử

b) Tìm tất cả các tập con của tập hợp A.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\sqrt{x}\ge 0$ suy ra $0<\dfrac{14}{3\sqrt{x}+6}\le\dfrac{14}{6}$

Mặt khác $\dfrac{14}{3\sqrt{x}+6}\in \mathrm{Z}$ nên $\dfrac{14}{3\sqrt{x}+6}=1$ hoặc $\dfrac{14}{3\sqrt{x}+6}=2$

Hay $x=\dfrac{1}{9}$ hoặc $x=\dfrac{64}{9}$

Vậy $A=\left\{\dfrac{1}{9};\dfrac{64}{9}\right\}$

b) Tất cả các tập con của tập hợp A là $\varnothing$, $\left\{\dfrac{1}{9}\right\}$, $\left\{\dfrac{64}{9}\right\}$, $\left\{\dfrac{1}{9};\dfrac{64}{9}\right\}$.

Bài 4: Cho $A=\{x\in\mathbb{R}\ |\ (x^4-16)(x^2-1)=0\}$ và $B=\{x\in N\ |\ 2x-9\le 0\}$.

Tìm tập hợp X sao cho

a) $X \subset B \setminus A$

b) $A \setminus B = X \cap A$ với X có đúng hai phần tử

Hướng dẫn giải

Ta có $A = \{-2;-1;1;2\}$ và $B = \{0;1;2;3;4\}$

a) Ta có $A \setminus B = \{0;3;4\}$

Suy ra $X \subset A \setminus B$ thì các tập hợp X là

$\varnothing, \{0\}, \{3\}, \{4\}, \{0;3\}, \{0;4\}, \{3;4\}, \{0;3;4\}$

b) Ta có $A \setminus B = \{-2;-1\}$ với X có đúng hai phần tử khi đó $X = \{-2;-1\}$.

Bài 5: Cho tập $A = \{-1;1;5;8\}$, B ="Gồm các ước số nguyên dương của 16"

a) Viết tập A dưới dạng chỉ ra tính chất đặc trưng của các phần tử.

Viết tập B dưới dạng liệt kê các phần tử.

b) Xác định các phép toán $A \cap B,\ A \cup B,\ A \setminus B$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x+1)(x-1)(x-5)(x-8) = 0\}$

$B = \{1;\ 2;\ 4;\ 8;\ 16\}$

b) Ta có $A \cap B = \{1;8\},\ A \cup B = \{-1;\ 1;\ 2;\ 4;\ 5;\ 8;\ 16\},\ A \setminus B = \{-1;\ 5\}$

Bài 6: Cho các tập hợp $E = \{\ x \in N \mid 1 \le x < 7\}$

$A = \{\ x \in N \mid (x^2 - 9)(x^2 - 5x - 6) = 0\}$ và $B = \{x \in N \mid x$ là số nguyên tố nhỏ hơn $6\}$

a) Chứng minh rằng $A \subset E$ và $B \subset E$

b) Tìm $C_E A$; $C_E B$; $C_E(A \cup B)$

c) Chứng minh rằng : $E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\mathrm{E} = \{1;2;3;4;5;6\}$ $A = \{3;6\}$ và $B = \{2;3;5\}$

Suy ra $A \subset E$ và $B \subset E$

b) Ta có $C_E A = E \setminus A = \{1;2;4;5\};\ C_E B = E \setminus B = \{1;4;6\}$

$A \cup B = \{2;3;5;6\} \Rightarrow C_E(A \cup B) = E \setminus (A \cup B) = \{1;4\}$

c) Ta có $A \cap B = \{3\} \Rightarrow C_E(A \cap B) = E \setminus (A \cap B) = \{1;2;4;5;6\}$

$E \setminus A = \{1;2;4;5\}; E \setminus B = \{1;4;6\} \Rightarrow (E \setminus A) \cup (E \setminus B) = \{1;2;4;5;6\}$

Suy ra $E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$.

Bài 7: Xác định các tập hợp $A \cup B, A \setminus C, A \cap B \cap C$ và biểu diễn trên trục số các tập hợp tìm được biết:

a) $A=\{x\in R|-1\le x\le 3\}$,$B=\{x\in R|x\ge 1\}$,$C=(-\infty;1)$

b) $A=\{x\in R|-2\le x\le 2\}$,$B=\{x\in R|x\ge 3\}$,$C=(-\infty;0)$

Hướng dẫn giải

a) Có $A=[-1;3]$ và $B=[1;+\infty)$

$A\cup B=[-1;+\infty)$, $A\setminus C=[1;3]$, $A\cap B\cap C=\phi$

b) Có $A=[-2;2]$ và $B=[3;+\infty)$

$A\cup B=[-2;2]\cup[3;+\infty)$, $A\setminus C=[0;2]$, $A\cap B\cap C=\phi$

Bài 8: Cho tập A = [-1; 2), B = (-3; 1) và C = (1; 4].

a) Viết tập A, B, C dưới dạng chỉ ra tính chất đặc trưng của các phần tử và biểu diễn chúng trên trục số.

b) Xác định các phép toán $A\cap B$, $B\cup C$, $A\setminus B$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $A=[-1;2)=\{x|-1\le x<2\}$,$B=(-3;1)=\{x|-3<x<1\}$

$C=(1;4]=\{x|1<x\le 4\}$

b) Ta có $A\cap B=[-1;1)$, $B\cup C=(-3;4)\setminus\{1\}$, $A\setminus B=[1;2)$

Bài 9: Cho hai tập hợp $A=[0;4),B=\{x\in\mathbb{R}/|x|\le 2\}$.Hãy xác định các tập hợp

$$A\cup B,A\cap B,A\setminus B$$

$A=[0;4),B=[-2;2]$, $A\cup B=[-2;4)$, $A\cap B=[0;2]$, $A\setminus B=(2;4)$

Bài 10:

a) Cho A = $\{x\in R\mid -1\le x<5\}$ B=$\{x\in R\mid -2<x<0$ hoặc $1<x\le 6\}$

C=$\{x\in R\mid x\ge 2\}$

Tìm $A\cap B,A\cup C,B\setminus C$ và biểu diễn cách lấy kết quả trên trục số

b) Cho $A=(-\infty,-2)$, $B=[2m+1,+\infty)$. Tìm m để $A\cup B=R$.

Hướng dẫn giải

a) $A\cap B=[-1;0)\cup(1;5)$ $A\cup C=[-1;+\infty)$ $B\setminus C=(-2;0)\cup(1;2)$

b) $A\cup B=R\Leftrightarrow 2m+1<-2\Leftrightarrow m<\dfrac{-3}{2}$

Bài 11: a) Tìm m để $(1;m]\cap(2;+\infty)\ne\varnothing$.

b) Viết tập A gồm các phần tử x thỏa mãn điều kiện $\begin{cases}x\le 3\\x+1\ge 0\\x<0\end{cases}$ dưới dạng tập số.

Hướng dẫn giải

a) Để $\left(1;\ m\right]\cap\left(2;\ +\infty\right)\neq\varnothing$ thì $m>2$.

b) Viết tập A gồm các phần tử x thỏa mãn điều kiện $\begin{cases}x\le 3\\ x+1\ge 0\\ x<0\end{cases}$ dưới dạng tập số.

Có $\begin{cases}x\le 3\\ x+1\ge 0\\ x<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 3\\ x\ge -1\\ x<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-\infty;\ 3]\\ x\in[-1;\ +\infty)\\ x\in(-\infty;\ 0)\end{cases}$ (biểu diễn trên trục số)

$\Leftrightarrow x\in(-\infty;\ 3]\cap[-1;\ +\infty)\cap(-\infty;\ 0)\Leftrightarrow x\in[-1;\ 0)$.

Vậy $A=\left[-1;\ 0\right)$.

Bài 12: Cho tập hợp $A=\left[m-1;\frac{m+1}{2}\right]$ và $B=\left(-\infty;-2\right)\cup\left[2;+\infty\right)$. Tìm m để

a) $A\subset B$ b) $A\cap B=\varnothing$

Hướng dẫn giải

Điều kiện để tồn tại tập hợp A là $m-1<\frac{m+1}{2}\Leftrightarrow m<3$ (*)

a) $A\subset B\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}A\subset\left(-\infty;-2\right)\\ A\subset\left[2;+\infty\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{m+1}{2}<-2\\ m-1\ge 2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-5\\ m\ge 3\end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện (*) ta có $m<-5$ là giá trị cần tìm

b) $A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-2\le m-1\\ \frac{m+1}{2}<2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\ge -1\\ m<3\end{array}\right.\Leftrightarrow -1\le m<3$

Kết hợp với điều kiện (*) ta có $-1\le m<3$ là giá trị cần tìm

Bài 13: Cho hai tập khác rỗng : $A=\left(m-1;4\right]$, $B=\left(-2\ ;2m+2\right)$, với m$\in\mathbb{R}$. Xác định m để :

a) $A\cap B\neq\varnothing$; b) $A\subset B$;

c) $B\subset A$; d) $(A\cap B)\subset(-1;\ 3)$.

Hướng dẫn giải

Với $A=\left(m-1;4\right]$, $B=\left(-2\ ;2m+2\right)$ khác tập rỗng, ta có điều kiện

$\begin{cases}m-1<4\\ 2m+2>-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<5\\ m>-2\end{cases}\Leftrightarrow -2<m<5$ (*).

Với điều kiện (*), ta có :

a) $A\cap B\neq\varnothing\Leftrightarrow m-1<2m+2\Leftrightarrow m>-3$. So sánh với (*) ta thấy các giá trị m thỏa mãn yêu cầu $A\cap B\neq\varnothing$ là $-2<m<5$.

b) $A \subset B \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \geq -2 \\ 2m+2 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$. So sánh (*) ta thấy các giá trị m thỏa mãn yêu cầu $A \subset B$ là $1 < m < 5$.

c) $B \subset A \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \leq -2 \\ 2m+2 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -1$. So sánh với (*) ta thấy các giá trị m thỏa mãn yêu cầu $B \subset A$ là $-2 < m \leq -1$.

d) $(A \cap B) \subset (-1;\ 3) \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \geq -1 \\ 2m+2 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{1}{2}$ (thỏa (*)).

Chương II BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Trong chương II, chúng ta sẽ tìm hiểu về bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn, ta sẽ học cách nhận biết nghiệm và biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trong mặt phẳng toạ độ và ứng dụng những kiến thức học được vào giải quyết các bài toán thực tiễn.



Bài toán tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = ax + by$ trên một miền đa giác có thể giúp tối ưu hoá sản xuất.

Học xong chương này, bạn có thể:

- Nhận biết được bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.
- Biểu diễn được miền nghiệm của bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên mặt phẳng toạ độ.
- Vận dụng được kiến thức về bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn vào giải quyết các bài toán thực tiễn (ví dụ: bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = ax + by$ trên một miền đa giác, ...).

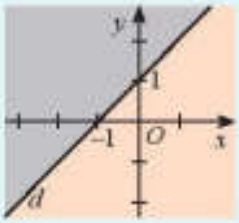
Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Bài 1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Từ khoá: Bất phương trình bậc nhất hai ẩn; Nghiệm; Miền nghiệm.

Đường thẳng d: $y = x + 1$ chia mặt phẳng toạ độ thành hai miền (không tính đường thẳng d) như hình bên. Dùng các nhãn dưới đây đặt vào miền phù hợp để đặt tên cho miền đó.

$y > x + 1$ $y < x + 1$



1. Khái niệm bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Bạn Nam để dành được 700 nghìn đồng. Trong một đợt ủng hộ các bạn học sinh ở vùng bị bão lụt, Nam đã ủng hộ x tờ tiền loại 20 nghìn đồng, y tờ tiền loại 50 nghìn đồng từ tiền để dành của mình.

a) Biểu diễn tổng số tiền bạn Nam đã ủng hộ theo x và y.

b) Giải thích tại sao ta lại có bất đẳng thức $20x + 50y \le 700$.

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là bất phương trình có một trong các dạng

$$ax + by + c < 0,\ ax + by + c > 0,\ ax + by + c \le 0,\ ax + by + c \ge 0,$$

trong đó a, b, c là những số cho trước, a, b không đồng thời bằng 0 và x, y là các ẩn.

Chân trời sáng tạo

Ví dụ 1

Tìm bất phương trình bậc nhất hai ẩn trong các bất phương trình sau đây:

a) $x - 5y + 2 \le 0$;

b) $9x^2 + 8y - 7 \ge 0$;

c) $3x - 2 > 0$;

d) $4y + 11 \le 0$.

Giải

Các bất phương trình a), c), d) là các bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Bất phương trình b) không là bất phương trình bậc nhất hai ẩn vì có chứa x^2.

Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

a) $2x - 3y + 1 \le 0$;

b) $x - 3y + 1 \ge 0$;

c) $y - 5 > 0$;

d) $x - y^2 + 1 > 0$.

2. Nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

HĐ2 Trường hợp nào sau đây thoả mãn tình huống được nêu trong HĐ1?

Trường hợp 1: Nam ủng hộ 2 tờ tiền loại 20 nghìn đồng và 3 tờ tiền loại 50 nghìn đồng.

Trường hợp 2: Nam ủng hộ 15 tờ tiền loại 20 nghìn đồng và 10 tờ tiền loại 50 nghìn đồng.

Xét bất phương trình $ax + by + c < 0$.

Mỗi cặp số $(x_0; y_0)$ thoả mãn $ax_0 + by_0 + c < 0$ được gọi là một ***nghiệm*** của bất phương trình đã cho.

Ví dụ 2

Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình $20x + 50y - 700 \le 0$?

a) $(5; 6)$; b) $(9; 11)$.

Giải

a) Vì $20 . 5 + 50 . 6 - 700 = -300 < 0$ nên $(5; 6)$ là nghiệm của bất phương trình $20x + 50y - 700 \le 0$.

b) Vì $20 . 9 + 50 . 11 - 700 = 30 > 0$ nên $(9; 11)$ không phải là nghiệm của bất phương trình $20x + 50y - 700 \le 0$.

HĐ2 Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình $4x - 7y - 28 \ge 0$?

a) $(9; 1)$; b) $(2; 6)$; c) $(0; -4)$.

HĐ1 Cho biết mỗi 100 g thịt bò chứa khoảng 26,1 g protein, một quả trứng nặng 44 g chứa khoảng 5,7 g protein (*nguồn*: https://www.vinmec.com). Giả sử có một người mỗi ngày cần không quá 60 g protein. Gọi số gam thịt bò và số quả trứng mà người đó ăn trong một ngày lần lượt là x và y.

a) Lập bất phương trình theo x, y diễn tả giới hạn về lượng protein trong khẩu phần ăn hằng ngày của người đó.

b) Dùng bất phương trình ở câu a) để trả lời hai câu hỏi sau:

– Nếu người đó ăn 150 g thịt bò và 2 quả trứng (mỗi quả 44 g) trong một ngày thì có phù hợp không?

– Nếu người đó ăn 200 g thịt bò và 2 quả trứng (mỗi quả 44 g) trong một ngày thì có phù hợp không?

3. Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

HĐ3 Cho bất phương trình $2x - y + 1 < 0$.

a) Vẽ đường thẳng $y = 2x + 1$.

b) Các cặp số $(-2; 0)$, $(0; 0)$, $(1; 1)$ có là nghiệm của bất phương trình đã cho không?

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm $(x_0; y_0)$ sao cho $ax_0 + by_0 + c < 0$ được gọi là ***miền nghiệm*** của bất phương trình $ax + by + c < 0$.

Người ta chứng minh được: Mỗi phương trình $ax + by + c = 0$ (a, b không đồng thời bằng 0) xác định một đường thẳng Δ. Đường thẳng Δ chia mặt phẳng Oxy thành hai nửa mặt phẳng, trong đó một nửa (không kể bờ Δ) là tập hợp các điểm $(x; y)$ thoả mãn $ax + by + c > 0$, nửa còn lại (không kể bờ Δ) là tập hợp các điểm $(x; y)$ thoả mãn $ax + by + c < 0$.

Ta có thể biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by + c < 0$ như sau:

Bước 1: Trên mặt phẳng Oxy, vẽ đường thẳng Δ: $ax + by + c = 0$.

Bước 2: Lấy một điểm $(x_0; y_0)$ không thuộc Δ. Tính $ax_0 + by_0 + c$.

Bước 3: Kết luận

– Nếu $ax_0 + by_0 + c < 0$ thì miền nghiệm của bất phương trình đã cho là nửa mặt phẳng (không kể bờ Δ) chứa điểm $(x_0; y_0)$.

– Nếu $ax_0 + by_0 + c > 0$ thì miền nghiệm của bất phương trình đã cho là nửa mặt phẳng (không kể bờ Δ) không chứa điểm $(x_0; y_0)$.

Chú ý: Đối với các bất phương trình bậc nhất hai ẩn dạng $ax + by + c \le 0$ (hoặc $ax + by + c \ge 0$) thì miền nghiệm là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c < 0$ (hoặc $ax + by + c > 0$) kể cả bờ.

Chân trời sáng tạo

Ví dụ 3

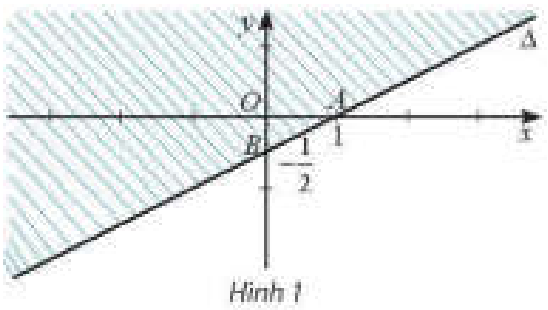
Biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình sau:

a) $x - 2y - 1 > 0$; b) $x + y - 1 \le 0$.

Giải

a) Vẽ đường thẳng Δ: $x - 2y - 1 = 0$ đi qua hai điểm $A(1; 0)$ và $B\left(0; -\frac{1}{2}\right)$.

Xét gốc tọa độ $O(0; 0)$. Ta thấy $O \notin \Delta$ và $0 - 2.0 - 1 < 0$. Do đó, miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng không kể bờ Δ, không chứa gốc tọa độ O (*miền không gạch chéo trên Hình 1*).

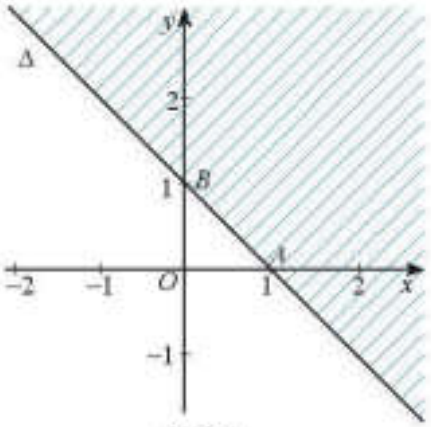


Hình 1

b) Vẽ đường thẳng Δ: $x + y - 1 = 0$ đi qua hai điểm $A(1; 0)$ và $B(0; 1)$.

Xét gốc tọa độ $O(0; 0)$. Ta thấy $O \notin \Delta$ và $0 + 0 - 1 < 0$.

Do đó, miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng kể cả bờ Δ, chứa gốc tọa độ O (*miền không gạch chéo trên Hình 2*).



Hình 2

3 Biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình sau:

a) $2x + y - 2 \le 0$; b) $x - y - 2 \ge 0$.

2 Biểu diễn miền nghiệm của hai bất phương trình sau trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy:

a) $y \ge 2$; b) $x \le 4$.

BÀI TẬP

1. Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn $x - 2y + 6 > 0$.

a) (0; 0) có phải là một nghiệm của bất phương trình đã cho không?

b) Chỉ ra ba cặp số $(x; y)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

c) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình đã cho trên mặt phẳng Oxy.

2. Biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình sau trên mặt phẳng tọa độ Oxy:

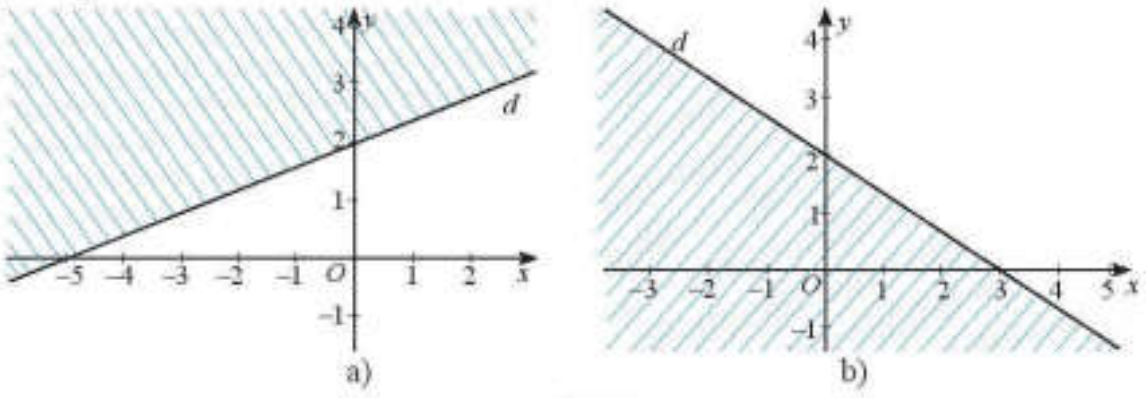
a) $-x + y + 2 > 0$; b) $y + 2 \ge 0$; c) $-x + 2 \le 0$.

3. Biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình sau trên mặt phẳng tọa độ Oxy:

a) $-x + 2 + 2(y - 2) < 2(1 - x)$; b) $3(x - 1) + 4(y - 2) < 5x - 3$.

4. Bạn Cúc muốn pha hai loại nước cam. Để pha một lít nước cam loại I cần 30 g bột cam, còn một lít nước cam loại II cần 20 g bột cam. Gọi x và y lần lượt là số lít nước cam loại I và II pha chế được. Biết rằng Cúc chỉ có thể dùng không quá 100 g bột cam. Hãy lập các bất phương trình mô tả số lít nước cam loại I và II mà bạn Cúc có thể pha chế được và biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình đó trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy.

5. Miền không gạch chéo (không kể bờ d) trong mỗi hình dưới đây là miền nghiệm của bất phương trình nào?



Hình 3

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Dạng 1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

1. Phương pháp

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là mệnh đề chứa hai biến có một trong các dạng $\left[\begin{array}{l} ax+by>c \\ ax+by<c \\ ax+by\ge c \\ ax+by\le c \end{array}\right.$, trong đó a,b,c là các số thực với $a^2+b^2\neq 0$.

Nghiệm của bất phương trình

Cặp số $(x_0;y_0)$ để $ax_0+by_0>c$ là bất đẳng thức đúng được gọi là một nghiệm của bất phương trình $ax+by>c.$

Biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Cũng như bất phương trình bậc nhất một ẩn, các bất phương trình bậc nhất hai ẩn thường có vô số nghiệm và để mô tả tập nghiệm của chúng, ta sử dụng phương pháp biểu diễn hình học.

Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy,$ tập hợp các điểm có toạ độ là nghiệm của bất phương trình được gọi là miền nghiệm của nó.

Từ đó ta có quy tắc thực hành biểu diễn hình học tập nghiệm (hay biểu diễn miền nghiệm) của bất phương trình $ax+by\le c$ như sau (tương tự cho bất phương trình $ax+by\ge c$).

Bước 1. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy vẽ đường thẳng $\Delta: ax+by=c.$

Bước 2. Lấy một điểm $M_0(x_0;y_0)$ không thuộc Δ (ta thường lấy gốc toạ độ O).

Bước 3. Tính ax_0+by_0 và so sánh ax_0+by_0 với $c.$

Bước 4. Kết luận.

+) Nếu $ax_0+by_0<c$ thì nửa mặt phẳng bờ Δ chứa M_0 là miền nghiệm của $ax_0+by_0\le c.$

+) Nếu $ax_0+by_0>c$ thì nửa mặt phẳng bờ Δ không chứa M_0 là miền nghiệm của $ax_0+by_0\le c.$

Chú ý: Miền nghiệm của bất phương trình $ax_0+by_0\le c$ bỏ đi đường thẳng $ax_0+by_0=c$ là miền nghiệm của bất phương trình $ax_0+by_0<c.$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Xác định miền nghiệm của các bất phương trình sau:

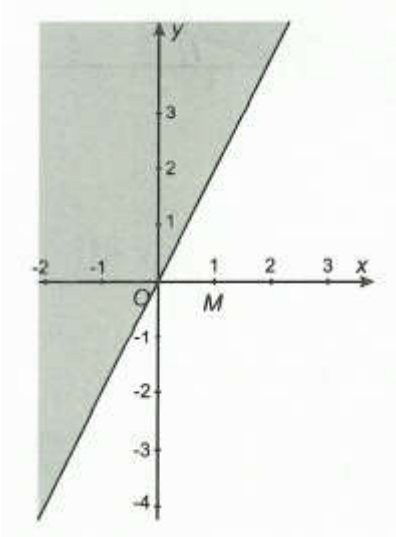
a) $2x-y\ge 0.$

b) $\dfrac{x-2y}{2}>\dfrac{2x+y+1}{3}.$

Hướng dẫn giải

a) Trong mặt phẳng toạ độ, vẽ đường thẳng $d: 2x-y=0.$ Ta có d chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Chọn một điểm bất kì không thuộc đường thẳng đó, chẳng hạn điểm $M(1;0).$ Ta thấy

$(1;0)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho. Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng bờ chứa d và chứa điểm $M(1;0)$ (miền không được tô màu trên hình vẽ).



b) Ta có

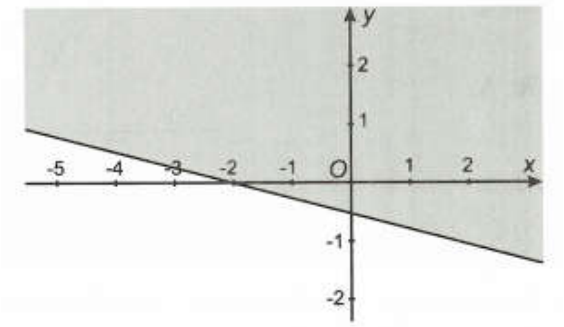
$$\frac{x-2y}{2}>\frac{2x-y+1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3(x-2y)-2(2x-y+1)>0$$

$$\Leftrightarrow -x-4y-2>0$$

$$\Leftrightarrow x+4y+2<0$$

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, vẽ đường thẳng $\Delta: x+4y+2=0$. Xét điểm $O(0;0)$, ta thấy $(0;0)$ không phải là nghiệm của bất phương trình đã cho, do đó miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng bờ Δ (không kể đường thẳng Δ) và không chứa điểm $O(0;0)$ (miền không được tô đậm như hình vẽ).



Ví dụ 2: Xác định miền nghiệm của các bất phương trình sau:

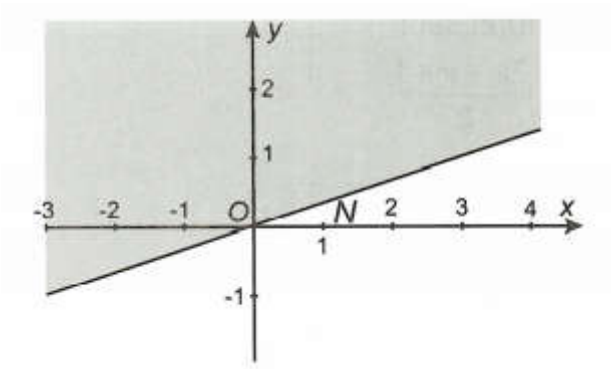
a) $x-3y\geq 0$.

b) $\frac{x-y}{-2}<x+y+1$.

Hướng dẫn giải

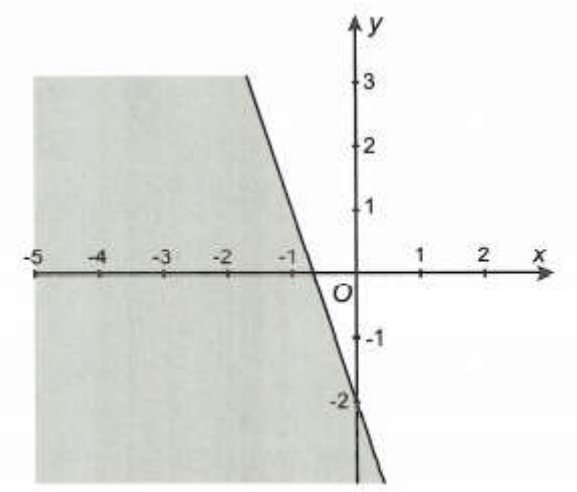
a) Trong mặt phẳng toạ độ, vẽ đường thẳng $d: x-3y=0$. Ta có d chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Chọn một điểm bất kì không thuộc đường thẳng đó, chẳng hạn điểm $N(1;0)$. Ta thấy

$(1;0)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho. Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng bờ chứa d và chứa điểm $N(1;0)$ (miền không được tô đậm trên hình vẽ).



b) Ta có $\frac{x-y}{-2} < x+y+1 \Leftrightarrow x-y > -2(x+y+1) \Leftrightarrow 3x+y+2>0$.

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, vẽ đường thẳng $\Delta: 3x+y+2=0$. Xét điểm $O(0;0)$, ta thấy $(0;0)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho, do đó miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng bờ Δ (không kể đường thẳng Δ) và chứa điểm $O(0;0)$ (miền không được tô đậm trên hình vẽ).



3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

A. $2x^2+3y>0$ **B.** $x^2+y^2<2$ **C.** $x+y^2\ge 0$ **D.** $x+y\ge 0$

Lời giải

Chọn D

Theo định nghĩa thì $x+y\ge 0$ là bất phương trình bậc nhất hai ẩn. Các bất phương trình còn lại là bất phương trình bậc hai.

Câu 2. Cho bất phương trình $2x+3y-6\le 0$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. Bất phương trình (1) chỉ có một nghiệm duy nhất.

B. Bất phương trình (1) vô nghiệm.

C. Bất phương trình (1) luôn có vô số nghiệm.

D. Bất phương trình (1) có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

Trên mặt phẳng tọa độ, đường thẳng $(d):2x+3y-6=0$ chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng.

Chọn điểm $O(0;0)$ không thuộc đường thẳng đó. Ta thấy $(x;y)=(0;0)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho. Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ (d) chứa điểm $O(0;0)$ kể cả (d).

Vậy bất phương trình (1) luôn có vô số nghiệm.

Câu 3. Miền nghiệm của bất phương trình: $3x+2(y+3)\ge 4(x+1)-y+3$ là nửa mặt phẳng chứa điểm:

A. $(3;0)$ **B.** $(3;1)$ **C.** $(2;1)$ **D.** $(0;0)$

Lời giải

Chọn C

Ta có $3x+2(y+3)\ge 4(x+1)-y+3\Leftrightarrow -x+3y-1\ge 0$.

Vì $-2+3.1-1>0$ là mệnh đề đúng nên miền nghiệm của bất phương trình trên chứa điểm có tọa độ $(2;1)$.

Câu 4. Miền nghiệm của bất phương trình: $3(x-1)+4(y-2)<5x-3$ là nửa mặt phẳng chứa điểm:

A. $(0;0)$ **B.** $(-4;2)$ **C.** $(-2;2)$ **D.** $(-5;3)$

Lời giải

Chọn A

Ta có $3(x-1)+4(y-2)<5x-3\Leftrightarrow -2x+4y-8<0$.

Vì $-2.0+4.0-8<0$ là mệnh đề đúng nên miền nghiệm của bất phương trình trên chứa điểm có tọa độ $(0;0)$.

Câu 5. Miền nghiệm của bất phương trình $-x+2+2(y-2)<2(1-x)$ là nửa mặt phẳng **không** chứa điểm nào trong các điểm sau?

A. $(0;0)$ **B.** $(1;1)$ **C.** $(4;2)$ **D.** $(1;-1)$

Lời giải

Chọn C

Ta có $-x+2+2(y-2)<2(1-x)\Leftrightarrow x+2y<4$.

Vì $-4+2.2<4$ là mệnh đề sai nên $(-4;2)$ không thuộc miền nghiệm của bất phương trình.

Câu 6. Trong các cặp số sau đây, cặp nào không thuộc nghiệm của bất phương trình: $x-4y+5>0$

A. $(-5;0)$ **B.** $(-2;1)$ **C.** $(0;0)$ **D.** $(1;-3)$

Lời giải

Chọn A

Vì $-5-4.0+5>0$ là mệnh đề sai nên $(-5;0)$ không thuộc miền nghiệm của bất phương trình.

Câu 7. Điểm $A(-1;3)$ là điểm thuộc miền nghiệm của bất phương trình:

A. $-3x+2y-4>0$ **B.** $x+3y<0$ **C.** $3x-y>0$ **D.** $2x-y+4>0$

Lời giải

Chọn A

Vì $-3.(-1)+2.3-4>0$ là mệnh đề đúng nên $A(-1;3)$ là điểm thuộc miền nghiệm của bất phương trình $-3x+2y-4>0$.

Câu 8. Cặp số $(2;3)$ là nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

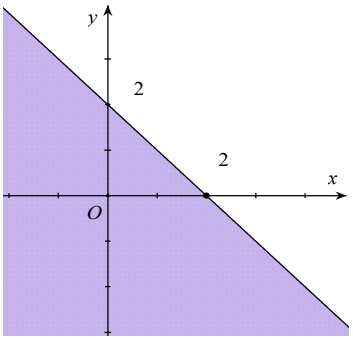
A. $2x-3y-1>0$. **B.** $x-y<0$. **C.** $4x>3y$. **D.** $x-3y+7<0$.

Lời giải

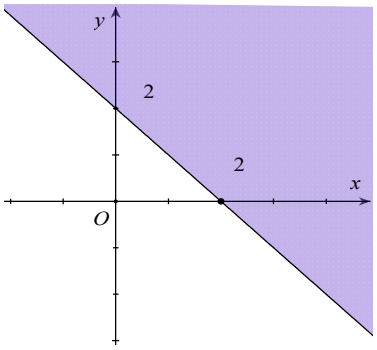
Chọn B

Vì $2-3<0$ là mệnh đề đúng nên cặp số $(2;3)$ là nghiệm của bất phương trình $x-y<0$.

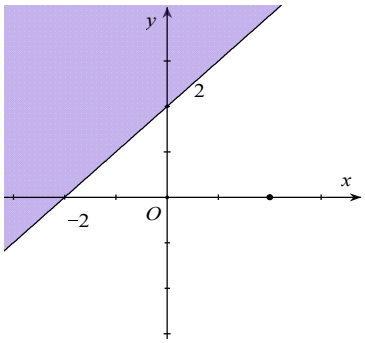
Câu 9. Miền nghiệm của bất phương trình $x+y\le 2$ là phần **tô đậm** trong hình vẽ của hình vẽ nào, trong các hình vẽ sau?



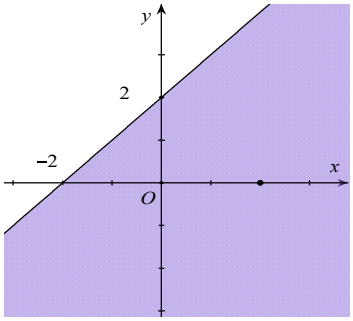
A.



B.



C.



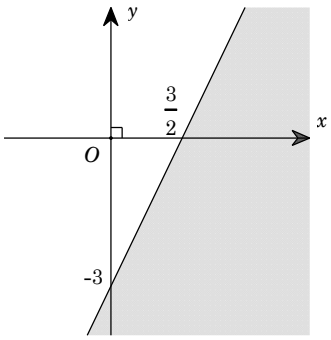
D.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng $\Delta: x+y-2=0$ đi qua hai điểm $A(2;0), B(0;2)$ và cặp số $(0;0)$ thỏa mãn bất phương trình $x-y\le 2$ nên Hình 1 biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $x+y\le 2$.

Câu 10. Phần **tô đậm** trong hình vẽ sau, biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình nào trong các bất phương trình sau?



A. $2x-y<3$ **B.** $2x-y>3$ **C.** $x-2y<3$ **D.** $x-2y>3$

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng đi qua hai điểm $A\left(\frac{3}{2};0\right)$ và $B(0;-3)$ nên có phương trình $2x-y=3$.

Mặt khác, cặp số $(0;0)$ không thỏa mãn bất phương trình $2x-y>3$ nên phần tô đậm ở hình trên biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $2x-y>3$.

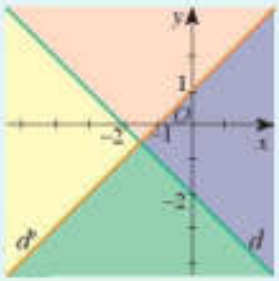
Bài 2. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Từ khoá: Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn; Nghiệm; Miền nghiệm; Điều kiện ràng buộc; Giá trị lớn nhất; Giá trị nhỏ nhất.

Hai đường thẳng d: $y = -x - 2$ và d': $y = x + 1$ chia mặt phẳng toạ độ thành bốn miền khác nhau (không tính hai đường thẳng d và d') như hình bên. Để kí hiệu một trong bốn miền đó, người ta đã tạo nhãn:

$$\begin{cases} y < -x - 2 \\ y < x + 1 \end{cases}$$

Hãy đặt nhãn này vào miền phù hợp.



1. Khái niệm hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

1 Một người nông dân dự định quy hoạch x sào đất trồng cà tím và y sào đất trồng cà chua. Biết rằng người đó chỉ có tối đa 9 triệu đồng để mua hạt giống và giá tiền hạt giống cho mỗi sào đất trồng cà tím là 200 000 đồng, mỗi sào đất trồng cà chua là 100 000 đồng.

a) Viết các bất phương trình mô tả các điều kiện ràng buộc đối với x, y.

b) Cặp số nào sau đây thoả mãn đồng thời tất cả các bất phương trình nêu trên?

(20; 40), (40; 20), (−30; 10).

Bài toán tìm nghiệm chung của ba bất phương trình $0,2x + 0,1y - 9 \le 0$; $x \ge 0$ và $y \ge 0$ là bài toán tìm nghiệm của hệ sau:

$$\begin{cases} 0,2x + 0,1y - 9 \le 0 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0. \end{cases}$$

Chân trời sáng tạo

Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là hệ gồm hai hay nhiều bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y. Mỗi nghiệm chung của tất cả các bất phương trình đó được gọi là một ***nghiệm*** của hệ bất phương trình đã cho.

Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, tập hợp các điểm $(x_0; y_0)$ có toạ độ là nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn được gọi là ***miền nghiệm*** của hệ bất phương trình đó.

Ví dụ 1

Tìm hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trong các hệ sau:

a) $\begin{cases} 3x + y - 1 \le 0 \\ 2x - y + 2 \ge 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + y - 9 = 0 \\ 4x - 7y + 3 = 0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} y - 1 < 0 \\ x + 2 \ge 0; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y - 3 \le 0 \\ -2x + y + 3 \ge 0 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0. \end{cases}$

Giải

Các hệ a), c), d) là các hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Hệ b) không phải hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn vì hệ này chỉ gồm các phương trình.

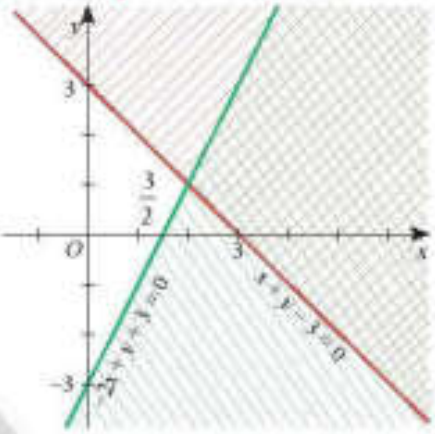
Hãy chỉ ra hai nghiệm của mỗi hệ bất phương trình trong Ví dụ 1.

2. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Cho hệ bất phương trình: $\begin{cases} x+y-3\le 0 \\ -2x+y+3\ge 0. \end{cases}$

Miền nào trong Hình 1 biểu diễn phần giao các miền nghiệm của hai bất phương trình trong hệ đã cho?

Miền không gạch chéo trong Hình 1 là miền nghiệm của hệ bất phương trình trên.



Hình 1

Để ***biểu diễn miền nghiệm*** của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên mặt phẳng tọa độ Oxy, ta thực hiện như sau:

– Trên cùng mặt phẳng tọa độ, biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình của hệ.

– Phần giao của các miền nghiệm là miền nghiệm của hệ bất phương trình.

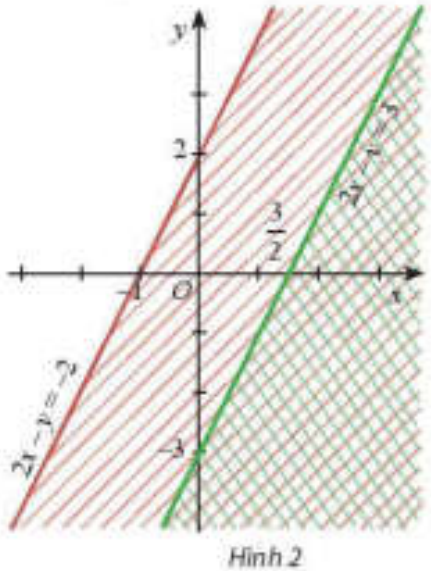
Ví dụ 2

Biểu diễn miền nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x-y-3\le 0 \\ 2x-y+2\le 0. \end{cases}$

Giải

Biểu diễn từng miền nghiệm của mỗi bất phương trình trên mặt phẳng Oxy.

Miền không gạch chéo (kể cả bờ) trong Hình 2 là phần giao của hai miền nghiệm của hai bất phương trình và cũng là phần biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.



Hình 2

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Ví dụ 3

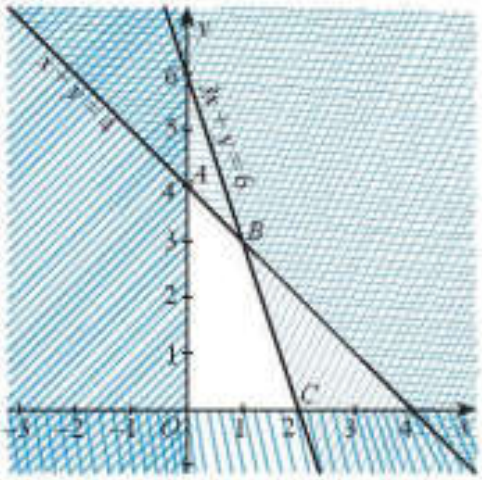
Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 3x+y\le 6 \\ x+y\le 4 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0. \end{cases}$$

Giải

Biểu diễn từng miền nghiệm của mỗi bất phương trình trên mặt phẳng Oxy.

Miền không gạch chéo (miền tứ giác $OABC$, bao gồm cả các cạnh) trong Hình 3 là phần giao của các miền nghiệm và cũng là phần biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.



Hình 3

Chú ý: Miền mặt phẳng tọa độ bao gồm một đa giác lồi và phần nằm bên trong đa giác đó được gọi là một ***miền đa giác***. Chẳng hạn, ta có miền nghiệm của hệ bất phương trình trong Ví dụ 3 là miền tứ giác $OABC$.

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x+y\le 8 \\ 2x+3y\le 18 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0. \end{cases}$$

3. Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = ax + by$ trên một miền đa giác

Hệ bất phương trình giúp ta mô tả được nhiều bài toán thực tế để tìm ra cách giải quyết tối ưu. Chúng thường được đưa về bài toán tìm giá trị lớn nhất (GTLN) hoặc giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức $F = ax + by$ trên một miền đa giác.

Người ta chứng minh được F đạt giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của đa giác.

Ví dụ 4

Bác Năm dự định trồng ngô và đậu xanh trên một mảnh đất có diện tích 8 ha. Nếu trồng 1 ha ngô thì cần 20 ngày công và thu được 40 triệu đồng. Nếu trồng 1 ha đậu xanh thì cần 30 ngày công và thu được 50 triệu đồng. Bác Năm cần trồng bao nhiêu hecta cho mỗi loại cây để thu được nhiều tiền nhất? Biết rằng, bác Năm chỉ có thể sử dụng không quá 180 ngày công cho việc trồng ngô và đậu xanh.

Giải

Gọi x là số hecta đất trồng ngô và y là số hecta đất trồng đậu xanh.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Ta có các điều kiện ràng buộc đối với x, y như sau:

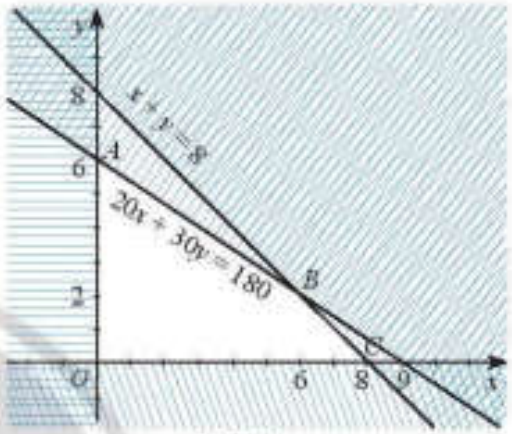
– Hiển nhiên $x \geq 0$, $y \geq 0$.

– Diện tích canh tác không vượt quá 8 ha nên $x + y \leq 8$.

– Số ngày công sử dụng không vượt quá 180 nên $20x + 30y \leq 180$.

Từ đó, ta có hệ bất phương trình mô tả các điều kiện ràng buộc: $\begin{cases} x+y \leq 8 \\ 20x+30y \leq 180 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình này trên hệ trục toạ độ Oxy, ta được miền tứ giác $OABC$ (Hình 4).



Hình 4

Toạ độ các đỉnh của tứ giác đó là: $O(0; 0)$; $A(0; 6)$; $B(6; 2)$; $C(8; 0)$.

Gọi F là số tiền (đơn vị: triệu đồng) bác Năm thu được, ta có: $F = 40x + 50y$.

Ta phải tìm x, y thoả mãn hệ bất phương trình sao cho F đạt giá trị lớn nhất, nghĩa là tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F = 40x + 50y$ trên miền tứ giác $OABC$.

Tính các giá trị của biểu thức F tại các đỉnh của đa giác, ta có:

Tại $O(0; 0)$: $F = 40.0 + 50.0 = 0$; Tại $A(0; 6)$: $F = 40.0 + 50.6 = 300$;

Tại $B(6; 2)$: $F = 40.6 + 50.2 = 340$; Tại $C(8; 0)$: $F = 40.8 + 50.0 = 320$.

F đạt giá trị lớn nhất bằng 340 tại $B(6; 2)$.

Vậy để thu được nhiều tiền nhất, bác Năm cần trồng 6 ha ngô và 2 ha đậu xanh.

Ví dụ 5

Một người dùng ba loại nguyên liệu A, B, C để sản xuất ra hai loại sản phẩm P và Q. Để sản xuất 1 kg mỗi loại sản phẩm P hoặc Q phải dùng một số kilôgam nguyên liệu khác nhau. Tổng số kilôgam nguyên liệu mỗi loại mà người đó có và số kilôgam từng loại nguyên liệu cần thiết để sản xuất ra 1 kg sản phẩm mỗi loại được cho trong bảng sau:

Loại nguyên liệu	Số kilôgam nguyên liệu đang có	Số kilôgam từng loại nguyên liệu cần để sản xuất 1 kg sản phẩm	
		P	Q
A	10	2	2
B	4	0	2
C	12	2	4

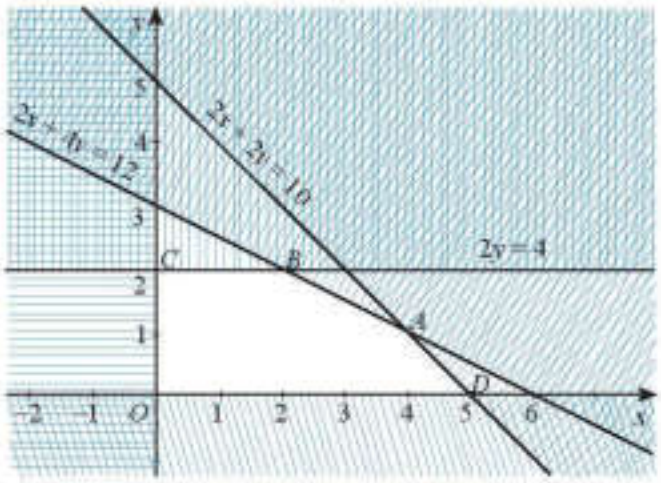
Biết 1 kg sản phẩm P có lợi nhuận 3 triệu đồng và 1 kg sản phẩm Q có lợi nhuận 5 triệu đồng. Hãy lập phương án sản xuất hai loại sản phẩm trên sao cho có lãi cao nhất.

Giải

Gọi x là số kilôgam sản phẩm P, y là số kilôgam sản phẩm Q cần sản xuất. Ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 2x+2y \le 10 \\ 2y \le 4 \\ 2x+4y \le 12 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0. \end{cases}$$

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình trên hệ trục toạ độ Oxy, ta được như Hình 5.



Hình 5

Miền nghiệm là miền ngũ giác $OCBAD$ (Hình 5) với các đỉnh: $O(0; 0)$; $C(0; 2)$; $B(2; 2)$; $A(4; 1)$; $D(5; 0)$.

Gọi F là số tiền lãi (đơn vị: triệu đồng) thu được, ta có: $F = 3x + 5y$.

Tính giá trị của F tại các đỉnh của ngũ giác:

Tại $O(0; 0)$: $F = 3.0 + 5.0 = 0$; Tại $C(0; 2)$: $F = 3.0 + 5.2 = 10$;

Tại $B(2; 2)$: $F = 3.2 + 5.2 = 16$; Tại $A(4; 1)$: $F = 3.4 + 5.1 = 17$;

Tại $D(5; 0)$: $F = 3.5 + 5.0 = 15$.

F đạt giá trị lớn nhất bằng 17 tại $A(4; 1)$.

Vậy người đó cần sản xuất 4 kg sản phẩm P và 1 kg sản phẩm Q để có lãi cao nhất là 17 triệu đồng.

Một người bán nước giải khát đang có 24 g bột cam, 9 l nước và 210 g đường để pha chế hai loại nước cam A và B. Để pha chế 1 l nước cam loại A cần 30 g đường, 1 l nước và 1 g bột cam; để pha chế 1 l nước cam loại B cần 10 g đường, 1 l nước và 4 g bột cam. Mỗi lít nước cam loại A bán được 60 nghìn đồng, mỗi lít nước cam loại B bán được 80 nghìn đồng. Người đó nên pha chế bao nhiêu lít nước cam mỗi loại để có doanh thu cao nhất?

BÀI TẬP

1. Biểu diễn miền nghiệm của mỗi hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} x+y-3 \ge 0 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y<0 \\ x+3y>-2 \\ y-x<3; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x \ge 1 \\ x \le 4 \\ x+y-5 \le 0 \\ y \ge 0. \end{cases}$

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

2. Một nhà máy sản xuất hai loại thuốc trừ sâu nông nghiệp là A và B. Cứ sản xuất mỗi thùng loại A thì nhà máy thải ra 0,25 kg khí carbon dioxide (CO_2) và 0,60 kg khí sulfur dioxide (SO_2), sản xuất mỗi thùng loại B thì thải ra 0,50 kg CO_2 và 0,20 kg SO_2. Biết rằng, quy định hạn chế sản lượng CO_2 của nhà máy tối đa là 75 kg và SO_2 tối đa là 90 kg mỗi ngày.



Hình 6

a) Tìm hệ bất phương trình mô tả số thùng của mỗi loại thuốc trừ sâu mà nhà máy có thể sản xuất mỗi ngày để đáp ứng các điều kiện hạn chế trên. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đó trên mặt phẳng toạ độ.

b) Việc nhà máy sản xuất 100 thùng loại A và 80 thùng loại B mỗi ngày có phù hợp với quy định không?

c) Việc nhà máy sản xuất 60 thùng loại A và 160 thùng loại B mỗi ngày có phù hợp với quy định không?

3. Bạn Lan thu xếp được không quá 10 giờ để làm hai loại đèn trung thu tặng cho các trẻ em khuyết tật. Loại đèn hình con cá cần 2 giờ để làm xong 1 cái, còn loại đèn ông sao chỉ cần 1 giờ để làm xong 1 cái. Gọi x, y lần lượt là số đèn hình con cá và đèn ông sao bạn Lan sẽ làm. Hãy lập hệ bất phương trình mô tả điều kiện của x, y và biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đó.

4. Một học sinh dự định vẽ các tấm thiệp xuân làm bằng tay để bán trong một hội chợ Tết. Cần 2 giờ để vẽ một tấm thiệp loại nhỏ có giá 10 nghìn đồng và 3 giờ để vẽ một tấm thiệp loại lớn có giá 20 nghìn đồng. Học sinh này chỉ có 30 giờ để vẽ và ban tổ chức hội chợ yêu cầu phải vẽ ít nhất 12 tấm. Hãy cho biết bạn ấy cần vẽ bao nhiêu tấm thiệp mỗi loại để có được nhiều tiền nhất.

5. Trong một tuần, bạn Mạnh có thể thu xếp được tối đa 12 giờ để tập thể dục giảm cân bằng hai môn: đạp xe và tập cử tạ tại phòng tập. Cho biết mỗi giờ đạp xe sẽ tiêu hao 350 calo và không tốn chi phí, mỗi giờ tập cử tạ sẽ tiêu hao 700 calo với chi phí 50 000 đồng / giờ. Mạnh muốn tiêu hao nhiều calo nhưng không được vượt quá 7 000 calo một tuần. Hãy giúp bạn Mạnh tính số giờ đạp xe và số giờ tập tạ một tuần trong hai trường hợp sau:

a) Mạnh muốn chi phí luyện tập là ít nhất.

b) Mạnh muốn số calo tiêu hao là nhiều nhất.

Dạng 1. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

1. Phương pháp

Tương tự hệ bất phương trình một ẩn, ta có hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Trong mặt phẳng toạ độ, ta gọi tập hợp các điểm có toạ độ thoả mãn mọi bất phương trình trong hệ là miền nghiệm của hệ. Vậy miền nghiệm của hệ là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.

Để xác định miền nghiệm của hệ, ta dùng phương pháp biểu diễn hình học như sau:

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

- Với mỗi bất phương trình trong hệ, ta xác định miền nghiệm của nó và gạch bỏ (tô màu) miền còn lại.
- Sau khi làm như trên lần lượt đối với tất cả các bất phương trình trong hệ trên cùng một mặt phẳng toạ độ, miền còn lại không bị gạch (tô đậm) chính là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Bài toán: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $T(x,y)=ax+by$ với $(x;y)$ nghiệm đúng một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn cho trước.

- **Bước 1:** Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho. Kết quả thường được miền nghiệm S là đa giác.
- **Bước 2:** Tính giá trị của F tương ứng với $(x;y)$ là tọa độ của các đỉnh của đa giác.
- **Bước 3:** Kết luận:
  - Giá trị lớn nhất của F là số lớn nhất trong các giá trị tìm được.
  - Giá trị nhỏ nhất của F là số nhỏ nhất trong các giá trị tìm được.

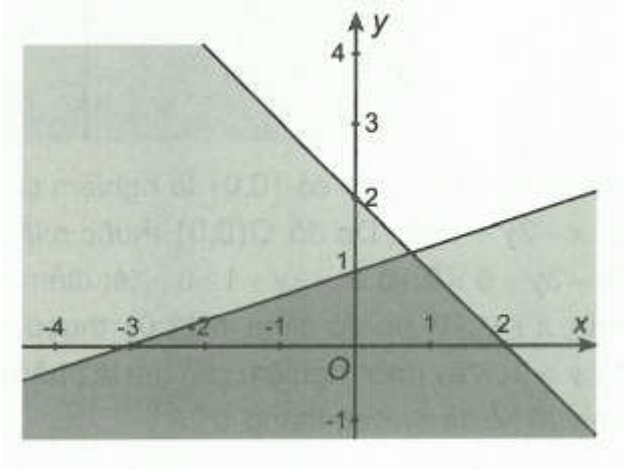
2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ: Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình sau $\begin{cases} x+y-2\ge 0 \\ x-3y+3\le 0. \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Vẽ các đường thẳng $d: x+y-2=0,\ d': x-3y+3=0$ trên mặt phẳng toạ độ Oxy.

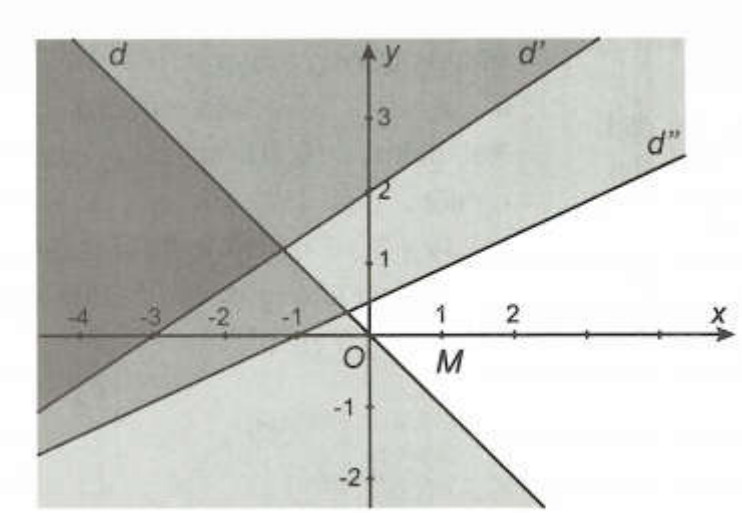
Xét điểm $O(0;0)$, ta thấy $(0;0)$ không phải là nghiệm của bất phương trình $x+y-2\ge 0$ và $x-3y+3\le 0$ do đó miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không được tô đậm trên hình vẽ kể cả hai đường d và d'.



Ví dụ 2: Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình sau: $\begin{cases} x+y>0 \\ 2x-3y+6>0. \\ x-2y+1\ge 0 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Vẽ các đường thẳng $d: x+y=0,\ d': 2x-3y+6=0$ và $d'': x-2y+1=0$ trên mặt phẳng toạ độ Oxy.



Xét điểm $O(0;0)$, ta có $(0;0)$ là nghiệm của bất phương trình $2x-3y+6>0$ và $x-2y+1\geq 0$. Do đó $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của các bất phương trình $2x-3y+6>0$ và $x-2y+1\geq 0$. Xét điểm $M(1;0)$ là nghiệm của bất phương trình $x+y>0$ do đó điểm $M(1;0)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình $x+y>0$. Vậy miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không được tô đậm trên hình vẽ kể cả đường thẳng d''.

Ví dụ 3: Xác định miền nghiệm của bất phương trình $(x-y)\left(x^3+y^3\right)\geq 0$.

Hướng dẫn giải

Ta có

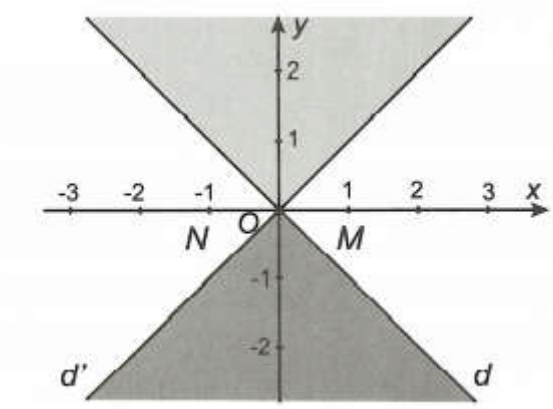
$(x-y)\left(x^3+y^3\right)\geq 0\Leftrightarrow (x-y)(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)\geq 0\Leftrightarrow (x-y)(x+y)\geq 0$

$\Leftrightarrow (x-y)(x+y)\geq 0\Leftrightarrow \begin{cases} x-y\geq 0 \\ x+y\geq 0 \end{cases}$ (1) hoặc $\begin{cases} x-y\leq 0 \\ x+y\leq 0 \end{cases}$ (2).

Như vậy miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là gồm hai miền nghiệm của hệ bất phương trình (1) và (2).

Vẽ các đường thẳng $d: x+y=0$ và $d': x-y=0$ trên mặt phẳng toạ độ Oxy. Xét điểm $M(1;0)$, ta có $(1;0)$ là nghiệm của các bất phương trình của hệ (1) do đó $M(1;0)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình (1). Xét điểm $N(-1;0)$, ta có $(-1;0)$ là nghiệm của các bất phương trình của hệ (2) do đó $N(-1;0)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình (2). Vậy miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không được tô đậm trên hình vẽ kể cả hai đường thẳng d và d'.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133



Ví dụ 4: Cho biểu thức $F(x;y)=2x+y$ trên miền xác định bởi hệ $\begin{cases}2x+y-9\le 0\\ x-y\le 0\\ y-1\le 0\end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của F

Hướng dẫn giải

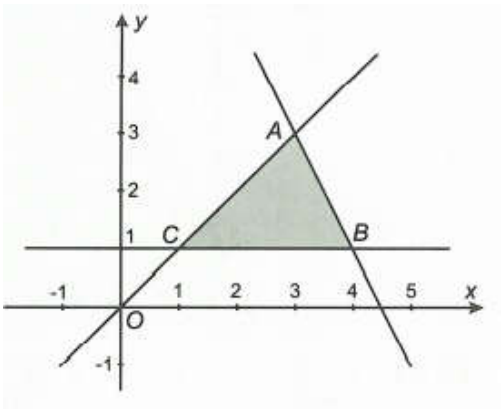
Trong mặt phẳng Oxy ta vẽ các đường thẳng có phương trình:

$2x+y-9=0;\ x-y=0;\ y-1=0.$

Khi đó miền nghiệm của hệ là miền tam giác ABC kể cả biên, được tô đậm, với $A(3;3), B(4;1), C(1;1)$.

Ta có $F(3;3)=9;\ F(4;1)=9;\ F(1;1)=3.$

Vậy giá trị lớn nhất là $F_{\max}=9$ khi $x=4;y=1$ hoặc $x=3;y=3$.



3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases}x+3y-2\ge 0\\ 2x+y+1\le 0\end{cases}$. Trong các điểm sau, điểm nào thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình?

A. $M(0;1)$ **B.** $N(-1;1)$ **C.** $P(1;3)$ **D.** $Q(-1;0)$

Lời giải

Chọn B

Ta thay lần lượt tọa độ các điểm vào hệ bất phương trình.

Với $M(0;1)\Rightarrow\begin{cases}0+3.1-2\ge 0\\ 2.0+1+1\le 0\end{cases}$. Bất phương trình thứ hai sai nên A sai.

Với $N(-1;1)\Rightarrow\begin{cases}-1+3.1-2\ge 0\\ 2.(-1)+1+1\le 0\end{cases}$: Đúng. Chọn B.

Câu 2. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases}2x-5y-1>0\\ 2x+y+5>0\\ x+y+1<0\end{cases}$. Trong các điểm sau, điểm nào thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình?

A. $O(0;0)$ **B.** $M(1;0)$ **C.** $N(0;-2)$ **D.** $P(0;2)$

Lời giải

Chọn C

Ta thay lần lượt tọa độ các điểm vào hệ bất phương trình.

Với $O(0;0) \Rightarrow \begin{cases} 2.0-5.0-1>0 \\ 2.0+0+5>0 \\ 0+0+1<0 \end{cases}$. Bất phương trình thứ nhất và thứ ba sai nên A sai.

Với $M(1;0) \Rightarrow \begin{cases} 2.1-5.0-1>0 \\ 2.1+0+5>0 \\ 1+0+1<0 \end{cases}$. Bất phương trình thứ ba sai nên B sai.

Với $N(0;-3) \Rightarrow \begin{cases} 2.0-5.(-3)-1>0 \\ 2.0+(-2)+5>0 \\ 0+(-2)+1<0 \end{cases}$: Đúng. Chọn C.

Câu 3. Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}-1\ge 0 \\ x\ge 0 \\ x+\frac{1}{2}-\frac{3y}{2}\le 2 \end{cases}$ chứa điểm nào trong các điểm sau đây?

A. $O(0;0)$ **B.** $M(2;1)$ **C.** $N(1;1)$ **D.** $P(5;1)$

Lời giải

Chọn B

Ta thay lần lượt tọa độ các điểm vào hệ bất phương trình.

Với $O(0;0) \Rightarrow \begin{cases} \frac{0}{2}+\frac{0}{3}-1\ge 0 \\ 0\ge 0 \\ 0+\frac{1}{2}-\frac{3.0}{2}\le 2 \end{cases}$. Bất phương trình thứ nhất sai nên A sai.

Với $M(2;1) \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{2}+\frac{1}{3}-1\ge 0 \\ 2\ge 0 \\ 2+\frac{1}{2}-\frac{3.1}{2}\le 2 \end{cases}$: Đúng. Chọn B.

Câu 4. Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x+y\ge 9 \\ x\ge y-3 \\ 2y\ge 8-x \\ y\le 6 \end{cases}$ chứa điểm nào trong các điểm sau đây?

A. $O(0;0)$ **B.** $M(1;2)$ **C.** $N(2;1)$ **D.** $P(8;4)$

Lời giải

Chọn D

Thay lần lượt tọa độ các điểm vào hệ bất phương trình.

Câu 5. Điểm $M(0;-3)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trìnhnào sau đây?

A. $\begin{cases}2x-y\le 3\\2x+5y\le 12x+8\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}2x-y>3\\2x+5y\le 12x+8\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}2x-y>-3\\2x+5y\le 12x+8\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}2x-y\le -3\\2x+5y\ge 12x+8\end{cases}$

Lời giải

Chọn A

Thay tọa độ $M(0;-3)$ lần lượt vào từng hệ bất phương trình.

Câu 6. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases}x+y-2\le 0\\2x-3y+2>0\end{cases}$. Trong các điểm sau, điểm nào không thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình?

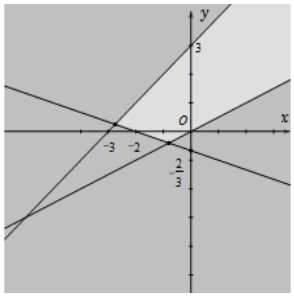
A. $O(0;0)$ **B.** $M(1;1)$ **C.** $N(-1;1)$ **D.** $P(-1;-1)$

Lời giải

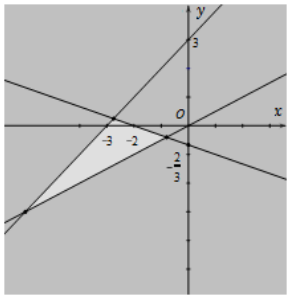
Chọn C

Thay lần lượt tọa độ các điểm vào hệ bất phương trình.

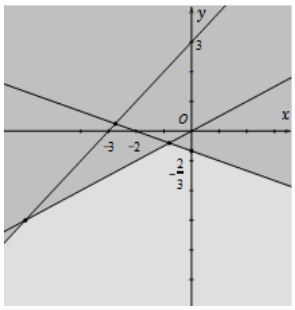
Câu 7. Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases}x-2y<0\\x+3y>-2\\y-x<3\end{cases}$ là phần không tô đậm của hình vẽ nào trong các hình vẽ sau?



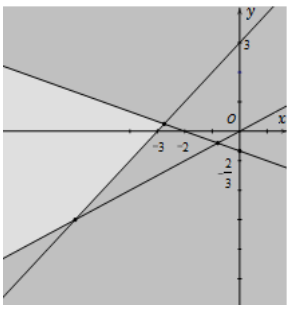
A.



B.



C.



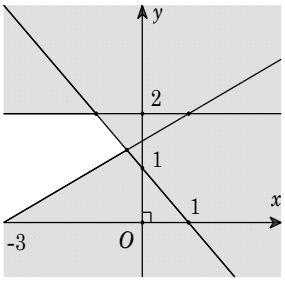
D.

Lời giải

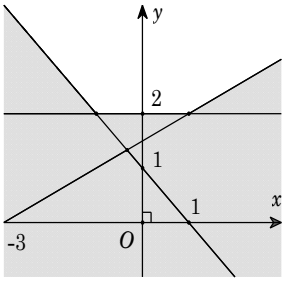
Chọn A

Chọn điểm $M(0;1)$ thử vào các bất phương trình của hệ thấy thỏa mãn.

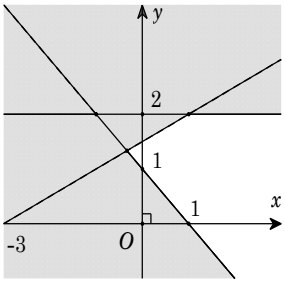
Câu 8. Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x+y-1>0 \\ y\ge 2 \\ -x+2y>3 \end{cases}$ là phần không tô đậm của hình vẽ nào trong các hình vẽ sau?



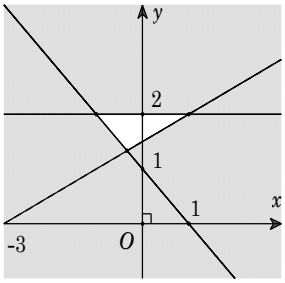
A.



B.



C.



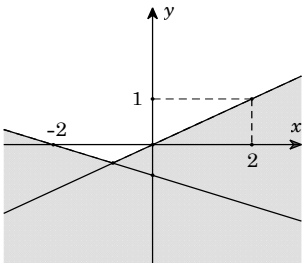
D.

Lời giải

Chọn B

Chọn điểm $M(0;4)$ thử vào các bất phương trình của hệ thấy thỏa mãn.

Câu 9. Phần không tô đậm trong hình vẽ dưới đây , biểu diễn tập nghiệm của hệ bất phương trình nào trong các hệ bất phương trình sau?



A. $\begin{cases} x-2y\le 0 \\ x+3y\ge -2 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x-2y>0 \\ x+3y<-2 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x-2y\le 0 \\ x+3y\le -2 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x-2y<0 \\ x+3y>-2 \end{cases}$

Lời giải

Chọn D

Do miền nghiệm không chứa biên nên ta loại đáp án A và **C.** Chọn điểm $M(0;1)$ thử vào các hệ bất phương trình.

Xét đáp án B, ta có $\begin{cases}0-2.1>0\\0+3.1<-2\end{cases}$: Sai.

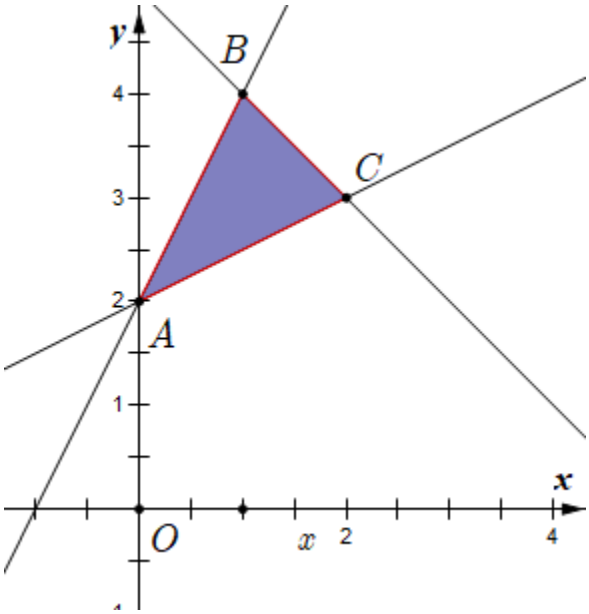
Câu 10. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=y-x$ trên miền xác định bởi hệ $\begin{cases}y-2x\le 2\\2y-x\ge 4\\x+y\le 5\end{cases}$ là

A. $\min F=1$ khi $x=2,\ y=3$.
B. $\min F=2$ khi $x=0,\ y=2$.
C. $\min F=3$ khi $x=1,\ y=4$.
D. $\min F=0$ khi $x=0,\ y=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Miền nghiệm của hệ $\begin{cases}y-2x\le 2\\2y-x\ge 4\\x+y\le 5\end{cases}$ là miền trong của tam giác ABC kể cả biên



Ta thấy $F=y-x$ đạt giá trị nhỏ nhất chỉ có thể tại các điểm A, B, C.

Tại $A(0;2)$ thì $F=2$.

Tại $B(1;4)$ thì $F=3$

Tại $A(2;3)$ thì $F=1$.

Vậy $\min F=1$ khi $x=2,\ y=3$.

Câu 11: Giá trị nhỏ nhất $F_{\min}$ của biểu thức $F(x;y)=4x+3y$ trên miền xác định bởi hệ $\begin{cases}0\le x\le 10\\0\le y\le 9\\2x+y\ge 14\\2x+5y\ge 30\end{cases}$ là

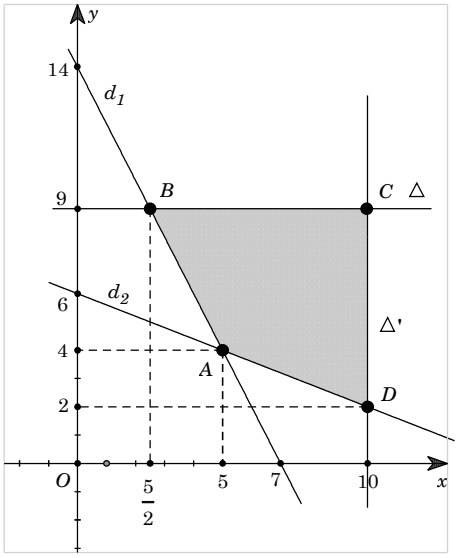
A. $F_{\min}=23$ **B.** $F_{\min}=26$ **C.** $F_{mim}=32$ **D.** $F_{\min}=67$

Lời giải

Chọn C

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ các đường thẳng

$d_1: 2x+y-14=0,\quad d_2: 2x+5y-30=0,\quad \Delta: y=9,\quad \Delta': x=10.$



Khi đó miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần mặt phẳng tô màu như hình vẽ.

Xét các đỉnh của miền khép kín tạo bởi hệ là $A(5;4)$, $B\left(\frac{5}{2};9\right)$, $C(10;9)$, $D(10;2)$.

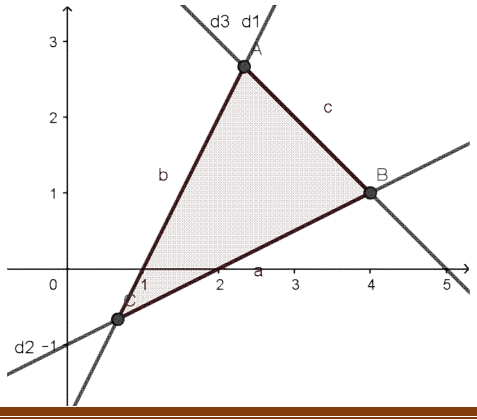
Ta có $\begin{cases} F(5;4)=32 \\ F\left(\frac{5}{2};9\right)=37 \\ F(10;9)=67 \\ F(10;2)=46 \end{cases} \longrightarrow F_{\min}=32.$

Câu 12. Biểu thức $F(x;y)=y-x$ đạt giá trị nhỏ nhất với điều kiện $\begin{cases} 2x-y\ge 2 \\ x-2y\le 2 \\ x+y\le 5 \\ x\ge 0 \end{cases}$ tại điểm M có toạ độ là:

A. $(4;1)$ **B.** $\left(\frac{8}{3};-\frac{7}{3}\right)$ **C.** $\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$ **D.** $(5;0)$

Lời giải

Chọn A



Vẽ các đường thẳng :

$(d_1): y = 2x - 2$

$(d_2): y = \frac{1}{2}x - 1$

$(d_3): y = 5 - x$

Khi đó miền nghiệm của hệ là miền trong của tam giác ABC

Tọa độ các đỉnh: $A\left(\frac{7}{3};\frac{8}{3}\right); B(4;1); C\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$

Ta có : $F(4;1) = -3;\ F\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right) = \frac{-4}{3} \Rightarrow F_{\min} = -3$

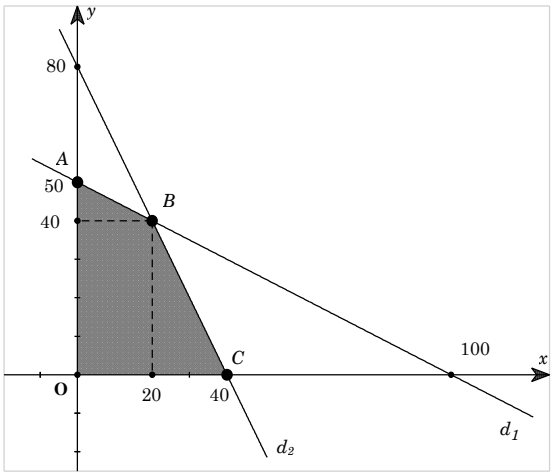
Câu 13. Cho x, y thoả mãn hệ $\begin{cases} x + 2y - 100 \le 0 \\ 2x + y - 80 \le 0 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P = (x; y) = 40000x + 30000y$

A. $P_{\max} = 2000000$ **B.** $P_{\max} = 2400000$ **C.** $P_{\max} = 1800000$ **D.** $P_{\max} = 1600000$

Lời giải

Chọn A

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ các đường thẳng $d_1: x + 2y - 100 = 0,\quad d_2: 2x + y - 80 = 0.$



Khi đó miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần mặt phẳng tô màu như hình vẽ.

Xét các đỉnh của miền khép kín tạo bởi hệ là

$O(0;0),\ A(0;50),\ B(20;40), C(40;0).$

Ta có $\begin{cases} P(0;0) = 0 \\ P(0;50) = 1500000 \\ P(20;40) = 2000000 \\ P(40;0) = 1600000 \end{cases} \longrightarrow P_{\max} = 2000000.$

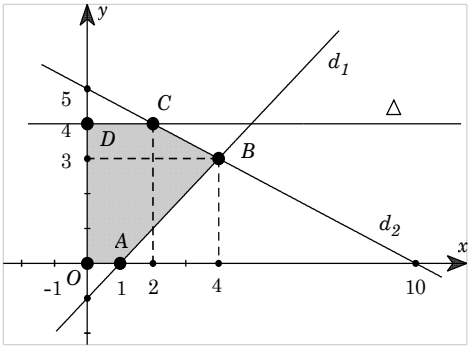
Câu 14. Giá trị lớn nhất $F_{\max}$ của biểu thức $F(x;y)=x+2y$ trên miền xác định bởi hệ $\begin{cases}0\le y\le 4\\ x\ge 0\\ x-y-1\le 0\\ x+2y-10\le 0\end{cases}$ là

A. $F_{\max}=6$ **B.** $F_{\max}=8$ **C.** $F_{\max}=10$ **D.** $F_{\max}=12$

Lời giải

Chọn C

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ các đường thẳng $d_1: x-y-1=0,\ d_2: x+2y-10=0,\ \Delta: y=4.$



Khi đó miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần mặt phẳng tô màu như hình vẽ.

Xét các đỉnh của miền khép kín tạo bởi hệ là $O(0;0),\ A(1;0),\ B(4;3),\ C(2;4),\ D(0;4).$

Ta có $\begin{cases}F(0;0)=0\\ F(1;0)=1\\ F(4;3)=10\\ F(2;4)=10\\ F(0;4)=8\end{cases}\longrightarrow F_{\max}=10.$

Dạng 2. Bài toán tối ưu

1. Phương pháp

Vấn đề tìm miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất có liên quan chặt chẽ đến **quy hoạch tuyến tính.** Đó là một ngành toán học có nhiều ứng dụng trong đời sống và kinh tế.

Lưu ý: Ta thừa nhận kết quả sau "Giá trị nhỏ nhất hay lớn nhất của biểu thức $P(x;y)=ax+by+c$ $a^2+b^2\neq 0$ trên miền đa giác lồi (kể cả biên) đạt được tại một đỉnh nào đó của đa giác".

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Một công ty kinh doanh thương mại chuẩn bị cho một đợt khuyến mại nhằm thu hút khách hàng bằng cách tiến hành quảng cáo sản phẩm của công ty trên hệ thống phát thanh và truyền hình. Chi phí cho 1 phút quảng cáo trên sóng phát thanh là 800.000 đồng, trên sóng truyền hình là 4.000.000 đồng. Đài phát thanh chỉ nhận phát các chương trình quảng cáo dài ít nhất là 5 phút. Do nhu cầu quảng cáo trên truyền hình lớn nên đài truyền hình chỉ nhận phát các chương trình dài tối đa là 4 phút. Theo các phân tích cùng thời lượng một phút quảng cáo trên truyền hình sẽ có hiệu quả gấp 6 lần trên sóng phát thanh. Công ty dự định chi tối đa là 16.000.000 đồng cho quảng cáo. Công ty cần đặt thời lượng quảng cáo trên sóng phát thanh và truyền hình như thế nào để hiệu quả nhất?

Hướng dẫn giải

Phân tích bài toán: Gọi thời lượng công ty đặt quảng cáo trên sóng phát thanh là x (phút), trên truyền hình là y (phút). Chi phí cho việc này là

$800.000x+4.000.000y$ (đồng).

Mức chi phí này không được phép vượt quá mực chi tối đa, tức là

$800\,000x+4\,000\,000y\le 16\,000\,000$

$\Leftrightarrow x+5y-20\le 0.$

Theo giả thiết, ta có $x\ge 5;\ x\le 4.$

Đồng thời do x,y là thời lượng nên $x\ge 0;y\ge 0.$

Hiệu quả chung của quảng cáo là $x+6y.$

Bài toán trở thành: Tìm x,y sao cho $M(x;y)=x+6y$ đạt giá trị lớn nhất, với x,y thoả mãn hệ bất phương trình $\begin{cases}x+5y-20\le 0\\ x\ge 5\\ 0\le y\le 4\end{cases}$ $(*).$

Trong mặt phẳng $Oxy,$ ta biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là phần tam giác ABC với $A(5;3),B(5;0),C(20;0).$

Ta có $M(5;3)=23;\ M(5;0)=5;\ M(20;0)=20$ suy ra giá trị lớn nhất của $M(x;y)$ bằng 23 tại $(5;3).$

Tức là nếu đặt thời lượng quảng cáo trên sóng phát thanh là 5 phút và trên truyền hình là 3 phút thì sẽ đạt hiệu quả nhất.

Ví dụ 2: Một xưởng sản xuất hai loại sản phẩm, mỗi kg sản phẩm loại một cần 2kg nguyên liệu và 30 giờ, đem lại mức lợi nhuận 40 000 đồng. Mỗi sản phẩm loại hai cần 4kg nguyên liệu và 15 giờ đem lại mức lợi nhuận là 30 000 đồng. Xưởng có 200kg nguyên liệu và 1200 giờ làm việc. Hỏi cần sản xuất mỗi loại sản phẩm bao nhiêu để có mức lợi nhuận cao nhất?

Hướng dẫn giải

Phân tích bài toán: Gọi $x\ (x\ge 0)$ là số kg loại một cần sản xuất, $y\ (y\ge 0)$ là số kg loại hai cần sản xuất. Suy ra số nguyên liệu cần dùng là $2x+4y,$ thời gian là $30x+15y$ có mức lợi nhuận là $40\,000x+30\,000y.$

Theo giả thiết bài toán xưởng có 200kg nguyên liệu và 1200 giờ làm việc, suy ra $2x+4y\le 200$ hay $x+2y-100\le 0;\ 30x+15y\le 1200$ hay $2x+y-80\le 0.$

Bài toán trở thành: Tìm $x;y$ thoả mãn hệ $\begin{cases}x+2y-100\le 0\\ 2x+y-80\le 0\\ x\ge 0\\ y\ge 0\end{cases}$ $(*)$ sao cho $L(x;y)=40\,000x+30\,000y$ đạt giá trị lớn nhất.

Biểu diễn miền nghiệm của hệ (*) là miền tứ giác $OABC$ với

$O(0;0),A(40;0),B(0;50),C(20;40).$

Ta có $L(0;0)=0,L(40;0)=1600\,000,L(0;50)=1500\,000,L(20;40)=2\,000\,000.$

Do đó giá trị lớn nhất của $L(x;y)$ là 2 000 000 khi $(x;y)=(20;40)$.

Vậy nên sản xuất 20kg sản phẩm loại I và 40kg sản phẩm loại hai để có mức lợi nhuận cao nhất.

Ví dụ 3: Một công ty điện tử sản xuất hai kiểu radio trên hai dây chuyền độc lập. Radio kiểu một sản xuất trên dây chuyền một với công suất 45 radio/ngày, radio kiểu hai sản xuất trên dây chuyền hai với công suất 80 radio/ngày. Để sản xuất một chiếc radio kiểu một cần 12 linh kiện, để sản xuất một chiếc radio kiểu hai cần 9 linh kiện. Tiền lãi khi bán một chiếc radio kiểu một là 250 000 đồng, lãi thu được khi bán một chiếc radio kiểu hai là 180 000 đồng. Hỏi cần sản xuất như thế nào để tiền lãi thu được là nhiều nhất, biết rằng số linh kiện có thể sử dụng tối đa trong một ngày là 900?

A. Sản xuất 15 radio kiểu một và 80 radio kiểu hai.

B. Sản xuất 45 radio kiểu một và 40 radio kiểu hai.

C. Sản xuất 45 radio kiểu một.

D. Sản xuất 80 radio kiểu hai.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi x và y lần lượt là số radio kiểu một và số radio kiểu hai mà công ty này sản xuất trong một ngày $(x;y\in N^*)$.

Số tiền lãi mà công ty này thu về hàng ngày là $f(x;y)=250000x+180000y$ (đồng).

Ta có hệ bất phương trình $\begin{cases}12x+9y\le 900\\0\le x\le 45\\0\le y\le 80\end{cases}$ $(*)$.

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x;y)$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là ngũ miền ngũ giác $OABCD$ trong đó $O(0;0)$, $A(45;0)$, $B(45;40)$, $C(15;80)$, $D(0;80)$.

Ta có $f(x;y)$ lớn nhất khi $(x;y)=(45;40)$, tức là công ty này cần sản xuất 45 radio kiểu một và 40 radio kiểu hai.

Ví dụ 4: Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 24 g hương liệu, 9 lít nước và 210 g đường để pha chế nước cam và nước táo. Để pha chế 1 lít nước cam cần 30 g đường và 1 lít nước; pha chế 1 lít nước táo cần 10 g đường, 1 lít nước và 4 g hương liệu. Mỗi lít nước cam nhận được 20 điểm thưởng, mỗi lít nước táo nhận được 80 điểm thưởng. Hỏi cần pha chế bao nhiêu lít nước trái cây mỗi loại để được số tiền thưởng là lớn nhất?

A. 7 lít nước đường.

B. 6 lít nước táo.

C. 3 lít nước đường, 6 lít nước táo.

D. 6 lít nước đường, 3 lít nước táo.

Hướng dẫn giải

Gọi $x;y$ lần lượt là số lít nước cam và táo của mỗi đội pha chế $(x;y\ge 0)$.

Số điểm thưởng của đội chơi này là $f(x;y)=20x+80y$.

Số gam đường cần dùng là $30x+10y$ (g).

Số lít nước cần dùng là $x+y$ (l).

Số gam hương liệu cần dùng là $4y$ (g).

Vì trong cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi sử dụng tối đa 24 g hương liệu, 9 lít nước và 210 g đường nên ta có hệ bất phương trình sau

$$\begin{cases} 30x+10y\le 210 \\ x+y\le 9 \\ 4y\le 24 \\ x;y\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y\le 21 \\ x+y\le 9 \\ y\le 6 \\ x;y\ge 0 \end{cases} (*).$$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x;y)$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là ngũ giác $OABCD$.

Trong đó $O(0;0), A(7;0), B(6;3), C(3;6), D(0;6)$.

Suy ra $f(3;6)$ là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x;y)$ trên miền nghiệm của hệ (*).

Như vậy để được số điểm thưởng lớn nhất cần pha chế 3 lít nước cam và 6 lít nước táo.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1 : Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 24 g hương liệu, 9 lít nước và 210 g đường để pha chế nước cam và nước táo.

- Để pha chế 1 lít nước cam cần 30 g đường, 1 lít nước và 1 g hương liệu;
- Để pha chế 1 lít nước táo cần 10 g đường, 1 lít nước và 4 g hương liệu.

Mỗi lít nước cam nhận được 60 điểm thưởng, mỗi lít nước táo nhận được 80 điểm thưởng. Hỏi cần pha chế bao nhiêu lít nước trái cây mỗi loại để đạt được số điểm thưởng cao nhất?

A. 5 lít nước cam và 4 lít nước táo. **B.** 6 lít nước cam và 5 lít nước táo.

C. 4 lít nước cam và 5 lít nước táo. **D.** 4 lít nước cam và 6 lít nước táo.

Lời giải

Chọn C

Giả sử x, y lần lượt là số lít nước cam và số lít nước táo mà mỗi đội cần pha chế.

Suy ra $30x+10y$ là số gam đường cần dùng;

$x+y$ là số lít nước cần dùng;

$x+4y$ là số gam hương liệu cần dùng.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ 30x+10y\le 210 \\ x+y\le 9 \\ x+4y\le 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ 3x+y\le 21 \\ x+y\le 9 \\ x+4y\le 24 \end{cases}$. $(*)$

Số điểm thưởng nhận được sẽ là $P=60x+80y$.

Ta đi tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P với x, y thỏa mãn $(*)$.

Câu 2: Một xưởng sản xuất hai loại sản phẩm

- Mỗi kg sản phẩm loại I cần 2 kg nguyên liệu và 30 giờ, đem lại mức lời 40 nghìn;
- Mỗi kg sản phẩm loại II cần 4 kg nguyên liệu và 15 giờ, đem lại mức lời 30 nghìn.

Xưởng có 200 kg nguyên liệu và 1200 giờ làm việc. Nên sản xuất mỗi loại sản phẩm bao nhiêu để có mức lời cao nhất?

A. 30 kg loại I và 40 kg loại II. **B.** 20 kg loại I và 40 kg loại II.

C. 30 kg loại I và 20 kg loại II. **D.** 25 kg loại I và 45 kg loại II.

Lời giải

Chọn B

Gọi $x \ge 0,\ y \ge 0$ (kg) lần lượt là số sản phẩm loại I và loại II cần sản xuất.

Khi đó, tổng số nguyên liệu sử dụng: $2x + 4y \le 200.$

Tổng số giờ làm việc: $30x + 15y \le 1200.$

Lợi nhuận tạo thành: $L = 40x + 30y$.

Thực chất của bài toán này là phải tìm $x \ge 0,\ y \ge 0$ thoả mãn hệ

$\begin{cases} 2x + 4y \le 200 \\ 30x + 15y \le 1200 \end{cases}$ sao cho $L = 40x + 30y$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 3: Một xưởng cơ khí có hai công nhân là Chiến và Bình. Xưởng sản xuất loại sản phẩm I và II. Mỗi sản phẩm I bán lãi 500 nghìn đồng, mỗi sản phẩm II bán lãi 400 nghìn đồng. Để sản xuất được một sản phẩm I thì Chiến phải làm việc trong 3 giờ, Bình phải làm việc trong 1 giờ. Để sản xuất được một sản phẩm II thì Chiến phải làm việc trong 2 giờ, Bình phải làm việc trong 6 giờ. Một người không thể làm được đồng thời hai sản phẩm. Biết rằng trong một tháng Chiến không thể làm việc quá 180 giờ và Bình không thể làm việc quá 220 giờ. Số tiền lãi lớn nhất trong một tháng của xưởng là.

A. 32 triệu đồng. **B.** 35 triệu đồng. **C.** 14 triệu đồng. **D.** 30 triệu đồng.

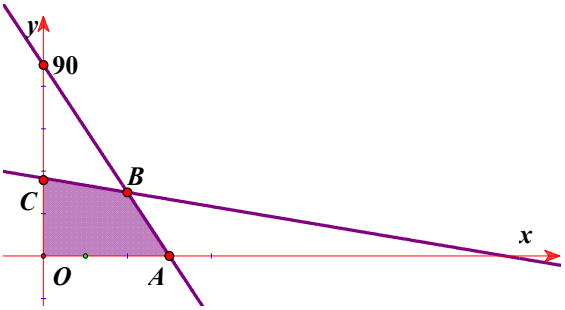
Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi x, y lần lượt là số sản phẩm loại I và loại II được sản xuất ra. Điều kiện x, y nguyên dương.

Ta có hệ bất phương trình sau: $\begin{cases} 3x + 2y \le 180 \\ x + 6y \le 220 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

Miền nghiệm của hệ trên là



Tiền lãi trong một tháng của xưởng là $T=0,5x+0,4y$.

Ta thấy T đạt giá trị lớn nhất chỉ có thể tại các điểm A, B, C. Vì C có tọa độ không nguyên nên loại.

Tại $A(60;0)$ thì $T=30$ triệu đồng.

Tại $B(40;30)$ thì $T=32$ triệu đồng.

Vậy tiền lãi lớn nhất trong một tháng của xưởng là 32 triệu đồng.

Câu 4. Một nhà khoa học đã nghiên cứu về tác động phối hợp của hai loại Vitamin A và B đã thu được kết quả như sau: Trong một ngày, mỗi người cần từ 400 đến 1000 đơn vị Vitamin cả A lẫn B và có thể tiếp nhận không quá 600 đơn vị vitamin A và không quá 500 đơn vị vitamin B. Do tác động phối hợp của hai loại vitamin trên nên mỗi ngày một người sử dụng số đơn vị vitamin B không ít hơn một nửa số đơn vị vitamin A và không nhiều hơn ba lần số đơn vị vitamin A. Tính số đơn vị vitamin mỗi loại ở trên để một người dùng mỗi ngày sao cho chi phí rẻ nhất, biết rằng mỗi đơn vị vitamin A có giá 9 đồng và mỗi đơn vị vitamin B có giá 7,5 đồng.

A. 600 đơn vị Vitamin A, 400 đơn vị Vitamin B

B. 600 đơn vị Vitamin A, 300 đơn vị Vitamin B

C. 500 đơn vị Vitamin A, 500 đơn vị Vitamin B

D. 100 đơn vị Vitamin A, 300 đơn vị Vitamin B

Lời giải

Chọn D

Gọi $x\ge 0,\ y\ge 0$ lần lượt là số đơn vị vitamin A và B để một người cần dùng trong một ngày.

Trong một ngày, mỗi người cần từ 400 đến 1000 đơn vị vitamin cả A lẫn B nên ta có: $400\le x+y\le 1000.$

Hàng ngày, tiếp nhận không quá 600 đơn vị vitamin A và không quá 500 đơn vị vitamin B nên ta có: $x\le 600,\ y\le 500.$

Mỗi ngày một người sử dụng số đơn vị vitamin B không ít hơn một nửa số đơn vị vitamin A và không nhiều hơn ba lần số đơn vị vitamin A nên ta có: $0,5x\le y\le 3x.$

Số tiền cần dùng mỗi ngày là: $T(x,y)=9x+7,5y.$

Bài toán trở thành: Tìm $x\ge 0,\ y\ge 0$ thỏa mãn hệ

$$\begin{cases}0\le x\le 600, 0\le y\le 500\\ 400\le x+y\le 1000\\ 0,5x\le y\le 3x\end{cases}$$ để $T(x,y)=9x+7,5y$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 5. Công ty Bao bì Dược cần sản xuất 3 loại hộp giấy: đựng thuốc B_1, đựng cao Sao vàng và

đựng "Quy sâm đại bổ hoàn". Để sản xuất các loại hộp này, công ty dùng các tấm bìa có kích thước giống nhau. Mỗi tấm bìa có hai cách cắt khác nhau.

- Cách thứ nhất cắt được 3 hộp B_1, một hộp cao Sao vàng và 6 hộp Quy sâm.
- Cách thứ hai cắt được 2 hộp B_1, 3 hộp cao Sao vàng và 1 hộp Quy sâm. Theo kế hoạch, số hộp Quy sâm phải có là 900 hộp, số hộp B_1 tối thiểu là 900 hộp, số hộp cao sao vàng tối thiểu là 1000 hộp. Cần phương án sao cho tổng số tấm bìa phải dùng là ít nhất?

A. Cắt theo cách một 100 tấm, cắt theo cách hai 300 tấm.

B. Cắt theo cách một 150 tấm, cắt theo cách hai 100 tấm.

C. Cắt theo cách một 50 tấm, cắt theo cách hai 300 tấm.

D. Cắt theo cách một 100 tấm, cắt theo cách hai 200 tấm.

Lời giải

Chọn A

Gọi $x \ge 0,\ y \ge 0$ lần lượt là số tấm bìa cắt theo cách thứ nhất, thứ hai.

Bài toán đưa đến tìm $x \ge 0,\ y \ge 0$ thoả mãn hệ $\begin{cases} 3x + 2y \ge 900 \\ x + 3y \ge 1000 \\ 6x + y = 900 \end{cases}$ sao cho $L = x + y$ nhỏ nhất.

Câu 6. Một nhà máy sản xuất, sử dụng ba loại máy đặc chủng để sản xuất sản phẩm A và sản phẩm B trong một chu trình sản xuất. Để sản xuất một tấn sản phẩm A lãi 4 triệu đồng người ta sử dụng máy I trong 1 giờ, máy $\mathbb{U}$ trong 2 giờ và máy MI trong 3 giờ. Để sản xuất ra một tấn sản phẩm B lãi được 3 triệu đồng người ta sử dụng máy I trong 6 giờ, máy $\mathbb{U}$ trong 3 giờ và máy MI trong 2 giờ. Biết rằng máy I chỉ hoạt động không quá 36 giờ, máy hai hoạt động không quá 23 giờ và máy MI hoạt động không quá 27 giờ. Hãy lập kế hoạch sản xuất cho nhà máy để tiền lãi được nhiều nhất.

A. Sản xuất 9 tấn sản phẩm A và không sản xuất sản phẩm B

B. Sản xuất 7 tấn sản phẩm A và 3 tấn sản phẩm B

C. Sản xuất $\frac{10}{3}$ tấn sản phẩm A và $\frac{49}{9}$ tấn sản phẩm B

D. Sản xuất 6 tấn sản phẩm B và không sản xuất sản phẩm A

Lời giải

Chọn B

Gọi $x \ge 0,\ y \ge 0$ là sản lượng cần sản xuất của sản phẩm A và sản phẩm B. Ta có:

$x + 6y$ là thời gian hoạt động của máy I.

$2x + 3y$ là thời gian hoạt động của máy II.

$3x + 2y$ là thời gian hoạt động của máy III.

Số tiền lãi của nhà máy: $T = 4x + 3y$.

Bài toán trở thành: Tìm $x \ge 0,\ y \ge 0$ thỏa mãn $\begin{cases} x + 6y \le 36 \\ 2x + 3y \le 23 \\ 3x + 2y \le 27 \end{cases}$ để $T = 4x + 3y$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 7. Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kiogam thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit. Mỗi kilogam thịt lợn chứa 600 đơn

vị protein và 400 đơn vị lipit. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất 1,6 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn. Giá tiền một kg thịt bò là 160 nghìn đồng, một kg thịt lợn là 110 nghìn đồng. Gọi x, y lần lượt là số kg thịt bò và thịt lợn mà gia đình đó cần mua. Tìm x, y để tổng số tiền họ phải trả là ít nhất mà vẫn đảm bảo lượng protein và lipit trong thức ăn?

A. $x=0,3$ và $y=1,1$. **B.** $x=0,3$ và $y=0,7$. **C.** $x=0,6$ và $y=0,7$. **D.** $x=1,6$ và $y=0,2$.

Hướng dẫn giải

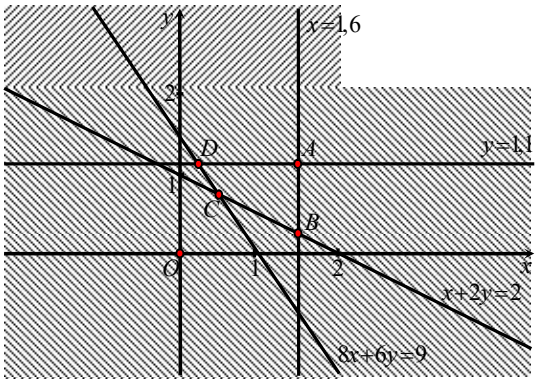
Chọn A.

Theo bài ra ta có số tiền gia đình cần trả là $160.x+110.y$ với x, y thỏa mãn: $\begin{cases}0\le x\le 1,6\\0\le y\le 1,1\end{cases}$.

Số đơn vị protein gia đình có là $0,8.x+0,6.y\ge 0,9 \Leftrightarrow 8x+6y\ge 9$ (d_1).

Số đơn vị lipit gia đình có là $0,2.x+0,4.y\ge 0,4 \Leftrightarrow x+2y\ge 2$ (d_2).

Bài toán trở thành: Tìm x, y thỏa mãn hệ bất phương trình $\begin{cases}0\le x\le 1,6\\0\le y\le 1,1\\8x+6y\ge 9\\x+2y\ge 2\end{cases}$ sao cho $T=160.x+110.y$ nhỏ nhất.



Vẽ hệ trục tọa độ ta tìm được tọa độ các điểm $A(1,6;1,1)$; $B(1,6;0,2)$; $C(0,6;0,7)$; $D(0,3;1,1)$.

Nhận xét: $T(A)=377$ nghìn, $T(B)=278$ nghìn, $T(C)=173$ nghìn, $T(D)=169$ nghìn.

Vậy tổng số tiền họ phải trả là ít nhất mà vẫn đảm bảo lượng protein và lipit trong thức ăn thì $x=0,6$ và $y=0,7$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Điểm nào dưới đây thuộc miền nghiệm của bất phương trình $2x+y-1<0$?

A. $Q(1;1)$. **B.** $M(1;-2)$. **C.** $P(2;-2)$. **D.** $N(1;0)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$Q(1;1)$: $2+1-1<0 \Leftrightarrow 2<0$ (vô lý) nên điểm $Q(1;1)$ không thuộc miền nghiệm của bất phương trình.

$M(1;-2)$: $2-2-1<0 \Leftrightarrow -1<0$ (luôn đúng) nên điểm $M(1;-2)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình.

$P(2;-2)$: $4-2-1<0 \Leftrightarrow 1<0$ (vô lý) nên điểm $P(2;-2)$ không thuộc miền nghiệm của bất phương trình.

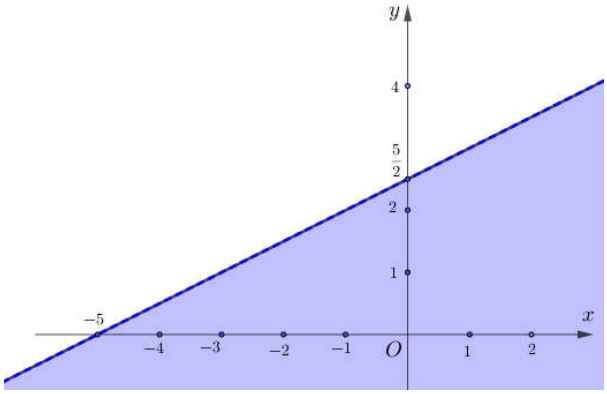
$N(1;0)$: $2-0-1<0 \Leftrightarrow 1<0$ (vô lý) nên điểm $N(1;0)$ không thuộc miền nghiệm của bất phương trình.

Câu 2. Cho bất phương trình $x-2y+5>0$ có tập nghiệm là S. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $(-2;2)\in S$. **B.** $(2;2)\in S$. **C.** $(-2;4)\in S$. **D.** $(1;3)\in S$.

Lời giải

Chọn B

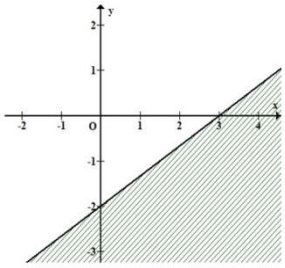


Xét đường thẳng $d: x-2y+5=0 \Rightarrow d: y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$.

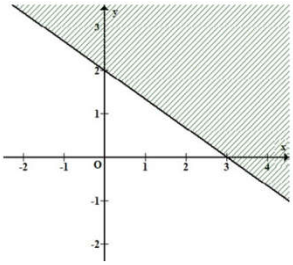
Lấy điểm $O(0;0)$, ta thấy $O\notin d$ và có $0-2.0+5>0$ nên nửa mặt phẳng bờ (d) chứa O là miền nghiệm của bất phương trình (miền bị tô xanh).

Khi đó ta thấy $(2;2)\in S$.

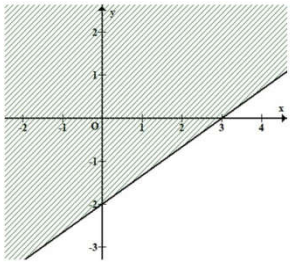
Câu 3. Hình vẽ nào sau đây biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $2x-3y-6\le 0$ (miền không tô đậm kể cả bờ)?



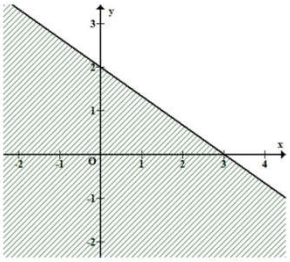
H1



H2



H3



H4

A. H1 **B.** H2 **C.** H3 **D.** H4

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng $2x-3y-6=0$ đi qua hai điểm $(0;-2),(3;0)$ nên loại đáp án H2 và H4.

Mặt khác $O(0;0)$ không thỏa mãn $2x-3y-6\le 0$ nên chọn hình H3.

Câu 4. Miền của bất phương trình $2x+y>1$ không chứa điểm nào sau đây?

A. $C(3;3)$. **B.** $D(-1;-1)$. **C.** $A(1;1)$. **D.** $B(2;2)$.

Lời giải

ChọnB

Thử vào dễ thấy rằng $D(-1;-1)$ không thỏa mãn bất phương trình nên đáp án là B.

Câu 5. Cặp số $(1;-1)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

A. $x+y-3>0$. **B.** $-x-3y-1<0$.

C. $-x-y<0$. **D.** $x+3y+1<0$.

Lời giải

Chọn D

Ta thấy cặp số $(1;-1)$ nghiệm đúng bất phương trình $x+3y+1<0$.

Câu 6. Điểm nào dưới đây thuộc miền nghiệm của bất phương trình $2x+y-1<0$?

A. $Q(1;1)$. **B.** $M(1;-2)$. **C.** $P(2;-2)$. **D.** $N(1;0)$.

Lời giải

Chọn B

Thay tọa độ điểm Q vào vế trái của bất phương trình $2x+y-1<0$, ta có $2.1+1-1>0$.

Suy ra điểm Q không thuộc miền nghiệm của bất phương trình.

Thay tọa độ điểm M vào vế trái của bất phương trình $2x+y-1<0$, ta có $2.1-2-1<0$.

Suy ra điểm M thuộc miền nghiệm của bất phương trình.

Câu 7. Tập nghiệm của bất phương trình $3x-2y+1<0$ là

A. Nửa mặt phẳng chứa gốc tọa độ, bờ là đường thẳng $3x-2y+1=0$ (không bao gồm đường thẳng).

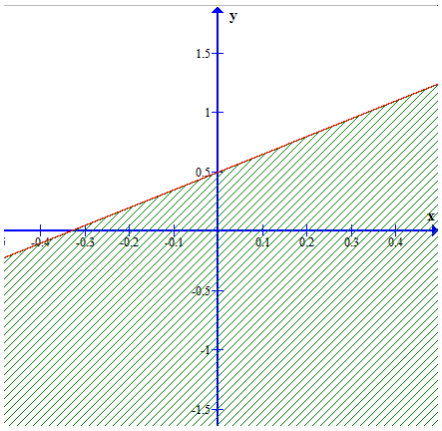
B. Nửa mặt phẳng chứa gốc tọa độ, bờ là đường thẳng $3x-2y+1=0$ (bao gồm đường thẳng).

C. Nửa mặt phẳng không chứa gốc tọa độ, bờ là đường thẳng $3x-2y+1=0$ (bao gồm đường thẳng).

D. Nửa mặt phẳng không chứa gốc tọa độ, bờ là đường thẳng $3x-2y+1=0$ (không bao gồm đường thẳng).

Lời giải

Chọn D



Quan sát đồ thị hàm số ta có, nửa mặt phẳng không chứa gốc tọa độ, bờ là đường thẳng $3x-2y+1=0$ (không bao gồm đường thẳng).

Câu 8. Cặp số nào dưới đây là một nghiệm của bất phương trình: $2x-y>3$.

A. $(3;1)$. **B.** $(0;-2)$ **C.** $(1;1)$. **D.** $(2;1)$.

Lời giải

Chọn A

Câu 9. Miền nghiệm của bất phương trình $5(x+2)-9<2x-2y+7$ **không** chứa điểm nào trong các điểm sau?

A. $(2;3)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(2;-1)$. **D.** $(0;0)$.

Lời giải

Chọn A

Thay tọa độ điểm $(2;3)$ vào bất phương trình $5(x+2)-9<2x-2y+7$ ta có:

$5(2+2)-9<2.2-2.3+7 \Leftrightarrow 11<5$ (Mệnh đề sai).

Vậy miền nghiệm của bất phương trình $5(x+2)-9<2x-2y+7$ không chứa điểm $(2;3)$.

Câu 10. Điểm nào dưới đây thuộc miền nghiệm của bất phương trình $x-2y-1\le 0$?

A. $M(0;-1)$. **B.** $Q(1;0)$. **C.** $N(-1;-2)$. **D.** $P(1;-1)$.

Lời giải

Chọn B

Xét đáp án A thay tọa độ M vào bất phương trình ta được: $1\le 0$ (vô lý) nên loại

Xét đáp án B thay tọa độ Q vào bất phương trình ta được: $0\le 0$ (đúng) nên chọn

Xét đáp án C thay tọa độ N vào bất phương trình ta được: $2\le 0$ (vô lý) nên loại

Xét đáp án D thay tọa độ P vào bất phương trình ta được: $2\le 0$ (vô lý) nên loại

Câu 11. Miền nghiệm của bất phương trình $x-2y+5<0$ là:

A. Nửa mặt phẳng chứa gốc tọa độ, bờ là đường thẳng $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ (bao gồm đường thẳng).

B. Nửa mặt phẳng không chứa gốc tọa độ, bờ là đường thẳng $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ (không bao gồm đường thẳng).

C. Nửa mặt phẳng chứa gốc tọa độ, bờ là đường thẳng $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ (không bao gồm đường thẳng).

D. Nửa mặt phẳng không chứa gốc tọa độ, bờ là đường thẳng $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ (bao gồm đường thẳng).

Lời giải

Chọn B

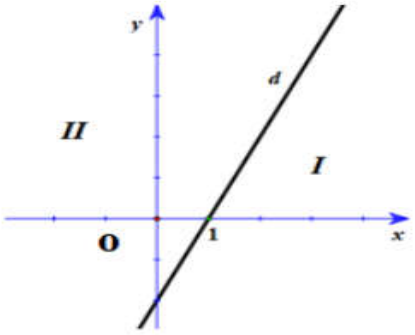
Ta có: $x-2y+5<0\Leftrightarrow y>\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$.

Thay tọa độ điểm $O(0;0)$ vào bất phương trình ta có: $0<0+\frac{5}{2}$ (vô lý).

Vậy điểm O không thuộc miền nghiệm của bất phương trình.

Nên miền nghiệm là: Nửa mặt phẳng không chứa gốc tọa độ, bờ là đường thẳng $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ (không bao gồm đường thẳng).

Câu 12. Đường thẳng $d:2x-y=2$ chia mặt phẳng tọa độ thành hai miền I, II có bờ là đường thẳng d (hình vẽ bên). Xác định miền nghiệm của bất phương trình $2x-y>2$.



A. Nửa mặt phẳng I bỏ đi đường thẳng d.
B. Nửa mặt phẳng I kể cả bờ d.
C. Nửa mặt phẳng II kể cả bờ d.
D. Nửa mặt phẳng II bỏ đi đường thẳng d.

Lời giải

Chọn A

Xét bất phương trình: $2x-y>2\ (1)$

Thay tọa độ gốc $O(0;0)$ vào (1) ta được: $0>2$ (không thỏa mãn).

Suy ra gốc O không thuộc miền nghiệm của bất phương trình (1).

Vậy miền nghiệm của bất phương trình (1) là nửa mặt phẳng I bỏ đi đường thẳng d.

Câu 13. Tập nghiệm của bất phương trình $3x-2y+1<0$.

A. Nửa mặt phẳng chứa gốc tọa độ, bờ là đường thẳng $3x-2y+1=0$(không bao gồm đường thẳng).

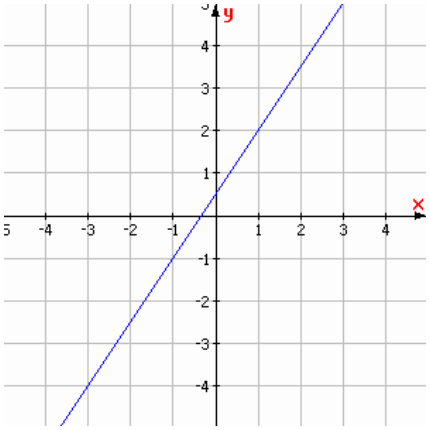
B. Nửa mặt phẳng chứa gốc tọa độ, bờ là đường thẳng $3x-2y+1=0$ (bao gồm đường thẳng).

C. Nửa mặt phẳng không chứa gốc tọa độ, bờ là đường thẳng $3x-2y+1=0$ (bao gồm đường thẳng).

D. Nửa mặt phẳng không chứa gốc tọa độ, bờ là đường thẳng $3x-2y+1=0$ (không bao gồm đường thẳng).

Lời giải

Chọn D

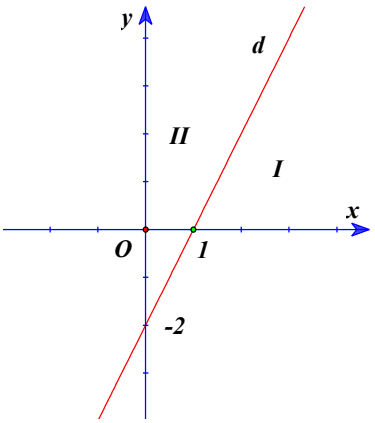


Vẽ đường thẳng $d:3x-2y+1=0$.

Lấy $O(0;0)\in d$. Ta thấy $3.0-2.0+1<0$ (vô lí).

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng không chứa gốc tọa độ, bờ là đường thẳng $3x-2y+1=0$ (không bao gồm đường thẳng).

Câu 14. Đường thẳng $d:2x-y-2=0$ chia mặt phẳng tọa độ thành hai miền I, II là hai nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng d (Hình vẽ bên).



Xác định miền nghiệm của bất phương trình $2x-y-2\ge 0$.

A. Nửa mặt phẳng I bỏ đi đường thẳng d.

B. Nửa mặt phẳng I kể cả bờ d.

C. Nửa mặt phẳng II kể cả bờ d.

D. Nửa mặt phẳng II bỏ đi đường thẳng d.

Lời giải

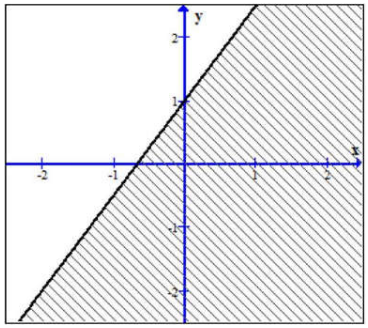
Chọn B

Ta thấy $O(0;0)\notin d$ và $2.0-0-2=-2<0$ nên $(0;0)$ không là nghiệm của bất phương trình $2x-y-2\ge 0$.

Do đó miền nghiệm của bất phương trình $2x-y-2\ge 0$ là miền không chứa điểm O kể cả đường thẳng d.

Vậy miền nghiệm của bất phương trình $2x-y-2\ge 0$ là nửa mặt phẳng I kể cả bờ d.

Câu 15. Hình dưới đây biểu diễn hình học miền nghiệm của bất phương trình nào? (Miền nghiệm là miền không gạch chéo và miền nghiệm không chứa đường thẳng)



A. $3x+2y>2$. **B.** $3x+2y<2$. **C.** $-3x+2y>2$. **D.** $-3x+2y<2$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng trong hình vẽ là $-3x+2y=2$.

Gốc tọa độ $O(0;0)$ không thuộc miền nghiệm nên ta chọn đáp án C.

Câu 16. Giá trị lớn nhất của biểu thức $F(x;y)=x+2y$, với điều kiện $\begin{cases}0\le y\le 4\\ x\ge 0\\ x-y-1\le 0\\ x+2y-10\le 0\end{cases}$ là

A. 6. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

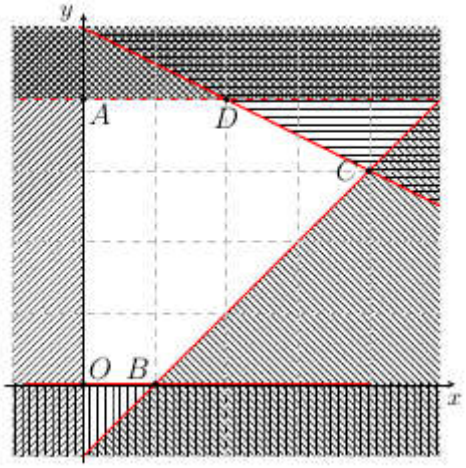
Trên cùng hệ trục tọa độ Oxy:

+ Vẽ miền nghiệm của $0\le y\le 4$ (có biên là trục hoành Ox và đường thẳng $y=4$).

+ Vẽ miền nghiệm của $x\ge 0$ (có biên là trục tung Oy).

+ Vẽ miền nghiệm của đường thẳng $x-y-1\le 0$ (có biên là đường thẳng $x-y-1=0$).

+ Vẽ miền nghiệm của đường thẳng $x+2y-10\le 0$ (có biên là đường thẳng $x+2y-10=0$).



Khi đó $F(x;y)=x+2y$ sẽ đạt lớn nhất tại một trong các điểm $A(0;4)$, $O(0;0), B(1;0), C(4;3), D(2;4)$.

Thử với từng điểm ta có $F(x;y)=x+2y$ đạt giá trị lớn nhất bằng 10 tại điểm $C(4;3)$ hoặc $D(2;4)$.

Câu 17. Điểm $O(0;0)$ **không** thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình nào sau đây?

A. $\begin{cases}x+3y<0\\2x+y+4>0\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x+3y\ge 0\\2x+y-4<0\end{cases}$.

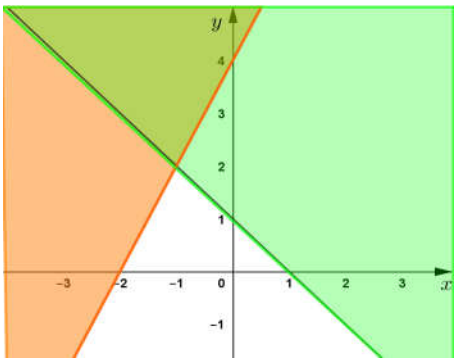
C. $\begin{cases}x+3y-6<0\\2x+y+4>0\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x+3y-6<0\\2x+y+4\ge 0\end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Thay tọa độ O vào hệ ta được đáp án.

Câu 18. Miền không bị gạch chéo (kể cả đường thẳng d_1 và d_2) là miền nghiệm của hệ bất phương trình nào?



A. $\begin{cases}x+y-1\ge 0\\2x-y+4\le 0\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x+y-1\ge 0\\2x-y+4\ge 0\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x+y-1\le 0\\2x-y+4\ge 0\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x+y-1\le 0\\2x-y+4\le 0\end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Nhận xét: Điểm O nằm trong niềm nghiệm của hệ, ta có $\begin{cases}0+0-1\le 0\\2.0-0+4\ge 0\end{cases}$ nên hệ cần tìm là $\begin{cases}x+y-1\le 0\\2x-y+4\ge 0\end{cases}$.

Câu 19. Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases}3x-4y+12\ge 0\\x+y-5\ge 0\\x+1>0\end{cases}$ là miền chứa điểm nào trong các điểm sau?

A. $M(1;-3)$. **B.** $N(4;3)$.

C. $P(-1;5)$. **D.** $Q(-2;-3)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\begin{cases}3x-4y+12\ge 0\\ x+y-5\ge 0\\ x+1>0\end{cases}$, kiểm tra đáp án thấy $N(4;3)$ thoả mãn.

Câu 20. Điểm nào sau đây thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases}2x+y-6<0\\ x-3y+5>0\\ x+1>0\end{cases}$?

A. $M(0;7)$. **B.** $N(1;1)$. **C.** $P(2;3)$. **D.** $Q(-1;2)$.

Lời giải

Chọn B

Thây điểm $N(1;1)$ vào hệ $\begin{cases}2x+y-6<0\\ x-3y+5>0\\ x+1>0\end{cases}$ ta được $\begin{cases}-3<0\\ 3>0\\ 2>0\end{cases}$ đúng.

Câu 21. Điểm nào trong các điểm sau thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases}3x-4y+12\ge 0\\ x+y-5\ge 0\\ x+1>0\end{cases}$?

A. $Q(-2;-3)$. **B.** $M(1;-3)$. **C.** $N(4;3)$. **D.** $P(-1;5)$.

Lời giải

ChọnC

Ta có tọa độ điểm $N(4;3)$ thay $x=4;y=3$ vào hệ bất phương trình đã cho thỏa mãn nên điểm $N(4;3)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình.

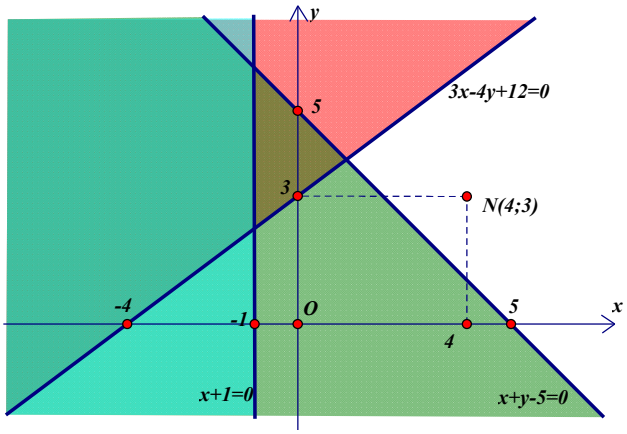
Câu 22. Miền nghiệm của hệ bất phương trình: $\begin{cases}3x-4y+12\ge 0\\ x+y-5\ge 0\\ x+1>0\end{cases}$ là miền chứa điểm nào trong các điểm sau?

A. $M(1;-3)$. **B.** $N(4;3)$. **C.** $P(-1;5)$. **D.** $Q(-2;-3)$.

Lời giải

Chọn B

Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình như hình vẽ:



Suy ra miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền chứa điểm $N(4;3)$.

Nhận xét: Theo hướng trắc nghiệm ta thay tọa độ từng điểm vào hệ, nếu tọa độ điểm nào thỏa mãn cả 3 bất phương trình thì chọn=> Chọn B

Câu 23. Điểm $O(0;0)$ không thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình nào dưới đây?

A. $\begin{cases} x+3y-6<0 \\ 2x+y+4>0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x+3y\ge 0 \\ 2x+y-4<0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x+3y<0 \\ 2x+y+4>0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x+3y-6<0 \\ 2x+y+4\ge 0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Với điểm $O(0;0)$, lần lượt thay $x=0$, $y=0$ vào từng hệ bất phương trình đã cho, ta được:

Phương án A: $\begin{cases} -6<0 \\ 4>0 \end{cases}$ (thoả mãn).

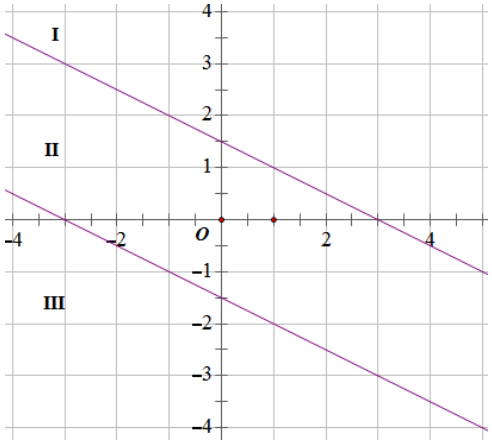
Phương án B: $\begin{cases} 0\ge 0 \\ -4<0 \end{cases}$ (thoả mãn).

Phương án C: $\begin{cases} 0<0 \\ 4>0 \end{cases}$ (Không thoả mãn vì $0<0$ là sai).

Phương án B: $\begin{cases} -6<0 \\ 4\ge 0 \end{cases}$ (thoả mãn).

Do đó chọn

Câu 24. Hai đường thẳng $d: x+2y+3=0$ và $d': x+2y-3=0$ chia mặt phẳng tọa độ thành 3 miền **I, II, III** có bờ là 2 đường thẳng d và d' không kể các điểm nằm trên 2 đường thẳng đó:



Xác định miền nghiệm của bất phương trình $\left|x+2y\right|<3$.

A. Miền **I** và **III**. **B.** Miền **II**. **C.** Miền **I**. **D.** Miền **III**.

Lời giải

Chọn B

Xét bất phương trình: $\left|x+2y\right|<3\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y<3 & (1)\\ x+2y>-3 & (2)\end{cases}$

Xác định miền nghiệm của BPT (1): $x+2y<3$

□ Lấy $O\left(0;0\right)\notin\left(d'\right)$. Thay tọa độ điểm O và BPT (1) ta thấy: $0+2.0<3$, đúng

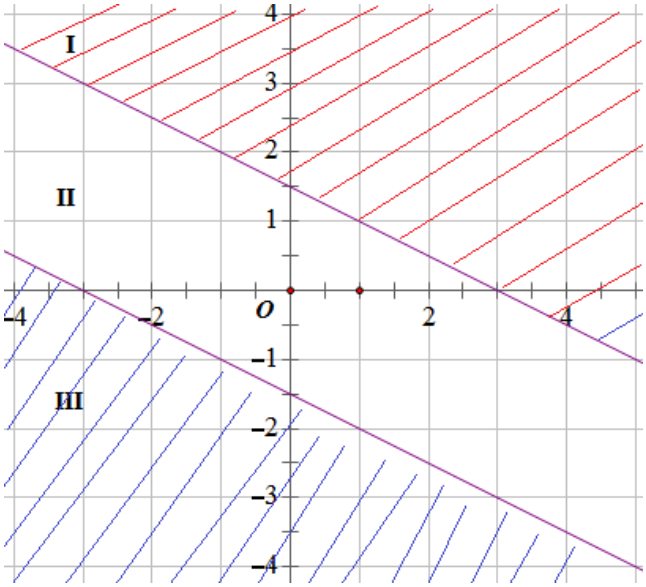
Suy ra: Điểm $O\left(0;0\right)$ thuộc miền nghiệm của BPT (1)

Xác định miền nghiệm của BPT (2): $x+2y>-3$

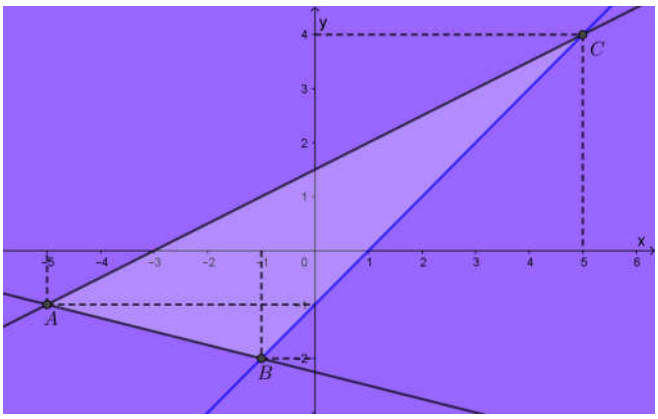
□ Lấy $O\left(0;0\right)\notin\left(d\right)$. Thay tọa độ điểm O và BPT (2) ta thấy: $0+2.0>-3$, đúng

Suy ra: Điểm $O\left(0;0\right)$ thuộc miền nghiệm của BPT (2)

Vậy miền nghiệm của BPT đã cho là phần không gạch chéo trên hình (Miền II).



Câu 25. Gọi (S) là tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ Oxy thỏa mãn hệ $\begin{cases} x-y-1\le 0 \\ x+4y+9\ge 0 \\ x-2y+3\ge 0 \end{cases}$ (hình vẽ).



Tìm tọa độ $(x;y)$ trong miền (S) sao cho biểu thức $T=3x-2y-4$ có giá trị nhỏ nhất.

A. $(5;4)$. **B.** $(-1;-2)$. **C.** $(-5;-1)$. **D.** $(-2;5)$.

Lời giải

Chọn C

Thay tọa độ điểm $A(-5;-1)$ vào biểu thức T ta được $T=-15+2-4=-17$.

Thay tọa độ điểm $B(-1;-2)$ vào biểu thức T ta được $T=-3+4-4=-3$.

Thay tọa độ điểm $C(5;4)$ vào biểu thức T ta được $T=15-8-4=3$.

Vậy chọn phương án C.

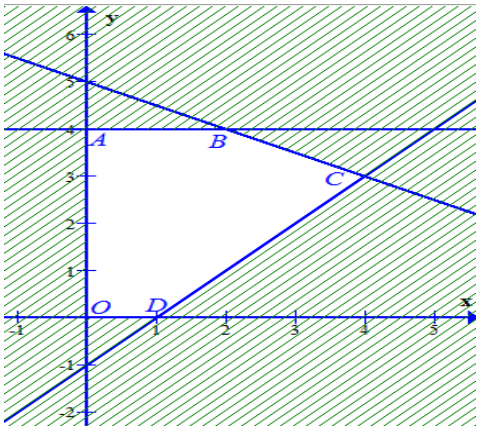
Câu 26. Giá trị lớn nhất của biểu thức $F(x;y)=x+2y$, với điều kiện $\begin{cases} 0\le y\le 4 \\ x\ge 0 \\ x-y-1\le 0 \\ x+2y-10\le 0 \end{cases}$ là

A. 6. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Xét các điểm $M(x;y)$ thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} 0\le y\le 4 \\ x\ge 0 \\ x-y-1\le 0 \\ x+2y-10\le 0 \end{cases}$



Khi đó $M(x;y)$ thuộc miền ngũ giác $ABCDO$.

Trong đó $A(0;4);B(2;4);C(4;3);D(1;0);O(0;0)$

Biểu thức $F(x;y)=x+2y$ đạt được giá trị lớn nhất tại một trong các đỉnh của ngũ giác đó.

Thay tọa độ của các đỉnh vào biểu thức $F(x;y)=x+2y$ ta có:

$F(0;4)=8$

$F(2;4)=10$

$F(4;3)=10$

$F(1;0)=1$

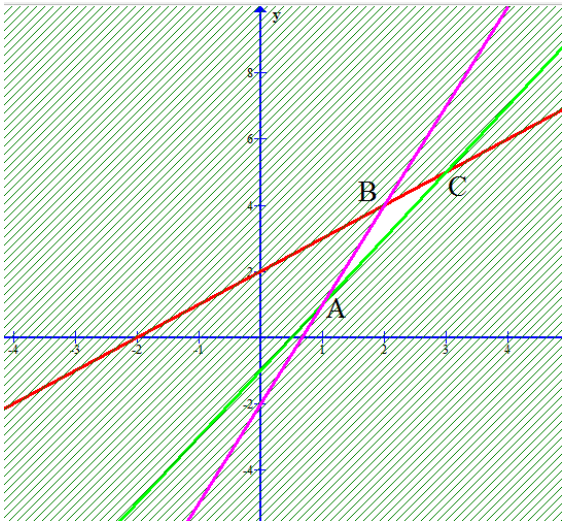
$F(0;0)=0$

Vậy biểu thức $F(x;y)=x+2y$ đạt được giá trị lớn nhất bằng 10, tại điểm B hoặc C.

Câu 27. Cho các giá trị x,y thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} x-y+2\ge 0 \\ 2x-y-1\le 0 \\ 3x-y-2\ge 0 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=3x+2y$.

A. 19. **B.** 25. **C.** 14. **D.** Không tồn tại.

Lời giải



Chọn B

Miền nghiệm của hệ đã cho là miền trong tam giác ABC (Kể cả đường biên) trong đó $A(1;1)$, $B(2;4), C(3;5)$.

Giá trị lớn nhất của $T=3x+2y$ đạt được tại các đỉnh của tam giác ABC.

Do $T_A=T(1;1)=3.1+2.1=5$, $T_B=T(2;4)=3.2+2.4=14$ và $T_C=T(3;5)=3.3+2.5=25$ nên giá trị lớn nhất của $T=3x+2y$ là 25 đạt được khi $x=3$ và $y=5$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 1. Cho bất phương trình: $2x-y<0$. Trong các cặp số $(-1;2)$, $(2;0)$, $(0;1)$, $(3;-2)$, $(-1;-2)$, cặp nào là nghiệm của bất phương trình, cặp nào không phải là nghiệm của bất phương trình?

Lời giải

Bằng cách thử trực tiếp, các cặp $(-1;2)$, $(0;1)$ là nghiệm, các cặp còn lại không phải là nghiệm của bất phương trình.

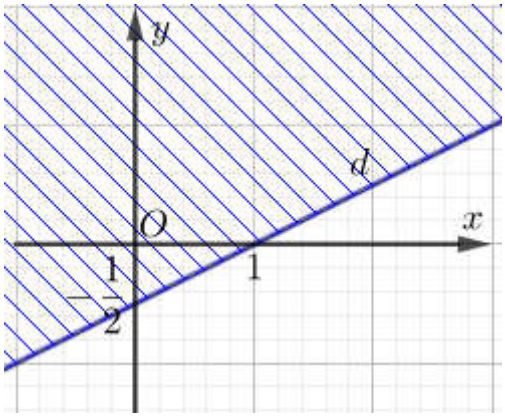
Câu 2. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình $x-2y>1$?

Lời giải

+ Đường thẳng $d: x-2y=1$ đi qua hai điểm $A(1;0)$ và $B\left(0;-\frac{1}{2}\right)$.

+ $x=y=0$ không phải là nghiệm của bất phương trình.

+ Miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng $d: x-2y=1$, không chứa gốc tọa độ O, không bao gồm đường thẳng d (là miền không gạch chéo trên hình vẽ)



Câu 3. Xác định miền nghiệm của các bất phương trình sau

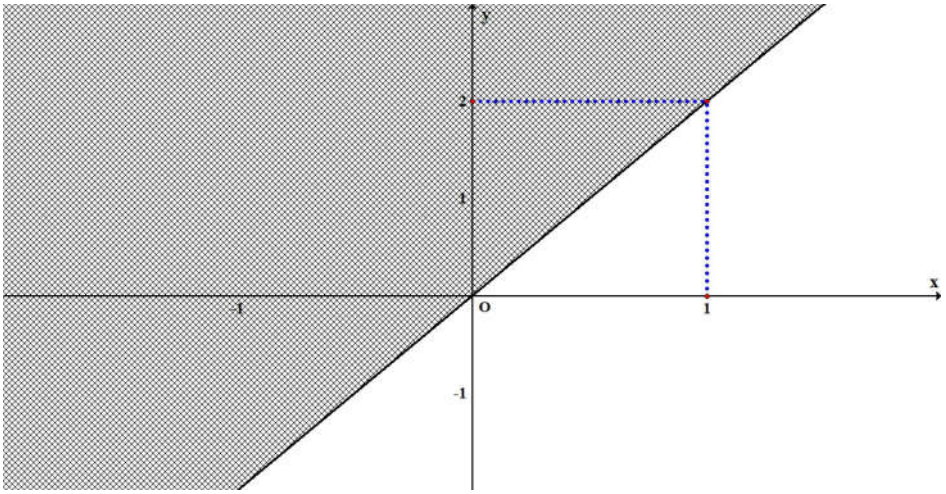
a) $2x-y\ge 0$.

b) $\frac{x-2y}{2}>\frac{2x+y+1}{3}$.

Lời giải.

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ đường thẳng $d: 2x-y=0$. Ta có d chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Chọn một điểm bất kì không thuộc đường thẳng đó, chẳng hạn điểm $M(1;0)$.

Ta thấy $(1;0)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho. Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng chứa bờ d và chứa điểm $M(1;0)$ (miền không được tô màu trên hình vẽ).



b) Ta có

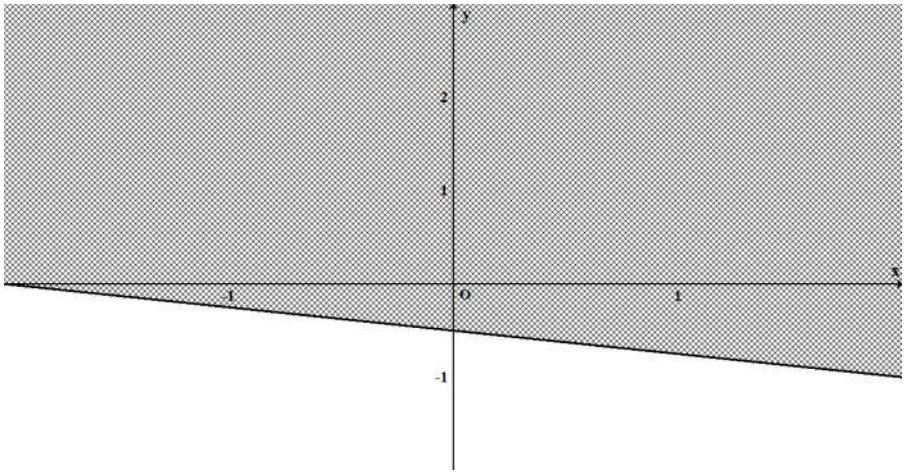
$\frac{x-2y}{2} > \frac{2x+y+1}{3} \Leftrightarrow 3(x-2y)-2(2x-y+1)>0 \Leftrightarrow -x-4y-2>0 \Leftrightarrow x+4y+2<0$.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ đường thẳng $\Delta: x+4y+2=0$.

Ta có Δ chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Chọn một điểm bất kì không thuộc đường thẳng đó, chẳng hạn điểm $O(0;0)$.

Ta thấy $(0;0)$ không phải là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng bờ Δ (Không kể đường thẳng Δ) và không chứa điểm $O(0;0)$ (miền không được tô màu trên hình vẽ).



Câu 4. Tìm các nghiệm $(x;y)$ của bất phương trình $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\le 1$, trong đó x, y là số nguyên dương.

Lời giải

Cách 1: Do $x>0$, $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\le 1$ nên ta có $\frac{y}{4}<1 \Leftrightarrow y<4$.

Do y nguyên dương nên $y\in\{1;2;3\}$.

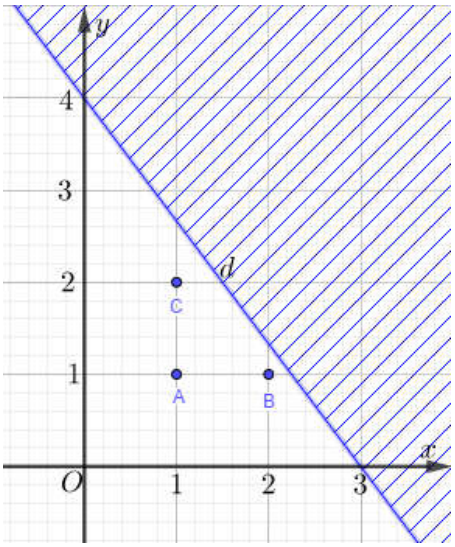
+ Với $y=1$, ta có $0<\frac{x}{3}\le\frac{3}{4} \Leftrightarrow 0<x\le\frac{9}{4} \Leftrightarrow x\in\{1;2\}$.

+ Với $y=2$, ta có $0<\frac{x}{3}\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow 0<x\le\frac{3}{2}\Leftrightarrow x=1$.

+ Với $y=3$, ta có $0<\frac{x}{3}\le\frac{1}{4}\Leftrightarrow 0<x\le\frac{3}{4}\Leftrightarrow x\in\varnothing$.

Vậy bất phương trình có các nghiệm nguyên dương là $(1;1)$, $(2;1)$ và $(1;2)$.

Cách 2: Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình lên hệ trục tọa độ (là miền không gạch chéo trên hình vẽ):



Từ biểu diễn hình học, ta thấy các điểm nguyên dương trong miền nghiệm của bất phương trình là

$A(1;1)$, $B(2;1)$ và $C(1;2)$

Câu 5. Tìm giá trị của tham số m sao cho $\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$ là nghiệm của bất phương trình $mx+(m-1)y>2$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$ là nghiệm của bất phương trình $mx+(m-1)y>2$ khi và chỉ khi

$$-m+2(m-1)>2\Leftrightarrow m>4$$

Câu 6. Cho tam giác ABC có $A(1;2)$, $B(-3;-1)$ và $C(3;-4)$. Tìm điều kiện của tham số m để điểm $M\left(m;\frac{m-5}{3}\right)$ nằm bên trong tam giác ABC?

Lời giải

Cách 1:

Đường thẳng $AB:\frac{x-1}{-3-1}=\frac{y-2}{-1-2}\Leftrightarrow 3x-4y+5=0$.

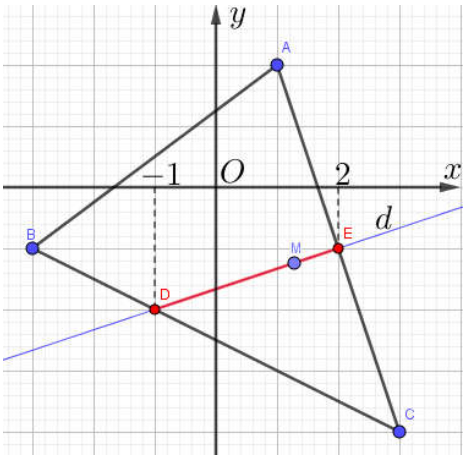
Đường thẳng $BC:\frac{x+3}{3+3}=\frac{y+1}{-4+1}\Leftrightarrow x+2y+5=0$.

Đường thẳng $AC:\dfrac{x-1}{3-1}=\dfrac{y-2}{-4-2}\Leftrightarrow 3x+y-5=0$.

Điều kiện cần và đủ để điểm M nằm bên trong tam giác ABC là điểm M cùng với mỗi đỉnh A, B, C lần lượt cùng phía với nhau đối với cạnh BC, CA, AB

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(1+4+5)\left(m+2\dfrac{m-5}{3}+5\right)>0\\(-9-1-5)\left(3m+\dfrac{m-5}{3}-5\right)>0\\(9+16+5)\left(3m-4\dfrac{m-5}{3}+5\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-1\\m<2\\m>-7\end{cases}\Leftrightarrow -1<m<2$$

Cách 2:



Do $M\left(m;\dfrac{m-5}{3}\right)$ nên $M\in d:y=\dfrac{x-5}{3}$.

Ta thấy, đường thẳng d cắt cạnh AC, BC của tam giác ABC lần lượt tại D và E.

Dựa vào đồ thị, ta thấy hoành độ D là $x_D=-1$, hoành độ điểm E là $x_E=2$.

Điểm M nằm bên trong tam giác ABC khi và chỉ khi điểm M nằm trên đoạn thẳng DE (trừ hai điểm D,E) khi và chỉ khi $-1<m<2$.

Câu 7. Xác định miền nghiệm của các hệ bất phương trình sau

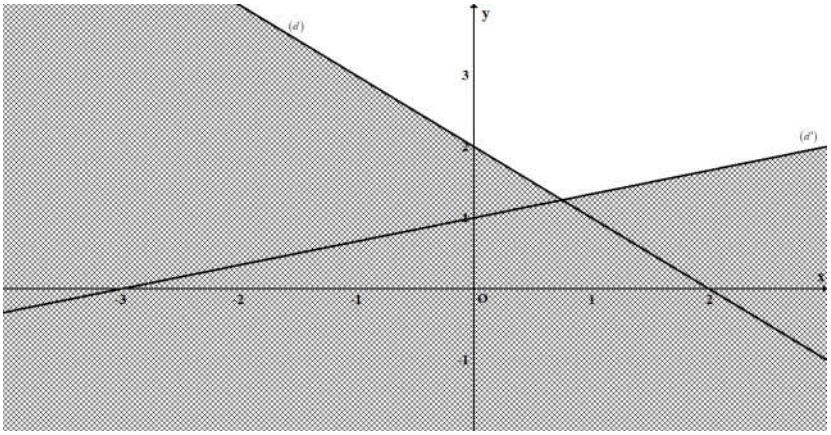
a) $\begin{cases}x+y-2\ge 0\\x-3y+3\le 0\end{cases}$

b) $\begin{cases}x+y>0\\-2x-3y+6>0\\x-2y+1\ge 0\end{cases}$

Lời giải.

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ các đường thẳng $d:x+y-2=0$ và $d':x-3y+3=0$.

Xét điểm $O(0;0)$, ta thấy $(0;0)$ không phải là nghiệm của bất phương trình $x+y-2\ge 0$ và $x-3y+3\le 0$ do đó miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không được tô màu trên hình vẽ cả hai đường thẳng d và d'.

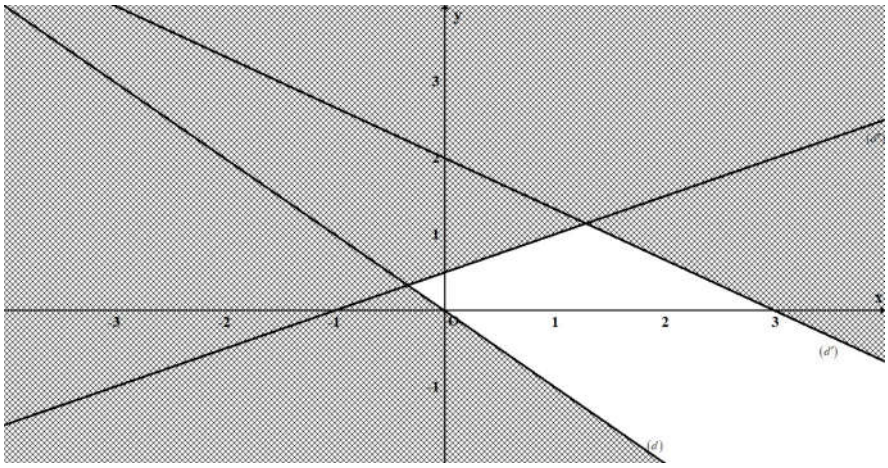


b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ các đường thẳng $d: x+y=0$, $d': -2x-3y+6=0$ và $d'': x-2y+1=0$.

Xét điểm $O(0;0)$, ta thấy $(0;0)$ là nghiệm của bất phương trình $-2x-3y+6>0$ và $x-2y+1\geq 0$. Do đó $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình $-2x-3y+6>0$ và $x-2y+1\geq 0$.

Xét điểm $M(1;0)$, ta thấy $(1;0)$ là nghiệm của bất phương trình $x+y>0$ do đó điểm $M(1;0)$ thuộc miền nghiệm bất phương trình $x+y>0$.

Vậy miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không được tô màu trên hình vẽ kể cả đường thẳng d''.

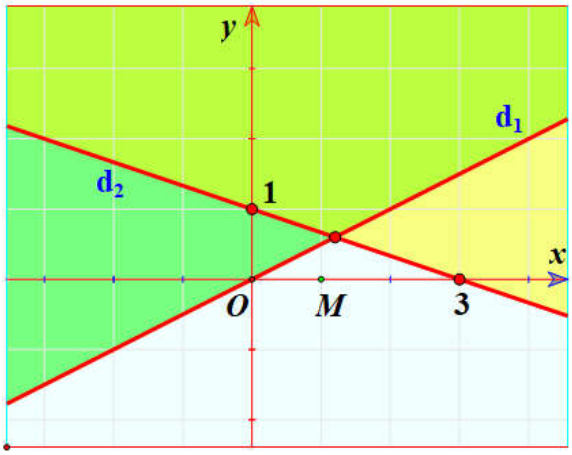


Câu 8. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x-2y>0 \\ x+3y<3 \end{cases}$.

Lời giải

- Vẽ các đường thẳng $d_1: x-2y=0$; $d_2: x+3y=3$.

- Điểm $M(1;0)$ có tọa độ thỏa mãn tất cả các bất phương trình trong hệ nên ta tô đậm các nửa mặt phẳng bờ $d_1; d_2$ không chứa điểm M. Miền không bị tô đậm (miền chứa điểm M), không tính các bờ $d_1; d_2$ (hình vẽ) là miền nghiệm của hệ đã cho.

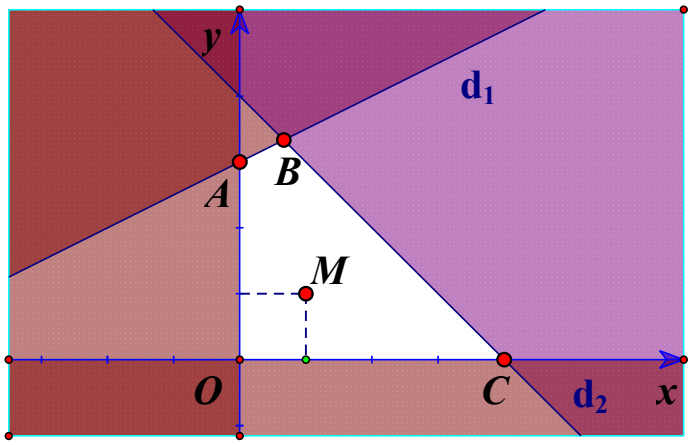


Câu 9. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} -x+2y\le 6 \\ x+y\le 4 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$.

Lời giải

- Vẽ các đường thẳng $d_1:-x+2y=6$; $d_2:x+y=4$; trục $Oy:x=0$; trục $Ox:y=0$.

- Điểm $M(1;1)$ có tọa độ thỏa mãn tất cả các bất phương trình trong hệ nên ta tô đậm các nửa mặt phẳng bờ $d_1;d_2;Ox;Oy$ không chứa điểm M. Miền không bị tô đậm là hình tứ giác $OABC$ kể cả bốn cạnh OA,AB,BC,CO trong hình vẽ dưới là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

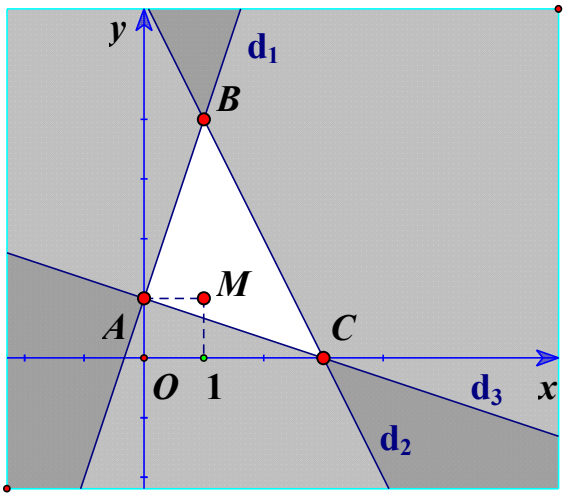


Câu 10. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x-y\ge -1 \\ 2x+y\le 6 \\ x+3y>3 \end{cases}$.

Lời giải

- Vẽ các đường thẳng $d_1:3x-y=-1$; $d_2:2x+y=6$; $d_3:x+3y=3$

- Điểm $M(1;1)$ có tọa độ thỏa mãn tất cả các bất phương trình trong hệ nên ta tô đậm các nửa mặt phẳng bờ $d_1;d_2;d_3$ không chứa điểm M. Miền không bị tô đậm là hình tam giác ABC không tính cạnh AC trong hình vẽ dưới là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.



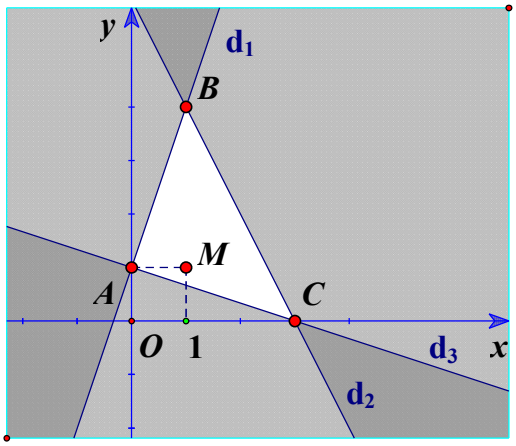
Câu 11. Cho cặp $(x;y)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases}3x-y\ge -1\\2x+y\le 6\\x+3y\ge 3\end{cases}$ (*). Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $f(x;y)=2x-3y+1$.

Lời giải

* Trước hết ta biểu diễn miền nghiệm của hệ (*):

+ Vẽ các đường thẳng $d_1:3x-y=-1;\ d_2:2x+y=6;\ d_3:x+3y=3$

+ Điểm $M(1;1)$ có tọa độ thỏa mãn tất cả các bất phương trình trong hệ nên ta tô đậm các nửa mặt phẳng bờ $d_1;d_2;d_3$ không chứa điểm M. Miền không bị tô đậm là hình tam giác ABC, tính cả ba cạnh AB,BC,CA trong hình vẽ dưới là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.



* Tìm tọa độ các điểm A,B,C:

+ $A=d_1\cap d_3$ nên tọa độ của nó là nghiệm của hệ $\begin{cases}3x-y=-1\\x+3y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$. Vậy $A(0;1)$.

+ $B=d_1\cap d_2$ nên tọa độ của nó là nghiệm của hệ $\begin{cases}3x-y=-1\\2x+y=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=4\end{cases}$. Vậy $B(1;4)$.

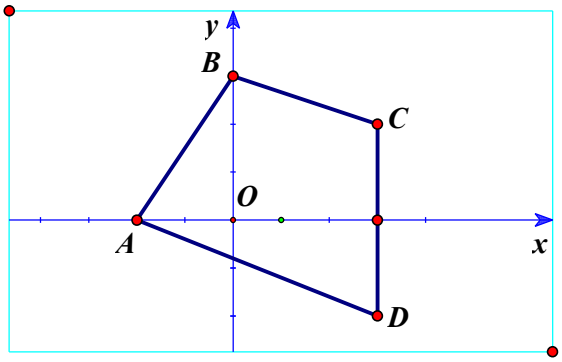
+ $C=d_2\cap d_3$ nên tọa độ của nó là nghiệm của hệ $\begin{cases}2x+y=6\\x+3y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=0\end{cases}$. Vậy $C(3;0)$.

* Tính giá trị của $f(x;y)=2x-3y+1$ tại tất cả các đỉnh của tam giác ABC:

$(x;y)$	$A(0;1)$	$B(1;4)$	$C(3;0)$
$f(x;y)=2x-3y+1$	-2	-9	7

Suy ra $\min f(x;y)=f(1;4)=-9$ và $\max f(x;y)=f(3;0)=7$.

Câu 12. Trong mặt phẳng Oxy, cho tứ giác $ABCD$ có $A(-2;0)$; $B(0;3)$; $C(3;2)$ và $D(3;-2)$ (tham khảo hình vẽ). Tìm tất cả các giá trị của m sao cho điểm $M(m;m+1)$ nằm trên hình tứ giác $ABCD$ tính cả bốn cạnh AB,BC,CD,DA.



Lời giải

* Nhận thấy hình tứ giác $ABCD$ tính cả 4 cạnh của nó là miền nghiệm của hệ bất phương trình gồm 4 bất phương trình có miền nghiệm là nửa mặt phẳng chứa điểm $O(0;0)$ và lần lượt có các bờ là các đường AB,BC,CD và DA.

- Phương trình đường thẳng AB: $-3x+2y=6$. Bất phương trình có miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ AB (tính cả bờ AB) và chứa điểm O là $-3x+2y\le 6$.

- Phương trình đường thẳng BC: $x+3y=9$. Bất phương trình có miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ BC (tính cả bờ BC) và chứa điểm O là $x+3y\le 9$.

- Phương trình đường thẳng CD: $x=3$. Bất phương trình có miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ CD (tính cả bờ CD) và chứa điểm O là $x\le 3$.

- Phương trình đường thẳng DA: $2x+5y=-4$. Bất phương trình có miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ DA (tính cả bờ DA) và chứa điểm O là $2x+5y\ge -4$.

Như vậy hình tứ giác $ABCD$ tính cả 4 cạnh của nó là miền nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases}-3x+2y\le 6\\x+3y\le 9\\x\le 3\\2x+5y\ge -4\end{cases}\quad(*).$$

* Điểm $M\left(m;m+1\right)$ nằm trên hình tứ giác $ABCD$ tính cả bốn cạnh của nó khi và chỉ khi $\left(m;m+1\right)$ là một nghiệm của hệ (*) , tức là $\begin{cases}-3m+2\left(m+1\right)\le 6\\ m+3\left(m+1\right)\le 9\\ m\le 3\\ 2m+5\left(m+1\right)\ge -4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge -4\\ m\le \dfrac{3}{2}\\ m\le 3\\ m\ge -\dfrac{9}{7}\end{cases}\Leftrightarrow -\dfrac{9}{7}\le m\le \dfrac{3}{2}.$

Vậy các giá trị m cần tìm là $-\dfrac{9}{7}\le m\le \dfrac{3}{2}.$

Câu 13. Một hộ nông dân dự định trồng đậu và cà trên diện tích 8 ha. Nếu trồng đậu thì cần 20 công và thu 3 triệu đồng trên diện tích mỗi ha, nếu trồng cà thì cần 30 công và thu 4 triệu đồng trên diện tích mỗi ha. Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên với diện tích là bao nhiêu để thu về được nhiều tiền nhất, biết rằng tổng số công không quá 180.

Lời giải

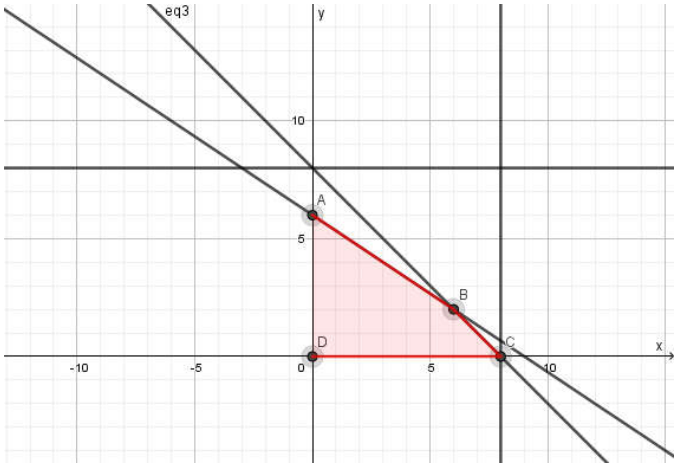
Gọi diện tích để trồng đậu là : x (ha); diện tích để trồng cà là: y (ha). (Đk: $0\le x,y\le 8$)

Tổng số diện tích sử dụng là: $x+y$.

Tổng số công cần sử dụng là: $20x+30y$

Ta có hệ bất phương trình : $\begin{cases}0\le x\le 8\\ 0\le y\le 8\\ x+y\le 8\\ 20x+30y\le 180\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 8\\ 0\le y\le 8\\ x+y\le 8\\ 2x+3y\le 18\end{cases}$

Vẽ các đường thẳng $\left(d_1\right):x+y=8,\ \left(d_2\right):2x+3y=18,\left(d_3\right):x=8,\ \left(d_4\right):y=8$ ta được miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần tô đậm như hình vẽ



$A\left(0;6\right)=\left(d_2\right)\cap Oy,\ B\left(6;2\right)=\left(d_1\right)\cap\left(d_2\right)$

$C\left(8;0\right)=\left(d_1\right)\cap Ox,\ D\equiv O\left(0;0\right)$

Số tiền thu về là: $f\left(x;y\right)=3x+4y$ (triệu đồng)

$M\left(x;y\right)$	A	B	C	D

$f(x,y)=3x+4y$	24	26	24	0

Do đó $f(x;y)$ đạt giá trị lớn nhất tại $B(6;2)$.

Vậy để thu được nhiều tiền nhất thì cần trồng 6 ha đậu và 2 ha cà.

Câu 14. Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kg thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit. Mỗi kg thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit. Biết rằng mỗi ngày gia đình này chỉ mua tối đa 1.5kg thịt bò và 1kg thịt lợn, giá tiền 1kg thịt bò là 200 nghìn đồng, 1kg thịt lợn là 100 nghìn đồng. Hỏi gia đình đó phải mua bao nhiêu kg thịt mỗi loại để số tiền bỏ ra là ít nhất.

Lời giải

Gọi số kg thịt bò cần mua là : x (kg); số kg thịt lợn cần mua là : y (kg). Đk:

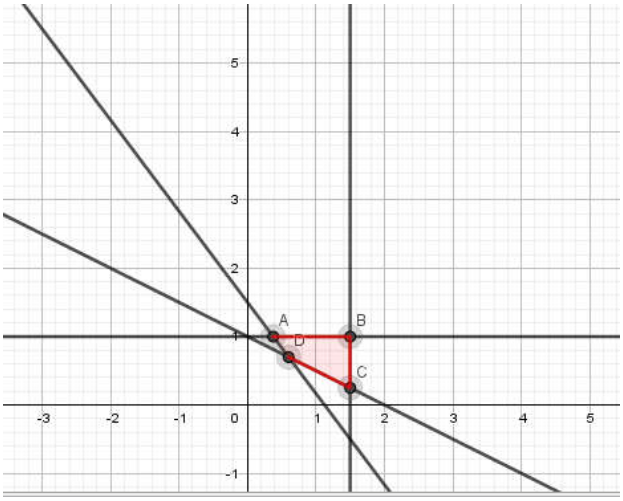
$0\le x\le 1,5,\ 0\le y\le 1$.

Khi đó số đơn vị protein là : $800x+600y$.

Số đơn vị lipit là : $200x+400y$.

Ta có hệ bất phương trình: $\begin{cases}0\le x\le 1,5\\0\le y\le 1\\800x+600y\ge 900\\200x+400y\ge 200\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 1,5\\0\le y\le 1\\8x+6y\ge 9\\x+2y\ge 2\end{cases}$.

Vẽ các đường thẳng: $(d_1):x=1,5$, $(d_2):y=1$, $(d_3):8x+6y=9$, $(d_4):x+2y=2$. Ta được miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần tô đậm trong hình vẽ.



$A\left(\frac{3}{8};1\right)=(d_3)\cap(d_2)$,

$B(1,5;1)=(d_1)\cap(d_2)$, $C(1,5;0,25)=(d_1)\cap(d_4)$ $D\left(\frac{3}{5};\frac{7}{10}\right)=(d_3)\cap(d_4)$.

Số tiền bỏ ra là : $f(x;y)=200x+100y$ (nghìn đồng).

$M(x;y)$	A	B	C	D
$f(x;y)=200x+100y$	175	400	325	190

Do đó $f(x;y)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $A\left(\frac{3}{8};1\right)$.

Vậy để số tiền bỏ ra nhỏ nhất thì cần mua $\frac{3}{8}kg$ và 1kg thịt lợn.

Câu 15. Người ta định dùng hai loại nguyên liệu để chiết xuất ít nhất 120 kg hóa chất A và 9 kg hóa chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại I giá 4 triệu đồng có thể chiết xuất được 20 kg chất A và 0,6 kg chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại II giá 3 triệu đồng có thể chiết xuất được 10 kg chất A và 1,5 kg chất B. Hỏi phải dùng bao nhiêu tấn nguyên liệu mỗi loại để chi phí mua nguyên liệu là ít nhất. Biết rằng cơ sở cung cấp nguyên liệu chỉ có thể cung cấp không quá 10 tấn nguyên liệu loại I và không quá 9 tấn nguyên liệu loại II.

Lời giải

Gọi số tấn nguyên liệu loại I cần sử dụng là x (tấn) ; số tấn nguyên liệu loại II cần sử dụng là y (tấn).

Đk: $0\le x\le 10,\ 0\le y\le 9$.

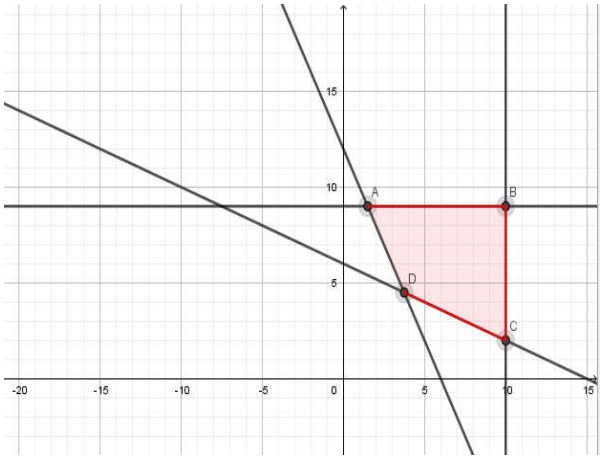
Khi đó số kg chất A thu được là: $20x+10y$

Số kg chất B thu được là: $0,6x+1,5y$.

Ta có hệ bất phương trình: $\begin{cases}0\le x\le 10\\0\le y\le 9\\20x+10y\ge 120\\0,6x+1,5y\ge 9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 10\\0\le y\le 9\\2x+y\ge 12\\2x+5y\ge 30\end{cases}$.

Vẽ các đường thẳng $(d_1):x=10,(d_2):y=9,(d_3):2x+y=12,(d_4):2x+5y=30$

Ta có miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần tô màu như hình vẽ :



$(d_2)\cap(d_3)=A\left(\frac{3}{2};9\right)$, $(d_2)\cap(d_1)=B(10;9)$.

$(d_1)\cap(d_4)=C(10;2)$, $(d_4)\cap(d_3)=D\left(\frac{15}{4};\frac{9}{2}\right)$

Chi phí mua nguyên liệu cần bỏ ra là : $f\left(x;y\right)=4x+3y$ (triệu đồng).

$M\left(x;y\right)$	A	B	C	D
$f(x,y)=4x+3y$	33	67	46	28,5

Do đó $f\left(x;y\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $D\left(\frac{15}{4};\frac{9}{2}\right)$.

Vậy để chi phí nguyên liệu là ít nhất ta cần sử dụng $\frac{15}{4}=3,75$ tấn nguyên liệu loại I và $\frac{9}{2}=4,5$ tấn nguyên liệu loại II.

Câu 16. Có ba nhóm máy A, B,C dùng để sản xuất ra hai loại sản phẩm I và II. Để sản xuất một đơn vị sản phẩm mỗi loại phải lần lượt dùng các máy thuộc các nhóm khác nhau. Số máy trong một nhóm và số máy của từng nhóm cần thiết để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm thuộc mỗi loại được cho trong bảng sau:

Nhóm	**Số máy trong mỗi nhóm**	**Số máy trong từng nhóm để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm**	
		Loại I	**Loại II**
A	10	2	2
B	4	0	2
C	12	2	4

Một đơn vị sản phẩm I lãi ba nghìn đồng, một đơn vị sản phẩm loại II lãi năm nghìn đồng. Hãy lập phương án để việc sản xuất hai loại sản phẩm trên có lãi cao nhất.

Lời giải

Gọi số sản phẩm loại I cần sản xuất là x ; số sản phẩm loại II cần sản xuất là y. Đk: $x,y\ge 0$.

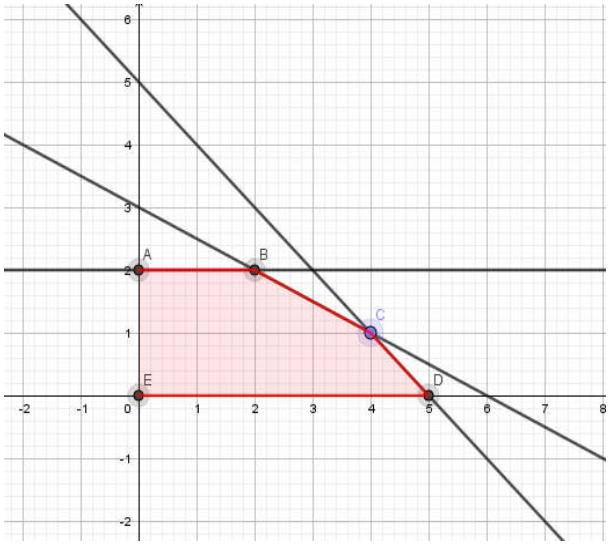
Số máy nhóm A cần sử dụng là: $2x+2y$.

Số máy nhóm B cần sử dụng là: $2y$.

Số máy nhóm C cần sử dụng là: $2x+4y$.

Ta có hệ bất phương trình: $\begin{cases}x\ge 0\\ y\ge 0\\ 2x+2y\le 10\\ 2y\le 4\\ x+2y\le 6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ 0\le y\le 2\\ x+y\le 5\\ x+2y\le 6\end{cases}$.

Vẽ các đường thẳng $\left(d_1\right):\mathrm{y}=2,\ \left(d_2\right):x+\mathrm{y}=5,\ \left(d_3\right):x+2y=6$. Ta có miền nghiệm của bất phương trình là phần tô màu như hình vẽ :



$(d_1)\cap Oy = A(0;2)$, $(d_1)\cap(d_3) = B(2;2)$, $(d_2)\cap(d_3) = C(4;1)$

$(d_2)\cap Ox = D(5;0)$, $E \equiv O = (0;0)$

Lãi suất thu được là : $f(x;y) = 3x + 5y$ (nghìn đồng).

$M(x;y)$	A	B	C	D	E
$f(x,y) = 4x + 3y$	10	16	17	15	0

Do đó $f(x;y)$ đạt giá trị lớn nhất tại $C(4;1)$.

Vậy phương án sản xuất 4 sản phẩm loại I và 1 sản phẩm loại II sẽ cho lãi cao nhất.

Chương III HÀM SỐ BẬC HAI VÀ ĐỒ THỊ

Trong chương này, chúng ta sẽ học cách nhận biết hàm số, sự biến thiên và đồ thị của hàm số bậc hai cũng như tìm hiểu các ứng dụng của hàm số để giải quyết một số vấn đề trong thực tiễn.



Nước được phun ra từ đài hoa sen ở phố đi bộ Nguyễn Huệ, Thành phố Hồ Chí Minh có dạng một đường parabol.

Học xong chương này, bạn có thể:

- Nhận biết được những mô hình thực tế dẫn đến khái niệm hàm số. Mô tả được các khái niệm cơ bản về hàm số và các đặc trưng hình học của đồ thị hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến.
- Thiết lập được bảng giá trị và vẽ được đồ thị hàm số bậc hai (parabol).
- Nhận biết được các tính chất cơ bản của parabol như đỉnh, trục đối xứng. Nhận biết và giải thích được các tính chất của hàm số bậc hai thông qua đồ thị.
- Vận dụng được những kiến thức về hàm số, hàm số bậc hai và đồ thị vào giải quyết bài toán thực tiễn.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Bài 1. Hàm số và đồ thị

Từ khoá: Hàm số; Tập xác định; Tập giá trị; Đồ thị hàm số; Hàm số đồng biến; Hàm số nghịch biến.



Nhiệt độ có mối liên hệ gì với thời gian?

1. Hàm số. Tập xác định và tập giá trị của hàm số

Bản tin dự báo thời tiết cho biết nhiệt độ ở một số thời điểm trong ngày 01/5/2021 tại Thành phố Hồ Chí Minh đã được ghi lại thành bảng kèm với biểu đồ bên.

Sử dụng bảng hoặc biểu đồ, hãy:

a) Viết tập hợp các mốc giờ đã có dự báo nhiệt độ.

b) Viết tập hợp các số đo nhiệt độ đã dự báo.

c) Cho biết nhiệt độ dự báo tại Thành phố Hồ Chí Minh vào lúc 7 giờ sáng ngày 01/5/2021.

Bảng 1. Dự báo thời tiết ngày 01/5/2021 tại Thành phố Hồ Chí Minh

Giờ	1	4	7	10	13	16	19	22
Nhiệt độ (°C)	28	27	28	32	31	29	28	27



Hình 1. Dự báo thời tiết ngày 01/5/2021 tại Thành phố Hồ Chí Minh

Trong , nhiệt độ dự báo là một đại lượng phụ thuộc vào thời điểm (giờ). Mối liên hệ giữa hai đại lượng này (nhiệt độ và thời gian) có các đặc trưng của một hàm số.

Giả sử x và y là hai đại lượng biến thiên và x nhận giá trị thuộc tập số D.

Nếu với mỗi giá trị x thuộc D, ta xác định được một và chỉ một giá trị tương ứng y thuộc tập hợp số thực $\mathbb{R}$ thì ta có một ***hàm số***.

Ta gọi x là ***biến số*** và y là ***hàm số*** của x.

Tập hợp D được gọi là ***tập xác định*** của hàm số.

Tập hợp T gồm tất cả các giá trị y (tương ứng với x thuộc D) gọi là ***tập giá trị*** của hàm số.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Ta thường dùng kí hiệu $f(x)$ để chỉ giá trị y tương ứng với x, nên hàm số còn được viết là $y = f(x)$.

Một hàm số có thể được cho bằng bảng (như Bảng 1), bằng biểu đồ (như Hình 1) hoặc bằng công thức như đã học ở cấp Trung học cơ sở, chẳng hạn $y = 2x - 3$, $y = -x^2$.

Ví dụ 1

a) Vì sao có thể nói bảng dữ liệu dự báo thời tiết (Bảng 1) biểu thị một hàm số? Tìm tập xác định, tập giá trị của hàm số này.

b) Biểu đồ "Dự báo nhiệt độ ngày 01/5/2021 tại Thành phố Hồ Chí Minh" (Hình 1) có biểu thị hàm số không? Tại sao?

Giải

a) Từ bảng dữ liệu dự báo thời tiết (Bảng 1) trong  , ta thấy ứng với mỗi thời điểm (giờ) trong bảng đều có một giá trị dự báo nhiệt độ duy nhất. Vì vậy, bảng này biểu thị một hàm số. Hàm số đó có tập xác định $D = \{1; 4; 7; 10; 13; 16; 19; 22\}$ và có tập giá trị $T = \{27; 28; 29; 31; 32\}$.

b) Tương tự, biểu đồ "Dự báo nhiệt độ ngày 01/5/2021 tại Thành phố Hồ Chí Minh" (Hình 1) cũng là một hàm số, ta cũng có tập xác định và tập giá trị như trên câu a.

Chú ý:

a) Khi một hàm số được cho bằng công thức mà không chỉ rõ tập xác định thì ta quy ước:

Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

b) Một hàm số có thể được cho bởi hai hay nhiều công thức. Chẳng hạn, xét hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} -3x + 5 & \text{với } x \le 1 \\ 2x^2 & \text{với } x > 1 \end{cases}$$

nghĩa là với $x \le 1$ thì $f(x) = -3x + 5$; với $x > 1$ thì $f(x) = 2x^2$.

Ví dụ 2

Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $f(x) = \sqrt{5 - x}$; b) $f(x) = \dfrac{1}{2x - 6}$.

Giải

a) Biểu thức $f(x)$ có nghĩa khi và chỉ khi $5 - x \ge 0$, tức là khi $x \le 5$.

Vậy tập xác định của hàm số này là $D = (-\infty; 5]$.

b) Biểu thức $f(x)$ có nghĩa khi và chỉ khi $2x - 6 \ne 0$, tức là khi $x \ne 3$.

Vậy tập xác định của hàm số này là $D = \mathbb{R}\backslash\{3\}$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

1 Một thiết bị đã ghi lại vận tốc v (mét/giây) ở thời điểm t (giây) của một vật chuyển động như trong bảng sau:

t (giây)	0,5	1	1,2	1,8	2,5
v (mét/giây)	1,5	3	0	5,4	7,5

Vì sao bảng này biểu thị một hàm số? Tìm tập xác định của hàm số này.

2 Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $f(x) = \sqrt{2x+7}$; b) $f(x) = \dfrac{x+4}{x^2-3x+2}$.

Ở góc của miếng đất hình chữ nhật, người ta làm một bồn hoa có dạng một phần tư hình tròn với bán kính r (Hình 2). Bán kính bồn hoa có kích thước từ 0,5 m đến 3 m.

a) Viết công thức của hàm số biểu thị diện tích bồn hoa theo bán kính r và tìm tập xác định của hàm số này.

b) Bán kính bồn hoa bằng bao nhiêu thì nó có diện tích là $0{,}5\pi$ m^2?



Hình 2

2. Đồ thị hàm số

2 Xét hàm số $y = f(x)$ cho bởi bảng sau:

x	−2	−1	0	1	2	3	4
$f(x)$	8	3	0	−1	0	3	8

a) Tìm tập xác định D của hàm số trên.

b) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, vẽ tất cả các điểm có toạ độ $(x; y)$ với $x \in D$ và $y = f(x)$.

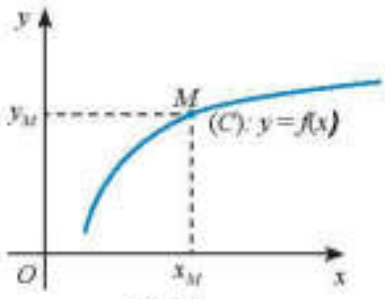
Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D.

Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, ***đồ thị*** (C) của hàm số là tập hợp tất cả các điểm $M(x; y)$ với $x \in D$ và $y = f(x)$.

Vậy $(C) = \{M(x, f(x)) \mid x \in D\}$.

Chú ý:

Điểm $M(x_M; y_M)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$ khi và chỉ khi $x_M \in D$ và $y_M = f(x_M)$.



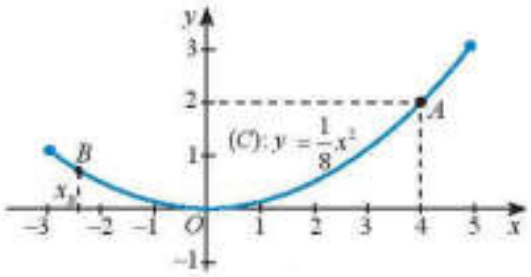
Hình 3

Ví dụ 3

a) Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{8}x^2$ xác định trên $D = [-3; 5]$ có đồ thị (C) như Hình 4.

– Điểm $A(4; f(4))$ có thuộc đồ thị (C) không?

– Lấy điểm B tuỳ ý trên đồ thị (C). Nêu nhận xét về hoành độ của điểm B.



Hình 4

b) Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$ được cho bởi bảng sau:

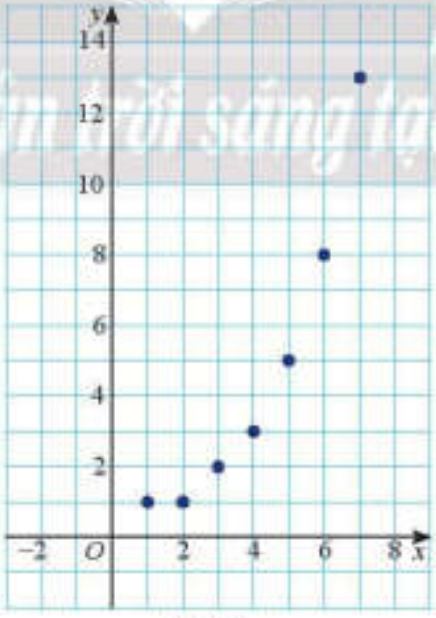
x	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	1	1	2	3	5	8	13

Giải

a) Vì $4 \in [-3; 5]$ nên điểm A có hoành độ bằng 4 và có tung độ $y = \frac{1}{8}.4^2 = 2$ là điểm thuộc đồ thị (C).

Khi lấy điểm B tuỳ ý trên đồ thị (C) thì hoành độ x_B của điểm này thuộc tập xác định D, nghĩa là $-3 \le x_B \le 5$.

b) Đồ thị của hàm số gồm 7 điểm như Hình 5.

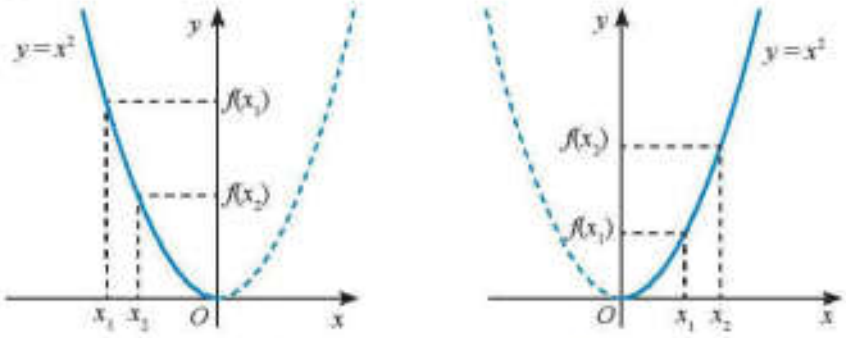


Hình 5

Vẽ đồ thị hàm số $f(x) = 3x + 8$.

3. Hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến

3 Quan sát đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2$ rồi so sánh $f(x_1)$ và $f(x_2)$ (với $x_1 < x_2$) trong từng trường hợp sau:



a) $x_1, x_2 \in (-\infty; 0)$ b) $x_1, x_2 \in (0; +\infty)$

Hình 6

Đối với hàm số trên, khi x tăng và thuộc khoảng $(-\infty; 0)$, ta thấy giá trị hàm số giảm. Ngược lại, khi x tăng và thuộc khoảng $(0; +\infty)$, giá trị hàm số tăng.

Một cách tổng quát, ta có:

Với hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$, ta nói:

- Hàm số ***đồng biến*** trên khoảng $(a; b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

- Hàm số ***nghịch biến*** trên khoảng $(a; b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Chân trời sáng tạo

Nhận xét:

Khi hàm số *đồng biến* (tăng) trên khoảng $(a; b)$ thì đồ thị của nó có dạng đi lên từ trái sang phải. Ngược lại, khi hàm số *nghịch biến* (giảm) trên khoảng $(a; b)$ thì đồ thị của nó có dạng đi xuống từ trái sang phải.

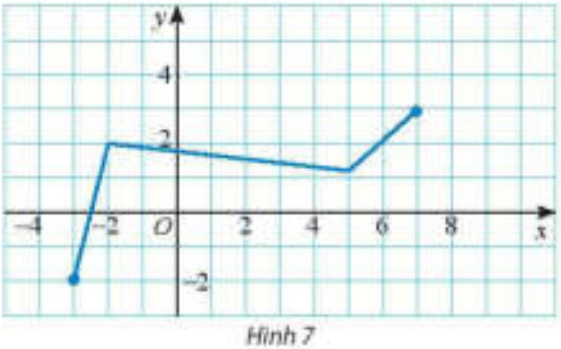
Ví dụ 4

Xét tính đồng biến, nghịch biến của các hàm số sau trên tập xác định hoặc trên khoảng được chỉ định:

a) $y = 3x - 1$;

b) $y = x^2$ trên khoảng $(-\infty; 0)$;

c) Hàm số có đồ thị như Hình 7.



Hình 7

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Giải

a) Xét hàm số $y = f(x) = 3x - 1$. Hàm số này xác định trên $\mathbb{R}$.

Lấy x_1, x_2 là hai số tuỳ ý sao cho $x_1 < x_2$, ta có:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 3x_1 < 3x_2 \Rightarrow 3x_1 - 1 < 3x_2 - 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Vậy hàm số đồng biến (tăng) trên $\mathbb{R}$.

b) Xét hàm số $y = x^2$ trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Lấy x_1, x_2 tuỳ ý sao cho $x_1 < x_2$, ta có: $f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$.

Do $x_1 < x_2$ nên $x_1 - x_2 < 0$ và do $x_1, x_2 \in (-\infty; 0)$ nên $x_1 + x_2 < 0$. Từ đây suy ra $f(x_1) - f(x_2) > 0$ hay $f(x_1) > f(x_2)$.

Vậy hàm số nghịch biến (giảm) trên khoảng $(-\infty; 0)$.

c) Từ đồ thị, ta thấy hàm số xác định trên $[-3; 7]$.

– Trên khoảng $(-3; -2)$, đồ thị có dạng đi lên từ trái sang phải nên hàm số này đồng biến trên khoảng $(-3; -2)$.

– Trên khoảng $(-2; 5)$, đồ thị có dạng đi xuống từ trái sang phải nên hàm số này nghịch biến trên khoảng $(-2; 5)$.

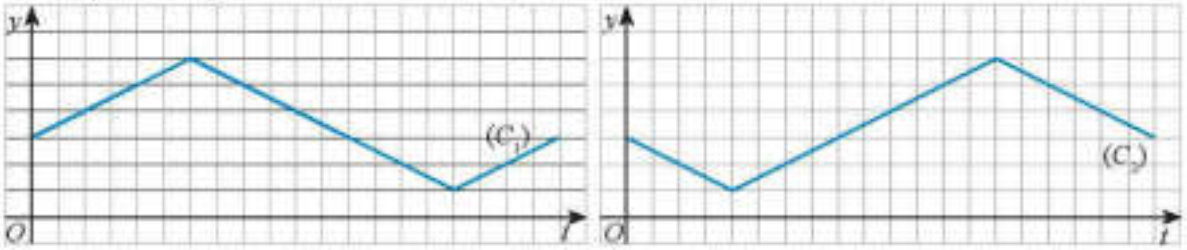
– Trên khoảng $(5; 7)$, đồ thị có dạng đi lên từ trái sang phải nên hàm số này đồng biến trên khoảng $(5; 7)$.

Ví dụ 5

Gia đình bạn Sơn sống ở tầng ba, bà ngoại của Sơn sống ở tầng sáu thuộc cùng một chung cư cao tầng. Sơn đi bộ từ nhà mình xuống tầng một để lấy thư và đưa lên nhà bà ngoại. Đưa thư cho bà xong, Sơn quay về nhà mình.

Đặt $y = h(t)$ là hàm số biểu thị khoảng cách từ vị trí của Sơn đến mặt đất theo thời gian t từ khi bạn ấy bắt đầu đi cho đến khi về lại nhà mình (chọn gốc thời gian là lúc Sơn bắt đầu đi lấy thư).

(C_1) hay (C_2) là đồ thị của hàm số $y = h(t)$? Tại sao?



a) b)

Hình 8

Giải

Khi bắt đầu đi từ tầng ba xuống tầng một, Sơn ngày càng gần mặt đất nên khoảng cách từ vị trí của Sơn đến mặt đất giảm dần, hay hàm số giảm, vậy đồ thị phải có dạng đi xuống.

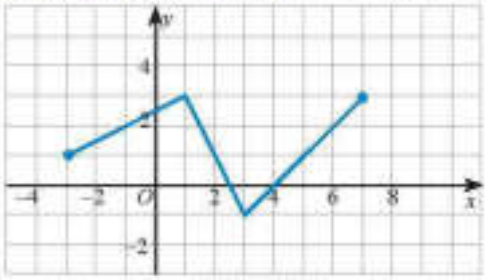
Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Khi đi từ tầng một lên tầng sáu để đưa thư cho bà ngoại, Sơn ngày càng xa mặt đất nên khoảng cách từ vị trí của Sơn đến mặt đất tăng dần, hay hàm số tăng, vậy đồ thị phải có dạng đi lên.

Khi đi từ tầng sáu về nhà mình, Sơn ngày càng gần mặt đất nên khoảng cách từ vị trí của Sơn đến mặt đất giảm dần, hay hàm số giảm, vậy đồ thị phải có dạng đi xuống.

Đồ thị (C_2) có dạng tương ứng như mô tả ở trên. Do đó, (C_2) là đồ thị của hàm số $y = h(t)$ này.

4 a) Tìm khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số có đồ thị sau:



Hình 9

b) Xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = f(x) = 5x^2$ trên khoảng $(2; 5)$.

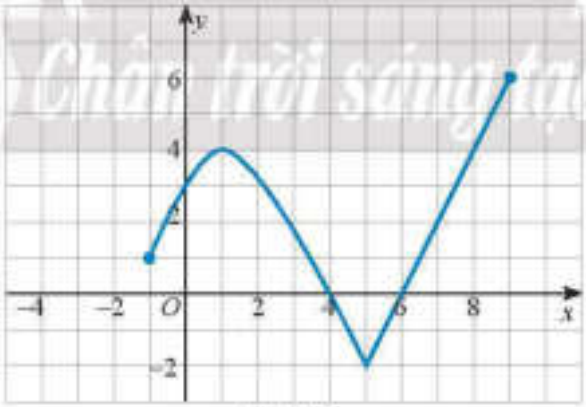
BÀI TẬP

1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $f(x) = \sqrt{-5x+3}$;

b) $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x+3}$.

2. Tìm tập xác định, tập giá trị của hàm số có đồ thị như Hình 10.



Hình 10

3. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của các hàm số sau:

a) $f(x) = -5x + 2$;

b) $f(x) = -x^2$.

4. Vẽ đồ thị hàm số $f(x) = |x|$, biết rằng hàm số này còn được viết như sau:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{với } x \geq 0 \\ -x & \text{với } x < 0. \end{cases}$$

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

5. Tìm tập xác định, tập giá trị và vẽ đồ thị hàm số:

$$f(x)=\begin{cases}-1 & \text{với } x<0\\ 1 & \text{với } x>0.\end{cases}$$

6. Một hãng taxi có bảng giá như sau:

	Giá mở cửa (0,5 km)	Giá cước các kilômét tiếp theo	Giá cước từ kilômét thứ 31
Taxi 4 chỗ	11 000 đồng	14 500 đồng	11 600 đồng
Taxi 7 chỗ	11 000 đồng	15 500 đồng	13 600 đồng

a) Xem số tiền đi taxi là một hàm số phụ thuộc số kilômét di chuyển, hãy viết công thức của các hàm số dựa trên thông tin từ bảng giá đã cho theo từng yêu cầu:

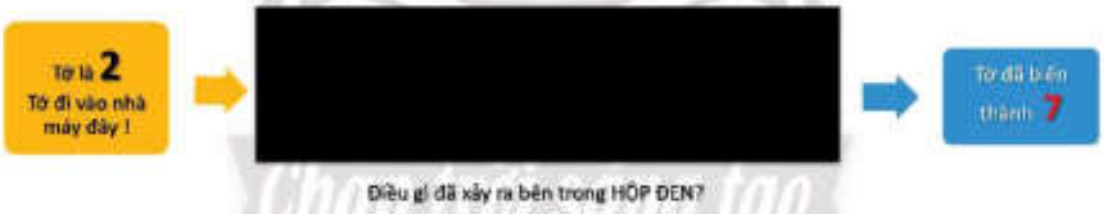
i) Hàm số $f(x)$ để tính số tiền hành khách phải trả khi di chuyển x km bằng xe taxi 4 chỗ.

ii) Hàm số $g(x)$ để tính số tiền hành khách phải trả khi di chuyển x km bằng xe taxi 7 chỗ.

b) Nếu cần đặt xe taxi cho 30 hành khách, nên đặt toàn bộ xe 4 chỗ hay xe 7 chỗ thì có lợi hơn?

7. **Đố vui**

Số 2 đã trải qua một hành trình thú vị và bị biến đổi sau khi đi qua chiếc hộp đen.



Bác thợ máy đã giải mã hộp đen cho một số x bất kì như sau:



Bên trong HỘP ĐEN là một đoạn chương trình được cài đặt sẵn. Ta xem đoạn chương trình này như một hàm số $f(x)$. Hãy viết biểu thức của $f(x)$ để mô tả sự biến đổi đã tác động lên x.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Tính giá trị của hàm số tại một điểm, điểm thuộc đồ thị

1. Phương pháp

Thay trực tiếp các giá trị của biến số x vào hàm số.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Câu 1: Điểm nào sau đây thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x(x-2)}$?

A. $M(2;1)$. **B.** $N(-1;0)$. **C.** $P(2;0)$. **D.** $Q\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(x)=\dfrac{x+1}{x(x-2)}$

Ta có: $f(-1)=\dfrac{-1+1}{-1(-1-2)}=0$.

Câu 2: Tọa độ giao điểm của đường thẳng $y=x-1$ và $(P): y=x^2-2x-1$ là

A. $(1;-1);(3;2)$. **B.** $(0;1);(3;2)$. **C.** $(0;-1);(3;2)$. **D.** $(1;-1);(-3;2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có phương trình hoành độ giao điểm: $x^2-2x-1=x-1\Leftrightarrow x^2-3x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\Rightarrow y=-1 \\ x=3\Rightarrow y=2 \end{array}\right.$

Vậy tọa độ giao điểm là: $(0;-1);(3;2)$

Câu 3: Cho (P) có phương trình $y=x^2-2x+4$. Tìm điểm mà parabol đi qua.

A. $Q(4;2)$. **B.** $N(-3;1)$. **C.** $P=(4;0)$. **D.** $M(-3;19)$.

Lời giải

Chọn D

Thử trực tiếp thấy tọa độ của $M(-3;19)$ thỏa mãn phương trình parabol.

Câu 4: Tìm m để đồ thị hàm số $y=4x+m-1$ đi qua điểm $A(1;2)$.

A. $m=6$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=-4$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số $y=4x+m-1$ đi qua điểm $A(1;2)$ suy ra $2=4.1+m-1\Rightarrow m=-1$

Câu 5: Cho hàm số $y=\begin{cases}x^2-2x \text{ khi } x\ge 1\\ \dfrac{5-2x}{x-1} \text{ khi } x<1\end{cases}$. Điểm nào sau đây thuộc đồ thị hàm số?

A. $(4;-1)$. **B.** $(-2;-3)$. **C.** $(-1;3)$. **D.** $(2;1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta thấy $\dfrac{5-2.(-2)}{-2-1}=-3$. Nên $(-2;-3)$ thuộc đồ thị hàm số đã cho.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. Tìm tọa độ điểm thuộc đồ thị của hàm số và có tung độ bằng -2.

A. $(0;-2)$. **B.** $\left(\dfrac{1}{3};-2\right)$. **C.** $(-2;-2)$. **D.** $(-1;-2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi $M_0(x_0;-2)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số có tung độ bằng -2.

Khi đó: $\dfrac{x_0+1}{x_0-1}=-2\Leftrightarrow x_0+1=2(1-x_0)\Leftrightarrow 3x_0=1\Leftrightarrow x_0=\dfrac{1}{3}\Rightarrow M\left(\dfrac{1}{3};-2\right)$.

Câu 2. Điểm nào sau đây thuộc đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-2}{x(x-1)}$

A. $M(0;-1)$. **B.** $M(2;1)$. **C.** $M(2;0)$. **D.** $M(1;1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Thử trực tiếp thấy tọa độ của $M(2;0)$ thỏa mãn phương trình hàm số.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{x-2}-3}{x-1} & \text{khi } x\ge 2\\ x^2+2 & \text{khi } x<2\end{cases}$. Tính $P=f(2)+f(-2)$.

A. $P=3$. **B.** $P=2$. **C.** $P=\dfrac{7}{3}$. **D.** $P=6$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $f(2)+f(-2)=\dfrac{2\sqrt{2-2}-3}{2-1}+(-2)^2+2\Rightarrow P=3$.

Câu 5. Đồ thị của hàm số $y=f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{khi} \quad x\le 2\\ -3 & \text{khi} \quad x>2\end{cases}$ đi qua điểm nào sau đây:

A. $(0;-3)$. **B.** $(3;7)$. **C.** $(2;-3)$. **D.** $(0;1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Thử lần lượt từng phương án A,B,C,D với chú ý về điều kiện ta được:

$f(0)=2.0+1=1\ne -3$, đồ thị không đi qua điểm $(0;-3)$.

$f(3)=-3\ne 7$, đồ thị không đi qua điểm $(3;7)$.

$f(2)=2.2+1=5\ne -3$, đồ thị không đi qua điểm $(2;-3)$.

$f(0)=2.0+1=1$, đồ thị không đi qua điểm $(0;1)$.

Câu 6. Cho hàm số: $f(x)=\begin{cases}-2(x-3) & \text{khi} \quad -1\le x\le 1\\ \sqrt{x^2-1} & \text{khi} \quad x>1\end{cases}$. Giá trị của $f(-1);\ f(1)$ lần lượt là

A. 8 và 0. **B.** 0 và 8. **C.** 0 và 0. **D.** 8 và 4.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $f(-1)=-2(-1-3)=8;\ f(1)=\sqrt{1^2-1}=0$.

Câu 7. Cho hàm số $y=\begin{cases}-2x+1 & \text{khi} \quad x\le -3\\ \dfrac{x+7}{2} & \text{khi} \quad x>-3\end{cases}$. Biết $f(x_0)=5$ thì x_0 là

A. -2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

TH1. $x_0\le -3$: Với $f(x_0)=5\Leftrightarrow -2x_0+1=5\Leftrightarrow x_0=-2$.

TH2. $x_0>-3$: Với $f(x_0)=5\Leftrightarrow \dfrac{x_0+7}{2}=5\Leftrightarrow x_0=3$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+3}{x+1} & \text{khi} \quad x\ge 0\\ \dfrac{\sqrt[3]{2+3x}}{x-2} & \text{khi} \quad -2\le x<0\end{cases}$. Ta có kết quả nào sau đây đúng?

A. $f(-1)=\frac{1}{3};\ f(2)=\frac{7}{3}$.

B. $f(0)=2;\ f(-3)=\sqrt{7}$.

C. $f(-1)$: không xác định; $f(-3)=-\frac{11}{24}$.

D. $f(-1)=\sqrt{8};f(3)=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$f(-1)=\frac{\sqrt[3]{2-3}}{-1-2}=\frac{1}{3};\ f(2)=\frac{2.2+3}{2+1}=\frac{7}{3}$.

Dạng 2: Tìm tập xác định của hàm số

1. Phương pháp

- *Tìm tập xác định D của hàm số* $y=f(x)$ *là tìm tất cả những giá trị của biến số x sao cho biểu thức f(x) có nghĩa:*

  $D=\{x\in R|f(x)\ có\ nghĩa\}$.

- *Điều kiện xác định của một số hàm số thường gặp:*

1) Hàm số $y=\frac{A(x)}{B(x)}$. Khi đó : $D=\{x\in\mathbb{R}\mid A(x)$ xác định và $A(x)\neq 0\}$

2) Hàm số $y=\sqrt[2k]{A(x)},k\in\mathbb{N}^*$.

Khi đó : $D=\{x\in\mathbb{R}\mid A(x)$ xác định và $A(x)\geq 0\}$

3) Hàm số $y=\frac{A(x)}{\sqrt[2k]{B(x)}},k\in\mathbb{N}^*$.

Khi đó : $D=\{x\in\mathbb{R}\mid A(x),B(x)$ xác định và $B(x)>0\}$

Chú ý:

- *Đôi khi ta sử dụng phối hợp các điều kiện với nhau.*
- $A.B\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}A\neq 0\\B\neq 0\end{cases}$.
- Nếu $y=f(x)$ có tập xác định là D. Khi đó: $y=f(x)$ xác định trên tập $X\Leftrightarrow X\subset D$

  $y=f(x)$ xác định trên tập $X\Leftrightarrow f(x)$ xác định với mọi $x\in X$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1 : Tìm tập xác định của hàm số $y=\sqrt{x-1}$

Hướng dẫn giải

Hàm số $y=\sqrt{x-1}$ xác định $\Leftrightarrow x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1$.

Ví dụ 2: Tìm tập xác định của hàm số $y=\sqrt{1+2x}+\sqrt{6+x}$

Hướng dẫn giải

Hàm số đã cho xác định khi $\begin{cases}1+2x\ge 0\\6+x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -\dfrac{1}{2}\\x\ge -6\end{cases}\Leftrightarrow x\ge -\dfrac{1}{2}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Ví dụ 3: Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x-2}$

Hướng dẫn giải

Hàm số xác định khi: $\begin{cases}x\ge 0\\x-2\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\x\ne 2\end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số $D=[0;+\infty)\setminus\{2\}$.

Ví dụ 4: Tìm tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1}{x-3}+\sqrt{x-1}$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện để hàm số xác định: $\begin{cases}x-3\ne 0\\x-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 1\le x\ne 3$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D=[1;+\infty)\setminus\{3\}$.

Ví dụ 5: Tìm m để hàm số $y=(x-2)\sqrt{3x-m-1}$ xác định trên tập $(1;+\infty)$?

Lời giải

ĐK: $x\ge\dfrac{m+1}{3}\Rightarrow D=\left[\dfrac{m+1}{3};+\infty\right)$.

Để hàm số xác định trên $(1;+\infty)$ thì

$(1;+\infty)\subset\left[\dfrac{m+1}{3};+\infty\right)\Leftrightarrow\dfrac{m+1}{3}\le 1\Leftrightarrow m+1\le 3\Rightarrow m\le 2$.

Ví dụ 6. Xác định tham số m để hàm số $y=\sqrt{3x-m}$ xác định trên tập $(1;+\infty)$

Hướng dẫn:

Tập xác định của hàm số $D=\left[\dfrac{m}{3};+\infty\right)$. Do đó hàm số xác định trên tập $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi

$(1;+\infty)\subset D=\left[\frac{m}{3};+\infty\right)\Leftrightarrow 1\geq\frac{m}{3}\Leftrightarrow m\leq 3$

Ví dụ 7. Xác định tham số m để hàm số $y=\sqrt{x^2-m}$ xác định trên tập $(-\infty;-3]$

Hướng dẫn:

hàm số xác định khi và chỉ khi $x^2-m\geq 0\Leftrightarrow x^2\geq m$ (1)

$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}m\leq 0\\ x\in\mathbb{R}\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}m>0\\ x\in(-\infty;-\sqrt{m}]\cup[\sqrt{m};+\infty)\end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\begin{cases}\mathbb{R} & khi\ m\leq 0\\ (-\infty;-\sqrt{m}]\cup[\sqrt{m};+\infty) & khi\ m>0\end{cases}$

Do đó hàm số xác định trên tập $(-\infty;-3]$ khi và chỉ khi

$(-\infty;-3]\subset D\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\leq 0\\ -3\leq-\sqrt{m}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\leq 0\\ 0<m\leq 9\end{array}\right.\Leftrightarrow m\leq 9$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Tìm tập xác định D của hàm số $f(x)=\sqrt{x+1}+\frac{1}{x}$.

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$. **C.** $D=[-1;+\infty)\setminus\{0\}$. **D.** $D=[-1;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện xác định: $\begin{cases}x+1\geq 0\\ x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -1\\ x\neq 0\end{cases}$. Vậy tập xác định: $D=[-1;+\infty)\setminus\{0\}$.

Câu 2. Cho hàm số: $y=\begin{cases}\frac{1}{x-1} & x\leq 0\\ \sqrt{x+2} & x>0\end{cases}$. Tập xác định của hàm số là tập hợp nào sau đây?

A. $[-2;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}$.

C. $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **D.** $\{x\in\mathbb{R}\setminus x\neq 1\text{ và }x\geq -2\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Với $x\leq 0$ ta có: $y=\frac{1}{x-1}$ xác định với mọi $x\neq 1$ nên xác định với mọi $x\leq 0$.

Với $x>0$ ta có: $y=\sqrt{x+2}$ xác định với mọi $x\geq -2$ nên xác định với mọi $x>0$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$.

Câu 3. Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-3}$ là

A. $(3;+\infty)$. **B.** $[1;+\infty)$. **C.** $[-1;3)\cup(3;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-3}$.

Điều kiện xác định: $\begin{cases}x+1\ge 0\\ x-3\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ x\ne 3\end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số $D=[-1;3)\cup(3;+\infty)$.

Câu 4. Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{2-x}{x^2-4x}$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\{0;2;4\}$. **B.** $\mathbb{R}\setminus[0;4]$. **C.** $\mathbb{R}\setminus(0;4)$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{0;4\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow x^2-4x\ne 0\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne 0\\ x\ne 4\end{cases}$. Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\{0;4\}$.

Câu 5. Tìm tập xác định D của hàm số $f(x)=\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{x}$.

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **B.** $D=[1;+\infty)$.

C. $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$. **D.** $D=[-1;+\infty)\setminus\{0\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Điều kiện: $\begin{cases}x+1\ge 0\\ x\ne 0\end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=[-1;+\infty)\setminus\{0\}$.

Câu 6. Tìm tập xác định của hàm số $y=\sqrt{4x^2-4x+1}$.

A. $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right]$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $\varnothing$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện xác định: $4x^2-4x+1\ge 0\Leftrightarrow (2x-1)^2\ge 0$.

Do đó tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Câu 7. Tập xác định của hàm số $f(x)=\sqrt{3-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ là

A. $D=(1;\ 3]$. **B.** $D=(-\infty;1)\cup[3;+\infty)$.

C. $D=[1;3]$. **D.** $D=\varnothing$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Hàm số xác định khi $\begin{cases}3-x\ge 0\\ x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 3\\ x>1\end{cases}\Leftrightarrow 1<x\le 3$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(1;\ 3]$.

Câu 8. Tập hợp nào sau đây là tập xác định của hàm số $y=\sqrt{1+5x}+\dfrac{|x|}{\sqrt{7-2x}}$?

A. $\left(\dfrac{1}{5};-\dfrac{7}{2}\right)$. **B.** $\left[-\dfrac{1}{5};\dfrac{7}{2}\right]$. **C.** $\left[-\dfrac{1}{5};-\dfrac{7}{2}\right)$. **D.** $\left[-\dfrac{1}{5};\dfrac{7}{2}\right)$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Hàm số xác đinh khi và chỉ khi $\begin{cases}1+5x\ge 0\\ 7-2x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -\dfrac{1}{5}\\ x<\dfrac{7}{2}\end{cases}\Leftrightarrow -\dfrac{1}{5}\le x<\dfrac{7}{2}$.

Câu 9. Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x^2-6x+8}$ là

A. $(3;8)\setminus\{4\}$. **B.** $[-3;3]\setminus\{2\}$. **C.** $(-3;3)\setminus\{2\}$. **D.** $(-\infty;3)\setminus\{2\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $9-x^2\ge 0\Leftrightarrow (3-x)(3+x)\ge 0\Leftrightarrow -3\le x\le 3$.

Hàm số xác định khi và chỉ khi

$\begin{cases} 9-x^2 \ge 0 \\ x^2-6x+8 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le x \le 3 \\ x \ne 4 \\ x \ne 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le x \le 3 \\ x \ne 2 \end{cases}$. Vậy $x \in [-3;3] \setminus \{2\}$.

Câu 10. Tập xác định của hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{-3x+8}+x & \text{khi} \quad x < 2 \\ \sqrt{x+7}+1 & \text{khi} \quad x \ge 2 \end{cases}$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. **C.** $\left(-\infty; \frac{8}{3}\right]$. **D.** $[-7;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có:

• Khi $x < 2$: $y = f(x) = \sqrt{-3x+8}+x$ xác định khi $-3x+8 \ge 0 \Leftrightarrow x \le \frac{8}{3}$.

Suy ra $D_1 = (-\infty;2)$.

• Khi $x \ge 2$: $y = f(x) = \sqrt{x+7}+1$ xác định khi $x+7 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -7$.

Suy ra $D_1 = [2;+\infty)$.

Vậy TXĐ của hàm số là $D = D_1 \cup D_2 = (-\infty;+\infty) = \mathbb{R}$.

Câu 11. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x^2-4x+3} - \frac{x}{x-3}$.

A. $(-\infty;1] \cup (3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;1) \cup (3;+\infty)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(1;3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Hàm số $y = \sqrt{x^2-4x+3} - \frac{x}{x-3}$ xác định

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+3 \ge 0 \\ x-3 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \text{ v } x \ge 3 \\ x \ne 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \le 1$ hoặc $x > 3$.

Câu 12. Tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{3-x}+\sqrt{x+1}}{x^2-5x+6}$ là

A. $[-1;3) \setminus \{2\}$. **B.** $[-1;2]$. **C.** $[-1;3]$. **D.** $(2;3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Hàm số $y=\dfrac{\sqrt{3-x}+\sqrt{x+1}}{x^2-5x+6}$ có nghĩa khi $\begin{cases}3-x\ge 0\\ x+1\ge 0\\ x^2-5x+6\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le x\le 3\\ x\ne 2;x\ne 3\end{cases}\Leftrightarrow x\in[-1;3)\setminus\{2\}$.

Câu 13. Tìm tập xác định của hàm số $y=\sqrt{2x^2-5x+2}$.

A. $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right]\cup[2;+\infty)$. **B.** $[2;+\infty)$. **C.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right]$. **D.** $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow 2x^2-5x+2\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le\dfrac{1}{2}\\ x\ge 2\end{array}\right.$.

Câu 14. Tìm m để hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-2m+3}}{x-m}+\dfrac{3x-1}{\sqrt{-x+m+5}}$ xác định trên khoảng $(0;1)$.

A. $m\in\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$. **B.** $m\in[-3;0]$.

C. $m\in[-3;0]\cup[0;1]$. **D.** $m\in[-4;0]\cup\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

*Gọi D là tập xác định của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-2m+3}}{x-m}+\dfrac{3x-1}{\sqrt{-x+m+5}}$.

$*x\in\mathrm{D}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2m+3\ge 0\\ x-m\ne 0\\ -x+m+5>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2m-3\\ x\ne m\\ x<m+5\end{cases}$.

*Hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-2m+3}}{x-m}+\dfrac{3x-1}{\sqrt{-x+m+5}}$ xác định trên khoảng $(0;1)$

$\Leftrightarrow(0;1)\subset D\Leftrightarrow\begin{cases}2m-3\le 0\\ m+5\ge 1\\ m\notin(0;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le\dfrac{3}{2}\\ m\ge -4\\ \left[\begin{array}{l}m\ge 1\\ m\le 0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m\in[-4;0]\cup\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$.

Dạng 3: Tính đồng biến, nghịch biến của hàm số

1. Phương pháp

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Cho hàm số f xác định trên K.

- $y=f(x)$ ***đồng biến*** *trên* $K \Leftrightarrow \forall x_1,x_2 \in K: x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$
- $y=f(x)$ ***nghịch biến*** *trên* $K \Leftrightarrow \forall x_1,x_2 \in K: x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$

Từ đó, ta có hai cách để xét tính đồng biến nghịch biến:

Cách 1: $\forall x_1,x_2 \in K: x_1<x_2$. Xét hiệu số $A=f(x_2)-f(x_1)$

- Nếu $A>0$ thì hàm số đồng biến
- Nếu $A<0$ thì hàm số nghịch biến

Cách 2: $\forall x_1,x_2 \in K: x_1 \neq x_2$. Xét tỉ số $A=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

- Nếu $A>0$ thì hàm số đồng biến
- Nếu $A<0$ thì hàm số nghịch biến

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Khảo sát sự biến thiên của hàm số sau

$a)\ y=x^2-4x+6$ trên mỗi khoảng $(-\infty;2);(2+\infty)$

$b)\ y=-x^2-6x+5$ trên mỗi khoảng $(-\infty;-3);(-3;+\infty)$

Hướng dẫn

$a)$ Với $x_1 \neq x_2$, ta có:

$$A=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=x_2+x_1-4=(x_2-2)+(x_1-2)$$

Do đó:

$\triangleright \forall x_1,x_2 \in (-\infty;2), x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1<2; x_2<2 \Rightarrow x_1-2<0, x_2-2<0 \Rightarrow A<0$

Vậy, hàm số nghịch biến trên $(-\infty;2)$

$\triangleright \forall x_1,x_2 \in (2;+\infty), x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1>2; x_2>2 \Rightarrow x_1-2>0, x_2-2>0 \Rightarrow A>0$

Vậy, hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Ví dụ 2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số sau

$a)\ y=\dfrac{3}{x-1}$ trên mỗi khoảng $(-\infty;1);(1;+\infty)$

$b)\ y=\dfrac{x+1}{2x+4}$ trên mỗi khoảng $(-\infty;-2);(-2;+\infty)$

Hướng dẫn

a) Với $x_1 \neq x_2$, ta có:

$$A=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{-3}{(x_1-1)(x_2-1)}$$

Do đó:

$\triangleright \forall x_1, x_2 \in (-\infty;1), x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1<1; x_2<1 \Rightarrow x_1-1<0, x_2-1<0 \Rightarrow A<0$

Vậy, hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$

$\triangleright \forall x_1, x_2 \in (1;+\infty), x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1>1; x_2>1 \Rightarrow x_1-1>0, x_2-1>0 \Rightarrow A<0$

Vậy, hàm số nghịch biến trên $(1;+\infty)$.

Ví dụ 3. Khảo sát sự biến thiên và lập bảng biến thiên của hàm số sau

$a) y=\sqrt[3]{x}+3;$ $\qquad b) y=\frac{1}{\sqrt{x}-1}$

Hướng dẫn

a) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}: x_1<x_2 \Rightarrow \sqrt[3]{x_1}<\sqrt[3]{x_2} \Rightarrow \sqrt[3]{x_1}+3<\sqrt[3]{x_2}+3 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Vậy, hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Tập xác định: $D=[0;+\infty)\backslash\{1\}$

$\forall x_1, x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2$, ta có:

$$A=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{-1}{(\sqrt{x_1}-1)(\sqrt{x_2}-1)(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})}$$

Do đó:

$\triangleright \forall x_1, x_2 \in [0;1), x_1 \neq x_2 \Rightarrow 0 \leq x_1<1; 0 \leq x_2<1 \Rightarrow \sqrt{x_1}-1<0, \sqrt{x_2}-1<0 \Rightarrow A<0$

Vậy, hàm số nghịch biến trên $[0;1)$

$\triangleright \forall x_1, x_2 \in (1;+\infty), x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1>1; x_2>1 \Rightarrow \sqrt{x_1}-1>0, \sqrt{x_2}-1>0 \Rightarrow A<0$

Vậy, hàm số nghịch biến trên $(1;+\infty)$.

Ví dụ 4: Tìm a để hàm số $f(x)=ax-\sqrt{1-a}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Hướng dẫn giải

Hàm số $f(x)=ax-\sqrt{1-a}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} a>0 \\ 1-a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<a \leq 1$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Hàm số nào sau đây đồng biến trên tập xác định của nó?

A. $y=3-x$. **B.** $y=3x+1$.

C. $y=4$. **D.** $y=x^2-2x+3$.

Lời giải

Chọn B

$y=3x+1$ có $a=3>0$ hàm số đồng biến trên TXĐ.

Câu 2: Xét sự biến thiên của hàm số $f(x)=\dfrac{3}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

B. Hàm số vừa đồng biến, vừa nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

D. Hàm số không đồng biến, không nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

$\forall x_1,x_2\in(0;+\infty):x_1\neq x_2$

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{3}{x_2}-\frac{3}{x_1}=\frac{-3(x_2-x_1)}{x_2x_1}\Rightarrow\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=-\frac{3}{x_2x_1}<0$$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Câu 3: Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=x$. **B.** $y=-2x$. **C.** $y=2x$. **D.** $y=\dfrac{1}{2}x$

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=ax+b$ với $a\neq 0$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a<0$.

Câu 4. Chọn khẳng định đúng ?

A. Hàm số $y=f(x)$ được gọi là nghịch biến trên K nếu $\forall x_1;x_2\in K,\ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

B. Hàm số $y=f(x)$ được gọi là đồng biến trên K nếu $\forall x_1;x_2\in K,\ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$.

C. Hàm số $y=f(x)$ được gọi là đồng biến trên K nếu $\forall x_1;x_2\in K,\ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

D. Hàm số $y=f(x)$ được gọi là đồng biến trên K nếu $\forall x_1;x_2\in K,\ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

Lời giải

Chọn D

Lí thuyết định nghĩa hàm số đồng biến, nghịch biến

Câu 5. Tìm m để hàm số $y=(2m-1)x+7$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m>\dfrac{1}{2}$. **B.** $m\ge\dfrac{1}{2}$. **C.** $m=\dfrac{1}{2}$. **D.** $m\in\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn A

hàm số $y=(2m-1)x+7$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $2m-1>0$.

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=(2m+3)x+m+3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m\le -\frac{3}{2}$. **B.** $m\ge -\frac{3}{2}$. **C.** $m>-\frac{3}{2}$. **D.** $m<-\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=(2m+3)x+m+3$ có dạng hàm số bậc nhất.

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow 2m+3<0\Leftrightarrow m<-\frac{3}{2}$.

Câu 7. Tổng tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=-2x^2+(m+1)x+3$ nghịch biến trên khoảng $(1;5)$ là

A. 6. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 15.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=-2x^2+(m+1)x+3$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{m+1}{4};+\infty\right)$.

Để hàm số $y=-2x^2+(m+1)x+3$ nghịch biến trên khoảng $(1;5)$ thì ta phải có $(1;5)\subset\left(\frac{m+1}{4};+\infty\right)\Leftrightarrow\frac{m+1}{4}\le 1\Leftrightarrow m\le 3$.

Các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=-2x^2+(m+1)x+3$ nghịch biến trên khoảng $(1;5)$ là $m=1,m=2,m=3$.

Tổng tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=-2x^2+(m+1)x+3$ nghịch biến trên khoảng $(1;5)$ là $S=1+2+3=6$.

Câu 8. Cho hàm số $y=(m+2)x+\sqrt{2-m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hàm số có dạng $y=ax+b$, nên để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m+2>0 \\ 2-m\ge 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m>-2 \\ m\le 2 \end{cases}$. Mặt khác do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-1;\,0;\,1;\,2\}$. Vậy có 4 giá trị nguyên của m.

Câu 9. Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+m+2}{x-m}$ xác định trên $(-1;2)$.

A. $\begin{cases} m\le -1 \\ m\ge 2 \end{cases}$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m\le -1 \\ m\ge 2 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>2 \end{array}\right.$. **D.** $-1<m<2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Hàm số $y=\dfrac{x+m+2}{x-m}$ xác định khi $x\ne m$.

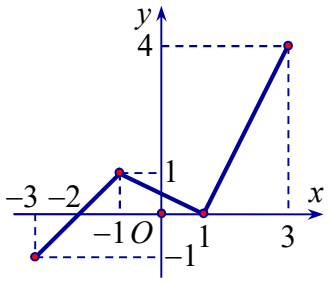
Để hàm số $y=\dfrac{x+m+2}{x-m}$ xác định trên $(-1;2)$ khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m\le -1 \\ m\ge 2 \end{array}\right.$.

Dạng 4: Dựa vào đồ thị tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $[-3;3]$ và đồ thị của nó được biểu diễn như hình dưới đây



Khẳng định nào sau đây **đúng** ?

A. Hàm số nghịch biến trên $(-1;0)$.

B. Hàm số đồng biến trên $(-3;-1)$ và $(1;4)$.

C. Hàm số đồng biến trên $(-3;3)$.

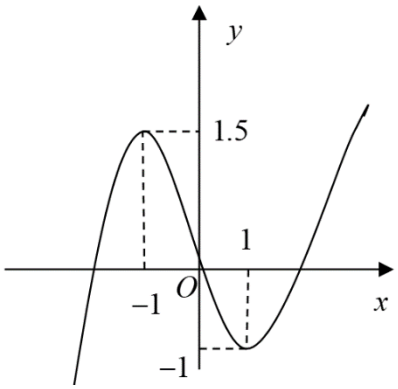
D. Hàm số đồng biến trên $(-3;-1)$ và $(1;3)$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số đồng biến có đồ thị đi lên và hàm số nghịch biến có đồ thị đi xuống (tính từ trái sang phải).

Câu 2: Hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên chỉ đồng biến trên tập



A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(1;+\infty)$.

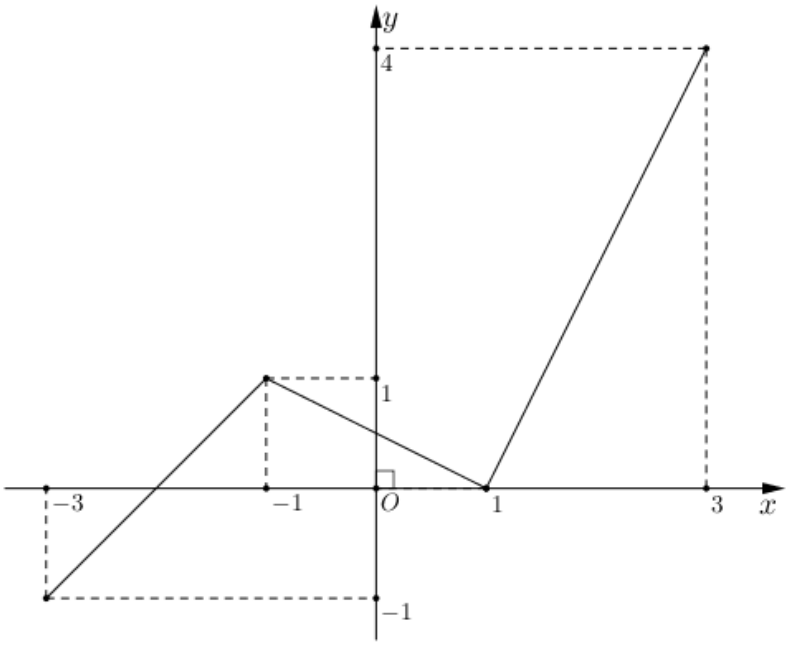
C. $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-1]$ và $[1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$ trên ta thấy hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định là $[-3;3]$, có đồ thị được biểu diễn bởi hình vẽ dưới đây.



Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

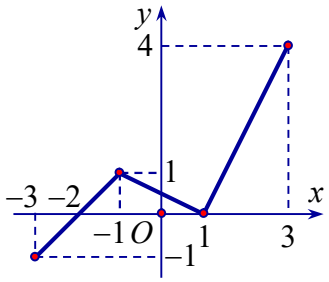
A. Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-3;1)$. **B.** Đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

C. Hàm số nghịch biến trên $(-2;1)$. **D.** Hàm số đồng biến trên $(-3;-1)$ và $(1;3)$.

Lời giải

Chọn D

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $[-3;3]$ và đồ thị của nó được biểu diễn như hình dưới đây.



Khẳng định nào sau đây **đúng** ?

A. Hàm số nghịch biến trên $(-1;2)$.

B. Hàm số đồng biến trên $(-3;-1)$ và $(1;4)$.

C. Hàm số đồng biến trên $(-3;3)$.

D. Hàm số đồng biến trên $(-3;-1)$ và $(1;3)$.

Lời giải

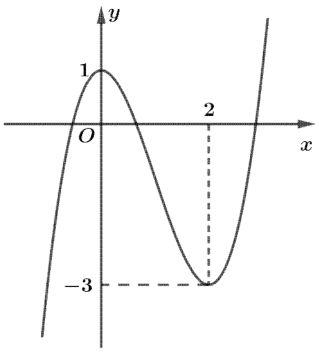
Chọn D

Hàm số đồng biến có đồ thị đi lên và hàm số nghịch biến có đồ thị đi xuống (tính từ trái sang phải).

Câu 5: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-3;3]$ để hàm số $f(x)=(m+1)x+m-2$ đồng biến trên

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hàm số có đồ thị như hình bên dưới.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;3)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

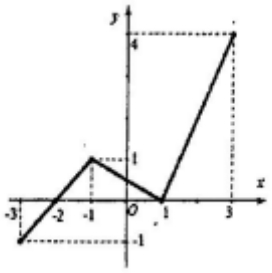
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

Lời giải

Chọn C

Trên khoảng $(0;2)$, đồ thị hàm số đi xuống từ trái sang phải nên hàm số nghịch biến.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định là $[-3;3]$ và có đồ thị được biểu diễn bởi hình bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. Hàm số $y=f(x)+2018$ đồng biến trên các khoảng $(-3;-1)$ và $(1;3)$.

B. Hàm số $y=f(x)+2018$ đồng biến trên các khoảng $(-2;1)$ và $(1;3)$.

C. Hàm số $y=f(x)+2018$ nghịch biến trên các khoảng $(-2;-1)$ và $(0;1)$.

D. Hàm số $y=f(x)+2018$ nghịch biến trên khoảng $(-3;-2)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $(C):y=f(x),(C')y=f(x)+2018$. Khi tịnh tiến đồ thị (C) theo phương song song trục tung lên phía trên 2018 đơn vị thì được đồ thị (C'). Nên tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $y=f(x)$, $y=f(x)+2018$ trong từng khoảng tương ứng không thay đổi.

Dựa vào đồ thị ta thấy:

Hàm số $y=f(x)+2018$ đồng biến trên các khoảng $(-3;-1)$ và $(1;3)$.

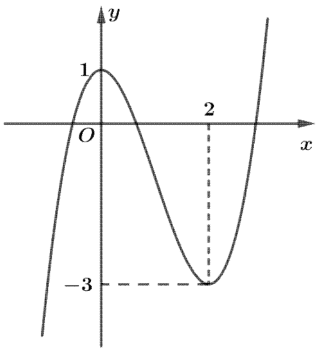
Hàm số $y=f(x)+2018$ đồng biến trên các khoảng $(-2;1)$ và $(1;3)$.

Hàm số $y=f(x)+2018$ nghịch biến trên các khoảng $(-2;-1)$ và $(0;1)$.

Hàm số $y=f(x)+2018$ nghịch biến trên khoảng $(-3;-2)$.

Câu 3. Cho hàm số có đồ thị như hình bên dưới.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133



Khẳng định nào sau đây là ***đúng***?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;3)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

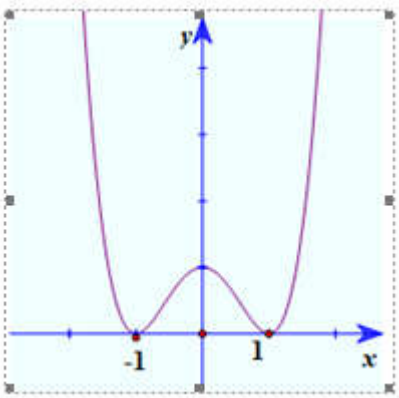
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

Lời giải

Chọn C

Trên khoảng $(0;2)$, đồ thị hàm số đi xuống từ trái sang phải nên hàm số nghịch biến.

Câu 4. Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ.



Chọn đáp án sai.

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

Lời giải

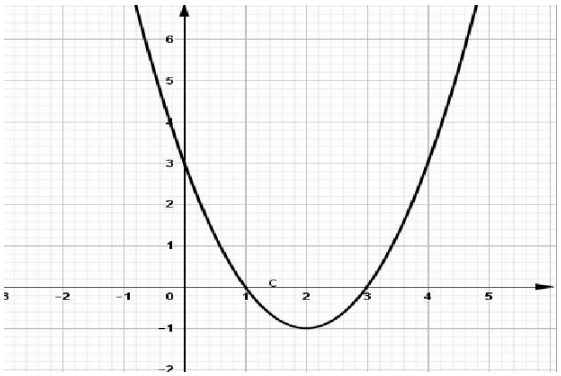
Chọn C

Từ đồ thị hàm số ta thấy:

Hàm số nghịch biến trong các khoảng: $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Hàm số đồng biến trong các khoảng: $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 5. Hàm số $f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Mệnh đề nào sau đây **đúng** ?

A. Đồ thị hàm số cắt trục hoành theo một dây cung có độ dài bằng 2 .

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;5)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;3)$.

D. $f\left(\sqrt{2019}\right)<f\left(\sqrt{2017}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Nhìn vào đồ thị hàm số ta có :

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm $M(1;0), N(3;0)\Rightarrow MN=2\Rightarrow A$ đúng.

Trên khoảng $(0;2)$ đồ thị hàm số đi xuống nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ và trên khoảng $(2;5)$ đồ thị hàm số đi lên nên hàm số đồng biến trên khoảng $(2;5)\Rightarrow B$ sai.

Trên khoảng $(0;2)$ đồ thị hàm số đi xuống nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ và trên khoảng $(2;3)$ đồ thị hàm số đi lên nên hàm số đồng biến trên khoảng $(2;3)\Rightarrow C$ sai.

Ta có : $\sqrt{2019},\sqrt{2017}\in(2;+\infty)$ và trên khoảng $(2;+\infty)$ hàm số đồng biến nên

$$\begin{cases}\sqrt{2019}>\sqrt{2017}\\ f\left(\sqrt{2019}\right)>f\left(\sqrt{2017}\right)\end{cases}\Rightarrow D \text{ sai.}$$

Bài 2. Hàm số bậc hai

Từ khoá: Hàm số bậc hai; Tập giá trị của hàm số bậc hai; Biến thiên; Parabol; Đỉnh; Trục đối xứng; Quỹ đạo parabol.

$y = ax^2$ $\quad y = a(x-m)(x-n)$

$y = ax^2 + bx$ $\quad y = a(x-h)^2 + k$

$y = ax^2 + bx + c$

Các hàm số này có chung đặc điểm gì?

1. Hàm số bậc hai

1 Khai triển biểu thức của các hàm số sau và sắp xếp theo thứ tự luỹ thừa của x giảm dần (nếu có thể). Hàm số nào có luỹ thừa bậc cao nhất của x là bậc hai?

a) $y = 2x(x-3)$; b) $y = x(x^2+2) - 5$; c) $y = -5(x+1)(x-4)$.

Hàm số bậc hai theo biến x là hàm số cho bởi công thức có dạng $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực và a khác 0.

Tập xác định của hàm số bậc hai là $\mathbb{R}$.

Ví dụ 1

Hàm số nào trong các hàm số sau đây là hàm số bậc hai?

a) $y = 2x^2 + x$; b) $y = x^3 + x + 1$; c) $y = \dfrac{x+1}{x+2}$; d) $y = -3x^2 - 1$; e) $y = \sqrt{5-2x}$.

Giải

Hàm số $y = 2x^2 + x$ và hàm số $y = -3x^2 - 1$ đều là hàm số bậc hai.

Các hàm số $y = x^3 + x + 1$; $y = \dfrac{x+1}{x+2}$; $y = \sqrt{5-2x}$ không phải là hàm số bậc hai.

1 Hàm số nào trong các hàm số được cho ở **1** là hàm số bậc hai?

2. Đồ thị hàm số bậc hai

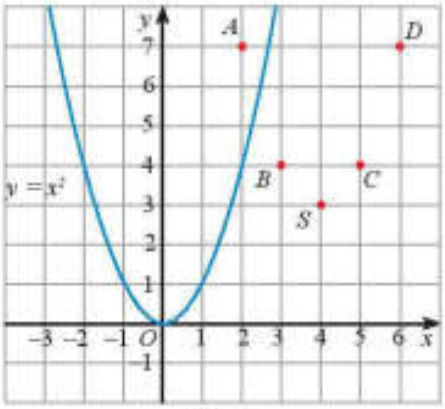
2 a) Xét hàm số:

$$y = f(x) = x^2 - 8x + 19 = (x-4)^2 + 3$$

có bảng giá trị:

x	2	3	4	5	6
$f(x)$	7	4	3	4	7

Trên mặt phẳng toạ độ, ta có các điểm $(x; f(x))$ với x thuộc bảng giá trị đã cho (Hình 1).



Hình 1

Hãy vẽ đường cong đi qua các điểm A, B, S, C, D và nêu nhận xét về hình dạng của đường cong này so với đồ thị của hàm số $y = x^2$ trên Hình 1.

b) Tương tự, xét hàm số:

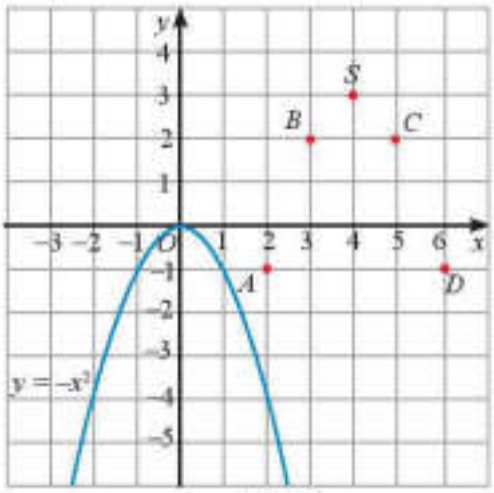
$y = g(x) = -x^2 + 8x - 13 = -(x-4)^2 + 3$

có bảng giá trị:

x	2	3	4	5	6
$g(x)$	-1	2	3	2	-1

Trên mặt phẳng tọa độ, ta có các điểm $(x; g(x))$ với x thuộc bảng giá trị đã cho (Hình 2).

Hãy vẽ đường cong đi qua các điểm A, B, S, C, D và nêu nhận xét về hình dạng của đường cong này so với đồ thị của hàm số $y = -x^2$ trên Hình 2.



Hình 2

Từ  , ta thấy hai dạng cơ bản của đồ thị hàm số bậc hai ứng với hai trường hợp $a > 0$ và $a < 0$.

Một cách tổng quát, sau khi biến đổi $y = ax^2 + bx + c = a\left[x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2 + \left(-\frac{\Delta}{4a}\right)$, với $a \neq 0$ và $\Delta = b^2 - 4ac$ người ta chứng minh được rằng trong mặt phẳng tọa độ Oxy, đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ có hình dạng là một parabol và có đỉnh $S\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, ***đồ thị hàm số bậc hai*** $y = ax^2 + bx + c$ (với $a \neq 0$) là một parabol (P):

– Có ***đỉnh*** S với hoành độ $x_S = -\frac{b}{2a}$, tung độ $y_S = -\frac{\Delta}{4a}$;

– Có ***trục đối xứng*** là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$ (đường thẳng này đi qua đỉnh S và song song với trục Oy);

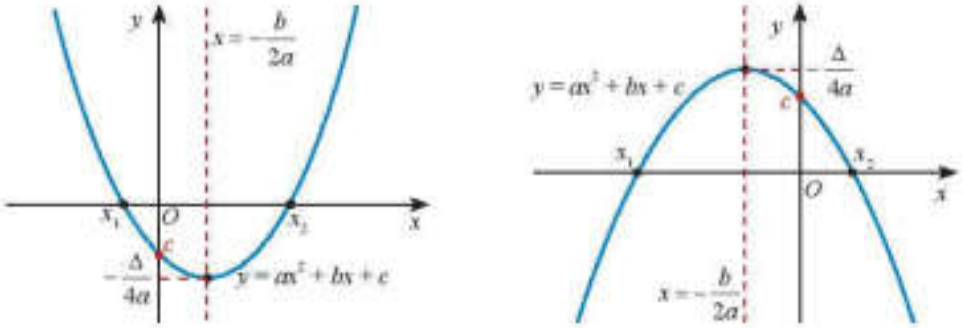
– Bề lõm quay lên trên nếu $a > 0$, quay xuống dưới nếu $a < 0$;

– Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng c, tức là đồ thị đi qua điểm có tọa độ $(0; c)$.

Chú ý: a) Nếu $b = 2b'$ thì (P) có đỉnh $S\left(-\frac{b'}{a}; -\frac{\Delta'}{a}\right)$.

b) Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ cắt trục hoành tại hai điểm lần lượt có hoành độ là hai nghiệm này (xem Hình 3).

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133



Hình 3

Cách vẽ đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ (với $a \neq 0$):

1) *Xác định toạ độ đỉnh* $S\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

2) *Vẽ trục đối xứng* d là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$.

3) *Tìm toạ độ giao điểm* của đồ thị với trục tung (điểm $A(0; c)$) và giao điểm của đồ thị với trục hoành (nếu có).

Xác định thêm điểm đối xứng với A qua trục đối xứng d, là điểm $B\left(\frac{-b}{a}; c\right)$.

4) *Vẽ parabol* có đỉnh S, có trục đối xứng d, đi qua các điểm tìm được.

Ví dụ 2

Vẽ đồ thị các hàm số:

a) $y = f(x) = -x^2 + 4x - 3$; b) $y = f(x) = x^2 + 2x + 2$.

Giải

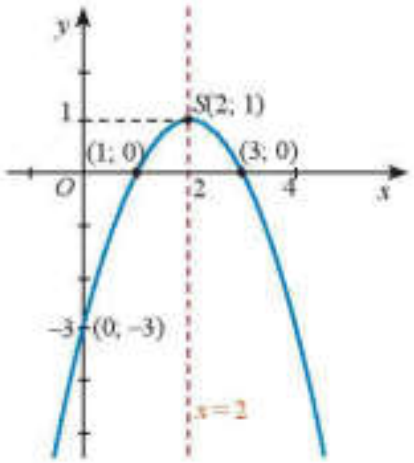
a) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, đồ thị hàm số bậc hai $y = f(x) = -x^2 + 4x - 3$ là một parabol (P):

– Có đỉnh S với hoành độ $x_S = 2$, tung độ $y_S = 1$;

– Có trục đối xứng là đường thẳng $x = 2$ (đường thẳng này đi qua đỉnh S và song song với trục Oy);

– Bề lõm quay xuống dưới vì $a < 0$;

– Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng –3, tức là đồ thị đi qua điểm có toạ độ $(0; -3)$.



Hình 4

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Ngoài ra, phương trình $-x^2+4x-3=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1=1$ và $x_2=3$ nên đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm có toạ độ (1; 0) và (3; 0).

Ta vẽ được đồ thị như Hình 4.

b) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, đồ thị hàm số bậc hai $y=f(x)=x^2+2x+2$ là một parabol (P):

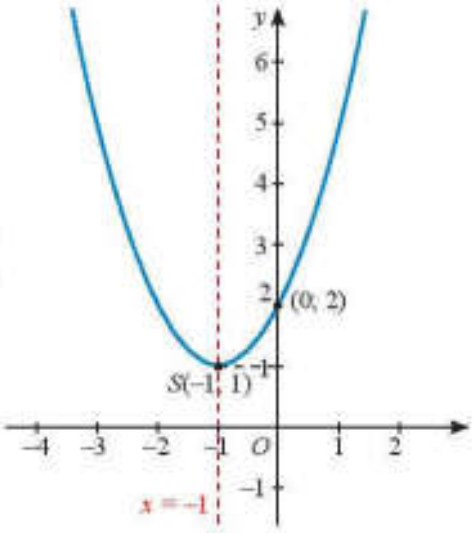
– Có đỉnh S với hoành độ $x_S=-1$, tung độ $y_S=1$;

– Có trục đối xứng là đường thẳng $x=-1$ (đường thẳng này đi qua đỉnh S và song song với trục Oy);

– Bề lõm quay lên trên vì $a>0$;

– Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2, tức là đồ thị đi qua điểm có toạ độ (0; 2).

Ta vẽ được đồ thị như Hình 5.

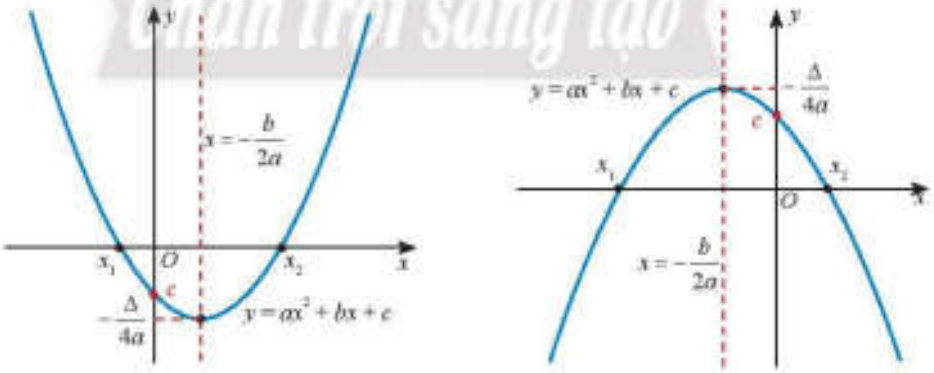


Hình 5

Vẽ đồ thị hàm số $y=x^2-4x+3$ rồi so sánh đồ thị hàm số này với đồ thị hàm số trong Ví dụ 2a. Nêu nhận xét về hai đồ thị này.

3. Sự biến thiên của hàm số bậc hai

Từ đồ thị của hàm số bậc hai cho ở hai hình sau, tìm khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số trong mỗi trường hợp.



Hình 6

Dựa vào đồ thị hàm số bậc hai $y=ax^2+bx+c$ (với $a\neq 0$), ta có bảng tóm tắt về sự biến thiên của hàm số này như sau:

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

$a > 0$	$a < 0$
Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{-b}{2a}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(\frac{-b}{2a}; +\infty\right)$.	Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{-b}{2a}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{-b}{2a}; +\infty\right)$.
Bảng biến thiên:	Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$\frac{-\Delta}{4a}$	↗ $+\infty$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$\frac{-\Delta}{4a}$	↘ $-\infty$

Chú ý:

Từ bảng biến thiên của hàm số bậc hai, ta thấy:

– Khi $a > 0$, hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{-\Delta}{4a}$ tại $x = \frac{-b}{2a}$ và hàm số có tập giá trị là $T = \left[-\frac{\Delta}{4a}; +\infty\right)$.

– Khi $a < 0$, hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{-\Delta}{4a}$ tại $x = \frac{-b}{2a}$ và hàm số có tập giá trị là $T = \left(-\infty; -\frac{\Delta}{4a}\right]$.

Ví dụ 3

Lập bảng biến thiên của hàm số $y = -x^2 + 4x - 3$. Hàm số này có giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất? Tìm giá trị đó.

Giải

Đỉnh S có toạ độ: $x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2.(-1)} = 2$; $y_S = -2^2 + 4.2 - 3 = 1$.

Hay $S(2; 1)$.

Vì hàm số bậc hai có $a = -1 < 0$ nên ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	1	↘ $-\infty$

Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 1 khi $x = 2$.

3 Tìm khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số $y = 2x^2 - 6x + 11$. Hàm số này có thể đạt giá trị bằng –1 không? Tại sao?

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

4. Ứng dụng của hàm số bậc hai

Tầm bay cao và tầm bay xa



Hình 7

Trong môn cầu lông, khi phát cầu, người chơi cần đánh cầu qua khỏi lưới sang phía sân đối phương và không được để cho cầu rơi ngoài biên.

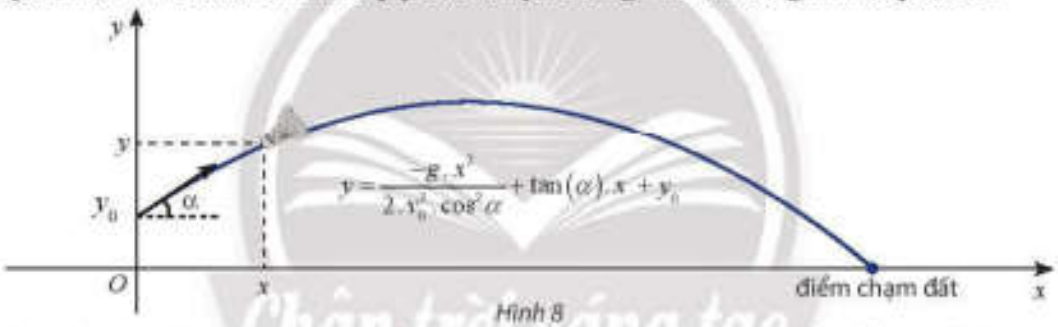
Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, chọn điểm có toạ độ $(0; y_0)$ là điểm xuất phát thì phương trình quỹ đạo của cầu lông khi rời khỏi mặt vợt là:

$$y = \frac{-g.x^2}{2.v_0^2.\cos^2\alpha} + \tan(\alpha).x + y_0$$

trong đó:

- g là gia tốc trọng trường (thường được chọn là 9,8 m/s^2);
- α là góc phát cầu (so với phương ngang của mặt đất);
- v_0 là vận tốc ban đầu của cầu;
- y_0 là khoảng cách từ vị trí phát cầu đến mặt đất.

Đây là một hàm số bậc hai nên quỹ đạo chuyển động của cầu lông là một parabol.



Hình 8

Xét trường hợp lặng gió, với vận tốc ban đầu và góc phát cầu đã biết, cầu chuyển động theo quỹ đạo parabol nên sẽ:

– Đạt vị trí cao nhất tại đỉnh parabol, gọi là *tầm bay cao*;

– Rơi chạm đất ở vị trí cách nơi đứng phát cầu một khoảng, gọi là *tầm bay xa*.

Bài toán ứng dụng

Một người đang tập chơi cầu lông có khuynh hướng phát cầu với góc 30° (so với mặt đất).

a) Hãy tính khoảng cách từ vị trí người này đến vị trí cầu rơi chạm đất (tầm bay xa), biết cầu rời mặt vợt ở độ cao 0,7 m so với mặt đất và vận tốc ban đầu của cầu là 8 m/s (bỏ qua sức cản của gió và xem quỹ đạo của cầu luôn nằm trong mặt phẳng thẳng đứng).

b) Giữ giả thiết như câu a) và cho biết khoảng cách từ vị trí phát cầu đến lưới là 4 m. Lần phát cầu này có bị xem là hỏng không? Tại sao?

(*Thông tin bổ sung*:

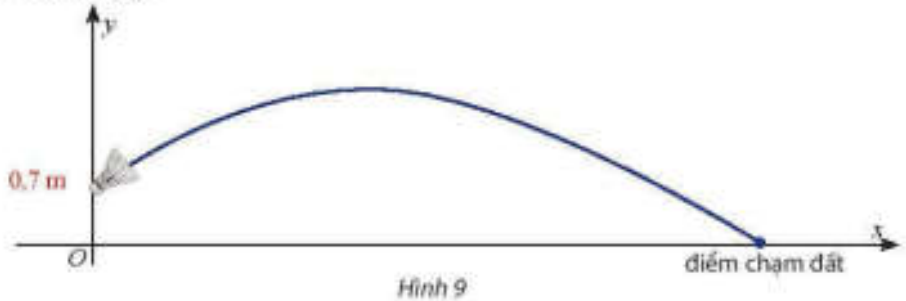
– Mép trên của lưới cầu lông cách mặt đất 1,524 m;

– Gia tốc trọng trường được chọn là 9,8 m/s^2.)

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Giải

a) Chọn hệ trục tọa độ như Hình 9 (vị trí rơi của cầu thuộc trục hoành và vị trí cầu rời mặt vợt thuộc trục tung).



Hình 9

Với $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$, góc phát cầu $\alpha = 30°$, vận tốc ban đầu $v_0 = 8$ m/s, phương trình quỹ đạo của cầu là:

$$y = -\frac{4{,}9}{48}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}x + 0{,}7 \quad (\text{với } x \geq 0).$$

Vị trí cầu rơi chạm đất là giao điểm của parabol và trục hoành nên giải phương trình $-\frac{4{,}9}{48}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}x + 0{,}7 = 0$ ta được $x_1 \approx -1{,}03$ và $x_2 \approx 6{,}68$.

Giá trị nghiệm dương cho ta khoảng cách từ vị trí người chơi cầu lông đến vị trí cầu rơi chạm đất là 6,68 m.

b) Khi cầu bay tới vị trí lưới phân cách, nếu nó ở bên trên mặt lưới và điểm rơi không ra khỏi đường biên phía bên sân đối phương thì lần phát cầu mới được xem là hợp lệ.

Ta cần so sánh tung độ của điểm trên quỹ đạo (có hoành độ bằng khoảng cách từ gốc tọa độ đến chân lưới phân cách) với chiều cao mép trên của lưới để tìm câu trả lời.



Hình 10

Khi $x = 4$, ta có $y = -\frac{4{,}9}{48} \cdot 4^2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 4 + 0{,}7 \approx 1{,}38$. Suy ra $y < 1{,}524$.

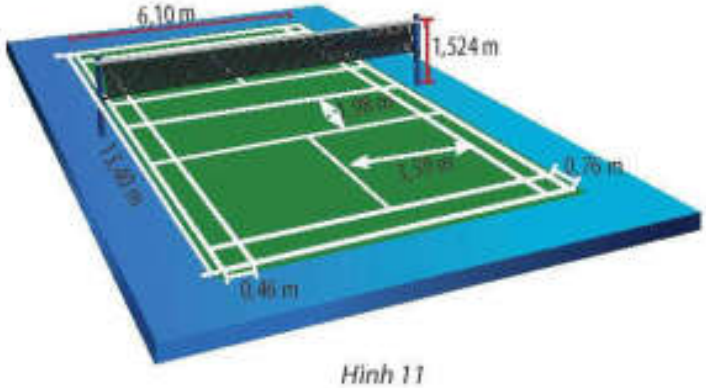
Như vậy lần phát cầu đã bị hỏng vì điểm trên quỹ đạo của cầu thấp hơn mép trên của lưới.

Trong bài toán ứng dụng, khi chơi trên sân cầu lông đơn, các lần phát cầu với thông tin như sau có được xem là hợp lệ không? (Các thông tin không được đề cập thì vẫn giữ như trong giả thiết bài toán trên).

a) Vận tốc xuất phát của cầu là 12 m/s.

b) Vị trí phát cầu cách mặt đất 1,3 m.

Lưu ý: Các thông số về sân cầu lông đơn được cho trong Hình 11.



Hình 11

BÀI TẬP

1. Hàm số nào sau đây là hàm số bậc hai?

a) $y = 9x^2 + 5x + 4$; b) $y = 3x^3 + 2x + 1$;

c) $y = -4(x+2)^3 + 2(2x^3 + 1) + 5$; d) $y = 5x^2 + \sqrt{x} + 2$.

2. Tìm điều kiện của m để hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc hai.

a) $y = mx^4 + (m+1)x^3 + x + 3$; b) $y = (m-2)x^3 + (m-1)x^2 + 5$.

3. Lập bảng biến thiên của hàm số $y = x^2 + 2x + 3$. Hàm số này có giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất? Tìm giá trị đó.

4. Cho hàm số bậc hai $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có $f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 5$.

a) Hãy xác định giá trị của các hệ số a, b và c.

b) Xác định tập giá trị và khoảng biến thiên của hàm số.

5. Cho hàm số $y = 2x^2 + x + m$. Hãy xác định giá trị của m để hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5.

6. Vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = 2x^2 + 4x - 1$; b) $y = -x^2 + 2x + 3$;

c) $y = -3x^2 + 6x$; d) $y = 2x^2 - 5$.

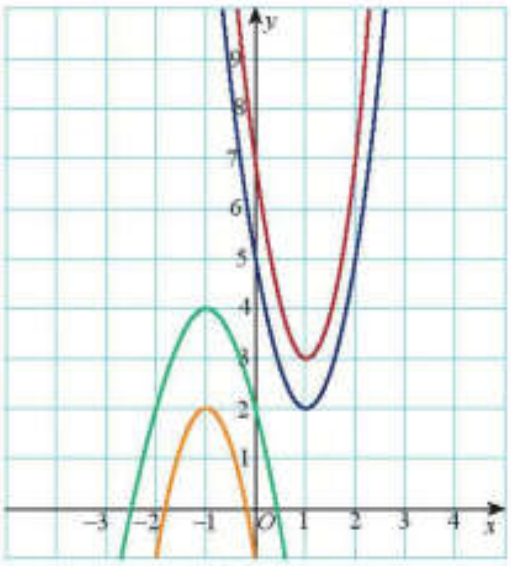
7. Hãy xác định đúng đồ thị của mỗi hàm số sau trên Hình 12.

(P_1): $y = -2x^2 - 4x + 2$;

(P_2): $y = 3x^2 - 6x + 5$;

(P_3): $y = 4x^2 - 8x + 7$;

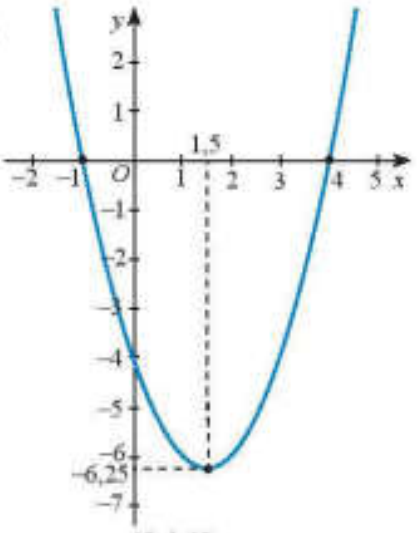
(P_4): $y = -3x^2 - 6x - 1$.



Hình 12

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

8. Tìm công thức của hàm số bậc hai có đồ thị như Hình 13.



Hình 13

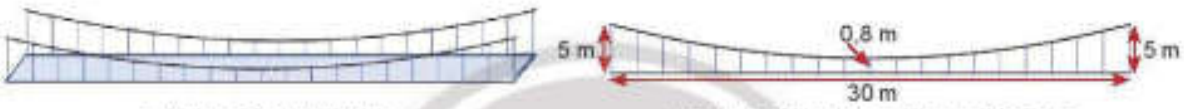
9. Chiếc cầu dây văng một nhịp được thiết kế hai bên thành cầu có dạng parabol và được cố định bằng các dây cáp song song.

Dựa vào bản vẽ ở Hình 14, hãy tính chiều dài tổng cộng của các dây cáp dọc ở hai mặt bên. Biết:

– Dây dài nhất là 5 m, dây ngắn nhất là 0,8 m. Khoảng cách giữa các dây bằng nhau.

– Nhịp cầu dài 30 m.

– Cần tính thêm 5% chiều dài mỗi sợi dây cáp để neo cố định.



a) Hình vẽ cầu dây văng

b) Hình chiếu đứng của cầu dây văng

Hình 14

Bạn có biết?

Quy luật tự nhiên và hình dạng parabol


Hình 15

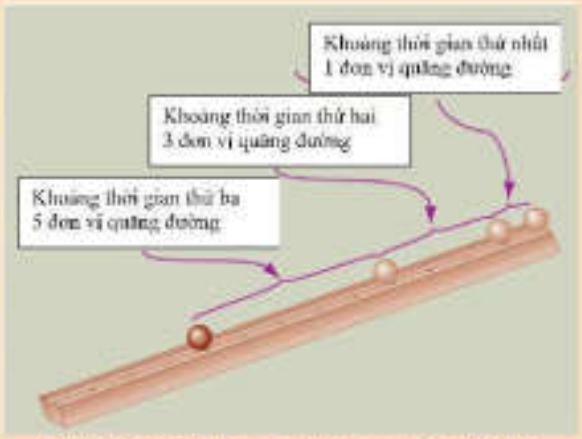
Vật chuyển động bởi ném xiên hay ném ngang có quỹ đạo là một phần của parabol. Hiện tượng này quan sát được khi ném bóng, nhảy xa, trượt tuyết nhảy trên không, vòi nước phun, ...

Trong khi đó, chuyển động rơi tự do hoặc chuyển động lăn trên mặt phẳng nghiêng có độ dài quãng đường tuân theo quy luật một hàm số bậc hai theo thời gian t, mặc dù quỹ đạo chuyển động là đường thẳng. Nhà vật lí học Galilei, đồng thời cũng là một nhạc sĩ, đã thiết kế bộ dụng cụ đo quãng đường lăn của vật nặng trên mặt phẳng nghiêng sau những khoảng thời gian như nhau để chứng minh kết quả này. Thời đó chưa có thiết bị phù hợp nên ông đã dùng những chiếc chuông để phát ra âm thanh cách đều thời gian mỗi khi viên bi lăn tới. Thật khó tin nhưng Galilei nhạy bén với âm thanh và ông nhận ra quãng đường lại không như nhau dù các khoảng thời gian là đều nhau.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133



Hình 16. Dụng cụ "mặt phẳng nghiêng" đo quãng đường di chuyển sau mỗi khoảng thời gian đều nhau của Galilei tại Bảo tàng Galileo, nước Ý

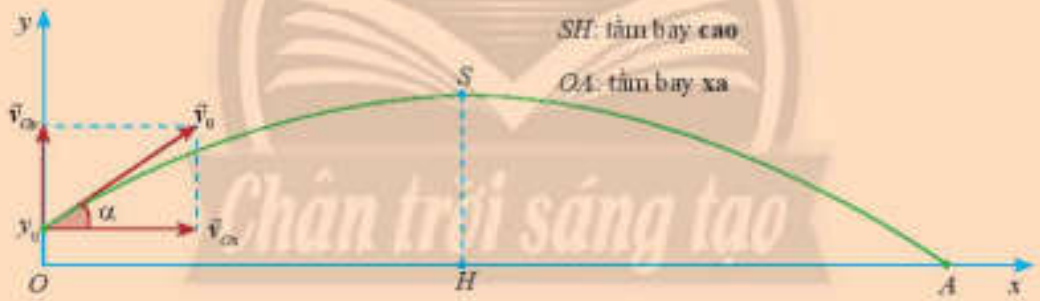


Hình 17. Mô phỏng mặt phẳng nghiêng Galilei

Quỹ đạo parabol

Khi một vật từ vị trí y_0 bị ném xiên lên cao theo góc α (so với phương ngang) với vận tốc ban đầu v_0 thì phương trình quỹ đạo của vật này là: $y = \frac{-g.x^2}{2.v_0^2.\cos^2\alpha} + \tan(\alpha).x + y_0$

Đây là một hàm số bậc hai nên quỹ đạo chuyển động là một parabol.



Hình 18. Vật được ném từ vị trí O, với góc ném α bay lên đến điểm cao nhất là S và rơi xuống điểm A

Khoảng cách *SH* được gọi là *tầm bay cao*, còn khoảng cách *OA* được gọi là *tầm bay xa*.

Nếu vận tốc ban đầu có độ lớn không đổi, thì góc ném α ảnh hưởng đến tầm bay cao và tầm bay xa.

– Trong thể thao, vận động viên môn ném lao, ném đĩa hay nhảy xa, ... có lực ném gần như ổn định. Do vậy, việc điều chỉnh góc ném α chính là kĩ thuật để đạt mục tiêu xa nhất.

– Binh chủng Pháo binh Việt Nam có câu khẩu hiệu "Chắn đồng, vai sắt, đánh giỏi, bắn trúng" gắn liền với kĩ thuật điều chỉnh vận tốc ban đầu v_0 và góc α để đạn pháo trúng mục tiêu.

(*Nguồn:* https://www.researchgate.net)

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = 4x^2 - 1$;

b) $y = \frac{1}{x^2+1}$;

c) $y = 2 + \frac{1}{x}$.

2. Tìm điều kiện của m để mỗi hàm số sau đây là một hàm số bậc hai:

a) $y = (1 - 3m)x^2 + 3$;

b) $y = (4m - 1)(x - 7)^2$;

c) $y = 2(x^2 + 1) + 11 - m$.

3. Vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = x^2 - 4x + 3$; b) $y = -x^2 - 4x + 5$;

c) $y = x^2 - 4x + 5$; d) $y = -x^2 - 2x - 1$.

4. Một vận động viên chạy xe đạp trong 1 giờ 30 phút đầu với vận tốc trung bình là 42 km/h. Sau đó người này nghỉ tại chỗ 15 phút và tiếp tục đạp xe 2 giờ liền với vận tốc 30 km/h.

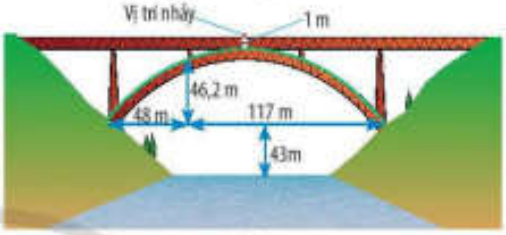
a) Hãy biểu thị quãng đường s (tính bằng kilômét) mà người này đi được sau t phút bằng một hàm số.

b) Vẽ đồ thị biểu diễn hàm số s theo t.

5. Biết rằng hàm số $y = 2x^2 + mx + n$ giảm trên khoảng $(-\infty; 1)$, tăng trên khoảng $(1; +\infty)$ và có tập giá trị là $[9; +\infty)$. Xác định giá trị của m và n.

6. Nhảy bungee là một trò chơi mạo hiểm. Trong trò chơi này, người chơi đứng ở vị trí trên cao, thắt dây an toàn và nhảy xuống. Sợi dây này có tính đàn hồi và được tính toán chiều dài để nó kéo người chơi lại khi gần chạm đất (hoặc mặt nước).

Chiếc cầu trong Hình 1 có bộ phận chống đỡ dạng parabol. Một người muốn thực hiện một cú nhảy bungee từ giữa cầu xuống với dây an toàn. Người này cần trang bị sợi dây an toàn dài bao nhiêu mét? Biết rằng chiều dài của sợi dây đó bằng một phần ba khoảng cách từ vị trí bắt đầu nhảy đến mặt nước.



Hình 1

7. Giả sử một máy bay cứu trợ đang bay theo phương ngang và bắt đầu thả hàng từ độ cao 80 m, lúc đó máy bay đang bay với vận tốc 50 m/s. Để thùng hàng cứu trợ rơi đúng vị trí được chọn, máy bay cần bắt đầu thả hàng từ vị trí nào? Biết rằng nếu chọn gốc toạ độ là hình chiếu trên mặt đất của vị trí hàng cứu trợ bắt đầu được thả, thì toạ độ của hàng cứu trợ được cho bởi hệ sau:

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = h - \frac{1}{2} gt^2 \end{cases}$$

Trong đó, v_0 là vận tốc ban đầu và h là độ cao tính từ khi hàng rời máy bay.

Lưu ý: Chuyển động này được xem là chuyển động ném ngang.



Hình 2

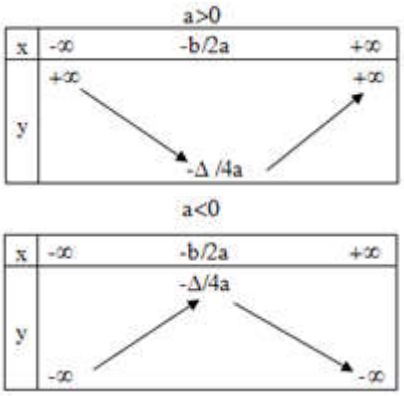
B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Bảng biến thiên, tính đơn điệu, GTLN và GTNN của hàm số bậc hai

1. Phương pháp

Bảng biến thiên:

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133



Như vậy:

- Khi $a>0$ hàm nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-\frac{b}{2a}\right)$, đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}:+\infty\right)$ và có GTNN là $\frac{-\Delta}{4a}$ khi $x=-\frac{b}{2a}$
- Khi $a<0$ hàm đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-\frac{b}{2a}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}:+\infty\right)$ và có GTLN là $\frac{-\Delta}{4a}$ khi $x=-\frac{b}{2a}$

*** Chú ý:** Nếu đề bài yêu cầu tìm GTLN, GTNN của hàm số trê $[c,d]\subset\mathbb{R}$ thì ta phải xem trục đối xứng $x=-\frac{b}{2a}$ có thuộc đoạn $[c,d]$ hay không? Từ đó phát thảo ra bảng biến thiên và dựa vào bảng biến thiên để tìm GTLL,GTNN

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=f(x)=x^2-3x$ trên đoạn $[0;2]$.

Lời giải

Hàm số $y=x^2-3x$ có $a=1>0$ nên bề lõm hướng lên.

Hoành độ đỉnh $x=-\frac{b}{2a}=\frac{3}{2}\in[0;2]$.

Vậy $\begin{cases} m=\min y=f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{4} \\ M=\max y=\max\{f(0),f(2)\}=\max\{0,-2\}=0 \end{cases}$.

Ví dụ 2: Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=f(x)=-x^2-4x+3$ trên đoạn $[0;4]$.

Lời giải

Hàm số $y=-x^2-4x+3$ có $a=-1<0$ nên bề lõm hướng xuống.

Hoành độ đỉnh $x=-\dfrac{b}{2a}=-2\notin[0;4]$.

Ta có $\begin{cases}f(4)=-29\\f(0)=3\end{cases}\longrightarrow m=\min y=f(4)=-29;\ M=\max y=f(0)=3.$

Ví dụ 3: Tìm giá trị thực của tham số $m\neq 0$ để hàm số $y=mx^2-2mx-3m-2$ có giá trị nhỏ nhất bằng -10 trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Ta có $x=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{2m}{2m}=1$, suy ra $y=-4m-2$.

Để hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -10 khi và chỉ khi $m>0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\-4m-2=-10\end{cases}\Leftrightarrow m=2.$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Bảng biến thiên nào dưới đây là của hàm số $y=-x^2+2x+1$:

A.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

B.

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

C.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

D.

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Xét hàm số $y=-x^2+2x+1$ có $a=-1<0$, tọa độ đỉnh $I(1;2)$ do đó hàm số trên tăng trên khoảng $(-\infty;1)$ và giảm trên khoảng $(1;+\infty)$.

Câu 2. Trục đối xứng của parabol $y=-x^2+5x+3$ là đường thẳng có phương trình

A. $x=\frac{5}{4}$. **B.** $x=-\frac{5}{2}$. **C.** $x=-\frac{5}{4}$. **D.** $x=\frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Trục đối xứng của parabol $y=ax^2+bx+c$ là đường thẳng $x=-\frac{b}{2a}$.

Trục đối xứng của parabol $y=-x^2+5x+3$ là đường thẳng $x=\frac{5}{2}$.

Câu 3. Cho hàm số $y=x^2-2x+3$. Chọn câu đúng.

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $a=1>0$, $b=-2$, $c=3$ nên hàm số có đỉnh là $I(1;2)$. Từ đó suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Câu 4. Xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $f(x)=x^2-4x+5$ trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;2)$, đồng biến trên $(2;+\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;2)$, nghịch biến trên $(2;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$f(x)=x^2-4x+5$

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Tọa độ đỉnh $I(2;1)$.

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;2)$, đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Câu 5. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2-4x+1$.

A. -3. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 13.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$y=x^2-4x+1=(x-2)^2-3\geq -3$.

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $x=2$.

Vậy hàm số đã cho đạt giá trị nhỏ nhất là -3 tại $x=2$.

Câu 6. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{2}{x^2-5x+9}$ bằng

A. $\dfrac{11}{8}$. **B.** $\dfrac{11}{4}$. **C.** $\dfrac{8}{11}$. **D.** $\dfrac{4}{11}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $x^2-5x+9=\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}\geq\dfrac{11}{4}\Rightarrow\dfrac{2}{x^2-5x+9}\leq\dfrac{2}{\frac{11}{4}}=\dfrac{8}{11}$

$\dfrac{2}{x^2-5x+9}=\dfrac{8}{11}\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{2}{x^2-5x+9}$ bằng $\dfrac{8}{11}$.

Câu 8. Hàm số $y=x^2-4x+3$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(1;3)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(-\infty;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Trục đối xứng $x=2$. Ta có $a=1>0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$ và đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 9. Cho parabol (P) có phương trình $y=3x^2-2x+4$. Tìm trục đối xứng của parabol

A. $x=-\frac{2}{3}$. **B.** $x=-\frac{1}{3}$. **C.** $x=\frac{2}{3}$. **D.** $x=\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

+ Có $a=3;\ b=-2;\ c=4$.

+ Trục đối xứng của parabol là $x=\frac{-b}{2a}=\frac{1}{3}$.

Câu 10. Cho hàm số $y=2x^2-4x+3$ có đồ thị là parabol (P). Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. (P) không có giao điểm với trục hoành. **B.** (P) có đỉnh là $S(1;1)$.

C. (P) có trục đối xứng là đường thẳng $y=1$. **D.** (P) đi qua điểm $M(-1;9)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

(P) có đỉnh là $S(1;1)$; trục đối xứng là đường thẳng $x=1$ nên C sai.

và (P) đi qua điểm $M(-1;9)\Rightarrow$ B, D đều đúng.

Xét phương trình $2x^2-4x+3=0$ vô nghiệm trên $\mathbb{R}$ nên (P)không có giao điểm với trục hoành$\Rightarrow$ A đúng.

Câu 11. Hàm số $y=-x^2+2x-5$ đồng biến trên khoảng:

A. $(-1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có đồ thị hàm số là một parabol có hoành độ đỉnh: $x=-\frac{b}{2a}=1$

Mà hệ số $a=-1<0$ nên đồ thị hàm số có bề lõm quay xuống

Vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty;1)$.

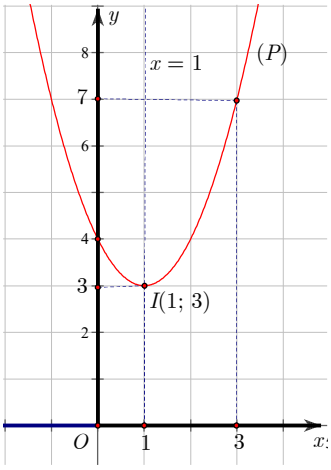
Câu 12. Cho hàm số $y=x^2-2x+4$ có đồ thị (P). Tìm mệnh đề **sai**.

A. (P) có đỉnh $I(1;3)$. **B.** $\min y=4,\forall x\in[0;3]$.

C. (P) có trục đối xứng $x=1$. **D.** $\max y=7,\forall x\in[0;3]$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Dựa vào đồ thị của hàm số $y=x^2-2x+4$: (P), ta nhận thấy:

(P) có đỉnh $I(1;3)$ nên A đúng.

$\min y=3, \forall x\in[0;3]$, đạt được khi $x=1$ nên B sai.

(P) có trục đối xứng $x=1$ nên C đúng.

$\max y=7, \forall x\in[0;3]$, đạt được khi $x=3$ nên D đúng.

Câu 13. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $(3;4)$?

A. $y=\frac{1}{2}x^2-2x+1$.

B. $y=x^2-7x+2$.

C. $y=-3x+1$.

D. $y=-\frac{1}{2}x^2+x-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

+ Hàm số $y=\frac{1}{2}x^2-2x+1$ đồng biến trên $(2;+\infty)$ nên đồng biến trên $(3;4)$. **Chọn A**

+ Hàm số $y=x^2-7x+2$ đồng biến trên $\left(\frac{7}{2};+\infty\right)$. Loại **B.**

+ Hàm số $y=-3x+1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Loại **C.**

+ Hàm số $y=-\frac{1}{2}x^2+x-1$ đồng biến trên $(-\infty;1)$. Loại **D.**

Câu 14. Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình bên?

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$-\infty$

A. $y=-x^2+5x+2$.

B. $y=-\frac{1}{2}x^2+x$.

C. $y=x^2-3x+1$.

D. $y=\frac{1}{4}x^2-x+3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị có bề lõm hướng xuống nên loại C, **D.**

Đồ thị hàm số $y=-\frac{1}{2}x^2+x$ có tọa độ đỉnh $I\left(1;\frac{1}{2}\right)$.

Câu 16. Bảng biến thiên của hàm số $y=-2x^2+4x+1$ là bảng nào sau đây?

A.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$	1	$+\infty$

B.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	3	$-\infty$

C.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$-\infty$	1	$-\infty$

D.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$	3	$+\infty$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Do hệ số $a=-2<0$ nên parabol có bề lõm hướng xuống và đỉnh có tọa độ $I(1;3)$.

Câu 17. Tìm m để hàm số $y=x^2-2x+2m+3$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[2;5]$ bằng -3.

A. $m=-3$.

B. $m=-9$.

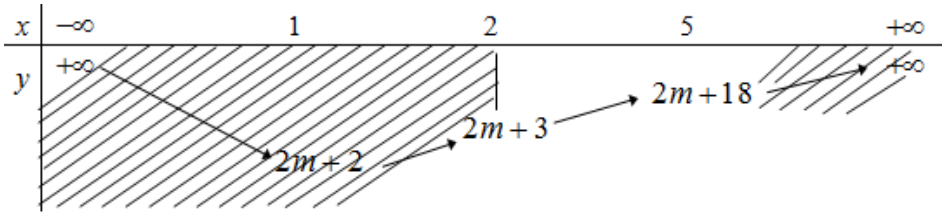
C. $m=1$.

D. $m=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=x^2-2x+2m+3$ trên đoạn $[2;5]$:



Do đó giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[2;5]$ của hàm số $y=x^2-2x+2m+3$ bằng $2m+3$.

Theo giả thiết $2m+3=-3 \Leftrightarrow m=-3$.

Câu 18. Cho hàm số $y=x^2-2\left(m+\frac{1}{m}\right)x+m\ (m>0)$ xác định trên $[-1;1]$. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-1;1]$ lần lượt là y_1, y_2 thỏa mãn $y_1-y_2=8$. Khi đó giá trị của m bằng

A. $m=1$. **B.** $m\in\varnothing$. **C.** $m=2$. **D.** $m=1$, $m=2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $y=f(x)=x^2-2\left(m+\frac{1}{m}\right)x+m$.

Hoành độ đỉnh của đồ thị hàm số là $x=m+\frac{1}{m}\geq 2$.

Vì hệ số $a=1>0$ nên hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty;m+\frac{1}{m}\right)$.

Suy ra, hàm số nghịch biến $[-1;1]$.

$\Rightarrow y_1=f(-1)=3m+\frac{2}{m}+1$.

$y_2=f(1)=1-m-\frac{2}{m}$.

Theo đề bài ta có: $y_1-y_2=8$

$\Leftrightarrow 3m+\frac{2}{m}+1-1+m+\frac{2}{m}=8\ (m>0) \Leftrightarrow m^2-2m+1=0 \Leftrightarrow m=1$.

Câu 19. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^4-4x^3-x^2+10x-3$ trên đoạn $[-1;4]$ là

A. $y_{\min}=-\frac{37}{4}$, $y_{\max}=21$. **B.** $y_{\max}=\frac{37}{4}$, $y_{\min}=-21$.

C. $y_{\min}=\frac{37}{4}$, $y_{\max}=21$. **D.** $y_{\max}=5$, $y_{\min}=-\frac{37}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $y=x^4-4x^3-x^2+10x-3=x^4-4x^3+4x^2-5x^2+10x-5+2$

$=\left(x^2-2x\right)^2-5\left(x-1\right)^2+2=\left[\left(x-1\right)^2-1\right]^2-5\left(x-1\right)^2+2$.

Đặt $t=\left(x-1\right)^2$, $x\in\left[-1;4\right]\Rightarrow t\in\left[0;9\right]$.

$y=\left(t-1\right)^2-5t+2=t^2-7t+3=\left(t-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{37}{4}$.

Cách 1: Ta có $0\le\left(t-\frac{7}{2}\right)^2\le\frac{121}{4}\Leftrightarrow-\frac{37}{4}\le y\le 21$.

Cách 2: Vẽ BBT

t	0		$\frac{7}{2}$		9
y	3	$\searrow$	$-\frac{37}{4}$	$\nearrow$	21

Vậy $y_{\min}=-\frac{37}{4}$, $y_{\max}=21$.

Dạng 2: Xác định hàm số bậc hai

1. Phương pháp

- $M\left(x_0;y_0\right)\in(P)\Leftrightarrow y_0=ax_0^2+bx_0+c$
- (P) có đỉnh $I\left(x_0;y_0\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=-\frac{b}{2a}\\ y_0=-\frac{\Delta}{4a}\end{cases}$ hoặc: $\begin{cases}x_0=-\frac{b}{2a}\\ y_0=ax_0^2+bx_0+c\end{cases}$
- (P) nhận $x=x_0$ làm trục đối xứng $\Leftrightarrow x_0=-\frac{b}{2a}$
- (P) có giá trị nhỏ nhất (hay lớn nhất) bằng $y_0\Leftrightarrow\frac{-\Delta}{4a}=y_0$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Xác định Parabol $y=ax^2+bx+c$ đạt cực tiểu bằng 4 tại $x=-2$ và đồ thị đi qua $A(0;6)$

Hướng dẫn giải

Parabol có đỉnh $I(-2;4)$ và đi qua $A(0;6)$ nên ta có

$\begin{cases} 4a-2b+c=4 \\ c=6 \\ -\dfrac{b}{2a}=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=2 \\ c=6 \end{cases}$. Vậy $y=\dfrac{1}{2}x^2+2x+6$.

Ví dụ 2. Parabol $y=ax^2+bx+c$ đi qua $A(8;0)$ và có đỉnh $I(6;-12)$. Xác định a,b,c

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết ta có hệ $\begin{cases} 64a+8b+c=0 \\ 36a+6b+c=-12 \\ -\dfrac{b}{2a}=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-36 \\ c=96 \end{cases}$.

Ví dụ 3. Tìm các hệ số a,b,c của $(P): y=\text{a}x^2+bx+c, (a\neq 0)$

a) (P) đi qua $A(-1;0); B(2;0); C(0;-4)$;

b) (P) đi qua $A(-1;-2)$ và có đỉnh $I(1;2)$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có:

$A(-1;0)\in(P)\Rightarrow a-b+c=0$

$B(2;0)\in(P)\Rightarrow 4a+2b+c=0$

$C(0;-4)\in(P)\Rightarrow c=-4$

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} a-b+c=0 \\ 4a+2b+c=0 \\ c=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-2 \\ c=-4 \end{cases}$

Vậy $a=2,b=-2,c=-4$

b) Vì (P) đi qua $A(-1;-2)$ nên $a-b+c=-2$

Mặt khác, vì (P) có đỉnh là $I(1;2)$ nên $I(1;2)\in(P)$ hay $a+b+c=2$

Và $\dfrac{-b}{2a}=1\Leftrightarrow 2a+b=0$

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} a-b+c=-2 \\ a+b+c=2 \\ 2a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases}$

Vậy $a=-1;b=2;c=1$

Ví dụ 4. Tìm các hệ số a,b,c của $(P): y=\text{ax}^2+bx+c,(a\neq 0)$

a) y nhận giá trị bằng -3 khi $x=2$ và (P) cắt $d: y=x+1$ tại hai điểm có hoành độ bằng 0 và bằng 1.

b) (P) đi qua hai điểm $A(-1;6)$, $B(4;3)$ và có trục đối xứng là $x=2$.

Hướng dẫn giải

a) Theo đề : y nhận giá trị bằng -3 khi $x=2$ nên $4a+2b+c=-3$

Gọi (P) cắt $d: y=x+1$ tại hai điểm M và N. Suy ra: $M(0;1)$, $N(1;6)$

$M(0;1)\in(P)\Rightarrow c=1$

$N(1;6)\in(P)\Rightarrow a+b+c=6$

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}4a+2b+c=-3\\a+b+c=6\\c=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-7\\b=12\\c=1\end{cases}$

Vậy $a=-7,\ b=12,\ c=1$

b) (P) đi qua hai điểm $A(-1;6)$, $B(4;3)$ nên

$A(-1;6)\in(P)\Rightarrow a-b+c=6$

$B(4;3)\in(P)\Rightarrow 16a+4b+c=3$

(P) và có trục đối xứng là $x=2$ nên $-\dfrac{b}{2a}=2\Leftrightarrow 4a+b=0$

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}a-b+c=6\\16a+4b+c=3\\4a+b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{3}{5}\\b=-\dfrac{12}{5}\\c=3\end{cases}$

Vậy $a=\dfrac{3}{5};b=-\dfrac{12}{5};c=3.$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $f(x)=3x^2+2x-5$ là hàm số bậc hai.

B. $f(x)=2x-4$ là hàm số bậc hai.

C. $f(x)=3x^3+2x-1$ là hàm số bậc hai.

D. $f(x)=x^4-x^2+1$ là hàm số bậc hai.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

* Theo định nghĩa tam thức bậc hai thì $f(x)=3x^2+2x-5$ là tam thức bậc hai.

Câu 2. Xác định parabol (P): $y=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ biết (P) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1 và có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ khi $x=\frac{1}{2}$

A. (P): $y=-x^2+x+1$.

B. (P): $y=x^2-x+1$.

C. (P): $y=2x^2-2x+1$.

D. (P): $y=x^2+x+0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có (P) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1: Khi $x=0$ thì $y=1 \Rightarrow c=1$.

(P) có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ khi $x=\frac{1}{2}$ nên:

$$\begin{cases} y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4} \\ \frac{-b}{2a}=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+1=\frac{3}{4} \\ \frac{-b}{2a}=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b=-\frac{1}{4} \\ a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}.$$

Vậy (P): $y=x^2-x+1$.

Câu 3. Đồ thị của hàm số nào sau đây là parabol có đỉnh $I(-1;3)$.

A. $y=2x^2+4x-3$.

B. $y=x^2-x+1$.

C. $y=2x^2+4x+5$.

D. $y=2x^2-2x-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đỉnh Parabol là $I\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)=\left(-\frac{b}{2a};-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$.

Do đó chỉ có đáp án C thoả.

Câu 4. Cho parabol $(P): y=ax^2+bx+c$ có trục đối xứng là đường thẳng $x=1$. Khi đó $4a+2b$ bằng

A. -1.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Do parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ có trục đối xứng là đường thẳng $x = 1$ nên $-\frac{b}{2a} = 1$

$\Leftrightarrow 2a = -b \Leftrightarrow 2a + b = 0 \Leftrightarrow 4a + 2b = 0$.

Câu 5. Đồ thị hàm số $y = mx^2 - 2mx - m^2 - 2$ $(m \neq 0)$ là parabol có đỉnh nằm trên đường thẳng $y = x - 3$ thì m nhận giá trị nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $(1;6)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(-3;3)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có đồ thị hàm số $y = mx^2 - 2mx - m^2 - 2$ là parabol có đỉnh $I(1;-m^2 - m - 2)$.

$I \in d: y = x - 3 \Leftrightarrow -m^2 - m - 2 = 1 - 3 \Leftrightarrow m^2 + m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -1 \end{array}\right. \Rightarrow m \in (-3;3)$.

Câu 6. Xác định a, b, c biết Parabol có đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đi qua các điểm $M(0;-1)$, $N(1;-1)$, $P(-1;1)$.

A. $y = x^2 - x - 1$. **B.** $y = x^2 - x + 1$.

C. $y = -2x^2 - 1$. **D.** $y = -x^2 + x - 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Vì $M \in (P)$, $N \in (P)$, $P \in (P)$ nên ta có hệ phương trình $\left\{\begin{array}{l} c = -1 \\ a + b + c = -1 \\ a - b + c = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{array}\right.$.

Vậy $(P): y = -x^2 - x - 1$.

Câu 7. Tìm parabol $(P): y = ax^2 + 3x - 2$, biết rằng parabol có trục đối xứng $x = -3$.

A. $y = x^2 + 3x - 2$. **B.** $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 2$.

C. $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 2$. **D.** $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Trục đối xứng của (P) có dạng:

$x=-\dfrac{b}{2a}=-3\Leftrightarrow -\dfrac{3}{2a}=-3\Leftrightarrow -3=-6a\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}$.

Vậy (P) có phương trình: $y=\dfrac{1}{2}x^2+3x-2$.

Câu 8. Biết rằng hàm số $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ đạt cực tiểu bằng 4 tại $x=2$ và có đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;6)$. Tính tích $P=abc$.

A. $P=-6$. **B.** $P=-3$. **C.** $P=6$. **D.** $P=\dfrac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Nhận xét: Hàm số đi qua điểm $A(0;6)$; đạt cực tiểu bằng 4 tại $x=2$ nên đồ thị hàm số đi qua $I(2;4)$ và nhận $x=2$ làm trục đối xứng, hàm số cũng đi qua điểm $A(0;6)$ suy ra:

$$\begin{cases}\dfrac{-b}{2a}=2\\ 4a+2b+c=4\\ c=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\ b=-2\\ c=6\end{cases}\Rightarrow abc=-6.$$

Câu 9. Xác định phương trình của Parabol có đỉnh $I(0;-1)$ và đi qua điểm $A(2;3)$.

A. $y=(x-1)^2$. **B.** $y=x^2+1$. **C.** $y=(x+1)^2$. **D.** $y=x^2-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Parabol (P) có dạng $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$.

Do $I\in(P)\Rightarrow c=-1$.

$I(0;-1)$ là đỉnh của $(P)\Rightarrow \dfrac{-b}{2a}=0\Rightarrow b=0$.

Lại có $A(2;3)\in(P)\Rightarrow 3=4a+2b+c\Rightarrow a=1$.

Nên $(P):y=x^2-1$.

Câu 10. Tìm m để Parabol $(P):y=mx^2-2x+3$ có trục đối xứng đi qua điểm $A(2;3)$.

A. $m=2$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=1$. **D.** $m=\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Với $m=0$ ta có phương trình $y=-2x+3$ là phương trình đuồng thẳng nên loại $m=0$.

Với $m\neq 0$. Ta có phương trình của Parabol:

Trục đối xứng: $x=-\dfrac{-2}{2m}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{m}$.

Trục đối xứng đi qua điểm $A(2;3)$ nên $2=\dfrac{1}{m}\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$.

Câu 11. Cho hàm số $y=-x^2-2x+1$. Chọn câu **sai**.

A. Đồ thị hàm số có trục đối xứng $x=-1$.

B. Hàm số không chẵn, không lẻ.

C. Hàm số tăng trên khoảng $(-\infty;-1)$.

D. Đồ thị hàm số nhận $I(-1;4)$ làm đỉnh.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $a=-1$, $b=-2$, $c=1$ nên đồ thị có trục đối xứng là $x=-\dfrac{-2}{2.(-1)}=-1$ và tọa độ đỉnh của parabol là $I(-1;2)$.

Câu 12. Cho parabol $y=ax^2+bx+4$ có trục đối xứng là đường thẳng $x=\dfrac{1}{3}$ và đi qua điểm $A(1;3)$. Tổng giá trị $a+2b$ là

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** -1.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Vì parabol $y=ax^2+bx+4$ có trục đối xứng là đường thẳng $x=\dfrac{1}{3}$ và đi qua điểm $A(1;3)$

Nên ta có: $\begin{cases}a+b+4=3\\-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=-1\\2a+3b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3\\b=2\end{cases}$

Do đó: $a+2b=-3+4=1$

Câu 15. Để đồ thị hàm số $y=mx^2-2mx-m^2-1\ (m\neq 0)$ có đỉnh nằm trên đường thẳng $y=x-2$ thì m nhận giá trị nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $(2;6)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-2;2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đồ thị hàm số $y=mx^2-2mx-m^2-1\ (m\neq 0)$ có đỉnh là $I(1;-m^2-m-1)$.

Để $I(1;-m^2-m-1)$ nằm trên đường thẳng $y=x-2$ thì $-m^2-m-1=-1$

$\Leftrightarrow m^2+m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\ (l)\\m=-1\ (n)\end{array}\right.$. Vậy $m=-1\in(-2;2)$.

Câu 16. Cho parabol $(P):y=ax^2+bx+2$. Xác định hệ số a, b biết (P) có đỉnh $I(2;-2)$.

A. $a=-1$, $b=4$. **B.** $a=1$, $b=4$. **C.** $a=1$, $b=-4$. **D.** $a=4$, $b=-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

+ Điều kiện: $a\neq 0$.

+ (P) có đỉnh $I(2;-2)$ nên ta có hệ: $\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{b}{2a}=2\\-2=a.2^2+b.2+2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}4a+b=0\\4a+2b=-4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=1\\b=-4\end{array}\right.$.

Câu 17. Parabol $(P):y=-2x^2-ax+b$ có điểm $M(1;3)$ với tung độ lớn nhất. Khi đó giá trị của b là

A. 5. **B.** 1. **C.** -2. **D.** -3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Do bề lõm của (P) quay xuống và M có tung độ lớn nhất nên M là đỉnh của (P).

Ta có $M(1;3)$ là đỉnh của parabol nên $\dfrac{a}{-4}=1\Leftrightarrow a=-4$.

Suy ra $y=-2x^2+4x+b$ qua $M(1;3)$ nên $b=1$.

Câu 18. Xác định các hệ số a và b để Parabol $(P):y=ax^2+4x-b$ có đỉnh $I(-1;-5)$.

A. $\left\{\begin{array}{l}a=3\\b=-2\end{array}\right.$. **B.** $\left\{\begin{array}{l}a=3\\b=2\end{array}\right.$. **C.** $\left\{\begin{array}{l}a=2\\b=3\end{array}\right.$. **D.** $\left\{\begin{array}{l}a=2\\b=-3\end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $x_I=-1\Rightarrow-\dfrac{4}{2a}=-1\Rightarrow a=2.$

Hơn nữa: $I \in (P)$ nên $-5 = a - 4 - b \Rightarrow b = 3$.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$. Biểu thức $f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1)$ có giá trị bằng

A. $ax^2 - bx - c$. **B.** $ax^2 + bx - c$. **C.** $ax^2 - bx + c$. **D.** $ax^2 + bx + c$.

Lời giải

Chọn D

$f(x+3) = a(x+3)^2 + b(x+3) + c = ax^2 + (6a+b)x + 9a + 3b + c$.

$f(x+2) = a(x+2)^2 + b(x+2) + c = ax^2 + (4a+b)x + 4a + 2b + c$.

$f(x+1) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c = ax^2 + (2a+b)x + a + b + c$.

$\Rightarrow f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) = ax^2 + bx + c$.

Dạng 3: Đồ thị hàm số bậc hai

1. Phương pháp

Để vẽ đường parabol $y = \text{a}x^2 + bx + c$ ta có thể thực hiện các bước như sau:

- Xác định toạ độ đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.
- Xác định trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$ và hướng bề lõm của parabol.
- Xác định một số điểm cụ thể của parabol (chẳng hạn, giao điểm của parabol với các trục toạ độ và các điểm đối xứng với chúng qua trục trục đối xứng).
- Căn cứ vào tính đối xứng, bề lõm và hình dáng parabol để vẽ parabol.

Để vẽ đồ thị hàm số $y = \left|\text{a}x^2 + bx + c\right|$ ta lần lượt làm như sau:

Trước hết ta vẽ đồ thị $(P): y = ax^2 + bx + c$

Ta có:

$$y = \left|ax^2 + bx + c\right| = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & khi \quad ax^2 + bx + c \ge 0 \\ -\left(ax^2 + bx + c\right), & khi \quad ax^2 + bx + c < 0 \end{cases}$$

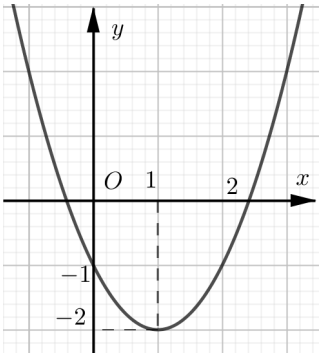
Vậy đồ thị hàm số $y = \left|\text{a}x^2 + bx + c\right|$ bao gồm hai phần

- Phần 1: Chính là đồ thị (P) lấy phần phía trên trục Ox
- Phần 2: Lấy đối xứng phần đồ thị (P) phía dưới trục Ox qua trục Ox.

Vẽ đồ thị hàm số (P_1) và (P_2)

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Câu 1. Đồ thị dưới đây là của hàm số nào sau đây?



A. $y=-x^2-2x+3$. **B.** $y=x^2+2x-2$.

C. $y=2x^2-4x-2$. **D.** $y=x^2-2x-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

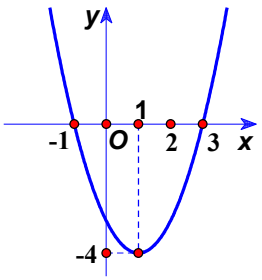
Do parabol có bề lõm quay lên nên $a>0$, từ đó ta loại **A.**

Trục đối xứng của parabol là $x=-\dfrac{b}{2a}=1$ nên ta loại **B.**

Khi $x=0$ thì $y=-1$ nên loại **C.**

Vậy đồ thị trên là của hàm số $y=x^2-2x-1$.

Câu 2. Cho parabol $(P): y=ax^2+bx+c,(a\neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Khi đó $2a+b+2c$ có giá trị là



A. -9. **B.** 9. **C.** -6. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

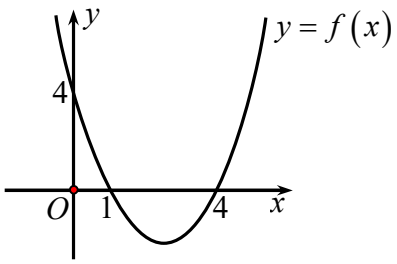
Chọn C.

Parabol $(P): y=ax^2+bx+c,(a\neq 0)$ đi qua các điểm $A(-1;\ 0)$, $B(1;\ -4)$, $C(3;\ 0)$ nên có hệ phương trình: $\begin{cases} a-b+c=0 \\ a+b+c=-4 \\ 9a+3b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=-3 \end{cases}$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Khi đó: $2a+b+2c=2.1-2+2(-3)=-6$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $\Delta=b^2-4ac$, tìm dấu của a và Δ.



A. $a>0,\ \Delta>0$.

B. $a<0,\ \Delta>0$.

C. $a>0,\ \Delta=0$.

D. $a<0,\ ,\ \Delta=0$.

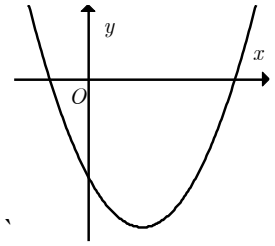
Hướng dẫn giải

Chọn A.

* Đồ thị hàm số là một Parabol quay lên nên $a>0$ và đồ thị hàm số cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt nên $\Delta>0$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho hàm số $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình bên dưới. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $a>0,\ b<0,\ c<0$.

B. $a>0,\ b<0,\ c>0$.

C. $a>0,\ b>0,\ c>0$.

D. $a<0,\ b<0,\ c<0$.

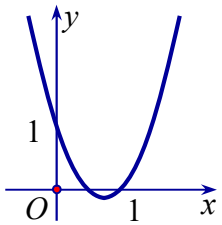
Hướng dẫn giải

Chọn A.

Parabol có bề lõm quay lên $\Rightarrow a>0$ loại D.

Parabol cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $c<0$ loại B, C. Chọn A.

Câu 2. Đồ thị hình bên dưới là đồ thị của hàm số nào?



A. $y=-2x^2+3x-1$.

B. $y=-x^2+3x-1$.

C. $y=2x^2-3x+1$.

D. $y=x^2-3x+1$.

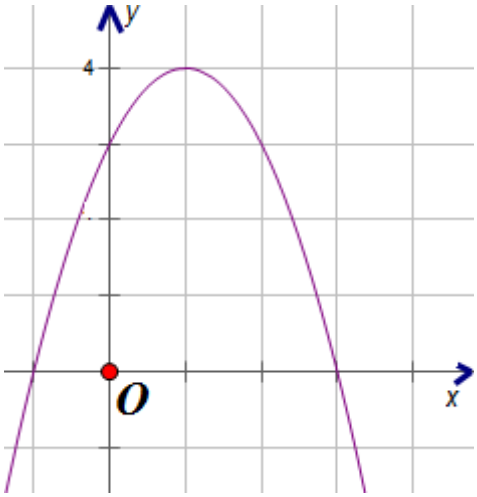
Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1

Đồ thị cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1, phương trình hoành độ giao điểm phải có nghiệm $x=1$, ta chỉ có phương trình $2x^2-3x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Câu 3. Cho hàm số $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ, thì dấu các hệ số của nó là



A. $a<0,b<0,c>0$.

B. $a<0,b>0,c>0$.

C. $a>0,b>0,c>0$.

D. $a<0,b>0,c<0$.

Hướng dẫn giải

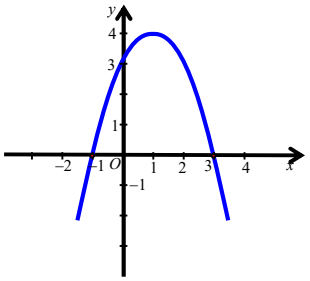
Chọn B.

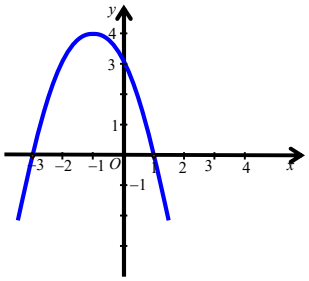
Đồ thị là parabol có bề lõm hướng xuống dưới nên $a<0$.

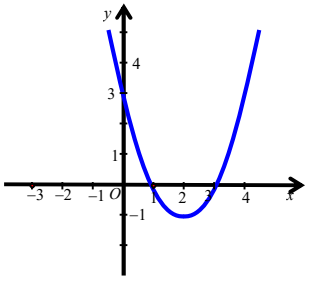
Đồ thị cắt chiều dương trục Oy nên $c>0$.

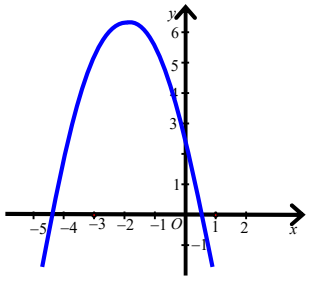
Trục đối xứng $x=-\dfrac{b}{2a}>0$, mà $a<0$, nên $b>0$.

Câu 4. Hàm số $y=-x^2+2x+3$ có đồ thị là hình nào trong các hình sau?

A. 

B. 

C. 

D. 

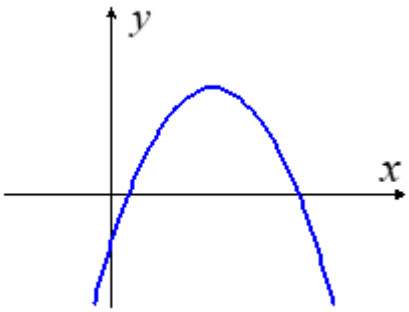
Hướng dẫn giải

Chọn A.

Do $a=-1$ nên đồ thị lõm xuống dưới $\Rightarrow$ Loại **C.**

Đồ thị có đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)\Rightarrow I(1;4)$

Câu 5. Cho hàm số $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $a<0,b>0,\Delta>0$.

B. $a<0,b<0,\Delta>0$.

C. $a>0,b>0,\Delta<0$.

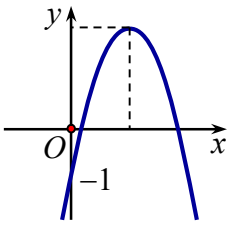
D. $a>0,b>0,\Delta>0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Quan sát bề lõm của parabol như hình vẽ ta có $a<0$ loại **C.** và **D.** , parabol cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt nên $\Delta>0$. Cho $x=0$ thì giao của parabol với trục tung Oy là $c<0$.

Câu 6. Hàm số nào có đồ thị như hình vẽ sau



A. $y=x^2-3x-1$.

B. $y=-2x^2+5x-1$.

C. $y=2x^2-5x-1$.

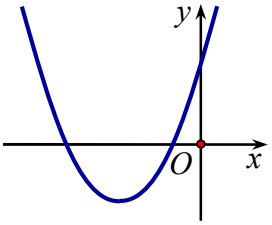
D. $y=-2x^2+5x$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Do bề lõm parabol hướng xuống nên $a<0$ và qua $A(0;-1)$.

Câu 7. Cho hàm số $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Mệnh nào sau đây đúng?



A. $a>0,\ b=0,\ c>0$.

B. $a>0,\ b>0,\ c>0$.

C. $a>0,\ b<0,\ c>0$.

D. $a<0,\ b>0,\ c>0$.

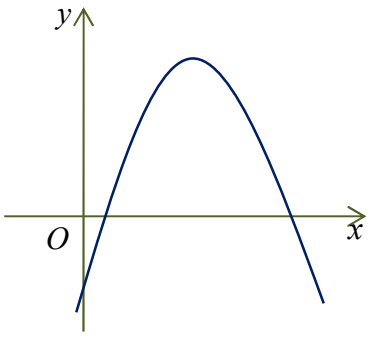
Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đồ thị có bề lõm quay lên trên $\Rightarrow a>0$. Loại đáp án **D.**

Trục đối xứng $x=-\dfrac{b}{2a}<0\Rightarrow a.b>0\Rightarrow b>0$.

Câu 8. Cho hàm số $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình dưới đây. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $a<0,\ b>0,\ c>0$.

B. $a>0,\ b<0,\ c>0$.

C. $a<0,\ b>0,\ c<0$.

D. $a>0,\ b>0,\ c<0$.

Hướng dẫn giải

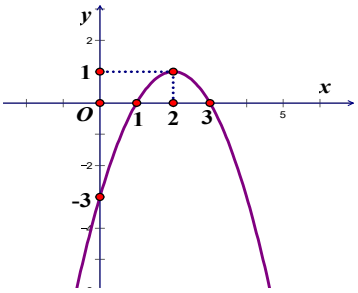
Chọn C.

Nhìn vào đồ thị ta có:

- Bề lõm hướng xuống $\Rightarrow a<0$.
- Hoành độ đỉnh $x=-\dfrac{b}{2a}>0\Rightarrow\dfrac{b}{2a}<0\Rightarrow b>0$.
- Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm $\Rightarrow c<0$.

Do đó: $a<0$, $b>0$, $c<0$.

Câu 9. Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên?



A. $y=-x^2+2x-3$.

B. $y=-x^2+4x-3$.

C. $y=x^2-4x+3$.

D. $y=x^2-2x-3$.

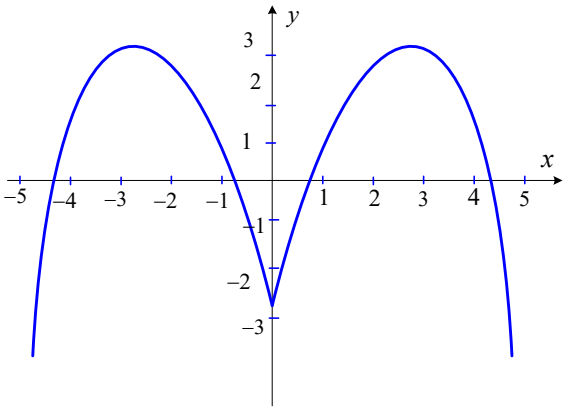
Hướng dẫn giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị suy ra: $a<0$ và hoành độ đỉnh là 2.

$y=-x^2+4x-3\Rightarrow a=-1;I(2;1)$

Câu 10. Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên



A. $y=x^2-3x-3$.

B. $y=-x^2+5|x|-3$.

C. $y=-x^2-3|x|-3$.

D. $y=-x^2+5x-3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Quan sát đồ thị ta loại A. và D. Phần đồ thị bên phải trục tung là phần đồ thị (P) của hàm số $y=-x^2+5x-3$ với $x>0$, tọa độ đỉnh của (P) là $\left(\frac{5}{2};\frac{13}{4}\right)$, trục đối xứng là $x=2,5$. Phần đồ thị bên trái trục tung là do lấy đối xứng phần đồ thị bên phải của (P) qua trục tung Oy. Ta được cả hai phần là đồ thị của hàm số $y=-x^2+5|x|-3$.

Câu 11. Đồ thị hàm số $y=x^2-6|x|+5$.

A. có tâm đối xứng $I(3;-4)$.

B. có tâm đối xứng $I(3;-4)$ và trục đối xứng có phương trình $x=0$.

C. không có trục đối xứng.

D. có trục đối xứng là đường thẳng có phương trình $x=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

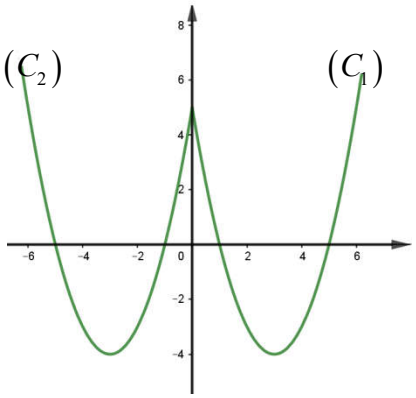
Ta có: $y=x^2-6|x|+5=\begin{cases}y_1=x^2-6x+5 \text{ khi } x\geq 0 \ (C_1)\\ y_2=x^2+6x+5 \text{ khi } x<0 \ (C_2)\end{cases}$

Đồ thị (C) của hàm số $y=x^2-6|x|+5$ gồm hai phần

Phần đồ thị (C_1): là phần đồ thị của hàm số $y_1=x^2-6x+5$ nằm bên phải trục tung

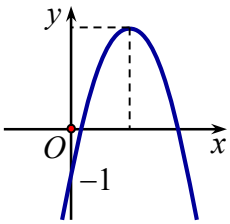
Phần đồ thị (C_2): là phần đồ thị của hàm số $y_2=x^2+6x+5$ có được bằng cách lấy đối xứng phần đồ thị (C_1) qua trục tung

Ta có đồ thị (C) như hình vẽ



Vậy: đồ thị (C) có trục đối xứng có phương trình $x=0$.

Câu 12. hàm số $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a<0,\ b<0,\ c<0$.

B. $a<0,\ b=0,\ c<0$.

C. $a>0,\ b>0,\ c<0$.

D. $a<0,\ \mathrm{b}>0,\ \mathrm{c}<0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

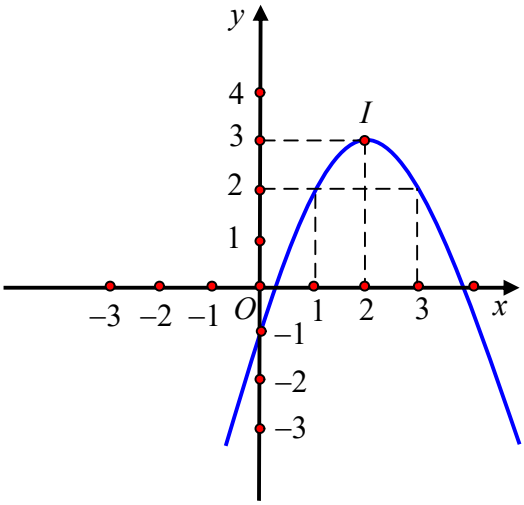
Quan sát đồ thị ta có:

Đồ thị quay bề lõm xuống dưới nên $a<0$; có hoành độ đỉnh $x_I=-\dfrac{b}{2a}>0\Leftrightarrow\dfrac{b}{a}<0\Rightarrow b>0$.

Lại có: đồ thị cắt Ox tại điểm có tung độ âm nên $c<0$.

Vậy $a<0,\ \mathrm{b}>0,\ \mathrm{c}<0$.

Câu 13. Cho parabol $(P):y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Tìm các giá trị m để phương trình $\left|ax^2+bx+c\right|=m$ có bốn nghiệm phân biệt.



A. $-1<m<3$.

B. $0<m<3$.

C. $0\le m\le 3$.

D. $-1\le m\le 3$.

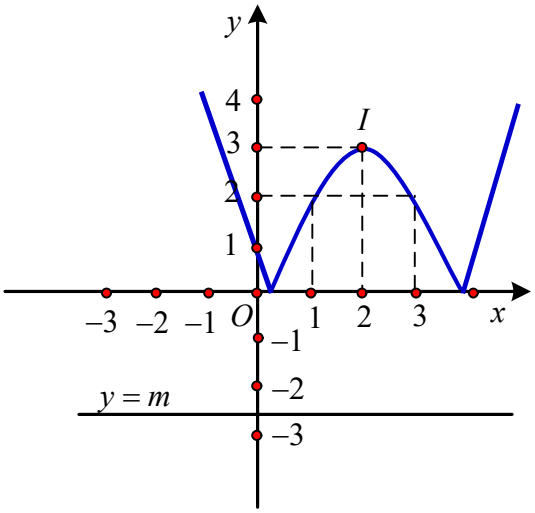
Hướng dẫn giải

Chọn B.

Quan sát đồ thị ta có đỉnh của parabol là $I(2;3)$ nên $\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}=2\\3=4a+2b+c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-4a\\4a+2b+c=3\end{cases}$.

Mặt khác (P) cắt trục tung tại $(0;-1)$ nên $c=-1$. Suy ra $\begin{cases}b=-4a\\4a+2b=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=4\end{cases}$.

$(P): y=-x^2+4x-1$ suy ra hàm số $y=\left|-x^2+4x-1\right|$ có đồ thị là là phần đồ thị phía trên trục hoành của (P) và phần có được do lấy đối xứng phần phía dưới trục hoành của (P), như hình vẽ sau:



Phương trình $\left|ax^2+bx+c\right|=m$ hay $\left|-x^2+4x-1\right|=m$ có bốn nghiệm phân biệt khi đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số hàm số $y=\left|-x^2+4x-1\right|$ tại bốn điểm phân biệt.

Suy ra $0<m<3$.

Dạng 4: Sự tương giao

1. Phương pháp

- Thiết lập phương trình hoành độ giao điểm
- Khai thác các điều kiện
- Xử lý phương trình hoành độ giao điểm
- Lựa chọn các kết luận cần thiết

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho parabol $(P): y=x^2-2x+m-1$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để parabol cắt Ox tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và trục Ox là

$$x^2-2x+m-1=0. \quad (1)$$

Để parabol cắt Ox tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=2-m>0 \\ S=2>0 \\ P=m-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<2 \\ m>1 \end{cases} \Leftrightarrow 1<m<2.$

Ví dụ 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = mx$ cắt đồ thị hàm số $(P): y = x^3 - 6x^2 + 9x$ tại ba điểm phân biệt.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) với d là $x^3 - 6x^2 + 9x = mx$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2 - 6x + 9 - m\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 6x + 9 - m = 0. \quad (1) \end{array}\right.$$

Để (P) cắt d tại ba điểm phân biệt khi và chỉ (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 0^2 - 6.0 + 9 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 9 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \neq 9 \end{cases}.$$

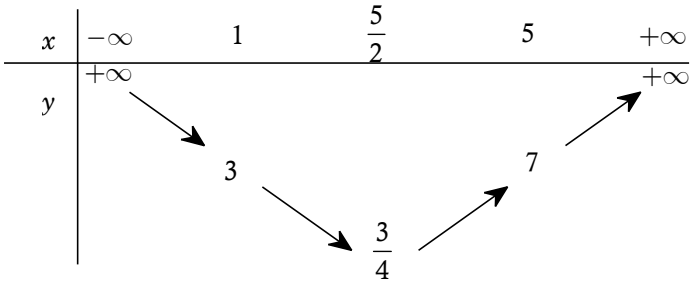
Ví dụ 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^2 - 5x + 7 + 2m = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $[1;5]$.

Lời giải

Ta có $x^2 - 5x + 7 + 2m = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 7 = -2m. \quad (*)$

Phương trình $(*)$ là phương trình hoành độ giao điểm của parabol $(P): x^2 - 5x + 7$ và đường thẳng $y = -2m$ (song song hoặc trùng với trục hoành).

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = x^2 - 5x + 7$ trên $[1;5]$ như sau:



Dựa vào bảng biến ta thấy $x \in [1;5]$ thì $y \in \left[\frac{3}{4}; 7\right]$.

Do đo để phương trình $(*)$ có nghiệm $x \in [1;5] \Leftrightarrow \frac{3}{4} \le -2m \le 7 \Leftrightarrow -\frac{3}{8} \ge m \ge -\frac{7}{2}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ có đồ thị là parabol (P). Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0\ (1)$. Chọn khẳng định **sai**:

A. Số giao điểm của parabol (P) với trục hoành là số nghiệm của phương trình (1).

B. Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của parabol (P) với trục hoành.

C. Nghiệm của phương trình (1) là giao điểm của parabol (P) với trục hoành.

D. Nghiệm của phương trình (1) là hoành độ giao điểm của parabol (P) với trục hoành.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Câu 2. Tọa độ giao điểm của đường thẳng $d: y=-x+4$ và parabol $y=x^2-7x+12$ là

A. $(-2;6)$ và $(-4;8)$.

B. $(2;2)$ và $(4;8)$.

C. $(2;-2)$ và $(4;0)$.

D. $(2;2)$ và $(4;0)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2-7x+12=-x+4 \Leftrightarrow x^2-6x+8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \Rightarrow y=2 \\ x=4 \Rightarrow y=0 \end{array}\right.$

Câu 3. Nghiệm của phương trình $x^2-8x+5=0$ có thể xem là hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số:

A. $y=x^2$ và $y=-8x+5$.

B. $y=x^2$ và $y=-8x-5$.

C. $y=x^2$ và $y=8x-5$.

D. $y=x^2$ và $y=8x+5$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $x^2-8x+5=0 \Leftrightarrow x^2=8x-5$.

Do đó nghiệm của phương trình $x^2-8x+5=0$ có thể xem là hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=x^2$ và $y=8x-5$.

Câu 4. Giao điểm của parabol $(P): y=x^2-3x+2$ với đường thẳng $y=x-1$ là

A. $(-1;2);(2;1)$.

B. $(1;0);(3;2)$.

C. $(2;1);(0;-1)$.

D. $(0;-1);(-2;-3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là

$$x^2-3x+2=x-1 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$$

Vậy hai giao điểm của (P) và (d) là $(1;0);(3;2)$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Câu 5. Cho đường thẳng $d: y = x+1$ và Parabol $(P): y = x^2 - x - 2$. Biết rằng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B. Khi đó diện tích tam giác OAB bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là $x^2 - x - 2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$.

Phương trình này có $a - b + c = 0$ nên có hai nghiệm $x_1 = -1, x_2 = 3$.

Suy ra $A(-1;0)$ và $B(3;4)$.

Diện tích tam giác OAB bằng $\frac{1}{2}.1.3 = \frac{3}{2}$.

Câu 6. Biết đường thẳng $d: y = mx$ cắt Parabol $(P): y = x^2 - x + 1$ tại hai điểm phân biệt A, B. Khi đó tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

A. $I\left(\frac{1+m}{2}; \frac{m^2+m}{2}\right)$. **B.** $I\left(\frac{1+m}{2}; \frac{-m^2-2m+3}{4}\right)$.

C. $I\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$. **D.** $I\left(\frac{1}{2}; \frac{m}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$mx = x^2 - x + 1 \Leftrightarrow x^2 - (m+1)x + 1 = 0$

Vì hoành độ giao điểm x_A, x_B là hai nghiệm của phương trình nên ta có tọa độ trung điểm I là $\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{m(x_A + x_B)}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{m+1}{2} \\ y_I = \frac{m^2+m}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{1+m}{2}; \frac{m^2+m}{2}\right)$.

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = 2x + 3$ cắt parabol $y = x^2 + (m+2)x - m$ tại hai điểm phân biệt nằm cùng phía với trục tung Oy.

A. $m > -3$. **B.** $m < -3$. **C.** $m > 3$. **D.** $m < 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$x^2+(m+2)x-m=2x+3 \Leftrightarrow x^2+mx-m-3=0$. (1)

Để đường thẳng d cắt parabol tại hai điểm phân biệt nằm cùng phía với trục tung Oy thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ \dfrac{c}{a}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2+4m+12>0\\ -m-3>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow m<-3$.

Câu 8. Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong nửa khoảng $[-10;-4)$ để đường thẳng $d: y=-(m+1)x+m+2$ cắt Parabol $(P): y=x^2+x-2$ tại hai điểm phân biệt cùng phía với trục tung?

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 8.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Xét phương trình: $-(m+1)x+m+2=x^2+x-2 \Leftrightarrow x^2+x(m+2)-m-4=0$

Để đường thẳng d cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt cùng phía với trục tung vậy điều kiện là $\begin{cases}\Delta>0\\ P>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(m+2)^2+4(m+4)>0\\ -m-4>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2+8m+20>0, \forall m\\ m<-4\end{cases}$

Vậy trong nửa khoảng $[-10;-4)$ có 6 giá trị nguyên m.

Câu 9. Tìm m để Parabol $(P): y=x^2-2(m+1)x+m^2-3$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1.x_2=1$.

A. $m=2$. **B.** Không tồn tại m. **C.** $m=-2$. **D.** $m=\pm 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) với trục hoành: $x^2-2(m+1)x+m^2-3=0$ (1).

Parabol (P) cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1.x_2=1$

$\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1.x_2=1$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=(m+1)^2-(m^2-3)>0\\ m^2-3=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>-2\\ m=\pm 2\end{cases} \Leftrightarrow m=2$.

Câu 10. Cho hai hàm số $y_1=x^2+(m-1)x+m$, $y_2=2x+m+1$. Khi đồ thị hai hàm số cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì m có giá trị là

A. $m>0$. **B.** $m<0$. **C.** m tùy ý. **D.** không có giá trị nào.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2+(m-1)x+m=2x+m+1 \Leftrightarrow x^2+(m-3)x-1=0(1)$.

Khi đồ thị hai hàm số cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì pt(1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta=(m-3)^2+4>0$ luôn đúng $\forall m\in\mathbb{R}$.

Câu 11. Đường thẳng $d_m:(m-2)x+my=-6$ luôn đi qua điểm:

A. $(3;-3)$ **B.** $(2;1)$ **C.** $(1;-5)$ **D.** $(3;1)$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$(m-2)x+my=-6 \Leftrightarrow (x+y)m-2x+6=0 \quad (*)$

Phương trình $(*)$ luôn đúng với mọi m khi $\begin{cases}x+y=0\\-2x+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=-3\end{cases}$

Vậy d_m luôn đi qua điểm cố định $(3;-3)$.

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị m để đường thẳng $y=mx+3-2m$ cắt parabol $y=x^2-3x-5$ tại 2 điểm phân biệt có hoành độ trái dấu.

A. $m<-3$. **B.** $-3<m<4$. **C.** $m<4$. **D.** $m\le 4$.

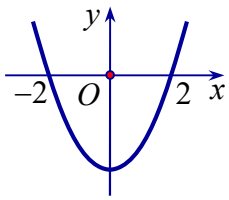
Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2-3x-5=mx+3-2m \Leftrightarrow x^2-(m+3)x+2m-8=0$ $(*)$.

Đường thẳng cắt parabol tại hai điểm phân biệt có hoành độ trái dấu khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow a.c<0 \Leftrightarrow 2m-8<0 \Leftrightarrow m<4$.

Câu 13. Cho parabol $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$, (P) có đồ thị như hình vẽ:



Biết đồ thị (P) cắt trục Ox tại các điểm lần lượt có hoành độ là -2, 2. Tập nghiệm của bất phương trình $y<0$ là

A. $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. **B.** $(-2;2)$.

C. $[-2;2]$. **D.** $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị ta thấy $y<0$ khi $x\in(-2;2)$.

Câu 14. Giá trị nào của m thì phương trình $(m-3)x^2+(m+3)x-(m+1)=0$ (1) có hai nghiệm phân biệt?

A. $m\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$. **B.** $m\in\left(-\infty;-\frac{3}{5}\right)\cup(1;+\infty)\setminus\{3\}$.

C. $m\in\left(-\frac{3}{5};1\right)$. **D.** $m\in\left(-\frac{3}{5};+\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\begin{cases}m-3\neq 0\\ \Delta=(m+3)^2+4(m-3)(m+1)>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 3\\ 5m^2-2m-3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 3\\ \left[\begin{array}{l}x<-\frac{3}{5}\\ x>1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m\in\left(-\infty;-\frac{3}{5}\right)\cup(1;+\infty)\setminus\{3\}$.

Câu 15. Có bao nhiêu giá trị thực của m để đường thẳng $d:y=4x-2m$ tiếp xúc với parabol $(P):y=(m-2)x^2+2mx-3m+1$

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là $(m-2)x^2+2mx-3m+1=4x-2m$

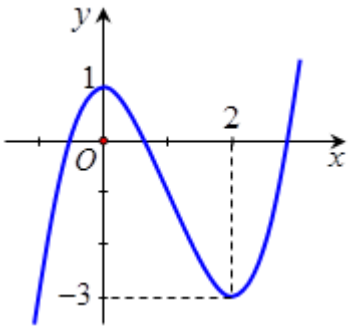
$\Leftrightarrow(m-2)x^2+2(m-2)x-m+1=0$.

d tiếp xúc với $(P)\Rightarrow$ phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) có nghiệm kép.

$\Rightarrow\begin{cases}m-2\neq 0\\ \Delta'=(m-2)^2-(m-2)(-m+1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 2\\ \left[\begin{array}{l}m=2\\ m=\frac{3}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m=\frac{3}{2}$.

Vậy có 1 giá trị m để đường thẳng d tiếp xúc với (P).

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Phương trình $2f(x)-1=0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$2f(x)-1=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{2}$.

Số nghiệm phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}$.

Dựa vào đồ thị hàm số suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

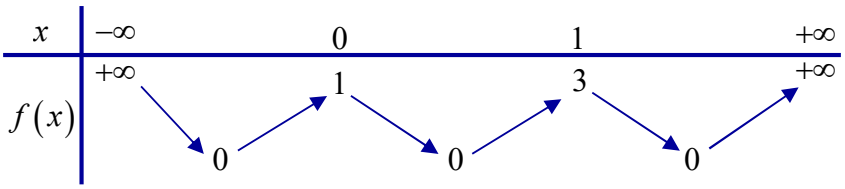
Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $\left|f(x)-1\right|=m$ có bốn nghiệm phân biệt.

A. $m=1$. **B.** $1<m<3$. **C.** $0<m<1$. **D.** $m\geq 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

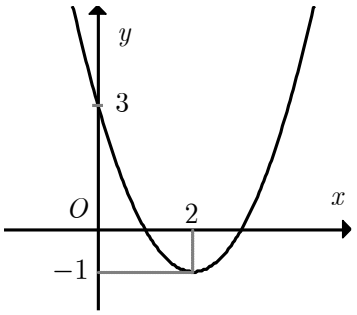
Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$, suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=\left|f(x)-1\right|$.



Từ BBT suy ra phương trình $\left|f\left(x\right)-1\right|=m$ có bốn nghiệm phân biệt khi $1<m<3$.

Vậy $1<m<3$.

Câu 18. Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ đồ thị như hình bên dưới. Hỏi với những giá trị nào của tham số m thì phương trình $f\left(\left|x\right|\right)-1=m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.



A. $-2<m<2$. **B.** $m=3$. **C.** $m>3$. **D.** $m=2$.

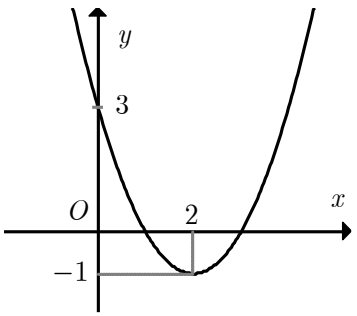
Hướng dẫn giải

Chọn D.

Hàm số $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ có đồ thị là $\left(C\right)$, lấy đối xứng phần đồ thị nằm bên phải Oy của $\left(C\right)$ qua Oy ta được đồ thị $\left(C'\right)$ của hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$.

Dựa vào đồ thị, phương trình $f\left(\left|x\right|\right)-1=m\Leftrightarrow\left(\left|x\right|\right)=m+1$ có đúng 3 nghiệm phân biệt khi $m+1=3\Leftrightarrow m=2$.

Câu 19. Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ đồ thị như hình bên dưới. Hỏi với những giá trị nào của tham số m thì phương trình $\left|f\left(x\right)\right|-1=m$ có đúng 2 nghiệm phân biệt.



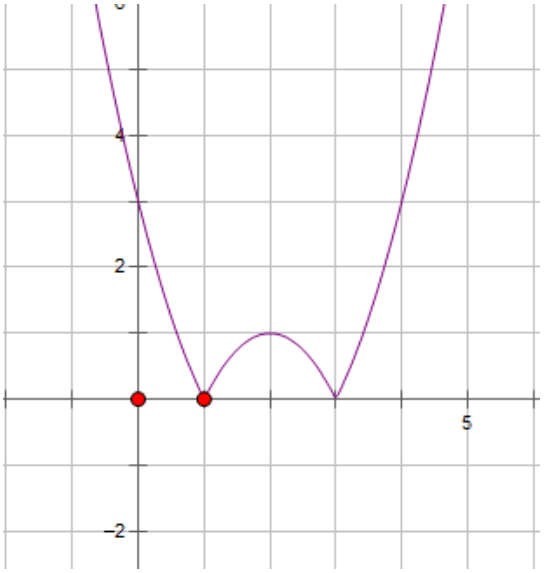
A. $\left[\begin{array}{l} m \ge 0 \\ m = -1 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m = -1 \end{array}\right.$. **C.** $m \ge -1$. **D.** $m \ge 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

+ Phương trình $\Leftrightarrow \left|f\left(x\right)\right| = m+1$.

+ Đồ thị hàm số $y = \left|f\left(x\right)\right|$ có dạng:



+ Dựa vào đồ thị, để phương trình $\left|f\left(x\right)\right| = m+1$ có hai nghiệm phân biệt thì:

$\left[\begin{array}{l} m+1 > 1 \\ m+1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m = -1 \end{array}\right.$.

Câu 20. Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong nửa khoảng $\left(0;2017\right]$ để phương trình $\left|x^2 - 4\left|x\right| - 5\right| - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 2016. **B.** 2008. **C.** 2009. **D.** 2017.

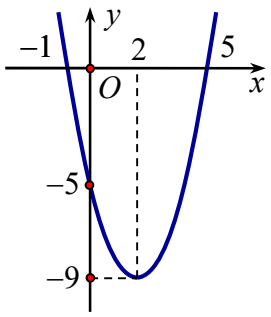
Hướng dẫn giải

Chọn B.

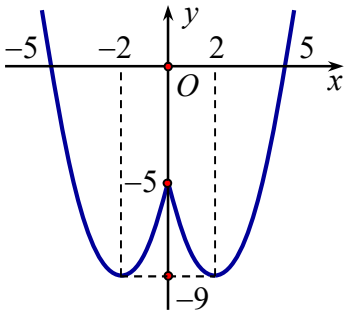
PT: $\left|x^2 - 4\left|x\right| - 5\right| - m = 0 \Leftrightarrow \left|x^2 - 4\left|x\right| - 5\right| = m$.

Số nghiệm phương trình $\left(1\right) \Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \left|x^2 - 4\left|x\right| - 5\right| \left(P\right)$ và đường thẳng $y = m$.

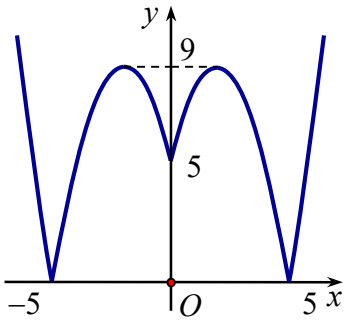
Xét hàm số $y = x^2 - 4x - 5$ $\left(P_1\right)$ có đồ thị như hình 1.



Hình 1.



Hình 2.



Hình 3.

Xét hàm số $y=x^2-4|x|-5\ (P_2)$ là hàm số chẵn nên có đồ thị nhận Oy làm trục đối xứng. Mà $y=x^2-4|x|-5=x^2-4x-5$ nếu $x\ge 0$. Suy ra đồ thị hàm số (P_2) gồm hai phần:

- Phần 1: Giữ nguyên đồ thị hàm số (P_1) phần bên phải Oy.
- Phần 2: Lấy đối xứng phần 1 qua trục Oy.

Ta được đồ thị (P_2) như hình 2.

Xét hàm số $y=\left|x^2-4|x|-5\right|(P)$, ta có: $y=\begin{cases}x^2-4|x|-5 & (y\ge 0)\\ -\left(x^2-4|x|-5\right) & (y<0)\end{cases}$.

Suy ra đồ thị hàm số (P) gồm hai phần:

- Phần 1: Giữ nguyên đồ thị hàm số (P_2) phần trên Ox.
- Phần 2: Lấy đối xứng đồ thị hàm số (P_2) phần dưới Ox qua trục Ox.

Ta được đồ thị (P) như hình 3.

Quan sát đồ thị hàm số (P) ta có: Để $\left|x^2-4|x|-5\right|=m\ (1)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>9\\ m=0\end{array}\right.$.

Mà $\begin{cases}m\in\mathbb{Z}\\ m\in(0;2017]\end{cases}\Rightarrow m\in\{10;11;12;...;2017\}$.

Câu 21. Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong nửa khoảng $(0;2017]$ để phương trình $\left|x^2-4|x|-5\right|-m=0$ có hai nghiệm phân biệt?

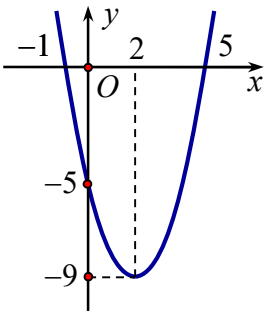
A. 2016. **B.** 2008. **C.** 2009. **D.** 2017.

Hướng dẫn giải

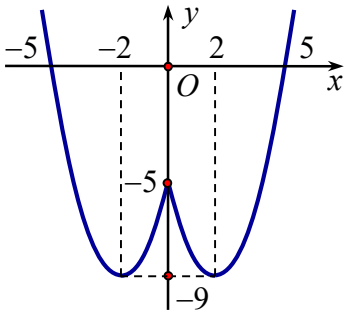
Chọn B.

PT: $\left|x^2-4\left|x\right|-5\right|-m=0\Leftrightarrow\left|x^2-4\left|x\right|-5\right|=m\left(1\right)$. Số nghiệm phương trình $\left(1\right)\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left|x^2-4\left|x\right|-5\right|\left(P\right)$ và đường thẳng $y=m$.

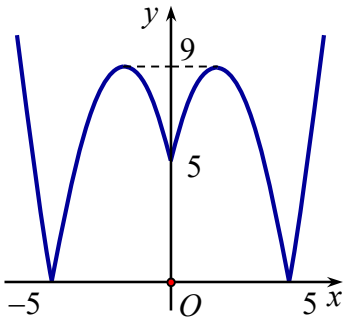
Xét hàm số $y=x^2-4x-5\ \left(P_1\right)$ có đồ thị như hình 1.



Hình 1.



Hình 2.



Hình 3.

Xét hàm số $y=x^2-4\left|x\right|-5\ \left(P_2\right)$ là hàm số chẵn nên có đồ thị nhận Oy làm trục đối xứng. Mà $y=x^2-4\left|x\right|-5=x^2-4x-5$ nếu $x\ge0$. Suy ra đồ thị hàm số $\left(P_2\right)$ gồm hai phần:

- Phần 1: Giữ nguyên đồ thị hàm số $\left(P_1\right)$ phần bên phải Oy.
- Phần 2: Lấy đối xứng phần 1 qua trục Oy.

Ta được đồ thị $\left(P_2\right)$ như hình 2.

Xét hàm số $y=\left|x^2-4\left|x\right|-5\right|\left(P\right)$, ta có: $y=\begin{cases}x^2-4\left|x\right|-5 & \left(y\ge0\right)\\ -\left(x^2-4\left|x\right|-5\right) & \left(y<0\right)\end{cases}$.

Suy ra đồ thị hàm số $\left(P\right)$ gồm hai phần:

- Phần 1: Giữ nguyên đồ thị hàm số $\left(P_2\right)$ phần trên Ox.
- Phần 2: Lấy đối xứng đồ thị hàm số $\left(P_2\right)$ phần dưới Ox qua trục Ox.

Ta được đồ thị $\left(P\right)$ như hình 3.

Quan sát đồ thị hàm số $\left(P\right)$ ta có: Để $\left|x^2-4\left|x\right|-5\right|=m\ \ \left(1\right)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>9\\ m=0\end{array}\right.$.

Mà $\begin{cases}m\in\mathbb{Z}\\ m\in\left(0;2017\right]\end{cases}\Rightarrow m\in\left\{10;11;12;...;2017\right\}$.

Dạng 4: Toán thực tế

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà sinh học thấy rằng: Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n)=360-10n$. Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích để trọng lương cá sau một vụ thu được nhiều nhất?

Hướng dẫn giải

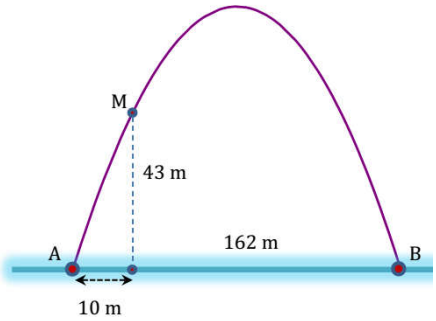
Trọng lượng cá trên đơn vị diện tích là

$$T=(360-10n)n=360n-10n^2 \quad =-10\left(n^2-36n+324-324\right) \quad =-10(n-18)^2+3240$$

$\Rightarrow T_{\max}=3240$ khi $n=18$.

Ví dụ 2: Cổng Arch tại thành phố St Louis của Mỹ có hình dạng là một parabol . Biết khoảng cách giữa hai chân cổng bằng $162\,\text{m}$. Trên thành cổng, tại vị trí có độ cao $43\,\text{m}$ so với mặt đất , người ta thả một sợi dây chạm đất . Vị trí chạm đất của đầu sợi dây này cách chân cổng A một đoạn $10\,\text{m}$. Giả sử các số liệu trên là chính xác. Hãy tính độ cao của cổng Arch .





Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Phương trình Parabol (P) có dạng $y=ax^2+bx+c$.

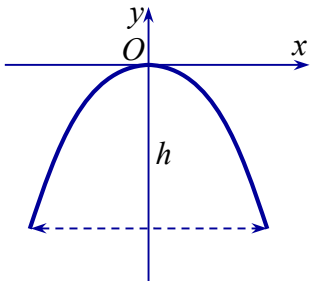
Parabol (P) đi qua điểm $A(0;0)$, $B(162;0)$, $M(10;43)$ nên ta có

$$\begin{cases} c=0 \\ 162^2a+162b+c=0 \\ 10^2a+10b+c=43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ a=-\dfrac{43}{1520} \\ b=\dfrac{3483}{760} \end{cases} \Rightarrow (P): y=-\frac{43}{1520}x^2+\frac{3483}{760}x.$$

Do đó chiều cao của cổng là $h=-\dfrac{\Delta}{4a}=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}\approx 185,6\,\text{m}.$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Một chiếc cổng hình parabol có phương trình $y=-\dfrac{1}{2}x^2$. Biết cổng có chiều rộng $d=5$ mét . Hãy tính chiều cao h của cổng.



A. $h=4,45$ mét. **B.** $h=3,125$ mét. **C.** $h=4,125$ mét. **D.** $h=3,25$ mét.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi A và B là hai điểm ứng với hai chân cổng như hình vẽ.

Vì cổng hình parabol có phương trình $y=-\frac{1}{2}x^2$ và cổng có chiều rộng $d=5$ mét nên:

$AB=5$ và $A\left(-\frac{5}{2};-\frac{25}{8}\right)$; $B\left(\frac{5}{2};-\frac{25}{8}\right)$.

Vậy chiều cao của cổng là $\left|-\frac{25}{8}\right|=\frac{25}{8}=3,125$ mét.

Câu 2. Một của hàng buôn giày nhập một đôi với giá là 40 đôla. Cửa hàng ước tính rằng nếu đôi giày được bán với giá x đôla thì mỗi tháng khách hàng sẽ mua $(120-x)$ đôi. Hỏi của hàng bán một đôi giày giá bao nhiêu thì thu được nhiều lãi nhất?

A. 80 USD. **B.** 160 USD. **C.** 40 USD. **D.** 240 USD.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

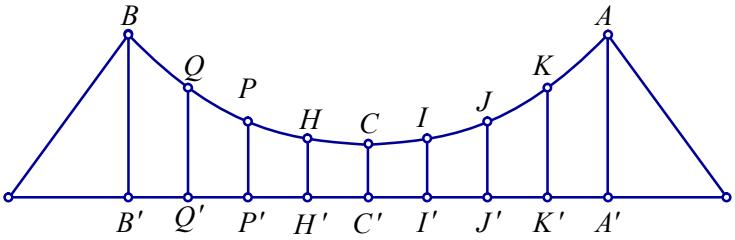
Gọi y là số tiền lãi của cửa hàng bán giày.

Ta có $y=(120-x)(x-40)=-x^2+160x-4800=-(x-80)^2+1600\le 1600$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=80$.

Vậy cửa hàng lãi nhiều nhất khi bán đôi giày với giá 80 US**D.**

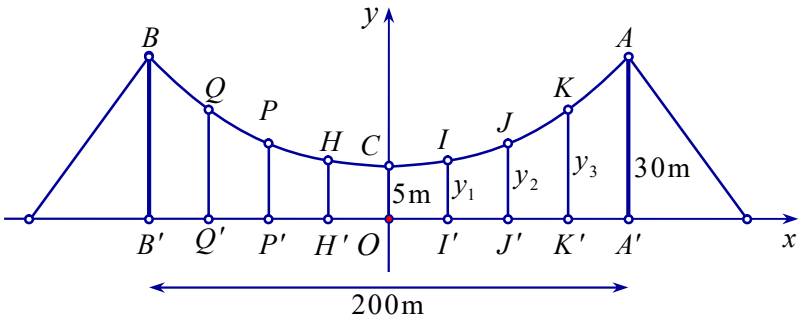
Câu 3. Dây truyền đỡ trên cầu treo có dạng Parabol ACB như hình vẽ. Đầu, cuối của dây được gắn vào các điểm A, B trên mỗi trục AA' và BB' với độ cao $30\,\text{m}$. Chiều dài đoạn $A'B'$ trên nền cầu bằng $200\,\text{m}$. Độ cao ngắn nhất của dây truyền trên cầu là $OC=5\,\text{m}$. Gọi Q', P', H', O, I', J', K' là các điểm chia đoạn $A'B'$ thành các phần bằng nhau. Các thanh thẳng đứng nối nền cầu với đáy dây truyền: QQ', PP', HH', OC, II', JJ', KK' gọi là các dây cáp treo. Tính tổng độ dài của các dây cáp treo?



A. Đáp án khác. **B.** $36,87\,\text{m}$. **C.** $73,75\,\text{m}$. **D.** $78,75\,\text{m}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Giả sử Parabol có dạng: $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ, khi đó parabol đi qua điểm $A(100;30)$, và có đỉnh $C(0;5)$. Đoạn AB chia làm 8 phần, mỗi phần $25\,\text{m}$.

Suy ra: $\begin{cases} 30 = 10000a + 100b + c \\ \dfrac{-b}{2a} = 0 \\ 5 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{400} \\ b = 0 \\ c = 5 \end{cases} \Rightarrow (P): y = \dfrac{1}{400}x^2 + 5.$

Khi đó, tổng độ dài của các dây cáp treo bằng $OC + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3$

$= 5 + 2\left(\dfrac{1}{400}.25^2 + 5\right) + 2\left(\dfrac{1}{400}.50^2 + 5\right) + 2\left(\dfrac{1}{400}.75^2 + 5\right)$

$= 78,75(\text{m})$.

Câu 4. Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe hon đa Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 và bán ra với giá là 31 triệu đồng. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm là sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất.

A. 30 triệu đồng. **B.** 29 triệu đồng.

C. 30,5 triệu đồng. **D.** 29,5 triệu đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi x đồng là số tiền mà doanh nghiệp A dự định giảm giá; $(0 \le x \le 4)$.

Khi đó:

Lợi nhuận thu được khi bán một chiếc xe là $31-x-27=4-x$.

Số xe mà doanh nghiệp sẽ bán được trong một năm là $600+200x$.

Lợi nhuận mà doanh nghiệp thu được trong một năm là

$f(x)=(4-x)(600+200x)=-200x^2+200x+2400$.

Xét hàm số $f(x)=-200x^2+200x+2400$ trên đoạn $[0;4]$ có bảng biến thiên

Vậy $\max\limits_{[0;4]} f(x)=2450 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

Vậy giá mới của chiếc xe là 30,5 triệu đồng thì lợi nhuận thu được là cao nhất.

Câu 5. Khi quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt độ cao nào đó rồi rơi xuống đất. Biết rằng quỹ đạo của quả là một cung parabol trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oth ,trong đó t là thời gian , kể từ khi quả bóng được đá lên; h là độ cao của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá lên từ độ cao $1,2\text{m}$. Sau đó 1 giây, nó đạt độ cao $8,5\text{m}$ và 2 giây sau khi đá lên, nó ở độ cao 6m. Hãy tìm hàm số bậc hai biểu thị độ cao h theo thời gian t và có phần đồ thị trùng với quỹ đạo của quả bóng trong tình huống trên.

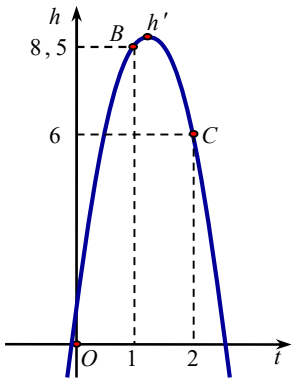
A. $y=4,9t^2+12,2t+1,2$. **B.** $y=-4,9t^2+12,2t+1,2$.

C. $y=-4,9t^2+12,2t-1,2$. **D.** $y=-4,9t^2-12,2t+1,2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Tại $t=0$ ta có $y=h=1,2$; tại $t=1$ ta có $y=h=8,5$; tại $t=2$, ta có $y=h=6$.



Chọn hệ trục Oth như hình vẽ.

Parabol (P) có phương trình: $y = at^2 + bt + c$, với $a \neq 0$.

Giả sử tại thời điểm t' thì quả bóng đạt độ cao lớn nhất h'.

Theo bài ra ta có: tại $t = 0$ thì $h = 1,2$ nên $A(0;\ 1,2) \in (P)$.

Tại $t = 1$ thì $h = 8,5$ nên $B(1;\ 8,5) \in (P)$.

Tại $t = 2$ thì $h = 6$ nên $C(2;\ 6) \in (P)$.

Vậy ta có hệ: $\begin{cases} c = 1,2 \\ a + b + c = 8,5 \\ 4a + 2b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1,2 \\ a = -4,9 \\ b = 12,2 \end{cases}$.

Vậy hàm số Parabol cần tìm có dạng: $y = -4,9t^2 + 12,2t + 1,2$.

Phần | HÌNH HỌC VÀ ĐO LƯỜNG

Chương IV HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

Trong chương IV, chúng ta sẽ mở rộng khái niệm tỉ số lượng giác của góc nhọn qua việc thiết lập các giá trị lượng giác của các góc từ 0° đến 180°. Chúng ta cũng sẽ tìm hiểu về các hệ thức lượng cơ bản trong tam giác, cụ thể là: định lí côsin, định lí sin, các công thức tính diện tích tam giác, đồng thời vận dụng các định lí, công thức nói trên vào các bài toán giải tam giác cũng như giải quyết một số tình huống thực tiễn.



Cầu Cần Thơ bắc ngang sông Hậu.

Học xong chương này, bạn có thể:

- Nhận biết và tính được giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180°.
- Tính được giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180° bằng máy tính cầm tay.
- Giải thích được hệ thức liên hệ giữa giá trị lượng giác của các góc phụ nhau, bù nhau.
- Giải thích được các hệ thức lượng cơ bản trong tam giác: định lí côsin, định lí sin, công thức tính diện tích tam giác.
- Mô tả được cách giải tam giác và vận dụng được vào việc giải một số bài toán có nội dung thực tiễn.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

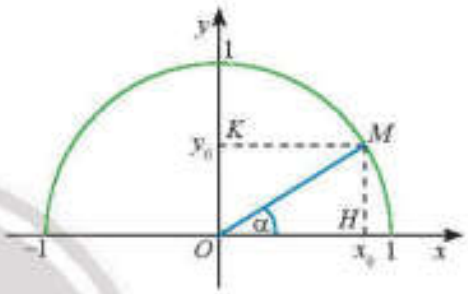
Bài 1. Giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180°

Từ khoá: Giá trị lượng giác; sin; côsin; tang; côtang.

Làm thế nào để mở rộng khái niệm tỉ số lượng giác của góc nhọn cho các góc từ 0° đến 180° ?

1. Giá trị lượng giác

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, nửa đường tròn tâm O bán kính $R = 1$ nằm phía trên trục hoành được gọi là nửa đường tròn đơn vị. Cho trước một góc nhọn α, lấy điểm M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$. Giả sử điểm M có toạ độ $(x_0; y_0)$.



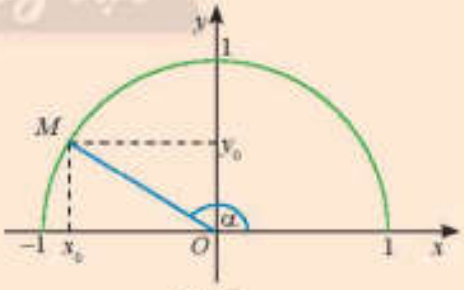
Hình 1

Áp dụng cách tính các tỉ số lượng giác của một góc nhọn đã học ở lớp 9, chứng tỏ rằng:

$$\sin\alpha = y_0;\ \cos\alpha = x_0;\ \tan\alpha = \frac{y_0}{x_0};\ \cot\alpha = \frac{x_0}{y_0}.$$

Mở rộng khái niệm tỉ số lượng giác đối với góc nhọn cho những góc α bất kì với $0° \le \alpha \le 180°$, ta có định nghĩa sau đây:

Với mỗi góc α $(0° \le \alpha \le 180°)$ ta xác định được một điểm M duy nhất trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$. Gọi $(x_0; y_0)$ là toạ độ điểm M, ta có:



Hình 2

– Tung độ y_0 của M là ***sin*** của góc α, kí hiệu là $\sin\alpha = y_0$;

– Hoành độ x_0 của M là ***côsin*** của góc α, kí hiệu là $\cos\alpha = x_0$;

– Tỉ số $\frac{y_0}{x_0}$ $(x_0 \ne 0)$ là ***tang*** của góc α, kí hiệu là $\tan\alpha = \frac{y_0}{x_0}$;

– Tỉ số $\frac{x_0}{y_0}$ $(y_0 \ne 0)$ là ***côtang*** của góc α, kí hiệu là $\cot\alpha = \frac{x_0}{y_0}$.

Các số $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ được gọi là các *giá trị lượng giác của góc* α.

Chân trời sáng tạo

Ví dụ 1

Tìm các giá trị lượng giác của góc 120°.

Giải

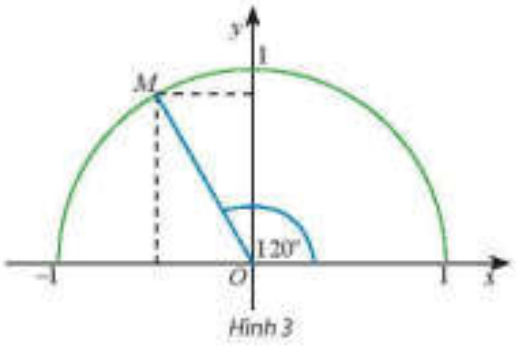
Lấy điểm M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = 120^\circ$. Ta có $\widehat{MOy} = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$.

Ta tính được tọa độ điểm M là $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Vậy theo định nghĩa ta có:

$$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \cos 120^\circ = -\frac{1}{2};$$

$$\tan 120^\circ = -\sqrt{3};\ \cot 120^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$



Hình 3

Chú ý:

a) Nếu α là góc nhọn thì các giá trị lượng giác của α đều dương.

Nếu α là góc tù thì $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$, $\tan\alpha < 0$, $\cot\alpha < 0$.

b) $\tan\alpha$ chỉ xác định khi $\alpha \neq 90^\circ$.

$\cot\alpha$ chỉ xác định khi $\alpha \neq 0^\circ$ và $\alpha \neq 180^\circ$.

?1 Tìm các giá trị lượng giác của góc 135°.

2. Quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau

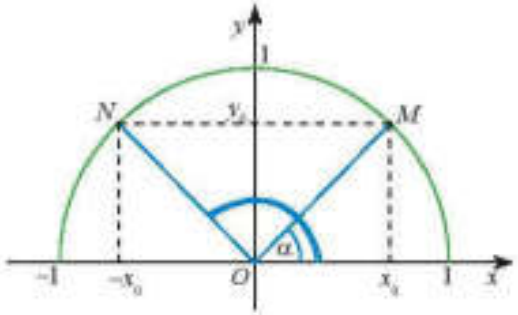
Từ lớp dưới ta đã biết hai góc ***phụ nhau*** thì các tỉ số lượng giác của chúng có mối liên hệ:

$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$; $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$;

$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot\alpha$; $\cot(90^\circ - \alpha) = \tan\alpha$.

Sau đây ta sẽ tìm hiểu về mối liên hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc ***bù nhau***.

?2 Trên nửa đường tròn đơn vị, cho dây cung NM song song với trục Ox (Hình 4). Tính tổng số đo của hai góc $\widehat{xOM}$ và $\widehat{xON}$.



Hình 4

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Nếu $\widehat{xOM} = \alpha$ thì ta có $\widehat{xON} = 180° - \alpha$.

Giả sử điểm M có toạ độ $(x_0; y_0)$. Do $x_N = -x_M = -x_0; y_N = y_M = y_0$ nên ta có các tính chất sau:

Với mọi góc α thoả mãn $0° \le \alpha \le 180°$, ta luôn có:

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$; $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$;

$\tan(180° - \alpha) = -\tan\alpha$ $(\alpha \ne 90°)$; $\cot(180° - \alpha) = -\cot\alpha$ $(0° < \alpha < 180°)$.

Ví dụ 2

Cho biết $\sin 30° = \frac{1}{2}$; $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan 60° = \sqrt{3}$. Tính $\sin 150°$; $\cos 135°$; $\tan 120°$.

Giải

$\sin 150° = \sin 30° = \frac{1}{2}$; $\cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan 120° = -\tan 60° = -\sqrt{3}$.

Tính các giá trị lượng giác: $\sin 120°$; $\cos 150°$; $\cot 135°$.

Cho biết $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, tìm góc α $(0° \le \alpha \le 180°)$ bằng cách vẽ nửa đường tròn đơn vị.

3. Giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt

Giá trị lượng giác của các góc bất kì có thể tính bằng máy tính cầm tay.

Dưới đây là bảng giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt.

Giá trị lượng giác \ α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	||	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot\alpha$	||	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	||

Chú ý: Trong bảng, kí hiệu "||" để chỉ giá trị lượng giác không xác định.

Tính: $A = \sin 150° + \tan 135° + \cot 45°$; $B = 2\cos 30° - 3\tan 150° + \cot 135°$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

2 Tìm góc α ($0° \le \alpha \le 180°$) trong mỗi trường hợp sau:

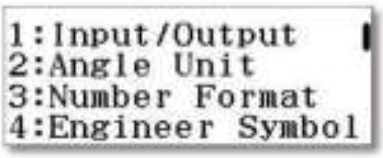
a) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\cos\alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2}$; c) $\tan\alpha = -1$; d) $\cot\alpha = -\sqrt{3}$.

4. Sử dụng máy tính cầm tay để tính giá trị lượng giác của một góc

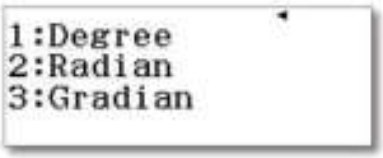
Có nhiều loại máy tính cầm tay có thể giúp tính nhanh chóng giá trị lượng giác của một góc. Chẳng hạn, ta có thể thực hiện trên một loại máy tính cầm tay như sau:

Sau khi mở máy, ấn liên tiếp các phím SHIFT MENU để màn hình hiện lên bảng lựa chọn.

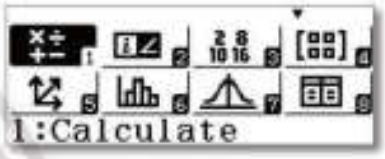
Ấn phím 2 để vào chế độ cài đặt đơn vị đo góc.



Ấn tiếp phím 1 để xác định đơn vị đo góc là "độ".



Ấn các phím MENU 1 để vào chế độ tính toán.



a) Tính các giá trị lượng giác của góc

Ví dụ 3

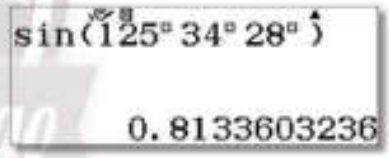
Sử dụng máy tính cầm tay, tính $\sin 125°34'28''$.

Giải

Để tính $\sin 125°34'28''$, ta ấn liên tiếp các phím sau đây:

sin 1 2 5 °‴ 3 4 °‴ 2 8 °‴) =

và được kết quả $\sin 125°34'28'' \approx 0{,}8133603236$, với hiển thị trên màn hình như hình bên.



Để tính $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ ta cũng làm như trên, chỉ thay phím sin bằng phím cos, tan.

Trường hợp muốn tính $\cot\alpha$, ta tính $\frac{1}{\tan\alpha}$.

b) Xác định số đo của góc khi biết giá trị lượng giác của góc đó

Ví dụ 4

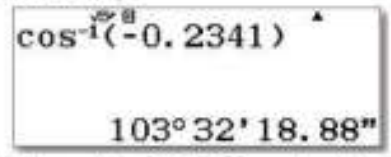
Sử dụng máy tính cầm tay, tìm α ($0° \le \alpha \le 180°$) biết $\cos\alpha = -0{,}2341$.

Giải

Để tìm α khi biết $\cos\alpha = -0{,}2341$, ta ấn liên tiếp các phím sau đây:

SHIFT cos (−) 0 • 2 3 4 1) = °‴

và được kết quả $\alpha \approx 103°32'19''$, với hiển thị trên màn hình như hình bên.



Để tìm α khi biết $\sin\alpha$, $\tan\alpha$ ta cũng làm tương tự như trên, chỉ thay phím cos bằng các phím sin, tan.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

a) Tính $\cos 80°43'51''$; $\tan 147°12'25''$; $\cot 99°9'19''$.

b) Tìm α $(0° \le \alpha \le 180°)$, biết $\cos\alpha = -0{,}723$.

BÀI TẬP

1. Cho biết $\sin 30° = \frac{1}{2}$; $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan 45° = 1$. Sử dụng mối liên hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau, phụ nhau để tính giá trị của $E = 2\cos 30° + \sin 150° + \tan 135°$.

2. Chứng minh rằng:

a) $\sin 20° = \sin 160°$;

b) $\cos 50° = -\cos 130°$.

3. Tìm góc α $(0° \le \alpha \le 180°)$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

b) $\sin\alpha = 0$;

c) $\tan\alpha = 1$;

d) $\cot\alpha$ không xác định.

4. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) $\sin A = \sin(B + C)$;

b) $\cos A = -\cos(B + C)$.

5. Chứng minh rằng với mọi góc α $(0° \le \alpha \le 180°)$, ta đều có:

a) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$;

b) $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$ $(0° < \alpha < 180°, \alpha \ne 90°)$;

c) $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ $(\alpha \ne 90°)$;

d) $1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ $(0° < \alpha < 180°)$.

6. Cho góc α với $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Tính giá trị của biểu thức $A = 2\sin^2\alpha + 5\cos^2\alpha$.

7. Dùng máy tính cầm tay, hãy thực hiện các yêu cầu dưới đây:

a) Tính: $\sin 168°45'33''$, $\cos 17°22'35''$, $\tan 156°26'39''$, $\cot 56°36'42''$.

b) Tìm α $(0° \le \alpha \le 180°)$ trong các trường hợp sau:

i) $\sin\alpha = 0{,}862$; ii) $\cos\alpha = -0{,}567$; iii) $\tan\alpha = 0{,}334$.

Dạng 1 : Xác định giá trị lượng giác của góc đặc biệt.

1. Phương pháp giải.

- Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác của một góc
- Sử dụng tính chất và bảng giá trị lượng giác đặc biệt
- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = a^2 \sin 90^0 + b^2 \cos 90^0 + c^2 \cos 180^0$

b) $B = 3 - \sin^2 90^0 + 2\cos^2 60^0 - 3\tan^2 45^0$

c) $C = \sin^2 45^0 - 2\sin^2 50^0 + 3\cos^2 45^0 - 2\sin^2 40^0 + 4\tan 55^0 . \tan 35^0$

Lời giải

a) $A = a^2.1 + b^2.0 + c^2.(-1) = a^2 - c^2$

b) $B=3-(1)^2+2\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1$

c) $C=\sin^2 45^0+3\cos^2 45^0-2\left(\sin^2 50^0+\sin^2 40^0\right)+4\tan 55^0.\cot 55^0$

$C=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-2\left(\sin^2 50^0+\cos^2 40^0\right)+4=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-2+4=4$

Ví dụ 2: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A=\sin^2 3^0+\sin^2 15^0+\sin^2 75^0+\sin^2 87^0$

b) $B=\cos 0^0+\cos 20^0+\cos 40^0+...+\cos 160^0+\cos 180^0$

c) $C=\tan 5^0\tan 10^0\tan 15^0...\tan 80^0\tan 85^0$

Lời giải

a) $A=\left(\sin^2 3^0+\sin^2 87^0\right)+\left(\sin^2 15^0+\sin^2 75^0\right)$

$=\left(\sin^2 3^0+\cos^2 3^0\right)+\left(\sin^2 15^0+\cos^2 15^0\right)$

$=1+1=2$

b) $B=\left(\cos 0^0+\cos 180^0\right)+\left(\cos 20^0+\cos 160^0\right)+...+\left(\cos 80^0+\cos 100^0\right)$

$=\left(\cos 0^0-\cos 0^0\right)+\left(\cos 20^0-\cos 20^0\right)+...+\left(\cos 80^0-\cos 80^0\right)$

$=0$

c) $C=\left(\tan 5^0\tan 85^0\right)\left(\tan 15^0\tan 75^0\right)...\left(\tan 45^0\tan 45^0\right)$

$=\left(\tan 5^0\cot 5^0\right)\left(\tan 15^0\cot 5^0\right)...\left(\tan 45^0\cot 5^0\right)$

$=1$

Ví dụ 3: Tính theo hàm số lượng giác của các góc bé hơn 90°:

$\sin 100^\circ$, $\sin 160^\circ$, $\cos 170^\circ$, $\tan 103^\circ 45'$, $\cot 124^\circ 15'$.

Lời giải.

$\sin 100^\circ=\sin\left(180^\circ-100^\circ\right)=\sin 80^\circ;$

$\sin 160^\circ=\sin\left(180^\circ-160^\circ\right)=\sin 20^\circ;$

$\tan 103^\circ 45'=-\tan\left(180-^\circ 103^\circ 45'\right)=\tan 76^\circ 15'$

$\cot 124^\circ 15'=-\cot\left(180^\circ-124^\circ 15'\right)=-\cot 55^\circ 45'$

Dạng 2 : Xác định giá trị của một biểu thức lượng giác có điều kiện.

1. Phương pháp giải.

- Dựa vào các hệ thức lượng giác cơ bản
- Dựa vào dấu của giá trị lượng giác
- Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: a) Cho $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ với $90^0<\alpha<180^0$. Tính $\cos\alpha$ và $\tan\alpha$

b) Cho $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$. Tính $\sin\alpha$ và $\cot\alpha$

c) Cho $\tan\gamma=-2\sqrt{2}$. Tính giá trị lượng giác còn lại.

Lời giải

a) Vì $90^0<\alpha<180^0$ nên $\cos\alpha<0$ mặt khác $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ suy ra

$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{1}{9}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Do đó $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

b) Vì $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ nên $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ và $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}=-\frac{2}{\sqrt{5}}$

c) Vì $\tan\gamma=-2\sqrt{2}<0\Rightarrow\cos\alpha<0$ mặt khác $\tan^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ nên $\cos\alpha=-\sqrt{\frac{1}{\tan^2+1}}=-\sqrt{\frac{1}{8+1}}=-\frac{1}{3}$

Ta có $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\Rightarrow\sin\alpha=\tan\alpha.\cos\alpha=-2\sqrt{2}.\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\Rightarrow\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Ví dụ 2: a) Cho $\cos\alpha=\frac{3}{4}$ với $0^0<\alpha<90^0$. Tính $A=\frac{\tan\alpha+3\cot\alpha}{\tan\alpha+\cot\alpha}$.

b) Cho $\tan\alpha=\sqrt{2}$. Tính $B=\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin^3\alpha+3\cos^3\alpha+2\sin\alpha}$

Lời giải

a) Ta có $A=\frac{\tan\alpha+3\frac{1}{\tan\alpha}}{\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}}=\frac{\tan^2\alpha+3}{\tan^2\alpha+1}=\frac{\frac{1}{\cos^2\alpha}+2}{\frac{1}{\cos^2\alpha}}=1+2\cos^2\alpha$

Suy ra $A=1+2.\frac{9}{16}=\frac{17}{8}$

b) $B=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\cos^3\alpha}}{\frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}+\frac{3\cos^3\alpha}{\cos^3\alpha}+\frac{2\sin\alpha}{\cos^3\alpha}}=\frac{\tan\alpha\left(\tan^2\alpha+1\right)-\left(\tan^2\alpha+1\right)}{\tan^3\alpha+3+2\tan\alpha\left(\tan^2\alpha+1\right)}$

Suy ra $B=\dfrac{\sqrt{2}\left(2+1\right)-\left(2+1\right)}{2\sqrt{2}+3+2\sqrt{2}\left(2+1\right)}=\dfrac{3\left(\sqrt{2}-1\right)}{3+8\sqrt{2}}$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hai góc α và β với $\alpha+\beta=90^{\circ}$. Tính giá trị của biểu thức $P=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$.

A. $P=0$. **B.** $P=1$. **C.** $P=-1$. **D.** $P=2$.

Lời giải

Chọn B

Hai góc α và β phụ nhau nên $\sin\alpha=\cos\beta;\cos\alpha=\sin\beta$.

Do đó, $P=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

Câu 2: Cho hai góc α và β với $\alpha+\beta=90^{\circ}$. Tính giá trị của biểu thức $P=\cos\alpha\cos\beta-\sin\beta\sin\alpha$.

A. $P=0$. **B.** $P=1$. **C.** $P=-1$. **D.** $P=2$.

Lời giải

Chọn A

Hai góc α và β phụ nhau nên $\sin\alpha=\cos\beta;\cos\alpha=\sin\beta$.

Do đó, $P=\cos\alpha\cos\beta-\sin\beta\sin\alpha=\cos\alpha\sin\alpha-\cos\alpha\sin\alpha=0$.

Câu 3: Cho α là góc tù. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\sin\alpha<0$. **B.** $\cos\alpha>0$. **C.** $\tan\alpha<0$. **D.** $\cot\alpha>0$.

Lời giải

Chọn C

Lấy góc $\alpha=120^{0}$ sau đó thử ngược

Câu 4: Cho hai góc nhọn α và β trong đó $\alpha<\beta$. Khẳng định nào sau đây là ***sai***?

A. $\cos\alpha<\cos\beta$. **B.** $\sin\alpha<\sin\beta$.

C. $\cot\alpha>\cot\beta$. **D.** $\tan\alpha+\tan\beta>0$.

Lời giải

Chọn A

Lấy $\alpha=30^{0};\beta=60^{0}$ sau đó thử ngược.

Câu 5: Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\cos75^{\circ}>\cos50^{\circ}$. **B.** $\sin80^{\circ}>\sin50^{\circ}$.

C. $\tan45^{\circ}<\tan60^{\circ}$. **D.** $\cos30^{\circ}=\sin60^{\circ}$.

Lời giải

Chọn A

Trong khoảng từ 0° đến 90°, khi giá trị của góc tăng thì giá trị cos tương ứng của góc đó giảm.

Câu 6: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\sin90^{\circ}<\sin100^{\circ}$. **B.** $\cos95^{\circ}>\cos100^{\circ}$.

C. $\tan85^{\circ}<\tan125^{\circ}$. **D.** $\cos145^{\circ}>\cos125^{\circ}$.

Lời giải

Chọn B

Trong khoảng từ 90° đến 180°, khi giá trị của góc tăng thì:

- Giá trị sin tương ứng của góc đó giảm.

- Giá trị cos tương ứng của góc đó giảm.

Câu 7: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\sin 90^\circ < \sin 150^\circ$.

B. $\sin 90^\circ 15' < \sin 90^\circ 30'$.

C. $\cos 90^\circ 30' > \cos 100^\circ$.

D. $\cos 150^\circ > \cos 120^\circ$.

Lời giải

Chọn C

Trong khoảng từ 90° đến 180°, khi giá trị của góc tăng thì:

- Giá trị sin tương ứng của góc đó giảm.

- Giá trị cos tương ứng của góc đó giảm.

Câu 8: Chọn hệ thức đúng được suy ra từ hệ thức $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$?

A. $\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$.

B. $\cos^2\frac{\alpha}{3} + \sin^2\frac{\alpha}{3} = \frac{1}{3}$.

C. $\cos^2\frac{\alpha}{4} + \sin^2\frac{\alpha}{4} = \frac{1}{4}$.

D. $5\left(\cos^2\frac{\alpha}{5} + \sin^2\frac{\alpha}{5}\right) = 5$.

Lời giải

Chọn D

Từ biểu thức $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ ta suy ra $\cos^2\frac{\alpha}{5} + \sin^2\frac{\alpha}{5} = 1$.

Do đó ta có $5\left(\cos^2\frac{\alpha}{5} + \sin^2\frac{\alpha}{5}\right) = 5$.

Câu 9: Cho biết $\sin\frac{\alpha}{3} = \frac{3}{5}$. Giá trị của $P = 3\sin^2\frac{\alpha}{3} + 5\cos^2\frac{\alpha}{3}$ bằng bao nhiêu?

A. $P = \frac{105}{25}$.

B. $P = \frac{107}{25}$.

C. $P = \frac{109}{25}$.

D. $P = \frac{111}{25}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có biểu thức $\sin^2\frac{\alpha}{3} + \cos^2\frac{\alpha}{3} = 1 \Leftrightarrow \cos^2\frac{\alpha}{3} = 1 - \sin^2\frac{\alpha}{3} = \frac{16}{25}$.

Do đó ta có $P = 3\sin^2\frac{\alpha}{3} + 5\cos^2\frac{\alpha}{3} = 3.\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 5.\frac{16}{25} = \frac{107}{25}$.

Câu 10: Cho biết $\tan\alpha = -3$. Giá trị của $P = \frac{6\sin\alpha - 7\cos\alpha}{6\cos\alpha + 7\sin\alpha}$ bằng bao nhiêu?

A. $P = \frac{4}{3}$.

B. $P = \frac{5}{3}$.

C. $P = -\frac{4}{3}$.

D. $P = -\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $P=\dfrac{6\sin\alpha-7\cos\alpha}{6\cos\alpha+7\sin\alpha}=\dfrac{6\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-7}{6+7\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\dfrac{6\tan\alpha-7}{6+7\tan\alpha}=\dfrac{5}{3}.$

Câu 11: Cho biết $\cos\alpha=-\dfrac{2}{3}$. Giá trị của $P=\dfrac{\cot\alpha+3\tan\alpha}{2\cot\alpha+\tan\alpha}$ bằng bao nhiêu?

A. $P=-\dfrac{19}{13}.$ **B.** $P=\dfrac{19}{13}.$ **C.** $P=\dfrac{25}{13}.$ **D.** $P=-\dfrac{25}{13}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có biểu thức $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Leftrightarrow\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\dfrac{5}{9}.$

Ta có $P=\dfrac{\cot\alpha+3\tan\alpha}{2\cot\alpha+\tan\alpha}=\dfrac{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+3\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\dfrac{\cos^2\alpha+3\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\dfrac{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2+3.\dfrac{5}{9}}{2.\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{5}{9}}=\dfrac{19}{13}.$

Câu 12: Cho biết $\cot\alpha=5.$ Giá trị của $P=2\cos^2\alpha+5\sin\alpha\cos\alpha+1$ bằng bao nhiêu?

A. $P=\dfrac{10}{26}.$ **B.** $P=\dfrac{100}{26}.$ **C.** $P=\dfrac{50}{26}.$ **D.** $P=\dfrac{101}{26}.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $P=2\cos^2\alpha+5\sin\alpha\cos\alpha+1=\sin^2\alpha\left(2\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+5\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\right)$

$=\dfrac{1}{1+\cot^2\alpha}\left(2\cot^2\alpha+5\cot\alpha+1+\cot^2\alpha\right)=\dfrac{3\cot^2\alpha+5\cot\alpha+1}{\cot^2\alpha+1}=\dfrac{101}{26}.$

Câu 13: Cho biết $3\cos\alpha-\sin\alpha=1$, $0^0<\alpha<90^0.$ Giá trị của $\tan\alpha$ bằng

A. $\tan\alpha=\dfrac{4}{3}.$ **B.** $\tan\alpha=\dfrac{3}{4}.$ **C.** $\tan\alpha=\dfrac{4}{5}.$ **D.** $\tan\alpha=\dfrac{5}{4}.$

Lời giải

Chọn A

Ta có

$3\cos\alpha-\sin\alpha=1\Leftrightarrow3\cos\alpha=\sin\alpha+1\rightarrow9\cos^2\alpha=(\sin\alpha+1)^2$

$\Leftrightarrow9\cos^2\alpha=\sin^2\alpha+2\sin\alpha+1\Leftrightarrow9\left(1-\sin^2\alpha\right)=\sin^2\alpha+2\sin\alpha+1$

$\Leftrightarrow10\sin^2\alpha+2\sin\alpha-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\alpha=-1\\ \sin\alpha=\dfrac{4}{5}\end{array}\right.$.|

- $\sin\alpha=-1$: không thỏa mãn vì $0^\circ<\alpha<90^\circ$.

- $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{3}{5}\Rightarrow\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{4}{3}.$

Câu 14: Cho biết $2\cos\alpha+\sqrt{2}\sin\alpha=2$, $0^0<\alpha<90^0$. Tính giá trị của $\cot\alpha$.

A. $\cot\alpha=\frac{\sqrt{5}}{4}$. **B.** $\cot\alpha=\frac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\cot\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\cot\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $2\cos\alpha+\sqrt{2}\sin\alpha=2\Leftrightarrow\sqrt{2}\sin\alpha=2-2\cos\alpha\to 2\sin^2\alpha=(2-2\cos\alpha)^2$

$\Leftrightarrow 2\sin^2\alpha=4-8\cos\alpha+4\cos^2\alpha\Leftrightarrow 2(1-\cos^2\alpha)=4-8\cos\alpha+4\cos^2\alpha$

$\Leftrightarrow 6\cos^2\alpha-8\cos\alpha+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\alpha=1\\ \cos\alpha=\frac{1}{3}\end{array}\right.$.

- $\cos\alpha=1$: không thỏa mãn vì $0^0<\alpha<90^0$.
- $\cos\alpha=\frac{1}{3}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}\longrightarrow\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 15: Cho biết $\sin\alpha+\cos\alpha=a$. Tính giá trị của $\sin\alpha\cos\alpha$.

A. $\sin\alpha\cos\alpha=a^2$. **B.** $\sin\alpha\cos\alpha=2a$.

C. $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{a^2-1}{2}$. **D.** $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{a^2-11}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\sin\alpha+\cos\alpha=a\to(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=a^2$

$\Leftrightarrow 1+2\sin\alpha\cos\alpha=a^2\Leftrightarrow\sin\alpha\cos\alpha=\frac{a^2-1}{2}$.

Câu 16: Cho biết $\cos\alpha+\sin\alpha=\frac{1}{3}$. Giá trị của $P=\sqrt{\tan^2\alpha+\cot^2\alpha}$ bằng bao nhiêu?

A. $P=\frac{5}{4}$. **B.** $P=\frac{7}{4}$. **C.** $P=\frac{9}{4}$. **D.** $P=\frac{11}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos\alpha+\sin\alpha=\frac{1}{3}\to(\cos\alpha+\sin\alpha)^2=\frac{1}{9}$

$\Leftrightarrow 1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{9}\Leftrightarrow\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{4}{9}$.

Ta có $P=\sqrt{\tan^2\alpha+\cot^2\alpha}=\sqrt{(\tan\alpha+\cot\alpha)^2-2\tan\alpha\cot\alpha}=\sqrt{\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2-2}$

$=\sqrt{\left(\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)^2-2}=\sqrt{\left(\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)^2-2}=\sqrt{\left(-\frac{9}{4}\right)^2-2}=\frac{7}{4}$.

Câu 17: Cho biết $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$. Giá trị của $P=\sqrt{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}$ bằng bao nhiêu?

A. $P=\frac{\sqrt{15}}{5}$. **B.** $P=\frac{\sqrt{17}}{5}$. **C.** $P=\frac{\sqrt{19}}{5}$. **D.** $P=\frac{\sqrt{21}}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}\to(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\frac{1}{5}$

$\Leftrightarrow 1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{5}\Leftrightarrow\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2}{5}.$

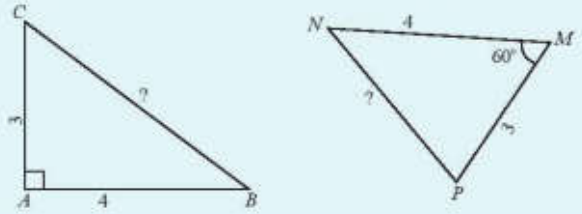
Ta có $P=\sqrt{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}=\sqrt{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$

$=\sqrt{1-2(\sin\alpha\cos\alpha)^2}=\frac{\sqrt{17}}{5}.$

Bài 2. Định lí côsin và định lí sin

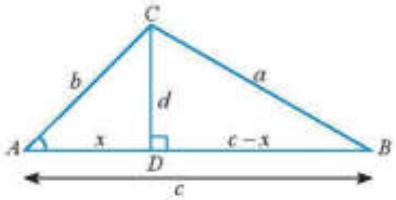
Từ khoá: Định lí côsin; Định lí sin; Diện tích tam giác; Công thức tính diện tích tam giác.

Làm thế nào để tính độ dài cạnh chưa biết của hai tam giác dưới đây?



1. Định lí côsin trong tam giác

a) Cho tam giác ABC không phải là tam giác vuông với góc A nhọn và $\widehat{C} \geq \widehat{B}$. Vẽ đường cao CD và đặt tên các độ dài như trong Hình 1. Hãy thay ? bằng chữ cái thích hợp để chứng minh công thức $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ theo gợi ý sau:



Hình 1

Xét tam giác vuông BCD, ta có: $a^2 = d^2 + (c-x)^2 = d^2 + x^2 + c^2 - 2xc$. (1)

Xét tam giác vuông ACD, ta có: $b^2 = d^2 + x^2 \Rightarrow d^2 = b^2 - x^2$. (2)

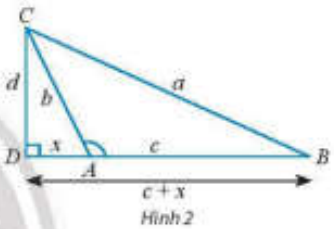
$$\cos A = \frac{?}{b} \Rightarrow ? = b\cos A. \quad (3)$$

Thay (2) và (3) vào (1), ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

Lưu ý: Nếu $\widehat{B} > \widehat{C}$ thì ta vẽ đường cao BD và chứng minh tương tự.

b) Cho tam giác ABC với góc A tù. Làm tương tự như trên, chứng minh rằng ta cũng có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$



Hình 2

Lưu ý: Vì A là góc tù nên $\cos A = -\frac{x}{b}$.

c) Cho tam giác ABC vuông tại A. Hãy chứng tỏ công thức $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ có thể viết là $a^2 = b^2 + c^2$.

Định lí côsin

Trong tam giác ABC với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A;$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B;$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Từ định lí côsin, ta có hệ quả sau đây:

Hệ quả

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}; \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Ví dụ 1

Cho tam giác ABC có $\widehat{C} = 115°$, $AC = 8$ và $BC = 12$. Tính độ dài cạnh AB và các góc A, B của tam giác đó.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Giải

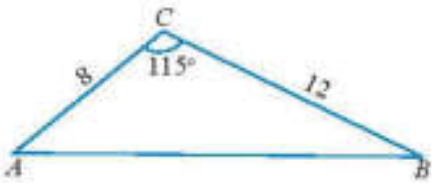
Theo định lí côsin, ta có:

$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2.BC.AC.\cos C$

$= 12^2 + 8^2 - 2.12.8.\cos 115°$

$\approx 289,14.$

Vậy $AB \approx \sqrt{289,14} \approx 17.$

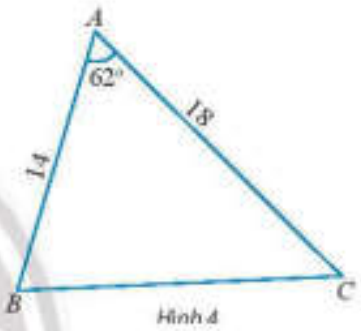


Hình 3

Theo hệ quả của định lí côsin, ta có $\cos A = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2.AB.AC} \approx \dfrac{17^2 + 8^2 - 12^2}{2.17.8} \approx 0,7684.$

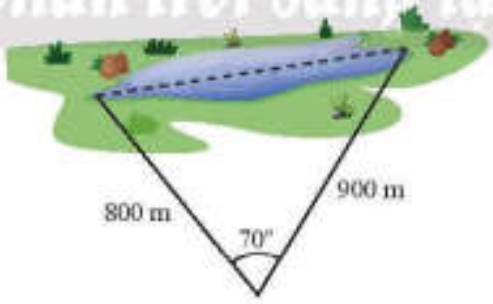
Suy ra $\widehat{A} \approx 39°47'$, $\widehat{B} = 180° - (\widehat{A} + \widehat{C}) \approx 25°13'.$

HĐ1 Tính các cạnh và các góc chưa biết của tam giác ABC trong Hình 4.



Hình 4

HĐ1 Tính khoảng cách giữa hai điểm ở hai đầu của một hồ nước. Biết từ một điểm cách hai đầu hồ lần lượt là 800 m và 900 m người quan sát nhìn hai điểm này dưới một góc 70° (Hình 5).



Hình 5

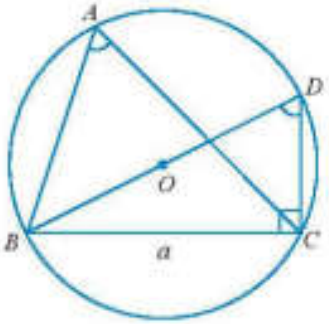
2. Định lí sin trong tam giác

HĐ2 a) Cho tam giác ABC không phải là tam giác vuông có $BC = a, AC = b, AB = c$ và R là bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó. Vẽ đường kính BD.

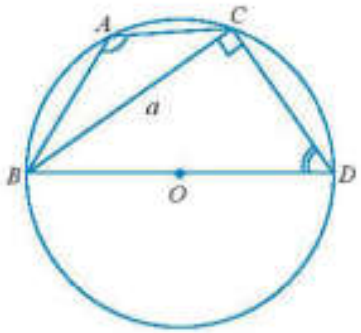
i) Tính $\sin \widehat{BDC}$ theo a và R.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

ii) Tìm mối liên hệ giữa hai góc $\widehat{BAC}$ và $\widehat{BDC}$. Từ đó chứng minh rằng $2R = \frac{a}{\sin A}$.



Hình 6a. Tam giác ABC có góc A nhọn



Hình 6b. Tam giác ABC có góc A tù

b) Cho tam giác ABC với góc A vuông. Tính $\sin A$ và so sánh a với $2R$ để chứng tỏ ta vẫn có công thức $2R = \frac{a}{\sin A}$.

Từ 2, ta có định lí sau:

Định lí sin

Trong tam giác ABC với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Từ định lí sin, ta có hệ quả sau đây:

Hệ quả

$a = 2R\sin A$; $b = 2R\sin B$; $c = 2R\sin C$;

$\sin A = \frac{a}{2R}$; $\sin B = \frac{b}{2R}$; $\sin C = \frac{c}{2R}$.

Ví dụ 2

Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 72°$, $\widehat{B} = 83°$, $BC = 18$. Tính độ dài các cạnh AC, AB và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

Giải

Đặt $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.

Ta có: $a = 18$, $\widehat{C} = 180° - (72° + 83°) = 25°$.

Áp dụng định lí sin, ta có $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

Chân trời sáng tạo

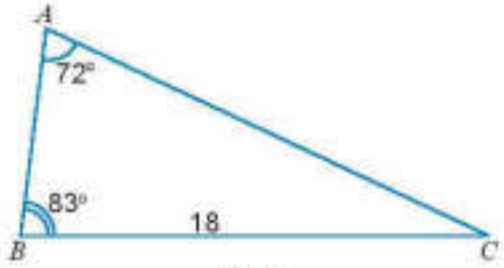
Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Suy ra:

$$AC = b = \frac{a\sin B}{\sin A} = \frac{18.\sin 83^\circ}{\sin 72^\circ} \approx 18,8;$$

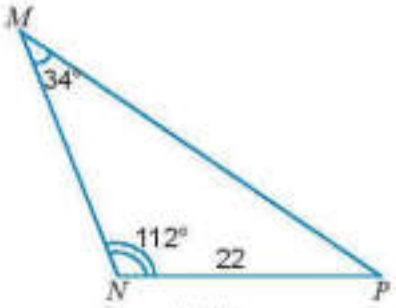
$$AB = c = \frac{a\sin C}{\sin A} = \frac{18.\sin 25^\circ}{\sin 72^\circ} \approx 8;$$

$$R = \frac{a}{2.\sin A} = \frac{18}{2.\sin 72^\circ} \approx 9,5.$$



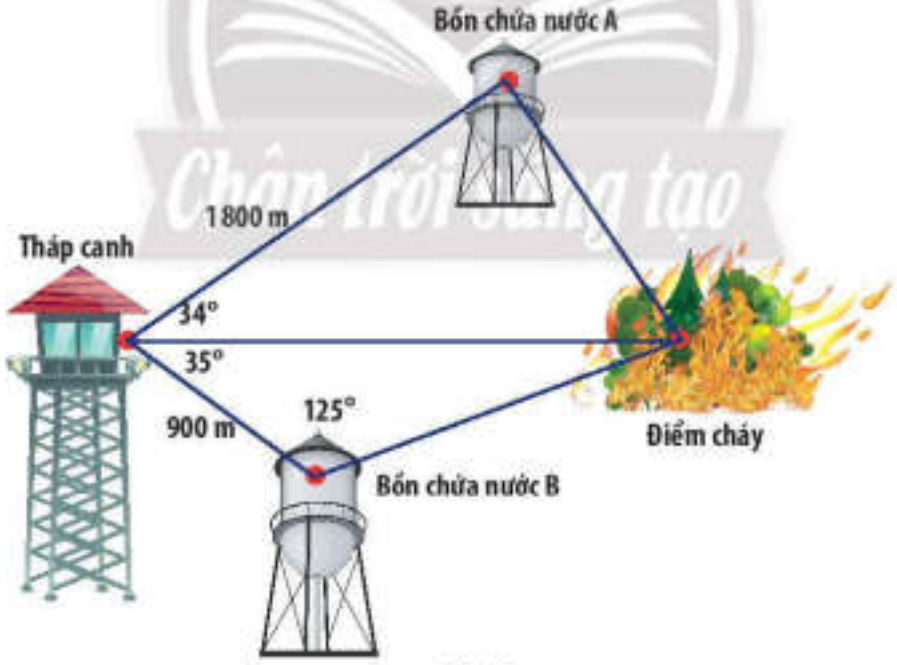
Hình 7

2 Tính các cạnh và các góc chưa biết của tam giác MNP trong Hình 8.



Hình 8

2 Trong một khu bảo tồn, người ta xây dựng một tháp canh và hai bồn chứa nước A, B để phòng hoả hoạn. Từ tháp canh, người ta phát hiện đám cháy và số liệu đưa về như Hình 9. Nên dẫn nước từ bồn chứa A hay B để dập tắt đám cháy nhanh hơn?



Hình 9

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

3. Các công thức tính diện tích tam giác

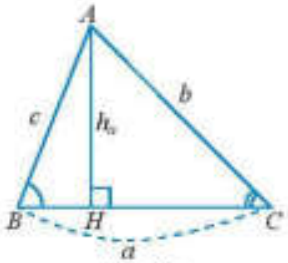
3 Cho tam giác ABC như Hình 10.

a) Viết công thức tính diện tích S của tam giác ABC theo a và h_a.

b) Tính h_a theo b và $\sin C$.

c) Dùng hai kết quả trên để chứng minh công thức $S = \frac{1}{2}ab\sin C$.

d) Dùng định lí sin và kết quả ở câu c) để chứng minh công thức $S = \frac{abc}{4R}$.



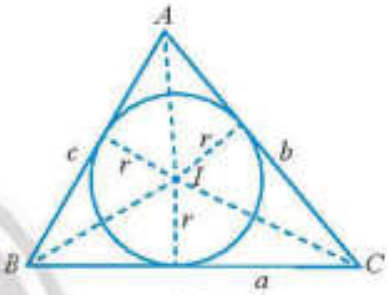
Hình 10

4 Cho tam giác ABC có $BC = a, AC = b, AB = c$ và $(I; r)$ là đường tròn nội tiếp tam giác (Hình 11).

a) Tính diện tích các tam giác IBC, IAC, IAB theo r và a, b, c.

b) Dùng kết quả trên để chứng minh công thức tính diện tích tam giác ABC:

$$S = \frac{r(a+b+c)}{2}.$$



Hình 11

Bằng cách áp dụng các hệ thức lượng trong tam giác, ta có thể tìm thêm được nhiều công thức tính diện tích tam giác. Ví dụ: Thay $h_a = c.\sin B$ vào công thức tính diện tích $S = \frac{1}{2}ah_a$ ta được $S = \frac{1}{2}ac\sin B$.

Cho tam giác ABC. Ta kí hiệu:

- h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao lần lượt ứng với các cạnh BC, CA, AB.
- R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.
- r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.
- p là nửa chu vi tam giác.
- S là diện tích tam giác.

Ta có các ***công thức tính diện tích tam giác*** sau:

1) $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$;

2) $S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B$;

3) $S = \frac{abc}{4R}$;

4) $S = pr$;

5) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (***công thức Heron***).

Chân trời sáng tạo

Ví dụ 3

Cho tam giác ABC có $a=2\sqrt{3}$, $b=2$ và $\widehat{C}=30^\circ$.

a) Tính diện tích tam giác ABC.

b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Giải

a) Áp dụng công thức $S=\frac{1}{2}ab\sin C$, ta có:

$$S=\frac{1}{2}.2\sqrt{3}.2.\sin 30^\circ=\frac{1}{2}.2\sqrt{3}.2.\frac{1}{2}=\sqrt{3}\approx 1,7.$$

b) Áp dụng định lí côsin, ta có: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=12+4-2.2\sqrt{3}.2.\frac{\sqrt{3}}{2}=4$.

Suy ra $c=2$.

Áp dụng định lí sin, ta có: $R=\frac{c}{2\sin C}=\frac{2}{2.\sin 30^\circ}=\frac{2}{2.\frac{1}{2}}=2$.

Ví dụ 4

Cho tam giác ABC có các cạnh $a=30$, $b=26$, $c=28$.

a) Tính diện tích tam giác ABC.

b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Giải

a) Ta có $p=\frac{1}{2}.(30+26+28)=42$.

Áp dụng công thức Heron, ta có:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{42(42-30)(42-26)(42-28)}=336.$$

b) Ta có $S=\frac{abc}{4R}$, suy ra $R=\frac{abc}{4S}=\frac{30.26.28}{4.336}=16,25$.

Ta lại có $S=pr$, suy ra $r=\frac{S}{p}=\frac{336}{42}=8$.

Tính diện tích tam giác ABC và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC trong các trường hợp sau:

a) Các cạnh $b=14$, $c=35$ và $\widehat{A}=60^\circ$;

b) Các cạnh $a=4$, $b=5$, $c=3$.

Chân trời sáng tạo

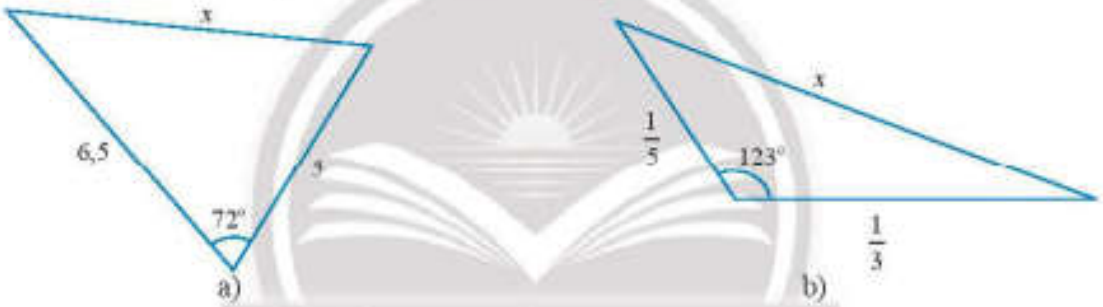
3 Tính diện tích một cánh buồm hình tam giác. Biết cánh buồm đó có chiều dài một cạnh là 3,2 m và hai góc kề cạnh đó có số đo là 48° và 105° (Hình 12).



Hình 12

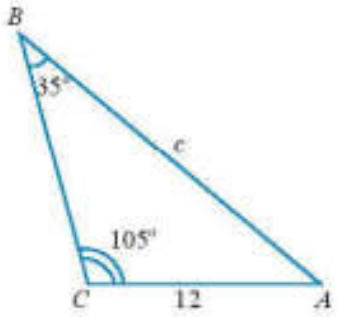
BÀI TẬP

1. Tính độ dài cạnh x trong các tam giác sau:



Hình 13

2. Tính độ dài cạnh c trong tam giác ABC ở Hình 14.

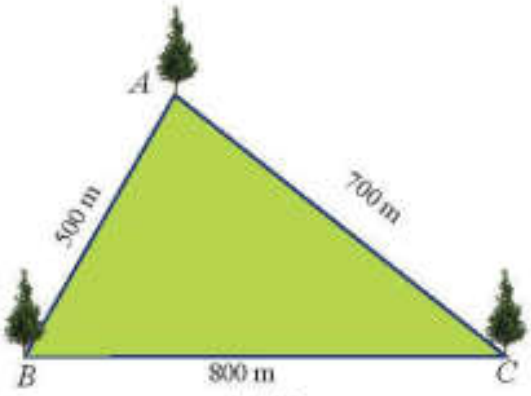


Hình 14

3. Cho tam giác ABC, biết cạnh $a = 152$, $\widehat{B} = 79°$, $\widehat{C} = 61°$. Tính các góc, các cạnh còn lại và bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác đó.

Chân trời sáng tạo

4. Một công viên có dạng hình tam giác với các kích thước như Hình 15. Tính số đo các góc của tam giác đó.



Hình 15

5. Tính diện tích một lá cờ hình tam giác cân có độ dài cạnh bên là 90 cm và góc ở đỉnh là 35°.


Hình 16

6. Cho tam giác ABC có $AB = 6, AC = 8$ và $\widehat{A} = 60°$.

a) Tính diện tích tam giác ABC.

b) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tính diện tích tam giác IBC.

7. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và độ dài ba cạnh AB, BC, CA lần lượt là 15, 18, 27.

a) Tính diện tích và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

b) Tính diện tích tam giác GBC.

8. Cho h_a là đường cao vẽ từ đỉnh A, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh hệ thức: $h_a = 2R\sin B\sin C$.

9. Cho tam giác ABC có góc B nhọn, AD và CE là hai đường cao.

a) Chứng minh $\dfrac{S_{BDE}}{S_{BAC}} = \dfrac{BD \cdot BE}{BA \cdot BC}$.

b) Biết rằng $S_{ABC} = 9S_{BDE}$ và $DE = 2\sqrt{2}$. Tính $\cos B$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

10. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có các đường chéo $AC = x, BD = y$ và góc giữa AC và BD bằng α. Gọi S là diện tích của tứ giác $ABCD$.

a) Chứng minh $S = \dfrac{1}{2}xy\sin\alpha$.

b) Nêu kết quả trong trường hợp $AC \perp BD$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Dạng 1: Sử dụng định lý sin và định lý cosin

1. Phương pháp.

Định lí cô – sin: Trong tam giác ABC với $BC=a, AC=b$ và $AB=c$. Ta có

$$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A,$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca.\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab.\cos C$$

Ta có thể suy ra hệ quả sau

Hệ quả 1.

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$
$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$
$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

Định lí sin : Trong tam giác ABC với $BC=a, AC=b, AB=c$ và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp.

Ta có $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

2. Các ví dụ.

Câu 1. Cho tam giác ABC, biết

a) $a=12, b=13, c=15$. Tính độ lớn góc A. b) $AB=5, AC=8, \widehat{A}=60^o$. Tính cạnh BC

Lời giải.

a) Ta có $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{13^2+15^2-12^2}{2.13.15}=\frac{25}{39}$. Suy ra $\widehat{A}\approx 50^o$

b) Ta có $BC^2=AC^2+AB^2-2AC.AB.\cos A=8^2+5^2-2.8.5.\cos 60^o=49$. Vậy $BC=7$

Câu 2. Cho tam giác ABC, biết

a) $\widehat{A}=60^o, \widehat{B}=45^o, b=4$. Tính cạnh b và c.

b) $\widehat{A}=60^o, a=6$. Tính R

Lời giải.

a) Ta có $A+B+C=180^o \Rightarrow C=180^o-A-B=75^o$.

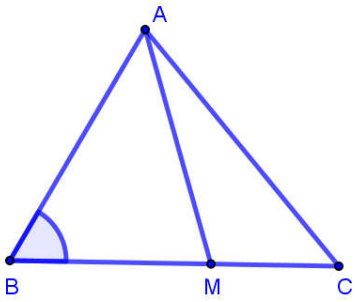
Suy ra $a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{4\sin 60^o}{\sin 45^o}\approx 4,9$ và $c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{4\sin 75^o}{\sin 45^o}\approx 5,5$

b) Ta có $R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{6}{2\sin 60^o}\approx 3,5$.

Câu 3. Cho tam giác ABC, có $AB=8, AC=9, BC=10$. Một điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $BM=7$. Tính độ dài đoạn thẳng AM.

Lời giải.

Ta có $\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \dfrac{83}{160}$



Áp dụng định lí cô-sin cho tam giác ABM, ta có

$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB.BM.\cos B = 8^2 + 7^2 - 2.8.7.\dfrac{83}{160} = \dfrac{549}{10}$

Vậy $AM = 3\sqrt{6,1}$

Câu 4. Cho tam giác ABC, có $\widehat{B} = 60^o, \widehat{C} = 45^o, BC = a$

a) Tính độ dài hai cạnh AB, AC.

b) Chứng minh $\cos 75^o = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

Lời giải.

a) Ta có $\widehat{A} = 180^o - \left(60^o + 45^o\right) = 75^o$. Đặt $AC = b, AB = c$. Theo định lí hàm số sin, ta có

$\dfrac{b}{\sin 60^o} = \dfrac{a}{\sin 75^o} = \dfrac{c}{\sin 45^o}$. Suy ra $b = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sin 75^o}; c = \dfrac{a\sqrt{2}}{2\sin 75^o}$

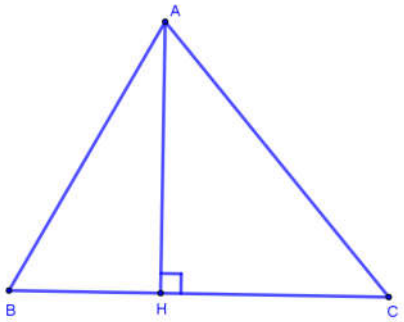
b) Kẻ $AH \perp BC$ do $\widehat{B}, \widehat{C}$ đều là góc nhọn nên H thuộc đoạn BC, hay $BC = HB + HC$.

Ta có $HC = \dfrac{b\sqrt{2}}{2}; HB = \dfrac{c}{2}$.

Suy ra $a = HC + HB = b\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{c}{2} = \dfrac{a\sqrt{6} + a\sqrt{2}}{4\sin 75^o}$.

Do đó $\sin 75^o = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ và

$\cos 75^o = \sqrt{1 - \sin^2 75^o} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)^2} = \dfrac{1}{4}\sqrt{8 - 2\sqrt{12}} = \dfrac{1}{4}\sqrt{\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.



Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Dạng 2: Sử dụng các công thức liên quan đến diện tích tam giác

1. Phương pháp.

Công thức diện tích tam giác

Với tam giác ABC ta kí hiệu h_a, h_b, h_c là độ dài đường cao lần lượt tương ứng với các cạnh BC, CA, AB ; R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ; $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi tam giác ; S là diện tích tam giác. Khi đó ta có

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$
$$= \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$$
$$= \frac{abc}{4R}$$
$$= pr$$
$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

2. Các ví dụ.

Câu 1. Cho tam giác ABC, biết

a) $a = 7, b = 8, c = 6$. Tính S và h_a.

b) $b = 7, c = 5, \cos A = \dfrac{3}{5}$. Tính S và R, r

Lời giải.

a) Áp dụng công thức Hê-rông với $p = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{21}{2}$

Ta có $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\dfrac{21}{2}\left(\dfrac{21}{2}-7\right)\left(\dfrac{21}{2}-8\right)\left(\dfrac{21}{2}-6\right)} = \dfrac{21\sqrt{15}}{4}$

Vì $S = \dfrac{1}{2}ah_a \Rightarrow \dfrac{21\sqrt{15}}{4} = \dfrac{1}{2}7.h_a \Rightarrow h_a = \dfrac{3\sqrt{15}}{2}$

b) Ta có $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25} \Rightarrow \sin A = \dfrac{4}{5}$ (vì $\sin A > 0$).

Mà $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}.7.5.\dfrac{4}{5} = 14$

Theo Định lí Cô-sin ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 7^2 + 5^2 - 2.7.5.\dfrac{3}{5} = 32 \Rightarrow a = 4\sqrt{2}$

Từ $S = \dfrac{1}{2}ah_a \Rightarrow h_a = \dfrac{2S}{a} = \dfrac{28}{4\sqrt{2}} = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}$

Theo định lí sin: $\dfrac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \dfrac{a}{2\sin A} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2.\dfrac{4}{5}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

Ta có $S = pr \Rightarrow r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{14}{5+7+4\sqrt{2}} = \dfrac{14}{12+4\sqrt{2}} = \dfrac{7}{6+2\sqrt{2}}$

Câu 2. Cho tam giác ABC, biết $a=3,b=4,c=6$. Tính góc lớn nhất và đường cao tương ứng với cạnh lớn nhất

Lời giải.

Ta có $c=6$ là cạnh lớn nhất của tam giác, do đó là góc lớn nhất.

Áp dụng định lí cô-sin, ta có $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{3^2+4^2-6^2}{2.3.4}=-\dfrac{11}{24}\Rightarrow \widehat{C}\approx 117^o17'$

Ta có h_c là đường cao ứng với cạnh lớn nhất. Theo công thức Hê-rông

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ với $p=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{13}{2}$

Nên $S=\sqrt{\dfrac{13}{2}\left(\dfrac{13}{2}-3\right)\left(\dfrac{13}{2}-4\right)\left(\dfrac{13}{2}-6\right)}=\dfrac{\sqrt{455}}{4}$

Ta có: $h_c=\dfrac{2S}{c}=\dfrac{\sqrt{455}}{2.6}=\dfrac{\sqrt{455}}{12}$

Câu 3. Tính các góc A,B và h_a,R của tam giác ABC biết $a=\sqrt{6},b=2,c=\sqrt{3}+1$

Lời giải.

Theo định lí cô-sin, ta có

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{4^2+\left(\sqrt{3}+1\right)^2-6^2}{2.2.\left(\sqrt{3}+1\right)}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \widehat{A}=60^o$,

$\cos B=\dfrac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2+6-4}{2.\left(\sqrt{3}+1\right).\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \widehat{B}=45^o$

$h_a=\dfrac{2S}{a}=\dfrac{ac\sin B}{a}=c\sin B=\left(\sqrt{3}+1\right)\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Áp dụng định lí sin ta có $\dfrac{b}{\sin B}=2R\Rightarrow R=\dfrac{b}{2\sin B}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

Câu 4. Cho tam giác ABC, biết $a=21,b=17,c=10$

a) Tính diện tích S của tam giác ABC và chiều cao h_a.

b) Tính bán kính đường tròn nội tiếp r và trung tuyến m_a.

Lời giải.

a) Ta có $p=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{21+17+10}{2}=24$

Theo công thức Hê-rông, ta có

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)}=84$

Do đó: $h_a=\dfrac{2S}{a}=\dfrac{2.84}{21}=8$.

b) Ta có $S=pr\Rightarrow r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{82}{24}=3,5$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Độ dài trung tuyến $m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{17^2+10^2}{2}-\frac{21^2}{4}=\frac{337}{4}=84,25$

Câu 5. Cho tam giác ABC, có $\widehat{A}=60^o, b=20, c=25$.

a) Tính diện tích S và chiều cao h_a.

b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp R và bán kính đường tròn nội tiếp r

Lời giải.

a) Ta có $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}.20.35.\frac{\sqrt{3}}{2}=175\sqrt{3}$

Hơn nữa $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=20^2+35^2-2.20.35.\frac{1}{2}=925$

Vậy $a=\sqrt{925}\approx 30,41$

Từ công thức $S=\frac{1}{2}ah_a\Rightarrow h_a=\frac{2S}{a}=\frac{350\sqrt{3}}{\sqrt{925}}\approx 19,94$

b) Từ công thức $\frac{a}{\sin A}=2R\Rightarrow R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{\sqrt{925}}{\sqrt{3}}\approx 17,56$

Từ công thức $S=pr$ với $p=\frac{a+b+c}{2}$

ta có $r=\frac{2S}{a+b+c}=\frac{bc\sin A}{a+b+c}=\frac{20.30.\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{925}+20+35}\approx 7,10$

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tam giác ABC có $AB=5, BC=7, CA=8$. Số đo góc $\hat{A}$ bằng:

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải

Chọn C

Theo định lí hàm cosin, ta có $\cos\widehat{A}=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB.AC}=\frac{5^2+8^2-7^2}{2.5.8}=\frac{1}{2}$.

Do đó, $\widehat{A}=60°$.

Câu 2: Tam giác ABC có $AB=2, AC=1$ và $\hat{A}=60^\circ$. Tính độ dài cạnh BC.

A. $BC=1$. **B.** $BC=2$. **C.** $BC=\sqrt{2}$. **D.** $BC=\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

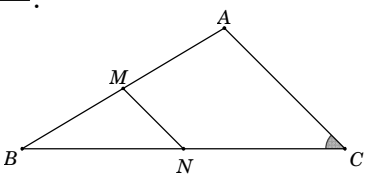
Theo định lí hàm cosin, ta có

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos\widehat{A}=2^2+1^2-2.2.1.\cos 60°=3\Rightarrow BC=\sqrt{3}$.

Câu 3: Tam giác ABC có đoạn thẳng nối trung điểm của AB và BC bằng 3, cạnh $AB=9$ và $\widehat{ACB}=60^\circ$. Tính độ dài cạnh cạnh BC.

A. $BC=3+3\sqrt{6}$. **B.** $BC=3\sqrt{6}-3$.

C. $BC=3\sqrt{7}$. **D.** $BC=\dfrac{3+3\sqrt{33}}{2}$.



Lời giải

Chọn A

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC.

$\longrightarrow MN$ là đường trung bình của ΔABC.

$\longrightarrow MN=\dfrac{1}{2}AC$. Mà $MN=3$, suy ra $AC=6$.

Theo định lí hàm cosin, ta có

$AB^2=AC^2+BC^2-2.AC.BC.\cos\widehat{ACB}$

$\Leftrightarrow 9^2=6^2+BC^2-2.6.BC.\cos 60^\circ$

$\Rightarrow BC=3+3\sqrt{6}$

Câu 4: Tam giác ABC có $\hat{B}=60^\circ, \hat{C}=45^\circ$ và $AB=5$. Tính độ dài cạnh AC.

A. $AC=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$. **B.** $AC=5\sqrt{3}$. **C.** $AC=5\sqrt{2}$. **D.** $AC=10$.

Lời giải

Chọn A

Theo định lí hàm sin, ta có $\dfrac{AB}{\sin\hat{C}}=\dfrac{AC}{\sin\hat{B}}\Leftrightarrow\dfrac{5}{\sin 45^\circ}=\dfrac{AC}{\sin 60^\circ}\Rightarrow AC=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$.

Câu 5: Cho hình thoi ABCD cạnh bằng $1\,cm$ và có $\widehat{BAD}=60^\circ$. Tính độ dài cạnh AC.

A. $AC=\sqrt{3}$. **B.** $AC=\sqrt{2}$. **C.** $AC=2\sqrt{3}$. **D.** $AC=2$.

Lời giải

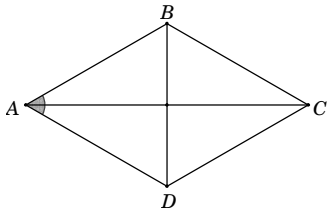
Chọn A

Do $ABCD$ là hình thoi, có $\widehat{BAD}=60^\circ\Rightarrow\widehat{ABC}=120^\circ$.

Theo định lí hàm cosin, ta có

$AC^2=AB^2+BC^2-2.AB.BC.\cos\widehat{ABC}$

$=1^2+1^2-2.1.1.\cos 120^\circ=3\Rightarrow AC=\sqrt{3}$



Câu 6: Tam giác ABC có $BC=10$ và $\widehat{A}=30^\circ$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $R=5$. **B.** $R=10$. **C.** $R=\dfrac{10}{\sqrt{3}}$. **D.** $R=10\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng định lí sin, ta có $\dfrac{BC}{\sin\widehat{BAC}}=2R\Rightarrow R=\dfrac{BC}{2.\sin\widehat{A}}=\dfrac{10}{2.\sin 30^0}=10$.

Câu 7: Tam giác ABC có $AB=3, AC=6$ và $\widehat{A}=60^\circ$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $R=3$. **B.** $R=3\sqrt{3}$. **C.** $R=\sqrt{3}$. **D.** $R=6$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng định lí Cosin, ta có $BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos\widehat{BAC}$

$= 3^2 + 6^2 - 2.3.6.\cos 60^0 = 27 \Leftrightarrow BC^2 = 27 \Leftrightarrow BC^2 + AB^2 = AC^2.$

Suy ra tam giác ABC vuông tại B, do đó bán kính $R = \frac{AC}{2} = 3.$

Câu 8: Tam giác ABC có $BC = 21\text{cm}$, $CA = 17\text{cm}$, $AB = 10\text{cm}$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $R = \frac{85}{2}\text{cm}$.
B. $R = \frac{7}{4}\text{cm}$.
C. $R = \frac{85}{8}\text{cm}$.
D. $R = \frac{7}{2}\text{cm}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $p = \frac{AB + BC + CA}{2} = 24.$ Áp dụng công thức Hê – rông, ta có

$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-CA)} = \sqrt{24.(24-21).(24-17).(24-10)} = 84\ cm^2.$

Vậy bán kính cần tìm là $S_{\Delta ABC} = \frac{AB.BC.CA}{4R} \Rightarrow R = \frac{AB.BC.CA}{4.S_{\Delta ABC}} = \frac{21.17.10}{4.84} = \frac{85}{8}\ cm.$

Câu 9: Tam giác đều cạnh a nội tiếp trong đường tròn bán kính R. Khi đó bán kính R bằng:

A. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
B. $R = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.
C. $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.
D. $R = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Xét tam giác ABC đều cạnh a, gọi M là trung điểm của BC.

Ta có $AM \perp BC$ suy ra $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.AM.BC = \frac{1}{2}.\sqrt{AB^2 - BM^2}.BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$

Vậy bán kính cần tính là $S_{\Delta ABC} = \frac{AB.BC.CA}{4R} \Rightarrow R = \frac{AB.BC.CA}{4.S_{\Delta ABC}} = \frac{a^3}{4.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$

Câu 10: Tam giác ABC vuông tại A có đường cao $AH = \frac{12}{5}\text{cm}$ và $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $R = \sqrt{3}\ cm.$
B. $R = 1,5\text{cm}$.
C. $R = 2\text{cm}$.
D. $R = 3,5\text{cm}$.

Lời giải

Chọn A

Tam giác ABC vuông tại A, có đường cao $AH \Rightarrow AB.AC = AH^2 \quad (*).$

Mặt khác $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow AB = \frac{3}{4}AC$ thế vào $(*)$, ta được $\frac{3}{4}AC^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 \Leftrightarrow AC = \frac{8\sqrt{3}}{5}.$

Suy ra $AB = \frac{3}{4}.\frac{8\sqrt{3}}{5} = \frac{6\sqrt{3}}{5} \Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2\sqrt{3}.$

Vậy bán kính cần tìm là $R = \frac{BC}{2} = \sqrt{3}\ cm.$

Câu 11: Tam giác ABC có $AB=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$, $BC=\sqrt{3}$, $CA=\sqrt{2}$. Gọi D là chân đường phân giác trong góc $\hat{A}$. Khi đó góc $\widehat{ADB}$ bằng bao nhiêu độ?

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 75°. **D.** 90°.

Lời giải

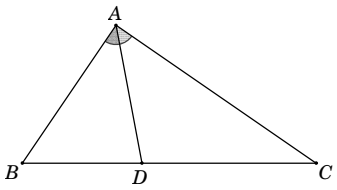
Chọn C

Theo định lí hàm cosin, ta có:

$\cos\widehat{BAC}=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2.AB.AC}=-\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \widehat{BAC}=120^\circ \Rightarrow \widehat{BAD}=60^\circ$

$\cos\widehat{ABC}=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2.AB.BC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \widehat{ABC}=45^\circ$



Trong ΔABD có $\widehat{BAD}=60^\circ, \widehat{ABD}=45^\circ\Rightarrow \widehat{ADB}=75^\circ$.

Câu 12: Tam giác AB vuông tại A, đường cao $AH=32\,cm$. Hai cạnh AB và AC tỉ lệ với 3 và 4. Cạnh nhỏ nhất của tam giác này có độ dài bằng bao nhiêu?

A. 38 *cm*. **B.** 40 *cm*. **C.** 42 *cm*. **D.** 45 *cm*.

Lời giải

Chọn B

Do tam giác ABC vuông tại A, có tỉ lệ 2 cạnh góc vuông $AB:AC$ là $3:4$ nên AB là cạnh nhỏ nhất trong tam giác.

Ta có $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow AC=\dfrac{4}{3}AB$.

Trong ΔABC có AH là đường cao

$\Rightarrow \dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{\left(\frac{4}{3}AB^2\right)}\Leftrightarrow \dfrac{1}{32^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{9}{16AB^2}\Rightarrow AB=40$.

Câu 13: Cho tam giác ABC có $AB=3\sqrt{3}$, $BC=6\sqrt{3}$ và $CA=9$. Gọi D là trung điểm BC. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD.

A. $R=\dfrac{9}{6}$. **B.** $R=3$. **C.** $R=3\sqrt{3}$. **D.** $R=\dfrac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Vì D là trung điểm của $BC\Rightarrow AD^2=\dfrac{AB^2+AC^2}{2}-\dfrac{BC^2}{4}=27\Rightarrow AD=3\sqrt{3}$.

Tam giác ABD có $AB=BD=DA=3\sqrt{3}\Rightarrow$ tam giác ABD đều.

Nên có bán kính đường tròn ngoại tiếp là $R=\dfrac{\sqrt{3}}{3}AB=\dfrac{\sqrt{3}}{3}.3\sqrt{3}=3$.

Câu 14: Tam giác ABC có $AB=3$, $AC=6$, $\widehat{BAC}=60^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC.

A. $S_{\Delta ABC}=9\sqrt{3}$. **B.** $S_{\Delta ABC}=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

C. $S_{\Delta ABC}=9$. **D.** $S_{\Delta ABC}=\dfrac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.AB.AC.\sin\widehat{A}=\frac{1}{2}.3.6.\sin 60^0=\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

Câu 15: Tam giác ABC có $AC=4$, $\widehat{BAC}=30°$, $\widehat{ACB}=75°$. Tính diện tích tam giác ABC.

A. $S_{\Delta ABC}=8$. **B.** $S_{\Delta ABC}=4\sqrt{3}$.

C. $S_{\Delta ABC}=4$. **D.** $S_{\Delta ABC}=8\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\widehat{ABC}=180^0-\left(\widehat{BAC}+\widehat{ACB}\right)=75°=\widehat{ACB}$.

Suy ra tam giác ABC cân tại A nên $AB=AC=4$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC\sin\widehat{BAC}=4.$

Câu 16: Tam giác ABC có $a=21,\ b=17,\ c=10$. Diện tích của tam giác ABC bằng:

A. $S_{\Delta ABC}=16$. **B.** $S_{\Delta ABC}=48$.

C. $S_{\Delta ABC}=24$. **D.** $S_{\Delta ABC}=84$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $p=\frac{21+17+10}{2}=24$.

Do đó $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)}=84$.

Câu 17: Tam giác ABC có $AB=3,\ AC=6,\ \widehat{BAC}=60°$. Tính độ dài đường cao h_a của tam giác.

A. $h_a=3\sqrt{3}$. **B.** $h_a=\sqrt{3}$. **C.** $h_a=3$. **D.** $h_a=\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng định lý hàm số côsin, ta có

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC\cos A=27\longrightarrow BC=3\sqrt{3}$.

Ta có $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.AB.AC.\sin\widehat{A}=\frac{1}{2}.3.6.\sin 60^0=\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

Lại có $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.BC.h_a\longrightarrow h_a=\frac{2S}{BC}=3.$

Câu 18: Tam giác ABC có $AC=4$, $\widehat{ACB}=60°$. Tính độ dài đường cao h uất phát từ đỉnh A của tam giác.

A. $h=2\sqrt{3}$. **B.** $h=4\sqrt{3}$. **C.** $h=2$. **D.** $h=4$.

Lời giải

Chọn A

Gọi H là chân đường cao xuất phát từ đỉnh A.

Tam giác vuông AHC, có $\sin\widehat{ACH}=\frac{AH}{AC}\longrightarrow AH=AC.\sin\widehat{ACH}=4.\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}.$

Câu 19: Tam giác ABC có $a=21,\ b=17,\ c=10$. Gọi B' là hình chiếu vuông góc của B trên cạnh AC. Tính BB'.

A. $BB'=8$. **B.** $BB'=\frac{84}{5}$.

C. $BB'=\frac{168}{17}$. **D.** $BB'=\frac{84}{17}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $p=\frac{21+17+10}{2}=24$.

Suy ra $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)}=84$.

Lại có $S=\frac{1}{2}b.BB'\longleftrightarrow 84=\frac{1}{2}.17.BB'\longrightarrow BB'=\frac{168}{17}$.

Câu 20: Tam giác ABC có $AB=8$ cm, $AC=18$ cm và có diện tích bằng 64 cm^2. Giá trị $\sin A$ ằng:

A. $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\sin A=\frac{3}{8}$.

C. $\sin A=\frac{4}{5}$. **D.** $\sin A=\frac{8}{9}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.AB.AC.\sin\widehat{BAC}\Leftrightarrow 64=\frac{1}{2}.8.18.\sin A\Leftrightarrow \sin A=\frac{8}{9}$.

Câu 21: Hình bình hành $ABCD$ có $AB=a$, $BC=a\sqrt{2}$ và $\widehat{BAD}=45^0$. Khi đó hình bình hành có diện tích bằng:

A. $2a^2$. **B.** $a^2\sqrt{2}$. **C.** a^2. **D.** $a^2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Diện tích tam giác ABD là $S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}.AB.AD.\sin\widehat{BAD}=\frac{1}{2}.a.a\sqrt{2}.\sin 45^0=\frac{a^2}{2}$.

Vậy diện tích hình bình hành $ABCD$ là $S_{ABCD}=2.S_{\Delta ABD}=2.\frac{a^2}{2}=a^2$.

Câu 22: Tam giác đều nội tiếp đường tròn bán kính $R=4$ cm có diện tích bằng:

A. 13 cm^2 **B.** $13\sqrt{2}$ cm^2

C. $12\sqrt{3}$ cm^2 **D.** 15 cm^2.

Lời giải

Chọn C

Xét tam giác ABC đều, có độ dài cạnh bằng a.

Theo định lí sin, ta có $\frac{BC}{\sin\widehat{BAC}}=2R\Leftrightarrow\frac{a}{\sin 60^0}=2.4\Leftrightarrow a=8.\sin 60^0=4\sqrt{3}$.

Vậy diện tích cần tính là $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.AB.AC.\sin\widehat{BAC}=\frac{1}{2}.\left(4\sqrt{3}\right)^2.\sin 60^0=12\sqrt{3}\ cm^2$.

Câu 23: Tam giác ABC có $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ và có diện tích S. Nếu tăng cạnh BC lên

2 lần đồng thời tăng cạnh AC lên 3 lần và giữ nguyên độ lớn của góc C thì khi đó diện tích của tam giác mới được tạo nên bằng:

A. $2S$. **B.** $3S$. **C.** $4S$. **D.** $6S$.

Lời giải

Chọn D

Diện tích tam giác ABC ban đầu là $S=\frac{1}{2}.AC.BC.\sin\widehat{ACB}=\frac{1}{2}.ab.\sin\widehat{ACB}.$

Khi tăng cạnh BC lên 2 lần và cạnh AC lên 3 lần thì diện tích tam giác ABC lúc này là $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.(3AC).(2BC).\sin\widehat{ACB}=6.\frac{1}{2}.AC.BC.\sin\widehat{ACB}=6S.$

Câu 24: Tam giác ABC có $BC=a$ và $CA=b$. Tam giác ABC có diện tích lớn nhất khi góc C bằng:

A. 60^0. **B.** 90^0. **C.** 150^0. **D.** 120^0.

Lời giải

Chọn B

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.AC.BC.\sin\widehat{ACB}=\frac{1}{2}.ab.\sin\widehat{ACB}.$

Vì a, b không đổi và $\sin\widehat{ACB}\le 1, \forall C$ nên suy ra $S_{\Delta ABC}\le\frac{ab}{2}.$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\sin\widehat{ACB}=1\Leftrightarrow\widehat{ACB}=90^0.$

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích tam giác ABC là $S=\frac{ab}{2}.$

Câu 25: Tam giác ABC có hai đường trung tuyến BM, CN vuông góc với nhau và có $BC=3$, góc $\widehat{BAC}=30^0$. Tính diện tích tam giác ABC.

A. $S_{\Delta ABC}=3\sqrt{3}$. **B.** $S_{\Delta ABC}=6\sqrt{3}$. **C.** $S_{\Delta ABC}=9\sqrt{3}$. **D.** $S_{\Delta ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Vì $BM\perp CN\longrightarrow 5a^2=b^2+c^2$. (Áp dụng hệ quả đã có trước)

Trong tam giác ABC, ta có $a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A=5a^2-2bc\cos A\longrightarrow bc=\frac{2a^2}{\cos A}.$

Khi đó $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}.\frac{2a^2}{\cos A}.\sin A=a^2\tan A=3\sqrt{3}$.

Câu 26: Tam giác ABC có $AB=5, AC=8$ và $\widehat{BAC}=60^0$. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

A. $r=1$. **B.** $r=2$. **C.** $r=\sqrt{3}$. **D.** $r=2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng định lý hàm số côsin, ta có

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC\cos A=49\longrightarrow BC=7$.

Diện tích $S=\frac{1}{2}AB.AC.\sin A=\frac{1}{2}.5.8.\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$.

Lại có $S=p.r\longrightarrow r=\frac{S}{p}=\frac{2S}{AB+BC+CA}=\sqrt{3}$.

Câu 27: Tam giác ABC có $a=21,\ b=17,\ c=10$. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

A. $r=16$. **B.** $r=7$. **C.** $r=\frac{7}{2}$. **D.** $r=8$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $p=\frac{21+17+10}{2}=24$.

Suy ra $S=\sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)}=84$.

Lại có $S=p.r\longrightarrow r=\frac{S}{p}=\frac{84}{24}=\frac{7}{2}$.

Câu 28: Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đều cạnh a.

A. $r=\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $r=\frac{a\sqrt{2}}{5}$. **C.** $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **D.** $r=\frac{a\sqrt{5}}{7}$.

Lời giải

Chọn C

Diện tích tam giác đều cạnh a bằng: $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Lại có $S=pr\longrightarrow r=\frac{S}{p}=\frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{3a}{2}}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Câu 29: Tam giác ABC vuông tại A có $AB=6$ cm, $BC=10$ cm. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

A. $r=1$ cm. **B.** $r=\sqrt{2}$ cm.
C. $r=2$ cm. **D.** $r=3$ cm.

Lời giải

Chọn C

Dùng Pitago tính được $AC=8$, suy ra $p=\frac{AB+BC+CA}{2}=12$.

Diện tích tam giác vuông $S=\frac{1}{2}AB.AC=24$ .Lại có $S=p.r\longrightarrow r=\frac{S}{p}=2$ cm.

Câu 30: Tam giác ABC vuông cân tại A, có $AB=a$. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

A. $r=\frac{a}{2}$. **B.** $r=\frac{a}{\sqrt{2}}$. **C.** $r=\frac{a}{2+\sqrt{2}}$. **D.** $r=\frac{a}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết, ta có $AC=AB=a$ và $BC=a\sqrt{2}$.

Suy ra $p=\frac{AB+BC+CA}{2}=a\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$.

Diện tích tam giác vuông $S=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{a^2}{2}$.

Lại có $S=p.r\longrightarrow r=\frac{S}{p}=\frac{a}{2+\sqrt{2}}$.

Câu 31: Tam giác ABC vuông cân tại A và nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Khi đó tỉ số $\frac{R}{r}$ bằng:

A. $1+\sqrt{2}$. **B.** $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$. **D.** $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $AC=AB=a\longrightarrow BC=a\sqrt{2}$. Suy ra $R=\frac{BC}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $p=\frac{AB+BC+CA}{2}=a\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$.

Diện tích tam giác vuông $S=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{a^2}{2}$.

Lại có $S=p.r\longrightarrow r=\frac{S}{p}=\frac{a}{2+\sqrt{2}}$. Vậy $\frac{R}{r}=1+\sqrt{2}$.

Bài 3. Giải tam giác và ứng dụng thực tế

Từ khoá: Giải tam giác; Các yếu tố xác định tam giác.

Với số liệu đo được từ một bên bờ sông như hình vẽ bên, bạn hãy giúp nhân viên đo đạc tính khoảng cách giữa hai cái cây bên kia bờ sông.



1. Giải tam giác

Giải tam giác là tìm số đo các cạnh và các góc còn lại của tam giác khi ta biết được các yếu tố đủ để xác định tam giác đó.

Để giải tam giác, ta thường sử dụng một cách hợp lí các hệ thức lượng như: định lí sin, định lí côsin và các công thức tính diện tích tam giác.

Ví dụ 1

Giải tam giác ABC trong các trường hợp sau:

a) $AB = 85, AC = 95$ và $\widehat{A} = 40°$;

b) $AB = 15, AC = 25$ và $BC = 30$.

Giải

Đặt $a = BC, b = AC, c = AB$.

a) Ta cần tính cạnh a và hai góc $\widehat{B}$, $\widehat{C}$.

Áp dụng định lí côsin, ta có:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 95^2 + 85^2 - 2.95.85.\cos 40° \approx 3878,38$.

Suy ra $a \approx \sqrt{3878,38} \approx 62,3$.

Áp dụng hệ quả định lí côsin, ta có:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \approx \frac{62,3^2 + 85^2 - 95^2}{2.62,3.85} \approx 0,197.$$

Suy ra $\widehat{B} = 78°38'$, $\widehat{C} = 180° - 40° - 78°38' = 61°22'$.

b) Ta cần tính số đo ba góc $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$.

Áp dụng hệ quả của định lí côsin, ta có:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{25^2 + 15^2 - 30^2}{2.25.15} = -\frac{1}{15} \Rightarrow \widehat{A} = 93°49'.$$

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Áp dụng định lí sin, ta có: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow\frac{30}{\sin 93^\circ 49'}=\frac{25}{\sin B}\Rightarrow \sin B=0{,}8315$

$\Rightarrow \widehat{B}\approx 56^\circ 15',\ \widehat{C}\approx 180^\circ-93^\circ 49'-56^\circ 15'=29^\circ 56'.$

Giải tam giác ABC trong các trường hợp sau:

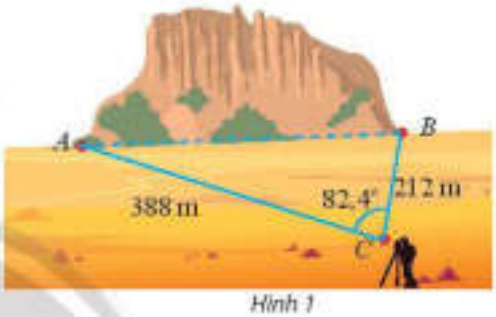
a) $a=17{,}4;\ \widehat{B}=44^\circ 30';\ \widehat{C}=64^\circ$. b) $a=10;\ b=6;\ c=8$.

2. Áp dụng giải tam giác vào thực tế

Vận dụng giải tam giác giúp ta giải quyết rất nhiều bài toán trong thực tế, đặc biệt là trong thiết kế và xây dựng.

Ví dụ 2

Một đường hầm được dự kiến xây dựng xuyên qua một ngọn núi. Để ước tính chiều dài của đường hầm, một kĩ sư đã thực hiện các phép đo và cho ra kết quả như Hình 1. Tính chiều dài của đường hầm từ các số liệu đã khảo sát được.



Hình 1

Giải

Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABC, ta có:

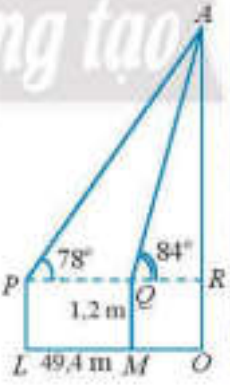
$AB^2=CA^2+CB^2-2\cdot CA\cdot CB\cdot\cos C=388^2+212^2-2\cdot 388\cdot 212\cdot\cos 82{,}4^\circ\approx 173\,730.$

Suy ra $AB\approx\sqrt{173730}\approx 417$ (m).

Vậy đường hầm dài khoảng 417 m.

Ví dụ 3

Để xác định chiều cao của một toà nhà cao tầng, một người đứng tại điểm M, sử dụng giác kế nhìn thấy đỉnh toà nhà với góc nâng $\widehat{RQA}=84^\circ$, người đó lùi ra xa một khoảng cách $LM=49{,}4$ m thì nhìn thấy đỉnh toà nhà với góc nâng $\widehat{RPA}=78^\circ$. Tính chiều cao của toà nhà, biết rằng khoảng cách từ mặt đất đến ống ngắm của giác kế đó là $PL=QM=1{,}2$ m (Hình 2).




Hình 2

Giải thích: Góc nâng là góc tạo bởi tia ngắm nhìn lên và đường nằm ngang.

Giải

Ta có $\widehat{PAQ}=\widehat{AQR}-\widehat{APR}=84^\circ-78^\circ=6^\circ$.

Áp dụng định lí sin trong tam giác APQ, ta có:

$$\frac{AQ}{\sin P}=\frac{PQ}{\sin A}\Rightarrow\frac{AQ}{\sin 78^\circ}=\frac{PQ}{\sin 6^\circ}\Rightarrow AQ=\frac{PQ\cdot\sin 78^\circ}{\sin 6^\circ}.$$

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Trong tam giác vuông AQR, ta có:

$$AR = AQ.\sin 84^\circ = \frac{PQ.\sin 78^\circ.\sin 84^\circ}{\sin 6^\circ} = \frac{49,4.\sin 78^\circ.\sin 84^\circ}{\sin 6^\circ} \approx 460 \text{ (m)}.$$

Vậy chiều cao của toà nhà là: $AO = AR + RO \approx 460 + 1,2 = 461,2$ (m).

Ví dụ 4

Hai trạm quan sát ở hai thành phố Đà Nẵng và Nha Trang đồng thời nhìn thấy một vệ tinh với góc nâng lần lượt là 75° và 60° (Hình 3). Vệ tinh cách trạm quan sát tại thành phố Đà Nẵng bao nhiêu kilômét? Biết rằng khoảng cách giữa hai trạm quan sát là 520 km.



Hình 3

Giải

Gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn vị trí của thành phố Đà Nẵng, Nha Trang và vệ tinh.

Ta có: $\widehat{C} = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$.

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC, ta có:

$$AC = \frac{AB.\sin B}{\sin C} = \frac{520.\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 637 \text{ (km)}.$$

Vậy vệ tinh cách trạm quan sát tại thành phố Đà Nẵng khoảng 637 km.

Ví dụ 5

Hãy giải bài toán nêu ra trong hoạt động khởi động của bài.



Hình 4

Giải

Gọi vị trí của người đo đạc đứng là điểm A và gọi B, C lần lượt là vị trí hai cái cây bên kia sông. Ta có tam giác ABC với $AC = 100$ m, $AB = 75$ m và $\widehat{A} = 32^\circ$.

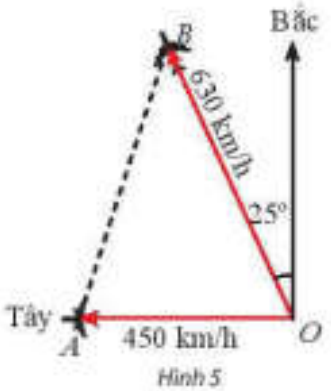
Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABC, ta có:

$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2.AC.AB.\cos A = 100^2 + 75^2 - 2.100.75.\cos 32^\circ \approx 2904,3$.

Suy ra $BC \approx \sqrt{2904,3} \approx 53,9$ (m).

Vậy hai cái cây bên kia sông cách nhau khoảng 53,9 m.

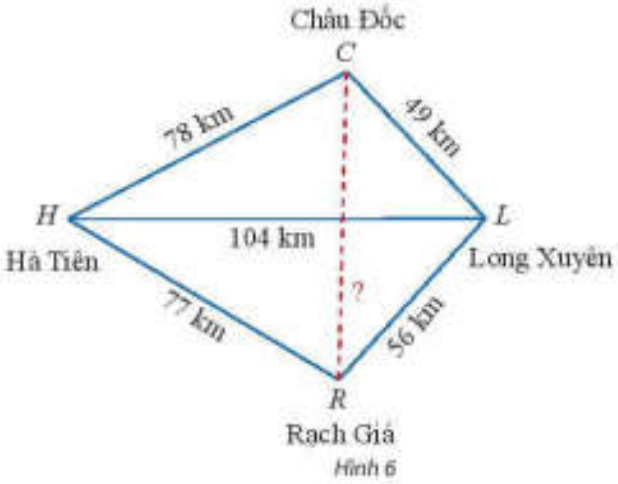
1 Hai máy bay cùng cất cánh từ một sân bay nhưng bay theo hai hướng khác nhau. Một chiếc di chuyển với tốc độ 450 km/h theo hướng tây và chiếc còn lại di chuyển theo hướng lệch so với hướng bắc 25° về phía tây với tốc độ 630 km/h (Hình 5). Sau 90 phút, hai máy bay cách nhau bao nhiêu kilômét? Giả sử chúng đang ở cùng độ cao.



Hình 5

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

2 Trên bản đồ địa lí, người ta thường gọi tứ giác với bốn đỉnh lần lượt là các thành phố Hà Tiên, Châu Đốc, Long Xuyên, Rạch Giá là tứ giác Long Xuyên. Dựa theo các khoảng cách đã cho trên Hình 6, tính khoảng cách giữa Châu Đốc và Rạch Giá.



Hình 6

BÀI TẬP

1. Giải tam giác ABC trong các trường hợp sau:

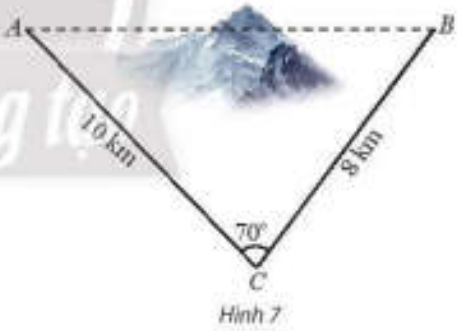
a) $AB = 14, AC = 23, \widehat{A} = 125°$;

b) $BC = 22, \widehat{B} = 64°, \widehat{C} = 38°$;

c) $AC = 22, \widehat{B} = 120°, \widehat{C} = 28°$;

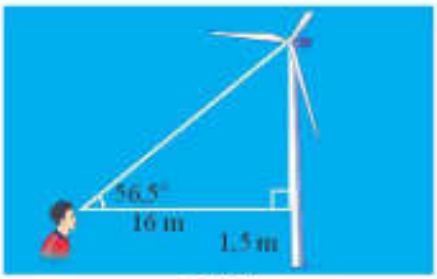
d) $AB = 23, AC = 32, BC = 44$.

2. Để lắp đường dây điện cao thế từ vị trí A đến vị trí B, do phải tránh một ngọn núi nên người ta phải nối đường dây từ vị trí A đến vị trí C dài 10 km, sau đó nối đường dây từ vị trí C đến vị trí B dài 8 km. Góc tạo bởi hai đoạn dây AC và CB là 70°. Tính chiều dài tăng thêm vì không thể nối trực tiếp từ A đến B.



Hình 7

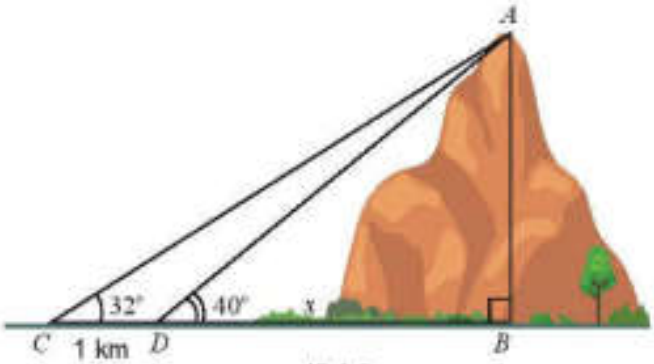
3. Một người đứng cách thân một cái quạt gió 16 m và nhìn thấy tâm của cánh quạt với góc nâng 56,5° (Hình 8). Tính khoảng cách từ tâm của cánh quạt đến mặt đất. Cho biết khoảng cách từ mắt của người đó đến mặt đất là 1,5 m.



Hình 8

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

4. Tính chiều cao AB của một ngọn núi. Biết tại hai điểm C, D cách nhau 1 km trên mặt đất (B, C, D thẳng hàng), người ta nhìn thấy đỉnh A của núi với góc nâng lần lượt là 32° và 40° (Hình 9).



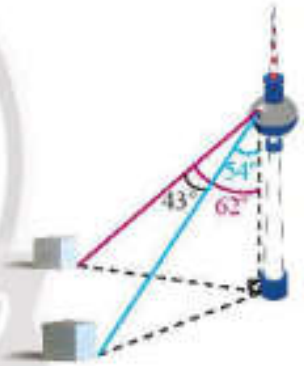
Hình 9

5. Hai người quan sát khinh khí cầu tại hai địa điểm P và Q nằm ở sườn đồi nghiêng 32° so với phương ngang, cách nhau 60 m (Hình 10). Người quan sát tại P xác định góc nâng của khinh khí cầu là 62°. Cùng lúc đó, người quan sát tại Q xác định góc nâng của khinh khí cầu đó là 70°. Tính khoảng cách từ Q đến khinh khí cầu.



Hình 10

6. Một người đứng ở trên một tháp truyền hình cao 352 m so với mặt đất, muốn xác định khoảng cách giữa hai cột mốc trên mặt đất bên dưới. Người đó quan sát thấy góc được tạo bởi hai đường ngắm tới hai mốc này là 43°, góc giữa phương thẳng đứng và đường ngắm tới một điểm mốc trên mặt đất là 62° và đến điểm mốc khác là 54° (Hình 11). Tính khoảng cách giữa hai cột mốc này.



Hình 11

Dạng 1: Giải tam giác.

1. Phương pháp.

- Giải tam giác là tính các cạnh và các góc của tam giác dựa trên một số điều kiện cho trước.
- Trong các bài toán giải tam giác người ta thường cho tam giác với ba yếu tố như sau : biết một cạnh và hai

góc kề cạnh đó; biết một góc và hai cạnh kề góc đó; biết ba cạnh.

Để tìm các yếu tố còn lại ta sử dụng định lí côsin và định lí sin ; định lí tổng ba góc trong một tam giác bằng 180^0 và trong một tam giác đối diện với góc lớn hơn thì có cạnh lớn hơn và ngược lại đối diện với cạnh lớn hơn thì có góc lớn hơn.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Giải tam giác ABC biết $b = 32$; $c = 45$ và $\widehat{A} = 87^0$.

Lời giải

Theo định lí côsin ta có

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A = 32^2 + 4^2 - 2.32.4.\sin 87^0$

Suy ra $a \approx 53,8$

Theo định lí sin ta có

$\sin B = \dfrac{b\sin A}{a} = \dfrac{32\sin 87^0}{53,8} \Rightarrow \widehat{B} \approx 36^0$

Suy ra $\widehat{C} = 180^0 - \widehat{A} - \widehat{B} \approx 180^0 - 87^0 - 36^0 = 57^0$

Ví dụ 2: Giải tam giác ABC biết $\widehat{A} = 60^0$, $\widehat{B} = 40^0$ và $c = 14$.

Lời giải

Ta có $\widehat{C} = 180^0 - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^0 - 60^0 - 40^0 = 80^0$

Theo định lí sin ta có

$a = \dfrac{c\sin A}{\sin C} = \dfrac{14.\sin 60^0}{\sin 80^0} \Rightarrow a \approx 12,3$

$b = \dfrac{c\sin B}{\sin C} = \dfrac{14.\sin 40^0}{\sin 80^0} \Rightarrow b \approx 9,1$

Dạng 2: Xác định các yếu tố trong tam giác.

1. Phương pháp

- Sử dụng định lí côsin và định lí sin
- Sử dụng công thức xác định độ dài đường trung tuyến và mối liên hệ của các yếu tố trong các công thức tính diện tích trong tam giác.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có $AB = 4$, $AC = 5$ và $\cos A = \dfrac{3}{5}$.

Tính cạnh BC, và độ dài đường cao kẻ từ A.

Lời giải

Áp dụng định lí côsin ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A = 4^2 + 5^2 - 2.4.5.\dfrac{3}{5} = 29$

Suy ra $BC = \sqrt{29}$

Vì $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ nên $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \dfrac{9}{25}} = \dfrac{4}{5}$

Theo công thức tính diện tích ta có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin A = \dfrac{1}{2}.4.5.\dfrac{4}{5} = 8$ (1)

Mặt khác $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}a.h_a = \dfrac{1}{2}.\sqrt{29}.h_a$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{1}{2}.\sqrt{29}.h_a = 8 \Rightarrow h_a = \dfrac{16\sqrt{29}}{29}$

Vậy độ dài đường cao kẻ từ A là $h_a = \dfrac{16\sqrt{29}}{29}$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn bán kính bằng 3, biết $\widehat{A} = 30^0$, $\widehat{B} = 45^0$. Tính độ dài trung tuyến kẻ từ A và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

Lời giải

Ta có $\widehat{C} = 180^0 - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^0 - 30^0 - 45^0 = 105^0$

Theo định lí sin ta có $a = 2R\sin A = 2.3.\sin 30^0 = 3$, $b = 2R\sin B = 2.3.\sin 45^0 = 6.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

$c = 2R\sin C = 2.3.\sin 105^0 \approx 5,796$

Theo công thức đường trung tuyến ta có $m_a^2 = \dfrac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{4} \approx \dfrac{2\left(18 + 5,796^2\right) - 9}{4} = 23,547$

Theo công thức tính diện tích tam giác ta có

$S_{ABC} = pr = \dfrac{1}{2}bc\sin A \Rightarrow r = \dfrac{bc\sin A}{2p} \approx \dfrac{3\sqrt{2}.5,796\sin 30^0}{3 + 3\sqrt{2} + 5,796} \approx 0,943$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC biết $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{2}$, $c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$. Tính góc lớn nhất của tam giác.

Lời giải

Theo giải thiết ta có $c < b < a$ suy ra $\widehat{C} < \widehat{B} < \widehat{A}$ do đó góc A là lớn nhất.
Theo định lí côsin ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8 + \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)^2 - 12^2}{2.2\sqrt{2}.\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)} = \frac{4 - 4\sqrt{3}}{8\sqrt{3} - 8} = -\frac{1}{2}$$

Suy ra $\widehat{A} = 120^0$
Vậy góc lớn nhất là góc A có số đo là 120^0.

Dạng 3: Chứng Minh Đẳng Thức, Bất Đẳng Thức Liên Quan Đến Các Yếu Tố Của Tam Giác, Tứ Giác.

1. Phương pháp giải.

- Để chứng minh đẳng thức ta sử dụng các hệ thức cơ bản để biến đổi vế này thành vế kia, hai vế cùng bằng một vế hoặc biến đổi tương đương về một đẳng thức đúng.
- Để chứng minh bất đẳng thức ta sử dụng các hệ thức cơ bản, bất đẳng thức cạnh trong tam giác và bất đẳng thức cổ điển (Cauchy, bunhiacôpxki,…)

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin^2 A = \sin B.\sin C$. Chứng minh rằng

a) $a^2 = bc$

b) $\cos A \ge \dfrac{1}{2}$

Lời giải

a) Áp dụng định lí sin ta có $\sin A = \dfrac{a}{2R}$, $\sin B = \dfrac{b}{2R}$, $\sin C = \dfrac{c}{2R}$

Suy ra $\sin^2 A = \sin B.\sin C \Leftrightarrow \left(\dfrac{a}{2R}\right)^2 = \dfrac{b}{2R}.\dfrac{c}{2R} \Leftrightarrow a^2 = bc$ đpcm

b) Áp dụng định lí côsin và câu a) ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + c^2 - bc}{2bc} \ge \frac{2bc - bc}{2bc} = \frac{1}{2}$$ đpcm

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC, chứng minh rằng: $\cot A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$

Lời giải:

Áp dụng định lí côsin và công thức $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A$ ta có:

$\cot A = \dfrac{\cos A}{\sin A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc\sin A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$ đpcm

Dạng 4: Nhận Dạng Tam Giác

1. Phương pháp giải.

Sử dụng định lí côsin; sin; công thức đường trung tuyến; công thức tính diện tích tam giác để biến đổi giả thiết về hệ thức liên hệ cạnh(hoặc góc) từ đó suy ra dạng của tam giác.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC thoả mãn $\sin C = 2\sin B\cos A$. Chứng minh minh rằng tam giác ABC cân .

Lời giải

Áp dụng định lí côsin và sin ta có:

$\sin C = 2\sin B\cos A \Leftrightarrow \dfrac{c}{2R} = 2.\dfrac{b}{2R}.\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$c^2 = b^2 + c^2 - a^2 \Leftrightarrow a = b$

Suy ra tam giác ABC cân tại đỉnh C.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC thoả mãn $\sin A = \dfrac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

Lời giải

Ta có: $\sin A = \dfrac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} \Leftrightarrow \sin A(\cos B + \cos C) = \sin B + \sin C$

$\Leftrightarrow \dfrac{a}{2R}\left(\dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} + \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) = \dfrac{b + c}{2R}$

$\Leftrightarrow b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) = 2b^2c + 2c^2b$

$\Leftrightarrow b^3 + c^3 + b^2c + bc^2 - a^2b - a^2c = 0 \Leftrightarrow (b + c)(b^2 + c^2) - a^2(b + c) = 0\ b^2 + c^2 = a^2 \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

Ví dụ 3: Nhận dạng tam giác ABC trong các trường hợp sau:

a) $a.\sin A + b\sin B + c\sin C = h_a + h_b + h_c$

b) $\dfrac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \dfrac{1}{2}(\cot^2 A + \cot^2 B)$

Lời giải

a) Áp dụng công thức diện tích ta có $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}ah_a$ suy ra

$a.\sin A + b\sin B + c\sin C = h_a + h_b + h_c \Leftrightarrow a.\dfrac{2S}{bc} + b.\dfrac{2S}{ca} + c.\dfrac{2S}{ab} = \dfrac{2S}{a} + \dfrac{2S}{b} + \dfrac{2S}{c}$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$

$\Leftrightarrow a = b = c$

Vậy tam giác ABC đều

b) Ta có: $\dfrac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \dfrac{1}{2}(\cot^2 A + \cot^2 B)$

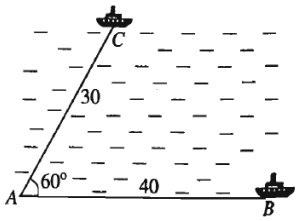
$\Leftrightarrow \dfrac{\cos^2 A + \cos^2 B + \sin^2 A + \sin^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \dfrac{1}{2}(\cot^2 A + 1 + \cot^2 B + 1)$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sin^2 A} + \dfrac{1}{\sin^2 B}\right) \Leftrightarrow (\sin^2 A + \sin^2 B)^2 = 4\sin^2 A\sin^2 B$

$\Leftrightarrow \sin^2 A = \sin^2 B \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2R}\right)^2 = \left(\frac{b}{2R}\right)^2 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại C.

Dạng 5: Bài toán thực tế

Câu 1: Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ một vị trí A, đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc 60^0. Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lí một giờ. Tàu C chạy với tốc độ 15 hải lí một giờ. Sau hai giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lí? Kết quả gần nhất với số nào sau đây?



A. 61 hải lí. **B.** 36 hải lí.

C. 21 hải lí. **D.** 18 hải lí.

Lời giải

Chọn B

Sau 2 giờ tàu B đi được 40 hải lí, tàu C đi được 30 hải lí. Vậy tam giác ABC có $AB = 40,\ AC = 30$ và $\widehat{A} = 60^0$.

Áp dụng định lí côsin vào tam giác ABC, ta có

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 30^2 + 40^2 - 2.30.40.\cos 60^0 = 900 + 1600 - 1200 = 1300.$$

Vậy $BC = \sqrt{1300} \approx 36$ (hải lí).

Sau 2 giờ, hai tàu cách nhau khoảng 36 hải lí.

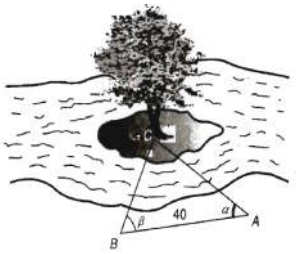
Câu 2: Để đo khoảng cách từ một điểm A trên bờ sông đến gốc cây C trên cù lao giữa sông, người ta chọn một điểm B cùng ở trên bờ với A sao cho từ A và B có thể nhìn thấy điểm C. Ta đo được khoảng cách $AB = 40\text{m}$, $\widehat{CAB} = 45^0$ và $\widehat{CBA} = 70^0$. Vậy sau khi đo đạc và tính toán được khoảng cách AC gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. 53 m.

B. 30 m.

C. 41,5 m.

D. 41 m.



Lời giải

Chọn C

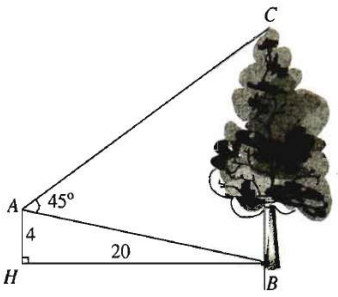
Áp dụng định lí sin vào tam giác ABC, ta có $\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$

Vì $\sin C = \sin(\alpha + \beta)$ nên $AC = \frac{AB.\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{40.\sin 70^0}{\sin 115^0} \approx 41,47$ m.

Câu 3: Từ vị trí A người ta quan sát một cây cao (hình vẽ).

Biết $AH = 4\text{m},\ HB = 20\text{m},\ \widehat{BAC} = 45^0$.

Chiều cao của cây gần nhất với giá trị nào sau đây?



A. 17,5m. **B.** 17m.

C. 16,5m. **D.** 16m.

Lời giải

Chọn B

Trong tam giác AHB, ta có $\tan\widehat{ABH}=\dfrac{AH}{BH}=\dfrac{4}{20}=\dfrac{1}{5}\longrightarrow\widehat{ABH}\approx 11^0 19'$.

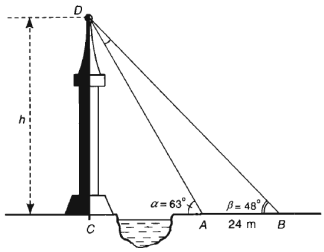
Suy ra $\widehat{ABC}=90^0-\widehat{ABH}=78^0 41'$.

Suy ra $\widehat{ACB}=180^0-\left(\widehat{BAC}+\widehat{ABC}\right)=56^0 19'$.

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC, ta được

$$\frac{AB}{\sin\widehat{ACB}}=\frac{CB}{\sin\widehat{BAC}}\longrightarrow CB=\frac{AB.\sin\widehat{BAC}}{\sin\widehat{ACB}}\approx 17\text{m}.$$

Câu 4: Giả sử $CD=h$ là chiều cao của tháp trong đó C là chân tháp. Chọn hai điểm A, B trên mặt đất sao cho ba điểm A, B và C thẳng hàng. Ta đo được $AB=24$ m, $\widehat{CAD}=63^0$, $\widehat{CBD}=48^0$.



Chiều cao h của tháp gần với giá trị nào sau đây?

A. 18m. **B.** 18,5m.

C. 60m. **D.** 60,5m.

Lời giải

Chọn D

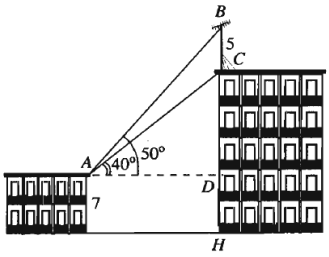
Áp dụng định lí sin vào tam giác ABD, ta có $\dfrac{AD}{\sin\beta}=\dfrac{AB}{\sin D}$.

Ta có $\alpha=\widehat{D}+\beta$ nên $\widehat{D}=\alpha-\beta=63^0-48^0=15^0$.

Do đó $AD=\dfrac{AB.\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}=\dfrac{24.\sin 48^0}{\sin 15^0}\approx 68,91$ m.

Trong tam giác vuông ACD, có $h=CD=AD.\sin\alpha\approx 61,4$ m.

Câu 5: Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten cao 5 m. Từ vị trí quan sát A cao 7 m so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten dưới góc 50^0 và 40^0 so với phương nằm ngang. Chiều cao của tòa nhà gần nhất với giá trị nào sau đây?



A. 12m. **B.** 19m.

C. 24m. **D.** 29m.

Lời giải

Chọn B

Từ hình vẽ, suy ra $\widehat{BAC}=10^0$ và $\widehat{ABD}=180^0-\left(\widehat{BAD}+\widehat{ADB}\right)=180^0-\left(50^0+90^0\right)=40^0$.

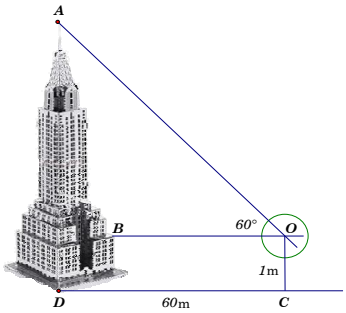
Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC, ta có

$$\frac{BC}{\sin\widehat{BAC}}=\frac{AC}{\sin\widehat{ABC}}\longrightarrow AC=\frac{BC.\sin\widehat{ABC}}{\sin\widehat{BAC}}=\frac{5.\sin 40^0}{\sin 10^0}\approx 18,5\text{ m}.$$

Trong tam giác vuông ADC, ta có $\sin\widehat{CAD}=\dfrac{CD}{AC}\longrightarrow CD=AC.\sin\widehat{CAD}=11,9$ m.

Vậy $CH=CD+DH=11,9+7=18,9$ m.

Câu 6: Xác định chiều cao của một tháp mà không cần lên đỉnh của tháp. Đặt kế giác thẳng đứng cách chân tháp một khoảng $CD = 60\text{m}$, giả sử chiều cao của giác kế là $OC = 1\text{m}$ .Quay thanh giác kế sao cho khi ngắm theo thanh ta nhình thấy đỉnh A của tháp. Đọc trên giác kế số đo của góc $\widehat{AOB} = 60^0$. Chiều cao của ngọn tháp gần với giá trị nào sau đây:



A. 40m . **B.** 114m .

C. 105m . **D.** 110m .

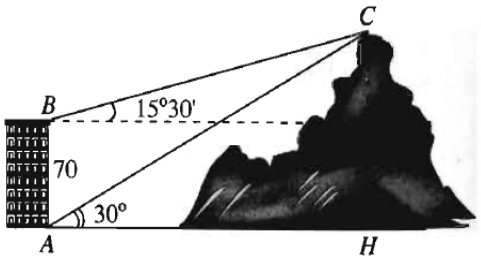
Lời giải

Chọn C

Tam giác OAB vuông tại B, có $\tan\widehat{AOB} = \dfrac{AB}{OB} \Rightarrow AB = \tan 60^0.OB = 60\sqrt{3}\,\text{m}$.

Vậy chiếu cao của ngọn tháp là $h = AB + OC = \left(60\sqrt{3}+1\right)\text{m}$.

Câu 7: Từ hai vị trí A và B của một tòa nhà, người ta quan sát đỉnh C của ngọn núi. Biết rằng độ cao $AB = 70\text{m}$, phương nhìn AC tạo với phương nằm ngang góc 30^0, phương nhìn BC tạo với phương nằm ngang góc $15^0 30'$ .Ngọn núi đó có độ cao so với mặt đất gần nhất với giá trị nào sau đây?



A. 135m . **B.** 234m .

C. 165m . **D.** 195m .

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết, ta suy ra tam giác ABC có $\widehat{CAB} = 60^0$, $\widehat{ABC} = 105^0 30'$ và $c = 70$.

Khi đó $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^0 \Leftrightarrow \widehat{C} = 180^0 - \left(\widehat{A} + \widehat{B}\right) = 180^0 - 165^0 30' = 14^0 30'$.

Theo định lí sin, ta có $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ hay $\dfrac{b}{\sin 105^0 30'} = \dfrac{70}{\sin 14^0 30'}$

Do đó $AC = b = \dfrac{70.\sin 105^0 30'}{\sin 14^0 30'} \approx 269{,}4\text{ m}$.

Gọi CH là khoảng cách từ C đến mặt đất. Tam giác vuông ACH có cạnh CH đối diện với góc 30^0 nên

$CH = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{269{,}4}{2} = 134{,}7\text{ m}$. Vậy ngọn núi cao khoảng 135 m.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 4

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Đẳng thức nào sau đây **đúng?**

A. $\tan\left(180^\circ + a\right) = -\tan a$.
B. $\cos\left(180^\circ + a\right) = -\cos a$.
C. $\sin\left(180^\circ + a\right) = \sin a$.
D. $\cot\left(180^\circ + a\right) = -\cot a$.

Lời giải

Chọn B.

Lý thuyết "cung hơn kém 180°"

Câu 2: Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào **đúng**?

A. $\sin\left(180^\circ - \alpha\right) = -\sin\alpha$.
B. $\cos\left(180^\circ - \alpha\right) = \cos\alpha$
C. $\tan\left(180^\circ - \alpha\right) = \tan\alpha$.
D. $\cot\left(180^\circ - \alpha\right) = -\cot\alpha$

Lời giải

Chọn D.

Mối liên hệ hai cung bù nhau.

Câu 3: Cho α và β là hai góc khác nhau và bù nhau, trong các đẳng thức sau đây đẳng thức nào **sai**?

A. $\sin\alpha = \sin\beta$.
B. $\cos\alpha = -\cos\beta$.
C. $\tan\alpha = -\tan\beta$.
D. $\cot\alpha = \cot\beta$.

Lời giải

Chọn D.

Mối liên hệ hai cung bù nhau.

Câu 4: Cho góc α tù. Điều khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $\sin\alpha < 0$.
B. $\cos\alpha > 0$.
C. $\tan\alpha > 0$.
D. $\cot\alpha < 0$.

Lời giải

Chọn D.

Câu 5: Hai góc nhọn α và β phụ nhau, hệ thức nào sau đây là **sai**?

A. $\sin\alpha = \cos\beta$.
B. $\tan\alpha = \cot\beta$.
C. $\cot\beta = \dfrac{1}{\cot\alpha}$.
D. $\cos\alpha = -\sin\beta$.

Lời giải

Chọn D.

$\cos\alpha = \cos\left(90^\circ - \beta\right) = \sin\beta$.

Câu 6: Cho $\cos x = \dfrac{1}{2}$. Tính biểu thức $P = 3\sin^2 x + 4\cos^2 x$

A. $\dfrac{13}{4}$.
B. $\dfrac{7}{4}$.
C. $\dfrac{11}{4}$.
D. $\dfrac{15}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $P = 3\sin^2 x + 4\cos^2 x = 3\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) + \cos^2 x = 3 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{13}{4}$.

Câu 7: Biết $\cos\alpha=\frac{1}{3}$. Giá trị đúng của biểu thức $P=\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha$ là:

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{10}{9}$. **C.** $\frac{11}{9}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$\cos\alpha=\frac{1}{3}\Rightarrow P=\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)+2\cos^2\alpha=1+2\cos^2\alpha=\frac{11}{9}$.

Câu 8: Cho biết $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$ và $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Tính $\tan\alpha$?

A. $\frac{5}{4}$. **B.** $-\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **D.** $-\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Do $0<\alpha<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\tan\alpha<0$. Ta có: $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow\tan^2\alpha=\frac{5}{4}\Rightarrow\tan\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 9: Cho α là góc tù và $\sin\alpha=\frac{5}{13}$. Giá trị của biểu thức $3\sin\alpha+2\cos\alpha$ là

A. 3. **B.** $-\frac{9}{13}$. **C.** -3. **D.** $\frac{9}{13}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=\frac{144}{169}\Rightarrow\cos\alpha=\pm\frac{12}{13}$

Do α là góc tù nên $\cos\alpha<0$, từ đó $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$

Như vậy $3\sin\alpha+2\cos\alpha=3\cdot\frac{5}{13}+2\left(-\frac{12}{13}\right)=-\frac{9}{13}$.

Câu 10: Cho $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, với $90^\circ<\alpha<180^\circ$. Tính $\cos\alpha$.

A. $\cos\alpha=\frac{2}{3}$. **B.** $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$. **C.** $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$.

Mặt khác $90^\circ<\alpha<180^\circ$ nên $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 11: $\cos\alpha$ bằng bao nhiêu nếu $\cot\alpha=-\frac{1}{2}$?

A. $\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $-\frac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\cot\alpha=-\frac{1}{2}\Rightarrow\tan\alpha=-2$.

$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1}{1+(-2)^2}=\frac{1}{5}$.

Suy ra $\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 12: Nếu $\tan\alpha=3$ thì $\cos\alpha$ bằng bao nhiêu?

A. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\pm\frac{\sqrt{10}}{10}$. **D.** $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1}{1+3^2}=\frac{1}{10}$.

Suy ra $\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Câu 13: Biết $\cot\alpha=-a$, $a>0$. Tính $\cos\alpha$

A. $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$. **B.** $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$. **C.** $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$. **D.** $\cos\alpha=-\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$.

Lời giải

Chọn D

Do $\cot\alpha=-a$, $a>0$ nên $90^0<\alpha<180^0$ suy ra $\cos\alpha<0$.

Mặt khác, $\tan\alpha=\frac{1}{\cot\alpha}\Leftrightarrow\tan\alpha=\frac{-1}{a}$.

Mà ta lại có $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}\Leftrightarrow\cos^2\alpha=\frac{a^2}{1+a^2}$.

Khi đó $\cos\alpha=-\frac{|a|}{\sqrt{1+a^2}}$ và do $a>0$ nên $\cos\alpha=-\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$.

Câu 14: Cho α là góc tù và $\sin\alpha=\frac{4}{5}$. Giá trị của biểu thức $A=2\sin\alpha-\cos\alpha$ bằng

A. $\frac{-7}{5}$. **B.** $\frac{7}{5}$. **C.** 1. **D.** $\frac{11}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\sin\alpha=\frac{4}{5}\Rightarrow\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$.

Do α là góc tù nên $\cos\alpha<0\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{-3}{5}$.

$A=2\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{2.4}{5}-\dfrac{-3}{5}=\dfrac{11}{5}$.

Câu 15: Cho $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$, với $90°\le\alpha\le180°$. Tính giá trị của $M=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos^3\alpha}$

A. $M=\dfrac{25}{27}$ **B.** $M=\dfrac{175}{27}$. **C.** $M=\dfrac{35}{27}$. **D.** $M=-\dfrac{25}{27}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{9}{25}$.

Mà $90°\le\alpha\le180°\Rightarrow\cos\alpha\le0\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{-3}{5}$.

Từ đó $M=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos^3\alpha}=\dfrac{-25}{27}$.

Câu 16: Cho biết $\cos\alpha=-\dfrac{2}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $E=\dfrac{\cot\alpha+3\tan\alpha}{2\cot\alpha+\tan\alpha}$?

A. $-\dfrac{19}{13}$. **B.** $\dfrac{19}{13}$. **C.** $\dfrac{25}{13}$. **D.** $-\dfrac{25}{13}$

Lời giải

Chọn B.

$E=\dfrac{\cot\alpha+3\tan\alpha}{2\cot\alpha+\tan\alpha}=\dfrac{1+3\tan^2\alpha}{2+\tan^2\alpha}=\dfrac{3\left(\tan^2\alpha+1\right)-2}{1+\left(1+\tan^2\alpha\right)}=\dfrac{\dfrac{3}{\cos^2\alpha}-2}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+1}=\dfrac{3-2\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}=\dfrac{19}{13}$.

Câu 17: Cho biết $\cot\alpha=5$. Tính giá trị của $E=2\cos^2\alpha+5\sin\alpha\cos\alpha+1$?

A. $\dfrac{10}{26}$. **B.** $\dfrac{100}{26}$. **C.** $\dfrac{50}{26}$. **D.** $\dfrac{101}{26}$.

Lời giải

Chọn D.

$E=\sin^2\alpha\left(2\cot^2\alpha+5\cot\alpha+\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\right)=\dfrac{1}{1+\cot^2\alpha}\left(3\cot^2\alpha+5\cot\alpha+1\right)=\dfrac{101}{26}$.

Câu 18: Cho $cot\alpha=\dfrac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $A=\dfrac{3\sin\alpha+4\cos\alpha}{2\sin\alpha-5\cos\alpha}$ là:

A. $-\dfrac{15}{13}$. **B.** -13. **C.** $\dfrac{15}{13}$. **D.** 13.

Lời giải

Chọn D.

$A=\dfrac{3\sin\alpha+4\sin\alpha.\cot\alpha}{2\sin\alpha-5\sin\alpha.\cot\alpha}=\dfrac{3+4\cot\alpha}{2-5\cot\alpha}=13$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Câu 19: Cho biết $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$. Giá trị của biểu thức $E=\frac{\cot\alpha-3\tan\alpha}{2\cot\alpha-\tan\alpha}$ bằng bao nhiêu?

A. $-\frac{25}{3}$. **B.** $-\frac{11}{13}$. **C.** $-\frac{11}{3}$. **D.** $-\frac{25}{13}$.

Lời giải

Chọn C.

$$E=\frac{\cot\alpha-3\tan\alpha}{2\cot\alpha-\tan\alpha}=\frac{1-3\tan^2\alpha}{2-\tan^2\alpha}=\frac{4-3\left(\tan^2\alpha+1\right)}{3-\left(1+\tan^2\alpha\right)}=\frac{4-\frac{3}{\cos^2\alpha}}{3-\frac{1}{\cos^2\alpha}}=\frac{4\cos^2\alpha-3}{3\cos^2\alpha-1}=-\frac{11}{3}.$$

Câu 20: Biết $\cos\alpha=\frac{1}{3}$. Giá trị đúng của biểu thức $P=\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha$ là:

A. $\frac{11}{9}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{10}{9}$.

Lời giải

Chọn A

$$\cos\alpha=\frac{1}{3}\Rightarrow P=\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)+2\cos^2\alpha=1+2\cos^2\alpha=\frac{11}{9}.$$

Câu 21: Cho tam giác ABC, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a^2=b^2+c^2+2bc\cos A$. **B.** $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

C. $a^2=b^2+c^2-2bc\cos C$. **D.** $a^2=b^2+c^2-2bc\cos B$.

Lời giải

Chọn B

Theo định lý cosin trong tam giác ABC, ta có $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

Câu 22: Cho tam giác ABC có $a=8,b=10$, góc C bằng 60^0. Độ dài cạnh c là?

A. $c=3\sqrt{21}$. **B.** $c=7\sqrt{2}$. **C.** $c=2\sqrt{11}$. **D.** $c=2\sqrt{21}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $c^2=a^2+b^2-2a.b.\cos C=8^2+10^2-2.8.10.\cos 60^0=84\Rightarrow c=2\sqrt{21}$.

Câu 23: Cho ΔABC có $b=6,c=8,\widehat{A}=60^0$. Độ dài cạnh a là:

A. $2\sqrt{13}$. **B.** $3\sqrt{12}$. **C.** $2\sqrt{37}$. **D.** $\sqrt{20}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=36+64-2.6.8.\cos 60^0=52\Rightarrow a=2\sqrt{13}$.

Câu 24: Cho ΔABC có $B=60^0,a=8,c=5$. Độ dài cạnh b bằng:

A. 7. **B.** 129. **C.** 49. **D.** $\sqrt{129}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=8^2+5^2-2.8.5.\cos 60^0=49\Rightarrow b=7$.

Câu 25: Cho ΔABC có $AB=9;BC=8;\widehat{B}=60^0$. Tính độ dài AC.

A. $\sqrt{73}$. **B.** $\sqrt{217}$. **C.** 8. **D.** $\sqrt{113}$.

Lời giải

Chọn A

Theo định lý cosin có:

$AC^2=BA^2+BC^2-2BA.BC.\cos\widehat{ABC}=73\Rightarrow AC=\sqrt{73}$.

Vậy $AC=\sqrt{73}$.

Câu 26: Cho tam giác ABC có $AB=2,AC=1$ và $A=60^0$. Tính độ dài cạnh BC.

A. $BC=\sqrt{2}$. **B.** $BC=1$. **C.** $BC=\sqrt{3}$. **D.** $BC=2$.

Lời giải

Chọn C

Theo định lý cosin ta có: $BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos 60^0}$

$=\sqrt{2^2+1^2-2.2.1.\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$.

Câu 27: Tam giác ABC có $a=8,c=3,\widehat{B}=60^0$. Độ dài cạnh b bằng bao nhiêu?

A. 49. **B.** $\sqrt{97}$ **C.** 7. **D.** $\sqrt{61}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=8^2+3^2-2.8.3.\cos 60^0=49\Rightarrow b=7$.

Câu 28: Tam giác ABC có $\widehat{C}=150^0,BC=\sqrt{3},AC=2$. Tính cạnh AB ?

A. $\sqrt{13}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 10. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Theo định lí cosin trong ΔABC ta có:

$AB^2=CA^2+CB^2-2CA.CB.\cos\widehat{C}=13\Rightarrow AB=\sqrt{13}$.

Câu 29: Cho $a;b;c$ là độ dài 3 cạnh của tam giác ABC. Biết $b=7;c=5;\cos A=\frac{4}{5}$. Tính độ dài của a.

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $\frac{7\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{23}{8}$. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng định lí cosin cho tam giác ABC ta có:

$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A=7^2+5^2-2.7.5.\frac{4}{5}=18$.

Suy ra: $a=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

Câu 30: Cho tam giác ABC có $AB=4$ cm, $BC=7$ cm, $AC=9$ cm. Tính $\cos A$.

A. $\cos A=-\frac{2}{3}$. **B.** $\cos A=\frac{1}{2}$. **C.** $\cos A=\frac{1}{3}$. **D.** $\cos A=\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2.AB.AC}=\frac{4^2+9^2-7^2}{2.4.9}=\frac{2}{3}$.

Câu 31: Cho tam giác ABC có $a^2+b^2-c^2>0$. Khi đó:

A. Góc $C>90^0$ **B.** Góc $C<90^0$

C. Góc $C=90^0$ **D.** Không thể kết luận được gì về góc C.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

Mà: $a^2+b^2-c^2>0$ suy ra: $\cos C>0\Rightarrow C<90^0$.

Câu 32: Cho tam giác ABC thoả mãn: $b^2+c^2-a^2=\sqrt{3}bc$. Khi đó:

A. $A=30^0$. **B.** $A=45^0$. **C.** $A=60^0$. **D.** $A=75^0$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\sqrt{3}bc}{2bc}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow A=30^0$.

Câu 33: Cho các điểm $A(1;1),B(2;4),C(10;-2)$. Góc $\widehat{BAC}$ bằng bao nhiêu?

A. 90^0. **B.** 60^0. **C.** 45^0. **D.** 30^0.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;3)$, $\overrightarrow{AC}=(9;-3)$.

Suy ra: $\cos\widehat{BAC}=\frac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|}=0\Rightarrow\widehat{BAC}=90^0$.

Câu 34: Cho tam giác ABC, biết $a=24,b=13,c=15$. Tính góc A?

A. $33^0 34'$. **B.** $117^0 49'$. **C.** $28^0 37'$. **D.** $58^0 24'$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{13^2+15^2-24^2}{2.13.15}=-\frac{7}{15}\Rightarrow A\simeq 117^0 49'$.

Câu 35: Cho tam giác ABC, biết $a=13,b=14,c=15$. Tính góc B?

A. $59^0 49'$. **B.** $53^0 7'$. **C.** $59^0 29'$. **D.** $62^0 22'$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{13^2+15^2-14^2}{2.13.15}=\dfrac{33}{65}\Rightarrow B\simeq 59^0 29'.$

Câu 36: Cho tam giác ABC biết độ dài ba cạnh BC, CA, AB lần lượt là a, b, c và thỏa mãn hệ thức $b\left(b^2-a^2\right)=c\left(c^2-a^2\right)$ với $b\neq c$. Khi đó, góc $\widehat{BAC}$ bằng

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $90°$. **D.** $120°$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $b\left(b^2-a^2\right)=c\left(c^2-a^2\right)\Leftrightarrow b^3-ba^2=c^3-ca^2\Leftrightarrow b^3-c^3-a^2\left(b-c\right)=0$

$\Leftrightarrow (b-c)\left(b^2+bc+c^2-a^2\right)=0\Leftrightarrow b^2+c^2-a^2=-bc$.

Mặt khác $\cos\widehat{BAC}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{-bc}{2bc}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\widehat{BAC}=120°$.

Câu 37: Cho ΔABC vuông ở A, biết $\widehat{C}=30°$, $AB=3$. Tính độ dài trung tuyến AM?

A. 3 **B.** 4 **C.** $\dfrac{5}{2}$ **D.** $\dfrac{7}{2}$

Lời giải

Chọn A

AM là trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $AM=\dfrac{1}{2}BC=BM=MC$.

Xét ΔBAC có $\widehat{B}=90°-30°=60°$.

Xét tam giác ABM có $BM=AM$ và $\widehat{B}=60°$ suy ra ΔABM là tam giác đều.

$\Rightarrow AM=AB=3$.

Câu 38: Cho tam giác ABC. Tìm công thức sai:

A. $\dfrac{a}{\sin A}=2R$. **B.** $\sin A=\dfrac{a}{2R}$. **C.** $b\sin B=2R$. **D.** $\sin C=\dfrac{c\sin A}{a}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R.$

Câu 39: Cho ΔABC với các cạnh $AB=c, AC=b, BC=a$. Gọi R,r,S lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và diện tích của tam giác ABC. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

A. $S=\dfrac{abc}{4R}$. **B.** $R=\dfrac{a}{\sin A}$.

C. $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C$. **D.** $a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$.

Lời giải

Chọn B.

Theo định lí Sin trong tam giác, ta có $\dfrac{a}{\sin A}=2R$.

Câu 40: Cho tam giác ABC có góc $\widehat{BAC}=60°$ và cạnh $BC=\sqrt{3}$. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $R=4$. **B.** $R=1$. **C.** $R=2$. **D.** $R=3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\dfrac{BC}{\sin A}=2R\Leftrightarrow R=\dfrac{BC}{2\sin A}=\dfrac{\sqrt{3}}{2.\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=1$.

Câu 41: Trong mặt phẳng, cho tam giác ABC có $AC=4$ cm, góc $\widehat{A}=60°$, $\widehat{B}=45°$. Độ dài cạnh BC là

A. $2\sqrt{6}$. **B.** $2+2\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{3}-2$. **D.** $\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AC}{\sin B}\Leftrightarrow BC=\dfrac{4.\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{6}$.

Câu 42: Cho ΔABC có $AB=5;\widehat{A}=40°;\widehat{B}=60°$. Độ dài BC gần nhất với kết quả nào?

A. $3,7$. **B.** $3,3$. **C.** $3,5$. **D.** $3,1$.

Lời giải

Chọn B

$\widehat{C}=180°-\widehat{A}-\widehat{B}=180°-40°-60°=80°$

Áp dụng định lý sin: $\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AB}{\sin C}\Rightarrow BC=\dfrac{AB}{\sin C}.\sin A=\dfrac{5}{\sin 80°}\sin 40°\approx 3,3$.

Câu 43: Cho tam giác ABC thoả mãn hệ thức $b+c=2a$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\cos B+\cos C=2\cos A.$ **B.** $\sin B+\sin C=2\sin A.$

C. $\sin B+\sin C=\dfrac{1}{2}\sin A$. **D.** $\sin B+\cos C=2\sin A.$

Lời giải

Chọn B.

Ta có:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\Rightarrow\frac{\dfrac{b+c}{2}}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\Leftrightarrow\frac{b+c}{2\sin A}=\frac{b+c}{\sin B+\sin C}\Leftrightarrow\sin B+\sin C=2\sin A.$$

Câu 44: Tam giác ABC có $a=16,8$; $\widehat{B}=56^0 13'$; $\widehat{C}=71^0$. Cạnh c bằng bao nhiêu?

A. $29,9$. **B.** $14,1$. **C.** $17,5$. **D.** $19,9$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: Trong tam giác ABC: $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^0 \Rightarrow \widehat{A}=180^0-71^0-56^013'=52^047'$.

Mặt khác $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow c=\frac{a.\sin C}{\sin A}=\frac{16,8.\sin 71^0}{\sin 52^047'}\simeq 19,9.$

Câu 45: Chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

A. $S=\frac{1}{2}bc\sin A.$ **B.** $S=\frac{1}{2}ac\sin A.$ **C.** $S=\frac{1}{2}bc\sin B.$ **D.** $S=\frac{1}{2}bc\sin B.$

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$.

Câu 46: Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng a. Góc $\widehat{BAD}=30°$. Diện tích hình thoi $ABCD$ là

A. $\frac{a^2}{4}.$ **B.** $\frac{a^2}{2}.$ **C.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$ **D.** $a^2.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $S_{ABCD}=AB.AD.\sin\widehat{BAD}=a.a.\sin 30°=\frac{1}{2}a^2$.

Câu 47: Cho ΔABC có $a=6,b=8,c=10.$ Diện tích S của tam giác trên là:

A. 48. **B.** 24. **C.** 12. **D.** 30.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: Nửa chu vi ΔABC: $p=\frac{a+b+c}{2}$.

Áp dụng công thức Hê-rông: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{12(12-6)(12-8)(12-10)}=24$.

Câu 48: Cho ΔABC có $a=4,c=5,B=150^0.$ Diện tích của tam giác là:

A. $5\sqrt{3}.$ **B.** 5. **C.** 10. **D.** $10\sqrt{3}.$

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}a.c.\sin B=\frac{1}{2}.4.5.\sin 150^0=5.$

Câu 49: Một tam giác có ba cạnh là $13,14,15$. Diện tích tam giác bằng bao nhiêu?

A. 84. **B.** $\sqrt{84}$. **C.** 42. **D.** $\sqrt{168}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{13+14+15}{2}=21$.

Suy ra: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}=84$.

Câu 50: Cho tam giác ABC có $a=4,b=6,c=8$. Khi đó diện tích của tam giác là:

A. $9\sqrt{15}.$ **B.** $3\sqrt{15}.$ **C.** 105. **D.** $\frac{2}{3}\sqrt{15}.$

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $p=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{4+6+8}{2}=9.$

Suy ra: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=3\sqrt{15}.$

Câu 51: Cho tam giác ΔABC có $b=7;c=5;\cos A=\dfrac{3}{5}$. Độ dài đường cao h_a của tam giác ΔABC là.

A. $\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$. **B.** 8. **C.** $8\sqrt{3}$ **D.** $80\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn A

$$a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}=\sqrt{7^2+5^2-2.7.5.\frac{3}{5}}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$

$\sin^2 A=1-\cos^2 A=1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{16}{25}$. Suy ra $\left[\begin{array}{l}\sin A=\dfrac{4}{5}\\ \sin A=-\dfrac{4}{5}\end{array}\right.$ vì $0\le\hat{A}\le 180^0$ nên $\sin A=\dfrac{4}{5}$

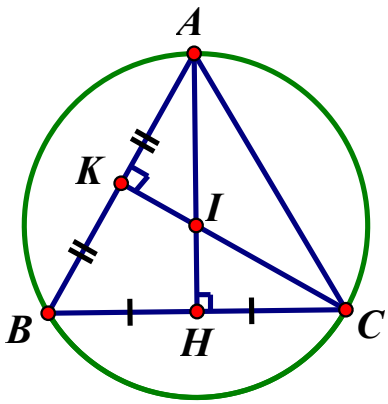
$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}.7.5.\dfrac{4}{5}=14$ mà $S=\dfrac{1}{2}a.h_a\Leftrightarrow 14=\dfrac{1}{2}.4\sqrt{2}.h_a\Leftrightarrow h_a=\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$

Câu 52: Cho tam giác ABC đều cạnh $2a$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{4a}{\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{8a}{\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{6a}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H, K lần lượt là trung điểm cạnh AB, BC;

I là giao điểm của AH và CK.

Lúc đó, I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có: $AH=\dfrac{2a\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$.

Do đó: $R = AI = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3}a\sqrt{3} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Câu 53: Cho tam giác ABC có $BC = \sqrt{6}$, $AC = 2$ và $AB = \sqrt{3}+1$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng:

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng định lý cosin ta có $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$ suy ra $A = 60°$.

Áp dụng định lý sin ta có $R = \frac{a}{2\sin A} = \sqrt{2}$.

Câu 54: Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng

A. 1. **B.** $\frac{8}{9}$. **C.** $\frac{4}{5}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Vì $AB^2 + AC^2 = BC^2$ nên tam giác ABC vuông tại A.

Do đó bán kính đường tròn nội tiếp $r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2}AB.AC}{\frac{1}{2}(AB+AC+BC)} = \frac{3.4}{3+4+5} = 1$.

Câu 55: Cho ΔABC có $S = 84, a = 13, b = 14, c = 15$. Độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp R của tam giác trên là:

A. $8{,}125$. **B.** 130. **C.** 8. **D.** $8{,}5$.

Lời giải

ChọnA.

Ta có: $S_{\Delta ABC} = \frac{a.b.c}{4R} \Leftrightarrow R = \frac{a.b.c}{4S} = \frac{13.14.15}{4.84} = \frac{65}{8}$.

Câu 56: Cho ΔABC có $S = 10\sqrt{3}$, nửa chu vi $p = 10$. Độ dài bán kính đường tròn nội tiếp r của tam giác trên là:

A. 3. **B.** 2. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3}$.

Câu 57: Một tam giác có ba cạnh là $26, 28, 30$. Bán kính đường tròn nội tiếp là:

A. 16. **B.** 8. **C.** 4. **D.** $4\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Ta có: $p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{26+28+30}{2}=42.$

$S=pr\Rightarrow r=\frac{S}{p}=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}=\frac{\sqrt{42(42-26)(42-28)(42-30)}}{42}=8.$

Câu 58: Một tam giác có ba cạnh là $52,56,60.$ Bán kính đường tròn ngoại tiếp là:

A. $\frac{65}{8}.$ **B.** $40.$ **C.** $32,5.$ **D.** $\frac{65}{4}.$

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{52+56+60}{2}=84.$

Suy ra: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{84(84-52)(84-56)(84-60)}=1344$.

Mà $S=\frac{abc}{4R}\Rightarrow R=\frac{abc}{4S}=\frac{52.56.60}{4.1344}=\frac{65}{2}$.

Câu 59: Tam giác với ba cạnh là $5;12;13$ có bán kính đường tròn ngoại tiếp là?

A. $6.$ **B.** $8.$ **C.** $\frac{13}{2}.$ **D.** $\frac{11}{2}.$

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $5^2+12^2=13^2\Rightarrow R=\frac{13}{2}.$ (Tam giác vuông bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $\frac{1}{2}$ cạnh huyền).

Câu 60: Tam giác với ba cạnh là $5;12;13$ có bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó bằng bao nhiêu?

A. $2.$ **B.** $2\sqrt{2}.$ **C.** $2\sqrt{3}.$ **D.** $3.$

Lời giải

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 1: Cho $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$. Hãy tính $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\cos\alpha$.

Lời giải.

Ta có: $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{4}{5}(\text{Vì }\sin\alpha>0)$

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4}{5}:\left(-\frac{3}{5}\right)=\left(-\frac{4}{3}\right)$. Do đó $\cot\alpha=-\frac{3}{4}$

Câu 2: Biết rằng $\sin15^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc 15°. Chứng minh $2\sin15^\circ.\cos15^\circ=\sin30^\circ$

Lời giải.

Ta có: $\cos^2 15^\circ=1-\sin^2 15^\circ=1-\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{8+4\sqrt{3}}{16}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{8}$

Từ đó $\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{8}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$;

$\tan 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}{4} = 2-\sqrt{3}$;

$\cos 15^\circ = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$.

Ta có $2\sin 15^\circ.\cos 15^\circ = 2.\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{8}(6-2) = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$.

Câu 3: Cho $\tan\alpha = -2$. Tính $\cos\alpha$ và $\sin\alpha$.

Lời giải.

Vì $\tan\alpha = -2 < 0$ nên $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ suy ra $\cos\alpha < 0$.Ta có:

$1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{1+4} = \frac{1}{5}$

Vậy $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ và $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Do đó

$\sin\alpha = \cos\alpha.\tan\alpha = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right).(-2) = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Câu 4: Cho $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, tính $P = 3\sin^2 x + 4\cos^2 x$.

Lời giải.

Ta có $P = 3\sin^2 x + 4\cos^2 x = 3\left(1-\cos^2 x\right) + 4\cos^2 x = 3+\cos^2 x = 3+\frac{1}{4} = \frac{13}{4}$.

Câu 5: Cho $\cos x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, tính $P = 3\sin x + \cos x$

Lời giải.

Ta có $\sin^2 x = 1-\cos^2 x = 1-\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 1-\frac{2+\sqrt{3}}{4} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}{4^2}$.

Chọn $\sin x = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ do $0^\circ \le x \le 180^0$

Vậy $P = 3\sin x + \cos x = \frac{3}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) + \frac{4}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) = \frac{7\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Câu 6: Cho $\tan\alpha = \sqrt{2}$, tính giá trị của biểu thức:

a) $A = \frac{3\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$

b) $B = \frac{2\sin^2\alpha + 1}{3\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha}$

Lời giải.

a) Chia tử và mẫu cho $\cos\alpha$, ta được

$$A=\frac{3\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{3\tan\alpha-1}{\tan\alpha+1}=\frac{3\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\left(3\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}{2-1}=7-4\sqrt{2}$$

b) Chia tử và mẫu cho $\cos^2\alpha$, ta được:

$$B=\frac{2\sin^2\alpha+1}{3\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha}=\frac{2\tan^2\alpha+\left(1+\tan^2\alpha\right)}{3\tan^2\alpha+2}=\frac{3\tan^2\alpha+1}{3\tan^2\alpha+2}=\frac{7}{8}$$

Câu 7: Biết $\sin\alpha=\frac{2}{5}$. Tính giá trị của biểu thức $P=\frac{\cos\alpha-\tan\alpha}{\cos\alpha+\tan\alpha}$.

Lời giải.

$$P=\frac{\cos\alpha-\tan\alpha}{\cos\alpha+\tan\alpha}=\frac{\frac{\cos\alpha}{2}-\tan\alpha}{\cos\alpha+\tan\alpha}=\frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}$$

$$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-2\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{17}{25}$$

Câu 8: Chứng minh các đẳng thức sau(giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

a) $\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x.\cos^2 x$

b) $\frac{1+\cot x}{1-\cot x}=\frac{\tan x+1}{\tan x-1}$

c) $\frac{\cos x+\sin x}{\cos^3 x}=\tan^3 x+\tan^2 x+\tan x+1$

Lời giải

a) $\sin^4 x+\cos^4 x=\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x-2\sin^2 x\cos^2 x$

$=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x$

$=1-2\sin^2 x\cos^2 x$

b) $\frac{1+\cot x}{1-\cot x}=\frac{1+\frac{1}{\tan x}}{1-\frac{1}{\tan x}}=\frac{\frac{\tan x+1}{\tan x}}{\frac{\tan x-1}{\tan x}}=\frac{\tan x+1}{\tan x-1}$

c) $\frac{\cos x+\sin x}{\cos^3 x}=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\sin x}{\cos^3 x}=\tan^2 x+1+\tan x\left(\tan^2 x+1\right)$

$=\tan^3 x+\tan^2 x+\tan x+1$

Câu 9: Chứng minh rằng biểu thức sau đây không phụ thuộc vào x

a) $A=\left(\sin x+\cos x\right)^2+\left(\sin x-\cos x\right)^2$

b) $B=\sin^4 x-\cos^4 x-2\sin^2 x+1$

Lời giải

a) $A=\left(\sin x+\cos x\right)^2+\left(\sin x-\cos x\right)^2=1+2\sin x.\cos x+1-2\sin x.\cos x=2$

b) $B=\sin^4 x-\cos^4 x-2\sin^2 x+1=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)-2\sin^2 x+1$

$=1\left[\sin^2 x-\left(1-\sin^2 x\right)\right]-2\sin^2 x+1=0$

Câu 10: Cho tam giác *ABC*. Chứng minh rằng

a) $\sin A=\sin\left(B+C\right)$

b) $\cos A=-\cos\left(B+C\right)$

c) $\sin\dfrac{A+B}{2}=\cos\dfrac{C}{2}$

d) $\tan A=-\tan\left(B+C\right)$

Lời giải

Vì *A, B, C* là 3 góc của ta giác nên A + B + C = 180^0 do đó

a) Ta có $\sin A=\sin\left(180°-A\right)=\sin\left(B+C\right)$

b) Ta có $\cos A=-\cos\left(180°-A\right)=-\cos\left(B+C\right)$

c) Ta có $\sin\dfrac{A+B}{2}=\cos\left(90°-\dfrac{A+B}{2}\right)=\cos\dfrac{C}{2}$

d) Ta có $\tan A=-\tan\left(180°-A\right)=-\tan\left(B+C\right)$

Câu 11: Chứng minh rằng nếu $\left(1-\sin A\right)\left(1-\sin B\right)=\cos A\cos B$ thì $\left(1+\sin A\right)\left(1+\sin B\right)=\cos A\cos B$

Lời giải

Vì $1+\sin A>0;1+\sin B>0$ nên

$\left(1-\sin A\right)\left(1-\sin B\right)=\cos A\cos B$

$\Leftrightarrow\left(1-\sin A\right)\left(1-\sin B\right)\left(1+\sin A\right)\left(1+\sin B\right)=\cos A\cos B\left(1+\sin A\right)\left(1+\sin B\right)$

$\Leftrightarrow\left(1-\sin^2 A\right)\left(1-\sin^2 B\right)=\cos A\cos B\left(1+\sin A\right)\left(1+\sin B\right)$

$\Leftrightarrow\cos^2 A\cos^2 B=\cos A\cos B\left(1+\sin A\right)\left(1+\sin B\right)$

$\Leftrightarrow\left(1+\sin A\right)\left(1+\sin B\right)=\cos A\cos B$

Câu 12: Tam giác ABC có $b+2c=2a$. Chứng minh rằng

a) $2\sin A=\sin B+\sin C$.

b) $\dfrac{2}{h_a}=\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}$

Lời giải.

a) Theo định lí sin ta có

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow\frac{a}{\sin A}=\frac{b+c}{\sin B+\sin C}=\frac{2a}{\sin B+\sin C}\Rightarrow 2\sin A=\sin B+\sin C$$

Cách khác: $a=2R\sin A,b=2R\sin B,c=2R\sin C$

Nên $b+c=2a\Rightarrow 2R\sin B+2R\sin C=2.2R\sin A\Rightarrow\sin B+\sin C=2\sin A$

b) Ta có $S=\dfrac{1}{2}a.h_a=\dfrac{1}{2}b.h_b=\dfrac{1}{2}c.h_c\Rightarrow\dfrac{1}{h_a}=\dfrac{a}{2S};\dfrac{1}{h_b}=\dfrac{b}{2S};\dfrac{1}{h_c}=\dfrac{c}{2S}$

Do đó $S=\dfrac{1}{2}a.h_a=\dfrac{1}{2}b.h_b=\dfrac{1}{2}c.h_c\Rightarrow\dfrac{1}{h_a}=\dfrac{a}{2S};\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}=\dfrac{1}{2S}\left(b+c\right)=\dfrac{1}{2S}2a=\dfrac{2}{h_a}$

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Câu 13: Tam giác ABC có $bc = a^2$. Chứng minh rằng

a) $\sin^2 A = \sin B.\sin C$.

b) $h_b.h_c = h_a^2$

Lời giải.

a) Theo giả thiết ta có $a^2 = bc$

Thay $a = 2R\sin A, b = 2R\sin B, c = 2R\sin C$ vào hệ thức trên ta được

$4R^2\sin^2 A = 2R\sin B.2R\sin C \Rightarrow \sin^2 A = \sin B.\sin C$

b) Ta có $2S = a.h_a = b.h_b = c.h_c \Rightarrow a^2h_a^2 = b.h_b.c.h_c$

Theo giả thiết $a^2 = bc$ nên suy ra $h_a^2 = h_b.h_c$

Câu 14: Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta đều có $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$.

Lời giải.

Áp dụng định lí trung tuyến trong tam giác ta có

$$m_a^2 = \frac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{4};\ m_b^2 = \frac{2\left(a^2 + c^2\right) - b^2}{4};\ m_c^2 = \frac{2\left(a^2 + b^2\right) - a^2}{4}$$

Từ đó suy ra $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$

Câu 15: Gọi là trọng tâm tam giác ABC. Chứng minh

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

Lời giải.

Theo tính chất của trọng tâm, ta có $GA = \frac{2}{3}m_a; GB = \frac{2}{3}m_b; GC = \frac{2}{3}m_c$

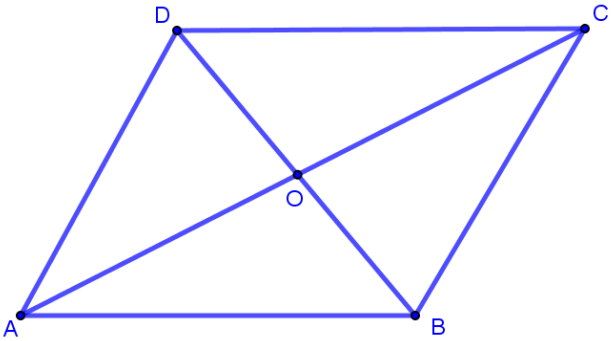
Nên $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \left(\frac{2}{3}m_a\right)^2 + \left(\frac{2}{3}m_b\right)^2 + \left(\frac{2}{3}m_c\right)^2 = \frac{4}{9}\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right)$

$$= \frac{4}{9}\left(\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}\right) = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

Câu 16: Chứng minh rằng tổng bình phương hai đường chéo của hình bình hành bằng tổng bình phương bốn cạnh của nó.

Lời giải.

Xét hình bình hành $ABCD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD thì AO là trung tuyến của tam giác ABD.



Ta có

$$AO^2=\frac{AB^2+AD^2}{2}-\frac{BD^2}{4}\Leftrightarrow\frac{AC^2}{4}=\frac{AB^2+AD^2}{2}-\frac{BD^2}{4}\Leftrightarrow AC^2+BD^2=2\left(AB^2+AD^2\right)$$

Câu 17: Cho tam giác ABC có cạnh $a=2\sqrt{3},\ b=2,\ C=30°$. Chứng minh ABC là tam giác cân. Tính diện tích và chiều cao h_a của tam giác.

Lời giải

Theo định lý cosin ta có $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=12+4-2\cdot2\sqrt{3}\cdot2\frac{\sqrt{3}}{2}=4$

Do đó $c=2=b$ nên tam giác ABC cân tại A có góc $B=C=30°$.

Ta có $S_{ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\cdot2\cdot\sqrt{3}\cdot2\cdot\frac{1}{2}=\sqrt{3},\ h_a=\frac{2S}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=1$.

Câu 18: Xét dạng tam giác ABC thoả mãn $\frac{1+\cos B}{\sin B}=\frac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}}$.

Lời giải

Ta có

$$\frac{1+\cos B}{\sin B}=\frac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}}\Leftrightarrow\frac{(1+\cos B)^2}{\sin^2 B}=\frac{(2a+c)^2}{4a^2-c^2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1+\cos B}{1-\cos B}=\frac{2a+c}{2a-c}\Leftrightarrow\frac{1+\cos B}{1-\cos B}-1=\frac{2a+c}{2a-c}-1$$

$$\Leftrightarrow2ac\cdot\cos B=c^2\Leftrightarrow a^2+c^2-b^2=c^2\Leftrightarrow a^2=b^2=b^2\Leftrightarrow a=b$$

Vậy tam giác ABC cân tại C.

Câu 19: Cho tam giác ABC có chiều cao $h_a=\sqrt{p\left(p-a\right)}$.Chứng minh ABC là tam giác cân.

Lời giải

Ta có $S=\frac{1}{2}a\cdot h_a=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ nên

$$h_a=\sqrt{p(p-a)}\Leftrightarrow2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=a\sqrt{p(p-a)}\Leftrightarrow2\sqrt{(p-b)(p-c)}=a$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có $2\sqrt{\left(p-b\right)\left(p-c\right)}\le\left(p-b\right)+\left(p-c\right)=2p-b-c=a$.

Do đó dấu đẳng thức xảy ra nên $p-b=p-c\Leftrightarrow b=c$.

Vậy tam giác ABC cân tại A.

Chương V VECTƠ

Trong chương V, chúng ta sẽ tìm hiểu về vectơ và các phép toán liên quan đến vectơ như: tổng và hiệu hai vectơ, tích của một số với một vectơ, tích vô hướng của hai vectơ. Chúng ta cũng sẽ học cách vận dụng các phép toán về vectơ vào việc giải toán cũng như trong các hoạt động thực tiễn và các môn học có liên quan.



Trong một máy đo vận tốc gió (Anemometer), độ lớn của vận tốc được đo bằng số vòng quay thiết bị hình chảo và hướng gió được biểu diễn bởi hướng của mũi tên.

Học xong chương này, bạn có thể:

- Nhận biết được khái niệm vectơ, vectơ bằng nhau, vectơ-không. Biểu thị được một số đại lượng trong thực tiễn bằng vectơ.
- Thực hiện được các phép toán trên vectơ (tổng và hiệu hai vectơ, tích của một số với một vectơ) và mô tả được những tính chất hình học (ba điểm thẳng hàng, trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác, ...) bằng vectơ.
- Thực hiện được phép toán tính tích vô hướng của hai vectơ và mô tả được những tính chất hình học bằng tích vô hướng.
- Sử dụng được vectơ và các phép toán trên vectơ để giải thích một số hiện tượng có liên quan đến Vật lí và Hoá học. Vận dụng được kiến thức về vectơ để giải một số bài toán hình học và một số bài toán liên quan đến thực tiễn.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Bài 1. Khái niệm vectơ

Từ khoá: Đại lượng vô hướng; Đại lượng có hướng; Điểm đầu; Điểm cuối; Ngọn; Giá; Độ lớn; Vectơ đối.

Chúng ta cần vectơ để biểu diễn các đại lượng có hướng.



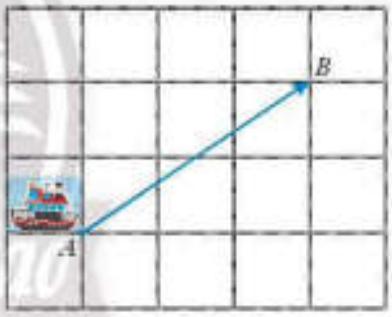
1. Định nghĩa vectơ

Trong thông báo: Có một con tàu chở 500 tấn hàng từ cảng A đến cảng B cách nhau 500 km.

Bạn hãy tìm sự khác biệt giữa hai đại lượng sau:

– Khối lượng của hàng: 500 tấn.

– Độ dịch chuyển của tàu: 500 km từ A đến B.



Hình 1

Đại lượng vô hướng là đại lượng chỉ có độ lớn. Ví dụ: khối lượng, khoảng cách, nhiệt độ, ...

Đại lượng có hướng là đại lượng bao gồm cả độ lớn và hướng. Ví dụ: độ dịch chuyển, lực, vận tốc, gia tốc, ...

Khi xác định một đại lượng vô hướng, ta chỉ cần mô tả độ lớn của nó. Ví dụ: Hàng trên tàu có khối lượng 500 tấn.

Khi xác định một đại lượng có hướng, ta phải đề cập đến cả độ lớn và hướng của nó. Ví dụ: Con tàu có độ dịch chuyển dài 500 km theo hướng từ A đến B.

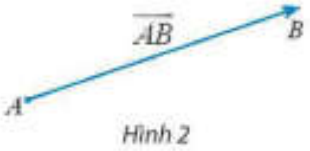
Vectơ là một đoạn thẳng có hướng, nghĩa là đã chỉ ra điểm đầu và điểm cuối.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

• Vectơ có điểm đầu A, điểm cuối B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là vectơ $\overrightarrow{AB}$ (Hình 2).

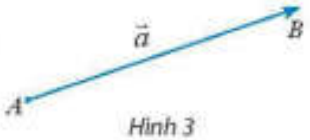
• Đường thẳng đi qua hai điểm A và B gọi là ***giá*** của vectơ $\overrightarrow{AB}$.

• Độ dài của đoạn thẳng AB gọi là ***độ dài*** của vectơ $\overrightarrow{AB}$ và được kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$. Như vậy ta có: $|\overrightarrow{AB}| = AB$.



Hình 2

Chú ý: Một vectơ khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối có thể viết là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \ldots$

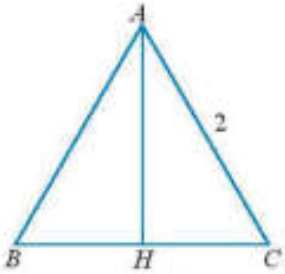


Hình 3

Ví dụ 1

Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 2 (Hình 4). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BC.

Tìm điểm đầu, điểm cuối, giá và độ dài của các vectơ: $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{BH}$.



Hình 4

Giải

Vectơ $\overrightarrow{CA}$ có điểm đầu là C, điểm cuối là A và có giá là đường thẳng AC.

Vectơ $\overrightarrow{AH}$ có điểm đầu là A, điểm cuối là H và có giá là đường thẳng AH.

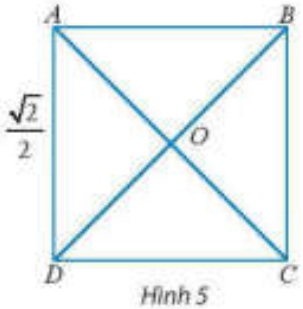
Vectơ $\overrightarrow{BH}$ có điểm đầu là B, điểm cuối là H và có giá là đường thẳng BH.

Ta có: $CA = 2$, $BH = 1$, $AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$.

Suy ra $|\overrightarrow{CA}| = 2$, $|\overrightarrow{BH}| = 1$, $|\overrightarrow{AH}| = \sqrt{3}$.

1 Tìm điểm đầu, điểm cuối, giá và độ dài của các vectơ $\overrightarrow{CH}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{HA}$ trong Ví dụ 1.

2 Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$, hai đường chéo cắt nhau tại O (Hình 5). Tìm độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AO}$.

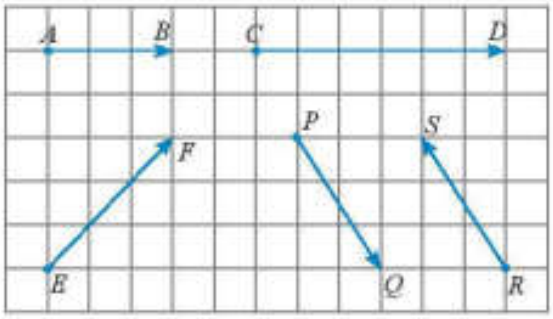


Hình 5

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

2. Hai vectơ cùng phương, cùng hướng

2 Bạn có nhận xét gì về giá của các cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{PQ}$ và $\overrightarrow{RS}$ trong Hình 6?



Hình 6

Hai vectơ được gọi là ***cùng phương*** nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

Ví dụ 2

Tìm các vectơ cùng phương trong Hình 6.

Giải

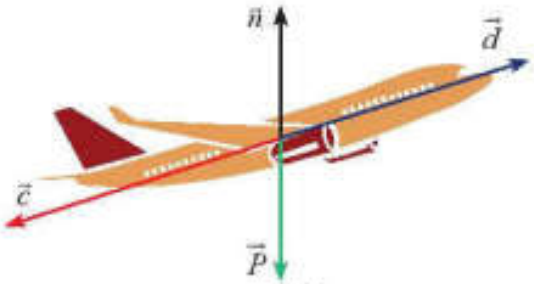
Trong Hình 6, $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng phương vì có giá trùng nhau; $\overrightarrow{PQ}$ và $\overrightarrow{RS}$ cùng phương vì có giá song song.

Chú ý: Trong Hình 6, hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng phương và có cùng hướng đi từ trái sang phải. Ta nói $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là *hai vectơ cùng hướng*. Hai vectơ $\overrightarrow{PQ}$ và $\overrightarrow{RS}$ cùng phương nhưng có hướng ngược nhau. Ta nói hai vectơ $\overrightarrow{PQ}$ và $\overrightarrow{RS}$ là *hai vectơ ngược hướng*.

Nhận xét: Hai vectơ cùng phương chỉ có thể cùng hướng hoặc ngược hướng.

Ví dụ 3

Tìm các lực ngược hướng trong số các lực tác động vào máy bay trong Hình 7.



Hình 7

Giải

Quan sát hình 7, ta thấy lực nâng $\vec{n}$ ngược hướng với trọng lực $\vec{P}$; lực cản $\vec{c}$ ngược hướng với lực đẩy $\vec{d}$.

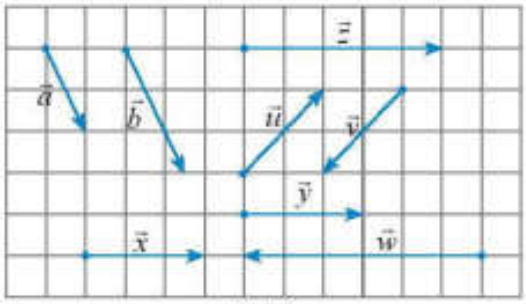
Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

3 Quan sát Hình 8 và gọi tên các vectơ:

a) Cùng phương với vectơ $\vec{x}$;

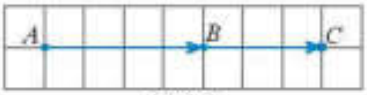
b) Cùng hướng với vectơ $\vec{a}$;

c) Ngược hướng với vectơ $\vec{u}$.



Hình 8

Nhận xét: Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.



Hình 9

Thật vậy, ta thấy nếu ba điểm A, B, C thẳng hàng thì hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ có giá trùng nhau nên chúng cùng phương. Ngược lại, nếu hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương thì hai đường thẳng AB và AC phải song song hoặc trùng nhau, hơn nữa hai đường thẳng này lại có chung điểm A nên chúng phải trùng nhau. Vậy ba điểm A, B, C thẳng hàng.

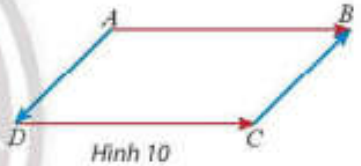
4 Khẳng định sau đúng hay sai? Hãy giải thích.

Nếu ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng thì hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

3. Vectơ bằng nhau – Vectơ đối nhau

3 Cho hình bình hành $ABCD$ (Hình 10), hãy so sánh độ dài và hướng của hai vectơ:

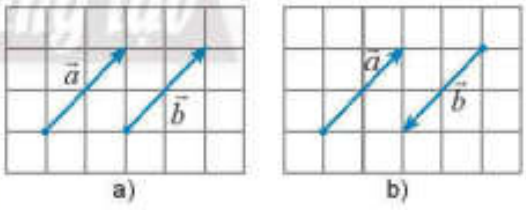
a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$; b) $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{CB}$.



Hình 10

Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là ***bằng nhau*** nếu chúng cùng hướng và có cùng độ dài, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$.

Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là ***đối nhau*** nếu chúng ngược hướng và có cùng độ dài, kí hiệu $\vec{a} = -\vec{b}$. Khi đó, vectơ $\vec{b}$ được gọi là ***vectơ đối*** của vectơ $\vec{a}$.

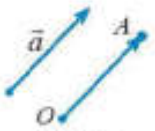


Hình 11

Chú ý:

a) Cho vectơ $\vec{a}$ và điểm O, ta luôn tìm được một điểm A duy nhất sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$. Khi đó độ dài của vectơ $\vec{a}$ là độ dài đoạn OA, kí hiệu là $|\vec{a}|$.

b) Cho đoạn thẳng MN, ta luôn có $\overrightarrow{NM} = -\overrightarrow{MN}$.



Hình 12

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Ví dụ 4

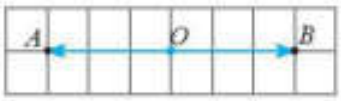
a) Tìm trong Hình 10 hai cặp vectơ bằng nhau và hai cặp vectơ đối nhau.

b) Cho điểm O là trung điểm của đoạn thẳng AB. Tìm hai vectơ đối nhau.

Giải

a) Trong Hình 10, ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$,

$\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD}$.



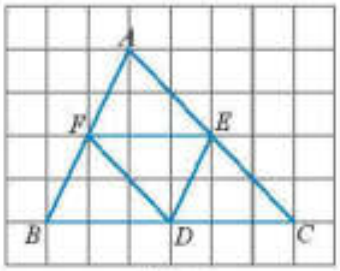
Hình 13

b) Ta có $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$ (Hình 13).

5 Cho D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC (Hình 14).

a) Tìm các vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{EF}$.

b) Tìm các vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{EC}$.



Hình 14

4. Vectơ-không

Ta biết rằng mỗi vectơ hoàn toàn được xác định khi biết điểm đầu và điểm cuối của nó.

Với một điểm A bất kì, ta quy ước có một vectơ đặc biệt mà điểm đầu và điểm cuối đều là A.

Vectơ đó được kí hiệu là $\overrightarrow{AA}$ và gọi là vectơ-không (có gạch nối giữa hai từ).

Vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau gọi là ***vectơ-không***, kí hiệu là $\vec{0}$.

Chú ý:

– Quy ước vectơ-không có độ dài bằng 0.

– Vectơ-không luôn cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ.

– Mọi vectơ-không đều bằng nhau: $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \ldots$ với mọi điểm $A, B, C, \ldots$

– Vectơ đối của vectơ-không là chính nó.

Ví dụ 5

Cho đoạn thẳng EF có độ dài bằng 2 và nhận M là trung điểm.

a) Tìm vectơ-không trong số các vectơ: $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{EE}$, $\overrightarrow{EM}$, $\overrightarrow{MM}$, $\overrightarrow{FF}$.

b) Dùng kí hiệu $\vec{0}$ để biểu diễn các vectơ-không đó.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Giải

a) Ta có các vectơ $\overrightarrow{EE}$, $\overrightarrow{MM}$, $\overrightarrow{FF}$ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau nên chúng là vectơ-không.

b) Ta viết $\vec{0} = \overrightarrow{EE} = \overrightarrow{FF} = \overrightarrow{MM}$.

6 Tìm độ dài của các vectơ $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{EE}$, $\overrightarrow{EM}$, $\overrightarrow{MM}$, $\overrightarrow{FF}$ trong Ví dụ 5.

BÀI TẬP

1. a) Bạn hãy tìm sự khác biệt giữa hai đại lượng sau:

– Bác Ba có số tiền là 20 triệu đồng.

– Một cơn bão di chuyển với vận tốc 20 km/h theo hướng đông bắc.

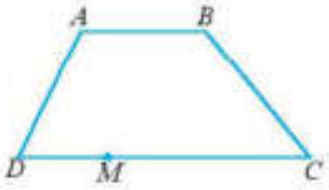
b) Trong các đại lượng sau, đại lượng nào cần được biểu diễn bởi vectơ?

Giá tiền, lực, thể tích, tuổi, độ dịch chuyển, vận tốc.

2. Cho hình thang $ABCD$ có hai cạnh đáy là AB và DC (Hình 15). Điểm M nằm trên đoạn DC.

a) Gọi tên các vectơ cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{AB}$.

b) Gọi tên các vectơ ngược hướng với vectơ $\overrightarrow{DM}$.

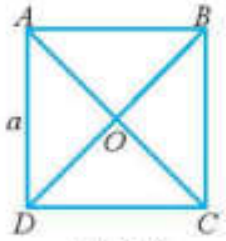


Hình 15

3. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O và có cạnh bằng a (Hình 16).

a) Tìm trong hình hai vectơ bằng nhau và có độ dài bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

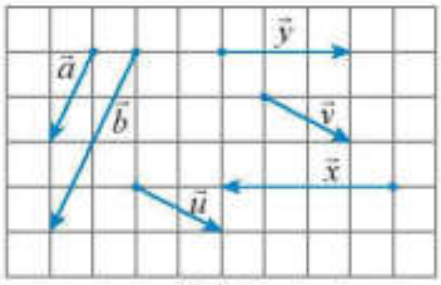
b) Tìm trong hình hai vectơ đối nhau và có độ dài bằng $a\sqrt{2}$.



Hình 16

4. Cho tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng tứ giác đó là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

5. Hãy chỉ ra các cặp vectơ cùng hướng, ngược hướng, bằng nhau trong Hình 17.



Hình 17

6. Gọi O là tâm hình lục giác đều $ABCDEF$.

a) Tìm các vectơ khác vectơ $\vec{0}$ và cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{OA}$.

b) Tìm các vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$.

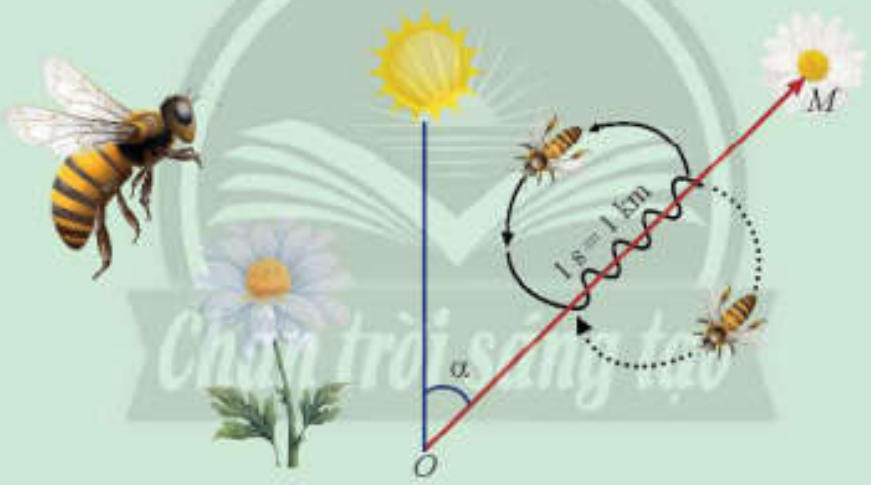
7. Tìm các lực cùng hướng và ngược hướng trong số các lực đẩy được biểu diễn bằng các vectơ trong Hình 18.



Hình 18

Bạn có biết?

VECTƠ TRONG VŨ ĐIỆU LOÀI ONG



Vũ điệu loài ong hay *điệu nhảy lúc lắc* là một vũ điệu đặc biệt hình số 8 của ong mật. Những con ong đã tìm được nguồn thức ăn thành công sẽ thực hiện vũ điệu này để chia sẻ thông tin cho các thành viên khác trong tổ. Thông tin đó là một vectơ $\overrightarrow{OM}$ chỉ độ dịch chuyển từ tổ đến nơi có hoa.

– Tia OM phân đôi đường số 8 trong vũ điệu chỉ hướng của vectơ.

– Thời gian múa sẽ tỉ lệ thuận với độ lớn của vectơ (khoảng cách từ tổ đến nơi có hoa).

Như vậy có thể nói loài ong cũng biết biểu diễn vectơ thông qua một điệu múa.

(*Nguồn*: https://en.wikipedia.org/wiki/Round_dance_honey_bee)

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Xác Định Một Vectơ; Phương, Hướng Của Vectơ; Độ Dài Của Vectơ

1. Phương pháp giải.

- Xác định một vectơ và xác định sự cùng phương, cùng hướng của hai vectơ theo định nghĩa
- Dựa vào các tính chất hình học của các hình đã cho biết để tính độ dài của một vectơ

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tứ giác $ABCD$. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của tứ giác.

Lời giải

Hai điểm phân biệt, chẳng hạn A, B ta xác định được hai vectơ khác vectơ-không là $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$. Mà từ bốn đỉnh A, B, C, D của tứ giác ta có 6 cặp điểm phân biệt do đó có 12 vectơ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng ba điểm A,B,C phân biệt thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

Lời giải

Nếu A,B,C thẳng hàng suy ra giá của $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ đều là đường thẳng đi qua ba điểm A,B,C nên $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

Ngược lại nếu $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương khi đó đường thẳng AB và AC song song hoặc trùng nhau. Nhưng hai đường thẳng này cùng đi qua điểm A nên hai đường thẳng AB và AC trùng nhau hay ba điểm A,B,C thẳng hàng.

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của BC,CA,AB.

a) Xác định các vectơ khác vectơ - không cùng phương với $\overrightarrow{MN}$ có điểm đầu và điểm cuối lấy trong các điểm đã cho.

b) Xác định các vectơ khác vectơ - không cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ có điểm đầu và điểm cuối lấy trong điểm đã cho.

c) Vẽ các vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{NP}$ mà có điểm đầu A,B.

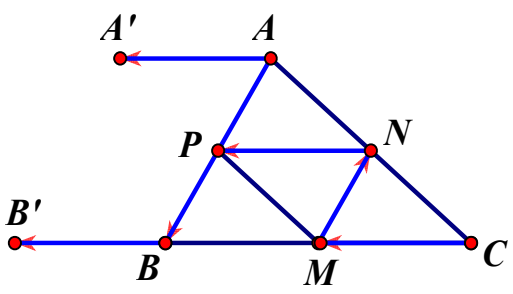
Lời giải (Hình 1.4)

a) Các vectơ khác vectơ không cùng phương với $\overrightarrow{MN}$ là $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{PB}$.

b) Các vectơ khác vectơ - không cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{NM}$.

c) Trên tia CB lấy điểm B' sao cho $BB'=NP$

Khi đó ta có $\overrightarrow{BB'}$ là vectơ có điểm đầu là B và bằng vectơ $\overrightarrow{NP}$.



Hình 1.4

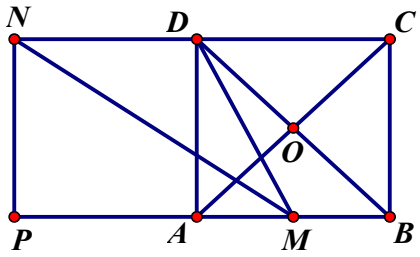
Qua A dựng đường thẳng song song với đường thẳng NP. Trên đường thẳng đó lấy điểm A' sao cho $\overrightarrow{AA'}$ cùng hướng với $\overrightarrow{NP}$ và $AA' = NP$.

Khi đó ta có $\overrightarrow{AA'}$ là vectơ có điểm đầu là A và bằng vectơ $\overrightarrow{NP}$.

Ví dụ 4: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh a. Gọi M là trung điểm của AB, N là điểm đối xứng với C qua D. Hãy tính độ dài của vectơ sau $\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{MN}$.

Lời giải (hình 1.5)

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông MAD ta có



Hình 1.5

$$DM^2 = AM^2 + AD^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Suy ra $\left|\overrightarrow{MD}\right| = MD = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Qua N kẻ đường thẳng song song với AD cắt AB tại P.

Khi đó tứ giác $ADNP$ là hình vuông và $PM = PA + AM = a + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$.

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông NPM ta có

$$MN^2 = NP^2 + PM^2 = a^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{13a^2}{4} \Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{13}}{2}$$

Suy ra $\left|\overrightarrow{MN}\right| = MN = \frac{a\sqrt{13}}{2}$.

Dạng 2: Chứng minh hai vectơ bằng nhau.

1. Phương pháp giải.

- Để chứng minh hai vectơ bằng nhau ta chứng minh chúng có cùng độ dài và cùng hướng hoặc dựa vào nhận xét nếu tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

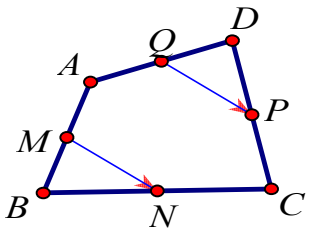
2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

Lời giải (hình 1.6)

Do M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC nên MN là đường trung bình của tam giác ABC suy ra $MN//AC$ và $MN=\frac{1}{2}AC$ (1).

Tương tự QP là đường trung bình của tam giác ADC suy ra $QP//AC$ và $QP=\frac{1}{2}AC$ (2).



Hình 1.6

Từ (1) và (2) suy ra $MN//QP$ và $MN=QP$ do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

Vậy ta có $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi I là trung điểm của BC. Dựng điểm B' sao cho $\overrightarrow{B'B}=\overrightarrow{AG}$.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{IC}$

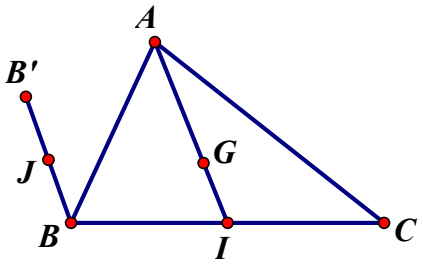
b) Gọi J là trung điểm của BB'. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{IG}$.

Lời giải (hình 1.7)

a) Vì I là trung điểm của BC nên $BI=CI$ và $\overrightarrow{BI}$ cùng hướng với $\overrightarrow{IC}$ do đó hai vectơ $\overrightarrow{BI},\overrightarrow{IC}$ bằng nhau hay $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{IC}$.

b) Ta có $\overrightarrow{B'B}=\overrightarrow{AG}$ suy ra $B'B=AG$ và $BB'//AG$.

Do đó $\overrightarrow{BJ}$, $\overrightarrow{IG}$ cùng hướng (1).



Hình 1.7

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $IG=\frac{1}{2}AG$, J là trung điểm BB' suy ra $BJ=\frac{1}{2}BB'$

Vì vậy $BJ=IG$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{IG}$.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Vectơ có điểm đầu là D, điểm cuối là E được kí hiệu là

A. DE. **B.** $|\overrightarrow{DE}|$. **C.** $\overrightarrow{ED}$. **D.** $\overrightarrow{DE}$.

Lời giải

Chọn D

Câu 2: Cho tam giác ABC. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ - không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh A, B, C?

A. 3. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Đó là các vectơ: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AC}$.

Câu 3: Cho tứ giác $ABCD$. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ - không có điểm đầu và cuối là các đỉnh

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

của tứ giác?

A. 4. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 12.

Lời giải

Chọn D

Xét các vectơ có điểm A là điểm đầu thì có các vectơ thỏa mãn bài toán là $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ $\longrightarrow$ có 3 vectơ.

Tương tự cho các điểm còn lại B, C, D.

Câu 4: Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Có duy nhất một vectơ cùng phương với mọi vectơ.

B. Có ít nhất hai vectơ có cùng phương với mọi vectơ.

C. Có vô số vectơ cùng phương với mọi vectơ.

D. Không có vectơ nào cùng phương với mọi vectơ.

Lời giải

Chọn A

Vì vectơ - không cùng phương với mọi vectơ.

Câu 5: Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Khi đó:

A. Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$.

B. Điều kiện đủ để A, B, C thẳng hàng là với mọi M, $\overrightarrow{MA}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$.

C. Điều kiện cần để A, B, C thẳng hàng là với mọi M, $\overrightarrow{MA}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$.

D. Điều kiện cần để A, B, C thẳng hàng là $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 6: Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC của tam giác đều ABC. Hỏi cặp vectơ nào sau đây cùng hướng?

A. $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{CB}$. **B.** $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{MB}$. **C.** $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$. **D.** $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{CA}$.

Lời giải

Chọn B

Câu 7: Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Số các vectơ khác vectơ - không, cùng phương với $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

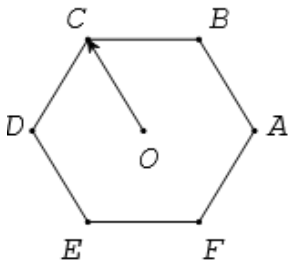
A. 4. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Đó là các vectơ: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{CF}$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133



Câu 8: Với $\overrightarrow{DE}$ (khác vectơ - không) thì độ dài đoạn ED được gọi là

A. Phương của $\overrightarrow{ED}$.

B. Hướng của $\overrightarrow{ED}$.

C. Giá của $\overrightarrow{ED}$.

D. Độ dài của $\overrightarrow{ED}$.

Lời giải

Chọn D

Câu 9: Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

B. $\vec{0}$ cùng hướng với mọi vectơ.

C. $\left|\overrightarrow{AB}\right|>0$.

D. $\vec{0}$ cùng phương với mọi vectơ.

Lời giải

Chọn C

Vì có thể xảy ra trường hợp $\left|\overrightarrow{AB}\right|=0\Leftrightarrow A\equiv B$.

Câu 10: Hai vectơ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi

A. Giá của chúng trùng nhau và độ dài của chúng bằng nhau.

B. Chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một hình bình hành.

C. Chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một tam giác đều.

D. Chúng cùng hướng và độ dài của chúng bằng nhau.

Lời giải

Chọn D

Câu 11: Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D và không cùng nằm trên một đường thẳng. Điều kiện nào trong các đáp án A, B, C, D sau đây là điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$?

A. $ABCD$ là hình bình hành.

B. $ABDC$ là hình bình hành.

C. $AC=BD$.

D. $AB=CD$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Rightarrow\begin{cases}AB\parallel CD\\AB=CD\end{cases}\Rightarrow ABDC$ là hình bình hành.
- Mặt khác, $ABDC$ là hình bình hành $\Rightarrow\begin{cases}AB\parallel CD\\AB=CD\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

Do đó, điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ là $ABDC$ là hình bình hành.

Câu 12: Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D thỏa mãn $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng $\overrightarrow{CD}$.
B. $\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{CD}$.
C. $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right|$.
D. $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải

Chọn D

Phải suy ra $ABDC$ là hình bình hành (nếu A, B, C, D không thẳng hàng) hoặc bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng.

Câu 13: Gọi O là giao điểm của hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.
B. $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DO}$.
C. $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$.
D. $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$.

Lời giải

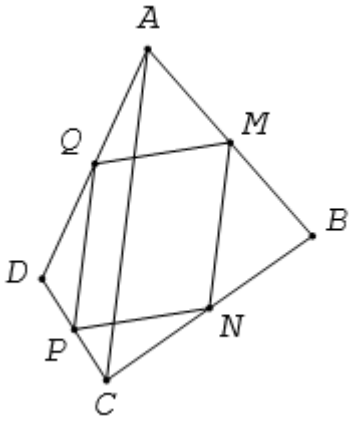
Chọn C

Câu 14: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$.
B. $\left|\overrightarrow{QP}\right|=\left|\overrightarrow{MN}\right|$.
C. $\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{NP}$.
D. $\left|\overrightarrow{MN}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|$.

Lời giải

Chọn D.



Ta có $\begin{cases} MN \,//\, PQ \\ MN = PQ \end{cases}$ (do cùng song song và bằng $\frac{1}{2}AC$).

Do đó $MNPQ$ là hình bình hành.

Câu 15: Cho hình vuông $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.
B. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.
C. $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$.
D. Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

Lời giải

Chọn C

Vì $AB=BC \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$.

Câu 16: Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình chữ nhật $ABCD$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$. **B.** $\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OD}$ cùng hướng.

C. $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$ cùng hướng. **D.** $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|$.

Lời giải

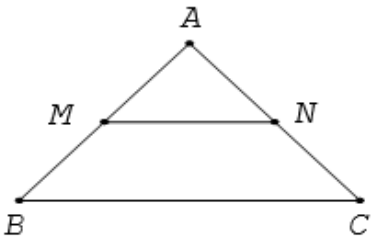
Chọn D

Câu 17: Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC của tam giác đều ABC. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$. **B.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$. **C.** $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BC}$. **D.** $\left|\overrightarrow{BC}\right|=2\left|\overrightarrow{MN}\right|$.

Lời giải

Chọn D



Ta có MN là đường trung bình của tam giác ABC.

Do đó $BC=2MN\longrightarrow\left|\overrightarrow{BC}\right|=2\left|\overrightarrow{MN}\right|$.

Câu 18: Cho tam giác ABC đều cạnh a. Gọi M là trung điểm BC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}$. **B.** $\overrightarrow{AM}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\overrightarrow{AM}=a$. **D.** $\left|\overrightarrow{AM}\right|=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

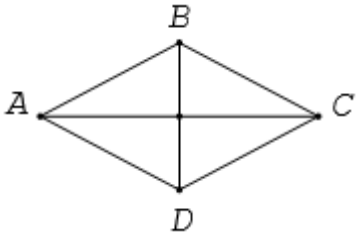
Chọn D

Câu 19: Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a và $\widehat{BAD}=60°$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$. **B.** $\left|\overrightarrow{BD}\right|=a$. **C.** $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$. **D.** $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DA}$.

Lời giải

Chọn B



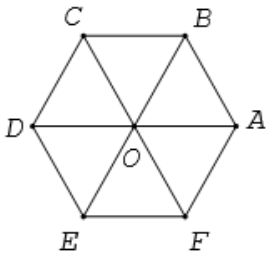
Từ giả thiết suy ra tam giác ABD đều cạnh a nên $BD=a\longrightarrow\left|\overrightarrow{BD}\right|=a$.

Câu 20: Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{ED}$. **B.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AF}\right|$. **C.** $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BC}$. **D.** $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OE}$.

Lời giải

Chọn D



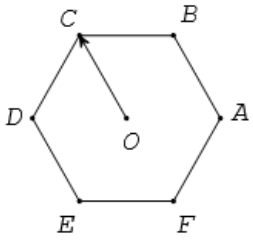
Câu 21: Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Số các vectơ bằng $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Đó là các vectơ: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{ED}$.

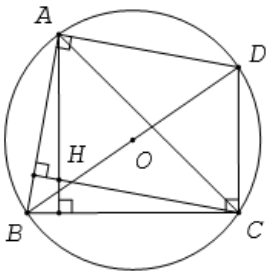


Câu 22: Cho tam giác ABC có trực tâm H. Gọi D là điểm đối xứng với B qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CH}$.
B. $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{HC}$.
C. $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CH}$.
D. $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{HC}$ và $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $AH \perp BC$ và $DC \perp BC$ (do góc $\widehat{DCB}$ chắn nửa đường tròn).

Suy ra $AH \parallel DC$.

Tương tự ta cũng có $CH \parallel AD$.

Suy ra tứ giác $ADCH$ là hình bình hành. Do đó $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{HC}$.

Câu 23: Cho $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ và một điểm C. Có bao nhiêu điểm D thỏa mãn $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right|$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right| \Leftrightarrow AB = CD$. Suy ra tập hợp các điểm D thỏa mãn yêu cầu bài toán là đường tròn tâm C, bán kính AB.

Câu 24: Cho $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ và một điểm C. Có bao nhiêu điểm D thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Bài 2. Tổng và hiệu của hai vectơ

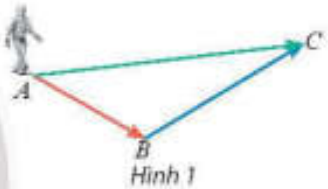
Từ khoá: Tổng của hai vectơ; Hiệu của hai vectơ; Quy tắc ba điểm; Quy tắc hình bình hành.

Một kiện hàng được vận chuyển từ điểm A đến điểm B rồi lại được vận chuyển từ điểm B đến điểm C. Tìm vectơ biểu diễn tổng của hai độ dịch chuyển: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.



1. Tổng của hai vectơ

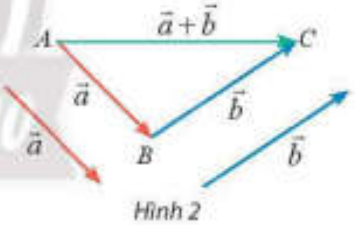
1 Một rô bốt thực hiện liên tiếp hai chuyển động có độ dịch chuyển lần lượt được biểu diễn bởi hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ (Hình 1). Tìm vectơ biểu diễn độ dịch chuyển của rô bốt sau hai chuyển động trên.



Hình 1

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Từ một điểm A tuỳ ý, lấy hai điểm B, C sao cho $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Khi đó $\overrightarrow{AC}$ được gọi là ***tổng của hai vectơ*** $\vec{a}$, $\vec{b}$ và được kí hiệu là $\vec{a}+\vec{b}$.

Vậy $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.



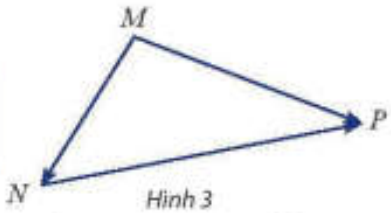
Hình 2

Phép toán tìm tổng của hai vectơ còn được gọi là ***phép cộng vectơ***.

Từ định nghĩa tổng của hai vectơ, ta suy ra quy tắc cộng vectơ sau đây:

Quy tắc ba điểm

Với ba điểm M, N, P, ta có: $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}$.



Hình 3

Chú ý: Khi cộng hai vectơ theo quy tắc ba điểm, điểm cuối của vectơ thứ nhất phải là điểm đầu của vectơ thứ hai.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Ví dụ 1

Cho các điểm E, F, G, H, K. Thực hiện các phép cộng vectơ:

$\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FH}; \overrightarrow{FK}+\overrightarrow{KG}; \overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HE}$.

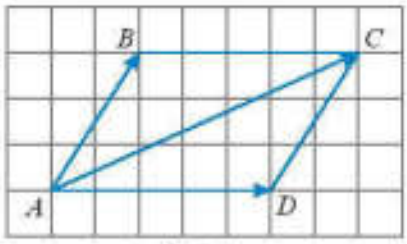
Giải

Áp dụng quy tắc ba điểm, ta có:

$\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{EH}; \quad \overrightarrow{FK}+\overrightarrow{KG}=\overrightarrow{FG}; \quad \overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{EE}=\vec{0}$.

Cho hình bình hành $ABCD$ (Hình 4).

Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

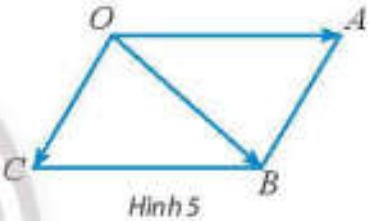


Hình 4

Từ $_2$, ta suy ra quy tắc cộng vectơ sau đây:

Quy tắc hình bình hành

Nếu $OABC$ là hình bình hành thì ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}$.



Hình 5

Ví dụ 2

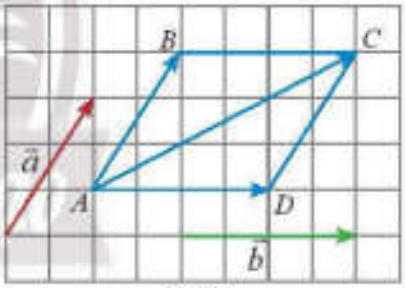
Tìm tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong Hình 6.

Giải

Ta có: $\vec{a}=\overrightarrow{AB}, \vec{b}=\overrightarrow{AD}$, suy ra $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

Theo quy tắc hình bình hành, ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

Vậy $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$.



Hình 6

Chú ý: Để áp dụng quy tắc hình bình hành, ta cần đưa bài toán tìm tổng hai vectơ về bài toán tìm tổng của hai vectơ có chung điểm đầu.

Cho hình thang $ABCD$ có hai cạnh đáy là AB và DC. Cho biết $\vec{a}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}; \vec{b}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}$.

Chứng minh hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Tìm độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

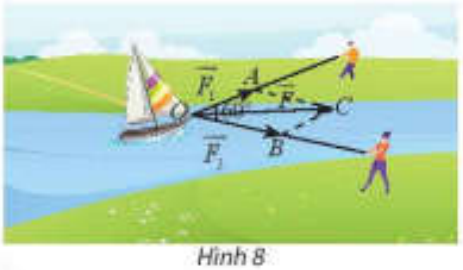
Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

1 Một máy bay có vectơ vận tốc chỉ theo hướng bắc, vận tốc gió là một vectơ theo hướng đông như Hình 7. Tính độ dài vectơ tổng của hai vectơ nói trên.



Hình 7

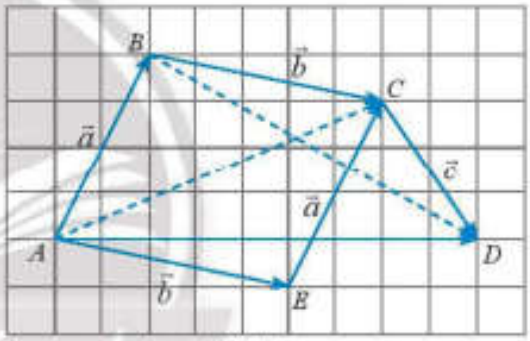
2 Hai người cùng kéo một con thuyền với hai lực $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{OB}$ có độ lớn lần lượt là 400 N, 600 N (Hình 8). Cho biết góc giữa hai vectơ là 60°. Tìm độ lớn của vectơ hợp lực $\overrightarrow{F}$ là tổng của hai lực $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$.



Hình 8

2. Tính chất của phép cộng các vectơ

2 Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ được biểu diễn như Hình 9. Hãy hoàn thành các phép cộng vectơ sau và so sánh các kết quả tìm được.



Hình 9

a) $\vec{a}+\vec{b} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} =$?;

$\vec{b}+\vec{a} = \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC} =$?.

b) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD} =$?;

$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) = \overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD} =$?.

Phép cộng vectơ có các tính chất sau:

- Tính chất giao hoán: $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$;
- Tính chất kết hợp: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;
- Với mọi vectơ $\vec{a}$, ta luôn có: $\vec{a}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{a} = \vec{a}$.

Chú ý: Từ tính chất kết hợp, ta có thể xác định được tổng của ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, kí hiệu là $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ với $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$.

Ví dụ 3

Cho tứ giác $ABCD$. Thực hiện các phép cộng vectơ sau:

a) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA})+\overrightarrow{BC}$; b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Giải

Áp dụng tính chất giao hoán và kết hợp của phép cộng vectơ, ta có:

a) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA})+\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CC}=\vec{0}$.

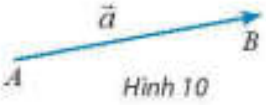
b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 1. Tính độ dài của các vectơ sau:

a) $\vec{a}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})+\overrightarrow{CB}$; b) $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$.

Chú ý: Cho vectơ tuỳ ý $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$.

Ta có $\vec{a}+(-\vec{a})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.



Hình 10

Tổng hai vectơ đối nhau luôn bằng vectơ-không: $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

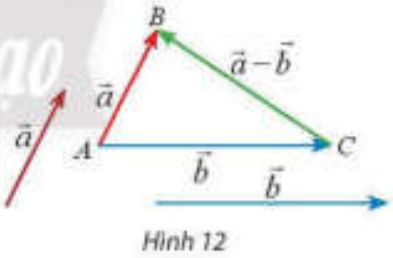
3. Hiệu của hai vectơ

Tìm hợp lực của hai lực đối nhau $\vec{F}$ và $-\vec{F}$ (Hình 11).



Hình 11

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. ***Hiệu của hai vectơ*** $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là vectơ $\vec{a}+(-\vec{b})$ và kí hiệu $\vec{a}-\vec{b}$.



Hình 12

Phép toán tìm hiệu của hai vectơ còn được gọi là ***phép trừ vectơ***.

Ví dụ 4

Cho các điểm M, N, P, Q. Thực hiện các phép trừ vectơ sau: $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PN}$; $\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PQ}$.

Giải

Ta có:

$\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}$;

$\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{QM}$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Chú ý:

Cho ba điểm O, A, B, ta có: $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$.



Hình 13

4 Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 1 và một điểm O tuỳ ý.
Tính độ dài của các vectơ sau:

a) $\vec{a} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD}$;

b) $\vec{b} = (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC})$.

4. Tính chất vectơ của trung điểm đoạn thẳng và trọng tâm tam giác

4 a) Cho điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB. Ta đã biết $\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AM}$.

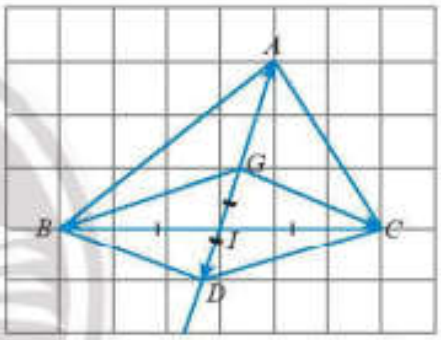
Hoàn thành phép cộng vectơ sau: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MM} =$?



Hình 14

b) Cho điểm G là trọng tâm của tam giác ABC có trung tuyến AI. Lấy D là điểm đối xứng với G qua I. Ta có $BGCD$ là hình bình hành và G là trung điểm của đoạn thẳng AD. Với lưu ý rằng $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$ và $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{DG}$, hoàn thành phép cộng vectơ sau:

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{DD} =$?



Hình 15

Người ta chứng minh được các tính chất:

Điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Ví dụ 5

Cho tứ giác $ABCD$ có I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD và O là trung điểm của IJ.
Chứng minh $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

Giải

Do I, J, O lần lượt là trung điểm của AB, CD và IJ nên:

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0};\ \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} = \vec{0};\ \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \vec{0}.$$

Ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JC}) + (\overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JD})$

$= (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}) + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}) + (\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD})$

$= \vec{0}$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

5 Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Tìm ba điểm M, N, P thoả mãn:

a) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$; b) $\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\vec{0}$; c) $\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}=\vec{0}$.

BÀI TẬP

1. Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm hai đường chéo và một điểm M tuỳ ý. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$; b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

2. Cho tứ giác $ABCD$, thực hiện các phép cộng và trừ vectơ sau:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$; b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$; c) $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}$.

3. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a. Tính độ dài của các vectơ:

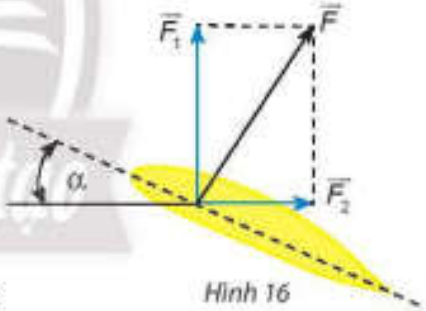
a) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$; c) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$.

4. Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm hai đường chéo. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$; b) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

5. Cho ba lực $\overrightarrow{F_1}=\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ đều là 10 N và $\widehat{AMB}=90°$. Tìm độ lớn của lực $\overrightarrow{F_3}$.

6. Khi máy bay nghiêng cánh một góc α, lực $\vec{F}$ của không khí tác động vuông góc với cánh và bằng tổng của lực nâng $\overrightarrow{F_1}$ và lực cản $\overrightarrow{F_2}$ (Hình 16). Cho biết $\alpha=30°$ và $|\vec{F}|=a$. Tính $|\overrightarrow{F_1}|$ và $|\overrightarrow{F_2}|$ theo a.



Hình 16

7. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a và ba điểm G, H, K thoả mãn: $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$; $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$; $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$. Tính độ dài các vectơ $\overrightarrow{KA}$, $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{AG}$.

8. Một con tàu có vectơ vận tốc chỉ theo hướng nam, vận tốc của dòng nước là một vectơ theo hướng đông như Hình 17. Tính độ dài vectơ tổng của hai vectơ nói trên.



Hình 17

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Xác định độ dài tổng, hiệu của các vectơ.

1. Phương pháp giải.

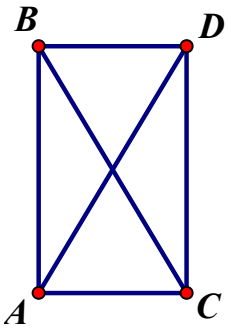
Để xác định độ dài tổng hiệu của các vectơ

- Trước tiên sử dụng định nghĩa về tổng, hiệu hai vectơ và các tính chất, quy tắc để xác định định phép toán vectơ đó.
- Dựa vào tính chất của hình, sử dụng định lí Pitago, hệ thức lượng trong tam giác vuông để xác định độ dài vectơ đó.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC}=30^0$ và $BC=a\sqrt{5}$.

Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.



Hình 1.10

Lời giải (hình 1.10)

Theo quy tắc ba điểm ta có

- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ Mà $\sin\widehat{ABC}=\dfrac{AC}{BC}$

$\Rightarrow AC=BC.\sin\widehat{ABC}=a\sqrt{5}.\sin 30^0=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

Do đó $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

- $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$

Ta có $AC^2+AB^2=BC^2\Rightarrow AB=\sqrt{BC^2-AC^2}=\sqrt{5a^2-\dfrac{5a^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$

Vì vậy $\left|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|=AB=\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$

- Gọi D là điểm sao cho tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.

Khi đó theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$

Vì tam giác ABC vuông ở A nên tứ giác $ABDC$ là hình chữ nhật suy ra $AD=BC=a\sqrt{5}$

Vậy $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AD}\right|=AD=a\sqrt{5}$

Ví dụ 2: Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là O và cạnh a. M là một điểm bất kỳ.

a) Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|$, $\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}\right|$, $\left|\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}\right|$

b) Chứng minh rằng $\vec{u}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}$ không phụ thuộc vị trí điểm M. Tính độ dài vectơ $\vec{u}$

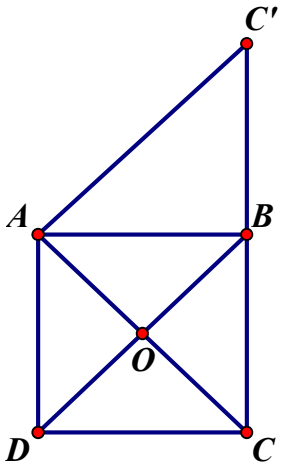
Lời giải (hình 1.11)

a) + Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

Suy ra $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC$.

Áp dụng định lí Pitago ta có $AC^2=AB^2+BC^2=2a^2\Rightarrow AC=\sqrt{2}a$

Vậy $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=a\sqrt{2}$



Hình 1.11

+ Vì O là tâm của hình vuông nên $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CO}$ suy ra $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BC}$

Vậy $\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|=a$

+ Do $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$ suy ra $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$

Mà $\left|\overrightarrow{BD}\right|=BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=a\sqrt{2}$ suy ra $\left|\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}\right|=a\sqrt{2}$

b) Theo quy tắc phép trừ ta có

$\vec{u}=\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right)+\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}\right)=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DB}$

Suy ra $\vec{u}$ không phụ thuộc vị trí điểm M.

Qua A kẻ đường thẳng song song với DB cắt BC tại C'.

Khi đó tứ giác $ADBC'$ là hình bình hành (vì có cặp cạnh đối song song) suy ra $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AC'}$

Do đó $\vec{u}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{CC'}$

Vì vậy $\left|\vec{u}\right|=\left|\overrightarrow{CC'}\right|=BC+BC'=a+a=2a$

Dạng 2: Chứng minh đẳng thức vectơ.

1. Phương pháp giải.

- Để chứng minh đẳng thức vectơ ta có các cách biến đổi: vế này thành vế kia, biến đổi tương đương, biến đổi hai vế cùng bằng một đại lương trung gian. Trong quá trình biến đổi ta cần sử dụng linh hoạt ba quy tắc tính vectơ.

Lưu ý: Khi biến đổi cần phải *hướng đích* , chẳng hạn biến đổi vế phải, ta cần xem vế trái có đại lượng nào để từ đó liên tưởng đến kiến thức đã có để làm sao xuất hiện các đại lượng ở vế trái. Và ta thường biến đổi vế phức tạp về vế đơn giản hơn.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho năm điểm A,B,C,D,E. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$

b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}$

Lời giải

a) Biến đổi vế trái ta có

$$VT=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)+\overrightarrow{CD}+\left(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DA}\right)$$
$$=\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}\right)+\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\right)+\overrightarrow{DA}$$
$$=\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}\right)+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}$$
$$=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}=VP \text{ ĐPCM}$$

b) Đẳng thức tương đương với

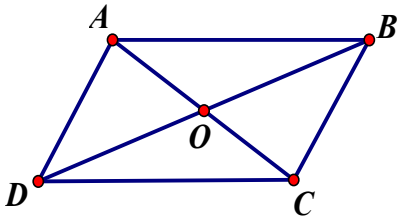
$$\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}\right)+\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}\right)-\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{EC}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}=\vec{0} \text{ (đúng) ĐPCM.}$$

Ví dụ 2: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. M là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

c) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.



Hình 1.12

Lời giải (Hình 1.12)

a) Ta có $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}$

$$=-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)+\overrightarrow{AC}$$

Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ suy ra

$$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$

b) Vì ABCD là hình bình hành nên ta có: $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CO}\Rightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AO}=\vec{0}$

Tương tự: $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

c) Cách 1: Vì ABCD là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}$$
$$=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$$

Cách 2: Đẳng thức tương đương với

$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$ (đúng do $ABCD$ là hình bình hành)

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$

c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$ với O là điểm bất kì.

Lời giải (Hình 1.13)

a) Vì PN, MN là đường trung bình của tam giác ABC nên

$PN//BM$, $MN//BP$ suy ra tứ giác $BMNP$ là hình bình hành

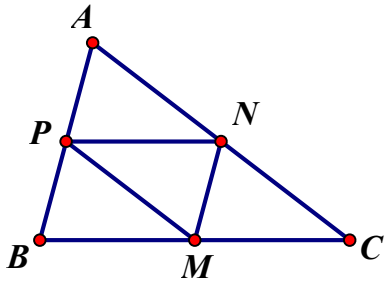
$\Rightarrow \overrightarrow{BM}=\overrightarrow{PN}$

N là trung điểm của $AC \Rightarrow \overrightarrow{CN}=\overrightarrow{NA}$

Do đó theo quy tắc ba điểm ta có

$\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}=\left(\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NA}\right)+\overrightarrow{AP}$

$=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$



Hình 1.13

b) Vì tứ giác $APMN$ là hình bình hành nên theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AM}$, kết hợp với quy tắc trừ

$\Rightarrow \overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BM}$

Mà $\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$ do M là trung điểm của BC.

Vậy $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$.

c) Theo quy tắc ba điểm ta có

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA}\right)+\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB}\right)+\left(\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NC}\right)$

$=\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}\right)+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{NC}$

$=\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}\right)-\left(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}\right)$

Theo câu a) ta có $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$ suy ra $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$.

B. $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NP}$.

C. $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CB}$.

D. $\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}$.

Lời giải

Chọn B

Xét các đáp án:

• Đáp án A. Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}\neq\overrightarrow{BC}$ (với D là điểm thỏa mãn $ABDC$ là hình bình hành). Vậy A sai.

• Đáp án B. Ta có $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{NP}$. Vậy B đúng.

• Đáp án C. Ta có $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}=-\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right)=-\overrightarrow{AD}\neq\overrightarrow{CB}$ (với D là điểm thỏa mãn $ABDC$ là hình bình hành). Vậy C sai.

• Đáp án D. Ta có $\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{BB}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}\neq\overrightarrow{AB}$. Vậy D sai.

Câu 2: Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là các vectơ khác $\vec{0}$ với $\vec{a}$ là vectơ đối của $\vec{b}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ cùng phương. **B.** Hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ ngược hướng.

C. Hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ cùng độ dài. **D.** Hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ chung điểm đầu.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\vec{a}=-\vec{b}$. Do đó, $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương, cùng độ dài và ngược hướng nhau.

Câu 3: Cho ba điểm phân biệt A, B, C. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$.

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}$. **D.** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$.

Lời giải

Chọn C.

Xét các đáp án:

• Đáp án A. Ta có $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{BC}$. Vậy A sai.

• Đáp án B. Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}\neq\overrightarrow{BC}$ (với D là điểm thỏa mãn $ABDC$ là hình bình hành). Vậy B sai.

• Đáp án C. Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$. Vậy C đúng.

Câu 4: Cho $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng. **B.** $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng độ dài.

C. $ABCD$ là hình bình hành. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DC}$. Do đó:

- $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ ngược hướng.
- $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng độ dài.
- $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ không cùng giá.
- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$.

Câu 5: Tính tổng $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}$.

A. $\overrightarrow{MR}$. **B.** $\overrightarrow{MN}$. **C.** $\overrightarrow{PR}$. **D.** $\overrightarrow{MP}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RN}=\overrightarrow{MN}$.

Câu 6: Cho hai điểm A và B phân biệt. Điều kiện để I là trung điểm AB là:

A. $IA=IB$. **B.** $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{IB}$. **C.** $\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}$. **D.** $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{BI}$.

Lời giải

Chọn C.

Câu 7: Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để I là trung điểm của đoạn thẳng AB?

A. $IA = IB.$ **B.** $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}.$ **C.** $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}.$ **D.** $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}.$

Lời giải

Chọn B.

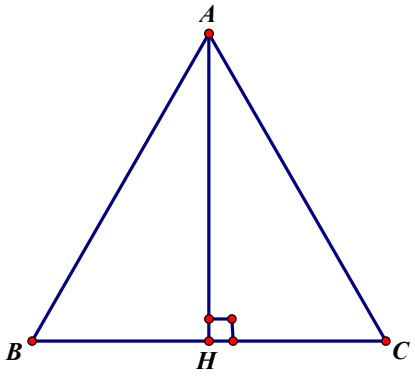
Điều kiện cần và đủ để I là trung điểm của đoạn thẳng AB là $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Câu 8: Cho tam giác ABC cân ở A, đường cao AH. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}.$ **B.** $\overrightarrow{HC} = -\overrightarrow{HB}.$ **C.** $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right|.$ **D.** $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{HC}.$

Lời giải

Chọn A.



Tam giác ABC cân ở A, đường cao AH. Do đó, H là trung điểm BC.

Ta có:

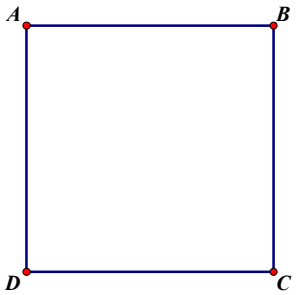
- $AB = AC \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right|$
- H là trung điểm $BC \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{HC} = -\overrightarrow{HB} \\ \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{HC} \end{cases}.$

Câu 9: Cho hình vuông $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}.$ **B.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$ **C.** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}.$ **D.** $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right|.$

Lời giải

Chọn D.



$ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right|$.

Câu 10: Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Nếu M là trung điểm đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}.$

B. Nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

C. Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}$.

D. Nếu ba điểm phân biệt A, B, C nằm tùy ý trên một đường thẳng thì $\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|$.

Lời giải

Chọn D.

Với ba điểm phân biệt A, B, C nằm trên một đường thẳng, đẳng thức $\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right| \Leftrightarrow AB+BC=AC$ xảy ra khi B nằm giữa A và C.

Câu 11: Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CD}$.

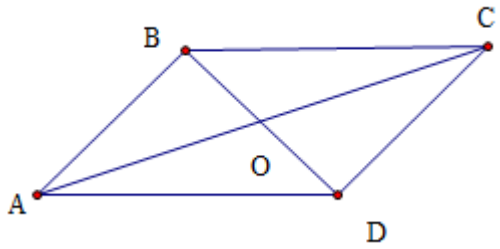
B. $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}$.

C. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$.

D. $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}$.

Lời giải

Chọn B.



Xét các đáp án:

- Đáp án A. Ta có $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$. Vậy A đúng.
- Đáp án B. Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{AD}\\ \overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AD}\end{cases}$. Vậy B sai.
- Đáp án C. Ta có $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$. Vậy C đúng.
- Đáp án D. Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}\end{cases}$. Vậy D đúng.

Câu 12: Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DB}$.

B. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}$.

C. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$.

D. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn A.

Do $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$.

Câu 13: Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Tính $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$.

A. $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BC}$.

B. $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{DA}$.

C. $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}.$ **D.** $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}.$

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$.

Câu 14: Cho tam giác ABC đều cạnh a. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}.$ **B.** $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AB}.$

C. $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{CA}\right|=a.$ **D.** $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{BC}.$

Lời giải

Chọn C.

Độ dài các cạnh của tam giác là a thì độ dài các vectơ $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{CA}\right|=a$.

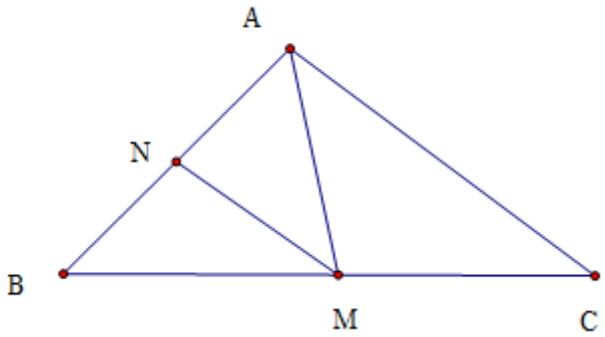
Câu 15: Cho tam giác ABC với M là trung điểm BC. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}.$ **B.** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}.$

C. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.$ **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}.$

Lời giải

Chọn A.



Xét các đáp án:

- Đáp án A. Ta có $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$ (theo quy tắc ba điểm).
- Đáp án B, C. Ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}$
  (với điểm N là trung điểm của AB).
- Đáp án D. Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$.

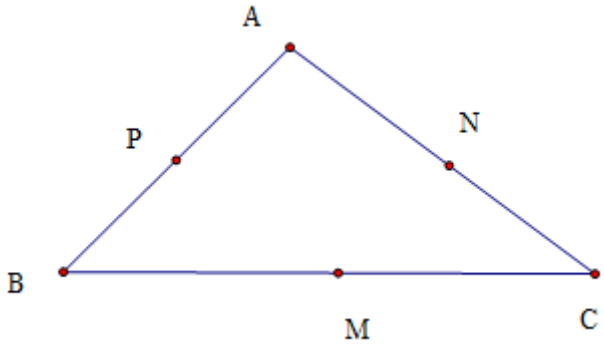
Câu 16: Cho tam giác ABC với M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}.$ **B.** $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}.$

C. $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PM}=\vec{0}.$ **D.** $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MP}.$

Lời giải

Chọn D.



Xét các đáp án:

• Đáp án A. Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}.$

• Đáp án B. Ta có $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AA}=\vec{0}.$

• Đáp án C. Ta có $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MM}=\vec{0}.$

• Đáp án D. Ta có $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{PM}=-\overrightarrow{MP}.$

Câu 17: Cho ba điểm phân biệt A, B, C. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $AB+BC=AC.$ **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}.$

C. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{CA}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|.$ **D.** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BC}.$

Lời giải

Chọn B.

Đáp án A chỉ đúng khi ba điểm A, B, C thẳng hàng và B nằm giữa A, C.

Đáp án B đúng theo quy tắc ba điểm.

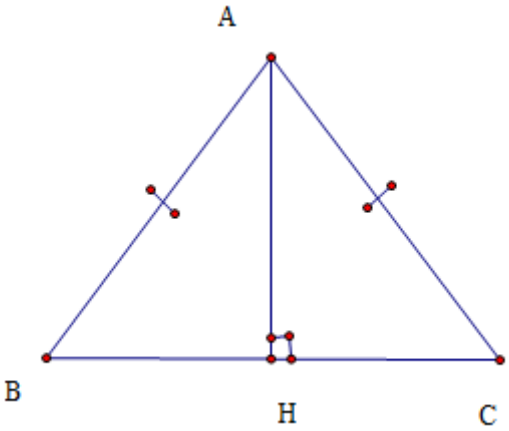
Câu 18: Cho tam giác ABC có $AB=AC$ và đường cao AH. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AH}.$ **B.** $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}.$

C. $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}.$ **D.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}.$

Lời giải

Chọn C.



Do ΔABC cân tại A, AH là đường cao nên H là trung điểm BC.

Xét các đáp án:

• Đáp án A. Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AH}$.

• Đáp án B. Ta có $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HA}+\vec{0}=\overrightarrow{HA}\neq\vec{0}$.

• Đáp án C. Ta có $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$ (do H là trung điểm BC).

• Đáp án D. Do $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên $\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{AC}$.

Câu 19: Cho tam giác ABC vuông cân đỉnh A, đường cao AH. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\left|\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\right|=\left|\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\right|$.

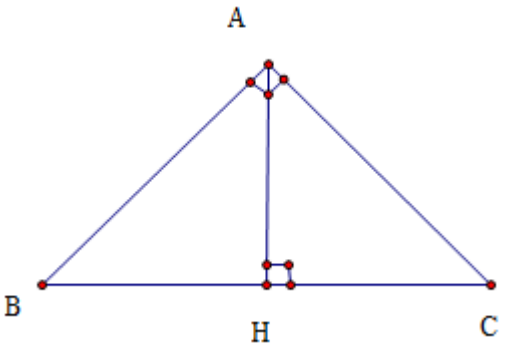
B. $\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{HC}-\overrightarrow{HA}$.

D. $\left|\overrightarrow{AH}\right|=\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AH}\right|$.

Lời giải

Chọn B.



Do ΔABC cân tại A, AH là đường cao nên H là trung điểm BC.

Xét các đáp án:

• Đáp án A. Ta có $\begin{cases}\left|\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|=a\\ \left|\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=a\end{cases}$

$\Rightarrow\left|\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\right|=\left|\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\right|$.

• Đáp án B. Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BH}\\ \overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CH}=-\overrightarrow{BH}\end{cases}$. Do đó B sai.

• Đáp án C. Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{HC}-\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{AC}\end{cases}\longrightarrow \overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{HC}-\overrightarrow{HA}.$

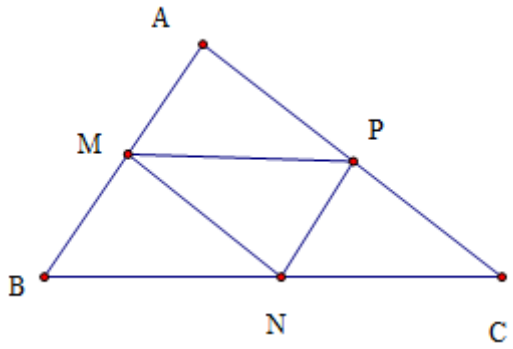
• Đáp án D. Ta có $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AH}\right|=\left|\overrightarrow{HB}\right|=\left|\overrightarrow{AH}\right|$ (do ΔABC vuông cân tại A).

Câu 20: Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC. Hỏi vectơ $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NP}$ bằng vectơ nào trong các vectơ sau?

A. $\overrightarrow{AP}$. **B.** $\overrightarrow{BP}$. **C.** $\overrightarrow{MN}$. **D.** $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{NB}$.

Lời giải

Chọn B.



Ta có $\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{BM}\longrightarrow \overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BP}.$

Câu 21: Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}.$ **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DA}.$

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}.$ **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}.$

Lời giải

Chọn A.

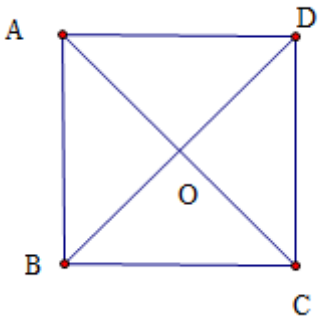
Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\right)+\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}\right)=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BD}\right)=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}.$

Câu 22: Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Vectơ nào trong các vectơ dưới đây bằng $\overrightarrow{CA}$?

A. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}.$ **B.** $-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}.$ **C.** $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}.$ **D.** $\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CB}.$

Lời giải

Chọn C.



Xét các đáp án:

• Đáp án A. Ta có $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{CA}.$

• Đáp án B. Ta có $-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{CA}.$

• Đáp án C. Ta có $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=-\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right)=-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}.$

• Đáp án D. Ta có $\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}=-\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}\right)=-\overrightarrow{CA}.$

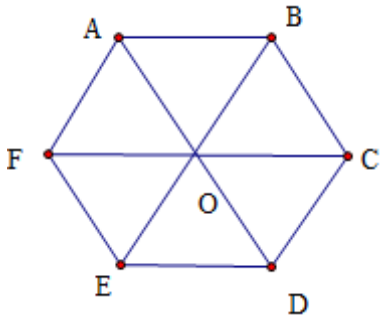
Câu 23: Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O. Đẳng thức nào sau đây **sai?**

A. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}.$ **B.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{EB}.$

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\vec{0}.$ **D.** $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}.$

Lời giải

Chọn D.



Ta có

• $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}.$ Do đo A đúng.

• $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)+\overrightarrow{OB}$

$=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{EB}.$ Do đo B đúng.

• $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)+\overrightarrow{EF}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}\right)+\overrightarrow{EF}$

$=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}.$ Do đó C đúng.

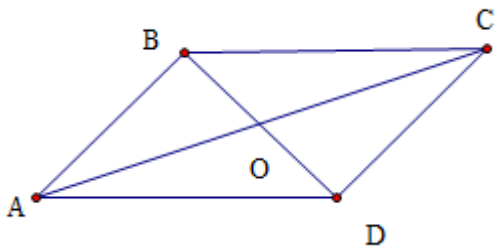
Dùng phương pháp loại trừ, suy ra D sai.

Câu 24: Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Hỏi vectơ $\left(\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{DO}\right)$ bằng vectơ nào trong các vectơ sau?

A. $\overrightarrow{BA}.$ **B.** $\overrightarrow{BC}.$ **C.** $\overrightarrow{DC}.$ **D.** $\overrightarrow{AC}.$

Lời giải

Chọn B.



Ta có $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{DO}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

Câu 25: Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

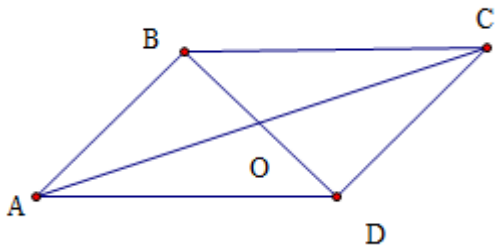
B. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

C. $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}\right|$.

D. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$.

Lời giải

Chọn D.



Xét các đáp án:

• Đáp án A. Ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)+\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right)=\vec{0}$.

• Đáp án B. Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ (quy tắc hình bình hành).

• Đáp án C. Ta có $\begin{cases}\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|=BD\\ \left|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}\right|=\left|\overrightarrow{DB}\right|=BD\end{cases}$.

• Đáp án D. Do $\overrightarrow{CD}\neq\overrightarrow{CB}\Rightarrow\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)\neq\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}\right)$.

Câu 26: Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi E,F lần lượt là trung điểm của AB,BC. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{EO}$.

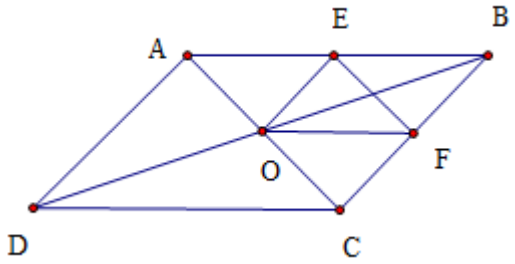
B. $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EO}$.

C. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\vec{0}$.

D. $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{DO}=\vec{0}$.

Lời giải

Chọn D.



Ta có OF, OE lần lượt là đường trung bình của tam giác ΔBCD và ΔABC.

$\Rightarrow BEOF$ là hình bình hành.

$\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BO}\Rightarrow \overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BD}.$

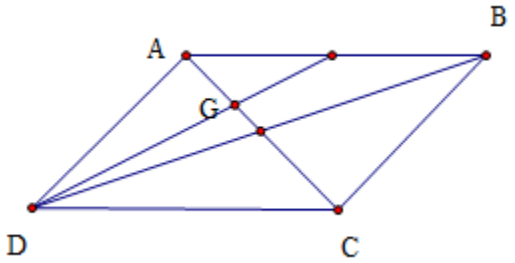
Câu 27: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{BD}.$ **B.** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{CD}.$

C. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{O}.$ **D.** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{CD}.$

Lời giải

Chọn A.



Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{O}$

$\Rightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GB}.$

Do đó $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{GD}-\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{BD}.$

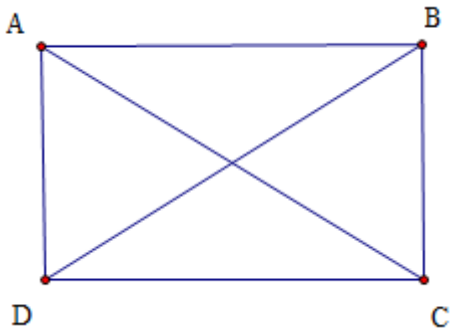
Câu 28: Cho hình chữ nhật $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}.$ **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}.$

C. $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|.$ **D.** $\left|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right|.$

Lời giải

Chọn C.



Ta có $\begin{cases} \left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{DB}\right|=BD \\ \left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC \end{cases}$.

Mà $BD=AC\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|$.

Câu 29: Cho tam giác ABC đều cạnh a. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$.

A. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=a\sqrt{3}$.

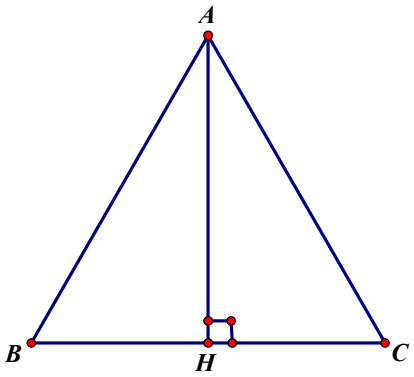
B. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=2a$.

D. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=2a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A.



Gọi H là trung điểm của $BC\Rightarrow AH\perp BC$.

Suy ra $AH=\dfrac{BC\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta lại có $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|2\overrightarrow{AH}\right|=2.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$.

Câu 30: Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB=a$. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$.

A. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=a\sqrt{2}$.

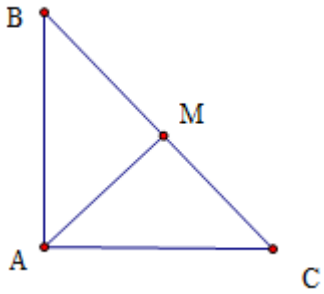
B. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=2a$.

D. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=a$.

Lời giải

Chọn A.



Gọi M là trung điểm $BC \longrightarrow AM = \frac{1}{2}BC.$

Ta có $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right| = \left|2\overrightarrow{AM}\right| = 2AM = BC = a\sqrt{2}.$

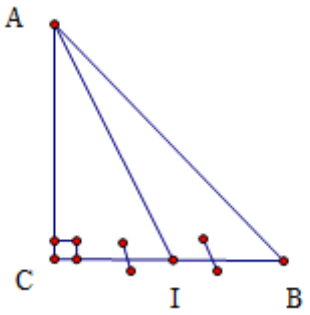
Câu 31: Cho tam giác ABC vuông cân tại C và $AB = \sqrt{2}$. Tính độ dài của $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

A. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{5}.$ **B.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right| = 2\sqrt{5}.$

C. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{3}.$ **D.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right| = 2\sqrt{3}.$

Lời giải

Chọn A.



Ta có $AB = \sqrt{2} \Rightarrow AC = CB = 1.$

Gọi I là trung điểm $BC \Rightarrow AI = \sqrt{AC^2 + CI^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$

Khi đó $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right| = 2\left|\overrightarrow{AI}\right| = 2.\frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}.$

Câu 32: Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AB = 3, AC = 4$. Tính $\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right|$.

A. $\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right| = 2.$ **B.** $\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right| = 2\sqrt{13}.$

C. $\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right| = 5.$ **D.** $\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{13}.$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right| = CB = \sqrt{AC^2 + AB^2} = \sqrt{3^2+4^2} = 5.$

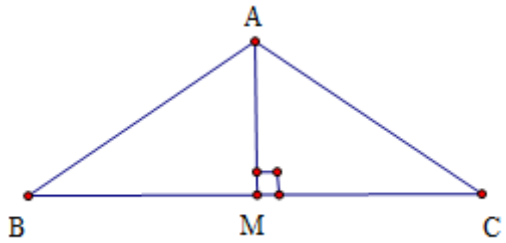
Câu 33: Tam giác ABC có $AB = AC = a$ và $\widehat{BAC} = 120°$. Tính $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right|$.

A. $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = a\sqrt{3}.$ **B.** $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = a.$

C. $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = \frac{a}{2}.$ **D.** $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = 2a.$

Lời giải

Chọn B.



Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow AM \perp BC.$

Trong tam giác vuông AMB, ta có $AM = AB.\sin\widehat{ABM} = a.\sin 30^0 = \frac{a}{2}.$

Ta có $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = \left|2\overrightarrow{AM}\right| = 2AM = a.$

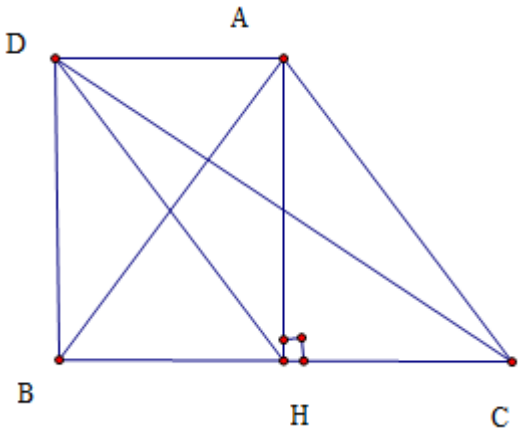
Câu 34: Cho tam giác ABC đều cạnh a, H là trung điểm của BC. Tính $\left|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}\right|$.

A. $\left|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}\right| = \frac{a}{2}.$ **B.** $\left|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}\right| = \frac{3a}{2}.$

C. $\left|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}\right| = \frac{2\sqrt{3}a}{3}.$ **D.** $\left|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}\right| = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$

Lời giải

Chọn D.



Gọi D là điểm thỏa mãn tứ giác $ACHD$ là hình bình hành

$\Rightarrow AHBD$ là hình chữ nhật.

$\left|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}\right| = \left|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CH}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right| = CD.$

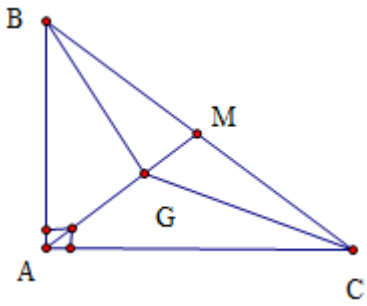
Ta có $CD=\sqrt{BD^2+BC^2}=\sqrt{AH^2+BC^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}+a^2}=\frac{a\sqrt{7}}{2}$.

Câu 35: Gọi G là trọng tâm tam giác vuông ABC với cạnh huyền $BC=12$. Tính độ dài của vectơ $\vec{v}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$.

A. $\left|\vec{v}\right|=2.$ **B.** $\left|\vec{v}\right|=2\sqrt{3}.$ **C.** $\left|\vec{v}\right|=8.$ **D.** $\left|\vec{v}\right|=4.$

Lời giải

Chọn D.



Gọi M là trung điểm của BC.

Ta có $\left|\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|=\left|2\overrightarrow{GM}\right|=2GM=2.\frac{1}{3}AM=\frac{2}{3}AM=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}BC\right)=\frac{BC}{3}=4.$

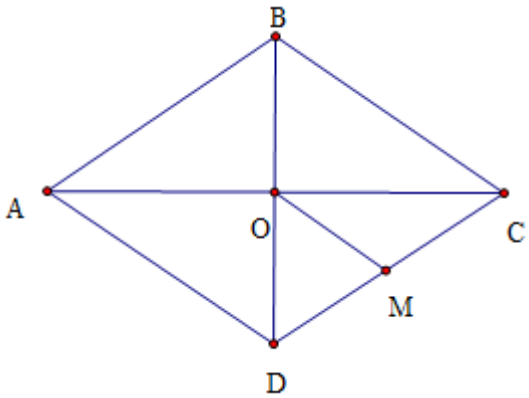
Câu 36: Cho hình thoi $ABCD$ có $AC=2a$ và $BD=a$. Tính $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|$.

A. $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|=3a.$ **B.** $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|=a\sqrt{3}.$

C. $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|=a\sqrt{5}.$ **D.** $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|=5a.$

Lời giải

Chọn C.



Gọi $O=AC\cap BD$ và M là trung điểm của CD.

Ta có $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|=2\left|\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right|=2\left|2\overrightarrow{OM}\right|=4OM$

$=4.\frac{1}{2}CD=2\sqrt{OD^2+OC^2}=2\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}=a\sqrt{5}.$

Câu 37: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tính $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}\right|$.

A. $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}\right|=0.$ **B.** $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}\right|=a.$

C. $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}\right|=a\sqrt{2}.$ **D.** $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}\right|=2a.$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC=a\sqrt{2}.$

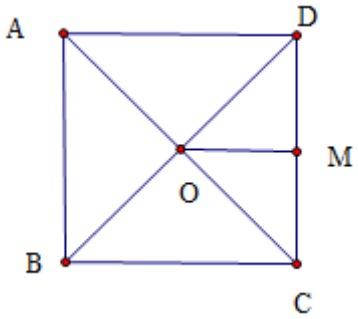
Câu 38: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, tâm O. Tính $\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|$.

A. $\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=a.$ **B.** $\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=a\sqrt{2}.$

C. $\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=\frac{a}{2}.$ **D.** $\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$

Lời giải

Chọn A.



Gọi M là trung điểm của BC.

Ta có $\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=2\left|\overrightarrow{OM}\right|=2OM=AB=a.$

Câu 39: Cho tam giác ABC có M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Xác định vị trí điểm M.

A. M là điểm thứ tư của hình bình hành $ACBM$.

B. M là trung điểm của đoạn thẳng AB.

C. M trùng với C.

D. M là trọng tâm tam giác ABC.

Lời giải

Chọn D.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.

Ta có $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Rightarrow M\equiv G$.

Câu 40: Cho tam giác ABC. Tập hợp tất cả các điểm M thỏa mãn đẳng thức $\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BA}\right|$ là

A. đường thẳng AB.

B. trung trực đoạn BC.

C. đường tròn tâm A, bán kính BC.

D. đường thẳng qua A và song song với BC.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BA}\right|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{CB}\right|=\left|\overrightarrow{AM}\right|\Rightarrow AM=BC$

Mà A, B, C cố định $\Rightarrow$ Tập hợp điểm M là đường tròn tâm A, bán kính BC.

Câu 41: Cho hình bình hành $ABCD$. Tập hợp tất cả các điểm M thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}$ là

A. một đường tròn.

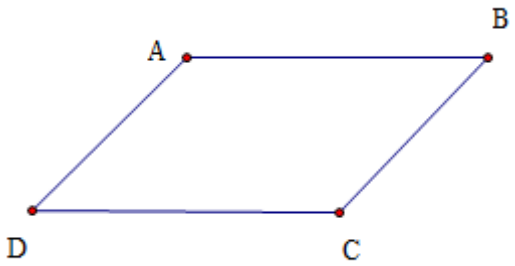
B. một đường thẳng.

C. tập rỗng.

D. một đoạn thẳng.

Lời giải

Chọn C.



$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}\Leftrightarrow\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MA}\Leftrightarrow\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AD}$: vô lí

$\Rightarrow$ Không có điểm M thỏa mãn.

Câu 42: Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}$. Tìm vị trí điểm M.

A. M là trung điểm của AC.

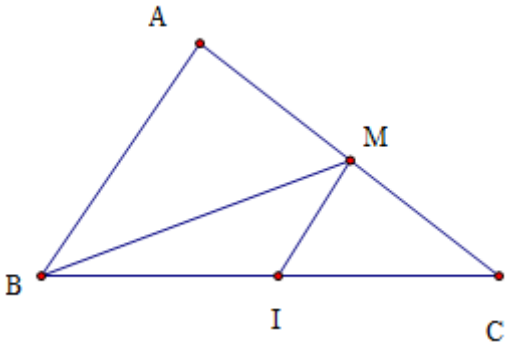
B. M là trung điểm của AB.

C. M là trung điểm của BC.

D. M là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$.

Lời giải

Chọn A.



Gọi I là trung điểm của $BC\Rightarrow\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MI}$

$\Rightarrow\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{MI}\Rightarrow M$ là trung điểm AC.

Câu 43: Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây

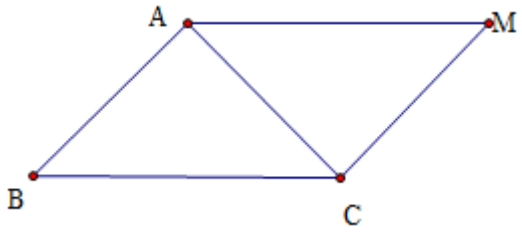
sai?

A. $MABC$ là hình bình hành. **B.** $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BM}$. **D.** $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Chọn D.



Ta có $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}$

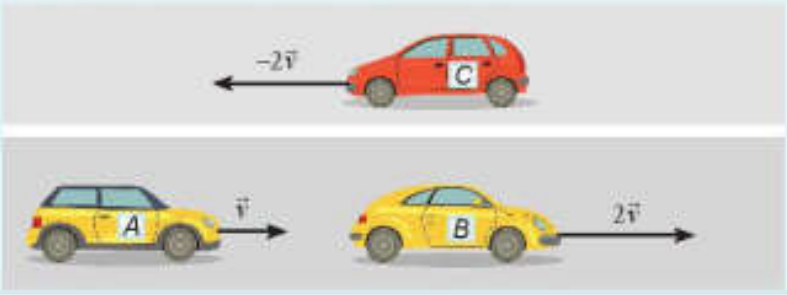
$\Rightarrow MABC$ là hình bình hành $\Rightarrow\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{CB}$.

Do đó D sai.

Bài 3. Tích của một số với một vectơ

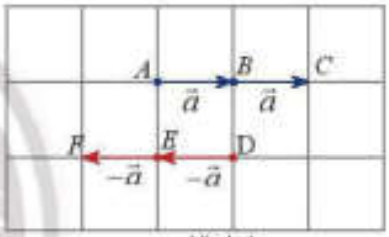
Từ khoá: Tích của một số với một vectơ; Tích của một vectơ với một số; Điều kiện cùng phương của hai vectơ.

Xe *B* đi cùng hướng với xe *A* và có tốc độ gấp 2 lần xe *A*.
Xe *C* đi ngược hướng với xe *A* và có tốc độ gấp 2 lần xe *A*.



1. Tích của một số với một vectơ và các tính chất

1 Cho vectơ $\vec{a}$. Hãy xác định độ dài và hướng của hai vectơ: $\vec{a}+\vec{a}$, $(-\vec{a})+(-\vec{a})$ (Hình 1).



Hình 1

Cho số k khác 0 và vectơ $\vec{a}$ khác $\vec{0}$. Tích của số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$.

Vectơ $k\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$ và có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$.

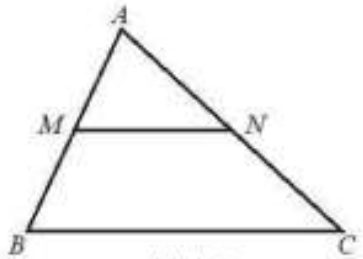
Ta quy ước $0\vec{a} = \vec{0}$ và $k\vec{0} = \vec{0}$.

Người ta còn gọi tích một số với một vectơ là *tích của một vectơ với một số*.

Ví dụ 1

Cho tam giác ABC có M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC (Hình 2). Tìm trong hình các vectơ bằng:

$2\overrightarrow{MN}; -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}; -2\overrightarrow{CN}$.



Hình 2

Giải

Ta có: $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}; -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MA}; -2\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AC}$.

Chân trời sáng tạo

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Cũng như phép nhân và phép cộng các số thực, người ta chứng minh được các phép toán trên vectơ có các tính chất sau:

Với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kì, với mọi số thực h và k, ta có:

$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$; $(h+k)\vec{a}=h\vec{a}+k\vec{a}$; $h(k\vec{a})=(hk)\vec{a}$;

$1.\vec{a}=\vec{a}$; $(-1).\vec{a}=-\vec{a}$.

Ví dụ 2

Thực hiện các phép toán vectơ sau:

a) $5(\vec{u}+\vec{v})$; b) $(x+2)\vec{a}$; c) $-3(4\vec{e})$; d) $\vec{c}-2\vec{c}$.

Giải

a) $5(\vec{u}+\vec{v})=5\vec{u}+5\vec{v}$;

b) $(x+2)\vec{a}=x\vec{a}+2\vec{a}$;

c) $-3(4\vec{e})=(-3.4)\vec{e}=-12\vec{e}$;

d) $\vec{c}-2\vec{c}=(1-2)\vec{c}=(-1)\vec{c}=-\vec{c}$.

Ví dụ 3

Cho đoạn thẳng AB và một điểm M tuỳ ý. Chứng minh I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.

Giải

Ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{MI}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{MI}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow I$ là trung điểm của đoạn thẳng AB.

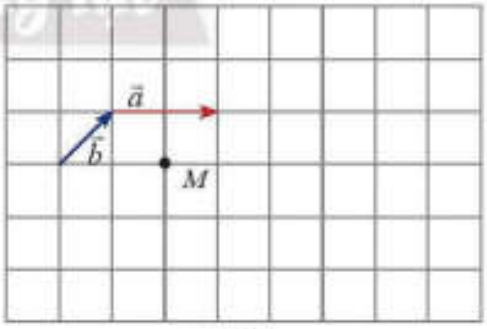
Chân trời sáng tạo

1 Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và một điểm M như Hình 3.

a) Hãy vẽ các vectơ $\overrightarrow{MN}=3\vec{a}$, $\overrightarrow{MP}=-3\vec{b}$.

b) Cho biết mỗi ô vuông có cạnh bằng 1.

Tính: $|3\vec{b}|$, $|-3\vec{b}|$, $|2\vec{a}+2\vec{b}|$.



Hình 3

2 Cho tam giác ABC. Chứng minh G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

Một con tàu chở hàng A đang đi về hướng tây với tốc độ 20 hải lí/giờ. Cùng lúc đó, một con tàu chở khách B đang đi về hướng đông với tốc độ 50 hải lí/giờ. Biểu diễn vectơ vận tốc $\vec{b}$ của tàu B theo vectơ vận tốc $\vec{a}$ của tàu A.



Hình 4

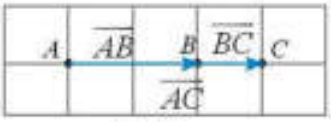
2. Điều kiện để hai vectơ cùng phương

2 Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ và cho $\vec{c}=\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\cdot\vec{b}$. So sánh độ dài và hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{c}$.

Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b}$ khác $\vec{0}$) cùng phương khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{a}=k\vec{b}$.

Nhận xét:

Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số k khác 0 để $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.



Hình 5

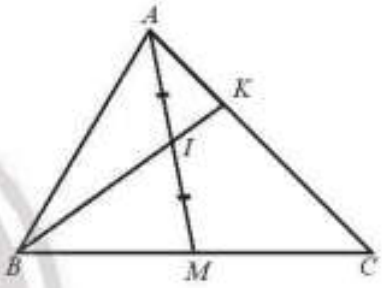
Ví dụ 4

Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm của AM và K là điểm trên cạnh AC sao cho $AK=\frac{1}{3}AC$.

a) Tính $\overrightarrow{BI}$ theo $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$.

b) Tính $\overrightarrow{BK}$ theo $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$.

c) Chứng minh ba điểm B, I, K thẳng hàng.



Hình 6

Giải

a) $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BA})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$. (1)

b) $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. (2)

c) Ta có: (1) $\Rightarrow 4\overrightarrow{BI}=2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$

(2) $\Rightarrow 3\overrightarrow{BK}=2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$

nên $\overrightarrow{BI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BK}$. (3)

Từ (3) ta suy ra ba điểm B, I, K thẳng hàng.

Chú ý: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Với mọi vectơ $\vec{c}$ luôn tồn tại duy nhất cặp số thực $(m; n)$ sao cho $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$.

3 Cho tứ giác $ABCD$ có I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Cho điểm G thoả mãn $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. Chứng minh ba điểm I, G, J thẳng hàng.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

BÀI TẬP

1. Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm hai đường chéo. Với M là điểm tuỳ ý, chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$; b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}$.

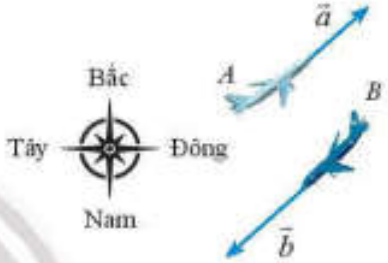
2. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MN}$; b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$.

3. Cho hai điểm phân biệt A và B. Xác định điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

4. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, CD, EF. Lấy điểm M tuỳ ý, chứng minh rằng $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$.

5. Máy bay A đang bay về hướng đông bắc với tốc độ 600 km/h. Cùng lúc đó, máy bay B đang bay về hướng tây nam với tốc độ 800 km/h. Biểu diễn vectơ vận tốc $\vec{b}$ của máy bay B theo vectơ vận tốc $\vec{a}$ của máy bay A.



Hình 7

6. Cho hai điểm phân biệt A và B.

a) Xác định điểm O sao cho $\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=\vec{0}$.

b) Chứng minh rằng với mọi điểm M, ta có $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=4\overrightarrow{MO}$.

7. Cho tam giác ABC.

a) Xác định các điểm M, N, P thoả mãn: $\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{NB}$, $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{PA}$.

b) Biểu thị mỗi vectơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$.

c) Chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng.

PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Dựng và tính độ dài vectơ chứa tích một vectơ với một số.

1. Phương pháp giải.

Sử dụng định nghĩa tích của một vectơ với một số và các quy tắc về phép toán vectơ để dựng vectơ chứa tích một vectơ với một số, kết hợp với các định lí pitago và hệ thức lượng trong tam giác vuông để tính độ dài của chúng.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác đều ABC cạnh a. điểm M là trung điểm BC. Dựng các vectơ sau và tính độ dài của chúng.

a) $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{MA}$ b) $\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

c) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$ d) $\frac{3}{4}\overrightarrow{MA}-2,5\overrightarrow{MB}$

Lời giải (Hình 1.14)

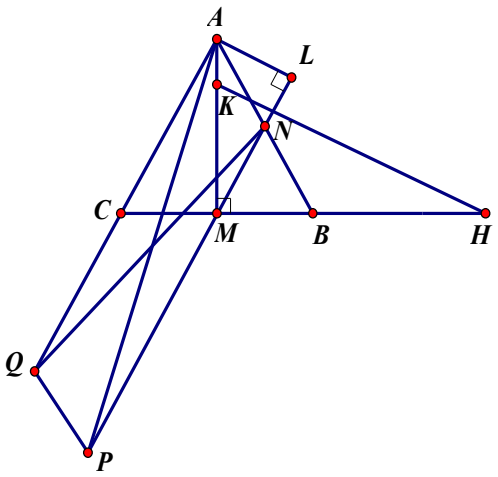
a) Do $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CM}$ suy ra theo quy tắc ba điểm ta có

$\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{CA}$

Vậy $\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{MA}\right|=CA=a$

b) Vì $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BM}$ nên theo quy tắc trừ ta có

$\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MA}$



Hình 1.14

Theo định lí Pitago ta có

$MA=\sqrt{AB^2-BM^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy $\left|\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right|=MA=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

c) Gọi N là trung điểm AB, Q là điểm đối xứng của A qua C và P là đỉnh của hình bình hành $AQPN$.

Khi đó ta có $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AN}, 2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AQ}$ suy ra theo quy tắc hình bình hành ta có

$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AP}$

Gọi L là hình chiếu của A lên PN

Vì $MN//AC\Rightarrow\widehat{ANL}=\widehat{MNB}=\widehat{CAB}=60^0$

Xét tam giác vuông ANL ta có $\sin\widehat{ANL}=\frac{AL}{AN}\Rightarrow AL=AN.\sin\widehat{ANL}=\frac{a}{2}\sin 60^0=\frac{a\sqrt{3}}{4}$

$\cos\widehat{ANL}=\frac{NL}{AN}\Rightarrow NL=AN.\cos\widehat{ANL}=\frac{a}{2}\cos 60^0=\frac{a}{4}$

Ta lại có $AQ=PN\Rightarrow PL=PN+NL=AQ+NL=2a+\frac{a}{4}=\frac{9a}{4}$

Áp dụng định lí Pitago trong tam giác ALP ta có

$AP^2 = AL^2 + PL^2 = \frac{3a^2}{16} + \frac{81a^2}{16} = \frac{21a^2}{4} \Rightarrow AP = \frac{a\sqrt{21}}{2}$

Vậy $\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right| = AP = \frac{a\sqrt{21}}{2}$

d) Gọi K là điểm nằm trên đoạn AM sao cho $MK = \frac{3}{4}MA$, H thuộc tia MB sao cho $MH = 2,5MB$.

Khi đó $\frac{3}{4}\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MK}$, $2,5\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MH}$

Do đó $\frac{3}{4}\overrightarrow{MA} - 2,5\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MH} = \overrightarrow{HK}$

Ta có $MK = \frac{3}{4}AM = \frac{3}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}a}{8}$, $MH = 2,5MB = 2,5.\frac{a}{2} = \frac{5a}{4}$

Áp dụng định lí Pitago cho tam tam giác vuông KMH ta có

$KH = \sqrt{MH^2 + MK^2} = \sqrt{\frac{25a^2}{16} + \frac{27a^2}{64}} = \frac{a\sqrt{127}}{8}$

Vậy $\left|\frac{3}{4}\overrightarrow{MA} - 2,5\overrightarrow{MB}\right| = KH = \frac{a\sqrt{127}}{8}$

Ví dụ 2: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a.

a) Chứng minh rằng $\vec{u} = 4\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

b) Tính độ dài vectơ $\vec{u}$

Lời giải (Hình 1.15)

a) Gọi O là tâm hình vuông.

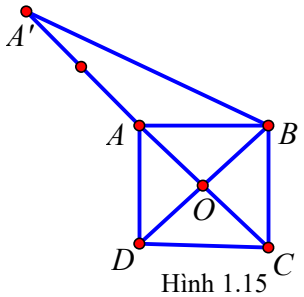
Theo quy tắc ba điểm ta có

$\vec{u} = 4\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right) - 3\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}\right) + \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}\right) - 2\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}\right)$

$= 4\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OD}$

Mà $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}$ nên $\vec{u} = 3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$

Suy ra $\vec{u}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M



Hình 1.15

b) Lấy điểm A' trên tia OA sao cho $OA' = 3OA$ khi đó

$\overrightarrow{OA'} = 3\overrightarrow{OA}$ do đó $\vec{u} = \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA'}$

Mặt khác $BA' = \sqrt{OB^2 + OA'^2} = \sqrt{OB^2 + 9OA^2} = a\sqrt{5}$

Suy ra $\left|\vec{u}\right| = a\sqrt{5}$

Dạng 2: Chứng minh đẳng thức vectơ.

1. Phương pháp giải

Sử dụng các kiến thức sau để biến đổi vế này thành vế kia hoặc cả hai biểu thức ở hai vế cùng bằng biểu thức thứ ba hoặc biến đổi tương đương về đẳng thức đúng:

- Các tính chất phép toán vectơ
- Các quy tắc: quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành và quy tắc phép trừ
- Tính chất trung điểm:

M là trung điểm đoạn thẳng AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

M là trung điểm đoạn thẳng AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM}$ (Với O là điểm tuỳ ý)

- Tính chất trọng tâm:

G là trọng tâm của tam giác ABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{O}$

G là trọng tâm của tam giác ABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$ (Với O là điểm tuỳ ý)

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD, O là trung điểm của IJ .Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IJ}$

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$ với M là điểm bất kì

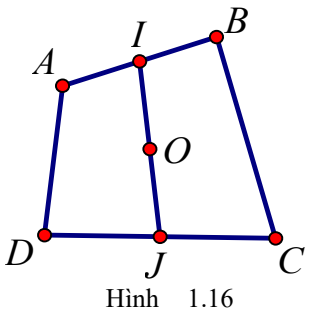
Lời giải (Hình 1.16)

a) Theo quy tắc ba điểm ta có

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC}$

Tương tự $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD}$

Mà I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD nên $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}, \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} = \vec{0}$



Hình 1.16

Vậy $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI}\right) + \left(\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD}\right) + 2\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{IJ}$ đpcm

b) Theo hệ thức trung điểm ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OJ}$

Mặt khác O là trung điểm IJ nên $\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \vec{0}$

Suy ra $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}\right)=\vec{0}$ đpcm

c) Theo câu b ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ do đó với mọi điểm M thì

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}\right)+\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}\right)+\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}\right)+\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$ đpcm

Ví dụ 2: Cho hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ có cùng trọng tâm G. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm tam giác BCA_1, ABC_1, ACB_1. Chứng minh rằng $\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{GG_2}+\overrightarrow{GG_3}=\vec{0}$

Lời giải

Vì G_1 là trọng tâm tam giác BCA_1 nên $3\overrightarrow{GG_1}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GA_1}$

Tương tự G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm tam giác ABC_1, ACB_1 suy ra

$3\overrightarrow{GG_2}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC_1}$ và $3\overrightarrow{GG_3}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GB_1}$

Công theo vế với vế các đẳng thức trên ta có

$\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{GG_2}+\overrightarrow{GG_3}=2\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+\left(\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GB_1}+\overrightarrow{GC_1}\right)$

Mặt khác hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ có cùng trọng tâm G nên

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GB_1}+\overrightarrow{GC_1}$

Suy ra $\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{GG_2}+\overrightarrow{GG_3}=\vec{0}$

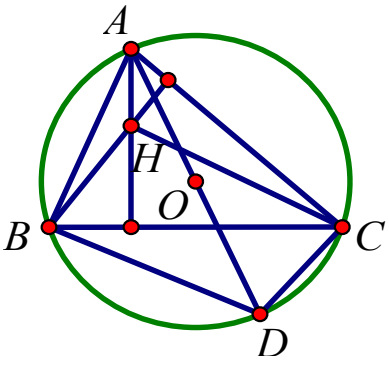
Ví dụ 3: Cho tam giác ABC có trực tâm H, trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp O. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$

c) $\overrightarrow{GH}+2\overrightarrow{GO}=\vec{0}$

Lời giải (Hình 1.17)



Hình 1.17

a) Dễ thấy $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$ nếu tam giác ABC vuông

Nếu tam giác ABC không vuông gọi D là điểm đối xứng của A qua O khi đó

$BH//DC$ (vì cùng vuông góc với AC)

$BD//CH$ (vì cùng vuông góc với AB)

Suy ra $BDCH$ là hình bình hành, do đó theo quy tắc hình bình hành thì $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}$ (1)

Mặt khác vì O là trung điểm của AD nên $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HD}=2\overrightarrow{HO}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$

b) Theo câu a) ta có

$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OC}\right)=2\overrightarrow{HO}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$ đpcm

c) Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$

Mặt khác theo câu b) ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$

Suy ra $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GH}\right)-3\overrightarrow{OG}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GH}+2\overrightarrow{GO}=\vec{0}$

Dạng 3: Phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương.

1. Phương pháp giải.

Sử dụng các tính chất phép toán vectơ, ba quy tắc phép toán vectơ và tính chất trung điểm, trọng tâm trong tam giác.

2. Các ví dụ.

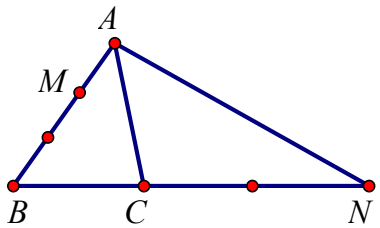
Ví dụ 1: Cho tam giác ABC. Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AB},\ \vec{b}=\overrightarrow{AC}$.

a) Hãy dựng các điểm M, N thỏa mãn: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{BC}$

b) Hãy phân tích $\overrightarrow{CM},\ \overrightarrow{AN},\ \overrightarrow{MN}$ qua các véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

c) Gọi I là điểm thỏa: $\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{CM}$. Chứng minh I,A,N thẳng hàng

Lời giải (hình 1.23)



Hình 1.23

a) Vì $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ suy ra M thuộc cạnh AB và $AM=\frac{1}{3}AB$; $\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{BC}$, suy ra N thuộc tia BC và $CN=2BC$.

b) Ta có: $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}$

$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+3(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-2\vec{a}+3\vec{b}$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=-\frac{1}{3}\vec{a}-2\vec{a}+3\vec{b}=-\frac{7}{3}\vec{a}+3\vec{b}$.

c) Ta có: $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CM}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}=-\frac{1}{3}(-2\vec{a}+3\vec{b})$

$\Rightarrow \overrightarrow{AI}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AN}\Rightarrow$ A, I, N thẳng hàng.

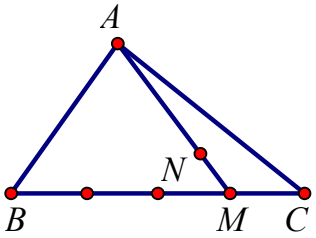
Ví dụ 2: Cho tam giác ABC, trên cạnh BC lấy M sao cho $BM=3CM$, trên đoạn AM lấy N sao cho $2AN=5MN$. G là trọng tâm tam giác ABC.

a) Phân tích các vectơ $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$ qua các véc tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

b) Phân tích các vectơ $\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{MN}$ qua các véc tơ $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GB}$

Lời giải (hình 1.24)

a) Theo giả thiết ta có: $\overrightarrow{BM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AN}=\frac{5}{7}\overrightarrow{AM}$



Hình 1.24

suy ra $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}=-\overrightarrow{AB}+\frac{5}{7}\overrightarrow{AM}$

$=-\overrightarrow{AB}+\frac{5}{7}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{23}{28}\overrightarrow{AB}+\frac{15}{28}\overrightarrow{AC}$

b) Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ suy ra $\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}$

Ta có $\overrightarrow{MN}=-\frac{2}{7}\overrightarrow{AM}=-\frac{2}{7}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right)$

$=-\frac{1}{14}\left(\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GA}\right)-\frac{3}{14}\left(\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GA}\right)$

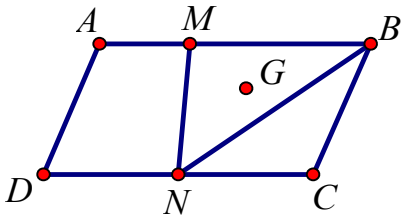
Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

$= -\frac{1}{14}\left(\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GA}\right)-\frac{3}{14}\left(-\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GA}\right)$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{GA}+\frac{1}{7}\overrightarrow{GB}$

Ví dụ 3: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là hai điểm nằm trên hai cạnh AB và CD sao cho $AB=3AM, CD=2CN$ và G là trọng tâm tam giác MNB. Phân tích các vectơ $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AG}$ qua các véc tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

Lời giải (hình 1.25)



Hình 1.25

Ta có: $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$=-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

Vì G là trọng tâm tam giác MNB nên

$3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{AB}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

Suy ra $\overrightarrow{AG}=\frac{5}{18}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Dạng 4: Tìm tập hợp điểm thỏa mãn điều kiện vectơ cho trước.

1. Phương pháp giải.

Để tìm tập hợp điểm M thỏa mãn mãn điều kiện vectơ ta quy về một trong các dạng sau

- Nếu $\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{MB}\right|$ với A, B phân biệt cho trước thì M thuộc đường trung trực của đoạn AB.

- Nếu $\left|\overrightarrow{MC}\right|=k.\left|\overrightarrow{AB}\right|$ với A, B, C phân biệt cho trước thì M thuộc đường tròn tâm C, bán kính bằng $k.\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

- Nếu $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{BC}$ với A, B, C phân biệt và k là số thực thay đổi thì

+ M thuộc đường thẳng qua A song song với BC với $k\in R$

+ M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC và cùng hướng $\overrightarrow{BC}$ với $k>0$

+ M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC và ngược hướng $\overrightarrow{BC}$ với $k<0$

- Nếu $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{BC}, B\neq C$ với A, B, C thẳng hàng và k thay đổi thì tập hợp điểm M là đường thẳng BC

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC

a) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I thỏa mãn : $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

b) Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn : $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\right|$.

Lời giải

a) Ta có: $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA}+3(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB})+4(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC})=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 9\overrightarrow{IA}=-3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}=-\dfrac{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}}{9}\Rightarrow$ I tồn tại và duy nhất.

b) Với I là điểm được xác định ở câu a, ta có:

$2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}=9\overrightarrow{MI}+(2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC})=9\overrightarrow{MI}$ và $\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AB}$ nên

$|\,2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\,|=|\,\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\,|\Leftrightarrow|\,9\overrightarrow{MI}\,|=|\,\overrightarrow{AB}\,|\Leftrightarrow MI=\dfrac{AB}{9}$

Vậy quỹ tích của M là đường tròn tâm I bán kính $\dfrac{AB}{9}$.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn điều kiện sau :

a) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right|$

b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=k\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right)$ với k là số thực thay đổi

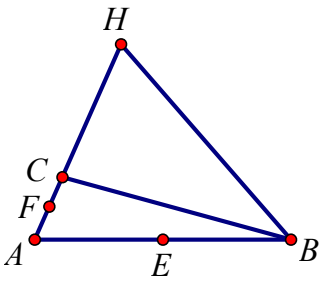
Lời giải (hình 1.28)

a) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC suy ra

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{ME}$ và $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MF}$

Khi đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right|$

$\Leftrightarrow\left|2\overrightarrow{ME}\right|=\left|2\overrightarrow{MF}\right|\Leftrightarrow ME=MF$



Hình 1.28

Vậy tập hợp các điểm M là đường trung trực của EF

b) Ta có $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+2\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)-3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)$

$=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{HB}$

Với H là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AH}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Suy ra $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=k\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right)$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{ME}=2k\overrightarrow{HB}\Leftrightarrow \overrightarrow{ME}=k\overrightarrow{HB}$

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua E và song song với HB

Ví dụ 3: Cho tứ giác $ABCD$. Với số k tùy ý, lấy các điểm M và N sao cho $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DN}=k\overrightarrow{DC}$. Tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn thẳng MN khi k thay đổi.

Lời giải (hình 1.29)

Gọi O, O' lần lượt là trung điểm của AD và BC, ta có

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'B}$ và $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'C}$

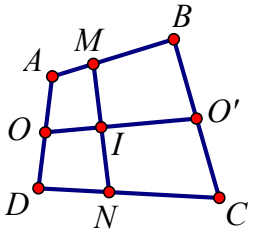
Suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{OO'}$

Tương tự vì O, I lần lượt là trung điểm của AD và MN nên

$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{DN}=2\overrightarrow{OI}$

Do đó $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(k\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{DC}\right)=k\overrightarrow{OO'}$

Vậy khi k thay đổi, tập hợp điểm I là đường thẳng OO'



Hình 1.29

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho tam giác OAB vuông cân tại O, cạnh $OA=a$. Tính $\left|2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|$.

A. a. **B.** $\left(1+\sqrt{2}\right)a$. **C.** $a\sqrt{5}$. **D.** $2a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Gọi C là điểm đối xứng của O qua $A\Rightarrow OC=2a$. Tam giác OBC vuông tại O, có $BC=\sqrt{OB^2+OC^2}=a\sqrt{5}$.

Ta có $2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BC}$, suy ra $\left|2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|=a\sqrt{5}$.

Câu 2: Cho tam giác OAB vuông cân tại O, cạnh $OA=a$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\left|3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}\right|=5a$. **B.** $\left|2\overrightarrow{OA}\right|+\left|3\overrightarrow{OB}\right|=5a$.

C. $\left|7\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}\right|=5a$. **D.** $\left|11\overrightarrow{OA}\right|-\left|6\overrightarrow{OB}\right|=5a$.

Lời giải

Chọn C.

Dựa vào các đáp án, ta có nhận xét sau:

- **A đúng**, gọi C nằm trên tia đối của tia AO sao cho $OC=3OA\Rightarrow 3\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$. Và D nằm trên tia đối của tia BO sao cho $OD=4OB\Rightarrow 4\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$. Dựng hình chữ nhật $OCED$ suy ra $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OE}$ (quy tắc hình bình hành).

  Ta có $\left|3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right|=\left|\overrightarrow{OE}\right|=OE=CD=\sqrt{OC^2+OD^2}=5a.$

- **B đúng**, vì $\left|2\overrightarrow{OA}\right|+\left|3\overrightarrow{OB}\right|=2\left|\overrightarrow{OA}\right|+3\left|\overrightarrow{OB}\right|=2a+3a=5a.$

- **C sai**, xử lý tương tự như ý đáp án **A. Chọn C.**

- **D đúng**, vì $\left|11\overrightarrow{OA}\right|-\left|6\overrightarrow{OB}\right|=11\left|\overrightarrow{OA}\right|-6\left|\overrightarrow{OB}\right|=11a-6a=5a.$

Câu 3: Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC, I là trung điểm của AM. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IA}=\vec{0}.$ **B.** $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+2\overrightarrow{IA}=\vec{0}.$

C. $2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IA}=\vec{0}.$ **D.** $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IA}=\vec{0}.$

Lời giải

Chọn B.

Vì M là trung điểm BC nên $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{IM}$. Mặt khác I là trung điểm AM nên $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IM}=\vec{0}$. Suy ra $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+2\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IM}+2\overrightarrow{IA}=2\left(\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IA}\right)=\vec{0}.$

Câu 4: Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC, I là trung điểm của AM. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).$ **B.** $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right).$

C. $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$ **D.** $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$

Lời giải

Chọn A.

Vì M là trung điểm BC nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}.\ (1)$ Mặt khác I là trung điểm AM nên $2\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AM}.\ (2)$

Từ $(1),(2)$ suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AI}\Leftrightarrow\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).$

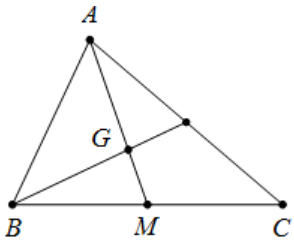
Câu 5: Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC, G là trọng tâm của tam giác ABC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).$ **B.** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).$

C. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{2}\overrightarrow{AC}.$ **D.** $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}.$

Lời giải

Chọn B.



Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$. Vì M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$. Do đó $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

Câu 6: Cho tứ giác $ABCD$. Trên cạnh AB, CD lấy lần lượt các điểm M, N sao cho $3\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}$ và $3\overrightarrow{DN}=2\overrightarrow{DC}$. Tính vectơ $\overrightarrow{MN}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$ **B.** $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}.$

C. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}.$ **D.** $\overrightarrow{MN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}$ và $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$.

Suy ra $3\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}+2\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}\right)$

$=\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right)+\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{BC}+\left(\overrightarrow{DN}+2\overrightarrow{CN}\right).$

Theo bài ra, ta có $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{DN}+2\overrightarrow{CN}=\vec{0}.$

Vậy $3\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}.$

Câu 7: Cho hình thang $ABCD$ có đáy là AB và CD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{DC}.$ **B.** $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{BN}.$

C. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right).$ **D.** $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right).$

Lời giải

Chọn D.

Vì M, N lần lượt là trung điểm của $AD, BC \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}=\vec{0} \\ \overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}=\vec{0} \end{cases}$. Dựa vào đáp án, ta có nhận xét sau:

- **A đúng**, vì $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{MN}=\left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}\right)+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{MN}.$
- **B đúng**, vì $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{BN}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}\right)-\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MN}.$
- **C đúng**, vì $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN}.$

Suy ra

$2\overrightarrow{MN}=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}\right)+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\left(\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}\right)=\vec{0}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$

$\longrightarrow \overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right).$

- **D sai**, vì theo phân tích ở đáp án **C. Chọn D.**

Câu 8: Cho hình bình hành $ABCD$ có M là trung điểm của AB. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}.$ **B.** $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BC}.$

C. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BC}.$ **D.** $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}.$

Lời giải

Chọn C.

Xét các đáp án ta thấy bài toán yêu cầu phân tích vectơ $\overrightarrow{DM}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{BC}$.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}$. Vì M là trung điểm AB nên $2\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{DM}=2\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{DM}=-2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}$

suy ra $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BC}.$

Câu 9: Cho tam giác ABC, điểm M thuộc cạnh AB sao cho $3AM=AB$ và N là trung điểm của AC. Tính $\overrightarrow{MN}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$ **B.** $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$

C. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$ **D.** $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$

Lời giải

Chọn B.

Vì N là trung điểm AC nên

$2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}.\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}.$

Suy ra $\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$

Câu 10: Cho tam giác ABC. Hai điểm M, N chia cạnh BC theo ba phần bằng nhau $BM=MN=NC$. Tính $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$ **B.** $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$

C. $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$ **D.** $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$

Câu 11: Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC. Tính $\overrightarrow{AB}$ theo $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$ **B.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}.$

C. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$ **D.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}.$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AM}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$

Câu 12: Cho tam giác ABC, gọi M là trung điểm AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NC=2NA$. Gọi K là trung điểm của MN. Khi đó

A. $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}.$ **B.** $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$

C. $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$ **D.** $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}.$

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$

Câu 13: Cho hình bình hành $ABCD$. Tính $\overrightarrow{AB}$ theo $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$.

A. $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}.$ **B.** $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}.$

C. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$ **D.** $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}.$

Lời giải

Chọn A.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$. Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\end{cases}$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}+\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}\longrightarrow\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}.$$

Câu 14: Cho tam giác ABC và đặt $\vec{a}=\overrightarrow{BC}, \vec{b}=\overrightarrow{AC}$. Cặp vectơ nào sau đây cùng phương?

A. $2\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+2\vec{b}.$ **B.** $2\vec{a}-\vec{b}, \vec{a}-2\vec{b}.$ **C.** $5\vec{a}+\vec{b}, -10\vec{a}-2\vec{b}.$ **D.** $\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}.$

Lời giải

Chọn C.

Dễ thấy $-10\vec{a}-2\vec{b}=-2\left(5\vec{a}+\vec{b}\right)\longrightarrow$ hai vectơ $5\vec{a}+\vec{b}, -10\vec{a}-2\vec{b}$ cùng phương.

Câu 15: Cho tam giác ABC có G là trọng tâm và I là trung điểm của BC. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{GI}.$ **B.** $\overrightarrow{IG}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}.$

C. $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GI}.$ **D.** $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}.$

Lời giải

Chọn C.

Vì I là trung điểm của BC suy ra $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IB}\\ \overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IC}\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\underbrace{\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}}_{\vec{0}}+2\overrightarrow{GI}=2\overrightarrow{GI}.$

Câu 16: Cho tam giác ABC có G là trọng tâm và M là trung điểm BC. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{GA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}.$ **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}.$

C. $\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}.$ **D.** $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GM}.$

Lời giải

Chọn D.

Vì M là trung điểm của BC suy ra $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MB}\\ \overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MC}\end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\underbrace{\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}}_{\vec{0}}+2\overrightarrow{GM}=2\overrightarrow{GM}.$

Câu 17: Cho tam giác ABC vuông tại A, M là trung điểm của BC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.$ **B.** $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.$ **C.** $\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MC}.$ **D.** $\overrightarrow{AM}=\dfrac{\overrightarrow{BC}}{2}.$

Lời giải

Chọn C.

Vì M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MC}.$

Câu 18: Cho tam giác ABC. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AM}.$ **B.** $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{NC}.$ **C.** $\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{MN}.$ **D.** $\overrightarrow{CN}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$

Lời giải

Chọn C.

Vì M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Suy ra MN là đường trung bình của tam giác

$ABC\longrightarrow MN=\dfrac{1}{2}BC.$ Mà $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{MN}$ là hai vectơ cùng hướng nên $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{MN}.$

Câu 19: Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AG}.$ **B.** $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BG}.$

C. $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CG}.$ **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}.$

Lời giải

Chọn B.

Gọi E là trung điểm của $AC \Rightarrow \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BE}.\ (1)$ Mà G là trọng tâm của tam giác ABC

$\Rightarrow \overrightarrow{BE}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BG}.\ (2)$

Từ $(1), (2)$ suy ra $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=2.\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BG}=3\overrightarrow{BG}.$

Câu 20: Cho tam giác đều ABC và điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}.$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{CI}=\dfrac{\overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{CB}}{3}$.

B. $\overrightarrow{CI}=\dfrac{\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}}{3}$.

C. $\overrightarrow{CI}=-\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}$.

D. $\overrightarrow{CI}=\dfrac{\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}}{-3}$.

Lời giải

Chọn C.

Từ giả thiết $\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}\Rightarrow B$ là trung điểm của $IA\Rightarrow\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AB}$.

Lại có $\begin{cases}\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BI}\\ \overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AI}\end{cases}\Rightarrow 2\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}$.

$=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+3\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+3\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)=-2\overrightarrow{CA}+4\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow\overrightarrow{CI}=-\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}$.

Câu 21: Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BC}$.

B. $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$.

C. $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$.

D. $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$.

Câu 22: Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là O. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}$.

B. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

C. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

D. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{AB}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CB}$ (vì $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$).

Câu 23: Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BC}$.

B. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$.

C. $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{CD}$.

D. $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BC}+\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}}_{\vec{0}}=2\overrightarrow{BC}.$

Câu 24: Cho hình bình hành $ABCD$ có M là giao điểm của hai đường chéo. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$ **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}.$

C. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BM}.$ **D.** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}.$

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BC}$. Suy ra điều trên không thể xảy ra vì $\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{BC}.$

Câu 25: Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{CA}.$ Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. M trùng $A.$ **B.** M trùng $B.$

C. M trùng $C.$ **D.** M là trọng tâm của tam giác $ABC.$

Lời giải

Chọn D.

Ta có $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{CA}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MA}.$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MC}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}.\ (*)$

Đẳng thức $(*)$ suy ra M là trọng tâm của tam giác $ABC.$

Câu 26: Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Đặt $\overrightarrow{GA}=\vec{a},\ \overrightarrow{GB}=\vec{b}$. Hãy tìm $m,\ n$ để có $\overrightarrow{BC}=m\vec{a}+n\vec{b}.$

A. $m=1,n=2.$ **B.** $m=-1,n=-2.$

C. $m=2,n=1.$ **D.** $m=-2,n=-1.$

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{BG}-\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}\right)=-\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}\ \left(\text{do }\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\right).$

Câu 27: Cho ba điểm A,B,C không thẳng hàng và điểm M thỏa mãn đẳng thức vectơ $\overrightarrow{MA}=x\overrightarrow{MB}+y\overrightarrow{MC}.$ Tính giá trị biểu thức $P=x+y.$

A. $P=0.$ **B.** $P=2.$ **C.** $P=-2.$ **D.** $P=3.$

Lời giải

Chọn B.

Do $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên tồn tại các số thực x,y sao cho

$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC},\forall M\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=x\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\right)+y\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}\right)$

$\Leftrightarrow\left(1-x-y\right)\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{MB}+y\overrightarrow{MC}\Leftrightarrow\left(x+y-1\right)\overrightarrow{MA}=x\overrightarrow{MB}+y\overrightarrow{MC}.$

Theo bài ra, ta có $\overrightarrow{MA}=x\overrightarrow{MB}+y\overrightarrow{MC}$ suy ra $x+y-1=1\Leftrightarrow x+y=2.$

Câu 28: Cho hình chữ nhật $ABCD$ và số thực $k>0$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=k$ là

A. một đoạn thẳng. **B.** một đường thẳng. **C.** một đường tròn. **D.** một điểm.

Lời giải

Chọn C.

Gọi I là tâm của hình chữ nhật $ABCD$, ta có $\begin{cases}2\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\\2\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\end{cases},\forall M.$

Do đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=k\Leftrightarrow\left|2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{MI}\right|=k\Leftrightarrow4\left|\overrightarrow{MI}\right|=k\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MI}\right|=\frac{k}{4}.\ (*)$

Vì I là điểm cố định nên tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $(*)$ là đường tròn tâm I, bán kính $R=\frac{k}{4}.$

Câu 29: Cho hình chữ nhật $ABCD$ và I là giao điểm của hai đường chéo. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$ là

A. trung trực của đoạn thẳng AB.

B. trung trực của đoạn thẳng AD.

C. đường tròn tâm I, bán kính $\frac{AC}{2}$.

D. đường tròn tâm I, bán kính $\frac{AB+BC}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

Gọi E,F lần lượt là trung điểm của AB,CD. Khi đó $\begin{cases}\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{ME}\\\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MF}\end{cases},\forall M.$

Do đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|\Leftrightarrow2\left|\overrightarrow{ME}\right|=2\left|\overrightarrow{MF}\right|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{ME}\right|=\left|\overrightarrow{MF}\right|.\ (*)$

Vì E,F là hai điểm cố định nên từ đẳng thức $(*)$ suy ra tập hợp các điểm M là trung trực của đoạn thẳng EF hay chính là trung trực của đoạn thẳng AD.

Câu 30: Cho hai điểm A,B phân biệt và cố định, với I là trung điểm của AB. Tập hợp các điểm M

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

thỏa mãn đẳng thức $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$ là

A. đường tròn tâm I, đường kính $\frac{AB}{2}$. **B.** đường tròn đường kính AB.

C. đường trung trực của đoạn thẳng AB. **D.** đường trung trực đoạn thẳng IA.

Lời giải

Chọn A.

Vì I là trung điểm của AB suy ra $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.

Do đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|\Leftrightarrow\left|2\overrightarrow{MI}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\right|\Leftrightarrow MI=\frac{AB}{2}.\ (*)$

Vậy tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $(*)$ là đường tròn tâm I, bán kính

Câu 31: Cho hai điểm A, B phân biệt và cố định, với I là trung điểm của AB. Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right|$ là

A. đường trung trực của đoạn thẳng AB. **B.** đường tròn đường kính AB.

C. đường trung trực đoạn thẳng IA. **D.** đường tròn tâm A, bán kính AB.

Lời giải

Chọn A.

Chọn điểm E thuộc đoạn AB sao cho $EB=2EA\Rightarrow 2\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}=\vec{0}$.

Chọn điểm F thuộc đoạn AB sao cho $FA=2FB\Rightarrow 2\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FA}=\vec{0}$.

Ta có $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right|\Leftrightarrow\left|2\overrightarrow{ME}+2\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EB}\right|=\left|2\overrightarrow{MF}+2\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{FA}\right|$

$\Leftrightarrow\left|3\overrightarrow{ME}+\underbrace{2\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}}_{\vec{0}}\right|=\left|3\overrightarrow{MF}+\underbrace{2\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}}_{\vec{0}}\right|\Leftrightarrow\left|3\overrightarrow{ME}\right|=\left|3\overrightarrow{MF}\right|\Leftrightarrow ME=MF.\ (*)$

Vì E, F là hai điểm cố định nên từ đẳng thức $(*)$ suy ra tập hợp các điểm M là trung trực của đoạn thẳng EF. Gọi I là trung điểm của AB suy ra I cũng là trung điểm của EF.

Vậy tập hợp các điểm M thỏa mãn $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right|$ là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Câu 32: Cho tam giác đều ABC cạnh a, trọng tâm G. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right|$ là

A. đường trung trực của đoạn BC . **B.** đường tròn đường kính BC .

C. đường tròn tâm G, bán kính $\frac{a}{3}$. **D.** đường trung trực đoạn thẳng AG.

Lời giải

Chọn A.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, AC. Khi đó $\begin{cases}\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}\\ \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MJ}\end{cases}$.

Theo bài ra, ta có $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right|\Leftrightarrow\left|2\overrightarrow{MI}\right|=\left|2\overrightarrow{MJ}\right|\Leftrightarrow MI=MJ.$

Vậy tập hợp các điểm M thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right|$ là đường trung trực của đoạn thẳng IJ, cũng chính là đường trung trực của đoạn thẳng BC vì IJ là đường trung bình của tam giác ABC.

Câu 33: Cho tam giác đều ABC cạnh a. Biết rằng tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\right|$ là đường tròn cố định có bán kính R. Tính bán kính R theo a.

A. $R=\frac{a}{3}$. **B.** $R=\frac{a}{9}$. **C.** $R=\frac{a}{2}$. **D.** $R=\frac{a}{6}$.

Lời giải

Chọn B.

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Ta có

$2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}=2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)+4\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right).$

Chọn điểm I sao cho $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)+\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IA}=\vec{0}.$

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=3\overrightarrow{IG}.$

Khi đó $9\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IA}=\vec{0}\Leftrightarrow 9\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow 9\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{CA}.\ (*)$

Do đó $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\right|\Leftrightarrow\left|9\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|\Leftrightarrow 9MI=AB.$

Vì I là điểm cố định thỏa mãn $(*)$ nên tập hợp các điểm M cần tìm là đường tròn tâm I, bán kính $R=\frac{AB}{9}=\frac{a}{9}$.

Câu 34: Cho tam giác ABC. Có bao nhiêu điểm M thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=3$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn D.

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC nên G cố định duy nhất và $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Ta có $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=3 \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}-3\overrightarrow{GM}\right|=3 \Leftrightarrow 3\left|\overrightarrow{GM}\right|=3 \Leftrightarrow GM=1$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm G bán kính bằng 1.

Bài 4. Tích vô hướng của hai vectơ

Từ khoá: Góc giữa hai vectơ; Tích vô hướng của hai vectơ.

Tác dụng một lực $\vec{F}$ vào một vật và làm cho vật đó dịch chuyển theo vectơ $\vec{d}$ thì sẽ sinh ra một công là A được tính theo công thức: $A=|\vec{F}|.|\vec{d}|.\cos\theta$, trong đó θ là góc giữa hai vectơ $\vec{F}$ và $\vec{d}$.



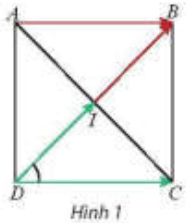
1. Góc giữa hai vectơ

1 Cho hình vuông $ABCD$ có tâm I (Hình 1).

a) Tính $\widehat{IDC}$.

b) Tìm hai vectơ cùng có điểm đầu là D và điểm cuối lần lượt là I và C.

c) Tìm hai vectơ cùng có điểm đầu là D và lần lượt bằng vectơ $\overrightarrow{IB}$ và $\overrightarrow{AB}$.



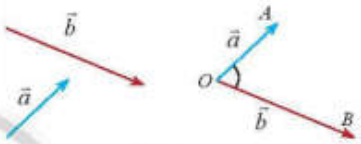
Hình 1

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$.

Góc $\widehat{AOB}$ với số đo từ 0° đến 180° được gọi là ***góc giữa hai vectơ*** $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Ta kí hiệu góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $(\vec{a},\vec{b})$.

Nếu $(\vec{a},\vec{b})=90°$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{a}\perp\vec{b}$.



Hình 2

Chú ý:

– Từ định nghĩa ta có $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$.

– Góc giữa hai vectơ cùng hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 0°.

– Góc giữa hai vectơ ngược hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 180°.

– Trong trường hợp có ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ hoặc $\vec{b}$ là vectơ $\vec{0}$ thì ta quy ước số đo góc giữa hai vectơ đó là tuỳ ý (từ 0° đến 180°).



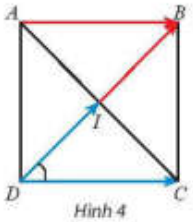
$(\vec{a},\vec{b})=0°$ $(\vec{c},\vec{d})=180°$

Hình 3

Ví dụ 1

Cho hình vuông $ABCD$ có tâm I là giao điểm của hai đường chéo. Tìm các góc:

a) $(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{AB})$; b) $(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{AI})$; c) $(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{DB})$; d) $(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IC})$.



Hình 4

Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$, suy ra $(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{AB})=(\overrightarrow{DI},\overrightarrow{DC})=\widehat{IDC}=45°$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

b) Ta có: $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI}$, suy ra $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{AI}) = (\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}) = \widehat{BIC} = 90°$.

c) Do hai vectơ $\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{DB}$ cùng hướng nên ta có $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{DB}) = 0°$.

d) Do hai vectơ $\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}$ ngược hướng nên ta có $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}) = 180°$.

1 Cho tam giác đều ABC có H là trung điểm của cạnh BC. Tìm các góc: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}), (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}), (\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC}), (\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BC}), (\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{BC})$.

2. Tích vô hướng của hai vectơ

2 Một người dùng một lực $\vec{F}$ có cường độ 10 N kéo một chiếc xe đi quãng đường dài 100 m. Tính công sinh bởi lực $\vec{F}$, biết rằng góc giữa vectơ $\vec{F}$ và hướng di chuyển là 45°. (*Công A (đơn vị: J) bằng tích của ba đại lượng: cường độ của lực $\vec{F}$, độ dài quãng đường và côsin của góc giữa hai vectơ $\vec{F}$ và độ dịch chuyển $\vec{d}$*).



Hình 5

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$.

Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$, được xác định bởi công thức:

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

Chú ý:

a) Trường hợp ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $\vec{0}$, ta quy ước $\vec{a}.\vec{b} = 0$.

b) Với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$, ta có $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$.

c) Khi $\vec{a} = \vec{b}$ thì tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và được gọi là *bình phương vô hướng* của vectơ $\vec{a}$.

Ta có $\vec{a}^2 = |\vec{a}|.|\vec{a}|.\cos 0° = |\vec{a}|^2$. Vậy bình phương vô hướng của một vectơ luôn bằng bình phương độ dài của vectơ đó.

Ví dụ 2

Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 4 và có đường cao AH. Tính các tích vô hướng:

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$; c) $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Giải

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|.\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = 4.4.\cos 60^\circ = 16.\frac{1}{2} = 8;$

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{BC}|.\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}) = 4.4.\cos 120^\circ = 16.\left(-\frac{1}{2}\right) = -8;$

c) $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AH}|.|\overrightarrow{BC}|.\cos(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{BC}) = |\overrightarrow{AH}|.|\overrightarrow{BC}|.\cos 90^\circ = 0.$

Chú ý: Trong Vật lí, tích vô hướng của $\vec{F}$ và $\vec{d}$ biểu diễn công A sinh bởi lực $\vec{F}$ khi thực hiện độ dịch chuyển $\vec{d}$. Ta có công thức: $A = \vec{F}.\vec{d}$.

2 Cho tam giác ABC vuông cân tại A, có cạnh huyền bằng $\sqrt{2}$.
Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

3 Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có độ dài lần lượt là 3 và 8 và có tích vô hướng là $12\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

1 Một người dùng một lực $\vec{F}$ có độ lớn là 20 N kéo một vật dịch chuyển một đoạn 50 m cùng hướng với $\vec{F}$. Tính công sinh bởi lực $\vec{F}$.

3. Tính chất của tích vô hướng

Người ta chứng minh được các tính chất sau đây của tích vô hướng:

Với ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bất kì và mọi số k, ta có:

$\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$; $\quad \vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$; $\quad (k\vec{a}).\vec{b} = k(\vec{a}.\vec{b}) = \vec{a}.(k\vec{b})$.

Ví dụ 3

Áp dụng các tính chất của tích vô hướng, chứng minh rằng: $(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$.

Giải

Ta có: $(\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}.\vec{a} + \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{a} + \vec{b}.\vec{b}$

$= \vec{a}^2 + \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$.

Vậy $(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$.

Nhận xét: Chứng minh tương tự, ta cũng có:

$(\vec{a}-\vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$; $\quad (\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Ví dụ 4

Cho tam giác ABC. Tính cạnh AB theo hai cạnh còn lại và góc C.

Giải

Ta có $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = \left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right)^2 = \overrightarrow{CB}^2 + \overrightarrow{CA}^2 - 2\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} = CB^2 + CA^2 - 2CB.CA.\cos C$

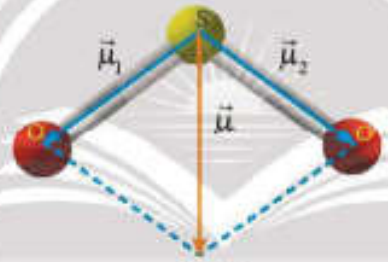
hay $c^2 = a^2 + b^2 - 2bc\cos C$.

4 Cho hai vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$ vuông góc, cùng có độ dài bằng 1.

a) Tính: $(\vec{i} + \vec{j})^2$; $(\vec{i} - \vec{j})^2$; $(\vec{i} + \vec{j}).(\vec{i} - \vec{j})$.

b) Cho $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$. Tính tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$ và tính góc $(\vec{a}, \vec{b})$.

2 Phân tử sulfur dioxide (SO_2) có cấu tạo hình chữ V, góc liên kết $\widehat{OSO}$ gần bằng 120°. Người ta biểu diễn sự phân cực giữa nguyên tử S với mỗi nguyên tử O bằng các vectơ $\vec{\mu}_1$ và $\vec{\mu}_2$ có cùng phương với liên kết cộng hoá trị, có chiều từ nguyên tử S về mỗi nguyên tử O và cùng có độ dài là 1,6 đơn vị (Hình 6). Cho biết vectơ tổng $\vec{\mu} = \vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2$ được dùng để biểu diễn sự phân cực của cả phân tử SO_2. Tính độ dài của $\vec{\mu}$.



Hình 6

BÀI TẬP

1. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Tính các tích vô hướng:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$.

2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O và cho $AD = a$, $AB = 2a$. Tính:

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO}$; b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

3. Cho ba điểm O, A, B thẳng hàng và $OA = a$, $OB = b$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ trong hai trường hợp:

a) Điểm O nằm ngoài đoạn thẳng AB; b) Điểm O nằm trong đoạn thẳng AB.

4. Cho đoạn thẳng AB có O là trung điểm và cho điểm M tuỳ ý. Chứng minh rằng:

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MO^2 - OA^2$.

5. Một người dùng một lực $\vec{F}$ có độ lớn là 90 N làm một vật dịch chuyển một đoạn 100 m. Biết lực $\vec{F}$ hợp với hướng dịch chuyển một góc 60°. Tính công sinh bởi lực $\vec{F}$.

6. Cho hai vectơ có độ dài lần lượt là 3 và 4 và có tích vô hướng là −6. Tính góc giữa hai vectơ đó.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Dạng 1: Tính tích vô hướng 2 vectơ và xác định góc của hai vecto

1. Phương pháp giải.

a) Để tính tích vô hướng của hai vectơ, ta có thể sử dụng:

+ Nếu có độ dài hai vectơ và góc giữa chúng, ta dùng định nghĩa $\boxed{\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})}$

+ Nếu là tích của tổng, hiệu các vectơ ta dùng tính chất của tích vô hướng

+ Nếu biết độ dài hai vectơ và độ dài của tổng hay hiệu của chúng, ta bình phương tổng hay hiệu của chúng

+ Nếu một vectơ cố định và một vectơ thay đổi ta có thể dùng định lý hình chiếu.

b) Để tính góc của hai vectơ, ta sử dụng công thức: $\boxed{\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}}$

2. Các ví dụ.

Câu 1. Cho tam giác ABC đều cạnh a, tâm O. Hãy tính:

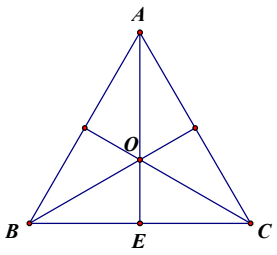
a). $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

b). $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

c). $\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$

d). $\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}\right)$

Lời giải



a). $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=AB.AC.\cos 60^0=a.a.\dfrac{1}{2}=\dfrac{a^2}{2}$

b). $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=-|\overrightarrow{BA}|.|\overrightarrow{BC}|\cos(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$

$=-BA.BC.\cos 60^0=-a.a.\dfrac{1}{2}=-\dfrac{a^2}{2}$

c). Gọi E là trung điểm của BC có $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$;

Do đó $\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=2\overrightarrow{OE}.\overrightarrow{CB}=2|\overrightarrow{OE}|.|\overrightarrow{CB}|.\cos(\overrightarrow{OE},\overrightarrow{CB})$

$=2.\mathrm{OE}.\mathrm{CB}\cos 90^0=0$.

d). Khai triển biểu thức, ta được

$D=\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AB}^2-3\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}-6\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$

Chú ý rằng: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\frac{a^2}{2}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{2}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}=\frac{a^2}{2}$

Từ đó $D=a^2+\frac{3a^2}{2}+a^2-3a^2=\frac{a^2}{2}$.

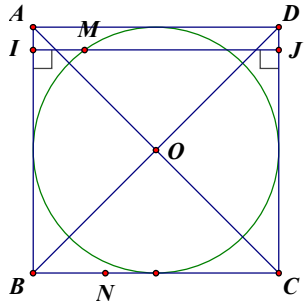
Câu 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, tâm O. Hãy tính:

a). $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}$; $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right)$;$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\right)$

b). $\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{AB}$ với N là điểm trên cạnh BC.

c). $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$ với M nằm trên đường tròn nội tiếp hình vuông.

Lời giải



a).

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=-\left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=-BA.BC.\cos 90^0=0$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}=-\left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BD}\right|\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}\right)=-BA.BD.\cos 45^0=-a.a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=-a^2$
- $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$

$=0+\left|\overrightarrow{AC}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}\right)=AC.BC.\cos 45^0=a^2$

b).

- $\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BO}\right).\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{AB}$ (do $\overrightarrow{BN}\perp\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{AB}=0$)

$=\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BA}=\left|\overrightarrow{BO}\right|.\left|\overrightarrow{BA}\right|.\cos\left(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BA}\right)=\frac{a\sqrt{2}}{2}.a\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{a^2}{2}$

- $\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BN}\right)\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}^2=-a^2$

c).

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA}\right)\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HB}\right)$

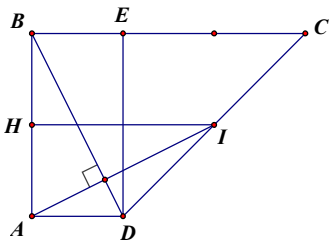
$=\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA}\right)\left(\overrightarrow{MH}-\overrightarrow{HA}\right)=MH^2-HA^2$

Câu 3. Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn $BC=3a$, đáy nhỏ $AD=a$, đường cao $AB=2a$

a). Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$

b). Gọi I là trung điểm của CD. Hãy tính góc giữa AI và BD.

Lời giải



– Dựng $DE \perp BC, E \in BC \Rightarrow ABED$ là hình chữ nhật. Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DE}.\overrightarrow{CD}$

$= -\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DC} = -\left|\overrightarrow{DE}\right|.\left|\overrightarrow{DC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DC}\right) = -DE.DC.\cos 45^0 = -2a.2a\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = -4a^2$

– $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BD} = 3.\left|\overrightarrow{BE}\right|.\left|\overrightarrow{BD}\right|.\cos\widehat{DBE} = 3BE.BD.\dfrac{BE}{BD} = 3.a^2$

– $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\right)\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} - \underbrace{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}}_{0} - \underbrace{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD}}_{0} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AB}$

$= \left|\overrightarrow{BC}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|.\cos 0^0 - \overrightarrow{AB}^2 = BC.AD - AB^2 = 3a.a - 4a^2 = -a^2$

(Vì $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} = 0$; $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD} = 0$).

b). Gọi H trung điểm của AB, suy ra HI là đường trung bình của hình thang ABCD, do đó $HI = \dfrac{AD + BC}{2} = 2a$

Có $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{HI} - \overrightarrow{HA}\right)\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{HI}.\overrightarrow{AD} - \underbrace{\overrightarrow{HI}.\overrightarrow{AB}}_{0} - \underbrace{\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{AD}}_{0} + \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{AB}$

Mà $\overrightarrow{HI}.\overrightarrow{AD} = HI.AD.\cos 0^0 = 2a.a = 2a^2$

$\overrightarrow{HI}.\overrightarrow{AB} = 0\left(do\ \overrightarrow{HI} \perp \overrightarrow{AB}\right)$; $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{AD} = 0\left(do\ \overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{AD}\right)$.

$\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AB} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 = -2a^2$

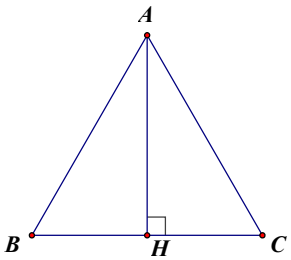
Vậy $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BD} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{BD} \Rightarrow$ góc giữa AI và BD bằng 90^0.

Câu 4. Cho tam giác ABC đều cạnh a, đường cao AH. Tính:

a). $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AH}$.

b). $\left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right)\left(2\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AH}\right)$

Lời giải



a).

– $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos\widehat{BAC}=a.a.\cos 60^0=\frac{a^2}{2}$

– $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AH}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=-AB.AH.\cos\widehat{BAH}=-a.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\cos 30^0=-\frac{3a^2}{4}$

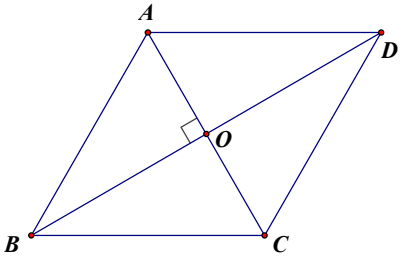
b). $\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)\left(2\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{AH}\right)=\overrightarrow{AB}\left(2\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{AH}\right)=2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$

$=-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=-2.\frac{a^2}{2}-3.\frac{3a^2}{4}=-\frac{13a^2}{4}$

Câu 5. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O cạnh bằng 7, góc $\widehat{BAC}=60^0$. Tính:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OA};\ \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD};\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OB}$

Lời giải



Do $\widehat{BAC}=60^0\Rightarrow\Delta ABC$ đều $\Rightarrow AC=7, BO=\frac{7\sqrt{3}}{2}$ (đường cao tam giác đều $=\frac{canh.\sqrt{3}}{2}$)

– $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos\widehat{BAC}=7.7.\cos 60^0=\frac{49}{2}.$

– $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO}=-AB.AO.\cos 60^0=-7.\frac{7}{2}.\frac{1}{2}=-\frac{49}{4}$

– $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0\left(do\ \overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}\right)$

– $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BO}=BA.BO.\cos\widehat{ABO}=a.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\cos 30^0=\frac{3a^2}{4}$

Câu 6. Cho các vectơ $\vec{a},\vec{b}$ có độ dài bằng 1 và thỏa mãn điều kiện $\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right|=3$. Tính $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

Lời giải

Ta có $\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right|=4\Leftrightarrow\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)^2=16\Leftrightarrow 4\vec{a}^2-12\vec{a}.\vec{b}+9\vec{b}^2=16$

$\Leftrightarrow 4a^2-12.\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)+9b^2=16$

$\Leftrightarrow 4-12\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)+9=16\Rightarrow\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-\frac{1}{4}.$

Câu 7. Cho các vectơ $\vec{a},\vec{b}$ có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai vectơ bằng 60^0. Xác định cosin góc giữa hai vec tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ với $\vec{u}=\vec{a}+2\vec{b},\ \vec{v}=\vec{a}-\vec{b}$.

Lời giải

Ta có $\vec{u}.\vec{v}=\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}^2+\vec{a}.\vec{b}-2\vec{b}^2=a^2+\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)-2b^2=-\frac{1}{2}$.

- $\vec{u}^2=\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+4\vec{a}.\vec{b}+4\vec{b}^2=1+4.1.1.\cos 60^0+4.1=7\Rightarrow\left|\vec{u}\right|=\sqrt{7}$
- $\vec{v}^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2-2.\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2=1-2.1.1\cos 60^0+1=1\Rightarrow\left|\vec{v}\right|=1$

$\vec{u}.\vec{v}=\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\Rightarrow\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|}=\frac{-\frac{1}{2}}{.\sqrt{7}.1}=-\frac{\sqrt{7}}{14}$.

Câu 8. Trong mặt phẳng Oxy cho $A(1;1),B(2;4),C(10;-2)$

a). Chứng minh rằng ABC là tam giác vuông.

b). Tính $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ suy ra cosB

Lời giải

a). $\left|\overrightarrow{AB}\right|=AB=\sqrt{10}$, $\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC=\sqrt{90}$, $\left|\overrightarrow{BC}\right|=BC=\sqrt{100}$

Có $BC^2=AB^2+AC^2=100\Rightarrow\Delta ABC$ vuông tại A.

b). Có $\overrightarrow{BA}=(-1;-3)$, $\overrightarrow{BC}=(8;-6)\Rightarrow\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=(-1).8+(-3)(-6)=10$

Ngoài ra $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)$

$\Rightarrow\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{10}{\sqrt{10}.\sqrt{100}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Câu 9. Cho hai vectơ đơn vị $\vec{a}$, $\vec{b}$ thỏa mãn điều kiện $\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{3}$. Tính $\vec{a}.\vec{b}$; $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$

Lời giải

$\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{3}\Rightarrow\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)^2=3\Leftrightarrow 4\vec{a}^2-4\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2=3\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}=\frac{3-4-1}{4}=-\frac{1}{2}$

Có $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2=1+2.\left(-\frac{1}{2}\right)+1=1\Rightarrow\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=1$

Dạng 2: Biểu thức tọa độ của tích vô hướng.

1. Phương pháp giải.

- Cho $\vec{a}=(x_1;y_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2)$. Khi đó

+ Tích vô hướng hai vectơ là $\vec{a}.\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$

+ Góc của hai vectơ được xác định bởi công thức

$$\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

Chú ý: $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$

- Để xác định độ dài một vectơ đoạn thẳng ta sử dụng công thức

+ Nếu $\vec{a}=(x;y)$ thì $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{x^2+y^2}$

+ Nếu $A(x_A;y_A),\ B(x_B;y_B)$ thì $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

2. Các ví dụ.

Câu 1: Cho tam giác ABC có $A(1;2),\ B(-2;6),\ C(9;8)$.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông tại A.

b) Tính góc B của tam giác ABC

c) Xác định hình chiếu của A lên cạnh BC

Lời giải:

a) Ta có $\overrightarrow{AB}(-3;4),\ \overrightarrow{AC}(8;6)\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-3.8+4.6=0$

Do đó $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ hay tam giác ABC vuông tại A.

b) Ta có $\overrightarrow{BC}(11;2),\ \overrightarrow{BA}(3;-4)$

Suy ra $\cos B=\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)=\dfrac{11.3+2.(-4)}{\sqrt{11^2+2^2}\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

c) Gọi $H(x;y)$ là hình chiếu của A lên BC.

Ta có $\overrightarrow{AH}(x-1;y-2),\ \overrightarrow{BH}(x+2;y-6),\ \overrightarrow{BC}(11;2)$

$AH\perp BC\Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow 11(x-1)+2(y-2)=0$

Hay $11x+2y-15=0\ (1)$

Mặt khác $\overrightarrow{BH},\overrightarrow{BC}$ cùng phương nên $\dfrac{x+2}{11}=\dfrac{y-6}{2}\Leftrightarrow 2x-11y+70=0\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $x=\dfrac{1}{5},\ y=\dfrac{32}{5}$

Vậy hình chiếu của A lên BC là $H\left(\dfrac{1}{5};\dfrac{32}{5}\right)$

Câu 2. Cho các điểm $A\left(4\sqrt{3};-1\right),\ B\left(0;3\right),\ C\left(8\sqrt{3};3\right)$.

a) Tính các cạnh của tam giác ABC.

b) Tính các góc của tam giác ABC.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{AB}=\left(-4\sqrt{3};4\right)\Rightarrow AB=\sqrt{48+16}=8$.

$\overrightarrow{BC}=\left(8\sqrt{3};0\right)\Rightarrow BC=8\sqrt{3}$

$\overrightarrow{CA}=\left(-4\sqrt{3};-4\right)\Rightarrow AB=8$

b) Ta có $\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2.AB.AC}=\dfrac{128-192}{128}=-\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $\widehat{A}=120^\circ$ và vì tam giác cân tại A nên $\widehat{B}=\widehat{C}=30^\circ$.

Câu 3. Cho các điểm $A(-1;-1)$, $B(3;1)$, $C(6;0)$.

a) Chứng minh ba điểm A,B,C không thẳng hàng.

b) Tính góc B và diện tích tam giác ABC.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;2)$, $\overrightarrow{AC}=(7;1)$. Vì $\frac{4}{7}\neq\frac{2}{1}$ nên ba điểm A,B,C không thẳng hàng.

b) Ta có $\overrightarrow{BA}=(-4;-2)$, $\overrightarrow{BC}=(3;-1)$.

Do đó $\cos B=\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\dfrac{(-4).3+(-2).(-1)}{\sqrt{16+4}.\sqrt{9+1}}=\dfrac{-10}{\sqrt{200}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\widehat{B}=135^\circ$.

Hạ đường cao AH ta có $S=\frac{1}{2}BC.AB.\sin 45^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{9+1}.\sqrt{16+4}.\frac{\sqrt{2}}{2}=5$.

Câu 4. Cho các điểm $A(1;3)$, $B(4;2)$.

a) Tìm tọa độ điểm D nằm trên trục Ox và cách đều hai điểm A và B.

b) Tính chu vi và điện tích tam giác OAB.

Lời giải.

a) Vì D nằm trên trục Ox nên $D(x;0)$. Ta có

$DA=DB\Leftrightarrow DA^2=DB^2\Leftrightarrow(x-1)^2+3^2=(x-4)^2+2^2$

$\Leftrightarrow x^2+1-2x+9=x^2+16-8x+4\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{3}$.

Vậy $D\left(\dfrac{5}{3};0\right)$.

b) Chu vi tam giác là $OA+OB+OC=\sqrt{1^2+3^2}+\sqrt{4^2+2^2}+\sqrt{3^2+1^2}=2\sqrt{10}+\sqrt{20}=2\left(\sqrt{10}+\sqrt{5}\right)$

Ta có $OA=AB=\sqrt{10}$ và $OB=\sqrt{20}=AC.\sqrt{2}$ nên tam giác OAB là tam giác vuông cân tại A.

Vậy diện tích tam giác OAB là $S=\dfrac{OA.OB}{2}=5$.

Câu 5. Cho các điểm $A(4;6)$, $B(5;1)$, $C(1;3)$. Tìm tọa độ tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải.

Gọi $I(x;y)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ta có $IA=IB=IC \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2=IB^2 \\ IA^2=IC^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2+(y-6)^2=(x-5)^2+(y-1)^2 \\ (x-4)^2+(y-6)^2=(x-1)^2+(y+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-10y=-26 \\ -6x-18y=-42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{5}{2} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2+(y-6)^2=(x-5)^2+(y-1)^2 \\ (x-4)^2+(y-6)^2=(x-1)^2+(y+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-10y=-26 \\ -6x-18y=-42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{5}{2} \end{cases}.$$

Vậy $I\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right)$ và bán kính $IA=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}-4\right)^2+\left(\dfrac{5}{2}-6\right)^2}=\dfrac{\sqrt{130}}{2}$.

Câu 6. Cho tam giác ABC có ba đỉnh $A(-3;0)$, $B(3;0)$, $C(2;6)$. Tìm tọa độ trọng tâm G và trực tâm H của tam giác.

Lời giải.

Trọng tâm G có tọa độ $\begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=\dfrac{2}{3} \\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=2 \end{cases}$. Vậy $G\left(\dfrac{2}{3};2\right)$.

Gọi $H(x;y)$ là trực tâm ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(2-3)+(y-0)(6-0)=0 \\ (x-3)(-3-2)+(y-0)(0-6)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+6y=3 \\ -5x-6y=-15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=\dfrac{5}{6} \end{cases}.$$

Vậy $H\left(2;\dfrac{5}{6}\right)$.

Câu 7: Cho ba điểm $A(3;4)$, $B(2;1)$ và $C(-1;-2)$. Tìm điểm M trên đường thẳng BC để góc $\widehat{AMB}=45^0$

Lời giải:

Giả sử $M(x;y)$ suy ra $\overrightarrow{MA}(3-x;4-y)$, $\overrightarrow{MB}(2-x;1-y)$, $\overrightarrow{BC}(-3;-3)$

Vì $\widehat{AMB}=45^0$ suy ra $\left|\cos\widehat{AMB}\right|=\left|\cos\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{BC}\right)\right|$

$$\Leftrightarrow \cos 45^0=\frac{\left|\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}\right|}{\left|\overrightarrow{MA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|-3(3-x)-3(4-y)|}{\sqrt{(3-x)^2+(4-y)^2}\sqrt{9+9}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(3-x)^2+(4-y)^2}=|x+y-7| \ (*)$$

Mặt khác M thuộc đường thẳng BC nên hai vectơ $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{BC}$ cùng phương

Suy ra $\frac{2-x}{-3}=\frac{1-y}{-3}\Leftrightarrow x=y+1$ thế vào (*) ta được

$\sqrt{(2-y)^2+(4-y)^2}=|2y-6|\Leftrightarrow y^2-6y+8=0\Leftrightarrow y=2$ hoặc $y=4$

+ Với $y=2\Rightarrow x=3$, ta có $\overrightarrow{MA}(0;2)$, $\overrightarrow{MB}(-1;-1)\Rightarrow \cos\widehat{AMB}=\cos\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

Khi đó $\widehat{AMB}=135^0$ (không thỏa mãn)

+ Với $y=4\Rightarrow x=5$, $\overrightarrow{MA}(-2;0)$, $\overrightarrow{MB}(-3;-3)\Rightarrow \cos\widehat{AMB}=\cos\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Khi đó $\widehat{AMB}=45^0$

Vậy $M(5;4)$. là điểm cần tìm.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|$. **B.** $\vec{a}.\vec{b}=0$. **C.** $\vec{a}.\vec{b}=-1$. **D.** $\vec{a}.\vec{b}=-|\vec{a}|.|\vec{b}|$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$.

Do $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng nên $(\vec{a},\vec{b})=0^0\longrightarrow\cos(\vec{a},\vec{b})=1$.

Vậy $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|$.

Câu 2. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a}.\vec{b}=-|\vec{a}|.|\vec{b}|$.

A. $\alpha=180^0$. **B.** $\alpha=0^0$. **C.** $\alpha=90^0$. **D.** $\alpha=45^0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$.

Mà theo giả thiết $\vec{a}.\vec{b}=-|\vec{a}|.|\vec{b}|$, suy ra $\cos(\vec{a},\vec{b})=-1\longrightarrow(\vec{a},\vec{b})=180^0$.

Câu 3. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$ và $\vec{a}.\vec{b}=-3$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha=30^0$. **B.** $\alpha=45^0$. **C.** $\alpha=60^0$. **D.** $\alpha=120^0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})\longrightarrow\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\frac{-3}{3.2}=-\frac{1}{2}\longrightarrow(\vec{a},\vec{b})=120^0$.

Câu 4. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ và hai vectơ $\vec{u}=\frac{2}{5}\vec{a}-3\vec{b}$ và $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha = 90^0$. **B.** $\alpha = 180^0$. **C.** $\alpha = 60^0$. **D.** $\alpha = 45^0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\vec{u} \perp \vec{v} \longrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}\right)\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{5}\vec{a}^2 - \frac{13}{5}\vec{a}\vec{b} - 3\vec{b}^2 = 0$

$\xrightarrow{|\vec{a}|=|\vec{b}|=1} \vec{a}\vec{b} = -1.$

Suy ra $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = -1 \longrightarrow \left(\vec{a},\vec{b}\right) = 180^0.$

Câu 5. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 - |\vec{a}|^2 - \left|\vec{b}\right|^2\right)$.

B. $\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)$.

C. $\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)$.

D. $\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{4}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)$.

Lời giải

Chọn C

Nhận thấy C và D chỉ khác nhau về hệ số $\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{4}$ nên đáp án sai sẽ rơi vào C hoặc D.

Ta có $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 = \left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2 - \left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2 = 4\vec{a}\vec{b} \longrightarrow \vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{4}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)$.

- A đúng, vì $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 = \left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2 = \left(\vec{a}+\vec{b}\right).\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \vec{a}.\vec{a} + \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{a} + \vec{b}.\vec{b} = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + 2\vec{a}.\vec{b}$

$\longrightarrow \vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 - |\vec{a}|^2 - \left|\vec{b}\right|^2\right)$.

- B đúng, vì $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 = \left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2 = \left(\vec{a}-\vec{b}\right).\left(\vec{a}-\vec{b}\right) = \vec{a}.\vec{a} - \vec{a}.\vec{b} - \vec{b}.\vec{a} + \vec{b}.\vec{b} = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\vec{a}.\vec{b}$

$\longrightarrow \vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)$.

Câu 6. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2a^2$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\frac{a^2}{2}$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Xác định được góc $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ là góc $\widehat{A}$ nên $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = 60^0$.

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = a.a.\cos 60^0 = \frac{a^2}{2}$.

Câu 7. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = a^2$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Xác định được góc $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)$ là góc ngoài của góc $\widehat{B}$ nên $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=120^0$.

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=AB.BC.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=a.a.\cos120^0=-\frac{a^2}{2}$.

Câu 8. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và có $AB=AC=a$. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-a^2$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=a^2$.

C. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Xác định được góc $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)$ là góc ngoài của góc $\widehat{B}$ nên $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=135^0$.

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=AB.BC.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=a.a\sqrt{2}.\cos135^0=-a^2$.

Câu 9. Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AB=c$, $AC=b$. Tính $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=b^2$. **B.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=c^2$.

C. $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=b^2+c^2$. **D.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=b^2-c^2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=BA.BC.\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=BA.BC.\cos\widehat{B}=c.\sqrt{b^2+c^2}.\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}=c^2$.

Cách khác. Tam giác ABC vuông tại A suy ra $AB\perp AC\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$.

Ta có $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}=AB^2=c^2$.

Câu 10. Cho tam giác ABC có $AB=2$ cm, $BC=3$ cm, $CA=5$ cm. Tính $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

A. $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=13$. **B.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=15$. **C.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=17$. **D.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=19$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $AB+BC=CA\Rightarrow$ ba điểm A, B, C thẳng hàng và B nằm giữa A, C.

Khi đó $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=CA.CB.\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=3.5.\cos0^0=15$.

Cách khác. Ta có $AB^2=\overrightarrow{AB}^2=\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)^2=CB^2-2\overrightarrow{CB}\overrightarrow{CA}+CA^2$

$\longrightarrow\overrightarrow{CB}\overrightarrow{CA}=\frac{1}{2}\left(CB^2+CA^2-AB^2\right)=\frac{1}{2}\left(3^2+5^2-2^2\right)=15$.

Câu 11. Cho tam giác ABC có $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. Tính $P=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{BC}$.

A. $P=b^2-c^2$. **B.** $P=\frac{c^2+b^2}{2}$.

C. $P=\frac{c^2+b^2+a^2}{3}$. **D.** $P=\frac{c^2+b^2-a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $P=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right).$

$=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right).\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2=AC^2-AB^2=b^2-c^2.$

Câu 12. Cho tam giác ABC có $BC=a,\ CA=b,\ AB=c.$ Gọi M là trung điểm cạnh BC. Tính $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{b^2-c^2}{2}.$ **B.** $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{c^2+b^2}{2}.$

C. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{c^2+b^2+a^2}{3}.$ **D.** $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{c^2+b^2-a^2}{2}.$

Lời giải

Chọn A

Vì M là trung điểm của BC suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}.$

Khi đó $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right).\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2\right)=\dfrac{1}{2}\left(AC^2-AB^2\right)=\dfrac{b^2-c^2}{2}.$

Câu 13. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a.$ Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=a^2.$ **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=a^2\sqrt{2}.$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a^2.$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}a^2.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\widehat{BAC}=45^0$ nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos 45^0=a.a\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=a^2.$

Câu 14. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $P=\overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}\right).$

A. $P=-1.$ **B.** $P=3a^2.$ **C.** $P=-3a^2.$ **D.** $P=2a^2.$

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết suy ra $AC=a\sqrt{2}.$

Ta có $P=\overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}\right)=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AC}^2$

$=-CA.CD\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}\right)-AC^2=-a\sqrt{2}.a.\cos 45^0-\left(a\sqrt{2}\right)^2=-3a^2.$

Câu 15. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a.$ Tính $P=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BA}\right).$

A. $P=2\sqrt{2}a.$ **B.** $P=2a^2.$ **C.** $P=a^2.$ **D.** $P=-2a^2.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\begin{cases}BD=a\sqrt{2}\\ \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BA}=\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\right)+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BD}\end{cases}.$

Khi đó $P=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).2\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=-2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}+0$

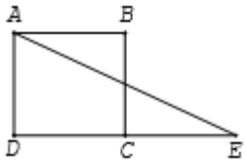
$=-2.BA.BD\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}\right)=-2.a.a\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-2a^2.$

Câu 16. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua C. Tính $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}$.

A. $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=2a^2.$ **B.** $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=\sqrt{3}a^2.$ **C.** $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=\sqrt{5}a^2.$ **D.** $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=5a^2.$

Lời giải

Chọn A



Ta có C là trung điểm của DE nên $DE=2a.$

Khi đó $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}\right).\overrightarrow{AB}=\underbrace{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}}_{0}+\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{AB}$

$=DE.AB.\cos\left(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{AB}\right)=DE.AB.\cos 0^0=2a^2.$

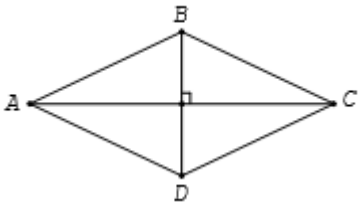
Câu 17. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=8,\ AD=5.$ Tích $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=62.$ **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=64.$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=-62.$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=-64.$

Lời giải

Chọn D

Giả thiết không cho góc, ta phân tích các vectơ $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BD}$ theo các vectơ có giá vuông góc với nhau.



Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}+0=-AB^2=-64$.

Câu 18. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC=8$ và $BD=6.$ Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=24.$ **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=26.$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=28.$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=32.$

Lời giải

Chọn D

Gọi $O=AC\cap BD$, giả thiết không cho góc, ta phân tích các vectơ $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}$ theo các vectơ có giá vuông góc với nhau.

Ta có

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\right).\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC}+0=\dfrac{1}{2}AC^2=32$.

Câu 19. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB=8$ cm, $AD=12$ cm, góc $\widehat{ABC}$ nhọn và diện tích bằng 54 cm^2.

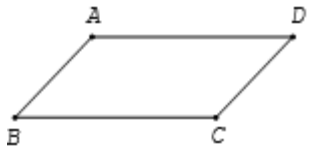
Tính $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)$.

A. $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=\frac{2\sqrt{7}}{16}$. **B.** $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=-\frac{2\sqrt{7}}{16}$.

C. $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=\frac{5\sqrt{7}}{16}$. **D.** $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=-\frac{5\sqrt{7}}{16}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $S_{ABCD}=2.S_{\Delta ABC}=54\Leftrightarrow S_{\Delta ABC}=27\,\text{cm}^2$. Diện tích tam giác ABC là:

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.AB.BC.\sin\widehat{ABC}=\frac{1}{2}.AB.AD.\sin\widehat{ABC}.$

$\Rightarrow \sin\widehat{ABC}=\frac{2.S_{\Delta ABC}}{AB.AD}=\frac{2.27}{8.12}=\frac{9}{16}$

$\longrightarrow \cos\widehat{ABC}=\sqrt{1-\sin^2\widehat{ABC}}=\frac{5\sqrt{7}}{16}$ (vì $\widehat{ABC}$ nhọn).

Mặt khác góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ là góc ngoài của góc $\widehat{ABC}$

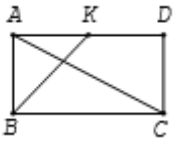
Suy ra $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=\cos\left(180^0-\widehat{ABC}\right)=-\cos\widehat{ABC}=-\frac{5\sqrt{7}}{16}$.

Câu 20. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=a$ và $AD=a\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD. Tính $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}=0$. **B.** $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}=-a^2\sqrt{2}$. **C.** $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}=a^2\sqrt{2}$. **D.** $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}=2a^2$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $AC=BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{2a^2+a^2}=a\sqrt{3}$.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\\ \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\end{cases}$

$\longrightarrow \overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$

$=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD}=-a^2+0+0+\frac{1}{2}\left(a\sqrt{2}\right)^2=0.$

Câu 21. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(3;-1)$, $B(2;10)$, $C(-4;2)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=40.$ **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-40.$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=26.$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-26.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;11)$, $\overrightarrow{AC}=(-7;3)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(-1).(-7)+11.3=40.$

Câu 22. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(3;-1)$ và $B(2;10)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}.$

A. $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=-4.$ **B.** $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=0.$ **C.** $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=4.$ **D.** $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=16.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AO}=(-3;1)$, $\overrightarrow{OB}=(2;10)$. Suy ra $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=-3.2+1.10=4.$

Câu 23. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=4\vec{i}+6\vec{j}$ và $\vec{b}=3\vec{i}-7\vec{j}$. Tính tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}.$

A. $\vec{a}.\vec{b}=-30.$ **B.** $\vec{a}.\vec{b}=3.$ **C.** $\vec{a}.\vec{b}=30.$ **D.** $\vec{a}.\vec{b}=43.$

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết suy ra $\vec{a}=(4;6)$ và $\vec{b}=(3;-7).$

Suy ra $\vec{a}.\vec{b}=4.3+6.(-7)=-30.$

Câu 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(-3;2)$ và $\vec{b}=(-1;-7)$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{c}$ biết $\vec{c}.\vec{a}=9$ và $\vec{c}.\vec{b}=-20.$

A. $\vec{c}=(-1;-3).$ **B.** $\vec{c}=(-1;3).$ **C.** $\vec{c}=(1;-3).$ **D.** $\vec{c}=(1;3).$

Lời giải

Chọn B

Gọi $\vec{c}=(x;y).$

Ta có $\begin{cases}\vec{c}.\vec{a}=9\\ \vec{c}.\vec{b}=-20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x+2y=9\\ -x-7y=-20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=3\end{cases}\longrightarrow\vec{c}=(-1;3).$

Câu 25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba vectơ $\vec{a}=(1;2)$, $\vec{b}=(4;3)$ và $\vec{c}=(2;3)$. Tính $P=\vec{a}.\left(\vec{b}+\vec{c}\right).$

A. $P=0.$ **B.** $P=18.$ **C.** $P=20.$ **D.** $P=28.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\vec{b}+\vec{c}=(6;6)$. Suy ra $P=\vec{a}.\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=1.6+2.6=18.$

Câu 26. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(-1;1)$ và $\vec{b}=(2;0)$. Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}.$

A. $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}.$ **B.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$ **C.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}.$ **D.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{1}{2}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{-1.2+1.0}{\sqrt{(-1)^2+1^2}.\sqrt{2^2+0^2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(-2;-1)$ và $\vec{b}=(4;-3)$. Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{-2.4+(-1).(-3)}{\sqrt{4+1}.\sqrt{16+9}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 28. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(4;3)$ và $\vec{b}=(1;7)$. Tính góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha=90^{\circ}$. **B.** $\alpha=60^{\circ}$. **C.** $\alpha=45^{\circ}$. **D.** $\alpha=30^{\circ}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{4.1+3.7}{\sqrt{16+9}.\sqrt{1+49}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\longrightarrow\left(\vec{a},\vec{b}\right)=45^{0}$.

Câu 29. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{x}=(1;2)$ và $\vec{y}=(-3;-1)$. Tính góc α giữa hai vectơ $\vec{x}$ và $\vec{y}$.

A. $\alpha=45^{\circ}$. **B.** $\alpha=60^{\circ}$. **C.** $\alpha=90^{\circ}$. **D.** $\alpha=135^{\circ}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\cos\left(\vec{x},\vec{y}\right)=\dfrac{\vec{x}.\vec{y}}{\left|\vec{x}\right|.\left|\vec{y}\right|}=\dfrac{1.(-3)+2.(-1)}{\sqrt{1+4}.\sqrt{9+1}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\longrightarrow\left(\vec{x},\vec{y}\right)=135^{0}$.

Câu 30. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(2;5)$ và $\vec{b}=(3;-7)$. Tính góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha=30^{\circ}$. **B.** $\alpha=45^{\circ}$. **C.** $\alpha=60^{\circ}$. **D.** $\alpha=135^{\circ}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{2.3+5(-7)}{\sqrt{4+25}.\sqrt{9+49}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\longrightarrow\left(\vec{a},\vec{b}\right)=135^{0}$.

Câu 31. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho vectơ $\vec{a}=(9;3)$. Vectơ nào sau đây không vuông góc với vectơ $\vec{a}$?

A. $\overrightarrow{v_1}=(1;-3)$. **B.** $\overrightarrow{v_2}=(2;-6)$. **C.** $\overrightarrow{v_3}=(1;3)$. **D.** $\overrightarrow{v_4}=(-1;3)$.

Lời giải

Chọn C

Kiểm tra tích vô hướng $\vec{a}.\vec{v}$, nếu đáp án nào cho kết quả khác 0 thì kết luận vectơ đó không vuông góc với $\vec{a}$.

Câu 32. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(1;2)$, $B(-1;1)$ và $C(5;-1)$. Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

A. $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{1}{2}$.

B. $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{2}{5}$.

D. $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;-1)$ và $\overrightarrow{AC}=(4;-3)$.

Suy ra $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{-2.4+(-1).(-3)}{\sqrt{4+1}.\sqrt{16+9}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 33. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(6;0)$, $B(3;1)$ và $C(-1;-1)$. Tính số đo góc B của tam giác đã cho.

A. 15°.

B. 60°.

C. 120°.

D. 135°.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{BA}=(3;-1)$ và $\overrightarrow{BC}=(-4;-2)$. Suy ra:

$\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{3.(-4)+(-1).(-2)}{\sqrt{9+1}.\sqrt{16+4}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\longrightarrow\widehat{B}=\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=135^{\circ}$.

Câu 34. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{i}-5\vec{j}$ và $\vec{v}=k\vec{i}-4\vec{j}$ Tìm k để vectơ $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

A. $k=20$.

B. $k=-20$.

C. $k=-40$.

D. $k=40$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết suy ra $\vec{u}=\left(\frac{1}{2};-5\right),\vec{v}=(k;-4)$.

Yêu cầu bài toán: $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\frac{1}{2}k+(-5)(-4)=0\Leftrightarrow k=-40$.

Câu 35. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{i}-5\vec{j}$ và $\vec{v}=k\vec{i}-4\vec{j}$. Tìm k để vectơ $\vec{u}$ và vectơ $\vec{v}$ có độ dài bằng nhau.

A. $k=\frac{37}{4}$.

B. $k=\frac{\sqrt{37}}{2}$.

C. $k=\pm\frac{\sqrt{37}}{2}$.

D. $k=\frac{5}{8}$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết suy ra $\vec{u}=\left(\frac{1}{2};-5\right),\vec{v}=(k;-4).$

Suy ra $\left|\vec{u}\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+25}=\frac{1}{2}\sqrt{101}$ và $\left|\vec{v}\right|=\sqrt{k^2+16}$. Do đó để

$$\left|\vec{u}\right|=\left|\vec{v}\right|\Leftrightarrow\sqrt{k^2+16}=\frac{1}{2}\sqrt{101}\Leftrightarrow k^2+16=\frac{101}{4}\Leftrightarrow k^2=\frac{37}{4}\Leftrightarrow k=\pm\frac{\sqrt{37}}{2}.$$

Câu 36. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba vectơ $\vec{a}=(-2;3)$, $\vec{b}=(4;1)$ và $\vec{c}=k\vec{a}+m\vec{b}$ với $k,\ m\in\mathbb{R}$. Biết rằng vectơ $\vec{c}$ vuông góc với vectơ $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2k=2m.$ **B.** $3k=2m.$ **C.** $2k+3m=0.$ **D.** $3k+2m=0.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases}\vec{c}=k\vec{a}+m\vec{b}=(-2k+4m;3k+m)\\ \vec{a}+\vec{b}=(2;4)\end{cases}$.

Để $\vec{c}\perp\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\Leftrightarrow\vec{c}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=0\Leftrightarrow 2(-2k+4m)+4(3k+m)=0\Leftrightarrow 2k+3m=0.$

Câu 37. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(-2;3)$ và $\vec{b}=(4;1)$. Tìm vectơ $\vec{d}$ biết $\vec{a}.\vec{d}=4$ và $\vec{b}.\vec{d}=-2$.

A. $\vec{d}=\left(\frac{5}{7};\frac{6}{7}\right).$ **B.** $\vec{d}=\left(-\frac{5}{7};\frac{6}{7}\right).$ **C.** $\vec{d}=\left(\frac{5}{7};-\frac{6}{7}\right).$ **D.** $\vec{d}=\left(-\frac{5}{7};-\frac{6}{7}\right).$

Lời giải

Chọn B

Gọi $\vec{d}=(x;y)$. Từ giả thiết, ta có hệ $\begin{cases}-2x+3y=4\\ 4x+y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{5}{7}\\ y=\frac{6}{7}\end{cases}$.

Câu 38. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba vectơ $\vec{u}=(4;1)$, $\vec{v}=(1;4)$ và $\vec{a}=\vec{u}+m.\vec{v}$ với $m\in\mathbb{R}$. Tìm m để $\vec{a}$ vuông góc với trục hoành.

A. $m=4.$ **B.** $m=-4.$ **C.** $m=-2.$ **D.** $m=2.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\vec{a}=\vec{u}+m.\vec{v}=(4+m;1+4m)$. Trục hoành có vectơ đơn vị là $\vec{i}=(1;0)$.

Vectơ $\vec{a}$ vuông góc với trục hoành $\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{i}=0\Leftrightarrow 4+m=0\Leftrightarrow m=-4.$

Câu 39. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{u}=(4;1)$ và $\vec{v}=(1;4)$. Tìm m để vectơ $\vec{a}=m.\vec{u}+\vec{v}$ tạo với vectơ $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}$ một góc 45^0.

A. $m=4.$ **B.** $m=-\frac{1}{2}.$ **C.** $m=-\frac{1}{4}.$ **D.** $m=\frac{1}{2}.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases}\vec{a}=m.\vec{u}+\vec{v}=(4m+1;m+4)\\ \vec{b}=\vec{i}+\vec{j}=(1;1)\end{cases}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\cos 45^0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{(4m+1)+(m+4)}{\sqrt{2}\sqrt{(4m+1)^2+(m+4)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow \dfrac{5(m+1)}{\sqrt{2}\sqrt{17m^2+16m+17}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow 5(m+1)=\sqrt{17m^2+16m+17}\Leftrightarrow \begin{cases}m+1\ge 0\\ 25m^2+50m+25=17m^2+16m+17\end{cases}\Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{4}.$

Câu 40. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tính khoảng cách giữa hai điểm $M(1;-2)$ và $N(-3;4)$.

A. $MN=4.$ **B.** $MN=6.$ **C.** $MN=3\sqrt{6}.$ **D.** $MN=2\sqrt{13}.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{MN}=(-4;6)$ suy ra $MN=\sqrt{(-4)^2+6^2}=\sqrt{42}=2\sqrt{13}.$

Câu 41. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;4)$, $B(3;2)$, $C(5;4)$. Tính chu vi P của tam giác đã cho.

A. $P=4+2\sqrt{2}.$ **B.** $P=4+4\sqrt{2}.$ **C.** $P=8+8\sqrt{2}.$ **D.** $P=2+2\sqrt{2}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(2;-2)\\ \overrightarrow{BC}=(2;2)\\ \overrightarrow{CA}=(-4;0)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}AB=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}\\ BC=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}\\ CA=\sqrt{(-4)^2+0^2}=4\end{cases}$

Vậy chu vi P của tam giác ABC là $P=AB+BC+CA=4+4\sqrt{2}.$

Câu 42. Trong hệ tọa độ $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, cho vectơ $\vec{a}=-\dfrac{3}{5}\vec{i}-\dfrac{4}{5}\vec{j}$. Độ dài của vectơ $\vec{a}$ bằng

A. $\dfrac{1}{5}.$ **B.** $1.$ **C.** $\dfrac{6}{5}.$ **D.** $\dfrac{7}{5}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\vec{a}=-\dfrac{3}{5}\vec{i}-\dfrac{4}{5}\vec{j}\longrightarrow \vec{a}=\left(-\dfrac{3}{5};-\dfrac{4}{5}\right)\Rightarrow|\vec{a}|=\sqrt{\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2+\left(-\dfrac{4}{5}\right)^2}=1.$

Câu 43. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(-2;4)$ và $B(8;4)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục hoành sao cho tam giác ABC vuông tại C.

A. $C(6;0).$ **B.** $C(0;0)$, $C(6;0).$ **C.** $C(0;0).$ **D.** $C(-1;0).$

Lời giải

Chọn B

Ta có $C \in Ox$ nên $C(c;0)$ và $\begin{cases}\overrightarrow{CA}=(-2-c;4)\\ \overrightarrow{CB}=(8-c;4)\end{cases}$.

Tam giác ABC vuông tại C nên $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=0 \Leftrightarrow (-2-c).(8-c)+4.4=0$

$\Leftrightarrow c^2-6c=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}c=6 \to C(6;0)\\ c=0 \to C(0;0)\end{array}\right.$.

Câu 44. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;2)$ và $B(-3;1)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục tung sao cho tam giác ABC vuông tại A.

A. $C(0;6)$. **B.** $C(5;0)$. **C.** $C(3;1)$. **D.** $C(0;-6)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $C \in Oy$ nên $C(0;c)$ và $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-4;-1)\\ \overrightarrow{AC}=(-1;c-2)\end{cases}$.

Tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow (-4).(-1)+(-1)(c-2)=0 \Leftrightarrow c=6$.

Vậy $C(0;6)$.

Câu 45. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(-4;0)$, $B(-5;0)$ và $C(3;0)$. Tìm điểm M thuộc trục hoành sao cho $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

A. $M(-2;0)$. **B.** $M(2;0)$. **C.** $M(-4;0)$. **D.** $M(-5;0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $M \in Ox$ nên $M(x;0)$ và $\begin{cases}\overrightarrow{MA}=(-4-x;0)\\ \overrightarrow{MB}=(-5-x;0)\\ \overrightarrow{MC}=(3-x;0)\end{cases} \longrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=(-6-3x;0)$.

Do $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ nên $-6-3x=0 \Leftrightarrow x=-2 \longrightarrow M(-2;0)$.

Câu 46. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $M(-2;2)$ và $N(1;1)$. Tìm tọa độ điểm P thuộc trục hoành sao cho ba điểm M, N, P thẳng hàng.

A. $P(0;4)$. **B.** $P(0;-4)$. **C.** $P(-4;0)$. **D.** $P(4;0)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $P \in Ox$ nên $P(x;0)$ và $\begin{cases}\overrightarrow{MP}=(x+2;-2)\\ \overrightarrow{MN}=(3;-1)\end{cases}$.

Do M, N, P thẳng hàng nên $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{-2}{-1} \Leftrightarrow x=4 \longrightarrow P(4;0)$.

Câu 47. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm điểm M thuộc trục hoành để khoảng cách từ đó đến điểm $N(-1;4)$ bằng $2\sqrt{5}$.

A. $M(1;0)$. **B.** $M(1;0)$, $M(-3;0)$.

C. $M(3;0)$. **D.** $M(1;0)$, $M(3;0)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $M \in Ox$ nên $M(m;0)$ và $\overrightarrow{MN} = (-1-m;4)$.

Theo giả thiết: $MN = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MN}\right| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(-1-m)^2+4^2} = 2\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow (1+m)^2 + 16 = 20 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m = 1 \longrightarrow M(1;0) \\ m = -3 \longrightarrow M(-3;0) \end{bmatrix}$.

Câu 48. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;3)$ và $B(4;2)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục hoành sao cho C cách đều hai điểm A và B.

A. $C\left(-\frac{5}{3};0\right)$. **B.** $C\left(\frac{5}{3};0\right)$. **C.** $C\left(-\frac{3}{5};0\right)$. **D.** $C\left(\frac{3}{5};0\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $C \in Ox$ nên $C(x;0)$ và $\begin{cases} \overrightarrow{AC} = (x-1;-3) \\ \overrightarrow{BC} = (x-4;-2) \end{cases}$.

Do $CA = CB \Leftrightarrow CA^2 = CB^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (-3)^2 = (x-4)^2 + (-2)^2 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \longrightarrow C\left(\frac{5}{3};0\right)$.

Câu 49. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(2;2)$, $B(5;-2)$. Tìm điểm M thuộc trục hoàng sao cho $\widehat{AMB} = 90^0$?

A. $M(0;1)$. **B.** $M(6;0)$. **C.** $M(1;6)$. **D.** $M(0;6)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $M \in Ox$ nên $M(m;0)$ và $\begin{cases} \overrightarrow{AM} = (m-2;-2) \\ \overrightarrow{BM} = (m-5;2) \end{cases}$.

Vì $\widehat{AMB} = 90^0$ suy ra $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$ nên $(m-2)(m-5) + (-2).2 = 0$.

$\Leftrightarrow m^2 - 7m + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m = 1 \\ m = 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} M(1;0) \\ M(6;0) \end{bmatrix}$.

Câu 50. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;-1)$ và $B(3;2)$. Tìm M thuộc trục tung sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

A. $M(0;1)$. **B.** $M(0;-1)$. **C.** $M\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $M\left(0;-\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $M \in Oy$ nên $M(0;m)$ và $\begin{cases} \overrightarrow{MA} = (1;-1-m) \\ \overrightarrow{MB} = (3;2-m) \end{cases}$.

Khi đó $MA^2+MB^2=\left|\overrightarrow{MA}\right|^2+\left|\overrightarrow{MB}\right|^2=1^2+(-1-m)^2+3^2+(2-m)^2=2m^2-2m+15.$

$=2\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{29}{2}\ge\frac{29}{2};\ \forall m\in\mathbb{R}.$

Suy ra $\left\{MA^2+MB^2\right\}_{\min}=\frac{29}{2}.$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m=\frac{1}{2}\longrightarrow M\left(0;\frac{1}{2}\right).$

Câu 51. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành $ABCD$ biết $A(-2;0)$, $B(2;5)$, $C(6;2)$. Tìm tọa độ điểm D.

A. $D(2;-3).$ **B.** $D(2;3).$ **C.** $D(-2;-3).$ **D.** $D(-2;3).$

Lời giải

Chọn A

Gọi $D(x;y)$. Ta có $\overrightarrow{AD}=(x+2;y)$ và $\overrightarrow{BC}=(4;-3)$. Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\longrightarrow\begin{cases}x+2=4\\y=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=-3\end{cases}\longrightarrow D(2;-3).$

Câu 52. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;3)$, $B(-2;4)$, $C(5;3)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác đã cho.

A. $G\left(2;\frac{10}{3}\right).$ **B.** $G\left(\frac{8}{3};-\frac{10}{3}\right).$ **C.** $G(2;5).$ **D.** $G\left(\frac{4}{3};\frac{10}{3}\right).$

Lời giải

Chọn D

Tọa độ trọng tâm $G(x_G;y_G)$ là $\begin{cases}x_G=\frac{1-2+5}{3}=\frac{4}{3}\\y_G=\frac{3+4+3}{3}=\frac{10}{3}\end{cases}.$

Câu 53. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-4;1)$, $B(2;4)$, $C(2;-2)$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác đã cho.

A. $I\left(\frac{1}{4};1\right).$ **B.** $I\left(-\frac{1}{4};1\right).$ **C.** $I\left(1;\frac{1}{4}\right).$ **D.** $I\left(1;-\frac{1}{4}\right).$

Lời giải

Chọn B

Gọi $I(x;y)$. Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AI}=(x+4;y-1)\\\overrightarrow{BI}=(x-2;y-4).\\\overrightarrow{CI}=(x-2;y+2)\end{cases}$

Do I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên $IA=IB=IC\Leftrightarrow\begin{cases}IA^2=IB^2\\IB^2=IC^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+4)^2+(y-1)^2=(x-2)^2+(y-4)^2\\(x-2)^2+(y-4)^2=(x-2)^2+(y+2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+4)^2=(x-2)^2+9\\y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{1}{4}\\y=1\end{cases}.$

Câu 54. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-3;0)$, $B(3;0)$ và $C(2;6)$. Gọi $H(a;b)$ là tọa độ trực tâm của tam giác đã cho. Tính $a+6b$.

A. $a+6b=5$. **B.** $a+6b=6$. **C.** $a+6b=7$. **D.** $a+6b=8$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AH}=(a+3;b) \ \& \ \overrightarrow{BC}=(-1;6)\\ \overrightarrow{BH}=(a-3;b) \ \& \ \overrightarrow{AC}=(5;6)\end{cases}$. Từ giả thiết, ta có:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+3).(-1)+b.6=0\\ (a-3).5+b.6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=\dfrac{5}{6}\end{cases}\longrightarrow a+6b=7.$$

Câu 55. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(4;3)$, $B(2;7)$ và $C(-3;-8)$. Tìm toạ độ chân đường cao A' kẻ từ đỉnh A xuống cạnh BC.

A. $A'(1;-4)$. **B.** $A'(-1;4)$. **C.** $A'(1;4)$. **D.** $A'(4;1)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $A'(x;y)$. Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AA'}=(x-4;y-3)\\ \overrightarrow{BC}=(-5;-15)\\ \overrightarrow{BA'}=(x-2;y-7)\end{cases}$.

Từ giả thiết, ta có $\begin{cases}AA'\perp BC\\ B,\ A',\ C \text{ thang hang}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}=0 \quad (1)\\ \overrightarrow{BA'}=k\overrightarrow{BC} \quad (2)\end{cases}$.

- $(1)\Leftrightarrow -5(x-4)-15(y-3)=0\Leftrightarrow x+3y=13$.
- $(2)\Leftrightarrow \dfrac{x-2}{-5}=\dfrac{y-7}{-15}\Leftrightarrow 3x-y=-1$.

Giải hệ $\begin{cases}x+3y=13\\ 3x-y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=4\end{cases}\longrightarrow A'(1;4)$.

Câu 56. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;4)$, $B(-3;1)$, $C(3;-1)$. Tìm tọa độ chân đường cao A' vẽ từ đỉnh A của tam giác đã cho.

A. $A'\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{1}{5}\right)$. **B.** $A'\left(-\dfrac{3}{5};-\dfrac{1}{5}\right)$. **C.** $A'\left(-\dfrac{3}{5};\dfrac{1}{5}\right)$. **D.** $A'\left(\dfrac{3}{5};-\dfrac{1}{5}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $A'(x;y)$. Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AA'}=(x-2;y-4)\\ \overrightarrow{BC}=(6;-2)\\ \overrightarrow{BA'}=(x+3;y-1)\end{cases}$.

Vì A' là chân đường cao vẽ từ đỉnh A của tam giác ABC nên

$$\begin{cases} AA' \perp BC \\ B,\ C,\ A' \text{ thẳng hàng} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}=0 \\ \overrightarrow{BA'}=k\overrightarrow{BC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2).6+(y-4).(-2)=0 \\ \dfrac{x+3}{6}=\dfrac{y-1}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-2y=4 \\ -2x-6y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{5} \\ y=-\dfrac{1}{5} \end{cases}.$$

Câu 57. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(-3;-2)$, $B(3;6)$ và $C(11;0)$. Tìm tọa độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình vuông.

A. $D(5;-8)$. **B.** $D(8;5)$. **C.** $D(-5;8)$. **D.** $D(-8;5)$.

Lời giải

Chọn A

Dễ dàng kiểm tra $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=0 \longrightarrow \widehat{ABC}=90^0$.

Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$. Suy ra I là trung điểm của $AC \longrightarrow I(4;-1)$.

Gọi $D(x;y)$, do I cũng là trung điểm của $BD \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+3}{2}=4 \\ \dfrac{y+6}{2}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-8 \end{cases} \Rightarrow D(5;-8)$.

Câu 58. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(2;4)$ và $B(1;1)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho tam giác ABC vuông cân tại B.

A. $C(4;0)$. **B.** $C(-2;2)$. **C.** $C(4;0)$, $C(-2;2)$. **D.** $C(2;0)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $C(x;y)$. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{BA}=(1;3) \\ \overrightarrow{BC}=(x-1;y-1) \end{cases}$.

Tam giác ABC vuông cân tại $B \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=0 \\ BA=BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1.(x-1)+3.(y-1)=0 \\ 1^2+3^2=(x-1)^2+(y-1)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4-3y \\ 10y^2-20y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=4 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} y=2 \\ x=-2 \end{cases}.$$

Câu 59. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có $A(1;-1)$ và $B(3;0)$. Tìm tọa độ điểm D, biết D có tung độ âm.

A. $D(0;-1)$. **B.** $D(2;-3)$. **C.** $D(2;-3)$, $D(0;1)$. **D.** $D(-2;-3)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $C=(x;y)$. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(2;1) \\ \overrightarrow{BC}=(x-3;y) \end{cases}$.

Vì $ABCD$ là hình vuông nên ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \\ AB=BC \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-3)+1.y=0 \\ (x-3)^2+y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2(3-x) \\ 5(x-3)^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2(3-x) \\ (x-3)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$.

Với $C_1(4;-2)$ ta tính được đỉnh $D_1(2;-3)$: thỏa mãn.

Với $C_2(2;2)$ ta tính được đỉnh $D_2(0;1)$: không thỏa mãn.

Câu 60. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác OAB với $A(1;3)$ và $B(4;2)$. Tìm tọa độ điểm E là chân đường phân giác trong góc O của tam giác OAB.

A. $E=\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right)$. **B.** $E=\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

C. $E=\left(-2+3\sqrt{2};4+\sqrt{2}\right)$. **D.** $E=\left(-2+3\sqrt{2};4-\sqrt{2}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Theo tính chất đường phân giác của tam giác ta có $\frac{EA}{EB}=\frac{OA}{OB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vì E nằm giữa hai điểm A, B nên $\overrightarrow{EA}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{EB}$. $(*)$

Gọi $E(x;y)$. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{EA}=(1-x;3-y) \\ \overrightarrow{EB}=(4-x;2-y) \end{cases}$.

Từ $(*)$, suy ra $\begin{cases} 1-x=-\frac{\sqrt{2}}{2}(4-x) \\ 3-y=-\frac{\sqrt{2}}{2}(2-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2+3\sqrt{2} \\ y=4-\sqrt{2} \end{cases}$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 4

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho 3 điểm phân biệt A,B,C thỏa mãn $3\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$. Tìm khẳng định đúng.

A. $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\frac{3}{5}\left|\overrightarrow{BC}\right|$. **B.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\frac{3}{2}\left|\overrightarrow{BC}\right|$. **C.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\frac{2}{5}\left|\overrightarrow{BC}\right|$. **D.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\frac{2}{3}\left|\overrightarrow{BC}\right|$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$3\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\frac{-3}{2}\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\frac{-3}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{-3}{2}\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{-3}{2}\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\frac{-3}{5}\overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right|=\frac{3}{5}\left|\overrightarrow{BC}\right|$.

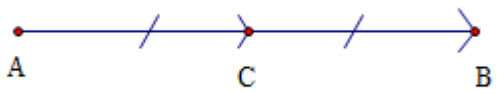
Câu 2: Gọi C là trung điểm của AB. Tìm khẳng định đúng.

A. $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}$. **B.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CB}\right|$.

C. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng. **D.** $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CB}$ ngược hướng.

Lời giải

Chọn C



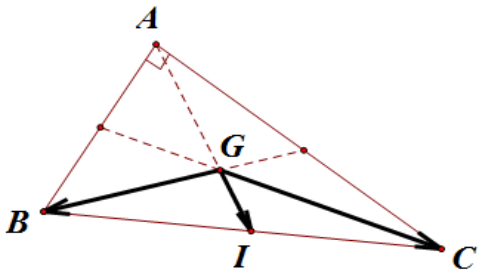
Suy ra $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

Câu 3: Cho tam giác vuông ABC có trọng tâm G và cạnh huyền $BC=12$. Khi đó vectơ tổng $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$ có độ dài bằng bao nhiêu?

A. $2\sqrt{3}$. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C



Gọi I là trung điểm BC.

Ta có: $\left|\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|=\left|2\overrightarrow{GI}\right|=\frac{2}{3}AI=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}BC=4$.

Câu 4: Cho hình vuông $ABCD$. Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

A. $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|$. **B.** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

C. $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$. **D.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$.

Lời giải

Chọn B

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng là mệnh đề sai, vì hai vectơ này có giá cắt nhau.

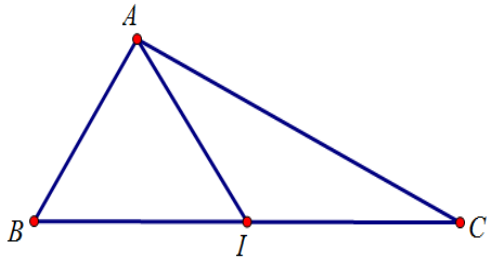
Câu 5: *Gọi AI là trung tuyến của ΔABC. Tìm điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MA}=\vec{0}$.*

A. *M là trung điểm của CI.* ***B.*** *M là trung điểm của BI.*

C. M là trung điểm của AI. **D.** M là trong tâm của ΔABC.

Lời giải

Chọn C



Gọi I là trung điểm của BC

Ta có: $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MA}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{MA}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}\Leftrightarrow$ M là trung điểm của AI.

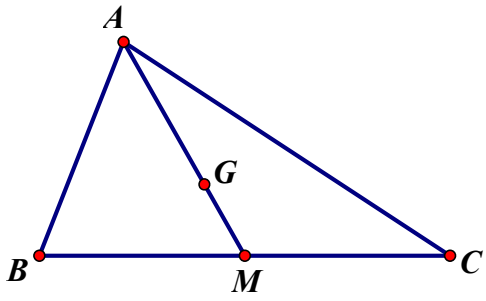
Câu 6: Nếu G là trọng tâm của giác ABC thì đẳng thức nào dưới đây đúng?

A. $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$. **B.** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

C. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$. **D.** $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm của BC

Ta có: $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

Câu 7: Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$. Đẳng thức nào dưới đây đúng?

A. $\overrightarrow{GG'}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}\right)$. **B.** $\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}$.

C. $\overrightarrow{GG'}=-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}\right)$. **D.** $\overrightarrow{GG'}=-\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Vì G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$ nên ta có:

$$\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}=3\overrightarrow{GG'}\Leftrightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{GG'}$$
$$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{GG'}$$

Mặt khác ta có G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

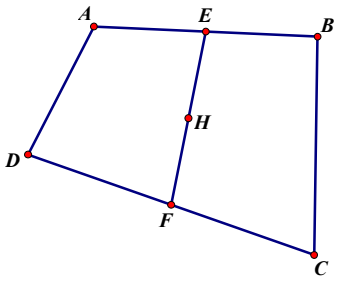
Vậy $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{GG'}$ hay $\overrightarrow{GG'}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}\right)$

Câu 8: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E,F,H lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB,CD,EF. Tìm vectơ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$, với điểm M tùy ý.

A. $4\overrightarrow{MH}$. **B.** $\vec{0}$. **C.** $4\overrightarrow{ME}$. **D.** $4\overrightarrow{MF}$.

Lời giải

Chọn A



Do E,F lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB,CD và điểm M tùy ý ta có:

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{ME}$

$\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MF}$

Suy ra $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}\right)$

Mặt khác H là trung điểm của các đoạn thẳng EF nê ta cũng có $\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=2\overrightarrow{MH}$

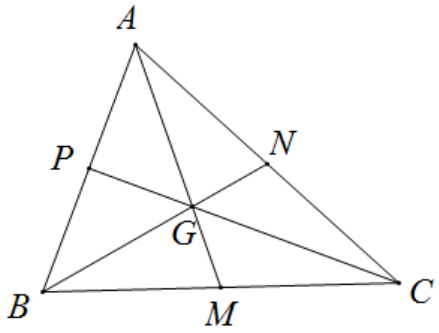
Vậy $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MH}$

Câu 9: Cho tam giác ABC có trọng tâm G và M, N, P lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, CA, AB. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP}=\vec{0}$. **C.** $\overrightarrow{GC}-2\overrightarrow{GP}=\vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}$.

Lời giải

Chọn C



+) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)=\vec{0}.$

+) G trọng tâm ΔABC nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow-\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{CG}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}$

+) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP}-\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP}=\vec{0}.$

+) G là trọng tâm ΔABC nên $\overrightarrow{GC}=-2\overrightarrow{GP}\Leftrightarrow\overrightarrow{GC}+2\overrightarrow{GP}=\vec{0}.$

Câu 10: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Cho vectơ $\overrightarrow{MN}$, với điểm O tùy ý ta luôn có $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}$.

B. Hiệu của hai vectơ là tổng của vectơ thứ nhất với vectơ đối của vectơ thứ hai.

C. Vectơ đối của vectơ $\vec{a}\neq\vec{0}$ là vectơ ngược hướng với $\vec{a}$ và có cùng độ dài với $\vec{a}$.

D. Vectơ đối của vectơ $\vec{0}$ là vectơ $\vec{0}$.

Lời giải

Chọn A

Cho vectơ $\overrightarrow{MN}$ với điểm O tùy ý ta luôn có: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}$. (Theo quy tắc trừ)

Câu 11: Gọi G là trọng tâm của tam giác đều ABC có cạnh bằng 3 cm. Tính độ dài của vectơ tổng $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$.

A. $\left|\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|=\frac{2\sqrt{3}}{3}cm.$

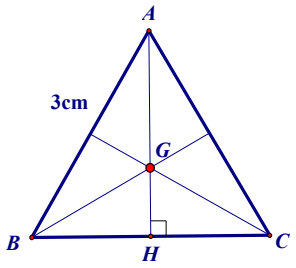
B. $\left|\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|=\sqrt{2}\,cm.$

C. $\left|\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|=\sqrt{3}\,cm.$

D. $\left|\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|=\frac{2\sqrt{3}}{2}cm.$

Lời giải

Chọn C



Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên ta có $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Do đó $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GA}$, suy ra $\left|\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|=\left|-\overrightarrow{GA}\right|=\left|-\overrightarrow{GA}\right|=GA.$

Mặt khác trong tam giác đều ABC: $AH=AC\cdot\sin C=3\cdot\sin 60^0=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}.$

Suy ra $GA=\dfrac{2}{3}AH=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\,cm.$

Câu 12: Cho 5 điểm M,N,P,Q,R tùy ý. Tìm vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{RN}-\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{QR}-\overrightarrow{PN}.$

A. $\vec{u}=\overrightarrow{MR}.$ **B.** $\vec{u}=\overrightarrow{MP}.$ **C.** $\vec{u}=\vec{0}.$ **D.** $\vec{u}=\overrightarrow{MN}.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\vec{u}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{RN}-\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{QR}-\overrightarrow{PN}$

$=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{NP}$

$=\overrightarrow{MN}+\underbrace{\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}}_{\vec{0}}$

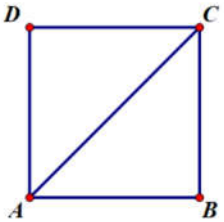
$=\overrightarrow{MN}.$

Câu 13: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Tìm độ dài của vectơ tổng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$?

A. $2a.$ **B.** $a\sqrt{2}.$ **C.** $a.$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.$

Lời giải

Chọn B



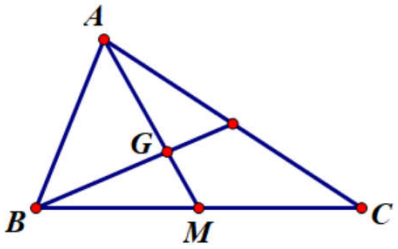
Ta có: $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC=a\sqrt{2}.$

Câu 14: Cho tam giác ABC có trọng tâm G và M là trung điểm của BC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\left|\overrightarrow{MB}\right|+\left|\overrightarrow{MC}\right|=0.$ **B.** $GB+GC=2GI.$ **C.** $\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{GM}.$ **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AM}.$

Lời giải

Chọn D



Ta có:

$\left|\overrightarrow{MB}\right|+\left|\overrightarrow{MC}\right|=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=MB+MC>0$.

$\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{GM}$.

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AM}$.

Câu 15: Cho tam giác ABC có D,E lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AB và AC. Tìm số k, biết rằng $\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{ED}$.

A. -2. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: D,E lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AB và AC

nên DE là đường trung bình tam giác ABC

Suy ra $\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{ED}\Rightarrow k=-2$.

Câu 16: Mệnh đề nào sau đây là đúng?.

A. Có vô số véc tơ cùng phương với mọi véc tơ.

B. Có duy nhất một véc tơ cùng phương với mọi véc tơ.

C. Không có véc tơ nào cùng phương với mọi véc tơ.

D. Có ít nhất hai véc tơ cùng phương với mọi véc tơ.

Lời giải

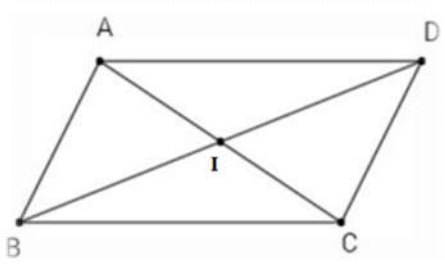
Chọn B

Câu 17: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm I. Tìm khẳng định đúng.

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{BI}$. **C.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$.

Lời giải

Chọn D



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$

Câu 18: Cho vec tơ $\vec{u}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}$. Tìm khẳng định đúng?

A. $\vec{u}=\overrightarrow{MN}$. **B.** $\vec{u}=\overrightarrow{MQ}$. **C.** $\vec{u}=\overrightarrow{MR}$. **D.** $\vec{u}=\overrightarrow{MP}$.

Lời giải

Chọn A

$\vec{u}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RN}=\overrightarrow{MN}$.

Câu 19: Cho bốn điểm A, B, C, D tùy ý. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}$

$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

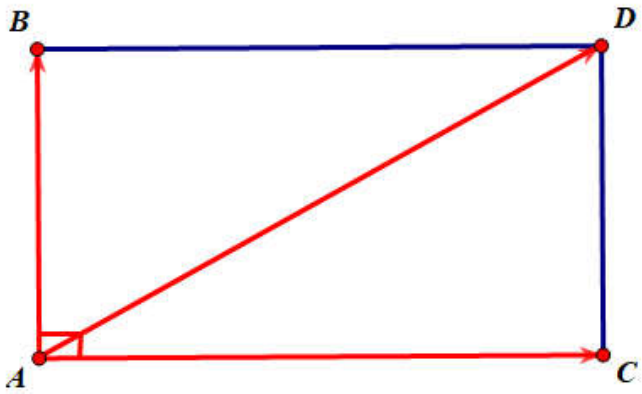
Câu 20: Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB=6cm$, $AC=8cm$. Tìm $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$.

A. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=5cm$. **B.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=14cm$.

C. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=20cm$. **D.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=10cm$.

Lời giải

Chọn D



* Dựng hình chữ nhật ABDC.

*Ta có: $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AD}\right|=AD=BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10cm$.

Câu 21: Cho ΔABC có trọng tâm G và M là một điểm tùy ý. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{GM}.$ **B.** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{GM}.$

C. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}.$ **D.** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$

Lời giải

Chọn B

Vì ΔABC có trọng tâm G và M là một điểm tùy ý.

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}.$

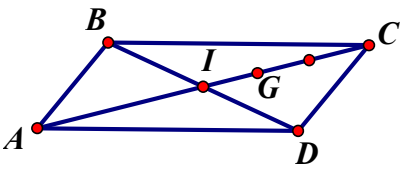
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{GM}.$

Câu 22: Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm I. Khi đó vectơ tổng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ bằng:

A. $2\overrightarrow{AI}.$ **B.** $4\overrightarrow{AI}.$ **C.** $4\overrightarrow{IA}.$ **D.** $2\overrightarrow{IA}.$

Lời giải

Chọn B



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$ với G là trọng tâm ΔBCD

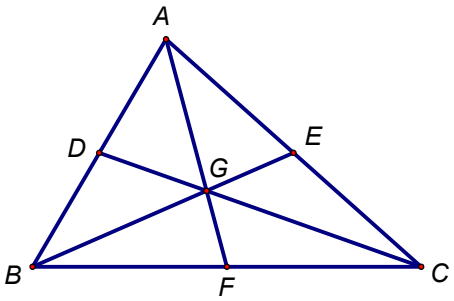
$=3.\frac{4}{3}\overrightarrow{AI}=4\overrightarrow{AI}.$

Câu 23: Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{GA};\vec{b}=\overrightarrow{GB}.$ Đẳng thức nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{CA}=-2\vec{a}-\vec{b}.$ **B.** $\overrightarrow{CA}=2\vec{a}+\vec{b}.$ **C.** $\overrightarrow{CA}=\frac{4}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}.$ **D.** $\overrightarrow{CA}=\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}.$

Lời giải

Chọn B



Gọi D, E và F theo thứ tự là trung điểm của AB, AC và BC.

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=-\vec{a}-\vec{b}.$$

Ta có: $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GA}=-\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GA}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{a}=2\vec{a}+\vec{b}..$

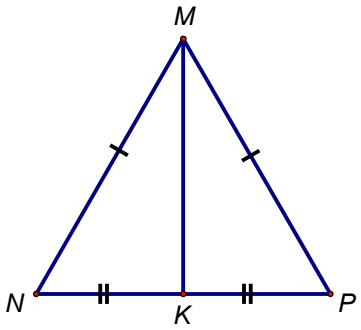
Câu 24: Cho ΔMNP đều cạnh bằng $5\sqrt{3}\ cm$. Tìm độ dài vectơ tổng $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}$.

A. $\left|\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}\right|=\dfrac{15}{2}\ cm$. **B.** $\left|\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}\right|=30\ cm$.

C. $\left|\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}\right|=10\sqrt{3}\ cm$. **D.** $\left|\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}\right|=15\ cm$.

Lời giải

Chọn D



Gọi K là trung điểm của NP.

Khi đó: $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}=2\overrightarrow{MK}$. Do đó, $\left|\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}\right|=2\left|\overrightarrow{MK}\right|=2MK$.

Vì ΔMNP đều nên MK cũng là đường cao. Do đó, $MK=5\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{15}{2}(cm)$.

Từ đó, $\left|\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}\right|=2MK=15(cm)$.

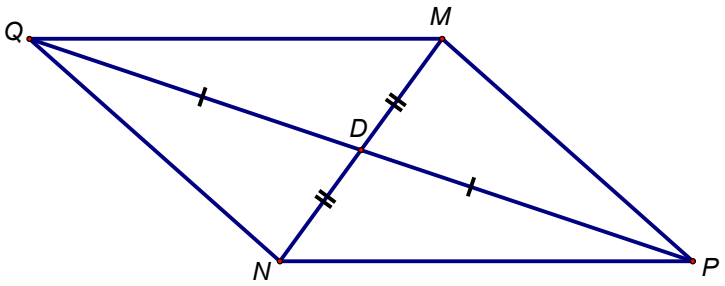
Câu 25: Cho ΔMNP. Tìm điểm Q thỏa mãn $\overrightarrow{QP}-\overrightarrow{QN}-\overrightarrow{QM}=\vec{0}$.

A. Q là một đỉnh của hình bình hành $MPNQ$. **B.** Q là một đỉnh của hình bình hành $MNPQ$.

C. Q là một đỉnh của hình bình hành $MPQN$. **D.** Q là một đỉnh của hình bình hành $MNQP$.

Lời giải

Chọn A



Gọi D là trung điểm của MN.

Ta có: $\overrightarrow{QP}-\overrightarrow{QN}-\overrightarrow{QM}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{QN}+\overrightarrow{QM}\Leftrightarrow\overrightarrow{QP}=2\overrightarrow{QD}$ (vì D là trung điểm của MN).

Do đó, Q đối xứng với P qua D. Vậy Q là một đỉnh của hình bình hành $MPNQ$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Cho tam giác ABC đều cạnh a và G là trọng tâm. Gọi I là trung điểm của AG.

Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{BI}$.

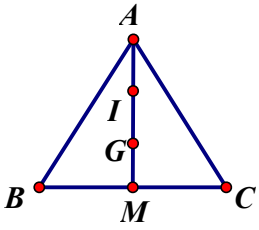
Hướng dẫn giải

(Hình 1.41)Ta có $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB = a$

Gọi M là trung điểm của BC

Ta có $\left|\overrightarrow{AG}\right| = AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}\sqrt{AB^2 - BM^2} = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\left|\overrightarrow{BI}\right| = BI = \sqrt{BM^2 + MI^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$



Hình 1.41

Bài 2: Cho tam giác ABC đều cạnh a. Tính độ dài của các vectơ sau $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

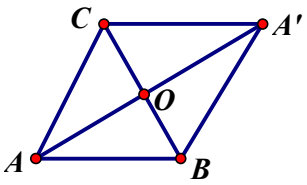
Hướng dẫn giải

(Hình 1.45)Theo quy tắc trừ ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right| = BC = a$

Gọi A' là đỉnh của hình bình hành $ABA'C$ và O là tâm hình nình hành đó. Khi đó ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA'}$.

Ta có $AO = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Suy ra $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = AA' = 2AO = a\sqrt{3}$



Hình 1.45

Bài 4: Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là O và cạnh a. M là một điểm bất kỳ.

a) Tính $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD}\right|, \left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right|$

b) Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$

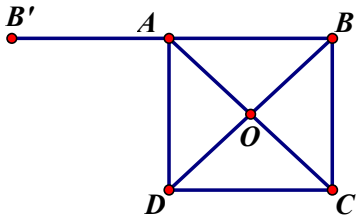
Hướng dẫn giải

(Hình 1.46)

a) Ta có $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AO}$

$\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD}\right| = AO = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Ta có $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AO}$ suy ra



Hình 1.46

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right| = 0$

b) Áp dụng quy tắc trừ ta có

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)-\left(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\right)=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DC}$

Lấy B' là điểm đối xứng của B qua A

Khi đó $-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB'}\Rightarrow\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{BB'}$

Suy ra $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=\left|\overrightarrow{BB'}\right|=BB'=2a$

Bài 5: Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a và $\widehat{BCD}=60^0$. Gọi O là tâm hình thoi.

Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|,\left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{DC}\right|$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AD}\right|=2a\cos 30^0=a\sqrt{3},$

$\left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{DC}\right|=\left|\overrightarrow{CO}\right|=a\cos 60^0=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Bài 6: Cho tam giác ABC .Lấy các điểm M,N,P sao cho $\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NA}+3\overrightarrow{NC}=\vec{0}$, $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\vec{0}$

a) Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AM}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

b) Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MN}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

Có nhận xét gì về ba điểm M, N, P thẳng hàng?

Hướng dẫn giải

a) $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AN}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AM}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{AB}-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{MP}=2\overrightarrow{MN}\Rightarrow$ M, N, P thẳng hàng

Bài 7: Cho tam giác ABC.Gọi I, J là hai điểm xác định bởi $\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}$, $3\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0}$

a)Tính $\overrightarrow{IJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b)Đường thẳng IJ đi qua trọng tâm G của tam giác ABC

Hướng dẫn giải

a) $\overrightarrow{IJ}=-2\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{IG}=-\dfrac{5}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}\Rightarrow 5\overrightarrow{IJ}=6\overrightarrow{IG}$ suy ra IJ đi qua trọng tâm G của tam giác ABC.

Bài 8. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI=3BI$ và J là điểm trên BC kéo dài sao cho $5JB=2JC$.

a) Hãy phân tích $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b) Hãy phân tích $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AJ}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $2\overrightarrow{IC}=-3\overrightarrow{IB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AI}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}.$

$5\overrightarrow{JB}=2\overrightarrow{JC}\Leftrightarrow5(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AJ})=2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AJ})\Leftrightarrow\overrightarrow{AJ}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

b) Gọi M là trung điểm BC, ta có:

$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).$

$\Rightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{35}{48}\overrightarrow{AI}-\frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}.$

Bài 9. Cho các vecto $\vec{a}=\left(2;0\right),\vec{b}=\left(-1;\frac{1}{2}\right),\vec{c}=\left(4;6\right).$

Tìm tọa độ vectơ $\vec{u}$ biết

a) $\vec{u}=2\vec{a}-4\vec{b}+5\vec{c}$

b) $\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{u}=\vec{c}$

Hướng dẫn giải

ĐS: a) $\vec{u}=(28;-28)$ b) $\vec{u}=(0;\frac{7}{2})$

Bài 10. Cho ba điểm $A(-4;0),B(-5;0)$ và $C(3;-3)$

a) Tìm tọa độ vecto $\vec{u}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{CA}$

b) Tìm điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

Hướng dẫn giải

ĐS: a) $\vec{u}(-38;3)$ b) $M(-2;-1)$

Bài 11: Cho ba điểm $A(3;4),\ B(2;1),\ C(-1;-2)$

a) Tìm tọa độ trung điểm cạnh BC và tọa độ trọng tâm của tam giác ABC

b) Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành

Hướng dẫn giải

a) Trung điểm BC là $I\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$, trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(\frac{4}{3};1\right)$

b) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}\Rightarrow D(0;1)$

Bài 12: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $A(3;4),B(-1;2),I(4;1)$. Xác định tọa độ các điểm C, D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành và I là trung điểm cạnh CD. Tìm tọa tâm O của hình bình hành $ABCD$.

Hướng dẫn giải

Do $I(4;-1)$ là trung điểm của CD nên đặt $C(4-x;-1-y)$, $D(4+x;-1+y) \Rightarrow \overrightarrow{CD}(2x;2y)$

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

Vậy $C(2;-2)$, $D(6;0)$, $O\left(\frac{9}{2};2\right)$

Bài 13. Cho tam giác ABC có $A(3;1)$, $B(1;-3)$, đỉnh C nằm trên Oy và trọng tâm G nằm trên trục Ox. Tìm tọa độ đỉnh C

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết ta có $C(0;y)$, $G(x;0)$

G là trọng tâm tam giác nên $\begin{cases} x_A+x_B+x_C=3x_G \\ y_A+y_B+y_C=3y_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{4}{3} \\ y=2 \end{cases}$

Vậy $C(0;2)$

Bài 14: Cho tam giác ABC có M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Biết $M(1;1), N(-2;-3), P(2;-1)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overrightarrow{MN}(-3;-4)$, $\overrightarrow{PA}(x_A-2;y_A+1)$, $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{PA} \Rightarrow A(-1;-5)$

N là trung điểm AC suy ra $C(-3;-1)$

M là trung điểm BC suy ra $B(5;3)$