SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THANH HÓA
CÁC TRƯỜNG THPT THỌ XUÂN

Mã đề 0001

KỲ THI GIAO LƯU HỌC SINH GIỎI LỚP 12
NĂM HỌC 2026 – 2027
Môn: Toán – Lớp 12
Thời gian làm bài: 90 phút (không kể thời gian phát đề)

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Câu 1: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+n}{x-1}$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có đường tiệm cận xiên đi qua điểm $A(2;5)$ và (C) cắt trục tung tại điểm $B(0;-2)$. Giá trị của biểu thức $T=2m-3n$ bằng

A. 2. **B.** -2. **C.** 10. **D.** -6.

Câu 2: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Gọi M là điểm trên cạnh $B'C'$ sao cho $B'M=2MC'$, và N là trung điểm của đoạn thẳng AB. Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{MN}$ theo ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ta được

A. $\overrightarrow{MN}=-\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}-\dfrac{2}{3}\vec{c}$.
B. $\overrightarrow{MN}=\vec{a}-\dfrac{1}{6}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$.
C. $\overrightarrow{MN}=-\vec{a}-\dfrac{1}{6}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$.
D. $\overrightarrow{MN}=-\vec{a}+\dfrac{5}{6}\vec{b}-\dfrac{1}{3}\vec{c}$.

Câu 3: Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ thỏa mãn $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=\sqrt{3}$ và tích vô hướng $(\vec{u}-\vec{v})\cdot(3\vec{u}+2\vec{v})=9$. Góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ bằng

A. 30°. **B.** 60°. **C.** 120°. **D.** 150°.

Câu 4: Thống kê thời gian tự học mỗi ngày (đơn vị: phút) của 60 học sinh lớp 12 chuyên được ghi lại trong bảng số liệu ghép nhóm sau:

Thời gian (phút)	$[60;90)$	$[90;120)$	$[120;150)$	$[150;180)$	$[180;210)$
Tần số	6	14	22	12	6

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. $131,82$ phút. **B.** $133,64$ phút. **C.** $135,45$ phút. **D.** $138,20$ phút.

Câu 5: Số nghiệm của phương trình lượng giác $\dfrac{\cos 3x}{\sin x-1}=0$ trên đoạn $[0;2026\pi]$ là

A. 5065. **B.** 6078. **C.** 4052. **D.** 5066.

Câu 6: Cho biết giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+ax+3}-bx\right)=3$ với a,b là các hằng số thực và $b>0$. Giá trị của biểu thức $P=a+2b$ bằng

A. 14. **B.** 8. **C.** 16. **D.** 10.

Câu 7: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$ có hai điểm cực trị là A và B. Diện tích của tam giác MAB với điểm $M(3;4)$ bằng

A. 8. **B.** 10. **C.** 4. **D.** 16.

Câu 8: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$ và chiều cao $AA'=2a$. Gọi M là trung điểm của $B'C'$ và N là trung điểm của AC. Độ dài của vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{NB}$ bằng

A. $3a$. **B.** $a\sqrt{7}$. **C.** $\frac{5a}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{13}}{2}$.

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;-2)$ và $B(-2;0;1)$. Điểm $N(a;b;c)$ thỏa mãn tứ giác $OABN$ là hình thang có hai cạnh đáy là OA và BN. Hai đường chéo OB và AN cắt nhau tại điểm I sao cho $IB=3OI$. Giá trị của biểu thức $T=a-2b+c$ bằng

A. -12. **B.** 14. **C.** 18. **D.** -22.

Câu 10: Khảo sát điểm thi đánh giá năng lực của 50 học sinh khối 12 được cho trong bảng tần số ghép nhóm sau:

Điểm số	$[500;600)$	$[600;700)$	$[700;800)$	$[800;900)$	$[900;1000)$
Tần số	4	10	16	12	8

Khoảng tứ phân vị Δ_Q của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng

A. $162,5$. **B.** $177,5$. **C.** $185,0$. **D.** $192,5$.

Câu 11: Trên đồng hồ tại thời điểm đang xét kim giờ OG chỉ đúng số 3, kim phút OP chỉ đúng số 12. Số đo góc lượng giác mà kim giờ quét được từ lúc xét đến khi kim phút và kim giờ gặp nhau lần đầu tiên bằng

A. $\alpha=\frac{\pi}{22}$. **B.** $\alpha=-\frac{2\pi}{45}$. **C.** $\alpha=-\frac{\pi}{21}$. **D.** $\alpha=-\frac{\pi}{22}$.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\frac{1}{2f(x)-1}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

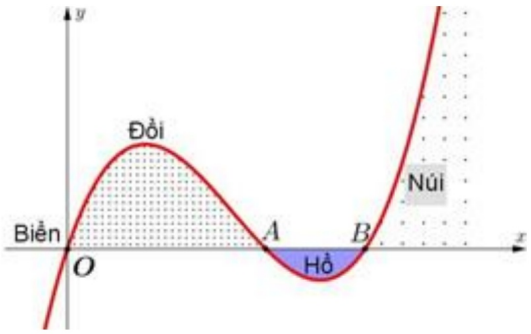
Câu 13: Cho tam giác $A_1B_1C_1$ có diện tích là 6 (đơn vị diện tích). Dựng tam giác $A_2B_2C_2$ bằng cách nối các trung điểm của các cạnh B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Tiếp tục quá trình này, ta có các tam giác $A_3B_3C_3,\ldots,A_nB_nC_n,\ldots$ Kí hiệu S_n là diện tích của tam giác $A_nB_nC_n$. Tính tổng $S_1+S_2+\cdots+S_n+\cdots$

A. 8 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 6

Câu 14: An và Bình thi đấu với nhau một trận bóng bàn, người thắng trước 3 séc sẽ giành chiến thắng chung cuộc. Xác suất An giành chiến thắng mỗi séc là $0,4$ (không có hoà). Tính xác suất An thắng chung cuộc.

A. $0,13824$. **B.** $0,064$. **C.** $0,31744$. **D.** $0,1152$.

Câu 15: Lát cắt ngang của một vùng đất ven biển được mô hình hoá thành một hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ (đơn vị trên các trục là km). Biết khoảng cách hai bên chân đồi $OA=500m$, độ rộng của hồ $AB=200m$ và độ sâu của hồ tại điểm sâu nhất là $50m$. Tìm chiều cao của ngọn đồi (đơn vị mét, làm tròn đến hàng phần chục).



A. $286,4m.$ **B.** $221,8m.$ **C.** $248,6m.$ **D.** $135,6m.$

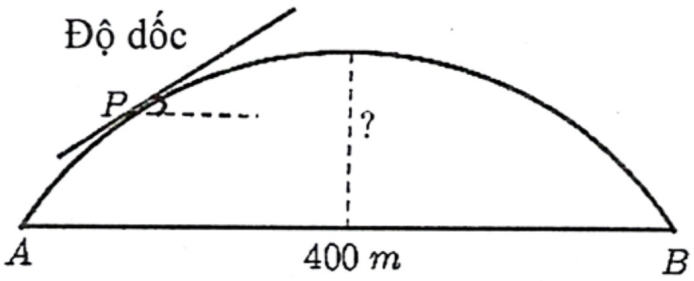
Câu 16: Cho khối chóp cụt đều $ABCD.A'B'C'D'$, đáy $ABCD$ và $A'B'C'D'$ có độ dài cạnh lần lượt là $6a$ và $3a$, độ dài cạnh bên bằng $4a$. Tính thể tích của khối chóp cụt đều $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $\frac{3a^3\sqrt{41}}{2}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{46}}{2}$. **C.** $\frac{21a^3\sqrt{46}}{2}$. **D.** $\frac{21a^3\sqrt{41}}{2}$

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;3), B(5;2;-1)$ và hai điểm $M(x_M;y_M;0), N(x_N;y_N;0)$ thay đổi trên mặt phẳng (Oxy) sao cho điểm $I(1;2;0)$ luôn là trung điểm của MN. Khi biểu thức $P=MA^2+2NB^2+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{NB}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính biểu thức $T=3x_M-5x_N+14y_M-2y_N$.

A. $T=-6$. **B.** $T=-8$. **C.** $T=-5$. **D.** $T=-7$.

Câu 18: Người ta xây dựng một cây cầu vượt giao thông hình parabol nối hai điểm có khoảng cách là $400m$. Độ dốc của mặt cầu không vượt quá 10° (độ dốc tại một điểm được xác định bởi góc giữa phương tiếp xúc với mặt cầu và phương ngang). Tính chiều cao giới hạn từ đỉnh cầu đến mặt đường (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).



A. $16,7\,m$ **B.** $16,5\,m$ **C.** $17,5\,m$ **D.** $17,6\,m$

Câu 19: Cho tứ diện $ABCD$ biết $AB=AD=20\,cm, CD=20\sqrt{2}\,cm$ và $ABC=DAB=90^0$. Góc giữa hai đường thẳng AD và BC bằng 45^0. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BD bằng

A. $5\sqrt{6}\,(dm)$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{3}(dm)$. **C.** $\frac{10\sqrt{6}}{3}(dm)$. **D.** $\sqrt{6}(dm)$.

Câu 20: Cho K là tập hợp các số tự nhiên có bốn chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập K. Gọi P là xác suất để số được chọn thỏa mãn tổng các chữ số của nó là bội của 4. Tính giá trị của $7P$?

A. $\frac{1743}{9000}$. **B.** $\frac{15701}{9000}$. **C.** $\frac{15743}{9000}$. **D.** $\frac{14343}{9000}$.

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Thí sinh trả lời từ câu 21 đến câu 26, trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 21: Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận của (C) và $M(x_0;y_0)$ là một điểm tùy ý thuộc (C) với $x_0>1$. Tiếp tuyến của (C) tại M cắt đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của (C) lần lượt tại hai điểm A và B.

a) Tọa độ giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị (C) là $I(1;2)$.

b) Tích khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của (C) là một hằng số bằng 3.

c) Diện tích tam giác IAB phụ thuộc vào vị trí của điểm M trên đồ thị (C) và đạt giá trị nhỏ nhất bằng 6.

d) Khoảng cách từ tâm đối xứng I đến tiếp tuyến tại M đạt giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{6}$.

Câu 22: Trong y học, nồng độ của một loại thuốc giảm đau trong huyết tương của bệnh nhân sau khi tiêm t giờ được mô hình hóa bởi hàm số:

$$C(t)=4\left(e^{-0{,}1t}-e^{-0{,}5t}\right)\quad(\text{mg/L}),\quad t\geq 0.$$

a) Trong 2 giờ đầu tiên sau khi tiêm, nồng độ thuốc trong huyết tương của bệnh nhân luôn tăng.

b) Nồng độ thuốc trong huyết tương đạt giá trị cao nhất tại thời điểm $t=2{,}5\ln 5$ giờ sau khi tiêm.

c) Tốc độ thay đổi nồng độ thuốc trong huyết tương giảm nhanh nhất (tức đạo hàm cấp hai $C''(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất) tại thời điểm $t=5\ln 5$ giờ.

d) Giá trị lớn nhất của nồng độ thuốc trong huyết tương của bệnh nhân bằng $1{,}28$ mg/L (làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;0)$, $B(0;1;2)$, $C(3;0;1)$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=9$.

a) Điểm I thỏa mãn hệ thức $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ có tọa độ là $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

b) Điểm P thay đổi trên đoạn thẳng BC. Biểu thức PA^2+2PO^2 đạt giá trị nhỏ nhất khi điểm P có hoành độ bằng $\dfrac{5}{11}$.

c) Xét điểm M thay đổi trên mặt cầu (S). Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=2MA^2+MB^2-MC^2$ bằng $21-18\sqrt{3}$.

d) Xét điểm M thay đổi trên mặt cầu (S). Giá trị lớn nhất của biểu thức $T=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}$ bằng $33+3\sqrt{138}$.

Câu 24: Để đánh giá mức độ tập trung và ổn định về kết quả học tập của hai khối chuyên Toán và chuyên Tin trong kỳ thi chọn HSG, nhà trường thống kê điểm thi (thang điểm 20) của 40 học sinh lớp 12 chuyên Toán và 40 học sinh lớp 12 chuyên Tin theo bảng số liệu ghép nhóm sau:

Điểm số	**[10; 12)**	**[12; 14)**	**[14; 16)**	**[16; 18)**	**[18; 20]**
Chuyên Toán	2	6	14	12	6
Chuyên Tin	4	8	12	10	6

a) Điểm trung bình của học sinh chuyên Toán cao hơn điểm trung bình của học sinh chuyên Tin là $0{,}5$ điểm.

b) Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu khối chuyên Toán là $Q_3=17{,}25$.

c) Khoảng tứ phân vị của khối chuyên Tin bằng $3{,}5$ điểm.

d) Dựa vào độ lệch chuẩn của hai mẫu số liệu ghép nhóm, kết quả điểm thi của học sinh khối chuyên Toán có độ phân tán nhỏ hơn (đồng đều hơn) so với khối chuyên Tin.

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AB, K là trung điểm của cạnh CD.

a) Đường thẳng SH vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

b) Tang của góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng đáy $(ABCD)$ bằng $\dfrac{\sqrt{39}}{13}$.

c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau SA và CD bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

d) Gọi φ là số đo góc nhị diện $[S,CD,A]$. Khi đó $\cos\varphi=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$.

Câu 26: Cho tập hợp $S=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12\}$. Gọi X là tập hợp tất cả các tập con gồm 3 phần tử phân biệt của S. Người ta chọn ngẫu nhiên một tập con $A=\{a;b;c\}$ từ X (với $a<b<c$).

a) Số phần tử của không gian mẫu bằng 220.

b) Số các tập con $A=\{a;b;c\}$ sao cho 3 số a,b,c theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng bằng 30.

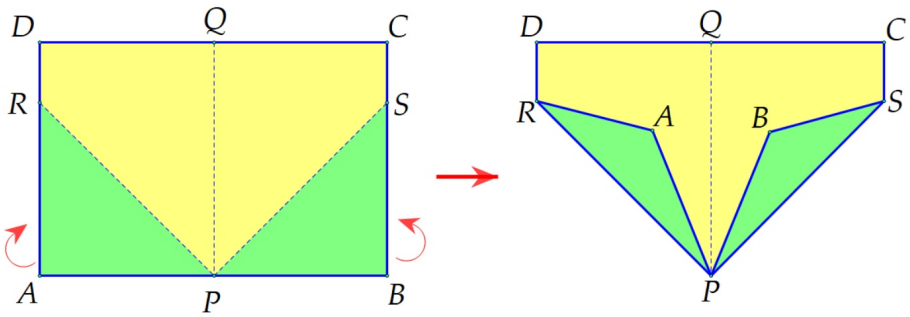
c) Xác suất để chọn được tập con $A=\{a;b;c\}$ sao cho 3 a,b,c theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân bằng bằng $\dfrac{3}{110}$.

d) Xác suất để chọn được tập con $A=\{a;b;c\}$ sao cho 3 số a,b,c thỏa mãn không có hai số nào là hai số tự nhiên liên tiếp bằng $\dfrac{6}{11}$.

PHẦN III. TRẢ LỜI NGẮN

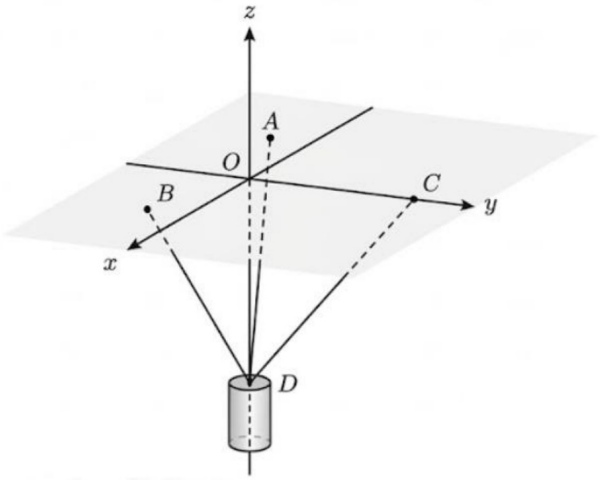
Câu 27: Cho hình tứ diện đều $ABCD$. Trên mỗi cạnh của tứ diện, ta đánh dấu 3 điểm chia đều cạnh tương ứng thành các phần bằng nhau. Gọi S là tập hợp các tam giác có ba đỉnh lấy từ 18 điểm đã đánh dấu. Lấy ra từ S một tam giác, biết rằng xác suất để mặt phẳng chứa tam giác đó song song với đúng một cạnh của tứ diện đã cho là phân số tối giản có dạng $\dfrac{a}{b}$. Tính $b-a$.

Câu 28: Trong đời sống hằng ngày, khổ giấy photocopy A4 thường dùng có kích thước $210\times297\,mm$. Hình vẽ là một tờ giấy $ABCD$ cỡ A4, gọi P,Q lần lượt là trung điểm của AB,CD. Nếu gập đồng thời hai điểm A,B theo hướng của PQ với mục tiêu làm cho AP,BP trùng với PQ, thì trong quá trình đó, khi $\cos APB=\dfrac{7}{8}$, góc nhị diện tạo bởi mặt phẳng APR và mặt đáy PQR là θ. Khi đó $\left[\tan\theta\right]^2$ bằng bao nhiêu?

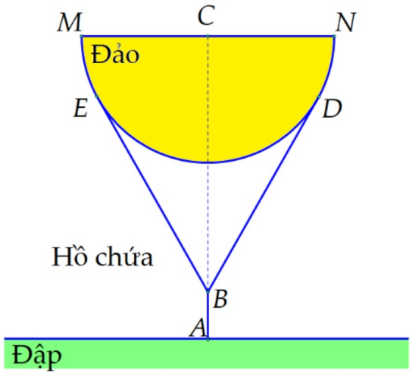


Câu 29: Trong không gian $Oxyz$, một vật được treo bằng ba sợi dây không dãn, mỗi sợi dây có một đầu lần lượt được gắn tại các điểm $A(-2;-1;0);B(2;-1;0);C(0;4;0)$, còn đầu kia được gắn với vật

tại điểm $D(0;0;-4)$ như hình vẽ (trong đó mặt phẳng (Oxy) song song với mặt đất, trục Oz hướng thẳng lên trên). Biết rằng mỗi sợi dây được thiết kế để chịu được lực căng tối đa là 20 N. Để không dây nào bị đứt thì trọng lượng tối đa của vật bằng bao nhiêu Niutơn? *(không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần mười).*



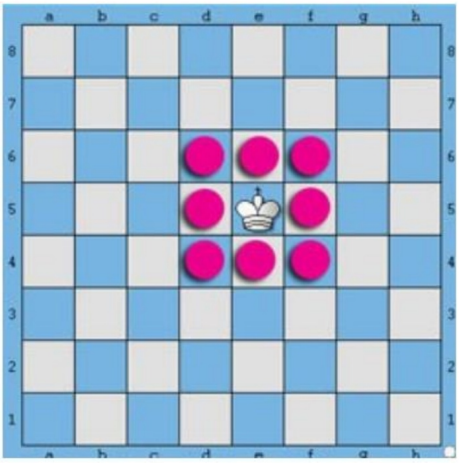
Câu 30: Sửa chữa, xây dựng lối đi (cầu gỗ) là một biện pháp thường gặp để nâng cao hiệu quả tham quan du lịch. Như hình vẽ, một hồ chứa có một đảo nhỏ hình nửa đường tròn bán kính 1 (trăm mét), tâm là C, và đường kính MN song song với mặt đập. Trên mặt đập có điểm A thỏa mãn $AC \perp MN$ và $AC = 3$ (trăm mét). Để thuận tiện cho du khách ra đảo ngắm cảnh, dự định xây ba đoạn lối đi AB, BD, BE. Điểm B nằm trên đoạn AC; các đoạn BD, BE đều là tiếp tuyến của đường tròn tâm C, các tiếp điểm lần lượt là D, E. Biết rằng các đoạn AB, BD, BE và đảo nằm trong cùng một mặt phẳng. Ngoài ra, trên đảo nửa tròn còn xây thêm các lối đi theo cung ME, cung ND và đoạn thẳng MN. Bỏ qua các yếu tố khác, cần xây tổng chiều dài lối đi nhỏ nhất là bao nhiêu (trăm mét)? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



Câu 31: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích V, có đáy ABC là tam giác vuông tại B với $BA = a, AC = 2a$. Mặt bên $(BB'A'A)$ là hình thoi có góc $ABB' = 60°$. Gọi I là trung điểm của BC'. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'A'$ và BI bằng $\frac{3a}{4}$. Biết rằng $V < \frac{a^3}{2}$. Giá trị $V = x.a^3$ thì x bằng bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần trăm.

Câu 32: Một quân vua được đặt trên một ô giữa bàn cờ vua. Mỗi bước di chuyển, quân vua được chuyển sang một ô khác chung cạnh hoặc chung đỉnh với ô đang đứng (xem hình minh họa). Bạn An di

chuyển quân vua ngẫu nhiên 3 bước. Biết xác suất để sau 3 bước đi quân vua trở về ô xuất phát là $\frac{a}{b}$ với $a,b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị $a+10b$



---------- Hết ----------

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI THAM KHẢO

Được thực hiện bởi AI & TOANMATH.com

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN.

Câu 1.

Ta có $y = x + m + 1 + \dfrac{m+n+1}{x-1}$ nên tiệm cận xiên của (C) là $y = x + m + 1$ (với $m + n + 1 \neq 0$).

Tiệm cận xiên đi qua $A(2;5)$ nên $5 = 2 + m + 1 \Leftrightarrow m = 2$.

(C) cắt trục tung tại $B(0;-2)$ nên $y(0) = -n = -2 \Leftrightarrow n = 2$. Khi đó $m + n + 1 = 5 \neq 0$ (thỏa mãn).

Vậy $T = 2m - 3n = 4 - 6 = -2$.

Chọn B.

Câu 2.

Ta có $\overrightarrow{AN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2}\vec{b}$.

Vì $B'M = 2MC'$ nên $\overrightarrow{B'M} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{B'C'} = \dfrac{2}{3}\left(\vec{c} - \vec{b}\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'M} = \vec{a} + \vec{b} + \dfrac{2}{3}\left(\vec{c} - \vec{b}\right) = \vec{a} + \dfrac{1}{3}\vec{b} + \dfrac{2}{3}\vec{c}$.

Do đó $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = -\vec{a} + \dfrac{1}{6}\vec{b} - \dfrac{2}{3}\vec{c}$.

Chọn A.

Câu 3.

Ta có $\left(\vec{u} - \vec{v}\right) \cdot \left(3\vec{u} + 2\vec{v}\right) = 3\left|\vec{u}\right|^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} - 2\left|\vec{v}\right|^2 = 12 - \vec{u} \cdot \vec{v} - 6 = 6 - \vec{u} \cdot \vec{v}$.

Theo giả thiết $6 - \vec{u} \cdot \vec{v} = 9 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = -3$.

$\cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \dfrac{-3}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left(\vec{u}, \vec{v}\right) = 150^\circ$.

Chọn D.

Câu 4.

Cỡ mẫu $n = 60$, $\dfrac{n}{2} = 30$. Tần số tích lũy: $6; 20; 42; 54; 60$ nên nhóm chứa trung vị là $[120;150)$.

$M_e = 120 + \dfrac{30 - 20}{22} \cdot 30 = 120 + \dfrac{150}{11} \approx 133,64$ (phút).

Chọn B.

Câu 5.

Điều kiện: $\sin x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Phương trình tương đương $\cos 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{m\pi}{3} (m \in \mathbb{Z})$.

Trên mỗi nửa khoảng $[k2\pi;(k+1)2\pi)$ có 6 giá trị $\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{6};\frac{7\pi}{6};\frac{3\pi}{2};\frac{11\pi}{6}$ (cộng thêm $k2\pi$), loại $\frac{\pi}{2} + k2\pi$ nên còn 5 nghiệm.

Đoạn $[0;2026\pi]$ gồm 1013 nửa khoảng như vậy ($k = 0,1,\ldots,1012$), còn $x = 2026\pi$ không là nghiệm vì $\cos(6078\pi) = 1 \neq 0$.

Vậy số nghiệm là $1013 \cdot 5 = 5065$.

Chọn A.

Câu 6.

Nếu $b \neq 2$ thì giới hạn bằng $\pm\infty$, nên $b = 2$ (thỏa mãn $b > 0$).

Khi đó $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+ax+3}-2x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ax+3}{\sqrt{4x^2+ax+3}+2x} = \frac{a}{4}$.

$\frac{a}{4} = 3 \Leftrightarrow a = 12$. Vậy $P = a + 2b = 12 + 4 = 16$.

Chọn C.

Câu 7.

$y' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$, suy ra $A(0;2)$, $B(2;-2)$.

$AB = \sqrt{2^2+4^2} = 2\sqrt{5}$, đường thẳng $AB:\ 2x + y - 2 = 0$, $d(M,AB) = \frac{|6+4-2|}{\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$.

$S_{MAB} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{8}{\sqrt{5}} = 8$.

Chọn A.

Câu 8.

Lăng trụ đứng có đáy vuông tại A nên $\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ đôi một vuông góc.

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'M}=\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$, $\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Suy ra $\vec{u}=\overrightarrow{AA'}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}\Rightarrow|\vec{u}|^2=4a^2+\frac{9}{4}a^2=\frac{25a^2}{4}\Rightarrow|\vec{u}|=\frac{5a}{2}$.

Chọn C.

Câu 9.

Vì $OABN$ là hình thang có hai đáy OA, BN nên $\triangle IOA\sim\triangle IBN$, suy ra $\frac{BN}{OA}=\frac{IB}{IO}=3$.

Với thứ tự đỉnh O,A,B,N, hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{NB}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{NB}=3\overrightarrow{OA}=(3;9;-6)$, suy ra $N(-5;-9;7)$.

Kiểm tra: $I\left(-\frac{1}{2};0;\frac{1}{4}\right)$ thuộc cả hai đoạn OB và AN, thỏa mãn $IB=3OI$.

Vậy $T=a-2b+c=-5+18+7=20$. Không có phương án nào đúng.

Câu 10.

Cỡ mẫu $n=50$. Tần số tích lũy: $4;14;30;42;50$.

$\frac{n}{4}=12,5$ nên nhóm chứa Q_1 là $[600;700)$: $Q_1=600+\frac{12,5-4}{10}\cdot100=685$.

$\frac{3n}{4}=37,5$ nên nhóm chứa Q_3 là $[800;900)$: $Q_3=800+\frac{37,5-30}{12}\cdot100=862,5$.

$\Delta_Q=Q_3-Q_1=862,5-685=177,5$.

Chọn B.

Câu 11.

Chọn chiều dương là chiều ngược chiều kim đồng hồ. Trong t phút, kim phút quay được góc $\frac{2\pi t}{60}=\frac{\pi t}{30}$, kim giờ quay được góc $\frac{\pi t}{360}$ (đều theo chiều kim đồng hồ).

Lúc đầu kim phút chỉ số 12, kim giờ chỉ số 3 nên kim phút phải quay nhiều hơn kim giờ một góc $\frac{\pi}{2}$ thì hai kim gặp nhau lần đầu.

$\frac{\pi t}{30}-\frac{\pi t}{360}=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\frac{11\pi t}{360}=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow t=\frac{180}{11}$.

Kim giờ quay theo chiều âm nên $\alpha=-\frac{\pi t}{360}=-\frac{\pi}{22}$.

Chọn D.

Câu 12.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} y=\dfrac{1}{2\cdot 1-1}=1$ nên $y=1$ là tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{1}{2}$ và $2f(x)-1<0$ với mọi $x>\dfrac{1}{2}$ nên $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$, không có thêm tiệm cận ngang.

Số tiệm cận đứng bằng số nghiệm của phương trình $f(x)=\dfrac{1}{2}$. Từ bảng biến thiên, đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}$ cắt đồ thị $y=f(x)$ tại đúng 1 điểm (thuộc khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$) nên có 1 tiệm cận đứng.

Vậy tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng là 2.

Chọn C.

Câu 13.

Tam giác $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ có các cạnh bằng nửa các cạnh của tam giác $A_nB_nC_n$ nên $S_{n+1}=\dfrac{1}{4}S_n$.

Dãy $\left(S_n\right)$ là cấp số nhân lùi vô hạn với $S_1=6$, $q=\dfrac{1}{4}$ nên $S_1+S_2+\cdots+S_n+\cdots=\dfrac{6}{1-\dfrac{1}{4}}=8$.

Chọn A.

Câu 14.

Giả sử kết quả các séc độc lập với nhau. An thắng chung cuộc khi An thắng séc thứ ba của mình ở séc thứ 3, thứ 4 hoặc thứ 5.

$P=0,4^3+C_3^2\cdot 0,6\cdot 0,4^3+C_4^2\cdot 0,6^2\cdot 0,4^3=0,064+0,1152+0,13824=0,31744$.

Chọn C.

Câu 15.

Chọn đơn vị trên các trục là mét. Đồ thị đi qua $O(0;0)$, $A(500;0)$, $B(700;0)$ nên $f(x)=ag(x)$ với $g(x)=x(x-500)(x-700)=x^3-1200x^2+350000x$, $a>0$.

$f'(x)=a\left(3x^2-2400x+350000\right)=0 \Leftrightarrow x_1=\dfrac{1200-100\sqrt{39}}{3}$ hoặc $x_2=\dfrac{1200+100\sqrt{39}}{3}$.

Điểm sâu nhất của hồ là điểm cực tiểu nên $f\left(x_2\right)=-50 \Rightarrow a=\dfrac{-50}{g\left(x_2\right)}$.

Đỉnh đồi là điểm cực đại, chiều cao ngọn đồi là $f\left(x_1\right)=\dfrac{-50g\left(x_1\right)}{g\left(x_2\right)}\approx 248,6$ (m).

Chọn C.

Câu 16.

Gọi H là hình chiếu của B' trên BD. Ta có $BH=\dfrac{BD-B'D'}{2}=\dfrac{6a\sqrt{2}-3a\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Chiều cao $h=B'H=\sqrt{BB'^2-BH^2}=\sqrt{16a^2-\dfrac{9a^2}{2}}=\dfrac{a\sqrt{46}}{2}$.

$V=\dfrac{h}{3}\left(36a^2+9a^2+\sqrt{36a^2\cdot 9a^2}\right)=\dfrac{a\sqrt{46}}{6}\cdot 63a^2=\dfrac{21a^3\sqrt{46}}{2}$.

Chọn C.

Câu 17.

Đặt $x=x_M$, $y=y_M$. Vì $I(1;2;0)$ là trung điểm MN nên $N(2-x;4-y;0)$.

$\overrightarrow{MA}=(1-x;1-y;3)$, $\overrightarrow{NB}=(3+x;y-2;-1)$.

$MA^2=x^2+y^2-2x-2y+11$, $NB^2=x^2+y^2+6x-4y+14$, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{NB}=-x^2-y^2-2x+3y-2$.

$P=2x^2+2y^2+8x-7y+37=2(x+2)^2+2\left(y-\dfrac{7}{4}\right)^2+\dfrac{183}{8}\geq\dfrac{183}{8}$.

Dấu bằng xảy ra khi $x_M=-2$, $y_M=\dfrac{7}{4}$, suy ra $x_N=4$, $y_N=\dfrac{9}{4}$.

$T=3\cdot(-2)-5\cdot 4+14\cdot\dfrac{7}{4}-2\cdot\dfrac{9}{4}=-6-20+\dfrac{49}{2}-\dfrac{9}{2}=-6$.

Chọn A.

Câu 18.

Chọn hệ trục tọa độ có gốc O tại đỉnh cầu, mặt cắt cây cầu là parabol $y=-ax^2$ $(a>0)$, hai chân cầu ứng với $x=\pm 200$.

Hệ số góc tiếp tuyến tại điểm có hoành độ x là $k=-2ax$, độ dốc lớn nhất tại hai chân cầu với $|k|=400a$.

Điều kiện: $400a\leq\tan 10^\circ\Leftrightarrow a\leq\dfrac{\tan 10^\circ}{400}$.

Chiều cao từ đỉnh cầu đến mặt đường là $h=a\cdot 200^2\leq 100\tan 10^\circ\approx 17,6$ (m).

Chọn D.

Câu 19.

Vì $\widehat{DAB}=90^\circ$, chọn hệ trục $Axyz$ (đơn vị cm) với $B(20;0;0)$, $D(0;20;0)$.

Vì $BC\perp AB$ nên $C(20;p;q)$, $\overrightarrow{BC}=(0;p;q)$.

Góc giữa AD và BC bằng 45°: $\dfrac{|p|}{\sqrt{p^2+q^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow q^2=p^2$.

$CD^2=800\Leftrightarrow 400+(p-20)^2+q^2=800\Leftrightarrow 2p^2-40p=0\Leftrightarrow p=20$ (loại $p=0$ vì khi đó $C\equiv B$).
Do tính đối xứng, chọn $C(20;20;20)$.

$\overrightarrow{AC}=(20;20;20)$, $\overrightarrow{BD}=(-20;20;0)$, $\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\right]=(-400;-400;800)$ cùng phương với $\vec{n}=(1;1;-2)$.

$d(AC,BD)=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}=\dfrac{20}{\sqrt{6}}=\dfrac{10\sqrt{6}}{3}$ (cm) $=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ (dm).

Chọn B.

Câu 20.

$n(\Omega)=9000$. Gọi số được chọn là $\overline{abcd}$.

Phân loại chữ số theo số dư khi chia cho 4: dư 0 gồm $\{0;4;8\}$, dư 1 gồm $\{1;5;9\}$, dư 2 gồm $\{2;6\}$, dư 3 gồm $\{3;7\}$.

Với mỗi bộ $\overline{bcd}$, chữ số $a\in\{1;2;\ldots;9\}$ có 2 cách chọn để $a+b+c+d$ chia hết cho 4, riêng khi $b+c+d$ chia 4 dư 3 thì có 3 cách ($a\in\{1;5;9\}$).

Số cặp $(c;d)$ có $c+d$ chia 4 dư 2 là $3\cdot2+2\cdot3+3\cdot3+2\cdot2=25$, dư 3 là $3\cdot2+2\cdot3+3\cdot2+2\cdot3=24$.

Tương tự, với mỗi cặp $(c;d)$, chữ số b có 2 cách chọn để $b+c+d$ chia 4 dư 3, riêng khi $c+d$ chia 4 dư 2 hoặc dư 3 thì có 3 cách. Số bộ $\overline{bcd}$ có $b+c+d$ chia 4 dư 3 là $2\cdot100+25+24=249$.

Số kết quả thuận lợi: $2\cdot1000+249=2249$.

$P=\dfrac{2249}{9000}\Rightarrow 7P=\dfrac{15743}{9000}$.

Chọn C.

<u>PHẦN II</u>. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI.

Câu 21.

Ta có $y=2+\dfrac{3}{x-1}$, tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=2$, $M\left(x_0;2+\dfrac{3}{x_0-1}\right)$ với $x_0>1$.

a) Đúng. Giao điểm hai đường tiệm cận là $I(1;2)$.

b) Đúng. $d(M,x=1)\cdot d(M,y=2)=\left(x_0-1\right)\cdot\dfrac{3}{x_0-1}=3$.

c) Sai. Tiếp tuyến tại M: $y=-\dfrac{3}{\left(x_0-1\right)^2}\left(x-x_0\right)+2+\dfrac{3}{x_0-1}$, cắt tiệm cận đứng tại $A\left(1;2+\dfrac{6}{x_0-1}\right)$, cắt tiệm cận ngang tại $B\left(2x_0-1;2\right)$.

$IA=\dfrac{6}{x_0-1}$, $IB=2\left(x_0-1\right)$, $S_{IAB}=\dfrac{1}{2}IA\cdot IB=6$ không đổi, không phụ thuộc vị trí của M.

d) Đúng. Gọi d là khoảng cách từ I đến tiếp tuyến. Tam giác IAB vuông tại I nên $\dfrac{1}{d^2}=\dfrac{1}{IA^2}+\dfrac{1}{IB^2}\geq\dfrac{2}{IA\cdot IB}=\dfrac{1}{6}$, suy ra $d\leq\sqrt{6}$.

Dấu bằng xảy ra khi $IA=IB\Leftrightarrow\left(x_0-1\right)^2=3\Leftrightarrow x_0=1+\sqrt{3}$.

Câu 22.

$C'(t)=4\left(-0,1e^{-0,1t}+0,5e^{-0,5t}\right)=0,4e^{-0,1t}\left(5e^{-0,4t}-1\right)$.

$C'(t)>0\Leftrightarrow e^{-0,4t}>\dfrac{1}{5}\Leftrightarrow t<2,5\ln 5\approx 4,02$.

a) Đúng. Trên $(0;2)\subset(0;2,5\ln 5)$ có $C'(t)>0$ nên nồng độ thuốc luôn tăng.

b) Đúng. $C'(t)$ đổi dấu từ dương sang âm tại $t=2,5\ln 5$ nên $C(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại $t=2,5\ln 5$.

c) Sai. $C''(t)=0,04e^{-0,1t}-e^{-0,5t}$.

$C''(5\ln 5)=0,04\cdot 5^{-\frac{1}{2}}-5^{-\frac{5}{2}}=5^{-\frac{5}{2}}-5^{-\frac{5}{2}}=0$, còn $C''(0)=0,04-1=-0,96<C''(5\ln 5)$.

Do đó $C''(t)$ không đạt giá trị nhỏ nhất tại $t=5\ln 5$.

d) Sai. $C_{\max}=C(2,5\ln 5)=4\left(5^{-\frac{1}{4}}-5^{-\frac{5}{4}}\right)=\dfrac{16}{5\sqrt[4]{5}}\approx 2,14$ (mg/L).

Câu 23.

a) Đúng. $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{OI}=2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=(-1;5;1)\Rightarrow I\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

b) Sai. $\overrightarrow{BC}=(3;-1;-1)$, P thuộc đoạn BC nên $P(3t;1-t;2-t)$, $t\in[0;1]$.

$PA^2=11t^2-8t+6$, $PO^2=11t^2-6t+5$, $PA^2+2PO^2=33t^2-20t+16$ nhỏ nhất khi $t=\dfrac{10}{33}\in[0;1]$, khi đó $x_P=\dfrac{10}{11}\neq\dfrac{5}{11}$.

c) Sai. Với I ở ý a, do $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ nên
$Q=2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2-\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2=2MI^2+2IA^2+IB^2-IC^2$.

$IA^2=\dfrac{11}{4}$, $IB^2=\dfrac{19}{4}$, $IC^2=\dfrac{75}{4}$ nên $Q=2MI^2-\dfrac{17}{2}$.

$OI=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}<3$ nên I nằm trong mặt cầu, $MI_{\min}=3-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

$Q_{\min}=2\left(3-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2-\dfrac{17}{2}=23-18\sqrt{3}\neq 21-18\sqrt{3}$.

d) Đúng. Ta có $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}\right)=OM^2-\overrightarrow{OM}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$, tương tự cho $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}$.

Suy ra $T=3OM^2-\overrightarrow{OM}\cdot\vec{w}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=27-\overrightarrow{OM}\cdot\vec{w}+2+4$, với
$\vec{w}=\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=(7;5;8)$, $\left|\vec{w}\right|=\sqrt{138}$.

$-\overrightarrow{OM}\cdot\vec{w}\le OM\cdot\left|\vec{w}\right|=3\sqrt{138}$, dấu bằng khi $\overrightarrow{OM}$ ngược hướng với $\vec{w}$. Vậy $T_{\max}=33+3\sqrt{138}$.

Câu 24.

Giá trị đại diện các nhóm: $11;13;15;17;19$.

a) Sai. $\overline{x}_T=\dfrac{2\cdot11+6\cdot13+14\cdot15+12\cdot17+6\cdot19}{40}=\dfrac{628}{40}=15,7$,
$\overline{x}_{Tin}=\dfrac{4\cdot11+8\cdot13+12\cdot15+10\cdot17+6\cdot19}{40}=\dfrac{612}{40}=15,3$, chênh lệch $0,4\neq0,5$.

b) Sai. $\dfrac{3n}{4}=30$, tần số tích lũy chuyên Toán: $2;8;22;34;40$ nên nhóm chứa Q_3 là $[16;18)$:
$Q_3=16+\dfrac{30-22}{12}\cdot2=\dfrac{52}{3}\approx17,33\neq17,25$.

c) Sai. Tần số tích lũy chuyên Tin: $4;12;24;34;40$.

$Q_1=12+\dfrac{10-4}{8}\cdot2=13,5$, $Q_3=16+\dfrac{30-24}{10}\cdot2=17,2$, $\Delta_Q=17,2-13,5=3,7\neq3,5$.

d) Đúng. $s_T^2 = \dfrac{10040}{40} - 15,7^2 = 4,51$, $s_{Tin}^2 = \dfrac{9592}{40} - 15,3^2 = 5,71$.

$s_T \approx 2,12 < s_{Tin} \approx 2,39$ nên điểm thi khối chuyên Toán có độ phân tán nhỏ hơn.

Câu 25.

a) Đúng. Tam giác SAB đều cạnh a nên $SH \perp AB$, $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; mà $(SAB) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến AB nên $SH \perp (ABCD)$.

b) Đúng. Góc giữa SD và $(ABCD)$ là $\widehat{SDH}$, $HD = \sqrt{AH^2 + AD^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + 3a^2} = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$.

$\tan \widehat{SDH} = \dfrac{SH}{HD} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \dfrac{\sqrt{39}}{13}$.

c) Sai. $CD \parallel AB \subset (SAB)$ nên $d(SA,CD) = d(CD,(SAB)) = d(D,(SAB))$.

Vì $DA \perp AB$, $DA \perp SH$ nên $DA \perp (SAB)$, suy ra $d(SA,CD) = DA = a\sqrt{3} \neq \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

d) Sai. $CD \perp HK$, $CD \perp SH$ nên $CD \perp (SHK) \Rightarrow CD \perp SK$, do đó góc nhị diện $[S,CD,A]$ là $\widehat{SKH}$.

$HK = a\sqrt{3}$, $SK = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} + 3a^2} = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$, $\cos\varphi = \dfrac{HK}{SK} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \neq \dfrac{2\sqrt{13}}{13}$.

Câu 26.

a) Đúng. $n(\Omega) = C_{12}^3 = 220$.

b) Đúng. a,b,c lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow a + c = 2b$, nên a,c cùng tính chẵn lẻ và mỗi cách chọn a,c xác định duy nhất b. Số tập con là $C_6^2 + C_6^2 = 30$.

c) Sai. a,b,c lập thành cấp số nhân $\Leftrightarrow b^2 = ac$. Các bộ thỏa mãn: $(1;2;4)$, $(2;4;8)$, $(3;6;12)$, $(1;3;9)$, $(4;6;9)$.

Xác suất bằng $\dfrac{5}{220} = \dfrac{1}{44} \neq \dfrac{3}{110}$.

d) Đúng. Đặt $a' = a$, $b' = b - 1$, $c' = c - 2$ thì $1 \le a' < b' < c' \le 10$, nên số cách chọn 3 số không có hai số liên tiếp là $C_{10}^3 = 120$.

Xác suất bằng $\dfrac{120}{220} = \dfrac{6}{11}$.

PHẦN III. TRẢ LỜI NGẮN.

Câu 27.

Số tam giác: $n(\Omega) = C_{18}^3 - 6 = 810$ (trừ 6 bộ ba điểm thẳng hàng trên cùng một cạnh).

Giả sử mặt phẳng (α) chứa tam giác song song với đúng một cạnh, chẳng hạn BC. Khi đó (α) không chứa điểm nào của BC nên ba đỉnh thuộc các cạnh AB, AC, DB, DC, AD.

Nếu không có đỉnh nào trên AD thì có hai đỉnh cùng thuộc (ABC) hoặc cùng thuộc (DBC). Nếu có một đỉnh trên AD thì hai đỉnh còn lại cũng cùng thuộc một trong hai mặt đó, vì nếu một điểm thuộc AB hoặc AC, điểm kia thuộc DB hoặc DC thì A, D cùng nằm ở phía đối diện với B, C đối với (α), khi đó đoạn AD không cắt (α), vô lí.

Hai đỉnh cùng thuộc một mặt chứa BC thì đoạn nối chúng song song với BC (vì $(\alpha) \parallel BC$), và cặp đỉnh này là duy nhất. Do đó mỗi tam giác thỏa mãn được đếm đúng một lần khi đếm theo cách sau.

Xét mặt (ABC): có $3 \cdot 3 = 9$ đoạn nối hai điểm đã đánh dấu song song với một cạnh của tam giác ABC, chẳng hạn đoạn $XY \parallel BC$ với $X \in AB$, $Y \in AC$.

Điểm thứ ba Z lấy trên các cạnh DA, DB, DC (9 điểm). Mặt phẳng (XYZ) song song với BC và không song song với AB, AC; nó song song thêm cạnh khác ở đúng 3 vị trí cần loại: trên DA, điểm Z với $\dfrac{AZ}{AD} = \dfrac{AX}{AB}$ (khi đó $(XYZ) \parallel (BCD)$); trên DB, điểm Z với $XZ \parallel AD$; trên DC, điểm Z với $YZ \parallel AD$. Mỗi vị trí này ứng với đúng một điểm đã đánh dấu nên còn $9 - 3 = 6$ cách chọn Z.

Số tam giác thỏa mãn: $4 \cdot 9 \cdot 6 = 216$, xác suất $P = \dfrac{216}{810} = \dfrac{4}{15}$.

Suy ra $a = 4$, $b = 15$, $b - a = 11$.

Đáp án: 11.

Câu 28.

Gọi $R \in AD$, $S \in BC$ sao cho PR, PS là các nếp gấp. Hai bên được gấp đồng thời và đối xứng nhau qua mặt phẳng chứa PQ và vuông góc với mặt đáy. Đặt $AP = BP = a$.

Nếp gấp PR đưa PA trùng PQ nên PR là phân giác của $\widehat{APQ}$, do đó $AR = AP = a$. Gọi $T = RS \cap PQ$ thì $APTR$ là hình vuông cạnh a, tâm E là giao điểm của AT và PR.

Khi gấp, gọi A_1, B_1 là vị trí của A, B. Điểm A quay quanh PR trong mặt phẳng vuông góc với PR tại E nên hình chiếu A' của A_1 trên mặt đáy nằm trên đường thẳng AT, $EA_1 = EA$ và $\theta = \widehat{A_1EA'}$.

Trong tam giác A_1PB_1: $A_1B_1^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cdot \dfrac{7}{8} = \dfrac{a^2}{4} \Rightarrow A_1B_1 = \dfrac{a}{2}$.

Do đối xứng, A_1B_1 song song với mặt đáy nên $A'B' = A_1B_1 = \dfrac{a}{2}$ và $A'B' \parallel AB$, với B' là hình chiếu của B_1 (nằm trên BT).

Suy ra $\dfrac{TA'}{TA} = \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{a/2}{2a} = \dfrac{1}{4}$, mà $TE = \dfrac{TA}{2}$ nên A' là trung điểm của TE, $EA' = \dfrac{EA}{2}$.

$\cos\theta = \dfrac{EA'}{EA_1} = \dfrac{EA'}{EA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ \Rightarrow \left[\tan\theta\right]^2 = 3$.

Đáp án: 3.

Câu 29.

$\overrightarrow{DA} = (-2;-1;4)$, $\overrightarrow{DB} = (2;-1;4)$, $\overrightarrow{DC} = (0;4;4)$, có độ dài lần lượt là $\sqrt{21};\sqrt{21};4\sqrt{2}$.

Gọi T_A, T_B, T_C là độ lớn lực căng các dây, P là trọng lượng của vật. Ta có $\overrightarrow{T_A} = \dfrac{T_A}{\sqrt{21}}(-2;-1;4)$,

$\overrightarrow{T_B} = \dfrac{T_B}{\sqrt{21}}(2;-1;4)$, $\overrightarrow{T_C} = \dfrac{T_C}{\sqrt{2}}(0;1;1)$, $\vec{P} = (0;0;-P)$.

Vật cân bằng nên $\overrightarrow{T_A} + \overrightarrow{T_B} + \overrightarrow{T_C} + \vec{P} = \vec{0}$.

Theo trục Ox: $T_A = T_B$. Theo trục Oy: $-\dfrac{2T_A}{\sqrt{21}} + \dfrac{T_C}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow T_C = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{21}}T_A < T_A$.

Theo trục Oz: $\dfrac{8T_A}{\sqrt{21}} + \dfrac{T_C}{\sqrt{2}} = P \Rightarrow P = \dfrac{10}{\sqrt{21}}T_A$.

Lực căng lớn nhất là $T_A = T_B = \dfrac{\sqrt{21}}{10}P \le 20 \Leftrightarrow P \le \dfrac{200}{\sqrt{21}} \approx 43,6$ (N).

Đáp án: 43,6.

Câu 30.

Do tính đối xứng, đặt $\widehat{CBD} = \widehat{CBE} = \theta$ (tính bằng radian). Vì BD, BE là tiếp tuyến nên $CD \perp BD$, $CE \perp BE$, $CD = CE = 1$.

$BD = BE = \dfrac{1}{\tan\theta}$, $BC = \dfrac{1}{\sin\theta}$, $AB = 3 - \dfrac{1}{\sin\theta}$. Vì B thuộc đoạn AC nên $\sin\theta \in \left[\dfrac{1}{3};1\right)$.

$\widehat{MCE} = \widehat{NCD} = \dfrac{\pi}{2} - \left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \theta$, bán kính bằng 1 nên độ dài cung ME, ND đều bằng θ; $MN = 2$.

Tổng chiều dài lối đi: $f(\theta) = 3 - \dfrac{1}{\sin\theta} + \dfrac{2}{\tan\theta} + 2\theta + 2$.

$f'(\theta)=\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}-\dfrac{2}{\sin^2\theta}+2=\dfrac{\cos\theta(1-2\cos\theta)}{\sin^2\theta}$.

$f'(\theta)=0\Leftrightarrow\cos\theta=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\theta=\dfrac{\pi}{3}$, và $f'(\theta)$ đổi dấu từ âm sang dương qua $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

$f_{\min}=f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=5-\dfrac{2}{\sqrt{3}}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}+\dfrac{2\pi}{3}=5+\dfrac{2\pi}{3}\approx 7{,}1$ (trăm mét).

Đáp án: 7,1.

Câu 31.

$B'A'\parallel AB\subset(ABC')$ nên $d(B'A',BI)=d(B'A',(ABC'))=d(B',(ABC'))=\dfrac{3a}{4}$.

Gọi M là trung điểm AB. Hình thoi $ABB'A'$ có $\widehat{ABB'}=60^\circ$ nên tam giác ABB' đều, suy ra $B'M\perp AB$, $B'M=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Mặt khác $B'C'\parallel BC\perp AB$ nên $AB\perp(C'B'M)$.

Kẻ $B'H\perp C'M$ thì $B'H\perp(ABC')$, do đó $B'H=\dfrac{3a}{4}$.

$B'C'=BC=\sqrt{4a^2-a^2}=a\sqrt{3}$, $C'H=\sqrt{3a^2-\dfrac{9a^2}{16}}=\dfrac{a\sqrt{39}}{4}$, $HM=\sqrt{\dfrac{3a^2}{4}-\dfrac{9a^2}{16}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Vì $CC'\parallel BB'$ nên C,C' cách đều mặt phẳng (ABB'), suy ra $V_{B'.ABC'}=V_{C'.ABB'}=V_{C.ABB'}=V_{B'.ABC}=\dfrac{V}{3}$.

Do $AB\perp C'M$ nên $V=3V_{B'.ABC'}=S_{ABC'}\cdot B'H=\dfrac{1}{2}C'M\cdot AB\cdot B'H=\dfrac{3a^2}{8}C'M$.

Nếu H thuộc đoạn $C'M$ thì $C'M=\dfrac{a\left(\sqrt{39}+\sqrt{3}\right)}{4}$, $V=\dfrac{3a^3\left(\sqrt{39}+\sqrt{3}\right)}{32}>\dfrac{a^3}{2}$ (loại).

Nếu H nằm ngoài đoạn $C'M$ thì $C'M=\dfrac{a\left(\sqrt{39}-\sqrt{3}\right)}{4}$, $V=\dfrac{3a^3\left(\sqrt{39}-\sqrt{3}\right)}{32}\approx 0{,}42a^3<\dfrac{a^3}{2}$ (thỏa mãn).

Vậy $x\approx 0{,}42$.

Đáp án: 0,42.

Câu 32.

Từ ô xuất phát ở giữa bàn cờ, sau nhiều nhất hai bước quân vua vẫn chưa tới biên, nên ở mỗi bước trong ba bước đều có 8 ô để chọn, $n(\Omega)=8^3=512$.

Gọi O là ô xuất phát. Để sau 3 bước trở về O thì ô thứ nhất X và ô thứ hai Y đều kề với O, đồng thời X kề với Y.

Tám ô kề O tạo thành một vòng quanh O: mỗi ô chung cạnh với O (4 ô) kề với 4 ô khác trong vòng, mỗi ô chung đỉnh với O (4 ô) kề với 2 ô khác trong vòng.

Số cách đi thuận lợi: $4 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 24$, xác suất $P = \dfrac{24}{512} = \dfrac{3}{64}$.

Suy ra $a = 3$, $b = 64$, $a + 10b = 643$.

Đáp án: 643.

---------- HẾT ----------