

(Đề thi có 06 trang)

Họ và tên thí sinh:..... SBD:.....

Mã đề thi 168

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Biết phương trình $\log_3 x - \log_5 x \log_2 x = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Tính giá trị biểu thức $T = \log_2(x_1 x_2)$.

- A. $\log_5 2$. B. $\log_3 5$. C. $1 + \log_2 5$. D. $\log_5 3$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau.

x	$-\infty$	0		1	2		$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	-	-		0	+		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		-1	$\searrow$		-6			
					8	$\searrow$		0	$\nearrow$	5

Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

- A. 3. B. 1. C. 0. D. 2.

Câu 3. Trong không gian cho $A(3;5;-2)$, $B(0;-1;1)$, $C(m;n;2)$. Biết A, B, C thẳng hàng, giá trị m, n bằng

- A. $m = 3, n = 1$. B. $m = -1, n = 3$. C. $m = 3, n = -1$. D. $m = -1, n = -3$.

Câu 4. Thời gian (phút) truy cập Internet mỗi buổi tối của một số học sinh ở hai lớp 12A, 12B được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	[9, 5; 12, 5)	[12, 5; 15, 5)	[15, 5; 18, 5)	[18, 5; 21, 5)	[21, 5; 24, 5)
Số học sinh	3	12	15	24	2

Một của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu phút (làm tròn đến hàng phần chục).

- A. 20. B. 19,4. C. 15,3. D. 18,1.

Câu 5. Tìm $\lim u_n$ biết $u_n = \frac{n\sqrt{1+3+5+\dots+(2n-1)}}{2n^2+1}$

- A. $-\infty$. B. 1. C. $\frac{1}{2}$. D. $+\infty$.

Câu 6. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

$f(x) = 4\cos^2 x + \sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4} - 2x\right)$. Tính giá trị biểu thức $T = M^2 - m^2$ (làm tròn đến hàng phần chục).

- A. $T = 11,4$. B. $T = 11,3$. C. $T = 27,2$. D. $T = 27,3$.

Câu 7. Xếp ngẫu nhiên 2 người quốc tịch nước Anh, 2 người quốc tịch nước Pháp và 2 người quốc tịch nước Đức ngồi vào một chiếc bàn dài có 6 ghế, mỗi người ngồi vào một ghế. Tính xác suất để hai người cùng quốc tịch thì không ngồi cạnh nhau. Biết mỗi người chỉ mang một quốc tịch.

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{17}{72}$. C. $\frac{1}{6}$. D. $\frac{11}{36}$.

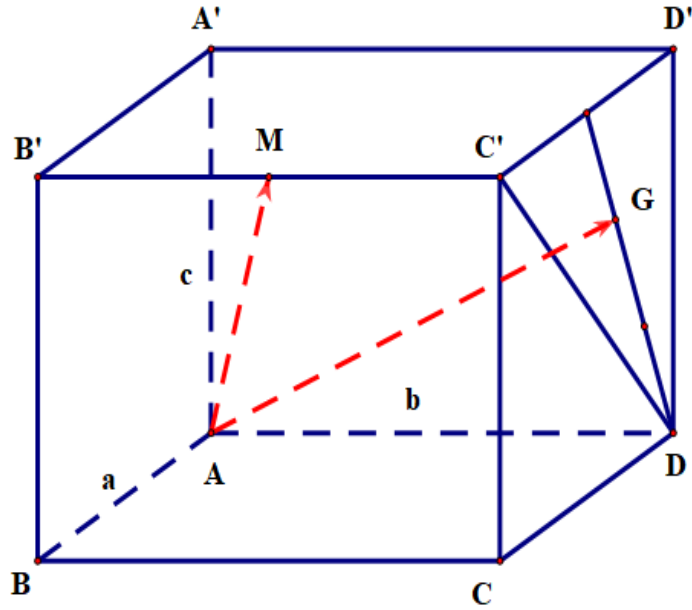
Câu 8. Mỗi ngày bác Quỳnh đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị: km) của bác Quỳnh trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau:

Quãng đường (km)	[2, 7; 3, 0)	[3, 0; 3, 3)	[3, 3; 3, 6)	[3, 6; 3, 9)	[3, 9; 4, 2)
Số ngày	3	6	5	4	2

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

- A. 0,975. B. 0,9. C. 0,5. D. 0,575.

Câu 9. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2, AD = 3, AA' = 4$. Gọi M là trung điểm của $B'C'$ và G là trọng tâm tam giác DCD' . Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AG}$.

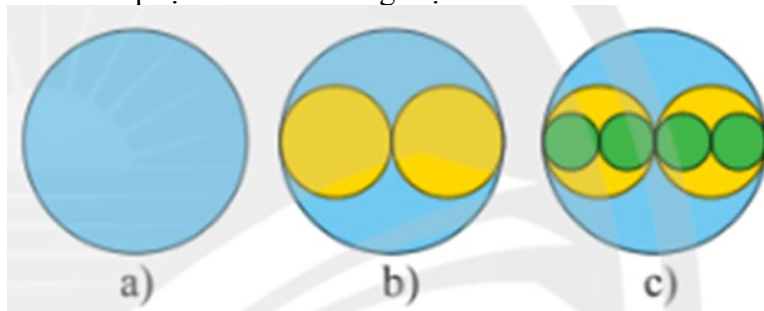


- A. $\frac{61}{6}$. B. $\frac{61}{3}$. C. $\frac{33}{4}$. D. $\frac{33}{2}$.

Câu 10. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm I . Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AC'} = \vec{u}, \overrightarrow{CA'} = \vec{v}, \overrightarrow{BD'} = \vec{x}, \overrightarrow{DB'} = \vec{y}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$. B. $2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$.
C. $2\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$. D. $2\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$.

Câu 11. Từ tờ giấy, cắt một hình tròn bán kính R như Hình 3a. Tiếp theo, cắt hai hình tròn bán kính $\frac{R}{2}$ rồi chồng lên hình tròn đầu tiên như Hình 3b. Tiếp theo, cắt bốn hình tròn bán kính $\frac{R}{4}$ rồi chồng lên các hình trước như Hình 3c. Cứ thế tiếp tục mãi. Tính tổng diện tích của các hình tròn.



- A. $\frac{1}{2}\pi R^2 \text{ cm}^2$. B. $4\pi R^2 \text{ cm}^2$. C. $2\pi R^2 \text{ cm}^2$. D. $\pi R^2 \text{ cm}^2$.

Câu 12. Cho $f(x) = a \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + b \sin x + 6$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Biết rằng $f(\log(\log e)) = 2$. Tính giá trị của $f(\log(\ln 10))$.

- A. 10. B. 8. C. 2. D. 4.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, $SA \perp (ABC)$. Mặt phẳng (SBC) cách A một khoảng bằng a và hợp với mặt phẳng (ABC) góc 30° . Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{8a^3}{3}$. B. $\frac{8a^3}{9}$. C. $\frac{4a^3}{9}$. D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	-1	$+\infty$	

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào, trong các khoảng dưới đây?

- A. $(-1; 2)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(-2; 1)$. D. $(-\infty; -2)$.

Câu 15. Có bao nhiêu cách chia hết 4 đồ vật khác nhau cho 3 người, biết rằng mỗi người nhận được ít nhất một đồ vật.

- A. 72. B. 36. C. 12. D. 3.

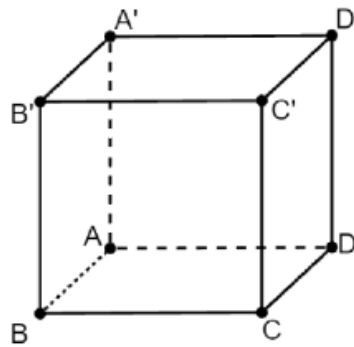
Câu 16. Tổng các nghiệm của phương trình $\sin 2x - \cos x = 0$ trong khoảng $(0; 2\pi)$ là

- A. 2π . B. 3π . C. π . D. 6π .

Câu 17. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(3; 0; 0)$, $D(0; 3; 0)$, $D'(0; 3; -3)$. Toạ độ trọng tâm tam giác $A'B'C'$ là

- A. $(2; 1; -1)$. B. $(1; 1; -2)$. C. $(2; 1; -2)$. D. $(1; 2; -1)$.

Câu 18. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (minh họa như hình bên). Phát biểu nào sau đây là đúng?



- A. $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD'}$. B. $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC'}$.
C. $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB'}$. D. $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; -2)$ và $B(2; 2; 1)$. Vector $\overrightarrow{AB}$ có toạ độ là

- A. $(3; 3; -1)$. B. $(-1; -1; -3)$. C. $(1; 1; 3)$. D. $(3; 1; 1)$.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		-6		-4		-6		$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x) + 4|$ là

- A. 5. B. 7. C. 4. D. 3.

PHẦN II. Trắc nghiệm đúng - sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 2, $SA = 2$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi I là trung điểm BC , M, N là hai điểm thay đổi trên hai cạnh AB, AD sao cho mặt phẳng (SMC) vuông góc với mặt phẳng (SNC) .

- a) Đường thẳng BD vuông góc với đường thẳng SC .

b) Khi thể tích khối chóp $S.AMCN$ đạt giá trị lớn nhất thì $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{5}{4}$.

c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng DI và SC là $\frac{2\sqrt{26}}{13}$.

d) Số đo của góc nhị diện $[B, SC, D]$ bằng 150° .

Câu 2. Một hộp đựng 6 viên bi xanh đánh số từ 1 đến 6, 7 viên bi vàng đánh số từ 1 đến 7 và 8 viên bi đỏ đánh số từ 1 đến 8. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp.

a) Số cách lấy ra 3 viên bi số đôi một khác nhau là 981.

b) Số cách lấy ra 3 viên bi cùng màu là 666.

c) Số cách lấy ra 3 viên bi đôi một khác số đồng thời đôi một khác màu là 216.

d) Số cách lấy ra 3 viên bi có đúng 2 màu là 883.

Câu 3. Công ty nước sạch Thanh Hóa thống kê lượng nước các hộ gia đình trong một khu vực tiêu thụ trong một tháng ở bảng sau:

Lượng nước tiêu thụ (m^3)	[5;8)	[8;11)	[11;14)	[14;17)	[17;20)
Số hộ gia đình	24	57	42	29	8

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Một của mẫu số liệu là $M_o = 10,0625$.

b) Công ty muốn gửi một thông báo khuyến nghị tiết kiệm nước đến 25% các hộ gia đình có lượng nước tiêu thụ cao nhất, Khi đó, công ty nên gửi thông báo tiết kiệm nước đến các hộ gia đình có lượng nước tiêu thụ từ $16,79m^3$ nước trở lên.

c) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là 15.

d) Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là 11,375.

Câu 4. Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = \frac{(m+1)x^2 + (2m+1)x - m + 2}{x+1}$, m là tham số.

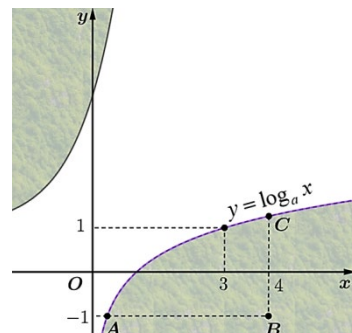
a) Tiệm cận xiên của đồ thị (C) là $y = (m+1)x + m$ với $\forall m \in \mathbb{R}$.

b) Khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ đến tiệm cận xiên của đồ thị (C) bằng 5.

c) Tiệm cận đứng của đồ thị (C) là $x = 1$.

d) Có 1 giá trị của tham số m để đường tiệm cận xiên của đồ thị (C) tạo với Ox , Oy một tam giác có diện tích bằng $\frac{1}{4}$.

Câu 5. Vịnh Hạ Long là một địa danh du lịch được nhiều người biết đến trên thế giới, nơi đây vẫn còn nhiều quần thể đảo lớn nhỏ chưa được khám phá. Một công ty du lịch quyết định khai thác khu vực có một số đảo nhỏ với hình dáng đặc biệt nếu nhìn từ trên xuống; trong số đó có hai hòn đảo mà phần giới hạn đất liền của nó được mô phỏng như hai đồ thị hàm số trên hình. Với hệ trục tọa độ Oxy thích hợp, đơn vị trên mỗi trục là 100 mét, đường cong mô tả cho hòn đảo thứ nhất có dạng $y = \log_a x$ đi qua điểm có tọa độ $(3; 1)$.



a) Điểm có tọa độ $(9; 3)$ thuộc đường cong $y = \log_a x$.

b) Chủ dự án muốn xây dựng một nơi trực tiếp nhìn ra biển để du khách tham quan, ăn uống...Họ đã lựa chọn khu vực tam giác cong ABC như trong hình (đường cong AC tiếp giáp biển); hoành độ của điểm A là $\sqrt{3}$.

c) Chủ dự án đã thuê một số kỹ sư rất giỏi toán (đặc biệt giỏi về hàm số mũ-logarit) đi khảo sát khu vực này và họ nhận thấy có thể bồi đắp thêm cho hòn đảo thứ hai để đường cong giáp biển $y = g(x)$ của nó đối xứng với đường cong $y = \log_a x$ qua đường thẳng $y = x + 1$. Khi đó đường cong $g(x) = 1 + 3 \cdot 3^x$.

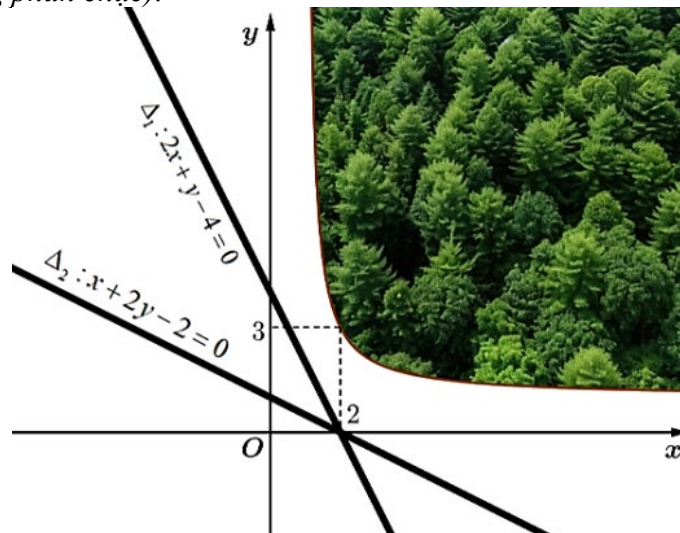
d) Chủ dự án định xây một cây cầu nối liền hai hòn đảo, khoảng cách ngắn nhất theo đường chim bay của cây cầu bằng 285 m (làm tròn đến hàng đơn vị của mét).

Câu 6. Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh a . Lấy các điểm M, N lần lượt thuộc AD và BC sao cho $AM = BN$.

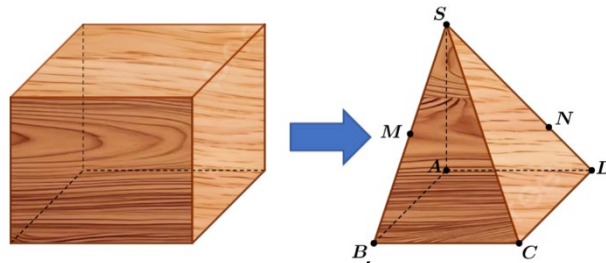
- Với $\overline{AM} = 3\overline{MD}$, $\overline{NB} = -3\overline{NC}$. Khi đó $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AB} - \frac{3}{2}\overline{CD}$.
- Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AD và BC thì $\overline{PQ} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{DC})$.
- Gọi G là trung điểm của PQ , khi đó G là trọng tâm tứ diện $ABCD$.
- Tổng giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của MN bằng a .

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

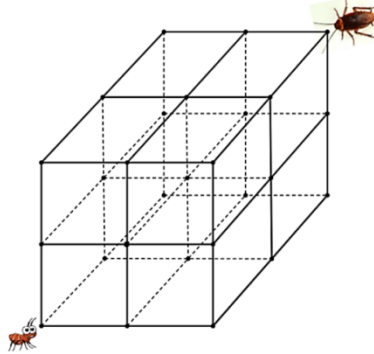
Câu 1. Mảnh đất vườn của nhà anh Điệp có một phần ranh giới cũng là một phần đường cong $(C): y = \frac{x+a}{x+b}$, bao quanh nó là sông nước. Với hệ trục tọa độ Oxy thích hợp, đơn vị trên mỗi trục là 10 mét thì đường cong (C) đi qua điểm $(2; 3)$ và có đường tiệm cận đứng $x = 1$. Hàng ngày anh Điệp phải dùng thuyền máy để vận chuyển trái cây từ khu vườn của mình đến hai tuyến đường $\Delta_1: 2x + y - 4 = 0$ và $\Delta_2: x + 2y - 2 = 0$ cho những người lái buôn từ nơi khác đến. Anh Điệp cần xác định một vị trí $M(x_0; y_0)$ thuộc khu vườn của mình để tổng các khoảng cách từ vị trí M đó đến hai tuyến đường Δ_1, Δ_2 là bé nhất. Hỏi khoảng cách từ vị trí được chọn làm gốc tọa độ đến điểm M là bao nhiêu mét? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



Câu 2. Từ một khối gỗ hình lập phương có cạnh bằng 5 dm, người thợ mộc chỉ cần đến hai lát cắt là có thể tạo ra một khối gỗ có dạng hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA = AB = 5$ dm. Người thợ cần tạo ra một vật để trang trí theo yêu cầu của khách hàng, anh đã chọn M là trung điểm SB , N thuộc cạnh SD sao cho $SN = 2ND$; sau đó anh ta tiếp tục thực hiện các lát cắt để có được vật thể hình tứ diện $ACMN$, thể tích vật thể sau cùng mà người thợ mộc làm ra là bao nhiêu dm^3 ? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



Câu 3. Trong công trường xây dựng, có một bộ khung sắt hình lập phương như hình vẽ (ta xem nó là hình lập phương dạng $2 \times 2 \times 2$). Người ta nhìn thấy một con kiến và một con gián xuất phát cùng lúc trên hai đỉnh thuộc đường chéo lớn của khung sắt hình lập phương và di chuyển trên các cạnh của mỗi hình vuông nhỏ. Con kiến cần đến vị trí mà con gián xuất phát và ngược lại, mỗi con ngày càng di chuyển xa vị trí mà nó xuất phát. Tính xác suất để hai con côn trùng này gặp nhau biết rằng vận tốc của gián bằng 4 cm/s , vận tốc của kiến là 2 cm/s . (Kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).



Câu 4. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $y \log_2 (8x + 2y + 32) - 4x = x^2 + (x^2 + 4x + y) \log_2 (x + 4)$. Khi biểu thức $y - 2x^3$ đạt giá trị lớn nhất, tính giá trị của biểu thức $x + 2y^3$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật $AD = 2AB = 2\sqrt{2}$, đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = 4$. Gọi các điểm M và N thỏa mãn $\overline{BM} = x\overline{BD}$, $\overline{SN} = y\overline{SC}$ và độ dài đoạn MN nhỏ nhất. Tính tổng $2x + 3y$.

Câu 6. Để hạn chế vi phạm thời gian làm việc đối với công nhân, giám đốc công ty quyết định xử lý bằng cách phạt tiền. Nhờ sự giám sát chặt chẽ của các quản đốc, giám đốc công ty biết được trong một tháng, giữa tỉ lệ công nhân vi phạm đúng k lần ($1 \leq k \leq 2$) là $t_k = \frac{N_k}{N}$ (trong đó N_k là số công nhân vi phạm đúng k lần, N là tổng số công nhân) và mức phạt mỗi lần vi phạm có mối liên hệ như sau: Nếu mỗi công nhân nộp phạt x nghìn đồng ($60 \leq x \leq 300$) khi vi phạm lần thứ nhất và nộp phạt $x - 20$ nghìn đồng khi vi phạm lần thứ hai thì $t_1 = \frac{36}{x+10}$ và $t_2 = \frac{4}{x-30}$ (không có công nhân nào vi phạm quá hai lần).

Biết rằng N không đổi và bằng 2400. Tổng số tiền nộp phạt trong một tháng ít nhất là bao nhiêu triệu đồng? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

----- HẾT -----

SỞ GD&ĐT THANH HÓA
TRƯỜNG THPT NHƯ XUÂN

BẢNG ĐÁP ÁN
KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 12

PHẦN I: Trắc nghiệm nhiều lựa chọn

Mã đề	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
168	B	C	D	B	C	B	A	D	D	A	C	A	B	C	B	B	C	B	C	A
277	A	A	D	B	C	B	B	A	B	A	C	C	C	A	D	B	B	A	A	C
364	A	B	A	B	A	A	D	B	D	B	C	A	B	A	A	B	A	B	C	D
413	C	A	A	C	A	C	D	A	B	C	A	C	B	A	B	D	C	B	B	D

PHẦN II: Trắc nghiệm đúng sai

Mã đề	Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6
168	a)Đ - b)Đ - c)S - d)S	a)S - b)S - c)Đ - d)Đ	a)Đ - b)S - c)Đ - d)Đ	a)S - b)S - c)S - d)Đ	a)S - b)S - c)Đ - d)S	a)S - b)Đ - c)Đ - d)S
277	a)Đ - b)S - c)Đ - d)S	a)Đ - b)S - c)Đ - d)Đ	a)S - b)S - c)Đ - d)S	a)S - b)S - c)Đ - d)S	a)Đ - b)S - c)S - d)Đ	a)S - b)S - c)Đ - d)Đ
364	a)S - b)Đ - c)S - d)Đ	a)S - b)S - c)Đ - d)S	a)S - b)S - c)S - d)Đ	a)S - b)Đ - c)Đ - d)S	a)Đ - b)Đ - c)S - d)Đ	a)Đ - b)S - c)S - d)Đ
413	a)Đ - b)S - c)Đ - d)Đ	a)Đ - b)S - c)Đ - d)S	a)S - b)Đ - c)S - d)S	a)S - b)Đ - c)S - d)Đ	a)S - b)Đ - c)S - d)S	a)Đ - b)S - c)Đ - d)S

PHẦN III: Trắc nghiệm trả lời ngắn - tự luận

Mã đề	Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6
168	34,1	10,4	0,27	251	4	103
277	103	0,27	34,1	4	251	10,4
364	103	4	251	34,1	0,27	10,4
413	0,27	4	251	103	10,4	34,1

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	-1	$+\infty$	

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào, trong các khoảng dưới đây?

- A. $(-\infty; -2)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(-2; 1)$. D. $(-1; 2)$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2; 1)$

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau.

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-1	-6	8	0	5

Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là 0.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$				-4			$+\infty$
		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
			-6				-6	

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x) + 4|$

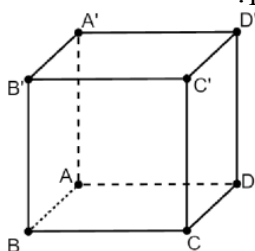
- A. 5 B. 4 C. 7 D. 3

Lời giải

Tính tiền đồ thị $y = f(x)$ theo trục Oy lên trên 4 đơn vị được đồ thị $y = f(x) + 4$

Khi đó, Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x) + 4|$ là 5

Câu 4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (minh họa như hình bên). Phát biểu nào sau đây là đúng?



- A. $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC'}$. B. $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD'}$. C. $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$. D. $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB'}$.

Lời giải

Do $ACC'A'$ là hình bình hành, theo quy tắc hình bình hành ta có: $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC'}$.

Câu 5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm I . Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AC'} = \vec{u}$, $\overrightarrow{CA'} = \vec{v}$, $\overrightarrow{BD'} = \vec{x}$, $\overrightarrow{DB'} = \vec{y}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$.

B. $2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$.

C. $2\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$.

D. $2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$.

Lời giải

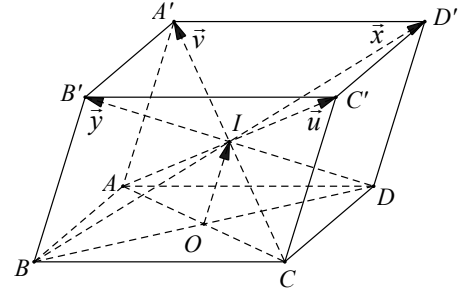
Ta phân tích:

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{CA'} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'}) + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AA'}) = 2\overrightarrow{AA'}.$$

$$\vec{x} + \vec{y} = \overrightarrow{BD'} + \overrightarrow{DB'} = (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DD'}) + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BB'}) = 2\overrightarrow{BB'} = 2\overrightarrow{AA'}.$$

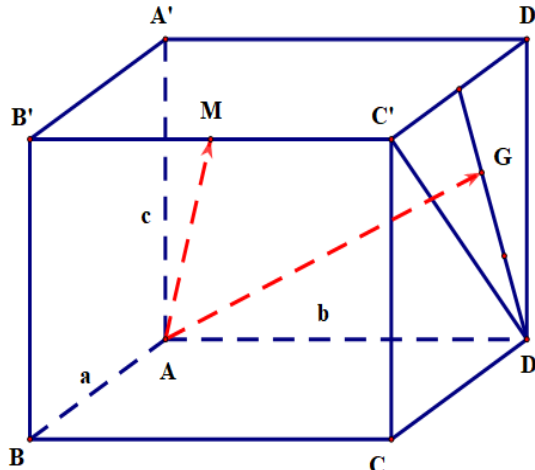
$$\Rightarrow \vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y} = 4\overrightarrow{AA'} = 4.2\overrightarrow{OI}.$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y}).$$



Câu 6. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có

$AB = 2, AD = 3, AA' = 4$. Gọi M là trung điểm của $B'C'$ và G là trọng tâm tam giác DCD' . Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AG}$



A. $\frac{61}{3}$.

B. $\frac{61}{6}$.

C. $\frac{33}{4}$.

D. $\frac{33}{2}$.

Lời giải

Vì $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B'M} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B'C'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Nên ta có: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

Ta có: $3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AC'}$ (vì G là trọng tâm tam giác DCD')

Mà $\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD}$ (vì $ADD'A'$ là hình bình hành), $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ (do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp)

Nên $3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AA'} + 3\overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD}$.

Vì $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA'} = 0$ (các vector đôi một vuông góc)

Nên ta có: $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AG} = \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} \right) \cdot \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} \right) = \frac{1}{3}AB^2 + \frac{1}{2}AD^2 + \frac{2}{3}AA'^2$

$$\frac{1}{3} \cdot 2^2 + \frac{1}{2} \cdot 3^2 + \frac{2}{3} \cdot 4^2 = \frac{33}{2}$$

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-2)$ và $B(2;2;1)$. Vector $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là
A. $(-1;-1;-3)$ **B.** $(3;1;1)$ **C.** $(1;1;3)$ **D.** $(3;3;-1)$

Lời giải

$$\overrightarrow{AB} = (2-1; 2-1; 1-(-2)) \text{ hay } \overrightarrow{AB} = (1;1;3).$$

Câu 8. Trong không gian cho $A(3;5;-2)$, $B(0;-1;1)$, $C(m;n;2)$. Biết A, B, C thẳng hàng, giá trị m, n bằng
A. $m=3, n=-1$. **B.** $m=-1, n=3$. **C.** $m=-1, n=-3$. **D.** $m=3, n=1$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (-3; -6; 3), \overrightarrow{AC} = (m-3; n-5; 4)$$

$$A, B, C \text{ thẳng hàng} \Rightarrow \frac{m-3}{-3} = \frac{n-5}{-6} = \frac{4}{3} \Rightarrow \begin{cases} m-3 = -4 \\ n-5 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = -3 \end{cases}$$

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(3;0;0)$, $D(0;3;0)$, $D'(0;3;-3)$. Tọa độ trọng tâm tam giác $A'B'C$ là
A. $(2;1;-2)$. **B.** $(1;2;-1)$. **C.** $(1;1;-2)$. **D.** $(2;1;-1)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (3;0;0). \text{ Gọi } C(x;y;z) \Rightarrow \overrightarrow{DC} = (x; y-3; z)$$

$$ABCD \text{ là hình bình hành} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow (x; y; z) = (3; 3; 0) \Rightarrow C(3; 3; 0)$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AD} = (0;3;0). \text{ Gọi } A'(x'; y'; z') \Rightarrow \overrightarrow{A'D'} = (-x'; 3-y'; -3-z')$$

$$ADD'A' \text{ là hình bình hành} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'D'} \Rightarrow (x'; y'; z') = (0; 0; -3) \Rightarrow A'(0; 0; -3)$$

$$\text{Gọi } B'(x_0; y_0; z_0) \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = (x_0; y_0; z_0+3)$$

$$ABB'A' \text{ là hình bình hành} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Rightarrow (x_0; y_0; z_0) = (3; 0; -3) \Rightarrow B'(3; 0; -3)$$

$$G \text{ là trọng tâm tam giác } A'B'C \Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{0+3+3}{3} = 2 \\ y_G = \frac{0+0+3}{3} = 1 \\ z_G = \frac{-3-3+0}{3} = -2 \end{cases} \Rightarrow G(2; 1; -2).$$

Câu 10. Thời gian (phút) truy cập Internet mỗi buổi tối của một số học sinh ở hai lớp 12A, 12B được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	[9,5;12,5)	[12,5;15,5)	[15,5;18,5)	[18,5;21,5)	[21,5;24,5)
Số học sinh	3	12	15	24	2

Một của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu phút (làm tròn đến hàng phần chục)

A. 18,1.

B. 19,4.

C. 15,3.

D. 20.

Lời giải

Mốt M_0 chứa trong nhóm $[18,5;21,5)$

$$M_0 = 18,5 + \frac{24-15}{(24-15) + (24-2)} \cdot 3 = 19,4$$

Câu 11. Mỗi ngày bác Quỳnh đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị: km) của bác Quỳnh trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau:

Quãng đường (km)	[2,7;3,0)	[3,0;3,3)	[3,3;3,6)	[3,6;3,9)	[3,9;4,2)
Số ngày	3	6	5	4	2

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

A. 0,9.

B. 0,975.

C. 0,5.

D. 0,575.

Lời giải

Cỡ mẫu $n = 20$

Gọi $x_1; x_2; \dots; x_{20}$ là mẫu số liệu gốc về quãng đường đi bộ mỗi ngày của bác Quỳnh trong 20 ngày được xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có: $x_1; \dots; x_3 \in [2, 7; 3, 0); x_4; \dots; x_9 \in [3, 0; 3, 3); x_{10}; \dots; x_{14} \in [3, 3; 3, 6);$
 $; x_{15}; \dots; x_{18} \in [3, 6; 3, 9); x_{19}; x_{20} \in [3, 9; 4, 2).$

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là $\frac{1}{2}(x_5 + x_6) \in [3, 0; 3, 3).$

Do đó, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là: $Q_1 = 3, 0 + \frac{\frac{20}{4} - 3}{6}(3, 3 - 3, 0) = 3, 1$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $\frac{1}{2}(x_{15} + x_{16}) \in [3, 6; 3, 9).$

Do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$Q_3 = 3, 6 + \frac{\frac{3 \cdot 20}{4} - (3 + 6 + 5)}{4}(3, 9 - 3, 6) = 3, 675$$

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 0, 575$$

Câu 12. Tổng các nghiệm của phương trình $\sin 2x - \cos x = 0$ trong khoảng $(0; 2\pi)$ là

A. 3π .

B. 6π .

C. π .

D. 2π .

Lời giải

Ta có: $\sin 2x - \cos x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin x \cdot \cos x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x \cdot (2 \sin x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ Theo đề: } x \in (0; 2\pi) \Rightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\}.$$

Vậy tổng các nghiệm là 3π .

Câu 13. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

$f(x) = 4 \cos^2 x + \sqrt{2} \cos \left(\frac{3\pi}{4} - 2x \right)$. Tính giá trị biểu thức $T = M^2 - m^2$. (Làm tròn đến hàng phần chục)

A. $T = 27, 2$.

B. $T = 11, 4$.

C. $T = 11, 3$.

D. $T = 27, 3$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f(x) = 4 \cos^2 x + \sqrt{2} \cos \left(\frac{3\pi}{4} - 2x \right) = 2 + 2 \cos 2x + \sin 2x - \cos 2x$

$$= \sin 2x + \cos 2x + 2 = \sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) + 2.$$

$$-\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} + 2 \leq \sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) + 2 \leq \sqrt{2} + 2$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2} + 2 \leq f(x) \leq \sqrt{2} + 2.$$

Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ bằng $\sqrt{2} + 2$ khi $\sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\pi$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ bằng $-\sqrt{2} + 2$ khi $\sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{8} + k\pi$.

$$M^2 - m^2 = \left(2 + \sqrt{2} \right)^2 - \left(2 - \sqrt{2} \right)^2 = 8\sqrt{2} \approx 11, 3.$$

Câu 14. Biết phương trình $\log_3 x - \log_5 x \log_2 x = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$. Tính giá trị biểu thức $T = \log_2(x_1 x_2)$.

A. $\log_5 2$.

B. $\log_5 3$.

C. $\log_3 5$.

D. $1 + \log_2 5$.

Lời giải

Điều kiện: $x > 0$.

Ta có: $\log_3 x - \log_5 x \log_2 x = 0$

$$\Leftrightarrow \log_3 2 \log_2 x - \log_5 x \log_2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x (\log_3 2 - \log_5 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 0 \\ \log_3 2 - \log_5 x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5^{\log_3 2} \end{cases}$$

Suy ra $T = \log_2(5^{\log_3 2}) = \log_3 2 \log_2 5 = \log_3 5$.

Câu 15. Cho $f(x) = a \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + b \sin x + 6$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Biết rằng $f(\log(\log e)) = 2$. Tính giá trị của $f(\log(\ln 10))$

A. 10.

B. 2.

C. 4.

D. 8.

Lời giải

$$\text{Đặt } t = \log(\log(e)) = \log\left(\frac{1}{\ln 10}\right) = -\log(\ln 10) \Leftrightarrow \log(\ln(10)) = -t$$

$$\text{Theo giả thiết ta có: } f(t) = a \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) + b \sin t + 6 = 2 \Leftrightarrow a \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) + b \sin t = -4$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } f(\log(\ln 10)) &= f(-t) = a \ln(-t + \sqrt{t^2 + 1}) + b \sin(-t) + 6 = a \ln \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1} + t} - b \sin t + 6 \\ &= -\left[a \ln(\sqrt{t^2 + 1} + t) + b \sin t\right] + 6 = -(-4) + 6 = 10. \end{aligned}$$

Câu 16. Tìm $\lim u_n$ biết $u_n = \frac{n \cdot \sqrt{1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)}}{2n^2 + 1}$

A. $+\infty$

B. $-\infty$

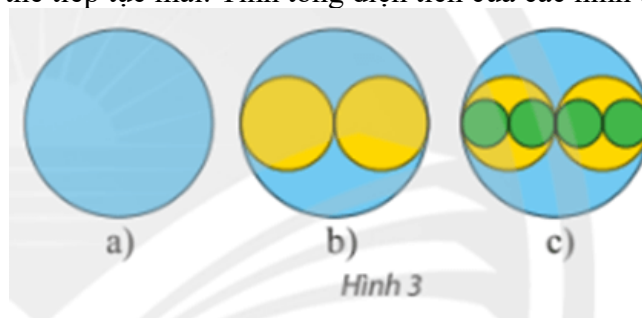
C. $\frac{1}{2}$

D. 1

Lời giải

Ta có: $1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2$ nên $\lim u_n = \frac{1}{2}$

Câu 17. Từ tờ giấy, cắt một hình tròn bán kính R như Hình 3a. Tiếp theo, cắt hai hình tròn bán kính $\frac{R}{2}$ rồi chồng lên hình tròn đầu tiên như Hình 3b. Tiếp theo, cắt bốn hình tròn bán kính $\frac{R}{4}$ rồi chồng lên các hình trước như Hình 3c. Cứ thế tiếp tục mãi. Tính tổng diện tích của các hình tròn.



A. $2\pi R^2 \text{ cm}^2$.

B. $\pi R^2 \text{ cm}^2$.

C. $\frac{1}{2}\pi R^2 \text{ cm}^2$.

D. $4\pi R^2 \text{ cm}^2$.

Lời giải

Diện tích của hình tròn bán kính R là $S_1 = \pi R^2$.

Tổng diện tích của hai hình tròn bán kính $\frac{R}{2}$ là $S_2 = 2\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\pi R^2$.

Tổng diện tích của bốn hình tròn bán kính $\frac{R}{4}$ là $S_3 = 4\pi \left(\frac{R}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}\pi R^2$.

Tổng diện tích của các hình tròn là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = \pi R^2$, công bội $q = \frac{1}{2}$. Do đó,

$$S = \frac{\pi R^2}{1 - \frac{1}{2}} = 2\pi R^2 \text{ cm}^2.$$

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, $SA \perp (ABC)$. Mặt phẳng (SBC) cách A một khoảng bằng a và hợp với mặt phẳng (ABC) góc 30° . Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

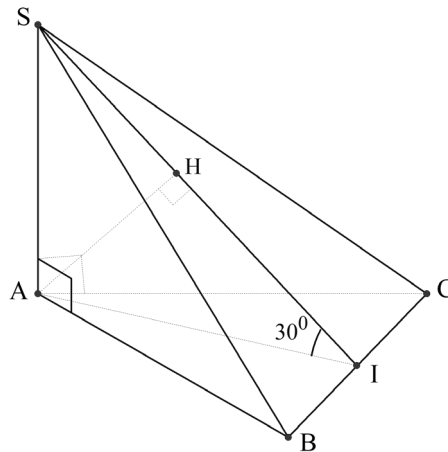
A. $\frac{8a^3}{9}$.

B. $\frac{8a^3}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

D. $\frac{4a^3}{9}$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của BC suy ra góc giữa $\text{mp}(SBC)$ và $\text{mp}(ABC)$ là $\widehat{SIA} = 30^\circ$.

H là hình chiếu vuông góc của A trên SI suy ra $d(A, (SBC)) = AH = a$.

Xét tam giác AHI vuông tại H suy ra $AI = \frac{AH}{\sin 30^\circ} = 2a$.

Giả sử tam giác đều ABC có cạnh bằng x , mà AI là đường cao suy ra $2a = x \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{4a}{\sqrt{3}}$.

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{ABC} = \left(\frac{4a}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{4a^2\sqrt{3}}{3}$.

Xét tam giác SAI vuông tại A suy ra $SA = AI \cdot \tan 30^\circ = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{4a^2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{8a^3}{9}$.

Câu 19. Có bao nhiêu cách chia hết 4 đồ vật khác nhau cho 3 người, biết rằng mỗi người nhận được ít nhất 1 đồ vật.

A. 72.

B. 3.

C. 12.

D. 36.

Lời giải

Có hai người mà mỗi người nhận một đồ vật và một người nhận hai đồ vật.

Chọn hai người để mỗi người nhận một đồ vật: có C_3^2 cách chọn.

Chọn hai đồ vật trao cho hai người: có A_4^2 cách chọn.

Hai đồ vật còn lại trao cho người cuối cùng.

Vậy số cách chia là: $C_3^2 \cdot A_4^2 = 36$ cách.

Câu 20. Xếp ngẫu nhiên 2 người quốc tịch nước Anh, 2 người quốc tịch nước Pháp và 2 người quốc tịch nước Đức ngồi vào một chiếc bàn dài có 6 ghế, mỗi người ngồi vào một ghế. Tính xác suất để hai người cùng quốc tịch thì không ngồi cạnh nhau. Biết mỗi người chỉ mang một quốc tịch.

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{11}{36}$.

D. $\frac{17}{72}$.

Lời giải

Số phần tử không gian mẫu là $n_\Omega = 6! = 720$.

Gọi A là biến cố: “Hai người quốc tịch nước Anh ngồi cạnh nhau”

B là biến cố: “Hai người quốc tịch nước Pháp ngồi cạnh nhau”

C là biến cố: “Hai người quốc tịch nước Đức ngồi cạnh nhau”

X là biến cố: “Hai người cùng quốc tịch thì không ngồi cạnh nhau”

Suy ra $\overline{X}$: “Có hai người cùng quốc tịch nào đó ngồi cạnh nhau”. Dễ thấy: $\overline{X} = A \cup B \cup C$.

Ta có $P(\overline{X}) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2! \cdot 5!}{6!} = \frac{1}{3}; P(A \cap B) = P(B \cap C) = P(C \cap A) = \frac{2! \cdot 2! \cdot 4!}{6!} = \frac{2}{15}.$$

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 3!}{6!} = \frac{1}{15}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } P(\overline{X}) = 3 \cdot \frac{1}{3} - 3 \cdot \frac{2}{15} + \frac{1}{15} = \frac{2}{3} \Rightarrow P(X) = 1 - P(\overline{X}) = \frac{1}{3}.$$

PHẦN 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 21. Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = \frac{(m+1)x^2 + (2m+1)x - m + 2}{x+1}$, m là tham số.

a) Tiệm cận đứng của đồ thị (C) là $x = 1$.

b) Tiệm cận xiên của đồ thị (C) là $y = (m+1)x + m$ với $\forall m \in \mathbb{R}$.

c) Khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ đến tiệm cận xiên của đồ thị (C) bằng 5

d) Có 1 giá trị của tham số m để đường tiệm cận xiên của đồ thị (C) tạo với Ox , Oy một tam giác có diện tích bằng $\frac{1}{4}$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------------	---------------	---------------	----------------

a) Mệnh đề sai.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(m+1) \cdot 1^2 + (2m+1) \cdot 1 - m + 2}{1+1} = m+2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(m+1) \cdot 1^2 + (2m+1) \cdot 1 - m + 2}{1+1} = m+2$$

Do đó $x = 1$ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị (C) .

b) Mệnh đề sai.

ĐK để đồ thị (C) có TCX là $m+1 \neq 0$ và $(m+1) \cdot (-1)^2 + (2m+1) \cdot (-1) - m + 2 \neq 0$

Suy ra $m \neq \pm 1$

c) Mệnh đề sai.

$$\text{Ta có } y = \frac{(m+1)x^2 + (2m+1)x - m + 2}{x+1} = (m+1)x + m + \frac{-2m+2}{x+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [y - ((m+1)x + m)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2m+2}{x+1} = 0$$

Với $m \neq \pm 1$, đồ thị (C) có TCX là $\Delta: y = (m+1)x + m$, điểm cố định mà Δ luôn đi qua với mọi $m \neq \pm 1$ là $K(-1; -1)$ nên $d(O, \Delta) \leq OK = \sqrt{2}$. Khoảng cách lớn nhất là $\sqrt{2}$.

d) Mệnh đề đúng.

Với điều kiện $m \neq \pm 1$, tiệm cận xiên Δ lần lượt cắt hai trục Ox , Oy tại $A\left(\frac{-m}{m+1}; 0\right)$ và $B(0; m)$.

$$\text{Diện tích của tam giác } OAB \text{ là } S = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \left| \frac{-m}{m+1} \right| \cdot |m| = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m^2}{|m+1|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2m^2 = |m+1| \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 = m+1 & (m \geq -1) \\ 2m^2 = -m-1 & (m < -1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 - m - 1 = 0 & (m \geq -1) \\ 2m^2 + m + 1 = 0 & (m < -1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 1 & (\text{loại}) \\ m = -\frac{1}{2} & (tm) \end{cases} \cdot \text{Vậy có 1 giá trị } m = -\frac{1}{2}.$$

Câu 22. Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh a . Lấy các điểm M, N lần lượt thuộc AD và BC sao cho $AM = BN$

a) Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AD và BC thì $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$

b) Gọi G là trung điểm của PQ , khi đó G là trọng tâm tứ diện $ABCD$.

c) Với $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{NB} = -3\overrightarrow{NC}$. Khi đó $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{CD}$

d) Tổng giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của MN bằng a

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
----------------	----------------	---------------	---------------

a) Mệnh đề đúng.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} \\ \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CQ} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}).$$

b) Mệnh đề đúng.

$$\text{Theo tính chất trung điểm ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GP} \\ \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GQ} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2(\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ})$$

Mặt khác $\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Rightarrow G$ là trọng tâm tứ diện $ABCD$.

c) Mệnh đề sai.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \quad (1).$$

$$\text{Mặt khác: } \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MD} = \vec{0}; \overrightarrow{BN} + 3\overrightarrow{CN} = \vec{0}.$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} \Rightarrow 3\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{MD} + 3\overrightarrow{DC} + 3\overrightarrow{CN} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } 4\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{DC}.$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{CD}.$$

d) Mệnh đề sai.

Đặt $\frac{AM}{AD} = x$, với , suy ra $\frac{BN}{BC} = x$. Khi đó, ta có: $\overrightarrow{AM} = x.\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BN} = x.\overrightarrow{BC}$.

Ta có: $\overrightarrow{BN} = x.\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = x(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = x.\overrightarrow{AC} + (1-x).\overrightarrow{AB}$.

Do đó: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = x.\overrightarrow{AC} + (1-x).\overrightarrow{AB} - x.\overrightarrow{AD}$.

$$MN^2 = x^2 a^2 + (1-x)^2 a^2 + x^2 a^2 + 2x(1-x) \frac{a^2}{2} - 2x^2 \cdot \frac{a^2}{2} - 2x(1-x) \frac{a^2}{2}$$

$$= a^2 [x^2 + (1-x)^2 + x^2 + x(1-x) - x^2 - x(1-x)] = a^2 (2x^2 - 2x + 1)$$

Xét hàm số $f(x) = (2x^2 - 2x + 1)$ trên đoạn $[0;1]$

Ta có: $MN_{\min} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ khi $M \equiv P, N \equiv Q$, $MN_{\max} = a$ khi $M \equiv D, N \equiv C$ hoặc $M \equiv A, N \equiv B$

Hay tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của MN bằng $\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)a$.

Câu 23. Công ty nước sạch Thanh Hóa thống kê lượng nước các hộ gia đình trong một khu vực tiêu thụ trong một tháng ở bảng sau:

Lượng nước tiêu thụ (m^3)	[5;8)	[8;11)	[11;14)	[14;17)	[17;20)
Số hộ gia đình	24	57	42	29	8

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là 15.

b) Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là 11,375.

c) Một của mẫu số liệu là $M_o = 10,0625$.

d) Công ty muốn gửi một thông báo khuyến nghị tiết kiệm nước đến 25% các hộ gia đình có lượng nước tiêu thụ cao nhất. Khi đó, công ty nên gửi thông báo tiết kiệm nước đến các hộ gia đình có lượng nước tiêu thụ từ $16,79m^3$ nước trở lên

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

a) Mệnh đề đúng.

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là $R = 20 - 5 = 15$.

b) Mệnh đề đúng.

Cỡ mẫu $n = 160$

Ta có bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu trên như sau

Lượng nước tiêu thụ (m^3)	[5;8)	[8;11)	[11;14)	[14;17)	[17;20)
Giá trị đại diện	6.5	9.5	12.5	15.5	18.5
Số hộ gia đình	24	57	42	29	8

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là:

$$\bar{x} = \frac{1}{160} (24.6,5 + 57.9,5 + 42.12,5 + 29.15,5 + 8.18,5) = 11.375.$$

c) Mệnh đề đúng.

Nhóm chứa một của mẫu số liệu ghép nhóm trên là nhóm $[8;11)$.

Do đó $u_m = 8, n_m = 57, n_{m-1} = 24, u_{m+1} = 11, n_{m+1} = 42$

$$\text{Một của mẫu số liệu là } M_o = 8 + \frac{57 - 24}{(57 - 24) + (57 - 42)} \cdot (11 - 8) \approx 10,0625.$$

d) Mệnh đề sai.

25% các hộ gia đình có lượng nước tiêu thụ cao nhất có lượng nước tiêu thụ không nhỏ hơn Q_3 , với Q_3 là tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu.

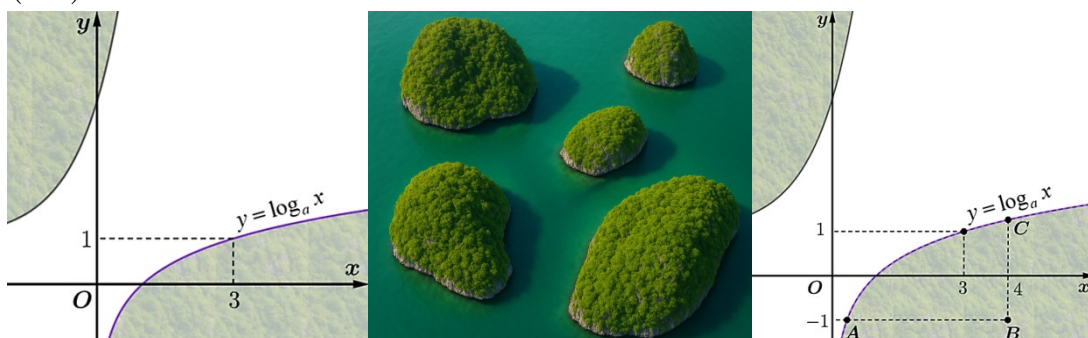
Tứ phân vị thứ ba của dãy số liệu $x_1; x_2; \dots; x_{160}$ là $\frac{1}{2}(x_{120} + x_{121})$.

Do x_{120} và x_{121} thuộc nhóm $[11; 14)$ nên tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu là

$$Q_3 = 11 + \frac{\frac{160 \cdot 3}{4} - (24 + 57)}{42} \cdot (14 - 11) \approx 13,79.$$

Vậy công ty nên gửi thông báo tiết kiệm nước đến các hộ gia đình có lượng nước tiêu thụ từ $13,79 m^3$ nước trở lên.

Câu 24. Vịnh Hạ Long là một địa danh du lịch được nhiều người biết đến trên thế giới, nơi đây vẫn còn nhiều quần thể đảo lớn nhỏ chưa được khám phá. Một công ty du lịch quyết định khai thác khu vực có một số đảo nhỏ với hình dáng đặc biệt nếu nhìn từ trên xuống; trong số đó có hai hòn đảo mà phần giới hạn đất liền của nó được mô phỏng như hai đồ thị hàm số trên hình. Với hệ trục tọa độ Oxy thích hợp, đơn vị trên mỗi trục là 100 mét, đường cong mô tả cho hòn đảo thứ nhất có dạng $y = \log_a x$ đi qua điểm có tọa độ $(3; 1)$.



Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:

a) Điểm có tọa độ $(9; 3)$ thuộc đường cong $y = \log_a x$.

b) Chủ dự án muốn xây dựng một nơi trực tiếp nhìn ra biển để du khách tham quan, ăn uống... Họ đã lựa chọn khu vực tam giác cong ABC như trong hình (đường cong AC tiếp giáp biển); hoành độ của điểm A là $\sqrt{3}$.

c) Chủ dự án đã thuê một số kỹ sư rất giỏi toán (**đặc biệt giỏi về hàm số mũ-logarit**) đi khảo sát khu vực này và họ nhận thấy có thể bồi đắp thêm cho hòn đảo thứ hai để đường cong giáp biển $y = g(x)$ của nó đối xứng với đường cong $y = \log_a x$ qua đường thẳng $y = x + 1$. Khi đó đường cong $g(x) = 1 + 3 \cdot 3^x$.

d) Chủ dự án định xây một cây cầu nối liền hai hòn đảo, khoảng cách ngắn nhất theo đường chim bay của cây cầu bằng 285 m (làm tròn đến hàng đơn vị của mét).

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------------	---------------	----------------	---------------

a) Mệnh đề sai.

Đường cong $y = \log_a x$ đi qua điểm $(3; 1)$ nên $1 = \log_a 3 \Rightarrow a = 3$.

Khi đó hàm số trở thành $y = \log_3 x$; đường cong này không đi qua điểm $(9; 3)$.

b) Mệnh đề sai.

Điểm $A(x_A; -1)$ thuộc đồ thị hàm số $y = \log_3 x \Rightarrow \log_3 x = -1 \Rightarrow x = 3^{-1} = \frac{1}{3}$.

c) Mệnh đề đúng.

Gọi $M(x_M; y_M) \in (C_1): y = \log_3 x$ và $N(x; y) \in (C_2): y = g(x)$.

$$M, N \text{ đối xứng qua } x - y + 1 = 0 \text{ nên ta có: } \begin{cases} \frac{x + x_M}{2} - \frac{y + y_M}{2} + 1 = 0 \\ 1 \cdot (x - x_M) + 1 \cdot (y - y_M) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + x_M - y_M + 2 = 0 \\ x + y - x_M - y_M = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = x + 1 \\ x_M = y - 1 \end{cases} \text{ hay } \boxed{M(y - 1; x + 1)}.$$

Vì $M \in (C_1)$ nên $x+1 = \log_3(y-1) \Rightarrow y-1 = 3^{x+1} \Rightarrow y = 3^{x+1} + 1$ hay $y = g(x) = 1 + 3 \cdot 3^x$.

d) Mệnh đề sai.

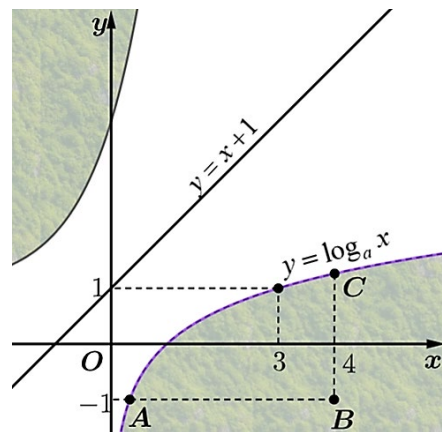
Xét tiếp tuyến của đường cong $y = \log_3 x$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = x + 1$.

Hệ số góc tiếp tuyến là $k = 1$; gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm thì

$$f'(x_0) = k \Rightarrow \frac{1}{x_0 \ln 3} = 1 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{\ln 3}; y_0 = \log_3 \frac{1}{\ln 3}.$$

Độ dài ngắn nhất cây cầu (theo đường chim bay) bằng hai lần khoảng cách từ $M\left(\frac{1}{\ln 3}; \log_3 \frac{1}{\ln 3}\right)$ đến đường thẳng $y = x + 1$.

$$\text{Ta có: } d_{\min} = 2 \cdot \frac{\left| \frac{1}{\ln 3} - \log_3 \frac{1}{\ln 3} + 1 \right|}{\sqrt{2}} \times 100 \approx \boxed{282 \text{ m}}.$$



Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 2, $SA = 2$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi I là trung điểm BC , M, N là hai điểm thay đổi trên hai cạnh AB, AD sao cho mặt phẳng (SMC) vuông góc với mặt phẳng (SNC) .

a) Đường thẳng BD vuông góc với đường thẳng SC .

b) Số đo của góc nhị diện $[B, SC, D]$ bằng 150°

c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng DI và SC là $\frac{2\sqrt{26}}{13}$

d) Khi thể tích khối chóp $S.AMCN$ đạt giá trị lớn nhất thì $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{5}{4}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

a) Mệnh đề đúng.

Do $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$

Suy ra câu a đúng.

b) Mệnh đề sai.

$$BK \perp SC \Rightarrow DK \perp SC \Rightarrow [B, SC, D] = \angle BKD$$

Kẻ

$$BK = DK = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

Tam giác SBC và SDC vuông và bằng nhau nên

$$\cos \angle BKD = -\frac{1}{2} \Rightarrow \angle BKD = 120^\circ$$

Áp dụng ĐL cos trong tam giác KBD có:

. Vậy b sai.

c) Mệnh đề đúng.

Kẻ CJ song song DI

$$\Rightarrow d(DI, SC) = d(D, (SCJ)) = \frac{1}{3} d(A, (SCJ))$$

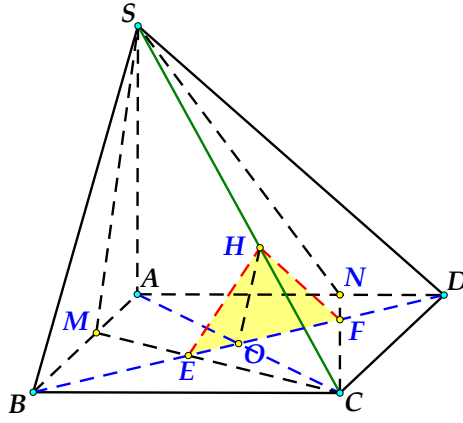
$$AP \perp CJ, AQ \perp SP \Rightarrow d(A, (SCJ)) = AQ$$

$$AP \cdot CJ = AC \cdot AJ \cdot \sin 45^\circ \Rightarrow AP = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow d(DI, SC) = d(D, (SCJ)) = \frac{1}{3} d(A, (SCJ)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{SA \cdot AP}{\sqrt{SA^2 + AP^2}} = \frac{\sqrt{56}}{14}$$

Vậy c sai.

d) Mệnh đề đúng.



Đặt $AM = x, AN = y$ với $0 < x \leq 2, 0 < y \leq 2$.

Ta có: $S_{AMCN} = S_{ABCD} - S_{\Delta NCD} - S_{\Delta MBC} = 4 - \frac{1}{2}(2-y) \cdot 2 - \frac{1}{2}(2-x) \cdot 2 = x + y$

Do đó: $V_{S.AMCM} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{AMCM} = \frac{2}{3}(x + y)$.

Gọi $E = BD \cap (SMC)$, $F = (SNC) \cap BD$ và O là tâm hình vuông.

Dễ dàng chứng minh $BD \perp (SAC) \Rightarrow EF \perp (SAC) \Rightarrow EF \perp SC$

Trong (SMC) , kẻ $EH \perp SC$ tại H (1), do $EF \perp SC$ nên $SC \perp (EHF) \Rightarrow SC \perp HF$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow [(SCM), (SNC)] = (EH, HF) = 90^\circ$ hay $\widehat{EHF} = 90^\circ \Rightarrow EH \perp HF$

Suy ra ΔEHF vuông tại H có đường cao OH (do $EF \perp (SAC), OH \subset (SAC)$)

Suy ra $OH^2 = OE \cdot OF$.

Ta dễ dàng tính được $OH = OC \cdot \sin \widehat{SCA} = OC \cdot \frac{SA}{SC} = \frac{2}{\sqrt{6}} \Rightarrow OE \cdot OF = \frac{2}{3}$.

Gọi K là trung điểm AM . Dễ dàng chứng minh $OK \parallel CM \Rightarrow \frac{BE}{OE} = \frac{BM}{MK} \Rightarrow \frac{OB - OE}{OE} = \frac{2 - x}{\frac{x}{2}} = \frac{2(2 - x)}{x}$

$$\Rightarrow \frac{OB}{OE} = \frac{4 - x}{x} \Rightarrow OE = \frac{x\sqrt{2}}{4 - x}.$$

Chứng minh tương tự, ta có $OF = \frac{y\sqrt{2}}{4 - y}$.

Từ đó ta suy ra $OE \cdot OF = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3xy = (4 - x)(4 - y) \Leftrightarrow (x + 2)(y + 2) = 12$.

Suy ra $y = \frac{12}{x + 2} - 2$ Ta có: $N \in AD \Rightarrow y \leq 2 \Rightarrow \frac{12}{x + 2} - 2 \leq 2 \Leftrightarrow x \geq 1 \Rightarrow x, y \in [1; 2]$.

Vậy $V_{S.AMCM} = \frac{2}{3} \left(x - 2 + \frac{12}{x + 2} \right)$.

Xét $f(x) = \frac{2}{3} \left(x - 2 + \frac{12}{x + 2} \right)$ với $x \in [1; 2]$.

$f'(x) = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{12}{(x + 2)^2} \right)$. Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(\sqrt{3} - 1) \in [1; 2] \\ x = -2(\sqrt{3} - 1) \notin [1; 2] \end{cases}$.

$f(1) = f(2) = 2$ và $f(2\sqrt{3} - 1) = \frac{8(\sqrt{3} - 1)}{3}$.

$$\text{Vậy } V_{\max} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \quad \text{Vậy } T = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{1^2} = \frac{5}{4}$$

Vậy d đúng

Câu 26. Một hộp đựng 6 viên bi xanh đánh số từ 1 đến 6, 7 viên bi vàng đánh số từ 1 đến 7 và 8 viên bi đỏ đánh số từ 1 đến 8. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp.

- a) Số cách lấy ra 3 viên bi số đôi một khác nhau là 981.
- b) Số cách lấy ra 3 viên bi cùng màu là 666.
- c) Số cách lấy ra 3 viên bi có đúng 2 màu là 883.
- d) Số cách lấy ra 3 viên bi đôi một khác số đồng thời đôi một khác màu là 216.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) Mệnh đề đúng.

Gọi A là biến cố 3 bi được chọn có số khác nhau.

Để tính số phần tử của biến cố A ta loại trừ các trường hợp sau:

Trường hợp 1. Cả ba bi lấy được ghi cùng 1 số: Có 6 trường hợp như vậy.

Trường hợp 2. Có đúng 2 bi ghi số giống nhau:

Khả năng 1. 2 bi ghi số giống nhau từ 1 đến 6: Có $6.C_3^2$ cách chọn 2 trong ba bi ghi cùng 1 số nào đó.

Bi còn lại có 18 cách chọn (khác số với hai bi kia). Khả năng này có $6.C_3^2.18$ cách chọn

Khả năng 2. 2 bi ghi số giống nhau là số 7: Có 1 cách chọn hai bi ghi số giống nhau là số 7. Có 19 cách chọn bi còn lại. Khả năng này có 19 cách chọn.

Vậy số phần tử của biến cố A là: $|A| = |\Omega| - 6 - 6C_3^2.18 - 19 = 981$.

b) Mệnh đề sai.

Số cách lấy ra 3 viên bi cùng màu là $C_6^3 + C_7^3 + C_8^3 = 111$.

c) Mệnh đề đúng.

Số cách lấy ra 3 viên bi có đúng 2 màu là:

$$C_{21}^3 - C_6^3 - C_7^3 - C_8^3 - 6.7.8 = 883$$

d) Mệnh đề đúng.

Gọi A là biến cố ba bi lấy được có 3 số khác nhau và 3 màu khác nhau.

Ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1. Bi đỏ được chọn ghi số 8. Khi đó có hai khả năng sau:

Khả năng 1. Bi vàng được chọn ghi số 7. Khi đó có 6 cách chọn bi xanh.

Khả năng 2. Bi vàng được chọn ghi số bé hơn 7. Khi đó bi vàng có 6 cách chọn, bi xanh có 5 cách chọn.

Trường hợp 1 có $6 + 6.5 = 36$ cách chọn.

Trường hợp 2. Bi đỏ được chọn ghi số 7. Khi đó bi vàng có 6 cách chọn (từ 1 đến 6) và bi xanh có 5 cách chọn (vì ghi số phải khác số bi vàng). Trường hợp này có $6.5 = 30$ cách chọn.

Trường hợp 3. Bi đỏ được chọn ghi số bé hơn 7. Bi đỏ có 6 cách chọn.

Khả năng 1. Bi vàng được chọn ghi số 7. Khi đó bi xanh có 5 cách chọn (ghi số khác bi đỏ).

Khả năng 2. Bi vàng được chọn ghi số bé hơn 7 và khác số bi đỏ. Khi đó bi vàng có 5 cách chọn và bi xanh có 4 cách chọn.

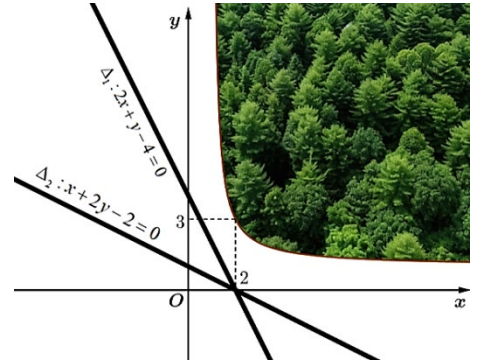
Trường hợp 3 này có $6(5 + 5.4) = 150$ cách chọn.

Vậy số phần tử của biến cố A là: $|A| = 36 + 30 + 150 = 216$.

PHẦN 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 27. Mảnh đất vườn của nhà anh Điệp có một phần ranh giới cũng là một phần đường cong (C):

$y = \frac{x+a}{x+b}$, bao quanh nó là sông nước. Với hệ trục tọa độ Oxy thích hợp, đơn vị trên mỗi trục là 10 mét thì đường cong (C) đi qua điểm $(2; 3)$ và có đường tiệm cận đứng $x = 1$. Hàng ngày anh Điệp phải dùng thuyền máy để vận chuyển trái cây từ khu vườn của mình đến hai tuyến đường $\Delta_1 : 2x + y - 4 = 0$ và $\Delta_2 : x + 2y - 2 = 0$ cho những người lái buôn từ nơi khác đến. Anh Điệp cần xác định một vị trí $M(x_0; y_0)$ thuộc khu vườn của mình để tổng các khoảng cách từ vị trí M đó đến hai tuyến đường Δ_1, Δ_2 là bé nhất. Hỏi khoảng cách từ vị trí được chọn làm gốc tọa độ đến điểm M là bao nhiêu mét (làm tròn đến hàng phần chục)?



Lời giải

Đáp án: 34,1 mét

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -b = 1 \Rightarrow b = -1$.

Khi đó đồ thị hàm số $y = \frac{x+a}{x-1}$ qua $(2; 3) \Rightarrow 3 = \frac{2+a}{2-1} \Rightarrow a = 1$; hàm số là $y = \frac{x+1}{x-1}$ (C).

Gọi $M\left(x_0; \frac{x_0+1}{x_0-1}\right) \in (C)$, $x_0 > 1$. Tổng khoảng cách từ M đến hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 là

$$d = d(M, \Delta_1) + d(M, \Delta_2) = \frac{\left|2x_0 + \frac{x_0+1}{x_0-1} - 4\right|}{\sqrt{5}} + \frac{\left|x_0 + 2 \cdot \frac{x_0+1}{x_0-1} - 2\right|}{\sqrt{5}};$$

$$\sqrt{5}d = \left|\frac{2x_0^2 - 5x_0 + 5}{x_0 - 1}\right| + \left|\frac{x_0^2 - x_0 + 4}{x_0 - 1}\right| = \frac{2x_0^2 - 5x_0 + 5}{x_0 - 1} + \frac{x_0^2 - x_0 + 4}{x_0 - 1} \quad (\text{vì } \begin{cases} 2x_0^2 - 5x_0 + 5 > 0 \\ x_0 - 1 > 0 \\ x_0^2 - x_0 + 4 > 0 \end{cases}, \forall x_0 > 1).$$

$$\text{Đặt } \sqrt{5}d = \frac{3x_0^2 - 6x_0 + 9}{x_0 - 1} = g(x) \text{ với } x > 1.$$

$$\text{Ta có: } g'(x) = \frac{3x_0^2 - 6x_0 - 3}{(x_0 - 1)^2}; \quad g'(x) = 0 \Rightarrow 3x_0^2 - 6x_0 - 3 = 0 \Rightarrow x_0 = 1 + \sqrt{2} > 1.$$

$$\text{Ta có: } \min_{(1; +\infty)} g(x) = g(1 + \sqrt{2}) = 6\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{5}d \geq 6\sqrt{2} \Rightarrow d \geq \frac{6\sqrt{10}}{5}.$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi } x_0 = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow M(1 + \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}).$$

$$\text{Khoảng cách } OM \text{ trên thực tế là } 10 \times \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2 + (1 + \sqrt{2})^2} = 10 \times (1 + \sqrt{2})\sqrt{2} \approx \boxed{34,1} \text{ mét.}$$

Câu 28. Để hạn chế vi phạm thời gian làm việc đối với công nhân, giám đốc công ty quyết định xử lý bằng cách phạt tiền. Nhờ sự giám sát chặt chẽ của các quản đốc, giám đốc công ty biết được trong một tháng, giữa tỉ lệ công nhân vi phạm đúng k lần ($1 \leq k \leq 2$) là $t_k = \frac{N_k}{N}$ (trong đó N_k là số công nhân vi phạm đúng k lần, N là tổng số công nhân) và mức phạt mỗi lần vi phạm có mối liên hệ như sau: Nếu mỗi công nhân nộp phạt x nghìn đồng ($60 \leq x \leq 300$) khi vi phạm lần thứ nhất và nộp phạt $x - 20$ nghìn đồng khi vi phạm lần thứ hai thì $t_1 = \frac{36}{x+10}$ và $t_2 = \frac{4}{x-30}$ (không có công nhân nào vi phạm quá hai lần). Biết rằng N không đổi và bằng 2400. Tổng số tiền nộp phạt trong một tháng ít nhất là bao nhiêu triệu đồng? (làm tròn kết quả ở hàng đơn vị)

Lời giải

Đáp án: 103

$$+ \text{Ti lệ công nhân vi phạm 1 lần là: } t_1 = \frac{N_1}{2400}$$

$$\Rightarrow \text{Số công nhân vi phạm 1 lần là: } N_1 = 2400t_1 = \frac{2400.36}{x+10}.$$

$$+ \text{Ti lệ công nhân vi phạm 2 lần là: } t_2 = \frac{N_2}{2400}$$

$$\Rightarrow \text{Số công nhân vi phạm 2 lần là: } N_2 = 2400t_2 = \frac{2400.4}{x-30}.$$

$\Rightarrow$ Tổng số tiền nộp phạt trong một tháng là:

$$T = N_1.x + N_2.x + N_2(x-20) = N_1x + N_2(2x-20)$$

$$= \frac{2400.36x}{x+10} + \frac{2400.4(2x-20)}{x-30}$$

$$= 2400.4 \left(\frac{9x}{x+10} + \frac{2x-20}{x-30} \right), \quad (60 \leq x \leq 300).$$

$$\text{Ta có: } T' = 2400.4 \left(\frac{90}{(x+10)^2} - \frac{40}{(x-30)^2} \right)$$

$$\Rightarrow T' = 0 \Leftrightarrow 90(x-30)^2 = 40(x+10)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 110 & (N) \\ x = 14 & (L) \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	60	110	300
T'	—	0	+
T			

$$\text{Vậy } T_{\min} = T(110) = 103200 \text{ (nghìn đồng)} = 103,2 \text{ triệu đồng.}$$

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật $AD = 2AB = 2\sqrt{2}$, đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = 4$. Gọi các điểm M và N thỏa mãn $\overline{BM} = x\overline{BD}$, $\overline{SN} = y\overline{SC}$ và độ dài đoạn MN nhỏ nhất. Tổng $2x + 3y$ bằng

Lời giải

Đáp án: 4

$$\text{Ta có } \overline{SN} = y\overline{SC} \Leftrightarrow \overline{SB} + \overline{BN} = y\overline{SC} \Leftrightarrow \overline{BN} = y\overline{SC} - \overline{SB}$$

$$\text{Suy ra } \overline{MN} = \overline{BN} - \overline{BM} = y\overline{SC} - \overline{SB} - x\overline{BD} = y\overline{SC} - \overline{SB} - x(\overline{SD} - \overline{SB})$$

$$= y\overline{SC} + (x-1)\overline{SB} - x\overline{SD} = y(\overline{SA} + \overline{AB} + \overline{AD}) + (x-1)(\overline{SA} + \overline{AB}) - x(\overline{SA} + \overline{AD})$$

$$= (y-1)\overline{SA} + (x+y-1)\overline{AB} + (y-x)\overline{AD}$$

$$\text{Do đó } MN^2 = \left[(y-1)\overline{SA} + (x+y-1)\overline{AB} + (y-x)\overline{AD} \right]^2$$

$$= (y-1)^2 \overline{SA}^2 + (x+y-1)^2 \overline{AB}^2 + (y-x)^2 \overline{AD}^2$$

$$= 16(y-1)^2 + 2(x+y-1)^2 + 8(y-x)^2$$

$$= 10x^2 + 26y^2 - 12xy - 4x - 36y + 18 = f(x)$$

$$\text{Ta có } f'(x) = 20x - 12y - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3y+1}{5}. \text{ Lập bảng biến thiên ta được}$$

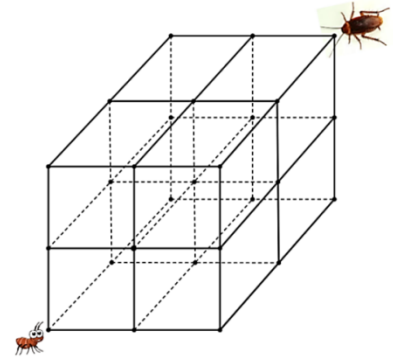
$$f(x) \geq f\left(\frac{3y+1}{5}\right) = \frac{1}{5}(112y^2 - 192y + 88) = \frac{112}{5}\left(y^2 - \frac{12}{7}y + \frac{11}{14}\right)$$

$$= \frac{112}{5} \left[\left(y - \frac{6}{7} \right)^2 + \frac{5}{98} \right] \geq \frac{8}{7}, \text{ dấu "=" có khi } y = \frac{6}{7} \Rightarrow x = \frac{5}{7}.$$

Vậy $MN_{\min} = \sqrt{\frac{8}{7}}$ khi $x = \frac{5}{7}, y = \frac{6}{7} \Rightarrow 2x + 3y = 4$.

Chú ý: Có thể giải bằng cách: $MN_{\min} \Leftrightarrow MN \perp BD, MN \perp SC$.

Câu 30. Trong công trường xây dựng, có một bộ khung sắt hình lập phương như hình vẽ (ta xem nó là hình lập phương dạng $2 \times 2 \times 2$). Người ta nhìn thấy một con kiến và một con gián xuất phát cùng lúc trên hai đỉnh thuộc đường chéo lớn của khung sắt hình lập phương và di chuyển trên các cạnh của mỗi hình vuông nhỏ. Con kiến cần đến vị trí mà con gián xuất phát và ngược lại, mỗi con ngày càng di chuyển xa vị trí mà nó xuất phát. Tính xác suất để hai con côn trùng này gặp nhau biết rằng vận tốc của gián bằng 4 cm/s , vận tốc của kiến là 2 cm/s . Kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm.



Lời giải

Đáp án: 0,27

Ta xem mỗi bước di chuyển của mỗi con là 1 đơn vị (ứng với cạnh hình vuông nhỏ).

Để đi hết hành trình của mình thì gián cần đi xuống 2 đơn vị, sang trái 2 đơn vị và đi dọc 2 đơn vị (có tất cả là 6 bước di chuyển) nên số cách đi của gián là $C_6^2 C_4^2$; hoàn toàn tương tự kiến cũng có số cách đi là $C_6^2 C_4^2$.

Gọi Ω là không gian mẫu thì $n(\Omega) = (C_6^2 C_4^2)^2$.

Vận tốc của gián gấp đôi vận tốc của kiến nên nếu hai con gặp nhau thì tại vị trí chúng gặp gián đã di chuyển 4 bước, kiến di chuyển 2 bước. Vị trí hai con gặp nhau (nếu có) được đánh dấu ở 6 vị trí trên hình vẽ.

Tại vị trí A: Gián có 2 lần di chuyển sang trái, 2 lần di chuyển dọc; sau đó đi từ A đến đích thì nó cần 2 lần đi xuống. Số cách đi của gián là $C_4^2 C_2^2 C_2^2$. Hành trình của kiến cũng tương tự mà theo chiều ngược lại nên kiến có $C_4^2 C_2^2 C_2^2$ cách đi. Số cách đi hai con là $(C_4^2 C_2^2 C_2^2)^2$.

Tại các vị trí A, C, E thì số cách đi mỗi con là như nhau.

Tại vị trí B: Số cách đi của hai con là $(C_4^1 C_3^1 C_2^2 C_2^1)^2$.

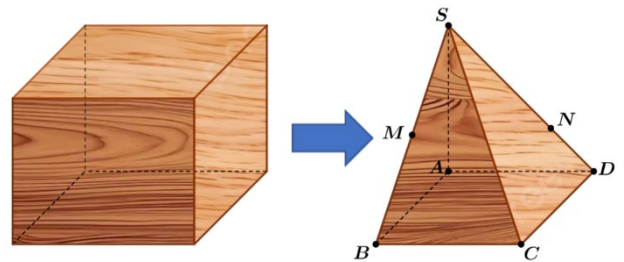
Tại các vị trí B, D, F thì số cách đi mỗi con là như nhau.

Gọi X là biến cố hai con côn trùng gặp nhau trên đường đi, ta có:

$$P(X) = \frac{3(C_4^2 C_2^2 C_2^2)^2 + 3(C_4^1 C_3^1 C_2^2 C_2^1)^2}{(C_6^2 C_4^2)^2} = \frac{17}{75} \approx \boxed{0,27}.$$

Câu 31. Từ một khối gỗ hình lập phương có cạnh bằng 5 dm , người thợ mộc chỉ cần đến hai lát cắt là có thể tạo ra một khối gỗ có dạng hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA = AB = 5 \text{ dm}$.

Người thợ cần tạo ra một vật để trang trí theo yêu cầu của khách hàng, anh đã chọn M là trung điểm SB , N thuộc cạnh SD sao cho $SN = 2ND$; sau đó anh ta tiếp tục thực hiện các lát cắt để có được vật thể hình tứ diện $ACMN$, thể tích vật thể sau cùng mà người thợ mộc làm ra là bao nhiêu dm^3 (làm tròn đến hàng phần chục)?



Lời giải

Đáp án: 10,4

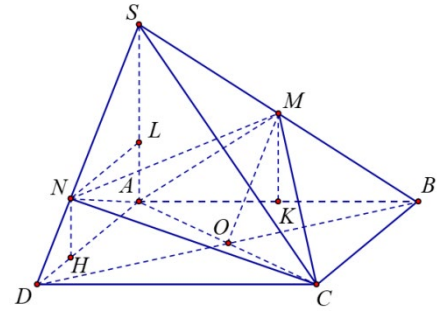
Gọi O là giao điểm của AC và BD trong mặt phẳng đáy.

$$\text{Ta có } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{5^3}{3} = \frac{125}{3}.$$

Vì OM là đường trung bình tam giác SBD nên $OM \parallel SD$
 $\Rightarrow SD \parallel (AMC)$.

$$\text{Do đó } d(N, (AMC)) = d(D, (AMC)) = d(B, (AMC)).$$

$$\text{Suy ra: } V_{ACMN} = V_{N.MAC} = V_{D.MAC} = V_{B.MAC} = V_{M.ABC}.$$



$$\text{Ta lại có } \frac{V_{M.ABC}}{V_{S.ABC}} = \frac{d(M, (ABCD)) \cdot S_{ABC}}{d(S, (ABCD)) \cdot S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} d(S, (ABCD)) \cdot \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD}}{d(S, (ABCD)) \cdot S_{ABCD}} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow V_{M.ABC} = \frac{1}{4} V_{S.ABC} = \frac{1}{4} \cdot \frac{125}{3} = \frac{125}{12} \approx 10,4 \text{ dm}^3.$$

Câu 32. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $y \log_2(8x + 2y + 32) - 4x = x^2 + (x^2 + 4x + y) \log_2(x + 4)$
 Khi biểu thức $y - 2x^3$ đạt giá trị lớn nhất, Tính giá trị của biểu thức $x + 2y^3$.

Lời giải

Đáp án: 251

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } y \log_2(8x + 2y + 32) - 4x &= x^2 + (x^2 + 4x + y) \log_2(x + 4) \\ \Leftrightarrow y[1 + \log_2(4x + y + 16)] &= y \log_2(x + 4) + x(x + 4)[1 + \log_2(x + 4)] \\ \Leftrightarrow y[1 + \log_2(4x + y + 16) - \log_2(x + 4)] &= x(x + 4)[1 + \log_2(x + 4)] \\ \Leftrightarrow \frac{y}{x + 4} \left(1 + \log_2 \frac{4x + y + 16}{x + 4} \right) &= x[1 + \log_2(x + 4)] \\ \Leftrightarrow \frac{y}{x + 4} \left[1 + \log_2 \left(\frac{y}{x + 4} + 4 \right) \right] &= x[1 + \log_2(x + 4)] \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = x[1 + \log_2(x + 4)]$ xác định trên $(0; +\infty)$

$$\text{Ta có: } f'(x) = 1 + \log_2(x + 4) + \frac{x}{(x + 4) \ln 2} > 0, \forall x > 0$$

Suy ra $f(x) = x[1 + \log_2(x + 4)]$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Suy ra, (1)} \Leftrightarrow \frac{y}{x + 4} = x \Leftrightarrow y = x^2 + 4x$$

$$\text{Nên } y - 2x^3 = -2x^3 + x^2 + 4x.$$

Xét hàm số $g(x) = -2x^3 + x^2 + 4x$ trên $(0; +\infty)$:

$$\text{Ta có } g'(x) = -6x^2 + 2x + 4, \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Lập BBT tìm được $\min_{(0; +\infty)} g(x) = g(1) = 3$ (đạt được khi và chỉ khi $x = 1$).

Với $x = 1$ thì $y = 5$ và $x + 2y^3 = 251$.

Xem thêm: ĐỀ THI HSG TOÁN 12
<https://toanmath.com/de-thi-hsg-toan-12>