PHAN NHẬT LINH

NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN

ỨNG DỤNG

Biên soạn theo chương trình mới với nhiều bài toán thực tế
Bám sát Đề minh họa 2025



Có lời giải
Đáp án chi tiết

Chia dạng cụ thể
Toán thực tế
Phù hợp đề Minh họa 2025

Phone/Zalo
0817 098 716

Liên hệ chỉnh chủ
FB: Phan Nhật Linh

CHƯƠNG 4

NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN

BÀI 01 NGUYÊN HÀM

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Định nghĩa

Định nghĩa: Cho hàm số f xác định trên K với K là một khoảng, một đoạn hay một nửa khoảng. Hàm số F được gọi là một nguyên hàm của f trên K nếu:

$$F'(x) = f(x), \forall x \in K$$

Chú ý 1:

- Họ các nguyên hàm của f trên K, kí hiệu $\int f(x)\mathrm{d}x$. Nếu F là một nguyên hàm của hàm số f trên K thì mọi nguyên hàm của f đều có dạng $F(x)+C$, với $C \in \mathbb{R}$. Vậy $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$.
- Nếu hàm số $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì tồn tại một hằng số C nào đó sao cho $G(x) = F(x)+C$ với mọi $x \in K$.

Chú ý 2:

- Để tìm họ các nguyên hàm (gọi tắt là tìm nguyên hàm) của hàm số $f(x)$ trên K, ta chỉ cần tìm một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ trên K. Khi đó: $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C, C$ là hằng số.
- Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng K thì $f(x)$ có nguyên hàm trên khoảng đó.
- Biểu thức $f(x)\mathrm{d}x$ gọi là vi phân của nguyên hàm $F(x)$ được ký hiệu là $\mathrm{d}F(x)$. Khi đó:

$$\mathrm{d}F(x) = F'(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$$

- Khi tìm nguyên hàm của một hàm số mà không chỉ rõ tập K, ta hiểu là tìm nguyên hàm của hàm số đó trên tập xác định của nó.

2 Các tính chất cơ bản của nguyên hàm

Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên K thì ta có các tính chất sau:

⊕ $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)$

⊕ $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$ với $k \neq 0$

⊕ $\int\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$

⊕ $\int\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x - \int g(x)\mathrm{d}x.$

3 Bảng công thức nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

Đạo hàm	Nguyên hàm	Nguyên hàm mở rộng (đọc thêm)
$(x)' = 1$	$\int 1\mathrm{d}x = x + C$	
$\left(x^{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1)x^{\alpha}$	$\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	$\int (ax+b)^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	$\int \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{x} + C$	$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{(ax+b)^2} = -\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{ax+b} + C$
$\left(a^x\right)' = a^x.\ln a$	$\int a^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{mx+n}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{m}\cdot\dfrac{a^{mx+n}}{\ln a} + C$
$\left(e^x\right)' = e^x$	$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$	$\int e^{ax+b}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}e^{ax+b} + C$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \dfrac{1}{ax+b}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}.\ln\lvert ax+b\rvert + C$
$(\sin x)' = \cos x$	$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$	$\int \cos(ax+b)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}.\sin(ax+b) + C$
$(\cos x)' = -\sin x$	$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$	$\int \sin(ax+b)\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{a}\cos(ax+b) + C$
$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + C$	$\int \dfrac{1}{\cos^2(ax+b)}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\tan(ax+b) + C$
$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\cot x + C$	$\int \dfrac{1}{\sin^2(ax+b)}\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{a}\cot(ax+b) + C$

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Tìm nguyên hàm của hàm số luỹ thừa

Các công thức thường dùng:

⊕ $\int 1\mathrm{d}x = x + C$

⊕ $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$

⊕ $\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C, \alpha \neq -1$

⊕ $\int \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{x} + C$

Chú ý các công thức biến đổi luỹ thừa:

⊕ $\dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$

⊕ $x^m.x^n = x^{m+n}$

⊕ $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

⊕ $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}; \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)$, biết:

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = x^4 + x^{-3}$

c) $f(x) = x^2 + \dfrac{3}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$

e) $f(x) = x^2 + \dfrac{3}{x} - 2\sqrt{x}$

f) $f(x) = 3\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

Bài tập 2: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)$, biết:

a) $f(x) = 2x\left(1 + 3x^3\right)$

b) $f(x) = (3x - 2)^2$

c) $f(x) = \dfrac{2x^4 + 3}{x^2}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{2x - 1}$

e) $f(x) = \dfrac{2}{4x - 3}$

f) $f(x) = \dfrac{6x + 2}{3x - 1}$

Bài tập 3: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1 + 2x^2}{x}$ thỏa mãn $F(-1) = 3$. Tìm $F(x)$.

Bài tập 4: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{2x + 1}$ và $F(0) = 2$. Tính $F(\mathrm{e})$

Bài tập 5: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2 - 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Tính $F(-1) + 2F(2)$.

Bài tập 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = 6x^2 - 2, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 1$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(2) = 0$. Tính $F(4)$.

Bài tập 7: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)$, biết:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{\sqrt{x}}$

Bài tập 8: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\dfrac{3x^3+1}{x}$. Khi đó hãy tính giá trị biểu thức $f(-3)+f(3)$ biết $f(1)=2, f(-1)=3$.

Bài tập 9: Tìm hàm số $y=f(x)$ biết $f'(x)=3x^2+2x-m+1$, $f(2)=1$ và đồ thị của hàm số $y=f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -5.

Bài tập 10: Tìm giá trị của tham số m biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}+m-1$ thỏa mãn $F(0)=0$ và $F(3)=7$.

Bài tập 11: Một loài vi khuẩn đang phát triển với tốc độ $f(t)=\dfrac{300}{0,25t}$, trong đó, t là thời gian tính bằng ngày. Với $t=1$ thì số lượng vi khuẩn là 1000 con. Hỏi sau 3 ngày số lượng vi khuẩn là bao nhiêu?

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=3x^2+2x$. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$?

A. $F_1(x)=x^3+x^2-4$. **B.** $F_2(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}$. **C.** $F_3(x)=x^3-x^2+1$. **D.** $F_4(x)=3x^3+x^2$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=x-\frac{1}{\sqrt{x}}$. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $(0;+\infty)$?

A. $F_1(x)=\frac{x^2}{2}+\sqrt{x}$. **B.** $F_2(x)=\frac{x^2}{2}-\sqrt{x}$.

C. $F_3(x)=\frac{x^2}{2}+2\sqrt{x}$. **D.** $F_4(x)=\frac{x^2}{2}-2\sqrt{x}$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=3+\frac{1}{x}$. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $(0;+\infty)$?

A. $F_1(x)=3x-\frac{1}{x^2}$. **B.** $F_2(x)=3x+\ln x$. **C.** $F_3(x)=3x+\frac{1}{x^2}$. **D.** $F_4(x)=3x-\ln x$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=3x^2+2x$. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$?

A. $F_1(x)=x^3+x^2-4$. **B.** $F_2(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}$. **C.** $F_3(x)=x^3-x^2+1$. **D.** $F_4(x)=3x^3+x^2$.

Câu 5: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+4$ là

A. $2x^2+4x+C$. **B.** x^2+4x+C. **C.** x^2+C. **D.** $2x^2+C$.

Câu 6: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2-2$ là

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=2x+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-2x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=x^2-2x+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=x^3-2x+C$.

Câu 7: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=5x^4-8x^3-6x$ là

A. $F(x)=x^5-2x^4-3x^2+C$. **B.** $F(x)=x^5-x^4-x^2+C$.

C. $F(x)=x^5-4x^4-2x^2+C$. **D.** $F(x)=x^5+2x^4-3x^2+C$.

Câu 8: Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+x-2024$ thỏa mãn $F(1)=-2024$ là

A. $\frac{1}{12}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2024x+\frac{5}{12}$. **B.** $\frac{1}{12}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2024x-\frac{1}{12}$.

C. $\frac{1}{12}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2024x+\frac{1}{12}$. **D.** $\frac{1}{12}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2024x-\frac{5}{12}$.

Câu 9: Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=(2x-3)^2$ thỏa mãn $F(-1)=-17$ là

A. $\frac{(2x-3)^3}{3}+\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{4}{3}x^3-6x^2+9x-\frac{2}{3}$.

C. $\frac{4}{3}x^3-6x^2+9x+\frac{8}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}x^3-6x^2+9x+\frac{2}{3}$.

Câu 10: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{5x-2}$.

A. $\int\frac{\mathrm{d}x}{5x-2}=\frac{1}{5}\ln|5x-2|+C$. **B.** $\int\frac{\mathrm{d}x}{5x-2}=\ln|5x-2|+C$.

C. $\int\frac{\mathrm{d}x}{5x-2}=-\frac{1}{2}\ln|5x-2|+C$. **D.** $\int\frac{\mathrm{d}x}{5x-2}=5\ln|5x-2|+C$.

Câu 11: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2+\frac{2}{x^2}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{x}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{2}{x}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{2}{x}+C$.

Câu 12: Biết một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{2x-1}$ là hàm số $F(x)$ thỏa mãn $F(1)=5$. Khi đó $F(x)$ là hàm số nào sau đây?

A. $F(x)=2\ln|2x-1|+5$. **B.** $F(x)=\frac{1}{2}\ln|2x-1|+5$.

C. $F(x)=\ln(2x-1)+5$. **D.** $F(x)=\ln|2x-1|+5$.

Câu 13: Tìm họ các nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\frac{x+3}{x+1}$.

A. $F(x)=x-\ln|x+1|+C$. **B.** $F(x)=x+\ln|x+1|+C$.

C. $F(x)=x-3\ln|x+1|+C$. **D.** $F(x)=x+2\ln|x+1|+C$.

Câu 14: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$.

A. $x+\frac{1}{x-1}+C$ **B.** $1+\frac{1}{(x-1)^2}+C$. **C.** $\frac{x^2}{2}+\ln|x-1|+C$. **D.** $x^2+\ln|x-1|+C$.

Câu 15: Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+1$ là

A. x^3+C. **B.** $\frac{x^3}{3}+x+C$. **C.** x^3+x+C. **D.** $6x+C$.

Câu 16: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{2x-1}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{2x-1}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\sqrt{2x-1}+C$.

Câu 17: Tìm nguyên hàm của hàm số $\int\left(x^2+\frac{3}{x}-2\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{x^3}{3}+3\ln|x|+\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$.

B. $\frac{x^3}{3}+3\ln|x|-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$.

C. $\frac{x^3}{3}+3\ln x-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}$.

D. $\frac{x^3}{3}-3\ln|x|-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$.

Câu 18: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3\sqrt{x}+x^{2024}$ là

A. $\sqrt{x}+\frac{x^{2023}}{673}+C$.

B. $2\sqrt{x^3}+\frac{x^{2025}}{2025}+C$.

C. $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{x^{2024}}{2025}+C$.

D. $\frac{1}{2\sqrt{x}}+6054x^{2025}+C$.

Câu 19: Họ các nguyên hàm của hàm số $y=x(x+1)^5$ là

A. $\frac{(x+1)^7}{7}+\frac{(x+1)^6}{6}+C$.

B. $6(x+1)^5+5(x+1)^4+C$.

C. $6(x+1)^5-5(x+1)^4+C$.

D. $\frac{(x+1)^7}{7}-\frac{(x+1)^6}{6}+C$.

Câu 20: Cho hàm số $y=F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=x^2$. Tính $F'(25)$.

A. 25. **B.** 125. **C.** 5. **D.** 625.

Câu 21: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^{\sqrt{5}}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{5}-1}x^{\sqrt{5}-1}+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=x^{\sqrt{5}+1}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\sqrt{5}x^{\sqrt{5}-1}+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{5}+1}x^{\sqrt{5}+1}+C$.

Câu 22: Họ tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+4$ là

A. $2x^2+4x+C$. **B.** x^2+4x+C. **C.** x^2+C. **D.** $2x^2+C$.

Câu 23: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=4x^3-2024$ là

A. $x^4-2024x+C$. **B.** $4x^3-2024x+C$. **C.** $12x^3+C$. **D.** x^4+C.

Câu 24: Biết $F(x)=x^3+\frac{1}{x}+1$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên miền $(0;+\infty)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\ln x$.

B. $f(x)=3x^2-\frac{1}{x^2}$.

C. $f(x)=3x^2+\dfrac{1}{x^2}$. **D.** $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4+\ln x+x+C$.

Câu 25: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2+\dfrac{2}{x^2}$.

A. $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{1}{x}+C$. **B.** $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{2}{x}+C$. **C.** $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1}{x}+C$. **D.** $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2}{x}+C$.

Câu 26: Biết $\int\left(\dfrac{1}{2x}+x^5\right)\mathrm{d}x=a\ln|x|+bx^6+C$ với $(a,b\in\mathbb{Q},C\in\mathbb{R})$. Tính a^2+b?

A. $\dfrac{5}{12}$. **B.** 9. **C.** $\dfrac{7}{13}$. **D.** $\dfrac{7}{6}$.

Câu 27: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x+1)(x+2)$ là

A. $2x+3+C$. **B.** $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{2}{3}x^2+2x+C$.

C. $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2}{3}x^2+2x+C$. **D.** $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3}{2}x^2+2x+C$.

Câu 28: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{5+2x^4}{x^2}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{5}{x}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{2x^3}{3}-\dfrac{5}{x}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{2x^3}{3}+5\ln x^2+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=2x^3-\dfrac{5}{x}+C$.

Câu 29: Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=2x+3\sqrt{x}$ thoả mãn $F(1)=0$.

A. $F(x)=x^2+3\sqrt{x^3}$. **B.** $F(x)=x^2+2\sqrt[3]{x^2}$.

C. $F(x)=x^2+3\sqrt[3]{x^2}-4$. **D.** $F(x)=x^2+2\sqrt{x^3}-3$.

Câu 30: Tìm hàm số $y=f(x)$, biết $f'(x)=3\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}},(x>0)$ và $f(1)=1$.

A. $f(x)=2x\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x^2}-4$. **B.** $f(x)=2x\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x^2}+2$.

C. $f(x)=\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x^2}-3$. **D.** $f(x)=x\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}-3$.

Câu 31: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(2x-3)^2$ thỏa $F(0)=\dfrac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $T=\log_2\left[3F(1)-2F(2)\right]$.

A. $T=10$. **B.** $T=4$. **C.** $T=2$. **D.** $T=-4$.

Câu 32: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{2}{x+2}$. Biết $F(-1)=1$, khi đó $F(2)$ bằng

A. $2\ln 3+2$. **B.** $4\ln 2+1$. **C.** $\ln 8+1$. **D.** $2\ln 4$.

Câu 33: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2x-3}$; biết $F(2)=1$. Giá trị $F(3)$ bằng

A. $F(3)=2\ln 3+1$. **B.** $F(3)=\frac{1}{2}\ln 3+1$.

C. $F(3)=\ln 3+1$. **D.** $F(3)=\frac{1}{2}\ln 3-1$.

Câu 34: Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3+2x$ có dạng $F(x)=ax^4+bx^2$. Tính $T=4a+b$.

A. $T=0$. **B.** $T=1$. **C.** $T=2$. **D.** $T=3$.

Câu 35: Với giá trị thực nào của tham số m để hàm số $F(x)=mx^3+(3m+2)x^2-4x+3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+10x-4$?

A. $m=0$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=2$.

Câu 36: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+3 & \text{khi } x\geq 1\\ 3x^2+2 & \text{khi } x<1\end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0)=2$. Giá trị $F(-1)+2F(2)$ bằng

A. 23. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 21.

Câu 37: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+5 & \text{khi } x\geq 1\\ 3x^2+4 & \text{khi } x<1\end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0)=2$. Giá trị của $F(-1)+2F(2)$ bằng

A. 27. **B.** 29. **C.** 12. **D.** 33.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=4x^3-6x$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0)=2$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $F(x)=f'(x)$.

b) $F'(x)=f(x)$.

c) $F(x)=x^4-3x^2+2$.

d) $F(1)=3$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=2x+m$ và $G(x)=x^3+mx^2+3x+m$ với $m\in\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$ làm một nguyên hàm của $f(x)$ sao cho $F(0)=1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau :

a) Khi $m=3$ thì $\int f(x)\mathrm{d}x=x^2-3x+C$.

b) Khi $m=2$ thì $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

c) Khi $m=-1$ thì $\int\left(G(x)-f(x)\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+C$

d) Có 2 giá trị nguyên dương của m để $F(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ với $x\neq 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(x)=2+\dfrac{3}{x-1}$.

b) $\int f(x)\mathrm{d}x=2x+3\ln(x-1)+C$.

c) Nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ thỏa mãn $F(2)=1$ là $F(x)=2x+3\ln|x-1|-3$

d) Phương trình $F(x)=2x+2$ có 2 nghiệm $x_1;x_2$. Khi đó $T=x_1+x_2=2$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2+3x+2}{x+1}$ với $x\neq -1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(x)=2x+1+\dfrac{1}{x+1}$.

b) $\int f(x)\mathrm{d}x=x^2+x+\ln(x+1)+C$.

c) Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2+3x+2}{x+1}$ thỏa mãn $F(-2)=3$ là $F(x)=x^2+x+\ln|x+1|+1$.

d) Bất phương trình $F(x)<x^2+x+2$ có tập nghiệm là $T=(-e-1;e-1)$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$ với $x\neq \pm 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$.

b) $\int f(x)\mathrm{d}x=\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|+C$.

c) Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$ thỏa mãn $F(-2)=\ln(3e)$ là $F(x)=\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+1$.

d) Phương trình $F(x)=\ln(2e)$ có 2 nghiệm $x_1;x_2$. Khi đó $S=x_1.x_2=1$.

Câu 6: Cho hàm số $F(x)=\int\left(2x+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$ (với $x>0$). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $F(x)=2\int x\,\mathrm{d}x+\int\sqrt{x}\,\mathrm{d}x+C$ với $C\in\mathbb{R}$.

b) $G(x)=F(x)+2024\Rightarrow G(x)=\int\left(2x+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$.

c) $F(x)=x+\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+C$.

d) $F(1)=\dfrac{2}{3}\Rightarrow F(4)=\dfrac{28}{3}$.

Câu 7: Cho hàm số $F(x)=\int\left(\sqrt[5]{x^3}\right)\mathrm{d}x$ (với $x>0$). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $F(x)=\dfrac{3}{5}\int x\,\mathrm{d}x$

b) $F(x)+C=\int\left(\sqrt[5]{x^3}\right)\mathrm{d}x, C\in\mathbb{R}$

c) $F(x)=\dfrac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}+C$

d) Biết $F(1)=-\dfrac{3}{8}$, khi đó $F(x)=\dfrac{5}{8}\sqrt[5]{x^8}-\dfrac{3}{8}$

Câu 8: Cho hàm số $f(x)=3$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\int f(x)\mathrm{d}x=3x+C$.

b) $\int\left[f(x)+x\right]^2\mathrm{d}x=x^3-\dfrac{1}{2}x^2+2x+C$

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(1)=1$ Thì $F(x)=3x-1$.

d) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì $F(1)+F(2)+...+F(100)=14590$ khi $F(1)=1$

Câu 9: Cho hàm số $f(x)=x^3-4x+5$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(1)=3$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\int\left(x^3-4x+5\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^4}{4}-2x^2+5x+C$.

b) $F(0)=2$

c) $\int\left[f(x)+f'(x)\right]\mathrm{d}x=\dfrac{x^4}{4}+x^3-2x^2+9x+C$

d) $\int f(x+1)\mathrm{d}x=\dfrac{x^4}{4}+x^3-\dfrac{1}{2}x^2+2x+C$

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=x+1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\int f(x)\mathrm{d}x=x^2+x+C$.

b) $\int\left[(x-1).f(x)\right]\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}x^3-x+C$

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(1)=2$ Thì $F(x)=x^2+x-1$.

d) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(1)=2$ và

$\dfrac{1}{F(1)}+\dfrac{1}{F(2)}+...+\dfrac{1}{F(99)}+\dfrac{1}{F(100)}=\dfrac{a}{b}$ thì $a+b=201$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)=x^2$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}+C$.

b) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(3)=1$ thì $F(4)=\frac{4}{3}$.

c) $\int f(2x+1)\mathrm{d}x = \int (2x+1)^2 \mathrm{d}x = \frac{4}{3}x^3+2x^2+x+C$

d) $\int [x.f(x-2)]\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+2x^2+C$

Câu 12: Cho hàm số $F(x)=x^2+x-6$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-6x+C$.

b) $f(1)+f(2)+...+f(49)+f(50)=2400$

c) Hàm số $G(x)$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ và $G(1)=3$ thì giá trị $G(4)=24$.

d) Hàm số $H(x-1)$ cũng là một nguyên hàm của $f(x-1)$ và $H(0)=3$ thì giá trị của biểu thức $H(2)-H(4)=6$.

Câu 13: Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f(x)=\frac{x^2+5x-7}{x}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(x)=x+5-\frac{7}{x}$.

b) $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+5x-7\ln|x|+C$.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(1)=5$. Khi đó ta tìm được hàm số $F(x)=\frac{x^2}{2}+5x-7\ln|x|+\frac{1}{2}$.

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(1)=4$ và $G(3)+G(-9)=20$. Khi đó tìm được $G(-6)=a\ln 2+b\ln 3+c$, với a,b,c là các số hữu tỉ. Vậy $a+b+c=\frac{2}{3}$.

Câu 14: Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f(x)=\frac{(x+1)(3x-2)}{x}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(x)=3x+5-\frac{2}{x}$

b) $\int f(x)\mathrm{d}x=3+x-2\ln|x|+C$.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(3)=15$. Khi đó ta tìm được $F(x)=\frac{3x^2}{2}+x-2\ln|x|+15$.

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(2)=1$ và $G(5)+G(-5)=10$. Khi đó tìm được $G(-10)=a\ln 2+b\ln 5+c$, với a,b,c là các số hữu tỷ. Vậy $a+b+c=75$.

Câu 15: Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f(x)=\dfrac{3x^5-2x^3+x^2+5x+4}{x^3}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(x)=3x^2-2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}$.

b) $\int f(x)\mathrm{d}x=x^3-2x+\ln|x|-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}+C$.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(-1)=0$. Khi đó tìm được $F(x)=x^3-2x+\ln|x|-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{3}{2}$.

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(1)=0$ và $G(-3)-G(3)=2$. Khi đó tìm được $G(-2)=\dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{\log_c e}$, với a,b,c là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Vậy $a+b+c=1093$.

Câu 16: Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f(x)=\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(x)=1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}$.

b) $\int f(x)\mathrm{d}x=x-2\ln|x|+\dfrac{1}{x}+C$.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(3)=5$. Khi đó ta tìm được $F(x)=x-2\ln|x|-\dfrac{1}{x}+5$.

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(1)=5$ và $G(2)+G(-4)=2025$. Khi đó tìm được $F(-8)=\dfrac{a}{b}$, với a,b là các số nguyên và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Vậy $a+b=16123$.

Câu 17: Hàm hai số $f(x)$ và $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn: $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ và $\int g(x)\mathrm{d}x=x+\ln|x|+C$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$.

b) $g(x)=1+\dfrac{1}{x}+C$.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)+g(x)$ và thỏa mãn $F(-1)=3$. Khi đó tìm được $F(x)=x^2+2\ln|x|-\frac{1}{2}$.

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)+g(x)$. Biết $G(2)=2\ln 2$ và $G(4)+G(-4)=2$. Khi đó tìm được $G(-6)=a\ln 2+b\ln 3+c$, với a,b,c là các số thực. Vậy $a+b+c=-2$.

Câu 18: Cây cà chua khi trồng có chiều cao 5cm. Tốc độ tăng chiều cao của cây cà chua sau khi trồng được cho bởi hàm số $v(t)=-0,1t^3+t^2$, trong đó t tính theo tuần, $v(t)$ tính bằng cm/tuần. Gọi $h(t)$ (tính bằng cm) là độ cao của cây cà chua ở tuần thứ t. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $h(t)=\frac{-t^4}{40}+\frac{t^3}{3}$, với $t\ge 0$.

b) Chiều cao tối đa của cây cà chua đó là $88,4$ cm (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

c) Giai đoạn tăng trưởng của cây cà chua đó kéo dài trong 9 tuần.

d) Vào thời điểm cây cà chua đó phát triển nhanh nhất thì chiều cao cây cà chua đạt $54,4$ cm (kết quả được làm tròn đến hàng phần mười).

Câu 19: Một chiếc xe đang chuyển động đều với tốc độ $v_0=15m/s$ thì gặp chướng ngại vật rồi phanh gấp với gia tốc không đổi là $a=-3\ m/s^2$. Kí hiệu $v(t)$ là tốc độ của xe, $a(t)$ là gia tốc xe, $s(t)$ là quãng đường xe đi được cho đến thời điểm t giây kể từ lúc phanh xe. Xét tính đúng – sai của các mệnh đề sau.

a) $v(t)=a'(t)$.

b) $a(t)=s''(t)$.

c) Tính từ lúc phanh xe, sau 4 giây thì xe dừng hẳn.

d) Quãng đường xe đi được tính từ lúc phanh xe đến khi dừng hẳn nằm trong khoảng từ 35 mét đến 40 mét.

Câu 20: Trong thí nghiệm nuôi cấy một loại vi sinh vật, kí hiệu $f(t)$ là tổng số lượng vi sinh vật sau t giờ. Biết rằng sau 3 giờ đầu tiên thì tổng số lượng vi sinh vật là 50 con. Trong 7 giờ tiếp theo, số lượng vi sinh vật thay đổi với tốc độ $f'(t)=t^2-8t$ (con/giờ).

a) Họ nguyên hàm của $f'(t)$ là $\frac{t^3}{3}-8t^2+C\ (C\in\mathbb{R})$.

b) Số lượng vi khuẩn tăng liên tục trong khoảng từ 3 giờ đến 10 giờ sau thời điểm làm thí nghiệm.

c) Số lượng vi khuẩn là nhỏ nhất sau 8 giờ tính từ lúc bắt đầu làm thí nghiệm.

d) Sau 6 giờ thì số lượng vi khuẩn là 5 con.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Người ta truyền nhiệt cho một bình nuôi cấy vi sinh vật từ $1°C$. Tốc độ tăng nhiệt độ của bình tại thời điểm t phút $(0 \le t \le 5)$ được cho bởi hàm số $f(t) = 3t^2$ ($°C$/ phút). Biết rằng nhiệt độ của bình đó tại thời điểm t là một nguyên hàm của hàm số $f(t)$. Tìm nhiệt độ của bình tại thời điểm 3 phút kể từ khi truyền nhiệt.

Câu 2: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 6at^2 + 2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là $90\ \text{m}^3$ và sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là $504\ \text{m}^3$. Tính thể tích nước trong bể sau khi bơm được 9 giây.

Câu 3: Tốc độ tăng trưởng của một đàn gấu mèo tại thời điểm t tháng kể từ khi người ta thả 100 cá thể đầu tiên vào một khu rừng được ước lượng bởi công thức $P'(t) = 8t + 30$ (con/tháng), với $P(t)$ là số lượng cá thể trong đàn tại thời điểm t tháng tương ứng. Dựa vào tốc độ tăng trưởng đã cho, hãy ước tính số cá thể của đàn gấu mèo này tại thời điểm 3 tháng kể từ khi chúng được thả vào rừng.

Câu 4: Cường độ dòng điện (đơn vị: A) trong một dây dẫn tại thời điểm t giây là:

$$I(t) = Q'(t) = 3t^2 - 6t + 5$$

Với $Q(t)$ là điện lượng (đơn vị: C) truyền trong dây dẫn tại thời điểm t. Biết khi $t = 1$ giây thì điện lượng truyền trong dây dẫn là $Q(1) = 4$. Tính diện lượng truyền trong dây dẫn khi $t = 3$.

Câu 5: Một chất điểm thực hiện chuyển động thẳng trên trục Ox, với vận tốc cho bởi công thức $v(t) = 3t^2 + 4t(\text{m/s})$ với t là thời gian. Biết rằng tại thời điểm bắt đầu của chuyển động, chất điểm đang ở vị trí có tọa độ $x = 1$. Tọa độ của chất điểm sau 1 giây chuyển động là bao nhiêu?

Câu 6: Một chất điểm chuyển động trên đường thẳng nằm ngang với gia tốc phụ thuộc thời gian $t(\text{s})$ là $a(t) = 2t - 7\ (\text{m/s}^2)$. Biết vận tốc đầu bằng $10\ \text{m/s}$, hỏi sau bao lâu thì chất điểm đạt vận tốc $18\ \text{m/s}$?

Câu 7: Một viên đạn được bắn lên trời với vận tốc là $72(\text{m/s})$ bắt đầu từ độ cao 2m. Hãy xác định chiều cao của viên đạn sau thời gian $5s$ kể từ lúc bắn biết gia tốc trọng trường là $9{,}8(\text{m/s}^2)$

Câu 8: Một vật đang chuyển động với vận tốc $6\ \text{m/s}$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = \dfrac{3}{t+1}(\text{m/s}^2)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc. Hỏi vận tốc của vật sau 10 giây gần nhất với kết quả nào sau đây?

Câu 9: Tốc độ phát triển của số lượng vi khuẩn trong hồ bơi được mô hình bởi hàm số $B'(t) = \dfrac{1000}{(1+0{,}3t)^2}$ với $t \ge 0$, trong đó $B(t)$ là số lượng vi khuẩn trên mỗi ml nước tại ngày thứ t. Số lượng vi khuẩn ban đầu là 500 con trên mỗi ml nước. Biết rằng mức độ an toàn cho người sử dụng hồ bơi là số vi khuẩn phải dưới 3000 con trên mỗi ml nước. Hỏi sau bao nhiêu ngày thì người ta phải xử lí và thay nước mới cho hồ bơi.

Câu 10: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 3at^2 + bt\ (m^3/s)$ và ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong

bể là $150m^3$. Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $1100m^3$. Hỏi thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây.

----------HẾT----------

Dạng 2: Nguyên hàm của hàm số lượng giác

Các công thức thường dùng:

⊕ $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$ ⊕ $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$

⊕ $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + C$ ⊕ $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\cot x + C$

Chú ý các công thức biến đổi lượng giác:

⊕ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ⊕ $\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ ⊕ $\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$

⊕ $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ ⊕ $\sin 2x = 2\sin x.\cos x$ ⊕ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

⊕ $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ ⊕ $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)$, biết:

a) $f(x) = 4x + 3\cos x$ b) $f(x) = 2x + \frac{1}{\sin^2 x}$

c) $f(x) = \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2$ d) $f(x) = \sin 3x$

e) $f(x) = \cos(2x+3)$ f) $f(x) = \cos 5x.\cos x$

Bài tập 2: Tìm

a) $\int (2\sin x - 3\cos x)\mathrm{d}x$ b) $\int \cos^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$

c) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos^2 x}$ d) $\int (\sin x + \cos x)^2\mathrm{d}x$

e) $\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$ trên $(0;\pi)$ f) $\int 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x$

Bài tập 3: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 2 - 5\sin x$ và $f(0) = 10$. Tìm hàm $f(x)$.

Bài tập 4: Cho $F(x) = \cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\tan x$. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $g(x) = \frac{\tan x}{f'(x)}$.

Bài tập 5: Một vật chuyển động với vận tốc là $v(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{\sin(\pi t)}{\pi}(\mathrm{m/s})$. Gọi S_1 là quãng đường vật đó đi trong 2 giây đầu và S_2 là quãng đường đi từ giây thứ 3 đến giây thứ 5. Chứng minh $S_2 > S_1$?

Bài tập 6: Một vật chuyển động với gia tốc phụ thuộc vào thời gian theo công thức $a(t) = \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$. Biết tại thời điểm $t = 0$ thì vận tốc và quãng đường đi được của vật đều bằng 0. Thiết lập công thức tính quãng đường đi được của vật đó theo thời gian

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=3\cos x-4\sin x$ là:

A. $3\sin x-4\cos x$. **B.** $-3\sin x+4\cos x$.

C. $3\sin x+4\cos x+C$. **D.** $-3\sin x+4\cos x+C$.

Câu 2: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=2\sin x+\dfrac{3}{\sin^2 x}$ là:

A. $-2\cos x-3\cot x+C$. **B.** $2\cos x-3\tan x+C$.

C. $-2\cos x+3\cot x+C$. **D.** $2\cos x-3\cot x+C$.

Câu 3: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\left(\cos\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{2}\right)^2$ là:

A. $\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}+C$. **B.** $x-\cos x+C$.

C. $\left(\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}\right)^2+C$. **D.** $\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}+C$.

Câu 4: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=2\cos^2\dfrac{x}{2}$ là:

A. $4\cos\dfrac{x}{2}+C$. **B.** $x+\sin x+C$.

C. $2\sin^2\dfrac{x}{2}+C$. **D.** $\dfrac{2}{3}\cos^3\dfrac{x}{2}+C$.

Câu 5: Nguyên hàm của hàm số có $f(x)=\tan^2 x+\cot^2 x$ là:

A. $2\tan x+2\cot x+C$. **B.** $\dfrac{1}{3}\tan^3 x+\dfrac{1}{3}\cot^3 x+C$.

C. $=\tan x+\cot x-2x+C$. **D.** $\tan x-\cot x-2x+C$.

Câu 6: Hàm số nào dưới đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x+\sin(2x+1)$?

A. $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\cos(2x+1)$. **B.** $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2-2\cos(2x+1)$.

C. $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}\cos(2x+1)$. **D.** $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}\cos(2x+1)$.

Câu 7: Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=2\sin x-\cos x$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ là

A. $F(x)=2\cos x-\sin x-1$. **B.** $F(x)=2\cos x+\sin x-1-\sqrt{3}$.

C. $F(x)=-2\cos x-\sin x+1$. **D.** $F(x)=-2\cos x-\sin x-1$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\cos^2 x}$. Chọn khẳng định đúng:

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\ln|x|+\tan x+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\ln x+\tan x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\ln x+\tan|x|+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\ln|x|+\tan x$.

Câu 9: Khẳng định nào đây sai?

A. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$.

B. $\int \cos x\,dx = -\sin x + C$.

C. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

D. $\int \cos x\,dx = -\tan x + C$.

Câu 10: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$ là

A. $x^3 - \cos x + C$. **B.** $6x - \cos x + C$. **C.** $x^3 + C$. **D.** $x^3 + \sin x + C$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5\cos x$ và $f(0) = 5$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(x) = 3x - 5\sin x - 5$.

B. $f(x) = 3x + 5\sin x + 5$.

C. $f(x) = 3x + 5\sin x + 2$.

D. $f(x) = 3x - 5\sin x + 5$.

Câu 12: Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + 2\cos x$ biết $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ là

A. $F(x) = -2\sin x - \cos x + 2$.

B. $F(x) = 2\sin x - \cos x + 2$.

C. $F(x) = \sin x - 2\cos x - 2$.

D. $F(x) = 2\sin x - \cos x - 2$.

Câu 13: Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \frac{1}{\cos^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ là

A. $-\cos x + \tan x - \sqrt{2} + 1$.

B. $-\cos x + \tan x + \sqrt{2} - 1$.

C. $\cos x + \tan x + \sqrt{2} - 1$.

D. $-\cos x + \tan x + C$.

Câu 14: Tìm $\int \sin 5x\,dx$.

A. $\int \sin 5x\,dx = -5\cos 5x + C$.

B. $\int \sin 5x\,dx = -\cos 5x + C$.

C. $\int \sin 5x\,dx = -\frac{1}{5}\cos 5x + C$.

D. $\int \sin 5x\,dx = \frac{1}{5}\cos 5x + C$.

Câu 15: Với C là hằng số, họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2\cos 2x$ là

A. $\sin 2x + C$. **B.** $2\sin 2x + C$. **C.** $-2\sin 2x + C$. **D.** $-\sin 2x + C$.

Câu 16: Tìm $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x.\cos^2 x}\,dx$

A. $\cos x + \sin x + C$.

B. $-\cos x - \sin x + C$.

C. $-\cot x - \tan x + C$.

D. $\cot x - \tan x + C$.

Câu 17: Nguyên hàm của hàm số $y = \tan^2 x$ là

A. $\tan x - x + C$.

B. $-\tan x - x + C$.

C. $-\tan x + x + C$.

D. $\tan x + x + C$.

Câu 18: Biết $\int (2\sin x + \cos x)^2\,dx = a\sin 2x - \cos 2x + bx + C$, với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $a^2 + b^2$.

A. $\frac{17}{2}$. **B.** $\frac{109}{4}$. **C.** $\frac{17}{16}$. **D.** $\frac{109}{16}$.

Câu 19: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của của hàm số $f(x) = \sin x$ và đồ thị hàm số $y = F(x)$ đi qua điểm $M(0;1)$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. **B.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$. **C.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. **D.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\int \sin x\mathrm{d}x = \cos x$.

b) $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$.

c) $\tan x + 1$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

d) $\cot(x+1)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \cos^2 x$ và $F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $F'(x) = \sin 2x$

b) $F(x) = \int \dfrac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x$

c) $\dfrac{\sin x\cos x + x}{2}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$

d) Biết $F(0) = 0$. Suy ra $F(\pi) = \pi$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = \tan^2 x$ và $F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $F'(x) = \tan^2 x$.

b) $\tan x$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

c) $F(x) = \int\left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\mathrm{d}x$.

d) Biết $F(0) = 0 \Rightarrow F(\pi) = 0$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \sin x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau :

a) Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = -\cos x + C$, với C là hằng số.

b) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(\pi) = 1$. Khi đó ta có $F(0) = -1$.

c) Ta có $\int F(x)\mathrm{d}x = \sin x + C_1$, với C_1 là hằng số.

d) Phương trình $F(x) = f(x)$ có đúng 4 nghiệm trên đoạn $[0;4\pi]$.

Câu 5: Đặt $F(x) = \int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Ta có $F(x) = -\cot x + C$, với C là hằng số.

b) Biết rằng, $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$. Khi đó, ta có $F(x)=1-\cot x$.

c) Hàm số $F(x)$ là hàm số chẵn trên tập xác định của $F(x)$.

d) Phương trình $F(x)=0$ có các nghiệm là $x=\frac{\pi}{4}+k2\pi$, với $k\in\mathbb{Z}$.

Câu 6: Đặt $F(x)=\int\tan^2 x\,\mathrm{d}x$ và thỏa mãn $F(0)=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Ta có $F(x)=-x+\tan x$.

b) Ta thấy hàm số $F(x)$ là hàm số chẵn trên tập xác định của $F(x)$.

c) Hàm số $F(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

d) Phương trình $F(x)+x=0$ có các nghiệm là $x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=\sin x+\cos x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Ta có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\sin x-\cos x+C$, với C là hằng số.

b) Biết rằng, $F(0)=-1$. Khi đó, $F(x)=\sin x-\cos x$.

c) Hàm số $F(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(0\,;\,\frac{\pi}{2}\right)$.

d) Hàm số $F(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất là -2.

Câu 8: Đặt $F(x)=-\int\sin x\,\mathrm{d}x$ và thỏa mãn $F(0)=1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Ta có $F(x)=\cos x$.

b) Ta thấy hàm số $F(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$.

c) Ta thấy $F(\alpha)=\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha},\ \forall\alpha\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

d) Ta có $F\left(\frac{\pi}{2^{2025}}\right)\cdot F\left(\frac{\pi}{2^{2024}}\right)\cdot F\left(\frac{\pi}{2^{2023}}\right)\cdots F\left(\frac{\pi}{2^3}\right)\cdot F\left(\frac{\pi}{2^2}\right)=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2^{2025}}}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin^2 x$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$. Tính giá trị của biểu thức $S=F(-\pi)+2F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (Kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân sau dấu phẩy)

Câu 2: Biết nguyên hàm $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{2\tan x+1}$ bằng $\frac{a}{b}\ln\left|2\sin x+\cos x\right|+\frac{c}{b}x+C$ với ($\frac{a}{b},\frac{c}{b}$ là các phân số tối giản và $a\in\mathbb{Z},c\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{N}^*$). Tính $a-b+c$.

Câu 3: Gọi $F(x)$ là họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)=8\sin 3x\cos x$. Biết rằng $F(x)$ có dạng $F(x)=a\cos 4x+b\cos 2x+C$. Khi đó $a-b$ bằng bao nhiêu?

Câu 4: Cho $F(x)=\cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x).\tan x$. Biết nguyên hàm của hàm số $\frac{\tan x}{f'(x)}$ có dạng $\frac{a}{b}\tan x+C$ với a, b là các số nguyên dương, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $C\in\mathbb{R}$. Tính $a-2b$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=4\sin 2x+\cos x,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=-2$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(\pi)=3$, khi đó $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng bao nhiêu?

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=\sin 2x,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$, khi đó $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$ bằng bao nhiêu ?

----------HẾT----------

Dạng 3: Nguyên hàm của hàm số mũ

Các công thức thường dùng:

⊕ $\int e^x \, dx = e^x + C$ ⊕ $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

Chú ý các công thức biến đổi lượng giác:

⊕ $a^x.a^y = a^{x+y}$ ⊕ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ ⊕ $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)$, biết:

a) $f(x) = 2024^x$

b) $f(x) = 5^x + 1$

c) $f(x) = e^{-x}$

d) $f(x) = e^{2x} - \frac{1}{x^2}$

e) $f(x) = 8^x.2^{1-2x}$

f) $f(x) = \left(3^x - \frac{1}{3^x}\right)^2$

Bài tập 2: Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau, biết:

a) $y = 2^x$

b) $y = \frac{1}{3^x}$

c) $y = \left(2e^x - 5^x\right)$

d) $y = \frac{1}{e^x}$

e) $y = \left(2.3^x - \frac{1}{3}.7^x\right)$

f) $y = 2^{3x}.3^{2x}$

g) $y = \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x}$

h) $y = \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1}$

i) $y = e^x\left(2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5}\right)$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2025^x$ là

A. $F(x)=x.2025^{x-1}$. **B.** $F(x)=2025.2024^x$.

C. $F(x)=2025^x.\ln 2025$. **D.** $F(x)=\dfrac{2025^x}{\ln 2025}$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=1+e^x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=x+xe^{x-1}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=1+e^x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=x+e^x+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=1+xe^{x-1}+C$.

Câu 3: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=5^{2x-1}$ là

A. $\dfrac{1}{2}.5^{2x-1}.\ln 5+C$. **B.** $2.5^{2x-1}.\ln 5+C$. **C.** $5^{2x-1}.\ln 5+C$. **D.** $\dfrac{1}{2\ln 5}.5^{2x-1}+C$.

Câu 4: Hàm số $F(x)=x^2+e^{-2x}+2025$ là một nguyên hàm của hàm số

A. $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{1}{2}e^{-2x}+2025x$. **B.** $f(x)=2x-2e^{-2x}$.

C. $f(x)=2x-2e^{-2x}+2025x$. **D.** $f(x)=2x+2e^{-2x}+2025$.

Câu 5: Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=e^x+2e^{-x}-2x$ thỏa mãn $F(0)=1$

A. $F(x)=e^x-2e^{-x}-x^2+2$. **B.** $F(x)=e^x+2e^{-x}-x^2-2$.

C. $F(x)=e^x-2e^{-x}-x^2$. **D.** $F(x)=e^x+2e^{-x}-x^2$.

Câu 6: Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào có họ tất cả các nguyên hàm là hàm số $F(x)=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$, ($a>0$, $a\neq 1$, C là hằng số).

A. $f(x)=a^x$. **B.** $f(x)=\dfrac{1}{x}$. **C.** $f(x)=\ln x$. **D.** $f(x)=x^a$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=3^x+2x$. Khẳng định nào dưới đây đúng

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{3^x}{\ln 3}+2+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{3^x}{\ln 3}+x^2+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=3^x.\ln 3+2+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=3^x.\ln 3+x^2+C$.

Câu 8: Hàm số $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nào sau đây?

A. $f(x)=\dfrac{x^4}{3}+e^x$. **B.** $f(x)=3x^2+e^x$. **C.** $f(x)=\dfrac{x^4}{12}+e^x$. **D.** $f(x)=x^2+e^x$.

Câu 9: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=2^x\left(1+2^{-x}\cdot\sin x\right)$ là

A. $\frac{2^{x+1}}{x+1}-\cos x+C$ **B.** $\frac{2^x}{\ln 2}-\cos x+C$. **C.** $\frac{2^x}{\ln 2}+\cos x+C$. **D.** $\frac{2^{x-1}}{x+1}+\cos x+C$.

Câu 10: Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{3x+1}-2x^2$ là

A. $\frac{\mathrm{e}^{3x+1}-2x^3}{3}$. **B.** $\frac{\mathrm{e}^{3x+1}}{3}-x^3$. **C.** $\frac{\mathrm{e}^{3x+1}}{3}-2x^3$. **D.** $\frac{\mathrm{e}^{3x+1}-x^3}{3}$.

Câu 11: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{2x}$ và $F(0)=0$. Giá trị của $F(\ln 3)$ bằng

A. 2 **B.** 6. **C.** 8. **D.** 4.

Câu 12: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=4^x+\cos 2x$ là

A. $\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{\sin 2x}{2}+C$. **B.** $4^x\ln 4+\frac{\sin 2x}{2}+C$.

C. $4^x\ln 4-\frac{\sin 2x}{2}+C$. **D.** $\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{\sin 2x}{2}+C$.

Câu 13: Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=e^x-1$ trên $(-\infty;+\infty)$, biết $F(0)=2$.

A. $F(x)=\frac{1}{e^x}-x+1$. **B.** $F(x)=\ln x-x-1$.

C. $F(x)=e^x-x+1$. **D.** $F(x)=e^x-x+2$.

Câu 14: Kết quả $\int\left(x+e^{2020x}\right)dx$ bằng

A. $x^2+\frac{e^{2020x}}{2020}+C$. **B.** $x^3+\frac{e^{2020x}}{2020}+C$. **C.** $\frac{x^2}{2}+\frac{e^{2020x}}{2020}+C$. **D.** $x+\frac{e^{2020x}}{2020}+C$.

Câu 15: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{-x}\left(2+\frac{e^x}{\cos^2 x}\right)$.

A. $F(x)=-\frac{2}{e^x}+\tan x+C$. **B.** $F(x)=2e^x-\tan x+C$.

C. $F(x)=-\frac{2}{e^x}-\tan x+C$. **D.** $F(x)=2e^{-x}+\tan x+C$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)=2^x+3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=2^{x-3}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=2^x\ln 2+3x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{2^x}{\ln 2}+3+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{2^x}{\ln 2}+3x+C$.

Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=e^x+2x+1,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=1$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(1)=e$. Tính $F(0)$.

A. $\frac{5}{6}$. **B.** $-\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $-\frac{5}{6}$.

Câu 18: Tìm $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x-1$ trên $(-\infty;+\infty)$, biết $F(0)=2$.

A. $F(x)=\ln x-x-1$. **B.** $F(x)=e^x-x-1$. **C.** $F(x)=\frac{1}{e^x}-x+1$. **D.** $F(x)=e^x-x+1$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=e^x+x^e$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì $F(x)+5$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$.

b) $F(x)=e^x+x^e+C$ là họ nguyên hàm của $f(x)$.

c) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0)=1$ thì $F(1)=2e$.

d) Nếu $F(x),G(x)$ lần lượt là các nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0)=1,G(1)=e$ thì ta luôn có $G(x)=F(x)+e$.

Câu 2: Cho hàm số $F(x)=\int\left(4^x+2^x+1\right)\mathrm{d}x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $F(x)=\int 4^x\mathrm{d}x+\int 2^x\mathrm{d}x+\int \mathrm{d}x$.

b) $F(x)=\dfrac{2^{2x}+2^x}{\ln 2}+x+C$.

c) Nếu $F(1)=\dfrac{4}{\ln 2}$ thì $F(2)=\dfrac{12}{\ln 2}-1$.

d) Nếu $G(x)=\int\dfrac{8^x+1}{2^x+1}\mathrm{d}x$ thì $G(x)=F(x)+C$.

Câu 3: Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{6^{x+1}+3^{2x}}{2^{2x+3}}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $F'(x)=\dfrac{6^{x+1}+3^{2x}}{2^{2x+3}}$.

b) $F(x)=\dfrac{\int\left(6^{x+1}+3^{2x}\right)\mathrm{d}x}{\int 2^{2x+3}\mathrm{d}x}$.

c) $F(x)=\int\left[\dfrac{3}{4}.\left(\dfrac{3}{2}\right)^x+\dfrac{1}{8}.\left(\dfrac{9}{4}\right)^x\right]\mathrm{d}x$.

d) Nếu $F(0)=0$ thì $F(1)=\dfrac{29}{64\left(\ln 3-\ln 2\right)}$.

Câu 4: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)=e^x-2x$ trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $F(0)=1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $F'(0)=0$.

b) $F(1)=e-1$.

c) $\int F(x)\mathrm{d}x = e^x - \frac{x^3}{3} + C$.

d) $\int \frac{f(x)}{xe^x}\mathrm{d}x = \ln|x| - 2e^x + C$

Câu 5: Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2^{2x+1} - 1 + \cos 2x}{2^x + \sin x}$ trên $[0;+\infty)$ thoả mãn $F(0) = \frac{2}{\ln 2} + 2$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(\pi) = 2^{\pi+1} - 1$.

b). $F'(0) = 2$

c) Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $F(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = \frac{\pi}{2}$ là $k = 2\sqrt{2^\pi} - 2$

d) $F(-1) = \frac{1}{\ln 2} + 2\cos 1$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = 2x + e^x$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2025$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(2) = 4 + e$

b) $\int f(x)dx = \int (2x + e^x)dx = x^2 + e^x + C$.

c) $F(x) = x^2 + e^x + 2024$.

d) $\int xf'(x^2)dx = \int x(2 + e^{x^2})dx = x^2 + xe^{x^2} + C$

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = e^x(2 + e^x)$. và $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\int f'(x)dx = 2e^x + e^{2x} + C$.

b) $F(x) = 2e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$.

Nếu $F(0) = 3$ thì $F(1) = 5e$.

d) Nếu $F(0) = \frac{5}{2}$ thì phương trình $F(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x^2.e^{2x}$. Tính tổng $a + b + 2c$.

Câu 2: Biết $F(x)=e^{2x}+2x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giả sử $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(2x)+\cos \pi x$. Khi đó $G(2)-G(0)=a.e^b+c$, $a,b,c\in\mathbb{Q}$. Tính $a.b.c$.

Câu 3: Cho hàm số $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{-2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=-(2x^2-8x+7)e^{-2x}$. Tính tổng $a+b+c$.

Câu 4: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^x+2x$ thỏa mãn $F(0)=\frac{3}{2}$. Tìm $F(2)$ (làm tròn đến hàng phần chục).

Câu 5: Một chiếc cốc chứa nước ở 95°C được đặt trong phòng có nhiệt độ 20°C. Theo định luật làm mát của Newton, nhiệt độ của nước trong cốc sau t phút (xem $t=0$ là thời điểm nước ở 95°C) là một hàm số $T(t)$. Tốc độ giảm nhiệt độ của nước trong cốc tại thời điểm t phút được xác định bởi công thức $T'(t)=-\frac{3}{2}e^{-\frac{t}{50}}$ (°C/ phút). Tính nhiệt độ của nước tại thời điểm $t=30$ phút.

Câu 6: Trọng lượng của một bào thai người nặng khoảng 0,04 ounce (1 ounce = 28,3485 gram) sau 8 tuần tuổi. Trong suốt 35 tuần tiếp theo, trọng lượng của bào thai này được dự đoán tăng với tốc độ $B'(t)=\frac{2436e^{-0,193t}}{\left(1+784e^{-0,193t}\right)^2}$, $8\le t\le 43$ với $B(t)$ là cân nặng tính bằng ounce và t là thời gian tính bằng tuần. Hãy tính trọng lượng của bao thai sau 25 tuần tuổi (Làm tròn kết quả đến chữ số hàng phần trăm).

----------HẾT----------

Dạng 4: Ứng dụng nguyên hàm giải bài toán thực tế

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Ký hiệu $h(x)$ là chiều cao của một cây (tính theo m) sau khi trồng x năm. Biết rằng sau một năm đầu tiên cây cao 2 m. Trong 10 năm tiếp theo cây phát triển với tốc độ $h'(x)=\frac{1}{x}$ (m/năm).

Bài tập 2: Một chiếc xe đạp đang chạy với vận tốc $v_0=10(m/s)$ thì tăng tốc với gia tốc không đổi là $a=2(m/s^2)$. Tính quãng đường xe đó đi được trong 3 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc.

Bài tập 3: Một đám vi trùng tại ngày thứ t có số lượng là $N(t)$. Biết rằng $N'(t)=\frac{2000}{1+2t}$ và lúc đầu đám vi trùng có 300000 con. Ký hiệu L là số lượng vi trùng sau 10 ngày. Tìm L.

Bài tập 4: Một quần thể virut Corona P đang thay đổi với tốc độ $P'(t)=\frac{5000}{1+0,2t}$, trong đó t là thời gian tính bằng giờ. Quần thể virut Corona P ban đầu có số lượng là 1000 con. Tìm số lượng virut Corona sau 3 giờ.

Bài tập 5: Một vật chuyển động với gia tốc phụ thuộc vào thời gian theo công thức $a(t)=\sin\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)$. Biết tại thời điểm $t=0$ thì vận tốc và quãng đường đi được của vật đều bằng 0. Xác định công thức tính quãng đường đi được của vật đó theo thời gian

Bài tập 6: Một vật đang chuyển động đều với gia tốc $v_0=15m/s$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=t^2+4t(m/s^2)$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 3 giây từ lúc bắt dầu tăng tốc.

Bài tập 7: Kí hiệu $h(x)$ là chiều cao của một cây (tính theo mét) sau khi trồng x năm. Biết rằng sau năm đầu tiên cây cao 3 m. Trong 15 năm tiếp theo cây phát triển với tốc độ $h'(x)=\frac{1}{x+1}$ (m/năm). Xác định chiều cao của cây sau x năm $(1\le x\le 16)$.

Bài tập 8: Kí hiệu $F(x)$ là chiều cao của một cây (tính theo mét) sau khi trồng x năm. Biết rằng sau năm đầu tiên cây cao 4 m. Trong 16 năm tiếp theo cây phát triển với tốc độ $f(x)=\frac{1}{2x+1}$ (m/năm). Xác định chiều cao của cây sau 5 năm.

Bài tập 9: Một vườn ươm cây cảnh bán một cây sau 6 năm trồng và uốn tạo dáng. Tốc độ tăng trưởng trong suốt 6 năm được tính xấp xỉ bởi công thức $h'(t)=1,5t+5$, trong đó $h(t)(cm)$ là chiều cao của cây khi kết thúc t (năm)

(*Nguồn: R.Larson andB. Edwards, Calculus 10e Cemgage 2014).* Cây con khi được trồng cao 12 cm.

a) Tìm công thức chỉ chiều cao của cây sau t năm.

b) Khi được bán, cây cao bao nhiêu centimét?

Bài tập 10: Tại một lễ hội dân gian, tốc độ thay đổi lượng khách tham dự được biểu diễn bằng hàm số $B'(t)=20t^3-300t^2+1000t$. Trong đó t tính bằng giờ $(0\le t\le 15)$, $B'(t)$ được tính bằng khách/giờ. *(Nguồn: A. Bigalke et al., Mathematik,Grundkurs ma-l, Cornelesen 2016).* Sau một giờ, 500 người đã có mặt tại lễ hội.

a) Viết công thức của hàm số $B(t)$ biểu diễn số lượng khách tham dự lễ hội với $0\le t\le 15$.

b) Sau 3 giờ sẽ có bao nhiêu khách tham dự lễ hội?

c) Số lượng khách tham dự lễ hội lớn nhất là bao nhiêu?

d) Tại thời điểm nào thì tốc độ thay đổi lượng khách tham dự lễ hội là lớn nhất?

Bài tập 11: Đối với các dự án xây dựng, chi phí nhân công lao động được tính theo số ngày công. Gọi $m(t)$ là số lượng nhân công được sử dụng ở ngày thứ t (kể từ khi khởi công dự án). Gọi $M(t)$ là số ngày công nhân được tính đến hết ngày thứ t (kể từ khi khởi công dự án). Trong kinh tế xây dựng, người ta đã biết rằng $M'(t)=m(t)$. Một công trình xây dựng dự kiến hoàn thành trong 400 ngày. Số lượng công nhân được sử dụng cho bởi hàm số $m(t)=800-2t$. Trong đó t tính theo ngày $(0\le t\le 400)$, $m(t)$ tính theo người (*Nguồn: A.Bigalke et al., Mathematik,Grundkurs ma-l, Cornelesen 2016).* Đơn giá cho một ngày công lao động là 400000 đồng. Tính chi phí nhân công lao động của công trình đó (cho đến lúc hoàn thành).

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Một quả bóng được ném lên từ độ cao $20m$ với vận tốc được tính bởi công thức sau đây $v(t)=-10t+16\,(m/s)$. Công thức nào sau đây tính độ cao của quả bóng theo thời gian t?

A. $h(t)=-5t^2+16t+C$. **B.** $h(t)=-5t^2+16t+20$.

C. $h(t)=5t^2-16t+20$. **D.** $h(t)=5t^2-16t+C$.

Câu 2: Một ô tô đang chạy với vận tốc $70\,km/h$ thì hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với tốc độ $v(t)=-10t+30\,(m/s)$. Tính quãng đường ô tô đi được sau 3 giây kể từ khi hãm phanh?

A. $51(m)$. **B.** $43(m)$. **C.** $54(m)$. **D.** $45(m)$.

Câu 3: Sự sản sinh vi rút Zika ngày thứ t có số lượng là $N(t)$ con, biết $N'(t)=\dfrac{1000}{t}$ và lúc đầu đám vi rút có số lượng 250.000 con. Tính số lượng vi rút sau 10 ngày.

A. 272304 con **B.** 212302 con **C.** 242102 con **D.** 252302 con.

Câu 4: Bạn Minh Hiền ngồi trên máy bay đi du lịch thế giới với vận tốc chuyển động của máy báy là $v(t)=3t^2+5(m/s)$. Quãng đường máy bay bay từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là:

A. $36m$. **B.** $252m$. **C.** 1134m. **D.** 966m.

Câu 5: Trong một đợt xả lũ, nhà máy thủy điện đã xả lũ trong 40 phút với tốc độ lưu lượng nước tại thời điểm t giây là $h'(t)=10t+500(m^3/s)$. Hỏi sau thời gian xả lũ trên thì hồ thoát nước của nhà máy đã thoát đi một lượng nước là bao nhiêu?



A. $5.10^4(m^3)$. **B.** $4.10^6(m^3)$. **C.** $3.10^3(m^3)$. **D.** $6.10^6(m^3)$.

Câu 6: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t)=3at^2+bt\ (m^3/s)$ và ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là $150m^3$. Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $1100m^3$. Hỏi thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây là bao nhiêu.

A. $8400m^3$ **B.** $8400m^3$ **C.** $6000m^3$ **D.** $4200m^3$

Câu 7: Gọi $h(t)\ (m)$ là mực nước ở bồn chứa sau khi bơm nước được t giây. Biết rằng $h'(t)=\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{t}\ \ (m/s)$ và lúc đầu bồn không có nước. Tìm mức nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

A. $2,64m$. **B.** $1,22m$. **C.** $2,22m$. **D.** $1,64m$.

Câu 8: Một ô tô đang chạy với vận tốc 20 / (*m s*) thì người người đạp phanh. Sau khi đạp phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -40t + 20(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bằng đầu đạp phanh. Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?



A. 5(cm). **B.** 7,5(m). **C.** $\frac{5}{2}$ (m). **D.** 5(m).

Câu 9: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)(\mathrm{m/s})$ có gia tốc $v'(t) = \frac{3}{t+1}(\mathrm{m/s^2})$. Vận tốc ban đầu của vật là $6\ \mathrm{m/s}$. Hỏi vận tốc của vật sau 10 giây (làm tròn đến kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất) có giá trị bằng bao nhiêu?

A. 5 (m/s). **B.** 13,2 (m/s). **C.** 8 (m/s). **D.** 7 (m/s).

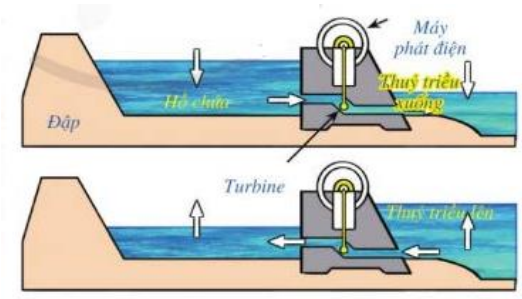
Câu 10: Người ta bơm nước vào một bồn chứa, lúc đầu bồn không chứa nước, mức nước ở bồn chứa sau khi bơm phụ thuộc vào thời gian bơm nước theo một hàm số $h = h(t)$ trong đó h tính bằng cm, t tính bằng giây. Biết rằng $h'(t) = \sqrt[3]{3t+8}$. Mực nước ở bồn sau khi bơm được 10 giây là bao nhiêu cm? (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

A. $25,6(cm)$. **B.** $42,1(cm)$. **C.** $45(cm)$. **D.** $27,94(cm)$.

Câu 11: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 3at^2 + bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là $150\ \mathrm{m}^3$, sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $100\ \mathrm{m}^3$. Tính thể tích của nước trong bể sau khi bơm được 20 giây.

A. $8400(m^3)$. **B.** $4200(m^3)$. **C.** $7260(m^3)$. **D.** $8560(m^3)$.

Câu 12: Mực nước trong hồ chứa của nhà máy điện thủy triều thay đổi trong suốt một ngày do nước chảy ra khi thủy triều xuống và nước chảy vào khi thủy triều lên (như hình vẽ). Tốc độ thay đổi của mực nước được xác định bởi hàm số $h'(t) = \frac{1}{90}(t^2 - 17t + 60)$, trong đó t tính bằng giờ $(0 \le t \le 24)$, $h'(t)$ tính bằng mét/giờ.



Tại thời điểm $t = 0$, mực nước trong hồ chứa cao $8m$. Mực nước trong hồ cao nhất và thấp nhất bao nhiêu?

A. $8(m)$. **B.** $4(m)$. **C.** $7(m)$. **D.** $6(m)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Vào năm 2014, dân số nước ta khoảng $90,7$ triệu người. Giả sử dân số nước ta sau t năm được xác định bởi hàm số $S(t)$ (đơn vị: triệu người), trong đó tốc độ gia tăng dân số được cho bởi $S'(t)=1,2698.\mathrm{e}^{0,014t}$, với t là số năm kể từ năm 2014, $S'(t)$ tính bằng triệu người/ năm. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $S(t)$ là một nguyên hàm của $S'(t)$

b) $S(t)=90,7.\mathrm{e}^{0,014t}+90,7$

c) Theo công thức trên, tốc độ tăng dân số nước ta năm 2034 (làm tròn đến hàng phần mười của triệu người/ năm) khoảng $1,7$ triệu người/ năm

d) Theo công thức trên, dân số nước ta năm 2034 (làm tròn đến hàng đơn vị của triệu người) là khoảng 120 triệu người/ năm

Câu 2: Một vật chuyển động với gia tốc $a(t)=4\cos t\left(\mathrm{m/s^2}\right)$. Tại thời điểm bắt đầu chuyển động vật có vận tốc bằng 0. Xét tính đúng sai của các khẳng đính sau:

a) Vận tốc của vật được biểu diễn bởi hàm số $v(t)=4\cos t\ (\mathrm{m/s})$.

b) Vận tốc của vật tại thời điểm $t=\dfrac{\pi}{6}$ là $2\left(\mathrm{m/s}\right)$

c) Tại thời điểm $t=\dfrac{\pi}{4}(s)$ sau khi xuất phát thì vận tốc của vật là $\sqrt{2}\left(\mathrm{m/s}\right)$

d) Gia tốc của vật tại thời điểm $t=\dfrac{\pi}{4}$ (s) là $2\sqrt{2}\ \left(\mathrm{m/s^2}\right)$

Câu 3: Một chiếc xe đang chuyển động đều với tốc độ $v_0=15m/s$ thì gặp chướng ngại vật rồi phanh gấp với gia tốc không đổi là $a=-3\ m/s^2$. Kí hiệu $v(t)$ là tốc độ của xe, $a(t)$ là gia tốc xe, $s(t)$ là quãng đường xe đi được cho đến thời điểm t giây kể từ lúc phanh xe. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

a) $v(t)=a'(t)$.

b) $a(t)=s''(t)$.

c) Tính từ lúc phanh xe, sau 4 giây thì xe dừng hẳn.

d) Quãng đường xe đi được tính từ lúc phanh xe đến khi dừng hẳn nằm trong khoảng từ 35 mét đến 40 mét.

Câu 4: Trong thí nghiệm nuôi cấy một loại vi sinh vật, kí hiệu $f(t)$ là tổng số lượng vi sinh vật sau t giờ. Biết rằng sau 3 giờ đầu tiên thì tổng số lượng vi sinh vật là 50 con. Trong 7 giờ tiếp theo, số lượng vi sinh vật thay đổi với tốc độ $f'(t)=t^2-8t$ (con/giờ). Xét tính đúng sai của các khẳng đính sau:

a) Họ nguyên hàm của $f'(t)$ là $\frac{t^3}{3}-8t^2+C\ (C\in\mathbb{R})$.

b) Số lượng vi khuẩn tăng liên tục trong khoảng từ 3 giờ đến 10 giờ sau thời điểm làm thí nghiệm.

c) Số lượng vi khuẩn là nhỏ nhất sau 8 giờ tính từ lúc bắt đầu làm thí nghiệm.

d) Sau 6 giờ thì số lượng vi khuẩn là 5 con.

Câu 5: Một quả cầu lông được đánh lên từ độ cao $2,2m$ với vận tốc được tính bởi công thức sau đây $v(t)=-0,8t+4,16\,(m/s)$. Xét tính đúng sai của các khẳng đính sau:

a) Công thức tính độ cao của quả cầu theo t là $h(t)=-0,4t^2+4,16t+2,2(m)$.

b) Quả cầu đạt độ cao cao nhất tại thời điểm $t=5,2(s)$.

c) Độ cao cao nhất của quả cầu bằng $13,016\,(m)$.

d) Thời điểm quả cầu chạm đất là $t=10,5\,(s)$.

Câu 6: Cây KEO LAI là một trong các loài cây không chỉ là nguyên liệu giấy quan trọng mà còn là loài cây cung cấp gỗ nguyên liệu cho các ngành khác như chế biến ván nhân tạo, chế biến đồ mộc xuất khẩu, gỗ bao bì, gỗ xây dựng. Cây phát triển với tốc độ nhanh. Kí hiệu $h(x)$ là chiều cao của một cây (tính theo mét) sau khi trồng x năm. Biết rằng sau năm đầu tiên cây cao $8m$ .Trong 10 năm tiếp theo cây phát triển với tốc độ $h'(x)=\frac{9}{x}$ (m/năm). Xét tính đúng sai của các khẳng đính sau:

a) Biểu thức của $h(x)$ là: $h(x)=9\ln(x)+C$.

b) Sau 3 năm cây cao $20m$.

c) Tốc độ phát triển của cây trong 10 năm đầu sẽ giảm dần.

d). Người ta thường thu hoạch cây KEO LAI khi nó có độ cao trong khoảng từ 26 đến 28 mét. Vậy đó là 8 hoặc 9 năm sau khi trồng.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Gọi $h(t)$ là chiều cao của cây keo (tính theo mét) sau khi trồng t năm. Biết rằng năm đầu tiên cây cao 1,5m, trong những năm tiếp theo. Cây phát triển với tốc độ $h'(t)=\frac{1}{\sqrt[4]{t}}$ (mét /năm). Sau bao nhiêu năm cây cao được 3m.

Câu 2: Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1990 được ước tính theo một hàm số theo thời gian $f(t)$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người). Biết rằng $f'(t)=\frac{34}{t^2+4t+4}$ (nghìn người/năm) biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn. Số dân của thị trấn đó vào năm 2035 là bao nhiêu? (kết quả lấy chính xác đến hàng phần trăm) biết dân số của thị trấn đó năm 1990 là 3 nghìn người.

Câu 3: Một quần thể vi khuẩn ban đầu gồm 500 vi khuẩn, sau đó bắt đầu tăng trưởng. Gọi $P(t)$ là số lượng vi khuẩn của quần thể đó tại thời điểm t, trong đó t tính theo ngày ($0\le t\le 10$). Tốc độ

tăng trưởng của quần thể vi khuẩn đó cho bởi hàm số $P'(t)=k\sqrt{t}$, trong đó k là hằng số. Sau 1 ngày, số lượng vi khuẩn của quần thể đó đã tăng lên thành 600 vi khuẩn *(Nguồn: R. Larson and BEdwards, Calculus 10e, Cengage 2014).* Tính số lượng vi khuẩn của quần thể đó sau 9 ngày.

Câu 4: Một đàn con trùng, ở ngày thứ t có số lượng là $K(t)$. Biết $K'(t)=\dfrac{4000}{1+\dfrac{t}{2}}$ và ban đầu đàn côn trùng có 50.000 con. Hỏi sau 10 ngày thì đàn có khoảng bao nhiêu con? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Câu 5: Một vật chuyển động với vận tốc ban đầu là $5(m/s)$ và có gia tốc được xác định bởi công thức $a(t)=\dfrac{2}{t+1}\left(m/s^2\right)$. Tính vận tốc của vật tại giây thứ 20 (là tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Câu 6: Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc 15m/s thì người lái xe hãm phanh. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-3t+15(\text{m/s})$, trong đó t (giây). Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được bao nhiêu mét?

Câu 7: Một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng từ mặt đất. Giả sử tại thời điểm t giây (coi là thời điểm viên đạn được bắn lên), vận tốc của nó được cho bởi $v(t)=24,5-9,8t(m/s)$. Tính quãng đường (mét) viên đạn đi sau 2 giây đầu.

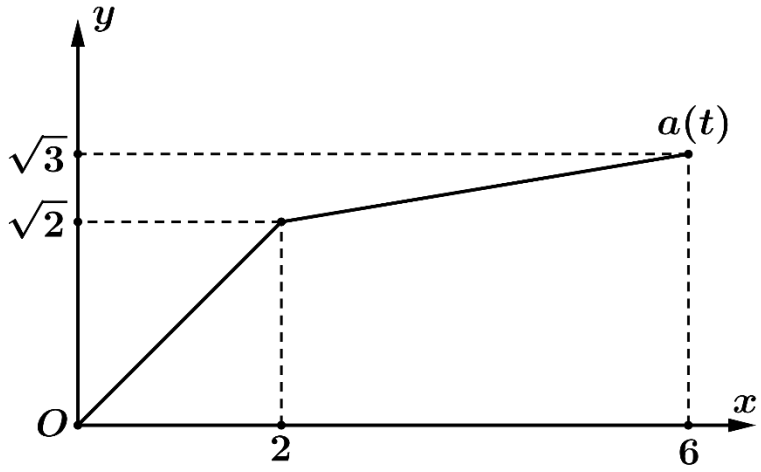
Câu 8: Cường độ dòng điện trong một dây dẫn tại thời điểm t giây là:

$$I(t)=Q'(t)=3t^2-6t+5,$$

Với $Q(t)$ là điện lượng truyền trong dây dẫn tại thời điểm t. Biết khi $t=1$ giây, điện lượng truyền trong dây dẫn là $Q(1)=4$. Tính điện lượng truyền trong dây dẫn khi $t=3$.

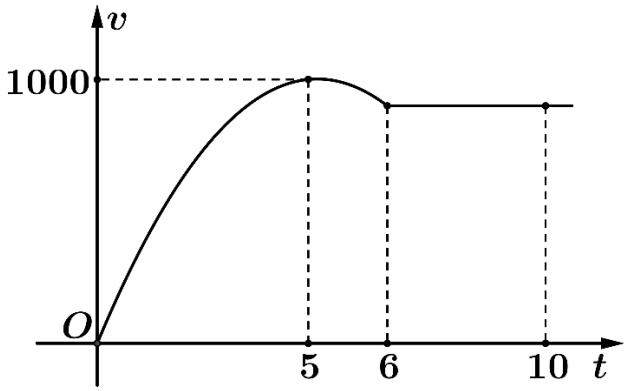
Câu 9: Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0=15(\text{m/s})$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=t^2+4t\left(\text{m/s}^2\right)$. Tính vận tốc chất điểm đó tại giây thứ 3 kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc.

Câu 10: Một vật chuyển động với hàm số gia tốc là $a(t)$. Biết rằng đồ thị hàm số $a(t)$ trên đoạn $[0;6]$ được cho như hình dưới đây và vận tốc tại thời điểm $t=0$ là $v(0)=1(m/s)$.



Tại thời điểm $t=6$ giây, vận tốc của vật là bao nhiêu?(làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

Câu 11: Một xe ô tô sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu chuyển động với vận tốc được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol như hình bên dưới. Biết rằng sau 5 phút thì xe đạt đến vận tốc cao nhất 1000 m/phút và bắt đầu giảm vận tốc, đi được 6 phút thì xe chuyển động đều.



Hỏi quãng đường xe đã đi được trong khoảng 10 phút đầu tiên là bao nhiêu?

----------HẾT----------

BÀI 02 ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Định nghĩa

Định nghĩa: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ thì hiệu số $F(b)-F(a)$ gọi là tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$, kí hiệu $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ và được xác định bởi công thức:

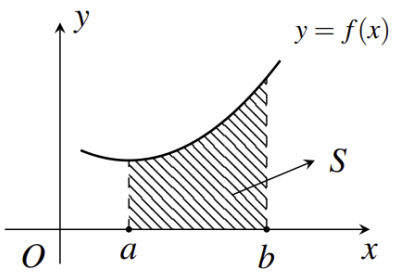
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

Chú ý:

- Trường hợp $a=b$: $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$
- Trường hợp $a>b$: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$
- Tích phân không phụ thuộc vào biến số x hay t, nghĩa là $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Ý nghĩa hình học của tích phân:

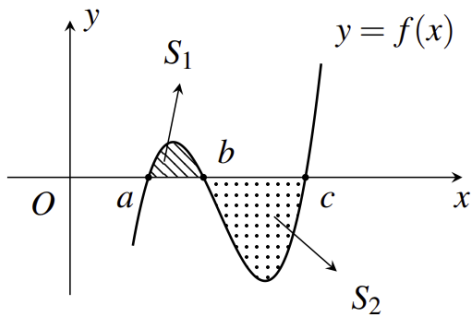
Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên $[a;b]$ thì $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y=f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x=a$ và $x=b$ (phần gạch sọc ở hình bên)



Một số lưu ý:

- Nếu $f(x)\le 0, \forall x\in[a;b]$ thì $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -S$
- Giả sử $f(x)$ liên tục trên $[a;c]$ và có đồ thị như hình bên. Gọi S_1, S_2 lần lượt là phần diện tích giới hạn bởi đồ thi $y=f(x)$ với trục hoành (hình vẽ). Khi đó:

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = S_1 - S_2$$



2 Các tính chất của tích phân

Tính chất 1: Cho hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó:

- $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$
- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$
- $\int_a^b\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
- $\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

Tính chất 2: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, k là số thực. Khi đó: $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Tính chất 3: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, $c\in(a;b)$. Khi đó:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

Mở rộng: Giá trị trung bình của hàm số liên tục $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ được định nghĩa là:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Tích phân của các hàm số cơ bản. Tính chất của tích phân

Phương pháp: Các bước tính $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

- **Bước 1:** Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ (thường chọn $C=0$)
- **Bước 2:** Sử dụng công thức $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính các tích phân sau đây:

a) $\int_0^3 3x^2\mathrm{d}x$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\mathrm{d}x$ c) $\int_1^{e^2} \frac{1}{u}\mathrm{d}u$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$ e) $\int_{-2}^{4} (x+1)(x-1)\mathrm{d}x$ f) $\int_1^2 \frac{x^2-2x+1}{x}\,\mathrm{d}x$

g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\sin x-2)\,\mathrm{d}x$ h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$ i) $\int_1^4 \left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)\mathrm{d}x$

j) $\int_2^3 \frac{x^2-3x+1}{x-1}\mathrm{d}x$ k) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\sin^2 x+3\right)\mathrm{d}x$ l) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x+\cos 3x}{\cos x}\mathrm{d}x$

m) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x(1+\tan x)}\mathrm{d}x$ n) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x$ o) $\int_0^1 \left(2^{2x}.3^{x-1}\right)\mathrm{d}x$

Bài tập 2: Tính các tích phân sau đây:

a) $\int_0^1 \left(4x^3+3x^2-2\right)\mathrm{d}x$ b) $\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ c) $\int_1^3 x^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x$

d) $\int_1^2 \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$ e) $\int_1^3 x^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x$ f) $\int_1^8 \sqrt[3]{x}\mathrm{d}x$

g) $\int_{-e}^{-1} \frac{2}{x}\mathrm{d}x.$ h) $\int_1^e \frac{7}{3x}\mathrm{d}x$ i) $\int_0^1 \left(2.3^x-5e^x\right)\mathrm{d}x$

Bài tập 3: Thực hiện các yêu cầu sau đây:

a) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3^x$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0)=0$. Tính $F(1)$

b) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)=2^x$ và $F(0)=0$. Tính $F(1)$

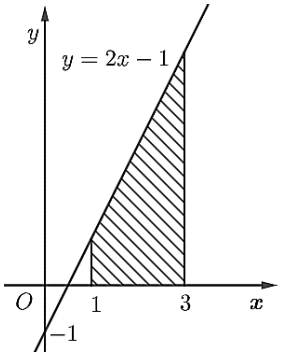
Bài tập 4: Cho $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=5$ và $\int_0^3 g(x)\mathrm{d}x=2$. Tính:

a) $\int_0^3 \left[f(x)+g(x) \right] \mathrm{d}x$ b) $\int_0^3 \left[f(x)-g(x) \right] \mathrm{d}x$

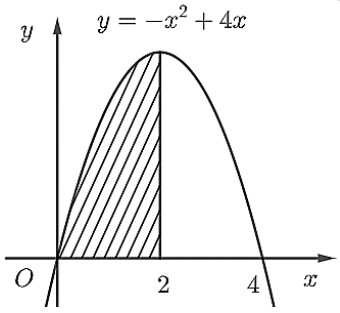
c) $\int_0^3 3f(x) \mathrm{d}x$ d) $\int_0^3 \left[2f(x)-3g(x) \right] \mathrm{d}x$

Bài tập 5: Thực hiện các yêu cầu sau:

a) Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)=2x-1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=3$.



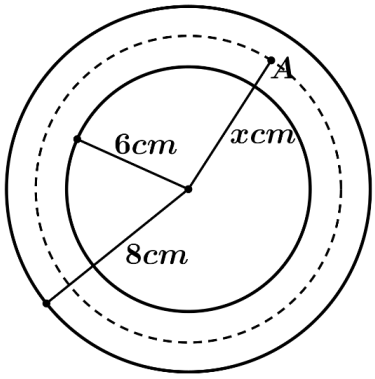
b) Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)=-x^2+4x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=2$.



c) Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)=(x+2)^2-1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=2$.

d) Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=3^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=2$.

Bài tập 6: Mặt cắt ngang của một ống dẫn khí nóng là hình vành khuyên như hình minh họa dưới đây:

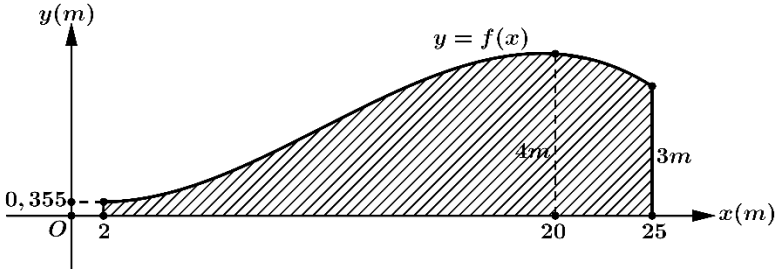


Khí bên trong ống được duy trì ở $150°$. Biết rằng nhiệt độ $T\ (°C)$ tại điểm A trên thành ống là hàm số của khoảng cách x (cm) từ A đến tâm của mặt cắt và $T'(x)=-\dfrac{30}{x}\ \ (6\le x\le 8)$.

Tìm nhiệt độ mặt ngoài của ống.

Bài tập 7: Năng lượng gió trên đất liền là một trong những công nghệ năng lượng tái tạo đang được phát triển ở quy mô toàn cầu. Năng lượng gió không trực tiếp phát thải khí nhà kính, không thải ra môi trường chất ô nhiễm khác, cũng như không tiêu thụ nước để làm mát cho các nhà máy. Các Turbine gió thường có ba cánh quay trên một trục ngang, lấy động năng từ quá trình di chuyển dòng không khí (gió) để chuyển đổi thành động năng thông qua một máy phát điện được kết nối với lưới điện. Hình thang cong (bị gạch sọc) trong hình dưới đây mô tả một phần mặt cắt đứng của cánh Turbine, được giới hạn bởi các đường thẳng $x=2, x=25,$ trục Ox và đồ thị hàm số.

$$y=f(x)=-\frac{1}{800}\left(x^3-33x^2+120x-400\right).$$



Hãy tính diện tích hình thang cong đó.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho $\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 3, \int_{-1}^{2} g(x)\mathrm{d}x = -1$. Khi đó $I = \int_{-1}^{2} \left[x + 2f(x) - 3g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 10. **B.** $\frac{21}{2}$. **C.** $\frac{19}{2}$. **D.** $\frac{17}{2}$.

Câu 2: Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_{1}^{2} \left(2 + f(x)\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 7. **B.** 9. **C.** $\frac{15}{4}$. **D.** $\frac{23}{4}$.

Câu 3: Cho $\int_{-1}^{2} f(t)\mathrm{d}t = 2$ và $\int_{-1}^{2} g(x)\mathrm{d}x = -1$. Tính $I = \int_{-1}^{2} \left[x + 2f(x) - 3g(x)\right]\mathrm{d}x$

A. $I = \frac{17}{2}$ **B.** $I = \frac{7}{2}$ **C.** $I = \frac{5}{2}$ **D.** $I = \frac{11}{2}$

Câu 4: Nếu $\int_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = -2$ và $\int_{1}^{4} g(x)\,\mathrm{d}x = -6$ thì $\int_{1}^{4} \left[2f(x) - g(x) + 1\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** -4. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 5: Giả sử $\int_{0}^{9} f(x)\mathrm{d}x = 7$ và $\int_{9}^{0} g(x)\mathrm{d}x = 1$. Khi đó $I = \int_{0}^{9} \left[2f(x) + 3g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. $I = 11$. **B.** $I = 17$. **C.** $I = 23$. **D.** $I = 8$.

Câu 6: Nếu $\int_{-1}^{4} f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_{-1}^{4} g(x)\mathrm{d}x = 3$. Khi đó $\int_{-1}^{4} \left[f(x) - g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 5. **B.** 6. **C.** 1. **D.** -1.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-6;11]$ và thỏa mãn $\int_{-6}^{11} f(x)\mathrm{d}x = 8$, $\int_{2}^{6} f(x)\mathrm{d}x = 3$. Giá trị của biểu thức $P = \int_{-6}^{2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{6}^{11} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $P = 4$. **B.** $P = 11$. **C.** $P = 5$. **D.** $P = 2$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(2) - F(0) = 5$. Khi đó $\int_{0}^{2} 3f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 6. **B.** 15. **C.** 10. **D.** 5.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x = 10$, $\int_{3}^{5} f(x)\mathrm{d}x = 1$. Khi đó $\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 9. **B.** 10. **C.** 11. **D.** -9.

Câu 10: Nếu $\int_0^1 2f(x)\mathrm{d}x = 6$ thì $\int_0^1 \left[\frac{1}{3}f(x) + 2x\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 11: Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x$ bằng

A. -1. **B.** $\frac{\pi}{2}$. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 12: Kết quả tích phân $I = \int_0^1 5^x\mathrm{d}x$ bằng

A. $I = \frac{4}{\ln 5}$. **B.** $I = 4\ln 5$. **C.** $I = 5\ln 5$. **D.** $I = \frac{5}{\ln 5}$.

Câu 13: Tích phân $I = \int_0^1 \frac{1}{x+2}\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\ln 3$. **B.** $\ln 3$. **C.** $1-\ln 3$. **D.** $\ln 3 - \ln 2$.

Câu 14: Cho $\int_0^{\ln 2} \left(2f(x) + e^x\right)\mathrm{d}x = 5$. Khi đó $\int_0^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\frac{5}{2}$.

Câu 15: Cho $\int_0^m \left(3x^2 - 2x + 1\right)\mathrm{d}x = 6$. Giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-1;2)$ **B.** $(-\infty;0)$ **C.** $(0;4)$ **D.** $(-3;1)$

Câu 16: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = 4$. Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2f(x) + \sin x\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. $8 + \frac{\pi}{2}$. **B.** $4 + \pi$. **C.** 9. **D.** 7.

Câu 17: Tính $I = \int_0^1 \left(\frac{1}{2x+1} + 3\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$.

A. $2 + \ln\sqrt{3}$. **B.** $4 + \ln 3$. **C.** $2 + \ln 3$. **D.** $1 + \ln\sqrt{3}$.

Câu 18: Nếu $\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = 3$ thì $\int_0^{\pi} \left[f(x) + \sin\frac{x}{2}\right]\mathrm{d}x$ bằng:

A. 10. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 5.

Câu 19: Tích phân $\int_0^1 \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\mathrm{e}^3 + \frac{1}{2}$. **B.** $\mathrm{e} - 1$. **C.** $\frac{\mathrm{e}^3 - 1}{3}$. **D.** $\mathrm{e}^3 - 1$.

Câu 20: Cho $I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x+a}}$, với $a > 0$. Tìm a nguyên để $I \geq 1$.

A. Không có giá trị nào của a. **B.** $a=0$.
C. Vô số giá trị của a. **D.** $a=1$.

Câu 21: Nếu $\int_0^{\ln 3}\left[f(x)+e^x\right]\mathrm{d}x=6$ thì $\int_0^{\ln 3}f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $6+\ln 3$. **B.** $6-\ln 3$. **C.** 4. **D.** 8.

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $\int_0^{\pi}\left[f(x)+\sin x\right]\mathrm{d}x=10$. Tính $I=\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=4$. **B.** $I=8$. **C.** $I=12$. **D.** $I=6$.

Câu 23: Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 3x.\sin x\mathrm{d}x$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Câu 24: Gọi a,b là các số nguyên sao cho $\int_0^{2}\sqrt{e^{x+2}}\mathrm{d}x=2ae^2+be$. Giá trị của a^2+b^2 bằng

A. 3. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 25: Có bao nhiêu số thực b thuộc khoảng $(\pi;3\pi)$ sao cho $\int_{\pi}^{b}4\cos 2x\mathrm{d}x=1$?

A. 4. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 2.

Câu 26: Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\cos x}.\sin x\mathrm{d}x$ bằng:

A. $1-e$. **B.** $e+1$. **C.** e. **D.** $e-1$.

Câu 27: Cho biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4-\sin x)\mathrm{d}x=a\pi+b$, với a,b là các số nguyên. Giá trị của biểu thức $a+b$ bằng

A. 1. **B.** -4. **C.** 6. **D.** 3.

Câu 28: Cho $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 4x\cos x\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{a}+\frac{b}{c}$ với a,b,c là các số nguyên, $c<0$ và $\frac{b}{c}$ tối giản. Tổng $a+b+c$ bằng

A. -77. **B.** 103. **C.** -17. **D.** 43.

Câu 29: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin^2 x.\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{a\sqrt{3}}{b}(a,b\in\mathbb{Z})$. Tính $P=\frac{a-2b}{b}$

A. $P=\frac{4}{3}$. **B.** $P=-\frac{4}{3}$. **C.** $P=-\frac{2}{3}$. **D.** $P=\frac{2}{3}$.

Câu 30: Cho $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} = a\sqrt{b} - \frac{8}{3}\sqrt{a} + \frac{2}{3}$, $(a,b \in \mathbb{N}^*)$. Tính $a+2b$

A. 7. **B.** 8. **C.** -1. **D.** 5.

Câu 31: Biết $I = \int_1^2 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3$ với $a,b \in \mathbb{R}$. Tính $T = a^2 + b^3$.

A. $T = \frac{1}{8}$. **B.** $T = \frac{8}{3}$. **C.** $T = \frac{1}{2}$. **D.** $T = \frac{3}{8}$.

Câu 32: Biết $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + x\cos x - \sin^3 x}{1+\cos x}\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{a} - \frac{b}{c}$. Trong đó a, b, $z + |z|^2.i - 1 - \frac{3}{4}i = 0$ là các số nguyên dương, phân số $\frac{b}{c}$ tối giản. Tính $T = a^2 + b^2 + c^2$.

A. $T = 50$. **B.** $T = 59$. **C.** $T = 16$. **D.** $T = 69$.

Câu 33: Diện tích hình thang cong giới hạn bởi $y = x^2; y = 0; x = 1; x = 3$ bằng

A. $S = 6$. **B.** $S = \frac{26}{3}$. **C.** $S = 5$. **D.** $S = \frac{28}{3}$.

Câu 34: Diện tích hình thang cong giới hạn bởi $y = \frac{2}{x+1}; y = 0; x = 1; x = 3$ bằng

A. $S = \ln 8$. **B.** $S = \ln 4$. **C.** $S = 2\ln 4$. **D.** $S = \ln 2$.

Câu 35: Diện tích hình thang cong được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{1}{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = e$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** e. **D.** e^{-1}.

Câu 36: Diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 2, x = 4$ là

A. $S = 10$. **B.** $S = 16$. **C.** $S = 2$. **D.** $S = 6$.

Câu 37: Tính diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = -x^2 - 2x + 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -2; x = 0$?

A. $S = \frac{10}{3}$. **B.** $S = 3$ **C.** $S = \frac{7}{3}$. **D.** $S = -3$

Câu 38: Một vật chuyển động với gia tốc $a(t) = 2\cos t\left(\mathrm{m/s^2}\right)$, biết rằng tại thời điểm bắt đầu chuyển động, vật có vận tốc bằng 0. Tính quãng đường vật đi được từ thời điểm $t = 0(s)$ đến thời điểm $t = \pi(s)$.

A. $5(m)$. **B.** $3(m)$. **C.** $2(m)$. **D.** $4(m)$.

Câu 39: Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu $1(\mathrm{m})$. Một ô tô A đang chạy với vận tốc $15\mathrm{m/s}$ bỗng gặp ô tô B đang đứng chờ đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều bởi vận tốc được biểu thị bởi công thức

$v_A(t)=15-5t\ (\text{m/s})$. Để hai ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là s mét. Giá trị của s bằng:

A. $23,5$. **B.** 21. **C.** $22,9$. **D.** $21,6$.

Câu 40: Một vật chuyển động với gia tốc $a(t)=\dfrac{1}{t^2+3t+2}\left(\text{m/s}^2\right)$, trong đó t là khoảng thời gian tính từ thời điểm ban đầu. Vận tốc chuyển động của vật là $v(t)$. Vào thời điểm $t=11(\text{s})$ thì vận tốc của vật là $v(\text{m/s})$, biết vận tốc ban đầu của vật là $v_0=3\ln 2(\text{m/s})$. Giá trị của v là:

A. $2,35$. **B.** $2,69$. **C.** $2,29$. **D.** $2,16$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=3, \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=5$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\int_2^0 f(x)\mathrm{d}x=3$.

b) $\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x=2$.

c) $\int_0^2 \left(f(x)-2x\right)\mathrm{d}x=-1$.

d) Nếu $f(x)=10$ thì $\int_0^2 x.f'(x)\mathrm{d}x=13$

Câu 2: Cho $f(x)=\sin x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $\int_0^{\pi} f\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}x=0$.

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2x-f(x)\right)\mathrm{d}x=\dfrac{\pi^2}{4}+1$.

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(2x)\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{4}$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=e^x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=e$.

b) $\int_0^1 f\left(2x+1\right)\mathrm{d}x = e^3 - e$.

c) $\int_0^1 \left(f\left(x\right) - 4x\right)\mathrm{d}x = e - 3$.

d) $\int_0^1 \left(x-1\right) f\left(x\right)dx = 2 - e$.

Câu 4: Giả sử chi phí mua và bảo trì một thiết bị trong x năm có thể được mô hình hóa theo công thức $C = 5000\left(25 + 3\int_0^x t^{\frac{1}{4}}dt \right)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Chi phí mua 1 sản phẩm là 100.000 đồng.

b) Chi phí bảo trì năm đầu tiên của 1 sản phẩm là 12.000 đồng.

c) Sau 6,5 năm thì số tiền mua một sản phẩm bằng số tiền bảo trì sản phẩm đó.

d) Nếu một nhà đầu tư có 10 triệu, thì họ có thể mua và bảo trì tối đa 30 sản phẩm trong 10 năm.

Câu 5: Cho $\int_{-3}^0 f\left(x\right)\mathrm{d}x = -4$ và $\int_{-3}^0 g\left(x\right)\mathrm{d}x = -3$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\int_0^{-3} f\left(x\right)\mathrm{d}x = -4$.

b) $\int_{-3}^0 -3f\left(x\right)\mathrm{d}x = 12$.

c) $\int_{-3}^0 \left[f\left(x\right) + g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x = -7$.

d) Nếu $\int_{-3}^0 \left[2f\left(x\right) + 3g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x = -51$ và $\int_{-3}^0 \left[nf\left(x\right) + mg\left(x\right)\right]\mathrm{d}x = 20$ thì $m+n = -3$.

Câu 6: Một chất điểm chuyển động trên đường thẳng nằm ngang với gia tốc phụ thuộc vào thời gian $t\left(\mathrm{s}\right)$ là $a\left(t\right) = 2t - 7\ \left(\mathrm{m/s^2}\right)$. Biết vận tốc đầu bằng $6\ \left(\mathrm{m/s}\right)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t\left(\mathrm{s}\right)$ xác định bởi $v\left(t\right) = t^2 - 7t + 10$.

b) Tại thời điểm $t = 7$, vận tốc của chất điểm là 6.

c) Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1 \le t \le 7$ là 18 m.

d) Trong 8 giây đầu tiên, thời điểm chất điểm xa nhất về phía bên phải là $t = 7$.

Câu 7: Một ô tô đang chạy với vận tốc $18\ \left(\mathrm{m/s}\right)$ thì người lái hãm phanh. Sau khi hãm phanh ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v\left(t\right) = 18 - 36t\ \left(\mathrm{m/s}\right)$, trong đó t là khoảng thời gian được tính bằng giây kể từ lúc ô tô bắt đầu hãm phanh. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau đây:

a) Thời gian kể từ lúc hãm phanh đến lúc xe dừng hẳn là $1,5$ giây.

b) Quãng đường xe đi được sau $0,3$ giây kể từ lúc hãm phanh là 3 mét.

c) Quãng đường kể từ lúc hãm phanh đến lúc xe dừng hẳn là $4,5$ mét.

d) Gia tốc tức thời của chuyển động này là $36\left(\text{m/s}^2\right)$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Nếu $\int_1^2 f(x)dx = 5$ và $\int_1^2 g(x)dx = -\frac{1}{2}$ thì $\int_1^2 \left[f(x) - g(x)\right]dx = \frac{11}{2}$

b) Nếu $\int_1^3 \left[g(x) + 2x + 3\right]dx = 10$ thì $\int_1^3 g(x)dx = 3$.

c) Nếu $f(x) = e^{3x}$, $F(0) = \frac{1}{3}$ thì $F\left(\frac{1}{3}\right) = e$.

d) Nếu $f(x) = 2x + 1;\ g(x) = x - 2$ thì $\int_3^5 \frac{f(x)}{g(x)}dx = a + b\ln c$. Khi đó $a + b + c = 11$.

Câu 9: Một ô tô đang di chuyển với tốc độ $20(m/s)$ thì hãm phanh nên tốc độ (m/s) theo thời gian t được tính theo công thức $v(t) = 20 - 5t(0 \le t \le 4)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Sau khi hãm phanh, tốc độ của xe tăng.

b) Tốc độ tại thời điểm 2s sau hãm phanh là $10(m/s)$

c) Sau khi hãm phanh 4s thì xe dừng hẳn.

d) Kể từ khi hãm phanh đến dừng, xe đi được quãng đường 42m

Câu 10: Một chất điểm chuyển động trên đường thẳng nằm ngang (chiều dương hướng sang phải) với gia tốc phụ thuộc vào thời gian $t(\text{s})$ là $a(t) = 2t - 7\ \left(\text{m/s}^2\right)$. Biết vận tốc đầu bằng $6\ (\text{m/s})$, xét tính đúng sai của các khẳng định sau.

a) Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t(\text{s})$ xác định bởi $v(t) = t^2 - 7t + 10$.

b) Tại thời điểm $t = 7$ (s), vận tốc của chất điểm là 6 (m/s).

c) Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1 \le t \le 7$ là 18 m.

d) Trong 8 giây đầu tiên, thời điểm chất điểm xa nhất về phía bên phải là $t = 7$ (s).

Câu 11: Giả sử lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức $P'(x) = -0,0008x + 10,4$. Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm.

a) Lợi nhuận khi bán được x đơn vị sản phẩm được tính bằng công thức $P(x) = -0,0008x^2 + 10,4x$.

b) Lợi nhuận khi bán được 50 sản phẩm đầu tiên là 519 triệu đồng.

c) Sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên 55 đơn vị sản phẩm là $49,79$ triệu đồng.

d) Biết sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên a đơn vị sản phẩm lớn hơn 517 triệu đồng, khi đó giá trị nhỏ nhất của a là 100.

Câu 12: Ở nhiệt độ $37°C$, một phản ứng hóa học từ chất đầu A, chuyển hóa thành chất sản phẩm B theo phương trình: $A \to B$. Giả sử $y(x)$ là nồng độ chất A (đơn vị mol L^{-1}) tại thời điểm x (giây), $y(x) > 0$ với $x \ge 0$, thỏa mãn hệ thức: $y'(x) = -7.10^{-4} y(x)$ với $x \ge 0$. Biết rằng tại $x = 0$, nồng độ (đầu) của A là $0,05$ mol L^{-1}. Xét hàm số $f(x) = \ln y(x)$ với $x \ge 0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f'(x) = -7.10^{-4}$

b) $f(x) = -7.10^{-4}x + \ln(0,05)$

c) $y(30) - y(15) = -6.10^{-4}$

d) Nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây gần bằng $0,05$.

Câu 13: Sau khi xuất phát, ô tô di chuyển với tốc độ $v(t) = 2,01t - 0,025t^2 (0 \le t \le 10)$. Trong đó $v(t)$ tính theo m/s, thời gian t tính theo s với $t = 0$ là thời điểm xe xuất phát.

a) Quãng đường xe di chuyển được tính theo công thức là $s(t) = 2,01 - 0,05t (0 \le t \le 10)$

b) Quãng đường xe di chuyển được trong 3 s là 8,82m.

c) Quãng đường xe di chuyển được trong giây thứ 9 xấp xỉ 15,277m

d) Trong khoảng thời gian không quá 10s đầu, khi vận tốc đạt giá trị lớn nhất thì gia tốc của xe là 1,51m/s^2

Lời giải

a) Sai: Quãng đường xe di chuyển được phải là nguyên hàm của $v(t)$

Khi đó $v'(t) = 2,01 - 0,05t (0 \le t \le 10)$ là công thức tính gia tốc của vật.

b) Đúng: Quãng đường xe di chuyển được trong 3s là: $\int_0^3 (2,01t - 0,025t^2)dt = 8,82m$.

c) Đúng: Quãng đường xe di chuyển được trong giây thứ 9

$$s(9) - s(8) = \int_8^9 (2,01t - 0,025t^2)dt \simeq 15,277m$$

d) Đúng: $v(t) = 2,01t - 0,025t^2 (0 \le t \le 10) \Rightarrow \max_{[0;10]} v(t) = 17,6m/s$ khi $t = 10s$

Gia tốc vật khi đó là $a(10) = v'(10) = 2,01 - 0,05.10 = 1,51 (m/s^2)$

Câu 14: Tại một nhà máy sản xuất một loại phân bón. Gọi $P(x)$ là lợi nhuận (tính theo triệu đồng) thu được từ việc bán x (tấn) sản phẩm trong một tuần. Khi đó đạo hàm $P'(x)$ gọi là lợi nhuận cận biên, cho biết tốc độ tăng lợi nhuận theo lượng sản phẩm bán được. Giả sử lợi nhuận cận biên (tính theo triệu đồng trên tấn) của nhà máy được ước lượng bởi công thức:
$P'(x) = 17 - 0,025x$ với $0 \le x \le 100$

Biết nhà máy lỗ 24 triệu đồng nếu không bán được lượng sản phẩm nào trong tuần.

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Công thức lợi nhuận (tính theo triệu đồng) thu được từ việc bán x (tấn) sản phẩm trong một tuần là $P(x)=17x-0,0125x^2+C$ với C là một hằng số bất kỳ

b) Có thể tính được lợi nhuận của nhà máy thu được khi bán 120 tấn sản phẩm trong tuần.

c) Lợi nhuận nhà máy thu được khi bán 80 tấn sản phẩm trong tuần là 1 tỉ 256 triệu đồng.

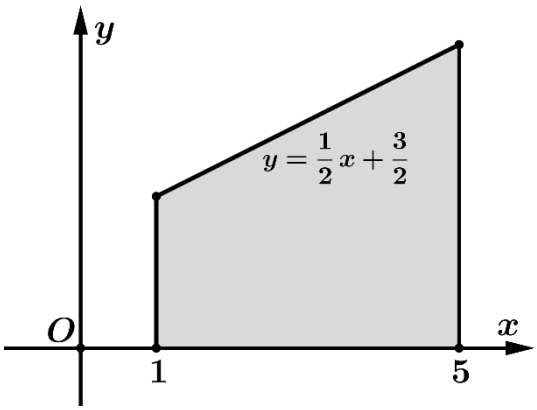
d) Nếu nhà máy bán được từ 1,3 tấn sản phẩm trên tuần trở lên thì nhà máy luôn có lãi.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Một ô tô đang chuyển động trên đường với vận tốc $v(t)=4t+3(\text{ m/s})$, với t là thời gian tính bằng giây. Quãng đường ô tô đi được trong khoảng từ 3 đến 5 giây là bao nhiêu?

Câu 2: Một người đang lái xe ô tô với vận tốc $24(\text{m/s})$ thì người lái phát hiện phía trước có chướng ngại vật nên cần giảm tốc độ của xe. Sau khi đạp phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-8t+24(\text{ m/s})$, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi xe dừng hẳn, ô tô di chuyển quãng đường bao nhiêu mét?

Câu 3: Một khối gỗ khi cắt một bề mặt ta thu được thiết diện được cho bởi hình vẽ bên. Diện tích của thiết diện đó bằng bao nhiêu?



Câu 4: Giá trị trung bình của hàm số liên tục $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ được định nghĩa là $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Giả sử nhiệt độ (tính bằng $^\circ\text{C}$) tại thời điểm t giờ trong khoảng thời gian từ 6 giờ sáng đến 12 giờ trưa ở một địa phương vào ngày 27/06/2023 được mô hình hóa bởi hàm số

$$T(t)=25+2(t-7),6\le t\le 12.$$

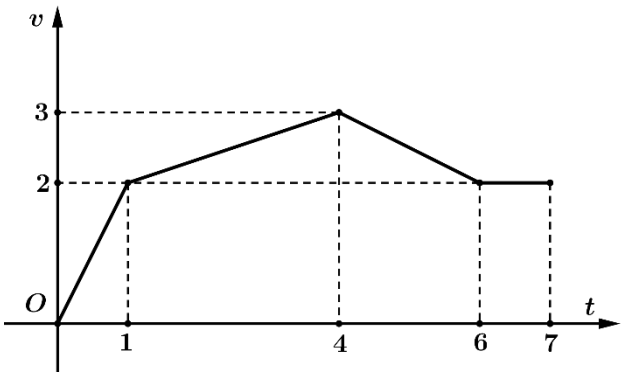
Nhiệt độ trung bình ngày 27/6/2023 của địa phương trên là bao nhiêu $^\circ\text{C}$?

Câu 5: Cửa hàng thực phẩm của anh An có lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức $P'(x)=-0,01x+2$. Lợi nhuận của sản phẩm trên khi doanh số là 200 với sản phẩm lớn hơn doanh số 150 sản phẩm là bao nhiêu triệu đồng, biết $P(x)$ là lợi nhuận tính bằng triệu đồng?

Câu 6: Một ô tô đang chuyển động trên đường với vận tốc $v(t)=t^2-4t+1(\text{ m/s})$, với t là thời gian tính bằng giây. Quãng đường ô tô đi được trong khoảng từ 2 đến 8 giây là bao nhiêu?

Câu 7: Chị Hồng đang lái xe với vận tốc $5\ \text{m/s}$ thì nhận thấy phía trước đèn giao thông đang chuẩn bị chuyển sang đèn đỏ nên cần giảm tốc độ của xe để đợi đèn đỏ. Sau khi đạp phanh, xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -0{,}5t + 5\ (\text{m/s})$, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi xe dừng hẳn, xe di chuyển quãng đường bao nhiêu mét?

Câu 8: Một chiếc xe chuyển động với đồ thị vận tốc được biểu diễn theo đường gấp khúc được minh họa trên hệ trục Otv như hình vẽ (mỗi đơn vị trên Ot ứng với 1 phút và mỗi đơn vị trên Ov ứng với $0{,}4$ km / phút).



Quãng đường mà xe đã di chuyển trong 7 phút là bao nhiêu km?

Câu 9: Giá trị trung bình của hàm số liên tục $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ được định nghĩa là $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

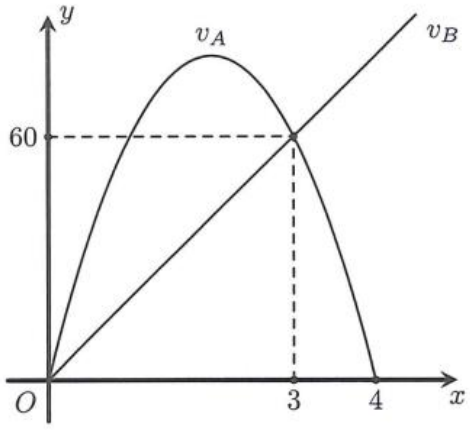
Giả sử lượng mưa trung bình (tính bằng mm) tại thời điểm t ngày trong khoảng thời gian từ ngày 01/10 đến ngày 31/10 ở Thừa Thiên Huế vào tháng 10/2023 được mô hình hóa bởi hàm số:

$$M(x) = 80 + 10(t-8); 1 \le t \le 31.$$

Lượng mưa trung bình tháng 10/2023 của Thừa Thiên Huế là bao nhiêu mm?

Câu 10: Một ô tô chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v(t) = 7t\ (\text{m/s})$. Đi được $5\ (\text{s})$ người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -35\ (\text{m/s}^2)$. Tính quãng đường của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn?

Câu 11: Cho đồ thị biểu diễn vận tốc của hai xe A và B khởi hành cùng một lúc và cùng vạch xuất phát, đi cùng chiều trên một con đường. Biết đồ thị biểu diễn vận tốc của xe A là một đường parabol và đồ thị biểu diễn vận tốc của xe B là một đường thẳng như hình vẽ bên. Hỏi sau 5 giây kể từ lúc xuất phát thì khoảng cách giữa hai xe là bao nhiêu mét? (Làm tròn đến hàng phần chục và biết rằng xe A sẽ dừng lại khi vận tốc bằng 0).



Câu 12: Giả sử vận tốc v của dòng máu ở khoảng cách r từ tâm của động bán kính R không đổi, có thể được mô hình hóa bởi công thức

$$\frac{1}{R-0}\int_0^R k\left(R^2-r^2\right)\mathrm{d}r=\frac{1}{R}\left(kR^2r-k\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^R=\frac{1}{R}\left(kR^3-k\frac{R^3}{3}\right)=kR^2-\frac{kR^2}{3}=\frac{2}{3}kR^2.$$

Trong đó k là một hằng số. Tìm vận tốc trung bình (đối với r) của động mạch trong khoảng $0\le r\le R.$ So sánh vận tốc trung bình với vận tốc lớn nhất.

Câu 13: Tốc độ tăng trưởng của một đàn gấu mèo tại thời điểm t tháng kể từ khi người ta thả 100 cá thể đầu tiên vào một khu rừng được ước lượng bởi công thức $P'(t)=8t+30$ (con/tháng), với $P(t)$ là số lượng cá thể trong đàn tại thời điểm t tháng tương ứng (nguồn: Chris Kirkpatrick, Barbara Alldred, Crystal Chilvers, Beverly Farahani, Kristina Farentino, Angelo Lillo, Ian Macpherson, John Rodger, Susanne Trew, Advanced Function, Nelson 2012). Dựa vào tốc độ tăng trưởng đã cho, hãy ước tính số cá thể của đàn gấu mèo này tại thời điểm 3 tháng kể từ khi chúng được thả vào rừng.

Câu 14: Nhằm tri ân người dân địa phương đã luôn tin tưởng, đồng hành với doanh nghiệp. Tập đoàn NXS đã tổ chức ngày hội cảm ơn vào ngày 10/07/2024. Trong chuỗi sự kiện đặc biệt này, tất cả người dân địa phương đều được miễn phí vé vào cổng, thỏa thích tận hưởng các trò chơi, tham quan các công trình kỳ thú, ấn tượng tại 05 công viên chủ đề được đầu tư, xây dựng hoành tráng với hàng trăm tiện ích.

Gọi $B(t)$ là hàm số biểu thị số lượng khách tham quan sau t giờ mở cửa. Khi đó tốc độ thay đổi lượng khách tham quan trong ngày được biểu diễn bằng hàm số $B'(t)=4t^3-3t^2+200$, trong đó t tính bằng giờ ($0\le t\le 8$), $B'(t)$ tính bằng khách/giờ. Sau 2 giờ đã có 1200 người có mặt. Hỏi sau 6 giờ lượng khách tham quan là bao nhiêu người?

Câu 15: Chủ một trung tâm thương mại muốn cho thuê một số gian hàng như nhau. Người đó muốn cho thuê mỗi gian hàng với giá là x triệu đồng $(x>0)$. Khi đó doanh thu của cửa hàng được biểu diễn theo hàm số $T(x)$. Tốc độ thay đổi doanh thu từ các gian hàng đó được biểu diễn bởi hàm số $T'(x)=-10x+200$, trong đó $T'(x)$ tính bằng triệu đồng. Biết rằng nếu giá thuê cho mỗi gian hàng là 10 triệu đồng thì doanh thu là 1800 triệu đồng. Tìm giá trị của x để người đó có doanh thu là cao nhất?

----------HẾT----------

Dạng 2: Tích phân của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối

Phương pháp: Ta thực hiện theo một trong hai cách sau:

Cách 1:

- Cho $f(x)=0$ tìm nghiệm $\in[a;b]$ giả sử các nghiệm đó là $x_1;x_2;...x_n\in[a;b]$
- Khi đó $I=\int\limits_a^{x_1}|f(x)|\mathrm{d}x+\int\limits_{x_1}^{x_2}|f(x)|\mathrm{d}x+\int\limits_{x_2}^{x_3}|f(x)|\mathrm{d}x+...+\int\limits_{x_n}^{b}|f(x)|\mathrm{d}x$

$$\Leftrightarrow I=\left|\int\limits_a^{x_1}f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int\limits_{x_1}^{x_2}f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int\limits_{x_2}^{x_3}f(x)\mathrm{d}x\right|+...+\left|\int\limits_{x_n}^{b}f(x)\mathrm{d}x\right|$$

- Tính mỗi tích phân thành phần

Cách 2:

- Cho $f(x)=0$ tìm nghiệm $\in[a;b]$.
- Xét dấu $f(x)$ trên $[a;b]$.
- Áp dụng công thức phá trị tuyệt đối $|A|=\begin{cases}A & khi\ A>0\\ -A & khi\ A<0\end{cases}$ để phá trị tuyệt đối trong $\int\limits_a^b....$
- Tính mỗi tích phân thành phần

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính các tích phân sau đây:

a) $A=\int\limits_{-2}^{2}|x^2-1|\mathrm{d}x$

b) $B=\int\limits_{-2}^{1}|x^3+x^2-2x|\mathrm{d}x$

c) $C=\int\limits_{-1}^{2}|x^3-3x+2|\mathrm{d}x$

d) $D=\int\limits_{-2}^{2}|x^4-3x^2-4|\mathrm{d}x$

Bài tập 2: Tính các tích phân sau đây:

a) $A=\int\limits_{-3}^{5}\left(|x+2|-|x-2|\right)\mathrm{d}x$

b) $B=\int\limits_{-1}^{2}\left(x+|1-x|-|x+2|\right)\mathrm{d}x$

c) $C=\int\limits_{1}^{5}\dfrac{2|x-2|+1}{x}\mathrm{d}x$

d) $D=\int\limits_{0}^{3}\sqrt{x^3-2x^2+x}\mathrm{d}x$

Bài tập 3: Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t (giây) là $v(t)=t^2-t-6$ (m/s).

a) Tìm độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1\le t\le 4$, tức là tính $\int\limits_1^4 v(t)\mathrm{d}t$.

b) Tìm tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian này, tức là tính $\int\limits_1^4|v(t)|\mathrm{d}t$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tính $\int_0^2 \sqrt{x^2-2x+1}\mathrm{d}x$

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** 1.

Câu 2: Tính $\int_{-1}^2 |2x+1|\mathrm{d}x$

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{13}{2}$.

Câu 3: Tính $I=\int_0^2 |2x-2|\mathrm{d}x.$

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 4: Tính $I=\int_0^3 |x(2x-4)|\mathrm{d}x.$

A. $\frac{16}{3}$. **B.** 2. **C.** $\frac{16}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 5: Tính tích phân $\int_0^8 |x^2-6x|\mathrm{d}x$.

A. $\frac{152}{3}$. **B.** $\frac{64}{3}$. **C.** $\frac{-64}{3}$. **D.** $\frac{-152}{3}$.

Câu 6: Biết $I=\int_{-1}^3 |x^2-3x+2|\mathrm{d}x=\frac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{N}^*, \frac{a}{b}$ tối giản. Tính $T=a-b.$

A. 12. **B.** 14. **C.** 11. **D.** 4.

Câu 7: Biết $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} |\sin x|dx=a-\sqrt{b}\ (a,b\in\mathbb{Q})$. Khi đó $a+4b$ bằng

A. 5. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 7.

Câu 8: Cho $I=\int_0^5 \frac{|x^2-x|}{x+3}dx=\frac{-1}{a}+b\ln\frac{c}{a}$, $(a,b,c\in\mathbb{N}^*)$. Tổng $a+b+c$ bằng

A. 17. **B.** 15. **C.** 13. **D.** 16.

Câu 9: Tính tích các giá trị của số thực m để tích phân $I=\int_0^1 |2x-m|\mathrm{d}x=2$.

A. 6. **B.** -3. **C.** 2. **D.** -4.

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m thỏa mãn: $\int_0^m \left|3x^2-2x\right|\mathrm{d}x = m-10$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)=1$, $y=g(x)=|x|$. Giá trị $I=\int_{-1}^{2}\min\left\{f(x);g(x)\right\}\mathrm{d}x$

A. 1. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 2. **D.** $\frac{5}{2}$.

Câu 12: Cho a là số thực dương, tính tích phân $I=\int_{-1}^{a}|x|\mathrm{d}x$ theo a.

A. $I=\frac{a^2+1}{2}$. **B.** $I=\frac{a^2+2}{2}$. **C.** $I=\frac{-2a^2+1}{2}$. **D.** $I=\frac{\left|3a^2-1\right|}{2}$.

Câu 13: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=4$; $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=6$. Tính $I=\int_{-1}^{3} f(|u|)\mathrm{d}u$

A. 2. **B.** 5. **C.** 10. **D.** 12.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho $f(x)=2x-1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x=2$.

b) $\int_{-1}^{1}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\frac{5}{2}$.

c) $\int_{-1}^{1} x^2 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}$.

d) $\int_{-1}^{1} x\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)=2x-4$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\int_{-2}^{-2} f(x)\mathrm{d}x=0$.

b) $\int_{1}^{4} f^2(x)\mathrm{d}x=7$.

c) $\int_{-2}^{5}\left|f(x)\right|dx=3^m.5^n$ với $m^2+n^2=16$.

d) $F(a)=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $a=2$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Nếu $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 2$ thì $\int_{-1}^{1} 4f(x)\mathrm{d}x = 6$.

b) Nếu $\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x = 5$ và $\int_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x = 3$ thì $\int_{3}^{5} f(x)\mathrm{d}x = -2$.

c) Nếu $f(x) = x^2 - 2x$, $F(0) = 1$ thì $F(2) = 11$.

d) Nếu $f(x) = x^2 - 2x$ thì $\int_{0}^{3} \left|x^2 - 2x\right| \mathrm{d}x = \frac{8}{3}$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Nếu $\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x = 2$ thì $\int_{3}^{1} 3f(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}$.

b) Nếu $\int_{2}^{7} f(x)\mathrm{d}x = -3$ và $\int_{1}^{7} f(x)\mathrm{d}x = 3$ thì $\int_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

c) Nếu $f(x) = \frac{1}{x}$, $F(1) = 0$ thì $F(2) = \ln 2$.

d) Nếu $f(x) = x^3 + 2x^2$ thì $\int_{-3}^{-1} \left|x^3 + 2x^2\right| \mathrm{d}x = -\frac{9}{2}$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = 4x^3 + x$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\int_{3}^{5} f(x)\mathrm{d}x = 552$.

b) Biết $F(1) = 4$ thì $F(2) = \frac{41}{2}$.

c) $\int_{0}^{2} \left(1 + 2x + f(x)\right) \mathrm{d}x = 20$.

d) Biết $\int_{-2}^{1} \left|f(x)\right| \mathrm{d}x = \frac{39}{2}$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = \sin 2x$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\int_{0}^{\pi} f(x)dx = 0$.

b) Biết $F(0) = \frac{1}{2}$ thì $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

c) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos x - f(x)\right) dx = 2$.

d) Biết $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(x\right)\right|dx=4$.

Câu 7: Cho hàm số $f\left(x\right)=\left|x^2-9\right|$ với $0\le x\le 9$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f\left(x\right)=\left|x^2-9\right|=\begin{cases}-x^2+9,\ 0\le x\le 3\\ x^2-9,\ 3\le x\le 9\end{cases}$.

b) $\int\limits_0^9 f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\int\limits_0^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_3^9 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

c) $\int\limits_0^9 f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_0^3\left(x^2-9\right)\mathrm{d}x+\int\limits_3^9\left(x^2-9\right)\mathrm{d}x$.

d) $\int\limits_0^9 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^m\left(x^2-9\right)\mathrm{d}x+\int\limits_m^9\left(x^2-9\right)\mathrm{d}x\ \forall m\in\left(0;9\right)$.

Câu 8: Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2-4}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x-2}\right)$.

b) $\int\limits_3^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x>\dfrac{1}{2}$

c) $\int\limits_3^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{a}{b}$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a,\ b\in\mathrm{N}$ thì ta có $a.b=15$.

d) $\int\limits_3^4\left[f\left(x\right)+\dfrac{f'\left(x\right)}{f^2\left(x\right)}\right]\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{5}{3}+7$.

Câu 9: Xét tính đúng sai của các phép tính tích phân sau.

a) $I=\int\limits_0^2\left|x-1\right|\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(x-1\right)\mathrm{d}x+\int\limits_1^2\left(x-1\right)\mathrm{d}x$

b) $I=\int\limits_0^2\left|x-1\right|\mathrm{d}x=1$

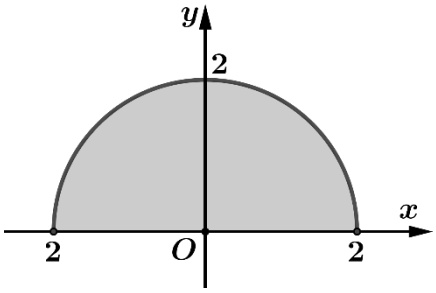
c) Cho a là số thực dương thì tích phân $I=\int\limits_{-1}^{a}\left|x\right|\mathrm{d}x=\dfrac{a^2+1}{2}$

d) Nếu $I=\int\limits_0^3\left|2^x-4\right|dx=a+\dfrac{b}{c\ln 2}$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản thì khi đó ta có giá trị của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2=3$

Câu 10: Cho hàm số $y=\sqrt{4-x^2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $y=\sqrt{4-x^2}$, $x\in\left[0;2\right]$ là phương trình một phần tư của đường tròn tâm tại gốc toạ độ O, bán kính bằng 2 và nằm ở góc phần tư thứ I.

b) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$ là một phần hai diện tích hình tròn như hình bên dưới:



c) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}.\pi.2^2$.

d) $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x = 2\pi$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Tính tích phân sau: $\int_0^2 |2x-3|\mathrm{d}x$.

Câu 2: Cho $0 \le m \le 2$ và tích phân $I = \int_0^m |x-2|\mathrm{d}x = 2$. Khi đó giá trị của tham số m bằng bao nhiêu?

Câu 3: Biết $I = \int_1^3 \left|\frac{x^2-6x+8}{x+1}\right|\mathrm{d}x = \frac{a}{b} + c\ln\frac{d}{e}$ biết a là số nguyên âm và $b,c,d,e \in \mathbb{Z}^*$; $(a,b)=1$, $(d,e)=1$. Giá trị của $a+b+c+d+e$ bằng:

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ và có bảng biến thiên như sau

x	0		2		3		5	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	−
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-1	↗	$f(5)$	↘ $-\infty$

Biết rằng $\int_2^5 |f'(x)|\mathrm{d}x = 5$. Giá trị của bằng bao nhiêu?

Câu 5: Biết $I = \int_1^5 \frac{2|x-2|+1}{x}\mathrm{d}x = 4 + a\ln 2 + b\ln 5$ với $a,b \in \mathbb{Z}$. Tính $S = a+b$.

Câu 6: Khu vực trung tâm một quảng trường có dạng hình tròn đường kính AB bằng 10m. Người ta trang trí khu vực này bằng hai đường Parabol đối xứng nhau qua AB, nằm trong hình tròn, đi qua các điểm A, B và có đỉnh cách mép hình tròn 1m. Phần giới hạn bởi 2 parabol được trồng hoa với chi phí 200 nghìn đồng 1 mét vuông, phần còn lại được lát gốm sứ với chi phí 800 nghìn đồng 1 mét vuông. Tính tổng chi phí (triệu đồng) để hoàn thành khu vực này (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai sau dấu phẩy) ?

Câu 7: Các nhà kinh tế sử dụng đường cong Lorenz để minh họa sự phân phối thu nhập trong một quốc gia. Gọi x là đại diện cho phần trăm số gia đình trong một quốc gia và y là phần trăm tổng thu nhập, mô hình $y = x$ sẽ đại diện cho một quốc gia mà các gia đình có thu nhập như nhau. Đường cong Lorenz $y = f(x)$, biểu thị sự phân phối thu nhập thực tế. Diện tích giữa hai mô hình này, với $0 \le x \le 100$, biểu thị "sự bất bình đẳng về thu nhập" của một quốc gia. Năm 2009, đường cong Lorenz của Hoa Kỳ có thể được mô hình hóa bởi hàm số

$y = \left(0,00061x^2 + 0,0224x + 1,666\right)^2, 0 \le x \le 100$,

Trong đó x được tính từ các gia đình nghèo nhất đến giàu có nhất. Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kì vào năm 2009 bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân đầu tiên sau dấu phẩy)?

----------HẾT----------

Dạng 3: Tích phân của hàm số cho bởi nhiều công thức

Phương pháp: Có hai bài toán trong dạng này

Bài toán 1: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} g(x) & \text{khi } x\le b \\ h(x) & \text{khi } x>b \end{cases}$ liên tục trên D. Tính $J=\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x$. Xét $b\in[a;c]$.

- **Bước 1:** Kiểm tra hàm số $f(x)$ có liên tục tại $x=b$?

  Tức là kiểm tra $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=f(b)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to b^-} g(x)=\lim\limits_{x\to b^+} h(x)=f(b)$

- **Bước 2:** Tách cận: $J=\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x=\underbrace{\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x}_{I_1}+\underbrace{\int\limits_b^c h(x)\mathrm{d}x}_{I_2}$.

- **Bước 3:** Tính các tích phân $I_1;I_2$ bằng các phương pháp đã học.

Bài toán 2: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} g(x;m) & \text{khi } x\le b \\ h(x;m) & \text{khi } x>b \end{cases}$ liên tục trên D. Tính $J=\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x$.

Xét $b\in[a;c]$.

- **Bước 1:** Kiểm tra hàm số $f(x)$ có liên tục tại $x=b$?

  Tức là kiểm tra: $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=f(b)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to b^-} g(x;m)=\lim\limits_{x\to b^+} h(x;m)=f(b)$

- **Bước 2:** Tách cận: $J=\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x=\underbrace{\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x}_{I_1}+\underbrace{\int\limits_b^c h(x)\mathrm{d}x}_{I_2}$.

- **Bước 3:** Tính các tích phân $I_1;I_2$ bằng các phương pháp đã học.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Biết rằng tốc độ v (km/phút) của một ca nô cao tốc thay đổi theo thời gian t (phút) như sau:

$$v(t)=\begin{cases} 0,5t, & 0\le t<2 \\ 1, & 2\le t<15 \\ 4-0,2t, & 15\le t\le 20 \end{cases}$$

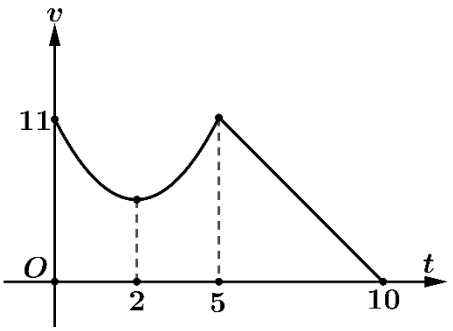
Tính quãng đường ca nô di chuyển được trong khoảng thời gian từ 0 tới 20 phút.

Bài tập 2: Tốc độ $v(m/s)$ của một thang máy di chuyển từ tầng 1 lên tầng cao nhất theo thời gian t (giây) được cho bởi công thức:

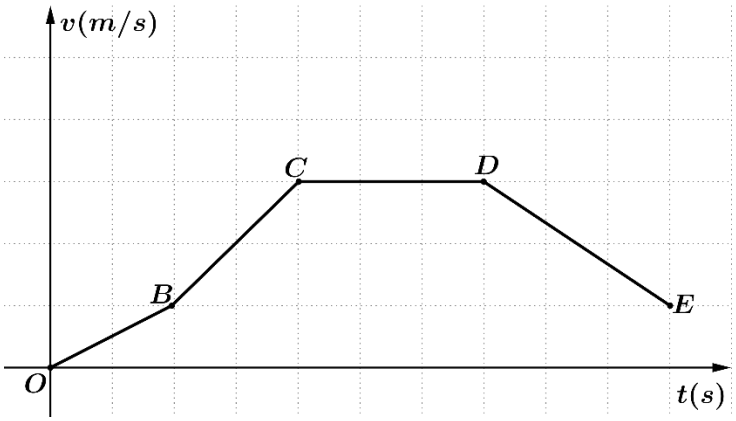
$$v(t)=\begin{cases} t, & 0\le t\le 2 \\ 2, & 2<t\le 20 \\ 12-0,5t, & 20<t\le 24 \end{cases}$$

Tính quãng đường chuyển động và tốc độ trung bình của thang máy.

Bài tập 3: Một chất điểm chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)(m/s)$ có dạng đường Parabol khi $0\le t\le 5(s)$ và $v(t)$ có dạng đường thẳng khi $5\le t\le 10(s)$. Biết đỉnh Parabol là $I(2,3)$. Hỏi quãng đường đi được chất điểm trong thời gian $0\le t\le 10(s)$ là bao nhiêu mét?



Bài tập 4: Cho hình vẽ dưới đây là đồ thị vận tốc $v(t)$ của một vật ($t=0$ là thời điểm vật bắt đầu chuyển động). Tính quãng đường chuyển động và vận tốc trung bình của vật 10 giây đầu tiên.



Bài tập 5: Khảo sát chuyển động của xe khách A trong 30 phút trên một quãng đường ta thu được kết quả: vận tốc $v(\text{m/phut})$ của xe khách theo thời gian t (phút) được biểu diễn bởi hàm số:

$$v(t)=\begin{cases}100t, & 0\le t\le 10\\ 20t+800, & 10<t\le 20\\ -10\text{t}+1400, & 20<t\le 30\end{cases}$$

Tính quãng đường chuyển động và vận tốc trung bình của xe khách trong 30 phút đã khảo sát.

Bài tập 6: Giả sử tốc độ $v(m/s)$ của một thang máy di chuyển từ tầng 1 lên tầng cao nhất theo thời gian t (giây) được cho bởi công thức: $v(t)=\begin{cases}t, & 0\le t\le 2\\ 2, & 2<t\le 20\\ 12-0,5t, & 20<t\le 24\end{cases}$. Tính quãng đường chuyển động và tốc độ trung bình của thang máy.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{khi } x\ge 0\\ e^{2x} & \text{khi } x<0\end{cases}$. Tích phân $I=\int\limits_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$ có giá trị bằng bao nhiêu?

A. $I=\dfrac{3e^2-1}{e^2}$. **B.** $I=\dfrac{9e^2-1}{2e^2}$. **C.** $I=\dfrac{11e^2-11}{2e^2}$. **D.** $I=\dfrac{7e^2+1}{2e^2}$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}3x^2 & \text{khi } 0\le x\le 1\\ 4-x & \text{khi } 1\le x\le 2\end{cases}$. Tính tích phân $\int\limits_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x$

A. $\dfrac{7}{2}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 3: Cho hàm số $\begin{cases}3x^2 & \text{khi } 0\le x\le 1\\ 4-x & \text{khi } 1\le x\le 2\end{cases}$. Tính tích phân $\int\limits_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{7}{2}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}4-x & \text{khi } 0\le x\le 1\\ 3x^2 & \text{khi } 1\le x\le 2\end{cases}$. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{21}{2}$. **B.** $\dfrac{7}{2}$. **C.** 7. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}4x-\sqrt{4x+9} & \text{khi } x>0\\ 4a+\tan^2 x & \text{khi } x\le 0\end{cases}$, đồng thời $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{4} f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{50}{3}$. Tính a.

A. $a=1$. **B.** $a=\dfrac{1}{2}$. **C.** $a=\dfrac{3}{4}$. **D.** $a=\dfrac{1}{4}$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(x)=\begin{cases}2x & \text{khi } x\ge 0\\ x^3+x+1 & \text{khi } x<0\end{cases}$. Tính $\int\limits_{0}^{2} f(x-1)\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{3}{4}$. **C.** $\dfrac{5}{4}$. **D.** $\dfrac{11}{4}$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-x+1 & \text{khi } x\ge \dfrac{1}{2}\\ 2x+\dfrac{7}{4} & \text{khi } x<\dfrac{1}{2}\end{cases}$. Tính tích phân $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin^2 x\right)\sin 2x\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{37}{24}$. **B.** $-\dfrac{37}{24}$. **C.** $\dfrac{24}{37}$. **D.** $\dfrac{17}{24}$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x+2 & \text{khi } -3\le x\le -1\\ x^2 & \text{khi } x\ge -1\end{cases}$ thì $\int\limits_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{31}{3}$. **B.** $\dfrac{28}{3}$. **C.** $\dfrac{22}{3}$. **D.** $\dfrac{26}{3}$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x^2-x & \text{khi } x<0\\ \sin x & \text{khi } x\ge 0\end{cases}$. Tính tích phân $\int\limits_{-1}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$

A. $\frac{13}{6}$. **B.** $\frac{5}{6}$. **C.** $-\frac{5}{6}$. **D.** $\frac{19}{6}$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}4x^3+2x+1 & \text{khi } x\ge 0\\ 4x+1 & \text{khi } x<0\end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(1)=2$. Giá trị của $2F(-1)+3F(2)$ bằng.

A. 76. **B.** 19. **C.** 21. **D.** 63.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x^2+2x+m & \text{khi } x\ge 1\\ 5-2x & \text{khi } x<1\end{cases}$ (m là tham số thực). Biết rằng $f(x)$ có nguyên hàm trên R là $F(x)$ thỏa mãn $F(-2)=-10$, khi đó $F(3)$ bằng

A. $36+3m$. **B.** 36. **C.** 38. **D.** $30+3m$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x+m & \text{khi } x\ge 0\\ x^2\left(x^3+1\right)^3 & \text{khi } x<0\end{cases}$ (với m tham số). Biết hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và tích phân $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x=a.e-\frac{b}{c}$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}^*;\frac{a}{b}$ tối giản ($e=2,718281\ldots.$). Biểu thức $a+b+c+m$ có giá bằng

A. -11. **B.** 35. **C.** 13. **D.** 36.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+a & \text{khi } x\ge 1\\ 3x^2+b & \text{khi } x<1\end{cases}$ thỏa mãn $\int\limits_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x=13$. Tính $T=a+b-ab$?

A. $T=-11$ **B.** $T=-5$ **C.** $T=1$ **D.** $T=-1$

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)=\begin{cases}x+m & ,x\ge 0\\ e^{2x} & ,x<0\end{cases}$ (m là hằng số). Biết $\int\limits_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x=a+\frac{b}{e^2}$ trong đó a,b là các số hữu tỉ. Tính $2a+4b^2$.

A. 10. **B.** 4. **C.** 80. **D.** 40.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sin x+2 & \text{khi } x\ge 0\\ 2\cos^2 x & \text{khi } x<0\end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{3}\right)=\pi$. Giá trị của $F\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2F\left(\frac{\pi}{6}\right)-F\left(\frac{\pi}{4}\right)$ bằng:

A. $\frac{1+\sqrt{3}+3\pi}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{13\pi}{12}$. **C.** $\frac{13\pi+6-6\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{12}$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x^2+a & \text{khi } x\ge 0\\ \sin 2x+\cos x-b & \text{khi } x<0\end{cases}$ liên tục và có nguyên hàm F liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(2)-F\left(-\frac{\pi}{2}\right)=10$ với a,b là tham số thực. Giá trị $\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\frac{m}{4}$, với m là một số thực. Khi đó $2m$ bằng:

A. $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{9}{4}$. **C.** 9. **D.** 18.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+3 & \text{khi } x\le 0\\ x^2-2x+3 & \text{khi } x>0\end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(3)=0$. Giá trị của $2F(-1)+3F(2)$ bằng

A. 17. **B.** 32. **C.** $-\frac{22}{3}$. **D.** -35.

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)$ có nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ là $F(x)=\begin{cases}x^2+5x+C_1 \text{ khi } x\ge 1\\ x^3+4x+C_2 \text{ khi } x<1\end{cases}$. Tính $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$?

A. 14. **B.** 13. **C.** 15. **D.** 16.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x^2-2x+1 \text{ khi } x\ge 0\\ 1-2x \quad \text{khi } x<0\end{cases}$. Giả sử F là 1 nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2020F(-1)+2021F(2)=-2022$. Giá trị $F(1)$ nằm trong khoảng nào?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;2)$.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3-2x & \text{khi } x\ge 1\\ 3x^2+2x-4 & \text{khi } x<1\end{cases}$. Giả sử $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(2)=4$. Giá trị của $F(-2)-4F(3)$ bằng

A. 16. **B.** 8. **C.** 18. **D.** 2.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-2x & \text{khi } x\ge 2\\ x-2 & \text{khi } x<2\end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2(x-2)\mathrm{d}x$

b) $\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_2^3\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x$

c) $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_1^2+\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_2^3$

d) $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\frac{5}{6}$

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=\left|x^2-9\right|$ với $0\le x\le 9$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(x)=\left|x^2-9\right|=\begin{cases}-x^2+9,\ 0\le x\le 3\\ x^2-9,\ 3\le x\le 9\end{cases}$.

b) $\int_0^9 f(x)\mathrm{d}x = -\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x + \int_3^9 f(x)\mathrm{d}x$.

c) $\int_0^9 f(x)\mathrm{d}x = -\int_0^3 \left(x^2-9\right)\mathrm{d}x + \int_3^9 \left(x^2-9\right)\mathrm{d}x$.

d) $\int_0^9 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^m \left(x^2-9\right)\mathrm{d}x + \int_m^9 \left(x^2-9\right)\mathrm{d}x \ \forall m \in (0,9)$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x^2+2x+m & \text{khi } x\geq 1\\ 5-2x & \text{khi } x<1\end{cases}$ (m là tham số thực) liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng $f(x)$ có nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ là $F(x)$ thỏa mãn $F(-2)=-10$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $m=-2$

b) $F(x)=\begin{cases}x^3+x^2-2x+8 & \text{khi } x\geq 1\\ 5x-x^2+4 & \text{khi } x<1\end{cases}$

c) $F(3)=83$

d) $\int_1^{e^2} f(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x = 3$

Câu 4: Giả sử tốc độ $v(m/s)$ của một thang máy di chuyển từ tầng 1 lên tầng cao nhất theo thời gian t được cho bởi công thức: $v(t)=\begin{cases}t\ ;\ 0\leq t\leq 2\\ 2\ ;\ 2<t\leq 20\\ 12-0{,}5t\ ;\ 20<t\leq 24\end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

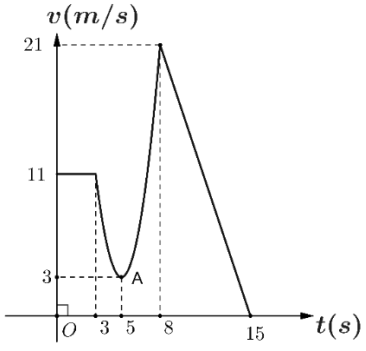
a) Tốc độ tại thời điểm $t=2s$ là 2.

b) Gia tốc chuyển động của thang máy tại thời điểm $t=15s$ là $2\left(m/s^2\right)$.

c) Quãng đường chuyển động của thang máy là $42m$.

d) Tốc độ trung bình của thang máy là $1{,}75(m/s)$.

Câu 5: Chất điểm chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)(m/s)$ có dạng đường thẳng khi $0\leq t\leq 3(s)$ và $8\leq t\leq 15(s)$ và $v(t)$ có dạng đường Parabol khi $3\leq t\leq 8(s)$ (như hình vẽ)



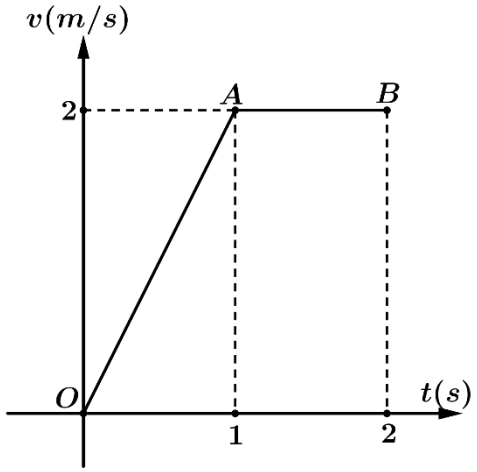
a) Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t=15$ là $v(15)=21(m/s)$.

b) Quãng đường chất điểm di chuyển được trong 3 giây đầu tiên là: $S_1=\int_0^3 11\mathrm{d}t(m)$

c) Quãng đường chất điểm đi được trong khoảng thời gian từ 8 giây đến 15 giây bằng $73,5(m)$

d) Vận tốc trung bình v_{tb} của chất điểm trong khoảng thời gian từ 3 đến 8 giây thỏa mãn $v_{tb}<7\ (m/s)$.

Câu 6: Một vật chuyển động với vận tốc được cho bởi đồ thị trong hình sau:



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Vận tốc của vật tại thời điểm t được xác định bởi $v(t)=\begin{cases}2t & \text{khi } 0\le t\le 1\\ 2 & \text{khi } t>1\end{cases}$.

b) Quãng đường vật đi được trong 1 giây đầu tiên được xác định bởi công thức $s(t)=\int_0^1 v(t)\mathrm{d}t$

c) Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ 1 giây đến 2 giây được xác định bởi công thức $s(t)=\int_0^2 v(t)\mathrm{d}t$

d) Quãng đường mà vật đi được trong 2 giây đầu tiên là $3m$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho $f(x)=\begin{cases}1 & \text{khi } x\ge 1\\ 2x-1 & \text{khi } x<1\end{cases}$. Tính $J=\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$

Câu 2: Cho số thực a và hàm số $f(x)=\begin{cases}2x & \text{khi } x\le 0\\ a\left(x-x^2\right) & \text{khi } x>0\end{cases}$. Tính tích phân $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ khi $a=12$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & \text{khi } x\ge 2\\ x^2-2x+3 & \text{khi } x<2\end{cases}$. Tích phân $I=\frac{1}{2}\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu? *Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2*

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{khi } x\ge 1\\ x+1 & \text{khi } x<1\end{cases}$. Tích phân $I=\int_{2}^{0}-3t^2 f(t)\mathrm{d}t$ bằng bao nhiêu? *Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2*

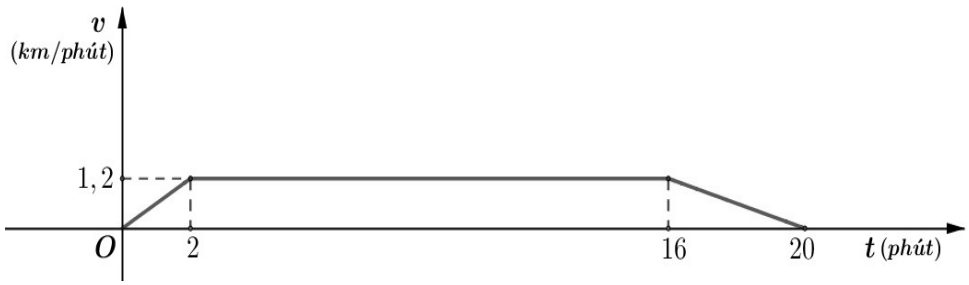
Câu 5: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x^2-1 & \text{khi } x<0\\ x-1 & \text{khi } 0\le x\le 2\\ 5-2x & \text{khi } x>2\end{cases}$. Tính tích phân $I=\int_{-5}^{9}\dfrac{1}{7}f(t)\mathrm{d}t$ bằng bao nhiêu? *Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2*

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}e^x+1 & \text{khi } x\ge 0\\ x^2-2x+2 & \text{khi } x<0\end{cases}$. Biết giá trị của $I=\int_{1/e}^{e^2}\dfrac{f(\ln x-1)}{x}\mathrm{d}x=\dfrac{a}{b}+ce$ với $a,b,c\in\mathbb{Z},b\ne 0$ và $(a,b)=1$ bằng. Giá trị của $a+b+c$

Câu 7: Biết rằng tốc độ v (km / phút) của một canô cao tốc thay đổi theo thời gian t (phút) được cho bởi công thức sau: $v(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{3} & \text{khi } 0\le t<3\\ 1 & \text{khi } 3\le t<10\\ 5-0,4t & \text{khi } 10\le t\le 18\end{cases}$.

Quãng đường canô di chuyển được trong khoảng từ 0 đến 18 phút là bao nhiêu km?

Câu 8: Tốc độ v(km / phút) của một ca nô cao tốc thay đổi theo thời gian t (phút) như đồ thị ở hình vẽ sau



Tính tốc độ trung bình của cano trong khoảng thời gian 20 phút đầu tiên.

----------HẾT----------

Dạng 4 : Ứng dụng tích phân giải bài toán thực tế

Phương pháp: Có hai bài toán trong dạng này

Bài toán 1: Bài toán chuyển động của một vật

Một vật chuyển động theo phương trình vận tốc $v(t)$ trong khoảng thời gian $t=a$ đến $t=b\,(a<b)$ sẽ di chuyển được quãng đường là: $s=\int_a^b v(t)dt$.

Một vật chuyển động có phương trình gia tốc $a(t)$ thì vận tốc của vật đó sau khoảng thời gian $\Delta t=t_2-t_1$ là: $v=\int_{t_1}^{t_2} a(t)dx$.

Bài toán 2: Bài toán ứng dụng tích phân vào tìm các đại lượng vật lý như công, điện lượng,…

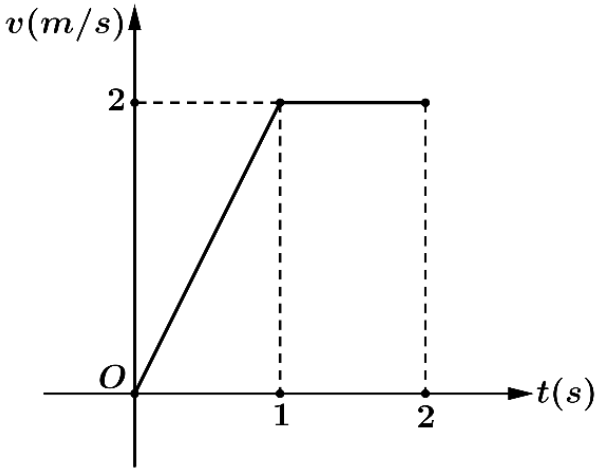
Theo định luật Hooke thì lực cần dùng để giữ lò xo giãn thêm *x* mét từ độ dài tự nhiện là $f(x)=kx$, với $k\,(N/m)$ là độ cứng của lò xo.

Công cần để kéo dãn lò xo từ độ dài l_1 đến độ dài l_2 là: $A=\int_{l_1}^{l_2} f(x)dx$.

Điện lượng chuyển qua tiết diện của dây dẫn của đoạn mạch trong thời gian từ t_1 đến t_2 là: $Q=\int_{t_1}^{t_2} I(t)dt$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Một vật chuyển động với vận tốc được cho bởi đồ thị ở hình vẽ dưới đây:



a) Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong 1 giây đầu tiên.

b) Tính quãng đườngvà vật di chuyển được trong 2 giây đầu tiên.

Bài tập 2: a) Cho một vật chuyển động với vận tốc $y=v(t)\,(\text{m/s})$. Cho $0<a<b$ và hàm vận tốc $v(t)>0$ với mọi $t\in[a;b]$. Hãy giải thích vì sao $\int_a^b v(t)\text{d}t$ biểu thị quãng đường mà vật đi được trong khoảng thời gian từ a đến b (tính theo giây).

b) Áp dụng công thức ở câu a) để giải bài toán sau đây: Một vật chuyển động với vận tốc được biểu thị bởi phương trình $v(t)=2-\sin t\,(\text{m/s})$. Tính quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=0(s)$ đến thời điểm $t=\frac{3\pi}{4}(s)$.

Bài tập 3: Ở nhiệt độ $37°\text{C}$, một phản ứng hóa học từ chất A, chuyển hóa thành sản phẩm chất B theo phương trình: $A \to B$. Giả sử $y(x)$ là nồng độ chất A (đơn vị mol L^{-1}) tại thời gian x (giây), $y(x) > 0$ với $x \geq 0$ thỏa mãn hệ thức $y'(x) = -7.10^{-4} y(x)$ với $x \geq 0$. Biết rằng $x = 0$ thì nồng độ (đầu) của chất A là $0,05$ mol L^{-1}

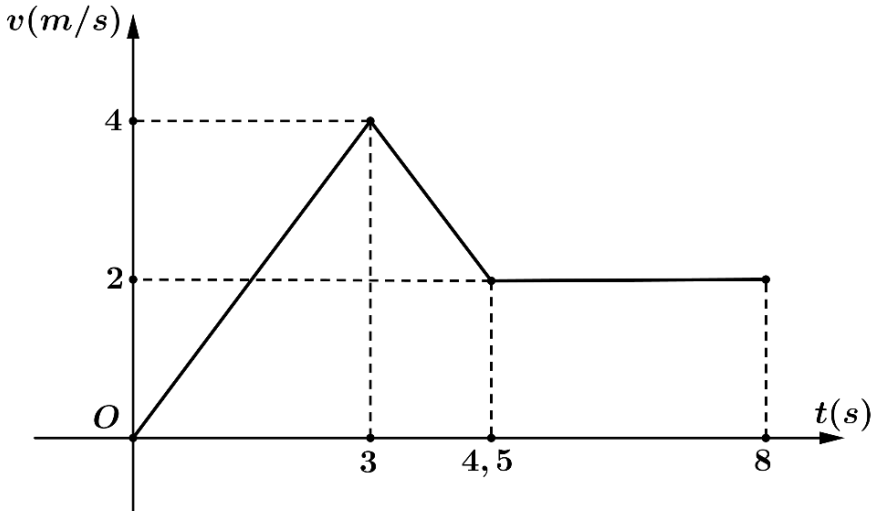
a) Xét hàm số $f(x) = \ln y(x)$ với $x \geq 0$. Hãy tính $f'(x)$ từ đó tìm hàm số $f(x)$.

b) Giả sử ta tính nồng độ trung bình chất A (đơn vị mol L^{-1}) từ thời điểm a (giây) đến thời điểm b (giây) với $0 < a < b$ theo công thức $\frac{1}{b-a}\int_a^b y(x)\text{d}x$. Xác định nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây.

Bài tập 4: a) Cường độ dòng điện chạy trong cuộn dây là $y = I(t)\,(\text{A})$. Cho $0 < a < b$ và $I(t) > 0$ với mọi $t \in [a;b]$. Hãy giải thích vì sao $\int_a^b I(t)\text{d}t$ biểu thị điện lượng (C) đã phóng qua cuộn dây trong khoảng thời gian từ a đến b (tính theo giây).

b) Áp dụng công thức ở câu a) để giải bài toán sau: Cường độ dòng điện chạy trong cuộn dây là $I = 2\sin(t)(A)$. Tính điện lượng (C) phóng ra trong cuộn dây khoảng thời gian từ thời điểm $t = 0(s)$ đến thời điểm $t = \frac{\pi}{2}(s)$.

Bài tập 5: Một vật chuyển động với vận tốc được cho bởi đồ thị ở hình vẽ:



a) Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong 3 giây đầu tiên.

b) Tính quãng đườngvà vật di chuyển được trong 8 giây đầu tiên.

Bài tập 6: Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trong thành phố thì các xe khi dừng lại phải cách nhau một khoảng tối thiểu là 1m. Một xe máy di chuyển trên đường thì gặp đèn đỏ từ xa, người điều khiển xe máy đạp phanh và xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 10 - 5t$ (m/s). Hỏi để giữ khoảng cách an toàn, người điều khiển xe máy phải bắt đầu đạp phanh khi cách xe đang dừng phía trước tối thiểu một khoảng bao xa, biết rằng ngay lúc đạp phanh thì xe phía trước đang đứng yên?

Bài tập 7: Giả sử rằng sau t năm, vốn đầu tư của một doanh nghiệp phát sinh lợi nhuận với tốc độ $P'(t)=126+t^2$ (triệu đồng/năm). Hỏi sau 10 năm đầu tiên thì doanh nghiệp thu được lợi nhuận là bao nhiêu (đơn vị triệu đồng)?

Bài tập 8: Việc thở là những vòng tuần hoàn, mỗi vòng tính từ lúc bắt đầu hít vào đến lúc kết thúc thở ra, thường kéo dài trong 5s. Vận tốc cực đại của khí là $V\ (l/s)$ nên vì thế nó được mô hình hoá bởi công thức $v(t)=V\sin\dfrac{3\pi t}{5}$. Tính thể tích khí hít vào phổi sau thời gian 2s.

Bài tập 9: Một mạch kín gồm một nguồn điện có suất điện động biến thiên theo thời gian được biểu diễn bởi $e=10\cos(100\pi t)(V)$ và điện trở trong không đáng kể, nối với mạch ngoài có một điện trở $R=50\Omega$. Tính điện lượng chuyển qua điện trở trong thời gian từ $t=0$ đến $t=\dfrac{1}{600}s$?

Bài tập 10: Một người đi xe môtô với độ tăng vận tốc tại một thời điểm t (tính theo giây, $t\geq 0$) được cho bởi hàm số $f(t)=\dfrac{1}{300}t^2+\dfrac{1}{1350}t\ \left(km/s^2\right)$. Nếu bắt đầu tăng tốc tính từ lúc khởi động máy (vận tốc bằng 0km/h), hỏi mất bao lâu thì người đó đạt đến tốc độ 120 km/h?

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Vận tốc của một vật chuyển động là $v(t)=3t^2+5\ (\text{m/s})$. Quãng đường vật đó đi được từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là

A. 669 m. **B.** 696 m. **C.** 699 m. **D.** 966 m.

Câu 2: Giả sử lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức $P'(x)=-0,0004x+9,3$. Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm. Khi đó sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 125 đơn vị sản phẩm là

A. $232,325$ triệu đồng. **B.** $230,315$ triệu đồng.

C. $321,385$ triệu đồng **D.** $231,375$ triệu đồng.

Câu 3: Giả sử vận tốc v của dòng máu ở khoảng cách r từ tâm của động mạch bán kính $R=9$, có thể được mô hình hóa bởi công thức $v=k\left(R^2-r^2\right)$, trong đó k là một hằng số. Tìm vận tốc trung bình (đối với r) của động mạch trong khoảng $0\le r\le R$.

A. $54k$. **B.** $45k$. **C.** $9k$. **D.** $27k$.

Câu 4: Một ô tô đang chạy với vận tốc $10m/s$ thì gặp chướng ngại vật, người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-2t+10(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Tính quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng.



A. $55m$. **B.** $25m$. **C.** $50m$. **D.** $16m$.

Câu 5: Một ô tô đang chạy với tốc độ $20(m/s)$ thì gặp chướng ngại vật, người lái đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+20(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét (m)?



A. $20\ m$. **B.** $30\ m$. **C.** $10\ m$. **D.** $40\ m$.

Câu 6: Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\frac{1}{120}t^2+\frac{58}{45}t(m/s)$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a\left(m/s^2\right)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $21(m/s)$ **B.** $25(m/s)$ **C.** $36(m/s)$ **D.** $30(m/s)$

Câu 7: Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\frac{1}{150}t^2+\frac{59}{75}t(m/s)$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc a bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a\left(m/s^2\right)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $15(m/s)$ **B.** $20(m/s)$ **C.** $16(m/s)$ **D.** $13(m/s)$

Câu 8: Một ô tô bắt đầu chuyển động thẳng đều với vận tốc v_0, sau 6 giây chuyển động thì gặp chướng ngại vật nên bắt đầu giảm tốc độ với vận tốc chuyển động $v(t)=-\frac{5}{2}t+a\ (m/s),\ (t\geq 6)$ cho đến khi dừng hẳn. Biết rằng kể từ lúc chuyển động đến lúc dừng thì ô tô đi được quãng đường là 80m. Tìm v_0.



A. $v_0=35m/s$. **B.** $v_0=25m/s$. **C.** $v_0=10m/s$. **D.** $v_0=20m/s$.

Câu 9: Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu 1m. Một ô tô A đang chạy với vận tốc 16m/s bỗng gặp ô tô B đang dừng đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu thị bởi công thức $v_A(t)=16-4t$ (đơn vị tính bằng m/s), thời gian tính bằng giây. Hỏi rằng để có 2 ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu?

A. 33. **B.** 12. **C.** 31. **D.** 32.

Câu 10: Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0=15$ m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=t^2+4t\left(\text{m/s}^2\right)$. Tính quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc.

A. 70,25 m. **B.** 68,25 m. **C.** 67,25 m. **D.** 69,75 m.

Câu 11: Một vật chuyển động với vận tốc $10\,\text{m/s}$ thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian là $a(t)=t^2+3t$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 6 giây kể từ khi vật bắt đầu tăng tốc.

A. 136m. **B.** 126m. **C.** 276m. **D.** 216m.

Câu 12: Một chiếc máy bay chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t)=t^2+10t\ (m/s)$ với t là thời gian được tính theo đơn vị giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết khi máy bay đạt vận tốc $200(m/s)$ thì rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là

A. $\frac{2500}{3}(m)$. **B.** $2000(m)$. **C.** $500(m)$. **D.** $\frac{4000}{3}(m)$.

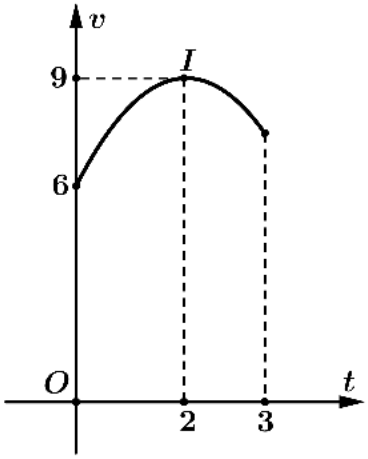
Câu 13: Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t)=7t\ (\text{m/s})$. Đi được 5s, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-70\ (\text{m/s}^2)$. Tính quãng đường S đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

A. $S=96,25\ (\text{m})$. **B.** $S=87,5\ (\text{m})$. **C.** $S=94\ (\text{m})$. **D.** $S=95,7\ (\text{m})$.

Câu 14: Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t)=2t\,(\text{m/s})$. Đi được 12 giây, người lái xe gặp chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-12(\text{m/s}^2)$. Tính quãng đường $s(\text{m})$ đi được của ôtô từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi dừng hẳn?

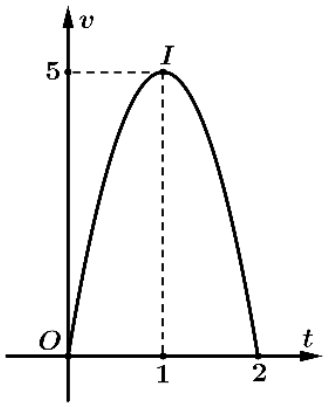
A. $s=168(\text{m})$. **B.** $s=166(\text{m})$. **C.** $s=144(\text{m})$. **D.** $s=152(\text{m})$.

Câu 15: Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.



A. $s=25,25(\text{km})$ **B.** $s=24,25(\text{km})$ **C.** $s=24,75(\text{km})$ **D.** $s=26,75(\text{km})$

Câu 16: Một người chạy trong 2 giờ, vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường Parabol với đỉnh $I(1;5)$ và trục đối xứng song song với trục tung Ov như hình vẽ. Tính quảng đường S người đó chạy được trong 1 giờ 30 phút kể từ lúc bắt đầu chạy (kết quả làm tròn đến 2 chữ số thập phân).



A. $2{,}11\text{km}$. **B.** $6{,}67\text{km}$. **C.** $5{,}63$ km. **D.** $5{,}63\text{km}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Một chất điểm chuyển động trên đường thẳng nằm ngang (chiều dương hướng sang phải) với gia tốc phụ thuộc vào thời gian $t(\text{s})$ là $a(t)=2t-7\ \left(\text{m/s}^2\right)$. Biết vận tốc đầu bằng $6\ (\text{m/s})$, xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t(\text{s})$ xác định bởi $v(t)=t^2-7t+10$.

b) Tại thời điểm $t=7$ (s), vận tốc của chất điểm là 6 (m/s).

c) Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1\le t\le 7$ là 18 m.

d) Trong 8 giây đầu tiên, thời điểm chất điểm xa nhất về phía bên phải là $t=7$ (s).

Câu 2: Giả sử lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức $P'(x)=-0{,}0008x+10{,}4$. Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm.

a) Lợi nhuận khi bán được x đơn vị sản phẩm được tính bằng $P(x)=-0{,}0008x^2+10{,}4x$.

b) Lợi nhuận khi bán được 50 sản phẩm đầu tiên là 519 triệu đồng.

c) Sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên 55 đơn vị sản phẩm là $49{,}79$ triệu đồng.

d) Biết sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên a đơn vị sản phẩm lớn hơn 517 triệu đồng, khi đó giá trị nhỏ nhất của a là 100.

Câu 3: Ở nhiệt độ $37°C$, một phản ứng hóa học từ chất đầu A, chuyển hóa thành chất sản phẩm B theo phương trình: $A\to B$. Giả sử $y(x)$ là nồng độ chất A (đơn vị mol L^{-1}) tại thời điểm x (giây), $y(x)>0$ với $x\ge 0$, thỏa mãn hệ thức: $y'(x)=-7.10^{-4}y(x)$ với $x\ge 0$. Biết rằng tại $x=0$, nồng độ (đầu) của A là $0{,}05$ mol L^{-1}. Xét hàm số $f(x)=\ln y(x)$ với $x\ge 0$. Khi đó, ta có

a) $f'(x)=-7.10^{-4}$

b) $f(x)=-7.10^{-4}x+\ln(0{,}05)$

c) $y(30)-y(15)=-6.10^{-4}$

d) Nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây gần bằng $0{,}05$.

Câu 4: Sau khi xuất phát, ô tô di chuyển với tốc độ $v(t)=2,01t-0,025t^2\,(0\le t\le 10)$. Trong đó $v(t)$ tính theo m/s, thời gian t tính theo giây với $t=0$ là thời điểm xe xuất phát. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Quãng đường xe di chuyển được tính theo công thức là $s(t)=2,01-0,05t\,(0\le t\le 10)$

b) Quãng đường xe di chuyển được trong 3 s là 8,82m.

c) Quãng đường xe di chuyển được trong giây thứ 9 xấp xỉ 15,277m

d) Trong khoảng thời gian không quá 10s đầu, khi vận tốc đạt giá trị lớn nhất thì gia tốc của xe là 1,51m/s^2

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Một vật chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t)=160-10t\ (m/s)$. Hỏi rằng trong 3s trước khi dừng hẳn vật di chuyển được bao nhiêu mét ?

Câu 2: Một xe mô tô phân khối lớn đang chạy với vận tốc 10m/s thì tăng tốc với gia tốc được biểu diễn bởi phương $a(t)=t^2+3t\,(m/s^2)$. Hỏi quãng đường của xe đi được trong quãng thời gian 10s đầu tiên sau khi tăng tốc ?

Câu 3: Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t (giây) là $v(t)=t^2-t-6$ (mét/giây). Quãng đường (mét) vật đi được trong khoảng thời gian $1\le t\le 4$ bằng *(làm tròn tới hàng phần trăm)*

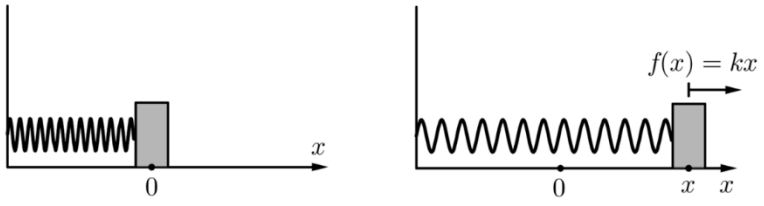
Câu 4: Một chiếc xe ô tô đang chạy trên đường cao tốc với vận tốc $72km/h$ thì tài xế bất ngờ đạp phanh làm cho chiếc ô tô chuyển động chậm với gia tốc $a(t)=-\frac{8}{5}t\ (m/s^2)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây. Hỏi kể từ khi đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn thì ô tô di chuyển bao nhiêu mét (m)? (*Giả sử trên đường ô tô di chuyển không có gì bất thường*).

A. $50\ (m)$. **B.** $\frac{250}{3}\ (m)$. **C.** $\frac{200}{3}\ (m)$. **D.** $\frac{100}{3}\ (m)$.

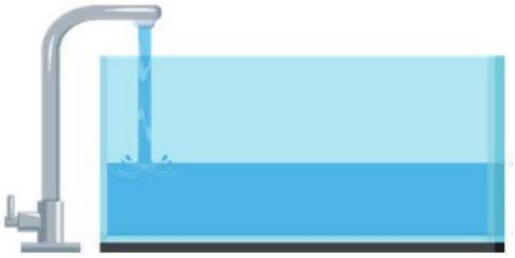
Câu 5: Công ty vừa đưa vào một dây chuyền sản xuất để chế tạo máy tính mới. Sau vài tuần, sản lượng đạt được $q(t)=4000\left(1-\frac{10}{(10-t)^2}\right)$ máy/tuần. Tìm số máy sản xuất được từ tuần thứ ba đến hết tuần thứ tư.

Câu 6: Việc thở là những vòng tuần hoàn, mỗi vòng tính từ lúc bắt đầu hít vào đến lúc kết thúc thở ra, thường kéo dài trong 5s. Vận tốc cực đại của khí là $V\ l/s$,vì thế nó được mô hình hoá bởi $v(t)=V\sin\frac{2\pi t}{5}$. Tính thể tích khí hít vào phổi sau thời gian 2s.

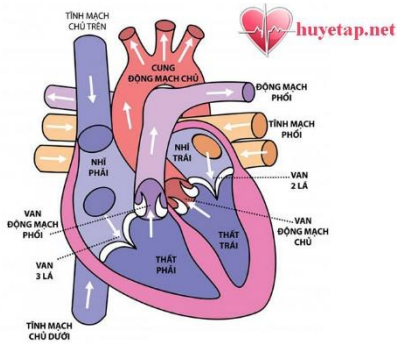
Câu 7: Một lực có độ lớn 40 N cần thiết để kéo căng một chiếc lò xo có độ dài tự nhiên 10 cm lên 15 cm. Biết rằng theo định luật *Hooke* trong Vật lý, khi một chiếc lò xo bị kéo căng thêm x so với độ dài tự nhiên của lò xo thì lò xo trì lại với một lực cho bởi công thức $f(x)=kx\,(N)$, trong đó k là hệ số đàn hồi của lò xo. Hãy tìm công sinh ra khi kéo lò xo có độ dài từ 15 cm đến 20 cm?



Câu 8: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t)=6at^2+2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là $90\ \text{m}^3$ và sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là $504\ \text{m}^3$. Tính thể tích của lượng nước trong bể sau khi bơm được 9 giây.



Câu 9: Hiệu suất của tim là lưu lượng máu được bơm bởi tim trên một đơn vị thời gian (lưu lượng máu chảy vào động mạch chủ). Để đo hiệu suất của tim, người ta bơm $A(\text{mg})$ chất chỉ thị màu vào tâm nhĩ phải, chảy qua tim rồi vào động mạch chủ và đo nồng độ chất chỉ thị màu còn lại ở tim đến thời điểm $T(\text{s})$ khi chất chỉ thị màu tan sạch. Gọi $c(t)$ là nồng độ (mg/l) chất chỉ thị màu tại thời điểm $t(\text{s})$ thì hiệu suất của tim được xác định bởi $F=\dfrac{A}{\int_0^T c(t)\,\text{d}t}(\text{l}/\text{s})$.



Tính hiệu suất của tim khi bơm 8 mg chất chỉ thị màu vào tâm nhĩ phải, biết $c(t)=\dfrac{1}{4}t(12-t)$ với $0\le t\le 12$ *(kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).*

(Nguồn: James Stewart, Calculus, Cengage Learning).

----------HẾT----------

BÀI 03 ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

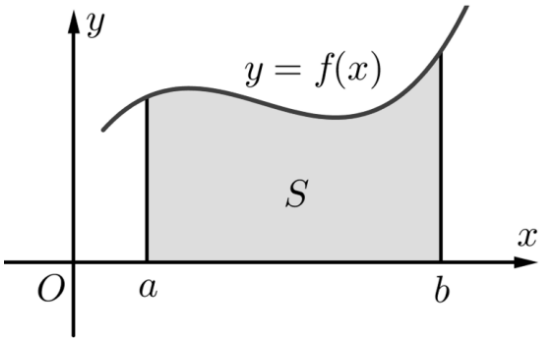
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Tính diện tích hình phẳng

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của một hàm số, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$

Ta đã biết, nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính bởi:

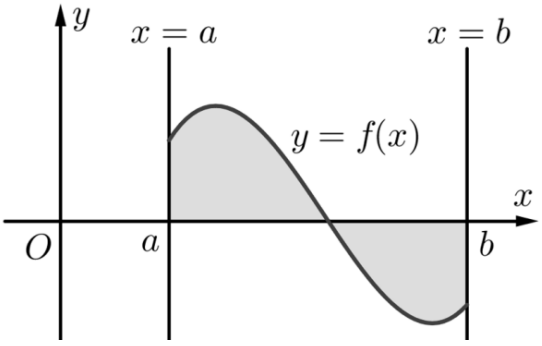
$$S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$



Một cách tổng quát, ta có kết quả sau:

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được tính bởi công thức:

$$S = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$



Chú ý: Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Nếu $f(x)$ không đổi dấu trên đoạn $[a;b]$ thì:

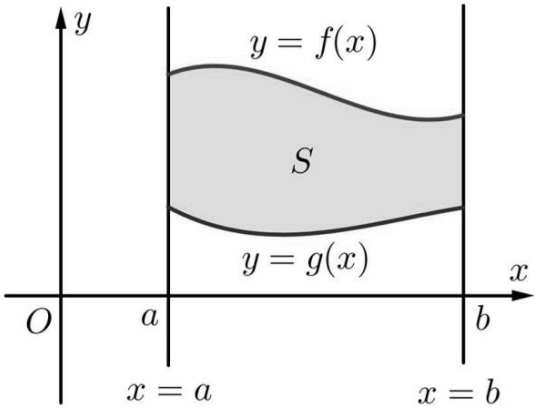
$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$$

Nếu phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm trên khoảng $(a;b)$ thì công thức trên vẫn đúng.

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số và hai đường thẳng $x = a, x = b$

Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số trên và hai đường thẳng $x = a, x = b$. Xét trường hợp $f(x) \geq g(x)$ với mọi $x \in [a;b]$. Kí hiệu S_1, S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, hai đường thẳng $x = a,\ x = b$ và đồ thị của hàm số $y = f(x), y = g(x)$ tương ứng. Khi đó:

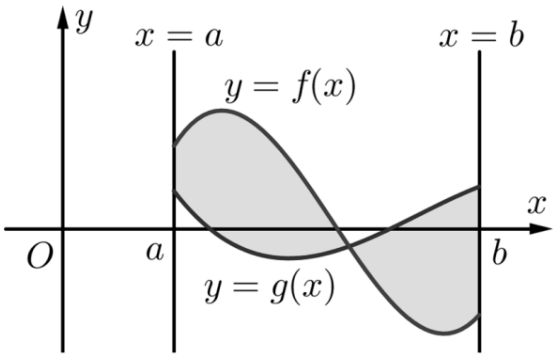
$$S = S_1 - S_2 = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right]\mathrm{d}x$$



Trong trường hợp tổng quát, ta có kết quả sau:

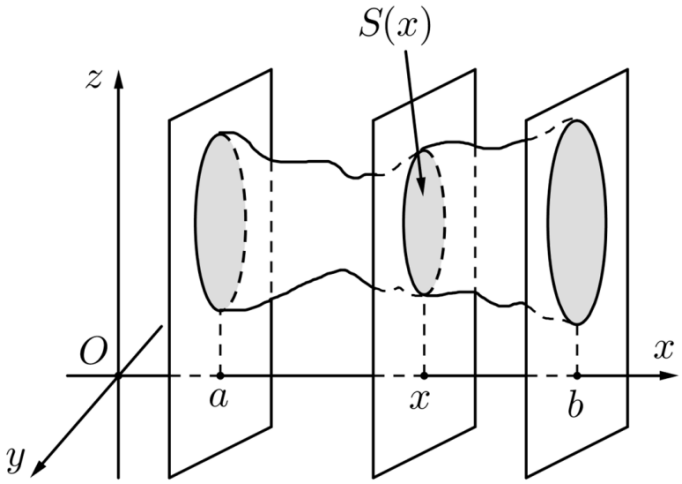
Cho hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a,\ x = b$ được tính bởi công thức:

$$S = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| \mathrm{d}x$$



2 Tính thể tích hình khối

Trong không gian, cho một vật thể nằm trong khoảng không gian giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b. Mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ là x với $(a \le x \le b)$ cắt vật thể theo mặt cắt có diện tích $S(x)$.



Khi đó, nếu $S(x)$ là hàm số liên tục trên $[a;b]$ thì thể tích của vật thể được tính bằng công thức:

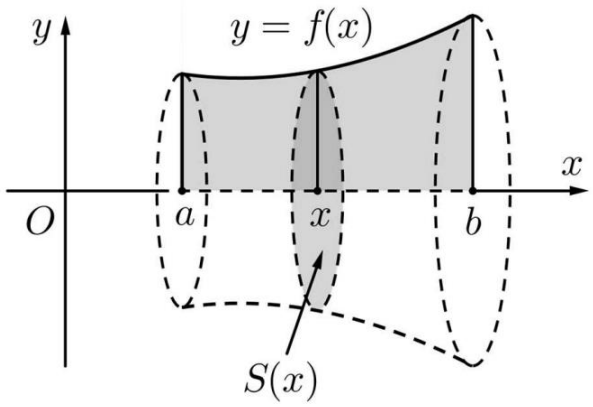
$$V = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x$$

Chú ý: Nếu $S(x) = S$ không đổi với mỗi $x \in [a;b]$ thì $V = (b-a)S$.

Thể tích khối tròn xoay

Cho $y = f(x)$ là hàm số liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$. Quay D xung quanh trục Ox ta được một hình khối gọi là khối tròn xoay. Cắt khối tròn xoay trên bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x với $x \in [a;b]$, ta được mặt cắt là hình tròn có bán kính bằng $f(x)$ và diện tích là $S(x) = \pi f^2(x)$. Vậy khối tròn xoay có thể tích là:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$$



B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Ứng dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng

Phương pháp:

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi một hàm số, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$

Diện tích hình phẳng giới hạn: $\begin{cases} y = f(x) \\ Ox \\ x = a; x = b \end{cases} \rightarrow S = \int_a^b \left| f(x) \right| \mathrm{d}x$.

Để phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta thường làm như sau:

Bước 1: Giải $f(x) = 0$ tìm nghiệm $x_1, x_2, ..., x_n \in (a;b)$ $(a < x_1 < x_2 < ... < x_n < b)$.

Bước 2: Tính $S = \int_a^{x_1} \left| f(x) \right| \mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} \left| f(x) \right| \mathrm{d}x + ... + \int_{x_n}^{b} \left| f(x) \right| \mathrm{d}x$

$= \left| \int_a^{x_1} f(x) \mathrm{d}x \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) \mathrm{d}x \right| + ... + \left| \int_{x_n}^{b} f(x) \mathrm{d}x \right|$

Chú ý: Ngoài cách trên, ta có thể dựa vào đồ thị để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$

Diện tích hình phẳng giới hạn: $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ x = a; x = b \end{cases} \rightarrow S = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| \mathrm{d}x$.

Để phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta thường làm như sau:

Bước 1: Giải $f(x) = g(x)$ tìm nghiệm $x_1, x_2, ..., x_n \in (a;b)$ $(a < x_1 < x_2 < ... < x_n < b)$.

Bước 2: Tính $S = \int_a^{x_1} \left| f(x) - g(x) \right| \mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} \left| f(x) - g(x) \right| \mathrm{d}x + ... + \int_{x_n}^{b} \left| f(x) - g(x) \right| \mathrm{d}x$

$= \left| \int_a^{x_1} \left(f(x) - g(x) \right) \mathrm{d}x \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} \left(f(x) - g(x) \right) \mathrm{d}x \right| + ... + \left| \int_{x_n}^{b} \left(f(x) - g(x) \right) \mathrm{d}x \right|$

Chú ý: Ngoài cách trên, ta có thể dựa vào đồ thị để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

a) Đồ thị hàm số $y = x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$.

b) Đồ thị hàm số $y = \mathrm{e}^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$.

c) Đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 1$.

d) Đồ thị hàm số $y = x^2 + x - 2$ và trục hoành.

e) Đồ thị hàm số $y = x^2 - 1$, trục hoành và đường thẳng $x = 3$.

f) Đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 4$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 3$.

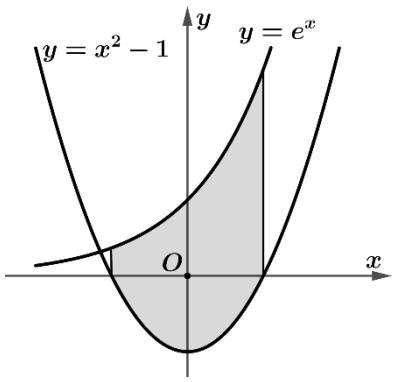
g) Đồ thị của các hàm số $y = x^3, y = 2x - 1$ và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$.

h) Đồ thị hàm số $y = \cos x - 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$ và $x = \pi$.

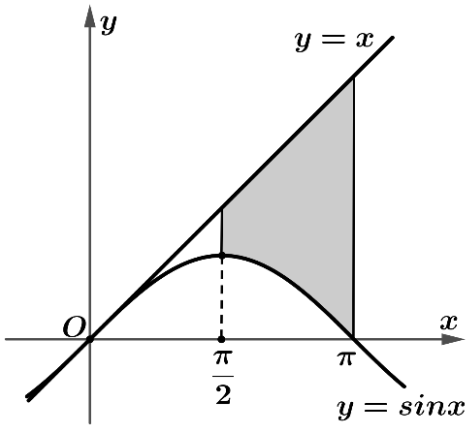
i) Đồ thị của hai hàm số $y = x^2, y = 2 - x$ và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$.

Bài tập 2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường được minh họa bởi hình vẽ sau đây:

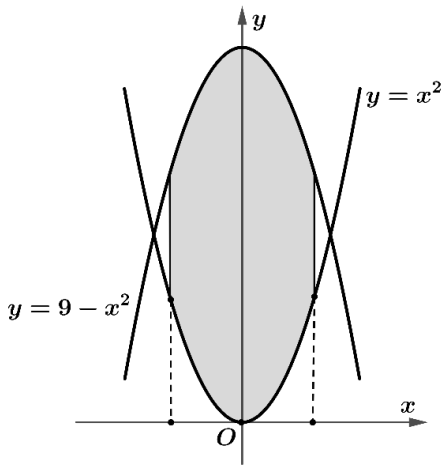
a) $y = e^x, y = x^2 - 1, x = -1, x = 1$



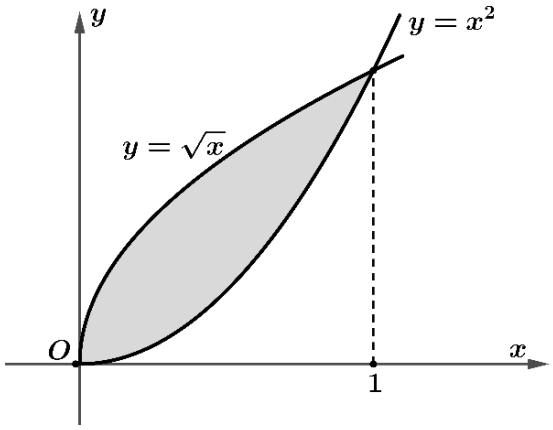
b) $y = \sin x, y = x, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi$



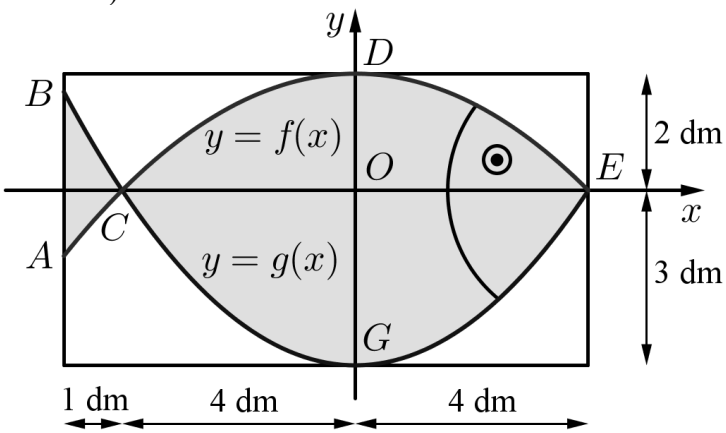
c) $y = 9 - x^2, y = 2x^2, x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$



d) $y=\sqrt{x}, y=x^2, x=0, x=1.$



Bài tập 3: Trên cửa sổ có dạng hình chữ nhật, họa sĩ thiết kế logo hình con cá cho một doanh nghiệp kinh doanh hải sản. Logo là hình phẳng giới hạn bởi hai parabol với các kích thước được cho trong hình sau (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là decimét).

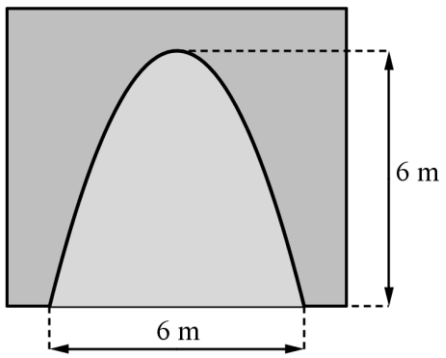


a) Lập phương trình các parabol $y=f(x)$ và $y=g(x)$.

b) Tính diện tích của logo.

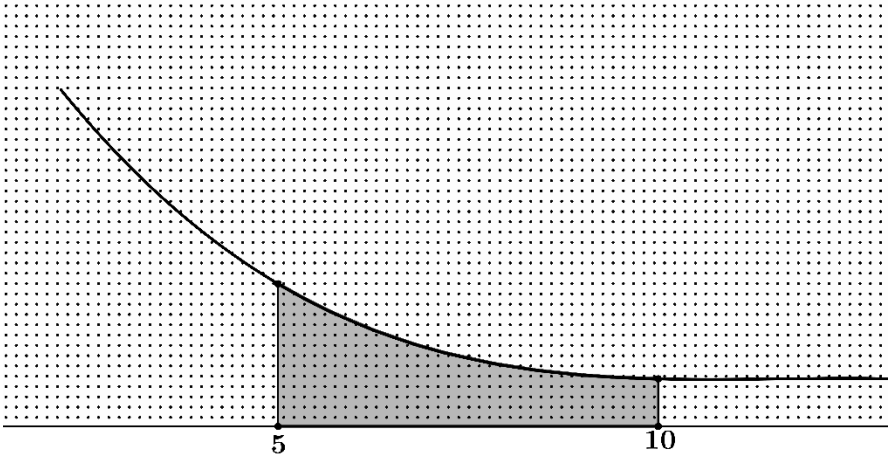
c) Logo chỉ cho phép 50% lượng ánh sáng đi qua. Lượng ánh sáng đi qua toàn bộ cửa sổ sau khi làm logo sẽ giảm bao nhiêu phần trăm (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Bài tập 4: Mặt cắt của một cửa hầm có dạng là hình phẳng giới hạn bởi một parabol và đường thẳng nằm ngang như hình sau. Tính diện tích của cửa hầm.



Bài tập 5: Đơn đặt hàng của nhà máy cho một loại máy điều hoà không khí là khoảng 6000 chiếc mỗi tuần khi giá là 331 USD/chiếc và khoảng 8000 chiếc mỗi tuần khi giá là 303 USD/chiếc. Hàm cung được cho bởi $p=0,0275x$, trong đó x là số lượng máy điều hoà được bán với giá p USD một chiếc. Tìm thặng dư tiêu dùng và thặng dư sản xuất (giả sử hàm cầu là hàm bậc nhất).

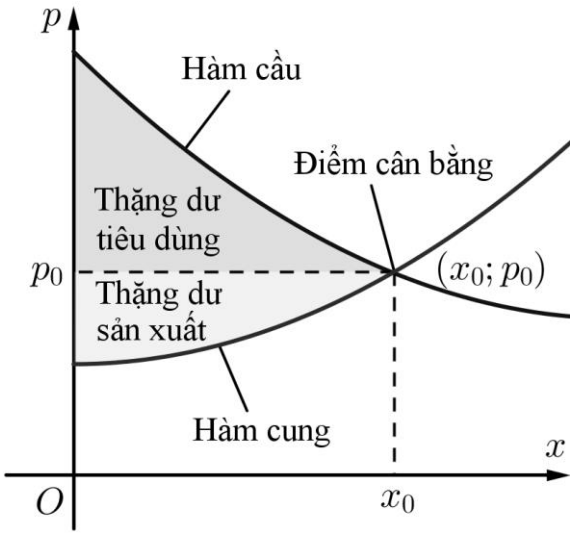
Bài tập 6: Trong xác suất thống kê thì một biến ngẫu nhiên X được gọi là có hàm mật độ $f(x)$ nếu xác suất để X nhận giá trị trong $[a,b]$ là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$, đường thẳng $y=a$ và $y=b$. Đặc biệt, khi $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x\geq 0\\ 0 \quad\quad , x<0\end{cases}$ trong đó λ là số thực cho trước thì X được gọi là biến ngẫu nhiên có phân phối mũ với tham số λ. Chẳng hạn, tuổi thọ của một bóng đèn (đơn vị năm) là một biến ngẫu nhiên X tuân theo phân phối mũ với hệ số $\lambda=\frac{1}{5}$. Hãy tính xác suất để một bóng đèn có tuổi thọ lớn hơn 5 năm và nhỏ hơn 10 năm.



Bài tập 7: Ta biết rằng hàm cầu liên quan đến giá p của một sản phẩm với nhu cầu của người tiêu dùng, hàm cung liên quan đến giá p của sản phẩm với mức độ sẵn sàng cung cấp sản phẩm của nhà sản xuất. Điểm cắt nhau $(x_0;p_0)$ của đồ thị hàm cầu $p=D(x)$ và đồ thị hàm cung $p=S(x)$ được gọi là điểm cân bằng.

Các nhà kinh tế gọi diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị hàm cầu, đường ngang $p=p_0$ và đường thẳng đứng $x=0$ là thặng dư tiêu dùng. Tương tự, diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị của hàm cung, đường nằm ngang $p=p_0$ và đường thẳng đứng $x=0$ được gọi là thặng dư sản xuất, như trong hình bên dưới.

(Theo *R. Larson, Brief Calculus: An Applied Approach, 8th edition, Cengage Learning, 2009*)



Giả sử hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm được mô hình hoá bởi:

Hàm cầu: $p=5-0,2x$ và hàm cung: $p=1+0,02x^2$, trong đó x là số đơn vị sản phẩm. Tìm thặng dư tiêu dùng và thặng dư sản xuất cho sản phẩm này.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y=x^3-6x$ và $y=x^2$ bằng

A. $\frac{125}{12}$. **B.** $\frac{16}{3}$. **C.** $\frac{63}{4}$. **D.** $\frac{253}{12}$.

Câu 2: Tính diện tích S hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong $y=-x^3+12x$ và $y=-x^2$

A. $S=\frac{937}{12}$ **B.** $S=\frac{343}{12}$ **C.** $S=\frac{397}{4}$ **D.** $S=\frac{793}{4}$

Câu 3: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y=|\ln x|, y=1$ được tính bởi công thức:

A. $S=\int_1^e\left|\left(|\ln x|-1\right)\right|\mathrm{d}x$ **B.** $S=\int_{\frac{1}{e}}^e\left(|\ln x|-1\right)\mathrm{d}x$

C. $S=\int_1^e\left|\left(1-|\ln x|\right)\right|\mathrm{d}x$ **D.** $S=\int_{\frac{1}{e}}^e\left(1-|\ln x|\right)\mathrm{d}x$

Câu 4: Gọi diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(C): y=\frac{-3x-1}{x-1}$ và hai trục tọa độ là S. Tính S?

A. $S=4\ln\frac{4}{3}-1$ **B.** $S=\ln\frac{4}{3}-1$ **C.** $S=1-\ln\frac{4}{3}$ **D.** $S=4\ln\frac{4}{3}$

Câu 5: Diện tích hình phẳng giớn hạn bởi các đường $y=x^2-4x+3;\ x=0$ và $y=0$ bằng

A. $\frac{5}{3}$. **B.** $\frac{16}{9}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{8}{3}$.

Câu 6: Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đường thẳng $y=x^2-x, y=0, x=0, x=2$ được tính bởi công thức nào sau đây?

A. $S=\int_0^2\left(x-x^2\right)\mathrm{d}x.$ **B.** $S=\int_1^2\left(x^2-x\right)-\int_0^1\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x.$

C. $S=\int_0^1\left(x^2-x\right)+\int_1^2\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x.$ **D.** $S=\int_0^2\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x.$

Câu 7: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=x^2$ và $y=8-x^2$ là

A. 12. **B.** 32. **C.** $\frac{3}{64}$. **D.** $\frac{64}{3}$.

Câu 8: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đường $y=x^2-1$ và $y=x-1$ bằng?

A. $\frac{\pi}{6}$. **B.** $\frac{13}{6}$. **C.** $\frac{13\pi}{6}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Câu 9: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y=x^2$, $y=x$ và các đường thẳng $x=0$, $x=1$ bằng

A. $\int_{-1}^0\left|x^2-x\right|\mathrm{d}x$. **B.** $\int_0^1\left|x^2+x\right|\mathrm{d}x$. **C.** $\int_{-1}^0\left|x^2+x\right|\mathrm{d}x$. **D.** $\int_0^1\left|x^2-x\right|\mathrm{d}x$.

Câu 10: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x^3 - 3x$ và $y = x$ bằng

A. 0. **B.** 8. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 11: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x + 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1; x = 3$.

A. $S = \frac{37}{3}$. **B.** $S = \frac{56}{3}$. **C.** $S = \frac{68}{3}$. **D.** $S = \frac{64}{3}$.

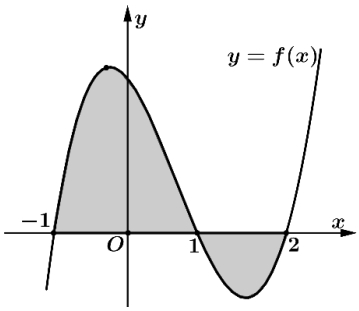
Câu 12: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sin x, Ox, x = 0, x = \pi$. Diện tích của hình phẳng (H) bằng

A. 1. **B.** 2π. **C.** 2. **D.** π.

Câu 13: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (x-2)^2 - 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{7}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = 0, x = -1, x = 2$ (như hình vẽ). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



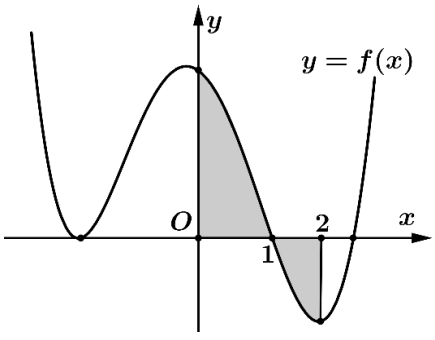
A. $S = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \int_{1}^{2} f(x)\,dx$.

B. $S = -\int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{2} f(x)\,dx$.

C. $S = -\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \int_{1}^{2} f(x)\,dx$.

D. $S = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{2} f(x)\,dx$.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị (C) là đường cong như hình bên.



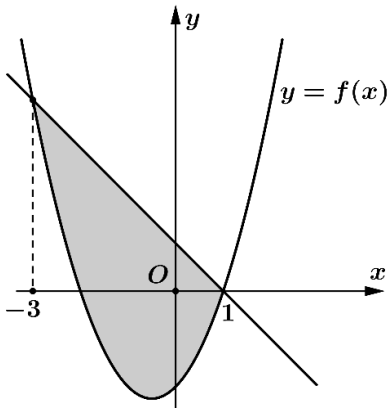
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số (C), trục hoành và hai đường thẳng $x = 0; x = 2$ là

A. $\int_{0}^{1} f(x)dx - \int_{1}^{2} f(x)dx$.

B. $\int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx$.

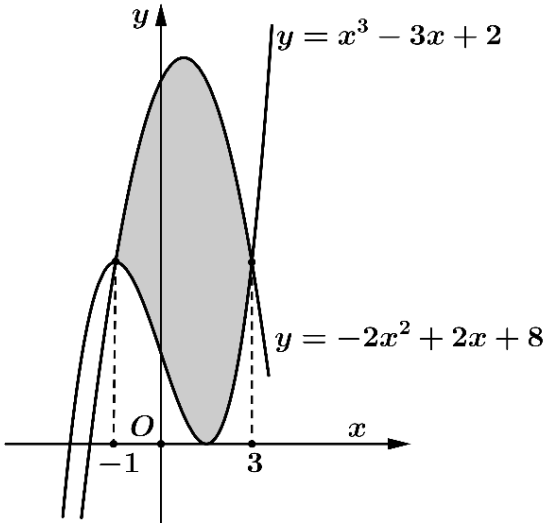
C. $\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|$. **D.** $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 16: Diện tích phần sạch sọc trong hình vẽ bằng



A. $\int_{-3}^{1}\left|-x^2-2x-3\right|\mathrm{d}x$. **B.** $\int_{-3}^{1}\left(x^2-2x-3\right)\mathrm{d}x$. **C.** $\int_{-3}^{1}\left(x^2+2x-3\right)\mathrm{d}x$. **D.** $\int_{-3}^{1}\left(-x^2-2x+3\right)\mathrm{d}x$.

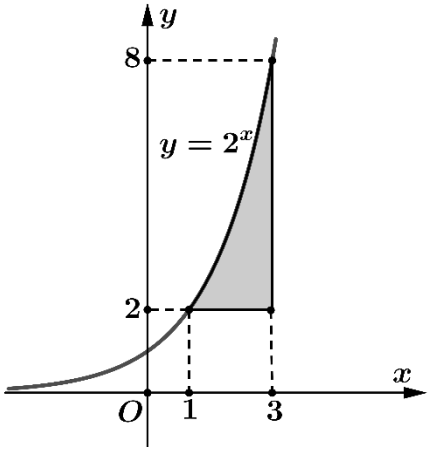
Câu 17: Diện tích hình phẳng phần gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào sau đây?



A. $S=\int_{-1}^{2}\left(x^3+2x^2-5x-6\right)\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int_{-1}^{2}\left(x^3+2x^2-x-10\right)\mathrm{d}x$.

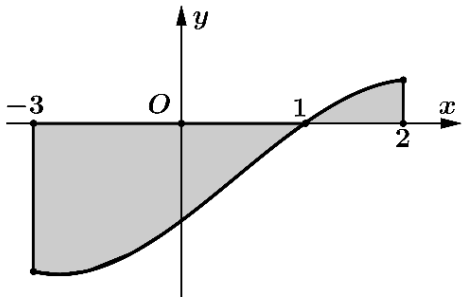
C. $S=\int_{-1}^{2}\left(x^3-2x^2-x+10\right)\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int_{-1}^{2}\left(-x^3-2x^2+5x+6\right)\mathrm{d}x$.

Câu 18: Diện tích hình phẳng gạch sọc trong hình vẽ bên dưới bằng



A. $\int_1^3 \left(2^x-2\right)\mathrm{d}x$. **B.** $\int_1^3 \left(2^x+2\right)\mathrm{d}x$. **C.** $\int_1^3 \left(2-2^x\right)\mathrm{d}x$. **D.** $\int_1^3 2^x\,\mathrm{d}x$.

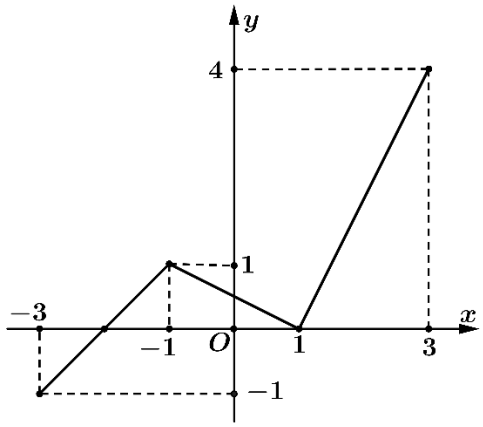
Câu 19: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-3, x=2$ (như hình vẽ). Đặt $a=\int_{-3}^{1} f(x)\mathrm{d}x, b=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$



Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $S=-a-b$. **B.** $S=a+b$. **C.** $S=a-b$. **D.** $S=b-a$.

Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định là $[-3;3]$ và có đồ thị như hình vẽ. Giá trị của $\int_{-3}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ bằng



A. 6. **B.** 5. **C.** 12. **D.** 10.

Câu 21: Diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi hai đường $y=x^3-x$ và $y=2x^2-x$ bằng

A. $\frac{5}{6}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** 2

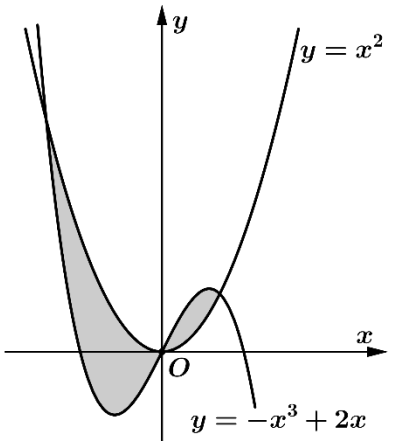
Câu 22: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=x^3+11x-6, y=6x^2$ và hai đường thẳng $x=0,\ x=2$ là

A. $S=2$. **B.** $S=\frac{2}{5}$. **C.** $S=5$. **D.** $S=\frac{5}{2}$.

Câu 23: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2$ và $y=4x-3$ là

A. $S=\frac{3}{4}$. **B.** $S=\frac{4}{3}$. **C.** $S=\frac{2}{3}$. **D.** $S=2$.

Câu 24: Diện tích của phần hình phẳng gạch chéo trong hình bên bằng



A. $\frac{55}{12}$. **B.** $\frac{37}{12}$. **C.** $\frac{9}{4}$. **D.** $\frac{15}{4}$.

Câu 25: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y = e^{\frac{x}{2}}; y = 0$ và $x = 0; x = 2$ bằng

A. $2e - 2$. **B.** $\frac{e-1}{2}$. **C.** $2e$. **D.** $e - 1$.

Câu 26: Hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x$ và $y = 0$ có diện tích bằng

A. $\frac{8}{3}$. **B.** 8. **C.** 2. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 27: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 + 2$ và đường thẳng $y = 6$ bằng

A. $\frac{32}{3}$. **B.** $\frac{40}{3}$. **C.** $\frac{16}{3}$. **D.** $\frac{8}{3}$.

Câu 28: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - x$ và $y = x - x^2$.

A. 13. **B.** $V = \frac{81}{12}$. **C.** $\frac{9}{4}$. **D.** $\frac{37}{12}$.

Câu 29: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = -x^2 + x + 6$ và $y = 0$ bằng

A. $\frac{95\pi}{6}$. **B.** $\frac{95}{6}$. **C.** $\frac{125\pi}{6}$. **D.** $\frac{125}{6}$.

Câu 30: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 - 3x$ và $y = x$ là

A. $\int_{-2}^{2} \left|x^3 - 4x\right| \mathrm{d}x$. **B.** $\int_{-2}^{2} \left|x^3 + 4x\right| \mathrm{d}x$. **C.** $\int_{0}^{2} \left|x^3 - 4x\right| \mathrm{d}x$. **D.** $\int_{-2}^{0} \left|x^3 - 4x\right| \mathrm{d}x$.

Câu 31: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x$ và trục hoành bằng

A. $\frac{4\pi}{3}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{3\pi}{4}$.

Câu 32: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ và $y = x - 1$ bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** 1. **D.** $-\frac{9}{2}$.

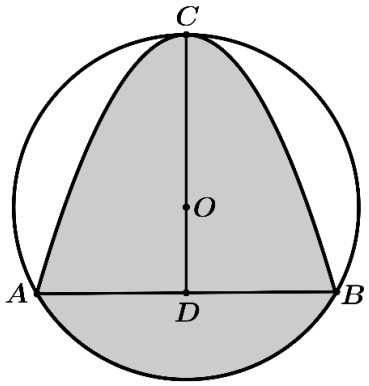
Câu 33: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = x^2$ và $y = 2 - x^2$ là

A. $\frac{8}{3}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** 0.

Câu 34: Gọi là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $2my = x^2$, $mx = \frac{1}{2}y^2$, $(m > 0)$. Tìm giá trị của m để $S = 3$

A. $m=3$. **B.** $m=2$. **C.** $m=\frac{1}{2}$. **D.** $m=\frac{3}{2}$.

Câu 35: Một hoa văn hình tròn tâm O, ngoại tiếp tam giác đều ABC có cạnh $AB=4\sqrt{3}\,\text{cm}$. Đường cong qua ba điểm: A,B,C là một phần của parabol.



Diện tích phần gạch chéo bằng

A. $37,54\ \text{cm}^2$. **B.** $9,83\text{cm}^2$. **C.** $27,71\text{cm}^2$. **D.** $36,75\text{cm}^2$.

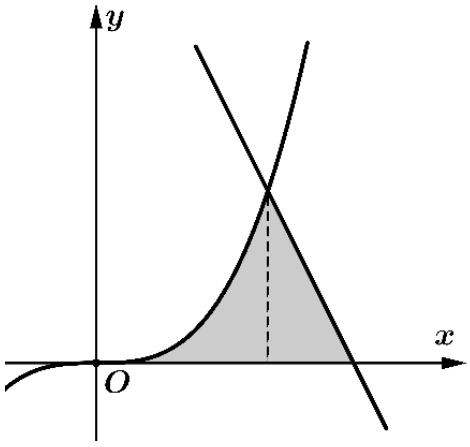
Câu 36: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$, $G(x)$ lần lượt là nguyên hàm của $f(x)$ và $f(x)-2x-1$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(2)+2G(1)=2023$; $2F(1)+G(2)=2019$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x)$ và $y=G(x)$ bằng

A. $\frac{31}{6}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{125}{6}$. **D.** $\frac{15}{2}$.

Câu 37: Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $\int_0^4 f(x)\text{d}x=F(4)-G(0)+2m$, với $m>0$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x)$, $y=G(x)$; $x=0$ và $x=4$. Khi $S=8$ thì m bằng:

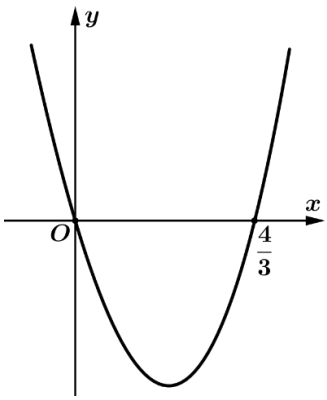
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 38: Cho hình (H) là hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=x^3$, đường thẳng $y=-2x+3$ và trục hoành (phần gạch chéo trong hình vẽ). Diện tích hình phẳng (H) là



A. $S=\frac{1}{4}$. **B.** $S=\frac{1}{2}$. **C.** $S=\frac{5}{4}$. **D.** $S=2$.

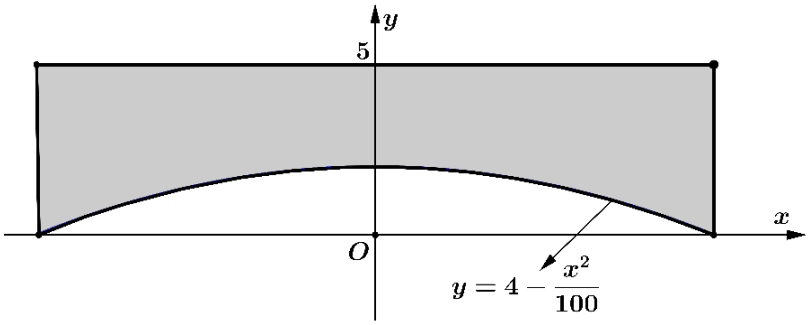
Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)=2x^3+ax^2+bx(a,b\in\mathbb{R})$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ bằng $\frac{m}{n}\left(m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}^*\right)$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $m+n$

A. -157. **B.** 74. **C.** 13. **D.** 119.

Câu 40: Hình bên dưới là mặt cắt dọc của một chiếc cầu bê tông (phần tô đậm, các đơn vị đều đo bằng mét)



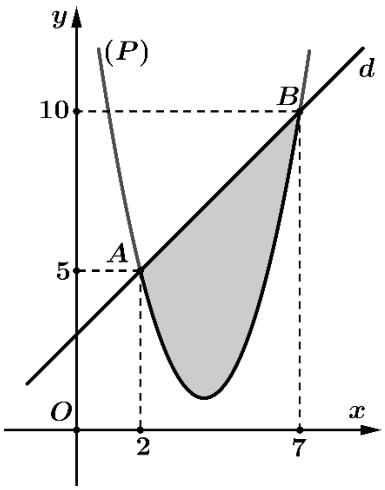
Biết chiều rộng của cầu bằng 9m. Thể tích bê tông ít nhất cần để đúc cầu là

A. $760\,\text{m}^3$. **B.** $780\,\text{m}^3$. **C.** $960\,\text{m}^3$. **D.** $840\,\text{m}^3$.

Câu 41: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2-4x+3\,(P)$ và các tiếp tuyến kẻ từ $A\left(\frac{3}{2};-3\right)$ đến đồ thị (P). Tính giá trị của S.

A. $S=\frac{9}{8}$. **B.** $S=\frac{9}{4}$. **C.** $S=9$. **D.** $S=\frac{9}{2}$.

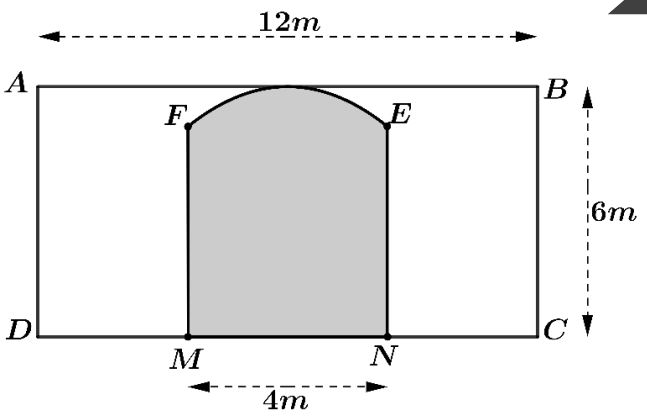
Câu 42: Cho hàm số bậc hai $y=f(x)$ có đồ thị (P) và đường thẳng d cắt tại hai điểm như trong hình bên. Biết rằng hình phẳng giới hạn bởi (P) và d có diện tích $S=\frac{125}{6}$. Khi đó hãy tính tích phân $\int_2^7(2x-3)f'(x)\mathrm{d}x$.



A. $\frac{215}{3}$. **B.** $\frac{265}{3}$.

C. $\frac{245}{3}$. **D.** $\frac{415}{3}$.

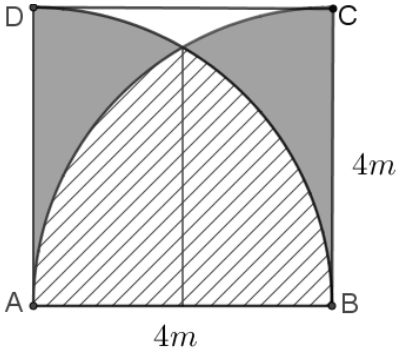
Câu 43: Một công ty quảng cáo muốn làm một bức tranh trang trí như phần $MNEIF$ được tô đậm trong hình vẽ bên dưới ở chính giữa của một bức tường hình chữ nhật $ABCD$ có $BC=6\text{m}$, $CD=12\text{m}$



Biết $MN = 4\text{m}$; cung EIF có hình parabol với đỉnh I là trung điểm của cạnh AB và đi qua hai điểm C, D. Kinh phí làm bức tranh là 1.200.000 đồng/m^2. Hỏi công ty đó cần bao nhiêu tiền để làm bức tranh?

A. 34266666 đồng. **B.** 13866666 đồng. **C.** 14933333 đồng. **D.** 27733333 đồng.

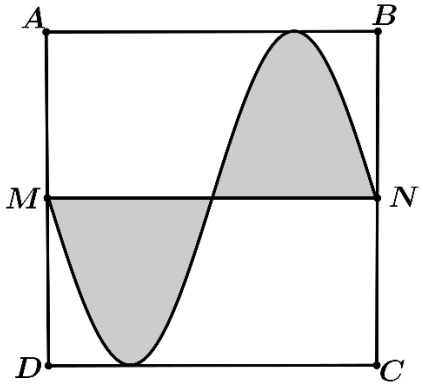
Câu 44: Một biển quảng cáo có dạng hình vuông $ABCD$ cạnh $AB = 4\text{m}$. Trên tấm biển đó có các đường tròn tâm A và đường tròn tâm B cùng bán kính $R = 4\text{m}$, hai đường tròn cắt nhau như hình vẽ. Chi phí để sơn phần gạch chéo là 150 000 đồng/m^2, chi phí sơn phần màu đen là 100 000 đồng/m^2 và chi phí để sơn phần còn lại là 250 000 đồng/m^2



Hỏi số tiền để sơn biển quảng cáo theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?

A. 3,017 triệu đồng. **B.** 1,213 triệu đồng. **C.** 2,06 triệu đồng. **D.** 2,195 triệu đồng.

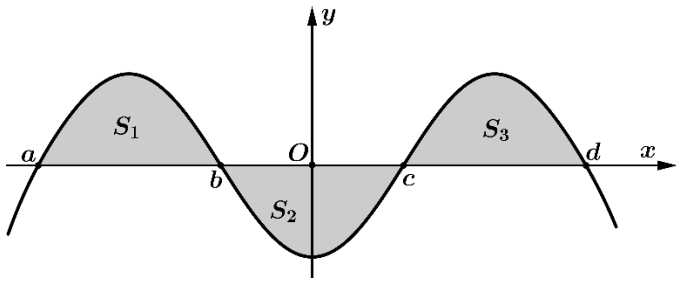
Câu 45: Bác An có mảnh vườn hình chữ nhật $ABCD$, chiều dài $AB = 2\pi(m)$, chiều rộng $BC = 3(m)$. Bác muốn trồng hoa trên dải đất (phần tô đậm) được giới hạn bởi đường MN (với M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC) và một đường hình sin (tham khảo hình vẽ). Diện tích đất trồng hoa bằng.



A. 3m^2. **B.** $5,57\text{m}^2$. **C.** $7,14\text{m}^2$. **D.** 6m^2.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;d]$ và có đồ thị như hình vẽ. Biết đồ thị $f(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm a,b,c,d, đồng thời tạo với trục hoành và 2 đường thẳng $x=a, x=d$ thành một hình phẳng (H) gồm 3 phần có diện tích lần lượt là S_1, S_2, S_3 như hình vẽ.



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

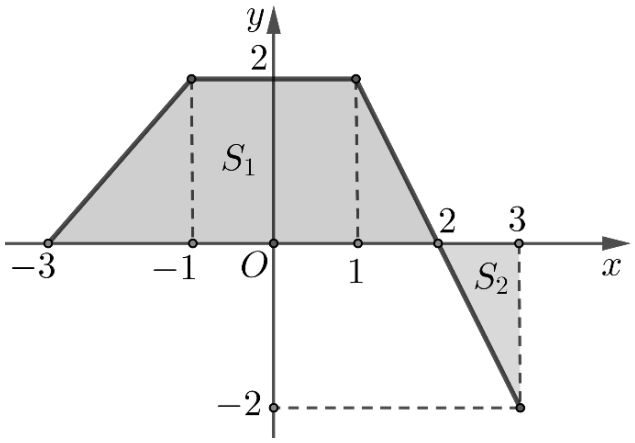
a) $S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

b) $S_2=-\int_c^b \left|f(x)\right|\mathrm{d}x$

c) $S_3=-\int_c^d f(x)\mathrm{d}x$

d) $S_{(H)}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_b^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^d f(x)\mathrm{d}x$

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-3;3]$ có đồ thị như hình vẽ, Biết rằng $f(x)$ tạo với trục hoành và 2 đường thẳng $x=-3, x=3$ một hình phẳng (H) gồm 2 phần có diện tích lần lượt là S_1, S_2.



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

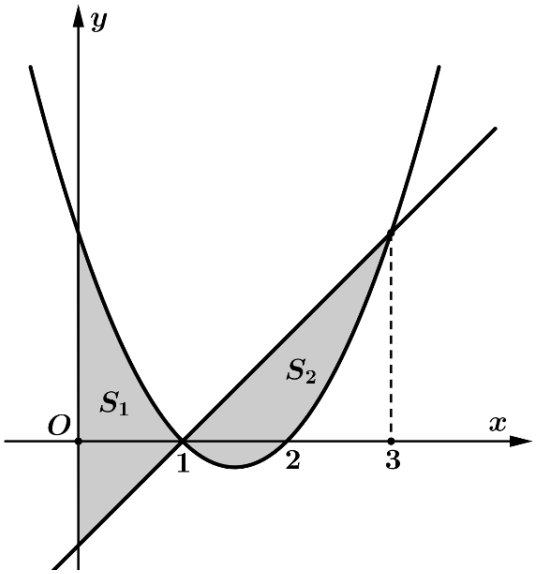
a) $S_{(H)}=\int_{-3}^{3} f(x)\mathrm{d}x$

b) $S_2=\left|\int_2^3 (-2x+4)\mathrm{d}x\right|=1$

c) $S_1=\int\limits_{-3}^{-1}(x+3)\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{1}2\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}(-2x+4)\mathrm{d}x$

d) $S_{(H)}=S_1-\int\limits_{2}^{3}(-2x+4)\mathrm{d}x$

Câu 3: Cho đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$ và $y=x-1$ và $S_1;S_2$ là phần diện tích phần được tô như trong hình dưới.



Xét tính đúng sai của các khẳng đính sau:

a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$ và $y=x-1$ là

$\int\limits_{0}^{3}(-x^2+4x-3)\mathrm{d}x$

b) $S_1=\dfrac{4}{3}$

c) $S_1=S_2$

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2;\ y=x-1;\ x=0;\ x=3$ là

$$\int\limits_{0}^{3}(-x^2+4x-3)\mathrm{d}x=1.$$

Câu 4: Cho hàm số $y=x^3-3x+2$ có đồ thị là (C) và đường thẳng $y=-2x+8$ có đồ thị là (d) và các đường thẳng $x=1$, $x=3$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (d), trục hoành và đường thẳng $x=1$; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (d), trục hoành và đường thẳng $x=5$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

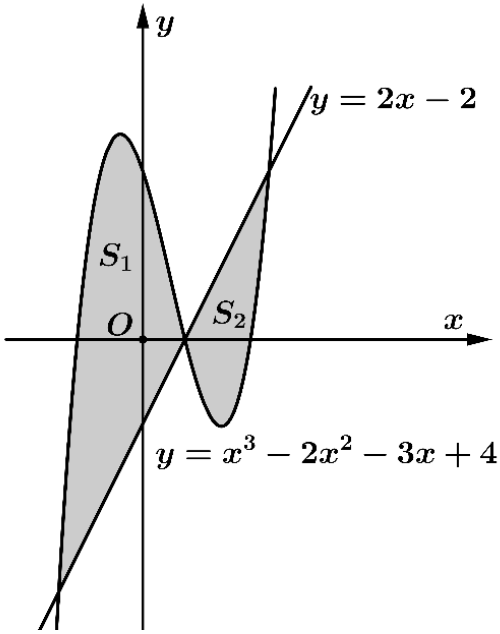
a) Số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng (d) là 3.

b) Hàm số $y=x^3-3x+2$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

c) $S_1>S_2$.

d) Tính diện tích giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=x^3-3x+2$, $y=-2x+8$ và hai đường thẳng $x=1$, $x=3$ bằng 23.

Câu 5: Cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 3x + 4$ có đồ thị (C) và đường thẳng $(d): y = 2x - 2$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



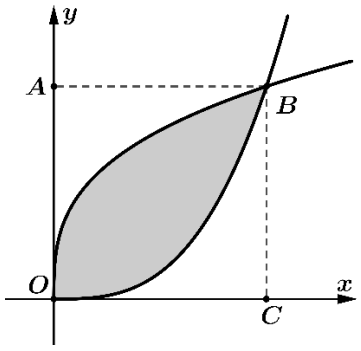
a) Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại ba điểm $A(-2;-6), B(1;0), C(3;4)$.

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), trục hoành, đường thẳng $x = -1; x = 2$ bằng $\frac{21}{4}$

c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và đường thẳng d bằng $\frac{253}{12}$.

d) Biết đường thẳng d cắt đồ thị (C) thành hai miền S_1 và S_2. Khi đó tỉ số $\frac{S_1}{S_2} = \frac{63}{16}$.

Câu 6: Cho một viên gạch men có dạng hình vuông $OABC$ như hình vẽ. Sau khi tọa độ hóa, ta có $O(0;0)$, $A(0;1)$, $B(1;1)$, $C(1;0)$ và hai đường cong lần lượt là đồ thị hàm số $y = x^3$ và $y = \sqrt[3]{x}$



a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt[3]{x}$, trục Ox, đường thẳng $x = 0$ và đường thẳng $x = 1$ được tính bằng công thức $S = \int_0^1 \left|\sqrt[3]{x}\right| \mathrm{d}x$.

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3$, trục Ox, đường thẳng $x = 0$ và đường thẳng $x = 1$ có giá trị bằng $\frac{3}{4}$ (đvdt).

c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3$ và $y=\sqrt[3]{x}$, đường thẳng $x=0$ và đường thẳng $x=1$ được tính bằng công thức $S=\int_0^1\left(x^3-\sqrt[3]{x}\right)\mathrm{d}x$.

d) Diện tích phần không được tô đậm trên viên gạch men có giá trị bằng $\frac{1}{2}$ (đvdt).

Câu 7: Các nhà kinh tế sử dụng đường cong Lorenz để minh họa sự phân phối thu nhập trong một quốc gia. Gọi x là đại diện cho phần trăm số gia đình trong một quốc gia và y là phần trăm tổng thu nhập, mô hình $y=x$ sẽ đại diện cho một quốc gia mà các gia đình có thu nhập như nhau. Đường cong Lorenz $y=f(x)$, biểu thị sự phân phối thu nhập thực tế. Diện tích giữa hai mô hình này, với $0\le x\le 100$, biểu thị "sự bất bình đẳng về thu nhập" của một quốc gia. Năm 2005, đường cong Lorenz của Hoa Kỳ có thể được mô hình hóa bởi hàm số

$$y=\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2,0\le x\le 100,$$

Trong đó x được tính từ các gia đình nghèo nhất đến giàu có nhất

Theo R.Larson, Brief Calculus: An Applied Approach, 8th edition, Cengage Learning, 2009)

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tính theo thứ tự từ các gia đình nghèo nhất đến giàu nhất, tổng thu nhập thực tế của 60% các gia đình đầu tiên chiếm chưa đến 30% so với tổng thu nhập của toàn bộ các gia đình.

b) Nếu sắp xếp các gia đình theo thứ tự từ nghèo nhất đến giàu nhất, rồi chia thành 10 nhóm bằng nhau từ 1 đến 10, tổng thu nhập của các gia đình trong nhóm 3 chiếm khoảng $8,56\%$ tổng thu nhập của toàn bộ các gia đình.

c) Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kì năm 2005 được xác định bởi công thức:

$$\int_0^{100}\left[x-\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2\right]\mathrm{d}x$$

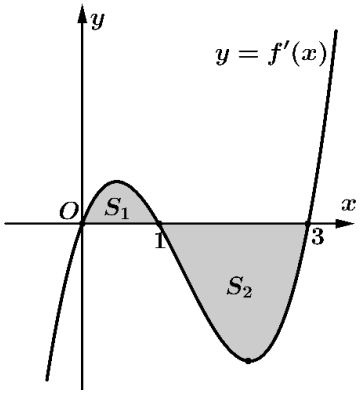
d) Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kỳ năm 2005 đã vượt quá 2000.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Tìm a để diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi $(P): y=\dfrac{x^2-2x}{x-1}$, đường thẳng $d: y=x-1$ và $x=a,\ x=2a\ (a>1)$ bằng $\ln 3$?

Câu 2: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$; $y=x$ và hai đường thẳng $x=2; x=3$ bằng $S=a\ln 2+b$. Giá trị của $a+b$ bằng bao nhiêu?

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình dưới. Biết rằng diện tích của các phần hình phẳng A và B lần lượt là $S_A=4$ và $S_B=10$. Tính giá trị của $f(3)$, biết giá trị của $f(0)=2$.



Câu 4: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}7-4x^3 & \text{khi } 0\le x\le 1\\ 4-x^2 & \text{khi } x>1\end{cases}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và các đường thẳng $x=0, x=3, y=0$.

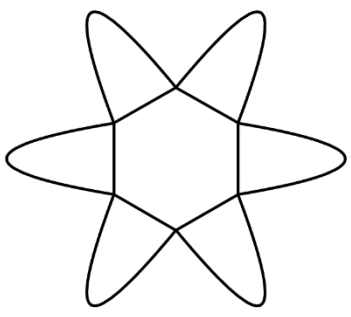
Câu 5: Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ và được giới hạn bởi các đường có phương trình $y=\dfrac{10}{3}x-x^2$, $y=\begin{cases}-x & \text{khi } x\le 1\\ x-2 & \text{khi } x>1\end{cases}$. Diện tích của (H) bằng bao nhiêu?

Câu 6: Tại một nhà máy ta gọi $C(x)$ là tổng chi phí (tính theo triệu động) để sản xuất x tấn sản phẩm A trong một tháng. Khi đó đạo hàm $C'(x)$ gọi là chi phí cận biên, cho biết tốc độ tăng tổng chi phí theo lượng sản phẩm được sản xuất. Giả sử chi phí cận biên (tính theo triệu đồng trên tấn) của nhà máy được ước lượng bởi công thức:

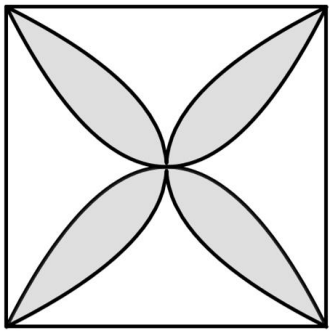
$$C'(x)=5-0,06x+0,00072x^2 \text{ với } 0\le x\le 150.$$

Biết rằng $C(0)=30$ triệu đồng, gọi là chi phí cố định. Tính tổng chi phí khi nhà máy sản xuất 100 tấn sản phẩm A trong tháng.

Câu 7: Để trang trí cho một phòng trong một tòa nhà, người ta vẽ lên tường một hình như sau: trên mỗi cạnh của hình lục giác đều có cạnh bằng 2 dm có một cánh hoa hình parabol, đỉnh của parabol cách cạnh 3 dm và nằm phía ngoài hình lục giác, đường parabol đó đi qua hai đầu mút của mỗi cạnh (xem hình sau). Hãy tính diện tích của hình nói trên (kể cả hình lục giác đều) để mua sơn trang trí cho phù hợp *(kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai sau dấu phẩy)*



Câu 8: Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 60 cm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô mầu sẫm như hình vẽ bên).



Tính diện tích phần cánh hoa của viên gạch.

Câu 9: Một doanh nghiệp sản xuất mặt hàng với chi phí cận biên được mô tả bởi hàm số:

$$f(x)=\frac{1}{10}\left(x^2-16x+93\right),\ x \text{ là số sản phẩm sản xuất}$$

Giả sử rằng doanh nghiệp bán được hết số lượng sản phẩm sản xuất được. Biết rằng doanh thu cận biên được mô tả bởi hàm số $g(x)=\left(\frac{4}{5}\right)^{x-8}+5$, với x là số lượng sản phẩm được bán ra.

Giả sử rằng tổng chi phí khi chưa sản xuất sản phẩm nào là 0 đồng và tổng doanh thu khi chưa bán được sản phẩm nào là 0 đồng. Hỏi khi sản xuất 8 sản phẩm và bán hết thì doanh nghiệp thu được lợi nhuận là bao nhiêu? *(kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai sau dấu phẩy)*

Câu 10: dụng đường cong Lorenz để minh họa sự phân phối thu nhập trong một quốc gia. Gọi x là đại diện cho phần trăm số gia đình trong một quốc gia và y là phần trăm tổng thu nhập, mô hình $y=x$ sẽ đại diện cho một quốc gia mà các gia đình có thu nhập như nhau. Đường cong Lorenz $y=f(x)$, biểu thị sự phân phối thu nhập thực tế. Diện tích giữa hai mô hình này, với $0\le x\le 100$, biểu thị "sự bất bình đẳng về thu nhập" của một quốc gia. Năm 2009, đường cong Lorenz của Hoa Kỳ có thể được mô hình hóa bởi hàm số:

$$y=\left(0,00061x^2+0,0224x+1,666\right)^2,0\le x\le 100,$$

Trong đó x được tính từ các gia đình nghèo nhất đến giàu có nhất. Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kì vào năm 2009 là bao nhiêu?

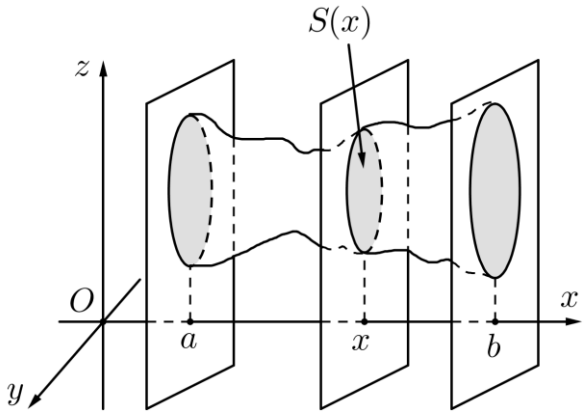
----------HẾT----------

Dạng 2: Ứng dụng tích phân để tính thể tích khối tròn xoay

Phương pháp:

Thể tích vật thể tính theo mặt cắt vuông góc trục hoành

Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b, $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $(a \le x \le b)$

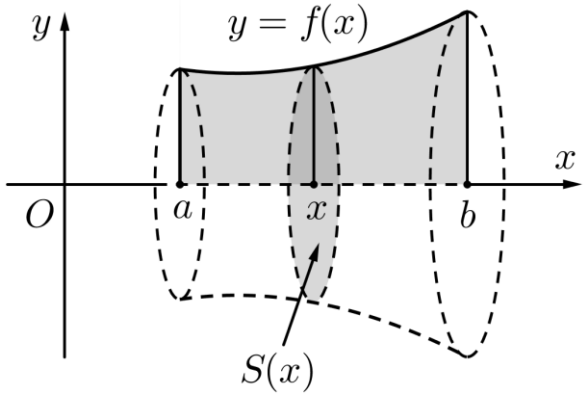


Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$

Khi đó, thể tích của vật thể B được xác định: $\boxed{V = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x}$.

Thể tích khối tròn xoay

Xoay miền hình phẳng giới hạn: $\begin{cases} y = f(x) \\ Ox; x = a; x = b \end{cases}$ quanh trục Ox.



Bước 1: Giải $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = c; c \in [a;b]$.

Bước 2: Tính $V = \pi \int_a^b \left(f(x) \right)^2 \mathrm{d}x$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành:

a) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thì hàm số $y = \sqrt{x-1}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 2$ và $x = 5$ quanh trục Ox.

b) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \cos x}$, trục hoành và các đường

thẳng $x=0,\ x=\dfrac{\pi}{2}$ quanh trục hoành.

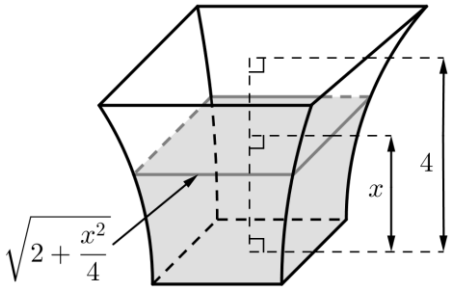
c) Khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=e^x$, trục Ox và hai đường thẳng $x=0; x=1$ quanh trục Ox.

d) Khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{\tan x}, y=0, x=0, x=\dfrac{\pi}{4}$ quay xung quanh trục Ox.

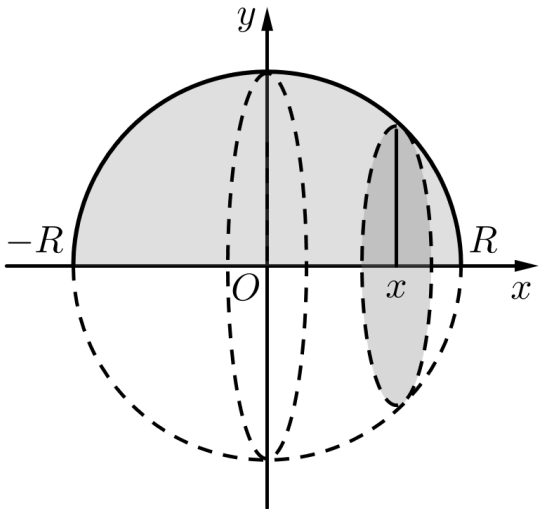
e) Khi quay hình phẳng xác định bởi các đường $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2$, $y=0$, $x=0$ và $x=3$ quanh trục Ox.

f) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{5-x}, x\le 5$, trục tung, trục hoành quay quanh trục hoành.

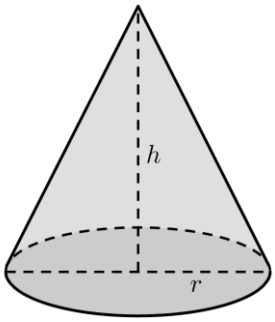
Bài tập 2: Một bình chứa nước có hình dạng như hình sau. Biết rằng khi nước trong bình có chiều cao x (dm) ($0\le x\le 4$) thì mặt nước là hình vuông có cạnh $\sqrt{2+\dfrac{x^2}{4}}$ (dm). Tính dung tích của bình.



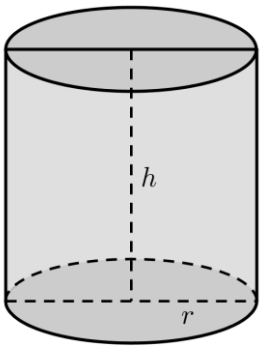
Bài tập 3: Sử dụng tích phân, tính thể tích khối cầu có bán kính R.



Bài tập 4: Sử dụng tích phân, tính thể tích khối nón có bán kính đáy r và chiều cao h.

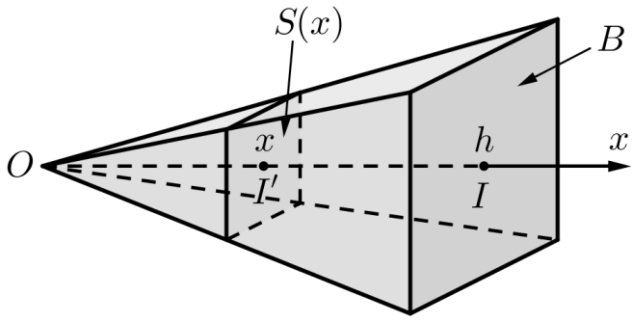


Bài tập 5: Sử dụng tích phân, tính thể tích khối trụ có bán kính đáy r và chiều cao h.



Bài tập 6: Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1\le x\le 3)$ thì được thiết diện là một hình chữ nhật có hai cạnh là $3x$ và x^2.

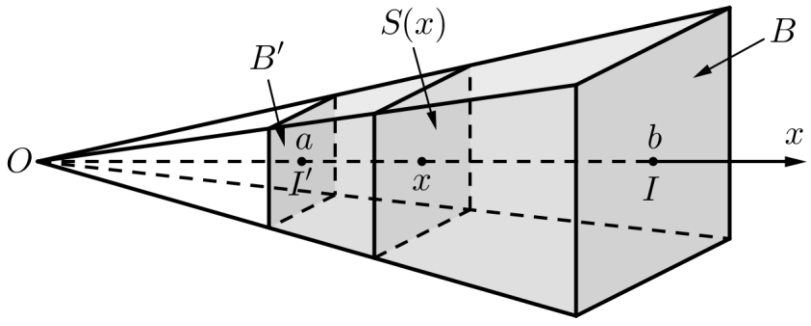
Bài tập 7: Cho khối chóp có chiều cao bằng h và diện tích đáy bằng B. Chọn trục Ox vuông góc với mặt phẳng đáy tại điểm I sao cho gốc O trùng với đỉnh của khối chóp và có hướng xác định bởi vectơ $\overrightarrow{OI}$. Khi đó $OI=h$. Một mặt phẳng (P) vuông góc với trục Ox tại x $(0\le x\le h)$, cắt khối chóp theo hình phẳng có diện tích $S(x)$.



a) Chứng minh rằng $S(x)=B\dfrac{x^2}{h^2}$.

b) Áp dụng tích phân tính thể tích khối chóp đó.

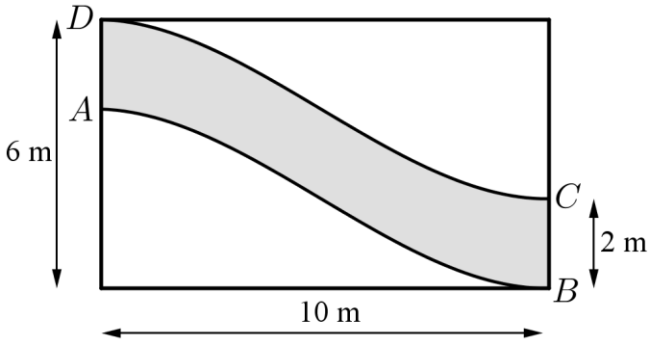
Bài tập 8: Cho khối chóp cụt đều tạo bởi khối chóp đỉnh S, diện tích hai đáy lần lượt là B, B' và chiều cao h. Chọn trục Ox chứa đường cao của khối chóp và gốc O trùng với đỉnh S. Hai mặt phẳng đáy của khối chóp cụt đều lần lượt cắt Ox tại I và I'. Đặt $OI=b$, $OI'=a$ $(a<b)$. Một mặt phẳng (P) vuông góc với trục Ox tại x $(a\le x\le b)$, cắt khối chóp cụt đều theo hình phẳng có diện tích $S(x)$.



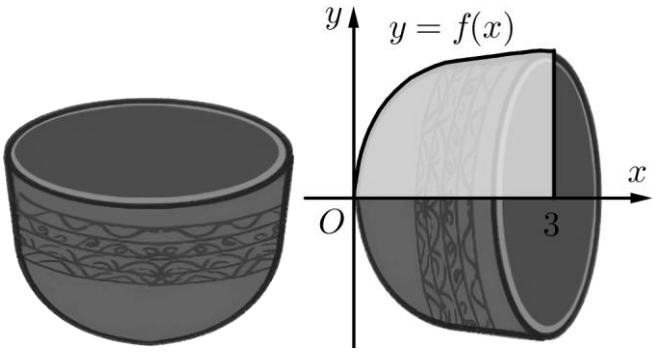
a) Chứng minh rằng $S(x)=B\dfrac{x^2}{b^2}$.

b) Dựa vào tích phân tính thể tích khối chóp cụt đều đó.

Bài tập 9: Cô Hạnh đổ bê tông một đường đi trong vườn (phần được tô màu) với kích thước được cho trong hình sau. Biết rằng đường cong AB được cho bởi đồ thị của một hàm số liên tục và đường cong DC nhận được từ đường cong AB bằng cách tịnh tiến theo phương thẳng đứng lên phía trên 2 m. Ngoài ra, cô Hạnh quyết định đổ lớp bê tông dày 15 cm và giá tiền 1 m^3 bê tông là 1 080 000 đồng. Tính số tiền cô Hạnh cần dùng để đổ bê tông con đường đó.



Bài tập 10: Xét chiếc chén trong một bộ ấm chén uống trà, bạn Dương ước lượng được rằng chiếc chén được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)=0,14x^3-0,87x^2+1,92x+0,85$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0,\ x=3$ quay quanh trục Ox (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là centimét). Tính thể tích của chiếc chén (làm tròn đến hàng đơn vị của centimét khối).



Bài tập 11: Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{m^2-x^2}$ (m là tham số khác 0) và trục hoành. Khi (H) quay xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích V. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $V<1000\pi$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0, x=1$, có thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\left(0\le x\le 1\right)$ là một tam giác đều có cạnh bằng x.

A. $V=\dfrac{12\pi}{5}$. **B.** $V=\dfrac{12}{5}$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{3}\pi}{12}$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{3}}{12}$.

Câu 2: Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sin x$, trục Ox và các đường thẳng $x=0,\ x=\pi$ quay quanh trục Ox. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành bằng

A. $\int\limits_0^{\pi}\sin x\,dx$. **B.** $\int\limits_0^{\pi}\sin^2 x\,dx$. **C.** $\pi\int\limits_0^{\pi}\sin^2 x\,dx$. **D.** $\pi\int\limits_0^{\pi}\cos^2 x\,dx$.

Câu 3: Cho hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{x+2}$ và hai trục toạ độ. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng đó quanh trục Ox bằng

A. $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. **B.** 2. **C.** 2π. **D.** $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\pi$.

Câu 4: Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi các đường $x=0, x=\pi, y=0$ và $y=-\sin x$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) xung quanh trục Ox được tính theo công thức

A. $V=\pi\int\limits_0^{\pi}\left|\sin x\right|\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\int\limits_0^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x$.

C. $V=\pi\left|\int\limits_0^{\pi}\left(-\sin x\right)\mathrm{d}x\right|$. **D.** $V=\int\limits_0^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x$.

Câu 5: Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0\le x\le 3)$ thì được thiết diện là một hình vuông có độ dài cạnh bằng $2\sqrt{9-x^2}$

A. 90 **B.** 72π **C.** 78π **D.** 72

Câu 6: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=e^x$, các đường thẳng $x=0$, $x=\ln 3$ và trục hoành. Thể tích khối tròn xoay sinh bởi (H) khi quay quanh trục hoành là

A. 2π. **B.** 4π. **C.** 4. **D.** π.

Câu 7: Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, trục Ox và hai đường thẳng $x=1; x=4$ khi quay quanh trục hoành được tính bởi công thức nào?

A. $V=\pi\int\limits_1^4 x\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi^2\int\limits_1^4 x\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\int\limits_1^4\sqrt{x}\mathrm{d}x$. **D.** $V=\int\limits_1^4\left|\sqrt{x}\right|\mathrm{d}x$.

Câu 8: Cho miền phẳng (D) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$, hai đường thẳng $x=1$, $x=2$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành.

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{3\pi}{2}$. **C.** $\dfrac{2\pi}{3}$. **D.** 3π.

Câu 9: Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^2 - 4x + 3$ và $y = 0$ quanh trục Ox bằng

A. $\frac{16}{15}$. **B.** $\frac{16\pi}{15}$. **C.** $\frac{31\pi}{30}$. **D.** $\frac{31}{30}$.

Câu 10: Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x-1}$, trục hoành và $x = 5$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi D quay quanh Ox bằng

A. $\frac{15\pi}{2}$. **B.** $\frac{15}{2}$. **C.** 8π. **D.** 8.

Câu 11: Thể tích vất thể tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ và trục hoành quay quanh Ox là

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{16}{15}$. **C.** $\frac{4\pi}{3}$. **D.** $\frac{16\pi}{15}$.

Câu 12: Giả sử D là hình phẳng giới hạn bởi đường parabol $y = x^2 - 3x + 2$ và trục hoành. Quay D quanh trục hoành ta thu được khối tròn xoay có thể tích bằng

A. $V = \frac{\pi}{30}$. **B.** $V = \frac{1}{30}$. **C.** $V = \frac{1}{6}$. **D.** $V = \frac{\pi}{6}$.

Câu 13: Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi hai đồ thị $y = x^2 + x$ và $y = 2x$. Quay hình (H) quanh trục hoành, tính thể tích vật thể thu được

A. $\frac{3\pi}{10}$. **B.** $\frac{5\pi}{6}$. **C.** $\frac{\pi}{6}$. **D.** $\frac{5}{6}$

Câu 14: Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x-1}$, trục hoành và $x = 5$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

A. $\frac{15\pi}{2}$. **B.** $\frac{15}{2}$. **C.** 8π. **D.** 8.

Câu 15: Tính thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = -x^2 + 3x$ và $y = 0$ xung quanh trục Ox.

A. $\frac{5\pi}{2}$. **B.** $\frac{27\pi}{10}$. **C.** $\frac{81\pi}{10}$. **D.** $\frac{9\pi}{2}$.

Câu 16: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị $(P): y = 2x - x^2$ và trục Ox. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi cho (H) quay quanh trục Ox.

A. $V = \frac{19\pi}{15}$. **B.** $V = \frac{13\pi}{15}$. **C.** $V = \frac{17\pi}{15}$. **D.** $V = \frac{16\pi}{15}$.

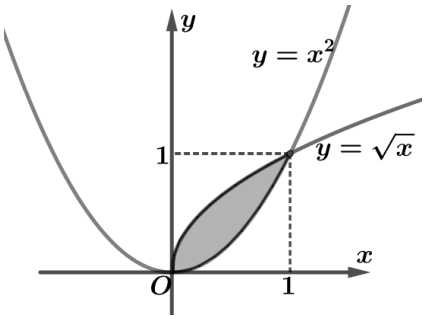
Câu 17: Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = \sqrt{4x - x^2}$ và $y = 0$ quanh trục ox bằng

A. $\frac{34\pi}{3}$. **B.** $\frac{31\pi}{3}$. **C.** $\frac{32\pi}{3}$. **D.** $\frac{35\pi}{3}$.

Câu 18: Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^2 - 4x + 3$ và $y = 0$ quanh trục Ox bằng

A. $\frac{16}{15}$. **B.** $\frac{16\pi}{15}$. **C.** $\frac{31\pi}{30}$. **D.** $\frac{31}{30}$.

Câu 19: Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2$ và đồ thị của hàm số $y=\sqrt{x}$ (tham khảo hình vẽ). Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục Ox bằng



A. $V=\dfrac{9\pi}{10}$. **B.** $V=\dfrac{3\pi}{10}$. **C.** $V=\dfrac{\pi}{10}$. **D.** $V=\dfrac{7\pi}{10}$.

Câu 20: Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bở đồ thị hàm số $y=f(x)=\sqrt{x}.e^{x^2}$, trục hoành, đường thẳng $x=1$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục hoành.

A. $V=\dfrac{1}{4}\pi\left(e^2-1\right)$. **B.** $V=\pi\left(e^2-1\right)$. **C.** $V=\dfrac{1}{4}\pi e^2-1$. **D.** $V=e^2-1$.

Câu 21: Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=4-x^2$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $V=\dfrac{512\pi}{15}$. **B.** $V=\dfrac{32}{3}$. **C.** $V=\dfrac{32\pi}{3}$. **D.** $V=\dfrac{512}{15}$.

Câu 22: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-x-2$ và trục hoành. Quay hình phẳng (H) quay quanh trục hoành, ta được một khối nón tròn xoay có thể tích bằng

A. $\dfrac{81}{10}\pi$. **B.** $\dfrac{81}{10}$. **C.** $\dfrac{9}{2}$. **D.** $\dfrac{9\pi}{2}$.

Câu 23: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=4-x^2$ và trục hoành. Thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục hoành bằng

A. $\dfrac{32\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{512\pi}{15}$. **C.** $\dfrac{32}{3}$. **D.** $\dfrac{512}{15}$.

Câu 24: Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=\left|x^2-3x+2\right|$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $\dfrac{\pi^2}{30}$. **B.** $\dfrac{\pi}{6}$. **C.** $\dfrac{\pi}{30}$. **D.** $\dfrac{\pi^2}{6}$.

Câu 25: Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=\left|x^2-3x+2\right|$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $\dfrac{\pi^2}{30}$. **B.** $\dfrac{\pi}{6}$. **C.** $\dfrac{\pi}{30}$. **D.** $\dfrac{\pi^2}{6}$.

Câu 26: Tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2$, trục hoành và đường thẳng $x=2$, khi quay xung quanh trục Ox bằng

A. $\dfrac{32\pi}{5}$. **B.** $\dfrac{\pi}{6}$. **C.** $\dfrac{5\pi}{6}$. **D.** $\dfrac{4\pi}{5}$.

Câu 27: Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) xác định bởi các đường $y=\frac{1}{3}x^3-x^2$ và $y=0$ quanh trục Ox là

A. $\frac{71\pi}{35}$. **B.** $\frac{81}{35}$. **C.** $\frac{71}{35}$. **D.** $\frac{81\pi}{35}$.

Câu 28: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi parapol $(P):y=x^2$ và đường thẳng $d:y=2x$. Thể tích khối tròn xoay sinh bởi (H) khi quay quanh trục Ox bằng

A. $\frac{64\pi}{15}$. **B.** $\frac{16\pi}{15}$. **C.** $\frac{256\pi}{15}$. **D.** $\frac{4\pi}{3}$.

Câu 29: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi parapol $(P):y=x^2$ và đường thẳng $d:y=2x$. Thể tích khối tròn xoay sinh bởi (H) khi quay quanh trục Ox bằng

A. $\frac{64\pi}{15}$. **B.** $\frac{16\pi}{15}$. **C.** $\frac{256\pi}{15}$. **D.** $\frac{4\pi}{3}$.

Câu 30: Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=4-x^2$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $\frac{32\pi}{3}$. **B.** $\frac{512\pi}{15}$. **C.** $\frac{16\pi}{3}$. **D.** $\frac{256\pi}{15}$.

Câu 31: Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=4-x^2$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $\frac{32\pi}{3}$. **B.** $\frac{512\pi}{15}$. **C.** $\frac{16\pi}{3}$. **D.** $\frac{256\pi}{15}$.

Câu 32: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$, hai đường thẳng $x=1,x=4$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành.

A. $\frac{15\pi}{2}$. **B.** $\frac{15}{2}$. **C.** $\frac{14\pi}{3}$. **D.** $\frac{14}{3}$.

Câu 33: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi $y=2x-x^2, y=0$. Tính thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay (H) xung quanh trục Ox ta được $V=\pi\left(\frac{a}{b}+1\right)$ với a,b là các số tự nhiên, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó

A. $ab=16$. **B.** $ab=12$. **C.** $ab=15$. **D.** $ab=18$.

Câu 34: Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-x$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $\frac{\pi}{3}$. **B.** $\frac{\pi}{15}$. **C.** $\frac{\pi}{30}$. **D.** $\frac{\pi}{5}$.

Câu 35: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$ và trục hoành. Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình (H) quanh trục hoành bằng

A. $\frac{\pi}{6}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{\pi}{30}$. **D.** $\frac{1}{30}$.

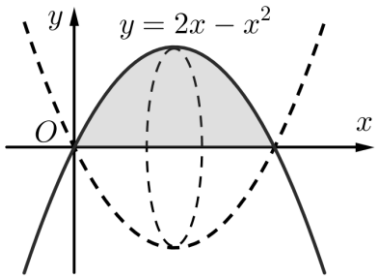
Câu 36: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 5x + 4$ và trục Ox. Tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình (H) quanh trục Ox.

A. $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{81}{10}$. **C.** $\frac{81\pi}{10}$. **D.** $\frac{9\pi}{2}$.

Câu 37: Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x$, $y = 0$ và $x = 3$ quay quanh trục Ox bằng

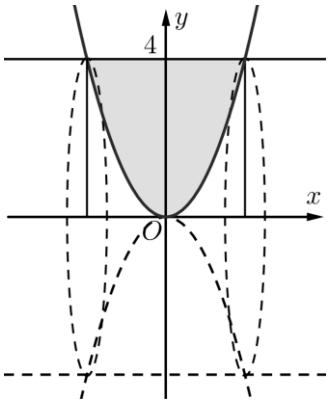
A. $\frac{18\pi}{5}$. **B.** $\frac{8\pi}{3}$. **C.** $\frac{18}{5}$. **D.** $\frac{8}{3}$.

Câu 38: Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2$, $y = 0$ khi quay quanh trục Ox là:



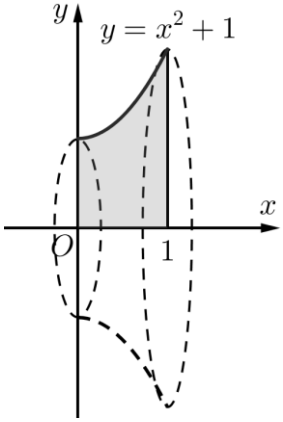
A. $\frac{4\pi}{3}$. **B.** $\frac{13\pi}{15}$. **C.** $\frac{14\pi}{15}$. **D.** $\frac{16\pi}{15}$.

Câu 39: Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$ và đường thẳng $y = 4$ quay quanh trục Ox. Thể tích khối tròn xoay sinh ra bằng:



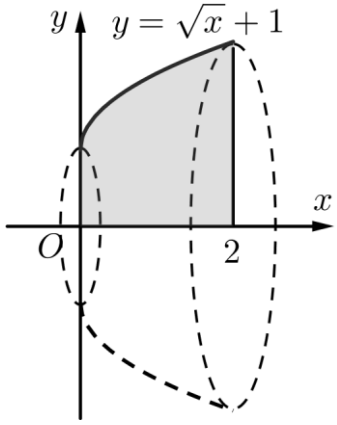
A. $\frac{64\pi}{5}$. **B.** $\frac{128\pi}{5}$. **C.** $\frac{256\pi}{5}$. **D.** $\frac{152\pi}{5}$.

Câu 40: Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 1$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ quay quanh trục Ox là:



A. $\frac{4\pi}{3}$. **B.** $\frac{28}{15}$. **C.** $\frac{28\pi}{15}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

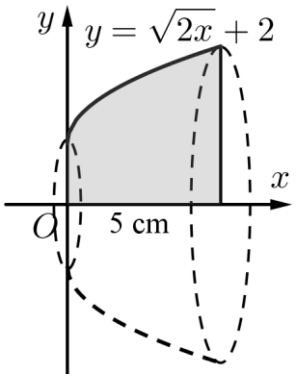
Câu 41: Tính thể tích chứa được của một cái chậu inox to mà khách hàng đặt theo kích thước yêu cầu, biết phần trong của nó có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường $y=\sqrt{x}+1$, trục Ox và các đường thẳng $x=0$, $x=2$ quanh trục Ox, đơn vị trên trục là decimet (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



A. $12{,}12\,\text{dm}^3$. **B.** $12{,}21\ \text{dm}^3$. **C.** $24{,}14\ \text{dm}^3$. **D.** $24{,}41\ \text{dm}^3$.

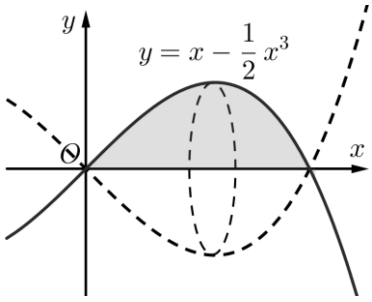
Câu 42: Tính thể tích chứa được (dung tích) của một cái chén (bát), biết phần trong của nó có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi đường $y=\sqrt{2x}+2$ và trục Ox (như hình vẽ), bát có độ sâu 5 cm, đơn vị trên trục là centimet (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).





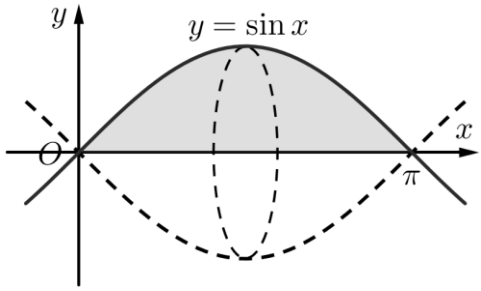
A. 78 cm^3. **B.** 274 cm^3. **C.** 87 cm^3. **D.** 247 cm^3.

Câu 43: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x-\frac{1}{2}x^3$, $y=0$, $x=0$, $x=\sqrt{2}$. Thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra bởi hình phẳng đó khi quay quanh trục Ox có giá trị thuộc khoảng nào sau đây?



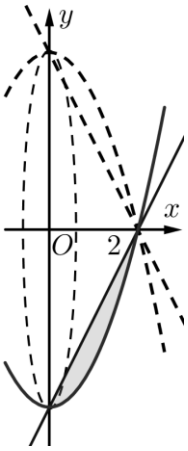
A. $\left(\frac{3}{2};2\right)$. **B.** $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **C.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Câu 44: Biết một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin^2 x$ là $F(x)=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}$. Thể tích của khối tròn xoay giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sin x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=\pi$ khi quay quanh trục Ox là:



A. $\frac{\pi^2}{4}$. **B.** $\frac{\pi^2}{2}$. **C.** $\frac{\pi}{2}$. **D.** $\frac{\pi}{4}$.

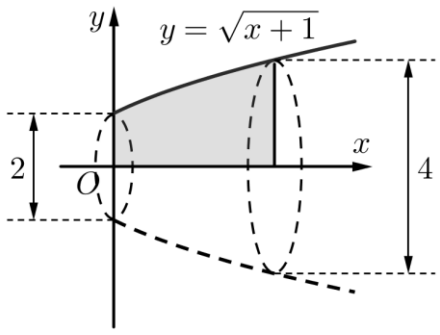
Câu 45: Thể tích hình khối do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-4$, $y=2x-4$, $x=0$, $x=2$ quay quanh trục Ox bằng:



A. $\frac{416\pi}{15}$. **B.** $\frac{752\pi}{5}$. **C.** $\frac{16\pi}{15}$. **D.** $\frac{32\pi}{5}$.

Câu 46: Một bác thợ gốm làm một cái chậu trồng cây, phần trong chậu cây có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng được tô đậm như hình sau quanh trục Ox (đơn vị trên trục là decimet), biết đường cong trong hình là đồ thị của hàm số $y=\sqrt{x+1}$, đáy chậu và miệng chậu có đường kính lần lượt là 2 dm và 4 dm. Dung tích của chậu là bao nhiêu (làm tròn kết quả nếu cần thiết)?





A. 25,13 lít. **B.** 23,56 lít. **C.** 14,66 lít. **D.** 7,5 lít.

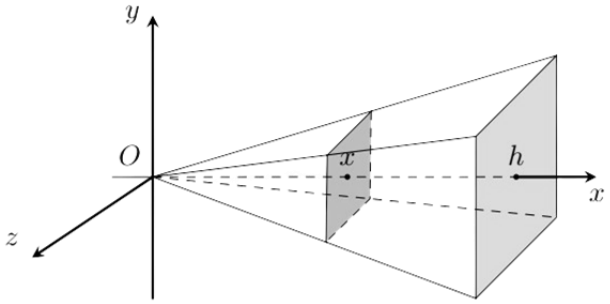
Câu 47: Từ một quả cầu bằng đá trắng sứ bán kính bằng 1 dm, người ta khoan rút lõi ngay "chính giữa" quả cầu (trục đối xứng của lõi và quả cầu trùng nhau) như hình sau với đường kính mũi khoan là 1 dm được một vật thể có thể tích V là bao nhiêu (bỏ qua độ dày mũi khoan)?



A. $V=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$ dm^3. **B.** $V=\dfrac{8-3\sqrt{3}}{6}\pi$ dm^3. **C.** $V=\dfrac{8+3\sqrt{3}}{6}\pi$ dm^3. **D.** $V=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\pi$ dm^3.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho khối chóp đều có đáy là hình vuông cạnh L và chiều cao là h. Chọn trục Ox sao cho gốc O trùng với đỉnh của khối chóp và trục đi qua tâm của đáy. (như hình dưới).



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đáy của khối chóp nằm trên mặt phẳng song song với Ox.

b) Mỗi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng $x\ (0\le x\le h)$, cắt khối chóp theo mặt cắt là hình vuông cạnh a.

c) Diện tích mặt cắt là $S(x)=\dfrac{L}{h}x^2$.

d) Thể tích của khối chóp là $V=\dfrac{1}{3}L^2h$.

Câu 2: Trong mặt phẳng Oxy, cho hàm số $y=x+\sqrt{x}$ và $y=x+x^2$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số trên là $x=0$ hoặc $x=-1$

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x=0$, $x=1$ được tính theo công thức $S=\int\limits_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)\mathrm{d}x$

c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x=0$, $x=1$ được tính theo công thức $S=\int\limits_0^1\left(x+x^2\right)\mathrm{d}x-\int\limits_0^1\left(x+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x=0$, $x=1$ bằng $\dfrac{1}{3}$ đvdt

Câu 3: Khối chỏm cầu có bán kính $R=5$ và chiều cao $h=1$ sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi cung tròn có phương trình $y=\sqrt{25-x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=4$, $x=5$ xung quanh trục Ox. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

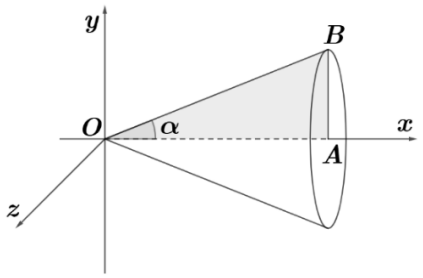
a) Khoảng cách từ tâm của khối cầu đến khối chỏm cầu bằng 3.

b) Thể tích của khối chỏm cầu V_1 được tính theo công thức $V_1=\pi\int\limits_4^5\left(25-x^2\right)\mathrm{d}x$.

c) Thể tích của khối chỏm cầu $V_1=\dfrac{14\pi}{3}$.

d) Gọi V_2 là thể tích của nửa khối cầu có bán kính bằng 5. Tỉ số thể tích $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{7}{125}$.

Câu 4: Cho tam giác vuông OAB có cạnh $OA=a$ nằm trên tục Ox và $AOB=\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$. Gọi β là khối tròn xoay sinh ra khi quay miền tam giác OAB xung quanh trục Ox. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Khi $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ thì thể tích V của khối β là $\dfrac{\pi a^3}{3}$ (đvtt).

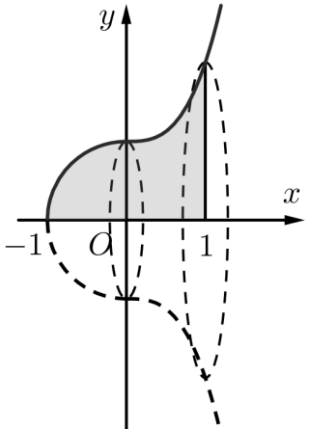
b) Khi $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ thì thể tích V của khối β là $\dfrac{\pi a^3}{9}$ (đvtt).

c) Khi thể tích V của khối β là $\dfrac{4\pi a^3}{3}$ thì giá trị $\cos\alpha<\dfrac{1}{2}$.

d) Khi $\tan\alpha=\cot\alpha$ thì thể tích V của khối β là $\dfrac{\pi a^3}{3}$.

Câu 5: Giả sử chiếc nón rộng vành sau có thể mô hình hóa bằng cách cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\begin{cases}x^3+1 & \text{khi } 0<x\le 1\\ \sqrt{1-x^2} & \text{khi } -1\le x\le 0\end{cases}$, trục Ox và các đường thẳng $x=-1$ và $x=1$ quay quanh trục Ox (đơn vị trên trục là dm). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:





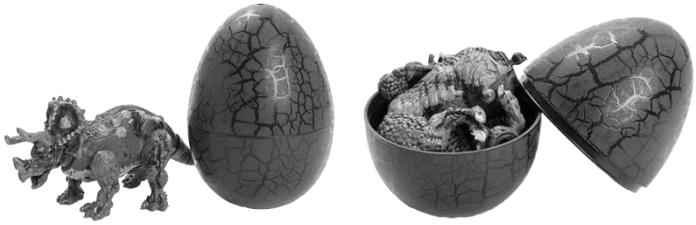
a) Diện tích hình phẳng (H) được tính theo công thức $S=\int_{-1}^{1}\left|\sqrt{1-x^2}+x^3+1\right|dx$.

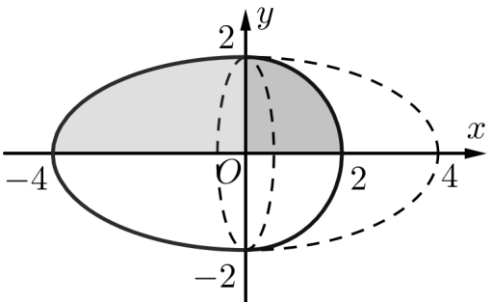
b) Diện tích thiết diện qua trục đối xứng của khối tròn xoay trên là $\frac{\pi+5}{2}$ dm^2.

c) Công thức tính thể tích khối tròn xoay trên là $V=\pi\int_{0}^{-1}\left(x^2-1\right)dx+\pi\int_{0}^{1}\left(x^6+2x^3+1\right)dx$.

d) Nếu thể tích của khối tròn xoay có dạng $\frac{a\pi}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản thì $a+b=139$.

Câu 6: Một cái trứng khủng long đồ chơi là một khối tròn xoay được tạo thành từ 2 mảnh ghép lại. Biết mảnh trên được tạo thành khi xoay một phần tư đường elip với trục lớn là 8 và trục nhỏ là 4 quanh trục Ox và mảnh dưới được tạo thành khi xoay một phần tư đường tròn bán kính 2 quanh trục Ox như hình sau (bỏ qua độ dày của vỏ trứng). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:





a) Thể tích phần trong của mảnh trên được tính bởi $V_1=\frac{\pi}{4}\int_{-4}^{0}\left(16-x^2\right)dx$.

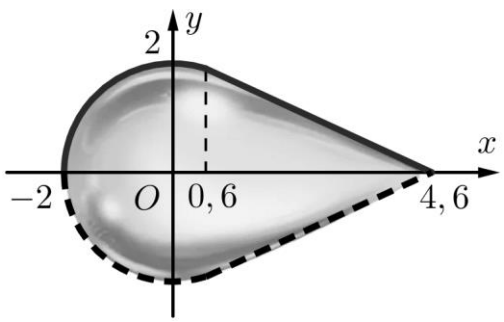
b) Thể tích phần trong của mảnh trên gấp 2 lần thể tích phần trong của mảnh dưới.

c) Thể tích phần trong của quả trứng đồ chơi này là 16π.

d) Diện tích thiết diện khi cắt bởi mặt phẳng qua trục của quả trứng là 3π.

Câu 7: Người ta chế tác một giọt nước bằng thủy tinh. Biết giọt nước thủy tinh này là vật thể tròn xoay khi xoay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x^2} & (-2\le x\le 0,6)\\ -\frac{\sqrt{91}}{20}x+\frac{23\sqrt{91}}{100} & (0,6<x\le 4,6)\end{cases}$ và trục Ox quanh trục Ox (đơn vị trên trục là centimet). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:





a) Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = 0,6$.

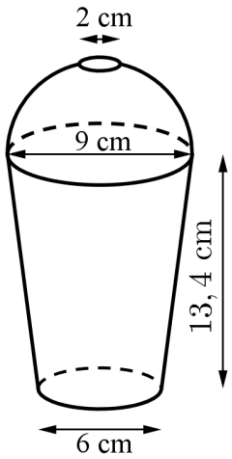
b) Diện tích mặt cắt của giọt nước thủy tinh khi cắt bởi mặt phẳng qua trục được tính bởi công thức $S = 2\int_{-2}^{4,6} f(x)dx$ cm^2.

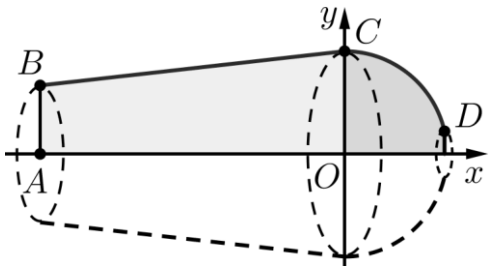
c) Thể tích của giọt nước thủy tinh này lớn hơn 40 cm^3.

d) Biết khối lượng riêng của thủy tinh là $\rho = 2,6$ g/cm^3, khối lượng của giọt nước thủy tinh này là 102,22 g (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Câu 8: Một ly trà sữa dạng hình nón cụt, có đường kính đáy ly 6 cm, đường kính miệng ly 9 cm, chiều cao 13,4 cm, ở miệng ly có sử dụng một nắp đậy có hình dạng nửa mặt cầu và ở đỉnh của nửa mặt cầu này có một hình tròn có đường kính 2 cm để cắm ống hút, mặt phẳng chứa hình tròn này song song với mặt phẳng chứa miệng ly (tham khảo hình vẽ sau).







Chọn hệ trục Oxy (đơn vị trên trục là centimet) với trục Ox đi qua tâm của 2 đáy hình nón cụt và gốc tọa độ O trùng với tâm của đáy lớn như hình vẽ trên.

a) Phương trình đường thẳng BC là: $1,5x - 13,4y + 60,3 = 0$.

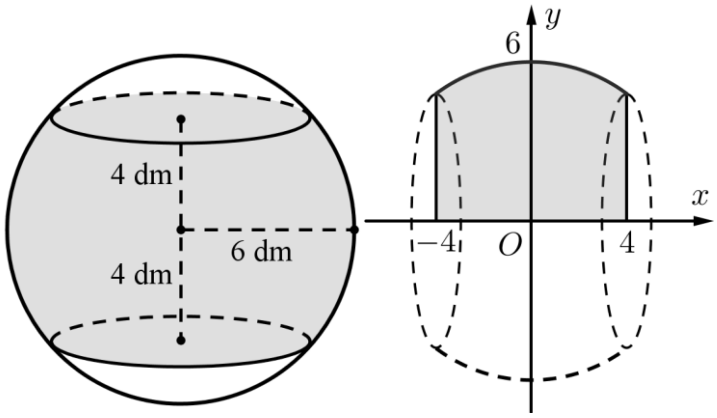
b) Tọa độ điểm D là $D\left(\frac{\sqrt{77}}{2};1\right)$.

c) Thể tích bên trong của ly không bao gồm nắp là 600 ml (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

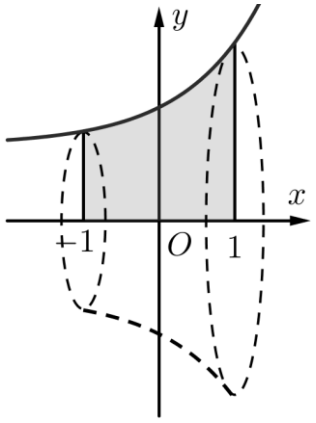
d) Thể tích bên trong của ly bao gồm cả thể tích của nắp là 780 ml (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

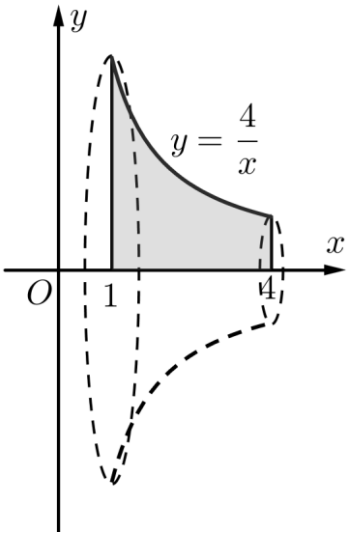
Câu 1: Một hình cầu có bán kính 6 dm, người ta cắt bỏ hai phần bằng hai mặt phẳng song song và cùng vuông góc với đường kính để làm mặt xung quanh của một chiếc lu chứa nước (như hình vẽ). Tính thể tích V (lít) mà chiếc lu chứa được biết mặt phẳng cách tâm mặt cầu 4 dm (làm tròn đến hàng đơn vị).



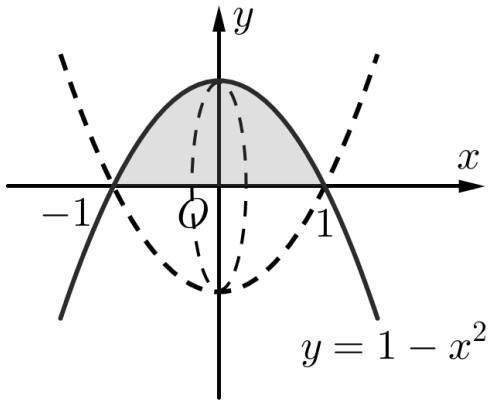
Câu 2: Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{e^x}{2}$, $y=0$ và $x=-1$, $x=1$ quanh trục hoành.



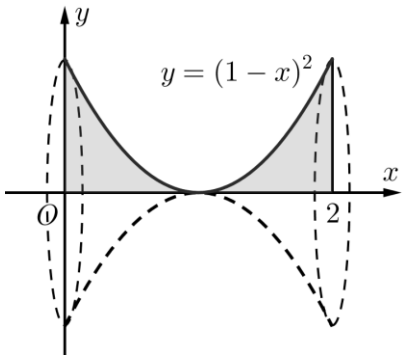
Câu 3: Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{4}{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=4$ quanh trục Ox là bao nhiêu?



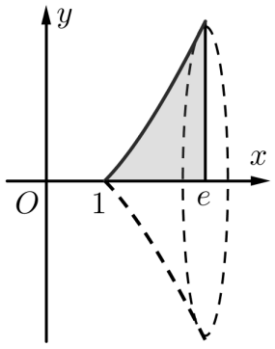
Câu 4: Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=1-x^2$, $y=0$ quanh trục Ox có kết quả dạng $\frac{a\pi}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó $S=a+b$ bằng bao nhiêu?



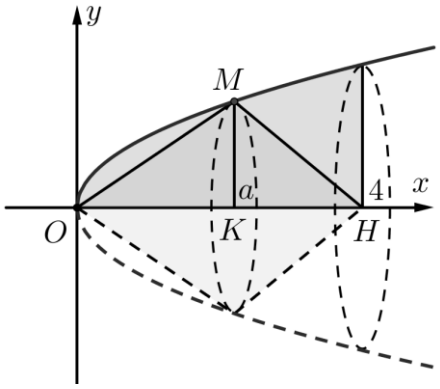
Câu 5: Biết thể tích khối tròn xoay tạo nên khi quay xung quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=(1-x)^2$, $y=0$, $x=0$, $x=2$ có dạng $\frac{a\pi}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị biểu thức $S=24a+12b$.



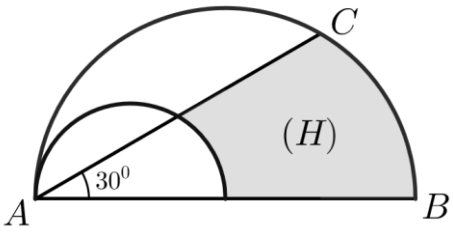
Câu 6: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x\ln x$, $y=0$, $x=e$ quay xung quanh trục Ox tạo thành khối tròn xoay có thể tích bằng $\frac{\pi}{a}\left(be^3-2\right)$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính $P=a^2-b^2$, biết một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x\ln x)^2$ là $F(x)=\frac{x^3}{27}\left(9\ln^2 x-6\ln x+2\right)$.



Câu 7: Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, $y=0$ và $x=4$ quanh trục Ox. Đường thẳng $x=a\ (0<a<4)$ cắt đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ tại M (xem hình vẽ sau). Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox. Biết rằng $V=2V_1$. Khi đó giá trị của a là bao nhiêu?



Câu 8: Cho các nửa đường tròn như hình vẽ sau, trong đó đường kính của nửa đường tròn lớn gấp đôi đường kính của nửa đường tròn nhỏ. Biết rằng nửa hình tròn đường kính AB có diện tích là 32π và góc $BAC = 30°$. Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng (H) (phần tô đậm) xung quanh đường thẳng AB.

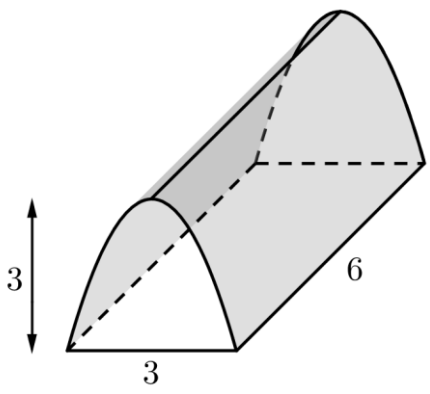


Câu 9: Người ta cần làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là 2,25 mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thi công trọn gói mỗi mét vuông là 1.500.000 đồng. Vậy số tiền làm cửa phải trả là bao nhiêu (đơn vị: triệu đồng)?

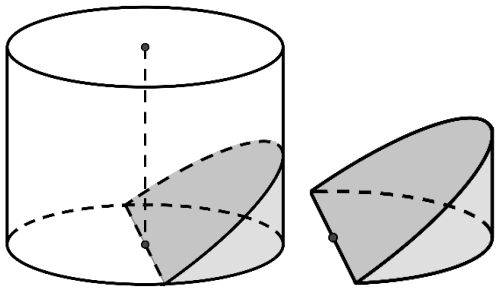
Câu 10: Xét phần bên trong của một thùng rượu: là một khối tròn xoay có 2 đáy là hình tròn bằng nhau và có chiều cao là 60 cm, đường cong (bên trong) của thùng là một cung tròn của đường tròn bán kính là 36 cm. Thùng rượu này chứa được tối đa bao nhiêu lít rượu? (kết quả làm tròn đến số thập phân đầu tiên sau dấu phẩy)



Câu 11: Một Chi đoàn thanh niên đi dự trại ở một đơn vị bạn, họ dự định dựng một lều trại có dạng parabol (nhìn từ mặt trước, lều trại được căng thẳng từ trước ra sau, mặt sau trại cũng là parabol có kích thước giống như mặt trước) với kích thước: nền trại là một hình chữ nhật có chiều rộng là 3 mét, chiều sâu là 6 mét, đỉnh của parabol cách mặt đất là 3 mét. Hãy tính thể tích (đơn vị: m^3) phần không gian phía trong trại để cử số lượng người tham dự trại cho phù hợp.



Câu 12: Từ một khúc gỗ hình trụ có đường kính 30 cm, người ta cắt khúc gỗ bởi một mặt phẳng đi qua đường kính đáy và nghiêng với đáy một góc $45°$ để lấy một hình nêm (xem hình minh họa dưới đây)

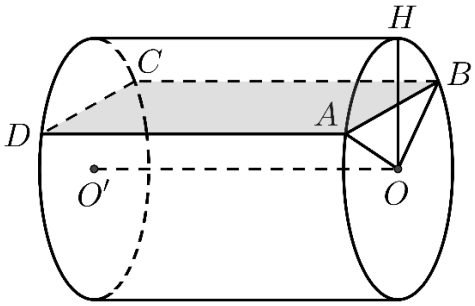


Kí hiệu V là thể tích của hình nêm. Tính V (cm^3).

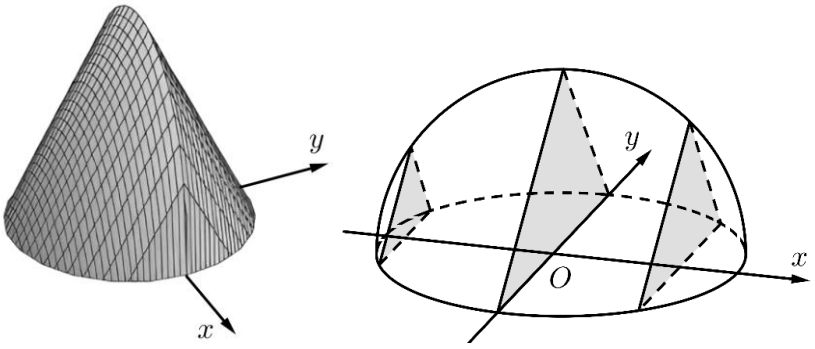
Câu 13: Một thùng rượu (xét phần bên trong) có 2 đáy là các hình tròn với bán kính là 30 cm, thiết diện (P) vuông góc với trục nối tâm của 2 đáy và cách đều 2 đáy có bán kính là 40 cm (bên trong), chiều cao thùng rượu là 1 m (hình vẽ). Biết rằng mặt phẳng chứa trục cắt mặt xung quanh (bên trong) thùng rượu theo các đường parabol có đỉnh nằm trên mặt phẳng (P), hỏi dung tích của thùng rượu (đơn vị: lít) là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



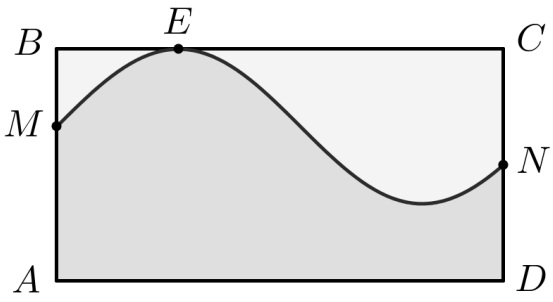
Câu 14: Một bồn hình trụ đang chứa dầu, được đặt nằm ngang, có chiều dài bồn là 5m, có bán kính đáy 1m. Người ta đã rút dầu trong bồn tương ứng với 0,5m của đường kính đáy. Tính thể tích của lượng dầu còn lại trong bồn (theo đơn vị m^3).



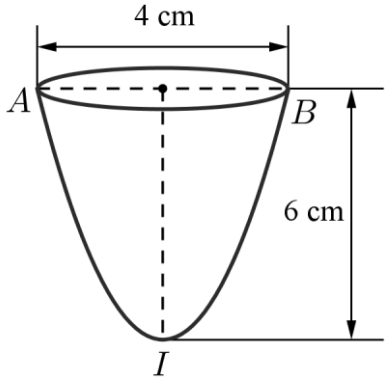
Câu 15: Một vật có kích thước và hình dáng như hình vẽ dưới đây. Đáy là hình tròn giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 16$, cắt vật bởi các mặt phẳng vuông góc với trục Ox ta được thiết diện là tam giác đều. Khi đó thể tích của vật thể có dạng $\dfrac{a\sqrt{3}}{b}$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $S = a + b$.



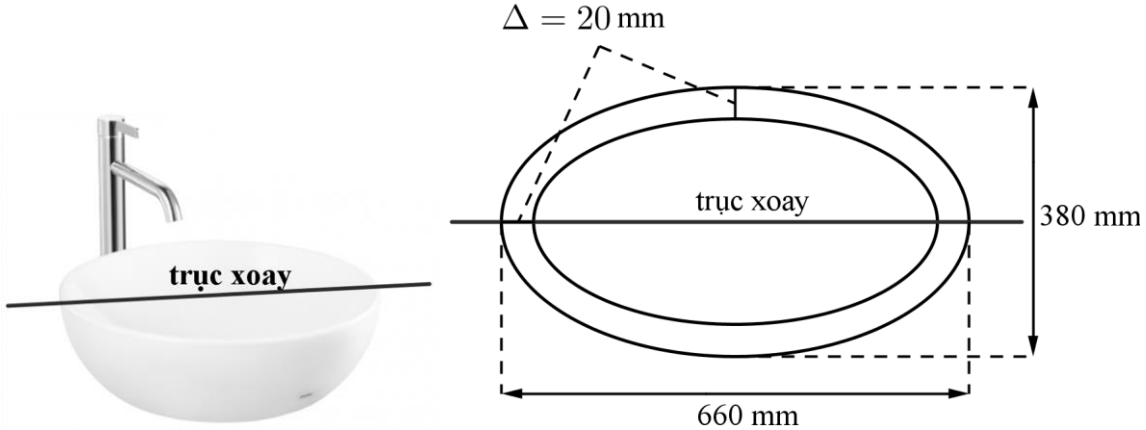
Câu 16: Từ một tấm tôn hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 30$ cm, $AD = \dfrac{55\pi}{3}$ cm. Người ta cắt tấm tôn theo đường hình sin như hình vẽ bên để được hai miếng tôn. Biết $AM = 20$ cm, $CN = 15$ cm, $BE = 5\pi$ cm. Tính thể tích V (đơn vị: lít) của khối tròn xoay được tạo thành khi xoay miếng tôn lớn quanh trục AD.



Câu 17: Có một vật thể là hình tròn xoay có dạng giống như một cái ly như hình vẽ dưới đây. Người ta đo được đường kính của miệng ly là 4 cm và chiều cao là 6 cm. Biết rằng thiết diện của chiếc ly cắt bởi mặt phẳng đối xứng là một parabol. Tính thể tích V (cm^3) của vật thể đã cho.



Câu 18: Hình elip được ứng dụng nhiều trong thực tiễn, đặc biệt là kiến trúc, xây dựng, thiết bị nội thất,. Mặt trong (lọt lòng) và ngoài (phủ bì) của một bồn rửa (lavabo) bằng sứ có hình dạng là một nửa khối tròn xoay khi quay quanh một trục của 2 elip có chung các trục đối xứng (hình minh họa). Thông số kĩ thuật mặt trên của bồn rửa: dài × rộng là 660×380 mm (phủ bì) và elip (lọt lòng) có trục lớn, trục nhỏ ít hơn elip phủ bì một khoảng 40 mm. Tính thể tích chứa nước của bồn rửa (đơn vị: lít) (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



----------HẾT----------

CHƯƠNG 4

NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN

BÀI 01 NGUYÊN HÀM

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Định nghĩa

Định nghĩa: Cho hàm số f xác định trên K với K là một khoảng, một đoạn hay một nửa khoảng. Hàm số F được gọi là một nguyên hàm của f trên K nếu:

$$F'(x) = f(x), \forall x \in K$$

Chú ý 1:

- Họ các nguyên hàm của f trên K, kí hiệu $\int f(x)\mathrm{d}x$. Nếu F là một nguyên hàm của hàm số f trên K thì mọi nguyên hàm của f đều có dạng $F(x)+C$, với $C \in \mathbb{R}$. Vậy $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$.
- Nếu hàm số $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì tồn tại một hằng số C nào đó sao cho $G(x) = F(x)+C$ với mọi $x \in K$.

Chú ý 2:

- Để tìm họ các nguyên hàm (gọi tắt là tìm nguyên hàm) của hàm số $f(x)$ trên K, ta chỉ cần tìm một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ trên K. Khi đó: $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C, C$ là hằng số.
- Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng K thì $f(x)$ có nguyên hàm trên khoảng đó.
- Biểu thức $f(x)\mathrm{d}x$ gọi là vi phân của nguyên hàm $F(x)$ được ký hiệu là $\mathrm{d}F(x)$. Khi đó:

$$\mathrm{d}F(x) = F'(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$$

- Khi tìm nguyên hàm của một hàm số mà không chỉ rõ tập K, ta hiểu là tìm nguyên hàm của hàm số đó trên tập xác định của nó.

2 Các tính chất cơ bản của nguyên hàm

Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên K thì ta có các tính chất sau:

⊕ $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)$

⊕ $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$ với $k \neq 0$

⊕ $\int\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$

⊕ $\int\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x - \int g(x)\mathrm{d}x.$

3 Bảng công thức nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

Đạo hàm	Nguyên hàm	Nguyên hàm mở rộng (đọc thêm)
$(x)' = 1$	$\int 1\mathrm{d}x = x + C$	
$\left(x^{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1)x^{\alpha}$	$\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	$\int (ax+b)^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	$\int \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{x} + C$	$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{(ax+b)^2} = -\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{ax+b} + C$
$\left(a^x\right)' = a^x.\ln a$	$\int a^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{mx+n}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{m}\cdot\dfrac{a^{mx+n}}{\ln a} + C$
$\left(e^x\right)' = e^x$	$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$	$\int e^{ax+b}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}e^{ax+b} + C$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \dfrac{1}{ax+b}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}.\ln\lvert ax+b\rvert + C$
$(\sin x)' = \cos x$	$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$	$\int \cos(ax+b)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}.\sin(ax+b) + C$
$(\cos x)' = -\sin x$	$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$	$\int \sin(ax+b)\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{a}\cos(ax+b) + C$
$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + C$	$\int \dfrac{1}{\cos^2(ax+b)}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\tan(ax+b) + C$
$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\cot x + C$	$\int \dfrac{1}{\sin^2(ax+b)}\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{a}\cot(ax+b) + C$

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Tìm nguyên hàm của hàm số luỹ thừa

Các công thức thường dùng:

⊕ $\int 1\mathrm{d}x = x + C$

⊕ $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$

⊕ $\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C, \alpha \neq -1$

⊕ $\int \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{x} + C$

Chú ý các công thức biến đổi luỹ thừa:

⊕ $\dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$

⊕ $x^m.x^n = x^{m+n}$

⊕ $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

⊕ $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}; \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)$, biết:

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = x^4 + x^{-3}$

c) $f(x) = x^2 + \dfrac{3}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$

e) $f(x) = x^2 + \dfrac{3}{x} - 2\sqrt{x}$

f) $f(x) = 3\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

Lời giải

a) Ta có $\int x^2\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} + C$

b) Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \int\left(x^4 + x^{-3}\right)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{1}{2}x^{-2} + C$

c) Ta có $\int\left(x^2 + \dfrac{3}{x}\right)\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} + 3\ln|x| + C$

d) Ta có $\int\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \ln|x| + \dfrac{1}{x} + C$

e) Ta có $\int x^2 + \dfrac{3}{x} - 2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} + 3\ln|x| - \dfrac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$

f) Ta có $\int\left(3\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\mathrm{d}x = \int\left(3x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{3}}\right)\mathrm{d}x = \dfrac{6}{3}x^{\frac{3}{2}} + \dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C = 2x^{\frac{3}{2}} + \dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$

Bài tập 2: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)$, biết:

a) $f(x) = 2x\left(1 + 3x^3\right)$

b) $f(x) = (3x - 2)^2$

c) $f(x) = \dfrac{2x^4 + 3}{x^2}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{2x - 1}$

e) $f(x) = \dfrac{2}{4x - 3}$

f) $f(x) = \dfrac{6x + 2}{3x - 1}$

Lời giải

a) Ta có $\int 2x\left(1+3x^3\right)\mathrm{d}x=\int\left(2x+6x^4\right)\mathrm{d}x=x^2\left(1+\frac{6x^3}{5}\right)+C$

b) Ta có $\int\left(3x-2\right)^2\mathrm{d}x=\int\left(9x^2-12x+4\right)\mathrm{d}x=3x^3-6x^2+4x+C$

c) Ta có $f\left(x\right)=\frac{2x^4+3}{x^2}=2x^2+3x^{-2}\Rightarrow\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(2x^2+3x^{-2}\right)\mathrm{d}x=\frac{2x^3}{3}-\frac{3}{x}+C$

d) Ta có $F\left(x\right)=\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left|2x-1\right|+C$

e) Ta có $\int\frac{2}{4x-3}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2x-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left|2x-\frac{3}{2}\right|+C$

f) Ta có $\int\frac{6x+2}{3x-1}\,\mathrm{d}x=\int\left(2+\frac{4}{3x-1}\right)\mathrm{d}x=2x+\frac{4}{4}\ln\left|3x-1\right|+C$

Bài tập 3: Biết $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\frac{1+2x^2}{x}$ thỏa mãn $F\left(-1\right)=3$. Tìm $F\left(x\right)$.

Lời giải

Ta có $F\left(x\right)=\int\frac{1+2x^2}{x}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x}+2x\right)\mathrm{d}x=\ln\left|x\right|+x^2+C$.

Mà $F\left(-1\right)=3\Leftrightarrow\ln\left|-1\right|+(-1)^2+C=3\Leftrightarrow C=2$ nên $F\left(x\right)=\ln\left|x\right|+x^2+2$.

Bài tập 4: Biết $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\frac{1}{2x+1}$ và $F\left(0\right)=2$. Tính $F\left(\mathrm{e}\right)$

Lời giải

Ta có $F\left(x\right)=\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left|2x+1\right|+C$.

Do $F\left(0\right)=2$ suy ra $C=2$ nên $F\left(\mathrm{e}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(2\mathrm{e}+1\right)+2=\ln\sqrt{2\mathrm{e}+1}+2$.

Bài tập 5: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}2x-1 & \text{khi } x\geq 1\\ 3x^2-2 & \text{khi } x<1\end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F\left(0\right)=2$. Tính $F\left(-1\right)+2F\left(2\right)$.

Lời giải

Ta có: $\int\left(2x-1\right)\mathrm{d}x=x^2-x+C_1$; $\int\left(3x^2-2\right)\mathrm{d}x=x^3-2x+C_2$

Suy ra $F\left(x\right)=\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\begin{cases}x^2-x+C_1 & \text{khi } x\geq 1\\ x^3-2x+C_2 & \text{khi } x<1\end{cases}$ mà ta có $F\left(0\right)=2\Rightarrow C_2=2$.

Mặt khác hàm số F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ nên $y=F\left(x\right)$ liên tục tại $x=1$

Suy ra: $\lim\limits_{x\to 1^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}F(x)\Rightarrow C_1=1$

Khi đó, ta có $F(x)=\begin{cases}x^2-x+1 & \text{khi } x\ge 1\\ x^3-2x+2 & \text{khi } x<1\end{cases}$ suy ra $\begin{cases}F(-1)=3\\ F(2)=3\end{cases}$. Vậy $F(-1)+2F(2)=9$.

Bài tập 6: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=6x^2-2,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=1$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(2)=0$. Tính $F(4)$.

Lời giải

Ta có: $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\left(6x^2-2\right)\mathrm{d}x=2x^3-2x+C$.

Suy ra $f(x)=2x^3-2x+C$.

Theo bài ra ta có $f(0)=1\Rightarrow C=1\Rightarrow f(x)=2x^3-2x+1$.

Khi đó: $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(2x^3-2x+1\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^4-x^2+x+C'$.

Mà $F(2)=0\Rightarrow 6+C'=0\Rightarrow C'=-6$ suy ra $F(x)=\frac{1}{2}x^4-x^2+x-6\Rightarrow F(4)=110.$

Vậy $F(4)=110.$

Bài tập 7: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)$, biết:

a) $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{x}$ b) $f(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{\sqrt{x}}$

Lời giải

a) $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\dfrac{x^2+3x+2}{x}\mathrm{d}x=\int\left(x+3+\dfrac{2}{x}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}x^2+3x+2\ln|x|+C$

b) Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\dfrac{x^2+3x+1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int\left(x\sqrt{x}+3\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$

$=\int\left(x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{x}+C$.

Vậy $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{x}+C$.

Bài tập 8: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\dfrac{3x^3+1}{x}$. Khi đó hãy tính giá trị biểu thức $f(-3)+f(3)$ biết $f(1)=2, f(-1)=3$.

Lời giải

$$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{3x^3+1}{x}\mathrm{d}x=\int\left(3x^2+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=x^3+\ln|x|+C=\begin{cases}x^3+\ln x+C_1 & \text{khi } x>0\\ x^3+\ln(-x)+C_2 & \text{khi } x<0\end{cases}.$$

$f(1)=1+C_1=2\Rightarrow C_1=1$; $f(-1)=-1+C_2=3\Rightarrow C_2=4$.

Suy ra $f(x)=\begin{cases}x^3+\ln x+1 & \text{khi } x>0\\ x^3+\ln(-x)+4 & \text{khi } x<0\end{cases}$ nên $f(-3)+f(3)=2\ln 3+5.$

Bài tập 9: Tìm hàm số $y=f(x)$ biết $f'(x)=3x^2+2x-m+1$, $f(2)=1$ và đồ thị của hàm số $y=f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -5.

Lời giải

Ta có $f(x)=\int(3x^2+2x-m+1)\mathrm{d}x=x^3+x^2+(1-m)x+C$

Theo đề bài, ta có $\begin{cases}f(2)=1\\ f(0)=-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2(1-m)+C+12=1\\ C=-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=4\\ C=-5\end{cases}$

Vậy $f(x)=x^3+x^2-3x-5$

Bài tập 10: Tìm giá trị của tham số m biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}+m-1$ thỏa mãn $F(0)=0$ và $F(3)=7$.

Lời giải

Ta có: $F(x)=\int\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}+m-1\right)\mathrm{d}x=\int\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)\mathrm{d}x+\int(m-1)\mathrm{d}x$

$=\int\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)\mathrm{d}(x+1)+\int(m-1)\mathrm{d}x=\sqrt{x+1}+(m-1)x+C$.

Theo đề bài ta có: $\begin{cases}F(0)=0\\ F(3)=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C+1=0\\ C+3m=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C=-1\\ m=3\end{cases}$.

Vậy $m=3$ khi đó $F(x)=\sqrt{x+1}+2x-1$.

Bài tập 11: Một loài vi khuẩn đang phát triển với tốc độ $f(t)=\dfrac{300}{0,25t}$, trong đó, t là thời gian tính bằng ngày. Với $t=1$ thì số lượng vi khuẩn là 1000 con. Hỏi sau 3 ngày số lượng vi khuẩn là bao nhiêu?

Lời giải

Do vi khuẩn đang phát triển với tốc độ $f(t)=\dfrac{300}{0,25t}$ nên hàm số lượng vi khuẩn $P(t)$ tại thời điểm t là một nguyên hàm của hàm số $f(t)=\dfrac{300}{0,25t}$.

Từ đó có $P(t)=\int\dfrac{300}{0,25t}\mathrm{d}t=\dfrac{300}{0,25}.\ln t+C=1200.\ln t+C$.

Ta có với $P(1)=1000\Leftrightarrow 1200.\ln 1+C=1000\Rightarrow C=1000$.

Hàm số biểu diễn số lượng vi khuẩn theo thời gian t là: $P(t)=1200.\ln t+1000$.

Sau 3 ngày số lượng vi khuẩn là $P(3)=1200.\ln 3+1000\approx 2318$ (con).

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=3x^2+2x$. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$?

A. $F_1(x)=x^3+x^2-4$. **B.** $F_2(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}$. **C.** $F_3(x)=x^3-x^2+1$. **D.** $F_4(x)=3x^3+x^2$.

Lời giải

Ta có: $F_1'(x)=3x^2+2x$; $F_2'(x)=x^2+x$; $F_3'(x)=3x^2-2x$; $F_4'(x)=9x^2+2x$.

Suy ra: $F_1'(x)=3x^2+2x=f(x)$.

Vậy $F_1(x)=x^3+x^2-4$ là một nguyên hàm của $f(x)=3x^2+2x$ trên $\mathbb{R}$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=x-\frac{1}{\sqrt{x}}$. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $(0;+\infty)$?

A. $F_1(x)=\frac{x^2}{2}+\sqrt{x}$. **B.** $F_2(x)=\frac{x^2}{2}-\sqrt{x}$.

C. $F_3(x)=\frac{x^2}{2}+2\sqrt{x}$. **D.** $F_4(x)=\frac{x^2}{2}-2\sqrt{x}$.

Lời giải

Ta có: $F_1'(x)=x+\frac{1}{2\sqrt{x}}$; $F_2'(x)=x-\frac{1}{2\sqrt{x}}$; $F_3'(x)=x+\frac{1}{\sqrt{x}}$; $F_4'(x)=x-\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Suy ra: $F_4'(x)=x-\frac{1}{\sqrt{x}}=f(x)$.

Vậy $F_4(x)=\frac{x^2}{2}-2\sqrt{x}$ là một nguyên hàm của $f(x)=x-\frac{1}{\sqrt{x}}$ trên $(0;+\infty)$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=3+\frac{1}{x}$. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $(0;+\infty)$?

A. $F_1(x)=3x-\frac{1}{x^2}$. **B.** $F_2(x)=3x+\ln x$. **C.** $F_3(x)=3x+\frac{1}{x^2}$. **D.** $F_4(x)=3x-\ln x$.

Lời giải

Ta có: $F_1'(x)=3+\frac{2}{x^3}$; $F_2'(x)=3+\frac{1}{x}$; $F_3'(x)=3-\frac{2}{x^3}$; $F_4'(x)=3-\frac{1}{x}$.

Suy ra: $F_2'(x)=3+\frac{1}{x}=f(x)$.

Vậy $F_2(x)=3x+\ln x$ là một nguyên hàm của $f(x)=3+\dfrac{1}{x}$ trên $(0;+\infty)$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=3x^2+2x$. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$?

A. $F_1(x)=x^3+x^2-4$. **B.** $F_2(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}$. **C.** $F_3(x)=x^3-x^2+1$. **D.** $F_4(x)=3x^3+x^2$.

Lời giải

Ta có: $F_1'(x)=3x^2+2x$; $F_2'(x)=x^2+x$; $F_3'(x)=3x^2-2x$; $F_4'(x)=9x^2+2x$.

Suy ra: $F_1'(x)=3x^2+2x=f(x)$.

Vậy $F_1(x)=x^3+x^2-4$ là một nguyên hàm của $f(x)=3x^2+2x$ trên $\mathbb{R}$.

Câu 5: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+4$ là

A. $2x^2+4x+C$. **B.** x^2+4x+C. **C.** x^2+C. **D.** $2x^2+C$.

Lời giải

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int(2x+4)\mathrm{d}x=2\int x\mathrm{d}x+4\int \mathrm{d}x=x^2+4x+C$.

Câu 6: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2-2$ là

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=2x+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}-2x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=x^2-2x+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=x^3-2x+C$.

Lời giải

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int(x^2-2)\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}x-2\int \mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}-2x+C$.

Câu 7: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=5x^4-8x^3-6x$ là

A. $F(x)=x^5-2x^4-3x^2+C.$ **B.** $F(x)=x^5-x^4-x^2+C.$

C. $F(x)=x^5-4x^4-2x^2+C.$ **D.** $F(x)=x^5+2x^4-3x^2+C.$

Lời giải

Ta có $F(x)=\int(5x^4-8x^3-6x)\mathrm{d}x=x^5-2x^4-3x^2+C..$

Vậy một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $F(x)=x^5-2x^4-3x^2+C..$

Câu 8: Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+x-2024$ thỏa mãn $F(1)=-2024$ là

A. $\dfrac{1}{12}x^4-\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-2024x+\dfrac{5}{12}$. **B.** $\dfrac{1}{12}x^4-\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-2024x-\dfrac{1}{12}$.

C. $\dfrac{1}{12}x^4-\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-2024x+\dfrac{1}{12}$. **D.** $\dfrac{1}{12}x^4-\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-2024x-\dfrac{5}{12}$.

Lời giải

Ta có $\int\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+x-2024\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int x^3\mathrm{d}x-2\int x^2\mathrm{d}x+\int x\mathrm{d}x-2024\int\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{3}.\frac{x^4}{4}-2.\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2024x+C=\frac{1}{12}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2024x+C$.

$F(1)=-2024\Leftrightarrow\frac{1}{12}.1^4-\frac{2}{3}.1^3+\frac{1}{2}.1^2-2024.1+C=-2024\Leftrightarrow C=\frac{1}{12}$.

Vậy nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+x-2024$ thỏa mãn $F(1)=-2024$ là $\frac{1}{12}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2024x+\frac{1}{12}$.

Câu 9: Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=(2x-3)^2$ thỏa mãn $F(-1)=-17$ là

A. $\frac{(2x-3)^3}{3}+\frac{4}{3}$.

B. $\frac{4}{3}x^3-6x^2+9x-\frac{2}{3}$.

C. $\frac{4}{3}x^3-6x^2+9x+\frac{8}{3}$.

D. $\frac{4}{3}x^3-6x^2+9x+\frac{2}{3}$.

Lời giải

Ta có $\int(2x-3)^2\mathrm{d}x=\int\left(4x^2-12x+9\right)\mathrm{d}x=4\int x^2\mathrm{d}x-12\int x\mathrm{d}x+9\int\mathrm{d}x=\frac{4}{3}x^3-6x^2+9x+C$.

$F(-1)=-17\Leftrightarrow\frac{4}{3}.(-1)^3-6.(-1)^2+9.(-1)+C=-17\Leftrightarrow C=-\frac{2}{3}$.

Vậy nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=(2x-3)^2$ thỏa mãn $F(-1)=-17$ là $\frac{4}{3}x^3-6x^2+9x-\frac{2}{3}$.

Câu 10: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{5x-2}$.

A. $\int\frac{\mathrm{d}x}{5x-2}=\frac{1}{5}\ln|5x-2|+C$.

B. $\int\frac{\mathrm{d}x}{5x-2}=\ln|5x-2|+C$.

C. $\int\frac{\mathrm{d}x}{5x-2}=-\frac{1}{2}\ln|5x-2|+C$.

D. $\int\frac{\mathrm{d}x}{5x-2}=5\ln|5x-2|+C$.

Lời giải

Ta có $\int\frac{\mathrm{d}x}{5x-2}=\frac{1}{5}\int\frac{\mathrm{d}(5x-2)}{5x-2}=\frac{1}{5}\ln|5x-2|+C$.

Câu 11: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2+\frac{2}{x^2}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{x}+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{2}{x}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{2}{x}+C$.

Lời giải

Ta có $\int\left(x^2+\frac{2}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{2}{x}+C$.

Câu 12: Biết một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{2x-1}$ là hàm số $F(x)$ thỏa mãn $F(1)=5$. Khi đó $F(x)$ là hàm số nào sau đây?

A. $F(x)=2\ln|2x-1|+5$. **B.** $F(x)=\frac{1}{2}\ln|2x-1|+5$.

C. $F(x)=\ln(2x-1)+5$. **D.** $F(x)=\ln|2x-1|+5$.

Lời giải

Ta có $F(x)=\int\frac{1}{2x-1}dx=\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$ mà $F(1)=5\Rightarrow C=5$. Vậy $F(x)=\frac{1}{2}\ln|2x-1|+5$.

Câu 13: Tìm họ các nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\frac{x+3}{x+1}$.

A. $F(x)=x-\ln|x+1|+C$. **B.** $F(x)=x+\ln|x+1|+C$.

C. $F(x)=x-3\ln|x+1|+C$. **D.** $F(x)=x+2\ln|x+1|+C$.

Lời giải

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{x+3}{x+1}\mathrm{d}x=\int\frac{x+1+2}{x+1}\mathrm{d}x=\int\left(1+\frac{2}{x+1}\right)\mathrm{d}x=x+2\ln|x+1|+C.$

Câu 14: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$.

A. $x+\frac{1}{x-1}+C$ **B.** $1+\frac{1}{(x-1)^2}+C$. **C.** $\frac{x^2}{2}+\ln|x-1|+C$. **D.** $x^2+\ln|x-1|+C$.

Lời giải

. Ta có: $\int\frac{x^2-x+1}{x-1}\mathrm{d}x=\int\frac{(x^2-x)+1}{x-1}\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}x+\int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x$

$=\int x\mathrm{d}x+\int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}(x-1)=\frac{1}{2}x^2+\ln|x-1|+C$.

Câu 15: Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+1$ là

A. x^3+C. **B.** $\frac{x^3}{3}+x+C$. **C.** x^3+x+C. **D.** $6x+C$.

Lời giải

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int(3x^2+1)\mathrm{d}x=3.\frac{x^3}{3}+x+C=x^3+x+C$.

Câu 16: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{2x-1}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{2x-1}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\sqrt{2x-1}+C$.

Lời giải

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int\sqrt{2x-1}\mathrm{d}x=\int\frac{(2x-1)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(2x-1)}{2}=\frac{1}{2}.\frac{(2x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C.$$

Câu 17: Tìm nguyên hàm của hàm số $\int\left(x^2+\frac{3}{x}-2\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{x^3}{3}+3\ln|x|+\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$.

B. $\frac{x^3}{3}+3\ln|x|-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$.

C. $\frac{x^3}{3}+3\ln x-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}$.

D. $\frac{x^3}{3}-3\ln|x|-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$.

Lời giải

Ta có: $\int\left(x^2+\frac{3}{x}-2\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+3\ln|x|-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$.

Câu 18: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3\sqrt{x}+x^{2024}$ là

A. $\sqrt{x}+\frac{x^{2023}}{673}+C$.

B. $2\sqrt{x^3}+\frac{x^{2025}}{2025}+C$.

C. $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{x^{2024}}{2025}+C$.

D. $\frac{1}{2\sqrt{x}}+6054x^{2025}+C$.

Lời giải

Ta có: $\int\left(3\sqrt{x}+x^{2024}\right)\mathrm{d}x=\int\left(3x^{\frac{1}{2}}+x^{2024}\right)\mathrm{d}x=3.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{x^{2025}}{2025}+C=2\sqrt{x^3}+\frac{x^{2025}}{2025}+C$.

Câu 19: Họ các nguyên hàm của hàm số $y=x(x+1)^5$ là

A. $\frac{(x+1)^7}{7}+\frac{(x+1)^6}{6}+C$.

B. $6(x+1)^5+5(x+1)^4+C$.

C. $6(x+1)^5-5(x+1)^4+C$.

D. $\frac{(x+1)^7}{7}-\frac{(x+1)^6}{6}+C$.

Lời giải

Ta có $y=x(x+1)^5=(x+1-1)(x+1)^5=(x+1)^6-(x+1)^5$

Kiểm tra $F(x)=\frac{(x+1)^7}{7}-\frac{(x+1)^6}{6}+C$ ta có $F'(x)=\frac{7(x+1)^6}{7}-\frac{6(x+1)^5}{6}=(x+1)^6-(x+1)^5$

Câu 20: Cho hàm số $y=F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=x^2$. Tính $F'(25)$.

A. 25. **B.** 125. **C.** 5. **D.** 625.

Lời giải

Ta có $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=x^2$ nên ta có $F'(x)=x^2,\forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó $F'(25)=25^2=625$.

Câu 21: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^{\sqrt{5}}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{5}-1}x^{\sqrt{5}-1}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=x^{\sqrt{5}+1}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\sqrt{5}x^{\sqrt{5}-1}+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{5}+1}x^{\sqrt{5}+1}+C$.

Lời giải

Áp dụng công thức nguyên hàm cơ bản suy ra $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{5}+1}x^{\sqrt{5}+1}+C$.

Câu 22: Họ tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+4$ là

A. $2x^2+4x+C$. **B.** x^2+4x+C. **C.** x^2+C. **D.** $2x^2+C$.

Lời giải

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int(2x+4)\mathrm{d}x=x^2+4x+C$.

Câu 23: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=4x^3-2024$ là

A. $x^4-2024x+C$. **B.** $4x^3-2024x+C$. **C.** $12x^3+C$. **D.** x^4+C.

Lời giải

Ta có $\int(4x^3-2024)\mathrm{d}x=x^4-2024x+C$.

Câu 24: Biết $F(x)=x^3+\frac{1}{x}+1$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên miền $(0;+\infty)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\ln x$. **B.** $f(x)=3x^2-\frac{1}{x^2}$.

C. $f(x)=3x^2+\frac{1}{x^2}$. **D.** $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\ln x+x+C$.

Lời giải

Ta có $F(x)=x^3+\frac{1}{x}+1$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên miền $(0;+\infty)$ nên $F'(x)=f(x)$ với mọi $x\in(0;+\infty)$ mà $F'(x)=\left(x^3+\frac{1}{x}+1\right)'=3x^2-\frac{1}{x^2}$.

Câu 25: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2+\frac{2}{x^2}$.

A. $\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}+C$. **B.** $\frac{x^3}{3}-\frac{2}{x}+C$. **C.** $\frac{x^3}{3}+\frac{1}{x}+C$. **D.** $\frac{x^3}{3}+\frac{2}{x}+C$.

Lời giải

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(x^2+\frac{2}{x^2}\right)\mathrm{d}x==\frac{x^3}{3}-\frac{2}{x}+C$

Câu 26: Biết $\int\left(\frac{1}{2x}+x^5\right)\mathrm{d}x=a\ln|x|+bx^6+C$ với $(a,b\in\mathbb{Q},C\in\mathbb{R})$. Tính a^2+b?

A. $\frac{5}{12}$. **B.** 9. **C.** $\frac{7}{13}$. **D.** $\frac{7}{6}$.

Lời giải

Ta có $\int\left(\frac{1}{2x}+x^5\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{1}{6}x^6+C$ nên $a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{6}\Rightarrow a^2+b=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$.

Câu 27: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x+1)(x+2)$ là

A. $2x+3+C$. **B.** $\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3}x^2+2x+C$.

C. $\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}x^2+2x+C$. **D.** $\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+2x+C$.

Lời giải

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int(x+1)(x+2)\mathrm{d}x=\int\left(x^2+3x+2\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+2x+C$.

Câu 28: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{5+2x^4}{x^2}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{2x^3}{3}+\frac{5}{x}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{2x^3}{3}-\frac{5}{x}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{2x^3}{3}+5\ln x^2+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=2x^3-\frac{5}{x}+C$.

Lời giải

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(2x^2+\frac{5}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{2x^3}{3}-\frac{5}{x}+C$.

Câu 29: Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=2x+3\sqrt{x}$ thoả mãn $F(1)=0$.

A. $F(x)=x^2+3\sqrt{x^3}$. **B.** $F(x)=x^2+2\sqrt[3]{x^2}$.

C. $F(x)=x^2+3\sqrt[3]{x^2}-4$. **D.** $F(x)=x^2+2\sqrt{x^3}-3$.

Lời giải

Ta có: $\int\left(2x+3\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=x^2+2x\sqrt{x}+C$ mà $F(1)=0\Rightarrow C=-3$.

Vậy $F(x)=x^2+2x\sqrt{x}-3$.

Câu 30: Tìm hàm số $y=f(x)$, biết $f'(x)=3\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}},(x>0)$ và $f(1)=1$.

A. $f(x)=2x\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x^2}-4$. **B.** $f(x)=2x\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x^2}+2$.

C. $f(x)=\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x^2}-3$. **D.** $f(x)=x\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}-3$.

Lời giải

Xét $\int\left(3\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)\mathrm{d}x=\int\left(3\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)\mathrm{d}x\Rightarrow\int\int\left(3\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)\mathrm{d}x=\int\left(3\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)\mathrm{d}x+C$

Câu 31: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(2x-3)^2$ thỏa $F(0)=\frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $T=\log_2\left[3F(1)-2F(2)\right]$.

A. $T=10$. **B.** $T=4$. **C.** $T=2$. **D.** $T=-4$.

Lời giải

Ta có: $F(x)=\int(2x-3)^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(2x-3)^2\,\mathrm{d}(2x-3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-3)^3}{3}+C$.

Ta có $F(0)=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{2}.\frac{(0-3)^3}{3}+C=\frac{1}{3}\Leftrightarrow C=\frac{29}{6}$.

Do đó $F(x)=\frac{1}{2}.\frac{(2x-3)^3}{3}+\frac{29}{6}$ nên $F(1)=\frac{1}{2}.-\frac{1}{3}+\frac{29}{6}=\frac{14}{3};F(2)=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}+\frac{29}{6}=5$.

$\Rightarrow T=\log_2\left[3F(1)-2F(2)\right]=\log_2\left(3.\frac{14}{3}-2.5\right)=\log_2 4=2$.

Câu 32: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\frac{2}{x+2}$. Biết $F(-1)=1$, khi đó $F(2)$ bằng

A. $2\ln 3+2$. **B.** $4\ln 2+1$. **C.** $\ln 8+1$. **D.** $2\ln 4$.

Lời giải

Ta có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{2}{x+2}\,\mathrm{d}x=2\ln|x+2|+C$.

Do $F(-1)=1$ nên $2\ln|-1+2|+C=1\Leftrightarrow C=1$.

Vậy $F(x)=2\ln|x+2|+1\Rightarrow F(2)=2\ln 4+1=4\ln 2+1$.

Câu 33: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{2x-3}$; biết $F(2)=1$. Giá trị $F(3)$ bằng

A. $F(3)=2\ln 3+1$. **B.** $F(3)=\frac{1}{2}\ln 3+1$.

C. $F(3)=\ln 3+1$. **D.** $F(3)=\frac{1}{2}\ln 3-1$.

Lời giải

Ta có: $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2x-3}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln|2x-3|+C$

Thay $x=2$ suy ra $C=1$ nên $F(x)=\frac{1}{2}\ln|2x-3|+1$. Vậy $F(3)=\frac{1}{2}\ln 3+1$.

Câu 34: Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3+2x$ có dạng $F(x)=ax^4+bx^2$. Tính $T=4a+b$.

A. $T=0$. **B.** $T=1$. **C.** $T=2$. **D.** $T=3$.

Lời giải

Ta có: $F(x)=ax^4+bx^2$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3+2x$ nên

$$F'(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 4ax^3+2bx=x^3+2x,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}4a=1\\2b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{4}\\b=1\end{cases}$$

Do đó $T=4a+b=4.\dfrac{1}{4}+1=2$.

Câu 35: Với giá trị thực nào của tham số m để hàm số $F(x)=mx^3+(3m+2)x^2-4x+3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+10x-4$?

A. $m=0$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên ta có

$$F'(x)=f(x)\Leftrightarrow 3mx^3+2(3m+2)x-4=3x^2+10x-4\Leftrightarrow\begin{cases}3m=3\\2(3m+2)=10\end{cases}\Leftrightarrow m=1$$

Câu 36: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+3 & \text{khi } x\ge 1\\3x^2+2 & \text{khi } x<1\end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0)=2$. Giá trị $F(-1)+2F(2)$ bằng

A. 23. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 21.

Lời giải

Do F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ nên

$$F(x)=\begin{cases}F_1(x)=\int(2x+3)\mathrm{d}x=x^2+3x+C_1 & \text{khi } x\ge 1\\F_2(x)=\int(3x^2+2)\mathrm{d}x=x^3+2x+C_2 & \text{khi } x<1\end{cases}$$

Theo bài ra, ta có $F(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ nên $F(x)$ liên tục trên đó và $F(0)=2$.

Điều này tương đương với $\begin{cases}F_1(1)=F_2(1)\\F_2(0)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4+C_1=3+C_2\\C_2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=1\\C_2=2\end{cases}$

Do đó, $F_1(x)=x^2+3x+1, F_2(x)=x^3+2x+2$, suy ra $F(-1)=F_2(-1)=-1, F(2)=F_1(2)=11$.

Vậy $F(-1)+2F(2)=-1+2\cdot 11=21$

Câu 37: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+5 & \text{khi } x\ge 1\\3x^2+4 & \text{khi } x<1\end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0)=2$. Giá trị của $F(-1)+2F(2)$ bằng

A. 27. **B.** 29. **C.** 12. **D.** 33.

Lời giải

Theo giả thiết F là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên ta có

$$f(x)=\begin{cases}2x+5 & \text{khi } x\ge 1\\ 3x^2+4 & \text{khi } x<1\end{cases}\Rightarrow F(x)=\begin{cases}x^2+5x+C_1 & \text{khi } x\ge 1\\ x^3+4x+C_2 & \text{khi } x<1\end{cases}$$

Vì $F(0)=0\Rightarrow C_2=2$.

Mặt khác, $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục tại $x=1$ nên ta có:

$$\lim_{x\to 1^+}F(x)=\lim_{x\to 1^-}F(x)\Leftrightarrow 6+C_1=5+C_2\Rightarrow C_1=C_2-1=1$$

Vậy $F(x)=\begin{cases}x^2+5x+1 & \text{khi } x\ge 1\\ x^3+4x+2 & \text{khi } x<1\end{cases}\Rightarrow F(-1)+2F(2)=-3+2.15=27$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=4x^3-6x$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0)=2$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $F(x)=f'(x)$.

b) $F'(x)=f(x)$.

c) $F(x)=x^4-3x^2+2$.

d) $F(1)=3$.

Lời giải

a) Sai: Theo định nghĩa $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ nên $F'(x)=f(x)$

b) Đúng: $F'(x)=f(x)$

c) Đúng: Ta có: $F(x)=\int 4x^3\mathrm{d}x-\int 6x\mathrm{d}x=x^4-3x^2+C$.

Theo giả thiết $F(0)=2$ suy ra $C=2\Rightarrow F(x)=x^4-3x^2+2$

d) Sai: $F(1)=1^4-3.1^2+2=0$

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=2x+m$ và $G(x)=x^3+mx^2+3x+m$ với $m\in\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$ làm một nguyên hàm của $f(x)$ sao cho $F(0)=1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau :

a) Khi $m=3$ thì $\int f(x)\mathrm{d}x=x^2-3x+C$.

b) Khi $m=2$ thì $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

c) Khi $m=-1$ thì $\int\left(G(x)-f(x)\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+C$

d) Có 2 giá trị nguyên dương của m để $F(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Lời giải

a) Sai: Khi $m=3$ thì $\int f(x)\mathrm{d}x=\int(2x+3)dx=\int 2x\mathrm{d}x+\int 3\mathrm{d}x=x^2+3x+C$

b) Sai: Khi $m=2, f(x)=2x+2; G(x)=x^3+2x^2+3x+2$.

Ta có $G'(x)=3x^2+4x+3 \Rightarrow G'(1)=10 \neq f(1)$ nên khi $m=2$, $G(x)$ là không phải là một nguyên hàm của $f(x)$

c) Đúng: Khi $m=-1, f(x)=2x-1; G(x)=x^3-x^2+3x-1$.

$$\int (G(x)-f(x))dx=\int (x^3-x^2+x)\mathrm{d}x=\int x^3\mathrm{d}x-\int x^2\mathrm{d}x+\int x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+C$$

d) Đúng: Ta có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int 2x\mathrm{d}x+\int m\mathrm{d}x=x^2+mx+C$ mà $F(0)=1$ suy ra $C=1$

$\Rightarrow F(x)=x^2+mx+1$.

$F(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta=m^2-4\leq 0 \Leftrightarrow -2\leq m\leq 2$.

Vì m nguyên dương nên $m\in\{1;2\}$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ với $x\neq 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(x)=2+\dfrac{3}{x-1}$.

b) $\int f(x)\mathrm{d}x=2x+3\ln(x-1)+C$.

c) Nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ thỏa mãn $F(2)=1$ là $F(x)=2x+3\ln|x-1|-3$

d) Phương trình $F(x)=2x+2$ có 2 nghiệm $x_1;x_2$. Khi đó $T=x_1+x_2=2$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có $f(x)=\dfrac{2(x-1)+3}{x-1}=2+\dfrac{3}{x-1}$.

b) Sai: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(2+\dfrac{3}{x-1}\right)\mathrm{d}x=2x+3\ln|x-1|+C$

c) Đúng: Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(2+\dfrac{3}{x-1}\right)\mathrm{d}x=2x+3\ln|x-1|+C$.

Ta có: $F(2)=1 \Leftrightarrow 2.2+3\ln|2-1|+C=1 \Leftrightarrow C=-3$ nên $F(x)=2x+3\ln|x-1|-3$.

d) Đúng: $F(x)=2x+2 \Leftrightarrow 2x+3\ln|x-1|-3=2x+2 \Leftrightarrow \ln|x-1|=5 \Leftrightarrow |x-1|=e^5$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1+e^5 \\ x=1-e^5 \end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện xác định).

Vậy $T=x_1+x_2=(1+e^5)+(1-e^5)=2$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2+3x+2}{x+1}$ với $x\neq -1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(x)=2x+1+\dfrac{1}{x+1}$.

b) $\int f(x)\mathrm{d}x=x^2+x+\ln(x+1)+C$.

c) Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2+3x+2}{x+1}$ thỏa mãn $F(-2)=3$ là $F(x)=x^2+x+\ln|x+1|+1$.

d) Bất phương trình $F(x)<x^2+x+2$ có tập nghiệm là $T=(-e-1;e-1)$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có $f(x)=2x+1+\dfrac{1}{x+1}$.

b) Sai: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(2x+1+\dfrac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=x^2+x+\ln|x+1|+C$

c) Đúng: Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(2x+1+\dfrac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=x^2+x+\ln|x+1|+C$.

Ta có $F(-2)=3\Leftrightarrow(-2)^2+(-2)+3\ln|-2+1|+C=3\Leftrightarrow C=1$ nên $F(x)=x^2+x+\ln|x+1|+1$

d) Sai: $F(x)<x^2+x+2\Leftrightarrow x^2+x+\ln|x+1|+1<x^2+x+2\Leftrightarrow\ln|x+1|<1$

$\Leftrightarrow|x+1|<e\Leftrightarrow-e<x+1<e\Leftrightarrow-e-1<x<e-1,\ x\neq-1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $F(x)<x^2+x+2$ là $T=(-e-1;e-1)\setminus\{-1\}$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$ với $x\neq\pm1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$.

b) $\int f(x)\mathrm{d}x=\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|+C$.

c) Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$ thỏa mãn $F(-2)=\ln(3e)$ là $F(x)=\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+1$.

d) Phương trình $F(x)=\ln(2e)$ có 2 nghiệm $x_1;x_2$. Khi đó $S=x_1.x_2=1$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có $f(x)=\dfrac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$.

b) Sai: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\ln|x-1|-\ln|x+1|+C=\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C$

c) Đúng: Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\ln|x-1|-\ln|x+1|+C=\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$.

$F(-2)=\ln(3e)\Leftrightarrow\ln\left|\frac{-2-1}{-2+1}\right|+C=\ln(3e)\Leftrightarrow\ln\left|\frac{-2-1}{-2+1}\right|+C=1+\ln 3\Leftrightarrow C=1$.

Vậy $F(x)=\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+1$.

d) Đúng: $F(x)=\ln(2e)\Leftrightarrow\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+1=1+\ln 2\Leftrightarrow\left|\frac{x-1}{x+1}\right|=2\Leftrightarrow|x-1|=2|x+1|$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=-\frac{1}{3}\end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện xác định).

Vậy $S=x_1.x_2=1$.

Câu 6: Cho hàm số $F(x)=\int\left(2x+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$ (với $x>0$). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $F(x)=2\int x\,\mathrm{d}x+\int\sqrt{x}\,\mathrm{d}x+C$ với $C\in\mathbb{R}$.

b) $G(x)=F(x)+2024\Rightarrow G(x)=\int\left(2x+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$.

c) $F(x)=x+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$.

d) $F(1)=\frac{2}{3}\Rightarrow F(4)=\frac{28}{3}$.

Lời giải

a) Đúng: Vì $\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x,k\neq 0;\int\left(f(x)+g(x)\right)\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x+\int g(x)\mathrm{d}x$

b) Đúng: $F(x),G(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $F(x)=G(x)+C$

c) Sai: $F(x)=\int\left(2x+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\int\left(2x+x^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x=x^2+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$ suy ra **c**) sai.

d) Sai: $F(1)=1+\frac{2}{3}+C=\frac{2}{3}\Rightarrow C=-1\Rightarrow F(x)=x^2+\frac{2}{3}x\sqrt{x}-1\Rightarrow F(4)=\frac{25}{3}$

Câu 7: Cho hàm số $F(x)=\int\left(\sqrt[5]{x^3}\right)\mathrm{d}x$ (với $x>0$). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $F(x)=\frac{3}{5}\int x\,\mathrm{d}x$

b) $F(x)+C=\int\left(\sqrt[5]{x^3}\right)\mathrm{d}x,C\in\mathbb{R}$

c) $F(x)=\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}+C$

d) Biết $F(1)=-\frac{3}{8}$, khi đó $F(x)=\frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8}-\frac{3}{8}$

Lời giải

a) Sai: $F(x)=\int\left(\sqrt[5]{x^3}\right)\mathrm{d}x=\int x^{\frac{3}{5}}\mathrm{d}x$

b) Đúng: Nếu $F(x),G(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $F(x)=G(x)+C$

c) Sai: $F(x)=\int\left(\sqrt[5]{x^3}\right)\mathrm{d}x=\int x^{\frac{3}{5}}\mathrm{d}x=\frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}}+C$

d) Sai: $F(x)=\frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}}+C, F(1)=\frac{5}{8}+C=-\frac{3}{8}\Rightarrow C=-1\Rightarrow F(x)=\frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8}-1.$

Câu 8: Cho hàm số $f(x)=3$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\int f(x)\mathrm{d}x=3x+C$.

b) $\int\left[f(x)+x\right]^2\mathrm{d}x=x^3-\frac{1}{2}x^2+2x+C$

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(1)=1$ Thì $F(x)=3x-1$.

d) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì $F(1)+F(2)+...+F(100)=14590$ khi $F(1)=1$

Lời giải

a) Đúng: Ta có: $\int 3\mathrm{d}x=3x+C$

b) Sai: $\int\left[f(x)+x\right]^2\mathrm{d}x=\int(3+x)^2\mathrm{d}x=\int\left(x^2+6x+9\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+3x^2+9x+C$

c) Sai: Ta có $F(1)=1\Leftrightarrow 3+C=1\Leftrightarrow C=-2$ vậy $F(x)=3x-2$.

d) Sai: Ta có: $F(x)=3x-2$ nên $F(1)=1;F(2)=4;F(3)=7;....;F(100)=298$ là cấp số cộng với $u_1=1;d=3.$

Khi đó: $F(1)+F(2)+...+F(100)=\frac{(1+298).100}{2}=14950.$

Câu 9: Cho hàm số $f(x)=x^3-4x+5$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(1)=3$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\int\left(x^3-4x+5\right)\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}-2x^2+5x+C$.

b) $F(0)=2$

c) $\int\left[f(x)+f'(x)\right]\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}+x^3-2x^2+9x+C$

d) $\int f(x+1)\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$

Lời giải

a) Đúng: Ta có $\int (x^3 - 4x + 5)\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 5x + C$.

b) Sai: Ta có $F(1) = 3 \Leftrightarrow \frac{13}{4} + C = 3 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{4}$ vậy $F(0) = -\frac{1}{4}$.

c) Sai: Ta có: $\int [f(x) + f'(x)]\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 5x + x^3 - 4x + C = \frac{x^4}{4} + x^3 - 2x^2 + x + C$.

d) Đúng: $\int f(x+1)\mathrm{d}x = \frac{(x+1)^4}{4} - 2(x+1)^2 + 5(x+1) + C = \frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x) = x + 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\int f(x)\mathrm{d}x = x^2 + x + C$.

b) $\int [(x-1).f(x)]\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 - x + C$

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(1) = 2$ Thì $F(x) = x^2 + x - 1$.

d) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(1) = 2$ và

$\frac{1}{F(1)} + \frac{1}{F(2)} + ... + \frac{1}{F(99)} + \frac{1}{F(100)} = \frac{a}{b}$ thì $a + b = 201$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x = x^2 + x + C$.

b) Đúng: $\int [(x-1).f(x)]\mathrm{d}x = \int (x-1).(x+1)\mathrm{d}x = \int (x^2 - 1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 - x + C$.

c) Sai: Ta có $F(1) = 2 \Leftrightarrow 2 + C = 2 \Leftrightarrow C = 0$ vậy $F(x) = x^2 + x$.

d) Đúng: Ta có: $F(x) = x^2 + x = x(x+1)$ nên ta có:

$$\frac{1}{F(1)} + \frac{1}{F(2)} + ... + \frac{1}{F(99)} + \frac{1}{F(100)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{99.100} + \frac{1}{100.101}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} + \frac{1}{100} - \frac{1}{101} = 1 - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}$$

Vậy $a = 100; b = 101$ nên $a + b = 201$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x) = x^2$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C$.

b) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(3)=1$ thì $F(4)=\frac{4}{3}$.

c) $\int f(2x+1)dx=\int(2x+1)^2dx=\frac{4}{3}x^3+2x^2+x+C$

d) $\int[x.f(x-2)]dx=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+2x^2+C$

Lời giải

a) Đúng: Ta có $\int f(x)dx=\frac{x^3}{3}+C$

b) Sai: Ta có $F(3)=1\Leftrightarrow\frac{3^3}{3}+C=1\Leftrightarrow C=-8$ vậy $F(x)=\frac{x^3}{3}-8$ nên $F(4)=\frac{40}{3}$.

c) Đúng: $\int f(2x+1)dx=\int(2x+1)^2dx=\int(4x^2+4x+1)dx=\frac{4}{3}x^3+2x^2+x+C$.

d) Sai: $\int[x.f(x-2)]dx=\int x.(x-2)^2dx=\int x.(x^2-4x+4)dx$

$=\int(x^3-4x^2+4x)dx=\frac{x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}+2x^2+C$

Câu 12: Cho hàm số $F(x)=x^2+x-6$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-6x+C$.

b) $f(1)+f(2)+...+f(49)+f(50)=2400$

c) Hàm số $G(x)$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ và $G(1)=3$ thì giá trị $G(4)=24$.

d) Hàm số $H(x-1)$ cũng là một nguyên hàm của $f(x-1)$ và $H(0)=3$ thì giá trị của biểu thức $H(2)-H(4)=6$.

Lời giải

a) Sai: Ta có $F'(x)=2x+1$

b) Sai: Ta có $f(1)+f(2)+...+f(49)+f(50)=3+5+...+101=\frac{(3+101).50}{2}=2600$.

c) Sai: Ta có $G(x)=x^2+x+C$ với $G(1)=3\Leftrightarrow1^2+1+C=3\Leftrightarrow C=1$

Khi đó $G(x)=x^2+x+1\Rightarrow G(4)=21$.

d) Sai: $H(x-1)=(x-1)^2+(x-1)+C=x^2-2x+1+x-1+C=x^2-x+C$ với $x=1$ ta có:

$H(0)=3\Leftrightarrow C=3$ nên $H(x-1)=x^2-x+3$; $H(2)=H(3-1)=9;H(4)=H(5-1)=23$

Khi đó: $H(2)-H(4)=9-23=-14$.

Câu 13: Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f(x)=\dfrac{x^2+5x-7}{x}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(x)=x+5-\dfrac{7}{x}$.

b) $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}+5x-7\ln|x|+C$.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(1)=5$. Khi đó ta tìm được hàm số $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+5x-7\ln|x|+\dfrac{1}{2}$.

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(1)=4$ và $G(3)+G(-9)=20$. Khi đó tìm được $G(-6)=a\ln 2+b\ln 3+c$, với a,b,c là các số hữu tỉ. Vậy $a+b+c=\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

a) Đúng: $f(x)=\dfrac{x^2+5x-7}{x}=x+5-\dfrac{7}{x}$.

b) Đúng: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(x+5-\dfrac{7}{x}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}+5x-7\ln|x|+C$.

c)Sai: Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(x+5-\dfrac{7}{x}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}+5x-7\ln|x|+C$.

Do $F(1)=5\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}+5+C=5\Leftrightarrow C=-\dfrac{1}{2}$ nên $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+5x-7\ln|x|-\dfrac{1}{2}$.

d) Sai: Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}+5x-7\ln|x|+C=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+5x-7\ln x+C_1 & khi\ x>0\\ \dfrac{x^2}{2}+5x-7\ln(-x)+C_2 & khi\ x<0\end{cases}$.

Do $\begin{cases}G(1)=4\\ G(3)+G(-9)=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=-\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{9}{2}+15-7\ln 3-\dfrac{3}{2}+\dfrac{81}{2}-45-14\ln 3+C_2=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=-\dfrac{3}{2}\\ C_2=21\ln 3+\dfrac{13}{2}\end{cases}$

Khi đó: $G(-6)=\dfrac{36}{2}-30-7\ln 6+21\ln 3+\dfrac{13}{2}=-7\ln 2+14\ln 3-\dfrac{11}{2}$.

Vậy $a+b+c=-7+14-\dfrac{11}{2}=\dfrac{3}{2}$.

Câu 14: Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f(x)=\dfrac{(x+1)(3x-2)}{x}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(x)=3x+5-\dfrac{2}{x}$

b) $\int f(x)\mathrm{d}x=3+x-2\ln|x|+C$.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(3)=15$. Khi đó ta tìm được $F(x)=\dfrac{3x^2}{2}+x-2\ln|x|+15$.

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(2)=1$ và $G(5)+G(-5)=10$. Khi đó tìm được $G(-10)=a\ln 2+b\ln 5+c$, với a,b,c là các số hữu tỷ. Vậy $a+b+c=75$.

Lời giải

a) Sai: $f(x)=\dfrac{(x+1)(3x-2)}{x}=\dfrac{3x^2+x-2}{x}=3x+1-\dfrac{2}{x}$.

b) Sai: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(3x+1-\dfrac{2}{x}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{3x^2}{2}+x-2\ln|x|+C$.

c) Sai: Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(3x+1-\dfrac{2}{x}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{3x^2}{2}+x-2\ln|x|+C$.

Do $F(3)=15\Leftrightarrow\dfrac{27}{2}+3-2\ln 3+C=15\Leftrightarrow C=2\ln 3-\dfrac{3}{2}$.

Vậy $F(x)=\dfrac{3x^2}{2}+x-2\ln|x|+2\ln 3-\dfrac{3}{2}$.

d) Đúng: Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{3x^2}{2}+x-2\ln|x|+C=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{2}+x-2\ln x+C_1 & khi\ x>0\\ \dfrac{3x^2}{2}+x-2\ln(-x)+C_2 & khi\ x<0\end{cases}$

Do $\begin{cases}G(2)=1\\ G(5)+G(-5)=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6+2+C_1=1\\ \dfrac{75}{2}+5-2\ln 5+C_1+\dfrac{75}{2}-5-2\ln 5+C_2=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=-7\\ C_2=4\ln 5-65\end{cases}$.

Nên $G(-10)=150-10-2\ln 10+4\ln 5-65=75-2\ln 2+2\ln 5=a\ln 2+b\ln 5+c$.

Vậy $a+b+c=-2+2+75=75$.

Câu 15: Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f(x)=\dfrac{3x^5-2x^3+x^2+5x+4}{x^3}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(x)=3x^2-2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}$.

b) $\int f(x)\mathrm{d}x=x^3-2x+\ln|x|-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}+C$.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(-1)=0$. Khi đó tìm được $F(x)=x^3-2x+\ln|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{3}{2}$.

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(1)=0$ và $G(-3)-G(3)=2$. Khi đó tìm được $G(-2)=\frac{a}{b}+\frac{1}{\log_c e}$, với a,b,c là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Vậy $a+b+c=1093$.

Lời giải

a) Đúng: $f(x)=\frac{3x^5-2x^3+x^2+5x+4}{x^3}=3x^2-2+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{4}{x^3}$.

b) Đúng: Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(3x^2-2+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)\mathrm{d}x=x^3-2x+\ln|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+C$.

c) Đúng: Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(3x^2-2+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)\mathrm{d}x=x^3-2x+\ln|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+C$

Do $F(-1)=0\Leftrightarrow C=-\frac{3}{2}$ nên $F(x)=x^3-2x+\ln|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{3}{2}$.

d) Sai: $\int f(x)\mathrm{d}x=x^3-2x+\ln|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+C=\begin{cases}x^3-2x+\ln x-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+C_1 & khi\ x>0\\ x^3-2x+\ln(-x)-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+C_2 & khi\ x<0\end{cases}$.

$$\begin{cases}G(1)=0\\ G(-3)-G(3)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=\frac{5}{2}\\ -27+6+\ln 3+\frac{1}{3}-\frac{1}{18}+C_2-27+6-\ln 3+\frac{1}{3}+\frac{1}{18}-\frac{5}{2}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=\frac{5}{2}\\ C_2=\frac{275}{6}\end{cases}$$

Nên $G(-2)=-8+4+\ln 2+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{275}{6}=\frac{1013}{24}+\frac{1}{\log_2 e}=\frac{a}{b}+\frac{1}{\log_c e}$.

Vậy $a+b+c=1013+24+2=1039$.

Câu 16: Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f(x)=\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(x)=1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}$.

b) $\int f(x)\mathrm{d}x=x-2\ln|x|+\frac{1}{x}+C$.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(3)=5$. Khi đó ta tìm được $F(x)=x-2\ln|x|-\frac{1}{x}+5$.

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(1)=5$ và $G(2)+G(-4)=2025$. Khi đó tìm được $F(-8)=\frac{a}{b}$, với a,b là các số nguyên và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Vậy $a+b=16123$.

Lời giải

a) Đúng: $f(x)=\left(\frac{x-1}{x}\right)^2=\frac{x^2-2x+1}{x^2}=1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}$.

b) Sai: Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=x-2\ln|x|-\frac{1}{x}+C$.

c) Sai: Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=x-2\ln|x|-\frac{1}{x}+C$.

Do $F(3)=5\Leftrightarrow 3-2\ln 3-\frac{1}{3}+C=5\Leftrightarrow C=2\ln 3+\frac{7}{3}$.

Vậy $F(x)=x-2\ln|x|-\frac{1}{x}+2\ln 3+\frac{7}{3}$.

d) Đúng: Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=x-2\ln|x|-\frac{1}{x}+C=\begin{cases}x-2\ln x-\frac{1}{x}+C_1 & khi\ \ x>0.\\ x-2\ln(-x)-\frac{1}{x}+C_2 & khi\ \ x<0.\end{cases}$

$$\begin{cases}G(1)=5\\ G(2)+G(-4)=2025\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=5\\ 2-2\ln 2-\frac{1}{2}+5-4-4\ln 2+\frac{1}{4}+C_2=2025\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=5\\ C_2=6\ln 2+\frac{8089}{4}\end{cases}$$

Nên $G(-8)=-8-6\ln 2+\frac{1}{8}+6\ln 2+\frac{8089}{4}=\frac{16115}{8}\Rightarrow a=16115;b=8$.

Vậy $a+b=16115+8=16123$.

Câu 17: Hàm hai số $f(x)$ và $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn: $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$ và $\int g(x)\mathrm{d}x=x+\ln|x|+C$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(x)=x+\frac{1}{x}$.

b) $g(x)=1+\frac{1}{x}+C$.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)+g(x)$ và thỏa mãn $F(-1)=3$. Khi đó tìm được $F(x)=x^2+2\ln|x|-\frac{1}{2}$.

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)+g(x)$. Biết $G(2)=2\ln 2$ và $G(4)+G(-4)=2$. Khi đó tìm được $G(-6)=a\ln 2+b\ln 3+c$, với a,b,c là các số thực. Vậy $a+b+c=-2$.

Lời giải

a) Đúng: $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}=x+\dfrac{1}{x}$.

b) Sai: Ta có $\int g(x)\mathrm{d}x=x+\ln|x|+C\Rightarrow g(x)=1+\dfrac{1}{x}$.

c) Sai: Ta có $f(x)+g(x)=x+1+\dfrac{2}{x}$.

Nên $\int\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=\int\left(x+1+\dfrac{2}{x}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}+x+2\ln|x|+C$.

Do $F(-1)=3\Leftrightarrow C=\dfrac{7}{2}$ nên $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+x+2\ln|x|+\dfrac{7}{2}$.

d) Đúng: Ta có $\int\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}+x+2\ln|x|+C=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+x+2\ln x+C_1 & khi\ x>0\\ \dfrac{x^2}{2}+x+2\ln(-x)+C_2 & khi\ x<0\end{cases}$.

Do $\begin{cases}G(2)=2\ln 2\\ G(4)+G(-4)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=-4\\ 8+4+4\ln 2-4+8-4+4\ln 2+C_2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=5\\ C_2=-8\ln 2-10\end{cases}$

Nên $G(-6)=18-6+2\ln 6-8\ln 2-10=2-6\ln 2+2\ln 3=a\ln 2+b\ln 3+c$.

Vậy $a+b+c=-6+2+2=-2$.

Câu 18: Cây cà chua khi trồng có chiều cao 5cm. Tốc độ tăng chiều cao của cây cà chua sau khi trồng được cho bởi hàm số $v(t)=-0{,}1t^3+t^2$, trong đó t tính theo tuần, $v(t)$ tính bằng cm/tuần. Gọi $h(t)$ (tính bằng cm) là độ cao của cây cà chua ở tuần thứ t. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $h(t)=\dfrac{-t^4}{40}+\dfrac{t^3}{3}$, với $t\ge 0$.

b) Chiều cao tối đa của cây cà chua đó là $88{,}4$ cm (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

c) Giai đoạn tăng trưởng của cây cà chua đó kéo dài trong 9 tuần.

d) Vào thời điểm cây cà chua đó phát triển nhanh nhất thì chiều cao cây cà chua đạt $54{,}4$ cm (kết quả được làm tròn đến hàng phần mười).

Lời giải

a) Sai: Ta có: $\int\left(-0,1t^3+t^2\right)\mathrm{d}t=\int-0,1t^3\ \mathrm{d}t+\int t^2\ \mathrm{d}t=\frac{-t^4}{40}+\frac{t^3}{3}+C$.

Do $h(t)$ là một nguyên hàm của $v(t)$ nên $h(t)=\frac{-t^4}{40}+\frac{t^3}{3}+C$

Cây cà chua khi trồng có chiều cao 5 cm nên $h(0)=5$ suy ra $C=5$.

Vậy $h(t)=\frac{-t^4}{40}+\frac{t^3}{3}+5, t\geq 0$.

b) Đúng: Ta chỉ cần tìm giá trị lớn nhất của $h(t)=\frac{-t^4}{40}+\frac{t^3}{3}+5$ với $t\in[0;10]$.

Ta có: $h'(t)=\frac{-t^3}{10}+t^2=\frac{t^2}{10}(-t+10)$ suy ra $h'(t)=0$ khi t bằng 0 hoặc 10.

Ta thấy $h(0)=5, h(10)=\frac{265}{3}$. Khi đó, $h(t)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{265}{3}$ trên đoạn $[0;10]$.

Vậy chiều cao tối đa của cây cà chua đó là $\frac{265}{3}\approx 88,3(\text{ cm})$.

c) Sai: Cây tăng trưởng khi $v(t)>0\Leftrightarrow -0,1t^3+t^2>0\Rightarrow t<10$.

Vậy giai đoạn tăng trưởng của cây kéo dài 10 tuần.

d) Đúng: Ta chỉ cần tìm giá trị lớn nhất của hàm số $v(t)=-0,1t^3+t^2$ với $t\in[0;10]$.

Ta có: $v'(t)=-0,3t^2+2t=-0,3t\left(t-\frac{20}{3}\right)$, suy ra $v'(t)=0$ khi t bằng 0 hoặc $\frac{20}{3}$.

Ta thấy $v(0)=0, v\left(\frac{20}{3}\right)=\frac{400}{27}, v(10)=0$.

Khi đó $v(t)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{400}{27}$ trên đoạn $[0;10]$ tại $t=\frac{20}{3}$.

Ta có: $h\left(\frac{20}{3}\right)=\frac{4405}{81}\approx 54,4$.

Câu 19: Một chiếc xe đang chuyển động đều với tốc độ $v_0=15 m/s$ thì gặp chướng ngại vật rồi phanh gấp với gia tốc không đổi là $a=-3\ m/s^2$. Kí hiệu $v(t)$ là tốc độ của xe, $a(t)$ là gia tốc xe, $s(t)$ là quãng đường xe đi được cho đến thời điểm t giây kể từ lúc phanh xe. Xét tính đúng – sai của các mệnh đề sau.

a) $v(t)=a'(t)$.

b) $a(t)=s''(t)$.

c) Tính từ lúc phanh xe, sau 4 giây thì xe dừng hẳn.

d) Quãng đường xe đi được tính từ lúc phanh xe đến khi dừng hẳn nằm trong khoảng từ 35 mét đến 40 mét.

Lời giải

a) Sai: $v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t$

b) Đúng: $a(t)=v'(t)=s''(t)$.

c) Sai: $v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\int -3\mathrm{d}t=-3t+C$.

$v(0)=-3.0+C=15\Rightarrow C=15$. Suy ra $v(t)=-3t+15$.

Xe dừng hẳn khi $v(t)=0\Rightarrow -3t+15=0\Rightarrow t=5$ giây.

d) Đúng: $s(t)=\int v(t)\mathrm{d}t=\int -3t+15\mathrm{d}t=\frac{-3}{2}t^2+15t+C$.

$s(0)=\frac{-3}{2}0^2+15.0+C=0\Rightarrow C=0\Rightarrow s(5)=37,5$ mét.

Câu 20: Trong thí nghiệm nuôi cấy một loại vi sinh vật, kí hiệu $f(t)$ là tổng số lượng vi sinh vật sau t giờ. Biết rằng sau 3 giờ đầu tiên thì tổng số lượng vi sinh vật là 50 con. Trong 7 giờ tiếp theo, số lượng vi sinh vật thay đổi với tốc độ $f'(t)=t^2-8t$ (con/giờ).

a) Họ nguyên hàm của $f'(t)$ là $\frac{t^3}{3}-8t^2+C$ $(C\in\mathbb{R})$.

b) Số lượng vi khuẩn tăng liên tục trong khoảng từ 3 giờ đến 10 giờ sau thời điểm làm thí nghiệm.

c) Số lượng vi khuẩn là nhỏ nhất sau 8 giờ tính từ lúc bắt đầu làm thí nghiệm.

d) Sau 6 giờ thì số lượng vi khuẩn là 5 con.

Lời giải

a) Sai: Ta có: $\int\left(t^2-8t\right)\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}-4t^2+C$.

b) Sai: Ta có: $f'(t)>0$ khi $8<t<10$ và $f'(t)<0$ khi $3<t<8$.

Nên số lượng vi sinh vật giảm trong khoảng từ 3 giờ đến 8 giờ, sau đó tăng dần trong khoảng 8 giờ đến 10 giờ.

c) Đúng: Bảng biến thiên của $f(t)$:

t	3		8		10
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘	$f(8)$	↗	

d) Đúng: $f(t)=\frac{t^3}{3}-4t^2+C$. Do $f(3)=50\Rightarrow\frac{3^3}{3}-4.3^2+C=50\Rightarrow C=77$.

Suy ra $f(t)=\frac{1}{3}t^3-4t^2+77\Rightarrow f(6)=5$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Người ta truyền nhiệt cho một bình nuôi cấy vi sinh vật từ $1°C$. Tốc độ tăng nhiệt độ của bình tại thời điểm t phút $(0\le t\le 5)$ được cho bởi hàm số $f(t)=3t^2$ ($°C$/ phút). Biết rằng nhiệt độ của bình đó tại thời điểm t là một nguyên hàm của hàm số $f(t)$. Tìm nhiệt độ của bình tại thời điểm 3 phút kể từ khi truyền nhiệt.

Lời giải

Ta có nhiệt độ của bình là $F(t)=\int f(t)\mathrm{d}t=\int 3t^2\ \mathrm{d}t=t^3+C$.

Vì người ta bắt đầu truyền nhiệt cho bình nuôi cấy từ $1°C$ nên ta có:

$F(0)=1\Leftrightarrow C=1\Rightarrow F(t)=t^3+1(°C)$

Vậy nhiệt độ của bình tại thời điểm 3 phút kể từ khi truyền nhiệt là $F(3)=3^3+1=28(°C)$.

Câu 2: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t)=6at^2+2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là $90\ \mathrm{m}^3$ và sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là $504\ \mathrm{m}^3$. Tính thể tích nước trong bể sau khi bơm được 9 giây.

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $h(t)=\int\left(6at^2+2bt\right)\mathrm{d}x=2at^3+bt^2+c$.

Lại có $h(0)=0;h(3)=90;h(6)=504$ nên suy ra $\begin{cases}c=0\\54a+9b=90\\432a+36b=504\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{2}{3}\\b=6\\c=0\end{cases}$.

Vậy $h(t)=\frac{4}{3}t^3+6t^2\Rightarrow h(9)=1458\ \mathrm{m}^3$.

Câu 3: Tốc độ tăng trưởng của một đàn gấu mèo tại thời điểm t tháng kể từ khi người ta thả 100 cá thể đầu tiên vào một khu rừng được ước lượng bởi công thức $P'(t)=8t+30$ (con/tháng), với $P(t)$ là số lượng cá thể trong đàn tại thời điểm t tháng tương ứng. Dựa vào tốc độ tăng trưởng đã cho,

hãy ước tính số cá thể của đàn gấu mèo này tại thời điểm 3 tháng kể từ khi chúng được thả vào rừng.

Lời giải

Số lượng cá thể trong đàn gấu mèo tại thời điểm t tháng là

$$P(t)=\int P'(t)\mathrm{d}t=\int(8t+30)\mathrm{d}t=4t^2+30t+C(\text{con})$$

Vì ban đầu thả 100 cá thể gấu mèo nên $P(0)=100\Leftrightarrow C=100\Rightarrow P(t)=4t^2+30t+100$ (con).

Suy ra số cá thể của đàn gấu mèo này tại thời điểm 3 tháng kể từ khi chúng được thả vào rừng là

$$P(3)=4.3^2+30.3+100=226(\text{ con})$$

Câu 4: Cường độ dòng điện (đơn vị: A) trong một dây dẫn tại thời điểm t giây là:

$$I(t)=Q'(t)=3t^2-6t+5$$

Với $Q(t)$ là điện lượng (đơn vị: C) truyền trong dây dẫn tại thời điểm t. Biết khi $t=1$ giây thì điện lượng truyền trong dây dẫn là $Q(1)=4$. Tính diện lượng truyền trong dây dẫn khi $t=3$.

Lời giải

Ta có: $Q(t)=\int Q'(t)\mathrm{d}t=\int(3t^2-6t+5)\mathrm{d}t=t^3-3t^2+5t+C$.

Vì $Q(1)=4\Rightarrow 1-3+5+C=4\Leftrightarrow C=1\Rightarrow Q(t)=t^3-3t^2+5t+1$.

Suy ra điện lượng truyền trong dây dẫn khi $t=3$ là $Q(3)=3^3-3.3^2+5.3+1=16(\mathrm{C})$.

Câu 5: Một chất điểm thực hiện chuyển động thẳng trên trục Ox, với vận tốc cho bởi công thức $v(t)=3t^2+4t(\mathrm{m/s})$ với t là thời gian. Biết rằng tại thời điểm bắt đầu của chuyển động, chất điểm đang ở vị trí có tọa độ $x=1$. Tọa độ của chất điểm sau 1 giây chuyển động là bao nhiêu?

Lời giải

Phương trình tọa độ của chất điểm là nguyên hàm của phương trình vận tốc nên ta có:

$$x(t)=\int v(t)\mathrm{d}t=\int(3t^2+4t)\mathrm{d}t=t^3+2t^2+C$$

Tại thời điểm bắt đầu của chuyển động, chất điểm đang ở vị trí có tọa độ $x=1$ nên khi $t=0$ có $C=1\Rightarrow x(t)=t^3+2t^2+1$.

Tọa độ của chất điểm sau 1 giây chuyển động là $x=4$.

Câu 6: Một chất điểm chuyển động trên đường thẳng nằm ngang với gia tốc phụ thuộc thời gian $t(\mathrm{s})$ là $a(t)=2t-7\left(\mathrm{m/s^2}\right)$. Biết vận tốc đầu bằng 10 m/s, hỏi sau bao lâu thì chất điểm đạt vận tốc 18 m/s?

Lời giải

Ta có $v(t)=\int(2t-7)\mathrm{d}t=t^2-7t+C$.

Vận tốc ban đầu bằng $10(\text{m/s})$ nên $v(0)=10 \Leftrightarrow C=10 \Rightarrow v(t)=t^2-7t+10$.

Chất điểm đạt vận tốc $18(\text{m/s})$ khi và chỉ khi $t^2-7t+10=18 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \text{ (loai)} \\ t=8. \end{array}\right.$

Vậy sau 8s thì chất điểm đạt vận tốc $18(\text{m/s})$.

Câu 7: Một viên đạn được bắn lên trời với vận tốc là $72(\text{m/s})$ bắt đầu từ độ cao 2m. Hãy xác định chiều cao của viên đạn sau thời gian $5s$ kể từ lúc bắn biết gia tốc trọng trường là $9{,}8\left(\text{m/s}^2\right)$

Lời giải

Ta có vận tốc của viên đạn tại thời điểm t là: $v(t)=\int -9{,}8dt=-9{,}8t+C_1$

Do $v(0)=72$ nên $v(0)=-9{,}8.0+C_1=72 \Leftrightarrow C_1=72 \Rightarrow v(t)=-9{,}8t+72$.

Độ cao của viên đạn tại thời điểm t là:

$$s(t)=\int v(t)dt=\int(-9{,}8t+72)dt=-4{,}9t^2+72t+C_2$$

Vì $s(0)=2$ nên $s(0)=-4{,}9.0^2+72.0+C_2=2 \Leftrightarrow C_2=2 \Rightarrow s(t)=-4{,}9t^2+72t+2$.

Vậy sau khoảng thời gian 5s kể từ lúc bắn, viên đạn ở độ cao

$$s(5)=-4{,}9.5^2+72.5+2=239{,}5(\text{m}).$$

Câu 8: Một vật đang chuyển động với vận tốc 6 m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=\dfrac{3}{t+1}\left(\text{m/s}^2\right)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc. Hỏi vận tốc của vật sau 10 giây gần nhất với kết quả nào sau đây?

Lời giải

Ta có $v(t)=\int \dfrac{3}{t+1}\,\text{d}t=3\ln|t+1|+C$.

Tại thời điểm lúc bắt đầu tăng tốc $t=0$ thì $v=6\text{ m/s}$ nên ta có $3\ln 1+C=6 \Leftrightarrow C=6$.

Suy ra $v(t)=3\ln|t+1|+6\text{ m/s}$.

Tại thời điểm $t=10s \Rightarrow v(10)=3\ln 11+6\approx 13\text{ m/s}$.

Câu 9: Tốc độ phát triển của số lượng vi khuẩn trong hồ bơi được mô hình bởi hàm số $B'(t)=\dfrac{1000}{(1+0{,}3t)^2}$ với $t\geq 0$, trong đó $B(t)$ là số lượng vi khuẩn trên mỗi ml nước tại ngày thứ t. Số lượng vi khuẩn ban đầu là 500 con trên mỗi ml nước. Biết rằng mức độ an toàn cho người sử dụng hồ bơi là số vi khuẩn phải dưới 3000 con trên mỗi ml nước. Hỏi sau bao nhiêu ngày thì người ta phải xử lí và thay nước mới cho hồ bơi.

Lời giải

Theo giả thiết thì số lượng vi khuẩn tăng với tốc độ là hàm số $B'(t)$ nên $B(t)$ chính là nguyên hàm của $B'(t)$:

Khi đó: $B(t)=\int B'(t)\mathrm{dt}=\int\frac{1000}{(1+0,3t)^2}\mathrm{dt}=1000\int(1+0,3t)^{-2}\mathrm{dt}=-\frac{1000}{0,3(1+0,3t)}+C$

Số lượng vi khuẩn lúc ban đầu là 500 con trên mỗi ml nước nên:

$B(0)=500\Leftrightarrow-\frac{1000}{0,3(1+0,3.0)}+C=500\Leftrightarrow C=\frac{11500}{3}.$

Suy ra hàm số biểu thị cho số lượng vi khuẩn tại ngày thứ t là: $B(t)=-\frac{1000}{0,3(1+0,3t)}+\frac{11500}{3}.$

Số lượng vi khuẩn dưới 3000 con trên mỗi ml nước thì người bơi vẫn an toàn, ta có:

$B(t)<3000\Leftrightarrow-\frac{1000}{0,3(1+0,3t)}+\frac{11500}{3}<3000$

$\Leftrightarrow-\frac{1000}{0,3(1+0,3t)}<-\frac{2500}{3}\Leftrightarrow1+0,3t<4\Leftrightarrow t<10.$

Vậy vào ngày thứ 10 hồ bơi không còn an toàn, cần phải thay nước mới.

Câu 10: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t)=3at^2+bt\ \left(m^3/s\right)$ và ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là $150m^3$. Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $1100m^3$. Hỏi thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây.

Lời giải

Ta có: $h'(t)=3at^2+bt$

Suy ra $h(t)=\int\left(3at^2+bt\right)dt=at^3+\frac{1}{2}bt^2+C\Rightarrow h(t)=at^3+\frac{1}{2}bt^2+C$

Chọn $t=0\Rightarrow h(0)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow h(t)=at^3+\frac{1}{2}bt^2$

Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là $150m^3$: $h(5)=150\Leftrightarrow125a+\frac{25}{2}b=150$

Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $1100m^3$: $h(10)=1100\Leftrightarrow1000a+50b=1100$

Ta có hệ: $\begin{cases}125a+\frac{25}{2}b=150\\1000a+50b=1100\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}\Rightarrow h(t)=t^3+t^2$

Nên thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây là $h(20)=20^3+20^2=8400m^3$

----------HẾT----------

Dạng 2: Nguyên hàm của hàm số lượng giác

Các công thức thường dùng:

⊕ $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$ ⊕ $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$

⊕ $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + C$ ⊕ $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\cot x + C$

Chú ý các công thức biến đổi lượng giác:

⊕ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ⊕ $\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ ⊕ $\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$

⊕ $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ ⊕ $\sin 2x = 2\sin x.\cos x$ ⊕ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

⊕ $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ ⊕ $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)$, biết:

a) $f(x) = 4x + 3\cos x$ b) $f(x) = 2x + \frac{1}{\sin^2 x}$

c) $f(x) = \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2$ d) $f(x) = \sin 3x$

e) $f(x) = \cos(2x+3)$ f) $f(x) = \cos 5x.\cos x$

Lời giải

a) Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \int (4x + 3\cos x)\mathrm{d}x = \frac{4x^2}{2} + 3\sin x + C = 2x^2 + 3\sin x + C$.

b) Ta có $\int \left(2x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x = x^2 - \cot x + C$.

c) $\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 = \sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 1 + \sin x$

Do đó: $\int \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x + \int \sin x\,\mathrm{d}x = x - \cos x + C$

d) Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \int \sin 3x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\cos 3x + C$.

e) Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin(2x+3) + C$

f) Ta có $\int \cos 5x\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (\cos 4x + \cos 6x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{6}\sin 6x\right) + C$.

Bài tập 2: Tìm

a) $\int(2\sin x-3\cos x)\mathrm{d}x$

b) $\int\cos^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$

c) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos^2 x}$

d) $\int(\sin x+\cos x)^2\mathrm{d}x$

e) $\int\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$ trên $(0;\pi)$

f) $\int 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x$

Lời giải

a) Ta có $\int(2\sin x-3\cos x)\mathrm{d}x=2\int\sin x\mathrm{d}x-3\int\cos x\mathrm{d}x=-2\cos x-3\sin x+C$.

b) Ta có $\int\cos^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(1+\cos x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(x+\sin x)+C$.

c) Ta có $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}+\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}=\tan x-\cot x+C$.

d) $\int(\sin x+\cos x)^2\mathrm{d}x=\int(\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x)\mathrm{d}x=\int(1+\sin 2x)\mathrm{d}x=x-\frac{1}{2}\cos 2x+C$.

e) Vì $(-\cot x)'=\frac{1}{\sin^2 x}$, với mọi x thuộc $(0;\pi)$ nên $F(x)=-\cot x$ là một nguyên hàm của $\frac{1}{\sin^2 x}$ trên $(0;\pi)$ nên $\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\cot x+C$ trên $(0;\pi)$.

f) Ta có $\int 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\int\sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$

Bài tập 3: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=2-5\sin x$ và $f(0)=10$. Tìm hàm $f(x)$.

Lời giải

Ta có $f(x)=\int(2-5\sin x)\mathrm{d}x=2x+5\cos x+C$.

Mà $f(0)=10\Rightarrow C=5$ nên $f(x)=2x+5\cos x+5$.

Bài tập 4: Cho $F(x)=\cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\tan x$. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $g(x)=\frac{\tan x}{f'(x)}$.

Lời giải

Ta có: $F'(x)=-2\sin 2x=-4\sin x\cos x$

Vì $F(x)=\cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\tan x$ nên:

$F'(x)=f(x).\tan x\Leftrightarrow -4\sin x\cos x=f(x).\tan x\Leftrightarrow f(x)=-4\cos^2 x$

Suy ra $f'(x)=8\sin x\cos x$

Vậy $\int g(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\tan x}{f'(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{\tan x}{8\sin x\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{8\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\tan x+C$

Bài tập 5: Một vật chuyển động với vận tốc là $v(t)=\frac{1}{2\pi}+\frac{\sin(\pi t)}{\pi}(\mathrm{m/s})$. Gọi S_1 là quãng đường vật đó đi trong 2 giây đầu và S_2 là quãng đường đi từ giây thứ 3 đến giây thứ 5. Chứng minh $S_2 > S_1$?

Lời giải

Gọi thời điểm ban đầu $S(0)=0; t=0; S=0 \Rightarrow S_1 = S(2)$

Khi đó: $S(t)=\int\left(\frac{1}{2\pi}+\frac{\sin(\pi t)}{\pi}\right)dt=\frac{1}{2\pi}t-\frac{1}{\pi^2}\cos(\pi t)+C$

Ta có: $S(0)=0 \Rightarrow C-\frac{1}{\pi^2}=0 \Rightarrow C=\frac{1}{\pi^2}$

Suy ra $S(t)=\frac{1}{2\pi}-\frac{1}{\pi^2}\cos(\pi t)+\frac{1}{\pi^2}$

$S_1=S(2)=\frac{1}{2\pi}-\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{\pi^2}=\frac{1}{2\pi}\approx 0{,}159$; $S_2=\int_3^5 v(t)dt=0{,}31 \Rightarrow S_2 > S_1$ (đpcm).

Bài tập 6: Một vật chuyển động với gia tốc phụ thuộc vào thời gian theo công thức $a(t)=\sin\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)$. Biết tại thời điểm $t=0$ thì vận tốc và quãng đường đi được của vật đều bằng 0. Thiết lập công thức tính quãng đường đi được của vật đó theo thời gian

Lời giải

Vận tốc của vật tại thời điểm t là: $v(t)=\int a(t)dt=\int\sin\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)dt=-\frac{1}{2}\cos\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)+C$.

Ta có: $v(0)=0 \Leftrightarrow C=\frac{1}{4} \Rightarrow v(t)=-\frac{1}{2}\cos\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{4}$.

$\Rightarrow s(t)=\int\left(-\frac{1}{2}\cos\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{4}\right)dt=-\frac{1}{4}\sin\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{4}t+D$.

Khi đó: $s(0)=0 \Leftrightarrow D=\frac{\sqrt{3}}{8}$ nên ta suy ra $s(t)=-\frac{1}{4}\sin\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{4}t+\frac{\sqrt{3}}{8}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=3\cos x-4\sin x$ là:

A. $3\sin x-4\cos x$.
B. $-3\sin x+4\cos x$.
C. $3\sin x+4\cos x+C$.
D. $-3\sin x+4\cos x+C$.

Lời giải

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int(3\cos x-4\sin x)\mathrm{d}x=3\int\cos x\mathrm{d}x-4\int\sin x\mathrm{d}x=3\sin x-4\cos x+C.$$

Câu 2: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=2\sin x+\dfrac{3}{\sin^2 x}$ là:

A. $-2\cos x-3\cot x+C$.
B. $2\cos x-3\tan x+C$.
C. $-2\cos x+3\cot x+C$.
D. $2\cos x-3\cot x+C$.

Lời giải

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(2\sin x+\dfrac{3}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x=2\int\sin x\mathrm{d}x+3\int\dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=-2\cos x-3\cot x+C.$

Câu 3: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\left(\cos\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{2}\right)^2$ là:

A. $\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}+C$.
B. $x-\cos x+C$.
C. $\left(\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}\right)^2+C$.
D. $\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}+C$.

Lời giải

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(\cos\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\int\left(\cos^2\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}+2\cos\dfrac{x}{2}.\sin\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$

$=\int(1+\sin x)\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}x+\int\sin x\mathrm{d}x=x-\cos x+C.$

Câu 4: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=2\cos^2\dfrac{x}{2}$ là:

A. $4\cos\dfrac{x}{2}+C$.
B. $x+\sin x+C$.
C. $2\sin^2\dfrac{x}{2}+C$.
D. $\dfrac{2}{3}\cos^3\dfrac{x}{2}+C$.

Lời giải

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int 2\cos^2\dfrac{x}{2}\mathrm{d}x=\int(1+\cos x)\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}x+\int\cos x\mathrm{d}x=x+\sin x+C.$

Câu 5: Nguyên hàm của hàm số có $f(x)=\tan^2 x+\cot^2 x$ là:

A. $2\tan x+2\cot x+C$. **B.** $\frac{1}{3}\tan^3 x+\frac{1}{3}\cot^3 x+C$.

C. $=\tan x+\cot x-2x+C$. **D.** $\tan x-\cot x-2x+C$.

Lời giải

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\tan^2 x\mathrm{d}x+\int\cot^2 x\mathrm{d}x=\int\left(1+\tan^2 x-1\right)\mathrm{d}x+\int\left(1+\cot^2 x-1\right)\mathrm{d}x$

$=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}x+\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x-2\int\mathrm{d}x$

$=\tan x-\cot x-2x+C$.

Câu 6: Hàm số nào dưới đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x+\sin(2x+1)$?

A. $F(x)=\frac{1}{2}x^2-\cos(2x+1)$. **B.** $F(x)=\frac{1}{2}x^2-2\cos(2x+1)$.

C. $F(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\cos(2x+1)$. **D.** $F(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\cos(2x+1)$.

Lời giải

$\left(\frac{1}{2}x^2-\cos(2x+1)\right)'=x+2\sin(2x+1)$.

$\left(\frac{1}{2}x^2-2\cos(2x+1)\right)'=x+4\sin(2x+1)$.

$\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\cos(2x+1)\right)'=x-\sin(2x+1)$.

$\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\cos(2x+1)\right)'=x+\sin(2x+1)$.

Vậy $F(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\cos(2x+1)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x+\sin(2x+1)$.

Câu 7: Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=2\sin x-\cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ là

A. $F(x)=2\cos x-\sin x-1$. **B.** $F(x)=2\cos x+\sin x-1-\sqrt{3}$.

C. $F(x)=-2\cos x-\sin x+1$. **D.** $F(x)=-2\cos x-\sin x-1$.

Lời giải

$F(x)=\int(2\sin x-\cos x)\mathrm{d}x=-2\cos x-\sin x+C$.

$F\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}+C=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow C=1$.

Vậy $F(x)=-2\cos x-\sin x+1$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{\cos^2 x}$. Chọn khẳng định đúng:

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = \ln|x| + \tan x + C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x = \ln x + \tan x + C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = \ln x + \tan|x| + C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x = \ln|x| + \tan x$.

Lời giải

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x = \int\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x = \ln|x| + \tan x + C$

Câu 9: Khẳng định nào đây sai?

A. $\int \sin x\ \mathrm{d}x = -\cos x + C$. **B.** $\int \cos x\ \mathrm{d}x = -\sin x + C$.

C. $\int \cos x\ \mathrm{d}x = \sin x + C$. **D.** $\int \cos x\ \mathrm{d}x = -\tan x + C$.

Lời giải

Ta có: $\int \cos x\ \mathrm{d}x = -\sin x + C$

Câu 10: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$ là

A. $x^3 - \cos x + C$. **B.** $6x - \cos x + C$. **C.** $x^3 + C$. **D.** $x^3 + \sin x + C$.

Lời giải

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \int\left(3x^2 + \sin x\right)\mathrm{d}x = x^3 - \cos x + C$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5\cos x$ và $f(0) = 5$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(x) = 3x - 5\sin x - 5$. **B.** $f(x) = 3x + 5\sin x + 5$.

C. $f(x) = 3x + 5\sin x + 2$. **D.** $f(x) = 3x - 5\sin x + 5$.

Lời giải

Ta có $f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x = \int(3 - 5\cos x)\mathrm{d}x = 3x - 5\sin x + C$.

Ta lại có: $f(0) = 5 \Rightarrow 3\cdot 0 - 5\sin 0 + C = 5 \Leftrightarrow C = 5$.

Vậy $f(x) = 3x - 5\sin x + 5$.

Câu 12: Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + 2\cos x$ biết $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ là

A. $F(x) = -2\sin x - \cos x + 2$. **B.** $F(x) = 2\sin x - \cos x + 2$.

C. $F(x) = \sin x - 2\cos x - 2$. **D.** $F(x) = 2\sin x - \cos x - 2$.

Lời giải

Ta có $\int(\sin x + 2\cos x)\mathrm{d}x = -\cos x + 2\sin x + C$.

Do $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ nên $C = -2$ nên $F(x) = 2\sin x - \cos x - 2$.

Câu 13: Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \frac{1}{\cos^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ là

A. $-\cos x + \tan x - \sqrt{2} + 1$. **B.** $-\cos x + \tan x + \sqrt{2} - 1$.

C. $\cos x+\tan x+\sqrt{2}-1$. **D.** $-\cos x+\tan x+C$.

Lời giải

Ta có $F(x)=\int\left(\sin x+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x=-\cos x+\tan x+C$.

Vì $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ nên $C=\sqrt{2}-1$ nên $F(x)=-\cos x+\tan x+\sqrt{2}-1$.

Câu 14: Tìm $\int\sin 5x\,\mathrm{d}x$.

A. $\int\sin 5x\,\mathrm{d}x=-5\cos 5x+C$. **B.** $\int\sin 5x\,\mathrm{d}x=-\cos 5x+C$.

C. $\int\sin 5x\,\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{5}\cos 5x+C$. **D.** $\int\sin 5x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{5}\cos 5x+C$.

Lời giải

Ta có $\int\sin 5x\,\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{5}\cos 5x+C$.

Câu 15: Với C là hằng số, họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=2\cos 2x$ là

A. $\sin 2x+C$. **B.** $2\sin 2x+C$. **C.** $-2\sin 2x+C$. **D.** $-\sin 2x+C$.

Lời giải

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int 2\cos 2x\,\mathrm{d}x=\sin 2x+C$.

Câu 16: Tìm $\int\dfrac{\cos 2x}{\sin^2 x.\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

A. $\cos x+\sin x+C$. **B.** $-\cos x-\sin x+C$.

C. $-\cot x-\tan x+C$. **D.** $\cot x-\tan x+C$.

Lời giải

$$\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x.\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x.\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x=-\cot x-\tan x+C.$$

Câu 17: Nguyên hàm của hàm số $y=\tan^2 x$ là

A. $\tan x-x+C$. **B.** $-\tan x-x+C$.

C. $-\tan x+x+C$. **D.** $\tan x+x+C$.

Lời giải

Ta có $\int\tan^2 x\,\mathrm{d}x=\int\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}x=\tan x-x+C$.

Câu 18: Biết $\int(2\sin x+\cos x)^2\,\mathrm{d}x=a\sin 2x-\cos 2x+bx+C$, với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính a^2+b^2.

A. $\dfrac{17}{2}$. **B.** $\dfrac{109}{4}$. **C.** $\dfrac{17}{16}$. **D.** $\dfrac{109}{16}$.

Lời giải

Từ giả thiết, áp dụng định nghĩa nguyên hàm ta được:

$$(a\sin 2x-\cos 2x+bx+C)'=(2\sin x+\cos x)^2=2\sin 2x-\frac{3}{2}\cos 2x+\frac{5}{2}$$

Ta có $\left(a\sin 2x-\cos 2x+bx+C\right)'=2a\cos 2x+2\sin 2x+b$.

Đối chiếu kết quả đồng nhất ta được $\begin{cases}2a=-\dfrac{3}{2}\\ b=\dfrac{5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{3}{4}\\ b=\dfrac{5}{2}\end{cases}$

Câu 19: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của của hàm số $f(x)=\sin x$ và đồ thị hàm số $y=F(x)$ đi qua điểm $M(0;1)$. Tính $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$. **B.** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$. **C.** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$. **D.** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$.

Lời giải

Theo bài ra $f(x)=\sin x$ nên $F(x)=-\cos x+C$, với C là hằng số tùy ý.

Đồ thị hàm số $y=F(x)$ đi qua điểm $M(0;1)$ nên $1=-\cos 0+C\Leftrightarrow C=2$

$\Rightarrow F(x)=-\cos x+2$. Do đó $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\int\sin x\mathrm{d}x=\cos x$.

b) $\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$.

c) $\tan x+1$ là một nguyên hàm của hàm số $y=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

d) $\cot(x+1)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Lời giải

a) Sai: $\int\sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$.

b) Đúng: $\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$

c) Đúng: Do $(\tan x+1)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ nên $\tan x+1$ là một nguyên hàm của hàm số $y=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

d) Sai: Do $\left[\cot(x+1)\right]'=-\dfrac{1}{\sin^2(x+1)}$ nên $\cot(x+1)$ không phải là một nguyên hàm của hàm số $y=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=\cos^2 x$ và $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $F'(x)=\sin 2x$

b) $F(x)=\int\dfrac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x$

c) $\dfrac{\sin x\cos x+x}{2}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$

d) Biết $F(0)=0$. Suy ra $F(\pi)=\pi$.

Lời giải

a) Sai: $F'(x)=f(x)=\cos^2 x$.

b) Đúng: Do $f(x)=\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$

c) Đúng: $\left(\dfrac{\sin x\cos x+x}{2}\right)'=\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x+1}{2}=\dfrac{2\cos^2 x}{2}=\cos^2 x$.

d) Sai: Do $\dfrac{\sin x\cos x+x}{2}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên $F(x)=\dfrac{\sin x\cos x+x}{2}+C$

Ta lại có $F(0)=C=0\Rightarrow F(x)=\dfrac{\sin x\cos x+x}{2}\Rightarrow F(\pi)=\dfrac{\pi}{2}$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=\tan^2 x$ và $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $F'(x)=\tan^2 x$.

b) $\tan x$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

c) $F(x)=\int\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}x$.

d) Biết $F(0)=0\Rightarrow F(\pi)=0$.

Lời giải

a) Đúng: Vì $F'(x)=f(x)=\tan^2 x$

b) Sai: Ta có $(\tan x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\tan^2 x+1$

c) Đúng: Do $\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1$ nên $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\tan^2 x\mathrm{d}x=\int\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}x$.

d) Sai: Ta có $F(x)=\int\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}x=\tan x-x+C$.

Khi đó $F(0)=C=0\Rightarrow F(x)=\tan x-x\Rightarrow F(\pi)=-\pi$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=\sin x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau :

a) Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = -\cos x + C$, với C là hằng số.

b) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(\pi)=1$. Khi đó ta có $F(0)=-1$.

c) Ta có $\int F(x)\mathrm{d}x = \sin x + C_1$, với C_1 là hằng số.

d) Phương trình $F(x)=f(x)$ có đúng 4 nghiệm trên đoạn $[0;4\pi]$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$.

b) Đúng: Từ giả thiết, ta được $-\cos\pi + C = 1 \Leftrightarrow 1 + C = 1 \Leftrightarrow C = 0$

Suy ra $F(x) = -\cos x \Rightarrow F(0) = -1$.

c) Sai: Ta có $\int F(x)\mathrm{d}x = -\int \cos x\,\mathrm{d}x = -\sin x + C_1$.

d) Đúng: Ta có $F(x)=f(x) \Leftrightarrow -\cos x = \sin x \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{-\pi}{4} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Ta xét $0 \le \dfrac{-\pi}{4} + k\pi \le 4\pi \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} \le k \le \dfrac{17}{4}$. Vì $k\in\mathbb{Z}$ nên $k\in\{1;2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$.

Tức là phương trình đã cho có đúng 4 nghiệm thuộc đoạn $[0;4\pi]$.

Câu 5: Đặt $F(x) = \int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Ta có $F(x) = -\cot x + C$, với C là hằng số.

b) Biết rằng, $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$. Khi đó, ta có $F(x) = 1 - \cot x$.

c) Hàm số $F(x)$ là hàm số chẵn trên tập xác định của $F(x)$.

d) Phương trình $F(x)=0$ có các nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$, với $k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có $F(x) = \int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\cot x + C$.

b) Đúng: Từ giả thiết, ta được $C - \cot\dfrac{\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow C = 1$ nên $F(x) = 1 - \cot x$.

c) Sai: Ta thấy $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0,\ F\left(\dfrac{-\pi}{4}\right) = 2$ nên $F\left(\dfrac{-\pi}{4}\right) \ne \pm F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ nên hàm số đã cho không là hàm chẵn mà cũng không là hàm lẻ trên tập xác định của $F(x)$.

d) Sai: Ta có $F(x)=0 \Leftrightarrow 1-\cot x=0 \Leftrightarrow \cot x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Câu 6: Đặt $F(x)=\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x$ và thỏa mãn $F(0)=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Ta có $F(x)=-x+\tan x$.

b) Ta thấy hàm số $F(x)$ là hàm số chẵn trên tập xác định của $F(x)$.

c) Hàm số $F(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

d) Phương trình $F(x)+x=0$ có các nghiệm là $x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có $F(x)=\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}x=\tan x-x+C$.

Mặt khác $F(0)=0$ nên ta có $C=0$ nên $F(x)=-x+\tan x$.

b) Sai: Ta thấy rằng $F(-x)=x-\tan x=-F(x)$ nên hàm số đã cho là hàm lẻ trên mỗi khoảng xác định của $F(x)$.

c) Đúng: Ta có $F'(x)=\tan^2 x\geq 0$ với mọi x thuộc tập xác định của $F(x)$ nên hàm số $F(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

d) Đúng: Ta có $F(x)+x=0 \Leftrightarrow -x+\tan x+x=0 \Leftrightarrow \tan x=0 \Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=\sin x+\cos x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Ta có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\sin x-\cos x+C$, với C là hằng số.

b) Biết rằng, $F(0)=-1$. Khi đó, $F(x)=\sin x-\cos x$.

c) Hàm số $F(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(0\,;\,\frac{\pi}{2}\right)$.

d) Hàm số $F(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất là -2.

Lời giải

a) Đúng: Ta có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int(\sin x+\cos x)\mathrm{d}x=-\cos x+\sin x+C$.

b) Từ giả thiết, ta được $\sin 0-\cos 0+C=-1 \Leftrightarrow C=0$ nên $F(x)=\sin x-\cos x$.

c) Ta có $F'(x)=\sin x+\cos x>0,\ \forall x\in\left(0\,;\,\frac{\pi}{2}\right)$ nên $F(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(0\,;\,\frac{\pi}{2}\right)$.

d) Ta thấy $\begin{cases}\sin x\geq -1\\ -\cos x\geq -1\end{cases}\Rightarrow F(x)=\sin x-\cos x\geq -2$.

Trong đó có $F(x)=-2 \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x=-1\\ \cos x=1\end{cases} \Rightarrow \sin^2 x+\cos^2 x=2\neq 1$.

Từ đó suy ra hàm số không đạt giá trị nhỏ nhất là -2.

Câu 8: Đặt $F(x)=-\int \sin x\,\mathrm{d}x$ và thỏa mãn $F(0)=1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Ta có $F(x)=\cos x$.

b) Ta thấy hàm số $F(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$.

c) Ta thấy $F(\alpha)=\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha},\ \forall \alpha\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

d) Ta có $F\left(\dfrac{\pi}{2^{2025}}\right)\cdot F\left(\dfrac{\pi}{2^{2024}}\right)\cdot F\left(\dfrac{\pi}{2^{2023}}\right)\cdots F\left(\dfrac{\pi}{2^3}\right)\cdot F\left(\dfrac{\pi}{2^2}\right)=\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{2^{2025}}}$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có $F(x)=-\int \sin x\,\mathrm{d}x=\cos x+C$. Mà $F(0)=1$ nên ta có $C=0\Rightarrow F(x)=\cos x$.

b) Sai: Ta thấy rằng, $F(-x)=\cos(-x)=\cos x=F(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên $F(x)$ là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$.

c) Sai: Ta thấy $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}$ hay $F(\alpha)=\cos\alpha=\dfrac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}$.

d) Sai: Ta có $F\left(\dfrac{\pi}{2^{2025}}\right)\cdot F\left(\dfrac{\pi}{2^{2024}}\right)\cdot F\left(\dfrac{\pi}{2^{2023}}\right)\cdots F\left(\dfrac{\pi}{2^3}\right)\cdot F\left(\dfrac{\pi}{2^2}\right)$

$=\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2^{2024}}}{2\sin\dfrac{\pi}{2^{2025}}}\cdot\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2^{2023}}}{2\sin\dfrac{\pi}{2^{2024}}}\cdot\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2^{2022}}}{2\sin\dfrac{\pi}{2^{2023}}}\cdots\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2^2}}{2\sin\dfrac{\pi}{2^3}}\cdot\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2}}{2\sin\dfrac{\pi}{2^2}}=\dfrac{1}{2^{2024}\sin\dfrac{\pi}{2^{2025}}}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin^2 x$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$. Tính giá trị của biểu thức $S=F(-\pi)+2F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ (Kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân sau dấu phẩy)

Lời giải

Vì Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin^2 x$ nên ta có

$\int \sin^2 x\mathrm{d}x=\int\dfrac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}\sin 2x+C=F(x)$.

Ta có $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0\Rightarrow\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{4}+C=0\Rightarrow C=\dfrac{1}{4}-\dfrac{\pi}{8}$.

Suy ra $F(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{4}-\frac{\pi}{8}$.

Khi đó $S=F(-\pi)+2F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{1}{4}-\frac{5\pi}{8}\right)+2\left(\frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}\right)=\frac{3}{4}-\frac{3\pi}{8}\approx -0,43$.

Câu 2: Biết nguyên hàm $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{2\tan x+1}$ bằng $\frac{a}{b}\ln\left|2\sin x+\cos x\right|+\frac{c}{b}x+C$ với ($\frac{a}{b},\frac{c}{b}$ là các phân số tối giản và $a\in\mathbb{Z},c\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{N}^*$). Tính $a-b+c$.

Lời giải

Ta có $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{2\tan x+1}=\int\frac{\cos x}{2\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{2\cos x-\sin x+\sin x}{2\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}\int\frac{2\cos x-\sin x}{2\sin x+\cos x}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{\sin x}{2\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

Đặt $J=\int\frac{\sin x}{2\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$ ta có $I=\frac{1}{2}\ln\left|2\sin x+\cos x\right|+\frac{1}{2}J$.

Ta có $2J+I=\int 1\mathrm{d}x=x+C$ suy ra $J=\frac{1}{2}(x-I+C_1)$.

Khi đó ta có: $I=\frac{1}{2}\ln\left|2\sin x+\cos x\right|+\frac{1}{4}(x-I+C_1)\Leftrightarrow I=\frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}\ln\left|2\sin x+\cos x\right|+\frac{1}{4}x\right]+C$

$\Leftrightarrow I=\frac{2}{5}\ln\left|2\sin x+\cos x\right|+\frac{1}{5}x+C$ suy ra $a=2,b=5,c=1$.

Vậy $a-b+c=-2$.

Câu 3: Gọi $F(x)$ là họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)=8\sin 3x\cos x$. Biết rằng $F(x)$ có dạng $F(x)=a\cos 4x+b\cos 2x+C$. Khi đó $a-b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $f(x)=8\sin 3x\cos x=4(\sin 4x+\sin 2x)=4\sin 4x+4\sin 2x$

Khi đó $F(x)=-\cos 4x-2\cos 2x+C\Rightarrow a=-1;\ b=-2$. Vậy $a-b=1$

Câu 4: Cho $F(x)=\cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x).\tan x$. Biết nguyên hàm của hàm số $\frac{\tan x}{f'(x)}$ có dạng $\frac{a}{b}\tan x+C$ với a, b là các số nguyên dương, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $C\in\mathbb{R}$. Tính $a-2b$.

Lời giải

Ta có $F'(x)=-2\sin 2x=-4\sin x\cos x$.

Vì $F(x)=\cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x).\tan x$ nên:

$F'(x)=f(x).\tan x\Leftrightarrow -4\sin x\cos x=f(x).\tan x\Leftrightarrow f(x)=-4\cos^2 x$.

Suy ra $f'(x)=8\sin x\cos x$.

Khi đó ta có: $\int\frac{\tan x}{f'(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{\tan x}{8\sin x\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{8\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\tan x+C$ suy ra $a=1,\ b=8$.

Vậy $a-2b=-15$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=4\sin 2x+\cos x,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=-2$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(\pi)=3$, khi đó $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $f(x)=\int f'(x)dx=\int(4\sin 2x+\cos x)dx=-2\cos 2x+\sin x+C$

Với $f(0)=-2\Rightarrow -2.\cos 2.0+\sin 0+C=-2\Rightarrow C=0$ nên $f(x)=-2\cos 2x+\sin x$

Ta có $F(x)=\int f(x)dx=\int(-2\cos 2x+\sin x)dx=-\sin 2x-\cos x+C'$

Với $F(\pi)=3\Rightarrow -\sin 2\pi-\cos\pi+C'=3\Rightarrow C'=2$ nên $F(x)=-\sin 2x-\cos x+2$

Khi đó $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\pi-\cos\frac{\pi}{2}+2=2$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=\sin 2x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$, khi đó $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$ bằng bao nhiêu ?

Lời giải

Ta có $f'(x)=\sin 2x,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x)=\int\sin 2xdx=-\frac{1}{2}\cos 2x+C$

Vì $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\cos\left(2.\frac{\pi}{4}\right)+C=0\Leftrightarrow C=0$ nên $f(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$

Vì $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ nên $F(x)=\int\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx=-\frac{1}{4}\sin 2x+C$

Lại có $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\Leftrightarrow -\frac{1}{4}\sin\left(2.\frac{\pi}{2}\right)+C=2\Leftrightarrow C=2$ suy ra $F(x)=-\frac{1}{4}\sin 2x+2$

Khi đó $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{4}\sin\left(2.\frac{\pi}{4}\right)+2=\frac{7}{4}=1,75$.

----------HẾT----------

Dạng 3: Nguyên hàm của hàm số mũ

Các công thức thường dùng:

⊕ $\int e^x\,dx = e^x + C$ ⊕ $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

Chú ý các công thức biến đổi lượng giác:

⊕ $a^x.a^y = a^{x+y}$ ⊕ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ ⊕ $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)$, biết:

a) $f(x) = 2024^x$ b) $f(x) = 5^x + 1$

c) $f(x) = e^{-x}$ d) $f(x) = e^{2x} - \frac{1}{x^2}$

e) $f(x) = 8^x.2^{1-2x}$ f) $f(x) = \left(3^x - \frac{1}{3^x}\right)^2$

Lời giải

a) Ta có $\int 2024^x\,dx = \frac{2024^x}{\ln 2024} + x + C$

b) Ta có $\int \left(5^x + 1\right)dx = \frac{5^x}{\ln 5} + x + C$

c) Ta có $\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C$

d) Ta có $\int f(x)dx = \int\left(e^{2x} - \frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{x} + C$

e) Ta có $f(x) = 8^x.2^{1-2x} = 2^{3x}.2^{1-2x} = 2^{x+1}$ nên nguyên hàm của $f(x)$ là $F(x) = \frac{2^{1+x}}{\ln 2} + C$.

f) Ta có: $= \int\left(9^x - 2 + 9^{-x}\right)dx = \frac{9^x}{\ln 9} - 2x - \frac{1}{9^x \ln 9} + C == \frac{9^x}{2\ln 3} - \frac{1}{2.9^x \ln 3} - 2x + C$

Bài tập 2: Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau, biết:

a) $y = 2^x$ b) $y = \frac{1}{3^x}$ c) $y = \left(2e^x - 5^x\right)$

d) $y = \frac{1}{e^x}$ e) $y = \left(2.3^x - \frac{1}{3}.7^x\right)$ f) $y = 2^{3x}.3^{2x}$

g) $y = \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x}$ h) $y = \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1}$ i) $y = e^x\left(2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5}\right)$

Lời giải

a) $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$.

b) $\int \frac{1}{3^x}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{3}\right)^x \mathrm{d}x = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln\frac{1}{3}} + C = -\frac{1}{3^x \ln 3} + C$.

c) $\int \left(2\mathrm{e}^x - 5^x\right)\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}^x - \frac{5^x}{\ln 5} + C$.

d) $\int \frac{1}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^x \mathrm{d}x = \frac{\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^x}{\ln\frac{1}{\mathrm{e}}} + C = -\frac{1}{\mathrm{e}^x} + C$.

e) $\int \left(2.3^x - \frac{1}{3}.7^x\right)\mathrm{d}x = \int 2.3^x \mathrm{d}x - \int \frac{1}{3}.7^x \mathrm{d}x = 2.\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{7^x}{3\ln 7} + C$.

f) $\int \left(2^{3x}.3^{2x}\right)\mathrm{d}x = \int 8^x.9^x \mathrm{d}x = \int 72^x \mathrm{d}x = \frac{72^x}{\ln 72} + C$.

g) $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x}\mathrm{d}x = \int 2.\left(\frac{1}{5}\right)^x \mathrm{d}x - \int \frac{1}{5}.\left(\frac{1}{2}\right)^x \mathrm{d}x = 2.\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^x}{\ln\frac{1}{5}} - \frac{1}{5}.\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\frac{1}{2}} + C = \frac{-2}{5^x \ln 5} + \frac{1}{5.2^x \ln 2} + C$.

h) $\int \frac{\mathrm{e}^{3x} + 1}{\mathrm{e}^x + 1}\mathrm{d}x = \int \left(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + 1\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + x + C$.

i) $\int \mathrm{e}^x \left(2024 - \frac{2025\mathrm{e}^{-x}}{x^5}\right)\mathrm{d}x = \int \left(2024\mathrm{e}^x - \frac{2025}{x^5}\right)\mathrm{d}x = 2024\mathrm{e}^x + \frac{506,25}{x^4} + C$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2025^x$ là

A. $F(x)=x.2025^{x-1}$. **B.** $F(x)=2025.2024^x$.

C. $F(x)=2025^x.\ln 2025$. **D.** $F(x)=\dfrac{2025^x}{\ln 2025}$.

Lời giải

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int 2025^x\mathrm{d}x=\dfrac{2025^x}{\ln 2025}+C$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=1+e^x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=x+xe^{x-1}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=1+e^x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=x+e^x+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=1+xe^{x-1}+C$.

Lời giải

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(1+e^x\right)dx=x+e^x+C$.

Câu 3: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=5^{2x-1}$ là

A. $\dfrac{1}{2}.5^{2x-1}.\ln 5+C$. **B.** $2.5^{2x-1}.\ln 5+C$. **C.** $5^{2x-1}.\ln 5+C$. **D.** $\dfrac{1}{2\ln 5}.5^{2x-1}+C$.

Lời giải

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int 5^{2x-1}dx=\dfrac{1}{5}\int 25^x dx=\dfrac{1}{5}.\dfrac{25^x}{\ln 25}+C=\dfrac{1}{2\ln 5}.5^{2x-1}+C$.

Câu 4: Hàm số $F(x)=x^2+e^{-2x}+2025$ là một nguyên hàm của hàm số

A. $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{1}{2}e^{-2x}+2025x$. **B.** $f(x)=2x-2e^{-2x}$.

C. $f(x)=2x-2e^{-2x}+2025x$. **D.** $f(x)=2x+2e^{-2x}+2025$.

Lời giải

Hàm số $F(x)=x^2+e^{-2x}+2025$ là một nguyên hàm của hàm số

$f(x)=\left(x^2+e^{-2x}+2025\right)'=2x-2e^{-2x}$.

Câu 5: Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=e^x+2e^{-x}-2x$ thỏa mãn $F(0)=1$

A. $F(x)=e^x-2e^{-x}-x^2+2$. **B.** $F(x)=e^x+2e^{-x}-x^2-2$.

C. $F(x)=e^x-2e^{-x}-x^2$. **D.** $F(x)=e^x+2e^{-x}-x^2$.

Lời giải

Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=e^x+2e^{-x}-2x$.

$\Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int\left(e^x+2e^{-x}-2x\right)dx=e^x-2e^{-x}-x^2+C$.

Vì $F(0)=1$ nên suy ra $e^0-2e^0-2.0+C=1\Rightarrow C=2$ nên $F(x)=e^x-2e^{-x}-x^2+2$.

Câu 6: Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào có họ tất cả các nguyên hàm là hàm số $F(x)=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$, ($a>0$, $a\neq 1$, C là hằng số).

A. $f(x)=a^x$. **B.** $f(x)=\dfrac{1}{x}$. **C.** $f(x)=\ln x$. **D.** $f(x)=x^a$.

Lời giải

Ta có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int a^x\mathrm{d}x=\dfrac{a^x}{\ln a}+C,(a>0,\ a\neq 1,\ C$ là hằngsố).

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=3^x+2x$. Khẳng định nào dưới đây đúng

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{3^x}{\ln 3}+2+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{3^x}{\ln 3}+x^2+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=3^x.\ln 3+2+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=3^x.\ln 3+x^2+C$.

Lời giải

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(3^x+2x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{3^x}{\ln 3}+x^2+C$.

Câu 8: Hàm số $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nào sau đây?

A. $f(x)=\dfrac{x^4}{3}+e^x$. **B.** $f(x)=3x^2+e^x$. **C.** $f(x)=\dfrac{x^4}{12}+e^x$. **D.** $f(x)=x^2+e^x$.

Lời giải

Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\Leftrightarrow F'(x)=f(x)$.

Suy ra hàm số cần tìm là $f(x)=\left(\dfrac{x^3}{3}+e^x\right)'=x^2+e^x$.

Câu 9: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=2^x\left(1+2^{-x}\cdot\sin x\right)$ là

A. $\dfrac{2^{x+1}}{x+1}-\cos x+C$ **B.** $\dfrac{2^x}{\ln 2}-\cos x+C$. **C.** $\dfrac{2^x}{\ln 2}+\cos x+C$. **D.** $\dfrac{2^{x-1}}{x+1}+\cos x+C$.

Lời giải

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int 2^x\left(1+2^{-x}\cdot\sin x\right)\mathrm{d}x=\int\left(2^x+\sin x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{2^x}{\ln 2}-\cos x+C$

Câu 10: Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{3x+1}-2x^2$ là

A. $\dfrac{\mathrm{e}^{3x+1}-2x^3}{3}$. **B.** $\dfrac{\mathrm{e}^{3x+1}}{3}-x^3$. **C.** $\dfrac{\mathrm{e}^{3x+1}}{3}-2x^3$. **D.** $\dfrac{\mathrm{e}^{3x+1}-x^3}{3}$.

Lời giải

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(e^{3x+1}-2x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int e^{3x+1}\mathrm{d}(3x+1)-\frac{2}{3}x^3=\frac{e^{3x+1}-2x^3}{3}.$$

Câu 11: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{2x}$ và $F(0)=0$. Giá trị của $F(\ln 3)$ bằng

A. 2 **B.** 6. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $F(x)=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+C$.

Theo giả thiết $F(0)=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}e^0+C=0\Leftrightarrow C=-\frac{1}{2}$.

Khi đó $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}\Rightarrow F(\ln 3)=\frac{1}{2}e^{2\ln 3}-\frac{1}{2}=4$

Câu 12: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=4^x+\cos 2x$ là

A. $\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{\sin 2x}{2}+C$. **B.** $4^x\ln 4+\frac{\sin 2x}{2}+C$.

C. $4^x\ln 4-\frac{\sin 2x}{2}+C$. **D.** $\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{\sin 2x}{2}+C$.

Lời giải

Ta có $\int\left(4^x+\cos 2x\right)dx=\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{\sin 2x}{2}+C$.

Câu 13: Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=e^x-1$ trên $(-\infty;+\infty)$, biết $F(0)=2$.

A. $F(x)=\frac{1}{e^x}-x+1$. **B.** $F(x)=\ln x-x-1$.

C. $F(x)=e^x-x+1$. **D.** $F(x)=e^x-x+2$.

Lời giải

Ta có: $F(x)=\int(e^x-1)\mathrm{dx}=\mathrm{e}^x-x+C$.

Vì $F(0)=2\Leftrightarrow e^0+C=2\Leftrightarrow C=1$ nên $F(x)=\mathrm{e}^x-x+1$.

Câu 14: Kết quả $\int\left(x+e^{2020x}\right)dx$ bằng

A. $x^2+\frac{e^{2020x}}{2020}+C$. **B.** $x^3+\frac{e^{2020x}}{2020}+C$. **C.** $\frac{x^2}{2}+\frac{e^{2020x}}{2020}+C$. **D.** $x+\frac{e^{2020x}}{2020}+C$.

Lời giải

Ta có $\int\left(x+e^{2020x}\right)dx=\frac{x^2}{2}+\frac{e^{2020x}}{2020}+C$.

Câu 15: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{-x}\left(2+\frac{e^x}{\cos^2 x}\right)$.

A. $F(x)=-\dfrac{2}{e^x}+\tan x+C$. **B.** $F(x)=2e^x-\tan x+C$.

C. $F(x)=-\dfrac{2}{e^x}-\tan x+C$. **D.** $F(x)=2e^{-x}+\tan x+C$.

Lời giải

Ta có $F(x)=\int e^{-x}\left(2+\dfrac{e^x}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x=\int\left(2e^{-x}+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x=-2e^{-x}+\tan x+C=-\dfrac{2}{e^x}+\tan x+C$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)=2^x+3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=2^{x-3}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=2^x\ln 2+3x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{2^x}{\ln 2}+3+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{2^x}{\ln 2}+3x+C$.

Lời giải

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(2^x+3\right)\mathrm{d}x=\dfrac{2^x}{\ln 2}+3x+C$.

Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=e^x+2x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=1$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(1)=e$. Tính $F(0)$.

A. $\dfrac{5}{6}$. **B.** $-\dfrac{1}{6}$. **C.** $\dfrac{1}{6}$. **D.** $-\dfrac{5}{6}$.

Lời giải

Ta có $f'(x)=e^x+2x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x)=\int\left(e^x+2x+1\right)dx=e^x+x^2+x+C$

Vì $f(0)=1\Leftrightarrow e^0+0+C=1\Leftrightarrow C=0$ nên $f(x)=e^x++x^2+x$

Vì $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ nên $F(x)=\int\left(e^x+x^2+x\right)dx=e^x+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+C$

Lại có $F(1)=e\Leftrightarrow C=-\dfrac{5}{6}$ suy ra $F(x)=e^x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{5}{6}$

Khi đó $F(0)=e^0-\dfrac{5}{6}=1-\dfrac{5}{6}=\dfrac{1}{6}$.

Câu 18: Tìm $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x-1$ trên $(-\infty;+\infty)$, biết $F(0)=2$.

A. $F(x)=\ln x-x-1$. **B.** $F(x)=e^x-x-1$. **C.** $F(x)=\dfrac{1}{e^x}-x+1$. **D.** $F(x)=e^x-x+1$.

Lời giải

Ta có: $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(e^x-1\right)\mathrm{d}x=e^x-x+C$.

Theo bài: $F(0)=2\Leftrightarrow e^0-0+C=2\Leftrightarrow 1+C=2\Leftrightarrow C=1$.

Vậy $F(x)=e^x-x+1$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=e^x+x^e$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì $F(x)+5$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$.

b) $F(x)=e^x+x^e+C$ là họ nguyên hàm của $f(x)$.

c) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0)=1$ thì $F(1)=2e$.

d) Nếu $F(x),G(x)$ lần lượt là các nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0)=1,G(1)=e$ thì ta luôn có $G(x)=F(x)+e$.

Lời giải

a) Đúng: Do $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ nên ta có:

$$\left(F(x)+5\right)'=\left(F(x)\right)'+(5)'=F'(x)=f(x).$$

Do đó $F(x)+5$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$.

b) Sai: Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(e^x+x^e\right)\mathrm{d}x=e^x+ex^{e-1}+C$.

Suy ra $F(x)=e^x+ex^{e-1}+C$ là họ nguyên hàm của $f(x)$.

c) Đúng: Ta có: $F(x)=\int\left(e^x+x^e\right)\mathrm{d}x=e^x+ex^{e-1}+C$ và $F(0)=1\Rightarrow 1+C=1\Leftrightarrow C=0$.

Suy ra $F(x)=e^x+ex^{e-1}\Rightarrow F(1)=e+e=2e$.

d) Sai: Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0)=1$ thì $F(x)=e^x+ex^{e-1}$ (1)

Nếu $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $G(1)=e$ thì $\begin{cases}G(x)=e^x+ex^{e-1}+C\\G(1)=e\end{cases}$

$\Rightarrow 2e+C=e\Leftrightarrow C=-e\Rightarrow G(x)=e^x+ex^{e-1}-e$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $G(x)=F(x)-e$.

Câu 2: Cho hàm số $F(x)=\int\left(4^x+2^x+1\right)\mathrm{d}x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $F(x)=\int 4^x\mathrm{d}x+\int 2^x\mathrm{d}x+\int\mathrm{d}x$.

b) $F(x)=\dfrac{2^{2x}+2^x}{\ln 2}+x+C$.

c) Nếu $F(1)=\dfrac{4}{\ln 2}$ thì $F(2)=\dfrac{12}{\ln 2}-1$.

d) Nếu $G(x)=\int\dfrac{8^x+1}{2^x+1}\mathrm{d}x$ thì $G(x)=F(x)+C$.

Lời giải

a) Đúng: Theo tính chất của nguyên hàm, ta có: $F(x)=\int\left(4^x+2^x+1\right)\mathrm{d}x=\int 4^x\mathrm{d}x+\int 2^x\mathrm{d}x+\int \mathrm{d}x$

b) Sai: $F(x)=\int\left(4^x+2^x+1\right)\mathrm{d}x=\dfrac{4^x}{\ln 4}+\dfrac{2^x}{\ln 2}+x+C=\dfrac{2^{2x}}{2\ln 2}+\dfrac{2^x}{\ln 2}+x+C$

$=\dfrac{2^{2x-1}+2^x}{\ln 2}+x+C.$

c) Sai: Do $F(x)=\dfrac{2^{2x-1}+2^x}{\ln 2}+x+C$ và $F(1)=\dfrac{4}{\ln 2}$ nên $\dfrac{4}{\ln 2}+1+C=\dfrac{4}{\ln 2}\Leftrightarrow C=-1$

$\Rightarrow F(x)=\dfrac{2^{2x-1}+2^x}{\ln 2}+x-1\Rightarrow F(2)=\dfrac{12}{\ln 2}+1.$

d) Sai : Ta có:

$$G(x)=\int\frac{8^x+1}{2^x+1}\mathrm{d}x=\int\frac{2^{3x}+1}{2^x+1}\mathrm{d}x=\int\frac{\left(2^x+1\right)\left(4^x-2^x+1\right)}{2^x+1}\mathrm{d}x=\int\left(4^x-2^x+1\right)\mathrm{d}x\neq F(x)+C.$$

Câu 3: Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{6^{x+1}+3^{2x}}{2^{2x+3}}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $F'(x)=\dfrac{6^{x+1}+3^{2x}}{2^{2x+3}}.$

b) $F(x)=\dfrac{\int\left(6^{x+1}+3^{2x}\right)\mathrm{d}x}{\int 2^{2x+3}\mathrm{d}x}.$

c) $F(x)=\int\left[\dfrac{3}{4}.\left(\dfrac{3}{2}\right)^x+\dfrac{1}{8}.\left(\dfrac{9}{4}\right)^x\right]\mathrm{d}x.$

d) Nếu $F(0)=0$ thì $F(1)=\dfrac{29}{64\left(\ln 3-\ln 2\right)}.$

Lời giải

a) Đúng: Theo định nghĩa nguyên hàm suy ra $F'(x)=f(x)=\dfrac{6^{x+1}+3^{2x}}{2^{2x+3}}.$

b) Sai: Theo tính chất nguyên hàm suy ra $F(x)=\int\dfrac{6^{x+1}+3^{2x}}{2^{2x+3}}\mathrm{d}x\neq\dfrac{\int\left(6^{x+1}+3^{2x}\right)\mathrm{d}x}{\int 2^{2x+3}\mathrm{d}x}.$

c) Đúng: Ta có $F(x)=\int\dfrac{6^{x+1}+3^{2x}}{2^{2x+3}}\mathrm{d}x=\int\dfrac{6.6^x+9^x}{8.4^x}\mathrm{d}x=\int\left[\dfrac{3}{4}.\left(\dfrac{3}{2}\right)^x+\dfrac{1}{8}.\left(\dfrac{9}{4}\right)^x\right]\mathrm{d}x.$

d) Đúng: $F(x)=\int\left[\frac{3}{4}.\left(\frac{3}{2}\right)^x+\frac{1}{8}.\left(\frac{9}{4}\right)^x\right]dx=\frac{\frac{3}{4}.\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\ln\frac{3}{2}}+\frac{\frac{1}{8}.\left(\frac{9}{4}\right)^x}{\ln\frac{9}{4}}+C=\frac{\frac{3}{4}.\left(\frac{3}{2}\right)^x+\frac{1}{16}.\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}}{\ln 3-\ln 2}+C$

Do $F(0)=0$ nên $\frac{13}{16(\ln 3-\ln 2)}+C=0\Leftrightarrow C=-\frac{13}{16(\ln 3-\ln 2)}$.

Suy ra $F(x)=\frac{\frac{3}{4}.\left(\frac{3}{2}\right)^x+\frac{1}{16}.\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}}{\ln 3-\ln 2}-\frac{13}{16(\ln 3-\ln 2)}$

Khi đó $F(1)=\frac{81}{64(\ln 3-\ln 2)}-\frac{13}{16(\ln 3-\ln 2)}=\frac{29}{64(\ln 3-\ln 2)}$.

Câu 4: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)=e^x-2x$ trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $F(0)=1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $F'(0)=0$.

b) $F(1)=e-1$.

c) $\int F(x)dx=e^x-\frac{x^3}{3}+C$.

d) $\int\frac{f(x)}{xe^x}dx=\ln|x|-2e^x+C$

Lời giải

a) Sai: Ta có $F'(x)=f(x)=e^x-2x\Rightarrow F'(0)=e^0-2.0=1$

b) Đúng: $\int f(x)dx=\int(e^x-2x)dx=e^x-x^2+C\Rightarrow F(x)=e^x-x^2+C$.

$F(0)=1\Leftrightarrow e^0-0^2+C=1\Leftrightarrow C=0\Rightarrow F(x)=e^x-x^2\Rightarrow F(1)=e-1$

c) Đúng: $\int F(x)dx=\int(e^x-x^2)dx=e^x-\frac{x^3}{3}+C$

d) Sai: $\int\frac{f(x)}{x.e^x}dx=\int\frac{e^x-2x}{x.e^x}dx=\int\left(\frac{1}{x}-2.e^{-x}\right)dx=\int\frac{1}{x}dx-2\int\left(e^{-1}\right)^x dx$

$=\ln|x|-2\left(e^{-1}\right)^x\ln e^{-1}+C=\ln|x|+2e^{-x}+C$

Câu 5: Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{2^{2x+1}-1+\cos 2x}{2^x+\sin x}$ trên $[0;+\infty)$ thoả mãn $F(0)=\frac{2}{\ln 2}+2$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(\pi)=2^{\pi+1}-1$.

b). $F'(0)=2$

c) Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $F(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0=\dfrac{\pi}{2}$ là $k=2\sqrt{2^{\pi}}-2$

d) $F(-1)=\dfrac{1}{\ln 2}+2\cos 1.$

Lời giải

Ta có $f(x)=\dfrac{2^{2x+1}-2\sin^2 x}{2^x+\sin x}=\dfrac{2\left(2^x-\sin x\right)\left(2^x+\sin x\right)}{2^x+\sin x}=2.2^x-2\sin x$

a) Sai: $f(\pi)=2.2^{\pi}-2\sin\pi=2^{\pi+1}$.

b) Đúng: $F'(x)=f(x)=2.2^x-2\sin x\Rightarrow F'(0)=2.2^0-2\sin 0=2$.

c) Đúng: Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $F(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0=\dfrac{\pi}{2}$ là

$$k=F'\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2.2^{\frac{\pi}{2}}-2\sin\frac{\pi}{2}=2.\sqrt{2^{\pi}}-2.$$

d) Đúng: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left[2.2^x-2\sin x\right]\mathrm{d}x=2.\dfrac{2^x}{\ln 2}+2\cos x+C\Rightarrow F(x)=\dfrac{2^{x+1}}{\ln 2}+2\cos x+C.$

Giả thiết $F(0)=\dfrac{2}{\ln 2}+2\Leftrightarrow\dfrac{2^{0+1}}{\ln 2}+2\cos 0+C=\dfrac{2}{\ln 2}+2\Leftrightarrow C=0\Rightarrow F(x)=\dfrac{2^{x+1}}{\ln 2}+2\cos x$

$\Rightarrow F(-1)=\dfrac{2^0}{\ln 2}+2\cos(-1)=\dfrac{1}{\ln 2}+2\cos 1.$

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=2x+e^x$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=2025$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(2)=4+e$

b) $\int f(x)dx=\int\left(2x+e^x\right)dx=x^2+e^x+C$.

c) $F(x)=x^2+e^x+2024$.

d) $\int xf'\left(x^2\right)dx=\int x\left(2+e^{x^2}\right)dx=x^2+xe^{x^2}+C$

Lời giải

a) Sai: $f(2)=4+e^2$.

b) Đúng: $\int f(x)dx=\int\left(2x+e^x\right)dx=x^2+e^x+C$.

c) Đúng: Ta có $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0)=2025$.

Suy ra $\begin{cases} F(x)=x^2+e^x+C \\ F(0)=2025 \end{cases} \Rightarrow 1+C=2025 \Leftrightarrow C=2024$.

Vậy $F(x)=x^2+e^x+2024$.

d) Ta có $\int xf'(x^2)dx=\int x\left(2+e^{x^2}\right)dx=x^2+\frac{1}{2}e^{x^2}+C$

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=e^x(2+e^x)$. và $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\int f'(x)dx=2e^x+e^{2x}+C$.

b) $F(x)=2e^x+\frac{1}{2}e^{2x}+C$.

Nếu $F(0)=3$ thì $F(1)=5e$.

d) Nếu $F(0)=\frac{5}{2}$ thì phương trình $F(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải

a) Đúng: $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C=2e^x+e^{2x}+C$.

b) Đúng: $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int e^x(2+e^x)\mathrm{d}x=\int\left(2e^x+e^{2x}\right)\mathrm{d}x=2e^x+\frac{1}{2}e^{2x}+C$.

c)Sai: $F(x)=2e^x+\frac{1}{2}e^{2x}+C$

Mà $F(0)=3\Rightarrow C=\frac{1}{2}\Rightarrow F(x)=2e^x+\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}\Rightarrow F(1)=2e+\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}=\frac{e^2+4e+1}{2}$.

d) Sai: Với $F(0)=\frac{5}{2}\Rightarrow C=0\Rightarrow F(x)=2e^x+\frac{1}{2}e^{2x}$

Ta có: $F(x)=0\Leftrightarrow 2e^x+\frac{1}{2}e^{2x}=0$ nên phương trình vô nghiệm.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho $F(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x^2.e^{2x}$. Tính tổng $a+b+2c$.

Lời giải

Ta có $F'(x)=(2ax+b)e^{2x}+2\left(ax^2+bx+c\right)e^{2x}=\left(2ax^2+(2a+2b)x+b+2c\right)e^{2x}$.

Mà $F(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x^2.e^{2x}$

$$\Rightarrow F'(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}2a=2\\2a+2b=0\\b+2c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\\c=\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

Vậy $a+b+2c=1$.

Câu 2: Biết $F(x)=e^{2x}+2x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giả sử $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(2x)+\cos\pi x$. Khi đó $G(2)-G(0)=a.e^b+c$, $a,b,c\in\mathbb{Q}$. Tính $a.b.c$.

Lời giải

Ta có $F(x)=\mathrm{e}^{2x}+2x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Suy ra $f(x)=F'(x)=2\mathrm{e}^{2x}+4x\Rightarrow f(2x)=2\mathrm{e}^{4x}+8x$

Khi đó $\int\left(f(2x)+\cos\pi x\right)\mathrm{d}x=\int\left(2\mathrm{e}^{4x}+8x+\cos\pi x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{4x}+4x^2+\dfrac{1}{\pi}\sin\pi x+C$.

Suy ra $G(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{4x}+4x^2+\dfrac{1}{\pi}\sin\pi x+C$.

Do đó $G(2)-G(0)=\left(\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^8+16+C\right)-\left(\dfrac{1}{2}+C\right)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^8+\dfrac{31}{2}$.

Vậy $a.b.c=62$.

Câu 3: Cho hàm số $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{-2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=-(2x^2-8x+7)e^{-2x}$. Tính tổng $a+b+c$.

Lời giải

Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên $F'(x)=f(x)$.

Ta có: $F'(x)=\left[(ax^2+bx+c)e^{-2x}\right]'=(2ax+b)e^{-2x}-2(ax^2+bx+c)e^{-2x}$

$=-\left[2ax^2-(2a-2b)x-b+2c\right]e^{-2x}$

Do $F'(x)=f(x)$ nên $\begin{cases}2a=2\\-2a+2b=-8\\-b+2c=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-3\\c=2\end{cases}\Rightarrow a+b+c=0$.

Câu 4: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^x+2x$ thỏa mãn $F(0)=\dfrac{3}{2}$. Tìm $F(2)$ (làm tròn đến hàng phần chục).

Lời giải

$F(x)=\int\left(\mathrm{e}^x+2x\right)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+x^2+C$.

$F(0)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow \mathrm{e}^0+C=\frac{3}{2}\Leftrightarrow C=\frac{1}{2}$.

$F(x)=\mathrm{e}^x+x^2+\frac{1}{2}$.

$F(2)\approx 11,9$.

Câu 5: Một chiếc cốc chứa nước ở 95°C được đặt trong phòng có nhiệt độ 20°C. Theo định luật làm mát của Newton, nhiệt độ của nước trong cốc sau t phút (xem $t=0$ là thời điểm nước ở 95°C) là một hàm số $T(t)$. Tốc độ giảm nhiệt độ của nước trong cốc tại thời điểm t phút được xác định bởi công thức $T'(t)=-\frac{3}{2}e^{-\frac{t}{50}}$ (°C/ phút). Tính nhiệt độ của nước tại thời điểm $t=30$ phút.

Lời giải

Ta có nhiệt độ của nước trong cốc sau t phút là:

$$T(t)=\int T'(t)\mathrm{d}t=\int\left(-\frac{3}{2}e^{-\frac{t}{50}}\right)\mathrm{d}t=-\frac{3}{2}.\frac{e^{-\frac{t}{50}}}{\ln e^{-\frac{1}{50}}}+C=75.e^{-\frac{t}{50}}+C$$

Vì $t=0$ là thời điểm nước ở 95°C nên ta có:

$T(0)=95\Leftrightarrow 75+C=95\Leftrightarrow C=15\Rightarrow T(t)=75.e^{-\frac{t}{50}}+15$.

Vậy nhiệt độ của nước tại thời điểm $t=30$ phút là: $T(30)=75.e^{-\frac{30}{50}}+15\approx 56,16°\mathrm{C}$.

Câu 6: Trọng lượng của một bào thai người nặng khoảng 0,04 ounce (1 ounce = 28,3485 gram) sau 8 tuần tuổi. Trong suốt 35 tuần tiếp theo, trọng lượng của bào thai này được dự đoán tăng với tốc độ $B'(t)=\frac{2436e^{-0,193t}}{\left(1+784e^{-0,193t}\right)^2}$, $8\le t\le 43$ với $B(t)$ là cân nặng tính bằng ounce và t là thời gian tính bằng tuần. Hãy tính trọng lượng của bao thai sau 25 tuần tuổi (Làm tròn kết quả đến chữ số hàng phần trăm).

Lời giải

Theo giả thiết, trọng lượng của bào thai này được dự đoán tăng với tốc độ là hàm số $B'(t)$ nên $B(t)$ chính là nguyên hàm của $B'(t)$:

Khi đó: $B(t)=\int B'(t)\mathrm{d}t=\int\frac{2436e^{-0,193t}}{\left(1+784e^{-0,193t}\right)^2}\mathrm{d}t$

Đặt $u=1+784e^{-0,193t}\Rightarrow \mathrm{d}u=784.(-0,193).e^{-0,193t}\mathrm{d}t=-151,312e^{-0,193t}\mathrm{d}t$

$$B(t)=-\frac{2436}{151,312}\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2}=\frac{2436}{151,312u}+C=\frac{2436}{151,312.\left(1+784e^{-0,193t}\right)}+C.$$

Sau 8 tuần tuổi thì bào thai cân nặng khoảng 0,04 ounce nên:

$$B(8)=0,04\Leftrightarrow\frac{2436}{151,312\left(1+784e^{-0,193.8}\right)}+C=0,04\Leftrightarrow C=0,04-\frac{2436}{151,312\left(1+784e^{-1,544}\right)}$$

Do đó ta có hàm số cân nặng của bào thai là:

$$B(t)=\frac{2436}{151,312\left(1+784e^{-0,193t}\right)}+0,04-\frac{2436}{151,312\left(1+784e^{-1,544}\right)},\ 8\le t\le 43.$$

Cân nặng của bào thai sau 25 tuần tuổi là:

$$B(25)=\frac{2436}{151,312\left(1+784e^{-0,193.25}\right)}+0,04-\frac{2436}{151,312\left(1+784e^{-1,544}\right)}\approx 2,15.$$

----------HẾT----------

Dạng 4: Ứng dụng nguyên hàm giải bài toán thực tế

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Ký hiệu $h(x)$ là chiều cao của một cây (tính theo m) sau khi trồng x năm. Biết rằng sau một năm đầu tiên cây cao 2 m. Trong 10 năm tiếp theo cây phát triển với tốc độ $h'(x)=\frac{1}{x}$ (m/năm).

Lời giải

a) Xác định chiều cao của cây sau x năm ($1\le x\le 11$).

Ta có $h(x)=\int h'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x+C$.

Vì $h(1)=2$ nên $\ln 1+C=2\Rightarrow C=2$.

Chiều cao của cây sau x năm ($1\le x\le 11$) là $h(x)=\ln x+2$.

b) Sau bao nhiêu năm cây cao 3 m.

Ta có $h(x)=3\Leftrightarrow \ln x+2=3\Leftrightarrow x=\mathrm{e}\approx 2{,}72$ (năm).

Vậy sau $\mathrm{e}\approx 2{,}72$ (năm) thì cây cao 3m.

Bài tập 2: Một chiếc xe đạp đang chạy với vận tốc $v_0=10(m/s)$ thì tăng tốc với gia tốc không đổi là $a=2(m/s^2)$. Tính quãng đường xe đó đi được trong 3 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc.

Lời giải

Ta có $v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\int 2\mathrm{d}t=2t+C$.

Vì $v(0)=10$ nên $C=10\Rightarrow v(t)=2t+10$.

Khi đó $s(t)=\int v(t)\mathrm{d}t=\int(2t+10)\mathrm{d}t=t^2+10t+D$.

Vì $s(0)=0$ nên $D=0\Rightarrow s(t)=t^2+10t$ m

Quãng đường xe đó đi được trong 3 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc là $s(3)=3^2+10.3=39\,\mathrm{m}$.

Bài tập 3: Một đám vi trùng tại ngày thứ t có số lượng là $N(t)$. Biết rằng $N'(t)=\frac{2000}{1+2t}$ và lúc đầu đám vi trùng có 300000 con. Ký hiệu L là số lượng vi trùng sau 10 ngày. Tìm L.

Lời giải

Ta có $N(t)=\int N'(t)\mathrm{d}t=\int\frac{2000}{1+2t}\mathrm{d}t=1000\ln|1+2t|+C$.

$N(0)=300000\Leftrightarrow 1000\ln|1|+C=300000\Leftrightarrow C=300000$

$\Rightarrow N(t)=1000\ln|1+2t|+300000\Rightarrow N(10)=1000\ln|1+2.10|+300000\approx 303044$.

Bài tập 4: Một quần thể virut Corona P đang thay đổi với tốc độ $P'(t)=\dfrac{5000}{1+0,2t}$, trong đó t là thời gian tính bằng giờ. Quần thể virut Corona P ban đầu có số lượng là 1000 con. Tìm số lượng virut Corona sau 3 giờ.

Lời giải

Ta có $P(t)=\int P'(t)\mathrm{d}t=\int\dfrac{5000}{1+0,2t}\mathrm{d}t=5000.\dfrac{1}{0,2}\ln(1+0,2t)+C=25000.\ln(1+0,2t)+C$.

$P(0)=1000\Leftrightarrow C=1000$.

Vậy biểu thức tính số lượng virut Corona với thời gian t bất kỳ là

$$P(t)=25000.\ln(1+0,2t)+1000.$$

Với $t=3$ giờ ta có $P(3)=25000.\ln(1+0,2.3)+1000\approx 12750,09$.

Vậy số lượng virut khi $t=3$ giờ khoảng 12750 con.

Bài tập 5: Một vật chuyển động với gia tốc phụ thuộc vào thời gian theo công thức $a(t)=\sin\left(2t+\dfrac{\pi}{3}\right)$. Biết tại thời điểm $t=0$ thì vận tốc và quãng đường đi được của vật đều bằng 0. Xác định công thức tính quãng đường đi được của vật đó theo thời gian

Lời giải

Ta có vận tốc của vật tại thời điểm t là: $v(t)=\int a(t)dt=\int\sin\left(2t+\dfrac{\pi}{3}\right)dt=-\dfrac{1}{2}\cos\left(2t+\dfrac{\pi}{3}\right)+C$

Ta có $v(0)=0\Leftrightarrow C=\dfrac{1}{4}\Rightarrow v(t)=-\dfrac{1}{2}\cos\left(2t+\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{1}{4}$.

$\Rightarrow s(t)=\int\left(-\dfrac{1}{2}\cos\left(2t+\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{1}{4}\right)dt=-\dfrac{1}{4}\sin\left(2t+\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{1}{4}t+D$ và $s(0)=0\Leftrightarrow D=\dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

Vậy $s(t)=-\dfrac{1}{4}\sin\left(2t+\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{1}{4}t+\dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

Bài tập 6: Một vật đang chuyển động đều với gia tốc $v_0=15m/s$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=t^2+4t\left(m/s^2\right)$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 3 giây từ lúc bắt dầu tăng tốc.

Lời giải

Ta có $v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\int\left(t^2+4t\right)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{3}t^3+2t^2+C$.

Mà $v(0)=15\Rightarrow C=15$ nên $v(t)=\dfrac{1}{3}t^3+2t^2+15$.

$S(t)=\int\left(\dfrac{1}{3}t^3+2t^2+15\right)\mathrm{d}t=\dfrac{t^4}{12}+\dfrac{2t^3}{3}+15t+C_1;\ S(0)=\dfrac{0^4}{12}+\dfrac{2.0^3}{3}+15.0+C_1=0\Leftrightarrow C_1=0$

Vậy $S(3)=69,75m$.

Bài tập 7: Kí hiệu $h(x)$ là chiều cao của một cây (tính theo mét) sau khi trồng x năm. Biết rằng sau năm đầu tiên cây cao 3 m. Trong 15 năm tiếp theo cây phát triển với tốc độ $h'(x)=\dfrac{1}{x+1}$ (m/năm). Xác định chiều cao của cây sau x năm $(1\le x\le 16)$.

Lời giải

Chiều cao của cây sau x năm là $h(x)=\int\dfrac{1}{x+1}\mathrm{d}x=\ln|x+1|+C=\ln(x+1)+C$, do $1\le x\le 16$.

Sau năm đầu tiên cây cao 3 m do đó ta có $h(1)=3\Leftrightarrow\ln(1+1)+C=3\Leftrightarrow C=3-\ln 2$.

Vậy $h(x)=\ln(x+1)+3-\ln 2$.

Bài tập 8: Kí hiệu $F(x)$ là chiều cao của một cây (tính theo mét) sau khi trồng x năm. Biết rằng sau năm đầu tiên cây cao 4 m. Trong 16 năm tiếp theo cây phát triển với tốc độ $f(x)=\dfrac{1}{2x+1}$ (m/năm). Xác định chiều cao của cây sau 5 năm.

Lời giải

Chiều cao của cây sau x năm là

$F(x)=\int\dfrac{1}{2x+1}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln|2x+1|+C=\dfrac{1}{2}\ln(2x+1)+C$, do $1\le x\le 17$.

Sau năm đầu tiên cây cao 4 m do đó ta có $F(1)=4\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\ln(2.1+1)+C=4\Leftrightarrow C=4-\dfrac{1}{2}\ln 3$.

Vậy $F(x)=\dfrac{1}{2}\ln(2x+1)+4-\dfrac{1}{2}\ln 3$

Chiều cao của cây sau 5 năm là $F(5)=\dfrac{1}{2}\ln(2.5+1)+4-\dfrac{1}{2}\ln 3\approx 4{,}65$ năm.

Bài tập 9: Một vườn ươm cây cảnh bán một cây sau 6 năm trồng và uốn tạo dáng. Tốc độ tăng trưởng trong suốt 6 năm được tính xấp xỉ bởi công thức $h'(t)=1{,}5t+5$, trong đó $h(t)(cm)$ là chiều cao của cây khi kết thúc t (năm)

(*Nguồn: R.Larson andB. Edwards, Calculus 10e Cemgage 2014).* Cây con khi được trồng cao 12 cm.

a) Tìm công thức chỉ chiều cao của cây sau t năm.

b) Khi được bán, cây cao bao nhiêu centimét?

Lời giải

a) $h(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $h'(t)=1{,}5t+5$.

Do $\int(1{,}5t+5)\mathrm{d}t=\int 1{,}5t\,\mathrm{d}t+\int 5\mathrm{d}t=\dfrac{3}{4}\int 2t\,\mathrm{d}t+\int 5\mathrm{d}t=\dfrac{3}{4}\int(t^2)'\mathrm{d}t+\int(5t)'\mathrm{d}t=\dfrac{3}{4}t^2+5t+C$.

Khi đó $h(t)=\dfrac{3}{4}t^2+5t+C$.

Vì cây con khi được trồng cao 12 cm nên $h(0)=12$ suy ra $C=12$ nên $h(t)=\dfrac{3}{4}t^2+5t+12$.

b) Sau 6 năm trồng và uốn tạo dáng. Cây có chiều cao là: $h(6)=\dfrac{3}{4}6^2+5.6+12=69\ (cm)$.

Vậy khi được bán, cây cao 69 cm.

Bài tập 10: Tại một lễ hội dân gian, tốc độ thay đổi lượng khách tham dự được biểu diễn bằng hàm số $B'(t)=20t^3-300t^2+1000t$. Trong đó t tính bằng giờ $(0\le t\le 15)$, $B'(t)$ được tính bằng khách/giờ. *(Nguồn: A. Bigalke et al., Mathematik,Grundkurs ma-l, Cornelesen 2016).* Sau một giờ, 500 người đã có mặt tại lễ hội.

a) Viết công thức của hàm số $B(t)$ biểu diễn số lượng khách tham dự lễ hội với $0\le t\le 15$.

b) Sau 3 giờ sẽ có bao nhiêu khách tham dự lễ hội?

c) Số lượng khách tham dự lễ hội lớn nhất là bao nhiêu?

d) Tại thời điểm nào thì tốc độ thay đổi lượng khách tham dự lễ hội là lớn nhất?

Lời giải

a) Ta có $B(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $B'(t)=20t^3-300t^2+1000t$.

Do đó $B(t)=\int\left(20t^3-300t^2+1000t\right)dt=5t^4-100t^3+500t^2+C$.

Nên $B(t)=5t^4-100t^3+500t^2+C$.

Vì sau một giờ, 500 người đã có mặt tại lễ hội nên $B(1)=405+C=500\Rightarrow C=95$.

Vậy $B(t)=5t^4-100t^3+500t^2+95,\ \ 0\le t\le 15$.

b) Số lượng khách tham dự lễ hội sau 3 giờ là: $B(3)=5.3^4-100.3^3+500.3^2+95=2300$ (khách).

c) Giá trị lớn nhất của hàm số $B(t)$ trên đoạn $[0;15]$. Ta có:

$$B'(t)=20t^3-300t^2+1000t=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=5\\t=10\end{array}\right.$$

Ta có: $B(0)=95;B(5)=3220;B(10)=95,B(15)=28220$.

Vậy Số lượng khách tham dự lễ hội lớn nhất là 28220 khách sau 15 giờ,

d) Ta tìm t để hàm số $B'(t)=20t^3-300t^2+1000t$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;15]$. Ta có:

$$B''(t)=60t^2-600t+1000=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{15-5\sqrt{3}}{3}\\t=\dfrac{15+5\sqrt{3}}{3}\end{array}\right.$$

Ta có: $B'(0)=0;B'\left(\dfrac{15-5\sqrt{3}}{3}\right)\approx 962,25;B'\left(\dfrac{15+5\sqrt{3}}{3}\right)\approx -962,25;B'(15)=15000$.

Khi đó, giá trị lớn nhất của hàm số $B'(t)=20t^3-300t^2+1000t$ trên đoạn $[0;15]$ bằng 15000 tại $t=15$.

Vậy tốc độ thay đổi lượng khách tham dự lễ hội là lớn nhất tại thời điểm 15 giờ.

Bài tập 11: Đối với các dự án xây dựng, chi phí nhân công lao động được tính theo số ngày công. Gọi $m(t)$ là số lượng nhân công được sử dụng ở ngày thứ t (kể từ khi khởi công dự án). Gọi $M(t)$ là số ngày công nhân được tính đến hết ngày thứ t (kể từ khi khởi công dự án). Trong kinh tế xây dựng, người ta đã biết rằng $M'(t)=m(t)$. Một công trình xây dựng dự kiến hoàn thành trong 400 ngày. Số lượng công nhân được sử dụng cho bởi hàm số $m(t)=800-2t$. Trong đó t tính theo ngày $(0\le t\le 400)$, $m(t)$ tính theo người (*Nguồn: A.Bigalke et al., Mathematik,Grundkurs ma-l, Cornelesen 2016).* Đơn giá cho một ngày công lao động là 400000 đồng. Tính chi phí nhân công lao động của công trình đó (cho đến lúc hoàn thành).

Lời giải

Ta có $M'(t)=m(t)$ nên $M(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $m(t)=800-2t$.

Do đó: $M(t)=\int(800-2t)\mathrm{d}t=800t-t^2+C$.

Suy ra: $M(t)=800t-t^2+C,\ 0\le t\le 400.$ Vì $M(0)=0\Rightarrow C=0$.

Vậy $M(t)=800t-t^2$.

Số ngày công được tính đến hết ngày thứ 400 là: $M(400)=800.400-400^2=160000$.

Chi phí nhân công lao động của công trình đó là: $400000.160000=64000000000$ (đồng).

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Một quả bóng được ném lên từ độ cao $20m$ với vận tốc được tính bởi công thức sau đây $v(t)=-10t+16\,(m/s)$. Công thức nào sau đây tính độ cao của quả bóng theo thời gian t?

A. $h(t)=-5t^2+16t+C$. **B.** $h(t)=-5t^2+16t+20$.

C. $h(t)=5t^2-16t+20$. **D.** $h(t)=5t^2-16t+C$.

Lời giải

Gọi $h(t)$ là độ cao của quả bóng tại thời điểm t.

Suy ra: $h'(t)=v(t)$ do đó $h(t)$ là một nguyên hàm của $v(t)$

Ta có: $\int(-10t+16)\mathrm{dt}=-5t^2+16t+C$.

Do quả bóng được ném lên từ độ cao $20m$ nên tại thời điểm $t=0$ thì $h=20$.

Hay $h(0)=20\Rightarrow C=20$ nên $h(t)=-5t^2+16t+20$.

Câu 2: Một ô tô đang chạy với vận tốc $70\,km/h$ thì hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với tốc độ $v(t)=-10t+30\,(m/s)$. Tính quãng đường ô tô đi được sau 3 giây kể từ khi hãm phanh?

A. $51(m)$. **B.** $43(m)$. **C.** $54(m)$. **D.** $45(m)$.

Lời giải

Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong t giây kể từ khi hãm phanh.

Ta có: $s(t)=\int(-10t+30)=-5t^2+30t+C$. Do $s(0)=0\Rightarrow C=0$.

Khi đó: $s(t)=-5t^2+30t\Rightarrow s(3)=-5.9+30.3=45(m)$.

Câu 3: Sự sản sinh vi rút Zika ngày thứ t có số lượng là $N(t)$ con, biết $N'(t)=\dfrac{1000}{t}$ và lúc đầu đám vi rút có số lượng 250.000 con. Tính số lượng vi rút sau 10 ngày.

A. 272304 con **B.** 212302 con **C.** 242102 con **D.** 252302 con.

Lời giải

Ta có: $N'(t)=\dfrac{1000}{t}\Rightarrow N(t)=\int\dfrac{1000}{t}\mathrm{d}t=1000\ln|t|+C\Rightarrow N(t)=1000\ln|t|+C$

Chọn $t=1\Rightarrow N(1)=250000\Rightarrow C=250000\Rightarrow N(t)=1000\ln|t|+250000$

Vậy số lượng vi rút sau 10 ngày là: $N(10)=1000\ln10+250000\approx252302$.

Câu 4: Bạn Minh Hiền ngồi trên máy bay đi du lịch thế giới với vận tốc chuyển động của máy báy là $v(t)=3t^2+5(m/s)$. Quãng đường máy bay bay từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là:

A. $36m$. **B.** $252m$. **C.** 1134m. **D.** 966m.

Lời giải

Ta có: $v(t)=3t^2+5\Rightarrow s(t)=\int v(t)\mathrm{d}t=\int(3t^2+5)\mathrm{d}t=t^3+5t+C\Rightarrow s(t)=t^3+5t+C$

Chọn $t=0\Rightarrow s(0)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow s(t)=t^3+5t$

Quãng đường máy bay bay từ giây thứ 4 là: $s(4)=4^3+5.4=84m$

Quãng đường máy bay bay từ giây thứ 10 là: $s(10)=10^3+5.10=1050m$

Quãng đường máy bay bay từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là: $s(10)-s(4)=966m$

Câu 5: Trong một đợt xả lũ, nhà máy thủy điện đã xả lũ trong 40 phút với tốc độ lưu lượng nước tại thời điểm t giây là $h'(t)=10t+500(m^3/s)$. Hỏi sau thời gian xả lũ trên thì hồ thoát nước của nhà máy đã thoát đi một lượng nước là bao nhiêu?



A. $5.10^4(m^3)$. **B.** $4.10^6(m^3)$. **C.** $3.10^3(m^3)$. **D.** $6.10^6(m^3)$.

Lời giải

Ta có: $h'(t)=10t+500\Rightarrow h(t)=\int(10t+500)\mathrm{d}x=5t^2+500t+C\Rightarrow h(t)=5t^2+500t+C$

Chọn $t=0\Rightarrow h(0)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow h(t)=5t^2+500t$

Thủy điện đã xả lũ trong 40 phút = 2400 giây thì thoát đi một lượng nước là:

$h(2400)=5.2400^2+500.2400=3.10^3(m^3)$

Câu 6: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t)=3at^2+bt\ (m^3/s)$ và ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là $150m^3$. Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $1100m^3$. Hỏi thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây là bao nhiêu.

A. $8400m^3$ **B.** $8400m^3$ **C.** $6000m^3$ **D.** $4200m^3$

Lời giải

Ta có: $h'(t)=3at^2+bt\Rightarrow h(t)=\int(3at^2+bt)dt=at^3+\frac{1}{2}bt^2+C\Rightarrow h(t)=at^3+\frac{1}{2}bt^2+C$

Chọn $t=0\Rightarrow h(0)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow h(t)=at^3+\frac{1}{2}bt^2$

Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là $150m^3$: $h(5)=150 \Leftrightarrow 125a+\frac{25}{2}b=150$

Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $1100m^3$: $h(10)=1100 \Leftrightarrow 1000a+50b=1100$

Ta có hệ: $\begin{cases}125a+\frac{25}{2}b=150\\1000a+50b=1100\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b=2\end{cases} \Rightarrow h(t)=t^3+t^2$

thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây là $h(20)=20^3+20^2=8400m^3$

Câu 7: Gọi $h(t)\ (m)$ là mực nước ở bồn chứa sau khi bơm nước được t giây. Biết rằng $h'(t)=\frac{1}{5}\sqrt[3]{t}\ \ (m/s)$ và lúc đầu bồn không có nước. Tìm mức nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

A. $2,64m$. **B.** $1,22m$. **C.** $2,22m$. **D.** $1,64m$.

Lời giải

Ta có: $h'(t)=\frac{1}{5}\sqrt[3]{t} \Rightarrow h(t)=\int\frac{1}{5}\sqrt[3]{t}dx=\frac{1}{5}\int t^{\frac{1}{3}}dx=\frac{1}{5}\frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+C=\frac{3}{20}t\sqrt[3]{t}+C \Rightarrow h(t)=\frac{3}{20}t\sqrt[3]{t}+C$

Chọn $t=0 \Rightarrow h(0)=0 \Rightarrow C=0 \Rightarrow h(t)=\frac{3}{20}t\sqrt[3]{t}$

Vậy mức nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây: $h(6)=\frac{3}{20}.6\sqrt[3]{6}\approx 1,64m$

Câu 8: Một ô tô đang chạy với vận tốc 20 / (*m s*) thì người người đạp phanh. Sau khi đạp phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-40t+20(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bằng đầu đạp phanh. Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?



A. 5(cm). **B.** 7,5(m). **C.** $\frac{5}{2}$ (m). **D.** 5(m).

Lời giải

Ta có: $v(t)=-40t+20 \Rightarrow s(t)=\int v(t)dt=\int(-40t+20)dt=-20t^2+20t+C$

$\Rightarrow s(t)=-20t^2+20t+C$

Chọn $t=0\Rightarrow s(0)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow s(t)=-20t^2+20t$

Khi xe dừng hẳn thì $v(t)=0\Leftrightarrow -40t+20=0\Rightarrow t=0,5$.

Từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được: $s(0,5)=-20(0,5)^2+20(0,5)=5m$

Câu 9: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)(\mathrm{m/s})$ có gia tốc $v'(t)=\dfrac{3}{t+1}\left(\mathrm{m/s^2}\right)$. Vận tốc ban đầu của vật là 6 m/s. Hỏi vận tốc của vật sau 10 giây (làm tròn đến kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất) có giá trị bằng bao nhiêu?

A. 5 (m/s). **B.** 13,2 (m/s). **C.** 8 (m/s). **D.** 7 (m/s).

Lời giải

Giả sử tại thời điểm ban đầu $t=0;v(0)=6(m/s)$

Ta có: $v(0)=6(m/s)\Rightarrow v(t)=\int v'(t)dt=\int\dfrac{3}{t+1}dt=3\ln|t+1|+C$

$v(0)=6\Rightarrow C=6\Rightarrow v(t)=3\ln|t+1|+6\Rightarrow v(10)=3\ln 11+6\approx 13,2(m/s)$

Câu 10: Người ta bơm nước vào một bồn chứa, lúc đầu bồn không chứa nước, mức nước ở bồn chứa sau khi bơm phụ thuộc vào thời gian bơm nước theo một hàm số $h=h(t)$ trong đó h tính bằng cm, t tính bằng giây. Biết rằng $h'(t)=\sqrt[3]{3t+8}$. Mực nước ở bồn sau khi bơm được 10 giây là bao nhiêu cm? (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

A. $25,6(cm)$. **B.** $42,1(cm)$. **C.** $45(cm)$. **D.** $27,94(cm)$.

Lời giải

Ta có: $h(t)=\int h'(t)\mathrm{d}t=\int\sqrt[3]{3t+8}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{4}(3t+8)\sqrt[3]{3t+8}+C$.

Lúc đầu $t=0$, bể không có nước $\Rightarrow h(0)=0\Rightarrow C+4=0\Rightarrow C=-4$

$\Rightarrow h(t)=\dfrac{1}{4}(3t+8)\cdot\sqrt[3]{3t+8}-4\Rightarrow h(10)\approx 27,94$.

Câu 11: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t)=3at^2+bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là 150 $\mathrm{m^3}$, sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là 100 $\mathrm{m^3}$. Tính thể tích của nước trong bể sau khi bơm được 20 giây.

A. $8400(m^3)$. **B.** $4200(m^3)$. **C.** $7260(m^3)$. **D.** $8560(m^3)$.

Lời giải

Ta có: $h(t)=\int h'(t)\mathrm{d}t=\int(3at^2+bt)\mathrm{d}t=a.t^3+b.\dfrac{t^2}{2}+C$.

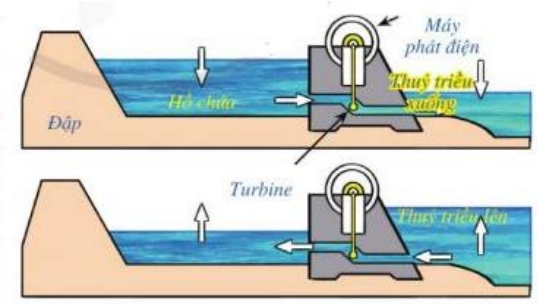
Do ban đầu hồ không có nước nên $h(0)=0\Leftrightarrow C=0\Rightarrow h(t)=a\cdot t^3+b\cdot\dfrac{t^2}{2}$.

Lúc 5 giây $h(5)=a.5^3+b.\dfrac{5^2}{2}=150$.

Lúc 10 giây $h(10)=a.10^3+b.\dfrac{10^2}{2}=1100$.

Suy ra $a=1,b=2\Rightarrow h(t)=t^3+t^2\Rightarrow h(20)=20^3+20^2=8400\left(\text{ m}^3\right)$.

Câu 12: Mực nước trong hồ chứa của nhà máy điện thủy triều thay đổi trong suốt một ngày do nước chảy ra khi thủy triều xuống và nước chảy vào khi thủy triều lên (như hình vẽ). Tốc độ thay đổi của mực nước được xác định bởi hàm số $h'(t)=\dfrac{1}{90}\left(t^2-17t+60\right)$, trong đó t tính bằng giờ $\left(0\le t\le 24\right)$, $h'(t)$ tính bằng mét/giờ. Tại thời điểm $t=0$, mực nước trong hồ chứa cao $8m$. Mực nước trong hồ cao nhất và thấp nhất bao nhiêu?



A. $8(m)$. **B.** $4(m)$. **C.** $7(m)$. **D.** $6(m)$.

Lời giải

Ta có: $h'(t)=\dfrac{1}{90}\left(t^2-17t+60\right)\Rightarrow h(t)=\dfrac{1}{90}\int\left(t^2-17t+60\right)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{90}\left(\dfrac{1}{3}t^3-\dfrac{17}{2}t^2+60t\right)+C$

Khi đó $h(t)=\dfrac{1}{90}\left(\dfrac{1}{3}t^3-\dfrac{17}{2}t^2+60t\right)+C$

Tại thời điểm $t=0$, mực nước trong hồ chứa cao $8m$ nên $h(0)=8\Rightarrow C=8$

$\Rightarrow h(t)=\dfrac{1}{90}\left(\dfrac{1}{3}t^3-\dfrac{17}{2}t^2+60t\right)+8\ \left(0\le t\le 24\right)$

Ta có: $h'(t)=0\Leftrightarrow t^2-17t+60=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=5\\t=12\end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên:

t	0		5		12		24
$h'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(t)$	8	↗	$\dfrac{1019}{108}$	↘	$\dfrac{44}{5}$	↗	$\dfrac{104}{5}$

Mực nước trong hồ cao nhất: $\dfrac{104}{5}=20,8m$ và thấp nhất $8m$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Vào năm 2014, dân số nước ta khoảng $90,7$ triệu người. Giả sử dân số nước ta sau t năm được xác định bởi hàm số $S(t)$ (đơn vị: triệu người), trong đó tốc độ gia tăng dân số được cho bởi $S'(t)=1,2698.\mathrm{e}^{0,014t}$, với t là số năm kể từ năm 2014, $S'(t)$ tính bằng triệu người/ năm. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $S(t)$ là một nguyên hàm của $S'(t)$

b) $S(t)=90,7.\mathrm{e}^{0,014t}+90,7$

c) Theo công thức trên, tốc độ tăng dân số nước ta năm 2034 (làm tròn đến hàng phần mười của triệu người/ năm) khoảng $1,7$ triệu người/ năm

d) Theo công thức trên, dân số nước ta năm 2034 (làm tròn đến hàng đơn vị của triệu người) là khoảng 120 triệu người/ năm

Lời giải

a) Đúng: Ta có $S(t)$ là một nguyên hàm của $S'(t)$.

b) Sai: Ta có

$$\int S'(t)\mathrm{d}t=\int 1,2698.\mathrm{e}^{0,014t}\mathrm{d}t=1,2698\int\left(\mathrm{e}^{0,014}\right)^t\mathrm{d}t=\frac{1,2698.\mathrm{e}^{0,014t}}{0,014}+C=90,7.\mathrm{e}^{0,014t}+C$$

Vì $S(0)=90,7$ nên $C=0$. Suy ra $S(t)=90,7.\mathrm{e}^{0,014t}$.

c) Đúng: Tốc độ tăng dân số nước ta năm 2034 là $S'(20)=1,2698.\mathrm{e}^{0,014.20}\approx 1,7$ (tr người/ năm).

d) Đúng: Dân số nước ta năm 2034 là $S(20)=90,7.\mathrm{e}^{0,014.20}\approx 120$ (triệu người).

Câu 2: Một vật chuyển động với gia tốc $a(t)=4\cos t\left(\mathrm{m/s}^2\right)$. Tại thời điểm bắt đầu chuyển động vật có vận tốc bằng 0. Xét tính đúng sai của các khẳng đính sau:

a) Vận tốc của vật được biểu diễn bởi hàm số $v(t)=4\cos t\ (\mathrm{m/s})$.

b) Vận tốc của vật tại thời điểm $t=\dfrac{\pi}{6}$ là $2(\mathrm{m/s})$

c) Tại thời điểm $t=\dfrac{\pi}{4}(s)$ sau khi xuất phát thì vận tốc của vật là $\sqrt{2}(\mathrm{m/s})$

d) Gia tốc của vật tại thời điểm $t=\dfrac{\pi}{4}$ (s) là $2\sqrt{2}\ \left(\mathrm{m/s}^2\right)$

Lời giải

a) Sai: Ta có $v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\int 4\cos\mathrm{d}t=4\sin t+C.$ Mà tại thời điểm bắt đầu chuyển động, vật có vận tốc bằng 0 nên ta có $v(0)=0$ hay $C=0.$

Vậy $v(t)=4\sin t$.

b) Đúng: Vận tốc của vật tại thời điểm $t=\frac{\pi}{6}$ là $v\left(\frac{\pi}{6}\right)=4\sin\frac{\pi}{6}=2$ (m/s).

c) Sai: Vận tốc của vật tại thời điểm $t=\frac{\pi}{4}$ là $v\left(\frac{\pi}{4}\right)=4\sin\frac{\pi}{4}=2\sqrt{2}\left(\text{m/s}\right)$

d) Đúng: Gia tốc của vật tại thời điểm $t=\frac{\pi}{4}$ (s) là: $a\left(\frac{\pi}{4}\right)=4\cos\frac{\pi}{4}=2\sqrt{2}\left(\text{m/s}^2\right)$

Câu 3: Một chiếc xe đang chuyển động đều với tốc độ $v_0=15m/s$ thì gặp chướng ngại vật rồi phanh gấp với gia tốc không đổi là $a=-3\ m/s^2$. Kí hiệu $v(t)$ là tốc độ của xe, $a(t)$ là gia tốc xe, $s(t)$ là quãng đường xe đi được cho đến thời điểm t giây kể từ lúc phanh xe. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

a) $v(t)=a'(t)$.

b) $a(t)=s''(t)$.

c) Tính từ lúc phanh xe, sau 4 giây thì xe dừng hẳn.

d) Quãng đường xe đi được tính từ lúc phanh xe đến khi dừng hẳn nằm trong khoảng từ 35 mét đến 40 mét.

Lời giải

a) Sai: $v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t$

b) Đúng: $a(t)=v'(t)=s''(t)$.

c) Sai: $v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\int -3\mathrm{d}t=-3t+C$.

$v(0)=-3.0+C=15\Rightarrow C=15$. Suy ra $v(t)=-3t+15$.

Xe dừng hẳn khi $v(t)=0\Rightarrow -3t+15=0\Rightarrow t=5$ giây.

d) Đúng: $s(t)=\int v(t)\mathrm{d}t=\int -3t+15\mathrm{d}t=\frac{-3}{2}t^2+15t+C$.

$s(0)=\frac{-3}{2}0^2+15.0+C=0\Rightarrow C=0\Rightarrow s(5)=37,5$ mét.

Câu 4: Trong thí nghiệm nuôi cấy một loại vi sinh vật, kí hiệu $f(t)$ là tổng số lượng vi sinh vật sau t giờ. Biết rằng sau 3 giờ đầu tiên thì tổng số lượng vi sinh vật là 50 con. Trong 7 giờ tiếp theo, số lượng vi sinh vật thay đổi với tốc độ $f'(t)=t^2-8t$ (con/giờ). Xét tính đúng sai của các khẳng đính sau:

a) Họ nguyên hàm của $f'(t)$ là $\frac{t^3}{3}-8t^2+C\ \ (C\in\mathbb{R})$.

b) Số lượng vi khuẩn tăng liên tục trong khoảng từ 3 giờ đến 10 giờ sau thời điểm làm thí nghiệm.

c) Số lượng vi khuẩn là nhỏ nhất sau 8 giờ tính từ lúc bắt đầu làm thí nghiệm.

d) Sau 6 giờ thì số lượng vi khuẩn là 5 con.

Lời giải

a) Sai: Ta có: $\int\left(t^2-8t\right)\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}-4t^2+C$.

b) Sai: Ta có: $f'(t)>0$ khi $8<t<10$ và $f'(t)<0$ khi $3<t<8$.

Nên số lượng vi sinh vật giảm trong khoảng từ 3 giờ đến 8 giờ, sau đó tăng dần trong khoảng 8 giờ đến 10 giờ.

c) Đúng: Bảng biến thiên của $f(t)$:

t	3		8		10
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘	$f(8)$	↗	

d) Đúng: $f(t)=\frac{t^3}{3}-4t^2+C$. Do $f(3)=50\Rightarrow\frac{3^3}{3}-4.3^2+C=50\Rightarrow C=77$.

Suy ra $f(t)=\frac{1}{3}t^3-4t^2+77\Rightarrow f(6)=5$.

Câu 5: Một quả cầu lông được đánh lên từ độ cao $2,2m$ với vận tốc được tính bởi công thức sau đây $v(t)=-0,8t+4,16\,(m/s)$. Xét tính đúng sai của các khẳng đính sau:

a) Công thức tính độ cao của quả cầu theo t là $h(t)=-0,4t^2+4,16t+2,2(m)$.

b) Quả cầu đạt độ cao cao nhất tại thời điểm $t=5,2(s)$.

c) Độ cao cao nhất của quả cầu bằng $13,016\,(m)$.

d) Thời điểm quả cầu chạm đất là $t=10,5\,(s)$.

Lời giải

a) Đúng: $h(t)=\int v(t)\mathrm{d}t=\int(-0,8t+4,16)\mathrm{d}t=-0,4t^2+4,16t+C$.

Mà $h(0)=2,2$ nên $C=2,2$ nên $h(t)=-0,4t^2+4,16t+2,2(m)$.

b) Đúng: Quả cầu đạt độ cao cao nhất tại thời điểm $t=-\frac{4,16}{2.(-0,4)}=5,2(s)$.

c) Đúng: Độ cao cao nhất của quả cầu bằng $h(5,2)=13,016\,(m)$.

d) Sai: Quả cầu chạm đất khi $h(t)=0 \Leftrightarrow -0,4t^2+4,16t+2,2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\approx 10,9 \\ t\approx -0,5 \end{array}\right.$.

Vì $t>0$ nên chọn $t\approx 10,9(s)$.

Câu 6: Cây KEO LAI là một trong các loài cây không chỉ là nguyên liệu giấy quan trọng mà còn là loài cây cung cấp gỗ nguyên liệu cho các ngành khác như chế biến ván nhân tạo, chế biến đồ mộc xuất khẩu, gỗ bao bì, gỗ xây dựng. Cây phát triển với tốc độ nhanh. Kí hiệu $h(x)$ là chiều cao của một cây (tính theo mét) sau khi trồng x năm. Biết rằng sau năm đầu tiên cây cao $8m$ .Trong 10 năm tiếp theo cây phát triển với tốc độ $h'(x)=\dfrac{9}{x}$ (m/năm). Xét tính đúng sai của các khẳng đính sau:

a) Biểu thức của $h(x)$ là: $h(x)=9\ln(x)+C$.

b) Sau 3 năm cây cao $20m$.

c) Tốc độ phát triển của cây trong 10 năm đầu sẽ giảm dần.

d). Người ta thường thu hoạch cây KEO LAI khi nó có độ cao trong khoảng từ 26 đến 28 mét. Vậy đó là 8 hoặc 9 năm sau khi trồng.

Lời giải

a) Đúng: $h'(x)=\dfrac{9}{x}\Rightarrow h(x)=\int\dfrac{9}{x}\mathrm{dx}=9\ln|x|+C=9\ln(x)+C$ (vì $x>0$)

b) Sai: Vì sau năm đầu tiên cây cao $8m$ nên $h(1)=8\Rightarrow 9\ln(1)+C=8\Rightarrow C=8$

$\Rightarrow h(x)=9\ln(x)+8\Rightarrow h(3)=9\ln(3)+8\approx 17,89(m)$. Vậy sau 3 năm cây cao khoảng $17,89m$.

c) Đúng: Ta có tốc độ phát triển của cây là hàm số $h'(x)=\dfrac{9}{x}\Rightarrow h"(x)=\dfrac{-9}{x^2}<0$ nên $h'(x)$ là hàm nghịch biến. Do đó tốc độ phát triển của cây sẽ giảm dần trong 10 năm đầu.

d) Đúng: Ta có $26\le h(x)\le 28\Rightarrow 26\le 9\ln(x)+8\le 28\Rightarrow 7,39\le x\le 9,23$

Vậy sau 8 hoặc 9 năm sau khi trồng.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Gọi $h(t)$ là chiều cao của cây keo (tính theo mét) sau khi trồng t năm. Biết rằng năm đầu tiên cây cao 1,5m, trong những năm tiếp theo. Cây phát triển với tốc độ $h'(t)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{t}}$ (mét /năm). Sau bao nhiêu năm cây cao được 3m.

Lời giải

Ta có $h'(t)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{t}}\Rightarrow h(t)=\int\dfrac{1}{\sqrt[4]{t}}dt=\int t^{-\frac{1}{4}}dt=\dfrac{t^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1}+C=\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{t^3}+C\Rightarrow h(t)=\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{t^3}+C$

Măm đầu tiên cây cao 1m nên $h(1)=1,5\Leftrightarrow 1,5=\frac{4}{3}\sqrt[4]{1}+C\Rightarrow C=\frac{1}{6}\Rightarrow h(t)=\frac{4}{3}\sqrt[4]{t^3}+\frac{1}{6}$

Vậy cây cao được 3m nên $h(t)=3\Leftrightarrow \frac{4}{3}\sqrt[4]{t^3}+\frac{1}{6}=3\Leftrightarrow \sqrt[4]{t^3}=\frac{17}{8}\Rightarrow t\approx 2,73$

Câu 2: Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1990 được ước tính theo một hàm số theo thời gian $f(t)$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người). Biết rằng $f'(t)=\frac{34}{t^2+4t+4}$ (nghìn người/năm) biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn. Số dân của thị trấn đó vào năm 2035 là bao nhiêu? (kết quả lấy chính xác đến hàng phần trăm) biết dân số của thị trấn đó năm 1990 là 3 nghìn người.

Lời giải

Ta có: $f'(t)=\frac{34}{t^2+4t+4}=\frac{34}{(t+2)^2}\Rightarrow f(t)=-\frac{34}{t+2}+C$

Chọn mốc thời gian là năm 1990. Dân số của thị trấn đó năm 1990 là 3 nghìn người nên ta có $f(0)=3$

Khi đó $-\frac{34}{2}+C=3\Leftrightarrow C=20$ nên $f(t)=-\frac{34}{t+2}+20$

Từ năm 1990 đến năm 2035 là 45 năm nên dân số của thị trấn năm 2035 là

$f(45)=-\frac{34}{47}+20=\frac{906}{47}\approx 19,28$ (nghìn người).

Câu 3: Một quần thể vi khuẩn ban đầu gồm 500 vi khuẩn, sau đó bắt đầu tăng trưởng. Gọi $P(t)$ là số lượng vi khuẩn của quần thể đó tại thời điểm t, trong đó t tính theo ngày ($0\le t\le 10$). Tốc độ tăng trưởng của quần thể vi khuẩn đó cho bởi hàm số $P'(t)=k\sqrt{t}$, trong đó k là hằng số. Sau 1 ngày, số lượng vi khuẩn của quần thể đó đã tăng lên thành 600 vi khuẩn *(Nguồn: R. Larson and BEdwards, Calculus 10e, Cengage 2014).* Tính số lượng vi khuẩn của quần thể đó sau 9 ngày.

Lời giải

Ta có: $P(t)=\int P'(t)dt=\int k\sqrt{t}dt=\int kt^{\frac{1}{2}}dt=k.\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C$.

Từ giả thiết suy ra: $\begin{cases}P(0)=500\\P(1)=600\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k.\frac{2}{3}.0\sqrt{0}+C=500\\k.\frac{2}{3}.1\sqrt{1}+C=600\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C=500\\\frac{2}{3}k=100\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C=500\\k=150\end{cases}$

$\Rightarrow P(t)=100t\sqrt{t}+500$.

Do đó, số lượng vi khuẩn của quần thể đó sau 9 ngày là: $P(9)=100.9\sqrt{9}+500=3200$.

Câu 4: Một đàn con trùng, ở ngày thứ t có số lượng là $K(t)$. Biết $K'(t)=\dfrac{4000}{1+\dfrac{t}{2}}$ và ban đầu đàn côn trùng có 50.000 con. Hỏi sau 10 ngày thì đàn có khoảng bao nhiêu con? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Số lượng côn trùng ngày thứ t là $K(t)=\int\dfrac{4000}{1+\dfrac{t}{2}}\mathrm{d}t=8000\ln\left|1+\dfrac{t}{2}\right|+C$.

Vì ban đầu đàn côn trùng có 50.000 con nên

$K(0)=50.000\Leftrightarrow 8000\ln\left|1+\dfrac{0}{2}\right|+C=50.000\Leftrightarrow C=50.000$

Số lượng côn trùng ngày thứ 10 là $K(10)=8000\ln\left|1+\dfrac{10}{2}\right|+50.000\approx 64.334$ con.

Câu 5: Một vật chuyển động với vận tốc ban đầu là $5(m/s)$ và có gia tốc được xác định bởi công thức $a(t)=\dfrac{2}{t+1}\left(m/s^2\right)$. Tính vận tốc của vật tại giây thứ 20 (là tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Ta có vận tốc của vật tại thời điểm t là $v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\int\dfrac{2}{t+1}\mathrm{d}t=2\ln|t+1|+C$.

Vì vận tốc ban đầu là $5(m/s)$ nên $v(0)=5\Leftrightarrow 2\ln|0+1|+C=5\Leftrightarrow C=5$.

Nên $v(t)=2\ln|t+1|+5$. Vậy vận tốc của vật tại giây thứ 20 là

$v(20)=2\ln|20+1|+5\approx 11(m/s)$.

Câu 6: Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc $15\mathrm{m/s}$ thì người lái xe hãm phanh. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-3t+15(\mathrm{m/s})$, trong đó t (giây). Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được bao nhiêu mét?

Lời giải

Ta có quãng đường xe đi được là $s(t)=\int v(t)dt=\int(-3t+15)\mathrm{d}t=-\dfrac{3}{2}t^2+15t+C$.

Do $s(0)=0$ nên $C=0$. Khi xe dừng hẳn thì $v(t)=0\Rightarrow t=5$.

Suy ra quãng đường đi được là $s(5)=37,5(m)$.

Câu 7: Một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng từ mặt đất. Giả sử tại thời điểm t giây (coi là thời điểm viên đạn được bắn lên), vận tốc của nó được cho bởi $v(t)=24,5-9,8t(m/s)$.
Tính quãng đường (mét) viên đạn đi sau 2 giây đầu.

Lời giải

Quãng đường viên đạn đi được là: $s(t)=\int(24,5-9,8t)\mathrm{d}t=24,5t-4,9t^2+C$

$\Rightarrow s(t)=24,5t-4,9t^2+C$. Chọn $t=0\Rightarrow s(0)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow s(t)=24,5t-4,9t^2$

Vậy sau 2 giây đầu quãng đường viên đạn đi là $s(2)=24,5.2-4,9.2^2=29,4m$

Câu 8: Cường độ dòng điện trong một dây dẫn tại thời điểm t giây là:

$$I(t)=Q'(t)=3t^2-6t+5,$$

Với $Q(t)$ là điện lượng truyền trong dây dẫn tại thời điểm t. Biết khi $t=1$ giây, điện lượng truyền trong dây dẫn là $Q(1)=4$. Tính điện lượng truyền trong dây dẫn khi $t=3$.

Lời giải

Ta có: $Q(t)=\int Q'(t)\mathrm{d}t=\int(3t^2-6t+5)\mathrm{d}t=t^3-3t^2+5t+C$.

Do $Q(1)=4$ nên $1^3-3.1^2+5.1+C=4\Rightarrow C=1$

Như vậy $Q(t)=t^3-3t^2+5t+1$ nên $Q(3)=3^3-3.3^2+5.3+1=16$.

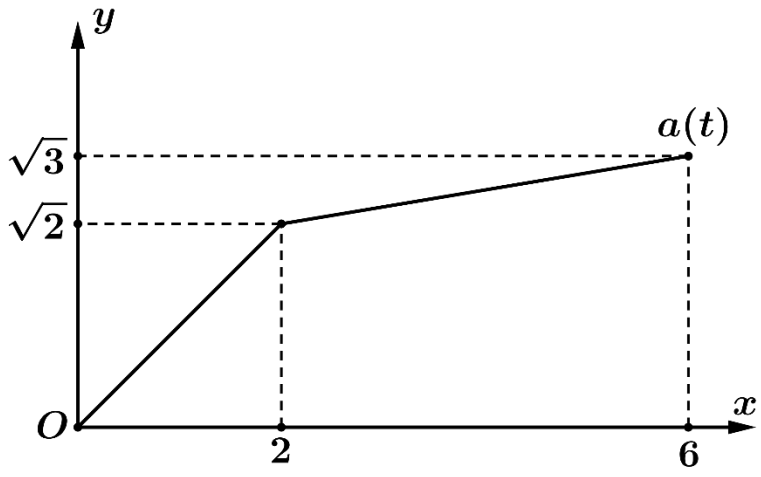
Câu 9: Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0=15(\mathrm{m/s})$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=t^2+4t(\mathrm{m/s^2})$. Tính vận tốc chất điểm đó tại giây thứ 3 kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc.

Lời giải

Ta có $a(t)=t^2+4t\Rightarrow v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}+2t^2+C(C\in\mathbb{R})$.

Theo giả thiết $v(0)=15\Rightarrow C=15\Rightarrow v(t)=\frac{t^3}{3}+2t^2+15$ nên $v(3)=\frac{3^3}{3}+2.3^2+15=41(\mathrm{m/s})$.

Câu 10: Một vật chuyển động với hàm số gia tốc là $a(t)$. Biết rằng đồ thị hàm số $a(t)$ trên đoạn $[0;6]$ được cho như hình dưới đây và vận tốc tại thời điểm $t=0$ là $v(0)=1(m/s)$.



Tại thời điểm $t=6$ giây, vận tốc của vật là bao nhiêu?(làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

Lời giải

Từ đồ thị ta có $a(t)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{2}t & ,0\le t\le 2\\ \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}t+\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2} & ,2\le t\le 6\end{cases}$.

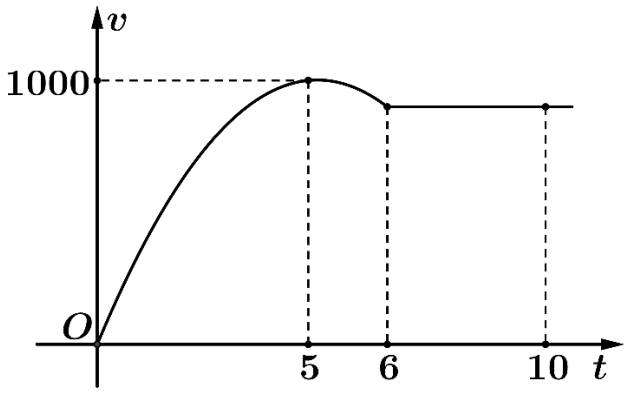
Mà $v(0)=1(m/s)$ nên $v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{4}t^2+1 & ,0\le t\le 2\\ \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{8}t^2+\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}t+C & ,2\le t\le 6\end{cases}$.

Vì vận tốc là hàm số liên tục nên

$\lim\limits_{t\to 2^-}v(t)=\lim\limits_{x\to 2^+}v(t)\Leftrightarrow\sqrt{2}+1=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}+3\sqrt{2}-\sqrt{3}+C\Leftrightarrow C=\dfrac{\sqrt{3}-3\sqrt{2}+2}{2}$.

Do đó $v(6)=1+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\approx 8,707\ (m/s)$.

Câu 11: Một xe ô tô sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu chuyển động với vận tốc được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol như hình bên dưới. Biết rằng sau 5 phút thì xe đạt đến vận tốc cao nhất 1000 m/phút và bắt đầu giảm vận tốc, đi được 6 phút thì xe chuyển động đều.



Hỏi quãng đường xe đã đi được trong khoảng 10 phút đầu tiên là bao nhiêu?

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta có phương trình vận tốc của ô tô là $v(t)=-40t^2+400t$ với $t\in[0;6]$ và $v=960$ với $t>6$. Trong khoảng 6 phút đầu phương trình quãng đường là

$S(t)=\int(-40t^2+400t)dt=-\dfrac{40}{3}t^3+200t^2+C$.

Tại thời điểm xe ô tô xuất phát ta có $t_0=0$ và $S(t_0)=0$ suy ra $C=0$ nên phương trình quãng đường là $S(t)=-\dfrac{40}{3}t^3+200t^2$.

Trong khoảng 6 phút đầu ô tô đi được quãng đường là $S(6)=4320m$ và 4 phút tiếp theo ô tô đi được quãng đường là $960\text{x}4=3840m$

Vậy quãng đường ô tô đi được trong 10 phút đầu là $4320+3840=8160$ m.

----------HẾT----------

BÀI 02 ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Định nghĩa

Định nghĩa: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ thì hiệu số $F(b)-F(a)$ gọi là tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$, kí hiệu $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ và được xác định bởi công thức:

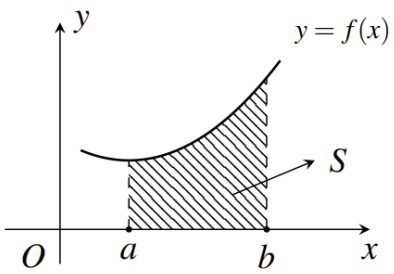
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

Chú ý:

- Trường hợp $a=b$: $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$
- Trường hợp $a>b$: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$
- Tích phân không phụ thuộc vào biến số x hay t, nghĩa là $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Ý nghĩa hình học của tích phân:

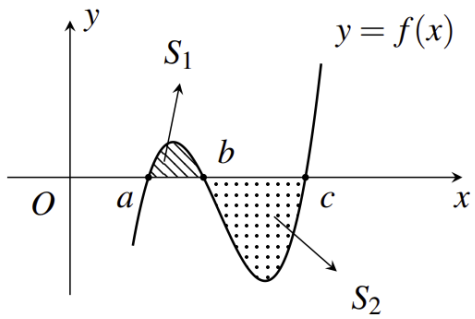
Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên $[a;b]$ thì $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y=f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x=a$ và $x=b$ (phần gạch sọc ở hình bên)



Một số lưu ý:

- Nếu $f(x)\le 0, \forall x\in[a;b]$ thì $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -S$
- Giả sử $f(x)$ liên tục trên $[a;c]$ và có đồ thị như hình bên. Gọi S_1, S_2 lần lượt là phần diện tích giới hạn bởi đồ thi $y=f(x)$ với trục hoành (hình vẽ). Khi đó:

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = S_1 - S_2$$



2 Các tính chất của tích phân

Tính chất 1: Cho hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó:

- $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$
- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$
- $\int_a^b\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
- $\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

Tính chất 2: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, k là số thực. Khi đó: $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Tính chất 3: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, $c\in(a;b)$. Khi đó:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

Mở rộng: Giá trị trung bình của hàm số liên tục $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ được định nghĩa là:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Tích phân của các hàm số cơ bản. Tính chất của tích phân

Phương pháp: Các bước tính $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

- **Bước 1:** Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ (thường chọn $C=0$)
- **Bước 2:** Sử dụng công thức $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính các tích phân sau đây:

a) $\int_0^3 3x^2\mathrm{d}x$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\mathrm{d}x$ c) $\int_1^{e^2} \frac{1}{u}\mathrm{d}u$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$ e) $\int_{-2}^{4} (x+1)(x-1)\mathrm{d}x$ f) $\int_1^2 \frac{x^2-2x+1}{x}\mathrm{d}x$

g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\sin x-2)\mathrm{d}x$ h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$ i) $\int_1^4 \left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)\mathrm{d}x$

j) $\int_2^3 \frac{x^2-3x+1}{x-1}\mathrm{d}x$ k) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\sin^2 x+3\right)\mathrm{d}x$ l) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x+\cos 3x}{\cos x}\mathrm{d}x$

m) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x(1+\tan x)}\mathrm{d}x$ n) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x$ o) $\int_0^1 \left(2^{2x}.3^{x-1}\right)\mathrm{d}x$

Lời giải

a) $\int_0^3 3x^2\mathrm{d}x = x^3\Big|_0^3 = 3^3-0^3 = 27$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = -\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos 0\right) = \frac{1}{2}$

c) $\int_1^{e^2} \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \ln|u|\Big|_1^{e^2} = \ln e^2 - \ln 1 = 2$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$

e) $\int_{-2}^{4} (x+1)(x-1)\mathrm{d}x = \int_{-2}^{4} \left(x^2-1\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_{-2}^{4} = 18$

f) $\int_1^2 \frac{x^2-2x+1}{x}\,dx = \int_1^2 \left(x-2+\frac{1}{x}\right)dx = \left(\frac{x^2}{2}-2x+\ln x\right)\Big|_1^2 = -\frac{1}{2}+\ln 2$

g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\sin x-2)\,dx = (-3\cos x-2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -3\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)-2\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = 3-\pi$

h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos x)\,dx = (x-\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}-1$

i) $\int_1^4 \left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)dx = \int_1^4 (x-4)dx = \left(\frac{x^2}{2}-4x\right)\Big|_1^4 = \frac{-9}{2}$

j) $\int_2^3 \frac{x^2-3x+1}{x-1}dx = \int_2^3 x-2-\frac{1}{x-1}dx = \left(\frac{x^2}{2}-2x-\ln|x-1|\right)_2^3 = \frac{1}{2}-\ln 2$

k) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\sin^2 x+3\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2x+3)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4-\cos 2x)dx = \left(4x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi$

l) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x+\cos 3x}{\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos x.\cos 2x}{\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2x dx = (\sin 2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$

m) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x(1+\tan x)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\cos x+\sin x}dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x-\sin x)dx = (\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}-1$

n) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx = (\tan x+\cot x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = 2-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

o) $\int_0^1 \left(2^{2x}.3^{x-1}\right)dx = \frac{1}{3}\int_0^1 12^x\,dx = \frac{1}{3}.\frac{12^x}{\ln 12}\Big|_0^1 = \frac{4}{\ln 12}-\frac{1}{3\ln 12} = \frac{11}{3\ln 12}$.

Bài tập 2: Tính các tích phân sau đây:

a) $\int_0^1 \left(4x^3+3x^2-2\right)dx$ b) $\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ c) $\int_1^3 x^{\sqrt{2}}dx$

d) $\int_1^2 \frac{1}{x^3}dx$ e) $\int_1^3 x^{\frac{2}{3}}dx$ f) $\int_1^8 \sqrt[3]{x}dx$

g) $\int_{-e}^{-1} \frac{2}{x}dx.$ h) $\int_1^e \frac{7}{3x}dx$ i) $\int_0^1 \left(2.3^x-5e^x\right)dx$

Lời giải

a) $\int_0^1 \left(4x^3+3x^2-2\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 4x^3\mathrm{d}x + \int_0^1 3x^2\mathrm{d}x - \int_0^1 2\mathrm{d}x = x^4\Big|_0^1 + x^3\Big|_0^1 - 2x\Big|_0^1$

$= \left(1^4-0^4\right)+\left(1^3-0^3\right)-\left(2.1-2.0\right)=0.$

b) $\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^4 x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x \; x^{\frac{1}{2}}\Big|_1^4 = \sqrt{x}\Big|_1^4 = \sqrt{4}-\sqrt{1}=1.$

c) $\int_1^3 x^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x = \frac{x^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1}\Big|_1^3 = \frac{3^{\sqrt{2}+1}-1}{\sqrt{2}+1}.$

d) $\int_1^2 \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x = \int_1^2 x^{-3}\mathrm{d}x = \frac{x^{-2}}{-2}\Big|_1^2 = \frac{2^{-2}}{-2}-\frac{1^{-2}}{-2}=\frac{3}{8}.$

e) $\int_1^3 x^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\Big|_1^3 = \frac{3}{5}.\left(3^{\frac{5}{3}}-1\right)=\frac{3}{5}.\left(\sqrt[3]{3^5}-1\right).$

f) $\int_1^8 \sqrt[3]{x}\mathrm{d}x = \int_1^8 x^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = \frac{3}{4}.x^{\frac{4}{3}}\Big|_1^8 = \frac{3}{4}.\left(8^{\frac{4}{3}}-1\right)=\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{8^4}-1\right)=\frac{3}{4}.(16-1)=\frac{45}{4}.$

g) $\int_{-e}^{-1} \frac{2}{x}\mathrm{d}x = 2\ln|x|\Big|_{-e}^{-1} = 2\ln|-1|-2\ln|-e| = -2.$

h) $\int_1^e \frac{7}{3x}\mathrm{d}x = \frac{7}{3}\ln|x|\Big|_1^e = \frac{7}{3}.\ln e-\frac{7}{3}.\ln 1=\frac{7}{3}.$

i) $\int_0^1 \left(2.3^x-5e^x\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{2.3^x}{\ln 3}-5e^x\right)\Big|_0^1 = \left(\frac{6}{\ln 3}-5e\right)-\left(\frac{2}{\ln 3}-5\right)=\frac{4}{\ln 3}-5e+5.$

Bài tập 3: Thực hiện các yêu cầu sau đây:

a) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3^x$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0)=0$. Tính $F(1)$

b) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)=2^x$ và $F(0)=0$. Tính $F(1)$

Lời giải

a) Ta có: $F(1)-F(0)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 3^x\mathrm{d}x = \frac{3^x}{\ln 3}\Big|_0^1 = \frac{3}{\ln 3}-\frac{1}{\ln 3}=\frac{2}{\ln 3}$

Suy ra $F(1)=\frac{2}{\ln 3}+F(0)=\frac{2}{\ln 3}+0=\frac{2}{\ln 3}$

b) Ta có $F(1)-F(0)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 2^x\,\mathrm{d}x = \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^1 = \frac{2^1-2^0}{\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}=\log_2 e.$

Vậy $F(1)=\log_2 e.$

Bài tập 4: Cho $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 5$ và $\int_0^3 g(x)\mathrm{d}x = 2$. Tính:

a) $\int_0^3 \left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x$ b) $\int_0^3 \left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$

c) $\int_0^3 3f(x)\mathrm{d}x$ d) $\int_0^3 \left[2f(x)-3g(x)\right]\mathrm{d}x$

Lời giải

a) $\int_0^3 \left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x = \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^3 g(x)\mathrm{d}x = 5+2 = 7$.

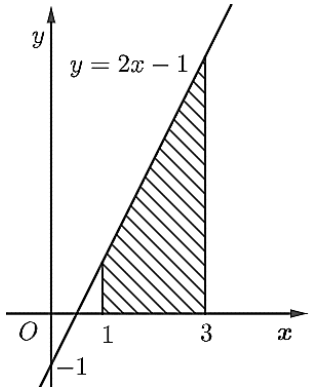
b) $\int_0^3 \left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x = \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^3 g(x)\mathrm{d}x = 5-2 = 3$.

c) $\int_0^3 3f(x)\mathrm{d}x = 3\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 3.5 = 15$.

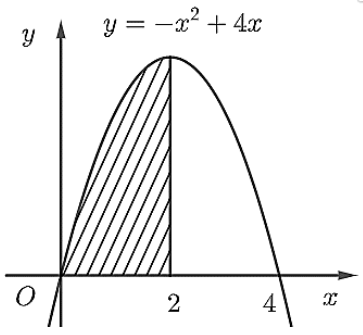
d) $\int_0^3 \left[2f(x)-3g(x)\right]\mathrm{d}x = 2\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x - 3\int_0^3 g(x)\mathrm{d}x = 2.5-3.2 = 4$.

Bài tập 5: Thực hiện các yêu cầu sau:

a) Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = 2x-1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 3$.



b) Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = -x^2+4x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 2$.



c) Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = (x+2)^2 - 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$.

d) Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=3^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=2$.

Lời giải

a) Hàm số $y=f(x)=2x-1$ liên tục và dương trên đoạn $[1;3]$ và có một nguyên hàm là $F(x)=x^2-x$

Do đó diện tích hình thang cong cần tìm là $S=F(3)-F(1)=(3^2-3)-(1^2-1)=6$.

b) Hàm số $y=f(x)=-x^2+4x$ liên tục, không âm trên đoạn $[0;2]$ và có một nguyên hàm $F(x)=-\frac{x^3}{3}+2x^2$.

Do đó, diện tích hình thang cong cần tìm là $S=F(2)-F(0)=\left(-\frac{2^3}{3}+2.2^2\right)-\left(-\frac{0^3}{3}+2.0^2\right)=\frac{16}{3}$

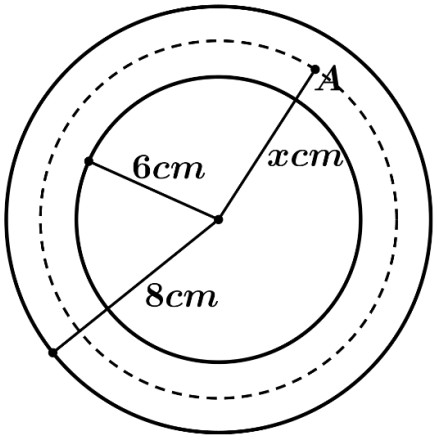
c) Hàm số $y=f(x)=(x+2)^2-1=x^2+4x+3$ liên tục và không âm trên đoạn $[1;2]$ và có một nguyên hàm $F(x)=\frac{x^3}{3}+2x^2+3x$

Ta có diện tích hình thang cong là: $S=F(2)-F(1)=\left(\frac{2^3}{3}+2.2^2+3.2\right)-\left(\frac{1^3}{3}+2.1^2+3.1\right)=\frac{34}{3}$

d) Hàm số $y=f(x)=3^x$ liên tục và không âm trên đoạn $[0;2]$ và có một nguyên hàm $F(x)=\frac{3^x}{\ln 3}$

Ta có diện tích hình thang cong cần tìm là $S=F(2)-F(0)=\left(\frac{3^2}{\ln 3}-\frac{3^0}{\ln 3}\right)=\frac{8}{\ln 3}$.

Bài tập 6: Mặt cắt ngang của một ống dẫn khí nóng là hình vành khuyên như hình minh họa dưới đây:



Khí bên trong ống được duy trì ở $150°$. Biết rằng nhiệt độ $T\,(°C)$ tại điểm A trên thành ống là hàm số của khoảng cách x (cm) từ A đến tâm của mặt cắt và $T'(x)=-\frac{30}{x}$ $(6\le x\le 8)$.

Tìm nhiệt độ mặt ngoài của ống.

Lời giải

Nhiệt độ $T\left(°C\right)$ tại điểm A trên thành ống là: $T\left(x\right)=\int T'\left(x\right)dx=\int -\frac{30}{x}dx=-30\ln x+C$

Biết rằng $T\left(6\right)=150\Leftrightarrow -30\ln 6+C=150\Leftrightarrow C=150+30\ln 6$

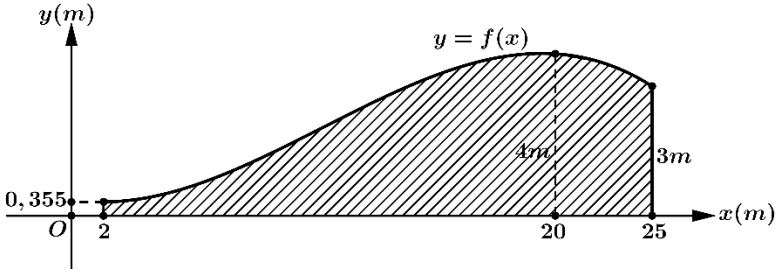
Nhiệt độ mặt ngoài của ống là:

$$T\left(8\right)=-30\ln 8+C=-30\ln 8+150+30\ln 6=150+30\ln\frac{3}{4}\approx 141,4°C$$

Vậy nhiệt độ mặt ngoài của ống khoảng $141,4°C$.

Bài tập 7: Năng lượng gió trên đất liền là một trong những công nghệ năng lượng tái tạo đang được phát triển ở quy mô toàn cầu. Năng lượng gió không trực tiếp phát thải khí nhà kính, không thải ra môi trường chất ô nhiễm khác, cũng như không tiêu thụ nước để làm mát cho các nhà máy. Các Turbine gió thường có ba cánh quay trên một trục ngang, lấy động năng từ quá trình di chuyển dòng không khí (gió) để chuyển đổi thành động năng thông qua một máy phát điện được kết nối với lưới điện. Hình thang cong (bị gạch sọc) trong hình dưới đây mô tả một phần mặt cắt đứng của cánh Turbine, được giới hạn bởi các đường thẳng $x=2, x=25,$ trục Ox và đồ thị hàm số.

$$y=f\left(x\right)=-\frac{1}{800}\left(x^3-33x^2+120x-400\right).$$



Hãy tính diện tích hình thang cong đó.

Lời giải

Diện tích của hình thang cong được tô màu vàng là: $I=\int_2^{25}-\frac{1}{800}\left(x^3-33x^2+120x-400\right)dx$

$$=-\frac{1}{800}.\left(\int_2^{25}x^3dx-33\int_2^{25}x^2dx+120\int_2^{25}x\,dx-400\int_2^{25}dx\right)=-\frac{1}{800}.\left(\frac{x^4}{4}\Big|_2^{25}-11x^3\Big|_2^{25}+60\,x^2\Big|_2^{25}-400\,x\Big|_2^{25}\right)$$

$$=\frac{184299}{3200}\left(m^2\right).$$

Vậy diện tích hình thang cong đó bằng $\frac{184299}{3200}\left(m^2\right).$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho $\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 3, \int_{-1}^{2} g(x)\mathrm{d}x = -1$. Khi đó $I = \int_{-1}^{2} \left[x + 2f(x) - 3g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 10. **B.** $\frac{21}{2}$. **C.** $\frac{19}{2}$. **D.** $\frac{17}{2}$.

Lời giải

Ta có: $I = \int_{-1}^{2} \left[x + 2f(x) - 3g(x)\right]\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} x\mathrm{d}x + 2\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x - 3\int_{-1}^{2} g(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2} + 2.3 - 3.(-1) = \frac{21}{2}$.

Câu 2: Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_{1}^{2} \left(2 + f(x)\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 7. **B.** 9. **C.** $\frac{15}{4}$. **D.** $\frac{23}{4}$.

Lời giải

Ta có $\int_{1}^{2} \left(2 + f(x)\right)\mathrm{d}x = \int_{1}^{2} 2\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 2x\big|_1^2 + x^3\big|_1^2 = 9$.

Câu 3: Cho $\int_{-1}^{2} f(t)\mathrm{d}t = 2$ và $\int_{-1}^{2} g(x)\mathrm{d}x = -1$. Tính $I = \int_{-1}^{2} \left[x + 2f(x) - 3g(x)\right]\mathrm{d}x$

A. $I = \frac{17}{2}$ **B.** $I = \frac{7}{2}$ **C.** $I = \frac{5}{2}$ **D.** $I = \frac{11}{2}$

Lời giải

Ta có $I = \int_{-1}^{2} \left[x + 2f(x) - 3g(x)\right]\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} x\mathrm{d}x + 2\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x - 3\int_{-1}^{2} g(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2} + 2.2 - 3(-1) = \frac{17}{2}$

Câu 4: Nếu $\int_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = -2$ và $\int_{1}^{4} g(x)\,\mathrm{d}x = -6$ thì $\int_{1}^{4} \left[2f(x) - g(x) + 1\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** -4. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

$\int_{1}^{4} \left[2f(x) - g(x) + 1\right]\mathrm{d}x = 2\int_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{1}^{4} g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{4} 1\,\mathrm{d}x = 2.(-2) + 6 + 3 = 5$.

Câu 5: Giả sử $\int_{0}^{9} f(x)\mathrm{d}x = 7$ và $\int_{9}^{0} g(x)\mathrm{d}x = 1$. Khi đó $I = \int_{0}^{9} \left[2f(x) + 3g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. $I = 11$. **B.** $I = 17$. **C.** $I = 23$. **D.** $I = 8$.

Lời giải

Ta có: $I = 2\int_{0}^{9} f(x)\mathrm{d}x + 3\int_{0}^{9} g(x)\mathrm{d}x = 2.7 + 3.(-1) = 11$.

Câu 6: Nếu $\int_{-1}^{4} f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_{-1}^{4} g(x)\mathrm{d}x = 3$. Khi đó $\int_{-1}^{4} \left[f(x) - g(x) \right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 5. **B.** 6. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải

Ta có: $\int_{-1}^{4} \left[f(x) - g(x) \right]\mathrm{d}x = \int_{-1}^{4} f(x)\mathrm{d}x - \int_{-1}^{4} g(x)\mathrm{d}x = 2 - 3 = -1.$

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-6;11]$ và thỏa mãn $\int_{-6}^{11} f(x)\mathrm{d}x = 8$, $\int_{2}^{6} f(x)\mathrm{d}x = 3$. Giá trị của biểu thức $P = \int_{-6}^{2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{6}^{11} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $P = 4$. **B.** $P = 11$. **C.** $P = 5$. **D.** $P = 2$.

Lời giải

Ta có: $\int_{-6}^{11} f(x)\mathrm{d}x = 8 \Leftrightarrow \int_{-6}^{2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{2}^{6} f(x)\mathrm{d}x + \int_{6}^{11} f(x)\mathrm{d}x = 8 \Leftrightarrow \int_{-6}^{2} f(x)\mathrm{d}x + 3 + \int_{6}^{11} f(x)\mathrm{d}x = 8$

$\Leftrightarrow \int_{-6}^{2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{6}^{11} f(x)\mathrm{d}x = 5 \Leftrightarrow P = 5.$

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(2) - F(0) = 5$. Khi đó $\int_{0}^{2} 3f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 6. **B.** 15. **C.** 10. **D.** 5.

Lời giải

Ta có: $\int_{0}^{2} 3f(x)\mathrm{d}x = 3\int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 3\left(F(2) - F(0)\right) = 3.5 = 15.$

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x = 10$, $\int_{3}^{5} f(x)\mathrm{d}x = 1$. Khi đó $\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 9. **B.** 10. **C.** 11. **D.** -9.

Lời giải

Ta có $\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x = \int_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x - \int_{3}^{5} f(x)\mathrm{d}x = 10 - 1 = 9.$

Câu 10: Nếu $\int_{0}^{1} 2f(x)\mathrm{d}x = 6$ thì $\int_{0}^{1} \left[\frac{1}{3} f(x) + 2x \right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Ta có $\int_{0}^{1} \left[\frac{1}{3} f(x) + 2x \right]\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x + 2\int_{0}^{1} x\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int_{0}^{1} 2f(x)\mathrm{d}x + x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.6 + 1 = 2.$

Câu 11: Giá trị của $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x$ bằng

A. -1. **B.** $\frac{\pi}{2}$. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x = \left(-\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$.

Câu 12: Kết quả tích phân $I = \int\limits_0^1 5^x\mathrm{d}x$ bằng

A. $I = \frac{4}{\ln 5}$. **B.** $I = 4\ln 5$. **C.** $I = 5\ln 5$. **D.** $I = \frac{5}{\ln 5}$.

Lời giải

Ta có: $I = \int\limits_0^1 5^x\mathrm{d}x = \frac{5^x}{\ln 5}\Big|_0^1 = \frac{5^1}{\ln 5} - \frac{5^0}{\ln 5} = \frac{4}{\ln 5}$.

Câu 13: Tích phân $I = \int\limits_0^1 \frac{1}{x+2}\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\ln 3$. **B.** $\ln 3$. **C.** $1 - \ln 3$. **D.** $\ln 3 - \ln 2$.

Lời giải

Ta có $I = \int\limits_0^1 \frac{1}{x+2}\mathrm{d}x = \ln|x+2|\Big|_0^1 = \ln 3 - \ln 2$.

Câu 14: Cho $\int\limits_0^{\ln 2} \left(2f\left(x\right) + e^x\right)\mathrm{d}x = 5$. Khi đó $\int\limits_0^{\ln 2} f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Ta có $\int\limits_0^{\ln 2} \left(2f\left(x\right) + e^x\right)\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^{\ln 2} f\left(x\right)\mathrm{d}x + \int\limits_0^{\ln 2} e^x\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^{\ln 2} f\left(x\right)\mathrm{d}x + e^x\Big|_0^{\ln 2} = 2\int\limits_0^{\ln 2} f\left(x\right)\mathrm{d}x + 1$

$\Rightarrow \int\limits_0^{\ln 2} f\left(x\right)\mathrm{d}x = 2$.

Câu 15: Cho $\int\limits_0^m \left(3x^2 - 2x + 1\right)\mathrm{d}x = 6$. Giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-1;2)$ **B.** $(-\infty;0)$ **C.** $(0;4)$ **D.** $(-3;1)$

Lời giải

Ta có $\int\limits_0^m \left(3x^2 - 2x + 1\right)dx = \left(x^3 - x^2 + x\right)\Big|_0^m = m^3 - m^2 + m$.

Để $\int_0^m \left(3x^2-2x+1\right)dx = 6 \Leftrightarrow m^3-m^2+m-6=0 \Leftrightarrow m=2\in(0;4)$

Câu 16: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = 4$. Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2f(x)+\sin x\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. $8+\frac{\pi}{2}$. **B.** $4+\pi$. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải

Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2f(x)+\sin x\right]\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x = 2\cdot 4+1=9.$

Câu 17: Tính $I=\int_0^1 \left(\frac{1}{2x+1}+3\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$.

A. $2+\ln\sqrt{3}$. **B.** $4+\ln 3$. **C.** $2+\ln 3$. **D.** $1+\ln\sqrt{3}$.

Lời giải

Ta có $I=\int_0^1 \left(\frac{1}{2x+1}+3\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2}\ln\left|2x+1\right|+2x\sqrt{x}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 3+2 = 2+\ln\sqrt{3}$.

Câu 18: Nếu $\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = 3$ thì $\int_0^{\pi}\left[f(x)+\sin\frac{x}{2}\right]\mathrm{d}x$ bằng:

A. 10. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 5.

Lời giải

Ta có $\int_0^{\pi}\left[f(x)+\sin\frac{x}{2}\right]\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x = 3-2\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi} = 3-2(0-1)=5.$

Câu 19: Tích phân $\int_0^1 \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\mathrm{e}^3+\frac{1}{2}$. **B.** $\mathrm{e}-1$. **C.** $\frac{\mathrm{e}^3-1}{3}$. **D.** e^3-1.

Lời giải

Ta có $\int_0^1 \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^1 \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}(3x) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}\Big|_0^1 = \frac{\mathrm{e}^3-1}{3}$.

Câu 20: Cho $I=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x+a}}$, với $a>0$. Tìm a nguyên để $I\ge 1$.

A. Không có giá trị nào của a. **B.** $a=0$.
C. Vô số giá trị của a. **D.** $a=1$.

Lời giải

Ta có $I=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x+a}} = \sqrt{2x+a}\Big|_0^1 = \sqrt{2+a}-\sqrt{a}$.

Ta có: $I \ge 1 \Leftrightarrow \sqrt{2+a} \ge 1+\sqrt{a} \Leftrightarrow 2+a \ge a+1+2\sqrt{a} \Leftrightarrow \sqrt{a} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \le a \le \frac{1}{4}$.

Với $a > 0$, a nguyên thì không có giá trị nào của a thoả mãn.

Câu 21: Nếu $\int_0^{\ln 3} \left[f(x) + e^x \right] \mathrm{d}x = 6$ thì $\int_0^{\ln 3} f(x) \mathrm{d}x$ bằng

A. $6 + \ln 3$. **B.** $6 - \ln 3$. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải

Ta có: $\int_0^{\ln 3} \left[f(x) + e^x \right] \mathrm{d}x = \int_0^{\ln 3} f(x) \mathrm{d}x + \int_0^{\ln 3} e^x \mathrm{d}x = \int_0^{\ln 3} f(x) \mathrm{d}x + 2$

Suy ra $\int_0^{\ln 3} f(x) \mathrm{d}x = 6 - 2 = 4$.

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $\int_0^{\pi} \left[f(x) + \sin x \right] \mathrm{d}x = 10$. Tính $I = \int_0^{\pi} f(x) \mathrm{d}x$.

A. $I = 4$. **B.** $I = 8$. **C.** $I = 12$. **D.** $I = 6$.

Lời giải

Ta có $\int_0^{\pi} \left[f(x) + \sin x \right] \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} f(x) \mathrm{d}x + \int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} f(x) \mathrm{d}x - \cos x \Big|_0^{\pi} = 10$

$\Rightarrow \int_0^{\pi} f(x) \mathrm{d}x = 10 + (\cos \pi - \cos 0) = 8$.

Câu 23: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x . \sin x \mathrm{d}x$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x . \sin x \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2x - \cos 4x) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{4} \sin 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{1}{4}.$$

Câu 24: Gọi a, b là các số nguyên sao cho $\int_0^2 \sqrt{e^{x+2}} \mathrm{d}x = 2ae^2 + be$. Giá trị của $a^2 + b^2$ bằng

A. 3. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Ta có: $\int_0^2 \sqrt{e^{x+2}} \mathrm{d}x = \int_0^2 \left(e^{x+2} \right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x = \int_0^2 e^{\frac{1}{2}x+1} \mathrm{d}x = 2e^{\frac{1}{2}x+1} \Big|_0^2 = 2e^2 - 2e \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$.

Vậy $a^2+b^2=5$.

Câu 25: Có bao nhiêu số thực b thuộc khoảng $(\pi;3\pi)$ sao cho $\int\limits_{\pi}^{b}4\cos 2x\mathrm{d}x=1$?

A. 4. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 2.

Lời giải

Ta có: $\int\limits_{\pi}^{b}4\cos 2x\mathrm{d}x=1\Leftrightarrow 2\sin 2x\Big|_{\pi}^{b}=1$

$$\Leftrightarrow \sin 2b=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2b=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\2b=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=\dfrac{\pi}{12}+k\pi\\b=\dfrac{5\pi}{12}+k\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z}).$$

Với $b=\dfrac{\pi}{12}+k\pi$ mà $b\in(\pi;3\pi)\Rightarrow 1<\dfrac{1}{12}+k<3,(k\in\mathbb{Z})\Rightarrow k=1;2\Rightarrow b=\dfrac{13\pi}{12};\dfrac{25\pi}{12}$.

Với $b=\dfrac{5\pi}{12}+k\pi$ mà $b\in(\pi;3\pi)\Rightarrow 1<\dfrac{5}{12}+k<3,(k\in\mathbb{Z})\Rightarrow k=1;2\Rightarrow b=\dfrac{17\pi}{12};\dfrac{29\pi}{12}$.

Vậy có 4 số thực b thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 26: Tính tích phân $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{\cos x}.\sin x\mathrm{d}x$ bằng:

A. $1-e$. **B.** $e+1$. **C.** e. **D.** $e-1$.

Lời giải

Ta có: $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{\cos x}.\sin x\mathrm{d}x=-\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{\cos x}\mathrm{d}(\cos x)=-e^{\cos x}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=-\left(e^{\cos\frac{\pi}{2}}-e^{\cos 0}\right)=-(1-e)=e-1.$

Câu 27: Cho biết $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(4-\sin x)\mathrm{d}x=a\pi+b$, với a,b là các số nguyên. Giá trị của biểu thức $a+b$ bằng

A. 1. **B.** -4. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(4-\sin x)dx=(4x+\cos x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=2\pi-1\Rightarrow a=2,b=-1.$

Vậy $a+b=1.$

Câu 28: Cho $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 4x\cos x\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{2}}{a}+\dfrac{b}{c}$ với a,b,c là các số nguyên, $c<0$ và $\dfrac{b}{c}$ tối giản. Tổng $a+b+c$ bằng

A. -77. **B.** 103. **C.** -17. **D.** 43.

Lời giải

Ta có $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 4x\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos 5x+\cos 3x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\sin 5x+\frac{1}{3}\sin 3x\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{30}-\frac{13}{60}$.

Suy ra $\begin{cases}a=30\\b=13\\c=-60\end{cases}\Rightarrow a+b+c=30+13-60=-17$.

Câu 29: Biết $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin^2 x.\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{a\sqrt{3}}{b}\left(a,b\in\mathbb{Z}\right)$. Tính $P=\frac{a-2b}{b}$

A. $P=\frac{4}{3}$. **B.** $P=-\frac{4}{3}$. **C.** $P=-\frac{2}{3}$. **D.** $P=\frac{2}{3}$.

Lời giải

Ta có $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin^2 x.\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x.\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x$

$=\left(\tan x-\cot x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ nên $P=\frac{2-2.3}{3}=-\frac{4}{3}$.

Câu 30: Cho $\int\limits_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}=a\sqrt{b}-\frac{8}{3}\sqrt{a}+\frac{2}{3},\ \left(a,b\in\mathbb{N}^*\right)$. Tính $a+2b$

A. 7. **B.** 8. **C.** –1. **D.** 5.

Lời giải

Ta có $\int\limits_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}=\int\limits_{0}^{1}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\left(\sqrt{\left(x+2\right)^3}-\sqrt{\left(x+1\right)^3}\right)\Big|_{0}^{1}=2\sqrt{3}-\frac{8}{3}\sqrt{2}+\frac{2}{3}$

Do đó $a=2;b=3$ nên $a+2b=8$

Câu 31: Biết $I=\int\limits_{1}^{2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 3$ với $a,b\in\mathbb{R}$. Tính $T=a^2+b^3$.

A. $T=\frac{1}{8}$. **B.** $T=\frac{8}{3}$. **C.** $T=\frac{1}{2}$. **D.** $T=\frac{3}{8}$.

Lời giải

$I=\int\limits_{1}^{2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\ln x-\ln\left(x+2\right)\right]\Big|_{1}^{2}=\frac{1}{2}\ln\frac{x}{x+2}\Big|_{1}^{2}=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\ln 3.$

Từ đó: $a=-\frac{1}{2},b=\frac{1}{2}\Rightarrow T=a^2+b^3=\frac{3}{8}$.

Câu 32: Biết $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{x+x\cos x-\sin^3 x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi^2}{a}-\dfrac{b}{c}$. Trong đó a, b, $z+|z|^2.i-1-\dfrac{3}{4}i=0$ là các số nguyên dương, phân số $\dfrac{b}{c}$ tối giản. Tính $T=a^2+b^2+c^2$.

A. $T=50$. **B.** $T=59$. **C.** $T=16$. **D.** $T=69$.

Lời giải

$$I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{x+x\cos x-\sin^3 x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)dx=\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{4}\cos 2x\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi^2}{8}-\dfrac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow\dfrac{\pi^2}{a}-\dfrac{b}{c}=\dfrac{\pi^2}{8}-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}a=8\\b=1\\c=2\end{cases}\Rightarrow a^2+b^2+c^2=69.$$

Câu 33: Diện tích hình thang cong giới hạn bởi $y=x^2;y=0;x=1;x=3$ bằng

A. $S=6$. **B.** $S=\dfrac{26}{3}$. **C.** $S=5$. **D.** $S=\dfrac{28}{3}$.

Lời giải

Ta có $f(x)=x^2$ là hàm số liên tục và không âm trên đoạn $[1;3]$.

$F(x)=\dfrac{x^3}{3}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2$ trên $[1;3]$.

Do đó diện tích hình thang cong cần tìm là: $S=F(3)-F(1)=\dfrac{3^3-1^3}{3}=\dfrac{26}{3}$.

Câu 34: Diện tích hình thang cong giới hạn bởi $y=\dfrac{2}{x+1};y=0;x=1;x=3$ bằng

A. $S=\ln 8$. **B.** $S=\ln 4$. **C.** $S=2\ln 4$. **D.** $S=\ln 2$.

Lời giải

Ta có $f(x)=\dfrac{2}{x+1}$ là hàm số liên tục và không âm trên đoạn $[1;3]$.

$F(x)=2\ln|x+1|$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2}{x+1}$ trên $[1;3]$.

Do đó diện tích hình thang cong cần tìm là: $S=F(3)-F(1)=2\ln 4-2\ln 2=2\ln 2=\ln 4$.

Câu 35: Diện tích hình thang cong được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)=\dfrac{1}{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1$, $x=e$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** e. **D.** e^{-1}.

Lời giải

Hàm số $y=f(x)=\dfrac{1}{x}$ liên tục,dương trên đoạn $[1;e]$ và có một nguyên hàm là $F(x)=\ln x$

Do đó, diện tích hình thang cong cần tìm là $S=F(e)-F(1)=\ln e-\ln 1=1.$

Câu 36: Diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)=x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=2, x=4$ là

A. $S=10$. **B.** $S=16$. **C.** $S=2$. **D.** $S=6$.

Lời giải

Hàm số $y=f(x)=x$ liên tục, dương trên đoạn $[2;4]$ và có một nguyên hàm $F(x)=\dfrac{x^2}{2}$.

Do đó, diện tích hình thang cong cần tìm là $S=F(4)-F(2)=\dfrac{4^2}{2}-\dfrac{2^2}{2}=6$.

Câu 37: Tính diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)=-x^2-2x+1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-2; x=0$?

A. $S=\dfrac{10}{3}$. **B.** $S=3$ **C.** $S=\dfrac{7}{3}$. **D.** $S=-3$

Lời giải

Hàm số $y=f(x)=-x^2-2x+1$ liên tục và không âm trên $[-2;0]$ và có một nguyên hàm là

$F(x)=\dfrac{-x^3}{3}-x^2+x$

Do đó diện tích hình thang cong cần tìm là $S=F(0)-F(-2)=0-\left(\dfrac{-10}{3}\right)=\dfrac{10}{3}$.

Câu 38: Một vật chuyển động với gia tốc $a(t)=2\cos t\left(\text{m}/\text{s}^2\right)$, biết rằng tại thời điểm bắt đầu chuyển động, vật có vận tốc bằng 0. Tính quãng đường vật đi được từ thời điểm $t=0(s)$ đến thời điểm $t=\pi(s)$.

A. $5(m)$. **B.** $3(m)$. **C.** $2(m)$. **D.** $4(m)$.

Lời giải

Ta có $v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\int 2\cos t\,\mathrm{d}t=2\sin t+C$.

Mà tại thời điểm bắt đầu chuyển động thì vật có vận tốc bằng 0 nên ta có $v(0)=0$ hay $C=0$.

Vậy $v(t)=2\sin t$.

Quãng đường vật đi được từ thời điểm $t=0(s)$ đến thời điểm $t=\pi(s)$ là

$$\int_0^{\pi} v(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\pi} 2\sin t\,\mathrm{d}t=-2\cos t\Big|_0^{\pi}=-2\cos\pi-(-2\cos 0)=4(\text{m}).$$

Câu 39: Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu $1(\text{m})$. Một ô tô A đang chạy với vận tốc 15m/s bỗng gặp ô tô B đang đứng chờ đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều bởi vận tốc được biểu thị bởi công thức

$v_A(t)=15-5t\ (\text{m/s})$. Để hai ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là s mét. Giá trị của s bằng:

A. $23,5$. **B.** 21. **C.** $22,9$. **D.** $21,6$.

Lời giải

Khi ô tô dừng lại $v_A(t)=0\Leftrightarrow t=3$

Quãng đường ô tô A đi được từ lúc ô tô A đạp phanh đến khi dừng hẳn là:

$$\int_0^3(15-5t)\mathrm{d}t=22,5(\text{m}).$$

Vậy để đảm bảo an toàn thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là $23,5\text{m}$

Câu 40: Một vật chuyển động với gia tốc $a(t)=\dfrac{1}{t^2+3t+2}\left(\text{m/s}^2\right)$, trong đó t là khoảng thời gian tính từ thời điểm ban đầu. Vận tốc chuyển động của vật là $v(t)$. Vào thời điểm $t=11(\text{s})$ thì vận tốc của vật là $v(\text{m/s})$, biết vận tốc ban đầu của vật là $v_0=3\ln 2(\text{m/s})$. Giá trị của v là:

A. $2,35$. **B.** $2,69$. **C.** $2,29$. **D.** $2,16$.

Lời giải

Ta có: $v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\int\dfrac{1}{t^2+3t+2}\mathrm{d}t=\int\left(\dfrac{1}{t+1}-\dfrac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t=\ln\left|\dfrac{t+1}{t+2}\right|+C$

$v(0)=\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)+C=3\ln 2\Rightarrow C=4\ln 2\Rightarrow v(t)=\ln\left|\dfrac{t+1}{t+2}\right|+4\ln 2$.

Tính $v(11)=\ln\left(\dfrac{12}{13}\right)+4\ln 2\approx 2,69$.

Vậy $v\approx 2,69$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=3,\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=5$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\int_2^0 f(x)\mathrm{d}x=3$.

b) $\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x=2$.

c) $\int_0^2\left(f(x)-2x\right)\mathrm{d}x=-1$.

d) Nếu $f(x)=10$ thì $\int_0^2 x.f'(x)\mathrm{d}x=13$

Lời giải

a) Sai: Vì $\int_2^0 f(x)dx=-3$

b) Đúng: Ta có $\int_2^3 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx - \int_0^2 f(x)dx = 2$

c) Đúng: Ta có $\int_0^2 \left(f(x) - 2x\right)dx = \int_0^2 f(x)dx - \int_0^2 2xdx = 3 - 4 = -1$

d) Sai: Ta có $\int_0^2 x.f'(x)dx = x.f(x)|_0^2 - \int_0^2 f(x)dx = 2f(2) - 3 = 17$

Câu 2: Cho $f(x) = \sin x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $\int_0^{\pi} f\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}x = 0$.

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2x - f(x)\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4} + 1$.

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(2x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$

Lời giải

a) Đúng: Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) Đúng: Ta có $\int_0^{\pi} f\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)dx = \int_0^{\pi} \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)dx = 0$.

c) Sai: Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2x - f(x)\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2xdx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx = \frac{\pi^2}{4} - 1$

d) Đúng: Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(2x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\sin 2xdx = \frac{\pi}{4}$

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = e^x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = e$.

b) $\int_0^1 f(2x+1)\mathrm{d}x = e^3 - e$.

c) $\int_0^1 \left(f(x) - 4x\right)\mathrm{d}x = e - 3$.

d) $\int_0^1 (x-1) f(x)dx = 2-e$.

Lời giải

a) Sai: Ta có $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 e^x dx = e-1$

b) Sai: Ta có $\int_0^1 e^{2x+1}dx = \frac{1}{2}e^{2x+1}\,|_0^1 = \frac{e\left(e^2-1\right)}{2}$

c) Đúng: Ta có $\int_0^1 \left(f(x)-4x\right)dx = \int_0^1 \left(e^x-4x\right)dx = e-3$

d) Đúng: Ta có $\int_0^1 (x-1) f(x)dx = \int_0^1 (x-1)e^x dx = 2-e$

Câu 4: Giả sử chi phí mua và bảo trì một thiết bị trong x năm có thể được mô hình hóa theo công thức $C = 5000\left(25+3\int_0^x t^{\frac{1}{4}}dt\right)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Chi phí mua 1 sản phẩm là 100.000 đồng.

b) Chi phí bảo trì năm đầu tiên của 1 sản phẩm là 12.000 đồng.

c) Sau 6,5 năm thì số tiền mua một sản phẩm bằng số tiền bảo trì sản phẩm đó.

d) Nếu một nhà đầu tư có 10 triệu, thì họ có thể mua và bảo trì tối đa 30 sản phẩm trong 10 năm.

Lời giải

a) Sai: Chi phí mua 1 sản phẩm ứng với $x=0$, sau ra $C = 5000.25 = 125.000$

b) Đúng: Với $x=1$ ta có: $C = 5000\left(25+3\int_0^1 t^{\frac{1}{4}}dt\right) = 137.000$. Suy ra chi phí bảo trì năm đầu tiên của sản phẩm là $137.000-125.000 = 12.000$ đồng.

c) Sai: Gọi x là số năm mà số tiền bảo trì bằng số tiền mua sản phẩm. Khi đó tổng số tiền mua và số tiền bảo trì là $2*125.000 = 250.000$.

$$5000\left(25+3\int_0^x t^{\frac{1}{4}}dt\right) = 250.000 \Leftrightarrow 25+3\left(\frac{4}{5}t^{\frac{5}{4}}\,|_0^x\right) = 50 \Leftrightarrow \frac{12}{5}x^{\frac{5}{4}} = 25 \Leftrightarrow x = \left(\frac{75}{2}\right)^{\frac{4}{5}} \approx 6.52 \text{ năm.}$$

d) Sai: Số tiền mua và bảo trì 1 sản phẩm trong 10 năm là:

$C = 5000\left(25+3\int_0^{10} t^{\frac{1}{4}}dt\right) = 5000\left(25+24\sqrt[4]{10}\right) \approx 338.393,53$. Ta có: $\frac{10.000.000}{338.393,53} \approx 29,55$

Vậy với 10 triệu thì họ có thể mua và bảo trì tối đa 29 sản phẩm.

Câu 5: Cho $\int_{-3}^{0} f(x)\mathrm{d}x=-4$ và $\int_{-3}^{0} g(x)\mathrm{d}x=-3$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\int_{0}^{-3} f(x)\mathrm{d}x=-4$.

b) $\int_{-3}^{0} -3f(x)\mathrm{d}x=12$.

c) $\int_{-3}^{0}\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=-7$.

d) Nếu $\int_{-3}^{0}\left[2f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=-51$ và $\int_{-3}^{0}\left[nf(x)+mg(x)\right]\mathrm{d}x=20$ thì $m+n=-3$.

Lời giải

a) Sai: Ta có $\int_{0}^{-3} f(x)\mathrm{d}x=-\int_{-3}^{0} f(x)\mathrm{d}x\Rightarrow\int_{0}^{-3} f(x)\mathrm{d}x=4$.

b) Đúng: Ta có $\int_{-3}^{0}(-3)f(x)\mathrm{d}x=(-3).\int_{-3}^{0} f(x)\mathrm{d}x=(-3).(-4)=12$.

c) Đúng: Ta có $\int_{-3}^{0}\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=\int_{-3}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{-3}^{0} g(x)\mathrm{d}x=(-4)+(-3)=-7$.

d) Sai: Ta có $\int_{-3}^{0}\left[mf(x)+ng(x)\right]\mathrm{d}x=-51$ và $\int_{-3}^{0}\left[nf(x)+mg(x)\right]\mathrm{d}x=20$

Suy ra $\begin{cases} m\int_{-3}^{0} f(x)\mathrm{d}x+n\int_{-3}^{0} g(x)\mathrm{d}x=-51 \\ n\int_{-3}^{0} f(x)\mathrm{d}x+m\int_{-3}^{0} g(x)\mathrm{d}x=20 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} -4m-3n=-51 \\ -4n-3m=-19 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m=21 \\ n=-11 \end{cases}\Rightarrow m+n=10$.

Câu 6: Một chất điểm chuyển động trên đường thẳng nằm ngang với gia tốc phụ thuộc vào thời gian $t(\mathrm{s})$ là $a(t)=2t-7\ (\mathrm{m/s^2})$. Biết vận tốc đầu bằng $6\ (\mathrm{m/s})$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t(\mathrm{s})$ xác định bởi $v(t)=t^2-7t+10$.

b) Tại thời điểm $t=7$, vận tốc của chất điểm là 6.

c) Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1\le t\le 7$ là 18 m.

d) Trong 8 giây đầu tiên, thời điểm chất điểm xa nhất về phía bên phải là $t=7$.

Lời giải

a) Sai: Ta có $v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\int(2t-7)\mathrm{d}t=t^2-7t+C$.

$v(0)=6\Rightarrow C=6$ nên $v(t)=t^2-7t+6$.

b) Đúng: $v(7)=7^2-7\cdot 7+6=6$.

c) Sai: Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1\le t\le 7$ là

$$S=\int_1^7 v(t)\mathrm{d}t=\int_1^7\left(t^2-7t+6\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{t^3}{3}-\frac{7t^2}{2}+6t\right)\Big|_1^7=-18.$$

d) Sai:Tọa độ của chất điểm tại thời điểm t là

$$x(t)=\int v(t)\mathrm{d}t=\int\left(t^2-7t+6\right)\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}-\frac{7t^2}{2}+6t+C.$$

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $x(t)$ với $t\in[0;8]$.

Ta có $x'(t)=v(t)=0$ khi $t=1$ hoặc $t=6$.

Lại có $x(0)=C$, $x(1)=\frac{17}{6}+C$, $x(6)=-18+C$, $x(8)=-\frac{16}{3}+C$.

Vậy giá trị lớn nhất của $x(t)$ với $t\in[0;8]$ đạt được khi $t=1$.

Câu 7: Một ô tô đang chạy với vận tốc $18\,(\mathrm{m/s})$ thì người lái hãm phanh. Sau khi hãm phanh ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=18-36t\,(\mathrm{m/s})$, trong đó t là khoảng thời gian được tính bằng giây kể từ lúc ô tô bắt đầu hãm phanh. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau đây:
a) Thời gian kể từ lúc hãm phanh đến lúc xe dừng hẳn là $1,5$ giây.

b) Quãng đường xe đi được sau $0,3$ giây kể từ lúc hãm phanh là 3 mét.

c) Quãng đường kể từ lúc hãm phanh đến lúc xe dừng hẳn là $4,5$ mét.

d) Gia tốc tức thời của chuyển động này là $36\left(\mathrm{m/s^2}\right)$.

Lời giải

a) Sai: Lúc hãm phanh thì $v(t_1)=0\Rightarrow 18-36t_1=0\Rightarrow t_1=0,5$ giây.

b) Sai: Quãng đường xe đi được sau $0,3$ giây kể từ lúc hãm phanh là

$$s=\int_0^{0,3}(18-36t)\mathrm{d}t=\left(18t-18t^2\right)\Big|_0^{0,3}=3,78.$$

c) Đúng: Với $t_1=0,5$ giây thì quãng đường kể từ lúc hãm phanh đến lúc xe dừng hẳn là

$$s_1=\int_0^{0,5}(18-36t)\mathrm{d}t=\left(18t-18t^2\right)\Big|_0^{0,5}=4,5$$

d) Sai: Gia tốc tức thời của chuyển động này là $a=v'(t)=-36\left(\mathrm{m/s^2}\right)$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Nếu $\int_1^2 f(x)dx = 5$ và $\int_1^2 g(x)dx = -\frac{1}{2}$ thì $\int_1^2 \left[f(x) - g(x)\right]dx = \frac{11}{2}$

b) Nếu $\int_1^3 \left[g(x) + 2x + 3\right]dx = 10$ thì $\int_1^3 g(x)dx = 3$.

c) Nếu $f(x) = e^{3x}$, $F(0) = \frac{1}{3}$ thì $F\left(\frac{1}{3}\right) = e$.

d) Nếu $f(x) = 2x + 1;\ g(x) = x - 2$ thì $\int_3^5 \frac{f(x)}{g(x)}dx = a + b\ln c$. Khi đó $a + b + c = 11$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có: $\int_1^2 \left[f(x) - g(x)\right]dx = \int_1^2 f(x)dx - \int_1^2 g(x)dx = 5 - \left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{11}{2}$

b) Sai: Ta có $\int_1^3 \left[g(x) + 2x + 3\right]dx = 10 \Leftrightarrow \int_1^3 g(x)dx + \int_1^3 (2x+3)dx = 10 \Leftrightarrow \int_1^3 g(x)dx + 14 = 10$

$\Leftrightarrow \int_1^3 g(x)dx = 10 - 14 = -4$.

c) Sai : Ta có $F(x) = \int f(x)dx = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$ và $F(0) = \frac{-1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3}e^{3.0} + C = \frac{1}{3} \Rightarrow C = 0$

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} \Rightarrow F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}e^{3.\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}e$

d) Sai: Ta có $\int_3^5 \frac{2x+1}{x-2}dx = \int_3^5 \frac{2(x-2)+5}{x-2}dx = \int_3^5 2 + \frac{5}{x-2}dx$

$= \left(2x + 5\ln|x-2|\right)\Big|_3^5 = (10 + 5\ln 3) - (6 + 5\ln 1) = 4 + 5\ln 3$ nên $a + b + c = 4 + 5 + 3 = 12$.

Câu 9: Một ô tô đang di chuyển với tốc độ $20(m/s)$ thì hãm phanh nên tốc độ (m/s) theo thời gian t được tính theo công thức $v(t) = 20 - 5t(0 \le t \le 4)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Sau khi hãm phanh, tốc độ của xe tăng.

b) Tốc độ tại thời điểm 2s sau hãm phanh là $10(m/s)$

c) Sau khi hãm phanh 4s thì xe dừng hẳn.

d) Kể từ khi hãm phanh đến dừng, xe đi được quãng đường 42m

Lời giải

a) Sai: Do $v'(t) = -5 < 0$ nên sau khi hãm phanh tốc độ của xe giảm.

b) Đúng: $v(2)=10$

c) Đúng: $v=0 \Leftrightarrow 20-5t=0 \Leftrightarrow t=4$.

d) $s=\int_0^4 (20-5t)dt=40$ nên kể từ khi hãm phanh đến dừng xe đi được quãng đường 40m.

Câu 10: Một chất điểm chuyển động trên đường thẳng nằm ngang (chiều dương hướng sang phải) với gia tốc phụ thuộc vào thời gian $t(\text{s})$ là $a(t)=2t-7\ (\text{m/s}^2)$. Biết vận tốc đầu bằng $6\ (\text{m/s})$, xét tính đúng sai của các khẳng định sau.

a) Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t(\text{s})$ xác định bởi $v(t)=t^2-7t+10$.

b) Tại thời điểm $t=7$ (s), vận tốc của chất điểm là 6 (m/s).

c) Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1\le t\le 7$ là 18 m.

d) Trong 8 giây đầu tiên, thời điểm chất điểm xa nhất về phía bên phải là $t=7$ (s).

Lời giải

a) Sai: Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t(\text{s})$ xác định bởi $v(t)=t^2-7t+10$.

Ta có $v(t)=\int a(t)\text{d}t=\int(2t-7)\text{d}t=t^2-7t+C$.

$v(0)=6\Rightarrow C=6$.

Vậy $v(t)=t^2-7t+6$ (m/s).

b) Đúng: Tại thời điểm $t=7$ (s), vận tốc của chất điểm là 6 (m/s).

$v(7)=7^2-7\cdot 7+6=6$ (m/s).

c) Sai: Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1\le t\le 7$ là 18 m.

Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1\le t\le 7$ là

$$S=\int_1^7 v(t)\text{d}t=\int_1^7 (t^2-7t+6)\text{d}t=\left(\frac{t^3}{3}-\frac{7t^2}{2}+6t\right)\Bigg|_1^7=-18.$$

d) Sai: Trong 8 giây đầu tiên, thời điểm chất điểm xa nhất về phía bên phải là $t=7$ (s).

Tọa độ của chất điểm tại thời điểm t là $x(t)=\int v(t)\text{d}t=\int(t^2-7t+6)\text{d}t=\frac{t^3}{3}-\frac{7t^2}{2}+6t+C$

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $x(t)$ với $t\in[0;8]$.

Ta có $x'(t)=v(t)=0$ khi $t=1$ hoặc $t=6$.

Lại có $x(0)=C$, $x(1)=\frac{17}{6}+C$, $x(6)=-18+C$, $x(8)=-\frac{16}{3}+C$.

Vậy giá trị lớn nhất của $x(t)$ với $t\in[0;8]$ đạt được khi $t=1$.

Câu 11: Giả sử lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức $P'(x)=-0,0008x+10,4$. Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm.

a) Lợi nhuận khi bán được x đơn vị sản phẩm được tính bằng công thức $P(x)=-0,0008x^2+10,4x$.

b) Lợi nhuận khi bán được 50 sản phẩm đầu tiên là 519 triệu đồng.

c) Sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên 55 đơn vị sản phẩm là 49,79 triệu đồng.

d) Biết sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên a đơn vị sản phẩm lớn hơn 517 triệu đồng, khi đó giá trị nhỏ nhất của a là 100.

Lời giải

a) Sai: Lợi nhuận khi bán được x đơn vị sản phẩm được tính bằng công thức $P(x) = -0,0008x^2 + 10,4x$.

Ta có: $P(x) = \int P'(x)\mathrm{d}x = \int(-0,0008x + 10,4)\mathrm{d}x = -0,0004x^2 + 10,4x$.

b) Đúng: Lợi nhuận khi bán được 50 sản phẩm đầu tiên là 519 triệu đồng.

Lợi nhuận khi bán được 50 sản phẩm đầu tiên là: $P(50) = -0,0004.50^2 + 10,4.50 = 519$ (triệu đồng).

c) Sai: Sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên 55 đơn vị sản phẩm là 49,79 triệu đồng.

Ta có sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên 55 đơn vị sản phẩm là

$$P(55) - P(50) = \int_{50}^{55} P'(x)\mathrm{d}x = \int_{50}^{55}(-0,0008x + 10,4)\mathrm{d}x = -\int_{50}^{55} 0,0008x\mathrm{d}x + \int_{50}^{55} 10,4\mathrm{d}x$$

$$= -0,0004x^2\Big|_{50}^{55} + 10,4x\Big|_{50}^{55} = -0,0004\left(55^2 - 50^2\right) + 10,4(55 - 50) = 51,79 \text{ (triệu đồng).}$$

d) Sai: Biết sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên a đơn vị sản phẩm lớn hơn 517 triệu đồng, khi đó giá trị nhỏ nhất của a là 100.

Ta có sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên a đơn vị sản phẩm là

$$P(a) - P(50) = \int_{50}^{a} P'(x)\mathrm{d}x = \int_{50}^{a}(-0,0008x + 10,4)\mathrm{d}x = -\int_{50}^{a} 0,0008x\mathrm{d}x + \int_{50}^{a} 10,4\mathrm{d}x$$

$$= -0,0004x^2\Big|_{50}^{a} + 10,4x\Big|_{50}^{a} = -0,0004\left(a^2 - 50^2\right) + 10,4(a - 50) = -0,0004a^2 + 10,4a - 519.$$

Theo bài ra ta có:

$-0,0004a^2 + 10,4a - 519 > 517 \Leftrightarrow 0,0004a^2 - 10,4a + 1036 < 0 \Leftrightarrow 100 < a < 25900$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của a là 101.

Câu 12: Ở nhiệt độ $37°C$, một phản ứng hóa học từ chất đầu A, chuyển hóa thành chất sản phẩm B theo phương trình: $A \to B$. Giả sử $y(x)$ là nồng độ chất A (đơn vị mol L^{-1}) tại thời điểm x (giây), $y(x) > 0$ với $x \ge 0$, thỏa mãn hệ thức: $y'(x) = -7.10^{-4}y(x)$ với $x \ge 0$. Biết rằng tại $x = 0$, nồng độ (đầu) của A là 0,05 mol L^{-1}. Xét hàm số $f(x) = \ln y(x)$ với $x \ge 0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f'(x) = -7.10^{-4}$

b) $f(x) = -7.10^{-4}x + \ln(0,05)$

c) $y(30) - y(15) = -6.10^{-4}$

d) Nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây gần bằng 0,05.

Lời giải

a) Đúng: $f'(x) = -7.10^{-4}$.

Ta có $f'(x)=\left(\ln y(x)\right)'=\dfrac{y'(x)}{y(x)}=-7.10^{-4}$.

b) Đúng: $f(x)=-7.10^{-4}x+\ln(0,05)$.

Ta có $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\left(-7.10^{-4}\right)\mathrm{d}x=-7.10^{-4}x+C$.

Theo giả thiết $y(0)=0,05$ nên $f(0)=\ln y(0)=\ln(0,05)$. Khi đó $C=\ln(0,05)$.

Vậy $f(x)=-7.10^{-4}x+\ln(0,05)$.

c) Sai: $y(30)-y(15)=-6.10^{-4}$.

Từ $f(x)=\ln y(x)\Rightarrow y(x)=e^{f(x)}=e^{-7.10^{-4}x+\ln(0,05)}=\dfrac{1}{20}e^{-7.10^{-4}x}$.

Do đó $y(30)-y(15)=\dfrac{1}{20}\left(e^{-7.10^{-4}.30}-e^{-7.10^{-4}.15}\right)\approx-5,2.10^{-4}$.

d) Đúng: Nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây gần bằng $0,05$.

Nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây là:

$$\frac{1}{30-15}\int_{15}^{30}y(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{15}\int_{15}^{30}\left(-\frac{1}{7.10^{-4}}\right)y'(x)\mathrm{d}x=-\frac{10^4}{105}y(x)\Big|_{15}^{30}=-\frac{10^4}{105}\left[y(30)-y(15)\right]\approx0,05.$$

Câu 13: Sau khi xuất phát, ô tô di chuyển với tốc độ $v(t)=2,01t-0,025t^2\left(0\le t\le10\right)$. Trong đó $v(t)$ tính theo $(\mathrm{m/s})$, thời gian t tính theo s với $t=0$ là thời điểm xe xuất phát.

a) Quãng đường xe di chuyển được tính theo công thức là $s(t)=2,01-0,05t\left(0\le t\le10\right)$

b) Quãng đường xe di chuyển được trong 3 s là 8,82m.

c) Quãng đường xe di chuyển được trong giây thứ 9 xấp xỉ 15,277m

d) Trong khoảng thời gian không quá 10s đầu, khi vận tốc đạt giá trị lớn nhất thì gia tốc của xe là 1,51m/s^2

Lời giải

a) Sai: Quãng đường xe di chuyển được phải là nguyên hàm của $v(t)$

Khi đó $v'(t)=2,01-0,05t\left(0\le t\le10\right)$ là công thức tính gia tốc của vật.

b) Đúng: Quãng đường xe di chuyển được trong 3s là: $\int_0^3\left(2,01t-0,025t^2\right)dt=8,82m$.

c) Đúng: Quãng đường xe di chuyển được trong giây thứ 9

$$s(9)-s(8)=\int_8^9\left(2,01t-0,025t^2\right)dt\simeq15,277m$$

d) Đúng: $v(t)=2,01t-0,025t^2\left(0\le t\le10\right)\Rightarrow\max_{[0;10]}v(t)=17,6m/s$ khi $t=10s$

Gia tốc vật khi đó là $a(10)=v'(10)=2,01-0,05.10=1,51\left(m/s^2\right)$

Câu 14: Tại một nhà máy sản xuất một loại phân bón. Gọi $P(x)$ là lợi nhuận (tính theo triệu đồng) thu được từ việc bán x (tấn) sản phẩm trong một tuần. Khi đó đạo hàm $P'(x)$ gọi là lợi nhuận cận biên, cho biết tốc độ tăng lợi nhuận theo lượng sản phẩm bán được. Giả sử lợi nhuận cận biên (tính theo triệu đồng trên tấn) của nhà máy được ước lượng bởi công thức:
$P'(x)=17-0,025x$ với $0\le x\le 100$

Biết nhà máy lỗ 24 triệu đồng nếu không bán được lượng sản phẩm nào trong tuần.

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Công thức lợi nhuận (tính theo triệu đồng) thu được từ việc bán x (tấn) sản phẩm trong một tuần là $P(x)=17x-0,0125x^2+C$ với C là một hằng số bất kỳ

b) Có thể tính được lợi nhuận của nhà máy thu được khi bán 120 tấn sản phẩm trong tuần.

c) Lợi nhuận nhà máy thu được khi bán 80 tấn sản phẩm trong tuần là 1 tỉ 256 triệu đồng.

d) Nếu nhà máy bán được từ 1,3 tấn sản phẩm trên tuần trở lên thì nhà máy luôn có lãi.

Lời giải

a) Sai: $C=-24$ không phải C bất kỳ.

$P(x)=\int P'(x)dx=\int(17-0,025x)dx=17x-0,0125x^2+C$ với $0\le x\le 100$

Vì nhà máy lỗ 24 triệu đồng nếu không bán được lượng sản phẩm nào trong tuần nên

Với $x=0$ thì $P(x)=-24$ suy ra $P(0)=-24\Leftrightarrow C=-24\Rightarrow P(x)=17x-0,0125x^2-24$

b) Sai: Chưa có công thức tính $P'(x)$ khi $x>100$ Công thức $P'(x)$ đề cho chỉ áp dụng được khi $0\le x\le 100$

c) Đúng: Khi bán 80 tấn sản phẩm trong tuần thì $x=80$ và $P(80)=1256$ triệu đồng.

d) Sai:Nhà máy chỉ bắt đầu có lãi khi $P(x)>0\Rightarrow 17x-0,0125x^2-24>0\Rightarrow 1,41<x<1358,5$

Vậy nếu $1,3\le x\le 1,41$ nhà máy vẫn có thể bị lỗ.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Một ô tô đang chuyển động trên đường với vận tốc $v(t)=4t+3(\text{ m/s})$, với t là thời gian tính bằng giây. Quãng đường ô tô đi được trong khoảng từ 3 đến 5 giây là bao nhiêu?

Lời giải

Quãng đường ô tô đi được trong khoảng từ 3 đến 5 giây là: $S=\int_3^5(4t+3)\mathrm{d}t=38$.

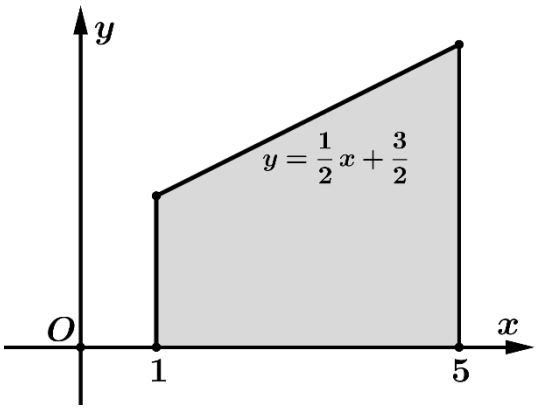
Câu 2: Một người đang lái xe ô tô với vận tốc $24(\text{m/s})$ thì người lái phát hiện phía trước có chướng ngại vật nên cần giảm tốc độ của xe. Sau khi đạp phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-8t+24(\text{ m/s})$, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi xe dừng hẳn, ô tô di chuyển quãng đường bao nhiêu mét?

Lời giải

Vật dừng lại tại thời điểm $v=0\Rightarrow -8t+24=0\Leftrightarrow t=3(\text{s})$

Ô tô di chuyển quãng đường là: $S=\int_0^3 v(t)\mathrm{d}t=\int_0^3(-8t+24)\mathrm{d}t=36$.

Câu 3: Một khối gỗ khi cắt một bề mặt ta thu được thiết diện được cho bởi hình vẽ bên. Diện tích của thiết diện đó bằng bao nhiêu?



Lời giải

Diện tích của thiết diện đó là: $S=\int_1^5\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)\mathrm{d}x=12$

Câu 4: Giá trị trung bình của hàm số liên tục $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ được định nghĩa là $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Giả sử nhiệt độ (tính bằng $^\circ\text{C}$) tại thời điểm t giờ trong khoảng thời gian từ 6 giờ sáng đến 12 giờ trưa ở một địa phương vào ngày 27/06/2023 được mô hình hóa bởi hàm số

$$T(t)=25+2(t-7),6\le t\le 12.$$

Nhiệt độ trung bình ngày 27/6/2023 của địa phương trên là bao nhiêu $^\circ\text{C}$?

Lời giải

Nhiệt độ trung bình ngày 27/6/2023 của địa phương trên là:

$$t_0=\frac{1}{12-6}.\int_6^{12}\left[25+(t-7)\right]\mathrm{d}t=\frac{1}{6}.\int_6^{12}(2t+11)\mathrm{d}t=29\ ^\circ\text{C}$$

Câu 5: Cửa hàng thực phẩm của anh An có lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức $P'(x)=-0,01x+2$. Lợi nhuận của sản phẩm trên khi doanh số là 200 với sản phẩm lớn hơn doanh số 150 sản phẩm là bao nhiêu triệu đồng, biết $P(x)$ là lợi nhuận tính bằng triệu đồng?

Lời giải

Lợi nhuận của cửa hàng khi đó là: $P(200)-P(150)=\int_{150}^{200}P'(x)\mathrm{d}x=\int_{150}^{200}(-0,01x+1)\mathrm{d}x=12,5$

Vậy lợi nhuận của sản phẩm hơn nhau $12,5$ triệu đồng.

Câu 6: Một ô tô đang chuyển động trên đường với vận tốc $v(t)=t^2-4t+1(\text{ m/s})$, với t là thời gian tính bằng giây. Quãng đường ô tô đi được trong khoảng từ 2 đến 8 giây là bao nhiêu?

Lời giải

Quãng đường ô tô đi được trong khoảng từ 2 đến 8 giây là:

$$S_0 = \int_2^8 v(t)\mathrm{d}t = \int_2^8 \left(t^2 - 4t + 1\right)\mathrm{d}t = 54$$

Câu 7: Chị Hồng đang lái xe với vận tốc $5\ \mathrm{m/s}$ thì nhận thấy phía trước đèn giao thông đang chuẩn bị chuyển sang đèn đỏ nên cần giảm tốc độ của xe để đợi đèn đỏ. Sau khi đạp phanh, xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -0,5t + 5\left(\mathrm{m/s}\right)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi xe dừng hẳn, xe di chuyển quãng đường bao nhiêu mét?

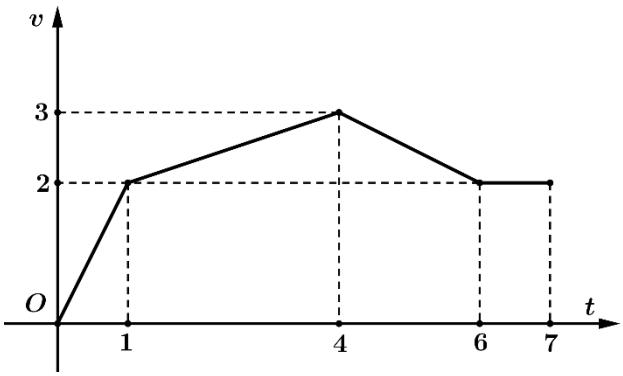
Lời giải

Lúc đạp phanh tại thời điểm: $v = 5 \Rightarrow -0,5t_1 + 5 = 5 \Leftrightarrow t_1 = 0$ giây

Xe dừng ở thời điểm $v = 0 \Leftrightarrow -0,5t_2 + 5 = 0 \Leftrightarrow t_2 = 10$ giây

Khi đó quãng đường xe di chuyển là: $S = \int_0^{10} \left(-0,5t + 5\right)\mathrm{d}t = 25$ mét.

Câu 8: Một chiếc xe chuyển động với đồ thị vận tốc được biểu diễn theo đường gấp khúc được minh họa trên hệ trục Otv như hình vẽ (mỗi đơn vị trên Ot ứng với 1 phút và mỗi đơn vị trên Ov ứng với $0,4$ km / phút).



Quãng đường mà xe đã di chuyển trong 7 phút là bao nhiêu km?

Lời giải

Quãng đường mà xe đã di chuyển trong 7 phút là:

$$S = \left(\int_0^7 t(t)\mathrm{d}t\right).0,4 = \left(\frac{1}{2}.1.2 + \frac{1}{2}(2+3).3 + \frac{1}{2}(2+3).2 + 1.2\right).0,4 = 6,2\,\mathrm{km}$$

Câu 9: Giá trị trung bình của hàm số liên tục $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ được định nghĩa là $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Giả sử lượng mưa trung bình (tính bằng mm) tại thời điểm t ngày trong khoảng thời gian từ ngày 01/10 đến ngày 31/10 ở Thừa Thiên Huế vào tháng 10/2023 được mô hình hóa bởi hàm số:

$$M(x) = 80 + 10(t-8); 1 \le t \le 31.$$

Lượng mưa trung bình tháng 10/2023 của Thừa Thiên Huế là bao nhiêu mm?

Lời giải

Lượng mưa trung bình tháng 10/2023 của Thừa Thiên Huế là

$$M_0 = \frac{1}{31-1}\int_1^{31} \left[80 + 10(t-8)\right]\mathrm{d}t = 160\,\mathrm{mm}.$$

Câu 10: Một ô tô chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v(t) = 7t\ (\mathrm{m/s})$. Đi được $5\ (\mathrm{s})$ người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc

$a=-35\ \left(\text{m/s}^2\right)$. Tính quãng đường của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn?

Lời giải

Quãng đường ô tô đi được trong $5\ (\text{s})$ đầu là $s_1=\int_0^5 7t\text{d}t=7\dfrac{t^2}{2}\Big|_0^5=87,5$ (mét).

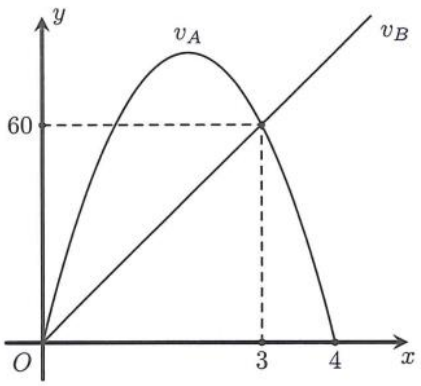
Phương trình vận tốc của ô tô khi người lái xe phát hiện chướng ngại vật là $v_{(2)}(t)=35-35t$ (m/s). Khi xe dừng lại hẳn thì $v_{(2)}(t)=0\Leftrightarrow 35-35t=0\Leftrightarrow t=1$.

Quãng đường ô tô đi được từ khi phanh gấp đến khi dừng lại hẳn là $s_2=\int_0^1(35-35t)\text{d}t$

$=\left(35t-35\dfrac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1=17,5$ (mét).

Vậy quãng đường của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn là $s=s_1+s_2$ $=87,5+17,5=105$ (mét).

Câu 11: Cho đồ thị biểu diễn vận tốc của hai xe A và B khởi hành cùng một lúc và cùng vạch xuất phát, đi cùng chiều trên một con đường. Biết đồ thị biểu diễn vận tốc của xe A là một đường parabol và đồ thị biểu diễn vận tốc của xe B là một đường thẳng như hình vẽ bên. Hỏi sau 5 giây kể từ lúc xuất phát thì khoảng cách giữa hai xe là bao nhiêu mét? (Làm tròn đến hàng phần chục và biết rằng xe A sẽ dừng lại khi vận tốc bằng 0).



Lời giải

Đồ thị biểu diễn vận tốc của xe A là (P) có phương trình: $v_A=at^2+bt+c\ (a\neq 0)$ đi qua điểm $(0;0);(3;60);(4;0)\Rightarrow v_A=-20t^2+80t$.

Đồ thị biểu diễn vận tốc của xe B là đường thẳng Δ có phương trình: $v_B=mt+n\ (m\neq 0)$ đi qua điểm $(0;0);(3;60)\Rightarrow v_B=20t$.

Ta có $v_A=-20t^2+80t=0\Rightarrow t=4$ nên xe A dừng lại sau giây thứ 4.

Do đó quãng đường xe A đi được sau 4 giây là $S_A=\int_0^4\left(-20t^2+80t\right)dt=\dfrac{640}{3}(m)$.

Quãng đường xe B đi được sau 5 giây đầu là $S_B = \int_0^5 (20t)dt = 250(m)$

Khoảng cách giữa hai xe sau 5 giây kể từ lúc xuất phát là $\Delta S = |S_A - S_B| = \frac{110}{3} = 36,7(m)$.

Câu 12: Giả sử vận tốc v của dòng máu ở khoảng cách r từ tâm của động bán kính R không đổi, có thể được mô hình hóa bởi công thức

$$\frac{1}{R-0}\int_0^R k\left(R^2 - r^2\right)\mathrm{d}r = \frac{1}{R}\left(kR^2 r - k\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^R = \frac{1}{R}\left(kR^3 - k\frac{R^3}{3}\right) = kR^2 - \frac{kR^2}{3} = \frac{2}{3}kR^2.$$

Trong đó k là một hằng số. Tìm vận tốc trung bình (đối với r) của động mạch trong khoảng $0 \le r \le R$. So sánh vận tốc trung bình với vận tốc lớn nhất.

Lời giải

Vận tốc trung bình (đối với r) của động mạch trong khoảng $0 \le r \le R$ là

$$\frac{1}{R-0}\int_0^R k\left(R^2 - r^2\right)\mathrm{d}r = \frac{1}{R}\left(kR^2 r - k\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^R = \frac{1}{R}\left(kR^3 - k\frac{R^3}{3}\right) = kR^2 - \frac{kR^2}{3} = \frac{2}{3}kR^2.$$

Xét hàm số $v(r) = k\left(R^2 - r^2\right)$, $0 \le r \le R$. Ta có $v'(r) = -2kr$; $v'(r) = 0 \Leftrightarrow r = 0$.

Suy ra vận tốc lớn nhất của dòng máu là $v_{CĐ} = kR^2$.

Vậy vậy tốc lớn nhất của dòng máu lớn hơn vận tốc trung bình là 1,5 lần.

Câu 13: Tốc độ tăng trưởng của một đàn gấu mèo tại thời điểm t tháng kể từ khi người ta thả 100 cá thể đầu tiên vào một khu rừng được ước lượng bởi công thức $P'(t) = 8t + 30$ (con/tháng), với $P(t)$ là số lượng cá thể trong đàn tại thời điểm t tháng tương ứng (nguồn: Chris Kirkpatrick, Barbara Alldred, Crystal Chilvers, Beverly Farahani, Kristina Farentino, Angelo Lillo, Ian Macpherson, John Rodger, Susanne Trew, Advanced Function, Nelson 2012). Dựa vào tốc độ tăng trưởng đã cho, hãy ước tính số cá thể của đàn gấu mèo này tại thời điểm 3 tháng kể từ khi chúng được thả vào rừng.

Lời giải

Ta có $P(t) = \int P'(t)\mathrm{d}t = \int (8t + 30)\mathrm{d}t = 4t^2 + 30t + C.$

Lại có ban đầu người ta thả 100 cá thể gấu mèo:

$$P(0) = 100 \Rightarrow C = 100 \Rightarrow P(t) = 4t^2 + 30t + 100.$$

Vậy số cá thể của đàn gấu mèo này tại thời điểm 3 tháng kể từ khi chúng được thả vào rừng là

$$P(3) = 4.3^2 + 30.3 + 100 = 226 \text{ cá thể.}$$

Câu 14: Nhằm tri ân người dân địa phương đã luôn tin tưởng, đồng hành với doanh nghiệp. Tập đoàn NXS đã tổ chức ngày hội cảm ơn vào ngày 10/07/2024. Trong chuỗi sự kiện đặc biệt này, tất cả người dân địa phương đều được miễn phí vé vào cổng, thỏa thích tận hưởng các trò chơi, tham quan các công trình kỳ thú, ấn tượng tại 05 công viên chủ đề được đầu tư, xây dựng hoành tráng với hàng trăm tiện ích.

Gọi $B(t)$ là hàm số biểu thị số lượng khách tham quan sau t giờ mở cửa. Khi đó tốc độ thay đổi lượng khách tham quan trong ngày được biểu diễn bằng hàm số $B'(t) = 4t^3 - 3t^2 + 200$, trong đó t tính bằng giờ ($0 \le t \le 8$), $B'(t)$ tính bằng khách/giờ. Sau 2 giờ đã có 1200 người có mặt. Hỏi sau 6 giờ lượng khách tham quan là bao nhiêu người?

Lời giải

Ta có $B(t) = \int B'(t)dt = t^4 - t^3 + 200t + C, C \in \mathbb{R} \Rightarrow B(2) = 1200 \Rightarrow C = 792$.

Suy ra $B(t) = t^4 - t^3 + 200t + 792$

Sau 6 giờ lượng khách tham quan là $B(6) = 3072$ (người).

Câu 15: Chủ một trung tâm thương mại muốn cho thuê một số gian hàng như nhau. Người đó muốn cho thuê mỗi gian hàng với giá là x triệu đồng $(x > 0)$. Khi đó doanh thu của cửa hàng được biểu diễn theo hàm số $T(x)$. Tốc độ thay đổi doanh thu từ các gian hàng đó được biểu diễn bởi hàm số $T'(x) = -10x + 200$, trong đó $T'(x)$ tính bằng triệu đồng. Biết rằng nếu giá thuê cho mỗi gian hàng là 10 triệu đồng thì doanh thu là 1800 triệu đồng. Tìm giá trị của x để người đó có doanh thu là cao nhất?

Lời giải

Ta có: $T(x) = \int T'(x)\mathrm{d}x = \int (-10x + 200)\mathrm{d}x = -5x^2 + 200x + C, C \in \mathbb{R}$.

Khi giá cho thuê mỗi gian hàng là 10 triệu đồng thì doanh thu là 1800 triệu đồng nên ta có $T(10) = 1800 \Rightarrow C = 300$.

Vậy $T(x) = -5x^2 + 200x + 300 = -5(x - 20)^2 + 2300 \le 2300$.

Dấu "=" xảy ra khi $x = 20$.

Suy ra doanh thu cao nhất mà chủ trung tâm thương mại có thể thu về là 2300 triệu đồng và khi đó mỗi gian hàng có giá cho thuê là 20 triệu đồng.

Vậy $x = 20$ (triệu đồng).

----------HẾT----------

Dạng 2: Tích phân của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối

Phương pháp: Ta thực hiện theo một trong hai cách sau:

Cách 1:

- Cho $f(x)=0$ tìm nghiệm $\in[a;b]$ giả sử các nghiệm đó là $x_1;x_2;...x_n\in[a;b]$
- Khi đó $I=\int\limits_a^{x_1}|f(x)|\mathrm{d}x+\int\limits_{x_1}^{x_2}|f(x)|\mathrm{d}x+\int\limits_{x_2}^{x_3}|f(x)|\mathrm{d}x+...+\int\limits_{x_n}^{b}|f(x)|\mathrm{d}x$

$$\Leftrightarrow I=\left|\int\limits_a^{x_1}f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int\limits_{x_1}^{x_2}f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int\limits_{x_2}^{x_3}f(x)\mathrm{d}x\right|+...+\left|\int\limits_{x_n}^{b}f(x)\mathrm{d}x\right|$$

- Tính mỗi tích phân thành phần

Cách 2:

- Cho $f(x)=0$ tìm nghiệm $\in[a;b]$.
- Xét dấu $f(x)$ trên $[a;b]$.
- Áp dụng công thức phá trị tuyệt đối $|A|=\begin{cases}A & khi\ A>0\\ -A & khi\ A<0\end{cases}$ để phá trị tuyệt đối trong $\int\limits_a^b...$.
- Tính mỗi tích phân thành phần

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính các tích phân sau đây:

a) $A=\int\limits_{-2}^{2}|x^2-1|\mathrm{d}x$

b) $B=\int\limits_{-2}^{1}|x^3+x^2-2x|\mathrm{d}x$

c) $C=\int\limits_{-1}^{2}|x^3-3x+2|\mathrm{d}x$

d) $D=\int\limits_{-2}^{2}|x^4-3x^2-4|\mathrm{d}x$

Lời giải

a) $A=\int\limits_{-2}^{2}|x^2-1|\mathrm{d}x$.

Xét $f(x)=x^2-1$ trên đoạn $[-2;2]$.

Cho $f(x)=0\Leftrightarrow x^2-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\in[-2;2]\\ x=1\in[-2;2]\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	-2		-1		1		2
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

Do đó: $A=\int\limits_{-2}^{2}|x^2-1|\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{-1}(x^2-1)\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}(x^2-1)\mathrm{d}x$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_{-2}^{-1}+\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1}+\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_{1}^{2}=\left[\frac{2}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)\right]+\left[\frac{2}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)\right]+\left[\frac{2}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)\right]=4.$$

b) $B=\int\limits_{-2}^{1}|x^3+x^2-2x|\mathrm{d}x$.

Xét $f(x)=x^3+x^2-2x$ trên $[-2;1]$.

Cho $f(x)=0 \Leftrightarrow x^3+x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2\in[-2;1] \\ x=0\in[-2;1] \\ x=1\in[-2;1] \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	-2		0		1
f(x)	0	$+$	0	$-$	0

Do đó: $B=\int\limits_{-2}^{1}\left|x^3+x^2-2x\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{0}\left(x^3+x^2-2x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_{0}^{1}\left(x^3+x^2-2x\right)\mathrm{d}x$

$=\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\Big|_{-2}^{0}-\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\Big|_{0}^{1}=-\left(-\frac{8}{3}\right)-\left(-\frac{5}{12}\right)=\frac{37}{12}.$

c) $C=\int\limits_{-1}^{2}\left|x^3-3x+2\right|\mathrm{d}x$.

Xét $f(x)=x^3-3x-2$ trên $[-1;2]$.

Cho $f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-3x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\in[-1;2] \\ x=-1\in[-1;2] \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x		-1		2
x^3-3x-2		0	$-$	0

Do đó: $C=-\int\limits_{-1}^{2}\left(x^3-3x-2\right)\mathrm{d}x=-\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2-2x\right)\Big|_{-1}^{2}=6-\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{27}{4}$.

d) $D=\int\limits_{-2}^{2}\left|x^4-3x^2-4\right|\mathrm{d}x$. Xét $f(x)=x^4-3x^2-4$ trên $[-2;2]$.

Cho $f(x)=0 \Leftrightarrow x^4-3x^2-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\in[-2;2] \\ x=-2\in[-2;2] \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x		-2		2
x^4-3x^2-4		0	$-$	0

Do đó: $D=-\int\limits_{-2}^{2}\left(x^4-3x^2-4\right)\mathrm{d}x=-\left(\frac{1}{5}x^5-x^3-4x\right)\Big|_{-2}^{2}=\frac{48}{5}-\left(-\frac{48}{5}\right)=\frac{96}{5}$.

Bài tập 2: Tính các tích phân sau đây:

a) $A=\int\limits_{-3}^{5}\left(\left|x+2\right|-\left|x-2\right|\right)\mathrm{d}x$

b) $B=\int\limits_{-1}^{2}\left(x+\left|1-x\right|-\left|x+2\right|\right)\mathrm{d}x$

c) $C=\int\limits_{1}^{5}\frac{2\left|x-2\right|+1}{x}\mathrm{d}x$

d) $D=\int\limits_{0}^{3}\sqrt{x^3-2x^2+x}\mathrm{d}x$

Lời giải

a) $A=\int\limits_{-3}^{5}\left(|x+2|-|x-2|\right)\mathrm{d}x$.

Ta có bảng xét dấu để phá trị tuyệt đối:

x	-3		-2		2		5
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2$		0	$x+2$		$x+2$	
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$			$-x+2$	0	$x-2$	
$\lvert x+2\rvert-\lvert x-2\rvert$	-4			$2x$		4	

Khi đó: $A=\int\limits_{-3}^{5}\left(|x+2|-|x-2|\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-3}^{-2}-4dx+\int\limits_{-2}^{2}2x\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{5}4\mathrm{d}x=-4x\Big|_{-3}^{-2}+x^2\Big|_{-2}^{2}+4x\Big|_{2}^{5}=8$.

b) $B=\int\limits_{-1}^{2}\left(x+|1-x|-|x+2|\right)\mathrm{d}x$.

Ta có bảng xét dấu để phá trị tuyệt đối:

x	-1		1		2
$\lvert 1-x\rvert$	$1-x$		0	$x-1$	
$\lvert x+2\rvert$	$x+2$			$x+2$	
$x+\lvert 1-x\rvert-\lvert x+2\rvert$	$-x-1$			$x-3$	

Khi đó:

$$B=\int\limits_{-1}^{2}\left(x+|1-x|-|x+2|\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}(-x-1)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}(x-3)\mathrm{d}x$$

$$=\left(-\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_{-1}^{1}+\left(\frac{x^2}{2}-3x\right)\Big|_{1}^{2}=\left(-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left[-4-\left(-\frac{5}{2}\right)\right]=-\frac{7}{2}.$$

c) $C=\int\limits_{1}^{5}\frac{2|x-2|+1}{x}\mathrm{d}x$.

Ta có: $|x-2|=\begin{cases}x-2 & khi\ x\geq 2\\ -x+2 & khi\ x<2\end{cases}$.

Khi đó:

$$I=\int\limits_{1}^{5}\frac{2|x-2|+1}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{2}\frac{2(2-x)+1}{x}\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{5}\frac{2(x-2)+1}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{2}\frac{5-2x}{x}\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{5}\frac{2x-3}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\int\limits_{1}^{2}\left(\frac{5}{x}-x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{5}\left(2-\frac{3}{x}\right)\mathrm{d}x=\left(5\ln|x|-x\right)\Big|_{1}^{2}+\left(2x-3\ln|x|\right)\Big|_{2}^{5}=8\ln 2-3\ln 5+4.$$

d) $D=\int\limits_{0}^{3}\sqrt{x^3-2x^2+x}\mathrm{d}x$

$$D=\int\limits_{0}^{3}\sqrt{x^3-2x^2+x}\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{3}\sqrt{x\left(x^2-2x+1\right)}\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{3}|x-1|\sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$$

Ta có: $|x-1|=\begin{cases}x-1 & khi\ x\geq 1\\ -x+1 & khi\ x<1\end{cases}$.

Khi đó: $D=\int\limits_0^3(1-x)\sqrt{x}\mathrm{d}x+\int\limits_0^3(x-1)\sqrt{x}\mathrm{d}x=\int\limits_0^3\left(x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}\right)\mathrm{d}x+\int\limits_0^3\left(x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x$

$=\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}\right)\Big|_0^1+\left(\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)\Big|_1^3=\frac{4}{15}+\left[\frac{8\sqrt{3}}{5}-\left(-\frac{4}{15}\right)\right]=\frac{24\sqrt{3}+8}{15}.$

Bài tập 3: Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t (giây) là $v(t)=t^2-t-6$ (m/s).

a) Tìm độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1\le t\le 4$, tức là tính $\int\limits_1^4 v(t)\mathrm{d}t$.

b) Tìm tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian này, tức là tính $\int\limits_1^4 |v(t)|\mathrm{d}t$.

Lời giải

a) Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1\le t\le 4$ là:

$$\int\limits_1^4 v(t)\mathrm{d}t=\int\limits_1^4\left(t^2-t-6\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}-6t\right)\Big|_1^4=\left(\frac{4^3}{3}-\frac{4^2}{2}-6\cdot 4\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-6\right)=-\frac{9}{2}.$$

b) Tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian $1\le t\le 4$ là:

$$\int\limits_1^4 |v(t)|\mathrm{d}t=\int\limits_1^4|t^2-t-6|\mathrm{d}t=\int\limits_1^3\left(-t^2+t+6\right)\mathrm{d}t+\int\limits_3^4\left(t^2-t-6\right)\mathrm{d}t=\frac{22}{3}+\frac{17}{6}=\frac{61}{6}.$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tính $\int_0^2 \sqrt{x^2-2x+1}\mathrm{d}x$

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** 1.

Lời giải

Ta có: $\int_0^2 \sqrt{x^2-2x+1}\mathrm{d}x = \int_0^2 |x-1|\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)\mathrm{d}x + \int_1^2 (x-1)\mathrm{d}x = \left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_1^2 = 1.$

Câu 2: Tính $\int_{-1}^2 |2x+1|\mathrm{d}x$

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{13}{2}$.

Lời giải

Ta có: $\int_{-1}^2 |2x+1|\mathrm{d}x$

$= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} |2x+1|\mathrm{d}x + \int_{-\frac{1}{2}}^2 |2x+1|\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (2x+1)\mathrm{d}x + \int_{-\frac{1}{2}}^2 (2x+1)\mathrm{d}x = \left(x^2+x\right)\Big|_{-1}^{-\frac{1}{2}} + \left(x^2+x\right)\Big|_{-\frac{1}{2}}^2 = \frac{13}{2}$

Câu 3: Tính $I = \int_0^2 |2x-2|\mathrm{d}x.$

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Ta có: $I = \int_0^1 (2-2x)\mathrm{d}x + \int_1^2 (2x-2)\mathrm{d}x = \left(2x-x^2\right)\Big|_0^1 + \left(x^2-2x\right)\Big|_1^2 = 1+1 = 2.$

Câu 4: Tính $I = \int_0^3 |x(2x-4)|\mathrm{d}x.$

A. $\frac{16}{3}$. **B.** 2. **C.** $\frac{16}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Ta có: $I = \int_0^3 |x(2x-4)|\mathrm{d}x = \int_0^2 x(4-2x)\mathrm{d}x + \int_2^3 x(2x-4)\mathrm{d}x$

$= \int_0^2 \left(4x-2x^2\right)\mathrm{d}x + \int_2^3 \left(2x^2-4x\right)\mathrm{d}x = \left(2x^2-\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^2 + \left(\frac{2}{3}x^3-2x^2\right)\Big|_2^3 = \frac{8}{3}+\frac{8}{3} = \frac{16}{3}.$

Câu 5: Tính tích phân $\int_0^8 \left|x^2-6x\right|\mathrm{d}x$.

A. $\frac{152}{3}$. **B.** $\frac{64}{3}$. **C.** $\frac{-64}{3}$. **D.** $\frac{-152}{3}$.

Lời giải

Ta có: $\int_0^8 \left|x^2-6x\right|\mathrm{d}x=\int_0^6 \left|x^2-6x\right|\mathrm{d}x+\int_6^8 \left|x^2-6x\right|\mathrm{d}x=\int_0^6 \left(-x^2+6x\right)\mathrm{d}x+\int_6^8 \left(x^2-6x\right)\mathrm{d}x$

$=\left(\frac{-x^3}{3}+\frac{6x^2}{2}\right)\Big|_0^6+\left(\frac{x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}\right)\Big|_6^8=\frac{152}{3}$

Câu 6: Biết $I=\int_{-1}^3 \left|x^2-3x+2\right|\mathrm{d}x=\frac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{N}^*,\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $T=a-b$.

A. 12. **B.** 14. **C.** 11. **D.** 4.

Lời giải

Ta có: $I=\int_{-1}^3 \left|x^2-3x+2\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 \left(x^2-3x+2\right)\mathrm{d}x-\int_1^2 \left(x^2-3x+2\right)\mathrm{d}x+\int_2^3 \left(x^2-3x+2\right)\mathrm{d}x$

$=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right)\Big|_{-1}^1-\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right)\Big|_1^2+\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right)\Big|_2^3$

$=\frac{14}{3}-\left(-\frac{1}{6}\right)+\frac{5}{6}=\frac{17}{3}.$

Ta có: $T=a-b=17-3=14.$

Câu 7: Biết $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \left|\sin x\right|dx=a-\sqrt{b}\ \left(a,b\in\mathbb{Q}\right)$. Khi đó $a+4b$ bằng

A. 5. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 7.

Lời giải

Ta có: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \left|\sin x\right|dx=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x dx+\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x dx=\left(\cos x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0-\left(\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=2-\frac{\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{\frac{3}{4}}$

Suy ra: $a=2,b=\frac{3}{4}$ nên $a+4b=5$ nên $\int_0^1 \left|f'\left(2x-1\right)\right|\mathrm{d}x=4$.

Câu 8: Cho $I=\int_0^5 \frac{\left|x^2-x\right|}{x+3}dx=\frac{-1}{a}+b\ln\frac{c}{a}$, $\left(a,b,c\in\mathbb{N}^*\right)$. Tổng $a+b+c$ bằng

A. 17. **B.** 15. **C.** 13. **D.** 16.

Lời giải

Ta có: $I=\int_0^5\frac{\left|x^2-x\right|}{x+3}\mathrm{d}x=-\int_0^1\frac{x^2-x}{x+3}\mathrm{d}x+\int_1^5\frac{x^2-x}{x+3}\mathrm{d}x=-\int_0^1\left(x-4+\frac{12}{x+3}\right)\mathrm{d}x+\int_1^5\left(x-4+\frac{12}{x+3}\right)\mathrm{d}x$

$=-\int_0^1(x-4)\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{12}{x+3}\mathrm{d}x+\int_1^5(x-4)\mathrm{d}x\int_1^5\frac{12}{x+3}\mathrm{d}x$

$=\frac{7}{2}-12\ln(x+3)\Big|_0^1-4+12\ln(x+3)\Big|_1^5=\frac{-1}{2}+12\ln\frac{3}{2}$

Suy ra: $a=2;b=12;c=3\Rightarrow a+b+c=17$

Câu 9: Tính tích các giá trị của số thực m để tích phân $I=\int_0^1|2x-m|\mathrm{d}x=2$.

A. 6. **B.** −3. **C.** 2. **D.** −4.

Lời giải

Trường hợp 1: $m<0\Rightarrow 2x-m>0\forall x\in[0;1]$

Suy ra $I=\int_0^1(2x-m)dx=\left(x^2-mx\right)\Big|_0^1=1-m\Rightarrow 1-m=2\Leftrightarrow m=-1.$

Trường hợp 2: $m>2\Rightarrow 2x-m<0\forall x\in[0;1]$

Suy ra $I=\int_0^1(m-2x)dx=\left(mx-x^2\right)\Big|_0^1=m-1\Rightarrow m-1=2\Leftrightarrow m=3$

Trường hợp 3: $0\le m\le 2$

$I=\int_0^{\frac{m}{2}}(m-2x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{m}{2}}^1(2x-m)\mathrm{d}x=\left(mx-x^2\right)\Big|_0^{\frac{m}{2}}+\left(x^2-mx\right)\Big|_{\frac{m}{2}}^1=\frac{m^2}{4}+(1-m)+\frac{m^2}{4}=\frac{m^2}{2}-m+1$

Suy ra $\frac{m^2}{2}-m+1=2\Leftrightarrow m^2-2m-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1+\sqrt{3}\\ m=1-\sqrt{3}\end{array}\right.$ (loại)

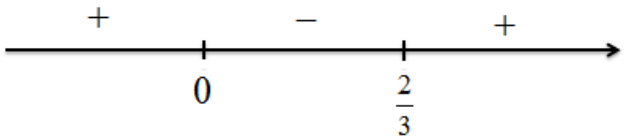
Tích các giá trị của m là $-1.3=-3$.

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m thỏa mãn: $\int_0^m\left|3x^2-2x\right|\mathrm{d}x=m-10$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Đặt $I=\int_0^m\left|3x^2-2x\right|dx=m-10$; $f(x)=3x^2-2x$. Dấu của $f(x)$:



Xét các trường hợp sau:

Nếu $m<0$: $I=\int_0^m\left(3x^2-2x\right)dx=\left(x^3-x^2\right)\Big|_0^m=m^3-m^2=m-10$.

Suy ra $m^3-m^2-m+10=0\Leftrightarrow m=-2$ (thỏa mãn).

Nếu $0\le m<\frac{2}{3}$: $I=-\int_0^m\left(3x^2-2x\right)dx=-\left(x^3-x^2\right)\Big|_0^m=-m^3+m^2=m-10$.

Suy ra $m^3-m^2+m-10=0\Leftrightarrow m\approx 2,36.$(loại).

Nếu $m\ge\frac{2}{3}$: $I=-\int_0^{\frac{2}{3}}\left(3x^2-2x\right)dx+\int_{\frac{2}{3}}^m\left(3x^2-2x\right)dx=\frac{4}{27}+\left(x^3-x^2\right)\Big|_{\frac{2}{3}}^m$

$=m^3-m^2+\frac{8}{27}=m-10\Rightarrow m^3-m^2-m+\frac{278}{27}=0\Leftrightarrow m\approx -2,02.$ (loại).

Vậy có 1 giá trị thực của tham số m thỏa mãn bài toán.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)=1,\ y=g(x)=|x|$. Giá trị $I=\int_{-1}^{2}\min\left\{f(x);g(x)\right\}\mathrm{d}x$

A. 1. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 2. **D.** $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Xét bất phương trình $|x|>1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>1\\x<-1\end{array}\right.$.

Vậy $\min\left\{1;|x|\right\}=1$ khi $1<x$ hoặc $x<-1$ mà $\min\left\{1;|x|\right\}=|x|$ khi $-1<x<1$

Xét $I=\int_{-1}^{2}\min\left\{f(x);g(x)\right\}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}\min\left\{1;|x|\right\}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\min\left\{1;|x|\right\}\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}\min\left\{1;|x|\right\}\mathrm{d}x$

$I=\int_{-1}^{1}|x|\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}-x\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}\mathrm{d}x=\frac{-x^2}{2}\Big|_{-1}^{0}+\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1}+x\Big|_1^2=2.$

Câu 12: Cho a là số thực dương, tính tích phân $I=\int_{-1}^{a}|x|\mathrm{d}x$ theo a.

A. $I=\frac{a^2+1}{2}$. **B.** $I=\frac{a^2+2}{2}$. **C.** $I=\frac{-2a^2+1}{2}$. **D.** $I=\frac{\left|3a^2-1\right|}{2}$.

Lời giải

Vì $a>0$ nên $I=-\int_{-1}^{0}x\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{a}x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+\frac{a^2}{2}=\frac{1+a^2}{2}$.

Câu 13: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=4;\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=6$. Tính $I=\int_{-1}^{3}f\left(|u|\right)\mathrm{d}u$

A. 2. **B.** 5. **C.** 10. **D.** 12.

Lời giải

Ta có $I=\int\limits_{-1}^{3} f\left(|u|\right)\mathrm{d}u=\int\limits_{-1}^{0} f\left(|u|\right)\mathrm{d}u+\int\limits_{0}^{3} f\left(|u|\right)\mathrm{d}u=\int\limits_{-1}^{0} f\left(-u\right)\mathrm{d}u+\int\limits_{0}^{3} f\left(u\right)\mathrm{d}u$.

Tính $I_1=\int\limits_{-1}^{0} f\left(-u\right)\mathrm{d}u$

Xét $\int\limits_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x=4$. Đặt $x=-u\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}u$.

Khi $x=0$ thì $u=0$. Khi $x=1$ thì $u=-1$ nên $4=\int\limits_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\int\limits_{0}^{-1} f\left(-u\right)\mathrm{d}u=\int\limits_{-1}^{0} f\left(-u\right)\mathrm{d}u$.

Tính $I_2=\int\limits_{0}^{3} f\left(u\right)\mathrm{d}u$

Ta có $\int\limits_{0}^{3} f\left(x\right)\mathrm{d}x=6\Rightarrow\int\limits_{0}^{3} f\left(u\right)\mathrm{d}u=6$ nên $I=\int\limits_{-1}^{0} f\left(-u\right)\mathrm{d}u+\int\limits_{0}^{3} f\left(u\right)\mathrm{d}u=4+6=10$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho $f\left(x\right)=2x-1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\int\limits_{-1}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x=2$.

b) $\int\limits_{-1}^{1}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=\frac{5}{2}$.

c) $\int\limits_{-1}^{1} x^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}$.

d) $\int\limits_{-1}^{1} x\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$

Lời giải

a) Sai: Ta có $\int\limits_{-1}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x-2$

b) Đúng: Ta có $2x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ suy ra $\int\limits_{-1}^{1}\left|2x-1\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}}\left|2x-1\right|\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left|2x-1\right|\mathrm{d}x=\frac{9}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$.

c) Đúng: Ta có $\int\limits_{-1}^{1} x^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1} x^2\left(2x-1\right)\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}$

d) Sai: Ta có:

$$\int\limits_{-1}^{1} x\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}} x\left|2x-1\right|\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x\left|2x-1\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}} x\left(1-2x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}} x\left(2x-1\right)\mathrm{d}x=-\frac{9}{8}+\frac{5}{24}=-\frac{11}{12}$$

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)=2x-4$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\int\limits_{-2}^{-2} f(x)\mathrm{d}x=0$.

b) $\int\limits_{1}^{4} f^2(x)\mathrm{d}x=7$.

c) $\int\limits_{-2}^{5}\left|f(x)\right|dx=3^m.5^n$ với $m^2+n^2=16$.

d) $F(a)=\int\limits_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $a=2$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có $\int\limits_{-2}^{-2} f(x)\mathrm{d}x=0$

b) Sai: Ta có $\int\limits_{1}^{4} f^2(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{4}(2x-4)^2\,\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{4}\left(4x^2-16x+16\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{4}{3}x^3-8x^2+16x\right)\Big|_1^4=12$.

c) Sai: Ta có:

$$\int\limits_{-2}^{5}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{5}\left|2x-4\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{2}(4-2x)\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{5}(2x-4)\mathrm{d}x=\left(4x-x^2\right)\Big|_{-2}^{2}+\left(x^2-4x\right)\Big|_{2}^{5}=25=3^0.5^2$$

Suy ra $m=0,n=2\Rightarrow m^2+n^2=4$.

d) Đúng: $F(a)=\int\limits_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{a}(2x-4)\mathrm{d}x=\left(x^2-4x\right)\Big|_0^a=a^2-4a=(a-2)^2-4\geq -4$

Suy ra $F(a)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng -4 khi $a=2$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Nếu $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x=2$ thì $\int\limits_{-1}^{1} 4f(x)\mathrm{d}x=6$.

b) Nếu $\int\limits_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x=5$ và $\int\limits_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x=3$ thì $\int\limits_{3}^{5} f(x)\mathrm{d}x=-2$.

c) Nếu $f(x)=x^2-2x$, $F(0)=1$ thì $F(2)=11$.

d) Nếu $f(x)=x^2-2x$ thì $\int\limits_{0}^{3}\left|x^2-2x\right|\mathrm{d}x=\frac{8}{3}$.

Lời giải

a) Sai: Ta có $\int_{-1}^{1} 4f(x)\mathrm{d}x = 4\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 4.2 = 8$

b) Đúng: Ta có $\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x + \int_{3}^{5} f(x)\mathrm{d}x = \int_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow 5 + \int_{3}^{5} f(x)\mathrm{d}x = 3 \Leftrightarrow \int_{3}^{5} f(x)\mathrm{d}x = -2$

c) Sai: Ta có $F(x) = \int f(x)dx = \int \left(x^2 - 2x\right)dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + C$

$F(0) = 1 \Rightarrow \frac{0^3}{3} - 0^2 + C = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 1 \Rightarrow F(2) = \frac{2^3}{3} - 2^2 + 1 = -\frac{1}{3}$

d) Đúng: Ta có $\int_{0}^{3} \left|x^2 - 2x\right|\mathrm{d}x = \int_{0}^{2} \left|x^2 - 2x\right|\mathrm{d}x + \int_{2}^{3} \left|x^2 - 2x\right|\mathrm{d}x = \int_{0}^{2} \left(-x^2 + 2x\right)\mathrm{d}x + \int_{2}^{3} \left(x^2 - 2x\right)\mathrm{d}x = \frac{8}{3}$

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Nếu $\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x = 2$ thì $\int_{3}^{1} 3f(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}$.

b) Nếu $\int_{2}^{7} f(x)\mathrm{d}x = -3$ và $\int_{1}^{7} f(x)\mathrm{d}x = 3$ thì $\int_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

c) Nếu $f(x) = \frac{1}{x}$, $F(1) = 0$ thì $F(2) = \ln 2$.

d) Nếu $f(x) = x^3 + 2x^2$ thì $\int_{-3}^{-1} \left|x^3 + 2x^2\right|\mathrm{d}x = \frac{-9}{2}$.

Lời giải

a) Sai: Ta có $\int_{3}^{1} 3f(x)\mathrm{d}x = 3\int_{3}^{1} f(x)\mathrm{d}x = -3.\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x = -3.2 = -6$

b) Sai: Ta có $\int_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{2}^{7} f(x)\mathrm{d}x = \int_{1}^{7} f(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x + (-3) = 3 \Leftrightarrow \int_{1}^{2} f(x)dx = 6$.

c) Đúng: Ta có $F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$

$F(1) = 2 \Rightarrow \ln(1) + C = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = \ln|x| \Rightarrow F(2) = \ln(2)$.

d) Đúng: Ta có $\int_{-3}^{-1} \left|x^3 + 2x^2\right|\mathrm{d}x = \int_{-3}^{-2} \left(-x^3 - 2x^2\right)\mathrm{d}x + \int_{-2}^{-1} \left(x^3 + 2x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{9}{2}$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = 4x^3 + x$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\int_{3}^{5} f(x)\mathrm{d}x = 552$.

b) Biết $F(1)=4$ thì $F(2)=\dfrac{41}{2}$.

c) $\int_0^2\left(1+2x+f(x)\right)\mathrm{d}x=20$.

d) Biết $\int_{-2}^1\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\dfrac{39}{2}$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có $\int_3^5\left(4x^3+x\right)\mathrm{d}x=552$.

b) Đúng: Ta có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(4x^3+x\right)\mathrm{d}x=x^4+\dfrac{x^2}{2}+C$

$F(1)=4\Rightarrow 1^4+\dfrac{1^2}{2}+C=4\Rightarrow C=\dfrac{5}{2}$

$\Rightarrow F(x)=x^4+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{5}{2}\Rightarrow F(2)=2^4+\dfrac{2^2}{2}+\dfrac{5}{2}=\dfrac{41}{2}$

c) Sai: Ta có $\int_0^2\left(1+2x+f(x)\right)\mathrm{d}x=\int_0^2\left(1+2x+4x^3+x\right)\mathrm{d}x\int_0^2\left(4x^3+3x+1\right)\mathrm{d}x=\left(x^4+\dfrac{3}{2}x^2+x\right)\Big|_0^2$

$=\left(2^4+\dfrac{3}{2}.2^2+2\right)-0=24$.

d) Đúng: Ta có $\int_{-2}^1\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{-2}^1\left|4x^3+x\right|\mathrm{d}x\int_{-2}^0\left(-4x^3-x\right)\mathrm{d}x+\int_0^1\left(4x^3+x\right)\mathrm{d}x=18+\dfrac{3}{2}=\dfrac{39}{2}$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=\sin 2x$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\int_0^{\pi}f(x)dx=0$.

b) Biết $F(0)=\dfrac{1}{2}$ thì $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$.

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos x-f(x)\right)dx=2$.

d) Biết $\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)\right|dx=4$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có $\int_0^{\pi}\sin 2x\mathrm{d}x=\left(\dfrac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\pi}=\dfrac{1}{2}\cos 2\pi-\dfrac{1}{2}\cos 0=0$.

b) Sai: Ta có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int \sin 2x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\cos 2x+C$

$F(0)=\frac{1}{2}\Rightarrow -\frac{1}{2}\cos 0+C=\frac{1}{2}\Rightarrow C=1\Rightarrow F(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x+1$

$\Rightarrow F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}\cos\left(2.\frac{\pi}{2}\right)+1=\frac{3}{2}$.

c) Sai: Ta có $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-\sin 2x)\mathrm{d}x=\left(\sin x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\left(\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\cos 2.\frac{\pi}{2}\right)-\left(\sin 0+\frac{1}{2}\cos 0\right)=0$.

d) Đúng: Ta có $\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\mathrm{d}x=2\int\limits_0^{\pi}|\sin 2x|\mathrm{d}x=2.\int\limits_0^{\pi}\sin 2x\mathrm{d}x=2.2=4$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=|x^2-9|$ với $0\le x\le 9$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(x)=|x^2-9|=\begin{cases}-x^2+9,\ 0\le x\le 3\\ x^2-9,\ 3\le x\le 9\end{cases}$.

b) $\int\limits_0^9 f(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_3^9 f(x)\mathrm{d}x$.

c) $\int\limits_0^9 f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_0^3(x^2-9)\mathrm{d}x+\int\limits_3^9(x^2-9)\mathrm{d}x$.

d) $\int\limits_0^9 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^m(x^2-9)\mathrm{d}x+\int\limits_m^9(x^2-9)\mathrm{d}x\ \forall m\in(0;9)$.

x	0		3		9
x^2-9		$-$	0	$+$	

a) Đúng: Từ bảng xét dấu ta thấy: $x^2-9\le 0,\forall x\in[0,3]$ và $x^2-9\ge 0,\forall x\in[3,9]$

b) Sai vì $\int\limits_0^9 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_3^9 f(x)\mathrm{d}x$.

c) Đúng: Theo bảng xét dấu ta có: $\int\limits_0^9|x^2-9|\mathrm{d}x=\int\limits_0^3|x^2-9|\mathrm{d}x+\int\limits_3^9|x^2-9|\mathrm{d}x$

$=\int\limits_0^3\left[-(x^2-9)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_3^9(x^2-9)\mathrm{d}x=-\int\limits_0^3(x^2-9)\mathrm{d}x+\int\limits_3^9(x^2-9)\mathrm{d}x$

d) Sai: Thế $m=1$ vào đẳng thức $\int\limits_0^9 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^m(x^2-9)\mathrm{d}x+\int\limits_m^9(x^2-9)\mathrm{d}x$ ta được:

Khi đó $\int_0^9 \left|x^2-9\right|\mathrm{d}x=\int_0^1 \left(x^2-9\right)\mathrm{d}x+\int_1^9 \left(x^2-9\right)\mathrm{d}x$ (1). Ta có: $\begin{cases} VP(1)=162 \\ VT(1)=198 \end{cases}$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(x)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x-2}\right)$.

b) $\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x>\dfrac{1}{2}$

c) $\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{a}{b}$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a, b\in \mathrm{N}$ thì ta có $a.b=15$.

d) $\int_3^4\left[f(x)+\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\right]\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{5}{3}+7$.

Lời giải

a) Sai: Ta có $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}=\dfrac{1}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}\right)$

b) Sai: $\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x=\int_3^4\dfrac{1}{(x-2)(x+2)}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}\int_3^4\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x$

$=\dfrac{1}{4}\left(\ln(x-2)-\ln(x+2)\right)\Big|_3^4=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x-2}{x+2}\Big|_3^4=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{5}{3}$. Ta có $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{5}{3}<0{,}5$.

c) Đúng: $\int_3^4 f(x)dx=\dfrac{1}{4}\int_3^4\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}\right)dx=\dfrac{1}{4}\left(\ln(x-2)-\ln(x+2)\right)\Big|_3^4=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{5}{3}$.

Do đó ta có $a=5; b=3$. Vậy $a.b=15$.

d) Sai: Ta có $\int_3^4\left[f(x)+\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\right]\mathrm{d}x=\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x+\int_3^4\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x$ với $\int_3^4 f(x)dx=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{5}{3}$.

Khi đó $\int_3^4\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{f(x)}\Big|_3^4=-12+5=-7$ nên $\int_3^4\left[f(x)+\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\right]\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{5}{3}-7$.

Câu 9: Xét tính đúng – sai của các phép tính tích phân sau.

a) $I=\int_0^2\left|x-1\right|\mathrm{d}x=\int_0^1(x-1)\mathrm{d}x+\int_1^2(x-1)\mathrm{d}x$

b) $I=\int_0^2\left|x-1\right|\mathrm{d}x=1$

c) Cho a là số thực dương thì tích phân $I=\int\limits_{-1}^{a}|x|\mathrm{d}x=\dfrac{a^2+1}{2}$

d) Nếu $I=\int\limits_{0}^{3}\left|2^x-4\right|dx=a+\dfrac{b}{c\ln 2}$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản thì khi đó ta có giá trị của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2=3$

Lời giải

a) Sai: $I=\int\limits_{0}^{2}|x-1|\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1}|x-1|\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}|x-1|\mathrm{d}x=-\int\limits_{0}^{1}(x-1)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}(x-1)\mathrm{d}x$.

b) Đúng: $I=\int\limits_{0}^{2}|x-1|\mathrm{d}x=-\int\limits_{0}^{1}(x-1)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}(x-1)\mathrm{d}x=-\left(\dfrac{x^2}{2}-x\right)\Big|_0^1+\left(\dfrac{x^2}{2}-x\right)\Big|_1^2=1$.

c) Đúng: Vì $a>0$ nên $I=-\int\limits_{-1}^{0}x\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{a}x\,\mathrm{d}x=-\dfrac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0}+\dfrac{x^2}{2}\Big|_0^a=\dfrac{1}{2}+\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{1+a^2}{2}$

d) Sai: $I=\int\limits_{0}^{3}\left|2^x-4\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{2}\left(4-2^x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{3}\left(2^x-4\right)\mathrm{d}x=\left(4x-\dfrac{1}{\ln 2}2^x\right)\Big|_0^2+\left(\dfrac{1}{\ln 2}2^x-4x\right)\Big|_2^3$

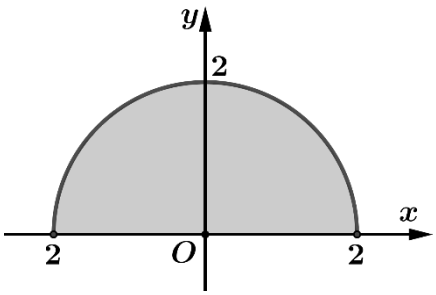
$=\left(8-\dfrac{3}{\ln 2}\right)+\left(\dfrac{4}{\ln 2}-4\right)=4+\dfrac{1}{\ln 2}=a+\dfrac{b}{c\ln 2}\Rightarrow\begin{cases}a=4\\b=1\\c=1\end{cases}$

$\Rightarrow P=a^2+b^2+c^2=4^2+1^2+1^2=18$.

Câu 10: Cho hàm số $y=\sqrt{4-x^2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $y=\sqrt{4-x^2}$, $x\in[0;2]$ là phương trình một phần tư của đường tròn tâm tại gốc toạ độ O, bán kính bằng 2 và nằm ở góc phần tư thứ I.

b) $\int\limits_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$ là một phần hai diện tích hình tròn như hình bên dưới:



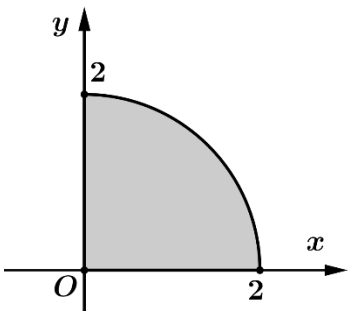
c) $\int\limits_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}.\pi.2^2$.

d) $\int\limits_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=2\pi$.

Lời giải

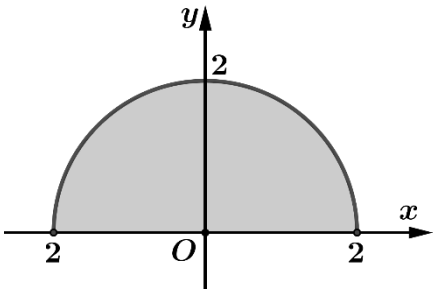
a) Đúng: $y=\sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ 0 \le x \le 2 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$ suy ra $y=\sqrt{4-x^2}$, $x \in [0;2]$ là phương trình một phần tư của đường tròn tâm tại gốc toạ độ O, bán kính bằng 2 và nằm ở góc phần tư thứ I.

b) Sai: Sử dụng ý nghĩa hình học của tích phân thì $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$ là một phần tư diện tích hình tròn như hình bên dưới



c) Đúng: Theo câu b thì $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.\pi.2^2$

d) Đúng: $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$ là một phần hai diện tích hình tròn như hình bên dưới



Do đó $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.\pi.2^2=2\pi$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Tính tích phân sau: $\int_0^2 |2x-3|\mathrm{d}x$.

Lời giải

Ta có $\int_0^2 |2x-3|\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{3}{2}}(3-2x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{3}{2}}^2(2x-3)\mathrm{d}x=\left(3x-x^2\right)\Big|_0^{\frac{3}{2}}+\left(x^2-3x\right)\Big|_{\frac{3}{2}}^2=\frac{9}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$

Câu 2: Cho $0 \le m \le 2$ và tích phân $I=\int_0^m |x-2|dx=2$. Khi đó giá trị của tham số m bằng bao nhiêu?

Lời giải

Do $x\in[0;m]\Rightarrow x-2\le x-m\le 0\Rightarrow |x-2|=2-x$

Vậy $I=\int\limits_0^m(2-x)dx=\left(2x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^m=2m-\frac{m^2}{2}=2\Rightarrow m=2$

Câu 3: Biết $I=\int\limits_1^3\left|\frac{x^2-6x+8}{x+1}\right|\mathrm{d}x=\frac{a}{b}+c\ln\frac{d}{e}$ biết a là số nguyên âm và $b,c,d,e\in\mathbb{Z}^*$; $(a,b)=1$, $(d,e)=1$. Giá trị của $a+b+c+d+e$ bằng:

Lời giải

Ta có $x+1>0$, $\forall x\in[1;3]$, suy ra $\int\limits_1^3\left|\frac{x^2-6x+8}{x+1}\right|\mathrm{d}x=\int\limits_1^3\frac{|x^2-6x+8|}{x+1}\mathrm{d}x$.

Lại có $x^2-6x+8\le 0\Leftrightarrow 2\le x\le 4$.

Do đó: $I=\int\limits_1^3\frac{|x^2-6x+8|}{x+1}\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\frac{x^2-6x+8}{x+1}\mathrm{d}x-\int\limits_2^3\frac{x^2-6x+8}{x+1}\mathrm{d}x$

$=\int\limits_1^2\left(x-7+\frac{15}{x+1}\right)\mathrm{d}x-\int\limits_2^3\left(x-7+\frac{15}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{11}{2}+15\ln\frac{3}{2}\right)-\left(-\frac{9}{2}+15\ln\frac{4}{3}\right)=-\frac{9}{2}+15\ln\frac{9}{8}$.

Vậy $\begin{cases}a=-9\\b=2\\c=15\\d=9\\e=8\end{cases}\Rightarrow a+b+c+d+e=25$

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ và có bảng biến thiên như sau

x	0		2		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-1	↗	$f(5)$	↘	$-\infty$

Biết rằng $\int\limits_2^5|f'(x)|\mathrm{d}x=5$. Giá trị của bằng bao nhiêu?

Lời giải

Từ bảng biến thiên ta có $x\in[3;5]\Rightarrow f'(x)\ge 0$ và $x\in[2;3]\Rightarrow f'(x)\le 0$, $f(2)=0, f(3)=-1$.

$\int\limits_2^5|f'(x)|\mathrm{d}x=5\Leftrightarrow\int\limits_2^3|f'(x)|\mathrm{d}x+\int\limits_3^5|f'(x)|\mathrm{d}x=5$

$\Leftrightarrow-\int\limits_2^3f'(x)\mathrm{d}x+\int\limits_3^5f'(x)\mathrm{d}x=5\Leftrightarrow f(x)\Big|_3^2+f(x)\Big|_3^5=5$

$\Leftrightarrow f(2)-f(3)+f(5)-f(3)=5 \Leftrightarrow f(5)+2=5 \Leftrightarrow f(5)=3$.

Câu 5: Biết $I=\int_1^5 \frac{2|x-2|+1}{x}\mathrm{d}x=4+a\ln 2+b\ln 5$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính $S=a+b$.

Lời giải

Ta có $|x-2|=\begin{cases}x-2 \text{ khi } x\geq 2\\ 2-x \text{ khi } x\leq 2\end{cases}$ do đó $I=\int_1^2 \frac{2|x-2|+1}{x}\mathrm{d}x+\int_2^5 \frac{2|x-2|+1}{x}\mathrm{d}x$.

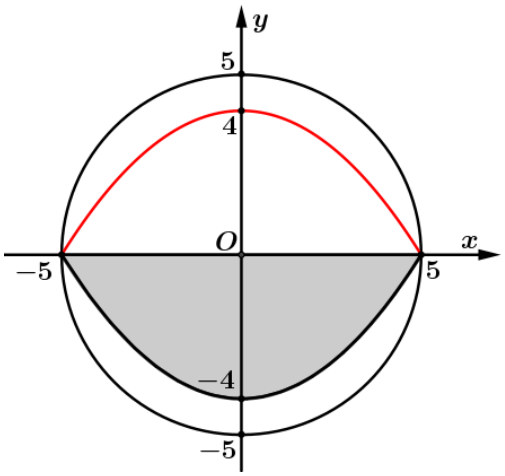
$=\int_1^2 \frac{2(2-x)+1}{x}\mathrm{d}x+\int_2^5 \frac{2(x-2)+1}{x}\mathrm{d}x=\int_1^2\left(\frac{5}{x}-2\right)\mathrm{d}x+\int_2^5\left(2-\frac{3}{x}\right)\mathrm{d}x$

$=\left(5\ln|x|-2x\right)\Big|_1^2+\left(2x-3\ln|x|\right)\Big|_2^5=4+8\ln 2-3\ln 5 \Rightarrow \begin{cases}a=8\\ b=-3\end{cases}\Rightarrow S=a+b=5$.

Câu 6: Khu vực trung tâm một quảng trường có dạng hình tròn đường kính AB bằng 10m. Người ta trang trí khu vực này bằng hai đường Parabol đối xứng nhau qua AB, nằm trong hình tròn, đi qua các điểm A, B và có đỉnh cách mép hình tròn 1m. Phần giới hạn bởi 2 parabol được trồng hoa với chi phí 200 nghìn đồng 1 mét vuông, phần còn lại được lát gốm sứ với chi phí 800 nghìn đồng 1 mét vuông. Tính tổng chi phí (triệu đồng) để hoàn thành khu vực này (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai sau dấu phẩy) ?

Lời giải

Xét hệ trục độ như hình vẽ.



Phương trình đường tròn là: $x^2+y^2=25$

Phương trình của Parabol có bề lõm hướng lên là: $y=\frac{4}{25}x^2-4$

Diện tích phần trồng hoa giới hạn bởi 2 parabol là:

$$S_1=2\int_{-5}^5\left|\left(\frac{4}{25}x^2-4\right)\right|\mathrm{d}x=4\int_0^5\left|\left(\frac{4}{25}x^2-4\right)\right|\mathrm{d}x=\frac{160}{3}\left(m^2\right).$$

Diện tích toàn bộ phần hình tròn là: $S_2=25\pi\left(m^2\right)$

Diện tích phần còn lại để trang trí gốm sứ là: $S = S_2 - S_1 = 25\pi - \frac{160}{3}\left(m^2\right)$.

Vậy tổng chi phí để làm khu vực trung tâm quảng trường là:

$\frac{160}{3}.200 + \left(25\pi - \frac{160}{3}\right).800 = 30,83$ (triệu đồng).

Câu 7: Các nhà kinh tế sử dụng đường cong Lorenz để minh họa sự phân phối thu nhập trong một quốc gia. Gọi x là đại diện cho phần trăm số gia đình trong một quốc gia và y là phần trăm tổng thu nhập, mô hình $y = x$ sẽ đại diện cho một quốc gia mà các gia đình có thu nhập như nhau. Đường cong Lorenz $y = f(x)$, biểu thị sự phân phối thu nhập thực tế. Diện tích giữa hai mô hình này, với $0 \le x \le 100$, biểu thị "sự bất bình đẳng về thu nhập" của một quốc gia. Năm 2009, đường cong Lorenz của Hoa Kỳ có thể được mô hình hóa bởi hàm số

$y = \left(0,00061x^2 + 0,0224x + 1,666\right)^2, 0 \le x \le 100$,

Trong đó x được tính từ các gia đình nghèo nhất đến giàu có nhất. Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kì vào năm 2009 bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân đầu tiên sau dấu phẩy)?

Lời giải

Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kì vào năm 2009 là diện tích hình phẳng S giới hạn bởi hai đồ thị:

$$\begin{cases} y = x \\ y = \left(0,00061x^2 + 0,0224x + 1,666\right)^2 \\ x = 0; x = 100 \end{cases} \Rightarrow S = \int_0^{100} \left|\left(0,00061x^2 + 0,0224x + 1,666\right)^2 - x\right| \mathrm{d}x.$$

Sử dụng máy tính cầm tay, ta được $S \approx 2086$.

----------HẾT----------

Dạng 3: Tích phân của hàm số cho bởi nhiều công thức

Phương pháp: Có hai bài toán trong dạng này

Bài toán 1: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} g(x) & \text{khi } x\le b \\ h(x) & \text{khi } x>b \end{cases}$ liên tục trên D. Tính $J=\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x$. Xét $b\in[a;c]$.

- **Bước 1:** Kiểm tra hàm số $f(x)$ có liên tục tại $x=b$?

  Tức là kiểm tra $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=f(b)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to b^-} g(x)=\lim\limits_{x\to b^+} h(x)=f(b)$

- **Bước 2:** Tách cận: $J=\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x=\underbrace{\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x}_{I_1}+\underbrace{\int\limits_b^c h(x)\mathrm{d}x}_{I_2}$.

- **Bước 3:** Tính các tích phân $I_1;I_2$ bằng các phương pháp đã học.

Bài toán 2: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} g(x;m) & \text{khi } x\le b \\ h(x;m) & \text{khi } x>b \end{cases}$ liên tục trên D. Tính $J=\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x$.

Xét $b\in[a;c]$.

- **Bước 1:** Kiểm tra hàm số $f(x)$ có liên tục tại $x=b$?

  Tức là kiểm tra: $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=f(b)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to b^-} g(x;m)=\lim\limits_{x\to b^+} h(x;m)=f(b)$

- **Bước 2:** Tách cận: $J=\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x=\underbrace{\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x}_{I_1}+\underbrace{\int\limits_b^c h(x)\mathrm{d}x}_{I_2}$.

- **Bước 3:** Tính các tích phân $I_1;I_2$ bằng các phương pháp đã học.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Biết rằng tốc độ v (km/phút) của một ca nô cao tốc thay đổi theo thời gian t (phút) như sau:

$$v(t)=\begin{cases} 0,5t, & 0\le t<2 \\ 1, & 2\le t<15 \\ 4-0,2t, & 15\le t\le 20 \end{cases}$$

Tính quãng đường ca nô di chuyển được trong khoảng thời gian từ 0 tới 20 phút.

Lời giải

Quãng đường chuyển động của ca nô là: $S=\int\limits_0^{20} v(t)\mathrm{d}t=\int\limits_0^{2}(0,5t)\mathrm{d}t+\int\limits_2^{15}1\mathrm{d}t+\int\limits_{15}^{20}(4-0,2t)\mathrm{d}t$

$$=\frac{t^2}{4}\Big|_0^2+(t)\Big|_2^{15}+\left(4t-\frac{1}{10}t^2\right)\Big|_{15}^{20}=1+15-2+40-37,5=16,5(km)$$

Bài tập 2: Tốc độ $v(m/s)$ của một thang máy di chuyển từ tầng 1 lên tầng cao nhất theo thời gian t (giây) được cho bởi công thức:

$$v(t)=\begin{cases} t, & 0\le t\le 2 \\ 2, & 2<t\le 20 \\ 12-0,5t, & 20<t\le 24 \end{cases}$$

Tính quãng đường chuyển động và tốc độ trung bình của thang máy.

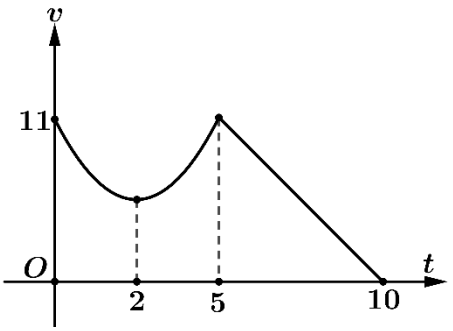
Lời giải

Quãng đường chuyển động của thang máy là: $S=\int_0^{24} v(t)\mathrm{d}t=\int_0^{2} t\mathrm{d}t+\int_2^{20} 2\mathrm{d}t+\int_{20}^{24}(12-0,5t)\mathrm{d}t$

$$=\frac{t^2}{2}\Big|_0^2+(2t)\Big|_2^{20}+\left(12t-\frac{1}{4}t^2\right)\Big|_{20}^{24}=2+40-4+144-140=42(m)$$

Tốc độ trung bình của thang máy là: $v_{tb}=\frac{S}{t}=\frac{42}{24}=1,75(m/s)$.

Bài tập 3: Một chất điểm chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)(m/s)$ có dạng đường Parabol khi $0\le t\le 5(s)$ và $v(t)$ có dạng đường thẳng khi $5\le t\le 10(s)$. Biết đỉnh Parabol là $I(2,3)$. Hỏi quãng đường đi được chất điểm trong thời gian $0\le t\le 10(s)$ là bao nhiêu mét?



Lời giải

Gọi Parabol $(P): y=at^2+bt+c$ là phương trình thể hiện vận tốc của chất điểm khi $0\le t\le 5(s)$

Do (P) có đỉnh $I(2;3)$ và đi qua $A(0;11)$ nên

$$\begin{cases} \frac{-b}{2a}=2 \\ y(0)=11 \\ y(2)=3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 4a+2b+c=3 \\ c=11 \\ 4a+b=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=2 \\ b=-8 \\ c=11 \end{cases}\Rightarrow y=2t^2-8t+11$$

Gọi $d: y=at+b$ là phương trình đường thẳng thể hiện vận tốc của chất điểm khi $5\le t\le 10(s)$ do d đi qua điểm $B(5;21)$ và $C(10;0)$ nên:

$$\begin{cases} 5a+b=11 \\ 10a+b=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=-\frac{11}{5} \\ b=22 \end{cases}\Rightarrow y=\frac{-11}{5}t+22$$

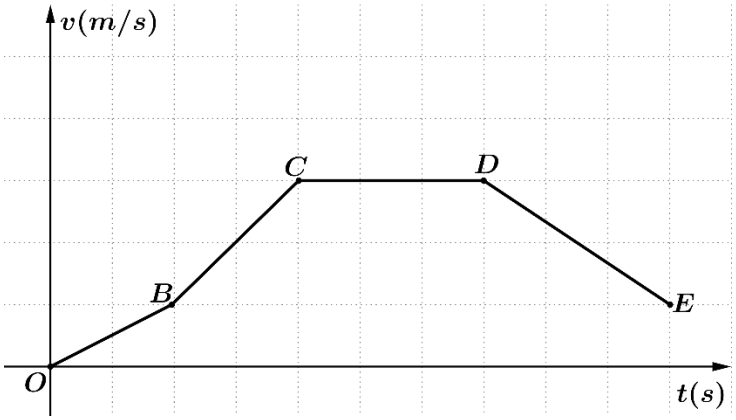
Như vậy phương trình biểu thị vận tốc của chất điểm là $v(t)=\begin{cases}2t^2-8t+11,\ 0\le t\le 5\\ \dfrac{-11}{5}t+22,\ 5<t\le 10\end{cases}$

Khi đó quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ $0\le t\le 10(s)$ là

$$S=\int_0^{10}v(t)\mathrm{d}t=\int_0^{5}\left(2t^2-8t+11\right)\mathrm{d}t+\int_5^{10}\left(\frac{-11}{5}t+22\right)\mathrm{d}t$$

$$=\left(\frac{2t^3}{3}-4t^2+11t\right)\Big|_0^5+\left(\frac{-11t^2}{10}+22t\right)\Big|_5^{10}=\frac{115}{3}+\frac{55}{2}=\frac{395}{6}(m)$$

Bài tập 4: Cho hình vẽ dưới đây là đồ thị vận tốc $v(t)$ của một vật ($t=0$ là thời điểm vật bắt đầu chuyển động). Tính quãng đường chuyển động và vận tốc trung bình của vật 10 giây đầu tiên.



Lời giải

Phương trình đường thẳng $OB: v=\dfrac{1}{2}t$

Phương trình đường thẳng $BC: v=t-1$

Phương trình đường thẳng $CD: v=3$

Phương trình đường thẳng $DE: v=-\dfrac{2}{3}t+\dfrac{23}{3}$

Suy ra: $v(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}t, & 0\le t\le 2\\ t-1, & 2<t\le 4\\ 3, & 4<t\le 7\\ -\dfrac{2}{3}t+\dfrac{23}{3}, & 7<t\le 10\end{cases}$.

Quãng đường chuyển động của vật trong 10 giây là:

$$S=\int_0^{10}v(t)\mathrm{d}t=\int_0^{2}v(t)\mathrm{d}t+\int_2^{4}v(t)\mathrm{d}t+\int_4^{7}v(t)\mathrm{d}t+\int_7^{10}v(t)\mathrm{d}t$$

$$S=\int_0^{2}\frac{1}{2}t\mathrm{d}t+\int_2^{4}(t-1)\mathrm{d}t+\int_4^{7}3\mathrm{d}t+\int_7^{10}\left(-\frac{2}{3}t+\frac{23}{3}\right)\mathrm{d}t=20\ (m)$$

Vận tốc trung bình của chuyển động là: $v_{tb}=\dfrac{S}{10}=2(m/s)$.

Bài tập 5: Khảo sát chuyển động của xe khách A trong 30 phút trên một quãng đường ta thu được kết quả: vận tốc $v(\text{m/phut})$ của xe khách theo thời gian t (phút) được biểu diễn bởi hàm số:

$$v(t)=\begin{cases}100t, & 0\le t\le 10\\ 20t+800, & 10<t\le 20\\ -10\text{t}+1400, & 20<t\le 30\end{cases}$$

Tính quãng đường chuyển động và vận tốc trung bình của xe khách trong 30 phút đã khảo sát.

Lời giải

Quãng đường chuyển động của xe khách trong 30 phút khảo sát là:

$$S=\int_0^{30}v(t)\mathrm{d}t=\int_0^{10}v(t)\mathrm{d}t+\int_{10}^{20}v(t)\mathrm{d}t+\int_{20}^{30}v(t)\mathrm{d}t$$

$$S=\int_0^{10}100t\mathrm{d}t+\int_{10}^{20}(20t+800)\mathrm{d}t+\int_{20}^{30}(-10t+1400)\mathrm{d}t=27500(m)$$

Vận tốc trung bình của xe khách trong 30 phút khảo sát là: $v_{tb}=\dfrac{S}{30}=\dfrac{2750}{3}\approx 917$ (m/phút).

Bài tập 6: Giả sử tốc độ $v(m/s)$ của một thang máy di chuyển từ tầng 1 lên tầng cao nhất theo thời gian t (giây) được cho bởi công thức: $v(t)=\begin{cases}t, & 0\le t\le 2\\ 2, & 2<t\le 20\\ 12-0,5t, & 20<t\le 24\end{cases}$. Tính quãng đường chuyển động và tốc độ trung bình của thang máy.

Lời giải

Gọi $s(t)$ là quãng đường thang máy di chuyển được đến thời gian t (giây). Quãng đường thang máy di chuyển từ tầng 1 lên tầng cao nhất là $s=s(20)-s(0)=\int_0^{20}v(t)\mathrm{d}t$

$$=\int_0^{2}v(t)\mathrm{d}t+\int_2^{20}v(t)\mathrm{d}t+\int_{20}^{24}v(t)\mathrm{d}t=\int_0^{2}t\mathrm{d}t+\int_2^{20}2\mathrm{d}t+\int_{20}^{24}(12-0,5t)\mathrm{d}t$$

$$=\left(\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^2+2(t)\Big|_2^{20}+\left(12t-\frac{0,5t^2}{2}\right)\Big|_{20}^{24}=42(m)$$

Vận tốc trung bình của thang máy là $v_{tb}=\dfrac{s}{t}=\dfrac{42}{24}=1,75(m/s)$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{khi } x\ge 0\\ e^{2x} & \text{khi } x<0\end{cases}$. Tích phân $I=\int\limits_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$ có giá trị bằng bao nhiêu?

A. $I=\dfrac{3e^2-1}{e^2}$. **B.** $I=\dfrac{9e^2-1}{2e^2}$. **C.** $I=\dfrac{11e^2-11}{2e^2}$. **D.** $I=\dfrac{7e^2+1}{2e^2}$.

Lời giải

Ta có: $I=\int\limits_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0} e^{2x}\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{2}(x+1)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}e^{2x}\Big|_{-1}^{0}+\left(\dfrac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{0}^{2}$

$=\dfrac{1}{2}\left(1-e^{-2}\right)+\left(\dfrac{4}{2}+2\right)=\dfrac{9}{2}-\dfrac{1}{2e^2}=\dfrac{9e^2-1}{2e^2}$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}3x^2 & \text{khi } 0\le x\le 1\\ 4-x & \text{khi } 1\le x\le 2\end{cases}$. Tính tích phân $\int\limits_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x$

A. $\dfrac{7}{2}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có: $\int\limits_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1} 3x^2\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}(4-x)\mathrm{d}x=\dfrac{7}{2}$.

Câu 3: Cho hàm số $\begin{cases}3x^2 & \text{khi } 0\le x\le 1\\ 4-x & \text{khi } 1\le x\le 2\end{cases}$. Tính tích phân $\int\limits_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{7}{2}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có $\int\limits_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1} 3x^2\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}(4-x)\mathrm{d}x=1+\dfrac{5}{2}=\dfrac{7}{2}$

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}4-x & \text{khi } 0\le x\le 1\\ 3x^2 & \text{khi } 1\le x\le 2\end{cases}$. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{21}{2}$. **B.** $\dfrac{7}{2}$. **C.** 7. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Ta có $I=\int\limits_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1}(4-x)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2} 3x^2\mathrm{d}x=\dfrac{21}{2}$

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}4x-\sqrt{4x+9} & \text{khi } x>0\\ 4a+\tan^2 x & \text{khi } x\le 0\end{cases}$, đồng thời $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{4} f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{50}{3}$. Tính a.

A. $a=1.$ **B.** $a=\frac{1}{2}.$ **C.** $a=\frac{3}{4}.$ **D.** $a=\frac{1}{4}.$

Lời giải

Ta có: $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{4}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{4}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\left(4a+\tan^2x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{4}\left(4x-\sqrt{4x+9}\right)\mathrm{d}x$

$=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\left(4a-1\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\left(1+\tan^2x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{4}\left(4x-\sqrt{4x+9}\right)\mathrm{d}x$

$=\left(4a-1\right)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{0}+\tan x\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{0}+\left(2x^2-\frac{\sqrt{\left(4x+9\right)^3}}{6}\right)\Big|_{0}^{4}=\left(4a-1\right)\pi+1+\frac{47}{3}=\frac{50}{3}\Leftrightarrow a=\frac{1}{4}.$

Câu 6: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f\left(x\right)=\begin{cases}2x & \text{khi } x\geq 0\\ x^3+x+1 & \text{khi } x<0\end{cases}$. Tính $\int\limits_{0}^{2}f\left(x-1\right)\mathrm{d}x.$

A. $\frac{3}{2}.$ **B.** $\frac{3}{4}.$ **C.** $\frac{5}{4}.$ **D.** $\frac{11}{4}.$

Lời giải

Ta có: $\int\limits_{0}^{2}f\left(x-1\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0}\left(x^3+x+1\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}2x\mathrm{d}x$

$=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-1}^{0}+x^2\Big|_{0}^{1}=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1+1=\frac{5}{4}.$

Câu 7: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2-x+1 & \text{khi } x\geq\frac{1}{2}\\ 2x+\frac{7}{4} & \text{khi } x<\frac{1}{2}\end{cases}$. Tính tích phân $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}f\left(\sin^2x\right)\sin 2x\mathrm{d}x.$

A. $\frac{37}{24}.$ **B.** $-\frac{37}{24}.$ **C.** $\frac{24}{37}.$ **D.** $\frac{17}{24}.$

Lời giải

Ta có $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}f\left(\sin^2x\right)\sin 2x\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}f\left(\sin^2x\right).2\sin x\cos x\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}2\sin x.f\left(\sin^2x\right)\mathrm{d}\left(\sin x\right)$

$=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}f\left(\sin^2x\right)\mathrm{d}\left(\sin^2x\right)=\int\limits_{0}^{1}f\left(u\right)\mathrm{d}u=\int\limits_{0}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\left(2x+\frac{7}{4}\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}(x^2-x+1)\mathrm{d}x=\frac{37}{24}.$

Câu 8: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}x+2 \text{ khi } -3\leq x\leq -1\\ x^2 \quad \text{khi } x\geq -1\end{cases}$ thì $\int\limits_{-3}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{31}{3}$. **B.** $\frac{28}{3}$. **C.** $\frac{22}{3}$. **D.** $\frac{26}{3}$.

Lời giải

Ta có $\int\limits_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-3}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-3}^{-1} (x+2)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{3} x^2\mathrm{d}x = 0 + \frac{28}{3} = \frac{28}{3}$.

Vậy $\int\limits_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{28}{3}$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x & \text{khi } x < 0 \\ \sin x & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$. Tính tích phân $\int\limits_{-1}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$

A. $\frac{13}{6}$. **B.** $\frac{5}{6}$. **C.** $-\frac{5}{6}$. **D.** $\frac{19}{6}$.

Lời giải

Ta có: $I = \int\limits_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} \left(2x^2 - x\right)\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\pi} \sin x\mathrm{d}x = \frac{7}{6} + 2 = \frac{19}{6}$

Câu 10: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 4x^3 + 2x + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ 4x + 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(1) = 2$. Giá trị của $2F(-1) + 3F(2)$ bằng.

A. 76. **B.** 19. **C.** 21. **D.** 63.

Lời giải

Vì F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ nên ta có:

$$\begin{cases} \int\limits_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} (4x+1)\mathrm{d}x = F(0) - F(-1) = -1 \\ \int\limits_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} \left(4x^3 + 2x + 1\right)\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = 3 \\ \int\limits_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{2} \left(4x^3 + 2x + 1\right)\mathrm{d}x = F(2) - F(1) = 19 \\ F(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(0) - F(-1) = -1 \\ F(0) = -1 \\ F(2) = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(-1) = 0 \\ F(2) = 21 \end{cases}.$$

Vậy $2F(-1) + 3F(2) = 63$

Câu 11: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x + m & \text{khi } x \geq 1 \\ 5 - 2x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ (m là tham số thực). Biết rằng $f(x)$ có nguyên hàm trên R là $F(x)$ thỏa mãn $F(-2) = -10$, khi đó $F(3)$ bằng

A. $36 + 3m$. **B.** 36. **C.** 38. **D.** $30 + 3m$.

Lời giải

Ta có $F(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + mx + C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 5x - x^2 + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$

Ta có $F(-2)=5(-2)-(-2)^2+C_2 \Rightarrow C_2=-10+14=4$

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} F(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^3+x^2+mx+C_1\right)=m+2+C_1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} F(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(5x-x^2+C_2\right)=4+C_2$

$F(x)$ liên tục tại $x=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} F(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} F(x)=F(1)$

$\Leftrightarrow m+2+C_1=4+C_2 \Leftrightarrow C_1=6-m$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$

$\Leftrightarrow m+5=3 \Leftrightarrow m=-2 \Rightarrow C_1=8$

Vậy $F(x)=\begin{cases} x^3+x^2-2x+8 & \text{khi } x\ge 1 \\ 5x-x^2+4 & \text{khi } x<1 \end{cases}$ Do đó $F(3)=38$

Vậy $a+b=15+4=19$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^x+m & \text{khi } x\ge 0 \\ x^2\left(x^3+1\right)^3 & \text{khi } x<0 \end{cases}$ (với m tham số). Biết hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và tích phân $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x=a.e-\dfrac{b}{c}$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}^*;\dfrac{a}{b}$ tối giản ($e=2,718281\ldots.$). Biểu thức $a+b+c+m$ có giá bằng

A. -11. **B.** 35. **C.** 13. **D.** 36.

Lời giải

Vì hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số liên tục tại điểm $x=0$.

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^x+m\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2\left(x^3+1\right)^3\right)=1+m \Leftrightarrow m=-1$.

Ta có: $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1} x^2\left(x^3+1\right)^3\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}\left(\mathrm{e}^x-1\right)\mathrm{d}x=e-\dfrac{23}{12}$.

Vậy $\begin{cases} a=1 \\ b=23 \\ c=12 \end{cases} \Rightarrow a+b+c+m=35$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} 2x+a & \text{khi } x\ge 1 \\ 3x^2+b & \text{khi } x<1 \end{cases}$ thỏa mãn $\int\limits_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x=13$. Tính $T=a+b-ab$?

A. $T=-11$ **B.** $T=-5$ **C.** $T=1$ **D.** $T=-1$

Lời giải

Để tồn tại $\int\limits_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;2] \Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại $x=1$

(Vì $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(0;1)$ và $(1;2)$).

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a+2 = b+3 \Leftrightarrow a = b+1 \ (1)$

Ta có

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(3x^2+b\right)\mathrm{d}x + \int_1^2 (2x+a)\mathrm{d}x = \left(x^3+bx\right)\Big|_0^1 + \left(x^2+ax\right)\Big|_1^2$$

$$= a+b+4$$

Mà $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 13 \Rightarrow a+b=9 \ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $a=5; b=4 \Rightarrow T = a+b-ab = -11$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) = \begin{cases} x+m & , x \ge 0 \\ e^{2x} & , x<0 \end{cases}$ (m là hằng số). Biết $\int\limits_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x = a + \dfrac{b}{e^2}$ trong đó a,b là các số hữu tỉ. Tính $2a+4b^2$.

A. 10. **B.** 4. **C.** 80. **D.** 40.

Lời giải

Do hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số liên tục tại $x=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow m = 1$

Khi đó ta có $\int\limits_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^0 e^{2x}\mathrm{d}x + \int\limits_0^2 (x+1)\mathrm{d}x$

$$= \frac{e^{2x}}{2}\Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{2} - \frac{e^{-2}}{2} + 4 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2e^2}.$$

Do đó $a = \dfrac{9}{2}; b = -\dfrac{1}{2}$. Vậy $2a+4b^2 = 10$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sin x + 2 & \text{khi} \quad x \ge 0 \\ 2\cos^2 x & \text{khi} \quad x<0 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \pi$. Giá trị của $F\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + 2F\left(\dfrac{\pi}{6}\right) - F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ bằng:

A. $\dfrac{1+\sqrt{3}+3\pi}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{13\pi}{12}$. **C.** $\dfrac{13\pi+6-6\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\pi}{12}$.

Lời giải

Ta có: $F\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + 2F\left(\dfrac{\pi}{6}\right) - F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$=F\left(-\frac{\pi}{6}\right)-F(0)+F(0)-F\left(\frac{\pi}{6}\right)+3F\left(\frac{\pi}{6}\right)-3F\left(\frac{\pi}{4}\right)+2F\left(\frac{\pi}{4}\right)-2F\left(\frac{\pi}{3}\right)+2F\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=-\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{0}f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}f(x)\mathrm{d}x-3\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}f(x)\mathrm{d}x-2\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}f(x)\mathrm{d}x+2F\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=-\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{0}(\sin x+2)\mathrm{d}x-\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}2\cos^2 x\mathrm{d}x-3\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}2\cos^2 x\mathrm{d}x-2\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}2\cos^2 x\mathrm{d}x+2F\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=-\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{0}(\sin x+2)\mathrm{d}x-\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}(\cos 2x+1)\mathrm{d}x-3\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2x+1)\mathrm{d}x-2\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}(\cos 2x+1)\mathrm{d}x+2F\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=-(-\cos x+2x)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{0}-\left(\frac{1}{2}\sin 2x+x\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{6}}-3\left(\frac{1}{2}\sin 2x+x\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}-2\left(\frac{1}{2}\sin 2x+x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}+2F\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=1-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{6}\right)-3\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{12}\right)-2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{12}\right)+2\pi=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{13\pi}{12}$$

Câu 16: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x^2+a & \text{khi } x\geq 0\\ \sin 2x+\cos x-b & \text{khi } x<0\end{cases}$ liên tục và có nguyên hàm F liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(2)-F\left(-\frac{\pi}{2}\right)=10$ với a,b là tham số thực. Giá trị $\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\frac{m}{4}$, với m là một số thực. Khi đó $2m$ bằng:

A. $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{9}{4}$. **C.** 9. **D.** 18.

Lời giải

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $a=1-b$.

Mặt khác $F(2)-F\left(-\frac{\pi}{2}\right)=10\Leftrightarrow\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{2}f(x)\mathrm{d}x=10$

$$\Leftrightarrow\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(\sin 2x+\cos x-b)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{2}(3x^2+a)\mathrm{d}x=10\Leftrightarrow\left(-\frac{1}{2}\cos 2x+\sin x-bx\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}+\left(x^3+ax\right)\Big|_{0}^{2}=10$$

$$\Leftrightarrow 2a-\frac{b\pi}{2}=2 \text{ suy ra } \begin{cases}a+b=1\\ 2a-\frac{b\pi}{2}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=0\end{cases} \text{ hay } f(x)=\begin{cases}3x^2+1 & \text{khi } x\geq 0\\ \sin 2x+\cos x & \text{khi } x<0\end{cases}.$$

Ta được

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} (\sin 2x + \cos x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \left(3x^2+1\right)\mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{2}\cos 2x + \sin x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{0} + \left(x^3+x\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$$

Suy ra $m = 9$ vậy $2m = 18$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{khi } x \le 0 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(3) = 0$. Giá trị của $2F(-1) + 3F(2)$ bằng

A. 17. **B.** 32. **C.** $-\frac{22}{3}$. **D.** -35.

Lời giải

Ta có $\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} (2x+3)\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} \left(x^2 - 2x + 3\right)\mathrm{d}x = \left(x^2+3x\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right)\Big|_{0}^{2} = 2 + \frac{14}{3} = \frac{20}{3}.$

Mà $\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{-1}^{2} = F(2) - F(-1)$ nên $F(2) - F(-1) = \frac{20}{3}$ (1)

Mặt khác $F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} x^2 + 3x + C_1 & \text{khi } x \le 0 \\ \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + C_2 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$.

Vì $F(3) = 0$ nên $9 - 9 + 9 + C_2 = 0$ suy ra $C_2 = -9$.

Vậy $F(2) = \frac{8}{3} - 2^2 + 3.2 - 9 = -\frac{13}{3}$. Thay $F(2) = -\frac{13}{3}$ vào (1) ta được $F(-1) = -11$.

Suy ra $2F(-1) + 3F(2) = 2.(-11) + 3.\left(-\frac{13}{3}\right) = -35.$

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ có nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ là $F(x) = \begin{cases} x^2 + 5x + C_1 \text{ khi } x \ge 1 \\ x^3 + 4x + C_2 \text{ khi } x < 1 \end{cases}$. Tính $\int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$?

A. 14. **B.** 13. **C.** 15. **D.** 16.

Lời giải

Vì hàm số $F(x)$ liên tục tại $x = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1^+} F(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} F(x) = F(1) \Rightarrow 1^2 + 5.1 + C_1 = 1^3 + 4.1 + C_2$

$\Rightarrow C_1 - C_2 = -1$

Ta có: $\int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(2) - F(0) = 2^2 + 5.2 + C_1 - \left(0^3 + 4.0 + C_2\right)$

$\Rightarrow \int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 14 + \mathrm{C}_1 - C_2 = 14 - 1 = 13$

Câu 19: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x^2-2x+1 \text{ khi } x\ge 0\\ 1-2x \quad \text{khi } x<0\end{cases}$. Giả sử F là 1 nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2020F(-1)+2021F(2)=-2022$. Giá trị $F(1)$ nằm trong khoảng nào?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

Ta có $I=2020\int\limits_1^{-1} f(x)\mathrm{d}x+2021\int\limits_1^{2} f(x)\mathrm{d}x=2020F(-1)+2021F(2)-4041F(1)$.

$\Rightarrow 4041F(1)=2020F(-1)+2021F(2)-I$.

Mà $\int\limits_1^{-1} f(x)\mathrm{d}x=-\left[\int\limits_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^{1} f(x)\mathrm{d}x\right]=-\left[\int\limits_{-1}^{0}(1-2x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^{1}\left(3x^2-2x+1\right)\mathrm{d}x\right]=-3$.

và $\int\limits_1^{2} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^{2}\left(3x^2-2x+1\right)\mathrm{d}x=5$.

Suy ra $I=2020.(-3)+2021.5=4045$.

Vậy $4041F(1)=2020F(-1)+2021F(2)-I=-6067\Rightarrow F(1)=-\dfrac{6067}{4041}$.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3-2x \quad \text{khi } x\ge 1\\ 3x^2+2x-4 \text{ khi } x<1\end{cases}$. Giả sử $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(2)=4$. Giá trị của $F(-2)-4F(3)$ bằng

A. 16. **B.** 8. **C.** 18. **D.** 2.

Lời giải

Ta có: $f(x)=\begin{cases}3-2x \quad \text{khi } x\ge 1\\ 3x^2+2x-4 \text{ khi } x<1\end{cases}\Rightarrow F(x)=\begin{cases}3x-x^2+C_1 \text{ khi } x\ge 1\\ x^3+x^2-4x+C_2 \text{ khi } x<1\end{cases}$.

Vì $F(2)=4\Rightarrow C_1=2\Rightarrow F(x)=\begin{cases}3x-x^2+2 \text{ khi } x\ge 1\\ x^3+x^2-4x+C_2 \text{ khi } x<1\end{cases}$

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$.

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}\left(3x-x^2+2\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^3+x^2-4x+C_2\right)\Leftrightarrow 3-1+2=1+1-4+C_2\Leftrightarrow C_2=6$

$\Rightarrow F(x)=\begin{cases}3x-x^2+2 \text{ khi } x\ge 1\\ x^3+x^2-4x+6 \text{ khi } x<1\end{cases}$.

Vậy $F(-2)-4F(3)=10-4.2=2$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-2x & \text{khi } x\ge 2\\ x-2 & \text{khi } x<2\end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^2(x-2)\mathrm{d}x$

b) $\int\limits_2^3 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_2^3\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x$

c) $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_1^2+\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_2^3$

d) $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\frac{5}{6}$

Lời giải

a) Đúng: Ta có $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^2(x-2)\mathrm{d}x$

b) Đúng: Ta có $\int\limits_2^3 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_2^3\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x$

c) Sai: Ta có $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^2(x-2)\mathrm{d}x+\int\limits_2^3\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_1^2+\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_2^3$.

d) Đúng :

$$\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^2(x-2)\mathrm{d}x+\int\limits_2^3\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_1^2+\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_2^3=\left(-2-\frac{-3}{2}\right)+\left(0-\frac{-4}{3}\right)=\frac{5}{6}$$

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=\left|x^2-9\right|$ với $0\le x\le 9$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(x)=\left|x^2-9\right|=\begin{cases}-x^2+9,\ 0\le x\le 3\\ x^2-9,\ 3\le x\le 9\end{cases}$.

b) $\int\limits_0^9 f(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_3^9 f(x)\mathrm{d}x$.

c) $\int\limits_0^9 f(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_0^3\left(x^2-9\right)\mathrm{d}x+\int\limits_3^9\left(x^2-9\right)\mathrm{d}x$.

d) $\int\limits_0^9 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^m\left(x^2-9\right)\mathrm{d}x+\int\limits_m^9\left(x^2-9\right)\mathrm{d}x\ \forall m\in(0,9)$.

Lời giải

x	0		3		9
x^2-9		$-$	0	$+$	

a) Đúng: Từ bảng xét dấu ta thấy: $x^2-9\le 0,\forall x\in[0,3]$ và $x^2-9\ge 0,\forall x\in[3,9]$

b) Sai: $\int\limits_0^9 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_3^9 f(x)\mathrm{d}x$.

c) Đúng: Theo bảng xét dấu ta có:

$$\int\limits_0^9\left|x^2-9\right|\mathrm{d}x=\int\limits_0^3\left|x^2-9\right|\mathrm{d}x+\int\limits_3^9\left|x^2-9\right|\mathrm{d}x=\int\limits_0^3\left[-\left(x^2-9\right)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_3^9\left(x^2-9\right)\mathrm{d}x$$
$$=-\int\limits_0^3\left(x^2-9\right)\mathrm{d}x+\int\limits_3^9\left(x^2-9\right)\mathrm{d}x$$

d) Sai: Thế $m=1$ vào đẳng thức $\int\limits_0^9 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^m\left(x^2-9\right)\mathrm{d}x+\int\limits_m^9\left(x^2-9\right)\mathrm{d}x$ ta được

$$\int\limits_0^9\left|x^2-9\right|\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(x^2-9\right)d\mathrm{d}x+\int\limits_1^9\left(x^2-9\right)\mathrm{d}x\ (1).$$

Ta có: $\begin{cases}VP(1)=162\\VT(1)=198\end{cases}$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x^2+2x+m & \text{khi } x\ge 1\\5-2x & \text{khi } x<1\end{cases}$ (m là tham số thực) liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng $f(x)$ có nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ là $F(x)$ thỏa mãn $F(-2)=-10$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $m=-2$

b) $F(x)=\begin{cases}x^3+x^2-2x+8 & \text{khi } x\ge 1\\5x-x^2+4 & \text{khi } x<1\end{cases}$

c) $F(3)=83$

d) $\int\limits_1^{e^2} f(\ln x)\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=3$

Lời giải

a) Đúng: Ta có $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ liên tục tại $x=1$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)\Leftrightarrow m+5=3\Leftrightarrow m=-2$.

b) Đúng: $F(x)=\begin{cases}x^3+x^2-2x+8 & \text{khi } x\ge 1\\5x-x^2+4 & \text{khi } x<1\end{cases}$.

Ta có $F(x)=\begin{cases}x^3+x^2+mx+C_1 & \text{khi } x\ge 1\\5x-x^2+C_2 & \text{khi } x<1\end{cases}$

$F(-2)=5(-2)-(-2)^2+C_2 \Rightarrow C_2=-10+14=4$.

$\lim\limits_{x\to 1^+} F(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^3+x^2+mx+C_1\right)=m+2+C_1$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} F(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(5x-x^2+C_2\right)=4+C_2$.

Ta lại có $F(x)$ liên tục tại $x=1$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 1^-} F(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} F(x)=F(1)\Leftrightarrow m+2+C_1=4+C_2\Leftrightarrow C_1=6-m$ mà $m=-2$ nên $C_1=8$

Vậy $F(x)=\begin{cases}x^3+x^2-2x+8 & \text{khi } x\ge 1\\ 5x-x^2+4 & \text{khi } x<1\end{cases}$.

c) Sai: $F(3)=83$.

Ta có $F(3)=3^3+3^2-2.3+8=38$.

d) Sai: $\int\limits_1^{e^2} f(\ln x)\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=3$.

Đặt $t=\ln x\Rightarrow dt=\dfrac{1}{x}dx$.

Khi $x=1\Rightarrow t=0$;

Khi $x=e^2\Rightarrow t=2$.

Do đó: $\int\limits_1^{e^2} f(\ln x)\dfrac{1}{x}dx=\int\limits_0^2 f(t)dt=\int\limits_0^1 f(x)dx+\int\limits_1^2 f(x)dx=\int\limits_0^1(5-2x)dx+\int\limits_1^2\left(3x^2+2x-2\right)dx=12$

Câu 4: Giả sử tốc độ $v(m/s)$ của một thang máy di chuyển từ tầng 1 lên tầng cao nhất theo thời gian t được cho bởi công thức: $v(t)=\begin{cases}t\ ;\ 0\le t\le 2\\ 2\ ;\ 2<t\le 20\\ 12-0,5t\ ;\ 20<t\le 24\end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tốc độ tại thời điểm $t=2s$ là 2.

b) Gia tốc chuyển động của thang máy tại thời điểm $t=15s$ là $2\left(m/s^2\right)$.

c) Quãng đường chuyển động của thang máy là $42m$.

d) Tốc độ trung bình của thang máy là $1,75(m/s)$.

Lời giải

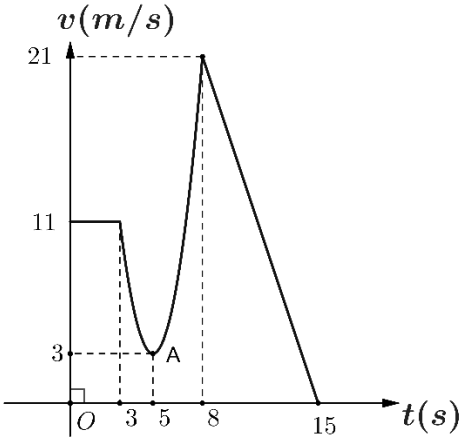
a) Đúng: Ta có $v(2)=2$.

b) Sai: Tại $t=15s$ thì $v(t)=2$ nên gia tốc $a=v'=0$. Gia tốc của thang máy tại thời điểm $t=15s$ là $0\left(m/s^2\right)$.

c) Đúng: $S=\int\limits_0^2 t\mathrm{d}t+\int\limits_2^{20} 2\mathrm{d}t+\int\limits_{20}^{24}(12-0,5t)\mathrm{d}t=42$.

d) Đúng: $v_{tb}=\dfrac{s}{t}=\dfrac{42}{24}=1,75$.

Câu 5: Chất điểm chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)(m/s)$ có dạng đường thẳng khi $0\le t\le 3(s)$ và $8\le t\le 15(s)$ và $v(t)$ có dạng đường Parabol khi $3\le t\le 8(s)$ (như hình vẽ)



a) Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t=15$ là $v(15)=21(m/s)$.

b) Quãng đường chất điểm di chuyển được trong 3 giây đầu tiên là: $S_1=\int_0^3 11\mathrm{d}t(m)$

c) Quãng đường chất điểm đi được trong khoảng thời gian từ 8 giây đến 15 giây bằng $73,5(m)$

d) Vận tốc trung bình v_{tb} của chất điểm trong khoảng thời gian từ 3 đến 8 giây thỏa mãn $v_{tb}<7\ (m/s)$.

Lời giải

a) Sai: Dựa vào đồ thị $v(t)$

b) Đúng: Trong 3 giây đầu tiên, vận tốc của chuyển động là $v(t)=11(m/s)$.

Do đó quãng đường chất điểm chuyển động trong 3 giây đầu tiên là: $S_1=\int_0^3 11\mathrm{d}t\ (m)$

c) Đúng: Trong khoảng thời gian từ 8 đến 15 giây, đồ thị $v(t)$ là một đường thẳng đi qua hai điểm $(8;21)$ và $(15;0)$. Ta có: $v(t)=at+b$.

Từ giả thiết ta có hệ: $\begin{cases}8a+b=21\\15a+b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3\\b=45\end{cases}$.

Do đó $v(t)=-3t+45\ (8\le t\le 15)$.

Quãng đường chất điểm đi được trong khoảng thời gian này là:

$$S_2=\int_8^{15}(-3t+45)\mathrm{d}t=-\frac{3t^2}{2}\Big|_8^{15}+45t\Big|_8^{15}=\frac{147}{2}=73,5(m).$$

d) Sai: Trong khoảng thời gian từ 3 đến 8 giây đồ thị $v(t)$ là một Parabol đi qua các điểm có tọa độ lần lượt là $(3;11),(5;3),(8;21)$ có phương trình dạng: $v(t)=at^2+bt+c$.

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases}9a+3b+c=11\\25a+5b+c=3\\64a+8b+c=21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-20\\c=53\end{cases}$

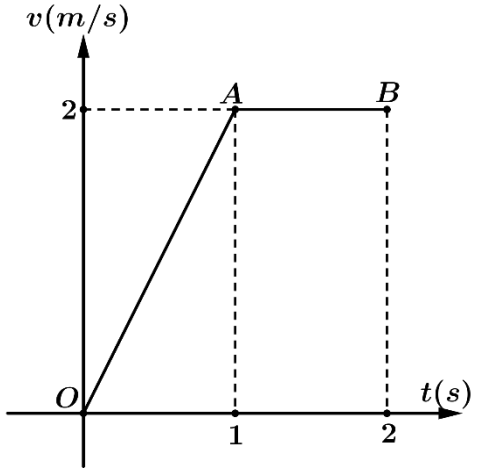
Do đó: $v(t)=2t^2-20t+53\,(3\le t\le 8)$.

Quãng đường chất điểm đi được trong khoảng thời gian này là:

$$S_3=\int_3^8 v(t)\mathrm{d}t=\int_3^8\left(2t^2-20t+53\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{2t^3}{3}-10t^2+53t\right)\Big|_3^8=\frac{115}{3}\ (m)$$

Vận tốc trung bình của chất điểm trong khoảng thời gian này là: $v_{tb}=\frac{S_3}{5}=\frac{23}{3}\approx 7,67(m/s)$.

Câu 6: Một vật chuyển động với vận tốc được cho bởi đồ thị trong hình sau:



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Vận tốc của vật tại thời điểm t được xác định bởi $v(t)=\begin{cases}2t & \text{khi } 0\le t\le 1\\2 & \text{khi } t>1\end{cases}$.

b) Quãng đường vật đi được trong 1 giây đầu tiên được xác định bởi công thức $s(t)=\int_0^1 v(t)\mathrm{d}t$

c) Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ 1 giây đến 2 giây được xác định bởi công thức $s(t)=\int_0^2 v(t)\mathrm{d}t$

d) Quãng đường mà vật đi được trong 2 giây đầu tiên là $3m$.

Lời giải

a) Đúng: Vận tốc của vật tại thời điểm t được xác định bởi $v(t)=\begin{cases}2t & \text{khi } 0\le t\le 1\\2 & \text{khi } t>1\end{cases}$.

Ta có phương trình đường thẳng đi qua hai điểm OA là $y=2x$, đường thẳng đi qua hai điểm A,B là $y=2$.

Do đó ta có công thức hàm vận tốc là: $v(t)=\begin{cases}2t & \text{khi } 0\le t\le 1\\ 2 & \text{khi } t>1\end{cases}$.

Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ a giây đến b giây được xác định bởi công thức $s(t)=\int_a^b v(t)\mathrm{d}t$.

b) Đúng: Quãng đường vật đi được trong 1 giây đầu tiên được xác định bởi công thức $s(t)=\int_0^1 v(t)\mathrm{d}t$.

Do đó quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ 0 giây đến 1 giây được xác định bởi công thức $s(t)=\int_0^1 v(t)\mathrm{d}t$.

c) Sai: Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ 1 giây đến 2 giây được xác định bởi công thức $s(t)=\int_0^2 v(t)\mathrm{d}t$.

Do đó quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ 1 giây đến 2 giây được xác định bởi công thức $s(t)=\int_1^2 v(t)\mathrm{d}t$.

d) Đúng: Quãng đường mà vật đi được trong 2 giây đầu tiên là $3m$.

Quãng đường mà vật đi được trong 2 giây đầu tiên là:

$$s(t)=\int_0^2 v(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 2t\mathrm{d}t+\int_1^2 2\,\mathrm{d}t=t^2\Big|_0^1+2t\Big|_1^2=1+2=3\mathrm{m}.$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho $f(x)=\begin{cases}1 & \text{khi } x\ge 1\\ 2x-1 & \text{khi } x<1\end{cases}$. Tính $J=\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x$

Lời giải

Ta có: $J=\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$

Tính $J_1=\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^1(2x-1)\mathrm{d}x=\left(x^2-x\right)\Big|_{-1}^1=0-2=-2$

Tính $J_2=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 1\mathrm{d}x=2-1=1$. Vậy $J=1-2=-1$.

Câu 2: Cho số thực a và hàm số $f(x)=\begin{cases}2x & \text{khi } x\le 0\\ a\left(x-x^2\right) & \text{khi } x>0\end{cases}$. Tính tích phân $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$ khi $a=12$

Lời giải

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(a\left(x-x^2\right)\right)=0\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2x)=0\end{cases}$, và $f(0)=0$ nên hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} 2x\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} a\left(x - x^2\right)\mathrm{d}x$

$= \left(x^2\right)\Big|_{-1}^{0} + a\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{1} = -1 + a\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{a}{6} - 1 \xrightarrow{a=12} \int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 1.$

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \ge 2 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tích phân $I = \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu? *Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2*

Lời giải

Ta có: $I = \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\int\limits_{1}^{2}\left(x^2 - 2x + 3\right)\mathrm{d}x + \int\limits_{2}^{3}\left(x^2 - 1\right)\mathrm{d}x\right] = \frac{23}{6}.$

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{khi } x \ge 1 \\ x + 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Tích phân $I = \int\limits_{2}^{0} -3t^2 f(t)\mathrm{d}t$ bằng bao nhiêu? *Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2*

Lời giải

$I = -3\int\limits_{2}^{0} t^2 f(t)\mathrm{d}t = 3\int\limits_{0}^{2} x^2 f(x)\mathrm{d}x = 3\left[\int\limits_{0}^{1} x^2(x+1)\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{2} x\mathrm{d}x\right] = \frac{25}{12} \approx 2{,}08$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{khi } x < 0 \\ x - 1 & \text{khi } 0 \le x \le 2 \\ 5 - 2x & \text{khi } x > 2 \end{cases}$. Tính tích phân $I = \int\limits_{-5}^{9} \frac{1}{7} f(t)\mathrm{d}t$ bằng bao nhiêu? *Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2*

Lời giải

Ta có: $I = \frac{1}{7}\int\limits_{-5}^{9} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{7}\int\limits_{-5}^{9} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{7}\int\limits_{-5}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{7}\int\limits_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{7}\int\limits_{2}^{9} f(x)\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{7}\int\limits_{-5}^{0}\left(2x^2 - 1\right)\mathrm{d}x + \frac{1}{7}\int\limits_{0}^{2}(x-1)\mathrm{d}x + \frac{1}{7}\int\limits_{2}^{9}(5 - 2x)\mathrm{d}x = \frac{109}{21} \approx 5{,}19$

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} e^x + 1 & \text{khi } x \ge 0 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Biết giá trị của $I = \int\limits_{1/e}^{e^2} \frac{f(\ln x - 1)}{x}\mathrm{d}x = \frac{a}{b} + ce$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}, b \ne 0$ và $(a, b) = 1$ bằng. Giá trị của $a + b + c$

Lời giải

Xét $I = \int\limits_{1/e}^{e^2} \frac{f(\ln x - 1)}{x}\mathrm{d}x$. Đặt $u = \ln x - 1 \Rightarrow \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$. Đổi cận $\begin{cases} x = \frac{1}{e} \Rightarrow u = -2 \\ x = e^2 \Rightarrow u = 1 \end{cases}$.

Khi đó $I = \int\limits_{-2}^{1} f(u)\mathrm{d}u = \int\limits_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$

$= \int\limits_{-2}^{0}\left(x^2 - 2x + 2\right)\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1}\left(e^x + 1\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x\right)\Big|_{-2}^{0} + \left(e^x + x\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{32}{3} + e.$

Vậy $\begin{cases} a=32 \\ b=3 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow a+b+c=36$.

Câu 7: Biết rằng tốc độ v (km / phút) của một canô cao tốc thay đổi theo thời gian t (phút) được cho bởi công thức sau: $v(t)=\begin{cases} \dfrac{t}{3} & \text{khi } 0\le t<3 \\ 1 & \text{khi } 3\le t<10 \\ 5-0,4t & \text{khi } 10\le t\le 18 \end{cases}$.

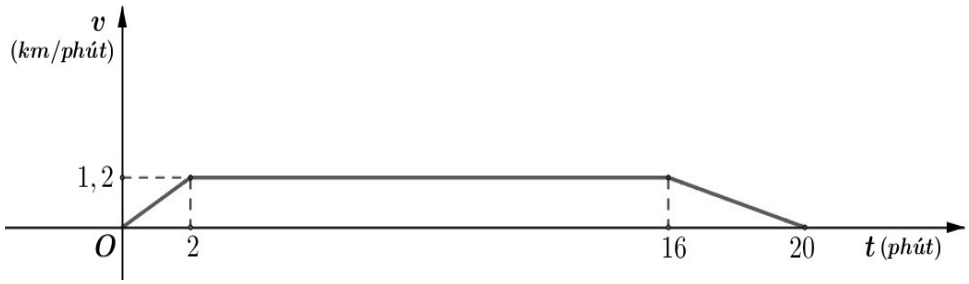
Quãng đường canô di chuyển được trong khoảng từ 0 đến 18 phút là bao nhiêu km?

Lời giải

Quãng đường canô di chuyển được trong khoảng từ 0 đến 18 phút là:

$$S_0=\int_0^{18} v(t)dt=\int_0^{3} v(t)dt+\int_3^{10} v(t)dt+\int_{10}^{18} v(t)dt=\int_0^{10}\frac{t}{3}dt+\int_3^{10}1dt+\int_{10}^{18}(5-0,4t)dt=3,7(\text{km})$$

Câu 8: Tốc độ v(km / phút) của một ca nô cao tốc thay đổi theo thời gian t (phút) như đồ thị ở hình vẽ sau



Tính tốc độ trung bình của cano trong khoảng thời gian 20 phút đầu tiên.

Lời giải

Từ đồ thị, ta có tốc độ của ca nô được tính theo công thức: $v(t)=\begin{cases} 0,6t \text{ khi } 0\le t<2 \\ 1,2 \text{ khi } 2\le t<16 \\ 6-0,3t \text{ khi } 16\le t\le 20 \end{cases}$.

Quãng đường cano di chuyển được trong 20 phút đầu tiên là

$$s=\int_0^{2}0,6tdt+\int_2^{16}1,2dt+\int_{16}^{20}(6-0,3t)dt=\frac{6}{5}+\frac{84}{5}+\frac{12}{5}=\frac{102}{5}\ (\text{km})$$

Tốc độ trung bình của cano trong 20 phút đầu tiên là $v_{tb}=\dfrac{s}{20}=\dfrac{102}{100}=1,02$ (km/phút).

----------HẾT----------

Dạng 4 : Ứng dụng tích phân giải bài toán thực tế

Phương pháp: Có hai bài toán trong dạng này

Bài toán 1: Bài toán chuyển động của một vật

Một vật chuyển động theo phương trình vận tốc $v(t)$ trong khoảng thời gian $t=a$ đến $t=b\,(a<b)$ sẽ di chuyển được quãng đường là: $s=\int_a^b v(t)dt$.

Một vật chuyển động có phương trình gia tốc $a(t)$ thì vận tốc của vật đó sau khoảng thời gian $\Delta t=t_2-t_1$ là: $v=\int_{t_1}^{t_2} a(t)dx$.

Bài toán 2: Bài toán ứng dụng tích phân vào tìm các đại lượng vật lý như công, điện lượng,…

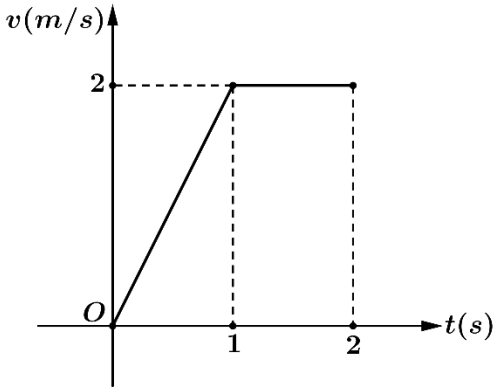
Theo định luật Hooke thì lực cần dùng để giữ lò xo giãn thêm *x* mét từ độ dài tự nhiện là $f(x)=kx$, với $k\,(N/m)$ là độ cứng của lò xo.

Công cần để kéo dãn lò xo từ độ dài l_1 đến độ dài l_2 là: $A=\int_{l_1}^{l_2} f(x)dx$.

Điện lượng chuyển qua tiết diện của dây dẫn của đoạn mạch trong thời gian từ t_1 đến t_2 là: $Q=\int_{t_1}^{t_2} I(t)dt$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Một vật chuyển động với vận tốc được cho bởi đồ thị ở hình vẽ dưới đây:



a) Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong 1 giây đầu tiên.

b) Tính quãng đườngvà vật di chuyển được trong 2 giây đầu tiên.

Lời giải

a) Dựa vào đồ thị trong khoảng thời gian 1 giây vận tốc của chuyển động được xác định là $v(t)=2t(\text{m/s})$

Ta có quãng đường mà vật di chuyển được trong 1 giây đầu tiên là $s=\int_0^1 2tdt=t^2\Big|_0^1=1(m)$

b) Dựa vào đồ thị ta thấy: Trong khoảng thời gian 1 giây vận tốc của chuyển động được xác định là $v(t)=2t(\text{m/s})$, khoảng thời gian từ 1 giây đến 2 giây vận tốc của chuyển động được xác định là $v(t)=2(\text{m/s})$,

Ta có quãng đường mà vật di chuyển được trong 2 giây đầu tiên là:

$$s=\int_0^1 2t\mathrm{d}t+\int_1^2 2\mathrm{d}t=t^2\Big|_0^1+2t\Big|_1^2=3(m).$$

Bài tập 2: a) Cho một vật chuyển động với vận tốc $y=v(t)\ (\mathrm{m/s})$. Cho $0<a<b$ và hàm vận tốc $v(t)>0$ với mọi $t\in[a;b]$. Hãy giải thích vì sao $\int_a^b v(t)\mathrm{d}t$ biểu thị quãng đường mà vật đi được trong khoảng thời gian từ a đến b (tính theo giây).

b) Áp dụng công thức ở câu a) để giải bài toán sau đây: Một vật chuyển động với vận tốc được biểu thị bởi phương trình $v(t)=2-\sin t(\mathrm{m/s})$. Tính quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=0(s)$ đến thời điểm $t=\frac{3\pi}{4}(s)$.

Lời giải

a) Ta đã biết $v(t)=s'(t)$ nên $s(t)=\int_a^b v(t)\mathrm{d}t$ biểu thị quãng đường mà vật đi được trong khoảng thời gian từ a đến b.

b) Quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=0(s)$ đến thời điểm $t=\frac{3\pi}{4}(s)$ là: $s(t)=\int_0^{\frac{3\pi}{4}} v(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{3\pi}{4}}(2-\sin t)\mathrm{d}t=(2t+\cos t)\Big|_0^{\frac{3\pi}{4}}=6\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}-1\approx 3{,}005(m)$.

Bài tập 3: Ở nhiệt độ $37°\mathrm{C}$, một phản ứng hóa học từ chất A, chuyển hóa thành sản phẩm chất B theo phương trình: $A\to B$. Giả sử $y(x)$ là nồng độ chất A (đơn vị mol L^{-1}) tại thời gian x (giây), $y(x)>0$ với $x\ge 0$ thỏa mãn hệ thức $y'(x)=-7.10^{-4}y(x)$ với $x\ge 0$. Biết rằng $x=0$ thì nồng độ (đầu) của chất A là $0{,}05$ mol L^{-1}

a) Xét hàm số $f(x)=\ln y(x)$ với $x\ge 0$. Hãy tính $f'(x)$ từ đó tìm hàm số $f(x)$.

b) Giả sử ta tính nồng độ trung bình chất A (đơn vị mol L^{-1}) từ thời điểm a (giây) đến thời điểm b (giây) với $0<a<b$ theo công thức $\frac{1}{b-a}\int_a^b y(x)\mathrm{d}x$. Xác định nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây.

Lời giải

a) Ta có $f(x)=\ln y(x)\Rightarrow f'(x)=\frac{y'(x)}{y(x)}=-7.10^{-4}\Rightarrow f(x)=-7.10^{-4}x$.

b) $f(x)=-7.10^{-4}x\ \Rightarrow \ln y(x)=-7.10^{-4}x\Leftrightarrow y(x)=e^{-7.10^{-4}x}$

Nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây là:

$$\frac{1}{30-15}\int_{15}^{30} y(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{15}\int_{15}^{30} e^{-7.10^{-4}x}\mathrm{d}x=\frac{1}{15}\frac{e^{-7.10^{-4}x}}{-7.10^{-4}x}\Big|_{15}^{30}=0,98\left(L^{-1}\right).$$

Bài tập 4: a) Cường độ dòng điện chạy trong cuộn dây là $y=I(t)\,(\mathrm{A})$. Cho $0<a<b$ và $I(t)>0$ với mọi $t\in[a;b]$. Hãy giải thích vì sao $\int_a^b I(t)\mathrm{d}t$ biểu thị điện lượng (C) đã phóng qua cuộn dây trong khoảng thời gian từ a đến b (tính theo giây).

b) Áp dụng công thức ở câu a) để giải bài toán sau: Cường độ dòng điện chạy trong cuộn dây là $I=2\sin(t)(A)$. Tính điện lượng (C) phóng ra trong cuộn dây khoảng thời gian từ thời điểm $t=0(s)$ đến thời điểm $t=\frac{\pi}{2}(s)$.

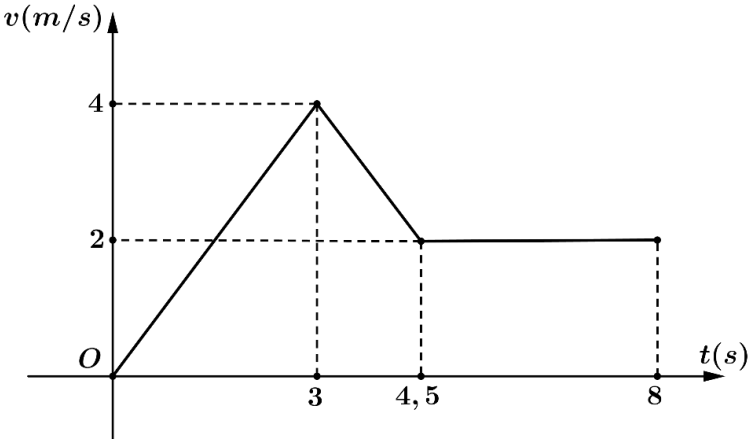
Lời giải

a) Ta đã biết $I(t)=Q'(t)$ nên $Q(t)=\int_a^b I(t)\mathrm{d}t$ biểu thị điện lượng đã phóng qua cuộn dây trong khoảng thời gian từ a đến b (a,b tính theo giây).

b) Quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=0(s)$ đến thời điểm:

$$t=\frac{\pi}{2}(s)\text{ là }Q(t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} I(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin(t)\mathrm{d}t=-\frac{2}{1}\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-2\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)=-2(0-1)=2(\mathrm{C}).$$

Bài tập 5: Một vật chuyển động với vận tốc được cho bởi đồ thị ở hình vẽ:



a) Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong 3 giây đầu tiên.

b) Tính quãng đườngvà vật di chuyển được trong 8 giây đầu tiên.

Lời giải

a) Dựa vào đồ thị trong khoảng thời gian 3 giây vận tốc của chuyển động được xác định là $v(t)=\frac{4}{3}t(\mathrm{m/s})$

Ta có quãng đường mà vật di chuyển được trong 3 giây đầu tiên là $s=\int_0^3 \frac{4}{3}t\mathrm{d}t=\frac{4}{3}t^2\Big|_0^3=12(m)$

b) Dựa vào đồ thị ta thấy trong khoảng thời gian 1 giây vận tốc của chuyển động được xác định là $v(t)=\frac{4}{3}t(\text{m/s})$, khoảng thời gian từ 3 giây đến 4,5 giây vận tốc của chuyển động được xác định là $v(t)=\frac{-4}{3}t+8(\text{m/s})$, khoảng thời gian từ 4,5 giây đến 8 giây vận tốc của chuyển động là $v(t)=8(\text{m/s})$

Ta có quãng đường mà vật di chuyển được trong 8 giây đầu tiên là:

$$s=\int_0^3 \frac{4}{3}t\text{d}t+\int_3^{4,5}\left(-\frac{4}{3}t+8\right)\text{d}t+\int_{4,5}^{8}8\text{d}t=38,5(m).$$

Bài tập 6: Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trong thành phố thì các xe khi dừng lại phải cách nhau một khoảng tối thiểu là 1m. Một xe máy di chuyển trên đường thì gặp đèn đỏ từ xa, người điều khiển xe máy đạp phanh và xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=10-5t$ (m/s). Hỏi để giữ khoảng cách an toàn, người điều khiển xe máy phải bắt đầu đạp phanh khi cách xe đang dừng phía trước tối thiểu một khoảng bao xa, biết rằng ngay lúc đạp phanh thì xe phía trước đang đứng yên?

Lời giải

Kể từ lúc đạp phanh (t = 0) đến lúc xe dừng lại thì xe đi được một quãng đường là s. Vì khoảng cách an toàn giữa 2 xe khi dừng lại tối thiểu là 1m nên người điều khiển xe máy phải bắt đầu đạp phanh khi cách xe đang dừng phía trước tối thiểu một khoảng s + 1 (m).

Tại thời điểm $t=0$ thì xe bắt đầu phanh, và xe dừng lại khi vận tốc bằng 0, khi đó:

$$v(t)=0\Leftrightarrow 10-5t=0\Leftrightarrow t=2.$$

Trong khoảng thời gian từ $t=0$ s đến $t=2$ s thì xe chạy thêm được quãng đường

$$s=\int_0^2(10-5t)dt=10\,(\text{m})$$

Vậy xe nên bắt đầu đạp phanh khi cách xe đang dừng phía trước tối thiểu một khoảng 11m để giữ khoảng cách an toàn.

Bài tập 7: Giả sử rằng sau t năm, vốn đầu tư của một doanh nghiệp phát sinh lợi nhuận với tốc độ $P'(t)=126+t^2$ (triệu đồng/năm). Hỏi sau 10 năm đầu tiên thì doanh nghiệp thu được lợi nhuận là bao nhiêu (đơn vị triệu đồng)?

Lời giải

Gọi $P(t)$ là lợi nhuận phát sinh của vốn sau t năm đầu tư. Ta có $P(t)$ là nguyên hàm của hàm tốc độ $P'(t)$.

Lợi nhuận phát sinh sau 10 năm đầu tiên là: $\int_0^{10}P'(t)dt=\int_0^{10}\left(126+t^2\right)dt=\frac{4780}{3}$ (triệu đồng).

Bài tập 8: Việc thở là những vòng tuần hoàn, mỗi vòng tính từ lúc bắt đầu hít vào đến lúc kết thúc thở ra, thường kéo dài trong 5s. Vận tốc cực đại của khí là $V\ (l/s)$ nên vì thế nó được mô hình hoá bởi công thức $v(t)=V\sin\frac{3\pi t}{5}$. Tính thể tích khí hít vào phổi sau thời gian 2s.

Lời giải

Vận tốc của khí hít vào được mô hình bởi công thức $v(t)=V\sin\frac{3\pi t}{5}$.

Suy ra lượng khí hít vào sau 2 giây là:

$$N(2)=\int_0^2 v(x)dx=\int_0^2 V\sin\frac{3\pi t}{5}dt=\frac{5V}{3\pi}\left(1-\cos\frac{3\pi.2}{5}\right)=1,06V \text{ (lít)}$$

Bài tập 9: Một mạch kín gồm một nguồn điện có suất điện động biến thiên theo thời gian được biểu diễn bởi $e=10\cos(100\pi t)(V)$ và điện trở trong không đáng kể, nối với mạch ngoài có một điện trở $R=50\Omega$.

Tính điện lượng chuyển qua điện trở trong thời gian từ $t=0$ đến $t=\frac{1}{600}s$?

Lời giải

Ta có $i=\frac{u}{R}=0,02\cos(100\pi t)$ (Ampe) và $i(t)=q'(t)$

Do đó $q=\int_{t_1}^{t_2} i(t)dt$ nên ta điện lượng từ $t=0$ đến $t=\frac{1}{600}s$

Khi đó $q=0,02\int_0^{\frac{1}{600}}\cos(100\pi t)dt=3,18.10^{-5}C$.

Bài tập 10: Một người đi xe môtô với độ tăng vận tốc tại một thời điểm t (tính theo giây, $t\geq 0$) được cho bởi hàm số $f(t)=\frac{1}{300}t^2+\frac{1}{1350}t\ \left(km/s^2\right)$. Nếu bắt đầu tăng tốc tính từ lúc khởi động máy (vận tốc bằng 0km/h), hỏi mất bao lâu thì người đó đạt đến tốc độ 120 km/h?

Lời giải

Gọi x là thời gian cần thiết để người đó đạt đến tốc độ 120 (km/h).

Ta nhận xét độ tăng vận tốc trong thời gian này cũng chính là tích phân của hàm $f(t)$ với $t=0$ đến $t=x$.

Như vậy ta xét phương trình sau :

$$\int_0^x\left(\frac{1}{300}t^2+\frac{1}{1350}t\right)dt=\frac{120}{3600}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{900}t^3+\frac{1}{2700}t^2\right)\Big|_0^x=\frac{1}{30}\Leftrightarrow\frac{1}{900}x^3+\frac{1}{2700}x^2=\frac{1}{30}\Leftrightarrow x=3(s)$$

Vậy sau 3s thì người đó đạt đến tốc độ 120 km/h.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Vận tốc của một vật chuyển động là $v(t)=3t^2+5$ (m/s). Quãng đường vật đó đi được từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là

A. 669 m. **B.** 696 m. **C.** 699 m. **D.** 966 m.

Lời giải

Quãng đường vật đó đi được từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là $S=\int_4^{10}\left(3t^2+5\right)\mathrm{d}t=966$ m.

Câu 2: Giả sử lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức $P'(x)=-0,0004x+9,3$. Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm. Khi đó sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 125 đơn vị sản phẩm là

A. 232,325 triệu đồng. **B.** 230,315 triệu đồng.

C. 321,385 triệu đồng **D.** 231,375 triệu đồng.

Lời giải

Ta có sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 125 đơn vị sản phẩm là

$$P(125)-P(100)=\int_{100}^{125}P'(x)\mathrm{d}x=\int_{100}^{125}(-0,0004x+9,3)\mathrm{d}x=-\int_{100}^{125}0,0004x\mathrm{d}x+\int_{100}^{125}9,3\mathrm{d}x$$

$$=-0,0002x^2\Big|_{100}^{125}+9,3x\Big|_{100}^{125}=-0,0002\left(125^2-100^2\right)+9,3(125-100)=231,375 \text{ (triệu đồng).}$$

Câu 3: Giả sử vận tốc v của dòng máu ở khoảng cách r từ tâm của động mạch bán kính $R=9$, có thể được mô hình hóa bởi công thức $v=k\left(R^2-r^2\right)$, trong đó k là một hằng số. Tìm vận tốc trung bình (đối với r) của động mạch trong khoảng $0\le r\le R$.

A. $54k$. **B.** $45k$. **C.** $9k$. **D.** $27k$.

Lời giải

Vận tốc trung bình của động mạch là:

$$v_{tb}=\frac{1}{R-0}\int_0^R v(r)\mathrm{d}r=\frac{1}{R}\int_0^R k\left(R^2-r^2\right)\mathrm{d}r=\frac{1}{R}\int_0^R\left(kR^2-kr^2\right)\mathrm{d}r=\frac{1}{R}\left(kR^2r-\frac{1}{3}kr^3\right)\Big|_0^R$$

$$=\frac{1}{R}\left(kR^3-\frac{1}{3}kR^3\right)=\frac{2kR^2}{3}=\frac{2k.9^2}{3}=54k.$$

Câu 4: Một ô tô đang chạy với vận tốc $10m/s$ thì gặp chướng ngại vật, người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-2t+10(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Tính quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng.



A. $55m$. **B.** $25m$. **C.** $50m$. **D.** $16m$.

Lời giải

Ta có $-2t+10=0\Leftrightarrow t=5\Rightarrow$ Thời gian tính từ lúc bắt đầu đạp phanh đến khi dừng hẳn là 5 giây. Vậy trong 8 giây cuối cùng thì có 3 giây ô tô chuyển động với vận tốc $10m/s$ và 5 giây chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-2t+10(m/s)$.

Khi đó quãng đường ô tô di chuyển là $S=3.10+\int_0^5(-2t+10)dt=30+25=55m$.

Câu 5: Một ô tô đang chạy với tốc độ $20(m/s)$ thì gặp chướng ngại vật, người lái đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+20(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét (m)?



A. $20\ m$. **B.** $30\ m$. **C.** $10\ m$. **D.** $40\ m$.

Lời giải

Khi ô tô dừng hẳn thì: $v(t)=0\Leftrightarrow -5t+20=0\Leftrightarrow t=4(s)$.

Vậy từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được: $s=\int_0^4(-5t+20)dt=40(m)$.

Câu 6: Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\frac{1}{120}t^2+\frac{58}{45}t(m/s)$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a(m/s^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $21(m/s)$ **B.** $25(m/s)$ **C.** $36(m/s)$ **D.** $30(m/s)$

Lời giải

Thời điểm chất điểm B đuổi kịp chất điểm A thì chất điểm B đi được 15 giây, chất điểm A đi được 18 giây.

Biểu thức vận tốc của chất điểm B có dạng $v_B(t)=\int a\mathrm{d}t=at+C$ mà $v_B(0)=0$ nên $v_B(t)=at$

Do từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi chất điểm B đuổi kịp thì quãng đường hai chất điểm đi được bằng nhau.

Do đó: $\int_0^{18}\left(\frac{1}{120}t^2+\frac{58}{45}\right)\mathrm{d}t=\int_0^{15}at\mathrm{d}t\Leftrightarrow 225=a.\frac{225}{2}\Leftrightarrow a=2$

Vậy, vận tốc của chất điểm B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $v_B(t)=2.15=30(m/s)$.

Câu 7: Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\frac{1}{150}t^2+\frac{59}{75}t(m/s)$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc a bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a(m/s^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $15(m/s)$ **B.** $20(m/s)$ **C.** $16(m/s)$ **D.** $13(m/s)$

Lời giải

Quãng đường chất điểm A đi từ đầu đến khi B đuổi kịp là $S=\int_0^{15}\left(\frac{1}{150}t^2+\frac{59}{75}t\right)dt=96(m)$.

Vận tốc của chất điểm B là $v_B(t)=\int a\mathrm{d}t=at+C$.

Tại thời điểm $t=3$ vật B bắt đầu từ trạng thái nghỉ nên $v_B(3)=0\Leftrightarrow C=-3a$.

Mặt khác quãng đường chất điểm B đi được đến khi gặp A là:

$$S_2=\int_3^{15}(at-3a)dt=\left(\frac{at^2}{2}-3at\right)\Big|_3^{15}=72a(m).$$

Vậy $72a=96\Leftrightarrow a=\frac{4}{3}\left(m/s^2\right)$.

Tại thời điểm đuổi kịp A thì vận tốc của B là $v_B(15)=16(m/s)$.

Câu 8: Một ô tô bắt đầu chuyển động thẳng đều với vận tốc v_0, sau 6 giây chuyển động thì gặp chướng ngại vật nên bắt đầu giảm tốc độ với vận tốc chuyển động $v(t)=-\frac{5}{2}t+a\ (m/s),\ (t\geq 6)$ cho đến khi dừng hẳn. Biết rằng kể từ lúc chuyển động đến lúc dừng thì ô tô đi được quãng đường là 80m. Tìm v_0.



A. $v_0=35m/s$. **B.** $v_0=25m/s$. **C.** $v_0=10m/s$. **D.** $v_0=20m/s$.

Lời giải

Tại thời điểm $t=6$ vật đang chuyển động với vận tốc v_0 nên có $v(6)=v_0$

$\Leftrightarrow -\frac{5}{2}.6+a=v_0 \Leftrightarrow a=v_0+15$ suy ra $v(t)=-\frac{5}{2}t+v_0+15$.

Gọi k là thời điểm vật dừng hẳn vậy ta có $v(k)=0 \Leftrightarrow k=\frac{2}{5}.(v_0+15) \Leftrightarrow k=\frac{2v_0}{5}+6$.

Tổng quãng đường vật đi được là $80=6.v_0+\int_6^k\left(-\frac{5}{2}t+v_0+15\right)dt$

$\Leftrightarrow 80=6.v_0+\left(-\frac{5}{4}t^2+v_0.t+15t\right)\Big|_6^k \Leftrightarrow 80=6.v_0-\frac{5}{4}\left(k^2-6^2\right)+v_0.(k-6)+15(k-6)$

$\Leftrightarrow 80=6.v_0-\frac{5}{4}\left(\frac{4(v_0)^2}{25}+\frac{24v_0}{5}\right)+v_0.\frac{2v_0}{5}+15.\frac{2v_0}{5}$

$\Leftrightarrow (v_0)^2+36.v_0-400=0 \Leftrightarrow v_0=10$

Câu 9: Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu 1m. Một ô tô A đang chạy với vận tốc 16m/s bỗng gặp ô tô B đang dừng đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu thị bởi công thức $v_A(t)=16-4t$ (đơn vị tính bằng m/s), thời gian tính bằng giây. Hỏi rằng để có 2 ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu?

A. 33. **B.** 12. **C.** 31. **D.** 32.

Lời giải

Ta có: $v_A(0)=16\text{m/s}$.

Khi xe A dừng hẳn: $v_A(t)=0 \Leftrightarrow t=4\text{s}$.

Quãng đường từ lúc xe A hãm phanh đến lúc dừng hẳn là $s=\int_0^4(16-4t)\text{d}t=32\text{m}$.

Do các xe phải cách nhau tối thiểu 1m để đảm bảo an toàn nên khi dừng lại ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là 33m.

Câu 10: Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0=15\text{ m/s}$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=t^2+4t\ (\text{m/s}^2)$. Tính quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc.

A. 70,25 m. **B.** 68,25 m. **C.** 67,25 m. **D.** 69,75 m.

Lời giải

$a(t)=t^2+4t \Rightarrow v(t)=\int a(t)\text{d}t=\frac{t^3}{3}+2t^2+C\ (C\in\mathbb{R})$.

Mà $v(0)=C=15 \Rightarrow v(t)=\frac{t^3}{3}+2t^2+15$ nên $S=\int_0^3\left(\frac{t^3}{3}+2t^2+15\right)\text{d}t=69,75\text{ m}$.

Câu 11: Một vật chuyển động với vận tốc 10m/s thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian là $a(t)=t^2+3t$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 6 giây kể từ khi vật bắt đầu tăng tốc.

A. 136m. **B.** 126m. **C.** 276m. **D.** 216m.

Lời giải

Ta có $v(0)=10\,\text{m/s}$ và $v(t)=\int_0^t a(t)\mathrm{d}t=\int_0^t\left(t^2+3t\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{t^3}{3}+\frac{3t^2}{2}\right)\Big|_0^t=\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2$.

Quãng đường vật đi được là $S=\int_0^6 v(t)\mathrm{d}t=\int_0^6\left(\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{1}{12}t^4+\frac{1}{2}t^3\right)\Big|_0^6=216\,\text{m}$.

Câu 12: Một chiếc máy bay chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t)=t^2+10t\ (m/s)$ với t là thời gian được tính theo đơn vị giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết khi máy bay đạt vận tốc $200(m/s)$ thì rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là

A. $\frac{2500}{3}(m)$. **B.** $2000(m)$. **C.** $500(m)$. **D.** $\frac{4000}{3}(m)$.

Lời giải

Thời điểm máy bay đạt vận tốc $200(m/s)$ là $v(t)=200\Leftrightarrow t^2+10t=200\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=10\\t=-20\end{array}\right.\Leftrightarrow t=10$

Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là:

$s=\int_0^{10}\left(t^2+10t\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{t^3}{3}+5t\right)\Big|_0^{10}=\frac{2500}{3}(m)$.

Câu 13: Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t)=7t\ (\text{m/s})$. Đi được 5s, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-70\ (\text{m/s}^2)$. Tính quãng đường S đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

A. $S=96,25\ (\text{m})$. **B.** $S=87,5\ (\text{m})$. **C.** $S=94\ (\text{m})$. **D.** $S=95,7\ (\text{m})$.

Lời giải

Chọn gốc thời gian là lúc ô tô bắt đầu đi. Sau 5s ô tô đạt vận tốc là $v(5)=35(\text{m/s})$.

Sau khi phanh vận tốc ô tô là $v(t)=35-70(t-5)$.

Ô tô dừng tại thời điểm $t=5,5\text{s}$.

Quãng đường ô tô đi được là $S=\int_0^5 7t\mathrm{d}t+\int_5^{5,5}\left[35-70(t-5)\right]\mathrm{d}t=96,25(\text{m})$.

Câu 14: Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t)=2t\ (\text{m/s})$. Đi được 12 giây, người lái xe gặp chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-12(\text{m/s}^2)$. Tính quãng đường $s(\text{m})$ đi được của ôtô từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi dừng hẳn?

A. $s=168(\text{m})$. **B.** $s=166(\text{m})$. **C.** $s=144(\text{m})$. **D.** $s=152(\text{m})$.

Lời giải

Giai đoạn 1: Xe bắt đầu chuyển động đến khi gặp chướng ngại vật.

Quãng đường xe đi được là: $S_1=\int_0^{12} v_1(t)\mathrm{d}t=\int_0^{12}2t\mathrm{d}t=t^2\Big|_0^{12}=144(\text{m})$.

Giai đoạn 2: Xe gặp chướng ngại vật đến khi dừng hẳn.

Ôtô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v_2(t)=\int a\mathrm{d}t=-12t+c$.

Vận tốc của xe khi gặp chướng ngại vật là: $v_2(0)=v_1(12)=2.12=24(\mathrm{m/s})$.

$\Rightarrow -12.0+c=24\Rightarrow c=24\Rightarrow v_2(t)=-12t+24$.

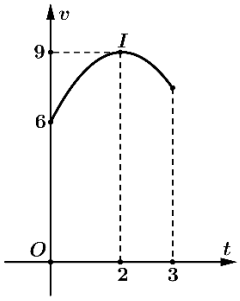
Thời gian khi xe gặp chướng ngại vật đến khi xe dừng hẳn là nghiệm phương trình:

$$-12t+24=0\Leftrightarrow t=2.$$

Khi đó, quãng đường xe đi được là: $S_2=\int_0^2 v_2(t)\mathrm{d}t=\int_0^2(-12t+24)\mathrm{d}t=\left(-6t^2+24t\right)\Big|_0^2=24(\mathrm{m})$.

Vậy tổng quãng đường xe đi được là: $S=S_1+S_2=168(\mathrm{m})$.

Câu 15: Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(\mathrm{km/h})$ phụ thuộc thời gian $t(\mathrm{h})$ có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.



A. $s=25,25(\mathrm{km})$ **B.** $s=24,25(\mathrm{km})$ **C.** $s=24,75(\mathrm{km})$ **D.** $s=26,75(\mathrm{km})$

Lời giải

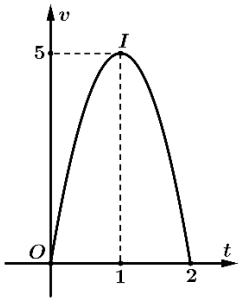
Gọi $v(t)=a.t^2+bt+c$.

Đồ thị $v(t)$ là một phần parabol có đỉnh $I(2;9)$ và đi qua điểm $A(0;6)$ nên

$$\begin{cases}\dfrac{-b}{2a}=2\\ a.2^2+b.2+c=9\\ a.0^2+b.0+c=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{-3}{4}\\ b=3\\ c=6\end{cases}$$ ta tìm được $v(t)=-\dfrac{3}{4}t^2+3t+6$

Vậy $S=\int_0^3\left(-\dfrac{3}{4}t^2+3t+6\right)dt=24,75$ (km)

Câu 16: Một người chạy trong 2 giờ, vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường Parabol với đỉnh $I(1;5)$ và trục đối xứng song song với trục tung Ov như hình vẽ. Tính quảng đường S người đó chạy được trong 1 giờ 30 phút kể từ lúc bắt đầu chạy (kết quả làm tròn đến 2 chữ số thập phân).



A. 2,11km. **B.** 6,67km. **C.** 5,63 km. **D.** 5,63km.

Lời giải

Ta có 1 giờ 30 phút = 1,5 giờ $\Rightarrow S=\int\limits_0^{1,5} v(t)\mathrm{d}t$.

Đồ thị $v=v(t)$ đi qua gốc tọa độ nên $v(t)$ có dạng $v(t)=at^2+bt$.

Đồ thị $v=v(t)$ có đỉnh là $I(1;5)$ nên $\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}=1\\ a+b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-2a\\ a+b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-5\\ b=10\end{cases}\Rightarrow v(t)=-5t^2+10t$

$S=\int\limits_0^{1,5}\left(-5t^2+10t\right)\mathrm{d}t=\dfrac{45}{8}\approx 5,63$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Một chất điểm chuyển động trên đường thẳng nằm ngang (chiều dương hướng sang phải) với gia tốc phụ thuộc vào thời gian $t(\mathrm{s})$ là $a(t)=2t-7\ \left(\mathrm{m/s^2}\right)$. Biết vận tốc đầu bằng $6\ (\mathrm{m/s})$, xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t(\mathrm{s})$ xác định bởi $v(t)=t^2-7t+10$.

b) Tại thời điểm $t=7$ (s), vận tốc của chất điểm là 6 (m/s).

c) Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1\le t\le 7$ là 18 m.

d) Trong 8 giây đầu tiên, thời điểm chất điểm xa nhất về phía bên phải là $t=7$ (s).

Lời giải

a) Sai: Ta có $v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\int(2t-7)\mathrm{d}t=t^2-7t+C$ và $v(0)=6\Rightarrow C=6$.

Vậy $v(t)=t^2-7t+6$ (m/s).

b) Đúng: $v(7)=7^2-7.7+6=6$ (m/s).

c) Sai: Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1\le t\le 7$ là:

$$S=\int\limits_1^7 v(t)\mathrm{d}t=\int\limits_1^7\left(t^2-7t+6\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{t^3}{3}-\frac{7t^2}{2}+6t\right)\Bigg|_1^7=-18.$$

d) Sai: Tọa độ của chất điểm tại thời điểm t là:

$$x(t)=\int v(t)\mathrm{d}t=\int\left(t^2-7t+6\right)\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}-\frac{7t^2}{2}+6t+C$$

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $x(t)$ với $t\in[0;8]$.

Ta có $x'(t)=v(t)=0$ khi $t=1$ hoặc $t=6$.

Lại có $x(0)=C$, $x(1)=\dfrac{17}{6}+C$, $x(6)=-18+C$, $x(8)=-\dfrac{16}{3}+C$.

Vậy giá trị lớn nhất của $x(t)$ với $t\in[0;8]$ đạt được khi $t=1$.

Câu 2: Giả sử lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức $P'(x)=-0,0008x+10,4$. Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm.

a) Lợi nhuận khi bán được x đơn vị sản phẩm được tính bằng $P(x)=-0,0008x^2+10,4x$.

b) Lợi nhuận khi bán được 50 sản phẩm đầu tiên là 519 triệu đồng.

c) Sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên 55 đơn vị sản phẩm là $49,79$ triệu đồng.

d) Biết sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên a đơn vị sản phẩm lớn hơn 517 triệu đồng, khi đó giá trị nhỏ nhất của a là 100.

Lời giải

a) Sai: Ta có: $P(x)=\int P'(x)\mathrm{d}x=\int(-0,0008x+10,4)\mathrm{d}x=-0,0004x^2+10,4x$.

b) Đúng: Lợi nhuận khi bán được 50 sản phẩm đầu tiên là:

$$P(50)=-0,0004.50^2+10,4.50=519 \text{ (triệu đồng).}$$

c) Sai: Ta có sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên 55 đơn vị sản phẩm là:

$$P(55)-P(50)=\int_{50}^{55}P'(x)\mathrm{d}x=\int_{50}^{55}(-0,0008x+10,4)\mathrm{d}x=-\int_{50}^{55}0,0008x\mathrm{d}x+\int_{50}^{55}10,4\mathrm{d}x$$

$$=-0,0004x^2\Big|_{50}^{55}+10,4x\Big|_{50}^{55}=-0,0004\left(55^2-50^2\right)+10,4(55-50)=51,79 \text{ (triệu đồng).}$$

d) Sai: Ta có sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên a đơn vị sản phẩm là

$$P(a)-P(50)=\int_{50}^{a}P'(x)\mathrm{d}x=\int_{50}^{a}(-0,0008x+10,4)\mathrm{d}x=-\int_{50}^{a}0,0008x\mathrm{d}x+\int_{50}^{a}10,4\mathrm{d}x$$

$$=-0,0004x^2\Big|_{50}^{a}+10,4x\Big|_{50}^{a}=-0,0004\left(a^2-50^2\right)+10,4(a-50)=-0,0004a^2+10,4a-519.$$

Theo bài ra ta có:

$-0,0004a^2+10,4a-519>517\Leftrightarrow 0,0004a^2-10,4a+1036<0\Leftrightarrow 100<a<25900$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của a là 101.

Câu 3: Ở nhiệt độ $37°C$, một phản ứng hóa học từ chất đầu A, chuyển hóa thành chất sản phẩm B theo phương trình: $A\to B$. Giả sử $y(x)$ là nồng độ chất A (đơn vị mol L^{-1}) tại thời điểm x (giây), $y(x)>0$ với $x\ge 0$, thỏa mãn hệ thức: $y'(x)=-7.10^{-4}y(x)$ với $x\ge 0$. Biết rằng tại $x=0$, nồng độ (đầu) của A là $0,05$ mol L^{-1}. Xét hàm số $f(x)=\ln y(x)$ với $x\ge 0$. Khi đó, ta có

a) $f'(x)=-7.10^{-4}$

b) $f(x)=-7.10^{-4}x+\ln(0,05)$

c) $y(30)-y(15)=-6.10^{-4}$

d) Nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây gần bằng $0,05$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có $f'(x)=\left(\ln y(x)\right)'=\dfrac{y'(x)}{y(x)}=-7.10^{-4}$.

b) Đúng: Ta có $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\left(-7.10^{-4}\right)\mathrm{d}x=-7.10^{-4}x+C$.

Theo giả thiết $y(0)=0,05$ nên $f(0)=\ln y(0)=\ln(0,05)$. Khi đó $C=\ln(0,05)$.

Vậy $f(x)=-7.10^{-4}x+\ln(0,05)$.

c) Sai: Từ $f(x)=\ln y(x)\Rightarrow y(x)=e^{f(x)}=e^{-7.10^{-4}x+\ln(0,05)}=\dfrac{1}{20}e^{-7.10^{-4}x}$.

Do đó $y(30)-y(15)=\dfrac{1}{20}\left(e^{-7.10^{-4}.30}-e^{-7.10^{-4}.15}\right)\approx -5,2.10^{-4}$.

d) Nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây là:

$$\frac{1}{30-15}\int_{15}^{30} y(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{15}\int_{15}^{30}\left(-\frac{1}{7.10^{-4}}\right)y'(x)\mathrm{d}x=-\frac{10^4}{105}y(x)\Big|_{15}^{30}=-\frac{10^4}{105}\left[y(30)-y(15)\right]\approx 0,05.$$

Câu 4: Sau khi xuất phát, ô tô di chuyển với tốc độ $v(t)=2,01t-0,025t^2\left(0\le t\le 10\right)$. Trong đó $v(t)$ tính theo m/s, thời gian t tính theo giây với $t=0$ là thời điểm xe xuất phát. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Quãng đường xe di chuyển được tính theo công thức là $s(t)=2,01-0,05t\left(0\le t\le 10\right)$

b) Quãng đường xe di chuyển được trong 3 s là 8,82m.

c) Quãng đường xe di chuyển được trong giây thứ 9 xấp xỉ 15,277m

d) Trong khoảng thời gian không quá 10s đầu, khi vận tốc đạt giá trị lớn nhất thì gia tốc của xe là 1,51m/s^2

Lời giải

a) Sai: Quãng đường xe di chuyển được phải là nguyên hàm của $v(t)$,

$v'(t)=2,01-0,05t\left(0\le t\le 10\right)$ là công thức tính gia tốc của vật.

b) Đúng: Quãng đường xe di chuyển được trong 3 s là $\int_0^3\left(2,01t-0,025t^2\right)dt=8,82m$.

c) Đúng: Quãng đường xe di chuyển được trong giây thứ 9:

$$s(9)-s(8)=\int_8^9\left(2,01t-0,025t^2\right)dt\simeq 15,277m$$

d) Đúng: $v(t)=2,01t-0,025t^2\left(0\le t\le 10\right)\Rightarrow\max_{[0;10]}v(t)=17,6\left(m/s\right)$ khi $t=10s$

Gia tốc vật khi đó là $a(10)=v'(10)=2,01-0,05.10=1,51\left(m/s^2\right)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Một vật chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t)=160-10t\ \left(m/s\right)$. Hỏi rằng trong 3s trước khi dừng hẳn vật di chuyển được bao nhiêu mét ?

Lời giải

Vật chuyển động chậm dần cho đến khi dừng hẳn thì:

$$v(t)=0\Leftrightarrow 160-10t\ =0\Leftrightarrow t=16(s).$$

Quãng đường vật đi được từ giây thứ 13 đến giây thứ 16 là: $S=\int_{13}^{16}v(t)dt=\int_{13}^{16}(160-10t)dt=45m$

Câu 2: Một xe mô tô phân khối lớn đang chạy với vận tốc 10m/s thì tăng tốc với gia tốc được biểu diễn bởi phương $a(t)=t^2+3t\left(m/s^2\right)$. Hỏi quãng đường của xe đi được trong quãng thời gian 10s đầu tiên sau khi tăng tốc ?

Lời giải

Xe mô tô tăng tốc với gia tốc $a(t)=t^2+3t\left(m/s^2\right)$. Vận tốc $v(t)$ chính là nguyên hàm của hàm số $a(t)$.

$$v(t)=\int a(t)dt=\int\left(t^2+3t\right)dt=\frac{t^3}{3}+3\frac{t^2}{2}+C.$$

Vận tốc ban đầu của xe là $v_0=10m/s$ nên

$$v(0)=10\Leftrightarrow\frac{0^3}{3}+3\frac{0^2}{2}+C=10\Leftrightarrow C=10\Rightarrow v(t)=\frac{t^3}{3}+3\frac{t^2}{2}+10.$$

Mặt khác, đạo hàm của quãng đường *s* chính là vận tốc *v* của xe chuyển động tại thời điểm *t*. Suy ra, quãng đường đi được của xe sau 10s đầu tiên bằng tích phân của hàm $v(t)$ khi biến *t* từ 0s đến 10s.

$$S=\int_0^{10}v(t)dt=\int_0^{10}\left(\frac{t^3}{3}+3\frac{t^2}{2}+10\right)dt=\frac{4300}{3}\approx1433.$$

Câu 3: Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t (giây) là $v(t)=t^2-t-6$ (mét/giây). Quãng đường (mét) vật đi được trong khoảng thời gian $1\le t\le4$ bằng *(làm tròn tới hàng phần trăm)*

Lời giải

Gọi S là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian $1\le t\le4$.

Ta có $S=\int_1^4\left|v(t)\right|\mathrm{d}t=\int_1^4\left|t^2-t-6\right|\mathrm{d}t=\int_1^3\left|t^2-t-6\right|\mathrm{d}t+\int_3^4\left|t^2-t-6\right|\mathrm{d}t$

$$=\left|-\frac{22}{3}\right|+\left|\frac{17}{6}\right|=\frac{61}{6}\approx10{,}17\left(m\right)$$

Câu 4: Một chiếc xe ô tô đang chạy trên đường cao tốc với vận tốc $72km/h$ thì tài xế bất ngờ đạp phanh làm cho chiếc ô tô chuyển động chậm với gia tốc $a(t)=-\frac{8}{5}t\ \left(m/s^2\right)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây. Hỏi kể từ khi đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn thì ô tô di chuyển bao nhiêu mét (m)? (*Giả sử trên đường ô tô di chuyển không có gì bất thường*).

A. $50\ (m)$. **B.** $\frac{250}{3}\ (m)$. **C.** $\frac{200}{3}\ (m)$. **D.** $\frac{100}{3}\ (m)$.

Lời giải

Vận tốc của ô tô là $v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\int\left(-\frac{8}{5}t\right)\mathrm{d}t=-\frac{4}{5}t^2+C$.

Ta có $72km/h=20m/s$. Vì $v(0)=20$ nên $C=20\Rightarrow v(t)=-\frac{4}{5}t^2+20$.

Khi xe dừng hẳn thì vận tốc bằng 0 nên $-\frac{4}{5}t^2+20=0\Rightarrow t=5$.

Quãng đường cần tìm là $s=\int_0^5\left(-\frac{4}{5}t^2+20\right)\mathrm{d}t=\left(-\frac{4}{15}t^3+20t\right)\Big|_0^5=\frac{200}{3}\ (m)$.

Câu 5: Công ty vừa đưa vào một dây chuyền sản xuất để chế tạo máy tính mới. Sau vài tuần, sản lượng đạt được $q(t)=4000\left(1-\dfrac{10}{(10-t)^2}\right)$ máy/tuần. Tìm số máy sản xuất được từ tuần thứ ba đến hết tuần thứ tư.

Lời giải

Số lượng máy tính từ đầu tuần thứ 3 đến hết tuần thứ 4 là:

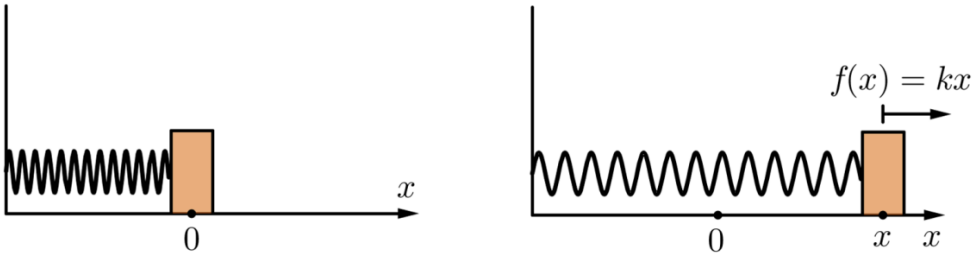
$$\int_2^4 4000\left(1-\frac{10}{10-t^2}\right)\mathrm{d}t = 4000t\Big|_2^4+\frac{40000}{t-10}\Big|_2^4 \approx 6333$$

Câu 6: Việc thở là những vòng tuần hoàn, mỗi vòng tính từ lúc bắt đầu hít vào đến lúc kết thúc thở ra, thường kéo dài trong 5s. Vận tốc cực đại của khí là $V\ l/s$,vì thế nó được mô hình hoá bởi $v(t)=V\sin\dfrac{2\pi t}{5}$. Tính thể tích khí hít vào phổi sau thời gian 2s.

Lời giải

Vận tốc của khí hít vào được mô hình bởi công thức $v(t)=V\sin\dfrac{2\pi t}{5}$. Suy ra lượng khí hít vào sau 2 giây là: $N(2)=\int_0^2 v(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 V\sin\dfrac{2\pi t}{5}\mathrm{d}t=\dfrac{5V}{2\pi}\left(1-\cos\dfrac{2\pi.2}{5}\right)=1,44V$ lít khí.

Câu 7: Một lực có độ lớn 40 N cần thiết để kéo căng một chiếc lò xo có độ dài tự nhiên 10 cm lên 15 cm. Biết rằng theo định luật *Hooke* trong Vật lý, khi một chiếc lò xo bị kéo căng thêm x so với độ dài tự nhiên của lò xo thì lò xo trì lại với một lực cho bởi công thức $f(x)=kx\,(N)$, trong đó k là hệ số đàn hồi của lò xo. Hãy tìm công sinh ra khi kéo lò xo có độ dài từ 15 cm đến 20 cm?



Lời giải

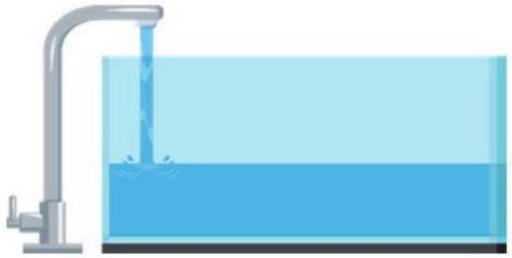
Khi kéo lò xo từ 10 cm đến 15 cm nó bị kéo căng thêm 5 cm = 0,05 m.

$\Rightarrow f(0,05)=40\Leftrightarrow 0,05k=40\Rightarrow k=800$ do đó $f(x)=800x$

Công được sinh ra khi kéo căng lò xo từ 15 cm đến 20 cm là $W=\int_{0,05}^{0,1} f(x)\mathrm{d}x$

$$\Rightarrow W=\int_{0,05}^{0,1} f(x)\mathrm{d}x=\int_{0,05}^{0,1}(800x)\mathrm{d}x=800\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0,05}^{0,1}=3\,(J).$$

Câu 8: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t)=6at^2+2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là $90\ \mathrm{m}^3$ và sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là $504\ \mathrm{m}^3$. Tính thể tích của lượng nước trong bể sau khi bơm được 9 giây.



Lời giải

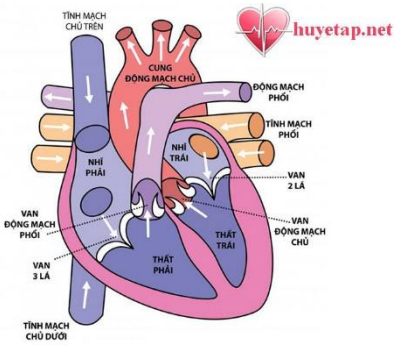
Ta có: $\int_0^3 \left(6at^2+2bt\right)\mathrm{d}t = 90 \Leftrightarrow \left(2at^3+bt^2\right)\Big|_0^3 = 90 \Leftrightarrow 54a+9b=90 \quad (1)$

Mặt khác: $\int_0^6 \left(6at^2+2bt\right)\mathrm{d}t = 504 \Leftrightarrow \left(2at^3+bt^2\right)\Big|_0^6 = 504 \Leftrightarrow 432a+36b=504 \quad (2)$

Từ (1) và $(2) \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{2}{3} \\ b=6 \end{cases}$ nên sau khi bơm 9 giây thì thể tích nước trong bể là:

$$V=\int_0^9 \left(4t^2+12t\right)\mathrm{d}t = \left(\frac{4}{3}t^3+6t^2\right)\Big|_0^9 = 1458\left(\mathrm{m}^3\right).$$

Câu 9: Hiệu suất của tim là lưu lượng máu được bơm bởi tim trên một đơn vị thời gian (lưu lượng máu chảy vào động mạch chủ). Để đo hiệu suất của tim, người ta bơm $A(\mathrm{mg})$ chất chỉ thị màu vào tâm nhĩ phải, chảy qua tim rồi vào động mạch chủ và đo nồng độ chất chỉ thị màu còn lại ở tim đến thời điểm $T(\mathrm{s})$ khi chất chỉ thị màu tan sạch. Gọi $c(t)$ là nồng độ (mg/l) chất chỉ thị màu tại thời điểm $t(\mathrm{s})$ thì hiệu suất của tim được xác định bởi $F=\dfrac{A}{\int_0^T c(t)\mathrm{d}t}(\mathrm{l}/\mathrm{s})$.



Tính hiệu suất của tim khi bơm 8 mg chất chỉ thị màu vào tâm nhĩ phải, biết $c(t)=\dfrac{1}{4}t(12-t)$ với $0\le t\le 12$ *(kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).*

(Nguồn: James Stewart, Calculus, Cengage Learning).

Lời giải

Để tính hiệu suất của tim, chúng ta cần sử dụng công thức đã cho: $F=\dfrac{A}{\int_0^T c(t)\mathrm{d}t}(\mathrm{l}/\mathrm{s})$

Trong đó: $A=8\,\mathrm{mg}$ (lượng chất chỉ thị bơm vào); $c(t)=\dfrac{1}{4}t(12-t)$ nồng độ chất chỉ thị màu tại thời điểm t; $T=12$ giây là thời gian khi chất chỉ thị màu tan sạch.

Đầu tiên, ta thay thế $c(t)$ vào tích phân: $\int_0^{12} c(t)\mathrm{d}t = \int_0^{12} \dfrac{1}{4}t(12-t)\mathrm{d}t$

Ta có thể tính tích phân này bằng cách phân tích: $\int_0^{12}\frac{1}{4}t(12-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int_0^{12}(12t-t^2)\mathrm{d}t$

Khi đó: $\int_0^{12}12t\mathrm{d}t=12.\frac{t^2}{2}\Big|_0^{12}=12.\frac{12^2}{2}=12.72=864$ và $\int_0^{12}t^2\mathrm{d}t=\frac{t^3}{2}\Big|_0^{12}=\frac{12^3}{3}=576$.

Kết hợp lại ta có: $\int_0^{12}(12t-t^2)\mathrm{d}t=864-576=288$ nên $\int_0^{12}c(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}.288=72$

Khi đó hiệu suất của tim là: $F=\frac{A}{\int_0^{12}c(t)\mathrm{d}t}=\frac{8}{72}=\frac{1}{9}\approx 0{,}11(\mathrm{l/s})$.

----------HẾT----------

BÀI 03 ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

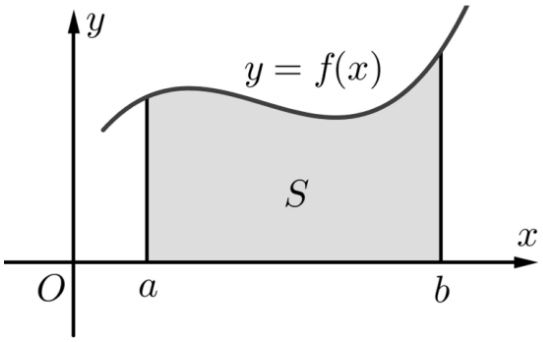
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Tính diện tích hình phẳng

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của một hàm số, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$

Ta đã biết, nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính bởi:

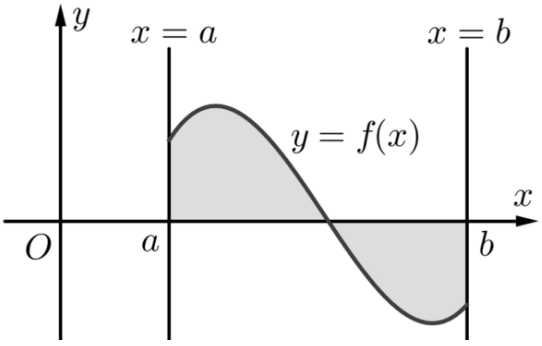
$$S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$



Một cách tổng quát, ta có kết quả sau:

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được tính bởi công thức:

$$S = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$



Chú ý: Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Nếu $f(x)$ không đổi dấu trên đoạn $[a;b]$ thì:

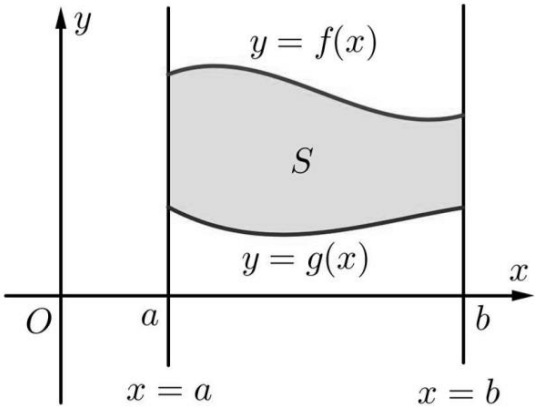
$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$$

Nếu phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm trên khoảng $(a;b)$ thì công thức trên vẫn đúng.

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số và hai đường thẳng $x = a, x = b$

Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số trên và hai đường thẳng $x = a, x = b$. Xét trường hợp $f(x) \geq g(x)$ với mọi $x \in [a;b]$. Kí hiệu S_1, S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, hai đường thẳng $x = a,\ x = b$ và đồ thị của hàm số $y = f(x), y = g(x)$ tương ứng. Khi đó:

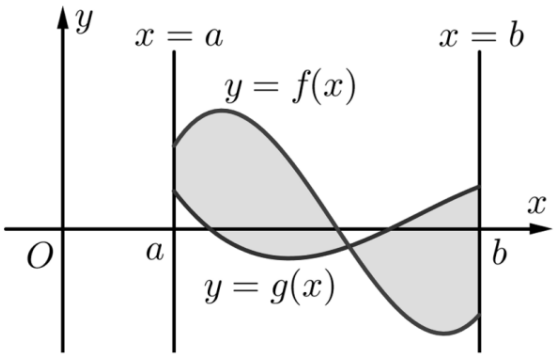
$$S = S_1 - S_2 = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right]\mathrm{d}x$$



Trong trường hợp tổng quát, ta có kết quả sau:

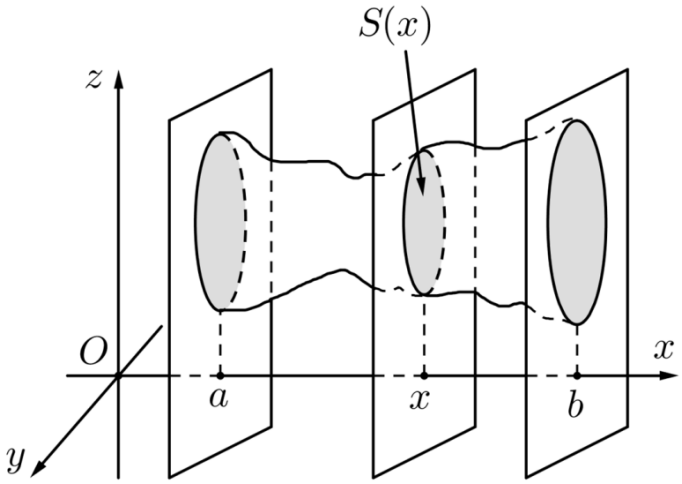
Cho hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a,\ x = b$ được tính bởi công thức:

$$S = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| \mathrm{d}x$$



2 Tính thể tích hình khối

Trong không gian, cho một vật thể nằm trong khoảng không gian giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b. Mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ là x với $(a \le x \le b)$ cắt vật thể theo mặt cắt có diện tích $S(x)$.



Khi đó, nếu $S(x)$ là hàm số liên tục trên $[a;b]$ thì thể tích của vật thể được tính bằng công thức:

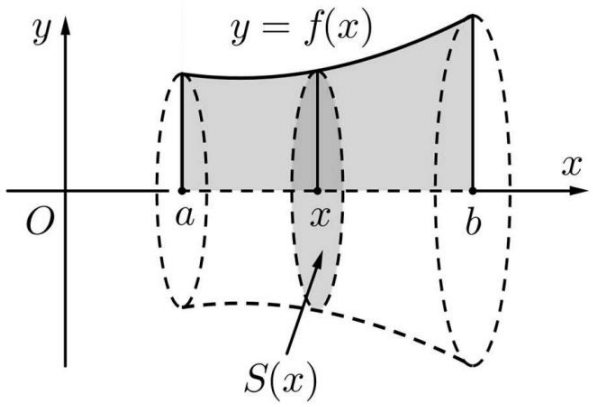
$$V = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x$$

Chú ý: Nếu $S(x) = S$ không đổi với mỗi $x \in [a;b]$ thì $V = (b-a)S$.

Thể tích khối tròn xoay

Cho $y = f(x)$ là hàm số liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$. Quay D xung quanh trục Ox ta được một hình khối gọi là khối tròn xoay. Cắt khối tròn xoay trên bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x với $x \in [a;b]$, ta được mặt cắt là hình tròn có bán kính bằng $f(x)$ và diện tích là $S(x) = \pi f^2(x)$. Vậy khối tròn xoay có thể tích là:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$$



B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Ứng dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng

Phương pháp:

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi một hàm số, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$

Diện tích hình phẳng giới hạn: $\begin{cases} y = f(x) \\ Ox \\ x = a; x = b \end{cases} \rightarrow S = \int_a^b \left| f(x) \right| \mathrm{d}x$.

Để phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta thường làm như sau:

Bước 1: Giải $f(x) = 0$ tìm nghiệm $x_1, x_2, ..., x_n \in (a;b)$ $(a < x_1 < x_2 < ... < x_n < b)$.

Bước 2: Tính $S = \int_a^{x_1} \left| f(x) \right| \mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} \left| f(x) \right| \mathrm{d}x + ... + \int_{x_n}^{b} \left| f(x) \right| \mathrm{d}x$

$= \left| \int_a^{x_1} f(x) \mathrm{d}x \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) \mathrm{d}x \right| + ... + \left| \int_{x_n}^{b} f(x) \mathrm{d}x \right|$

Chú ý: Ngoài cách trên, ta có thể dựa vào đồ thị để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$

Diện tích hình phẳng giới hạn: $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ x = a; x = b \end{cases} \rightarrow S = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| \mathrm{d}x$.

Để phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta thường làm như sau:

Bước 1: Giải $f(x) = g(x)$ tìm nghiệm $x_1, x_2, ..., x_n \in (a;b)$ $(a < x_1 < x_2 < ... < x_n < b)$.

Bước 2: Tính $S = \int_a^{x_1} \left| f(x) - g(x) \right| \mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} \left| f(x) - g(x) \right| \mathrm{d}x + ... + \int_{x_n}^{b} \left| f(x) - g(x) \right| \mathrm{d}x$

$= \left| \int_a^{x_1} \left(f(x) - g(x) \right) \mathrm{d}x \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} \left(f(x) - g(x) \right) \mathrm{d}x \right| + ... + \left| \int_{x_n}^{b} \left(f(x) - g(x) \right) \mathrm{d}x \right|$

Chú ý: Ngoài cách trên, ta có thể dựa vào đồ thị để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

a) Đồ thị hàm số $y = x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$.

b) Đồ thị hàm số $y = \mathrm{e}^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$.

c) Đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 1$.

d) Đồ thị hàm số $y = x^2 + x - 2$ và trục hoành.

e) Đồ thị hàm số $y = x^2 - 1$, trục hoành và đường thẳng $x = 3$.

f) Đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 4$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 3$.

g) Đồ thị của các hàm số $y=x^3, y=2x-1$ và hai đường thẳng $x=1, x=2$.

h) Đồ thị hàm số $y=\cos x-2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$ và $x=\pi$.

i) Đồ thị của hai hàm số $y=x^2, y=2-x$ và hai đường thẳng $x=0, x=2$.

Lời giải

a) Diện tích hình phẳng cần tính là $S=\int_0^2\left|x^2\right|\mathrm{d}x=\int_0^2 x^2\mathrm{d}x=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2=\frac{8}{3}$.

b) Diện tích hình phẳng cần tính là $S=\int_0^2\left|e^x\right|\mathrm{d}x=\int_0^2 e^x\mathrm{d}x=\left.e^x\right|_0^2=e^2-1$.

c) Diện tích hình phẳng cần tính là: $S=\int_0^1\left|x^3+1\right|\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x^3+1\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{x^4}{4}+x\right)\right|_0^1=\frac{5}{4}$.

d) Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành là nghiệm của phương trình:

$x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng $S=\int_{-2}^1\left|x^2+x-2\right|\mathrm{d}x=-\int_{-2}^1\left(x^2+x-2\right)\mathrm{d}x=\frac{9}{2}$.

e) Phương trình hoành độ giao điểm của các đường $y=x^2-1$ và Ox là: $x^2-1=0\Leftrightarrow x=\pm 1$.

Diện tích hình phẳng là:

$$S=\int_{-1}^3\left|x^2-1\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^1\left(-x^2+1\right)\mathrm{d}x+\int_1^3\left(x^2-1\right)\mathrm{d}x=\left.\left(-\frac{x^3}{3}+x\right)\right|_{-1}^1+\left.\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\right|_1^3=8.$$

f) Ta có: $x^4-3x^2-4=0\Leftrightarrow x=2\in[0;3]$

Diện tích hình phẳng là: $S=\int_0^3\left|x^4-3x^2-4\right|\mathrm{d}x=\left|\left(\int_0^2 x^4-3x^2-4\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_2^3 x^4-3x^2-4\,\mathrm{d}x\right|$

$$=\left|\left.\left(\frac{x^5}{5}-x^3-4x\right)\right|_0^2\right|+\left|\left.\left(\frac{x^5}{5}-x^3-4x\right)\right|_2^3\right|=\frac{48}{5}+\frac{96}{5}=\frac{144}{5}.$$

g) Ta có: $x^3=2x-1\Leftrightarrow x^3-2x+1=0\Leftrightarrow(x-1)\left(x^2+x-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$

$\Rightarrow x^3-2x+1\geq 0, \forall x\in[1;2]$

Khi đó, diện tích hình phẳng cần tính là: $S=\int_1^2\left(x^3-2x+1\right)dx=\left.\left(\frac{1}{4}x^4-x^2+x\right)\right|_1^2=\frac{7}{4}$.

h) Vì $\cos x-2<0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ nên diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S=\int_0^{\pi}\left|\cos x-2\right|\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\left(2-\cos x\right)\mathrm{d}x=\left(2x+\sin x\right)\Big|_0^{\pi}=2\pi.$$

i) Diện tích cần tìm là $S=\int_0^2\left|x^2-\left(2-x\right)\right|\mathrm{d}x=\int_0^2\left|x^2+x-2\right|\mathrm{d}x$

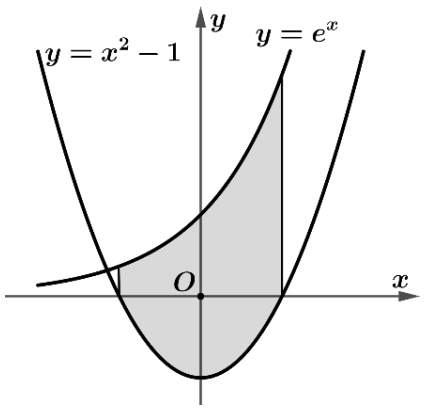
Ta có $x^2+x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right.$

Khi đó: $S=\int_0^1\left|x^2+x-2\right|\mathrm{d}x+\int_1^2\left|x^2+x-2\right|\mathrm{d}x=\left|\int_0^1\left(x^2+x-2\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_1^2\left(x^2+x-2\right)\mathrm{d}x\right|$

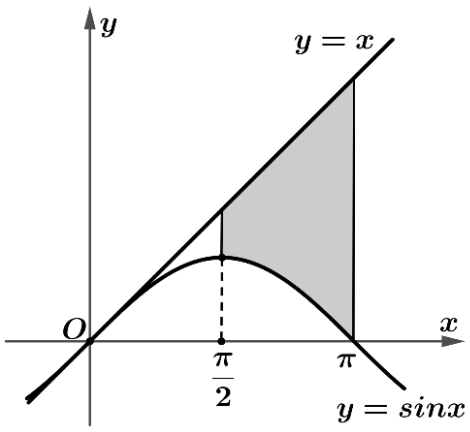
$$=\left|\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_0^1\right|+\left|\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_1^2\right|=\left|\frac{-7}{6}\right|+\left|\frac{11}{6}\right|=3.$$

Bài tập 2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường được minh họa bởi hình vẽ sau đây:

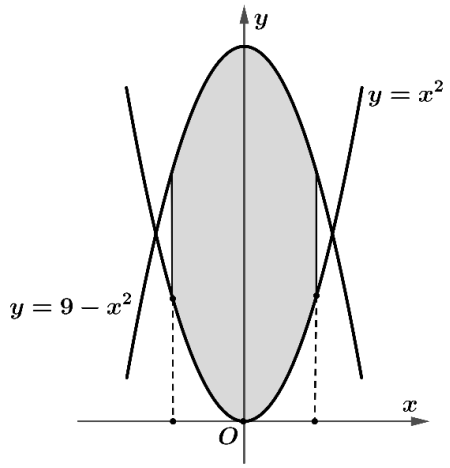
a) $y=e^x, y=x^2-1, x=-1, x=1$



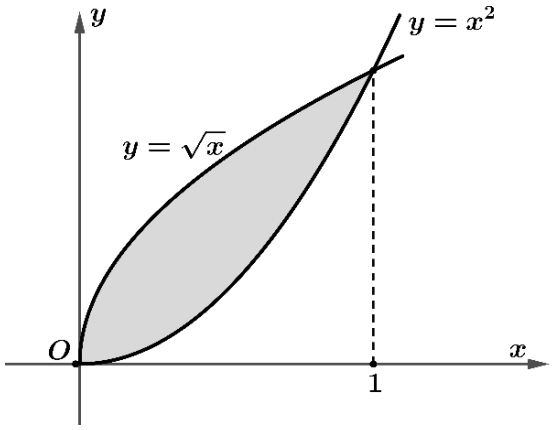
b) $y=\sin x, y=x, x=\frac{\pi}{2}, x=\pi$



c) $y=9-x^2, y=2x^2, x=-\sqrt{3}, x=\sqrt{3}$



d) $y=\sqrt{x}, y=x^2, x=0, x=1.$



Lời giải

a) Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$S=\int_{-1}^{1}\left|e^x-\left(x^2-1\right)\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left(e^x-x^2+1\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}e^x\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\left(-x^2+1\right)\mathrm{d}x=e-\frac{1}{e}+\frac{4}{3}$$

b) Diện tích hình phẳng cần tính là: $S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left|\sin x-x\right|\mathrm{d}x$

Trong khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ thì $\sin x<1<x$, do đó:

$$S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left|\sin x-x\right|\mathrm{d}x=S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(x-\sin x\right)\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}x\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\cos x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{3\pi^2}{8}-1$$

c) Diện tích hình phẳng cần tính là: $S=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left|\left(9-x^2\right)-2x^2\right|\mathrm{d}x=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left|9-3x^2\right|\mathrm{d}x$

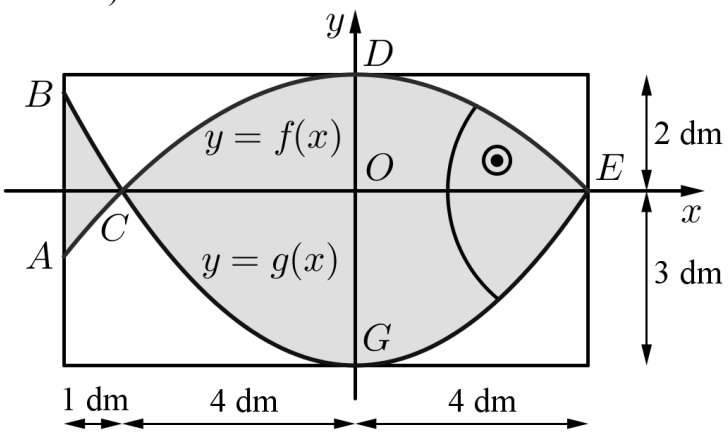
Do trên khoảng $\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right): 3x^2<9$ nên diện tích hình phẳng cần tính là:

$$S=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left|9-3x^2\right|dx=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(9-3x^2\right)dx=\left(9x-3.\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}=12\sqrt{3}$$

d) Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$S=\int_0^1\left|\sqrt{x}-x^2\right|\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x-\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_0^1-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

Bài tập 3: Trên cửa sổ có dạng hình chữ nhật, họa sĩ thiết kế logo hình con cá cho một doanh nghiệp kinh doanh hải sản. Logo là hình phẳng giới hạn bởi hai parabol với các kích thước được cho trong hình sau (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là decimét).



a) Lập phương trình các parabol $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$.

b) Tính diện tích của logo.

c) Logo chỉ cho phép 50% lượng ánh sáng đi qua. Lượng ánh sáng đi qua toàn bộ cửa sổ sau khi làm logo sẽ giảm bao nhiêu phần trăm (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Lời giải

a) Từ đồ thị ta thấy parabol $y=f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ có đỉnh tại điểm $O\left(0;0\right)$ nên $c=0$ và đi qua điểm $A\left(2;4\right)$ nên $4=4a+2b$

Giả sử $b=0$ (do parabol đối xứng quá trục tung) nên $4a=4\Rightarrow a=1$ nên $y=f\left(x\right)=x^2$

Parabol $y=g\left(x\right)=mx^2+nx+p$ có đỉnh tại điểm $E\left(2;0\right)$ nên $y=-m\left(x-2\right)^2+0$ và đi qua điểm $C\left(3;1\right)$ nên $m=-1$ nên $y=g\left(x\right)=-\left(x-2\right)^2$

b) Phương trình hoành độ giao điểm của $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$ là $x^2=-\left(x-2\right)^2$

$$\Leftrightarrow 2x^2-4x+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$$

Diện tích của logo là:

$$S=\int_1^2\left[f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=\int_1^2\left(x^2+\left(x-2\right)^2\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{2}{3}x^3-2x^2+4x\right)\Big|_1^2=\frac{20}{3}\left(\mathrm{dm}^3\right)$$

c) Logo chỉ cho phép 50% lượng ánh sáng đi qua. Diện tích cửa sổ là $2.4 = 8\left(\text{dm}^3\right)$

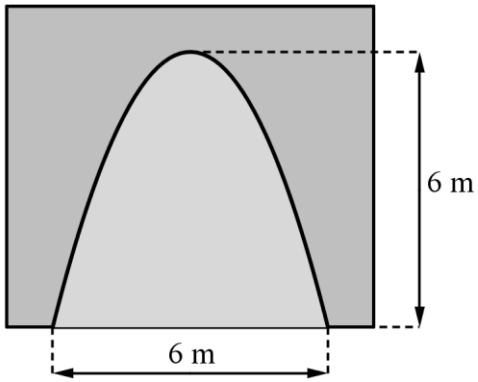
Lượng ánh sáng đi qua cửa sổ trước khi làm logo là: 100% ánh sáng $= 8\left(\text{dm}^3\right)$

Lượng ánh sáng đi qua cửa sổ sau khi làm logo là: $50\%.\dfrac{20}{3} = \dfrac{10}{3}\ \left(\text{dm}^3\right)$

Tổng lượng ánh sáng đi qua sau khi làm là: $8 - \dfrac{10}{3} = \dfrac{14}{3}\ \left(\text{dm}^3\right)$

Lượng ánh sáng đi qua toàn bộ cửa sổ sau khi làm logo sẽ giảm $\dfrac{8 - \dfrac{14}{3}}{8}.100 = 41,6\ (\%)$.

Bài tập 4: Mặt cắt của một cửa hầm có dạng là hình phẳng giới hạn bởi một parabol và đường thẳng nằm ngang như hình sau. Tính diện tích của cửa hầm.



Lời giải

Ta dễ dàng tìm được parabol là $y = -\dfrac{1}{6}x^2 + 6$ và đường thẳng nằm ngang là $y = 0$

Phương trình hoành độ giao điểm là: $-\dfrac{1}{6}x^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 36 \Leftrightarrow x = \pm 6$

Diện tích của cửa hầm là: $S = \int\limits_{-6}^{6}\left(-\dfrac{1}{6}x^2 + 6\right)\text{d}x = \left(-\dfrac{1}{18}x^3 + 6x\right)\Big|_{-6}^{6} = 48\ \left(\text{m}^2\right)$.

Bài tập 5: Đơn đặt hàng của nhà máy cho một loại máy điều hoà không khí là khoảng 6000 chiếc mỗi tuần khi giá là 331 USD/chiếc và khoảng 8000 chiếc mỗi tuần khi giá là 303 USD/chiếc. Hàm cung được cho bởi $p = 0,0275x$, trong đó x là số lượng máy điều hoà được bán với giá p USD một chiếc. Tìm thặng dư tiêu dùng và thặng dư sản xuất (giả sử hàm cầu là hàm bậc nhất).

Lời giải

Hàm cầu có dạng $p = ax + b$. Do đơn đặt hàng của nhà máy cho một loại máy điều hoà không khí là 6000 chiếc mỗi tuần khi giá là 331 USD/chiếc và 8000 chiếc mỗi tuần khi giá là 303 USD/chiếc nên ta có: $\begin{cases} 331 = 6000a + b \\ 303 = 8000a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -0,014 \\ b = 415. \end{cases}$

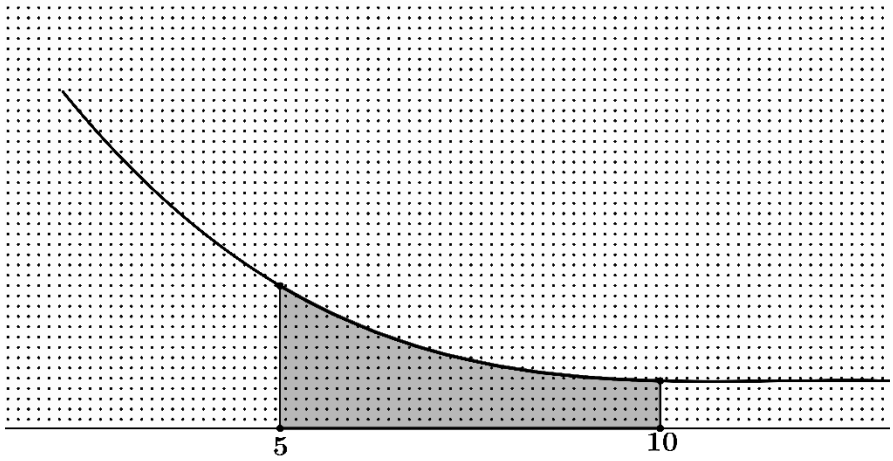
Vậy hàm cầu là $p = -0,014x + 415$.

Xét phương trình $-0,014x+415=0,0275x \Leftrightarrow x=10000$ khi đó $p=275$.

Thặng dư tiêu dùng là: $\int_0^{10000}\left(-0,014x+415-275\right)\mathrm{d}x=700000$ (USD)

Thặng dư sản xuất là: $\int_0^{10000}\left(275-0,0275x\right)\mathrm{d}x=1375000$ (USD).

Bài tập 6: Trong xác suất thống kê thì một biến ngẫu nhiên *X* được gọi là có hàm mật độ $f(x)$ nếu xác suất để *X* nhận giá trị trong $[a,b]$ là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$, đường thẳng $y=a$ và $y=b$. Đặc biệt, khi $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x\geq 0\\ 0 \quad , x<0\end{cases}$ trong đó λ là số thực cho trước thì *X* được gọi là biến ngẫu nhiên có phân phối mũ với tham số λ. Chẳng hạn, tuổi thọ của một bóng đèn (đơn vị năm) là một biến ngẫu nhiên X tuân theo phân phối mũ với hệ số $\lambda=\frac{1}{5}$. Hãy tính xác suất để một bóng đèn có tuổi thọ lớn hơn 5 năm và nhỏ hơn 10 năm.



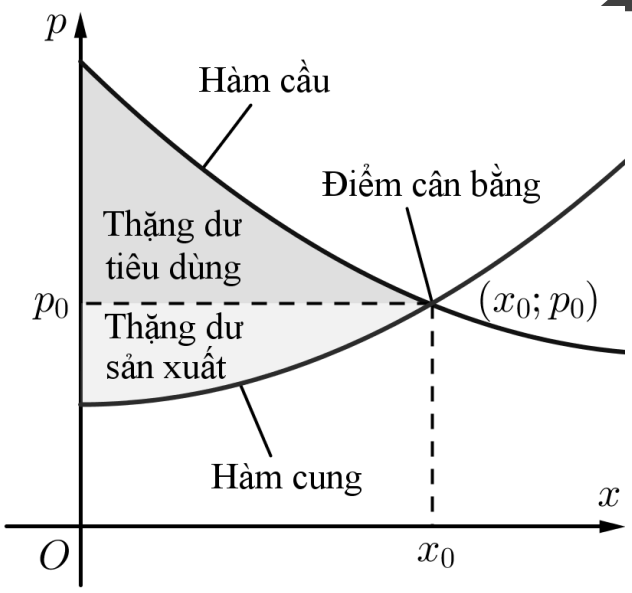
Lời giải

Hàm mật độ xác suất của *X* là: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x}, x\geq 0\\ 0 \quad , x<0\end{cases}$. Xác suất để một bóng đèn có tuổi thọ lớn hơn 5 năm và nhỏ hơn 10 năm là: $P[5\leq X\leq 10]=\int_5^{10}\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x}\,\mathrm{d}x=-e^{-\frac{1}{5}x}\Big|_5^{10}=\frac{e-1}{e^2}$.

Bài tập 7: Ta biết rằng hàm cầu liên quan đến giá p của một sản phẩm với nhu cầu của người tiêu dùng, hàm cung liên quan đến giá p của sản phẩm với mức độ sẵn sàng cung cấp sản phẩm của nhà sản xuất. Điểm cắt nhau $(x_0;p_0)$ của đồ thị hàm cầu $p=D(x)$ và đồ thị hàm cung $p=S(x)$ được gọi là điểm cân bằng.

Các nhà kinh tế gọi diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị hàm cầu, đường ngang $p=p_0$ và đường thẳng đứng $x=0$ là thặng dư tiêu dùng. Tương tự, diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị của hàm cung, đường nằm ngang $p=p_0$ và đường thẳng đứng $x=0$ được gọi là thặng dư sản xuất, như trong hình bên dưới.

(Theo *R. Larson, Brief Calculus: An Applied Approach, 8th edition, Cengage Learning, 2009*)



Giả sử hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm được mô hình hoá bởi:

Hàm cầu: $p = 5 - 0,2x$ và hàm cung: $p = 1 + 0,02x^2$, trong đó x là số đơn vị sản phẩm. Tìm thặng dư tiêu dùng và thặng dư sản xuất cho sản phẩm này.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai hàm là: $5 - 0,2x = 1 + 0,02x^2$

$\Leftrightarrow 0,02x^2 + 0,2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10 \\ x = -20 \end{array}\right.$

Với $x = 10$ thỏa mãn khi đó $x_0 = 10; p_0 = 5 - 0,2.10 = 3$

Thặng dư tiêu dùng là $\int_0^{10} (5 - 0,2x - 3)\mathrm{d}x = \int_0^{10} (2 - 0,2x)\mathrm{d}x = 10$.

Thặng dư sản suất là $\int_0^{10} \left(3 - 1 - 0,02x^2\right)\mathrm{d}x = \int_0^{10} \left(2 - 0,02x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{40}{3}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y = x^3 - 6x$ và $y = x^2$ bằng

A. $\frac{125}{12}$. **B.** $\frac{16}{3}$. **C.** $\frac{63}{4}$. **D.** $\frac{253}{12}$.

Lời giải

Ta có $x^3 - 6x = x^2 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Ta có $S = \int\limits_{-2}^{3} \left|x^3 - x^2 - 6x\right| \mathrm{d}x = \frac{253}{12}$.

Câu 2: Tính diện tích S hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong $y = -x^3 + 12x$ và $y = -x^2$

A. $S = \frac{937}{12}$ **B.** $S = \frac{343}{12}$ **C.** $S = \frac{397}{4}$ **D.** $S = \frac{793}{4}$

Lời giải

Xét phương trình $-x^3 + 12x = -x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \\ x = -3 \end{array}\right.$.

Diện tích S hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong $y = -x^3 + 12x$ và $y = -x^2$ bằng

$S = \int\limits_{-3}^{4} \left|-x^3 + 12x + x^2\right| \mathrm{d}x = \frac{937}{12}$.

Câu 3: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = |\ln x|, y = 1$ được tính bởi công thức:

A. $S = \int\limits_{1}^{e} \left|\left(|\ln x| - 1\right)\right| \mathrm{d}x$ **B.** $S = \int\limits_{\frac{1}{e}}^{e} \left(|\ln x| - 1\right) \mathrm{d}x$

C. $S = \int\limits_{1}^{e} \left|\left(1 - |\ln x|\right)\right| \mathrm{d}x$ **D.** $S = \int\limits_{\frac{1}{e}}^{e} \left(1 - |\ln x|\right) \mathrm{d}x$

Lời giải

Xét phương trình: $|\ln x| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \ln x = -1 \\ \ln x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{e} \\ x = e \end{array}\right.$

Khi đó: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = |\ln x|, y = 1$ được tính bởi công thức: $S = \int\limits_{\frac{1}{e}}^{e} \left|1 - |\ln x|\right| \mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{e}}^{e} \left(1 - |\ln x|\right) \mathrm{d}x$.

Câu 4: Gọi diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(C): y=\dfrac{-3x-1}{x-1}$ và hai trục tọa độ là S. Tính S?

A. $S=4\ln\dfrac{4}{3}-1$ **B.** $S=\ln\dfrac{4}{3}-1$ **C.** $S=1-\ln\dfrac{4}{3}$ **D.** $S=4\ln\dfrac{4}{3}$

Lời giải

Ta có: $\dfrac{-3x-1}{x-1}=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{3}.$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(C): y=\dfrac{-3x-1}{x-1}$; $y=0; x=0; x=-\dfrac{1}{3}$ là

$$S=\int_{-\frac{1}{3}}^{0}\left|\frac{-3x-1}{x-1}\right|\mathrm{d}x=\left|\int_{-\frac{1}{3}}^{0}\frac{3x+1}{x-1}\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{-\frac{1}{3}}^{0}\left(3+\frac{4}{x-1}\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\left(3x+4\ln|x-1|\right)\Big|_{-\frac{1}{3}}^{0}\right|=4\ln\frac{4}{3}-1$$

Câu 5: Diện tích hình phẳng giớn hạn bởi các đường $y=x^2-4x+3$; $x=0$ và $y=0$ bằng

A. $\dfrac{5}{3}$. **B.** $\dfrac{16}{9}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $\dfrac{8}{3}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$

$$S=\int_0^3\left|x^2-4x+3\right|\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x^2-4x+3\right)\mathrm{d}x-\int_1^3\left(x^2-4x+3\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\Big|_0^1-\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\Big|_1^3=\frac{8}{3}$$

Câu 6: Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đường thẳng $y=x^2-x, y=0, x=0, x=2$ được tính bởi công thức nào sau đây?

A. $S=\int_0^2\left(x-x^2\right)\mathrm{d}x.$ **B.** $S=\int_1^2\left(x^2-x\right)-\int_0^1\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x.$

C. $S=\int_0^1\left(x^2-x\right)+\int_1^2\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x.$ **D.** $S=\int_0^2\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x.$

Lời giải

Ta có: $S=\int_0^2\left|x^2-x\right|\mathrm{d}x=\int_0^1\left|x^2-x\right|\mathrm{d}x+\int_1^2\left|x^2-x\right|\mathrm{d}x=-\int_0^1\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x+\int_1^2\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x$

Câu 7: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=x^2$ và $y=8-x^2$ là

A. 12. **B.** 32. **C.** $\dfrac{3}{64}$. **D.** $\dfrac{64}{3}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm cần tìm là $x^2=8-x^2\Leftrightarrow 2x^2=8\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$S=\int\limits_{-2}^{2}\left|x^2-\left(8-x^2\right)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{2}\left|2x^2-8\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{2}\left(-2x^2+8\right)\mathrm{d}x$ vì $2x^2-8\le 0,\forall x\in[-2;2]$

$\Rightarrow S=\left(-\frac{2}{3}x^3+8x\right)\Big|_{-2}^{2}=-\frac{2}{3}.2^3+8.2-\left(-\frac{2}{3}.(-2)^3+8.(-2)\right)=\frac{64}{3}$.

Câu 8: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đường $y=x^2-1$ và $y=x-1$ bằng?

A. $\frac{\pi}{6}$. **B.** $\frac{13}{6}$. **C.** $\frac{13\pi}{6}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm hai đồ thị hàm số là: $x^2-1=x-1\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng là: $S=\int\limits_{0}^{1}\left|x^2-x\right|\mathrm{d}x=\left|\int\limits_{0}^{1}\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{1}\right|=\frac{1}{6}$.

Câu 9: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y=x^2$, $y=x$ và các đường thẳng $x=0$, $x=1$ bằng

A. $\int\limits_{-1}^{0}\left|x^2-x\right|\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_{0}^{1}\left|x^2+x\right|\mathrm{d}x$. **C.** $\int\limits_{-1}^{0}\left|x^2+x\right|\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_{0}^{1}\left|x^2-x\right|\mathrm{d}x$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2=x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.\Rightarrow S=\int\limits_{0}^{1}\left|x^2-x\right|\mathrm{d}x$.

Câu 10: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=x^3-3x$ và $y=x$ bằng

A. 0. **B.** 8. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Xét phương trình $x^3-3x=x\Leftrightarrow x^3-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm 2\end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=x^3-3x$ và $y=x$ là

$S=\int\limits_{-2}^{2}\left|x^3-4x\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{0}\left|x^3-4x\right|\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{2}\left|x^3-4x\right|\mathrm{d}x=\left|\left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)\Big|_{-2}^{0}\right|+\left|\left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)\Big|_{0}^{2}\right|=8$

Câu 11: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2+2x+1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1;x=3$.

A. $S=\frac{37}{3}$. **B.** $S=\frac{56}{3}$. **C.** $S=\frac{68}{3}$. **D.** $S=\frac{64}{3}$.

Lời giải

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2+2x+1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1;x=3$ là $S=\int\limits_{-1}^{3}\left|x^2+2x+1\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{3}\left(x^2+2x+1\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^3}{3}+x^2+x\right)\Big|_{-1}^{3}=\frac{64}{3}$.

Câu 12: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sin x, Ox, x=0, x=\pi$. Diện tích của hình phẳng (H) bằng

A. 1. **B.** 2π. **C.** 2. **D.** π.

Lời giải

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sin x, Ox, x=0, x=\pi$ là

$$S=\int_0^{\pi}|\sin x|\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^{\pi}=-(\cos\pi-\cos 0)=2.$$

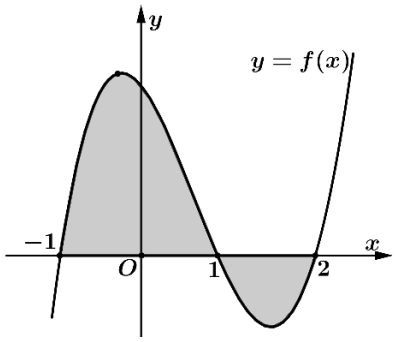
Câu 13: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=(x-2)^2-1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=2$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{7}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có: $S=\int_1^2\left|(x-2)^2-1\right|\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x), y=0, x=-1, x=2$ (như hình vẽ). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



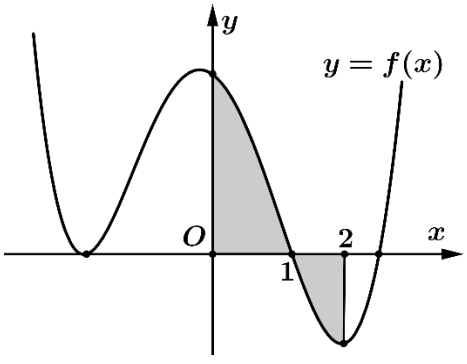
A. $S=\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=-\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S=-\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị, ta có $S=\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Câu 15: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị (C) là đường cong như hình bên.



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số (C), trục hoành và hai đường thẳng $x=0$; $x=2$ là

A. $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

B. $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

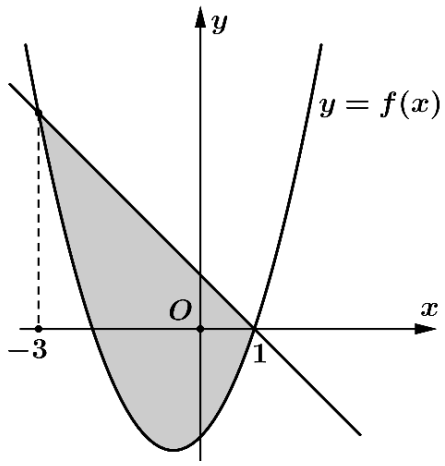
C. $\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|$.

D. $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số ta có diện tích hình phẳng cần tính là $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 16: Diện tích phần sạch sọc trong hinh vẽ bằng



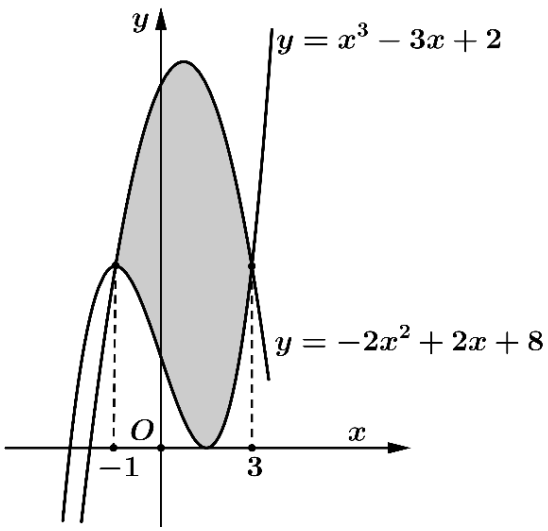
A. $\int_{-3}^1 \left|-x^2-2x-3\right|\mathrm{d}x$. **B.** $\int_{-3}^1 \left(x^2-2x-3\right)\mathrm{d}x$. **C.** $\int_{-3}^1 \left(x^2+2x-3\right)\mathrm{d}x$. **D.** $\int_{-3}^1 \left(-x^2-2x+3\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị hai hàm số $y=x^2+x-2$ và $y=-x+1$.

Ta có diện tích hình phẳng là $S=\int_{-3}^1 \left(-x+1-\left(x^2+x-2\right)\right)\mathrm{d}x=\int_{-3}^1 \left(-x^2-2x+3\right)\mathrm{d}x$.

Câu 17: Diện tích hình phẳng phần gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào sau đây?



A. $S=\int_{-1}^{2}\left(x^3+2x^2-5x-6\right)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int_{-1}^{2}\left(x^3+2x^2-x-10\right)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int_{-1}^{2}\left(x^3-2x^2-x+10\right)\mathrm{d}x$.

D. $S=\int_{-1}^{2}\left(-x^3-2x^2+5x+6\right)\mathrm{d}x$.

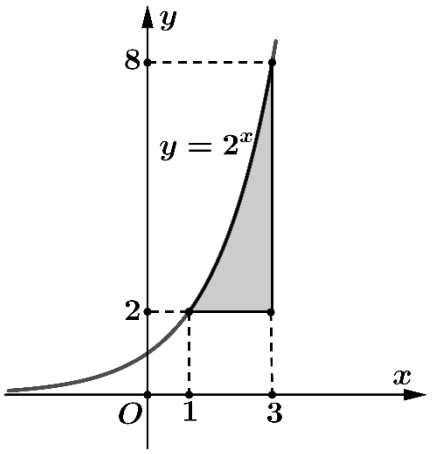
Lời giải

Ta có: $S=\int_{-1}^{2}\left|\left(x^3-3x+2\right)-\left(-2x^2+2x+8\right)\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}\left[\left(-2x^2+2x+8\right)-\left(x^3-3x+2\right)\right]\mathrm{d}x$

Do $-2x^2+2x+8\geq x^3-3x+2,\ \forall x\in[-1;2]$ nên $S=\int_{-1}^{2}\left(-x^3-2x^2+5x+6\right)\mathrm{d}x$.

Vậy diện tích hình phẳng phần gạch chéo trong hình vẽ là $S=\int_{-1}^{2}\left(-x^3-2x^2+5x+6\right)\mathrm{d}x$.

Câu 18: Diện tích hình phẳng gạch sọc trong hình vẽ bên dưới bằng



A. $\int_{1}^{3}\left(2^x-2\right)\mathrm{d}x$.

B. $\int_{1}^{3}\left(2^x+2\right)\mathrm{d}x$.

C. $\int_{1}^{3}\left(2-2^x\right)\mathrm{d}x$.

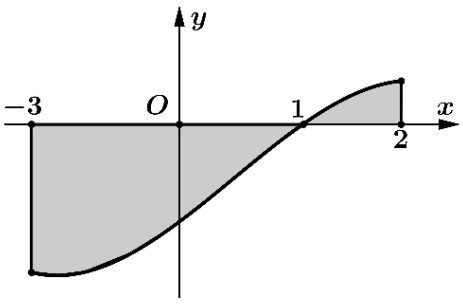
D. $\int_{1}^{3}2^x\,\mathrm{d}x$.

Lời giải

Hình phẳng gạch sọc trong hình vẽ được giới hạn bởi các đường $y=2^x, y=2, x=1$ và $x=3$.

Do đó diện tích hình phẳng gạch sọc trong hình vẽ bằng $\int_{1}^{3}\left|2^x-2\right|\mathrm{d}x=\int_{1}^{3}\left(2^x-2\right)\mathrm{d}x$.

Câu 19: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-3, x=2$ (như hình vẽ). Đặt $a=\int_{-3}^{1}f(x)\mathrm{d}x, b=\int_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$



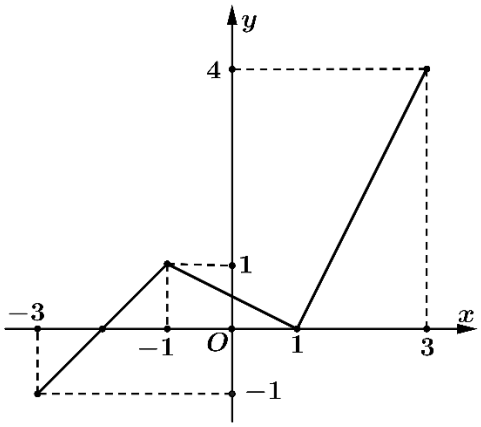
Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $S=-a-b$. **B.** $S=a+b$. **C.** $S=a-b$. **D.** $S=b-a$.

Lời giải

Ta có: $S=\int\limits_{-3}^{2}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=-\int\limits_{-3}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x=-a+b$.

Câu 20: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có tập xác định là $\left[-3;3\right]$ và có đồ thị như hình vẽ. Giá trị của $\int\limits_{-3}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng



A. 6. **B.** 5. **C.** 12. **D.** 10.

Lời giải

Ta có: $\int\limits_{-3}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-3}^{-2}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{-2}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x=-S_{\Delta ABC}+S_{\Delta CDE}+S_{\Delta EFG}$

$=-\frac{1}{2}.1.1+\frac{1}{2}.1.3+\frac{1}{2}.2.4=5$

Câu 21: Diện tích hình phẳng $\left(H\right)$ giới hạn bởi hai đường $y=x^3-x$ và $y=2x^2-x$ bằng

A. $\frac{5}{6}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** 2

Lời giải

Xét phương trình $x^3-x=2x^2-x\Leftrightarrow x^3-2x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng $\left(H\right)$ là: $S=\int\limits_{0}^{2}\left|\left(x^3-x\right)-\left(2x^2-x\right)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{2}\left|x^3-2x^2\right|\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$.

Câu 22: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=x^3+11x-6, y=6x^2$ và hai đường thẳng $x=0,\ x=2$ là

A. $S=2$. **B.** $S=\frac{2}{5}$. **C.** $S=5$. **D.** $S=\frac{5}{2}$.

Lời giải

Giải phương trình: $x^3+11x-6=6x^2\Leftrightarrow x^3-6x^2+11x-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\\x=3\end{array}\right.$.

Ta có $S=\int_0^2\left|x^3-6x^2+11x-6\right|\mathrm{d}x=\left|\int_0^1\left(x^3-6x^2+11x-6\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_1^2\left(x^3-6x^2+11x-6\right)\mathrm{d}x\right|=\frac{5}{2}$.

Câu 23: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2$ và $y=4x-3$ là

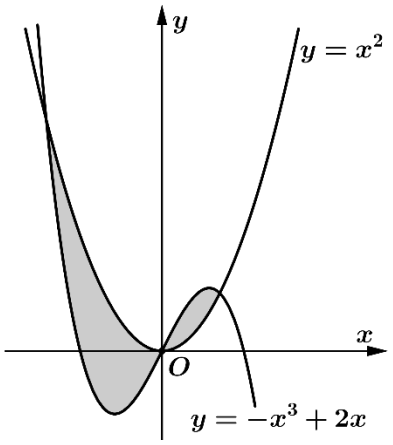
A. $S=\frac{3}{4}$. **B.** $S=\frac{4}{3}$. **C.** $S=\frac{2}{3}$. **D.** $S=2$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2=4x-3\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$.

Khi đó $S=\int_1^3\left|x^2-4x+3\right|\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$.

Câu 24: Diện tích của phần hình phẳng gạch chéo trong hình bên bằng



A. $\frac{55}{12}$. **B.** $\frac{37}{12}$. **C.** $\frac{9}{4}$. **D.** $\frac{15}{4}$.

Lời giải

Giải phương trình $x^2=-x^3+2x\Leftrightarrow x^3+x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=0\\x=-2.\end{array}\right.$.

Diện tích của phần hình phẳng gạch chéo trong hình bên bằng $S=\int_{-2}^1\left|x^3+x^2-2x\right|\mathrm{d}x=\frac{37}{12}$.

Câu 25: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y=e^{\frac{x}{2}};y=0$ và $x=0;x=2$ bằng

A. $2e-2$. **B.** $\frac{e-1}{2}$. **C.** $2e$. **D.** $e-1$.

Lời giải

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y=e^{\frac{x}{2}};y=0$ và $x=0;x=2$ là:

$S=\int_0^2\left|e^{\frac{x}{2}}\right|\mathrm{d}x=\int_0^2e^{\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=2e^{\frac{x}{2}}\Big|_0^2=2\left(e^{\frac{2}{2}}-e^{\frac{0}{2}}\right)==2(e-1)=2e-2$.

Câu 26: Hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=x^2-2x$ và $y=0$ có diện tích bằng

A. $\frac{8}{3}$. **B.** 8. **C.** 2. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị: $x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=x^2-2x$ và $y=0$ là

$S=\int\limits_0^2\left|x^2-2x\right|\mathrm{d}x=\dfrac{4}{3}$.

Câu 27: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2+2$ và đường thẳng $y=6$ bằng

A. $\dfrac{32}{3}$. **B.** $\dfrac{40}{3}$. **C.** $\dfrac{16}{3}$. **D.** $\dfrac{8}{3}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2+2=6\Leftrightarrow x=\pm2$

Diện tích hình phẳng cần tính là: $S=\int\limits_{-2}^2\left|x^2-4\right|\mathrm{d}x=\dfrac{32}{3}$.

Câu 28: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-x$ và $y=x-x^2$.

A. 13. **B.** $V=\dfrac{81}{12}$. **C.** $\dfrac{9}{4}$. **D.** $\dfrac{37}{12}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm đồ thị hàm số $y=x^3-x$ và $y=x-x^2$ là:

$$x^3-x=x-x^2\Leftrightarrow x^3+x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-2\end{array}\right.$$

Suy ra $S=\int\limits_{-2}^1\left|x^3+x^2-2x\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^0\left(x^3+x^2-2x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_0^1\left(x^3+x^2-2x\right)\mathrm{d}x$

$=\left(\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{-2}^0-\left(\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_0^1=\dfrac{8}{3}-\left(\dfrac{-5}{12}\right)=\dfrac{37}{12}$.

Câu 29: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=-x^2+x+6$ và $y=0$ bằng

A. $\dfrac{95\pi}{6}$. **B.** $\dfrac{95}{6}$. **C.** $\dfrac{125\pi}{6}$. **D.** $\dfrac{125}{6}$.

Lời giải

Ta xét phương trình hoành độ giao điểm: $-x^2+x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=3\end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng cần tính là: $S=\int\limits_{-2}^3\left|-x^2+x+6\right|\mathrm{d}x=\dfrac{125}{6}$.

Câu 30: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^3-3x$ và $y=x$ là

A. $\int\limits_{-2}^2\left|x^3-4x\right|\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_{-2}^2\left|x^3+4x\right|\mathrm{d}x$. **C.** $\int\limits_0^2\left|x^3-4x\right|\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_{-2}^0\left|x^3-4x\right|\mathrm{d}x$.

Lời giải

Xét phương trình $x^3-3x=x \Leftrightarrow x^3-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$. Vậy $S=\int\limits_{-2}^{2}\left|x^3-4x\right|\mathrm{d}x$.

Câu 31: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2+2x$ và trục hoành bằng

A. $\frac{4\pi}{3}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{3\pi}{4}$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2+2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị trên là: $S=\int\limits_{-2}^{0}\left|x^2+2x\right|\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$.

Câu 32: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=x^2-4x+3$ và $y=x-1$ bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** 1. **D.** $-\frac{9}{2}$.

Lời giải

Xét phương trình: $x^2-4x+3=x-1 \Leftrightarrow x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$.

Suy ra, diện tích hình phẳng đã cho bằng:

$$\int\limits_{1}^{4}\left|\left(x^2-4x+3\right)-\left(x-1\right)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{4}\left|x^2-5x+4\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{4}\left(-x^2+5x-4\right)\mathrm{d}x=\frac{9}{2}.$$

Câu 33: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=x^2$ và $y=2-x^2$ là

A. $\frac{8}{3}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** 0.

Lời giải

Xét phương trình $x^2=2-x^2 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Vậy diện tích hình phẳng đã cho bằng $\int\limits_{-1}^{1}\left|x^2-\left(2-x^2\right)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}\left|2x^2-2\right|\mathrm{d}x=\frac{8}{3}$.

Câu 34: Gọi là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $2my=x^2,\ mx=\frac{1}{2}y^2,\ \left(m>0\right)$. Tìm giá trị của m để $S=3$

A. $m=3$. **B.** $m=2$. **C.** $m=\frac{1}{2}$. **D.** $m=\frac{3}{2}$.

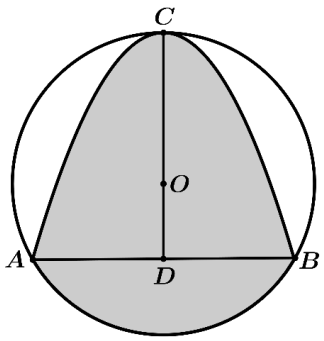
Lời giải

Do $m>0$ nên suy ra $x>0,\ y>0$.

Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ phương trình $\left\{\begin{array}{l} 2my=x^2 \\ mx=\frac{1}{2}y^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2my=x^2 \\ 2mx=y^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2m \end{array}\right.$

Ta có $S=\int\limits_{0}^{2m}\left|\sqrt{2mx}-\frac{x^2}{2m}\right|\mathrm{d}x=3$ hay $\frac{4m^2}{3}=3 \Leftrightarrow m=\frac{3}{2}$.

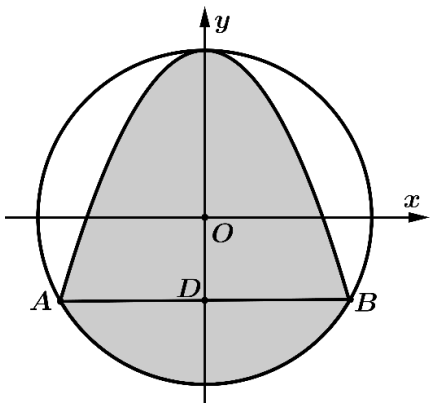
Câu 35: Một hoa văn hình tròn tâm O, ngoại tiếp tam giác đều ABC có cạnh $AB = 4\sqrt{3}\,\text{cm}$. Đường cong qua ba điểm: A, B, C là một phần của parabol.



Diện tích phần gạch chéo bằng

A. $37,54\ \text{cm}^2$. **B.** $9,83\text{cm}^2$. **C.** $27,71\text{cm}^2$. **D.** $36,75\text{cm}^2$.

Lời giải



Do tam giác ABC là tam giác đều có cạnh $4\sqrt{3}\,\text{cm}$ nên ta có:

$CD = 4\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6(\text{cm}) \Rightarrow OC = \dfrac{2}{3}CD = 4(\text{cm})$ và $OD = 2(cm)$.

Gắn trục toạ độ Oxy như hình vẽ, ta có: $A\left(-2\sqrt{3};-2\right), B\left(2\sqrt{3};-2\right), C(0;4)$

Phương trình đường Parapol đi qua 3 điểm A, B, C có đỉnh C có dạng $y = ax^2 + 4\ (P)$.

Thay toạ độ điểm $B\left(2\sqrt{3};-2\right)$ vào (P) suy ra $a = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow (P): y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 4$

Phương trình đường tròn tâm O bán kính $OA = 4$ là $x^2 + y^2 = 16 \Rightarrow$ Phương trình một phần cung nhỏ AB có dạng $y = -\sqrt{16 - x^2}$

Vậy diện tích phần gạch chéo bằng $\int\limits_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \left[\left(-\dfrac{1}{2}x^2 + 4\right) - \left(-\sqrt{16 - x^2}\right)\right] dx \approx 37,54\ (\text{cm}^2)$

Câu 36: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$, $G(x)$ lần lượt là nguyên hàm của $f(x)$ và $f(x) - 2x - 1$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(2) + 2G(1) = 2023$; $2F(1) + G(2) = 2019$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x)$ và $y = G(x)$ bằng

A. $\dfrac{31}{6}$. **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** $\dfrac{125}{6}$. **D.** $\dfrac{15}{2}$.

Lời giải

Theo bài ra ta có $F'(x)=f(x)$ và $G'(x)=f(x)-2x-1$ với $\forall x\in\mathbb{R}$

Nên $F'(x)=G'(x)+2x+1\Rightarrow F(x)=G(x)+x^2+x+C$.

Vì $\begin{cases}F(2)+2G(1)=2023\\2F(1)+G(2)=2019\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}G(2)+6+C+2G(1)=2023\\2\left(G(1)+2+C\right)+G(2)=2019\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}G(2)+2G(1)+6+C=2023\\G(2)+2G(1)+4+2C=2019\end{cases}\Rightarrow C-2=-4\Leftrightarrow C=-2$.

Khi đó: $F(x)-G(x)=x^2+x-2$ và ta có $F(x)-G(x)=0\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=F(x)$ và $y=G(x)$ là :

$S=\int\limits_{-2}^{1}\left|F(x)-G(x)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{1}\left|x^2+x-2\right|\mathrm{d}x=\dfrac{9}{2}$.

Câu 37: Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x=F(4)-G(0)+2m$, với $m>0$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x)$, $y=G(x)$; $x=0$ và $x=4$. Khi $S=8$ thì m bằng:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Theo đề ta có $\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x=F(4)-G(0)+2m\Rightarrow F(x)\Big|_0^4=F(4)-G(0)+2m$

$\Rightarrow F(4)-F(0)=F(4)-G(0)+2m\Rightarrow G(0)-F(0)=2m.\ (1)$

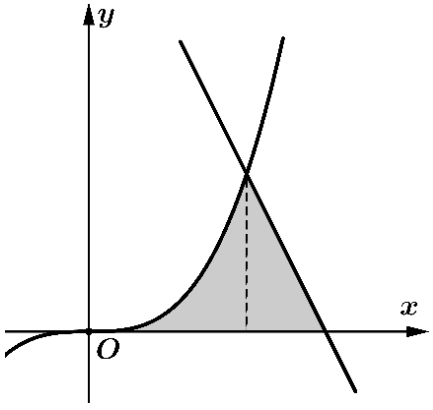
Mặt khác, do $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên ta có $G(x)-F(x)=C$ (không đổi) với mọi $x\in\mathbb{R}.\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $G(x)-F(x)=2m>0$, với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Khi đó ta có $S=\int\limits_0^4\left|G(x)-F(x)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_0^4 2m.\mathrm{d}x=2mx\Big|_0^4=8m$.

Theo đề ta có $8m=8\Leftrightarrow m=1$.

Câu 38: Cho hình (H) là hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=x^3$, đường thẳng $y=-2x+3$ và trục hoành (phần gạch chéo trong hình vẽ). Diện tích hình phẳng (H) là



A. $S=\frac{1}{4}$. **B.** $S=\frac{1}{2}$. **C.** $S=\frac{5}{4}$. **D.** $S=2$.

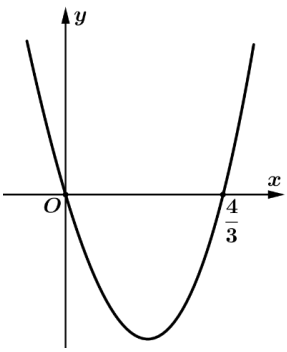
Lời giải

Ta có $x^3=-2x+3\Leftrightarrow x^3+2x-3=0\Leftrightarrow x=1$

Đường cong $y=x^3$ đi qua $O(0;0)$ và $y=-2x+3$ cắt Ox tại điểm có hoành độ $x=\frac{3}{2}$.

Vậy $S=\int_0^1 x^3\mathrm{d}x+\int_1^{\frac{3}{2}}(-2x+3)\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}\Big|_0^1+\left(3x-x^2\right)\Big|_1^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}$

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)=2x^3+ax^2+bx(a,b\in\mathbb{R})$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ bằng $\frac{m}{n}\left(m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}^*\right)$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $m+n$

A. -157. **B.** 74. **C.** 13. **D.** 119.

Lời giải

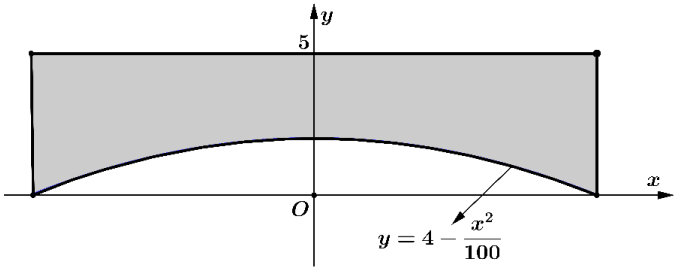
Ta có: $f'(x)=6x^2+2ax+b$.

Từ đồ thị suy ra: $\begin{cases}f'(0)=0\\f'\left(\frac{4}{3}\right)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=0\\a=-4\end{cases}$.

Ta có: $f(x)-f'(x)=2x^3-10x^2+8x$. Cho $f(x)-f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=4\end{array}\right.$.

Vậy diện tích hình phẳng là $S=\int_0^4\left|2x^3-10x^2+8x\right|\mathrm{d}x=\frac{71}{3}\Rightarrow m+n=74$.

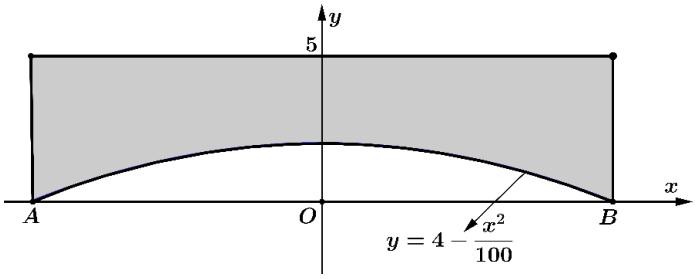
Câu 40: Hình bên dưới là mặt cắt dọc của một chiếc cầu bê tông (phần tô đậm, các đơn vị đều đo bằng mét)



Biết chiều rộng của cầu bằng 9m. Thể tích bê tông ít nhất cần để đúc cầu là

A. $760\,\text{m}^3$. **B.** $780\,\text{m}^3$. **C.** $960\,\text{m}^3$. **D.** $840\,\text{m}^3$.

Lời giải



Parapol $y=4-\dfrac{x^2}{100}$ cắt trục hoành tại hai điểm A,B. Cho $y=0\Rightarrow 4-\dfrac{x^2}{100}=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=20\\x=-20\end{array}\right.$

Do đó $A(-20;0)$ và $B(20;0)$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parapol và trục hoành là $S=\int\limits_{-20}^{20}\left(4-\dfrac{x^2}{100}\right)\text{d}x=\dfrac{320}{3}\left(\text{m}^2\right)$.

Diện tích phần tô đậm bằng $40.5-\dfrac{320}{3}=\dfrac{280}{3}\left(\text{m}^2\right)$.

Khi đó thể tích bê tông ít nhất cần để đúc cầu là $\dfrac{280}{3}.9=840\left(\text{m}^3\right)$.

Câu 41: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2-4x+3\,(P)$ và các tiếp tuyến kẻ từ $A\left(\dfrac{3}{2};-3\right)$ đến đồ thị (P). Tính giá trị của S.

A. $S=\dfrac{9}{8}$. **B.** $S=\dfrac{9}{4}$. **C.** $S=9$. **D.** $S=\dfrac{9}{2}$.

Lời giải

Hàm số $y=f(x)=x^2-4x+3\ (P)$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$ và đạo hàm $y'=f'(x)=2x-4$.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm, với $y_0=x_0^2-4x_0+3$.

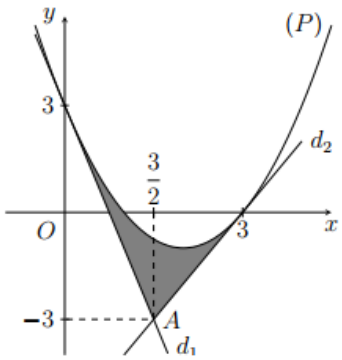
Suy ra phương trình tiếp tuyến của (P) tại M có dạng:

$y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0\Leftrightarrow y=(2x_0-4)(x-x_0)+x_0^2-4x_0+3\ (d)$.

Vì $A\left(\dfrac{3}{2};-3\right)\in d$ nên ta có: $(2x_0-4)\left(\dfrac{3}{2}-x_0\right)+x_0^2-4x_0+3=-3\Leftrightarrow -x_0^2+3x_0=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=3\end{array}\right.$.

Với $x_0=0$ suy ra phương trình tiếp tuyến là $y=-4x+3\ (d_1)$.

Với $x_0=3$ suy ra phương trình tiếp tuyến là $y=2x-6\,(d_2)$.



Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d_1): $x^2-4x+3=-4x+3\Leftrightarrow x=0$.

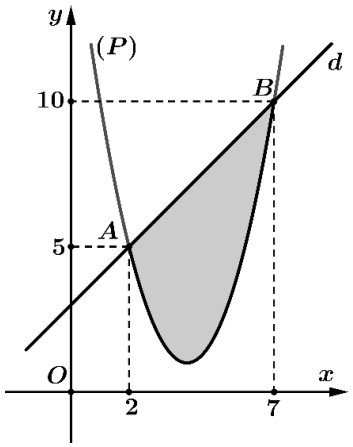
Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (d_2): $2x-6=-4x+3\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d_2): $x^2-4x+3=2x-6\Leftrightarrow x=3$.

Suy ra diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S=\int_0^{\frac{3}{2}}\left|x^2-4x+3-(-4x+3)\right|\mathrm{d}x+\int_{\frac{3}{2}}^{3}\left|x^2-4x+3-(2x-6)\right|\mathrm{d}x=\frac{9}{4}\text{(đvdt)}.$$

Câu 42: Cho hàm số bậc hai $y=f(x)$ có đồ thị (P) và đường thẳng d cắt tại hai điểm như trong hình bên. Biết rằng hình phẳng giới hạn bởi (P) và d có diện tích $S=\dfrac{125}{6}$. Khi đó hãy tính tích phân $\int_2^7(2x-3)f'(x)\mathrm{d}x$.



A. $\dfrac{215}{3}$. **B.** $\dfrac{265}{3}$. **C.** $\dfrac{245}{3}$. **D.** $\dfrac{415}{3}$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta có điểm $A(2;5)$ và $B(7;10)$ thuộc đường thẳng d và Parabol (P)

Suy ra đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(5;5)$

Phương trình đường thẳng $d: y=x+3$

Gọi (P) có phương trình: $y=ax^2+bx+c,(a>0)$

$A,B\in(P)\Rightarrow$ Hệ phương trình: $\begin{cases}4a+2b+c=5\\49a+7b+c=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-4a-2b+5\\49a+7b+5-4a-2b=10\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}c=-4a-2b+5\\b=1-9a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=3+14a\\b=1-9a\end{cases}$

Hình phẳng giới hạn bởi (P) và d có diện tích $S=\dfrac{125}{6}$

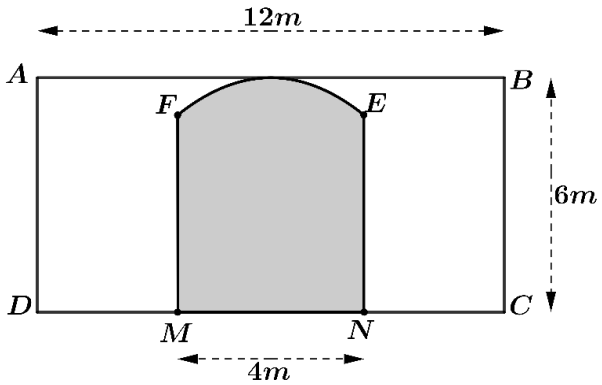
$\Rightarrow\int_2^7\left|x+3-\left(ax^2+bx+c\right)\right|\mathrm{d}x=\dfrac{125}{6}\Rightarrow\int_2^7\left|x+3-\left[ax^2+(1-9a)x+(3+14a)\right]\right|\mathrm{d}x=\dfrac{125}{6}$

$\Leftrightarrow\int_2^7\left[-ax^2+9ax-14a\right]\mathrm{d}x=\dfrac{125}{6}\Leftrightarrow\left(-\dfrac{ax^3}{3}+\dfrac{9ax^2}{2}-14ax\right)\Big|_2^7=\dfrac{125}{6}$

$\Leftrightarrow \frac{125}{6}a = \frac{125}{6} \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow b = -8; c = 17$

(P) có phương trình: $y = f(x) = x^2 - 8x + 17 \Rightarrow f'(x) = 2x - 8 \Rightarrow \int_2^7 (2x-3) f'(x) \mathrm{d}x = \frac{215}{3}$

Câu 43: Một công ty quảng cáo muốn làm một bức tranh trang trí như phần $MNEIF$ được tô đậm trong hình vẽ bên dưới ở chính giữa của một bức tường hình chữ nhật $ABCD$ có $BC = 6\text{m}$, $CD = 12\text{m}$



Biết $MN = 4\text{m}$; cung EIF có hình parabol với đỉnh I là trung điểm của cạnh AB và đi qua hai điểm C, D. Kinh phí làm bức tranh là 1.200.000 đồng/m^2. Hỏi công ty đó cần bao nhiêu tiền để làm bức tranh?

A. 34266666 đồng. **B.** 13866666 đồng. **C.** 14933333 đồng. **D.** 27733333 đồng.

Lời giải

Gọi O là trung điểm cạnh MN và trùng với gốc toạ độ $\Rightarrow M(-2;0); N(2;0)$.

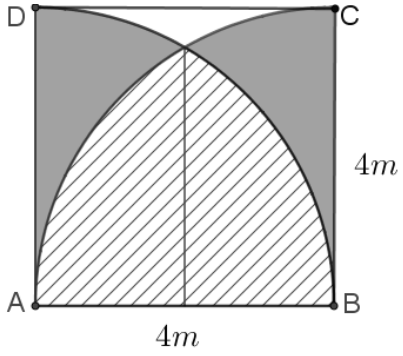
Phương trình parapol đỉnh $I(0;6)$ và đi qua hai điểm $D(-6;0); C(6;0)$ là $(P): y = -\frac{1}{2}x^2 + 6$.

Diện tích giới hạn bởi $(P): y = -\frac{1}{2}x^2 + 6$; $y = 0; x = -2; x = 2$.

Khi đó: $S = \int_{-2}^{2} \left| -\frac{1}{2}x^2 + 6 \right| \mathrm{d}x = \frac{208}{9} (\text{m}^2)$.

Vậy công ty đó cần bao nhiêu tiền để làm bức tranh $\frac{208}{9}.1.200.000 = 27733333$ đồng.

Câu 44: Một biển quảng cáo có dạng hình vuông $ABCD$ cạnh $AB = 4\text{m}$. Trên tấm biển đó có các đường tròn tâm A và đường tròn tâm B cùng bán kính $R = 4\text{m}$, hai đường tròn cắt nhau như hình vẽ. Chi phí để sơn phần gạch chéo là 150 000 đồng/m^2, chi phí sơn phần màu đen là 100 000 đồng/m^2 và chi phí để sơn phần còn lại là 250 000 đồng/m^2



Hỏi số tiền để sơn biển quảng cáo theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?

A. 3,017 triệu đồng. **B.** 1,213 triệu đồng. **C.** 2,06 triệu đồng. **D.** 2,195 triệu đồng.

Lời giải

Gọi I là giao điểm của 2 cung tròn $AC;BD$. Chọn gốc toạ độ $A(0;0) \Rightarrow B(4,0)$

Xét cung tròn có phương trình $y=\sqrt{16-x^2}$

Phần diện tích gạch chéo $S=2.\int_2^4 \sqrt{16-x^2}\mathrm{d}x=16\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{16\pi}{3}-4\sqrt{3}$

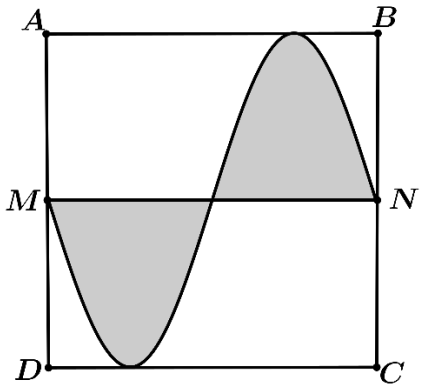
Phần diện tích màu đen: $2.\left(\frac{1}{4}\pi.4^2-\frac{16\pi}{3}+4\sqrt{3}\right)=\frac{-8\pi}{3}+8\sqrt{3}$

Phần diện tích còn lại: $16-\left(\frac{16\pi}{3}-4\sqrt{3}+\frac{-8\pi}{3}+8\sqrt{3}\right)=16-\frac{8\pi}{3}-4\sqrt{3}$

Số tiền để sơn biển quảng cáo:

$\left(\frac{16\pi}{3}-4\sqrt{3}\right).150\ 000+\left(\frac{-8\pi}{3}+8\sqrt{3}\right).100\ 000+\left(16-\frac{8\pi}{3}-4\sqrt{3}\right).250\ 000=2{,}195$ triệu đồng.

Câu 45: Bác An có mảnh vườn hình chữ nhật $ABCD$, chiều dài $AB=2\pi(m)$, chiều rộng $BC=3(m)$. Bác muốn trồng hoa trên dải đất (phần tô đậm) được giới hạn bởi đường MN (với M,N lần lượt là trung điểm của AD,BC) và một đường hình sin (tham khảo hình vẽ). Diện tích đất trồng hoa bằng.



A. $3\mathrm{m}^2$. **B.** $5{,}57\mathrm{m}^2$. **C.** $7{,}14\mathrm{m}^2$. **D.** $6\mathrm{m}^2$.

Lời giải

Dựng hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

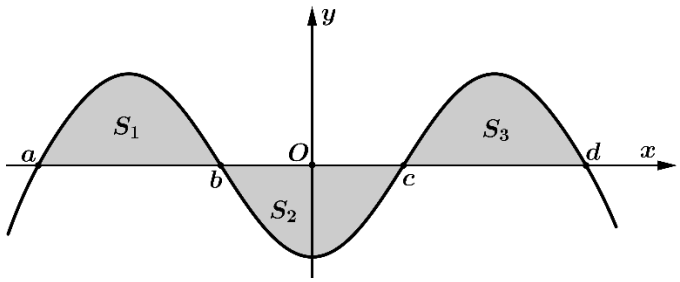
Vì phần đường cong là một đồ thị hình sin đi qua các điểm $(0;0),\left(-\frac{\pi}{2};1{,}5\right),(-\pi;0),\left(\frac{\pi}{2};1{,}5\right)$ $,(\pi;0)$ nên đường cong có phương trình $y=\frac{3}{2}\sin x$

Khi đó phần diện tích đất trồng hoa giới hạn bởi các đồ thị hàm số: $\begin{cases} y=\frac{3}{2}\sin x \\ y=0 \\ x=-\pi;x=\pi \end{cases}$

Do đó diện tích đất trồng hoa là $S=\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{3}{2}\sin x\right|\mathrm{d}x=6\mathrm{m}^2$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;d]$ và có đồ thị như hình vẽ. Biết đồ thị $f(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm a,b,c,d, đồng thời tạo với trục hoành và 2 đường thẳng $x=a, x=d$ thành một hình phẳng (H) gồm 3 phần có diện tích lần lượt là S_1, S_2, S_3 như hình vẽ.



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

b) $S_2=-\int_c^b \left|f(x)\right|\mathrm{d}x$

c) $S_3=-\int_c^d f(x)\mathrm{d}x$

d) $S_{(H)}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_b^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^d f(x)\mathrm{d}x$

Lời giải

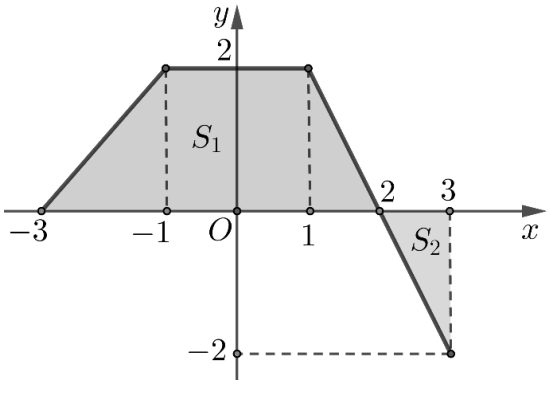
a) Đúng: Dựa vào hình vẽ, ta có: $S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

b) Sai: Dựa vào hình vẽ, ta có: $S_2=\int_c^b \left|f(x)\right|\mathrm{d}x=-\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ (do $f(x)\le 0, x\in[b;c]$).

c) Sai: Dựa vào hình vẽ, ta có: $S_3=\int_c^d \left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\int_c^d f(x)\mathrm{d}x$ (do $f(x)\ge 0, x\in[c;d]$).

d) Đúng: Dựa vào hình vẽ, ta có: $S_{(H)}=\int_a^d \left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_b^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^d f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-3;3]$ có đồ thị như hình vẽ, Biết rằng $f(x)$ tạo với trục hoành và 2 đường thẳng $x=-3, x=3$ một hình phẳng (H) gồm 2 phần có diện tích lần lượt là S_1, S_2.



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $S_{(H)}=\int_{-3}^{3} f(x)\mathrm{d}x$

b) $S_2=\left|\int_2^3(-2x+4)\mathrm{d}x\right|=1$

c) $S_1=\int_{-3}^{-1}(x+3)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}2\mathrm{d}x+\int_1^2(-2x+4)\mathrm{d}x$

d) $S_{(H)}=S_1-\int_2^3(-2x+4)\mathrm{d}x$

Lời giải

Xét hàm số $y=f(x)$, ta có: $f(x)=\begin{cases}x+3, & x\in[-3;-1]\\ 2, & x\in[-1;1]\\ -2x+4, & x\in[1;3]\end{cases}$

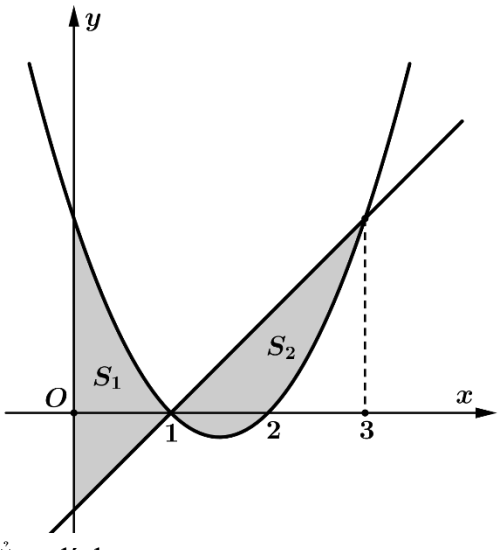
a) Sai: Ta có: $S_{(H)}=\int_{-3}^{3}|f(x)|\mathrm{d}x$.

b) Đúng: Do $f(x)=-2x+4\le 0, x\in[2;3]$ nên $S_2=\int_2^3|-2x+4|\mathrm{d}x=\left|\int_2^3(-2x+4)\mathrm{d}x\right|=1$.

c) Đúng: Dựa vào hình vẽ, ta có: $S_1=\int_{-3}^{2}|f(x)|\mathrm{d}x=\int_{-3}^{-1}(x+3)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}2\mathrm{d}x+\int_1^2(-2x+4)\mathrm{d}x$.

(d) Đúng: Ta có: $S_{(H)}=\int_{-3}^{3}|f(x)|\mathrm{d}x=S_1+S_2=S_1-\int_2^3(-2x+4)\mathrm{d}x$.

Câu 3: Cho đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$ và $y=x-1$ và $S_1;S_2$ là phần diện tích phần được tô như trong hình dưới.



Xét tính đúng sai của các khẳng đính sau:

a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$ và $y=x-1$ là

$\int_0^3(-x^2+4x-3)\mathrm{d}x$

b) $S_1=\frac{4}{3}$

c) $S_1=S_2$

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$; $y=x-1$; $x=0$; $x=3$ là

$$\int_0^3 \left(-x^2+4x-3\right)\mathrm{d}x = 1.$$

Lời giải

a) Sai: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$ và $y=x-1$ là $\int_1^3 \left(x-1-\left(x^2-3x+2\right)\right)\mathrm{d}x = \int_1^3 \left(-x^2+4x-3\right)\mathrm{d}x$.

b) Đúng: $S_1 = \int_0^1 \left(x^2-3x+2-\left(x-1\right)\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x^2-4x+3\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}-2+3 = \frac{4}{3}$.

c) Đúng: $S_2 = \int_1^3 \left(x-1-\left(x^2-3x+2\right)\right)\mathrm{d}x = \int_1^3 \left(-x^2+4x-3\right)\mathrm{d}x = \left(-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x\right)\Big|_1^3$

$= -9+18-9-\left(-\frac{1}{3}+2-3\right) = \frac{4}{3}$

Vậy $S_1 = S_2$.

d) Sai: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$; $y=x-1$; $x=0$; $x=3$ là $\int_0^3 \left|-x^2+4x-3\right| dx = S_1+S_2 = \frac{8}{3}$.

Câu 4: Cho hàm số $y=x^3-3x+2$ có đồ thị là (C) và đường thẳng $y=-2x+8$ có đồ thị là (d) và các đường thẳng $x=1$, $x=3$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (d), trục hoành và đường thẳng $x=1$; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (d), trục hoành và đường thẳng $x=5$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng (d) là 3.

b) Hàm số $y=x^3-3x+2$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

c) $S_1 > S_2$.

d) Tính diện tích giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=x^3-3x+2$, $y=-2x+8$ và hai đường thẳng $x=1$, $x=3$ bằng 23.

Lời giải

a) Sai: Xét phương trình hoành độ: $x^3-3x+2=-2x+8 \Leftrightarrow x^3-x-6=0 \Leftrightarrow x=2$.

Suy ra (C) cắt (d) tại duy nhất một điểm.

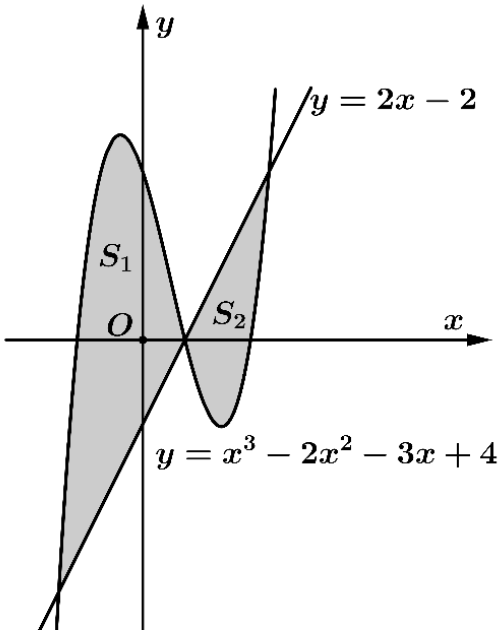
b) Đúng: Ta có: $y'=3x^2-3=0 \Rightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$.

c) Đúng: Ta có $S_1 = \int_1^4 \left(8-2x\right)\mathrm{d}x = 9$ và $S_2 = -\int_4^5 \left(8-2x\right)\mathrm{d}x = 1$ nên suy ra $S_1 > S_2$.

d) Sai: Diện tích giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=x^3-3x+2$, $y=-2x+8$ và hai đường thẳng $x=1$, $x=3$ bằng:

$$\int_1^3 \left|x^3-3x+2-(8-2x)\right|dx=\int_1^2 \left|x^3-x-6\right|dx+\int_2^3 \left|x^3-x-6\right|dx=\frac{15}{4}+\frac{31}{4}=\frac{46}{4}=\frac{23}{2}.$$

Câu 5: Cho đồ thị hàm số $y=x^3-2x^2-3x+4$ có đồ thị (C) và đường thẳng $(d):y=2x-2$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại ba điểm $A(-2;-6),B(1;0),C(3;4)$.

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), trục hoành, đường thẳng $x=-1;x=2$ bằng $\frac{21}{4}$

c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và đường thẳng d bằng $\frac{253}{12}$.

d) Biết đường thẳng d cắt đồ thị (C) thành hai miền S_1 và S_2. Khi đó tỉ số $\frac{S_1}{S_2}=\frac{63}{16}$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3-2x^2-3x+4=2x-2\Leftrightarrow x^3-2x^2-5x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\Rightarrow y=-6\\ x=1\Rightarrow y=0\\ x=3\Rightarrow y=4\end{array}\right.$$

Vậy đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại ba điểm $A(-2;-6),B(1;0),C(3;4)$.

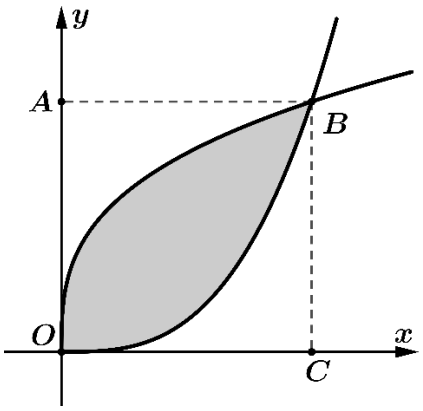
b) Sai: Diện tích cần tính là: $S=\int_{-1}^2 \left|x^3-2x^2-3x+4\right|dx=\frac{97}{12}$.

c) Đúng: Ta có $(S):\begin{cases}y=f(x)=x^3-2x^2-3x+4\\ y=g(x)=2x-2\\ x=-2\\ x=3\end{cases}\Rightarrow f(x)-g(x)=x^3-2x^2-5x+6.$

Diện tích $S = S_1 + S_2 = \int\limits_{-2}^{1} \left| x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \right| \mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{3} \left| x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \right| \mathrm{d}x = \frac{63}{4} + \frac{16}{3} = \frac{253}{12}$.

d) Sai: Ta có $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{63}{4}}{\frac{16}{3}} = \frac{189}{64}$.

Câu 6: Cho một viên gạch men có dạng hình vuông $OABC$ như hình vẽ. Sau khi tọa độ hóa, ta có $O(0;0)$, $A(0;1)$, $B(1;1)$, $C(1;0)$ và hai đường cong lần lượt là đồ thị hàm số $y = x^3$ và $y = \sqrt[3]{x}$



a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt[3]{x}$, trục Ox, đường thẳng $x = 0$ và đường thẳng $x = 1$ được tính bằng công thức $S = \int\limits_{0}^{1} |\sqrt[3]{x}| \mathrm{d}x$.

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3$, trục Ox ,đường thẳng $x = 0$ và đường thẳng $x = 1$ có giá trị bằng $\frac{3}{4}$ (đvdt).

c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3$ và $y = \sqrt[3]{x}$, đường thẳng $x = 0$ và đường thẳng $x = 1$ được tính bằng công thức $S = \int\limits_{0}^{1} \left(x^3 - \sqrt[3]{x} \right) \mathrm{d}x$.

d) Diện tích phần không được tô đậm trên viên gạch men có giá trị bằng $\frac{1}{2}$ (đvdt).

Lời giải

a) Đúng: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox, đường thẳng $x = a, x = b$ được tính bằng công thức $S = \int\limits_{a}^{b} |f(x)| \mathrm{d}x$

b) Sai: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3$, trục Ox ,đường thẳng $x = 0$ và đường thẳng $x = 1$.

Ta có $S = \int\limits_{0}^{1} \left| x^3 \right| \mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$ (đvdt).

c) Sai: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$, đường thẳng $x=a$ và đường thẳng $x=b$ được tính bằng công thức $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$, vì phần đồ thị của hàm số $y=x^3$ nằm dưới phần đồ thị của hàm số $y=\sqrt[3]{x}$, nên diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3$ và $y=\sqrt[3]{x}$, đường thẳng $x=0$ và đường thẳng $x=1$ được tính bằng công thức $S=\int_0^1\left(-x^3+\sqrt[3]{x}\right)\mathrm{d}x$

d) Đúng: Diện tích hình vuông có cạnh bằng 1 là $S=1^2=1$ (đvdt)

Gọi S_1 là diện tích phần tô đậm: $S_1=\int_0^1\left(\sqrt[3]{x}-x^3\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x^{\frac{1}{3}}-x^3\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}$ (đvdt),

Vậy diện tích phần không được tô đậm trên viên gạch men bằng $S-S_1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ (đvdt).

Câu 7: Các nhà kinh tế sử dụng đường cong Lorenz để minh họa sự phân phối thu nhập trong một quốc gia. Gọi x là đại diện cho phần trăm số gia đình trong một quốc gia và y là phần trăm tổng thu nhập, mô hình $y=x$ sẽ đại diện cho một quốc gia mà các gia đình có thu nhập như nhau. Đường cong Lorenz $y=f(x)$, biểu thị sự phân phối thu nhập thực tế. Diện tích giữa hai mô hình này, với $0\le x\le 100$, biểu thị "sự bất bình đẳng về thu nhập" của một quốc gia. Năm 2005, đường cong Lorenz của Hoa Kỳ có thể được mô hình hóa bởi hàm số

$$y=\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2, 0\le x\le 100,$$

Trong đó x được tính từ các gia đình nghèo nhất đến giàu có nhất

Theo R.Larson, Brief Calculus: An Applied Approach, 8th edition, Cengage Learning, 2009)

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tính theo thứ tự từ các gia đình nghèo nhất đến giàu nhất, tổng thu nhập thực tế của 60% các gia đình đầu tiên chiếm chưa đến 30% so với tổng thu nhập của toàn bộ các gia đình.

b) Nếu sắp xếp các gia đình theo thứ tự từ nghèo nhất đến giàu nhất, rồi chia thành 10 nhóm bằng nhau từ 1 đến 10, tổng thu nhập của các gia đình trong nhóm 3 chiếm khoảng 8,56% tổng thu nhập của toàn bộ các gia đình.

c) Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kì năm 2005 được xác định bởi công thức:

$$\int_0^{100}\left[x-\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2\right]\mathrm{d}x$$

d) Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kỳ năm 2005 đã vượt quá 2000.

Lời giải

a) Đúng: Tính theo thứ tự từ các gia đình nghèo nhất đến giàu nhất, tổng thu nhập của 60% các gia đình của đầu tiên chiếm tỷ lệ trong tổng thu nhập là: $f(60)=27,321529(\%)$.

b) Sai: Nếu sắp xếp các gia đình theo thứ tự từ nghèo nhất đến giàu nhất, rồi chia thành 10 nhóm bằng nhau từ 1 đến 10, tổng thu nhập của các gia đình trong nhóm 3 chiếm khoảng 8,56% tổng thu nhập của toàn bộ các gia đình.

Nếu sắp xếp các gia đình theo thứ tự từ nghèo đến giàu, rồi chia thành 10 nhóm bằng nhau, mỗi nhóm chiếm 10% số gia đình của Hoa Kỳ.

Tổng thu nhập của 30% số gia đình (là các gia đình thuộc nhóm $1,2,3$) chiếm tỷ lệ trong tổng thu nhập của tất cả các gia đình là: $f(30)=8,561476\,(\%)$.

Tổng thu nhập của 20% số gia đình (là các gia đình thuộc nhóm $1,2$) chiếm tỷ lệ trong tổng thu nhập của tất cả các gia đình là: $f(20)=5,774409\,(\%)$.

$\Rightarrow$ Tỷ lệ của tổng thu nhập các gia đình nhóm thứ 3 so với toàn bộ các gia đình là:
$f(30)-f(20)=2,787067(\%)$.

c) Sai: Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kì năm 2005 được xác định bởi công thức:
$\int_0^{100}\left[x-\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2\right]\mathrm{d}x$.

Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kì vào năm 2005 là diện tích hình phẳng S giới hạn bởi hai đồ thị:

$$\begin{cases} y=x \\ y=\left(0,00061x^2+0,0218+1,723\right)^2 \\ x=0;x=100 \end{cases} \Rightarrow S=\int_0^{100}\left|\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2-x\right|\mathrm{d}x.$$

Cách 1:

Sử dụng máy tính cầm tay, ta thấy phương trình $\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2-x=0$ có hai ngiệm $x=a;x=b\,(a<b)$ thuộc $[0;100]$.

Xét dấu biểu thức $g(x)=\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2-x$ ta được:

x	0		a		b		100
$g(x)$		+	0	−	0	+	

Suy ra: $S=\int_0^{100}|g(x)|\mathrm{d}x=\int_0^{a}|g(x)|\mathrm{d}x+\int_a^{b}|g(x)|\mathrm{d}x+\int_b^{100}|g(x)|\mathrm{d}x$.

$=\left|\int_0^{a}g(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_a^{b}g(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_b^{100}g(x)\mathrm{d}x\right|=\int_0^{a}g(x)\mathrm{d}x-\int_a^{b}g(x)\mathrm{d}x+\int_b^{100}g(x)\mathrm{d}x$.

Cách 2:

Sử dụng máy tính cầm tay ta được: $S=\int_0^{100}\left|\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2-x\right|\mathrm{d}x\approx 2068,9$.

Kiểm tra phép tính của đề bài, ta có: $\int_0^{100}\left[x-\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2\right]\mathrm{d}x=2059,3131$.

d) Đúng: Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kỳ năm 2005 đã vượt quá 2000.

Sự bất bình đẳng thu nhập của Hoa Kỳ năm 2005 là:

$$S=\int_0^{100}\left|\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2-x\right|\mathrm{d}x\approx 2068,9.$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Tìm a để diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi $(P): y=\dfrac{x^2-2x}{x-1}$, đường thẳng $d: y=x-1$ và $x=a,\ x=2a\ (a>1)$ bằng $\ln 3$?

Lời giải

Ta có: $S=\displaystyle\int_a^{2a}\left|\frac{x^2-2x}{x-1}-(x-1)\right|\mathrm{d}x=\int_a^{2a}\left|\frac{1}{x-1}\right|\mathrm{d}x=\int_a^{2a}\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x$ (vì $a>1$) $=\ln(x-1)\Big|_a^{2a}$ (vì $a>1$)

$=\ln(2a-1)-\ln(a-1)=\ln\dfrac{2a-1}{a-1}$.

Ta có: $\ln\dfrac{2a-1}{a-1}=\ln 3\Leftrightarrow\dfrac{2a-1}{a-1}=3\Leftrightarrow a=2.$

Câu 2: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$; $y=x$ và hai đường thẳng $x=2; x=3$ bằng $S=a\ln 2+b$. Giá trị của $a+b$ bằng bao nhiêu?

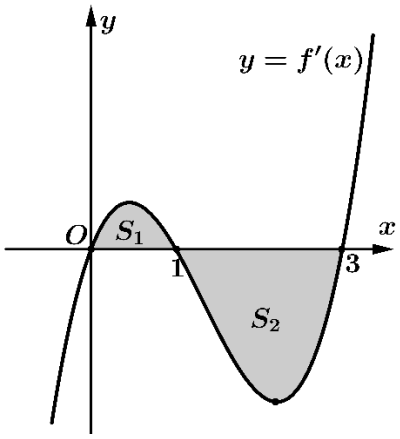
Lời giải

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$; $y=x$ và hai đường thẳng $x=2; x=3$ là: $S=\displaystyle\int_2^3\left|\frac{x^2-2x+3}{x-1}-x\right|\mathrm{d}x=\int_2^3\left|\frac{-x+3}{x-1}\right|\mathrm{d}x=\int_2^3\left|-1+\frac{2}{x-1}\right|\mathrm{d}x=$

$=\left(-x+2\ln|x-1|\right)\Big|_2^3=(-3+2\ln 2)+2=-1+2\ln 2$

Vậy $a=2; b=-1\Rightarrow a+b=1$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình dưới. Biết rằng diện tích của các phần hình phẳng A và B lần lượt là $S_A=4$ và $S_B=10$. Tính giá trị của $f(3)$, biết giá trị của $f(0)=2$.



Lời giải

Hình phẳng A được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$, trục hoành $y=0$, trục tung $x=0$ và đường thẳng $x=1$ nên diện tích hình phẳng A là:

$S_A = \int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\big|_0^1 = f(1) - f(0) \Rightarrow f(1) = S_A + f(0) = 4 + 2 = 6.$

Hình phẳng B được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$, trục hoành $y = 0$, đường thẳng $x = 1$ và đường thẳng $x = 3$ nên diện tích hình phẳng B là:

$S_B = \int_1^3 |f'(x)|\,\mathrm{d}x = -\int_1^3 f'(x)\,\mathrm{d}x = -f(x)\big|_1^3 = -\left[f(3) - f(1)\right] = -f(3) + f(1).$

Suy ra $f(3) = f(1) - S_B = 6 - 10 = -4$.

Vậy $f(3) = -4$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 7 - 4x^3 & \text{khi } 0 \le x \le 1 \\ 4 - x^2 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và các đường thẳng $x = 0, x = 3, y = 0$.

Lời giải

Ta có: $S = \int_0^1 \left(7 - 4x^3\right)dx + \int_1^2 \left(4 - x^2\right)dx + \int_2^3 \left(x^2 - 4\right)dx$

$= \left(7x - x^4\right)\Big|_0^1 + \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2 + \left(\frac{x^3}{3} - 4x\right)\Big|_2^3 = 6 + 4 - \frac{7}{3} - 3 - \frac{8}{3} + 8 = 10.$

Câu 5: Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ và được giới hạn bởi các đường có phương trình $y = \frac{10}{3}x - x^2$, $y = \begin{cases} -x & \text{khi } x \le 1 \\ x - 2 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Diện tích của (H) bằng bao nhiêu?

Lời giải

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = -x$ và $y = x - 2$ là: $-x = x - 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Diện tích hình phẳng cần tính là: $S = \int_0^1 \left(\frac{10}{3}x - x^2 + x\right)\mathrm{d}x + \int_1^3 \left(\frac{10}{3}x - x^2 - x + 2\right)\mathrm{d}x.$

$\Leftrightarrow S = \int_0^1 \left(\frac{13}{3}x - x^2\right)\mathrm{d}x + \int_1^3 \left(\frac{7}{3}x - x^2 + 2\right)\mathrm{d}x \Leftrightarrow S = \int_0^1 \left(\frac{13}{3}x - x^2\right)\mathrm{d}x + \int_1^3 \left(\frac{7}{3}x - x^2 + 2\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow S = \left(\frac{13}{6}x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{7}{6}x^2 - \frac{x^3}{3} + 2x\right)\Big|_1^3 = \frac{13}{2} = 6{,}5.$

Câu 6: Tại một nhà máy ta gọi $C(x)$ là tổng chi phí (tính theo triệu động) để sản xuất x tấn sản phẩm A trong một tháng. Khi đó đạo hàm $C'(x)$ gọi là chi phí cận biên, cho biết tốc độ tăng tổng chi phí theo lượng sản phẩm được sản xuất. Giả sử chi phí cận biên (tính theo triệu đồng trên tấn) của nhà máy được ước lượng bởi công thức:

$$C'(x) = 5 - 0{,}06x + 0{,}00072x^2 \text{ với } 0 \le x \le 150.$$

Biết rằng $C(0)=30$ triệu đồng, gọi là chi phí cố định. Tính tổng chi phí khi nhà máy sản xuất 100 tấn sản phẩm A trong tháng.

Lời giải

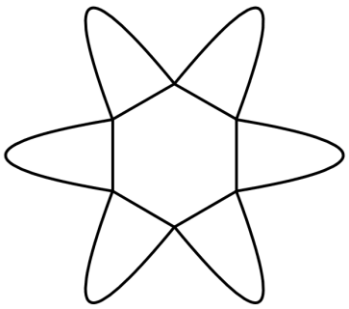
Ta có: $C(100)-C(0)=\int_0^{100} C'(x)\mathrm{d}x=\int_0^{100}\left(5-0,06x+0,00072x^2\right)\mathrm{d}x$

$=5\int_0^{100}\mathrm{d}x-0.06\int_0^{100}x\mathrm{d}x+0.00072\int_0^{100}x^2\mathrm{d}x=5x\left|_0^{100}\right.-0,03x^2\left|_0^{100}\right.+0,00024x^3\left|_0^{100}\right.=440.$

Suy ra $C(100)=C(0)+440=30+440=470$ (triệu đồng).

Vậy khi nhà máy sản xuất 100 tấn sản phẩm loại A trong tháng thì tổng chi phí là 470 triệu đồng.

Câu 7: Để trang trí cho một phòng trong một tòa nhà, người ta vẽ lên tường một hình như sau: trên mỗi cạnh của hình lục giác đều có cạnh bằng 2 dm có một cánh hoa hình parabol, đỉnh của parabol cách cạnh 3 dm và nằm phía ngoài hình lục giác, đường parabol đó đi qua hai đầu mút của mỗi cạnh (xem hình sau). Hãy tính diện tích của hình nói trên (kể cả hình lục giác đều) để mua sơn trang trí cho phù hợp *(kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai sau dấu phẩy)*



Lời giải

Hình lục giác đều có cạnh bằng 2dm .

Diện tích của hình lục giác đều có thể được tính bằng công thức: $S_{\text{Luc giac}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}.a^2$ với $a=2\text{dm}$

Thay vào công thức ta có: $S_{\text{Luc giac}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}.2^2=6\sqrt{3}\left(\text{dm}^2\right)$

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho trung điểm của cạnh là AB, với $A(1,0),B(-1,0)$ và đỉnh $I(0,3)$ của parabol.

Phương trình của parabol có dạng: $y=ax^2+b$

Do parabol đi qua các điểm A và B nên ta có: $y=-3x^2+3$

Diện tích mỗi cánh hoa được tính bằng tích phân: $S_{\text{Cánh hoa}}=\int_{-1}^{1}\left(-3x^2+3\right)\mathrm{d}x$

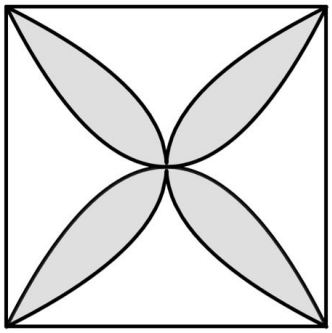
Tính tích phân: $S_{\text{cánh hoa}}=\left[-x^3+3x\right]\Big|_{-1}^{1}=(-1+3)-(1-3)=4\text{dm}^2$

Hình có 6 cánh hoa nên tổng diện tích của các cánh hoa là: $S_{\text{Tong cánh hoa}}=6.4=24\ \text{dm}^2$

Tổng diện tích của hình bao gồm cả hình lục giác và các cánh hoa là:

$$S_{\text{Tong}} = S_{\text{Luc giác}} + S_{\text{Tong cánh hoa}} = 6\sqrt{3} + 24 \approx 34,39\,\text{dm}^2$$

Câu 8: Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 60 cm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô mầu sẫm như hình vẽ bên).



Tính diện tích phần cánh hoa của viên gạch.

Lời giải

Chọn hệ tọa độ như hình vẽ (1 đơn vị trên trục bằng $10\,\text{cm} = 1\text{dm}$), các cánh hoa tạo bởi các đường parabol có phương trình $y = \frac{x^2}{3}$, $y = -\frac{x^2}{3}, x = -\frac{y^2}{3}, x = \frac{y^2}{3}$.

Diện tích một cánh hoa (nằm trong góc phàn tư thứ nhất) bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{3}, y = \sqrt{3x}$ và hai đường thẳng $x = 0; x = 3$.

Do đó diện tích một cánh hoa bằng: $\int_0^3 \left(\sqrt{3x} - \frac{x^2}{3} \right) \mathrm{d}x = 3\left(\text{dm}^2\right) = 300\left(\text{cm}^2\right)$.

Câu 9: Một doanh nghiệp sản xuất mặt hàng với chi phí cận biên được mô tả bởi hàm số:

$$f(x) = \frac{1}{10}\left(x^2 - 16x + 93\right),\ x \text{ là số sản phẩm sản xuất}$$

Giả sử rằng doanh nghiệp bán được hết số lượng sản phẩm sản xuất được. Biết rằng doanh thu cận biên được mô tả bởi hàm số $g(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^{x-8} + 5$, với x là số lượng sản phẩm được bán ra.

Giả sử rằng tổng chi phí khi chưa sản xuất sản phẩm nào là 0 đồng và tổng doanh thu khi chưa bán được sản phẩm nào là 0 đồng. Hỏi khi sản xuất 8 sản phẩm và bán hết thì doanh nghiệp thu được lợi nhuận là bao nhiêu? *(kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai sau dấu phẩy)*

Lời giải

Hàm tổng chi phí $F(x)$ là nguyên hàm của hàm chi phí cận biên $f(x)$.

Ta có: $F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{10}\left(x^2 - 16x + 93\right)\mathrm{d}x$ và $F(x) = \frac{1}{10}\left(\frac{x^3}{3} - 8x^2 + 93x\right) + C$

Với điều kiện ban đầu $F(0) = 0$ ta có: $\frac{1}{10}\left(\frac{0^3}{3} - 8.0^2 + 93.0\right) + C = 0 \Rightarrow C = 0$

Do đó: $F(x)=\frac{1}{10}\left(\frac{x^3}{3}-8x^2+93x\right)$

Hàm tổng doanh thu $G(x)$ là nguyên hàm của hàm doanh thu cận biên $g(x)$.

Ta có: $G(x)=\int g(x)\mathrm{d}x=\int\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{x-8}+5\right)\mathrm{d}x$ và $G(x)=\frac{1}{\ln\frac{4}{5}}\left(\frac{4}{5}\right)^{x-8}+5x+C$

Với điều kiện ban đầu $G(0)=0$ ta có: $\frac{1}{\ln\frac{4}{5}}\left(\frac{4}{5}\right)^{-8}+5.0+C=0\Rightarrow C=-\frac{1}{\ln\frac{4}{5}}\left(\frac{4}{5}\right)^{-8}$

Do đó: $G(x)=\frac{1}{\ln\frac{4}{5}}\left(\frac{4}{5}\right)^{x-8}+5x-\frac{1}{\ln\frac{4}{5}}\left(\frac{4}{5}\right)^{-8}$

Khi đó $F(8)=\frac{1}{10}\left(\frac{8^3}{3}-8.8^2+93.8\right)$ và $G(8)=\frac{1}{\ln\frac{4}{5}}\left(\frac{4}{5}\right)^{8-8}+5.8-\frac{1}{\ln\frac{4}{5}}\left(\frac{4}{5}\right)^{-8}$

Lợi nhuận khi sản xuất và bán hết 8 sản phẩm là: Lợi nhuận $=G(8)-F(8)\approx 21{,}96$ đồng

Câu 10: Người ta sử dụng đường cong Lorenz để minh họa sự phân phối thu nhập trong một quốc gia. Gọi x là đại diện cho phần trăm số gia đình trong một quốc gia và y là phần trăm tổng thu nhập, mô hình $y=x$ sẽ đại diện cho một quốc gia mà các gia đình có thu nhập như nhau. Đường cong Lorenz $y=f(x)$, biểu thị sự phân phối thu nhập thực tế. Diện tích giữa hai mô hình này, với $0\le x\le 100$, biểu thị "sự bất bình đẳng về thu nhập" của một quốc gia. Năm 2009, đường cong Lorenz của Hoa Kỳ có thể được mô hình hóa bởi hàm số:

$$y=\left(0{,}00061x^2+0{,}0224x+1{,}666\right)^2,0\le x\le 100,$$

Trong đó x được tính từ các gia đình nghèo nhất đến giàu có nhất. Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kì vào năm 2009 là bao nhiêu?

Lời giải

Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kì vào năm 2009 là diện tích hình phẳng S giới hạn bởi hai đồ thị:

$$\begin{cases}y=x\\ y=\left(0{,}00061x^2+0{,}0224x+1{,}666\right)^2\\ x=0;x=100\end{cases}\Rightarrow S=\int_0^{100}\left|\left(0{,}00061x^2+0{,}0224x+1{,}666\right)^2-x\right|\mathrm{d}x.$$

Sử dụng máy tính cầm tay, ta được $S\approx 2085{,}5$.

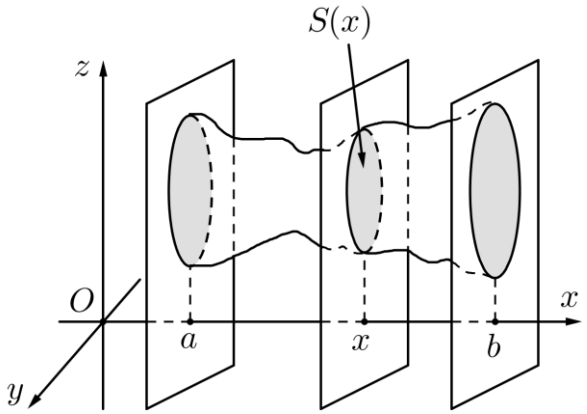
----------HẾT----------

Dạng 2: Ứng dụng tích phân để tính thể tích khối tròn xoay

Phương pháp:

Thể tích vật thể tính theo mặt cắt vuông góc trục hoành

Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b, $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $(a \le x \le b)$

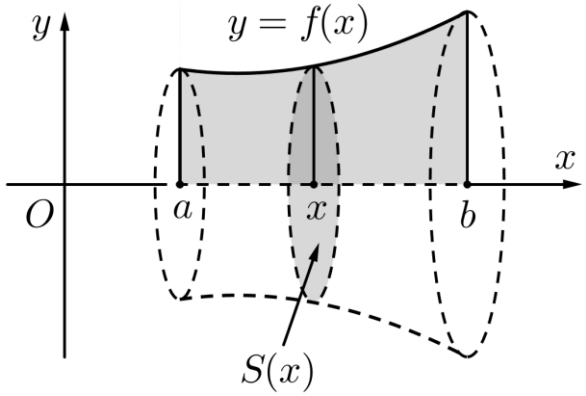


Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$

Khi đó, thể tích của vật thể B được xác định: $\boxed{V = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x}$.

Thể tích khối tròn xoay

Xoay miền hình phẳng giới hạn: $\begin{cases} y = f(x) \\ Ox; x = a; x = b \end{cases}$ quanh trục Ox.



Bước 1: Giải $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = c; c \in [a;b]$.

Bước 2: Tính $V = \pi \int_a^b \left(f(x) \right)^2 \mathrm{d}x$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành:

a) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thì hàm số $y = \sqrt{x-1}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 2$ và $x = 5$ quanh trục Ox.

b) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \cos x}$, trục hoành và các đường

thẳng $x=0,\ x=\dfrac{\pi}{2}$ quanh trục hoành.

c) Khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=e^x$, trục Ox và hai đường thẳng $x=0; x=1$ quanh trục Ox.

d) Khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{\tan \mathrm{x}}, y=0, x=0, x=\dfrac{\pi}{4}$ quay xung quanh trục Ox.

e) Khi quay hình phẳng xác định bởi các đường $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2$, $y=0$, $x=0$ và $x=3$ quanh trục Ox.

f) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{5-x}, x\le 5$, trục tung, trục hoành quay quanh trục hoành.

Lời giải

a) Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng D quanh trục Ox ta có: $V=\pi\displaystyle\int_2^5\left(\sqrt{x}-1\right)^2\mathrm{d}x$

b) Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức:

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{2+\cos x}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2+\cos x)\mathrm{d}x=\pi(2x+\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi(\pi+1).$$

c) Ta có thể tích cần tìm là $V=\pi\displaystyle\int_0^1\left(e^x\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^1 e^{2x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}e^{2x}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}\left(e^2-1\right)$.

d) Thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra là:

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{\tan x}\right)^2.\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x.\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}.\mathrm{d}x=-\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x}$$

$$=-\pi\left(\ln|\cos x|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\pi\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi\ln 2}{2}.$$

e) Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox là :

$$V=\pi\int_0^3\left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^3\left(\frac{1}{9}x^6-\frac{2}{3}x^5+x^4\right)\mathrm{d}x=\frac{81\pi}{35}.$$

Vậy thể tích khối tròn xoay cần tính là : $V=\dfrac{81\pi}{35}$.

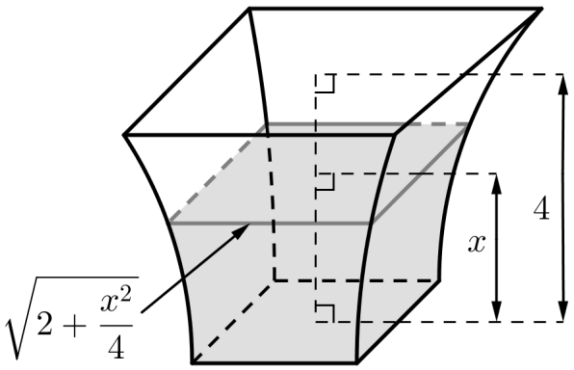
f) Xét phương trình hoành độ giao điểm hai hàm số là: $\sqrt{5-x}=0\Leftrightarrow 5-x=0\Leftrightarrow x=5$

Khi đó D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $\begin{cases}y=f(x)=\sqrt{5-x}\\ y=0\\ x=0; x=5\end{cases}$

Thể tích khối tròn xoay khi quay D quanh Ox là:

$$V=\pi\int_0^5\left(\sqrt{5-x}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^5(5-x)\mathrm{d}x=\pi\left(5x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^5=\frac{25\pi}{2}.$$

Bài tập 2: Một bình chứa nước có hình dạng như hình sau. Biết rằng khi nước trong bình có chiều cao x (dm) ($0\le x\le 4$) thì mặt nước là hình vuông có cạnh $\sqrt{2+\frac{x^2}{4}}$ (dm). Tính dung tích của bình.

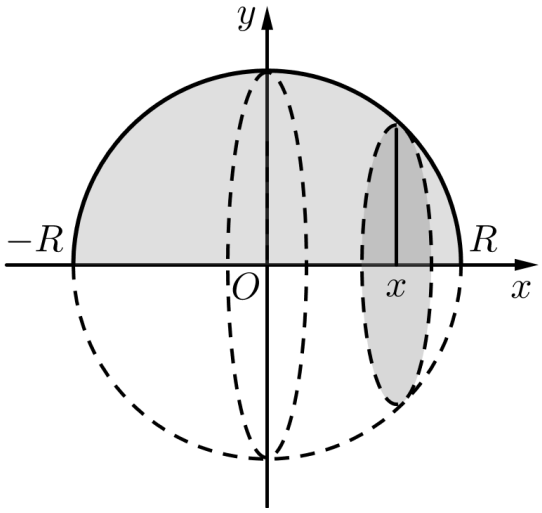


Lời giải

Mặt nước là hình vuông có cạnh $\sqrt{2+\frac{x^2}{4}}$ (dm) nên có diện tích là $\left(\sqrt{2+\frac{x^2}{4}}\right)^2=2+\frac{x^2}{4}\left(\mathrm{dm}^2\right)$

Thể tích của bình chứa nước là: $V=\int_0^4\left(2+\frac{x^2}{4}\right)\mathrm{d}x=\frac{40}{3}\left(\mathrm{dm}^3\right)$

Bài tập 3: Sử dụng tích phân, tính thể tích khối cầu có bán kính R.



Lời giải

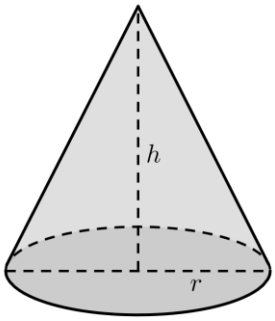
Khối cầu có bán kính R thì phương trình mặt cầu trong không gian là $x^2+y^2+z^2=R^2$

Xét mặt cát ngang của khối cầu qua trục x ta có $y^2+z^2=R^2-x^2$

Diện tích mặt cắt ngang khi đó là $\pi\left(R^2-x^2\right)$

Khi đó thể tích khối cầu là $V=\int\limits_{-R}^{R}\pi\left(R^2-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi R^3$

Bài tập 4: Sử dụng tích phân, tính thể tích khối nón có bán kính đáy r và chiều cao h.



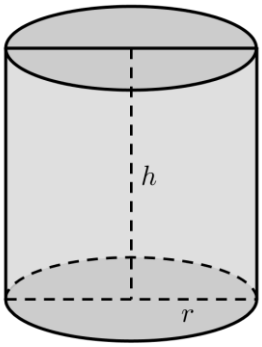
Lời giải

Khối nón có bán kính đáy là r và chiều cao là h.

Phương trình đường sinh của khối nón trong mặt phẳng là $y=\frac{r}{h}x$

Khi đó thể tích của khối nón là $V=\int\limits_{0}^{h}\pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\pi r^2h$.

Bài tập 5: Sử dụng tích phân, tính thể tích khối trụ có bán kính đáy r và chiều cao h.



Lời giải

Để tính thể tích hình trụ bằng tích phân, ta có thể xem khối trụ như một tập hợp các đĩa tròn có độ dày vô cùng nhỏ Δx xếp chồng lên nhau từ đáy đến đỉnh. Mỗi đĩa có diện tích là πr^2.

Khi đó thể tích của một đĩa nhỏ là $\Delta V=\pi r^2\Delta x$

Tổng thể tích của khối trụ là tổng của tất cả các đĩa từ $x=0$ đến $x=h$ nghĩa là $V=\int\limits_{0}^{h}\pi r^2\mathrm{d}x$

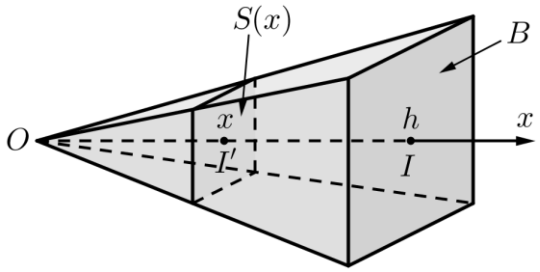
Khi đó $V=\pi r^2\int\limits_{0}^{h}\mathrm{d}x=\pi r^2h$

Bài tập 6: Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1\le x\le 3)$ thì được thiết diện là một hình chữ nhật có hai cạnh là $3x$ và x^2.

Lời giải

Ta có diện tích thiết diện: $S(x)=3x.x^2=3x^3$. Khi đó $V=\int_1^3 3x^3\mathrm{d}x=\frac{3}{4}x^4\Big|_1^3=60$.

Bài tập 7: Cho khối chóp có chiều cao bằng h và diện tích đáy bằng B. Chọn trục Ox vuông góc với mặt phẳng đáy tại điểm I sao cho gốc O trùng với đỉnh của khối chóp và có hướng xác định bởi vectơ $\overrightarrow{OI}$. Khi đó $OI=h$. Một mặt phẳng (P) vuông góc với trục Ox tại x $(0\le x\le h)$, cắt khối chóp theo hình phẳng có diện tích $S(x)$.



a) Chứng minh rằng $S(x)=B\frac{x^2}{h^2}$.

b) Áp dụng tích phân tính thể tích khối chóp đó.

Lời giải

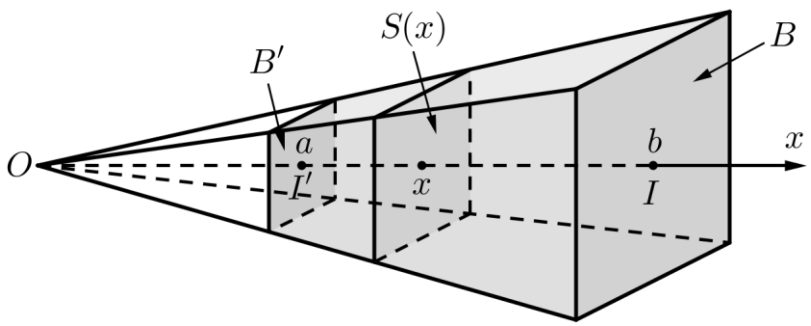
a) Khối chóp có đỉnh là O và có diện tích đáy là B. Mặt phẳng (P) vuông góc với trục Ox tại x cắt khối chóp tạo thành một hình phẳng có diện tích $S(x)$.

Do mặt phẳng (P) song song với đáy của khối chóp, hình phẳng cắt được là một hình đồng dạng với đáy. Tỉ lệ đồng dạng giữa hai hình là $\frac{x}{h}$.

Diện tích của hình đồng dạng tỉ lệ bình phương của tỉ lệ đồng dạng nên $S(x)=B\left(\frac{x}{h}\right)^2=B.\frac{x^2}{h^2}$

b) Để tính thể tích của khối chóp, ta sử dụng tích phân của diện tích mặt cắt theo chiều cao x từ 0 đến h ta được: $V=\int_0^h S(x)\mathrm{d}x=\int_0^h B.\frac{x^2}{h^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.B.h$.

Bài tập 8: Cho khối chóp cụt đều tạo bởi khối chóp đỉnh S, diện tích hai đáy lần lượt là B, B' và chiều cao h. Chọn trục Ox chứa đường cao của khối chóp và gốc O trùng với đỉnh S. Hai mặt phẳng đáy của khối chóp cụt đều lần lượt cắt Ox tại I và I'. Đặt $OI=b, OI'=a$ $(a<b)$. Một mặt phẳng (P) vuông góc với trục Ox tại x $(a\le x\le b)$, cắt khối chóp cụt đều theo hình phẳng có diện tích $S(x)$.



a) Chứng minh rằng $S(x)=B\dfrac{x^2}{b^2}$.

b) Dựa vào tích phân tính thể tích khối chóp cụt đều đó.

Lời giải

Khối chóp cụt đều có hai đáy với diện tích lần lượt là B và B'. Khi mặt phẳng (P) cắt khối chóp cụt tại vị trí x thì diện tích của thiết diện là $S(x)$

Diện tích của thiết diện thay đổi theo tỉ lệ bình phương của khoảng cách từ đỉnh S đến mặt cắt.

Cụ thể diện tích $S(x)$ tỉ lệ với bình phương của khoảng cách từ O đến x, nghĩa là $\left(\dfrac{x}{b}\right)^2$

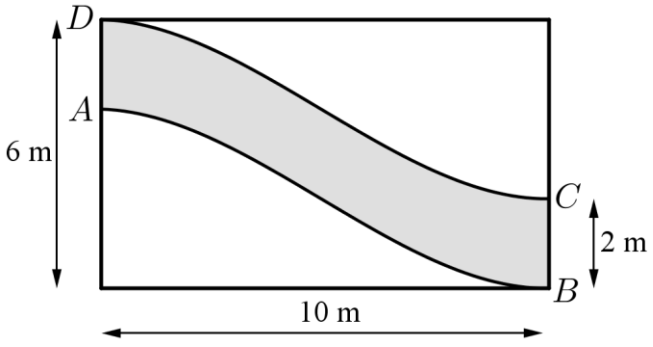
Do đó ta có: $S(x)=B\left(\dfrac{x}{b}\right)^2=B.\dfrac{x^2}{b^2}$

b) Để tính thể tích của khối chóp cụt đều thì ta sử dụng tích phân của thiết diện $S(x)$ từ $x=a$ đến $x=b$.

Thể tích của khối chóp cụt đều được tính bằng công thức: $V=\int\limits_a^b S(x)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b B.\dfrac{x^2}{b^2}\mathrm{d}x$

Khi đó $V=\dfrac{B}{b^2}\int\limits_a^b x^2\mathrm{d}x=\dfrac{B}{3b^2}\left(b^3-a^3\right)$ ta thay $h=b-a$ và $B'=B.\dfrac{a^2}{b^2}$ thì ta được thể tích khối chóp cụt được tính bằng công thức $V=\dfrac{h}{3}\left(B+\sqrt{B.B'}+B'\right)$.

Bài tập 9: Cô Hạnh đổ bê tông một đường đi trong vườn (phần được tô màu) với kích thước được cho trong hình sau. Biết rằng đường cong AB được cho bởi đồ thị của một hàm số liên tục và đường cong DC nhận được từ đường cong AB bằng cách tịnh tiến theo phương thẳng đứng lên phía trên 2 m. Ngoài ra, cô Hạnh quyết định đổ lớp bê tông dày 15 cm và giá tiền 1 m^3 bê tông là 1 080 000 đồng. Tính số tiền cô Hạnh cần dùng để đổ bê tông con đường đó.



Lời giải

Để tính diện tích phần đổ bê tông, ta cần xác định diện tích giữa hai đường cong AB và DC

Đường cong DC là kết quả của việc tịnh tiến đường cong AB lên trên 2 m.

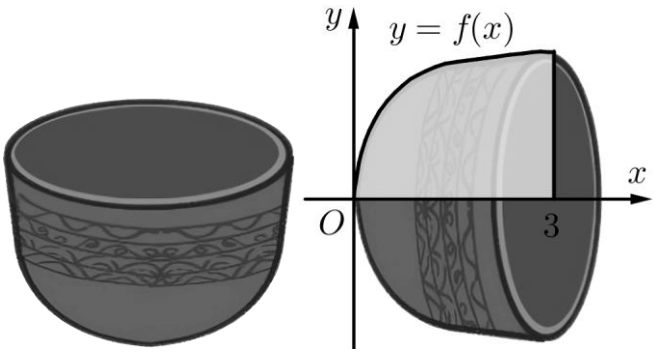
Giả sử hàm số của đường cong AB là $f(x)$ thì hàm số của đường cong DC là $f(x)+2$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong là: $S=\int_0^{10}\left[f(x)+2-f(x)\right]\mathrm{d}x=20\,\mathrm{m}^2$

Lớp bê tông có độ dày là $15\,\mathrm{cm}$ tức là $0{,}15\,\mathrm{m}$ thì có thể tích là: $20.0{,}15=3\mathrm{m}^3$

Chi phí tổng cộng để đổ bê tông con đường đó là: $3.1080000=3240000$ (đồng).

Bài tập 10: Xét chiếc chén trong một bộ ấm chén uống trà, bạn Dương ước lượng được rằng chiếc chén được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)=0{,}14x^3-0{,}87x^2+1{,}92x+0{,}85$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0,\ x=3$ quay quanh trục Ox (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là centimét). Tính thể tích của chiếc chén (làm tròn đến hàng đơn vị của centimét khối).



Lời giải

Thể tích của chiếc chén là: $V=\pi\int_0^3\left(0{,}14x^3-0{,}87x^2+1{,}92x+0{,}85\right)^2\mathrm{d}x=41{,}87\left(\mathrm{cm}^3\right)$.

Bài tập 11: Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{m^2-x^2}$ (m là tham số khác 0) và trục hoành. Khi (H) quay xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích V. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $V<1000\pi$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong và trục hoành là: $\sqrt{m^2-x^2}=0\Leftrightarrow x=\pm m$

Thể tích vật thể tròn xoay cần tính là: $V=\pi\int_{-|m|}^{|m|}\left(m^2-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(m^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-|m|}^{|m|}=\frac{4\pi m^2|m|}{3}$

Ta có: $V<1000\pi\Leftrightarrow\frac{4\pi m^2|m|}{3}<1000\pi\Leftrightarrow|m|^3<750\Leftrightarrow-\sqrt[3]{750}<m<\sqrt[3]{750}$.

Ta có $\sqrt[3]{750}\simeq 9{,}08$ và $m\neq 0$.

Suy ra, các giá trị m nguyên là $m\in\{-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$

Vậy có 18 giá trị nguyên của m.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0, x=1$, có thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\left(0\le x\le 1\right)$ là một tam giác đều có cạnh bằng x.

A. $V=\dfrac{12\pi}{5}$. **B.** $V=\dfrac{12}{5}$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{3}\pi}{12}$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải

Thể tích vật thể là: $V=\int\limits_0^1 S\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 x^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{3}}{12}$.

Câu 2: Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sin x$, trục Ox và các đường thẳng $x=0,\ x=\pi$ quay quanh trục Ox. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành bằng

A. $\int\limits_0^{\pi}\sin x\,dx$. **B.** $\int\limits_0^{\pi}\sin^2 x\,dx$. **C.** $\pi\int\limits_0^{\pi}\sin^2 x\,dx$. **D.** $\pi\int\limits_0^{\pi}\cos^2 x\,dx$.

Lời giải

Công thức tính thể tích khối tròn xoay $V=\pi\int\limits_a^b f^2\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Câu 3: Cho hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{x+2}$ và hai trục toạ độ. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng đó quanh trục Ox bằng

A. $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. **B.** 2. **C.** 2π. **D.** $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\pi$.

Lời giải

$V=\pi\int\limits_{-2}^{0}\left(\sqrt{x+2}\right)^2 dx=\pi\left(x^2+2x\right)\Big|_{-2}^{0}=2\pi.$

Câu 4: Cho hình phẳng $\left(D\right)$ được giới hạn bởi các đường $x=0, x=\pi, y=0$ và $y=-\sin x$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay $\left(D\right)$ xung quanh trục Ox được tính theo công thức

A. $V=\pi\int\limits_0^{\pi}\left|\sin x\right|\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\int\limits_0^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x$.

C. $V=\pi\left|\int\limits_0^{\pi}\left(-\sin x\right)\mathrm{d}x\right|$. **D.** $V=\int\limits_0^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x$.

Lời giải

Ta có $V=\pi\int\limits_0^{\pi}\left(-\sin x\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x$.

Câu 5: Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0\le x\le 3)$ thì được thiết diện là một hình vuông có độ dài cạnh bằng $2\sqrt{9-x^2}$

A. 90 **B.** 72π **C.** 78π **D.** 72

Lời giải

Diện tích hình vuông là $S=\left(2\sqrt{9-x^2}\right)^2=4\left(9-x^2\right)=36-4x^2$

Vậy thể tích vật thể là $V=\int_0^3 S(x)\mathrm{d}x=\int_0^3\left(36-4x^2\right)\mathrm{d}x=72$.

Câu 6: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=e^x$, các đường thẳng $x=0$, $x=\ln 3$ và trục hoành. Thể tích khối tròn xoay sinh bởi (H) khi quay quanh trục hoành là

A. 2π. **B.** 4π. **C.** 4. **D.** π.

Lời giải

$V=\pi\int_0^{\ln 3} e^{2x}\,\mathrm{d}x=\pi\frac{1}{2}e^{2x}\,|_0^{\ln 3}=4\pi$.

Câu 7: Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, trục Ox và hai đường thẳng $x=1; x=4$ khi quay quanh trục hoành được tính bởi công thức nào?

A. $V=\pi\int_1^4 x\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi^2\int_1^4 x\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\int_1^4\sqrt{x}\mathrm{d}x$. **D.** $V=\int_1^4\left|\sqrt{x}\right|\mathrm{d}x$.

Lời giải

Ta có: $V=\pi\int_1^4 x\mathrm{d}x$

Câu 8: Cho miền phẳng (D) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$, hai đường thẳng $x=1$, $x=2$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{3\pi}{2}$. **C.** $\frac{2\pi}{3}$. **D.** 3π.

Lời giải

Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành $V=\pi\int_1^2\left(\sqrt{x}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{2}$

Câu 9: Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-4x+3$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $\frac{16}{15}$. **B.** $\frac{16\pi}{15}$. **C.** $\frac{31\pi}{30}$. **D.** $\frac{31}{30}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm là $x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$.

Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-4x+3$ và $y=0$ quanh trục Ox là: $V=\pi\int\limits_1^3\left(x^2-4x+3\right)^2\mathrm{d}x=\dfrac{16\pi}{15}$.

Câu 10: Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x-1}$, trục hoành và $x=5$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi D quay quanh Ox bằng

A. $\dfrac{15\pi}{2}$. **B.** $\dfrac{15}{2}$. **C.** 8π. **D.** 8.

Lời giải

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $\sqrt{x-1}=0\Rightarrow x=1\Rightarrow V=\pi\int\limits_1^5|x-1|\mathrm{d}x=8\pi$.

Câu 11: Thể tích vất thể tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-4x+3$ và trục hoành quay quanh Ox là

A. $\dfrac{4}{3}$. **B.** $\dfrac{16}{15}$. **C.** $\dfrac{4\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{16\pi}{15}$.

Lời giải

Ta có $x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$. Vậy $V_{Ox}=\pi\int\limits_1^3\left(x^2-4x+3\right)^2\mathrm{d}x=\dfrac{16\pi}{15}$.

Câu 12: Giả sử D là hình phẳng giới hạn bởi đường parabol $y=x^2-3x+2$ và trục hoành. Quay D quanh trục hoành ta thu được khối tròn xoay có thể tích bằng

A. $V=\dfrac{\pi}{30}$. **B.** $V=\dfrac{1}{30}$. **C.** $V=\dfrac{1}{6}$. **D.** $V=\dfrac{\pi}{6}$.

Lời giải

Ta có $y=0\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$. Khi đó: $V=\pi\int\limits_1^2\left(x^2-3x+2\right)^2dx=\dfrac{\pi}{30}$.

Câu 13: Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi hai đồ thị $y=x^2+x$ và $y=2x$. Quay hình (H) quanh trục hoành, tính thể tích vật thể thu được

A. $\dfrac{3\pi}{10}$. **B.** $\dfrac{5\pi}{6}$. **C.** $\dfrac{\pi}{6}$. **D.** $\dfrac{5}{6}$

Lời giải

Xét phương trình: $x^2+x=2x\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$

Ta có thể tích cần tìm là: $V=\pi\int\limits_0^1\left|\left(x^2+x\right)^2-\left(2x\right)^2\right|\mathrm{d}x=\dfrac{3\pi}{10}$

Câu 14: Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x-1}$, trục hoành và $x=5$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

A. $\dfrac{15\pi}{2}$. **B.** $\dfrac{15}{2}$. **C.** 8π. **D.** 8.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hàm số $y=\sqrt{x-1}$ và trục hoành là $\sqrt{x-1}=0\Rightarrow x=1$.

Khi đó thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox là

$V=\pi\int\limits_{1}^{5}\left(\sqrt{x-1}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_{1}^{5}(x-1)\,\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_1^5=8\pi$.

Câu 15: Tính thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=-x^2+3x$ và $y=0$ xung quanh trục Ox.

A. $\frac{5\pi}{2}$. **B.** $\frac{27\pi}{10}$. **C.** $\frac{81\pi}{10}$. **D.** $\frac{9\pi}{2}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm giữa hai đường $y=-x^2+3x$ và $y=0$ là

$-x^2+3x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$. Do đó thể tích khối tròn xoay cần tính là $V=\pi\int\limits_{0}^{3}\left(-x^2+3x\right)^2\mathrm{d}x=\frac{81\pi}{10}$.

Câu 16: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị $(P):y=2x-x^2$ và trục Ox. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi cho (H) quay quanh trục Ox.

A. $V=\frac{19\pi}{15}$. **B.** $V=\frac{13\pi}{15}$. **C.** $V=\frac{17\pi}{15}$. **D.** $V=\frac{16\pi}{15}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (P) và trục Ox là: $2x-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Thể tích khối tròn xoay cần tìm là $V=\pi\int\limits_{0}^{2}\left(2x-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\frac{16\pi}{5}$.

Câu 17: Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=\sqrt{4x-x^2}$ và $y=0$ quanh trục ox bằng

A. $\frac{34\pi}{3}$. **B.** $\frac{31\pi}{3}$. **C.** $\frac{32\pi}{3}$. **D.** $\frac{35\pi}{3}$.

Lời giải

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\sqrt{4x-x^2}$ và đường thẳng $y=0$ là nghiệm phương trình $\sqrt{4x-x^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=4\end{array}\right.$.

Do đó, thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{4x-x^2}$ và $y=0$ quay quanh trục Ox là $V=\pi\int\limits_{0}^{4}\left(\sqrt{4x-x^2}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_{0}^{4}\left(4x-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(2x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^4=\frac{32\pi}{3}$.

Câu 18: Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-4x+3$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $\frac{16}{15}$. **B.** $\frac{16\pi}{15}$. **C.** $\frac{31\pi}{30}$. **D.** $\frac{31}{30}$.

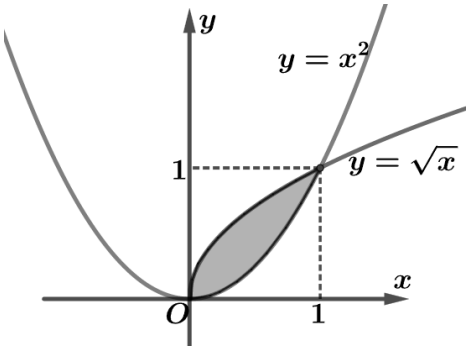
Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đường $y=x^2-4x+3$ và đường $y=0$ là

$x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$.

Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-4x+3$ và $y=0$ quanh trục Ox là $V=\pi\int\limits_1^3\left(x^2-4x+3\right)^2\mathrm{d}x=\dfrac{16\pi}{15}$.

Câu 19: Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2$ và đồ thị của hàm số $y=\sqrt{x}$ (tham khảo hình vẽ). Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục Ox bằng



A. $V=\dfrac{9\pi}{10}$. **B.** $V=\dfrac{3\pi}{10}$. **C.** $V=\dfrac{\pi}{10}$. **D.** $V=\dfrac{7\pi}{10}$.

Lời giải

Thể tích khối tròn xoay thu được là $V=\pi\int\limits_0^1\left|x^4-x\right|\mathrm{d}x=\dfrac{3\pi}{10}$.

Câu 20: Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bở đồ thị hàm số $y=f(x)=\sqrt{x}.e^{x^2}$, trục hoành, đường thẳng $x=1$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục hoành.

A. $V=\dfrac{1}{4}\pi\left(e^2-1\right)$. **B.** $V=\pi\left(e^2-1\right)$. **C.** $V=\dfrac{1}{4}\pi e^2-1$. **D.** $V=e^2-1$.

Lời giải

Ta có: $\sqrt{x}.e^{x^2}=0\Leftrightarrow x=0$

Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục hoành là:

$$V=\pi\int\limits_0^1\left(\sqrt{x}.e^{x^2}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^1 xe^{2x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\int\limits_0^1 e^{2x^2}\mathrm{d}\left(2x^2\right)=\frac{\pi}{4}e^{2x^2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}\left(e^2-1\right).$$

Câu 21: Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=4-x^2$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $V=\dfrac{512\pi}{15}$. **B.** $V=\dfrac{32}{3}$. **C.** $V=\dfrac{32\pi}{3}$. **D.** $V=\dfrac{512}{15}$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $4-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.$.

Thể tích của khối tròn xoay thu được là: $V=\pi\int\limits_{-2}^2\left(4-x^2\right)^2dx=\dfrac{512\pi}{15}$.

Câu 22: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-x-2$ và trục hoành. Quay hình phẳng (H) quay quanh trục hoành, ta được một khối nón tròn xoay có thể tích bằng

A. $\frac{81}{10}\pi$. **B.** $\frac{81}{10}$. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{9\pi}{2}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành: $x^2-x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$

Thể tích khối nón là $V=\pi\int_{-1}^{2}\left(x^2-x-2\right)^2\mathrm{d}x=\frac{81\pi}{10}$.

Câu 23: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=4-x^2$ và trục hoành. Thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục hoành bằng

A. $\frac{32\pi}{3}$. **B.** $\frac{512\pi}{15}$. **C.** $\frac{32}{3}$. **D.** $\frac{512}{15}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $4-x^2=0\Leftrightarrow x=\pm 2$

Khi đó: $V=\pi\int\limits_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_{-2}^{2}\left(16-8x^2+x^4\right)\mathrm{d}x=\pi\left(16x-\frac{8}{3}x^3+\frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-2}^{2}=\frac{512}{15}\pi$.

Câu 24: Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=\left|x^2-3x+2\right|$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $\frac{\pi^2}{30}$. **B.** $\frac{\pi}{6}$. **C.** $\frac{\pi}{30}$. **D.** $\frac{\pi^2}{6}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $\left|x^2-3x+2\right|=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$. Vậy $V=\pi\int\limits_{1}^{2}\left|x^2-3x+2\right|^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{30}$.

Câu 25: Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=\left|x^2-3x+2\right|$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $\frac{\pi^2}{30}$. **B.** $\frac{\pi}{6}$. **C.** $\frac{\pi}{30}$. **D.** $\frac{\pi^2}{6}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $\left|x^2-3x+2\right|=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Vậy $V=\pi\int\limits_{1}^{2}\left|x^2-3x+2\right|^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{30}$..

Câu 26: Tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2$, trục hoành và đường thẳng $x=2$, khi quay xung quanh trục Ox bằng

A. $\frac{32\pi}{5}$. **B.** $\frac{\pi}{6}$. **C.** $\frac{5\pi}{6}$. **D.** $\frac{4\pi}{5}$.

Lời giải

Thể tích khối tròn xoay là: $V=\pi\int\limits_{0}^{2}\left(x^2\right)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{1}{5}x^5\right)\Big|_{0}^{2}=\frac{32\pi}{5}$.

Câu 27: Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) xác định bởi các đường $y=\frac{1}{3}x^3-x^2$ và $y=0$ quanh trục Ox là

A. $\frac{71\pi}{35}$. **B.** $\frac{81}{35}$. **C.** $\frac{71}{35}$. **D.** $\frac{81\pi}{35}$.

Lời giải

Ta có $\frac{1}{3}x^3-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$.

Vậy thể tích khối tròn xoay cần tìm là $V=\pi\int\limits_0^3\left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\frac{81\pi}{35}$.

Câu 28: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi parapol $(P):y=x^2$ và đường thẳng $d:y=2x$. Thể tích khối tròn xoay sinh bởi (H) khi quay quanh trục Ox bằng

A. $\frac{64\pi}{15}$. **B.** $\frac{16\pi}{15}$. **C.** $\frac{256\pi}{15}$. **D.** $\frac{4\pi}{3}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2=2x\Leftrightarrow x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

$V=\pi\int\limits_0^2\left[(2x)^2-\left(x^2\right)^2\right]\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^2\left(4x^2-x^4\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{4}{3}x^3-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2=\frac{64\pi}{15}$.

Câu 29: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi parapol $(P):y=x^2$ và đường thẳng $d:y=2x$. Thể tích khối tròn xoay sinh bởi (H) khi quay quanh trục Ox bằng

A. $\frac{64\pi}{15}$. **B.** $\frac{16\pi}{15}$. **C.** $\frac{256\pi}{15}$. **D.** $\frac{4\pi}{3}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2=2x\Leftrightarrow x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

$V=\pi\int\limits_0^2\left[(2x)^2-\left(x^2\right)^2\right]\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^2\left(4x^2-x^4\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{4}{3}x^3-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2=\frac{64\pi}{15}$.

Câu 30: Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=4-x^2$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $\frac{32\pi}{3}$. **B.** $\frac{512\pi}{15}$. **C.** $\frac{16\pi}{3}$. **D.** $\frac{256\pi}{15}$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $4-x^2=0\Leftrightarrow x=\pm2$.

Thể tích khối tròn xoay thu được là: $V=\pi\int\limits_{-2}^2\left(4-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\frac{512\pi}{15}$..

Câu 31: Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=4-x^2$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $\frac{32\pi}{3}$. **B.** $\frac{512\pi}{15}$. **C.** $\frac{16\pi}{3}$. **D.** $\frac{256\pi}{15}$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $4-x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm 2$.

Thể tích khối tròn xoay thu được là: $V=\pi\int\limits_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)^2 \mathbf{d}x=\frac{512\pi}{15}$..

Câu 32: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$, hai đường thẳng $x=1, x=4$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành.

A. $\frac{15\pi}{2}$. **B.** $\frac{15}{2}$. **C.** $\frac{14\pi}{3}$. **D.** $\frac{14}{3}$.

Lời giải

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành

$V=\pi\int\limits_{1}^{4}\left(\sqrt{x}\right)^2 \mathrm{d}x=\pi\int\limits_{1}^{4} x\mathrm{d}x=\pi.\frac{x^2}{2}\Big|_1^4=\frac{15\pi}{2}$.

Câu 33: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi $y=2x-x^2, y=0$. Tính thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay (H) xung quanh trục Ox ta được $V=\pi\left(\frac{a}{b}+1\right)$ với a,b là các số tự nhiên, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó

A. $ab=16$. **B.** $ab=12$. **C.** $ab=15$. **D.** $ab=18$.

Lời giải

Xét phương trình $2x-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Tính thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay (H) xung quanh trục Ox là

$V=\pi\int\limits_{0}^{2}\left(2x-x^2\right)dx=\frac{16}{15}\pi=\left(1+\frac{1}{15}\right)\pi \Rightarrow a=1, b=15 \Rightarrow ab=15$.

Câu 34: Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-x$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $\frac{\pi}{3}$. **B.** $\frac{\pi}{15}$. **C.** $\frac{\pi}{30}$. **D.** $\frac{\pi}{5}$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Thể tích khối tròn xoay là: $V=\pi\int\limits_{0}^{1}\left(x^2-x\right)^2 dx=\frac{\pi}{30}$.

Câu 35: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$ và trục hoành. Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình (H) quanh trục hoành bằng

A. $\frac{\pi}{6}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{\pi}{30}$. **D.** $\frac{1}{30}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $y=0 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Vậy $V=\pi\int\limits_1^2\left(x^2-3x+2\right)^2 dx=\dfrac{\pi}{30}$.

Câu 36: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-5x+4$ và trục Ox. Tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình (H) quanh trục Ox.

A. $\dfrac{9}{2}$. **B.** $\dfrac{81}{10}$. **C.** $\dfrac{81\pi}{10}$. **D.** $\dfrac{9\pi}{2}$.

Lời giải

Ta có: $x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$

Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình (H) quanh trục Ox là

$V=\pi\int\limits_1^4\left(x^2-5x+4\right)^2 dx=\dfrac{81\pi}{10}$.

Câu 37: Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-2x$, $y=0$ và $x=3$ quay quanh trục Ox bằng

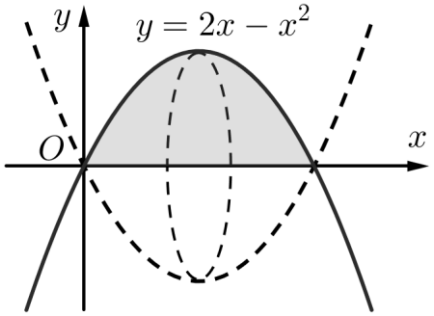
A. $\dfrac{18\pi}{5}$. **B.** $\dfrac{8\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{18}{5}$. **D.** $\dfrac{8}{3}$.

Lời giải

Xét phương trình $x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Khi đó $V=\pi\int\limits_0^3\left(x^2-2x\right)^2 \mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^3\left(x^4-4x^3+4x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\dfrac{x^5}{5}-x^4+\dfrac{4x^3}{3}\right)\Big|_0^3=\dfrac{18\pi}{5}$

Câu 38: Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi các đường $y=2x-x^2$, $y=0$ khi quay quanh trục Ox là:



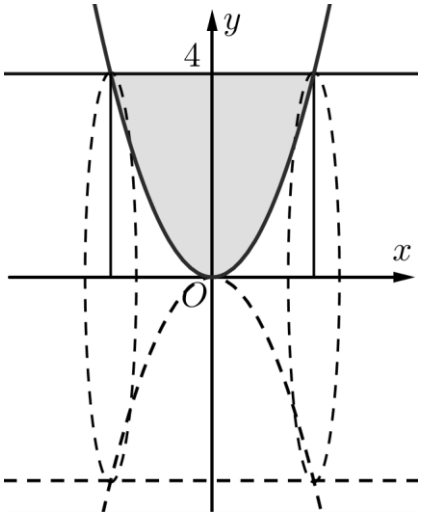
A. $\dfrac{4\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{13\pi}{15}$. **C.** $\dfrac{14\pi}{15}$. **D.** $\dfrac{16\pi}{15}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm là: $-x^2+2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Thể tích khối tròn xoay là: $V=\pi\int\limits_0^2\left(2x-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\dfrac{16\pi}{15}$

Câu 39: Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$ và đường thẳng $y = 4$ quay quanh trục Ox. Thể tích khối tròn xoay sinh ra bằng:



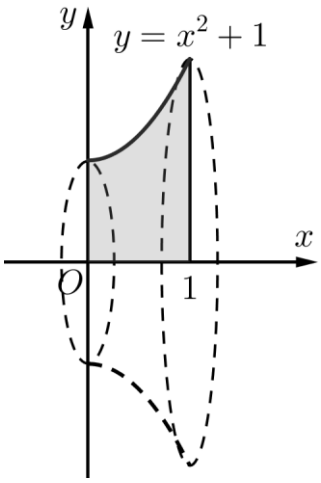
A. $\frac{64\pi}{5}$. **B.** $\frac{128\pi}{5}$. **C.** $\frac{256\pi}{5}$. **D.** $\frac{152\pi}{5}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm là: $x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Thể tích khối tròn xoay là: $V = \pi \int_{-2}^{2} \left| \left(x^2\right)^2 - 4^2 \right| \mathrm{d}x = \frac{256\pi}{5}$.

Câu 40: Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 1,\ x = 0,\ x = 1,\ y = 0$ quay quanh trục Ox là:

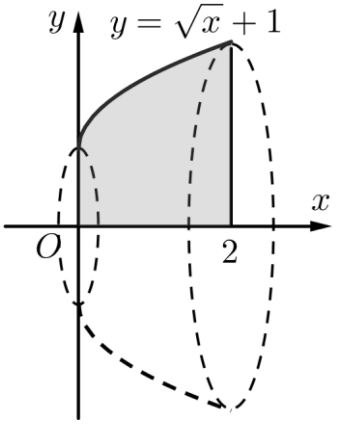


A. $\frac{4\pi}{3}$. **B.** $\frac{28}{15}$. **C.** $\frac{28\pi}{15}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Thể tích khối tròn xoay là: $V = \pi \int_{0}^{1} \left(x^2 + 1\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{28\pi}{15}$

Câu 41: Tính thể tích chứa được của một cái chậu inox to mà khách hàng đặt theo kích thước yêu cầu, biết phần trong của nó có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường $y = \sqrt{x} + 1$, trục Ox và các đường thẳng $x = 0,\ x = 2$ quanh trục Ox, đơn vị trên trục là decimet (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



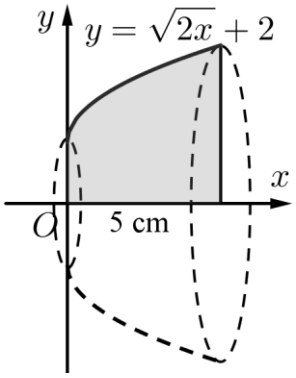
A. $12{,}12\,\text{dm}^3$. **B.** $12{,}21\ \text{dm}^3$. **C.** $24{,}14\ \text{dm}^3$. **D.** $24{,}41\ \text{dm}^3$.

Lời giải

Thể tích của chậu inox là: $V=\pi\int_0^2\left(\sqrt{x}+1\right)^2\text{d}x=\pi\left(\frac{8}{3}\sqrt{2}+4\right)\approx 24{,}41\ (\text{dm}^3)$.

Câu 42: Tính thể tích chứa được (dung tích) của một cái chén (bát), biết phần trong của nó có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi đường $y=\sqrt{2x}+2$ và trục Ox (như hình vẽ), bát có độ sâu 5 cm, đơn vị trên trục là centimet (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



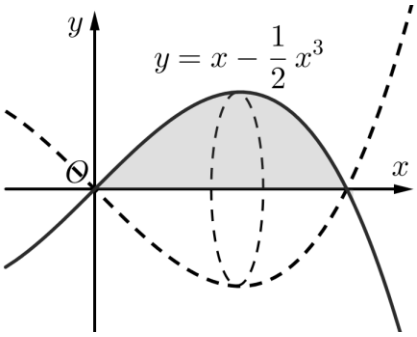


A. $78\ \text{cm}^3$. **B.** $274\ \text{cm}^3$. **C.** $87\ \text{cm}^3$. **D.** $247\ \text{cm}^3$.

Lời giải

Thể tích của chén là: $V=\pi\int_0^5\left(\sqrt{2x}+2\right)^2\text{d}x=\pi\left(\frac{40}{3}\sqrt{10}+45\right)\approx 274\ (\text{cm}^3)$

Câu 43: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x-\frac{1}{2}x^3$, $y=0$, $x=0$, $x=\sqrt{2}$. Thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra bởi hình phẳng đó khi quay quanh trục Ox có giá trị thuộc khoảng nào sau đây?



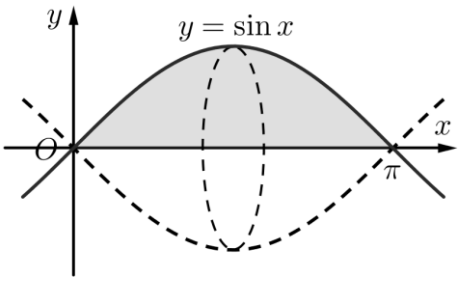
A. $\left(\frac{3}{2};2\right)$. **B.** $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **C.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm là: $x-\frac{1}{2}x^3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{2}\\x=0\end{array}\right.$

Thể tích của vật thể là: $V=\pi\int\limits_0^{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{2}x^3\right)^2\mathrm{d}x=\frac{16\sqrt{2}\pi}{105}\approx 0,677\in\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Câu 44: Biết một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin^2 x$ là $F(x)=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}$. Thể tích của khối tròn xoay giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sin x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=\pi$ khi quay quanh trục Ox là:

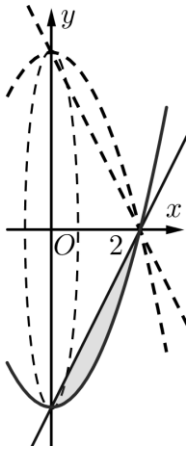


A. $\frac{\pi^2}{4}$. **B.** $\frac{\pi^2}{2}$. **C.** $\frac{\pi}{2}$. **D.** $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Thể tích khối tròn xoay là: $V=\pi\int\limits_0^{\pi}(\sin x)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\int\limits_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x\right)=\frac{\pi^2}{2}$

Câu 45: Thể tích hình khối do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-4$, $y=2x-4$, $x=0$, $x=2$ quay quanh trục Ox bằng:



A. $\frac{416\pi}{15}$. **B.** $\frac{752\pi}{5}$. **C.** $\frac{16\pi}{15}$. **D.** $\frac{32\pi}{5}$.

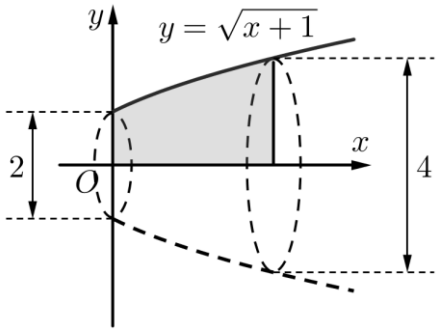
Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm là: $x^2-4=2x-4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Thể tích của hình khối là: $V=\pi\int_0^2\left|\left(x^2-4\right)^2-\left(2x-4\right)^2\right|\mathrm{d}x=\dfrac{32\pi}{5}$.

Câu 46: Một bác thợ gốm làm một cái chậu trồng cây, phần trong chậu cây có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng được tô đậm như hình sau quanh trục Ox (đơn vị trên trục là decimet), biết đường cong trong hình là đồ thị của hàm số $y=\sqrt{x+1}$, đáy chậu và miệng chậu có đường kính lần lượt là 2 dm và 4 dm. Dung tích của chậu là bao nhiêu (làm tròn kết quả nếu cần thiết)?





A. 25,13 lít. **B.** 23,56 lít. **C.** 14,66 lít. **D.** 7,5 lít.

Lời giải

Với bán kính đáy chậu là 1dm thì $y=1\Rightarrow\sqrt{x}+1=1\Rightarrow x=0$

Với bán kính đáy chậu là 2 dm thì $y=2\Rightarrow\sqrt{x}+1=2\Rightarrow x=3$

Thể tích của khối chậu là: $V=\pi\int_0^2\left(\sqrt{x}+1\right)^2\mathrm{d}x=\dfrac{15\pi}{2}\approx 23{,}56\,\mathrm{dm}^3$.

Câu 47: Từ một quả cầu bằng đá trắng sứ bán kính bằng 1 dm, người ta khoan rút lõi ngay "chính giữa" quả cầu (trục đối xứng của lõi và quả cầu trùng nhau) như hình sau với đường kính mũi khoan là 1 dm được một vật thể có thể tích V là bao nhiêu (bỏ qua độ dày mũi khoan)?







A. $V=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$ dm^3. **B.** $V=\dfrac{8-3\sqrt{3}}{6}\pi$ dm^3. **C.** $V=\dfrac{8+3\sqrt{3}}{6}\pi$ dm^3. **D.** $V=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\pi$ dm^3.

Lời giải

Gọi V_1 là thể tích của khối trụ và V_2 là thể tích của chỏm cầu

Nửa chiều cao của khối trụ là: $l=\sqrt{1^2-\left(0{,}5\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ nên ta có thể suy ra chiều cao của chỏm cầu là: $h=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Thể tích khối trụ là: $V_1=\pi R^2.H=\pi.R^2.2l=\dfrac{\pi\sqrt{3}}{4}$

Thể tích chỏm cầu: $V_2=\pi\int\limits_{R-h}^{R}\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2dx\Leftrightarrow V_2=\pi\int\limits_{R-h}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx\Leftrightarrow V_2=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{R-h}^{R}$

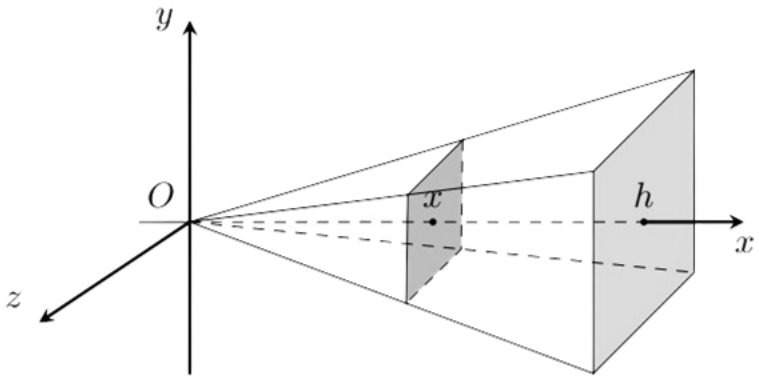
$\Leftrightarrow V_2=\pi\left[\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)-\left(R^2\left(R-h\right)-\frac{\left(R-h\right)^3}{3}\right)\right]\Leftrightarrow V_2=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right).$

Thay số ta suy ra được thể tích của chỏm cầu là $V_2=\pi\left(\frac{2}{3}-\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$

Khi đó thể tích của khối cần tìm là $V=V_1+2V_2=\frac{\pi\sqrt{3}}{4}+\pi\left(\frac{2}{3}-\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)=\frac{8-3\sqrt{3}}{6}\pi$ dm^3

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho khối chóp đều có đáy là hình vuông cạnh L và chiều cao là h. Chọn trục Ox sao cho gốc O trùng với đỉnh của khối chóp và trục đi qua tâm của đáy. (như hình dưới).



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

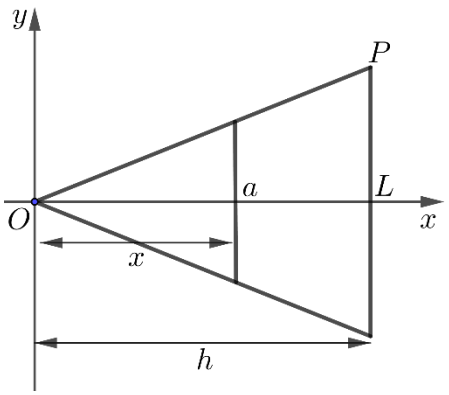
a) Đáy của khối chóp nằm trên mặt phẳng song song với Ox.

b) Mỗi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng $x\left(0\le x\le h\right)$, cắt khối chóp theo mặt cắt là hình vuông cạnh a.

c) Diện tích mặt cắt là $S\left(x\right)=\frac{L}{h}x^2$.

d) Thể tích của khối chóp là $V=\frac{1}{3}L^2h$.

Lời giải



a) Sai: Đáy của khối chóp nằm trên mặt phẳng vuông góc với Ox tại $x=h$.

b) Đúng: Mỗi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng $x\left(0\le x\le h\right)$, cắt khối chóp theo mặt cắt là hình vuông có cạnh là a.

c) Sai: Theo định lí Tha-les, ta có $\frac{x}{h}=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{L}{2}}$ suy ra $a=\frac{L}{h}x$.

Do đó, diện tích của mặt cắt này là $S\left(x\right)=\frac{L^2}{h^2}x^2$.

d) Đúng: Thể tích của khối chóp này là $V=\int\limits_0^h S\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^h \frac{L^2}{h^2}.x^2\mathrm{d}x=\frac{L^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^h=\frac{1}{3}L^2h$.

Câu 2: Trong mặt phẳng Oxy, cho hàm số $y=x+\sqrt{x}$ và $y=x+x^2$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số trên là $x=0$ hoặc $x=-1$

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x=0$, $x=1$ được tính theo công thức $S=\int\limits_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)\mathrm{d}x$

c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x=0$, $x=1$ được tính theo công thức $S=\int\limits_0^1\left(x+x^2\right)\mathrm{d}x-\int\limits_0^1\left(x+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x=0$, $x=1$ bằng $\frac{1}{3}$ đvdt

Lời giải

a) Sai: Phương trình hoành giao độ giao điểm của hai đồ thị hàm số trên là

$x+\sqrt{x}=x+x^2\Leftrightarrow x=x^4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

b) Đúng: Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=x+\sqrt{x}$, $y=x+x^2$, $x=0$, $x=1$ là: $S=\int\limits_0^1\left|\left(x+\sqrt{x}\right)-\left(x+x^2\right)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left|\sqrt{x}-x^2\right|\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)\mathrm{d}x$.

c) Sai: Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=x+\sqrt{x}$, $y=x+x^2$, $x=0$, $x=1$ là: $S=\int\limits_0^1\left|\left(x+\sqrt{x}\right)-\left(x+x^2\right)\right|\mathrm{d}x$

$=\int\limits_0^1\left[\left(x+\sqrt{x}\right)-\left(x+x^2\right)\right]\mathrm{d}x$ (vì $x+\sqrt{x}\ge x+x^2\ \forall x\in\left[0;1\right]$ $)=\int\limits_0^1\left(x+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x-\int\limits_0^1\left(x+x^2\right)\mathrm{d}x$.

d) Sai: Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=x+\sqrt{x}$, $y=x+x^2$, $x=0$, $x=1$ là $S=\int\limits_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ đvdt.

Câu 3: Khối chỏm cầu có bán kính $R=5$ và chiều cao $h=1$ sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi cung tròn có phương trình $y=\sqrt{25-x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=4$, $x=5$ xung quanh trục Ox. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Khoảng cách từ tâm của khối cầu đến khối chỏm cầu bằng 3.

b) Thể tích của khối chỏm cầu V_1 được tính theo công thức $V_1=\pi\int\limits_4^5\left(25-x^2\right)\mathrm{d}x$.

c) Thể tích của khối chỏm cầu $V_1=\dfrac{14\pi}{3}$.

d) Gọi V_2 là thể tích của nửa khối cầu có bán kính bằng 5. Tỉ số thể tích $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{7}{125}$.

Lời giải

a) Sai: Khoảng cách từ tâm của khối cầu đến khối chỏm cầu bằng $5-1=4$.

b) Đúng: Thể tích của khối chỏm cầu được tính theo công thức

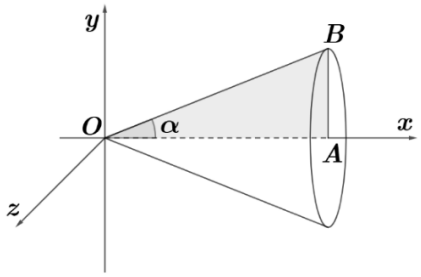
$$V_1=\pi\int\limits_4^5\sqrt{25-x^2}^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_4^5\left(25-x^2\right)\mathrm{d}x$$

c) Đúng: Ta có thể tích khối chỏm cầu là $V=\pi\int\limits_4^5\left(25-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(25x-\dfrac{x^3}{3}\right)\Big|_4^5=\dfrac{14\pi}{3}$.

d) Đúng: Gọi V_2 là thể tích của nửa khối cầu có bán kính bằng 5.

Ta có $V_2=\dfrac{1}{2}.\dfrac{4}{3}\pi.5^3=\dfrac{250}{3}\pi$ nên suy ra $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{\frac{14}{3}\pi}{\frac{250}{3}\pi}=\dfrac{7}{125}$.

Câu 4: Cho tam giác vuông OAB có cạnh $OA=a$ nằm trên tục Ox và $AOB=\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$. Gọi β là khối tròn xoay sinh ra khi quay miền tam giác OAB xung quanh trục Ox. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Khi $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ thì thể tích V của khối β là $\dfrac{\pi a^3}{3}$ (đvtt).

b) Khi $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ thì thể tích V của khối β là $\dfrac{\pi a^3}{9}$ (đvtt).

c) Khi thể tích V của khối β là $\dfrac{4\pi a^3}{3}$ thì giá trị $\cos\alpha<\dfrac{1}{2}$.

d) Khi $\tan\alpha=\cot\alpha$ thì thể tích V của khối β là $\dfrac{\pi a^3}{3}$.

Lời giải

a) Đúng: Do OB đi qua gốc tọa độ và tạo với Ox một góc $\dfrac{\pi}{4}$ nên $OB: y=\tan\dfrac{\pi}{4}x=x$.

Khi đó, thể tích của khối β theo $V=\pi\int\limits_0^a x^2\mathrm{d}x=\dfrac{\pi x^3}{3}\Big|_0^a=\dfrac{\pi a^3}{3}$ (đvtt)

b) Đúng: Do OB đi qua gốc tọa độ và tạo với Ox một góc $\frac{\pi}{6}$ nên $OB: y=\tan\frac{\pi}{6}x=\frac{x}{\sqrt{3}}$.

Khi đó, thể tích của khối β theo $V=\pi\int_0^a\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^a\frac{x^2}{3}\mathrm{d}x=\left.\frac{\pi x^3}{9}\right|_0^a=\frac{\pi a^3}{9}$ (đvtt).

c) Đúng: Do OB đi qua gốc tọa độ và tạo với Ox một góc α nên $OB: y=\tan\alpha.x$.

Khi đó, thể tích của khối β theo $V=\pi\int_0^a(\tan\alpha.x)^2\mathrm{d}x=\left.\frac{\pi\tan^2\alpha.x^3}{3}\right|_0^a=\frac{\pi\tan^2\alpha.a^3}{3}$ (đvtt).

Do $V=\frac{4\pi a^3}{3}\Leftrightarrow\frac{\pi\tan^2\alpha.a^3}{3}=\frac{4\pi a^3}{3}\Leftrightarrow\tan^2\alpha=4\Rightarrow\frac{1}{\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha+1=5\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\pm1}{\sqrt{5}}$.

Mặt khác $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ nên $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

d) Đúng: Ta có: Do OB đi qua gốc tọa độ và tạo với Ox một góc α nên $OB: y=\tan\alpha.x$.

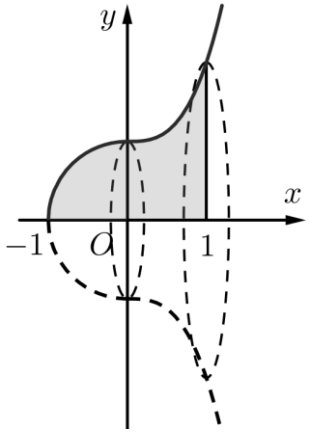
Khi đó thể tích của khối β theo $V=\pi\int_0^a(\tan\alpha.x)^2\mathrm{d}x=\left.\frac{\pi\tan^2\alpha.x^3}{3}\right|_0^a=\frac{\pi\tan^2\alpha.a^3}{3}$ (đvtt).

Do $\tan\alpha=\cot\alpha\Rightarrow\tan^2\alpha=\cot\alpha.\tan\alpha=1\Leftrightarrow\tan\alpha=\pm1$.

Mặt khác $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ nên $\tan\alpha=1\Rightarrow V=\frac{\pi\tan^2\alpha.a^3}{3}=\frac{\pi.a^3}{3}$ (đvtt).

Câu 5: Giả sử chiếc nón rộng vành sau có thể mô hình hóa bằng cách cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\begin{cases}x^3+1 & \text{khi } 0<x\le1\\ \sqrt{1-x^2} & \text{khi } -1\le x\le0\end{cases}$, trục Ox và các đường thẳng $x=-1$ và $x=1$ quay quanh trục Ox (đơn vị trên trục là dm). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:





a) Diện tích hình phẳng (H) được tính theo công thức $S=\int_{-1}^{1}\left|\sqrt{1-x^2}+x^3+1\right|dx$.

b) Diện tích thiết diện qua trục đối xứng của khối tròn xoay trên là $\frac{\pi+5}{2}$ dm^2.

c) Công thức tính thể tích khối tròn xoay trên là $V=\pi\int_0^{-1}\left(x^2-1\right)dx+\pi\int_0^1\left(x^6+2x^3+1\right)dx$.

d) Nếu thể tích của khối tròn xoay có dạng $\frac{a\pi}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản thì $a+b=139$.

Lời giải

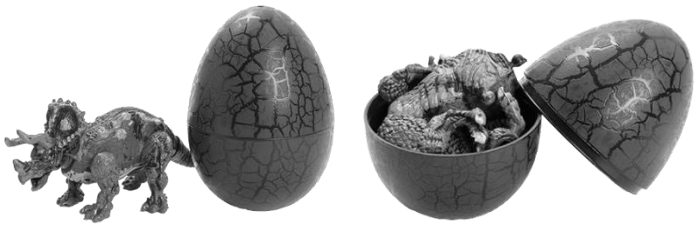
a) Sai: Diện tích hình phẳng (H) được tính bằng công thức: $S=\int\limits_{-1}^{0}\left(\sqrt{1-x^2}\right)dx+\int\limits_{0}^{1}\left(x^3+1\right)dx$

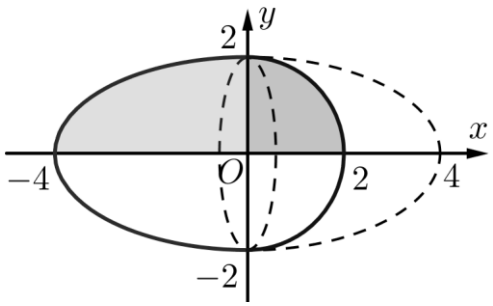
b) Đúng: Diện tích thiết diện qua trục đối xứng của khối tròn xoay trên là $\dfrac{\pi+5}{2}$ dm^2.

c) Đúng: ông thức tính thể tích khối tròn xoay trên là $V=\pi\int\limits_{0}^{-1}\left(x^2-1\right)dx+\pi\int\limits_{0}^{1}\left(x^6+2x^3+1\right)dx$.

d) Đúng: $V=\pi\int\limits_{0}^{-1}\left(x^2-1\right)dx+\pi\int\limits_{0}^{1}\left(x^6+2x^3+1\right)dx=\dfrac{97\pi}{42}$ nên $a=97$ và $b=42\Rightarrow a+b=139$.

Câu 6: Một cái trứng khủng long đồ chơi là một khối tròn xoay được tạo thành từ 2 mảnh ghép lại. Biết mảnh trên được tạo thành khi xoay một phần tư đường elip với trục lớn là 8 và trục nhỏ là 4 quanh trục Ox và mảnh dưới được tạo thành khi xoay một phần tư đường tròn bán kính 2 quanh trục Ox như hình sau (bỏ qua độ dày của vỏ trứng). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:





a) Thể tích phần trong của mảnh trên được tính bởi $V_1=\dfrac{\pi}{4}\int\limits_{-4}^{0}\left(16-x^2\right)dx$.

b) Thể tích phần trong của mảnh trên gấp 2 lần thể tích phần trong của mảnh dưới.

c) Thể tích phần trong của quả trứng đồ chơi này là 16π.

d) Diện tích thiết diện khi cắt bởi mặt phẳng qua trục của quả trứng là 3π.

Lời giải

a) Đúng: Mảnh trên được biểu diễn bởi elip: $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1\Rightarrow y^2=4\left(1-\dfrac{x^2}{16}\right)$

Thể tích phần trong của mảnh trên được tính bởi $V_1=\pi\int\limits_{-4}^{0}\left[4\left(1-\dfrac{x^2}{16}\right)\right]dx=\dfrac{\pi}{4}\int\limits_{-4}^{0}\left(16-x^2\right)dx$.

b) Đúng: Thể tích phần trong mảnh trên là: $V_1=\dfrac{\pi}{4}\int\limits_{-4}^{0}\left(16-x^2\right)dx=\dfrac{32\pi}{3}$

Mảnh dưới được biểu diễn bởi đường tròn: $x^2+y^2=4\Rightarrow y^2=4-x^2$

Thể tích phần trong dưới là: $V_2=\pi\int\limits_{0}^{2}\left(4-x^2\right)dx=\dfrac{16\pi}{3}$.

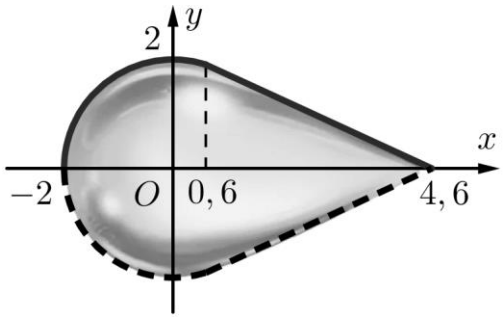
Vậy thể tích phần trong của mảnh trên gấp 2 lần thể tích phần trong của mảnh dưới.

c) Đúng: Thể tích phần trong của quả trứng đồ chơi này là: $V = V_1 + V_2 = \frac{32\pi}{3} + \frac{16\pi}{3} = 16\pi$

d) Sai: Diện tích thiết diện khi cắt bởi mặt phẳng qua trục của quả trứng là 4π .

Câu 7: Người ta chế tác một giọt nước bằng thủy tinh. Biết giọt nước thủy tinh này là vật thể tròn xoay khi xoay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2} & (-2 \le x \le 0,6) \\ -\frac{\sqrt{91}}{20}x + \frac{23\sqrt{91}}{100} & (0,6 < x \le 4,6) \end{cases}$ và trục Ox quanh trục Ox (đơn vị trên trục là centimet). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:





a) Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = 0,6$.

b) Diện tích mặt cắt của giọt nước thủy tinh khi cắt bởi mặt phẳng qua trục được tính bởi công thức $S = 2\int_{-2}^{4,6} f(x)dx$ cm^2.

c) Thể tích của giọt nước thủy tinh này lớn hơn 40 cm^3.

d) Biết khối lượng riêng của thủy tinh là $\rho = 2,6$ g/cm^3, khối lượng của giọt nước thủy tinh này là 102,22 g (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

a) Đúng: $\lim\limits_{x \to 0,6^-} f(x) = \sqrt{4-(0,6)^2} = \sqrt{4-0,36} = \sqrt{3,64} \approx 1,907$

$\lim\limits_{x \to 0,6^+} f(x) = -\frac{\sqrt{91}}{20}.0,6 + \frac{23\sqrt{91}}{100} \approx 1,907$

Vậy hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = 0,6$

b) Đúng: Diện tích mặt cắt của giọt nước thủy tinh khi cắt bởi mặt phẳng qua trục được tính bởi công thức $S = 2\int_{-2}^{4,6} f(x)dx$ cm^2.

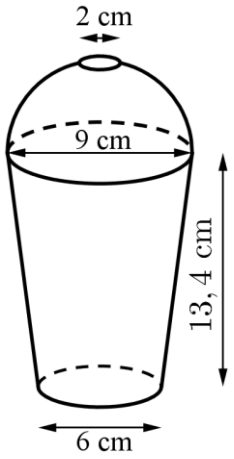
c) Sai: Thể tích của giọt nước thủy tinh này là:

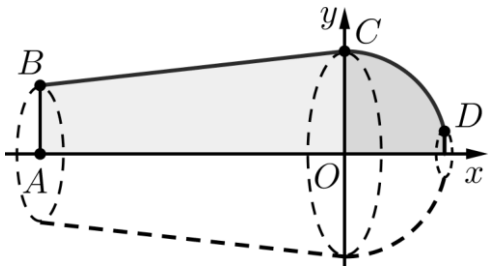
$$V = V_1 + V_2 = \pi\int_{-2}^{0,6}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2 dx + \pi\int_{0,6}^{4,6}\left(-\frac{\sqrt{91}}{20}x + \frac{23\sqrt{91}}{100}\right)^2 dx = \frac{4693\pi}{375} \approx 39,32 \text{ cm}^3$$

d) Đúng: Khối lượng của giọt nước thủy tinh này là: $m = \rho.V = 2,6.\frac{4693\pi}{375} \approx 102,22$ g.

Câu 8: Một ly trà sữa dạng hình nón cụt, có đường kính đáy ly 6 cm, đường kính miệng ly 9 cm, chiều cao 13,4 cm, ở miệng ly có sử dụng một nắp đậy có hình dạng nửa mặt cầu và ở đỉnh của nửa mặt cầu này có một hình tròn có đường kính 2 cm để cắm ống hút, mặt phẳng chứa hình tròn này song song với mặt phẳng chứa miệng ly (tham khảo hình vẽ sau).







Chọn hệ trục Oxy (đơn vị trên trục là centimet) với trục Ox đi qua tâm của 2 đáy hình nón cụt và gốc tọa độ O trùng với tâm của đáy lớn như hình vẽ trên.

a) Phương trình đường thẳng BC là: $1,5x-13,4y+60,3=0$.

b) Tọa độ điểm D là $D\left(\frac{\sqrt{77}}{2};1\right)$.

c) Thể tích bên trong của ly không bao gồm nắp là 600 ml (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

d) Thể tích bên trong của ly bao gồm cả thể tích của nắp là 780 ml (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

a) Đúng: $B=(-13,4;3)$ và $C=(0;4,5)$ nên $\overrightarrow{BC}=(13,4;1,5)$ nên đường thẳng BC có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{BC}}=(-1,5;13,4)$

Phương trình đường thẳng BC là: $-1,5(x-13,4)+13,4(y-3)=0 \Leftrightarrow 1,5x-13,4y+60,3=0$

b) Đúng: Hoành độ của điểm D là: $x_D=\sqrt{(4,5)^2-1}=\frac{\sqrt{77}}{2}\Rightarrow D\left(\frac{\sqrt{77}}{2};1\right)$

c) Đúng: Thể tích bên trong của ly không bao gồm nắp là: $V_1=\pi\int\limits_{-13,4}^{0}\left(\frac{1,5x+60,3}{13,4}\right)^2dx\approx 600\text{ cm}^3$

d) Sai: Thể tích bên trong của ly bao gồm cả thể tích của nắp là: $V=V_1+(V_2-V_3)$ trong đó V_2 là nửa thể tích của khối cầu và V_3 là thể tích của chỏm cầu.

Nửa thể tích khối cầu là: $V_2=\frac{1}{2}.\frac{4}{3}.\pi.R^3=\frac{243\pi}{4}$

Thể tích chỏm cầu: $V_3=\pi\int\limits_{R-h}^{R}\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2dx\Leftrightarrow V_3=\pi\int\limits_{R-h}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx\Leftrightarrow V_3=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{R-h}^{R}$

$$\Leftrightarrow V_3=\pi\left[\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)-\left(R^2(R-h)-\frac{(R-h)^3}{3}\right)\right]\Leftrightarrow V_3=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right).$$

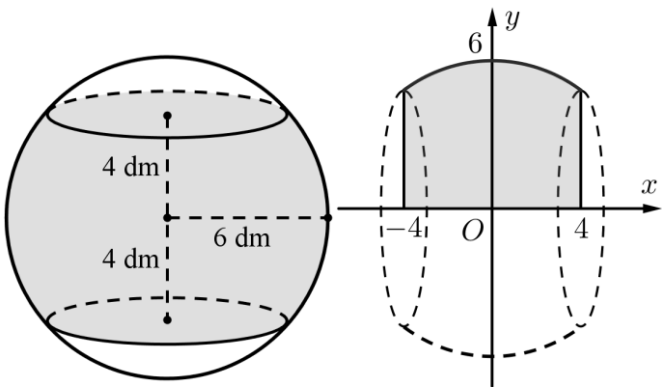
Thay số ta có: $h=4{,}5-\dfrac{\sqrt{77}}{2}$; $R=4{,}5\Rightarrow V_3=\dfrac{\left(729-83\sqrt{77}\right)\pi}{12}$

Thể tích bên trong của ly bao gồm cả thể tích của nắp là:

$$V=600+\left[\frac{243\pi}{4}-\frac{\left(729-83\sqrt{77}\right)\pi}{12}\right]\approx 790\text{ ml}.$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Một hình cầu có bán kính 6 dm, người ta cắt bỏ hai phần bằng hai mặt phẳng song song và cùng vuông góc với đường kính để làm mặt xung quanh của một chiếc lu chứa nước (như hình vẽ). Tính thể tích V (lít) mà chiếc lu chứa được biết mặt phẳng cách tâm mặt cầu 4 dm (làm tròn đến hàng đơn vị).

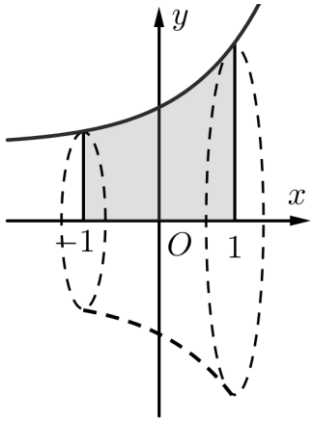


Lời giải

Thể tích cần tìm là thể tích của khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)=\sqrt{36-x^2}$, trục hoành và các đường thẳng $x=-4$, $x=4$ quanh trục hoành.

Do đó: $V=\pi\displaystyle\int_{-4}^{4}\left(36-x^2\right)dx=\frac{736\pi}{3}\approx 771$ lít.

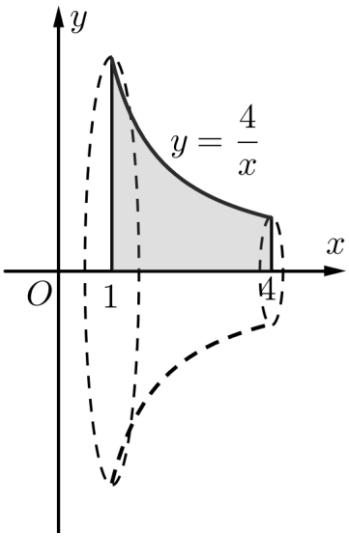
Câu 2: Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{e^x}{2}$, $y=0$ và $x=-1$, $x=1$ quanh trục hoành.



Lời giải

Thể tích khối tròn xoay là: $V=\pi\int\limits_{-1}^{1}\frac{e^{2x}}{4}dx=\frac{\pi}{8}e^{2x}\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{8}\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)\approx 2{,}85$.

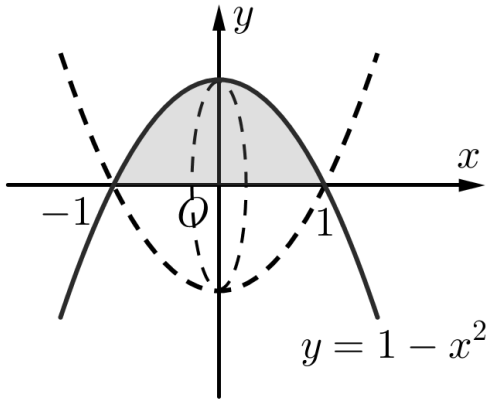
Câu 3: Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{4}{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=4$ quanh trục Ox là bao nhiêu?



Lời giải

Thể tích của khối tròn xoay là: $V=\pi\int\limits_{1}^{4}\left(\frac{4}{x}\right)^2 dx=12\pi\approx 37{,}7$.

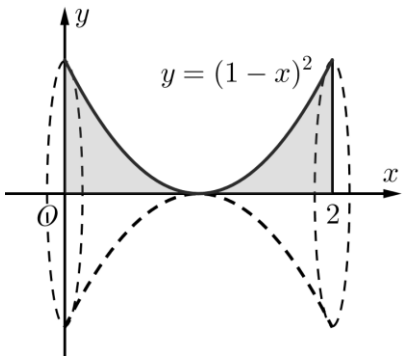
Câu 4: Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=1-x^2$, $y=0$ quanh trục Ox có kết quả dạng $\frac{a\pi}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó $S=a+b$ bằng bao nhiêu?



Lời giải

Thể tích khối tròn xoay là: $V=\pi\int\limits_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^2 dx=\frac{16\pi}{15}$; $a=16$, $b=15$; $S=31$.

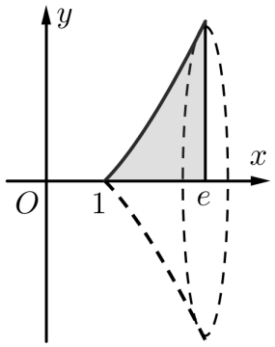
Câu 5: Biết thể tích khối tròn xoay tạo nên khi quay xung quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=(1-x)^2$, $y=0$, $x=0$, $x=2$ có dạng $\frac{a\pi}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị biểu thức $S=24a+12b$.



Lời giải

Thể tích khối tròn xoay là: $V=\pi\int\limits_{0}^{2}(1-x)^4\,dx=\dfrac{2\pi}{5}$; $a=2,\ b=5$; $S=24a+12b=108$.

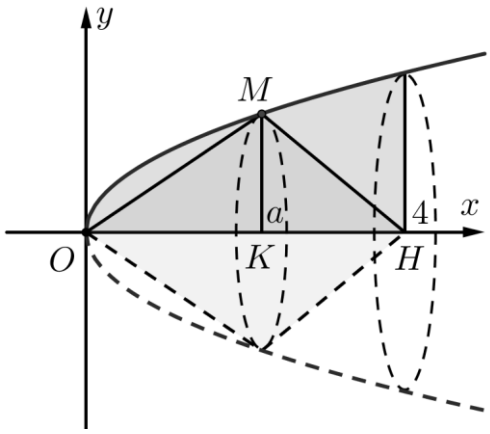
Câu 6: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x\ln x,\ y=0,\ x=e$ quay xung quanh trục Ox tạo thành khối tròn xoay có thể tích bằng $\dfrac{\pi}{a}\left(be^3-2\right)$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính $P=a^2-b^2$, biết một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x\ln x)^2$ là $F(x)=\dfrac{x^3}{27}\left(9\ln^2 x-6\ln x+2\right)$.



Lời giải

Thể tích của khối tròn xoay là: $V=\pi\int\limits_{1}^{e}y^2dx=\pi.F(x)\Big|_1^e=\dfrac{\pi}{27}\left(5e^3-2\right)$; $a=27,\ b=5$; $P=704$.

Câu 7: Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, $y=0$ và $x=4$ quanh trục Ox. Đường thẳng $x=a\ (0<a<4)$ cắt đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ tại M (xem hình vẽ sau). Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox. Biết rằng $V=2V_1$. Khi đó giá trị của a là bao nhiêu?



Lời giải

Ta có $V=\pi\int\limits_0^4 x\,dx=8\pi$ và tọa độ $M\left(a;\sqrt{a}\right)$.

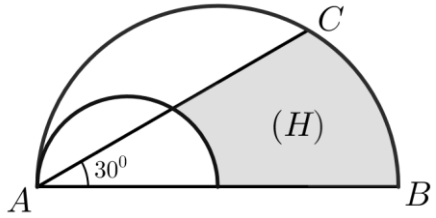
Khi quay tam giác OMH quanh trục Ox tạo thành hai hình nón có chung đáy:

Hình nón $\left(N_1\right)$ có đỉnh là O, chiều cao $h_1=OK=a$, bán kính đáy $R=MK=\sqrt{a}$;

Hình nón $\left(N_2\right)$ có đỉnh là H, chiều cao $h_2=HK=4-a$, bán kính đáy $R=MK=\sqrt{a}$.

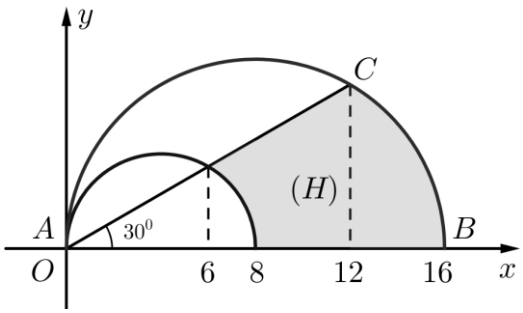
Khi đó $V_1=\frac{1}{3}\pi R^2h_1+\frac{1}{3}\pi R^2h_2=\frac{4}{3}\pi a$; $V=2V_1\Leftrightarrow 8\pi=2.\frac{4}{3}\pi a\Rightarrow a=3$.

Câu 8: Cho các nửa đường tròn như hình vẽ sau, trong đó đường kính của nửa đường tròn lớn gấp đôi đường kính của nửa đường tròn nhỏ. Biết rằng nửa hình tròn đường kính AB có diện tích là 32π và góc $BAC=30°$. Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng $\left(H\right)$ (phần tô đậm) xung quanh đường thẳng AB.



Lời giải

Chọn hệ trục Oxy thích hợp như hình sau:



Phương trình nửa đường tròn lớn: $f\left(x\right)=\sqrt{16x-x^2}$.

Phương trình nửa đường tròn nhỏ: $g\left(x\right)=\sqrt{8x-x^2}$.

Phương trình đường thẳng $AC:y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

Khi đó $V=\pi\int\limits_6^8\left|\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2-\left(8x-x^2\right)\right|dx+\pi\int\limits_8^{12}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2dx+\pi\int\limits_{12}^{16}\left(16x-x^2\right)dx=\frac{784\pi}{3}\approx 821$.

Câu 9: Người ta cần làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là 2,25 mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thi công trọn gói mỗi mét vuông là 1.500.000 đồng. Vậy số tiền làm cửa phải trả là bao nhiêu (đơn vị: triệu đồng)?

Lời giải

Gắn parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ vào hệ trục tọa độ sao cho (P) đi qua $O(0;0)$, $A(3;0)$ và $B(1,5;2,25)$ suy ra (P): $y = -x^2 + 3x$ nên diện tích cửa khi đó là: $S = \int_0^3 \left|-x^2 + 3x\right| dx = \frac{9}{2}$.

Vậy số tiền làm cửa là: $\frac{9}{2}.1,5 = 6,75$ (triệu đồng).

Câu 10: Xét phần bên trong của một thùng rượu: là một khối tròn xoay có 2 đáy là hình tròn bằng nhau và có chiều cao là 60 cm, đường cong (bên trong) của thùng là một cung tròn của đường tròn bán kính là 36 cm. Thùng rượu này chứa được tối đa bao nhiêu lít rượu? (kết quả làm tròn đến số thập phân đầu tiên sau dấu phẩy)



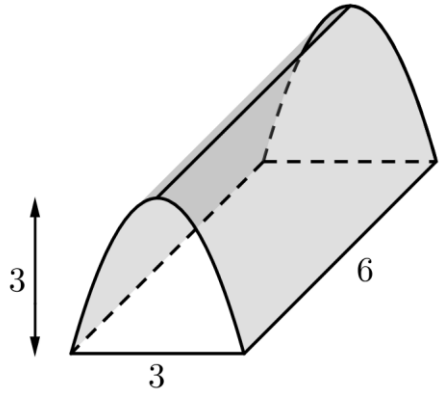
Lời giải

Phương trình đường tròn là: $x^2 + y^2 = 36^2 \Rightarrow y^2 = 36^2 - x^2$

Thể tích của thùng rượu là: $V = \pi \int_{-30}^{30} \left(\sqrt{36^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-30}^{30} \left(1296 - x^2\right) dx = 59760\pi \text{ cm}^3$

Vậy thùng rượu chứa được tối ta $187,7$ lít rượu.

Câu 11: Một Chi đoàn thanh niên đi dự trại ở một đơn vị bạn, họ dự định dựng một lều trại có dạng parabol (nhìn từ mặt trước, lều trại được căng thẳng từ trước ra sau, mặt sau trại cũng là parabol có kích thước giống như mặt trước) với kích thước: nền trại là một hình chữ nhật có chiều rộng là 3 mét, chiều sâu là 6 mét, đỉnh của parabol cách mặt đất là 3 mét. Hãy tính thể tích (đơn vị: m^3) phần không gian phía trong trại để cử số lượng người tham dự trại cho phù hợp.



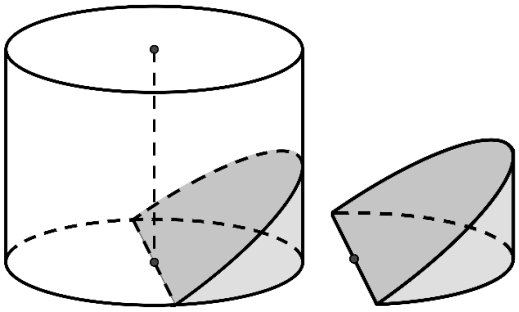
Lời giải

Gắn hệ trục tọa độ Oxy vào parabol sao cho đỉnh của parabol là $I(0;3)$, parabol cắt trục Ox tại 2 điểm là $A\left(-\frac{3}{2};0\right)$, $B\left(\frac{3}{2};0\right)$. Tìm được parabol $(P): y = -\frac{4}{3}x^2 + 3$.

Cắt lều trại bằng mặt phẳng song song với mặt phẳng chứa parabol ta được thiết diện có diện tích S bằng diện tích của hình phẳng giới hạn bởi (P) và trục Ox ta có $S=\int\limits_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}\left|-\frac{4}{3}x^2+3\right|dx=6$.

Khi đó thể tích phần không gian phía trong trại là: $V=\int\limits_0^6 6\,dx=36$ m^3.

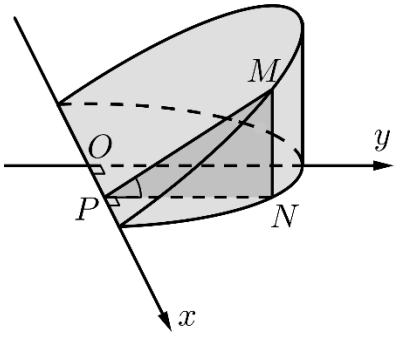
Câu 12: Từ một khúc gỗ hình trụ có đường kính 30 cm, người ta cắt khúc gỗ bởi một mặt phẳng đi qua đường kính đáy và nghiêng với đáy một góc $45°$ để lấy một hình nêm (xem hình minh họa dưới đây)



Kí hiệu V là thể tích của hình nêm. Tính V (cm^3).

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Khi đó hình nêm có đáy là nửa hình tròn có phương trình: $y=\sqrt{225-x^2}$, $x\in[-15;15]$.

Một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x với $x\in[-15;15]$ cắt hình nêm theo thiết diện là ΔMNP có diện tích là $S(x)$ (xem hình).

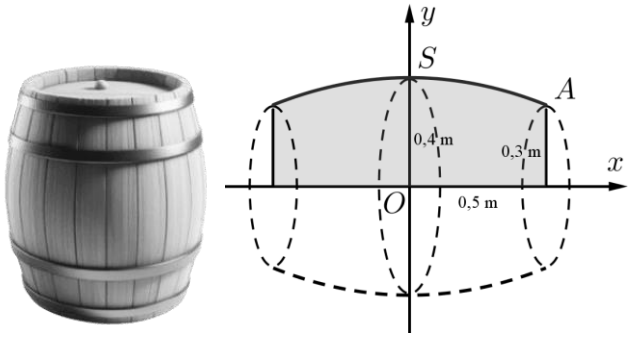
Ta có $NP=y$, $MN=NP.\tan 45°=y=\sqrt{225-x^2}$. Khi đó $S(x)=\frac{1}{2}MN.NP=\frac{1}{2}\left(225-x^2\right)$.

Suy ra thể tích hình nêm là: $V=\int\limits_{-15}^{15}S(x)dx=2250$ cm^3.

Câu 13: Một thùng rượu (xét phần bên trong) có 2 đáy là các hình tròn với bán kính là 30 cm, thiết diện (P) vuông góc với trục nối tâm của 2 đáy và cách đều 2 đáy có bán kính là 40 cm (bên trong), chiều cao thùng rượu là 1 m (hình vẽ). Biết rằng mặt phẳng chứa trục cắt mặt xung quanh (bên trong) thùng rượu theo các đường parabol có đỉnh nằm trên mặt phẳng (P), hỏi dung tích của thùng rượu (đơn vị: lít) là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



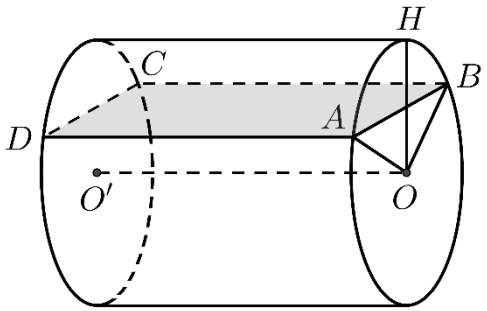
Lời giải



Gọi $(P): y = ax^2 + bx + c$ là parabol đi qua điểm $A(0,5;\ 0,3)$ và có đỉnh $S(0;\ 0,4)$ (hình vẽ). Khi đó, dung tích thùng rượu bằng thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi (P), trục hoành và hai đường thẳng $x = 0,5;\ x = -0,5$ quay quanh trục Ox.

Tìm được $(P): y = -\frac{2}{5}x^2 + 0,4$. Suy ra $V = \pi \int\limits_{-0,5}^{0,5} \left(-\frac{2}{5}x^2 + 0,4\right)^2 dx = \frac{203\pi}{1500}\ \text{m}^3 \approx 425$ lít.

Câu 14: Một bồn hình trụ đang chứa dầu, được đặt nằm ngang, có chiều dài bồn là 5m, có bán kính đáy 1m. Người ta đã rút dầu trong bồn tương ứng với 0,5m của đường kính đáy. Tính thể tích của lượng dầu còn lại trong bồn (theo đơn vị m^3).



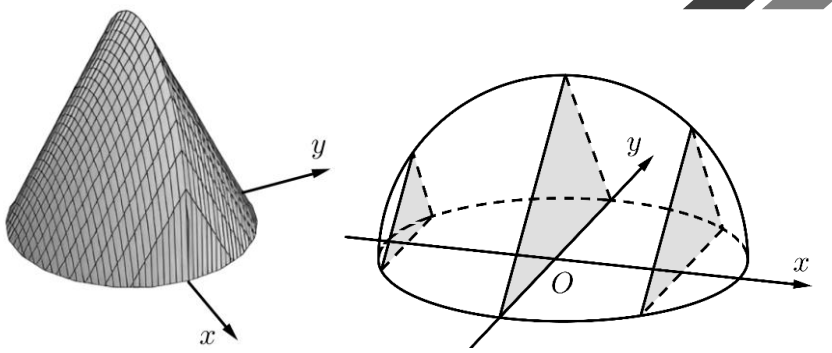
Lời giải

Dung tích của bồn (hình trụ) đựng dầu là: $V = \pi r^2 h = \pi.1^2.5 = 5\pi\ \text{m}^3$.

Thể tích phần đã rút dầu ra (phần trên mặt phẳng $(ABCD)$) là: $V_1 = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right).5\ \text{m}^3$.

Vậy thể tích lượng dầu còn lại là: $V_2 = V - V_1 \approx 12,6\ \text{m}^3$.

Câu 15: Một vật có kích thước và hình dáng như hình vẽ dưới đây. Đáy là hình tròn giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 16$, cắt vật bởi các mặt phẳng vuông góc với trục Ox ta được thiết diện là tam giác đều. Khi đó thể tích của vật thể có dạng $\frac{a\sqrt{3}}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $S = a + b$.



Lời giải

Ta có $x^2+y^2=16 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{16-x^2}$.

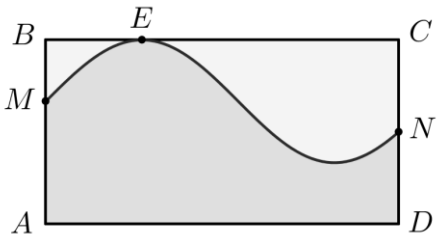
Suy ra thiết diện là tam giác đều có cạnh bằng $2\sqrt{16-x^2}$.

Do đó diện tích thiết diện là $S(x)=\left(2\sqrt{16-x^2}\right)^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}\left(16-x^2\right)$.

Thể tích cần tìm là $V=\int\limits_{-4}^{4}S(x)dx=\sqrt{3}\int\limits_{-4}^{4}\left(16-x^2\right)dx=\dfrac{256\sqrt{3}}{3}$.

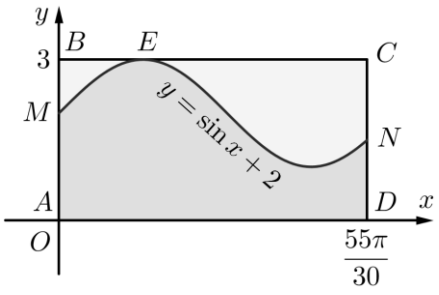
Suy ra $a=256, b=3; S=259$.

Câu 16: Từ một tấm tôn hình chữ nhật $ABCD$ với $AB=30$ cm, $AD=\dfrac{55\pi}{3}$ cm. Người ta cắt tấm tôn theo đường hình sin như hình vẽ bên để được hai miếng tôn. Biết $AM=20$ cm, $CN=15$ cm, $BE=5\pi$ cm. Tính thể tích V (đơn vị: lít) của khối tròn xoay được tạo thành khi xoay miếng tôn lớn quanh trục AD.



Lời giải

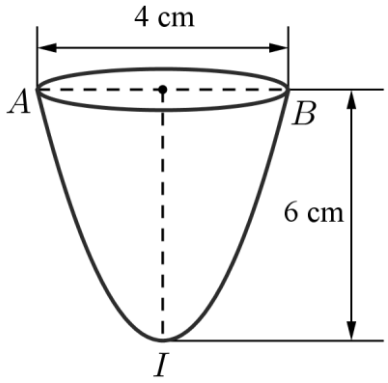
Chọn hệ trục Oxy với đơn vị trên trục là 10 cm như hình sau.



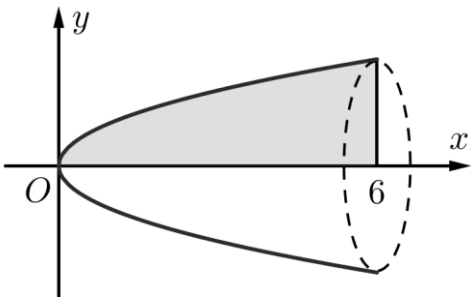
Khi đó đường cắt miếng tôn hình sin trên là đồ thị của hàm số $y=\sin x+2,\ 0\le x\le\dfrac{55\pi}{30}$.

Thể tích cần tìm là $V=\pi\int\limits_{0}^{\frac{55\pi}{30}}\left(\sin x+2\right)^2dx\approx 83{,}8$ lít.

Câu 17: Có một vật thể là hình tròn xoay có dạng giống như một cái ly như hình vẽ dưới đây. Người ta đo được đường kính của miệng ly là 4 cm và chiều cao là 6 cm. Biết rằng thiết diện của chiếc ly cắt bởi mặt phẳng đối xứng là một parabol. Tính thể tích V (cm^3) của vật thể đã cho.



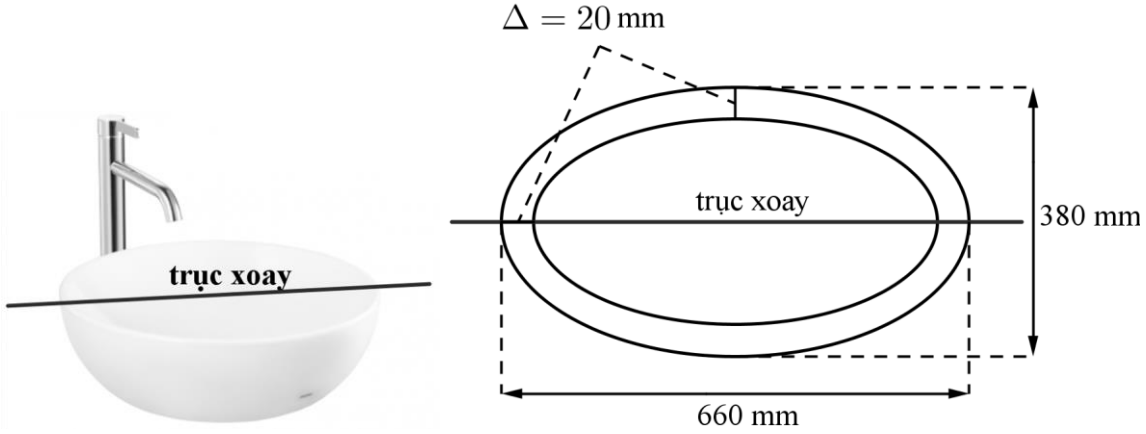
Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ Oxy thích hợp, ta được phương trình parabol là $(P): y^2 = \frac{2}{3}x$ với $0 \le x \le 6$

Thể tích vật thể đã cho là: $V = \pi \int_0^6 \frac{2}{3} x\,dx = 12\pi \approx 37{,}7$ cm^3.

Câu 18: Hình elip được ứng dụng nhiều trong thực tiễn, đặc biệt là kiến trúc, xây dựng, thiết bị nội thất,. Mặt trong (lọt lòng) và ngoài (phủ bì) của một bồn rửa (lavabo) bằng sứ có hình dạng là một nửa khối tròn xoay khi quay quanh một trục của 2 elip có chung các trục đối xứng (hình minh họa). Thông số kĩ thuật mặt trên của bồn rửa: dài $\times$ rộng là 660×380 mm (phủ bì) và elip (lọt lòng) có trục lớn, trục nhỏ ít hơn elip phủ bì một khoảng 40 mm. Tính thể tích chứa nước của bồn rửa (đơn vị: lít) (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy thích hợp với đơn vị trên trục là decimet.

Phương trình elip lọt lòng: $(E):\frac{x^2}{3,1^2}+\frac{y^2}{1,7^2}=1\Leftrightarrow y=\pm 1,7\sqrt{1-\frac{x^2}{3,1^2}}$.

Thể tích chứa nước của bồn rửa: $V=\frac{1}{2}.\pi\int\limits_{-3,1}^{3,1}1,7^2\left(1-\frac{x^2}{3,1^2}\right)dx\approx 18,8$ lít.

----------HẾT----------