

ĐỀ CHÍNH THỨC

Ngày thi: 17/9/2026

Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 180 phút

Bài 1. (6,0 điểm) Với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$, xét phương trình

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+2)} + \dots + \frac{1}{n(x+n)} = 1.$$

a) Chứng minh phương trình trên luôn có một nghiệm dương duy nhất x_n với mỗi $n \geq 2$.

b) Đặt $y_n = n^{\frac{1}{2026}}(1 - x_n)$, $\forall n \geq 2$. Tính $\lim y_n$.

Bài 2. (7,0 điểm) Một số nguyên dương $n > 1$ được gọi là "đẹp" nếu tồn tại các số nguyên dương đôi một phân biệt $d_1, d_2, \dots, d_k$ (với $k \geq 2$) sao cho $n = d_1 d_2 \dots d_k$ và $d_i^2 \mid (n + 3d_i)$, $\forall i = \overline{1, k}$. Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên dương "đẹp".

a) Giả sử $n \in S$ là số chính phương không chia hết cho 3, $n = d_1 d_2 \dots d_k$ và $d_i^2 \mid (n + 3d_i)$, $\forall i = \overline{1, k}$. Chứng minh các số d_i ($i = 1, 2, \dots, k$) đôi một nguyên tố cùng nhau và là các số chính phương.

b) Chứng minh tập hợp S có vô hạn phần tử.

Bài 3. (7,0 điểm) Cho hình bình hành $ABCD$ có góc A nhọn, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O . Đường tròn (I) nội tiếp tam giác OBC tiếp xúc với BC tại E .

a) Giả sử tam giác ADE nhọn. Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ABE, ADE, CDE . Chứng minh trục tâm của tam giác $O_1 O_2 O_3$ nằm trên AD .

b) Lấy điểm S khác O sao cho SA và SD cùng tiếp xúc với (I) . Gọi K là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác SAD . Chứng minh OK đi qua trung điểm của AD .

HẾT

Ghi chú: - Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị không giải thích gì thêm.

ĐỀ CHÍNH THỨC

Ngày thi: 18/9/2026

Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 180 phút

Bài 1. (7,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M, N lần lượt là trung điểm cung nhỏ BC và cung $\widehat{BAC}$ của đường tròn (O) .

a) Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác AMB, AMC . Chứng minh bốn điểm A, N, I, J cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi (K) là đường tròn tiếp xúc với AM, AB và tiếp xúc trong với (O) ; (L) là đường tròn tiếp xúc với AM, AC và tiếp xúc trong với (O) . Tiếp tuyến chung trong (khác AM) của (K) và (L) cắt MN tại Z . Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác AZN tiếp xúc với cả (K) và (L) .

Bài 2. (7,0 điểm) Có N người ngồi thành một vòng tròn (với $N \geq 3$), mỗi người cầm k tấm thẻ (với $k \geq 2$), trên mỗi tấm thẻ được ghi một số thuộc tập $\{1; 2; 3; \dots; N\}$. Mỗi số thuộc tập trên được ghi đúng trên k tấm thẻ, tức là có k thẻ được ghi số 1, k thẻ được ghi số 2, ..., k thẻ được ghi số N . Cả N người cùng thực hiện trò chơi như sau: Mỗi lượt chơi, mỗi người đều giữ lại những thẻ được ghi số lớn nhất trong những thẻ mà mình đang có (có thể nhiều hơn một thẻ) rồi chuyển cho người bên tay trái những thẻ còn lại. Trò chơi sẽ dừng lại khi xuất hiện ít nhất một người giữ trong tay k thẻ có ghi số giống nhau (có thể họ đang giữ nhiều hơn k thẻ).

a) Với $N = 25, k = 2$, chứng minh rằng trò chơi luôn dừng lại sau hữu hạn lượt chơi mà không phụ thuộc vào việc ban đầu họ cầm thẻ thế nào.

b) Tìm tất cả các giá trị của k và N để trò chơi dừng lại sau hữu hạn lượt chơi mà không phụ thuộc vào việc ban đầu họ cầm thẻ thế nào.

Bài 3. (6,0 điểm) Cho đa thức hệ số thực $P(x) = x^{2026} + a_1x^{2025} + \dots + a_{2025}x + a_{2026}$ với $a_{2024} = 0$ và $a_{2025}a_{2026} > 0$. Biết rằng đa thức $P(x)$ có 2026 nghiệm thực.

a) Chứng minh rằng $P(x)$ có cả nghiệm âm và nghiệm dương.

b) Xét dãy đa thức $P_1(x) = P(x), P_{n+1}(x) = P(P_n(x)), \forall n \geq 1$. Chứng minh rằng đa thức $P_{2026}(x)$ có cả nghiệm âm và nghiệm dương.

HẾT

Ghi chú: Giám thị không giải thích gì thêm.

CHỌN ĐTQG QUẢNG NGÃI 2026 – NGÀY 1

Bài toán 0.1. (Lim Olympic - Quảng Ngãi TST - P1)

Với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$, xét phương trình

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+2)} + \cdots + \frac{1}{n(x+n)} = 1.$$

- ① Chứng minh phương trình trên luôn có một nghiệm dương duy nhất x_n với mỗi $n \geq 2$.
- ② Đặt $y_n = n^{\frac{1}{2026}}(1 - x_n)$, $\forall n \geq 2$. Tính $\lim y_n$.

 Lời giải.

Với mỗi $n \geq 2$, đặt $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(x+k)}$ với $x \geq 0$.

- ① Ta có $f_n(0) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} > 1$, do $n \geq 2$ và $f_n(0) \geq 1 + \frac{1}{4} > 1$.

Mặt khác, $f_n(1) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{n}{n+1} < 1$.

Vì f_n liên tục nên tồn tại $x_n \in (0, 1)$ sao cho $f_n(x_n) = 1$.

Hơn nữa, nếu $0 \leq x < y$ thì với mọi $k = 1, 2, \dots, n$ ta có $\frac{1}{k(x+k)} > \frac{1}{k(y+k)}$, suy ra $f_n(x) > f_n(y)$.

Do đó f_n giảm ngặt trên $[0, +\infty)$, nên nghiệm dương x_n nói trên là duy nhất.

- ② Ta có $0 < x_n < 1$. Mặt khác, $f_n(x_n) = 1$ và $f_n(1) = \frac{n}{n+1}$, nên

$$\frac{1}{n+1} = f_n(x_n) - f_n(1) = (1 - x_n) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+x_n)(k+1)}.$$

Vì $0 < x_n < 1$ nên $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+x_n)(k+1)} \geq \frac{1}{2(1+x_n)} > \frac{1}{4}$.

Do đó $0 < 1 - x_n < \frac{4}{n+1}$ hay $0 < y_n = n^{1/2026}(1 - x_n) < \frac{4n^{1/2026}}{n+1}$.

Vì thế theo nguyên lý kẹp, ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$.

Nhận xét.

Trên thực tế, ta cũng có thể chứng minh được giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - x_n)$ là hữu hạn và khác 0.

Bài toán 0.2. (Lim Olympic - Quảng Ngãi TST - P2)

Một số nguyên dương $n > 1$ được gọi là **đẹp** nếu tồn tại các số nguyên dương đôi một phân biệt $d_1, d_2, \dots, d_k$ (với $k \geq 2$) sao cho $n = d_1 d_2 \dots d_k$ và $d_i^2 \mid (n + 3d_i)$, $\forall i = \overline{1, k}$. Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên dương **đẹp**.

- ① Giả sử $n \in S$ là số chính phương không chia hết cho 3, $n = d_1 d_2 \dots d_k$ và $d_i^2 \mid (n + 3d_i)$, $\forall i = \overline{1, k}$. Chứng minh các số d_i ($i = 1, 2, \dots, k$) đôi một nguyên tố cùng nhau và là các số chính phương.
- ② Chứng minh tập hợp S có vô hạn phần tử.

Lời giải.

- ① Giả sử tồn tại $1 \leq i < j \leq k$ sao cho d_i, d_j có một ước nguyên tố chung p .

Từ $d_i^2 \mid n + 3d_i$, do $d_i \mid n$, suy ra $d_i \mid \frac{n}{d_i} + 3$. Tương tự, $d_j \mid \frac{n}{d_j} + 3$.

Đặt $D_i = \frac{n}{d_i}$. Vì $d_j \mid D_i$ nên $p \mid D_i$. Mặt khác, $p \mid d_i$ và $d_i \mid D_i + 3$, suy ra $p \mid D_i + 3$.

Do đó $p \mid 3$, nên $p = 3$. Khi ấy $3 \mid d_i \mid n$, mâu thuẫn với giả thiết $3 \nmid n$.

Vậy các số $d_1, d_2, \dots, d_k$ đôi một nguyên tố cùng nhau.

Bây giờ $n = d_1 d_2 \dots d_k$ là số chính phương.

Với mỗi ước nguyên tố p của d_i , do các d_j đôi một nguyên tố cùng nhau nên $v_p(n) = v_p(d_i)$.

Vì n là số chính phương nên $v_p(n)$ chẵn. Suy ra $v_p(d_i)$ chẵn với mọi ước nguyên tố p của d_i .

Do đó mỗi d_i là một số chính phương.

- ② Xét dãy $(n_m)_{m \geq 0}$ xác định bởi $n_0 = 18$ và $n_{m+1} = n_m \frac{n_m + 3}{3}$.

Ta chứng minh bằng quy nạp mệnh đề sau: Với mỗi $m \geq 0$, tồn tại các số nguyên dương đôi một phân biệt $d_1, d_2, \dots, d_r$ sao cho $n_m = d_1 d_2 \dots d_r$, $d_i^2 \mid n_m + 3d_i$ và $d_i \mid \frac{n_m}{3}$ với mọi i .

Với $m = 0$, ta có $n_0 = 18 = 3 \cdot 6$ nên mệnh đề đúng với $m = 0$.

Giả sử mệnh đề đúng với m , và viết $n_m = d_1 d_2 \dots d_r$. Đặt $d_{r+1} = \frac{n_m + 3}{3} = \frac{n_m}{3} + 1$.

Khi đó $n_{m+1} = n_m d_{r+1} = d_1 d_2 \dots d_r d_{r+1}$.

Với $1 \leq i \leq r$, từ $d_i \mid \frac{n_m}{3}$ suy ra $d_i \mid d_{r+1} - 1$. Ta có $n_{m+1} + 3d_i = d_{r+1}(n_m + 3d_i) + 3d_i(1 - d_{r+1})$.

Theo giả thiết quy nạp, $d_i^2 \mid n_m + 3d_i$. Mặt khác, $d_i \mid d_{r+1} - 1$, nên $d_i^2 \mid 3d_i(1 - d_{r+1})$.

Do đó $d_i^2 \mid n_{m+1} + 3d_i$.

Đối với số d_{r+1} , ta có $n_{m+1} + 3d_{r+1} = d_{r+1}(n_m + 3) = 3d_{r+1}^2$, nên $d_{r+1}^2 \mid n_{m+1} + 3d_{r+1}$.

Ta cũng có $d_i \mid \frac{n_m}{3} \mid \frac{n_{m+1}}{3}$ với $1 \leq i \leq r$, còn $d_{r+1} \mid \frac{n_{m+1}}{3}$.

Cuối cùng, do $d_i \mid \frac{n_m}{3}$ nên $d_i \leq \frac{n_m}{3} < \frac{n_m}{3} + 1 = d_{r+1}$ nên d_{r+1} khác tất cả các số $d_1, \dots, d_r$.

Suy ra mệnh đề quy nạp đúng, nên n_m là số đẹp với mọi $m \geq 0$.

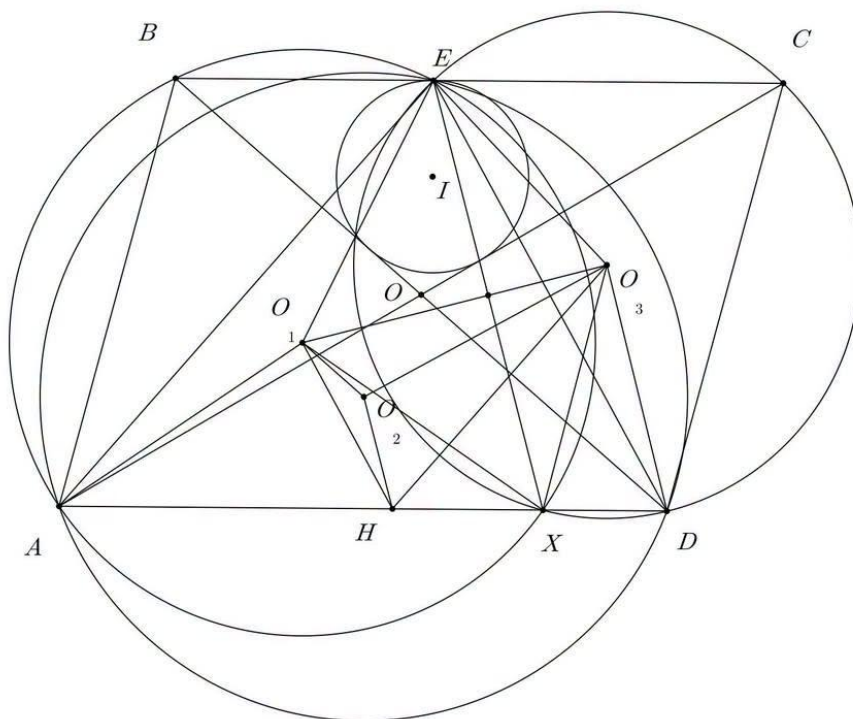
Mặt khác, $\frac{n_m + 3}{3} > 1$, nên $n_{m+1} > n_m$. Do đó các số n_m đôi một khác nhau.

Vậy tập hợp S có vô hạn phần tử.

Bài toán 0.3. (Lim Olympic - Quảng Ngãi TST - P3)

Cho hình bình hành $ABCD$ có góc A nhọn, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O . Đường tròn (I) nội tiếp tam giác OBC tiếp xúc với BC tại E .

- ① Giả sử tam giác ADE nhọn. Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ABE, ADE, CDE . Chứng minh trực tâm của tam giác $O_1O_2O_3$ nằm trên AD .
- ② Lấy điểm S khác O sao cho SA và SD cùng tiếp xúc với (I) . Gọi K là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác SAD . Chứng minh OK đi qua trung điểm của AD .



Lời giải.

- ① Xét thế hình trên. Gọi (AEB) cắt AD tại X , do $BE \parallel AX \Rightarrow BEXA$ là hình thang cân.
 $\Rightarrow \angle EXD = \angle ABE = \angle XDC \Rightarrow ECDX$ là hình thang cân $\Rightarrow X$ nằm trên (ECD) .

Ta thấy O_1O_2 là trung trực AE , O_2O_3 là trung trực ED .

$$\Rightarrow \angle O_1O_2O_3 = 180^\circ - \angle AED \text{ và } \angle AEO_1 = 90^\circ - \frac{\angle EO_1A}{2} = 90^\circ - \angle EXA = \angle DEO_3.$$

$$\Rightarrow \angle AED = \angle O_1EO_3.$$

Gọi H là trực tâm $\Delta O_1O_2O_3 \Rightarrow \angle O_1HO_3 = 180^\circ - \angle O_1O_3O_2 = \angle O_1EO_3 = \angle O_1XO_3$
 (do O_1O_3 là trung trực EX).

$$\Rightarrow \text{Tứ giác } O_1O_3XH \text{ nội tiếp} \Rightarrow \angle O_1XH = \angle O_1O_3H.$$

$$\text{Lại có } O_3H \parallel AE \text{ và } O_1O_3 \perp EX \Rightarrow \angle O_1O_3H = 90^\circ - \angle AEX = \angle O_1XA \Rightarrow \angle O_1XH = \angle O_1XA.$$

$$\Rightarrow H \text{ nằm trên } AD.$$

2 Gọi (J) là đường tròn nội tiếp $\triangle OAD$ tiếp xúc AD tại F . Do O là tâm đối xứng biến BC thành AD nên O là trung điểm $IJ, EF \Rightarrow IE = JF$.

Gọi U, V, Y, Z lần lượt là tiếp điểm của (I) với AC, BD, SD, SA .

$$\Rightarrow SA - SD = (AZ + ZS) - (SY + YD) = AU - VD = OA - OD = EC - EB = AF - DF.$$

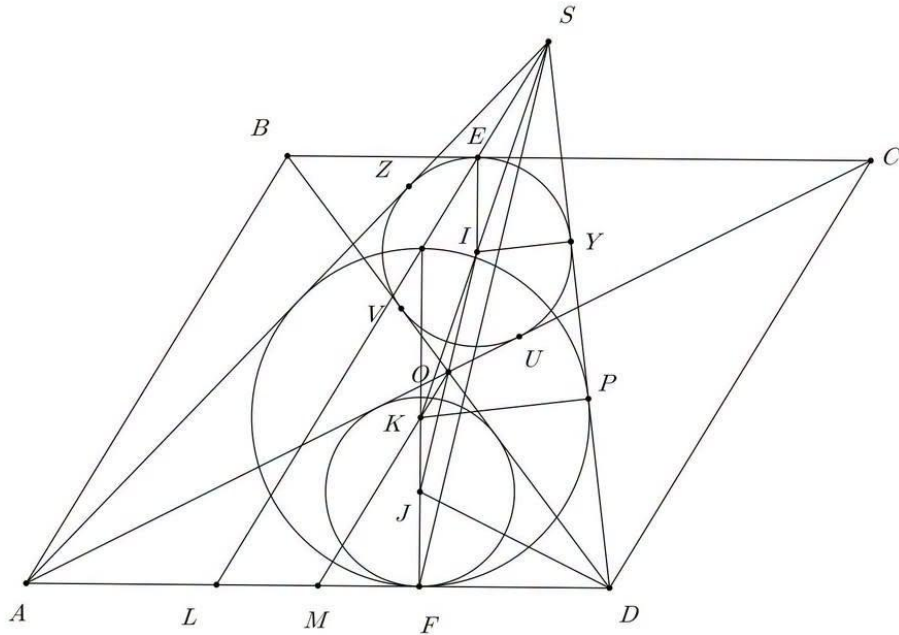
Gọi F' là tiếp điểm của (K) với $AD \Rightarrow AF' - DF' = SA - SD$.

$$\Rightarrow AF' - DF' = AF - DF \text{ và } AF' + DF' = AF + DF.$$

$$\Rightarrow AF = AF' \Rightarrow F' \text{ trùng } F \text{ hay } K, J, F \text{ thẳng hàng.}$$

$$\text{Gọi } (K) \text{ tiếp xúc } SD \text{ tại } P \Rightarrow \frac{SI}{SK} = \frac{IY}{KP} = \frac{IE}{KF} = \frac{JF}{KF} \Rightarrow IJ \parallel SF.$$

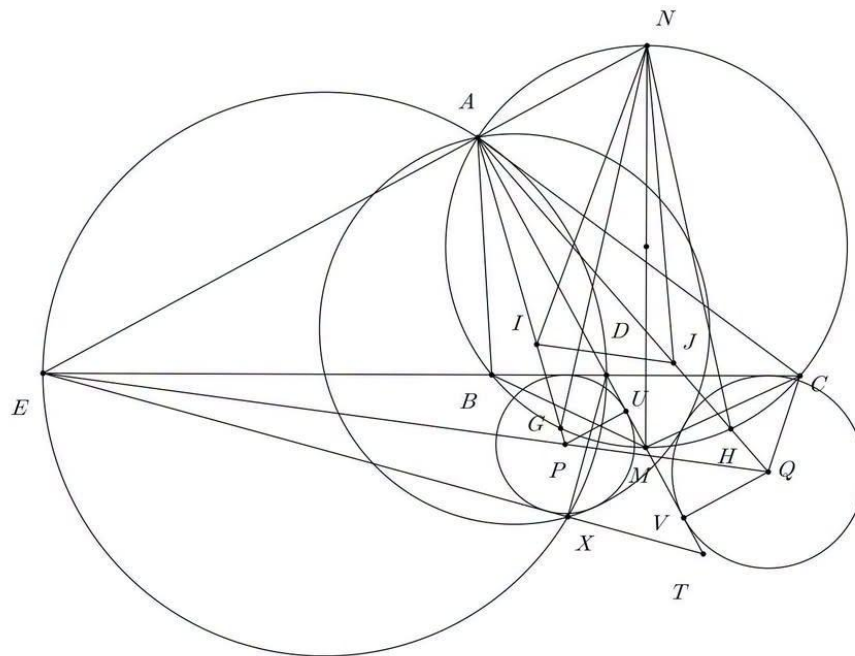
Theo kết quả quen thuộc của mô hình tâm nội, với L là tiếp điểm tâm bàng đỉnh S của $\triangle SAD$ với AD thì SL đi qua chân đường kính từ F của (K) và M là trung điểm $AD \Rightarrow MK$ đi qua trung điểm SF theo tính chất đường trung bình. Mà KO cũng đi qua trung điểm SF theo bổ đề hình thang nên K, O, M thẳng hàng.



Bài toán 0.4. (Lim Olympic - Quảng Ngãi TST - P4)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M, N lần lượt là trung điểm cung nhỏ BC và cung BAC của đường tròn (O) .

- ① Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác AMB, AMC . Chứng minh bốn điểm A, N, I, J cùng thuộc một đường tròn.
- ② Gọi (K) là đường tròn tiếp xúc với AM, AB và tiếp xúc trong với (O) ; (L) là đường tròn tiếp xúc với AM, AC và tiếp xúc trong với (O) . Tiếp tuyến chung trong (khác AM) của (K) và (L) cắt MN tại Z . Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác AZN tiếp xúc với cả (K) và (L) .



Lời giải.

- ① Gọi AI cắt (O) tại G , AJ cắt (O) tại H . Ta dễ có $GI = GB = GM$ và $HJ = HM = HC$ mà AG, AH đẳng giác nên $GB = HC \Rightarrow GI = HJ$, lại có N là trung điểm cung lớn BC nên N cũng là trung điểm cung lớn $GH \Rightarrow NG = NH \Rightarrow \triangle NGI = \triangle NHJ$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle NIG = \angle NJH \Rightarrow ANJI$ nội tiếp.
- ② Gọi AN, AM cắt BC tại E, D .

Xét phép nghịch đảo cực A phương tích $AB \cdot AC$ và lấy đối xứng qua phân giác $\angle BAC$ ta có:

$B \leftrightarrow C, (O) \leftrightarrow BC$ nên (K) biến thành đường tròn bàng tiếp (Q) của $\triangle ADC$ và (L) biến thành đường tròn bàng tiếp (P) của $\triangle ABD$.

Gọi U, V là hình chiếu của P, Q lên $AT \Rightarrow \frac{AP}{AQ} = \frac{PU}{QV}$. Gọi PQ cắt BC tại $E' \Rightarrow E'$ là tâm vị tự ngoài của (P) và $(Q) \Rightarrow \frac{E'P}{E'Q} = \frac{PU}{QV} = \frac{AP}{AQ} \Rightarrow AE'$ là phân giác ngoài $\angle PAQ \Rightarrow E'$ trùng E .

Gọi tiếp tuyến chung ngoài khác BC của $(P), (Q)$ cắt AD tại T , cắt (ADE) tại $X \Rightarrow AE, DX$ là hai đường cao $\triangle DET$ do (ADE) là đường tròn đường kính DE . Ta thấy ảnh của tiếp tuyến chung trong d của (K) và (L) sẽ là đường tròn đi qua A tiếp xúc trong với (P) và tiếp xúc ngoài với (Q) nên ảnh của d chính là đường tròn *Euler* tam giác DET theo định lý *Feuerbach*. Mà Z là giao điểm của d với MN nên ảnh của Z chính là X , là giao điểm của (ADE) và $(Euler)$ của $\triangle DET$. Mà EX tiếp xúc với cả (P) và (Q) nên (AZN) tiếp xúc với cả (K) và (L) .

Bài toán 0.5. (Lim Olympic - Quảng Ngãi TST - P5)

Có N người ngồi thành một vòng tròn ($N \geq 3$), mỗi người cầm k tấm thẻ ($k \geq 2$), trên mỗi tấm thẻ được ghi một số thuộc tập $\{1, 2, 3, \dots, N\}$. Mỗi số thuộc tập trên được ghi đúng trên k tấm thẻ, tức là có k thẻ được ghi số 1, k thẻ được ghi số 2, $\dots$, k thẻ được ghi số N . Cả N người cùng thực hiện trò chơi như sau: Mỗi lượt chơi, mỗi người đều giữ lại những thẻ được ghi số lớn nhất trong những thẻ mà mình đang có (có thể nhiều hơn một thẻ), rồi chuyển cho người bên tay trái những thẻ còn lại. Trò chơi sẽ dừng lại khi xuất hiện ít nhất một người giữ trong tay k thẻ có ghi số giống nhau (có thể họ đang giữ nhiều hơn k thẻ).

- 1 Với $N = 25, k = 2$, chứng minh rằng trò chơi luôn dừng lại sau hữu hạn lượt chơi mà không phụ thuộc vào việc ban đầu họ cầm thẻ thế nào.
- 2 Tìm tất cả các giá trị của k và N để trò chơi dừng lại sau hữu hạn lượt chơi mà không phụ thuộc vào việc ban đầu họ cầm thẻ thế nào.

Lời giải.

- 1 Ta sẽ giải bài toán trong trường hợp tổng quát là $k = 2$ và N là số lẻ.

Đặt $N = 2m + 1$. Giả sử phản chứng rằng trò chơi không bao giờ dừng.

Hai thẻ mang số N đứng yên tại hai người khác nhau. Sau đó, hai thẻ mang số $N - 1$ sẽ được chuyển qua những người đang giữ thẻ N cho tới khi chúng đến những người không giữ thẻ có số lớn hơn. Khi ấy chúng đứng yên. Nếu chúng cùng đứng yên tại một người thì trò chơi đã dừng, nên chúng phải nằm tại hai người mới khác nhau.

Tiếp tục như vậy, sau hữu hạn lượt, tất cả thẻ mang các số $m + 2, m + 3, \dots, 2m + 1$ đều đứng yên.

Có m số như vậy, nên $2m = N - 1$ thẻ trên nằm tại $N - 1$ người khác nhau.

Gọi A là người duy nhất còn lại.

Xét hai thẻ mang số $m + 1$. Tại bất cứ người nào trong $N - 1$ người trên, thẻ $m + 1$ đều nhỏ hơn một thẻ đang được giữ cố định, nên nó phải được chuyển tiếp.

Vì thế cả hai thẻ $m + 1$ cuối cùng đều đi tới A .

Khi thẻ thứ nhất tới A , nó được giữ lại. Sau đó thẻ thứ hai cũng tới A , nên A giữ hai thẻ cùng mang số $m + 1$. Trò chơi dừng, mâu thuẫn.

Vậy nếu $k = 2$ và N lẻ thì trò chơi luôn dừng.

- ② Ta sẽ chứng minh ngoại trừ trường hợp $k = 2$ và N lẻ, thì trò chơi đều không dừng lại.

◇ **Trường hợp 1:** N chẵn.

Đặt $N = 2m$. Chia N người thành m nhóm, mỗi nhóm gồm hai người.

Ta dùng m số lớn nhất là $m + 1, m + 2, \dots, 2m$.

Với mỗi số $r \in \{m + 1, m + 2, \dots, 2m\}$, lấy k thẻ mang số r và phát cho hai người trong một nhóm: một người nhận 1 thẻ, người kia nhận $k - 1$ thẻ.

Như vậy mỗi người đều có ít nhất một thẻ mang số lớn hơn m , nhưng không ai có đủ k thẻ cùng số. Các vị trí còn thiếu được điền bằng toàn bộ các thẻ mang các số $1, 2, \dots, m$.

Trong quá trình chơi, các thẻ mang số lớn hơn m luôn là những thẻ có số lớn nhất tại người đang giữ chúng, nên chúng đứng yên mãi mãi. Mọi thẻ mang số không vượt quá m đều nhỏ hơn các thẻ cố định này, nên sau mỗi lượt chúng đều được chuyển sang người bên trái.

Do đó, phần các thẻ nhỏ mà mỗi người đang giữ chỉ chuyển nguyên sang người bên trái sau mỗi lượt. Ban đầu mỗi người có ít nhất một thẻ lớn, nên có nhiều nhất $k - 1$ thẻ nhỏ. Vì vậy không bao giờ có người nào nhận được k thẻ nhỏ cùng số.

Mặt khác, với mỗi số lớn, k thẻ của số đó được chia cho ít nhất hai người và luôn đứng yên, nên cũng không thể có người nào giữ đủ k thẻ cùng số.

Vậy với cách chia ban đầu này, trò chơi không bao giờ dừng.

◇ **Trường hợp 2:** N lẻ và $k \geq 3$.

Viết $N = 2m + 3$.

Chia N người thành một nhóm gồm ba người và m nhóm, mỗi nhóm gồm hai người.

Có tất cả $m + 1$ nhóm, lấy $m + 1$ số lớn nhất trong $\{1, 2, \dots, N\}$ và gán mỗi số cho một nhóm.

★ Với mỗi nhóm gồm hai người, chia k thẻ mang số tương ứng thành hai phần 1 và $k - 1$.

★ Với nhóm gồm ba người, chia k thẻ mang số tương ứng thành ba phần 1, 1, $k - 2$. Do $k \geq 3$, cả ba phần đều khác rỗng và mỗi phần đều có ít hơn k thẻ.

Như vậy mỗi người đều giữ ít nhất một thẻ mang một trong $m + 1$ số lớn nhất, nhưng không ai giữ đủ k thẻ cùng số. Ta điền các vị trí còn lại bằng tất cả các thẻ mang những số nhỏ hơn.

Hoàn toàn tương tự trường hợp trên, các thẻ mang $m + 1$ số lớn nhất đứng yên mãi mãi, còn các thẻ nhỏ hơn chỉ chuyển vòng quanh bàn từ người này sang người bên trái.

Mỗi người có ít nhất một thẻ lớn, nên tại mọi thời điểm phần thẻ nhỏ chuyển tới một người có không quá $k - 1$ thẻ. Do đó không thể xuất hiện k thẻ nhỏ cùng số tại một người. Các thẻ lớn cũng đã được chia cho ít nhất hai người nên không thể tạo ra k thẻ cùng số tại một người.

Vì vậy tồn tại cách chia ban đầu để trò chơi không bao giờ dừng.

Từ đây ta suy ra được tất cả các giá trị cần tìm là $k = 2$ và N lẻ.

Bài toán 0.6. (Lim Olympic - Quảng Ngãi TST - P6)

Cho đa thức hệ số thực $P(x) = x^{2026} + a_1x^{2025} + \dots + a_{2025}x + a_{2026}$ với $a_{2024} = 0$ và $a_{2025}a_{2026} > 0$. Biết rằng đa thức $P(x)$ có 2026 nghiệm thực.

- ① Chứng minh rằng $P(x)$ có cả nghiệm âm và nghiệm dương.
- ② Xét dãy đa thức $P_1(x) = P(x)$, $P_{n+1}(x) = P(P_n(x))$, với mọi $n \geq 1$. Chứng minh rằng đa thức $P_{2026}(x)$ có cả nghiệm âm và nghiệm dương.

** Lời giải.**

Gọi các nghiệm thực của P là $x_1, x_2, \dots, x_{2026}$ (kể cả bội). Vì $a_{2026} \neq 0$, tất cả các x_i đều khác 0.

- ① Theo Viète, ta có $a_{2026} = x_1x_2 \cdots x_{2026}$ và $a_{2025} = -a_{2026} \sum_{i=1}^{2026} \frac{1}{x_i}$.

Do $a_{2025}a_{2026} > 0$, suy ra $\sum_{i=1}^{2026} \frac{1}{x_i} < 0$. Mặt khác, vì $a_{2024} = 0$ nên

$$0 = a_{2024} = a_{2026} \sum_{1 \leq i < j \leq 2026} \frac{1}{x_i x_j},$$

Vì vậy $\sum_{1 \leq i < j \leq 2026} \frac{1}{x_i x_j} = 0$.

Từ đây suy ra được P có ít nhất một nghiệm âm và ít nhất một nghiệm dương.

- ② Gọi $\alpha < 0$ là nghiệm âm nhỏ nhất và $\beta > 0$ là nghiệm dương lớn nhất của P .

Ta có nhận xét sau: Với mỗi $t \geq 0$, phương trình $P(x) = t$ có ít nhất một nghiệm âm và ít nhất một nghiệm dương. Thật vậy, ta có

$$P(\alpha) = P(\beta) = 0 \leq t,$$

trong khi do P là đa thức monic bậc chẵn nên

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty.$$

Theo định lý giá trị trung gian, trên $(-\infty, \alpha]$ có một nghiệm của $P(x) = t$, và trên $[\beta, +\infty)$ cũng có một nghiệm, trong đó nghiệm thứ nhất âm và nghiệm thứ hai dương.

Bây giờ đặt $t_0 = 0$. Do $\beta > 0$ và $P(\beta) = 0$, ta chọn $t_1 = \beta > 0$ sao cho $P(t_1) = t_0$.

Tiếp tục, nếu đã chọn $t_j > 0$, theo nhận xét trên ta có thể chọn một nghiệm dương $t_{j+1} > 0$ của phương trình $P(x) = t_j$. Bằng cách đó ta thu được

$$P(t_{j+1}) = t_j, \quad j = 0, 1, \dots, 2024,$$

với $t_1, t_2, \dots, t_{2025} > 0$.

Cuối cùng, xét phương trình $P(x) = t_{2025}$. Theo nhận xét trên, phương trình này sẽ có một nghiệm âm $u < 0$ và một nghiệm dương $v > 0$. Khi đó

$$P_{2026}(u) = P_{2025}(P(t_{2025})) = 0, \quad P_{2026}(v) = P_{2025}(P(t_{2025})) = 0.$$

Vậy P_{2026} có cả nghiệm âm và nghiệm dương.