

# NGHIỆM THỰC CỦA ĐA THỨC VÀ ỨNG DỤNG

LƯU VĂN NGÂN

CHUYÊN BẮC NINH

## Chương 1. Cơ sở lý thuyết

**1. Định nghĩa.** Hàm số  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  được gọi là đa thức nếu  $f = \text{const}$  hoặc tồn tại  $n \in \mathbb{N}^*$  và các số thực  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  với  $a_n \neq 0$  sao cho

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

- Với  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  là các hệ số;  $a_n$  là hệ số của bậc cao nhất và  $a_0$  là hệ số tự do.
- Với  $a_n \neq 0$  thì  $n$  được gọi là bậc của đa thức  $f(x)$ , kí hiệu là  $\deg f = n$ .
- Khi  $a_n = 1$  thì đa thức trên được gọi là đa thức chuẩn tắc hay đa thức monic bậc  $n$ .

## 2. Nghiệm của đa thức

**2.1. Định nghĩa.** Cho  $f \in \mathbb{R}[x]$  và  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Ta nói  $\alpha$  là nghiệm thực của  $f(x)$  nếu  $f(\alpha) = 0$ .

### 2.2. Định lí Bézout

Cho  $f \in \mathbb{R}[x]$  và  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  $\alpha$  là nghiệm thực của  $f(x)$  khi và chỉ khi  $f(x) : (x - \alpha)$

### 2.3. Nghiệm bội

Cho  $f \in \mathbb{R}[x]$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  và  $k \in \mathbb{N}^*$ . Ta gọi  $\alpha$  là nghiệm thực bội  $k$  của  $f(x)$  nếu  $f(x)$  chia hết cho  $(x - \alpha)^k$  nhưng không chia hết cho  $(x - \alpha)^{k+1}$  tức là  $f(x) = (x - \alpha)^k \cdot g(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  và  $g(\alpha) \neq 0$ .

### 2.4. Nghiệm hữu tỉ, nghiệm nguyên

Cho đa thức  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $a_n \neq 0, a_k \in \mathbb{Z}, k = \overline{0, n}$ . Nếu

$x = \frac{p}{q}, (p, q) = 1$  là nghiệm của đa thức  $f(x)$  thì  $p | a_0, q | a_n$ .

- Nếu  $a_n = 1$  thì các nghiệm hữu tỉ nếu có của  $f(x)$  đều là nghiệm nguyên với  $f(x)$  là đa thức hệ số nguyên.

- Với mọi số nguyên  $m$ , ta có  $f(m) \mid (p - mq)$ . Đặc biệt,  $f(-1) \mid (p + q)$  và  $f(1) \mid (p - q)$ .

**Nhận xét.** Nếu  $\alpha \neq \pm 1, \alpha \in \mathbb{Z}$  là nghiệm của  $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$  thì  $\frac{f(1)}{1-\alpha}; \frac{f(-1)}{1+\alpha} \in \mathbb{Z}$ .

## 2.5. Tính chất nghiệm của đa thức

- Cho  $f \in \mathbb{R}[x]$  có các nghiệm  $x_1, x_2, \dots, x_m$  với bội tương ứng là  $k_1, k_2, \dots, k_m$  thì tồn tại  $g \in \mathbb{R}[x]$  sao cho  $f(x) = (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_m)^{k_m} \cdot g(x)$ .
- Nếu  $\deg f = n$  và  $k_i$  là bội của nghiệm  $x_i, i = \overline{1, m}$  thì  $k_1 + k_2 + \dots + k_m \leq n$ .
- Mọi đa thức bậc  $n \geq 1$  đều có tối đa  $n$  nghiệm thực.
- Nếu đa thức  $f(x)$  có bậc  $\leq n$  và có ít nhất  $n + 1$  nghiệm thực thì  $f(x) \equiv 0$ .
- Nếu đa thức  $f(x)$  có bậc  $\leq n$  và nhận  $n + 1$  giá trị như nhau tại  $n + 1$  điểm khác nhau của biến thì  $f(x) \equiv C$ .
- Nếu hai đa thức  $f(x)$  và  $g(x)$  có bậc  $\leq n$  và nhận  $n + 1$  giá trị như nhau tại  $n + 1$  điểm khác nhau của biến thì  $f(x) = g(x)$ .

## 3. Định lý Lagrange và Định lý Rolle

**3.1. Định lý Lagrange.** Giả sử  $f(x)$  xác định và liên tục trên  $[a; b]$ , khả vi trên  $(a; b)$

. Khi đó tồn tại  $c \in (a; b)$  sao cho  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

**3.2. Định lý Rolle.** Giả sử  $f(x)$  xác định và liên tục trên  $[a; b]$ , khả vi trên  $(a; b)$  và  $f(a) = f(b)$ . Khi đó tồn tại  $c \in (a; b)$  sao cho  $f'(c) = 0$ .

**Nhận xét.** Áp dụng vào đa thức  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đạo hàm  $f'(x)$ . Nếu  $f(a) = f(b)$  thì tồn tại nghiệm  $c$  của  $f'(x)$  thuộc khoảng  $(a; b)$ . Nếu  $f(x)$  có  $k$  nghiệm thì  $f'(x)$  có  $k - 1$  nghiệm,  $f''(x)$  có  $k - 2$  nghiệm, ...

**4. Quy tắc dấu Descartes:**  $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, a_n \neq 0$ .

Gọi  $D$  là số nghiệm dương (kể cả nghiệm bội),  $L$  là số lần đổi dấu trong dãy hệ số khác 0 từ  $a_n$  đến  $a_0$  (bỏ  $a_k = 0$ ).

Khi đó  $D \leq L$  và  $L - D$  là số chẵn. Do đó  $L - D = 2m, m \in \mathbb{N}$ .

## 5. Định lí Viete

- Định lí Viet thuận: Cho đa thức  $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \in \mathbb{R}[x]$  có bậc  $n$ . Nếu  $f(x)$  có  $n$

nghiệm thực (không cần phân biệt) thì 
$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}, \forall k = \overline{1, n}.$$

- Định lí Viet đảo: Cho  $n$  số thực  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . Đặt

$$S_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n;$$

$$S_2 = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1} \alpha_n;$$

$$S_k = \sum x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k};$$

...

$$S_n = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$$

Khi đó  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  là  $n$  nghiệm của đa thức

$$g(x) = x^n - S_1 x^{n-1} + S_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n S_n.$$

## Chương 2. Ứng dụng trong việc giải các bài toán Đa thức

### 1. Nghiệm thực của Đa thức với yếu tố Đại số

**VÍ DỤ 1.** Cho hai đa thức  $P(x) = x^4 + x^3 - 1$  và  $Q(x) = x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1$ . Chứng minh rằng nếu  $a$  và  $b$  là hai nghiệm của  $P(x)$  thì  $ab$  là nghiệm của  $Q(x)$ .

*Lời giải*

Đặt  $p = ab \neq 0$  và  $s = a + b$ . Khi đó tích của hai nghiệm còn lại là  $-\frac{1}{p}$  và tổng của chúng là  $-(s+1)$ .

Do đó  $P(x) = x^4 + x^3 - 1 = (x^2 - sx + p)\left(x^2 + (s+1)x - \frac{1}{p}\right)$ . Biến đổi và đồng nhất ta được:

$$\frac{s}{p} + (s+1)p = 0 \Rightarrow s = -\frac{p^2}{1+p^2} \text{ và } p - \frac{1}{p} = s(s+1) = -\frac{p^2}{1+p^2} \cdot \frac{1}{1+p^2}.$$

Khi đó,  $p^6 + p^4 + p^3 - p^2 - 1 = 0$ . Vậy  $ab$  là nghiệm của  $Q(x)$ .

**VÍ DỤ 2.** Cho  $a, b, c$  là các số thực khác 0 sao cho các đa thức  $P(x) = ax^2 + bx + c$  và  $Q(x) = cx^2 + ax + b$  có ít nhất một nghiệm thực chung. Chứng minh rằng  $a + b + c = 0$ .

*Lời giải*

**Cách 1.** Đặt  $R(x) = xQ(x) - P(x)$ . Vì  $P(x)$  và  $Q(x)$  có nghiệm thực chung  $x_0$  nên  $H(x_0) = x_0Q(x_0) - P(x_0) = 0$ . Mặt khác  $H(x_0) = c(x_0^3 - 1)$ , do đó  $x_0^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$ .

Vậy  $a + b + c = 0$ .

**Cách 2.** Đặt  $H(x) = cP(x) - aQ(x)$  và  $K(x) = bP(x) - cQ(x)$ . Gọi  $x_0$  là nghiệm thực chung của hai đa thức  $P(x)$  và  $Q(x)$  thì  $x_0$  là cũng nghiệm thực chung của hai đa thức  $H(x)$  và  $K(x)$ .

Nếu  $bc = a^2$  thì  $ab = c^2, bc = a^2$ , suy ra  $a = b = c$ . Khi đó  $P(x) = a(x^2 + x + 1)$ , điều này mâu thuẫn với  $P(x)$  có ít nhất một nghiệm thực và  $a \neq 0$ . Bởi vậy  $bc \neq a^2$ .

Vì  $P(x_0) = Q(x_0) = H(x_0) = K(x_0) = 0$  nên

$$\frac{c^2 - ab}{a^2 - bc} = \frac{b^2 - ac}{c^2 - ab} \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Rightarrow a + b + c = 0.$$

**VÍ DỤ 3. (RUSSIAN MO 2001)** Cho đa thức  $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c; (a, b, c \in \mathbb{R})$

có 3 nghiệm thực phân biệt và đa thức  $Q(x) = x^2 + x + 2019$ . Chứng minh rằng

$$P(2019) > \frac{1}{64}, \text{ biết đa thức } P(Q(x)) \text{ không có nghiệm thực.}$$

**Lời giải**

Giả sử  $P(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3), r_i \in \mathbb{R}$ . Khi đó

$$P(Q(x)) = \prod_{i=1}^3 (x^2 + x + 2019 - r_i). \text{ Vì } P(Q(x)) \text{ không có nghiệm thực nên}$$

$$1 - 4(2019 - r_i) < 0, \forall i = \overline{1, 3} \Rightarrow \frac{1}{4} < 2019 - r_i, \forall i = \overline{1, 3}.$$

$$\text{Mặt khác } P(2019) = P(Q(0)) = \prod_{i=1}^3 (2019 - r_i) > \frac{1}{64}.$$

**VÍ DỤ 4.** Cho  $P(x) = x^{2020} + a_1 x^{2019} + a_2 x^{2018} + \dots + a_{2019} x + a_{2020}$  có 2020 nghiệm thực. Biết  $a_{2015} = 2015; a_{2017} = 2017$ . Chứng minh  $|a_{2016}| > 2016$ .

**Lời giải**

$P(x)$  có 2020 nghiệm thực nên  $P'(x)$  có 2019 nghiệm thực  $\Rightarrow P''(x)$  có 2018 nghiệm thực  $\Rightarrow P^{(3)}(x)$  có 2017 nghiệm thực

$$\Rightarrow P^{(3)}(x) = 2020.2019.2018x^{2017} + 2019.2018.2017a_1x^{2016} + \dots + 3.2.1.a_{2017}$$

$$\text{Đặt } Q(x) = x^{2017}.P\left(\frac{1}{x}\right) = 6a_{2017}x^{2017} + 24a_{2016}x^{2016} + 60a_{2015}x^{2015} + \dots + b_1x + b_0$$

Khi đó  $Q(x)$  cũng có 2017 nghiệm thực  $x_1; x_2; \dots; x_{2017}$ .

$$\text{Theo định lí Viète, ta có: } \sum_{i=1}^{2017} x_i = \frac{-4a_{2016}}{a_{2017}}; \sum_{1 \leq i < j \leq 2017} x_i x_j = \frac{10a_{2015}}{a_{2017}}$$

$$\Rightarrow \left( \sum_{i=1}^{2017} x_i \right)^2 \geq 2 \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq 2017} x_i x_j \Rightarrow a_{2016}^2 \geq \frac{20.a_{2015}.a_{2017}}{16} \Rightarrow a_{2016} > 2016 (\text{đcm}).$$

Vậy,  $a_{2016} > 2016$ .

**VÍ DỤ 5. (USA TST 2005)** Cho các đa thức  $f(x) = \sum_{k=1}^n a_k x^k$  và  $g(x) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2^k - 1} x^k$ , trong đó  $n$  là số nguyên dương và  $a_1, a_2, \dots, a_n$  là các số thực. Chứng minh rằng nếu  $g(x)$  có các nghiệm là 1 và  $2^{n+1}$  thì  $f(x)$  cũng có nghiệm  $x_0$  thỏa mãn  $1 \leq x_0 \leq 2^{n+1}$ .

**Lời giải**

Ta có

$$g(2x) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2^k - 1} (2x)^k = \sum_{k=1}^n a_k x^k + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2^k - 1} x^k = f(x) + g(x)$$

suy ra  $f(x) = g(2x) - g(x)$ .

Thay  $x$  lần lượt các giá trị  $1, 2, 2^2, \dots, 2^n$  ta được

$$f(1) + f(2) + \dots + f(2^n) = g(2^{n+1}) - g(1) = 0$$

Vậy tồn tại  $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$  sao cho  $f(2^i) \leq 0 \leq f(2^j)$ . Do đó đa thức  $f(x)$  luôn có nghiệm  $x_0 \in [1; 2^{n+1}]$

**VÍ DỤ 6 (Đề Xuất Duyệt Hải Hải Phòng).** Tìm tất cả các đa thức  $P(x)$  với hệ số thực thỏa mãn  $P(0) = -3.2016$  và  $(x^2 - 4x + 3)P(x) = (x^2 + 4x + 3)P(x - 2) \forall x \in \mathbb{R}$ .

**Lời giải**

$$(x - 1)(x - 3)P(x) = (x + 1)(x + 3)P(x - 2) \quad (1)$$

$$\Rightarrow P(x) : (x + 1)(x + 3) \Rightarrow P(x) = (x + 1)(x + 3)Q(x)$$

$$(1) \Rightarrow (x - 1)(x - 3)(x + 1)(x + 3)Q(x) = (x + 1)(x + 3)(x - 1)(x + 1)Q(x - 2)$$

$$\Rightarrow (x - 3)Q(x) = (x + 1)Q(x - 2)$$

Hoàn toàn tương tự suy ra

$$Q(x) = (x + 1)H(x), (x - 3)H(x) = (x - 1)H(x - 2)$$

$$H(x) = (x - 1)G(x), G(x) = G(x - 2)$$

Từ gt suy ra  $G(0) = 2016$ , kết hợp với trên ta có  $G(x) \equiv 2016$ .

Vậy  $P(x) = 2016(x - 1)(x + 1)^2(x + 3)$ . Thử lại thỏa mãn đề bài.

**VÍ DỤ 7 (TST Phú Thọ 2016 – 2017).** Tìm tất cả các đa thức  $P(x)$  với hệ số thực thỏa mãn  $(x^2 - 6x + 8)P(x) - (x^2 + 2x)P(x - 2) = 6x^2 - 12x, \forall x \in \mathbb{R}$ .

**Lời giải**

Viết phương trình đã cho dưới dạng

$$(x^2 - 6x + 8)[P(x) + x] = (x^2 + 2x)[P(x - 2) + x - 2], \forall x \in \mathbb{R}.$$

Đặt  $Q(x) = P(x) + x$ , ta có  $Q \in \mathbb{R}[x]$  thỏa mãn

$$(x^2 - 6x + 8)Q(x) = (x^2 + 2x)Q(x - 2), \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Hay } (x - 2)(x - 4)Q(x) = x(x + 2)Q(x - 2), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

$$\text{Cho } x = 0, -2, 4, \text{ từ } (*) \text{ suy ra } Q(0) = 0; Q(-2) = 0, Q(2) = 0.$$

Suy ra  $Q(x) = x(x - 2)(x + 2)R(x)$ . Ta có  $R \in \mathbb{R}[x]$  thỏa mãn

$$(x - 4)(x - 2)^2(x)(x + 2)R(x) = (x)^2(x + 2)(x - 4)(x - 2)R(x - 2), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (x - 2)R(x) = xR(x - 2), \forall x \neq 0; \pm 2; 4 \Rightarrow (x - 2)R(x) = xR(x - 2), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (**)$$

Cho  $x = 0, (**) \Rightarrow R(0) = 0$ ; suy ra  $R(x) = xS(x)$ . Khi đó  $S \in \mathbb{R}[x]$  thỏa mãn

$$(x - 2)(x)S(x) = x(x - 2)S(x - 2), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow S(x) = S(x - 2), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ đây suy ra  $S(x) = c$ , với  $c$  là hằng số.

Do đó  $P(x) = cx^2(x^2 - 4) - x = c(x^4 - 4x^2) - x$ . Thử lại thỏa mãn.

**VÍ DỤ 8.** Cho tam thức bậc hai  $f(x) = ax^2 + bx + c$  thỏa mãn điều kiện

$$|f(-1)| \leq 1; |f(0)| \leq 1; |f(1)| \leq 1. \text{ Tìm giá trị lớn nhất của } |f(x)| \text{ với } x \in [-1; 1].$$

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \begin{cases} f(-1) = a - b + c \\ f(0) = c \\ f(1) = a + b + c \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } f(x) = \left[ \frac{f(1) + f(-1)}{2} - f(0) \right] x^2 + \left[ \frac{f(1) - f(-1)}{2} \right] x + f(0)$$

$$= \frac{f(1)}{2}(x^2 + x) + \frac{f(-1)}{2}(x^2 - x) + f(0)(1 - x^2).$$

Suy ra  $|f(x)| \leq \frac{1}{2}|x^2 + x| + \frac{1}{2}|x^2 - x| + |1 - x^2| = \frac{1}{2}(|x^2 + x| + |x^2 - x|) + |1 - x^2|$ .

Vì  $x \in [-1; 1]$  nên  $(x^2 + x)(x^2 - x) = x^2(x^2 - 1) \leq 0$ . Vậy  $x^2 + x$  và  $x^2 - x$  trái dấu.

Do đó

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(|x^2 + x| + |x^2 - x|) + |1 - x^2| &= \frac{1}{2}(x^2 + x - x^2 + x) + 1 - x^2 = |x| + 1 - x^2 \\ &= -\left(|x| - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \leq \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Vậy  $|f(x)| \leq \frac{5}{4}$ . Suy ra  $\max_{x \in [-1; 1]} f(x) = \frac{5}{4}$  đạt được khi  $x = \pm \frac{1}{2}$ .

**VÍ DỤ 9.** Cho  $f(x) = ax^2 + bx + c$  và  $g(x) = cx^2 + bx + a$ . Chứng minh rằng nếu  $|f(x)| \leq 1$  khi  $|x| \leq 1$  thì  $|g(x)| \leq 2$  khi  $|x| \leq 1$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\begin{cases} f(-1) = a - b + c \\ f(0) = c \\ f(1) = a + b + c \end{cases}$ . Theo giả thiết  $|f(x)| \leq 1$  khi  $|x| \leq 1$  nên

$$|f(-1)| \leq 1; |f(0)| \leq 1; |f(1)| \leq 1.$$

Do đó

$$\begin{aligned} g(x) &= f(0)x^2 + \frac{f(1) - f(-1)}{2}x + \frac{f(1) + f(-1)}{2} - f(0) \\ &= f(0).(x^2 - 1) + \frac{f(1)}{2}(x + 1) + \frac{f(-1)}{2}(1 - x) \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} |g(x)| &\leq |f(0).(x^2 - 1)| + \frac{1}{2}|f(1).(x + 1)| + \frac{1}{2}|f(-1).(1 - x)| \\ &\leq |1 - x^2| + \frac{1}{2}|x + 1| + \frac{1}{2}|1 - x| \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Mà } |x| \leq 1 \text{ nên: } |1 - x^2| + \frac{1}{2}|x + 1| + \frac{1}{2}|1 - x| = 1 - x^2 + \frac{1}{2}(x + 1) + \frac{1}{2}(1 - x) = 2 - x^2 \leq 2$$

$$\forall x \in [-1; 1] \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

### Các bài tập có sử dụng Định lí Viète

**VÍ DỤ 10.** Cho đa thức  $f(x) = x^2 + ax + b; a, b \in \mathbb{R}$ . Giả sử phương trình  $f(f(x)) = 0$  có 4 nghiệm thực phân biệt và tổng của hai trong bốn nghiệm đó bằng  $-1$ . Chứng minh rằng  $b \leq -\frac{1}{4}$ .

#### Lời giải

Từ giả thiết suy ra phương trình  $f(x) = 0$  phải có 2 nghiệm thực  $x_1, x_2$ . Phương trình  $f(f(x)) = 0$  có 4 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi  $x_{1,2} \geq -\frac{\Delta}{4}$ , trong đó

$$\Delta = a^2 - 4b. \text{ Khi đó } -a = x_1 + x_2 \geq -\frac{\Delta}{2} \Rightarrow 4b \leq a^2 - 2a \quad (*)$$

Gọi  $y_1, y_2, y_3, y_4$  là 4 nghiệm của phương trình  $f(f(x)) = 0$ . Giả sử  $y_1, y_2$  là 2 nghiệm của phương trình  $x^2 + ax + b - x_1 = 0$  và  $y_3, y_4$  là hai nghiệm của phương trình  $x^2 + ax + b - x_2 = 0$

Từ giả thiết, giả sử  $y_1 + y_2 = -1 \Rightarrow a = 1$ . Từ  $(*) \Rightarrow b \leq -\frac{1}{4}$ . Nếu  $y_1 + y_3 = -1$  thì  $y_1^2 + y_2^2 \geq \frac{1}{2}$ .

Ta có  $y_1^2 + ay_1 + b - x_1 = 0$  và  $y_3^2 + ay_3 + b - x_2 = 0$ , suy ra  $y_1^2 + y_3^2 + 2b = 0 \Rightarrow b = -\frac{y_1^2 + y_3^2}{2} \leq -\frac{1}{4}$ .

**VÍ DỤ 11.** Giả sử với hai số dương  $a, b$  thì đa thức  $x^3 - ax^2 + bx - a$  có các nghiệm lớn hơn 1. Xác định  $a, b$  để biểu thức  $P = \frac{b^n - 3^n}{a^n}$  đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó ( $n$  là số nguyên dương cho trước).

#### Lời giải.

Gọi  $x_1, x_2, x_3$  là các nghiệm của đa thức đã cho. Theo định lí Viet ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b \\ x_1x_2x_3 = a \end{cases}$$

Áp dụng BĐT AM - GM ta có  $x_1 + x_2 + x_3 \geq 3\sqrt[3]{x_1x_2x_3} \Leftrightarrow a \geq 3\sqrt[3]{a} \Leftrightarrow a \geq 3\sqrt{3} \quad (*)$

Ta lại có  $b^2 = (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)^2 \geq 3x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) \Leftrightarrow b^2 \geq 3a^2 \Leftrightarrow b \geq \sqrt{3}a$

Suy ra  $P = \frac{b^n - 3^n}{a^n} \geq \frac{\sqrt{3^n}a^n - 3^n}{a^n} = \sqrt{3^n} - \frac{3^n}{a^n} \geq \sqrt{3^n} - \frac{3^n}{(3\sqrt{3})^n} \quad (\text{do } (*)).$  Do đó

$$P \geq \frac{3^n - 1}{\sqrt{3^n}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = 3\sqrt{3}, b = \sqrt{3}a = 9$ . Khi đó phương trình có 3 nghiệm trùng nhau và bằng  $\sqrt{3}$ . Vậy giá trị nhỏ nhất của  $P$  là  $\frac{3^n - 1}{\sqrt{3^n}}$  khi  $a = 3\sqrt{3}, b = 9$ .

**VÍ DỤ 12.** Cho  $n \in \mathbb{N}^*$  và  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $a_0 \neq 0$  và tồn tại số nguyên dương  $m \leq n$  sao cho  $\left| \frac{a_m}{a_0} \right| \geq C_n^m$ . Chứng minh rằng  $P(x)$  có ít nhất 1 nghiệm có modun không vượt quá 1.

**Lời giải**

Giả sử các nghiệm của  $P(x)$  đều có môđun lớn hơn 1. Do  $a_0 \neq 0$  nên các nghiệm của  $P(x)$  đều khác 0.

$$\text{Xét } Q(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

Giả sử  $x_i, i = \overline{1, n}$  là nghiệm của  $Q(x)$  thì  $\frac{1}{x_i}, i = \overline{1, n}$  là nghiệm của  $P(x) \Rightarrow |x_i| < 1$ .

Theo ĐL Viet, ta có  $\left| \frac{a_m}{a_0} \right| = \left| \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_m} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m} \right| < C_n^m, \forall m \leq n$ . Mâu thuẫn với giả thiết.

**VÍ DỤ 13 (Rumani 2001).** Cho số nguyên dương chẵn  $n$ . Tìm các số thực  $a, b$  thỏa mãn điều kiện:

(i)  $b^n = 3a + 1$

(ii) Đa thức  $P(x) = (x^2 + x + 1)^n - x^n - a$  chia hết cho đa thức  $Q(x) = x^3 + x^2 + x + b$

.

**Lời giải**

Giả sử  $x_1, x_2, x_3$  là các nghiệm của đa thức  $Q(x)$  thì  $x_1, x_2, x_3$  cũng là nghiệm của đa thức  $P(x)$ .

Nếu tồn tại ít nhất một nghiệm của  $P(x)$  bằng 0 thì từ giả thiết suy ra  $b = 0, a = 1$  (mâu thuẫn điều kiện (i)), suy ra  $b \neq 0$  và  $x_1, x_2, x_3 \neq 0$ .

Đặt  $R(x) = x^n P(x)$ . Khi đó  $R(x) = [Q(x) - b]^n - x^{2n} - ax^n$ , do đó

$$x_i^{2n} + ax_i^n - b^n = 0, \forall i = 1, 2, 3$$

Suy ra  $x_i^n, i = 1, 2, 3$  là nghiệm của phương trình  $x^2 + ax - b = 0$  nên trong các số  $x_i^n$  có ít nhất hai số bằng nhau. Không mất tính tổng quát giả sử  $x_1^n = x_2^n$ . Ta xét các trường hợp sau:

+)  $x_1^n = x_2^n = x_3^n$ , khi đó theo định lý Viet, ta có  $x_1^{3n} = (x_1 x_2 x_3)^n = b^n = 3a + 1$ . Mặt khác

$$x_1^{2n} + ax_1^n = b^n = 3a + 1, \text{ suy ra } a = \frac{x_1^{2n} - 1}{3 - x_1^n} = \frac{x_1^{3n} - 1}{3} \text{ nên } x_1^n = x_2^n = x_3^n = 1. \text{ Khi đó}$$

$$b^n = 1, a = 0.$$

+)  $x_1^n = x_2^n \neq x_3^n$ . Áp dụng định lý Viet ta có

$$x_1 x_2 x_3 = -b \Rightarrow x_1^{2n} x_3^n = b^n = x_3^{2n} + ax_3^n \Rightarrow x_3^n - x_1^{2n} + a = 0$$

Mặt khác

$$x_3^n + x_1^n = -a \Rightarrow x_1^n (x_1^n + 1) = 0 \Rightarrow x_2^n = x_1^n = -1 \Rightarrow a = 1 - b^n \Rightarrow a = 0, b^n = 1.$$

Vậy ta luôn có  $b^n = 1, a = 0$ . Nếu  $b = -1, a = 0$  thì tất cả các nghiệm của đa thức  $Q(x) = x^3 + x^2 + x - 1$  là nghiệm của đa thức  $R(x) = 1 - x^{2n}$ . Điều này vô lý vì  $Q(x)$  có nghiệm thực khác  $\pm 1$ , mà  $R(x)$  chỉ có hai nghiệm thực là  $\pm 1$ . Vậy  $b = 1, a = 0$ .

**VÍ DỤ 14 (VMO 2009)** Cho ba số thực  $a, b, c$  thỏa mãn điều kiện: với mỗi số nguyên dương  $n, a^n + b^n + c^n$  là một số nguyên. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên  $p, q, r$  sao cho  $a, b, c$  là 3 nghiệm của phương trình  $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ .

**Lời giải**

**Cách 1.** Với mỗi số nguyên dương  $n$ , đặt  $T_n = a^n + b^n + c^n$ . Theo giả thiết  $T_n \in \mathbb{Z}, \forall n \geq 1$

Ta chứng minh các số  $p = -(a + b + c), q = ab + bc + ca, r = abc$  thỏa mãn điều kiện của bài toán.

Thật vậy, do định lí Viet đảo, các số  $a, b, c$  là nghiệm của phương trình  $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ . Hơn nữa  $p = -T_1 \in \mathbb{Z}$ . Ta phải chứng minh  $q, r \in \mathbb{Z}$ . Ta có

$$T_1 = -p$$

$$T_2 = p^2 - 2q \quad (1)$$

$$T_3 = -p^3 + 3pq - 3r \quad (2)$$

$$T_{n+3} = -pT_{n+2} - qT_{n+1} - rT_n, \forall n \geq 1 \quad (3)$$

Do  $T_2, p \in \mathbb{Z}$  nên từ (1)  $\Rightarrow 2q \in \mathbb{Z}$ .

$$\text{Từ (2)} \Rightarrow 2pT_3 = -2p^4 + 6p^2q - 6pr \Rightarrow 6pr \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Từ (3) cho } n=1 \text{ ta được } T_4 = -pT_3 - qT_2 - rT_1 = p^4 - 4p^2q + 4pr + 2q^2$$

$$\Rightarrow 3T_4 = 3p^4 - 12p^2q + 12pr + 6q^2 \Rightarrow 6q^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow q \in \mathbb{Z}. \text{ Do đó, kết hợp với (2) ta}$$

$$\text{có } 3r \in \mathbb{Z}, \text{ suy ra } r \text{ có dạng } r = \frac{m}{3}, m \in \mathbb{Z} \quad (4). \text{ Mặt khác từ (3) ta có } rT_n \in \mathbb{Z}, \forall n \geq 1$$

$$\text{. Kết hợp với (4) ta có } mT_n \equiv 0 \pmod{3}, \forall n \geq 1 \quad (5).$$

$$\text{- Nếu tồn tại } n \text{ sao cho } (T_n, 3) = 1 \text{ thì từ (5) suy ra } m \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow r \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{- Nếu } T_n \equiv 0 \pmod{3}, \forall n \geq 1 \text{ thì } p = -T_1 \equiv 0 \pmod{3} \text{ và } T_3 \equiv 0 \pmod{3} \text{ nên từ (2) suy ra } r \in \mathbb{Z}.$$

**Cách 2.** Từ giả thiết ta có  $a + b + c, a^2 + b^2 + c^2, a^4 + b^4 + c^4 \in \mathbb{Z} \quad (1)$ , suy ra  $2(ab + bc + ca)$ ,

$$2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \in \mathbb{Z}.$$

Áp dụng hằng đẳng thức:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \quad \text{với bộ số}$$

$$(x, y, z) = (a, b, c) \text{ và } (a^2, b^2, c^2) \text{ ta suy ra } 6abc \in \mathbb{Z} \text{ và } 6a^2b^2c^2 \in \mathbb{Z}. \text{ Đặt}$$

$$6abc = k \Rightarrow 6a^2b^2c^2 = \frac{k^2}{6} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 6 \mid k^2 \text{ và } abc \in \mathbb{Z} \quad (2).$$

Từ đẳng thức  $2(ab + bc + ca)^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 4abc(a + b + c)$ , ta suy ra  $2(ab + bc + ca)^2 \in \mathbb{Z}$ .

Đặt  $2(ab + bc + ca) = q \Rightarrow 2(ab + bc + ca)^2 = \frac{q^2}{2} \Rightarrow 2|q$  và  $ab + bc + ca \in \mathbb{Z}$  (3).

Từ (1), (2), (3) ta có điều phải chứng minh.

**VÍ DỤ 15 (Đề xuất DHBB Hưng Yên).** Cho  $P(x)$  là đa thức bậc 5, mà trên đồ thị của nó có đúng ba điểm phân biệt thẳng hàng và có hoành độ là nghiệm của đa thức  $P''(x)$ . Chứng minh rằng hoành độ của ba điểm đó lập thành một cấp số cộng.

### Lời giải

Giả sử hoành độ ba điểm thỏa mãn điều kiện đề bài là  $x_1, x_2, x_3$ . Không mất tính tổng quát giả sử  $x_1 < x_2 < x_3$ . Do ba điểm  $(x_1, P(x_1)); (x_2, P(x_2))$  và  $(x_3, P(x_3))$  thẳng hàng nên tồn tại hằng số  $\alpha, \beta$  sao cho  $P(x_i) = \alpha x_i + \beta$  với mỗi  $i = 1, 2, 3$ .

Coi hệ số cao nhất của  $P(x)$  bằng 1.

Bài toán đưa về chứng minh  $x_1 + x_3 = 2x_2$ .

Từ giả thiết ta có  $P''(x) = 20(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ .

Xét đa thức  $Q(x) = P(x) - \alpha x - \beta$ , ta có

$$Q(x_i) = P(x_i) - \alpha x_i - \beta = 0 \text{ với } i = 1, 2, 3.$$

$$Q''(x) = P''(x) \text{ suy ra } Q''(x_i) = P''(x_i) \text{ với mỗi } i = 1, 2, 3.$$

Mọi nghiệm của  $Q''(x)$  đều là nghiệm của  $Q(x)$ .

$$\text{Suy ra } 20.Q(x) = Q''(x)(x^2 + px + q) \quad (1)$$

Đặt  $x = y - \frac{p}{2}$ , từ (1) ta có

$$20.Q\left(y - \frac{p}{2}\right) = Q''\left(y - \frac{p}{2}\right)\left(y^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)$$

$$\text{Đặt } R(y) = Q\left(y - \frac{p}{2}\right) = y^5 + ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + e \text{ và } q - \frac{p^2}{4} = s.$$

$$\text{Ta có } 20.R(y) = R''(y).(y^2 + s)$$

$$20(y^5 + ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + e)$$

$$= (20y^3 + 12ay^2 + 6by + 2c)(y^2 + s)$$

Đồng nhất hệ số của  $y^4, y^2$  và hệ số tự do ta được

$$\begin{cases} 20a = 12a \\ 20c = 12as + 2c \Leftrightarrow a = c = e = 0 \\ 20e = 2cs \end{cases}$$

Suy ra  $R(y) = y^5 + by^3 + dy$  là hàm số lẻ.

Nên  $R''(y) = 20y^3 + 6by$  có 3 nghiệm  $y_1, y_2, y_3$  với  $y_2 = 0$  và  $y_1 + y_3 = 0 = 2y_2$ .

Vì  $x_i = y_i - \frac{p}{2}$  suy ra  $x_1 + x_3 = 2x_2$  (đpcm).

**VÍ DỤ 16 (Đề xuất DHBB – Vĩnh Phúc).** Cho đa thức  $P(x)$  bậc ba với hệ số nguyên.

Biết rằng  $P(x)$  có ba nghiệm vô tỷ phân biệt là  $a, b, c$  thỏa mãn  $a + b + c = 0$  và tồn tại hai số nguyên  $p, q$  sao cho  $a = b^2 + pb + q$ . Chứng minh rằng  $T = p^2 - 2p - 4q - 7$  là số chính phương.

**Lời giải**

Đặt  $Q(x) = x^2 + px + q$  thì theo giả thiết, ta có

$$P(Q(b)) = P(a) = 0.$$

Suy ra  $P(Q(x))$  có nghiệm là  $x = b$ . Xét phép chia

$$P(Q(x)) = P(x) \cdot f(x) + r(x) \text{ với } \deg r(x) \leq 2.$$

Thay  $x = b$  vào, suy ra  $r(b) = 0$ . Nếu  $\deg r > 0$  thì lại xét phép chia

$$P(x) = f_1(x) \cdot r(x) + r_1(x) \text{ với } \deg r_1(x) \leq 1.$$

Chú ý rằng  $r_1(x) \in \mathbb{Z}[x]$  và  $r_1(b) = 0$  với  $b$  vô tỷ nên vô lý, suy ra  $\deg r = 0$  hay

$$P(Q(x)) = P(x) \cdot f(x)$$

Từ đó suy ra  $P(Q(a)) = P(Q(c)) = 0$ , suy ra  $Q(a) \in \{a, b, c\}$ .

Ta xét các trường hợp:

+ Nếu  $Q(a) = a$  thì  $a = a^2 + pa + q \Rightarrow a^2 + pa + q = b^2 + pb + q$  nên

$$(a - b)(a + b + p) = 0 \Rightarrow p - c = 0 \Rightarrow p = c, \text{ mâu thuẫn vì } p \text{ nguyên còn } c \text{ vô tỉ.}$$

+ Nếu  $Q(a) = b$  thì  $a^2 + pa + q = b$ ;  $b^2 + pb + q = a$  nên

$$a - b = (b - a)(a + b + p) = 0 \Rightarrow a + b + p = -1 \Rightarrow p = c - 1, \text{ mâu thuẫn.}$$

Do đó,  $Q(a) = c$ . Tương tự  $Q(c) = b$ . Do đó ta có hệ điều kiện

$$\begin{cases} a = b^2 + pb + q \\ b = c^2 + pc + q \\ c = a^2 + pa + q \end{cases} \quad (*)$$

Trừ từng vế hai phương trình đầu của (\*), ta có

$$a - b = b^2 - c^2 + p(b - c) = (b - c)(b + c + p) = (b - c)(p - a).$$

Tương tự thì  $b - c = (c - a)(p - b)$  và  $c - a = (a - b)(p - c)$

Nhân ba hệ thức trên ta được:  $(p - a)(p - b)(p - c) = 1$ .

Cộng các đẳng thức trong (\*), ta được

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3q = 0 \Rightarrow ab + bc + ca = \frac{3}{2}q.$$

Từ (\*) ta suy ra ba phương trình sau:

$$\begin{cases} a^3 + b^3 + c^3 = (a^2b + b^2c + c^2a) + p(a^2b + b^2c + c^2a) + q(a^2 + b^2 + c^2) \\ ab + bc + ca = a^3 + b^3 + c^3 + p(a^2 + b^2 + c^2) \\ p(a^2 + b^2 + c^2) = p(ab^2 + bc^2 + ca^2) + p^2(ab + bc + ca) \end{cases}$$

Cộng các đẳng thức trên và tìm được  $abc = \frac{2p^2q - 2q - q^2}{4p}$

Thay tất cả vào đẳng thức  $(p - a)(p - b)(p - c) = 1$ , ta được

$$p^3 - p^2(a + b + c) + p(ab + bc + ca) - abc = 1$$

$$\Leftrightarrow p^3 + \frac{3pq}{2} - \frac{2p^2q - 2q - q^2}{4p} = 1$$

$$\Leftrightarrow q^2 + 2q(2p^2 + 1) + 4(p^4 - p) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q = -2(p^2 - p) \\ q = -2(p^2 + p + 1) \end{cases}$$

Nếu  $q = -2(p^2 - p)$  thì  $abc = -(p - 1)^2(2p + 1)$  nên đa thức

$$P(x) = x^3 - 3(p^2 - p)x + (p - 1)^2(2p + 1) \text{ có nghiệm } x = p - 1.$$

Điều này không thể xảy ra vì  $p - 1$  nguyên.

Do đó  $q = -2(p^2 + p + 1)$  nên

$T = p^2 - 2p + 8(p^2 + p + 1) - 7 = 9p^2 + 6p + 1 = (3p + 1)^2$  là số chính phương.

**VÍ DỤ 17 (VMO 2009)** Cho ba số thực  $a, b, c$  thỏa mãn điều kiện: với mỗi số nguyên dương  $n, a^n + b^n + c^n$  là một số nguyên. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên  $p, q, r$  sao cho  $a, b, c$  là 3 nghiệm của phương trình  $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ .

**Lời giải**

**Cách 1.** Với mỗi số nguyên dương  $n$ , đặt  $T_n = a^n + b^n + c^n$ . Theo giả thiết  $T_n \in \mathbb{Z}, \forall n \geq 1$

Ta chứng minh các số  $p = -(a + b + c), q = ab + bc + ca, r = abc$  thỏa mãn điều kiện của bài toán.

Thật vậy, do định lý Viet đảo, các số  $a, b, c$  là nghiệm của phương trình  $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ . Hơn nữa  $p = -T_1 \in \mathbb{Z}$ . Ta phải chứng minh  $q, r \in \mathbb{Z}$ . Ta có

$$T_1 = -p$$

$$T_2 = p^2 - 2q \quad (1)$$

$$T_3 = -p^3 + 3pq - 3r \quad (2)$$

$$T_{n+3} = -pT_{n+2} - qT_{n+1} - rT_n, \forall n \geq 1 \quad (3)$$

Do  $T_2, p \in \mathbb{Z}$  nên từ (1)  $\Rightarrow 2q \in \mathbb{Z}$ .

Từ (2)  $\Rightarrow 2pT_3 = -2p^4 + 6p^2q - 6pr \Rightarrow 6pr \in \mathbb{Z}$

Từ (3) cho  $n=1$  ta được  $T_4 = -pT_3 - qT_2 - rT_1 = p^4 - 4p^2q + 4pr + 2q^2$

$\Rightarrow 3T_4 = 3p^4 - 12p^2q + 12pr + 6q^2 \Rightarrow 6q^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow q \in \mathbb{Z}$ . Do đó, kết hợp với (2) ta

có  $3r \in \mathbb{Z}$ , suy ra  $r$  có dạng  $r = \frac{m}{3}, m \in \mathbb{Z}$  (4). Mặt khác từ (3) ta có  $rT_n \in \mathbb{Z}, \forall n \geq 1$

. Kết hợp với (4) ta có  $mT_n \equiv 0 \pmod{3}, \forall n \geq 1$  (5).

- Nếu tồn tại  $n$  sao cho  $(T_n, 3) = 1$  thì từ (5) suy ra  $m \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow r \in \mathbb{Z}$ .

- Nếu  $T_n \equiv 0 \pmod{3}, \forall n \geq 1$  thì  $p = -T_1 \equiv 0 \pmod{3}$  và  $T_3 \equiv 0 \pmod{3}$  nên từ (2) suy ra  $r \in \mathbb{Z}$ .

**Cách 2.** Từ giả thiết ta có  $a + b + c, a^2 + b^2 + c^2, a^4 + b^4 + c^4 \in \mathbb{Z}$  (1), suy ra  $2(ab + bc + ca)$ ,

$$2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \in \mathbb{Z}.$$

Áp dụng hằng đẳng thức:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \quad \text{với bộ số}$$

$(x, y, z) = (a, b, c)$  và  $(a^2, b^2, c^2)$  ta suy ra  $6abc \in \mathbb{Z}$  và  $6a^2b^2c^2 \in \mathbb{Z}$ . Đặt

$$6abc = k \Rightarrow 6a^2b^2c^2 = \frac{k^2}{6} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 6|k \text{ và } abc \in \mathbb{Z} \quad (2).$$

Từ đẳng thức  $2(ab + bc + ca)^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 4abc(a + b + c)$ , ta suy ra  $2(ab + bc + ca)^2 \in \mathbb{Z}$ .

$$\text{Đặt } 2(ab + bc + ca) = q \Rightarrow 2(ab + bc + ca)^2 = \frac{q^2}{2} \Rightarrow 2|q \text{ và } ab + bc + ca \in \mathbb{Z} \quad (3).$$

Từ (1), (2), (3) ta có điều phải chứng minh.

**VÍ DỤ 18 (Arab Saudi TST 2016).** Tồn tại hay không hai đa thức  $P(x), Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$

có bậc không nhỏ hơn 2 thỏa mãn  $P(Q(x)) = (x-1)(x-2)\dots(x-9)$ .

**Lời giải**

Từ đề bài ta thấy tích các bậc của  $P(x), Q(x)$  bằng 9 và mỗi đa thức đều có bậc không nhỏ hơn 2 nên suy ra chúng là các đa thức bậc 3.

Dễ thấy  $Q(1), Q(2), \dots, Q(9)$  là các nghiệm của  $P(x)$ , mà  $P(x)$  có bậc 3 nên có tối đa 3 nghiệm nguyên. Đồng thời  $Q(x)$  có bậc 3 nên với mỗi số thực  $t$  thì  $Q(x) - t$  cũng có tối đa 3 nghiệm nguyên. Từ đó suy ra  $P(x)$  có 3 nghiệm nguyên  $a, b, c$  và tập

$\{1; 2; \dots; 9\}$  có một phân hoạch  $\{a_1, a_2, a_3\} \cup \{b_1, b_2, b_3\} \cup \{c_1, c_2, c_3\}$  sao cho

$$\begin{cases} Q(a_1) = Q(a_2) = Q(a_3) = a \\ Q(b_1) = Q(b_2) = Q(b_3) = b \\ Q(c_1) = Q(c_2) = Q(c_3) = c \end{cases}.$$

Áp dụng ĐL Viet:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = c_1 + c_2 + c_3 \\ a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 = b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_1 = c_1c_2 + c_2c_3 + c_3c_1 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = S$$

Suy ra  $3S = 1^2 + 2^2 + \dots + 9^2 = 285 \Leftrightarrow S = 95$ .

Ta có 95 chia 4 dư 3 nên suy ra  $a_1, a_2, a_3$  đều lẻ. Tương tự  $b_1, b_2, b_3$  và  $c_1, c_2, c_3$  đều lẻ dẫn đến tập  $\{1; 2; \dots; 9\}$  chứa toàn số lẻ. Vậy không có cặp đa thức thỏa mãn.

**Nhận xét tổng quát:** Với giá trị nào của số nguyên dương  $n$  thì tồn tại các đa thức  $P(x), Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$  có bậc ít nhất bằng 2 thỏa mãn  $P(Q(x)) = (x-1)(x-2)\dots(x-n)$ .

**VÍ DỤ 19 (Nam Định TST 2018 – 2019 – Ngày 2).** Xét  $a, b$  là các số thực dương thỏa mãn  $P(x) = x^3 - 3x^2 + ax - b$  có 3 nghiệm thực (không nhất thiết phân biệt) là  $x_1, x_2, x_3$ .

. Đặt  $u_n = \frac{x_1^n + x_2^n + x_3^n}{x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + x_3^{n+1}}, n \in \mathbb{N}^*$ .

a. Xét tính đơn điệu của dãy số  $(u_n)$  khi  $a \in (0; +\infty) \setminus \{3\}$ .

b. Tìm các số thực dương  $a, b$  để  $\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} < \sqrt{n^2 + 2018}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

### Lời giải

Ta chứng minh với  $a, b > 0$  thì  $x_1, x_2, x_3 > 0$ .

Theo ĐL Viet:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = a \\ x_1x_2x_3 = b \end{cases}$$

Vì  $x_1 + x_2 + x_3 = 3 > 0$  nên có ít nhất một nghiệm dương, giả sử là  $x_1$ , khi đó  $x_2x_3 = \frac{b}{x_1} > 0$ .

Nếu  $x_2, x_3 < 0$ . Ta viết  $x_2 = -u, x_3 = -v$  với  $u, v > 0$ .

Khi đó:  $\begin{cases} uv = x_2x_3 = a + x_1(-x_2 - x_3) = a + x_1(u + v) > x_1(u + v) \\ x_1 > -x_2 - x_3 = u + v > 0 \end{cases}$

Suy ra  $uv > (u + v)^2 \Rightarrow 0 > u^2 + uv + v^2 \Leftrightarrow \left(u + \frac{v}{2}\right)^2 + \frac{3v^2}{4} < 0$

Vậy  $x_2, x_3 > 0$ .

$$\text{Xét } u_n - u_{n+1} = \frac{(x_1^n + x_2^n + x_3^n)(x_1^{n+2} + x_2^{n+2} + x_3^{n+2}) - (x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + x_3^{n+1})^2}{(x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + x_3^{n+1})(x_1^{n+2} + x_2^{n+2} + x_3^{n+2})}$$

Từ  $x_1, x_2, x_3 > 0$  suy ra  $(x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + x_3^{n+1})(x_1^{n+2} + x_2^{n+2} + x_3^{n+2}) > 0$

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki

$$(x_1^n + x_2^n + x_3^n)(x_1^{n+2} + x_2^{n+2} + x_3^{n+2}) \geq (x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + x_3^{n+1})^2$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x_1^n}}{\sqrt{x_1^{n+2}}} = \frac{\sqrt{x_2^n}}{\sqrt{x_2^{n+2}}} = \frac{\sqrt{x_3^n}}{\sqrt{x_3^{n+2}}} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 > 0.$$

Khi đó  $a = x_1 + x_2 + x_3 = 3$ . Vậy ...

c. Ta có khi  $a, b > 0$  thì  $u_1 \geq u_k > 0, \forall k = \overline{1, n}$ . Suy ra  $\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} \geq \frac{n}{u_1}, \forall n \geq 1$

$$\text{Do đó } \sqrt{n^2 + 2018} > \frac{n}{u_1}, \forall n \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{x_1 + x_2 + x_3} < \frac{\sqrt{n^2 + 2018}}{n}, \forall n \geq 1$$

$$\text{Chuyển qua giới hạn } \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{x_1 + x_2 + x_3} < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 2018}}{n} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)}{x_1 + x_2 + x_3} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{9 - 2a}{3} \leq 1 \Leftrightarrow a \geq 3$$

Mặt khác  $9 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 \geq 3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 3a \Rightarrow a \leq 3$ . Vậy  $a = 3$ .

$$\text{Với } a = 3: x^3 - 3x^2 + 3x - b = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^3 = b - 1$$

PT này có 3 nghiệm thực (không nhất thiết phân biệt) khi và chỉ khi  $b - 1 = 0 \Leftrightarrow b = 1$ .

Thử lại: Khi  $a = 3, b = 1: x_1 = x_2 = x_3 = 1 \Rightarrow u_n = 1, \forall n \geq 1$

$$\text{Khi đó } \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} < \sqrt{n^2 + 2018}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

## 2. Nghiệm thực của Đa thức với yếu tố Giải tích

**VÍ DỤ 20 (Nga 2013).** Cho  $P(x), Q(x)$  là hai đa thức monic, có bậc 2020, có hệ số thực thỏa mãn phương trình  $P(x)=Q(x)$  không có nghiệm thực. Chứng minh rằng phương trình  $P(x+1)=Q(x-1)$  có ít nhất một nghiệm thực.

### Lời giải

Do  $P(x), Q(x)$  là hai đa thức monic nên bậc của  $P(x)-Q(x)$  không vượt quá 2019, nhưng lại không thể có bậc là 2019 vì một đa thức bậc lẻ luôn có ít nhất một nghiệm thực.

Vậy hệ số của  $x^{2019}$  trong  $P(x), Q(x)$  bằng nhau. Từ đó suy ra  $P(x+1)-Q(x-1)$  có bậc là 2019, do đó phương trình  $P(x+1)=Q(x-1)$  có ít nhất một nghiệm thực.

**\*) Định lí về tính liên tục:** Với  $a < b$  là các số thực, nếu hàm  $f$  liên tục trên  $[a; b]$  và  $f(a) \cdot f(b) < 0$  thì tồn tại  $c \in (a; b)$  sao cho  $f(c) = 0$ .

**VÍ DỤ 21 (Brazil 2017).** Cho đa thức  $P(x) = x^2 + 2017x + 1$ . Chứng minh rằng với mọi số  $n$  nguyên dương, đa thức  $P_n(x) = P(P(\dots P(x) \dots))$  luôn có nghiệm thực.

### Lời giải

Dễ thấy đa thức  $P_n(x)$  có hệ số cao nhất dương nên  $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_n(x) = +\infty$ . Tiếp theo, ta chỉ ra tồn tại một số  $\alpha$  để  $P_n(\alpha) < 0$  là xong.

Thật vậy, xét đa thức  $Q(x) = P(x) - x = x^2 + 2016x + 1$ .

Đa thức  $Q(x)$  có hai nghiệm phân biệt  $x_0, x_1$  thỏa mãn  $\begin{cases} x_0 + x_1 = -2016 \\ x_0 \cdot x_1 = 1 \end{cases}$  nên  $x_0, x_1$  cùng âm.

Khi đó, đặt  $x_0 = \alpha$ , ta có  $P(\alpha) = \alpha, \dots, P_n(\alpha) = \alpha < 0$ .

**\*) Nhận xét:**  $\alpha$  được gọi là điểm bất động của  $P(x)$ . Khi gặp những bài toán liên quan đến  $P_n(x)$ , ta thường nghĩ tới việc sử dụng điểm bất động.

**VÍ DỤ 22.** Cho  $n \in \mathbb{Z}^*$ . Ta gọi đa thức  $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{2n}x^{2n}$  là đẹp, nếu

i)  $\forall i = 0, 2n : 2019 \leq a_i \leq 2020$ ;

ii)  $P_n(x)$  có nghiệm thực.

Chúng minh tồn tại đa thức  $P_{2019}(x)$  đẹp và hãy tìm  $n$  nhỏ nhất để tồn tại  $P_n(x)$  đẹp.

**Lời giải**

\*) Xét  $P_{2019}(x) = 2019 + 2020x + 2019x^2 + \dots + 2019x^{4038}$

Ta có  $P_{2019}(-1) = 2019 - 2020 \cdot 2019 + 2019 \cdot 2019 = 0$

Vậy tồn tại đa thức  $P_{2019}(x)$  đẹp.

\*) Ta chứng minh  $n = 2019$  là giá trị nhỏ nhất cần tìm.

Giả sử phản chứng với  $n < 2019$  thì tồn tại đa thức  $P_n(x)$  đẹp. Ta có

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{2n}x^{2n} \geq 2019(1 + x^2 + \dots + x^{2n}) - 2020(|x| + |x|^3 + \dots + |x|^{2n-1}), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ta có } 2019(1 + x^2 + \dots + x^{2n}) > 2020(|x| + |x|^3 + \dots + |x|^{2n-1}), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + x^2 + \dots + x^{2n}}{|x| + |x|^3 + \dots + |x|^{2n-1}} > \frac{2020}{2019} = 1 + \frac{1}{2019}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Với } n < 2019, \text{ ta có } \Leftrightarrow \frac{1 + x^2 + \dots + x^{2n}}{|x| + |x|^3 + \dots + |x|^{2n-1}} \geq 1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{2019}, \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$\text{Thật vậy } (1) \Leftrightarrow n(1 + x^2 + \dots + x^{2n}) \geq (n+1)(|x| + |x|^3 + \dots + |x|^{2n-1}), \forall x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Áp dụng BĐT AM – GM,  $\forall x \in \mathbb{R}$  ta có

$$nx^{2k+2} + nx^{2k} \geq n|x|^{2n+1}, \forall k = \overline{0, n-1} \quad (3)$$

$$x^{2n} + 1 \geq |x|^{2n-k} + |x|^k, \forall k = \overline{1, 2n-1} \quad (4)$$

Với (3), cho  $k$  chạy từ 0 đến  $n-1$ ; với (4) cho  $k$  chạy từ 1 đến  $2n-1$  rồi cộng vế ta được (2).

**VÍ DỤ 23.** Cho đa thức  $P(x) = x^{2019} + a_{2018}x^{2018} + a_{2017}x^{2017} + \dots + a_1x + a_0$  có hệ số thực với  $P(1)P(2) \neq 0$  và  $4\frac{P'(2)}{P(2)} > \frac{P'(1)}{P(1)} + 2019$ . Giả sử  $P(x)$  có 2019 nghiệm

thực, chứng minh rằng trong số đó, có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng  $(1; 2)$ .

**Lời giải**

Gọi  $x_1, x_2, \dots, x_{2019}$  là nghiệm của  $P(x)$ .

Theo định lí Bezout ta có  $P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ .

Khi đó  $P'(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \left( \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \dots + \frac{1}{x - x_n} \right)$ .

Do đó  $\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x - x_i}$ .

Chúng minh phản chứng rằng  $P(x)$  không có nghiệm nào thuộc khoảng  $(1; 2)$ .

Ta có  $4 \frac{P'(2)}{P(2)} - \frac{P'(1)}{P(1)} = \sum_{i=1}^{2019} \left( \frac{4}{2 - x_i} - \frac{1}{1 - x_i} \right) = \sum_{i=1}^{2019} \left( \frac{2 - 3x_i}{(2 - x_i)(1 - x_i)} \right)$ .

Do  $x_i > 2$  hoặc  $x_i < 1$  nên  $(2 - x_i)(1 - x_i) > 0$ .

Ngoài ra  $\frac{2 - 3x_i}{(2 - x_i)(1 - x_i)} \leq 1, \forall x_i \notin (1; 2)$ .

Suy ra  $4 \frac{P'(2)}{P(2)} - \frac{P'(1)}{P(1)} \leq 2019$  (Vô lí)

Vậy tồn tại ít nhất một nghiệm thuộc khoảng  $(1; 2)$ .

**Nhận xét.** Đây là một bài toán về áp dụng hệ quả của định lí Bezout và những kiến thức về đại số, giải tích hỗ trợ vào việc xử lý bất đẳng thức trong đa thức. Sau đây là một số bài toán tương tự:

### Các bài tập tương tự

**Bài tập 1.** Cho đa thức  $P(x)$  bậc  $n$  có hệ số thực, hệ số cao nhất là 1 và có  $n$  nghiệm thực sao cho  $P(-1) \neq 0$  và  $-\frac{P'(-1)}{P(-1)} \leq \frac{n}{2}$ . Chứng minh rằng  $P(x)$  có ít nhất một nghiệm  $x_0$  với  $|x_0| \geq 1$

**Bài tập 2 (Costa Ric - 2009.)** Giả sử đa thức  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + 1$  có thể phân tích thành  $P(x) = (x + r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n)$ , với  $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{R}$ . Chứng minh rằng  $(n-1)a_{n-1}^2 \geq 2na_{n-2}$ .

**VÍ DỤ 24. (VN TST 1994)** Cho đa thức  $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ ,  $\deg P = 4$  và có 4 nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng phương trình sau cũng có 4 nghiệm dương phân biệt

$$\frac{1-4x}{x^2}P(x) + \left(1 - \frac{1-4x}{x^2}\right)P'(x) - P''(x) = 0 \quad (1)$$

**Lời giải.**

$$\frac{1-4x}{x^2}P(x) + \left(1 - \frac{1-4x}{x^2}\right)P'(x) - P''(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-4x}{x^2}(P(x) - P'(x)) + (P'(x) - P''(x)) = 0 \quad (2)$$

Đặt  $Q(x) = P(x) - P'(x)$ . Khi đó  $(2) \Leftrightarrow \frac{1-4x}{x^2}Q(x) + Q'(x) = 0 \quad (3)$ . Ta chứng

minh nếu đa thức bậc bốn  $P(x)$  có 4 nghiệm dương phân biệt thì đa thức  $Q(x) = P(x) - P'(x)$  cũng có 4 nghiệm dương phân biệt. Không giảm tính tổng quát,

giả sử hệ số bậc cao nhất của  $P(x)$  là 1. Đặt

$$P(x) = x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \quad \text{với } x_1, x_2, x_3, x_4$$

là các nghiệm dương. Từ đó theo định lý Viet thì  $a, b, c, d > 0$

Ta có

$$P'(x) = (x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) + (x - x_1)(x - x_3)(x - x_4) + (x - x_1)(x - x_2)(x - x_4) + (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$Q(x) = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + c + d$$

$$Q(x_1) = P(x_1) - P'(x_1) = -(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4);$$

$$Q(x_2) = -(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4).$$

Suy ra  $Q(x_1)Q(x_2) < 0$ , tức là tồn tại  $y_1 \in [x_1; x_2]$  là nghiệm dương của  $Q(x)$ . Tương

tự,  $Q(x)$  có 2 nghiệm dương  $y_2 \in [x_2; x_3], y_3 \in [x_3; x_4]$ . Mặt khác  $\deg Q(x) = 4$  nên

$Q(x)$  còn có nghiệm thực thứ tư là  $y_4$ . Theo định lý Viet ta có  $y_1y_2y_3y_4 = c + d > 0$ .

Mà  $y_1, y_2, y_3 > 0$  nên  $y_4 > 0$ .

Đặt  $R(x) = t^4 Q\left(\frac{1}{t}\right)$ , dễ thấy  $\deg R(x) = 4$  và  $R(x)$  cũng có 4 nghiệm dương phân biệt. Theo kết quả chứng minh trên phương trình  $R(x) - R'(x) = 0$  (4) có 4 nghiệm dương phân biệt. Ta có

$$\begin{aligned} (4) &\Leftrightarrow t^4 \left[ P\left(\frac{1}{t}\right) - P'\left(\frac{1}{t}\right) \right] - \left\{ t^4 \left[ P\left(\frac{1}{t}\right) - P'\left(\frac{1}{t}\right) \right] \right\}' = 0 \\ &\Leftrightarrow t^4 \left[ P\left(\frac{1}{t}\right) - P'\left(\frac{1}{t}\right) \right] - \left\{ 4t^3 \left[ P\left(\frac{1}{t}\right) - P'\left(\frac{1}{t}\right) \right] + t^4 \left[ -\frac{1}{t^2} P'\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{t^2} P''\left(\frac{1}{t}\right) \right] \right\} = 0 \\ &\Leftrightarrow (t^2 - 4t) P\left(\frac{1}{t}\right) + (1 + 4t - t^2) P'\left(\frac{1}{t}\right) - P''\left(\frac{1}{t}\right) = 0 \quad (5) \end{aligned}$$

Đặt  $\frac{1}{t} = x$ , (5)  $\Leftrightarrow \frac{1-4x}{x^2} P(x) + \left(1 - \frac{1-4x}{x^2}\right) P'(x) - P''(x) = 0$ .

Vậy phương trình (1) có 4 nghiệm dương phân biệt.

**\* Định lý Rolle đối với đa thức:**

**Cho đa thức  $P(x)$  với hệ số thực và hai số thực  $a, b$  ( $a < b$ ). Khi đó, nếu  $P(a) = P(b)$  thì tồn tại  $c \in (a; b)$  sao cho  $P'(c) = 0$ .**

**\* Hệ quả :** Cho đa thức  $P(x)$  với hệ số thực có  $n$  nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi đa thức đạo hàm cấp  $k$  tức đa thức  $P^{(n-k)}(x)$  có  $n-k$  nghiệm thực phân biệt.

**VÍ DỤ 25.** Cho đa thức  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  với hệ số thực, có bậc  $n$  và có  $n$  nghiệm thực phân biệt.

- Chứng minh rằng đa thức  $Q(x) = P(x) - P'(x)$  cũng có  $n$  nghiệm (không nhất thiết phân biệt).
- Với  $n \geq 3$  chứng minh rằng  $(n-1)a_{n-1}^2 > 2na_n a_{n-2}$

**Lời giải :**

a) Đặt  $H(x) = e^{-x} \cdot P(x)$ .

- Do  $P(x)$  có  $n$  nghiệm thực phân biệt suy ra  $H(x)$  cũng có  $n$  nghiệm thực phân biệt đó.

- Ta có  $H'(x) = -e^{-x} \cdot P(x) + e^{-x} \cdot P'(x) = -e^{-x} (P(x) - P'(x)) = -e^{-x} \cdot Q(x)$

- Áp dụng hệ quả của định lí Rolle đối với đa thức ta suy ra đa thức  $Q(x)$  có  $n-1$  nghiệm thực phân biệt. Mà  $\deg Q(x) = n$  suy ra đa thức  $Q(x)$  có  $n$  nghiệm. Đpcm.

**\* Nhận xét:**

+) Tại sao lại nghĩ đến  $H(x) = e^{-x} \cdot P(x)$  phải chăng  $H'(x)$  xuất hiện  $Q(x) = P(x) - P'(x)$ .

+) Do đó đây là phép đặt khá hay và quan trọng.

- Nếu đặt  $H(x) = e^x \cdot P(x)$  suy ra  $H'(x) = e^x \cdot [P(x) + P'(x)]$  khi đó bài toán có thể trở thành chứng minh đa thức  $P(x) + P'(x)$  có  $n$  nghiệm.

- Nếu đặt  $H(x) = e^{\frac{x}{\alpha}} \cdot P(x)$  suy ra  $H'(x) = \frac{e^{\frac{x}{\alpha}}}{\alpha} \cdot [P(x) + \alpha P'(x)]$  khi đó bài toán có thể trở thành chứng minh đa thức  $P(x) + \alpha P'(x)$  có  $n$  nghiệm.

b) Từ đạo hàm cấp  $n-2$  của  $P(x)$  và điều kiện  $n \geq 3$  nên  $P^{(n-2)}(x)$  là đa thức bậc hai

cụ thể là  $P^{(n-2)}(x) = \frac{n!}{2!} \cdot a_n \cdot x^2 + \frac{(n-1)!}{1!} \cdot a_{n-1} \cdot x + (n-2)! \cdot a_{n-2}$ .

- Áp dụng hệ quả của định lí Rolle ta suy ra  $\frac{n!}{2!} \cdot a_n \cdot x^2 + \frac{(n-1)!}{1!} \cdot a_{n-1} \cdot x + (n-2)! \cdot a_{n-2} = 0$

có hai nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow \Delta > 0$  hay  $(n-1)a_{n-1}^2 > 2na_n \cdot a_{n-2}$

**\* Nhận xét :**

+) Tại sao lại nghĩ đến lấy đạo hàm cấp  $n-2$  phải chăng như thế mới triệt tiêu hết  $a_{n-3}, a_{n-4}, \dots, a_0$  và chỉ còn lại  $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}$ .

**VÍ DỤ 26.** Cho  $P(x)$  là đa thức với hệ số thực có  $n$  nghiệm thực phân biệt lớn hơn 1.

Xét đa thức  $Q(x) = (x^2 + 1)P(x)P'(x) + x[P^2(x) + P'^2(x)]$ . Chứng minh rằng đa thức  $Q(x)$  có  $2n-1$  nghiệm thực phân biệt.

**Lời giải.**

Ta có  $Q(x) = [P'(x) + xP(x)][xP'(x) + P(x)]$ .

$$\text{Để thấy } \begin{cases} P'(x) + xP(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \left( e^{\frac{x^2}{2}} P(x) \right)' \\ xP'(x) + P(x) = (xP(x))' \end{cases}$$

Giả sử các nghiệm của  $P(x)$  là  $1 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ . Theo định lý **Rolle**, đa thức  $P'(x) + xP(x)$  có  $n-1$  nghiệm  $\alpha_i, i = \overline{1, n-1}$  thỏa mãn  $1 < x_1 < \alpha_1 < x_2 < \dots < \alpha_{n-1} < x_n$  và đa thức  $xP'(x) + P(x)$  có  $n$  nghiệm  $\beta_j, j = \overline{1, n}$  thỏa mãn  $0 < \beta_1 < x_1 < \beta_2 < x_2 < \dots < \beta_n < x_n$ .

- Nếu  $\alpha_i \neq \beta_j, \forall i, j$  thì ta có ngay điều phải chứng minh.

- Giả sử tồn tại  $(i, j)$  sao cho  $\alpha_i = \beta_j = \gamma \Rightarrow \gamma > 1$ .

$$\text{Khi đó } \begin{cases} P'(\gamma) + \gamma P(\gamma) = 0 \\ \gamma P'(\gamma) + P(\gamma) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{P'(\gamma)}{P(\gamma)} = -\gamma \\ \frac{P'(\gamma)}{P(\gamma)} = -\frac{1}{\gamma} \end{cases} \Rightarrow \gamma^2 = 1. \text{ Điều này mâu thuẫn với}$$

$$\gamma > 1.$$

### **Bài tập tương tự**

**Bài 1.** Cho  $P(x)$  là đa thức bậc  $n$  với hệ số thực có  $n$  nghiệm thực phân biệt khác 0.

Chứng minh rằng các nghiệm của đa thức  $Q(x) = x^2 P''(x) + 3xP'(x) + P(x)$  là thực và phân biệt.

### **Lời giải**

Ta có

$$Q(x) = x^2 P''(x) + 3xP'(x) + P(x) = [x^2 P'(x)]' + [xP(x)]' = [x(xP'(x) + P(x))]'$$

Đặt  $R(x) = x(xP'(x) + P(x))$ . Xét hàm số  $f(x) = e^{\ln|x|} P(x), x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Giả sử  $n$  nghiệm thực phân biệt của  $P(x)$  là  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ . Khi đó  $f(x) = 0$  cũng có  $n$  nghiệm thực  $x_i, i = \overline{1, n}$ .

$$f'(x) = e^{\ln|x|} \left( P'(x) + \frac{P(x)}{x} \right)$$

Các nghiệm thực của phương trình  $f'(x)=0$  cũng là nghiệm của phương trình

$P'(x) + \frac{P(x)}{x} = 0$ . Theo định lí Lagrange, ta có  $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \exists y_i \in (x_i; x_{i+1})$ ,

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = (x_{i+1} - x_i) f'(y_i)$$

$$\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \exists y_i \in (x_i; x_{i+1}), f'(y_i) = 0.$$

Do đó,  $f'(x) = 0$  có ít nhất  $n-1$  nghiệm thực phân biệt khác 0, nên  $P'(x) + \frac{P(x)}{x} = 0$

có ít nhất  $n-1$  nghiệm thực phân biệt khác 0 là các giá trị  $y_i, i = \overline{1, n-1}$ .

Mặt khác  $R(x) = x(xP'(x) + P(x)) = x^2 \left( P'(x) + \frac{P(x)}{x} \right)$  nên  $R(x)$  là đa thức bậc

$n+1$  có ít nhất  $n$  nghiệm thực là 0 và  $y_i, i = \overline{1, n-1}$ . Do đó  $R(x)$  có  $n+1$  nghiệm thực kể cả bội (nếu có nghiệm bội thì có duy nhất nghiệm khác 0 bội 2).

Nếu  $R(x)$  có một nghiệm  $y_{i_0}$  bội 2 thì  $R(x) = x(x - y_{i_0})K_{n-2}(x)$ , trong đó  $K_{n-2}(x)$  là đa thức bậc  $n-2$  với hệ số thực.

$$Q(x) = [x(xP'(x) + P(x))] = (x - y_{i_0}) \left[ 2xK_{n-2}(x) + (x - y_{i_0})(xK_{n-2}(x))' \right]$$

Vậy  $Q(x)$  nhận  $y_{i_0}$  làm nghiệm.

Kí hiệu  $n$  nghiệm ( $y_{i_0}$  chỉ tính một lần) của  $R(x)$  theo thứ tự tăng dần là  $u_j, j = \overline{1, n}$ .

Theo định lí Lagrange ta có

$$\forall j = \overline{1, n-1}, \exists t_j \in (u_j; u_{j+1}): R(u_j) - R(u_{j+1}) = (u_j - u_{j+1}) R'(t_j)$$

$\Rightarrow \forall j \in \{1, \dots, n-1\}, \exists t_j \in (u_j; u_{j+1}): Q(t_j) = R'(t_j) = 0$ . Vậy  $Q(x)$  có thêm  $n-1$  nghiệm thực khác  $y_{i_0}$  nữa. Do đó  $Q(x)$  có  $n$  nghiệm thực phân biệt.

**Bài 2.** Cho số thực  $\alpha \neq 0$  và đa thức  $P(x)$  với hệ số thực bậc  $n > 1$  sao cho  $P(x)$  không có nghiệm thực. Chứng minh đa thức  $Q(x) = P(x) + \alpha P'(x) + \dots + \alpha^n P^{(n)}(x)$  không có nghiệm thực.

**Lời giải**

Không mất tính tổng quát, ta giả sử hệ số bậc cao nhất của  $P(x)$  dương. Vì  $P(x)$  không có nghiệm thực nên  $P(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$  và  $\deg P(x) = n$  là số chẵn.

Ta có  $Q'(x) = P'(x) + \alpha P''(x) + \dots + \alpha^{n-1} P^{(n)}(x)$

Suy ra  $P(x) = Q(x) - \alpha Q'(x)$ . Đặt  $R(x) = -e^{-\frac{x}{\alpha}} Q(x)$  thì  $R'(x) = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{x}{\alpha}} P(x)$ , suy ra  $R'(x)$  không có nghiệm thực nên theo định lý Rolle  $R(x)$  có nhiều nhất 1 nghiệm. Vì vậy  $Q(x)$  có nhiều nhất 1 nghiệm.

Giả sử  $x_0$  là nghiệm thực duy nhất của  $Q(x)$ , do  $\deg Q(x) = n$  là số chẵn nên tồn tại số nguyên dương  $m$  và đa thức  $K(x)$  với hệ số thực sao cho  $Q(x) = (x - x_0)^m K(x), 2 \leq m \leq n$ .

Khi đó  $Q'(x) = (x - x_0)^{m-1} [K(x) + (x - x_0)K'(x)]$ . Vậy  $P(x_0) = 0$ . Điều này mâu thuẫn giả thiết  $P(x)$  không có nghiệm thực, suy ra điều phải chứng minh.

**Bài 3.** Cho đa thức  $P(x)$  hệ số thực bậc  $n \geq 1$  và có  $m$  nghiệm thực (kể cả nghiệm bội). Chứng minh rằng đa thức  $Q(x) = (x^2 + 1)P(x) + P'(x)$  có ít nhất  $m$  nghiệm thực (kể cả nghiệm bội).

**Lời giải**

$P(x)$  có  $m$  nghiệm thực nên phương trình  $e^{\frac{x^3}{3}+x} P(x) = 0$  cũng có  $m$  nghiệm thực.

Theo định lý Rolle thì phương trình

$$\left[ e^{\frac{x^3}{3}+x} P(x) \right]' = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{x^3}{3}+x} [(x^2 + 1)P(x) + P'(x)] = 0 \text{ có ít nhất } m - 1 \text{ nghiệm thực.}$$

Ta xét các trường hợp sau:

- Với  $m$  chẵn. Nếu  $n$  lẻ thì  $P(x)$  là đa thức bậc lẻ có số nghiệm thực (kể cả bội) là lẻ, suy ra  $m$  lẻ, mâu thuẫn. Vậy  $n$  là số chẵn. Từ đó  $Q(x)$  là đa thức bậc chẵn, suy ra số nghiệm thực, kể cả bội là chẵn. Theo trên, nó có ít nhất  $m - 1$  nghiệm thực, trong khi  $m - 1$  lẻ. Vậy  $Q(x)$  có ít nhất  $m$  nghiệm thực.

- Với  $m$  lẻ. Nếu  $n$  chẵn thì  $P(x)$  là đa thức bậc chẵn nên nó có chẵn nghiệm thực kể cả bội, tức  $m$  chẵn, mâu thuẫn. Vậy  $n$  phải lẻ, suy ra  $Q(x)$  là đa thức bậc  $n+2$  là một số lẻ. Do đó nó có lẻ số nghiệm. Mặt khác  $Q(x)$  có ít nhất  $m-1$  (là số chẵn) nghiệm thực. Vậy  $Q(x)$  có ít nhất  $m$  nghiệm thực.

**Bài 4.** Cho đa thức  $P(x)$  hệ số thực bậc  $n \geq 1$  và có  $m$  nghiệm thực (kể cả nghiệm bội). Chứng minh rằng đa thức  $Q(x) = (x^2 + 1)P(x) + P'(x)$  có ít nhất  $m$  nghiệm thực (kể cả nghiệm bội).

**Lời giải**

$P(x)$  có  $m$  nghiệm thực nên phương trình  $e^{\frac{x^3}{3}+x}P(x) = 0$  cũng có  $m$  nghiệm thực.

Theo định lí Rolle thì phương trình

$$\left[ e^{\frac{x^3}{3}+x}P(x) \right]' = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{x^3}{3}+x} \left[ (x^2 + 1)P(x) + P'(x) \right] = 0 \text{ có ít nhất } m-1 \text{ nghiệm thực.}$$

Ta xét các trường hợp sau:

- Với  $m$  chẵn. Nếu  $n$  lẻ thì  $P(x)$  là đa thức bậc lẻ có số nghiệm thực (kể cả bội) là lẻ, suy ra  $m$  lẻ, mâu thuẫn. Vậy  $n$  là số chẵn. Từ đó  $Q(x)$  là đa thức bậc chẵn, suy ra số nghiệm thực, kể cả bội là chẵn. Theo trên, nó có ít nhất  $m-1$  nghiệm thực, trong khi  $m-1$  lẻ. Vậy  $Q(x)$  có ít nhất  $m$  nghiệm thực.

- Với  $m$  lẻ. Nếu  $n$  chẵn thì  $P(x)$  là đa thức bậc chẵn nên nó có chẵn nghiệm thực kể cả bội, tức  $m$  chẵn, mâu thuẫn. Vậy  $n$  phải lẻ, suy ra  $Q(x)$  là đa thức bậc  $n+2$  là một số lẻ. Do đó nó có lẻ số nghiệm. Mặt khác  $Q(x)$  có ít nhất  $m-1$  (là số chẵn) nghiệm thực. Vậy  $Q(x)$  có ít nhất  $m$  nghiệm thực.

## BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

### 1. Bài tập đề nghị

**Bài 1. (VMO 2012)** Cho các cặp số cộng  $(a_n), (b_n)$  và số nguyên  $m > 2$ . Xét  $m$  tam thức bậc hai  $P_k(x) = x^2 + a_kx + b_k, k = \overline{1, m}$ . Chứng minh rằng nếu hai tam thức  $P_1(x)$  và  $P_m(x)$  đều không có nghiệm thực thì tất cả các tam thức còn lại cũng không có nghiệm thực.

**Bài 2.** Cho đa thức  $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + 1$  có các hệ số không âm. Chứng minh rằng nếu  $P(x)$  có  $n$  nghiệm thực thì  $P(2) \geq 3^n$ .

**Bài 3. (USAMO 1975)** Cho  $P(x) \in \mathbb{R}[x]$  có bậc  $n$  nguyên dương sao cho  $P(k) = \frac{k}{k+1}, \forall k = \overline{0, n}$ . Tính  $P(n+1)$ .

**Bài 4.** Cho đa thức  $f(x) = x^2 + ax + b; a, b \in \mathbb{R}$ . Giả sử phương trình  $f(f(x)) = 0$  có 4 nghiệm thực phân biệt và tổng của hai trong bốn nghiệm đó bằng  $-1$ . Chứng minh rằng  $b \leq -\frac{1}{4}$ .

**Bài 5.** Cho số nguyên dương chẵn  $n$ , xét các thức  $P(x)$  với hệ số thực

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + 1$$

sao cho  $P(x)$  có ít nhất một nghiệm thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $A = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2$ .

**Bài 6 (ROMANIA MO 2001)** Cho số nguyên dương chẵn  $n$ . Tìm các số thực  $a, b$  thỏa mãn điều kiện:

(i)  $b^n = 3a + 1$

(ii) Đa thức  $P(x) = (x^2 + x + 1)^n - x^n - a$  chia hết cho đa thức  $Q(x) = x^3 + x^2 + x + b$ .

**Bài 7 (VMO 1988)** Cho đa thức  $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, n \geq 3$  có  $n$

nghiệm thực và  $a_0 = 1, a_1 = -n, a_2 = \frac{n^2 - n}{2}$ . Xác định  $a_3, a_4, \dots, a_n$ .

**Bài 8.** Cho  $P(x)$  là đa thức với hệ số thực có  $n$  nghiệm thực phân biệt lớn hơn 1. Xét đa thức  $Q(x) = (x^2 + 1)P(x)P'(x) + x[P^2(x) + P'^2(x)]$ . Chứng minh rằng đa thức  $Q(x)$  có  $2n - 1$  nghiệm thực phân biệt.

**Bài 9 (THTT 10/2004).** Cho đa thức  $P(x)$  có bậc 2018 và thỏa mãn  $P(x) = \frac{x^2}{x+1}, \forall x \in \{1, 2, \dots, 2019\}$ . Tính  $P(2020)$ .

**Bài 10 (Tạp chí Pi 5/2018).** Cho hai đa thức  $P(x) = x^3 - 4x^2 + 39x - 46$  và  $Q(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 3$ .

- Chứng minh rằng cả hai đa thức đều có duy nhất một nghiệm thực.
- Kí hiệu  $\alpha, \beta$  tương ứng là nghiệm thực của  $P(x), Q(x)$ . Chứng minh rằng  $\{\alpha\} > \{\beta\}^2$  (với  $\{x\}$  là phần lẻ của số thực  $x$ ).

**Bài 11 (VMO 2002).** Cho hai đa thức  $P(x) = 4x^3 - 2x^2 - 15x + 9$  và  $Q(x) = 12x^3 + 6x^2 - 7x + 1$ .

- Chứng minh rằng cả hai đa thức đều có ba nghiệm thực phân biệt.
- Kí hiệu  $\alpha, \beta$  tương ứng là nghiệm thực lớn nhất của  $P(x), Q(x)$ . Chứng minh rằng  $\alpha^2 + 3\beta^2 = 4$ .

**Bài 12 (Hà Tĩnh TST 2018 – 2019 Ngày 2).** Kí hiệu  $M = \{-10; -9, \dots; 9; 10\}$ . Xét đa thức  $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c \in M$ ). Biết  $\left|P(2 + \sqrt{2})\right| < \frac{9}{2018}$ , chứng minh rằng đa thức  $P(x)$  có ba nghiệm thực phân biệt.

**Bài 13 (VN TST 2015).** Gọi  $\alpha$  là nghiệm dương của phương trình  $x^2 + x - 5 = 0$ . Với mỗi số nguyên dương  $n$  nào đó, gọi  $c_0, c_1, \dots, c_n$  là các số nguyên không âm thỏa mãn  $c_0 + c_1\alpha + \dots + c_n\alpha^n = 2015$ .

- Chứng minh rằng  $c_0 + c_1 + \dots + c_n \equiv 2 \pmod{3}$ .
- Tìm GTNN của  $S = c_0 + c_1 + \dots + c_n$ .

**Bài 14.** Cho  $P(x)$  là một đa thức bậc 3 có hệ số hữu tỉ. Biết rằng  $P(x)$  có 3 nghiệm thực  $\alpha, \beta, \gamma$  thỏa mãn  $k = \frac{\alpha}{\beta}$  là một số hữu tỉ khác 0 và  $\pm 1$ . Chứng minh rằng  $\alpha, \beta, \gamma$  hữu tỉ.

**Bài 15 (Tập chí Pi T9/2017).** Cho dãy số nguyên dương  $(a_n)$  với  $n \geq 0$  có tính chất: Với mỗi số tự nhiên  $m$ , đa thức  $P_m(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$  có  $m$  nghiệm thực phân biệt. Chứng minh rằng  $a_n \geq n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Bài 16.** Cho  $2n$  số  $a_1 < a_2 < \dots < a_{2n}$  với  $n \geq 2$ . Đặt

$$S = \sum_{i=1}^{2n} a_i, A_1 = \sum_{i < j} a_{2i} a_{2j}, A_2 = \sum_{i < j} a_{2i+1} a_{2j+1}.$$

Chứng minh rằng  $(n-1)S^2 > 4n(A_1 + A_2)$ .

**Bài 17.** Cho  $P(x) \in \mathbb{R}[x], \deg P(x) = 2017$ . Chứng minh rằng tồn tại hai đa thức  $Q(x), R(x) \in \mathbb{R}[x]; \deg Q = \deg R = 2017; Q(x), R(x)$  có tất cả các nghiệm đều thực sao cho  $P(x) = Q(x) + R(x)$ .

## 2. Lời giải bài tập đề nghị

**Bài 1. (VMO 2012)** Cho các cặp số cộng  $(a_n), (b_n)$  và số nguyên  $m > 2$ . Xét  $m$  tam thức bậc hai  $P_k(x) = x^2 + a_kx + b_k, k = \overline{1, m}$ . Chứng minh rằng nếu hai tam thức  $P_1(x)$  và  $P_m(x)$  đều không có nghiệm thực thì tất cả các tam thức còn lại cũng không có nghiệm thực.

### Lời giải.

Gọi  $a, b$  lần lượt là công sai của cặp số cộng  $(a_n), (b_n)$  và giả sử  $P_k(x)$  có nghiệm thực  $x = c$  với  $1 < k < m$  nào đó.

Theo tính chất của cặp số cộng ta có

$$P_m(x) - P_k(x) = (m - k)(ax + b) \text{ và } P_k(x) - P_1(x) = (k - 1)(ax + b).$$

Suy ra  $P_m(c) = (m - k)(ac + b)$  và  $P_1(c) = -(k - 1)(ac + b)$  nên  $P_m(c) \cdot P_1(c) < 0$ .

Nhưng  $P_m(c) > 0, P_1(c) > 0$  nên điều suy ra ở trên là không thể. Vậy không có tam thức bậc hai nào có nghiệm thực.

**Bài 2.** Cho đa thức  $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + 1$  có các hệ số không âm. Chứng minh rằng nếu  $P(x)$  có  $n$  nghiệm thực thì  $P(2) \geq 3^n$ .

### Lời giải

Giả sử  $P(x)$  có  $n$  nghiệm thực  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Từ giả thiết ta có  $x_i < 0, \forall i = \overline{1, n}$  và

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

Suy ra

$$P(2) = \prod_{i=1}^n (2 - x_i) = \prod_{i=1}^n [1 + 1 + (-x_i)] \geq \prod_{i=1}^n 3\sqrt[n]{-x_i} = 3^n \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n (-x_i)}.$$

Theo định lý Viet ta có  $\prod_{i=1}^n x_i = (-1)^n \Rightarrow \prod_{i=1}^n (-x_i) = 1$ , suy ra  $P(2) \geq 3^n$ .

**Bài 3. (USAMO 1975)** Cho  $P(x) \in \mathbb{R}[x]$  có bậc  $n$  nguyên dương sao cho

$$P(k) = \frac{k}{k+1}, \forall k = \overline{0, n}. \text{ Tính } P(n+1).$$

### Lời giải

Xét đa thức  $Q(x) = (x+1)P(x) - x$ . Theo giả thiết suy ra  $Q(i) = 0, \forall i = \overline{0, n}$ . Suy ra tồn tại số thực  $c \neq 0$  sao cho  $Q(x) = cx(x-1)\dots(x-n)$ . Vì  $Q(x) = (x+1)P(x) - x$  nên  $Q(-1) = 1$ .

Suy ra  $c = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$  và  $Q(x) = (x+1)P(x) - x = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}x(x-1)\dots(x-n)$  (\*).

Từ (\*) ta có

$$(n+2)P(n+1) - n - 1 = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}(n+1)n\dots 1 \Rightarrow P(n+1) = \frac{n+1+(-1)^{n+1}}{n+2}.$$

**Bài 4.** Cho đa thức  $f(x) = x^2 + ax + b; a, b \in \mathbb{R}$ . Giả sử phương trình  $f(f(x)) = 0$  có 4 nghiệm thực phân biệt và tổng của hai trong bốn nghiệm đó bằng  $-1$ . Chứng minh rằng  $b \leq -\frac{1}{4}$ .

**Lời giải**

Từ giả thiết suy ra phương trình  $f(x) = 0$  phải có 2 nghiệm thực  $x_1, x_2$ . Phương trình  $f(f(x)) = 0$  có 4 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi  $x_{1,2} \geq -\frac{\Delta}{4}$ , trong đó

$$\Delta = a^2 - 4b. \text{ Khi đó } -a = x_1 + x_2 \geq -\frac{\Delta}{2} \Rightarrow 4b \leq a^2 - 2a \quad (*)$$

Gọi  $y_1, y_2, y_3, y_4$  là 4 nghiệm của phương trình  $f(f(x)) = 0$ . Giả sử  $y_1, y_2$  là 2 nghiệm của phương trình  $x^2 + ax + b - x_1 = 0$  và  $y_3, y_4$  là hai nghiệm của phương trình  $x^2 + ax + b - x_2 = 0$

Từ giả thiết, giả sử  $y_1 + y_2 = -1 \Rightarrow a = 1$ . Từ (\*)  $\Rightarrow b \leq -\frac{1}{4}$ . Nếu  $y_1 + y_3 = -1$  thì

$$y_1^2 + y_2^2 \geq \frac{1}{2}.$$

Ta có  $y_1^2 + ay_1 + b - x_1 = 0$  và  $y_3^2 + ay_3 + b - x_2 = 0$ , suy ra

$$y_1^2 + y_3^2 + 2b = 0 \Rightarrow b = -\frac{y_1^2 + y_3^2}{2} \leq -\frac{1}{4}$$

**Bài 5.** Cho số nguyên dương chẵn  $n$ , xét các thức  $P(x)$  với hệ số thực

$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + 1$  sao cho  $P(x)$  có ít nhất một nghiệm thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $A = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2$ .

**Lời giải**

Nếu  $n = 2$  thì  $P(x) = x^2 + a_1x + 1$  có nghiệm khi  $T = a_1^2 \geq 4$ .

Nếu  $n > 2$ , gọi  $x_0$  là nghiệm thực của  $P(x)$  thì  $x_0 \neq 0$  và  $-\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_0^i = x_0^n + 1 > 0$ . Do

đó tồn tại các số  $a_i$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) không đồng thời bằng 0. Ta có

$$A = \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_0^i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n-1} x_0^{2i}} = \frac{(x_0^n + 1)^2}{\sum_{i=1}^{n-1} x_0^{2i}}$$

Do  $x_0^n + 1 \geq x_0^{n-2i} + x_0^{2i}, \forall i = 1, \frac{n}{2} - 1$  nên cộng các bất đẳng thức này, suy ra

$$\begin{aligned} \frac{n-2}{4}(x_0^n + 1) &\geq \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} x_0^{2i} \Rightarrow \frac{n-2}{4}(x_0^n + 1)^2 \geq \sum_{i=1}^{n-1} x_0^{2i} - x_0^n \\ &\Rightarrow \frac{n-1}{4}(x_0^n + 1)^2 \geq \sum_{i=1}^{n-1} x_0^{2i} + \frac{1}{4}(x_0^n - 1)^2 \\ &\Rightarrow \frac{n-1}{4}(x_0^n + 1)^2 \geq \sum_{i=1}^{n-1} x_0^{2i} \Rightarrow A \geq \frac{4}{n-1} \end{aligned}$$

Xét đa thức  $P(x) = x^n - \frac{2}{n-1}(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x) + 1$  có một nghiệm bằng 1 và

$$A = \frac{4}{n-1}. \text{ Vậy giá trị nhỏ nhất của } A \text{ là } \frac{4}{n-1}.$$

**Bài 6 (ROMANIA MO 2001)** Cho số nguyên dương chẵn  $n$ . Tìm các số thực  $a, b$  thỏa mãn điều kiện:

(i)  $b^n = 3a + 1$

(ii) Đa thức  $P(x) = (x^2 + x + 1)^n - x^n - a$  chia hết cho đa thức  $Q(x) = x^3 + x^2 + x + b$ .

**Lời giải**

Giả sử  $x_1, x_2, x_3$  là các nghiệm của đa thức  $Q(x)$  thì  $x_1, x_2, x_3$  cũng là nghiệm của đa thức  $P(x)$ .

Nếu tồn tại ít nhất một nghiệm của  $P(x)$  bằng 0 thì từ giả thiết suy ra  $b = 0, a = 1$  (mâu thuẫn điều kiện (i)), suy ra  $b \neq 0$  và  $x_1, x_2, x_3 \neq 0$ .

Đặt  $R(x) = x^n P(x)$ . Khi đó  $R(x) = [Q(x) - b]^n - x^{2n} - ax^n$ , do đó

$$x_i^{2n} + ax_i^n - b^n = 0, \forall i = 1, 2, 3$$

Suy ra  $x_i^n, i = 1, 2, 3$  là nghiệm của phương trình  $x^2 + ax - b = 0$  nên trong các số  $x_i^n$  có ít nhất hai số bằng nhau. Không mất tính tổng quát giả sử  $x_1^n = x_2^n$ . Ta xét các trường hợp sau:

+)  $x_1^n = x_2^n = x_3^n$ , khi đó theo định lý Viet, ta có  $x_1^{3n} = (x_1 x_2 x_3)^n = b^n = 3a + 1$ . Mặt khác

$$x_1^{2n} + ax_1^n = b^n = 3a + 1, \text{ suy ra } a = \frac{x_1^{2n} - 1}{3 - x_1^n} = \frac{x_1^{3n} - 1}{3} \text{ nên } x_1^n = x_2^n = x_3^n = 1. \text{ Khi đó}$$

$$b^n = 1, a = 0.$$

+)  $x_1^n = x_2^n \neq x_3^n$ . Áp dụng định lý Viet ta có

$$x_1 x_2 x_3 = -b \Rightarrow x_1^{2n} x_3^n = b^n = x_3^{2n} + ax_3^n \Rightarrow x_3^n - x_1^{2n} + a = 0$$

Mặt khác

$$x_3^n + x_1^n = -a \Rightarrow x_1^n (x_1^n + 1) = 0 \Rightarrow x_2^n = x_1^n = -1 \Rightarrow a = 1 - b^n \Rightarrow a = 0, b^n = 1.$$

Vậy ta luôn có  $b^n = 1, a = 0$ . Nếu  $b = -1, a = 0$  thì tất cả các nghiệm của đa thức  $Q(x) = x^3 + x^2 + x - 1$  là nghiệm của đa thức  $R(x) = 1 - x^{2n}$ . Điều này vô lý vì  $Q(x)$  có nghiệm thực khác  $\pm 1$ , mà  $R(x)$  chỉ có hai nghiệm thực là  $\pm 1$ . Vậy  $b = 1, a = 0$ .

**Bài 7 (VMO 1988)** Cho đa thức  $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n, n \geq 3$  có  $n$

nghiệm thực và  $a_0 = 1, a_1 = -n, a_2 = \frac{n^2 - n}{2}$ . Xác định  $a_3, a_4, \dots, a_n$ .

**Lời giải**

Kí hiệu  $x_i, i = \overline{1, n}$  là  $n$  nghiệm thực của đa thức thì  $\sum_{i=1}^n x_i = n$  và

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j = \frac{n^2 - n}{2}, i \neq j$$

Ta có  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j = n^2 - n^2 + n = n$

và  $\sum_{i=1}^n (x_i - 1)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i + n = n - n + n = 0 \Rightarrow x_i = 1, i = \overline{1, n}$ . Suy ra

$$P(x) = (x - 1)^n. \text{ Vậy các hệ số của đa thức là } (-1)^k C_n^k, k = \overline{0, n}.$$

**Bài 8.** Cho  $P(x)$  là đa thức với hệ số thực có  $n$  nghiệm thực phân biệt lớn hơn 1. Xét đa thức  $Q(x) = (x^2 + 1)P(x)P'(x) + x[P^2(x) + P'^2(x)]$ . Chứng minh rằng đa thức  $Q(x)$  có  $2n - 1$  nghiệm thực phân biệt.

**Lời giải.**

Ta có  $Q(x) = [P'(x) + xP(x)][xP'(x) + P(x)]$ .

Để thấy 
$$\begin{cases} P'(x) + xP(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \left( e^{\frac{x^2}{2}} P(x) \right)' \\ xP'(x) + P(x) = (xP(x))' \end{cases}$$

Giả sử các nghiệm của  $P(x)$  là  $1 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ . Theo định lí **Rolle**, đa thức

$P'(x) + xP(x)$  có  $n - 1$  nghiệm  $\alpha_i, i = \overline{1, n-1}$  thoả mãn

$1 < x_1 < \alpha_1 < x_2 < \dots < \alpha_{n-1} < x_n$  và đa thức  $xP'(x) + P(x)$  có  $n$  nghiệm  $\beta_j, j = \overline{1, n}$

thoả mãn  $0 < \beta_1 < x_1 < \beta_2 < x_2 < \dots < \beta_n < x_n$ .

- Nếu  $\alpha_i \neq \beta_j, \forall i, j$  thì ta có ngay điều phải chứng minh.

- Giả sử tồn tại  $(i, j)$  sao cho  $\alpha_i = \beta_j = \gamma \Rightarrow \gamma > 1$ .

$$\text{Khi đó } \begin{cases} P'(\gamma) + \gamma P(\gamma) = 0 \\ \gamma P'(\gamma) + P(\gamma) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{P'(\gamma)}{P(\gamma)} = -\gamma \\ \frac{P'(\gamma)}{P(\gamma)} = -\frac{1}{\gamma} \end{cases} \Rightarrow \gamma^2 = 1. \text{ Điều này mâu thuẫn với}$$

$\gamma > 1$ .

**Bài 9 (THTT 10/2004).** Cho đa thức  $P(x)$  có bậc 2018 và thỏa mãn

$$P(x) = \frac{x^2}{x+1}, \forall x \in \{1, 2, \dots, 2019\}. \text{ Tính } P(2020).$$

**Lời giải**

Xét  $Q(x) = (x+1)P(x) - x^2, \forall x \in \mathbb{R}$ . Ta có  $\deg Q(x) = 2019$  và  $Q(x)$  có 2019 nghiệm là  $1, 2, \dots, 2019$ . Do đó

$$Q(x) = C(x-1)(x-2)\dots(x-2019).$$

$$\text{Lại có } Q(-1) = -1 \Leftrightarrow C(-2)(-3)\dots(-2020) = -1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{2020!}.$$

$$\text{Suy ra } Q(x) = \frac{1}{2020!}(x-1)(x-2)\dots(x-2019).$$

$$\text{Do đó } Q(2020) = \frac{1}{2020} \Rightarrow \frac{1}{2020} = 2021 \cdot P(2020) - 2020^2 \Rightarrow P(2020) = \frac{1 + 2020^3}{2020 \cdot 2021}.$$

**Bài 10 (Tạp chí Pi 5/2018).** Cho hai đa thức  $P(x) = x^3 - 4x^2 + 39x - 46$  và

$$Q(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 3.$$

c. Chứng minh rằng cả hai đa thức đều có duy nhất một nghiệm thực.

d. Kí hiệu  $\alpha, \beta$  tương ứng là nghiệm thực của  $P(x), Q(x)$ . Chứng minh rằng

$$\{\alpha\} > \{\beta\}^2 \text{ (với } \{x\} \text{ là phần lẻ của số thực } x \text{)}.$$

**Lời giải**

a. Vì  $P(x), Q(x)$  là các đa thức bậc 3 nên đều có ít nhất một nghiệm thực. Hơn nữa:

$P'(x)=2x^2+23+(x-4)^2>0, \forall x \in \mathbb{R}$  và  $Q'(x)=3(x+1)^2+1>0, \forall x \in \mathbb{R}$  nên  $P(x), Q(x)$  đều là các hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$ . Do đó cả hai đa thức đều có duy nhất một nghiệm thực.

- b.  $P(x), Q(x)$  đều là các hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $P(1).P(2)=-10.24<0$  và  $Q(0).Q(1)=-3.5<0$  nên suy ra  $\alpha \in (1;2), \beta \in (0;1)$ . Do đó,  $\{\alpha\}=\alpha-1, \{\beta\}=\beta$ .

Ta chứng minh  $\alpha-1>\beta^2 \Leftrightarrow \alpha>\beta^2+1$ .

Ta có  $0=Q(\beta)=\beta^3+3\beta^2+4\beta-3 \Leftrightarrow \beta^3+4\beta=3(1-\beta^2)$

$$\Leftrightarrow (\beta^3+4\beta)^2=9(1-\beta^2)^2, (0<\beta<1)$$

$$\Leftrightarrow \beta^6-\beta^4+34\beta^2-9=0.$$

Ta có  $P(\beta^2+1)=\beta^6-\beta^4+34\beta^2-10=-1 \Rightarrow P(\beta^2+1).P(2)=-1.24<0$

Suy ra  $\alpha \in (\beta^2+1;2) \Rightarrow \alpha>\beta^2+1$ .

**Bài 11 (VMO 2002).** Cho hai đa thức  $P(x)=4x^3-2x^2-15x+9$  và  $Q(x)=12x^3+6x^2-7x+1$ .

- c. Chứng minh rằng cả hai đa thức đều có ba nghiệm thực phân biệt.  
d. Kí hiệu  $\alpha, \beta$  tương ứng là nghiệm thực lớn nhất của  $P(x), Q(x)$ . Chứng minh rằng  $\alpha^2+3\beta^2=4$ .

**Bài 12 (Hà Tĩnh TST 2018 – 2019 Ngày 2).** Kí hiệu  $M=\{-10;-9,...;9;10\}$ . Xét đa thức  $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$  ( $a, b, c \in M$ ). Biết  $\left|P(2+\sqrt{2})\right|<\frac{9}{2018}$ , chứng minh rằng đa thức  $P(x)$  có ba nghiệm thực phân biệt.

**Lời giải**

Ta có

$$\begin{aligned} P(2+\sqrt{2}) &= (2+\sqrt{2})^3 + a(2+\sqrt{2})^2 + b(2+\sqrt{2}) + c \\ &= 20 + 6a + 2b + c + (14 + 4a + b)\sqrt{2} = m + n\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Do  $a, b, c \in M$  nên  $|m| \leq 110, |n| \leq 64$ .

Ta chứng minh  $P(2+\sqrt{2})=0$ . Giả sử  $P(2+\sqrt{2}) \neq 0 \Leftrightarrow m+n\sqrt{2} \neq 0 \Leftrightarrow m, n$  không đồng thời bằng 0.

Suy ra  $m-n\sqrt{2} \neq 0$  và  $|m-n\sqrt{2}| \leq |m|+|n|\sqrt{2} < 110+64 \cdot \frac{3}{2} = 204$ , từ đây suy ra

$$\left| P(2+\sqrt{2}) \right| = \left| m+n\sqrt{2} \right| = \left| \frac{m^2-2n^2}{m-n\sqrt{2}} \right| \geq \frac{1}{206} > \frac{9}{2018}. \text{ Mâu thuẫn chứng tỏ } P(2+\sqrt{2})=0$$

.

Ta có  $P(2+\sqrt{2})=m+n\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow m=n=0 \Rightarrow m-n\sqrt{2}=P(2-\sqrt{2})=0$ .

Do  $P(x)$  có hai nghiệm là  $2 \pm \sqrt{2}$  là hai nghiệm của  $Q(x)=x^2-4x+2$  nên

$$P(x) = (x^2-4x+2) \left( x + \frac{c}{2} \right)$$

Từ đó suy ra  $P(x)$  có 3 nghiệm thực phân biệt là  $2 \pm 2$  và  $-\frac{c}{2}$ .

**Bài 13 (VN TST 2015).** Gọi  $\alpha$  là nghiệm dương của phương trình  $x^2+x-5=0$ . Với mỗi số nguyên dương  $n$  nào đó, gọi  $c_0, c_1, \dots, c_n$  là các số nguyên không âm thỏa mãn  $c_0 + c_1\alpha + \dots + c_n\alpha^n = 2015$ .

c. Chứng minh rằng  $c_0 + c_1 + \dots + c_n \equiv 2 \pmod{3}$ .

d. Tìm GTNN của  $S = c_0 + c_1 + \dots + c_n$ .

**Lời giải**

a. Xét đa thức  $P(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$ .

Xét phép chia  $P(x) = (x^2+x-5)Q(x) + R(x)$ , ta có  $\deg R(x) \leq 1$ .

Ta có  $P(\alpha) = R(\alpha) = 2015$  và  $P(1) = -3Q(1) + R(1) \equiv R(1) \pmod{3}$

Do đó, ta chứng minh  $R(1) \equiv 2 \pmod{3}$ .

Thật vậy

+) TH 1:  $\deg R(x) = 1 \Rightarrow R(x) = ax + b \Rightarrow R(\alpha) = a\alpha + b = 2015$ .

Do  $\alpha$  vô tỉ nên  $a\alpha + b$  vô tỉ (mâu thuẫn).

+ ) TH 2:  $\deg R(x)=0 \Rightarrow R(x)=2015 \equiv 2 \pmod{3}$ .

b. Ta có  $P(1)=-3Q(1)+2015$ . Do đó, để tìm GTNN của  $P(1)$  ta tìm GTLN của  $Q(1)$ .

Giả sử  $Q(x)=b_0+b_1x+\dots+b_{n-2}x^{n-2}; (b_0, b_1, \dots, b_{n-2} \in \mathbb{Z})$ .

Ta có

$$P(x)=(x^2+x-5)Q(x)+2015=(x^2+x-5)(b_0+b_1x+\dots+b_{n-2}x^{n-2})+2015$$

Đồng nhất hệ số

$$c_0=-5b_0+2015 \geq 0$$

$$c_1=b_0-5b_1 \geq 0$$

$$c_2=b_0+b_1-5b_2 \geq 0$$

$$c_3=b_1+b_2-5b_3 \geq 0$$

...

$$c_{n-2}=b_{n-4}+b_{n-3}-5b_{n-2} \geq 0$$

$$c_{n-1}=b_{n-3}+b_{n-2} \geq 0$$

$$a_n=b_{n-2} \geq 0$$

Ta có

$$b_0 \leq \frac{2015}{5}, b_1 \leq \frac{403}{5}$$

$$\text{Xét dãy số } \begin{cases} b_0=403, b_1=80 \\ b_n = \left\lfloor \frac{b_{n-1}+b_{n-2}}{5} \right\rfloor, n \geq 2 \end{cases}$$

Rõ ràng dãy này đến một lúc nào đó thì bằng 0 nên ta tính được

$$b_2=96, b_3=35, b_4=26, b_5=12, b_6=7, b_7=3, b_8=2, b_9=1, b_n=0, n \geq 10$$

$$\text{Suy ra } Q(1) \leq 665 \Rightarrow P(1) \geq -3.665 + 2015 = 20$$

**Bài 14.** Cho  $P(x)$  là một đa thức bậc 3 có hệ số hữu tỉ. Biết rằng  $P(x)$  có 3 nghiệm

thực  $\alpha, \beta, \gamma$  thỏa mãn  $k = \frac{\alpha}{\beta}$  là một số hữu tỉ khác 0 và  $\pm 1$ . Chứng minh rằng  $\alpha, \beta, \gamma$

hữu tỉ.

**Lời giải**

Không mất tổng quát, giả sử  $P(x)$  monic, ta có  $P(x)=x^3+mx^2+nx+p$  với  $m,n,p\in\mathbb{Q}$ .

$$\text{Theo ĐL Viet: } \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-m \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=n. \\ \alpha\beta\gamma=-p \end{cases}$$

Ta sẽ tìm một đa thức bậc 2, hệ số hữu tỉ nhàn  $\alpha, \beta$  hoặc  $\gamma$  làm nghiệm.

Ta có

$$\begin{aligned} (k^2+k+1)\beta^2+m(k+1)\beta+n &= \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2-(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta)+n \\ &= -(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+n=-n+n=0 \end{aligned}$$

Vậy  $\beta$  là nghiệm của đa thức  $Q(x)=(k^2+k+1)x^2+m(k+1)x+n\in\mathbb{Q}[x]$

Nếu gọi  $R(x)$  là đa thức hệ số hữu tỉ, có bậc nhỏ nhất, monic, nhận  $\beta$  làm nghiệm thì  $\deg R\leq 2$ .

Nếu  $\deg R=1$ , do  $R(x)\in\mathbb{Q}[x]$  nên  $\beta\in\mathbb{N}$ , suy ra  $\alpha=k\beta\in\mathbb{Q}, \gamma=-m-\alpha-\beta\in\mathbb{Q}$ .

Nếu  $\deg R=2$ , do  $\deg P=3$  nên suy ra  $\alpha$  hoặc  $\gamma$  hữu tỉ và dẫn tới  $\alpha, \beta, \gamma$  hữu tỉ.

**Bài 15 (Tạp chí Pi T9/2017).** Cho dãy số nguyên dương  $(a_n)$  với  $n\geq 0$  có tính chất:

Với mỗi số tự nhiên  $m$ , đa thức  $P_m(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+a_1x+a_0$  có  $m$  nghiệm thực phân biệt. Chứng minh rằng  $a_n\geq n, \forall n\in\mathbb{N}$ .

**Lời giải**

(Bài 11 – trang 49 Chuyên đề BD Đa thức HSG).

**Bài 16.** Cho  $2n$  số  $a_1 < a_2 < \dots < a_{2n}$  với  $n\geq 2$ .

$$\text{Đặt } S=\sum_{i=1}^{2n} a_i, A_1=\sum_{i<j} a_{2i}a_{2j}, A_2=\sum_{i<j} a_{2i+1}a_{2j+1}.$$

Chứng minh rằng  $(n-1)S^2 > 4n(A_1+A_2)$ .

**Lời giải**

**Bổ đề:** Cho đa thức  $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$  với hệ số thực, có bậc  $n\geq 2$

và có  $n$  nghiệm thực phân biệt. Khi đó  $(n-1)a_{n-1}^2 > 2na_n.a_{n-2}$

Thật vậy, từ đạo hàm cấp  $n-2$  của  $P(x)$  và điều kiện  $n \geq 2$  nên  $P^{(n-2)}(x)$  là đa thức bậc hai cụ thể là  $P^{(n-2)}(x) = \frac{n!}{2!} \cdot a_n \cdot x^2 + \frac{(n-1)!}{1!} \cdot a_{n-1} \cdot x + (n-2)! a_{n-2}$ .

- Áp dụng hệ quả của định lý Rolle ta suy ra  $\frac{n!}{2!} \cdot a_n \cdot x^2 + \frac{(n-1)!}{1!} \cdot a_{n-1} \cdot x + (n-2)! a_{n-2} = 0$

có hai nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow \Delta > 0$  hay  $(n-1)a_{n-1}^2 > 2na_n \cdot a_{n-2}$

**Quay lại bài toán:**

Xét  $P(x) = (x-a_1)(x-a_3)\dots(x-a_{2n-1}) + (x-a_2)(x-a_4)\dots(x-a_{2n})$

Ta thấy  $\deg P = n$ , hệ số cao nhất bằng 2.

Lại có  $P(a_1) \cdot P(a_2) < 0, P(a_3) \cdot P(a_4) < 0, \dots$  nên  $P(x)$  có  $n$  nghiệm thực phân biệt.

Áp dụng bổ đề, ta có:  $(n-1)S^2 > 4n(A_1 + A_2)$ .

**Bài 17.** Cho  $P(x) \in \mathbb{R}[x], \deg P(x) = 2017$ . Chứng minh rằng tồn tại hai đa thức  $Q(x), R(x) \in \mathbb{R}[x]; \deg Q = \deg R = 2017; Q(x), R(x)$  có tất cả các nghiệm đều thực sao cho  $P(x) = Q(x) + R(x)$ .

**Lời giải**

Không mất tổng quát, giả sử  $P(x)$  monic.

Xét 2017 số  $1, 2, \dots, 2017$ . Cho  $y_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, 2017}$  sao cho  $y_i > \max\{0; 2P(i)\}$  với  $i \in \{1; 3; \dots; 2017\}$  và  $y_i < \min\{0; 2P(i)\}$  với  $i \in \{2; 4; \dots; 2016\}$ .

Theo CT nội suy Lagrange, tồn tại đa thức

$$H(x) = \sum_{i=1}^{2017} y_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{2017} \frac{x-j}{i-j}, \deg H \leq 2016, H(x) \in \mathbb{R}[x]$$

Khi đó  $H(i) = y_i, \forall i = \overline{1, 2017}$ .

Đặt  $Q(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-2017) + H(x)$ , khi đó  $\deg Q = 2017$  và

$Q(i) = y_i, \forall i = \overline{1, 2017}$ ,  $Q(x)$  monic

$Q(1) \cdot Q(2) = y_1 \cdot y_2 < 0, Q(2) \cdot Q(3) = y_2 \cdot y_3 < 0, \dots, Q(i) \cdot Q(i+1) < 0, \forall i = \overline{1, 2016}$

Do đó  $Q(x)$  có 2016 nghiệm thực, nhưng do  $\deg Q = 2017$  nên  $Q(x)$  có 2017 nghiệm thực.

Đặt  $R(x) = 2P(x) - Q(x)$ , khi đó  $R(x) \in \mathbb{R}[x]$ , monic và  $\deg R = 2017$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } R(i)R(i+1) &= (2P(i) - Q(i))(2P(i+1) - Q(i+1)) \\ &= (2P(i) - y_i)(2P(i+1) - y_{i+1}) < 0, \forall i = \overline{1, 2016} \end{aligned}$$

Tương tự,  $R(x)$  có 2017 nghiệm thực.