

Câu 50

TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM ẨN CHO BỞI ĐỒ THỊ HÀM $f'(x)$

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1 Định nghĩa 1

Giả sử K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng và $y = f(x)$ là một hàm số xác định trên K . Ta nói:

+ Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **đồng biến** (tăng) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

+ Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **nghịch biến** (giảm) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K gọi chung là **đơn điệu** trên K .

2 Nhận xét

Nhận xét 1

Nếu hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cùng đồng biến (nghịch biến) trên D thì hàm số $f(x) + g(x)$ cũng đồng biến (nghịch biến) trên D . Tính chất này có thể không đúng đối với hiệu $f(x) - g(x)$.

Nhận xét 2

Nếu hàm số $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số dương và cùng đồng biến (nghịch biến) trên D thì hàm số $f(x) \cdot g(x)$ cũng đồng biến (nghịch biến) trên D . Tính chất này có thể không đúng khi các hàm số $f(x), g(x)$ không là các hàm số dương trên D .

Nhận xét 3

Cho hàm số $u = u(x)$, xác định với $x \in (a; b)$ và $u(x) \in (c; d)$. Hàm số $f[u(x)]$ cũng xác định với $x \in (a; b)$. Ta có nhận xét sau:

i. Giả sử hàm số $u = u(x)$ đồng biến với $x \in (a; b)$. Khi đó, hàm số $f[u(x)]$ đồng biến với $x \in (a; b) \Leftrightarrow f(u)$ đồng biến với $u \in (c; d)$.

ii. Giả sử hàm số $u = u(x)$ nghịch biến với $x \in (a; b)$. Khi đó, hàm số $f[u(x)]$ nghịch biến với $x \in (a; b) \Leftrightarrow f(u)$ nghịch biến với $u \in (c; d)$.

3 Định lý 1

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K . Khi đó:

a) Nếu hàm số đồng biến trên khoảng K thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$.

b) Nếu hàm số nghịch biến trên khoảng K thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$.

4 Định lý 2

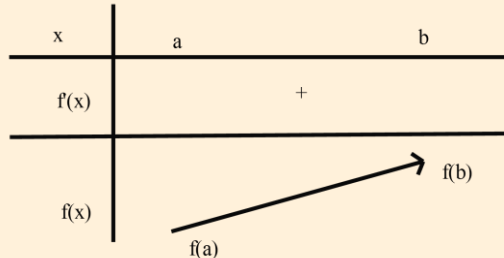


Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K . Khi đó:

- a) Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số f đồng biến trên K .
- b) Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số f nghịch biến trên K .
- c) Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì hàm số f không đổi trên K .

Chú ý

Chú ý: Khoảng K trong định lý trên ta có thể thay thế bởi đoạn hoặc một nửa khoảng. Khi đó phải có thêm giả thuyết “Hàm số liên tục trên đoạn hoặc nửa khoảng đó”. Chẳng hạn:



Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f'(x) > 0, \forall x \in (a; b)$ thì hàm số f đồng biến trên đoạn $[a; b]$.

5 Định lý 3

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K . Khi đó:

- a) Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại hữu hạn điểm thuộc K thì hàm số f đồng biến trên K .
- b) Nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại hữu hạn điểm thuộc K thì hàm số f đồng biến trên K .

Quy tắc xét tính đơn điệu của hàm số.

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên K

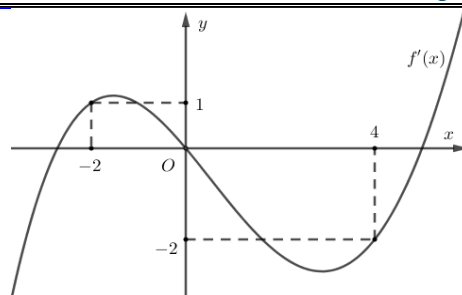
- Nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm $x \in K$ thì hàm số f đồng biến trên K .
- Nếu $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm $x \in K$ thì hàm số f nghịch biến trên K .

II. BÀI TẬP MẪU

1 Lời giải tham khảo

Bùi Sỹ Khanh – Nguyễn Đức Lợi – Huỳnh Đức Vũ

Câu 50. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x) = f(1 - 2x) + x^2 - x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$.

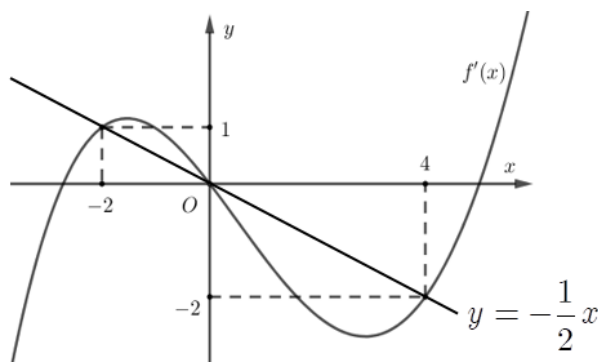
B. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

C. $(-2; -1)$.

D. $(2; 3)$.

Lời giải

Chọn A



Xét hàm số $g(x) = f(1 - 2x) + x^2 - x$

Tập xác định: $\mathbb{R}$

Đạo hàm: $g'(x) = -2f'(1 - 2x) + 2x - 1, x \in \mathbb{R}$.

Trước tiên ta cần tìm x sao cho $g'(x) \leq 0$.

Ta có $g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow -2f'(1 - 2x) + 2x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow f'(1 - 2x) \geq -\frac{1}{2}(1 - 2x) (*)$

Đặt $t = 1 - 2x$, bất phương trình $(*)$ trở thành $f'(t) \geq -\frac{1}{2}t$

Từ đồ thị ta có $f'(t) \geq -\frac{1}{2}t \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq t \leq 0 \\ t \geq 4 \end{cases}$

Do đó, $g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq 1 - 2x \leq 0 \\ 1 - 2x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \\ x \leq -\frac{3}{2} \end{cases}$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(1 - 2x) = -\frac{1}{2}1 - 2x \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right\}$: hữu hạn.

Như vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ và nửa khoảng $\left[-\infty; -\frac{3}{2}\right]$.

Soi các phương án của đề bài, ta chọn A.





Bình luận: Đây là câu vận dụng cao về vấn đề tính đơn điệu của một hàm số. Để làm được nó hoặc những dạng tương tự mở rộng, ta cần nắm vững kiến thức cơ bản sau:

① Tính đơn điệu và dấu của đạo hàm

Điều kiện cần: Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K .

+ f đồng biến trên khoảng $K \Rightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in K$.

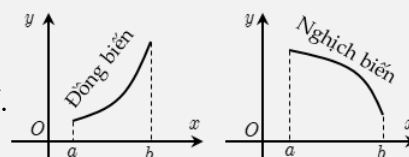
+ f nghịch biến trên khoảng $K \Rightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in K$.

Điều kiện đủ: Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K .

Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số đồng biến trên khoảng K .

Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng K .

Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì hàm số không đổi trên khoảng K .



Mở rộng:

1) Nếu phương trình $f'(x) = 0$ có hữu hạn nghiệm trên K thì ta có điều kiện cần và đủ sau đây:

+ f đồng biến trên khoảng $K \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in K$.

+ f nghịch biến trên khoảng $K \Leftrightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in K$.

2) $\begin{cases} f(x) \text{ liên tục trên } [a; b] \\ f'(x) > 0, \forall x \in (a; b) \end{cases} \Rightarrow f \text{ đồng biến trên } [a; b].$

$\begin{cases} f(x) \text{ liên tục trên } [a; b] \\ f'(x) < 0, \forall x \in (a; b) \end{cases} \Rightarrow f \text{ nghịch biến trên } [a; b].$

$\begin{cases} f(x) \text{ liên tục trên } (-\infty; a] \\ f'(x) > 0, \forall x \in (-\infty; a) \end{cases} \Rightarrow f \text{ đồng biến trên } (-\infty; a].$

...

② **Đạo hàm hàm hợp:** Giả sử hàm số $y = f(x)$ và $u = u(x)$ có đạo hàm trên khoảng K . Khi

đó: $[f(u)]' = u' \cdot f'(u)$.

3 Phân tích hướng giải

1. Dạng toán

Đây là dạng toán tìm khoảng đơn điệu của hàm ẩn dạng $g(x) = f[u(x)] + v(x)$ khi biết đồ thị của hàm số $y = f'(x)$.

2. Hướng giải

Cách 1:

B1: Tính đạo hàm của hàm số $g(x)$, $g'(x) = u'(x) \cdot f'(u) + v'(x)$.

B2: Sử dụng đồ thị của $f'(x)$, lập bảng xét dấu của $g'(x)$.

B3: Dựa vào bảng dấu kết luận khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.



Cách 2:

B1: Tính đạo hàm của hàm số $g(x)$, $g'(x) = u'(x) \cdot f'[u(x)] + v'(x)$.

B2: Hàm số $g(x)$ đồng biến $\Leftrightarrow g'(x) \geq 0$; (Hàm số $g(x)$ nghịch biến $\Leftrightarrow g'(x) \leq 0$) (*)

B3: Giải bất phương trình (*) (dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$) từ đó kết luận khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Cách 3: (Trắc nghiệm)

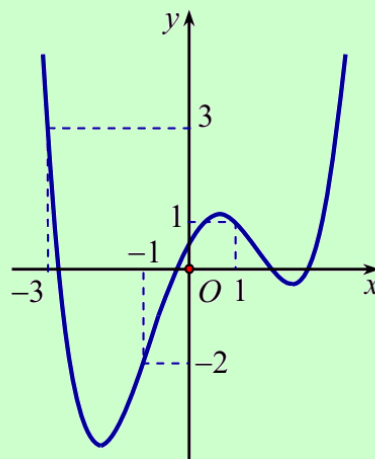
B1: Tính đạo hàm của hàm số $g(x)$, $g'(x) = u'(x) \cdot f'[u(x)] + v'(x)$.

B3: Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $K \Leftrightarrow g'(x) \geq 0, \forall x \in K$; (Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $K \Leftrightarrow g'(x) \leq 0, \forall x \in K$) (*)

B3: Lần lượt chọn thay giá trị từ các phương án vào $g'(x)$ để loại các phương án sai.

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình sau.



Hàm số $g(x) = 3f(1-2x) + 8x^3 - 21x^2 + 6x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1;2)$. B. $(-3;-1)$. C. $(0;1)$. D. $(-1;2)$.

Lời giải

Chọn A

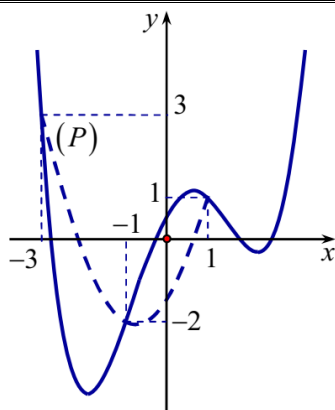
Ta có $g'(x) = -6f'(1-2x) + 24x^2 - 42x + 6$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(1-2x) < 4x^2 - 7x + 1 \quad (*)$$

$$\text{Đặt } 1-2x = t \Leftrightarrow x = \frac{1-t}{2}$$

$$\text{Ta có } (*) \text{ trở thành } f'(t) < 4 \left(\frac{1-t}{2} \right)^2 - 7 \cdot \frac{1-t}{2} + 1 \Leftrightarrow f'(t) < t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{3}{2}.$$

Ta vẽ parabol $(P): y = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ trên cùng hệ trục Oxy với đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ sau, ta thấy (P) có đỉnh $I(-\frac{3}{4}; -\frac{33}{16})$ và đi qua các điểm $(-3;3), (-1;-2), (1;1)$.

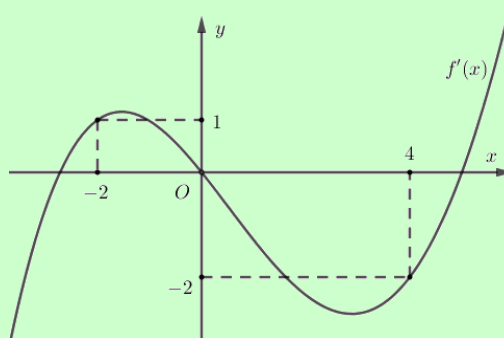


Từ đồ thị hàm số ta thấy trên khoảng $(-3;1)$ ta có $f'(t) < t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{3}{2} \Leftrightarrow -3 < t < -1$

$$\Leftrightarrow -3 < 1 - 2x < -1 \Leftrightarrow 1 < x < 2$$

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình sau.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = 4f(x-m) + x^2 - 2mx + 2020$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

*** Ý tưởng:** Phát triển thành bài toán chứa tham số.

Lời giải

Chọn A

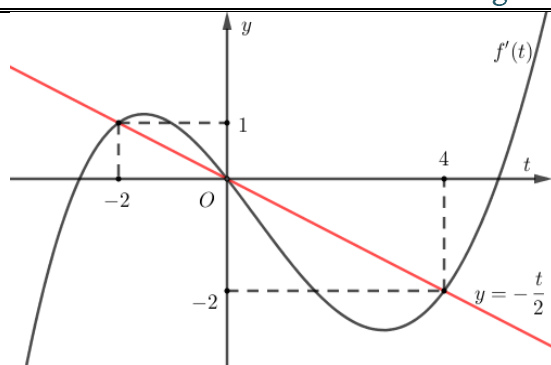
Ta có $g'(x) = 4f'(x-m) + 2x - 2m$

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(x-m) \geq -\frac{x-m}{2} \quad (*)$$

$$\text{Đặt } t = x - m \text{ thì } (*) \Leftrightarrow f'(t) \geq -\frac{t}{2}$$

Vẽ đường thẳng $y = -\frac{x}{2}$ trên cùng hệ trục Oxy với đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ sau





Từ đồ thị ta có $f'(t) \geq -\frac{t}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq t \leq 0 \\ t \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2 \leq x \leq m \\ x \geq m+4 \end{cases}$

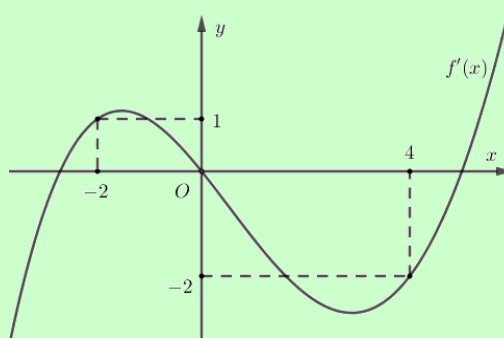
Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2) \Leftrightarrow g'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (1;2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m-2 \leq 1 < 2 \leq m \\ m+4 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq m \leq 3 \\ m \leq -3 \end{cases}$

Vì m nguyên dương nên $m \in \{2;3\}$.

Vậy có hai giá trị nguyên dương của m để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

Câu 3: Cho hàm số đa thức $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết $f(0) = 0$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình sau.



Hàm số $g(x) = |4f(x) + x^2|$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

- A. $(0;4)$. B. $(-2;0)$. C. $(4;+\infty)$. D. $(-\infty;-2)$.

*** Ý tưởng:** Phát triển thành bài toán tìm khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối.

Lời giải

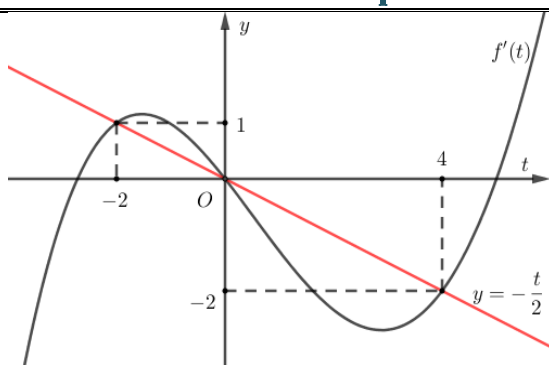
Chọn A

Xét hàm số $h(x) = 4f(x) + x^2, x \in \mathbb{R}$

Có $h'(x) = 4f'(x) + 2x \Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{x}{2}$

Vẽ đường thẳng $y = -\frac{x}{2}$ trên cùng hệ trục Oxy với đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ sau





Từ đồ thị ta có BBT của $h(x)$ như sau :

x	$-\infty$	-2	0	4	$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$h(-2)$	0	$h(4)$	$+\infty$

Chú ý ở đây $h(0) = 4f(0) = 0$

Từ đó ta có BBT của như sau :

x	$-\infty$	-2	0	4	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$-h(-2)$	0	$-h(4)$	$+\infty$

Từ BBT ta suy ra $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;4)$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-3	0	5	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Biết rằng $1 < f(x) < 5, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(f(x) - 1) + x^3 + 3x^2 + 2020$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây

- A. $(0;5)$. B. $(-2;0)$. C. $(-2;5)$. D. $(-\infty;-2)$.

*** Ý tưởng:** Phát triển thành bài toán tìm khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = f(u) + g(x)$

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = f'(x) \cdot f'(f(x) - 1) + 3x^2 + 6x$

Vì $1 < f(x) < 5, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 0 < f(x) - 1 < 4$

Từ bảng xét dấu của $f'(x) \Rightarrow f'(f(x) - 1) < 0$

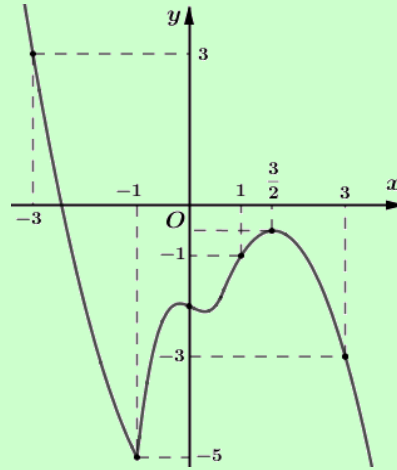
Từ đó ta có bảng xét dấu như sau



x	$-\infty$	-3	-2	0	5	$+\infty$
$f'(x).f''(f(x)-1)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$3x^2 + 6x$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$

Do đó hàm $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình bên dưới.



Hỏi hàm số $g(x) = f(1-x) + \frac{x^2}{2} - x$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(-3;1)$.

B. $(-2;0)$.

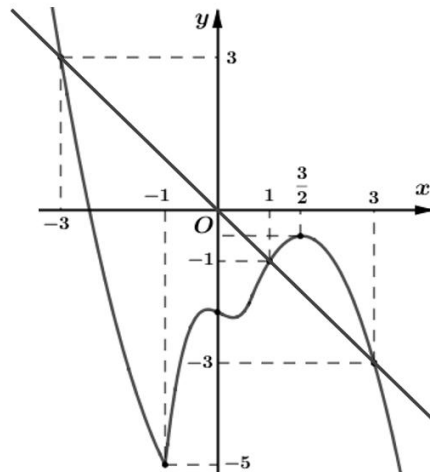
C. $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$.

D. $(1;3)$.

Bùi Sỹ Khanh – Nguyễn Đức Lợi – Huỳnh Đức Vũ

Lời giải

Chọn B



$$g'(x) = -f'(1-x) + x - 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

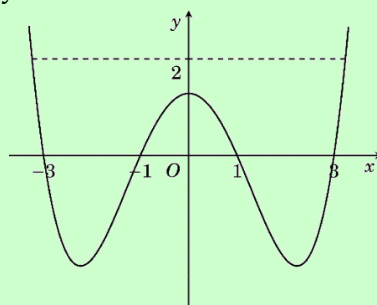
$$g'(x) = -f'(1-x) + x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow f'(1-x) \geq -(1-x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \leq -3 \\ 1 \leq 1-x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -f'(1-x) + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x \in [-2; 0; 4] : \text{hữu hạn.}$$

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên mỗi tập $[-2;0]$, $[4;+\infty)$ nên nghịch biến trên $(-2;0)$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $g(x) = f(1 - 2x - 2x^2 + 1)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

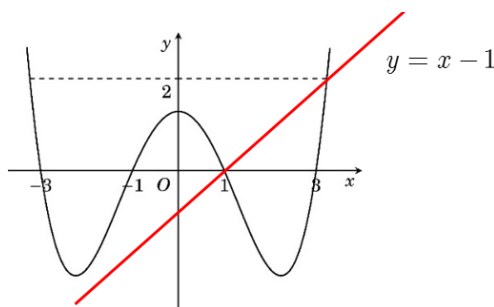


- A. $\left(-\frac{3}{2}; -1\right)$. B. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. **C. $[-1; 0]$.** D. $[1; 3]$.

Bùi Sỹ Khanh – Nguyễn Đức Lợi – Huỳnh Đức Vũ

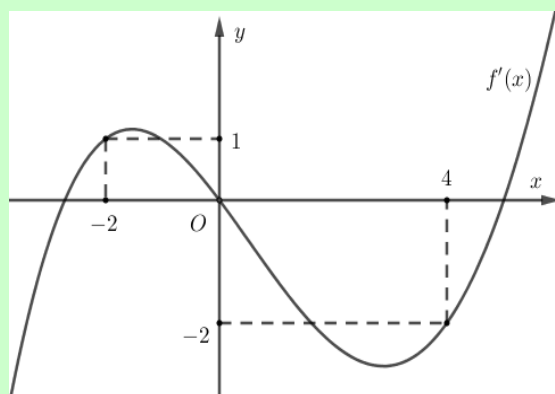
Lời giải

Chọn C



Hàm số $g(x) = f(1 - 2x - 2x^2 + 1)$ đồng biến $\Rightarrow g'(x) = -2f'(1 - 2x) - 4x > 0$
 $\Leftrightarrow f'(1 - 2x) < (1 - 2x) - 1 \Rightarrow 1 < 1 - 2x < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 0$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên $m \in [-10; 10]$ để hàm số

$g(x) = f(1 - 2x + m) + x^2 - (m + 1)x + m^2$ nghịch biến trên khoảng $[1; 2]$.

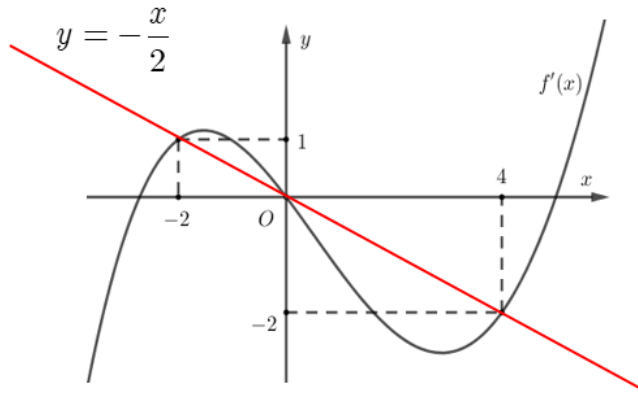
- A. 5. **B. 4.** C. 3. D. 6.

Bùi Sỹ Khanh – Nguyễn Đức Lợi – Huỳnh Đức Vũ

Lời giải

Chọn B





$$g'(x) = -2f'(1-2x+m) + 2x - m - 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f'(1-2x+m) \geq -\frac{1}{2}1-2x+m \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x+m \geq 4 \\ -2 \leq 1-2x+m \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x+m \geq 4 \\ -2 \leq 1-2x+m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{m-3}{2} \\ \frac{1+m}{2} \leq x \leq \frac{3+m}{2} \end{cases}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(1-2x+m) = -\frac{1}{2}1-2x+m \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{m-3}{2}; \frac{1+m}{2}; \frac{3+m}{2} \right\}: \text{ hữu hạn.}$$

Hàm số g nghịch biến trên $1;2 \Leftrightarrow g'(x) \leq 0, \forall x \in 1;2$

$$\Leftrightarrow g'(x) \leq 0, \forall x \in 1;2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq \frac{m-3}{2} \\ \frac{1+m}{2} \leq 1 < 2 \leq \frac{3+m}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 7 \\ m = 1 \end{cases}$$

Vậy $m = 1;7;8;9$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = g(x) = f(x^2 - 2x + m) + 2019$ đồng biến trên khoảng $1; +\infty$.

A. $m \leq 1$.

B. $m \leq 2$.

C. $m \geq 2$.

D. $m \geq 1$.

Bùi Sỹ Khanh – Nguyễn Đức Lợi – Huỳnh Đức Vũ

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

$$\text{Ta có } y' = g'(x) = 2x - 2f'(x^2 - 2x + m) \geq 0$$

Hàm số đồng biến trên $1; +\infty \Leftrightarrow g'(x) \geq 0, \forall x \in 1; +\infty$.

$$\Leftrightarrow 2x - 2f'(x^2 - 2x + m) \geq 0, \forall x \in 1; +\infty, \forall x \in 1; +\infty.$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2(x^2 - 2x + m) \geq 0, \forall x \in 1; +\infty \Leftrightarrow x^2 - 2x + m - 1 \leq 0, \forall x \in 1; +\infty.$$



$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + m - 1 \geq 0 \quad \forall x \in 1; +\infty$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + m \geq 0, \quad \forall x \in 1; +\infty$$

$$\Leftrightarrow h(t) = t + m \geq 0 \quad \forall t \in -1; +\infty \quad (t = x^2 - 2x > -1 \quad \forall x \in 1; +\infty)$$

Bảng xét dấu

t	$-\infty$	$-m-1$	$-m$	$+\infty$
$h(t)$	+	0	-	+

Khi đó $h(t) \geq 0, \quad \forall t \in -1; +\infty \Leftrightarrow -m \leq -1 \Leftrightarrow m \geq 1$.

Cách 2: Ta có bảng xét dấu đạo hàm $f' x$ như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

$$y' = g' x = 2x - 2 \quad f' x^2 - 2x + m.$$

Hàm số $y = g x$ đồng biến trên khoảng $1; +\infty \Leftrightarrow g' x \geq 0, \quad \forall x \in 1; +\infty$.

Ta thấy $2x - 2 > 0, \quad \forall x \in 1; +\infty$ nên

$$g' x \geq 0, \quad \forall x > 1 \Leftrightarrow f' x^2 - 2x + m \geq 0, \quad \forall x > 1.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + m \leq -1, \quad \forall x > 1 \\ x^2 - 2x + m \geq 0, \quad \forall x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -x^2 + 2x - 1 = u(x), \quad \forall x \geq 1 \\ m \geq -x^2 + 2x = v(x), \quad \forall x \geq 1 \end{cases} \quad (\text{do tính liên tục})$$

$m \leq -x^2 + 2x - 1 = u(x), \quad \forall x \geq 1$: Không tồn tại m .

$$m \geq -x^2 + 2x, \quad \forall x > 1 \Leftrightarrow m \geq 1 - (x-1)^2, \quad \forall x \geq 1 \Leftrightarrow m \geq 1.$$

Câu 9: Cho hàm số $y = f x$ có bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	+

Biết $1 < f x < 3, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = g x = f f x + x^3 - 6x^2 - 1$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $3; 4$.

B. $-3; -2$.

C. $1; 3$.

D. $-2; 1$.

Bùi Sỹ Khanh – Nguyễn Đức Lợi – Huỳnh Đức Vũ

Lời giải

Chọn A

$$g' x = f'(x) \cdot f x + 2x^2 - 12x.$$

Do $1 < f x < 3, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ nên từ bảng xét dấu ta có $f' f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta xét một số khả năng có thể xảy ra



+ TH1: $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x \geq 4 \end{cases}$

• $\begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ 4 \leq x \leq 6 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 - 12x \leq 0 \Rightarrow$ Chưa xác định được dấu của $g' x$ với giả thiết đã cho.

• $x \geq 6 \Rightarrow 2x^2 - 12x \geq 0 \Rightarrow g' x \geq 0, \forall x \geq 6 \Rightarrow$ Hàm số $g x$ đồng biến trên $[6; +\infty)$.

+ TH2: $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < x < 4 \\ x < 1 \end{cases}$

Ta thấy với $3 < x < 4$ thì $2x^2 - 12x < 0$ nên $g' x < 0, \forall x \in (3; 4) \Rightarrow$ Hàm số $g x$ nghịch biến trên $(3; 4)$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+

Hàm số $y = 2f(1-x) + \sqrt{x^2 + 1} - x$ nghịch biến trên những khoảng nào dưới đây

A. $-\infty; -2$.

B. $-\infty; 1$.

C. $-2; 0$.

D. $-3; -2$.

Bùi Sỹ Khanh – Nguyễn Đức Lợi – Huỳnh Đức Vũ

Lời giải

Chọn C

$$g(x) = 2f(1-x) + \sqrt{x^2 + 1} - x \Rightarrow g'(x) = -2f'(1-x) + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1.$$

Để ý $\sqrt{x^2 + 1} > x, \forall x \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 < 0, \forall x.$

Ta xét một số khả năng về dấu của $-2f'(1-x)$

+TH1: $-2f'(1-x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(1-x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \leq 1 \\ 3 \leq 1-x \leq 4 \end{cases} : \text{Chưa xác định được dấu của } g' x$

với giả thiết đã cho.

+TH2: $-2f'(1-x) \leq 0 \Leftrightarrow f'(1-x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq 1-x \leq 3 \\ 1-x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 0 \\ x \leq -3 \end{cases}.$

$\Rightarrow g'(x) < 0, \forall x \in (-\infty; -3] \cup [-2; 0] \Rightarrow$ Hàm số $g x$ nghịch biến trên $[-2; 0]$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f' x = x^2 - 2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số

$g x = f(2 - \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1} - 3$ đồng biến trên các khoảng nào dưới đây?

A. $-2; -1$.

B. $-1; 1$.

C. $1; 2$.

D. $2; 3$.

Bùi Sỹ Khanh – Nguyễn Đức Lợi – Huỳnh Đức Vũ

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x) = f' \cdot 2 - \sqrt{x^2 + 1} \cdot \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 1}} \left[f' \cdot 2 - \sqrt{x^2 + 1} + 1 \right]$.

Vì $f'(x) = x^2 - 2x = x(x - 2) \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$ hay $f'(x) + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

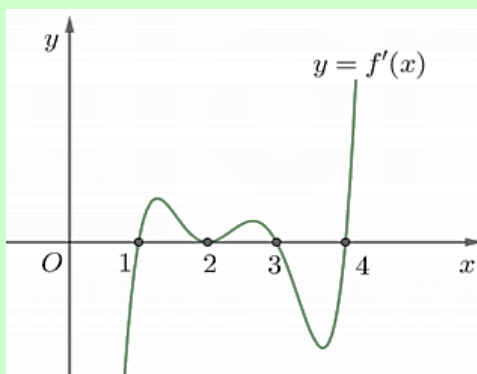
Suy ra $f' \cdot 2 - \sqrt{x^2 + 1} + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $-\infty; 0$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x^2 - 2 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - 4)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $-\infty; -\sqrt{3}$.

B. $-3; 0$.

C. $1; \sqrt{3}$.

D. $-\sqrt{3}; +\infty$.

Bùi Sỹ Khanh – Nguyễn Đức Lợi – Huỳnh Đức Vũ

Lời giải

Chọn C

Ta xét $y' = 2x \cdot f'(x^2 - 2 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - 4) < 0 \Rightarrow \begin{cases} xf'(x^2 - 2 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - 4) < 0 & (1) \\ -x^2 - 2x + 3 < 0 & (2) \end{cases}$

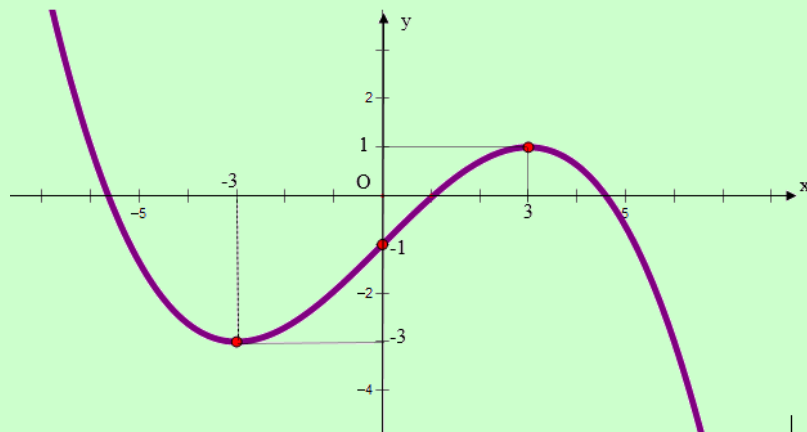
Từ (2) $\Rightarrow \begin{cases} x < -3 \\ x > 1 \end{cases}$ nên loại A, B.

D. Vậy chọn.

C.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.





Hàm số $g(x) = f(3x+1) - 3x^2 + x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$. B. $\left(0; \frac{2}{3}\right)$. C. $(-1; 0)$. D. $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x) = 3f'(3x+1) - (6x+2) + 3$

Hàm $g(x)$ đồng biến trên khoảng K khi

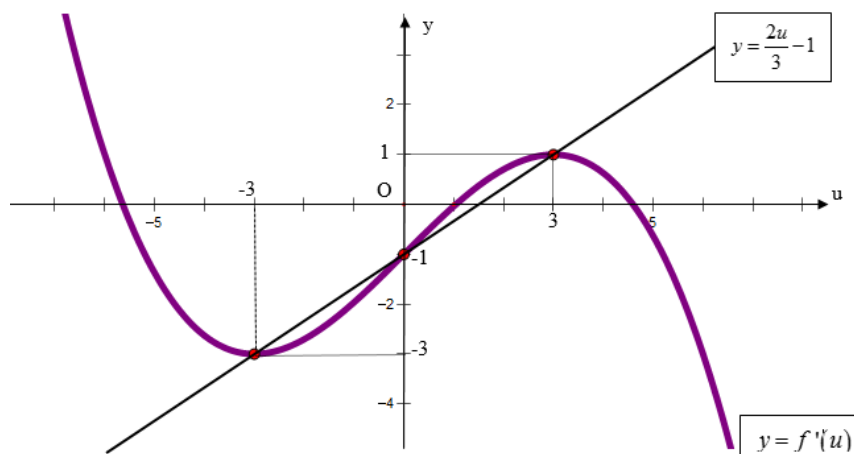
$g'(x) \geq 0$ (dấu = xảy ra tại một số hữu hạn điểm)

$$\Leftrightarrow 3f'(3x+1) - (6x+2) + 3 \geq 0 \quad (1)$$

Đặt $u = 3x+1$ ta được: $h(u) = 3f'(u) - 2u + 3$.

$$\text{Ta có: } (1) \Leftrightarrow 3f'(u) - 2u + 3 \geq 0 \Leftrightarrow f'(u) \geq \frac{2u}{3} - 1$$

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có đồ thị hàm số $y = f'(u)$ và $y = \frac{2u}{3} - 1$ như hình vẽ

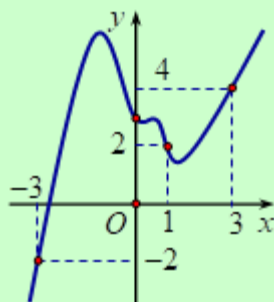


Để $h(u) \geq 0$ ta cần có đồ thị $y = f'(u)$ phải nằm bên trên của đồ thị hàm $y = \frac{2u}{3} - 1$

$$\text{Từ đó ta có } h(u) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq u \leq 3 \\ u \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq 3x+1 \leq 3 \\ 3x+1 \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right] \\ x \leq -\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\text{Cho nên ta Chọn B vì } \left(0; \frac{2}{3}\right) \subset \left[-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$$

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$. Đồ thị $y = f'(x)$ cho như hình bên. Hàm số $g(x) = f(x-1) - \frac{x^2}{2}$ nghịch biến trong khoảng nào dưới đây?



A. $(2; 4)$.

B. $(0; 1)$.

C. $(-2; 1)$.

D. $(1; 3)$.

Lời giải

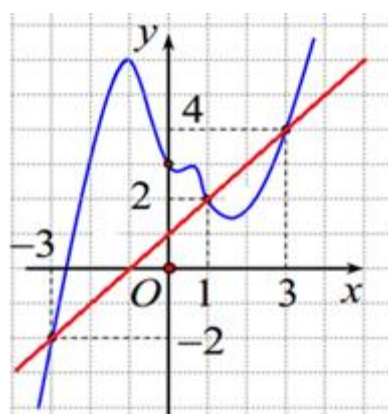
Chọn A

$$\text{Ta có: } g(x) = f(x-1) - \frac{x^2}{2} \Rightarrow g'(x) = f'(x-1) - x.$$

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x-1) - x = 0 \Leftrightarrow f'(x-1) = (x-1) + 1$$

$$\text{Đặt } t = x-1 \text{ thì } f'(t) = t+1$$

Vẽ đường thẳng $y = x+1$ trên cùng một hệ trục tọa độ với đồ thị hàm số $y = f'(x)$ (như hình vẽ bên).



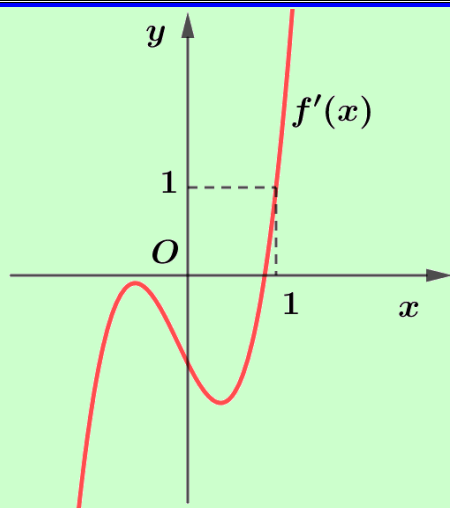
$$\text{Dựa vào đồ thị } f'(t) = t+1 \Leftrightarrow t = -3, t = 1, t = 3$$

$$\text{Hàm số nghịch biến } g'(x) = f'(x-1) - x \leq 0 \Leftrightarrow f'(t) \leq t \Leftrightarrow t \in (-\infty; -3) \cup (1; 3)$$

$$\text{Do đó } x \in (-\infty; -2) \cup (2; 4) \text{ vậy } g(x) \text{ nghịch biến trên } (2; 4).$$

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên.





Hàm số $g(x) = f(x^2 + 2x) - x^2 - 2x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1 - \sqrt{2}; -1)$. B. $(-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2})$. C. $(-1; +\infty)$. D. $(-1; -1 + \sqrt{2})$.

Lời giải

Chọn A

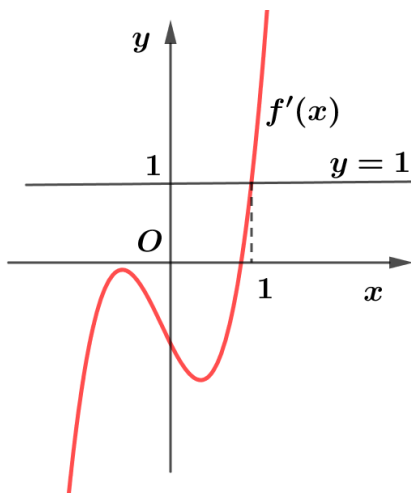
Ta có: $g(x) = f(x^2 + 2x) - x^2 - 2x$

$$\Rightarrow g'(x) = (2x + 2)f'(x^2 + 2x) - 2x - 2 = 2(x + 1)[f'(x^2 + 2x) - 1].$$

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x + 1)[f'(x^2 + 2x) - 1] = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = -1 + \sqrt{2}, x = -1 - \sqrt{2}$$

$$\text{Xét } g'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 > 0 \\ f'(x^2 + 2x) > 1 \end{cases} \quad (I) \\ \begin{cases} x + 1 < 0 \\ f'(x^2 + 2x) < 1 \end{cases} \quad (II)$$

Xét sự tương giao của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $y = 1$.



Dựa vào đồ thị ta có: $f'(x^2 + 2x) > 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x > 1$ và $f'(x^2 + 2x) < 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x < 1$.



$$\text{Xét hệ (I): } \begin{cases} x+1 > 0 \\ f'(x^2+2x) > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x^2+2x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > -1+\sqrt{2} \Leftrightarrow x > -1+\sqrt{2} \\ x < -1-\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Xét hệ (II): } \begin{cases} x+1 < 0 \\ f'(x^2+2x) < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x^2+2x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ -1-\sqrt{2} < x < -1+\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -1-\sqrt{2} < x < -1.$$

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1-\sqrt{2}; -1)$ và $(-1+\sqrt{2}; +\infty)$.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đặt $y = g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A. Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.
- B. Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 3 điểm cực trị.
- C. Hàm số $y = g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.
- D. Hàm số $y = g(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.

Lời giải

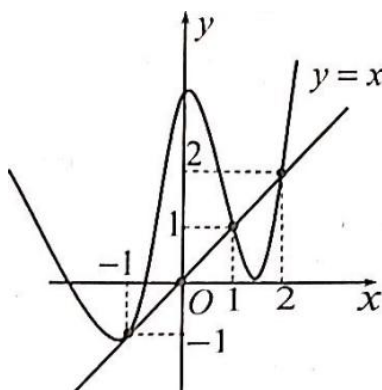
Chọn D

Ta có: $g'(x) = f'(x) - x$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x$ (*).

Số nghiệm của phương trình (*) là số giao điểm giữa đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = x$.

Dựa vào hình bên ta thấy giao tại 3 điểm $(-1; -1); (1; 1); (2; 2)$

$$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$



Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	+	0	+

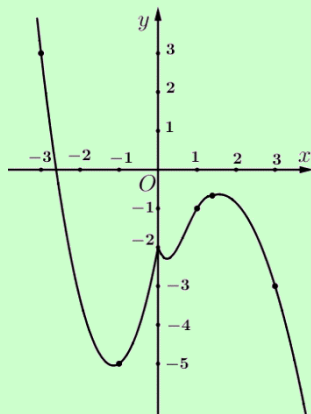


Từ bảng xét dấu $g'(x)$ ta thấy hàm số $y = g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$.

Đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(2; +\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

Hàm số $y = g(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Hỏi hàm số $g(x) = f(1-x) + \frac{x^2}{2} - x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2; 0)$. B. $(1; 3)$. C. $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$. D. $(-3; 1)$.

Lời giải

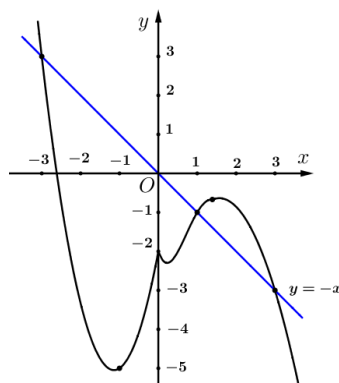
Chọn A

Ta có: $g'(x) = -f'(1-x) + x - 1$.

Hàm số $g(x)$ nghịch biến $\Leftrightarrow g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(1-x) > x - 1$ (1).

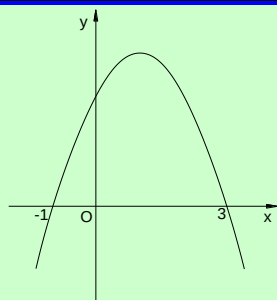
Đặt $t = 1 - x$. Khi đó (1) trở thành $f'(t) > -t$ (2).

Bất phương trình (2) được thỏa khi $f'(x) > -x$ hay đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía trên đồ thị hàm số $y = -x$.



Từ đồ thị ta được $\begin{cases} t < -3 \\ 1 < t < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x < -3 \\ 1 < 1 - x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ -2 < x < 0 \end{cases}$. Vậy chọn khoảng $(-2; 0)$.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ sau.



Hàm số $g(x) = f(2x^4 - 1)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; +\infty)$. B. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$. C. $(-\infty; -1)$. D. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $g'(x) = 8x^3 \cdot f'(2x^4 - 1)$

TH1: $x \geq 0$. Để hàm số $g(x)$ đồng biến thì

$$f'(2x^4 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq 2x^4 - 1 \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq x^4 \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt[4]{2} \leq x \leq \sqrt[4]{2} \\ \Rightarrow 0 \leq x \leq \sqrt[4]{2} \Leftrightarrow x \in [0; \sqrt[4]{2}].$$

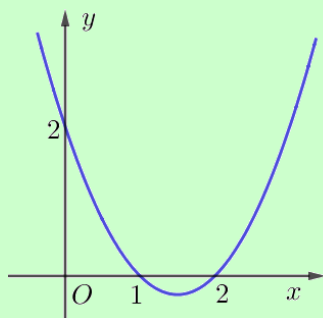
TH2: $x < 0$. Để hàm số $g(x)$ đồng biến thì

$$f'(2x^4 - 1) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^4 - 1 \leq -1 \\ 2x^4 - 1 \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(L) \\ x^2 \geq \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt[4]{2} \\ x \leq -\sqrt[4]{2} \end{cases}.$$

So sánh với điều kiện $x < 0 \Rightarrow x \leq -\sqrt[4]{2} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt[4]{2}]$.

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên $[0; \sqrt[4]{2}]$ và $(-\infty; -\sqrt[4]{2}]$. Do đó chọn khoảng $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau đây.



Hàm số $y = f(x - x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào?

- A. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. B. $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$. C. $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$. D. $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y = f(x - x^2)$



Ta có: $y' = (1 - 2x)f'(x - x^2)$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ x - x^2 = 1 \\ x - x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x^2 - x + 1 = 0 \text{ (VN)} \\ x^2 - x + 2 = 0 \text{ (VN)} \end{cases}$$

Ta lại có: $x - x^2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 \leq \frac{1}{4} < 1, \forall x \in \mathbb{R}$

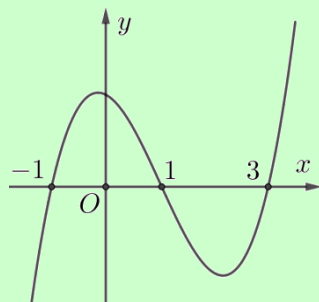
Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x) \Rightarrow f'(x - x^2) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x - x^2)$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'	+	0	-
y			

Vậy hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **Chọn A**

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(1; 2)$.

B. $(-\infty; -3)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(-2; 0)$.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau



x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y								

Đặt $g(x) = f(x^2 + 2x)$, ta có $g'(x) = (x^2 + 2x)' \cdot f'(x^2 + 2x) = 2(x+1) \cdot f'(x^2 + 2x)$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến khi $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow (x+1) \cdot f'(x^2 + 2x) \geq 0$

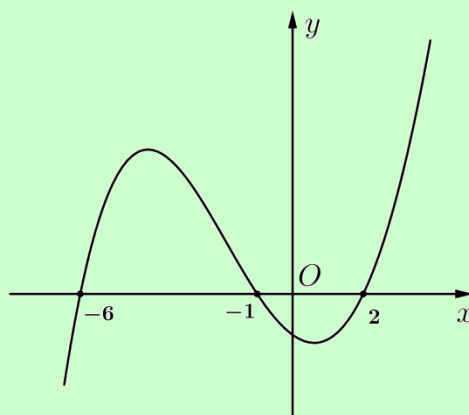
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ f'(x^2 + 2x) \geq 0 \end{cases} \quad (1) \text{ hoặc } \begin{cases} x+1 \leq 0 \\ f'(x^2 + 2x) \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\cdot \text{ Xét (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ -1 \leq x^2 + 2x \leq 1 \\ x^2 + 2x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ -1 - \sqrt{2} \leq x \leq -1 + \sqrt{2} \\ x \leq -3 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq -1 + \sqrt{2} \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$\cdot \text{ Xét (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \leq 0 \\ x^2 + 2x \leq -1 \\ 1 \leq x^2 + 2x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x = -1 \\ \begin{cases} x^2 + 2x - 1 \geq 0 \\ x^2 + 2x - 3 \leq 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x = -1 \\ \begin{cases} x \leq -1 - \sqrt{2} \\ x \geq -1 + \sqrt{2} \end{cases} \\ -3 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq -1 - \sqrt{2} \\ x = -1 \end{cases}$$

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$, biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Hàm số $g(x) = f(3 - x^2)$ đồng biến trên khoảng?

A. $(2;3)$.

B. $(-1;0)$.

C. $(-2;-1)$.

D. $(0;1)$.

Lời giải

Chọn B



Dựa vào đồ thị, ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-6	-1	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$

$$g'(x) = -2xf'(3-x^2)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ f'(3-x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 3 \\ x = \pm 2 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

$$f'(3-x^2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < 3-x^2 < -1 \\ 2 < 3-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < -2 \\ 2 < x < 3 \\ -1 < x < 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$f'(3-x^2)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$-2x$	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$	0	$-$	$ $	$-$
g'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Từ BBT suy ra hàm số đồng biến trên $(-1; 0)$.

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-3	0	5	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Biết: $1 < f(x) < 5, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó, hàm số $g(x) = f(f(x)-1) + x^3 + 3x^2 + 2020$ nghịch biến trong khoảng nào dưới đây:

- A. $(-2; 0)$. B. $(0; 5)$. C. $(-2; 5)$. D. $(-\infty; -2)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g'(x) = f'(x) \cdot f'(f(x)-1) + 3x^2 + 6x$.

Vì $1 < f(x) < 5, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 0 < f(x)-1 < 4$.

Từ bảng xét dấu của $f'(x) \Rightarrow 0 < f'(f(x)-1) < 0$.

Từ đó, ta có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$	-3	-2	0	5	$+\infty$
$f'(x) \cdot f'(f(x)-1)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$-$
$3x^2 + 6x$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$

Do đó, hàm $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm $f'(x)$ như sau :

x	$-\infty$	-2		1		3	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x) + 2020$ có bao nhiêu điểm cực tiểu ?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x) = 2x - 2 f'(x^2 - 2x)$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{theo BBT } f'(x)} \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = -2 \\ x^2 - 2x = 1 \\ x^2 - 2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \pm \sqrt{2} \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$1 - \sqrt{2}$	1	$1 + \sqrt{2}$	3	$+\infty$
g'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
g							

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **Chọn A**

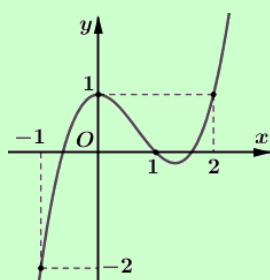
Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ xét trên khoảng $3; +\infty$

- $x \in 3; +\infty \rightarrow 2x - 2 > 0$. 1
- $x \in 3; +\infty \rightarrow x^2 - 2x > 3 \xrightarrow{\text{theo BBT } f'(x)} f'(x^2 - 2x) < 0$. 2

Từ 1 và 2, suy ra $g'(x) = 2x - 2 f'(x^2 - 2x) < 0$ trên khoảng $3; +\infty$ nên $g'(x)$ mang dấu $-$.

Nhận thấy các nghiệm $x = \pm 1$ và $x = 3$ là các nghiệm bội lẻ nên $g'(x)$ qua nghiệm đổi dấu.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $g(x) = f(3x-1) - 9x^3 + 18x^2 - 12x + 2021$ nghịch biến trên khoảng.

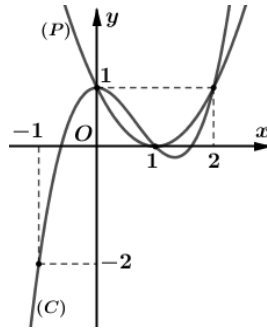
- A. $(-\infty; 1)$. B. $(1; 2)$. C. $(-3; 1)$. D. $\left(\frac{2}{3}; 1\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x) = 3f'(3x-1) - 3(9x^2 - 12x + 4)$; $g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f'(3x-1) \leq (3x-2)^2$. (1)

Đặt $t = 3x-1$ khi đó (1) $\Rightarrow f'(t) \leq (t-1)^2$.



Dựa vào đồ thị ta suy ra $f'(t) \leq (t-1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 0 \\ 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$. (vì phần đồ thị của $f'(t)$ nằm phía dưới đồ thị hàm số $y = (t-1)^2$).

Như vậy $f'(3x-1) \leq (3x-2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1 \leq 0 \\ 1 \leq 3x-1 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$.

Vậy hàm số $g(x) = f(3x-1) - 9x^3 + 18x^2 - 12x + 2021$ nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ và $\left(\frac{2}{3}; 1\right)$.

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	

Đặt $y = g(x) = 2f(1-x) + \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 + 3$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
 B. Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.
 C. Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.
 D. Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$

Lời giải

Chọn C



Ta có: $y' = g'(x) = -2f'(1-x) + x^3 - 3x^3 + 2x$.

Dựa vào bảng xét dấu $f'(x)$ ta có $f'(1-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=1 \\ x=0 \\ x=3 \end{cases}$.

$$-2f'(1-x) > 0 \Leftrightarrow f'(1-x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < 1-x < -1 \\ 0 < 1-x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 3 \\ 0 < x < 1 \end{cases}.$$

$$x^3 - 3x^3 + 2x = x(x-1)(x-2)$$

Bảng xét dấu $y' = g'(x)$

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
$-2f'(1-x)$		-	0	+	0	-	0	+	0	-	
$x^3 - 3x^3 + 2$		-	0	+	0	-	0	+		+	
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+		Chưa xác định dấu	

Vậy hàm số đồng biến trên $(0;1)$.

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.

Hàm số $g(x) = f(2x+3) + 4x^2 + 12x + 1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. B. $\left(-\frac{5}{2}; -2\right)$. C. $\left(-2; -\frac{3}{2}\right)$. D. $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Lời giải

Chọn B





$$y = f'(x) \quad y = -2x$$

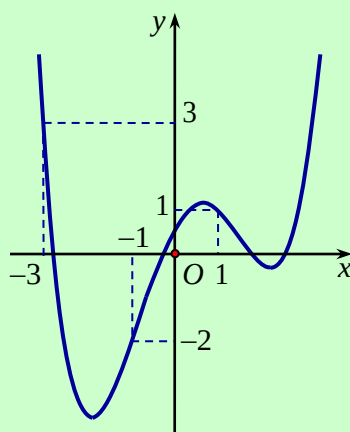
Hàm số $g(x)$ đồng biến

$$\Rightarrow g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2f'(2x+3) + 8x + 12 > 0 \Leftrightarrow f'(2x+3) > -2(2x+3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 < -1 \\ 0 < 2x+3 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ -\frac{3}{2} < x < -1 \end{cases} \quad \text{Chọn B}$$

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018. \text{ Mệnh đề nào dưới đây đúng?}$$



- A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-1;1)$. B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-3;1)$.
C. Hàm số $g(x)$ đồng biến $(-3;-1)$. D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1;1)$.

Lời giải

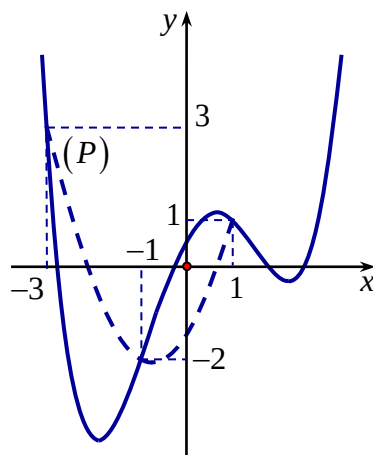
Chọn B

$$\text{Ta có: } g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018 \Rightarrow g'(x) = f'(x) - x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$$



$$+ g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}. \text{ Đặt } y = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \text{ có đồ thị (P)}$$

$$\text{Dựa vào đồ thị } y = f'(x), \text{ ta có: } \begin{cases} f'(-1) = -2 \\ f'(1) = 1 \\ f'(-3) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g'(-1) = 0 \\ g'(1) = 0 \\ g'(-3) = 0 \end{cases}$$



Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ trên cùng hệ trục tọa độ như hình vẽ trên (đường nét đứt), Đồ thị (P) đi qua các điểm $(-3; 3)$, $(-1; -2)$, $(1; 1)$ với đỉnh $I\left(-\frac{3}{4}; -\frac{33}{16}\right)$.

Ta thấy: + Trên khoảng $(-1; 1)$ thì $f'(x) > x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$, nên $g'(x) > 0 \quad \forall x \in (-1; 1)$

+ Trên khoảng $(-3; -1)$ thì $f'(x) < x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$, nên $g'(x) < 0 \quad \forall x \in (-3; -1)$

Từ những nhận xét trên, ta có bảng biến thiên của hàm $y = g'(x)$ trên $[-3; 1]$ như sau:

x	-3	-1	1
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$			

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-1; 1)$. **Chọn A**

Câu 28: Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ





Hàm số $g(x) = f(x+1) - \frac{x^2 + 4x + 3}{2}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -2)$. B. $(-3; -1)$. C. $(0; 1)$. D. $(-1; 0)$.

Lời giải

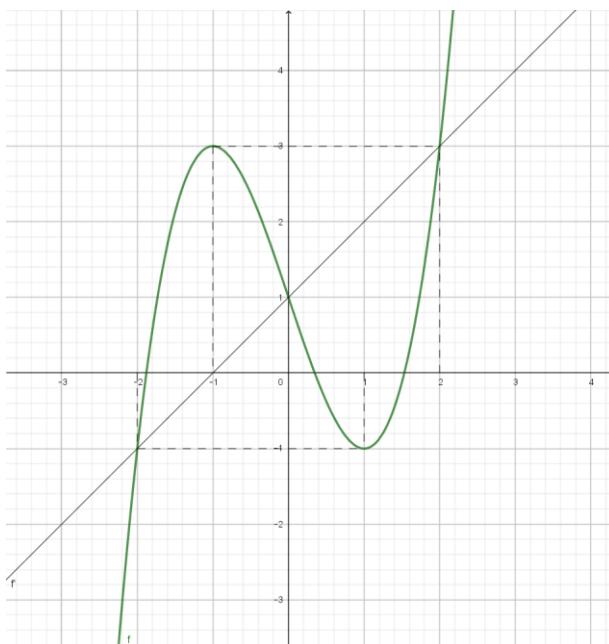
Chọn B

Ta có: $g(x) = f(x+1) - \frac{x^2 + 4x + 3}{2} \Rightarrow g'(x) = f'(x+1) - x - 2$.

Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x+1) > x+2$ (1)

Đặt $x+1=t$. Bất phương trình (1) có dạng: $f'(t) > t+1$

Xét hai hàm số $y = f'(t)$ và $y = t+1$:

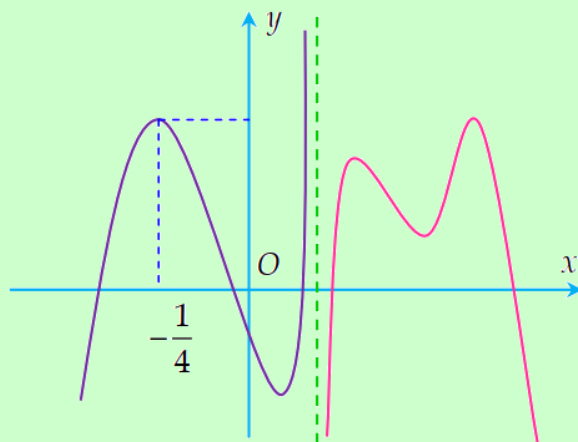


Dựa vào đồ thị ta có: $f'(t) > t+1 \Rightarrow \begin{cases} t \in (-2; 0) \\ t > 2 \end{cases}$



$$\text{Ta có } g'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x+1 < 0 \\ x+1 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < -1 \\ x > 1 \end{cases}$$

Câu 29: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 + x)$?



A. 10.

B. 11.

C. 12.

D. 13.

Lời giải

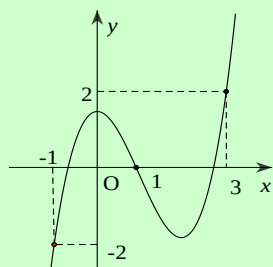
Chọn B

Ta có $y' = (2x+1)f'(x^2+x)$; $x^2+x=m$ có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq -\frac{1}{4}$.

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm $f'(x)$ cắt trục hoành tại 5 điểm trong đó 1 điểm có hoành độ nhỏ hơn $-\frac{1}{4}$ và có một tiệm cận.

Khi đó ứng với mỗi giao điểm có hoành độ lớn hơn $-\frac{1}{4}$ và 1 điểm không xác định thì $y'=0$ có hai nghiệm. Từ đây dễ dàng suy ra hàm $y = f(x^2+x)$ có 11 cực trị.

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $g(x) = 2f(x) - x^2 + 2x + 2020$.



Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(1;3)$.

B. Hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị đại.

C. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-1;1)$.

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(3;+\infty)$.

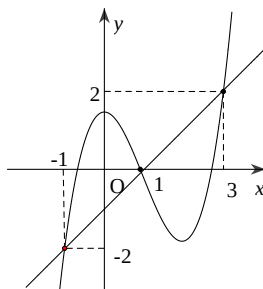
Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = 2f'(x) - 2x + 2 = 2[f'(x) - (x-1)]$.



Dựa vào hình vẽ ta thấy đường thẳng $y = x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tại 3 điểm: $(-1; -2)$, $(1; 0)$, $(3; 2)$.



Dựa vào đồ thị ta có

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2[f'(x) - (x - 1)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2[f'(x) - (x - 1)] > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ 3 < x \end{cases}$$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow 2[f'(x) - (x - 1)] < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 1 < x < 3 \end{cases}$$

Câu 31: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu như hình vẽ

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+

Tìm khoảng đồng biến của hàm số $y = g(x) = 2f(1-x) - \frac{1}{5}x^5 + \frac{5}{4}x^4 - 3x^3$.

- A. $(-\infty; 0)$. B. $(2; 3)$. C. $(0; 2)$. D. $(3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Coi $f'(x) = (x+2)(x+1)x(x-1)$ có bảng xét dấu như trên.

$$g'(x) = -2f'(1-x) - x^4 + 5x^3 - 6x^2$$

Ta đi xét dấu $g'(x) = P + Q$. Với:

$$P = -2f'(1-x) = -2(3-x)(2-x)(1-x)(-x) = 2x(3-x)(2-x)(1-x)$$

Bảng xét dấu của P

x	$-\infty$	0		1		2		3		$+\infty$
P		-	0	+	0	-	0	+	0	-

$$Q = -x^4 + 5x^3 - 6x^2 = -x^2(x-2)(x-3)$$

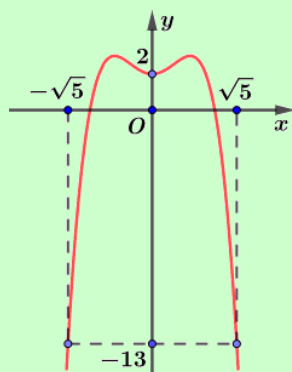


Bảng xét dấu của Q

x	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$		
Q	-	0	-	0	+	0	-

Từ hai BXD của P, Q . Ta có $P > 0, Q > 0$ với $\forall x \in (2; 3)$ nên $g'(x) = P + Q > 0$ với $\forall x \in (2; 3)$.

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ

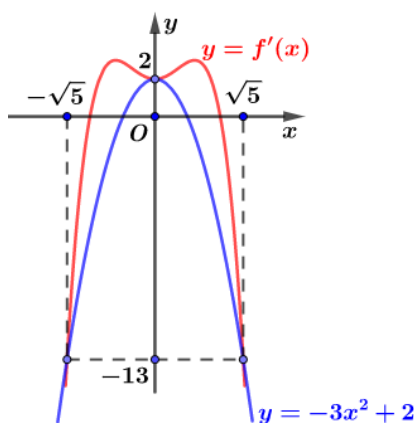


Xét hàm số $g(x) = 2f(x) + 2x^3 - 4x - 3m - 6\sqrt{5}$ với m là tham số thực. Điều kiện cần và đủ để $g(x) \leq 0$ với mọi $x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$ là

- A. $m \geq \frac{2}{3} f(\sqrt{5})$. B. $m \geq \frac{2}{3} f(0)$. C. $m \geq \frac{2}{3} f(-\sqrt{5})$. D. $m \leq \frac{2}{3} f(\sqrt{5})$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $g(x) \leq 0$ với mọi $x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}] \Leftrightarrow 2f(x) + 2x^3 - 4x - 3m - 6\sqrt{5} \leq 0$ với mọi $x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}] \Leftrightarrow 2f(x) + 2x^3 - 4x - 6\sqrt{5} \leq 3m$ với mọi $x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$

$$\Leftrightarrow \max_{x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]} (2f(x) + 2x^3 - 4x - 6\sqrt{5}) \leq 3m \text{ với mọi } x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}] \quad (*).$$

Đặt $h(x) = 2f(x) + 2x^3 - 4x - 6\sqrt{5}$.

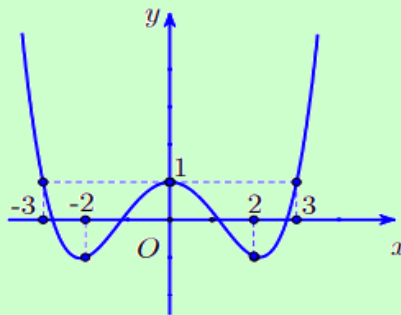


$$\text{Ta có } h'(x) = 2f'(x) + 6x^2 - 4, h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -3x^2 + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{5} \\ x = \sqrt{5} \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị ta thấy $f'(x) \geq -3x^2 + 2$ với mọi $x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}] \Rightarrow h(x)$ luôn đồng biến trên $[-\sqrt{5}; \sqrt{5}] \Rightarrow \max_{[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]} h(x) = h(\sqrt{5}) = 2f(\sqrt{5})$.

$$\text{Vậy } (*) \Leftrightarrow 2f(\sqrt{5}) \leq 3m \Leftrightarrow m \geq \frac{2}{3}f(\sqrt{5}).$$

Câu 33: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ:



Hàm số $y = f(2x-1) + \frac{x^3}{3} + x^2 - 2x$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-6; -3)$. B. $(3; 6)$. C. $(6; +\infty)$. D. $(-1; 0)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } y' = 2f'(2x-1) + x^2 + 2x - 2 = 2f'(2x-1) + (x+1)^2 - 3$$

$$\text{Nhận xét: Hàm số } y = f(x) \text{ có } f'(x) \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3 \text{ và } f'(x) \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -3 \end{cases}$$

Do đó ta xét các trường hợp:

Với $-6 < x < -3 \Rightarrow -13 < 2x-1 < -7$ suy ra $y' > 0$ hàm số đồng biến (loại)

Với $3 < x < 6 \Rightarrow 5 < 2x-1 < 11$ suy ra $y' > 0$ hàm số đồng biến (loại)

Với $x > 6 \Rightarrow 2x-1 > 11$ suy ra $y' > 0$ hàm số đồng biến (loại)

Với $-1 < x < 0 \Rightarrow -3 < 2x-1 < -1$ nên $2f'(2x-1) \leq 2$ và $-3 < (x+1)^2 - 3 < -2$ suy ra $y' < 0$ hàm số nghịch biến (nhận).

Câu 34: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	+	0	-	0	+	

Hàm số $g(x) = 3f(x+2) - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; +\infty)$. B. $(-\infty; -1)$. C. $(-1; 0)$. D. $(0; 2)$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $g'(x) = 3[f'(x+2) - (x^2 - 3)]$

Với $x \in (-1; 0) \Rightarrow x+2 \in (1; 2) \Rightarrow f'(x+2) > 0$ lại có $x^2 - 3 < 0 \Rightarrow y' > 0, \forall x \in (-1; 0)$.

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Chú ý:

+) Ta xét $x \in (1; 2) \subset (1; +\infty) \Rightarrow x+2 \in (3; 4) \Rightarrow f'(x+2) < 0; x^2 - 3 > 0$

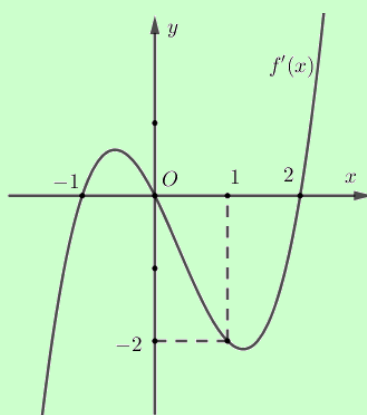
Suy ra hàm số nghịch biến trên $(1; 2)$ nên loại hai phương án **A, D**.

+) Tương tự ta xét

$x \in (-\infty; -2) \Rightarrow x+2 \in (-\infty; 0) \Rightarrow f'(x+2) < 0; x^2 - 3 > 0 \Rightarrow y' < 0, \forall x \in (-\infty; -2)$.

Suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ nên loại phương án **B**.

Câu 35: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình sau.



Hàm số $g(x) = 3f(x^2 - 2) + \frac{3}{2}x^4 - 3x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(-\sqrt{3}; -1)$. **B.** $(0; 1)$. **C.** $(-1; 1)$. **D.** $(1; \frac{3}{2})$.

Lời giải

Chọn D

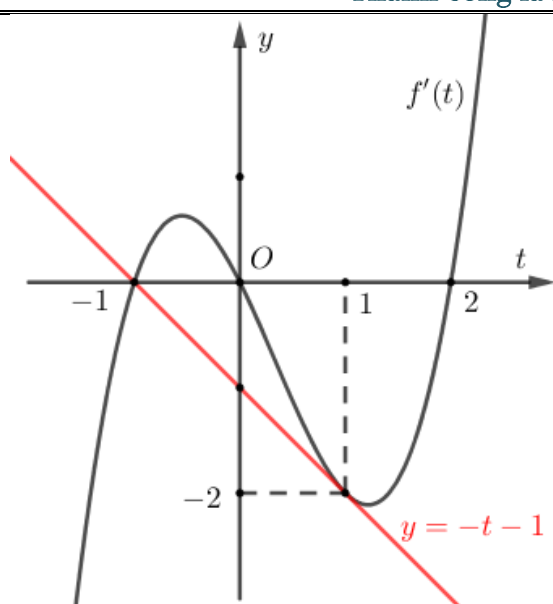
Ta có $g'(x) = 6x \cdot f'(x^2 - 2) + 6x^3 - 6x = 6x[f'(x^2 - 2) + x^2 - 1]$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 2) + x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Đặt $t = x^2 - 2 \Rightarrow f'(x^2 - 2) + x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(t) + t + 1 = 0 \Leftrightarrow f'(t) = -t - 1$.

Đồ thị của hàm số $y = f'(t)$ và $y = -t - 1$ như hình vẽ sau





Từ đồ thị, ta có $f'(t) = -t - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 1 \end{cases}$ ($t = -1$ là nghiệm đơn và $t = 1$ là nghiệm kép).

$$\Rightarrow f'(x^2 - 2) = -(x^2 - 2) - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2 = -1 \\ x^2 - 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

Suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm \sqrt{3} \end{cases}$ ($x = 0, x = \pm 1$ là nghiệm đơn và $x = \pm \sqrt{3}$ là nghiệm kép).

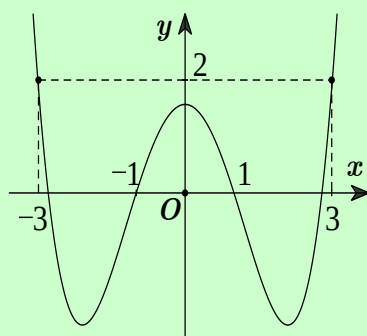
Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	-	0	+	0	+

$$(\text{vì } g'\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \left[f'\left(-\frac{7}{4}\right) - \frac{3}{4}\right] < 0).$$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 36: Cho hàm số $y = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ với a, b, c, d, e, f là các số thực, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y = f(1 - 2x) - 2x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?



A. $\left(-\frac{3}{2}; -1\right)$.

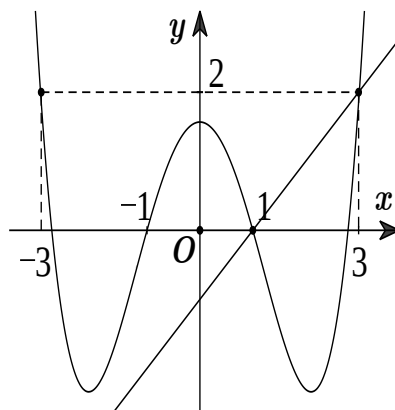
B. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

C. $(-1; 0)$.

D. $(1; 3)$.

 **Lời giải**

Chọn C



Cách 1: Ta có: $g(x) = f(1-2x) - 2x^2 + 1 \Rightarrow g'(x) = -2f'(1-2x) - 4x$.

Có: $g'(x) > 0 \Leftrightarrow -2f'(1-2x) - 4x > 0 \Leftrightarrow f'(1-2x) < -2x$ (1).

Đặt $t = 1 - 2x$, bất phương trình (1) trở thành $f'(t) < t - 1$.

Vẽ đường thẳng $y = x - 1$. Trên cùng đồ thị, ta thấy đường thẳng $y = x - 1$ nằm trên đồ thị hàm số $f'(x)$ trên khoảng $(1; 3) \Rightarrow f'(t) < t - 1 \Leftrightarrow 1 < t < 3 \Leftrightarrow 1 < 1 - 2x < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 0$.

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Cách 2: Ta có: $g(x) = f(1-2x) - 2x^2 + 1 \Rightarrow g'(x) = -2f'(1-2x) - 4x$.

Có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(1-2x) = -2x \Leftrightarrow f'(1-2x) = (1-2x) - 1$.

Xét sự tương giao của đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và $y = t - 1$ ($t = 1 - 2x$).

Từ đồ thị ta có $f'(t) = t - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases}$. Khi đó $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x = 1 \\ 1 - 2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$.

Cách 3: Cách trắc nghiệm.

Ta có: $g(x) = f(1-2x) - 2x^2 + 1 \Rightarrow g'(x) = -2f'(1-2x) - 4x$.

Ta lần lượt thử các đáp án.

Thử Chọn A Chọn $x = -1, 25 \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right) \Rightarrow g'(-1, 25) = -2f'(3, 5) - 5$.

Nhìn đồ thị $f'(x)$ ta thấy $f'(3, 5) > 0 \Rightarrow g'(-1, 25) < 0 \Rightarrow$ loại đáp án A.

Thử đáp án B: Chọn $x = 0, 25 \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow g'(0, 25) = -2f'(0, 5) - 1$.



Nhìn đồ thị $f'(x)$ ta thấy $f'(0,5) > 0 \Rightarrow g'(0,25) < 0 \Rightarrow$ loại đáp án **B**.

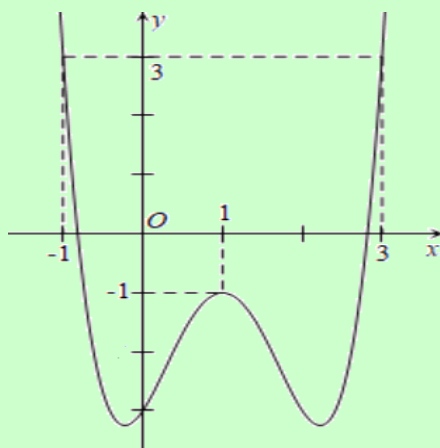
Thử đáp án C: Chọn $x = -0,5 \in (-1; 0) \Rightarrow g'(-0,5) = -2f'(2) + 2$.

Nhìn đồ thị $f'(x)$ ta thấy $f'(2) < 0 \Rightarrow -2f'(2) > 0 \Rightarrow g'(-0,5) > 0 \Rightarrow$ Chọn đáp án **C**.

Thử đáp án D: Chọn $x = 2 \in (1; 3) \Rightarrow g'(2) = -2f'(-3) - 8$.

Nhìn đồ thị $f'(x)$ ta thấy $f'(-3) > 0 \Rightarrow -2f'(-3) < 0 \Rightarrow g'(2) < 0 \Rightarrow$ loại đáp án **D**.

Câu 37: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây.



Hàm số $g(x) = f(3x-1) - 27x^3 + 54x^2 - 27x + 4$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

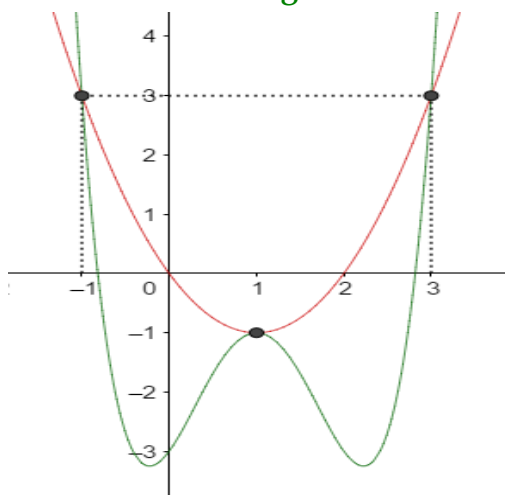
A. $\left(0; \frac{2}{3}\right)$.

B. $\left(\frac{2}{3}; 3\right)$.

C. $(0; 3)$.

D. $(4; +\infty)$.

Lời giải



Chọn D

Cách 1:

Ta có: $g(x) = f(3x-1) - (3x-1)^3 + 3(3x-1)^2 \Rightarrow g'(x) = 3[f'(3x-1) - (3x-1)^2 + 2(3x-1)]$

Có $g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(3x-1) > (3x-1)^2 - 2(3x-1)$ (1).

Đặt $t = 3x-1$, bất phương trình (1) trở thành $f'(t) > t^2 - 2t$.

Vẽ Parabol $y = x^2 - 2x$. Trên cùng đồ thị, ta thấy đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm trên đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x$ trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$.

$$\text{Suy ra } f'(t) > t^2 - 2t \Leftrightarrow \begin{cases} t < -1 \\ t > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1 < -1 \\ 3x-1 > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > \frac{4}{3} \end{cases}$$

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(\frac{4}{3}; +\infty)$.

Cách 2:

$$\text{Ta có: } g(x) = f(3x-1) - (3x-1)^3 + 3(3x-1)^2 \Rightarrow g'(x) = 3[f'(3x-1) - (3x-1)^2 + 2(3x-1)]$$

$$\text{Có: } g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(3x-1) = (3x-1)^2 - 2(3x-1).$$

Xét sự tương giao của đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và $y = t^2 - 2t, (t = 3x-1)$.

$$\text{Từ đồ thị ta có: } f'(t) = t^2 - 2t \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 1 (\text{nghiệm kép}) \\ t = 3 \end{cases}$$

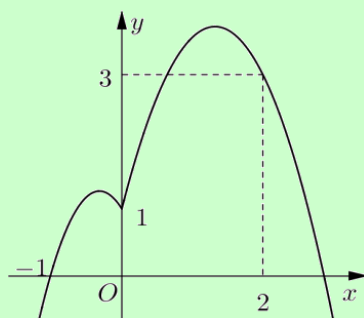
$$\text{Khi đó } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1 = -1 \\ 3x-1 = 1 \\ 3x-1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2}{3} (\text{nghiệm kép}) \\ x = 3 \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu.

x	$-\infty$	0	$\frac{2}{3}$	3	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(3; +\infty)$.

Câu 38: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(-1) = 0$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $y = |2f(x-1) - x^2|$ đồng biến trên khoảng

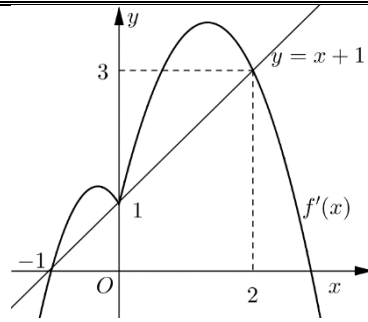
- A. $(3; +\infty)$. B. $(-1; 2)$. C. $(0; +\infty)$. D. $(0; 3)$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } g(x) = 2f(x-1) - x^2 \Rightarrow g'(x) = 2[f'(x-1) - (x-1) - 1]$$





Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đồ thị hàm số $y = x + 1$ ta có:

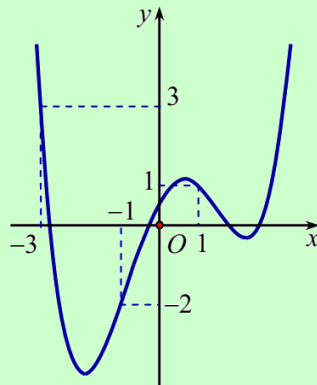
$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x-1) > (x-1) + 1 \Leftrightarrow -1 < x-1 < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 3$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$					

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $y = |2f(x-1) - x^2|$ đồng biến trên khoảng $(0; 3)$.

Câu 39: Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình sau.



Hàm số $g(x) = 3f(1-2x) + 8x^3 - 21x^2 + 6x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; 2)$. B. $(-3; -1)$. C. $(0; 1)$. D. $(-1; 2)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x) = -6f'(1-2x) + 24x^2 - 42x + 6$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(1-2x) < 4x^2 - 7x + 1 \quad (*)$$

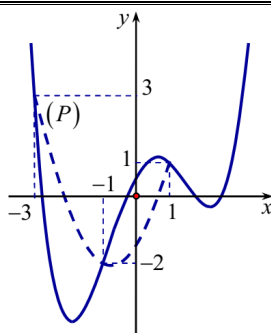
Đặt $1-2x = t \Leftrightarrow x = \frac{1-t}{2}$

Ta có $(*)$ trở thành $f'(t) < 4\left(\frac{1-t}{2}\right)^2 - 7\frac{1-t}{2} + 1 \Leftrightarrow f'(t) < t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{3}{2}$.

Ta vẽ parabol $(P): y = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ trên cùng hệ trục Oxy với đồ thị $y = f'(x)$ như hình

vẽ sau (đường nét đứt), ta thấy (P) có đỉnh $I(-\frac{3}{4}; -\frac{33}{16})$ và đi qua các điểm

$(-3; 3), (-1; -2), (1; 1)$.



Từ đồ thị hàm số ta thấy trên khoảng $(-3;1)$ ta có $f'(t) < t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{3}{2} \Leftrightarrow -3 < t < -1$

$$\Leftrightarrow -3 < 1 - 2x < -1 \Leftrightarrow 1 < x < 2$$

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

Câu 40: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn: $f'(x) = (1-x^2)(x-5)$ Hàm số $y = 3f(x+3) - x^3 + 12x$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(1;5)$. B. $(2;+\infty)$. C. $(-1;0)$. D. $(-\infty;-1)$.

Lời giải

Chọn B

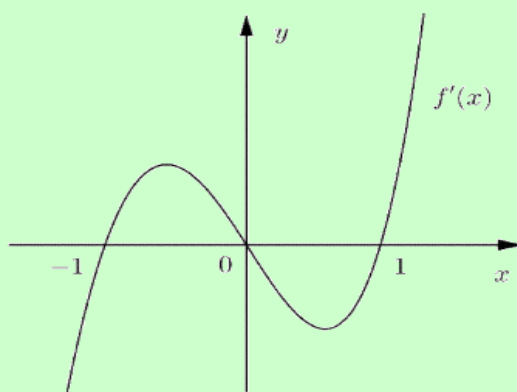
Ta có: $f'(x) = (1-x^2)(x-5)$ suy ra $f'(x+3) = [1-(x+3)^2](x+3-5)$
 $= -(x+4)(x+2)(x-2)$.

Mặt khác: $y' = 3 \cdot f'(x+3) - 3x^2 + 12 = -3[(x+4)(x+2)(x-2) + (x^2-4)]$
 $= -3(x-2)(x+2)(x+5)$.

Xét $y' < 0 \Leftrightarrow -3(x-2)(x+2)(x+5) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -5 < x < -2 \\ x > 2 \end{cases}$.

Vậy hàm số $y = 3f(x+3) - x^3 + 12x$ nghịch biến trên các khoảng $(-5;-2)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 41: Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $f'(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $g(x) = f(f'(x))$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1;+\infty)$. B. $(-\infty;-2)$. C. $(-1;0)$. D. $(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3})$.

Lời giải



Chọn B

Vì các điểm $(-1;0), (0;0), (1;0)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} -1+a-b+c=0 \\ c=0 \\ 1+a+b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = x^3 - x \Rightarrow f''(x) = 3x^2 - 1$$

Ta có: $g(x) = f(f'(x)) \Rightarrow g'(x) = f'(f'(x)) \cdot f''(x)$

$$\text{Xét } g'(x) = 0 \Leftrightarrow g'(x) = f'(f'(x)) \cdot f''(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x^3 - x)(3x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x = 0 \\ x^3 - x = 1 \\ x^3 - x = -1 \\ 3x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = 0 \\ x = 1,325 \\ x = -1,325 \\ x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-1,325$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$1,325$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+	0	+

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$

Câu 42: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 2x - 3, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 20]$ để hàm số $g(x) = f(x^2 + 3x - m) + m^2 + 1$ đồng biến trên $(0; 2)$?

A. 16.

B. 17.

C. 18.

D. 19.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(t) = t^2 + 2t - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -3 \\ t \geq 1 \end{cases} (*)$.

Có $g'(x) = (2x + 3)f'(x^2 + 3x - m)$

Vì $2x + 3 > 0, \forall x \in (0; 2)$ nên $g(x)$ đồng biến trên $(0; 2) \Leftrightarrow g'(x) \geq 0, \forall x \in (0; 2)$

$\Leftrightarrow f'(x^2 + 3x - m) \geq 0, \forall x \in (0; 2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - m \leq -3, \forall x \in (0; 2) \\ x^2 + 3x - m \geq 1, \forall x \in (0; 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x \leq m - 3, \forall x \in (0; 2) \\ x^2 + 3x \geq m + 1, \forall x \in (0; 2) \end{cases} (**)$$

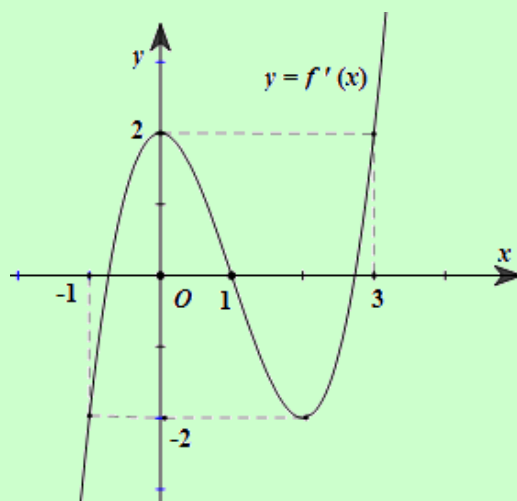
Có $h(x) = x^2 + 3x$ luôn đồng biến trên $(0; 2)$ nên từ $(**)$ $\Rightarrow \begin{cases} m - 3 \geq 10 \\ m + 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 13 \\ m \leq -1 \end{cases}$



$$\text{Vì } \begin{cases} m \in [-10; 20] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \text{Có 18 giá trị của tham số } m.$$

Vậy có 18 giá trị của tham số m cần tìm.

Câu 43: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Đặt $g(x) = f(x-m) - \frac{1}{2}(x-m-1)^2 + 2019$ với m là tham số thực. Gọi S là tập các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5; 6)$. Tổng các phần tử của S bằng:

A. 4.

B. 11.

C. 14.

D. 20.

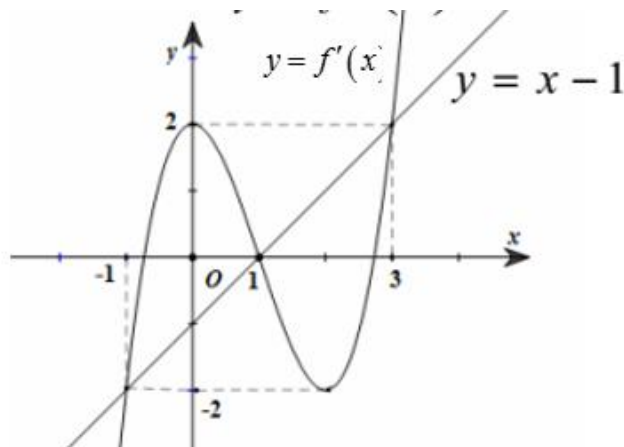
Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = f'(x-m) - (x-m-1)$

Đặt $h(x) = f'(x) - (x-1)$. Từ đồ thị $y = f'(x)$ và đồ thị $y = x-1$ trên hình vẽ ta suy ra

$$h(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x \geq 3 \end{cases}$$



$$\text{Ta có } g'(x) = h(x-m) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x-m \leq 1 \\ x-m \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \leq x \leq m+1 \\ x \geq m+3 \end{cases}$$

Do đó hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(m-1; m+1)$ và $(m+3; +\infty)$

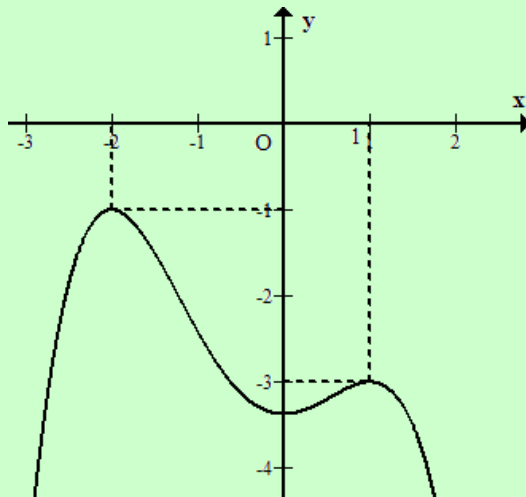


Do vậy, hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6) \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \leq 5 \\ m+1 \geq 6 \\ m+3 \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \leq m \leq 6 \\ m \leq 2 \end{cases}$

Do m nguyên dương nên $m \in \{1; 2; 5; 6\}$, tức $S = \{1; 2; 5; 6\}$

Tổng các phần tử của S bằng 14.

Câu 44: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m , $m \in \mathbb{Z}$, $-2020 < m < 2020$ để hàm số

$$g(x) = f(x^2) + mx^2 \left(x^2 + \frac{8}{3}x - 6 \right) \text{ đồng biến trên khoảng } (-3;0)$$

A. 2021.

B. 2020.

C. 2019.

D. 2022.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2) + 4mx(x^2 + 2x - 3)$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-3;0)$ suy ra $g'(x) \geq 0, \forall x \in (-3;0)$.

$$\Leftrightarrow 2xf'(x^2) + 4mx(x^2 + 2x - 3) \geq 0, \forall x \in (-3;0) \Leftrightarrow f'(x^2) - 2m(-x^2 - 2x + 3) \leq 0, \forall x \in (-3;0)$$

$$\Leftrightarrow f'(x^2) \leq 2m(-x^2 - 2x + 3), \forall x \in (-3;0) \Leftrightarrow m \geq \frac{f'(x^2)}{2(-x^2 - 2x + 3)}, \forall x \in (-3;0)$$

$$\Leftrightarrow m \geq \max_{(-3;0)} \frac{f'(x^2)}{2(-x^2 - 2x + 3)}.$$

$$\Leftrightarrow \text{Ta có } -3 < x < 0 \Rightarrow 0 < x^2 < 9 \Rightarrow f'(x^2) \leq -3 \text{ dấu "=" khi } x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1.$$

$$\Leftrightarrow -x^2 - 2x + 3 = -(x+1)^2 + 4 \Rightarrow 0 < -x^2 - 2x + 3 \leq 4, \forall x \in (-3;0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{-x^2 - 2x + 3} \geq \frac{1}{4}, \text{ dấu "=" khi } x = -1.$$

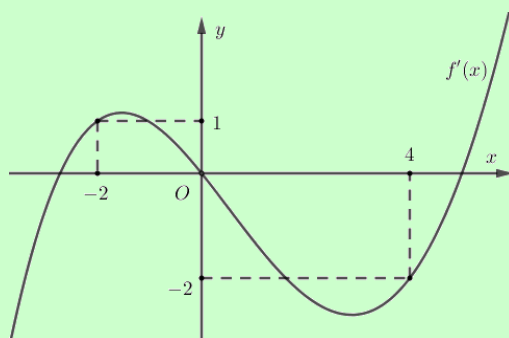
$$\text{Suy ra } \frac{f'(x^2)}{2(-x^2 - 2x + 3)} \leq \frac{-3}{2 \cdot 4} = \frac{-3}{8}, \forall x \in (-3;0), \text{ dấu "=" khi } x = -1.$$

$$\Rightarrow \max_{(-3;0)} \frac{f'(x^2)}{2(-x^2 - 2x + 3)} = -\frac{3}{8}.$$



Vậy $m \geq -\frac{3}{8}$, mà $m \in \mathbb{Z}$, $-2020 < m < 2020$ nên có 2020 giá trị của tham số m thỏa mãn bài toán.

Câu 45: Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình sau.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = 4f(x-m) + x^2 - 2mx + 2020$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

Lời giải

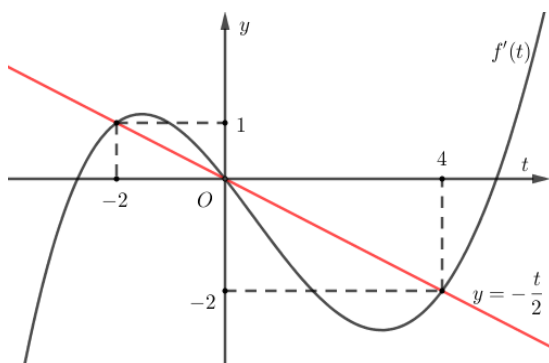
Chọn A

Ta có $g'(x) = 4f'(x-m) + 2x - 2m$

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(x-m) \geq -\frac{x-m}{2} \quad (*)$$

$$\text{Đặt } t = x - m \text{ thì } (*) \Leftrightarrow f'(t) \geq -\frac{t}{2}$$

Vẽ đường thẳng $y = -\frac{x}{2}$ trên cùng hệ trục Oxy với đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ sau



$$\text{Từ đồ thị ta có } f'(t) \geq -\frac{t}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq t \leq 0 \\ t \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2 \leq x \leq m \\ x \geq m+4 \end{cases}$$

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2) \Leftrightarrow g'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (1;2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-2 \leq 1 < 2 \leq m \\ m+4 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq m \leq 3 \\ m \leq -3 \end{cases}$$

Vì m nguyên dương nên $m \in \{2;3\}$.

Vậy có hai giá trị nguyên dương của m để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x-1)(x-4); \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m < 2020$ để hàm số $g(x) = f\left(\frac{2-x}{1+x} - m\right)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.



A. 2018.

B. 2019.

C. 2020.

D. 2021

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x) = -\frac{3}{(x+1)^2} f'\left(\frac{2-x}{1+x} - m\right)$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$

$$\Leftrightarrow g'(x) \geq 0; \forall x \in (2; +\infty)$$

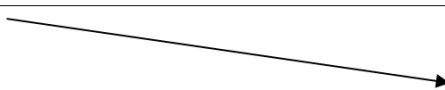
$$\Leftrightarrow -\frac{3}{(x+1)^2} f'\left(\frac{2-x}{1+x} - m\right) \geq 0; \forall x \in (2; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow f'\left(\frac{2-x}{1+x} - m\right) \leq 0; \forall x \in (2; +\infty)$$

Ta có: $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)(x-4) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$

Do đó: $f'\left(\frac{2-x}{1+x} - m\right) \leq 0; \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2-x}{1+x} - m \leq -1; \forall x \in (2; +\infty) & (1) \\ 1 \leq \frac{2-x}{1+x} - m \leq 4; \forall x \in (2; +\infty) & (2) \end{cases}$

Hàm số $h(x) = \frac{2-x}{1+x} - m; x \in (2; +\infty)$ có bảng biến thiên:

x		2	$+\infty$
$h'(x)$			-
$h(x)$		$-m$	
			$-\infty$

Căn cứ bảng biến thiên suy ra: Điều kiện (2) không có nghiệm m thỏa mãn.

Điều kiện (1) $\Leftrightarrow -m \leq -1 \Leftrightarrow m \geq 1$, kết hợp điều kiện $m < 2020$ suy ra có 2019 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét: Có thể mở rộng bài toán đã nêu như sau:

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x-1)(x-4); \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m < 2020$ để hàm số $g(x) = f\left(\frac{2-x}{1+x} + h(m)\right)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Câu 47: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)e^x$, có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-2019; 2019]$ để hàm số $y = g(x) = f(\ln x) - mx^2 + mx - 2$ nghịch biến trên $(1; e^2)$.

A. 2018.

B. 2019.

C. 2020.

D. 2021.

Lời giải

Chọn B



Trên $(1; e^2)$ ta có $g'(x) = \frac{1}{x} \cdot f'(\ln x) - 2mx + m = \ln x + 1 - (2x - 1)m$

Để hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên $(1; e^2)$ thì $g'(x) = \ln x + 1 - (2x - 1)m \leq 0, \forall x \in (1; e^2)$

$$\Leftrightarrow \ln x + 1 - (2x - 1)m \leq 0, \forall x \in (1; e^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln x + 1}{2x - 1} \leq m, \forall x \in (1; e^2)$$

Xét hàm số $h(x) = \frac{\ln x + 1}{2x - 1}$ trên $(1; e^2)$, ta có $h'(x) = \frac{-\frac{1}{x} - 2 \ln x}{(2x - 1)^2} < 0, \forall x \in (1; e^2)$, từ đây

suy ra $m \geq 1$. Vậy có 2019 giá trị nguyên của m thỏa bài toán.

