

Đại Số & Giải tích 12

ĐỀ CƯƠNG HỌC KÌ 1 NĂM 2020



2020

Từ cơ bản tới nâng cao

Các dạng toán đa dạng và đầy đủ
dành cho học sinh muốn đạt 8+

MỤC LỤC

CHƯƠNG 1. ỒNG DƯNG ÑÀO HÀM ÑỀ KHẢO SÁT & VẼ ÑỒI THỜ HÀM SỐ	1
§ 1. TÍNH ÑỒN ÑIEU CỦA HÀM SỐ	1
— Dang toan 1: Tìm cac khoang ñồn ñieu (khảo sát chiều biến thiên)	2
— Dang toan 2: Tìm tham số m ñể hàm số ñồn ñieu trên miền xác ñịnh của nó	14
— Dang toan 3: Một số bài toán vận dụng & vận dụng cao thông gap	21
§ 2. CỐC TRỜ CỦA HÀM SỐ	27
— Dang toan 1: Tìm ñiểm cốc ñải, cốc tieu, giá trị cốc ñải, giá trị cốc tieu	28
— Dang toan 2: Tìm tham số m ñể hàm số ñạt cốc trở tại ñiểm $x = x_0$ cho trước	34
— Dang toan 3: Biến luan hoành ñối cốc trở hoặc tung ñối cốc trở	37
— Dang toan 4: Một số bài toán vận dụng & vận dụng cao thông gap	47
§ 3. GIÁI TRỜ LỚN NHẤT VÀ GIÁI TRỜ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ	57
— Dang toan 1: Tìm gtnn và gtlN của hàm số khi ñể cho ñối thờ hoặc bảng biến thiên	58
— Dang toan 2: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên ñoạn	60
— Dang toan 3: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng	64
— Dang toan 4: Một số bài toán vận dụng & vận dụng cao thông gap	67
§ 4. ÑỒÔNG TIỀM CẦN	73
— Dang toan 1: Tìm ñồông tiềm cần ñiêng, tiềm cần ngang của ñối thờ hàm số	74
— Dang toan 2: Bài toán tiềm cần liên quan ñến tham số	77
§ 5. KHẢO SÁT SỒI BIẾN THIÊN VÀ VẼ ÑỒI THỜ HÀM SỐ	85
— Dang toan 1: Nhận dạng ñối thờ hàm số	85
— Dang toan 2: Biến ñối ñối thờ	99
— Dang toan 3: Tổng giao khi ñể cho bảng biến thiên hoặc ñối thờ	103
— Dang toan 4: Tổng giao của hai hàm cụ thể	114
CHƯƠNG 2. HÀM SỐ LUYỆN THỜ, HÀM SỐ MUI, HÀM SỐ LOGARIT	119
§ 1. Công thức mũ & logarit	119
— Dang toan 1: Công thức mũ và các biến ñối	119
— Dang toan 2: Công thức logarit và các biến ñối	122
§ 2. Hàm số lũy thừa — Hàm số mũ — Hàm số logarit	135
— Dang toan 1: Tìm tập xác ñịnh của hàm lũy thừa, mũ, logarit	136
— Dang toan 2: Tìm ñạo hàm của hàm mũ — logarit	140
— Dang toan 3: Ñồn ñieu và cốc trở của hàm số mũ & logarit	143
— Dang toan 4: Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số mũ & logarit	146
— Dang toan 5: Nhận dạng ñối thờ hàm số mũ — lũy thừa và logarit	149
— Dang toan 5: Bài toán lãi suất và một số bài toán thóc te khác	153
§ 3. Phôông trình mũ, phôông trình logarit	165
— Dang toan 1: Phôông trình mũ & logarit cô ban (hay ñiờa về cung cô số)	165
— Dang toan 2: Giải phôông trình mũ — logarit bằng cách ñặt ẩn phụ	173
— Dang toan 3: Bài toán chứa tham số trong phôông trình mũ & logarit (nâng cao)	178
— Dang toan 4: Phôông pháp hàm số (nâng cao)	185
§ 4. Bất phôông trình mũ — Bất phôông trình logarit	189
— Dang toan 1: Bất phôông trình mũ & logarit cô ban hoặc ñiờa về cung cô số	189
— Dang toan 2: Phôông pháp ñặt ẩn phụ hoặc phôông pháp ñánh giá	193
— Dang toan 3: Tìm m ñể bất phôông trình nghiệm ñúng, có nghiệm (nâng cao)	197

ĐỊA CHỈ GHI DANH:

- TRUNG TÂM THẾ VINH – 45A LÊ THỨC HOẠCH – Q. TÂN PHÚ (ĐỐI DIỆN TRƯỜNG THPT TRẦN PHÚ).
- TRUNG TÂM HOÀNG GIA – 56 PHỐ CHỢ – P. TÂN THÀNH – Q. TÂN PHÚ (SAU CHỢ TÂN PHÚ).
- 71/25/10 PHÚ THỌ HÒA – P. PHÚ THỌ HÒA – Q. TÂN PHÚ – TP. HỒ CHÍ MINH.

ĐIỆN THOẠI GHI DANH:

- 0983.047.188 – Zalo (Thầy Nguyễn Đức Nam) – Face: <https://www.facebook.com/marion.zack/>
- 0933.755.607 – Zalo (Thầy Lê Văn Đoàn) – 0929.031.789 – Face: <https://www.facebook.com/levan.doan.902>

NHÓM TOÁN THẦY LÊ VĂN ĐOÀN:

Ths. Lê Văn Đoàn – Ths. Trương Huy Hoàng – Ths. Nguyễn Tiến Hà – Thầy Bùi Sỹ Khanh – Thầy Nguyễn Đức Nam – Thầy Đỗ Minh Tiến – Thầy Nguyễn Duy Tùng – Thầy Trần Nguyễn Vĩnh Nghi – Thầy Hoàng Minh Thiện – Thầy Trần Quốc Tuấn.

THỜI KHÓA BIỂU CÁC LỚP TOÁN ĐANG HỌC (Sau 05/09 sẽ mở thêm lớp mới, hs theo dõi thông báo):

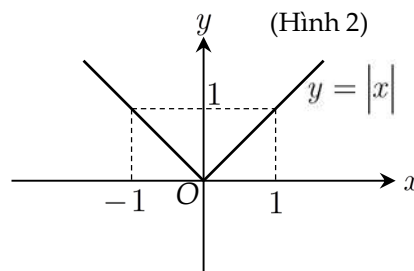
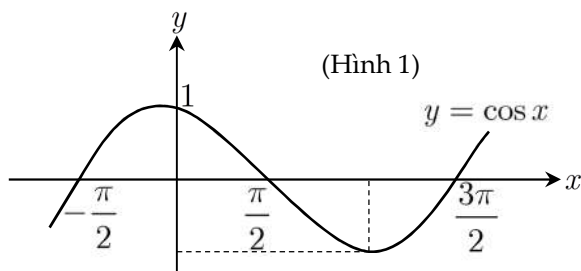
KHỐI 6	Thứ hai	Thứ ba	Thứ tư	Thứ năm	Thứ sáu	Thứ bảy	Chủ nhật
19'15 – 21'15			T6A		T6A		
KHỐI 7	Thứ hai	Thứ ba	Thứ tư	Thứ năm	Thứ sáu	Thứ bảy	Chủ nhật
17'30 -19'30			T7A		T7A		
KHỐI 8	Thứ hai	Thứ ba	Thứ tư	Thứ năm	Thứ sáu	Thứ bảy	Chủ nhật
19'15 – 21'15	T8A		T8A				
KHỐI 9	Thứ hai	Thứ ba	Thứ tư	Thứ năm	Thứ sáu	Thứ bảy	Chủ nhật
17'30 -19'30	T9A	T9B	T9A	T9B			
KHỐI 10	Thứ hai	Thứ ba	Thứ tư	Thứ năm	Thứ sáu	Thứ bảy	Chủ nhật
17'45 -19'15						T10C	T10C
19'30 – 21'00	T10A 10HG	T10B	T10A 10HG	T10B	T10A 10HG	T10B	Giải đề
KHỐI 11	Thứ hai	Thứ ba	Thứ tư	Thứ năm	Thứ sáu	Thứ bảy	Chủ nhật
17'45 -19'15	T11A	T11B1 T11B2	T11A	T11B1 T11B2	T11A	T11B1 T11B2	Giải đề
19'30 – 21'00		T11-C		T11-C		T11-C	
KHỐI 12	Thứ hai	Thứ ba	Thứ tư	Thứ năm	Thứ sáu	Thứ bảy	Chủ nhật
17'45 -19'15	T12A1 T12A2 T12HG1	T12C	T12A1 T12A2 T12HG1	T12C	T12A1 T12A2 T12HG1	T12C T12HG2	Lớp chuyên đề VD và VDC
19'30 – 21'00	T12B		T12B	T12HG2	T12B	T12HG2	

Chương 1. ỒNG DUNG NẢO HAM NỂ KHẢO SAT & VE NỂ THỜ HAM SỎ

§ 1. TÍNH NỜN NỂIU CƯA HAM SỎ

A. KIỂN THỨ CỜ BẢN

Từ đồ thị hình 1 và hình 2 bên dưới, hãy chỉ các khoảng tăng (đồng biến), giảm (nghịch biến) của hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ và của hàm số $y = |x|$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?



1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K với K là khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng.

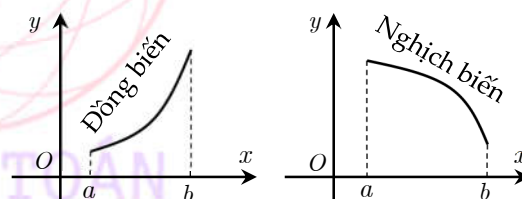
- Hàm số $y = f(x)$ đồng biến (tăng) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến (giảm) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K được gọi chung là đơn điệu trên K .

Nhận xét: Từ định nghĩa, nếu $\forall x_1, x_2 \in K$ và $x_1 \neq x_2$ thì hàm số:

- $f(x)$ đồng biến trên $K \Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$.

$$f(x) \text{ nghịch biến trên } K \Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0.$$



- Nếu hàm số đồng biến trên K thì đồ thị đi lên từ trái sang phải và nghịch biến trên K thì đồ thị đi xuống từ trái sang phải.

2. Tính đơn điệu và dấu của đạo hàm

Định lý (thừa nhận): Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K .

- Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số đồng biến trên khoảng K .
- Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng K .

Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì hàm số không đổi trên khoảng K .

Định lý mở rộng: Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ (hoặc $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$) và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số điểm hữu hạn của K thì hàm số đồng biến (nghịch biến) trên khoảng K .

Ví dụ: Hàm số $y = 2x^3 + 6x^2 + 6x - 7$ xác định trên $\mathbb{R}$

Ta có: $y' = 6x^2 + 12x + 6 = 6(x+1)^2$. Do đó $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ và $y' > 0, \forall x \neq -1$.

Theo định lý mở rộng, hàm số luôn đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

Lưu ý: Nếu K là một đoạn hoặc nửa khoảng thì phải bổ sung giả thiết “hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn hoặc nửa khoảng đó”. Chẳng hạn: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và có đạo hàm $f'(x) > 0, \forall x \in K$ trên khoảng $(a; b)$ thì hàm số đồng biến trên đoạn $[a; b]$.

Dạng toán 1: Tìm các khoảng đơn điệu (khảo sát chiều biến thiên)

☆☆☆

★ **Bài toán.** Tìm các khoảng đơn điệu (khảo sát chiều biến thiên) của hàm số $y = f(x)$.✎ **Phương pháp:**

- **Bước 1.** Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số. Tính đạo hàm $y' = f'(x)$.
- **Bước 2.** Tìm các điểm tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.
- **Bước 3.** Sắp xếp các điểm theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên (xét dấu y').
- **Bước 4.** Từ bảng biến thiên, kết luận: $y' > 0 \Rightarrow$ đồng biến và $y' < 0 \Rightarrow$ nghịch biến.

1. Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

- A. $(0; 2)$. B. $(1; +\infty)$.
C. $(-\infty; 0)$. D. $(-\infty; 1)$.

Lời giải. Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 6x, \quad y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2.$$

Bảng biến thiên (xét dấu y'):

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0
y				

Chọn đáp án C.

2. Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

- A. $(-1; 3)$. **B.** $(3; +\infty)$.
C. $(2; 4)$. D. $(-\infty; 1)$.

3. Hàm số $y = x^3 - 3x + 12$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây ?

- A. $(0; 2)$. B. $(1; +\infty)$.
C. $(-\infty; -1)$. **D.** $(-1; 1)$.

4. Hàm số $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 11$ đồng biến trên khoảng nào sau đây ?

- A. $(3; +\infty)$. B. $(-1; +\infty)$.
C. $(-1; 3)$. D. $(-\infty; 3)$.

5. Hàm số nào sau đây luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $y = x^3 - 3x$. B. $y = -x^3 - 2x$.
C. $y = x^4 + 2x^2$. **D.** $y = x^3 + x^2 + 4x$.

6. Hàm số nào sau đây luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $y = -x^3 + 4x$. **B.** $y = -x^3 + 3x^2 - 3x$.
C. $y = x^4 - 2x^2$. D. $y = x^3 - x^2 + 4x$.

BÀI TẬP VỀ NHÀ 1**Câu 1.** (THPT Chuyên Bắc Ninh) Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 5$ đồng biến trên khoảng

- A. $(0; 2)$. B. $(0; +\infty)$.
 C. $(-\infty; 2)$. D. $(-\infty, 0)$ và $(2; +\infty)$.

Câu 2. (THPT Chuyên Trần Phú – Hải Phòng) Hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$ nghịch biến trên khoảng

- A. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.
 B. $(1; +\infty)$.
 C. $(-1; +\infty)$.
 D. $(-1; 1)$.

Câu 3. (THPT Quốc Học Quy Nhơn Bình Định) Cho hàm số $y = 2x^3 + 6x^2 + 6x - 1$. Mệnh đề nào dưới đây sai ?

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
 B. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
 C. Trên khoảng $(-\infty; -2)$ hàm số đã cho đồng biến.
 D. Trên khoảng $(2; +\infty)$ hàm số đã cho đồng biến.

Câu 4. (THPT Cẩm Bình Hà Tĩnh) Hàm số nào sau đây nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. $y = x^3 - 3x^2$. B. $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$.
 C. $y = -x^3 + 3x + 1$. D. $y = x^3 + 2018$.

Câu 5. (Sở GD & ĐT Hà Nội) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

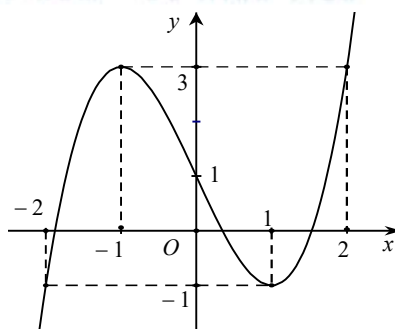
x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

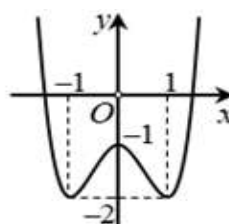
- A. $(0; +\infty)$. B. $(-\infty; -2)$. C. $(-3; 1)$. D. $(-2; 0)$.

Câu 6. (Cụm Liên Trường THPT Tp. Vinh – Nghệ An) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây ?

- A. $(-0,5; 0,3)$.
 B. $(-2; 2)$.
 C. $(-1,2; 0,1)$.
 D. $(0; 2)$.

**Câu 7.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

- A. $(0; 1)$.
 B. $(-\infty; 1)$.
 C. $(-1; 1)$.
 D. $(-1; 0)$.



7. Hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 2019$ đồng biến trên khoảng nào sau đây ?

- A. $(-\infty; 0)$. B. $(0; +\infty)$.
C. $(0; 1)$. D. $(-1; 1)$.

Ta có: $y' = -4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \vee x = 0$.

Bảng biến thiên (xét dấu y'):

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Chọn đáp án C.

8. Hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 5$ nghịch biến trên các khoảng nào dưới đây ?

- A. $(-1; 0)$. **B.** $(0; 1)$.
 C. $(-1; 1)$. D. $(1; +\infty)$.

9. Hàm số $y = -x^4 + 8x^2 + 6$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

- A. $(-2; 0)$. B. $(-2; 2)$.
C. $(-\infty; -2)$. D. $(2; +\infty)$.

10. Hàm số $f(x) = x^4 + 4x^2 + 1$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây ?

- A.** $(-\infty; 0)$. B. $(-\infty; +\infty)$.
 C. $(0; +\infty)$. D. $(-1; 1)$.

11. Hàm số $f(x) = 2x^4 + 1$ đồng biến trên khoảng nào ?

- A. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$. B. $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.
C. $(0; +\infty)$. D. $(-\infty; 0)$.

12. Hàm số $f(x) = 1 - 3x^4$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây ?

- A.** $(0; +\infty)$. B. $(-\infty; 0)$.
 C. $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$. D. $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

13. Hàm số $y = -x^4 - x^2$ đồng biến trên khoảng

- A. $(-1; 2)$. B. $(0; +\infty)$.
 C. $(-\infty; 1)$. **D.** $(-\infty; 0)$.

14. Hàm số $y = x^4 + x^2$ nghịch biến trên khoảng

- A.** $(-\infty; 0)$. B. $(0; +\infty)$.
 C. $(-1; 1)$. D. $(1; 2)$.

BÀI TẬP VỀ NHÀ 2

Câu 8. (THPT Chuyên Hùng Vương – Bình Phước) Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.
B. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
 C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
 D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Câu 9. (Sở GD & ĐT Quảng Nam) Hỏi hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây ?

- A. $(-3; -2)$. B. $(-2; -1)$.
 C. $(0;1)$. D. $(1;2)$.

Câu 10. (THPT Chuyên Khoa Học Tự Nhiên Hà Nội) Cho hàm số $y = x^4 + 4x^2 + 3$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

- A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
 B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
 D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 11. (THPT Trần Phú – Tp. Hồ Chí Minh) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, ($a \neq 0$) có bảng biến thiên bên dưới. Hỏi đó là hàm số nào ?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$					$+\infty$

Biểu đồ biến thiên: Từ $+\infty$ xuống 1 tại $x = -1$, từ 1 lên 2 tại $x = 0$, từ 2 xuống 1 tại $x = 1$, từ 1 lên $+\infty$.

- A. $y = -x^4 + 2x^2 + 2$. **B.** $y = x^4 - 2x^2 + 2$.
 C. $y = x^4 - 2x - 2$. D. $y = -x^4 + 2x - 2$.

Câu 12. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, ($a \neq 0$) có bảng biến thiên bên dưới. Hỏi đó là hàm số nào ?

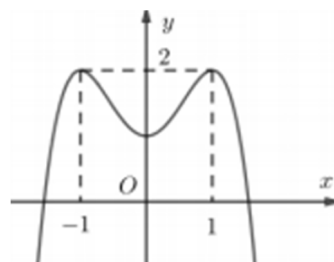
- A. $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$.
 B. $y = -2x^4 - 4x^2 + 1$.
 C. $y = -2x^4 + 4x^2 - 1$.
D. $y = -2x^4 + 4x^2 + 1$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$					$+\infty$

Biểu đồ biến thiên: Từ $-\infty$ lên 3 tại $x = -1$, từ 3 xuống 0 tại $x = 0$, từ 0 lên 3 tại $x = 1$, từ 3 xuống $+\infty$.

Câu 13. (THPT Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào sau đây ?

- A. $(-1;1)$.
B. $(-1;0)$.
 C. $(-\infty; -1)$.
 D. $(0;1)$.



15. Hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ nghịch biến trên khoảng

- A. $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. B. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
C. $(-\infty; 1), (1; +\infty)$. C. $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải. Điều kiện: $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

Ta có: $y' = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$.

Bảng biến thiên (xét dấu y'):

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$		$-$	
y					

Chọn đáp án C.

Nhận xét.

Hàm số nhất biến $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ luôn đơn điệu 1 chiều (luôn tăng hoặc luôn giảm) trên các khoảng xác định của nó.

16. Hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ đồng biến trên khoảng

- A. $(-\infty; +\infty)$. B. $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
C. $(-\infty; -1)$. D. $(-3; 3)$.

17. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
 B. Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.
 C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
D. Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

18. Cho hàm số $y = \frac{3-x}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
 B. Hàm số nghịch biến với mọi $x \neq 1$.
C. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
 D. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

BÀI TẬP VỀ NHÀ 3

Câu 14. (Sở GD & ĐT Tp. HCM cụm 7) Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$. Mệnh đề nào là mệnh đề **đúng** ?

- A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
 B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
 D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Câu 15. (THPT Chuyên Ngoại Ngữ – Hà Nội) Cho hàm số $y = \frac{5-x}{x+2}$. Mệnh đề nào **đúng** ?

- A. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.
 B. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 5)$.
 D. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Câu 16. (Sở GD & ĐT Bắc Giang) Hàm số $y = \frac{mx-1-m^2}{x+1}$ với m là tham số. Mệnh đề nào **đúng** ?

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
 B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
 C. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng mà nó xác định.
 D. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng mà nó xác định.

Câu 17. (Đề thi minh họa – Bộ GD & ĐT 2017) Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$?

- A. $y = 3x^3 + 3x - 2$.
 B. $y = 2x^3 - 5x + 1$.
 C. $y = x^4 + 3x^2$.
 D. $y = \frac{x-2}{x+1}$.

Câu 18. (HK1 THPT Trần Phú – Tp. HCM 2019) Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$?

- A. $y = \frac{1}{x}$.
 B. $y = \frac{x+2}{x-1}$.
 C. $y = -x^3 + 3x + 1$.
 D. $y = -x^3 + x^2 - 4x + 1$.

Câu 19. (THPT Tiên Lãng – Hải Phòng) Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình bên dưới ?

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		–		–	
y	1			$+\infty$	1

Diagram showing arrows from the values 1 and $+\infty$ in the y row to $-\infty$ in the y row at the boundaries of the intervals.

- A. $y = \frac{x+1}{x-2}$.
 B. $y = \frac{2x-1}{x+2}$.
 C. $y = \frac{2x+5}{x+2}$.
 D. $y = \frac{2x-3}{x-2}$.

19. Hàm số $y = x + \frac{4}{x}$ nghịch biến trên khoảng

- A. $(-2; 2)$. B. $(2; +\infty)$.
C. $(-\infty; -2)$. **D.** $(-2; 0), (0; 2)$.

Điều kiện $x \neq 0$. Ta có: $y' = 1 - \frac{4}{x^2}$.

Xét $y' = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Chọn đáp án D.

20. Hàm số $y = x + \frac{9}{x}$ đồng biến trên khoảng

- A. $(-\infty; -2)$. B. $(2; +\infty)$.
C. $(-3; 3)$. **D.** $(3; +\infty)$.

21. Hàm số $y = 2x - 1 + \frac{8}{x-1}$ đồng biến trên khoảng nào sau đây ?

- A. $(-1; 3)$. B. $(-\infty; 3)$.
C. $(-\infty; -1)$. D. $(-1; +\infty)$.

22. Hàm số $y = \frac{x^2 - 3x}{x+1}$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây ?

- A. $(-3; 1)$. **B.** $(-3; -1)$.
C. $(-\infty; -3)$. D. $(1; +\infty)$.

Điều kiện: $x \neq -1$. Khi đó $y' = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$.

Xét $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$.

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Chọn đáp án B.

23. Hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1}$ nghịch biến trên các khoảng nào dưới đây ?

- A. $(-\infty; -1), (-1; +\infty)$. B. $(-2; 0)$.
C. $(-2; -1), (-1; 0)$. D. $(0; +\infty)$.

24. Hàm số $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x-1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

- A. $(-\infty; 1)$. **B.** $(0; 1)$.
C. $(0; 2)$. D. $(1; +\infty)$.

BÀI TẬP VỀ NHÀ 4

- Câu 20.** (HKI – THPT Trần Phú – Tp. HCM năm 2019) Cho hàm số $y = x + \frac{4}{x+1}$. Khẳng định nào sau đây **đúng** ?
- A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-3; 1)$.
- B. Hàm số đã cho luôn đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
- C. Hàm số đã cho luôn nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- D. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -3)$ và $(1; +\infty)$.
- Câu 21.** (HKI – THPT Tân Bình – Tp. HCM năm 2018) Cho hàm số $y = -x + \frac{2}{x}$. Khẳng định nào sau đây **đúng** ?
- A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- B. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
- C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- D. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.
- Câu 22.** (THPT Chuyên Vĩnh Phúc – Vĩnh Phúc năm học 2020) Hàm số $y = \frac{2}{x^2 + 1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?
- A. $(-1; 1)$.
- B. $(-\infty; +\infty)$.
- C. $(0; +\infty)$.
- D. $(-\infty; 0)$.
- Câu 23.** (THPT Ninh Giang – Hải Dương năm học 2019) Tìm tất cả các khoảng nghịch biến của hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$?
- A. $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
- B. $(-2; 0)$.
- C. $(-2; -1)$ và $(-1; 0)$.
- D. $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$.
- Câu 24.** (Sở GD & ĐT Nam Định) Tìm tất cả các khoảng đồng biến của hàm số $y = \frac{x}{x^2 + 1}$?
- A. $(-1; 1)$.
- B. $(0; +\infty)$.
- C. $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.
- D. $(-\infty; +\infty)$.

25. Hàm số $y = \sqrt{9 - x^2}$ đồng biến trên khoảng

- A. $(-\infty; 0)$. **B.** $(-3; 0)$.
C. $(-3; 3)$. D. $(0; 3)$.

Điều kiện: $9 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$.

Ta có: $y' = \frac{-2x}{2\sqrt{9 - x^2}}, \forall x \in (-3; 3)$.

Cho $y' = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên (xét dấu y'):

x	$-\infty$	-3		0		3	$+\infty$
y'				+	0	-	
y							

Chọn đáp án B.

26. Hàm số $y = \sqrt{4x - x^2}$ nghịch biến trên

- A. $(2; +\infty)$. **B.** $(0; 2)$.
C. $(2; 4)$. D. $(0; 4)$.

27. Hàm số $f(x) = \sqrt{8 + 2x - x^2}$ đồng biến trên khoảng nào sau đây ?

- A. $(1; +\infty)$. **B.** $(1; 4)$.
C. $(-\infty; 1)$. **D.** $(-2; 1)$.

28. Hàm số $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây ?

- A.** $(-\infty; 1)$. **B.** $(5; +\infty)$.
C. $(1; 5)$. D. $(-\infty; 2)$.

29. Hàm số $y = \sqrt{16x - x^2}$ đồng biến trên khoảng nào sau đây ?

- A. $(-\infty; 8)$. **B.** $(0; 8)$.
C. $(8; 16)$. D. $(8; +\infty)$.

30. Hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây ?

- A. $(3; +\infty)$. **B.** $(1; 3)$.
C. $(-\infty; 1)$. D. $(-\infty; 3)$.

BÀI TẬP VỀ NHÀ 5

- Câu 25.** (THPT Phan Đình Phùng – Hà Tĩnh) Hàm số $y = \sqrt{25 - x^2}$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây ?
- A. $(-5; 0)$.
B. $(0; 5)$.
 C. $(-\infty; 0)$.
 D. $(0; +\infty)$.
- Câu 26.** (THPT Chuyên Thái Bình) Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng** ?
- A.** Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$.
 B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.
 C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
 D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.
- Câu 27.** (THPT Hoa Lư A Hà Nội) Hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?
- A. $(-\infty; 1)$.
B. $(1; 2)$.
 C. $(1; +\infty)$.
 D. $(0; 1)$.
- Câu 28.** (THPT Chuyên Thái Bình – Thái Bình năm 2019) Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 1}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng** ?
- A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
 B. Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.
C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
 D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- Câu 29.** (Sở GD & ĐT Vĩnh Phúc lần 2 năm 2019) Tìm tất cả các khoảng đồng biến của hàm số $y = x - 2\sqrt{x} + 2020$?
- A. $(0; 1)$.
 B. $\left(0; \frac{1}{4}\right)$.
 C. $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$.
D. $(1; +\infty)$.
- Câu 30.** (THPT Chuyên Phan Bội Châu – Nghệ An) Cho hàm số $y = \sqrt{2x - x^2} - x$. Hỏi hàm số nghịch biến trên khoảng nào sau đây ?
- A. $(0; 1)$.
 B. $(-\infty; 1)$.
 C. $(1; +\infty)$.
D. $(1; 2)$.

- 31.** Tìm khoảng nghịch biến của hàm số $f(x)$, biết $f'(x) = x(x+1)^2(x-1)^3, \forall x \in \mathbb{R}$.
- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-1; 0)$.
C. $(0; 1)$. D. $(1; +\infty)$.

Ta có: $f'(x) = x(x+1)^2(x-1)^3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (x+1)^2 = 0 \\ (x-1)^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+1 = 0 \\ x-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên (xét dấu $f'(x)$):

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Chọn đáp án C.

Cần nhớ: Xét dấu "Mỗi ô thử 1 điểm".

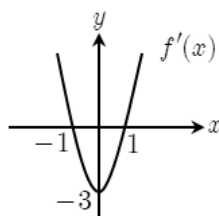
- 32.** Tìm khoảng đồng biến của hàm số $y = f(x)$, biết $f'(x) = x^2(x^2 - 4)(x - 2)^2, \forall x \in \mathbb{R}$.
- A.** $(-\infty; -2)$. B. $(-2; 2)$.
 C. $(-2; +\infty)$. D. $(0; 2)$.

- 33.** Tìm khoảng đồng biến của hàm số $f(x)$, biết $f'(x) = (x-1)(x^2 - 5x + 4), \forall x \in \mathbb{R}$.
- A. $(1; 4)$. **B.** $(4; +\infty)$.
 C. $(1; +\infty)$. D. $(-\infty; 4)$.

- 34.** Tìm khoảng nghịch biến của hàm số $f(x)$, biết $f'(x) = (x-3)^2(x^3 - 8), \forall x \in \mathbb{R}$.
- A. $(-\infty; 3)$. B. $(3; +\infty)$.
 C. $(2; 3)$. **D.** $(-\infty; 2)$.

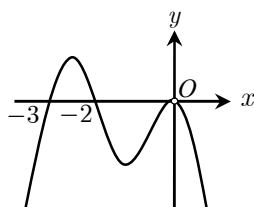
- 35.** Cho hàm số đa thức $f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Tìm khẳng định **đúng** ?

- A. Hàm số $f(x)$ nghịch biến $(-\infty; 0)$.
 B. Hàm số $f(x)$ đồng biến $(0; +\infty)$.
C. Hàm số $f(x)$ đồng biến $(1; +\infty)$.
 D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến $(-\infty; -1)$.



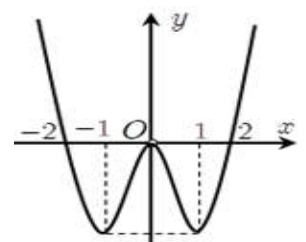
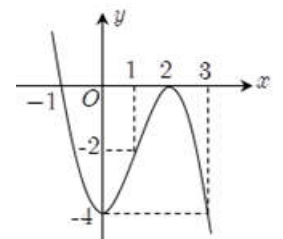
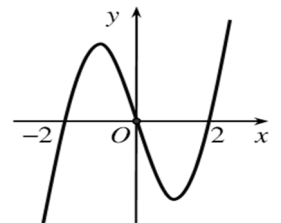
- 36.** Cho hàm số đa thức $f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Tìm khẳng định **đúng** ?

- A. Hàm số $f(x)$ đồng biến $(-2; 0)$.
B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến $(0; +\infty)$.
 C. Hàm số $f(x)$ đồng biến $(-\infty; 3)$.
 D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến $(-3; -2)$.



BÀI TẬP VỀ NHÀ 6

- Câu 31.** (THPT Chuyên Thái Bình 2019) Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = (x-2)(x+5)(x+1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?
- A. $(2; +\infty)$. B. $(-2; 0)$.
C. $(0; 1)$. D. $(-6; -1)$.
- Câu 32.** (THPT Đoàn Thượng – Hải Dương năm học 2019 – 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-1)^3(2-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?
- A. $(2; +\infty)$. B. $(-1; 1)$.
C. $(1; 2)$. D. $(-\infty; -1)$.
- Câu 33.** Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)^2(x+2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây **đúng** ?
- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2; -1)$, $(0; +\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$, $(0; +\infty)$.
- Câu 34.** Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) = (x^2 - 1)(x+1)(5-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng** ?
- A. $f(1) < f(4) < f(2)$.
B. $f(1) < f(2) < f(4)$.
C. $f(2) < f(1) < f(4)$.
D. $f(4) < f(2) < f(1)$.
- Câu 35.** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Mệnh đề nào dưới đây **đúng** ?
- A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.
B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 1)$.
C. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
- Câu 36.** Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ là đường cong như hình vẽ bên dưới. Hỏi khẳng định nào **đúng** ?
- A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.
B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2; 2)$.
C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- Câu 37.** Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong như hình vẽ. Hỏi mệnh đề nào **đúng** ?
- A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.
B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2; 2)$.



Dạng toán 2. Tìm tham số m để hàm số đơn điệu trên miền xác định của nó

① Tìm tham số m để hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên tập xác định ?

Phương pháp:

— **Bước 1.** Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Tính đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

— **Bước 2.** Ghi điều kiện để hàm đơn điệu, chẳng hạn:

$$\text{Để } f(x) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R} \Rightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'} > 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow m ?$$

$$\text{Để } f(x) \text{ nghịch biến trên } \mathbb{R} \Rightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'} < 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow m ?$$

⌘ **Lưu ý:** Dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$$\bullet \quad f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \quad \bullet \quad f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}.$$

- Nếu hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có a chứa tham số thì vui lòng chia ra hai trường hợp. Đó là trường hợp $a = 0$ để xét tính đúng sai (nhận, loại m) và trường hợp $a \neq 0$ (sử dụng dấu tam thức bậc hai). Sau khi giải xong, hợp hai trường hợp lại.

② Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ đơn điệu mỗi khoảng xác định của nó ?

Phương pháp:

— **Bước 1.** Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$. Tính đạo hàm $y' = \frac{a.d - b.c}{(cx + d)^2}$.

— **Bước 2.** Ghi điều kiện để hàm đơn điệu. Chẳng hạn:

Để $f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó

$$\Rightarrow y' > 0, \forall x \in \mathcal{D} \Leftrightarrow a.d - b.c > 0 \Rightarrow m ?$$

Để $f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó

$$\Rightarrow y' < 0, \forall x \in \mathcal{D} \Leftrightarrow a.d - b.c < 0 \Rightarrow m ?$$

③ Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ đồng biến trên $(\alpha; \beta)$.

— **Bước 1.** Tìm điều kiện $x \neq -\frac{d}{c}$ và tính đạo hàm $y' = \frac{ad - cb}{(cx + d)^2}$.

$$\text{— Bước 2. Hàm số đồng biến trên } (\alpha; \beta) \Rightarrow \begin{cases} y' > 0 \\ x \neq -\frac{d}{c} \\ x \in (\alpha; \beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ad - cb > 0 \\ -\frac{d}{c} \notin (\alpha; \beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ad - cb > 0 \\ -\frac{d}{c} \leq \alpha \\ -\frac{d}{c} \geq \beta \end{cases} \Rightarrow m.$$

⌘ **Lưu ý:** Lý luận tương tự cho trường hợp nghịch biến hoặc trên $(-\infty; \alpha)$, $[\alpha; +\infty)$, ...

- 37.** Tìm tất cả giá trị m để hàm số $y = \frac{mx + 4m}{x + m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định ?
- A. $m < 0$. B. $0 < m < 4$.
C. $0 \leq m \leq 4$. D. $m > 4$.

Lời giải tham khảoĐiều kiện: $x \neq -m$.

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định

$$\Leftrightarrow y' = \frac{m^2 - 4m}{(x + m)^2} < 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4. \text{ Chọn đáp án B.}$$

- 38.** Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{mx - 3m + 4}{x + m}$ nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$?
- A. $-4 < m < 1$. B. $-4 < m < 0$.
C. $-4 \leq m \leq 0$. D. $-4 < m \leq 0$.

Lời giải tham khảo

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow y' = \frac{m^2 + 3m - 4}{(x + m)^2} < 0, \forall \begin{cases} x \in (-2; 0) \\ x \neq -m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 3m - 4 < 0 \\ -m \leq -2 \vee -m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < m < 1 \\ m \leq 0 \vee m \geq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -4 < m \leq 0. \text{ Chọn đáp án D.}$$

- 39.** (Sở GD & ĐT Vĩnh Phúc 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm $y = \frac{m^2x - 4}{x - 1}$ đồng biến trên các khoảng xác định ?
- A. 1. B. 3. C. 5. D. 7.

- 40.** (Sở GD & ĐT Hà Nội 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{x - 2}{x - m}$ đồng biến trên $(-\infty; -1)$?
- A. 4. B. 2. C. 3. D. Vô số.

- 41.** (Chuyên Thái Bình 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = \frac{x + m}{mx + 4}$ đồng biến trên các khoảng xác định ?
- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

- 42.** (Sở GD & ĐT Phú Thọ 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{mx - 2m - 3}{x - m}$ đồng biến trên $(2; +\infty)$?
- A. 4. B. 3. C. 5. D. 11.

- 43.** (THPT Kinh Môn Hải Dương) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x + m}{x + 2}$ đồng biến trên từng khoảng xác định ?
- A. $m \leq 2$. B. $m > 2$.
C. $m < 2$. D. $m \geq 2$.

- 44.** (Đề thi THPT 2020 – Mã 102 câu 39) Tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x + 5}{x + m}$ đồng biến trên $(-\infty; -8)$ là
- A. $(5; +\infty)$. B. $(5; 8]$.
C. $[5; 8)$. D. $(5; 8)$.

45. (Sở GD & ĐT Bắc Giang) Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{mx - 5m + 6}{x + m}$ nghịch biến trên các khoảng xác định ? A. $(-\infty; -6)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(-6; +\infty)$. D. $(-6; 1)$.	46. (Đề thi THPT 2020 – Mã 101 câu 40) Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x + 4}{x + m}$ đồng biến trên $(-\infty; -7)$ là A. $[4; 7)$. B. $(4; 7]$. C. $(4; 7)$. D. $(4; +\infty)$.
47. (Chuyên Hùng Vương – Phú Thọ) Tất cả các giá trị m sao cho hàm số $f(x) = \frac{x - m}{x + 1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định là A. $m > 1$. B. $m > -1$. C. $m \geq 1$. D. $m \geq -1$.	48. (Sở GD & ĐT Thanh Hóa năm 2020) Tập hợp m để hàm số $y = \frac{(m + 1)x + 2m + 2}{x + m}$ nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$ là A. $(1; 2)$. B. $[1; +\infty)$. C. $[1; 2)$. D. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.
49. (Đề thi THPT năm 2017 – Mã đề 104) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m sao cho hàm số $y = \frac{mx + 4m}{x + m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó ? A. 5. B. 4. C. 3. D. Vô số.	50. (Sở GD & ĐT Gia Lai năm 2020) Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{mx - 4}{m - x}$ nghịch biến trên $(-3; 1)$? A. $(1; 2)$. B. $[1; 2)$. C. $[1; 2]$. D. $(1; 2]$.

- 51.** Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-10;10)$ để hàm số $y = \frac{2\cos x - 1}{\cos x - m}$ đồng biến $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
- A. 8. B. 10. **C. 9.** D. 11.

Đặt $u = \cos x \Rightarrow u'_x = -\sin x < 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Do $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow u \in (0;1) \Rightarrow y = \frac{2u - 1}{u - m}$.

YCBT $\Leftrightarrow y' = \frac{-2m + 1}{(u - m)^2} \cdot u'_x > 0, \forall \begin{cases} u \neq m \\ u \in (0;1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2m + 1 < 0 \\ m \leq 0 \vee m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ m \leq 0 \vee m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1.$

Do $m \in \mathbb{Z}, m \in (-10;10) \Rightarrow m \in \{1;2;3;\dots;9\}$.

Có $(9 - 1) + 1 = 9$ số nguyên m . **Chọn C.**

- 52.** Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-10;10)$ để hàm số $y = \frac{2\cos x + 3}{2\cos x - m}$ đồng biến $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$.
- A. 14. **B. 12.** C. 8. D. 10.

- 53.** Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-7;7)$ để hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.
- A. 6. B. 7. **C. 8.** D. 9.

- 54.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-8;8)$ để hàm số $y = \frac{\sin x - 3}{\sin x - m}$ đồng biến $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.
- A. 8. B. 9. **C. 10.** D. 11.

- 55.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-8;8)$ để hàm $y = \frac{\sin 2x - 1}{\sin 2x + m}$ đồng biến $\left(\frac{-\pi}{12}; \frac{\pi}{4}\right)$.
- A. 5. B. 6. **C. 7.** D. 8.

- 56.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-9;9)$ để hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{m \tan x - 2}$ đồng biến $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.
- A. 1.** B. 2. C. 7. D. 8.

- 57. (Đề tham khảo THPT – Bộ GD & ĐT lần 2 năm 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?
- A. 5. B. 4. C. 3. D. 2.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x) = x^2 + 2mx + 4 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \text{ (LĐ)} \\ \Delta = 4m^2 - 16 \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$. Vậy có 5 giá trị nguyên của m . **Chọn đáp án A.**

- 58. (Đề thi THPT năm 2017 – Mã đề 123)** Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m + 9)x + 5$ với m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?
- A. 4. B. 6. C. 7. D. 5.

- 59.** Cho hàm số $y = x^3 - (m + 1)x^2 + 3x + 1$, với m là tham số. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Tìm số phần tử của S .
- A. 7. B. 6. C. Vô số. D. 5.

- 60. (Sở GD & ĐT Cần Thơ năm 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thỏa mãn $|m| < 10$ sao cho hàm số $y = x^3 + x^2 + mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?
- A. 3. B. 5. C. 7. D. 9.

- 61.** Tìm các giá trị của m để hàm số $f(x) = (m^2 - 4)x^3 + 3(m - 2)x^2 + 3x - 4$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?
- A. $m \geq 2$. B. $m \leq 2$. C. $m > 2$. D. $m < 2$.

- 62. (Đề tham khảo Bộ GD & ĐT năm 2017)** Hỏi có bao nhiêu số nguyên của tham số m để hàm số $y = (m^2 - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?
- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

BÀI TẬP VỀ NHÀ 7

- Câu 38.** (THPT Chuyên Nguyễn Bình Khiêm – Quảng Nam) Cho hàm số $y = \frac{mx - 2}{x + m - 3}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó ?
- A. $1 \leq m \leq 2$. B. $m = 1$.
 C. $1 < m < 2$. D. $m = 2$.
- Câu 39.** (HK1 THPT Trần Phú – Tp. HCM) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{mx + 4}{x + m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó ?
- A. 2. B. 3.
 C. 5. D. Vô số.
- Câu 40.** (HK1 THPT Nguyễn Thượng Hiền – Tp. HCM) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{mx + 7m - 8}{x - m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó ?
- A. 8. B. 5.
 C. 3. D. Vô số.
- Câu 41.** (Đề thi THPT QG năm 2017 mã đề 105) Cho hàm số $y = \frac{mx - 2m - 3}{x - m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S ?
- A. 4. B. Vô số.
 C. 3. D. 5.
- Câu 42.** (THPT Lê Lợi – Thanh Hóa năm 2019) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{mx - 4}{x - m}$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$?
- A. $m \in (2; +\infty)$. B. $m \in (-\infty; -2)$.
 C. $m \in (-2; 0)$. D. $m \in (-2; 2)$.
- Câu 43.** (THPT Quốc Học Quy Nhơn – Bình Định) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{mx - 9}{x - m}$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$?
- A. $-3 < m \leq 2$. B. $-3 < m < 2$.
 C. $m \leq 2$. D. $2 \leq m < 3$.
- Câu 44.** (THPT Chuyên Thái Nguyên) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $f(x) = \frac{mx + 9}{x + m}$ luôn nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$?
- A. $-3 \leq m \leq -1$. B. $-3 < m \leq -1$.
 C. $-3 \leq m \leq 3$. D. $-3 < m < 3$.
- Câu 45.** (Đề thi THPT QG năm 2018 – Mã đề 101) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x + 2}{x + 5m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -10)$?
- A. 2. B. Vô số.
 C. 1. D. 3.

Câu 46. (Đề THPT năm 2020 – Mã đề 103 câu 41) Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để

hàm số $y = \frac{x+2}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -5)$ là

- A. $(2; 5]$. B. $[2; 5)$.
C. $(2; +\infty)$. D. $(2; 5)$.

Câu 47. Tìm tất cả các giá trị tham số m sao cho hàm số $y = \frac{\sin x - 2}{\sin x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

- A. $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m < 2$.
B. $m \leq 0$.
C. $1 \leq m < 2$.
D. $m > 2$.

Câu 48. (Đề minh họa – Bộ GD & ĐT năm 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho

hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$?

- A. $m \geq 2$. B. $m \leq 0$.
C. $1 \leq m < 2$. D. $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m < 2$.

Câu 49. (THPT Lương Thế Vinh – Hà Nội) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để hàm

số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m+3)x + 2$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. Vô số. B. 5.
C. 3. D. 7.

Câu 50. (THPT Chuyên Trần Phú – Hải Phòng) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm

số $y = -\frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (3m+2)x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. 2. B. 4.
C. 7. D. Vô số.

Câu 51. (THPT Chuyên Lương Thế Vinh – Đồng Nai) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để

hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - mx^2 + (3-2m)x + m$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. 1.
B. Vô số.
C. 0.
D. 2.

Câu 52. (THPT Chuyên KHTN – Hà Nội) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số

$y = (m-1)x^3 + (m-1)x^2 + x + m$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. $m < 1$ hoặc $m \geq 4$.
B. $1 < m \leq 4$.
C. $1 < m < 4$.
D. $1 \leq m \leq 4$.

Dạng toán 3. Một số bài toán vận dụng & vận dụng cao thường gặp

- Câu 1.** Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + 2mx - 3m + 41$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài bằng 3. Tổng tất cả phần tử của S bằng
- A. 9.
B. -1.
C. -8.
D. 8.
- Câu 2.** Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m+1)x^2 + 4x + 7$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài bằng $2\sqrt{5}$. Tổng tất cả phần tử của S bằng
- A. 4.
B. 2.
C. -1.
D. -2.
- Câu 3.** Tìm tất cả các giá trị m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 2$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?
- A. $m \geq 3$.
B. $m \neq 3$.
C. $m \leq 3$.
D. $m < 3$.
- Câu 4.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 - (m^2 - 3m + 2)x + 5$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$?
- A. 3.
B. 2.
C. 4.
D. 1.
- Câu 5.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 + 2m)x$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$?
- A. $[-1; 0]$.
B. $\emptyset$.
C. $\{-1\}$.
D. $[0; 1]$.
- Câu 6.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = x^3 - 3(m+2)x^2 + 3(m^2 + 4m)x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$?
- A. 1.
B. 4.
C. 3.
D. 2.
- Câu 7.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-20; 20)$ sao cho hàm số $y = x - \frac{16x}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?
- A. 9.

- B. 8.
C. 10.
D. 21.

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = 3m \sin^3 x - \sin^2 x + \sin x + m - 2$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$?

- A. $m \leq -3$.
B. $m \leq 0$.
C. $m \geq \frac{1}{3}$.
D. $m \geq -1/3$.

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx - \sin x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $m > 1$.
B. $m \leq -1$.
C. $m \geq 1$.
D. $m \geq -1$.

Câu 10. Cho hàm số $y = \sin x - \sqrt{3} \cos x - mx$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. $m \leq -2$.
B. $m \leq \sqrt{2}$.
C. $m \geq 2$.
D. $m \geq 1$.

Câu 11. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của m để hàm số $y = x^3 + mx - \frac{1}{5x^5}$ đồng biến trên $(0; +\infty)$?

- A. 5.
B. 3.
C. 0.
D. 4.

Câu 12. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \frac{3}{4}x^4 - (m-1)x^2 - \frac{1}{4x^4}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

- A. 1.
B. 2.
C. 3.
D. 4.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x^2 + mx + 9)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương của tham số m để hàm số $y = f(3-x)$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$?

- A. 5.
B. 6.
C. 7.
D. 8.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+2)(x^2 + mx + 5)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = f(x^2 + x - 2)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ là

- A. 3.
B. 4.
 C. 5.
 D. 7.

Câu 15. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $y = x + m\sqrt{x^2 + 3}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. 5.
 B. 7.
C. 3.
 D. 4.

Câu 16. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x + m\sqrt{x^2 + 2}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. 1.
 B. 2.
C. 3.
 D. 4.

Câu 17. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + (5 - m)x + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = f(\sin x)$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

- A. 5.
 B. 3.
C. 4.
 D. 2.

Câu 18. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + (9 - m)x + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $(0; 15)$ để hàm số $y = f(\cos x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

- A. 9.
 B. 6.
C. 8.
 D. 7.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(\sin 2x - m)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right)$?

- A. $-3 \leq m \leq -1$.**
 B. $-2 \leq m \leq -1$.
 C. $-3 \leq m \leq 0$.
 D. $-2 \leq m \leq 0$.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-20; 20]$ để hàm số $y = f(2 \tan x + m)$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$?

- A. 36.
B. 35.
C. 37.
D. 38.

x	$-\infty$	-3	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$				$+\infty$

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, dấu của đạo hàm được cho bởi bảng dưới đây:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $g(x) = f(2x - 2)$ nghịch biến trong khoảng nào dưới đây ?

- A. $(-1; 1)$.
B. $(2; +\infty)$.
C. $(1; 2)$.
D. $(-\infty; -1)$.

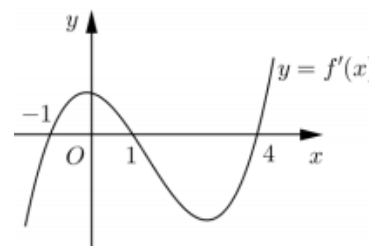
Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu của đạo hàm bên dưới. Hàm số $y = f\left(1 - \frac{x}{2}\right) + x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

- A. $(-4; -2)$.
B. $(2; 4)$.
C. $(-2; 0)$.
D. $(0; 2)$.

x	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	1	0	-2	2	4

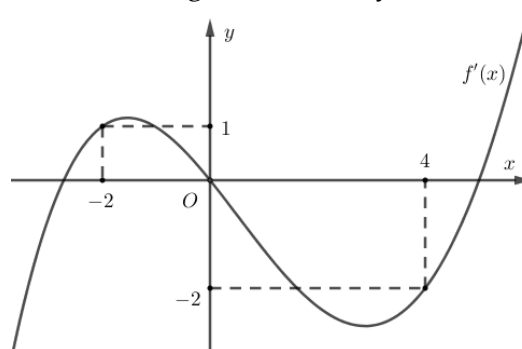
Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Hàm số $y = f(2 - x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

- A. $(1; 3)$.
B. $(2; +\infty)$.
C. $(-2; 1)$.
D. $(3; +\infty)$.



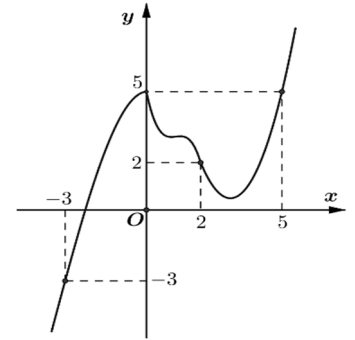
Câu 24. (Câu 50 – Đề tham khảo Bộ GD & ĐT lần 1 năm 2020) Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị bên dưới. Hàm số $y = f(1 - 2x) + x^2 - x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

- A. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$.
B. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.
C. $(-2; -1)$.
D. $(2; 3)$.



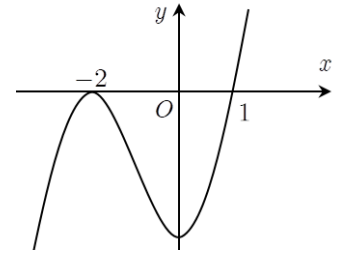
Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(-2x + 1) + (x + 1)(-2x + 4)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

- A. $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$.
 B. $(-\infty; -2)$.
 C. $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.
 D. $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$.



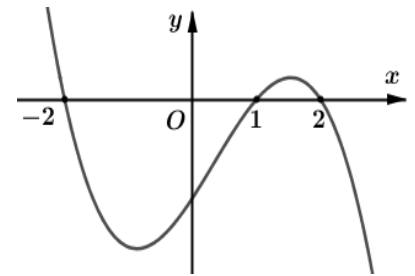
Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(3x + 5)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

- A. $\left(-\frac{7}{3}; +\infty\right)$.
 B. $(-\infty; 10)$.
 C. $\left[\frac{4}{3}; +\infty\right)$.
 D. $(-\infty; 8)$.



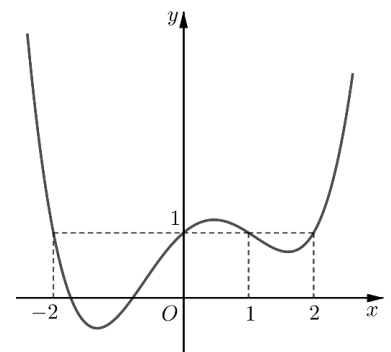
Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(3x - 1)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây ?

- A. $(-\infty; -6)$.
 B. $(1; 5)$.
 C. $(2; 6)$.
 D. $(-\infty; -7)$.



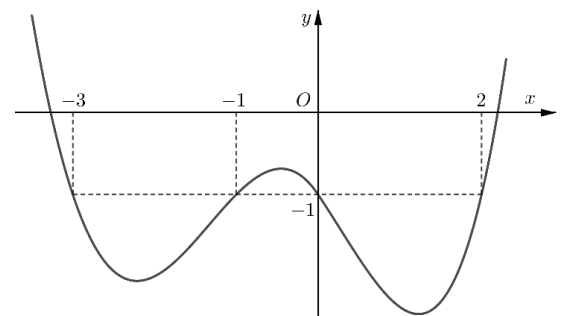
Câu 28. Cho đồ thị hàm số $y = f'(2 - x^3)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x) - x + 1$ nghịch biến trong khoảng nào dưới đây ?

- A. $(1; 2)$.
 B. $(2; +\infty)$.
 C. $(-\infty; 1)$.
 D. $(-4; -1)$.



Câu 29. Cho đồ thị hàm số $y = f'(x^3 - 2)$ như hình vẽ. Hàm số $y = -2f(x) - 2x - 1$ đồng biến trong khoảng nào sau đây ?

- A. $(-3; -1)$.
 B. $(-12; -10)$.
 C. $(5; 7)$.
 D. $(-\infty; -3)$.

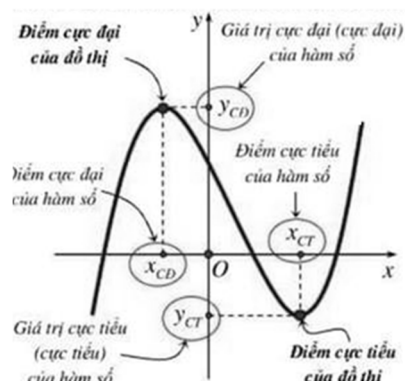
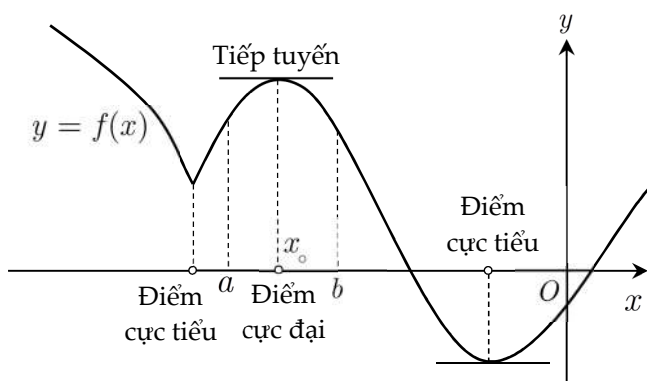


- Câu 30.** Cho hàm số $f(x) = |x^2 - 2mx + m + 2|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-9; 9]$ để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$?
- A. 3.
B. 2.
C. 16.
D. 9.
- Câu 31.** Cho hàm số $y = |x^3 - (2m - 5)x + 2018|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2019; 2019]$ để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 3)$?
- A. 3032.
B. 4039.
C. 0.
D. 2021.
- Câu 32.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \sqrt{x^2 + mx - m^2 + 11}$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?
- A. 8.
B. 6.
C. 7.
D. Vô số.
- Câu 33.** Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số $y = (m^3 - 3m)x^4 + m^2x^3 - mx^2 + x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?
- A. 1.
B. 2.
C. 3.
D. Vô số.
- Câu 34.** Biết $\forall a, b$ thay đổi thì hàm số $f(x) = -x^3 + (x + a)^3 + (x + b)^3$ luôn đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 - 4a - 4b + 2$ bằng
- A. -4.
B. -2.
C. 0.
D. 2.
- Câu 35.** Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-2018; 2018]$ để hàm số $y = \frac{1 - m^3}{4}x^4 + x^3 + \frac{4 - m}{2}x^2 + 2x$ luôn đồng biến $\forall x \in [2; 4]$?
- A. 4037.
B. 2021.
C. 2019.
D. 2020.

§ 2. CỘC TRÒ CỦA HÀM SỐ

☆☆☆

Khái niệm cực đại, cực tiểu



Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $(a; b)$, (có thể a là $-\infty$, b là $+\infty$) và $x_0 \in (a; b)$:

- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0 .
- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 .

Các định lý cần nhớ

1. Định lý 1 (điều kiện cần)

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và đạt cực đại (hoặc cực tiểu) tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

2. Định lý 2 (điều kiện đủ)

Giả sử $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $K = (x_0 - h; x_0 + h)$ và có đạo hàm trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$, với $h > 0$. Khi đó:

- Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.
- Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow y_{CD} \searrow$		

x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow y_{CT} \nearrow$		

Nói cách khác:

- Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 .
- Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0 .

2. Định lý 3

Giả sử $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$, với $h > 0$. Khi đó:

- Nếu $y'(x_0) = 0$, $y''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu.
- Nếu $y'(x_0) = 0$, $y''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại.

Chú ý. Một hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0, hoặc tại đó hàm số không có đạo hàm, chẳng hạn hàm số $y = |x|$.

Dạng toán 1: Tìm điểm cực đại, cực tiểu, giá trị cực đại, giá trị cực tiểu

☆☆☆

★ **Bài toán:** Tìm các điểm cực đại, cực tiểu (nếu có) của hàm số $y = f(x)$.

✎ **Phương pháp:**

- **Bước 1.** Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số.
- **Bước 2.** Tính đạo hàm $y' = f'(x)$. Tìm các điểm x_i , ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- **Bước 3.** Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
- **Bước 4.** Từ bảng biến thiên, suy ra các điểm cực trị (dựa vào nội dung định lý 2).

BÀI TẬP VẬN DỤNG

1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$						

- Hàm số đạt cực tiểu tại điểm: $x = -1$.
- Hàm số đạt cực đại tại điểm: $x = 2$.
- Giá trị CĐ (cực đại) của hàm số: $y_{\text{CD}} = 1$.
- Giá trị CT (cực tiểu) của hàm số: $y_{\text{CT}} = -3$.
- Điểm cực đại của đồ thị hàm số: $M(2; 1)$.
- Điểm cực tiểu đồ thị hàm số: $N(-1; -3)$.

2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	-	0	+				
$f(x)$	$-\infty$			3			-2			$+\infty$

- Hàm số đạt cực tiểu tại điểm:
- Hàm số đạt cực đại tại điểm:
- Giá trị CĐ (cực đại) của hàm số:
- Giá trị CT (cực tiểu) của hàm số:
- Điểm cực đại của đồ thị hàm số:
- Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số:

3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$+$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$-$
y								

Diagram illustrating the mapping of x to y based on the table above:

- $x = -\infty \rightarrow y = 1$
- $x = -1 \rightarrow y = -\infty$
- $x = 0 \rightarrow y = +\infty$
- $x = 1 \rightarrow y = +\infty$
- $x = +\infty \rightarrow y = -\infty$

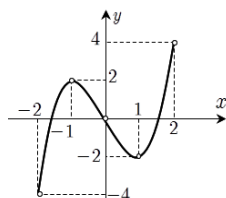
4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		$+$	0	$-$	$ $	$-$	0	$+$	
y			-4		$+\infty$		4		$+\infty$
	$-\infty$			$+\infty$					

- Hàm số đạt cực tiểu tại điểm:
- Hàm số đạt cực đại tại điểm:
- Giá trị CĐ (cực đại) của hàm số:
- Giá trị CT (cực tiểu) của hàm số:
- Điểm cực đại của đồ thị hàm số:
- Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số:

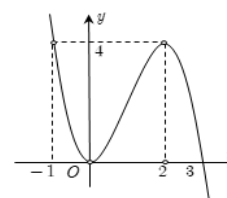
- Hàm số đạt cực tiểu tại điểm:
- Hàm số đạt cực đại tại điểm:
- Giá trị CĐ (cực đại) của hàm số:
- Giá trị CT (cực tiểu) của hàm số:
- Điểm cực đại của đồ thị hàm số:
- Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số:

5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị:



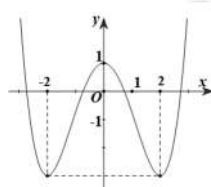
- Hàm số đạt cực tiểu tại điểm:
- Hàm số đạt cực đại tại điểm:
- Giá trị CĐ (cực đại) của hàm số:
- Giá trị CT (cực tiểu) của hàm số:
- Điểm cực đại của đồ thị hàm số:
- Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số:

6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị:



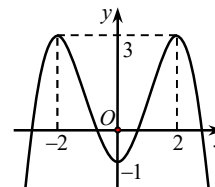
- Hàm số đạt cực tiểu tại điểm:
- Hàm số đạt cực đại tại điểm:
- Giá trị CĐ (cực đại) của hàm số:
- Giá trị CT (cực tiểu) của hàm số:
- Điểm cực đại của đồ thị hàm số:
- Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số:

7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị:



- Hàm số đạt cực tiểu tại điểm:
- Hàm số đạt cực đại tại điểm:
- Giá trị CĐ (cực đại) của hàm số:

8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị:



- Hàm số đạt cực tiểu tại điểm:
- Hàm số đạt cực đại tại điểm:
- Giá trị CĐ (cực đại) của hàm số:

8. Giá trị cực đại của hàm $y = x^3 - 3x + 1$ bằng

A. 3. B. -1. C. 1. D. 4.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = -1 \\ x = -1 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	3	-1	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow$ giá trị cực đại $y_{\text{CĐ}} = 3$.

Chọn đáp án A.

9. Giá trị cực đại hàm số $y = x^3 - 12x - 1$ bằng

A. -17. B. -2. C. 45. D. 15.

10. Điểm cực đại của đồ thị hàm số:

$y = -x^3 - 3x^2 + 1$ là

- A. $x = 0$. B. $M(-2; -19)$.
 C. $N(0; 1)$. D. $x = -2$.

11. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số:

$y = -x^4 + 2x^2 + 5$ là

- A. $A(-1; 6)$. B. $x = 0$.
 C. 5. D. $B(0; 5)$.

12. Điểm cực đại của đồ thị hàm số:

$y = x^4 - 4x^2 + 3$

- A. $(0; -1)$. B. $(0; 3)$.
 C. $(\sqrt{2}; -1)$. D. $(-\sqrt{2}; -1)$.

13. Giá trị của tiểu của hàm số

$y = -x^4 + 2x^2 + 2$ bằng

- A. 2. B. $(0; 2)$.
 C. $(1; 3)$. D. 3.

14. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$. Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

- A. $x = -1$. B. $x = -2$.
 C. $x = 0$. D. $(-2; -3)$.

15. Gọi A , a lần lượt là giá trị cực đại, giá trị cực tiểu của hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$. Giá trị của

$A^2 - 2a$ bằng

- A. 6. B. 7. C. 8. D. 9.

16. Giá trị cực đại của $y = \sqrt{3 - 2x - x^2}$ bằng

- A. 0. B. 2. C. 3. D. $\sqrt{3}$.

17. Cực đại của hàm số $y = x\sqrt{1 - x^2}$ bằng

- A. $\sqrt{2}/2$. B. $-\sqrt{2}$. C. $-0,5$. D. $0,5$.

BÀI TẬP VỀ NHÀ 1**Câu 1.** (Đề thi THPT QG năm 2019 – Mã đề 104) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên:

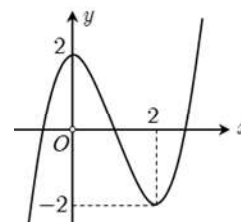
x	$-\infty$	1	3	$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$		2		-2		$+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại điểm

- A. $x = -2$. B. $x = 1$. **C. $x = 3$.** D. $x = 2$.

Câu 2. (Sở GD & ĐT Tp. HCM) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào **đúng**?

- A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 2.
 B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2.
C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và cực tiểu tại $x = 2$.
 D. Hàm số có ba điểm cực trị.

**Câu 3.** (THPT Chuyên Vĩnh Phúc 2018) Hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1. **B. 0.**
 C. 2. D. 3.

Câu 4. (Sở GD & ĐT Bạc Liêu) Điểm cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ là

- A. $x = 11$.
B. $x = 3$.
 C. $x = 7$.
 D. $x = -1$.

Câu 5. (THPT Thăng Long – Hà Nội) Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 - 1$. Điểm cực tiểu của hàm số là

- A. $x = 1$. B. $A(0; -1)$.
 C. $x = -1$. **D. $x = 0$.**

Câu 6. (THPT Nhân Chính Hà Nội) Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - x - 20}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -4)$.
B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 5$.
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$.
 D. Hàm số không có cực trị.

Câu 7. (Sở GD & ĐT Tp. HCM – Cụm 5 năm 2017) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàmsố $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$ bằng

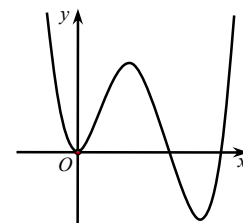
- A. $4\sqrt{5}$.**
 B. 4.
 C. 8.
 D. $5\sqrt{2}$.

- Câu 8.** (THPT Chuyên Lê Quý Đôn – Đà Nẵng) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x) = x(1-x)^2(3-x)^3(x-2)^4$. Điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là
- A. $x = 2$.
 B. $x = 3$.
 C. $x = 1$.
 D. $x = 0$.

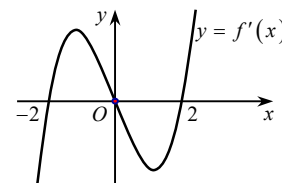
- Câu 9.** (THPT Chuyên Lê Thánh Tông – Quảng Nam 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x+2)(x-1)^{2020}(x-2)^{2021}$. Khẳng định nào đúng?
- A. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = 1$ và đạt cực tiểu tại các điểm $x = \pm 2$.
 B. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(1;2)$ và $(2;+\infty)$.
 C. Hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị.
 D. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;2)$.

- Câu 10.** (THPT Hoa Lư A – Hà Nội) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ như hình vẽ. Mệnh đề nào đúng?

- A. Hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.
 B. Hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.
 C. Hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.
 D. Hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.

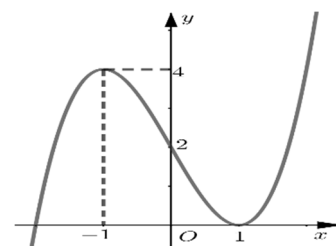


- Câu 11.** (Sở GD & ĐT Hậu Giang 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Khẳng định nào đúng?
- A. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = 1$.
 B. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = 0$.
 C. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = -1$.
 D. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại các điểm $x = \pm 2$.



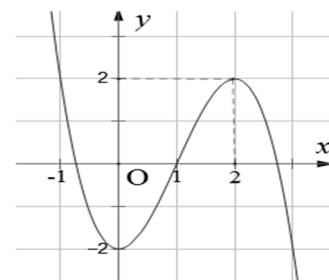
- Câu 12.** (THPT Chuyên Lương Văn Chánh – Phúc Yên 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) - 5x$ là

- A. 2.
 B. 3.
 C. 4.
 D. 1.



- Câu 13.** (THPT Mộ Đức – Quảng Ngãi năm 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây đúng về cực trị của hàm số $g(x) = f(x) + x$.

- A. Hàm số có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu.
 B. Hàm số không có điểm cực đại và một điểm cực tiểu.
 C. Hàm số có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu.
 D. Hàm số có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.



Câu 14. (THPT Chuyên Vĩnh Phúc năm 2020) Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số

$$y = -\frac{1}{3}x^3 + x - \frac{2}{3}. \text{ Tọa độ trung điểm của } AB \text{ là}$$

A. $\left(0; -\frac{2}{3}\right).$ **B.** $\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right).$

C. $(0; 1).$ **D.** $(1; 0).$

Câu 15. (THPT Hậu Lộc 2 – Thanh Hóa 2020) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị là (C) . Gọi A, B là các điểm cực trị của (C) . Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A. $2\sqrt{5}.$ **B.** $5.$

C. $4.$ **D.** $5\sqrt{2}.$

Câu 16. (THPT Quảng Xương – Thanh Hóa) Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có hai điểm cực trị A, B . Diện tích tam giác OAB với $O(0; 0)$ là gốc tọa độ bằng

A. $2.$ **B.** $\frac{1}{2}.$

C. $1.$ **D.** $3.$

Câu 17. (THPT Hoa Lư A – Ninh Bình năm 2019) Gọi A và B là các điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$. Diện tích của tam giác OAB (O là gốc tọa độ) bằng

A. $2.$

B. $4.$

C. $1.$

D. $3.$

Câu 18. (THPT Thạch Thành – Thanh Hóa) Đồ thị hàm số $y = x^4 + ax^2 + b$ có điểm cực tiểu là $M(-1; 4)$. Giá trị của $2a + b$ bằng

A. $-1.$

B. $1.$

C. $0.$

D. $2.$

Câu 19. (THPT Kim Liên – Hà Nội) Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + ax + b$ có đồ thị (C) . Biết đồ thị (C) có điểm cực trị là $A(1; 3)$. Giá trị của $4a - b$ bằng

A. $3.$

B. $2.$

C. $4.$

D. $1.$

Câu 20. (Sở GD & GD Thanh Hóa) Đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $A(1; 0)$ và có điểm cực trị $M(-2; 0)$. Giá trị của biểu thức $a^2 + b^2 + c^2$ bằng

A. $25.$

B. $-1.$

C. $7.$

D. $14.$

Dạng toán 2. Tìm tham số m để hàm số đạt cực trị tại điểm $x = x_0$ cho trước

☆☆☆

★ **Bài toán.** Tìm tham số để hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm $x = x_0$?✎ **Phương pháp:**• **Bước 1.** Tìm tập xác định $\mathcal{D}$. Tính đạo hàm y' .• **Bước 2.** Dựa vào nội dung định lí 1:Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và đạt cực đại (hoặc cực tiểu) tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.• **Bước 3.** Với m vừa tìm, thế vào hàm số và thử lại (dựa vào định lí 2 và 3).📖 **Lưu ý:** Đối với hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ta có thể dựa vào định lí 3:

$$\bullet \quad x = x_0 \text{ điểm là cực đại} \Rightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) < 0 \end{cases} \quad \bullet \quad x = x_0 \text{ là cực tiểu} \Rightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) > 0 \end{cases}$$

1. Cho hàm $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$. Tìm m để hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 3$.

- A. $m = 1$. B. $m = 5$.
C. $m \in \{1; 5\}$. D. $m > 3$.

Ta có: $\begin{cases} y' = x^2 - 2mx + m^2 - 4 \\ y'' = 2x - 2m \end{cases}$

Vì $x = 3$ là điểm cực đại của hàm số $\Rightarrow \begin{cases} y'(3) = 0 \\ y''(3) < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 5 = 0 \\ 6 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 5 \Leftrightarrow m = 5 \\ m > 3 \end{cases}$$

Chọn đáp án B.

3. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$.
Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 3$ thì m bằng
A. -1 . B. 5 . C. 1 . D. -7 .

2. Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - mx^2 + (m^2 - m + 1)x$.
Tìm m để hàm đạt cực đại tại điểm $x = 1$.

- A. $m = 2$. B. $m = 3$.
C. $m = -1$. D. $m = 0$.

4. Hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^4 + 2m - 5$ đạt cực tiểu tại điểm $x = -1$ khi
A. $m = -1$. B. $m \neq -1$.
C. $m = 1$. D. $m \neq 1$.

BÀI TẬP VỀ NHÀ 2

- Câu 21.** (Đề thi THPT Quốc Gia năm 2017 – Mã đề 102 câu 32) Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại điểm $x = 3$.
- A. $m = 1$. B. $m = -1$.
 C. $m = 5$. D. $m = -7$.
- Câu 22.** (THPT Ngô Sĩ Liên – Bắc Giang) Biết hàm số $y = x^3 - 2x^2 + mx + 3$ đạt cực tiểu tại $x = 1$. Giá trị của m bằng
- A. 4. B. 3.
 C. 2. D. 1.
- Câu 23.** (Chuyên Lê Quý Đôn Đà Nẵng) Tìm tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x$ đạt cực đại tại điểm $x_0 = 1$.
- A. $m \neq 0, m \neq 2$. B. $m = 2$.
 C. $m = 0$. D. $m = 0, m = 2$.
- Câu 24.** (THPT Kiến An – Hải Phòng năm 2019) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx^3 + x^2 + (m^2 - 6)x + 1$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.
- A. $m = 1$. B. $m = -4$.
 C. $m = -2$. D. $m = 2$.
- Câu 25.** (THPT Việt Trì – Phú Thọ 2020) Cho hàm số $y = x^3 - 3(m + 1)x^2 + 3(m - 1)^2x$. Hàm số đạt cực trị tại điểm có hoành độ $x = 1$ khi
- A. $m = 1$. B. $m = 0, m = 4$.
 C. $m = 4$. D. $m = 0, m = 1$.
- Câu 26.** (THPT Chuyên Biên Hòa – Hà Nam) Hàm số $y = x^3 + 2ax^2 + 4bx - 2019$ đạt cực trị tại điểm $x = -1$. Khi đó hiệu $a - b$ bằng
- A. -1 . B. $\frac{4}{3}$.
 C. $\frac{3}{4}$. D. $-\frac{3}{4}$.
- Câu 27.** (Sở GD & ĐT Hà Nội) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 + mx^2$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.
- A. $m \leq 0$.
 B. $m = 0$.
 C. $m \geq 0$.
 D. $m > 0$.
- Câu 28.** (THPT Quảng Xương I – Thanh Hóa) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{4}(m - 1)x^4$ đạt cực đại tại $x = 0$.
- A. $m < 1$. B. $m > 1$.
 C. Không có m . D. $m = 1$.
- Câu 29.** (THPT Ngô Sĩ Liên – Bắc Giang) Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 5x + 1$ là

A. $y = -\frac{16}{3}x + \frac{8}{3}$. B. $y = \frac{16}{3}x + \frac{8}{3}$.

C. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$. D. $y = \frac{1}{3}x - \frac{8}{3}$.

Câu 30. (THPT Trần Phú – Tp. Hồ Chí Minh) Tìm giá trị thực của tham số m sao cho đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ song song với đường thẳng $d: 4x + y - 3 = 0$.

A. $m = 1$. B. $m = 2$.

C. $m = 3$. D. $m = 4$.

Câu 31. (THPT Lương Văn Chánh Phú Yên) Biết đường thẳng $d: y = (3m + 1)x + 3$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$. Giá trị của m bằng

A. $\frac{1}{6}$. B. $-\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{3}$. D. $-\frac{1}{6}$.

Câu 32. (Tạp Chí Toán Học & Tuổi Trẻ) Cho hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 4$. Biết có hai giá trị m_1, m_2 của tham số m để đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số tiếp xúc với đường tròn $(C): (x - m)^2 + (y - m - 1)^2 = 5$. Tổng $m_1 + m_2$ bằng

A. 0.

B. 10.

C. 6.

D. -6.

Câu 33. (Toán Học Bắc Trung Nam) Đồ thị hàm số $y = \frac{3x^2 - x + 5}{x - 2}$ có hai điểm cực trị A, B nằm trên đường thẳng d có phương trình $d: y = ax + b$. Giá trị của $a + b$ bằng

A. -1.

B. 1.

C. 3.

D. 5.

Câu 34. (THPT Chuyên KHTN Hà Nội) Cho hàm số $y = \frac{mx^2 - 2x + m - 1}{2x + 1}$. Tìm tham số m để đường thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số này vuông góc với đường phân giác của góc phần tư thứ nhất trong mặt phẳng tọa độ.

A. $m = -\frac{1}{2}$.

B. $m = 1$.

C. $m = -1$.

D. $m = \frac{1}{2}$.

Dạng toán 3. Biện luận hoành độ cực trị hoặc tung độ cực trị☞ **Cần nhớ:****BÀI TẬP VẬN DỤNG**

1. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3mx + m^2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-5; 5)$ để hàm số có 2 điểm cực trị?

A. 5. B. 6. **C. 7.** D. 8.

Hàm số đã cho có hai điểm cực trị

$\Leftrightarrow y' = 3x^2 - 6mx + 3m = 0$ có hai nghiệm phân

biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \neq 0 \text{ (LĐ)} \\ \Delta = (-6m)^2 - 36m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 1 \end{cases}$

$\xrightarrow[m \in (-5; 5)]{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-4; -3; -2; -1; 2; 3; 4\}$.

Chọn đáp án C.

2. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (m + 1)x + 2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-10; 10)$ để hàm số có 2 điểm cực trị?

A. 9. B. 10. **C. 11.** D. 12.

3. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2mx + m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thỏa $m < 5$ sao cho hàm số có 2 điểm cực trị ? A. 5. B. 6. C. 9. D. 8.	4. Cho hàm số $y = 2x^3 - (m - 2)x^2 + (6 - 3m)x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thỏa mãn $m < 20$ sao cho hàm số có 2 điểm cực trị ? A. 5. B. 10. C. 15. D. 20.
5. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x + 2011$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số không có điểm cực trị ? A. 5. B. 6. C. 9. D. 8. Hàm số không có điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = x^2 + 2mx + 4 = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \neq 0 \text{ (LĐ)} \\ \Delta = (2m)^2 - 16 \leq 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow 4m^2 - 16 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$. Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$. Chọn A.	6. Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (3m + 2)x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số không có điểm cực trị ? A. 2. B. 3. C. 7. D. Vô số.
7. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-5; 5)$ để hàm số $y = x^3 + 6x^2 + 3(m + 2)x - m - 1$ không có điểm cực trị ? A. 2. B. 3. C. 7. D. 8.	8. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-9; 9)$ để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2mx + m$ không có điểm cực trị ? A. 3. B. 5. C. 7. D. 9.
9. Tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = (m + 2)x^3 + 3x^2 + mx - 5$ có điểm cực tiểu nằm bên trái điểm cực đại là A. $-3 < m < 1$. B. $-3 \leq m \leq 1$. C. $-3 < m < -2$. D. $-3 \leq m < -2$.	10. Tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 + 3x + 1$ có điểm cực đại nằm bên trái điểm cực tiểu là A. $0 < m < 1$. B. $m > 1$. C. $m < 1$. D. $m < 0 \vee m > 1$.

11. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-9;9)$ sao cho hàm số $y = x^4 + (m+1)x^2 + 4$ có 3 điểm cực trị ?
 A. 6. B. 8. **C. 7.** D. 9.

12. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $y = mx^4 + (m-2)x^2 + 1$ có 3 điểm cực trị ?
A. 1. B. 3. C. 5. D. 7.

13. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-5;5)$ để hàm số $y = m^2x^4 + (m-4)x^2 + m$ có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại ?
 A. 6. B. 8. **C. 7.** D. 5.

14. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-6;6)$ để hàm số $y = mx^4 + (m^2-9)x^2 + m^2$ có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu ?
A. 2. B. 4. C. 6. D. 8.

15. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-5;5)$ để đồ thị hàm số $y = x^3 - 4x^2 + (1-m^2)x + 1$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía so với trục tung Oy ?
 A. 3. B. 4. **C. 5.** D. 6.

16. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = -x^3 + x^2 - (m^2-3m)x - 4$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía so với trục tung Oy ?
A. 2. B. 5. C. 7. D. Vô số.

17. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị $y = \frac{2x^3}{3} + (m+1)x^2 + (m^2+4m+3)x$ có 2 điểm cực trị nằm bên phải trục tung Oy ?
A. 1. B. 3. C. 5. D. Vô số.

18. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x$ có hai điểm cực trị nằm bên trái trục tung Oy ?
 A. 2. B. 3. C. Vô số. **D. 0.**

19. Tính tổng các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m^2 - 2m$ có giá trị cực đại bằng 3.

- A. 2. B. -2. C. 3. D. -3.

20. Tính tích các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + m^2 - 4m$ có giá trị cực đại bằng 9.

- A. 5. B. 4. C. -4. D. -5.

21. Tham số m thuộc khoảng nào sau đây thì hàm số $y = x^3 - 3x + 1 - m$ có giá trị cực tiểu (y_{CT}) thỏa mãn $2y_{CT} + 8 = 0$?

- A. (2;5). B. (0;3). C. $(-\infty;0)$. D. (5;9).

22. Tổng các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m^2 + 2m$ có giá trị cực tiểu (y_{CT}) thỏa mãn $y_{CT} = -4$ bằng

- A. 2. B. -4. C. 4. D. -2.

23. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2m$ có giá trị cực đại và giá trị cực tiểu trái dấu ?

- A. 1. B. 3. C. 5. D. Vô số.

24. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x + 1 - m$ có giá trị cực đại và giá trị cực tiểu trái dấu ?

- A. 1. B. 3. C. 5. D. Vô số.

25. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có hai điểm cực trị nằm hai bên trục hoành Ox ?

- A. 3. B. 5. C. 7. D. 9.

26. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = -x^3 + 6x^2 + m - 1$ có hai điểm cực trị nằm hai bên trục hoành Ox ?

- A. 7. B. 9. C. 31. D. 33.

27. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + 1$. Tìm tham số m để hàm số có 2 điểm cực trị x_1 và x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 2$.

- A. $m = \pm 1$. B. $m = 0$.
C. $m = \pm 2$. D. $m = \pm 3$.

YCBT $\Leftrightarrow y' = x^2 - 2mx - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S^2 - 2P = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 + 4 > 0 : (\text{LĐ}) \\ 4m^2 + 2 = 6 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow m = \pm 1$. Chọn đáp án A.

28. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x$. Tìm tham số m để hàm số có 2 điểm cực trị x_1 và x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$.

- A. $m = -1$. B. $m = \pm 2$.
C. $m = \pm 1$. D. $m = 2$.

29. Biết hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có 2 điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13$. Hỏi m thuộc tập hợp nào sau đây ?

- A. $(-1; 7)$. B. $(7; 10)$.
C. $(-15; -7)$. D. $(-7; -1)$.

30. Biết hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 - (2m-1)x$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x_1^2 + x_2^2 - 10(x_1 + x_2)$ bằng

- A. 78. B. 1.
C. -18. D. -22.

31. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - m - 1$ có đồ thị (C) . Biết đồ thị (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt lập có hoành độ lập thành cấp số cộng. Khi đó m thuộc khoảng nào dưới đây ?

- A. $(2; 4)$. B. $(-2; 0)$.
C. $(-5; -2)$. D. $(4; 10)$.

32. Biết đường thẳng $d: y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$ tạo thành hai phần hình phẳng khép kín có diện tích bằng nhau. Khi đó m thuộc khoảng nào dưới đây ?

- A. $(3; +\infty)$. B. $(-1; 3)$.
C. $(-\infty; -3)$. D. $(-3; -1)$.

33. Biết đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị $A(0;1)$, B , C thỏa mãn $BC = 4$. Khi đó tham số m bằng

- A.** 4. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** -2.

34. Biết đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 2$ có ba điểm cực trị $A(0;2)$, B , C thỏa mãn $BC = 2$. Khi đó tham số m bằng

- A.** ± 2 . **B.** 4. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** ± 1 .

35. Biết đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị $A(0;1)$, B , C sao cho trung điểm I của BC thuộc đường thẳng $d: y - 1 = 0$. Khi đó m thuộc tập hợp nào sau đây ?

- A.** $\{-4; 0; 4\}$. **B.** $\{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}$.
C. $\{-1; 0; 1\}$. **D.** $\{-2; 0; 2\}$.

36. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

- A.** $m = \sqrt{2}$, $m = 0$. **B.** $m = -1$, $m = 0$.
C. $m = 0$. **D.** $m = \sqrt{3}$, $m = -1$.

37. Tìm giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.

- A.** $m = 1$. **B.** $m = \sqrt{3}$.
C. $m = 3\sqrt{3}$. **D.** $m = \sqrt[3]{3}$.

38. Cho hàm số $y = x^4 + 2(m-4)x^2 + m + 5$ có đồ thị (C_m) . Giá trị của tham số m để (C_m) có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm bằng

- A.** $\sqrt{5}$. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 3.

BÀI TẬP VỀ NHÀ 3

- Câu 41.** (THPT Kinh Môn – Hải Dương) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m sao cho hàm số $y = (m - 3)x^3 + 2(m^2 - m - 1)x^2 + (m + 4)x - 1$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục tung Oy ?
- A. 4. B. 5.
C. 6. D. 7.
- Câu 42.** (Tập chí Toán Học & Tuổi Trẻ số 484) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - m + 1$ có các giá trị cực trị trái dấu ?
- A. 2. B. 9.
C. 3. D. 7.
- Câu 43.** (THPT Tân Bình – Tp. Hồ Chí Minh) Cho hàm số $y = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 18x + 2m - 1$ có hai điểm cực trị $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ thỏa mãn $x_1 > x_2$. Tìm tham số m sao cho $y_1 + 4y_2 = 10$?
- A. $m = -\frac{21}{2}$. **B.** $m = -\frac{23}{2}$.
C. $m = -11$. D. $m = -12$.
- Câu 44.** (Tập chí Toán Học & Tuổi Trẻ số 484) Tìm điều kiện của tham số thực m sao cho hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 + (m + 1)x^2 + (m^2 + 4m + 3)x - 3$ có các điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm bên phải của trục tung ?
- A. $-5 < m < -1$. **B.** $-5 < m < -3$.
C. $-3 < m < -1$. D. $m < -5$ hoặc $m > -1$.
- Câu 45.** (THPT Chuyên Quốc Học Huế) Có mấy giá trị nguyên của tham số $m \in (-20; 18)$ để đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}(m - 1)x^2 - 3mx - \frac{3m}{2}$ nằm về cùng phía hoành Ox ?
- A. 1. B. 19.
C. 20. **D.** 18.
- Câu 46.** (THPT Nguyễn Khuyến – Tp. Hồ Chí Minh) Tìm các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (1 - m)x + m$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với trục Ox ?
- A.** $-\frac{1}{4} < m \neq 0$. B. $m > 0$.
C. $-\frac{1}{4} < m < 0$. D. $m < -\frac{1}{4}$.
- Câu 47.** (THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ – Hòa Bình) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3(m + 1)x^2 + 12mx - 3m$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 3 < x_2$?
- A. $m \neq 1$. B. $m > 1$.
C. $m < \frac{3}{2}$. **D.** $m > \frac{3}{2}$.
- Câu 48.** (THPT Chuyên Hùng Vương – Phú Thọ 2019) Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?
- A. $m_0 \in (-1; 7)$.

B. $m_0 \in (7;10)$.

C. $m_0 \in (-15;-7)$.

D. $m_0 \in (-7;-1)$.

Câu 49. (THPT Chuyên Vĩnh Phúc năm 2018) Với giá trị nào của tham số m thì đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$ có cực đại, cực tiểu thỏa mãn $|x_{\text{CB}} + x_{\text{CT}}| = 2$?

A. $m = 1$.

B. $m = 2$.

C. $m = -1$.

D. $m = -2$.

Câu 50. (THPT Thăng Long – Hà Nội 2018) Biết hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 - (2m-1)x$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x_1^2 + x_2^2 - 10(x_1 + x_2)$ bằng

A. 78.

B. 1.

C. -18.

D. -22.

Câu 51. (THPT Thanh Miện – Hải Dương) Biết rằng đồ thị hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + x - 2$ có giá trị tuyệt đối của hoành độ hai điểm cực trị là độ dài hai cạnh của tam giác vuông có cạnh huyền là $\sqrt{7}$. Hỏi có bao nhiêu giá trị của tham số m thỏa mãn bài toán ?

A. 3.

B. 1.

C. 0.

D. 2.

Câu 52. (THPT Chuyên Hạ Long – Quảng Ninh) Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2$ có 2 điểm cực trị A và B sao cho 3 điểm A, B và $M(1;-2)$ thẳng hàng ?

A. $m = \sqrt{2}$.

B. $m = -\sqrt{2}$.

C. $m = 2$.

D. $m = \pm\sqrt{2}$.

Câu 53. (THPT Chuyên Hùng Vương – Gia Lai) Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + m$ với m là tham số thực khác 0. Tìm tham số m để trọng tâm tam giác OAB thuộc đường thẳng $3x + 3y - 8 = 0$?

A. $m = 5$.

B. $m = 2$.

C. $m = 6$.

D. $m = 4$.

Câu 54. (THPT Chuyên Trần Phú – Hải Phòng) Gọi m_1, m_2 là các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + m - 1$ có hai điểm cực trị là B, C sao cho tam giác OBC có diện tích bằng 2, với O là gốc tọa độ. Tích số $m_1 m_2$ bằng

A. -15.

B. 12.

C. 6.

D. -20.

Câu 55. (THPT Chuyên Lê Hồng Phong – Nam Định) Tìm tất cả các tham số thực m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị $A(0;1), B, C$ thỏa mãn $BC = 4$?

A. $m = \sqrt{2}$.

B. $m = 4$.

C. $m = \pm 4$.

D. $m = \pm\sqrt{2}$.

Câu 56. (HKI – THPT Nguyễn Thượng Hiền – Tp. Hồ Chí Minh) Có bao nhiêu số thực m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có hai điểm cực trị A và B sao cho tam giác OAB vuông tại O ?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 0.

Câu 57. (HKI – THPT Trần Phú – Tp. Hồ Chí Minh) Gọi S là tập các số thực m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 6m^2x + 2m$ có hai điểm cực trị A và B sao cho $AB = 2\sqrt{34}$. Tích các phần tử của S bằng

A. -1.

B. -4.

C. 1.

D. 2.

Câu 58. (Đề minh họa – Bộ GD & ĐT năm 2017) Cho $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 1)x$. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là A và B sao cho A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $d: y = 5x - 9$. Tích các phần tử của S bằng

A. 27.

B. -27.

C. 9.

D. -9.

Câu 59. (Tạp Chí Toán Học & Tuổi Trẻ số 485) Tìm k để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2kx^2 + k$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận điểm $G\left(0; \frac{1}{3}\right)$ làm trọng tâm ?

A. $k \in \left\{\frac{1}{3}; 1\right\}$.

B. $k \in \left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$.

C. $k \in \left\{ \frac{1}{2}; 1 \right\}.$ **D.** $k \in \left\{ -1; \frac{1}{3} \right\}.$

Câu 60. (TT Diệu Hiền – Cần Thơ năm 2018) Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$ có đồ thị (C) . Tìm tham số m sao cho (C) có ba điểm cực trị A, B, C thỏa mãn $OA = BC$, trong đó O là gốc tọa độ, A là điểm cực trị thuộc trục tung ?

A. $m = 0$ hoặc $m = 2$.

B. $m = 2 \pm 2\sqrt{2}$.

C. $m = 3 \pm 3\sqrt{3}$.

D. $m = 5 \pm 5\sqrt{5}$.

Câu 61. (THPT Chuyên Bắc Ninh) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân ?

A. $m = 0$.

B. $m = -1, m = 0$.

C. $m = 1$.

D. $m = 0, m = 1$.

Câu 62. (THPT Chuyên Vĩnh Phúc) Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^4 + 2m$. Tìm tham số m để các điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành một tam giác đều ?

A. $m = 2\sqrt{2}$.

B. $m = \sqrt[3]{3}$.

C. $m = \sqrt[3]{4}$.

D. $m = 1$.

Câu 63. (THPT Hậu Lộc 2 Thanh Hóa) Tìm giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1 ?

A. $m = \sqrt[3]{3}$.

B. $m = \sqrt{3}$.

C. $m = 3\sqrt{3}$.

D. $m = 1$.

Câu 64. (Đề minh họa lần 3 – Bộ GD & ĐT năm 2017) Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 1)x$. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là A và B sao cho A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $d: y = 5x - 9$. Tích các phần tử của S bằng

A. 27.

B. -27.

C. 9.

D. -9.

Dạng toán 4. Một số bài toán vận dụng và vận dụng cao thường gặp

☆☆☆

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên bên dưới. Trên khoảng $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$ thì hàm số $y = f(x^2)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây ?

A. $x = \sqrt{2}$.

B. $x = -\sqrt{2}$.

C. $x = 0$.

D. $x = 2$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
			0	+

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên bên dưới. Hàm số $y = f(x^2 - 2)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây ?

A. $x = -2$.

B. $x = -1$.

C. $x = 0$.

D. $x = 2$.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	-
			0	+

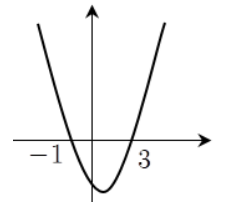
Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(1 - x^2)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây ?

A. $x = -1$.

B. $x = \pm\sqrt{2}$.

C. $x = 3$.

D. $x = 0$.



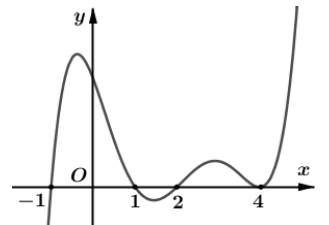
Câu 4. Cho hàm $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $y = f(1 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 4.

B. 7.

C. 3.

D. 9.



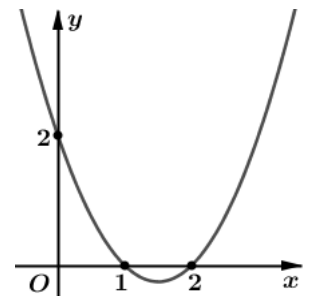
Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm $f'(x) = ax^2 + bx + c$ như hình bên dưới. Hỏi hàm số $y = f(x - x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.



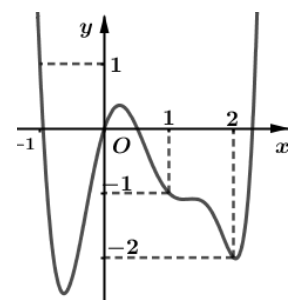
Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = 2f(x) + x^2$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây ?

A. $x = -1$.

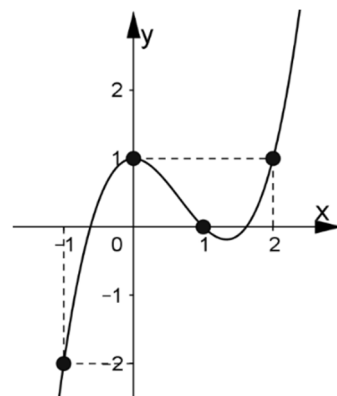
B. $x = 0$.

C. $x = 1$.

D. $x = 2$.



Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình bên dưới. Hàm số $y = f(x) - \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + 2$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây ?



A. $x = 1$.

B. $x = -1$.

C. $x = 0$.

D. $x = 2$.

Câu 8. Cho hàm $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f\left(1 - \frac{1}{2}x\right) + 4x$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(x^2 - 8x)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 6.

B. 3.

C. 5.

D. 2.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 3)(x^2 + 1), \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = f(x) - mx$ có 4 điểm cực trị ?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x^3 - 2x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(x) + mx + 3$ có 3 điểm cực trị ?

A. 1.

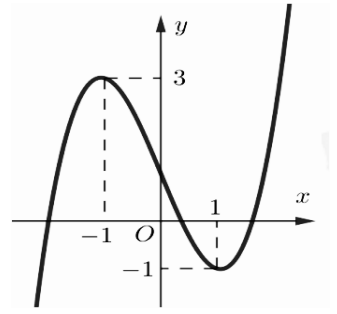
B. 2.

C. 3.

D. 4.

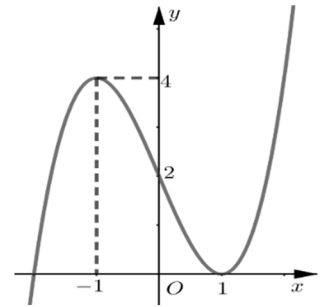
Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-12; 12)$ sao cho hàm số $y = f(x) + mx + 12$ có đúng 1 điểm cực trị?

- A. 5.
B. 18.
C. 20.
D. 12.



Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(x) - mx$ có 3 điểm cực trị?

- A. $0 < m < 4$.
B. $0 \leq m \leq 4$.
C. $m > 4$.
D. $m < 0$.



Câu 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 7 điểm cực trị?

- A. 3.
B. 4.
C. 5.
D. 6.

Câu 15. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị?

- A. 26.
B. 16.
C. 27.
D. 44.

Câu 16. Số giá trị nguyên của tham số m với $|m| < 10$ sao cho hàm số $y = |3x^3 + 3x^2 + mx + m|$ có 5 điểm cực trị là

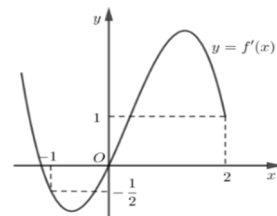
- A. 9.
B. 10.
C. 8.
D. 16.

Câu 17. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thỏa mãn $|m| < 10$ sao cho hàm số $y = |x^3 - (m-2)x^2 - mx - m^2|$ có 3 điểm cực tiểu?

- A. 9.
B. 10.
C. 8.
D. 16.

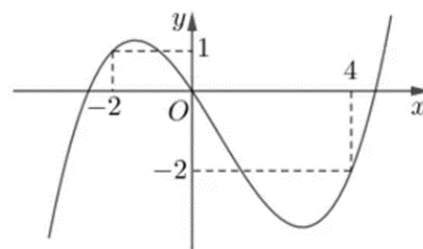
Câu 18. (Đại Học Vinh lần 1 năm 2020) Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, ($ae < 0$). Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới. Hàm số $y = |4f(x) - x^2|$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

- A. 4.
B. 5.
C. 3.
D. 2.



Câu 19. Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có $f(0) = -1$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị là hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = |4f(x+1) + x^2 + 2x|$ là

- A. 3.
B. 5.
C. 4.
D. 6.



Câu 20. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - (2m-1)x^2 + (8-m)x + 2020$ với m là tham số. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có điểm 5 cực trị là khoảng $(a; b)$. Tích $a.b$ bằng

- A. 12.
B. 16.
C. 10.
D. 14.

Câu 21. Cho hàm số $f(x) = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có 5 cực trị?

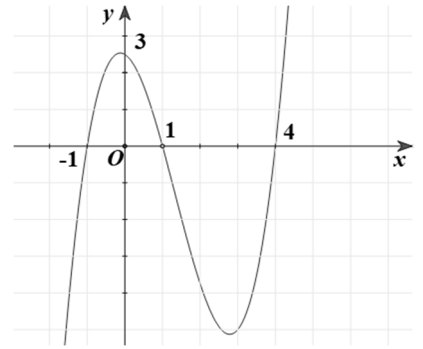
- A. $\frac{5}{4} \leq m \leq 2$.
B. $-\frac{5}{4} < m < 2$.
C. $-2 < m < \frac{5}{4}$.
D. $\frac{5}{4} < m < 2$.

Câu 22. Cho hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + (3-m)x + 2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có 3 điểm cực trị?

- A. $m \geq 3$.
B. $-\frac{1}{2} < m < 3$.
C. $m > 3$.
D. $-\frac{1}{2} < m \leq 3$.

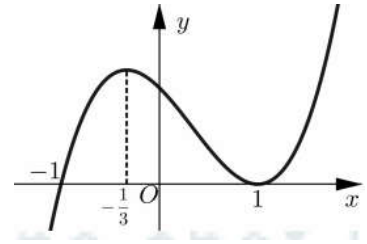
Câu 23. Cho hàm số $f(x)$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y = f(|3 - x|)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

- A. 5.
B. 3.
C. 4.
D. 2.



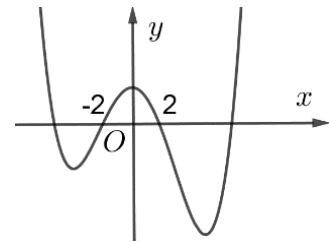
Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x^2 - 2|x|)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

- A. 1.
B. 2.
C. 5.
D. 3.



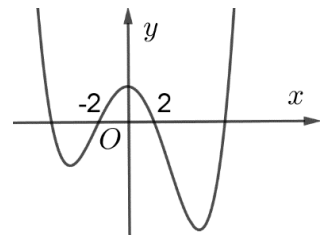
Câu 25. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(|x|^3 - 3|x|)$ là

- A. 5.
B. 3.
C. 7.
D. 11.



Câu 26. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x) = f(x^4 - 4|x|)$ là

- A. 5.
B. 3.
C. 7.
D. 11.



Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên bên dưới. Số điểm cực đại và số điểm cực tiểu của hàm số $y = f^2(2x) - 2f(2x) + 1$ lần lượt là

- A. 2 và 3.
B. 3 và 2.
C. 1 và 1.
D. 2 và 2.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$		0		3		$-\infty$

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên bên dưới. Số điểm cực đại và số điểm cực tiểu của hàm số $y = f^2(2x) - 6f(2x) + 9$ lần lượt là

- A. 2 và 1.
B. 1 và 2.
C. 1 và 1.
D. 2 và 2.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$		0	3		$-\infty$

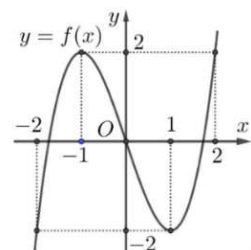
Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên của $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Xét trên khoảng $(-\pi; 2\pi)$, số điểm cực trị của hàm số $y = 2f(\sin x) + 3\sin x$ là

- A. 5.
B. 3.
C. 7.
D. 9.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$		-1		$+\infty$
		-2		-2	

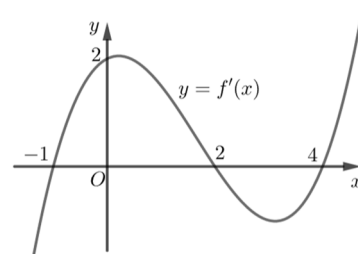
Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Xét trên khoảng $(-\pi; 2\pi)$, số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(2\cos x) + 2\cos 2x$ là

- A. 13.
B. 10.
C. 11.
D. 9.



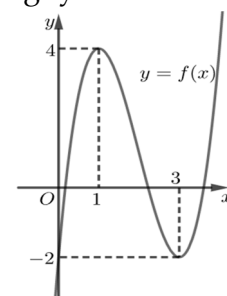
Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x) - x^3 + 3x$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

- A. 2.
B. 4.
C. 3.
D. 5.



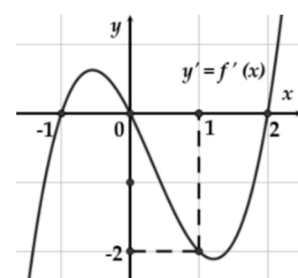
Câu 32. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị trong hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |f^2(x) + 2f(x) + m|$ có 9 điểm cực trị?

- A. 24.
B. Vô số.
C. 25.
D. 23.

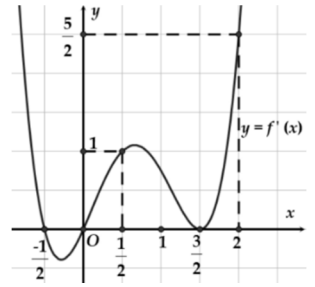


Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = 3f(x^2 - 2) + \frac{3}{2}x^4 - 3x^2$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

- A. $x = 0$.
B. $x = 1$.
C. $x = -1$.
D. $x = 2$.



Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x^2 - 2) - \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?



- A. 4.
- B. 1.
- C. 2.
- D. 3.

Câu 35. (Đề thi THPT QG năm 2019 – Câu 46 Mã đề 101) Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ là

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	-3	2	-1	$+\infty$

- A. 9.
- B. 3.
- C. 7.
- D. 5.

Câu 36. (Đề thi THPT QG năm 2019 – Câu 50 Mã đề 104) Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(4x^2 + 4x)$ là

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	-3	2	-1	$+\infty$

- A. 9.
- B. 3.
- C. 7.
- D. 5.

Câu 37. (Đề thi THPT năm 2020 – Câu 44 Mã đề 103) Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^4 [f(x-1)]^2$ là

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$				3			$+\infty$
		-1				-1		

- A. 7.
- B. 5.
- C. 9.
- D. 11.

Câu 38. (Đề thi THPT năm 2020 – Câu 44 Mã đề 101) Cho hàm bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên bên dưới. Số điểm cực trị của hàm $g(x) = x^4 [f(x+1)]^2$ là

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-2	3	-2	$+\infty$

- A. 11.
- B. 9.
- C. 7.
- D. 5.

ĐỀ RÈN LUYỆN CỰC TRI

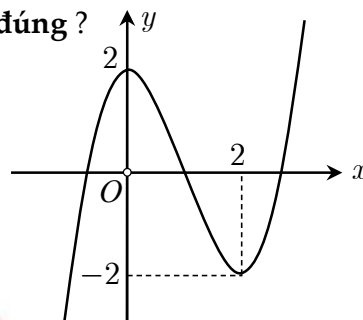
Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên. Khẳng định nào sau đây là **đúng** ?

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		3		-2		$+\infty$

- A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.
 B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$.
 C. Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$.
 D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 4$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình. Mệnh đề nào **đúng** ?

- A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 2.
 B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2.
 C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và cực tiểu tại $x = 2$.
 D. Hàm số có ba điểm cực trị.



Câu 3. Hàm số $y = \frac{-2x+1}{x-3}$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Câu 4. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ là

- A. $x = 1$. B. $M(1;3)$. C. $x = -1$. D. $N(-1;7)$.

Câu 5. Tìm điểm cực đại của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$.

- A. $(-1;1)$. B. $x = -1$. C. $(0;2)$. D. $x = 0$.

Câu 6. Giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ là

- A. -20. B. 7. C. -25. D. 3.

Câu 7. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x^2+8}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng** ?

- A. Cực đại của hàm số bằng $\frac{1}{4}$. B. Cực đại của hàm số bằng $-\frac{1}{8}$.
 C. Cực đại của hàm số bằng 2. D. Cực đại của hàm số bằng -4.

Câu 8. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x}$. Giá trị của tổng $y_{\text{CB}} + y_{\text{CT}}$ bằng

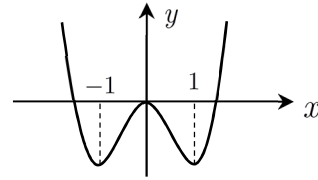
- A. -6. B. -1.
 C. 0. D. -5.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x^2 - 4)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào **đúng** ?

- A. Hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.
 B. Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại điểm $x = -2$.
 C. Hàm số đã cho đạt cực đại tại điểm $x = 2$.
 D. Hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

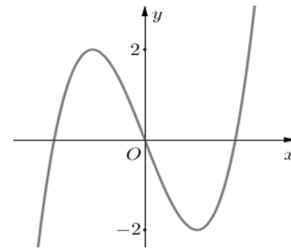
Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hỏi đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 5.
B. 2.
C. 3.
D. 4.



Câu 11. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 2.
B. 3.
C. 4.
D. 5.



Câu 12. Đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 15$ có hai điểm cực trị A, B . Độ dài đoạn AB là

- A. $2\sqrt{65}$. B. $5\sqrt{55}$. C. $4\sqrt{65}$. D. $4\sqrt{26}$.

Câu 13. Đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 5$ có ba điểm cực trị là A, B, C . Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

- A. $G\left(0; \frac{11}{3}\right)$. B. $G\left(0; \frac{17}{3}\right)$. C. $G(0; 4)$. D. $G\left(1; \frac{13}{3}\right)$.

Câu 14. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có hai điểm cực trị A, B . Diện tích ΔOAB bằng

- A. 2. B. $\frac{1}{2}$. C. 3. D. 4.

Câu 15. Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng

- A. 1. B. $1 + \sqrt{2}$. C. $\sqrt{2} - 1$. D. $\sqrt{2}$.

Câu 16. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào không có cực trị?

- A. $y = x^3 - 3x^2 + 3$. B. $y = x^4 - x^2 + 1$. C. $y = x^3 + 2$. D. $y = -x^4 + 3$.

Câu 17. Đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x + 1$ có hai điểm cực trị A và B . Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB .

- A. $N(1; 12)$. B. $M(1; -12)$. C. $P(1; 0)$. D. $Q(0; -1)$.

Câu 18. Tìm điều kiện của hệ số để đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a \neq 0$) có hai điểm cực trị nằm về hai phía so với trục tung?

- A. $a > 0, b < 0, c > 0$. B. $a.c < 0$.
C. $b^2 - 12ac \geq 0$. D. $b^2 - 12ac > 0$.

Câu 19. Cho hàm số $y = x^3 - 3m^2x + m$. Tìm tham số m để trung điểm của hai điểm cực trị của đồ thị hàm số thuộc $d: y = 1$?

- A. $m = \frac{1}{3}$. B. $m = -\frac{1}{3}$. C. $m = 1$. D. $m = \frac{1}{2}$.

Câu 20. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 + x^2 - (2m + 1)x + 4$ có đúng hai cực trị?

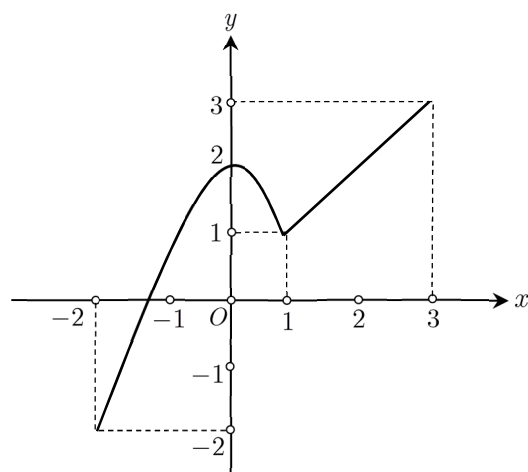
- A. $m < \frac{4}{3}$. B. $m > -\frac{2}{3}$. C. $m < -\frac{2}{3}$. D. $m > -\frac{4}{3}$.

- Câu 21.** Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x + 2018$ không có cực trị.
 A. $m \leq -1$. B. $m \geq 2$. C. $-1 \leq m \leq 2$. D. $-1 \leq m \leq 1$.
- Câu 22.** Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có đúng 1 điểm cực trị ?
 A. $m \leq 0$. B. $m > 0$. C. $m \in \mathbb{R}$. D. $m \in \emptyset$.
- Câu 23.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = (m+1)x^4 - mx^2 + 3$ có ba điểm cực trị ?
 A. $m \in (-\infty; -1) \cup [0; +\infty)$. B. $m \in (-1; 0)$.
 C. $m \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$. D. $m \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.
- Câu 24.** Tìm tất cả các tham số m để hàm số $f(x) = x^4 + x^3 - mx^2$ có ba điểm cực trị ?
 A. $m \in (0; +\infty)$. B. $m \in (-\infty; 0)$.
 C. $m \in \left[-\frac{9}{2}; +\infty\right) \setminus \{0\}$. D. $m \in \left[-\frac{9}{32}; +\infty\right) \setminus \{0\}$.
- Câu 25.** Tìm tất cả các tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 2$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 2$?
 A. $m > 0$. B. $m = 0$. C. $m < 0$. D. $m \neq 0$.
- Câu 26.** Tìm các tham số m để hàm số $f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x$ đạt cực đại tại $x = 1$?
 A. $m = 0$. B. $m \in \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$. C. $m \in \{0; 2\}$. D. $m = 2$.
- Câu 27.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + (m-1)x + 2$ có hai điểm cực trị đều nằm bên trái trục tung.
 A. $1 < m < 2$. B. $m > 1$. C. $m < 2$. D. $m < 1$.
- Câu 28.** Biết rằng có hai giá trị của tham số thực m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m^2 + 2m$ đạt giá trị cực tiểu bằng -4 . Tính tổng S của hai giá trị m đó ?
 A. $S = 1$. B. $S = -2$. C. $S = 3$. D. $S = 5$.
- Câu 29.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 4mx^2 + 3m - 2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận $G\left(0; -\frac{5}{3}\right)$ làm trọng tâm ?
 A. $m = 1$. B. $m = 8$.
 C. $m = 1$ hoặc $m = \frac{1}{8}$. D. $m = \frac{1}{8}$.
- Câu 30.** Tìm các tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 + m - 1)x + 1$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 + x_2| = 4$?
 A. $m = 2$. B. $\nexists m$. C. $m = -2$. D. $m = \pm 2$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.C	3.B	4.B	5.D	6.C	7.A	8.A	9.A	10.A
11.B	12.C	13.B	14.A	15.C	16.C	17.A	18.B	19.C	20.B
21.C	22	23.D	24.D	25.B	26.D	27.A	28.B	29.C	30.C

§ 3. GIA TRÒ LỚN NHẤT VÀ GIA TRÒ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ



VD1. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & \text{khi } -2 \leq x \leq 1 \\ x & \text{khi } 1 < x \leq 3 \end{cases}$ có đồ thị hàm số như hình vẽ bên trái.

a) Hãy chỉ ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 3]$ và $[0; 3]$?

b) Tìm GTLN và GTNN của hàm số $y = f(2 \sin x + 1)$?

VD2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	-3	-1	1	2			
y'		+	0	-	0	+	
y			0		-2		3

GTNN của hàm số là

GTLN của hàm số là

1. **Định nghĩa:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathcal{D}$.

$$\bullet M = \max_{\mathcal{D}} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in \mathcal{D} \\ \exists x_0 \in \mathcal{D} : f(x_0) = M \end{cases} \quad \bullet m = \min_{\mathcal{D}} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in \mathcal{D} \\ \exists x_0 \in \mathcal{D} : f(x_0) = m \end{cases}$$

2. **Định lý 1:** Mọi hàm số liên tục trên một đoạn đều có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.
(hiểu khác: hàm số không liên tục trên $[a; b]$ sẽ không có min và max).

3. **Hai bài toán cơ bản cần nhớ**

Bài toán 1. Tìm GTLN & GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Bước 1. Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$.

Tính $f'(x)$ và tìm những điểm x_i sao cho tại đó có đạo hàm bằng 0 hoặc liên tục nhưng không có đạo hàm.

Bước 2. Tính $f(a)$, $f(b)$, $f(x_i)$.

Bước 3. Kết luận: $\begin{cases} \max_{[a; b]} f(x) = \max \{f(a); f(b); f(x_i)\} \\ \min_{[a; b]} f(x) = \min \{f(a); f(b); f(x_i)\} \end{cases}$.

Bài toán 2. Tìm GTLN & GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(a; b)$.

Bước 1. Tìm tập xác định. Tính $f'(x)$. Cho $f'(x) = 0$ tìm nghiệm.

Bước 2. Xét dấu biểu thức $y' = f'(x)$ và lập bảng biến thiên (có tính giới hạn).

Bước 3. Dựa vào bảng biến thiên để kết luận GTLN (GTNN nếu có).

4. **Định lý 2**

- Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên đoạn $[a; b]$ thì $\min_{[a; b]} f(x) = f(a)$ và $\max_{[a; b]} f(x) = f(b)$.
- Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[a; b]$ thì $\min_{[a; b]} f(x) = f(b)$ và $\max_{[a; b]} f(x) = f(a)$.

Dạng toán 1: Tìm gtnn và gtn của hàm số khi đề cho đồ thị hoặc bảng biến thiên

☆☆☆

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trong đoạn $[-1; 3]$ như hình. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$. Tìm mệnh đề **đúng**?

- A. $M = f(-1)$.
 B. $M = f(3)$.
 C. $M = f(2)$.
 D. $M = f(0)$.

x	-1	0	2	3		
y'		+	0	-	0	+
y	0	5	1	4		

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[-2; 3]$ có bảng biến thiên như hình bên. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 3]$. Tổng $M + m$ bằng

- A. 1.
 B. 3.
 C. -1.
 D. 4.

x	-2	0	1	3		
y'		+	0	-		+
		2		3		
y	-2		1		3	

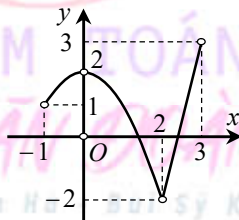
Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên trên đoạn $[-1; 4]$ như hình dưới. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 4]$. Giá trị của $M + m$ bằng

- A. -4.
 B. -28.
 C. 20.
 D. -20.

x	-1	1	3	4	
y'	+	0	-	0	+
y	-24	-4	-8	-4	

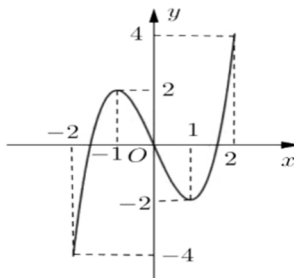
Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị của $M - m$ bằng

- A. 0.
 B. 1.
 C. 4.
 D. 5.



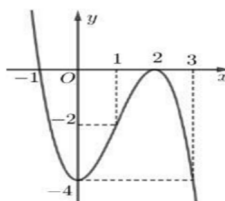
Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 2]$. Giá trị của $M - m$ bằng

- A. 0.
 B. 8.
 C. 4.
 D. 2.



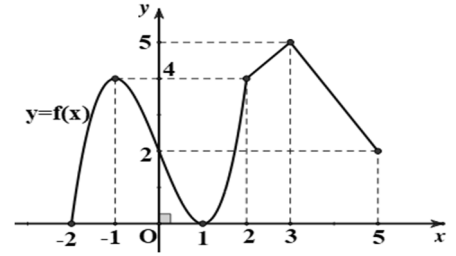
Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị bên dưới. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[1; 3]$. Giá trị của $M + m$ bằng

- A. 4.
 B. -6.
 C. -2.
 D. -4.



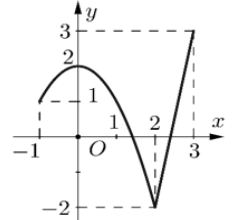
Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-2; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(2\cos 5x + 1)$. Giá trị của $M - 2m$ bằng

- A. 10.
- B. 3.
- C. 7.
- D. 5.



Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(3\sin^2 x - 1)$ bằng

- A. 0.
- B. 1.
- C. 3.
- D. 2.



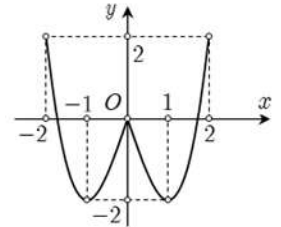
Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có bảng biến thiên bên dưới. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = (3|\cos x| - 1)$ bằng

- A. 4.
- B. 3.
- C. 2.
- D. 1.

x	-1	0	2	3		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$			2		-2	3

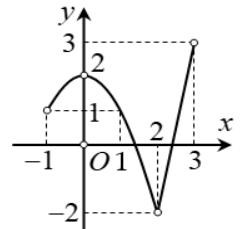
Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-2; 2]$ có đồ thị như hình. Gọi M, m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3f\left(\frac{4\sin x - 1}{3}\right)$ trên $\left(0; \frac{7\pi}{6}\right)$. Giá trị của $2M - m$ bằng

- A. 4.
- B. 2.
- C. 5.
- D. 6.



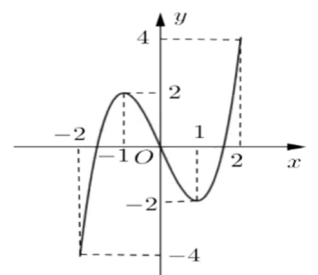
Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(f(x))$ trên đoạn $[-1; 0]$. Giá trị $M - m$ bằng

- A. 2.
- B. 3.
- C. 4.
- D. 5.



Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(f(x))$ trên đoạn $[-1; 1]$. Giá trị của $M - m$ bằng

- A. 2.
- B. 4.
- C. 6.
- D. 8.



Dạng toán 2: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn

Bài toán: Tìm giá trị lớn nhất & giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Phương pháp:

Bước 1. Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$.

Tính $f'(x)$ và tìm những điểm x_i sao cho tại đó có đạo hàm bằng 0 hoặc liên tục nhưng không có đạo hàm.

Bước 2. Tính $f(a)$, $f(b)$, $f(x_i)$.

Bước 3. Kết luận:
$$\begin{cases} \max_{[a;b]} f(x) = \max \{f(a); f(b); f(x_i)\} \\ \min_{[a;b]} f(x) = \min \{f(a); f(b); f(x_i)\} \end{cases}$$

➤ **Lưu ý:**

- Nếu $y = f(x)$ đồng biến trên $[a; b]$ thì $\min_{[a;b]} f(x) = f(a)$ và $\max_{[a;b]} f(x) = f(b)$.
- Nếu $y = f(x)$ nghịch biến trên $[a; b]$ thì $\min_{[a;b]} f(x) = f(b)$ và $\max_{[a;b]} f(x) = f(a)$.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

1. (Đề thi THPT 2020 – Mã đề 101 – Câu 36) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 24x$ trên đoạn $[2; 19]$ bằng

A. $32\sqrt{2}$. B. -40 . C. $-32\sqrt{2}$. D. -45 .

Ta có: $y' = 3x^2 - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \text{ (N)} \\ x = -2\sqrt{2} \text{ (L)} \end{cases}$

$y(2) = -40$, $y(19) = 6403$, $y(2\sqrt{2}) = -32\sqrt{2}$.

Suy ra: $\min_{[2;19]} y = -32\sqrt{2}$ khi $x = 2\sqrt{2}$. **Chọn C.**

2. (Đề thi THPT 2020 – Mã đề 101 – Câu 36) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 21x$ trên đoạn $[2; 19]$ bằng

A. -36 . B. $-14\sqrt{7}$. C. $14\sqrt{7}$. D. -34 .

3. (Đề thi THPT 2020 – Mã đề 103 – Câu 35) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 30x$ trên đoạn $[2; 19]$ bằng

A. $20\sqrt{10}$. B. -63 . C. -52 . D. $-20\sqrt{10}$.

4. (Đề thi THPT 2020 – Mã đề 104 – Câu 29) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 33x$ trên đoạn $[2; 19]$ bằng

A. -72 . B. $-22\sqrt{11}$. C. -58 . D. $22\sqrt{11}$.

5. (Đề thi THPT QG 2017 – Mã đề 110) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ trên đoạn $[0; \sqrt{3}]$ bằng A. 9. B. $8\sqrt{3}$. C. 6. D. 1.	6. (Đề thi THPT 2017 – Mã đề 105) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 5$ trên đoạn $[-2; 3]$ bằng A. 50. B. 5. C. 1. D. 122.
7. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng A. -4. B. 8. C. 4. D. -8.	8. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^5 - x^4 - 3x^3 + 9$ trên đoạn $[-2; 1]$ bằng A. 9. B. 10. C. 11. D. 19.
9. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{-2x + 3}{x + 1}$ trên đoạn $[1; 4]$ bằng A. 1. B. -1. C. $1/2$. D. $-1/2$.	10. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{3x - 1}{x - 3}$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng A. -5. B. $-1/3$. C. $1/3$. D. 5.
11. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{-2x + 3}{x + 1}$ trên đoạn $[1; 4]$ bằng A. 1. B. -1. C. $1/2$. D. $-1/2$.	12. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{3x - 1}{x - 3}$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng A. -5. B. $-1/3$. C. $1/3$. D. 5.
13. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x - m^2}{x + 1}$ trên đoạn $[0; 1]$ bằng A. $\frac{1 + m^2}{2}$. B. $-m^2$. C. $\frac{1 - m^2}{2}$. D. $\frac{m^2 - 1}{2}$.	14. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{2x - 1}{3x - 6}$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{5}{3}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\nexists$.

15. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{1}{x}$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng A. 2. B. $\frac{11}{3}$. C. $\frac{12}{5}$. D. $\frac{10}{3}$.	16. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{9}{x}$ trên đoạn $[2; 4]$. A. $\frac{13}{2}$. B. 6. C. $\frac{11}{2}$. D. $\frac{25}{4}$.
17. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 1 + \sqrt{4x - x^2}$ bằng A. 0. B. 1. C. 3. D. $2\sqrt{5}$.	18. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ trên đoạn $[-1; 3]$ bằng A. 1. B. $2\sqrt{2}$. C. 2. D. $2\sqrt{3}$.
19. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \sqrt{2 - x^2}$ bằng A. $-2\sqrt{2}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $3\sqrt{10}$. D. 2.	20. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3x + \sqrt{10 - x^2}$ bằng A. $\sqrt{10}$. B. $-3\sqrt{10}$. C. $3\sqrt{10}$. D. 10.
21. Cho hàm số $y = \cos^3 x + 2\sin^2 x + \cos x$. Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho bằng A. $\frac{9}{4}$. B. -2. C. $\frac{58}{27}$. D. 2.	22. Cho hàm số $y = \sin^3 x - \cos 2x + 1$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho bằng A. $\frac{80}{27}$. B. 0. C. 1. D. 3.

23. Cho hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$. Tìm tham số m sao cho $\min_{[-1;1]} y = 0$.

Ta có: $y' = -3x^2 - 6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \text{ (L)} \end{cases}$.

Tính $y(-1) = m - 2$, $y(0) = m$, $y(1) = m - 4$.

Suy ra: $\min_{[-1;1]} y = m - 4$. Mà theo đề $\min_{[-1;1]} y = 0$

$$\Leftrightarrow m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 4.$$

24. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m^2$. Tìm tham số m sao cho $\min_{[-1;1]} y = -3m$.

.....
.....
.....
.....
.....

25. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + m - 1$. Tìm tham số m sao cho $\max_{[0;3]} y = 64$.

.....
.....
.....

26. Cho hàm số $y = x^3 - 3x - 2m + 1$. Tìm tham số m sao cho $\min_{[-1;4]} y = -2$.

.....
.....
.....

27. Cho hàm số $y = x^3 + (m^2 + 1)x + m + 1$. Tìm tham số m sao cho $\min_{[0;1]} y = 5$.

Ta có: $y' = 3x^2 + m^2 + 1 > 0$.

Do đó hàm số đã cho luôn đồng biến trên $[0;1]$.

$$\Rightarrow \min_{[0;1]} y = y(0) \Leftrightarrow 5 = m + 1 \Leftrightarrow m = 4.$$

28. Cho hàm số $y = x^3 + 3m^2x + 6$. Tìm tham số m sao cho $\max_{[0;3]} y = 42$.

.....
.....
.....

29. Cho hàm số $y = -x^3 - 3(m^2 + 2)x + m^2$. Tìm tham số m sao cho $\max_{[2;5]} y = 25m$.

.....
.....
.....

30. Cho hàm số $f(x) = -x^3 + mx^2 - (m^2 + m + 1)x$. Tìm tham số m sao cho $\min_{[-1;1]} f(x) = -6$.

.....
.....
.....

31. Tìm tham số m sao cho hàm số $y = \frac{mx + 1}{x - m}$ có $\min_{[-1;2]} y = m + 2$.

.....
.....
.....
.....
.....

32. Tìm tham số m sao cho hàm số $y = \frac{mx - 2}{x + m}$ có $\max_{[0;4]} y = m - 1$.

.....
.....
.....
.....
.....

Dạng toán 3: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng

Bài toán: Tìm GTLN & GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(a; b)$.

Phương pháp:

Bước 1. Tìm tập xác định. Tính $f'(x)$. Cho $f'(x) = 0$ tìm nghiệm.

Bước 2. Xét dấu biểu thức $y' = f'(x)$ và lập bảng biến thiên (có tính giới hạn).

Bước 3. Dựa vào bảng biến thiên để kết luận GTLN (GTNN nếu có).

Lưu ý: Trong một số trường hợp, có thể giải nhanh bằng bất đẳng thức:

① **Bất đẳng thức Cauchy (AM – GM):**

$$\bullet \forall a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0, \text{ ta luôn có: } \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

Dấu " $=$ " xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n \geq 0$.

$$\bullet \forall a \geq 0; b \geq 0 \text{ thì ta có: } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}. \text{ Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi } a = b.$$

$$\bullet \forall a \geq 0; b \geq 0; c \geq 0 \text{ thì ta có: } \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}. \text{ Dấu " = " } \Leftrightarrow a = b = c.$$

Một số kỹ năng cơ bản về ghép Cauchy:

$$\bullet mX + \frac{n}{X} \geq 2\sqrt{mX \cdot \frac{n}{X}} = 2\sqrt{mn}, \forall X > 0 \text{ (khi } x \geq a, \text{ cần dự đoán tại điểm biên } x = a).$$

$$\bullet mX + \frac{n}{X^2} = \frac{mX}{2} + \frac{mX}{2} + \frac{n}{X^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{m^2 \cdot n}{4}}.$$

$$\bullet mX^2 + \frac{n}{X} = mX^2 + \frac{n}{2X} + \frac{n}{2X} \geq 3\sqrt[3]{\frac{mn^2}{4}}.$$

(Kỹ thuật tách cặp nghịch đảo là kỹ thuật tách phần nguyên theo mẫu số để sau khi áp dụng bất đẳng thức Cauchy, biến số triệt tiêu, chỉ còn lại hằng số, dựa vào điểm rơi của bài toán).

$$\bullet X \cdot (a - mX) = \frac{1}{m} \cdot (mX) \cdot (a - mX) \leq \frac{1}{m} \cdot \frac{(mX + a - mX)^2}{4} = \frac{a^2}{4m}.$$

$$\bullet X^2 \cdot (a - X) = 4 \cdot \frac{X}{2} \cdot \frac{X}{2} \cdot (a - X) \leq 4 \cdot \frac{\left(\frac{X}{2} + \frac{X}{2} + a - X\right)^3}{27} = \frac{4a^3}{27}.$$

② **Bất đẳng thức Cauchy Schwarz**

$$\bullet \forall a, b, x, y, \text{ ta có: } -\sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)} \leq a \cdot x + b \cdot y \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}.$$

Dấu " $=$ " xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$.

$$\bullet \forall a, b > 0, x, y \in \mathbb{R}, \text{ ta có: } \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}. \text{ Dấu " = " xảy ra khi } \frac{x}{a} = \frac{y}{b}.$$

1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có)

của hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$.

Điều kiện: $x^2 + x + 1 \neq 0$: luôn đúng.

Ta có: $y' = \frac{2x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$.

Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1$.

	$x \rightarrow +\infty$	$x \rightarrow -\infty$		
x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0
y	1	3	$\frac{1}{3}$	1

Suy ra: $\max_{\mathbb{R}} y = 3$ và $\min_{\mathbb{R}} y = \frac{1}{3}$.**2.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có)

của hàm số $y = \frac{2x^2 + 4x + 5}{x^2 + 1}$.

3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có)

của hàm số $y = \frac{x-1}{x^2-x+1}$?

4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có)

của hàm số $y = \frac{x^2+2x+3}{x^2+2}$?

5. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$?**6.** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$?**7.** Tìm giá trị nhỏ nhất của $y = x^2 - 2x + \frac{2}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$?**8.** Tìm giá trị nhỏ nhất: $y = \sqrt{x-1} + \frac{4}{\sqrt{x-1}+1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$?

9. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{5}{x} \text{ trên khoảng } [1; +\infty).$$

10. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số

$$y = \frac{x^3}{4} + \frac{8}{x} \text{ trên khoảng } (0; +\infty).$$

11. Hãy tìm giá trị lớn nhất M của hàm số

$$y = x^3(4 - x) \text{ trên đoạn } [0; 4].$$

12. Hãy tìm giá trị lớn nhất M của hàm số

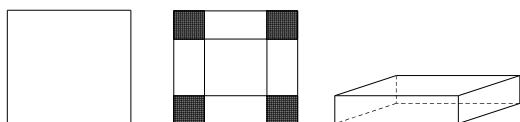
$$y = |x|\sqrt{4 - x^2}.$$

13. Một vật chuyển động theo $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$.

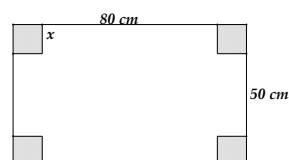
Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu? ($t : m, v : s$).

14. Quãng đường s (mét) đi được của đoàn tàu là một hàm số của thời gian t (phút), hàm số đó là $s = 6t^2 - t^3$. Thời điểm t (giây) mà tại đó vận tốc v (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất?

15. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm giá trị của x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



16. Cho một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước 80cm x 50cm. Người ta cắt bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình có cạnh x (cm) để khi gập lại được một chiếc hộp không nắp. Để chiếc hộp có thể tích lớn nhất thì giá trị của x bằng bao nhiêu?



Dạng toán 4: Một số bài toán vận dụng và vận dụng cao thường gặp

Câu 1. Cho hàm số $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + 1$ (a, b các tham số) đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 0$. Khi $a - b$ đạt giá trị lớn nhất thì $b^4 + ab^3 + b^3 + 1$ bằng

- A. 9.
- B. 7.
- C. 5.**
- D. 6.

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = x^6 + ax^5 + bx^4 + 1$ (a, b các tham số) đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 0$. Khi $a + b$ nhỏ nhất thì tích số ab bằng

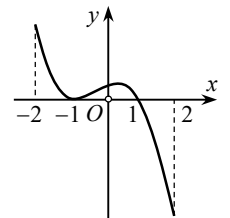
- A. -2.**
- B. -12.
- C. -1.
- D. -20.

Câu 3. Có bao nhiêu số nguyên của tham số m để hàm số $f(x) = x^6 + (m - 3)x^5 - (m^2 - 9)x^4 + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 0$?

- A. 9.
- B. 7.
- C. 5.
- D. 6.**

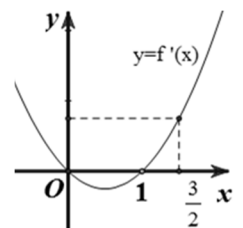
Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[-2; 2]$, có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Tìm giá trị x_0 để hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $[-2; 2]$.

- A. $x_0 = 2$.
- B. $x_0 = -1$.**
- C. $x_0 = -2$.
- D. $x_0 = 1$.



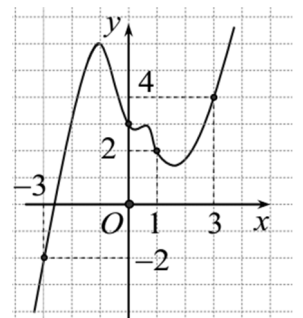
Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$, biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ tại điểm nào sau đây ?

- A. $x = 1,5$.
- B. $x = -1$.
- C. $x = 0$.
- D. $x = 1$.**



Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y = f'(x)$ cho như hình dưới đây. Đặt $g(x) = 2f(x) - (x + 1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng** ?

- A. $\min_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.
- B. $\max_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.**
- C. $\max_{[-3;3]} g(x) = g(3)$.
- D. $\nexists \max_{[-3;3]} g(x)$.



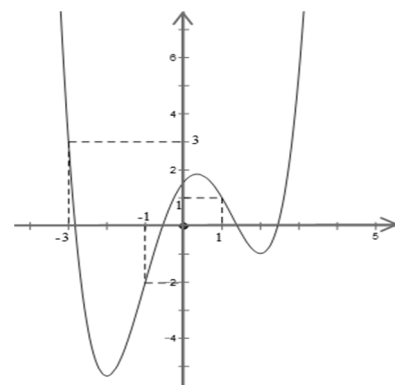
Câu 7. Cho $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{4} + \frac{3x}{2} + 2020$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$.

B. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$.

C. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-3)$.

D. $\min_{[-3;1]} g(x) = \frac{g(-3) + g(1)}{2}$.



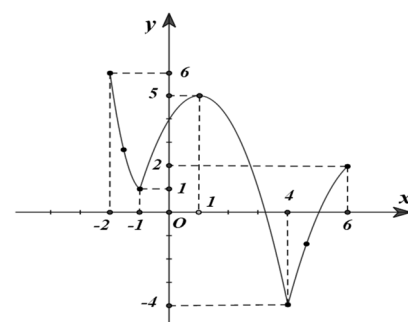
Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;6]$ có đồ thị như hình. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(\cos x) = m$ có nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

A. 10.

B. 6.

C. 2.

D. 5.



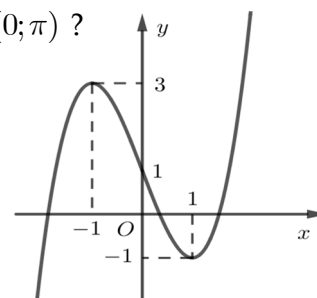
Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(f(\sin x)) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.



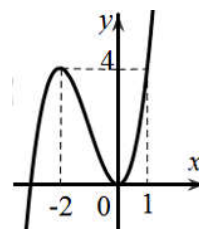
Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x^2 + 2x - 2) = 3m + 1$ có nghiệm thuộc $[0;1]$ là

A. $[0;4]$.

B. $[-1;0]$.

C. $[0;1]$.

D. $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$.



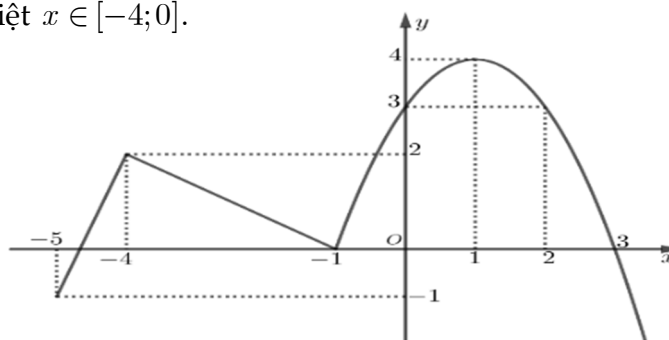
Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có mấy giá trị nguyên của m để phương trình $2f(f(x)) = m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt $x \in [-4;0]$.

A. 1.

B. 2.

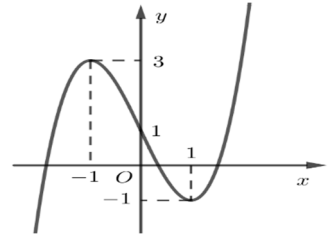
C. 7.

D. 5.



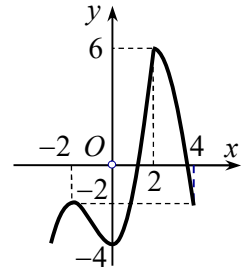
Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sin x) = 3 \sin x + m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$. Tổng các phần tử của S bằng

- A. -9.
B. -10.
C. -6.
D. -5.



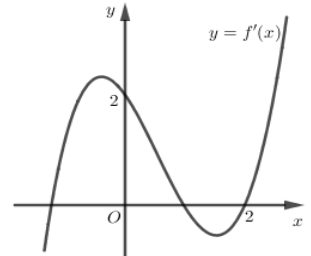
Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Có bao nhiêu số nguyên của tham số m để phương trình $\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2} + 1\right) + x = m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-2; 2]$.

- A. 8.
B. 9.
C. 10.
D. 11.



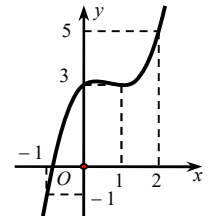
Câu 14. Cho hàm số $f(x)$, hàm số $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Bất phương trình $f(x) > 2x + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi

- A. $m \leq f(2) - 4$.
B. $m \leq f(0)$.
C. $m < f(0)$.
D. $m < f(2) - 4$.



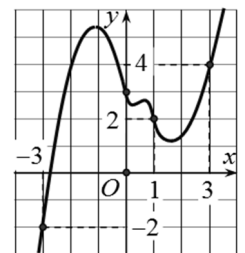
Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ. Tìm tham số m để bất phương trình $f(x) \leq m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 2]$.

- A. $m \leq 5$.
B. $m \geq 5$.
C. $m \leq -1$.
D. $m \geq -1$.



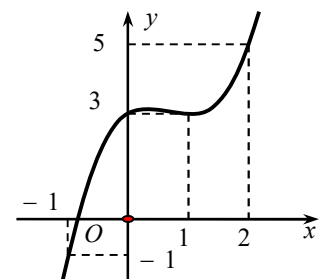
Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tìm m để bất phương trình $m \geq 2[f(x+1) - 2x] - x^2 - 4$ nghiệm đúng $\forall x \in [-4; 2]$.

- A. $m \geq 2f(0) - 1$.
B. $m \geq 2f(-3) - 4$.
C. $m \geq 2f(3) - 16$.
D. $m \geq 2f(1) - 4$.



Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tìm tham số m để bất phương trình $f(x) \geq m$ có nghiệm $x \in [-1; 2]$.

- A. $m \leq 5$.
B. $m \geq 5$.
C. $m \leq -1$.
D. $m \geq -1$.



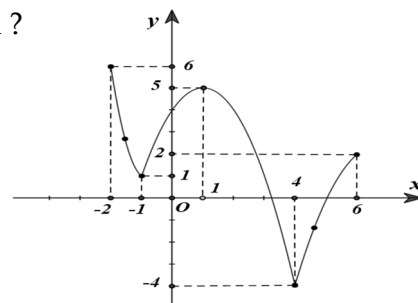
Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 6]$, có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tìm tất cả các tham số m để bất phương trình $f(\sin x) \geq m$ có nghiệm?

A. $m \leq 5$.

B. $m \geq 1$.

C. $m \leq -4$.

D. $m \leq 1$.



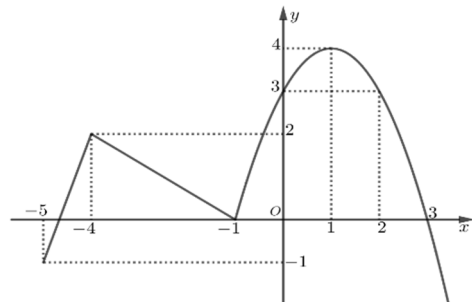
Câu 19. Cho hàm $y = f(x)$ liên tục trên $[-5; 3]$, có đồ thị như hình vẽ. Tìm m để bất phương trình $f(\sqrt{4x - x^2}) \geq m$ có nghiệm $x \in [0; 4]$.

A. $m \leq 3$.

B. $m \leq 0$.

C. $m \leq 4$.

D. $m \leq -1$.



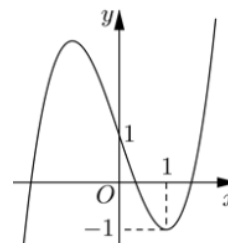
Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(\sin x) - 3\sin x|$ với mọi $x \in (0; \pi)$ bằng

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.



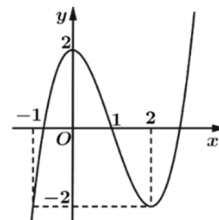
Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = |f(2\sin x) - 4\sin x|$ có giá trị lớn nhất trên khoảng $(0; \pi)$ bằng

A. 7.

B. 5.

C. 6.

D. 4.



Câu 22. Cho hàm số $f(x) = x^3 + mx^2 - m^2x + 2$ với tham số $m > 0$. Biết $\min_{[-m; m]} f(x) = \frac{14}{27}$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m \in (1; 3)$.

B. $m \in (-3; -1)$.

C. $m \in (-\infty; -3)$.

D. $m \in (3; +\infty)$.

Câu 23. (Đề minh họa lần 1 – Bộ GD & ĐT năm 2020) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng 16. Tính tổng các phần tử của S bằng

A. -16.

B. 16.

C. -12.

D. -2.

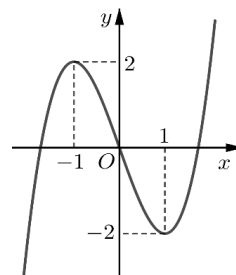
- Câu 24.** Có bao nhiêu giá trị của m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| -x^4 + 8x^2 + m \right|$ trên đoạn $[-1; 3]$ bằng 2018 ?
- A. 0.
B. 2.
 C. 4.
 D. 6.
- Câu 25.** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{x^2 + mx + m}{x + 1} \right|$ trên đoạn $[1; 2]$ bằng 2. Tổng tất cả các phần tử của tập S là
- A. $\frac{19}{6}$. **B.** $-\frac{11}{6}$.
 C. 4. D. -1.
- Câu 26.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để $\max_{x \in [0; 2]} |x^3 - 3x + m| + \min_{x \in [0; 2]} |x^3 - 3x + m| = 3$?
- A. 1.
 B. 3.
 C. 0.
D. 2.
- Câu 27.** Cho hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2m + 1$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max_{[1; 3]} |f(x)| + \min_{[1; 3]} |f(x)| \geq 10$. Số các giá trị nguyên của S trong $[-30; 30]$ là
- A. 56.
B. 61.
 C. 55.
 D. 57.
- Câu 28.** Cho hàm số $y = (x^3 - 3x + m + 1)^4$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 81 là
- A.** -2.
 B. 0.
 C. 1.
 D. 2.
- Câu 29.** Cho hàm số $y = (x^3 - 3x + m)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 1 bằng
- A. 1.
 B. -4.
C. 0.
 D. 4.

Câu 30. Cho hàm số $y = (x^2 + x + m)^2$. Tổng tất cả các giá trị thực tham số m sao cho $\min_{[-2;2]} y = 4$ bằng

- A. 8.
B. -8.
C. $-\frac{23}{4}$.
D. $\frac{9}{4}$.

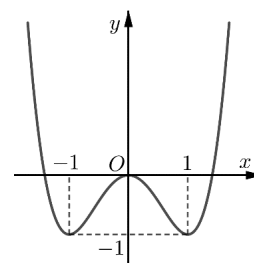
Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tổng tất cả các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = [f(x) + m + 1]^2$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 9 là

- A. -2.
B. 0.
C. 1.
D. 2.



Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = [f(x) + m]^2$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 9 là

- A. -3.
B. 1.
C. 2.
D. 4.



Câu 33. Có bao nhiêu số m để bất phương trình $m^3(x^4 - 1) \leq m^2(x^3 - x^2 - x + 1) + 6m(x^2 - 2x - 3)$ nghiệm đúng với mọi số thực x ?

- A. 3.
B. 1.
C. Vô số.
D. 2.

Câu 34. Gọi S là tập hợp các giá trị của m để $m^2x^4 - (m+2)x^3 + x^2 + (m^2 - 1)x \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Số phần tử của tập S là

- A. 3.
B. 2.
C. 0.
D. 1.

Câu 35. Cho hàm số $f(x) = -\frac{1}{5}m^2x^5 + \frac{1}{3}mx^3 - 10x^2 + (m^2 - m - 20)x + 2019$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$. Tích giá trị của các phần tử thuộc S bằng

- A. 5.
B. -5.
C. -3.
D. 3.

§ 4. NỒI TIỆM CÂN



1. Đường tiệm cận ngang

Định nghĩa. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$ hoặc $(-\infty; +\infty)$). Đường thẳng $y = \alpha$ là đường **tiệm cận ngang** (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu **ít nhất một trong các điều kiện** sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \alpha, \quad (\alpha : \text{const}).$$

Nhận xét:

— Để tìm **tiệm cận ngang** của đồ thị hàm số ta cần tính giới hạn của hàm số tại **vô cực** ($\pm\infty$).

— Tìm giới hạn ở vô cực của hàm $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$; với $P(x)$, $Q(x)$ là các đa thức không căn:

+ Bậc của $P(x)$ nhỏ hơn bậc của $Q(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0 \Rightarrow$ Tiệm cận ngang $Ox : y = 0$.

+ Bậc của $P(x)$ bằng bậc của $Q(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \frac{\text{Hệ số } x \text{ bậc cao của } P(x)}{\text{Hệ số } x \text{ bậc cao của } Q(x)} = \alpha$ (một số cụ thể)

$\Rightarrow y = \alpha$ là tiệm cận ngang.

+ Bậc của $P(x)$ lớn hơn bậc của $Q(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty \Rightarrow$ Không có tiệm cận ngang.

Ví dụ: $y = \frac{x+2}{x^2+3}$ có bậc tử (bậc 1) nhỏ hơn bậc mẫu (bậc 2) $\Rightarrow$ TCN: $y = 0$ (trục Ox),

$y = \frac{x^2+3}{x+2}$: không có tiệm cận, $y = \frac{2x^2+x-1}{x^2+1} \Rightarrow$ TCN: $y = 2$.

2. Đường tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường **tiệm cận đứng**

(hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty.$$

Đặc biệt: Đối với hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$ và tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$.

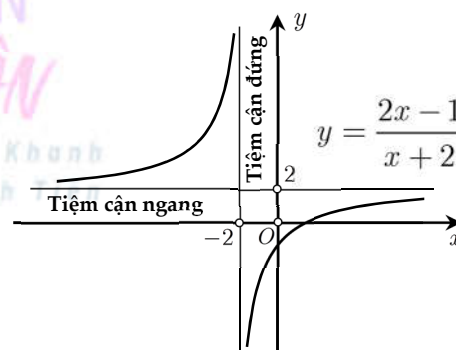
Nhận xét:

— Để tìm **tiệm cận đứng** của đồ thị hàm số, ta cần **tính giới hạn một bên** của x_0 , với x_0 thường là điều kiện biên của hàm số (hay tại x_0 thì hàm số không xác định).

— Kỹ năng sử dụng máy tính (**tham khảo**):

+ Tính $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x = x_0 + 10^{-9}$.

+ Tính $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x = x_0 - 10^{-9}$.



Dạng toán 1: Tìm đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

☆☆☆

- **Tìm đường TCN:** $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \alpha$ (1 số cụ thể) $\longrightarrow y = \alpha$ là tiệm cận ngang.
- **Tìm đường TCD:** $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} y = \pm\infty \longrightarrow$ TCD: $x = x_0$ (thường $x \neq x_0$ hoặc trong BBT thì x_0 tại ||).

1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên. Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	-		+
y	2 $\searrow$ $-\infty$	$+\infty$ $\searrow$ 2	

Lời giải. Quan sát bảng biến thiên, ta thấy:

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang.
- $\lim_{x \rightarrow 1^\pm} y = \pm\infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng.

2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên bên dưới. Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	+	0	-	+
y	0 $\nearrow$ 2	2 $\searrow$ $-\infty$	$-\infty$ $\nearrow$ 3	3 $\nearrow$ 5

3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên. Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	+	-	0	+
y	$-\infty$ $\nearrow$ 2	2 $\searrow$ $+\infty$	$+\infty$ $\searrow$ 0	0 $\nearrow$ $+\infty$

4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên. Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	-	-	0	+
y	2 $\searrow$ $-\infty$	$-\infty$ $\searrow$ -5	-5 $\nearrow$ 3	3 $\nearrow$ -1

5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên. Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
y'	-	-	0	+	-
y	-1 $\searrow$ $-\infty$	$-\infty$ $\searrow$ 2	2 $\searrow$ -4	-4 $\nearrow$ 3	3 $\searrow$ 0

6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên. Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+	-	0	+	-
y	$-\infty$ $\nearrow$ 1	1 $\searrow$ $+\infty$	$+\infty$ $\searrow$ -2	-2 $\nearrow$ 5	5 $\searrow$ -3

7. Tìm đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

Lời giải. Điều kiện $x \neq -1$.

Tìm tiệm cận đứng:

$$\text{Tính } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x+1}{x+1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x+1}{x+1} = +\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng.

Tìm tiệm cận ngang:

$$\text{Tính } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x+1}{x+1} = 2$$

$\Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang.

Cần nhớ:

Hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có:

TCĐ: $cx+d=0 \Leftrightarrow x = -\frac{d}{c}$ và TCN: $y = \frac{a}{c}$.

Tâm đối xứng của đồ thị là $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$.

8. Tìm đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x}{2x-1}$.

- Tiệm cận ngang:
- Tiệm cận đứng:

9. Tìm đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{3}{x+1}$.

- Tiệm cận ngang:
- Tiệm cận đứng:

10. (Đề thi THPT 2020 – Mã đề 101 câu 11) Tìm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{4x+1}{x-1}$ là

- A. $y = 1$. B. $y = 4$. C. $y = -1$. D. $y = -4$.

$\Rightarrow$ Tiệm cận ngang:

11. (Đề thi THPT QG năm 2019) Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ là

- A. $x = 1$. B. $y = 2$. C. $y = -1$. D. $x = -1$.

$\Rightarrow$ Tiệm cận ngang:

12. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+x-2}{x^3+x^2-5x+3}$.

Chuẩn thức: $y = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{x+2}{(x-1)(x+3)}$

Điều kiện: $x \neq 1, x \neq -3$.

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0$: là tiệm cận ngang.
- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} y = \pm\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} y = \pm\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$ là TCĐ.

Cần nhớ: $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ (đã chuẩn thức, tức thu gọn)

Tiệm cận ngang:

- Bậc $P(x) <$ bậc $Q(x) \Rightarrow$ TCN $y = 0$.
- Bậc $P(x) =$ bậc $Q(x) \Rightarrow$ TCN $y = \alpha$
với $\alpha = \frac{\text{Hệ số } x \text{ bậc cao của } P(x)}{\text{Hệ số } x \text{ bậc cao của } Q(x)}$.
- Bậc $P(x) >$ bậc $Q(x)$: không có TCN.

Tiệm cận đứng: $x = x_0$ với x_0 là nghiệm của $Q(x) = 0$ sau khi chuẩn thức.

13. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-5x+4}{x^2-1}$.

14. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3-2x^2-5x+6}{x^3+x^2-5x+3}$.

15. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ

thị hàm số $y = \frac{x^3 - 3x^2 - 16}{x^2 - 16}$.

16. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ

thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+25} - 5}{x^2 + x}$.

17. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ

thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x^2 + x}$.

18. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ

thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$.

19. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ

thị hàm số $y = \frac{\sqrt{4x^2 - 4x + 3}}{x - 3}$.

20. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ

thị hàm số $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$.

21. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ

thị hàm số $y = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x - 1}$.

22. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ

thị hàm số $y = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x + 5}$.

23. Cho hàm $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, có đạo hàm $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ và có bảng biến thiên

Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{f(x) - 1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

24. Cho hàm $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, có đạo hàm $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	2	$+\infty$	3	$-\infty$	$-\infty$

Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{2f(x) - 5}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

Dạng toán 2: Bài toán tiệm cận liên quan đến tham số

☆☆☆

25. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{3x-1}{x-m}$ có đường tiệm cận đứng là $x = 5$.

Giải. Ta có tiệm cận đứng là $x - m = 0$

$$\Leftrightarrow x = m = 5.$$

Kết luận: $m = 5$ là giá trị cần tìm.

26. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx-1}{2x+m}$ có đường tiệm cận đứng là $x = -1$.

27. Cho hàm số $f(x) = \frac{(m+1)x-5m}{2x-m}$. Tìm tham số m để đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

Giải. Tiệm cận ngang là $y = \frac{a}{c} = \frac{m+1}{2} = 1$

$$\Leftrightarrow m+1=2 \Leftrightarrow m=1.$$

Kết luận: $m = 1$ là giá trị cần tìm.

28. Cho hàm số $y = \frac{(2m-1)x+1}{x-m}$. Tìm tham số m để đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 3$.

29. Tìm m để tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{x+m-1}$ đi qua điểm $A(5;2)$.

30. Tìm m để tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+2m-1}{x+m}$ đi qua điểm $M(3;1)$.

31. Tìm m để tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{mx+5}{x+1}$ đi qua điểm $M(10;-3)$.

32. Tìm m để tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{(m+1)x-2}{1-x}$ đi qua điểm $A(3;1)$.

33. Cho hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$. Tìm $a+b$ để đồ thị hàm số có $x=1$ là tiệm cận đứng và $2y=1$ là tiệm cận ngang.

34. Cho hàm số $y = \frac{ax+4}{bx-1}$. Tìm $a+b$ để đồ thị hàm số có $x=1$ là tiệm cận đứng và $y=2$ là tiệm cận ngang.

35. Tìm tham số thực m để đồ thị hàm số $f(x) = \frac{mx+3}{x-m}$ có tiệm cận đứng là đường $x=1$, tiệm cận ngang là đường $y=1$.

36. Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{bx+1}$. Tìm $a+b$ để đồ thị hàm số có $3x-1=0$ là tiệm cận đứng và $y=2$ là tiệm cận ngang.

37. Cho hàm số $f(x) = \frac{(a-3)x + a + 9}{x - b - 3}$. Đồ thị hàm số nhận trục hoành và trục tung làm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng. Tính tích $a.b$. 	38. Cho hàm số $y = \frac{mx + 1}{x + 3n + 1}$. Đồ thị hàm số nhận trục hoành và trục tung làm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng. Tính $m + n$.
39. Tìm m để đồ thị hàm số $f(x) = \frac{2mx + m}{x - 1}$ có đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 16. 	40. Tìm m để đồ thị hàm số $f(x) = \frac{4mx + 3m}{x - 2}$ có đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 2020.
41. Đồ thị hàm số $y = \frac{(4a-b)x^2 + ax + 1}{x^2 + ax + b - 12}$ nhận trục hoành và trục tung làm hai tiệm cận. Tính giá trị của $a + b$. 	42. Đồ thị hàm số $f(x) = \frac{(2m-n)x^2 + mx + 1}{x^2 + mx + n - 6}$ nhận trục hoành và trục tung làm hai tiệm cận. Tính tổng $m + n$.
43. Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2 - mx + 1}$ có hai đường tiệm cận đứng? Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình $g(x) = x^2 - mx + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 2. $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \neq 0 \quad (\text{LĐ}) \\ \Delta = m^2 - 4 > 0 \\ g(2) = 2^2 - 2m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \\ m \neq \frac{5}{2} \end{cases}$ Kết luận: $m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \setminus \left\{ \frac{5}{2} \right\}$.	44. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{mx^2 - 2mx + 4 + m}$. Tìm m để đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng?

45. Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2-mx+1}$ có đúng ba đường tiệm cận ?

46. Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2-2mx+4}$ có đúng ba đường tiệm cận ?

47. Cho hàm số $y = \frac{x^2+x-2}{x^2-2x+m}$. Tìm tham số m để đồ thị hàm số có 3 tiệm cận ?

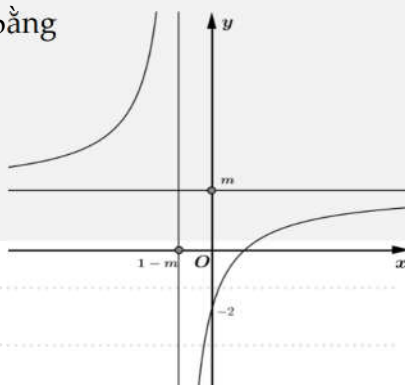
48. Cho hàm số $y = \frac{x}{x^2-2(m+1)x+m^2}$. Tìm tham số m để đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ?

49. Cho hàm số $y = \frac{2x^2-3x+m}{x-m}$. Tìm tham số m để đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

50. Cho hàm số $y = \frac{x^2+m^2x-m-1}{x+2}$. Tìm m để đồ thị hàm số có tiệm cận đứng ?

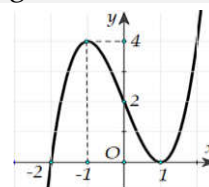
51. Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng

- A. 2.
- B. 1.**
- C. 3.
- D. -1.



52. Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ như hình vẽ. Đồ thị của $g(x) = \frac{x^2-x}{f^2(x)-2f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?

- A. 2.
- B. 3.
- C. 4.**
- D. 5.



BÀI TẬP VỀ NHÀ

Câu 1. Tìm đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$?

- A. $x = 1, y = -1$. B. $x = 1, y = 1$. C. $x = -1, y = 1$. D. $x = -1, y = -1$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Khẳng định nào **đúng** ?

- A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có tiệm cận ngang.
 B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai tiệm cận ngang.
 C. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận ngang $y = -1$ và tiệm cận đứng $x = 1$.
 D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai tiệm cận ngang là các đường $y = 1$ và $y = -1$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		+	
y			1

-1 —————>

Hỏi đồ thị hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang ?

- A. 0. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên:

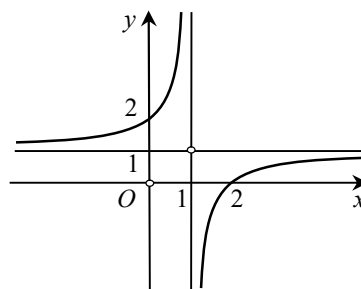
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	0	2	$-\infty$	5

Hỏi mệnh đề nào dưới đây **đúng** ?

- A. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y = 0, y = 5$ và tiệm cận đứng là $x = 1$.
 B. Giá trị cực tiểu của hàm số là $y_{CT} = 3$.
 C. Giá trị cực đại của hàm số là $y_{CD} = 5$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là

- A. $x = 1$.
 B. $x = 2$.
 C. $y = 2$.
 D. $y = 1$.



Câu 6. Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{3x+6}$ có đồ thị (C) . Khẳng định nào là **sai** ?

- A. (C) có tiệm cận đứng $x = -2$. B. (C) có tiệm cận ngang $y = \frac{2}{3}$.

- C. (C) có tâm đối xứng $I\left(-2; \frac{2}{3}\right)$. D. (C) đi qua điểm $A\left(1; \frac{1}{9}\right)$.

Câu 7. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = 1 + \frac{2x+2}{x-1}$?

- A. $x = 1$. B. $y = 2$. C. $y = 3$. D. $y = 1$.

Câu 8. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3}{x-2}$ là bao nhiêu ?

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Câu 9. Cho hàm số $y = \frac{4x+2019}{2|x|+1}$ (1). Mệnh đề nào dưới đây là **đúng** ?

- A. Đồ thị hàm số (1) không có tiệm cận ngang và có đúng một tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$.
 B. Đồ thị hàm số (1) có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = -2$, $y = 2$ và không có tiệm cận đứng.
 C. Đồ thị hàm số (1) có đúng một tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$ và không có tiệm cận đứng.
 D. Đồ thị hàm số (1) không có tiệm cận ngang và có đúng hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x = -1$, $x = 1$.

Câu 10. Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{-4x+5}{2x+3}$ tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 11. Cho hàm số $y = \frac{4mx+3m}{x-2}$. Tìm m để đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cùng hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích là 2016.

- A. $m = 1008$. B. $m = \pm 504$. C. $m = \pm 252$. D. $m = \pm 1008$.

Câu 12. Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+2x-3}{x^2-4x+3}$.

- A. $x = 1$. B. $x = 1$ và $x = 3$. C. $x = 3$. D. $y = 1$.

Câu 13. Đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x^2+4x+4}$ có tiệm cận đứng $x = a$ và tiệm cận ngang $y = b$. Tính $S = a + 2b$.

- A. $S = -2$. B. $S = 2$. C. $S = -4$. D. $S = 4$.

Câu 14. Đồ thị hàm số nào sau đây không có tiệm cận ngang ?

- A. $y = x + \sqrt{x^2-1}$. B. $y = \frac{x^2}{x-1}$.
 C. $y = \frac{x+2}{x-1}$. D. $y = \frac{x+2}{x^2-1}$.

Câu 15. Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-4x+3}{x^4-4x^2+3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ?

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 5.

Câu 16. Đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2+2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 17. Cho hàm số $y = \frac{x^2-1}{x(x^2-2x-3)}$. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là bao nhiêu ?

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

Câu 18. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-2}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận ?

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.

Câu 19. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$ là bao nhiêu ?

- A. 0. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 20. Tìm tất cả các đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

- A. $y = -1$. B. $y = 1$. C. $y = 1, y = -1$. D. $y = 0$.

Câu 21. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-3x-4}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận ?

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Câu 22. Đồ thị hàm số $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận ?

- A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 23. Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-9}$. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

- A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = \pm 3$.
 B. Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng và 1 tiệm cận ngang.
 C. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.
 D. Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng và 2 tiệm cận ngang.

Câu 24. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{x-1}$.

- A. 1. B. 4. C. 3. D. 2.

Câu 25. Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một tiệm cận ngang là $y = 3$. Khi đó đồ thị hàm số $g(x) = 2f(x) - 4$ có một tiệm cận ngang là

- A. $y = 3$. B. $y = 2$. C. $y = 1$. D. $y = -4$.

Câu 26. Tìm m để tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{x+m-1}$ đi qua điểm $A(5;2)$.

- A. $m = -4$. B. $m = -1$. C. $m = 6$. D. $m = 4$.

Câu 27. Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{(m+1)x-5m}{2x-m}$ có tiệm cận ngang là $y = 1$.

- A. $m = 2$. B. $m = \frac{5}{2}$. C. $m = 0$. D. $m = 1$.

Câu 28. Cho hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$. Tìm $S = a + b$ để đồ thị hàm số có $x = 1$ là tiệm cận đứng và $y = \frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang.

- A. $S = -3$. B. $S = 3$. C. $S = 1$. D. $S = 8$.

Câu 29. Tìm tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx+3}{x-m}$ có tiệm cận đứng là đường $x = 1$, tiệm cận ngang là đường $y = 1$.

- A. $m = 1$. B. $m = 2$. C. $m = -1$. D. $m = 3$.

Câu 30. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{4x-5}{x-m}$ có tiệm cận đứng nằm bên phải trục Oy .

- A. $m = 0$. B. $m < 0$. C. $m > 0$. D. $m \neq 0$.

Câu 31. Xác định hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$; biết rằng đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $M(0;1)$ và đồ thị có giao điểm hai đường tiệm cận là $I(1;-1)$?

- A. $y = \frac{x+1}{x-1}$. B. $y = \frac{x-2}{-x-2}$. C. $y = \frac{2x-1}{x-1}$. D. $y = \frac{x+1}{1-x}$.

Câu 32. Cho hàm số $y = \frac{3x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) và M là điểm bất kì thuộc (C) . Gọi d_1, d_2 lần lượt là khoảng cách từ điểm M đến đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang. Tính tích $d_1 d_2$.

- A. $d_1 d_2 = 2$. B. $d_1 d_2 = 3$. C. $d_1 d_2 = 4$. D. $d_1 d_2 = 6$.

Câu 33. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-4}{x^2-mx+4}$ có hai đường tiệm cận đứng ?

- A. $m \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$. B. $m \neq 5$.
C. $m \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty) \setminus \{5\}$. D. $m \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.

Câu 34. Cho hàm số $y = \frac{2x^2-3x+m}{x-m}$ có đồ thị (C) . Tìm tham số m để (C) không có tiệm cận đứng ?

- A. $m = 0$. B. $m = 1$.
C. $m = 2$. D. $m = 0$ hoặc $m = 1$.

Câu 35. Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x^2+4x+m}$. Tìm tham số m để đồ thị hàm số có ba tiệm cận ?

- A. $m > 4$ và $m \neq 3$.
B. $m < 4$.
C. $m < 4$ và $m \neq 3$.
D. $m \in \mathbb{R}$.

Câu 36. Cho hàm số $y = \frac{mx+1}{x+3n+1}$. Đồ thị hàm số nhận trục hoành và trục tung làm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng. Tính $m + n$.

- A. $m + n = -\frac{1}{3}$. B. $m + n = \frac{1}{3}$. C. $m + n = \frac{2}{3}$. D. $m + n = 0$.

Câu 37. Biết đồ thị hàm số $y = \frac{(2m - n)x^2 + mx + 1}{x^2 + mx + n - 6}$ nhận trục hoành và trục tung làm hai tiệm cận.

Tính $m + n$.

- A. $m + n = 6$. B. $m + n = -6$. C. $m + n = 8$. D. $m + n = 9$.

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	2	$+\infty$	3	$-\infty$	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x) - 5}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

- A. 0. B. 4. C. 2. D. 1.

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số

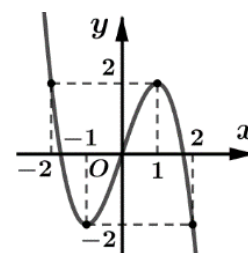
$g(x) = \frac{1}{f^2(x) - 1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

- A. 0.
B. 1.
C. 2.
D. 3.

x	$-\infty$	$-0,5$	$+\infty$
f'	$+$	$+$	$+$
f	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	$\frac{3}{2}$

Câu 40. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Đồ thị hàm số $y = \frac{x + 2}{f(x) + 1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

- A. 0.
B. 1.
C. 2.
D. 3.



BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.C	3.D	4.A	5.A	6.D	7.C	8.A	9.B	10.C
11.C	12.C	13.C	14.B	15.B	16.B	17.A	18.B	19.B	20.C
21.D	22.A	23.C	24.C	25.B	26.A	27.D	28.B	29.A	30.C
31.D	32.C	33.C	34.D	35.C	36.A	37.D	38.B	39.C	40.D

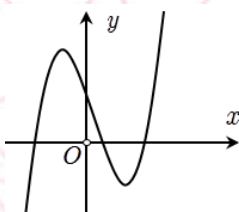
§ 5. KHẢO SÁT SỐ BIẾN THIÊN VÀ VẼ NỒ THỜ HÀM SỐ

Dạng toán 1: Nhận dạng đồ thị hàm số

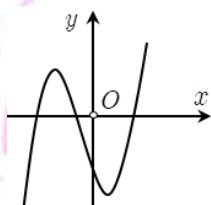
☆☆☆

NHẬN DẠNG ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC BA**Cần nhớ:****1.** Cho đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hỏi đồ thị là của hàm số nào dưới đây ?

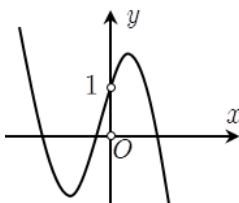
- A. $y = -x^2 + x - 1$.
 B. $y = -x^3 + 3x + 1$.
 C. $y = x^4 - x^2 + 1$.
 D. $y = x^3 - 3x + 1$.

**2.** Cho đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hỏi đồ thị là của hàm số nào dưới đây ?

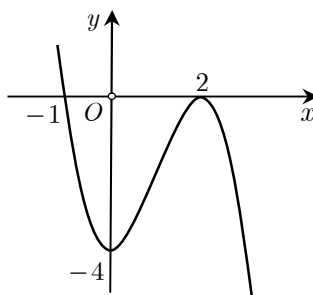
- A. $y = x^3 - 3x + 1$.
 B. $y = x^4 - 3x^2 - 1$.
 C. $y = -x^3 - 3x - 1$.
 D. $y = x^3 - 3x - 1$.

**3.** Cho đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hỏi đồ thị là của hàm số nào dưới đây ?

- A. $y = x^3 + 3x^2 - 3x + 1$.
 B. $y = -x^3 - 2x^2 + x - 2$.
 C. $y = -x^3 + 3x + 1$.
 D. $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

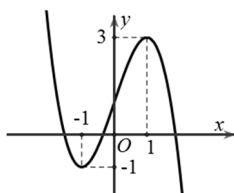
**4.** Cho đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hỏi đồ thị là của hàm số nào dưới đây ?

- A. $y = -x^3 - 4$.
 B. $y = x^3 - 3x^2 - 4$.
 C. $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.
 D. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.



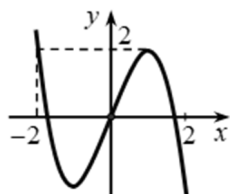
5. Cho đồ thị của hàm số có hình vẽ bên dưới. Hỏi đồ thị là của hàm số nào dưới đây ?

- A. $y = -x^3 + 3x + 1$.
 B. $y = x^3 - 3x + 1$.
 C. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.
 D. $y = -x^3 - 3x + 1$.



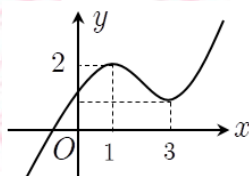
6. Cho đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hỏi đồ thị là của hàm số nào dưới đây ?

- A. $y = x^3 - 3x^2$.
 B. $y = -x^4 + 2x^2$.
 C. $y = 1 + 3x - x^3$.
 D. $y = 3x - x^3$.



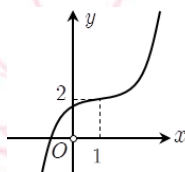
7. Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tìm mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau ?

- A. $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
 B. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
 C. $y' > 0, \forall x > 1$.
 D. $y' > 0, \forall x < 1$.



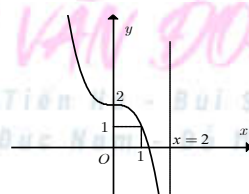
8. Cho đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tìm mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau ?

- A. $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
 B. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
 C. $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
 D. $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.



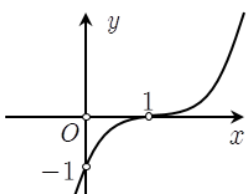
9. Cho đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tìm mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau ?

- A. $y' > 0, \forall x < 2$.
 B. $y' = 0, \forall x < 2$.
 C. $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
 D. $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.



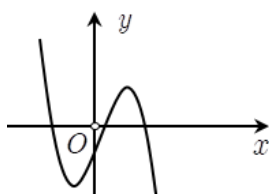
10. Cho đồ thị của hàm số như hình vẽ bên dưới. Hỏi đồ thị là của hàm số nào ?

- A. $y = (x - 1)^3$.
 B. $y = x^3 + 1$.
 C. $y = x^3 - 1$.
 D. $y = (x + 1)^3$.



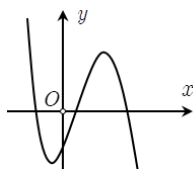
11. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình. Mệnh đề nào sau đây **đúng** ?

- A. $y' = 0$ vô nghiệm.
 B. $y' = 0$ có 1 nghiệm duy nhất.
 C. $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.
 D. $y' = 0$ có 3 nghiệm.



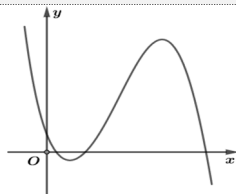
12. (Đề thi thử lần 6 – T.T Thế Vinh – T.T Hoàng Gia – Tp. Hồ Chí Minh) Cho đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?

- A. 1.
B. 2.
C. 3.
D. 4.



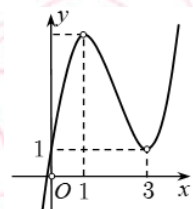
13. (Đề thi THPT 2020 Câu 45 Mã đề 101) Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) như hình vẽ. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?

- A. 4.
B. 1.
C. 2.
D. 3.



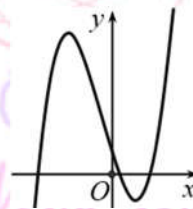
14. Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ như hình vẽ. Tìm mệnh đề **đúng** ?

- A. $a > 0, b > 0, c < 0, d < 0$.
B. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.
C. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.
D. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.



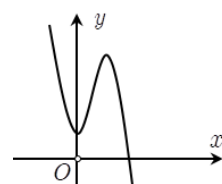
15. Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ như hình vẽ. Tìm mệnh đề **đúng** ?

- A. $a > 0, d > 0, b < 0, c < 0$.
B. $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
C. $a > 0, c > 0, d > 0, b < 0$.
D. $a > 0, b > 0, d > 0, c < 0$.



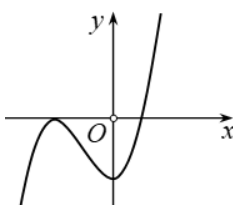
16. Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ như hình vẽ bên dưới. Tìm mệnh đề **đúng** ?

- A. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$.
B. $a < 0, b < 0, c = 0, d > 0$.
C. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.
D. $a < 0, b > 0, c = 0, d > 0$.



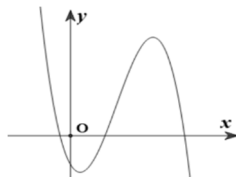
17. Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ như hình vẽ bên dưới. Tìm mệnh đề **đúng** ?

- A. $a > 0, b > 0, c = 0, d < 0$.
B. $a > 0, b > 0, c = 0, d > 0$.
C. $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.
D. $a > 0, b < 0, c = 0, d < 0$.



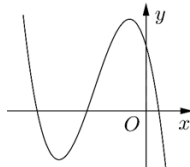
18. (Đề thi THPT 2020 Câu 46 Mã đề 102) Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) như hình vẽ. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?

- A. 4.
B. 1.
C. 2.
D. 3.



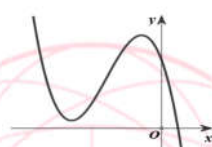
19. (Đề thi THPT 2020 Câu 46 Mã đề 103) Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) như hình vẽ. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?

- A. 4.
B. 1.
C. 2.
D. 3.



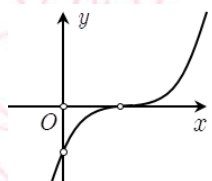
20. (Đề thi THPT 2020 Câu 48 Mã đề 104) Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) như hình vẽ. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?

- A. 4.
B. 1.
C. 2.
D. 3.



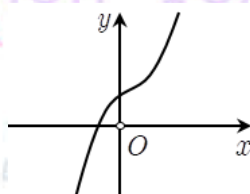
21. Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ như hình vẽ bên dưới. Tìm mệnh đề **đúng** ?

- A. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.
B. $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$.
C. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
D. $a > 0, b < 0, c > 0, d < 0$.



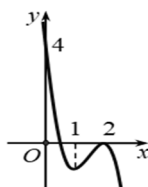
22. Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ như hình vẽ bên dưới. Tìm mệnh đề **đúng** ?

- A. $ab^2 > 3a^2c$.
B. $ab^2 < 3a^2c$.
C. $b^2d > 3acd$.
D. $-b^2d < -3acd$.



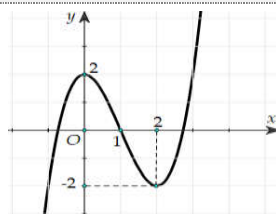
23. Cho đồ thị hàm số $y = -2x^3 + bx^2 + cx + d$ như hình vẽ bên dưới. Tổng $b + c + d$ bằng

- A. 1.
B. 3.
C. 5.
D. 7.



24. Cho đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 - 3x^2 + cx + d$ như hình vẽ bên dưới. Tổng $a + c + d$ bằng

- A. 2.
B. -3.
C. 0.
D. 3.



25. Cho bảng biến thiên bên dưới. Tìm hàm số thỏa mãn bảng biến thiên đã cho ?

A. $y = x^3 + 3x^2 + 1$.

B. $y = 2x^3 + 6x^2 + 1$.

C. $y = x^3 + 3x^2 - 1$.

D. $y = -x^3 - 3x^2 + 1$.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

26. Cho bảng biến thiên bên dưới. Tìm hàm số thỏa mãn bảng biến thiên đã cho ?

A. $y = -x^3 + 6x - 2$.

B. $y = -3x^3 + 9x^2 - 2$.

C. $y = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 2$.

D. $y = -2x^3 + 6x^2 - 2$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\infty$

27. Cho bảng biến thiên bên dưới. Tìm hàm số thỏa mãn bảng biến thiên đã cho ?

A. $y = -x^3 + 3x$.

B. $y = -x^3 - 3x^2 + 1$.

C. $y = x^3 - 3x$.

D. $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

28. Cho bảng biến thiên bên dưới. Tìm hàm số thỏa mãn bảng biến thiên đã cho ?

A. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

B. $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

C. $y = x^3 + 3x^2 + 1$.

D. $y = -x^3 - 3x^2 - 1$.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

29. Cho bảng biến thiên bên dưới. Tìm hàm số thỏa mãn bảng biến thiên đã cho ?

A. $y = x^3 + 3x + 2$.

B. $y = x^3 + 9x^2 + 27x$.

C. $y = x^3 - 3x^2 + 6$.

D. $y = 2x^3 + 6x^2 + 6x$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	$+$	0	$+$
y	$-\infty$	-2	$+\infty$

30. (Đề thi thử lần 2 – Trung Tâm Thế Vinh – Trung Tâm Hoàng Gia – Tp. Hồ Chí Minh) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + 2$ có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$	x_1	x_2	0	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$

Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào đúng ?

A. $a > 0, b < 0, c < 0$.

B. $a > 0, b < 0, c > 0$.

C. $a > 0, b > 0, c < 0$.

D. $a > 0, b > 0, c > 0$.

ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC BỐN TRÙNG PHƯƠNG

Cần nhớ:

1. Cho bảng biến thiên của hàm số bậc bốn trùng phương bên dưới. Hàm số đó là

A. $y = -x^4 + 2x^2 + 2.$

B. $y = x^4 - 2x^2 + 2.$

C. $y = x^4 - 2x - 2.$

D. $y = x^4 + 2x^2 + 2.$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		1	2	1	$+\infty$

2. Cho bảng biến thiên của hàm số bậc bốn trùng phương bên dưới. Hàm số đó là

A. $y = 2x^4 - 4x^2 + 1.$

B. $y = -2x^4 + 4x^2 + 1.$

C. $y = -2x^4 - 4x^2 + 1.$

D. $y = -2x^4 + 4x^2 - 1.$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
		3	1	3	$-\infty$

3. Cho bảng biến thiên của hàm số bậc bốn trùng phương bên dưới. Hàm số đó là

A. $y = x^4 - 2x^2 - 2.$

B. $y = -x^4 + 2x^2 - 2.$

C. $y = x^4 + 2x^2 - 2.$

D. $y = x^4 + 2x^2 - 1.$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$
		-2	$+\infty$

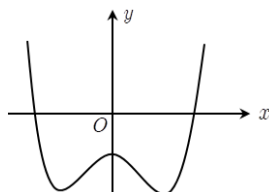
4. (THPT Quốc Gia 2017 – Mã 101) Cho đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị là của hàm số nào ?

A. $y = -x^3 + x^2 - 1.$

B. $y = x^4 - x^2 - 1.$

C. $y = x^3 - x^2 - 1.$

D. $y = -x^4 + x^2 - 1.$



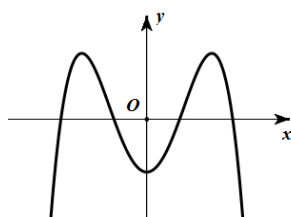
5. (THPT Quốc Gia 2018 – Mã 101) Cho đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị là của hàm số nào ?

A. $y = x^4 - 3x^2 - 1.$

B. $y = x^3 - 3x^2 - 1.$

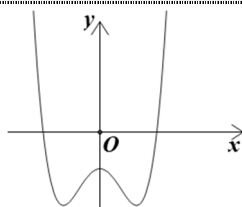
C. $y = -x^3 + 3x^2 - 1.$

D. $y = -x^4 + 3x^2 - 1.$



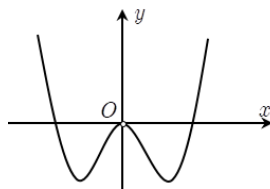
6. (THPT Quốc Gia 2018 – Mã 102) Cho đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị là của hàm số nào ?

- A. $y = x^4 - 2x^2 - 1$.
 B. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$.
 C. $y = x^3 - x^2 - 1$.
 D. $y = -x^3 + x^2 - 1$.



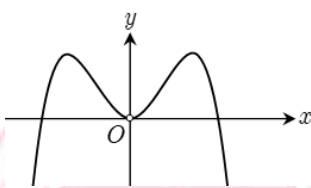
7. Cho đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị là của hàm số nào ?

- A. $y = -x^4 + 2x^2$.
 B. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.
 C. $y = -x^4 - 2x^2$.
 D. $y = x^4 - 2x^2$.



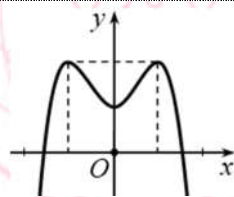
8. Cho đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị là của hàm số nào ?

- A. $y = -x^4 + 2x^2$.
 B. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.
 C. $y = -x^4 - 2x^2$.
 D. $y = x^4 - 2x^2$.



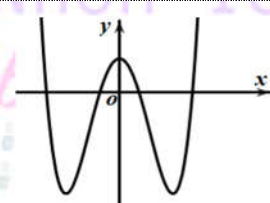
9. Cho đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị là của hàm số nào ?

- A. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.
 B. $y = -x^3 - 2x + x + 1$.
 C. $y = x^3 - 2x^2 - x + 1$.
 D. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.



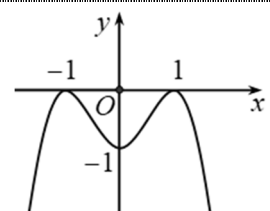
10. Cho đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị là của hàm số nào ?

- A. $y = -x^4 + 4x^2 + 1$.
 B. $y = x^4 + 2x^2 + 1$.
 C. $y = x^4 - 4x^2 + 1$.
 D. $y = x^4 - 2x^2 - 1$.



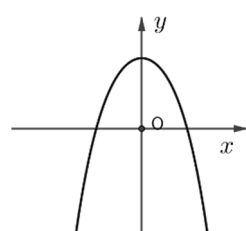
11. Cho đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị là của hàm số nào ?

- A. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$.
 B. $y = -x^4 + x^2 - 1$.
 C. $y = -x^4 + 3x^2 - 3$.
 D. $y = -x^4 + 3x^2 - 2$.



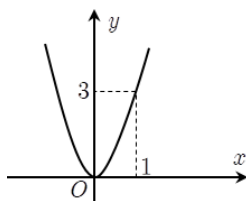
12. Cho đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị là của hàm số nào ?

- A. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.
 B. $y = -x^4 - 2x^2 + 1$.
 C. $y = x^4 - 3x^2 + 1$.
 D. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.



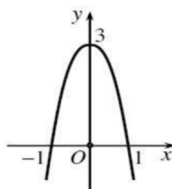
13. Cho đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị là của hàm số nào ?

- A. $y = x^2$.
 B. $y = -x^4 + 4x^2$.
 C. $y = 3x^4 - x^2 + 1$.
 D. $y = 2x^4 + x^2$.



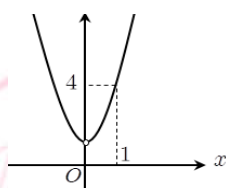
14. Cho đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị là của hàm số nào ?

- A. $y = x^3 + 3x^2 - 3$.
 B. $y = -x^2 + 2x + 3$.
 C. $y = x^4 + 2x^2 - 3$.
 D. $y = -x^4 - 2x^2 + 3$.



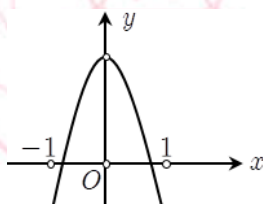
15. Cho đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị là của hàm số nào ?

- A. $y = x^2 + x + 2$.
 B. $y = x^4 + 2x^2 + 1$.
 C. $y = x^4 + 4x^2 - 4$.
 D. $y = -x^4 - 2x^2 + 3$.



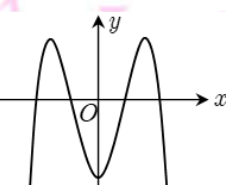
16. Cho đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị là của hàm số nào ?

- A. $y = -x^3 + 3x^2 + 2$.
 B. $y = 3x^2 + 2$.
 C. $y = -x^4 + 2$.
 D. $y = -x^4 - 2x^2 + 2$.



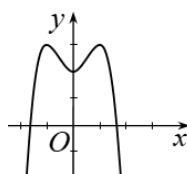
17. Cho đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ như hình vẽ. Tìm mệnh đề **đúng** ?

- A. $a > 0, b < 0, c < 0$.
 B. $a < 0, b > 0, c < 0$.
 C. $a > 0, b < 0, c > 0$.
 D. $a < 0, b < 0, c < 0$.



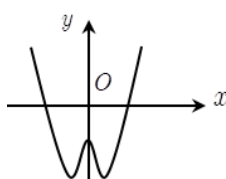
18. Cho đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ như hình vẽ. Tìm mệnh đề **đúng** ?

- A. $a < 0, b < 0, c > 0$.
 B. $a > 0, b > 0, c > 0$.
 C. $a > 0, b < 0, c > 0$.
 D. $a < 0, b > 0, c > 0$.



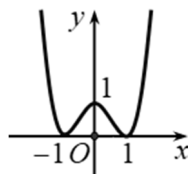
19. Cho đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ như hình vẽ. Tìm mệnh đề **đúng** ?

- A. $abc < 0$.
 B. $ab > 0$.
 C. $ac > 0$.
 D. $bc > 0$.



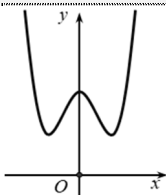
20. Cho đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ như hình vẽ. Tìm mệnh đề **đúng** ?

- A. $a > 0, b < 0, c = 1$.
 B. $a > 0, b > 0, c = 1$.
 C. $a < 0, b > 0, c = 1$.
 D. $a > 0, b > 0, c > 0$.



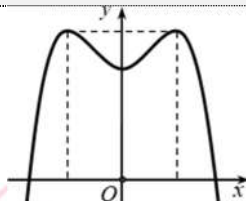
21. Cho đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ như hình vẽ. Tìm mệnh đề **đúng** ?

- A. $a + c > 0, b > 0$.
 B. $a + c > 0, b < 0$.
 C. $a + c < 0, b > 0$.
 D. $a + c < 0, b < 0$.



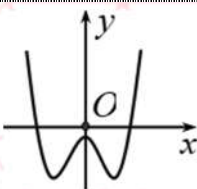
22. Cho đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ như hình vẽ. Tìm mệnh đề **đúng** ?

- A. $a < 0, b > 0, c > 0$.
 B. $a < 0, b > 0, c < 0$.
 C. $a > 0, b < 0, c < 0$.
 D. $a < 0, b < 0, c < 0$.



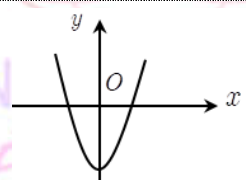
23. Cho đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ như hình vẽ. Tìm mệnh đề **đúng** ?

- A. $a > 0, b < 0, c > 0$.
 B. $a > 0, b > 0, c < 0$.
 C. $a > 0, b < 0, c < 0$.
 D. $a < 0, b > 0, c < 0$.



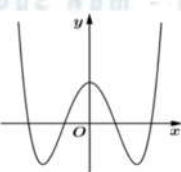
24. Cho đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ như hình vẽ. Tìm mệnh đề **đúng** ?

- A. $c < 0, b > 0$.
 B. $c < 0, b \geq 0$.
 C. $c > 0, b < 0$.
 D. $c > 0, b \leq 0$.



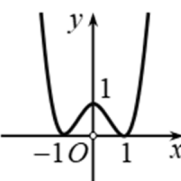
25. Cho đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ như hình vẽ. Tìm mệnh đề **đúng** ?

- A. $a > 0, b > 0, c > 0$.
 B. $a > 0, b < 0, c > 0$.
 C. $a < 0, b > 0, c > 0$.
 D. $a > 0, b < 0, c < 0$.



26. Cho đồ thị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ như hình vẽ bên dưới. Giá trị của biểu thức $a^2 + b + 3c$ bằng

- A. 7.
 B. 5.
 C. 2.
 D. 3.

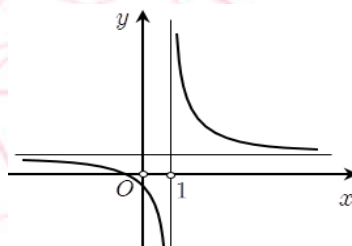


ĐỒ THỊ HÀM SỐ NHẤT BIẾN

Cần nhớ:

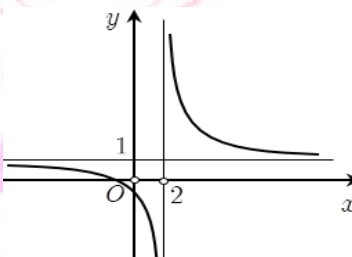
1. (THPT QG năm 2017 – Mã 101) Cho đồ thị hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ như hình. Tìm khẳng định **đúng** ?

- A. $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
 B. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
 C. $y' > 0, \forall x \neq 1$.
 D. $y' < 0, \forall x \neq 1$.



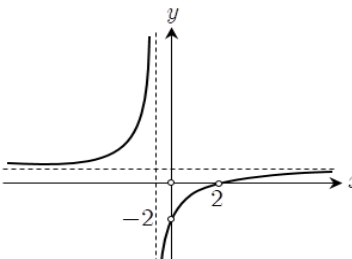
2. (THPT QG năm 2017 – Mã 101) Cho đồ thị hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ như hình. Tìm khẳng định **đúng** ?

- A. $y' < 0, \forall x \neq 2$.
 B. $y' < 0, \forall x \neq 1$.
 C. $y' > 0, \forall x \neq 2$.
 D. $y' > 0, \forall x \neq 1$.



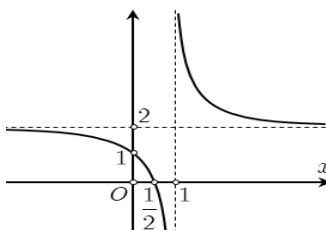
3. Đồ thị bên dưới là của hàm số nào trong bốn hàm số được cho dưới đây ?

- A. $y = \frac{x + 2}{x - 1}$. B. $y = \frac{2 - x}{x + 1}$.
 C. $y = \frac{x - 2}{x + 1}$. D. $y = \frac{x - 2}{x - 1}$.



4. Đồ thị bên dưới là của hàm số nào trong bốn hàm số được cho dưới đây ?

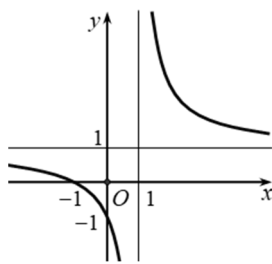
- A. $y = \frac{x - 1}{x - 2}$. B. $y = \frac{2x - 1}{x - 1}$.
 C. $y = \frac{2x + 1}{x - 1}$. D. $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$.



5. Đồ thị bên dưới là của hàm số nào trong bốn hàm số được cho dưới đây ?

A. $y = \frac{2x-3}{2x-2}$ B. $y = \frac{x}{x-1}$

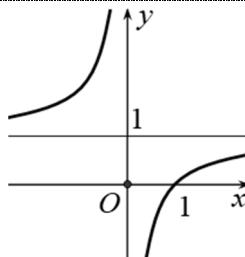
C. $y = \frac{x-1}{x+1}$ D. $y = \frac{x+1}{x-1}$



6. Đồ thị bên dưới là của hàm số nào trong bốn hàm số được cho dưới đây ?

A. $y = \frac{x+1}{x}$ B. $y = \frac{x-1}{x+1}$

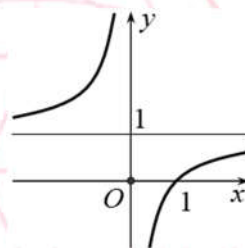
C. $y = \frac{2x-2}{x}$ D. $y = \frac{x-1}{x}$



7. Đồ thị bên dưới là của hàm số nào trong bốn hàm số được cho dưới đây ?

A. $y = \frac{x+1}{x}$ B. $y = \frac{x-1}{x+1}$

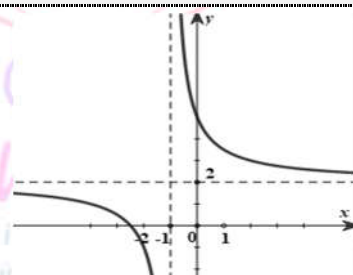
C. $y = \frac{2x-2}{x}$ D. $y = \frac{x-1}{x}$



8. Đồ thị bên dưới là của hàm số nào trong bốn hàm số được cho dưới đây ?

A. $y = \frac{2x+1}{x+1}$ B. $y = \frac{-2x+5}{-x-1}$

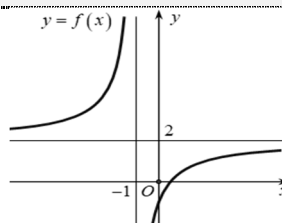
C. $y = \frac{2x+3}{x+1}$ D. $y = \frac{2x+5}{x+1}$



9. Đồ thị bên dưới là của hàm số nào trong bốn hàm số được cho dưới đây ?

A. $y = \frac{2x+1}{x-1}$ B. $y = \frac{1-2x}{x-1}$

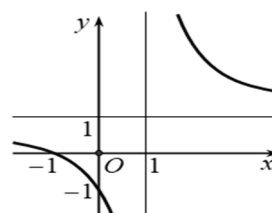
C. $y = \frac{2x-1}{x+1}$ D. $y = \frac{1-2x}{x+1}$



10. Đồ thị bên dưới là của hàm số nào trong bốn hàm số được cho dưới đây ?

A. $y = \frac{2x+1}{x-1}$ B. $y = \frac{2x-1}{x-1}$

C. $y = \frac{x+1}{x-1}$ D. $y = \frac{x-1}{x+1}$



11. Cho hàm số phù hợp với bảng biến thiên. Hỏi đó là hàm số nào ?

A. $y = \frac{-x+2}{x-1}$ B. $y = \frac{x+2}{x-1}$

C. $y = \frac{x+2}{x+1}$ D. $y = \frac{x-3}{x-1}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'		-	-
y	1	$+\infty$	1

12. Cho hàm số phù hợp với bảng biến thiên. Hỏi đó là hàm số nào ?

A. $y = \frac{x+1}{2x-1}$ B. $y = \frac{2x-1}{x+1}$

C. $y = \frac{2x+3}{x+1}$ D. $y = \frac{2x-1}{x-1}$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'		+	+
y	2	$+\infty$	2

13. Cho hàm số phù hợp với bảng biến thiên. Hỏi đó là hàm số nào ?

A. $y = \frac{2x+1}{x-2}$ B. $y = \frac{x-1}{2x+2}$

C. $y = \frac{x+1}{x-2}$ D. $y = \frac{x+3}{2+x}$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'		-	-
y	1	$+\infty$	1

14. Cho hàm số phù hợp với bảng biến thiên. Hỏi đó là hàm số nào ?

A. $y = \frac{x+1}{2x-1}$ B. $y = \frac{2x-1}{x+1}$

C. $y = \frac{2x+3}{x+1}$ D. $y = \frac{2x-1}{x-1}$

x	$-\infty$	0,5	$+\infty$
y'		+	+
y	0,5	$+\infty$	0,5

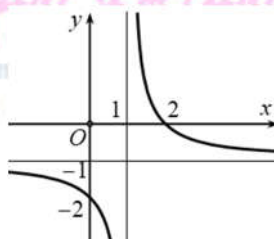
15. Cho đồ thị hàm số $y = \frac{ax-b}{x-1}$ như hình vẽ. Tìm khẳng định **đúng** ?

A. $b < 0 < a$.

B. $0 < b < a$.

C. $b < a < 0$.

D. $0 < a < b$.



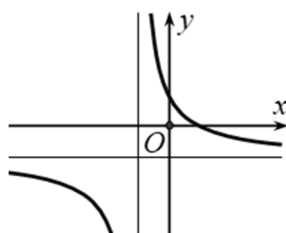
16. Cho đồ thị hàm số $y = \frac{ax-1}{cx+d}$ như hình vẽ. Tìm khẳng định **đúng** ?

A. $d > 0, a > 0, c < 0$.

B. $d > 0, a < 0, c > 0$.

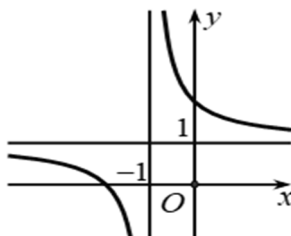
C. $d < 0, a > 0, c < 0$.

D. $d < 0, a < 0, c > 0$.



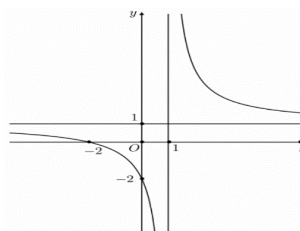
17. Cho đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{x+1}$ như hình vẽ. Tìm khẳng định **đúng** ?

- A. $b < 0 < a$.
- B. $0 < a < b$.
- C. $a < b < 0$.
- D. $0 < b < a$.



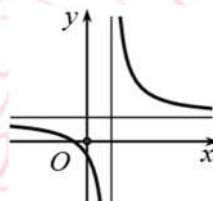
18. Cho đồ thị hàm số $y = \frac{ax - b}{x - 1}$ như hình vẽ. Tìm khẳng định **đúng** ?

- A. $a < 0, b < 0$.
- B. $0 < b < a$.
- C. $b < 0 < a$.
- D. $a < b < 0$.



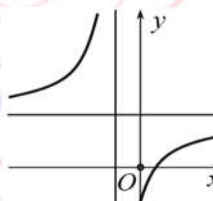
19. Cho đồ thị hàm số $y = \frac{bx - c}{x - a}$ như hình vẽ. Tìm khẳng định **đúng** ?

- A. $a > 0, b < 0, c < ab$.
- B. $a > 0, b > 0, c < ab$.
- C. $a < 0, b > 0, c < ab$.
- D. $a < 0, b < 0, c > ab$.



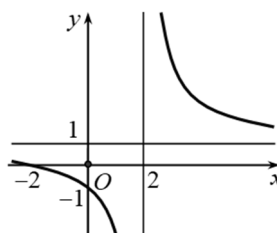
20. Cho đồ thị hàm số $y = \frac{ax + b}{x - c}$ như hình vẽ. Tìm khẳng định **đúng** ?

- A. $a < 0, b > 0, c > 0$.
- B. $a > 0, b < 0, c > 0$.
- C. $a > 0, b > 0, c < 0$.
- D. $a > 0, b < 0, c < 0$.



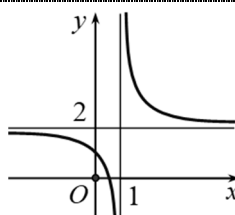
21. Cho đồ thị hàm số $y = \frac{ax + 2}{cx + b}$ như hình vẽ. Giá trị của a, b, c lần lượt là

- A. 1; 1; -1.
- B. 2; 2; -1.
- C. 1; 2; 1.
- D. 1; -2; 1.



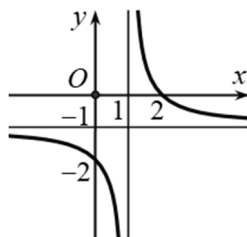
22. Cho đồ thị hàm số $y = \frac{ax - 1}{bx + c}$ như hình vẽ. Giá trị của a, b, c lần lượt là

- A. 2; 1; -1.
- B. 2; 1; 1.
- C. 2; 2; -1.
- D. 2; -1; 1.



23. Cho đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ như hình vẽ bên dưới. Giá trị của tổng $a - 3b + 2c$ bằng

- A. 12.
B. -7.
C. 10.
D. -9.



24. (Đề tham khảo thi THPT năm 2020 – Bộ GD & ĐT) Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+1}{bx+c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên bên dưới. Trong các số a, b và c có bao nhiêu số dương?

- A. 0.
B. 1.
C. 2.
D. 3.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
$f(x)$	1	$+\infty$	$-\infty$

25. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+1}$, ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên bên dưới. Trong các số a, b và c có bao nhiêu số dương?

- A. 0.
B. 1.
C. 2.
D. 3.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$		-	-
$f(x)$	$+\infty$	2	$-\infty$

26. Cho hàm số $y = \frac{ax+1}{bx+c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên bên dưới và đồ thị cắt trục hoành tại điểm có hoành độ âm. Tìm khẳng định **đúng**?

- A. $a < 0, b < 0, c < 0$.
B. $a > 0, b > 0, c < 0$.
C. $a > 0, b > 0, c > 0$.
D. $a > 0, b < 0, c > 0$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'		+	+
y	1	$+\infty$	$-\infty$

27. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên bên dưới. Mệnh đề nào **đúng**?

- A. $ac > 0, ab > 0$.
B. $ad < 0, bc > 0$.
C. $cd < 0, bd > 0$.
D. $ab > 0, cd > 0$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
$f(x)$	-2	$+\infty$	$-\infty$

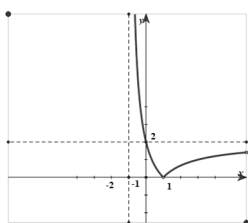
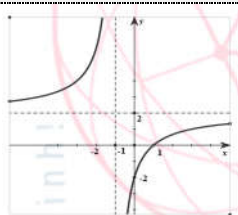
Dạng toán 2: Biến đổi đồ thị

☆☆☆

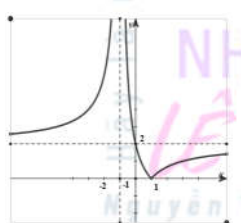
Cần nhớ:

31. Cho đồ thị hàm số $y = \frac{2x-2}{x+1}$. Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = \left| \frac{2x-2}{x+1} \right|$?

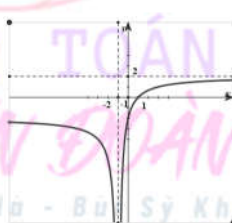
- A. Hình 1.
B. Hình 2.
C. Hình 3.
D. Hình 4.



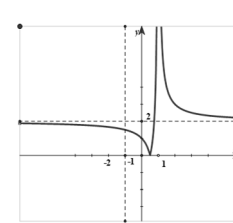
Hình 1



Hình 2



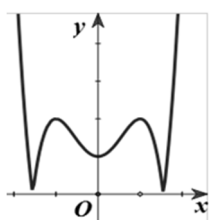
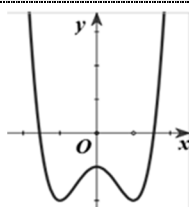
Hình 3



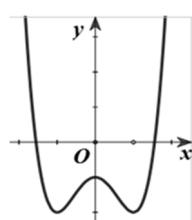
Hình 4

32. Cho đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$. Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = |x^4 - 2x^2 - 1|$?

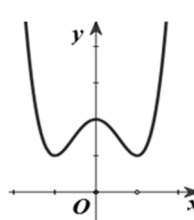
- A. Hình 1.
B. Hình 2.
C. Hình 3.
D. Hình 4.



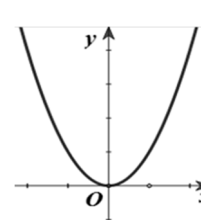
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

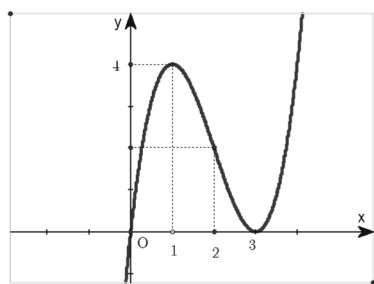
33. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào sau đây ?

A. $y = |x|^3 + 6|x|^2 + 9|x|$.

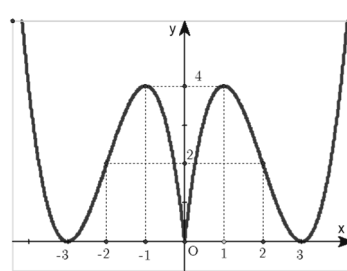
B. $y = |x|^3 - 6x^2 + 9|x|$.

C. $y = |x^3 - 6x^2 + 9x|$.

D. $y = -x^3 + 6x^2 - 9x$.



Hình 1



Hình 2

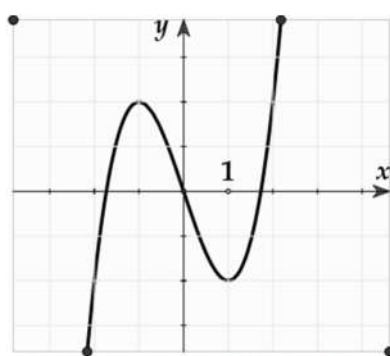
34. Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào sau đây ?

A. $y = |x^3 - 3x|$.

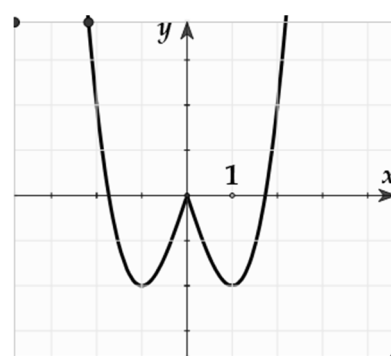
B. $y = |x|^3 - 3|x|$.

C. $y = -x^3 + 3x$.

D. $y = ||x|^3 - 3|x||$.



Hình 1



Hình 2

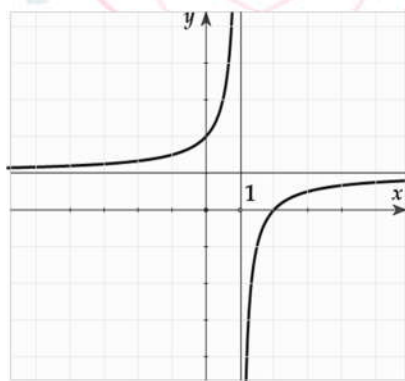
35. Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x-1}$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào sau đây ?

A. $y = \left| \frac{x-2}{x-1} \right|$.

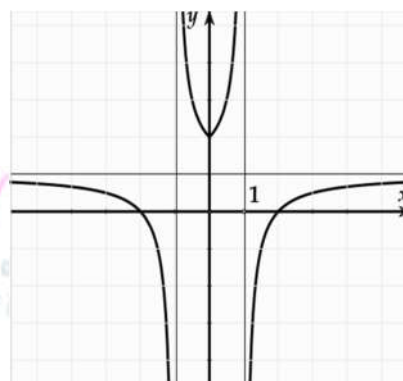
B. $y = \frac{|x|-2}{|x|-1}$.

C. $y = \frac{|x|-2}{|x|+1}$.

D. $y = \frac{||x|-2|}{||x|-1|}$.



Hình 1



Hình 2

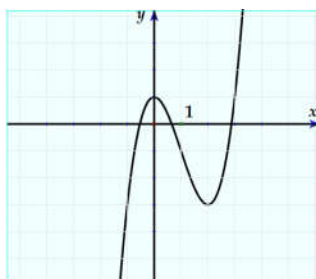
36. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào sau đây ?

A. $y = |x^3 - 3x^2 + 1|$.

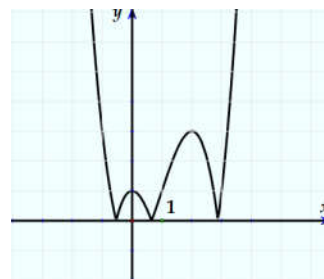
B. $y = |x|^3 - 3x^2 + 1$.

C. $y = |x|^3 - 3|x|^2 + 1$.

D. $y = ||x|^3 - 3x^2 + 1|$.



Hình 1



Hình 2

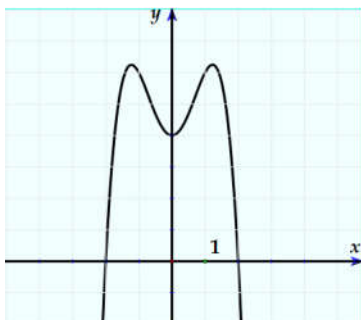
37. Cho hàm số $y = -x^4 + 3x^2 + 4$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào sau đây ?

A. $y = |-x^4 + 3x^2 - 4|$.

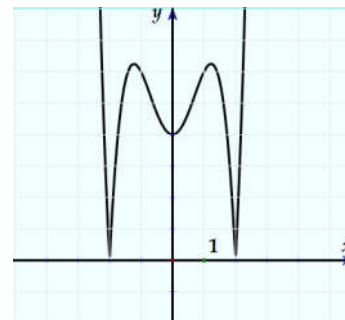
B. $y = |-x^4 + 3x^2| + 4$.

C. $y = -|x|^4 + 3|x|^2 + 4$.

D. $y = |-x^4 + 3x^2 + 4|$.



Hình 1



Hình 2

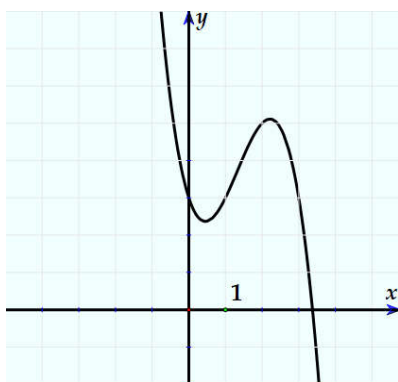
38. Cho $y = -x^3 + 4x^2 - 3x + 3$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào sau đây ?

A. $y = |-x^3 + 4x^2 - 3x + 3|$.

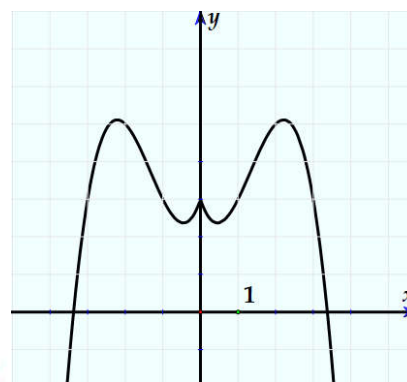
B. $y = -|x|^3 + 4x^2 - 3|x| + 3$.

C. $y = |x^3 + 4x^2 - 3x - 3|$.

D. $y = |x^3 - 4x^2 + 3|x| - 3|$.



Hình 1



Hình 2

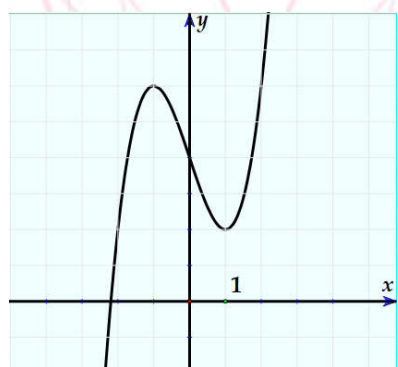
39. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 4$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào sau đây ?

A. $y = |x^3 - 3x + 4|$.

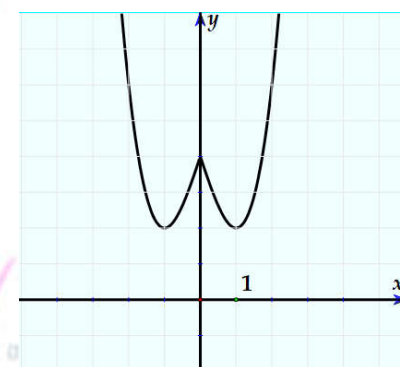
B. $y = |x|^3 - 3|x| + 4$.

C. $y = |x|^3 - 3|x| - 4$.

D. $y = ||x|^3 - 3x + 4|$.



Hình 1



Hình 2

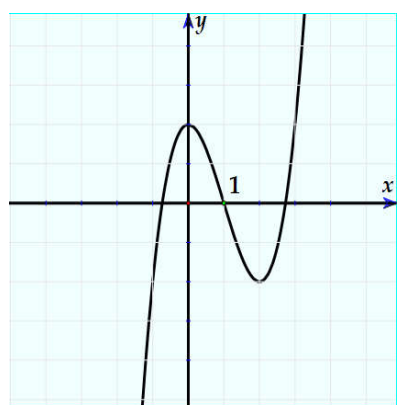
40. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào sau đây ?

A. $y = |x^3 - 3x^2 + 2|$.

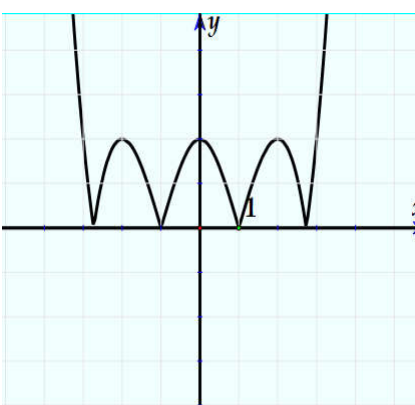
B. $y = |x|^3 - 3x^2 + 2$.

C. $y = |x|^3 - 3|x|^2 + 2$.

D. $y = ||x|^3 - 3x^2 + 2|$.



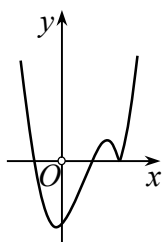
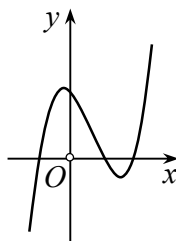
Hình 1



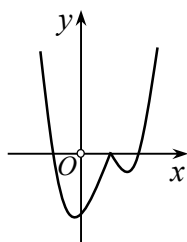
Hình 2

41. Cho đồ thị hàm số $y = (x - 2)(x^2 - 1)$. Hình nào là đồ thị của hàm số $y = |x - 2|(x^2 - 1)$?

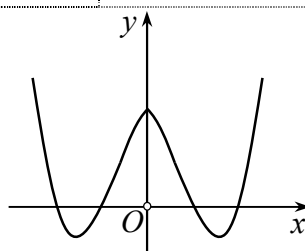
- A. Hình 1.
B. Hình 2.
C. Hình 3.
D. Hình 4.



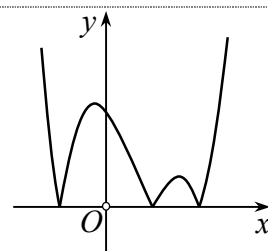
Hình 1



Hình 2



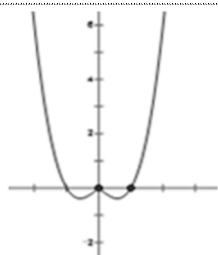
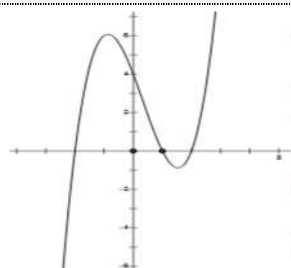
Hình 3



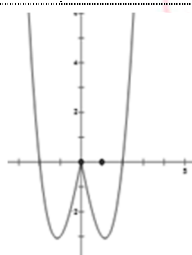
Hình 4

42. Cho đồ thị hàm số $y = (x - 1)(x^2 - 4)$. Hình nào là đồ thị của hàm số $y = |x - 1|(x^2 - 4)$?

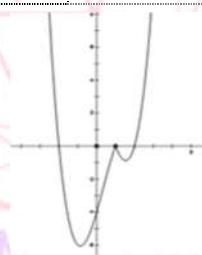
- A. Hình 1.
B. Hình 2.
C. Hình 3.
D. Hình 4.



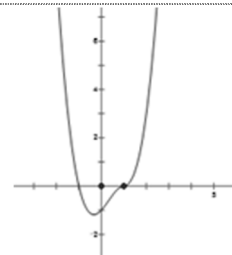
Hình 1



Hình 2



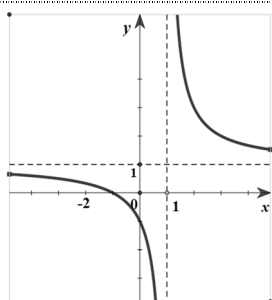
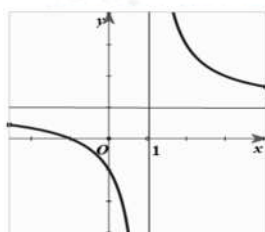
Hình 3



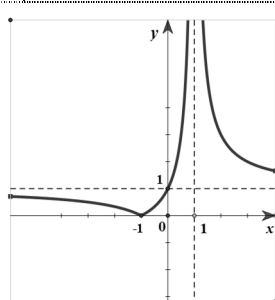
Hình 4

43. Cho đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$. Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = \frac{|x+1|}{x-1}$?

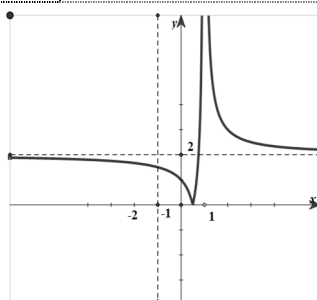
- A. Hình 1.
B. Hình 2.
C. Hình 3.
D. Hình 4.



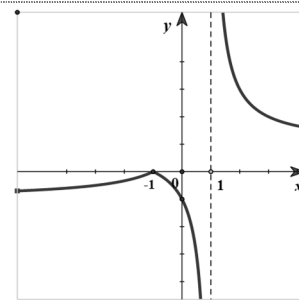
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

Dạng toán 3: Tương giao khi đề cho bảng biến thiên hoặc đồ thị

☆☆☆

→ **Cần nhớ:**

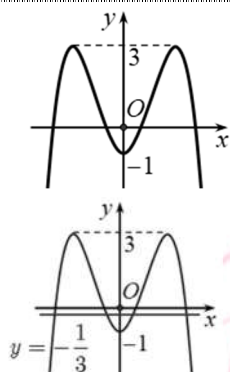
1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình. Tìm số nghiệm của phương trình $\frac{1-f(x)}{1+f(x)} = 2$?

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.



Ta có: $\frac{1-f(x)}{1+f(x)} = 2 \Leftrightarrow 1-f(x) = 2.[1+f(x)]$

$$\Leftrightarrow 3f(x) = -1 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{3} \quad (*)$$

Số nghiệm của (*) là số giao điểm của đồ thị và đường thẳng nằm ngang $y = -1/3$. Quan sát hình vẽ, nhận thấy số giao điểm là 4. Suy ra, số nghiệm là 4. **Chọn đáp án D.**

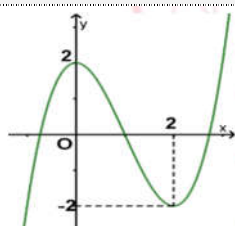
2. (THPT QG 2018 – Mã 101) Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$. Tìm số nghiệm của $3f(x) + 4 = 0$?

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.



Học sinh vẽ lại đồ thị:

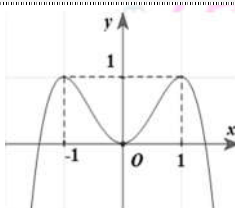
3. (THPT QG 2018 – Mã 102) Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$. Tìm số nghiệm của $4f(x) - 3 = 0$?

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 0.



Học sinh vẽ lại đồ thị:

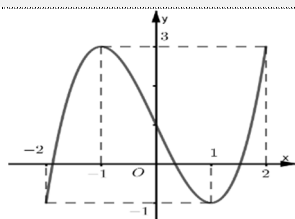
4. (THPT QG 2018 – Mã 103) Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$. Tìm số nghiệm của $3f(x) - 4 = 0$?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.



Học sinh vẽ lại đồ thị:

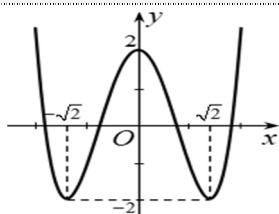
5. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Tìm số nghiệm của phương trình $2f(x) + 3 = 0$?

A. 4

B. 2

C. 0

D. 3



Học sinh vẽ lại đồ thị:

6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới. Tìm số nghiệm của phương trình $f(x) + 3 = 0$?

- A. 0.
B. 3.
C. 1.
D. 2.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	-3	$+\infty$	

Học sinh vẽ lại BBT:

7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới. Tìm số nghiệm của $f(x) = 0$.

- A. 3
B. 0
C. 1
D. 2

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	-1	$+\infty$	

Học sinh vẽ lại BBT:

8. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới. Tìm số nghiệm của $f(x) + 1 = 0$.

- A. 3
B. 0
C. 1
D. 2

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$+$
y	$-\infty$	2	-1	$+\infty$

Học sinh vẽ lại BBT:

9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới. Tìm số nghiệm của $f^2(x) - 4 = 0$.

- A. 3
B. 5
C. 1
D. 2

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	4	-2	$+\infty$	

Học sinh vẽ lại BBT:

10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến. Tìm số nghiệm của $2f^2(x) - 3f(x) + 1 = 0$.

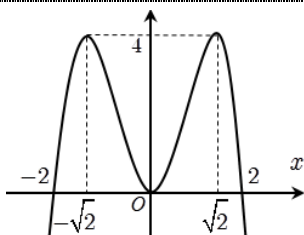
- A. 6
B. 0
C. 3
D. 2

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	1	3	$\frac{1}{3}$	1	

Học sinh vẽ lại BBT:

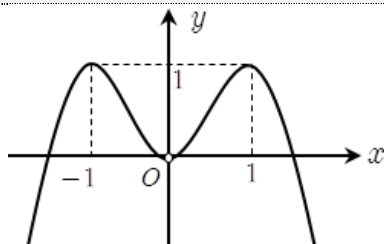
11. Cho đồ thị hàm số $y = -x^4 + 4x^2$. Tìm tham số m để phương trình $x^4 - 4x^2 + m - 2 = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt ?

- A. $m < 0$ hoặc $m = 4$.
B. $m < 0$.
C. $m < 2$ hoặc $m = 6$.
D. $m < 2$.



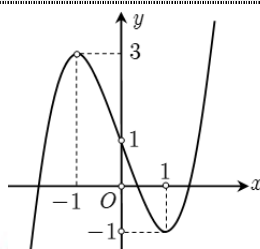
12. (THPT QG năm 2017 – Mã 104) Cho đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $-x^4 + 2x^2 = m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt?

- A. $m > 0$.
 B. $0 \leq m \leq 1$.
 C. $0 < m < 1$.
 D. $m < 1$.



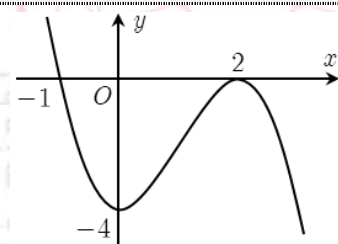
13. (Sở GD & ĐT Phú Thọ năm 2019) Cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ như hình bên dưới. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3 - 3x - m = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt?

- A. $-2 < m < 3$.
 B. $-2 < m < 2$.
 C. $-2 \leq m < 2$.
 D. $-1 < m < 3$.



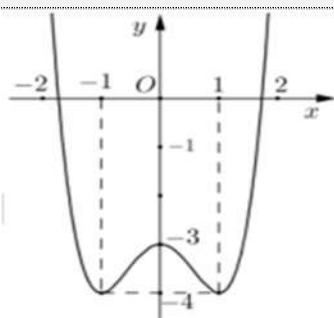
14. (Sở GD & ĐT Bắc Ninh 2020) Cho đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ như hình bên dưới. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3 - 3x - m = 0$ có đúng 2 nghiệm phân biệt?

- A. $m = -1, m = -5$.
 B. $m = 4$.
 C. $0 < m < 4$.
 D. $m = 0$.



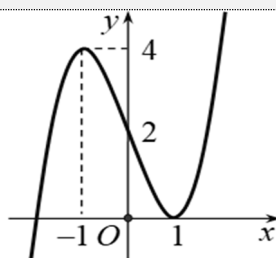
15. (Sở GD & ĐT Sơn La năm 2019) Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên dưới. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có đúng 2 nghiệm?

- A. $m > -3$.
 B. $m = -4$.
 C. $m > -3 \vee m = -4$.
 D. $m < 3 \vee m = 4$.



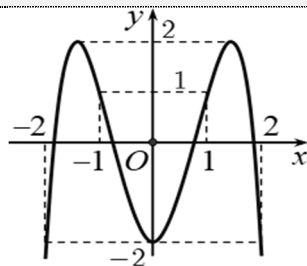
16. (Sở GD & ĐT Hải Phòng 2020) Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên dưới. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) + 1 = m$ có đúng 3 nghiệm?

- A. $0 < m < 5$.
 B. $1 < m < 5$.
 C. $-1 < m < 4$.
 D. $0 < m < 4$.



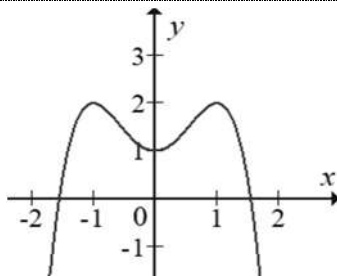
17. (HK1 năm 2019 – THPT Trần Phú – Tp. HCM) Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có đúng 3 nghiệm thuộc đoạn $[-2; 1]$?

- A. $-2 < m < 0$.
B. $-2 \leq m < 1$.
C. $-2 < m \leq 1$.
D. $-2 < m \leq 0$.



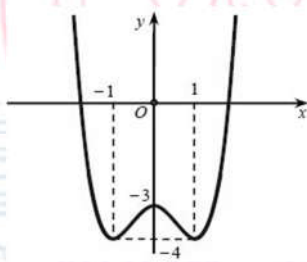
18. (HK1 năm 2019 – THPT Tân Bình – Tp. HCM) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi phương trình $m = f(x) + 1$ với $m < 2$ có bao nhiêu nghiệm ?

- A. 3.
B. 0.
C. 4.
D. 2.



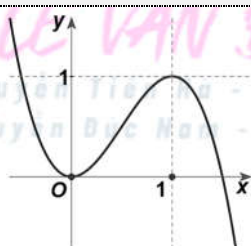
19. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) - m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt ?

- A. $-4 < m < -3$.
B. $m > -4$.
C. $-4 \leq m < -3$.
D. $-4 < m \leq -3$.



20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình. Hỏi phương trình $f(x) = x$ có bao nhiêu nghiệm ?

- A. 0.
B. 1.
C. 2.
D. 3.



21. Cho bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có 3 nghiệm phân biệt ?

- A. $m < -2$.
B. $-2 < m < 4$.
C. $-2 \leq m \leq 4$.
D. $m > 4$.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	4	-2	$+\infty$	

Học sinh vẽ lại BBT:

22. Cho bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) - 1 = 2m$ có 3 nghiệm phân biệt ?

A. $-1 < m < 3$.

B. $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$.

C. $0 < m < 2$.

D. $-1 < m < 1$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	-	0	+	0	-
y	$-\infty$		3		$-\infty$
		-1			

Học sinh vẽ lại BBT:

23. Cho bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) + 3m = 2$ có 4 nghiệm phân biệt ?

A. $\begin{cases} m < -1 \\ m > -1/3 \end{cases}$.

B. $-1 < m < -1/3$.

C. $m = -1/3$.

D. $m \leq -1$.

x	$-\infty$	-1	1	1	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
y	$+\infty$			5			$+\infty$
		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$		
		3		3			

Học sinh vẽ lại BBT:

24. Cho bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

A. $[-1; 2]$.

B. $(-1; 2)$.

C. $(-1; 2]$.

D. $(-\infty; 2]$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	-		+ 0 -	
y	$+\infty$		2	
	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	
	-1	$-\infty$	$-\infty$	

Học sinh vẽ lại BBT:

25. Cho bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có 3 nghiệm phân biệt ?

A. $m \in [1; \sqrt{2})$.

B. $m \in (-1; \sqrt{2})$.

C. $m \in (1; \sqrt{2})$.

D. $m \in [-1; \sqrt{2})$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$-$
y		$\sqrt{2}$		$+\infty$
	-1		$-\infty$	1

Học sinh vẽ lại BBT:

26. Cho bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có 3 nghiệm phân biệt ?

A. $-4 \leq m < 0$.

B. $-4 < m < 0$.

C. $-7 < m < 0$.

D. $-4 < m \leq 0$.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$-\infty$
		-4	0	-7		

Học sinh vẽ lại BBT:

27. Cho bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

A. $[-2; 4]$.

B. $(-2; 4)$.

C. $(-2; 4]$.

D. $(-\infty; 4]$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	–		+	–
y	$+\infty$	-2	4	$-\infty$

Học sinh vẽ lại BBT:

28. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $[0; +\infty)$, liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ và có bảng biến thiên như hình. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \in (0; 2)$ và $x_2 \in (2; +\infty)$.

A. $(-2; -1)$.

B. $[-2; -1)$.

C. $(-2; 0)$.

D. $(-3; -1)$.

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
y'			+	0	–
y			-2	0	-3

29. Cho bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$. Tìm m để phương trình $f(x) - 1 = 2m$ có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 < 1 < x_2 < 2 < x_3$.

A. $-1 < m \leq 1$.

B. $-1 < m < 1$.

C. $0 < m < 1$.

D. $0 < m \leq 1$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	-	0	+	0	-
y	$-\infty$		3		$-\infty$

← Cần nhớ:

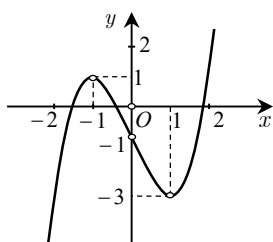
30. Cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x - 1$. Tìm m để $|x^3 - 3x - 1| = m$ có 3 nghiệm phân biệt.

A. $m = 0$.

B. $1 < m < 3$.

C. $-3 < m < 1$.

D. $m = 0$ hoặc $m = 3$.



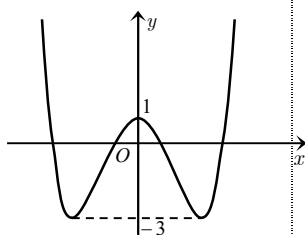
31. Cho đồ thị hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$. Tìm m để $|f(x)| = m$ có 4 nghiệm phân biệt?

A. $-3 < m < 1$.

B. $m = 0$.

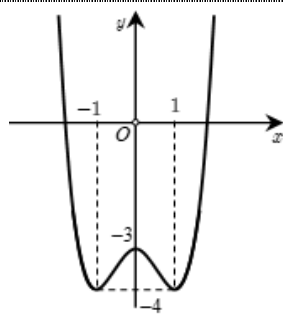
C. $m = 0$ hoặc $m = 3$.

D. $1 < m < 3$.



32. Cho đồ thị hàm số $f(x)$. Hỏi phương trình $|f(x)| = \pi$ có bao nhiêu nghiệm nghiệm ?

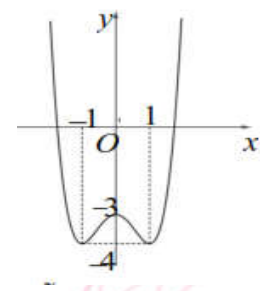
- A. 6 nghiệm.
B. 2 nghiệm.
C. 3 nghiệm.
D. 4 nghiệm.



Học sinh vẽ lại đồ thị hàm số $y = |f(x)|$:

33. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$. Tìm m để $|f(x)| + 1 = m$ có 6 nghiệm phân biệt ?

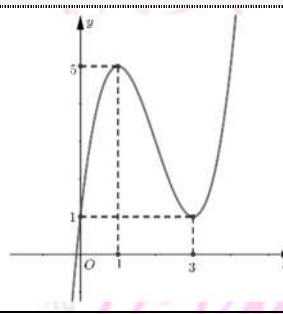
- A. $-4 < m < -3$.
B. $4 < m < 5$.
C. $m > 5$.
D. $0 < m < 4$.



Học sinh vẽ lại đồ thị hàm số $y = |f(x)|$:

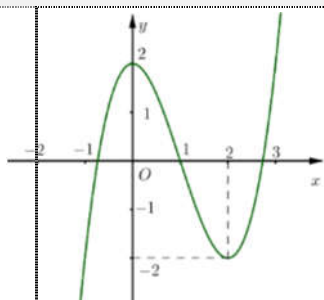
34. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $|f(x)| = m$ có 2 nghiệm phân biệt ?

- A. $\begin{cases} 0 < m < 1 \\ m > 5 \end{cases}$.
B. $m < 1$.
C. $m = 1, m = 5$.
D. $1 < m < 5$.



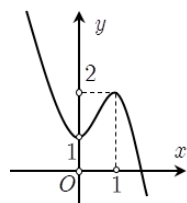
35. Cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $|x^3 - 3x^2 + 2| = m$ có nhiều nghiệm nhất ?

- A. $-2 \leq m \leq 2$.
B. $0 < m < 2$.
C. $-2 < m < 2$.
D. $0 \leq m \leq 2$.



36. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(|x|) = m$ có 2 nghiệm phân biệt ?

- A. $m \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.
B. $m \in (-\infty; 1)$.
C. $m \in (-\infty; 1) \cup \{2\}$.
D. $m \in (2; +\infty)$.



37. Cho bảng biến thiên của $y = f(x)$. Nếu $m \in (1;3)$ thì $|f(x)| = m$ có bao nhiêu nghiệm ?

- A. 4 nghiệm.
B. 3 nghiệm.
C. 2 nghiệm.
D. 5 nghiệm.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$		4		0	$-\infty$

38. Cho bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$. Hỏi phương trình $|f(x)| = 4$ có mấy nghiệm ?

- A. 4 nghiệm.
B. 3 nghiệm.
C. 2 nghiệm.
D. 1 nghiệm.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
y'	$+$	0	$-$	0	$+$		
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

39. Cho bảng biến thiên của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3$. Tìm tham số thực m để phương trình $|x^4 - 4x^2 + 3| = m$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt ?

- A. $1 < m < 3$.
B. $m > 3$.
C. $m = 0$.
D. $m \in (1;3) \cup \{0\}$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		-1		3		-1		$+\infty$

40. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như biến dưới. Hỏi phương trình $|f(x)| = 2$ có bao nhiêu nghiệm ?

- A. 1 nghiệm.
B. 2 nghiệm.
C. 3 nghiệm.
D. 4 nghiệm.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	$-$		0	$+$
y	1	$+\infty$	1	$+\infty$

41. Cho bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$. Phương trình $f(|x|) = 2018$ có bao nhiêu nghiệm ?

- A. 0 nghiệm.
B. 3 nghiệm.
C. 1 nghiệm.
D. 4 nghiệm.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$		1		5		$-\infty$

42. Cho bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$. Tìm tham số m để $|f(x)| + 3m = 2$ có 4 nghiệm ?

A. $m \leq -\frac{1}{3}$.	x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
B. $-1 < m < 2$.	y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
C. $-1 < m < -\frac{1}{3}$.	y	$+\infty$		3	5	3		$+\infty$	
D. $3 < m < 5$.									

43. Cho bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$. Tìm m để phương trình $|f(x)| = m + 2$ có 4 nghiệm ?

A. $-2 < m < -1$.	x	$-\infty$	0	1	$+\infty$			
B. $-3 \leq m \leq -2$.	y'	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$		
C. $-2 \leq m \leq -1$.	y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$
D. $-3 < m < -2$.								

44. Cho bảng biến thiên của hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $m = |f(x)|$ có 4 nghiệm phân biệt, trong đó có đúng 1 nghiệm dương ?

A. $m > 2$.

B. $0 < m < 4$.

C. $m > 0$.

D. $2 < m < 4$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0
y	$-\infty$	4	0	$+\infty$

45. Cho bảng biến thiên của hàm số $y = x^3 - 3x$ bên dưới. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $|x^3 - 3x| = 2m$ có 4 nghiệm phân biệt ?

A. $-2 < m < 0$.	x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
B. $m \geq -2$.	y'		$+$	0	$-$	0	$+$
C. $-1 < m < 0$.	y			2		-2	$+\infty$
D. $m > -1$.							

46. Cho bảng biến thiên của hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $|f(x)| = m$ có 4 nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1 < x_2 < x_3 < \frac{1}{2} < x_4$?

A. $0 < m < 1$.

B. $\frac{1}{2} < m < 1$.

C. $0 < m \leq 1$.

D. $\frac{1}{2} \leq m < 1$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0
y	$-\infty$	1	0	$+\infty$

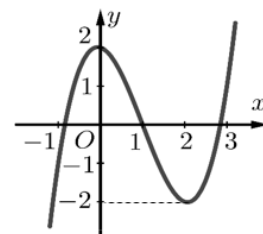
47. Cho hàm số bậc bốn $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có bảng biến thiên bên dưới. Phương trình $f(1 - 2f(x)) = f(c)$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

- A. 6.
B. 5.
C. 3.
D. 4.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y			2		1		2	
	$-\infty$							$-\infty$

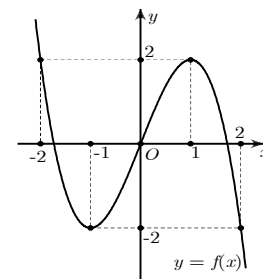
48. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ. Hỏi phương trình $f(f(x)) = 1$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 5.
B. 6.
C. 7.
D. 9.



49. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(f(x)) = f(f(-a + b - c + d))$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 3.
B. 4.
C. 5.
D. 6.



50. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(1 - 2f(x)) = f(a + b + c + d)$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 1.
B. 2.
C. 3.
D. 4.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+ \ 0$	$-$
$g(x)$	$+\infty$			
		-1	1	$-\infty$

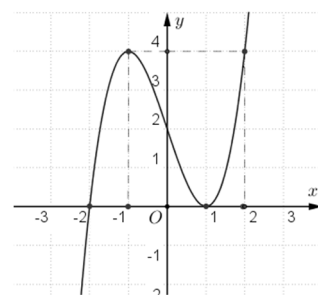
51. Cho hàm số bậc bốn $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có bảng biến thiên bên dưới. Phương trình $f(2 - f(x)) = f(16a + 4b + c)$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 6.
B. 5.
C. 3.
D. 4.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y	$+\infty$		2		$+\infty$
		0		0	

52. Cho hàm số đa thức bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $f(f(x) + 2) = f(x) + f(d)$ là

- A. 6.
B. 7.
C. 4.
D. 5.



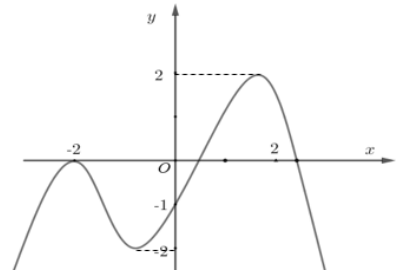
53. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thực của phương trình $f(f(x)) + 1 = 0$ là

A. 4.

B. 7.

C. 6.

D. 9.



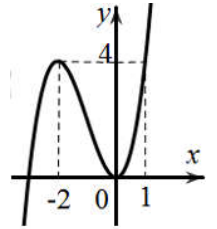
54. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x^2 + 2x - 2) = 3m + 1$ có nghiệm thuộc đoạn $[0; 1]$ là

A. $[0; 4]$.

B. $[-1; 0]$.

C. $[0; 1]$.

D. $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$.



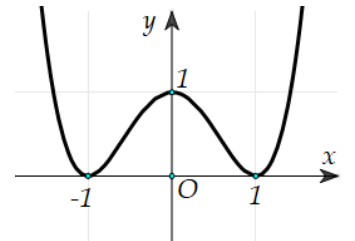
55. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3f\left(\frac{4\sin x - 1}{3}\right) = m$ có nghiệm?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.



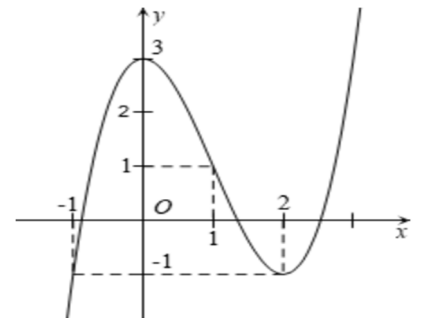
56. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $[f(x^2 + 1)]^2 - f(x^2 + 1) - 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1.

B. 3.

C. 4.

D. 5.



57. (Đề tham khảo thi THPT năm 2020 – Bộ GD & ĐT) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên bên dưới.

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(\sin x) = 1$ là

A. 7.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$			2		2		0	
	$-\infty$							$+\infty$

Dạng toán 4: Tương giao của hai hàm cụ thể

☆☆☆

————→ **Cần nhớ:****Câu 1.** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{4x}$ với trục hoành là bao nhiêu ?

- A.** 1. **B.** 3.
C. 2. **D.** 4.

Câu 2. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 16x^2 + 13x + 2$ cắt trục tung tại điểm nào sau đây ?

- A.** $M(1;0)$. **B.** $N(-1;0)$.
C. $P(0;2)$. **D.** $O(0;0)$.

Câu 3. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ và trục hoành là bao nhiêu ?

- A.** 3 điểm. **B.** 2 điểm.
C. 1 điểm. **D.** 0 điểm.

Câu 4. Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ với đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$.

- A.** $A(4;3)$, $B(0;-1)$. **B.** $C(-1;3)$.
C. $D(3;-1)$. **D.** $I(-1;0)$, $J(3;4)$.

Câu 5. Biết đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 5$ và đường thẳng $y = 9$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$. Tính $x_1 + x_2$.

- A.** $x_1 + x_2 = 3$. **B.** $x_1 + x_2 = 0$.
C. $x_1 + x_2 = 18$. **D.** $x_1 + x_2 = 5$.

Câu 6. Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x + 2$ và đường thẳng $y = x + 2$.

- A.** $(0;3)$. **B.** $(0;-2)$.
C. $(2;0)$. **D.** $(0;2)$.

Câu 7. Đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ cắt các trục tọa độ tại A , B . Tính độ dài đoạn AB .

- A.** $AB = \frac{\sqrt{5}}{2}$. **B.** $AB = \frac{1}{2}$.
C. $AB = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $AB = \frac{5}{4}$.

Câu 8. Đồ thị hàm số $y = x^2 - x$ và đồ thị hàm số $y = 5 + \frac{3}{x}$ cắt nhau tại hai điểm A và B . Tính độ dài đoạn AB .

- A.** $AB = 8\sqrt{5}$. **B.** $AB = 25$.
C. $AB = 4\sqrt{2}$. **D.** $AB = 10\sqrt{2}$.

- Câu 9.** Đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+5}$ và đường thẳng $y = x-1$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B .
 Tìm hoành độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .
 A. $x_I = 1$. B. $x_I = -2$.
 C. $x_I = 2$. D. $x_I = -1$.
- Câu 10.** Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $y = x+1$ và đường cong $y = \frac{2x+4}{x-1}$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng MN .
 A. $I(1;2)$. B. $I(-2;-3)$.
 C. $I(1;3)$. D. $I(2;3)$.
- Câu 11.** Đồ thị hàm số $y = x^4 + x^2$ và đồ thị hàm số $y = -x^2 - 1$ có bao nhiêu điểm chung?
 A. 0. B. 1.
 C. 2. D. 4.
- Câu 12.** Hỏi hai đồ thị $(C): y = x^3 - 2x + 2$ và $(C'): y = 3x^2 - x - 1$ có bao nhiêu giao điểm.
 A. 0. B. 1.
 C. 2. D. 3.
- Câu 13.** Đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm?
 A. 0. B. 2.
 C. 4. D. 3.
- Câu 14.** Đường thẳng $y = x+1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+2}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$. Tính $S = y_1 + y_2$.
 A. $S = 1$. B. $S = 4$.
 C. $S = 3$. D. $S = 0$.
- Câu 15.** Tìm tung độ giao điểm của đồ thị $(C): y = \frac{2x-3}{x+3}$ và đường thẳng $d: y = x-1$.
 A. 3. B. -1.
 C. 1. D. -3.
- Câu 16.** Hỏi đồ thị của hàm số $y = x^3 + 2x^2 - x + 1$ và đồ thị của hàm số $y = x^2 - x + 3$ có tất cả bao nhiêu điểm chung phân biệt?
 A. Có 2 điểm chung. B. Không có điểm chung.
 C. Có 3 điểm chung. D. Có 1 điểm chung.
- Câu 17.** Biết rằng đồ thị các hàm số $y = x^3 + \frac{5}{4}x - 2$ và $y = x^2 + x - 2$ tiếp xúc nhau tại điểm $M(x_0; y_0)$. Tìm x_0 .
 A. $x_0 = \frac{3}{2}$. B. $x_0 = \frac{1}{2}$.
 C. $x_0 = -\frac{5}{2}$. D. $x_0 = \frac{3}{4}$.
- Câu 18.** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 - 7x^2 - 6$ và $y = x^3 - 13x$ là bao nhiêu?

- A. 1. B. 2.
C. 3. D. 4.

Câu 19. Đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$ và đồ thị của hàm số $y = -x^2 + 4$ có tất cả bao nhiêu điểm chung ?

- A. 0. B. 4.
C. 1. D. 2.

Câu 20. Biết đường thẳng $y = 2x + 4$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 - 4$ tại điểm duy nhất $(x_0; y_0)$.
Tìm $x_0 + y_0$.

- A. $x_0 + y_0 = 6$. B. $x_0 + y_0 = 2$.
C. $x_0 + y_0 = 10$. D. $x_0 + y_0 = 8$.

Câu 21. Parabol $y = x^2 + 2x$ cắt đường cong $y = -x^3 + 3x^2 + 2x - 1$ tại bao nhiêu điểm ?

- A. 1. B. 2.
C. 3. D. 0.

Câu 22. Đồ thị hàm số nào sau đây cắt trục tung tại điểm có tung độ âm ?

- A. $y = \frac{4x+1}{x+2}$. B. $y = \frac{3x+4}{x-1}$.
C. $y = \frac{-2x+3}{x+1}$. D. $y = \frac{2x-3}{3x-1}$.

Câu 23. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$ với đường thẳng $y = 3x - 6$ là

- A. 3. B. 0.
C. 1. D. 2.

Câu 24. Đồ thị của hàm số $y = x^4 - x^2 + 2$ và đồ thị của hàm số $y = 4$ có tất cả bao nhiêu điểm chung ?

- A. 0. B. 1.
C. 4. D. 2.

Câu 25. Số giao điểm của đường cong $y = x^4 + 5x^2 - 2$ và trục hoành là bao nhiêu ?

- A. 2. B. 0.
C. 4. D. 3.

Câu 26. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 + 2x^2 - m^2 - 1$ với trục hoành (với m là tham số thực).

- A. 1. B. 2.
C. 3. D. 4.

Câu 27. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm $y = \frac{2x+m}{x+1}$ cắt đường thẳng $y = 1 - x$ tại 2 điểm phân biệt ?

- A. $m \in (-\infty; 2]$.
B. $m \in (-\infty; 2)$.
C. $m \in (-\infty; -2)$.
D. $m \in (2; +\infty)$.

Câu 28. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị $y = \frac{x}{x-1}$ cắt đường thẳng $y = -x + m$ tại hai điểm phân biệt ?

- A. $1 < m < 4$.
 B. $m < 0$ hoặc $m > 2$.
 C. $m < 0$ hoặc $m > 4$.
 D. $m < 1$ hoặc $m > 4$.

Câu 29. Cho hàm số $y = \frac{2x+3}{x+2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = x + m$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt ?

- A. $m > 2$.
 B. $m < 6$.
 C. $m = 2$.
 D. $m < 2$ hoặc $m > 6$.

Câu 30. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm $y = (x-m)(2x^2 + x - 3m)$ cắt trục hoành Ox tại ba điểm phân biệt ?

- A. $m \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$.
 B. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{24}\right) \setminus \{0; 1\}$.
 C. $m \in \left[-\frac{1}{24}; +\infty\right) \setminus \{0; 1\}$.
 D. $m \in \left[-\frac{1}{24}; +\infty\right)$.

Câu 31. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hai hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m - 2$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt ?

- A. $m = 2$.
 B. $m < 3$.
 C. $m = 3$.
 D. $m > 3$.

Câu 32. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m + 2$ cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt.

- A. $m \in (2; +\infty)$.
 B. $m \in (-\infty; 1)$.
 C. $m \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.
 D. $m \in (0; +\infty)$.

Câu 33. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đường thẳng $y = -1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - (3m+2)x^2 + 3m$ tại bốn điểm phân biệt ?

- A. $\begin{cases} m > \frac{1}{3} \\ m \neq 1 \end{cases}$.
 B. $-1 \leq m \leq 0$.
 C. $\begin{cases} m > -\frac{1}{3} \\ m < 0 \end{cases}$.
 D. $\begin{cases} m > -\frac{1}{3} \\ m \neq 0 \end{cases}$.

- Câu 34.** Tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $(C): y = -2x^3 + 3x^2 + 2m - 1$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt là
- A. $\frac{1}{4} \leq m < \frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$.
- C. $0 < m < \frac{1}{2}$. D. $0 \leq m \leq \frac{1}{2}$.
- Câu 35.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $d: y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ tại ba điểm phân biệt?
- A. 1. B. 3.
- C. 5. D. 7.
- Câu 36.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $d: y = m - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ tại ba điểm phân biệt?
- A. 7. B. 5.
- C. 3. D. 9.
- Câu 37.** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đường thẳng $d: y - m = 0$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ tại bốn điểm phân biệt?
- A. $-4 < m < -3$. B. $m < -4$.
- C. $m > -3$. D. $-4 < m < -2$.
- Câu 38.** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đường thẳng $d: y = 3m$ cắt đồ thị hàm số $y = -2x^4 + 2x^2 + 1$ tại ba điểm phân biệt?
- A. $\frac{1}{3} \leq m \leq \frac{1}{2}$. B. $m = \frac{1}{2}$.
- C. $m \leq \frac{1}{3}$. D. $m = \frac{1}{3}$.
- Câu 39.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 2x^2 - m + 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt?
- A. $m \in (3; +\infty)$.
- B. $m \in [3; +\infty)$.
- C. $m \in (3; +\infty) \cup \{2\}$.
- D. $m \in \{2; 3\}$.
- Câu 40.** Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại ít nhất ba điểm phân biệt?
- A. $0 < m < 1$.
- B. $-1 < m \leq 0$.
- C. $-1 < m < 0$.
- D. $-1 \leq m < 0$.

1.A	2.C	3.B	4.D	5.B	6.D	7.A	8.C	9.D	10.A
11.A	12.D	13.D	14.B	15.B	16.D	17.B	18.C	19.D	20.C
21.C	22.B	23.D	24.D	25.A	26.B	27.B	28.C	29.D	30.C
31.B	32.A	33.D	34.C	35.B	36.C	37.A	38.D	39.C	40.B



Chương II.

HÀM SỐ LŨY THỪA

HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

§ 1. CÔNG THỨC MŨ & LÔGARIT

Dạng toán 1: Công thức mũ và các biến đổi

Cho a và b là các số thực dương x và y là những số thực tùy ý.

❶ $a^n = \underbrace{a.a.a\dots a}_{n \text{ số } a}$	❹ $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$
❷ $a^{x+y} = a^x . a^y$	❺ $\sqrt[y]{a^x} = a^{\frac{x}{y}}, (y \geq 2; y \in \mathbb{Z}^+)$
❸ $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \Rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	❻ $[u(x)]^0 = 1, \forall u(x) \neq 0$
❹ $a^{x.y} = (a^x)^y = (a^y)^x$	❼ $\sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad (n \geq 2; n \in \mathbb{Z}^+)$
❺ $a^x . b^x = (a.b)^x$	❽ $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

1. (MH lần 2 – 2017) Với $x > 0$ thì $\sqrt[4]{x.\sqrt[3]{x^2}.\sqrt{x^3}}$ bằng

- A. $x^{\frac{1}{2}}$. B. $x^{\frac{13}{24}}$.
C. $x^{\frac{1}{4}}$. D. $x^{\frac{2}{3}}$.

Ta có: $\sqrt[4]{x.\sqrt[3]{x^2}.\sqrt{x^3}} = \sqrt[4]{x.\sqrt[3]{x^2}.x^{\frac{3}{2}}} = \sqrt[4]{x.\sqrt[3]{x^2}.x^{\frac{3}{2}}} = \sqrt[4]{x.\sqrt[3]{x^{\frac{7}{2}}}} = \sqrt[4]{x.x^{\frac{7}{6}}} = \sqrt[4]{x^{\frac{13}{6}}} = x^{\frac{13}{24}}$.
Chọn B.

2. Với $x > 0$ thì $x.\sqrt[5]{x.\sqrt[3]{x}.\sqrt{x}}$ bằng

- A. $x^{\frac{2}{3}}$. B. $x^{\frac{3}{10}}$.
C. $x^{\frac{13}{10}}$. D. $x^{\frac{1}{2}}$.

3. Với $x > 0$ thì $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}} : x^{\frac{11}{16}}$ bằng

- A. $\sqrt[4]{x}$. B. $\sqrt[6]{x}$.
C. $\sqrt[8]{x}$. D. $\sqrt{x}$.

4. Cho biểu thức $P = \sqrt{x\sqrt[3]{x^2}\sqrt[4]{x^3}}$, với $x > 0$. Xác định k sao cho biểu thức $P = x^{\frac{23}{24}}$.

- A. $k = 6$. B. $k = 2$.
C. $k = 4$. D. $\nexists k$.

5. Với $x > 0$ thì $\frac{(x^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1}}{x^{-\sqrt{3}+2} \cdot x^{2+\sqrt{3}}}$ bằng

- A. 1. B. x^6 .
C. x^2 . D. $\frac{1}{x^2}$.

6. Với $a > 0$ thì $\frac{a^{\sqrt{3}+1} \cdot a^{2-\sqrt{3}}}{(a^{\sqrt{2}-1})^{\sqrt{2}+1}}$ bằng

- A. a . B. a^2 .
C. 1. D. a^3 .

7. Với $a > 0$ thì $\frac{a^{\sqrt{7}+1} \cdot a^{2-\sqrt{7}}}{2a^5(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}}$ bằng

- A. a^5 . B. 2.
C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{a^5}$.

8. Nếu $9^x + 9^{-x} = 23$ thì $\frac{5 + 3^x + 3^{-x}}{1 - 3^x - 3^{-x}}$ bằng

- A. $-\frac{5}{2}$. B. $\frac{1}{2}$.
C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Lưu ý. Có thể giải phương trình mũ để tìm x , sau đó tính giá trị của biểu thức.

Ta có: $9^x + 9^{-x} = 23 \Leftrightarrow \left(3^x + \frac{1}{3^x}\right)^2 = 5^2 \Rightarrow \boxed{3^x + \frac{1}{3^x} = 5}$

Do đó $\frac{5 + 3^x + 3^{-x}}{1 - 3^x - 3^{-x}} = \frac{5 + 3^x + \frac{1}{3^x}}{1 - \left(3^x + \frac{1}{3^x}\right)} = \frac{5 + 5}{1 - 5} = \frac{10}{-4} = -\frac{5}{2}$. Chọn A.

9. Nếu $4^x + 4^{-x} = 14$ thì $\frac{10 - 2^x - 2^{-x}}{3 + 2^x + 2^{-x}}$ bằng

- A. 2. B. $\frac{1}{2}$.
C. $\frac{6}{7}$. D. 7.

10. Nếu $25^x + 25^{-x} = 7$ thì $\frac{4 - 5^x - 5^{-x}}{9 + 5^x + 5^{-x}}$ bằng

- A. 12. B. $\frac{1}{12}$.
C. $\frac{1}{9}$. D. 9.

11. Giá trị của biểu thức $P = (7 + 4\sqrt{3})^{2017} (7 - 4\sqrt{3})^{2016}$ bằng

- A. 1.
B. $7 - 4\sqrt{3}$.
C. $7 + 4\sqrt{3}$.
D. $(7 + 4\sqrt{3})^{2016}$.

Phân tích: Tách đồng bậc và áp dụng công thức $a^n b^n = (ab)^n$.

Ta có $P = \left[(7 + 4\sqrt{3})^{2016} \cdot (7 - 4\sqrt{3})^{2016} \right] \cdot (7 + 4\sqrt{3})$
 $= \left[(7 + 4\sqrt{3}) \cdot (7 - 4\sqrt{3}) \right]^{2016} \cdot (7 + 4\sqrt{3}) = (49 - 48)^{2016} \cdot (7 + 4\sqrt{3})$
 $= 1^{2016} \cdot (7 + 4\sqrt{3}) = 7 + 4\sqrt{3}$. **Chọn đáp án C.**

12. Giá trị của biểu thức $P = (9 + 4\sqrt{5})^{2017} (9 - 4\sqrt{5})^{2016}$ bằng

- A. 1.
B. $9 - 4\sqrt{5}$.
C. $9 + 4\sqrt{5}$.
D. $(9 - 4\sqrt{5})^{2017}$.

13. Giá trị của biểu thức $P = (1 + \sqrt{3})^{2016} (3 - \sqrt{3})^{2016}$ bằng

- A. 12^{1008} .
B. 4^{1008} .
C. $(1 + \sqrt{3})^{1008}$.
D. $(3 - \sqrt{3})^{1008}$.

14. Giá trị của biểu thức $P = (\sqrt{6} + \sqrt{2})^{2016} (\sqrt{6} - 3\sqrt{2})^{2016}$ bằng

- A. 48^{1008} .
B. -48^{1008} .
C. 18^{1008} .
D. -18^{1008} .

15. Với $0 < a < b$ thì giá trị của biểu thức $T = \sqrt{(a^\pi + b^\pi)^2 - (4^\pi ab)^\pi}$ bằng

- A. $a^\pi + b^\pi$.
B. $b - a$.
C. $b^\pi - a^\pi$.
D. $a^\pi - b^\pi$.

➤ **Chú ý:** $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{khi } A \geq 0 \\ -A & \text{khi } A < 0 \end{cases}$

16. * Cho $a, b \geq 0$ và đặt $x = 3^{\frac{a+b}{2}}$, $y = \frac{3^a + 3^b}{2}$. Khẳng định nào đúng?

- A. $x \leq y$. B. $x < y$.
C. $x \geq y$. D. $x > y$.

Hướng dẫn: Áp dụng
Cauchy $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

Dạng toán 2: Công thức lôgarit và các biến đổi

☆☆☆

Cho $0 < a \neq 1$ và $b, c > 0$.

❶ $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$	❸ $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
❷ $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$	❹ $\log_a b^n = \begin{cases} n \cdot \log_a b & \text{khi } \alpha \text{ lẻ} \\ n \cdot \log_a b & \text{khi } \alpha \text{ chẵn} \end{cases}$
❺ $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$	❻ $\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \Rightarrow \log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$
❻ $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$	❼ $a^{\log_b c} = c^{\log_b a} \Rightarrow b = a^{\log_a b}$
❽ $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$	❽ $\begin{cases} \ln b = \log_e b \\ \lg b = \log b = \log_{10} b \end{cases}$

BÀI TẬP ÁP DỤNG**17. (THPT QG 2017 – Mã 101 câu 06)** Cho $0 < a \neq 1$. Tính $I = \log_{\sqrt{a}} a$.

- A. $I = \frac{1}{2}$. B. $I = 0$.
 C. $I = -2$. D. $I = 2$.

18. (THPT QG 2017 – Mã 103 câu 10) Cho $0 < a \neq 2$. Tính $I = \log_{\frac{a}{2}} \left(\frac{a^2}{4} \right)$.

- A. $I = \frac{1}{2}$. B. $I = -\frac{1}{2}$.
 C. $I = -2$. D. $I = 2$.

19. (THPT QG 2018 – Mã 101) Với a là số thực dương tùy ý, $\ln(5a) - \ln(3a)$ bằng

- A. $\frac{\ln(5a)}{\ln(3a)}$. B. $\ln(2a)$.
 C. $\ln(5/3)$. D. $\ln 5 / \ln 3$.

20. (THPT QG 2018 – Mã 102) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3(3a)$ bằng

- A. $3 \log_3 a$. B. $3 + \log_3 a$.
 C. $1 + \log_3 a$. D. $1 - \log_3 a$.

21. (THPT QG 2017) Cho $\log_3 a = 2$ và $\log_2 b = \frac{1}{2}$. Tính $I = 2 \log_3 [\log_3(3a)] + \log_{\frac{1}{4}} b^2$.

- A. $I = \frac{5}{4}$. B. $I = \frac{3}{2}$.
 C. $I = 0$. D. $I = 4$.

22. (THPT QG 2017 Câu 29 – Mã 103) Cho $\log_a b = 2$ và $\log_a c = 3$. Tính $P = \log_a (b^2 c^3)$.

- A. $P = 31$. **B.** $P = 13$.
C. $P = 30$. D. $P = 108$.

23. Cho $\log_a b = 3$, $\log_a c = -2$. Giá trị của biểu thức $\log_a (a^3 b^2 \sqrt{c})$ bằng

- A. -8 . **B.** 5 .
C. 4 . **D.** 8 .

24. Cho $a, b > 0$. Giá trị của biểu thức $\log_a b^2 + \log_{a^2} b^4$ bằng

- A. $2 \log_a b$. **B.** 0 .
C. $\log_a b$. **D.** $4 \log_a b$.

25. Cho $0 < a \neq 1$, $b > 0$ thỏa mãn $\log_a b = \frac{b}{4}$ và $\log_2 a = \frac{16}{b}$. Tổng $a + b$ bằng

- A. 16 . **B.** 12 .
C. 10 . **D.** 18 .

26. Cho $0 < a \neq 1$, $b > 0$ thỏa mãn $\log_a b = \frac{b}{9}$ và $\log_3 a = \frac{27}{b}$. Tổng $2a + 2b$ bằng

- A. 30 . **B.** 60 .
C. 90 . D. 120 .

27. Cho $a, b > 0$ thỏa $\log_2 a = x$, $\log_2 b = y$. Giá trị của biểu thức $P = \log_2 (a^2 b^3)$ bằng

- A.** $2x + 3y$. **B.** $x^2 y^3$.
C. $x^2 + y^3$. D. $6xy$.

28. Cho a, x là các số thực dương, biết $\log_3 x = 2 \log_{\sqrt{3}} a + \log_{\frac{1}{3}} a$. Tính x theo a .

- A. $x = a^4$. **B.** $x = a^3$.
C. $x = 3a$. D. $x = a - 3$.

29. (THPT QG 2017 Câu 15 – Mã 101) Với $0 < a$; $b \neq 1$, giá trị của $\log_a b^3 + \log_{a^2} b^6$ bằng

- A. $9 \log_a b$. **B.** $27 \log_a b$.
C. $15 \log_a b$. **D.** $6 \log_a b$.

30. Cho $\log_a x = 2$, $\log_b x = 3$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Tính $P = \log_{\frac{a}{b^2}} x$.

A. $P = -6$. B. $P = \frac{1}{6}$.

C. $P = -\frac{1}{6}$. D. $P = 6$.

31. (THPT QG 2017 – Câu 42) Cho $\log_a x = 3$, $\log_b x = 4$ với $a, b > 1$. Tính $P = \log_{ab} x$.

A. $P = \frac{7}{12}$. B. $P = \frac{1}{12}$.

C. $P = 12$. D. $P = \frac{12}{7}$.

32. Nếu $\log_a x = -1$ và $\log_a y = 4$ thì $\log_a (x^2 y^3)$ bằng

A. 3. B. 10.

C. -14. D. 65.

33. Biết rằng $a, b, c > 1$ thỏa mãn $\log_{ab}(bc) = 2$. Giá trị của biểu thức $P = \log_{\frac{c}{b}} a^4 + \log_{\frac{c}{a}}(ab)$ bằng

A. 1. B. 2.

C. 3. D. 4.

34. Cho $0 < a \neq 1$ và $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa $\log_a 3 = x$, $\log_a 2 = y$. Khi đó $(x + y) \log_6 a$ bằng

A. $(x + y)^2$. B. $2(x + y)$.

C. $x + y$. D. 1.

35. (THPT QG 2017 – Câu 43) Cho $a, b > 0$ thỏa $a^2 + b^2 = 8ab$. Khi đó $\log(a + b)$ bằng

A. $\log a + \log b$.

B. $1 + \log a + \log b$.

C. $\frac{1 + \log a + \log b}{2}$.

D. $0,5 + \log a + \log b$.

36. Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $a^2 + 9b^2 = 10ab$. Khi đó $\log \frac{a + 3b}{4}$ bằng

A. $\log a + \log b$.

B. $\frac{\log a + \log b}{2}$.

C. $2(\log a + \log b)$.

D. $2 \log a + \log b$.

37. Cho $x, y > 1$ và $2x - 3y > 1$ thỏa mãn $x^2 - 6y^2 = xy$. Khi đó $I = \frac{1 + \log_3 x + \log_3 y}{\log_3(2x - 3y)}$ bằng

A. $M = \frac{1}{4}$. B. $M = 1$.

C. $M = \frac{1}{2}$. D. $M = 2$.

Có $x^2 - 6y^2 = xy \xrightarrow{\text{chia } y^2} \left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} - 6 = 0 \Rightarrow \frac{x}{y} = 3 \Leftrightarrow x = 3y$.

Khi đó: $I = \frac{\log_3 3 + \log_3(3y) + \log_3 y}{\log_3(3y)} = \frac{\log_3(3y)^2}{\log_3(3y)} = 2$. **Chọn D.**

38. (THPTQG 2017 Câu 37) Cho $x, y > 1$ thỏa mãn $x^2 + 9y^2 = 6xy$. Tìm $I = \frac{1 + \log_{12} x + \log_{12} y}{2 \log_{12}(x + 3y)}$.

A. $I = \frac{1}{4}$. B. $I = 1$.

C. $I = \frac{1}{2}$. D. $I = \frac{1}{3}$.

39. Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $\log_4 a = \log_6 b = \log_9(a + b)$. Giá trị của $\frac{a}{b}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

C. $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$.

D. $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Đặt $\log_4 a = \log_6 b = \log_9(a + b) = k$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 4^k \\ b = 6^k \\ a + b = 9^k \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = \left(\frac{2}{3}\right)^k > 0 \\ 4^k + 6^k = 9^k \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2k} + \left(\frac{2}{3}\right)^k - 1 = 0 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \frac{a}{b} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Chọn đáp án B.

40. Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $\log_9 a = \log_{12} b = \log_{16}(a + b)$. Mệnh đề nào **đúng**?

A. $\frac{a}{b} \in (2; 3)$. B. $\frac{a}{b} \in (3; 9)$.

C. $\frac{a}{b} \in (0; 2)$. D. $\frac{a}{b} \in (9; 16)$.

41. Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $\log_{16} a = \log_{20} b = \log_{25} \frac{2a - b}{3}$. Tỉ số $\frac{a}{b}$ bằng

A. $\frac{5}{4}$. B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{3}{2}$. D. $\frac{4}{5}$.

42. Với $x, y, z \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $x \log_{2016} 2 + y \log_{2016} 3 + z \log_{2016} 7 = 1$. Giá trị $x + y + z$ bằng

- A. 2017. B. 10.
C. 2016. D. 8.

43. Cho $x = 2018!$. Giá trị $A = \frac{1}{\log_{2018} x} + \frac{1}{\log_{32018} x} + \dots + \frac{1}{\log_{2017^{2018}} x} + \frac{1}{\log_{2018^{2018}} x}$ bằng

- A. $\frac{1}{2020}$. B. 2018.
C. $\frac{1}{2021}$. D. 2019.

44. Cho a, b, c là ba số dương, khác 1 và thỏa $\frac{1}{\log_a c^2} + \frac{1}{\log_b c^3} = \frac{1}{6}$. Mệnh đề nào **đúng**?

- A. $a^3 b^4 = 1$.
B. $a^3 + b^4 = c$.
C. $a^3 b^2 = c$.
D. $a^3 b^4 = c$.

45. Xét các số thực a, b thỏa mãn $\log_3(3^a \cdot 9^b) = \log_9 3$. Mệnh đề nào là **đúng**?

- A. $a + 2b = 2$.
B. $4a + 2b = 1$.
C. $4ab = 1$.
D. $2a + 4b = 1$.

46. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b} = 10$. Giá trị của $\frac{1}{2} \log a + \frac{1}{3} \log b$ bằng

- A. 0. B. 10.
C. -1. D. 1.

47. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $\log_3 a^2 + \log_{\frac{1}{3}} b = 2$. Giá trị của $\frac{a}{\sqrt{b}}$ bằng

- A. 9. B. 3.
C. $\frac{1}{9}$. D. $\frac{1}{3}$.

48. Cho x và y là hai số thực dương khác 1 thỏa mãn $8xy^2 = 1$. Giá trị của $\frac{1}{\log_x 2} + \frac{2}{\log_y 2}$ bằng

- A. 3. B. -3.
C. 4. D. -4.

RÈN LUYỆN LẦN 1

Câu 1. Cho $0 < a \neq 1$ và biểu thức $\sqrt{a^3 \sqrt{a}}$ được viết dưới dạng a^n . Tìm n .

- A. $n = \frac{11}{6}$. B. $n = \frac{5}{3}$. C. $n = \frac{2}{3}$. D. $n = \frac{1}{6}$.

Câu 2. Với a là số thực dương bất kì, mệnh đề nào dưới đây **đúng** ?

- A. $\log(3a) = 3 \log a$. B. $\log a^3 = \frac{1}{3} \log a$. C. $\log a^3 = 3 \log a$. D. $\log(3a) = \frac{1}{3} \log a$.

Câu 3. Với a là số thực dương tùy ý, $\ln(8a) - \ln(5a)$ bằng

- A. $\frac{\ln(5a)}{\ln(3a)}$. B. $\ln(2a)$. C. $\ln \frac{8}{5}$. D. $\frac{\ln 5}{\ln 3}$.

Câu 4. Cho biểu thức $Q = \sqrt{a^2 \cdot \sqrt[3]{a^4}}$ với $a > 0$, $a \neq 1$. Khẳng định nào **đúng** ?

- A. $Q = a^{\frac{5}{3}}$. B. $Q = a^{\frac{7}{3}}$. C. $Q = a^{\frac{7}{4}}$. D. $Q = a^{\frac{11}{6}}$.

Câu 5. Với a, b là các số thực dương bất kỳ và $a \neq 1$. Mệnh đề nào **đúng** ?

- A. $\log_{\sqrt{a}} b = -2 \log_a b$. B. $\log_{\sqrt{a}} b = -\frac{1}{2} \log_a b$.
C. $\log_{\sqrt{a}} b = \frac{1}{2} \log_a b$. D. $\log_{\sqrt{a}} b = 2 \log_a b$.

Câu 6. Cho hai số thực dương a, b và $a \neq 1$. Khẳng định nào **đúng** ?

- A. $\log_{\sqrt{a}} ab = \frac{1}{2} + \log_a \sqrt{b}$. B. $2018 \log_a ab = 1 + \log_a b^{2018}$.
C. $\log_a a^{2018} b = 2018 + \log_a b$. D. $\log_a a^{2018} b = 2018(1 + \log_a b)$.

Câu 7. Cho $0 < a \neq 1$. Rút gọn $P = \frac{(a^3)^4}{a^2 \cdot a^{\frac{3}{2}}}$.

- A. $P = a^9$. B. $P = a^{\frac{17}{2}}$. C. $P = a^{\frac{23}{2}}$. D. $P = a^{\frac{7}{2}}$.

Câu 8. Rút gọn biểu thức $P = \frac{x^6 \cdot \sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt[4]{x^5}}{\sqrt{x^3}}$ với $x > 0$.

- A. $P = x^{\frac{5}{4}}$. B. $P = x^{\frac{112}{60}}$. C. $P = x^{\frac{13}{18}}$. D. $P = x^{\frac{211}{60}}$.

Câu 9. Cho a, b là hai số thực dương. Kết quả thu gọn của biểu thức $A = \frac{(\sqrt[4]{a^3 b^2})^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12} b^6}}}$ là

- A. 1. B. a . C. ab . D. b .

Câu 10. Cho $1 \neq a > 0$, $x > 0$, $y > 0$, khẳng định nào sau đây **sai** ?

- A. $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$. B. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$.
C. $\log_a \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log_a x$. D. $\log_{\sqrt{a}} x = \frac{1}{2} \log_a x$.

Câu 11. Biết $\frac{x^{a^2}}{x^{b^2}} = x^{16}$ với $x > 1$ và $a + b = 2$. Tính giá trị của biểu thức $M = a - b$.

- A. $M = 18$. B. $M = 14$. C. $M = 8$. D. $M = 16$.

Câu 12. Cho $a, b > 0$, viết $a^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{a}$ về dạng a^x và $\sqrt[3]{b\sqrt{b\sqrt{b}}}$ về dạng b^y . Tính $T = 6x + 12y$.

- A. $T = 17$. B. $T = \frac{7}{12}$. C. $T = 14$. D. $T = \frac{7}{6}$.

Câu 13. Cho số thực $0 < a \neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_a \frac{\sqrt{a^3}}{a^2}$.

- A. $P = -\frac{4}{3}$. B. $P = \frac{1}{2}$. C. $P = \frac{3}{2}$. D. $P = -\frac{1}{2}$.

Câu 14. Cho $a, b > 0$, $a \neq 1$, $a^2 = b$ và đặt $P = \log_{\sqrt[3]{a}} b^3$. Mệnh đề nào **đúng**?

- A. $P = \frac{9}{2}$. B. $P = \frac{1}{2}$. C. $P = 18$. D. $P = \frac{2}{3}$.

Câu 15. Giá trị của biểu thức $P = (1 + \sqrt{3})^{2016} (3 - \sqrt{3})^{2016}$ bằng

- A. 12^{1008} . B. 4^{1008} . C. $(1 + \sqrt{3})^{1008}$. D. $(3 - \sqrt{3})^{1008}$.

Câu 16. Cho a là số thực dương và $a \neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = a^{4\log_a \sqrt{5}}$.

- A. $P = 5$. B. $P = 5^{14}$. C. $P = 7\sqrt{5}$. D. $P = 5^7$.

Câu 17. Cho các số dương a, b, c, d . Giá trị của $S = \ln \frac{a}{b} + \ln \frac{b}{c} + \ln \frac{c}{d} + \ln \frac{d}{a}$ bằng

- A. 1. B. $\ln(abcd)$. C. 0. D. $\ln(ab + cd)$.

Câu 18. Cho $\log_a x = -1$ và $\log_a y = 4$. Tính $P = \log_a (x^2 y^3)$.

- A. $P = 3$. B. $P = 10$. C. $P = -14$. D. $P = 65$.

Câu 19. Cho $\log_2(a + 1) = 3$. Tính $3^{\log_4(a-3)}$.

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 20. Cho $a, b > 0$ và $a \neq 1$ thỏa mãn $\log_a b = 2$. Tính giá trị của $T = \log_{a^2} b^6 + \log_a \sqrt{b}$.

- A. $T = 8$. B. $T = 7$. C. $T = 5$. D. $T = 6$.

Câu 21. Cho các số thực dương a, b với $a \neq 1$. Khẳng định nào **đúng**?

- A. $\log_{a^4}(ab) = 4a \log_a b$. B. $\log_{a^4}(ab) = 4 + 4 \log_a b$.
C. $\log_{a^4}(ab) = \frac{1}{4} \log_a b$. D. $\log_{a^4}(ab) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \log_a b$.

Câu 22. Với các số thực dương a, b bất kỳ. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $\log_2 \left(\frac{a^3}{4b} \right) = 3 \log_2 a - \log_2 b - 2$. B. $\log_2 \left(\frac{a^3}{4b} \right) = 3 \log_2 a - \log_2 b + 2$.
C. $\log_2 \left(\frac{a^3}{4b} \right) = 3 \log_2 a + \log_2 b + 2$. D. $\log_2 \left(\frac{a^3}{4b} \right) = 3 \log_2 a + \log_2 b - 2$.

Câu 23. Tính $P = \log_{a^2}(a^{10}b^2) + \log_{\sqrt{a}} \left(\frac{a}{\sqrt{b}} \right) + \log_{\sqrt[3]{b}} b^{-2}$ với $0 < a \neq 1$ và $0 < b \neq 1$.

- A. $P = 2$. B. $P = 1$. C. $P = \sqrt{3}$. D. $P = \sqrt{2}$.

Câu 24. Cho a, b là hai số thực dương bất kì. Mệnh đề nào dưới đây **đúng** ?

- A. $\ln(ab^2) = \ln a + (\ln b)^2$. B. $\ln(ab) = \ln a \cdot \ln b$.
C. $\ln(ab^2) = \ln a + 2 \ln b$. D. $\ln(a + b) = \ln a \cdot \ln b$.

Câu 25. Với $a, b > 0$ và $a \neq 1$, đặt $P = \log_a b^3 + \log_{a^2} b^6$. Mệnh đề nào **đúng** ?

- A. $P = 9 \log_a b$. B. $P = 27 \log_a b$. C. $P = 15 \log_a b$. D. $P = 6 \log_a b$.

Câu 26. Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $\log_a b = 2$. Tính giá trị của $T = \log_{\frac{\sqrt{a}}{b}}(a^3 \sqrt{b})$.

- A. $T = -\frac{10}{9}$. B. $T = \frac{2}{3}$. C. $T = -\frac{2}{9}$. D. $T = \frac{2}{15}$.

Câu 27. Cho $\log_a x = 2$, $\log_b x = 3$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Tính $P = \log_{\frac{a}{b^2}} x$.

- A. 6. B. -6. C. 3. D. -3.

Câu 28. Với các số thực x, y dương bất kì. Mệnh đề nào **đúng** ?

- A. $\log_2(x + y) = \log_2 x + \log_2 y$. B. $\log_2(xy) = \log_2 x \cdot \log_2 y$.
C. $\log_2\left(\frac{x^2}{y}\right) = 2 \log_2 x - \log_2 y$. D. $\log_2\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\log_2 x}{\log_2 y}$.

Câu 29. Cho các số thực dương a, b, c với $c \neq 1$. Mệnh đề nào sau đây **sai** ?

- A. $\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$. B. $\log_{c^2} \frac{a}{b^2} = \frac{1}{2} \log_c a - \log_c b$.
C. $\log_c^2\left(\frac{a}{b}\right) = 4(\log_c a - \log_c b)$. D. $\log_c \frac{a}{b} = \frac{\ln a - \ln b}{\ln c}$.

Câu 30. Với ba số thực dương a, b, c bất kỳ. Mệnh đề nào dưới đây **đúng** ?

- A. $\log_2 \frac{8a^{b^2}}{c} = 3 + 2b \log_2 a - \log_2 c$. B. $\log_2 \frac{8a^{b^2}}{c} = 3 + b^2 \log_2 a - \log_2 c$.
C. $\log_2 \frac{8a^{b^2}}{c} = 3 + \frac{1}{b^2} \log_2 a - \log_2 c$. D. $\log_2 \frac{8a^{b^2}}{c} = 3 + b^2 \log_2 a + \log_2 c$.

Câu 31. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 = 14ab$. Khẳng định nào **sai** ?

- A. $\ln \frac{a+b}{4} = \frac{\ln a + \ln b}{2}$. B. $2 \log \frac{a+b}{4} = \log a + \log b$.
C. $2 \log_4(a+b) = 4 + \log_4 a + \log_4 b$. D. $2 \log_2(a+b) = 4 + \log_2 a + \log_2 b$.

Câu 32. Cho $\log_a c = x > 0$ và $\log_b c = y > 0$. Khi đó giá trị của $\log_{ab} c$ là

- A. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$. B. $\frac{1}{xy}$. C. $\frac{xy}{x+y}$. D. $x + y$.

Câu 33. Cho $\log_2 5 = a$. Tính $\log_{32} 40$ theo a bằng

- A. $\frac{2+a}{2}$. B. $\frac{3a+1}{2}$. C. $\frac{a+2}{9}$. D. $\frac{3+a}{5}$.

Câu 34. Cho $\log_2 m = a$ và $A = \log_m(8m)$ với $0 < m \neq 1$. Tìm mối liên hệ giữa A và a .

A. $A = (3 + a)a$. B. $A = (3 - a)a$. C. $A = \frac{3 + a}{a}$. D. $A = \frac{3 - a}{a}$.

Câu 35. Cho $a, b > 0$ thỏa $\frac{\log_3 5 \cdot \log_5 a}{1 + \log_3 2} - \log_6 b = 2$. Tìm khẳng định **đúng** ?

A. $a = b \log_6 2$. B. $a = b \log_6 3$. C. $a = 36b$. D. $2a + 3b = 0$.

Câu 36. Cho a, b lần lượt là số hạng thứ nhất và thứ năm của một cấp số cộng có công sai $d \neq 0$. Giá trị của $\log_2 \left(\frac{b - a}{d} \right)$ bằng

A. $\log_2 5$. B. 3. C. 2. D. $\log_2 3$.

Câu 37. Cho $x, y > 1$ thỏa mãn $x^2 - 12y^2 = 4xy$. Tính $P = \frac{1 + \log_8(x + 2y) + \log_8 y}{2 \log_8(x + 2y)}$.

A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{2}$.
C. 1. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 38. Cho $0 < a \neq 1$. Giá trị $P = \log_a 2018 + \log_{\sqrt{a}} 2018 + \log_{\sqrt[3]{a}} 2018 + \dots + \log_{\sqrt[2018]{a}} 2018$

A. $1009 \cdot 2019 \cdot \log_a 2018$. B. $2018 \cdot 2019 \cdot \log_a 2018$.
C. $2018 \cdot \log_a 2018$. D. $2019 \cdot \log_a 2018$.

Câu 39. Cho $a, b > 0$ thỏa $\log_{16} a = \log_{20} b = \log_{25} \frac{2a - b}{3}$ và đặt $T = \frac{a}{b}$. Khẳng định đúng là

A. $0 < T < \frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{2} < T < \frac{2}{3}$.
C. $-2 < T < 0$. D. $1 < T < 2$.

Câu 40. Biết rằng $2^{\frac{x+1}{x}} = \log_2 \left[14 - (y-2)\sqrt{y+1} \right]$ với $x > 0$. Tính $P = x^2 + y^2 - xy + 1$.

A. 3 B. 1.
C. 2. D. 4.

BẢNG ĐÁP ÁN RÈN LUYỆN LẦN 1

1.C	2.C	3.C	4.A	5.D	6.C	7.B	8.A	9.C	10.D
11.C	12.C	13.D	14.C	15.A	16.A	17.C	18.B	19.D	20.B
21.D	22.A	23.B	24.C	25.D	26.A	27.B	28.C	29.C	30.B
31.C	32.C	33.D	34.C	35.C	36.C	37.C	38.A	39.D	40.C

RÈN LUYỆN LẦN 2

Câu 1. Cho a là số thực dương tùy ý khác 1. Mệnh đề nào dưới đây **đúng** ?

- A. $\log_2 a = \log_a 2$. B. $\log_2 a = \frac{1}{\log_2 a}$. C. $\log_2 a = \frac{1}{\log_a 2}$. D. $\log_2 a = -\log_a 2$.

Câu 2. Cho các số dương a, b, c và $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây **đúng** ?

- A. $\log_a b + \log_a c = \log_a (b + c)$. B. $\log_a b + \log_a c = \log_a |b - c|$.
C. $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$. D. $\log_a b + \log_a c = \log_a (b - c)$.

Câu 3. Cho a là một số dương, biểu thức $a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a}$ viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ là

- A. $a^{\frac{5}{6}}$. B. $a^{\frac{7}{6}}$. C. $a^{\frac{4}{3}}$. D. $a^{\frac{6}{7}}$.

Câu 4. Viết biểu thức $Q = \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[6]{x^5}$ với $x > 0$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ ?

- A. $Q = x^{\frac{2}{3}}$. B. $Q = x^{\frac{5}{3}}$. C. $Q = x^{\frac{5}{2}}$. D. $Q = x^{\frac{7}{3}}$.

Câu 5. Cho số thực a dương. Rút gọn biểu thức $P = \sqrt[5]{a^4 \sqrt[4]{a^3 \sqrt[3]{a \sqrt{a}}}}$.

- A. $P = a^{\frac{1}{14}}$. B. $P = a^{\frac{1}{120}}$. C. $P = a^{\frac{11}{40}}$. D. $P = a^{\frac{13}{60}}$.

Câu 6. Viết biểu thức $A = \sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a}}} : a^{\frac{11}{6}}$ với $a > 0$ dưới dạng lũy thừa của số mũ hữu tỉ.

- A. $A = a^{\frac{21}{44}}$. B. $A = a^{\frac{1}{12}}$. C. $A = a^{\frac{23}{24}}$. D. $A = a^{\frac{23}{24}}$.

Câu 7. Biết $\sqrt[5]{\frac{b}{a}} \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ với a, b là các số thực dương. Tìm m .

- A. $m = \frac{2}{15}$. B. $m = \frac{4}{15}$. C. $m = \frac{2}{5}$. D. $m = -\frac{2}{15}$.

Câu 8. Viết biểu thức $P = \frac{a^2 a^{\frac{5}{2}} \sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[6]{a^5}}$, ($a > 0$) dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ.

- A. $P = a$. B. $P = a^5$. C. $P = a^4$. D. $P = a^2$.

Câu 9. Cho a, b là hai số thực dương. Thu gọn biểu thức $T = \frac{a^{\frac{7}{6}} \cdot b^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[6]{ab^2}}$.

- A. $T = \frac{a}{b^2}$. B. $T = ab$. C. $T = \frac{b}{a}$. D. $T = \frac{a}{b}$.

Câu 10. Với $a > 0$ thì biểu thức $P = \frac{a^{\sqrt{7}+1} \cdot a^{2-\sqrt{7}}}{(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}}$ được rút gọn là

- A. $P = a^5$. B. $P = a^4$. C. $P = a^3$. D. $P = a$.

Câu 11. Cho a là số thực dương khác 4. Tính $I = \log_{\frac{a}{4}} \left(\frac{a^3}{64} \right)$.

- A. $I = 3$. B. $I = \frac{1}{3}$. C. $I = -3$. D. $I = -\frac{1}{3}$.

Câu 12. Cho $0 < a \neq 1$. Giá trị của biểu thức $P = \log_a(a \cdot \sqrt[3]{a^2})$ là

- A. $\frac{4}{3}$. B. 3. C. $\frac{5}{3}$. D. $\frac{5}{2}$.

Câu 13. Cho b là số thực dương khác 1. Tính $P = \log_b(b^2 \sqrt{b})$.

- A. $P = \frac{3}{2}$. B. $P = 1$. C. $P = \frac{5}{2}$. D. $P = \frac{1}{4}$.

Câu 14. Cho $\log_a b = 3$, $\log_a c = -2$. Giá trị của $\log_a(a^3 b^2 \sqrt{c})$ bằng

- A. -8. B. 5. C. 4. D. 8.

Câu 15. Cho a, b là các số thực dương khác 1 thỏa $\log_a b = \sqrt{3}$. Giá trị của $\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}}$ là

- A. $-\sqrt{3}$. B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $-2\sqrt{3}$. D. $\sqrt{3}$.

Câu 16. Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào **đúng**?

- A. $\log_2 \frac{2a^3}{b} = 1 + 3\log_2 a - \log_2 b$. B. $\log_2 \frac{2a^3}{b} = 1 + \frac{1}{3}\log_2 a - \log_2 b$.
C. $\log_2 \frac{2a^3}{b} = 1 + 3\log_2 a + \log_2 b$. D. $\log_2 \frac{2a^3}{b} = 1 + \frac{1}{3}\log_2 a + \log_2 b$.

Câu 17. Cho a là số thực dương. Tìm mệnh đề **đúng**?

- A. $\log_3 \frac{a^2}{\sqrt{3}} = 2\log_3 a - 2$. B. $\log_3 \frac{a^2}{\sqrt{3}} = 2\log_3 a + 2$.
C. $\log_3 \frac{a^2}{\sqrt{3}} = 2\log_3 a - \frac{1}{2}$. D. $\log_3 \frac{a^2}{\sqrt{3}} = 2\log_3 a + \frac{1}{2}$.

Câu 18. Cho hai số thực dương a, b với $a \neq 1$. Hỏi khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. $\log_a(a^3 b^2) = \frac{3}{2} + \log_a b$. B. $\log_a(a^3 b^2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\log_a b$.
C. $\log_a(a^3 b^2) = 3 + \log_a b$. D. $\log_a(a^3 b^2) = 3 + 2\log_a b$.

Câu 19. Cho $a, b, x > 0$. Tìm x , biết $\log_2 x = 5\log_2 a + 4\log_2 b$.

- A. $x = a^5 b^4$. B. $x = a^4 b^5$. C. $x = 5a + 4b$. D. $x = 4a + 5b$.

Câu 20. Cho a là số thực dương và $a \neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $M = a^{2016 \log_a 2^{2017}}$.

- A. $M = 1008^{2017}$. B. $M = 2017^{2016}$. C. $M = 2016^{2017}$. D. $M = 2017^{1008}$.

Câu 21. Cho $a = \log_2 m$ với $0 < m \neq 1$. Đẳng thức nào dưới đây **đúng**?

- A. $\log_m 8m = \frac{3+a}{a}$. B. $\log_m 8m = \frac{3-a}{a}$.
C. $\log_m 8m = (3-a)a$. D. $\log_m 8m = (3+a)a$.

Câu 22. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $\log_a b = m$, $\log_a c = n$. Tính $A = \log_{abc}(ab^2c^3)$ theo m và n .

- A. $\frac{1+2m+3n}{1+m+n}$. B. $\frac{7}{3}$. C. $\frac{1+3m+2n}{1+m+n}$. D. $\frac{1+m+n}{1+3m+2n}$.

Câu 23. Cho số thực $a > 0$ và khác 1. Tính giá trị của biểu thức sau $P = \log_{\frac{1}{a}} a^2 + \log_{a^2} \sqrt{a}$.

- A. $P = \frac{17}{4}$. B. $P = \frac{13}{4}$. C. $P = -\frac{11}{4}$. D. $P = -\frac{15}{4}$.

Câu 24. Biết $\log_a b = 2$, $\log_a c = 3$ với $a, b, c > 0$ và $a \neq 1$. Tính $T = \log_a \frac{a^2 \sqrt[3]{b}}{c}$.

- A. $T = -\frac{1}{3}$. B. $T = 5$. C. $T = 6$. D. $T = \frac{2}{3}$.

Câu 25. Cho $1 \neq a, b > 0$ thỏa mãn $\log_a b = 3$. Tính giá trị của biểu thức $T = \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}}$.

- A. $T = 1$. B. $T = 4$. C. $T = -1$. D. $T = -4$.

Câu 26. Cho $\log_2 3 = a$, $\log_2 7 = b$. Biểu diễn $\log_2 2016$ theo a và b .

- A. $\log_2 2016 = 5 + 2a + b$. B. $\log_2 2016 = 5 + 3a + 2b$.
C. $\log_2 2016 = 2 + 2a + 3b$. D. $\log_2 2016 = 2 + 3a + 2b$.

Câu 27. Biết $\log_{42} 2 = 1 + m \log_{42} 3 + n \log_{42} 7$ với m và n là các số nguyên. Mệnh đề nào **đúng**?

- A. $m.n = 2$. B. $m.n = -1$. C. $m.n = -2$. D. $m.n = 1$.

Câu 28. Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 = 7ab$. Chọn mệnh đề **đúng**?

- A. $2\log(a+b) = 3(\log a + \log b)$. B. $2(\log a + \log b) = \log(7ab)$.
C. $3\log(a+b) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$. D. $\log \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$.

Câu 29. Cho $a, b > 0$ thỏa $a+b = 2\sqrt{ab}$. Chọn mệnh đề **đúng**?

- A. $\ln \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} = \frac{1}{4}(\ln a + \ln b)$. B. $\ln(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = \frac{1}{4}(\ln a + \ln b)$.
C. $\ln \sqrt{a} + \ln \sqrt{b} = \frac{1}{4}(\ln a + \ln b)$. D. $\ln(a+b) = 2\ln(ab)$.

Câu 30. Cho $x > 0, y > 0$. Viết biểu thức $x^{\frac{4}{5}} \cdot \sqrt[6]{x^5 \sqrt{x}} = x^m$ và $y^{\frac{4}{5}} : \sqrt[6]{y^5 \sqrt{y}} = y^n$. Tính $m - n$.

- A. $\frac{11}{6}$. B. $-\frac{8}{5}$. C. $-\frac{11}{6}$. D. $\frac{8}{5}$.

Câu 31. Cho $5^x = 2$. Tính $A = 25^x + 5^{2-x}$.

- A. $A = \frac{13}{2}$. B. $A = \frac{75}{2}$. C. $A = \frac{33}{2}$. D. $A = 29$.

Câu 32. Cho $9^x + 9^{-x} = 14$ và $\frac{6 + 3(3^x + 3^{-x})}{2 - 3^{x+1} - 3^{1-x}} = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $P = a.b$.

- A. $P = 10$. B. $P = -10$. C. $P = -45$. D. $P = 45$.

Câu 33. Cho $\log_3(\sqrt{a^2 + 9} + a) = 2$. Giá trị biểu thức $\log_3(2a^2 + 9 - 2a\sqrt{a^2 + 9})$ bằng

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 0.

Câu 34. Cho $x > 0$, $y > 0$ và $K = \left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)^2 \left(1 - 2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}\right)^{-1}$. Xác định mệnh đề **đúng**?

- A. $K = 2x$. B. $K = x + 1$. C. $K = x - 1$. D. $K = x$.

Câu 35. Cho $x, y > 0$ thỏa $\log_{16}(x + y) = \log_9 x = \log_{12} y$. Giá trị của $P = 1 + \frac{x}{y} + \left(\frac{x}{y}\right)^2$ bằng

- A. $P = 2$. B. $P = 16$.
C. $P = 3 + \sqrt{5}$. D. $P = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

Câu 36. Cho a và b là các số thực thỏa $3 \cdot 2^a + 2^b = 7\sqrt{2}$ và $5 \cdot 2^a - 2^b = 9\sqrt{2}$. Tính $S = a + b$.

- A. $S = 3$. B. $S = 2$.
C. $S = 4$. D. $S = 1$.

Câu 37. Cho hàm số $f(x) = \frac{2^x}{2^x + 2}$. Tổng $f(0) + f\left(\frac{1}{10}\right) + \dots + f\left(\frac{18}{10}\right) + f\left(\frac{19}{10}\right)$ bằng

- A. $\frac{59}{6}$. B. 10.
C. $\frac{19}{2}$. D. $\frac{28}{3}$.

Câu 38. Cho $a > 0$ và $a \neq 1$ và $b > 0$. Rút gọn biểu thức $P = \sqrt{\log_a^2(ab) - \frac{2 \log b}{\log a} - 1}$.

- A. $P = |\log_a b + 1|$. B. $P = |\log_a b - 1|$.
C. $P = |\log_a b|$. D. $P = 0$.

Câu 39. Rút gọn $A = (\log_b^3 a + 2 \log_b^2 a + \log_b a)(\log_a b - \log_{ab} b) - \log_b a$ bằng

- A. 1. B. 3.
C. 2. D. 0.

Câu 40. Cho $a, b \in \mathbb{R}$ và $f(x) = a \ln^{2017}(\sqrt{x^2 + 1} + x) + bx \sin^{2018} x + 2$. Biết $f(5^{\log_c 6}) = 6$, tính giá trị của biểu thức $P = f(-6^{\log_c 5})$ với $0 < c \neq 1$.

- A. $P = -2$. B. $P = 6$.
C. $P = 4$. D. $P = 2$.

BẢNG ĐÁP ÁN RÈN LUYỆN LẦN 2

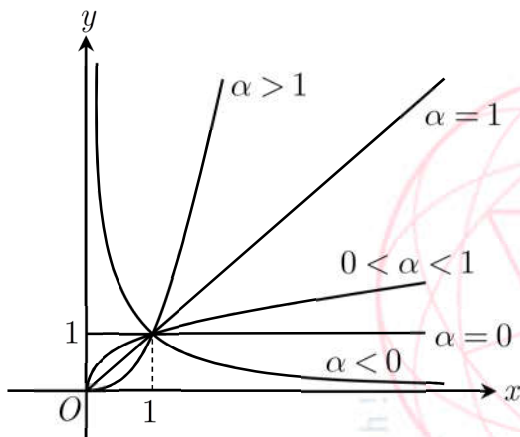
1.C	2.C	3.B	4.B	5.C	6.D	7.D	8.B	9.D	10.A
11.A	12.C	13.C	14.D	15.B	16.A	17.C	18.D	19.A	20.D
21.A	22.A	23.A	24.A	25.A	26.A	27	28.D	29.A	30.A
31.C	32.C	33.D	34.D	35.A	36.B	37.A	38.C	39.A	40.A

§ 2. HÀM SỐ LŨY THỪA – HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LÔGARIT

☆☆☆

I. HÀM SỐ LŨY THỪA

- Định nghĩa:** Hàm số $y = x^\alpha$, với $\alpha \in \mathbb{R}$, được gọi là hàm số lũy thừa.
- Tập xác định:** Tập xác định của hàm số lũy thừa $y = [P(x)]^n$.
 - n nguyên dương $\Rightarrow$ Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
 - n nguyên âm hoặc bằng 0 $\Rightarrow$ điều kiện $P(x) \neq 0$.
 - n không nguyên $\Rightarrow$ điều kiện $P(x) > 0$.
- Đạo hàm:** Hàm số $y = x^\alpha$, ($\alpha \in \mathbb{R}$) có đạo hàm với mọi $x > 0$ và $\boxed{(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}}$.
- Đồ thị hàm số lũy thừa trên khoảng $(0; +\infty)$**



Đồ thị của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ luôn đi qua điểm $I(1;1)$.

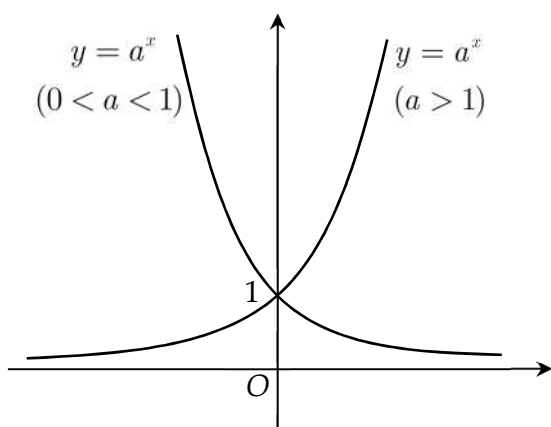
Lưu ý: Khi khảo sát hàm số lũy thừa với số mũ cụ thể, ta phải xét hàm số đó trên toàn bộ tập xác định của nó. Chẳng hạn: $y = x^3$, $y = x^{-2}$, $y = x^\pi$.

II. HÀM SỐ MŨ

- Định nghĩa:** Cho số thực dương $a \neq 1$. Hàm số $y = a^x$ được gọi là hàm số mũ cơ số a .
- Tập xác định:** $y = a^{P(x)}$ xác định khi $P(x)$ xác định. Đối với $y = a^x$ thì có $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
Tập giá trị của hàm số mũ là $T = (0; +\infty)$.

- Đạo hàm:** $\boxed{(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'}$ $\Rightarrow$
 - $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$.
 - $(e^x)' = e^x$.
 - $(e^u)' = u' \cdot e^u$.
 Công thức thừa nhận $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$.

- Đồ thị hàm số mũ $y = a^x$**



Tập xác định	$\mathcal{D} = (-\infty; +\infty)$.
Đạo hàm	$y' = a^x \ln a$.
Đơn điệu	$a > 1$: hàm số đồng biến. $0 < a < 1$: nghịch biến.
Tiệm cận	Trục Ox là tiệm cận ngang.
Đồ thị	Đi qua điểm $(0;1)$ và $(1;a)$, nằm về phía trên trục hoành ($y = a^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$).

III. HÀM SỐ LÔGARIT

1. **Định nghĩa:** Cho $0 < a \neq 1$. Hàm số $y = \log_a x$ được gọi là hàm số lôgarit cơ số a .

2. **Tập xác định:** $y = \log_a [P(x)] \Rightarrow$ điều kiện: $P(x) > 0$.

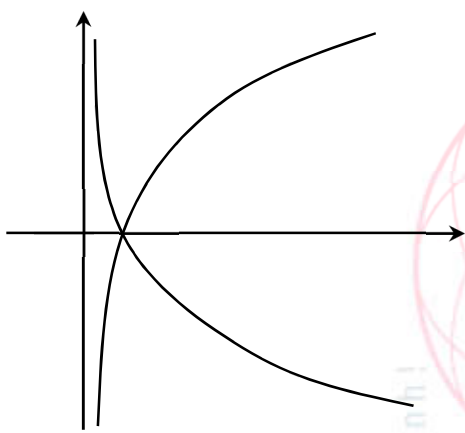
Nếu a chứa biến x thì bổ sung $0 < a \neq 1$.

Đặc biệt:

- $y = \ln[P(x)]$ hoặc $y = \log[P(x)] \Rightarrow$ điều kiện: $P(x) > 0$.
- $y = \log_a [P(x)]^n \Rightarrow$ điều kiện: $\begin{cases} \circ P(x) > 0: \text{nếu } n \text{ lẻ} \\ \circ P(x) \neq 0: \text{nếu } n \text{ chẵn} \end{cases}$.

3. **Đạo hàm:** $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \Rightarrow (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$. **Đặc biệt** $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$ và $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

4. **Đồ thị hàm số lôgarit** $y = \log_a x$



Tập xác định	$\mathcal{D} = (0; +\infty)$.
Đạo hàm	$y' = \frac{1}{x \ln a}$.
Đơn điệu	• $a > 1$: hàm số đồng biến. • $0 < a < 1$: hàm số nghịch biến.
Tiệm cận	Trục Oy là tiệm cận đứng.
Đồ thị	Đi qua các điểm $(1; 0)$ và $(a; 1)$, nằm về phía phải trục tung.

Nhận xét:

Đồ thị của các hàm số $y = a^x$ và $y = \log_a x$, ($0 < a \neq 1$) đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$, (góc phần tư thứ nhất và thứ ba trong hệ trục Oxy).

Dạng toán 1: Tìm tập xác định của hàm lũy thừa, mũ, lôgarit

1. **Hàm số mũ** $y = a^{P(x)}$ thì điều kiện xác định là $P(x)$ có nghĩa.

2. **Hàm số lũy thừa** $y = [P(x)]^n$.

- n nguyên dương $\Rightarrow$ Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- n nguyên âm hoặc bằng 0 $\Rightarrow$ điều kiện $P(x) \neq 0$.
- n không nguyên $\Rightarrow$ điều kiện $P(x) > 0$.

3. **Hàm số lôgarit**

$y = \log_a [P(x)] \Rightarrow$ điều kiện: $P(x) > 0$. Nếu a chứa biến x thì bổ sung $0 < a \neq 1$.

Đặc biệt:

- $y = \ln[P(x)]$ hoặc $y = \log[P(x)] \Rightarrow$ điều kiện: $P(x) > 0$.
- $y = \log_a [P(x)]^n \Rightarrow$ điều kiện: $\begin{cases} \circ P(x) > 0: \text{nếu } n \text{ lẻ} \\ \circ P(x) \neq 0: \text{nếu } n \text{ chẵn} \end{cases}$.

1. Tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = (2x - x^2)^{\frac{1}{3}} + \log_2(x - 1)^2$ là

A. $(0; 2)$. B. $(0; 1)$.

C. $\mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$. D. $(0; 2) \setminus \{1\}$.

Điều kiện: $\begin{cases} 2x - x^2 > 0 \\ (x - 1)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

Tập xác định $\mathcal{D} = (0; 2) \setminus \{1\}$.

Chọn đáp án D.

☛ **Cần nhớ:** $A^2 > 0 \Rightarrow A \neq 0$ và $|A| > 0 \Leftrightarrow A \neq 0$.

2. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = (x^2 - x - 2)^{-\log 1000}$.

A. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

B. $\mathcal{D} = (0; +\infty)$.

C. $\mathcal{D} = (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.

3. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = (x^2 - x)^{\sqrt{2018}}$.

A. $\mathcal{D} = (-\infty; +\infty)$.

B. $\mathcal{D} = (1; +\infty)$.

C. $\mathcal{D} = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

D. $\mathcal{D} = (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$.

4. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = (x^3 - x^2)^{-5}$.

A. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$.

C. $\mathcal{D} = (0; 1)$.

D. $\mathcal{D} = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

5. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = (3x - x^2)^{\frac{\pi}{2}}$.

A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$.

B. $\mathcal{D} = (0; 3)$.

C. $\mathcal{D} = (0; 3)$.

D. $\mathcal{D} = [0; 3]$.

6. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = (3 - x)^0$.

A. $\mathcal{D} = (-\infty; 3)$.

B. $\mathcal{D} = (-\infty; 3]$.

C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

D. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

7. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = 2018^{\sqrt{2-x^2}}$.

A. $\mathcal{D} = (-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

B. $\mathcal{D} = (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

C. $\mathcal{D} = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

D. $\mathcal{D} = (-\infty; -\sqrt{2}]$.

8. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(-x^2 - x + 6)$.

- A. $\mathcal{D} = (3; +\infty)$.
 B. $\mathcal{D} = (-3; 2)$.
 C. $\mathcal{D} = (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$.
 D. $\mathcal{D} = (-\infty; 2)$.

9. Hãy tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \ln(x^2 - 2x - 3)$.

- A. $\mathcal{D} = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.
 B. $\mathcal{D} = (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$.
 C. $\mathcal{D} = [-1; 3]$.
 D. $\mathcal{D} = (-1; 3)$.

10. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x-1}{x}$.

- A. $\mathcal{D} = (1; +\infty)$.
 B. $\mathcal{D} = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.
 C. $\mathcal{D} = (0; 1)$.
 D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

11. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \log_{2018} \frac{x-1}{x+2}$.

- A. $\mathcal{D} = [1; +\infty)$.
 B. $\mathcal{D} = (-2; 1)$.
 C. $\mathcal{D} = (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.
 D. $\mathcal{D} = (-\infty; -2)$.

12. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \log \frac{x+1}{x-1}$.

- A. $\mathcal{D} = (-1; 1)$.
 B. $\mathcal{D} = [-1; 1]$.
 C. $\mathcal{D} = (-\infty; 1) \cup (-1; +\infty)$.
 D. $\mathcal{D} = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

13. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = 2^x + \ln|x+1|$.

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
 B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
 C. $\mathcal{D} = \mathbb{R}^+$.
 D. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

14. * Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-2018; 2018)$ để hàm số $y = (x^2 - 2x - m + 1)^{\sqrt{5}}$ xác định $\forall x \in \mathbb{R}$.

- A. 4036.
B. 2018.
C. 2017.
D. Vô số.

Cần nhớ: $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$\bullet f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

$$\bullet f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện: $x^2 - 2x - m + 1 > 0$

Để $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ thì $x^2 - 2x - m + 1 > 0$ luôn đúng $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \neq 0 \quad (\text{LĐ}) \\ \Delta = 4 - 4(-m + 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$, $\begin{cases} m \in (-2018; 2018) \\ m < 0 \end{cases}$ nên $m \in \{-2017; \dots; -1\}$ có

$-1 - (-2017) + 1 = 2017$ số nguyên m . **Chọn đáp án C.**

15. * Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-50; 50)$ để hàm số $y = \log_{2018}(x^2 - 2x - m + 1)$ xác định $\forall x \in \mathbb{R}$.

- A. 99.
B. 49.
C. 50.
D. 100.

16. * Biết $m \in (a; b)$ thì $y = \ln(x^2 - 2x - m^2 + 5m - 5)$ xác định $\forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $a + b$ bằng

- A. -5.
B. 5.
C. 3.
D. -3.

17. * Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = \log_2(x^2 - 4x + m)$ xác định $\forall x \in \mathbb{R}$.

- A.** $m > 4$.
B. $m < 4$.
C. $m \geq 4$.
D. $m \leq 4$.

18. * Tìm m để hàm số $y = \log_2[(m+2)x^2 + 2(m+2)x + m+3]$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- A. $m \leq -2$.
B. $m > -2$.
C. $m < -2$.
D. $m \geq -2$.

Dạng toán 2: Tìm đạo hàm của hàm mũ – lôgarit

$$\bullet (a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \Rightarrow \begin{cases} \circ (e^u)' = u' \cdot e^u \\ \circ (e^x)' = e^x \end{cases} \quad \bullet (\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \Rightarrow \begin{cases} \circ (\ln u)' = \frac{u'}{u} \\ \circ (\ln x)' = \frac{1}{x} \end{cases}$$

BÀI TẬP ỨNG DỤNG

1. Đạo hàm của hàm số $y = 2^{2x^2+x}$ là

- A. $2^{2x^2+x} \cdot \ln 2$. **B.** $(4x+1) \cdot 2^{2x^2+x} \cdot \ln 2$.
C. $(2x^2+x)2^{2x^2+x} \ln 2$. D. $(4x+1)\ln(2x^2+x)$.

Học sinh ghi công thức $(a^u)' = \dots$
 $\Rightarrow y' = (2x^2+x)' \cdot 2^{2x^2+x} \cdot \ln 2 = (4x+1) \cdot 2^{2x^2+x} \cdot \ln 2$.
Chọn đáp án B.

2. Đạo hàm của hàm số $y = 8^{x^2+1}$ là

- A. $2x \cdot 8^{x^2}$. B. $2x(x^2+1) \cdot 8^{x^2} \ln 8$.
C. $(x^2+1) \cdot 8^{x^2}$. **D.** $6x \cdot 8^{x^2+1} \cdot \ln 2$.

3. Tính đạo hàm của hàm số $y = e^{1-2x}$.

- A. $y' = 2e^{1-2x}$. B. $y' = e^{1-2x}$.
C. $y' = -2e^{1-2x}$. D. $y' = e^x$.

Học sinh ghi công thức $(e^u)' = \dots$
 $\Rightarrow y' = \dots$

4. Đạo hàm của hàm số $y = e^{x^2+x}$ là

- A. $(x^2+x) \cdot e^{2x+1}$. B. $(2x+1) \cdot e^{2x+1}$.
C. $(2x+1) \cdot e^{x^2+x}$. D. $(2x+1) \cdot e^x$.

Học sinh ghi công thức $(e^u)' = \dots$
 $\Rightarrow y' = \dots$

5. Đạo hàm của hàm số $y = 5^{\sin x}$ là

- A.** $5^{\sin x} \cdot \ln 5 \cdot \cos x$. B. $5^{\sin x} \cdot \cos x$.
C. $5^{\sin x-1} \cdot \sin x$. D. $5^{\sin x} \cdot \ln 5$.

$\bullet (a^u)' = \dots$ $\bullet (\sin x)' = \dots$
 $\Rightarrow y' = \dots$

6. Tính đạo hàm của hàm số $y = e^{\cos 2x}$.

- A. $y' = \sin 2x \cdot e^{\cos 2x}$. B. $y' = \frac{1}{2} \sin 2x \cdot e^{\cos 2x}$.
C. $y' = 2 \cos 2x \cdot e^{\sin 2x}$. **D.** $y' = -2 \sin 2x \cdot e^{\cos 2x}$.

$\bullet (e^u)' = \dots$ $\bullet (\cos u)' = \dots$
 $\Rightarrow y' = \dots$

7. Đạo hàm của hàm số $y = (x^2 - 2x + 2)e^x$ là

- A. $(x^2+2)e^x$. **B.** x^2e^x .
C. $(2x-2)e^x$. D. $-2xe^x$.

$\bullet (u \cdot v)' = \dots$
 $\Rightarrow y' = \dots$

8. Đạo hàm của hàm số $y = \log_2(2x + 1)$ là

- A. $\frac{2}{(2x+1)\ln x}$. B. $\frac{2}{(2x+1)\ln 2}$.
 C. $\frac{2\ln 2}{x+1}$. **D.** $\frac{2}{(x+1)\ln 2}$.

Học sinh ghi công thức $(\log_a u)' =$

$\Rightarrow y' =$

9. Đạo hàm của hàm số $y = \log_2(x^2 + 1)$ là

- A.** $\frac{2x}{(x^2+1)\ln 2}$. B. $\frac{1}{x^2+1}$.
 C. $\frac{1}{(x^2+1)\ln 2}$. D. $\frac{2x}{x^2+1}$.

Học sinh ghi công thức $(\log_a u)' =$

10. Đạo hàm của hàm số $y = \log(x^2 - x)$ là

- A. $\frac{1}{(x^2-x)\ln 10}$. B. $\frac{2x-1}{x^2-x}$.
C. $\frac{2x-1}{(x^2-x)\ln 10}$. D. $\frac{2x-1}{(x^2-x)\log e}$.

• $\log u = \log_{10} u$ và $(\log_a u)' =$

11. Đạo hàm của hàm số $y = \log(e^x + 2)$ là

- A.** $\frac{e^x}{(e^x+2)\ln 10}$. B. $\frac{e^x}{e^x+2}$.
 C. $\frac{1}{(e^x+2)\ln 10}$. D. $\frac{1}{e^x+2}$.

• $(e^a) =$ • $(\log_a u)' =$

12. Đạo hàm của hàm số $y = e^x - \ln(3x)$ là

- A. $e^x - \frac{1}{3x}$. **B.** $e^x - \frac{1}{x}$.
 C. $e^x - \frac{3}{x}$. D. $e^x + \frac{1}{x}$.

Học sinh ghi công thức $(\ln u)' =$

$\Rightarrow y' =$

13. Đạo hàm của hàm số $y = x \ln x$ là

- A. $y' = \frac{1}{x}$. B. $y' = \ln x$.
 C. $y' = 1$. **D.** $y' = \ln x + 1$.

14. * Giá trị của tham số m để $y'(e) = 2m + 1$ với $y = \ln(2x + 1)$ là

- A. $\frac{1+2e}{4e-2}$. B. $\frac{1+2e}{4e+2}$.
C. $\frac{1-2e}{4e+2}$. D. $\frac{1-2e}{4e-2}$.

15. * Cho hàm số $f(x) = \ln(2e^x + m)$ thỏa mãn $f'(-\ln 2) = \frac{3}{2}$. Mệnh đề nào đúng ?

A. $m \in (1; 3)$. B. $m \in (-5; -2)$.

C. $m \in (1; +\infty)$. D. $m \in (-\infty; 3)$.

16. * Cho hàm số $y = (x^2 + mx)e^x$. Biết $y'(0) = 1$ thì $y'(1)$ bằng

A. $6e$. B. $3e$.

C. $5e$. D. $4e$.

17. * Cho hàm số $f(x) = 2^{x^2+a}$ và có $f'(1) = 2 \ln 2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a > 1$. B. $-2 < a < 0$.

C. $0 < a < 1$. D. $a < -2$.

18. * Cho hàm số $y = \frac{\ln x}{x}$. Hỏi mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2y' + xy'' = -\frac{1}{x^2}$. B. $y' + xy'' = x^{-2}$.

C. $y' + xy'' = -\frac{1}{x^2}$. D. $2y' + xy'' = \frac{1}{x^2}$.

19. Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^2 + x)^\alpha$ với α là hằng số.

A. $2\alpha(x^2 + x)^{\alpha-1}$.

B. $\alpha(x^2 + x)^{\alpha+1}(2x + 1)$.

C. $\alpha(x^2 + x)^{\alpha-1}(2x + 1)$.

D. $\alpha(x^2 + x)^{\alpha-1}$.

20. Cho hàm số $y = x^\pi$. Giá trị của $y''(1)$ bằng

A. $\ln^2 \pi$.

B. $\pi \ln \pi$.

C. 0 .

D. $\pi(\pi - 1)$.

21. Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x^3}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ là

A. $\frac{7}{6} \cdot \sqrt[6]{x}$.

B. $\frac{4}{3} \cdot \sqrt[3]{x}$.

C. $7\sqrt[6]{x}$.

D. $\sqrt[9]{x}$.

22. * Cho hàm số $f(x) = \ln \frac{2018x}{x+1}$. Tổng $S = f'(1) + f'(2) + \dots + f'(2017) + f'(2018)$ bằng

A. $\frac{2018}{2019}$.

B. 1 .

C. $\ln 2018$.

D. 2018 .

Dạng toán 3: Đơn điệu và cực trị của hàm số mũ & lôgarit**1. Tính chất của lũy thừa**

- Nếu $a > 1$ thì $a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$.
- Nếu $0 < a < 1$ thì $a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$.

2. Hàm số mũ $y = a^x$.

- $a > 1$: hàm số đồng biến.
- $0 < a < 1$: hàm số nghịch biến.

3. Hàm số lôgarit $y = \log_a x$, ($a > 0$, $a \neq 1$).

- $a > 1$: hàm số đồng biến.
- $0 < a < 1$: hàm số nghịch biến.

Lưu ý: Nếu hàm số không có dạng chuẩn như trên (chẳng hạn $y = 2^{x^2-2x}$, $y = \log_3(x-1)$,...), ta dựa vào kiến thức cơ bản về chương 1 để làm, cụ thể:

- Tìm điều kiện và tính đạo hàm y' .
- Lập bảng biến thiên và xét dấu.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

1. Cho $(a-1)^{-\frac{2}{3}} < (a-1)^{-\frac{1}{3}}$. Hỏi mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **đúng** ?

- A. $a > 1$. B. $a > 2$.
C. $0 < a < 1$. D. $1 < a < 2$.

2. Cho $(a^2 - 2a + 1)^{\frac{1}{2}} < (a^2 - 2a + 1)^{-\frac{3}{2}}$. Hỏi mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **đúng** ?

- A. $a \in (0; 2) \setminus \{1\}$.
B. $a \in (0; 2)$.
C. $a \in (0; 2) \setminus \{2\}$.
D. $a < 0$ hoặc $a > 2$.

3. Hỏi với giá trị nào của a thì hàm số $y = (3-a)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $2 < a < 3$. B. $0 < a < 1$.
C. $a > 2$. D. $a < 0$.

4. Hỏi với giá trị nào của a thì hàm số $y = (1 + 3a - a^2)^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $a < 0$. B. $0 < a < 2$.
C. $a > 3$. D. $0 < a < 3$.

5. Chọn khẳng định **sai** khi nói về tính đơn điệu và tập xác định của các hàm số sau ?

- A. $y = 2^x$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$. A. Đúng vì $y = 2^x$ có $a = 2 > 1$ nên đồng biến.
B. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$. B. Đúng vì điều kiện $x > 0$ và có $a = \frac{1}{2} < 1$.
C. $y = x^{\sqrt{2}}$ có tập xác định là $(0; +\infty)$. C. Đúng vì $\sqrt{2}$ không nguyên nên $x > 0$.
D. $y = \log_2 x$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$. D. Sai vì $x > 0$ nên đồng biến $(0; +\infty)$.

6. Hàm số $y = \log_{0,5}(-x^2 + 2x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây ?

- A. $(-\infty; 1)$.
 B. $(0; 1)$.
 C. $(1; +\infty)$.
D. $(1; 2)$.

Sai lầm thường gặp: Học sinh dễ ngộ nhận $a = 0,5 < 1$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

Lời giải. Điều kiện: $-x^2 + 2x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$.

$$\text{Có } y' = \frac{-2x + 2}{(-x^2 + 2x) \ln 0,5} = 0 \Leftrightarrow -2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
y'			-	0	+

Thử điểm: $y'(0,5) < 0$, $y'(1,5) > 0$. Chọn đáp án D.

7. Tìm khoảng nghịch biến của hàm số $y = \log_2(2x^2 - x - 1)$.

- A. $(1; +\infty)$. B. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$.
 C. $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$. D. $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

8. Cho hàm số $y = \left(\frac{3}{4}\right)^{x^2 - 2x + 2}$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **đúng** ?

- A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
 B. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.
C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$.
 D. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

9. Hỏi hàm số $y = e^{x^2 - 4x + 4}$ đồng biến trên những khoảng nào sau đây ?

- A. $(-\infty; +\infty)$.
 B. $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.
C. $(2; +\infty)$.
 D. $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

10. Cho hàm số $f(x) = x - \ln(1 + x)$. Mệnh đề nào sau đây **đúng** ?

- A. Hàm số đồng biến trên $(-1; 0)$.
 B. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$.
 C. Hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$.
D. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.

11. Hoành độ điểm cực đại của hàm số $y = e^{x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x - 1}$ là

- A. $x_{\text{CD}} = 1$. B. $x_{\text{CD}} = 0$.
C. $x_{\text{CD}} = \frac{2}{3}$. D. $x_{\text{CD}} = \frac{1}{3}$.

12. * Cho hàm số $y = \frac{\ln x - 4}{\ln x - 2m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; e)$. Tìm số phần tử của S .

- A. 2.
B. 4.
C. 3.
D. 1.

13. * Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = 2^{\frac{mx+1}{x+m}}$ nghịch biến trên $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$?

- A. $m \in (-1; 1)$.
B. $m \in (0; 1)$.
C. $m \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.
D. $m \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

14. * Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = 2^{x^3 - x^2 + mx + 1}$ đồng biến trên đoạn $[1; 2]$?

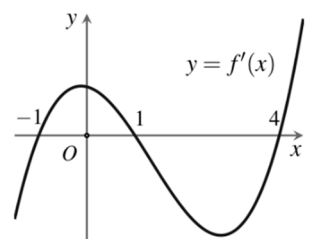
- A. $m > -8$.
B. $m \geq -1$.
C. $m \leq -8$.
D. $m < -1$.

15. * Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-50; 50)$ thì hàm số $y = \frac{2^{x+1} + 1}{2^x - m}$ nghịch biến $(-1; 1)$.

- A. 48.
B. 47.
C. 50.
D. 49.

16. ** Cho hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tìm số điểm cực trị của hàm số đồ thị hàm số $y = e^{2f(x)+1} + 5^{f(x)}$.

- A. 1.
B. 2.
C. 4.
D. 3.



Dạng toán 4: Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số mũ & lôgarit

☆☆☆

1. Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^2 - 2 \ln x$ trên $[e^{-1}; e]$ là

A. $M = e^2 - 2, m = e^{-2} + 2.$

B. $M = e^{-2} + 2, m = 1.$

C. $M = e^{-2} + 1, m = 1.$

D. $M = e^2 - 2, m = 1.$

Lưu ý. Các bước giống chương 1.

Lời giải. Ta có $y' = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 & (L) \\ x = 1 & (N) \end{cases}$

Tính $y(1) = 1, y(e) = e^2 - 2, y(e^{-1}) = e^{-2} + 2.$

Suy ra $M = e^2 - 2$ và $m = 1$. **Chọn đáp án D.****2.** Giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm số $y = x - \ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; e\right]$ theo thứ tự lần lượt là

A. 1 và $e - 1.$

B. $\frac{1}{2} + \ln 2$ và $e - 1.$

C. 1 và $e.$

D. 1 và $\frac{1}{2} + \ln 2.$

3. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = e^{x^3 - 3x + 3}$ trên đoạn $[0; 2]$.

A. $\max_{[0;2]} y = e^2.$ B. $\max_{[0;2]} y = e^3.$

C. $\max_{[0;2]} y = e^5.$ D. $\max_{[0;2]} y = e.$

4. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x.e^x$ trên đoạn $[-2; 0]$ bằng

A. $2 - e.$ B. $-\frac{2}{e^2}.$

C. $-\frac{1}{e}.$ D. 0.

5. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x \ln x$ trên đoạn $[e^{-2}; e]$ lần lượt là

A. e và $-\frac{1}{e}.$ B. e và $-\frac{2}{e}.$

C. $\frac{1}{e}$ và $-\frac{1}{e}.$ D. $-\frac{1}{e}$ và $-\frac{2}{e}.$

6. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = e^{2x} - 3e^x - 1$ trên đoạn $[0; \ln 3]$ lần lượt là

A. -1 và $-4.$ B. 1 và $\frac{13}{4}.$

C. -1 và $-\frac{13}{4}.$ D. 1 và $-4.$

7. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \ln^3 x - 3 \ln x$ trên đoạn $[1; e^3]$ lần lượt là

A. 18 và $\frac{1}{4}$. B. 18 và -2 .

C. 12 và 2. D. 12 và $\frac{1}{4}$.

8. ** Cho $m = \log_a(\sqrt[3]{ab})$, với $a, b > 1$ và $P = \log_a^2 b + 16 \log_b a$. Hỏi với m bằng bao nhiêu thì P đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $m = 2$.

B. $m = 1$.

C. $m = \frac{1}{2}$.

D. $m = 4$.

9. ** Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\log_4(x+y) + \log_4(x-y) \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của $2x - y$ bằng

A. 4.

B. -4 .

C. $2\sqrt{3}$.

D. $\frac{10\sqrt{3}}{3}$.

10. ** Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $\ln x + \ln y \geq \ln(x^2 + y)$. Giá trị nhỏ nhất của $x + y$ bằng

A. 6.

B. $2 + 3\sqrt{2}$.

C. $3 + 2\sqrt{2}$.

D. $\sqrt{17} + \sqrt{3}$.

11. ** (Đề tham khảo - Bộ GD & ĐT năm 2020) Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa $a > 1, b > 1$ và $a^x = b^y = \sqrt{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 2y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $(1; 2)$. B. $\left[2; \frac{5}{2}\right)$.

C. $[3; 4)$. D. $\left[\frac{5}{2}; 3\right)$.

12. ** Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa $\log_{3x+y}(x^2 + y^2) \leq 1$. Khi $P = 3x + y$ đạt giá trị lớn nhất, thì $k = \frac{x}{y}$ bằng

A. $k = 1$. B. $k = \frac{1}{2}$.

C. $k = 3$. D. $k = \frac{1}{3}$.

13. ** (THPT QG 2017 Câu 46 – Mã 102) Cho $a, b > 0$ thỏa $\log_2 \frac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = a + 2b$.

A. $P_{\min} = \frac{2\sqrt{10} - 3}{2}$.

B. $P_{\min} = \frac{3\sqrt{10} - 7}{2}$.

C. $P_{\min} = \frac{2\sqrt{10} - 1}{2}$.

D. $P_{\min} = \frac{2\sqrt{10} - 5}{2}$.

14. ** Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $(xy - 1) \cdot 2^{2xy-1} = (x^2 + y) \cdot 2^{x^2+y}$. Giá trị nhỏ nhất của y bằng

A. $\frac{3}{7}$.

B. 2.

C. $\frac{9}{4}$.

D. $\frac{4\sqrt{3}}{3} - 1$.

15. ** Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $2^{y^2} \left[\log_2(x^2 + 1) - \log_2(2 - y^2) + 2^{x^2} \right] \leq 2$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |2(x + y) - 1|$ bằng

A. $2\sqrt{2} - 1$.

B. $\frac{2\sqrt{2} + 1}{2}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{4 - \sqrt{2}}{4}$.

16. ** (Câu 45 – Mã đề 103 năm 2020) Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 2x + 4y$ bằng

A. $\frac{33}{8}$.

B. $\frac{9}{8}$.

C. $\frac{21}{4}$.

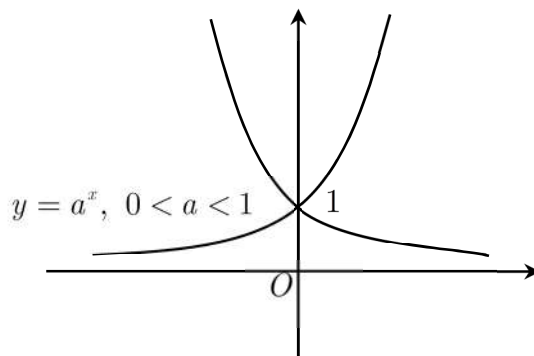
D. $\frac{41}{8}$.

Dạng toán 5: Nhận dạng đồ thị hàm số mũ - lũy thừa và lôgarit

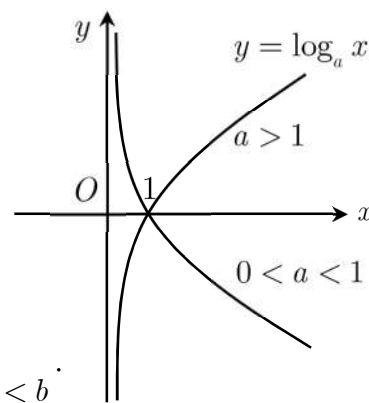
☆☆☆

① Nhận dạng đồ thị hàm số mũ $y = a^x$.

- Vì $y = a^x > 0$ có tập giá trị $T = (0; +\infty)$ nên đồ thị (C) nằm phía trên Ox và tiệm cận ngang là hoành Ox .
- Đồ thị (C) luôn đi qua $M(0;1)$, $N(1;a)$.
- Từ trái sang phải nếu đồ thị (C):
Đi lên $\Rightarrow$ Đồng biến $\Rightarrow a > 1$.
Đi xuống $\Rightarrow$ Nghịch biến $\Rightarrow 0 < a < 1$.
- Đồ thị $y = a^x$ và $y = \frac{1}{a^x}$ đối xứng nhau qua trục Oy .

**② Nhận dạng đồ thị hàm số lôgarit $y = \log_a x$.**

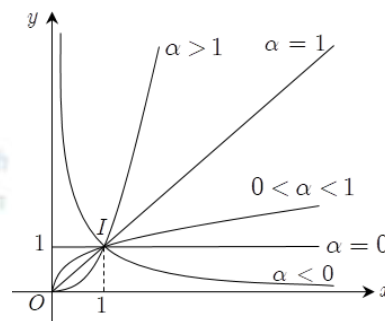
- Vì điều kiện $x > 0$ và tập giá trị là $T = \mathbb{R}$ nên đồ thị hàm số lôga luôn nằm bên phải trục Oy và tiệm cận đứng là Oy .
- Khi $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 0 \\ x = a \Rightarrow y = 1 \end{cases}$ nên (C) luôn qua $M(1;0)$, $N(a;1)$.
- Từ trái sang phải nếu đồ thị (C)
Đi lên $\Rightarrow$ ĐB $\Rightarrow a > 1 \Rightarrow \begin{cases} x > 1 : \log_a x > \log_b x \Leftrightarrow a < b \\ 0 < x < 1 : \log_a x > \log_b x \Leftrightarrow a > b \end{cases}$.
Đi xuống $\Rightarrow$ NB $\Rightarrow 0 < a < 1 \Rightarrow \begin{cases} x > 1 : \log_a x > \log_b x \Leftrightarrow a > b \\ 0 < x < 1 : \log_a x > \log_b x \Leftrightarrow a < b \end{cases}$.
- Đồ thị $y = \log_a x$ và $y = a^x$ đối xứng qua $d : y = x$.

**③ Đồ thị hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$.**

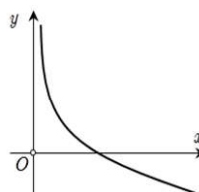
Đồ thị của hàm số $y = x^\alpha$ luôn đi qua điểm $I(1;1)$.

Khi khảo sát hàm số lũy thừa với số mũ cụ thể, ta phải xét hàm số đó trên toàn bộ tập xác định của nó.

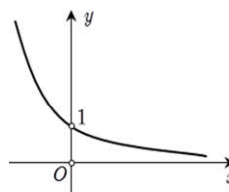
Chẳng hạn: $y = x^3$, $y = x^{-2}$, $y = x^\pi$.

**BÀI TẬP ÁP DỤNG****1. Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào ?**

- A. $y = 2^x$. B. $y = \log_2 x$.
- C. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. D. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

**2. Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào ?**

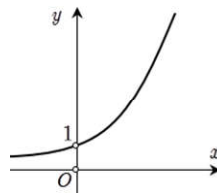
- A. $y = 2^x$. B. $y = \log_2 x$.
- C. $y = \frac{1}{2^x}$. D. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.



3. Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào ?

A. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ B. $y = \log_{\frac{2}{5}} x$.

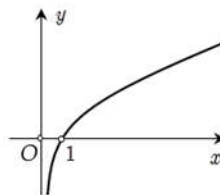
C. $y = \log_3 x$ D. $y = 2^x$.



4. Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào ?

A. $y = e^x$ B. $y = \log_{\sqrt{7}} x$.

C. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ D. $y = \frac{1}{e^x}$.



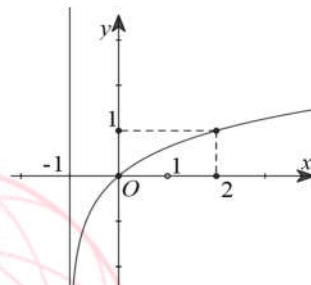
5. Đồ thị hàm số bên dưới là của hàm số nào ?

A. $y = \log_2 x + 1$.

B. $y = \log_2(x + 1)$.

C. $y = \log_3 x$.

D. $y = \log_3(x + 1)$.



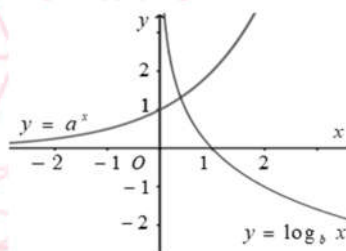
6. Cho hai hàm số $y = a^x$, $y = \log_b x$ có đồ thị như hình vẽ sau. Khẳng định nào đúng ?

A. $a > 1$, $0 < b < 1$.

B. $1 > a > 0$, $b > 1$.

C. $0 < a < 1$, $b < 1$.

D. $a > 1$, $b > 1$.



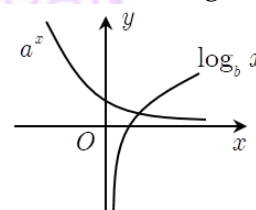
7. Cho hai hàm số $y = a^x$, $y = \log_b x$ có đồ thị như hình vẽ sau. Khẳng định nào đúng ?

A. $a > 1$, $b > 1$.

B. $0 < a$, $b < 1$.

C. $0 < a < 1 < b$.

D. $0 < b < 1 < a$.



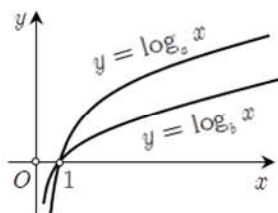
8. Đồ thị hai hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ như hình vẽ. Mệnh đề nào đúng ?

A. $a > b > 1$.

B. $1 > a > b$.

C. $b > a > 1$.

D. $a > 1 > b$.



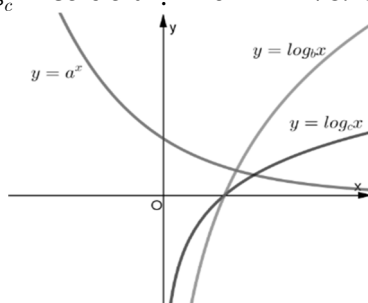
9. Cho các hàm số $y = a^x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ có đồ thị như hình vẽ. Chọn khẳng định đúng ?

A. $c > b > a$.

B. $b > a > c$.

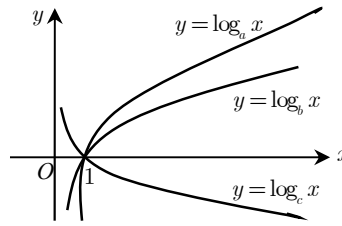
C. $a > b > c$.

D. $b > c > a$.



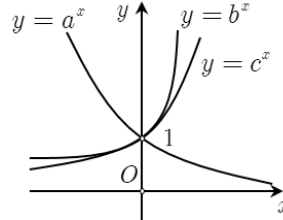
10. Từ các đồ thị $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ đã cho ở hình. Khẳng định nào **đúng**?

- A. $0 < a < b < 1 < c$.
 B. $0 < c < 1 < a < b$.
 C. $0 < c < a < 1 < b$.
 D. $0 < c < 1 < b < a$.



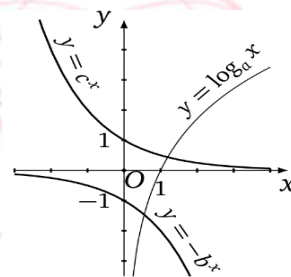
11. Đồ thị các hàm số $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ như hình vẽ bên. Mệnh đề nào **đúng**?

- A. $a < b < c$.
 B. $a < c < b$.
 C. $b < c < a$.
 D. $c < a < b$.



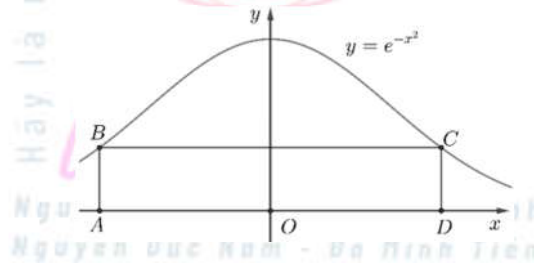
12. Xét các hàm số $y = \log_a x$, $y = -b^x$, $y = c^x$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây, trong đó a , b , c là các số thực dương khác 1. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. $\log_c(a+b) > 1 + \log_c 2$.
 B. $\log_{ab} c > 0$.
 C. $\log_a \frac{b}{c} > 0$.
 D. $\log_b \frac{a}{c} < 0$.



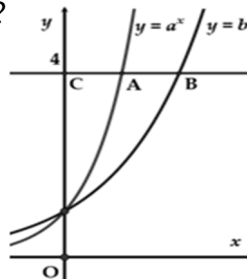
13. Cho đồ thị hàm số $y = e^{-x^2}$ như hình vẽ với $ABCD$ là hình chữ nhật thay đổi sao cho B và C luôn thuộc đồ thị hàm số đã cho. Cạnh AD nằm trên trục hoành. Giá trị lớn nhất của diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là

- A. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}}$.
 B. $\frac{2}{e}$.
 C. $\frac{\sqrt{2}}{e}$.
 D. $\frac{2}{\sqrt{e}}$.



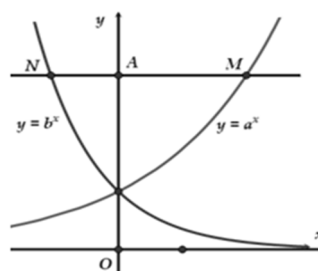
14. Cho điểm $C(0;4)$, đường thẳng $y = 4$ cắt hai đồ thị hàm số $y = a^x$ và $y = b^x$ lần lượt tại A và B sao cho $AB = AC$. Mệnh đề nào **đúng**?

- A. $a = 2b$.
 B. $b = a^2$.
 C. $b = 2a$.
 D. $a = b^2$.

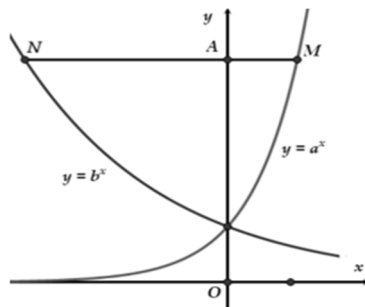


15. Biết đường thẳng $y = m$ cắt các đường $y = a^x$, $y = b^x$, trục tung lần lượt tại M , N và A thỏa $3AN = 2AM$. Mệnh đề nào **đúng**?

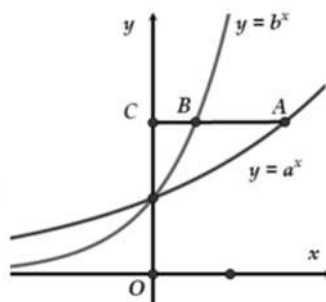
- A. $a^2 = b^3$.
 B. $a^3 = b^2$.
 C. $3b = 2a$.
 D. $a^3 b^2 = 1$.



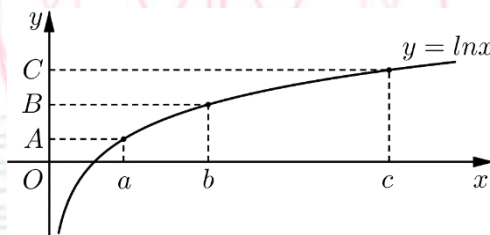
16. Cho hai số thực dương a, b khác 1. Biết rằng bất kì đường thẳng nào song song với trục hoành mà cắt các đường $y = a^x$, $y = b^x$ và trục tung lần lượt tại M , N , A thỏa mãn $AN = 3AM$. Tìm khẳng định **đúng**?



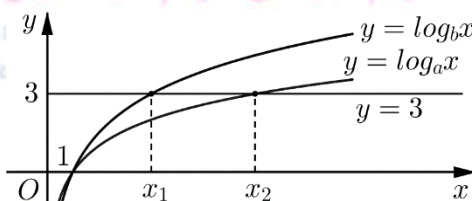
17. Cho hai số thực dương a, b khác 1 và hai hàm số $y = a^x$ và $y = b^x$ có đồ thị như hình bên dưới. Đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị hàm số $y = a^x$, $y = b^x$, trục tung lần lượt tại A , B , C sao cho $AC = 3BC$. Tìm mệnh đề **đúng**?



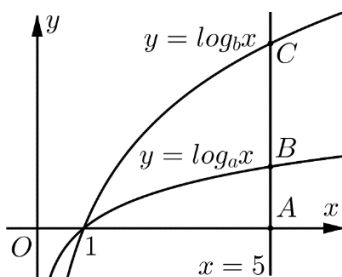
18. Trong hình dưới đây, điểm B là trung điểm của đoạn thẳng AC . Khẳng định nào **đúng**?



19. Hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Đường thẳng $y = 3$ cắt hai đồ thị tại các điểm có hoành độ x_1, x_2 . Biết rằng $x_2 = 2x_1$, giá trị của $\frac{a}{b}$ bằng



20. Cho các hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Đường thẳng $x = 5$ cắt trục hoành, đồ thị hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ lần lượt tại A , B và C . Biết rằng $CB = 2AB$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?



Dạng toán 6: Bài toán lãi suất và một số bài toán thực tế khác

☆☆☆

① **Lãi đơn:** là số tiền lãi chỉ tính trên số tiền gốc mà không tính trên số tiền lãi do số tiền gốc sinh ra, tức là tiền lãi của kì hạn trước không được tính vào vốn để tính lãi cho kì hạn kế tiếp, cho dù đến kì hạn người gửi không đến rút tiền ra.

Công thức tính: Khách hàng gửi vào ngân hàng A đồng với lãi đơn $r\%$ / kì hạn thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n kì hạn ($n \in \mathbb{N}^*$) là $A_n = A(1 + nr)$.

Lưu ý: trong tính toán các bài toán lãi suất và các bài toán liên quan, ta nhớ $r\%$ là $\frac{r}{100}$.

② **Lãi kép:** Tiền lãi của kì hạn trước nếu người gửi không rút ra thì được tính vào vốn để tính lãi cho kì hạn sau.

Công thức tính: Khách hàng gửi vào ngân hàng A đồng với lãi kép $r\%$ / kì hạn thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n kì hạn ($n \in \mathbb{N}^*$) là $A_n = A(1 + r)^n$.

Lưu ý: Tổng tiền lãi thu được là hiệu số $A_n - A$.

③ **Công thức tăng trưởng** $S = Ae^{n \cdot r}$.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

1. (Đề tham khảo – Bộ GD & ĐT năm 2018 – Câu 22) Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất $0,4\%$ / tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ta khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được lập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi xuất không thay đổi ?

A. 102.424.000 đồng.

B. 102.423.000 đồng.

C. 102.016.000 đồng.

D. 102.017.000 đồng.

Vì số tiền lãi được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo nên đây là hình thức lãi kép.

Ta có $A = 100.000.000$, $r = 0,4\% = \frac{0,4}{100}$ / tháng và $n = 6$.

Ta có số tiền được lĩnh cả vốn lẫn lãi là

$$A_n = A(1 + r)^n = 100000000 \left(1 + \frac{0,4}{100} \right)^6 = 102.424.128 \text{ đồng}$$

2. Một người gửi 1 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 7% / năm. Biết nếu không rút tiền ta khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được lập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau 8 năm, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi xuất không thay đổi ?

A. 1.719.000 đồng.

B. 1.718.000 đồng.

C. 1.714.000 đồng.

D. 1.713.000 đồng.

3. Ông Toàn gửi 50 triệu đồng vào ngân hàng ngân hàng Đông Á theo thể thức lãi kép (đến kỳ hạn mà người gửi không rút lãi ra thì tiền lãi được tính vào vốn của kỳ kế tiếp) với lãi suất 14% một năm. Hỏi sau hai năm ông Toàn thu được cả vốn lẫn lãi bao nhiêu (giả sử lãi suất không thay đổi).

- A. 63,98 triệu đồng.
B. 64,98 triệu đồng.
 C. 64,89 triệu đồng.
 D. 65,89 triệu đồng.

4. Một người gửi tiết kiệm 10 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7% một năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Sau 5 năm mới rút lãi thì người đó thu được số tiền lãi là

- A. 14,026 triệu đồng.
 B. 50,7 triệu đồng.
C. 4,026 triệu đồng.
 D. 3,5 triệu đồng.

5. Một người gửi tiết kiệm 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7% một năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Sau 5 năm mới rút lãi thì người đó thu được số tiền lãi là

- A. 70,128 triệu đồng.
 B. 50,7 triệu đồng.
C. 20,128 triệu đồng.
 D. 30,5 triệu đồng.

6. Một người đầu tư một số tiền vào công ty theo thể thức lãi kép kỳ hạn 1 năm với lãi suất 7,6%/năm. Giả sử lãi suất không đổi, hỏi sau bao nhiêu năm người đó thu được (cả vốn và lãi) số tiền gấp 5 lần số tiền ban đầu.

- A. 23 năm.
 B. 24 năm.
 C. 21 năm.
D. 22 năm.

Lời giải. Gọi x là số tiền ban đầu. Theo đề bài, ta có:

$$A_n = A_0(1+r)^n \Leftrightarrow 5x = x \left(1 + \frac{7,6}{100}\right)^n \Leftrightarrow \left(1 + \frac{7,6}{100}\right)^n = 5$$

$$\Leftrightarrow (1,076)^n = 5 \Leftrightarrow n = \log_{1,076} 5 \approx 22 \text{ năm.}$$

Chọn đáp án D.

7. (THPT QG năm 2018 – Mã đề 104) Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 6,1%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra ?

- A. 13 năm.
 B. 10 năm.
 C. 11 năm.
D. 12 năm.

8. (THPT QG năm 2018 – Mã đề 104) Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất $6,6\%$ / năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau một năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra ?

- A. 11 năm.
B. 12 năm.
C. 13 năm.
D. 10 năm.

9. Ông A gửi 9,8 triệu đồng tiết kiệm vào ngân hàng X với lãi suất $8,4\%$ / năm và lãi suất hằng năm được nhập vào vốn. Hỏi theo cách này thì bao nhiêu năm nữa ông A thu được tổng số tiền là 20 triệu. Giả sử lãi suất không đổi.

- A. 9 năm.
B. 8 năm.
C. 10 năm.
D. 20 năm.

10. Một người gửi ngân hàng 200 triệu theo hình thức lãi kép, lãi suất $0,58\%$ một tháng (kể từ tháng thứ hai trở đi, tiền lãi được tính theo phần trăm của tổng tiền gốc và tiền lãi tháng trước đó). Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng thì người đó có 225 triệu đồng ?

- A. 30 tháng.
B. 21 tháng.
C. 24 tháng.
D. 22 tháng.

11. Để quảng bá cho sản phẩm A, một công ty dự định tổ chức quảng cáo theo hình thức quảng cáo trên truyền hình. Nghiên cứu của công ty cho thấy: Nếu sau n quảng cáo được phát thì tỉ lệ người xem quảng cáo đó mua sản phẩm A tuân theo công thức: $P(n) = \frac{1}{1 + 49 \cdot e^{-0,015n}}$. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu lần quảng cáo để tỉ lệ người xem mua sản phẩm đạt trên 30% ?

- A. 202. B. 203.
C. 206. D. 207.

12. Năm 2020, tỉ lệ thể tích khí CO_2 trong không khí là $397 \cdot 10^{-6}$. Biết rằng tỉ lệ thể tích khí CO_2 trong không khí tăng $0,4\%$ hàng năm. Đến năm bao nhiêu thì tỉ lệ thể tích khí CO_2 trong không khí vượt ngưỡng $41 \cdot 10^{-5}$?

- A. 202. B. 203.
C. 206. D. 207.

RÈN LUYỆN LẦN 1

- Câu 1.** Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = e^{x^2+2x}$.
- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. B. $\mathcal{D} = [0; 2]$. C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$. D. $\mathcal{D} = \emptyset$.
- Câu 2.** Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = (x^2 + x - 2)^{-3}$.
- A. $\mathcal{D} = (0; +\infty)$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
C. $\mathcal{D} = (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$.
- Câu 3.** Tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = (2x - 1)^{\sqrt{3}}$ là
- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. B. $\mathcal{D} = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. C. $\mathcal{D} = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.
- Câu 4.** Tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \log_3(x^2 - 4x + 3)$ là
- A. $\mathcal{D} = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. B. $\mathcal{D} = (1; 3)$.
C. $\mathcal{D} = (-\infty; 1)$. D. $\mathcal{D} = (3; +\infty)$.
- Câu 5.** Tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \ln(-x^2 + 5x - 6)$ là
- A. $\mathcal{D} = (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$. B. $\mathcal{D} = (2; 3)$.
C. $\mathcal{D} = (-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$. D. $\mathcal{D} = [2; 3]$.
- Câu 6.** Tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \log(x - 3)^4 + \log_3(-x^2 + 5x - 4)$ là
- A. $\mathcal{D} = (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$. B. $\mathcal{D} = (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$.
C. $\mathcal{D} = (1; 4) \setminus \{3\}$. D. $\mathcal{D} = (1; 4)$.
- Câu 7.** Tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{2018x}{\log_{2019}(-x^2 + 2x)}$
- A. $\mathcal{D} = [0; 2]$. B. $\mathcal{D} = (0; 2)$. C. $\mathcal{D} = [0; 2] \setminus \{1\}$. D. $\mathcal{D} = (0; 2) \setminus \{1\}$.
- Câu 8.** Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \log_x \frac{2x}{3-x}$ là
- A. $\mathcal{D} = (0; 3) \setminus \{1\}$. B. $\mathcal{D} = (0; 3)$. C. $\mathcal{D} = (1; 3)$. D. $\mathcal{D} = (0; 1)$.
- Câu 9.** Tìm các giá trị của m để hàm số $y = \log_3(4x^2 - 4x - 3m)$ xác định trên $\mathbb{R}$.
- A. $m \geq \frac{3}{4}$. B. $m \geq -\frac{1}{3}$. C. $m \leq 2$. D. $m < -\frac{1}{3}$.
- Câu 10.** Cho hàm số $y = \sqrt{\log_2(x^2 - 3x + m) - 1}$. Tìm m để hàm số có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- A. $m \leq \frac{9}{4}$. B. $m \leq \frac{17}{4}$. C. $m \geq \frac{17}{4}$. D. $m \geq \frac{9}{4}$.
- Câu 11.** Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin 2x + 3^x$.
- A. $y' = 2 \cos 2x + x3^{x-1}$. B. $y' = -\cos 2x + 3^x$.
C. $y' = -2 \cos 2x - 3^x \ln 3$. D. $y' = 2 \cos 2x + 3^x \ln 3$.
- Câu 12.** Đẳng thức nào sau đây đúng với mọi số dương x ?
- A. $(\log x)' = \frac{x}{\ln 10}$. B. $(\log x)' = \frac{\ln 10}{x}$.

C. $(\log x)' = \frac{1}{x \ln 10}$.

D. $(\log x)' = x \ln 10$.

Câu 13. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_2(x + e^x)$.

A. $\frac{1 + e^x}{\ln 2}$.

B. $\frac{1 + e^x}{(x + e^x) \ln 2}$.

C. $\frac{1 + e^x}{x + e^x}$.

D. $\frac{1}{(x + e^x) \ln 2}$.

Câu 14. Tính đạo hàm của hàm số $y = x + \ln^2 x$.

A. $y' = 1 + \frac{2 \ln x}{x}$.

B. $y' = 1 + 2 \ln x$.

C. $y' = 1 + \frac{2}{x \ln x}$.

D. $y' = 1 + 2x \ln x$.

Câu 15. Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2 e^x$. Khẳng định nào **đúng** ?

A. $y'' - y' = e^x(x + 1)$.

B. $y'' - y' = e^x(x - 1)$.

C. $y'' + y' = e^x(x - 1)$.

D. $y'' + y' = e^x(-x + 1)$.

Câu 16. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x + 2}{9^x}$.

A. $y' = \frac{1 + 2(x + 2) \ln 3}{3^{2x}}$.

B. $y' = \frac{1 - 2(x + 2) \ln 3}{3^{2x}}$.

C. $y' = \frac{1 + (x + 2) \ln 3}{3^{2x}}$.

D. $y' = \frac{1 - (x + 2) \ln 3}{3^{2x}}$.

Câu 17. Cho $a > 0, a \neq 1$. Khẳng định nào **đúng** ?A. Tập giá trị của hàm số $y = \log_a x$ là khoảng $(-\infty; +\infty)$.B. Tập xác định của hàm số $y = a^x$ là khoảng $(0; +\infty)$.C. Tập xác định của hàm số $y = \log_a x$ là khoảng $(-\infty; +\infty)$.D. Tập giá trị của hàm số $y = a^x$ là khoảng $(-\infty; +\infty)$.**Câu 18.** Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $y = \left(\frac{e}{3}\right)^x$.

B. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

C. $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$.

D. $y = \log_5 x$.

Câu 19. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên tập xác định của nó ?

A. $y = \ln x$.

B. $y = \log_{0.99} x$.

C. $y = \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^x$.

D. $y = x^{-3}$.

Câu 20. Hàm số $y = \log_9(x^2 - 2x)$ nghịch biến trên khoảng

A. $(1; +\infty)$.

B. $(-\infty; 0)$.

C. $(-1; 1)$.

D. $(0; +\infty)$.

Câu 21. Cho hàm số $y = x - \ln(1 + x)$. Mệnh đề nào sau đây **đúng** ?A. Hàm số đồng biến trên $(-1; 0)$.B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.C. Hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$.D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.**Câu 22.** Hàm số $y = x^2 \ln x$ đạt cực trị tại điểm

A. $x = \sqrt{e}$.

B. $x = 0, x = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

C. $x = 0$.

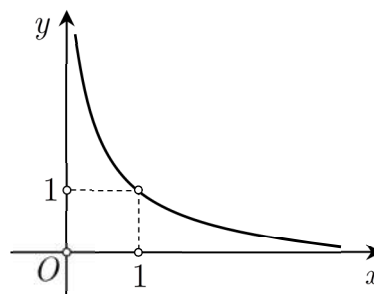
D. $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Câu 23. Cho hàm số $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$. Chọn mệnh đề **sai** ?

- A. Hàm số có 1 điểm cực trị.
- B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.
- C. Hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.
- D. Hàm số có tập giá trị $T = \mathbb{R}$.

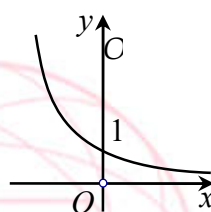
Câu 24. Đồ thị hàm số bên dưới là của hàm số nào ?

- A. $y = x^{-2}$.
- B. $y = 2^{-x}$.
- C. $y = x^{-\frac{1}{2}}$.
- D. $y = \log_2 x$.



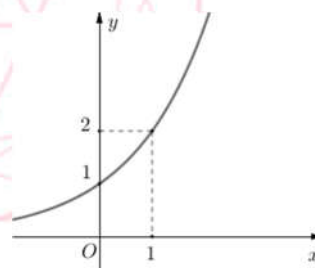
Câu 25. Hình bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau đây ?

- A. $y = (\sqrt{2})^x$.
- B. $y = (0,8)^x$.
- C. $y = \log_2 x$.
- D. $y = \log_{0,4} x$.



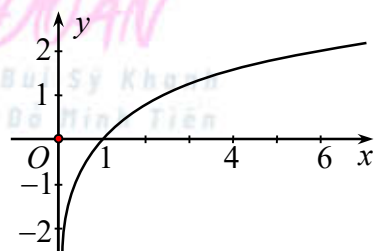
Câu 26. Đường cong trong hình sau là đồ thị của hàm số nào ?

- A. $y = (\sqrt{2})^x$.
- B. $y = \log_2(2x)$.
- C. $y = 2^x$.
- D. $y = \frac{1}{2}x + 1$.



Câu 27. Hàm số nào sau đây có đồ thị phù hợp với hình vẽ.

- A. $y = \log_{0,6} x$.
- B. $y = \log_{\sqrt{6}} x$.
- C. $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x$.
- D. $y = 6^x$.



Câu 28. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x.e^x$ trên $[-2; 0]$ bằng

- A. 0.
- B. $-\frac{2}{e^2}$.
- C. $-e$.
- D. $-\frac{1}{e}$.

Câu 29. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = e^{x^3 - 3x + 3}$ trên đoạn $[0; 2]$.

- A. $\max_{[0;2]} y = e^2$.
- B. $\max_{[0;2]} y = e^3$.
- C. $\max_{[0;2]} y = e^5$.
- D. $\max_{[0;2]} y = e$.

Câu 30. Giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm số $y = x - \ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; e\right]$ theo thứ tự là

- A. 1 và $e - 1$. B. $\frac{1}{2} + \ln 2$ và e .
- C. 1 và e . D. 1 và $\frac{1}{2} + \ln 2$.

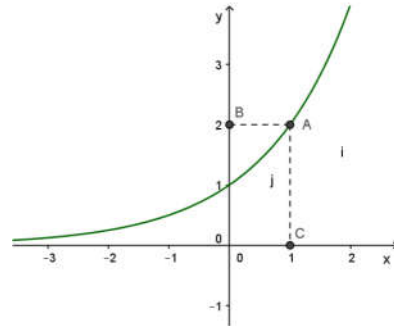
Câu 31. Biết đồ thị (C) ở hình bên là đồ thị hàm số $y = a^x$ ($0 < a \neq 1$). Gọi (C') là đường đối xứng với (C) qua đường thẳng $y = x$. Hỏi (C') là đồ thị của hàm số nào?

A. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

B. $y = 2^x$.

C. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

D. $y = \log_2 x$.



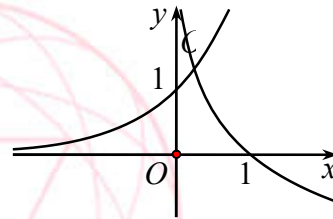
Câu 32. Cho hai đồ thị $y = a^x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm khẳng định **đúng**?

A. $0 < a < 1$, $0 < b < 1$.

B. $a > 1$, $b > 1$.

C. $a > 1$, $0 < b < 1$.

D. $0 < a < 1$, $b > 1$.



Câu 33. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = e^{3x^2 - 12x + 1} + x^3 - 3x^2$ trên đoạn $[1; 3]$ là

A. $e^{-11} - 4$.

B. e^8 .

C. $e^{-9} - 3$.

D. $e^{-12} - 4$.

Câu 34. Cho $P = 9 \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{a} + \log_{\frac{1}{3}}^2 a - \log_{\frac{1}{3}} a^3 + 1$ với $a \in \left[\frac{1}{27}; 3\right]$ và M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P . Tính $S = 3m + 4M$.

A. $S = \frac{83}{2}$.

B. $S = \frac{109}{9}$.

C. $S = 42$.

D. $S = 38$.

Câu 35. Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 0,4%/tháng. Biết rằng nếu không rút tiền khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau đúng 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

A. 102.424.000 đồng.

B. 102.423.000 đồng.

C. 102.016.000 đồng.

D. 102.017.000 đồng.

Câu 36. Một người gửi tiết kiệm 10 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7% một năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Sau 5 năm mới rút lãi thì người đó thu được số tiền lãi là

A. 14,026 triệu đồng.

B. 50,7 triệu đồng.

C. 4,026 triệu đồng.

D. 3,5 triệu đồng.

Câu 37. Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng với lãi suất 8,4%/năm và tiền lãi hàng năm được nhập vào tiền vốn. Tính số năm tối thiểu người đó cần gửi để số tiền thu được nhiều hơn 2 lần số tiền gửi ban đầu.

- A. 10 năm. B. 9 năm.
C. 8 năm. D. 11 năm.

Câu 38. Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng với kì hạn 3 tháng, lãi suất 5% một quý theo hình thức lãi kép (sau 3 tháng sẽ tính lãi và cộng vào gốc). Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 50 triệu đồng với kì hạn và lãi suất như trước đó. Tính tổng số tiền người đó nhận được sau 1 năm (tính từ lần gửi đầu tiên) ?

- A. 179,676 triệu đồng. B. 177,676 triệu đồng.
C. 178,676 triệu đồng. D. 176,676 triệu đồng.

Câu 39. Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn tuân theo công thức $S = A.e^{rt}$, trong đó A là số vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng, t là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Để số lượng vi khuẩn ban đầu tăng gấp đôi thì thời gian tăng trưởng t gần với kết quả nào sau đây nhất.

- A. 3 giờ 9 phút. B. 3 giờ 2 phút.
C. 3 giờ 30 phút. D. 3 giờ 18 phút.

Câu 40. Để thực hiện kế hoạch kinh doanh, ông A cần chuẩn bị một số vốn ngay từ bây giờ. Ông có số tiền là 500 triệu đồng gửi tiết kiệm với lãi suất 0,4%/tháng theo hình thức lãi kép. Sau 10 tháng, ông A gửi thêm vào 300 triệu nhưng lãi suất các tháng sau có thay đổi là 0,5% tháng. Hỏi sau 2 năm kể từ lúc gửi số tiền ban đầu, số tiền ông A nhận được cả gốc lẫn lãi là bao nhiêu ? (Không tính phần thập phân).

- A. 879693600. B. 880438640.
C. 879693510. D. 901727821.

BẢNG ĐÁP ÁN RÈN LUYỆN LẦN 1

1.A	2.D	3.B	4.A	5.B	6.C	7.D	8.A	9.D	10.C
11.D	12.C	13.B	14.A	15.A	16.B	17.A	18.A	19.A	20.B
21.D	22.D	23.A	24.C	25.B	26.C	27.B	28.B	29.D	30.A
31.D	32.C	33.A	34.D	35.A	36.C	37.B	38.D	39.A	40.C

RÈN LUYỆN LẦN 2

- Câu 1.** Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = (x^3 - 27)^{\frac{\pi}{2}}$.
 A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. C. $\mathcal{D} = [3; +\infty)$. D. $\mathcal{D} = (3; +\infty)$.
- Câu 2.** Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = (x^2 - x - 2)^{-3}$.
 A. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.
 C. $\mathcal{D} = (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$. D. $\mathcal{D} = (0; +\infty)$.
- Câu 3.** Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = (-x^2 + 3x + 4)^{\frac{1}{3}} + \sqrt{2 - x}$.
 A. $\mathcal{D} = (-1; 2]$. B. $\mathcal{D} = [-1; 2]$. C. $\mathcal{D} = (-\infty; 2]$. D. $\mathcal{D} = (-1; 2)$.
- Câu 4.** Tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \log_2(3 - 2x - x^2)$ là
 A. $\mathcal{D} = (-1; 3)$. B. $\mathcal{D} = (0; 1)$. C. $\mathcal{D} = (-1; 1)$. D. $\mathcal{D} = (-3; 1)$.
- Câu 5.** Tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{2 - x}} + \ln(x - 1)$ là
 A. $\mathcal{D} = [1; 2]$. B. $\mathcal{D} = (1; +\infty)$. C. $\mathcal{D} = (1; 2)$. D. $\mathcal{D} = (0; +\infty)$.
- Câu 6.** Có bao nhiêu số nguyên $x > 0$ để hàm số $y = \log_{2018}(10 - x)$ xác định.
 A. 10. B. 2018. C. Vô số. D. 9.
- Câu 7.** Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (x^2 + m)^{\sqrt{2}}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.
 A. $\forall m \in \mathbb{R}$. B. $m \neq 0$. C. $m > 0$. D. $m \geq 0$.
- Câu 8.** Có mấy giá trị nguyên của $m \in (-2018; 2018)$ để hàm số $y = (x^2 - 2x - m + 1)^{\sqrt{5}}$ xác định $\forall x \in \mathbb{R}$.
 A. 4036. B. 2018. C. 2017. D. Vô số.
- Câu 9.** Tìm tham số m để hàm số $y = \log(x^2 - 2mx + 4)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.
 A. $m < -2 \vee m > 2$. B. $m = 2$. C. $m < 2$. D. $-2 < m < 2$.
- Câu 10.** Số giá trị nguyên của m trên đoạn $[-2018; 2018]$ để hàm số $y = \ln(x^2 - 2x - m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.
 A. 2019. B. 2017. C. 2018. D. 1009.
- Câu 11.** Đạo hàm của hàm số $y = 3^x$ là
 A. $y' = \frac{-3^x}{\ln 3}$. B. $y' = 3^x \ln 3$. C. $y' = \frac{3^x}{\ln 3}$. D. $y' = -3^x \ln 3$.
- Câu 12.** Tính đạo hàm của hàm số $y = e^{\sin x}$.
 A. $y' = \cos x \cdot e^{\sin x}$. B. $y' = e^{\cos x}$. C. $y' = \sin x \cdot e^{\sin x - 1}$. D. $y' = \cos x \cdot e^{\sin x}$.
- Câu 13.** Đạo hàm của hàm số $y = x \cdot 2^x$ là
 A. $y' = (1 + x \ln 2) \cdot 2^x$. B. $y' = (1 - x \ln 2) \cdot 2^x$.
 C. $y' = (1 + x) \cdot 2^x$. D. $y' = 2^x + x^2 2^{x-1}$.
- Câu 14.** Đạo hàm của hàm số $y = \log_2(2x + 1)$ là
 A. $\frac{2}{(2x + 1) \ln x}$. B. $\frac{2}{(2x + 1) \ln 2}$. C. $\frac{2 \ln 2}{x + 1}$. D. $\frac{2}{(x + 1) \ln 2}$.

Câu 15. Tìm đạo hàm của hàm số $y = x(\ln x - 1)$.

- A. $y' = \ln x$. B. $y' = 1$. C. $y' = 1 - \frac{1}{x}$. D. $y' = \ln x - 1$.

Câu 16. Cho hàm số $y = \ln(e^x + m^2)$. Với giá trị nào của m thì $y'(1) = \frac{1}{2}$.

- A. $m = e$. B. $m = -e$. C. $m = \frac{1}{e}$. D. $m = \pm\sqrt{e}$.

Câu 17. Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên tập xác định của nó ?

- A. $y = \left(\frac{e}{2}\right)^x$. B. $y = \left(\frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}}\right)^x$. C. $y = \left(\frac{4}{\sqrt{3} + 2}\right)^x$. D. $y = \left(\frac{\pi + 3}{2\pi}\right)^x$.

Câu 18. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = (\sqrt{3} - 1)^x$. B. $y = (\pi - e)^x$. C. $y = \pi^x$. D. $y = (e - 2)^x$.

Câu 19. Hỏi với giá trị nào của a thì hàm số $y = (3 - a)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $2 < a < 3$. B. $0 < a < 1$. C. $a > 2$. D. $a < 0$.

Câu 20. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $(0; +\infty)$.

- A. $y = \log_3 x$. B. $y = \log_{\sqrt{3}-1} x$. C. $y = \log_{\sqrt{5}-2} x$. D. $y = \log_{\sqrt{2}-1} x$.

Câu 21. Hàm số $y = \log_2(x^2 - 2x)$ đồng biến trên khoảng

- A. $(1; +\infty)$. B. $(2; +\infty)$. C. $(-1; 1)$. D. $(0; +\infty)$.

Câu 22. Hỏi hàm số $y = e^{x^2-4x+4}$ đồng biến trên những khoảng nào sau đây ?

- A. $\mathbb{R}$. B. $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.
C. $(2; +\infty)$. D. $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Câu 23. Cho hàm số $y = \frac{\ln x - 4}{\ln x - 2m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; e)$. Tìm số phần tử của S .

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 1.

Câu 24. Cho hàm số $y = x^2 + 4\ln(3 - x)$. Tìm giá trị cực đại y_{CD} của hàm số đã cho.

- A. $y_{\text{CD}} = 4$. B. $y_{\text{CD}} = 2$. C. $y_{\text{CD}} = 1$. D. $y_{\text{CD}} = 1 + 4\ln 2$.

Câu 25. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 2\ln x$ trên đoạn $[e^{-1}; e]$.

- A. $\max y = e^2 - 2$, $\min y = e^{-2} + 2$. B. $\max y = e^{-2} + 2$, $\min y = m = 1$.
C. $\max y = e^{-2} + 1$, $\min y = 1$. D. $\max y = e^2 - 2$, $\min y = 1$.

Câu 26. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = e^{x^3-3x+3}$ trên đoạn $[0; 2]$.

- A. $\max y = e^2$. B. $\max y = e^3$. C. $\max y = e^5$. D. $\max y = e$.

Câu 27. Cho $1 < x < 64$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \log_2^4 x + 12\log_2^2 x \cdot \log_2 \frac{8}{x}$.

- A. $\max P = 64$. B. $\max P = 96$. C. $\max P = 82$. D. $\max P = 81$.

Câu 28. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $y = e^{3x} + 3e^{2x} - 9e^x + 5$ trên $[-\ln 2; \ln 5]$ là

- A. 160 và 0. B. 106 và 0. C. 601 và 1. D. 610 và 1.

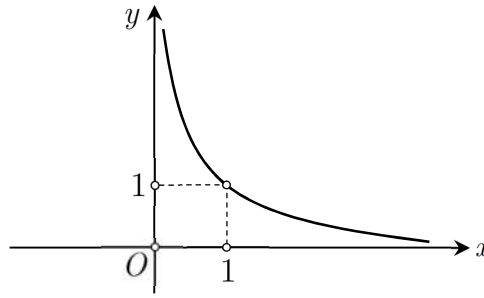
Câu 29. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số cho ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?

A. $y = x^{-2}$.

B. $y = 2^{-x}$.

C. $y = x^{\frac{1}{2}}$.

D. $y = \log_2 x$.



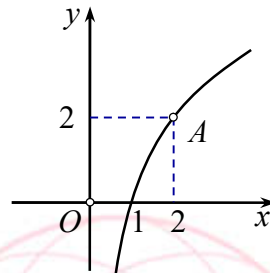
Câu 30. Giá trị thực của a để hàm số $y = \log_a x$ ($0 < a \neq 1$) có đồ thị là hình bên dưới ?

A. $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $a = \sqrt{2}$.

C. $a = \frac{1}{2}$.

D. $a = 2$.



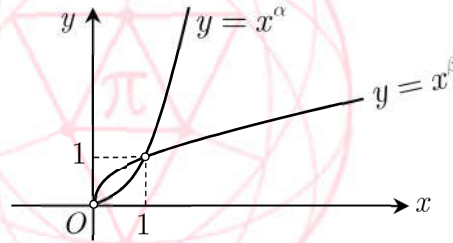
Câu 31. Đồ thị các hàm số $y = x^\alpha$, $y = x^\beta$ trên khoảng $(0; +\infty)$ được cho trong hình vẽ bên. Khẳng định nào **đúng** ?

A. $0 < \beta < 1 < \alpha$.

B. $\beta < 0 < 1 < \alpha$.

C. $0 < \alpha < 1 < \beta$.

D. $\alpha < 0 < 1 < \beta$.



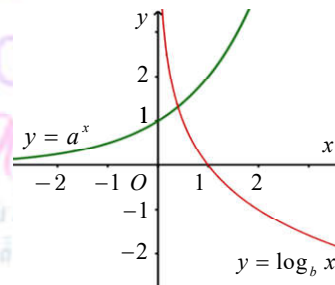
Câu 32. Cho $a > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$. Đồ thị các hàm số $y = a^x$ và $y = \log_b x$ được như hình vẽ bên dưới. Mệnh đề nào sau đây là **đúng** ?

A. $a > 1$, $0 < b < 1$.

B. $1 > a > 0$, $b > 1$.

C. $0 < a < 1$, $0 < b < 1$.

D. $a > 1$, $b > 1$.



Câu 33. Cho $0 < a$, $b \neq 1$ thỏa $\log_a^2 b - 8 \log_b(a \cdot \sqrt[3]{b}) = -\frac{8}{3}$. Tính $P = \log_a(a \cdot \sqrt[3]{ab}) + 2018$.

A. $P = 2018$.

B. $P = 2019$.

C. $P = 2020$.

D. $P = 2021$.

Câu 34. Với các số thực dương a , b bất kỳ. Mệnh đề nào dưới đây **đúng** ?

A. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + 3 \log_2 a - \log_2 b$.

B. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + \frac{1}{3} \log_2 a - \log_2 b$.

C. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + 3 \log_2 a + \log_2 b$.

D. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + \frac{1}{3} \log_2 a + \log_2 b$.

Câu 35. Cho $0 < x$; $y \neq 1$ thỏa $\log_{\sqrt[3]{x}} y = \frac{3y}{8}$ và $\log_{\sqrt{2}} x = \frac{32}{y}$. Giá trị của $P = x^2 - y^2$ là

A. 120.

B. 132.

C. 240.

D. 340.

Câu 36. Cho $0 < a \neq 1$. Hỏi có mấy mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau ?

- Hàm số $y = \log_a x$ có tập xác định $\mathcal{D} = (0; +\infty)$.
- Hàm số $y = \log_a x$ là hàm đơn điệu trên khoảng $(0; +\infty)$.
- Đồ thị hàm số $y = \log_a x$ và $y = a^x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.
- Đồ thị hàm số $y = \log_a x$ nhận Ox là một tiệm cận.

A. 3. B. 4. C. 2. D. 1.

Câu 37. Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 0,4% / tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được lập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

A. 102.424.000 đồng. B. 102.423.000 đồng.
C. 102.016.000 đồng. D. 102.017.000 đồng.

Câu 38. Một người gửi tiết kiệm 10 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7% một năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Sau 5 năm mới rút lãi thì người đó thu được số tiền lãi là

A. 14,026 triệu đồng. B. 50,7 triệu đồng.
C. 4,026 triệu đồng. D. 3,5 triệu đồng.

Câu 39. Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 6,1% / năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

A. 13 năm. B. 10 năm. C. 11 năm. D. 12 năm.

Câu 40. Cho $x, y > 0$ thỏa $2018^{2(x^2-y+1)} = \frac{2x+y}{(x+1)^2}$. Giá trị nhỏ nhất của $P = 2y - 3x$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{7}{8}$.
C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{5}{6}$.

BẢNG ĐÁP ÁN RÈN LUYỆN LẦN 2

1.D	2.B	3.A	4.D	5.C	6.D	7.C	8.C	9.D	10.C
11.B	12.A	13.A	14.D	15.A	16.D	17.D	18.C	19.A	20.A
21.B	22.C	23.D	24.A	25.D	26.D	27.D	28.A	29.C	30.B
31.A	32.A	33.C	34.A	35.C	36.A	37.A	38.C	39.D	40.B

§ 3. PHƯƠNG TRÌNH MŨ – PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

☆☆☆

Dạng toán 1: Phương trình mũ & lôgarit cơ bản (hay đưa về cùng cơ số)

1. Phương trình mũ cơ bản $a^x = b$, ($a > 0$, $a \neq 1$).

- Nếu $b > 0$ thì phương trình $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$.
- Nếu $b \leq 0$ thì phương trình $a^x = b$ vô nghiệm (do $a^x > 0$).

2. Phương trình lôgarit cơ bản $\log_a x = b$, ($a > 0$, $a \neq 1$).

Theo định nghĩa lôgarit, ta có phương trình $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$.

3. Phương trình đưa về cùng cơ số

Đặt điều kiện, rồi sử dụng công thức mũ và lôgarit để đưa về một trong những dạng sau:

① Nếu $a > 0$, $a \neq 1$ thì $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

② $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, (*), với $a.b = 1$. Ta sẽ giải như sau:

Ta có: $a.b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{a} = a^{-1}$ nên phương trình (*) $\Leftrightarrow a^{f(x)} = a^{-g(x)} \Leftrightarrow f(x) = -g(x)$.

③ Khác cơ số $\rightarrow$ lôgarit hóa hai vế, chẳng hạn: $a^{u(x).v(x)} = b^{u(x)} \rightarrow$ lấy lôga cơ số a hai vế.

③ Dạng $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, & g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$.

Lưu ý: Sau khi giải tìm nghiệm, ta nên so sánh với điều kiện ban đầu.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

1. Tập nghiệm của phương trình $2^{x^2-9x+16} = 4$ là

- A. $\{2; 7\}$. B. $\{4; 5\}$.
C. $\{1; 8\}$. D. $\{3; 6\}$.

Phương trình $2^{x^2-9x+16} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 16 = \log_2 4$
 $\Leftrightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = 7$. Chọn đáp án A.

2. (Đề tham khảo – Bộ GD & ĐT năm 2020) Nghiệm của phương trình $3^{x-1} = 27$ là

- A. $x = 4$. B. $x = 3$.
C. $x = 2$. D. $x = 1$.

3. Tập nghiệm của phương trình $2^{x^2-5x+6} = 1$ là

- A. $\{1; 2\}$. B. $\{1; 6\}$.
C. $\{-6; -1\}$. D. $\{2; 3\}$.

4. Tích tất cả các nghiệm của phương trình $3^{x^2-x \ln 2 + 1} = 4$ bằng

- A. $1 - \log_3 4$. B. $1 + \log_3 4$.
C. $1 - 2 \ln 2$. D. $1 + 2 \ln 2$.

5. Gọi x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) là hai nghiệm của phương trình $9^{x-1} = 3^{x^2-2}$. Giá trị $2^{x_1} + 3^{x_2}$ bằng

- A. 5.
B. 10.
C. 11.
D. 28.

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow 3^{2x-2} = 3^{x^2-2} \Leftrightarrow 2x-2 = x^2-2 \Leftrightarrow x^2-2x=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases} \xrightarrow{x_1 < x_2} \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=2 \end{cases} \Rightarrow 2^{x_1} + 3^{x_2} = 2^0 + 3^2 = 10. \text{ Chọn đáp án B.}$$

6. Nghiệm của phương trình $4^{2x+5} = 2^{2-x}$ là

- A. $x = -\frac{8}{5}$. B. $x = \frac{12}{5}$.
C. $x = 3$. D. $x = 2$.

7. Nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+1} = 125^x$ là

- A. $x = -\frac{2}{5}$. B. $x = -\frac{1}{8}$.
C. $x = 4$. D. $x = 1$.

8. Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $5^{3x-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2}$ bằng

- A. 0. B. 5.
C. 2. D. 3.

9. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phương trình $5^{x^2-x-1} \cdot 3^{x^2-x+2} = 27$. Giá trị $x_1 + x_2 + x_1x_2$ bằng

- A. -1. B. 0.
C. 1. D. 2.

Lưu ý.

Sử dụng công thức đưa về
 $a^x \cdot b^x = c \Leftrightarrow (ab)^x = c$.

$$\begin{aligned} \text{Phương trình} &\Leftrightarrow \frac{5^{x^2-x}}{5^1} \cdot 3^{x^2-x} \cdot 3^2 = 27 \Leftrightarrow \frac{9}{5} \cdot (5 \cdot 3)^{x^2-x} = 27 \\ &\Leftrightarrow 15^{x^2-x} = 15 \Leftrightarrow x^2-x=1 \Leftrightarrow x^2-x-1=0. \text{ Theo Viét, ta có:} \\ &x_1 + x_2 = 1 \text{ và } x_1x_2 = -1 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_1x_2 = 1 - 1 = 0. \\ &\text{Chọn đáp án B.} \end{aligned}$$

10. Tập nghiệm của phương trình $3^x \cdot 5^{x-1} = 7$ là

- A. $\{\log_{21} 5\}$. B. $\{\log_{15} 35\}$.
C. $\{\log_{21} 35\}$. D. $\{\log_{15} 21\}$.

11. Tập nghiệm của phương trình $2^x \cdot 3^{x+2} = 324$ là

- A. $\{-2\}$. B. $\{1\}$.
C. $\{\pm 1\}$. D. $\{2\}$.

12. Tập nghiệm của phương trình $6^{x^2+1} \cdot 2^{x^2-1} = 36$ là

- A. $\{-2\}$. B. $\{1\}$.
C. $\{\pm 1\}$. D. $\{2\}$.

13. Tập nghiệm của phương trình $3^{x^2} - 2^{x^2-1} = 2^{x^2+2} - 3^{x^2-1}$ là	
A. $\left\{\pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$. C. $\left\{\pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. B. $\{\pm\sqrt{3}\}$. D. $\{\pm\sqrt{2}\}$.	Phương trình $3^{x^2} - 2^{x^2-1} = 2^{x^2+2} - 3^{x^2-1} \Leftrightarrow 3^{x^2} + 3^{x^2-1} = 2^{x^2+2} + 2^{x^2-1}$ $\Leftrightarrow 3^{x^2} + \frac{3^{x^2}}{3} = 2^{x^2} \cdot 2^2 + \frac{2^{x^2}}{2} \Leftrightarrow 3^{x^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) = 2^{x^2} \cdot \left(4 + \frac{1}{2}\right)$ $\Leftrightarrow \frac{4}{3} \cdot 3^{x^2} = \frac{9}{2} \cdot 2^{x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$. Chọn D.
14. Tập nghiệm của phương trình $3^{x+5} - 3^x = 121$ là (hướng dẫn: công thức, rút nhân tử $\rightarrow$ cơ bản)	
A. $\{\log_2 3\}$. B. $\{-\log_3 2\}$. C. $\{\log_3 2\}$. D. $\{-\log_2 3\}$.	
15. Tập nghiệm của phương trình $4^{x+1} + 4^{x-1} = 272$ là	
A. $\{1\}$. B. $\{3\}$. C. $\{2\}$. D. $\{5\}$.	
16. Tập nghiệm của phương trình $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$ là	
A. $\{1\}$. B. $\{-1\}$. C. $\{-2\}$. D. $\{2\}$.	
17. Tập nghiệm của phương trình $5^{x^2} + 15 \cdot 4^{x^2-2} = 24 \cdot 5^{x^2-2} + 4^{x^2}$ là	
A. $\{\pm\sqrt{2}\}$. B. $\left\{\frac{1}{2}\right\}$. C. $\{2\}$. D. $\{\pm 2\}$.	
18. Nghiệm của phương trình $(\sqrt{17} + 4)^{2x-1} = (\sqrt{17} - 4)^{x-5}$ là (nhóm 2 cơ số nhân nhau bằng 1)	
A. $x = 0$. B. $x = 1$ C. $x = 3$. D. $x = 2$. Với $a \cdot b = 1 \Leftrightarrow b = a^{-1}$ thì $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow a^{f(x)} = a^{-g(x)}$	Nhận xét. Ta có $(\sqrt{17} + 4)(\sqrt{17} - 4) = 1$ nên phương trình $(\sqrt{17} + 4)^{2x-1} = (\sqrt{17} - 4)^{x-5} \Leftrightarrow (\sqrt{17} + 4)^{2x-1} = (\sqrt{17} + 4)^{-x+5}$ $\Leftrightarrow 2x - 1 = -x + 5 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$. Chọn đáp án B.
19. Tổng các nghiệm của phương trình $(\sqrt{2} + 1)^{x^2} = (\sqrt{2} - 1)^{5x+3}$ bằng	
A. 3. B. -3. C. 5. D. -5.	
20. Tổng các nghiệm của phương trình $(\sqrt{5} + 2)^{x-1} = (\sqrt{5} - 2)^{\frac{x-1}{x+1}}$ bằng	
A. -1. B. 1. C. 2. D. -2.	

21. Các nghiệm của phương trình $2^{x^2+x} - 4 \cdot 2^{x^2-x} - 2^{2x} + 4 = 0$ là (nhóm đưa về tích số)	
A. $x = 0, x = 1$. B. $x = 1, x = 2$. C. $x = 0, x = 2$. D. $x = 1, x = 3$.	Phương trình $\Leftrightarrow (2^{x^2+x} - 2^{2x}) - (4 \cdot 2^{x^2-x} - 4) = 0$ $\Leftrightarrow 2^{2x} \cdot (2^{x^2-x} - 1) - 4 \cdot (2^{x^2-x} - 1) = 0 \Leftrightarrow (2^{x^2-x} - 1) \cdot (2^{2x} - 4) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2-x} - 1 = 0 \\ 2^{2x} - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2-x} = 1 = 2^0 \\ 2^{2x} = 2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ 2x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \cdot \text{Chọn A.}$
22. Biết phương trình $12 \cdot 3^x + 3 \cdot 15^x - 5^{x+1} = 20$ có nghiệm $x = \log_3 \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a > 0, b > 0$. Giá trị của biểu thức tích ab bằng	
A. 12. B. 20. C. 15. D. 30.	
23. Các nghiệm của phương trình $25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x = 25$ là	
A. $x = 0$ hoặc $x = 2$. B. $x = 1$ hoặc $x = 2$. C. $x = 0$ hoặc $x = 3$. D. $x = 2$ hoặc $x = 3$.	
24. Tổng các nghiệm của phương trình $4^x + 3^{2x+1} = 3 \cdot 18^x + 2^x$ bằng	
A. $\log_3 4$. B. $\log_2 3$. C. $-\log_{\frac{9}{2}} 3$. D. $\log_2 9$.	
25. Tổng các nghiệm của phương trình $2^{x-3} = 3^{x^2-5x+6}$ bằng (nhóm khác cơ số $\rightarrow$ lôgarit hóa)	
A. $x = 3, x = \log_3 18$. B. $x = 3, x = \log_3 8$. C. $x = 2, x = \log_3 12$. D. $x = 2, x = \log_3 18$.	Phương trình $2^{x-3} = 3^{x^2-5x+6} \Leftrightarrow 2^{x-3} = 3^{(x-3)(x-2)}$ Lấy lôgarit cơ số 3 hai vế thì (*) $\Leftrightarrow \log_3 [2^{x-3}] = \log_3 [3^{(x-3)(x-2)}]$ $\Leftrightarrow (x-3) \cdot \log_3 2 = (x-3)(x-2) \Leftrightarrow (x-3) \cdot (\log_3 2 - x + 2) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \\ x = 2 + \log_3 2 = \log_3 18 \end{cases} \cdot \text{Chọn đáp án A.}$
26. Tổng các nghiệm của phương trình $5^{x^2-5x+6} = 2^{x-3}$ bằng	
A. $\log_5 1350$. B. $\log_3 162$. C. $\log_5 6250$. D. $\log_2 288$.	
27. Các nghiệm của phương trình $2^{x+3} = 5^{x^2+2x-3}$ là	
A. $x = -3, x = \log_5 2$. B. $x = -3, x = \log_5 4$. C. $x = 3, x = \log_4 5$. D. $x = 3, x = \log_2 5$.	

28. Tổng các nghiệm của phương trình $\log_2(-x^2 + 3x) = 1$ bằng

- A. 2. B. $\frac{1}{3}$.
C. 3. D. $\frac{1}{2}$.

Điều kiện: $-x^2 + 3x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 3$.

Phương trình $\log_2(-x^2 + 3x) = 1 \Leftrightarrow -x^2 + 3x = 2^1$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \xrightarrow{\text{Viet}} S = x_1 + x_2 = 3$. **Chọn đáp án C.**

29. Nghiệm của phương trình $\log_2(x - 5) = 4$ là

- A. $x = 3$. B. $x = 13$.
C. $x = 21$. D. $x = 11$.

30. Nghiệm của phương trình $\log(x - 1) = 2$ là

- A. $x = e^2 - 1$. B. $x = e^2 + 1$.
C. $x = 101$. D. $x = \pi^2 + 1$.

31. Tập nghiệm của phương trình $\ln(4 - x) = 100$ là

- A. $\{e^{100} - 4\}$. B. $\{10^{100} - 4\}$.
C. $\{4 - e^{100}\}$. D. $\{4 - 10^{100}\}$.

32. Tập nghiệm của phương trình $\log_3(2^x - 1) = 4$ là

- A. $\{\log_2 82\}$. B. $\{\log_2 65\}$.
C. $\{\log_2 81\}$. D. $\{\log_2 66\}$.

33. Nghiệm của phương trình $\log_2(3^{3x-1} - 1) = 3$ là

- A. $x = 2$. B. $x = 1$.
C. $x = 3$. D. $x = 8$.

34. Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2 - 4x + 3) = \log_2(4x - 4)$ là

- A. $\{1; 7\}$. B. $\{7\}$.
C. $\{1\}$. D. $\{3; 7\}$.

35. Số nghiệm của phương trình $\log_3(x^2 + 4x) = \log_3(2x + 3)$ là

- A. 3. B. 2.
C. 1. D. 0.

36. Giải phương trình $\log_2(x-2) + 3\log_8(3x-5) - 2 = 0$.

A. $x = 3, x = \frac{2}{3}$.

B. $x = 3$.

C. $x = \frac{2}{3}$.

D. $x = 3, x = \frac{7}{3}$.

Điều kiện: $\begin{cases} x-2 > 0 \\ 3x-5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$.

Phương trình $\Leftrightarrow \log_2(x-2) + 3\log_{2^3}(3x-5) = 2$

$\Leftrightarrow \log_2(x-2) + \log_2(3x-5) = 2 \Leftrightarrow \log_2[(x-2)(3x-5)] = 2$

$\Leftrightarrow (x-2)(3x-5) = 2^2 = 4 \Leftrightarrow x = 3 \text{ hoặc } x = 2/3$.

So với điều kiện, nghiệm là $x = 3$. **Chọn đáp án B.**

37. Nghiệm của phương trình $2\log_4 x + \log_2(x-3) = 2$ là

A. $x = 16$.

B. $x = 1$.

C. $x = 4$.

D. $x = 3$.

38. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_3(x^2 - 2x + 3) - \frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}(x+1) = 1$.

A. $S = \{5\}$.

B. $S = \{0; 5\}$.

C. $S = \{0; 5\}$.

D. $S = \{1; 5\}$.

39. Số nghiệm của phương trình $\frac{1}{3}\log_{\sqrt[3]{3}}(x^2 + 4x) + \log_3 4 \cdot \log_{\frac{1}{4}}(2x+3) = 0$ là

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

40. Giải phương trình $\log_2(x-3) + 2\log_4 3 \cdot \log_3 x = 2$. (HD: Công thức $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$).

A. $x = 2$.

B. $x = 4$.

C. $x = 5$.

D. $x = 4, x = 5$.

41. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{2}}(2x-2) + \log_2(x-3)^2 = 2$ trên $\mathbb{R}$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 8.

B. $6 + \sqrt{2}$.C. $4 + \sqrt{2}$.D. $8 + \sqrt{2}$.**Cần nhớ:**

$$\bullet A^{2n} > 0 \Leftrightarrow A \neq 0.$$

$$\bullet A^{2n} = B^{2n} \Leftrightarrow A = \pm B.$$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} 2x-2 > 0 \\ (x-3)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > 2 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \neq 3 \end{cases}$.

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \log_2(2x-2)^2 + \log_2(x-3)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2[(2x-2)(x-3)]^2 = 2 \Leftrightarrow [(2x-2)(x-3)]^2 = 2^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 8x + 6 = 2 \\ 2x^2 - 8x + 6 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 8x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{2} \\ 2x^2 - 8x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \end{cases}.$$

So với điều kiện, các nghiệm là $x = 2$, $x = 2 + \sqrt{2}$.

Chọn đáp án C.

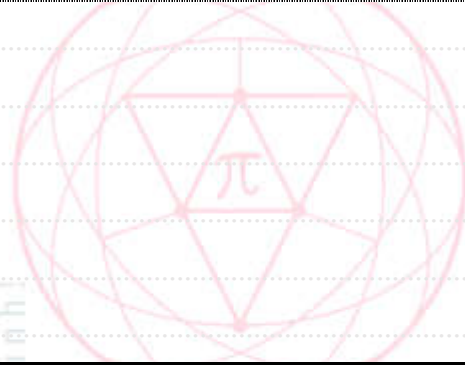
42. Tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{2020}}(x-3) + \log_{2020}(x-5)^2 = 0$ là $S = a + b\sqrt{2}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$. Giá trị của $a + b$ bằng

A. 8.

B. 9.

C. 10.

D. 11.



43. Tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{3}}(x-2) + \log_3(x-4)^2 = 0$ là $S = a + b\sqrt{2}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Giá trị của tích số $a.b$ bằng

A. 7.

B. 3.

C. 6.

D. 9.

LÊ VĂN ĐOÀN
 Nguyễn Tiến Hà - Bùi Sỹ Khanh
 Nguyễn Đức Nam - Đỗ Minh Tiên

44. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{7}}(x+2) + \log_7(x-8)^2 = 0$ là $S = a + b\sqrt{26}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$. Giá trị của $\sqrt{a} + b$ bằng

A. 3.

B. 4.

C. 6.

D. 9.

45. Giải phương trình $\log_{\sqrt{3}}(x-2) \cdot \log_5 x = 2 \log_3(x-2)$. (HD: chuyển vế $\rightarrow$ rút nhân tử)

- A. $x = 3, x = 4$.
 B. $x = 3, x = 5$.
 C. $x = 1, x = 3$.
 D. $x = 4, x = 5$.

46. Tất cả các nghiệm của phương trình $2 \log_9^2 x = \log_3 x \cdot \log_3(\sqrt{2x+1} - 1)$ là

- A. $x = 1, x = 1 + \sqrt{2}$.
 B. $x = 4, x = 1 + \sqrt{2}$.
 C. $x = 1 + \sqrt{3}, x = 4$.
 D. $x = 1, x = 4$.

47. Tất cả nghiệm phương trình $2 \log_2 x \cdot \log_3 x + 5 \log_2 x - 8 \log_3 x = 20$ là (HD: nhóm tích)

- A. $x = 16$ hoặc $x = \frac{\sqrt{3}}{27}$.
 B. $x = 16$ hoặc $x = \frac{\sqrt{3}}{27}$.
 C. $x = 4$ hoặc $x = \sqrt{3}$.
 D. $x = 16$ hoặc $x = \sqrt{3}$.

48. Tất cả các nghiệm của phương trình $\log_4(\log_2 x) + \log_2(\log_4 x) = 2$ là

- A. $x = 16, x = 2\sqrt{2}$.
 B. $x = 16$.
 C. $x = 4, x = 16$.
 D. $x = 4, x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

49. (Đề tham khảo 2018) Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \frac{2}{3}$ bằng (HD: áp dụng công thức đưa về dạng $(\log_3 x)^4 = \text{hằng số dương}$)

- A. $\frac{80}{9}$.
 B. $\frac{82}{9}$.
 C. 9.
 D. 0.

Dạng toán 2: Giải phương trình mũ - lôgarit bằng cách đặt ẩn phụ



① $P(a^{f(x)}) = 0 \xrightarrow{PP} \text{đặt } t = a^{f(x)}, t > 0.$

② $\alpha.a^{2f(x)} + \beta.(ab)^{f(x)} + \lambda.b^{2f(x)} = 0 \xrightarrow{PP} \text{Chia hai vế cho } b^{2f(x)} \text{ và đặt } t = \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} > 0.$

(ba cơ số khác nhau $\longrightarrow$ chia cho cơ số nhỏ nhất hoặc cơ số lớn nhất)

③ $a^{f(x)} + b^{f(x)} = c, \text{ với } a.b = 1 \xrightarrow{PP} \text{đặt } t = a^{f(x)} \Rightarrow b^{f(x)} = \frac{1}{t}.$

④ $\alpha.a^{f(x)} + a^{f(x)}.a^{g(x)} + \beta.a^{g(x)} + b = 0 \xrightarrow{PP} \text{đặt 2 ẩn } \begin{cases} u = a^{f(x)} > 0 \\ v = a^{g(x)} > 0 \end{cases} \text{ (hoặc đưa về tích).}$

⑤ $P(\log_a f(x)) = 0 \xrightarrow{PP} \text{đặt } t = \log_a f(x).$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

1. Phương trình $3^{2x+1} - 4.3^x + 1 = 0$ có hai nghiệm $x_1, x_2, (x_1 < x_2)$. Chọn câu đúng?

A. $x_1.x_2 = -1.$

B. $x_1 + 2x_2 = -1.$

C. $2x_1 + x_2 = 0.$

D. $x_1 + x_2 = -2.$

Lưu ý. Đặt ẩn phụ cho bài toán để nhìn, có thể từ (*) xem là phương trình bậc hai ẩn là 3^x và giải bình thường.

Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow 3.3^{2x} - 4.3^x + 1 = 0 \quad (*)$

$\Leftrightarrow 3.(3^x)^2 - 4.3^x + 1 = 0$ và đặt $t = 3^x > 0$ thì phương trình

$\Leftrightarrow 3t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3^x = 1 \\ t = 3^x = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_3 1 = 0 \\ x = \log_3 \frac{1}{3} = -1 \end{cases}$

$x_1 = -1, x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + 2x_2 = -1.$

Chọn đáp án B.

2. Gọi S là tổng các nghiệm của phương trình $4^{x-1} - 3.2^x + 7 = 0$. Giá trị của S bằng

A. $\log_2 7.$ B. 12.

C. 28. D. $\log_2 28.$

3. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $25^x - 4.5^x + 3 = 0$ bằng

A. $\log_5 4.$ B. $\log_5 3.$

C. $\log_4 5.$ D. $\log_3 5.$

4. Tích tất cả các nghiệm của phương trình $4^{x^2-1} - 6.2^{x^2-2} + 2 = 0$ bằng

A. 2. B. 8.

C. 6. D. 4.

5. Tập nghiệm của phương trình $2.e^x + 2.e^{-x} - 5 = 0$ là

A. $\left\{\ln \frac{1}{2}\right\}$. B. $\{\ln 2\}$.

C. $\left\{\frac{1}{2}\right\}$. D. $\{\pm \ln 2\}$.

Phương trình $\Leftrightarrow 2.e^x + \frac{2}{e^x} - 5 = 0 \Leftrightarrow 2.e^{2x} - 5.e^x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x = 2 \Rightarrow x = \log_e 2 = \ln 2 \\ e^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \log_e \frac{1}{2} = \ln \frac{1}{2} = \ln 2^{-1} = -\ln 2 \end{cases}$

Chọn đáp án D.

6. Tìm tập nghiệm S của phương trình $3^{x+1} + 18.3^{-x} = 29$.

A. $S = \left\{2; \log_3 \frac{2}{3}\right\}$.

B. $S = \{2; 1 - \log_3 2\}$.

C. $S = \{4; 1 - \log_2 3\}$.

D. $S = \{4; \log_3 2 - 1\}$.

7. Tìm tập nghiệm S của phương trình $7^x + 2.7^{1-x} - 9 = 0$.

A. $S = \{1; \log_2 7\}$.

B. $S = \{1; \log_7 2\}$.

C. $S = \{\log_2 7\}$.

D. $S = \{1\}$.

8. Tìm tập nghiệm S của phương trình $2^{x^2-x} - 2^{2+x-x^2} = 3$.

A. $S = \{1; 2\}$.

B. $S = \{2; 4\}$.

C. $S = \{-1; 2\}$.

D. $S = \{-1; 4\}$.

9. Tìm tập nghiệm S của phương trình $7^{\sqrt{x}} + 2.7^{1-\sqrt{x}} - 9 = 0$.

A. $S = \{1; \log_2^2 7\}$.

B. $S = \{1; \log_7 2\}$.

C. $S = \{1; \log_2 7\}$.

D. $S = \{1; \log_7^2 2\}$.

10. Tìm tập nghiệm S của phương trình $8^x - 3.4^x - 3.2^{x+1} + 8 = 0$.

A. $S = \{0\}$.

B. $S = \{2\}$.

C. $S = \{0; 2\}$.

D. $S = \{4\}$.

11. Tất cả các nghiệm của phương trình $6.4^x - 13.6^x + 6.9^x = 0$ là

A. $x = \pm 1$.

B. $x = \frac{2}{3}, x = \frac{3}{2}$.

C. $x = \frac{1}{2}, x = 2$.

D. $x = \frac{3}{2}; x = 1$.

Lời giải. Bài toán có 3 cơ số khác nhau và vế phải là 0 nên sẽ chia hai vế cho cơ số nhỏ nhất (hoặc lớn nhất) sẽ được pt bậc 2.

Phương trình $\xrightarrow{\text{Chia } 4^x > 0} 6 - 13 \cdot \left(\frac{6}{4}\right)^x + 6 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^x = 0$

$\Leftrightarrow 6 - 13 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + 6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 1 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{2}{3} \Rightarrow x = -1 \end{cases}$. Chọn đáp án A.

12. Nghiệm của phương trình $25^x + 15^x = 2.9^x$ là

A. $x = 0, x = \frac{5}{2}$.

B. $x = 0$.

C. $x = \frac{2}{5}; x = \frac{5}{2}$.

D. $x = 1$.

13. Nghiệm của phương trình $2.4^{\frac{1}{x}} + 6^{\frac{1}{x}} = 9^{\frac{1}{x}}$ là

A. $x = \log_{\frac{2}{3}} 2$.

B. $x = \log_2 3$.

C. $x = -\log_{\frac{2}{3}} 2$.

D. $x = \log_3 2$.

14. Giải phương trình $4^{2x^2} - 2.4^{x^2+x} + 4^{2x} = 0$. (**HD:** chia hai vế cho 4^{2x} để xuất hiện ẩn phụ)

A. $x = 0, x = \frac{1}{2}$.

B. $x = 0, x = \frac{1}{4}$.

C. $x = 0, x = 2$.

D. $x = 1, x = \frac{1}{2}$.

15. Nghiệm của phương trình $2^{2x^2+1} - 9.2^{x^2+x} + 2^{2x+2} = 0$ là

A. $x = -1, x = \frac{1}{2}$.

B. $x = 1, x = 2$.

C. $x = 1, x = \frac{1}{2}$.

D. $x = -1, x = 2$.

16. Nghiệm của phương trình $(7 + 4\sqrt{3})^x - 3.(2 - \sqrt{3})^x + 2 = 0$ là

A. $x = 0$.

B. $x = \frac{1}{2}$.

C. $x = 2$.

D. $x = \frac{1}{2}, x = 2$.

Nhập vào máy tính $(2 + \sqrt{3})^X$ và CALC $X = -1$ và $X = 2$ thì được $2 - \sqrt{3}$ và $7 + 4\sqrt{3}$ nên từ đó có lời giải sau:

Phương trình $\Leftrightarrow (2 + \sqrt{3})^{2x} - 3.(2 + \sqrt{3})^{-x} + 2 = 0$

$\xrightarrow{t=(2+\sqrt{3})^x > 0} t^2 - \frac{3}{t} + 2 = 0 \Leftrightarrow t^3 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Với $t = 1$, suy ra $(2 + \sqrt{3})^x = 1 \Rightarrow x = 0$.

Chọn đáp án A.

17. Nghiệm của phương trình $(7 + 4\sqrt{3})^x + (2 + \sqrt{3})^x = 6$ là

A. $x = \log_{2-\sqrt{3}} 2$.

B. $x = \log_{2+\sqrt{3}} 2$.

C. $x = \log_2(2 + \sqrt{3})$.

D. $x = \log_2 \sqrt{3}$.

18. Nghiệm của phương trình $(3 + 2\sqrt{2})^x = 2.(\sqrt{2} - 1)^x + 3$ là

A. $x = \log_{\sqrt{2}-1} 2$.

B. $x = \log_2(1 + \sqrt{2})$.

C. $x = \log_{\sqrt{2}+1} 2$.

D. $x = \log_2(\sqrt{2} - 1)$.

19. Nghiệm của phương trình $(5 + 2\sqrt{6})^x + (5 - 2\sqrt{6})^x = 10$ là

A. $x = 1$.

B. $x = -1$.

C. $x = 2$.

D. $x = \pm 1$.

20. Nghiệm của phương trình $(\sqrt[3]{3 + \sqrt{8}})^x + (\sqrt[3]{3 - \sqrt{8}})^x = 6$ là

A. $x = 3$.

B. $x = \pm 3$.

C. $x = -3$.

D. $x = 1$.

21. Tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3^2 x - 4\log_3(3x) + 7 = 0$ là

A. $x = \frac{1}{3}$.

B. $x = 3, x = 27$.

C. $x = 27$.

D. $x = \frac{1}{3}; x = \frac{1}{27}$.

Điều kiện: $x > 0$ thì phương trình

$$\Leftrightarrow (\log_3 x)^2 - 4(\log_3 3 + \log_3 x) + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_3 x)^2 - 4\log_3 x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 1 \Rightarrow x = 3 \\ \log_3 x = 3 \Rightarrow x = 3^3 = 27 \end{cases}$$

Chọn đáp án B.

22. Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x - 4\log_2 5 \cdot \log_5 x + 3 = 0$ bằng

A. $\frac{1}{3}$.

B. 3.

C. $\frac{1}{16}$.

D. 16.

23. Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3^2 x - \log_9(9x^2) - 1 = 0$ bằng

A. $\frac{1}{3}$.

B. 3.

C. $\frac{1}{27}$.

D. 27.

24. Tích tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_3 x \cdot \log_3(27x) - 4 = 0$ bằng

A. $\frac{1}{27}$.

B. $\frac{244}{81}$.

C. 3.

D. $\frac{1}{3}$.

25. Tích tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_2^2(4x) - 3\log_{\sqrt{2}} x - 7 = 0$ bằng

A. $\sqrt{2}$.

B. $8\sqrt{2}$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. 4.

26. Tích tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log^2 x^3 - 20\log\sqrt{x} + 1 = 0$ bằng

A. 1.

B. $10^9\sqrt{10}$.

C. 10.

D. $\sqrt[10]{10}$.

Dạng toán 3: Bài toán chứa tham số trong phương trình mũ & lôgarit (nâng cao)

☆☆☆

Bài toán. Tìm tham số m để $f(x; m) = 0$ có nghiệm (hoặc có k nghiệm) trên miền $\mathcal{D}$.

- **Bước 1.** Tách m ra khỏi biến số x và đưa về dạng $f(x) = A(m)$.
- **Bước 2.** Khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $\mathcal{D}$.
- **Bước 3.** Dựa vào bảng biến thiên để xác định giá trị tham số $A(m)$ để đường thẳng $y = A(m)$ nằm ngang cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

- 1.** Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x - 2m \cdot 2^x + 2m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1 + x_2 = 3$.

A. $m = -1$.

B. $m = 3$.

C. $m = 4$.

D. $m = -2$.

Giải. Đặt $t = 2^x > 0$ thì phương trình $\Leftrightarrow t^2 - 2mt + 2m = 0$ (*)

Phương trình có hai nghiệm phân biệt thì (*) có hai nghiệm phân biệt dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 4m^2 - 8m > 0 \\ S = 2m > 0 \\ P = 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \vee m > 2 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2 \quad (**)$$

$$x_1 + x_2 = 3 \Leftrightarrow 2^{x_1+x_2} = 2^3 \Leftrightarrow 2^{x_1} 2^{x_2} = 8 \Leftrightarrow t_1 t_2 = 8 \Leftrightarrow 2m = 8 \Leftrightarrow m = 4.$$

So với điều kiện, nhận $m = 4$. **Chọn đáp án C.**

- 2. (THPT QG năm 2017 – Mã đề 104 câu 31)** Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 + x_2 = 1$.

A. $m = 6$.

B. $m = -3$.

C. $m = 3$.

D. $m = 1$.

- 3.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $9^x - 2m \cdot 3^x + 2m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1 + x_2 = 3$.

A. $m = 9$.

B. $m = \frac{27}{2}$.

C. $m = 3\sqrt{3}$.

D. $m = -3$.

- 4.** Tìm m để phương trình $4^x + (4m - 1) \cdot 2^x + 3m^2 - 1 = 0$ có 2 nghiệm x_1 và x_2 thỏa $x_1 + x_2 = 3$.

A. $m = \sqrt{3}$.

B. $m = \pm\sqrt{3}$.

C. $m = -\sqrt{3}$.

D. $m < -1/\sqrt{3}$.

5. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - (m+2)\log_3 x + 3m - 1 = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1 \cdot x_2 = 27$.

A. $m = 1$.

B. $m = \frac{4}{3}$.

C. $m = 25$.

D. $m = \frac{28}{3}$.

Giải. Đặt $t = \log_3 x$ thì phương trình $\Leftrightarrow t^2 - (m+2)t + 3m - 1 = 0$ (*)

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì (*) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \neq 0 \\ \Delta = (m+2)^2 - 4(3m-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 8m + 8 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 - 2\sqrt{2} \\ m > 4 + 2\sqrt{2} \end{cases} \quad (**)$$

Ta có: $x_1 \cdot x_2 = 27 \Leftrightarrow \log_3(x_1 \cdot x_2) = \log_3 27 \Leftrightarrow \log_3 x_1 + \log_3 x_2 = 3$

$$\Leftrightarrow t_1 + t_2 = 3 \xrightarrow{\text{Viet}} S = m + 2 = 3 \Leftrightarrow m = 1 \text{ (thỏa (**))}.$$

Chọn đáp án A.

6. (Đề thi THPT QG 2017 – Mã đề 101 câu 39) Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - m \log_3 x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 = 81$.

A. $m = -4$.

B. $m = 4$.

C. $m = 81$.

D. $m = 44$.

7. Giả sử m là số thực sao cho phương trình $\log_3^2 x - (m+2)\log_3 x + 3m - 2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \cdot x_2 = 9$. Khi đó m thỏa mãn tính chất nào sau đây ?

A. $m \in (4; 6)$.

B. $m \in (-1; 1)$.

C. $m \in (3; 4)$.

D. $m \in (1; 3)$.

8. Giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1 + 3)(x_2 + 3) = 72$ thuộc khoảng nào sau đây ?

A. $(0; 3)$.

B. $(3; 6)$.

C. $(-6; -3)$.

D. $(-3; 0)$.

9. Tìm tập hợp tham số m để phương trình $25^x - 2 \cdot 10^x + m^2 \cdot 4^x = 0$ có 2 nghiệm trái dấu ?

A. $(-1; 0) \cup (0; 1)$.

B. $(-\infty; 1]$.

C. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

D. $(-1; +\infty)$.

Giải. Chia hai vế cho $4^x > 0$ được $\left(\frac{5}{2}\right)^{2x} - 2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x + m^2 = 0$ (1)

Đặt $t = \left(\frac{5}{2}\right)^x > 0$ thì (1) $\Leftrightarrow f(t) = t^2 - 2t + m^2 = 0$ (2)

Để (1) có 2 nghiệm trái dấu $x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow 0 < \left(\frac{5}{2}\right)^{x_1} < \left(\frac{5}{2}\right)^0 < \left(\frac{5}{2}\right)^{x_2}$

$$\Leftrightarrow 0 < t_1 < 1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1.f(1) < 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ S = 2 > 0 : \text{LĐ} \\ P = m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$$

Chọn đáp án A.

Cần nhớ: Để $a \cdot x^{2f(x)} + b \cdot x^{f(x)} + c = 0$ có 2 nghiệm phân biệt trái dấu thì phương trình theo ẩn phụ

$$f(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c = 0 \text{ có 2 nghiệm thỏa } 0 < t_1 < 1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot f(1) < 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} . \text{ (định lí đảo tam thức bậc 2).}$$

10. Tìm tập hợp tham số m để phương trình $4^x - m \cdot 2^x + 2m - 5 = 0$ có hai nghiệm trái dấu ?

A. $(2; +\infty)$.

B. $\left(0; \frac{5}{2}\right)$.

C. $(0; +\infty)$.

D. $\left[\frac{5}{2}; 4\right)$.

11. Tìm tập hợp tham số m để phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 3m - 3 = 0$ có hai nghiệm trái dấu ?

A. $m \in (-\infty; 2)$.

B. $m \in (1; +\infty)$.

C. $m \in (1; 2)$.

D. $m \in (0; 2)$.

12. Tìm các giá trị của m để phương trình $9^x - 2(m+3) \cdot 3^x + 6m - 3 = 0$ có hai nghiệm trái dấu ?

A. $m < 1$.

B. $m < \frac{1}{2}$.

C. $m > \frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{2} < m < 1$.

- ✦ Nhóm bài toán tìm tham số m để phương trình có nghiệm, có k nghiệm ta thường tư duy như sau:
- Nếu là phương trình bậc hai hoặc ba hoặc dạng đặc biệt, ta ưu tiên cho $m = 100$ để tìm nghiệm đẹp. Nếu không có nghiệm đẹp ta chuyển sang hướng 2.
 - Nếu không có nghiệm đẹp hoặc dạng $\log_a f(x; m) = \log_a g(x; m)$ thì cô lập m xem là bài toán tương giao giữa hai đường để biện luận nghiệm.
- 13.** Giả sử phương trình $\log_2^2 x - (m + 2)\log_2 x + 2m = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 6$. Giá trị của biểu thức $|x_1 - x_2|$ bằng
- A. 3.
B. 8.
C. 2.
D. 4.
- 14. (Đề tham khảo – Bộ GD & ĐT 2020)** Cho phương trình $\log_2^2(2x) - (m + 2)\log_2 x + m - 2 = 0$ (m tham số). Tập hợp các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1; 2]$.
- A. $(1; 2)$.
B. $[1; 2]$.
C. $[1; 2)$.
D. $[2; +\infty)$.
- 15.** Cho phương trình $2\log_2^2 x + (3 - 2m)\log_2(4x) - 8 + 5m = 0$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[\sqrt{2}; 2]$ là
- A. $\left(\frac{5}{2}; 3\right)$.
B. $\left[\frac{5}{2}; 3\right)$.
C. $\left[\frac{5}{2}; 3\right]$.
D. $[3; +\infty)$.
- 16.** Cho phương trình $\log_3^2(27x) - (9 + m)\log_3 x - 7 + m = 0$ (m tham số). Tập hợp các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(3^{-1}; 3]$.
- A. $(-2; 0)$.
B. $(0; 1)$.
C. $(-4; -3)$.
D. $(2; 3)$.
- 17.** Cho phương trình $3^{2x+1} + (11 - 3m)3^x + m - 4 = 0$ (m tham số). Tập hợp các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $[0; 1)$.
- A. $[5; 7)$.
B. $(0; 1]$.
C. $(-4; -3)$.
D. $(2; 3)$.

Bài mẫu. Có bao nhiêu giá trị của tham số thực nguyên m nằm trong đoạn $[-2020; 2020]$ để phương trình $\ln(mx) = 2\ln(x+1)$ có nghiệm duy nhất ?

A. 2020.

B. 2019.

C. 2021.

D. 2022.

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $x > -1$. Phương trình $\Leftrightarrow \ln(mx) = \ln(x+1)^2 \Leftrightarrow mx = x^2 + 2x + 1 \quad (*)$

Khi $x = 0$ thì phương trình trở thành $0 = 1$: sai.

Khi $x \neq 0$, chia hai vế cho x thì phương trình trở thành $m = x + 2 + \frac{1}{x} = f(x), \forall x \neq 0$.

Có $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ và $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$			$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$			$+\infty$	4	$+\infty$	

The graph illustrates the function $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x}$. It features a vertical asymptote at $x = 0$ and a horizontal asymptote at $y = 4$. The function has a local minimum at $(1, 4)$. The graph is shaded for $x < -1$ and $x > 1$. Arrows indicate the behavior of the function as x approaches the asymptotes and infinity.

Từ bảng biến thiên, suy ra phương trình $f(x) = m$ có nghiệm duy nhất khi $m = 4$ hoặc $m < 0$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2020; 2019; \dots; -1\} \cup \{4\}$ có $[-1 - (-2020) + 1] + 1 = 2021$ số nguyên m .

18. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_3(9^x - m) = x + 1$ có hai nghiệm phân biệt ?

A. 1.

B. 2.

C. 19.

D. 20.

19. Cho phương trình $\ln[(m+1)x] - 2\ln(x+2) = 0$, với m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong đoạn $[-8; 10]$ để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất ?

A. 2.

B. 8.

C. 7.

D. 12.

20. Có bao nhiêu giá trị của m nguyên trong $[-2017; 2017]$ để phương trình $\log(mx) = 2\log(x+1)$ có nghiệm duy nhất ?

A. 2017.

B. 4014.

C. 2018.

D. 4015.

- 21.** Biết rằng có 4 cặp số thực dương (x, y) sao cho $xy = 1$ và $3^{\log_3^2 x} + 4.x^{\log_3 y} + 6 = m$ (m là tham số thực). Khi đó, tham số m thỏa mãn tính chất nào sau đây ?
- A. $m > 11$.
B. $10 < m < 11$.
 C. $m = 11$.
 D. $8 < m \leq 10$.
- 22.** Biết rằng có 4 cặp số thực dương $(x; y)$ sao cho $xy = 1$ và $x^{2\log_2 x} - (m + 3).y^{\log_2 y} + 4 = 0$ (m là tham số thực). Khi đó, tham số m thỏa mãn tính chất nào sau đây ?
- A. $m > 2$.
B. $1 < m < 2$.
 C. $m = 1$.
 D. $m \geq 1$.
- 23.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-2020; 2020]$ để phương trình $2^{\log_2^2 x} + 9.y^{\log_2 x} - 4 = m$ có đúng 2 cặp số thực dương $(x; y)$ sao cho $xy = 1$.
- A. 2020.
 B. 2014.
C. 2015.
 D. 2016.
- 24.** Biết rằng có 3 cặp số thực dương $(x; y)$ sao cho $xy = 1$ và $9^{\log_3^2 x} + 16.x^{\log_3 y} + 3 = m$ (m là tham số thực). Khi đó, tham số m thỏa mãn tính chất nào sau đây ?
- A.** $m = 20$.
 B. $m \geq 20$.
 C. $m = 15$.
 D. $15 < m \leq 20$.
- 25.** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực $m \in (-10; 10)$ sao cho phương trình $\log_3(x^2 - 2x + 4) = \log_5(x^2 - 2x + m)$ có 2 nghiệm phân biệt ?
- A. 4.
B. 3.
 C. 6.
 D. 9.
- 26.** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực $m \in (-10; 10)$ sao cho phương trình $\log_6(2020x + m) = \log_4(1010x)$ có đúng 2 nghiệm phân biệt ?
- A. 13.
 B. 3.
C. 2.
 D. 12.

- 27.** Biết m_o là giá trị duy nhất của tham số m để phương trình $2^{x^2} \cdot 3^{mx-1} = 6$ có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1 + x_2 = \log_2 81$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng** ?
- A. $m_o \in (-7; -2)$.
- B. $m_o \in (-2; 5)$.
- C. $m_o \in (6; 7)$.
- D. $m_o \in (5; 6)$.
- 28.** Biết m_o là giá trị duy nhất của tham số m để phương trình $3^{x^2} \cdot 2^{mx-1} = 6$ có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1 + x_2 = \log_3 5$. Mệnh đề nào **đúng** ?
- A. $m_o \in (-7; -3]$.
- B. $m_o \in (-3; 0]$.
- C. $m_o \in (0; 4]$.
- D. $m_o \in (4; 7)$.
- 29.** Có bao nhiêu giá trị $m \in (0; 2020)$ để phương trình $4^x + 4 = 2^{x+2} \cdot \cos(x + m)$ có nghiệm thực ?
- A. 324. B. 322. C. 320. D. 321.
- Lời giải tham khảo**
- Ta có: $4^x + 4 = 2^{x+2} \cdot \cos(x + m) \Leftrightarrow \cos(x + m) = \frac{2^x}{4} + \frac{1}{2^x} \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 2\sqrt{\frac{2^x}{4} \cdot \frac{1}{2^x}} = 1$.
- Mà $\cos(x + m) \leq 1$ nên $\cos(x + m) = 1$ và dấu "=" xảy ra khi $\frac{2^x}{4} = \frac{1}{2^x} \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^2 \Leftrightarrow x = 1$.
- Với $x = 1$ thì $\cos(x + m) = 1 \Leftrightarrow \cos(1 + m) = 1 \Leftrightarrow 1 + m = k2\pi \Leftrightarrow m = k2\pi - 1$.
- Do $0 < m < 2020 \Rightarrow 0 < k2\pi - 1 < 2020 \Leftrightarrow 0,16 < k < 321,65 \Rightarrow k \in \{1; 2; \dots; 321\}$.
- Suy ra có $(321 - 1) + 1 = 321$ số m . **Chọn đáp án D.**
- 30.** Có bao nhiêu giá trị thực của tham số $m \in (0; 20\pi)$ để phương trình $2^{x+1} \cdot \sin(2x + m) = 4^x + 1$ có nghiệm thực ?
- A. 12.
- B. 11.
- C. 10.
- D. 9.
- 31.** Có bao nhiêu số nguyên $m \in (0; 2020)$ để phương trình $4^{x+1} + 1 = 2^{x+2} \cdot \cos(x + 2m)$ có nghiệm ?
- A. 643.
- B. 642.
- C. 321.
- D. 322.
- 32.** Có bao nhiêu số nguyên $m \in (0; 2020)$ để phương trình $4^x + 4 = 2^{x+2} \cdot \cos^2(x + \sqrt{m})$ có nghiệm ?
- A. 8.
- B. 14.
- C. 7.
- D. 15.

Dạng toán 4: Phương pháp hàm số (nâng cao)

☆☆☆

Thông thường ta sẽ vận dụng nội dung các định lý (và các kết quả) sau:

① Nếu hàm số $y = f(x)$ đơn điệu một chiều (luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến) trên khoảng $\mathcal{D}$ thì phương trình $f(x) = 0$ không quá một nghiệm trên $\mathcal{D}$.

$\Rightarrow$ Để vận dụng định lý này, ta cần nắm được 1 nghiệm $x = x_0$ của phương trình, rồi chỉ rõ hàm đơn điệu một chiều trên $\mathcal{D}$ và kết luận $x = x_0$ là nghiệm duy nhất.

Hệ quả: Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục và thỏa mãn $f'(x) = 0$ có một nghiệm trên $\mathcal{D}$ thì phương trình $f(x) = 0$ không quá 2 nghiệm trên $\mathcal{D}$.

② Nếu $f(t)$ đơn điệu 1 chiều trên $\mathcal{D}$ và tồn tại $u, v \in \mathcal{D}$ thì $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.

$\Rightarrow$ Để áp dụng định lý này, ta cần xây dựng hàm đặc trưng $f(t)$.

③ Bất phương trình

• Nếu hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên $\mathcal{D}$ và $\forall u, v \in \mathcal{D}$ thì $f(u) > f(v) \Leftrightarrow u > v$.

• Nếu hàm số $y = f(t)$ nghịch biến trên $\mathcal{D}$ và $\forall u, v \in \mathcal{D}$ thì $f(u) > f(v) \Leftrightarrow u < v$.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

1. Biết rằng x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) là 2 nghiệm phương trình $\log_3(\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 2) + 5^{x^2 - 3x + 1} = 2$ và $x_1 + 2x_2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{b})$ với a, b là số nguyên dương. Tổng $a + b$ bằng

A. 11.

B. 13.

C. 14.

D. 16.

2. Tổng các nghiệm của phương trình $2x^2 - 8x = \log_2 \frac{2x + 1}{(x - 1)^2}$ bằng

A. $\frac{1}{4}$. **B.** 4.

C. $\frac{1}{2}$. **D.** 0.

3. Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2 \frac{2x + 1}{(x - 1)^2} = 2x^2 - 6x + 2$ bằng

A. $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **B.** 2.

C. $\frac{1}{2}$. **D.** $2\sqrt{7}$.

4. Giải phương trình $7^x = 1 + 6\log_7(6x + 1)$.

A. $x = 0, x = 1$.

B. $x = 1, x = 2$.

C. $x = 0, x = 2$.

D. $x = 1, x = 3$.

Giải. Đặt $\log_7(6x + 1) = y \Rightarrow \begin{cases} 7^y = 6x + 1 \\ 7^x = 6y + 1 \end{cases} \Rightarrow 7^y - 7^x = 6x - 6y$

$\Leftrightarrow 7^y + 6y = 7^x + 6x \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ và xét $f(t) = 7^t + 6t$ có đạo hàm

$f'(t) = 7^t \cdot \ln 7 + 6 > 0, \forall t \Rightarrow f(t)$ đồng biến nên $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Suy ra $7^x = 6x + 1$ và theo ví dụ 6, nghiệm cần tìm là $x = 0, x = 1$.

Chọn đáp án A.

5. Giải phương trình $7^{x-1} = 1 + 2\log_7(6x - 5)^3$.

A. $x = 1, x = 3$.

B. $x = 1, x = 2$.

C. $x = 0, x = 1$.

D. $x = 0, x = 2$.

6. Giải phương trình $5^x = 1 - x + 5\log_5(1 + 4x)$.

A. $x = 1, x = 2$.

B. $x = 1, x = 3$.

C. $x = 0, x = 1$.

D. $x = 0, x = 2$.

7. Giải phương trình $2^{x^2-3x+1} - 2^{x-2} + x^2 - 4x + 3 = 0$.

A. $x = 1, x = 3$.

B. $x = 1, x = 2$.

C. $x = 0, x = 1$.

D. $x = 0, x = 2$.

8. Gọi $x_1, x_2 > 0$ là hai nghiệm của $\log_2 \frac{2x^2 - 6x + 8}{x^2 + 4x + 6} + x^3 - 9x^2 = 8x - 2$ thì $2^{x_1+x_2} + x_1x_2$ bằng

A. 18.

B. 20.

C. 1026.

D. 1024.

9. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt{m+2}\sqrt{m+2}\sin x = \sin x$ có nghiệm thực ?

- A. 0.
B. 1.
C. 2.
D. 3.

10. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m nhỏ hơn 10 sao cho phương trình $\sqrt{m+\sqrt{m+e^x}} = e^x$ có nghiệm thực ?

- A. 9.
B. 8.
C. 10.
D. 7.

11. Tìm các giá trị của m để phương trình $\ln[m + \ln(m+x)] = x$ có nhiều nghiệm nhất ?

- A. $m \geq 0$.
B. $m > 1$.
C. $m < e$.
D. $m \geq -1$.

12. Cho phương trình $\log_3 \frac{2x^2 - x + m}{x^2 + 1} = x^2 + x + 4 - m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2018; 2018]$ để phương trình có hai nghiệm trái dấu ?

- A. 2022.
B. 2021.
C. 2016.
D. 2015.

13. Có bao nhiêu số nguyên của m để phương trình $\log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1} = x^2 - 5x + 2 - m$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

A. 3.

B. Vô số.

C. 2.

D. 4.

14. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để tồn tại cặp số $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời $e^{3x+5y} - e^{x+3y+1} = 1 - 2x - 2y$ và $\log_3^2(3x + 2y - 1) - (m + 6)\log_3 x + m^2 + 9 = 0$?

A. 6.

B. 5.

C. 8.

D. 7.

15. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để tồn tại cặp số dương $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời $\frac{\log_2 y}{x} = 1 - y$ và $\log_3^2(x + 2y) - 4(m + 2)\log_3(2x - y) + 5m^2 - 5 = 0$?

A. 9.

B. 8.

C. 16.

D. 17.

16. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\log_2(2x + 2) + x - 3y = 8^y$. Biết $0 \leq x \leq 2018$, số cặp $(x; y)$ nguyên thỏa mãn đẳng thức là

A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 4.

17. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $0 < x \leq 2020$ và $(x + 1).3^x = y.27^y$?

A. 2020.

B. 672.

C. 2021.

D. 673.

§ 4 BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ – BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

☆☆☆

Dạng toán 1: Bất phương trình mũ & lôgarit cơ bản hoặc đưa về cùng cơ số

1. Bất phương trình mũ cơ bản $a^x > b$, ($a > 0$, $a \neq 1$).

— Nếu $b \leq 0$ thì tập nghiệm là $S = \mathbb{R}$ vì $a^x > 0 \geq b$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

— Nếu $b > 0$:

- Với $a > 1$ thì bất phương trình $a^x > b \Leftrightarrow x > \log_a b$.
- Với $0 < a < 1$ thì bất phương trình $a^x > b \Leftrightarrow x < \log_a b$.

2. Bất phương trình lôgarit cơ bản $\log_a x > b$, ($a > 0$, $a \neq 1$).

— Nếu $a > 1$ thì bất phương trình $\log_a x > b \Leftrightarrow x > a^b$.

— Nếu $0 < a < 1$ thì bất phương trình $\log_a x > b \Leftrightarrow 0 < x < a^b$.

3. Bất phương trình mũ và lôgarit đưa về cùng cơ số

Tìm điều kiện và dùng các công thức mũ hoặc lôgarit đưa về các dạng cơ bản:

— Dạng $a^{f(x)} > a^{g(x)}$:

- Nếu $a > 1$ thì $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$. (cùng chiều khi $a > 1$).
- Nếu $0 < a < 1$ thì $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$. (ngược chiều khi $0 < a < 1$).
- Nếu a chứa ẩn thì $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow (a-1)[f(x) - g(x)] > 0$.

— Dạng $\log_a f(x) > \log_a g(x)$:

- Nếu $a > 1$ thì $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ (cùng chiều khi $a > 1$).
- Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$ (ngược chiều khi $0 < a < 1$).

✦ Cần nhớ rằng khi giải xong nên giao với điều kiện, nếu không sẽ chắc sai !!!!

BÀI TẬP VẬN DỤNG

1. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(x-1) > 2$ là

- A. $(10; +\infty)$. B. $(-\infty; 10)$.
C. $(0; 10)$. D. $[10; +\infty)$.

2. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0.5}(x-3) \geq -1$ là

- A. $(3; 5)$. B. $[5; +\infty)$.
C. $(-\infty; 5)$. D. $(3; 5]$.

3. Tập nghiệm của bất phương trình $\log x \geq 1$ là

- A. $(10; +\infty)$. B. $(0; +\infty)$.
C. $[10; +\infty)$. D. $(-\infty; 10)$.

4. Tập nghiệm của bất phương trình $\ln(2 - x) \leq 1$ là

A. $[2 - e; +\infty)$. B. $[2 - e; 2)$.

C. $(2 - e; +\infty)$. D. $(2 - e; e)$.

5. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{2x-1} > 27$ là

A. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. B. $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

C. $(3; +\infty)$. D. $(2; +\infty)$.

6. Tập nào sau đây là tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \geq \frac{1}{4}$?

A. $(3; +\infty)$. B. $(1; 3]$.

C. $(-\infty; 3]$. D. $[3; +\infty)$.

7. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{\sqrt{x}} < 2$ là

A. $[0; 1)$. B. $(-\infty; 1)$.

C. $(0; 1)$. D. $(1; +\infty)$.

8. (Đề minh họa – Bộ GD & ĐT 2017) Tập nghiệm S của bất phương trình $5^{x+1} - \frac{1}{5} > 0$ là

A. $(1; +\infty)$. B. $(-1; +\infty)$.

C. $(-2; +\infty)$. D. $(-\infty; -2)$.

9. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{\pi}{6}} [\log_3(x - 2)] > 0$ là khoảng $(a; b)$. Giá trị $b - a$ bằng

A. 2. B. 4.

C. 3. D. 5.

Điều kiện:

10. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3 \left(\log_{\frac{1}{2}} x \right) < 1$ là

A. $(0; 1)$. B. $\left(\frac{1}{8}; 1\right)$.

C. $(1; 8)$. D. $\left(\frac{1}{8}; 3\right)$.

11. (Sở GD & ĐT Đồng Tháp) Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3 \frac{4x+6}{x} \leq 0$ là

- A. $\left[-2; -\frac{3}{2}\right]$. B. $[-2; 0)$.
C. $(-\infty; 2]$. D. $\mathbb{R} \setminus \left[-\frac{3}{2}; 0\right]$.

Điều kiện:

$$\frac{4x+6}{x} > 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup (0; +\infty).$$

Vì cơ số $a = 3 > 1$ nên $\log_3 \frac{4x+6}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4x+6}{x} \leq 3^0$
 $\Leftrightarrow \frac{4x+6}{x} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{3x+6}{x} \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x < 0$ (xét dấu)

Giao với điều kiện, tập nghiệm là $S = \left[-2; -\frac{3}{2}\right]$.

Chọn đáp án A.

12. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{x-1} > 2$ là

- A. $(1 + \sqrt{2}; +\infty)$.
B. $(1; 9)$.
C. $(9; +\infty)$.
D. $(1; 1 + \sqrt{2})$.

13. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}} \frac{x+2}{3-2x} \geq 0$ là

- A. $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$. B. $\left[-2; \frac{1}{3}\right]$.
C. $\left[-2; \frac{1}{3}\right]$. D. $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$.

14. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,5} x > \log_{0,5} 2$ là

- A. $(1; 2)$. B. $(-\infty; 2)$.
C. $(2; +\infty)$. D. $(0; 2)$.

15. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2x} < 2^{x+6}$ là

- A. $(0; 6)$. B. $(-\infty; 6)$.
C. $(0; 64)$. D. $(6; +\infty)$.

16. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2} < 2^{6-x}$ là

- A. $(-\infty; -3)$. B. $(-3; 2)$.
C. $(2; +\infty)$. D. $(-2; 3)$.

17. Hỏi bất phương trình $2^{x^2-3x+4} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-10}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương ?

- A. Vô số. B. 4.
C. 6. D. 3.

18. Bất phương trình $\log_2(2x + 5) > \log_2(x - 1)$ có tập nghiệm là S . Hỏi trong S có bao nhiêu phần tử là số nguyên dương bé hơn 10.

- A. 9. B. 15.
C. 8. D. 10.

19. Có bao nhiêu số nguyên x là nghiệm của bất phương trình $\log_{0,5} x \leq \log_{0,5} x^2$.

- A. 2. B. 0.
C. Vô số. D. 1.

20. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\ln x^2 > \ln(4x - 4)$.

- A. $S = (1; +\infty) \setminus \{2\}$.
B. $S = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
C. $S = (2; +\infty)$.
D. $S = (1; +\infty)$.

21. Bất phương trình $\ln(2x + 3) \geq \ln(2017 - 4x)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương ?

- A. 170.
B. 169.
C. Vô số.
D. 168.

22. Với $0 < m \neq 1$ thì $x = 1$ là 1 nghiệm của $\log_m(2x^2 + x + 3) \leq \log_m(3x^2 - x)$. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình đó.

- A. $S = [-1; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right]$.
B. $S = [-1; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; 2\right]$.
C. $S = (-2; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right]$.
D. $S = (-1; 0) \cup (1; 3]$.

23. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $(17 - 12\sqrt{2})^x \geq (3 + \sqrt{8})^{x^2}$ là

- A. 1.
B. 2.
C. 4.
D. 3.

Dạng toán 2: Phương pháp đặt ẩn phụ hoặc phương pháp đánh giá**1. Phương pháp đặt ẩn phụ**

Ta sẽ làm tương tự như các dạng đặt ẩn phụ của phương trình nhưng lưu ý đến chiều biến thiên của hàm số.

2. Phương pháp đánh giá (hai hàm khác loại)

Cho hàm số $y = f(t)$ xác định và liên tục trên $\mathcal{D}$:

- Nếu hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathcal{D}$ và $\forall u, v \in \mathcal{D}$ thì $f(u) > f(v) \Leftrightarrow u > v$.
- Nếu hàm số $f(t)$ luôn nghịch biến trên $\mathcal{D}$ và $\forall u, v \in \mathcal{D}$ thì $f(u) > f(v) \Leftrightarrow u < v$.

1. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2 x - 5 \log_2 x + 4 \geq 0$.

A. $S = (-\infty; 2] \cup [16; +\infty)$.

B. $S = [2; 16]$.

C. $S = (0; 2] \cup [16; +\infty)$.

D. $S = (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.

Giải. Điều kiện: $x > 0$. Đặt $t = \log_2 x$ thì bất phương trình trở thành

$$t^2 - 5t + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 4 \\ t \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2 x \geq 4 \\ \log_2 x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 16 \\ x \leq 2 \end{cases}.$$

So với điều kiện $x > 0$, tập nghiệm là $S = (0; 2] \cup [16; +\infty)$.

Chọn đáp án C.

2. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2 x - 7 \log_2 3 \cdot \log_3 x + 6 \geq 0$.

A. $S = (-\infty; 2] \cup [64; +\infty)$.

B. $S = [2; 8]$.

C. $S = (0; 2] \cup [64; +\infty)$.

D. $S = (-\infty; 1] \cup [6; +\infty)$.

3. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log^2 x - 2019 \log x + 2018 \leq 0$.

A. $S = [10; 10^{2018})$.

B. $S = [1; 10^{2018}]$.

C. $S = (10; 10^{2018})$.

D. $S = [10; 10^{2018}]$.

4. Giải bất phương trình $\log_3^2 x - 2 \log_3(3x) - 1 < 0$ được tập nghiệm $S = (a; b)$, với a, b là hai số thực và $a < b$. Giá trị của $3a + b$ bằng

A. -3 .

B. 3 .

C. 11 .

D. 28 .

5. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $16^x - 5.4^x + 4 \geq 0$.

A. $S = (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$.

B. $S = (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.

C. $S = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

D. $S = (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$.

Giải. Đặt $t = 4^x$, $t > 0$ thì bất phương trình trở thành

$$\begin{cases} t > 0 \\ t^2 - 5t + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 4 \\ 0 < t \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4^x \geq 4 \\ 0 < 4^x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 0 \end{cases}.$$

Tập nghiệm cần tìm là $S = (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$.

Chọn đáp án D.

6. Biết $S = [a; b]$ là tập nghiệm của bất phương trình $3.9^x - 10.3^x + 3 \leq 0$. Tìm $T = b - a$.

A. $T = \frac{8}{3}$.

B. $T = 1$.

C. $T = \frac{10}{3}$.

D. $T = 2$.

7. Tìm tổng T các nghiệm nguyên của bất phương trình $9^{x-1} - 36.3^{x-3} + 3 \leq 0$.

A. $T = 6$.

B. $T = 3$.

C. Số vô cùng lớn.

D. $T = 0$.

8. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $3^x + 9.3^{-x} < 10$ là

A. 7.

B. 1.

C. 5.

D. Vô số.

9. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $9^x - 2.6^x + 4^x > 0$.

A. $S = (0; +\infty)$.

B. $S = \mathbb{R}$.

C. $S = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

D. $S = [0; +\infty)$.

10. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $3^{x^2} < 2^x$.

- A. $x \in (0; +\infty)$.
 B. $x \in (0; \log_2 3)$.
 C. $x \in (0; \log_3 2)$.
 D. $x \in (0; 1)$.

Giải. Lấy lôgarit cơ số 3 hai vế của bất phương trình

$$\begin{aligned} 3^{x^2} < 2^x &\Leftrightarrow \log_3 3^{x^2} < \log_3 2^x \\ &\Leftrightarrow x^2 \log_3 3 < x \log_3 2 \Leftrightarrow x^2 - x \log_3 2 < 0 \\ &\Leftrightarrow 0 < x < \log_3 2. \text{ Chọn đáp án C.} \end{aligned}$$

11. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $3^x \cdot 5^{x^2} < 1$.

- A. $S = (-\log_5 3; 0]$.
 B. $S = [0; \log_3 5)$.
 C. $S = (-\log_5 3; 0)$.
 D. $S = (0; \log_3 5)$.

24. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2-4} \geq 5^{x-2}$ là

- A. $(-\infty; -2) \cup (\log_2 5; +\infty)$.
 B. $(-\infty; -2] \cup (\log_2 5; +\infty)$.
 C. $(-\infty; \log_2 5 - 2) \cup (2; +\infty)$.
 D. $(-\infty; \log_2 5 - 2] \cup [2; +\infty)$.

12. Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $2^{2x^2-15x+100} - 2^{x^2+10x-50} + x^2 - 25x + 150 < 0$.

- A. 3. B. 4.
 C. 5. D. 6.

☛ **Cần nhớ:**

Hàm số $f(t)$ đồng biến thì
 $f(u) > f(v) \Leftrightarrow u > v$.

Hàm số $f(x)$ nghịch biến thì
 $f(u) > f(v) \Leftrightarrow u < v$.

Giải. Bất phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} 2^{2x^2-15x+100} + (2x^2 - 15x + 100) &< 2^{x^2+10x-50} + (x^2 + 10x - 50) \\ &\Leftrightarrow f(2x^2 - 15x + 100) < f(x^2 + 10x - 50) \quad (*) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t$ có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó $(*) \Leftrightarrow 2x^2 - 15x + 100 < x^2 + 10x - 50$

$$\Leftrightarrow x^2 - 25x + 150 < 0 \Leftrightarrow 10 < x < 15. \text{ Vì } x \in \mathbb{Z} \text{ nên chọn B.}$$

13. Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $3^{x^2-x-6} - 3^{x+2} + x^2 - 2x - 8 \leq 0$.

- A. 3.
 B. 5.
 C. 7.
 D. 9.

14. Số nghiệm nguyên $x \in (-20; 20)$ của bất phương trình $3^{\sqrt{x^2+1}} + 2|x| < 3^{x+1}$ là

- A. 8.
B. 20.
C. 12.
D. 19.

15. Tìm tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình $2x \cdot (\sqrt{3})^{\frac{1}{x}} - 2x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} \leq 2x^2 - 2x - 1$?

- A. 1.
B. 5.
C. 14.
D. 27.

16. Tính tổng các nghiệm nguyên $x < 30$ của bất phương trình $x^2 + x - 2 + \log_2 x > 0$.

- A. 378.
B. 406.
C. 434.
D. 435.

17. Tổng tất cả các nghiệm nguyên dương của $\log_2 \frac{2x^2 - 6x + 8}{x^2 + 4x + 6} + x^3 - 9x^2 - 8x + 2 < 0$ bằng

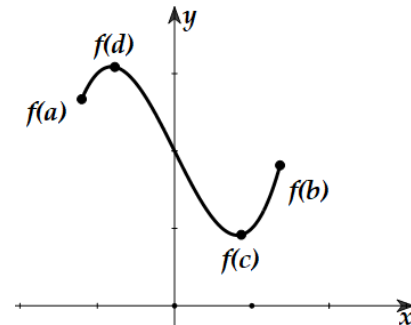
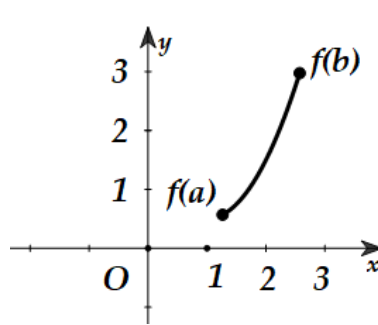
- A. 36.
B. 44.
C. 45.
D. 55.

Dạng toán 3: Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng, có nghiệm (nâng cao)

CÁCH NHỚ

Nếu hàm chỉ có min và max ở biên và $\nexists$ thì: Loại $\forall$ luôn có dấu $=$, loại có nghiệm luôn bỏ dấu $=$ (hình thức nhất bên trái).

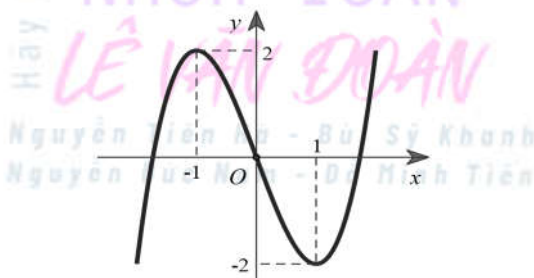
Nếu hàm có min và max tồn tại thì đang có dấu gì giữ nguyên (hình thức hai bên phải).



$m > f(x), \forall x \in (a; b)$	$m > \max \longrightarrow m \geq f(b)$	$m > \max \longrightarrow m > f(d)$
$m \geq f(x), \forall x \in (a; b)$	$m \geq \max \longrightarrow m \geq f(b)$	$m \geq \max \longrightarrow m \geq f(d)$
$m < f(x), \forall x \in (a; b)$	$m < \min \longrightarrow m \leq f(a)$	$m < \min \longrightarrow m < f(c)$
$m \leq f(x), \forall x \in (a; b)$	$m \leq \min \longrightarrow m \leq f(a)$	$m \leq \min \longrightarrow m \leq f(c)$
$m > f(x)$ có nghiệm $x \in (a; b)$	$m > \min \longrightarrow m > f(a)$	$m > \min \longrightarrow m > f(c)$
$m \geq f(x)$ có nghiệm $x \in (a; b)$	$m \geq \min \longrightarrow m > f(a)$	$m \geq \min \longrightarrow m \geq f(c)$
$m < f(x)$ có nghiệm $x \in (a; b)$	$m < \max \longrightarrow m < f(b)$	$m < \max \longrightarrow m < f(d)$
$m \leq f(x)$ có nghiệm $x \in (a; b)$	$m \leq \max \longrightarrow m < f(b)$	$m \leq \max \longrightarrow m \leq f(d)$

18. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Bất phương trình $f(x) - x^2 + 3 < m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi:

- A. $m \geq f(0) + 3$.
 B. $m > f(1) + 3$.
 C. $m \geq f(1) + 3$.
 D. $m > f(0) + 3$.



Lời giải tham khảo

Đặt $m > f(x) - x^2 + 3 = g(x), \forall x \in (-1; 1)$

$\Leftrightarrow$ hoặc (1): $m > \max_{[-1; 1]} g(x)$

$\Leftrightarrow$ hoặc (2): $m \geq \max_{[-1; 1]} g(x)$.

(chọn (1) khi hàm đạt max tại $x_0 \in (-1; 1)$ và chọn (2) khi hàm đơn điệu 1 chiều)

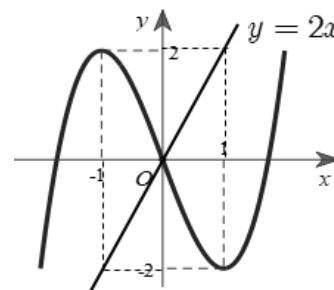
Ta có: $g'(x) = f'(x) - 2x, g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2x \Leftrightarrow x = 0 \in (-1; 1)$.

Ta có bảng biến thiên bên phải:

Từ bảng biến thiên, suy ra: $\max_{[-1; 1]} g(x) = g(0) = f(0) + 3$.

Đạt được tại $x = 0 \in (-1; 1) \Rightarrow m > f(0) + 3$.

Chọn đáp án D.



x	-1	0	1
$g'(x)$		+	-
$g(x)$		$g(0)$	$g(1)$

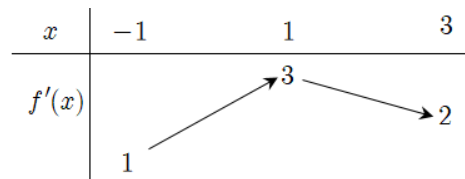
19. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $3m + 3x^2 < 3f(x) + x^3$ nghiệm đúng $\forall x \in (0; 3)$.

A. $m < f(0)$.

B. $m \leq f(0)$.

C. $m \leq f(3)$.

D. $m \leq f(1) - \frac{2}{3}$.



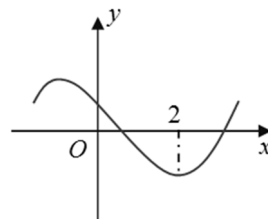
20. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $f(x) \geq \frac{x+1}{x+2} + m$ nghiệm đúng $\forall x \in [0; 1]$.

A. $m \geq f(0) - 0,5$.

B. $m \leq f(1) - \frac{2}{3}$.

C. $m > f(0) - 0,5$.

D. $m < f(1) - \frac{2}{3}$.



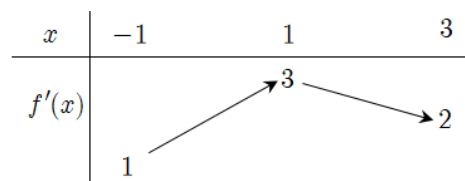
21. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m + x^2 < f(x) + \frac{1}{3}x^3$ nghiệm đúng $\forall x \in (0; 3)$.

A. $m < f(0)$.

B. $m \leq f(0)$.

C. $m \leq f(3)$.

D. $m \leq f(1) - \frac{2}{3}$.



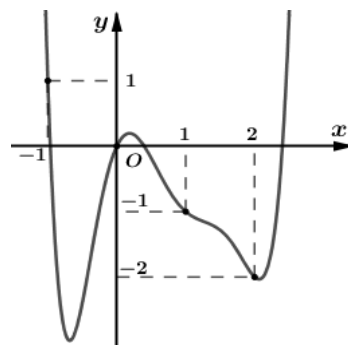
22. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho $m \leq 2f(x+2) + x^2 + 4x + 3$ nghiệm đúng $\forall x \in (-3; +\infty)$.

A. $m \geq 2f(0) - 1$.

B. $m \leq 2f(0) - 1$.

C. $m \leq 2f(-1)$.

D. $m \geq 2f(-1)$.



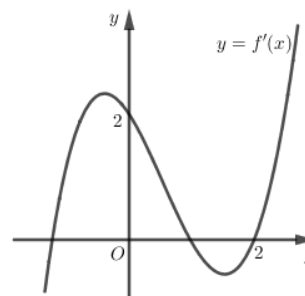
23. Cho hàm số $f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình. Bất phương trình $f(x) < 2x + m$ (m là tham số thực) có nghiệm trên $(0; 2)$ khi và chỉ khi

A. $m > f(0)$.

B. $m > f(2) - 4$.

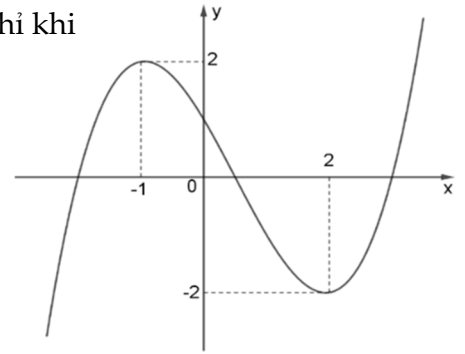
C. $m \geq f(0)$.

D. $m \geq f(2) - 4$.



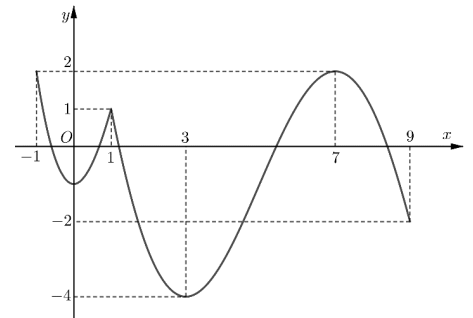
24. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Bất phương trình $3f(x) + x^3 < m - 3x \ln x$ có nghiệm thuộc đoạn $[1; 2]$ khi và chỉ khi

- A. $m > 3f(1) + 1$.
B. $m \geq 3f(2) + 8 + 6 \ln 2$.
C. $m \geq 3f(1) + 1$.
D. $m > 3f(2) + 8 + 6 \ln 2$.



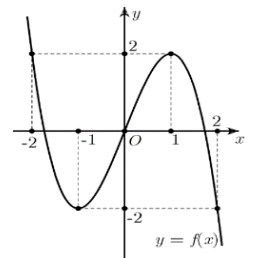
25. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 9]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây. Xét bất phương trình $16.3^{f(x)} - [f^2(x) + 2f(x) - 8].4^{f(x)} \geq (m^2 - 3m).6^{f(x)}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 9]$?

- A. 6.
B. 5.
C. 31.
D. 32.



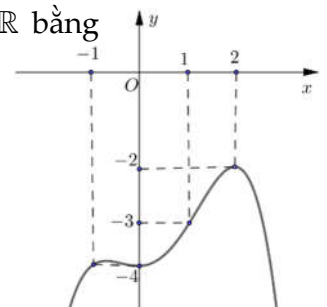
26. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $[0; 9]$ sao cho bất phương trình $2^{f^2(x) + f(x) - m} - 16.2^{f^2(x) - f(x) - m} - 4^{f(x)} + 16 < 0$ có nghiệm $x \in (-1; 1)$?

- A. 5.
B. 6.
C. 7.
D. 8.



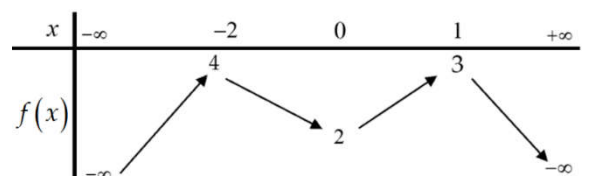
27. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đồ thị bên dưới. Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $9.6^{f(x)} + [4 - f^2(x)].9^{f(x)} \leq (5m - m^2).4^{f(x)}$ đúng $\forall x \in \mathbb{R}$ bằng

- A. 10.
B. 4.
C. 5.
D. 9.



- 50.1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên bên dưới. Số giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $[\log_2 f(x) + e^{f(x)} + 1].f(x) \geq m$ có nghiệm trên khoảng $(-2; 1)$ là

- A. 68.
B. 18.
C. 229.
D. 230.



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

- Câu 1.** Bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x-12} > 1$ có tất cả bao nhiêu nghiệm nguyên ?
- A. 3. B. 5. C. 7. D. Vô số.
- Câu 2.** Tập nghiệm của bất phương trình $5^{3x+1} \geq \frac{1}{25}$ là
- A. $x \in [1; +\infty)$. B. $x \in [-1; +\infty)$. C. $x \in (-\infty; -3]$. D. $x \in (-\infty; 3]$.
- Câu 3.** Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(1-2x) \leq 3$.
- A. $S = \left[-\frac{7}{2}; +\infty\right)$. B. $S = \left[-\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right)$. C. $S = \left[-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$. D. $S = \left[-\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right]$.
- Câu 4.** Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{0,5}(x-1) > 2$.
- A. $S = \left(-\infty; \frac{5}{4}\right)$. B. $S = \left[1; \frac{5}{4}\right)$. C. $S = \left[\frac{5}{4}; +\infty\right)$. D. $S = (1; +\infty)$.
- Câu 5.** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(\log_{\frac{1}{2}} x) \geq 0$ là
- A. $S = \left[0; \frac{1}{2}\right)$. B. $S = \left[0; \frac{1}{2}\right]$. C. $S = \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$. D. $S = \left[0; \frac{1}{4}\right]$.
- Câu 6.** Tập nghiệm của bất phương trình $10^{2x} < 10^{x+6}$ là
- A. $(0; 6)$. B. $(-\infty; 6)$. C. $(0; 64)$. D. $(6; +\infty)$.
- Câu 7.** Giải bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2}$.
- A. $S = (-\infty; 3)$. B. $S = (3; +\infty)$. C. $S = (-\infty; -3)$. D. $S = \left[-\frac{1}{2}; 3\right)$.
- Câu 8.** Giải bất phương trình $\log(3x^2 + 1) > \log(4x)$.
- A. $x < \frac{1}{3}$ hoặc $x > 1$. B. $0 < x < \frac{1}{3}$ hoặc $x > 1$.
C. $0 < x < 1$. D. $\frac{1}{3} < x < 1$.
- Câu 9.** Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(4x-9) > \log_{\frac{1}{2}}(x+10)$.
- A. 6. B. 4. C. 0. D. Vô số.
- Câu 10.** Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\ln x^2 < 2 \ln(4x+4)$.
- A. $S = \left(-\frac{4}{5}; +\infty\right)$. B. $S = (-1; +\infty) \setminus \{0\}$.
C. $S = \left(-\frac{4}{5}; +\infty\right) \setminus \{0\}$. D. $S = \left(-\frac{4}{3}; +\infty\right) \setminus \{0\}$.
- Câu 11.** Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{0,2}(x+1) > \log_{0,2}(3-x)$.
- A. $S = (-1; 3]$. B. $S = (-1; +\infty)$. C. $S = (-1; 1)$. D. $S = (-\infty; 1)$.

Câu 12. Cho $f(x) = x.e^{-3x}$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) > 0$ là

- A. $S = \left(0; \frac{1}{3}\right)$. B. $S = (0; 1)$. C. $S = \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. D. $S = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$.

Câu 13. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{\sqrt{x}} < 2$ là

- A. $S = [0; 1)$. B. $S = (-\infty; 1)$. C. $S = \mathbb{R}$. D. $S = (1; +\infty)$.

Câu 14. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}} > 3^{-x}$ là

- A. $S = (2; +\infty)$. B. $S = (1; 2)$. C. $S = (1; 2]$. D. $S = [2; +\infty)$.

Câu 15. Giải bất phương trình $(\sqrt{3})^{x^2+1} \leq 3^{-x+2}$.

- A. $S = \mathbb{R} \setminus (-3; 1)$. B. $S = \mathbb{R} \setminus [-3; 1]$. C. $S = [-3; 1]$. D. $S = (-3; 1)$.

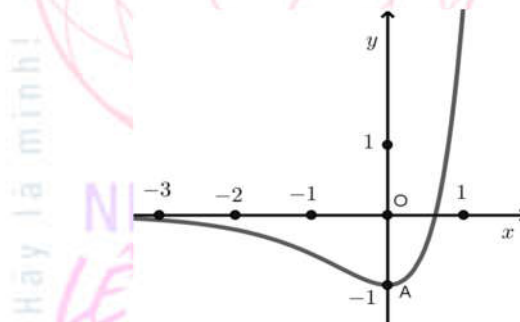
Câu 16. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1-2x}{x} > 0$ là

- A. $S = \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. B. $S = \left(0; \frac{1}{3}\right)$. C. $S = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$. D. $S = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$.

Câu 17. Tập nghiệm của bất phương trình $(\sqrt{5} + 2)^{x-1} \leq (\sqrt{5} - 2)^{x-1}$ là

- A. $S = (-\infty; 1]$. B. $S = [1; +\infty)$. C. $S = (-\infty; 1)$. D. $S = (1; +\infty)$.

Câu 18. Cho hàm số $f(x) = 3^{2x} - 2 \cdot 3^x$ có đồ thị (C) như hình vẽ.



Có bao nhiêu mệnh đề **đúng**?

- (1) Đường thẳng $y = 0$ cắt đồ thị hàm số (C) tại điểm có hoành độ là $x = \log_3 2$.
- (2) Bất phương trình $f(x) \geq -1$ có nghiệm duy nhất.
- (3) Bất phương trình $f(x) \geq 0$ có tập nghiệm là $(-\infty; \log_3 2)$.
- (4) Đường thẳng $y = 0$ cắt đồ thị hàm số (C) tại 2 điểm phân biệt.

- A. 2. B. 4. C. 1. D. 2.

Câu 19. Tập nghiệm của bất phương trình $2\log_2(x-1) \leq \log_2(5-x) + 1$ là

- A. $S = (1; 5)$. B. $S = (1; 3]$. C. $S = [1; 3]$. D. $S = [3; 5]$.

Câu 20. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2(x+3) - 1 \geq \log_{\sqrt{2}} x$ là

- A. 1. B. 3. C. 0. D. 2.

Câu 21. Giải bất phương trình $2\log_3(4x-3) + \log_{\frac{1}{9}}(2x+3)^2 \leq 2$.

- A. $x > \frac{3}{4}$. B. $\frac{3}{4} < x \leq 3$. C. Vô nghiệm. D. $-\frac{3}{8} \leq x \leq 3$.

Câu 22. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2 x + \log_3 x \geq 1 + \log_2 x \cdot \log_3 x$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. Vô số.

Câu 23. Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $2\log_4(x-3) + \log_4(x-5)^2 = 0$ là

- A. 8. B. $8 + \sqrt{2}$. C. $8 - \sqrt{2}$. D. $4 + \sqrt{2}$.

Câu 24. Tập nghiệm của bất phương trình $2^x > 3^{x+1}$ là

- A. $\emptyset$. B. $\left(-\infty; \log_{\frac{2}{3}} 3\right)$. C. $(-\infty; \log_2 3]$. D. $\left(\log_{\frac{2}{3}} 3; +\infty\right)$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x) = \frac{3^{x-2}}{7^{x^2-4}}$. Hỏi mệnh đề nào sai ?

- A. $f(x) > 1 \Leftrightarrow (x-2) \cdot \log 3 - (x^2-4) \cdot \log 7 > 0$.
 B. $f(x) > 1 \Leftrightarrow (x-2) \cdot \log_{0,3} 3 - (x^2-4) \cdot \log_{0,3} 7 > 0$.
 C. $f(x) > 1 \Leftrightarrow (x-2) \cdot \ln 3 - (x^2-4) \cdot \ln 7 > 0$.
 D. $f(x) > 1 \Leftrightarrow x-2 - (x^2-4) \cdot \log_3 7 > 0$.

Câu 26. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_m(2x^2 + x + 3) \leq \log_m(3x^2 - x)$ với m là tham số thực dương khác 1, biết $x = 1$ là một nghiệm của bất phương trình đã cho.

- A. $S = (-2; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right]$. B. $S = [-1; 0] \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right]$.
 C. $S = (-1; 0) \cup (1; 3]$. D. $S = [-1; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right]$.

Câu 27. Bất phương trình $\log^2 x - 2019 \log x + 2018 \leq 0$ có tập nghiệm là

- A. $S = [10; 10^{2018}]$. B. $S = [10; 10^{2018})$. C. $S = [1; 2018]$. D. $S = (10; 10^{2018})$.

Câu 28. Tập nghiệm của bất phương trình $16^x - 5 \cdot 4^x + 4 \geq 0$ là

- A. $S = (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$. B. $S = (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.
 C. $S = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. D. $S = (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$.

Câu 29. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $3^x + 9 \cdot 3^{-x} < 10$ là

- A. Vô số. B. 2. C. 0. D. 1.

Câu 30. Tập nghiệm của bất phương trình $9^x - 2 \cdot 6^x + 4^x > 0$ là

- A. $S = (0; +\infty)$. B. $S = \mathbb{R}$. C. $S = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. D. $S = [0; +\infty)$.

Câu 31. Biết phương trình $\log_3(3^x - 1) \cdot [1 + \log_3(3^x - 1)] = 6$ có hai nghiệm là $x_1 < x_2$ và tỉ số

$\frac{x_1}{x_2} = \log \frac{a}{b}$ trong đó $a, b \in \mathbb{N}^*$ và a, b có ước chung lớn nhất bằng 1. Tính $a + b$.

- A. $a + b = 38$. B. $a + b = 37$.
 C. $a + b = 56$. D. $a + b = 55$.

Câu 32. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{x+1}(-2x) > 2$.

- A. $(\sqrt{3} - 2; 0)$. B. $(-1; 0)$.
 C. $(-\infty; 0)$. D. $(\sqrt{3} - 2; +\infty)$.

- Câu 33.** Cho hai hàm số $f(x) = \frac{1}{2} \cdot 5^{2x+1}$ và $g(x) = 5^x + 4x \cdot \ln 5$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) > g'(x)$ là
- A. $S = (-\infty; 0)$. B. $S = (1; +\infty)$. C. $S = (0; 1)$. D. $S = (0; +\infty)$.
- Câu 34.** Tìm số nghiệm nguyên của $2^{2x^2-15x+100} - 2^{x^2+10x-50} + x^2 - 25x + 150 < 0$.
- A. 6. B. 4. C. 5. D. 3.
- Câu 35.** Tìm m để bất phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 3 - 2m \leq 0$ có nghiệm thực.
- A. $m \geq 2$. B. $m \leq 3$. C. $m \leq 5$. D. $m \geq 1$.
- Câu 36.** Bất phương trình $\ln(2x^2 + 3) > \ln(x^2 + ax + 1)$ nghiệm đúng với mọi số thực x khi
- A. $-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$. B. $0 < a < 2\sqrt{2}$. C. $0 < a < 2$. D. $-2 < a < 2$.
- Câu 37.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$: $1 + \log_6(x^2 + 1) \geq \log_6(mx^2 + 2x + m)$.
- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.
- Câu 38.** Có mấy giá trị nguyên dương m để $4\log_2 \sqrt{x} - 2\log_2 x + 3m - 2 < 0$ có nghiệm.
- A. 2. B. 1. C. 0. D. Vô số.
- Câu 39.** Tìm m để bất phương trình $4\log_2 \sqrt{x} + \log_2 x + m \geq 0$ nghiệm đúng $\forall x \in (1; 64)$.
- A. $m \leq 0$. B. $m \geq 0$. C. $m < 0$. D. $m > 0$.
- Câu 40.** Biết rằng trong tất cả các cặp $(x; y)$ thỏa mãn $\log_2(x^2 + y^2 + 2) \leq 2 + \log_2(x + y - 1)$, chỉ có duy nhất một cặp $(x; y)$ thỏa mãn $3x + 4y - m = 0$. Khi đó hãy tính tổng tất cả các giá trị m tìm được?
- A. 20. B. 46. C. 28. D. 14.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.B	3.D	4.B	5.B	6.B	7.A	8.B	9.B	10.C
11.C	12.D	13.A	14.A	15.C	16.C	17.A	18.C	19.B	20.A
21.B	22.B	23.B	24.B	25.B	26.D	27.A	28.D	29.D	30.C
31.D	32.A	33.D	34.B	35.D	36.D	37.C	38.C	39.B	40.C