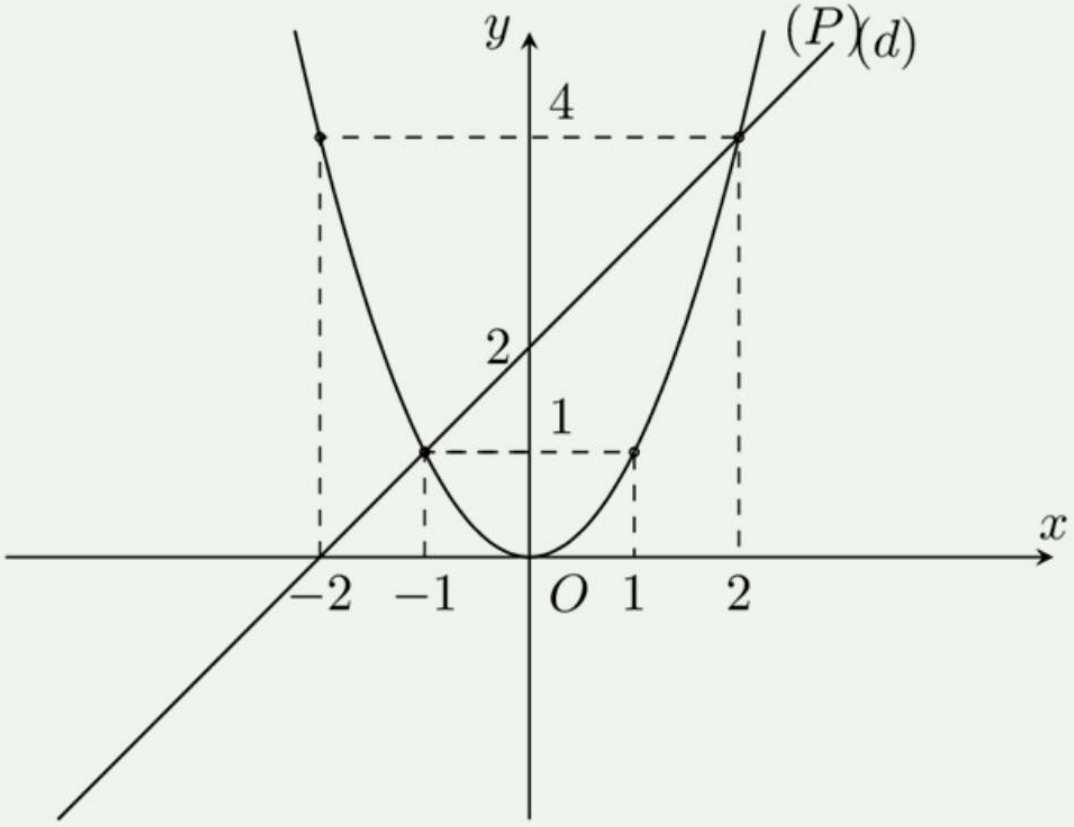
PHAN NHẬT LINH

HÀM SỐ

TÀI LIỆU MỚI NĂM 2024

File word cho giáo viên liên hệ Zalo: 0817.098.716



NẮM TRỌN CÁC CHUYÊN ĐỀ NĂM 2024 - PHAN NHẬT LINH

CHƯƠNG 1

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

CHỦ ĐỀ 1 TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Hàm số đơn điệu: Cho hàm số f xác định trên K, trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng

- f đồng biến trên K nếu với mọi $x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- f nghịch biến trên K nếu với mọi $x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Điều kiện cần để hàm số đơn điệu

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I. Khi đó:

- Nếu hàm số f đồng biến trên I thì $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in I$.
- Nếu hàm số f nghịch biến trên I thì $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in I$.

Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu

1. Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I.
   - Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại hữu hạn điểm của I thì hàm số đồng biến trên I.
   - Nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại hữu hạn điểm của I thì hàm số nghịch biến trên I.
   - Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in I$ thì hàm số f không đổi trên I.
2. Giả sử hàm số f liên tục trên nửa khoảng $[a;b)$ và có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$.
   - Nếu $f'(x) > 0$ (hoặc $f'(x) < 0$ (với mọi $x \in (a;b)$ thì hàm số f đồng biến (hoặc nghịch biến) trên nửa khoảng $[a;b)$.
   - Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in (a;b)$ thì hàm số f không đổi trên nửa khoảng $[a;b)$.

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3x$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;1)$ **B.** $(-\infty;-1)$ **C.** $(1;+\infty)$ **D.** $(-\infty;+\infty)$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 2: Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$, trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào đúng:

A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = x^3 - 3x$. **B.** $y = x^3 + 3x$. **C.** $y = \dfrac{x-1}{x+1}$. **D.** $y = x^4 - 3x^2 + 1$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 4: Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = x^2 + 1$. **B.** $y = \dfrac{x}{x+1}$. **C.** $y = \tan x$. **D.** $y = x^3 + x^2 + 5x$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 5: Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên tập xác định của nó?

A. $y=-x^4+3x^2+1$. **B.** $y=x^4+2x^2+1$. **C.** $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$. **D.** $y=x^3+3x-2$.

✍ Lời giải

……

……

……

……

Câu 6: Cho hàm số $y=-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+6x-1$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;3)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;3)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

✍ Lời giải

……

……

……

……

Câu 7: Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=x^4+2x^2$. **B.** $y=\dfrac{x-1}{x+1}$. **C.** $y=-x^3-3x+1$. **D.** $y=2x^3+3x+1$.

✍ Lời giải

……

……

……

……

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=-x+1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

✍ Lời giải

……

……

……

……

……

……

Câu 9: Hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;1)$.

C. $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x)=x^2(x+2)(1-x)$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng

A. $(2;3)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 11: Hàm số $y=2x^3+3x^2-12x+2021$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-2;1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 12: Khoảng đồng biến của hàm số $y=x^3+x^2-5x+1$ là

A. $(0;2)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $\left(-\dfrac{5}{3};1\right)$. **D.** $(-3;1)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1: Mở đầu về tính đơn điệu của hàm số

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

Câu 1: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và khoảng $(1;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên tập $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Câu 2: Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=x^2+x.$ **B.** $y=x^3+x.$ **C.** $y=x^4+x^2.$ **D.** $y=\dfrac{x+1}{x+3}.$

Câu 3: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{-x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$

D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 4: Cho hàm số $y=x^4+2022$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2022;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 5: Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\dfrac{3x+1}{x-2}\cdot$ **B.** $y=-3x^3-x+1\cdot$ **C.** $y=x^3-2x+1\cdot$ **D.** $y=-x^4-2x^2+1\cdot$

Câu 6: Cho các hàm số $y=x^4+3x^2+1;\ y=x^3+x^2+5x+1;\ y=\dfrac{x-1}{x+2};\ y=x^2+x+1$. Trong các hàm số đã cho, có bao nhiêu hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 7: Hàm số nào sau đây nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó?

A. $y=\dfrac{x-2}{x+2}.$ **B.** $y=\dfrac{-x+2}{x+2}.$ **C.** $y=\dfrac{x-2}{-x+2}.$ **D.** $y=\dfrac{x+2}{-x+2}.$

Câu 8: Cho hàm số $y=x^3+3x+2$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Câu 9: Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=2x^2+5$. **B.** $y=-x^3+3x^2-9x+2$.

C. $y=-x^3-x^2$. **D.** $y=\dfrac{x-1}{x+2}$

Câu 10: Hàm số $y=-2x^3+3x^2+1$ đồng biến trong khoảng nào trong các khỏng dưới đây?

A. $(-1;1)$. **B.** $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(0;2)$.

Câu 11: Hàm số nào sau đây nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. $y=\dfrac{x-1}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{x+1}{x+3}$. **C.** $y=-x^3+3x^2-9x$. **D.** $y=-x^3+x+1$.

Câu 12: Cho hàm số $y=x^3-3x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Câu 13: Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. $y=3x^3+3x-7$. **B.** $y=2x^3-5x+12$. **C.** $y=x^4+4x^2$. **D.** $y=\dfrac{x-3}{x+2}$.

Câu 14: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và khoảng $(1;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên tập $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Câu 15: Hàm số $y=-x^3+3x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;4)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(0;2)$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x)=(2-x)^4(x+2)^3(1-x)$. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;1)$. **B.** $(-2;2)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Câu 17: Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\dfrac{1}{x-1}$. **B.** $y=x^3-3x+4$. **C.** $y=-2022x+1$. **D.** $y=-x^2+2$.

Câu 18: Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=-x^3-x$. **B.** $y=-x^4-x^2$. **C.** $y=-x^3+x$. **D.** $y=\dfrac{x+2}{x-1}$.

Câu 19: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-2)^3$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;0)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(3-x), \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;3)$. **B.** $(-1;3)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Câu 21: Hàm số $y=x^4-2x^2-2$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-3;0)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(0;1)$.

Câu 22: Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x+6$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;5)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(5;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Câu 23: Hàm số $y=(x-2)(x^2+1)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;2)$. **B.** $\left(\frac{1}{3};1\right)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(2;3)$.

Câu 24: Hàm số $y=x^4+2x^2-3$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$. **B.** $(0;+\infty)$.

C. $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Câu 25: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=(x-2)(x+5)(x+1)$. Hỏi hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-6;-1)$.

Câu 26: Cho hàm số $y=x^4-8x^2+2019$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

Câu 27: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^4(x-1)^3(2-x)$. Hàm số $g(x)=-2f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 28: Hàm số $y=x^3-2x^2+x+1$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $\left(-\frac{1}{3};1\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{3};1\right)$.

Câu 29: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1), \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;+\infty)$. **B.** $(-1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(-1;0)$.

Câu 30: Hàm số $y=x^4-6x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;+\infty)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Dạng 2: Tính đơn điệu của hàm số có chứa tham số

Tính đơn điệu của hàm liên tục trên khoảng - đoạn

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, khi đó các phát biểu sau là tương đương:

- Hàm số $f(x)$ đồng biến (nghịch biến) trên khoảng $(a;b)$.
- Hàm số $f(x)$ đồng biến (nghịch biến) trên đoạn $[a;b]$.
- Hàm số $f(x)$ đồng biến (nghich biến) trên $[a;b)$.
- Hàm số $f(x)$ đồng biến (nghịch biên) trên $(a;b]$.

Bất đẳng thức AM-GM (Cauchy)

Cho các số không âm a,b,c, ta có:

- $a+b\ge 2\sqrt{ab}$; dấu bằng xảy ra khi và chi khi $a=b$.
- $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}$; dấu bằng xảy ra khi và chi khi $a=b=c$.

Tổng quát: Với n số không âm $a_1,a_2,\ldots,a_n$, ta luôn có trung bình cộng của n số đó lớn hơn hoặc bằng trung bình nhân của n số đó. Cụ thể: $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\ge \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$.

Dấu bằng xảy ra khi: $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

Vấn đề hàm số biến thành hàm hằng:

Ta đều biết nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên K, khi đó $f(x)$ đồng biến trên K khi và chỉ khi $f'(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f'(x)$ chỉ bằng 0 tại các điểm rời rạc. Đa số các trường hợp $f'(x)$ chỉ bằng 0 tại các điểm rời rạc (ví dụ $y=x^2+mx; y=x^3+mx^2+2mx+1; y=x^2+\frac{1}{x^2+m}\ldots$), những hàm số này không thể bằng 0 tại vô hạn điểm liên tục được. Tuy nhiên có một số trường hợp chúng ta cần phải xét trường hợp của m để cảnh giác vấn đề $f(x)$ suy biến thành hàm hằng. Chú ý các ví dụ sau:

- **Ví dụ 1:** $f(x)=mx^3+mx^2+1$. Có $f'(x)=3mx^2+2mx$. Nếu $m=0$ thì $f'(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)$ là hàm hằng do đó khi $m=0$ thì $f(x)$ không đồng biến và không nghịch biến.
- **Ví dụ 2:** $f(x)=\frac{x-m}{x+1}$ có $f'(x)=\frac{1+m}{(x+1)^2}\forall x\ne -1$. Nếu $m=-1$ thì $f'(x)=0,\forall x\ne -1$ nên $f(x)$ suy biến thành hàm hằng trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ nên $f(x)$ không đồng biến cũng không nghịch biến.

1 Ví dụ minh họa

Câu 1: Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+m^2-6}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$. Tổng các phần tử của S là

A. -2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-x^2+mx+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m<3$. **B.** $m\le\dfrac{1}{3}$. **C.** $m\ge\dfrac{1}{3}$. **D.** $m<-3$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=(x+2a)(x+2b-a)(ax+1)$. Có bao nhiêu cặp $(a;b)$ để hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** vô số.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{m}{3}x^3-2mx^2+(3m+5)x+2021$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 2. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left(4-m^2\right)x^3+\left(m-2\right)x^2+x+m-1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 6: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ sao cho hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3+2x^2+\left(m-1\right)x-1$ nghịch biến trên $\left(0;+\infty\right)$?

A. 8. **B.** 7. **C.** 10. **D.** 12.

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 7: Tìm số các giá trị nguyên của tham số $m\in[0;2022]$ để hàm số $y=\left(2m-1\right)x-\left(m-1\right)\cos x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

A. 1 **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 8: Cho hàm số $y=-x^3-mx^2+(4m+9)x+5$, với m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

A. 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 9: Số các giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-100;100]$ để hàm số $y=mx^3+mx^2+(m+1)x-3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là

A. 99. **B.** 100. **C.** 200. **D.** 199.

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=(m^2-3m)x^2+2(m^2-9)x+m^2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2 Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tập tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-3)x-m+2$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là $m\in[a;b]$. Giá trị $b-a$ bằng.

A. 4. **B.** 10. **C.** 12. **D.** -3.

Câu 2: Có báo nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=(m^2-m-6)x^3+(m-3)x^2-2x+1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. 6. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 3: Cho hàm số $y=\frac{(m^2-m)x^3}{3}+(m^2-m)x^2+mx+2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 3. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị thực của m để hàm số $y=mx^9+(m^2-3m+2)x^5+(2m^3-m^2-m)x^4+m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

A. vô số. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 5: Tổng các giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-10;10]$ để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+2x^2-mx-1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ bằng bao nhiêu?

A. 49. **B.** -49. **C.** -45. **D.** 45.

Câu 6: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-20;2]$ để hàm số $y=x^3-x^2+3mx-1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 2. **B.** 23. **C.** 20. **D.** 3.

Câu 7: Hãy tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=-x^3+mx^2-2022$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m=0$. **B.** $m>0$. **C.** $m\le 0$. **D.** $m\ge 0$.

Câu 8: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3+x^2+mx+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m\le\frac{4}{3}$. **B.** $m\le\frac{1}{3}$. **C.** $m\ge\frac{4}{3}$. **D.** $m\ge\frac{1}{3}$.

Câu 9: Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y=x+3-\frac{m}{x-2}$ đồng biến trên $[5;+\infty)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2020;2020]$ sao cho hàm số $f(x)=(m-1)x^3+(m-1)x^2+(2m+1)x+3m-1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 2020. **B.** 2018. **C.** 2019. **D.** 2021.

Câu 11: Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\frac{mx+4m-3}{x+m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định là

A. 3. **B.** 6. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 12: Tìm giá trị lớn nhất của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(8-2m)x+m+3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m=-4$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=4$. **D.** $m=2$.

Câu 13: Tập tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-3)x-m+2$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là $m\in[a;b]$. Giá trị $b-a$ bằng.

A. 4. **B.** 10. **C.** 12. **D.** -3.

Câu 14: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{2\cot x+1}{\cot x+m}$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $m\in(-\infty;-1)\cup\left[0;\frac{1}{2}\right]$. **B.** $m\in(-\infty;-1]\cup\left[0;\frac{1}{2}\right)$.

C. $m\in(-\infty;-1]\cup\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $m\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Câu 15: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-2020;2020]$ để hàm số $y=x^{2021}-mx+2020$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 2020. **B.** 2021. **C.** 2022. **D.** 2023.

Câu 16: Hàm số $y=-\frac{1}{3}mx^3+mx^2-x$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

A. $m<-1$. **B.** $0\le m\le 1$. **C.** $m\ne 0$. **D.** $m<0$ hoặc $m>1$.

Câu 17: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+16x+10$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. 7. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 18: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-(m+1)x^2+3x-m^2+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $\left[\begin{array}{l}m\ge 2\\ m\le -4\end{array}\right.$. **B.** $-4\le m\le 2$. **C.** $-4<m<2$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m>2\\ m<-4\end{array}\right.$.

Câu 19: Cho hàm số (P) với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$

A. 6. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 4.

Câu 20: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $y=(m^3-3m)x^4+m^2x^3-mx^2+x+1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** Vô số.

Câu 21: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $f(x)=3x+m\sqrt{x^2+1}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 5. **B.** 1. **C.** 7. **D.** 2.

Câu 22: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2020;2020]$ để hàm số $y = \left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{x+21}{x+3m}}$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$?

A. 2014. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 2015.

Câu 23: Cho hai số thực dương a và b thỏa mãn hàm số $y = \frac{4a^3+a}{b+1}x + \cos\left(\sqrt{2b+1}.x\right)$ đồng biến trong khoảng $(-\infty;+\infty)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = 27b - 8a^3$.

A. 40. **B.** 351. **C.** 345. **D.** 81.

Câu 24: Cho hàm số $f(x) = \frac{2}{5}m^2x^5 - \frac{8}{3}mx^3 - \left(m^2 - m - 20\right)x + 1$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 7. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 10.

Dạng 3: Tính đơn điệu của hàm phân thức

Dạng 01: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$. Xét tính đơn điệu của hàm số $f(x)$ trên các khoảng xác định?

Tập xác định của hàm số: $D=\left(-\infty;-\dfrac{d}{c}\right)\cup\left(-\dfrac{d}{c};+\infty\right)$ và đạo hàm $f'(x)=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

Điều kiện cần và đủ để hàm số đồng biến là $ad-bc>0$ và nghịch biến là $ad-bc<0$.

Kết luận:

- $ad-bc>0$ thì hàm số đồng biến trên các khoảng xác định.
- $ad-bc<0$ thì hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định.
- $ad-bc=0$ thì hàm số là hàm hằng trên các khoảng xác định.

Dạng 02: Tìm điều kiện của tham số để hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ đơn điệu trên K

với $K=\{(a;b);[a;b];(a;b];[a;b)\}$

Bước 1: Tìm TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ và tính đạo hàm: $f'(x)=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

Bước 2:

- Hàm số đồng biến trên $K\Leftrightarrow\begin{cases}ad-bc>0\\cx+d\neq 0,\forall x\in K\end{cases}\Leftrightarrow K\Leftrightarrow\begin{cases}ad-bc>0\\-\dfrac{d}{c}\notin K\end{cases}$
- Hàm số nghịch biến trên $K\Leftrightarrow\begin{cases}ad-bc<0\\cx+d\neq 0,\forall x\in K\end{cases}\Leftrightarrow K\Leftrightarrow\begin{cases}ad-bc<0\\-\dfrac{d}{c}\notin K\end{cases}$

Dạng 03: Tìm điều kiện của tham số để hàm số $f(x)=\dfrac{au(x)+b}{cu(x)+d}$ đơn điệu trên K

với $K=\{(a;b);[a;b];(a;b];[a;b)\}$

Trong bài toán này, ta thấy hàm số $u(x)$ là một hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K nên khi đó ta đặt $t=u(x)$ suy ra $g(t)=\dfrac{at+b}{ct+d}$.

- Nếu hàm số $u(x)$ đồng biến trên $K\Rightarrow t\in[u(a);u(b)];(u(a);u(b));...$

  Bước 1: Tìm tập giá trị T của $t(x)$ trên K

  Bước 2: Tìm m để $g(t)$ đồng biến (nếu để cho $f(x)$ đồng biến) hoặc nghịch biến (nếu để cho $f(x)$ nghịch biến) trên T.

- Nếu hàm số $u(x)$ nghịch biến trên K

  Bước 1: Tìm tập giá trị T của $t(x)$ trên K

  Bước 2: Tìm m để $g(t)$ đồng biến (nếu để cho $f(x)$ nghịch biến) hoặc nghịch biến (nếu để cho $f(x)$ đồng biến) trên T.

1 Ví dụ minh họa

Câu 1: Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+2}$. Khẳng định nào sau đây là **đúng?**

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

C. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 2: Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x-1}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x-4}{x+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5: Cho hàm số $y=\dfrac{mx+2}{2x+m}$, m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 6: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx-2}{x-m+1}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định?

A. 4. **B.** 6. **C.** Vô số. **D.** 2.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 7: Tìm tất cả giá trị của m sao cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+2}$ đồng biến trên các khoảng xác định?

A. $m\geq 2$. **B.** $m<2$. **C.** $m\leq 2$. **D.** $m>2$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 8: Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-6)$ là

A. $(3;6]$. **B.** $(3;6)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $[3;6)$.

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 9: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+m^2}{x+4}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 5. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{2\cot x+1}{\cot x+m}$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $m\in(-\infty;-1)\cup\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$. **B.** $m\in(-\infty;-1]\cup\left[0;\dfrac{1}{2}\right)$.

C. $m\in(-\infty;-1]\cup\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $m\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2 Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hàm số $y=\dfrac{5x+9}{x-1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$ và $(2;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $R\setminus\{1\}$.

D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

Câu 2: Khẳng định nào sau đây đúng về tính đơn điệu của hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$?

A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 3: Cho hàm số $y=\dfrac{x+4}{x+1}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

C. Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Câu 4: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Câu 5: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 6: Hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

C. $(-\infty;1)$. **D.** $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Câu 7: Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+3}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;+\infty\right)$.

B. Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

C. Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;+\infty\right)$.

Câu 8: Hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi tham số m thỏa mãn

A. $m<1$. **B.** $m\le 1$. **C.** $m\ge 1$. **D.** $m>1$.

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{2x+m}{x+1}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định?

A. $m\le 2\cdot$ **B.** $m\ge 2\cdot$ **C.** $m>2\cdot$ **D.** $m<2\cdot$

Câu 10: Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{\left(m+1\right)x+4}{x+2m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 11: Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx+1}{x+m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định là

A. $\left(-\infty;-1\right)$. **B.** $\left(-1;1\right)$. **C.** $\left(1;+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;1\right)$.

Câu 12: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{mx+9}{x+m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định.

A. $-3\le m\le 3$. **B.** $-3<m<3$. **C.** $-3\le m<3$. **D.** $-3<m\le 3$.

Câu 13: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+m^2}{x+4}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 5. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 14: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-2}$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

A. $m>-2$. **B.** $m\ge -2$. **C.** $m\le -2$. **D.** $m<-2$.

Câu 15: Cho hàm số $y=\dfrac{mx+4m}{x+m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** Vô số.

Câu 16: Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+m^2-6}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-2\right)$. Tổng các phần tử của S là

A. -2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 17: Cho hàm số $y=\dfrac{mx+2}{2x+m}$, m là tham số thự **C.** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$. Tìm số phần tử của S.

A. 1. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 18: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=3x-1+\dfrac{m^2+3m}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 19: Cho hàm số $y=\dfrac{mx+4m}{x+m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S.

A. 5. **B.** 4. **C.** Vô số. **D.** 3.

Câu 20: Hàm số $f(x)=\dfrac{m\sqrt{1-x}+1}{2\sqrt{1-x}+m+1}$ đồng biến trên $\left(-\infty;\dfrac{15}{16}\right)$ khi $m\in[a;b)$.Tính $P=a+b$

A. $P=0$ **B.** $P=-\dfrac{1}{2}$. **C.** $P=\dfrac{1}{2}$. **D.** $P=1$.

Câu 21: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-10;10)$ để hàm số $y=\dfrac{\sqrt{3-x}+2}{\sqrt{3-x}+m}$ đồng biến trên khoảng $(-6;2)$?

A. 11. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 7.

Câu 22: Có bao nhiêu số nguyên $m\in[0;2021]$ để hàm số $y=\dfrac{m\sin x-1}{\sin x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{5\pi}{6}\right)$?

A. 2020. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2021.

Câu 23: Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ là

A. $m\in(-\infty;1)$. **B.** $m\in(1;+\infty)$. **C.** $m\in(1;2]$. **D.** $m\in(1;2)$.

Câu 24: Gọi S là tập các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\dfrac{2\sqrt{1-x}-14}{m-\sqrt{1-x}}$ đồng biến trên khoảng $(-15;-3)$. Số phần tử của tập S là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 25: Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{2x^2+(1-m)x+1+m}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 26: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2+x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

A. $(-\infty;-2]$. **B.** $(-3;-2]$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Câu 27: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{\tan x-2}{\tan x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

A. $m\le 0$ hoặc $1\le m<2$. **B.** $m\le 0$.

C. $1\le m<2$. **D.** $m\ge 2$.

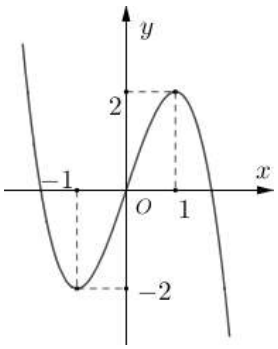
Câu 28: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1-x}+m}$ đồng biến trên khoảng $(-3;0)$?

A. 0. **B.** 3. **C.** 0. **D.** vô số.

Câu 29: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=\dfrac{x^2-4x+m+2+3\sqrt{x^2-4x}}{\sqrt{x^2-4x}+2}$ nghịch biến trên khoảng $(-4;0)$?

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 17.

Câu 30: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình bên dưới. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mf(x)+2024}{f(x)+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$?



A. 88. **B.** 84. **C.** 86. **D.** 89.

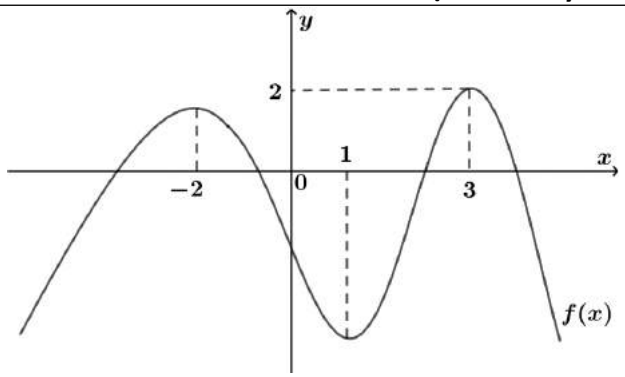
Câu 31: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-20;20]$ để hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-2x+2}+1}{2m-3-\sqrt{x^2-2x+2}}$ đồng biến trên $(-\infty;1)$?

A. 21. **B.** 19. **C.** 22. **D.** 20.

Câu 32: Cho hai hàm số $f(x)=\dfrac{x+4a}{x+b}$ và $g(x)=\dfrac{x+b}{x+a^2}$ cùng đồng biến trên từng khoảng xác định của nó. Gọi a_o và b_o lần lượt là những số nguyên dương nhỏ nhất của a và b thỏa mãn. Giá trị của biểu thức $T=a_o+b_o$ tương ứng bằng:

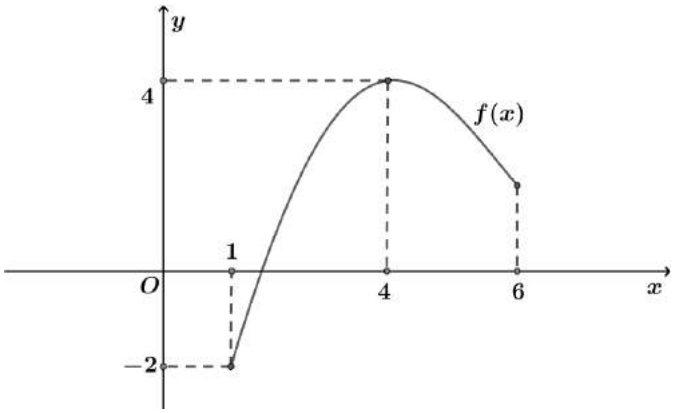
A. 25. **B.** 26. **C.** 27. **D.** 28.

Câu 33: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ. Hỏi hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-3}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-3;-2)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(-1;2)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Câu 34: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-20;2021)$ để hàm số $y=\dfrac{f(x)+5}{f(x)+m}$ nghịch biến trên $(1;4)$?



A. 19. **B.** 21. **C.** 20. **D.** 22.

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị nằm trên trục hoành và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, bảng xét dấu của biểu thức $f'(x)$ như bảng dưới đây.

x	$-\infty$		-2		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=g(x)=\dfrac{f\left(x^2-2x\right)}{f\left(x^2-2x\right)+1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $\left(-2;\dfrac{5}{2}\right)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Dạng 4: Tính đơn điệu của hàm số bậc ba

Cho hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Đạo hàm: $y' = f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Hàm số bậc ba đồng biến, nghịch biến trên $\mathbb{R}$

- Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 3ac \leq 0 \\ a > 0 \end{cases}$
- Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 3ac \leq 0 \\ a < 0 \end{cases}$

Hàm số bậc ba đồng biến, nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ cho trước

- Hàm số đồng biến trên $(a;b) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (a;b)$
- Hàm số nghịch biến trên $(a;b) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (a;b)$

Phương pháp cô lập tham số (sử dụng khi tách được tham số)

Bước 1: Tách tham số m ở $y' \geq 0$ hoặc $y' \leq 0$ để đưa về dạng $f(m) \geq g(m)$ hoặc $f(m) \leq g(m)$

Bước 2: Xét hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(a;b)$, tính đạo hàm và lập bảng biến thiên

Bước 3: Dựa vào bảng biến thiên của $f(x)$ để suy ra được giá trị của $g(x)$: "lớn hơn giá trị lớn nhất hoặc nhỏ hơn giá trị nhỏ nhất"

Phương pháp sử dụng biệt thức Denta (sử dụng khi không tách được tham số)

Biệt thức Delta: $\Delta' = b^2 - 3ac$

Trường hợp 1: $\Delta' \leq 0$ thì kiểm tra dấu của hệ số a để suy ra hàm số đồng biến hay nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Sau đó đối chiếu với yêu cầu bài toán để suy ra giá trị của tham số m.

Trường hợp 2: $\Delta' > 0$ thì khi đó $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Ta lập bảng xét dấu, dựa vào yêu cầu bài toán để suy ra giá trị của tham số m.

Lưu ý: Nếu hệ số a phụ thuộc vào tham số, ta cần xét thêm trường hợp $a = 0$.

1 Ví dụ minh họa

Câu 1: Hàm số $y = -2x^3 + 3x^2 + 1$ đồng biến trong khoảng nào trong các khỏng dưới đây?

A. $(-1;1)$. **B.** $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$.

C. $(0;1)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Hàm số $y = -x^3 + 3x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;4)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(0;2)$

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 4: Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$, với m là tham số. Số giá trị nguyên của m để hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 4.

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 5: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - (2m-3)x - m + 2$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 5. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 6: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x-3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. Vô số. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 7: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\frac{m}{3}x^3-2mx^2+(3m+5)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 6. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 8: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để hàm số $y=x^3+mx^2-x+3$ nghịch biến trên $(2;4)$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 9: Cho hàm số $y=x^3-(m+1)x^2-(2m^2-3m+2)x+2m(2m-1)$. Biết $[a;b]$ là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên $[2;+\infty)$. Tổng $a+b$ bằng

A. $-\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{3}{2}$. **C.** 0. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

2 Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Khoảng nghịch biến của hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 4$ là

A. $(0;+\infty)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(-2;0)$.

Câu 2: Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + 6$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;5)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(5;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Câu 3: Hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;1)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $[1;+\infty)$. **D.** $(-2;+\infty)$.

Câu 4: Hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $\left(-\frac{1}{3};1\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{3};1\right)$.

Câu 5: Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3mx$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

A. $m \le -1$. **B.** $m \ge -1$. **C.** $m \ge 1$. **D.** $m \le 3$.

Câu 6: Tập hợp tất cả giá trị của hàm tham số m để hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + mx + 5$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là

A. $[-3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-3)$. **C.** $(-3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-3]$.

Câu 7: Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x - m$. đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $[-2;2]$. **B.** $(-2;2)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $[2;+\infty)$.

Câu 8: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + mx - 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m \le 9$. **B.** $m < 9$. **C.** $m > 9$. **D.** $m \ge 9$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x) = x^3 + 3mx^2 + 3$, với giá trị $m = m_0$ thì hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $m \in [0;1]$. **B.** $m \in [1;2]$. **C.** $m \in (3;5)$. **D.** $m \in (-1;0)$.

Câu 10: Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $y = f(x) = -2x^3 + (m-1)x^2 + mx + 5$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-5 \ge m$. **B.** $3 \le m \le 5$. **C.** $-3 \le m \le -1$. **D.** $m \in \varnothing$.

Câu 11: Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3(m-1)x^2 + 3x + 2022$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A. $[0;2]$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 12: Cho hàm số $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{m+1}{4}x^4 + \frac{2m^2+m-1}{3}x^3 + 1$. Số các giá trị nguyên của $m \in [0;10]$ để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A. 10. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 5.

Câu 13: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - x^2 + mx + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m < 3$. **B.** $m \le \frac{1}{3}$. **C.** $m \ge \frac{1}{3}$. **D.** $m < -3$.

Câu 14: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 9x - 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 5. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 6.

Câu 15: Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + mx^2 - (2m+3)x + 4$ nghịch biến trên R. Tổng giá trị các phần tử của S bằng

A. 5. **B.** -3. **C.** 3. **D.** -5.

Câu 16: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + mx - 3$ đồng biến trên khoảng $(2;6)$?

A. 6. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 17: Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 + m$. Điều kiện cần và đủ của m để hàm số đồng biến trên $(0;2)$ là

A. $m \le 0$. **B.** $m \le -3$. **C.** $m \ge -3$. **D.** $m \ge 0$.

Câu 18: Các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x + 3$ nghịch biến trên một khoảng có độ dài lớn hơn 3 là

A. $m > 6$. **B.** $m \in (0;6)$. **C.** $m < 0$. **D.** $m < 0$; $m > 6$.

Câu 19: Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^3 - 6x^2 + 3mx + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ là

A. $(-\infty;-4]$. **B.** $(-\infty;-12]$. **C.** $[-4;+\infty)$. **D.** $[-3;+\infty)$.

Câu 20: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - x^2 + mx + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m < 3$. **B.** $m \le \frac{1}{3}$. **C.** $m \ge \frac{1}{3}$. **D.** $m < -3$.

Câu 21: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - 2mx^2 + (3m+5)x + 2021$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 2. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 22: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = (4-m^2)x^3 + (m-2)x^2 + x + m - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 23: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ sao cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + (m-1)x - 1$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$?

A. 8. **B.** 7. **C.** 10. **D.** 12.

Câu 24: Cho hàm số $y=-x^3-mx^2+(4m+9)x+5$, với m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

A. 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 25: Số các giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-100;100]$ để hàm số $y=mx^3+mx^2+(m+1)x-3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là

A. 99. **B.** 100. **C.** 200. **D.** 199.

Câu 26: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left(4-m^2\right)x^3+(m-2)x^2+x+m-1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 27: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=-m^2x^5-mx^3-\left(m^2-m-20\right)x^2+2021$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. 7. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 1.

Câu 28: Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y=\frac{2}{3}x^3+mx-\frac{1}{3x^3}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 0. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 29: Có bao nhiêu giá trị m để hàm số $y=\frac{2}{3}m^2x^3-4mx^2+\left(8-2m^2\right)x-1$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$

A. 4. **B.** 6. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 30: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\frac{x^3}{3}-(m+1)x^2+\left(m^2+2m\right)x+1$ nghịch biến trên đoạn $[2;3]$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 31: Các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=2x^3-3(2m+1)x^2+6m(m+1)x+1$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là**.**

A. $m<1$. **B.** $m\le 1$. **C.** $m<2$. **D.** $m>1$.

Câu 32: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x-2022$ đồng biến trên khoảng $(1;6)$

A. Vô số. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 33: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3mx^2-9m^2x$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

A. $m\ge\frac{2}{3}$ hoặc $m\le -2$. **B.** $m>\frac{2}{3}$. **C.** $m<-2$. **D.** $-2<m<\frac{2}{3}$.

Câu 34: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-10;10)$ để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+(m-2)x^2+(2m-5)x-1$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

Câu 35: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=x^3-3(2m+1)x^2+(12m+5)x+2$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$. Số phần tử của S bằng

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 0 .

Câu 36: Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y=x^3-\frac{1}{5x^5}+mx-2022$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 1. **B.** 2 . **C.** 4 . **D.** 5 .

Câu 37: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[0;10]$ để hàm số $y=x^3-(m-3)x^2-(m-9)x+2m+1$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 8. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 9.

Câu 38: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-20;20)$ để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(m+1)x^2+(1-m)x+2022$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 23. **B.** 21. **C.** 20 . **D.** 22 .

Dạng 5: Tính đơn điệu của hàm tổng, hàm hợp, hàm liên kết

Xét tính đơn điệu của các hàm số tổng, hàm số hợp và hàm liên kết:

- Xét tính đơn điệu của hàm số: $y=f(x)+g(x)$
- Xét tính đơn điệu của hàm số: $y=f(u(x))$ với u là một hàm đối với biến x

Phương pháp giải:

- **Bước 1:** Tính đạo hàm y' (nếu có)
- **Bước 2:** Giải các bất phương trình $y'>0;\ y'<0$ hoặc lập bảng xét dấu
- **Bước 3:** Đưa ra kết luận

Chú ý: Với hàm số hợp $y=f(u)$ có $y'=u'.f'(u)$ và $y=f^n(u)$ có $y'=n\left(f(u)\right)^{n-1}\left[u'.f'(u)\right]$

1 Ví dụ minh họa

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(-1;1)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(-1;3)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)=(x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;20]$ để hàm số $g(x)=f\left(x^2+3x-m\right)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 16. **B.** 20. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)=-x^3+6x^2-32$. Khi đó hàm số $g(x)=f\left(x^2-3x\right)$ nghịch biến trên khoảng

A. $(-\infty;+\infty)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn $-20<m<20$ và hàm số $y=f\left(x^2+2x+m\right)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

A. 17 **B.** 15 **C.** 16 **D.** 14

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, biết rằng $f'(x+1)=x^2-4x+3$. Hàm số $y=f(x^2+2x+3)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;+\infty)$. **B.** $(-1-\sqrt{2};0)$. **C.** $(-1+\sqrt{2};+\infty)$. **D.** $(-1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2})$.

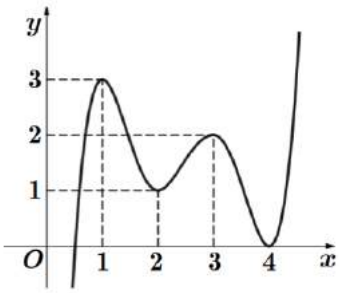
Lời giải

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=-x^3+4x^2+x-4$. Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m\in\mathbb{R}\setminus(a;b)$ thì hàm số $h(x)=f\left(\frac{3}{x+1}-m^2-1\right)$ nghịch biến trên $(2;+\infty)$. Tính $S=a+b.$

A. $S=1$. **B.** $S=\frac{3}{2}$. **C.** $S=-1$. **D.** $S=0$.

Lời giải

Câu 7: Cho hàm số đa thức bậc năm $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $h(x)=f^3(x)-3f^2(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2;3)$. **B.** $(3;4)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(-\infty;1)$.

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $g(x)=f'\left(x^3+2\right)$ có bảng xét dấu như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		3		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Có bao nhiêu số nguyên $m\in[-2023;2023]$ để hàm số $y=f(x-m)$ đồng biến trên $(-\infty;0)$?

A. 2017. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 2018.

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

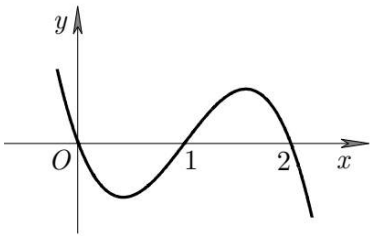
.....

.....

.....

.....

Câu 9: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Biết hàm số $y=f'(1+x)$ có đồ thị như trong hình bên.



Có bao nhiêu số nguyên dương m sao cho hàm số $g(x)=f\left(-x^2+2x-2022+m\right)$ đồng biến trên $(0;1)$?

A. 2023. **B.** 2021. **C.** 2022. **D.** 2024.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

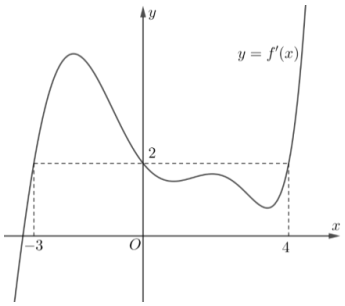
.....

.....

.....

.....

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới đây



Hàm số $g(x)=f\left(x^2-3x\right)-2x^2+6x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(0;4)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

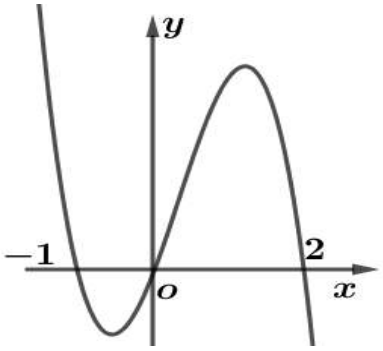
.....

.....

.....

2 Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hàm số đa thức bậc bậc bốn $f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(3-2x)$ được cho như hình bên. Hàm số $y=f(x^2+1)$ nghịch biến trên khoảng nào?



A. $(-\infty;0)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;1)$.

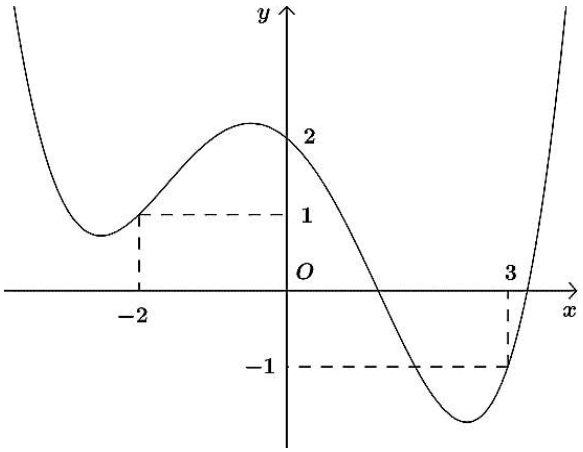
Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như ở bảng dưới đây.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hỏi hàm số $g(x)=3-2f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$. **B.** $\left(\dfrac{1}{2};2\right)$. **C.** $\left(-2;-\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên.



Hàm số $g(x)=f(x+1)+\dfrac{x^3}{3}-3x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;2)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;4)$. **D.** $(1;5)$.

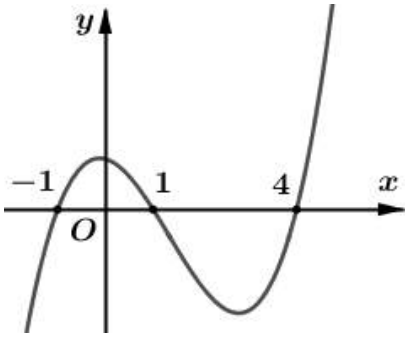
Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^3(x-1)^2(x+2)$. Khoảng nghịch biến của hàm số là

A. $(-2;0)$. **B.** $(-\infty;-2);(0;1)$. **C.** $(-\infty;-2);(0;+\infty)$. **D.** $(-2;0);(1;+\infty)$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(x-2)(x+4)^2$. Hàm số $y=f(x+1)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-5;1)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(0;1)$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục, có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên.



Hàm số $y=g(x)=f(2-x)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(1;3)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-2;1)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có biểu thức đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x^2-2x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hỏi hàm số $g(x)=f(x^2-2x+2)$ đồng biến trên các khoảng nào trong các khoảng sau

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

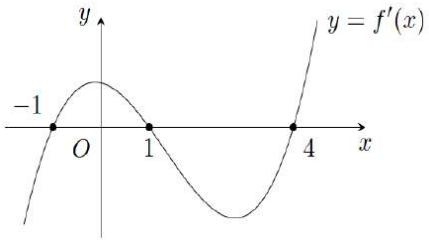
Hỏi hàm số $y=f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};2\right)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 9: Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)(x^2-1)$. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng:

A. $(1;2)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;-1)$.

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Hàm số $y=f(2-x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như hình sau

Hàm số $g(x)=f(x^2+3x+1)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

A. $(0;1)$. **B.** $(-4;-2)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(-2;-1)$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(2x+1)-4x^3+9x^2-6x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

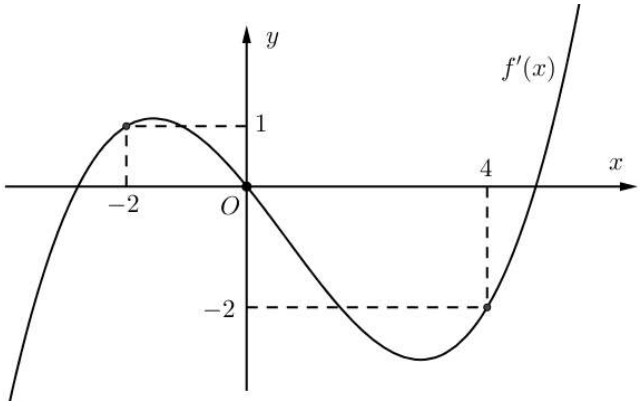
A. $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-3;2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để hàm số $y=f\left(x^2+2x-m\right)$ đồng biến trên $(-1;1)$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f'	$+\infty$	↘		↗	$+\infty$

A. 12. **B.** 14. **C.** 11. **D.** 13.

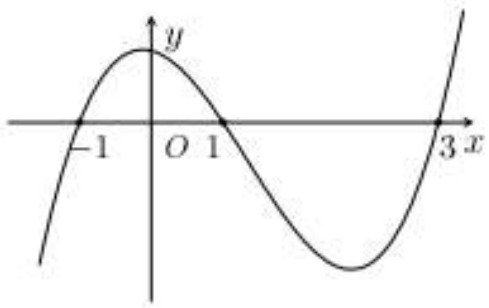
Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=4f(x-m)+x^2-2mx+2021$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$?

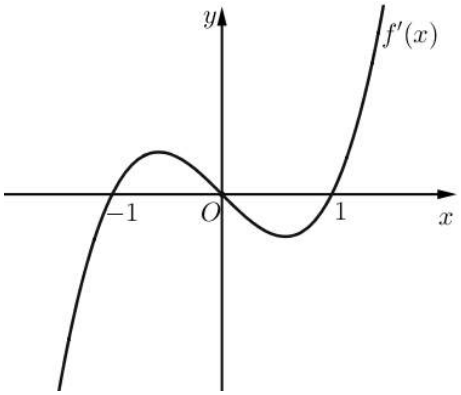
A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 15: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên $m\in[-10;10]$ để hàm số $g(x)=f(x-m)$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?



A. 8. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 9.

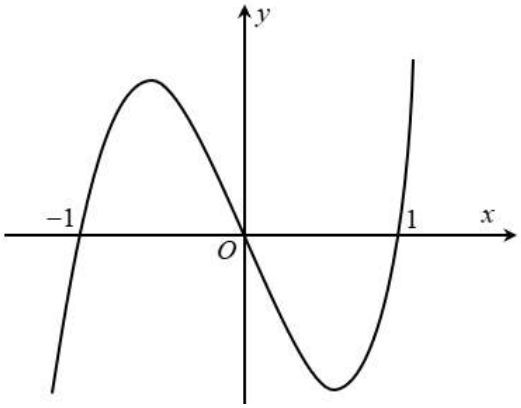
Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $f'(x)=x^3+bx^2+cx\ (b,c\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Hàm số $g(x)=f\left(f'(x)\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

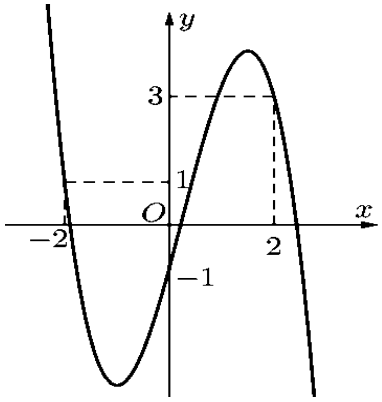
A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+a$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y=g(x)=f(1-2x)f(2-x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ được cho bởi hình vẽ bên dưới đây



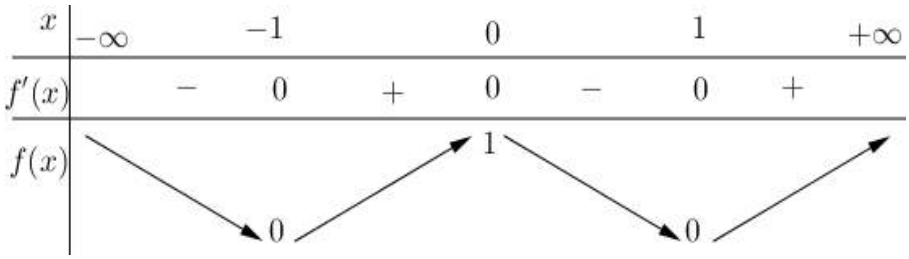
Đặt hàm số $g(x)=f(x)-\frac{x^3}{4}-\frac{x^2}{4}+x$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $g(x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$ là

A. $(-\infty;-5]$. **B.** $[-1;+\infty)$. **C.** $(-5;-1)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

Câu 19: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=-x^2-2x+3$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Số giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để hàm số $g(x)=f\left(\sin^2 x+3\sin x-m\right)+m^2+2$ đồng biến trên $\left(\frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right)$ là

A. 5. **B.** 6. **C.** 14. **D.** 15.

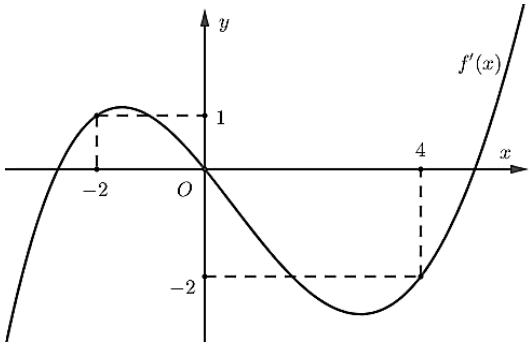
Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ



Hàm số $y=f\left(\sin^2 2x-4\sin 2x+1\right)$ trên $[0;2021\pi]$ có ít nhất bao nhiêu khoảng đồng biến?

A. 2042. **B.** 8084. **C.** 2021. **D.** 2020.

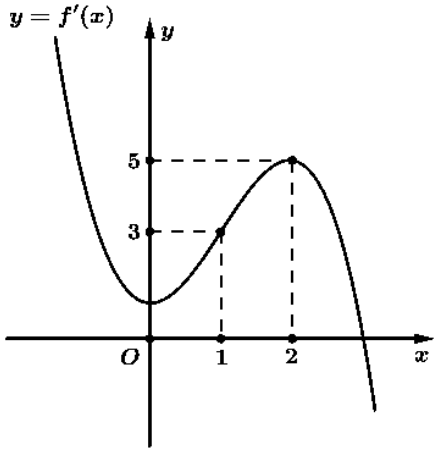
Câu 21: Cho hàm số đa thức $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau



Hàm số $g(x)=4f\left(x^2-1\right)+x^4-2x^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

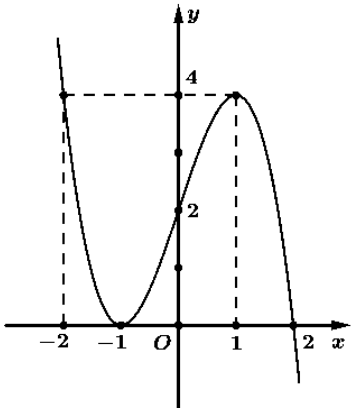
A. $(-2;0)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn, có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y=f(5-2x)+4x^2-10x$ đồng biến trên các khoảng nào sau đây?



A. $(3;4)$. **B.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};2\right)$. **D.** $\left(0;\frac{3}{2}\right)$.

Câu 23: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(x^2+x-1\right)+\dfrac{480}{m\left(x^2+x+2\right)}+2021$ nghịch biến trên $(0;1)$?

A. 4. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 24: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	1	↗	2	↘	0	↗	$+\infty$

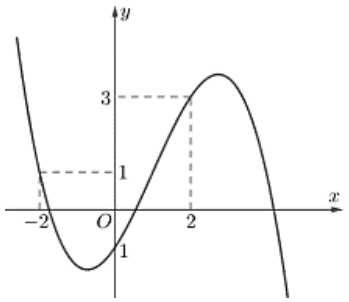
Hàm số $y=\left[f(x)\right]^3-3\left[f(x)\right]^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $(2;3)$.

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x)=x^{2021}(x-2)^2\left(x^2+mx+8\right)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của $m\in(-2020;+\infty)$ sao cho hàm số $h(x)=f(x)+\dfrac{1}{2025}x^{2025}-\dfrac{3}{2024}x^{2024}+\dfrac{2}{1011}x^{2022}+2021$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$. Số phần tử của S là

A. 2025. **B.** 2024. **C.** 2026. **D.** 2027.

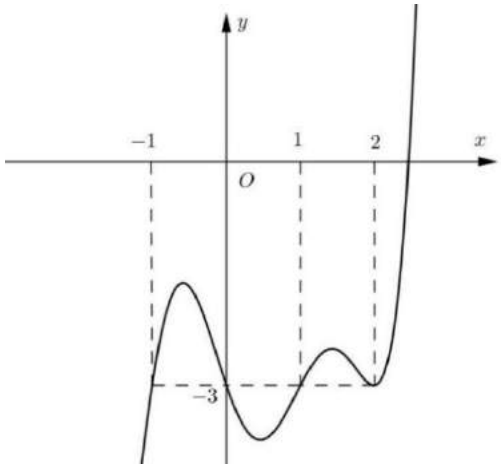
Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc 4. Đồ thị hàm số $f'(x+2)$ được cho trong hình vẽ bên



Hàm số $g(x)=4f\left(x^2\right)-x^6+5x^4-4x^2+1$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-4;-3)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$. **D.** $(-2;-1)$.

Câu 27: Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hỏi hàm số $g(x)=f\left(2x^2-x\right)+6x^2-3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\frac{1}{4};0\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{4};1\right)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên dưới.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$		1		-1		2		$+\infty$

Có bao nhiêu số nguyên $m\in(0;10)$ để hàm số $y=f\left(m-\frac{x}{2}\right)+x$ nghịch biến trên khoảng $(-1;3)$?

A. 7. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 2.

Câu 29: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;1)$. **B.** $(-4;-3)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;-1)$.

Câu 30: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(x-2)$ với mọi giá trị thực của x. Xét hàm số $g(x)=f\left(\frac{5x}{x^2+4}\right)$. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng?

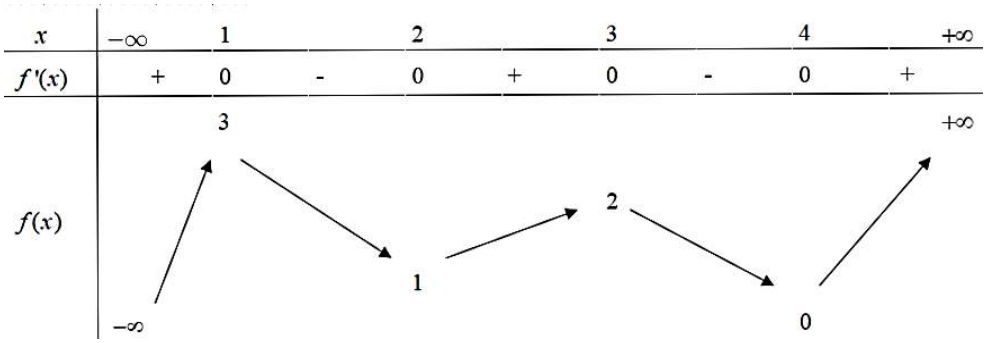
A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$. **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;4)$.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$. **D.** Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=1$

Câu 31: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(3-x)(10-3x)^2(x-2)^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(3-x)+\frac{1}{6}(x^2-1)^3$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$.

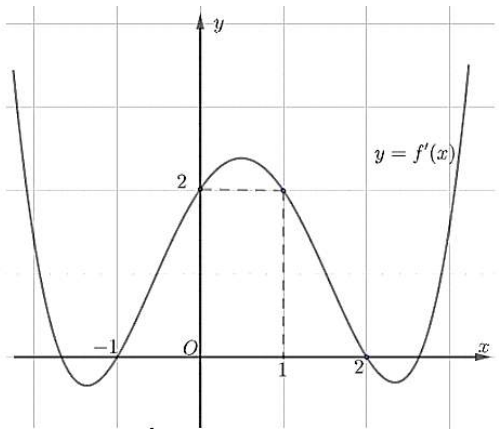
Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Hàm số $y=\left(f(x)\right)^3-3.\left(f(x)\right)^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(3;4)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(2;3)$.

Câu 33: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số tham số m nguyên thuộc đoạn $[-20;20]$ để hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$ biết $g(x)=3f\left(-x^3-3x+m\right)+\left(x^3+3x-m\right)^2\left(-2x^3-6x+2m-6\right)$.



A. 23. **B.** 21. **C.** 5. **D.** 17.

Câu 34: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=3f(2x-1)-4x^3+15x^2-18x+1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(3;+\infty)$. **B.** $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{5}{2};3\right)$. **D.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$.

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+4)\left(x^2+2mx+9\right)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Số giá trị nguyên âm của m để hàm số $g(x)=f\left(x^2+3x-4\right)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

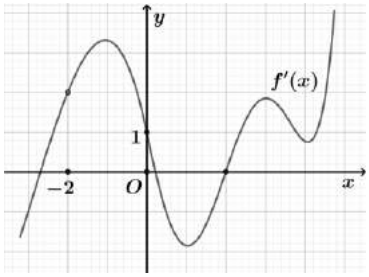
Câu 36: Cho hàm số $f(x)=-x^4-\left(4-m^2\right)x+2020$ và $g(x)=-x^3+5x^2-2020x+2021$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để $h(x)=g\left[f(x)\right]$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

A. 13. **B.** 12. **C.** 7. **D.** 6.

Câu 37: Cho hàm số $g(x)=f(1-x)$ có đạo hàm $g'(x)=(3-x)^{2021}(2+x)^{2020}\left[x^2+(m-2)x-3m+6\right]$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 38: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình bên dưới. Hỏi hàm số $g(x)=4f(x)+x^2-4x+2021$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

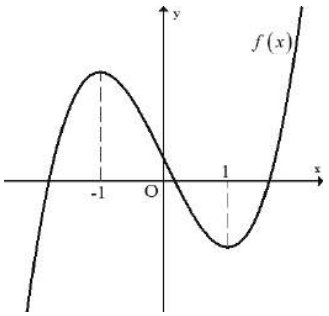


A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;+\infty)$

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, biết rằng $f'(x+2)=x^2-3x+2$. Hàm số $y=f\left(x^2+4x+7\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(-3;-1)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-2;0)$.

Câu 40: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Biết rằng hàm số $f\left(x^3-3x-1\right)$ nghịch biến trên các khoảng lớn nhất $(a;b);(m;n);(p;q)$. Giá trị của biểu thức $\left(a^2+b^2+m^2+n^2+p^2+q^2\right)$ bằng:



A. 9. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 10.

Câu 41: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét đấu đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x)=f\left(4-\sqrt{4-x^2}\right)$ đồng biến trên:

x	$-\infty$		-3		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

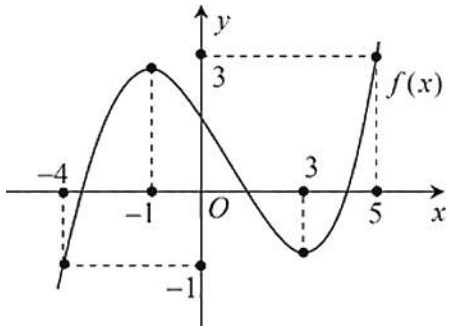
A. $(0;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(-3;-1)$.

Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét đấu đạo hàm $f'(x)$như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x)=f\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)$ nghịch biến trên:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

A. $(5;6)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;5)$.

Câu 43: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ dưới đây. Hỏi hàm số $f\left(f(x)\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

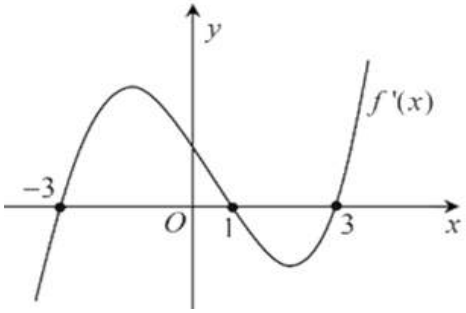


A. $(0;2)$. **B.** $(-3;-1)$. **C.** $(3;5)$. **D.** $(-5;-3)$.

Câu 44: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ có biểu thức đạo hàm được cho bởi $f'(x)=x(x-2)(x+1)$. Hỏi tham số thực m thuộc khoảng nào dưới đây thì hàm số $g(x)=f\left(x^3+m\right)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

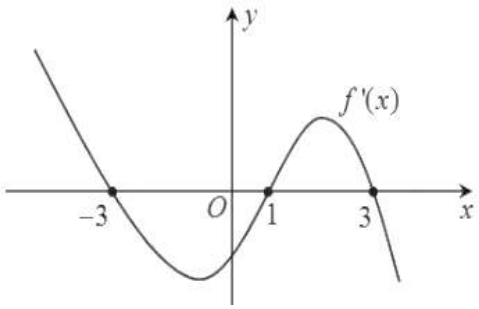
A. $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(1;4)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$. **D.** $(0;1)$.

Câu 45: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-20;20]$ để hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x-m\right)$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$?



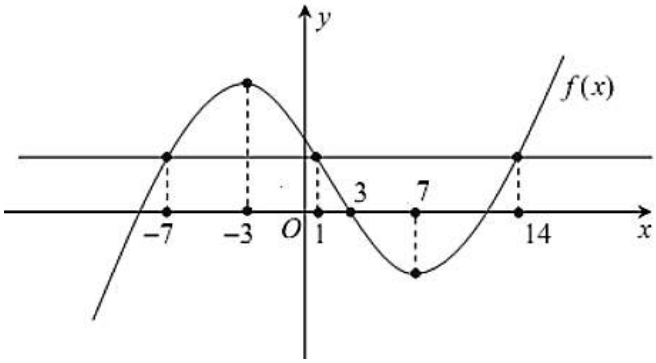
A. 19. **B.** 23. **C.** 18. **D.** 17.

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x-m\right)$ đồng biến trên $[-2;-1]$.



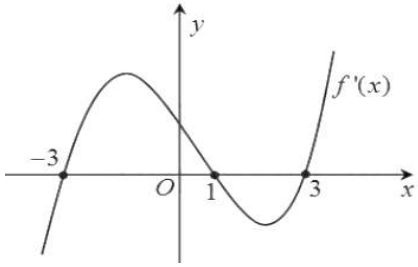
A. 24. **B.** 25. **C.** 26. **D.** 31.

Câu 47: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ. Hỏi hàm số $g(x)=\left[f(x)\right]^2-6f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



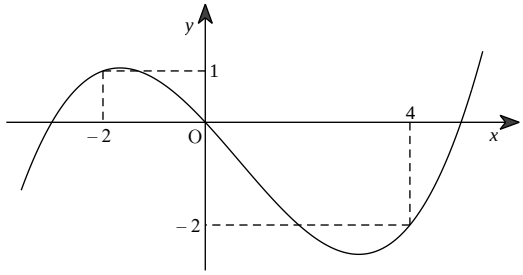
A. $(-3;1)$. **B.** $(7;14)$. **C.** $(14;+\infty)$. **D.** $(1;7)$.

Câu 48: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x-m\right)$ nghịch biến trên $(-1;2)$.



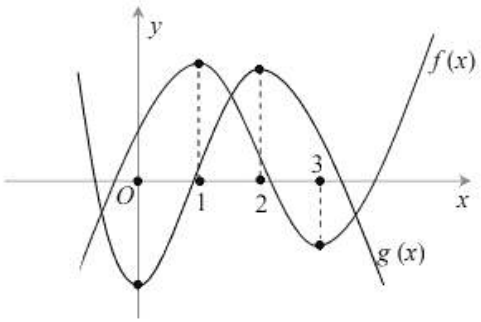
A. 0. **B.** 1. **C.** 28. **D.** 23.

Câu 49: Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x)=f(1-2x)+x^2-x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?



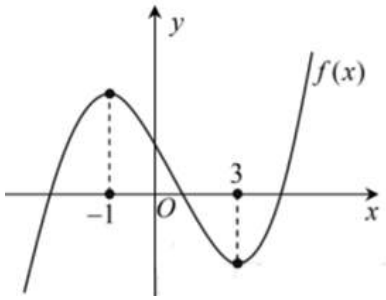
A. $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(2;3)$.

Câu 50: Cho hàm số $f(x)$, $g(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết hai hàm số $y=f(2x-1)$, $y=g(ax+b)$ có cùng khoảng nghịch biến lớn nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $(4a+b)$ bằng:



A. 0. **B.** -2. **C.** -4. **D.** 3.

Câu 51: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số như hình vẽ. Khi đó hàm số $f\left(x^3+3x-1\right)$ nghịch biến trên:



A. $(1;2)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

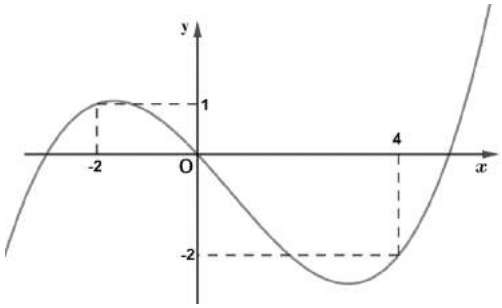
Câu 52: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn $-10<m<10$ và hàm số $y=f(x^2+2x+m)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

A. 5. **B.** 4. **C.** 6 **D.** 1.

Câu 53: Cho hàm số $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,\ a\neq 0$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên thuộc khoảng $(-6;6)$ của tham số m để hàm số $g(x)=f(3-2x+m)+x^2-(m+3)x+2m^2$ nghịch biến trên $(0;1)$. Khi đó, tổng giá trị các phần tử của S là

A. 12. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 15.

Câu 54: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức và hàm số $y=f\left(x^2-1\right)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $g(x)=f\left(2x^3-x\right)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. **B.** $\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{\sqrt{6}};1\right)$. **D.** $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}};+\infty\right)$.

Câu 55: Cho hàm số $y=f(x^2-2)$ là hàm số bậc 4 có bảng biến thiên như sau.

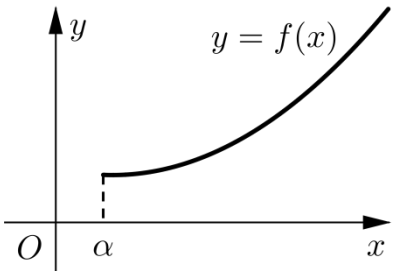
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(-2)$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$-\infty$

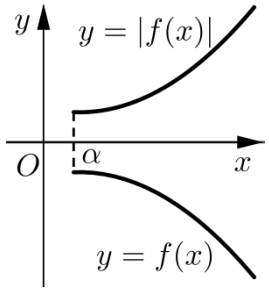
Hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x+3\right)$ đồng biến trong khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

Dạng 6: Tính đơn điệu của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối

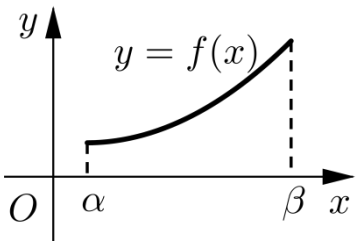
- Hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ đồng biến trên $\left[\alpha;+\infty\right)$ khi và chỉ khi:

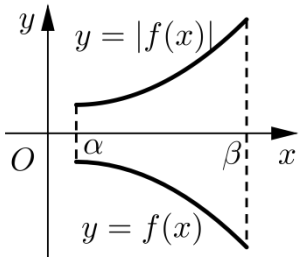




- $\begin{cases}y'\left(\alpha\right)\ge 0,\ \forall x\in\left[\alpha;+\infty\right)\\ y\left(\alpha\right)\ge 0\end{cases}$.
- $\begin{cases}y'\left(\alpha\right)\le 0,\ \forall x\in\left[\alpha;+\infty\right)\\ y\left(\alpha\right)\le 0\end{cases}$.

- Hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ đồng biến trên $\left(\alpha;\beta\right)$ khi và chỉ khi:





- $\begin{cases}y'\left(\alpha\right)\ge 0,\ \forall x\in\left(\alpha;\beta\right)\\ y\left(\alpha\right)\ge 0\end{cases}$.
- $\begin{cases}y'\left(\alpha\right)\le 0,\ \forall x\in\left(\alpha;\beta\right)\\ y\left(\alpha\right)\le 0\end{cases}$.

- Các dạng đồng biến $y=\left|f\left(x\right)\right|$ trên $\left(-\infty;a\right],\left[\alpha;\beta\right]$ ta thực hiện tương tự.
- Hàm số hỏi nghịch biến làm ngược lại.

1 Ví dụ minh họa

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $a\in\left(-10;+\infty\right)$ để hàm số $y=\left|x^3+\left(a+2\right)x+9-a^2\right|$ đồng biến trên khoảng $\left(0;1\right)$?

A. 12. **B.** 11. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $a \in [-10;10]$ để hàm số $f(x) = \left|x^3 - 3ax^2 - 3(a+2)x - a + 1\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 19. **B.** 12. **C.** 2. **D.** 1.

✍ Lời giải

Câu 3: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left|x^5 - 5x^2 + 5(m-1)x - 8\right|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$?

A. 2. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 1.

✍ Lời giải

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|2x^3-mx+1\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 2. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$?

A. 6. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\left|x^4+2x^3+mx+2\right|$ đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$?

A. $m\geq 1$. **B.** $m\in\varnothing$. **C.** $0\leq m\leq 1$. **D.** $m\leq 0$.

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 7: Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-4;4)$ để hàm số $y=\left|\frac{1}{3}x^3-x^2+mx+1\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$?

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 6.

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

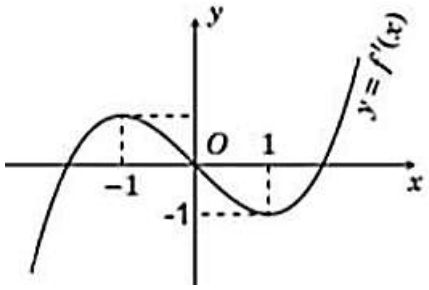
.....

.....

.....

.....

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(0)=3$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $g(x)=\left|2f(x)+x^2-2mx+2m\right|$ đồng biến trên $(0;1)$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

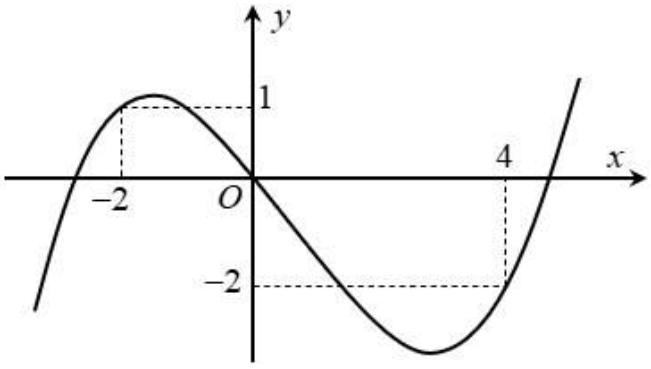
.....

.....

.....

.....

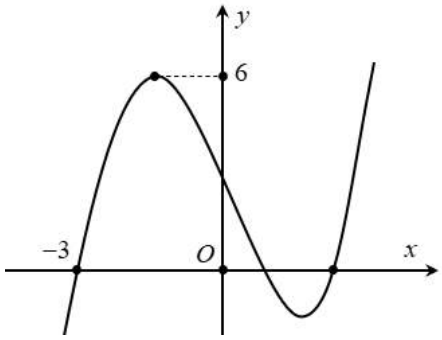
Câu 9: Cho hàm số $y=f'(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Gọi S là tập tất cả các số tự nhiên không quá 100 của m sao cho hàm số $g(x)=f\left(\left|m-2x\right|\right)+x^2-mx$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$. Số phần tử của tập S bằng:



A. 95. **B.** 96. **C.** 100. **D.** 99.

Lời giải

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[0;23]$ để hàm số $y=\left|f(x)-2m^2x+m-1\right|$ đồng biến trên khoảng $(-3;0)$? Biết rằng tọa độ điểm cực tiểu của hàm số $y=f(x)$ là $(-3;5)$?

A. 1. **B.** 22. **C.** 3. **D.** 20.

Lời giải

2 Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham m thuộc đoạn $[-10;10]$ để hàm số $y=\left|-x^3+3(m+1)x^2-3m(m+2)x+m^2(m+3)\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

A. 21. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 2.

Câu 2: Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2019;2019]$ của tham số thực m để hàm số $y=\left|x^3-3(m+2)x^2+3m(m+4)x\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;4)$?

A. 4033. **B.** 4032. **C.** 2018. **D.** 2016.

Câu 3: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của $m<5$ để hàm số $y=\left|\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+m\right|$ đồng biến trên $(0,+\infty)$?

A. 2 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 8

Câu 4: Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y=\left|x^5-mx+4\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 5: Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-10;10)$ để hàm số $y=\left|2x^3-2mx+3\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 12. **B.** . **C.** 11. **D.** 7.

Câu 6: Cho hàm số $y=\left|x^5-mx+1\right|$. Gọi S là tập tất cả các số nguyên dương m sao cho hàm số đồng biến trên $[1;+\infty)$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 15 **B.** 14 **C.** 12 **D.** 13

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=\left|x^2-2mx+m+2\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-9;9]$ để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 3 **B.** 2 **C.** 16 **D.** 9

Câu 8: Cho hàm số $f(x)=\left|-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}(2m+3)x^2-(m^2+3m)x+\frac{2}{3}\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-9;9]$ để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 16. **D.** 9.

Câu 9: Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in(-20;20)$ để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

A. 4. **B.** 30. **C.** 8. **D.** 15.

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên không âm m để hàm số $y=\left|x^4-mx^2+9\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

A. 3. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 4.

Câu 11: Cho hàm số $y=\left|\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(m+3)x^2+(2m+3)x-1\right|$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$. Chọn mệnh đề **sai**?

A. S có 4 phần tử.
B. Tổng các giá trị của m thuộc S bằng 6.
C. Tích các giá trị của m thuộc S bằng 0.
D. Giá trị m lớn nhất thuộc S bằng 4.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)=\left|x^3-(2m-5)x+2018\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2019;2019]$ để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;3)$?

A. 3032. **B.** 4039. **C.** 0. **D.** 2021.

Câu 13: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=g(x)=\left|x^3-3(m+1)x^2+3m(m+2)x\right|$ đồng biến trên nửa đoạn $[0;+\infty)$ biết rằng $-2021\le m\le 2021$?

A. 2020. **B.** 2021. **C.** 2022. **D.** 2019.

Câu 14: Gọi $S=[a;+\infty)$ là tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\left|x^3-3x^2+mx+3m+1\right|$ đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$. Khi đó a bằng

A. -3. **B.** 19. **C.** 3. **D.** -2.

Câu 15: Tính tổng S tất cả các giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-10;10]$ để hàm số $y=\left|\frac{mx+3}{x+m+2}\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

A. $S=55$. **B.** $S=54$. **C.** $S=3$. **D.** $S=5$.

Câu 16: Tìm m để hàm số $y=\left|\frac{x-2m+1}{x+m}\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$

A. $\frac{1}{3}<m\le 1$. **B.** $m\in[-1;1]\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$. **C.** $-1\le m<\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}<m\le 1$.

Câu 17: Có bao nhiêu số nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|\frac{x^2-2x+2m+2}{x-1}\right|$ đồng biến trên $[3;+\infty)$?

A. 4. **B.** 5. **C.** vô số. **D.** 6.

Câu 18: Tìm tất cả các giá thực của tham số m để hàm số $y=\left|x-\frac{2}{x}+m\right|$ đồng biến trên $[1;+\infty)$.

A. $m\le -1$ **B.** $-1<m\le 1$ **C.** $m\ge 1$ **D.** $m>0$

Câu 19: Tính tổng tất cả các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=\left|\frac{x^3-2mx+2}{x-1}\right|$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

A. 3 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 5

Câu 20: Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của m để hàm số $y=\left|x+5+\dfrac{1-m}{x-2}\right|$ đồng biến trên $[5;+\infty)$?

A. 11. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 21: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\left|\dfrac{x-m+1}{x+m}\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

A. $m\le\dfrac{1}{2}$ hoặc $m\ge 2$. **B.** $\dfrac{1}{2}<m<2$. **C.** $\dfrac{1}{2}<m\le 2$. **D.** $\dfrac{1}{2}\le m\le 2$.

Câu 22: Cho hàm số $y=\left|\sqrt{2-x}+\sqrt{x+2}+\dfrac{m}{2}x-1\right|$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số nghịch biến trên $(0;1)$

A. 4 **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 23: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-5;5)$ để hàm số $y=\left|\sqrt{x^2-3}-2x-3m\right|$ nghịch biến trên $(2;3)$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 9.

Câu 24: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|4\sqrt{x^2+2x+3}+5x-m^2+5\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 9 **B.** 6 **C.** 11 **D.** 8

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)=\left|\sqrt{x^2+3}+2x+m^2-5m\right|$.Hỏi m thuộc khoảng nào trong các khoảng sau để hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

A. $(-\infty;0]$. **B.** $(1;4)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $[3;+\infty)$.

Câu 26: Tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|x^3-3x^2-9x-5+\dfrac{m}{2}\right|$ có 5 điểm cực trị là.

A. 2016. **B.** 1952. **C.** −2016. **D.** −496.

Câu 27: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $[-5;5]$ để hàm số $y=\left|\cos^3 x-3m^2\cos x\right|$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. 1. **B.** 11. **C.** 5. **D.** 6

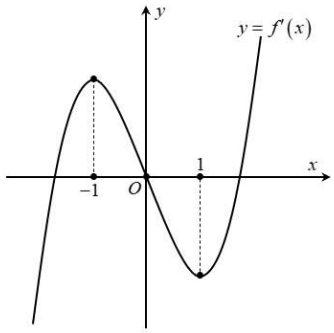
Câu 28: Có bao nhiêu giá trị m nguyên dương và nhỏ hơn 2020 để hàm số $y=\left|4^x-m.2^{x+1}+m+2\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

A. 2018. **B.** 2019. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 29: Có bao nhiêu số nguyên m thuộc $(-2020;2020)$ để hàm số $y=\left|\ln\left(x^2+2x-m\right)-2mx^2-1\right|$ luôn đồng biến trên $(0;10)$.

A. 4038. **B.** 2020. **C.** 2017. **D.** 2017.

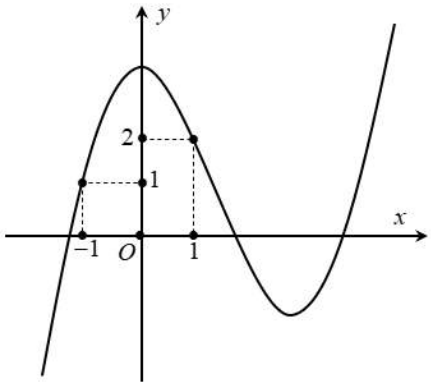
Câu 30: Cho hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Biết rằng $f(1)=1$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2023;2023]$ để hàm số $y=\left|4f(\ln x)-\ln^2 x+1-2m\right|$ nghịch biến trên khoảng $(1;e)$.

A. 2023. **B.** 2014. **C.** 2026. **D.** 4042.

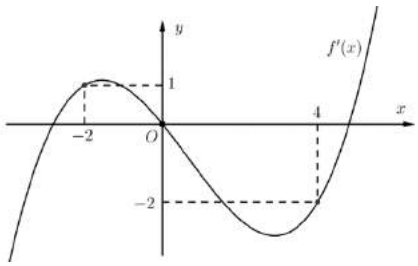
Câu 31: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-23;23]$ để hàm số $y=\left|2f(2-x)-mx^2+2(3m+1)x+m\right|$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$?

A. 43. **B.** 41. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 32: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và luôn dương trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



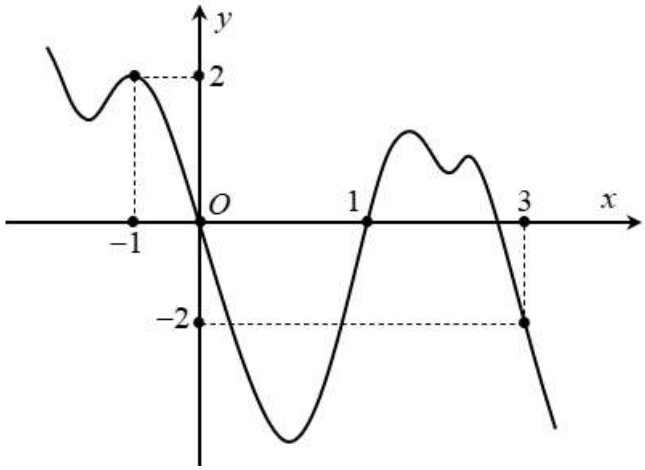
Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $0\le m<20$ để hàm số $y=\left|4f(|x-m|)+x^2-2mx+2023\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 33: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=-x^2-2x+3$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Số giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để hàm số $g(x)=f\left(\left|\sin^2 x+3\sin x-m\right|\right)+m^2+2$ đồng biến trên $\left(\frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right)$ là

A. 5. **B.** 6. **C.** 14. **D.** 11.

Câu 34: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số đạo hàm $y=f'(x)$ như sau:



Hàm số ho hàm số $g(x)=2f\left(|x-1|\right)+x^2-2x-2|x-1|+2023$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(3;+\infty)$.

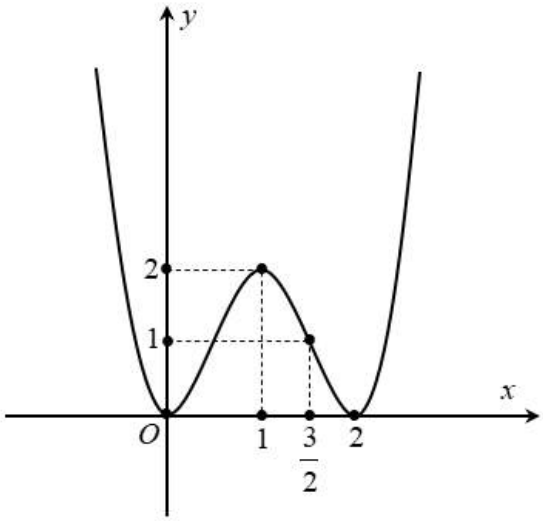
Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(-3)=0$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hỏi hàm số $g(x)=\left|2(x+1)^6-6(x+1)^2-3f\left(-x^4-4x^3-4x^2-2\right)\right|$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(1;2)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;+\infty)$.

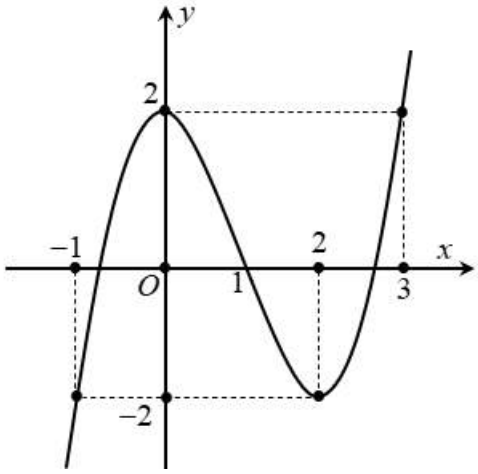
Câu 36: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $g(x)=f(2x-2)$ có đồ thị như hình dưới đây:



Gọi S là tập tất cả các số nguyên của tham số a để hàm số $y=\left|4f\left(\sin x\right)+\cos 2x-(a+1)^2\right|$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Tổng các phần tử của tập S là:

A. 2. **B.** -3. **C.** 0. **D.** -1.

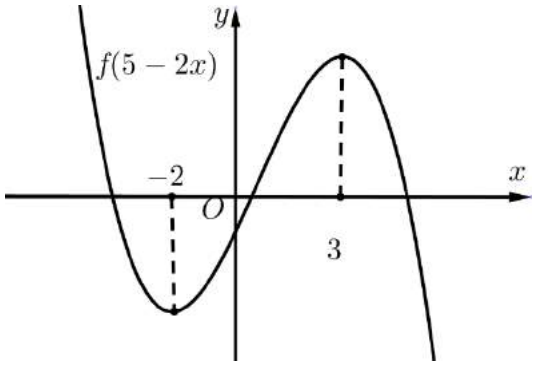
Câu 37: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có $f(5)>8$ và $f(1)=0$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Hàm số $g(x)=\left|f\left(1-\frac{x}{2}\right)-\frac{x^2}{8}\right|$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-8;-4)$ **B.** $(4;+\infty)$ **C.** $(2;4)$ **D.** $(-10;-8)$

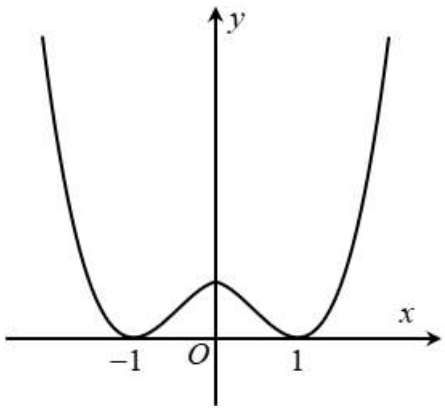
Câu 38: Cho đồ thị hàm số $y=f(5-2x)$ như hình vẽ dưới đây:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-23;23]$ để hàm số $y=f\left(\left|x^3-3x+m\right|+m^2-1\right)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

A. 23. **B.** 22. **C.** 21. **D.** 20.

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[0;23]$ để hàm số $g(x)=f\left(\left|x^2-2x\right|+m\right)+2023$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

A. 23. **B.** 20. **C.** 21. **D.** 22.

CHƯƠNG 1

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

CHỦ ĐỀ 1 TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Hàm số đơn điệu: Cho hàm số f xác định trên K, trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng

- f đồng biến trên K nếu với mọi $x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- f nghịch biến trên K nếu với mọi $x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Điều kiện cần để hàm số đơn điệu

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I. Khi đó:

- Nếu hàm số f đồng biến trên I thì $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in I$.
- Nếu hàm số f nghịch biến trên I thì $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in I$.

Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu

1. Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I.
   - Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại hữu hạn điểm của I thì hàm số đồng biến trên I.
   - Nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại hữu hạn điểm của I thì hàm số nghịch biến trên I.
   - Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in I$ thì hàm số f không đổi trên I.
2. Giả sử hàm số f liên tục trên nửa khoảng $[a;b)$ và có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$.
   - Nếu $f'(x) > 0$ (hoặc $f'(x) < 0$ (với mọi $x \in (a;b)$ thì hàm số f đồng biến (hoặc nghịch biến) trên nửa khoảng $[a;b)$.
   - Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in (a;b)$ thì hàm số f không đổi trên nửa khoảng $[a;b)$.

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3x$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;1)$ **B.** $(-\infty;-1)$ **C.** $(1;+\infty)$ **D.** $(-\infty;+\infty)$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\forall x \in \mathbb{R}$, $y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow y' < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

Vậy hàm số nghịch biến trên $(-1;1)$

Câu 2: Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$, trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào đúng:

A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$.

Ta có: $y' = \dfrac{-1}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in D$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 3: Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = x^3 - 3x$. **B.** $y = x^3 + 3x$. **C.** $y = \dfrac{x-1}{x+1}$. **D.** $y = x^4 - 3x^2 + 1$.

Lời giải

Chọn B

Nhận xét $y = x^3 + 3x$ có $y' = 3x^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $y = x^3 + 3x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 4: Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = x^2 + 1$. **B.** $y = \dfrac{x}{x+1}$. **C.** $y = \tan x$. **D.** $y = x^3 + x^2 + 5x$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = x^3 + x^2 + 5x$ có $y' = 3x^2 + 2x + 5 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên nó đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 5: Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên tập xác định của nó?

A. $y = -x^4 + 3x^2 + 1$. **B.** $y = x^4 + 2x^2 + 1$. **C.** $y = \dfrac{2x+3}{x-1}$. **D.** $y = x^3 + 3x - 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y = x^3 + 3x - 2 \Rightarrow y' = 3x^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 6: Cho hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x-1$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;3)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;3)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=-x^2+x+6$

$y'=0\Rightarrow -x^2+x+6=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y		↘		↗		↘	

Từ bảng biến thiên ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;3)$.

Câu 7: Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=x^4+2x^2$. **B.** $y=\frac{x-1}{x+1}$. **C.** $y=-x^3-3x+1$. **D.** $y=2x^3+3x+1$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=2x^3+3x+1$ có $y'=6x^2+3>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=-x+1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x)=-x+1>0\Leftrightarrow x<1.$

Suy ra hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

Câu 9: Hàm số $y=\frac{x-2}{x+1}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;1)$.

C. $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=\frac{x-2}{x+1}$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

$y'=\frac{3}{(x+1)^2}>0,\forall x\neq -1$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x)=x^2(x+2)(1-x)$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng

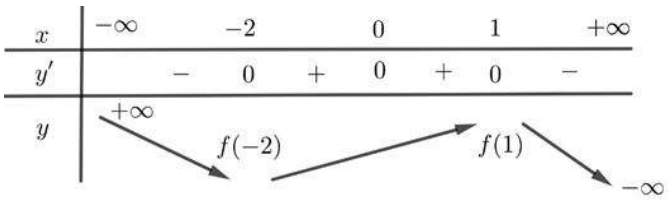
A. $(2;3)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Lời giải

Chọn A

$$f'(x)=x^2(x+2)(1-x)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=0\\x=1\\x=-2\end{bmatrix}$$

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)\supset(2;3)$

Câu 11: Hàm số $y=2x^3+3x^2-12x+2021$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

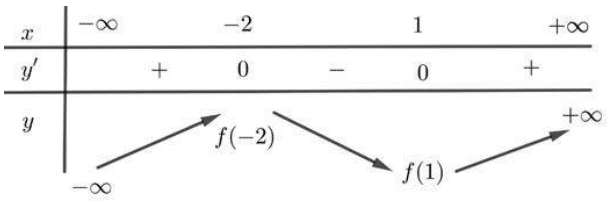
A. $(-2;1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=6x^2+6x-12=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=1\\x=-2\end{bmatrix}$

Bảng biến thiên:



Quan sát bảng biến thiên ta có hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;1)$

Câu 12: Khoảng đồng biến của hàm số $y=x^3+x^2-5x+1$ là

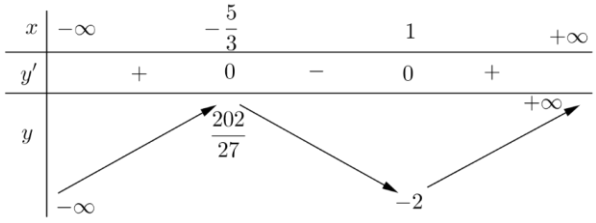
A. $(0;2)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $\left(-\frac{5}{3};1\right)$. **D.** $(-3;1)$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=3x^2+2x-5$; $y'=0\Leftrightarrow x=-\frac{5}{3}\vee x=1$.



Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1: Mở đầu về tính đơn điệu của hàm số

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

Câu 1: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và khoảng $(1;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên tập $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y=\dfrac{x+1}{x-1}\Rightarrow y'=-\dfrac{2}{(x-1)^2}<0\ \forall x\neq 1$

Nên hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$

Câu 2: Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=x^2+x.$ **B.** $y=x^3+x.$ **C.** $y=x^4+x^2.$ **D.** $y=\dfrac{x+1}{x+3}.$

Lời giải

Chọn B

$y=x^2+x\Rightarrow y'=2x+1$ nên hàm số $y=x^2+x$ không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$y=x^3+x\Rightarrow y'=3x^2+1>0,\forall x\in\mathbb{R}.$ Vậy hàm số $y=x^3+x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$y=x^4+x^2\Rightarrow y'=4x^3+2x$ nên hàm số $y=x^4+x^2$ không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$y=\dfrac{x+1}{x+3}\Rightarrow y'=\dfrac{2}{(x+3)^2}>0,\forall x\neq -3$ nên hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+3}$ không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 3: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{-x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$

D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=\dfrac{2}{(-x+1)^2}>0,\forall x\neq 1$. Nên hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 4: Cho hàm số $y=x^4+2022$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2022;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên R.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=4x^3$

Bảng biến thiên của hàm số

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

Nhìn vào các phương án suy ra chọn phương án C.

Câu 5: Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\dfrac{3x+1}{x-2}\cdot$ **B.** $y=-3x^3-x+1\cdot$

C. $y=x^3-2x+1\cdot$ **D.** $y=-x^4-2x^2+1\cdot$

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số: $y=-3x^3-x+1\cdot$ Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=-3x^2-1<0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số này nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 6: Cho các hàm số $y=x^4+3x^2+1;\ y=x^3+x^2+5x+1;\ y=\dfrac{x-1}{x+2};\ y=x^2+x+1$. Trong các hàm số đã cho, có bao nhiêu hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào tính chất hàm số ta loại $y=x^4+3x^2+1;\ y=\dfrac{x-1}{x+2};y=x^2+x+1.$

Xét hàm số $y=x^3+x^2+5x+1.$

Ta có $D=\mathbb{R}$ và $y'=3x^2+2x+5=3\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{14}{3}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $y=x^3+x^2+5x+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy trong các hàm số đã cho, chỉ có 1 hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 7: Hàm số nào sau đây nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó?

A. $y=\dfrac{x-2}{x+2}.$ **B.** $y=\dfrac{-x+2}{x+2}.$ **C.** $y=\dfrac{x-2}{-x+2}.$ **D.** $y=\dfrac{x+2}{-x+2}.$

Lời giải

Chọn B

Xét các hàm số sau

$y=\dfrac{x-2}{x+2}\Rightarrow y'=\dfrac{4}{(x+2)^2}>0,\forall x\neq -2$: Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

$y=\dfrac{-x+2}{x+2}\Rightarrow y'=\dfrac{-4}{(x+2)^2}<0,\forall x\neq -2$: Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định

$y=\dfrac{x-2}{-x+2}=-1\Rightarrow y'=0$: Hàm hằng, hàm số không tăng không giảm trên mỗi khoảng xác định của nó.

$y=\dfrac{x+2}{-x+2}\Rightarrow y'=\dfrac{4}{(-x+2)^2}>0,\forall x\neq 2$: Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

Vậy hàm số $y=\dfrac{-x+2}{x+2}$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

Câu 8: Cho hàm số $y=x^3+3x+2$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=3x^2+3>0\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$.

Câu 9: Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=2x^2+5$. **B.** $y=-x^3+3x^2-9x+2$.

C. $y=-x^3-x^2$. **D.** $y=\dfrac{x-1}{x+2}$

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y=-x^3+3x^2-9x+2\Rightarrow y'=-3x^2+6x-9$

Ta thấy $y'=-3(x^2-2x+3)<0\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số $y=-x^3+3x^2-9x+2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 10: Hàm số $y=-2x^3+3x^2+1$ đồng biến trong khoảng nào trong các khỏng dưới đây?

A. $(-1;1)$. **B.** $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$.

C. $(0;1)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Chọn C

$y'=-6x^2+6x,\forall x$. Suy ra $y'>0,\forall x\in(0;1)$. Vậy hàm số đồng biến trong khoảng $(0;1)$.

Câu 11: Hàm số nào sau đây nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. $y=\dfrac{x-1}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{x+1}{x+3}$. **C.** $y=-x^3+3x^2-9x$. **D.** $y=-x^3+x+1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y=-x^3+3x^2-9x\Rightarrow y'=-3x^2+6x-9<0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Nên hàm số $y=-x^3+3x^2-9x$ luôn nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Câu 12: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$y' = 3x^2 - 6x$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

$y' < 0, \forall x \in (0;2)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

Câu 13: Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. $y = 3x^3 + 3x - 7$. **B.** $y = 2x^3 - 5x + 12$. **C.** $y = x^4 + 4x^2$. **D.** $y = \dfrac{x-3}{x+2}$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = 3x^3 + 3x - 7$ có $y' = 9x^2 + 3 > 0, \forall x$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Câu 14: Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và khoảng $(1;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên tập $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = \dfrac{-2}{(x-1)^2} < 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và khoảng $(1;+\infty)$.

Câu 15: Hàm số $y = -x^3 + 3x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;4)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(0;2)$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Hàm số đồng biến khi $y' > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x) = (2-x)^4(x+2)^3(1-x)$. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;1)$. **B.** $(-2;2)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

$$f'(x)=(2-x)^4(x+2)^3(1-x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \text{ (boäi chaün)} \\ x=-2 \text{ (boäi leû)} \\ x=1 \text{ (boäi leû)} \end{array}\right. .$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;1)$.

Câu 17: Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\dfrac{1}{x-1}$. **B.** $y=x^3-3x+4$. **C.** $y=-2022x+1$. **D.** $y=-x^2+2$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y=-2022x+1$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=-2022<0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $y=-2022x+1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 18: Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=-x^3-x$. **B.** $y=-x^4-x^2$. **C.** $y=-x^3+x$. **D.** $y=\dfrac{x+2}{x-1}$.

Lời giải

Chọn A

Xét $y=-x^3-x$ có $D=\mathbb{R}$ và $y'=-3x^2-1=-(3x^2+1)<0,\ \forall x$.

$\Rightarrow$ Hàm số $y=-x^3-x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 19: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-2)^3$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;0)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số nghịch biến $\Rightarrow f'(x)=x(x-2)^3<0 \Leftrightarrow x(x-2)<0 \Leftrightarrow 0<x<2$.

Mà $(0;1)\subset(0;2)$. Nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(3-x), \forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;3)$. **B.** $(-1;3)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow (x+1)(3-x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ 3-x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy hàm số đồng biến trên $(-1;3)$, nghịch biến trên $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$.

Câu 21: Hàm số $y=x^4-2x^2-2$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-3;0)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=4x^3-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \\ x=0 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 22: Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x+6$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;5)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(5;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=x^2-6x+5$, $y'=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;5)$.

Câu 23: Hàm số $y=(x-2)(x^2+1)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;2)$. **B.** $\left(\frac{1}{3};1\right)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(2;3)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y=(x-2)(x^2+1)=x^3-2x^2+x-2$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y'=3x^2-4x+1$

Giải phương trình: $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu đạo hàm ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3};1\right)$.

Câu 24: Hàm số $y=x^4+2x^2-3$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$. **B.** $(0;+\infty)$.

C. $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y=x^4+2x^2-3$ suy ra $y'=4x^3+4x$.

$y'>0\Leftrightarrow 4x^3+4x>0\Leftrightarrow 4x(x^2+1)>0\Leftrightarrow x>0$.

Nên hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Câu 25: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=(x-2)(x+5)(x+1)$. Hỏi hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-6;-1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x)=(x-2)(x+5)(x+1)$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-5\\x=-1\\x=2\end{array}\right.$.

Dấu của $f'(x)$:

x	$-\infty$		-5		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$\Rightarrow$ Hàm số $f(x)$ đồng biên trên $(-5;-1)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 26: Cho hàm số $y=x^4-8x^2+2019$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 4x^3 - 16x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2. \end{array}\right.$

Bảng xét dấu y'

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Do đó, hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 2019$ đồng biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^4 (x-1)^3 (2-x)$. Hàm số $g(x) = -2f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Ta có: $g'(x) = \left[-2f(x)\right]' = -2.f'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$.

Câu 28: Hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $\left(-\frac{1}{3};1\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{3};1\right)$.

Lời giải

Chọn D

$y = x^3 - 2x^2 + x + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 - 4x + 1 \Rightarrow y' < 0, \forall x \in \left(\frac{1}{3};1\right)$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3};1\right)$.

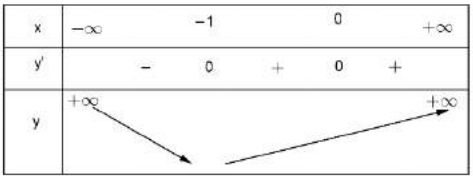
Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1), \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;+\infty)$. **B.** $(-1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên



Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty;-1)$.

Câu 30: Hàm số $y=x^4-6x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;+\infty)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=4x^3-12x$.

Cho $y'=0\Leftrightarrow 4x^3-12x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(\sqrt{3};+\infty)$ nên cũng đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

Dạng 2: Tính đơn điệu của hàm số có chứa tham số

Tính đơn điệu của hàm liên tục trên khoảng - đoạn

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, khi đó các phát biểu sau là tương đương:

- Hàm số $f(x)$ đồng biến (nghịch biến) trên khoảng $(a;b)$.
- Hàm số $f(x)$ đồng biến (nghịch biến) trên đoạn $[a;b]$.
- Hàm số $f(x)$ đồng biến (nghich biến) trên $[a;b)$.
- Hàm số $f(x)$ đồng biến (nghịch biên) trên $(a;b]$.

Bất đẳng thức AM-GM (Cauchy)

Cho các số không âm a,b,c, ta có:

- $a+b\ge 2\sqrt{ab}$; dấu bằng xảy ra khi và chi khi $a=b$.
- $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}$; dấu bằng xảy ra khi và chi khi $a=b=c$.

Tổng quát: Với n số không âm $a_1,a_2,\ldots,a_n$, ta luôn có trung bình cộng của n số đó lớn hơn hoặc bằng trung bình nhân của n số đó. Cụ thể: $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\ge \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$.

Dấu bằng xảy ra khi: $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

Vấn đề hàm số biến thành hàm hằng:

Ta đều biết nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên K, khi đó $f(x)$ đồng biến trên K khi và chỉ khi $f'(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f'(x)$ chỉ bằng 0 tại các điểm rời rạc. Đa số các trường hợp $f'(x)$ chỉ bằng 0 tại các điểm rời rạc (ví dụ $y=x^2+mx; y=x^3+mx^2+2mx+1; y=x^2+\frac{1}{x^2+m}\ldots$), những hàm số này không thể bằng 0 tại vô hạn điểm liên tục được. Tuy nhiên có một số trường hợp chúng ta cần phải xét trường hợp của m để cảnh giác vấn đề $f(x)$ suy biến thành hàm hằng. Chú ý các ví dụ sau:

- **Ví dụ 1:** $f(x)=mx^3+mx^2+1$. Có $f'(x)=3mx^2+2mx$. Nếu $m=0$ thì $f'(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)$ là hàm hằng do đó khi $m=0$ thì $f(x)$ không đồng biến và không nghịch biến.
- **Ví dụ 2:** $f(x)=\frac{x-m}{x+1}$ có $f'(x)=\frac{1+m}{(x+1)^2}\forall x\ne -1$. Nếu $m=-1$ thì $f'(x)=0,\forall x\ne -1$ nên $f(x)$ suy biến thành hàm hằng trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ nên $f(x)$ không đồng biến cũng không nghịch biến.

1 Ví dụ minh họa

Câu 1: Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\frac{x+m^2-6}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$. Tổng các phần tử của S là

A. -2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$. Ta có $y'=\dfrac{-m-m^2+6}{(x-m)^2}=\dfrac{-m^2-m+6}{(x-m)^2}$.

Để hàm số $y=\dfrac{x+m^2-6}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ thì:

$$f'(x)>0,\forall x\in(-\infty;-2)\Leftrightarrow\begin{cases}-m^2-m+6>0\\ m\notin(-\infty;-2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3<m<2\\ m\geq -2\end{cases}\Rightarrow -2\leq m<2$$

$\Rightarrow S=\{-2;-1;0;1\}$

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-x^2+mx+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m<3$. **B.** $m\leq\dfrac{1}{3}$. **C.** $m\geq\dfrac{1}{3}$. **D.** $m<-3$.

Lời giải

Chọn C

$y=x^3-x^2+mx+1\Rightarrow y'=3x^2-2x+m$

Hàm số $y=x^3-x^2+mx+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow 3x^2-2x+m\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\Delta'=1-3m\leq 0\Leftrightarrow m\geq\dfrac{1}{3}$

Vậy hàm số $y=x^3-x^2+mx+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $m\geq\dfrac{1}{3}$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=(x+2a)(x+2b-a)(ax+1)$. Có bao nhiêu cặp $(a;b)$ để hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** vô số.

Lời giải

Chọn B

Trường hợp 1: $a=0$, hàm số $f(x)$ là hàm số bậc hai, không thể đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Trường hợp 2: $a\neq 0$, hàm số $f(x)$ là hàm bậc 3.

Để $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $a>0$ và $f(x)=0$ có duy nhất một nghiệm trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $-2a=a-2b=-\dfrac{1}{a}\Leftrightarrow\begin{cases}-2a=\dfrac{-1}{a}\\ a-2b=-\dfrac{1}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ a=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.(l)\\ 2b=a+\dfrac{1}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ b=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\end{cases}$.

Câu 4: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{m}{3}x^3-2mx^2+(3m+5)x+2021$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 2. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $\mathcal{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=mx^2-4mx+(3m+5)$.

Xét hai trường hợp sau

Khi $m=0$ thì $y'=5>0\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi $m\neq 0$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y'\geq 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow mx^2-4mx+(3m+5)\geq 0$ v?i $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ \Delta'\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ 4m^2-m(3m+5)\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m\leq 5.$

Vậy có 6 giá trị thỏa mãn đề bài.

Câu 5: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left(4-m^2\right)x^3+\left(m-2\right)x^2+x+m-1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=3\left(4-m^2\right)x^2+2\left(m-2\right)x+1$.

Với $m=-2$ không thỏa mãn.

Với $m=2$ thỏa mãn.

Với $m\neq\pm 2$. Ta có $\Delta'=\left(m-2\right)^2-3\left(4-m^2\right)=4m^2-4m-8$

Để thỏa mãn yêu cầu bài toán $\begin{cases}\Delta'\leq 0\\ 4-m^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-m-2\leq 0\\ -2<m<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\leq m\leq 2\\ -2<m<2\end{cases}\Leftrightarrow -1\leq m<2.$

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=-1, m=0$ và $m=2$.

Câu 6: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ sao cho hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3+2x^2+\left(m-1\right)x-1$ nghịch biến trên $\left(0;+\infty\right)$?

A. 8. **B.** 7. **C.** 10. **D.** 12.

Lời giải

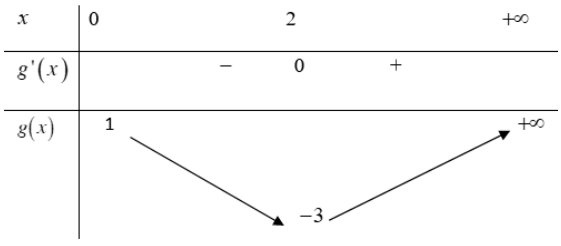
Chọn A

$y=-\frac{1}{3}x^3+2x^2+\left(m-1\right)x-1\Rightarrow y'=-x^2+4x+m-1.$

Hàm số nghịch biến trên $\left(0;+\infty\right)\Leftrightarrow y'\leq 0, \forall x\in\left(0;+\infty\right)\Leftrightarrow -x^2+4x+m-1\leq 0, \forall x\in\left(0;+\infty\right).$

$\Leftrightarrow m\leq x^2-4x+1, \forall x\in\left(0;+\infty\right)$. Xét hàm số $g\left(x\right)=x^2-4x+1$

Bảng biến thiên của hàm số $g\left(x\right)=x^2-4x+1$ trên $\left(0;+\infty\right)$.



Từ bảng biến thiên suy ra $m\leq -3$ thì hàm số nghịch biến trên $\left(0;+\infty\right)$.

Do m nguyên và thuộc đoạn $[-10;10]$ nên có 8 giá trị nguyên của tham số m.

Câu 7: Tìm số các giá trị nguyên của tham số $m \in [0;2022]$ để hàm số $y=(2m-1)x-(m-1)\cos x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

A. 1 **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=2m-1+(m-1)\sin x$.

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Trường hợp 1: $m=1 \Rightarrow y'=1>0, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số ĐB trên $\mathbb{R}$ (loại).

Trường hợp 2: $m>1$

Khi đó $y' \le 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sin x \le \dfrac{1-2m}{m-1}, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \dfrac{1-2m}{m-1} \ge 1 \Leftrightarrow \dfrac{2-3m}{m-1} \ge 0 \Leftrightarrow m \in \varnothing$.

Trường hợp 3: $m<1$

Khi đó $y' \le 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sin x \ge \dfrac{1-2m}{m-1}, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \dfrac{1-2m}{m-1} \le -1 \Leftrightarrow \dfrac{-m}{m-1} \le 0 \Leftrightarrow m \le 0$.

Do $m \in [0;2022]$ nên $m=0$.

Vậy có 1 giá trị m thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Câu 8: Cho hàm số $y=-x^3-mx^2+(4m+9)x+5$, với m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

A. 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Đạo hàm: $y'=-3x^2-2mx+4m+9$

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;+\infty) \Leftrightarrow y' \le 0, \forall x \in (-\infty;+\infty)$

$\Leftrightarrow (-m)^2-(-3)(4m+9) \le 0 \Leftrightarrow m^2+12m+27 \le 0 \Leftrightarrow -9 \le m \le -3 \Rightarrow m \in \{-9;-8;-7;...;-3\}$

Vậy có 7 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán

Câu 9: Số các giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-100;100]$ để hàm số $y=mx^3+mx^2+(m+1)x-3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là

A. 99. **B.** 100. **C.** 200. **D.** 199.

Lời giải

Chọn A

Trường hợp 1: Xét $m=0$ thì $y=x-3$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên loại.

Trường hợp 2 : Xét $m \ne 0$: Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y'=3mx^2+2mx+m+1 \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (y' có thể bằng 0 tại hữu hạn điểm)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ \Delta'=m^2-3m(m+1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ 2m^2+3m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \le -\frac{3}{2}.$$

Kết hợp với $m \in \mathbb{Z}; m \in [-100;100]$ ta được $m \in \{-100;-99;\cdots;-2\}$.

Suy ra có 99 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left(m^2-3m\right)x^2+2\left(m^2-9\right)x+m^2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=2\left(m^2-3m\right)x+2\left(m^2-9\right)$.

Trường hợp 1: $m^2-3m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=3\end{array}\right.$.

Với $m=0\Rightarrow y'=-18<0\Rightarrow$ Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Với $m=3\Rightarrow y'=0$. Khi đó $y=9$ (loại).

Trường hợp 2: $m^2-3m\neq 0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\neq 0\\m\neq 3\end{array}\right.$. Hàm số là hàm số bậc hai.

$\Rightarrow$ Không có giá trị nào của tham số m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy $m=0$ (thỏa mãn).

2 Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tập tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(2m-3\right)x-m+2$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là $m\in\left[a;b\right]$. Giá trị $b-a$ bằng.

A. 4. **B.** 10. **C.** 12. **D.** -3.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=-x^2-2mx+2m-3$. Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì:

$$\left\{\begin{array}{l}a<0\\\Delta\leq 0\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}-1<0\\m^2-\left(-1\right)\left(2m-3\right)\leq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow m^2+2m-3\leq 0\Leftrightarrow -3\leq m\leq 1.$$

Suy ra $a=-3;b=1\Rightarrow b-a=1-\left(-3\right)=4$.

Câu 2: Có báo nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=(m^2-m-6)x^3+(m-3)x^2-2x+1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. 6. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Trường hợp 1: $m^2-m-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3\\m=-2\end{array}\right.$

Với $m=3\Rightarrow y=-2x+1$ hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Với $m=-2\Rightarrow y=-5x^2-2x+1$ không nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Trường hợp 2: $m^2-m-6\neq 0$,

$y=(m^2-m-6)x^3+(m-3)x^2-2x+1\Rightarrow y'=3(m^2-m-6)x^2+2(m-3)x-2$.

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $\begin{cases} m^2-m-6<0 \\ \Delta'=7m^2-12m-27\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<3 \\ -\dfrac{9}{7}\le m\le 3 \end{cases}$

Suy ra $m\in\{-1,0,1,2,3\}$

Câu 3: Cho hàm số $y=\dfrac{\left(m^2-m\right)x^3}{3}+\left(m^2-m\right)x^2+mx+2.$ Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 3. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=\left(m^2-m\right)x^2+2\left(m^2-m\right)x+m$.

Trường hợp 1: $m^2-m=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \end{array}\right.$.

Với $m=0$ thì $y'=0.$ Suy ra hàm số đã cho là hàm số hằng.

Do đó $m=0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m=1$ thì $y'=1>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $m=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: $m^2-m\ne 0\Leftrightarrow \begin{cases} m\ne 0 \\ m\ne 1 \end{cases}$.

Khi đó: Hàm số $y=\dfrac{\left(m^2-m\right)x^3}{3}+\left(m^2-m\right)x^2+mx+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left(m^2-m\right)x^2+2\left(m^2-m\right)x+m\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}.$

Tức là $\begin{cases} m^2-m>0 \\ \left(m^2-m\right)^2-\left(m^2-m\right)m\le 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m^2-m>0 \\ m^2-2m\le 0 \end{cases}\Leftrightarrow 1<m\le 2.$ Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m=2.$

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị thực của m để hàm số $y=mx^9+\left(m^2-3m+2\right)x^5+\left(2m^3-m^2-m\right)x^4+m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

A. vô số. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y=mx^9+\left(m^2-3m+2\right)x^5+\left(2m^3-m^2-m\right)x^4+m$

$y'=9mx^8+5\left(m^2-3m+2\right)x^4+4\left(2m^3-m^2-m\right)x^3$

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi:

$y'=9mx^8+5\left(m^2-3m+2\right)x^4+4\left(2m^3-m^2-m\right)x^3\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ và dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm.

Ta có $y'=x^3\left[9mx^5+5\left(m^2-3m+2\right)x+4\left(2m^3-m^2-m\right)\right]$ có một nghiệm bội lẻ là $x=0$ nên $y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ khi y' không đổi dấu qua $x=0$.

Nên phương trình $9mx^5+5\left(m^2-3m+2\right)x+4\left(2m^3-m^2-m\right)=0$ phải có nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ là $x=0$.

Tức là $2m^3-m^2-m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=0\\m=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

Thử lại:

Với $m=1$, ta có: ta có: $y'=9x^8\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó $m=1$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

Với $m=0$, ta có: $y'=10x^4\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó $m=0$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

Với $m=-\dfrac{1}{2}$, ta có: $y'=-\dfrac{9}{2}x^8+\dfrac{75}{4}x^4$, không thỏa mãn điều kiện đề bài.

Câu 5: Tổng các giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $\left[-10;10\right]$ để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3+2x^2-mx-1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ bằng bao nhiêu?

A. 49. **B.** -49. **C.** -45. **D.** 45.

Lời giải

Chọn B

Ta có đạo hàm: $y'=x^2+4x-m$

Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y'\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=1>0\\\Delta'\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow 4+m\leq 0\Leftrightarrow m\leq -4$

Vì $m\in\left[-10;10\right]$ và $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\left[-10;-4\right]$.

Vậy $S=-10-9-8-7-6-5-4=-49$

Câu 6: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-20;2]$ để hàm số $y=x^3-x^2+3mx-1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 2. **B.** 23. **C.** 20. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y=x^3-x^2+3mx-1$ đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'=3x^2-2x+3m\geq 0\quad\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\Delta'\leq 0\Leftrightarrow 1-9m\leq 0\Leftrightarrow m\geq\dfrac{1}{9}$

Mà m nguyên thuộc $[-20;2]\Rightarrow m\in\{1;2\}\Rightarrow$ có hai giá trị m.

Câu 7: Hãy tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f\left(x\right)=-x^3+mx^2-2022$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m=0$. **B.** $m>0$. **C.** $m\leq 0$. **D.** $m\geq 0$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x)=-x^3+mx^2-2022$.

Ta có $f'(x)=-3x^2+2mx$.

Để hàm số $f(x)=-x^3+mx^2-2022$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $f'(x)\le 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'\le 0\\ a<0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m^2\le 0\\ -3<0\end{cases}\Leftrightarrow m=0$.

Vậy $m=0$ thì hàm số $f(x)=-x^3+mx^2-2022$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 8: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3+x^2+mx+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m\le\frac{4}{3}$. **B.** $m\le\frac{1}{3}$. **C.** $m\ge\frac{4}{3}$. **D.** $m\ge\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác đinh $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y'=3x^2+2x+m$. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $3x^2+2x+m\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}3>0\\ \Delta'\le 0\end{cases}\Leftrightarrow 1-3m\le 0\Leftrightarrow m\ge\frac{1}{3}$.

Câu 9: Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y=x+3-\frac{m}{x-2}$ đồng biến trên $[5;+\infty)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định: $x\ne 2$. Ta có: $y'=1+\frac{m}{(x-2)^2}$

Hàm số y đồng biến trên $[5;+\infty)\Leftrightarrow y'\ge 0,\forall x\in[5;+\infty)\Leftrightarrow 1+\frac{m}{(x-2)^2}\ge 0,\forall x\in[5;+\infty)$

$\Leftrightarrow m\ge -(x-2)^2,\forall x\in[5;+\infty)\Leftrightarrow m\ge\max\limits_{[5;+\infty)}\left[-(x-2)^2\right]$ **(*)**

Đặt $g(x)=-(x-2)^2$, ta có $g'(x)=-2(x-2)<0,\forall x\in[5;+\infty)$

x	5	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	-9	$-\infty$

Khi đó **(*)** $\Leftrightarrow m\ge -9$

Vì m nguyên âm nên $m\in\{-9;-8;-7;...;-1\}$. Vậy có 9 giá trị m cần tìm.

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2020;2020]$ sao cho hàm số $f(x)=(m-1)x^3+(m-1)x^2+(2m+1)x+3m-1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 2020. **B.** 2018. **C.** 2019. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn A

Nếu $m=1 \Rightarrow f(x)=3x+2$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow m=1$ thỏa mãn.

Nếu $m \neq 1$, ta có $f'(x)=3(m-1)x^2+2(m-1)x+2m+1$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $f'(x)=3(m-1)x^2+2(m-1)x+2m+1 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1>0 \\ \Delta'=(m-1)^2-3(m-1)(2m+1) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ \left[\begin{array}{l} m \geq 1 \\ m \leq -\dfrac{4}{5} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow m \in (1;+\infty).$$

Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $m \in [1;+\infty)$.

Vì m nguyên thuộc đoạn $[-2020;2020]$, nên $m \in \{1,2,\ldots,2020\}$.

Vậy có 2020 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 11: Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx+4m-3}{x+m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định là

A. 3. **B.** 6. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y'<0 \ \forall x \in D \Leftrightarrow m^2-4m+3<0 \Leftrightarrow m \in (1;3)$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m=2$

Vậy tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m thỏa ycbt là 2.

Câu 12: Tìm giá trị lớn nhất của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(8-2m)x+m+3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m=-4$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=4$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=x^2-2mx+8-2m$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow x^2-2mx+8-2m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1>0 \\ m^2+2m-8 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 2.$$

Giá trị lớn nhất của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(8-2m)x+m+3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $m=2$.

Câu 13: Tập tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=-\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-3)x-m+2$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là $m \in [a;b]$. Giá trị $b-a$ bằng.

A. 4. **B.** 10. **C.** 12. **D.** -3.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = -x^2 - 2mx + 2m - 3$. Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì

$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < 0 \\ m^2 - (-1)(2m-3) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 \le 0 \Leftrightarrow -3 \le m \le 1.$$

Suy ra $a = -3; b = 1 \Rightarrow b - a = 1 - (-3) = 4$.

Câu 14: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{2\cot x + 1}{\cot x + m}$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $m \in (-\infty; -1) \cup \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$. **B.** $m \in (-\infty; -1] \cup \left[0; \dfrac{1}{2}\right)$.

C. $m \in (-\infty; -1] \cup \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $m \in \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \cot x$. Vì hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ và với $x \in \left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ thì $t \in (0;1)$ nên Yêu cầu bài toán tương đương với: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{2t+1}{t+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 < 0 \\ -m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} -m \ge 1 \\ -m \le 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m \le -1 \\ m \ge 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -1 \\ 0 \le m < \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow m \in (-\infty; -1] \cup \left[0; \frac{1}{2}\right).$$

Câu 15: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-2020; 2020]$ để hàm số $y = x^{2021} - mx + 2020$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 2020. **B.** 2021. **C.** 2022. **D.** 2023.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 2021.x^{2020} - m$. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow 2021.x^{2020} - m \ge 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m \le 2021.x^{2020} \ \forall x \in \mathbb{R}$. Xét $f(x) = 2021.x^{2020} \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 2021.2020.x^{2019}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2021.2020.x^{2019} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra $m \le 0$, m là số nguyên trong đoạn $[-2020;2020]$ nên có 2021 số.

Câu 16: Hàm số $y = -\frac{1}{3}mx^3 + mx^2 - x$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

A. $m < -1$. **B.** $0 \le m \le 1$. **C.** $m \ne 0$. **D.** $m < 0$ hoặc $m > 1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = -mx^2 + 2mx - 1$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' = -mx^2 + 2mx - 1 \le 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Trường hợp 1: $\begin{cases} -m < 0 \\ \Delta' = m^2 - m \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \in [0;1] \end{cases} \Rightarrow m \in (0;1]$.

Trường hợp 2: $m = 0 \Rightarrow y' = -1 < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

Vậy $0 \le m \le 1$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 17: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + 16x + 10$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. 7. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Chon B

Ta có $y' = x^2 - 2mx + 16$. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \ge 0 \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + 16 \ge 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \le 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 16 \le 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \le m \le 4$.

Do m nguyên nên có 9 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 18: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + 3x - m^2 + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $\begin{bmatrix} m \ge 2 \\ m \le -4 \end{bmatrix}$. **B.** $-4 \le m \le 2$. **C.** $-4 < m < 2$. **D.** $\begin{bmatrix} m > 2 \\ m < -4 \end{bmatrix}$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + 3x - m^2 + 2$ có $y' = 3x^2 - 2(m+1)x + 3$.

Để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ **(*)**.

Ta có $y' = 3x^2 - 2(m+1)x + 3$ là tam thức bậc hai có hệ số của x^2 bằng $3 > 0$ và biệt thức $\Delta' = (m+1)^2 - 9$.

Do đó **(*)** $\Leftrightarrow \Delta' \le 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 9 \le 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 \le 9 \Leftrightarrow -3 \le m+1 \le 3 \Leftrightarrow -4 \le m \le 2$.

Câu 19: Cho hàm số (P) với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$

A. 6. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = -3x^2 - 2mx + 4m + 9$

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 < 0 \\ \Delta' = m^2 + 12m + 27 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -9 \le m \le -3$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{-9; -8; ...; -3\}$. Vậy có tất cả 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 20: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \left(m^3 - 3m\right)x^4 + m^2x^3 - mx^2 + x + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = 4\left(m^3 - 3m\right)x^3 + 3m^2x^2 - 2mx + 1 \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Với $m = 0$ ta có $y' = 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Với $m = \sqrt{3}$ ta có $y' = 9x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $m = \sqrt{3}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Với $m = -\sqrt{3}$ ta có $y' = 9x^2 + 2\sqrt{3}x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $m = -\sqrt{3}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Với $m^3 - 3m > 0$ ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} y' = -\infty$ nên không tồn tại m để $y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$, do đó không thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Với $m^3 - 3m < 0$ ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} y' = -\infty$ nên không tồn tại m để $y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$, do đó không thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Vậy có 3 giá trị thỏa mãn là $m \in \left\{0; \sqrt{3}; -\sqrt{3}\right\}$.

Câu 21: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $f(x) = 3x + m\sqrt{x^2 + 1}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 5. **B.** 1. **C.** 7. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x) = 3x + m\sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = 3 + \dfrac{mx}{\sqrt{x^2 + 1}} \Rightarrow f''(x) = \dfrac{m}{\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)^3}$.

Ta có: $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = m + 3$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = -m + 3$.

Trường hợp 1: $m > 0$, khi đó $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\Leftrightarrow f'(x) \ge 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -m + 3 \ge 0 \Leftrightarrow m \le 3$.

So điều kiện: $0 < m \le 3$.

Trường hợp 2: $m < 0$, khi đó $f''(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\Leftrightarrow f'(x) \ge 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m + 3 \ge 0 \Leftrightarrow m \ge -3$.

So điều kiện: $-3 \le m < 0$.

Trường hợp 3: $m = 0$, khi đó $f(x) = 3x$, hiển nhiên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Kết luận: hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow -3 \le x \le 3$.

Câu 22: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2020;2020]$ để hàm số $y = \left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{x+21}{x+3m}}$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$?

A. 2014. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 2015.

Lời giải

Chon C

Xét hàm số $y = \left(\frac{7}{9}\right)^{f(x)}$ với $f(x) = \frac{x+21}{x+3m}$. Ta có $y' = f'(x).\left(\frac{7}{9}\right)^{f(x)}.\ln\frac{7}{9}$. Do đó hàm số $y = \left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{x+21}{x+3m}}$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$ khi và chỉ khi hàm số $f(x) = \frac{x+21}{x+3m}$ nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$. Ta có $f'(x) = \frac{3m-21}{(x+3m)^2}$.

$f(x) = \frac{x+21}{x+3m}$ nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty) \Leftrightarrow f'(x) < 0 \forall x \in (3;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-21<0 \\ -3m \notin (3;+\infty) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m<7 \\ -3m \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<7 \\ m \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le m < 7$.

Do m nguyên và $m \in [-2020;2020]$ nên có 8 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 23: Cho hai số thực dương a và b thỏa mãn hàm số $y = \frac{4a^3+a}{b+1}x + \cos\left(\sqrt{2b+1}.x\right)$ đồng biến trong khoảng $(-\infty;+\infty)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = 27b - 8a^3$.

A. 40. **B.** 351. **C.** 345. **D.** 81.

Lời giải

Chọn B

Theo giả thiết ta có: $y' = \frac{4a^3+a}{b+1} - \sqrt{2b+1}\sin\left(\sqrt{2b+1}\,x\right)$

Hàm số đồng biến trong khoảng $(-\infty;+\infty) \Leftrightarrow y' = \frac{4a^3+a}{b+1} - \sqrt{2b+1}\sin\left(\sqrt{2b+1}\,x\right) \ge 0,\ \forall x$

$\Leftrightarrow \min\left(\frac{4a^3+a}{b+1} - \sqrt{2b+1}\sin\left(\sqrt{2b+1}\,x\right)\right) \ge 0$

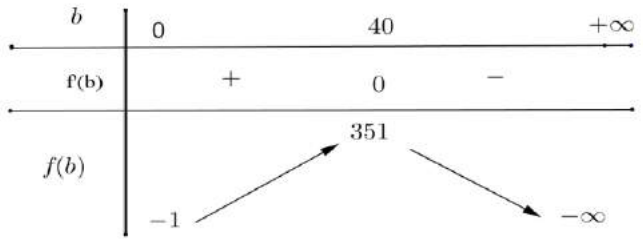
$\Leftrightarrow \frac{4a^3+a}{b+1} - \sqrt{2b+1} \ge 0 \Leftrightarrow 4a^3+a \ge (b+1)\sqrt{2b+1} \Leftrightarrow 8a^3+2a \ge \left[(2b+1)+1\right]\sqrt{2b+1}$

$\Leftrightarrow (2a)^3 + 2a \ge \left(\sqrt{2b+1}\right)^3 + \sqrt{2b+1} \Leftrightarrow 2a \ge \sqrt{2b+1}$.

Khi đó $S \le f(b) = 27b - \left(\sqrt{2b+1}\right)^3 \le \max\limits_{(0;+\infty)} f(b)$.

Xét hàm số $f(b) = 27b - \left(\sqrt{2b+1}\right)^3$ với $b>0$; $f'(b) = 27 - 3\sqrt{2b+1} = 0 \Leftrightarrow b = 40$

Bảng biến thiên hàm $f(b)$



Do đó: $S \le \max\limits_{(0;+\infty)} f(b) = f(40) = 351$

Câu 24: Cho hàm số $f(x) = \frac{2}{5}m^2x^5 - \frac{8}{3}mx^3 - \left(m^2 - m - 20\right)x + 1$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 7. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $f'(x) = 2m^2x^4 - 8mx^2 - m^2 + m + 20$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x) = 2m^2x^4 - 8mx^2 - m^2 + m + 20 \ge 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Nếu $m = 0$ ta có $f'(x) = 20 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, nên $m = 0$ nhận.

Nếu $m \ne 0$ ta thấy hàm số $g(x) = f'(x)$ là hàm trùng phương có hệ số $a = 2m^2 > 0$.

$g'(x) = f''(x) = 8m^2x^3 - 16mx = 8mx\left(mx^2 - 2\right)$.

Với $m < 0$ thì giá trị cực tiểu của hàm số $g(x)$ là $g(0) = -m^2 + m + 20$.

Với $m > 0$ thì giá trị cực tiểu của hàm số $g(x)$ là $g\left(\sqrt{\frac{2}{m}}\right) = -m^2 + m + 12$.

Để $f'(x) \ge 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} m < 0 \\ -m^2 + m + 20 \ge 0 \end{cases} \right. \left. \begin{cases} m > 0 \\ -m^2 + m + 12 \ge 0 \end{cases}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4 \le m < 0 \\ 0 < m \le 4 \end{array}\right.$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow \{-4;-3;-2;-1;1;2;3;4\}$.

Vậy có 9 giá trị nguyên của tham số m.

Dạng 3: Tính đơn điệu của hàm phân thức

Dạng 01: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$. Xét tính đơn điệu của hàm số $f(x)$ trên các khoảng xác định?

Tập xác định của hàm số: $D=\left(-\infty;-\dfrac{d}{c}\right)\cup\left(-\dfrac{d}{c};+\infty\right)$ và đạo hàm $f'(x)=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

Điều kiện cần và đủ để hàm số đồng biến là $ad-bc>0$ và nghịch biến là $ad-bc<0$.

Kết luận:

- $ad-bc>0$ thì hàm số đồng biến trên các khoảng xác định.
- $ad-bc<0$ thì hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định.
- $ad-bc=0$ thì hàm số là hàm hằng trên các khoảng xác định.

Dạng 02: Tìm điều kiện của tham số để hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ đơn điệu trên K

với $K=\{(a;b);[a;b];(a;b];[a;b)\}$

Bước 1: Tìm TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ và tính đạo hàm: $f'(x)=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

Bước 2:

- Hàm số đồng biến trên $K\Leftrightarrow\begin{cases}ad-bc>0\\cx+d\neq 0,\forall x\in K\end{cases}\Leftrightarrow K\Leftrightarrow\begin{cases}ad-bc>0\\-\dfrac{d}{c}\notin K\end{cases}$
- Hàm số nghịch biến trên $K\Leftrightarrow\begin{cases}ad-bc<0\\cx+d\neq 0,\forall x\in K\end{cases}\Leftrightarrow K\Leftrightarrow\begin{cases}ad-bc<0\\-\dfrac{d}{c}\notin K\end{cases}$

Dạng 03: Tìm điều kiện của tham số để hàm số $f(x)=\dfrac{au(x)+b}{cu(x)+d}$ đơn điệu trên K

với $K=\{(a;b);[a;b];(a;b];[a;b)\}$

Trong bài toán này, ta thấy hàm số $u(x)$ là một hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K nên khi đó ta đặt $t=u(x)$ suy ra $g(t)=\dfrac{at+b}{ct+d}$.

- Nếu hàm số $u(x)$ đồng biến trên $K\Rightarrow t\in[u(a);u(b)];(u(a);u(b));...$

  Bước 1: Tìm tập giá trị T của $t(x)$ trên K

  Bước 2: Tìm m để $g(t)$ đồng biến (nếu để cho $f(x)$ đồng biến) hoặc nghịch biến (nếu để cho $f(x)$ nghịch biến) trên T.

- Nếu hàm số $u(x)$ nghịch biến trên K

  Bước 1: Tìm tập giá trị T của $t(x)$ trên K

  Bước 2: Tìm m để $g(t)$ đồng biến (nếu để cho $f(x)$ nghịch biến) hoặc nghịch biến (nếu để cho $f(x)$ đồng biến) trên T.

1 Ví dụ minh họa

Câu 1: Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+2}$. Khẳng định nào sau đây là **đúng?**

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

C. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Hàm số có $y'=\dfrac{3}{(x+2)^2}>0$ với $\forall x\in D$

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

Câu 2: Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

$y'=\dfrac{-5}{(x-2)^2}<0$ với $\forall x\in D\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 3: Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x-1}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Ta có $y'=\dfrac{2}{(x-1)^2}\Rightarrow y'>0,\forall x\neq 1.$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x-4}{x+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$. Ta có: $y'=\dfrac{m+4}{(x+m)^2}$

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow y'>0,\forall x\in D\Leftrightarrow m+4>0\Leftrightarrow m>-4$.

Vì m nguyên âm nên $m\in\{-3;-2;-1\}$ Vậy có 3 giá trị thỏa mãn.

Câu 5: Cho hàm số $y=\dfrac{mx+2}{2x+m}$, m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{-m}{2}\right\}$, $y'=\dfrac{m^2-4}{(2x+m)^2}$.

Để hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó thì $m^2-4<0\Leftrightarrow -2<m<2$.

Do đó có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 6: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx-2}{x-m+1}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định?

A. 4. **B.** 6. **C.** Vô số. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{m-1\}$.

Ta có: $y=\dfrac{mx-2}{x-m+1}\Rightarrow y'=\dfrac{m(1-m)+2}{(x-m+1)^2}=\dfrac{-m^2+m+2}{(x-m+1)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định thì $y'>0\,\forall x\in D$

Hay $-m^2+m+2>0\Leftrightarrow -1<m<2$.

Các giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn đề bài là: 0; 1.

Vậy có 2 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn đề bài.

Câu 7: Tìm tất cả giá trị của m sao cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+2}$ đồng biến trên các khoảng xác định?

A. $m\geq 2$. **B.** $m<2$. **C.** $m\leq 2$. **D.** $m>2$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+2}$ đồng biến trên các khoảng xác định

$\Leftrightarrow y'=\dfrac{2-m}{(x+2)^2}>0,\forall x\neq -2\Leftrightarrow 2-m>0\Leftrightarrow m<2$.

Câu 8: Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-6)$ là

A. $(3;6]$. **B.** $(3;6)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $[3;6)$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$. Ta có $y'=\dfrac{m-3}{(x+m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-6) \Leftrightarrow y'>0\ \forall x\in(-\infty;-6)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-3>0 \\ -m\notin(-\infty;-6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>3 \\ -m\geq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>3 \\ m\leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow 3<m\leq 6.$$

Câu 9: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+m^2}{x+4}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 5. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-4\}$. Ta có: $y=\dfrac{x+m^2}{x+4}\Rightarrow y'=\dfrac{4-m^2}{(x+4)^2}$.

Hàm số $y=\dfrac{x+m^2}{x+4}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó khi và chỉ khi

$y'>0,\forall x\neq -4 \Leftrightarrow 4-m^2>0 \Leftrightarrow -2<m<2$. Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-1;0;1\}$.

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{2\cot x+1}{\cot x+m}$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $m\in(-\infty;-1)\cup\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$. **B.** $m\in(-\infty;-1]\cup\left[0;\dfrac{1}{2}\right)$.

C. $m\in(-\infty;-1]\cup\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $m\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\cot x$. Vì hàm số $y=\cot x$ nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$ và với $x\in\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$ thì $t\in(0;1)$ nên Yêu cầu bài toán tương đương với: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{2t+1}{t+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1<0 \\ -m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} -m \geq 1 \\ -m \leq 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m \leq -1 \\ m \geq 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -1 \\ 0 \leq m < \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow m \in (-\infty;-1] \cup \left[0;\frac{1}{2}\right).$$

2 Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hàm số $y=\dfrac{5x+9}{x-1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$ và $(2;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $R\setminus\{1\}$.

D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D=R\setminus\{1\}$ và có đạo hàm: $y'=\dfrac{-14}{(x-1)^2}<0, \forall x \in D$.

Do đó hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$. Suy ra hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 2: Khẳng định nào sau đây đúng về tính đơn điệu của hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$?

A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Ta có $y'=\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)'=\dfrac{-3}{(x-1)^2}<0, \forall x \in (-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 3: Cho hàm số $y=\dfrac{x+4}{x+1}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

C. Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Ta có $y'=\dfrac{-3}{(x+1)^2}<0,\ \forall x\in D$.

Vậy hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Câu 4: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Đạo hàm: $y'=\dfrac{-3}{(x-2)^2}<0,\ \forall x\in D$.

Vậy hàm số nghịch biến trên $(2;+\infty)$.

Câu 5: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Ta có: $y'=\dfrac{-2}{(x-1)^2}<0\,\forall x\neq 1\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 6: Hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$.

B. $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

C. $(-\infty;1)$.

D. $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và đạo hàm $y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}>0,\forall x\neq -1$.

Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Câu 7: Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+3}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;+\infty\right)$.

B. Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

C. Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$. Đạo hàm: $y'=\dfrac{5}{\left(x+3\right)^2}>0,\forall x\in D$.

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;-3\right)$ và $\left(-3;+\infty\right)$.

Câu 8: Hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi tham số m thỏa mãn

A. $m<1$. **B.** $m\le 1$. **C.** $m\ge 1$. **D.** $m>1$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Ta có $y=\dfrac{x+m}{x+1}\Rightarrow y'=\dfrac{1-m}{\left(x+1\right)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow y'>0,\forall x\ne -1\Rightarrow 1-m>0\Leftrightarrow m<1$.

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{2x+m}{x+1}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định?

A. $m\le 2\cdot$ **B.** $m\ge 2\cdot$ **C.** $m>2\cdot$ **D.** $m<2\cdot$

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Hàm số $y=\dfrac{2x+m}{x+1}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định $\forall x\in D$ khi và chỉ khi

$y'=\dfrac{2-m}{\left(x+1\right)^2}<0\Leftrightarrow 2-m<0\Leftrightarrow m>2$.

Câu 10: Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{\left(m+1\right)x+4}{x+2m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-2m\}$. Ta có $f'\left(x\right)=\dfrac{2\left(m^2+m-2\right)}{\left(x+2m\right)^2}$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$ khi

$\begin{cases}m^2+m-2<0\\-2m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2<m<1\\m\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 0\le m<1$

Theo giả thiết $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 0$.

Câu 11: Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{mx+1}{x+m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định là

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D = R \setminus \{-m\}$. Ta có: $y' = \dfrac{m^2-1}{(x+m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow m^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$

Câu 12: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{mx+9}{x+m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định.

A. $-3 \le m \le 3$. **B.** $-3 < m < 3$. **C.** $-3 \le m < 3$. **D.** $-3 < m \le 3$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$. Ta có $y' = \dfrac{m^2-9}{(x+m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow m^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 3$.

Câu 13: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x+m^2}{x+4}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 5. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$. Ta có $y' = \dfrac{4-m^2}{(x+4)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó thì $4 - m^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.
Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{2x^2-3x+m}{x-2}$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

A. $m > -2$. **B.** $m \ge -2$. **C.** $m \le -2$. **D.** $m < -2$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$; $f'(x) = \dfrac{2x^2-8x+6-m}{(x-2)^2}$.

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên các khoảng xác định

$\Leftrightarrow f'(x) \ge 0 (\forall x \in D) \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 6 - m \ge 0 (\forall x \in D) \Leftrightarrow 2(x-2)^2 \ge m + 2 (\forall x \in D)$.

Suy ra $m + 2 \le 0 \Leftrightarrow m \le -2$.

Câu 15: Cho hàm số $y=\dfrac{mx+4m}{x+m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$; suy ra: $y'=\dfrac{m^2-4m}{(x+m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định khi $y'<0,\forall x\in D \Leftrightarrow m^2-4m<0 \Leftrightarrow 0<m<4$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên có 3 giá trị thỏa mãn là $\{1;2;3\}$.

Câu 16: Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+m^2-6}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$. Tổng các phần tử của S là

A. -2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$. Ta có $y'=\dfrac{-m-m^2+6}{(x-m)^2}=\dfrac{-m^2-m+6}{(x-m)^2}$.

Để hàm số $y=\dfrac{x+m^2-6}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ thì

$$f'(x)>0,\forall x\in(-\infty;-2)\Leftrightarrow\begin{cases}-m^2-m+6>0\\ m\notin(-\infty;-2)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-3<m<2\\ m\geq -2\end{cases}\Rightarrow -2\leq m<2 \Rightarrow S=\{-2;-1;0;1\}.$$

Vậy tổng các phần tử của S là $-2+(-1)+0+1=-2$.

Câu 17: Cho hàm số $y=\dfrac{mx+2}{2x+m}$, m là tham số thự **C.** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$. Tìm số phần tử của S.

A. 1. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{m}{2}\right\}$. Ta có $y'=\dfrac{m^2-4}{(2x+m)^2}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-4<0\\ -\dfrac{m}{2}\notin(0;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2<m<2\\ \left[\begin{array}{l}-\dfrac{m}{2}\leq 0\\ -\dfrac{m}{2}\geq 1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2<m<2\\ \left[\begin{array}{l}m\geq 0\\ m\leq -2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow 0\leq m<2.$

Vậy tập S có 2 phần tử.

Câu 18: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=3x-1+\dfrac{m^2+3m}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Ta có $y=3x-1+\dfrac{m^2+3m}{x+1}\Rightarrow y'=\dfrac{3(x+1)^2-(m^2+3m)}{(x+1)^2}$.

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $y'\geq 0$, $\forall x\neq -1$ $\Leftrightarrow 3(x+1)^2-(m^2+3m)\geq 0,\forall x\neq -1$.

Do $(x+1)^2>0,\forall x\neq -1$ nên yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m^2+3m\leq 0\Leftrightarrow -3\leq m\leq 0$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-3;-2;-1;0\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 19: Cho hàm số $y=\dfrac{mx+4m}{x+m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S.

A. 5. **B.** 4. **C.** Vô số. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=\dfrac{mx+4m}{x+m}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$. Ta có $y'=\dfrac{m^2-4m}{(x+m)^2}$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định

$\Leftrightarrow y'<0,\forall x\in D\Leftrightarrow y'=\dfrac{m^2-4m}{(x+m)^2}<0,\forall x\in D\Leftrightarrow m^2-4m<0\Leftrightarrow 0<m<4$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{1;2;3\}$. Vậy có 3 giá trị m.

Câu 20: Hàm số $f(x)=\dfrac{m\sqrt{1-x}+1}{2\sqrt{1-x}+m+1}$ đồng biến trên $\left(-\infty;\dfrac{15}{16}\right)$ khi $m\in[a;b)$.Tính $P=a+b$

A. $P=0$ **B.** $P=-\dfrac{1}{2}$. **C.** $P=\dfrac{1}{2}$. **D.** $P=1$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sqrt{1-x}$. Khi $x\in\left(-\infty;\dfrac{15}{16}\right)$ thì $t\in\left(\dfrac{1}{4};+\infty\right)$

Khi đó hàm số đã cho trở thành $g(t)=\dfrac{mt+1}{2t+m+1}$

Vì hàm số $t=\sqrt{1-x}$ nghịch biến trên $\left(-\infty;\dfrac{15}{16}\right)$ nên yêu cầu bài toán trở thành tìm m để hàm số $g(t)=\dfrac{mt+1}{2t+m+1}$ nghịch biến trên $\left(\dfrac{1}{4};+\infty\right)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-m-1}{2} \le \dfrac{1}{4} \\ m^2+m-2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge -\dfrac{3}{2} \\ -2<m<1 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{3}{2} \le m < 1$. Vậy $P = -\dfrac{3}{2}+1 = -\dfrac{1}{2}$.

Câu 21: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-10;10)$ để hàm số $y = \dfrac{\sqrt{3-x}+2}{\sqrt{3-x}+m}$ đồng biến trên khoảng $(-6;2)$?

A. 11. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \sqrt{3-x}$. Do $x \in (-6;2) \Rightarrow t \in (1;3)$.

Khi đó ta có $y = f(t) = \dfrac{t+2}{t+m}$ với $t \in (1;3)$ và $t \ne -m$. Ta có $y' = f'(t) = \dfrac{m-2}{(t+m)^2}$.

Mà hàm số $t = \sqrt{3-x}$ là hàm số nghịch biến trên khoảng $(-6;2)$ nên để hàm số đã cho đồng biến trên $(-6;2) \Leftrightarrow$ hàm số $y = f(t)$ nghịch biến trên $(1;3) \Leftrightarrow \begin{cases} m-2<0 \\ -m \notin (1;3) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m-2<0 \\ \left[\begin{array}{l} -m \le 1 \\ -m \ge 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<2 \\ \left[\begin{array}{l} m \ge -1 \\ m \le -3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \le m < 2 \\ m \le -3 \end{array}\right.$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in (-10;10) \Rightarrow m \in \{-9;-8;-7;...;-4;-3;-1;0;1\}$.

Vậy có 10 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 22: Có bao nhiêu số nguyên $m \in [0;2021]$ để hàm số $y = \dfrac{m\sin x - 1}{\sin x - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{5\pi}{6}\right)$?

A. 2020. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \sin x \Rightarrow t' = \cos x$. Với $x \in \left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{5\pi}{6}\right) \Rightarrow t' = \cos x < 0$ và $t \in \left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

Hàm số đã cho trở thành: $y = \dfrac{mt-1}{t-m}$. Điều kiện: $t \ne m$. Ta có: $y' = \dfrac{-m^2+1}{(t-m)^2}$.

Vì $x \in \left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{5\pi}{6}\right) \Rightarrow t' = \cos x < 0$ và $t \in \left(\dfrac{1}{2};1\right)$ nên hàm số $y = \dfrac{m\sin x - 1}{\sin x - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{5\pi}{6}\right)$ khi và chỉ khi hàm số $y = \dfrac{mt-1}{t-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -m^2+1>0 \\ m \notin \left(\dfrac{1}{2};1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<m<1 \\ \left[\begin{array}{l} m \le \dfrac{1}{2} \\ m \ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \le \dfrac{1}{2}$.

Vì $m \in [0;2021]$ và m nguyên nên $m = 0$. Vậy có 1 giá trị nguyên m thoả mãn.

Câu 23: Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x+1}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ là

A. $m \in (-\infty;1)$. **B.** $m \in (1;+\infty)$. **C.** $m \in (1;2]$. **D.** $m \in (1;2)$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R} \setminus \{-m\}$. Ta có: $y' = \dfrac{m-1}{(x+m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2) \Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in (-\infty;-2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1>0 \\ -m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ m \leq 2 \end{cases}$. Vậy $m \in (1;2]$.

Câu 24: Gọi S là tập các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \dfrac{2\sqrt{1-x}-14}{m-\sqrt{1-x}}$ đồng biến trên khoảng $(-15;-3)$. Số phần tử của tập S là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \sqrt{1-x}$. Với $x \in (-15;-3) \Rightarrow t \in (2;4)$.

Ta có $t' = \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}} < 0; \forall x \in (-15;-3)$ nên hàm số $t = \sqrt{1-x}$ nghịch biến trên khoảng $(-15;-3)$

Khi đó, hàm số trở thành $y = f(t) = \dfrac{2t-14}{m-t}$, $t \in (2;4)$ và $t \neq m \Rightarrow f'(t) = \dfrac{2m-14}{(m-t)^2}$.

Do đó, hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-15;-3)$ khi và chỉ khi hàm số $y = f(t)$ nghịch biến trên $(2;4) \Leftrightarrow f'(t) < 0; \forall t \in (2;4) \Leftrightarrow \begin{cases} m \notin (2;4) \\ 2m-14<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<7 \\ \left[\begin{array}{l} m \leq 2 \\ m \geq 4 \end{array}\right. \end{cases}$.

Mà m là số nguyên dương nên $m \in \{1;2;4;5;6\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn.

Câu 25: Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{2x^2 + (1-m)x + 1 + m}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$. Ta có $y' = \dfrac{2x^2 - 4mx + m^2 - 2m - 1}{(x-m)^2} = \dfrac{g(x)}{(x-m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $g(x) \geq 0, \forall x > 1$ và $m \leq 1$ (1)

Vì $\Delta_g{}' = 2(m+1)^2 \geq 0, \forall m$ nên $(1) \Leftrightarrow g(x) = 0$ có hai nghiệm thỏa $x_1 \leq x_2 \leq 1$

Điều kiện tương đương là $\begin{cases} 2g(1) = 2(m^2 - 6m + 1) \geq 0 \\ \dfrac{S}{2} = m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 3 - 2\sqrt{2} \approx 0,2$.

Do đó không có giá trị nguyên dương của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 26: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x^2 + x + m}$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

A. $(-\infty;-2]$. **B.** $(-3;-2]$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = \dfrac{m - (x+1)^2}{(x^2 + x + m)^2}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} y' \leq 0 \\ x^2 + x + m \neq 0 \end{cases}, \forall x \in (-1;1) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m - (x+1)^2}{(x^2 + x + m)^2} \leq 0 \\ x^2 + x + m \neq 0 \end{cases}, \forall x \in (-1;1)$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq (x+1)^2 \\ m \neq -x^2 - x \end{cases}, \forall x \in (-1;1) \Rightarrow m \leq (x+1)^2, \forall x \in (-1;1) \Leftrightarrow m \leq 0$ (*).

Đặt $f(x) = -x^2 - x, x \in (-1;1) \Rightarrow f'(x) = -2x - 1 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$				$+$	0	$-$			
$f(x)$			0		$\frac{1}{4}$		-2		

Vậy $m \in (-\infty;-2] \cup \left(\dfrac{1}{4};+\infty\right)$ (**). Từ $(*)$ và $(**) \Rightarrow m \in (-\infty;-2]$.

Câu 27: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

A. $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m < 2$. **B.** $m \leq 0$.

C. $1 \leq m < 2$. **D.** $m \geq 2$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \tan x$, vì $x \in \left(0;\dfrac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t \in (0;1)$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t-2}{t-m}$ $\forall t\in(0;1)$. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$. Ta có $f'(t)=\dfrac{2-m}{(t-m)^2}$.

Ta thấy hàm số $t(x)=\tan x$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Nên hàm số $y=\dfrac{\tan x-2}{\tan x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ khi và chỉ khi: $f'(t)>0$ $\forall t\in(0;1)$

$\Leftrightarrow \dfrac{2-m}{(t-m)^2}>0$ $\forall t\in(0;1)\Leftrightarrow\begin{cases}2-m>0\\ m\notin(0;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<2\\ \left[\begin{array}{l}m\le 0\\ m\ge 1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m\in(-\infty;0]\cup[1;2)$.

Câu 28: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1-x}+m}$ đồng biến trên khoảng $(-3;0)$?

A. 0. **B.** 3. **C.** 0. **D.** vô số.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\sqrt{1-x}$, $x\in(-3;0)\Rightarrow t\in(1;2)$

Ta có: $t'=\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}$ là hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;0)$.

Yêu cầu bài toán trở thành: Tìm các giá trị nguyên của m để hàm số $f(t)=\dfrac{t+1}{t+m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$. Có $f'(t)=\dfrac{m-1}{(t+m)^2}$.

Hàm số $f(t)=\dfrac{t+1}{t+m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}f'(t)<0\\ -m\notin(1;2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<1\\ \left[\begin{array}{l}-m\le 1\\ -m\ge 2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le -2\\ -1\le m<1\end{array}\right.$

Vậy có vô số giá trị nguyên của tham số m.

Câu 29: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=\dfrac{x^2-4x+m+2+3\sqrt{x^2-4x}}{\sqrt{x^2-4x}+2}$ nghịch biến trên khoảng $(-4;0)$?

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 17.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\sqrt{x^2-4x}\Rightarrow t'=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}}<0$ $\forall\ t\in(-4;0)$ $\Rightarrow$ t nghịch biến trên $(-4;0)$

$\Rightarrow t\in\left(0;4\sqrt{2}\right)$

Khi đó bài toán trở thành tìm m nguyên dương để hàm số $g(t)=\dfrac{t^2+3t+m+2}{t+2}$ đồng biến

trên $\left(0;4\sqrt{2}\right)$.

Ta có $g\left(t\right)=\dfrac{t^2+3t+m+2}{t+2}\Rightarrow g'\left(t\right)=\dfrac{t^2+4t+4-m}{\left(t+2\right)^2}=0\Leftrightarrow t^2+4t+4-m=0\Leftrightarrow\left(t+2\right)^2=m$

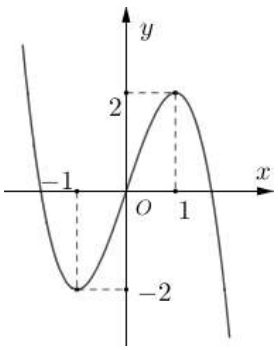
Do phương $m>0$ nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt $x=-2\pm\sqrt{m}$

$\Rightarrow$Hàm số đồng biên trên $\left(-\infty;-2-\sqrt{m}\right)$ và $\left(-2+\sqrt{m};+\infty\right)$.

Để hàm số $g\left(t\right)$ đồng biến trên $\left(0;4\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow\left(0;4\sqrt{2}\right)\subset\left(-2+\sqrt{m};+\infty\right)$

$\Leftrightarrow-2+\sqrt{m}\le0\Leftrightarrow\sqrt{m}\le2\Leftrightarrow m\le4$.

Câu 30: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong như hình bên dưới. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mf\left(x\right)+2024}{f\left(x\right)+m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(-1;1\right)$?



A. 88. **B.** 84. **C.** 86. **D.** 89.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=f\left(x\right)$. Nhận thấy hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $x\in\left(-1;1\right)$ và $f\left(x\right)\in\left(-2;2\right),\forall x\in\left(-1;1\right)$.

Do đó yêu cầu bài toán dẫn đến bài toán tìm m để hàm số $y=\dfrac{mt+2024}{t+m}$ nghịch biến trên $\left(-2;2\right)$.

Điều kiện: $t+m\ne0\Leftrightarrow t\ne-m$. Ta có: $y'=\dfrac{m^2-2024}{\left(t+m\right)^2}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\begin{cases}y'<0,\forall t\in\left(-2;2\right)\\-m\notin\left(-2;2\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-2024<0\\\left[\begin{array}{l}-m\ge2\\-m\le-2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\sqrt{2024}<m<\sqrt{2024}\\\left[\begin{array}{l}m\le-2\\m\ge2\end{array}\right.\end{cases}$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\sqrt{2024}<m\le-2\\2\le m<\sqrt{2024}\end{array}\right.$ và $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\left\{-44;-43;...;-2;2;3;...;44\right\}$.

Vậy có 86 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 31: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in\left[-20;20\right]$ để hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-2x+2}+1}{2m-3-\sqrt{x^2-2x+2}}$ đồng biến trên $\left(-\infty;1\right)$?

A. 21. **B.** 19. **C.** 22. **D.** 20.

Lời giải

Chọn A

Đặt $u=\sqrt{x^2-2x+2}$. Xét trên $(-\infty;1)$ thì $u\in(1;+\infty)$

Để $(-\infty;1)$ nằm trong TXĐ của hàm số đã cho thì: $2m-3\neq\sqrt{x^2-2x+2},\ \forall x\in(-\infty;1)$

$\Leftrightarrow 2m-3\le 1\Leftrightarrow m\le 2$

Ta có hàm số $y=\dfrac{u+1}{2m-3-u}\longrightarrow y'=\dfrac{2m-2}{(2m-3-u)^2}\cdot u'=\dfrac{2m-2}{(2m-3-u)^2}\cdot\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$

Để hàm số đồng biến trên $(-\infty;1)$ thì $y'=\dfrac{2m-2}{(2m-3-u)^2}\cdot\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}>0,\ \forall x\in(-\infty;1)$

Suy ra $2m-2<0\Leftrightarrow m<1$

Từ, suy ra $m<1$, mà $m\in[-20;20],\ m\in\mathbb{Z}\longrightarrow m=\{-20,-19,...,0\}$.

Vậy có 21 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu.

Câu 32: Cho hai hàm số $f(x)=\dfrac{x+4a}{x+b}$ và $g(x)=\dfrac{x+b}{x+a^2}$ cùng đồng biến trên từng khoảng xác định của nó. Gọi a_o và b_o lần lượt là những số nguyên dương nhỏ nhất của a và b thỏa mãn. Giá trị của biểu thức $T=a_o+b_o$ tương ứng bằng:

A. 25. **B.** 26. **C.** 27. **D.** 28.

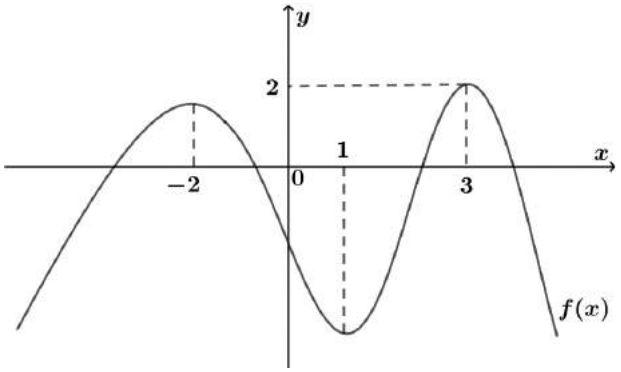
Lời giải

Chọn B

Ta có: $\begin{cases} f'(x)=\dfrac{b-4a}{(x+b)^2}>0\Rightarrow b>4a(*) \\ g'(x)=\dfrac{a^2-b}{(x+a^2)}>0\Rightarrow a^2>b(**) \end{cases}\Rightarrow a^2>4a\Rightarrow a>4\Rightarrow a_o=5$

Từ $(*)\Rightarrow b>4a_0=20\Rightarrow b_o=21\Rightarrow T=26$.

Câu 33: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ. Hỏi hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-3}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-3;-2)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(-1;2)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

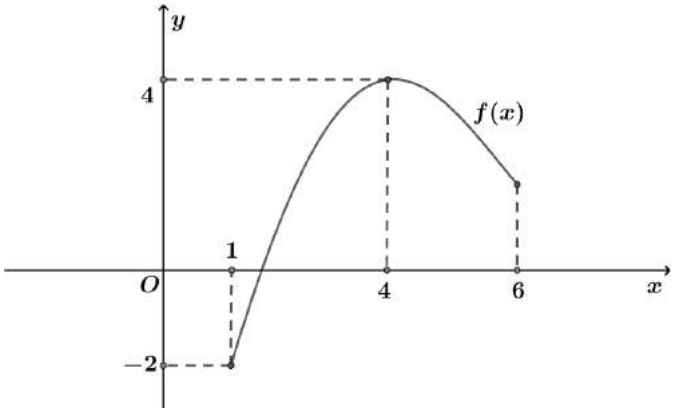
Ta luôn có: $f(x)\le 2<3\Rightarrow$ phương trình mẫu số $f(x)-3=0$ vô nghiệm.

Suy ra hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-3}$ có tập xác đinh là $\mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y'=-\dfrac{f'(x)}{[f(x)-3]^2}$

Hàm số nghịch biến thì: $y'=-\dfrac{f'(x)}{[f(x)-3]^2}<0\Leftrightarrow f'(x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\in(-\infty;-2)\\ x\in(1;3)\end{array}\right.$

Câu 34: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-20;2021)$ để hàm số $y=\dfrac{f(x)+5}{f(x)+m}$ nghịch biến trên $(1;4)$?



A. 19. **B.** 21. **C.** 20. **D.** 22.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số $y=g(x)=\dfrac{f(x)+5}{f(x)+m}$ là $D=\{x\in R|\ f(x)\neq -m\}$

Để khoảng $(1;4)\subset D\rightarrow$ phương trình $f(x)=-m$ phải không có nghiệm $x\in(1;4)$.

Suy ra: $\left[\begin{array}{l}-m\geq 4\\ -m\leq -2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\leq -4\\ m\geq 2\end{array}\right.\quad(1)$

Đạo hàm: $y'=g'(x)=f'(x)\cdot\dfrac{m-5}{\left(f(x)+m\right)^2}$; Để ý rằng trên luôn có $f'(x)>0$

Để hàm số $y=g(x)=\dfrac{f(x)+5}{f(x)+m}$ nghịch biến trên thì:

$g'(x)=f'(x)\cdot\dfrac{m-5}{\left(f(x)+m\right)^2}<0$ với $\forall x\in(1;4)$

Suy ra: $\dfrac{m-5}{\left(f(x)+m\right)^2}<0\Leftrightarrow m-5<0\Leftrightarrow m<5\quad(2)$

Kết hợp (1) và (2) và điều kiện m nguyên $m\in[-20;2021)$.

Ta suy ra: $\left[\begin{array}{l}-20\leq m\leq -4\\ 2\leq m<5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-20\leq m\leq -4\\ 2\leq m\leq 4\end{array}\right.$. Có 20 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị nằm trên trục hoành và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, bảng xét dấu của biểu thức $f'(x)$ như bảng dưới đây.

x	$-\infty$		-2		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=g(x)=\dfrac{f\left(x^2-2x\right)}{f\left(x^2-2x\right)+1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $\left(-2;\dfrac{5}{2}\right)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

$$g'(x)=\frac{\left(x^2-2x\right)'.f'\left(x^2-2x\right)}{\left(f\left(x^2-2x\right)+1\right)^2}=\frac{(2x-2).f'\left(x^2-2x\right)}{\left(f\left(x^2-2x\right)+1\right)^2}.$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-2=0\\ f'\left(x^2-2x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2-2x=-2\\ x^2-2x=-1\\ x^2-2x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1\\ x=3\end{array}\right.$$

Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta có hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;3)$.

Dạng 4: Tính đơn điệu của hàm số bậc ba

Cho hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Đạo hàm: $y' = f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Hàm số bậc ba đồng biến, nghịch biến trên $\mathbb{R}$

- Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 3ac \leq 0 \\ a > 0 \end{cases}$
- Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 3ac \leq 0 \\ a < 0 \end{cases}$

Hàm số bậc ba đồng biến, nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ cho trước

- Hàm số đồng biến trên $(a;b) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (a;b)$
- Hàm số nghịch biến trên $(a;b) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (a;b)$

Phương pháp cô lập tham số (sử dụng khi tách được tham số)

Bước 1: Tách tham số m ở $y' \geq 0$ hoặc $y' \leq 0$ để đưa về dạng $f(m) \geq g(m)$ hoặc $f(m) \leq g(m)$

Bước 2: Xét hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(a;b)$, tính đạo hàm và lập bảng biến thiên

Bước 3: Dựa vào bảng biến thiên của $f(x)$ để suy ra được giá trị của $g(x)$: "lớn hơn giá trị lớn nhất hoặc nhỏ hơn giá trị nhỏ nhất"

Phương pháp sử dụng biệt thức Denta (sử dụng khi không tách được tham số)

Biệt thức Delta: $\Delta' = b^2 - 3ac$

Trường hợp 1: $\Delta' \leq 0$ thì kiểm tra dấu của hệ số a để suy ra hàm số đồng biến hay nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Sau đó đối chiếu với yêu cầu bài toán để suy ra giá trị của tham số m.

Trường hợp 2: $\Delta' > 0$ thì khi đó $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Ta lập bảng xét dấu, dựa vào yêu cầu bài toán để suy ra giá trị của tham số m.

Lưu ý: Nếu hệ số a phụ thuộc vào tham số, ta cần xét thêm trường hợp $a = 0$.

1 Ví dụ minh họa

Câu 1: Hàm số $y = -2x^3 + 3x^2 + 1$ đồng biến trong khoảng nào trong các khỏng dưới đây?

A. $(-1;1)$. **B.** $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$.

C. $(0;1)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = -6x^2 + 6x, \forall x$. Suy ra $y' > 0, \forall x \in (0;1)$.

Vậy hàm số đồng biến trong khoảng $(0;1)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Khi đó: $y'<0,\forall x\in(0;2)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

Câu 3: Hàm số $y=-x^3+3x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;4)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(0;2)$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=-3x^2+6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Hàm số đồng biến khi $y'>0\Leftrightarrow 0<x<2$.

Câu 4: Cho hàm số $y=-x^3-mx^2+(4m+9)x+5$, với m là tham số. Số giá trị nguyên của m để hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Hàm số ngịch biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'=-3x^2-2mx+4m+9\le 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1<0\\\Delta'=m^2+3(4m+9)\le 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow m^2+12m+27\le 0\Leftrightarrow -9\le m\le -3$ mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-9;-8;-7;-6;....;-3\}$

Vậy có 7 số nguyên thỏa mãn.

Câu 5: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2-(2m-3)x-m+2$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 5. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2-(2m-3)x-m+2\Rightarrow y'=x^2-2mx-(2m-3).$

Để hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì

$\begin{cases}1>0\\m^2+2m-3\le 0\end{cases}\Leftrightarrow -3\le m\le 1\Rightarrow m\in\{-3;-2;-1;0;1\}$

Câu 6: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x-3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. Vô số. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = x^2 - 2mx + m + 2$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m + 2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 2 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-1;0;1;2\}$

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn bài toán.

Câu 7: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - 2mx^2 + (3m+5)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 6. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = mx^2 - 4mx + 3m + 5$.

Với $a = 0 \Leftrightarrow m = 0 \Rightarrow y' = 5 > 0$. Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Với $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ (2m)^2 - m(3m+5) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m^2 - 5m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 0 \leq m \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 5.$$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1;2;3;4;5\}$.

Câu 8: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để hàm số $y = x^3 + mx^2 - x + 3$ nghịch biến trên $(2;4)$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $D = \mathbb{R}$.

Hàm số nghịch biến trên $(2;4)$ khi và chỉ khi $y' = 3x^2 + 2mx - 1 \leq 0, \forall x \in (2;4)$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{1-3x^2}{2x}, \forall x \in (2;4) \ (1).$$

Xét hàm số $g(x) = \frac{1-3x^2}{2x}$ trên $(2;4)$ có $g'(x) = -\frac{3x^2+1}{2x^2} < 0, \forall x \in (2;4)$.

Do hàm số $g(x) = \frac{1-3x^2}{2x}$ liên tục tại $x = 2$ và $x = 4$ nên

$$(1) \Leftrightarrow m \leq \min_{(2;4)} g(x) \Leftrightarrow m \leq g(4) \Leftrightarrow m \leq -\frac{47}{8}.$$

Vì m nguyên thuộc $[-10;10]$ nên $m \in \{-10;-9;-8;-7;-6\}$.

Câu 9: Cho hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2m(2m-1)$. Biết $[a;b]$ là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên $[2;+\infty)$. Tổng $a+b$ bằng

A. $-\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{3}{2}$. **C.** 0. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\forall x \in \mathbb{R}, y' = 3x^2 - 2(m+1)x - 2m^2 + 3m - 2$

$y' = 0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt $\frac{m+1 \pm \sqrt{7m^2 - 7m + 7}}{3}$ với mọi m

Yêu cầu bài toán $[2;+\infty) \subset \left[\frac{m+1+\sqrt{7m^2-7m+7}}{3}\right)$, nên $\frac{m+1+\sqrt{7m^2-7m+7}}{3} \le 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{7m^2-7m+7} \le 5-m \Leftrightarrow -2 \le m \le \frac{3}{2}$. Vậy $a+b = -\frac{1}{2}$

2 Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Khoảng nghịch biến của hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 4$ là

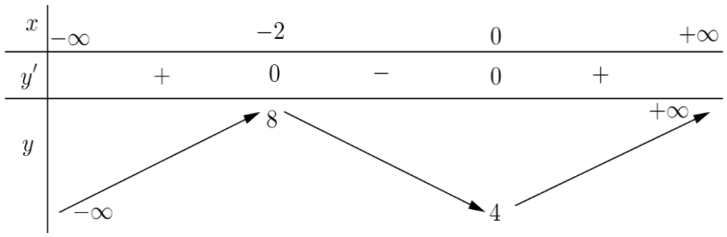
A. $(0;+\infty)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(-2;0)$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 3x^2 + 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên



Vậy hàm số đồng nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

Câu 2: Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + 6$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

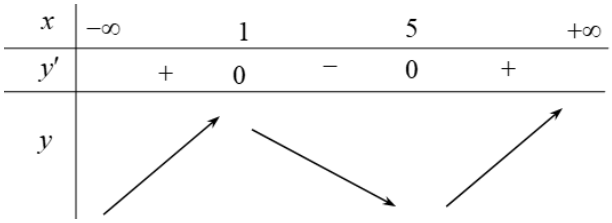
A. $(1;5)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(5;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = x^2 - 6x + 5$, $y' = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 5 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu đạo hàm



Từ bảng xét dấu suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;5)$.

Câu 3: Hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;1)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $[1;+\infty)$. **D.** $(-2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=3x^2-3\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow 3x^2-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Câu 4: Hàm số $y=x^3-2x^2+x+1$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $\left(-\frac{1}{3};1\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{3};1\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y=x^3-2x^2+x+1\Rightarrow y'=3x^2-4x+1\Rightarrow y'<0,\forall x\in\left(\frac{1}{3};1\right)$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3};1\right)$.

Câu 5: Hàm số $y=-x^3+3x^2+3mx$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

A. $m\le -1$. **B.** $m\ge -1$. **C.** $m\ge 1$. **D.** $m\le 3$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y=-x^3+3x^2+3mx$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$

Đạo hàm: $y'=-3x^2+6x+3m$

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ $y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'\le 0\\a<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9+9m\le 0\\-3<0\end{cases}\Leftrightarrow m\le -1.$

Vậy $m\le -1$ thỏa mãn bài toán.

Câu 6: Tập hợp tất cả giá trị của hàm tham số m để hàm số $y=-x^3+3x^2+mx+5$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là

A. $[-3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-3)$. **C.** $(-3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-3]$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=-3x^2+6x+m$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\le 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow -3x^2+6x+m\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3<0\\\Delta'=3^2-(-3)m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow 9+3m\le 0\Leftrightarrow m\le -3.$

Vậy $m\in(-\infty;-3]$.

Câu 7: Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+mx^2+4x-m$. đã cho

đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $[-2;2]$. **B.** $(-2;2)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $[2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y'=x^2+2mx+4\geq 0,\forall x$ hay $\Delta'\leq 0$ $\Leftrightarrow m^2-4\leq 0\Leftrightarrow -2\leq m\leq 2$

Câu 8: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-3x^2+mx-2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m\leq 9$. **B.** $m<9$. **C.** $m>9$. **D.** $m\geq 9$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y'=x^2-6x+m\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta'\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1>0\\ 9-m\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow m\geq 9$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)=x^3+3mx^2+3$, với giá trị $m=m_0$ thì hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $m\in[0;1]$. **B.** $m\in[1;2]$. **C.** $m\in(3;5)$. **D.** $m\in(-1;0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(x)=x^3+3mx^2+3$. Đạo hàm $f'(x)=3x^2+6mx$

Để hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$ thì $f'(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 3x^2+6mx\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta'\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3>0\\ 9m^2\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow m=0\in[0;1]$

Câu 10: Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $y=f(x)=-2x^3+(m-1)x^2+mx+5$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-5\geq m$. **B.** $3\leq m\leq 5$. **C.** $-3\leq m\leq -1$. **D.** $m\in\varnothing$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y=f(x)=-2x^3+(m-1)x^2+mx+5$. Đạo hàm $f'(x)=-6x^2+2(m-1)x+m$

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $f'(x)\leq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow -6x^2+2(m-1)x+m\leq 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta'\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-6<0\\ (m-1)^2+6m\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow m^2+4m+1\leq 0\Leftrightarrow -2-\sqrt{3}\leq m\leq -2+\sqrt{3}$

Câu 11: Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3+3(m-1)x^2+3x+2022$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A. $[0;2]$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y = x^3 + 3(m-1)x^2 + 3x + 2022 \Rightarrow y' = 3x^2 + 6(m-1)x + 3$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y' \geq 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3x^2 + 6(m-1)x + 3 \geq 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 + 2(m-1)x + 1 \geq 0; \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \Delta' \leq 0 (do: a = 1 > 0) \Leftrightarrow m^2 - 2m \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2$

Câu 12: Cho hàm số $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{m+1}{4}x^4 + \frac{2m^2+m-1}{3}x^3 + 1$. Số các giá trị nguyên của $m \in [0;10]$ để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A. 10. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = x^2\left(x^2 - (m+1)x + \left(2m^2 + m - 1\right)\right) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2 - (m+1)x + \left(2m^2 + m - 1\right) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (m+1)^2 - 4\left(2m^2 + m - 1\right) \leq 0 \Leftrightarrow -7m^2 - 2m + 5 \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -1 \\ m \geq \frac{5}{7} \end{array}\right.$.

Câu 13: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - x^2 + mx + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m < 3$. **B.** $m \leq \frac{1}{3}$. **C.** $m \geq \frac{1}{3}$. **D.** $m < -3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = x^3 - x^2 + mx + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 - 2x + m$

Hàm số $y = x^3 - x^2 + mx + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow 3x^2 - 2x + m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = 1 - 3m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{3}$

Vậy hàm số $y = x^3 - x^2 + mx + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $m \geq \frac{1}{3}$.

Câu 14: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 9x - 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 5. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x) = x^2 + 2mx + 9$

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 9 \leq 0$ nên $m \in [-3;3]$.

Vậy có 7 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 15: Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số

$y=-\frac{1}{3}x^3+mx^2-(2m+3)x+4$ nghịch biến trên R. Tổng giá trị các phần tử của S bằng

A. 5. **B.** -3. **C.** 3. **D.** -5.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: : $D=R$.

$y'=-x^2+2mx-2m-3$.

Đề hàm số nghịch biến trên R thì $y'=-x^2+2mx-2m-3\le 0,\forall x\in R$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'\le 0\\ a<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-2m-3\le 0\\ -1<0\end{cases}\Rightarrow -1\le m\le 3$.

Vậy tổng các phần tử của S là $T=-1+0+1+2+3=5$.

Câu 16: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+mx-3$ đồng biến trên khoảng $(2;6)$?

A. 6. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=x^2-4x+m$.

Hàm số đồng biến trên $(2;6)\Leftrightarrow y'\ge 0\ \ \forall x\in(2;6)\Leftrightarrow m\ge -x^2+4x\ \ \forall x\in(2;6)$.

Xét $g(x)=-x^2+4x\ \ \forall x\in(2;6)$.

Ta thấy hàm số $g(x)=-x^2+4x$ nghịch biến trên khoảng $(2;6)$.

Do đó $m\ge g(x)\ \ \forall x\in(2;6)\Leftrightarrow m\ge \underset{x\in[2;6]}{Max}\, g(x)\Leftrightarrow m\ge g(2)\Leftrightarrow m\ge 4$.

Vậy $m\in\{4;5;6;7;8;9;10\}$. Vậy có 7 giá trị của m.

Câu 17: Cho hàm số $y=x^3+mx^2+m$. Điều kiện cần và đủ của m để hàm số đồng biến trên $(0;2)$ là

A. $m\le 0$. **B.** $m\le -3$. **C.** $m\ge -3$. **D.** $m\ge 0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=3x^2+2mx$

Hàm số $y=x^3+mx^2+m$ đồng biến trên $(0;2)\Leftrightarrow 3x^2+2mx\ge 0\,\forall x\in(0;2)$

$\Leftrightarrow 3x+2m\ge 0\,\forall x\in(0;2)\Leftrightarrow m\ge -\frac{3}{2}x\,\forall x\in(0;2)\Leftrightarrow m\ge \max\limits_{[0;2]}\left(-\frac{3}{2}x\right)\Leftrightarrow m\ge 0$

Vậy $m\ge 0$ thì hàm số đồng biến trên $(0;2)$.

Câu 18: Các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x+3$ nghịch biến trên một khoảng có độ dài lớn hơn 3 là

A. $m>6$. **B.** $m\in(0;6)$. **C.** $m<0$. **D.** $m<0\,;\,m>6$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=6x^2+6(m-1)x+6(m-2)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -m+2 \end{array}\right.$

Hàm số nghịch biến trên khoảng có độ dài lớn hơn 3 $\Leftrightarrow \left|(-m+2)-(-1)\right| > 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 6 \end{array}\right.$.

Câu 19: Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^3 - 6x^2 + 3mx + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ là

A. $(-\infty;-4]$. **B.** $(-\infty;-12]$. **C.** $[-4;+\infty)$. **D.** $[-3;+\infty)$.

Lời giải

YCBT $\Leftrightarrow y' \le 0, \forall x \in (-\infty;1) \Leftrightarrow -3x^2 - 12x + 3m \le 0, \forall x \in (-\infty;1) \Leftrightarrow x^2 + 4x \ge m, \forall x \in (-\infty;1)$

Xét hàm $f(x) = x^2 + 4x$ trên $(-\infty;1)$ có $\min\limits_{(-\infty;1)} f(x) = f(-2) = -4$.

Do đó, $x^2 + 4x \ge m, \forall x \in (-\infty;1) \Leftrightarrow m \le \min\limits_{(-\infty;1)} f(x) = -4 \Leftrightarrow m \le -4.$

Câu 20: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - x^2 + mx + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m < 3$. **B.** $m \le \dfrac{1}{3}$. **C.** $m \ge \dfrac{1}{3}$. **D.** $m < -3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y = x^3 - x^2 + mx + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 - 2x + m$

Hàm số $y = x^3 - x^2 + mx + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow 3x^2 - 2x + m \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = 1 - 3m \le 0 \Leftrightarrow m \ge \dfrac{1}{3}$

Vậy hàm số $y = x^3 - x^2 + mx + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $m \ge \dfrac{1}{3}$.

Câu 21: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{m}{3}x^3 - 2mx^2 + (3m+5)x + 2021$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 2. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: **:** $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = mx^2 - 4mx + (3m+5)$.

Xét hai trường hợp sau

Khi $m = 0$ thì $y' = 5 > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi $m \ne 0$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' \ge 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Nghĩa là

$mx^2 - 4mx + (3m+5) \ge 0$ v?i $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 4m^2 - m(3m+5) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \le 5.$

Vậy có 6 giá trị thỏa mãn đề bài.

Câu 22: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = (4-m^2)x^3 + (m-2)x^2 + x + m - 1$

đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 3\left(4-m^2\right)x^2 + 2(m-2)x + 1$.

Với $m = -2$ không thỏa mãn.

Với $m = 2$ thỏa mãn.

Với $m \neq \pm 2$. Ta có $\Delta' = (m-2)^2 - 3\left(4-m^2\right) = 4m^2 - 4m - 8$

Để thỏa mãn yêu cầu bài toán $\begin{cases}\Delta' \le 0 \\ 4-m^2 > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2 - m - 2 \le 0 \\ -2 < m < 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1 \le m \le 2 \\ -2 < m < 2\end{cases} \Leftrightarrow -1 \le m < 2$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = -1, m = 0$ và $m = 2$.

Câu 23: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ sao cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + (m-1)x - 1$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$?

A. 8. **B.** 7. **C.** 10. **D.** 12.

Lời giải

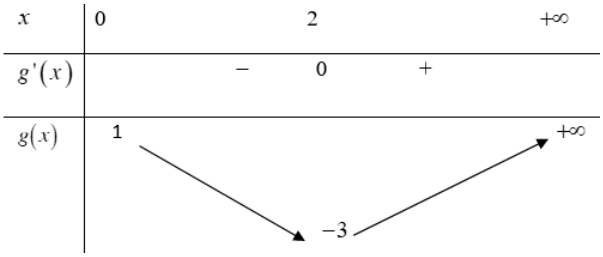
Chọn A

Ta có: $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + (m-1)x - 1 \Rightarrow y' = -x^2 + 4x + m - 1$.

Hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty) \Leftrightarrow y' \le 0, \forall x \in (0;+\infty) \Leftrightarrow -x^2 + 4x + m - 1 \le 0, \forall x \in (0;+\infty)$.

$\Leftrightarrow m \le x^2 - 4x + 1, \forall x \in (0;+\infty)$. Xét hàm số $g(x) = x^2 - 4x + 1$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x) = x^2 - 4x + 1$ trên $(0;+\infty)$.



Từ bảng biến thiên suy ra $m \le -3$ thì hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Do m nguyên và thuộc đoạn $[-10;10]$ nên có 8 giá trị nguyên của tham số m.

Câu 24: Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$, với m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

A. 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = -3x^2 - 2mx + 4m + 9$

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;+\infty) \Leftrightarrow y' \le 0, \forall x \in (-\infty;+\infty)$

$\Leftrightarrow (-m)^2 - (-3)(4m+9) \le 0 \Leftrightarrow m^2 + 12m + 27 \le 0 \Leftrightarrow -9 \le m \le -3$

$\Rightarrow m \in \{-9;-8;-7;...;-3\}$

Vậy có 7 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán

Câu 25: Số các giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-100;100]$ để hàm số $y=mx^3+mx^2+(m+1)x-3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là

A. 99. **B.** 100. **C.** 200. **D.** 199.

Lời giải

Chọn A

Trường hợp 1 : Xét $m=0$ thì $y=x-3$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên loại.

Trường hợp 2 : Xét $m\neq 0$: Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y'=3mx^2+2mx+m+1\leq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ (y' có thể bằng 0 tại hữu hạn điểm)

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ \Delta'=m^2-3m(m+1)\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ 2m^2+3m\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow m\leq -\frac{3}{2}.$$

Kết hợp với $m\in\mathbb{Z};\ m\in[-100;100]$ ta được $m\in\{-100;-99;\cdots;-2\}$.

Suy ra có 99 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 26: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left(4-m^2\right)x^3+\left(m-2\right)x^2+x+m-1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Với $m=2$ thì $y=x+1$ thỏa mãn.

Với $m=-2$ thì $y=-4x^2+x-3$ không thỏa mãn.

Với $m\neq\pm 2$: ta có $y'=3\left(4-m^2\right)x^2+2\left(m-2\right)x+1$. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases}a=3\left(4-m^2\right)>0\\ \Delta'=\left(m-2\right)^2-3\left(4-m^2\right)\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4-m^2>0\\ 4\left(m-2\right)\left(m+1\right)\leq 0\end{cases}\begin{cases}-2<m<2\\ -1\leq m\leq 2\end{cases}\Leftrightarrow -1\leq m<2$.

Mà m là số nguyên nên $m\in\{-1;0;1\}$. Vậy có bốn giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đầu bài.

Câu 27: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=-m^2x^5-mx^3-\left(m^2-m-20\right)x^2+2021$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. 7. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: : $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=-5m^2x^4-3mx^2-2\left(m^2-m-20\right)x$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y'\leq 0\ ,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x\left[-5m^2x^3-3mx-2\left(m^2-m-20\right)\right]\leq 0,\forall x\in\mathbb{R}$

Đặt $g\left(x\right)=-5m^2x^3-3mx-2\left(m^2-m-20\right)$

Yêu cầu bài toán $\Rightarrow g\left(0\right)=0\Leftrightarrow -2\left(m^2-m-20\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=5\\ m=-4\end{array}\right.$

Thử lại:

Với $m=5\Rightarrow y'=-125x^4-15x^2\leq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ nhận $m=5$.

Với $m=-4 \Rightarrow y'=-80x^4+12x^2 \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le \dfrac{-\sqrt{15}}{10} \\ x=0 \\ x \ge \dfrac{\sqrt{15}}{10} \end{array}\right. \Rightarrow$ loại $m=4$.

Vậy, $m=5$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 28: Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y=\frac{2}{3}x^3+mx-\frac{1}{3x^3}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 0. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=\frac{2}{3}x^3+mx-\frac{1}{3x^3}$ xác định với mọi $x \in (0;+\infty)$.

Ta có $y'=2x^2+m+\frac{1}{x^4}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $y' \ge 0, \forall x \in (0;+\infty)$

$\Leftrightarrow 2x^2+\frac{1}{x^4} \ge -m, \forall x \in (0;+\infty)\ (*)$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương $x^2, x^2, \frac{1}{x^4}$, ta được

$2x^2+\frac{1}{x^4}=x^2+x^2+\frac{1}{x^4} \ge 3\sqrt[3]{x^2.x^2.\frac{1}{x^4}}=3$. Dấu "=" xảy ra khi $x=1$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow \min\limits_{(0;+\infty)}\left(2x^2+\frac{1}{x^4}\right) \ge -m \Leftrightarrow 3 \ge -m \Leftrightarrow m \ge -3$.

Vậy có 3 giá trị nguyên âm của m thỏa mãn bài toán.

Câu 29: Có bao nhiêu giá trị m để hàm số $y=\frac{2}{3}m^2x^3-4mx^2+\left(8-2m^2\right)x-1$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$

A. 4. **B.** 6. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y'=2m^2x^2-8mx+\left(8-2m^2\right)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' \le 0, \forall x \in (-2;0)$.

Với $m=0 \Rightarrow y'=8 \le 0$ (loại).

Với $m \ne 0$ $y'=2m^2x^2-8mx+\left(8-2m^2\right)=2m^2\left(x^2+\frac{(2-m)+(m+2)}{m}x+\frac{(2-m)(m+2))}{m^2}\right)$

$=2m^2\left(x-\frac{2-m}{m}\right)\left(x-\frac{m+2}{m}\right) \le 0, \forall x \in (-2;0)(*)$.

$$\Leftrightarrow \frac{2-m}{m} \le x \le \frac{2+m}{m}, \forall x \in (-2;0) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2-m}{m} \le -2 \\ \frac{2+m}{m} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2.$$

Vậy có 1 giá trị nguyên của tham số $m = -2$ thõa mãn ycbt.

Câu 30: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x^3}{3} - (m+1)x^2 + (m^2+2m)x + 1$ nghịch biến trên đoạn $[2;3]$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2m$ có $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2m = 0$

Ta có: $\Delta' = (m+1)^2 - (m^2+2m) = 1$

Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1 = m$ và $x_2 = m+2$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		m		$m+2$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗		↘		↗	$+\infty$

Hàm số $y = \frac{x^3}{3} - (m+1)x^2 + (m^2+2m)x + 1$ nghịch biến trên đoạn $[2;3] \Leftrightarrow y' \le 0, \forall x \in [2;3]$

Do đó ta có $[2;3] \subset [m;m+2] \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 2 \\ 3 \le m+2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le m \le 2$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1;2\}$.

Câu 31: Các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là**.**

A. $m < 1$. **B.** $m \le 1$. **C.** $m < 2$. **D.** $m > 1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$.

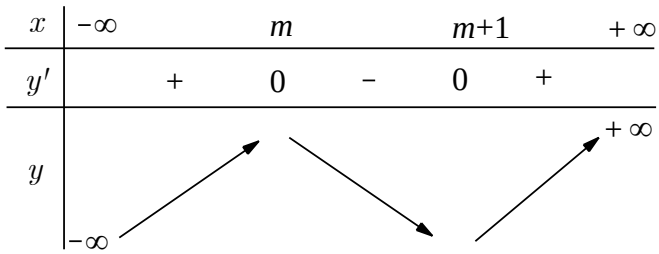
Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Hàm số có $y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1) = 0$.

$\Leftrightarrow x^2 - (2m+1)x + m(m+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+1 \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta có hàm số đồng biến trên $(-\infty;m)$ và $(m+1;+\infty)$. Suy ra hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$ khi $(2;+\infty)\subset(m+1;+\infty)\Leftrightarrow m+1\le 2\Leftrightarrow m\le 1$.

Câu 32: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x-2022$ đồng biến trên khoảng $(1;6)$

A. Vô số. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=x^2-2mx+m+2$.

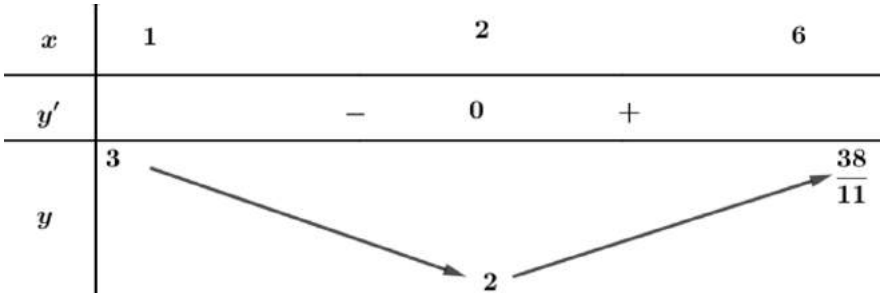
Để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x-2022$ đồng biến trên khoảng $(1;6)$

$\Leftrightarrow y'\ge 0,\forall x\in(1;6)\Leftrightarrow x^2-2mx+m+2\ge 0,\forall x\in(1;6)\Leftrightarrow m\le\frac{x^2+2}{2x-1},\forall x\in(1;6)$

Xét hàm số $g(x)=\frac{x^2+2}{2x-1},\forall x\in(1;6)\Rightarrow g'(x)=\frac{2x^2-2x-4}{(2x-1)^2}$

Ta có $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)$ trên khoảng $(1;6)$



Căn cứ vào bảng biến thiên suy ra $m\le 2\Rightarrow$.có hai giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 33: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3mx^2-9m^2x$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

A. $m\ge\frac{2}{3}$ hoặc $m\le -2$. **B.** $m>\frac{2}{3}$. **C.** $m<-2$. **D.** $-2<m<\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 6mx - 9m^2$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx - 9m^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx - 3m^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -m \\ x = 3m \end{array}\right.$.

Nếu $-m = 3m \Leftrightarrow m = 0$ thì $y' \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số không có khoảng nghịch biến.

Nếu $-m < 3m \Leftrightarrow m > 0$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-m; 3m)$.

Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2) \Leftrightarrow \begin{cases} -m \leq 0 \\ 3m \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{2}{3}$.

Kết hợp với điều kiện ta được $m \geq \frac{2}{3}$.

Nếu $-m > 3m \Leftrightarrow m < 0$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(3m; -m)$.

Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3m \leq 0 \\ -m \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -2$.

Kết hợp với điều kiện ta được $m \leq -2$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ khi $m \leq -2$ hoặc $m \geq \frac{2}{3}$.

Câu 34: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-10;10)$ để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m-2)x^2 + (2m-5)x - 1$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = x^2 + 2(m-2)x + 2m - 5$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 5 - 2m \end{array}\right.$.

Trường hợp 1: Với $-1 < 5 - 2m \Leftrightarrow m < 3$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty) \Leftrightarrow 2 \geq 5 - 2m \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{2}$.

Hay $\frac{3}{2} \leq m < 3$ thì thỏa đề.

Trường hợp 2: Với $-1 > 5 - 2m \Leftrightarrow m > 3$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$ nên đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ với mọi m.

Trường hợp 3: Với $-1 = 5 - 2m \Leftrightarrow m = 3$.

Ta có $y' \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Vậy $m \geq \frac{3}{2}$ thì thỏa yêu cầu bài toán.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in (-10;10)$ nên $m \in \{2;3;4;5;6;7;8;9\}$.

Câu 35: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = x^3 - 3(2m+1)x^2 + (12m+5)x + 2$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$. Số phần tử của S bằng

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R}$ có đạo hàm $y' = 3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5$.

Hàm số đồng biến trong khoảng $(2;+\infty)$ khi $y' \ge 0,\ \forall x \in (2;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5 \ge 0,\ \forall x \in (2;+\infty)$.

$3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5 \ge 0 \Leftrightarrow m \le \dfrac{3x^2 - 6x + 5}{12(x-1)}$.

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{3x^2 - 6x + 5}{12(x-1)}$ với $x \in (2;+\infty)$.

$g'(x) = \dfrac{3x^2 - 6x + 1}{12(x-1)^2} > 0$ với $\forall x \in (2;+\infty) \Rightarrow$ hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Do đó $m \le g(x),\ \forall x \in (2;+\infty) \Rightarrow m \le g(2) \Leftrightarrow m \le \dfrac{5}{12}$.

Vậy không có giá trị nguyên dương nào của m thỏa mãn bài toán.

Câu 36: Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = x^3 - \dfrac{1}{5x^5} + mx - 2022$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 3x^2 + m + \dfrac{1}{x^6}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $y' = 3x^2 + m + \dfrac{1}{x^6} \ge 0, \forall x \in (0;+\infty)$

$\Leftrightarrow m \ge -3x^2 - \dfrac{1}{x^6}, \forall x \in (0;+\infty)$.

Xét hàm số $g(x) = -3x^2 - \dfrac{1}{x^6},\ x \in (0;+\infty)$.

$g'(x) = -6x + \dfrac{6}{x^7} = \dfrac{-6(x^8-1)}{x^7},\ g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \quad (\text{TM}) \\ x = -1 \quad (\text{L}) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	-4	↘	$-\infty$

Dựa vào BBT ta có $m \ge -4$.

Do đó các giá trị nguyên âm của tham số m là $-4;-3;-2;-1$.

Vậy có 4 giá trị nguyên âm của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 37: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [0;10]$ để hàm số $y = x^3 - (m-3)x^2 - (m-9)x + 2m + 1$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 8. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 3x^2 - 2(m-3)x - (m-9)$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0,\ \forall x \in (0;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 2(m-3)x - (m-9) \geq 0,\ \forall x \in (0;+\infty) \Leftrightarrow (2x+1)m \leq 3x^2 + 6x + 9,\ \forall x \in (0;+\infty)$

$\Leftrightarrow m \leq \dfrac{3x^2+6x+9}{2x+1},\ \forall x \in (0;+\infty)$ (Do $2x+1>0,\ \forall x \in (0;+\infty)$).

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{3x^2+6x+9}{2x+1}$ trên $(0;+\infty)$ có $f'(x) = \dfrac{6x^2+6x-12}{(2x+1)^2}$.

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2\ (l) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	9	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \leq f(x), \forall x \in (0;+\infty) \Leftrightarrow m \leq 6$.

Do m nguyên thuộc đoạn $[0;10]$ nên $m \in \{0;1;2;3;4;5;6\}$.

Vậy có 7 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 38: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-20;20)$ để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}(m+1)x^2 + (1-m)x + 2022$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 23. **B.** 21. **C.** 20. **D.** 22.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}(m+1)x^2 + (1-m)x + 2022 \Rightarrow y' = x^2 - (m+1)x + 1 - m$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty) \Leftrightarrow x^2 - (m+1)x + 1 - m \geq 0, \forall x \in (0;+\infty)$

$\Leftrightarrow m \leq \dfrac{x^2-x+1}{x+1}, \forall x \in (0;+\infty)$ $(*)$

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{x^2-x+1}{x+1}, \forall x \in (0;+\infty) \Rightarrow g'(x) = \dfrac{x^2+2x-2}{(x+1)^2}$

Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1+\sqrt{3}$ do $x \in (0;+\infty)$.

Bảng biến thiên

x	0		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	$\searrow$	$5-2\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $(*) \Leftrightarrow m \le 5 - 2\sqrt{3}$.

Do $m \in (-20;20)$ nên $-20 < m \le 5 - 2\sqrt{3}$.

Mặt khác, m là số nguyên nên $m \in \{-19;-18;...;0;1\}$.

Vậy có 21 số nguyên m thỏa yêu cầu bài toán.

Dạng 5: Tính đơn điệu của hàm tổng, hàm hợp, hàm liên kết

Xét tính đơn điệu của các hàm số tổng, hàm số hợp và hàm liên kết:

- Xét tính đơn điệu của hàm số: $y=f(x)+g(x)$
- Xét tính đơn điệu của hàm số: $y=f(u(x))$ với u là một hàm đối với biến x

Phương pháp giải:

- **Bước 1:** Tính đạo hàm y' (nếu có)
- **Bước 2:** Giải các bất phương trình $y'>0;\ y'<0$ hoặc lập bảng xét dấu
- **Bước 3:** Đưa ra kết luận

Chú ý: Với hàm số hợp $y=f(u)$ có $y'=u'.f'(u)$ và $y=f^n(u)$ có $y'=n\left(f(u)\right)^{n-1}\left[u'.f'(u)\right]$

1 Ví dụ minh họa

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(-1;1)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(-1;3)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y=f(1-x)\Rightarrow y'=-f'(1-x)$.

Hàm số $y=f(1-x)$ nghịch biến $\Rightarrow -f'(1-x)\le 0\Leftrightarrow f'(1-x)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-x\ge 1\\ -1\le 1-x\le 0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\le 0\\ 1\le x\le 2\end{array}\right.$. Vậy hàm số $y=f(1-x)$ có nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)=(x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;20]$ để hàm số $g(x)=f\left(x^2+3x-m\right)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 16. **B.** 20. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow (x-1)(x+3)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-3\end{array}\right.$

Do $g(x)=f\left(x^2+3x-m\right)\Rightarrow g'(x)=(2x+3)f'\left(x^2+3x-m\right)$

Hàm số $g(x)=f\left(x^2+3x-m\right)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$

$\Leftrightarrow g'(x)=(2x+3)f'\left(x^2+3x-m\right)\ge 0,\forall x\in(0;2)\Leftrightarrow f'\left(x^2+3x-m\right)\ge 0,\forall x\in(0;2)$

$\Leftrightarrow \left(x^2+3x-m-1\right)\left(x^2+3x-m+3\right)\ge 0,\forall x\in(0;2)\ (1)$

Đặt $t = x^2 + 3x$ với $x \in (0;2)$. Ta có $t' = 2x + 3 > 0, \forall x \in (0;2)$. Mà $x \in (0;2) \Rightarrow t \in (0;10)$

Khi đó (1) trở thành $(t - m - 1)(t - m + 3) \ge 0, \forall t \in (0;10) \Leftrightarrow \begin{cases} 10 \le m - 3 \\ 0 \ge m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 13 \\ m \le -1 \end{cases}$.

Mà m là số nguyên thuộc đoạn $[-10;20]$ nên có 18 giá trị nguyên của m thỏa điều kiện đề bài.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) = -x^3 + 6x^2 - 32$. Khi đó hàm số $g(x) = f\left(x^2 - 3x\right)$ nghịch biến trên khoảng

A. $(-\infty;+\infty)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g(x) = f\left(x^2 - 3x\right) \Rightarrow g'(x) = (2x - 3).f'\left(x^2 - 3x\right)$.

$$f'(x) = -x^3 + 6x^2 - 32 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 6x^2 - 32 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$g(x) = f\left(x^2 - 3x\right) \Rightarrow g'(x) = (2x-3).f'\left(x^2 - 3x\right) \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ f'\left(x^2 - 3x\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 3x = -2 \\ x^2 - 3x = 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x^2 - 3x - 4 = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ x = 1,\ x = 2 \\ x = -1,\ x = 4 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		$3/2$		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn $-20 < m < 20$ và hàm số $y = f\left(x^2 + 2x + m\right)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

A. 17 **B.** 15 **C.** 16 **D.** 14

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = \left(x^2 + 2x + m\right)' f'\left(x^2 + 2x + m\right) = 2(x+1) f'\left(x^2 + 2x + m\right)$.

Hàm số $y = f\left(x^2 + 2x + m\right)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$ khi và chỉ khi $y' \ge 0, \forall x \in (0;1)$ và

$y'=0$ tại hữu hạn điểm.

Khi đó ta có $2(x+1)f'\left(x^2+2x+m\right)\ge 0,\forall x\in(0;1) \Leftrightarrow f'\left(x^2+2x+m\right)\ge 0,\forall x\in(0;1)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0\le x^2+2x+m\le 3,\forall x\in(0;1) \\ x^2+2x+m\le -2,\forall x\in(0;1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -m\le x^2+2x\le 3-m,\forall x\in(0;1) \\ x^2+2x\le -2-m,\forall x\in(0;1) \end{array}\right.$$

Xét hàm số $y=x^2+2x$, ta có bảng biến thiên

x	0		1
$f(x)$	0	$\nearrow$	3

Dựa vào bảng biến thiên ta có

Trường hợp 1: $-m\le x^2+2x\le 3-m,\forall x\in(0;1) \Leftrightarrow \begin{cases} -m\le 0 \\ 3-m\ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow 0\le m\le 0 \Leftrightarrow m=0$.

Trường hợp 2: $x^2+2x\le -2-m,\forall x\in(0;1) \Leftrightarrow -2-m\ge 3 \Leftrightarrow m\le -5$.

Kết hợp với $-20<m<20$ suy ra $-20<m\le -5 \Leftrightarrow m\in\{-19;-18;-17;.....;-5\}$

Vậy có 16 số nguyên $-20<m<20$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, biết rằng $f'(x+1)=x^2-4x+3$. Hàm số $y=f\left(x^2+2x+3\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;+\infty)$. **B.** $\left(-1-\sqrt{2};0\right)$. **C.** $\left(-1+\sqrt{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(-1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Ta có $f'(x+1)=x^2-4x+3 \Leftrightarrow f'(x+1)=(x+1)^2-6(x+1)+8$.

Đặt $x+1=a$ ta được $f'(a)=a^2-6a+8$ có $f'(a)=a^2-6a+8\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\le 2 \\ a\ge 4 \end{array}\right.$.

Ta có $y'=\left(f\left(x^2+2x+3\right)\right)'=(2x+2)f'\left(x^2+2x+3\right)$.

Hàm số đồng biến khi $(2x+2)f'\left(x^2+2x+3\right)\ge 0$

Trường hợp 1: $\begin{cases} 2x+2\ge 0 \\ f'\left(x^2+2x+3\right)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+2x+3\le 2 \\ x^2+2x+3\ge 4 \end{array}\right. \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \left[\begin{array}{l} x\le -1-\sqrt{2} \\ x\ge -1+\sqrt{2} \end{array}\right. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x\ge -1+\sqrt{2}$$

Trường hợp 2: $\begin{cases} 2x+2\le 0 \\ f'\left(x^2+2x+3\right)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -1 \\ 2\le x^2+2x+3\le 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le -1 \\ -1-\sqrt{2} \le x \le -1+\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow -1-\sqrt{2} \le x \le -1$

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-1+\sqrt{2};+\infty\right)$ và $\left(-1-\sqrt{2};-1\right)$.

Cách 2:

Đặt $x+1=a$ ta được $f'(a)=a^2-6a+8$ có $f'(a)=a^2-6a+8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=4 \end{array}\right.$.

$y'=(2x+2)\,f'\left(x^2+2x+3\right);\ y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x^2+2x+3=2 \\ x^2+2x+3=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ (x+1)^2=0 \\ x=-1-\sqrt{2} \\ x=-1+\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu y'

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		-1		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-1+\sqrt{2};+\infty\right)$ và $\left(-1-\sqrt{2};-1\right)$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=-x^3+4x^2+x-4$. Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m \in \mathbb{R} \setminus (a;b)$ thì hàm số $h(x)=f\left(\dfrac{3}{x+1}-m^2-1\right)$ nghịch biến trên $(2;+\infty)$. Tính $S=a+b.$

A. $S=1$. **B.** $S=\dfrac{3}{2}$. **C.** $S=-1$. **D.** $S=0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow -x^3+4x^2+x-4 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -1 \\ 1 \le x \le 4 \end{array}\right.$

Ta có: $h'(x)=\dfrac{-3}{(x+1)^2}.f'\left(\dfrac{3}{x+1}-m^2-1\right)$

Hàm số $h(x)$ nghịch biến trên $(2;+\infty) \Leftrightarrow h'(x) \le 0, \forall x \in (2;+\infty)$

$\Leftrightarrow \dfrac{-3}{(x+1)^2}.f'\left(\dfrac{3}{x+1}-m^2-1\right) \le 0, \forall x \in (2;+\infty) \Leftrightarrow f'\left(\dfrac{3}{x+1}-m^2-1\right) \ge 0, \forall x \in (2;+\infty)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{3}{x+1}-m^2-1 \le -1 \\ 1 \le \dfrac{3}{x+1}-m^2-1 \le 4 \end{array}\right., \forall x \in (2;+\infty) \qquad (*)$

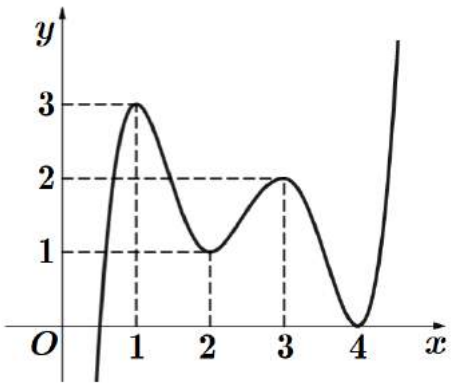
Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)=\dfrac{3}{x+1}-m^2-1$ trên $(2;+\infty)$:

x	2	$+\infty$
$g(x)$	$-m^2$	$\searrow$ $-m^2-1$

Khi đó $(*)\Leftrightarrow\left[\begin{cases}-m^2-1\ge 1\\ -m^2\le 4\\ -m^2\le -1\end{cases}\Leftrightarrow m^2\ge 1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 1\\ m\le -1\end{array}\right.\Leftrightarrow m\in\mathbb{R}\setminus(-1;1)\right.$

Suy ra $a=-1;\ b=1$. Vậy $S=-1+1=0$.

Câu 7: Cho hàm số đa thức bậc năm $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $h(x)=f^3(x)-3f^2(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2;3)$. **B.** $(3;4)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $h'(x)=3f'(x)\left[f^2(x)-2f(x)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\ f(x)=0\\ f(x)=2\end{array}\right.$.

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2\\ x=3\\ x=4\end{array}\right.$, $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a(0<a<1)\\ x=4\end{array}\right.$; $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=b(a<b<1)\\ x=c(1<c<2)\\ x=3\\ x=d\ \ (d>4)\end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu của $h'(x)$:

x	$-\infty$		a		b		1		c		2		3		4		d		$+\infty$
$h'(x)$		$-$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu, ta thấy được $h'(x)<0,\forall x\in(2;3)$ nên $h(x)$ nghịch biến trên $(2;3)$.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $g(x)=f'\left(x^3+2\right)$ có bảng xét dấu như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		3		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Có bao nhiêu số nguyên $m\in[-2023;\ 2023]$ để hàm số $y=f(x-m)$ đồng biến trên $(-\infty;\ 0)$?

A. 2017. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $g(x)=0 \Leftrightarrow f'\left(x^3+2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \\ x=2 \\ x=3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f'(-6)=0 \\ f'(2)=0 \\ f'(10)=0 \\ f'(29)=0 \end{array}\right.$

Suy ra $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-6 \\ x=2 \\ x=10 \\ x=29 \end{array}\right.$.

Xét hàm số $h(x)=f(x-m) \Rightarrow h'(x)=f'(x-m)$

Ta có $h'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x-m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-m=-6 \\ x-m=2 \\ x-m=10 \\ x-m=29 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m-6 \\ x=m+2 \\ x=m+10 \\ x=m+29 \end{array}\right.$

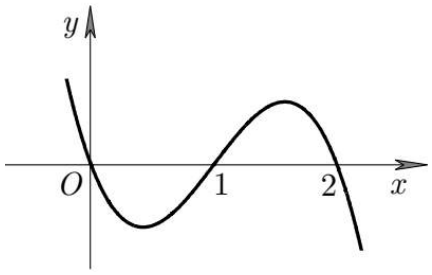
Ta có bảng xét dấu theo khoảng như sau (với $h'(m)=f'(0)=g\left(-\sqrt[3]{2}\right)<0$)

x	$-\infty$	m-6		m+2		m+10		m+29	$+\infty$
$h'(x)=f(x-m)$	+	0	–	0	+	0	–	0	+

Để hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$ thì $m-6 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 6$

Suy ra $m \in \{6;7;8;....;2023\}$, vậy có 2018 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 9: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Biết hàm số $y=f'(1+x)$ có đồ thị như trong hình bên.



Có bao nhiêu số nguyên dương m sao cho hàm số $g(x)=f\left(-x^2+2x-2022+m\right)$ đồng biến trên $(0;1)$?

A. 2023. **B.** 2021. **C.** 2022. **D.** 2024.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(1+x)$ ta có $f'(1+x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Đặt $t=1+x \Rightarrow f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=2. \\ t=3 \end{array}\right.$

Vậy $f'(t)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\le 1 \\ 2\le t\le 3 \end{array}\right., f'(t)\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1\le t\le 2 \\ t\ge 3 \end{array}\right.$.

$g(x)=f\left(-x^2+2x-2022+m\right)\Rightarrow g'(x)=(2-2x)\,f'\left(-x^2+2x-2022+m\right)$.

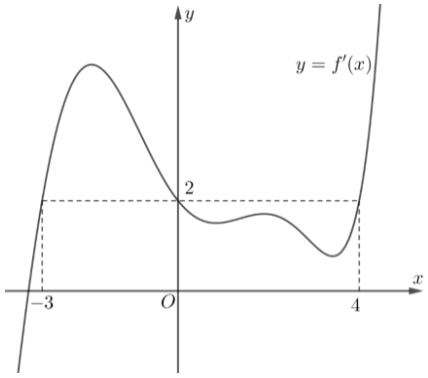
Hàm số $g(x)=f\left(-x^2+2x-2022+m\right)$ đồng biến trên $(0;1)$

$\Leftrightarrow (2-2x)\,f'\left(-x^2+2x-2022+m\right)\ge 0,\forall x\in(0;1)\Leftrightarrow f'\left(-x^2+2x-2022+m\right)\ge 0,\forall x\in(0;1)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x^2+2x-2022+m\le 1 \\ \begin{cases} -x^2+2x-2022+m\ge 2 \\ -x^2+2x-2022+m\le 3 \end{cases} \end{array}\right. \forall x\in(0;1)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le x^2-2x+2023 \\ \begin{cases} m\ge x^2-2x+2024 \\ m\le x^2-2x+2025 \end{cases} \end{array}\right. \forall x\in(0;1)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le 2022 \\ 2024\le m\le 2024 \end{array}\right.$. Vậy có 2023 số.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới đây



Hàm số $g(x)=f\left(x^2-3x\right)-2x^2+6x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(0;4)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x)=f'\left(x^2-3x\right)(2x-3)-4x+6=(2x-3)\left[f'\left(x^2-3x\right)-2\right]$.

Xét $f'\left(x^2-3x\right)-2>0\Leftrightarrow f'\left(x^2-3x\right)>2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x>4 \\ -3<x^2-3x<0 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>4 \\ x<-1 \\ 0<x<3 \end{array}\right.$.

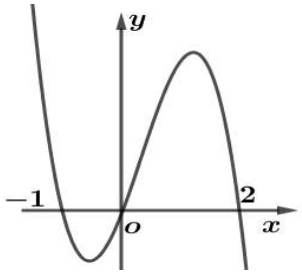
Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{3}{2}$		3		4		$+\infty$
$2x-3$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$f'\left(x^2-3x\right)-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$, $\left(0;\frac{3}{2}\right)$, $(3;4)$.

2 Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hàm số đa thức bậc bậc bốn $f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(3-2x)$ được cho như hình bên. Hàm số $y=f\left(x^2+1\right)$ nghịch biến trên khoảng nào?



A. $(-\infty;0)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn C

Do $f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn, nên dựa vào đồ thị hàm số trên ta có:

$f'(3-2x)=a(x+1)x(x-2),(a<0)$.

Đặt $3-2x=t\Rightarrow x=\dfrac{3-t}{2}\Rightarrow f'(t)=a\left(\dfrac{3-t}{2}+1\right)\left(\dfrac{3-t}{2}\right)\left(\dfrac{3-t}{2}-2\right)=\dfrac{a}{8}(5-t)(3-t)(-1-t)$.

Suy ra $y'=2x.f'\left(x^2+1\right)=\dfrac{a}{8}2x\left(4-x^2\right)\left(2-x^2\right)\left(-2-x^2\right)$, $f'\left(x^2+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm2\\x=\pm\sqrt{2}\\x=0\end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
$f'\left(x^2+1\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như ở bảng dưới đây.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hỏi hàm số $g(x)=3-2f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$. **B.** $\left(\dfrac{1}{2};2\right)$. **C.** $\left(-2;-\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g'(x)=-2f'\left(x+\dfrac{1}{x}\right).\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$g'(x)>0\Leftrightarrow-2f'\left(x+\dfrac{1}{x}\right).\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)>0\Leftrightarrow f'\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right).\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)<0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-1<0\\ f'\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)>0\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-1>0\\ f'\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2<1\\ \dfrac{x^2+1}{x}<-2\vee 0<\dfrac{x^2+1}{x}<2\end{cases}\\ \begin{cases}x^2>1\\ -2<\dfrac{x^2+1}{x}<0\vee \dfrac{x^2+1}{x}>2\end{cases}\end{array}\right.$$

Trường hợp 1: $\begin{cases}x^2<1\\ \dfrac{x^2+1}{x}<-2\vee 0<\dfrac{x^2+1}{x}<2\end{cases}$ (1)

$$(1)\Leftrightarrow \frac{x^2+2x+1}{x}<0\vee\begin{cases}\dfrac{x^2-2x+1}{x}<0\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{x}<0\vee\begin{cases}\dfrac{(x-1)^2}{x}<0\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1\neq 0\\ x<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -1\\ x<0\end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện $x^2<1$ ta được: $-1<x<0$.

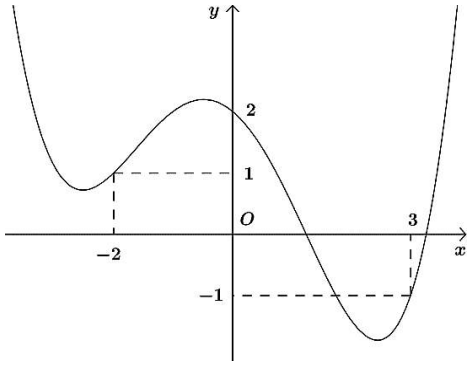
Trường hợp 2: $\begin{cases}x^2>1\\ -2<\dfrac{x^2+1}{x}<0\vee\dfrac{x^2+1}{x}>2\end{cases}$ (2)

$$(2)\Leftrightarrow\begin{cases}0<\dfrac{x^2+2x+1}{x}\vee\dfrac{x^2-2x+1}{x}>0\\ x<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x\neq 1\end{cases}.$$

Kết hợp điều kiện $x^2>1$, ta được: $x>1$.

Vậy các khoảng đồng biến là: $(-\infty;-1)$, $(1;+\infty)$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x)=f(x+1)+\dfrac{x^3}{3}-3x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-1;2)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;4)$. **D.** $(1;5)$.

Lời giải

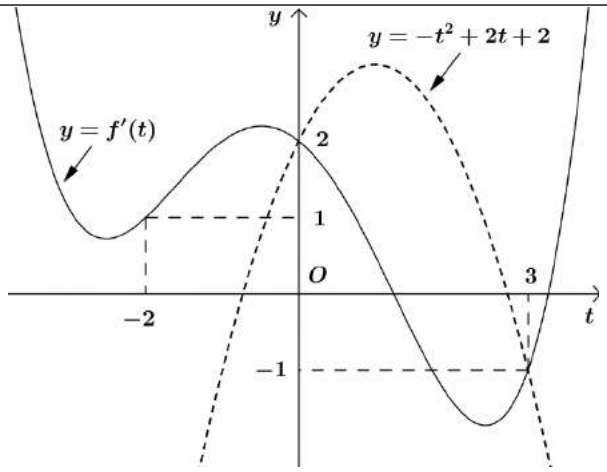
Chọn A

Ta có $g'(x)=f'(x+1)+x^2-3=f'(x+1)+(x+1)^2-2(x+1)-2$.

Khi đó $g'(x)\le 0\Leftrightarrow f'(x+1)\le -(x+1)^2+2(x+1)+2$ (1)

Đặt $t=x+1$. Bất phương trình (1) trở thành $f'(t)\le -t^2+2t+2$ (2)

Xét tương giao của đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và $y=-t^2+2t+2$



ta có nghiệm của bất phương trình là $0\le t\le 3 \Leftrightarrow 0\le x+1\le 3 \Leftrightarrow -1\le x\le 2$.

Suy ra hàm số $g(x)=f(x+1)+\frac{x^3}{3}-3x$ nghịch biến trên $(-1;2)$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^3(x-1)^2(x+2)$. Khoảng nghịch biến của hàm số là

A. $(-2;0)$. **B.** $(-\infty;-2);(0;1)$. **C.** $(-\infty;-2);(0;+\infty)$. **D.** $(-2;0);(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Cho $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=0\\x=1\end{array}\right.$. Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(x-2)(x+4)^2$. Hàm số $y=f(x+1)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-5;1)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow(x-1)(x-2)(x+4)^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\\x=-4\end{array}\right.$ (trong 3 nghiệm trên thì nghiệm $x=-4$ là nghiệm kép)

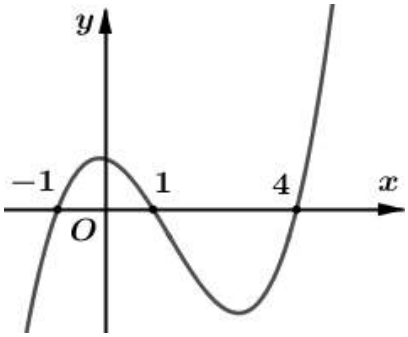
$y'=f'(x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=1\\x+1=2\\x+1=-4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-5\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-5		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗		↗ 20		↘ 13		↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục, có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên.



Hàm số $y=g(x)=f(2-x)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(1;3)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-2;1)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị ta có bảng xét dấu của đạo hàm là:

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

Ta có: $g'(x)=-f'(2-x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-x=-1\\2-x=1\\2-x=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=1\\x=-2\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

Vậy hàm số $y=g(x)=f(2-x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;1)$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có biểu thức đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x^2-2x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hỏi hàm số $g(x)=f(x^2-2x+2)$ đồng biến trên các khoảng nào trong các khoảng sau

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x)=(2x-2)f'(x^2-2x+2)=(2x-2)(x^2-2x+2-1)^2(x^2-2x+2)(x^2-2x+2-2)$

$=(2x-2)(x^2-2x+1)^2(x^2-2x+2)x(x-2)$

Phương trình có các nghiệm bội lẻ là: $x\in\{0;1;2\}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘		↗		↘		↗	$+\infty$

Vậy hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Hỏi hàm số $y=f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};2\right)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y=f(3-2x)$.

Ta có $y'=-2f'(3-2x)<0 \Leftrightarrow f'(3-2x)>0 \Leftrightarrow -1<3-2x<2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}<x<2$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2};2\right)$.

Câu 9: Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)(x^2-1)$. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng:

A. $(1;2)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;-1)$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y=f(x)$ có $f'(x)=x(x-1)(x^2-1)=x(x-1)^2(x+1)$.

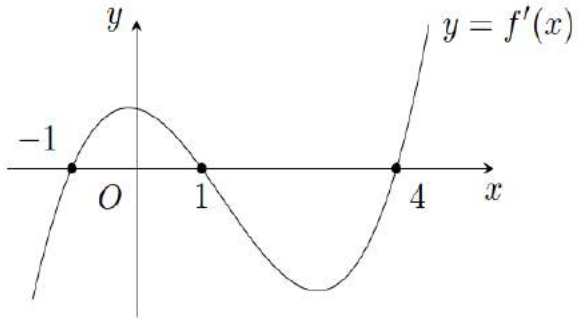
$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x(x-1)^2(x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{array}\right. .$$

Suy ra bảng xét dấu của hàm $f'(x)$:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu của hàm $f'(x)$ suy ra hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Hàm số $y=f\left(2-x\right)$ đồng biến trên khoảng

A. $\left(2;+\infty\right)$. **B.** $\left(-2;1\right)$. **C.** $\left(1;3\right)$. **D.** $\left(-\infty;-2\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\left[f\left(2-x\right)\right]'=-f'\left(2-x\right)$.

Hàm số $y=f\left(2-x\right)$ đồng biến $\Leftrightarrow -f'\left(2-x\right)\ge 0\Leftrightarrow f'\left(2-x\right)\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2-x\le -1\\1\le 2-x\le 4\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge 3\\-2\le x\le 1\end{array}\right.$

Câu 11: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như hình sau

Hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2+3x+1\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

A. $\left(0;1\right)$. **B.** $\left(-4;-2\right)$. **C.** $\left(-1;0\right)$. **D.** $\left(-2;-1\right)$.

Lời giải

Chọn A

$g'\left(x\right)=\left(2x+3\right)f'\left(x^2+3x+1\right)$.

$$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow \left(2x+3\right)f'\left(x^2+3x+1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{3}{2}\\x^2+3x+1=-1\\x^2+3x+1=1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{3}{2}\\x=-1\\x=-2\\x=0\\x=-3\end{array}\right..$$

Bảng xét dấu $g'\left(x\right)=\left(2x+3\right)f'\left(x^2+3x+1\right)$

x	$-\infty$		-3		-2		$-\frac{3}{2}$		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2+3x+1\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;1\right)$.

Câu 12: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f\left(2x+1\right)-4x^3+9x^2-6x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(1;3\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=2f'\left(2x+1\right)-12x^2+18x-6$

Hàm số đồng biến khi $y'\ge 0\Leftrightarrow 2f\left(2x+1\right)-12x^2+18x-6\ge 0$

$$\Rightarrow\begin{cases}f'\left(2x+1\right)\ge 0\\-12x^2+18x-6\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}1\le 2x+1\le 3\\4\le 2x+1\end{array}\right.\\-12x^2+18x-6\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}0\le x\le 1\\\frac{3}{2}\le x\end{array}\right.\\\frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le x\le 1.$$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Câu 13: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-3;2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $\left[-10;10\right]$ để hàm số $y=f\left(x^2+2x-m\right)$ đồng biến trên $\left(-1;1\right)$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f'	$+\infty$	↘		↗	$+\infty$

A. 12. **B.** 14. **C.** 11. **D.** 13.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên kết hợp với đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-3;2$ ta có:

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0

Ta có $y'=\left(2x+2\right)f'\left(x^2+2x-m\right)$.

Để hàm số đồng biến trên $\left(-1;1\right)$ thì: $\left(2x+2\right)f'\left(x^2+2x-m\right)\ge 0,\forall x\in\left(-1;1\right)$

$\Leftrightarrow f'\left(x^2+2x-m\right)\ge 0,\forall x\in\left(-1;1\right);$

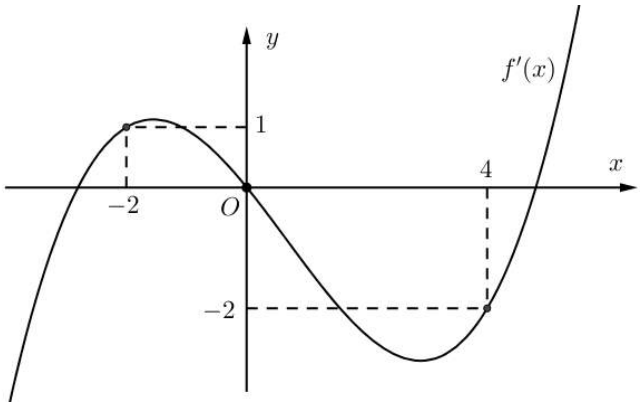
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+2x-m\ge 2,\forall x\in\left(-1;1\right)\\x^2+2x-m\le -3,\forall x\in\left(-1;1\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m+2\le x^2+2x,\forall x\in\left(-1;1\right)\\m-3\ge x^2+2x,\forall x\in\left(-1;1\right)\end{array}\right.$$

Ta có $g\left(x\right)=x^2+2x,x\in\left(-1;1\right);g'\left(x\right)=2x+2=0\Leftrightarrow x=-1$, suy ra:

x	-1		1
$g'(x)$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	3
	-1		

Suy ra $\left[\begin{array}{l} m+2\le -1 \\ m-3\ge 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le -3 \\ m\ge 6 \end{array}\right. \xrightarrow{m\in[-10;10]} \left[\begin{array}{l} m\in\{-10;-9;...;-3\} \\ m\in\{6;7;8;9;10\} \end{array}\right.$.

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=4f(x-m)+x^2-2mx+2021$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$?

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

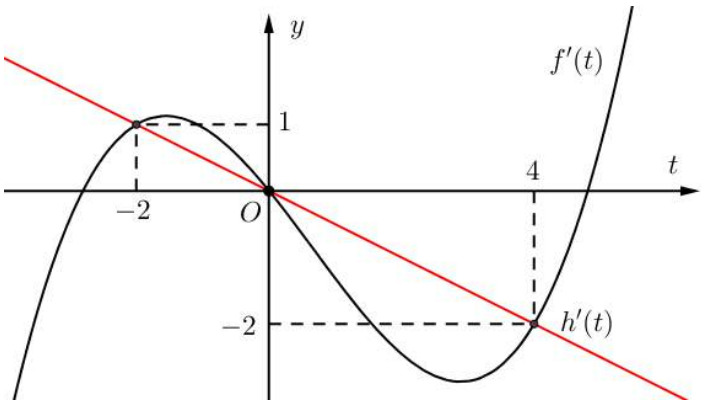
Để $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2) \Leftrightarrow g'(x)\ge 0 \ \forall x\in(1;2)$

$\Leftrightarrow g'(x)=4.f'(x-m)+2x-2m\ge 0 \quad \forall x\in(1;2) \Leftrightarrow f'(x-m)\ge -\dfrac{x-m}{2} \quad \forall x\in(1;2) \ (*)$

Đặt $t=x-m$. Với $x\in(1;2)\Rightarrow t\in(1-m;2-m)$.

Ta có: $(*)\Leftrightarrow f'(t)\ge -\dfrac{t}{2} \quad \forall t\in(1-m;2-m)$

Vẽ đồ thị hàm số $f'(t)$ và $h(t)=-\dfrac{t}{2}$ trên cùng hệ trục ta được:



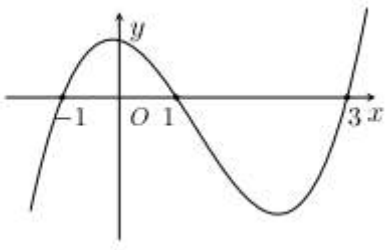
Từ đồ thị ta có: $f'(t)\ge h(t)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2\le t\le 0 \\ t\ge 4 \end{array}\right.$

Nên để $f'(t) \ge -\frac{t}{2} \quad \forall t \in (1-m;2-m) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(1-m;2-m) \subset [-2;0] \\ (1-m;2-m) \subset [4;+\infty)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2 \le 1-m < 2-m \le 0 \\ 1-m \ge 4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2 \le m \le 3 \\ m \le -3\end{array}\right.$

Mà m nguyên dương $\Rightarrow m \in \{2;3\}$. Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên $m \in [-10;10]$ để hàm số $g(x) = f(x-m)$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?



A. 8. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = f'(x-m)$. Vì $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $g'(x) = f'(x-m)$ cũng liên tục trên $\mathbb{R}$. Căn cứ vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy

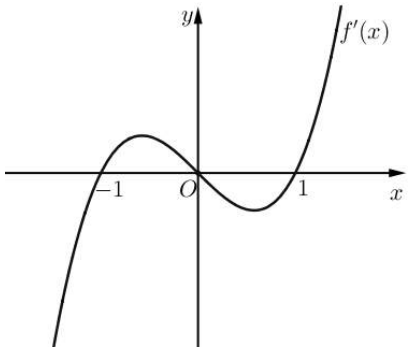
$g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x-m) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-m < -1 \\ 1 < x-m < 3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x < m-1 \\ 1+m < x < 3+m\end{array}\right.$.

Hàm số $g(x) = f(x-m)$ nghịch biến trên khoảng $(1;3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3 \le m-1 \\ \left\{\begin{array}{l}3+m \ge 3 \\ 1+m \le 1\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m \ge 4 \\ m = 0\end{array}\right.$.

Mà m là số nguyên thuộc đoạn $[-10;10]$ nên ta có $S = \{0;4;5;6;..;10\}$.

Vậy S có 7 phần tử.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $f'(x) = x^3 + bx^2 + cx \ (b,c \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Hàm số $g(x) = f(f'(x))$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)=x^3+bx^2+cx$ ta suy ra:

$$\begin{cases} b=0 \\ c=-1 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=x^3-x \Rightarrow f''(x)=3x^2-1$$

Ta có: $g(x)=f\left(f'(x)\right) \Rightarrow g'(x)=f'\left(f'(x)\right).f''(x)=f'\left(x^3-x\right)\left(3x^2-1\right)$

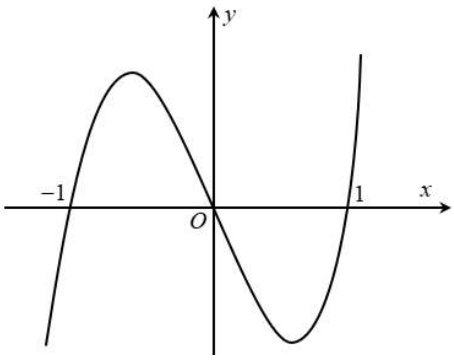
$$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'\left(x^3-x\right)\left(3x^2-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3-x=0 \\ x^3-x=1 \\ x^3-x=-1 \\ 3x^2-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=0 \\ x=a \ \ (1<a<2) \\ x=-a \\ x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-a$		-1		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1		a		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow g(x)$ đồng biến trên $(a;+\infty)$ nên cũng đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+a$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y=g(x)=f\left(1-2x\right)f\left(2-x\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$, theo đồ thị thì đa thức $f'(x)$ có ba nghiệm phân biệt là $-1,0,1$ nên $f'(x)=4ax(x+1)(x-1)=4ax^3-4ax \Rightarrow f(x)=ax^4-2ax^2+a=a\left(x^2-1\right)^2$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta có $a>0$ nên $f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$.

$$g'(x)=\left[f\left(1-2x\right)\right]'f\left(2-x\right)+f\left(1-2x\right)\left[f\left(2-x\right)\right]'=-2f'\left(1-2x\right)f\left(2-x\right)-f\left(1-2x\right)f'\left(2-x\right)$$

Xét $x\in\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} 1-2x\in(-2;0) \\ 2-x\in\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right) \end{cases}$, dấu của $f'(x)$ không cố định trên $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ nên ta không kết

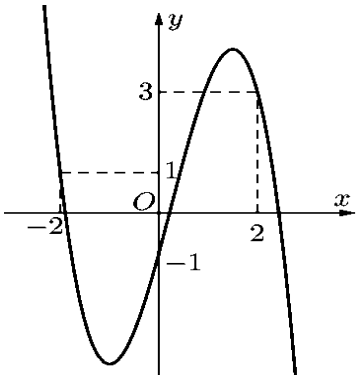
luận được tính đơn điệu của hàm số $g(x)$ trên $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Xét $x\in(-\infty;0)\Rightarrow\begin{cases}1-2x\in(1;+\infty)\\2-x\in(2;+\infty)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'(1-2x)>0\\f'(2-x)>0\end{cases}\Rightarrow g'(x)<0$. Do đó, hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;0)$.

$x\in(0;2)\Rightarrow\begin{cases}1-2x\in(-3;1)\\2-x\in(0;2)\end{cases}$, dấu của $f'(x)$ không cố định trên $(-3;1)$ và $(0;2)$ nên ta không kết luận được tính đơn điệu của hàm số $g(x)$ trên $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Xét $x\in(3;+\infty)\Rightarrow\begin{cases}1-2x\in(-\infty;-5)\\2-x\in(-\infty;-1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'(1-2x)<0\\f'(2-x)<0\end{cases}\Rightarrow g'(x)>0$. Do đó, hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(3;+\infty)$.

Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ được cho bởi hình vẽ bên dưới đây



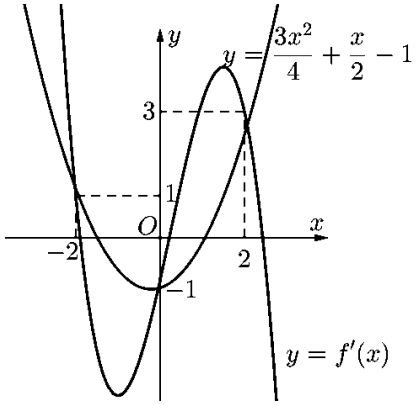
Đặt hàm số $g(x)=f(x)-\frac{x^3}{4}-\frac{x^2}{4}+x$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $g(x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$ là

A. $(-\infty;-5]$. **B.** $[-1;+\infty)$. **C.** $(-5;-1)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Xét $g(x)=f(x)-\frac{x^3}{4}-\frac{x^2}{4}+x\Rightarrow g'(x)=f'(x)-\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}x+1$.



$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Từ đó ta biểu diễn $g'(x)=ax(x+2)(x-2)$ trong đó $a<0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗		↘		↗		↘	

Xét hàm số $y=g(x+m)$ có $y'=g'(x+m)=a(x+m)(x+m+2)(x+m-2)$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-m-2$		$-m$		$-m+2$		$+\infty$
$g'(x+m)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x+m)$		↗		↘		↗		↘	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy để hàm số nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$ khi và chỉ khi $-m+2\le 3 \Leftrightarrow m\ge -1$.

Câu 19: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=-x^2-2x+3$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Số giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để hàm số $g(x)=f\left(\sin^2 x+3\sin x-m\right)+m^2+2$ đồng biến trên $\left(\frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right)$ là

A. 5. **B.** 6. **C.** 14. **D.** 15.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $g(x)=f\left(\sin^2 x+3\sin x-m\right)+m^2+2$

$g'(x)=(2\sin x.\cos x+3\cos x)\,f'\left(\sin^2 x+3\sin x-m\right)=\cos x(2\sin x+3)\,f'\left(\sin^2 x+3\sin x-m\right)$

$g(x)$ đồng biến trên $\left(\frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right) \Leftrightarrow g'(x)\ge 0,\forall x\in\left(\frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x+3)\,f'\left(\sin^2 x+3\sin x-m\right)\ge 0,\forall x\in\left(\frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow f'\left(\sin^2 x+3\sin x-m\right)\le 0,\forall x\in\left(\frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right)$.

Theo giả thiết: $f'(x)=-x^2-2x+3\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 1 \\ x\le -3 \end{array}\right.$, ta có:

$$f'\left(\sin^2 x+3\sin x-m\right)\le 0,\forall x\in\left(\frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin^2 x+3\sin x-m\ge 1,\forall x\in\left(\frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right)\\ \sin^2 x+3\sin x-m\le -3,\forall x\in\left(\frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin^2 x+3\sin x\ge m+1,\forall x\in\left(\frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right)\\ \sin^2 x+3\sin x\le m-3,\forall x\in\left(\frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right)\end{array}\right.\quad(1)$$

Xét hàm số $u(x)=\sin^2 x+3\sin x$ trên $\left[\frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right]$, ta có $\max\limits_{\left[\frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right]}u(x)=\frac{3+6\sqrt{3}}{4}$,

$\min\limits_{\left[\frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right]}u(x)=\frac{7}{4}$, do đó $(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m-3\ge\frac{3+6\sqrt{3}}{4}\\ m+1\le\frac{7}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge\frac{15+6\sqrt{3}}{4}\\ m\le\frac{3}{4}\end{array}\right.$, kết hợp với $m\in\mathbb{Z}$ và thuộc $[-10;10]$ ta được $m\in\{-10,-9,...,0,7,...,10\}$. Vậy có 15 số nguyên m thỏa mãn bài toán.

Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	0	↗	1	↘	0	↗	

Hàm số $y=f\left(\sin^2 2x-4\sin 2x+1\right)$ trên $[0;2021\pi]$ có ít nhất bao nhiêu khoảng đồng biến?

A. 2042. **B.** 8084. **C.** 2021. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=\sin 2x$ có chu kỳ $T=\pi$, nên ta xét hàm số $y=f\left(\sin^2 2x-4\sin 2x+1\right)$ trên $[0;\pi]$.

Ta có $y'=f'\left(\sin^2 2x-4\sin 2x+1\right)4\cos 2x\left(\sin 2x-2\right)$.

Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow f'\left(\sin^2 2x-4\sin 2x+1\right).2\cos 2x\left(\sin 2x-2\right)>0$

$\Leftrightarrow\cos 2x.f'\left(\sin^2 2x-4\sin 2x+1\right)<0\ (*)$.

Vì $-1\le\sin 2x\le 1\Rightarrow -2\le\sin^2 2x-4\sin 2x+1\le 6$.

Trường hợp 1: $\cos 2x<0\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}<2x<\frac{3\pi}{2}$.

$$(*)\Rightarrow f'\left(\sin^2 2x-4\sin 2x+1\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<\sin^2 2x-4\sin 2x+1<0\\ 1<\sin^2 2x-4\sin 2x+1<6\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-\sqrt{3}<\sin 2x<2-\sqrt{2} \\ -1<\sin 2x<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}\arcsin\left(2-\sqrt{2}\right)<x<\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}\arcsin\left(2-\sqrt{3}\right) \\ \dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{4} \end{array}\right. .$$

Trường hợp 2: $\cos 2x>0 \Leftrightarrow 2x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right)$.

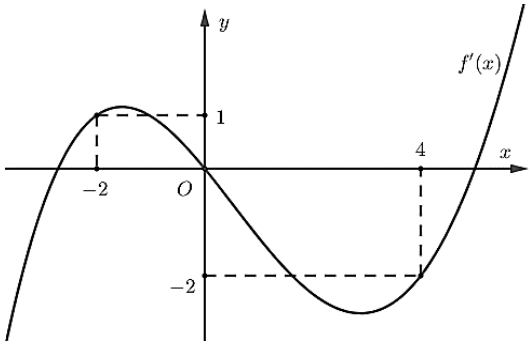
$$(*)\Rightarrow f'\left(\sin^2 2x-4\sin 2x+1\right)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2<\sin^2 2x-4\sin 2x+1<-1 \\ 0<\sin^2 2x-4\sin 2x+1<1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-\sqrt{2}<\sin 2x<1 \\ 0<\sin 2x<2-\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}\arcsin\left(2-\sqrt{2}\right)<x<\dfrac{\pi}{4} \\ 0<x<\dfrac{1}{2}\arcsin\left(2-\sqrt{3}\right) \end{array}\right. .$$

Suy ra hàm số $y=f\left(\sin^2 2x-4\sin 2x+1\right)$ trên $[0;\pi]$ có 4 khoảng đồng biến.

Vậy hàm số $y=f\left(\sin^2 2x-4\sin 2x+1\right)$ trên $[0;2021\pi]$ có ít nhất 8084 khoảng đồng biến.

Câu 21: Cho hàm số đa thức $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau



Hàm số $g(x)=4f\left(x^2-1\right)+x^4-2x^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-2;0)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

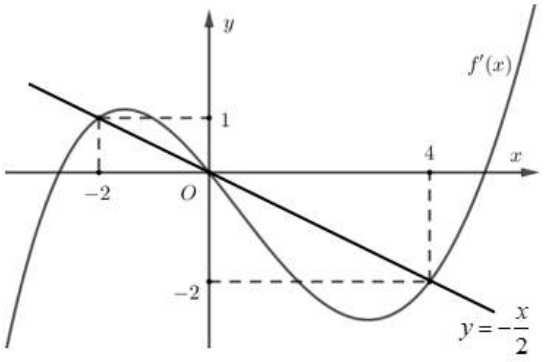
Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$g'(x)=8x.f'\left(x^2-1\right)+4x^3-4x=4x\left[2f'\left(x^2-1\right)+x^2-1\right];\ g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'\left(x^2-1\right)=-\dfrac{x^2-1}{2} \end{array}\right. .$$

Vẽ đường thẳng $y=-\dfrac{x}{2}$ đi qua các điểm $(-2;1)$, $(0;0)$ và $(4;-2)$. Nghiệm của phương trình $f'(x)=-\dfrac{x}{2}$ là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ với đường thẳng $y=-\dfrac{x}{2}$.



Quan sát hình vẽ trên, ta thấy $f'(x)=-\frac{x}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=0\\x=4\end{array}\right.$ và $f'(x)>-\frac{x}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<x<0\\x>4\end{array}\right.$.

Khi đó $f'\left(x^2-1\right)=-\frac{x^2-1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-1=-2\\x^2-1=0\\x^2-1=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\x=\pm\sqrt{5}\end{array}\right.$.

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có các nghiệm đơn là: $x=0$, $x=\pm1$, $x=\pm\sqrt{5}$ nên $g'(x)$ đổi dấu qua các nghiệm này.

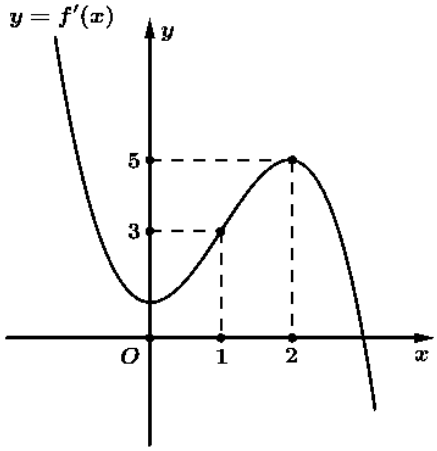
Có $g'(3)=24\left[f'(8)+4\right]>0$ do $f'(x)+\frac{x}{2}>0,\forall x\in(-2;0)\cup(4;+\infty)$.

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		-1		0		1		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\sqrt{5}\right)$, $(-1;0)$ và $\left(1;\sqrt{5}\right)$.

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn, có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y=f(5-2x)+4x^2-10x$ đồng biến trên các khoảng nào sau đây?



A. $(3;4)$. **B.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};2\right)$. **D.** $\left(0;\frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

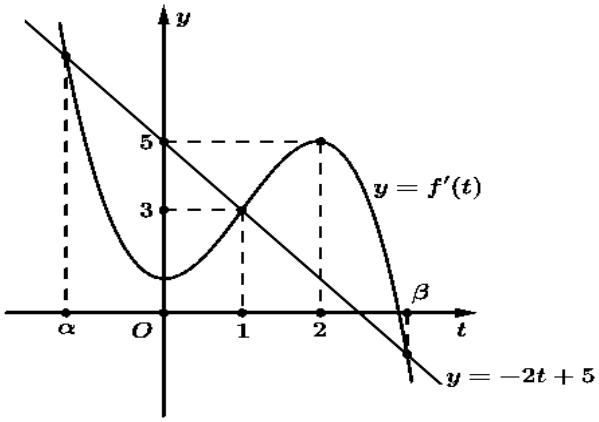
Chọn B

Đặt $g(x)=f\left(5-2x\right)+4x^2-10x\Rightarrow g'(x)=-2f'\left(5-2x\right)+8x-10$.

Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow -2f'\left(5-2x\right)+8x-10=0\Leftrightarrow f'\left(5-2x\right)=4x-5$.

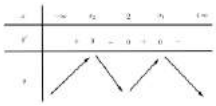
Đặt $t=5-2x$ ta có phương trình $f'\left(t\right)=-2t+5$

Vẽ đồ thị hai hàm số $y=f'\left(t\right)$ và $y=-2t+5$ trên cùng một hệ trục tọa độ.



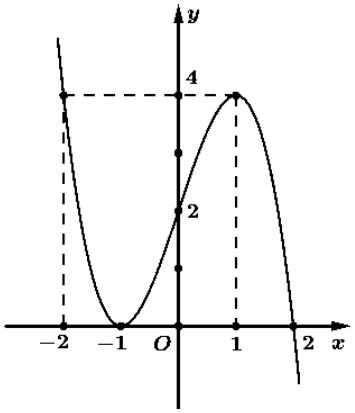
Ta có hoành độ các giao điểm: $\left[\begin{array}{l} t=\alpha,\alpha<0 \\ t=1 \\ t=\beta,\beta>\dfrac{5}{2} \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=x_1\in\left(\dfrac{5}{2};+\infty\right) \\ x=2 \\ x=x_2\in\left(-\infty;\dfrac{5}{4}\right) \end{array}\right.$.

Do đó $g(x)$ có bảng biến thiên như sau



Căn cứ vào bảng biến thiên ta có hàm số đồng biến trên khoảng $\left(2;\dfrac{5}{2}\right)$.

Câu 23: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị $f'\left(x\right)$ như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2+x-1\right)+\dfrac{480}{m\left(x^2+x+2\right)}+2021$ nghịch biến trên $\left(0;1\right)$?

A. 4. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Do $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $g(x)$ nghịch biến trên $(0;1) \Leftrightarrow g(x)$ nghịch biến trên $[0;1]$.

Ta có:

$$g'(x)=(2x+1)\,f'\left(x^2+x-1\right)-\frac{480(2x+1)}{m\left(x^2+x+2\right)^2}=(2x+1)\left[f'\left(x^2+x-1\right)-\frac{480}{m\left(x^2+x+2\right)^2}\right].$$

Ta có $x\in[0;1]$ nên $\begin{cases}-1\le x^2+x-1\le 1\\ 2x+1>0\end{cases}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow g'(x)\le 0,\forall x\in[0;1] \Leftrightarrow f'\left(x^2+x-1\right)-\frac{480}{m\left(x^2+x+2\right)^2}\le 0,\forall x\in[0;1]$

$\Leftrightarrow \left(x^2+x+2\right)^2 f'\left(x^2+x-1\right)\le \frac{480}{m},\forall x\in[0;1]$ (*).

Dựa vào đồ thị $f'(x)$ ta thấy khi $-1\le x^2+x-1\le 1$ thì $\max\limits_{x\in[0;1]}\left(f'\left(x^2+x-1\right)\right)=4$, dấu "=" xảy ra khi $x=1$.

Mà $\max\limits_{x\in[0;1]}\left(x^2+x+2\right)^2=16$, dấu "=" xảy ra khi $x=1$.

Nên $\max\limits_{x\in[0;1]}\left[\left(x^2+x+2\right)^2 f'\left(x^2+x-1\right)\right]=4.16=64$, dấu "=" xảy ra khi $x=1$.

Do đó (*) $\Leftrightarrow \frac{480}{m}\ge 64 \Leftrightarrow m\le\frac{15}{2}$.

Vì m là số nguyên dương nên ta có 7 giá trị m thỏa mãn đề bài.

Câu 24: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	1	↗	2	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số $y=\left[f(x)\right]^3-3\left[f(x)\right]^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

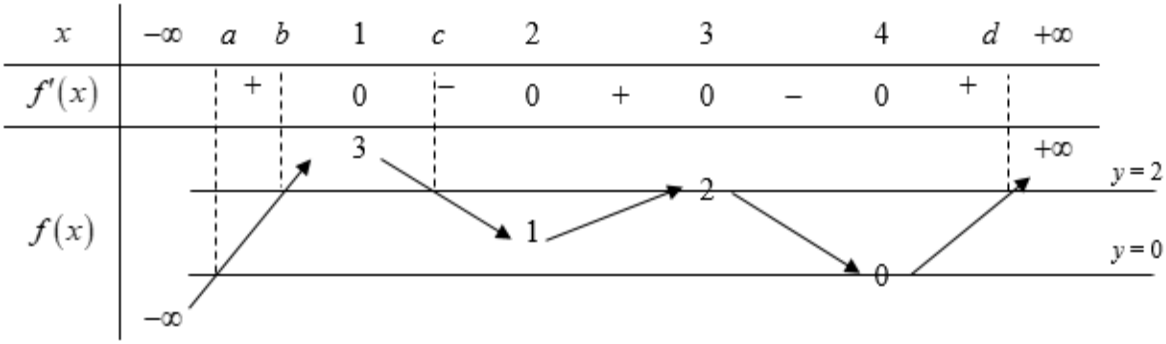
A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $(2;3)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=3f'(x)\left[f^2(x)-2f(x)\right]$.

Phương trình $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\ f(x)=0\\ f(x)=2\end{array}\right.$.



Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x \in \{1;2;3;4\}$;

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=a<1$ hoặc $x=4$;

$$f(x)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=b\ (a<b<1) \\ x=c \in (1;2) \\ x=3 \\ x=d>4 \end{array}\right. .$$

Ta lập được bảng xét dấu của y':

x	$-\infty$		a		b		1		c		2		3		4		d		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	

Từ bảng xét dấu, ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;a)$; $(b;1)$; $(c;2)$; $(3;4)$ và $(d;+\infty)$.

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x)=x^{2021}(x-2)^2\left(x^2+mx+8\right)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của $m \in (-2020;+\infty)$ sao cho hàm số $h(x)=f(x)+\frac{1}{2025}x^{2025}-\frac{3}{2024}x^{2024}+\frac{2}{1011}x^{2022}+2021$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$. Số phần tử của S là

A. 2025. **B.** 2024. **C.** 2026. **D.** 2027.

Lời giải

Chọn A

Ta có $h'(x)=f'(x)+x^{2024}-3x^{2023}+4x^{2021}=x^{2021}\left[(x-2)^2.\left(x^2+mx+8\right)+\left(x^3-3x^2+4\right)\right]$

$=x^{2021}(x-2)^2\left[x^2+mx+8+x+1\right] \le 0, \forall x \in (-\infty;-1) \Leftrightarrow x^2+x+9+mx \ge 0, \forall x \in (-\infty;-1)$

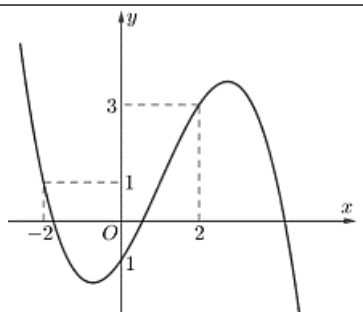
$\Leftrightarrow mx \ge -x^2-x-9, \forall x \in (-\infty;-1) \Leftrightarrow m \le -x-1-\frac{9}{x}, \forall x \in (-\infty;-1)$

Xét hàm số $g(x)=-x-\frac{9}{x}-1, x \in (-\infty;-1)$, tính đạo hàm lập bảng biến thiên ta tìm được $\min\limits_{(-\infty;-1)}\left(-x-\frac{9}{x}-1\right)=5 \Leftrightarrow x=-3$.

Từ đó suy ra $m \le -x-1-\frac{9}{x}, \forall x \in (-\infty;-1) \Leftrightarrow m \le 5$.

Do $m \in (-2020;+\infty), m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2019;-2018;...;5\}$. Suy ra có $5+2019+1=2025$ số m.

Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc 4. Đồ thị hàm số $f'(x+2)$ được cho trong hình vẽ bên

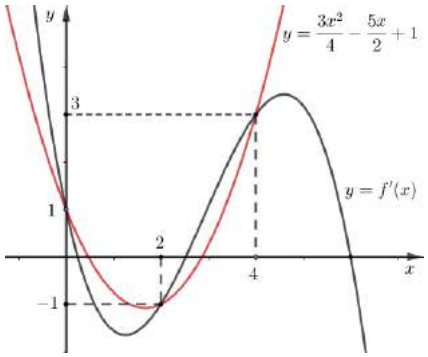


Hàm số $g(x)=4f\left(x^2\right)-x^6+5x^4-4x^2+1$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-4;-3)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$. **D.** $(-2;-1)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như sau.

Ta có $g'(x)=8x.f'\left(x^2\right)-6x^5+20x^4-8x=8x\left[f'\left(x^2\right)-\left(\frac{3}{4}x^4-\frac{5}{2}x^2+1\right)\right]$

Ta có $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'\left(x^2\right)=\frac{3}{4}x^4-\frac{5}{2}x^2+1\ (*)\end{array}\right.$

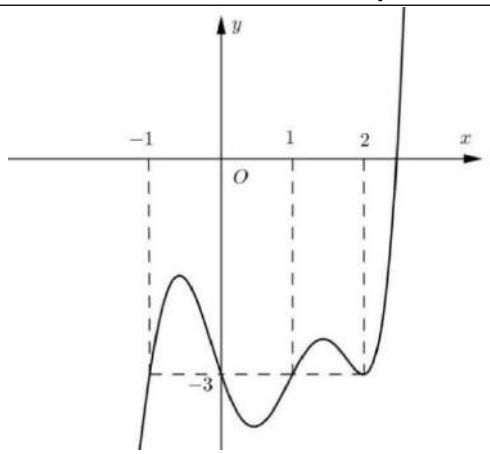
Từ đồ thị suy ra $(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=0\\ x^2=2\\ x^2=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm\sqrt{2}\\ x=\pm2\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu $g'(x)$.

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Từ bảng xét dấu của $g'(x)$ suy ra hàm số đồng biến trên $(-\infty;-2)$ nên hàm số cũng đồng biến trên $(-4;-3)$.

Câu 27: Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hỏi hàm số $g(x)=f\left(2x^2-x\right)+6x^2-3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\frac{1}{4};0\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{4};1\right)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g(x)=f\left(2x^2-x\right)+6x^2-3x$

$\Rightarrow g'(x)=(4x-1)\,f'\left(2x^2-x\right)+12x-3=(4x-1)\left[f'\left(2x^2-x\right)+3\right]$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x-1=0\\ f'\left(2x^2-x\right)=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{4}\\ 2x^2-x=-1(\text{vô nghiệm})\\ 2x^2-x=1\\ 2x^2-x=0\\ 2x^2-x=2(\text{nghiệm kép})\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{4}\\ x=1\\ x=-\frac{1}{2}\\ x=0\\ x=\frac{1}{2}\\ x=\frac{1+\sqrt{17}}{4}(nghiem\ \ kep)\\ x=\frac{1-\sqrt{17}}{4}(nghiem\ \ kep)\end{array}\right.$$

Ta có: $g'(-2)=-9\left(f'(10)+3\right)$ dựa vào đồ thì $f'(x)$ ta thấy $f'(10)>-3\Rightarrow f'(10)+3>0$

$\Rightarrow g'(-2)<0$.

Vì $g'(x)$ không đổi dấu qua các nghiệm bội chẵn nên ta có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{17}}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1+\sqrt{17}}{4}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0 $-$	0	$+$ 0	$-$	0 $+$	0	$-$ 0	$+$ 0 $+$

Xét dấu $g'(x)$ ta được $g'(x)>0,\forall x\in\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)\cup\left(1;\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4};+\infty\right)$.

Suy ra $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{1}{2};0\right)$ và $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$ và $(1;+\infty)$.

Mà $\left(-\frac{1}{4};0\right)\subset\left(-\frac{1}{2};0\right)$ nên hàm số $g(x)=f\left(2x^2-x\right)+6x^2-3x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{4};0\right)$.

Cách 2: Ta có: $g(x)=f\left(2x^2-x\right)+6x^2-3x$

$\Rightarrow g'(x)=(4x-1)\,f'\left(2x^2-x\right)+12x-3=(4x-1)\left[f'\left(2x^2-x\right)+3\right]$.

Xét $g'(x)\ge 0$.

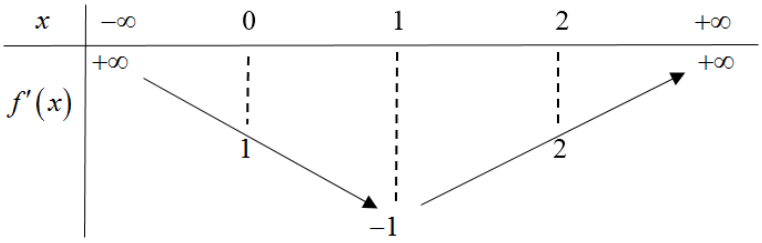
Trường hợp 1: $\begin{cases}4x-1\ge 0\\ f'\left(2x^2-x\right)\ge -3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\frac{1}{4}\\ x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left[0;\frac{1}{2}\right]\cup[1;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]\cup[1;+\infty)$

.

Trường hợp 2: $\begin{cases}4x-1\le 0\\ f'\left(2x^2-x\right)\le -3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\frac{1}{4}\\ x\in\left[-\frac{1}{2};0\right]\cup\left[\frac{1}{2};1\right]\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left[-\frac{1}{2};0\right]$.

Vậy $g'(x)\ge 0\Leftrightarrow x\in\left[-\frac{1}{2};0\right]\cup\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]\cup[1;+\infty)$.

Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên dưới.



Có bao nhiêu số nguyên $m\in(0;10)$ để hàm số $y=f\left(m-\frac{x}{2}\right)+x$ nghịch biến trên khoảng $(-1;3)$?

A. 7. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Đặt $g(x)=f\left(m-\frac{x}{2}\right)+x$. Ta có $g'(x)=-\frac{1}{2}f'\left(m-\frac{x}{2}\right)+1$.

Ta có $g'(x)<0\Leftrightarrow f'\left(m-\frac{x}{2}\right)>2$.

Từ bảng biến thiên ta có: $f'\left(m-\frac{x}{2}\right)>2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2<m-\frac{x}{2}\\ m-\frac{x}{2}<a\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<2m-4\\ 2m-2a<x\end{array}\right.$, với $a<0$.

Suy ra hàm số $y=f\left(m-\frac{x}{2}\right)+x$ nghịch biến trên hai khoảng $(-\infty;2m-4)$ và $(2m-2a;+\infty)$

.

Do đó hàm số $y=f\left(m-\frac{x}{2}\right)+x$ nghịch biến trên khoảng $(-1;3)$ khi và chỉ khi $(-1;3)\subset(-\infty;2m-4)$ hoặc $(-1;3)\subset(2m-2a;+\infty)$.

Trường hợp 1: $(-1;3)\subset(-\infty;2m-4)\Leftrightarrow 3\le 2m-4\Leftrightarrow m\ge\frac{7}{2}$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$, $m\in(0;10)$ nên $m\in\{4;5;6;7;8;9\}$.

Trường hợp này có 6 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: $(-1;3)\subset(2m-2a;+\infty)\Leftrightarrow 2m-2a\le -1\Leftrightarrow m\le a-\frac{1}{2}$.

Mà $a<0$ suy ra $m<-\frac{1}{2}$ (không thỏa mãn do $m>0$). Vậy có 6 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 29: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;1)$. **B.** $(-4;-3)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;-1)$.

Lời giải

Chọn D

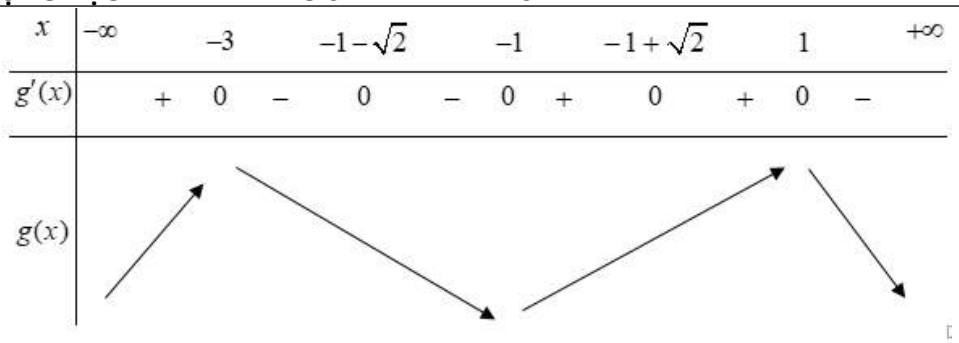
Đặt: $y=g(x)=f\left(x^2+2x\right)$; $g'(x)=\left(f\left(x^2+2x\right)\right)'=(2x+2).f'\left(x^2+2x\right)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow(2x+2).f'\left(x^2+2x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+2=0\\f'\left(x^2+2x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x^2+2x=-2\ (vo\ nghiem)\\x^2+2x=1\\x^2+2x=3\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-1-\sqrt{2}\\x=-1+\sqrt{2}\\x=1\\x=-3\end{array}\right.$$

. ($x=-1\pm\sqrt{2}$ là các nghiệm bội chẵn của phương trình: $x^2+2x=1$).

Ta có bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên, suy ra hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-2;-1\right)$.

Chú ý: Cách xét dấu $g'\left(x\right)$:

Chọn giá trị $x=0\in\left(-1;-1+\sqrt{2}\right)\Rightarrow x^2+2x=0\Rightarrow g'\left(0\right)=f'\left(0\right)>0$ (dựa theo bảng xét dấu của hàm $f'\left(x\right)$). Suy ra $g'\left(x\right)>0$, $\forall x\in\left(-1;-1+\sqrt{2}\right)$. Sử dụng quy tắc xét dấu đa thức "lẻ đổi, chẵn không" suy ra dấu của $g'\left(x\right)$ trên các khoảng còn lại.

Câu 30: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(x-2)$ với mọi giá trị thực của x. Xét hàm số $g(x)=f\left(\dfrac{5x}{x^2+4}\right)$. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;4)$.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

D. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=1$

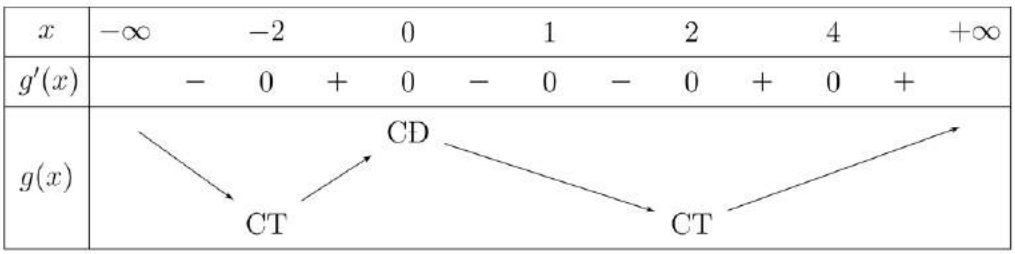
Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'\left(x\right)=\left(\dfrac{5x}{x^2+4}\right)'f'\left(\dfrac{5x}{x^2+4}\right)=\dfrac{20-5x^2}{\left(x^2+4\right)^2}\left(\dfrac{5x}{x^2+4}\right)\left(\dfrac{5x}{x^2+4}-1\right)^2\left(\dfrac{5x}{x^2+4}-2\right),\forall x\in\mathbb{R}$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{20-5x^2}{\left(x^2+4\right)^2}=0\\ \dfrac{5x}{x^2+4}=0\\ \dfrac{5x}{x^2+4}=1\\ \dfrac{5x}{x^2+4}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm2\\ x=0\\ x=1\\ x=4\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)$:



Vậy hàm số $y=g(x)$ đạt cực đại tại $x=0$.

Câu 31: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(3-x)(10-3x)^2(x-2)^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(3-x)+\frac{1}{6}(x^2-1)^3$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=-f'(3-x)+x(x^2-1)^2$.

Theo giả thiết $f'(x)=(3-x)(10-3x)^2(x-2)^2$ nên $f'(3-x)=x(3x+1)^2(1-x)^2$

Từ đó suy ra $g'(x)=-x(3x+1)^2(1-x)^2+x(x^2-1)^2$

$=x(x-1)^2\left[-(3x+1)^2+(x+1)^2\right]=x(x-1)^2(-8x^2-4x)=x^2(x-1)^2(-8x-4)$

Khi đó $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\,(nghiem\ \ kep)\\x=1(nghiem\ \ kep)\\x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$-$	
g		↗		↘		↘		↘	

Khi đó hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	1	↗	2	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số $y=\left(f(x)\right)^3-3.\left(f(x)\right)^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(3;4)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(2;3)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=3.\left(f(x)\right)^2.f'(x)-6.f(x).f'(x)$

$=3f(x).f'(x).\left[f(x)-2\right]$

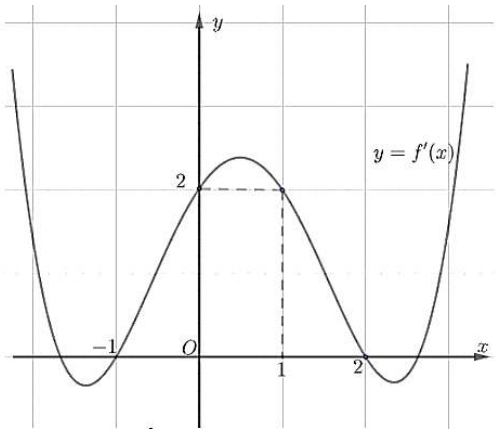
$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)=0\Leftrightarrow x\in\{x_1,4\mid x_1<1\} \\ f(x)=2\Leftrightarrow x\in\{x_2,x_3,3,x_4\mid x_1<x_2<1<x_3<2;4<x_4\} \\ f'(x)=0\Leftrightarrow x\in\{1,2,3,4\}\end{array}\right.$$

Lập bảng xét dấu ta có

x	$-\infty$		x_1		x_2		1		x_3		2		3		4		x_4		$+\infty$
f(x)		-	0	+		+		+		+		+		+	0	+		+	
f(x) - 2		-		-	0	+		+	0	-		-	0	-		-	0	+	
f'(x)		+		+		+	0	-		-	0	+	0	-	0	+		+	
y'		+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	

Do đó ta có hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;3)$.

Câu 33: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số tham số m nguyên thuộc đoạn $[-20;20]$ để hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$ biết $g(x)=3f\left(-x^3-3x+m\right)+\left(x^3+3x-m\right)^2\left(-2x^3-6x+2m-6\right)$.



A. 23. **B.** 21. **C.** 5. **D.** 17.

Lời giải

Chọn A

$$g(x)=3f\left(-x^3-3x+m\right)+2\left(-x^3-3x+m\right)^2\left(-x^3-3x+m-3\right)$$

$$=3f\left(-x^3-3x+m\right)+2\left(-x^3-3x+m\right)^3-6\left(-x^3-3x+m\right)^2$$

Ta có

$$g'(x)=-9\left(x^2+1\right)f'\left(-x^3-3x+m\right)-18\left(x^2+1\right)\left(-x^3-3x+m\right)^2+36\left(x^2+1\right)\left(-x^3-3x+m\right)$$

Để hàm số nghịch biến trên $(-1;2)$

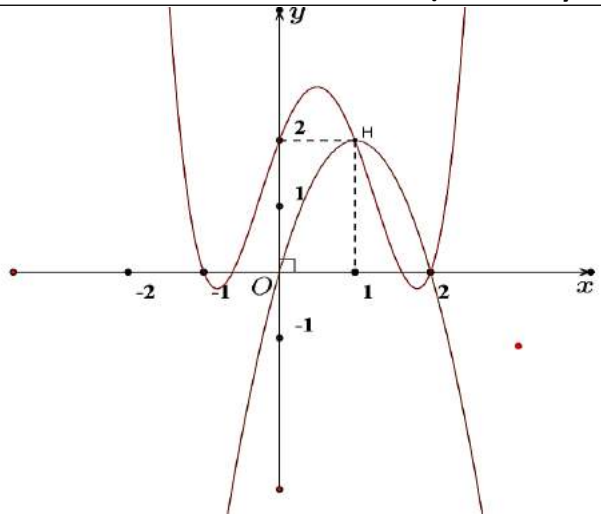
$$g'(x)\le 0\ \forall x\in(-1;2)\Leftrightarrow f'\left(-x^3-3x+m\right)+2\left(-x^3-3x+m\right)^2-4\left(-x^3-3x+m\right)\ge 0\ \forall x\in(-1;2)$$

$$\Leftrightarrow f'\left(-x^3-3x+m\right)\ge -2\left(-x^3-3x+m\right)^2+4\left(-x^3-3x+m\right)\ \forall x\in(-1;2)$$

Đặt $t=-x^3-3x+m$. Với $x\in(-1;2)$ có $t'=-3x^2-3<0\ \forall x\in(-1;2)\Rightarrow t\in(m-14;m+4)$

Xét bất phương trình (1) $f'(t)\ge -2t^2+4t$ (1)

Đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và $y=-2t^2+4t$ trên cùng hệ trục tọa độ:



Để (1) luôn đúng $\Leftrightarrow \begin{cases} t \in (m-14, m+4) \\ \left[\begin{array}{l} t \le 1 \\ t \ge 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t \in (m-14, m+4) \\ t \le 1 \end{cases} \\ \begin{cases} t \in (m-14, m+4) \\ t \ge 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+4 \le 1 \\ m-14 \ge 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -3 \\ m \ge 16 \end{array}\right.$.

Do $m \in [-20;20]$ nên số giá trị của m là $(-3+20)+1+(20-16)+1=23$.

Câu 34: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=3f(2x-1)-4x^3+15x^2-18x+1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(3;+\infty)$. **B.** $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{5}{2};3\right)$. **D.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta đặt: $y=g(x)=f(2x-1)-4x^3+15x^2-18x+1$.

$\Rightarrow g'(x)=6f'(2x-1)-12x^2+30x-18=6\left[f'(2x-1)-2x^2+5x-3\right]$.

Có $f'(2x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=1 \\ 2x-1=2 \\ 2x-1=3 \\ 2x-1=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{3}{2} \\ x=2 \\ x=\frac{5}{2} \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		2		$\frac{5}{2}$		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0		$+$		0		$+$		0	$-$	0	$+$	
$f'(2x-1)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-2x^2+5x-3$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0		$?$	$-$		$?$		$?$		$?$	

Từ đó, ta có bảng xét dấu như sau:

Dựa vào bảng xét dấu trên, ta kết luận hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(1;\frac{3}{2}\right)$.

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+4)\left(x^2+2mx+9\right)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Số giá trị nguyên âm của m để hàm số $g(x)=f\left(x^2+3x-4\right)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=(2x+3)f'\left(x^2+3x-4\right)$.

Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ khi

$(2x+3)f'\left(x^2+3x-4\right)\ge 0,\ \forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow f'\left(x^2+3x-4\right)\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow\left(x^2+3x-4\right)^2\left(x^2+3x\right)\left[\left(x^2+3x-4\right)^2+2m\left(x^2+3x-4\right)+9\right]\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)(1)$

Đặt $t=x^2+3x-4\ (t>0)$ do $x\in(1;+\infty)$

$(1)\Rightarrow t^2(t+4)\left(t^2+2mt+9\right)\ge 0,\forall t>0\Leftrightarrow t^2+2mt+9\ge 0,\forall t>0$

$\Leftrightarrow m\ge -\frac{1}{2}\left(t+\frac{9}{t}\right),\forall t>0\Leftrightarrow m\ge -3$

Do m nguyên âm nên $m\in\{-3;-2;-1\}$.

Câu 36: Cho hàm số $f(x)=-x^4-\left(4-m^2\right)x+2020$ và $g(x)=-x^3+5x^2-2020x+2021$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để $h(x)=g\left[f(x)\right]$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

A. 13. **B.** 12. **C.** 7. **D.** 6.

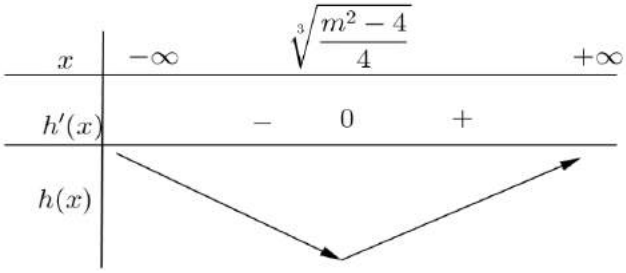
Lời giải

Chọn D

Ta có $h(x)=g\left[f(x)\right]\Rightarrow h'(x)=g'\left[f(x)\right].f'(x)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} g'\left[f(x)\right]=0 \\ f'(x)=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} -3f^2(x)+10f(x)-2020=0(vn) \\ -4x^3-\left(4-m^2\right)=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow x^3=\frac{m^2-4}{4}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{m^2-4}{4}}$

Bảng biến thiên:



Hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi $\sqrt[3]{\frac{m^2-4}{4}} \le 2 \Leftrightarrow -6 \le m \le 6$.

Vậy có 6 giá trị nguyên dương m thỏa mãn.

Câu 37: Cho hàm số $g(x)=f(1-x)$ có đạo hàm $g'(x)=(3-x)^{2021}(2+x)^{2020}\left[x^2+(m-2)x-3m+6\right]$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\forall x\in\mathbb{R}$, $g'(x)=-f'(1-x)\Rightarrow f'(1-x)=-g'(x)$.

Suy ra $f'(1-x)=-(3-x)^{2021}(2+x)^{2020}\left[x^2+(m-2)x-3m++6\right]$

$\Leftrightarrow f'(1-x)=-\left[2+(1-x)\right]^{2021}\left[3-(1-x)\right]^{2020}\left[(1-x)^2-m(1-x)-2m+5\right]$

Vậy $f'(x)=-(2+x)^{2021}(3-x)^{2020}\left(x^2-m.x-2m+5\right)$

Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$

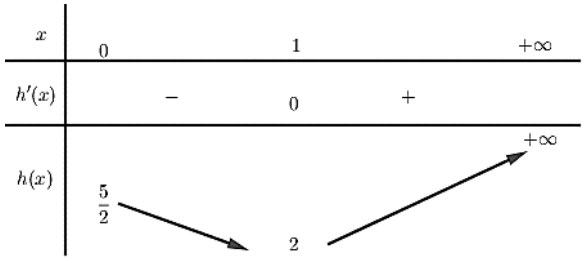
$\Leftrightarrow f'(x)=-(2+x)^{2021}(3-x)^{2020}\left(x^2-m.x-2m+5\right)\le 0\ \ \forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow x^2-mx-2m+5\ge 0$, $\forall x\in(0;+\infty)\Leftrightarrow m\le\dfrac{x^2+5}{x+2}\ \forall x\in(0;+\infty).(*)$

Xét $h(x)=\dfrac{x^2+5}{x+2}=x-2+\dfrac{9}{x+2}$, $x\in(0;+\infty)$

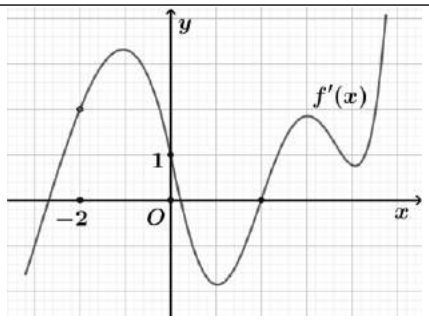
$\Rightarrow h'(x)=1-\dfrac{9}{(x+2)^2}\Rightarrow h'(x)=0\Leftrightarrow 1-\dfrac{9}{(x+2)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+2=3\\x+2=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-5\end{array}\right.$

Bảng biến thiên



$(*)\Leftrightarrow m\le 2$, mà m nguyên dương suy ra $m\in\{1;2\}$. Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 38: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình bên dưới. Hỏi hàm số $g(x)=4f(x)+x^2-4x+2021$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



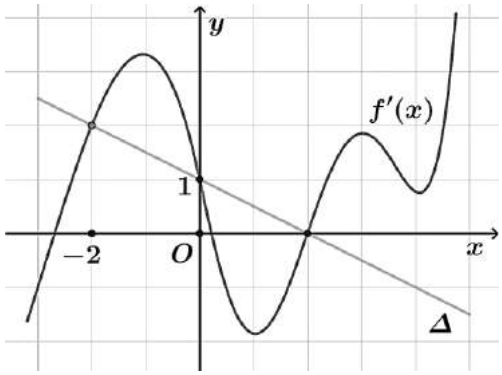
A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;+\infty)$

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số: $g(x)=4f(x)+x^2-4x+2021\Rightarrow g'(x)=4.f'(x)+2x-4=4\cdot\left[f'(x)-\left(-\frac{x}{2}+1\right)\right]$

Để hàm số nghịch biến thì: $g'(x)=4\cdot\left[f'(x)-\left(-\frac{x}{2}+1\right)\right]\le 0\Leftrightarrow f'(x)\le\left(-\frac{x}{2}+1\right)$



Trên hệ trục ta nhận thấy đường thẳng $\Delta: y=-\frac{x}{2}+1$ đi qua ba điểm $(-2;2),(0;1),(2;0)$.

Để $f'(x)\le\left(-\frac{x}{2}+1\right)$ thì đồ thị hàm số $\left(y=f'(x)\right)$ phải nằm dưới đường thẳng Δ.

Tương ứng với miền $\left[\begin{array}{l}x\le -2\\0\le x\le 2\end{array}\right.$.

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, biết rằng $f'(x+2)=x^2-3x+2$. Hàm số $y=f\left(x^2+4x+7\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(-3;-1)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-2;0)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x+2)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)\Rightarrow f'(x)=(x-2-1)(x-2-2)=(x-3)(x-4)$

.

Khi đó: $f'(x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=4\end{array}\right.$. Đặt $y=g(x)=f\left(x^2+4x+7\right)$.

Ta có: $g'(x)=(2x+4).f'\left(x^2+4x+7\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+4=0\\f'\left(x^2+4x+7\right)=0\end{array}\right.$

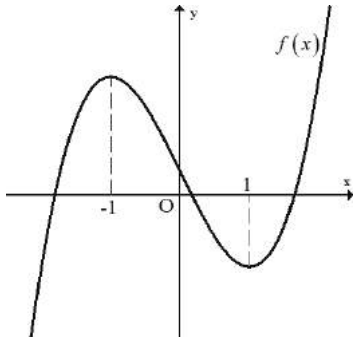
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x^2+4x+7=3 \\ x^2+4x+7=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ (x+2)^2=0 \\ x=-1 \\ x=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-1 \\ x=-3 \end{array}\right..$$

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: hàm số $y=g(x)=f\left(x^2+4x+7\right)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

Câu 40: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Biết rằng hàm số $f\left(x^3-3x-1\right)$ nghịch biến trên các khoảng lớn nhất $(a;b);(m;n);(p;q)$. Giá trị của biểu thức $\left(a^2+b^2+m^2+n^2+p^2+q^2\right)$ bằng:



A. 9. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Đặt $u=x^3-3x-1\Rightarrow g(x)=f(u)=f\left(x^3-3x-1\right)\Rightarrow g'(x)=\left(3x^2-3\right)f'\left(x^3-3x-1\right)$

$$\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x^3-3x-1=-1 \\ x^3-3x-1=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \\ x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		2		$+\infty$
u'		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$f'(u)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\sqrt{3};-1\right),(0;1),\left(\sqrt{3};2\right)$.

Vậy giá trị của biểu thức $\left(a^2+b^2+m^2+n^2+p^2+q^2\right)=12$

Câu 41: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét đấu đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x)=f\left(4-\sqrt{4-x^2}\right)$ đồng biến trên:

x	$-\infty$		-3		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

A. $(0;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(-3;-1)$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Tập xác định của hàm số $f\left(4-\sqrt{4-x^2}\right)$ là $[-2;2]$

Đạo hàm: $g'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}f'\left(4-\sqrt{4-x^2}\right)$

Hàm số đồng biến thì $g'(x)\ge 0$. Từ tập xác định ta có:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(0;2)\\ f'\left(4-\sqrt{4-x^2}\right)\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-2;0)\\ f'\left(4-\sqrt{4-x^2}\right)\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(0;2)\\ \left[\begin{array}{l}-3\le 4-\sqrt{4-x^2}\le 1\\ 4-\sqrt{4-x^2}\ge 4\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-2;0)\\ \left[\begin{array}{l}1\le 4-\sqrt{4-x^2}\le 4\\ 4-\sqrt{4-x^2}\le -3\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(0;2)\\ \left[\begin{array}{l}4-\sqrt{4-x^2}\le 1\\ VN\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-2;0)\\ \left[\begin{array}{l}1\le 4-\sqrt{4-x^2}\\ VN\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(0;2)\\ \sqrt{4-x^2}\ge 3\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-2;0)\\ \sqrt{4-x^2}\le 3\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(0;2)\\ VN\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-2;0)\\ \forall x\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in(-2;0).$$

Cách 2: Sử dụng pp ghép trục: $g(x)=f\left(4-\sqrt{4-x^2}\right)=f(u),u=4-\sqrt{4-x^2}$, với $x\in[-2;2]$

Bảng biến thiên kép

x	-2		0		2
u	4	$\longleftarrow$	2	$\longrightarrow$	4
$f(u)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét đấu đạo hàm $f'(x)$như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x)=f\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)$ nghịch biến trên:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

A. $(5;6)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;5)$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Tập xác định của hàm số $g(x)=f\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)$ là $D=[-1;7]$

Đạo hàm: $g'(x)=\dfrac{3-x}{\sqrt{7+6x-x^2}}f'\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)$

Hàm số nghịch biến: $g'(x)\le 0$

Từ tập xác định, ta có các trường hợp sau:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-1;3)\\ f'\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(3;7)\\ f'\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-1;3)\\ -1\le -1+\sqrt{7+6x-x^2}\le 2\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(3;7)\\ \left[\begin{array}{l}-1+\sqrt{7+6x-x^2}\le -1\\ -1+\sqrt{7+6x-x^2}\ge 2\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-1;3)\\ \sqrt{7+6x-x^2}\le 3\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(3;7)\\ \sqrt{7+6x-x^2}\ge 3\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-1;3)\\ \left[\begin{array}{l}x\le 3-\sqrt{7}\\ x\ge 3+\sqrt{7}\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(3;7)\\ 3-\sqrt{7}\le x\le 3+\sqrt{7}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1<x\le 3-\sqrt{7}\\ 3<x\le 3+\sqrt{7}\end{array}\right..$$

Cách 2: Sử dụng phương pháp ghép trục

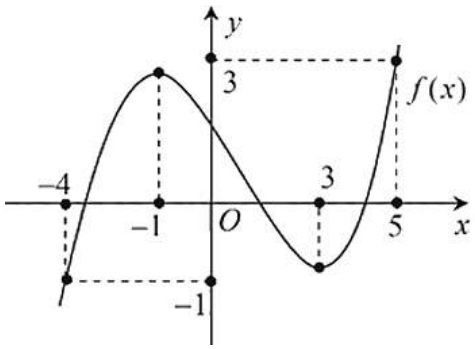
$g(x)=f\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)=f(u)$ với $u=-1+\sqrt{7+6x-x^2}$ và $x\in[-2;2]$

Bảng biến thiên kép

x	-1		$3-\sqrt{7}$		3		$3+\sqrt{7}$		7
u	-1	$\longleftarrow$	2		3		2	$\longrightarrow$	4
$f(u)$									

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-1;3-\sqrt{7}\right)$và $\left(3;3+\sqrt{7}\right)$

Câu 43: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ dưới đây. Hỏi hàm số $f\left(f(x)\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(0;2)$. **B.** $(-3;-1)$. **C.** $(3;5)$. **D.** $(-5;-3)$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số: $g(x)=f\left(f(x)\right)\Rightarrow g'(x)=f'(x).f'\left[f(x)\right]$

Hàm số đồng biến khi $g'(x)=f'(x).f'\left[f(x)\right]\geq 0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}f'(x)\geq 0\\ f'\left[f(x)\right]\geq 0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}f'(x)\leq 0\\ f'\left[f(x)\right]\leq 0\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x\leq -1\\ x\geq 3\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}f(x)\leq -1\\ f(x)\geq 3\end{array}\right.\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}-1\leq x\leq 3\\ -1\leq f(x)\leq 3\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x\leq -1\\ x\geq 3\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x\leq -4\\ x\geq 5\end{array}\right.\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}-1\leq\leq 3\\ -4\leq x\leq 5\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\leq -4\\ -1\leq x\leq 3\\ x\geq 5\end{array}\right.$$

Câu 44: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ có biểu thức đạo hàm được cho bởi $f'(x)=x(x-2)(x+1)$. Hỏi tham số thực m thuộc khoảng nào dưới đây thì hàm số $g(x)=f\left(x^3+m\right)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(1;4)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x)=f\left(x^3+m\right)$ có biểu thức đạo hàm:

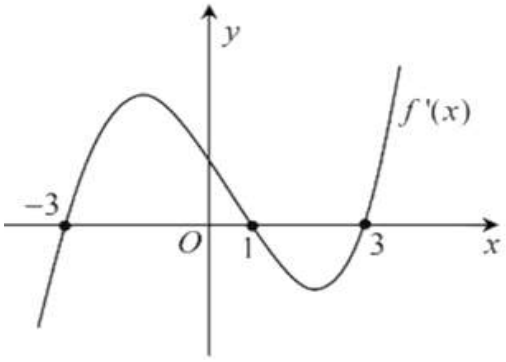
$g'(x)=3x^2.f'\left(x^3+m\right)=3x^2.\left(x^3+m\right)\left(x^3+m-2\right)\left(x^3+m+1\right)$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt[3]{m+1}$		$-\sqrt[3]{m}$		$-\sqrt[3]{m-2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ thì ta phải có: $\sqrt[3]{m-2} \le 1 \Leftrightarrow m \le 1 \Leftrightarrow m \in [1;+\infty)$

Câu 45: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-20;20]$ để hàm số $g(x) = f\left(x^2 - 2x - m\right)$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$?



A. 19. **B.** 23. **C.** 18. **D.** 17.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(x) = f\left(x^2 - 2x - m\right) \Rightarrow g'(x) = 2(x-1).f'\left(x^2 - 2x - m\right)$

Với $\forall x \in (1;3) \Rightarrow x - 1 \ge 0$

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;3)$ thì:

$g'(x) = 2(x-1).f'\left(x^2 - 2x - m\right) \ge 0 \Leftrightarrow f'\left(x^2 - 2x - m\right) \ge 0$

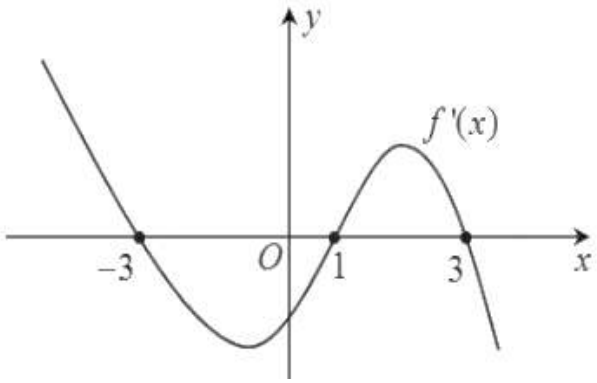
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - m \ge 3 \\ -3 \le x^2 - 2x - m \le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le x^2 - 2x - 3 \\ x^2 - 2x - 1 \le m \le x^2 - 2x + 3 \end{array}\right., \forall x \in (1;3)$

Suy ra với $\forall x \in (1;3)$ ta có:

$\left[\begin{array}{l} m \le \min\left(x^2 - 2x - 3\right) \\ \max\left(x^2 - 2x - 1\right) \le m \le \min\left(x^2 - 2x + 3\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le 4 \\ 2 \le m \le 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -20 \le m \le -4 \\ m = 2 \end{array}\right.$

Do đó có 18 giá trị m nguyên thỏa mãn.

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30;30]$ để hàm số $g(x) = f\left(x^3 - 3x - m\right)$ đồng biến trên $[-2;-1]$.



A. 24 . **B.** 25 . **C.** 26 . **D.** 31.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x)=3\left(x^2-1\right)f'\left(x^3-3x-m\right)$. Với $\forall x\in[-2;-1]\Rightarrow x^2-1\geq 0$

Để hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x-m\right)$ đồng biến trên $[-2;-1]$ thì:

$3\left(x^2-1\right)f'\left(x^3-3x-m\right)\geq 0,\forall x\in[-2;-1]$

$\Leftrightarrow f'\left(x^3-3x-m\right)\geq 0,\forall x\in[-2;-1]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3-3x-m\leq -3,\forall x\in[-2;-1]\\ 1\leq x^3-3x-m\leq 3,\forall x\in[-2;-1]\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3-3x\leq m-3,\forall x\in[-2;-1]\\ \left\{\begin{array}{l}m+1\leq x^3-3x\\ m-3\geq x^3-3x\end{array}\right.,\forall x\in[-2;-1]\end{array}\right.\quad(1)$

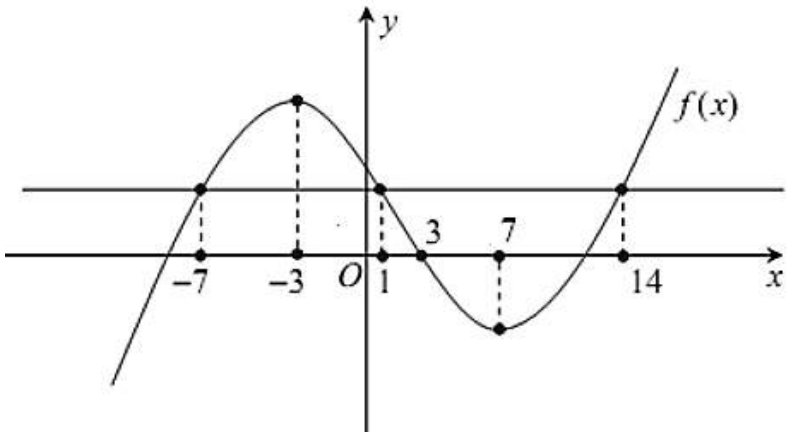
Xét hàm số $h(x)=x^3-3x\Rightarrow h'(x)=3x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\notin[-2;-1]\\ x=-1\in[-2;-1]\end{array}\right.$

Ta có: $h(-2)=-2$ và $h(-1)=2\Rightarrow\max\limits_{[-2;-1]}h(x)=2$ và $\min\limits_{[-2;-1]}h(x)=-2$

Từ $(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\max\limits_{[-2;-1]}h(x)\leq m-3\\ \left\{\begin{array}{l}m+1\leq\min\limits_{[-2;-1]}h(x)\\ m+3\geq\max\limits_{[-2;-1]}h(x)\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\leq m-3\\ \left\{\begin{array}{l}m+1\leq -2\\ m+3\geq 2\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\geq 5\\ \left\{\begin{array}{l}m\leq -3\\ m\geq -1\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow m\geq 5.$

Mà $m\in[-30;30]\Rightarrow 5\leq m\leq 30$, do đó có 26 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 47: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ. Hỏi hàm số $g(x)=\left[f(x)\right]^2-6f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-3;1)$. **B.** $(7;14)$. **C.** $(14;+\infty)$. **D.** $(1;7)$.

Lời giải

Chọn B

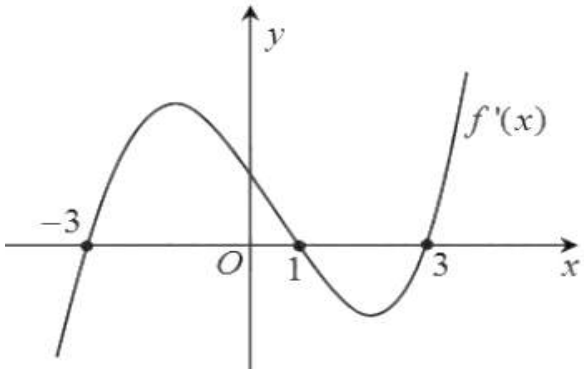
Xét hàm số $g(x)=\left[f(x)\right]^2-6f(x)$.

$g'(x)=2f(x).f'(x)-6f'(x)=2f'(x)\left(f(x)-3\right)$.

Hàm số nghịch biến khi $g'(x)=2f'(x)\left(f(x)-3\right)\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f'(x)\ge 0\\ f(x)-3\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}f'(x)\le 0\\ f(x)-3\ge 0\end{cases}\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\le -3\\ x\ge 7\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x\le -7\\ 1\le x\le 14\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}-3\le x\le 7\\ \left[\begin{array}{l}-7\le x\le 1\\ x\ge 14\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le -7\\ 7\le x\le 14\\ -3\le x\le 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le -7\\ 7\le x\le 14\\ -3\le x\le 1\end{array}\right.$$

Câu 48: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x-m\right)$ nghịch biến trên $(-1;2)$.



A. 0. **B.** 1. **C.** 28. **D.** 23.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g'(x)=2(x-1)f'\left(x^2-2x-m\right)$

Để hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x-m\right)$ nghịch biến trên $(-1;2)$ thì:

$g'(x)=2(x-1)f'\left(x^2-2x-m\right)\le 0,\forall x\in(-1;2)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2(x-1)f'\left(x^2-2x-m\right)\le 0,\forall x\in(-1;1)\\ 2(x-1)f'\left(x^2-2x-m\right)\le 0,\forall x\in(1;2)\end{cases}\quad(1)$$

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}f'\left(x^2-2x-m\right)\ge 0,\forall x\in(-1;1)\\ f'\left(x^2-2x-m\right)\le 0,\forall x\in(1;2)\end{cases}$$

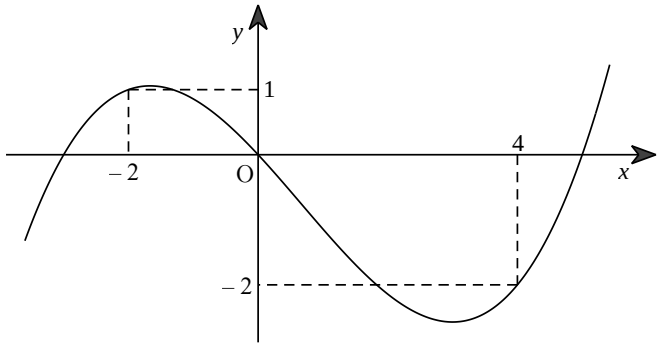
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2-2x-m\ge 3\\ -3\le x^2-2x-m\le 1\end{array}\right.,\forall x\in(-1;1)\\ \left[\begin{array}{l}1\le x^2-2x-m\le 3\\ x^2-2x-m\le -3\end{array}\right.,\ \forall x\in(1;2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2-2x\ge m+3\\ m-3\le x^2-2x\le m+1\end{array}\right.,\forall x\in(-1;1)\\ \left[\begin{array}{l}m+1\le x^2-2x\le m+3\\ x^2-2x\le m-3\end{array}\right.,\ \forall x\in(1;2)\end{cases}\quad(2)$$

Xét hàm số $h(x)=x^2-2x\Rightarrow h'(x)=2x-2=0\Leftrightarrow x=1$

Với $\forall x\in(-1;1)\Rightarrow h'(x)=2x-2<0\Rightarrow h(1)<h(x)<h(-1)\Leftrightarrow -1<h(x)<3,\forall x\in(-1;1)$

Với $\forall x\in(1;2)\Rightarrow h'(x)=2x-2>0\Rightarrow h(1)<h(x)<h(2)\Leftrightarrow -1<h(x)<0,\forall x\in(1;2)$

Câu 49: Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x)=f(1-2x)+x^2-x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?



A. $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(2;3)$.

Lời giải

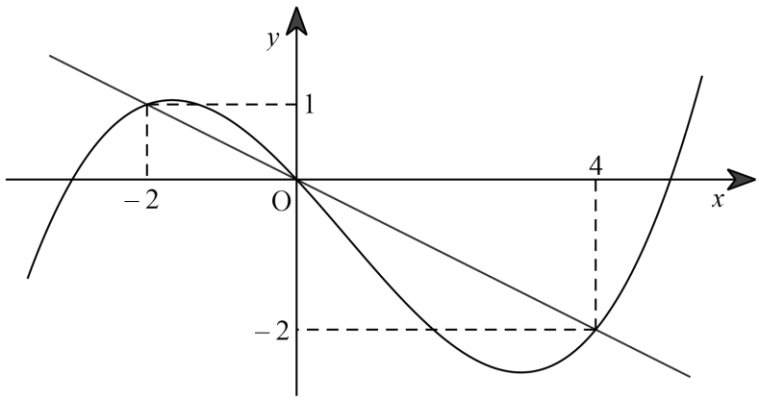
Chọn A

Ta có : $g(x)=f(1-2x)+x^2-x\ \Rightarrow g'(x)=-2f'(1-2x)+2x-1$

Đặt $t=1-2x\Rightarrow g'(x)=-2f'(t)-t$

$g'(x)=0\Rightarrow f'(t)=-\frac{t}{2}$

Vẽ đường thẳng $y=-\frac{x}{2}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ trên cùng một hệ trục



Hàm số $g(x)$ nghịch biến $\Rightarrow g'(x)\le 0\Rightarrow f'(t)\ge -\dfrac{t}{2}\Rightarrow \left[\begin{array}{l}-2\le t\le 0\\ t\ge 4\end{array}\right.$

Như vậy $f'(1-2x)\ge \dfrac{1-2x}{-2}\Rightarrow \left[\begin{array}{l}-2\le 1-2x\le 0\\ 4\le 1-2x\end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{2}\le x\le \dfrac{3}{2}\\ x\le -\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$.

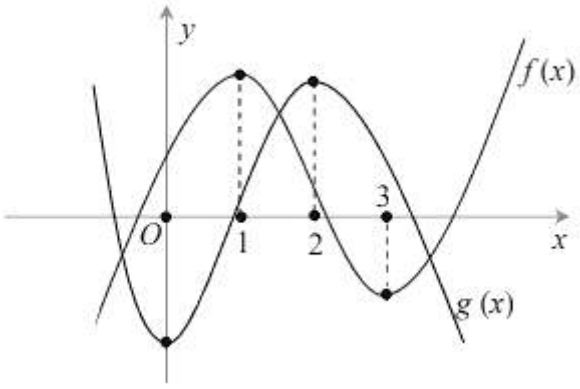
Vậy hàm số $g(x)=f(1-2x)+x^2-x$ nghịch biến trên các khoảng $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ và $\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right)$.

Mà $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)\subset\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ nên hàm số $g(x)=f(1-2x)+x^2-x$ nghịch biến trên khoảng $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$

Từ $(2)\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}-1\ge m+3\\ \begin{cases}m-3\le -1\\ 3\le m+1\end{cases}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m+1\le -1\\ 0\le m+3\end{cases}\\ 0\le m-3\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}-4\ge m\\ \begin{cases}m\le 2\\ 2\le m\end{cases}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\le -2\\ -3\le m\end{cases}\\ 3\le m\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}m\le -4\\ m=2\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}-3\le m\le -2\\ m\ge 3\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow m\in\varnothing$.

Vậy không có giá trị nguyên của $m\in[-30;30]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 50: Cho hàm số $f(x)$, $g(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết hai hàm số $y=f(2x-1)$, $y=g(ax+b)$ có cùng khoảng nghịch biến lớn nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $(4a+b)$ bằng:



A. 0. **B.** -2. **C.** -4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y=f(2x-1)\Rightarrow (f(2x-1))'=2f'(2x-1)$ nghịch biến khi $f'(x)<0$

$\Leftrightarrow \left(f(2x-1) \right)' = 2.f'(2x-1) < 0 \Leftrightarrow f'(2x-1) < 0 \Leftrightarrow 1 < 2x-1 < 3 \Leftrightarrow 1 < x < 2$.

Xét hàm số $y = g(ax+b) \Rightarrow \left(g(ax+b) \right)' = a.g'(ax+b)$ nghịch biến khi xảy ra hai trường hợp

$$\left[\begin{cases} a > 0 \\ g'(ax+b) < 0 \end{cases} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} a > 0 \\ \left[\begin{array}{l} ax+b < 0 \\ ax+b > 2 \end{array} \right. \end{cases} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} a > 0 \\ \left[\begin{array}{l} x < \dfrac{-b}{a} \\ x > \dfrac{2-b}{a} \end{array} \right. \end{cases} \right.$$

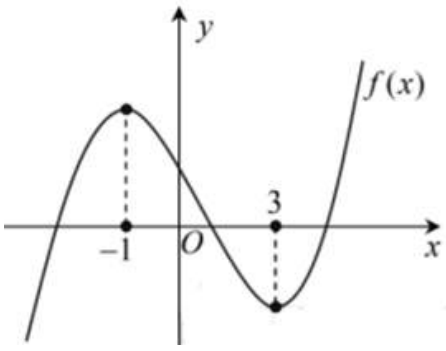
$$\left[\begin{cases} a < 0 \\ g'(ax+b) > 0 \end{cases} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} a < 0 \\ 0 < ax+b < 2 \end{cases} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} a < 0 \\ -\dfrac{b-2}{a} < x < -\dfrac{b}{a} \end{cases} \right.$$

Nếu $a > 0$ thì hàm số $y = g(ax+b)$ nghịch biến trên $\left(-\infty; \dfrac{-b}{a} \right); \left(\dfrac{2-b}{a}; +\infty \right)$ không thỏa mãn điều kiện có khoảng nghịch biến là $(1;2)$.

Nếu $a < 0$ thì hàm số $y = g(ax+b)$ nghịch biến trên $\left(-\dfrac{b-2}{a}; \dfrac{-b}{a} \right)$

Yêu cầu bài toán là hai hàm số $y = f(2x-1)$, $y = g(ax+b)$ có cùng khoảng nghịch biến lớn nhất nên $\begin{cases} -\dfrac{b-2}{a} = 1 \\ \dfrac{-b}{a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow 4a+b = -4$.

Câu 51: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số như hình vẽ. Khi đó hàm số $f\left(x^3+3x-1 \right)$ nghịch biến trên:



A. $(1;2)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $\left(-2; -\dfrac{1}{2} \right)$. **D.** $\left(-\dfrac{1}{2}; 0 \right)$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x) = f\left(x^3+3x-1 \right)$

Đạo hàm hàm hợp $g'(x) = \left(3x^2+3 \right).f'\left(x^3+3x-1 \right) = 3\left(x^2+1 \right).f'\left(x^3+3x-1 \right)$.

Để hàm số nghịch biến thì $g'(x) = 3\left(x^2+1 \right).f'\left(x^3+3x-1 \right) \le 0$

$f'\left(x^3+3x-1\right)\le 0 \Leftrightarrow -1\le x^3+3x-1\le 3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+3x\ge 0 \\ x^3+3x-4\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(x^2+3\right)\ge 0 \\ (x-1)\left(x^2+x+4\right)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0\le x\le 1.$

Câu 52: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn $-10<m<10$ và hàm số $y=f(x^2+2x+m)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

A. 5. **B.** 4. **C.** 6 **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Xét $y=g(x)=f(x^2+2x+m)$

Ta có: $y'=g'(x)=2(x+1)f'(x^2+2x+m)$

Vì $x+1>0\forall x\in(0;1)$ nên để hàm số $y=f(x^2+2x+m)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$ khi và chỉ khi $f'(x^2+2x+m)>0\forall x\in(0;1)$, do hàm số x^2+2x+m luôn đồng biến trên $(0;1)$ nên

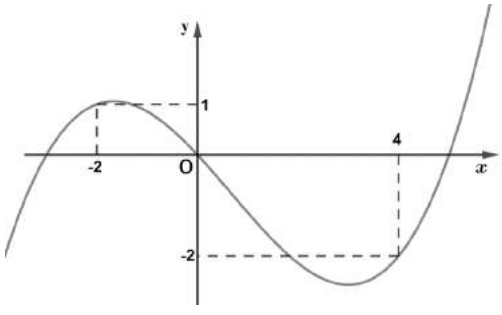
Đặt $t=x^2+2x+m$. Vì $x\in(0;1)$ nên $t\in(m;m+3)$

Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ ta có: $\left[\begin{array}{l} m+3\le -2 \\ \begin{cases} m\ge 0 \\ m+3\le 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le -5 \\ m=0 \end{array}\right.$

Mà $-10<m<10$ nên $m=\{-9;-8;-7;-6;-5;0\}$

Vậy có tất cả 6 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn đề bài.

Câu 53: Cho hàm số $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,\ a\ne 0$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên thuộc khoảng $\left(-6;6\right)$ của tham số m để hàm số $g\left(x\right)=f\left(3-2x+m\right)+x^2-\left(m+3\right)x+2m^2$ nghịch biến trên $\left(0;1\right)$. Khi đó, tổng giá trị các

phần tử của S là

A. 12. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 15.

Lời giải

Chọn B

Xét $g'(x)=-2f'(3-2x+m)+2x-(m+3)$. Xét phương trình $g'(x)=0$

Đặt $t=3-2x+m$ thì phương trình trở thành $-2.\left[f'(t)-\frac{-t}{2}\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\\t=4\\t=0\end{array}\right.$.

Từ đó, $g'(x)=0\Leftrightarrow x_1=\frac{5+m}{2},x_2=\frac{m+3}{2},x_3=\frac{-1+m}{2}$. Lập bảng xét dấu, đồng thời lưu ý nếu $x>x_1$ thì $t<t_1$ nên $f(x)>0$. Và các dấu đan xen nhau do các nghiệm đều làm đổi dấu đạo hàm nên suy ra $g'(x)\le 0\Leftrightarrow x\in[x_2;x_1]\cup(-\infty;x_3]$.

Vì hàm số nghịch biến trên $(0;1)$ nên $g'(x)\le 0,\forall x\in(0;1)$ từ đó suy ra $\left[\begin{array}{l}\frac{3+m}{2}\le 0<1\le\frac{5+m}{2}\\1\le\frac{-1+m}{2}\end{array}\right.$

và giải ra các giá trị nguyên thuộc $(-6;6)$ của m là -3; 3; 4; 5.

Câu 54: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức và hàm số $y=f\left(x^2-1\right)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		-1		3		-1		$+\infty$

Hàm số $g(x)=f\left(2x^3-x\right)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. **B.** $\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{\sqrt{6}};1\right)$. **D.** $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}};+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn A

Xét $y=f\left(x^2-2x\right)$ có $y'=2xf'\left(x^2-1\right);\ y'=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'\left(x^2-1\right)=0\end{array}\right.$.

Có $x=\pm\sqrt{2}$ là nghiệm bội lẻ của $f'\left(x^2-1\right)=0$ và $f'(1)=0$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

Xét $g(x)=f\left(2x^3-x\right)$, cho $g'(x)=\left(6x^2-1\right)f'\left(2x^3-x\right)$

Cho $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ 2x^3-x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ x=1 \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{6}}$		$\frac{1}{\sqrt{6}}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$\boxed{0}$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}};\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 55: Cho hàm số $y=f(x^2-2)$ là hàm số bậc 4 có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	$f(-1)$	↘	$f(-2)$	↗	$f(-1)$	↘	$-\infty$

Hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x+3\right)$ đồng biến trong khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=2x.f'\left(x^2-2\right)$, dựa vào bảng biến thiên ta thấy $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$ do đó

$f'\left(x^2-2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$ và do đó $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$.

Xét $g(x)=f\left(x^3-3x+3\right)$ ta có $g'(x)=\left(3x^2-3\right)f'\left(x^3-3x+3\right)$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(3x^2-3\right)=0 \\ f'\left(x^3-3x+3\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x^3-3x+3=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

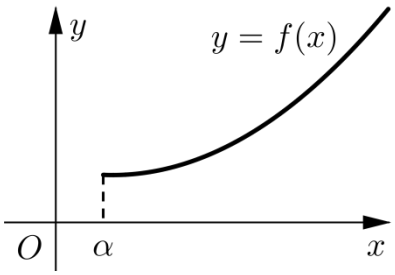
Ta có bảng xét dấu $g'(x)$

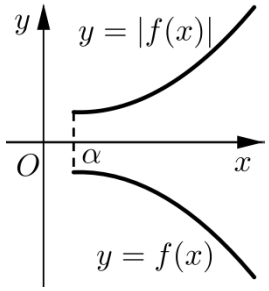
x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số đồng biến trên $(1;2)$.

Dạng 6: Tính đơn điệu của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối

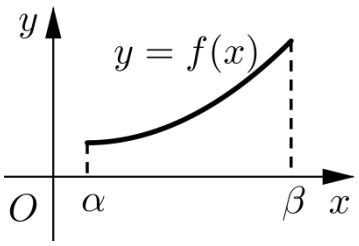
- Hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ đồng biến trên $\left[\alpha;+\infty\right)$ khi và chỉ khi:

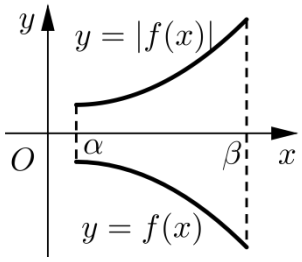




- $\begin{cases} y'\left(\alpha\right)\geq 0,\ \forall x\in\left[\alpha;+\infty\right) \\ y\left(\alpha\right)\geq 0 \end{cases}$.
- $\begin{cases} y'\left(\alpha\right)\leq 0,\ \forall x\in\left[\alpha;+\infty\right) \\ y\left(\alpha\right)\leq 0 \end{cases}$.

- Hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ đồng biến trên $\left(\alpha;\beta\right)$ khi và chỉ khi:





- $\begin{cases} y'\left(\alpha\right)\geq 0,\ \forall x\in\left(\alpha;\beta\right) \\ y\left(\alpha\right)\geq 0 \end{cases}$.
- $\begin{cases} y'\left(\alpha\right)\leq 0,\ \forall x\in\left(\alpha;\beta\right) \\ y\left(\alpha\right)\leq 0 \end{cases}$.

- Các dạng đồng biến $y=\left|f\left(x\right)\right|$ trên $\left(-\infty;a\right],\left[\alpha;\beta\right]$ ta thực hiện tương tự.
- Hàm số hỏi nghịch biến làm ngược lại.

1 Ví dụ minh họa

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $a\in\left(-10;+\infty\right)$ để hàm số $y=\left|x^3+\left(a+2\right)x+9-a^2\right|$ đồng biến trên khoảng $\left(0;1\right)$?

A. 12. **B.** 11. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Xét $f\left(x\right)=x^3+\left(a+2\right)x+9-a^2$ có $f'\left(x\right)=3x^2+a+2$

Để $y=\left|f\left(x\right)\right|$ đồng biến trên khoảng $\left(0;1\right)$

Trường hợp 1: $\begin{cases} f'\left(x\right)\geq 0,\forall x\in\left(0;1\right) \\ f\left(0\right)\geq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+a+2\ge 0, \forall x\in(0;1) \\ 9-a^2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge \underset{(0;1)}{Max}\left(-3x^2-2\right) \\ 9-a^2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge -2 \\ -3\le a\le 3 \end{cases} \Rightarrow a\in[-2;3]$$

$a=\{-2;-1;0;1;2;3;\} \rightarrow$ 6 giá trị

Trường hợp 2: $\begin{cases} f'(x)\le, \forall x\in(0;1) \\ f(0)\le 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+a+2\le 0, \forall x\in(0;1) \\ 9-a^2\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\le \underset{(0;1)}{Min}\left(-3x^2-2\right) \\ 9-a^2\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\le -5 \\ \left[\begin{array}{l} a\ge 3 \\ a\le -3 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow a\le -5$$

Kết hợp với điều kiện bài toán $a=\{-9;-8;-7;-6;-5\} \rightarrow$ 5 giá trị

Vậy có 11 giá trị thoả mãn.

Câu 2: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $a\in[-10;10]$ để hàm số $f(x)=\left|x^3-3ax^2-3(a+2)x-a+1\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 19. **B.** 12. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x)=x^3-3ax^2-3(a+2)x-a+1$

Đạo hàm $g'(x)=3x^2-6ax-3(a+2)=3\left(x^2-2ax-a-2\right)$

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$ thì ta có hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\begin{cases} f(0)\ge 0 \\ f'(x)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+1\ge 0 \\ a\le \dfrac{x^2-2}{2x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\le 1 \\ a\le -2 \end{cases}, \forall x\in(0;2)$

Trường hợp 2: $\begin{cases} f(0)\le 0 \\ f'(x)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+1\le 0 \\ a\ge \dfrac{x^2-2}{2x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge 1 \\ a\ge 1 \end{cases}, \forall x\in(0;2)$

Từ hai trường hợp, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\le -2 \\ a\ge 1 \end{array}\right. \xrightarrow{a\in\mathbb{Z};a\in[-10;10]} \left[\begin{array}{l} -10\le a\le -2 \\ 1\le a\le 10 \end{array}\right.$

Vậy có tất cả 19 giá trị nguyên của tham số a thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 3: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|x^5-5x^2+5(m-1)x-8\right|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$?

A. 2. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x)=x^5-5x^2+5(m-1)x-8.$

Trường hợp 1: $f(x)=0$ có nghiệm $x_0\in(-\infty;1)$ thì hàm số $y=\left|f(x)\right|$ không thể nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

Trường hợp 2: $f(x)=0$ không có nghiệm $x_0 \in (-\infty;1)$.

Ta có: $f'(x)=5x^4-10x+5(m-1).$

Khi đó $y=\left|x^5-5x^2+5(m-1)x-8\right|=\left|f(x)\right|=\sqrt{f^2(x)}$ nên $y'=\dfrac{f'(x).f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$.

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$ khi và chỉ khi $y' \le 0$ với $\forall x \in (-\infty;1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x).f(x) \le 0 \\ f(x) \ne 0 \end{cases}, \forall x \in (-\infty;1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < 0 \\ f'(x) \ge 0 \end{cases}, \forall x \in (-\infty;1)$ (vì $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$)

$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x)=5x^4-10x+5(m-1) \ge 0, \forall x \in (-\infty;1) \\ f(1)=5m-17 \le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \ge -x^4+2x+1, \forall x \in (-\infty;1) \\ m \le \dfrac{17}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge \max\limits_{(-\infty;1)}\left(-x^4+2x+1\right)=\dfrac{3}{2.\sqrt[3]{2}}+1 \\ m \le \dfrac{17}{5} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{2.\sqrt[3]{2}}+1 \le m \le \dfrac{17}{5} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m=3.$

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|2x^3-mx+1\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 2. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x)=2x^3-mx+1.$

Trường hợp 1: $f(x)=0$ có nghiệm $x_0 \in (1;+\infty)$ thì hàm số $y=\left|f(x)\right|$ không thể đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Trường hợp 2: $f(x)=0$ không có nghiệm $x_0 \in (1;+\infty)$. Ta có: $f'(x)=6x^2-m.$

Khi đó $y=\left|2x^3-mx+1\right|=\left|f(x)\right|=\sqrt{f^2(x)}$ nên $y'=\dfrac{f'(x).f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $y' \ge 0$ với $\forall x \in (1;+\infty)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x).f(x) \ge 0 \\ f(x) \ne 0 \end{cases}, \forall x \in (1;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f'(x) \ge 0 \end{cases}, \forall x \in (1;+\infty)$ (vì $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$)

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3-mx+1>0 \\ 6x^2-m \ge 0 \end{cases}, \forall x \in (1;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) \ge 0 \\ f'(1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-m+1 \ge 0 \\ 6-m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \le 3 \Rightarrow m \in \{1;2;3\}$.

Câu 5: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$?

A. 6. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+m \Rightarrow f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x\left(x^2-x-2\right)$

$$\Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		↘	$m-5$	↗		↘		↗	

Nhận thấy: hàm số $y=\left|f(x)\right|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1) \Leftrightarrow m-5\geq 0 \Leftrightarrow m\geq 5$.

Lại do $\begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ m<10 \end{cases} \Rightarrow m\in\{5;6;7;8;9\}$. Vậy có 5 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\left|x^4+2x^3+mx+2\right|$ đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$?

A. $m\geq 1$. **B.** $m\in\varnothing$. **C.** $0\leq m\leq 1$. **D.** $m\leq 0$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $f(x)=x^4+2x^3+mx+2 \Rightarrow f'(x)=4x^3+6x^2+m$; $y=\left|x^4+2x^3+mx+2\right|=\left|f(x)\right|$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ nên hàm số đồng biến trên $(-1;+\infty)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} f'(x)\geq 0,\forall x\in(-1;+\infty) \\ f(-1)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3+6x^2+m\geq 0,\forall x\in(-1;+\infty) \\ 1-m\geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\geq -4x^3-6x^2,\forall x\in(-1;+\infty) \\ 1-m\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\geq \max\limits_{(-1;+\infty)}\left(-4x^3-6x^2\right) \\ m\leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\geq 0 \\ m\leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0\leq m\leq 1.$$

Câu 7: Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-4;4)$ để hàm số $y=\left|\frac{1}{3}x^3-x^2+mx+1\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$?

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số: $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+mx+1 \Rightarrow f'(x)=x^2-2x+m$. Ta có: $\Delta'=1-m$

Trường hợp 1: $\Delta'\leq 0 \Leftrightarrow 1-m\leq 0 \Leftrightarrow m\geq 1$. Suy ra $f'(x)\geq 0,\forall x\in(1;+\infty)$.

Vậy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m\geq 1 \\ f(1)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\geq 1 \\ \frac{1}{3}+m\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\geq 1 \\ m\geq -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m\geq 1.$

Kết hợp với điều kiện $m\in\mathbb{Z};m\in(-4;4)$ ta được $m\in\{-3;-2;-1;0;1\}$. Ta có 5 giá trị của m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: $\Delta'>0\Leftrightarrow m<1$. Suy ra $f'(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1,x_2\ (x_1<x_2)$

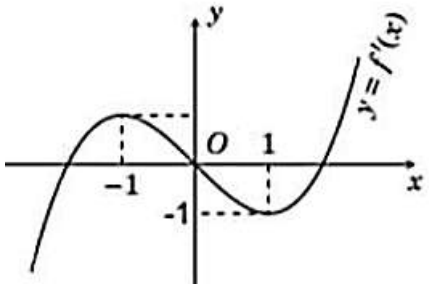
Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$f(x_1)$	↘	$f(x_2)$	↗	$+\infty$

Vậy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\begin{cases}m<1\\x_1<x_2\le 1\\f(1)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<1\\f'(1)>0\\\dfrac{S}{2}-1<0\\f(1)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<1\\f'(1)>0\\1-1<0\\f(1)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow m=\varnothing$

Vậy tất cả có 5 giá trị của m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(0)=3$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $g(x)=\left|2f(x)+x^2-2mx+2m\right|$ đồng biến trên $(0;1)$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Đặt $h(x)=2f(x)+x^2-2mx+2m\Rightarrow h'(x)=2f'(x)+2x-2m.$

Chọn hàm $f''(x)=3a(x^2-1)\Rightarrow f'(x)=a(x^3-3x)+d$.

$\begin{cases}f'(0)=0\\f'(1)=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=0\\a=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{x^3-3x}{2}$. Xét hàm $p(x)=f'(x)+x=\dfrac{x^3-x}{2},x\in(0;1)$.

Ta có: $p'(x)=\dfrac{3x^2-1}{2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ (thoa\ man)\\x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ (loai)\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên:

x	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1
p'		$-$	0	$+$	
p	0	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{9}$	↗	0

Như vậy: $-\dfrac{\sqrt{3}}{9} \le p(x) < 0, \forall x \in (0;1)$.

Hàm số $g(x) = \left|2f(x) + x^2 - 2mx + 2m\right|$ đồng biến trên $(0;1)$ khi và chỉ khi xảy ra một trong hai trường hợp sau:

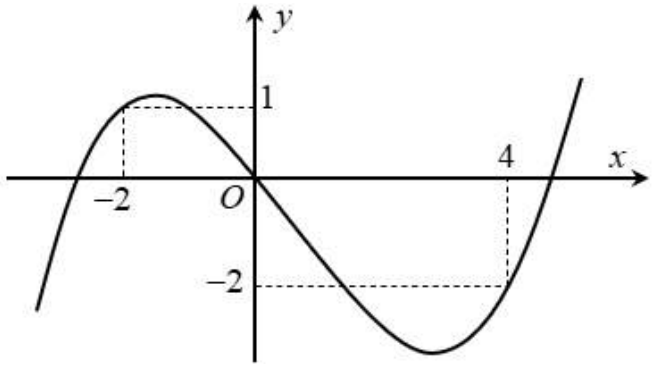
Trường hợp 1: $\begin{cases} h(0) = 6 + 2m \ge 0 \\ h'(x) \ge 0, \forall x \in (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge -3 \\ m \le f'(x) + x, \forall x \in (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge -3 \\ m \le -\dfrac{\sqrt{3}}{9} \end{cases}$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-3;-2;-1\}$.

Trường hợp 2: $\begin{cases} h(0) = 6 + 2m \le 0 \\ h'(x) \le 0, \forall x \in (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le -3 \\ m \ge f'(x) + x, \forall x \in (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le -3 \\ m \ge 0 \end{cases}$ (loại).

Vậy $m \in \{-3;-2;-1\}$.

Câu 9: Cho hàm số $y = f'(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Gọi S là tập tất cả các số tự nhiên không quá 100 của m sao cho hàm số $g(x) = f\left(\left|m - 2x\right|\right) + x^2 - mx$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$. Số phần tử của tập S bằng:



A. 95. **B.** 96. **C.** 100. **D.** 99.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Ta có: $g'(x) = \dfrac{2(2x-m)}{|2x-m|} f'\left(|2x-m|\right) + (2x-m) = (2x-m)\left[\dfrac{2f'\left(|2x-m|\right)}{|2x-m|} + 1\right]$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (2x-m)\left[\frac{2f'\left(|2x-m|\right)}{|2x-m|} + 1\right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{m}{2} \\ 2f'\left(|2x-m|\right) + |2x-m| = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Đặt $t = |2x-m|$ thì phương trình $(*)$ trở thành $2f'(t) + t = 0 \Leftrightarrow f'(t) = -\dfrac{t}{2}$

Kẻ đường thẳng $y=-\dfrac{t}{2}$ với đồ thị $f'(x)$ ta được $\left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=0 \\ t=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |2x-m|=-2\ (vo\ nghiem) \\ |2x-m|=0\ (nghiem\ kep). \\ |2x-m|=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{m}{2}+2 \\ x=\dfrac{m}{2}-2 \end{array}\right. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$\frac{m}{2}-2$		$\frac{m}{2}$		$\frac{m}{2}+2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	

Nhận xét: khi $x\to+\infty$ thì $(2x-m)>0$ và $|2x-m|\to+\infty$ nên $f(t)+t>0\Rightarrow g'(x)>0$.

Để hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0;1)$ thì

$$\left[\begin{array}{l} (0;1)\in\left(-\infty;\dfrac{m}{2}-2\right) \\ (0;1)\in\left(\dfrac{m}{2};\dfrac{m}{2}+2\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1\le m\le\dfrac{m}{2}-2 \\ \dfrac{m}{2}\le 0<1\le\dfrac{m}{2}+2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge 6 \\ -2\le m\le 0 \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện $m\in\mathbb{N}$ và $m\le 100$ nên suy ra $m\in\{0;6;7;8;...;100\}$.

Vậy có tất cả 96 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2:

Ta có: $g(x)=f\left(|m-2x|\right)+x^2-mx\Rightarrow g'(x)=\dfrac{(2x-m)\left[2f'\left(|m-2x|\right)+|m-2x|\right]}{|m-2x|}$.

Để hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ thì $g'(x)\le 0,\forall x\in(0;1)$

Trường hợp 1: $m-2x>0\Leftrightarrow x<\dfrac{m}{2}$

Ta có $g'(x)=-\left[2f'(m-2x)+(m-2x)\right]\le 0\Leftrightarrow 2f'(m-2x)+(m-2x)\ge 0$

$$\Leftrightarrow f'(m-2x)\ge-\frac{(m-2x)}{2}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}-2\le m-2x\le 1\\ m-2x\ge 4\end{array}\right.\\ \dfrac{m}{2}\ge 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}m-1\le 2x\le m+2\\ m-4\ge 2x\end{array}\right.\\ \dfrac{m}{2}\ge 1\end{array}\right.,\forall x\in(0;1)$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}m-1\le 0\\ m+2\ge 2\end{array}\right.\Leftrightarrow 0\le m\le 1\\ m-4\ge 2\end{array}\right.\\ m\ge 2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}0\le m\le 1\\ m\ge 6\end{array}\right.\\ m\ge 2\end{array}\right.\Leftrightarrow m\ge 6.$$

Trường hợp 2: $m-2x<0\Leftrightarrow x>\dfrac{m}{2}$

Ta có $g'(x)=2f'(2x-m)+(2x-m)\le 0 \Leftrightarrow f'(2x-m)\le -\dfrac{(2x-m)}{2}, \forall x\in(0;1)$

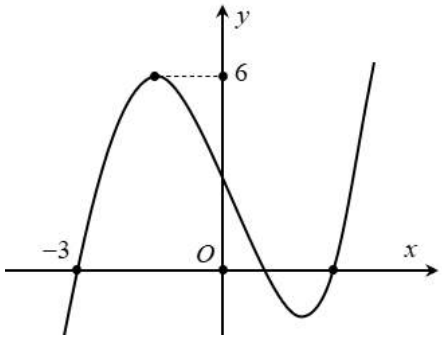
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2x-m\le -2 \\ 0\le 2x-m\le 4 \end{array}\right. \\ m\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m-2\ge 2x \\ m\le 2x\le m+4 \end{array}\right. \\ m\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m-2\ge 2 \\ \begin{cases} m\le 0 \\ m+4\ge 2 \end{cases} \end{array}\right. \\ m\le 0 \end{cases}, \forall x\in(0;1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m\ge 4 \\ -2\le m\le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow -2\le m\le 0 \\ m\le 0 \end{cases}$$

Từ hai trường hợp và điều kiện $m\in\mathbb{N}$ và $m\le 100$ nên suy ra $m\in\{0;6;7;8;...;100\}$.

Vậy có tất cả 96 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[0;23]$ để hàm số $y=\left|f(x)-2m^2x+m-1\right|$ đồng biến trên khoảng $(-3;0)$? Biết rằng tọa độ điểm cực tiểu của hàm số $y=f(x)$ là $(-3;5)$?

A. 1. **B.** 22. **C.** 3. **D.** 20.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x)=f(x)-2m^2x+m-1$ có $g'(x)=f'(x)-2m^2$.

Do hàm số $y==f(x)$ có điểm cực tiểu là $(-3;5)$ nên ta có $f(-3)=5$.

Để hàm số $y=\left|g(x)\right|$ đồng biến trên khoảng $(-3;0)$ thì xảy ra hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\begin{cases} g'(x)\ge 0 \\ g(-3)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x)-2m^2\ge 0 \\ f(-3)+6m^2+m-1\ge 0 \end{cases}, \forall x\in(-3;0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2\le f'(x) \\ 6m^2+m+4\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2\le 0 \\ 6m^2+m+4\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow m=0$$

Trường hợp 2: $\begin{cases} g'(x)\le 0 \\ g(-3)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x)-2m^2\le 0 \\ f(-3)+6m^2+m-1\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2\ge f'(x) \\ 6m^2+m+4\le 0 \end{cases}$

Do $6m^2+m+4>0,\ \forall m$ nên trường hợp 2 không thỏa mãn.

Kết hợp điều kiện $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in[0;23]$ suy ra $m\in\{0\}$.

Vậy có 1 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

2 Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham m thuộc đoạn $[-10;10]$ để hàm số $y=\left|-x^3+3(m+1)x^2-3m(m+2)x+m^2(m+3)\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

A. 21. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x)=-x^3+3(m+1)x^2-3m(m+2)x+m^2(m+3)$ trên khoảng $(0;2)$.

$f'(x)=-3x^2+6(m+1)x-3m(m+2)=-3\left[x^2-2(m+1)x+m(m+2)\right]$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=m+2 \end{array}\right.$ $(m<m+2)$. **Nhận xét:** $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=m+3 \end{array}\right.$

x	$-\infty$	m		$m+2$		$m+3$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	-	
$f(x)$	$+\infty$	0				0	$-\infty$
$\lvert f(x)\rvert$	$+\infty$	0				0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số $y=\left|f(x)\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$ khi

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (0;1)\subset(m;\ m+2) \\ (0;1)\subset(m+3;\ +\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le 0<1\le m+2 \\ m+3\le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1\le m\le 0 \\ m\le -3 \end{array}\right.$.

Mà m nguyên thuộc khoảng $[-10;10]$ nên có 10 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2: Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2019;2019]$ của tham số thực m để hàm số $y=\left|x^3-3(m+2)x^2+3m(m+4)x\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;4)$?

A. 4033. **B.** 4032. **C.** 2018. **D.** 2016.

Lời giải

Chọn A

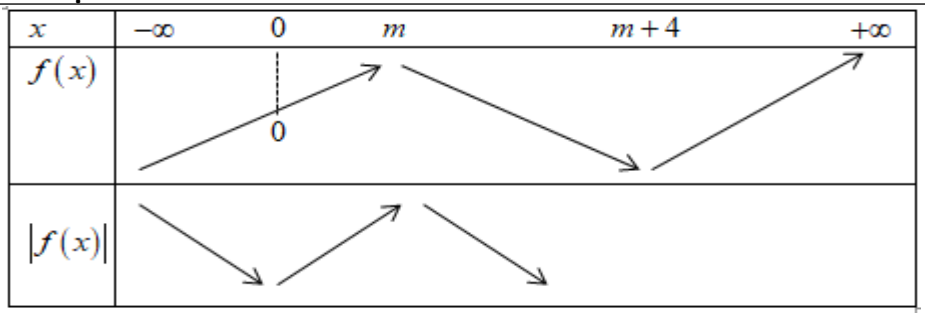
Xét hàm số $f(x)=x^3-3(m+2)x^2+3m(m+4)x$ trên khoảng $(0;4)$

$f'(x)=3x^2-6(m+2)x+3m(m+4)=3\left[x^2-2(m+2)x+m(m+4)\right]$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=m+4 \end{array}\right.$ $(m<m+4)$

Nhận xét: Đồ thị hàm số $y=f(x)$ luôn đi qua điểm $O(0;0)$.

Trường hợp 1: Nếu $m>0$

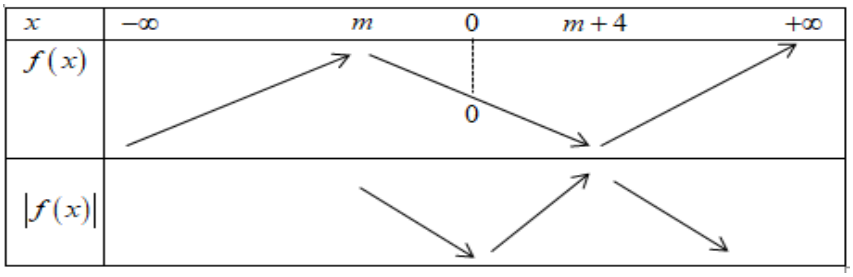


Từ bảng biến thiên, suy ra

hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ đồng biến trên khoảng $\left(0;4\right)\Leftrightarrow\left(0;4\right)\subset\left(0;m\right)\Leftrightarrow m\geq 4$

Kết hợp với $m>0$, ta có $m\geq 4$.

Trường hợp 2: Nếu $m\leq 0<m+4\ \Leftrightarrow -4<m\leq 0$

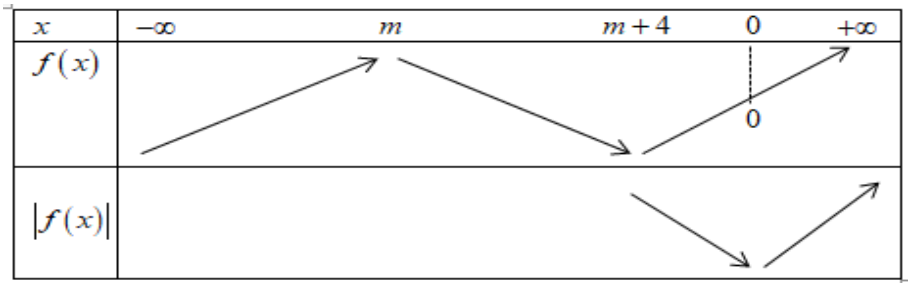


Từ bảng biến thiên, suy ra

hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ đồng biến trên khoảng $\left(0;4\right)\Leftrightarrow\left(0;4\right)\subset\left(0;m+4\right)\ \Leftrightarrow m+4\geq 4\Leftrightarrow m\geq 0$

Kết hợp với $-4<m\leq 0$, ta có $m=0$.

Trường hợp 3: Nếu $m+4\leq 0\Leftrightarrow m\leq -4$



Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ luôn đồng biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$ nên hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ đồng biến trên khoảng $\left(0;4\right)$ với mọi $m\leq -4$. Vậy $\left[\begin{array}{l} m\geq 4 \\ m=0 \\ m\leq -4 \end{array}\right.$

Mà m nguyên thuộc khoảng $\left[-2019;2019\right]$ nên có 4033 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của $m<5$ để hàm số $y=\left|\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+m\right|$ đồng biến trên $(0,+\infty)$?

A. 2 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 8

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+m$ ta có $y'=x^2+x+1>0,\forall x\in R.$

Suy ra hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+m$ luôn đồng biến trên R.

Do đó điều kiện hàm số $y=\left|\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+m\right|$ đồng biến trên $(0,+\infty)$ là $y_{(0)}\geq 0 \Rightarrow m\geq 0.$

Lại có m nguyên dương và $m<5$ vậy có 4 giá trị của m

Câu 4: Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y=\left|x^5-mx+4\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y=\begin{cases}x^5-mx+4 & khi\left(x^5-mx+4\geq 0\right)\\ -x^5+mx-4 & khi\left(x^5-mx+4<0\right)\end{cases}$; $y'=\begin{cases}5x^4-m & khi\left(x^5-mx+4\geq 0\right)\\ -5x^4+m & khi\left(x^5-mx+4<0\right)\end{cases}$

Trường hợp 1: $y'=\begin{cases}5x^4-m\geq 0\\ x^5-mx+4\geq 0\end{cases}, \forall x\geq 1\Leftrightarrow\begin{cases}m\leq 5x^4\\ m\leq x^4+\frac{4}{x}\end{cases}, \forall x\geq 1\Leftrightarrow\begin{cases}m\leq 5\\ m\leq 1+4\end{cases}\Leftrightarrow m\leq 5.$

Trường hợp 2: $y'=\begin{cases}-5x^4+m\geq 0\\ x^5-mx+4<0\end{cases}, \forall x\geq 1.$ Hệ vô nghiệm vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^5-mx+4\right)=+\infty.$

Vậy $\begin{cases}m\leq 5\\ m\in\mathbb{Z}^+\end{cases}\Rightarrow m\in\{1,2,3,4,5\}.$

Câu 5: Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-10;10)$ để hàm số $y=\left|2x^3-2mx+3\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 12. **B.** . **C.** 11. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số: $f(x)=2x^3-2mx+3$ có $f'(x)=6x^2-2m$

Trường hợp 1: Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ và $f(1)\geq 0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}6x^2-2m\geq 0\\ 5-2m\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\leq 3x^2\ \forall x\in(1;+\infty)\\ m\leq\frac{5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\leq 3\\ m\leq\frac{5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow m\leq\frac{5}{2}$

Suy ra có 12 giá trị m thỏa yêu cầu

Trường hợp 2: Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$ và $f(1)\leq 0$

Trường hợp này không xảy ra do $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Vậy có tất cả 12 giá trị m thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 6: Cho hàm số $y=\left|x^5-mx+1\right|$. Gọi S là tập tất cả các số nguyên dương m sao cho hàm số đồng biến trên $[1;+\infty)$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 15 **B.** 14 **C.** 12 **D.** 13

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=\dfrac{x^5-mx+1}{\left|x^5-mx+1\right|}.\left(5x^4-m\right)$

Để hàm số đồng biến trên $[1;+\infty)$ thì $g(x)=\left(x^5-mx+1\right)\left(5x^4-m\right)\geq 0$ (*), $\forall x\geq 1$.

Với $m=0$ ta có $g(0)=\left(x^5+1\right).5x^4>0, \forall x\geq 1$.

Với $m>0$. Do $m\in \mathrm{N} \Rightarrow (*)$ luôn có 1 nghiệm là $\sqrt[4]{\dfrac{m}{5}}$. Ta chú ý $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

Do vậy, điều kiện cần để $g(x)\geq 0, \forall x\geq 1$ là $\sqrt[4]{\dfrac{m}{5}}\leq 1 \Leftrightarrow m\leq 5$.

Với $m=1$, $m=2$; $m=3$; $m=4$; $m=5$, thay vào (*) kiểm tra bảng xét dấu thấy đúng
$\Rightarrow$nhận $m=1; m=2$; $m=3; m=4; m=5$
Vậy $S=\{1;2;3;4;5\}$. Tổng các phần tử của S là 15.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=\left|x^2-2mx+m+2\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-9;9]$ để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 3 **B.** 2 **C.** 16 **D.** 9

Lời giải

Chọn A

Xét hàm $g(x)=x^2-2mx+m+2$. Ta có $g'(x)=2x-2m$.

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ khi và chỉ khi

$\begin{cases} g(0)\geq 0 \\ g'(x)\geq 0 \end{cases}, \forall x\in(0;2)$ hoặc $\begin{cases} g(0)\leq 0 \\ g'(x)\leq 0 \end{cases}, \forall x\in(0;2)$.

Trường hợp 1: $\begin{cases} g(0)\geq 0 \\ g'(x)\geq 0 \end{cases}, \forall x\in(0;2) \Leftrightarrow \begin{cases} m+2\geq 0 \\ -2m\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2\leq m\leq 0$.

Trường hợp 2: $\begin{cases} g(0)\leq 0 \\ g'(x)\leq 0 \end{cases}, \forall x\in(0;2) \Leftrightarrow \begin{cases} m+2\leq 0 \\ -2m\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\leq -2 \\ m\geq 0 \end{cases}$ vô nghiệm.

Do m là nguyên thuộc $[-9;9]$ nên $m\in\{-2, -1, 0\}$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)=\left|-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}(2m+3)x^2-(m^2+3m)x+\dfrac{2}{3}\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-9;9]$ để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 16. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm $g(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}(2m+3)x^2-(m^2+3m)x+\frac{2}{3}$. Ta có

$g'(x)=-x^2+(2m+3)x-(m^2+3m)=-(x-m)(x-m-3).$

Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ khi và chỉ khi

$\begin{cases}g(2)\le 0\\ g'(x)\ge 0\end{cases},\forall x\in(1;2)$ hoặc $\begin{cases}g(2)\ge 0\\ g'(x)\le 0\end{cases},\forall x\in(1;2)$.

Trường hợp 1.

$\begin{cases}g(2)\le 0\\ g'(x)\ge 0\end{cases},\forall x\in(1;2)\Leftrightarrow\begin{cases}-2m^2-2m+4\le 0\\ -(x-m)(x-m-3)\ge 0\end{cases},\forall x\in(1;2)\Leftrightarrow\begin{cases}m\in(-\infty;-2]\cup[1;+\infty)\\ m\in[-1;1]\end{cases}\Leftrightarrow m=1.$

Trường hợp 2.

$\begin{cases}g(2)\ge 0\\ g'(x)\le 0\end{cases},\forall x\in(1;2)\Leftrightarrow\begin{cases}-2m^2-2m+4\ge 0\\ -(x-m)(x-m-3)\le 0\end{cases},\forall x\in(1;2)\Leftrightarrow\begin{cases}m\in[-2;1]\\ m\in(-\infty,-2]\cup[2;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow m=-2.$

Do m là nguyên thuộc $[-9;9]$ nên $m\in\{1,-2\}$.

Câu 9: Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in(-20;20)$ để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

A. 4. **B.** 30. **C.** 8. **D.** 15.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y=\begin{cases}3x^4-4x^3-12x^2+m & \left(3x^4-4x^3-12x^2+m\ge 0\right)\\ -3x^4+4x^3+12x^2-m & \left(3x^4-4x^3-12x^2+m<0\right)\end{cases}$

Nên $y'=\begin{cases}12x^3-12x^2-24x & \left(3x^4-4x^3-12x^2+m\ge 0\right)\\ -12x^3+12x^2+24x & \left(3x^4-4x^3-12x^2+m<0\right)\end{cases}$

Yêu cầu bài toán tương đương với

Trường hợp 1: $\begin{cases}12x^3-12x^2-24x\le 0\\ 3x^4-4x^3-12x^2+m\ge 0\end{cases},\forall x>1$

$m\ge -3x^4+4x^3+12x^2,\forall x<-1\Leftrightarrow m\ge 5$

Trường hợp 1: $\begin{cases}-12x^3+12x^2+24x\le 0\\ 3x^4-4x^3-12x^2+m<0\end{cases},\forall x>1\Rightarrow$ Hệ này vô nghiệm.

Vậy $m\in\{5;6;...;19\}$. Có 15 số nguyên thỏa mãn.

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên không âm m để hàm số $y=\left|x^4-mx^2+9\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

A. 3. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=\begin{cases}x^4-mx^2+9 & \left(x^4-mx^2+9\ge 0\right)\\ -x^4+mx^2-9 & \left(x^4-mx^2+9<0\right)\end{cases}$ nên $y'=\begin{cases}4x^3-2mx & \left(x^4-mx^2+9\ge 0\right)\\ -4x^3+2mx & \left(x^4-mx^2+9<0\right)\end{cases}$

Yêu cầu bài toán tương đương với

Trường hợp 1: $\begin{cases}4x^3-2mx\ge 0\\ x^4-mx^2+9\ge 0\end{cases},\forall x>1\Leftrightarrow\begin{cases}m\le 2x^2\\ m\le x^2+\dfrac{9}{x^2}\end{cases},\forall x>1\Leftrightarrow\begin{cases}m\le 2x^2\\ m\le x^2+\dfrac{9}{x^2}\end{cases},\forall x\ge 1$

$\Leftrightarrow m\le 2\Rightarrow m\in\{0;1;2\}$

Trường hợp 2: $\begin{cases}-4x^3+2mx\ge 0\\ x^4-mx^2+9<0\end{cases},\forall x>1$

Hệ này vô nghiệm vì khi $x\to+\infty$ thì $x^4-mx^2+9\to+\infty$.

Câu 11: Cho hàm số $y=\left|\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(m+3)x^2+(2m+3)x-1\right|$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$. Chọn mệnh đề **sai**?

A. S có 4 phần tử.

B. Tổng các giá trị của m thuộc S bằng 6.

C. Tích các giá trị của m thuộc S bằng 0.

D. Giá trị m lớn nhất thuộc S bằng 4.

Lời giải

Chọn D

Đặt $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(m+3)x^2+(2m+3)x-1.$

Ta có: $f'(x)=x^2-(m+3)x+2m+3$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}f'(x)\ge 0,\forall x\in(4;+\infty)\\ f(4)\ge 0\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}f'(x)\le 0,\forall x\in(4;+\infty)\\ f(4)\le 0\end{cases}$$

Trường hợp 1: $\begin{cases}f'(x)\ge 0,\forall x\in(4;+\infty)\\ f(4)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-(m+3)x+(2m+3)\ge 0,\forall x\in(4;+\infty)\\ 16-4(m+3)+2m+3\ge 0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\le\dfrac{x^2-3x+3}{x-2},\forall x\in(4;+\infty)\\ m\le\dfrac{7}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le\min\limits_{[4;+\infty)}\dfrac{x^2-3x+3}{x-2}\\ m\le\dfrac{7}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le\dfrac{7}{2}\\ m\le\dfrac{7}{2}\end{cases}\Leftrightarrow m\le\frac{7}{2}$$

Trường hợp 2: $\begin{cases}f'(x)\le 0,\forall x\in(4;+\infty)\\ f(4)\le 0\end{cases}$

Hệ vô nghiệm vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-(m+3)x+(2m+3)\right)=+\infty$.

Vậy $m\le\frac{7}{2}, m$ nguyên dương nên $m\in\{0;1;2;3\}$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)=\left|x^3-(2m-5)x+2018\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2019;2019]$ để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;3)$?

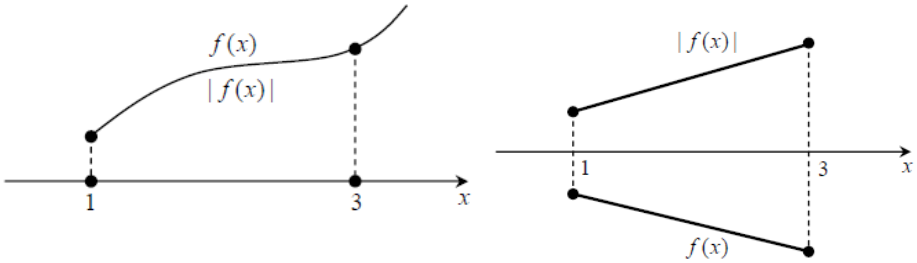
A. 3032. **B.** 4039. **C.** 0. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x)=x^3-(2m-5)x+2018$, có đạo hàm $f'(x)=3x^2-(2m-5)$.

Hàm số $y=|f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$ thì đồ thì của hàm số trong khoảng $(1;3)$ phải có hình dạng như sau:



Trường hợp 1: Hàm số $f(x)$ đồng biến trong khoảng $(1;3)$ và không âm trên $(1;3)$ tức là:

$$\begin{cases} f(1)\ge 0 \\ f'(x)\ge 0\ \forall x\in(1;3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m\le 3x^2+5\ \forall x\in(1;3) \\ 2024-2m\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\le 4 \\ m\le 1012 \end{cases} \Leftrightarrow m\le 4.$$

Trường hợp 2: Hàm số $f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(1;3)$ và không dương trên $(1;3)$ tức là:

$$\begin{cases} f(1)\le 0 \\ f'(x)\le 0\ \forall x\in(1;3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m\ge 3x^2+5\ \forall x\in(1;3) \\ 2024-2m\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge 4 \\ m\ge 1012 \end{cases} \Leftrightarrow m\ge 1012.$$

Kết hợp với điều kiện ta được kết quả $m\in[-2019;4]\cup[1012;2019]$. Vậy có 3032 giá trị của m.

Câu 13: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=g(x)=\left|x^3-3(m+1)x^2+3m(m+2)x\right|$ đồng biến trên nửa đoạn $[0;+\infty)$ biết rằng $-2021\le m\le 2021$?

A. 2020. **B.** 2021. **C.** 2022. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số: $y=f(x)=x^3-3(m+1)x^2+3m(m+2)x$. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=3x^2-6(m+1)x+3m(m+2)$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=m \\ x=m+2 \end{array}\right.(m<m+2,\forall m)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		m		$m+2$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗		↘		↗	$+\infty$

.

Gọi (C_1) là phần đồ thị của hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+3m(m+2)x$ nằm trên $0x$.

Gọi (C_2) là phần đồ thị của hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+3m(m+2)x$ nằm dưới $0x$.

Gọi (C_2') là phần đồ thị đối xứng với (C_2) qua $0x$.

Suy ra đồ thị hàm số $y=g(x)=\left|x^3-3(m+1)x^2+3m(m+2)x\right|$ gồm $(C_1)\cup(C_2')$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: hàm số $y=g(x)=\left|x^3-3(m+1)x^2+3m(m+2)x\right|$ đồng biến trên nửa đoạn $[0;+\infty)$ khi và chỉ khi $\begin{cases}m+2\le 0\\ f(0)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow m\le -2$.

Kết hợp với điều kiện $-2021\le m\le 2021$, ta suy ra có 2020 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 14: Gọi $S=[a;+\infty)$ là tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\left|x^3-3x^2+mx+3m+1\right|$ đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$. Khi đó a bằng

A. -3. **B.** 19. **C.** 3. **D.** -2.

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(x)=x^3-3x^2+mx+3m+1\Rightarrow f'(x)=3x^2-6x+m$.

Trường hợp 1: $\begin{cases}f'(x)\ge 0,\forall x\in(-2;+\infty)\\ f(-2)\ge 0\end{cases}$.

$\begin{cases}f'(x)\ge 0,\forall x\in(-2;+\infty)\\ f(-2)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2-6x+m\ge 0,\forall x\in(-2;+\infty)\\ m\ge 19\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge -3x^2+6x,\forall x\in(-2;+\infty)\\ m\ge 19\end{cases}$

$\begin{cases}m\ge \max\limits_{x\in(-2;+\infty)}\left(-3x^2+6x\right)\\ m\ge 19\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge 3\\ m\ge 19\end{cases}\Leftrightarrow m\ge 19$.

Trường hợp 1: $\begin{cases}f'(x)\le 0,\forall x\in(-2;+\infty)\\ f(-2)\le 0\end{cases}$.

$\begin{cases}f'(x)\le 0,\forall x\in(-2;+\infty)\\ f(-2)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2-6x+m\le 0,\forall x\in(-2;+\infty)\\ m-19\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le -3x^2+6x,\forall x\in(-2;+\infty)\\ m\le 19\end{cases}$

$\begin{cases}m\le \min\limits_{(-2;+\infty)}\left(-3x^2+6x\right)\\ m\le 19\end{cases}$.

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3x^2+6x\right)=-\infty\Rightarrow$ hàm số $y=-3x^2+6x$ không có giá trị nhỏ nhất. Vì vậy TH2 không có giá trị m thỏa mãn. Vậy tập các giá trị m cần tìm là $S=[19;+\infty)$.

Câu 15: Tính tổng S tất cả các giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-10;10]$ để hàm số $y=\left|\dfrac{mx+3}{x+m+2}\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

A. $S=55$. **B.** $S=54$. **C.** $S=3$. **D.** $S=5$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y=\dfrac{mx+3}{x+m+2}$ với $x\neq -m-2$, có $y'=\dfrac{m^2+2m-3}{(x+m+2)^2}$.

Hàm số $y=\left|\dfrac{mx+3}{x+m+2}\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$ khi xảy ra một trong hai trường hợp sau :

Trường hợp 1: $\begin{cases} y'=\dfrac{m^2+2m-3}{(x+m+2)^2}>0 \\ y(1)\geq 0 \\ -m-2\notin(1;+\infty) \end{cases}, \forall x>1 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+2m-3>0 \\ \dfrac{m+3}{m+3}\geq 0 \\ -m-2\leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-3 \\ m>1 \end{array}\right. \\ m\geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow m>1.$

Trường hợp 2: $\begin{cases} y'=\dfrac{m^2+2m-3}{(x+m+2)^2}<0 \\ y(1)\leq 0 \\ -m-2\notin(1;+\infty) \end{cases}, \forall x>1 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+2m-3<0 \\ \dfrac{m+3}{m+3}\leq 0 \\ -m-2\leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m\in\varnothing.$

Vậy $m\in(1;+\infty)$, lại do $\begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ m\in[-10;10] \end{cases}$ suy ra $m\in\{2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$, vậy $S=54$.

Câu 16: Tìm *m* để hàm số $y=\left|\dfrac{x-2m+1}{x+m}\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$

A. $\dfrac{1}{3}<m\leq 1.$ **B.** $m\in[-1;1]\setminus\left\{\dfrac{1}{3}\right\}.$ **C.** $-1\leq m<\dfrac{1}{3}.$ **D.** $\dfrac{1}{3}<m\leq 1.$

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(x)=\dfrac{x-2m+1}{x+m}$. Điều kiện: $x\neq -m$ khi đó $f'(x)=\dfrac{3m-1}{(x+m)^2}$

Để hàm số đồng biến trên $(1;+\infty) \Leftrightarrow y'=\dfrac{f'(x).f(x)}{|f(x)|}\geq 0, \forall x\in(1;+\infty)$

$\begin{cases} f'(x)>0, \forall x\in(1;+\infty) \\ f(1)\geq 0 \end{cases}(I)$ hoặc $\begin{cases} f'(x)<0, \forall x\in(1;+\infty) \\ f(1)\leq 0 \end{cases}(II)$

Ta có $(I)\Leftrightarrow \begin{cases} 3m-1>0 \\ -m\leq 1 \\ \dfrac{2-2m}{1+m}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}<m\leq 1$; $(II)\Leftrightarrow \begin{cases} 3m-1<0 \\ -m\leq 1 \\ \dfrac{2-2m}{1+m}\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\in\varnothing$. Vậy $\dfrac{1}{3}<m\leq 1.$

Câu 17: Có bao nhiêu số nguyên của tham số *m* để hàm số $y=\left|\dfrac{x^2-2x+2m+2}{x-1}\right|$ đồng biến trên $[3;+\infty)$?

A. 4. **B.** 5. **C.** vô số. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2m+2}{x-1}$ có $f'(x)=\dfrac{x^2-2x-2m}{(x-1)^2}$

Khi đó $y=|f(x)|=\sqrt{f^2(x)}\Rightarrow y'=\dfrac{f'(x).f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$

Hàm số đồng biến trên $[3;+\infty)\Leftrightarrow y'\ge 0,\forall x\in[3;+\infty)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}f'(x).f(x)\ge 0\\ f(x)\ne 0\end{cases},\forall x\in[3;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0\\ f'(x)\ge 0\end{cases},\forall x\in[3;+\infty)$ (vì $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$)

$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2-2x+2m+2}{x-1}>0\\ \dfrac{x^2-2x-2m}{(x-1)^2}\ge 0\end{cases},\forall x\in[3;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x+2m+2>0\\ x^2-2x-2m\ge 0\end{cases},\forall x\in[3;+\infty)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2m+2>-x^2+2x\\ 2m\le x^2-2x\end{cases},\forall x\in[3;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases}2m+2>\max\limits_{[3;+\infty)}\left(-x^2+2x\right)\\ 2m\le\min\limits_{[3;+\infty)}\left(x^2-2x\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2m+2>-3\\ 2m\le 3\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m>-\dfrac{5}{2}\\ m\le\dfrac{3}{2}\end{cases}$. Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-2;-1;0;1\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 18: Tìm tất cả các giá thực của tham số m để hàm số $y=\left|x-\dfrac{2}{x}+m\right|$ đồng biến trên $[1;+\infty)$.

A. $m\le -1$ **B.** $-1<m\le 1$ **C.** $m\ge 1$ **D.** $m>0$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y=\left|x-\dfrac{2}{x}+m\right|=\sqrt{\left(x-\dfrac{2}{x}+m\right)^2}\Rightarrow y'=\dfrac{\left(x-\dfrac{2}{x}+m\right)\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)}{\sqrt{\left(x-\dfrac{2}{x}+m\right)^2}}$

Hàm số đồng biến trên $[1;+\infty)\Leftrightarrow y'\ge 0,\forall\in[1;+\infty)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x-\dfrac{2}{x}+m\right)\ge 0\\ \left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)\ge 0\end{cases},\forall\in[1;+\infty)\Leftrightarrow\left(x-\dfrac{2}{x}+m\right)\ge 0,\forall\in[1;+\infty)$

$\Leftrightarrow\left(x-\dfrac{2}{x}+m\right)\ge 0,\forall\in[1;+\infty)\Leftrightarrow m\ge -x+\dfrac{2}{x},\forall\in[1;+\infty)$

$\Leftrightarrow m\ge\max\limits_{[1;+\infty)}\left(-x+\dfrac{2}{x}\right)(*)$

Xét hàm số $g(x)=-x+\frac{2}{x},\forall x\in[1;+\infty) \Rightarrow g'(x)=-1-\frac{2}{x^2}<0,\forall x\in[1;+\infty)$

$\Rightarrow \max\limits_{[1;+\infty)} g(x)=\max\limits_{[1;+\infty)}\left(-x+\frac{2}{x}\right)=g(1)=1$. Vậy $(*)\Leftrightarrow m\ge 1.$

Câu 19: Tính tổng tất cả các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=\left|\frac{x^3-2mx+2}{x-1}\right|$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

A. 3 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 5

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x)=\frac{x^3-2mx+2}{x-1}$. Ta có: $f'(x)=\frac{2x^3-3x^2+2m-2}{(x-1)^2}$.

Khi đó $y=\left|\frac{x^3-2mx+2}{x-1}\right|=|f(x)|=\sqrt{f^2(x)}$ nên $y'=\frac{f'(x).f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi $y'\ge 0$ với $\forall x\in(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x).f(x)\ge 0 \\ f(x)\ne 0 \end{cases},\forall x\in(2;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ f'(x)\ge 0 \end{cases},\forall x\in(2;+\infty)$ (do $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$)

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(2)\ge 0 \\ \frac{2x^3-3x^2+2m-2}{(x-1)^2}\ge 0,\forall x\in(2;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10-4m\ge 0 \\ 2x^3-3x^2+2m-2\ge 0,\forall x\in(2;+\infty) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\le \frac{5}{2} \\ 2m\ge -2x^3+3x^2+2,\forall x\in(2;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\le \frac{5}{2} \\ 2m\ge \max\limits_{x\in[2;+\infty)}\left(-2x^3+3x^2+2\right) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\le \frac{5}{2} \\ 2m\ge -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\le \frac{5}{2} \\ m\ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1\le m\le \frac{5}{2}$

Vì $m\in\mathbb{Z}^+$ nên $m\in\{1;2\}$. Vậy tổng các giá trị nguyên dương của m là 3.

Câu 20: Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của m để hàm số $y=\left|x+5+\frac{1-m}{x-2}\right|$ đồng biến trên $[5;+\infty)$?

A. 11. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D=R\setminus\{2\}$.

Xét hàm số $f(x)=x+5+\frac{1-m}{x-2}$. Đạo hàm: $f'(x)=1+\frac{m-1}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+m+3}{(x-2)^2}$.

Khi đó $y=\left|f\left(x\right)\right|=\sqrt{f^2\left(x\right)}$ nên $y'=\dfrac{f'\left(x\right).f\left(x\right)}{\sqrt{f^2\left(x\right)}}$.

Hàm số đồng biến trên $\left[5;+\infty\right)$ khi và chỉ khi $y'\ge 0,\forall x\in\left[5;+\infty\right)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}f'\left(x\right).f\left(x\right)\ge 0\\ f\left(x\right)\ne 0\end{cases},\forall x\in\left[5;+\infty\right)\Leftrightarrow\begin{cases}f\left(x\right)>0\\ f'\left(x\right)\ge 0\end{cases},\forall x\in\left[5;+\infty\right)$ (vì $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=+\infty$)

$\Leftrightarrow\begin{cases}x+5+\dfrac{1-m}{x-2}>0\\ 1+\dfrac{m-1}{\left(x-2\right)^2}\ge 0\end{cases},\forall x\in\left[5;+\infty\right)\Leftrightarrow\begin{cases}m<x^2+3x-9\\ m\ge -x^2+4x-3\end{cases},\forall x\in\left[5;+\infty\right)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m<\min\limits_{[5;+\infty)}\left(x^2+3x-9\right)\\ m\ge\max\limits_{[5;+\infty)}\left(-x^2+4x-3\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<5^2+3.5-9\\ m\ge -5^2+4.5-3\end{cases}\Leftrightarrow -8\le m<31.$

Mà m nguyên âm nên ta có: $m\in\left\{-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1\right\}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên âm của m để hàm số $y=\left|x+5+\dfrac{1-m}{x-2}\right|$ đồng biến trên $\left[5;+\infty\right)$.

Câu 21: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\left|\dfrac{x-m+1}{x+m}\right|$ đồng biến trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$.

A. $m\le\dfrac{1}{2}$ hoặc $m\ge 2$. **B.** $\dfrac{1}{2}<m<2$. **C.** $\dfrac{1}{2}<m\le 2$. **D.** $\dfrac{1}{2}\le m\le 2$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $f\left(x\right)=\dfrac{x-m+1}{x+m},\ \left(x\ne -m\right)\ \Rightarrow\ f'\left(x\right)=\dfrac{2m-1}{\left(x+m\right)^2}$

Để hàm số y đồng biến trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$ thì $y'\ge 0\Leftrightarrow\dfrac{f'\left(x\right)\cdot f\left(x\right)}{\left|f\left(x\right)\right|}\ge 0,\ \forall x\in\left(1;+\infty\right)$

Trường hợp 1:

$\begin{cases}f'\left(x\right)<0,\forall x\in\left(1;+\infty\right)\\ f\left(1\right)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2m-1<0\\ -m\le 1\\ \dfrac{2-m}{m+1}\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<\dfrac{1}{2}\\ m\ge -1\\ m<-1\vee 2\le m\end{cases}\Leftrightarrow m\in\varnothing$

Trường hợp 2:

$\begin{cases}f'\left(x\right)>0,\forall x\in\left(1;+\infty\right)\\ f\left(1\right)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2m-1>0\\ -m\le 1\\ \dfrac{2-m}{1+m}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>\dfrac{1}{2}\\ m\ge -1\\ -1<m\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}<m\le 2$

Vậy để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$ thì $\dfrac{1}{2}<m\le 2$.

Câu 22: Cho hàm số $y=\left|\sqrt{2-x}+\sqrt{x+2}+\frac{m}{2}x-1\right|$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số nghịch biến trên $(0;1)$

A. 4 **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Đặt $f(x)=\sqrt{2-x}+\sqrt{x+2}+\frac{m}{2}x-1$. Ta có $f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{2-x}}+\frac{1}{2\sqrt{2+x}}+\frac{m}{2}$

Do hàm số liên tục tại $x=0;x=1$ nên để hàm số nghịch biến trên $(0;1)$ ta xét 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1:

$$\begin{cases} f'(x)\le 0,\forall x\in[0;1] \\ f(1)\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \frac{m}{2}\le \frac{1}{2\sqrt{2-x}}-\frac{1}{2\sqrt{2+x}},\forall x\in[0;1] \\ f(1)\ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \frac{m}{2}\le \frac{1}{2\sqrt{2-x}}-\frac{1}{2\sqrt{2+x}},\forall x\in[0;1] \\ \frac{m}{2}\ge -\sqrt{3} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \frac{m}{2}\le \min\limits_{x\in[0;1]}\left\{\frac{1}{2\sqrt{2-x}}-\frac{1}{2\sqrt{2+x}}\right\} \\ m\ge -2\sqrt{3} \end{cases}\Leftrightarrow -2\sqrt{3}\le m\le 0$$

Trường hợp 2:

$$\begin{cases} f'(x)\ge 0,\forall x\in[0;1] \\ f(1)\le 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \frac{m}{2}\ge \frac{1}{2\sqrt{2-x}}-\frac{1}{2\sqrt{2+x}},\forall x\in[0;1] \\ f(1)\le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \frac{m}{2}\ge \frac{1}{2\sqrt{2-x}}-\frac{1}{2\sqrt{2+x}},\forall x\in[0;1] \\ \frac{m}{2}\le -\sqrt{3} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \frac{m}{2}\ge \max\limits_{x\in[0;1]}\left\{\frac{1}{2\sqrt{2-x}}-\frac{1}{2\sqrt{2+x}}\right\} \\ \frac{m}{2}\le -\sqrt{3} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow\begin{cases} m\ge 1-\frac{1}{\sqrt{3}} \\ m\le -2\sqrt{3} \end{cases}$ (vô nghiệm). Do m nguyên nên m nhận các giá trị sau $-3;-2;-1;0$

Câu 23: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-5;5)$ để hàm số $y=\left|\sqrt{x^2-3}-2x-3m\right|$ nghịch biến trên $(2;3)$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-3}-2x-3m$. Ta có: $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-3}}-2\Leftrightarrow f'(x)=\frac{x-2\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{x^2-3}}$.

Cho $f'(x)=0\Rightarrow x-2\sqrt{x^2-3}=0\Rightarrow x=2$.

Ta thấy $f'(x)<0,\forall x\in(2;3)$ nên hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(2;3)$.

Để $y=\left|\sqrt{x^2-3}-2x-3m\right|$ nghịch biến trên $(2;3)$ thì

$f(3)\geq 0\Leftrightarrow \sqrt{6}-6-3m\geq 0\Leftrightarrow m\leq \dfrac{\sqrt{6}-6}{3}$

Do $m\in(-5;5)$ nên $m=\{-2;-3;-4\}$.

Câu 24: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|4\sqrt{x^2+2x+3}+5x-m^2+5\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 9 **B.** 6 **C.** 11 **D.** 8

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x)=4\sqrt{x^2+2x+3}+5x-m^2+5$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{4(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+3}}+5$

Với $x>1\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Vậy để hàm số $y=|f(x)|$ đồng biến trên $(1;+\infty)\Leftrightarrow f(1)\geq 0\Leftrightarrow -m^2+10+4\sqrt{6}\geq 0$

$\Leftrightarrow m^2\leq 10+4\sqrt{6}\Leftrightarrow -2-\sqrt{6}\leq m\leq 2+\sqrt{6}$

Mà $m\in\mathbb{Z},\Rightarrow m\in\{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$ suy ra chọn đáp án A

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)=\left|\sqrt{x^2+3}+2x+m^2-5m\right|$.Hỏi m thuộc khoảng nào trong các khoảng sau để hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

A. $(-\infty;0]$. **B.** $(1;4)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $[3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x)=\sqrt{x^2+3}+2x+m^2-5m$. Ta có $g'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}+2>0\,\forall x\in(1;+\infty)$.

Dễ thấy $g(x)$ liên tục trên $[1;+\infty)$ và $g'(x)>0\forall\, x\in(1;+\infty)$ nên $g(x)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$

$\Rightarrow g(1)\geq 0\Leftrightarrow m^2-5m+4\geq 0$ (*)

Nên $y=f(x)=|g(x)|$ đồng biến trên $[1;+\infty)\Rightarrow f(1)\geq 0$ kết hợp với (*) ta có:

$m^2-5m+4\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\leq 1\\ m\geq 4\end{array}\right.\cdot\left[\begin{array}{l}m\in(-\infty;1]\\ m\in[4;+\infty)\end{array}\right.$.Mà $m\in(-\infty;0]\subset(-\infty;1]$.

Câu 26: Tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|x^3-3x^2-9x-5+\dfrac{m}{2}\right|$ có 5 điểm cực trị là.

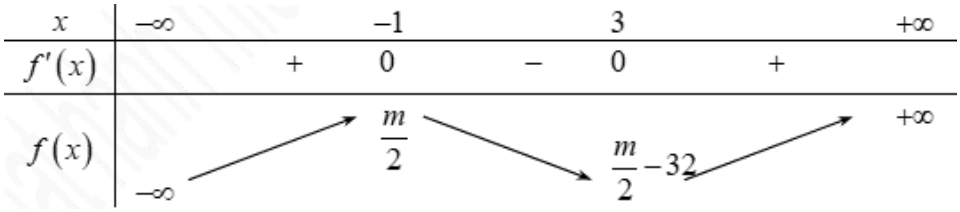
A. 2016. **B.** 1952. **C.** –2016. **D.** –496.

Lời giải

Chọn A

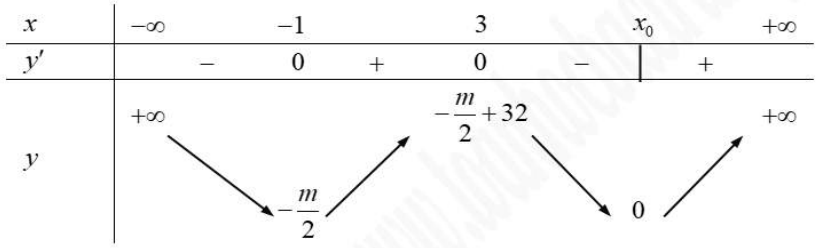
Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2-9x-5+\dfrac{m}{2}$. Ta có $f'(x)=3x^2-6x-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên



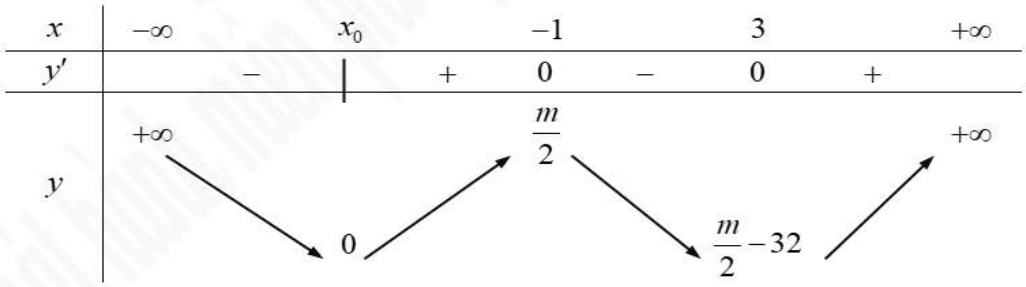
Do $y=\left|f(x)\right|=\begin{cases}f(x),f(x)\ge 0\\-f(x),f(x)<0\end{cases}$ nên

Nếu $\dfrac{m}{2}\le 0\Leftrightarrow m\le 0$ thì $f(x)=0$ có nghiệm $x_0>3$, ta có bảng biến thiên của hàm số đã cho là



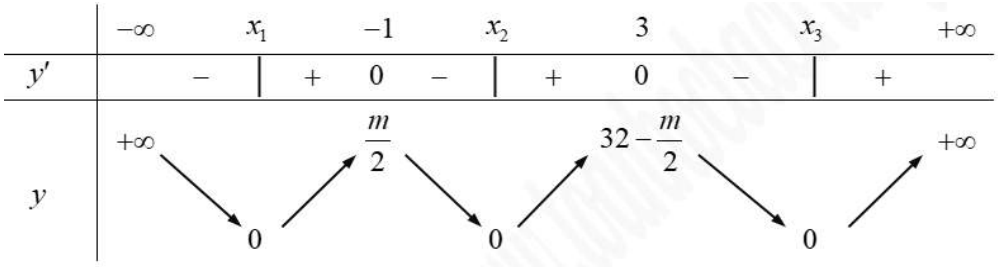
Trường hợp này hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Nếu $\dfrac{m}{2}-32\ge 0\Leftrightarrow m\ge 64$ thì $f(x)=0$ có nghiệm $x_0<-1$,ta có bảng biến thiên của hàm số đã cho là



Trường hợp này hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Nếu $\begin{cases}\dfrac{m}{2}>0\\\dfrac{m}{2}-32<0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<64$ thì $f(x)=x^3-3x^2-9x-5+\dfrac{m}{2}=0$ có ba nghiệm $x_1;\ x_2;\ x_3$ với $x_1<-1<x_2<3<x_3$, ta có bảng biến thiên của hàm số đã cho là



Trường hợp này hàm số đã cho có 5 điểm cực trị.

Như vậy, các giá trị nguyên của m để hàm số đã cho có 5 điểm cực trị là $m \in \{1;2;3;...;63\}$.

Tổng các giá trị nguyên này là: $S = 1+2+3+...+63 = \dfrac{63(1+63)}{2} = 2016$.

Câu 27: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $[-5;5]$ để hàm số $y = \left|\cos^3 x - 3m^2 \cos x\right|$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. 1. **B.** 11. **C.** 5. **D.** 6

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \cos x$, vì $x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0;1)$. Vì $t = \cos x$ là hàm số nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ nên

Yêu cầu bài toán trở thành tìm m nguyên thuộc $[-5;5]$ để hàm số $y = \left|t^3 - 3m^2 t\right|$ đồng biến trên $(0;1)$. Xét $f(t) = t^3 - 3m^2 t^2; t \in (0;1)$; $f'(t) = 3t^2 - 3m^2$.

Trường hợp 1: Nếu $m = 0 \Rightarrow f'(t) > 0; \forall t \in (0;1) \Rightarrow f(t)$ luôn đồng biến trên $(0;1)$.

Mà $f(0) = 0 \Rightarrow y = |f(t)|$ luôn đồng biến trên $(0;+\infty) \Rightarrow y = |f(t)|$ đồng biến trên $(0;1)$.

Do đó $m = 0$ thỏa mãn bài toán (1).

Trường hợp 2: $m \neq 0 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = m \\ t = -m \end{array}\right.$; $f(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -m\sqrt{3} \\ t = 0 \\ t = m\sqrt{3} \end{array}\right.$

Với $m > 0$, ta có BBT sau:

t	0		m		$m\sqrt{3}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$\lvert f(t)\rvert$	0	↗	$2m^3$	↘	0

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số $y = |f(t)|$ đồng biến trên $(0;m)$.

Yêu cầu bài toán tương đương $(0;1) \subset (0;m) \Leftrightarrow m \geq 1 \quad (2)$.

Với $m < 0$, ta có bảng biến thiên sau:

t	0		$-m$		$-m\sqrt{3}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$\lvert f(t)\rvert$	0	↗	$-2m^3$	↘	0

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y = |f(t)|$ đồng biến trên $(0;-m)$.

Yêu cầu bài toán tương đương $(0;1)\subset(0;-m)\Leftrightarrow m\le -1\,(3)$.

Từ $(1);(2);(3)$ vậy có 11 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 28: Có bao nhiêu giá trị *m* nguyên dương và nhỏ hơn 2020 để hàm số $y=\left|4^x-m.2^{x+1}+m+2\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

A. 2018. **B.** 2019. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x)=4^x-m.2^{x+1}+m+2$ (1) trên khoảng $(0;1)$. Đặt $t=2^x$, $t\in(1;2)$.

Hàm số (1) trở thành $h(t)=t^2-2m.t+m+2$ trên khoảng $(1;2)$. Suy ra $h'(t)=2t-2m$.

Ta có $y=|f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0;1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\ \text{ñoàng bieán treân}\ (0;1)\\ f(0)\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)\ \text{nghòch bieán treân}\ (0;1)\\ f(0)\le 0\end{cases}\end{array}\right.$ (*).

Vì hàm số $t=2^x$ đồng biến trên $(0;1)$.

Do đó, (*) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}h(t)\ \text{ñoàng bieán treân}\ (1;2)\\ 3-m\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}h(t)\ \text{nghòch bieán treân}\ (1;2)\\ 3-m\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2t-2m\ge 0\,\forall t\in(1;2)\\ 3-m\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}2t-2m\le 0\,\forall t\in(1;2)\\ 3-m\le 0\end{cases}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\le 1\\ m\le 3\end{cases}\\ \begin{cases}m\ge 2\\ m\ge 3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le 1\\ m\ge 3\end{array}\right.$. Vậy có 2018 số nguyên dương nhỏ hơn 2020 thỏa ycbt.

Câu 29: Có bao nhiêu số nguyên m thuộc $(-2020;2020)$ để hàm số $y=\left|\ln\left(x^2+2x-m\right)-2mx^2-1\right|$ luôn đồng biến trên $(0;10)$.

A. 4038. **B.** 2020. **C.** 2017. **D.** 2017.

Lời giải

Chọn C

Ta xét hàm số $f(x)=\ln\left(x^2+2x-m\right)-2mx^2-1$ trên $(0;10)$.

Điều kiện hàm số có nghĩa là $x^2+2x-m>0,\forall x\in(0;10)\Leftrightarrow x^2+2x>m,\forall x\in(0;10)$ (1)

Ta lại có $x^2+2x=x(x+2)>0$ với mọi $x\in(0;10)$ nên điều kiện (1) cho ta $m\le 0$ (2)

Đạo hàm $f'(x)=\dfrac{2x+2}{x^2+2x-m}-4mx$ do $m\le 0$ và $x\in(0;10)$ nên $\dfrac{2x+2}{x^2+2x-m}>0;-4mx\ge 0$

suy ra $f'(x)>0$ hàm số đồng biến trên $(0;10)$.

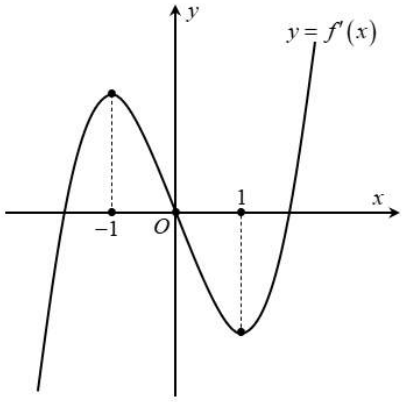
Từ đó để hàm số $y=\left|\ln\left(x^2+2x-m\right)-2mx^2-1\right|=|f(x)|$ đồng biến trên $(0;10)$ điều kiện đủ là $f(x)\ge 0$ với mọi $x\in(0;10)$ (3).

Trường hợp 1 : $m=0$ khi đó $f(x)=\ln\left(x^2+2x\right)-1$ có $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ không thỏa mãn (3)

Trường hợp 2 : Xét $m<0$, do hàm số $f(x)$ đồng biến nên ta chỉ cần $f(0)\ge 0$ $\Leftrightarrow \ln(-m)-1\ge 0 \Leftrightarrow -m\ge e \Leftrightarrow m\le -e$.

Từ đó ta được: $\begin{cases}-2020<m\le -e\\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow m\in\{-2019;-2018;-2017;....;-3\}$ có 2017 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Câu 30: Cho hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Biết rằng $f(1)=1$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2023;2023]$ để hàm số $y=\left|4f(\ln x)-\ln^2 x+1-2m\right|$ nghịch biến trên khoảng $(1;e)$.

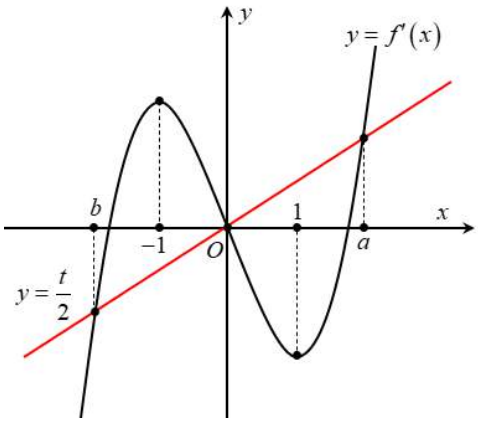
A. 2023. **B.** 2014. **C.** 2026. **D.** 4042.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(x)=4f(\ln x)-\ln^2 x+1-2m$ với $x>0$.

Ta có $g'(x)=4f'(\ln x).\dfrac{1}{x}-2\ln x.\dfrac{1}{x}$; $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(\ln x)=\dfrac{\ln x}{2}$. Đặt $t=\ln x$ ta có $f'(t)=\dfrac{t}{2}$



Dựa vào đồ thị phương trình $f'(t)=\dfrac{t}{2}$ có ba nghiệm lần lượt là $t=b<-1$; $t=0$ và $t=a>1$.

Suy ra $g'(x)=0$ có ba nghiệm lần lượt là $x=e^b<\dfrac{1}{e}$; $x=1$ và $x=e^a>e$.

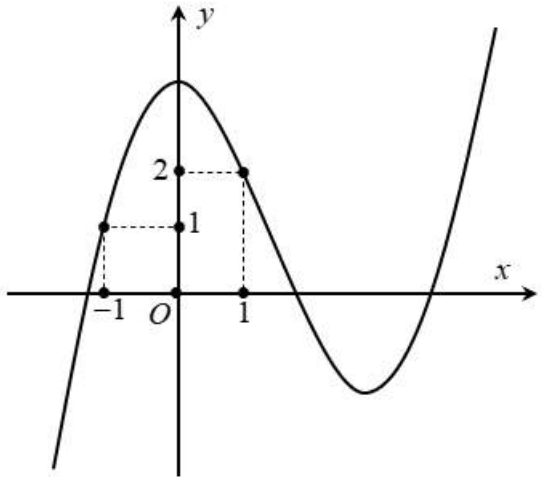
Bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)$.

x	0		e^b		1		e		e^a	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	
$g(x)$		↘		↗		↘	$g(e)$	↗		

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow g(e)=4-2m\ge 0\Leftrightarrow m\le 2\xrightarrow{m\in\mathbb{Z};\,m\in[-2023;2023]}-2023\le m\le 2$.

Suy ra có tất cả 2026 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 31: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-23;23]$ để hàm số $y=\left|2f(2-x)-mx^2+2(3m+1)x+m\right|$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$?

A. 43. **B.** 41. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $g(x)=2f(2-x)-mx^2+2(3m+1)x+m$

Ta có: $g'(x)=-2f'(2-x)-2mx+2(3m+1)=2\left[-f(2-x)-mx+3m+1\right]$.

Khi đó: $g(3)=2f(-1)-9m+2(3m+1).3+m=10m+8$.

Đặt $t=2-x\Rightarrow t\in(-1;1)$

Để hàm số $y=\left|g(x)\right|$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$ thì xảy ra hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\begin{cases}g'(3)\ge 0\\ g(3)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-f'(2-x)-mx+3m+1\ge 0,\forall x\in(1;3)\\ 10m+8\le 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m(2-x)+m+1\ge f'(2-x),\ \forall x\in(1;3)\\ m\le -\dfrac{4}{5}\end{cases}$

Xét phương trình $mt+m+1\ge f'(t),\forall t\in(-1;1)\Rightarrow\begin{cases}m(-1)+m+1\ge 1\\ m(-1)+m+1\ge 2\end{cases}\Leftrightarrow 2m+1\ge 2\Leftrightarrow m\ge\dfrac{1}{2}$.

Từ đó suy ra $\begin{cases} m \ge \dfrac{1}{2} \\ m \le -\dfrac{4}{5} \end{cases}$ (vô lý).

Trường hợp 2: $\begin{cases} g'(3) \le 0 \\ g(3) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -f'(2-x) - mx + 3m + 1 \le 0, \forall x \in (1;3) \\ 10m + 8 \ge 0 \end{cases}$

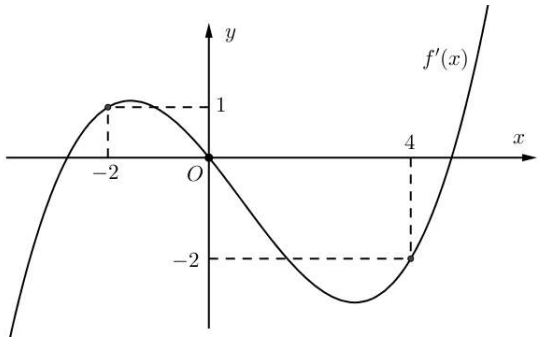
$\Leftrightarrow \begin{cases} m(2-x) + m + 1 \le f'(2-x),\ \forall x \in (1;3) \\ m \ge -\dfrac{4}{5} \end{cases}$

Xét phương trình $mt + m + 1 \le f'(t), \forall t \in (-1;1) \Rightarrow \begin{cases} m(-1) + m + 1 \le 1 \\ 2m + 1 \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \le \dfrac{1}{2}$

Từ đó suy ra $\begin{cases} m \le \dfrac{1}{2} \\ m \ge -\dfrac{4}{5} \end{cases} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}; m \in [-23;23]} -\dfrac{4}{5} \le m \le \dfrac{1}{2} \Rightarrow m \in \{0\}.$

Vậy có một giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và luôn dương trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $0 \le m < 20$ để hàm số $y = \left|4f(|x-m|) + x^2 - 2mx + 2023\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(x) = 4f(|x-m|) + x^2 - 2mx + 2023 = 4f(|x-m|) + (x-m)^2 - m^2 + 2023.$

Đạo hàm: $g'(x) = (x-m)\left(4f'(|x-m|) + 2|x-m|\right)$

Theo giả thiết $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $m \in [0;20)$ suy ra $g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ $(*)$

Để hàm số $y = |g(x)|$ đồng biến trên $(1;2)$ thì $g(x).g'(x) \ge 0, \forall x \in (1;2)$

Mặt khác $g(x) > 0 \Rightarrow g'(x) \ge 0 \Leftrightarrow (x-m)\left(4f'(|x-m|) + 2|x-m|\right) \ge 0, \forall x \in (1;2)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - m \ge 0 \\ 4f(|x-m|) + 2|x-m| \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x - m \le 0 \\ 4f(|x-m|) + 2|x-m| \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - m \ge 0 \\ 4f(|x-m|) + 2|x-m| \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x - m \le 0 \\ 4f(|x-m|) + 2|x-m| \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m \le 1 \\ |x-m| \ge 4 \end{cases} \xrightarrow{x \in (1;2)} m \in \varnothing \\ \begin{cases} m \ge 2 \\ |x-m| \le 4 \end{cases} \Rightarrow 2 \le m \le 5 \end{array}\right.$

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 33: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=-x^2-2x+3$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Số giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để hàm số $g(x)=f\left(\left|\sin^2 x+3\sin x-m\right|\right)+m^2+2$ đồng biến trên $\left(\frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right)$ là

A. 5. **B.** 6. **C.** 14. **D.** 11.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $g(x)=f\left(\left|\sin^2 x+3\sin x-m\right|\right)+m^2+2$.

Đặt $t=\sin x$ với $x\in\left(\frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right)$ thì $t\in\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Xét hàm số $g(t)=f\left(\left|t^2+3t-m\right|\right)+m^2+2$. Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\left(\frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right)$ thì hàm số $g(t)$ phải nghịch biến trên $\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Đặt $u=t^2+3t$ với $u\in\left(\frac{7}{4};\frac{3+\sqrt{6}}{4}\right)$

Xét hàm số $h(u)=f\left(|u-m|\right)+m^2+2$ nghịch biến trên $\left(\frac{7}{4};\frac{3+\sqrt{6}}{4}\right)$

Đạo hàm: $h'(u)=\frac{f'\left(|u-m|\right)(u-m)}{|u-m|}\le 0,\forall u\in\left(\frac{7}{4};\frac{3+\sqrt{6}}{4}\right)$

Với $u>m$, ta có $\frac{f'(u-m)(u-m)}{(u-m)}\le 0\Leftrightarrow f'(u-m)\le 0,\forall u\in\left(\frac{7}{4};\frac{3+\sqrt{6}}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}u-m\le -3\\ u-m\ge 1\end{array}\right.\\ m\le\frac{7}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}u\le m-3\\ u\ge m+1\end{array}\right.\\ m\le\frac{7}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\frac{3+6\sqrt{3}}{4}\le m-3\\ m+1\le\frac{7}{4}\end{array}\right.\\ m\le\frac{7}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m\ge\frac{15+6\sqrt{3}}{4}\\ m\le\frac{3}{4}\end{array}\right.\\ m\le\frac{7}{4}\end{cases}\Leftrightarrow m\le\frac{3}{4}$$

Với $u<m$, ta có: $\begin{cases}\frac{f'(m-u)(m-u)}{(u-m)}\le 0\\ m\ge\frac{3+\sqrt{6}}{4}\end{cases},\forall u\in\left(\frac{7}{4};\frac{3+\sqrt{6}}{4}\right)$.

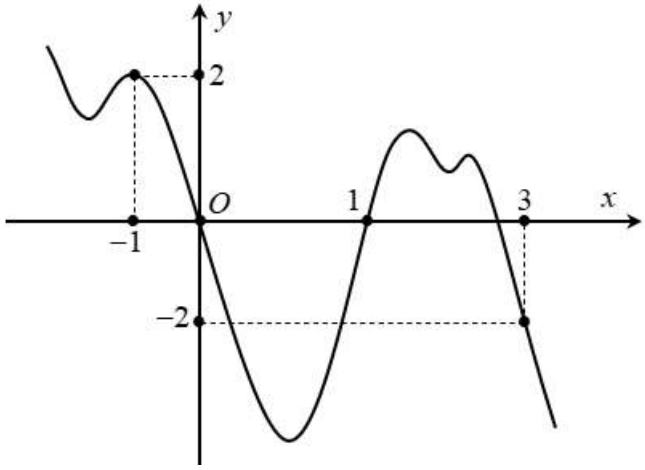
$$\Leftrightarrow\begin{cases}f'(m-u)\ge 0\\ m\ge\frac{3+\sqrt{6}}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\le m-u\le 3\\ m\ge\frac{3+\sqrt{6}}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u\ge m-1\\ m\ge\frac{3+\sqrt{6}}{4}\\ u\le m+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m-1\le\frac{7}{4}\\ m\ge\frac{3+\sqrt{6}}{4}\\ \frac{3+\sqrt{6}}{4}\le m+3\end{cases},\forall u\in\left(\frac{7}{4};\frac{3+\sqrt{6}}{4}\right)$$

$\Rightarrow$khi $u<m$ thì không có giá trị nào của m thỏa mãn.

Do $m \in \mathbb{Z}, m \in [-10;10]$ nên suy ra $-10 \le m \le 0 \Rightarrow m \in \{-10;-9;...;0\}$

Vậy có tất cả 11 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số đạo hàm $y = f'(x)$ như sau:



Hàm số ho hàm số $g(x) = 2f(|x-1|) + x^2 - 2x - 2|x-1| + 2023$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

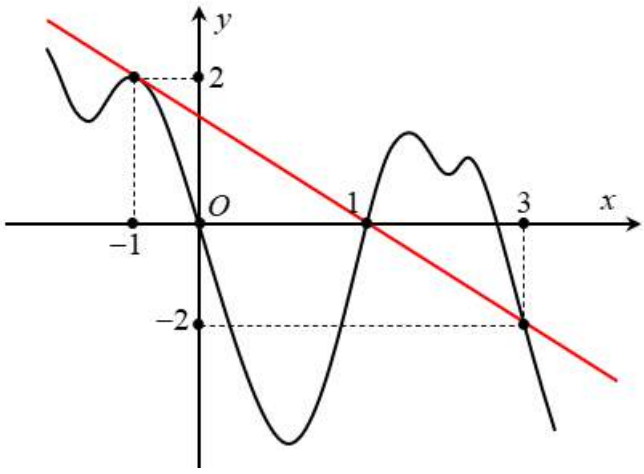
Ta có $g(x) = 2f(|x-1|) + x^2 - 2x - 2|x-1| + 2023$

$\Leftrightarrow g(x) = 2f\left(\sqrt{(x-1)^2}\right) + x^2 - 2x - 2\sqrt{(x-1)^2} + 2023$

$\Rightarrow g'(x) = 2\dfrac{x-1}{|x-1|}\left[f'(|x-1|) + |x-1| - 1\right], \forall x \ne 1 \Leftrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(|x-1|) = -|x-1| + 1$

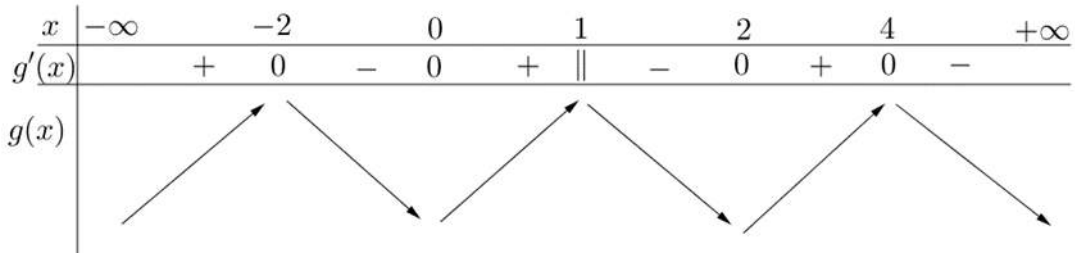
Đặt $t = |x-1|$ với $t \ge 0$, ta được phương trình $f'(t) = -t + 1$ (1)

Phương trình (1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và đường thẳng $y = -t + 1$.



Vì $t \ge 0$ nên $f'(t) = -t + 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} |x-1| = 1 \\ |x-1| = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \\ x = 4 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số nghịch biến trên $(1;2)$.

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(-3)=0$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hỏi hàm số $g(x)=\left|2(x+1)^6-6(x+1)^2-3f\left(-x^4-4x^3-4x^2-2\right)\right|$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(1;2)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $h(x)=2(x+1)^6-6(x+1)^2-3f\left(-x^4-4x^3-4x^2-2\right)$. Khi đó $g(x)=\left|h(x)\right|$.

Ta có $h(x)=2(x+1)^6-6(x+1)^2-3f\left[-(x+1)^4+2(x+1)^2-3\right]$.

Suy ra $h'(x)=12(x+1)^5-12(x+1)-3\left[-4(x+1)^3+4(x+1)\right]f'\left[-(x+1)^4+2(x+1)^2-3\right]$.

Hay $h'(x)=12(x+1)\left[(x+1)^4-1\right]+12(x+1)\left[(x+1)^2-1\right]f'\left[-(x+1)^4+2(x+1)^2-3\right]$.

Hay $h'(x)=12(x+1).\left[(x+1)^2-1\right].\left\{(x+1)^2+1+f'\left[-(x+1)^4+2(x+1)^2-3\right]\right\}$.

Hay $h'(x)=12(x+1).(x+2)x.\left\{(x+1)^2+1+f'\left[-(x+1)^4+2(x+1)^2-3\right]\right\}$.

Ta có $-(x+1)^4+2(x+1)^2-3=-\left[(x+1)^2-1\right]^2-2\le -2,\ \forall x$.

Từ bảng xét dấu suy ra $f'\left[-(x+1)^4+2(x+1)^2-3\right]\ge 0,\ \forall x$.

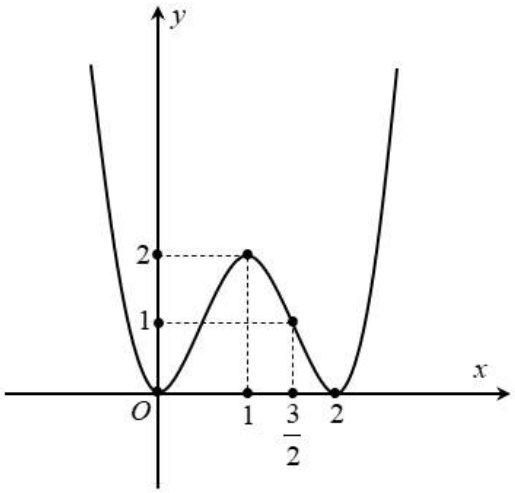
Do đó, $(x+1)^2+1+f'\left[-(x+1)^4+2(x+1)^2-3\right]>0,\ \forall x$.

Vậy $h'(x)=0\Leftrightarrow 12(x+1).(x+2)x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-2\\x=0\end{array}\right.$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-4-3f(-2)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-4-3f(-2)$	$\nearrow$	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4+3f(-2)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4+3f(-2)$ $\searrow$ 0 $\nearrow$ $+\infty$

Từ bảng biến thiên có thể khẳng định hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

Câu 36: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $g(x)=f(2x-2)$ có đồ thị như hình dưới đây:



Gọi S là tập tất cả các số nguyên của tham số a để hàm số $y=\left|4f(\sin x)+\cos 2x-(a+1)^2\right|$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Tổng các phần tử của tập S là:

A. 2. **B.** -3. **C.** 0. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=2f'(2x-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow f'(-2)=0\\x=1\Rightarrow f'(0)=0\\x=2\Rightarrow f'(2)=0\end{array}\right.$

Từ đó, ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$

x	$-\infty$		-2		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$			
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Đặt $h(x)=4f(\sin x)+\cos 2x-(a+1)^2$

Khi đó $h'(x)=4\cos x.f'(\sin x)-2\sin 2x$

Với $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}\cos x,\sin 2x>0\\ \sin x\in(0;1)\Rightarrow f'(\sin x)<0\end{cases}\Rightarrow h'(x)<0,\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Suy ra hàm số $h(x)$ nghịch biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

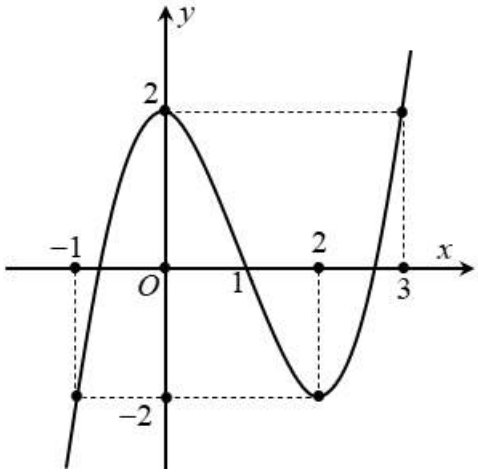
Do đó, hàm số $y=|h(x)|$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow h(x)\ge 0\ \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow h\left(\frac{\pi}{2}\right)\ge 0\Leftrightarrow 4f(1)-1-(a+1)^2\ge 0\Leftrightarrow 3-(a+1)^2\ge 0$

$\Rightarrow -2,73\le a\le 0,73\xrightarrow{a\in\mathbb{Z}}a\in\{-2;-1;0\}$.

Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 37: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có $f(5)>8$ và $f(1)=0$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Hàm số $g(x)=\left|f\left(1-\frac{x}{2}\right)-\frac{x^2}{8}\right|$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-8;-4)$ **B.** $(4;+\infty)$ **C.** $(2;4)$ **D.** $(-10;-8)$

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $h(x)=f\left(1-\frac{x}{2}\right)-\frac{x^2}{8}$

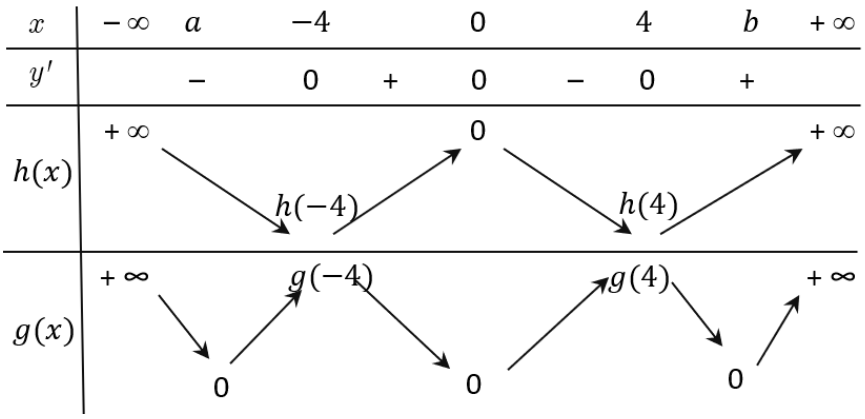
Ta có $h'(x)=-\frac{1}{2}f'\left(1-\frac{x}{2}\right)-\frac{x}{4}=0\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left(f'\left(1-\frac{x}{2}\right)+\frac{x}{2}\right)=0$ (3)

Đặt $1-\frac{x}{2}=t\Rightarrow\frac{x}{2}=1-t$

Khi đó $(3)\Leftrightarrow f'(t)-(t-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=1\\ t=3\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-4\\ x=0\\ x=4\end{array}\right.$

Ta có $h(0)=f(1)-0=f(1)=0$; suy ra $h(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\\x=0\\x=b(a<0<b)\end{array}\right.$

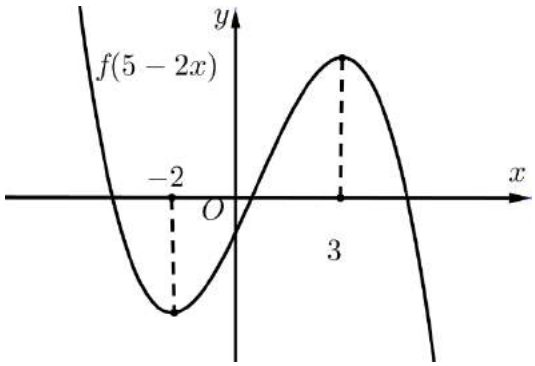
Ta có bảng biến thiên của hàm số là



Ta có $h(-8)=f\left(1-\frac{-8}{2}\right)-\frac{(-8)^2}{8}=f(5)-8>0$, vì $f(5)>8$, suy ra $-8<a$.

Từ đó ta có hàm số nghịch biến trên $(-10;-8)$.

Câu 38: Cho đồ thị hàm số $y=f(5-2x)$ như hình vẽ dưới đây:



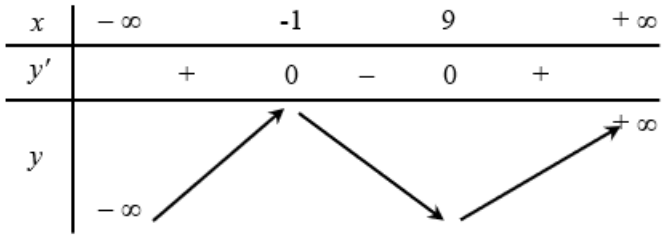
Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-23;23]$ để hàm số $y=f\left(\left|x^3-3x+m\right|+m^2-1\right)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

A. 23. **B.** 22. **C.** 21. **D.** 20.

Lời giải

Chọn B

Bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ được vẽ lại như sau:



$$g(x)=f\left(\left|x^3-3x+m\right|+m^2-1\right)\Rightarrow g'(x)=\frac{\left(3x^2-3\right)\left(x^3-3x+m\right)}{\left|x^3-3x+m\right|}.f'\left(\left|x^3-3x+m\right|+m^2-1\right)$$

Nhận xét: $\left|x^3-3x+m\right|+m^2-1\geq -1,\forall x\in\mathbb{R}$ và $\left(3x^2-3\right)=3\left(x^2-1\right)<0,\forall x\in(0;1)$.

Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$ khi và chỉ khi $g'(x)\ge 0,\forall x\in(0;1)$

$\Leftrightarrow (x^3-3x+m).f'\left(\left|x^3-3x+m\right|+m^2-1\right)\le 0,\forall x\in(0;1)$

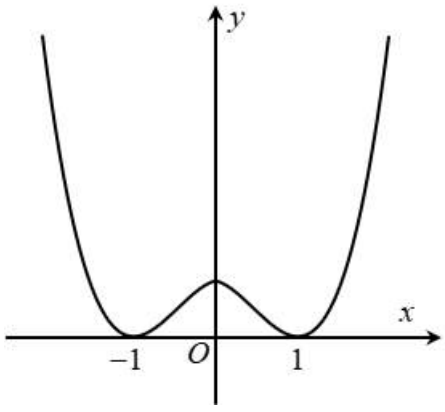
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left|x^3-3x+m\right|+m^2-1\in[-1;9]\\ x^3-3x+m\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}\left|x^3-3x+m\right|+m^2-1\ge 9\\ x^3-3x+m\le 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-1\le x^3-3x+m+m^2-1\le 9\\ x^3-3x\ge -m\end{cases}\\ \begin{cases}-\left(x^3-3x+m\right)+m^2-1\ge 9\\ x^3-3x\le -m\end{cases}\end{array}\right. ,\ \forall x\in(0;1)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-m^2-m\le x^3-3x\le 10-m^2\\ x^3-3x\ge -m\end{cases}\\ \begin{cases}m^2-m-10\ge x^3-3x\\ x^3-3x\le -m\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-m^2-m\le -2\\ 10-m^2\ge 0\end{cases}\\ -m\le -2\\ \begin{cases}m^2-m-10\ge 0\\ -m\ge 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m\ge 1\\ m\le -2\end{array}\right.\\ -\sqrt{10}\le m\le \sqrt{10}\end{cases}\\ m\ge 2\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m\le \dfrac{1-\sqrt{41}}{2}\\ m\ge \dfrac{1+\sqrt{41}}{2}\end{array}\right.\\ m\le 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\le m\le \sqrt{10}\\ m\le \dfrac{1-\sqrt{41}}{2}\end{array}\right. \xrightarrow{m\in\mathbb{Z};\,m\in[-23;23]} m\in\{-23;-22;....;-3;\,2;3\}$$

Vậy có tất cả 23 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[0;23]$ để hàm số $g(x)=f\left(\left|x^2-2x\right|+m\right)+2023$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

A. 23. **B.** 20. **C.** 21. **D.** 22.

Lời giải:

Chọn A

Để hàm số $g(x)=f\left(\left|x^2-2x\right|+m\right)+2023$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ thì

$$g'(x)=\frac{(2x-2)\left(x^2-2x\right)}{\left|x^2-2x\right|}f'\left(\left|x^2-2x\right|+m\right)\geq 0,\ \forall x\in(2;+\infty)$$

Mà $\frac{(2x-2)\left(x^2-2x\right)}{\left|x^2-2x\right|}>0,\forall x\in(2;+\infty)\Rightarrow\ f'\left(\left|x^2-2x\right|+m\right)\geq 0,\ \forall x\in(2;+\infty)$

Từ đồ thị, hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $[-1;0]$ và $[1;+\infty)$.

Suy ra $\left[\begin{array}{l}\left|x^2-2x\right|+m\geq 1\\ -1\leq\left|x^2-2x\right|+m\leq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|x^2-2x\right|\geq 1-m\\ -1-m\leq\left|x^2-2x\right|\leq -m\end{array}\right.$, $\forall x\in(2;+\infty)$.

Nhận xét: Ta thấy $\left|x^2-2x\right|\geq 0,\forall x\in(2;+\infty)\Rightarrow 0\geq 1-m\Leftrightarrow m\geq 1\xrightarrow{m\in\mathbb{Z};\,m\in[0;23]}1\leq m\leq 23$.

Vậy có tất cả 23 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

CHƯƠNG 1

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

CHỦ ĐỀ 2 CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa: Giả sử hàm số f xác định trên tập K và $x_0 \in K$. Ta nói:

- x_0 là **điểm cực tiểu** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa x_0 sao cho $(a;b) \subset K$ và $f(x) > f(x_0), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số f.
- x_0 là **điểm cực đại** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa x_0 sao cho $(a;b) \subset K$ và $f(x) < f(x_0), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số f.
- Điểm cực đại và điểm cực tiểu gọi chung là **điểm cực trị**.
- Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu gọi chung là **cực trị**.
- Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị của hàm số** và điểm cực trị phải là một điểm trong tập hợp K.
- Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **giá trị cực trị (hay cực trị)** của hàm số.
- Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số thì điểm $(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực trị của đồ thị** hàm số f.

Quy tắc tìm cực trị

- **Quy tắc 1:**
  - **Bước 1:** Tìm tập xác định. Tìm $f'(x)$.
  - **Bước 2:** Tìm các điểm x_i $(i = 1;2;...)$ mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm.
  - **Bước 3:** Lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi đi qua x_i thì hàm số đạt cực trị tại x_i.
- **Định lý**
  - Giả sử $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$ với $h > 0$. Khi đó:
  - Nếu $f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại x_0.
  - Nếu $f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại x_0.

  Từ định lí trên, ta có một quy tắc khác để tìm cực trị của hàm số

- **Quy tắc 2:**
  - **Bước 1:** Tìm tập xác định. Tìm $f'(x)$.
  - **Bước 2:** Tìm các nghiệm x_i $(i=1;2;...)$ của phương trình $f'(x)=0$.
  - **Bước 3:** Tính $f''(x)$ và tính $f''(x_i)$.

    Nếu $f''(x_i)<0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_i.

    Nếu $f''(x_i)>0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_i.

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Hàm số $y=x^4-x^2+3$ có mấy điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$+$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

A. $(2;0)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $x=2$. **D.** $y=0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x\left(x^2-x\right)(x-2)$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 4: Hàm số $y=\sqrt[3]{x^2}$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên R và $f'(x)=(x+1)(x-2)^2(x-1)$. Điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. $x=2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=0$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 6: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+5$. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là

A. $M(1;2)$. **B.** $M(2;1)$. **C.** $M(5;0)$. **D.** $M(0;5)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)(x+4)^3, \forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

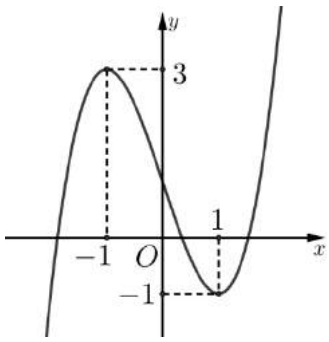
.....

.....

.....

.....

Câu 9: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ \ (a,b,c,d \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ.



Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 0. **B.** 3. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 10: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$. **B.** Giá trị cực đại của hàm số bằng -4.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$. **D.** Giá trị cực tiểu của hàm số bằng 0.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 11: Đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ có bao nhiêu điểm cực trị có tung độ dương?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 12: Cho hàm số $g(x)$ có đạo hàm $g'(x)=(x-1)^2(3-x)^{2021}(x+1)$ và liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó hàm số $g(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 13: Đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị $A(1;-7)$, $B(2;-8)$. Tính $y(-1)$?

A. $y(-1)=-35$. **B.** $y(-1)=11$. **C.** $y(-1)=-11$. **D.** $y(-1)=7$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x)=x^2(x-1)(x+2)^5$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1: Mở đầu về cực trị của hàm số

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

Câu 1: Cho các khẳng định sau:

Nếu hàm số $y=f(x)$ có giá trị cực đại là M, giá trị cực tiểu là m thì $M>m$.

Nếu hàm số $y=f(x)$ không có cực trị thì phương trình $f'(x)=0$ vô nghiệm.

Hàm số $y=f(x)$ có đúng hai điểm cực trị thì hàm số đó là hàm số bậc ba.

Hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c$ với $a\neq 0$ luôn có cực trị.

Số khẳng định đúng là

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau

A. $x=x_0$ là điểm cực tiểu của hàm số thì hàm số có giá trị cực tiểu là $f(x_0)$.

B. Nếu hàm số đơn điệu trên $\mathbb{R}$ thì hàm số không có cực trị.

C. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=x_0$ thì $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua x_0.

D. Hàm số đạt cực trị tại điểm $x=x_0$ thì $f'(x_0)=0$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2\left(x^2-25\right)$, $x\in\mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đã cho có 2 điểm cực tiểu. **B.** Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=-5$.

C. Hàm số đã cho đạt cực đại tại $x=5$. **D.** Hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

Câu 4: Hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 5: Số điểm cực trị của hàm số $y=\dfrac{4x^3}{3}-2x^2-x-3$ là

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 6: Hàm số $y=-x^3+3x$ đạt cực đại tại điểm

A. $x=-2$. **B.** $x=2$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=1$.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x)=(x-1)^2\left(x^2-5x+6\right)$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 8: Điểm cực tiểu của hàm số $y=x^3-12x+20$ là

A. $x=4$. **B.** $x=2$. **C.** $x=0$. **D.** $x=-2$.

Câu 9: Hàm số $y=2x^4-4x^2+2022$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(2-x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Điểm cực đại của hàm số là

A. $x=1$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-1$.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+1)^2(x-2)^3(x-4)$. Số điểm cực trị của hàm số là:

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 12: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số có tọa độ là

A. $(2;2)$. **B.** $(2;-2)$. **C.** $(0;-2)$. **D.** $(0;2)$.

Câu 13: Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=-x^4-4x^2+1$ là

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 14: Hàm số nào trong các hàm số dưới đây **không** có cực trị?

A. $y=x^3+3x-2$. **B.** $y=x^3-3x-2$.

C. $y=x^4+3x^2-2$. **D.** $y=x^4-3x^2-2$.

Câu 15: Điểm cực đại của hàm số $y=x^3+3x^2-1$ là

A. $x=-2$. **B.** $x=0$. **C.** $x=3$. **D.** $x=-1$.

Câu 16: Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-1$ đạt cực đại tại điểm

A. $x=0$. **B.** $x=3$. **C.** $x=2$. **D.** $x=1$.

Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)(x-2),\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 1. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)(x+1)^4$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hỏi hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 19: Số điểm cực trị của hàm số $y=x(x^2-4)(-x^2+3x-2)$ là

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 20: Trong các hàm số sau, hàm số nào không có cực trị?

A. $y=x^3-x^2-3x+2$. **B.** $y=x^3-3x^2+2$. **C.** $y=\frac{2x+1}{x-3}$. **D.** $y=-x^4+3x^2+1$.

Câu 21: Cho hàm số $y=-x^4+2x^2+3$ có đồ thị (C). Gọi h và h_1 lần lượt là khoảng cách từ các điểm cực đại và cực tiểu của (C) đến trục hoành. Tỉ số $\frac{h}{h_1}$ là

A. $\frac{3}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 22: Cho hàm số $y=x^3-3x+5$. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho là:

A. $(-1;7)$. **B.** $(7;-1)$. **C.** $(3;1)$. **D.** $(1;3)$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(2x+1)(x+2)^2(3x-1)^4,\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x)$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 24: Tìm điểm cực tiểu x_{CT} của hàm số $y=x^3+3x^2-9x$.

A. $x_{CT}=0$. **B.** $x_{CT}=1$. **C.** $x_{CT}=-1$. **D.** $x_{CT}=-3$.

Câu 25: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(x^2-3)(x^4-1)$ trên $\mathbb{R}$. Tính số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=2(x-1)^2(x-3)(x^2-4)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 27: Tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ là

A. $(0;-2)$. **B.** $(2;-2)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;2)$.

Câu 28: Hàm số $y=x^4-3x^2-2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 29: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-2)(4-x^2)(x^2-1)$ trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x=-2$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=1$. **D.** $x=2$.

Câu 30: Hàm số nào dưới đây nhận $x=1$ làm

A. $y=x^3+3x^2-9x+1\cdot$ **B.** $y=x^4-2x^2+1\cdot$

C. $y=x^3-6x^2+9x+1\cdot$ **D.** $y=x^2-2x+1\cdot$

Câu 31: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=x(x+2022)(x^2-4x+4)$. Hàm số $f(x)$ có mấy điểm cực tiểu?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 32: Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=x^3-6x^2+9x+1$ có tổng hoành độ và tung độ bằng

A. 6. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 3.

Câu 33: Điểm cực tiểu của hàm số $y=f(x)=x^3-12x+20$ là

A. $x=4$. **B.** $x=2$. **C.** $x=0$. **D.** $x=-2$.

Câu 34: Hàm số $y=x^3-3x^2-2$ có điểm cực đại là

A. $x=-6$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=2$. **D.** $x=0$.

Câu 35: Đồ thị của hàm số $y=-x^3+3x^2+5$ có hai điểm cực trị A và B. Độ dài đoạn AB là

A. $5\sqrt{2}$. **B.** $10\sqrt{2}$. **C.** $4\sqrt{5}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

Câu 36: Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $f(x)=x^4-10x^2+3$ là

A. $(-\sqrt{5};22)$. **B.** $(5;22)$. **C.** $(0;3)$. **D.** $(\sqrt{5};-22)$.

Câu 37: Đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2ax+b$ có điểm cực tiểu $A(2;-2)$. Khi đó $a+b$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** -4. **D.** -2.

Câu 38: Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2+2$. Hàm số $g(x)=f(x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=(x+3)^2(x-2)^3(x+5)$. Hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 40: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+4$, gọi M, N lần lượt là điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số. Tọa độ trung điểm I của MN là

A. $I(1;2)$. **B.** $I(2;1)$. **C.** $I(0;4)$. **D.** $I(2;0)$.

Dạng 2: Cực trị hàm bậc ba

Bài toán tổng quát: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a\neq 0$, a,b,c,d phụ thuộc vào tham số). Tìm giá trị của tham số để hàm số có cực đại, cực tiểu (cực trị) thỏa mãn điều kiện cho trước.

Phương pháp tổng quát:

Bước 1: Tính $y'=3ax^2+2bx+c;\ y'=0\Leftrightarrow g(x)=3ax^2+2bx+c=0$

Để hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta(\Delta')>0 \end{cases} \Leftrightarrow$ giá trị tham số thuộc miền D nào đó $(*)$

Bước 2: Từ điều kiện cho trước dẫn tới một phương trình, một bất phương trình hoặc một biểu thức theo theo tham số, giải điều kiện này ta được tham số sau đó đối chiếu với điều kiện $(*)$ và kết luận.

Chú ý:

- Với những điều kiện liên quan tới hoành độ thì giả sử $M_1(x_1;y_1)$ và $M_2(x_2;y_2)$ là hai điểm cực trị thì $x_1;x_2$ là hai nghiệm của $g(x)=0$ theo viet ta có $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a} \\ x_1x_2=\dfrac{c}{3a} \end{cases}$ và biến đổi điều kiện theo tổng và tích chứ không nên thay trực tiếp vào khi điều kiện phức tạp.
- Với những điều kiện liên quan tới tung độ (giá trị cực trị) thì trong trường hợp Δ là một số chính phương thì tìm được cụ thể hai nghiệm $x_1;x_2$ và khi đó tung độ tương tứng là $y_1=f(x_1)$; $y_2=f(x_2)$.
- Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba là:

$$AB=\sqrt{\frac{4e+16e^3}{a}} \text{ với } e=\frac{b^2-3ac}{9a}$$

- Đường thẳng qua hai điểm cực trị đó là: $y=\left(\dfrac{2c}{3}-\dfrac{2b^2}{9a}\right)x+d-\dfrac{bc}{9a}$.
- Bấm máy tính tìm ra đường thẳng đi qua hai điểm cực trị :

$$ax^3+bx^2+cx+d-\left(3ax^2+2bx+c\right)\left(\frac{x}{3}+\frac{b}{9a}\right)\xrightarrow{x=i}Ai+B\Rightarrow y=Ax+B$$

- Hoặc sử dụng công thức $y-\dfrac{y'.y''}{18a}$
- Trong trường hợp nghiệm y' "xấu" ta nên thay gián tiếp vào phương trình đường thẳng cực trị để biểu diễn giá trị cực trị ở dạng tổng quát.

- Cho hàm số bậc ba $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đạo hàm $y'=f'(x)=3ax^2+2bx+c$

  Hàm số $f(x)$ có cực trị khi và chỉ khi $f(x)$ có cực đại và cực tiểu.

  Phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'=b^2-3ac>0$.

  Hàm số $f(x)$ không có cực trị $\Leftrightarrow \Delta'=b^2-3ac\leq 0$.

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Điểm cực đại của hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 3$ là

A. $x = 0$. **B.** $x = -2$. **C.** $(0;3)$. **D.** $(-2;7)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 2: Giá trị cực đại của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ bằng

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Số điểm cực trị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 5$ là

A. 1 **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 4: Giá trị cực đại của hàm số $y = x^3 - 12x + 1$ là

A. -15. **B.** -2. **C.** 17. **D.** 2.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 5: Hàm số $y = x^3 - 12x + 3$ đạt cực đại tại điểm

A. $x = 19$. **B.** $x = -2$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = -13$.

Lời giải

.....

.....

……

……

Câu 6: Tìm tất cả giá trị của tham số thực m để hàm số $y = mx^3 - (m^2+1)x^2 + 2x - 3$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$

A. $m = \dfrac{3}{2}$. **B.** $m = -2$. **C.** $m = 0$. **D.** $m \in \varnothing$.

Lời giải

……

……

……

……

Câu 7: Hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x - 2$ đạt cực tiểu tại $x = 1$ khi

A. $m = -1$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = -3$.

Lời giải

……

……

……

……

Câu 8: Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -\dfrac{x^3}{3} + mx^2 - 2mx + 1$ có hai điểm cực trị là

A. $\left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < 0 \end{array}\right.$. **B.** $0 < m < 2$. **C.** $m > 2$. **D.** $m > 0$.

Lời giải

……

……

……

……

Câu 9: Cho hàm số $y = x^3 - \dfrac{3}{2}(m-2)x^2 - 3(m-1)x + 1, m$ là tham số. Số giá trị $m > 0$ để hàm số có giá trị cực đại, giá trị cực tiểu lần lượt là $y_{CĐ}, y_{CT}$ thỏa mãn $2y_{CĐ} + y_{CT} = 4$ là

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

……

……

……

……

Câu 10: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-m-1\right)x+1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để hàm số đạt cực trị tại $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $x_1^2+2mx_2-3m^2+m-5\le 0$?

A. 9. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-2mx^2+m^2x+1$ đạt cực tiểu tại $x=1$ là

A. $\{1\}$. **B.** $\{-1;-3\}$. **C.** $\{3\}$. **D.** $\{1;3\}$.

Câu 2: Cho hàm số $y=x^3-2x^2+mx+3$ đạt cực tiểu tại $x=1$. Giá trị của m

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 3: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-4\right)x+3$ đạt cực tiểu tại $x=3$.

A. $m=-7$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=5$. **D.** $m=1$.

Câu 4: Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-m+1\right)x+1$ đạt cực đại tại điểm $x=1$ khi

A. $m=1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=1$ hoặc $m=2$. **D.** $m=2$.

Câu 5: Giá trị thực của tham số m để hàm số $y=-x^3+mx^2+\left(m^2-12\right)x+2$ đạt cực tiểu tại $x=-1$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(5;9)$. **B.** $(-4;0)$. **C.** $(0;3)$. **D.** $(3;6)$.

Câu 6: Tìm m đề hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-4\right)x+3$ đạt cực đại tại điểm $x=3$.

A. $m=-1$. **B.** $m=1$. **C.** $m=5$. **D.** $m=-5$.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)=x^3+3mx^2-1$. Giá trị của tham số m để hàm số có điểm cực đại $x=-2$ là:

A. -2. **B.** $\varnothing$ **C.** -1 **D.** 1

Câu 8: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3+\frac{1}{2}\left(m^2-1\right)x^2+1-m$ có điểm cực đại là $x=-1$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+\left(m^2-m+2\right)x^2+\left(3m^2+1\right)x$ đạt cực tiểu tại $x=-2$.

A. $\left[\begin{array}{l}m=3\\m=1\end{array}\right.$. **B.** $m=3$. **C.** $m=1$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m=-3\\m=-1\end{array}\right.$.

Câu 10: Để hàm số $y=x^3-3x^2+mx$ đạt cực tiểu tại $x=2$ thì tham số thực m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $m\in(3;5)$. **B.** $m\in(-3;-1)$. **C.** $m\in(1;3)$. **D.** $m\in(-1;1)$.

Câu 11: Giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-4\right)x+3$ đạt cực tiểu tại $x=3$ là

A. $m=1$. **B.** $m=5$. **C.** $m=1; m=5$. **D.** $m=-1; m=-5$.

Câu 12: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=x^3+3x^2-mx+1$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Câu 13: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx+1$ đạt cực tiểu tại $x=2$.

A. $0<m\le 4$. **B.** $m>4$. **C.** $m=0$. **D.** $0\le m<4$.

Câu 14: Cho hàm số $y=x^3+3\left(m^2-m+2\right)x^2+3\left(3m^2+1\right)x+2022m$, tìm các giá trị của tham số m để hàm số đạt cực tiểu tại $x=-2$.

A. $m=1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=4$.

Câu 15: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=mx^3-\left(m^2+1\right)x^2+2x-3$ đạt cực tiểu tại $x=1$. Khi đó

A. $S=\left\{-\frac{3}{2}\right\}$. **B.** $S=\{0\}$. **C.** $S=\left\{\frac{3}{2};0\right\}$. **D.** $S=\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Câu 16: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-m-1\right)x$ đạt giá trị cực đại tại $x=1$.

A. $m=2$. **B.** $m=1$. **C.** $m=3$. **D.** $m=0$.

Câu 17: Giá trị của m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(3m+1\right)x+1$ đạt cực tiểu tại $x=1$ là

A. $m=0$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=2$. **D.** $m=1$.

Câu 18: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-4\right)x+3$ đạt cực đại tại điểm $x=3$.

A. $m=-1$. **B.** $m=1$. **C.** $m=1, m=5$. **D.** $m=5$.

Câu 19: Cho hàm số $f\left(x\right)=-x^3+2\left(2m-1\right)x^2-\left(m^2-8\right)x+2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đạt giá trị cực đại tại điểm $x=-1$.

A. $m=3$. **B.** $m=-9$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-2$.

Câu 20: Khi hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-2\right)x+2021$ đạt cực đại tại $x=1$ thì giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(1;4\right)$. **B.** $\left(-3;0\right)$. **C.** $\left(0;3\right)$. **D.** $\left(-2;0\right)$.

Câu 21: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-4\right)x+3$ đạt cực đại tại $x=3$.

A. $m=1,\ m=5$. **B.** $m=5$.

C. $m=1$. **D.** $m=-1$.

Câu 22: Tìm m để hàm số $y=-\frac{2}{3}x^3-2mx^2+\left(m^2+3m\right)x+5$ đạt cực đại tại $x=1$.

A. $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-2\end{array}\right.$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=2$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=2\end{array}\right.$.

Câu 23: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-(2m+1)x^2-(5m+4)x+10$ đạt cực đại tại điểm $x=-1$.

A. $m=-1$. **B.** $m=3$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-2$.

Câu 24: Cho hàm số $y=x^3+(m^2-m+1)x^2+(3m^2-4)x+m+2$. Có bao nhiêu giá trị của m để hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 25: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+mx^2+(m^2-2m-3)x+4$ đạt cực tiểu tại điểm $x=0$.

A. $m=-1$ hoặc $m=3$. **B.** $m=-1$.

C. $m=3$. **D.** $m=1$ hoặc $m=3$.

Câu 26: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3+3x^2-mx+2022$ đạt cực tiểu tại $x=2$.

A. $m=-24$. **B.** $m=24$. **C.** $m\in\varnothing$. **D.** $m=0$.

Câu 27: Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-4)x-2021$ đạt cực đại tại $x=3$.

A. $m=1$ **B.** $m=-1$ **C.** $m=5$ **D.** $m=-7$

Câu 28: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^4-2(m+2)x^2$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

A. $\left[\begin{array}{l} m\le -2 \\ m\ge 0 \end{array}\right.$ **B.** $m<0$. **C.** $m=0$. **D.** $m\le -2$.

Câu 29: Giá trị nguyên lớn nhất của tham số m để hàm số $y=\frac{x^2+(m-1)x+3-2m}{x+m}$ đạt cực tiểu tại $x=-1$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(0;\sqrt{5})$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(-1;2)$. **D.** $(\sqrt{5};5)$.

Câu 30: Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^2+1$ với m là tham số thự **C.** Tìm m để hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$.

A. $m=-4$. **B.** $m=0$. **C.** $m=2$. **D.** $m=0;m=2$.

Câu 31: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3mx^2+(m^2+2)x-m$ đạt cực tiểu tại $x=1$?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** Vô số

Câu 32: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-4)x+3$ đạt giá trị cực đại tại $x=3$.

A. $m=-1$. **B.** $m=5$ **C.** $m=-7$. **D.** $m=1$

Câu 33: Cho hàm số $f(x)=-x^3+2(2m-1)x^2-(m^2-8)x+2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đạt giá trị cực đại tại điểm $x=-1$.

A. $m=3$. **B.** $m=-9$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-2$.

Câu 34: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{2}{3}x^3+(m-1)x^2+(m^2-4m+3)x-1$ có hai điểm cực trị.

A. $-5<m<-1$. **B.** $1<m<5$. **C.** $-5<m<1$. **D.** $-1<m<5$.

Câu 35: Hãy tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=x^3-3mx$ có cực trị?

A. $m\geq 0$. **B.** $m\neq 0$. **C.** $m>2$. **D.** $m>0$.

Câu 36: Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+3(3m+7)x+1$ có cực trị là

A. $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>3 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m<-3 \\ m>2 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m\leq -2 \\ m\geq 3 \end{array}\right.$. **D.** $-2<m<3$.

Câu 37: Tìm tất cả các giá trị của tham số m đề hàm số $y=x^3-3x^2+2mx+m$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu

A. $m\geq \frac{3}{2}$. **B.** $m<\frac{3}{2}$. **C.** $m\leq \frac{3}{2}$. **D.** $m>\frac{3}{2}$.

Câu 38: Tìm giá trị của m để hàm số $y=x^3-x^2+mx-1$ có hai điểm cực trị.

A. $m\leq \frac{1}{3}$. **B.** $m<\frac{1}{3}$. **C.** $m\geq \frac{1}{3}$. **D.** $m>\frac{1}{3}$.

Câu 39: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+mx-1$ có cực đại và cực tiểu?

A. $m<1$. **B.** $m\leq 1$. **C.** $m>1$. **D.** $m\geq 1$.

Câu 40: Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx-1$ có hai điểm cực trị x_1,x_2 sao cho $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=10$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $m_0\in(-15;-7)$. **B.** $m_0\in(-1;7)$. **C.** $m_0\in(-7;-1)$. **D.** $m_0\in(7;10)$.

Câu 41: Cho biết hàm số $y=x^3-3x^2+mx-1$ đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=3$. Khi đó

A. $m\leq -1$. **B.** $m\in(2;3)$. **C.** $m\in(1;2)$. **D.** $m\in(0;1)$.

Câu 42: Đồ thị hàm số $y=x^3-2mx^2+m^2x+n$ có điểm cực tiểu là $I(1;3)$. Khi đó $m+n$ bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 43: Cho đường cong $(C_m): y=x^3-3(m-1)x^2-3(m+1)x+3$. Gọi S là tập các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A,B sao cho O,A,B thẳng hàng. Tổng các phần tử của S bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 44: Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{2}{3}x^3-mx^2-2(3m^2-1)x+\frac{2}{3}$ có hai điểm cực trị có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1x_2+2(x_1+x_2)=1$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 45: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^3+4(m-2)x^2-7x+1$ có hai điểm cực trị x_1,x_2 $(x_1<x_2)$ thỏa mãn $|x_1|-|x_2|=-4$?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 46: Hàm số $y=\frac{2}{3}x^3-mx^2-2\left(3m^2-1\right)x+\frac{2}{3}$ có 2 điểm cực trị x_1,x_2 sao cho $x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)=1$ khi $m=\frac{a}{b}$. Tính $S=a^2+b^2$.

A. $S=10$. **B.** $S=13$. **C.** $S=25$. **D.** $S=34$.

Câu 47: Gọi x_1,x_2 là các điểm cực trị của hàm số $y=x^3-3mx^2-6x$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $S=\left(x_1^2-3\right)\left(x_2^2-1\right)$ là

A. $7-4\sqrt{3}$. **B.** 4. **C.** $4\sqrt{3}$. **D.** $7+4\sqrt{3}$.

Câu 48: Cho biết hàm số $y=x^3-3x^2+mx-1$ đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=3.$ Khi đó

A. $m\le -1.$ **B.** $m\in(2;3).$ **C.** $m\in(1;2).$ **D.** $m\in(0;1).$

Câu 49: Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx-1$ có hai điểm cực trị x_1,x_2 sao cho $x_1+x_2-3x_1x_2=1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m_0\in(-4;-2)$. **B.** $m_0\in(2;4)$. **C.** $m_0\in(0;2)$. **D.** $m_0\in(-2;0)$.

Câu 50: Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(2m-1\right)x-m+2$ có hai điểm cực trị dương là

A. $m\in\left(\frac{1}{2};1\right)\cup(1;+\infty)$. **B.** $m\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $m\in(1;+\infty)$. **D.** $m\in(-\infty;1)\cup(1;2)$.

Câu 51: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\left(m+1\right)x^2+\left(m^2+5\right)x-2m^3,\ \ (C_m)$. Với giá trị nào của m thì hàm số có hai điểm cực trị nằm phía bên phải trục Oy ?

A. $m\le -1.$ **B.** $m>2$. **C.** $m\ge 2$. **D.** $m>-1.$

Câu 52: Để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+m-1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$, giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(2;3)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;3)$.

Câu 53: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\left(m+1\right)x^2+\left(m^2+4\right)x-6$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $\left(x_1,y_1\right),\left(x_2,y_2\right)$ thỏa mãn $y_1+y_2=\frac{20}{3}.$

A. $-2.3<m<0$. **B.** $2.2<m<4.1$.

C. $0<m<2.2$. **D.** $4.1<m<5.3$.

Câu 54: Với điều kiện nào của tham số m thì hàm số $y=\frac{x^3}{3}-x^2+mx+2020$ có hai điểm cực trị nằm về bên phải trục Oy ?

A. $0<m<1.$ **B.** $0<m\le 1.$ **C.** $0\le m\le 1.$ **D.** $-1<m<1.$

Câu 55: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=x^3-3x^2-mx+4$ có hai điểm cực trị thuộc khoảng

$(-3;3)$.

A. 12. **B.** 11. **C.** 13. **D.** 10.

Câu 56: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-8x^2+\left(m^2+11\right)x-2m^2+2$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục Ox ?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 57: Cho hàm số $y=x^3-(2m+1)x^2+(m+1)x+m-1$. Có bao nhiêu giá trị của số tự nhiên $m<20$ để hàm số có hai giá trị cực trị trái dấu?

A. 19. **B.** 20. **C.** 21. **D.** 22.

Câu 58: Tìm giá trị tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+mx-2$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục tung.

A. $m\geq 0$. **B.** $m\leq 0$. **C.** $m>0$. **D.** $m<0$.

Câu 59: Tìm số giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=2x^3-6x^2-m+1$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành.

A. Vô số giá trị m. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 3.

Câu 60: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019;2022]$ để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x$ có hai điểm cực trị trong khoảng $(0;+\infty)$?

A. 2019. **B.** 2020. **C.** 2021. **D.** 2022.

Câu 61: Cho hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x-1$ với m là tham số thực. Tập hợp các giá trị của m để hàm số có hai cực trị nằm trong khoảng $(-2;3)$ là

A. $(1;3)$. **B.** $(3;4)$. **C.** $(-1;3)\cup(3;4)$. **D.** $(-1;4)$.

Câu 62: Cho hàm số $y=x^3+2(m-2)x^2-5x+1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 $(x_1<x_2)$ thỏa mãn $|x_1|-|x_2|=-2$.

A. $\frac{7}{2}$. **B.** -1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 5.

Câu 63: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=x^3-6x^2+(3m+6)x-m-6$ đạt cực đại cực tiểu đồng thời hai giá trị cực trị cùng dấu

A. 7. **B.** 4. **C.** 12. **D.** 5.

Câu 64: Cho hàm số $y=x^3+3mx^2+4m^2-2$ có đồ thị (C) và điểm $C(2;4)$. Tính tổng bình phương các giá trị của m để (C) có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 6.

A. 5. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 65: Tồn tại bao nhiêu số dương m để đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=(m+1)x^3-(m+2)x^2+3m-2$ cắt và tạo với hai tia Ox, Oy một tam giác có diện tích bằng $\frac{9}{4}$?

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 66: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx$. Tìm m để đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số trên cắt đường thẳng $d: y = x - 3$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

A. $m = 2$. **B.** $m = -2$. **C.** $m = -1$. **D.** $m = 1$.

Câu 67: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + \left(m^2 - 1\right)x$ có hai điểm cực trị A và B sao cho A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $d: y = 5x - 9$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 0. **B.** 6. **C.** -6. **D.** 3

Câu 68: Cho hàm số $y = x^3 - mx^2 - m^2x + 8$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số có điểm cực tiểu nằm hoàn toàn phía trên trục hoành?

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 69: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(3m+2)x^2 + \left(2m^2 + 3m + 1\right)x - 2$ có điểm cực đại x_{CD} và điểm cực tiểu x_{CT} thoả mãn $3x_{CD}^2 = 4x_{CT}$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 70: Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 9x - 2m^2 + 1$. Hãy tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho có các điểm cực trị là $x_1; x_2$ sao cho $|x_1 - x_2| = 2$?

A. $m = 1$. **B.** $m = -3$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -3 \end{array}\right.$. **D.** $m \in \varnothing$.

Câu 71: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx + 1$ **(1)** và điểm $A(2;3)$. Biết m là một giá trị để đồ thị hàm số **(1)** có hai điểm cực trị B và C sao cho tam giác ABC cân tại A. Diện tích tam giác ABC bằng

A. 6. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 3. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 72: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3\left(m^2 - 1\right)x - m^3 + m$ có hai điểm cực trị A, B và $OA + OB$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. Vô số. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 73: Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3\left(m^2 - 1\right)x - 3m^2 - 1$ có điểm cực đại và cực tiểu cùng với gốc tọa độ tạo thành tam giác vuông tại O. Tích tất cả các giá trị của tập S bằng

A. -1. **B.** $-\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** 1.

Câu 74: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + x - 2$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_1x_2 = 3$

A. $m = -4$. **B.** $m = 2$.
C. $m = 3$. **D.** Không có giá trị m.

Câu 75: Biết m_o là giá trị tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13$.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m_0 \in (-7;-1)$. **B.** $m_0 \in (7;10)$. **C.** $m_0 \in (-1;7)$. **D.** $m_0 \in (-15;-7)$.

Câu 76: Cho hàm số $y=(m-3)x^3+2(m^2-m-1)x^2+(m+4)x-1$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục Oy. Tổng các phần tử của S là

A. -3. **B.** -4. **C.** 0. **D.** -2.

Câu 77: Biết rằng $m_0=\frac{a}{b}, a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{N}^*$, $\frac{a}{b}$ tối giản là giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(m-1)x^2+(3m-2)x+1$ có 2 điểm cực trị trái dấu x_1, x_2 thoả mãn $\frac{1}{x_1}-2=\left|\frac{1}{x_2}\right|$.

Tính tổng $S=a+2b$?

A. 13. **B.** 8. **C.** 11. **D.** -11.

Câu 78: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}mx^3-(m-1)x^2+3(m-2)x+\frac{1}{6}$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1+2x_2=1$.

A. $\left[\begin{array}{l} m=\frac{2}{3} \\ m=2 \end{array}\right.$. **B.** $1-\frac{\sqrt{6}}{2}<m<1+\frac{\sqrt{6}}{2}$.

C. $m\in\left(1-\frac{\sqrt{6}}{2};1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\setminus\{0\}$. **D.** $m=2$.

Câu 79: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{x^3}{3}-(5m^2-3m-1)x^2+(2m+1)x+1$ có hai điểm cực trị A và B sao cho A, B cách đều đường thẳng $x-1=0$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 80: Cho hàm số $y=x^3-3x^2-(m^2-2)x+m^2$ (C_m). Biết rằng đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt $A,B,C(x_A<x_B<x_C)$ và có hai điểm cực trị M,N. Số các giá trị của tham số m để $MN=AC$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3

Dạng 3: Cực trị hàm trùng phương

Bài toán tổng quát: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ (a,b,c phụ thuộc vào tham số m). Tìm m để hàm số có 3 cực trị và thỏa mãn điều kiện cho trước.

Phương pháp:

Đạo hàm $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x\left(2ax^2 + b\right) = 2x.g\left(x\right)$ với $g\left(x\right) = 2ax^2 + b$.

Phương trình: $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ g\left(x\right) = 2ax^2 + b = 0 \end{array}\right.$, từ đó ta có các nhận xét sau:

- Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow g\left(x\right) = 0$ có hai nghiệm phân biệt và khác 0 $\Leftrightarrow a.b < 0$.
- Để hàm số có một điểm cực trị $\Leftrightarrow g\left(x\right) = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép bằng $0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a.b > 0 \\ \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a \neq 0 \\ b = 0 \end{cases} \end{array}\right.$.
- Hàm số có 1 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} ab < 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$.
- Hàm số có 2 điểm cực đại, 1 điểm cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} ab < 0 \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$.
- Nếu hàm số có 3 điểm cực trị thì tọa độ 3 điểm cực trị hàm số là $x = 0;\ x = \sqrt{\frac{-b}{2a}}; x = -\sqrt{\frac{-b}{2a}}$.
- Tọa độ 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A\left(0;c\right) \in Oy;\ B\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}; \frac{4ac - b^2}{4a}\right); B\left(-\sqrt{\frac{-b}{2a}}; \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ và ta có ΔABC luôn cân tại A, hai điểm B,C đối xứng nhau qua trục Oy $\cos BAC = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}; \cot^2 \frac{\alpha}{2} = -\frac{b^3}{8a}, S_{\Delta ABC} = \frac{b^2}{4|a|}\sqrt{\frac{-b}{2a}}$.
- Độ dài các cạnh $AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}; BC = 2\sqrt{\frac{-b}{2a}}$
- Phương trình đường $BC:\ y = \frac{4ac - b^2}{4a}$. Phương trình $AB, AC:\ y = \pm\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}\right)^3 x + c$

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m không vượt quá 2020 để hàm số $y=-x^4+(m-5)x^2+3m-1$ có ba điểm cực trị

A. 2017. **B.** 2019. **C.** 2016. **D.** 2015.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 2: Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^4+2\left(m^2-m-6\right)x^2+m-1$ có ba điểm cực trị.

A. 3 **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^4-\left(m^2-9\right)x^2+2021$ có 1 cực trị. Số phần tử của tập S là

A. Vô số. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 4: Cho hàm số $y=-x^4+\left(m^2-m\right)x^2$. Tìm m để hàm số có đúng một cực trị.

A. $m\in(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$. **B.** $m\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$.

C. $m\in[0;1]$. **D.** $m\in(0;1)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 5: Tìm điều kiện của tham số b để hàm số $y = x^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị.

A. $b = 0$. **B.** $b \neq 0$. **C.** $b < 0$. **D.** $b > 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 6: Cho đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có điểm cực đại $A(0;-3)$ và điểm cực tiểu $B(-1;-5)$. Tính giá trị của $P = a + 2b + 3c$.

A. $P = 3$. **B.** $P = -5$. **C.** $P = -9$. **D.** $P = -15$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 7: Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^4 + (2m-1)x^2 + m - 2$ chỉ có một điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu.

A. $\left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m > \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$. **B.** $m \le 0$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$. **D.** $m \le \dfrac{1}{2}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 8: Để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2. Giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-1;0)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 9: Cho hàm số $f(x)=x^4-2mx^2+2$. Tổng bình phương các giá trị m để hàm số có ba cực trị và đường tròn đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số có bán kính bằng 4, gần với số nguyên nào nhất trong các số nguyên sau?

A. 8. **B.** 9. **C.** 16. **D.** 7.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 10: Đồ thị của hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+2m+1$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m\in(6;9)$. **B.** $m\in(-6;-3)$. **C.** $m\in(-3;2)$. **D.** $m\in(2;6)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^4+\left(m^2-3m\right)x^2+1$ có điểm cực đại?

A. 2. **B.** 0. **C.** 4. **D.** Vô số.

Câu 2: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=mx^4-(m^2-9)x^2+2m$ có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

A. 2. **B.** vô số. **C.** 4. **D.** 7

Câu 3: Tập hợp các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=x^4-2\left(m+2\right)x^2+3m-1$ chỉ có điểm cực tiểu và không có điểm cực đại là

A. $\left(-\infty;-2\right)$. **B.** $\left\{-2;2\right\}$. **C.** $\left(-2;+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;-2\right]$.

Câu 4: Tập hợp các giá tị thực của tham số m để hàm số $y=x^4-2\left(m+2\right)x^2+3m-1$ chỉ có điểm cực tiểu, không có điểm cực đại là

A. $\left(-\infty;-2\right)$. **B.** $\left\{-2;2\right\}$. **C.** $\left(-2;+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;2\right]$.

Câu 5: Tập hợp các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=x^4-2\left(m+2\right)x^2+3m-1$ chỉ có điểm cực tiểu, không có điểm cực đại là

A. $\left(-\infty;-2\right)$. **B.** $\left\{-2;2\right\}$. **C.** $\left(-2;+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;-2\right]$.

Câu 6: Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số $y=mx^4+\left(m-3\right)x^2+2021$ có 2 cực tiểu và một cực đại.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 7: Hãy tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f\left(x\right)=x^4-2xm^2$ có đúng 3 điểm cực trị?

A. $m>0$. **B.** $m\in\varnothing$. **C.** $m<0$. **D.** $\forall m\in R$.

Câu 8: Cho hàm số trùng phương $f\left(x\right)=x^4-2mx^2-1$. Hãy tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f\left(x\right)$ có ba điểm cực trị.

A. $m>1$. **B.** $m\le 1$. **C.** $m>0$. **D.** $m\le 0$.

Câu 9: Hãy tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^4-2\left(m-1\right)x^2$ có đúng một điểm cực trị?

A. $m\le 1$. **B.** $m\ge 1$. **C.** $m<1$. **D.** $m=1$.

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m không vượt quá 2020 để hàm số $y=-x^4+(m-5)x^2+3m-1$ có ba điểm cực trị

A. 2017. **B.** 2019. **C.** 2016. **D.** 2015.

Câu 11: Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=mx^4+\left(m-1\right)x^2+2020$ có đúng một điểm cực đại.

A. $\begin{cases}m<1\\m\neq 0\end{cases}$. **B.** $m\le 0$. **C.** $0\le m\le 1$. **D.** $m<1$.

Câu 12: Số giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=x^4-(6-2m)x^2+4m-3$ có ba điểm cực trị là:

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 13: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=(m-3)x^4+(2-m)x^2+m-1$ chỉ có một điểm cực trị và là điểm cực tiểu?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 14: Cho hàm số $y=(m+1)x^4-mx^2+3$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có ba điểm cực trị.

A. $m\in(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$. **B.** $m\in(-\infty;-1)\cup[0;+\infty)$.

C. $m\in(-\infty;-1]\cup[0;+\infty)$. **D.** $m\in(-1;0)$.

Câu 15: Tìm m để hàm số $f(x)=x^4-2mx^2+4$ có 3 điểm cực trị phân biệt với hoành độ nằm trong khoảng $(-3;3)$.

A. $[0;9]$. **B.** $[-3;3]$. **C.** $(0;9)$. **D.** $(-3;3)$.

Câu 16: Tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=3mx^4+(m-2)x^2+m+1$ có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu thỏa mãn giá trị cực tiểu có giá trị dương là

A. $(-1;2)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $[2;+\infty)$.

Câu 17: Có bao nhiêu số nguyên thuộc khoảng $(-100;99)$ của tham số m để hàm số $y=(m+1)x^4+(m-3)x^2+5m^2+2$ có đúng một điểm cực trị, đồng thời điểm cực trị đó là điểm cực đại?

A. 101. **B.** 99. **C.** 98. **D.** 100.

Câu 18: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C) của hàm số $y=x^4-2m^2x^2+m^4+5$ có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tứ giác nội tiếp. Tìm tích các phần tử của S.

A. 2. **B.** $\frac{1}{5}$. **C.** $\frac{-1}{5}$. **D.** -2.

Câu 19: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=x^4+2mx^2+1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

A. $m=-1$. **B.** $m=-\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. **C.** $m=\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. **D.** $m=1$.

Câu 20: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=mx^4+\left(m^2-4\right)x^2+2$ có đúng một điểm cực đại và không có điểm cực tiểu?

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 21: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=x^4+(m+1)x^2-2m-1$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác có một góc bằng $120°$.

A. $m=-1-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$, $m=-1$. **B.** $m=-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

C. $m=-1-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$. **D.** $m<-1$.

Câu 22: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn $4\sqrt{2}$.

A. $0 < m < 2$ **B.** $m > 0$ **C.** $0 < m < \sqrt[3]{4}$ **D.** $m < 2$

Câu 23: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông. Số phần tử của tập hợp S là

A. 2. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 24: Cho hàm số $y = x^4 - 8m^2x^2 + 1(1)$ Tìm các giá trị của m để hàm số (1) có 3 cực trị A, B, C và diện tích tam giác ABC bằng 64

A. $m = \pm\sqrt[5]{4}$ **B.** $m = \pm\sqrt[5]{2}$ **C.** $m = \pm\sqrt[5]{6}$ **D.** $m = \pm\sqrt[5]{8}$

Câu 25: Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = (m^2 - 9)x^4 - 2x^2 + 1$ có đúng một điểm cực trị là

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 26: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + m + 2\ (C_m)$. Giá trị gần nhất của tham số m để đồ thị (C_m) có 3 điểm cực trị nhận gốc toạ độ O làm trọng tâm?

A. 0 **B.** -1 **C.** -2 **D. 3**

Câu 27: Cho hàm số $y = x^4 - 2(1-m^2)x^2 + m + 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có cực đại cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành tam giác có diện tích lớn nhất.

A. $m = 1$. **B.** $m = \frac{1}{2}$. **C.** $m = -\frac{1}{2}$. **D.** $m = 0$.

Câu 28: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2mx^3 + (m+2)x^2 - 3$ có điểm cực tiểu mà không có điểm cực đại?

A. 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 29: Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2 + 1$ có đồ thị (C) và điểm $E(0;-1)$. Tìm m để (C) có điểm cực đại là A, hai điểm cực tiểu là B và C sao cho ΔBCE là tam giác đều.

A. $m = 2$. **B.** $m = -\frac{1}{4}$. **C.** $m = 2;\ m = -\frac{1}{4}$. **D.** $m = -2;\ m = \frac{1}{4}$.

Câu 30: Cho hàm số $y = 4x^4 - 8mx^2 + 3m^2 + 2$. Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị A, B, C tạo thành một tam giác có tâm đường tròn nội tiếp nằm trên đường thẳng $x + y - 2 = 0$.

A. 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 1.

Câu 31: Xét hàm số $y = f(x) = x^4 + 2mx^3 - (m+1)x^2 + 2m - 2$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số có cực tiểu mà không có cực đại là

A. 1. **B.** Vô số. **C.** 2. **D.** 3.

Dạng 4: Cực trị của hàm hợp

Kiến thức trọng tâm và phương pháp giải:

Đạo hàm của hàm hợp: $\left[f\left(u(x)\right)\right]' = u'(x).f'\left(u(x)\right)$

Tính chất đổi dấu của biểu thức: Gọi $x=\alpha$ là một nghiệm của phương trình $f(x)=0$. Khi đó:

- Nếu $x=\alpha$ là nghiệm bội bậc chẵn $\left\{(x-\alpha)^2,(x-\alpha)^4,...\right\}$ thì hàm số $y=f(x)$ không đổi dấu khi đi qua α.
- Nếu $x=\alpha$ là nghiệm đơn hoặc nghiệm bội bậc lẻ $\left\{(x-\alpha),(x-\alpha)^3,...\right\}$ thì hàm số $y=f(x)$ đổi dấu khi đi qua α.

Để tìm cực trị của hàm số $y=\left[f\left(u(x)\right)\right]$ ta làm như sau:

- **Bước 1:** Tính đạo hàm $y'=\left[f\left(u(x)\right)\right]'$
- **Bước 2:** Giải phương trình $y'=\left[f\left(u(x)\right)\right]'=0$ dựa vào đồ thị hay bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$
- **Bước 3:** Lập bảng biến thiên của hàm số
- **Bước 4:** Kết luận về các điểm cực trị

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=x(x+2022)\left(x^2-4x+4\right)$. Hàm số $f(x)$ có mấy điểm cực tiểu?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

.....

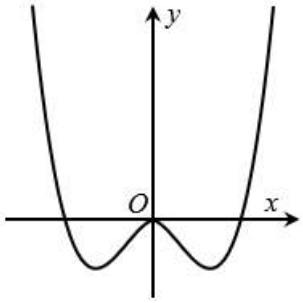
.....

.....

.....

.....

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ được cho bởi hình vẽ bên. Khi đó, hàm số $g(x)=f\left(x^2-2\right)$ có số điểm cực trị là



A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

✍ Lời giải

……

……

……

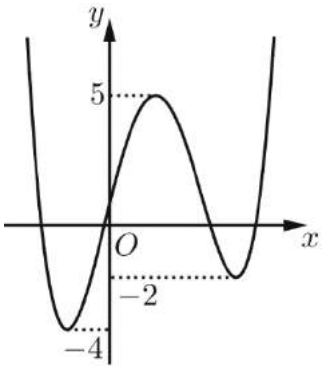
……

……

……

……

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên.



Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f(x)-mx$ có đúng hai điểm cực tiểu, khi đó tổng các giá trị của S là

A. 9. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 7.

✍ Lời giải

……

……

……

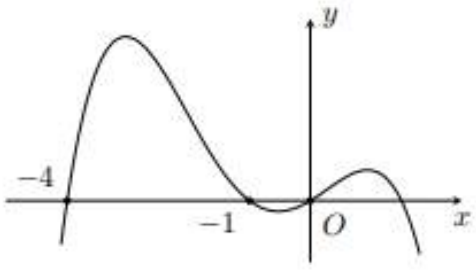
……

……

……

……

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị có 3 điểm cực trị như hình dưới đây. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x+2\right)$ là



A. 5. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 7.

Lời giải

.....

.....

.....

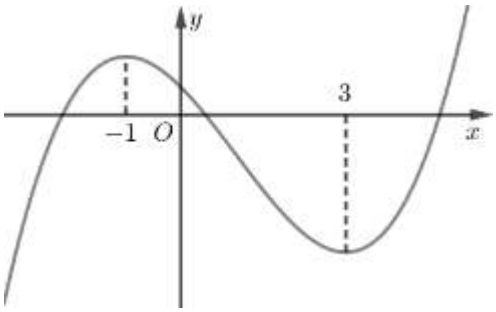
.....

.....

.....

.....

Câu 6: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(x^2-4x+m\right)$ có 3 điểm cực trị. Số phần tử của S là

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

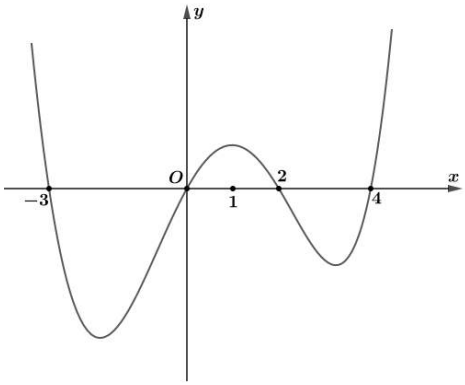
Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(x+2)(x-3)$ và liên tục trên $\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 5. **B.** 2. **C.** 3 **D.** 1

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x\left(2x-x^2\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. $x=3$. **B.** $x=1$. **C.** $x=0$. **D.** $x=2$.

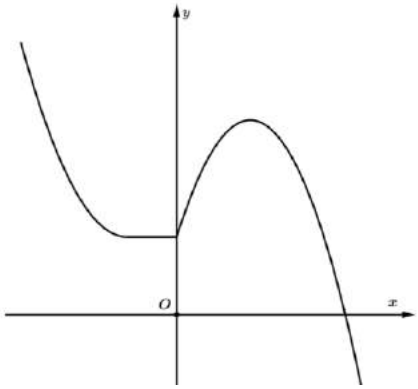
Câu 3: Cho hàm số bậc năm $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như trong hình vẽ bên.



Tìm số điểm cực đại của hàm số $y=e^{f(x)}.\pi^{f^3(x)}$.

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 4: Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f(x-1)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. Vô số. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

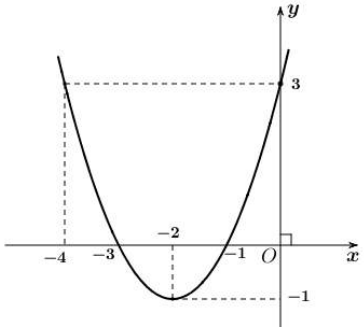
Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-2\right)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ. Đặt $g(x)=2f(x)-6x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hỏi đồ thị hàm số $y=g(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị

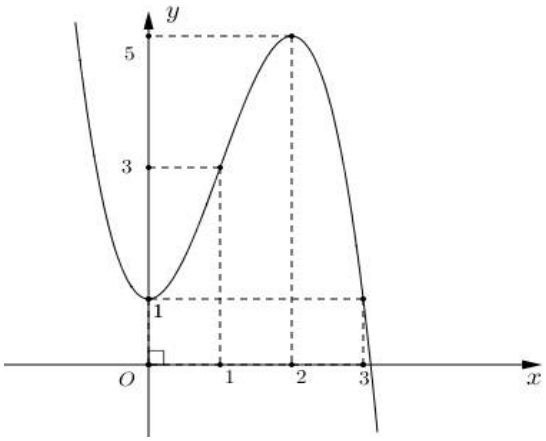


A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)^2(2x-1)$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3 **B.** 1. **C.** 2. **D.** 5.

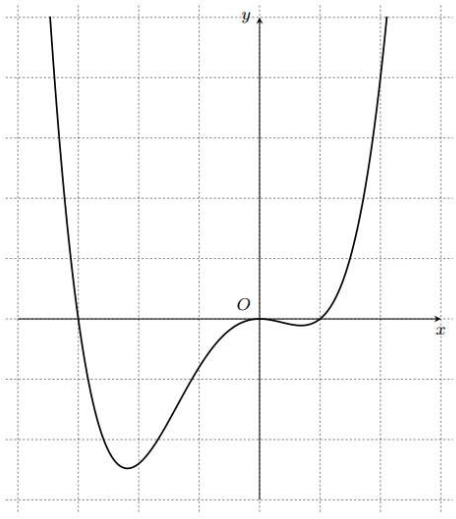
Câu 8: Cho hàm đa thức bậc ba $y=f(x)$ như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(f(x)+m\right)$ có đúng 6 điểm cực trị?

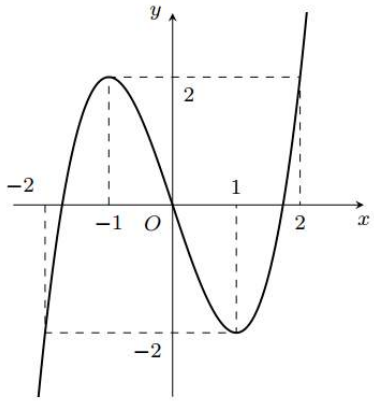
A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức, có $f(-3)<0$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left[f(x-6)\right]^{2050}$ là



A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=\sqrt{4-f^2(x)}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

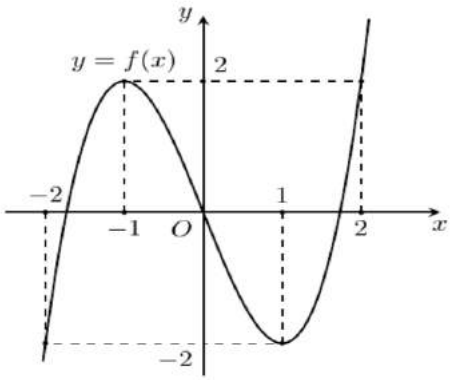


A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(x)=(x+1)^2(x+3)(x^2-4)$. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B. 3.** **C. 4.** **D. 1.**

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y=\left[f(x)\right]^2$ là

A. 5. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

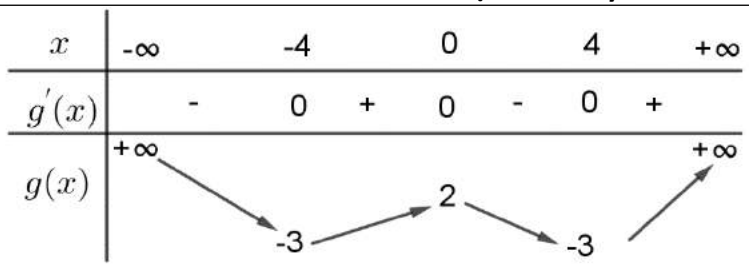
Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f\left(x^2+x\right)$ là

A. 2 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 0

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $g(x)=f'(x)$ như sau



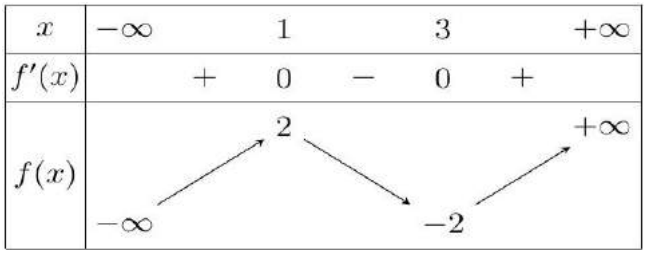
Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2+4x\right)$ là

A. 6. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 15: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=2x^2+x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

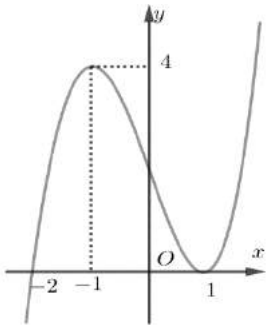
Câu 16: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'\left(x\right)$ như sau



Hỏi hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2-2x+4\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu.

A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

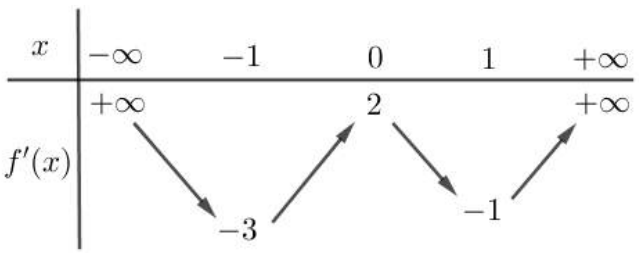
Câu 17: Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có đồ thị $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ bên dưới



Hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2-3\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

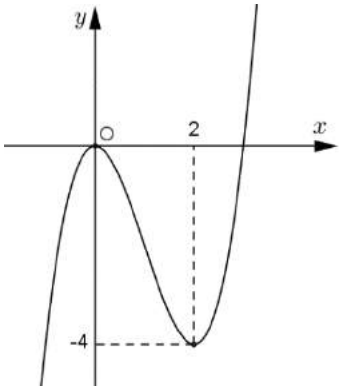
Câu 18: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$, bảng biến thiên của hàm số $f'\left(x\right)$ như sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ là

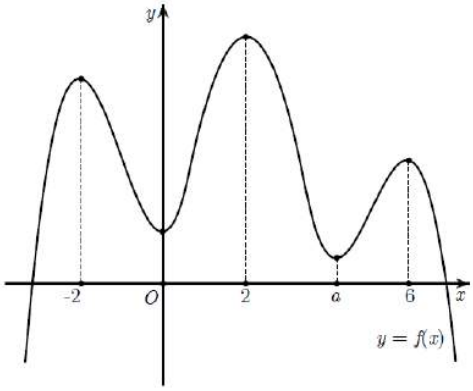
A. 9.. **B.** 3.. **C.** 7.. **D.** 5.

Câu 19: Biết rằng hàm số $f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f\left[f(x)\right]$.



A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

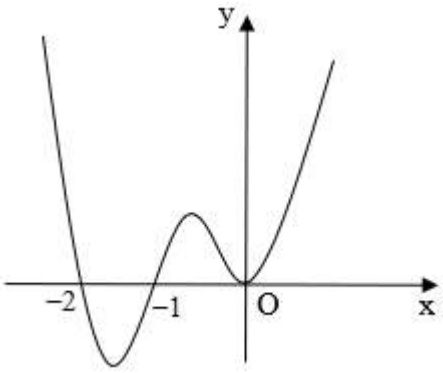
Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Biết tất cả các điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là $-2;\ 0;\ 2;\ a;\ 6$ với $4<a<6$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^6-3x^2\right)$ là

A. 8. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 7.

Câu 21: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $f'\left(x^2-4x-12\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f\left(x^2-8x\right)$ đạt cực đại tại điểm

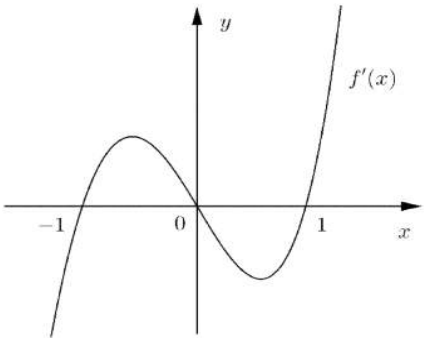


A. $x=1$. **B.** $x=0$. **C.** $x=2$. **D.** $x=4$.

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(x)=\left(x^2-4x-5\right)\left(x^2-1\right)$. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f\left(x^3-3x^2\right)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

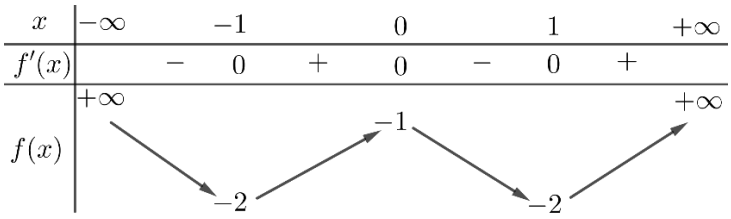
Câu 23: Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $f'(x)=x^3+ax^2+bx+c(a,b,c\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $g(x)=f\left(f'(x)\right)$ có bao nhiêu cực tiểu?

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 7.

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f^3\left(x^3+3x\right)+2022$ là

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 25: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a,b,c,d\in\mathbb{R};a\neq 0)$ có đồ thị là đường cong ở hình bên. Hỏi hàm số $y=f\left(f^2(x)+1\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

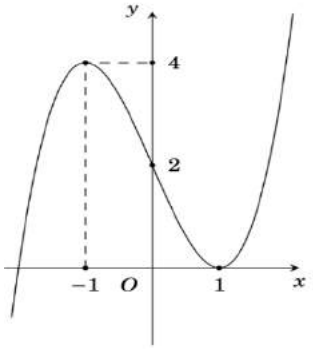
Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x)=x^3-4x$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-22;22]$ để hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x-m\right)$ có 7 cực trị.

A. 21. **B.** 22. **C.** 23. **D.** 24.

Câu 27: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2-x,\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(x^4+3x^2+2+m\right)$ có đúng 3 cực trị?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)-2x$ là

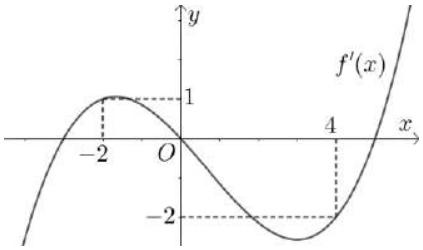


A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 29: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)\left(2x^2-3x-9\right),\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(x)+x^3-3x^2-9x+6$ có bao nhiêu điểm cực trị?

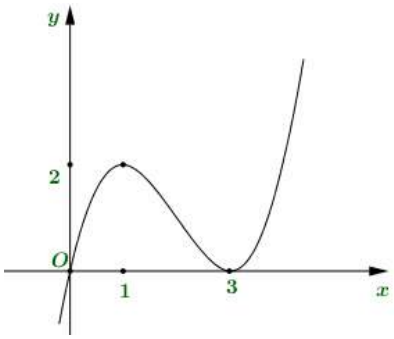
A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 30: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $g(x)=4.f\left(x^2-4\right)+x^4-8x^2$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?



A. 4. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 5.

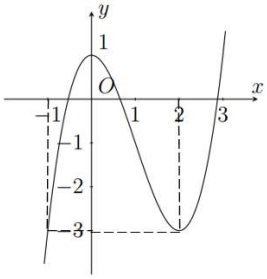
Câu 31: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,(a\neq 0)$. Hàm số $f'(1-x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)-x^2$ là

A. 10. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 4.

Câu 32: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $h(x)$ có đạo hàm $h'(x)=f\left(x^3-3x^2+m\right)+3$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $h(x)$ có hoành độ cực trị thuộc đoạn $[-1;2]$.

A. 11. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

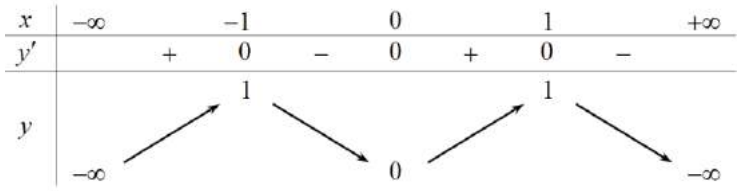
Câu 33: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=3f\left(-x^4+4x^2-6\right)+2x^6-3x^4-12x^2$ là:

A. 4. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 34: Cho $y=f(x)$ là hàm số bậc bốn có bảng biến thiên như sau:



Hàm số $y=\dfrac{f\left(-x^2+2x\right)+2021}{f\left(-x^2+2x\right)}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=x^2-82x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=f\left(x^4-18x^2+m\right)$ có đúng 7 cực trị?

A. 83. **B.** vô số **C.** 80. **D.** 81.

Câu 36: Cho hàm số $y=f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+1$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(f(x)\right)$ bằng

A. 13. **B.** 10. **C.** 3. **D.** 11.

Câu 37: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y=f'(x)=(x-2)^2\left(x^2-x\right)$, $x\in\mathbb{R}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f\left(\dfrac{1}{2}x^2-6x+m\right)$ có 5 điểm cực trị. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 154. **B.** 17. **C.** 213. **D.** 153.

Câu 38: Cho $f(x)$ là hàm đa thức và cho hàm đa thức bậc ba $g(x)=f(x+1)$ thỏa mãn $(x-1)g'(x+3)=(x+1)g'(x+2)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(2x^2-4x+5\right)$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn và có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)=2^{-\frac{1}{x^4}}\left[f(2x+1)\right]^3$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	3	↘	-2	↗	$+\infty$

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 40: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+3)^2\left(x^2-x\right)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=f\left(x^2-6x+m\right)$ có 5 điểm cực trị?

A. 8. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 6.

Câu 41: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2\left(x^2-7x+12\right),\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x+m\right)$ có đúng 6 điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2+x-6$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=f\left(x^3-3x^2-9x+m\right)$ có đúng 6 điểm cực trị.

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

Câu 43: Cho hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	3	↘	-2	↗	$+\infty$

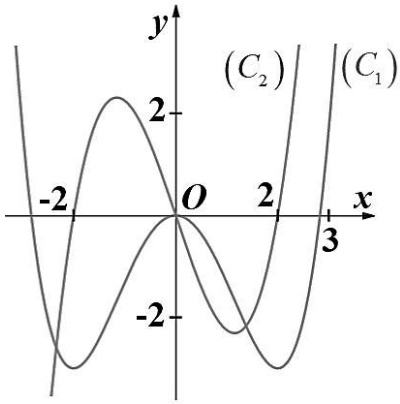
Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left(x^3-x\right)\left[f\left(x+1\right)\right]^2$ là

A. 11. **B.** 8. **C.** 13. **D.** 10.

Câu 44: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2-4x$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(2x^2-12x+m\right)$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 17. **B.** 19. **C.** 16. **D.** 18.

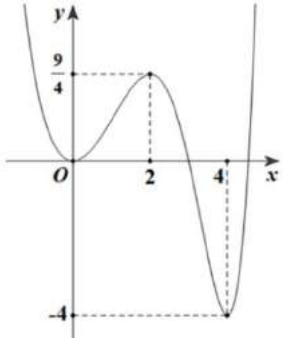
Câu 45: Cho đồ thị hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị (C_1) và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị (C_2) như hình vẽ bên.



Số điểm cực đại của đồ thị hàm số $g(x)=f\left[e^{-x}f(x)\right]$ trên $(-\infty;3)$ là:

A. 5. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f(5-2x)$ như hình vẽ bên dưới

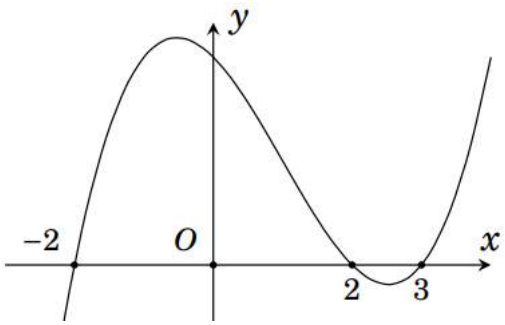


Có bao nhiêu giá trị thực của tham số $m\in[0;10]$ để hàm số $y=2f\left(4x^2+1-m\right)$ có 7 điểm cực

trị?

A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

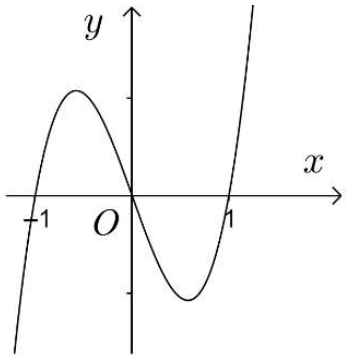
Câu 47: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f(-2)=0$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên dưới.



Hỏi hàm số $g(x)=\left[f\left(-x-x^2\right)\right]^2$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 48: Cho hàm số bậc bốn $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+a$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong như hình vẽ sau:



Hàm số $y=f(2x-1)f\left(x^2-2x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 7. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 49: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=\dfrac{(x-1)(x+4)}{\sqrt[3]{x}}$. Hàm số $y=f\left(x^2+4x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Câu 50: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(x-2),\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x^2+m\right)$ có đúng 8 cực trị?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 51: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=x^2+16x,\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(x^4-8x^2+m\right)$ có đúng 9 điểm cực trị?

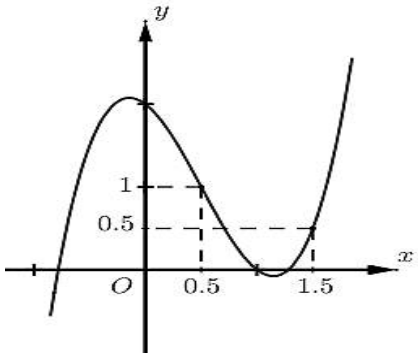
A. 16 **B.** 9. **C.** 15. **D.** 10.

Câu 52: Cho hai hàm số $g(x);f(x)$, trong đó $g(x)$ là hàm số đa thức bậc ba thỏa mãn $g(x)=f(x+1)$ và $(x-1)g'(x+3)=(x+1)g'(x+2)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số

$y = f\left(2x^2 - 4x + 3 - m\right)$ có đúng ba cực trị.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 5.

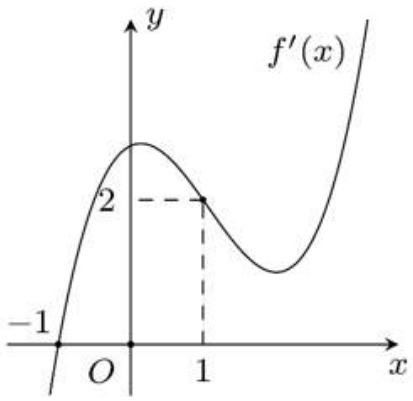
Câu 53: Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Hàm số $g(x) = f\left(\dfrac{x^2-1}{2}\right) - 2\ln x$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 54: Cho $f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị là đường cong như hình dưới đây.



Hỏi hàm số $g(x) = f(\sin x - 1) + \dfrac{\cos 2x}{4}$ có bao nhiêu điểm cực trị thuộc khoảng $(0;2\pi)$?

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 55: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘		↗	5	↘		↗	$+\infty$
			-3				-5		

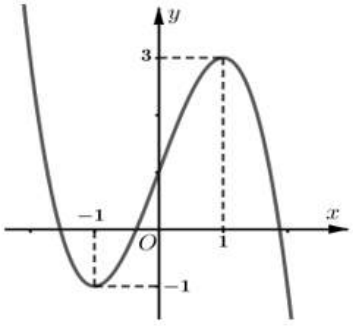
Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = e^{f(x)} - m.3^{f(x)}$ có đúng 7 điểm cực trị.

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 56: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x^2-2x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f(x^3-3x^2+m)$ có 8 điểm cực trị là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4

Câu 57: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ là hàm số bậc ba và $f'(x)$ có đồ thị là đường cong như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=f(2x-1)+mx+3$ có ba điểm cực trị?



A. 5. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 58: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=(x^3-3x-m+1)^2$ có 5 điểm cực trị.

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 59: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2+2x$ trên $\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f(x^2-8x+m)$ có 5 điểm cực trị dương?

A. 0 **B.** 14 **C.** 13 **D.** 12

Câu 60: Cho hàm số $f(x)=x^2+(a+x)\sqrt{x^2+1}+ax$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $a\in(-20;20)$ sao cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có cùng một điểm cực trị $A(x_0;y_0)$ và $y_0<-5$?

A. 15. **B.** 19. **C.** 16. **D.** 39.

Dạng 5: Cực trị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối

❖ **Một số kiến thức cần nắm:**

➢ **Cách vẽ đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$:**

- Cho đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$. Đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ được vẽ bằng cách:
- Giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ nằm phía trên trục hoành.
- Lấy đối xứng phần đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ nằm phía dưới trục hoành qua trục hoành đồng thời xóa phần phía dưới trục hoành.

➢ **Tính chất đặc biệt của đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$:**

- Số cực trị của hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ bằng tổng số cực trị hàm số $y=f\left(x\right)$ và số điểm cắt của $y=f\left(x\right)$ và trục Ox (không tính điểm tiếp xúc).
- Hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ là hàm số chẵn đồ thị đối xứng qua trục tung. Đồ thị được vẽ bằng cách:
- Giữ nguyên đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right),\left(C_1\right)$ ứng với $x\ge 0$.
- Với $x<0$ được vẽ bằng cách lấy đối xứng phần đồ thị $\left(C_1\right)$ qua trục tung.
- Gọi $\left(C_1\right)$ có số điểm cực trị là α.
- Nếu $\left(C_1\right)$ cắt trục tung thì số điểm cực trị của $y=f\left(\left|x\right|\right)$ là $2\alpha+1$ (một điểm cực trị là $x=0$)
- Nếu $\left(C_1\right)$ không cắt trục tung thì số điểm cực trị của $y=f\left(\left|x\right|\right)$ là 2α.
- Số điểm cực trị của hàm số $f\left(\left|x\right|\right)$ là: $2a+1$ với a là số điểm cực trị dương của hàm số $y=f\left(x\right)$ (số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ nằm phía bên phải trục tung).
- Số điểm cực trị (nếu có) của hàm số $y=f\left(ax+b\right)+c$ bằng số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x\right)$.

➢ Đồ thị hàm số có dạng $y=\left|u\left(x\right)\right|.v\left(x\right)$

- Từ đồ thị $\left(C\right):y=u\left(x\right).v\left(x\right)$ suy ra đồ thị $\left(C'\right):y=\left|u\left(x\right)\right|.v\left(x\right)$.
- Ta có: $y=\left|u\left(x\right)\right|.v\left(x\right)=\begin{cases}u\left(x\right).v\left(x\right)\ \ neu\ \ u\left(x\right)\ge 0\\-u\left(x\right).v\left(x\right)\ neu\ u\left(x\right)<0\end{cases}$

➢ Cách vẽ đồ thị hàm số $\left(C'\right)$ từ đồ thị $\left(C\right)$:

- Giữ nguyên miền đồ thị $u\left(x\right)\ge 0$ của đồ thị $\left(C\right):y=f\left(x\right)$.
- Bỏ phần đồ thị miền $u\left(x\right)<0$ của $\left(C\right)$, lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox.

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Hàm số $y=\left|x^3+3x^2\right|$ đạt cực tiểu tại

A. $x=0$. **B.** $x=4$. **C.** $x=0$ và $x=a<-3$. **D.** $x=-3$ và $x=0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	1	↗	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f(x)-2\right|$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Hàm số $y=\left|(x-1)^3(x+1)\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m^2\right|$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 5. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-2)^{2019}\left(x^2-x-2\right)^{2020}(x+3)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ là:

A. 5. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

.....

.....

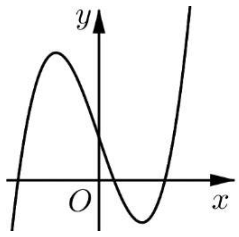
.....

.....

.....

.....

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên.



Hàm số $g(x)=f(|x|)+2021$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 7: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị của hàm số $y=\left|x^3-3x^2+m\right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		0		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	2021	↘	2020		↗ 2016	↘	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f\left(|x|\right)-2019\right|$ là

A. 5. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 7.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như sau. Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f(x)\right|$ là

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-4	↗	-3	↘	-4	↗	$+\infty$

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 7.

Lời giải

.....

.....

……

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=\left|2x^4-8x^3-16x^2+1-m\right|$ (m là tham số). Biết rằng khi m thay đổi thì số điểm cực trị của hàm số có thể là a hoặc b hoặc c. Giá trị $a+b+c$ bằng:

A. 12. **B.** 16. **C.** 15. **D.** 13.

Lời giải

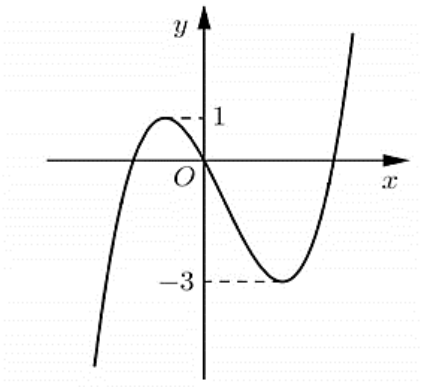
……

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$ có 7 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 2: Cho hàm số bậc ba có đồ thị $y=f(x)$ như hình vẽ dưới đây. Tất cả các số thực của tham số m để hàm số $y=\left|f(x)+m\right|$ có 5 điểm cực trị là



A. $\left[\begin{array}{l} m\le -1 \\ m\ge 3 \end{array}\right.$. **B.** $-1<m<3$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=3 \end{array}\right.$. **D.** $1<m<3$.

Câu 3: Cho hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$ có ba điểm cực trị $x=-1;\ x=0;\ x=2$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=f\left(\left|x+m\right|\right)$ có 7 điểm cực trị.

A. $m<-1$. **B.** $m<0$. **C.** $-1<m<2$. **D.** $m<2$.

Câu 4: Cho hàm số $y=\left|x\right|^3-mx+5$. Gọi a là số điểm cực trị của hàm số đã cho. Mệnh đề nào dưới đây đúng

A. $a=0$. **B.** $a\le 1$. **C.** $1<a\le 3$. **D.** $a>3$.

Câu 5: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\left|x\right|^3-(2m+1)x^2+3m\left|x\right|-5$ có 5 điểm cực trị:

A. $\left(-\infty;\frac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$. **B.** $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=x^3-(2m-1)x^2+(2-m)x+2$. Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ có 5 điểm cực trị:

A. $-\frac{5}{4}<m<2$. **B.** $\frac{5}{4}<m<2$. **C.** $\frac{1}{2}<m<2$. **D.** $-2<m<\frac{5}{4}$.

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\left|x\right|^3-(2m+1)x^2+3m\left|x\right|-5$ có 3 điểm cực trị:

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $\left[0;\frac{1}{4}\right)$.

Câu 8: Cho hàm số: $f(x)=\frac{1}{4}x^4-mx^3+\frac{3}{2}(m^2-1)x^2+(1-m^2)x+2019$ với m là tham số thực. Biết rằng hàm số $y=f(|x|)$ có số điểm cực trị lớn hơn 5 khi $a<m^2<b+2\sqrt{c}\,(a,b,c\in\mathbb{R})$. Giá trị $T=a+b+c$ bằng

A. 6. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 5.

Câu 9: Có bao nhiêu số nguyên $m\in[-10;10]$ để hàm số $y=|mx^3-3mx^2+(3m-2)x+2-m|$ có 5 điểm cực trị?

A. 7. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 11.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-20	↗	0	↘	-20	↗	$+\infty$

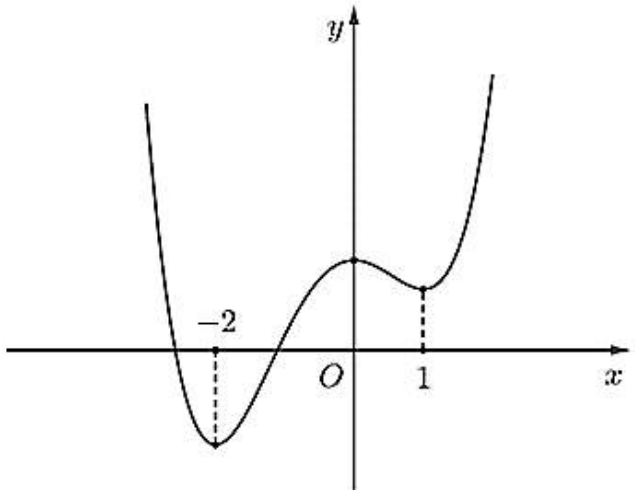
Có ban nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y=|f(x)+m|$ có 7 điểm cực trị?

A. 0. **B.** 21. **C.** 18. **D.** 19.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^3-2x^2)(x^3-2x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=|f(1-2018x)|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị

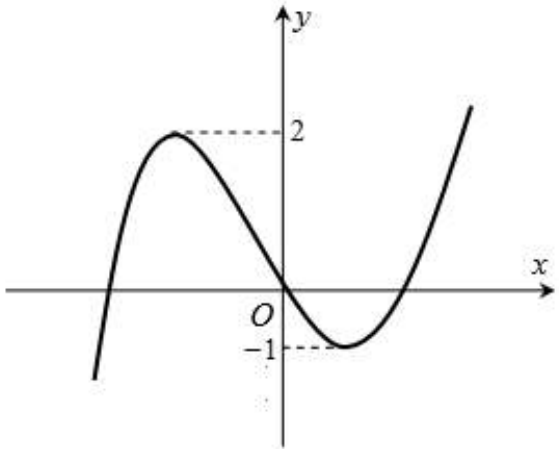
A. 9. **B.** 2022. **C.** 11. **D.** 2018.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Các điểm $x=-2;x=0;x=1$ là các điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f(|x+1|-3)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



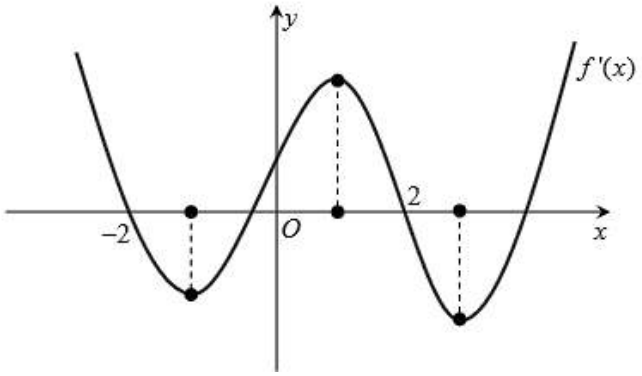
A. 5. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=|2f(x)-3m|$ có 5 điểm cực trị là:



A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y=\left|f\left(x^3-3x\right)+2\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?



A. 16. **B.** 17. **C.** 19. **D.** 18

Câu 15: Biết phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a\neq 0)$ có đúng hai nghiệm thực. Hàm số $y=\left|ax^3+bx^2+cx+d\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 16: Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20;20)$ để hàm số $y=\left|x^2-2x+m\right|+2x+1$ có ba điểm cực trị?

A. 17. **B.** 16. **C.** 19. **D.** 18.

Câu 17: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=\left|x^3+(2m-1)x^2+(2m^2-2m-9)x-2m^2+9\right|$ có 5 điểm cực trị.

A. 7. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

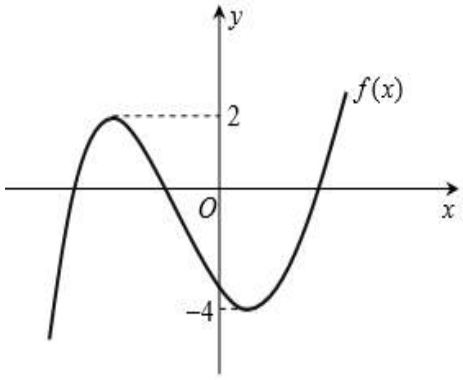
Câu 18: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=|x|^3-3mx^2+3(m^2-4)|x|+1$ có 3 điểm cực trị.

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 19: Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-10;10)$ để hàm số $y=|x|^3-3mx^2+3(m^2-4)|x|+1$ có 5 điểm cực trị.

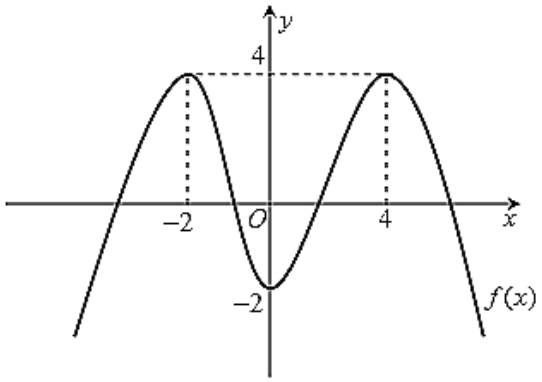
A. 3. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 7.

Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2021;2012]$ để hàm số $y=\left|f^2(x)-2f(x)+m+4\right|$ có đúng 5 điểm cực trị?



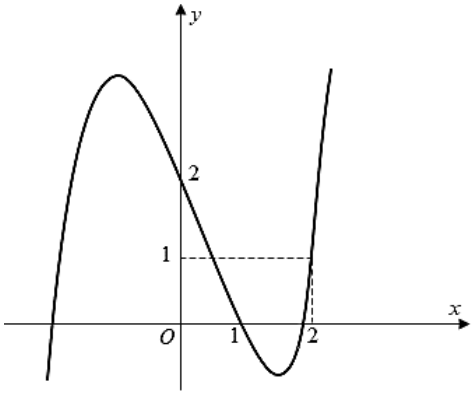
A. 2104 . **B.** 2016 . **C.** 2105 . **D.** 2017

Câu 21: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|4f^2\left(x\right)+8f\left(x\right)+m-1\right|$ có đúng 15 điểm cực trị?



A. 2 . **B.** 3 . **C.** 0 . **D.** 1.

Câu 22: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



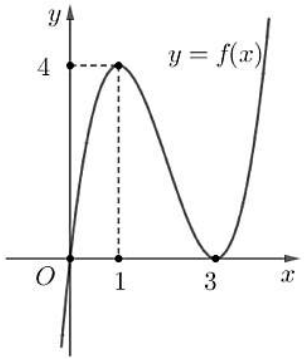
Hàm số $y=\left|4f\left(x\right)-2x^3+7x^2-8x+1\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị

A. 5 . **B.** 6 . **C.** 7 . **D.** 8 .

Câu 23: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x-1\right)^3\left(x^2+\left(4m-5\right)x+m^2-7m+6\right),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ có đúng 5 điểm cực trị.

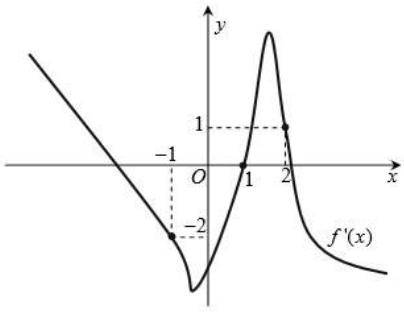
A. 4 . **B.** 2 . **C.** 5 . **D.** 3 .

Câu 24: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|\left(f\left(x\right)\right)^2+f\left(x\right)-2\right|$ là



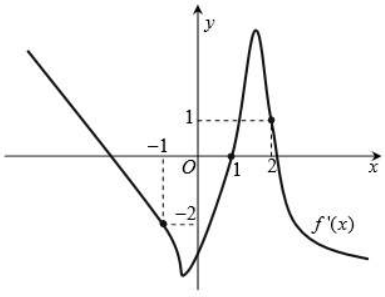
A. 6. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Hỏi hàm số $y=\left|2f(x)-x^2+2x+3\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?



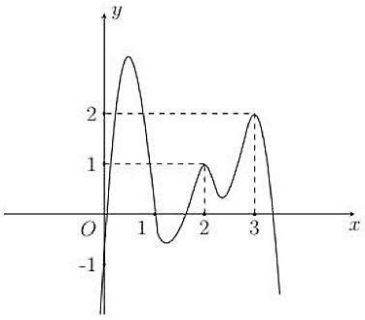
A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7

Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Hỏi hàm số $y=\left|2f\left(x^2-2x\right)-x^4+4x^3-2x^2-4x+2021\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?



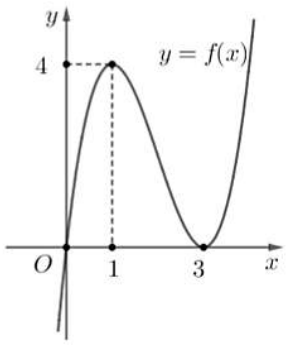
A. 9. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 12.

Câu 27: Cho $f(x)$ là một hàm đa thức và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y=\left|2f(x)-(x-1)^2\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?



A. 9. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Khi hàm số $y=\left|\left(f(x)\right)^2+f(x)+m\right|$ có số điểm cực trị là ít nhất. Giá trị nhỏ nhất của tham số m thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $(0;1)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(1;+\infty)$.

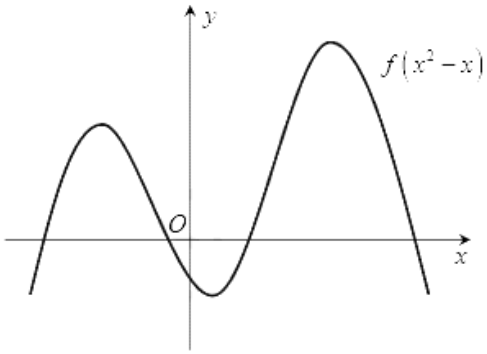
Câu 29: Cho hàm số $y=f(x)=x^2-2mx+4m|x-m|+2$. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in(-21;21)$ để hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị. Số phần tử của S

A. 20. **B.** 16. **C.** 18. **D.** 19

Câu 30: Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3mx^2+6mx+m-1$. Số giá trị nguyên của tham số $m\in[-2021;2021]$ để hàm số $y=f(|x+2019m-2020|)$ có đúng 5 điểm cực trị

A. 2016. **B.** 2018. **C.** 2019. **D.** 2017

Câu 31: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y=f(x^2-x)$ được cho như hình vẽ dưới đây. Hỏi hàm số $y=f(x^2-2mx-|x-m|+m^2)$ có tất cả bao nhiêu cực trị?



A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 1.

Câu 32: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-2		-1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	1	↘	0	↗	3	↘	$-\infty$

Xét hàm số $g(x)=f(|x-4|)+2018^{2019}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là:

A. 5. **B.** 1. **C.** 9. **D.** 2.

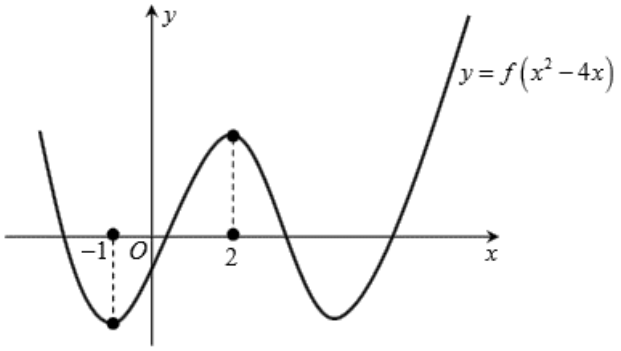
Câu 33: Cho hàm số $f(x)=\left|\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}+m\right|$. Hàm số có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 34: Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, với a,b,c là các số thực thỏa mãn $\begin{cases}a+b+c<-1\\4a-2b+c>8\\c<0\end{cases}$. Hàm số $y=\left|f\left(|x|\right)\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

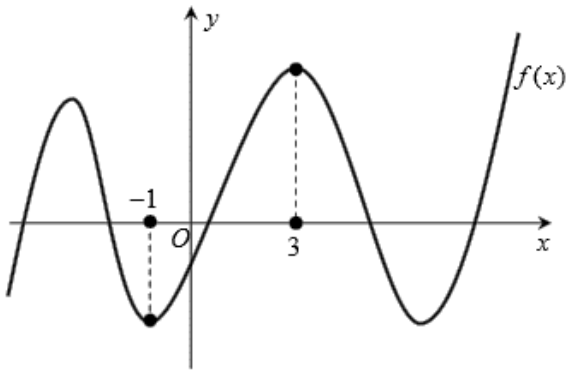
A. 7. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 5.

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y=f\left(x^2-4x\right)$ được cho như hình vẽ dưới đây. Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-2|x|+12\right)$ có tất cả bao nhiêu cực trị?



A. 7. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 1.

Câu 36: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-21;21]$ để hàm số $y=\left(-|x+2021m|-2m+1\right)$ có đúng 5 điểm cực trị. Số phần tử của tập S là



A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 37: Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y=\left|x^3+(m-4)x-m+3\right|$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 5.

Câu 38: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=x^3-3x^2-10x$. Số giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(\left|x^2-2mx+m-2\right|-3\right)$ có 13 điểm cực trị là:

A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 39: Cho hàm số $y \quad f \ x \quad \begin{cases} -x^2 - mx + 6, x \le 2 \\ \frac{n}{2}x - 4, x > 2 \end{cases} \quad m, n \in \mathbb{R}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f \ x$ có đúng hai điểm cực trị?

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 40: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \left| f\left(x^2 + m - 5\right) \right|$ có ít nhất 7 điểm cực trị?

A. 6. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 3.

Câu 41: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và hàm số $y = f'(2x+1)$ có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(2x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

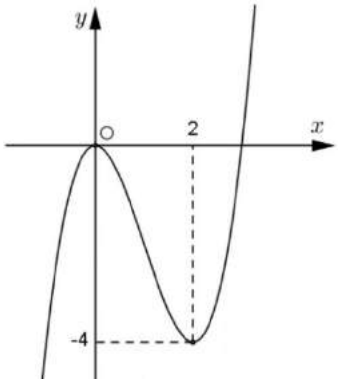
Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in [-2023; 2023]$ để hàm số $y = g(x) = f\left(\left|x^{2023} + 2023x\right| + m\right)$ có ít nhất 5 điểm cực trị.

A. 4046. **B.** 4047. **C.** 2024. **D.** 2023.

Câu 42: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = \left(x^3 - 2x^2\right)\left(x^3 - 2x\right)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $\left|f(1 - 2022x)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 12. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 11.

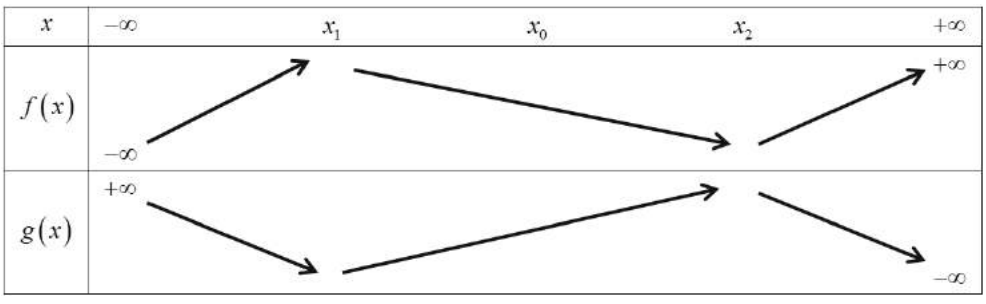
Câu 43: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Hàm số $y = \left|f\left(x^2\right) - x^2\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 44: Cho hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây



Biết rằng phương trình $f(x)=g(x)$ có nghiệm $x_0\in(x_1;x_2)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=|f(x)-g(x)|$ là

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 45: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^3+2|x|-4\right)$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 10.

Câu 46: Tìm số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^4-8|x|^3+22x^2-24|x|+6\sqrt{2}$.

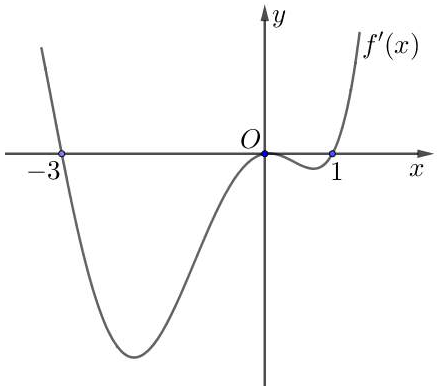
A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 47: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-2)^2(x-1)\left(x^2-2(m+1)x+m^2-1\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 48: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức, có $f(-3)<0$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.

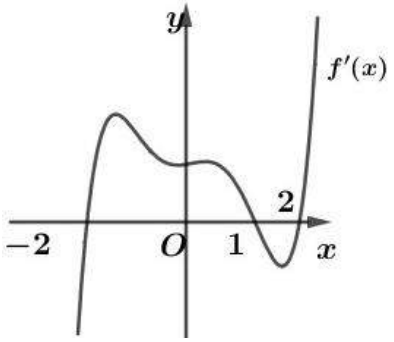


Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left[f(x-6)\right]^{2050}$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 49: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(-2)<f(2)=0$, đồ thị $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên.

Hàm số $g(x)=\left|f(x)+\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right|$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?



A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 50: Có tất cả bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2022;2022]$ để hàm số $y=\left|x^3-3x^2+m\right|$ có 3 điểm cực trị?

A. 4040. **B.** 4041. **C.** 4042. **D.** 4043.

Câu 51: Hàm số $y=\left|x^4-8x^3+22x^2-24x+6\sqrt{2}\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 52: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|-x^3+3x^2+m+2\right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 5.

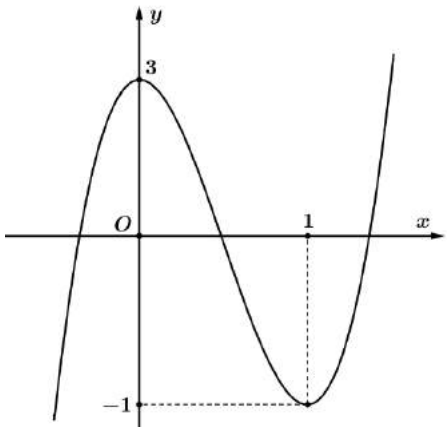
Câu 53: Cho hàm số $y=f(x)$ có $f(-2)=0$ và đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như hình sau

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g(x)=\left|15f\left(-x^4+2x^2-2\right)-10x^6+30x^2\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

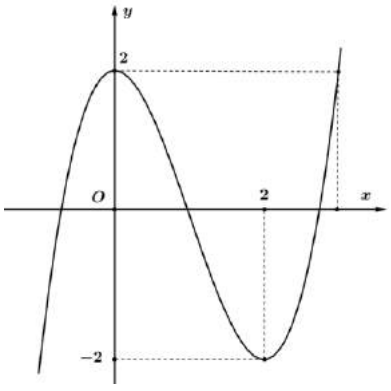
Câu 54: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Hàm số $y=\left|f\left(2^{\sqrt{x}}-1\right)\right|-3$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 55: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như sau



Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f^2(x)-4f(x)+3\right|$ là

A. 3. **B.** 7. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 56: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-2		-1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

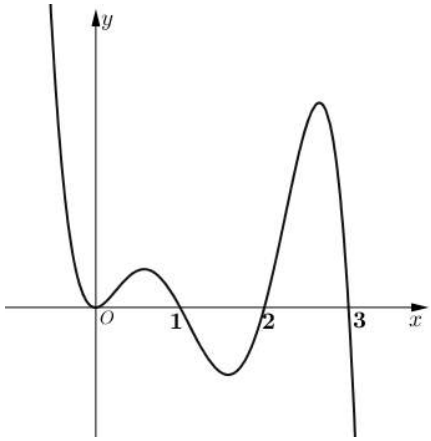
Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)=f\left(\left|x-4\right|\right)+2022^{2023}$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 57: Cho hàm số $f'(x)=(1-x)\left(x^2-5x+6\right)$. Hỏi có bao nhiêu giá trị của tham số m (với $m\in[0;6];2m\in\mathbb{Z}$) để hàm số $g(x)=f\left(x^2-2\left|x-1\right|-2x+m\right)$ có đúng 9 điểm cực trị?

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 3.

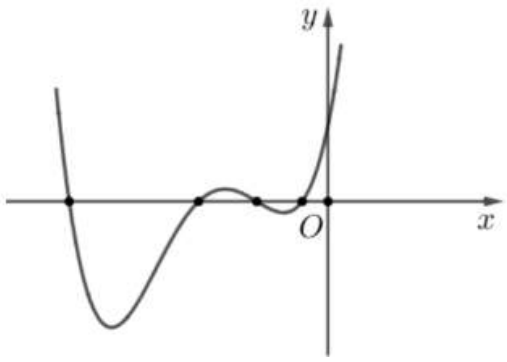
Câu 58: Cho hàm đa thức $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Có bao nhiêu giá trị của m để $m\in[0;6]$, $2m\in\mathbb{Z}$ để hàm số $g(x)=f\left(x^2-2\left|x-1\right|-2x+m\right)$ có đúng 9 điểm cực trị?

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 3.

Câu 59: Cho hàm đa thức $y=f(x)$, biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Biết rằng $f(0)=0$. Hỏi hàm số $g(x)=\left|f\left(x^6\right)-x^3\right|$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

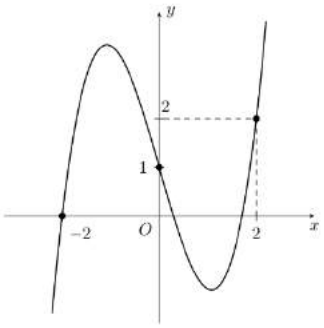
Câu 60: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ thỏa mãn $a>0,d>2021,a+b+c+d-2021<0$. Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f(x)-2021\right|$ là

A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 61: Cho hàm số $f(x)=2x^3+bx^2+cx+d$ thỏa mãn $4b+2c+d+16<0$ và $9b-3c+d>54$. Hàm số $y=|f(x)|$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

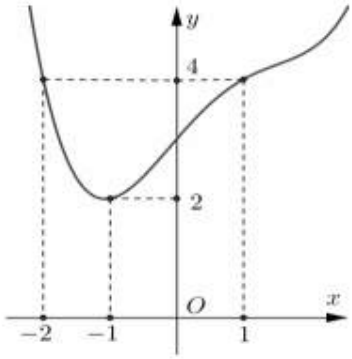
A. 2 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 4

Câu 62: Biết Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $f'\left(\sqrt[3]{x}\right)$ được cho trong hình dưới. Hàm số $g(x)=\left|f(x)-\frac{1}{8}x^4-x\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực đại.



A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 4.

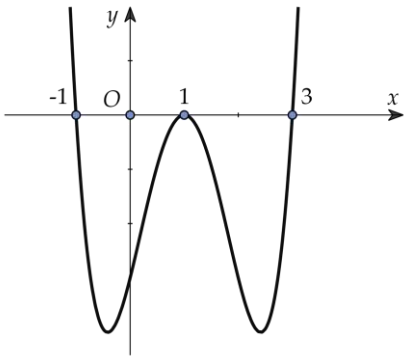
Câu 63: Cho hàm số $y=f(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f\,(a\neq 0)$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Đặt $g(x)=f(3x-1)-9x^3+\frac{9}{2}x^2-6x+2022$. Hàm số $y=g(|x|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 64: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới:



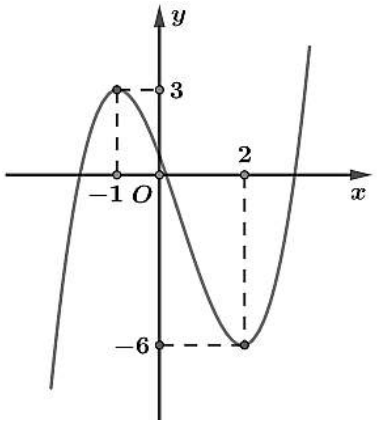
Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(|x^3|+1\right)$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 65: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $f(x)=\left|\dfrac{x}{x^2+x+1}-\dfrac{m}{3}\right|$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 3 **B.** 5 **C.** 2 **D.** 4

Câu 66: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(\left|f^2(x)-4f(x)-m\right|\right)$ có 17 điểm cực trị là

A. 1652. **B.** 1653. **C.** 1654. **D.** 1651.

Câu 67: Gọi S là tập giá trị nguyên $m\in[0;100]$ để hàm số $y=\left|x^3-3mx^2+4m^3-12m-8\right|$ có 5 cực trị. Tính tổng các phần tử của S.

A. 10096. **B.** 4048. **C.** 5047. **D.** 10094.

Câu 68: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-5	↗	$+\infty$

Đặt $g(x)=\left|m+f(2022+x)\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=g(x)$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 6. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 7.

Câu 69: Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-5;5)$ để đồ thị hàm số $y=\left|x^4-3mx^2-4\right|$ có đúng ba điểm cực trị A,B,C và diện tích tam giác ABC lớn hơn 4.

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 70: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+$
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để hàm số $h(x)=|f(x)-m|$ có đúng 3 điểm cực trị?

A. 21. **B.** 19. **C.** 18. **D.** 20.

Câu 71: Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=|x^3-3x^2+m-4|$ có đúng 5 điểm cực trị là

A. $[4;8]$. **B.** $[-4;0]$. **C.** $(-4;0)$. **D.** $(4;8)$.

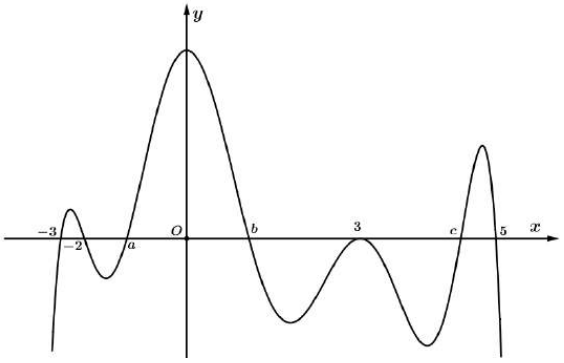
Câu 72: Số giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2022;2022]$ để hàm số $f(x)=|x|^3-3mx^2+24(m-2)|x|+2021m$ có đúng năm điểm cực trị là

A. 2025. **B.** 2021. **C.** 2019. **D.** 2020.

Câu 73: Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[-2021;2021]$ để hàm số $y=\left|\dfrac{x^2+m}{x^2+1}\right|$ có đúng ba điểm cực trị

A. 2020. **B.** 2022. **C.** 2021. **D.** 2019.

Câu 74: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ $-3;-2;a;b;3;c;5$ với $-\dfrac{4}{3}<a<-1;\ 1<b<\dfrac{4}{3};\ 4<c<5$ có dạng như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=f(2|x|+m-2022)$ có 5 điểm cực trị?



A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Câu 75: Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=|x|^3-(2m+1)x^2+3m|x|-5$ có 5 điểm cực trị.

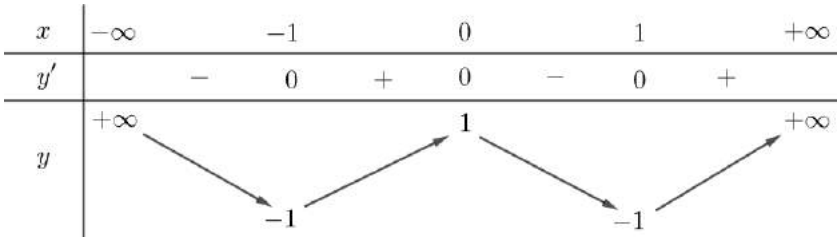
A. $\left(0;\dfrac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$. **B.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$.

C. $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Câu 76: Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=|x^3-(6m+3)x^2+(9+18m)x-27|$ có ba điểm cực trị.

A. $\left[\begin{array}{l} m<\dfrac{-1}{2} \\ m>1 \end{array}\right.$. **B.** $-1\le m<\dfrac{-1}{2}$. **C.** $-1\le m<1$. **D.** $-1\le m\le 1$.

Câu 77: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên. Số điểm cực trị của hàm số $y=|f(x)|$ là

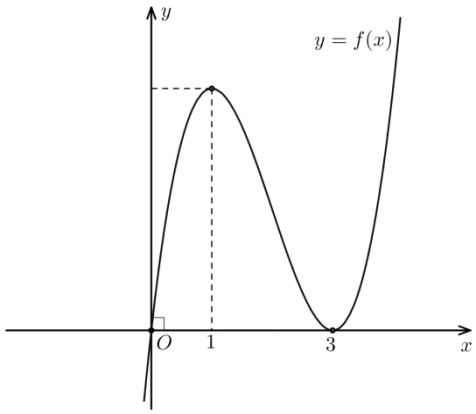


A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 4.

Câu 78: Tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|x^2-x-30\right|+mx+1$ có ba điểm cực trị là:

A. 22. **B.** 2. **C.** 21. **D.** 0.

Câu 79: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $h(x)=\left|f^2(x)+f(x)+m\right|$ có đúng 3 điểm cực trị.

A. $m\ge\frac{1}{4}$. **B.** $m\le 1$. **C.** $m<1$. **D.** $m>\frac{1}{4}$.

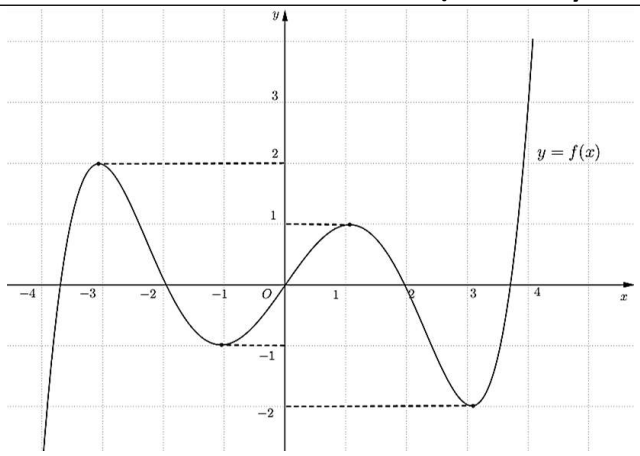
Câu 80: Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+(m-1)x+3m-2$. Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị

A. $m>1$. **B.** $m<2$. **C.** $1<m<2$. **D.** $m>2$.

Câu 81: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=\left|x^3-6x^2+9x-2m\right|$ có đúng 3 điểm cực trị.

A. $\left[\begin{array}{l} m\ge 2 \\ m\le 0 \end{array}\right.$. **B.** $0<m<2$. **C.** $0\le m\le 2$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<0 \end{array}\right.$.

Câu 82: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình sau. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\left|2f(x)-m\right|$ có đúng 7 điểm cực trị?



A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 83: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	1	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị của m thỏa mãn $2022m\in\mathbb{Z}$ để hàm số $g\left(x\right)=\left|f^2\left(x\right)-2f\left(x\right)-m\right|$ có 7 điểm cực trị.

A. 1. **B.** 0. **C.** 2021. **D.** 2022.

Câu 84: Có bao nhiêu số nguyên của tham số $m\in\left[-10;10\right]$ để hàm số $f\left(x\right)=\left|\dfrac{x}{x^2+x+1}-\dfrac{m}{12}\right|$ có 4 điểm cực trị?

A. 13. **B.** 14. **C.** 15. **D.** 16.

Câu 85: Cho hàm số $y=f(x)$, đạo hàm $f'(x)$ có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$		-4		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

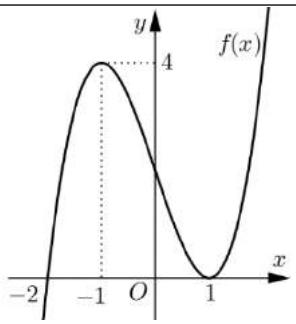
Có bao nhiêu giá trị nguyên bé hơn 2022 của tham số m để hàm số $y=f\left(\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|-\dfrac{m}{3}\right)$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 2009. **B.** 2007. **C.** 2010. **D.** 2008.

Câu 86: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm là $f'\left(x\right)=\left(x+1\right)^2\left(x^2-2x\right),\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(\left|x^3-3x\right|+m\right)$ có đúng 7 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Câu 87: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



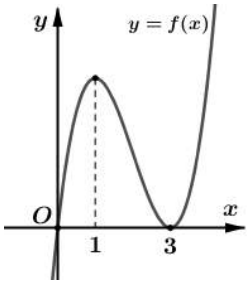
Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [0;20]$ để hàm số $g(x) = \left| f^2(x) - 2f(x) - m \right|$ có 9 điểm cực trị?

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

Câu 88: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x) = x^3 - 3x - 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30;30]$ để hàm số $y = f\left(\left|x^4 - 8x^2\right| + m\right)$ có đúng 7 điểm cực trị.

A. 1. **B.** 16. **C.** 2. **D.** 17.

Câu 89: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-15;15]$ để hàm số $h(x) = \left| f^2(x) + f(x) + m \right|$ có đúng 3 điểm cực trị?

A. 16. **B.** 15. **C.** 17. **D.** 14.

Câu 90: Cho hàm số $y = \left|3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2m - 1\right|$. Khi tham số m thay đổi thì hàm số đã cho có số điểm cực trị được chia thành ba mức là a, b, c với $a > b > c$. Giá trị $a - b - c$ bằng

A. -1. **B.** 15. **C.** -2. **D.** 3.

Câu 91: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x) = (x+3)(x-4)$. Tính tổng các giá trị nguyên của tham số $m \in [-10;5]$ để hàm số $y = f\left(\left|x^2 - 3x + m\right|\right)$ có nhiều điểm cực trị nhất?

A. 54. **B.** 9. **C.** -54. **D.** -52.

Câu 92: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ $f'(x) = (x+3)(x-4)$. Tính tổng các giá trị nguyên của tham số $m \in [-10;5]$ để hàm số $y = f\left(\left|x^2 - 3x + m\right|\right)$ có nhiều điểm cực trị nhất?

A. 54. **B.** 9. **C.** -52. **D.** -54.

Câu 93: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left|3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 2m\right|$ có 7 điểm cực trị?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

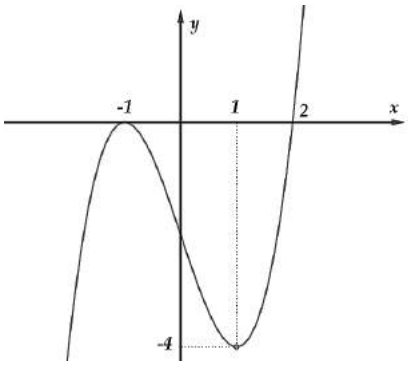
Câu 94: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi A,B,C,D là 4 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=|x|^3-6x^2+9|x|-3$ với hoành độ đều khác 0. Bán kính đường tròn ngoại tiếp đi qua 4 điểm A,B,C,D bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 95: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+3)(x^2-2)\forall x\in\mathbb{R}$. Tìm tất cả các giá trị thực không âm của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(\left|\sin x+\sqrt{3}\cos x\right|+m\right)$ có nhiều điểm cực trị nhất trên $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{11\pi}{12}\right]$.

A. $m\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$. **B.** $m\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$. **C.** $m\in\left(\sqrt{2}-1,\sqrt{2}\right)$. **D.** $m\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right)$.

Câu 96: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=g(x)=f\left(2x^2-4|x|+m-3\right)$ có 7 điểm cực trị.

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 97: Cho hàm số $y=\left|x^3+(m+2)x^2+mx-m^2\right|$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thoả mãn $|m-1|<5$ để hàm số đã cho có đúng 5 điểm cực trị?

A. 6. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 98: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=f(x)=\left|x^2-2mx+1\right|+4x$ có điểm cực đại với giá trị cực đại tương ứng nằm trong khoảng $(3;4)$ và đồng thời thỏa mãn $10m$ là số nguyên. Tìm số phần tử của tập S.

Câu 99: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-4	↗	2	↘	0	↗	$+\infty$

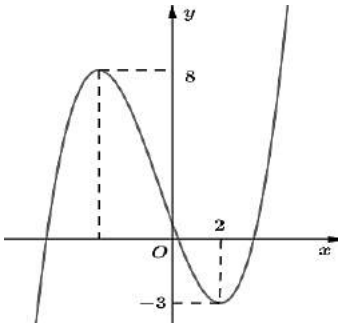
Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=\left|f\left(4x^3+1\right)+m\right|$ có 7 điểm cực trị?

A. Vô số. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 100: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-9)(x^2-16), \forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(\left|x^3+7x\right|+m\right)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 9. **B.** 16. **C.** 8. **D.** 4.

Câu 101: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là một đường cong như hình bên dưới.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(\left|f^2(x)-2f(x)-m\right|\right)$ có nhiều điểm cực trị nhất?

A. 11. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 13.

Câu 102: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^3\left[x^2+(1-3m)x+2m^2-2m\right]$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị của tham số $m\in[-5;5]$ để hàm số $g(x)=f\left(|x|+m\right)$ có tối thiểu 3 cực trị.

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

Câu 103: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=12x\left(x^2-x-2\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-10;10)$ để hàm số $y=f\left(|x|+m\right)$ có 7 điểm cực trị?

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

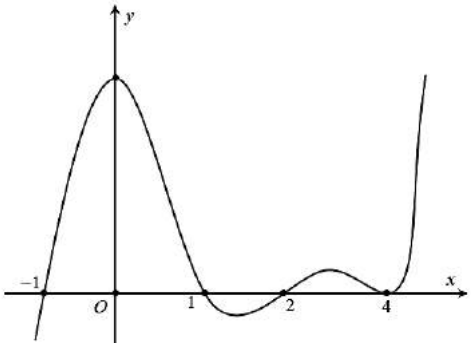
Câu 104: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y=f'(x)=(x-5)(x^2-4), x\in R$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-100;100]$ để hàm số $y=g(x)=f\left(\left|x^3+3x\right|+m\right)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 105. **B.** 106. **C.** 104. **D.** 103.

Câu 105: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f'(x)=(x-8).(x^2-8x+15)$ Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f\left(-16\left|x^4-2x^2\right|+m^2\right)$ có nhiều cực trị nhất?

A. 4. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 8.

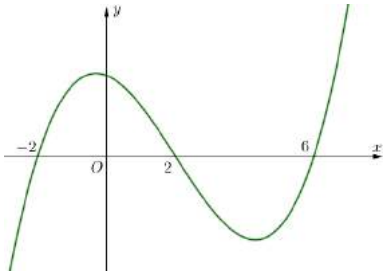
Câu 106: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có đúng 4 điểm chung với trục hoành như hình vẽ bên dưới:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(|x|^3-3|x|+m+2021\right)+2022m^3$ có đúng 11 điểm cực trị?

A. 0. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 1.

Câu 107: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ là hàm bậc 3 có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(\left|2x^3+3x\right|-m+1\right)$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

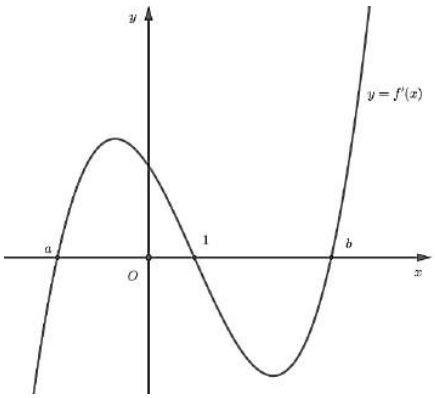
Câu 108: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		1		5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-4	↗	2	↘	0	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=\left|f\left(4x^3+1\right)+m\right|$ có 7 điểm cực trị?

A. 3 **B.** 1 **C.** 0 **D.** Vô số

Câu 109: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ. Gọi tập S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên $m\in[-21;21]$ để hàm số $f\left(\left|x^2+2mx-1\right|\right)$ có đúng 7 điểm cực trị. Số phần tử của S là:



A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 110: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và xác định trên R và có đồ thị đạo hàm $y=f'(x)=x(x-1)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(|2x+1|-1\right)$ là:

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 111: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên R và có biểu thức đạo hàm $y=f'(x)=x(x-2)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f(|2x+m|-m)$ có đúng ba điểm cực trị

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

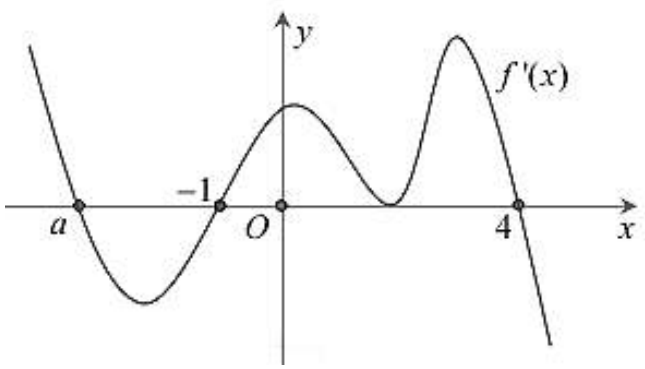
Câu 112: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có biểu thức đạo hàm $f'(x)=x(x-m)(x-6+m)$, với m là tham số. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $f(|3x-2|+1)$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2

Câu 113: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có biểu thức đạo hàm $f'(x)=x\left(x^2-2mx+12+m\right)$, với m là tham số. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $f\left(\left|2x-m^2\right|+m\right)$ có đúng 5 điểm cực trị?

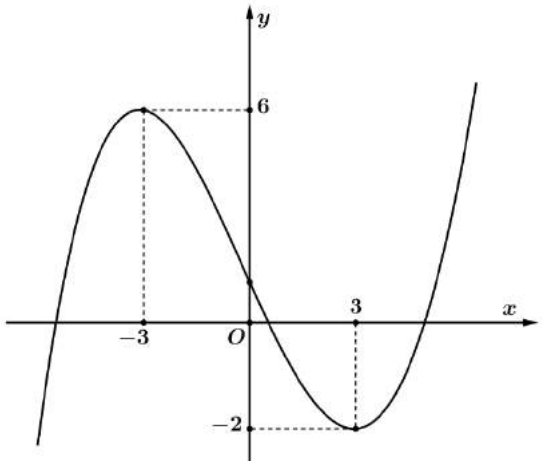
A. 27. **B.** 26. **C.** 25. **D.** 29

Câu 114: Cho đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $f\left(\left|x^3-3m^2x\right|\right)$ có đúng 11 điểm cực trị?



A. 29. **B.** 23. **C.** 21. **D.** 22

Câu 115: Cho hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(\left|f(x)-m\right|\right)$ có đúng 11 điểm cực trị?



A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 116: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases} x^2-2(m-4)x-1 \quad neu \begin{bmatrix} x\le 1 \\ x\ge 3 \end{bmatrix} \\ 4x^2-2(m-a)x+b \; neu 1<x<3 \end{cases}$, với a và b là những số thực xác định và hàm số liên tục trên toàn $\mathbb{R}$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có đúng 3 điểm cực trị?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 117: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} mx+n & \text{neu } x<-1 \\ x^2+nx+m-9 & \text{neu } x\ge -1 \end{cases}$, với hai tham số thực m và n. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $f(x)$ có đúng 2 điểm cực trị?

A. 6. **B.** 36. **C.** 11. **D.** 5

Câu 118: Cho hàm số $f(x)$ có biểu thức đạo hàm $f'(x)=2x^2-3x+1$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $f\left(\left|x^2-4x+3\right|+mx\right)$ có 9 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 31

Câu 119: Cho hàm số $y=|x-1|+|x+1|+|x-2|-2x+1$. Hàm số đạt cực tiểu tại

A. $x=2$ **B.** $x=1$ **C.** $x=-1$ **D.** $x=0$

Câu 120: Cho hàm số $y=|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|+|x-5|-m^2x+1$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có cực trị?

A. 4 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 5

Câu 121: Cho hàm số $f(x)=|x-1|+3|x-2|+5|x-3|+mx$; với m là tham số. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có cực trị?

A. 17. **B.** 15. **C.** 16. **D.** vô số.

Câu 122: Cho hàm số $f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-3|+...+|x-n|$. với n là số nguyên dương không lớn hơn 2021. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số n để hàm số có cực trị?

A. 1010. **B.** 1011. **C.** 1009. **D.** 2020.

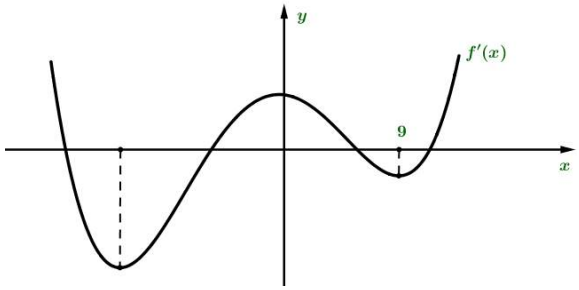
Câu 123: Số điểm cực trị của hàm số $f(x)=\left|x^2-4x+3\right|+|x+1|$ là:

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 124: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=f(x)=\left|x^2-2mx+1\right|+4x$ có điểm cực đại với giá trị cực đại tương ứng nằm trong khoảng $(3;4)$ và đồng thời thỏa mãn $10m$ là số nguyên. Số phần tử của tập S là

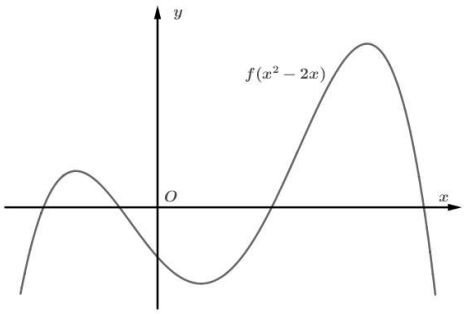
A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 125: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y=f\left(6|x|-x^2\right)$ có số điểm cực trị là.



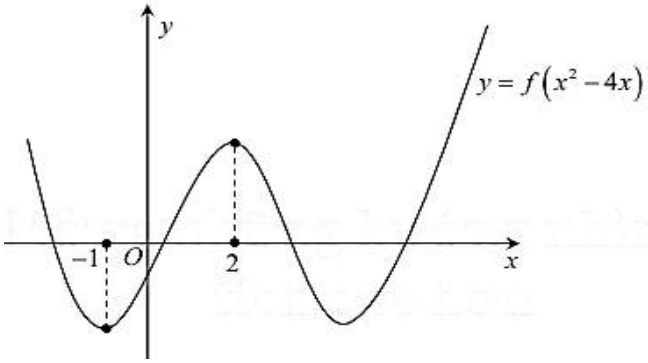
A. 9. **B.** 7. **C.** 13. **D.** 11

Câu 126: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y=f\left(x^2-x\right)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-2mx-\left|x-m\right|+m^2\right)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị.



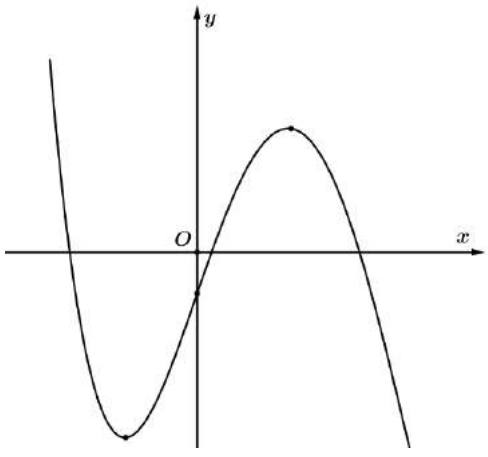
A. 7. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 9

Câu 127: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y=f\left(x^2-4x\right)$ được cho như hình vẽ. Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-8\left|x\right|+12\right)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



A. 3. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 7.

Câu 128: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $f(\left|x\right|+\left|x-1\right|)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

CHƯƠNG 1

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

CHỦ ĐỀ 2 CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa: Giả sử hàm số f xác định trên tập K và $x_0 \in K$. Ta nói:

- x_0 là **điểm cực tiểu** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa x_0 sao cho $(a;b) \subset K$ và $f(x) > f(x_0), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số f.
- x_0 là **điểm cực đại** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa x_0 sao cho $(a;b) \subset K$ và $f(x) < f(x_0), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số f.
- Điểm cực đại và điểm cực tiểu gọi chung là **điểm cực trị**.
- Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu gọi chung là **cực trị**.
- Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị của hàm số** và điểm cực trị phải là một điểm trong tập hợp K.
- Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **giá trị cực trị (hay cực trị)** của hàm số.
- Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số thì điểm $(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực trị của đồ thị** hàm số f.

Quy tắc tìm cực trị

- **Quy tắc 1:**
  - **Bước 1:** Tìm tập xác định. Tìm $f'(x)$.
  - **Bước 2:** Tìm các điểm x_i $(i = 1;2;...)$ mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm.
  - **Bước 3:** Lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi đi qua x_i thì hàm số đạt cực trị tại x_i.
- **Định lý**
  - Giả sử $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$ với $h > 0$. Khi đó:
  - Nếu $f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại x_0.
  - Nếu $f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại x_0.

  Từ định lí trên, ta có một quy tắc khác để tìm cực trị của hàm số

- **Quy tắc 2:**
  - **Bước 1:** Tìm tập xác định. Tìm $f'(x)$.
  - **Bước 2:** Tìm các nghiệm x_i $(i=1;2;...)$ của phương trình $f'(x)=0$.
  - **Bước 3:** Tính $f''(x)$ và tính $f''(x_i)$.

    Nếu $f''(x_i)<0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_i.

    Nếu $f''(x_i)>0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_i.

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Hàm số $y=x^4-x^2+3$ có mấy điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y=x^4-x^2+3$ có $ab=1.(-1)=-1<0$, suy ra hàm số $y=x^4-x^2+3$ có 3 điểm cực trị.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$+$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

A. $(2;0)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $x=2$. **D.** $y=0$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên, điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(2;0)$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x\left(x^2-x\right)(x-2)$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Vì $x=1$, $x=2$ là nghiệm bội lẻ và $x=0$ là nghiệm bội chẵn nên hàm số có 2 điểm cực trị.

Câu 4: Hàm số $y=\sqrt[3]{x^2}$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Tính đạo hàm. $y=\sqrt[3]{x^2}\Rightarrow y'=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}},(x\neq 0)$

Xét dấu y' ta có: $y'>0$ với $x\in(0;+\infty)$ và $y'<0$ với $x\in(-\infty;0)$.

Vậy hàm số có 1 cực trị

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên R và $f'(x)=(x+1)(x-2)^2(x-1)$. Điểm cực đại của hàm số đã cho là

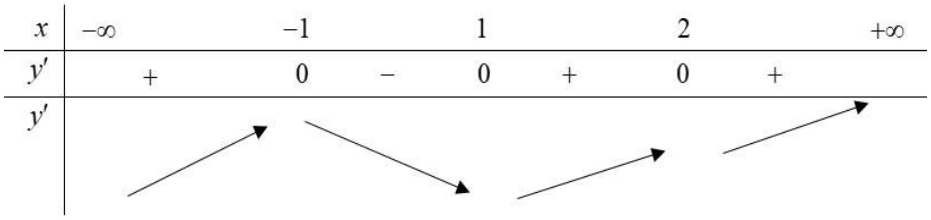
A. $x=2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=0$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\\x=1\end{array}\right.$

Ta có: $x=2$ là nghiệm kép nên dấu $f'(x)$ không đổi khi " đi qua" $x=2$.



Điểm cực đại của hàm số đã cho là $x=-1$.

Câu 6: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+5$. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là

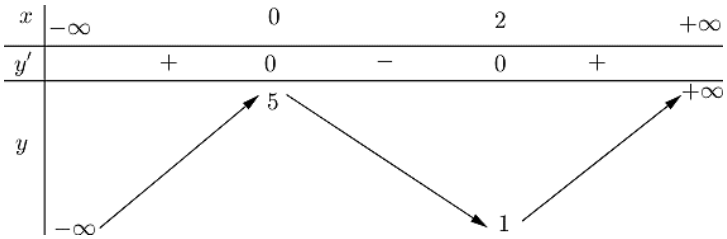
A. $M(1;2)$. **B.** $M(2;1)$. **C.** $M(5;0)$. **D.** $M(0;5)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=3x^2-6x$. Cho $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên suy ra điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $M(2;1)$.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)(x+4)^3,\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-4.\end{array}\right.$

Bảng xét dấu $f'(x)$:

x	$-\infty$		-4		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số có bao nhiêu điểm cực tiểu?

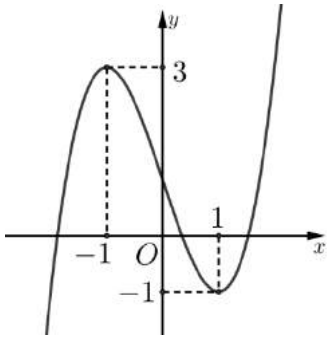
A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng xét dấu đạo hàm, ta thấy hàm số có 2 điểm cực tiểu.

Câu 9: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ.



Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 0. **B.** 3. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(1;-1)$ nên giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng -1.

Câu 10: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.
B. Giá trị cực đại của hàm số bằng -4.
C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.
D. Giá trị cực tiểu của hàm số bằng 0.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$. Xét $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = 0$.

Câu 11: Đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ có bao nhiêu điểm cực trị có tung độ dương?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ có 1 điểm cực trị có tung độ dương.

Câu 12: Cho hàm số $g(x)$ có đạo hàm $g'(x)=(x-1)^2(3-x)^{2021}(x+1)$ và liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó hàm số $g(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)^2(3-x)^{2021}(x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Trong đó $x=1$ là nghiệm bội hai; $x=3$ là nghiệm bội 2021 và $x=-1$ là nghiệm đơn. Vì vậy hàm số $g(x)$ có hai điểm cực trị là $x=3$ và $x=-1$.

Câu 13: Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị $A(1;-7)$, $B(2;-8)$. Tính $y(-1)$?

A. $y(-1) = -35$. **B.** $y(-1) = 11$. **C.** $y(-1) = -11$. **D.** $y(-1) = 7$.

Lời giải

Chọn A

Gọi đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ là (C).

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Vì $A(1;-7)$, $B(2;-8)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ nên ta có:

$$\begin{cases} A \in (C) \\ y'(x_A) = 0 \\ B \in (C) \\ y'(x_B) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7 = a.1^3 + b.1^2 + c.1 + d \\ 0 = 3a.1^2 + 2b.1 + c \\ -8 = a.2^3 + b.2^2 + c.2 + d \\ 0 = 3a.2^2 + 2b.2 + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -9 \\ c = 12 \\ d = -12 \end{cases}$$

Vậy $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 12$, do đó $y(-1) = -35$.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x) = x^2(x-1)(x+2)^5$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Nhận xét $x=0$ là nghiệm kép, $x=1$ là nghiệm đơn và $x=-2$ là nghiệm bội lẻ. Vậy hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1: Mở đầu về cực trị của hàm số

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

Câu 1: Cho các khẳng định sau:

Nếu hàm số $y=f(x)$ có giá trị cực đại là M, giá trị cực tiểu là m thì $M>m$.

Nếu hàm số $y=f(x)$ không có cực trị thì phương trình $f'(x)=0$ vô nghiệm.

Hàm số $y=f(x)$ có đúng hai điểm cực trị thì hàm số đó là hàm số bậc ba.

Hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c$ với $a\neq 0$ luôn có cực trị.

Số khẳng định đúng là

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Khẳng định sai vì hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ có $y_{CD}=-2<2=y_{CT}$.

Khẳng định sai vì hàm số $f(x)=x^3$ không có cực trị nhưng phương trình $f'(x)=3x^2=0$ có nghiệm.

Khẳng định sai vì hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ không là hàm bậc ba nhưng vẫn có hai điểm cực trị là $x=-2$ và $x=0$.

Khẳng định đúng vì hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c$ với $a\neq 0$ có thể có 1 hoặc 3 điểm cực trị.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau

A. $x=x_0$ là điểm cực tiểu của hàm số thì hàm số có giá trị cực tiểu là $f(x_0)$.

B. Nếu hàm số đơn điệu trên $\mathbb{R}$ thì hàm số không có cực trị.

C. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=x_0$ thì $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua x_0.

D. Hàm số đạt cực trị tại điểm $x=x_0$ thì $f'(x_0)=0$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số đạt cực trị tại điểm $x=x_0$ thì $f'(x_0)=0$ hoặc $f'(x_0)$ không xác định.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x^2-25), x\in\mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây là

đúng?

A. Hàm số đã cho có 2 điểm cực tiểu. **B.** Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=-5$.

C. Hàm số đã cho đạt cực đại tại $x=5$. **D.** Hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2\left(x^2-25\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=5 \\ x=-5 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-5		0		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x=-5$ và đạt cực tiểu tại $x=5$.

Do vậy hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

Câu 4: Hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Ta có $y=\dfrac{2x+3}{x+1} \Rightarrow y'=\dfrac{-1}{(x+1)^2}<0,\ \forall x\in D$.

Vậy hàm số đã cho không có cực trị.

Câu 5: Số điểm cực trị của hàm số $y=\dfrac{4x^3}{3}-2x^2-x-3$ là

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y=\dfrac{4x^3}{3}-2x^2-x-3 \Rightarrow y'=4x^2-4x-1 \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow 4x^2-4x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-\sqrt{2} \\ x=1+\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Vì $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt nên hàm số có 2 điểm cực trị.

Câu 6: Hàm số $y=-x^3+3x$ đạt cực đại tại điểm

A. $x=-2$. **B.** $x=2$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=-3x^2+3$. Khi đó $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Lại có $y''=-6x$.

$y''(1)=-6<0$. Suy ra hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

$y''(-1)=6>0$. Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x)=(x-1)^2(x^2-5x+6)$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=(x-1)^2(x^2-5x+6)=(x-1)^2(x-2)(x-3)$.

Do $f'(x)=0$ có 1 nghiệm kép $x=1$ và hai nghiệm đơn $x=2, x=3$ nên $f'(x)$ đổi dấu hai lần khi qua $x=2$ và $x=3$. Do đó hàm số có 2 điểm cực trị.

Câu 8: Điểm cực tiểu của hàm số $y=x^3-12x+20$ là

A. $x=4$. **B.** $x=2$. **C.** $x=0$. **D.** $x=-2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=3x^2-12 \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu y':

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu của y' ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$.

Câu 9: Hàm số $y=2x^4-4x^2+2022$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=8x^3-8x$.

$$y'=0 \Leftrightarrow 8x^3-8x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

Phương trình $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(2-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Điểm cực đại của hàm số là

A. $x=1$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

Chọn A

Xét $f'(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(2-x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số đạt cực đại tại $x=2$.
Vậy hàm số đã cho có 1 điểm cực trị.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+1)^2(x-2)^3(x-4)$. Số điểm cực trị của hàm số là:

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow x(x+1)^2(x-2)^3(x-4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x=2\\x=4\end{array}\right.$

$f'(x)=0$ có một nghiệm bội chẵn tại $x=-1$ nên không đổi dấu khi qua $x=-1$ nên hàm số có ba cực trị.

Câu 12: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số có tọa độ là

A. $(2;2)$. **B.** $(2;-2)$. **C.** $(0;-2)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=3x^2-6x;\ y''=6x-6$

Xét: $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Ta thấy: $y''(0)=-6<0\Rightarrow$Hàm số có điểm cực tiểu $x=0$.

Vậy tọa độ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(0;2)$.

Câu 13: Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=-x^4-4x^2+1$ là

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Vì $ab>0$ nên đồ thị hàm số có 1 điểm cực trị.

Câu 14: Hàm số nào trong các hàm số dưới đây **không** có cực trị?

A. $y=x^3+3x-2$. **B.** $y=x^3-3x-2$.

C. $y=x^4+3x^2-2$. **D.** $y=x^4-3x^2-2$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y=x^3+3x-2$ có $y'=3x^2+3>0$ nên hàm số luôn đồng biến.

Do đó hàm số $y=x^3+3x-2$ không có cực trị.

Câu 15: Điểm cực đại của hàm số $y=x^3+3x^2-1$ là

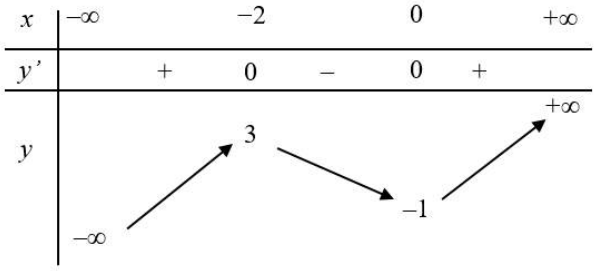
A. $x=-2$. **B.** $x=0$. **C.** $x=3$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=3x^2+6x$. Cho $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\Rightarrow y=3\\x=0\Rightarrow y=-1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy điểm cực đại của hàm số là $x=-2$.

Câu 16: Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-1$ đạt cực đại tại điểm

A. $x=0$. **B.** $x=3$. **C.** $x=2$. **D.** $x=1$.

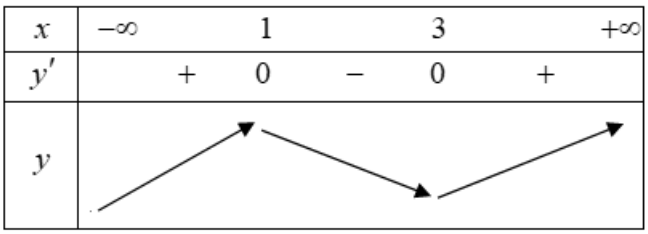
Lời giải

Chọn D

Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Ta có $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-1\Rightarrow y'=x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu :



Suy ra hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)(x-2),\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 1. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=x(x-1)(x-2)\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right.$, vì các nghiệm $x=0;x=1;x=2$ đều là các nghiệm đơn, suy ra hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)(x+1)^4$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hỏi hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Dễ dàng nhận thấy $f'(x)$ chỉ đổi dấu khi x qua các giá trị $x=0$, $x=1$ nên hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

Câu 19: Số điểm cực trị của hàm số $y=x\left(x^2-4\right)\left(-x^2+3x-2\right)$ là

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Ta có $y=f(x)=x\left(x^2-4\right)\left(-x^2+3x-2\right)=-x(x-1)(x+2)(x-2)^2$.

Ta có

$y'=-(x-1)(x+2)(x-2)^2-x(x+2)(x-2)^2-x(x-1)(x-2)^2-2x(x-1)(x+2)(x-2)$

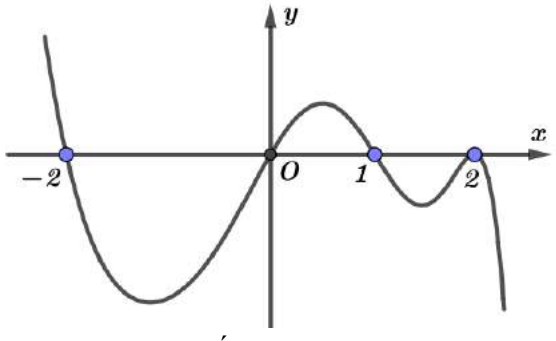
$y'=-(x-2)\left(x^3-x^2-4x+4+x^3-4x+x^3-3x^2+2x+2x^3+2x^2-4x\right)$

$$\Rightarrow y'=-(x-2)\left(5x^3-2x^2-10x+4\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ 5x^3-2x^2-10x+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\pm\sqrt{2} \\ x=\dfrac{2}{5} \end{array}\right.$$

Vì y' đổi dấu khi qua 4 điểm $x=2$; $x=\pm\sqrt{2}$ và $x=\dfrac{2}{5}$. Vậy số điểm cực trị của hàm số là 4.

Cách 2:

Nhận xét: Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty$ và đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục Ox tại 4 điểm có hoành độ $0,1,-2,2$ trong đó tại điểm có hoành độ $x=2$ là đồ thị $y=f(x)$ tiếp xúc với trục hoành. Do đó, đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hình dạng như sau



Từ đồ thị, ta thấy số điểm cực trị của hàm số là 4.

Câu 20: Trong các hàm số sau, hàm số nào không có cực trị?

A. $y=x^3-x^2-3x+2$. **B.** $y=x^3-3x^2+2$. **C.** $y=\dfrac{2x+1}{x-3}$. **D.** $y=-x^4+3x^2+1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y=\dfrac{2x+1}{x-3}\Rightarrow y'=\dfrac{-7}{(x-3)^2}<0,\forall x\neq 3$ nên hàm số không có điểm cực trị.

Câu 21: Cho hàm số $y=-x^4+2x^2+3$ có đồ thị (C). Gọi h và h_1 lần lượt là khoảng cách từ các điểm cực đại và cực tiểu của (C) đến trục hoành. Tỉ số $\dfrac{h}{h_1}$ là

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y=-x^4+2x^2+3\Rightarrow y'=-4x^3+4x$; $y'=0\Rightarrow -4x^3+4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=4\\x=0\Rightarrow y=3\\x=-1\Rightarrow y=4\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	3	↗	4	↘	$-\infty$

Vậy đồ thị hàm số đạt cực đại tại $A(-1;4),B(1;4)$; đạt cực tiểu tại $C(0;3)$.

Khi đó $h=4;h_1=3$ suy ra $\dfrac{h}{h_1}=\dfrac{4}{3}$.

Câu 22: Cho hàm số $y=x^3-3x+5$. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho là:

A. $(-1;7)$. **B.** $(7;-1)$. **C.** $(3;1)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=3x^2-3$. $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=3\\x=-1\Rightarrow y=7\end{array}\right.$

Suy ra: $y''=6x;\ y''(1)=6>0$

Nên điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(1;3)$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(2x+1)(x+2)^2(3x-1)^4,\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x)$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có đạo hàm: $f'(x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{2}\\x=-2\\x=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$

Suy ra: $x=-\dfrac{1}{2}$ là nghiệm bội lẻ, $x=-2, x=\dfrac{1}{3}$ là nghiệm bội chẵn nên số điểm cực trị là 1.

Câu 24: Tìm điểm cực tiểu x_{CT} của hàm số $y=x^3+3x^2-9x$.

A. $x_{CT}=0$. **B.** $x_{CT}=1$. **C.** $x_{CT}=-1$. **D.** $x_{CT}=-3$.

Lời giải

Chọn B

$y'=3x^2+6x-9=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3\end{array}\right.$.

$y''=6x+6$, $y''(1)=12>0$ nên $x=1$ là điểm cực tiểu.

Câu 25: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)\left(x^2-3\right)\left(x^4-1\right)$ trên $\mathbb{R}$. Tính số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số có 3 điểm cực trị

Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=2(x-1)^2(x-3)\left(x^2-4\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

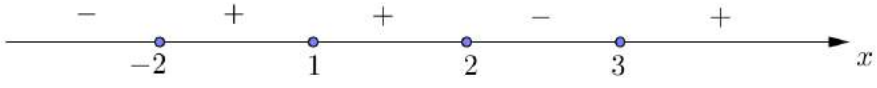
A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=2(x-1)^2(x-3)\left(x^2-4\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\\x=\pm2\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu $f'(x)$



Từ trục xét dấu của $f'(x)$ ta thấy hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực tiểu.

Câu 27: Tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ là

A. $(0;-2)$. **B.** $(2;-2)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;2)$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Tính đạo hàm: $y'(x) = 3x^2 - 6x$. Suy ra $y'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$y'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$y(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Từ bảng xét dấu, suy ra tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(0;2)$.

Câu 28: Hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = 4x^3 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{6}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{6}}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$-\frac{17}{4}$	↗	-2	↘	$-\frac{17}{4}$	↗	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CĐ} = -2$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ và $y_{CT} = -\dfrac{17}{4}$.

Câu 29: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-2)(4-x^2)(x^2-1)$ trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x = -2$. **B.** $x = -1$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = 2$.

Lời giải

Chọn B

Cho $f'(x)=0 \Leftrightarrow -(x-2)^2(x+2)(x^2-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2. \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Từ bảng xét dấu, ta có điểm cực tiểu của hàm số là $x=-1$.

Câu 30: Hàm số nào dưới đây nhận $x=1$ làm

A. $y=x^3+3x^2-9x+1\cdot$ **B.** $y=x^4-2x^2+1\cdot$

C. $y=x^3-6x^2+9x+1\cdot$ **D.** $y=x^2-2x+1\cdot$

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y=x^3+3x^2-9x+1\cdot$ Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3x^2+6x-9$; $y'=0 \Leftrightarrow 3x^2+6x-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	28	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta suy ra $x=1$ là điểm cực đại của hàm số.

Câu 31: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=x(x+2022)(x^2-4x+4)$. Hàm số $f(x)$ có mấy điểm cực tiểu?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $f'(x)=x(x+2022)(x^2-4x+4)$

$\Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x(x+2022)(x^2-4x+4)=0 \Leftrightarrow x(x+2022)(x-2)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2022 \\ x=2 \ \ (kép) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-2022		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-2022)$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow$ hàm số $f(x)$ có 1 điểm cực tiểu.

Câu 32: Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ có tổng hoành độ và tung độ bằng

A. 6. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 12x + 9$, $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

$y'' = 6x - 12$, $y''(1) = -6 < 0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

Vậy điểm cực đại của đồ thị hàm số là $A(1;5)$.

Câu 33: Điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x) = x^3 - 12x + 20$ là

A. $x = 4$. **B.** $x = 2$. **C.** $x = 0$. **D.** $x = -2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 3x^2 - 12$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	36	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $x = 2$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Câu 34: Hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 2$ có điểm cực đại là

A. $x = -6$. **B.** $x = -2$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = 0$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$.

Câu 35: Đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 5$ có hai điểm cực trị A và B. Độ dài đoạn AB là

A. $5\sqrt{2}$. **B.** $10\sqrt{2}$. **C.** $4\sqrt{5}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = -3x^2 + 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right. \Rightarrow$ hàm số có hai điểm cực trị là $A(0;5); B(2;9)$.

Độ dài đoạn AB là: $AB = \sqrt{(2-0)^2 + (9-5)^2} = 2\sqrt{5}$.

Câu 36: Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $f(x) = x^4 - 10x^2 + 3$ là

A. $(-\sqrt{5};22)$. **B.** $(5;22)$. **C.** $(0;3)$. **D.** $(\sqrt{5};-22)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x) = 4x^3 - 20x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{5} \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		0		$\sqrt{5}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-22	$\nearrow$	3	$\searrow$	-22	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(\sqrt{5};-22)$

Câu 37: Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2ax + b$ có điểm cực tiểu $A(2;-2)$. Khi đó $a + b$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** -4. **D.** -2.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x + 2a$; $y'' = 6x - 6$

Để đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $A(2;-2)$ cần có:

$$\begin{cases} y'(2) = 0 \\ y''(2) > 0 \\ y(2) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 0 \\ 6.2 - 6 > 0 \\ 4a + b - 4 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases}.$$ Vậy $a + b = 2$.

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Hàm số $g(x) = f(x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

$$g'(x) = 2xf'(x^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 0 \\ x^2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{array}\right..$$

Vậy hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=(x+3)^2(x-2)^3(x+5)$. Hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=2 \\ x=-5 \end{array}\right.$ và $f'(x)$ đổi dấu khi qua $x=-3$ và $x=-5$ nên hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị.

Câu 40: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+4$, gọi M, N lần lượt là điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số. Tọa độ trung điểm I của MN là

A. $I(1;2)$. **B.** $I(2;1)$. **C.** $I(0;4)$. **D.** $I(2;0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có tọa độ trung điểm I của cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số bậc 3 thỏa mãn:

$$\begin{cases} y_I''=0 \\ I\in f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x_I-6=0 \\ y_I=x_I^3-3x_I^2+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I=1 \\ y_I=2 \end{cases}.$$

Dạng 2: Cực trị hàm bậc ba

Bài toán tổng quát: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a\neq 0$, a,b,c,d phụ thuộc vào tham số). Tìm giá trị của tham số để hàm số có cực đại, cực tiểu (cực trị) thỏa mãn điều kiện cho trước.

Phương pháp tổng quát:

Bước 1: Tính $y'=3ax^2+2bx+c;\ y'=0\Leftrightarrow g(x)=3ax^2+2bx+c=0$

Để hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta(\Delta')>0 \end{cases} \Leftrightarrow$ giá trị tham số thuộc miền D nào đó $(*)$

Bước 2: Từ điều kiện cho trước dẫn tới một phương trình, một bất phương trình hoặc một biểu thức theo theo tham số, giải điều kiện này ta được tham số sau đó đối chiếu với điều kiện $(*)$ và kết luận.

Chú ý:

- Với những điều kiện liên quan tới hoành độ thì giả sử $M_1(x_1;y_1)$ và $M_2(x_2;y_2)$ là hai điểm cực trị thì $x_1;x_2$ là hai nghiệm của $g(x)=0$ theo viet ta có $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a} \\ x_1x_2=\dfrac{c}{3a} \end{cases}$ và biến đổi điều kiện theo tổng và tích chứ không nên thay trực tiếp vào khi điều kiện phức tạp.
- Với những điều kiện liên quan tới tung độ (giá trị cực trị) thì trong trường hợp Δ là một số chính phương thì tìm được cụ thể hai nghiệm $x_1;x_2$ và khi đó tung độ tương tứng là $y_1=f(x_1)$; $y_2=f(x_2)$.
- Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba là:

$$AB=\sqrt{\frac{4e+16e^3}{a}} \text{ với } e=\frac{b^2-3ac}{9a}$$

- Đường thẳng qua hai điểm cực trị đó là: $y=\left(\dfrac{2c}{3}-\dfrac{2b^2}{9a}\right)x+d-\dfrac{bc}{9a}$.
- Bấm máy tính tìm ra đường thẳng đi qua hai điểm cực trị :

$$ax^3+bx^2+cx+d-\left(3ax^2+2bx+c\right)\left(\frac{x}{3}+\frac{b}{9a}\right)\xrightarrow{x=i}Ai+B\Rightarrow y=Ax+B$$

- Hoặc sử dụng công thức $y-\dfrac{y'.y''}{18a}$
- Trong trường hợp nghiệm y' "xấu" ta nên thay gián tiếp vào phương trình đường thẳng cực trị để biểu diễn giá trị cực trị ở dạng tổng quát.

- Cho hàm số bậc ba $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đạo hàm $y'=f'(x)=3ax^2+2bx+c$

  Hàm số $f(x)$ có cực trị khi và chỉ khi $f(x)$ có cực đại và cực tiểu.

  Phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'=b^2-3ac>0$.

  Hàm số $f(x)$ không có cực trị $\Leftrightarrow \Delta'=b^2-3ac\leq 0$.

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Điểm cực đại của hàm số $y=x^3+3x^2+3$ là

A. $x=0$. **B.** $x=-2$. **C.** $(0;3)$. **D.** $(-2;7)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=3x^2+6x, y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	7	↘	3	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta được điểm cực đại của hàm số là $x=-2$.

Câu 2: Giá trị cực đại của hàm số $y=x^3-3x+2$ bằng

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=3x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$.

Bảng BBT

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Suy ra giá trị cực đại của hàm số $y=x^3-3x+2$ bằng 4.

Câu 3: Số điểm cực trị của hàm số $y=x^3-3x^2+5$ là

A. 1 **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=3x^2-6x$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu y':

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu của y' ta thấy hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

Câu 4: Giá trị cực đại của hàm số $y=x^3-12x+1$ là

A. -15. **B.** -2. **C.** 17. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=3x^2-12$, $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-12=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=x^3-12x+1$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	17	↘	-15	↗	$+\infty$

Vậy hàm số đã cho có giá trị cực đại bằng 17.

Câu 5: Hàm số $y=x^3-12x+3$ đạt cực đại tại điểm

A. $x=19$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-13$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=3x^2-12$, $y'=0\Leftrightarrow x=\pm 2$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	19	↘	-13	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x=-2$.

Câu 6: Tìm tất cả giá trị của tham số thực m để hàm số $y=mx^3-(m^2+1)x^2+2x-3$ đạt cực tiểu tại điểm $x=1$

A. $m=\dfrac{3}{2}$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=0$. **D.** $m\in\varnothing$.

Lời giải

Chọn A

$y'=3mx^2-2(m^2+1)x+2$, $y''=6mx-2(m^2+1)$

Điều kiện cần $y'(1)=0\Leftrightarrow -2m^2+3m=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

Điều kiện đủ

Khi $m=0\Rightarrow y''(1)=-2<0\Rightarrow x=1$ là điểm cực đại của hàm số

Khi $m=\dfrac{3}{2}\Rightarrow y''(1)=\dfrac{5}{2}>0\Rightarrow x=1$ là điểm cực tiểu của hàm số

Câu 7: Hàm số $y=x^3-2mx^2+m^2x-2$ đạt cực tiểu tại $x=1$ khi

A. $m=-1$. **B.** $m=3$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y^{'}=3x^2-4mx+m^2; y^{"}=6x-4m$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1 \Rightarrow y^{'}(1)=3-4m+m^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=3 \end{array}\right.$

$y"(1)=6-4m$.

Với $m=1$ thì $y"(1)=2>0(TM)$.

Với $m=3$ thì $y"(1)=2-6<0(ktm)$.

Vậy $m=1$.

Câu 8: Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=-\frac{x^3}{3}+mx^2-2mx+1$ có hai điểm cực trị là

A. $\left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<0 \end{array}\right.$. **B.** $0<m<2$. **C.** $m>2$. **D.** $m>0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=-x^2+2mx-2m$.

Hàm số đã cho có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$

Phương trình $-x^2+2mx-2m=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $\Delta'=m^2-2m>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<0 \end{array}\right.$.

Câu 9: Cho hàm số $y=x^3-\frac{3}{2}(m-2)x^2-3(m-1)x+1, m$ là tham số. Số giá trị $m>0$ để hàm số có giá trị cực đại, giá trị cực tiểu lần lượt là $y_{CĐ}, y_{CT}$ thỏa mãn $2y_{CĐ}+y_{CT}=4$ là

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y'=3x^2-3(m-2)x-3(m-1)$; $y'=0 \Leftrightarrow x^2-(m-2)x-m+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=m-1 \end{array}\right.$.

Với $m>0$ thì $-1<m-1$. Khi đó hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ và đạt cực tiểu tại $x=m-1$.

Do đó: $y_{CĐ}=y(-1)=\frac{3m}{2}, y_{CT}=y(m-1)=-\frac{1}{2}(m+2)(m-1)^2+1$.

Từ giả thiết: $2y_{CĐ}+y_{CT}=4 \Leftrightarrow 2.\frac{3m}{2}-\frac{1}{2}(m+2)(m-1)^2+1=4$

$\Leftrightarrow 6m-6-(m+2)(m-1)^2=0 \Leftrightarrow (m-1)(m^2+m-8)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\frac{-1\pm\sqrt{33}}{2} \end{array}\right.$.

Do $m>0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\frac{-1+\sqrt{33}}{2} \end{array}\right.$.

Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Câu 10: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-m-1\right)x+1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để hàm số đạt cực trị tại $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $x_1^2+2mx_2-3m^2+m-5\le 0$?

A. 9. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=x^2-2mx+m^2-m-1$.

Hàm số đạt cực trị tại $x_1,\ x_2$ khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta'=m+1>0\Leftrightarrow m>-1.\ (*)$

Khi đó $\begin{cases}x_1+x_2=2m\\x_1.x_2=m^2-m-1\end{cases}$

Theo đề bài: $x_1^2+2mx_2-3m^2+m-5\le 0\Leftrightarrow x_1^2+\left(x_1+x_2\right)x_2-3m^2+m-5\le 0$

$\Leftrightarrow x_1^2+x_1x_2+x_2^2-3m^2+m-5\le 0\Leftrightarrow \left(x_1+x_2\right)^2-x_1x_2-3m^2+m-5\le 0$

$\Leftrightarrow 4m^2-m^2+m+1-3m^2+m-5\le 0\Leftrightarrow 2m-4\le 0\Leftrightarrow m\le 2$.

Kết hợp với $(*)$ ta được $-1<m\le 2$.

Do m nguyên nên $m\in\{0,1,2\}$.

Vậy có 3 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-2mx^2+m^2x+1$ đạt cực tiểu tại $x=1$ là

A. $\{1\}$. **B.** $\{-1;-3\}$. **C.** $\{3\}$. **D.** $\{1;3\}$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D=\mathbb{R}$

Ta có : $y'=3x^2-4mx+m^2$; $y''=6x-4m$

Để hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ thì:

$$\begin{cases} y'(1)=0 \\ y''(1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4m+3=0 \\ 6-4m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=3 \end{array}\right. \\ m<\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m=1$$

Vậy tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ là $S=\{1\}$.

Câu 2: Cho hàm số $y=x^3-2x^2+mx+3$ đạt cực tiểu tại $x=1$. Giá trị của m

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3x^2-4x+m$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ suy ra $y'(1)=0 \Leftrightarrow -1+m=0 \Leftrightarrow m=1$.

Với $m=1$: $y=x^3-2x^2+x+3, y'=3x^2-4x+1, y''=6x-4$.

$y'(1)=0, y''(1)>0 \Rightarrow x=1$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Vậy $m=1$ là giá trị cần tìm.

Câu 3: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-4\right)x+3$ đạt cực tiểu tại $x=3$.

A. $m=-7$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=5$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=x^2-2mx+m^2-4$; $y''=2x-2m$

Để hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$ khi $\begin{cases} y'(3)=0 \\ y''(3)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-6m+5=0 \\ 6-2m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=5 \end{array}\right. \\ m<3 \end{cases} \Leftrightarrow m=1.$

Câu 4: Hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-m+1\right)x+1$ đạt cực đại tại điểm $x=1$ khi

A. $m=1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=1$ hoặc $m=2$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn D

Có $y'=x^2-2mx+m^2-m+1$, $y''=2x-2m$

Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-m+1\right)x+1$ đạt cực đại tại điểm $x=1$ khi $\begin{cases}y'(1)=0\\y''(1)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-3m+2=0\\2-2m<0\end{cases}\Leftrightarrow m=2$.

Câu 5: Giá trị thực của tham số m để hàm số $y=-x^3+mx^2+\left(m^2-12\right)x+2$ đạt cực tiểu tại $x=-1$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(5;9)$. **B.** $(-4;0)$. **C.** $(0;3)$. **D.** $(3;6)$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=-3x^2+2mx+m^2-12$; $y''=-6x+2m$.

Để hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$ khi $\begin{cases}y'(-1)=0\\y''(-1)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3.(-1)^2+2m.(-1)+m^2-12=0\\-6.(-1)+2m>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-2m-15=0\\m>-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=5\ \ (TM)\\m=-3\ (L)\end{array}\right.\\m>-3\end{cases}\Leftrightarrow m=5$. Vậy $m=5\in(3;6)$

Câu 6: Tìm m đề hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-4\right)x+3$ đạt cực đại tại điểm $x=3$.

A. $m=-1$. **B.** $m=1$. **C.** $m=5$. **D.** $m=-5$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=x^2-2mx+\left(m^2-4\right)$, $y''=2x-2m$.

Hàm số đạt cực trị tại $x=3$ suy ra $y'(3)=0\Rightarrow m^2-6m+5=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=5\end{array}\right.$.

Với $m=5$ ta có $y''(3)=6-10=-4<0$ suy ra hàm số đạt cực đại tại $x=3$.

Với $m=1$ ta có $y''(3)=6-2=4>0$ suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$.

Vậy $m=5$ thì hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-4\right)x+3$ đạt cực đại tại điểm $x=3$.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)=x^3+3mx^2-1$. Giá trị của tham số m để hàm số có điểm cực đại $x=-2$ là:

A. -2. **B.** $\varnothing$ **C.** -1 **D.** 1

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=f'(x)=3x^2+6mx;\ f''(x)=6x+6m$. Hàm số đạt cực đại tại $x=-2\Leftrightarrow\begin{cases}f'(-2)=0\\f''(-2)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}12-12m=0\\-12+6m<0\end{cases}\Leftrightarrow m=1$.

Câu 8: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3+\frac{1}{2}\left(m^2-1\right)x^2+1-m$ có điểm cực đại là $x=-1$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

$y = x^3 + \frac{1}{2}\left(m^2 - 1\right)x^2 + 1 - m;\ y' = 3x^2 + \left(m^2 - 1\right)x;\ y'' = 6x + m^2 - 1$

Hàm số $y = x^3 + \frac{1}{2}\left(m^2 - 1\right)x^2 + 1 - m$ có điểm cực đại là $x = -1$

$\Rightarrow 3 + \left(m^2 - 1\right)(-1) = 0 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -2 \end{array}\right.$

Lúc này $y''(-1) = -6 + 4 - 1 < 0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

Vậy có 2 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 9: **Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + \left(m^2 - m + 2\right)x^2 + \left(3m^2 + 1\right)x$ đạt cực tiểu tại $x = -2$.**

A. $\left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = 1 \end{array}\right.$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = 1$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m = -3 \\ m = -1 \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn B

Xét $y = \frac{1}{3}x^3 + \left(m^2 - m + 2\right)x^2 + \left(3m^2 + 1\right)x$.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = x^2 + 2\left(m^2 - m + 2\right)x + \left(3m^2 + 1\right)$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$ **nên** $y'(-2) = 0$.

Ta có $4 - 4\left(m^2 - m + 2\right) + 3m^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 3 \end{array}\right.$.

$y'' = 2x + 2\left(m^2 - m + 2\right);\ y''(-2) = 2m^2 - 2m;\ y''(-2) > 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 2m > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < 0 \end{array}\right.$

Để hàm số hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$ **thì** $m = 3$ thỏa mãn.

Câu 10: Để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ đạt cực tiểu tại $x = 2$ thì tham số thực m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $m \in (3;5)$. **B.** $m \in (-3;-1)$. **C.** $m \in (1;3)$. **D.** $m \in (-1;1)$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 6x + m$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2 \Rightarrow y'(2) = 0 \Leftrightarrow 3.2^2 - 6.2 + m = 0 \Leftrightarrow m = 0$. (Trắc nghiệm: làm đến đây và xét các đáp án ta **chọn D)**

Khi $m = 0$ thì $y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow y'' = 6x - 6$.

Ta có: $y''(2) = 6.2 - 6 = 6 > 0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Vậy $m = 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2 \Rightarrow m \in (-1;1)$.

Câu 11: Giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + \left(m^2 - 4\right)x + 3$ đạt cực tiểu tại $x = 3$ là

A. $m = 1$. **B.** $m = 5$. **C.** $m = 1; m = 5$. **D.** $m = -1; m = -5$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

$y'=x^2-2mx+m^2-4;\ y''=2x-2m$.

Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-4\right)x+3$ đạt cực tiểu tại $x=3$ khi:

$$\begin{cases}y'(3)=0\\y''(3)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-6m+5=0\\6-2m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=1\\m=5\end{array}\right.\\m<3\end{cases}\Leftrightarrow m=1.$$ Vậy $m=1$ là giá trị cần tìm.

Câu 12: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=x^3+3x^2-mx+1$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

$y=x^3+3x^2-mx+1\Rightarrow y'=3x^2+6x-m\ .\Rightarrow y''=6x+6$.

Để hàm số $y=x^3+3x^2-mx+1$ đạt cực tiểu tại $x=1$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y'(1)=0\\y''(1)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3.1^2+6.1-m=0\\6.1+6>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=9\\12>0\end{cases}(n).$$

Câu 13: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx+1$ đạt cực tiểu tại $x=2$.

A. $0<m\le 4$. **B.** $m>4$. **C.** $m=0$. **D.** $0\le m<4$.

Lời giải

Chọn C

$y=x^3-3x^2+mx+1$

Khi đó $y'=3x^2-6x+m;y''=6x-6$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2\Rightarrow\begin{cases}y'(2)=0\\y''(2)>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=0\\6>0\end{cases}\Leftrightarrow m=0$.

Câu 14: Cho hàm số $y=x^3+3\left(m^2-m+2\right)x^2+3\left(3m^2+1\right)x+2022m$, tìm các giá trị của tham số m để hàm số đạt cực tiểu tại $x=-2$.

A. $m=1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=4$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=3x^2+6\left(m^2-m+2\right)x+3\left(3m^2+1\right)=3\left[x^2+2\left(m^2-m+2\right)x+3m^2+1\right]$;

$y''=6x+6\left(m^2-m+2\right)$.

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=-2\ \Leftrightarrow\begin{cases}y'(2)=0\\y''(2)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-4m+3=0\\6m(m-1)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=1\\m=3\end{array}\right.\\m(m-1)>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow m=3$.

Câu 15: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=mx^3-\left(m^2+1\right)x^2+2x-3$ đạt cực tiểu tại $x=1$. Khi đó

A. $S=\left\{-\frac{3}{2}\right\}$. **B.** $S=\{0\}$. **C.** $S=\left\{\frac{3}{2};0\right\}$. **D.** $S=\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Lời giải

Chọn D

TH1: $m=0\Rightarrow y=-x^2+2x-3\Rightarrow$ Hàm số chỉ có cực đại.

TH2: $m\neq 0\Rightarrow\begin{cases}y'=3mx^2-2\left(m^2+1\right)x+2\\ y''=6mx-2\left(m^2+1\right)\end{cases}$

Do hàm số đã cho là hàm bậc 3 nên điều kiện cần để hàm đạt cực tiểu tại $x=1$ là

$$y'(1)=0\Leftrightarrow 3m-2\left(m^2+1\right)+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=\frac{3}{2}\end{array}\right.\Rightarrow m=\frac{3}{2}$$

Khi $m=\frac{3}{2}$ ta có : $y''(1)=9-2\left(\frac{9}{4}+1\right)=\frac{5}{2}>0$ nên $m=\frac{3}{2}$ thỏa mãn.

Câu 16: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-m-1\right)x$ đạt giá trị cực đại tại $x=1$.

A. $m=2$. **B.** $m=1$. **C.** $m=3$. **D.** $m=0$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=x^2-2mx+m^2-m-1$ và $y''=2x-2m$.

Hàm số đạt cực đại tại $x=1$ nên $y'(1)=0\Leftrightarrow m^2-3m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=3\end{array}\right.$.

Với $m=0$ thì $y''(1)=2>0$ suy ra hàm đạt cực tiểu tại $x=1$ (loại).

Với $m=3$ thì $y''(1)=-4<0$ suy ra hàm đạt cực đại tại $x=1$ (nhận).

Vậy $m=3$ là giá trị cần tìm.

Câu 17: Giá trị của m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(3m+1)x+1$ đạt cực tiểu tại $x=1$ là

A. $m=0$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=2$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=x^2-2mx+3m+1\Rightarrow y''=2x-2m$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1\Rightarrow\begin{cases}y'(1)=0\\ y''(1)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1^2-2m.1+3m+1=0\\ 2.1-2m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-2\\ m<1\end{cases}\Leftrightarrow m=-2$.

Thử lại với $m=-2$, ta có: $y=\frac{1}{3}x^3+2x^2-5x+1$ suy ra $y'=x^2+4x-5$.

Khi đó $y'=0\Leftrightarrow x^2+4x-5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-5\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu y':

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=1$ với $m=-2$.

Câu 18: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-4\right)x+3$ đạt cực đại tại điểm $x=3$.

A. $m=-1$. **B.** $m=1$. **C.** $m=1, m=5$. **D.** $m=5$.

Lời giải

Chọn C

$y'=x^2-2mx+\left(m^2-4\right)$

Hàm số đạt cực trị tại điểm $x=3$ thì $y'(3)=0$

$\Rightarrow 3^2-2m.3+\left(m^2-4\right)=0\Leftrightarrow m^2-6m+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=5\end{array}\right.$

TH1: $m=1$. Khi đó $y'=x^2-2x-3\Rightarrow y''=2x-2\Rightarrow y''(3)=4>0$ nên $x=3$ là điểm cực tiểu.

TH2: $m=5$. Khi đó $y'=x^2-10x+21\Rightarrow y''=2x-10\Rightarrow y''(3)=-4<0$ nên $x=3$ là điểm cực đại.

Vậy $m=5$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)=-x^3+2(2m-1)x^2-\left(m^2-8\right)x+2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đạt giá trị cực đại tại điểm $x=-1$.

A. $m=3$. **B.** $m=-9$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=-3x^2+4(2m-1)x-\left(m^2-8\right)$

Hàm số đạt giá trị cực đại tại điểm $x=-1\Rightarrow f'(-1)=0\Rightarrow -m^2-8m+9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-9\end{array}\right.$

Với $m=1\Rightarrow f(x)=-x^3+2x^2+7x+2$

Có $f'(x)=-3x^2+4x+7; f''(x)=-6x+4$

Mà $\begin{cases}f'(-1)=0\\f''(-1)=10>0\end{cases}\Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1\Rightarrow m=1$ không thoả mãn yêu cầu bài ra.

Với $m=-9\Rightarrow f(x)=-x^3-38x^2-73x+2$

Có $f'(x)=-3x^2-76x-73; f''(x)=-6x-76$

Mà $\begin{cases}f'(-1)=0\\f''(-1)=-70<0\end{cases}\Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x=-1\Rightarrow m=-9$ thoả mãn yêu cầu bài ra.

Vậy $m=-9$ thỏa mãn đề bài.

Câu 20: Khi hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-2\right)x+2021$ đạt cực đại tại $x=1$ thì giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(1;4)$. **B.** $(-3;0)$. **C.** $(0;3)$. **D.** $(-2;0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = -x^2 - 2mx + m^2 - 2$ và $y'' = -2x - 2m$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ thì $y'(1) = 0$

$\Leftrightarrow -1^2 - 2m.1 + m^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = -1 \end{array}\right.$.

Với $m = 3$ ta có $y''(1) = -2 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -8 < 0$ nên $x = 1$ là điểm cực đại.

Suy ra $m = 3$ thỏa mãn.

Với $m = -1$ ta có $y' = -x^2 + 2x - 1 = -(x-1)^2 \le 0 \Rightarrow$ hàm số luôn nghịch biến, nên hàm số không có cực trị.

Suy ra $m = -1$ không thỏa mãn.

Vậy $m = 3$ thì hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + \left(m^2 - 2\right)x + 2021$ đạt cực đại tại $x = 1$.

Câu 21: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + \left(m^2 - 4\right)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$.

A. $m = 1,\ m = 5$. **B.** $m = 5$.

C. $m = 1$. **D.** $m = -1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m^2 - 4;\ y'' = 2x - 2m$

Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + \left(m^2 - 4\right)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$ khi và chỉ khi

$\begin{cases} y'(3) = 0 \\ y''(3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^2 - 2m.3 + m^2 - 4 = 0 \\ 2.3 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 5 = 0 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 5 \end{array}\right. \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 5$.

Vậy với $m = 5$ thì hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + \left(m^2 - 4\right)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$.

Câu 22: Tìm m để hàm số $y = -\frac{2}{3}x^3 - 2mx^2 + \left(m^2 + 3m\right)x + 5$ đạt cực đại tại $x = 1$.

A. $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -2 \end{array}\right.$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = 2$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 2 \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -2x^2 - 4mx + m^2 + 3m,\ y'' = -4x - 4m$.

Để hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ thì $y'(1) = 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 2 \end{array}\right.$.

Với $m = -1$ thì $y' = -2x^2 + 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Vì $x = 1$ là nghiệm kép nên không là điểm cực đại.

Với $m=2$ thì $y''(1)=-12<0$ nên $x=1$ là điểm cực đại.

Vậy $m=2$ là giá trị cần tìm.

Câu 23: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-(2m+1)x^2-(5m+4)x+10$ đạt cực đại tại điểm $x=-1$.

A. $m=-1$. **B.** $m=3$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=3x^2-2(2m+1)x-(5m+4)$

$y''=6x-2(2m+1)$

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=-1$ khi $\begin{cases}y'(-1)=0\\y''(-1)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-m+1=0\\-4m-8<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=1\\m>-2\end{cases}\Rightarrow m=1$.

Câu 24: Cho hàm số $y=x^3+(m^2-m+1)x^2+(3m^2-4)x+m+2$. Có bao nhiêu giá trị của m để hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=3x^2+2(m^2-m+1)x+3m^2-4; y''=6x+2(m^2-m+1)$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$ thì $y'(-1)=0\Leftrightarrow m^2+2m-3=0\Leftrightarrow m=1; m=-3$

Thử lại

Khi $m=1$, $y''(-1)<0$: Hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ (Không thỏa yêu cầu bài toán)

Khi $m=-3$, $y''(-1)>0$: Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$ (Thỏa yêu cầu bài toán)

Vậy có 1 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 25: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+mx^2+(m^2-2m-3)x+4$ đạt cực tiểu tại điểm $x=0$.

A. $m=-1$ hoặc $m=3$. **B.** $m=-1$.

C. $m=3$. **D.** $m=1$ hoặc $m=3$.

Lời giải

Chọn C

TXĐ $D=\mathbb{R}$.

$y'=x^2+2mx+m^2-2m-3$.

Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+mx^2+(m^2-2m-3)x+4$ đạt cực tiểu tại điểm $x=0$

$\Rightarrow y'(0)=0\Leftrightarrow 0^2+2m.0+m^2-2m-3=0\Leftrightarrow m^2-2m-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=3\end{array}\right.$.

Với $m=-1$, $y'=x^2-2x, y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$; $y''=2x-2\Rightarrow y''(0)=-2<0$

$\Rightarrow$ Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+mx^2+(m^2-2m-3)x+4$ đạt cực đại tại điểm $x=0$ khi $m=-1$.

Vậy $m=-1$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m=3$, $y'=x^2+6x$, $y'=0\Leftrightarrow x^2+6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-6\end{array}\right.$; $y"=2x+6\Rightarrow y"(0)=6>0$.

$\Rightarrow$ Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+mx^2+\left(m^2-2m-3\right)x+4$ đạt cực tiểu tại điểm $x=0$ khi $m=3$ (thỏa mãn).

Câu 26: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3+3x^2-mx+2022$ đạt cực tiểu tại $x=2$.

A. $m=-24$. **B.** $m=24$. **C.** $m\in\varnothing$. **D.** $m=0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=3x^2+6x-m$

Do hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$ nên $y'(2)=0\Leftrightarrow 3.2^2+6.2-m=0\Leftrightarrow m=24$

Với $m=24$ hàm số trở thành $y=x^3+3x^2-24x+2022$

$y'=3x^2+6x-24, y'=0\Leftrightarrow 3x^2+6x-24=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-4\\x=2\end{array}\right.$; $y''=6x+6$

Ta có $\begin{cases}y''(2)=18>0\\y'(2)=0\end{cases}\Rightarrow x=2$ là điểm cực tiểu của hàm số đã cho. Vậy $m=24$.

Câu 27: Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-4\right)x-2021$ đạt cực đại tại $x=3$.

A. $m=1$ **B.** $m=-1$ **C.** $m=5$ **D.** $m=-7$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=3x^2-6mx+3\left(m^2-4\right)$; $y''=6x-6m$.

Hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-4\right)x-2021$ đạt cực đại tại $x=3$ khi và chỉ khi: $\begin{cases}y'(3)=0\\y''(3)<0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}3(9-6m+m^2-4)=0\\3(6-2m)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-6m+5=0\\m>3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=1(L)\\m=5(TM)\end{array}\right.\\m>3\end{cases}$.

Vậy $m=5$ là giá trị cần tìm.

Câu 28: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^4-2(m+2)x^2$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

A. $\left[\begin{array}{l}m\le -2\\m\ge 0\end{array}\right.$ **B.** $m<0$. **C.** $m=0$. **D.** $m\le -2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=4x^3-4(m+2)x$.

Giải phương trình $y'=0\Leftrightarrow 4x^3-4(m+2)x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m+2\end{array}\right.$.

Nếu $m+2>0 \Leftrightarrow m>-2$ thì $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt $x_1=-\sqrt{m+2}$; $x_2=0$; $x_3=\sqrt{m+2}$ khi đó ta có y' đổi dấu từ $+$ sang $-$ ki qua điểm $x=0$ nên $x=0$ là điểm cực đại $\Rightarrow m>-2$ không thỏa mãn. Nếu $m+2\le 0 \Leftrightarrow m\le -2$ thì $y'=0$ có nghiệm duy nhất $x=0$ khi đó ta có y' đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi qua điểm $x=0$ nên $x=0$ là điểm cực tiểu $\Rightarrow m\le -2$ thỏa mãn.

Câu 29: Giá trị nguyên lớn nhất của tham số *m* để hàm số $y=\dfrac{x^2+(m-1)x+3-2m}{x+m}$ đạt cực tiểu tại $x=-1$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(0;\sqrt{5}\right)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(-1;2)$. **D.** $\left(\sqrt{5};5\right)$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định $x\ne -m$.

Đạo hàm cấp một và cấp hai của hàm số lần lượt là: $y'=1+\dfrac{m-3}{(x+m)^2}$, $y''=\dfrac{-2(m-3)}{(x+m)^3}$.

Để hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} y'(-1)=0 \\ y''(-1)>0 \\ m\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\dfrac{m-3}{(-1+m)^2}=0 \\ \dfrac{-2(m-3)}{(-1+m)^3}>0 \\ m\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-1 \end{array}\right.$$

Nghiệm nguyên lớn nhất của *m* là $m=2$ nên chọn khoảng $\left(0;\sqrt{5}\right)$.

Câu 30: Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-m^2+1$ với *m* là tham số thự**C.** Tìm *m* để hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$.

A. $m=-4$. **B.** $m=0$. **C.** $m=2$. **D.** $m=0;m=2$.

Lời giải

Chọn B

$y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-m^2+1 \Rightarrow y'=3x^2-6mx+3m^2-3=3(x-m+1)(x-m-1)$

$y''=6x-6m$.

Để hàm số đạt cực tiểu tại $x=1 \Rightarrow y'(1)=0 \Leftrightarrow 3m^2-6m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \end{array}\right.$.

Với $m=0 \Rightarrow y''(1)=6>0$. Suy ra $m=0$ (thỏa mãn).

Với $m=2 \Rightarrow y''(1)=-6<0$. Suy ra $m=2$ (loại).

Vậy giá trị của m để hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-m^2+1$ đạt cực tiểu tại $x=1$ là $m=0$

.

Câu 31: Có bao nhiêu giá trị của tham số *m* để hàm số $y=x^3-3mx^2+\left(m^2+2\right)x-m$ đạt cực tiểu tại $x=1$?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** Vô số

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + m^2 + 2 \Rightarrow y'(1) = m^2 - 6m + 5$.

Ta có $y'(1) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 5 \end{array}\right.$

Với $m = 1$, $y' = 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ nên hàm số không có cực trị, do đó $m = 1$ không thỏa yêu cầu đề.

Với $m = 5$, $y' = 3x^2 - 30x + 27 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 9 \\ x = 1 \end{array}\right.$, vì $a > 0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và đạt cực tiểu tại $x = 9$. Do đó $m = 5$ không thỏa yêu cầu đề.

Vậy không có giá trị nào của m để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Câu 32: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + \left(m^2 - 4\right)x + 3$ đạt giá trị cực đại tại $x = 3$.

A. $m = -1$. **B.** $m = 5$ **C.** $m = -7$. **D.** $m = 1$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = x^2 - 2mx + m^2 - 4$; và: $y'' = 2x - 2m$

Giả sử $x = 3$ là điểm cực đại, khi đó ta có: $\begin{cases} y'(3) = 0 \\ y''(3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 5 = 0 \\ 6 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 5$

Với $m = 5$, hàm số trở thành: $y = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 21x + 3$, $y' = x^2 - 10x + 21$

Xét dấu y' ta thấy $x = 3$ là điểm cực đại của hàm số. Vậy $m = 5$.

Câu 33: Cho hàm số $f(x) = -x^3 + 2(2m-1)x^2 - \left(m^2 - 8\right)x + 2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đạt giá trị cực đại tại điểm $x = -1$.

A. $m = 3$. **B.** $m = -9$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = -2$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $f(x) = -x^3 + 2(2m-1)x^2 - \left(m^2 - 8\right)x + 2$ có $f'(x) = -3x^2 + 4(2m-1)x - \left(m^2 - 8\right)$ và $f''(x) = -6x + 4(2m-1)$.

Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị tại điểm $x = -1$ là $f'(-1) = 0$

$\Leftrightarrow -3 - 4(2m-1) - \left(m^2 - 8\right) = 0 \Leftrightarrow m^2 + 8m - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -9 \end{array}\right.$.

TH1: $m = 1 \Rightarrow f''(-1) = -6(-1) + 4(2.1-1) = 10 \Rightarrow f''(-1) > 0$, suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$. Vậy $m = 1$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

TH2: $m = -9 \Rightarrow f''(-1) = -6(-1) + 4\left[2(-9) - 1\right] = -70 \Rightarrow f''(-1) < 0$, suy ra hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

Vậy với $m = -9$ thì hàm số đã cho đạt giá trị cực đại tại điểm $x = -1$.

Câu 34: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{2}{3}x^3+(m-1)x^2+\left(m^2-4m+3\right)x-1$ có hai điểm cực trị.

A. $-5<m<-1$. **B.** $1<m<5$. **C.** $-5<m<1$. **D.** $-1<m<5$.

Lời giải

Chọn B

$y'=2x^2+2(m-1)x+m^2-4m+3$

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow 2x^2+2(m-1)x+m^2-4m+3=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Delta'>0\Leftrightarrow(m-1)^2-2\left(m^2-4m+3\right)>0\Leftrightarrow -m^2+6m-5>0\Leftrightarrow 1<m<5$.

Vậy $1<m<5$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 35: Hãy tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=x^3-3mx$ có cực trị?

A. $m\geq 0$. **B.** $m\neq 0$. **C.** $m>2$. **D.** $m>0$.

Lời giải

Chọn D

$f(x)=x^3-3mx\Rightarrow f'(x)=3x^2-3m$.

Để hàm số có cực trị thì $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 0^2+9m>0\Leftrightarrow m>0$.

Câu 36: Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+3(3m+7)x+1$ có cực trị là

A. $\left[\begin{array}{l}m<-2\\m>3\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m<-3\\m>2\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m\leq -2\\m\geq 3\end{array}\right.$. **D.** $-2<m<3$.

Lời giải

Chọn A

$y'=3x^2-6(m+1)x+3(3m+7)$

Hàm số có cực trị khi và chỉ khi y' có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta'=9(m+1)^2-9(3m+7)>0\Leftrightarrow m^2-m-6>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>3\\m<-2\end{array}\right.$

Câu 37: Tìm tất cả các giá trị của tham số m đề hàm số $y=x^3-3x^2+2mx+m$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu

A. $m\geq\frac{3}{2}$. **B.** $m<\frac{3}{2}$. **C.** $m\leq\frac{3}{2}$. **D.** $m>\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$y=x^3-3x^2+2mx+m$; $y'=3x^2-6x+2m$.

Hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta'>0\Leftrightarrow 9-2.3m>0\Leftrightarrow m<\frac{3}{2}$.

Câu 38: Tìm giá trị của m để hàm số $y=x^3-x^2+mx-1$ có hai điểm cực trị.

A. $m\leq\frac{1}{3}$. **B.** $m<\frac{1}{3}$. **C.** $m\geq\frac{1}{3}$. **D.** $m>\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 3x^2 - 2x + m.$

Hàm số $y = x^3 - x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $3x^2 - 2x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt, tức là $\Delta' = 1 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{3}.$

Câu 39: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + mx - 1$ có cực đại và cực tiểu?

A. $m < 1.$ **B.** $m \le 1.$ **C.** $m > 1.$ **D.** $m \ge 1.$

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = x^2 - 2x + m$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + m = 0$; $\Delta' = 1 - m$.

Hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 1 - m > 0 \Leftrightarrow m < 1.$

Câu 40: Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 10$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $m_0 \in (-15;-7)$. **B.** $m_0 \in (-1;7)$. **C.** $m_0 \in (-7;-1)$. **D.** $m_0 \in (7;10)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x + m \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + m = 0$ (1).

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Điều kiện $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$.

Theo Viet $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = \frac{m}{3} \end{cases}$ (*).

Theo bài ra $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 10 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 10$ (**).

Từ (*) và (**) ta được $4 - m = 10 \Leftrightarrow m = -6$ thoả mãn điều kiện.

Vậy $m_0 = -6 \in (-7;-1)$.

Câu 41: Cho biết hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 3.$ Khi đó

A. $m \le -1.$ **B.** $m \in (2;3).$ **C.** $m \in (1;2).$ **D.** $m \in (0;1).$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + m$

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 khi $\Delta' = (-3)^2 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$

Theo định lí Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = \frac{m}{3} \end{cases}$

Theo đề bài ta có $x_1^2+x_2^2=3\Leftrightarrow\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=3\Leftrightarrow 2^2-\frac{2}{3}m=3\Leftrightarrow m=\frac{3}{2}$

Vậy $m=\frac{3}{2}$ thỏa mãn đề bài.

Câu 42: Đồ thị hàm số $y=x^3-2mx^2+m^2x+n$ có điểm cực tiểu là $I\left(1;3\right)$. Khi đó $m+n$ bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=x^3-2mx^2+m^2x+n\Rightarrow y'=3x^2-4mx+m^2\Rightarrow y''=6x-4m$

Do $I\left(1;3\right)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-2mx^2+m^2x+n$

$$\Rightarrow\begin{cases}I\left(1;3\right)\in y\\y'\left(1\right)=0\\y''\left(1\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-2m+m^2+n=3\\m^2-4m+3=0\\6-4m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-2m+m^2+n=3\\\left[\begin{array}{l}m=1\\m=3\end{array}\right.\\m<\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=1\\n=3\end{cases}$$

Vậy $m+n=4$.

Câu 43: Cho đường cong $\left(C_m\right):y=x^3-3\left(m-1\right)x^2-3\left(m+1\right)x+3$. Gọi S là tập các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A,B sao cho O,A,B thẳng hàng. Tổng các phần tử của S bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=3x^2-6\left(m-1\right)x-3\left(m+1\right)=3\left[x^2-2\left(m-1\right)x-\left(m+1\right)\right]$.

Đồ thị $\left(C_m\right)$ có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow x^2-2\left(m-1\right)x-\left(m+1\right)=0\left(*\right)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow\Delta'=\left(m-1\right)^2+m+1>0\Leftrightarrow m^2-m+2>0\Leftrightarrow m\in\mathbb{R}$.

Ta có $y=y'.\left[\frac{1}{3}x-\frac{m-1}{3}\right]+\left[-2m^2+2m-4\right]x+4-m^2$.

Suy ra phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm cực trị là

$y=\left(-2m^2+2m-4\right)x+4-m^2$.

Do O,A,B thẳng hàng nên $4-m^2=0\Rightarrow\Rightarrow m=\pm2$.

Suy ra $S=\left\{2;-2\right\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là 0.

Câu 44: Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{2}{3}x^3-mx^2-2\left(3m^2-1\right)x+\frac{2}{3}$ có hai điểm cực trị có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)=1$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 2x^2 - 2mx - 2\left(3m^2 - 1\right) = 2\left[x^2 - mx - \left(3m^2 - 1\right)\right]$.

Đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow x^2 - mx - \left(3m^2 - 1\right) = 0\ (*)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta = m^2 + 4\left(3m^2 - 1\right) > 0 \Leftrightarrow 13m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow m^2 > \dfrac{4}{13} \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; -\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right) \cup \left(\dfrac{2}{\sqrt{13}}; +\infty\right)$.

Theo Viét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = -\left(3m^2 - 1\right) \end{cases}$.

Theo bài $x_1 x_2 + 2\left(x_1 + x_2\right) = 1 \Leftrightarrow -3m^2 + 1 + 2m = 1 \Leftrightarrow 3m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \ \ (ko \text{ tm}) \\ m = \dfrac{2}{3} (tm) \end{array}\right.$.

Kết luận: Có 1 giá trị tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 45: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^3 + 4\left(m-2\right)x^2 - 7x + 1$ có hai điểm cực trị $x_1, x_2\ \left(x_1 < x_2\right)$ thỏa mãn $\left|x_1\right| - \left|x_2\right| = -4$?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y = x^3 + 4\left(m-2\right)x^2 - 7x + 1\ (1) \Rightarrow y' = 3x^2 + 8\left(m-2\right)x - 7$

Xét phương trình $3x^2 + 8\left(m-2\right)x - 7 = 0\ (2)$

Suy ra hàm số (1) luôn có hai điểm cực trị x_1, x_2 với mọi m.

Ta thấy $ac = -21 < 0$ nên phương trình (2) có hai nghiệm trái dấu

Suy ra hàm số (1) luôn có hai điểm cực trị x_1, x_2 với mọi m.

$\Rightarrow x_1 < 0;\ x_2 > 0 \Rightarrow \left|x_1\right| = -x_1;\ \left|x_2\right| = x_2$.

Ta có: $\left|x_1\right| - \left|x_2\right| = -4 \Leftrightarrow -x_1 - x_2 = -4 \Leftrightarrow -\left(x_1 + x_2\right) = -4 \Leftrightarrow \dfrac{8\left(m-2\right)}{3} = -4 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$

Vậy không có giá trị nguyên nào của m thỏa bài toán.

Câu 46: Hàm số $y = \dfrac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2\left(3m^2 - 1\right)x + \dfrac{2}{3}$ có 2 điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1 x_2 + 2\left(x_1 + x_2\right) = 1$ khi $m = \dfrac{a}{b}$. Tính $S = a^2 + b^2$.

A. $S = 10$. **B.** $S = 13$. **C.** $S = 25$. **D.** $S = 34$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = \dfrac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2\left(3m^2 - 1\right)x + \dfrac{2}{3} \Rightarrow y' = 2x^2 - 2mx - 2\left(3m^2 - 1\right)$.

Để y có hai cực trị x_1, x_2 thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt, tức là $\Delta' = m^2 + 4\left(3m^2 - 1\right) = 13m^2 - 4 > 0$ hay $m \in \left(-\infty; -\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right) \cup \left(\dfrac{2}{\sqrt{13}}; +\infty\right)$.

Ta lại có $x_1 x_2 + 2\left(x_1 + x_2\right) = 1 \Leftrightarrow -3m^2 + 1 + 2m = 1 \Leftrightarrow -3m^2 + 2m = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \text{ (loaïi)} \\ m=\dfrac{2}{3} \text{ (thoaû)} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow S=13..$$

Câu 47: Gọi x_1, x_2 là các điểm cực trị của hàm số $y=x^3-3mx^2-6x$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $S=\left(x_1^2-3\right)\left(x_2^2-1\right)$ là

A. $7-4\sqrt{3}$. **B.** 4. **C.** $4\sqrt{3}$. **D.** $7+4\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $' = \mathbb{R}$

$$y'=3x^2-6mx-6;\ y'=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=m-\sqrt{m^2+2}=x_1=\dfrac{-2}{x_2} \\ x=m+\sqrt{m^2+2}=x_2 \end{array}\right. .$$

$$S=\left(\frac{4}{x_2^2}-3\right)\left(x_2^2-1\right)=7-3x_2^2-\frac{4}{x_2^2}.$$

Ta có: $3x_2^2+\dfrac{4}{x_2^2} \geq 4\sqrt{3} \Rightarrow S \leq 7-4\sqrt{3}$ suy ra $\max S=7-4\sqrt{3}$.

Câu 48: Cho biết hàm số $y=x^3-3x^2+mx-1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=3$. Khi đó

A. $m \leq -1$. **B.** $m \in (2;3)$. **C.** $m \in (1;2)$. **D.** $m \in (0;1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=3x^2-6x+m$

Hàm số $y=x^3-3x^2+mx-1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 khi $\Delta'=(-3)^2-3m>0 \Leftrightarrow m<3$

Theo định lí Viet ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1x_2=\dfrac{m}{3} \end{cases}$

Theo đề bài ta có $x_1^2+x_2^2=3 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=3 \Leftrightarrow 2^2-\dfrac{2}{3}m=3 \Leftrightarrow m=\dfrac{3}{2}$

Vậy $m=\dfrac{3}{2}$ thỏa mãn đề bài.

Câu 49: Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx-1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1+x_2-3x_1x_2=1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m_0 \in (-4;-2)$. **B.** $m_0 \in (2;4)$. **C.** $m_0 \in (0;2)$. **D.** $m_0 \in (-2;0)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=3x^2-6x+m;\ y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x+m=0(*)$.

Hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 $\Leftrightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'=9-3m>0$ $\Leftrightarrow m<3$.

Theo định lý Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1.x_2 = \dfrac{m}{3} \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 - 3x_1x_2 = 1 \Leftrightarrow 2 - m = 1 \Leftrightarrow m = 1$

Vậy $m_0 = 1 \in (0;2)$.

Câu 50: Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x - m + 2$ có hai điểm cực trị dương là

A. $m \in \left(\dfrac{1}{2};1\right) \cup (1;+\infty)$. **B.** $m \in \left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $m \in (1;+\infty)$. **D.** $m \in (-\infty;1) \cup (1;2)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = x^2 - 2mx + 2m - 1$. Để hàm số có hai điểm cực trị dương thì phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 2m + 1 > 0 \\ a.c = 2m - 1 > 0 \\ -\dfrac{b}{a} = 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > \dfrac{1}{2} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(\dfrac{1}{2};1\right) \cup (1;+\infty)$. Vậy $m \in \left(\dfrac{1}{2};1\right) \cup (1;+\infty)$.

Cách 2.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + 2m - 1$. Để hàm số có hai điểm cực trị dương thì phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \ (\text{vì } a + b + c = 0) \\ x_2 = 2m - 1 \end{array}\right.$ dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 \neq 1 \\ 2m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(\dfrac{1}{2};1\right) \cup (1;+\infty)$

.

Vậy $m \in \left(\dfrac{1}{2};1\right) \cup (1;+\infty)$.

Câu 51: Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + \left(m^2 + 5\right)x - 2m^3, \ (C_m)$. Với giá trị nào của m thì hàm số có hai điểm cực trị nằm phía bên phải trục Oy ?

A. $m \leq -1$. **B.** $m > 2$. **C.** $m \geq 2$. **D.** $m > -1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 5$

Khi đó hàm số có hai điểm cực trị nằm bên phải Oy khi và chỉ khi $y' = 0$ có hai nghiệm dương

phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m+1)^2 - (m^2+5) > 0 \\ S = \dfrac{2(m+1)}{1} > 0 \\ P = \dfrac{m^2+5}{1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2$

Câu 52: Để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$, giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(2;3)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải

Chọn D

$y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$

Xét $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m}, (m > 0) \end{array}\right.$

Tọa độ ba điểm cực trị là: $A(0; m-1), B\left(-\sqrt{m}; -m^2 + m - 1\right), C\left(\sqrt{m}; -m^2 + m - 1\right)$

Gọi H là trung điểm của cạnh BC, ta có $\begin{cases} AH = m^2 \\ BC = 2\sqrt{m} \end{cases}$

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AH \cdot BC = m^2\sqrt{m} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow m = 2$

Câu 53: Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m^2+4)x - 6$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ thỏa mãn $y_1 + y_2 = \dfrac{20}{3}$.

A. $-2.3 < m < 0$. **B.** $2.2 < m < 4.1$.

C. $0 < m < 2.2$. **D.** $4.1 < m < 5.3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = f'(x) = x^2 - 2(m+1)x + (m^2+4)$.

Để hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - m^2 - 4 = 2m - 3 > 0 \Leftrightarrow m > \dfrac{3}{2}$.

Gọi I là tâm đối xứng của đồ thị thì x_I là nghiệm của $y'' = 0$. Khí đó $y_1 + y_2 = 2y_I$.

Ta có: $y'' = 2x - 2(m+1)$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = m + 1$.

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ thỏa mãn $y_1 + y_2 = \dfrac{20}{3} \Leftrightarrow y_I = \dfrac{10}{3}$.

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{3}(m+1)^3 - (m+1)^3 + (m^2+4)(m+1) - 6 = \dfrac{10}{3}$.

$\Leftrightarrow m^3 - 3m^2 + 6m - 18 = 0 \Leftrightarrow (m-3)(m^2+6) = 0 \Leftrightarrow m = 3$.

Câu 54: Với điều kiện nào của tham số m thì hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + mx + 2020$ có hai điểm cực trị nằm về

bên phải trục Oy ?

A. $0<m<1$. **B.** $0<m\le 1$. **C.** $0\le m\le 1$. **D.** $-1<m<1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=\dfrac{x^3}{3}-x^2+mx+2020\Rightarrow y'=x^2-2x+m$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\S>0\\P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-m>0\\2>0,\forall m\\m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<1\\m>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<1$$

Vậy $0<m<1$.

Câu 55: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=x^3-3x^2-mx+4$ có hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-3;3)$.

A. 12. **B.** 11. **C.** 13. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=3x^2-6x-m$

Hàm số có hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-3;3)$ khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2\in(-3;3)\Leftrightarrow 3x^2-6x-m=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2\in(-3;3)$.

$\Leftrightarrow m=3x^2-6x$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2\in(-3;3)$.

Xét hàm số $f(x)=3x^2-6x$. Ta có $f'(x)=6x-6$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên

x	-3		1		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	45	↘	-3	↗	9

Dựa vào bảng biến thiên ta có $-3<m<9$.

Vậy $m\in\{-2;-1;0;...;8\}$.

Câu 56: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-8x^2+(m^2+11)x-2m^2+2$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục Ox ?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số $y=x^3-8x^2+(m^2+11)x-2m^2+2$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của Ox

$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số $y=x^3-8x^2+(m^2+11)x-2m^2+2$ cắt Ox tại ba điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình $x^3-8x^2+(m^2+11)x-2m^2+2=0$ có ba nghiệm phân biệt.

Mà $x^3-8x^2+(m^2+11)x-2m^2+2=0$

$\Leftrightarrow x^3-2x^2-6x^2+12x+m^2x-2m^2-x+2=0 \Leftrightarrow (x-2)\left(x^2-6x+m^2-1\right)=0$.

Do đó phương trình trên luôn có một nghiệm $x=2$ nên phương trình $f(x)=x^2-6x+m^2-1=0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác $2 \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ f(2)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}10-m^2>0\\ -9+m^2\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\sqrt{10}<m<\sqrt{10}\\ m\neq \pm 3\end{cases}$.

Với $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{-2;-1;0;1;2\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của tham số m.

Câu 57: Cho hàm số $y=x^3-(2m+1)x^2+(m+1)x+m-1$. Có bao nhiêu giá trị của số tự nhiên $m<20$ để hàm số có hai giá trị cực trị trái dấu?

A. 19. **B.** 20. **C.** 21. **D.** 22.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y=x^3-(2m+1)x^2+(m+1)x+m-1$.

Hàm số có hai giá trị cực trị trái dấu khi và chỉ khi đồ thị cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt

$\Leftrightarrow x^3-(2m+1)x^2+(m+1)x+m-1=0$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-2mx+1-m\right)=0$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow x^2-2mx+1-m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}m^2+m-1>0\\ 2-3m\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\\ m>\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.\\ m\neq\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

Kết hợp điều kiện $m\in\mathbb{N}, m<20$ ta được $1\le m<20$, $m\in\mathbb{N}$. Vậy có 19 số tự nhiên thỏa mãn bài toán.

Câu 58: Tìm giá trị tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+mx-2$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục tung.

A. $m\ge 0$. **B.** $m\le 0$. **C.** $m>0$. **D.** $m<0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=3x^2-6(m+1)x+m$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm hai phía trục tung thì phương trình $y'=0$ có hai nghiệm trái dấu, ta cần: $3.m<0 \Leftrightarrow m<0$.

Câu 59: Tìm số giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=2x^3-6x^2-m+1$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành.

A. Vô số giá trị m. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = 6x^2 - 12x = 6x(x-2)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$. Khi đó: $y_1 = y(0) = 1 - m$ và $y_2 = y(2) = -7 - m$

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành tức là hàm số có hai giá trị cực trị trái dấu, ta cần: $y_1.y_2 < 0 \Leftrightarrow (1-m)(-m-7) < 0 \Leftrightarrow -7 < m < 1$.

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-6;-5;-4;-3;-2;-1;0\}$.

Câu 60: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019;2022]$ để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x$ có hai điểm cực trị trong khoảng $(0;+\infty)$?

A. 2019. **B.** 2020. **C.** 2021. **D.** 2022.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = x^2 - 2mx + m + 2$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y'$ có hai nghiệm dương phân biệt:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S = x_1 + x_2 > 0 \\ P = x_1 x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 > 0 \\ 2m > 0 \\ m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 2 \end{array}\right. \\ m > 0 \\ m > -2 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2.$$

Vì m là số nguyên và thuộc đoạn $[-2019;2022]$ nên $m = \{3;4;5;...;2022\}$.

Vậy có 2020 giá trị m thỏa mãn.

Câu 61: Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$ với m là tham số thực. Tập hợp các giá trị của m để hàm số có hai cực trị nằm trong khoảng $(-2;3)$ là

A. $(1;3)$. **B.** $(3;4)$. **C.** $(-1;3) \cup (3;4)$. **D.** $(-1;4)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2) \Leftrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 = -1 \\ x = x_2 = 2 - m \end{array}\right.$

Để hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2 - m \neq -1 \Leftrightarrow m \neq 3$.

Nếu $x_1 < x_2 \Leftrightarrow m < 3$ thì yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -2 < -1 < 2 - m < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 3$.

Nếu $x_1 > x_2 \Leftrightarrow m > 3$ thì yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -2 < 2 - m < -1 < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m < 4$.

Vậy $m \in (-1;3) \cup (3;4)$.

Câu 62: Cho hàm số $y = x^3 + 2(m-2)x^2 - 5x + 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ thỏa mãn $|x_1| - |x_2| = -2$.

A. $\frac{7}{2}$. **B.** -1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = 3x^2 + 4(m-2)x - 5$.

Khi đó $\Delta' = 4(m-2)^2 + 15 > 0$ nên hàm số luôn có hai điểm cực trị x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$.

Vì $a.c < 0$ nên $x_1 < 0 < x_2$

Suy ra: $|x_1| - |x_2| = -2 \Leftrightarrow -x_1 - x_2 = -2 \Leftrightarrow \frac{b}{a} = -2 \Leftrightarrow \frac{4(m-2)}{3} = -2 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Câu 63: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = x^3 - 6x^2 + (3m+6)x - m - 6$ đạt cực đại cực tiểu đồng thời hai giá trị cực trị cùng dấu

A. 7. **B.** 4. **C.** 12. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 12x + 3(m+2)$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 3(m+2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + m + 2 = 0$

Hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow (-2)^2 - (m+2) > 0 \Leftrightarrow m < 2$

$y = \frac{1}{3}(x-2)y' + 2(m-2)x + m - 2$

Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là hai điểm cực trị của đồ thị. Khi đó: $y'(x_1) = 0, y'(x_2) = 0$

$\Rightarrow$Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị: $y = 2(m-2)x + m - 2$

$y_1 = 2(m-2)x_1 + m - 2$, $y_2 = 2(m-2)x_2 + m - 2$

Áp dụng định lí Vi – ét cho phương trình: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1.x_2 = m + 2 \end{cases}$

Hai giá trị cực trị cùng dấu $\Leftrightarrow y_1.y_2 > 0 \Leftrightarrow \left[2(m-2)x_1 + m - 2\right].\left[2(m-2)x_2 + m - 2\right] > 0$

$\Leftrightarrow (m-2)^2\left[4x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 1\right] > 0 \Leftrightarrow (m-2)^2\left[4.4 + 2(m+2) + 1\right] > 0$

$\Leftrightarrow (m-2)^2(2m+21) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m > \frac{-21}{2} \end{cases}$. Kết hợp điều kiện ta có: $\frac{-21}{2} < m < 2$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-10; -9; ..; -4; -3; -3; -2; -1; 0; 1\}$.

Vậy có 12 số nguyên.

Câu 64: Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + 4m^2 - 2$ có đồ thị (C) và điểm $C(2;4)$. Tính tổng bình phương các giá trị của m để (C) có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 6.

A. 5. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=3x^2+6mx=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2m\end{array}\right.$.

Đồ thị (C) có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow -2m\neq 0\Leftrightarrow m\neq 0$.

Khi đó $A\left(0;4m^2-2\right)$, $B\left(-2m;4m^3+4m^2-2\right)\Rightarrow AB=\sqrt{4m^2+16m^6}=2|m|\sqrt{4m^4+1}$.

Phương trình đường thẳng AB là: $\frac{x-0}{-2m-0}=\frac{y-\left(4m^2-2\right)}{4m^3}\Leftrightarrow 2m^2x+y-4m^2+2=0$.

$d\left(C,AB\right)=\frac{\left|4m^2+4-4m^2+2\right|}{\sqrt{4m^4+1}}=\frac{6}{\sqrt{4m^4+1}}$.

Diện tích tam giác ABC là

$S=\frac{1}{2}.AB.d\left(C,AB\right)=6\Leftrightarrow\frac{1}{2}.2|m|.\sqrt{4m^4+1}.\frac{6}{\sqrt{4m^4+1}}=6$

$\Leftrightarrow|m|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-1\end{array}\right.$.

Vậy tổng bình phương các giá trị của m là 2.

Câu 65: Tồn tại bao nhiêu số dương m để đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=(m+1)x^3-(m+2)x^2+3m-2$ cắt và tạo với hai tia Ox,Oy một tam giác có diện tích bằng $\frac{9}{4}$?

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=3\left(m+1\right)x^2-2\left(m+2\right)x$

Hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow\begin{cases}m+1\neq 0\\\left(m+2\right)^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq -1\\m\neq -2\end{cases}$

Lấy y chia y' ta được: $y=\left[3\left(m+1\right)x^2-2\left(m+2\right)x\right]\left(\frac{1}{3}x-\frac{m+2}{9\left(m+1\right)}\right)-\frac{2}{9}\frac{\left(m+2\right)^2}{\left(m+1\right)}x+3m-2$

Do đó đường thẳng qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình

$d:\ y=-\frac{2}{9}\frac{\left(m+2\right)^2}{\left(m+1\right)}x+3m-2$

$d\cap Ox=A\left(\frac{9\left(3m-2\right)\left(m+1\right)}{2\left(m+2\right)^2};0\right)$, $d\cap Oy=B\left(0;3m-2\right)$ $\left(m>\frac{2}{3}\right)$.

$S_{\Delta OAB}=\frac{9}{4}\Rightarrow\frac{1}{2}\left|\frac{9\left(3m-2\right)\left(m+1\right)}{2\left(m+2\right)^2}\right|.\left|3m-2\right|=\frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow\frac{\left(3m-2\right)^2\left(m+1\right)}{\left(m+2\right)^2}=1\Leftrightarrow 9m^3-4m^2-12m=0\Leftrightarrow m=\frac{2}{9}+\frac{4\sqrt{7}}{9}$.

Vậy tồn tại 1 số dương m thỏa bài toán.

Câu 66: Cho hàm số $y=x^3-3mx$. Tìm m để đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số trên

cắt đường thẳng $d: y = x - 3$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

A. $m = 2$. **B.** $m = -2$. **C.** $m = -1$. **D.** $m = 1$.

Lời giải

Chọn D

$y = x^3 - 3mx \Rightarrow y' = 3x^2 - 3m$

Hàm số có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$.

Ta có $y = y'.\left(\frac{1}{3}x\right) - 2mx$. Khi đó đường thẳng Δ đi qua 2 điểm cực trị có phương trình $y = -2mx$. Gọi $M = \Delta \cap d, M(1,b)$

Vì $M(1,b) \in d \Rightarrow b = 1 - 3 = -2$.

$M(1,-2) \in \Delta \Rightarrow -2 = -2m.1 \Rightarrow m = 1(tm)$.

Câu 67: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + \left(m^2 - 1\right)x$ có hai điểm cực trị A và B sao cho A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $d: y = 5x - 9$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 0. **B.** 6. **C.** -6. **D.** 3

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = x^2 - 2mx + \left(m^2 - 1\right)$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m - 1 \\ x = m + 1 \end{array}\right. \Rightarrow A\left(m - 1; \frac{m^3 - 3m + 2}{3}\right) \text{ và } B\left(m + 1; \frac{m^3 - 3m - 2}{3}\right)$$

Dễ thấy phương trình đường thẳng $AB: y = -\frac{2}{3}x + \frac{m\left(m^2 - 1\right)}{3}$ nên AB không thể song song hoặc trùng với $d \Rightarrow A, B$ cách đều đường thẳng $d: y = 5x - 9$ nếu trung điểm I của AB nằm trên d

$$I\left(m; \frac{m^3 - 3m}{3}\right) \in d \Rightarrow \frac{m^3 - 3m}{3} = 5m - 9 \Leftrightarrow m^3 - 18m + 27 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = \frac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Với $m = 3 \Rightarrow A, B$ thỏa điều kiện nằm khác phía so với d.

Với $m = \frac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow A, B$ thỏa điều kiện nằm khác phía so với d.

Tổng các phần tử của S bằng 0.

Câu 68: Cho hàm số $y = x^3 - mx^2 - m^2x + 8$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số có điểm cực tiểu nằm hoàn toàn phía trên trục hoành?

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

$y' = 3x^2 - 2mx - m^2$; $\Delta' = m^2 + 3m^2 = 4m^2$.

Do đó phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm là $x_1 = \frac{m + 2m}{3} = m$, $x_2 = \frac{m - 2m}{3} = -\frac{m}{3}$.

Để hàm số có cực trị thì $m \neq 0$

Trường hợp 1: $m > 0$, khi đó $x_1 > x_2$, hàm số đạt cực tiểu tại $x_1 = m$.

Để hàm số có điểm cực tiểu nằm hoàn toàn phía trên trục hoành $f(x_1) > 0$.

Hay $m^3 - m^3 - m^3 + 8 > 0 \Leftrightarrow 8 - m^3 > 0 \Leftrightarrow m < 2$.

Kết hợp điều kiện ta được $0 < m < 2$. Do m nguyên nên $m = 1$.

Trường hợp 2: $m < 0$, khi đó $x_1 < x_2$, hàm số đạt cực tiểu tại $x_2 = -\dfrac{m}{3}$.

Để hàm số có điểm cực tiểu nằm hoàn toàn phía trên trục hoành $f(x_2) > 0$.

Hay $-\dfrac{m^3}{27} - \dfrac{m^3}{9} + \dfrac{m^3}{3} + 8 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{5}{27}m^3 + 8 > 0 \Leftrightarrow m > -\sqrt[3]{\dfrac{216}{5}}$.

Kết hợp điều kiện ta được $-\sqrt[3]{\dfrac{216}{5}} < m < 0$. Do m nguyên nên $m \in \{-3;-2;-1\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Câu 69: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}(3m+2)x^2 + (2m^2+3m+1)x - 2$ có điểm cực đại x_{CD} và điểm cực tiểu x_{CT} thoả mãn $3x_{CD}^2 = 4x_{CT}$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}(3m+2)x^2 + (2m^2+3m+1)x - 2 \Rightarrow y' = x^2 - (3m+2)x + (2m^2+3m+1)$ có $\Delta = m^2 \geq 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2m+1 \\ x = m+1 \end{array}\right.$.

Hàm số có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi $m \neq 0$.

Trường hợp 1. $x_{CD} = 2m+1; x_{CT} = m+1$.

Do $a = \dfrac{1}{3} > 0$ nên suy ra $x_{CD} < x_{CT} \Leftrightarrow 2m+1 < m+1 \Leftrightarrow m < 0$.

Lại có $3x_{CD}^2 = 4x_{CT} \Leftrightarrow 3(2m+1)^2 = 4(m+1) \Leftrightarrow 12m^2 + 8m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{-2 \pm \sqrt{7}}{6}$.

Với điều kiện $m < 0 \Rightarrow m = \dfrac{-2-\sqrt{7}}{6}$ thoả mãn.

Trường hợp 2: $x_{CD} = m+1; x_{CT} = 2m+1$

Do $a = \dfrac{1}{3} > 0$ nên suy ra $x_{CD} < x_{CT} \Leftrightarrow m+1 < 2m+1 \Leftrightarrow m > 0$.

Lại có $3x_{CD}^2 = 4x_{CT} \Leftrightarrow 3(m+1)^2 = 4(2m+1) \Leftrightarrow 3m^2 - 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$.

Với điều kiện $m > 0 \Rightarrow m = 1$ thoả mãn.

Kết luận: vậy có 2 giá trị thực của tham số m thoả mãn.

Câu 70: Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 9x - 2m^2 + 1$. Hãy tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho có các điểm cực trị là $x_1; x_2$ sao cho $|x_1 - x_2| = 2$?

A. $m=1$. **B.** $m=-3$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-3 \end{array}\right.$. **D.** $m\in\varnothing$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3x^2-6(m+1)x+9$.

Khi đó: $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6(m+1)x+9=0 \Leftrightarrow x^2-2(m+1)x+3=0$ (*)

Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$

$\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow (m+1)^2-3>0 \Leftrightarrow m^2+2m-2>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>-1+\sqrt{3} \\ m<-1-\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Theo định lý vi-et ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2(m+1) \\ x_1x_2=3 \end{cases}$.

Theo bài ra: $|x_1-x_2|=2 \Leftrightarrow (x_1-x_2)^2=4$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4 \Leftrightarrow 4(m+1)^2-4.3=4 \Leftrightarrow m^2+2m-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-3 \end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Vậy $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-3 \end{array}\right.$.

Câu 71: Cho hàm số $y=x^3-3mx+1$ **(1)** và điểm $A(2;3)$. Biết m là một giá trị để đồ thị hàm số **(1)** có hai điểm cực trị B và C sao cho tam giác ABC cân tại A. Diện tích tam giác ABC bằng

A. 6. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 3. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=3x^2-3m.$

Đồ thị hàm số **(1)** có hai điểm cực trị B và C khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt, suy ra $m>0$.

Khi đó, không giảm tổng quát suy ra $B(\sqrt{m};1-2m\sqrt{m});C\left(-\sqrt{m};2m\sqrt{m}+1\right);A(2;3)$.

Tam giác ABC cân tại A suy ra $AB=AC$.

$AB^2=AC^2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{m}-2\right)^2+\left(2+2m\sqrt{m}\right)^2=\left(\sqrt{m}+2\right)^2+\left(2-2m\sqrt{m}\right)^2$

$\Leftrightarrow 8\sqrt{m}-16m\sqrt{m}=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} m=0 & (\text{lo¹i v× } m>0) \\ m=\dfrac{1}{2} & (\text{tháa m·n}) \end{array}\right.$

Với $m=\dfrac{1}{2}$ thì $BC=\sqrt{(2\sqrt{m})^2+(4m\sqrt{m})^2}=\sqrt{4m+16m^3}=\sqrt{4.\dfrac{1}{2}+16.\dfrac{1}{8}}=2$.

Thử lại thấy ba điểm A,B,C không thẳng hàng.

Gọi I là trung điểm của BC, suy ra $I(0;1)$ và $IA=\sqrt{2^2+(3-1)^2}=2\sqrt{2}$.

Vậy diện tích tam giác ABC bằng $\dfrac{1}{2}.IA.BC=\dfrac{1}{2}.2\sqrt{2}.2=2\sqrt{2}$.

Câu 72: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-m^3+m$ có hai điểm cực trị $A,\ B$ và $OA+OB$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. Vô số. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=\left(x-m\right)^3-3x+m\Rightarrow y'=3\left(x-m\right)^2-3$.

$y'=0\Leftrightarrow\left(x-m\right)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m+1\\x=m-1\end{array}\right.$

Đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow m+1\neq m-1\Leftrightarrow m\in\mathbb{R}$.

Với $x=m+1\Rightarrow y=1-3\left(m+1\right)+m=-2m-2\Rightarrow A\left(m+1;-2m-2\right).$

Với $x=m-1\Rightarrow y=-1-3\left(m-1\right)+m=-2m+2\Rightarrow B\left(m-1;-2m+2\right).$

Ta có $OA+OB=\sqrt{\left(m+1\right)^2+\left(-2m-2\right)^2}+\sqrt{\left(m-1\right)^2+\left(-2m+2\right)^2}$

$=\sqrt{5m^2+10m+5}+\sqrt{5m^2-10m+5}$

$=\sqrt{5}\left|m+1\right|+\sqrt{5}\left|-m+1\right|\geq\sqrt{5}.\left|\left(m+1\right)+\left(-m+1\right)\right|=2\sqrt{5}\Rightarrow\left(OA+OB\right)_{\min}=2\sqrt{5}.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\left(m+1\right)\left(-m+1\right)\geq0\Leftrightarrow-1\leq m\leq1\Rightarrow m\in\left\{0;\pm1\right\}$.

Câu 73: Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=-x^3+3x^2+3\left(m^2-1\right)x-3m^2-1$ có điểm cực đại và cực tiểu cùng với gốc tọa độ tạo thành tam giác vuông tại O. Tích tất cả các giá trị của tập S bằng

A. -1. **B.** $-\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=-3x^2+6x+3m^2-3=0\Leftrightarrow-x^2+2x+m^2-1=0\ \ (1)$

Để hàm số có hai điểm cực đại và cực tiểu thì (1) phải có hai nghiệm phân biệt, nên $\Delta'=m^2>0$ suy ra $m\neq0$.

Dễ thấy (1) có hai nghiệm $x_1=1-m$ và $x_2=1+m$ nên $A\left(1-m;-2-2m^3\right)$ và $B\left(1+m;-2+2m^3\right)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số

Tam giác OAB vuông ở O $\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0\Leftrightarrow\left(1-m\right)\left(1+m\right)+\left(-2-2m^3\right)\left(-2+2m^3\right)=0$

$\Leftrightarrow1-m^2+4\left(1-m^6\right)=0\Leftrightarrow\left(1-m^2\right)\left(4m^4+4m+5\right)=0\Leftrightarrow m^2=1\Leftrightarrow m=\pm1$.

Do đó tích các giá trị thỏa mãn của m bằng -1.

Câu 74: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}mx^2+x-2$ đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $x_1+x_2+x_1x_2=3$

A. $m=-4$. **B.** $m=2$.

C. $m=3$. **D.** Không có giá trị m.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = x^2 - mx + 1$

Để hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$ (1)

Khi đó, phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2.

theo hệ thức viet $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1.x_2 = 1 \end{cases}$.

Theo bài ra ta có: $x_1 + x_2 + x_1x_2 = 3 \Leftrightarrow m + 1 = 3 \Leftrightarrow m = 2$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra không có giá trị m nào thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 75: Biết m_o là giá trị tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m_0 \in (-7;-1)$. **B.** $m_0 \in (7;10)$. **C.** $m_0 \in (-1;7)$. **D.** $m_0 \in (-15;-7)$.

Lời giải

Chọn D

Để hàm số có 2 điểm cực trị thì $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = 36 - 12m > 0 \Leftrightarrow m < 3$

Theo bài ra: $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 13$ $\boxed{*}$.

Mà theo định lý Viét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1.x_2 = \dfrac{m}{3} \end{cases}$ thay vào $\boxed{*}$ ta được:

$4 - 3.\dfrac{m}{3} = 13 \Leftrightarrow m = -9$ (t/m).

Câu 76: Cho hàm số $y = (m-3)x^3 + 2(m^2 - m - 1)x^2 + (m+4)x - 1$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục Oy. Tổng các phần tử của S là

A. -3. **B.** -4. **C.** 0. **D.** -2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 3(m-3)x^2 + 4(m^2 - m - 1)x + m + 4 = 0$.

Đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục Oy $\Leftrightarrow$ Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 0 < x_2$ $\Leftrightarrow 3(m-3)(m+4) < 0 \Leftrightarrow -4 < m < 3$.

Kết hợp điều kiện $m \in \mathbb{Z}$ ta được $m \in \{-3;-2;-1;0;1;2\}$ $\Rightarrow S = \{-3;-2;-1;0;1;2\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là -3.

Câu 77: Biết rằng $m_0=\frac{a}{b}, a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{N}^*$, $\frac{a}{b}$ tối giản là giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(m-1)x^2+(3m-2)x+1$ có 2 điểm cực trị trái dấu x_1, x_2 thoả mãn $\frac{1}{x_1}-2=\left|\frac{1}{x_2}\right|$. Tính tổng $S=a+2b$?

A. 13. **B.** 8. **C.** 11. **D.** −11.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=x^2-(m-1)x+3m-2$

Hàm số có 2 điểm cực trị trái dấu $x_1, x_2 \Leftrightarrow PT: y'=0$ có hai nghiệm trái dấu x_1, x_2

$\Leftrightarrow 3m-2<0\Leftrightarrow m<\frac{2}{3}$ (*).

Theo định lí Viet, ta có $\begin{cases} x_1+x_2=m-1 \\ x_1x_2=3m-2 \end{cases}$

Từ $\frac{1}{x_1}-2=\left|\frac{1}{x_2}\right|$ suy ra $\frac{1}{x_1}-2>0\Leftrightarrow\frac{1}{x_1}>2\Leftrightarrow 0<x_1<\frac{1}{2}\Rightarrow x_2<0$.

Ta có $\frac{1}{x_1}-2=\left|\frac{1}{x_2}\right|\Leftrightarrow\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=2\Leftrightarrow x_1+x_2=2x_1x_2\Leftrightarrow m-1=6m-4\Leftrightarrow m=\frac{3}{5}$

Suy ra $a=3, b=5\Rightarrow S=a+2b=13$.

Câu 78: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}mx^3-(m-1)x^2+3(m-2)x+\frac{1}{6}$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1+2x_2=1$.

A. $\left[\begin{array}{l} m=\frac{2}{3} \\ m=2 \end{array}\right.$. **B.** $1-\frac{\sqrt{6}}{2}<m<1+\frac{\sqrt{6}}{2}$.

C. $m\in\left(1-\frac{\sqrt{6}}{2};1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\setminus\{0\}$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y=\frac{1}{3}mx^3-(m-1)x^2+3(m-2)x+\frac{1}{6}$

Tập xác định $D=R;\ y'=mx^2-2(m-1)x+3(m-2)$

Hàm số đạt cực trị tại x_1, $x_2 \Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \Delta'=(m-1)^2-m.3(m-2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow m\in\left(1-\frac{\sqrt{6}}{2};1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\setminus\{0\}$

Khi đó theo định lý Viet ta có $\begin{cases} x_1+x_2=\frac{2(m-1)}{m} \\ x_1.x_2=\frac{3(m-2)}{m} \end{cases}$. Mà $x_1+2x_2=1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-2x_2+x_2=\dfrac{2(m-1)}{m} \\ (1-2x_2).x_2=\dfrac{3(m-2)}{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=\dfrac{2-m}{m} \\ \left(1-2.\dfrac{2-m}{m}\right).\dfrac{2-m}{m}=\dfrac{3(m-2)}{m} \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{2}{3} \\ m=2 \end{array}\right. \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy với $\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{2}{3} \\ m=2 \end{array}\right.$ thì hàm số đã cho đạt cực trị tại $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $x_1+2x_2=1$.

Câu 79: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-\left(5m^2-3m-1\right)x^2+(2m+1)x+1$ có hai điểm cực trị A và B sao cho A, B cách đều đường thẳng $x-1=0$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

$y'=x^2-2\left(5m^2-3m-1\right)x+2m+1$

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-\left(5m^2-3m-1\right)x^2+(2m+1)x+1$ có hai điểm cực trị A và B

$\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \left(5m^2-3m-1\right)^2-(2m+1)>0\ (1)$

Giả sử $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ với $x_1;x_2$ là hai nghiệm phân biệt của phương trình $y'=0$

A, B cách đều đường thẳng $x-1=0 \Rightarrow |x_1-1|=|x_2-1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=x_2\ (l) \\ x_1+x_2=2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow 2\left(5m^2-3m-1\right)=2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\dfrac{2}{5} \end{array}\right.$

Thay vào (1) ta thấy $m=-\dfrac{2}{5}$ thảo yêu cầu

Câu 80: Cho hàm số $y=x^3-3x^2-\left(m^2-2\right)x+m^2\ (C_m)$. Biết rằng đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt $A,B,C\left(x_A<x_B<x_C\right)$ và có hai điểm cực trị M,N. Số các giá trị của tham số m để $MN=AC$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và trục Ox là: $x^3-3x^2-\left(m^2-2\right)x+m^2=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-2x-m^2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x-m^2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1\pm\sqrt{1+m^2} \end{array}\right.$.

Suy ra (C_m) cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt $A\left(1-\sqrt{1+m^2};0\right), B(1;0), C\left(1+\sqrt{1+m^2};0\right)$ và $AC=2\sqrt{1+m^2}$.

Ta có, $y'=3x^2-6x-m^2+2$, $y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x-m^2+2=0(1)$, phương trình (1) luôn có 2

nghiệm x_1, x_2 với mọi giá trị của tham số m.

Áp dung định lý Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1.x_2 = \dfrac{-m^2+2}{3} \end{cases}$.

Gọi hai điểm cực trị là $M\left(x_1; y_1\right), N\left(x_2; y_2\right)$.

Đường thẳng qua hai điểm cực trị M, N là $y = -\dfrac{2}{3}\left(m^2+1\right)x + \dfrac{2m^2+2}{3}$.

Nên ta có $MN = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \dfrac{4}{9}\left(m^2+1\right)^2\left(x_2 - x_1\right)^2} = \sqrt{\left(1 + \dfrac{4}{9}\left(m^2+1\right)^2\right)\left(\left(x_2 + x_1\right)^2 - 4x_1x_2\right)}$

$= \sqrt{\left(1 + \dfrac{4}{9}\left(m^2+1\right)^2\right)\left(4 - \dfrac{4}{3}\left(2 - m^2\right)\right)} = \sqrt{\dfrac{4}{3}\left(1+m^2\right) + \dfrac{16}{27}\left(1+m^2\right)^3}$

Theo giả thiết $MN = AC$

$\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{4}{3}\left(1+m^2\right) + \dfrac{16}{27}\left(1+m^2\right)^3} = 2\sqrt{1+m^2} \Leftrightarrow \dfrac{4}{3}\left(1+m^2\right) + \dfrac{16}{27}\left(1+m^2\right)^3 = 4\left(1+m^2\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{4}{3}\left(1+m^2\right) + \dfrac{16}{27}\left(1+m^2\right)^3 = 4\left(1+m^2\right) \Leftrightarrow \dfrac{4}{3} + \dfrac{16}{27}\left(1+m^2\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \left(1+m^2\right)^2 = \dfrac{9}{2}$

$\Leftrightarrow 1+m^2 = \dfrac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{\dfrac{3}{\sqrt{2}} - 1}$.

Dạng 3: Cực trị hàm trùng phương

Bài toán tổng quát: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ (a,b,c phụ thuộc vào tham số m). Tìm m để hàm số có 3 cực trị và thỏa mãn điều kiện cho trước.

Phương pháp:

Đạo hàm $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x\left(2ax^2 + b\right) = 2x.g\left(x\right)$ với $g\left(x\right) = 2ax^2 + b$.

Phương trình: $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ g\left(x\right) = 2ax^2 + b = 0 \end{array}\right.$, từ đó ta có các nhận xét sau:

- Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow g\left(x\right) = 0$ có hai nghiệm phân biệt và khác 0 $\Leftrightarrow a.b < 0$.
- Để hàm số có một điểm cực trị $\Leftrightarrow g\left(x\right) = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép bằng $0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a.b > 0 \\ \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a \neq 0 \\ b = 0 \end{cases} \end{array}\right.$.
- Hàm số có 1 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} ab < 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$.
- Hàm số có 2 điểm cực đại, 1 điểm cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} ab < 0 \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$.
- Nếu hàm số có 3 điểm cực trị thì tọa độ 3 điểm cực trị hàm số là $x = 0;\ x = \sqrt{\frac{-b}{2a}}; x = -\sqrt{\frac{-b}{2a}}$.
- Tọa độ 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A\left(0;c\right) \in Oy;\ B\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}; \frac{4ac - b^2}{4a}\right); B\left(-\sqrt{\frac{-b}{2a}}; \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ và ta có ΔABC luôn cân tại A, hai điểm B,C đối xứng nhau qua trục Oy $\cos BAC = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}; \cot^2 \frac{\alpha}{2} = -\frac{b^3}{8a}, S_{\Delta ABC} = \frac{b^2}{4|a|}\sqrt{\frac{-b}{2a}}$.
- Độ dài các cạnh $AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}; BC = 2\sqrt{\frac{-b}{2a}}$
- Phương trình đường $BC:\ y = \frac{4ac - b^2}{4a}$. Phương trình $AB, AC:\ y = \pm\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}\right)^3 x + c$

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m không vượt quá 2020 để hàm số $y=-x^4+(m-5)x^2+3m-1$ có ba điểm cực trị

A. 2017. **B.** 2019. **C.** 2016. **D.** 2015.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $ab<0$.

Suy ra hàm số $y=-x^4+(m-5)x^2+3m-1$ có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $m-5>0\Leftrightarrow m>5.$

Mà m nguyên dương và không vượt quá 2020 nên $m\in\{6,7,...,2019,2020\}\Rightarrow$ có tất cả 2015 giá trị.

Câu 2: Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^4+2(m^2-m-6)x^2+m-1$ có ba điểm cực trị.

A. 3 **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=4x^3+4(m^2-m-6)x$

$$y'=0\Rightarrow 4x^3+4(m^2-m-6)x=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}4x=0\\x^2=-m^2+m+6\end{array}\right.$$

Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow -m^2+m+6>0\Rightarrow -2<m<3$.

Câu 3: Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^4-(m^2-9)x^2+2021$ có 1 cực trị. Số phần tử của tập S là

A. Vô số. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Để hàm số có 1 cực trị thì $-(m^2-9)\geq 0\Leftrightarrow m^2-9\leq 0\Leftrightarrow -3\leq m\leq 3$.

Vậy có 7 giá trị nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4: Cho hàm số $y=-x^4+(m^2-m)x^2$. Tìm m để hàm số có đúng một cực trị.

A. $m\in(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$. **B.** $m\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$.

C. $m\in[0;1]$. **D.** $m\in(0;1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=-4x^3+2(m^2-m)x$; $y'=0\Leftrightarrow -4x^3+2(m^2-m)x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\2x^2=m^2-m\end{array}\right.$.

Hàm số có đúng một điểm cực trị khi phương trình $2x^2 = m^2 - m$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x = 0$.

Điều kiện là $m^2 - m \le 0 \Leftrightarrow 0 \le m \le 1$. Vậy $m \in [0;1]$.

Câu 5: Tìm điều kiện của tham số b để hàm số $y = x^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị.

A. $b = 0$. **B.** $b \ne 0$. **C.** $b < 0$. **D.** $b > 0$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 4x^3 + 2bx = 2x\left(2x^2 + b\right);\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -\dfrac{b}{2} \end{array}\right.$$

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow x^2 = -\dfrac{b}{2}$ có hai nghiệm phân biệt khác $0 \Leftrightarrow -\dfrac{b}{2} > 0 \Leftrightarrow b < 0$.

Câu 6: Cho đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có điểm cực đại $A(0;-3)$ và điểm cực tiểu $B(-1;-5)$. Tính giá trị của $P = a + 2b + 3c$.

A. $P = 3$. **B.** $P = -5$. **C.** $P = -9$. **D.** $P = -15$.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;-3)$ và $B(-1;-5) \Rightarrow \begin{cases} c = -3 \\ a + b + c = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = -2 \\ c = -3. \end{cases} \quad (1)$

$y = ax^4 + bx^2 + c \Rightarrow y' = 4ax^3 + 2bx$.

Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $B(-1;-5) \Rightarrow -4a - 2b = 0. \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} a + b = -2 \\ -4a - 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4. \end{cases}$

Với $\begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow y = 2x^4 - 4x^2 - 3 \Rightarrow y' = 8x^3 - 8x \Rightarrow y'' = 24x^2 - 8;\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1. \end{array}\right.$

$y''(0) = -8 < 0 \Rightarrow A(0;-3)$ là điểm cực đại.

$y''(-1) = 16 > 0 \Rightarrow B(-1;-5)$ là điểm cực tiểu.

Vậy $\begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow P = a + 2b + 3c = -15$.

Câu 7: Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^4 + (2m-1)x^2 + m - 2$ chỉ có một điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu.

A. $\left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m > \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$ **B.** $m \le 0$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$ **D.** $m \le \dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Xét $m=0$, khi đó $y=-x^2-2$ là hàm số bậc hai có $a=-1<0$ nên đồ thị là Parabol có bề lõm hướng xuống nên có 1 cực đại mà không có cực tiểu. Suy ra $m=0$ thỏa mãn đề bài.

Xét $m\neq 0$, khi đó $y=mx^4+(2m-1)x^2+m-2$ là hàm số bậc 4 dạng trùng phương.

Để đồ thị hàm số $y=mx^4+(2m-1)x^2+m-2$ chỉ có một điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu thì $\begin{cases}m<0\\ m.(2m-1)\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m<0\\ \left[\begin{array}{l}m\leq 0\\ m\geq\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow m<0$. Vậy $m\leq 0$.

Câu 8: Để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+m-1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2. Giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-1;0)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

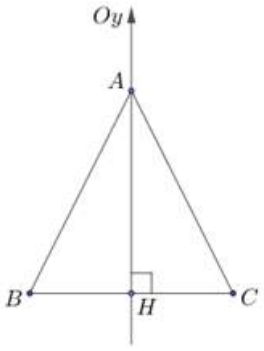
Ta có $y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)$

Đồ thị hàm số đã cho có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow m>0$ $(*)$.

Với $m>0$, ta có $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm\sqrt{m}\end{array}\right.$

Gọi $A(0;m-1),B\left(-\sqrt{m};-m^2+m-1\right),C\left(\sqrt{m};-m^2+m-1\right)$ là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.



Vì $A\in Oy;B$ và C đối xứng nhau qua Oy nên tam giác ABC cân tại A (tham khảo hình vẽ).

Gọi $H=BC\cap Oy\Rightarrow AH\perp BC\Rightarrow S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AH.BC=2$

$\Leftrightarrow\left|\left(y_A-y_H\right)\left(x_C-x_B\right)\right|=4$ (với $y_H=y_B=y_C$)

$\Leftrightarrow\left|m^2.2\sqrt{m}\right|=4\Leftrightarrow m^2\sqrt{m}=2\Rightarrow m=\sqrt[5]{4}\in(1;2)$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)=x^4-2mx^2+2$. Tổng bình phương các giá trị m để hàm số có ba cực trị và đường tròn đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số có bán kính bằng 4, gần với số nguyên nào nhất trong các số nguyên sau?

A. 8. **B.** 9. **C.** 16. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x)=4x^3-4mx$. Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow m>0$

Khi đó đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $A(0;2)$; $B\left(-\sqrt{m};2-m^2\right)$; $C\left(\sqrt{m};2-m^2\right)$

Ta có: $AB=\sqrt{m+m^4}=AC$; $BC=2\sqrt{m}$

$\Rightarrow \cos BAC=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB.AC}=\dfrac{m^3-1}{m^3+1}\Rightarrow \sin BAC=\sqrt{1-\cos^2 BAC}=\dfrac{2m\sqrt{m}}{m^3+1}$

Mà $BC=2R\sin BAC\Leftrightarrow 2\sqrt{m}=2.4.\dfrac{2m\sqrt{m}}{m^3+1}\Leftrightarrow m^3-8m+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\approx -2,889 \quad (loại)\\ m\approx 2,764 \quad (thỏa\ mãn)\\ m\approx 0,125 \quad (thỏa\ mãn)\end{array}\right.$

Vậy tổng bình phương các giá trị m là $2,764^2+0,125\approx 7,655$.

Câu 10: Đồ thị của hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+2m+1$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m\in(6;9)$. **B.** $m\in(-6;-3)$. **C.** $m\in(-3;2)$. **D.** $m\in(2;6)$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4-2(m+1)x^2+2m+1=0$. **(1)**

Đặt $t=x^2, t\ge 0$. Phương trình trở thành $t^2-2(m+1)t+2m+1=0$. **(2)**

Phương trình **(1)** có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình **(2)** có hai nghiệm dương phân biệt, nghĩa là $\begin{cases}\Delta'>0\\ S>0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m+1)^2-(2m+1)>0\\ m+1>0\\ 2m+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ne 0\\ m>-1\\ m>-\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-\dfrac{1}{2}\\ m\ne 0\end{cases}.$

Cách 1. Gọi $x_1,x_2,x_3,x_4\ (x_1<x_2<x_3<x_4)$ là nghiệm của phương trình **(1)** và $t_1,t_2\ (t_1<t_2)$ là nghiệm của phương trình **(2)**.

Theo giả thiết, ta có:

$x_4-x_3=x_3-x_2=x_2-x_1\Leftrightarrow x_4-x_3=x_3-x_2\Leftrightarrow\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1}=\sqrt{t_1}+\sqrt{t_1}\Leftrightarrow t_2=9t_1>0$

Ta có hệ: $\begin{cases}t_1+t_2=2(m+1)\\ t_1t_2=2m+1\\ t_2=9t_1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_1=\dfrac{m}{5}+\dfrac{1}{5}\\ t_2=\dfrac{9m}{5}+\dfrac{9}{5}\\ t_1t_2=2m+1\end{cases}\Rightarrow\left(\dfrac{m}{5}+\dfrac{1}{5}\right)\left(\dfrac{9m}{5}+\dfrac{9}{5}\right)=2m+1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=4\\ m=-\dfrac{4}{9}\ (\text{nhận})\end{array}\right.$

Cách 2. Với $\Delta'>0$, phương trình **(1)** có nghiệm $t_1=1, t_2=2m+1$. Biện luận như trên, ta có hai trường hợp $\left[\begin{array}{l}t_2=9t_1\\ t_1=9t_2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=4\\ m=-\dfrac{4}{9}\ (\text{nhận})\end{array}\right.$.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^4 + \left(m^2 - 3m\right)x^2 + 1$ có điểm cực đại?

A. 2. **B.** 0. **C.** 4. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Nhận xét:

Hàm số $y = x^4 + \left(m^2 - 3m\right)x^2 + 1$ là hàm trùng phương dạng $y = ax^4 + bx^2 + c$ có $a = 1 > 0$.

Nên để hàm số có cực đại thì hàm số cần có 3 cực trị.

Khi đó điều kiện cần tìm là: $ab < 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 3$.

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1;2\}$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 2: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = mx^4 - (m^2 - 9)x^2 + 2m$ có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

A. 2. **B.** vô số. **C.** 4. **D.** 7

Lời giải

Chọn A

Để hàm số $y = mx^4 - (m^2 - 9)x^2 + 2m$ có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -m\left(m^2 - 9\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m^2 - 9 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < 0 \xrightarrow{m \in Z} m \in \{-2;-1\}.$$

Câu 3: Tập hợp các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = x^4 - 2\left(m + 2\right)x^2 + 3m - 1$ chỉ có điểm cực tiểu và không có điểm cực đại là

A. $\left(-\infty;-2\right)$. **B.** $\{-2;2\}$. **C.** $\left(-2;+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;-2\right]$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định của hàm số đã cho là: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 4\left(m + 2\right)x$; $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4\left(m + 2\right)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m + 2 \end{array}\right.$

Để hàm số đã cho chỉ có điểm cực tiểu và không có điểm cực đại thì $m + 2 \le 0 \Leftrightarrow m \le -2$.

Câu 4: Tập hợp các giá tị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2\left(m + 2\right)x^2 + 3m - 1$ chỉ có điểm cực tiểu, không có điểm cực đại là

A. $\left(-\infty;-2\right)$. **B.** $\{-2;2\}$. **C.** $\left(-2;+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;2\right]$.

Lời giải

Chọn A

Hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ chỉ có điểm cực tiểu, không có điểm cực đại khi $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0 \\ b > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a > 0 \\ ab > 0 \end{cases} \end{array}\right.$

Áp dụng cho bài toán này ta được: $-2\left(m + 2\right) > 0 \Leftrightarrow m < -2$

Câu 5: Tập hợp các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=x^4-2(m+2)x^2+3m-1$ chỉ có điểm cực tiểu, không có điểm cực đại là

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $\{-2;2\}$. **C.** $(-2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2]$.

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Ta có $y'=4x^3-4(m+2)x=4x\left(x^2-m-2\right)$

Xét $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m+2\end{array}\right.$

Để hàm số chỉ có cực tiểu và không có cực đại thì $\begin{cases}m+2\le 0\\a=1>0\end{cases}\Leftrightarrow m\le -2$

Vậy $m\in(-\infty;-2]$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 6: Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số $y=mx^4+(m-3)x^2+2021$ có 2 cực tiểu và một cực đại.

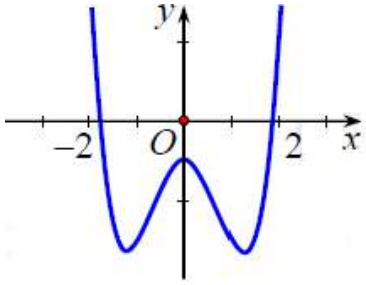
A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c(a\neq 0)$ có 3 cực trị khi $ab<0$

Để hàm số $y=f(x)$ có 2 cực tiểu và 1 cực đại thì đồ thị hàm số $y=f(x)$ có dạng



Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ $\Rightarrow$Đồ thị nhánh ngoài của hàm số hướng lên, nên hàm số có hệ số $a>0$

.

Khi đó để thỏa mãn yêu cầu bài toán ta có: $\begin{cases}a>0\\ab<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\m(m-3)<0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<3$.

Vậy có 2 giá trị m nguyên là $m\in\{1;2\}$.

Câu 7: Hãy tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=x^4-2xm^2$ có đúng 3 điểm cực trị?

A. $m>0$. **B.** $m\in\varnothing$. **C.** $m<0$. **D.** $\forall m\in R$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số đã cho có đúng 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ $f'(x)=0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

Ta có $f'(x)=4x^3-2m^2$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3-2m^2=0 \Leftrightarrow x^3=\dfrac{m^2}{2} \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\dfrac{m^2}{2}}$.

Vậy không có giá trị nào của tham số m để hàm số có đúng 3 điểm cực trị.

Câu 8: Cho hàm số trùng phương $f(x)=x^4-2mx^2-1$. Hãy tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị.

A. $m>1$. **B.** $m\le 1$. **C.** $m>0$. **D.** $m\le 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=4x^3-4mx$. Phương trình $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m \end{array}\right.$.

Hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $f'(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m>0$

.

Vậy $m>0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 9: Hãy tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^4-2(m-1)x^2$ có đúng một điểm cực trị?

A. $m\le 1$. **B.** $m\ge 1$. **C.** $m<1$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=x^4-2(m-1)x^2$ có đúng một điểm cực trị khi và chỉ khi $-2(m-1)\ge 0 \Leftrightarrow m\le 1$.

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m không vượt quá 2020 để hàm số $y=-x^4+(m-5)x^2+3m-1$ có ba điểm cực trị

A. 2017. **B.** 2019. **C.** 2016. **D.** 2015.

Lời giải

Chọn D

Để hàm số có ba điểm cực trị thì: $ab=-1.(m-5)<0 \Leftrightarrow m-5>0 \Leftrightarrow m>5$ (1)

Theo giả thiết: $m\le 2020$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra có 2015 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn là: $m\in\{6;7;...;2020\}$

Câu 11: Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=mx^4+(m-1)x^2+2020$ có đúng một điểm cực đại.

A. $\begin{cases} m<1 \\ m\neq 0 \end{cases}$. **B.** $m\le 0$. **C.** $0\le m\le 1$. **D.** $m<1$.

Lời giải

Chọn D.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Trường hợp 1: $m=0 \Rightarrow y=-x^2+2020$ là hàm bậc hai có đồ thị là parabol có bề lõm hướng xuống nên có đúng một điểm cực đại. Do đó $m=0$ là một giá trị cần tìm.

Trường hợp 2: $m \neq 0$: hàm số $y = mx^4 + (m-1)x^2 + 2020$ là hàm trùng phương nên đồ thị có đúng một điểm cực đại khi $\left[\begin{cases} m > 0 \\ m-1 < 0 \end{cases} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < m < 1 \\ m < 0 \end{array}\right.$

$\left.\begin{cases} m < 0 \\ m-1 \leq 0 \end{cases}\right.$

Kết hợp 2 trường hợp trên ta được $m < 1$ là tất cả các giá trị cần tìm.

Câu 12: Số giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = x^4 - (6-2m)x^2 + 4m - 3$ có ba điểm cực trị là:

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 4x^3 - 2(6-2m)x = 4x\left(x^2 - 3 + m\right)$

$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 4x\left(x^2 - 3 + m\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 3 - m \end{array}\right. \quad (1)$

hàm số có 3 cực trị khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow 3 - m > 0 \Leftrightarrow m < 3$

Suy ra các giá trị nguyên dương thỏa mãn là $m = 1; m = 2$ nên ta chọn đáp án**A.**

Câu 13: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = (m-3)x^4 + (2-m)x^2 + m - 1$ chỉ có một điểm cực trị và là điểm cực tiểu?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Trường hợp 1: Xét $m - 3 = 0$

Khi đó: $y = -x^2 + 2$ chỉ đạt cực đại tại $x = 0$.

Trường hợp 2: Xét $m - 3 > 0$

Khi đó: $y = (m-3)x^4 + (2-m)x^2 + m - 1$ có $\begin{cases} a = m - 3 > 0 \\ b = 2 - m < 0 \end{cases}$ nên hàm số có ba cực trị.

TH3: Xét $m - 3 < 0$

Nếu $b > 0$ thì hàm số có ba cực trị.

Nếu $b \leq 0$ thì hàm số có một cực trị và là cực đại.

Vậy không tồn tại giá trị m thỏa điều kiện đề bài.

Câu 14: Cho hàm số $y = (m+1)x^4 - mx^2 + 3$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có ba điểm cực trị.

A. $m \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$. **B.** $m \in (-\infty; -1) \cup [0; +\infty)$.

C. $m \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$. **D.** $m \in (-1; 0)$.

Lời giải

Chọn A

Để hàm số có ba điểm cực trị thì $(m+1)m > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 0 \end{array}\right.$. Vậy $m \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.

Câu 15: Tìm m để hàm số $f(x)=x^4-2mx^2+4$ có 3 điểm cực trị phân biệt với hoành độ nằm trong khoảng $(-3;3)$.

A. $[0;9]$. **B.** $[-3;3]$. **C.** $(0;9)$. **D.** $(-3;3)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x)=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 4x\left(x^2-m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m\end{array}\right.$$

Để hàm số có 3 điểm cực trị phân biệt với hoành độ nằm trong khoảng $(-3;3)$ thì $f'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $(-3;3)$ tức là phương trình $x^2=m$ có 2 nghiêm phân biệt khác 0 và thuộc $(-3;3)$.

Suy ra $0<m<9$. Vậy $m\in(0;9)$ thoả yêu cầu bài toán.

Câu 16: Tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=3mx^4+(m-2)x^2+m+1$ có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu thỏa mãn giá trị cực tiểu có giá trị dương là

A. $(-1;2)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $[2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số $y=3mx^4+(m-2)x^2+m+1$ có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu thỏa mãn y_{CT} có giá trị dương $\Leftrightarrow\begin{cases}3m(m-2)<0\\3m<0\\m+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m-2<0\\m<0\\m>-1\end{cases}\Leftrightarrow -1<m<0$.

Câu 17: Có bao nhiêu số nguyên thuộc khoảng $(-100;99)$ của tham số m để hàm số $y=(m+1)x^4+(m-3)x^2+5m^2+2$ có đúng một điểm cực trị, đồng thời điểm cực trị đó là điểm cực đại?

A. 101. **B.** 99. **C.** 98. **D.** 100.

Lời giải

Chọn B

Trường hợp 1: $m+1=0$ hay $m=-1$, hàm số đã cho trở thành $y=-4x^2+7$.

Hàm số có 1 điểm cực đại, tại $x=0$.

Trường hợp 2: $m\neq -1$.

Hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị, đồng thời điểm đó là điểm cực đại khi và chỉ khi $\begin{cases}m+1<0\\m-3\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<-1\\m\le 3\end{cases}\Leftrightarrow m<-1$.

Kết hợp 2 trường hợp, ta được $m\le -1$.

Kết hợp điều kiện $m\in(-100;99)$ và $m\in\mathbb{Z}$ suy ra $m\in\{-99,-98,...,-1\}$.

Vậy có 99 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 18: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C) của hàm số $y=x^4-2m^2x^2+m^4+5$ có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tứ giác nội tiếp. Tìm tích các phần tử của S.

A. 2. **B.** $\frac{1}{5}$. **C.** $\frac{-1}{5}$. **D.** -2.

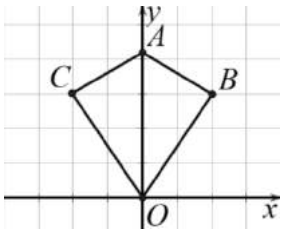
Lời giải

Chọn C

Để hàm số $y=x^4-2m^2x^2+m^4+5$ có ba điểm cực trị thì $y'=0$ phải có ba nghiệm phân biệt.

Ta có $y'=4x^3-4m^2x=4x\left(x^2-m^2\right)$. $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=m\\x=-m\end{array}\right.$, $(m\neq 0)$.

Ba điểm cực trị là $A\left(0;m^4+5\right),B(m;5),C(-m;5)$.



Ba điểm A,B,C và gốc tọa độ $O(0;0)$ tạo thành tứ giác nội tiếp khi và chỉ khi $B+C=\pi$ $\Leftrightarrow B=C=\frac{\pi}{2}$, (do $B=C$) $\Leftrightarrow \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BO}=0\Leftrightarrow m^2-5m^4=0\Leftrightarrow m^2=\frac{1}{5}$. Vậy S có 2 phần tử và có tích bằng $\frac{-1}{5}$.

Câu 19: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=x^4+2mx^2+1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

A. $m=-1$. **B.** $m=-\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. **C.** $m=\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=4x^3+4mx=4x\left(x^2+m\right)$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=-m\end{array}\right.$.

Đồ thị hàm số đã cho có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $-m>0\Leftrightarrow m<0$.

Khi đó đồ thị hàm số có ba điểm cực trị lập thành một tam giác cân tại A với $A(0;1),B\left(\sqrt{-m};-m^2+1\right);C\left(-\sqrt{-m};-m^2+1\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}\left(\sqrt{-m};-m^2\right);\overrightarrow{AC}\left(-\sqrt{-m};-m^2\right)$.

Tam giác ABC vuông $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow\sqrt{-m}\left(-\sqrt{-m}\right)+m^4=0\Leftrightarrow m^4+m=0$

$\Leftrightarrow m\left(m^3+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-1\end{array}\right.$.

Đối chiếu điều kiện ta có $m=-1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2: Áp dụng công thức tính nhanh.

Hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân khi $b^3=-8a$.

Khi đó $(2m)^3=-8\Leftrightarrow m=-1$.

Câu 20: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=mx^4+\left(m^2-4\right)x^2+2$ có đúng một điểm cực đại và không có điểm cực tiểu?

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D=\mathbb{R}$

Ta có $y'=4mx^3+2\left(m^2-4\right)x$

Với $m=0$ suy ra $y=-4x^2+2$

Hàm số $y=-4x^2+2$ có 1 điểm cực đại và không có điểm cực tiểu, suy ra $m=0$ thỏa mãn.

Với suy ra $m\neq 0$ $y'=4mx^3+2\left(m^2-4\right)x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2=\dfrac{-\left(m^2-4\right)}{2m}\end{array}\right.$

Hàm số có một điểm cực đại và không có cực tiểu khi

$$\begin{cases}a=m<0\\ \dfrac{-\left(m^2-4\right)}{2m}\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ m\left(m^2-4\right)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ m^2-4\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ -2\le m\le 2\end{cases}\Leftrightarrow -2\le m<0$$

Vậy $-2\le m\le 0$, có 3 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 21: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=x^4+(m+1)x^2-2m-1$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác có một góc bằng $120°$.

A. $m=-1-\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$, $m=-1$. **B.** $m=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

C. $m=-1-\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$. **D.** $m<-1$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m+1<0\Leftrightarrow m<-1$.

Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành ba đỉnh của một tam giác ABC cân tại A với $A(0;-2m-1)$, $B\left(-\sqrt{\dfrac{-m-1}{2}};-\dfrac{(m+1)^2}{4}-2m-1\right)$, $C\left(\sqrt{\dfrac{-m-1}{2}};-\dfrac{(m+1)^2}{4}-2m-1\right)$ và $H\left(0;-\dfrac{(m+1)^2}{4}-2m-1\right)$ (H là trung điểm BC).

Do tam giác ABC cân tại $A\Rightarrow A=120°$.

Ta có: $BH=AH\tan 60°$

$\Leftrightarrow \frac{(m+1)^2}{4}.\sqrt{3} = \sqrt{-\frac{m+1}{2}} \Leftrightarrow \frac{3(m+1)^4}{16} = -\frac{m+1}{2} \Leftrightarrow 3(m+1)^3 = -8 \Leftrightarrow m = -1 - \frac{2}{\sqrt[3]{3}}$ (thỏa mãn).

Câu 22: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn $4\sqrt{2}$.

A. $0 < m < 2$ **B.** $m > 0$ **C.** $0 < m < \sqrt[3]{4}$ **D.** $m < 2$

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx$. $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$.

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $m > 0$.

Khi đó đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $O(0;0)$, $A\left(\sqrt{m};-m^2\right)$, $B\left(-\sqrt{m};-m^2\right)$.

Gọi H là trung điểm AB thì OH là đường cao của ΔOAB, $H\left(0;-m^2\right)$

Do đó:

$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}OH.AB = \frac{1}{2}m^2.2\sqrt{m} = m^2\sqrt{m} \Rightarrow S_{\Delta OAB} < 4\sqrt{2} \Leftrightarrow m^2\sqrt{m} < 4\sqrt{2} \Leftrightarrow < 0 < m < 2.$

Trắc nghiệm nhanh:

Áp dụng công thức tính nhanh: Điều kiện để hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 3 điểm cực trị là ba đỉnh của tam giác có diện tích S_0 là $\left\{\begin{array}{l} a.b < 0 \\ S_0 = |a|\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}\right)^5 \end{array}\right.$.

Ta được $0 < |1|\left(\sqrt{\frac{2m}{2}}\right)^5 < 4\sqrt{2} \Rightarrow 0 < m^2\sqrt{m} < 4\sqrt{2} \Rightarrow 0 < m < 2$

Câu 23: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông. Số phần tử của tập hợp S là

A. 2. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2 \Rightarrow y' = 4x^3 - 4(m+1)x = 4x\left(x^2 - m - 1\right)$.

Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow x^2 - m - 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác $0 \Leftrightarrow -m - 1 < 0 \Leftrightarrow m > -1 (*)$.

Khi đó: $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\sqrt{m+1} \\ x = 0 \\ x = \sqrt{m+1} \end{array}\right.$.

Giả sử A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

$\Rightarrow A\left(-\sqrt{m+1};-2m-1\right), B\left(0;m^2\right), C\left(\sqrt{m+1};-2m-1\right)$

$\Rightarrow \vec{AB}=\left(\sqrt{m+1};(m+1)^2\right), \vec{CB}=\left(-\sqrt{m+1};(m+1)^2\right)$

ΔABC vuông tại $B \Leftrightarrow \vec{AB}.\vec{CB}=0 \Leftrightarrow -(m+1)+(m+1)^4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=0 \end{array}\right.$

$\Rightarrow m=0$ (Thỏa mãn $(*)$)

Trắc nghiệm nhanh:

Áp dụng công thức tính nhanh: Điều kiện để hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có 3 điểm cực trị là ba đỉnh của tam giác vuông là $\begin{cases} a.b<0 \\ b^3+8a=0 \end{cases}$.

Ta được: $\begin{cases} -m-1<0 \\ \left[-2(m+1)\right]^3+8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-1 \\ -8(m+1)^3+8=0 \end{cases} \Rightarrow m=0$

Câu 24: Cho hàm số $y=x^4-8m^2x^2+1(1)$ Tìm các giá trị của m để hàm số (1) có 3 cực trị A, B, C và diện tích tam giác ABC bằng 64

A. $m=\pm\sqrt[5]{4}$ **B.** $m=\pm\sqrt[5]{2}$ **C.** $m=\pm\sqrt[5]{6}$ **D.** $m=\pm\sqrt[5]{8}$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=4x^3-16m^2x=4x\left(x^2-4m^2\right)$

Để hàm số có 3 cực trị là $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình $g(x)=x^2-4m^2=0$ có hai nghiệm phân biệt $x\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 0$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\Rightarrow y=1 \\ x=2m\Rightarrow y=1-16m^4 \\ x=-2m\Rightarrow y=1-16m^4 \end{array}\right.$

Giả sử 3 điểm cực trị là: $A(0;1); B\left(2m;1-16m^4\right); C\left(-2m;1-16m^4\right)$

Ta thấy $AB=AC=\sqrt{(2m)^2+\left(16m^4\right)^2}$ nên tam giác ABC cân tại A

Gọi I là trung điểm của BC thì $I(0;1-16m^4)$ nên $AI=16m^4$; $BC=4|m|$

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.AI.BC=\frac{1}{2}16m^4.4|m|=64\Leftrightarrow |m^5|=2\Leftrightarrow m=\pm\sqrt[5]{2}$ (thỏa mãn $m\neq 0$)

Vậy $m=\pm\sqrt[5]{2}$ là giá trị cần tìm.

Câu 25: Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left(m^2-9\right)x^4-2x^2+1$ có đúng một điểm cực trị là

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y=\left(m^2-9\right)x^4-2x^2+1$ (1).

Trường hợp 1: $m^2-9=0 \Leftrightarrow m=\pm 3$.

Khi đó (1) trở thành: $y=-2x^2+1$ có đúng 1 điểm cực trị.

Vậy $m=\pm 3$ thỏa đề bài.

Trường hợp 2: $m^2-9\neq 0 \Leftrightarrow m\neq \pm 3$.

Ta có: $y'=4\left(m^2-9\right)x^3-4x$; $y'=0\Leftrightarrow 4\left(m^2-9\right)x^3-4x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \left(m^2-9\right)x^2-1=0(*) \end{array}\right.$

Hàm số có đúng một điểm cực trị $\Leftrightarrow (*)$ có đúng một nghiệm $x=0$ hoặc vô nghiệm.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2-9<0 \\ \left(m^2-9\right).0^2-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow -3<m<3$.

Vì m là số nguyên nên $m\in\{-2,-1,0,1,2\}$.

Suy ra có 7 giá trị nguyên của m thỏa đề bài.

Cách 2. Tổng quát $y=ax^4+bx^2+c$ có đúng một cực trị

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} a=0 \\ b\neq 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a\neq 0 \\ \dfrac{b}{a}\geq 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Để hàm số $y=\left(m^2-9\right)x^4-2x^2+1$ có đúng một điểm cực trị

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2-9=0 \\ \left\{\begin{array}{l} m^2-9\neq 0 \\ \dfrac{-2}{m^2-9}\geq 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\pm 3 \\ -3<m<3 \end{array}\right. \Leftrightarrow -3\leq m\leq 3$

Vì m là số nguyên nên $m\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$. Vậy có 7 giá trị nguyên của m thỏa đề bài.

Câu 26: Cho hàm số $y=x^4-2x^2+m+2\ (C_m)$. Giá trị gần nhất của tham số *m* để đồ thị (C_m) có 3 điểm cực trị nhận gốc toạ độ O làm trọng tâm?

A. 0 **B.** -1 **C.** -2 **D. 3**

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=4x^3-4x=4x\left(x^2-1\right)$, $y'=0\Leftrightarrow x_1=0;\ x_{2,3}=\pm 1$

Gọi $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2),C(x_3;y_3)$ là các điểm cực trị của (C_m) thì:

$A(0;m+2),B(-1;m+1),C(1;m+1)$

Gốc tọa độ $O(0;0)$ là trọng tâm của ΔABC

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_O=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3} \\ y_O=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0=0(\forall m) \\ 0=\dfrac{3m+4}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow m=-\frac{4}{3}$$

Giá trị của m cần tìm là $m=-\dfrac{4}{3}$.

Câu 27: Cho hàm số $y=x^4-2\left(1-m^2\right)x^2+m+1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có cực đại cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành tam giác có

diện tích lớn nhất.

A. $m=1$. **B.** $m=\frac{1}{2}$. **C.** $m=-\frac{1}{2}$. **D.** $m=0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=4x^3-4\left(1-m^2\right)x=4x\left(x^2-1+m^2\right)$.

Để hàm số có cực đại và cực tiểu thì $1-m^2>0\Leftrightarrow -1<m<1$.

Với điều kiện trên thì đồ thị hàm số có các điểm cực trị là

$A\left(0;m+1\right)$, $B\left(\sqrt{1-m^2};-m^4+2m^2+m\right)$, $C\left(-\sqrt{1-m^2};-m^4+2m^2+m\right)$.

Tam giác ABC cân tại A nên có diện tích

$S_{ABC}=\frac{1}{2}BC.d\left(A,BC\right)=\frac{1}{2}.2\sqrt{1-m^2}.\left(m^4-2m^2+1\right)=\sqrt{1-m^2}.\left(1-m^2\right)^2\le 1,\ \forall m\in\left(-1;1\right)$.

Vậy diện tích tam giác ABC lớn nhất khi $m=0$.

Câu 28: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^4-2mx^3+\left(m+2\right)x^2-3$ có điểm cực tiểu mà không có điểm cực đại?

A. 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=4x^3-6mx^2+2\left(m+2\right)x=2x\left[2x^2-3mx+\left(m+2\right)\right]$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\2x^2-3mx+\left(m+2\right)=0(*)\end{array}\right.$$

Trường hợp 1: Phương trình có nghiệm $x=0$, khi đó $m=-2$. Thay $m=-2$ vào phương trình ta được: $2x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$.

Ta có xét dấu y' như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	

Ta thấy khi $m=-2$ hàm số đã cho có một điểm cực tiểu và không có điểm cực đại.

Trường hợp 2: Phương trình có không có nghiệm $x=0$, khi đó $m\ne -2$.

Dễ thấy phương trình có 2 nghiệm phân biệt thì phương trình $y'=0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt, khi đó hàm số đã cho có cả điểm cực đại và điểm cực tiểu.

Khi phương trình vô nghiệm hoặc có nghiệm kép thì phương trình $y'=0$ có 1 nghiệm đơn hoặc 1 nghiệm đơn và 1 nghiệm kép, lúc này hàm số đã cho có 1 điểm cực tiểu $x=0$.

Như vậy, khi $m\ne -2$, hàm số đã cho có một điểm cực tiểu khi và chỉ khi phương trình vô nghiệm hoặc có nghiệm kép, điều này xảy ra khi và chỉ khi phương trình có $\Delta\le 0$.

$$\Delta\le 0\Leftrightarrow 9m^2-8\left(m+2\right)\le 0\Leftrightarrow 9m^2-8m-16\le 0\Leftrightarrow\frac{4-4\sqrt{10}}{9}\le m\le\frac{4+4\sqrt{10}}{9}.$$

Mà $m\in\mathbb{Z}$, suy ra $m\in\left\{0;1\right\}$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 29: Cho hàm số $y=x^4-2\left(m+1\right)x^2+m^2+1$ có đồ thị $\left(C\right)$ và điểm $E\left(0;-1\right)$. Tìm m để $\left(C\right)$ có

điểm cực đại là A, hai điểm cực tiểu là B và C sao cho ΔBCE là tam giác đều.

A. $m=2$. **B.** $m=-\frac{1}{4}$. **C.** $m=2;\ m=-\frac{1}{4}$. **D.** $m=-2;\ m=\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y'=4x^3-4(m+1)x=4x\left[x^2-(m+1)\right]$.

Để hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow m+1>0\Leftrightarrow m>-1\,(*)$.

Ta có: $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m+1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=m^2+1\\x=\sqrt{m+1}\Rightarrow y=-2m\\x=-\sqrt{m+1}\Rightarrow y=-2m\end{array}\right.$.

Khi đó, 3 điểm cực trị của đồ thị (C) là: $A(0;m^2+1)$, $B\left(\sqrt{m+1};-2m\right)$, $C\left(-\sqrt{m+1};-2m\right)$.

Ta có: $BC^2=4(m+1)$, $BE^2=CE^2=m+1+(2m-1)^2$.

Tam giác BCE đều $\Leftrightarrow BC=BE\Leftrightarrow 4(m+1)=m+1+(2m-1)^2\Leftrightarrow 4m^2-7m-2=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=-\frac{1}{4}\end{array}\right.$. So với điều kiện $(*)$, nhận $m=2$ và $m=-\frac{1}{4}$. Vậy có 2 giá trị của m thoả mãn.

Câu 30: Cho hàm số $y=4x^4-8mx^2+3m^2+2$. Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị A,B,C tạo thành một tam giác có tâm đường tròn nội tiếp nằm trên đường thẳng $x+y-2=0$.

A. 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y=4x^4-8mx^2+3m^2+2\Rightarrow y'=16x^3-16mx$

$y'=0\Leftrightarrow 16x^3-16mx=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m\ \ (*)\end{array}\right.$

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị A,B,C khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt, tức là phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác $0\Leftrightarrow m>0$.

Khi đó đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị là $A(0;3m^2+2)$, $B\left(-\sqrt{m};-m^2+2\right)$, $C\left(\sqrt{m};-m^2+2\right)$.

Nhận xét: Tam giác ABC luôn cân tại A và có Oy là trục đối xứng. Gọi H là chân đường cao xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC suy ra $AH\equiv Oy$ và AH là đường cao cũng là đường phân giác trong góc A nên I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác thì $I\in AH$ hay $I\in Oy$.

Vì tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp nằm trên đường thẳng $x+y-2=0$ nên I là giao điểm của đường thẳng $x+y-2=0$ với Oy. Suy ra tọa độ của I là nghiệm của hệ

$\left\{\begin{array}{l}x=0\\x+y-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=0\\y=2\end{array}\right.\Rightarrow I(0;2)$.

Phương trình đường thẳng $BC: y=-m^2+2$.

Phương trình đường thẳng AC: $\frac{x}{\sqrt{m}}=\frac{y-3m^2-2}{-4m^2}\Leftrightarrow\frac{x}{\sqrt{m}}+\frac{y-3m^2-2}{4m^2}=0$

$\Leftrightarrow 4m\sqrt{m}x+y-3m^2-2=0.$

Do I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác nên $d\left(I,AC\right)=d\left(I,BC\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{3m^2}{\sqrt{16m^3+1}}=m^2 \quad (m>0) \Leftrightarrow \sqrt{16m^3+1}=3 \Leftrightarrow 16m^3+1=9 \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ (thỏa mãn).

Vậy $m=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Câu 31: Xét hàm số $y=f\left(x\right)=x^4+2mx^3-\left(m+1\right)x^2+2m-2$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số có cực tiểu mà không có cực đại là

A. 1. **B.** Vô số. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta xét $y=f\left(x\right)=x^4+2mx^3-\left(m+1\right)x^2+2m-2$

$y'=4x^3+6mx^2-2\left(m+1\right)x$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\2x^2+3mx-m-1=0(*)\end{array}\right.$

Để hàm số có tực tiểu mà không có cực đại khi và chỉ khi

Trường hợp 1: $(*)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta\le 0\Leftrightarrow 9m^2+8m+8\le 0\Leftrightarrow m\in\varnothing$.

Trường hợp 2: $(*)$ có một nghiệm $x=0\Leftrightarrow m=-1$.

Vậy số giá trị nguyên của tham số m là 1.

Dạng 4: Cực trị của hàm hợp

Kiến thức trọng tâm và phương pháp giải:

Đạo hàm của hàm hợp: $\left[f\left(u(x)\right)\right]' = u'(x).f'\left(u(x)\right)$

Tính chất đổi dấu của biểu thức: Gọi $x=\alpha$ là một nghiệm của phương trình $f(x)=0$. Khi đó:

- Nếu $x=\alpha$ là nghiệm bội bậc chẵn $\left\{(x-\alpha)^2,(x-\alpha)^4,...\right\}$ thì hàm số $y=f(x)$ không đổi dấu khi đi qua α.
- Nếu $x=\alpha$ là nghiệm đơn hoặc nghiệm bội bậc lẻ $\left\{(x-\alpha),(x-\alpha)^3,...\right\}$ thì hàm số $y=f(x)$ đổi dấu khi đi qua α.

Để tìm cực trị của hàm số $y=\left[f\left(u(x)\right)\right]$ ta làm như sau:

- **Bước 1:** Tính đạo hàm $y'=\left[f\left(u(x)\right)\right]'$
- **Bước 2:** Giải phương trình $y'=\left[f\left(u(x)\right)\right]'=0$ dựa vào đồ thị hay bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$
- **Bước 3:** Lập bảng biến thiên của hàm số
- **Bước 4:** Kết luận về các điểm cực trị

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $f'(x)$ có 2 nghiệm $x=0;x=1$ và đổi dấu qua hai nghiệm này. Do đó hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=x(x+2022)\left(x^2-4x+4\right)$. Hàm số $f(x)$ có mấy điểm cực tiểu?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

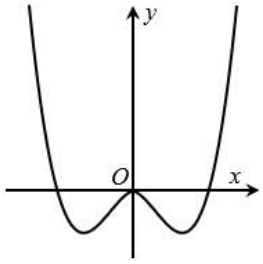
Giải $f'(x)=0\Leftrightarrow x(x+2022)\left(x^2-4x+4\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2022\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2022		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗		↗	

Hàm số có 1 điểm cực tiểu.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ được cho bởi hình vẽ bên. Khi đó, hàm số $g(x)=f\left(x^2-2\right)$ có số điểm cực trị là



A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x)=2xf'\left(x^2-2\right)\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'\left(x^2-1\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-1=a\ (-2<a<-1)\\x^2-1=0\\x^2-1=b\ (1<b<2)\end{array}\right.$.

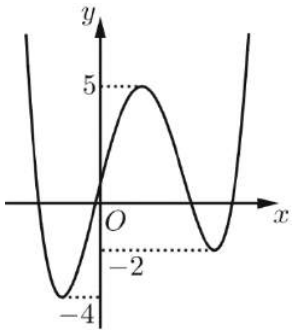
$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=1+a<0\ (-2<a<-1)\\x^2=1\\x^2=1+b>0\ (1<b<2)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\x=\pm\sqrt{1+b}\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{1+b}$		-1		0		1		$\sqrt{1+b}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên.



Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f(x)-mx$ có đúng hai điểm cực tiểu, khi đó tổng các giá trị của S là

A. 9. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

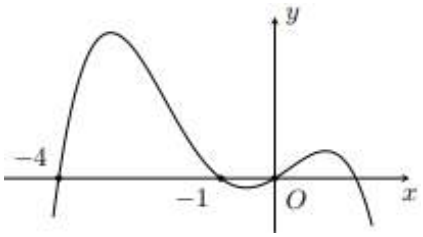
Ta có: $g'(x)=f'(x)-m$. Vẽ đồ thị hàm số $f'(x)$ và đường thẳng $y=m$ trên cùng hệ trục tọa độ

Hàm số $g(x)$ có đúng hai cực tiểu khi và chỉ khi $g'(x)$ có hai lần đổi dấu từ $(-)$ sang $(+)$ $\Leftrightarrow -2 < m < 5$.

Kết hợp với m nguyên suy ra $m \in \{-1,0,1,2,3,4\}$ là tất cả các giá trị cần tìm.

Do đó tổng các giá trị của S là 9.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị có 3 điểm cực trị như hình dưới đây. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f\left(x^3 - 3x + 2\right)$ là



A. 5. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x) = \left(3x^2 - 3\right) f'\left(x^3 - 3x + 2\right)$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x^3 - 3x + 2 = m_1 \quad (1) \\ x^3 - 3x + 2 = m_2 \quad (2) \\ x^3 - 3x + 2 = m_3 \quad (3) \end{array}\right.$

Với $m_1 \in (-4;-1); m_2 \in (-1;0); m_3 \in (0;1)$. Xét hàm số $y = x^3 - 3x + 2$, có $y' = 3x^2 - 3$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

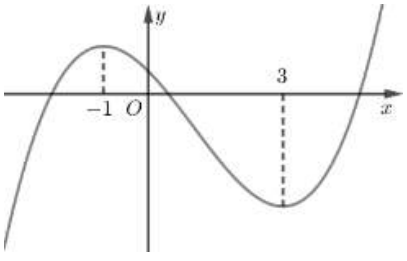
Với $m_1 \in (-4;-1) \Rightarrow (1)$ có 1 nghiệm

Với $m_2 \in (-1;0) \Rightarrow (2)$ có 1 nghiệm

Với $m_3 \in (0;1) \Rightarrow (3)$ có 3 nghiệm phân biệt

Vậy $g'(x) = 0$ có 7 nghiệm bội lẻ, nên có 7 điểm cực trị.

Câu 6: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f\left(x^2 - 4x + m\right)$ có 3 điểm cực trị. Số phần tử của S là

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

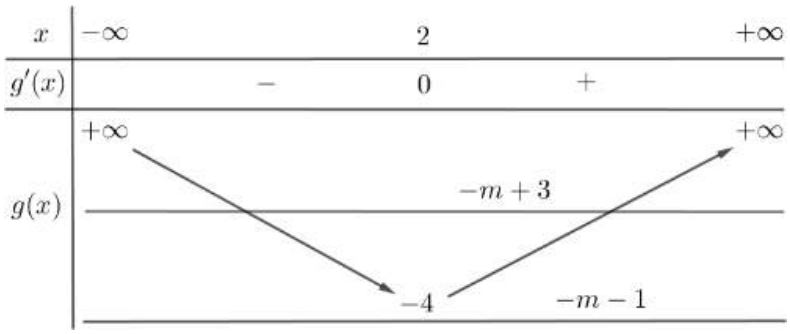
Chọn A

Ta có: $y' = (2x-4)\, f'\left(x^2-4x+m\right)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ f'\left(x^2-4x+m\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x^2-4x+m = -1 \\ x^2-4x+m = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x^2-4x = -m-1 \quad (*) \\ x^2-4x = -m+3 \end{array}\right.$$

Hàm số $y = f\left(x^2-4x+m\right)$ có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có đúng 3 nghiệm bội lẻ.

Xét hàm số: $g(x) = x^2-4x$



Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy: Phương trình $(*)$ có đúng ba nghiệm bội lẻ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m+3 > -4 \\ -m-1 \le -4 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \le m < 7 \Rightarrow S = \{3;4;5;6\}$$

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(x+2)(x-3)$ và liên tục trên $\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 5. **B.** 2. **C.** 3 **D.** 1

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=(x-1)(x+2)(x-3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=0\\x+2=0\\x-3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2.\\x=3\end{array}\right.$

$f'(x)=0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt nên hàm số đã cho có 3 cực trị.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x\left(2x-x^2\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. $x=3$. **B.** $x=1$. **C.** $x=0$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn D

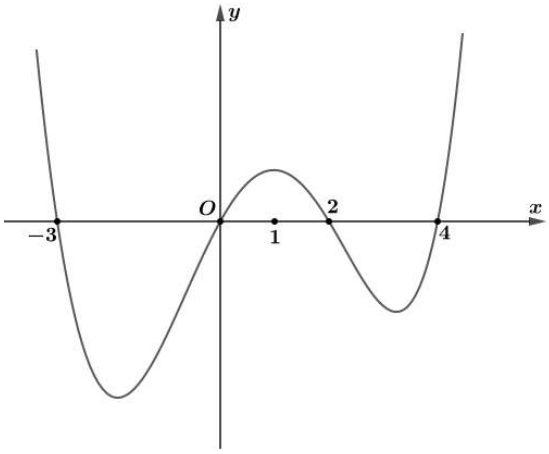
Ta có: $f'(x)=0\Leftrightarrow x\left(2x-x^2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$ (với $x=0$ là nghiệm kép).

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗		↗		↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có điểm cực đại của hàm số là $x=2$.

Câu 3: Cho hàm số bậc năm $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như trong hình vẽ bên.

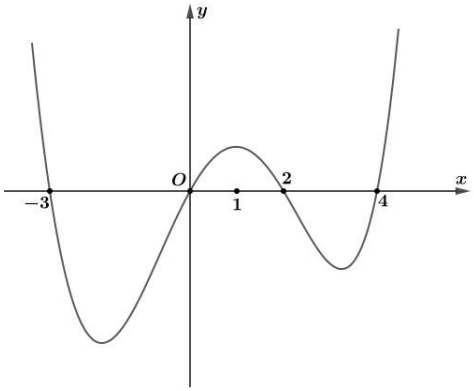


Tìm số điểm cực đại của hàm số $y=e^{f(x)}.\pi^{f^3(x)}$.

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D



Ta có $y' = \left(e^{f(x)}.\pi^{f^3(x)}\right)' = f'(x)\left[e^{f(x)}.\pi^{f^3(x)} + 3f^2(x).e^{f(x)}.\pi^{f^3(x)}.\ln\pi\right]$.

Dễ thấy $e^{f(x)}.\pi^{f^3(x)} + 3f^2(x).e^{f(x)}.\pi^{f^3(x)}.\ln\pi > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

do đó phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 0 \\ x = 2 \\ x = 4 \end{array}\right.$.

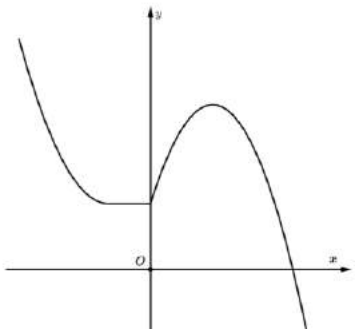
Ta có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-3		0		2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Qua bảng xét dấu của y' ta thấy hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = -3$ và $x = 2$.

Vậy hàm số đã cho có 2 điểm cực đại.

Câu 4: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f(x-1)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

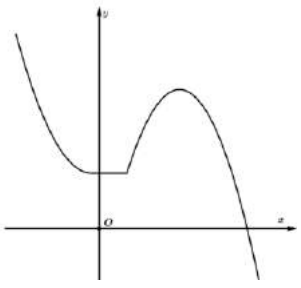


A. Vô số. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ sang phải 1 đơn vị ta được đồ thị hàm số $y = f(x-1)$ như sau:



Dựa vào đồ thị, ta thấy hàm số $y = f(x-1)$ chỉ có 1 điểm cực đại.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-2\right)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng xét dấu $y=f'(x)$ có 3 nghiệm là $x=-2;\ x=1;\ x=2$, các nghiệm $x=-2;\ x=2$ là nghiệm đơn và $x=1$ là nghiệm kép $\Rightarrow f'(x)=a(x+2)(x-1)^2(x-2),\ (a<0)$

Xét hàm số $y=f\left(x^2-2\right)$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$$y'=2x.f'\left(x^2-2\right),\ y'=0\Leftrightarrow 2x.\left[a.\left(x^2-2+2\right)\left(x^2-2-1\right)^2\left(x^2-2-2\right)\right]=0,\ (a<0)$$

$$\Leftrightarrow a.2x^3\left(x^2-3\right)^2\left(x^2-4\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x^3=0\\x^2-4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\x=-2\end{array}\right..$$

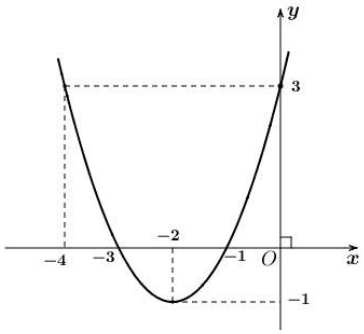
Bảng xét dấu của hàm số $y=f\left(x^2-2\right)$

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, hàm số $y=f\left(x^2-2\right)$ có cực đại tại $x=2;\ x=2$.

Vậy hàm số $y=f\left(x^2-2\right)$ có hai điểm cực đại.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ. Đặt $g(x)=2f(x)-6x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Hỏi đồ thị hàm số $y=g(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị



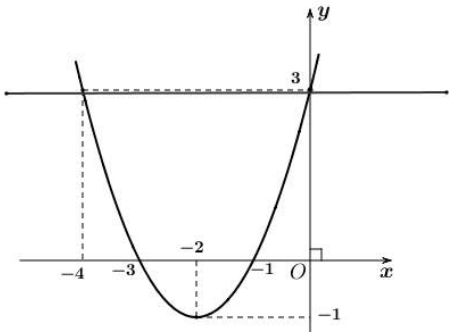
A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x)=2f'(x)-6=2\left(f'(x)-3\right);\ g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=3$.

Dựa vào đồ thị hàm số



Ta có đồ thị hàm đồ $y=f'(x)$ cắt đường thẳng $y=3$ tại hai điểm phân biệt. Nên phương trình $g'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt.

Do đó đồ thị hàm số $y=g(x)$ có hai điểm cực trị.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)^2(2x-1)$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3 **B.** 1. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

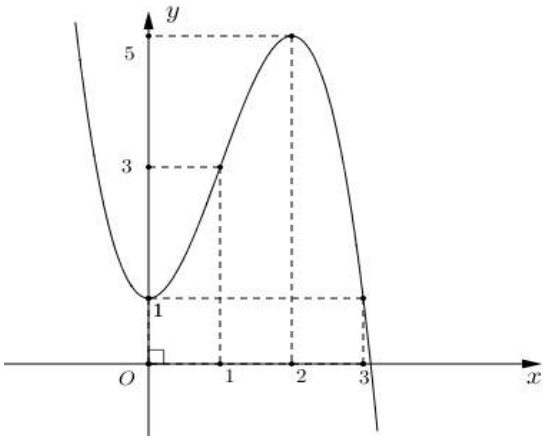
Chọn B

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$. Bảng xét dấu của $f'(x)$:

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số đã cho có 1 cực trị.

Câu 8: Cho hàm đa thức bậc ba $y=f(x)$ như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(f(x)+m\right)$ có đúng 6 điểm cực trị?

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

Vì đồ thị của hàm số $y=f(x)$ đi qua các điểm có toạ độ là $(0;1),(1;3),(2;5),(3;1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} d=1 \\ a+b+c+d=3 \\ 8a+4b+2c+d=5 \\ 27a+9b+3c+d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=3 \\ c=0 \\ d=1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=-x^3+3x^2+1$$

$$\Rightarrow f'(x)=-3x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Xét hàm số $y=f\left(f(x)+m\right) \Rightarrow y'=f'(x).f'\left(f(x)+m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'\left(f(x)+m\right)=0 \end{array}\right.$

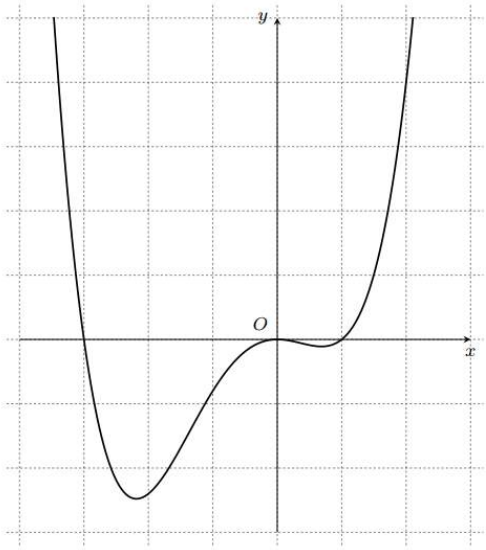
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ f(x)+m=0 \\ f(x)+m=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ f(x)=-m \\ f(x)=-m+2 \end{array}\right. .$$

Hàm số $y=f\left(f(x)+m\right)$ có đúng 6 điểm cực trị $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -m\le 1 \\ -m+2>1 \end{cases} \\ \begin{cases} -m+2\ge 5 \\ -m<5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1\le m<1 \\ -5<m\le -3 \end{array}\right.$.

Mà $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{-4;-3;-1;0\}$.

Vậy có 4 giá trị m nguyên thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức, có $f(-3)<0$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left[f(x-6)\right]^{2050}$ là



A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$. Ta có bảng biến thiên hàm số $y=f(x)$.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$f(-3)<0$	↘	$f(1)$	↗	$+\infty$

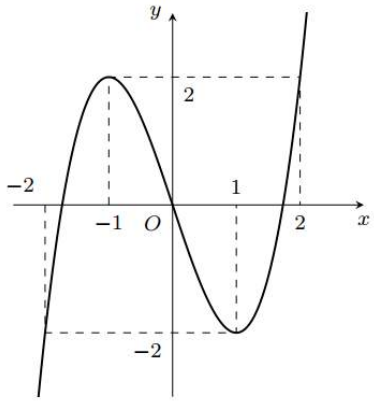
Ta có $g'(x)=2050\left[f(x-6)\right]^{2049}.f'(x-6)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x-6)=0\\f'(x-6)=0.\end{array}\right.$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$, ta thấy phương trình $f(x-6)=0$ có một nghiệm đơn.

Mặt khác $f'(x-6)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-6=-3\\x-6=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=7\end{array}\right.$ là hai nghiệm đơn.

Vậy hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=\sqrt{4-f^2(x)}$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $4-f^2(x)\ge 0\Leftrightarrow -2\le f(x)\le 2\Leftrightarrow -2\le x\le 2$.

Ta có $y'=\dfrac{-1}{\sqrt{4-f^2(x)}}.f(x).f'(x)$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\f'(x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\in(-2;-1)\\x=0\\x=b\in(1;2)\\x=-1\\x=1.\end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên

x	-2		a		-1		0		1		b		2
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y		↗		↘		↗		↘		↗		↘	

Dựa vào bảng biến thiên, ta có hàm số đã cho có 5 điểm cực trị.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(x)=(x+1)^2(x+3)(x^2-4)$. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B. 3.** **C. 4.** **D. 1.**

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x+1)^2=0\\ x+3=0\\ x^2-4=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=-3\\ x=2\\ x=-2\end{array}\right.$

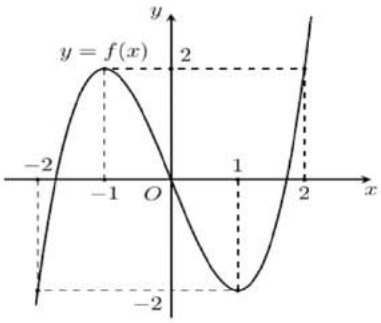
Lập bảng xét dấu của $f'(x)$

x	$-\infty$		-3		-2		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ ta thấy hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại $\left[\begin{array}{l}x=-3\\ x=2\end{array}\right.$ và đạt cực đại tại $x=-2$.

Vậy hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau:



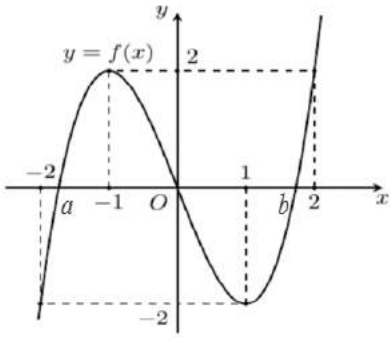
Số điểm cực trị của hàm số $y=\left[f(x)\right]^2$ là

A. 5. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y=\left[f(x)\right]^2$; $y'=2f(x).f'(x)$.



$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\f'(x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\\x=0\\x=b\\x=-1\\x=1\end{array}\right.\text{ trong đó }\left\{\begin{array}{l}-2<a<-1\\1<b<2\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		a		-1		0		1		b		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số $y=\left[f(x)\right]^2$ có 5 điểm cực trị.

Ghi chú: Bổ sung chữ điểm vào đề để tránh hiểu nhầm.

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f\left(x^2+x\right)$ là

A. 2 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 0

Lời giải

Chọn A

Ta có $g(x)=f\left(x^2+x\right)\Rightarrow g'(x)=(2x+1)f'\left(x^2+x\right)$.

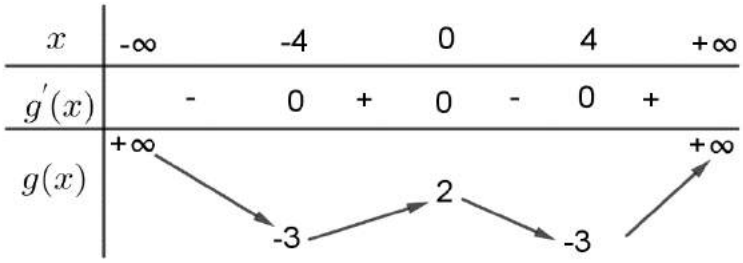
Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+1=0\\f'\left(x^2+x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{2}\\x^2+x=-1\\x^2+x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{2}\\x=1\\x=-2\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-2		$-\dfrac{1}{2}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có hai điểm cực tiểu.

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $g(x)=f'(x)$ như sau



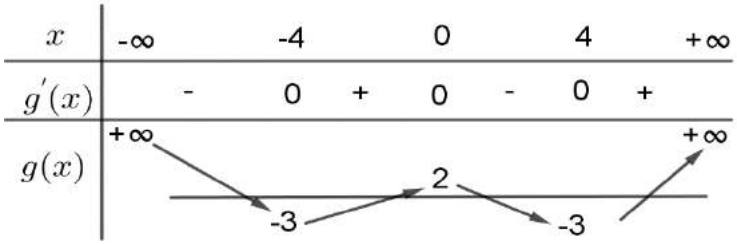
Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2+4x\right)$ là

A. 6. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

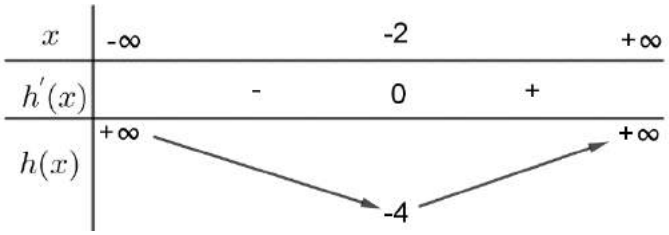
Ta có: $\left[f\left(x^2+4x\right)\right]'=(2x+4).f'\left(x^2+4x\right)$; $\left[f\left(x^2+4x\right)\right]'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\ f'\left(x^2+4x\right)=0\end{array}\right.$.



Từ bảng biến thiên ta có: $f'\left(x^2+4x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+4x=a_1\in(-\infty;-4)\\ x^2+4x=a_2\in(-4;0)\\ x^2+4x=a_3\in(0;4)\\ x^2+4x=a_4\in(4;+\infty)\end{array}\right.$ (1).

Xét $h(x)=x^2+4x$, $h'(x)=2x+4=0\Leftrightarrow x=-2$.

Ta có bảng biến thiên:



Kết hợp bảng biến thiên của $h(x)$ và hệ (1) ta thấy:

Phương trình $x^2+4x=a_1\in(-\infty;-4)$ vô nghiệm.

Phương trình $x^2+4x=a_2\in(-4;0)$ có 2 nghiệm khác -2.

Phương trình $x^2+4x=a_3\in(0;4)$ có 2 nghiệm khác -2.

Phương trình $x^2+4x=a_4\in(4;+\infty)$ có 2 nghiệm khác -2.

Vậy hàm số $y=f\left(x^2+4x\right)$ có tất cả 7 điểm cực trị.

Câu 15: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=2x^2+x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x)=0\Leftrightarrow 2x^2+x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

Đặt $g(x)=f\left(x^2-2x\right)\Rightarrow g'(x)=(2x-2)f'\left(x^2-2x\right)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\f'\left(x^2-2x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-2x=0\\x^2-2x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=0;\ x=2\\x=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2};\ x=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu $g'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		$\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$		1		$\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Hỏi hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x+4\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu.

A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=(2x-2)f'\left(x^2-2x+4\right)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-2=0\\f'\left(x^2-2x+4\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-2x+4=1\\x^2-2x+4=3\end{array}\right.$$

$x^2-2x+4=1\Leftrightarrow x^2-2x+3=0$ (vô nghiệm).

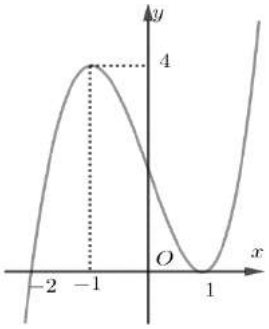
$x^2-2x+4=3\Leftrightarrow x^2-2x+1=0\Leftrightarrow x=1$(nghiệm kép).

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

Vậy hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x+4\right)$ có 1 điểm cực tiểu.

Câu 17: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới



Hàm số $g(x)=f\left(x^2-3\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $g(x)=f\left(x^2-3\right)\Rightarrow g'(x)=2x.f'\left(x^2-3\right)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow 2x.f'\left(x^2-3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'\left(x^2-3\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2-3=-2\\ x^2-3=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm1\\ x=\pm2\end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↘		↗		↘		↗		↗	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực tiểu.

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	2	↘	-1	↗	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ là

A. 9.. **B.** 3.. **C.** 7.. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

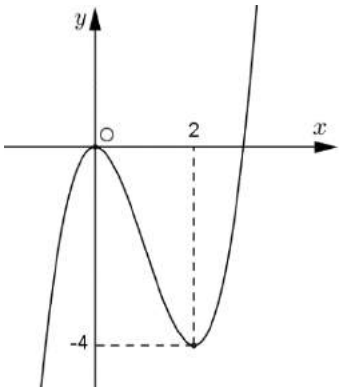
Ta có $y' = 2(x-1).f'\left(x^2-2x\right)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ f'\left(x^2-2x\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x=a\in(-\infty;-1) \\ x^2-2x=b\in(-1;0) \\ x^2-2x=c\in(0;1) \\ x^2-2x=d\in(1;+\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=1 & \\ x^2-2x-a=0, a\in(-\infty;-1) & (1) \\ x^2-2x-b=0, b\in(-1;0) & (2) \\ x^2-2x-c=0, c\in(0;1) & (3) \\ x^2-2x-d=0, d\in(1;+\infty) & (4) \end{array}\right.$$

Phương trình (1) vô nghiệm, các phương trình $(2),(3),(4)$ đều có hai nghiệm phân biệt khác 1 và do b,c,d đôi một khác nhau nên các nghiệm của phương trình $(2),(3),(4)$ cũng đôi một khác nhau. Do đó $f'\left(x^2-2x\right)=0$ có 6 nghiệm phân biệt.

Vậy $y'=0$ có 7 nghiệm phân biệt, do đó số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ là 7.

Câu 19: Biết rằng hàm số $f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f\left[f(x)\right]$.



A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y=f\left[f(x)\right]$, $y'=f'(x).f'\left[f(x)\right]$;

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'\left[f(x)\right]=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ f(x)=0 \\ f(x)=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=a\in(2;+\infty) \\ x=b\in(a;+\infty) \end{array}\right.$$

Với $x>b$, ta có $f(x)>2 \Rightarrow f'\left[f(x)\right]>0$

Với $a<x<b$, ta có $0<f(x)<2 \Rightarrow f'\left[f(x)\right]<0$

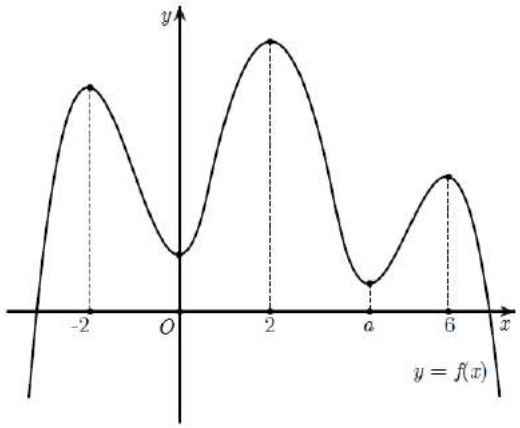
Với $0<x<a$ hoặc $x<0$, ta có $f(x)<0 \Rightarrow f'\left[f(x)\right]>0$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		a		b		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số $y = f\left[f\left(x \right) \right]$ có bốn điểm cực trị.

Câu 20: Cho hàm số $y = f\left(x \right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Biết tất cả các điểm cực trị của hàm số $y = f\left(x \right)$ là $-2\,;\ 0\,;\ 2\,;\ a\,;\ 6$ với $4 < a < 6$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(x^6 - 3x^2 \right)$ là

A. 8. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị ta có -2; 0; 2; a; 6 là tất cả các nghiệm của $f'\left(x \right)$.

Ta có: $y' = \left(f\left(x^6 - 3x^2 \right) \right)' = \left(6x^5 - 6x \right) f'\left(x^6 - 3x^2 \right)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6x^5 - 6x = 0 \\ f'\left(x^6 - 3x^2 \right) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, x = \pm 1 \\ x^6 - 3x^2 = -2 \\ x^6 - 3x^2 = 0 \\ x^6 - 3x^2 = 2 \\ x^6 - 3x^2 = a \\ x^6 - 3x^2 = 6 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, x = \pm 1 \\ x = \pm 1 \\ x = 0, x = \pm \sqrt[4]{3} \\ x = \pm \sqrt{2} \\ x = \pm m, m > \sqrt{2} \\ x = \pm n,\ n > m \end{array} \right.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g\left(x \right) = x^6 - 3x^2$

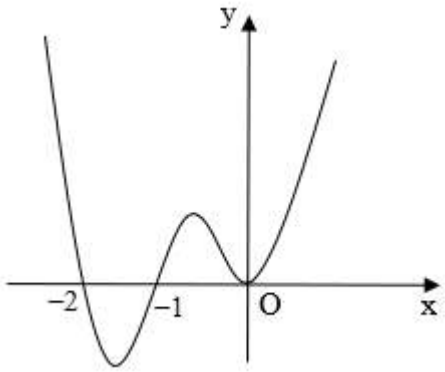
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	0	↘	-2	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $g\left(x \right) = x^6 - 3x^2$, ta suy ra ± 1 là nghiệm kép của phương trình $x^6 - 3x^2 = -2$ và 0 là nghiệm kép của phương trình $x^6 - 3x^2 = 0$. Do đó ± 1 và 0 là nghiệm kép của $f'\left(x^6 - 3x^2 \right)$. Do vậy ± 1 và 0 là nghiệm bội ba của y'.

Các nghiệm khác ± 1 và 0 của y' đều là nghiệm đơn.

Vậy hàm số đã cho có 11 cực trị.

Câu 21: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $f'\left(x^2-4x-12\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f\left(x^2-8x\right)$ đạt cực đại tại điểm



A. $x=1$. **B.** $x=0$. **C.** $x=2$. **D.** $x=4$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g'(x)=2(x-4)f'\left(x^2-8x\right)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\ f'\left(x^2-8x\right)=0\quad(1)\end{array}\right.$$

Xét (1): Đặt $x=t+2$, ta được $x^2-8x=(t+2)^2-8(t+2)=t^2-4t-12$. Suy ra phương trình (1) trở thành

$$f'\left(t^2-4t-12\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\\ t=-1\ \text{(Trong đó, } t=0 \text{ là nghiệm bội chẵn).}\\ t=0\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\ \text{(Trong đó } x=2 \text{ là nghiệm bội chẵn).}\\ x=2\end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↘		↗	

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số đạt cực đại tại điểm $x=1$.

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(x)=\left(x^2-4x-5\right)\left(x^2-1\right)$. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f\left(x^3-3x^2\right)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

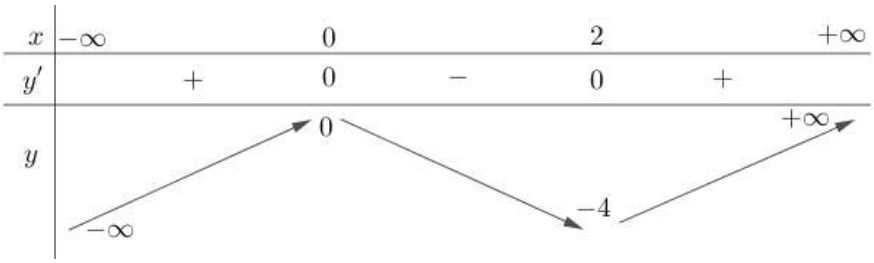
Chọn B

Giải phương trình $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=5 \end{array}\right.$, trong đó $x=-1$ là nghiệm bội chẵn.

Xét hàm số $y=f\left(x^3-3x^2\right) \Rightarrow y'=\left(3x^2-6x\right) f'\left(x^3-3x^2\right)$

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2-6x=0 \\ f'\left(x^3-3x^2\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x^3-3x^2=-1 \quad (1). \\ x^3-3x^2=1 \quad (2). \\ x^3-3x^2=5 \quad (3). \end{array}\right.$$

Xét hàm số $y=x^3-3x^2$, ta có bảng biến thiên sau:

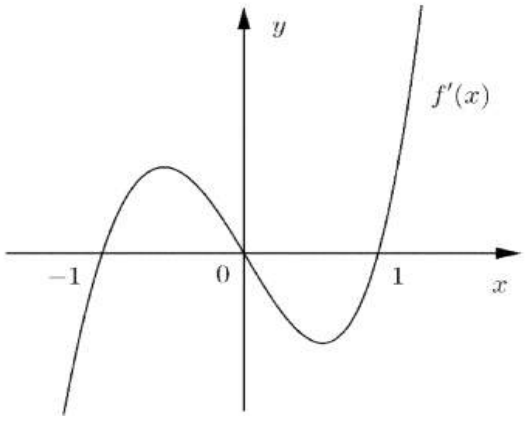


Từ bảng biến thiên của hàm số $y=x^3-3x^2$ suy ra phương trình $(2);(3)$ có nghiệm duy nhất.

Và vì $x=-1$ là nghiệm kép của phương trình $f'(x)=0$ nên các nghiệm ở phương trình (1) đều là nghiệm bội chẵn.

Suy ra đồ thị hàm số $y=f\left(x^3-3x^2\right)$ có 4 điểm cực trị.

Câu 23: Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $f'(x)=x^3+ax^2+bx+c(a,b,c\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $g(x)=f\left(f'(x)\right)$ có bao nhiêu cực tiểu?

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Vì các điểm $(-1;0),(0;0),(1;0)$ thuộc đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} -1+a-b+c=0 \\ c=0 \\ 1+a+b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=x^3-x \Rightarrow f''(x)=3x^2-1$$

Ta có: $g(x)=f\left(f'(x)\right) \Rightarrow g'(x)=f'\left(f'(x)\right).f''(x)$

Xét $g'(x)=0 \Leftrightarrow g'(x)=f'\left(f'(x)\right).f''(x)=0 \Leftrightarrow f'\left(x^3-x\right)\left(3x^2-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3-x=0 \\ x^3-x=1 \\ x^3-x=-1 \\ 3x^2-1=0 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=0 \\ x=x_1 (x_1 \approx 1,325 \quad) \\ x=x_2 (x_2 \approx -1,325) \\ x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-1,325$		-1		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1		$1,325$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu suy ra $g(x)$ có 4 cực tiểu.

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f^3\left(x^3+3x\right)+2022$ là

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=3\left(3x^2+3\right)f'\left(x^3+3x\right)f^2\left(x^3+3x\right).$

Ta thấy $3\left(3x^2+3\right)>0, \forall x\in\mathbb{R}$, và $f^2\left(x^3+3x\right)\geq 0, \ \forall x\in\mathbb{R}$, nên dấu của $g'(x)$ chính là dấu của $f'\left(x^3+3x\right).$

$$f'\left(x^3+3x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3+3x=-1 \\ x^3+3x=0 \\ x^3+3x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1\in(-1;0) \\ x=0 \\ x=x_2\in(0;1) \end{array}\right.$$

Từ bảng biến thiên của hàm $f(x)$ ta có $f'(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x<0 \\ x>1 \end{array}\right.$

Do đó $f'\left(x^3+3x\right)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x^3+3x<0 \\ x^3+3x>1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1<x<0 \\ x>x_2 \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực tiểu.

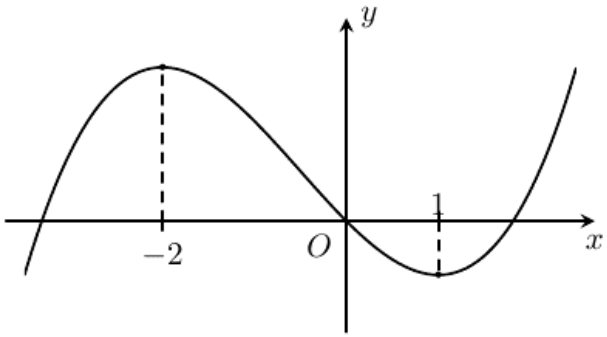
Câu 25: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\left(a,b,c,d\in\mathbb{R};a\neq 0\right)$ có đồ thị là đường cong ở hình bên.

Hỏi hàm số $y=f\left(f^2(x)+1\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B



Đạo hàm $y'=2f'(x)f(x)f'\left(f^2(x)+1\right)$

Phương trình đạo hàm: $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f(x)=0 \\ f^2(x)+1=-2(VN) \\ f^2(x)+1=1(kép) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \\ x=a<-2. \\ x=0 \\ x=b>1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		a		-2		0		1		b		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Dựa theo bảng biến thiên thì hàm số có 3 điểm cực tiểu.

Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x)=x^3-4x$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-22;22]$ để hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x-m\right)$ có 7 cực trị.

A. 21. **B.** 22. **C.** 23. **D.** 24.

Lời giải

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow x\left(x^2-4\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm2\end{array}\right.$.

Xét $g'(x)=(2x-2).f'\left(x^2-2x-m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-2x-m=0\\x^2-2x-m=-2\\x^2-2x-m=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-2x=m\ (1)\\x^2-2x=m-2\ (2)\\x^2-2x=m+2\ (3)\end{array}\right.$

Để hàm số $g(x)$ có 7 cực trị thì mỗi phương trình $(1),(2),(3)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow m-2>-1\Leftrightarrow m>1$, lại có $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in[-22;22]\Rightarrow m\in\{2;3;4;...;22\}$

Vậy có 21 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 27: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2-x,\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(x^4+3x^2+2+m\right)$ có đúng 3 cực trị?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm $g(x)=f\left(x^4+3x^2+2+m\right)$.

Có $g'(x)=\left(4x^3+6x\right).f'\left(x^4+3x^2+2+m\right)$.

Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x^3+6x=0\\f'\left(x^4+3x^2+2+m\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^4+3x^2+2+m=0\\x^4+3x^2+2+m=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^4+3x^2+2=-m\\x^4+3x^2+2=-m+1\end{array}\right.$

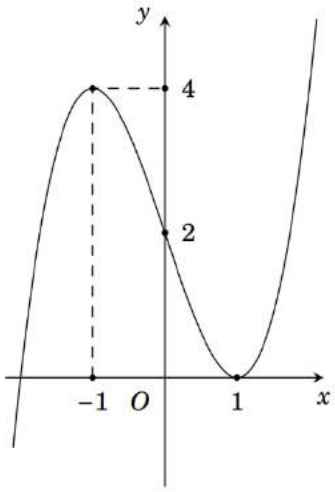
Bảng biến thiên của hàm $h(x)=x^4+3x^2+2$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Để hàm số có đúng 3 cực trị thì $\left\{\begin{array}{l}-m+1>2\\-m\le2\end{array}\right.\Leftrightarrow-2\le m<-1$.

Vậy có 1 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)-2x$ là



A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = f'(x) - 2$.

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) - 2x$ là số nghiệm đơn (hoặc bội lẻ) của phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2$.

Số nghiệm của phương trình $y = f(x) - 2x$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = 2$. Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$, phương trình $f'(x) = 2$ có 3 nghiệm đơn hay hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)\left(2x^2 - 3x - 9\right), \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(x) + x^3 - 3x^2 - 9x + 6$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

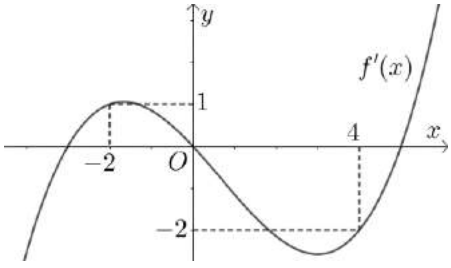
Ta có $g(x) = f(x) + x^3 - 3x^2 - 9x + 6$

$\Rightarrow g'(x) = f'(x) + 3x^2 - 6x^2 - 9 = (x+1)\left(2x^2 - 3x - 9\right) + (x+1)(3x - 9) = (x+1)\left(2x^2 - 18\right)$

Ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \pm 3 \end{array}\right.$.

Do $g'(x) = 0$ có 3 nghiệm bội lẻ nên $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

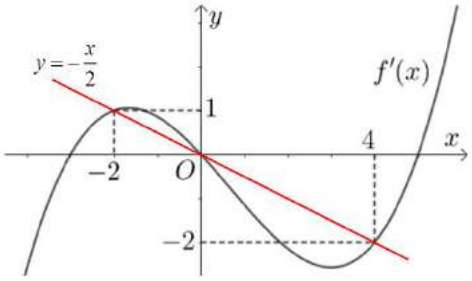
Câu 30: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = 4.f\left(x^2 - 4\right) + x^4 - 8x^2$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?



A. 4. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $g'(x)=8x.f'\left(x^2-4\right)+4x^3-16x$;

$$g'(x)=0\Leftrightarrow 4x\left[2f'.\left(x^2-4\right)+x^2-4\right]=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=0\\2f'.\left(x^4-4\right)=-\left(x^4-4\right)\quad(2)\end{bmatrix}.$$

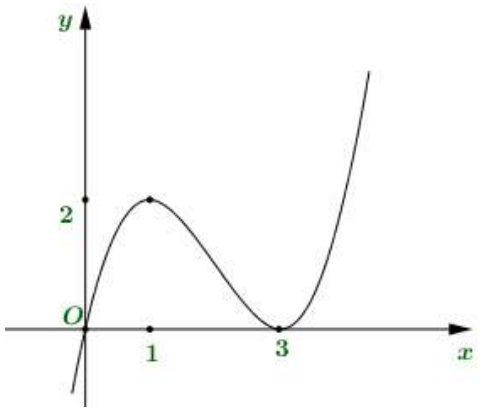
Đặt $t=x^4-4$, khi đó $(2)\Rightarrow f'(t)=\dfrac{-t}{2}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}t=-2\\t=0\\t=4\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x^2-4=-2\\x^2-4=0\\x^2-4=4\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=\pm\sqrt{2}\\x=\pm2\\x=\pm2\sqrt{2}\end{bmatrix}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-2\sqrt{2}$	-2	0	2	$2\sqrt{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$ 0	$-$ 0	$+$ 0	$-$ 0	$+$
$g(x)$	↘		↗ ↘		↗ ↘		↗

Vậy hàm số có 3 điểm cực tiểu.

Câu 31: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,(a\neq 0)$. Hàm số $f'(1-x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)-x^2$ là

A. 10. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

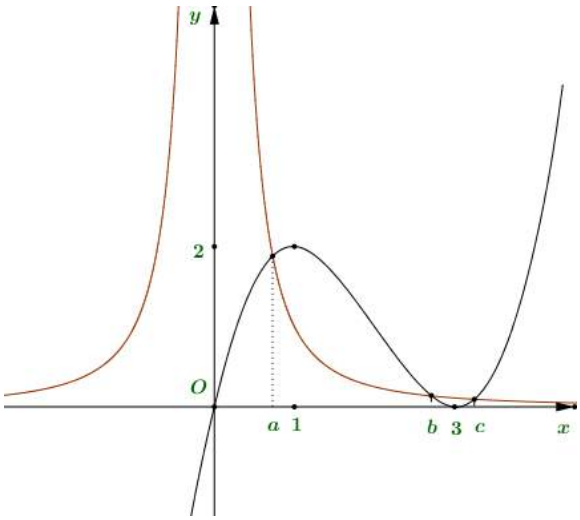
Ta có: $g(x)=f\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)-x^2=f\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)-x^2$.

$g'(x)=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)' f'\left(1-\frac{1}{x^2}\right)-2x=\frac{2}{x^3} f'\left(1-\frac{1}{x^2}\right)-2x.$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} f'\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=2x \Leftrightarrow f'\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}\ (*).$

Nhận xét: Số cực trị của hàm số $g(x)=f\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)-x^2$ là số giao điểm (không tính điểm tiếp xúc) của đồ thị hàm số $y=f'\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$ và đồ thị hàm số $y=\frac{1}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}$.

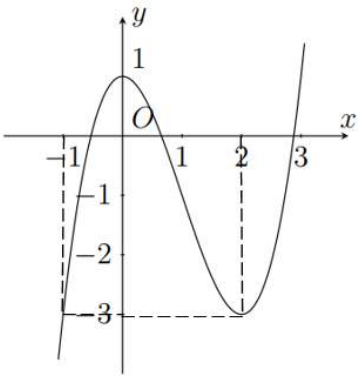
Vẽ đồ thị hàm số $h(x)=\frac{1}{x^2}$ trên cùng một hệ trục với đồ thị hàm số $y=f'(1-x)$, ta được:



$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{x^2}=a\in(0;1) \\ \frac{1}{x^2}=b\in(1;3) \\ \frac{1}{x^2}=c\in(3;+\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=\frac{1}{a} \\ x^2=\frac{1}{b} \\ x^2=\frac{1}{c} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{\frac{1}{a}} \\ x=\pm\sqrt{\frac{1}{b}} \\ x=\pm\sqrt{\frac{1}{c}} \end{array}\right.$.

Vậy hàm số có 6 điểm cực trị.

Câu 32: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $h(x)$ có đạo hàm $h'(x)=f\left(x^3-3x^2+m\right)+3$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của

tham số m để hàm số $h(x)$ có hoành độ cực trị thuộc đoạn $[-1;2]$.

A. 11. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $h'(x)=0 \Leftrightarrow f\left(x^3-3x^2+m\right)+3=0 \Leftrightarrow f\left(x^3-3x^2+m\right)=-3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3-3x^2+m=-1 \\ x^3-3x^2+m=2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3-3x^2=-1-m \\ x^3-3x^2=2-m \end{array}\right. (*)$

Xét hàm số $g(x)=x^3-3x^2$ trên đoạn $[-1;2]$

Ta có bảng biến thiên:

x	-1		0		2
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-4	↗	0	↘	-4

Dựa vào bảng biến thiên và yêu cầu bài toán:

$(*) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -4 \le -1-m \le 0 \\ -4 \le 2-m \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \le m \le 3 \\ 2 \le m \le 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow -1 \le m \le 6$

Suy ra $m \in \{-1;0;1;2;3;4;5;6\}$

Câu 33: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=3f\left(-x^4+4x^2-6\right)+2x^6-3x^4-12x^2$ là:

A. 4. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $g'(x)=-12x\left(x^2-2\right)\left[f'\left(-2-\left(x^2-2\right)^2\right)-\left(x^2+1\right)\right]$.

Dựa vào bảng xét dấu, ta có $f'(x)<0, \forall x \in (-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

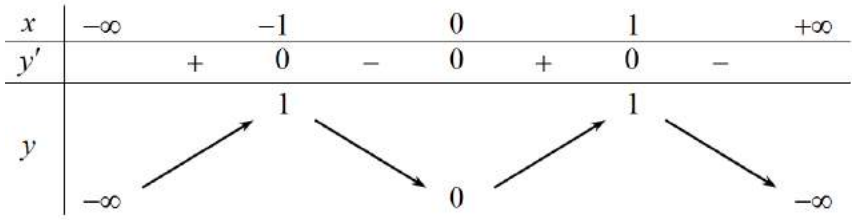
Ta có $-2-\left(x^2-2\right)^2 \le -2$ nên $\Rightarrow f'\left[-2-\left(x^2-2\right)^2\right] \le 0$.

Suy ra $f'\left[-2-\left(x^2-2\right)^2\right]-\left(x^2+1\right)<0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$, cả 3 nghiệm đều là nghiệm bội lẻ.

nên $g'(x)$ cùng dấu với $h(x)=x\left(x^2-2\right)$ nên hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực tiểu.

Câu 34: Cho $y=f(x)$ là hàm số bậc bốn có bảng biến thiên như sau:



Hàm số $y=\dfrac{f\left(-x^2+2x\right)+2021}{f\left(-x^2+2x\right)}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $f\left(-x^2+2x\right)\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+2x\neq 0 \\ -x^2+2x\neq a \quad (a<-1) \\ -x^2+2x\neq b \quad (\mathrm{b}>1) \quad (\forall x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq 2 \\ x\neq 1+\sqrt{1-a} \\ x\neq 1-\sqrt{1-a} \end{cases}.$

Ta có $y=\dfrac{f\left(-x^2+2x\right)+2021}{f\left(-x^2+2x\right)}=1+\dfrac{2021}{f\left(-x^2+2x\right)} \Rightarrow y'=\dfrac{-2021(-2x+2)f'\left(-x^2+2x\right)}{f^2\left(-x^2+2x\right)}$

Do đó $y'=0 \Leftrightarrow \dfrac{-2021(-2x+2)f'\left(-x^2+2x\right)}{f^2\left(-x^2+2x\right)}=0$

$\Leftrightarrow -2021(-2x+2)f'\left(-x^2+2x\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ -x^2+2x=-1 \\ -x^2+2x=0 \\ -x^2+2x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1\pm\sqrt{2} \\ x=0; x=2\notin TXĐ \\ (x-1)^2=0 \end{array}\right.$.

Vậy hàm số có 3 cực trị.

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=x^2-82x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=f\left(x^4-18x^2+m\right)$ có đúng 7 cực trị?

A. 83. **B.** vô số **C.** 80. **D.** 81.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=\left(4x^3-36x\right)f'\left(x^4-18x^2+m\right)$.

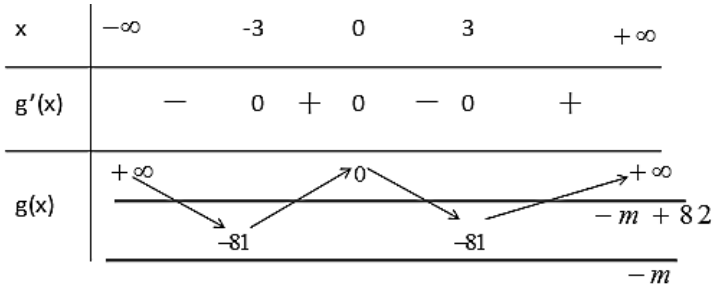
Cho $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'\left(x^4-18x^2+m\right)=0 \\ 4x^3-36x=0 \end{array}\right.$.

Với $4x^3-36x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 3 \end{array}\right.$ có 3 nghiệm đơn.

Với $f'\left(x^4-18x^2+m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^4-18x^2+m=0 \\ x^4-18x^2+m=82 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^4-18x^2=-m \\ x^4-18x^2=-m+82 \end{array}\right.$.

Xét hàm số $g(x)=x^4-18x^2$; $g'(x)=4x^3-36x$, $g'(x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm3\end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)=x^4-18x^2$.



Để hàm số $y=f\left(x^4-18x^2+m\right)$ có đúng 7 cực trị thì $f'\left(x^4-18x^2+m\right)=0$ phải có 4 nghiệm đơn khác $0,\pm3$. Do đó dựa vào bảng biến thiên ta có

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}-m<-81\\-81<-m+82<0\end{array}\right.\\-m+82>-m>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}82<m<163\\m<0\end{array}\right.$$

Mà $m\in\mathbb{Z}^+$ nên $m\in\{83;84;...161;162\}$ nên có 80 giá trị.

Câu 36: Cho hàm số $y=f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+1$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(f(x)\right)$ bằng

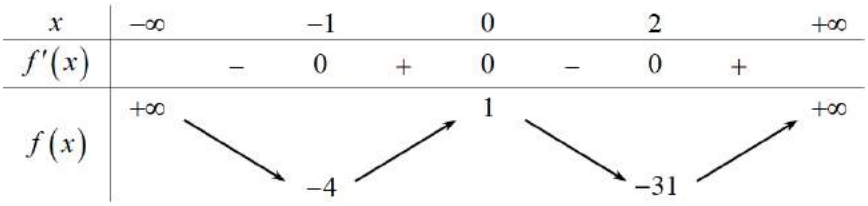
A. 13. **B.** 10. **C.** 3. **D.** 11.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=12x^3-12x^2-24x$, $f'(x)=0\Leftrightarrow12x^3-12x^2-24x=0\Leftrightarrow x=0,x=-1,x=2$.

Bảng biến thiên



Cách 1: Ta có $y'=f'\left(f(x)\right).f'(x)$, $y'=0\Leftrightarrow f'\left(f(x)\right).f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}f'(x)=0 & (1)\\f'\left(f(x)\right)=0 & (2)\end{array}\right.$

$(1)\Leftrightarrow x=-1;x=0;x=2$.

$(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}f(x)=-1 & (3)\\f(x)=0 & (4)\\f(x)=2 & (5)\end{array}\right.$

Theo bảng biến thiên thì (3) và (4) có bốn nghiệm phân biệt và (5) có hai nghiệm phân biệt. Do đó phương trình $y'=0$ có 13 nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi đi qua các nghiệm đó.

Vậy hàm số đã cho có 13 điểm cực trị.

Cách 2: Sử dụng phương pháp ghép trục.

Đặt $g(x)=f\left(f(x)\right)$, ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau

x	$-\infty$			-1			0			2			$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	2	0	-1	-4	-1	0	1	0	-1	-31	-1	0	2	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	-31	1	-4	833	-4	1	-12	1	-4	$f(-31)$	-4	1	-31	$+\infty$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho có 13 điểm cực trị.

Câu 37: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y=f'(x)=(x-2)^2(x^2-x)$, $x\in\mathbb{R}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f\left(\frac{1}{2}x^2-6x+m\right)$ có 5 điểm cực trị. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 154. **B.** 17. **C.** 213. **D.** 153.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=0\\x=1\end{array}\right.$, trong đó $x=2$ là nghiệm bội chẵn nên không phải là điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$.

Xét hàm số $y=g(x)=f\left(\frac{1}{2}x^2-6x+m\right)$; $g'(x)=(x-6)f'\left(\frac{1}{2}x^2-6x+m\right)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=6\\f'\left(\frac{1}{2}x^2-6x+m\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=6\\\frac{1}{2}x^2-6x+m=2\\\frac{1}{2}x^2-6x+m=0\\\frac{1}{2}x^2-6x+m=1\end{array}\right.$$

Nghiệm của phương trình $\frac{1}{2}x^2-6x+m=2$ không phải là điểm cực trị của hàm số $y=g(x)$.

Để hàm số $y=g(x)$ có 5 điểm cực trị thì phương trình $\frac{1}{2}x^2-6x+m=0$ và $\frac{1}{2}x^2-6x+m=1$ phải có 4 nghiệm phân biệt khác 6.

Xét hàm số $h(x)=\frac{1}{2}x^2-6x$; $h'(x)=x-6$; $h'(x)=0\Leftrightarrow x=6$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		6		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-18	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm phương trình $\frac{1}{2}x^2-6x+m=0$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $h(x)$ và đường thẳng $y=-m$.

Số nghiệm phương trình $\frac{1}{2}x^2-6x+m=1$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $h(x)$ và đường thẳng $y=-m+1$.

Mà $-m<-m+1$ nên để hai phương trình trên có 4 nghiệm phân biệt khác 6 thì $-m>-18 \Leftrightarrow m<18$.

Tập các giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $S=\{1;...;17\}$.

Tổng tất các giá trị m của tập S là $1+...+17=153$.

Câu 38: Cho $f(x)$ là hàm đa thức và cho hàm đa thức bậc ba $g(x)=f(x+1)$ thỏa mãn $(x-1)g'(x+3)=(x+1)g'(x+2)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(2x^2-4x+5\right)$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

$g(x)=f(x+1)\Rightarrow g'(x)=f'(x+1)$.

$(x-1)g'(x+3)=(x+1)g'(x+2)$ hay $(x-1)f'(x+4)=(x+1)f'(x+3)$.

Cho $\begin{cases}x=1\\x=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'(4)=0\\f'(3)=0\end{cases}\Rightarrow f'(x)=a(x-3)(x-4)$.

$y=f\left(2x^2-4x+5\right)\Rightarrow y'=(4x-4).f'\left(2x^2-4x+5\right)$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x-4=0\\f'\left(2x^2-4x+5\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\2x^2-4x+5=4\\2x^2-4x+5=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\2x^2-4x+1=0\\2x^2-4x+2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\frac{2-\sqrt{2}}{2}\\x=\frac{2+\sqrt{2}}{2}\\x=1\end{array}\right.$$

Vậy hàm số có 3 cực trị

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn và có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)=2^{-\frac{1}{x^4}}\left[f(2x+1)\right]^3$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	3	↘	-2	↗	$+\infty$

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $g(x)=2^{-\frac{1}{x^4}}\left[f(2x+1)\right]^3$.

$$\Rightarrow g'(x)=2^{-\frac{1}{x^4}}\frac{4\ln 2}{x^5}\left[f(2x+1)\right]^3+2^{-\frac{1}{x^4}}.3.2f'(2x+1)\left[f(2x+1)\right]^2$$

$$\Leftrightarrow g'(x)=2.2^{\frac{-1}{x^4}}\left[f\left(2x+1\right)\right]^2\left(\frac{2\ln 2}{x^5}f\left(2x+1\right)+3f'\left(2x+1\right)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f^2\left(2x+1\right)=0 \\ \frac{2\ln 2}{x^5}f\left(2x+1\right)+3f'\left(2x+1\right)=0 \quad (*) \end{array}\right.$$

Do các nghiệm của phương trình $f^2\left(2x+1\right)=0$ là các nghiệm bội chẵn nên số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)$ là số nghiệm bội lẻ của phương trình $(*)$.

Xét phương trình $\frac{2\ln 2}{x^5}f\left(2x+1\right)+3f'\left(2x+1\right)=0$.

Đặt $t=2x+1$ ta được $\frac{2^6.\ln 2}{\left(t-1\right)^5}f\left(t\right)+3f'\left(t\right)=0$.

Từ bảng biến thiên ta thấy được phương trình $f\left(t\right)=0$ có 4 nghiệm t_1,t_2,t_3,t_4.

$\Rightarrow f\left(t\right)=a\left(t-t_1\right)\left(t-t_2\right)\left(t-t_3\right)\left(t-t_4\right)$

$\Rightarrow f'\left(t\right)=a\left[\left(t-t_2\right)\left(t-t_3\right)\left(t-t_4\right)+\left(t-t_1\right)\left(t-t_3\right)\left(t-t_4\right)+\left(t-t_1\right)\left(t-t_2\right)\left(t-t_4\right)+\left(t-t_1\right)\left(t-t_2\right)\left(t-t_3\right)\right.$

Do 4 nghiệm t_1,t_2,t_3,t_4 không là nghiệm của phương trình $(*)$ nên:

$$\frac{2^6.\ln 2}{\left(t-1\right)^5}f\left(t\right)+3f'\left(t\right)=0\Rightarrow\frac{2^6.\ln 2}{\left(t-1\right)^5}+3\frac{f'\left(t\right)}{f\left(t\right)}=0 \quad (**)$$

Thay $f\left(t\right)$ và $f'\left(t\right)$ vào $(**)$ ta có:

$$\frac{2^6\ln 2}{\left(t-1\right)^5}+\frac{3}{t-t_1}+\frac{3}{t-t_2}+\frac{3}{t-t_3}+\frac{3}{t-t_4}=0$$

Xét hàm số $h\left(t\right)=\frac{2^6\ln 2}{\left(t-1\right)^5}+\frac{3}{t-t_1}+\frac{3}{t-t_2}+\frac{3}{t-t_3}+\frac{3}{t-t_4}$ với $t\neq 1,t\neq t_i\left(i=\overline{1,4}\right)$.

$$\Rightarrow h'\left(t\right)=\frac{-2^6.5.\ln 2}{\left(t-1\right)^6}+\frac{-3}{\left(t-t_1\right)^2}+\frac{-3}{\left(t-t_2\right)^2}+\frac{-3}{\left(t-t_3\right)^2}+\frac{-3}{\left(t-t_4\right)^2}<0,\forall\ t\neq 1,t\neq t_i\left(i=\overline{1,4}\right).$$

Ta có bảng biến thiên của $h\left(t\right)$:

t	$-\infty$		t_1		t_2		t_3		1		t_4		$+\infty$
$h'(t)$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	
$h(t)$	0	↘	$+\infty$	↘	$+\infty$	↘	$+\infty$	↘	$+\infty$	↘	$+\infty$	↘	0
		$-\infty$		$-\infty$		$-\infty$		$-\infty$		$-\infty$			

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình $h\left(t\right)=0$ luôn có 4 nghiệm đơn phân biệt do đó hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực trị.

Câu 40: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x+3\right)^2\left(x^2-x\right)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=f\left(x^2-6x+m\right)$ có 5 điểm cực trị?

A. 8. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Xét $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3(nghiem\,boi\,chan) \\ x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$

Đặt $g(x)=f\left(x^2-6x+m\right) \Rightarrow g'(x)=(2x-6).f'\left(x^2-6x+m\right)$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x^2-6x+m=-3(nghiem\ boi\ chan) \\ x^2-6x+m=0\ (1) \\ x^2-6x+m=1\ (2) \end{array}\right.$

Hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ mỗi phương trình (1) và (2) có hai nghiệm phân biệt khác 3

$\Leftrightarrow \begin{cases} 9-m>0 \\ 10-m>0 \\ -9+m\neq 0 \\ -10+m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<9 \\ m<10 \\ m\neq 9 \\ m\neq 10 \end{cases} \Leftrightarrow m<9$

Mà $m\in\mathbb{N}^* \Rightarrow m\in\{1;2;3;...;8\}$. Vậy có 8 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Câu 41: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2\left(x^2-7x+12\right), \forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x+m\right)$ có đúng 6 điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

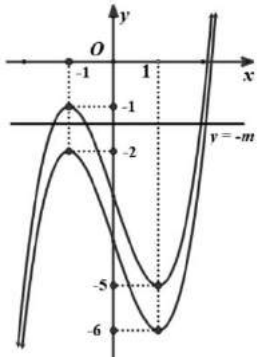
Chọn B

Ta có $f'(x)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\,(l) \\ x=3 \\ x=4 \end{array}\right.$.

$g'(x)=\left(3x^2-3\right)f'\left(x^3-3x+m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x^3-3x+m=3 \\ x^3-3x+m=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x^3-3x-3=-m\ (1) \\ x^3-3x-4=-m\ (2) \end{array}\right.$.

Hàm số đã cho có đúng 6 điểm cực trị khi và chỉ khi $(1),(2)$ có tổng 4 nghiệm phân biệt $x\neq\pm 1$.

Ta vẽ đồ thị của hai hàm số $y=x^3-3x-3, y=x^3-3x-4$ trên cùng một hệ tọa độ.



Từ đồ thị, ta có: $\left[\begin{array}{l}-2\le -m<-1\\ -6<-m\le -5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1<m\le 2\\ 5\le m<6\end{array}\right.\Rightarrow m\in\{2;5\}$.

Vậy có 2 số.

Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2+x-6$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=f\left(x^3-3x^2-9x+m\right)$ có đúng 6 điểm cực trị.

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=x^2+x-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\ x=2\end{array}\right.$.

Ta có $y'=\left(3x^2-6x-9\right)f'\left(x^3-3x^2-9x+m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=3\\ x^3-3x^2-9x=-m-3\ \ (1)\\ x^3-3x^2-9x=-m+2\ \ (2)\end{array}\right.$.

Xét $h(x)=x^3-3x^2-9x;\ h'(x)=3x^2-6x-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=3\end{array}\right.$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	-27	↗	$+\infty$

($-m+2$ và $-m-3$ là các đường ngang)

Để hàm số $y=f\left(x^3-3x^2-9x+m\right)$ có đúng 6 điểm cực trị thì

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}-m+2\ge 5\\ -27<-m-3<5\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}-27<-m+2<5\\ -m-3\le -27\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-8<m\le -3\\ 24\le m<29\end{array}\right.$$.

Vậy có 10 giá trị nguyên của m để hàm số $y=f\left(x^3-3x^2-9x+m\right)$ có đúng 6 điểm cực trị.

Câu 43: Cho hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	3	↘	-2	↗	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left(x^3-x\right)\left[f(x+1)\right]^2$ là

A. 11. **B.** 8. **C.** 13. **D.** 10.

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết $y' = ax\left(x^2-1\right)(a>0) \Rightarrow y = ax^4 - \frac{a}{2}x^2 + c$.

Theo bài ra $\begin{cases} y(0)=3 \\ y(1)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ \frac{a}{4}-\frac{a}{2}+b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=20 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow y = 5x^4 - 10x^2 + 3$.

$g(x) = \left(x^3-x\right)\left[f\left(x+1\right)\right]^2 \Rightarrow g'(x) = \left(3x^2-1\right)\left[f\left(x+1\right)\right]^2 + 2f'(x+1)\left(x^3-x\right)f\left(x+1\right)$

$\Rightarrow g'(x) = f\left(x+1\right)\left[\left(3x^2-1\right)f\left(x+1\right) + 2f'(x+1)\left(x^3-x\right)\right]$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x+1\right)=0\,(2) \\ \left(3x^2-1\right)f\left(x+1\right) + 2f'(x+1)\left(x^3-x\right) = 0\,(3) \end{array}\right.$

Giải $f\left(x+1\right)=0\,(2)$.

Dựa vào đồ thị phương trình (2) có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4.

Giải $\left(3x^2-1\right)f\left(x+1\right) + 2f'(x+1)\left(x^3-x\right) = 0\,(3)$

Hay $\left(3x^2-1\right)\left[5\left(x+1\right)^4 - 10\left(x+1\right)^2 + 3\right] + 40\left[\left(x+1\right)^3 - \left(x+1\right)\right]\left(x^3-x\right) = 0$ (4)

Đặt $h(x) = \left(3x^2-1\right)\left[5\left(x+1\right)^4 - 10\left(x+1\right)^2 + 3\right] + 40\left[\left(x+1\right)^3 - \left(x+1\right)\right]\left(x^3-x\right)$

$y = h(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$h(-3) = 6878, h(-2) = -22, h(-1) = 6, h(-0.5) = \frac{-373}{64}, h(0) = 2, h(0.5) = -\frac{1893}{64}, h(1) = 86$

Ta có $\begin{cases} h(-3).h(-2) < 0 \\ h(-2).h(-1) < 0 \\ h(-1).h(-0.5) < 0 \\ h(-0.5).h(0) < 0 \\ h(0).h(0.5) < 0 \\ h(0.5).h(1) < 0 \end{cases}$ (5)

$y = h(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $y = h(x)$ liên tục trên các đoạn

$[-3,-2],[-2;-1],[-1;-0.5],[-0.5;0],[0;0.5],[0.5;1]$ (6).

Từ (5) và (6) phương trình (4) có ít nhất 6 nghiệm đơn thì:

$-3 < x_5 < -2, -2 < x_6 < -1, -1 < x_7 < -0.5, -0.5 < x_8 < 0, 0 < x_9 < 0.5, 0.5 < x_{10} < 1$.

Mà phương trình bậc 6 có tối đa 6 nghiệm nên (4) chỉ có 6 nghiệm phân biệt đơn nên đổi dấu

Vậy hàm số $g(x) = \left(x^3-x\right)\left[f\left(x+1\right)\right]^2$ có 10 điểm cực trị.

Câu 44: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 4x$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f\left(2x^2 - 12x + m\right)$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 17. **B.** 19. **C.** 16. **D.** 18.

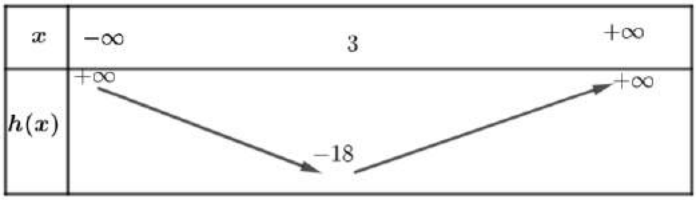
Lời giải

$f'(x) = x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$.

Ta có: $g'(x)=(4x-12)\cdot f'\left(2x^2-12x+m\right)$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\2x^2-12x+m=0\ (1)\\2x^2-12x+m=4\ (2)\end{array}\right.$

Để hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình (1) và (2), mỗi phương trình có hai nghiệm phân biệt khác 3.

Xét hàm số $h(x)=2x^2-12x$. Ta có:

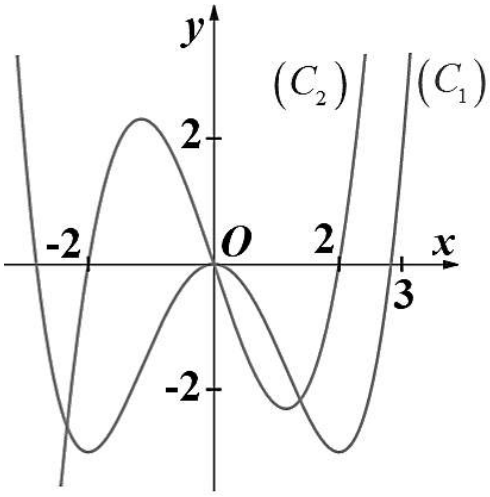


Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình $(1);(2)$ có hai nghiệm phân biệt khác 3

$\Leftrightarrow\begin{cases}-m>-18\\4-m>-18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<18\\m<22\end{cases}\Leftrightarrow m<18$.

Vì $m\in\mathbb{N}^*$ nên có 17 giá trị của tham số m thỏa mãn đề bài.

Câu 45: Cho đồ thị hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị (C_1) và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị (C_2) như hình vẽ bên.



Số điểm cực đại của đồ thị hàm số $g(x)=f\left[e^{-x}f(x)\right]$ trên $(-\infty;3)$ là:

A. 5. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

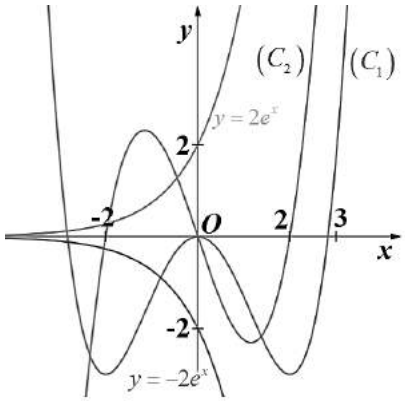
Chọn B

Ta có: $g'(x)=e^{-x}\left[f'(x)-f(x)\right]f'\left[e^{-x}f(x)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{c}f'(x)-f(x)=0\\e^{-x}f(x)=-2\\e^{-x}f(x)=0\\e^{-x}f(x)=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{c}f'(x)=f(x)\\f(x)=0\\f(x)=-2e^x\\f(x)=2e^x\end{array}\right.$

Ta có đồ thị (C_1) cắt đồ thị (C_2) tại 3 điểm nên phương trình $f'(x)=f(x)$ có 3 nghiệm đơn phân biệt.

Ta có đồ thị (C_1) cắt trục hoành tại 2 điểm nên phương trình $f(x)=0$ có 2 nghiệm đơn phân biệt.

Vẽ đồ thị các hàm số $2e^x, 2e^{-x}$ trên cùng một hình vẽ, ta có được:

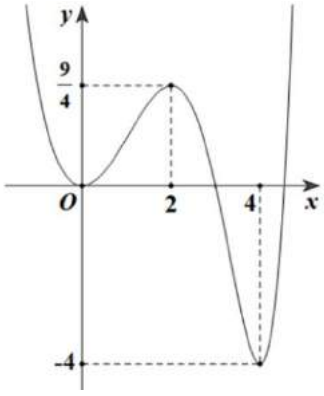


Từ hình vẽ ta thấy được phương trình $f(x)=2e^x$ và $f(x)=-2e^x$ có 3 nghiệm đơn phân biệt.

Vậy $g'(x)=0$ có 8 nghiệm đơn phân biệt nên hàm số $g(x)$ có 8 điểm cực trị.

$\Rightarrow$Hàm số có 4 điểm cực đại.

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f(5-2x)$ như hình vẽ bên dưới



Có bao nhiêu giá trị thực của tham số $m\in[0;10]$ để hàm số $y=2f\left(4x^2+1-m\right)$ có 7 điểm cực trị?

A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=f(5-2x)\Rightarrow y'=-2f'(5-2x)$. Từ đồ thị, suy ra

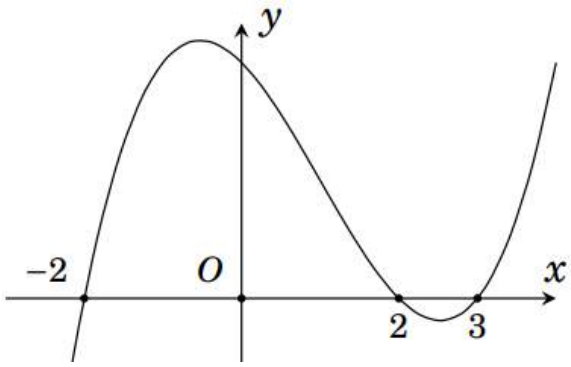
$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\x=4\end{array}\right.\text{. Đặt } t=5-2x\Rightarrow x=\frac{5-t}{2},\ f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=5\\t=1\\t=-3\end{array}\right.$$

$$g(x)=2f\left(4x^2+1-m\right)\Rightarrow g'(x)=16x.f'\left(4x^2+1-m\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\4x^2+1-m=5\\4x^2+1-m=1\\4x^2+1-m=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=\frac{m+4}{4}\\x^2=\frac{m}{4}\\x^2=\frac{m-4}{4}\end{array}\right.$$

để hàm số $y=g(x)=2f\left(4x^2+1-m\right)$ có 7 điểm cực trị thì $g'(x)=0$ có 7 nghiệm phân biệt và $g'(x)$ đổi dấu qua 7 nghiệm đó. Từ đó suy ra $y=g\left(x\right)$ có 7 cực trị khi $m>4$ ~~và~~, đồng thời theo đề $m\in\left[0;10\right]$. Vậy có 6 giá trị của *m* thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 47: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f\left(-2\right)=0$ và đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ được cho như hình vẽ bên dưới.



Hỏi hàm số $g\left(x\right)=\left[f\left(-x-x^2\right)\right]^2$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Bảng biến thiên của $f\left(x\right)$:

x	$-\infty$		-2		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	0	↗	$f(2)$	↘	$f(3)$	↗	

Xét $S_1=\int\limits_{-2}^{2}\left|f'\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=f\left(2\right)-f\left(-2\right)=f\left(2\right)$ và $S_2=\int\limits_{2}^{3}\left|f'\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=f\left(2\right)-f\left(3\right)$

Theo đồ thị ta thấy $S_1>S_2\Rightarrow f\left(2\right)>f\left(2\right)-f\left(3\right)\Rightarrow f\left(3\right)>0$

Ta có $g'\left(x\right)=2\left(-1-2x\right).f\left(-x-x^2\right).f'\left(-x-x^2\right)$

$$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1+2x=0\\f'\left(-x-x^2\right)=0\\f\left(-x-x^2\right)=0\end{array}\right.$$

Ta thấy:

$1+2x=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

$$f'\left(-x-x^2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-x-x^2=-2\\-x-x^2=2\left(VN\right)\\-x-x^2=3\left(VN\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right.$$

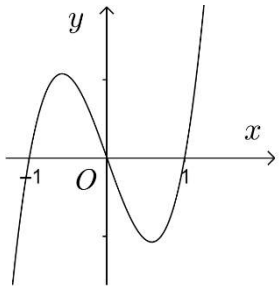
Nhận xét đồ thị hàm số $f\left(x\right)$ tiếp xúc với đường thẳng $x=0$ nên phương trình $f\left(-x-x^2\right)=0$

cho nghiệm bội chẵn, do đó $f\left(-x-x^2\right)$ không đổi dấu khi đi qua các nghiệm của nó.

Vậy $g(x)$ có ba điểm cực trị $x=-\dfrac{1}{2}, x=1, x=-2$.

Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f\left(-x-x^2\right)\right]^2=+\infty$ nên $g(x)$ có số điểm cực đại không vượt quá số điểm cực tiểu. Do đó $g(x)$ có hai điểm cực tiểu.

Câu 48: Cho hàm số bậc bốn $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+a$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong như hình vẽ sau:



Hàm số $y=f(2x-1)f\left(x^2-2x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 7. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+a \Rightarrow f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$.

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty \Rightarrow 4a>0 \Leftrightarrow a>0$.

Hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là $-1;0;1$ nên ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} d=0 \\ -4a+3b-2c+d=0 \\ 4a+3b+2c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=0 \\ b=0 \\ c=-2a \end{cases} \Rightarrow f(x)=ax^4-2ax^2+a=a\left(x^4-2x^2+1\right).$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

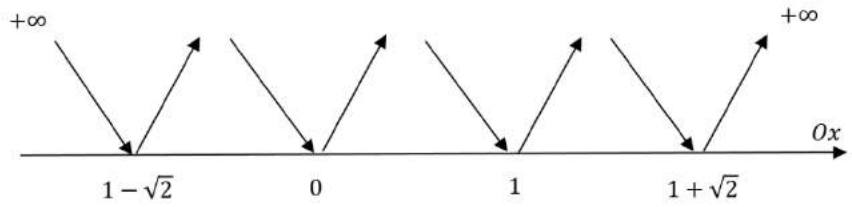
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	a	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Đặt $g(x)=f(2x-1)f\left(x^2-2x\right)$.

Ta có $g(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(2x-1)=0 \\ f\left(x^2-2x\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=-1 \\ 2x-1=1 \\ x^2-2x=-1 \\ x^2-2x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=1+\sqrt{2} \\ x=1-\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Phương trình $g(x)=0$ có bốn nghiệm nhưng đều là nghiệm bội chẵn.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$. Suy ra hàm số $y=g(x)$ có dạng như sau:



Kết luận hàm số $y=f(2x-1)f\left(x^2-2x\right)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 49: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=\dfrac{(x-1)(x+4)}{\sqrt[3]{x}}$. Hàm số $y=f\left(x^2+4x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

Bảng xét dấu của $y=f'(x)$

x	$-\infty$		-4		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

Đặt $g(x)=f\left(x^2+4x\right)$. Ta có $g'(x)=(2x+4)f'\left(x^2+4x\right)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+4=0\\ f'\left(x^2+4x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\ x^2+4x=-4\\ x^2+4x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=-2\pm\sqrt{5}\end{array}\right.$$

$f'\left(x^2+4x\right)$ không xác định khi $x^2+4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-4\end{array}\right.$.

Xét bất phương trình $f'\left(x^2+4x\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-4<x^2+4x<0\\ x^2+4x>1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-4<x<-2\\ -2<x<0\\ x<-2-\sqrt{5}\\ x>-2+\sqrt{5}\end{array}\right.$

Bảng xét dấu của $y=g'(x)$

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{5}$		-4		-2		0		$-2+\sqrt{5}$		$+\infty$
$2x+4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x^2+4x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

Do hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $y=g(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, do đó hàm số $y=f\left(x^2+4x\right)$ có năm điểm cực trị.

Câu 50: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(x-2),\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x^2+m\right)$ có đúng 8 cực trị?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$, trong đó $x=1$ là nghiệm bội chẵn, $x=0$ và $x=2$ là các nghiệm đơn.

$g'(x)=\left(3x^2-6x\right).f'\left(x^3-3x^2+m\right)$.

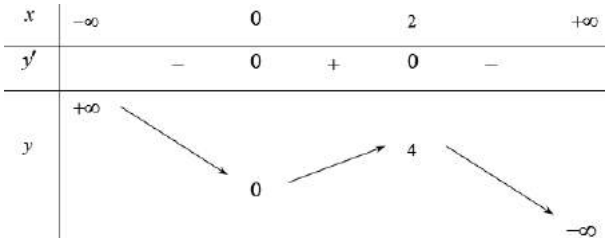
$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2-6x=0 \\ x^3-3x^2+m=1 \\ x^3-3x^2+m=0 \\ x^3-3x^2+m=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x^3-3x^2+m=1 \\ x^3-3x^2+m=0 \\ x^3-3x^2+m=2 \end{array}\right. .$$

Vì khi đi qua các nghiệm của phương trình $x^3-3x^2+m=1$ (nếu có) dấu của $f'\left(x^3-3x^2+m\right)$ không đổi nên dấu của $g'(x)$ chỉ phụ thuộc các nghiệm của hai phương trình còn lại.

Vậy hàm số $y=g(x)$ có 8 điểm cực trị khi và chỉ khi mỗi phương trình $x^3-3x^2+m=0$ và $x^3-3x^2+m=2$ phải có ba nghiệm phân biệt (khác 0 và khác 2).

Xét hàm số $h(x)=-x^3+3x^2$, ta có $h'(x)=-3x^2+6x$; $h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=h(x)$



Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy điều kiện để mỗi phương trình $-x^3+3x^2=m$ và $-x^3+3x^2=m-2$ phải có ba nghiệm phân biệt (khác 0 và khác 2) là

$0<m-2<m<4 \Leftrightarrow 2<m<4$.

Vậy chỉ có một giá trị nguyên của m thỏa mãn là $m=3$.

Câu 51: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=x^2+16x, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(x^4-8x^2+m\right)$ có đúng 9 điểm cực trị?

A. 16 **B.** 9. **C.** 15. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

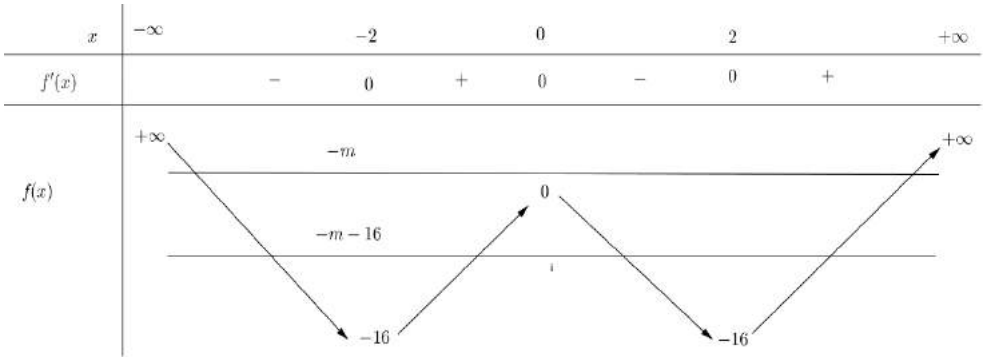
Ta có: $y'=\left(4x^3-16x\right).f'\left(x^4-8x^2+m\right)$

$$\Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^3-16x=0 \\ f'\left(x^4-8x^2+m\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \\ x=2 \\ x^4-8x^2+m=0 \\ x^4-8x^2+m=-16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \\ x=2 \\ x^4-8x^2=-m \quad (*) \\ x^4-8x^2=-m-16 \quad (**) \end{array}\right.$$

Xét hàm số $f(x)=x^4-8x^2 \Rightarrow f'(x)=4x^3-16x;\ f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Nhận xét: $-m-16<-m, \forall m$

Bảng biến thiên:



Để hàm số đã cho có 9 cực trị thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác $-2;0;2$ và phương trình $(**)$ có bốn nghiệm phân biệt. Khi đó

Trường hợp 1: $\begin{cases} -m>0 \\ -m-16<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ m>-16 \end{cases} \Leftrightarrow -16<m<0$.

Trường hợp 2: $m=0$ phương trình $(*)$ có ba nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 0 và phương trình $(**)$ có bốn nghiệm phân biệt thỏa mãn đề bài.

Vậy $m \in \{-15;-14;-13;-12;-11;-10;-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;0\}$.

Câu 52: Cho hai hàm số $g(x); f(x)$, trong đó $g(x)$ là hàm số đa thức bậc ba thỏa mãn $g(x)=f(x+1)$ và $(x-1)g'(x+3)=(x+1)g'(x+2)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(2x^2-4x+3-m\right)$ có đúng ba cực trị.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Theo giả thiết thì $g(x)$ là hàm số bậc ba thỏa mãn $g(x)=f(x+1)$ nên ta có $f(x)$ cũng là hàm số bậc ba. Suy ra $f'(x)=ax^2+bx+c$, do đó $f'(x)=0$ có tối đa hai nghiệm.

Mặt khác $g(x)=f(x+1) \Leftrightarrow g'(x)=f'(x+1)$.

Do đó $(x-1)g'(x+3)=(x+1)g'(x+2) \Leftrightarrow (x-1)f'(x+4)=(x+1)f'(x+3)$.

Với $x=1 \Rightarrow 2f'(4)=0$; $x=-1 \Rightarrow -2f'(3)=0$.

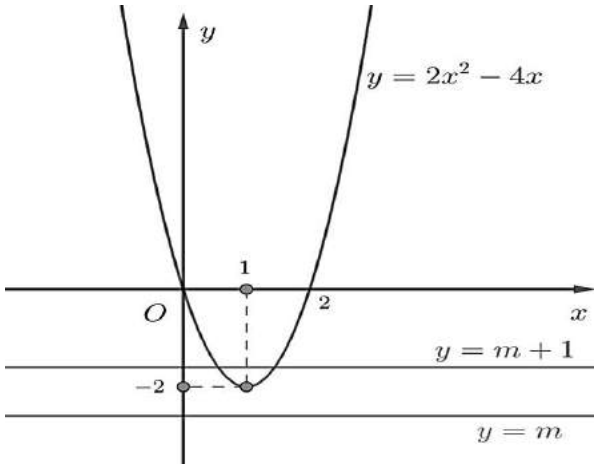
Suy ra $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=4 \end{array}\right.$.

Ta có $y=f\left(2x^2-4x+3-m\right) \Rightarrow y'=(4x-4)f'\left(2x^2-4x+3-m\right)$.

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ 2x^2-4x+3-m=3 \\ 2x^2-4x+3-m=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ 2x^2-4x=m \\ 2x^2-4x=1+m \end{array}\right. .$$

Hàm số $y=f\left(2x^2-4x+3-m\right)$ có đúng ba cực trị khi và chỉ khi $y'=0$ có đúng 3 nghiệm đơn hoặc bội lẻ.

Xét sự tương giao giữa đồ thị hàm số $y=2x^2-4x$ với hai đường $y=m$ và $y=m+1$ như sau:

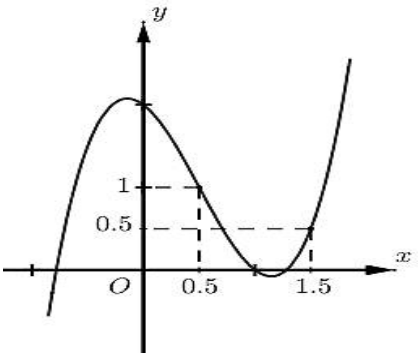


-

Do đó $y'=0$ có đúng 3 nghiệm đơn hoặc bội lẻ khi và chỉ khi $-3<m\le -2$.

Vậy có một giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 53: Cho hàm số $f\left(x\right)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Hàm số $g\left(x\right)=f\left(\dfrac{x^2-1}{2}\right)-2\ln x$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

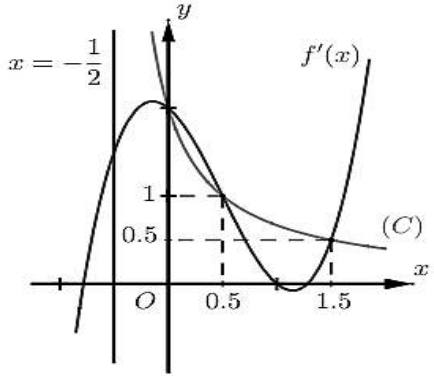
Tập xác định của hàm số $g\left(x\right)$ là $D=\left(0;+\infty\right)$.

Ta có $g'\left(x\right)=2x.f'\left(\dfrac{x^2-1}{2}\right)-\dfrac{2}{x}$. Khi đó $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow f'\left(\dfrac{x^2-1}{2}\right)=\dfrac{1}{x^2}$ (*).

Đặt $t=\dfrac{x^2-1}{2}$. Điều kiện: $\left(t>-\dfrac{1}{2}\right)$ khi đó $x^2=t+\dfrac{1}{2}$.

Phương trình (*) trở thành $f'\left(t\right)=\dfrac{1}{t+\dfrac{1}{2}}\Leftrightarrow f'\left(t\right)=\dfrac{2}{2t+1}$.

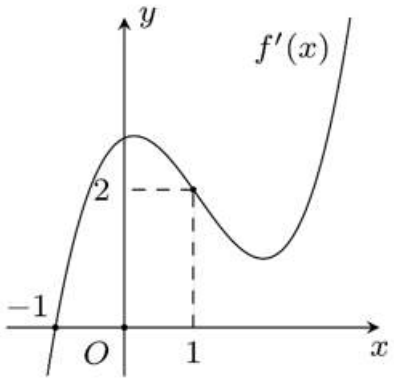
Vẽ đồ thị $\left(C\right)$ của hàm số $y=\dfrac{2}{2x+1}$ với $x>-\dfrac{1}{2}$.



Dựa vào đồ thị ta thấy $f'(t)=\dfrac{2}{2t+1}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=0,5\\t=1,5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=\dfrac{1}{2}\\x^2=1\\x^2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\x=\pm1\\x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện $x>0$, nên phương trình $g'(x)=0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt nên hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 54: Cho $f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị là đường cong như hình dưới đây.



Hỏi hàm số $g(x)=f(\sin x-1)+\dfrac{\cos 2x}{4}$ có bao nhiêu điểm cực trị thuộc khoảng $(0;2\pi)$?

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g(x)=f(\sin x-1)+\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sin^2 x}{2}\Rightarrow g'(x)=\cos x.f'(\sin x-1)-\sin x.\cos x$.

Xét $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\cos x=0 & (1)\\ f'(\sin x-1)-\sin x=0 & (2)\end{array}\right.$

$(1)\Leftrightarrow\cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$. Vì $x\in(0;2\pi)\Rightarrow 0<\dfrac{\pi}{2}+k\pi<2\pi\Leftrightarrow k\in\{0;1\}$.

$(2)\Leftrightarrow f'(\sin x-1)-\sin x=0\Leftrightarrow f'(\sin x-1)=\sin x$.

Đặt $t=\sin x-1, x\in(0;2\pi)\Rightarrow t\in(-2;0)$. Khi đó:

$f'(t)=t+1, t\in(-2;0)\Leftrightarrow t=-1\Leftrightarrow\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Vì $x\in(0;2\pi)\Rightarrow 0<k\pi<2\pi\Leftrightarrow k\in\{1\}$.

Vậy hàm số có 3 điểm cực trị thuộc khoảng $(0;2\pi)$.

Câu 55: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=e^{f(x)}-m.3^{f(x)}$ có đúng 7 điểm cực trị.

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g(x)=e^{f(x)}-3^{f(x)}\Rightarrow g'(x)=\left[e^{f(x)}-3^{f(x)}m\ln 3\right]f'(x)$.

Ta có $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ e^{f(x)}-3^{f(x)}m\ln 3=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \\ x=2 \\ \left(\dfrac{e}{3}\right)^{f(x)}=m\ln 3 \end{array}\right.$.

Để hàm số $g(x)=e^{f(x)}-m.3^{f(x)}$ có đúng 7 điểm cực trị thì phương trình $\left(\dfrac{e}{3}\right)^{f(x)}=m\ln 3$ phải có bốn nghiệm bội lẻ khác -2, 0, 2.

Xét hàm số $h(x)=\left(\dfrac{e}{3}\right)^{f(x)}$.

Ta có $h'(x)=\left(\dfrac{e}{3}\right)^{f(x)}\ln\dfrac{e}{3}f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$h(-2)$	$\searrow$	$h(0)$	$\nearrow$	$h(2)$	$\searrow$	$-\infty$

Do $h(2)>h(-2)$ nên để phương trình $\left(\dfrac{e}{3}\right)^{f(x)}=m\ln 3$ có bốn nghiệm bội lẻ khác -2, 0, 2

$\Leftrightarrow h(0)<m\ln 3<h(-2)\Leftrightarrow\dfrac{1}{\ln 3}\left(\dfrac{e}{3}\right)^5<m<\dfrac{1}{\ln 3}\left(\dfrac{3}{e}\right)^3\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m=1$.

Câu 56: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x^2-2x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f(x^3-3x^2+m)$ có 8 điểm cực trị là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x)=(3x^2-6x)f'(x^3-3x^2+m)=3x(x-2)f'(x^3-3x^2+m)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\f'(x^3-3x^2+m)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\x^3-3x^2+m=0\\x^3-3x^2+m=2\\x^3-3x^2+m=1\,(L)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\x^3-3x^2=-m\quad(1)\\x^3-3x^2=-m+2\quad(2)\end{array}\right.$$

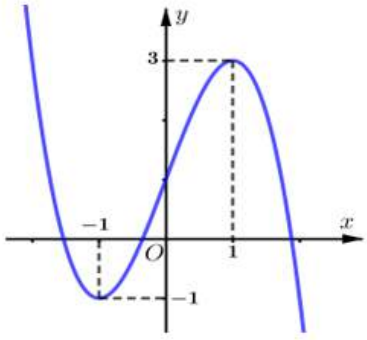
Xét $h(x)=x^3-3x^2\Rightarrow h'(x)=3x^2-6x;\ h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

Để hàm số $g(x)$ có 8 điểm cực trị thì phương trình $(1),(2)$ phải có tổng 6 nghiệm phân biệt khác 0 và 2. Từ bảng biến thiên $h(x)$ ta có:

$$\begin{cases}-4<-m<0\\-4<-m+2<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<m<4\\2<m<6\end{cases}\Leftrightarrow 2<m<4\Rightarrow m=3$$

Câu 57: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ là hàm số bậc ba và $f'(x)$ có đồ thị là đường cong như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=f(2x-1)+mx+3$ có ba điểm cực trị?



A. 5. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Xét $f'(x)=ax^3+bx^2+cx+d,\ (a\neq 0)$

Ta có: $\begin{cases} f'(0)=1 \Rightarrow d=1 \\ f'(-1)=-1 \Rightarrow -a+b-c+d=-1 \\ f'(1)=3 \Rightarrow a+b+c+d=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=1 \\ -a+b-c=-2 \\ a+b+c=2 \end{cases}$

$f''(x)=3ax^2+2bx+c$ có hai nghiệm $x=1,\ x=-1$ nên $\begin{cases} -\dfrac{2b}{3a}=0 \Rightarrow b=0 \\ \dfrac{c}{3a}=-1 \Rightarrow c=-3a \end{cases}$

Do đó $a-3a=2 \Rightarrow a=-1 \Rightarrow c=3 \Rightarrow f'(x)=-x^3+3x+1$

$\Rightarrow f'(2x-1)=-(2x-1)^3+3(2x-1)+1 \Rightarrow f''(2x-1)=-6(2x-1)^2+6$

$\Rightarrow f''(2x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=1 \Leftrightarrow x=1 \\ 2x-1=-1 \Leftrightarrow x=0 \end{array}\right.$

$y=f(2x-1)+mx+3 \Rightarrow y'=2f'(2x-1)+m$

Để hàm số $y=f(2x-1)+mx+3$ có ba điểm cực trị thì đồ thị hàm số $y=f'(2x-1)$ cắt đường thẳng $y=-\dfrac{m}{2}$ tại ba điểm phân biệt.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f''(2x-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(2x-1)$	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

$\Rightarrow -1<-\dfrac{m}{2}<3 \Leftrightarrow -6<m<2 \Rightarrow m \in \{-5;-4;-3;-2;-1;0;1\}$

Vậy có 7 giá trị nguyên của m thoả đề.

Câu 58: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=\left(x^3-3x-m+1\right)^2$ có 5 điểm cực trị.

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

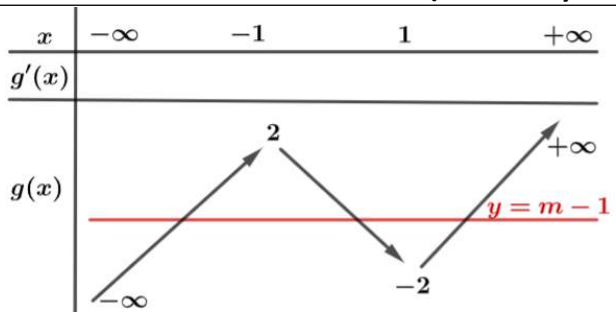
Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=5\left(3x^2-3\right)\left(x^3-3x-m+1\right)$.

Cho $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x^3-3x=m-1\ (*) \end{array}\right.$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (*)$ có 3 nghiệm phân biệt khác ± 1.

Xét hàm số $g(x)=x^3-3x$ có $g'(x)=3x^2-3;\ g'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên suy ra $-2<m-1<2\Rightarrow -1<m<3$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 59: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2+2x$ trên $\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(x^2-8x+m\right)$ có 5 điểm cực trị dương?

A. 0 **B.** 14 **C.** 13 **D.** 12

Lời giải

Chọn C

$g(x)=f\left(x^2-8x+m\right)\Rightarrow g'(x)=2(x-4)f'\left(x^2-8x+m\right)$.

$$\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{c}x-4=0\\x^2-8x+m=0\\x^2-8x+m=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{c}x-4=0\\x^2-8x=-m\quad(1)\\x^2-8x=-2-m(2)\end{array}\right.$$

Để $g(x)=f\left(x^2-8x+m\right)$ có 5 điểm cực trị dương khi và chỉ khi (1), (2) có 4 nghiệm dương phân biệt khác 4.

Xét hàm số $h(x)=x^2-8x$ với $x>0$.

Ta có bảng biến thiên của $h(x)=x^2-8x$:

x	0		4		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	0	$\searrow$	-16	$\nearrow$	$+\infty$

Để (1), (2) có 4 nghiệm dương phân biệt khác 4 $\Leftrightarrow\begin{cases}-m<0\\-2-m>-16\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<14$.

$\Rightarrow m\in\{1;2;...;13\}$ nên có tất cả 13 giá trị tham số m.

Câu 60: Cho hàm số $f(x)=x^2+(a+x)\sqrt{x^2+1}+ax$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $a\in(-20;20)$ sao cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có cùng một điểm cực trị $A(x_0;y_0)$ và $y_0<-5$?

A. 15. **B.** 19. **C.** 16. **D.** 39.

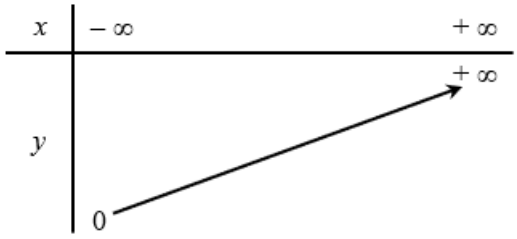
Lời giải

Chọn B

Ta có: $f(x)=(a+x)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right), g>0\ \forall x$; $f'(x)=g(x)+\dfrac{(a+x)g(x)}{\sqrt{x^2+1}}$.

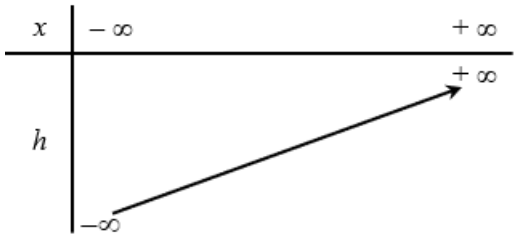
$f'(x)=0 \Leftrightarrow -a = x+\sqrt{x^2+1}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f'(x)=0$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow a<0$.



$y_0 < -5 \Leftrightarrow f(x) < -5$ có nghiệm.

$\Leftrightarrow a < \dfrac{6x-5\sqrt{x^2+1}}{h}$ có nghiệm (luôn đúng)



Vậy $a \in \{-19;...;-1\}$

Dạng 5: Cực trị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối

❖ **Một số kiến thức cần nắm:**

➢ **Cách vẽ đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$:**

- Cho đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$. Đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ được vẽ bằng cách:
- Giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ nằm phía trên trục hoành.
- Lấy đối xứng phần đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ nằm phía dưới trục hoành qua trục hoành đồng thời xóa phần phía dưới trục hoành.

➢ **Tính chất đặc biệt của đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$:**

- Số cực trị của hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ bằng tổng số cực trị hàm số $y=f\left(x\right)$ và số điểm cắt của $y=f\left(x\right)$ và trục Ox (không tính điểm tiếp xúc).
- Hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ là hàm số chẵn đồ thị đối xứng qua trục tung. Đồ thị được vẽ bằng cách:
- Giữ nguyên đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right),\left(C_1\right)$ ứng với $x\ge 0$.
- Với $x<0$ được vẽ bằng cách lấy đối xứng phần đồ thị $\left(C_1\right)$ qua trục tung.
- Gọi $\left(C_1\right)$ có số điểm cực trị là α.
- Nếu $\left(C_1\right)$ cắt trục tung thì số điểm cực trị của $y=f\left(\left|x\right|\right)$ là $2\alpha+1$ (một điểm cực trị là $x=0$)
- Nếu $\left(C_1\right)$ không cắt trục tung thì số điểm cực trị của $y=f\left(\left|x\right|\right)$ là 2α.
- Số điểm cực trị của hàm số $f\left(\left|x\right|\right)$ là: $2a+1$ với a là số điểm cực trị dương của hàm số $y=f\left(x\right)$ (số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ nằm phía bên phải trục tung).
- Số điểm cực trị (nếu có) của hàm số $y=f\left(ax+b\right)+c$ bằng số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x\right)$.

➢ Đồ thị hàm số có dạng $y=\left|u\left(x\right)\right|.v\left(x\right)$

- Từ đồ thị $\left(C\right):y=u\left(x\right).v\left(x\right)$ suy ra đồ thị $\left(C'\right):y=\left|u\left(x\right)\right|.v\left(x\right)$.
- Ta có: $y=\left|u\left(x\right)\right|.v\left(x\right)=\begin{cases}u\left(x\right).v\left(x\right)\ \ neu\ \ u\left(x\right)\ge 0\\-u\left(x\right).v\left(x\right)\ neu\ u\left(x\right)<0\end{cases}$

➢ Cách vẽ đồ thị hàm số $\left(C'\right)$ từ đồ thị $\left(C\right)$:

- Giữ nguyên miền đồ thị $u\left(x\right)\ge 0$ của đồ thị $\left(C\right):y=f\left(x\right)$.
- Bỏ phần đồ thị miền $u\left(x\right)<0$ của $\left(C\right)$, lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox.

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Hàm số $y=\left|x^3+3x^2\right|$ đạt cực tiểu tại

A. $x=0$. **B.** $x=4$. **C.** $x=0$ và $x=a<-3$. **D.** $x=-3$ và $x=0$.

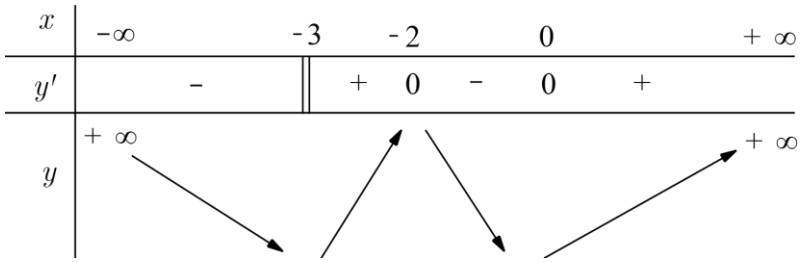
Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y=\left|x^3+3x^2\right|=\begin{cases}x^3+3x^2 \text{ khi } x\geq -3\\ -x^3-3x^2 \text{ khi } x<-3\end{cases}$.

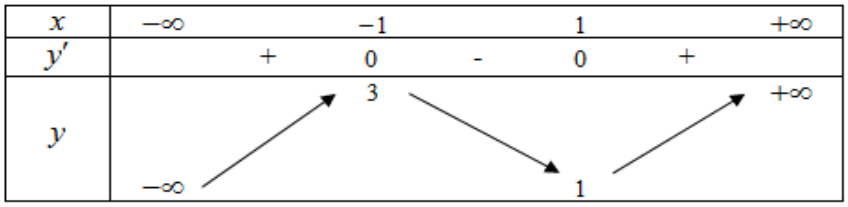
$y'=\begin{cases}3x^2+6x \text{ khi } x>-3\\ -3x^2-6x \text{ khi } x<-3\end{cases}$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên.



Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x=-3$ và $x=0$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f(x)-2\right|$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f(x)-2\right|$ bằng $m+n$.

m là số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)-2\Rightarrow m=2$.

n là số nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x)=2\Rightarrow n=3$.

Suy ra, số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f(x)-2\right|$ bằng 5.

Câu 3: Hàm số $y=\left|(x-1)^3(x+1)\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y=(x-1)^3(x+1)$

Ta có đạo hàm $y'=3(x-1)^2(x+1)+(x-1)^3=(x-1)^2(4x+2)$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=0\\ x=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow y=-\dfrac{27}{16}\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{27}{16}$	↗		↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên hàm số $y=f(x)$ Suy ra hàm số $y=\left|f(x)\right|=\left|(x-1)^3(x+1)\right|$ có 3 cực trị.

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m^2\right|$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 5. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y=3x^4-4x^3-12x^2+m^2\Rightarrow y'=12x^3-12x^2-24x$

$$y'=12x^3-12x^2-24x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=0\\ x=2\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$-5+m^2$	↗	m^2	↘	$-32+m^2$	↗	$+\infty$

Hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m^2\right|$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^2<0\\ 5<m^2<32\end{array}\right.\Leftrightarrow\sqrt{5}<|m|<\sqrt{32}$

Kết hợp điều kiện $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-3;-4;-5;3;4;5\}$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-2)^{2019}\left(x^2-x-2\right)^{2020}(x+3)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $f\left(|x|\right)$ là:

A. 5. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

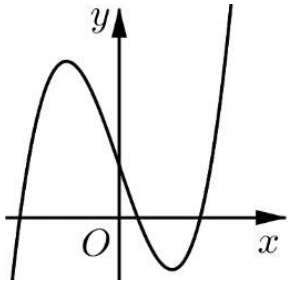
Ta có: $f'(x)=0\Leftrightarrow(x-2)^{2019}\left(x^2-x-2\right)^{2020}(x+3)^3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-1\\ x=-3\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y		↗		↘		↘		↗	

Từ bảng biến thiên: đồ thị của hàm số $f\left(|x|\right)$ được giữ lại phần $x>0$ rồi lấy đối xứng qua Oy . Khi đó hàm số có 3 cực trị.

Câu 6: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình bên.



Hàm số $g\left(x\right)=f\left(|x|\right)+2021$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g'\left(x\right)=\left(f\left(|x|\right)+2021\right)'=\dfrac{x}{|x|}f'\left(|x|\right)$.

$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\dfrac{x}{|x|}f'\left(|x|\right)=0$. Ta có: $g'\left(x\right)$ không xác định tại điểm $x=0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		x_3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘		↗		↗		↘		↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\left[\begin{array}{l}|x|=x_1\\|x|=x_2\\|x|=x_3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm x_2\\x=\pm x_3\end{array}\right.$

x	$-\infty$		$-x_3$		$-x_2$		0		x_2		x_3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số có 5 điểm cực trị.

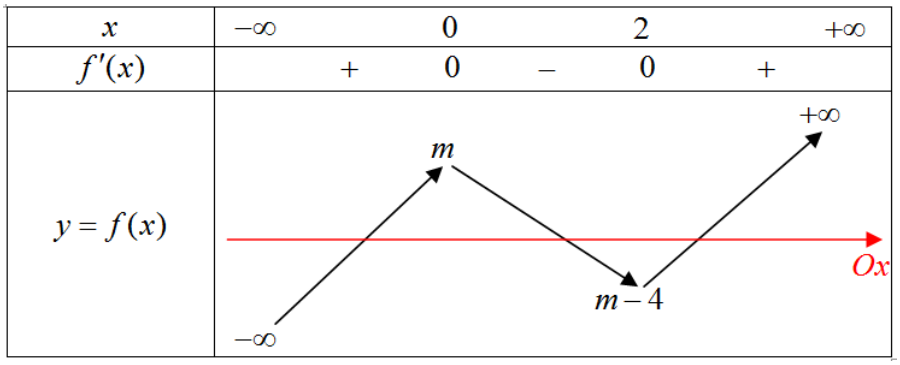
Câu 7: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị của hàm số $y=\left|x^3-3x^2+m\right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

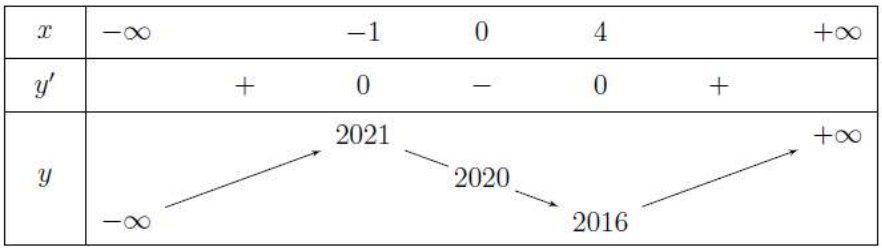
Xét hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2+m$ có bảng biến thiên như sau:



Nhận xét: Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\left|f(x)\right|$ bằng số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ cộng với số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với trục Ox **(giao điểm này không trùng với điểm cực trị)**.

Như vậy: Đồ thị hàm số $y=g(x)=\left|x^3-3x^2+m\right|$ có 5 điểm cực trị khi $m(m-4)<0$ $\Leftrightarrow 0<m<4$. Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{1;2;3\}$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f\left(\left|x\right|\right)-2019\right|$ là

A. 5. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Xét $h(x)=f(x)-2019$ có $h'(x)=f'(x)$; $h'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=4\end{array}\right.$

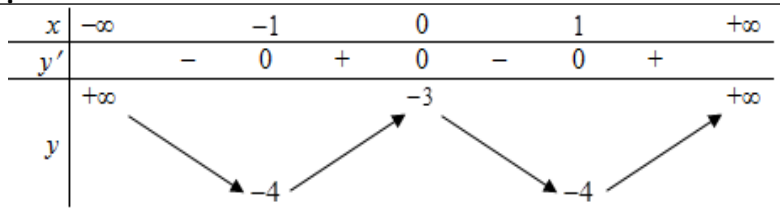
Phương trình giao điểm của đồ thị hàm số $y=h(x)$ với trục hoành:

$$f(x)-2019=0\Leftrightarrow f(x)=2019\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a<-1\\x=b(0<b<4)\\x=c>4\end{array}\right.$$

Vậy hàm số $y=\left|h(x)\right|$ có 3 điểm cực trị dương.

Vậy số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|h(\left|x\right|)\right|$ là $2.3+1=7$.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như sau. Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f(x)\right|$ là



A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ bằng tổng số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x\right)$ và số nghiệm đơn và bội lẻ của phương trình $f\left(x\right)=0$.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có 3 cực trị và phương trình $f\left(x\right)=0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Suy ra đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 10: Cho hàm số $f\left(x\right)=\left|2x^4-8x^3-16x^2+1-m\right|$ **(*m* là tham số)**. Biết rằng khi m thay đổi thì số điểm cực trị của hàm số có thể là a hoặc b hoặc c. Giá trị $a+b+c$ bằng:

A. 12. **B.** 16. **C.** 15. **D.** 13.

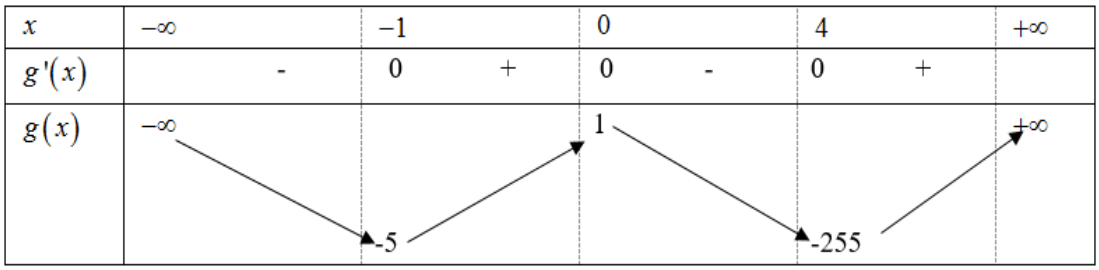
Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g\left(x\right)=2x^4-8x^3-16x^2+1$.

Ta có $g'\left(x\right)=8x^3-24x-32x$. $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x=4\end{array}\right.$. Suy ra hàm số $g\left(x\right)$ có 3 điểm cực trị

$\Rightarrow y=g\left(x\right)-m$ cũng có 3 điểm cực trị $\forall m\in\mathbb{R}$.



Số điểm cực trị của hàm số $f\left(x\right)$ bằng tổng số điểm cực trị của hàm số $y=g\left(x\right)-m$ và số giao điểm **(giao điểm không trùng với điểm cực trị)** của đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)-m$ với trục hoành.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra

Nếu $m\le-255$ hàm số $f\left(x\right)$ có 3 điểm cực trị.

Nếu $\left[\begin{array}{l}-255<m\le-5\\m\ge1\end{array}\right.$ hàm số $f\left(x\right)$ có 5 điểm cực trị.

Nếu $-5<m<1$ hàm số $f\left(x\right)$ có 7 điểm cực trị.

Vậy $f\left(x\right)$ có 3 điểm cực trị, hoặc có 5 điểm cực trị, hoặc có 7 điểm cực trị.

Suy ra $a+b+c=15$.

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$ có 7 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+m$ có ba điểm cực trị là nghiệm của phương trình

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 12x^3-12x^2-24x=0\Leftrightarrow 12\left(x^3-x^2-12x\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x=2\end{array}\right..$$

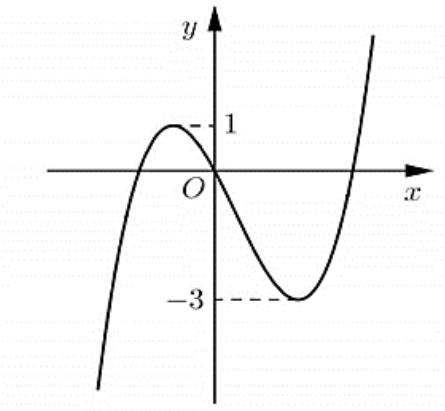
Phương trình $f(x)=0$ có tối đa bốn nghiệm thực. Do đó hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $f(x)=0$ có 4 nghiệm thực phân biệt.

$\Leftrightarrow 3x^4-4x^3-12x^2=-m$ có 4 nghiệm thực phân biệt.

Lập bảng biến thiên của hàm số $y=3x^4-4x^3-12x^2$, ta có giá trị cần tìm của m thỏa mãn là $-5<-m<0\Leftrightarrow 0<m<5\Rightarrow m\in\{1;2;3;4\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 2: Cho hàm số bậc ba có đồ thị $y=f(x)$ như hình vẽ dưới đây. Tất cả các số thực của tham số m để hàm số $y=\left|f(x)+m\right|$ có 5 điểm cực trị là



A. $\left[\begin{array}{l}m\le -1\\m\ge 3\end{array}\right.$. **B.** $-1<m<3$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=3\end{array}\right.$. **D.** $1<m<3$.

Lời giải

Chọn B

Yêu cầu bài toán tương đương với $f(x)+m=0\Leftrightarrow -m=f(x)$ có tổng số nghiệm đơn và bội lẻ bằng $3\Leftrightarrow -3<-m<1\Leftrightarrow -1<m<3.$

Câu 3: Cho hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$ có ba điểm cực trị $x=-1;\ x=0;\ x=2$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=f\left(\left|x+m\right|\right)$ có 7 điểm cực trị.

A. $m<-1$. **B.** $m<0$. **C.** $-1<m<2$. **D.** $m<2$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=f\left(\left|x+m\right|\right)$ có 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow y=f\left(x+m\right)$ có 3 điểm cực trị dương.

Các điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x+m\right)$ là $\left[\begin{array}{l}x+m=-1\\x+m=0\\x+m=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1-m\\x=-m\\x=2-m\end{array}\right.$

Vậy ta có điều kiện là $\left\{\begin{array}{l}-1-m>0\\-m>0\\2-m>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m<-1\\m<0\\m<2\end{array}\right.\Leftrightarrow m<-1$

Câu 4: Cho hàm số $y=\left|x\right|^3-mx+5$. Gọi a là số điểm cực trị của hàm số đã cho. Mệnh đề nào dưới đây đúng

A. $a=0$. **B.** $a\le 1$. **C.** $1<a\le 3$. **D.** $a>3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y=\left\{\begin{array}{l}x^3-mx+5\left(x\ge 0\right)\\-x^3-mx+5\left(x<0\right)\end{array}\right.\Rightarrow y'=\left\{\begin{array}{l}3x^2-m\left(x>0\right)\\-3x^2-m\left(x<0\right)\end{array}\right.$ và hàm số không có đạo hàm tại $x=0$

Nếu $m=0\Rightarrow y'=\left\{\begin{array}{l}3x^2>0\left(x>0\right)\\-3x^2<0\left(x<0\right)\end{array}\right.$

đổi dấu từ âm sang dương khi qua điểm x = 0 nên hàm số có duy nhất 1 điểm cực trị là x = 0

Nếu $m>0\Rightarrow y'=\left\{\begin{array}{l}3x^2-m\left(x>0\right)\\-3x^2-m\left(x<0\right)\end{array}\right.$; $y'=0\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{m}{3}}$

y' chỉ đổi dấu khi đi qua $x=\sqrt{\frac{m}{3}}$. Nên hàm số có duy nhất 1 điểm cực trị là $x=\sqrt{\frac{m}{3}}$

Nếu $m<0\Rightarrow y'=\left\{\begin{array}{l}3x^2-m\left(x>0\right)\\-3x^2-m\left(x<0\right)\end{array}\right.$; $y'=0\Leftrightarrow x=-\sqrt{\frac{-m}{3}}$

y' chỉ đổi dấu khi đi qua $x=-\sqrt{\frac{-m}{3}}$ nên hàm số có duy nhất 1 điểm cực trị là $x=-\sqrt{\frac{-m}{3}}$

Vậy với mọi m, hàm số có duy nhất 1 điểm cực trị.

Câu 5: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\left|x\right|^3-\left(2m+1\right)x^2+3m\left|x\right|-5$ có 5 điểm cực trị:

A. $\left(-\infty;\frac{1}{4}\right)\cup\left(1;+\infty\right)$. **B.** $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)\cup\left(1;+\infty\right)$. **C.** $\left(1;+\infty\right)$. **D.** $\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup\left(1;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn D

Yêu cầu bài toán tương đương với hàm số $y=x^3-(2m+1)x^2+3mx-5$ có hai điểm cực trị dương, tức là phương trình $y'=f'(x)=3x^2-2(2m+1)x+3m=0$ có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=(2m+1)^2-9m>0\\ S=\dfrac{2(2m+1)}{3}>0\\ P=\dfrac{3m}{3}>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>1\\ 0<m<\dfrac{1}{4}\end{array}\right.$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=x^3-(2m-1)x^2+(2-m)x+2$. Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị:

A. $-\dfrac{5}{4}<m<2$. **B.** $\dfrac{5}{4}<m<2$. **C.** $\dfrac{1}{2}<m<2$. **D.** $-2<m<\dfrac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Yêu cầu bài toán tương đương với hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị dương, tức là phương trình $y'=f'(x)=3x^2-2(2m-1)x+2-m=0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=(2m-1)^2-3(2-m)>0\\ S=\dfrac{2(2m-1)}{3}>0\\ P=\dfrac{2-m}{3}>0\end{cases}\Leftrightarrow\frac{5}{4}<m<2.$$

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=|x|^3-(2m+1)x^2+3m|x|-5$ có 3 điểm cực trị:

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $\left[0;\dfrac{1}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Yêu cầu bài toán tương đương với hàm số $y=f(x)=x^3-(2m+1)x^2+3mx-5$ có đúng một điểm cực trị dương, tức là phương trình $y'=f'(x)=3x^2-2(2m+1)x+3m=0$ có hai nghiệm thỏa mãn $x_1\le 0<x_2\Leftrightarrow m\le 0$.

Câu 8: Cho hàm số: $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4-mx^3+\dfrac{3}{2}(m^2-1)x^2+(1-m^2)x+2019$ với m là tham số thực. Biết rằng hàm số $y=f(|x|)$ có số điểm cực trị lớn hơn 5 khi $a<m^2<b+2\sqrt{c}\,(a,b,c\in\mathbb{R})$. Giá trị $T=a+b+c$ bằng

A. 6. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x+1-m^2$ là một đa thức bậc ba có tối đa 3 nghiệm, vậy hàm số $y=f(|x|)$ có số điểm cực trị lớn hơn 5 khi và chỉ khi $f(x)$ có 3 điểm cực trị dương, tức là $f'(x)=0$ có 3 nghiệm dương phân biệt.

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow x^3-3mx^2+3(m^2-1)x+1-m^2=0$ có ba nghiệm dương phân biệt.

Xét hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x+1-m^2$ có

$$y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6mx+3(m^2-1)=m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m-1\\x=m+1\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x_{cd}=m-1, y_{cd}=m^3-m^2-3m+3\\x_{ct}=m+1, y_{ct}=m^3-m^2-3m-1\end{array}\right.$$

Do đó phương trình $y=0$ có 3 nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi:

$$\left\{\begin{array}{l}x_{cd>0}\\y(0)<0\\y_{cd}.y_{ct}<0\end{array}\right.\left\{\begin{array}{c}m-1>0\\1-m^2<0\\(m^3-m^2-3m+3).(m^3-m^2-3m+1)<0\end{array}\right.\Leftrightarrow\sqrt{3}<m<1+\sqrt{2}\Leftrightarrow 3<m^2<3+2\sqrt{2}$$

Vì vậy $a=3$, $b=3$, $c=2$. Nên $a+b+c=8$.

Câu 9: Có bao nhiêu số nguyên $m\in[-10;10]$ để hàm số $y=|mx^3-3mx^2+(3m-2)x+2-m|$ có 5 điểm cực trị?

A. 7. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 11.

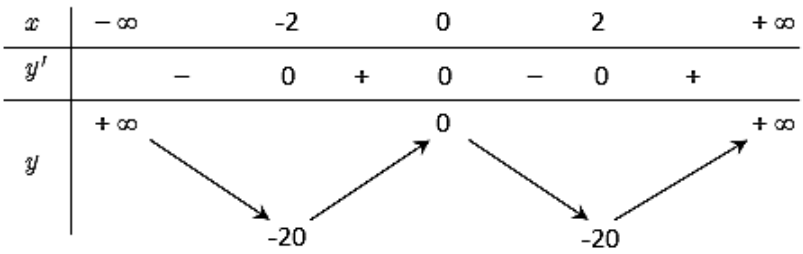
Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=|mx^3-3mx^2+(3m-2)x+2-m|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y=mx^3-3mx^2+(3m-2)x+2-m$ có hai điểm cực trị và phương trình $mx^3-3mx^2+(3m-2)x+2-m=0\Leftrightarrow(x-1)(mx^2-2mx+m-2)=0$ có 3 nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\neq 0\\\Delta'=m^2-m(m-2)>0\Leftrightarrow m>0\\m-2m+m-2\neq 0\end{array}\right.$

Vậy có 10 giá trị m thỏa mãn ycbt.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau:



Có ban nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y=|f(x)+m|$ có 7 điểm cực trị?

A. 0. **B.** 21. **C.** 18. **D.** 19.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị là $x=-2;x=0;x=2$ nên hàm số $y=f(x)+m$ cũng có 3 điểm cực trị $x=-2;x=0;x=2$.

Vậy điều kiện để hàm số $y=|f(x)+m|$ có 7 điểm cực trị là phương trình $f(x)+m=0\Leftrightarrow f(x)=-m$ có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -20<-m<0\Leftrightarrow 0<m<20$.

Vậy có 19 giá trị m thỏa mãn ycbt.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\left(x^3-2x^2\right)\left(x^3-2x\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=|f(1-2018x)|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị

A. 9. **B.** 2022. **C.** 11. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x)=\left(x^3-2x^2\right)\left(x^3-2x\right)$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0(boi3)\\x=2\\x=\sqrt{2}\\x=-\sqrt{2}\end{array}\right.$

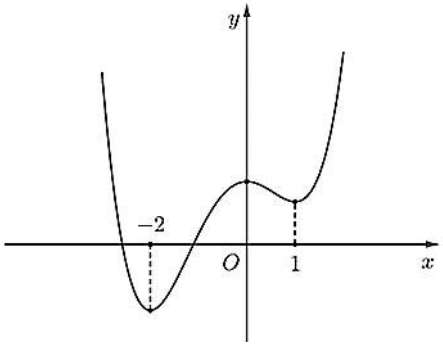
$\Rightarrow f'(1-2018x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-2018x=0(boi3)\\1-2018x=2\\1-2018x=\sqrt{2}\\1-2018x=-\sqrt{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1/2018(boi3)\\x=-1/2018\\x=\left(1-\sqrt{2}\right)/2018\\x=\left(1+\sqrt{2}\right)/2018\end{array}\right.$

Suy ra: Hàm số $f(1-2018x)$ có 4 điểm cực trị

Phương trình $f(1-2018x)=0$ có nhiều nhất 5 nghiệm

Vậy hàm số $y=|f(1-2018x)|$ có nhiều nhất $4+5=9$ điểm cực trị.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Các điểm $x=-2;x=0;x=1$ là các điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f(|x+1|-3)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



A. 5. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

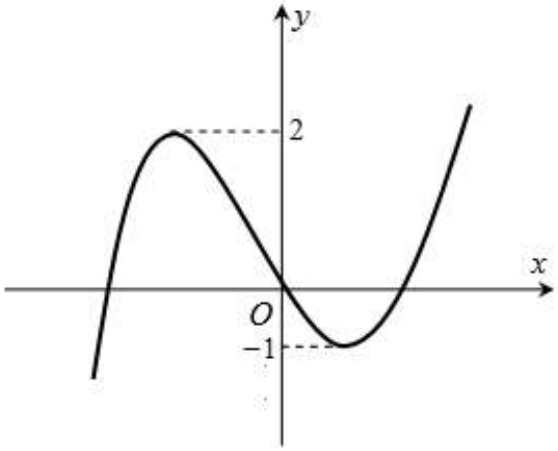
Ghi chú: Hàm số $y=f(|x+m|+n)$ có tất cả $2a+1$ điểm cực trị, trong đó a là số điểm cực trị lớn hơn $-m$ của hàm số $y=f(x+m+n)$.

Ta có hàm số $y=f(x+1-3)=f(x-2)$ có các điểm cực trị là:

$x-2=-2; x-2=0; x-2=1 \Leftrightarrow x=0; x=2; x=3$

Hàm số này có 3 điểm cực trị lớn hơn -1.Do đó hàm số $y=f\left(|x+1|-3\right)$ có tổng cộng 2.3+1=7 điểm cực trị.

Câu 13: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|2f\left(x\right)-3m\right|$ có 5 điểm cực trị là:

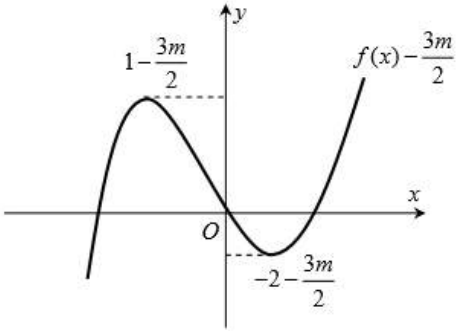


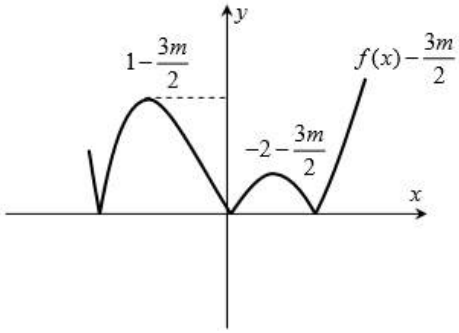
A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=\left|2f\left(x\right)-3m\right|=2\left|f\left(x\right)-\frac{3m}{2}\right|$ có cùng số điểm cực trị với hàm số $y=g\left(x\right)=\left|f\left(x\right)-\frac{3m}{2}\right|$.





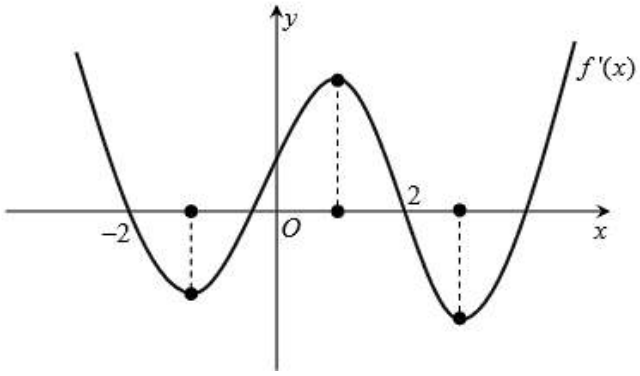
Thực hiện biến đổ đồ thị:

$$f\left(x\right)\xrightarrow[mot\_doan\_3\_don\_vi]{Tinh\_tien\_len\_tren} f\left(x\right)-\frac{3m}{2}\xrightarrow{lay\_doi\_xung\_qua\_Ox}\left|f\left(x\right)-\frac{3m}{2}\right|.$$

Hàm số $\left(f\left(x\right)-\frac{3m}{2}\right)$ có hai điểm cực trị tương ứng với hai giá trị cực trị là $\begin{cases}1\to\left(-2-\frac{3m}{2}\right)\\1\to\left(1-\frac{3m}{2}\right)\end{cases}$.

Để hàm số $y=g(x)=\left|f(x)-\frac{3m}{2}\right|$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị hàm số $\left(f(x)-\frac{3m}{2}\right)$ phải cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $\Rightarrow\begin{cases}\left(-2-\frac{3m}{2}\right)<0\\ \left(1-\frac{3m}{2}\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{4}{3}<m<\frac{2}{3}\Rightarrow m=\{1;0\}$.

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y=\left|f\left(x^3-3x\right)+2\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?



A. 16. **B.** 17. **C.** 19. **D.** 18

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x\right)+2$ có $g'(x)=\left(3x^2-3\right)f'\left(x^3-3x\right)$.

Phương trình đạo hàm $g'(x)=\left(3x^2-3\right)f'\left(x^3-3x\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2-3=0\Leftrightarrow x=\pm 1.\\ f'\left(x^3-3x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3-3x=-2\Leftrightarrow(x-1)^2(x-2)=0\\ x^3-3x=a\in(-2;0)\\ x^3-3x=2\Leftrightarrow(x+1)^2(x-2)=0\\ x^3-3x=b>2.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Suy ra hàm số $y=f\left(x^3-3x\right)+2$ có 8 điểm cực trị có tối đa 17 điểm cực trị.

Câu 15: Biết phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0\ (a\neq 0)$ có đúng hai nghiệm thực. Hàm số $y=\left|ax^3+bx^2+cx+d\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ghi chú: *Hàm số* $y=|f(x)|$ *có* $m+n$ *điểm cực trị*

Trong đó m *là số điểm cực trị của hàm số* $y=f(x)$, n *là số nghiệm đơn và nghiệm bội lẻ của phương trình* $f(x)=0$.

Vì phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0\ (a\neq 0)$ có đúng hai nghiệm thực nên biểu thức có dạng:

$u=ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_1)^2(x-x_2)$

$u'=a(x-x_1)^2+2a(x-x_1)(x-x_2)=(x-x_1)(ax-ax_1+2ax-2ax_2)$.

Phương trinh $u'=0$ có hai nghiệm đơn nên ta suy ra hàm số ax^3+bx^2+cx+d có hai điểm cực trị. Từ đó hàm số $y=\left|ax^3+bx^2+cx+d\right|$ có tất cả $2+1=3$ cực trị.

Câu 16: Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20;20)$ để hàm số $y=\left|x^2-2x+m\right|+2x+1$ có ba điểm cực trị?

A. 17. **B.** 16. **C.** 19. **D.** 18.

Lời giải

Chọn C

Trường hợp 1: Phương trình $x^2+2x+m=0$ vô nghiệm.

Nếu $x^2+2x+m<0\ \forall x$ (vô lí)

Nếu $x^2+2x+m>0\ \forall x$

Khi đó $y=x^2-2x+m+2x+1=x^2+m+1$. Hàm số này có 1 điểm cực trị tại $x=0$. **Loại**

Trường hợp 2: Phương trình $x^2+2x+m=0$ có nghiệm.

Nếu phương trình có nghiệm kép thì x^2+2x+m có dạng $(x-x_0)^2\geq 0\forall x$. Lúc này hàm số cũng có 1 điểm cực trị tại $x=0$. **Loại**

Nếu phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1<x_2\Leftrightarrow\Delta'>0\Leftrightarrow 1-m>0\Leftrightarrow m<1$

$$y'=\frac{(2x-2)(x^2-2x+m)}{\left|x^2-2x+m\right|}+2$$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{cases}2x-2+2=0\\x^2-2x+m>0\end{cases}\begin{cases}-(2x-2)+2=0\\x^2-2x+m<0\end{cases}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{cases}x=0\\x^2-2x+m>0\end{cases}\begin{cases}x=2\\x^2-2x+m<0\end{cases}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{cases}x=0\\m>0\end{cases}\begin{cases}x=2\\m<0\end{cases}\right.$$

Khi $0<m<1$, rõ ràng không tồn tại số nguyên

Khi $m<0$ ta có bảng xét dấu của y' như sau:

Vì $x_1+x_2=2;x_1x_2=m<0$ nên $x_1<2<x_2$.

x	$-\infty$		x_1		2		x_2		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

Lúc này hàm số có 3 điểm cực trị. Vậy $m\in\{-19;...;-1\}$.Ta có 19 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 17: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=\left|x^3+(2m-1)x^2+(2m^2-2m-9)x-2m^2+9\right|$ có 5 điểm cực trị.

A. 7. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $x^3+(2m-1)x^2+(2m^2-2m-9)x-2m^2+9=0$ (1)

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+2mx+2m^2-9)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2+2mx+2m^2-9=0 \end{array}\right.$

Ycbt $\Leftrightarrow$ (1) có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=m^2-(2m^2-9)>0 \\ 1+2m+2m^2-9\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3<m<3 \\ m\neq \dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2} \end{cases} \Rightarrow m\in\{-2,-1,0,1,2\}.$

Vậy có 5 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 18: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=|x|^3-3mx^2+3(m^2-4)|x|+1$ có 3 điểm cực trị.

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ycbt $\Leftrightarrow y=x^3-3mx^2+3(m^2-4)x+1$ có đúng một điểm cực trị dương

$\Leftrightarrow y'=3x^2-6mx+3(m^2-4)=0$ có đúng một nghiệm dương

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m-2 \\ x=m+2 \end{array}\right.$ có đúng một nghiệm dương

$\Leftrightarrow m-2\le 0<m+2 \Leftrightarrow -2<m\le 2 \Rightarrow m\in\{-1,0,1,2\}$.

Vậy có 4 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 19: Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-10;10)$ để hàm số $y=|x|^3-3mx^2+3(m^2-4)|x|+1$ có 5 điểm cực trị.

A. 3. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

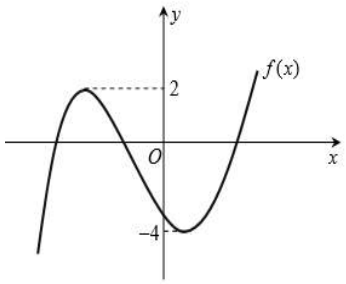
Ycbt $\Leftrightarrow y=x^3-3mx^2+3(m^2-4)x+1$ có đúng hai điểm cực trị dương

$\Leftrightarrow y'=3x^2-6mx+3(m^2-4)=0$ có đúng hai nghiệm dương

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m-2 \\ x=m+2 \end{array}\right.$ có đúng hai nghiệm dương $\Leftrightarrow m-2>0 \Leftrightarrow m>2 \Rightarrow m\in\{3,4,...,9\}$.

Vậy có 7 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2021;2012]$ để hàm số $y=\left|f^2(x)-2f(x)+m+4\right|$ có đúng 5 điểm cực trị?



A. 2104. **B.** 2016. **C.** 2105. **D.** 2017

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x)=f^2(x)-2f(x)+m+4\Rightarrow g'(x)=f'(x).(2f(x)-2).$

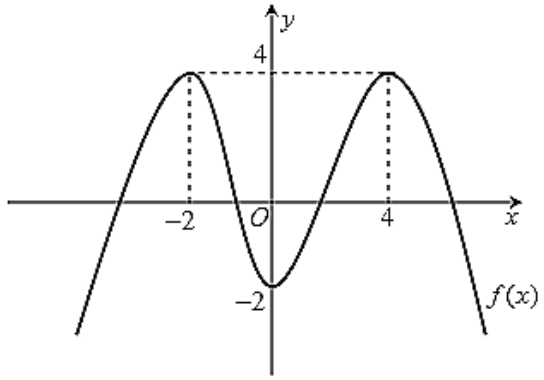
Cho $g'(x)=f'(x).(2f(x)-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\Rightarrow co\_2\_cuc\_tri\\f(x)=1\Rightarrow co\_3\_cuc\_tri\end{array}\right.$.

$\Rightarrow y=g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Để hàm số $y=|g(x)|$ có 5 điểm cực trị thì phương trình $g(x)=f^2(x)-2f(x)+m+4$ vô nghiệm.

$\Rightarrow \Delta'=1-m-4=-m-3\le 0\Leftrightarrow m\ge -3\rightarrow -3\le m\le 2012\Rightarrow$ có 2016 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 21: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=|4f^2(x)+8f(x)+m-1|$ có đúng 15 điểm cực trị?



A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y=g(x)=4f^2(x)+8f(x)+m-1\Rightarrow g'(x)=4f'(x).(2f(x)+2).$

Phương trình đạo hàm $g'(x)=4f'(x).(2f(x)+2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\Rightarrow co\ 3\ diem\ cuc\ tri\\f(x)=-1\Rightarrow co\ 4\ diem\ cuc\ tri\end{array}\right.$.

Suy ra hàm số $y=g(x)$ có 7 điểm cực trị.

Để hàm số $y=|g(x)|$ có đúng 15 điểm cực trị thì pt $4f^2(x)+8f(x)+m-1$ phải có 8 nghiệm bội lẻ.

Dựa vào đồ thị ta thấy: phương trình $f(x)=a\in(-2;4)$ luôn có 4 nghiệm phân biệt.

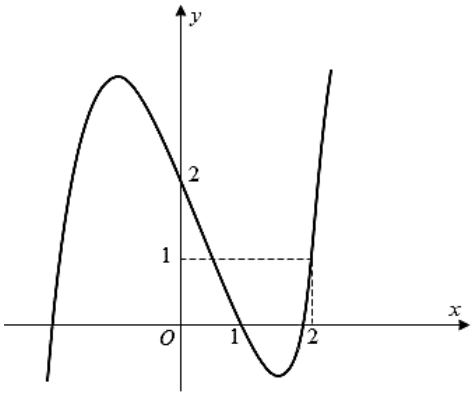
Đặt $f(x)=u$ thì phương trình $4u^2+8u+m-1=0$ phải có 2 nghiệm phân biệt với $\forall u\in(-2;4).$

Mặt khác: $4u^2+8u+m-1=0\Leftrightarrow m-1=-4u^2-8u$, ta có bảng biến thiên như sau:

u	-2		-1		4
y'		$-$	0	$+$	
y			4		
	0				$m-1$
					-96

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow 0<m-1<4\Leftrightarrow 1<m<5\Rightarrow m=\{2;3;4\}$.

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hàm số $y=\left|4f(x)-2x^3+7x^2-8x+1\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

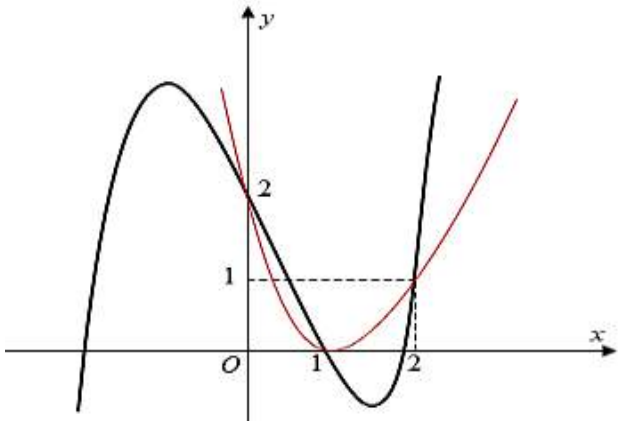
Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(x)=4f(x)-2x^3+7x^2-8x+1$ có:

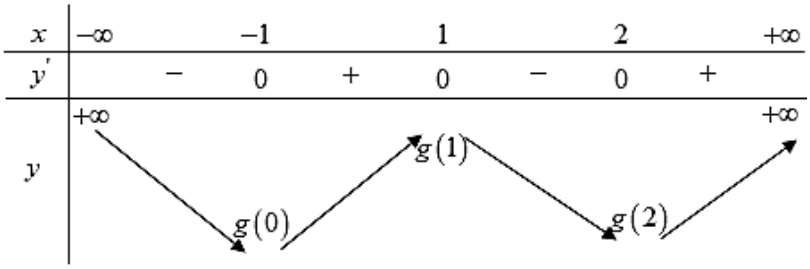
$$g'(x)=0\Leftrightarrow 4f'(x)-6x^2+14x-8=0\Leftrightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{7}{2}x+2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right.$$

Đường cong $y=f'(x)$ cắt parabol $y=\frac{3}{2}x^2-\frac{7}{2}x+2$ tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $x=0;x=1;x=2$



Và $g'(x)$ đổi dấu khi đi qua các điểm $x=0;x=1;x=2$ nên $g(x)$ có ba điểm cực trị.

Ta có bảng biến thiên



Vậy phương trình $g(x)=0$ có tối đa bốn nghiệm (đơn hoặc bội lẻ)

Vậy hàm số $y=|g(x)|$ có tối đa $3+4=7$ điểm cực trị

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^3\left(x^2+(4m-5)x+m^2-7m+6\right),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=f(|x|)$ có đúng 5 điểm cực trị.

A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

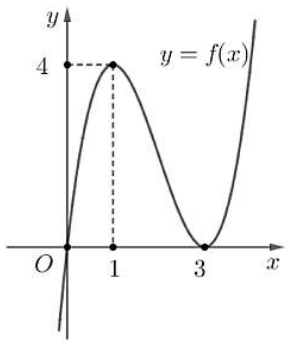
Chọn D

Hàm số $y=f(|x|)$ có đúng 5 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y=f(x)$ có đúng hai điểm cực trị dương $\Leftrightarrow g(x)=x^2+(4m-5)x+m^2-7m+6=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn

$$x_1\le 0<x_2\ne 1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1<0<x_2\ne 1\\ x_1=0<x_2\ne 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a.g(0)<0\\ g(1)\ne 0\end{cases}\\ \begin{cases}g(0)=0\\ g(1)\ne 0\\ S>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m^2-7m+6<0\\ m^2-3m+2\ne 0\end{cases}\\ \begin{cases}m^2-7m+6=0\\ m^2-3m+2\ne 0\\ 5-4m>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}1<m<6\\ m\ne 2\end{cases}.$$

Vậy $m\in\{3,4,5\}$.

Câu 24: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|\left(f(x)\right)^2+f(x)-2\right|$ là



A. 6. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $g(x)=(f(x))^2+f(x)-2$ có

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow 2f(x).f'(x)+f'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)(2f(x)+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f(x)=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Quan sát đồ thị hàm số $f(x)$ hàm số có hai điểm cực trị $x=0;x=3$ do đó

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0;x=3$ và kẻ đường thẳng $y=-\dfrac{1}{2}$ cắt đồ thị hàm số $f(x)$ tại duy nhất một điểm có hoành độ $x=a<0$. Vậy $f(x)=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=a$.

Vậy $g'(x)$ đổi dấu khi qua các điểm $x=a;x=0;x=3$ do đó $g(x)$ có ba điểm cực trị $x=a;x=0;x=3$.

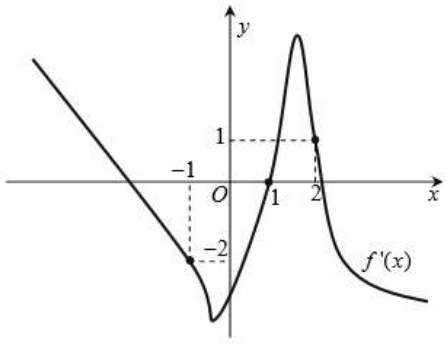
Xét phương trình $g(x)=0 \Leftrightarrow (f(x))^2+f(x)-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=1 \\ f(x)=-2 \end{array}\right.$;

Phương trình $f(x)=1$ có ba nghiệm phân biệt x_1,x_2,x_3 với $0<x_1<1<x_2<3<x_3$.

Phương trình $f(x)=-2$ có một nghiệm duy nhất $x_4<a$.

Vậy hàm số $y=|g(x)|$ có tất cả 7 điểm cực trị.

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Hỏi hàm số $y=|2f(x)-x^2+2x+3|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?



A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7

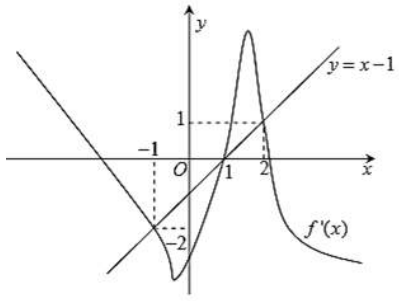
Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y=g(x)=2f(x)-x^2+2x+3 \Rightarrow g'(x)=2f(x)-2x+2=2(f'(x)-x+1)$.

Cho $g'(x)=2f(x)-2x+2=2(f'(x)-x+1)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x-1$.

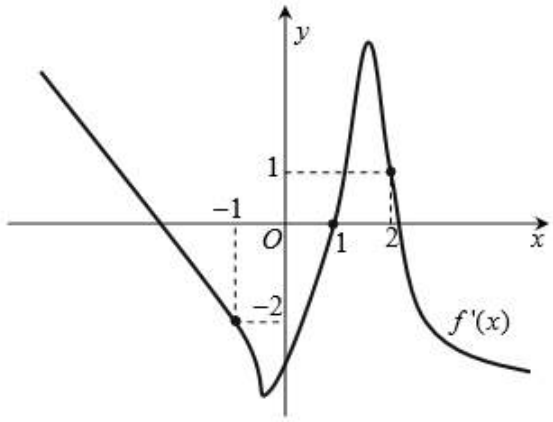
Ta có đồ thị:



Từ đồ thị ta thấy phương trình $f'(x)=x-1$ có ba nghiệm phân biệt là $x=\pm 1;x=2$.

Suy ra hàm số $y=g(x)=2f(x)-x^2+2x+3$ có ba điểm cực trị $\Rightarrow y=\left|2f(x)-x^2+2x+3\right|$ có tối đa 7 điểm cực trị.

Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Hỏi hàm số $y=\left|2f\left(x^2-2x\right)-x^4+4x^3-2x^2-4x+2021\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?



A. 9. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 12.

Lời giải

Chọn B

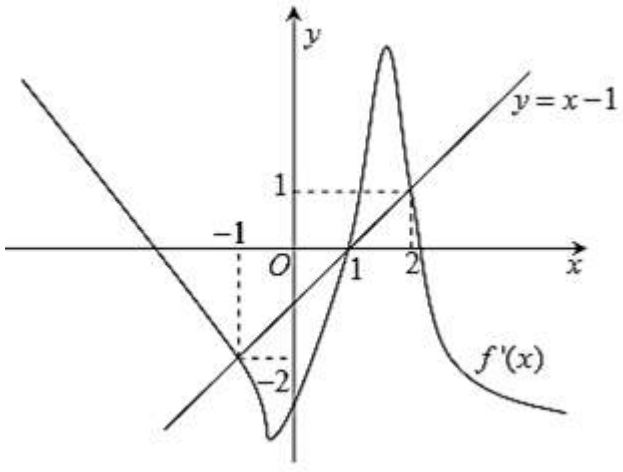
Xét hàm số $y=g(x)=2f\left(x^2-2x\right)-x^4+4x^3-2x^2-4x+2021$ có:

$g'(x)=2(2x-2)f'\left(x^2-2\right)-4x^3+12x^2-4x-4=4(x-1)\left(f'\left(x^2-2x\right)-\left(x^2-2x-1\right)\right).$

Cho $g'(x)=4(x-1)\left(f'\left(x^2-2x\right)-\left(x^2-2x-1\right)\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\f'\left(x^2-2x\right)=x^2-2x-1\end{array}\right.$.

Xét phương trình $f'\left(x^2-2x\right)=x^2-2x-1$. Đặt $x^2-2x=t\Rightarrow f'(t)=t-1.$

Ta có đồ thị như sau:



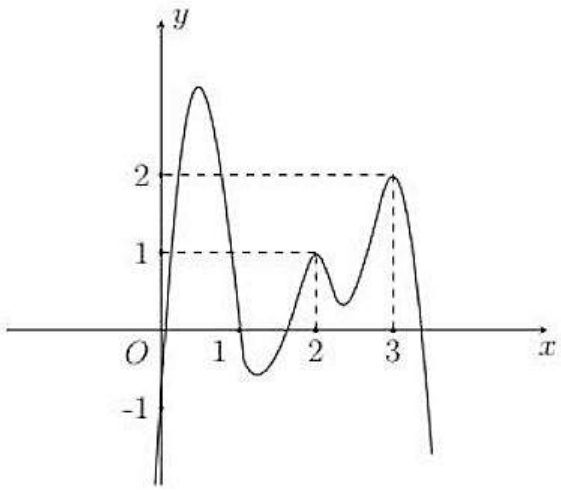
Dựa vào đồ thị, ta thấy đạo hàm $f'(t)$ cắt đường thẳng $y=t-1$ tại 3 điểm phân biệt

$t=\pm1;t=2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=x^2-2x=-1\Rightarrow co\ nghiem\ kep\\t=x^2-2x=1\Rightarrow co\ hai\ nghiem\ phan\ biet\\t=x^2-2x=2\Rightarrow co\ hai\ nghiem\ phan\ biet\end{array}\right.$

Suy ra hàm số $y=g(x)=2f\left(x^2-2x\right)-x^4+4x^3-2x^2-4x+2021$ có 5 điểm cực trị.

Suy ra hàm số $y=\left|2f\left(x^2-2x\right)-x^4+4x^3-2x^2-4x+2021\right|$ có tối đa 11 điểm cực trị.

Câu 27: Cho $f(x)$ là một hàm đa thức và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y=\left|2f(x)-(x-1)^2\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?



A. 9. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

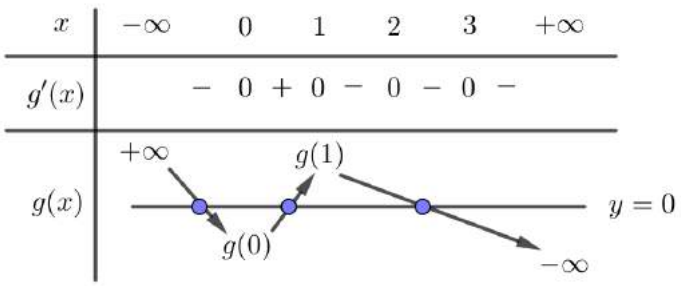
Xét $g(x)=2f(x)-(x-1)^2$. Tìm số điểm cực trị của $g(x)$:

Ta có $g'(x)=0\Leftrightarrow 2f'(x)-2(x-1)=0\Leftrightarrow f'(x)=x-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\\x=3\end{array}\right.$

Kẻ đường thẳng $y=x-1$ cắt đồ thị $f'(x)$ tại bốn điểm phân biệt có hoành độ $x=0;x=1;x=2;x=3$ trong đó tại các điểm có hoành độ $x=2;x=3$ là các điểm tiếp xúc, do đó $g'(x)$ chỉ đổi dấu khi qua các điểm $x=0;x=1$. Vì vậy hàm số $g(x)$ có hai điểm cực trị $x=0;x=1$.

Ta tìm số nghiệm của phương trình $g(x)=0$.

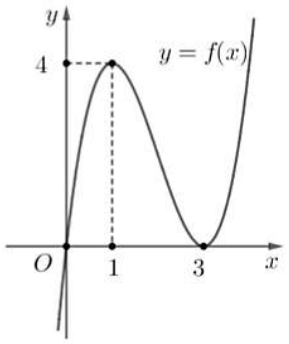
Bảng biến thiên:



Suy ra phương trình $g(x)=0$ có tối đa ba nghiệm phân biệt.

+) Vậy hàm số $y=|g(x)|$ có tối đa 2+3=5 điểm cực trị.

Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Khi hàm số $y=\left|\left(f(x)\right)^2+f(x)+m\right|$ có số điểm cực trị là ít nhất. Giá trị nhỏ nhất của tham số m thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $(0;1)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=f(x);g(t)=t^2+t+m;y=\left|g(t)\right|=\left|t^2+t+m\right|$.

Hàm số $g(t)$ có 1 cực trị tại $t=-\frac{1}{2};f(x)=-\frac{1}{2}$ có nghiệm duy nhất vậy để hàm số ban đầu có ít cực trị nhất khi và chỉ khi t^2+t+m không đổi dấu khi và chỉ khi $\Delta=1-4m\le 0\Leftrightarrow m\ge\frac{1}{4}$;

Vậy giá trị nhỏ nhất cần tìm của m là $\frac{1}{4}$.

Câu 29: Cho hàm số $y=f(x)=x^2-2mx+4m\left|x-m\right|+2$. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in(-21;21)$ để hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị. Số phần tử của S

A. 20. **B.** 16. **C.** 18. **D.** 19

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=f(x)=(x-m)^2+4m\left|x-m\right|-m^2+2.$

Mặt khác, hàm số $y=f(x)$ có cùng số điểm cực trị với hàm số $y=g\left(\left|x\right|\right)=x^2+4m\left|x\right|-m^2+2$

Có thể coi $y=f(x)=g\left(\left|x-m\right|\right).$

Để hàm số $y=f(x)=g\left(\left|x-m\right|\right)$ có ba điểm cực trị thì hàm số $y=g\left(\left|x\right|\right)$ phải có ba điểm cực trị.

Khi đó, hàm số $g(x)=x^2+4mx-m^2+2$ phải có 1 cực trị dương.

Suy ra hàm số $g(x)=x^2+4mx-m^2+2$ đạt cực trị tại $x=-2m>0\Leftrightarrow m<0.$

Suy ra $-21<m<0\Rightarrow m=\{-20;...;-1\}$. Vậy có 20 giá trị thỏa mãn.

Câu 30: Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3mx^2+6mx+m-1$. Số giá trị nguyên của tham số $m\in[-2021;2021]$ để hàm số $y=f\left(\left|x+2019m-2020\right|\right)$ có đúng 5 điểm cực trị

A. 2016. **B.** 2018. **C.** 2019. **D.** 2017

Lời giải

Chọn C

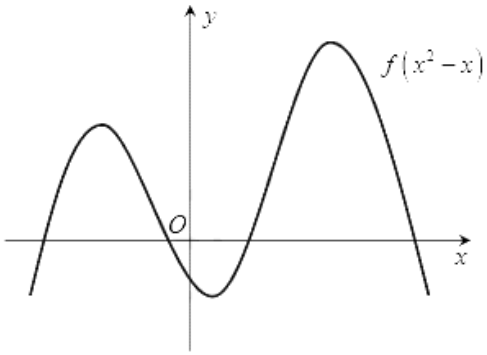
Hàm số $y=f\left(\left|x+a\right|\right)$ có hình dạng giống đồ thị hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$. Tuy nhiên chỉ là tịnh tiến theo trục hoành Ox (theo chiều ngang), phụ thuộc vào giá trị của a.

Bài toán quy về tìm m để hàm số $y=f\left(x\right)=x^3-3mx^2+6mx+m-1$ có hai điểm cực trị dương.

Xét đạo hàm $f'\left(x\right)=3x^2-6mx+6m=0$ có 2 nghiệm dương

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=9m^2-18m>0\\ \dfrac{6m}{3}>0\end{cases}\Leftrightarrow m>2\Rightarrow 3\le m\le 2021\rightarrow \text{có 2019 giá trị thỏa mãn.}$$

Câu 31: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y=f\left(x^2-x\right)$ được cho như hình vẽ dưới đây. Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-2mx-\left|x-m\right|+m^2\right)$ có tất cả bao nhiêu cực trị?



A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

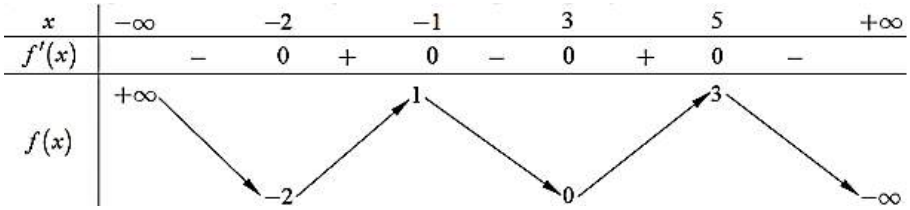
Xét hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(x^2-x\right)$.

Ta có $y=f\left(x^2-2mx-\left|x-m\right|+m^2\right)=f\left(\left(x-m\right)^2-\left|x-m\right|\right)=g\left(\left|x-m\right|\right)$.

Mặt khác hàm số $y=g\left(\left|x-m\right|\right)$ và hàm số $y=g\left(\left|x\right|\right)$ có cùng số điểm cực trị.

Lại có, hàm số $y=f\left(x\right)$ có hai điểm cực trị dương $\Rightarrow$hàm số $y=g\left(\left|x\right|\right)=f\left(x^2-\left|x\right|\right)$ có 5 điểm cực trị. Suy ra hàm số $y=g\left(\left|x-m\right|\right)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 32: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ



Xét hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|x-4\right|\right)+2018^{2019}$. Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)$ là:

A. 5. **B.** 1. **C.** 9. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Số điểm cực trị của hàm số $f\left(\left|x-4\right|\right)+2018^{2019}$ bằng số cực trị của hàm số $f\left(\left|x-4\right|\right)$.

Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(\left|x-4\right|\right)$ bằng $2a+12$, trong đó a là số điểm cực trị lớn hơn 4 của hàm số $y=f\left(x-4\right)$.

Hàm số $y=f\left(x\right)$ có bốn điểm cực trị là $x=-2;x=-1;x=3;x=5$ nên hàm số $y=f\left(x-4\right)$ có các điểm cực trị tương ứng là $x-4=-2;x-4=-1;x-4=3;x-4=5$ $\Leftrightarrow x=2;x=3;x=7;x=9$.

Có hai điểm cực trị lớn hơn 4 là $x=7;x=9$.

Vậy hàm số $y=f\left(\left|x-4\right|\right)$ có 5 điểm cực trị và $g\left(x\right)$ cũng có 5 điểm cực trị.

Câu 33: Cho hàm số $f\left(x\right)=\left|\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}+m\right|$. Hàm số có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Xét $g\left(x\right)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}+m$ có $g'\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\left(x+1\right)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\dfrac{1-x}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^2}}=0\Leftrightarrow x=1.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$m-1$	↗	$m+\sqrt{2}$	↘	$m+1$

Suy ra $g(x)$ có một điểm cực trị $x=1$ và phương trình $g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases}m+\sqrt{2}>0\\m-1<0\end{cases}\Leftrightarrow -\sqrt{2}<m<1.$

Vậy hàm số $f(x)=\left|g(x)\right|$ có tối đa 1+2=3 điểm cực trị.

Câu 34: Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3+ax^2+bx+c$, với a,b,c là các số thực thỏa mãn $\begin{cases}a+b+c<-1\\4a-2b+c>8\\c<0\end{cases}$. Hàm số $y=\left|f\left(\left|x\right|\right)\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

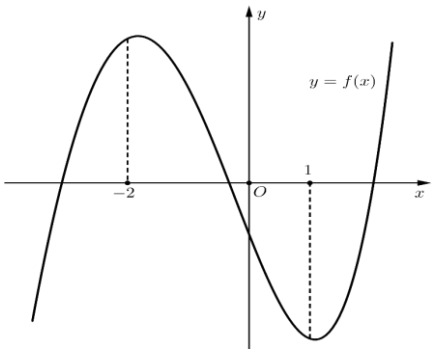
A. 7. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

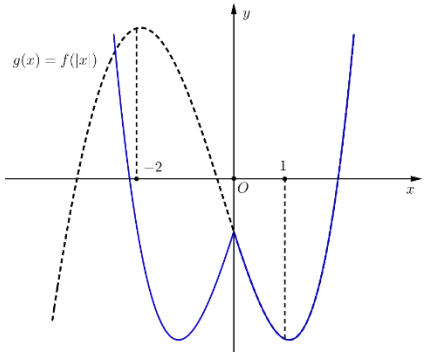
Cách 1:

Ta có: $\begin{cases} a+b+c<-1 \\ 4a-2b+c>8 \\ c<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1)<0 \\ f(-2)>0 \\ f(0)<0 \end{cases}$. Suy ra đồ thị hàm số $y=f(x)$ có dạng như sau:

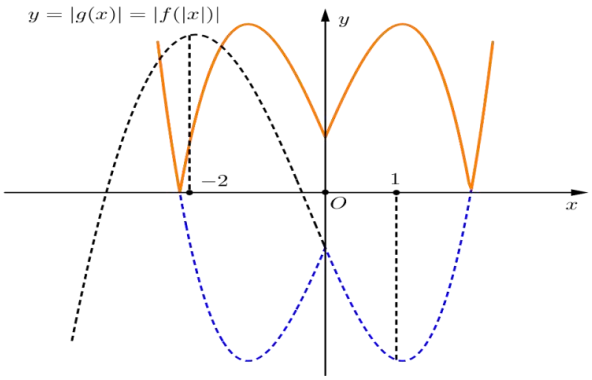


Ta sẽ dùng cách vẽ đồ thị hàm số $y=\left|f(|x|)\right|$ từ đồ thị hàm số $y=f(x)$. Bằng cách thực hiện từ trong ra ngoài:

Bước 1: Vẽ đồ thị hàm số $g(x)=f(|x|)$ bằng cách giữ nguyên phần bên phải trục tung của $y=f(x)$;; lấy đối xứng qua trục tung phần bên trái trục tung của $y=f(x)$.



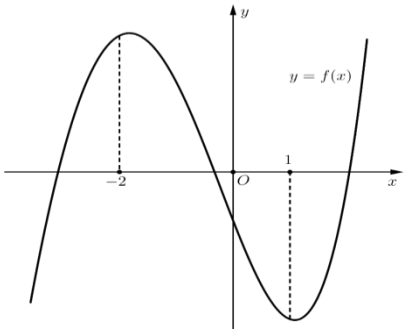
Bước 2: Vẽ đồ thị hàm số $y=\left|g(x)\right|$ bằng cách giữ nguyên phần trên trục hoành của $y=g(x)$; lấy đối xứng qua trục hoành phần bên dưới trục hoành của $y=g(x)$.



Từ đồ thị suy ra hàm số $y=\left|f(|x|)\right|$ có tất cả 5 điểm cực trị.

Cách 2:

Ta có: $\begin{cases} a+b+c<-1 \\ 4a-2b+c>8 \\ c<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1)<0 \\ f(-2)>0 \\ f(0)<0 \end{cases}$. Suy ra đồ thị hàm số $y=f(x)$ có dạng như sau:

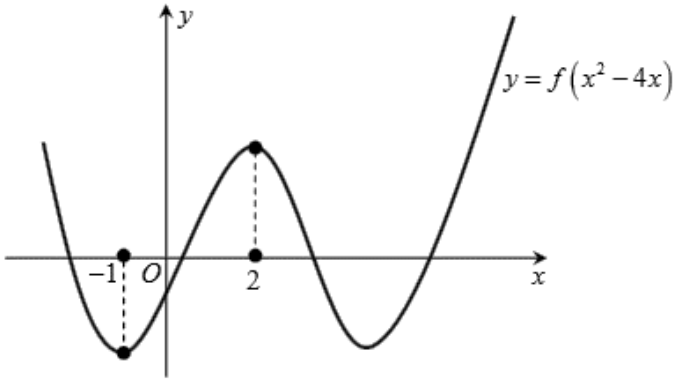


Hàm số này có 1 điểm cực trị dương và $f(x)=0$ có một nghiệm dương.

Đặt $g(x)=f(|x|)$ hàm số này có $2.1+1=3$ điểm cực trị và phương trình $g(x)=0$

$\Leftrightarrow f(|x|)=0$ có hai nghiệm (đơn hoặc bội lẻ). Do vậy hàm số $y=|g(x)|=|f(|x|)|$ có tất cả $3+2=5$ điểm cực trị.

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y=f\left(x^2-4x\right)$ được cho như hình vẽ dưới đây. Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-2|x|+12\right)$ có tất cả bao nhiêu cực trị?



A. 7. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y=g(x)=f\left(x^2-4x\right)$.

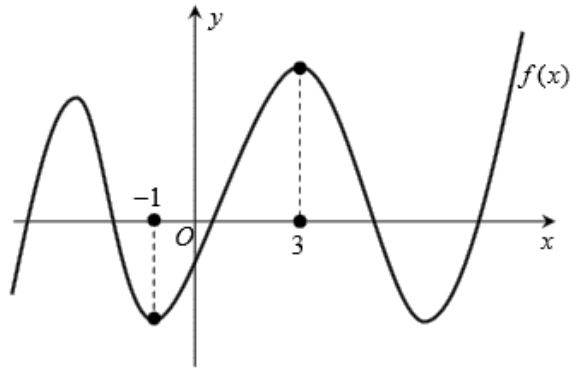
Ta có $y=f\left(x^2-8|x|+12\right)=f\left(x^2-4|x|+4-4|x|+8\right)=f\left(\left(|x|-2\right)^2-4\left(|x|-2\right)\right)=g\left(|x|-2\right)$.

Mặt khác hàm số $y=g(x)$ có các điểm cực trị là $x=-1;x=2;x=c>2$.

$\Rightarrow$hàm số $y=g(x-2)$ có các điểm cực trị là $x=1;x=4;x=c+2$ (có 3 cực trị dương).

Suy ra hàm số $y=g\left(|x|-2\right)=f\left(x^2-8|x|+12\right)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 36: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-21;21]$ để hàm số $y=\left(-|x+2021m|-2m+1\right)$ có đúng 5 điểm cực trị. Số phần tử của tập S là



A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=f\left(-\left|x+2021m\right|-2m+1\right)$ có cùng số điểm cực trị với hàm số $y=f\left(-\left|x\right|-2m+1\right)$.

Thực hiện biến đổi đồ thị $f\left(x\right)\to f\left(x-2m+1\right)\to f\left(-\left|x\right|-2m+1\right)$.

Các điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x\right)$ là $\left(x_1=a<0\right);\left(x_2=-1\right);\left(x_3=3\right);\left(x_4=b>3\right)$.

Vậy các điểm cực trị của hàm số $y=f\left(-\left|x\right|-2m+1\right)$ là:

$\left(x_1=a+2m-1\right);\left(x_2=-1+2m-1\right);\left(x_3=3+2m-1\right);\left(x_4=b+2m-1\right)$.

Để hàm số $y=f\left(-\left|x\right|-2m+1\right)$ có đúng 5 điểm cực trị thì hàm số $y=f\left(x-2m+1\right)$ có đúng 2 điểm cực trị âm.

Suy ra $\begin{cases}-1+2m-1<0\\3+2m-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow -1\le m<1\to m=\left\{-1;0\right\}$

Câu 37: Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y=\left|x^3+\left(m-4\right)x-m+3\right|$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=\left|x^3+\left(m-4\right)x-m+3\right|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $f\left(x\right)=x^3+\left(m-4\right)x-m+3$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Xét phương trình: $f\left(x\right)=0\Leftrightarrow x^3+\left(m-4\right)x-m+3=0$

$\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(x^2+x+m-3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{c}x=1\\x^2+x+m-3=0\left(*\right)\end{array}\right.$

Để $f\left(x\right)=0$ có 3 nghiệm phân biệt thì $\left(*\right)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\m\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-4\left(m-3\right)>0\\m\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<\dfrac{13}{4}\\m\ne 1\end{cases}$

Do m nguyên dương nên $m\in\left\{2;3\right\}$. Vậy có 2 giá trị m thoả mãn.

Câu 38: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=x^3-3x^2-10x$. Số giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(\left|x^2-2mx+m-2\right|-3\right)$ có 13 điểm cực trị là:

A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

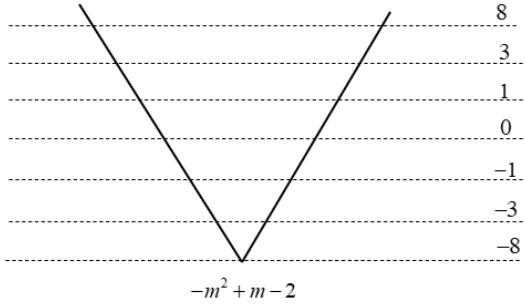
Hướng tiếp cận thứ nhất:

Ta có $f'(x)=x^3-3x^2-10x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=5\\x=-2\end{array}\right.$

Đặt $u=\left|x^2-2mx+m-2\right|$. Xét hàm số $g(x)=f\left(|u|-3\right)=f\left(\left|x^2-2mx+m-2\right|-3\right)$.

Xét hàm số gốc: $h(x)=f\left(|x|-3\right)\Rightarrow h'(x)=\left(|x|\right)'.f'\left(|x|-3\right)=0\left[\begin{array}{l}|x|-3=-2\\|x|-3=0\\|x|-3=5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\x=\pm3\\x=\pm8\end{array}\right.$.

Nhận xét: $h'(x)$ không xác định tại $x=0$



Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-m^2+m-2<-3\\-m^2+m-2\geq-8\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m^2-m-1>0\\m^2-m-6\leq0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}m>\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\\m<\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.\\-2\leq m\leq3\end{array}\right.$

Vì m nguyên dương nên $m=\{2;3\}$, vậy có 2 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn.

Hướng tiếp cận thứ hai:

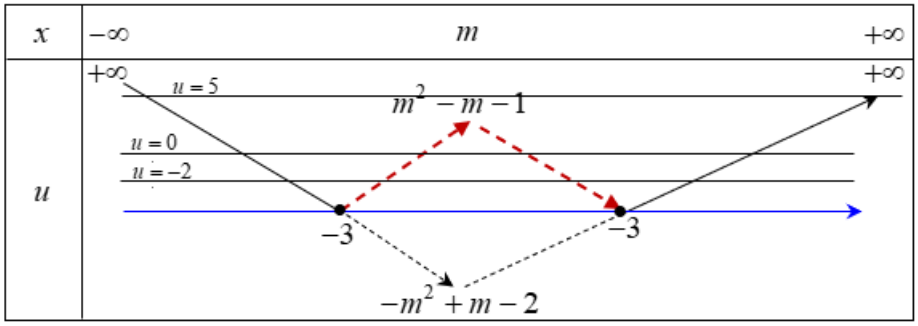
Hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại các điểm $x=5;x=0;x=-2$.

Xét hàm số $f(u)=f\left(\left|x^2-2mx+m-2\right|-3\right)$ với $u=\left|x^2-2mx+m-2\right|-3$.

Đặt $h(x)=x^2-2mx+m-2$, ta vẽ bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ như sau:

x	$-\infty$		m		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-m^2+m-2$	$\nearrow$	$+\infty$

Nhận thấy $-m^2+m-2<0$ nên ta suy ra được bảng biến thiên của u như sau:



Số điểm cực trị của $f(u)$ = Số điểm cực trị của u + Số nghiệm đơn của $\left[\begin{array}{l} u=5 \\ u=0 \\ u=-2 \end{array}\right.$.

Từ bảng biến thiên ta thấy u có 3 điểm cực trị. Để hàm số $g(x)$ có 13 cực trị thì số nghiệm đơn của $\left[\begin{array}{l} u=5 \\ u=0 \\ u=-2 \end{array}\right.$ phải bằng 10.

Để có 10 nghiệm bội lẻ thì các đường thẳng $u=-2;u=0$ phải nằm dưới m^2-m-1 và đường thẳng $u=5$ phải nằm trên m^2-m-1.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m^2-m-1>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ m<\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}^+} m\in\{2;3\}. \\ m^2-m-1\le 5 \Leftrightarrow -2\le m\le 3 \end{array}\right.$

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)=\left\{\begin{array}{l} -x^2-mx+6, x\le 2 \\ \dfrac{n}{2}x-4, x>2 \end{array}\right.$ $m,n\in\mathbb{R}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f(x)$ có đúng hai điểm cực trị?

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số liên tục tại liên tục tại $x=2$ nên ta có:

$4-|2m+6|=\dfrac{n}{2}.2 \quad 4\Leftrightarrow n=2m+6.$

Ta có $y=f'(x)=\left\{\begin{array}{l} 2x+|m, x<2 \\ \dfrac{n}{2}, x>2 \end{array}\right.$ $m,n\subset\mathbb{R}$.

Để hàm số $y=f(x)$ có đúng hai điểm cực trị thì hàm số phải đạt cực trị tại điểm $x=2$ và $f'(x)$ đổi dấu qua $x=2$ suy ra $\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x).\lim\limits_{x\to 2^+} f'(x)<0 \Leftrightarrow (m-4)\left(\dfrac{n}{2}\right)<0$

$\Leftrightarrow (m-4)(m+3)<0\Leftrightarrow -3<m<4.$

Vì vậy $-3<m<4\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{-2;-1;0;1;2;3\}$.

Câu 40: Cho hàm số $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|f\left(x^2+m-5\right)\right|$ có ít nhất 7 điểm cực trị?

A. 6. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x)=3x^2-12x+9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=1\end{array}\right.$

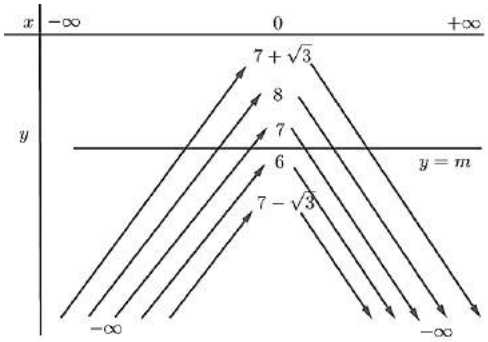
$f(x)=x^3-6x^2+9x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=2\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$

Ta có: $y=\left|f\left(x^2+m-5\right)\right|=\sqrt{f^2\left(x^2+m-5\right)}$

$$\Rightarrow y'=\frac{f\left(x^2+m-5\right)\cdot 2x\cdot f'\left(x^2+m-5\right)}{\left|f\left(x^2+m-5\right)\right|}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f\left(x^2+m-5\right)=0\\f'\left(x^2+m-5\right)=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2+m-5=2+\sqrt{3}\\x^2+m-5=2-\sqrt{3}\\x^2+m-5=2\\x^2+m-5=3\\x^2+m-5=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\m=-x^2+7+\sqrt{3}\\m=-x^2+7-\sqrt{3}\\m=-x^2+7\\m=-x^2+8\\m=-x^2+6\end{array}\right.$$

Ta vẽ đồ thị các hàm trên cùng một bảng biến thiên:



Để hàm số $y=\left|f\left(x^2+m-5\right)\right|$ có ít nhất 7 điểm cực trị thì $y'=0$ phải có ít nhất 7 nghiệm phân biệt. Dựa vào bảng biến thiên ta có: $m<7$. Mà m nguyên dương nên $m=\{1;2;3;4;5;6\}$.

Vậy có 6 giá trị nguyên dương của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 41: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên R và hàm số $y=f'\left(2x+1\right)$ có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(2x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in[-2023;2023]$ để hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(\left|x^{2023}+2023x\right|+m\right)$ có ít nhất 5 điểm cực trị.

A. 4046. **B.** 4047. **C.** 2024. **D.** 2023.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị là $-1,1,2$.

Nhận xét: hàm số $g(x)=f\left(\left|x^{2023}+2023x\right|+m\right)$ là hàm số chẵn nên hàm số $g(x)$ có ít nhất có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow g(x)=f\left(x^{2023}+2023x+m\right)$ có ít nhất có 2 điểm cực trị dương.

$\Rightarrow g'(x)=\left(2023x^{2022}+2023\right)f'\left(x^{2023}+2023x+m\right)=0$.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^{2023}+2023x+m=2\\x^{2023}+2023x+m=1\\x^{2023}+2023x+m=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x^{2023}+2023x=2-m & (1)\\x^{2023}+2023x=1-m & (2)\\x^{2023}+2023x=-1-m & (3)\end{array}\right.$$

Xét hàm số $h(x)=x^{2023}+2023x\ \Rightarrow h'(x)=2023x^{2022}+2023>0\ \ \forall x>0$.

Bảng biến thiên:

x	0	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	
$h(x)$	0	$+\infty$

Phương trình $g'(x)=0$ ít nhất có 2 nghiệm dương $\Leftrightarrow 1-m>0\Leftrightarrow m<1$.

Vì $m\in[-2023;2023]\Rightarrow$ có 2024 giá trị nguyên của m.

Câu 42: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\left(x^3-2x^2\right)\left(x^3-2x\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $\left|f\left(1-2022x\right)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 12. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

$f'(x)=\left(x^3-2x^2\right)\left(x^3-2x\right)=x^3(x-2)\left(x^2-2\right)=x^3(x-2)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$.

$f'(x)=0$ có 3 nghiệm đơn và 1 nghiệm bội 3 nên hàm số $f(x)$ có 4 điểm cực trị.

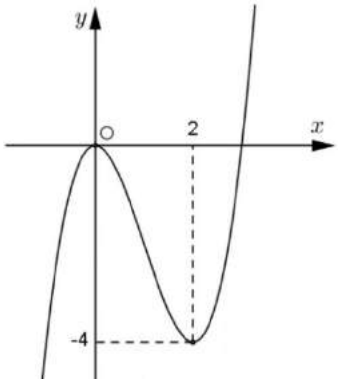
Số điểm cực trị của hàm số $\left|f\left(1-2022x\right)\right|$ bằng số điểm cực trị của hàm số $\left|f(x)\right|$.

Ta có số điểm cực trị của hàm số $\left|f(x)\right|$ bằng $m+n$ (Trong đó m là số điểm cực trị của hàm $f(x)$, n là số nghiệm của $f(x)$ không tính những nghiệm là điểm cực trị).

Theo trên ta có $m=4$ nên số nghiệm lớn nhất của $f(x)$ là 5 hay $n=5$.

Hàm số $\left|f\left(1-2022x\right)\right|$ có nhiều nhất 9 điểm cực trị.

Câu 43: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Hàm số $y=\left|f\left(x^2\right)-x^2\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Xét hàm số $g(x)=f\left(x^2\right)-x^2$. Ta có $g'(x)=2xf'\left(x^2\right)-2x$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'\left(x^2\right)=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=a\ (a>2)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{a}\end{array}\right.\cdot$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{a}$		0		$\sqrt{a}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(a)-a$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(a)-a$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $y=g(x)$ có 3 điểm cực trị và đồ thị hàm số cắt Ox tại tối đa 4 điểm.

Vậy hàm số $y=\left|f\left(x^2\right)-x^2\right|$ có tối đa 7 điểm cực trị.

Câu 44: Cho hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây

x	$-\infty$		x_1		x_0		x_2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

Biết rằng phương trình $f(x)=g(x)$ có nghiệm $x_0\in\left(x_1;x_2\right)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f(x)-g(x)\right|$ là

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Đặt $h(x)=f(x)-g(x)$, với $x\in\mathbb{R}$. Khi đó, $h'(x)=f'(x)-g'(x)$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=h(x)$ như sau:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	$h(x_1)$	↘	$h(x_2)$	↗	$+\infty$

Vậy hàm số $y=h(x)=f(x)-g(x)$ có hai điểm cực trị.

Mà phương trình $f(x)-g(x)=0$ có nghiệm $x_0\in(x_1;x_2)$ nên $h(x_0)=0$. Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=h(x)$, ta thấy phương trình $h(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt.

Vậy hàm số $y=\left|f(x)-g(x)\right|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 45: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^3+2|x|-4\right)$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng xét dấu $f'(x)$ ta có hàm số $f(x)$ có 2 cực trị tại $x=-1$ và $x=4$.

Xét $g(x)=f\left(x^3+2|x|-4\right)=\begin{cases}f\left(x^3+2x-4\right)\text{ khi }x\ge 0\\ f\left(x^3-2x-4\right)\text{ khi }x<0\end{cases}$

$g'(x)=\begin{cases}\left(3x^2+2\right).f'\left(x^3+2x-4\right)\text{ khi }x\ge 0\\ \left(3x^2-2\right).f'\left(x^3-2x-4\right)\text{ khi }x<0\end{cases}$.

Xét $g'(x)=0$

Trường hợp 1: $x\ge 0$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left(3x^2+2\right).f'\left(x^3+2x-4\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3+2x-4=-1\\ x^3+2x-4=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3+2x-3=0\\ x^3+2x-8=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1>0\\ x\simeq 1{,}67>0\end{array}\right.$$

Với $x\ge 0$ có 2 cực trị.

Trường hợp 2: $x<0$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left(3x^2-2\right).f'\left(x^3-2x-4\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2-2=0\\ x^3-2x-4=-1\\ x^3-2x-4=4\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=\dfrac{2}{3} \\ x^3-2x-3=0 \\ x^3-2x-8=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt{\dfrac{2}{3}} \\ x=\sqrt{\dfrac{2}{3}}\ (\text{loai}) \\ x\simeq 1.89\ (\text{loai}) \\ x\simeq 2,33\ (\text{loai}) \end{array}\right.$$

Với $x<0$ có 1 cực trị.

Vậy hàm số $g(x)=f\left(x^3+2|x|-4\right)$ có 3 cực trị.

Câu 46: Tìm số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^4-8|x|^3+22x^2-24|x|+6\sqrt{2}$.

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x)=x^4-8x^3+22x^2-24x+6\sqrt{2}$.

Suy ra $f'(x)=4x^3-24x^2+44x-24=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số có 3 điểm cực trị dương.

Suy ra số điểm cực trị của hàm số $y=x^4-8|x|^3+22x^2-24|x|+6\sqrt{2}$ bằng $2.3+1=7$.

Câu 47: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-2)^2(x-1)\left(x^2-2(m+1)x+m^2-1\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(|x|\right)$ có 5 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Nhận xét: Hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có số điểm cực trị $=2.$ (số điểm cực trị dương của hàm số $y=f(x)$) $+1$.

Suy ra để hàm số $g(x)=f\left(|x|\right)$ có 5 điểm cực trị thì hàm số $y=f(x)$ phải có 2 điểm cực trị dương.

Xét $f'(x)=0\Leftrightarrow(x-2)^2(x-1)\left(x^2-2(m+1)x+m^2-1\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\,(L) \\ (x-1)\left(x^2-2(m+1)x+m^2-1\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2(m+1)x+m^2-1=0\,(*) \end{array}\right. .$$

Từ điều kiện bài toán suy ra phương trình $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1 và trái dấu hoặc có một nghiệm bằng 0 và một nghiệm dương khác 1.

Trường hợp 1: hai nghiệm phân biệt khác 1 và trái dấu.

Điều kiện $\begin{cases} 1^2-2(m+1).1+m^2-1\neq 0 \\ 1.\left(m^2-1\right)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-2m-2\neq 0 \\ m^2-1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1-\sqrt{3}; \\ m\neq 1+\sqrt{3}; \\ -1<m<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1-\sqrt{3} \\ -1<m<1 \end{cases}.$

Suy ra $m=0$ (TM).

Trường hợp 2: có một nghiệm bằng 0 và một nghiệm dương khác 1.

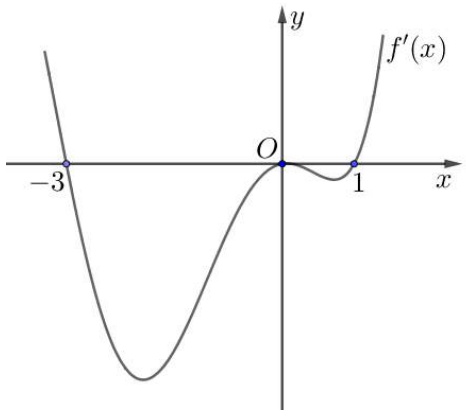
Điều kiện $0^2-2(m+1).0+m^2-1=0 \Leftrightarrow m=\pm 1$.

Với $m=1 \Rightarrow x^2-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right. \Rightarrow m=1$ (TM).

Với $m=-1 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow m=-1$ (Loại).

Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 48: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức, có $f(-3)<0$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



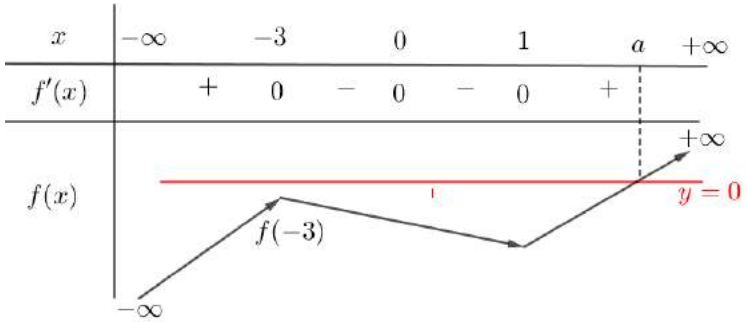
Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left[f(x-6)\right]^{2050}$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$

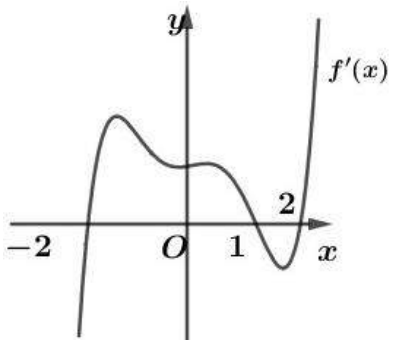


$g'(x)=2050.\left[f(x-6)\right]^{2049}.f'(x-6)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x-6)=0 \\ f'(x-6)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-6=a>1 \\ x-6=0 \\ x-6=-3 \\ x-6=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a+6>7 \\ x=6 \\ x=3 \\ x=7 \end{array}\right.$$. ($x=6$ là nghiệm bội chẵn)

Ta có $g'(x)=0$ có 3 nghiệm bội lẻ phân biệt ($x_1=3<x_2=7<x_3=a+6$) nên hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 49: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(-2)<f(2)=0$, đồ thị $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Hàm số $g(x)=\left|f(x)+\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right|$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?



A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $h(x)=f(x)+\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x$.

Ta có $h'(x)=f'(x)+x^3-x^2-4x+4$. Với $h'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-x^3+x^2+4x-4$.

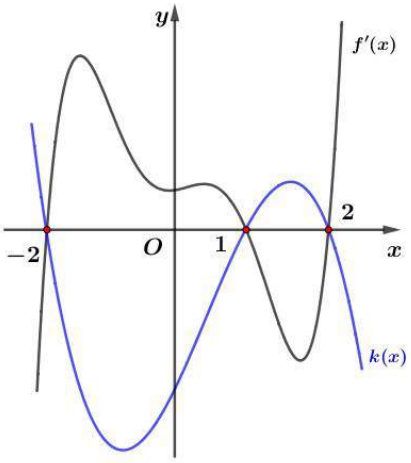
Đặt $k(x)=-x^3+x^2+4x-4$, ta sẽ khảo sát và vẽ đồ thị của $k(x)$.

Ta có $k'(x)=-3x^2+2x+4$. Cho $k'(x)=0 \Leftrightarrow -3x^2+2x+4=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{3}$.

Chú ý sự tương giao của đồ thị hàm số $k(x)$ và trục hoành, ta thấy

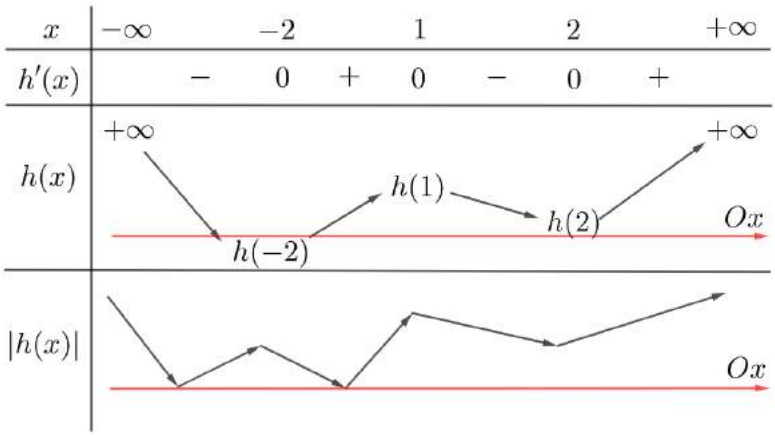
$$k(x)=0 \Leftrightarrow -x^3+x^2+4x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right. .$$

Từ đó ta có hình vẽ như sau



Từ hình vẽ, ta có $h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Hơn nữa, $h(-2)=f(-2)-\dfrac{28}{3}<0, h(2)=f(2)+\dfrac{4}{3}>0$. Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ và $\left|h(x)\right|$ như sau



Vậy hàm số $g(x)=\left|h(x)\right|$ có 3 điểm cực tiểu.

Câu 50: Có tất cả bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2022;2022]$ để hàm số $y=\left|x^3-3x^2+m\right|$ có 3 điểm cực trị?

A. 4040. **B.** 4041. **C.** 4042. **D.** 4043.

Lời giải

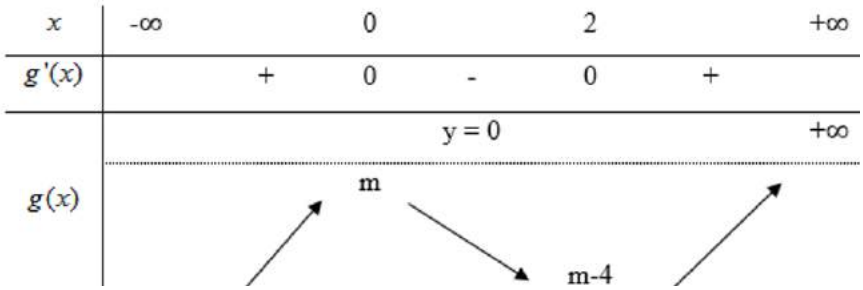
Chọn C

Xét hàm số $g(x)=x^3-3x^2+m$

Ta có: $g'(x)=3x^2-6x=3x(x-2);$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Suy ra hàm số $g(x)=x^3-3x^2+m$ có hai điểm cực trị $x=0$; $x=2$.



Do số điểm cực trị của hàm số $y=\left|x^3-3x^2+m\right|$ bằng tổng số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^3-3x^2+m$ và số nghiệm của phương trình $x^3-3x^2+m=0$ (*) (không kể nghiệm bội chẵn).

Khi đó yêu cầu bài toán tương đương (*) có 1 nghiệm (không kể nghiệm 0 và 2 là các nghiệm bội chẵn, và cũng là các cực trị của hàm số $y=g(x)$).

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m-4 \ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge 4 \end{array}\right. \xrightarrow{m \in [-2022;202]} m \in [-2022;0] \cup [4;2022]$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ suy ra có $2023+2019=4042$ số nguyên m.

Câu 51: Hàm số $y=\left|x^4-8x^3+22x^2-24x+6\sqrt{2}\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f(x)\right|$ bằng số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ cộng với số giao điểm (khác cực trị) của hàm số $y=f(x)$ với trục hoành.

Xét hàm số $y=f(x)=x^4-8x^3+22x^2-24x+6\sqrt{2}$ ta có

$f'(x)=4x^3-24x^2+44x-24$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-9+6\sqrt{2}$	$\nearrow$	$-8+6\sqrt{2}$	$\searrow$	$-9+6\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y=f(x)$ có 3 cực trị và phương trình $f(x)=0$ có bốn nghiệm phân biệt nên hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có 7 điểm cực trị.

Câu 52: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|-x^3+3x^2+m+2\right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=\left|g(x)\right|$ có số điểm cực trị bằng tổng số điểm cực trị của $g(x)$ và số nghiệm đơn của phương trình $g(x)=0$.

Xét hàm số $y=g(x)=-x^3+3x^2+m+2$.

Suy ra $y'=g'(x)=-3x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$m+2$	$\nearrow$	$m+6$	$\searrow$	$-\infty$

Suy ra hàm số $y=g(x)=-x^3+3x^2+m+2$ có 2 điểm cực trị.

Hàm số $y=\left|-x^3+3x^2+m+2\right|$ có 5 điểm cực trị khi $-x^3+3x^2+m+2=0$ có 3 nghiệm đơn khác 0 và 2. Khi đó $\begin{cases}m+6>0\\m+2<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-6\\m<-2\end{cases}\Leftrightarrow -6<m<-2$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|-x^3+3x^2+m+2\right|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 53: Cho hàm số $y=f(x)$ có $f(-2)=0$ và đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như hình sau

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g(x)=\left|15f\left(-x^4+2x^2-2\right)-10x^6+30x^2\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $h(x)=15f\left(-x^4+2x^2-2\right)-10x^6+30x^2$

Ta có $h'(x)=15\left(-4x^3+4x\right).f'\left(-x^4+2x^2-2\right)-60x^5+60x$

$\Rightarrow h'(x)=-60x\left(x^2-1\right)\left[f'\left(-x^4+2x^2-2\right)+x^2+1\right]$.

Mà $-x^4+2x^2-2=-\left(x^2-1\right)^2-1\le -1,\forall x\in\mathbb{R}$ nên dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ ta suy ra $f'\left(-x^4+2x^2-2\right)\ge 0$.

Suy ra $f'\left(-x^4+2x^2-2\right)+x^2+1>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

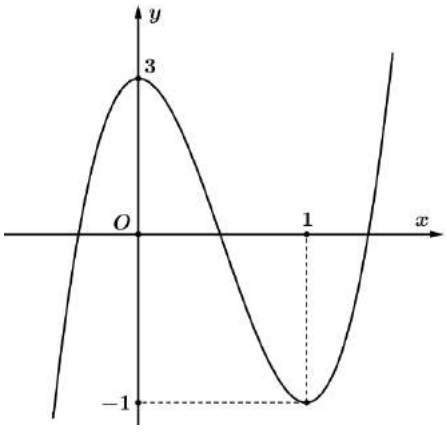
Do đó dấu của $h'(x)$ cùng dấu với $u(x)=-60x\left(x^2-1\right)$, tức là đổi dấu khi đi qua các điểm $x=-1;x=0;x=1$.

Vậy hàm số $h(x)$ có 3 điểm cực trị.

Ta có $h(0)=15f(-2)=0$ nên đồ thị hàm số $y=h(x)$ tiếp xúc Ox tại O và cắt trục Ox tại 2 điểm phân biệt khác điểm cực trị.

Vậy hàm số $y=g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 54: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Hàm số $y=\left|f\left(2^{\sqrt{x}}-1\right)\right|-3$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

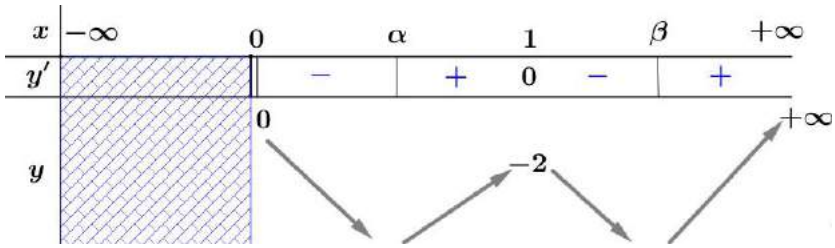
Áp dụng công thức $\left(|u|\right)' = \dfrac{u'.u}{|u|} \Rightarrow y' = \dfrac{2^{\sqrt{x}}.\ln 2}{2\sqrt{x}}.\dfrac{f'\left(2^{\sqrt{x}}-1\right).f\left(2^{\sqrt{x}}-1\right)}{\left|f\left(2^{\sqrt{x}}-1\right)\right|}$ với $x>0$.

Xét $y'=0 \Leftrightarrow f'\left(2^{\sqrt{x}}-1\right)=0$ hoặc $f\left(2^{\sqrt{x}}-1\right)=0$.

Ta có: $f'\left(2^{\sqrt{x}}-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{\sqrt{x}}-1=0 \\ 2^{\sqrt{x}}-1=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

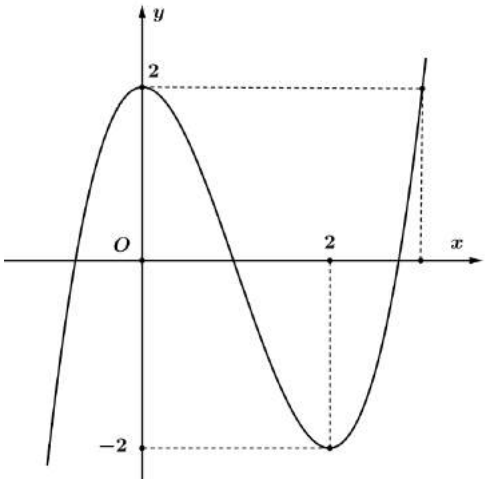
Và: $f\left(2^{\sqrt{x}}-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{\sqrt{x}}-1=a\in(0;1) \\ 2^{\sqrt{x}}-1=b\in(1;+\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha\in(0;1) \\ x=\beta\in(1;+\infty) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số có 2 điểm cực tiểu.

Câu 55: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như sau



Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f^2(x)-4f(x)+3\right|$ là

A. 3. **B.** 7. **C.** 4. **D.** 2.

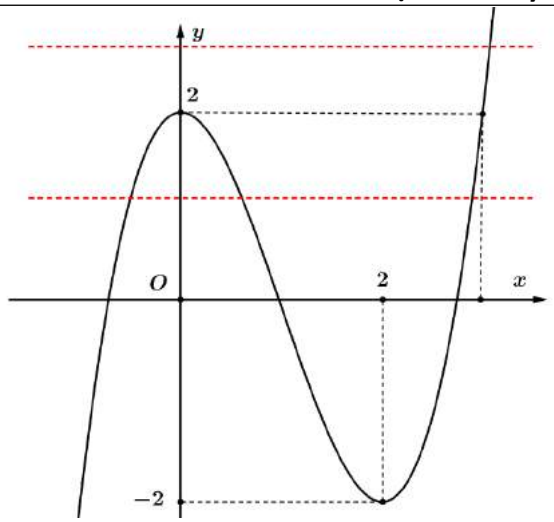
Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x)=f^2(x)-4f(x)+3$

Bước 1: Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $g(x)$ với trục Ox

Giải phương trình $g(x)=0 \Leftrightarrow f^2(x)-4f(x)+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=1 \\ f(x)=3 \end{array}\right.(I)$



Căn cứ vào đồ thị ở trên suy ra số giao điểm của đồ thị hàm số $y=g(x)$ với trục hoành là 4 điểm

Bước 2: Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)$

$g(x)=f^2(x)-4f(x)+3 \Rightarrow g'(x)=2f'(x)\left(f(x)-2\right)$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f(x)=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2\,(II) \\ x=3 \end{array}\right.$$

Dễ thấy các nghiệm của (I) và của (II) không trùng nhau, suy ra hàm số $y=\left|f^2(x)-4f(x)+3\right|$ có 7 điểm cực trị.

Lưu ý: Nghiệm $x=0$ là nghiệm bội lẻ.

Câu 56: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-2		-1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	1	↘	0	↗	3	↘	$-\infty$

Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)=f\left(\left|x-4\right|\right)+2022^{2023}$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=\left[f\left(\left|x-4\right|\right)\right]'=\left(\left|x-4\right|\right)'.f'\left(\left|x-4\right|\right)=\dfrac{x-4}{\left|x-4\right|}f'\left(\left|x-4\right|\right)$.

$g'(x)$ không xác định tại điểm $x=4$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'\left(\left|x-4\right|\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|x-4\right|=-2 \\ \left|x-4\right|=-1 \\ \left|x-4\right|=3 \\ \left|x-4\right|=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=9 \\ x=-1 \\ x=7 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		4		7		9		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗		↘		↗		↘		↗		↘	

Do đó hàm số $y=g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 57: Cho hàm số $f'(x)=(1-x)\left(x^2-5x+6\right)$. Hỏi có bao nhiêu giá trị của tham số m (với $m\in[0;6];2m\in\mathbb{Z}$) để hàm số $g(x)=f\left(x^2-2|x-1|-2x+m\right)$ có đúng 9 điểm cực trị?

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

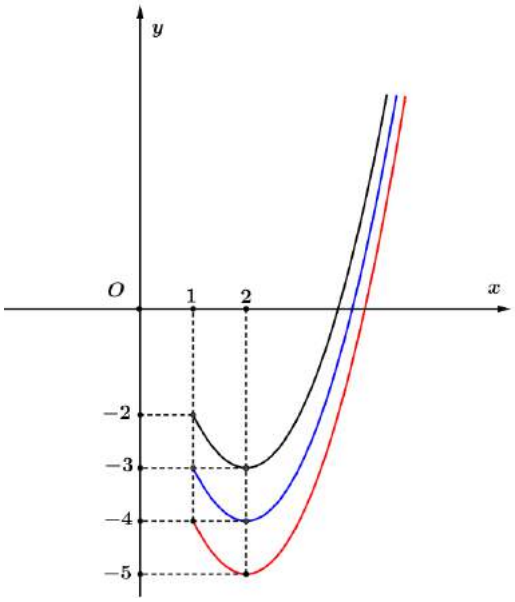
Đồ thị hàm số $g(x)=f\left(x^2-2|x-1|-2x+m\right)=f\left(|x-1|^2-2|x-1|+m-1\right)$ đối xứng qua đường thẳng $x=1$.

Xét hàm số $y=f\left(x^2-4x+m+2\right)$, $x\ge 1$.

$$y'=(2x-4)\,f'\left(x^2-4x+m+2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x^2-4x+m+2=0\ (l)\\x^2-4x+m+2=1\\x^2-4x+m+2=2\\x^2-4x+m+2=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x^2-4x+1=-m\\x^2-4x=-m\\x^2-4x-1=-m\end{array}\right.$$

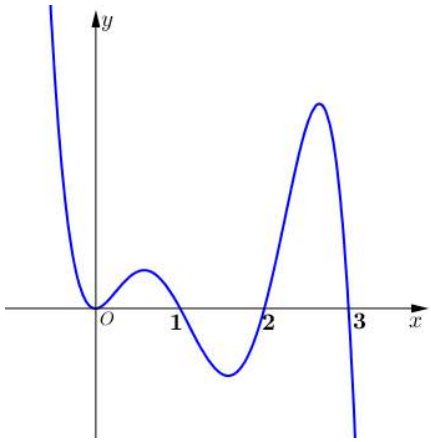
Hàm số $g(x)=f\left(x^2-2|x-1|-2x+m\right)$ có đúng 9 điểm cực trị khi và chỉ khi đường thẳng $y=-m$ cắt các đồ thị hàm số $y=x^2-4x-1, y=x^2-4x, y=x^2-4x+1$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn 1 và khác 2.

Ta có đồ thị



Từ đồ thị, ta được: $\left[\begin{array}{l}-m\ge -2\\-4<-m<-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le 2\\3<m<4\end{array}\right.\Rightarrow m\in\left\{0;\frac{1}{2};1;\frac{3}{2};2;\frac{7}{2}\right\}$.

Câu 58: Cho hàm đa thức $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Có bao nhiêu giá trị của m để $m\in[0;6]$, $2m\in\mathbb{Z}$ để hàm số $g(x)=f\left(x^2-2|x-1|-2x+m\right)$ có đúng 9 điểm cực trị?

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x)=h(|x-1|)=f\left(|x-1|^2-2|x-1|+m-1\right)$

Do đồ thị hàm số $y=h(|x-1|)$ có được khi tịnh tiến đồ thị hàm số $y=h(|x|)$ sang phải một đơn vị nên số cực trị của hàm số $y=h(|x-1|)$ bằng số cực trị hàm $y=h(|x|)$. Như vậy, để hàm số $g(x)$ có 9 cực trị thì hàm số $y=h(x)=f\left(x^2-2x+m-1\right)$ có 4 cực trị có hoành độ dương.

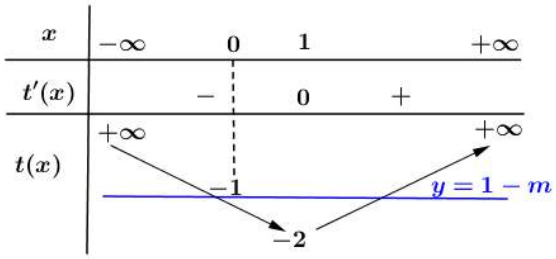
Lại có: $y'=(2x-2)f'\left(x^2-2x+m-1\right)$.

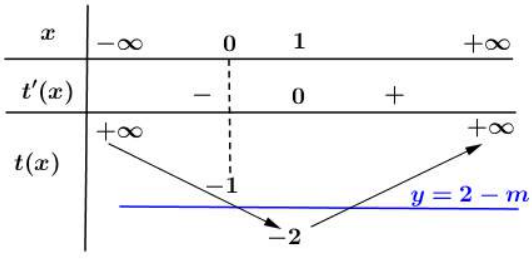
$$y'=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ f'\left(x^2-2x+m-1\right)=0\ (*)\end{array}\right.$$

$$(*)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x+m-1=1\\ x^2-2x+m-1=2\\ x^2-2x+m-1=3\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x-1=1-m\ (1)\\ x^2-2x-1=2-m\ (2)\\ x^2-2x-1=3-m\ (3)\end{array}\right.$$

(trường hợp $x^2-2x+m-1=0$ có nghiệm bội chẵn nên không là cực trị).

Xét hàm số $t(x)=x^2-2x-1\Rightarrow t'(x)=2x-2$



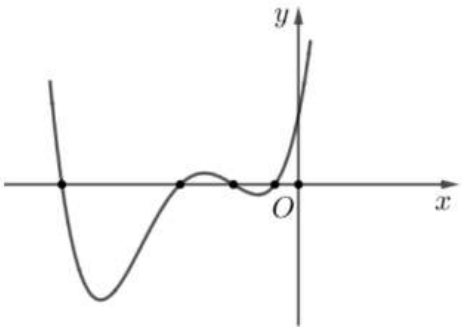


Để hàm số đã cho có 9 cực trị thì phương trình $(1),(2),(3)$ phải có 3 nghiệm dương phân biệt khác 1. Khi đó, ta có:

$$\begin{bmatrix}1-m\ge -1\\ -2<2-m<-1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}m\le 2\\ 3<m<4\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}0\le 2m\le 4\\ 6<2m<8\end{bmatrix}.$$

Do $2m\in\mathbb{Z}\Rightarrow\ 2m\in\{0;1;2;3;4;7\}$. Vậy có 6 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 59: Cho hàm đa thức $y=f(x)$, biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Biết rằng $f(0)=0$. Hỏi hàm số $g(x)=\left|f\left(x^6\right)-x^3\right|$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chon D

$$h(x)=f\left(x^6\right)-x^3\Rightarrow h'(x)=6x^5f'\left(x^6\right)-3x^2=3x^2\left(2x^3f'\left(x^6\right)-1\right)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x^2=0\\ 2x^3f'\left(x^6\right)-1=0\end{bmatrix}$$

Đặt $u(x)=2x^3f'\left(x^6\right)-1\Rightarrow u'(x)=6x^2f'\left(x^6\right)+12x^8f''\left(x^6\right)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}.$

(Từ đồ thị ta có $x^6\ge 0\Rightarrow\begin{cases}f'\left(x^6\right)>0\\ f''\left(x^6\right)>0\end{cases}$ do đó $\begin{cases}6x^2f'\left(x^6\right)>0\\ 12x^8f''\left(x^6\right)>0\end{cases}.\forall x\in\mathbb{R}$

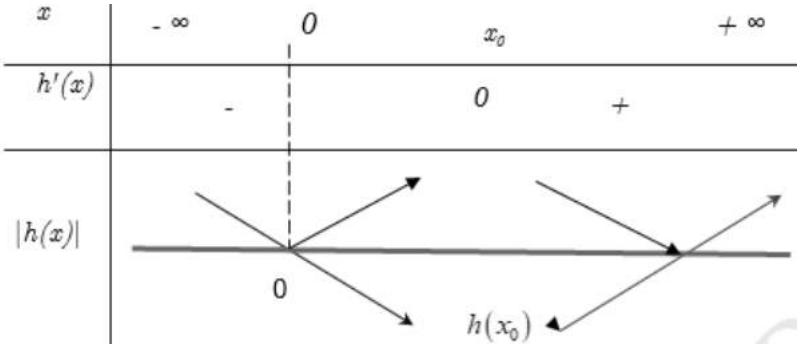
Nên $u(x)$ đồng biến và liên tục trên $\mathbb{R}$ (do $f(x)$ là hàm đa thức

$\Rightarrow u(x)$ là hàm đa thức) và $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}u(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=+\infty\end{cases}$ suy ra phương trình $u(x)=2x^3f'\left(x^6\right)-1=0$ có nghiệm duy nhất.

Giả sử $u(x)=2x^3f'\left(x^6\right)-1=0\Leftrightarrow x^3f'\left(x^6\right)=\dfrac{1}{2}$ có nghiệm là x_0 (do $f'\left(x_0^6\right)>0$)

$\Rightarrow x_0^3>0\Rightarrow x_0>0$

Ta có bảng biến thiên sau:



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $g(x)=\left|h(x)\right|$ có 1 điểm cực đại.

Câu 60: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ thỏa mãn $a>0, d>2021, a+b+c+d-2021<0$. Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f(x)-2021\right|$ là

A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Đặt $g(x)=f(x)-2021=ax^3+bx^2+cx+d-2021$. Số cực trị của hàm số $y=\left|g(x)\right|$ bằng số cực trị của hàm số $y=g(x)$ cộng số nghiệm đơn của phương trình $g(x)=0$.

Ta có $g(0)=d-2021>0, g(1)=a+b+c+d-2021<0$.

Giả sử hàm số $y=g(x)$ không có cực trị, kết hợp với $a>0$ ta có $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra, $g(0)<g(1)$ (mâu thuẫn). Do đó, hàm số $y=g(x)$ có hai cực trị x_1, x_2 $(x_1<x_2)$.

Từ đây ta lập được bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$g(x_1)$	↘	$g(x_2)$	↗	$+\infty$

Chỉ có thể xảy ra một trong 5 trường hợp dưới đây.

Trường hợp 1: $x_1<x_2\le 0\Rightarrow g(0)<g(1)$ (mâu thuẫn).

Trường hợp 2: $1\le x_1<x_2\Rightarrow g(0)<g(1)$ (mâu thuẫn).

Trường hợp 3: $0\le x_1<x_2\le 1\Rightarrow \begin{cases} g(x_1)\ge g(0)>0 \\ g(x_2)\le g(1)<0 \end{cases}\Rightarrow g(x)=0$ có 3 nghiệm đơn. Do đó, hàm số $y=\left|g(x)\right|$ có 5 điểm cực trị.

Trường hợp 4: $0\le x_1<1\le x_2\Rightarrow \begin{cases} g(x_1)\ge g(0)>0 \\ g(x_2)\le g(1)<0 \end{cases}\Rightarrow g(x)=0$ có 3 nghiệm đơn. Do đó, hàm số $y=\left|g(x)\right|$ có 5 điểm cực trị.

Trường hợp 5: $x_1\le 0<x_2\le 1\Rightarrow \begin{cases} g(x_1)\ge g(0)>0 \\ g(x_2)\le g(1)<0 \end{cases}\Rightarrow g(x)=0$ có 3 nghiệm đơn. Do đó, hàm số $y=\left|g(x)\right|$ có 5 điểm cực trị.

Vậy hàm số $y=\left|f(x)-2021\right|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 61: Cho hàm số $f(x)=2x^3+bx^2+cx+d$ thỏa mãn $4b+2c+d+16<0$ và $9b-3c+d>54$. Hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 4

Lời giải

Chọn C

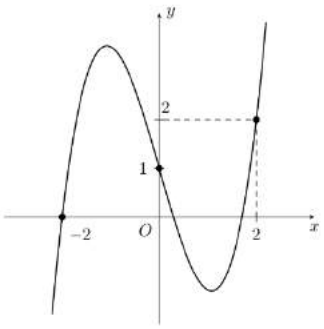
Ta có $f(x)=2x^3+bx^2+cx+d\Rightarrow f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Ta có: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(2x^3+bx^2+cx+d\right) = -\infty \\ f(-3) = -54+9b-3c+d > 0 \\ f(2) = 4b+2c+d+16 < 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x^3+bx^2+cx+d\right) = +\infty \end{cases}$

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x).f(-3) < 0$, $f(-3)\,f(2) < 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x).f(2) < 0$ nên theo tính chất hàm liên tục thì phương trình $f(x)=0$ và ít nhất ba nghiệm và $f(x)$ là hàm bậc ba nên phương trình $f(x)=0$ sẽ có ba nghiệm. Do đó hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị.

$\Rightarrow$ Hàm số $\left|f(x)\right|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 62: Biết Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $f'\left(\sqrt[3]{x}\right)$ được cho trong hình dưới. Hàm số $g(x)=\left|f(x)-\frac{1}{8}x^4-x\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực đại.



A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

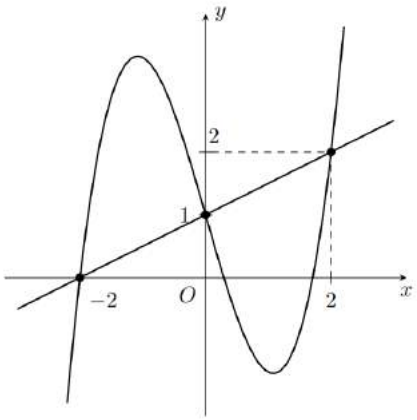
Chọn A

Xét hàm số $h(x)=f(x)-\frac{1}{8}x^4-x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $h'(x)=f'(x)-\frac{1}{2}x^3-1$, nên $h'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{2}x^3+1$.

Đặt $x=\sqrt[3]{t} \Rightarrow t=x^3$, khi đó xét $h'(x)=f\left(\sqrt[3]{t}\right)-\left(\frac{1}{2}t+1\right)$.

Vẽ đồ thị hàm số $y=\frac{1}{2}t+1$ cùng hệ tọa độ với đồ thị hàm số $f'\left(\sqrt[3]{t}\right)$ ta được như hình dưới



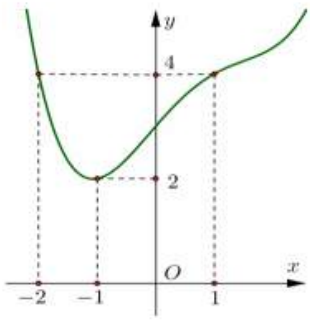
Do đó $h'(x)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=0 \\ t=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt[3]{2} \\ x=0 \\ x=\sqrt[3]{2} \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ như sau

x	$-\infty$		$-\sqrt[3]{2}$		0		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$h\left(-\sqrt[3]{2}\right)$	$\nearrow$	$h(0)$	$\searrow$	$h\left(-\sqrt[3]{2}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số $g(x)=\left|h(x)\right|$ có tối đa 3 điểm cực đại.

Câu 63: Cho hàm số $y=f(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f\,(a\neq 0)$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Đặt $g(x)=f(3x-1)-9x^3+\dfrac{9}{2}x^2-6x+2022$. Hàm số $y=g\left(\left|x\right|\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

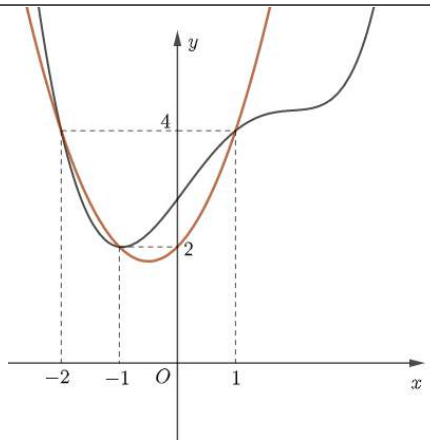
Chọn A

Ta có: $g'(x)=3f'(3x-1)-27x^2+9x-6=3f'(3x-1)-3(3x-1)^2-3(3x-1)-6$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(3x-1)=(3x-1)^2+(3x-1)+2$

Đặt $t=3x-1$ ta được phương trình: $f'(t)=t^2+t+2$

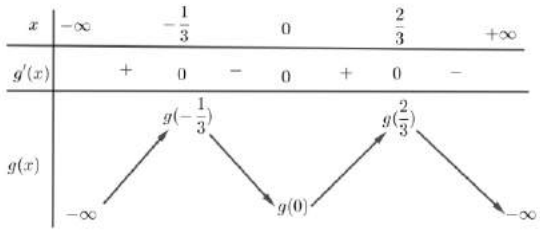
Từ đồ thị của hai hàm số $y=f'(t)$ và hàm $y=t^2+t+2$ ta có phương trình $f'(t)=t^2+t+2$ có ba nghiệm $t=-1$, $t=1$ và $t=-2$.



Với $t=-1$ thì $x=0$. Với $t=1$ thì $x=\dfrac{2}{3}$. Với $t=-2$ thì $x=\dfrac{-1}{3}$

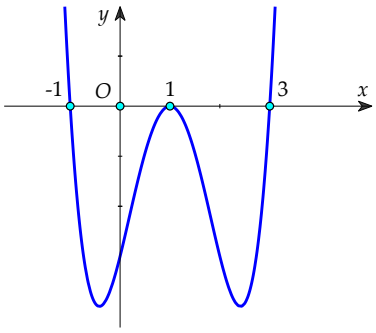
Khi đó phương trình $g'(x)=0$ có ba nghiệm $x=0$, $x=\dfrac{2}{3}$ và $x=\dfrac{-1}{3}$

Bảng biến thiên của hàm $y=g(x)$



Từ bảng biến thiên của hàm $y=g(x)$ suy ra đồ thị hàm $y=g\left(|x|\right)$ có 3 điểm cực trị

Câu 64: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới:



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(|x^3|+1\right)$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Đặt $h(x)=f\left(x^3+1\right) \Rightarrow g(x)=h(|x|)=f\left(|x^3|+1\right)$.

$$h'(x)=3x^2.f'\left(x^3+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^3+1=-1 \\ x^3+1=1 \\ x^3+1=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt[3]{2} \\ x=0 \\ x=\sqrt[3]{2} \end{array}\right. .$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt[3]{2}$		0		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘		↗		↘		↗	$+\infty$

Suy ra hàm số $y=h(x)$ có duy nhất một điểm cực trị dương.

Vậy số điểm cực trị của hàm số $g(x)=h(|x|)$ là 3.

Câu 65: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $f(x)=\left|\dfrac{x}{x^2+x+1}-\dfrac{m}{3}\right|$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 3 **B.** 5 **C.** 2 **D.** 4

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{x}{x^2+x+1}-\dfrac{m}{3}$.

Ta có $g'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{1-x^2}{\left(x^2+x+1\right)^2}=0\Leftrightarrow x=\pm1.$

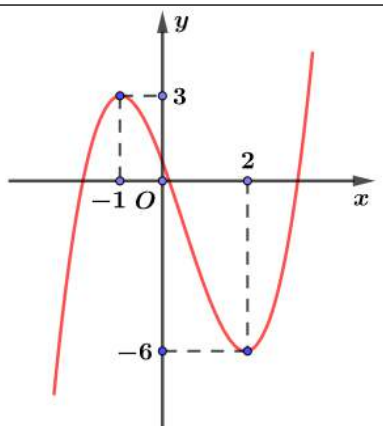
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\frac{m}{3}$	↘	$-1-\frac{m}{3}$	↗	$\frac{1}{3}-\frac{m}{3}$	↘	$-\frac{m}{3}$

Hàm số $g(x)$ có hai điểm cực trị $x=-1,\ x=1$ với mọi $m\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)=|g(x)|$ có ít nhất 3 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $g(x)=0$ có nghiệm bội lẻ.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(-1-\dfrac{m}{3}\right)\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{m}{3}\right)<0\\ -\dfrac{m}{3}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-3<m<1\\ m=0\end{array}\right.\Rightarrow m\in\{-2;-1,0\}$$ (Do m nguyên)

Câu 66: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(\left|f^2(x)-4f(x)-m\right|\right)$ có 17 điểm cực trị là

A. 1652. **B.** 1653. **C.** 1654. **D.** 1651.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$g'(x)=\frac{f'(x)\left(2f(x)-4\right)\left(f^2(x)-4f(x)-m\right)}{\left|f^2(x)-4f(x)-m\right|}.f'\left(\left|f^2(x)-4f(x)-m\right|\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f'(x)=0\ (1)\\ 2f(x)-4=0\Leftrightarrow f(x)=2\ (2)\\ f^2(x)-4f(x)-m=0\Leftrightarrow f^2(x)-4f(x)=m\ (3)\\ \left|f^2(x)-4f(x)-m\right|=-1\,(voly)\\ \left|f^2(x)-4f(x)-m\right|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f^2(x)-4f(x)-m=2\\ f^2(x)-4f(x)-m=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f^2(x)-4f(x)=m+2\ (4)\\ f^2(x)-4f(x)=m-2\ (5)\end{array}\right.\end{array}\right.$$

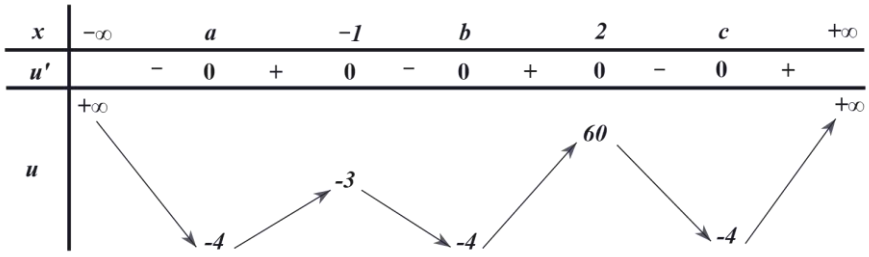
Dễ thấy (1) có 2 nghiệm đơn (vì có 2 cực trị) và (2) có 3 nghiệm đơn

Vậy tổng số nghiệm đơn của phương trình $(3);(4);(5)$ là 12 thì thỏa mãn

Đặt $u=u(x)=f^2(x)-4f(x)\Rightarrow u'=2f'(x)\left(f(x)-2\right)\Rightarrow u'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x\in\{-1;2\}\\ x\in\{a;b;c\}\end{array}\right.$.

Các nghiệm trên được sắp thứ tự từ nhỏ đến lớn như sau: $a<-1<b<2<c$.

Bảng biến thiên của hàm số $u=f^2(x)-4f(x)$.



Vậy số giao điểm của các đường thẳng $y=m-2;y=m;y=m+2$ với đồ thị $u(x)$ là 12 điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-3\le m-2<60\\ -3\le m+2<60\end{array}\right.\Leftrightarrow-1\le m<58\Rightarrow m\in\{-1;0;1;...;57\}\Rightarrow S=1652.$$

Câu 67: Gọi S là tập giá trị nguyên $m \in [0;100]$ để hàm số $y = \left|x^3 - 3mx^2 + 4m^3 - 12m - 8\right|$ có 5 cực trị. Tính tổng các phần tử của S.

A. 10096. **B.** 4048. **C.** 5047. **D.** 10094.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3mx^2 + 4m^3 - 12m - 8$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6mx$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2m \end{array}\right.$

Hàm số $y = \left|x^3 - 3mx^2 + 4m^3 - 12m - 8\right|$ có 5 cực trị $\Leftrightarrow f(x)$ có hai giá trị cực trị trái dấu $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m \neq 0 \\ \left(4m^3 - 12m - 8\right)\left(8m^3 - 12m^3 + 4m^3 - 12m - 8\right) < 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m \neq 0 \\ \left(4m^3 - 12m - 8\right)\left(-12m - 8\right) < 0 \end{array}\right.$.

Kết hợp với $m \in [0;100]$ và $m \in \mathbb{Z}$ ta được $m \in \{3;4;...,100\}$. Vậy $S = \{3,4,...,100\}$.

Tổng các phần tử của S là 5047.

Câu 68: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-5	↗	$+\infty$

Đặt $g(x) = \left|m + f\left(2022 + x\right)\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = g(x)$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 6. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Đặt $h(x) = m + f\left(2022 + x\right)$

Số điểm cực trị của $g(x)$ sẽ bằng số điểm cực trị của $h(x)$ cộng với số nghiệm bội lẻ của phương trình $h(x) = 0$ (Nghiệm bội lẻ này phải khác điểm cực trị của hàm số).

Số điểm CT của $h(x)$ bằng số điểm CT của $f(x)$. Nên hàm số $h(x)$ có 2 điểm cực trị.

Vậy để hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị thì pt $h(x) = 0$, phải có 3 nghiệm lẻ phân biệt.

$h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x + 2022) = -m$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x + 2022)$:

x	$-\infty$	x_1-2022		x_2-2022	$+\infty$
$f'(x+2022)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x+2022)$	$-\infty$	$\nearrow$ 3		$\searrow$ -5	$\nearrow$ $+\infty$

Ycbt $-5<-m<3\Leftrightarrow -3<m<5$. Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-2;-1;...;4\}$.

Vậy có 7 giá trị m thỏa mãn ycbt.

Câu 69: Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-5;5)$ để đồ thị hàm số $y=\left|x^4-3mx^2-4\right|$ có đúng ba điểm cực trị A,B,C và diện tích tam giác ABC lớn hơn 4.

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Để đồ thị hàm số $y=\left|x^4-3mx^2-4\right|$ có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi $m\le 0$.

Khi đó 3 điểm cực trị là A,B,C với:

$$A\left(-\sqrt{3m+\sqrt{9m^2+16}};0\right),A\left(\sqrt{3m+\sqrt{9m^2+16}};0\right),C(0;4)$$

Khi đó diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC}=4\sqrt{3m+\sqrt{9m^2+16}}$.

Theo yêu cầu bài toán ta có:

$$4\sqrt{3m+\sqrt{9m^2+16}}>4\Leftrightarrow\sqrt{3m+\sqrt{9m^2+16}}>1\Leftrightarrow 3m+\sqrt{9m^2+16}\Leftrightarrow m>\frac{-15}{6}.$$

Kết hợp với $\begin{cases}m\in(-5;5)\\ m\le 0\end{cases}\Rightarrow -\frac{15}{6}<m\le 0$. Có 3 giá trị nguyên của m.

Câu 70: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	3	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 1	$\searrow$ 0	$\nearrow$ $+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để hàm số $h(x)=\left|f(x)-m\right|$ có đúng 3 điểm cực trị?

A. 21. **B.** 19. **C.** 18. **D.** 20.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên ta thấy được $f(x)-m$ có hai điểm cực trị, nên để hàm số $h(x)=\left|f(x)-m\right|$ có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $f(x)-m=0$ có một nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 1\\ m\le 0\end{array}\right.$.

Câu 71: Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\left|x^3-3x^2+m-4\right|$ có đúng 5 điểm cực trị là

A. $[4;8]$. **B.** $[-4;0]$. **C.** $(-4;0)$. **D.** $(4;8)$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2+m-4$.

Ta có $f'(x)=3x^2-6x$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow f(0)=m-4\\x=2\Rightarrow f(2)=m-8\end{array}\right.$

Suy ra hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2+m-4$ có 2 điểm cực trị.

Để hàm số $y=\left|x^3-3x^2+m-4\right|$ có đúng 5 điểm cực trị thì phương trình $f(x)=0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow f(0).f(2)<0\Leftrightarrow(m-4)(m-8)<0\Leftrightarrow 4<m<8$.

Câu 72: Số giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2022;2022]$ để hàm số $f(x)=|x|^3-3mx^2+24(m-2)|x|+2021m$ có đúng năm điểm cực trị là

A. 2025. **B.** 2021. **C.** 2019. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn C

Đặt $g(x)=x^3-3mx^2+24(m-2)x+2021m\Rightarrow g'(x)=3x^2-6mx+24(m-2)$.

Hàm số $y=f(x)$ có năm cực trị $\Leftrightarrow y=g(x)$ có đúng hai cực trị dương

$\Leftrightarrow g'(x)=0$ có đúng hai nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow 3x^2-6mx+24(m-2)=0$ có đúng hai nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow x^2-2mx+8(m-2)=0$ có đúng hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\Delta'>0\\S>0\\P>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m^2-8(m-2)>0\\2m>0\\8(m-2)>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m^2-8m+16>0\\m>0\\m>2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}(m-4)^2>0\\m>2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\neq 4\\m>2\end{array}\right..$$

Vì $m\in[-2022;2022]\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}m\in[3,2022]\\m\neq 4\end{array}\right.\Rightarrow$ có 2019 giá trị của m.

Câu 73: Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[-2021;2021]$ để hàm số $y=\left|\dfrac{x^2+m}{x^2+1}\right|$ có đúng ba điểm cực trị

A. 2020. **B.** 2022. **C.** 2021. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn C

Đặt $y=f(x)=\dfrac{x^2+m}{x^2+1}$, $f'(x)=\dfrac{2(1-m)x}{\left(x^2+1\right)^2}$.

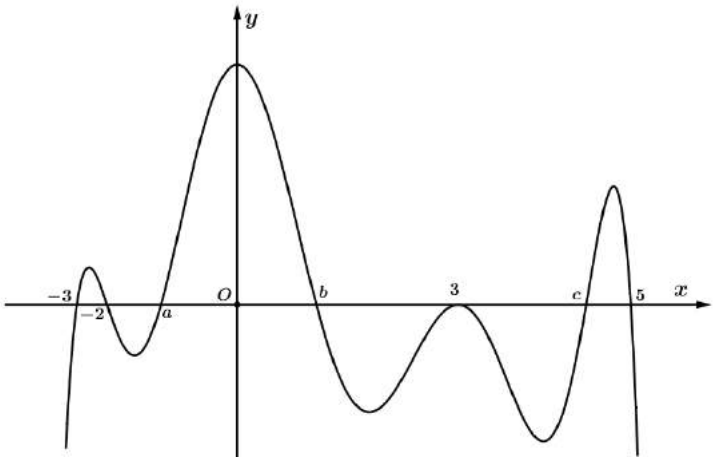
Với $m=1\Rightarrow y=1$, hàm số đã cho không có điểm cực trị nào. (loại).

Với $m \neq 1, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, như vậy $f(x)$ có một điểm cựa trị.

Hàm số $y = \left|\dfrac{x^2+m}{x^2+1}\right|$ có đúng ba điểm cực trị khi đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2+m}{x^2+1}$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt khác 0, điều này tương đương với $m < 0$.

$m \in [-2021; 2021]$ nên $m \in \{-2021; -2020; ....; -1\}$.

Câu 74: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ $-3; -2; a; b; 3; c; 5$ với $-\dfrac{4}{3} < a < -1;\ 1 < b < \dfrac{4}{3};\ 4 < c < 5$ có dạng như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = f\left(2|x| + m - 2022\right)$ có 5 điểm cực trị?



A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(x) = f(2x + m - 2022)$ ta có $g'(x) = 2f'(2x + m - 2022)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(2x+m-2022) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+m-2022 = -3 \\ 2x+m-2022 = -2 \\ 2x+m-2022 = a, \left(-\dfrac{4}{3} < a < -1\right) \\ 2x+m-2022 = b, \left(1 < b < \dfrac{4}{3}\right) \\ 2x+m-2022 = 3 \\ 2x+m-2022 = c, (4 < c < 5) \\ 2x+m-2022 = 5 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 2019 - m \\ 2x = 2020 - m \\ 2x = 2022 + a - m \\ 2x = 2022 + b - m \\ 2x = 2025 - m \\ 2x = 2022 + c - m \\ 2x = 2027 - m \end{array}\right.$$

, trong đó $x = 3$ là nghiệm bội chẵn

Để hàm số $y=f\left(2|x|+m-2022\right)$ có 5 điểm cực trị thì hàm số $g(x)=f\left(2x+m-2022\right)$ phải có đúng 2 cực trị có hoành độ dương $\Leftrightarrow f'(2x+m-2022)=0$ có đúng 2 nghiệm dương phân biệt $x\neq 3$ $\Leftrightarrow \begin{cases}2022+b-m<0\\2022+c-m>0\end{cases}\Leftrightarrow 2022+b<m<c+2022.$

Mặt khác theo đề bài $1<b<\frac{4}{3};\ 4<c<5$ nên $\frac{4}{3}+2022\le m\le 4+2022\Leftrightarrow \frac{6070}{3}\le m\le 2026.$

Do m là số nguyên nên $m\in\{2024;2025;2026\}\Rightarrow$ có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 75: Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=|x|^3-(2m+1)x^2+3m|x|-5$ có 5 điểm cực trị.

A. $\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$. **B.** $\left(-\infty;\frac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$.

C. $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=|x|^3-(2m+1)x^2+3m|x|-5$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $f(x)=x^3-(2m+1)x^2+3mx-5$ có hai cực trị dương

$\Leftrightarrow f'(x)=0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow 3x^2-2(2m+1)x+3m=0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\S>0\\P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4m^2-5m+1>0\\2m+1>0\\m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\in\left(-\infty;\frac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)\\m>-\frac{1}{2}\\m>0\end{cases}\Leftrightarrow m\in\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$$

Câu 76: Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\left|x^3-(6m+3)x^2+(9+18m)x-27\right|$ có ba điểm cực trị.

A. $\begin{bmatrix}m<\frac{-1}{2}\\m>1\end{bmatrix}$. **B.** $-1\le m<\frac{-1}{2}$. **C.** $-1\le m<1$. **D.** $-1\le m\le 1$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x)=x^3-(6m+3)x^2+(9+18m)x-27$, có $f'(x)=3x^2-2(6m+3)x+9+18m$.

Để hàm số $|f(x)|$ có ba điểm cực trị thì hàm số $f(x)$ phải có 2 cực trị cùng dấu hay phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt (1) và phương trình $f(x)=0$ có 1 nghiệm (2).

Giải $(1) \Leftrightarrow \Delta'_{f'} = (6m+3)^2 - 3(9+18m) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Giải (2): Ta có $f(x) = (x-3)\left(x^2 - 6mx + 9\right)$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x^2 - 6mx + 9 = 0 \ (*) \end{array}\right.$

$(2) \Leftrightarrow (*)$ vô nghiệm hoặc có nghiệm $x = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta_{(*)} \le 0 \\ 3^2 - 6m.3 + 9 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \le m \le 1 \\ m = 1 \end{array}\right.$

Vậy $-1 \le m < \dfrac{-1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 77: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên. Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ là

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	1	↘	-1	↗	$+\infty$

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$y = f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	1	↘	-1	↗	$+\infty$
$y = \lvert f(x)\rvert$	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	0	↗	1 ↘ 0 ↗ 1 ↘ 0 ↗ $+\infty$

Từ bảng biến thiên ta suy ra hàm số $y = |f(x)|$ có 7 điểm cực trị.

Câu 78: Tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left|x^2 - x - 30\right| + mx + 1$ có ba điểm cực trị là:

A. 22. **B.** 2. **C.** 21. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y = \left|x^2 - x - 30\right| + mx + 1 = \sqrt{\left(x^2 - x - 30\right)^2} + mx + 1$.

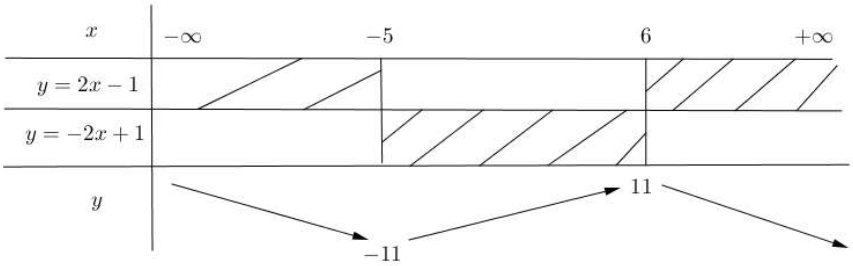
$y' = \dfrac{2\left(x^2 - x - 30\right)(2x-1)}{2\sqrt{\left(x^2 - x - 30\right)^2}} + m = \dfrac{\left(x^2 - x - 30\right)(2x-1)}{\left|x^2 - x - 30\right|} + m$.

$$y'=0\Leftrightarrow\frac{\left(x^2-x-30\right)\left(2x-1\right)}{\left|x^2-x-30\right|}+m=0\Leftrightarrow m=-\frac{\left(x^2-x-30\right)\left(2x-1\right)}{\left|x^2-x-30\right|}\ (*).$$

Nếu $x^2-x-30>0\Leftrightarrow x<-5\vee x>6$ thì $m=-\frac{\left(x^2-x-30\right)\left(2x-1\right)}{x^2-x-30}=-\left(2x-1\right).$

Nếu $x^2-x-30<0\Leftrightarrow -5<x<6$ thì $m=-\frac{\left(x^2-x-30\right)\left(2x-1\right)}{-\left(x^2-x-30\right)}=2x-1.$

Ta có ảng biến thiên:

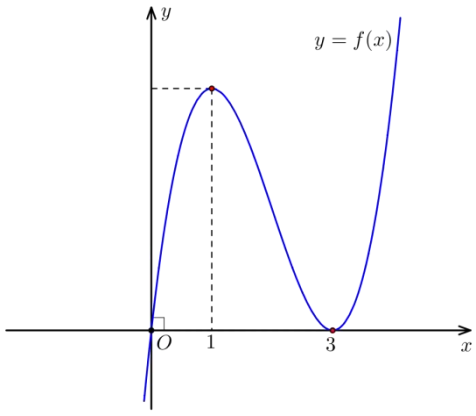


Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $(*)$ có 3 nghiệm phân biệt, tức là $-11<m<11$.

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-10;-9;-8;-7;...;8;9;10\}$.

Vậy tổng tất cả các giá trị nguyên của m là 0.

Câu 79: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $h\left(x\right)=\left|f^2\left(x\right)+f\left(x\right)+m\right|$ có đúng 3 điểm cực trị.

A. $m\ge\frac{1}{4}$. **B.** $m\le 1$. **C.** $m<1$. **D.** $m>\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Xét $g\left(x\right)=f^2\left(x\right)+f\left(x\right)+m$. Ta có $g'\left(x\right)=2f\left(x\right)f'\left(x\right)+f'\left(x\right)$.

$$\Rightarrow g'\left(x\right)=2f\left(x\right)f'\left(x\right)+f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(x\right)=0\\f\left(x\right)=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\cdot$$

Ta có: $f'\left(x\right)=0\Rightarrow$ có hai nghiệm là $x=0;x=3$ và $f\left(x\right)=-\frac{1}{2}$ có một nghiệm là $x=a<0$

nên hàm số $g(x)$ có ba điểm cực trị.

Do đó để đồ thị hàm số $h(x)=\left|f^2(x)+f(x)+m\right|$ có đúng 3 điểm cực trị thì phương trình $f^2(x)+f(x)+m=0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta=1-4m<0\Leftrightarrow m>\frac{1}{4}$.

Câu 80: Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+(m-1)x+3m-2$. Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị

A. $m>1$. **B.** $m<2$. **C.** $1<m<2$. **D.** $m>2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có phương trình $f'(x)=x^2-2x+m-1$.

Hàm số $y=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+(m-1)x+3m-2$ có hai cực trị có hoành độ dương hay phương trình $f'(x)=x^2-2x+m-1=0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

Ta có phương trình $f'(x)=x^2-2x+m-1=0$ có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\P>0\\S>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2-m>0\\2>0\\m-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<2\\m>1\end{cases}\Leftrightarrow 1<m<2$.

Vậy $1<m<2$.

Câu 81: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=\left|x^3-6x^2+9x-2m\right|$ có đúng 3 điểm cực trị.

A. $\begin{bmatrix}m\ge 2\\m\le 0\end{bmatrix}$. **B.** $0<m<2$. **C.** $0\le m\le 2$. **D.** $\begin{bmatrix}m>2\\m<0\end{bmatrix}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x)=x^3-6x^2+9x$, ta có $g'(x)=3x^2-12x+9$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=1\\x=3\end{bmatrix}$.

Ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

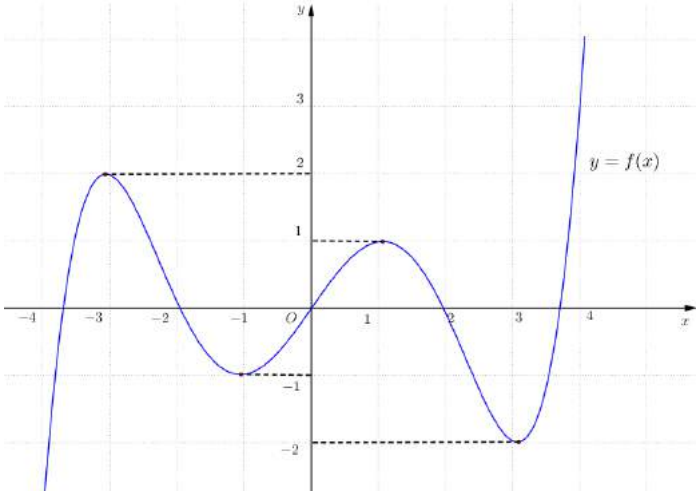
Đặt $u(x)=x^3-6x^2+9x-2m$.

Để hàm số $f(x)=\left|u(x)\right|$ có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow u(x).u'(x)=0$ có 3 nghiệm bội lẻ.

Mà $u'(x)=g'(x)=0$ đã có 2 nghiệm $x=1;x=3$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow u(x)=0$ có 1 nghiệm đơn khác 1 và 3 $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2m\ge 4 \\ 2m\le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge 2 \\ m\le 0 \end{array}\right.$.

Câu 82: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình sau. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\left|2f(x)-m\right|$ có đúng 7 điểm cực trị?



A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y=\left|2f(x)-m\right| \Rightarrow y'=\dfrac{\left[2f(x)-m\right].\left[2f'(x)\right]}{\left|2f(x)-m\right|}$

Nhận thấy số điểm cực trị của hàm số $y=\left|2f(x)-m\right|$ là số nghiệm bội lẻ của phương trình:

$$\left[2f(x)-m\right].\left[2f'(x)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{m}{2}\ (1) \\ f'(x)=0\ (2) \end{array}\right.$$

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có 4 điểm cực trị, suy ra phương trình (2) có 4 nghiệm bội lẻ.

Để đồ thị hàm số $y=\left|2f(x)-m\right|$ có đúng 7 điểm cực trị, cần phương trình (1) có đúng 3 nghiệm bội lẻ và không trùng lặp với các nghiệm của phương trình (2)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1\le \dfrac{m}{2}<2 \\ -2<\dfrac{m}{2}\le -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\le m<4 \\ -4<m\le -2 \end{array}\right.$$

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn là: $m\in\{-3;-2;2;3\}$.

Câu 83: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	1	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị của m thỏa mãn $2022m \in \mathbb{Z}$ để hàm số $g(x)=\left|f^2(x)-2f(x)-m\right|$ có 7 điểm cực trị.

A. 1. **B.** 0. **C.** 2021. **D.** 2022.

Lời giải

Chọn C

Đặt $h(x)=f^2(x)-2f(x)-m$; $h'(x)=\left[2f(x)-2\right].f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=1 \\ f'(x)=0 \end{array}\right.$

Phương trình $f(x)=1$ có một nghiệm đơn $x=a$ $(a<1)$ và nghiệm kép $x=2$

$f'(x)=0$ có hai nghiệm đơn $x=1, x=2$. Ta có bảng biến thiên của $h(x)$

x	$-\infty$		a		1		2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$				$-m$				$+\infty$
			$-1-m$				$-1-m$		

Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $h(x)=0$ có 4 nghiệm đơn phân biệt $\Leftrightarrow -1-m<0<-m \Leftrightarrow -1<m<0 \Rightarrow -2022<2022m<0$. Suy ra có 2021 giá trị thỏa mãn.

Câu 84: Có bao nhiêu số nguyên của tham số $m \in [-10;10]$ để hàm số $f(x)=\left|\dfrac{x}{x^2+x+1}-\dfrac{m}{12}\right|$ có 4 điểm cực trị?

A. 13. **B.** 14. **C.** 15. **D.** 16.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{x}{x^2+x+1}-\dfrac{m}{12}$.

Ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1-x^2}{\left(x^2+x+1\right)^2}=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\dfrac{m}{12}$				$\dfrac{1}{3}-\dfrac{m}{12}$		$-\dfrac{m}{12}$
			$-1-\dfrac{m}{12}$				

Từ bảng biến thiên, ta thấy hàm số $f(x)=\left|g(x)\right|$ có đúng 4 điểm cực trị khi và chỉ khi phương

trình $g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} -1-\dfrac{m}{12}<0 \\ \dfrac{1}{3}-\dfrac{m}{12}>0 \\ -\dfrac{m}{12}\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12<m<4 \\ m\neq 0 \end{cases}$

Do m nguyên và $m\in[-10;10] \Rightarrow m\in\{-10;-9;....;-1;1;2;3\}$.

Câu 85: Cho hàm số $y=f(x)$, đạo hàm $f'(x)$ có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$		-4		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên bé hơn 2022 của tham số m để hàm số $y=f\left(\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|-\dfrac{m}{3}\right)$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 2009. **B.** 2007. **C.** 2010. **D.** 2008.

Lời giải

Chọn D

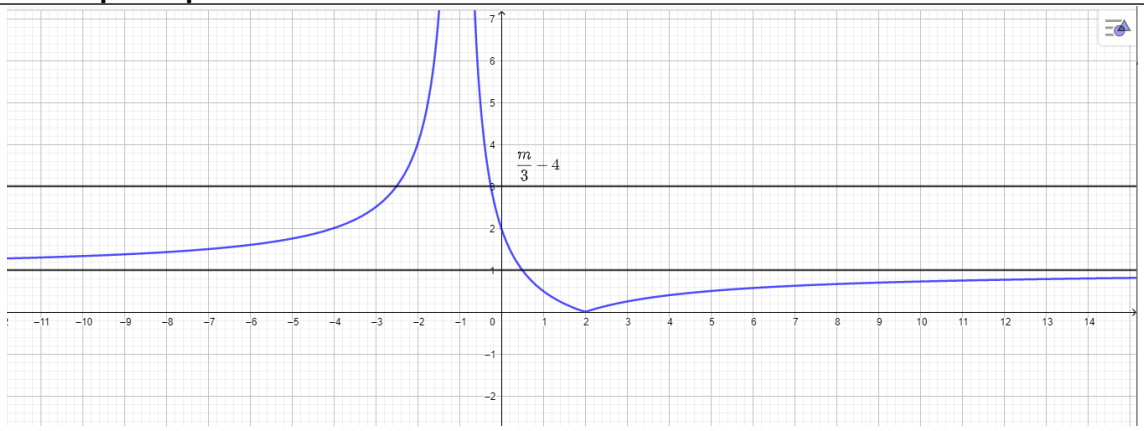
Ta có: $y'=\left(\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|-\dfrac{m}{3}\right)' f'\left(\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|-\dfrac{m}{3}\right)=\dfrac{\dfrac{x-2}{x+1}\cdot\dfrac{3}{(x+1)^2}}{\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|} f'\left(\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|-\dfrac{m}{3}\right)$

Nhận xét: $x=2$ là điểm tới hạn của hàm số $y=f(x)$

$$y'=0\Leftrightarrow f'\left(\left|\frac{x-2}{x+1}\right|-\frac{m}{3}\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|-\dfrac{m}{3}=4 \\ \left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|-\dfrac{m}{3}=-4 \\ \left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|-\dfrac{m}{3}=1\ (l) \end{array}\right.$$

Vì $f'(x)$ không đổi dấu khi qua 1 nên hàm số $y=f\left(\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|-\dfrac{m}{3}\right)$ có đúng 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|=\dfrac{m}{3}+4 \\ \left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|=\dfrac{m}{3}-4 \end{array}\right.$ có 4 nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ khác 2.

Mặt khác, do $\dfrac{m}{3}+4-\left(\dfrac{m}{3}-4\right)=8>0,\ \forall m\in\mathbb{R}$ nên nhìn vào đồ thị



Ta có: $\left[\begin{array}{l}\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|=\dfrac{m}{3}+4\\ \left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|=\dfrac{m}{3}-4\end{array}\right.$ có 4 nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ khác 2

$\Leftrightarrow \left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|=\dfrac{m}{3}-4$ có 2 nghiệm đơn khác 2 $\Leftrightarrow \begin{cases}0<\dfrac{m}{3}-4\\ \dfrac{m}{3}-4\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0<\dfrac{m}{3}-4\\ \dfrac{m}{3}-4\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow 12<m\neq 15$

Mà $\begin{cases}m\in\mathbb{Z}\\ m<2022\end{cases}$ nên ta có $\begin{cases}m\in\mathbb{Z}\\ 13\le m\le 2021\\ m\neq 15\end{cases}$

Do đó có 2008 giá trị m nguyên thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 86: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=(x+1)^2(x^2-2x), \forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(\left|x^3-3x\right|+m\right)$ có đúng 7 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗		↘		↗	$+\infty$

Cách 1: Giải trực tiếp

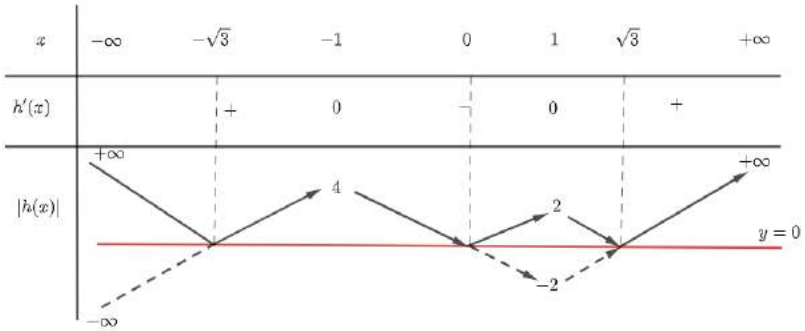
$$y=f\left(\left|x^3-3x\right|+m\right)\Rightarrow y'=\frac{\left(x^3-3x\right)\left(3x^2-3\right)}{\left|x^3-3x\right|}f'\left(\left|x^3-3x\right|+m\right)$$

$y'=0$ hoặc y' không xác định khi: $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \\ x=\pm 1 \\ f'\left(\left|x^3-3x\right|+m\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \\ x=\pm 1 \\ \left|x^3-3x\right|+m=0 \\ \left|x^3-3x\right|+m=2 \end{array}\right.$

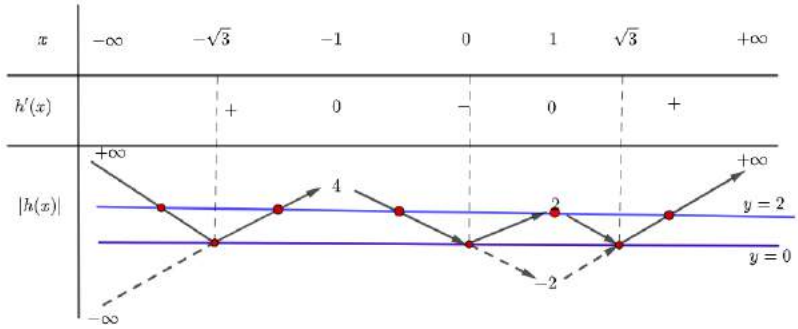
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \\ x=\pm 1 \\ \left|x^3-3x\right|=-m \\ \left|x^3-3x\right|=2-m \end{array}\right. .$$

Đặt $h(x)=x^3-3x \Rightarrow h'(x)=3x^2-3$; $h'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Bảng biến thiên của hàm số $\left|h(x)\right|$:



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy để hàm số $y=f\left(\left|x^3-3x\right|+m\right)$ có 7 cực trị thì số nghiệm bội lẻ của phương trình $y'=0$ phải là 7.

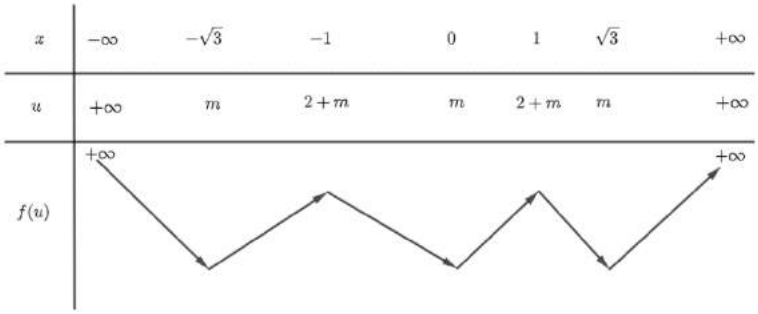


Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} 2-m=2 \\ -m=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=0$.

Vậy chỉ có 1 giá trị nguyên là $m=0$ thoả mãn hàm số $y=f\left(\left|x^3-3x\right|+m\right)$ có đúng 7 cực trị.

Cách 2: Ghép trục và đánh giá

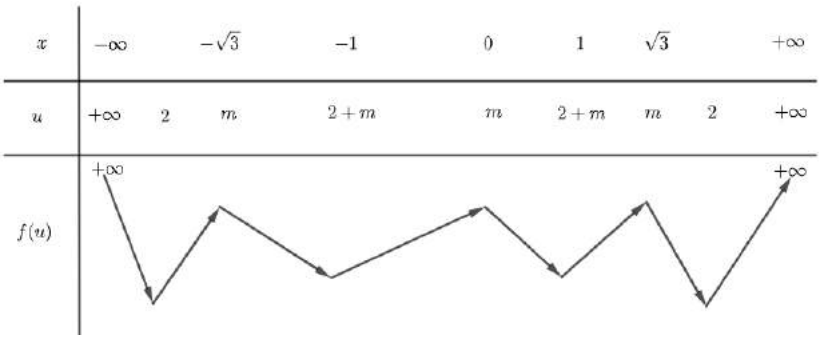
Đặt $u=\left|x^3-3x\right|+m \Rightarrow u'=\dfrac{\left(x^3-3x\right)\left(3x^2-3\right)}{\left|x^3-3x\right|}$; $u'=0$ hoặc u' không xác định khi: $\left[\begin{array}{l} u=0 \\ u=\pm 1 \\ u=\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$.



Kết hợp với bảng biến thiên của $y=f(x)$, ta thấy để hàm số $y=f(u)$ có 7 cực trị thì $m<2$ và trong $(m;2+m)$ không chứa điểm cực trị nào của $f(x)$.

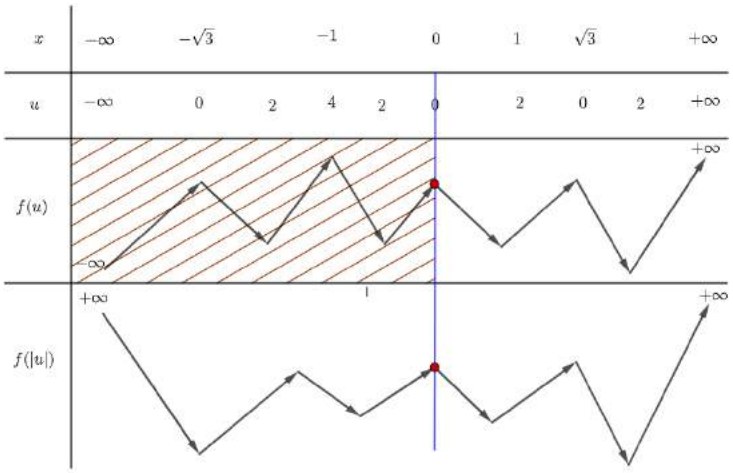
Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m=0$.

Vậy chỉ có 1 giá trị nguyên là $m=0$ thoả mãn hàm số $y=f\left(\left|x^3-3x\right|+m\right)$ có đúng 7 cực trị.



Cách 3: Ghép trục và tịnh tiến đồ thị.

Đặt $u=x^3-3x\Rightarrow u'=3x^2-3$; $u'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=-1\\u=1\end{array}\right.$.



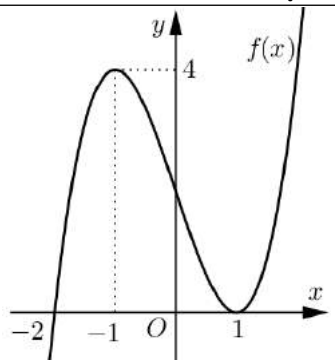
Hàm số $y=f\left(|u|+m\right)$ được tạo thành từ việc tịnh tiến qua trái m đơn vị $(m>0)$, rồi lấy đối xứng qua trục Oy.

Ta thấy để hàm số $y=f\left(|u|+m\right)$ có 7 cực trị thì số cực trị dương của $f(u+m)$ phải là 3 $\Rightarrow 0\le m<1$.

Kết hợp $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=0$.

Vậy chỉ có 1 giá trị nguyên là $m=0$ thoả mãn hàm số $y=f\left(\left|x^3-3x\right|+m\right)$ có đúng 7 cực trị.

Câu 87: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[0;20]$ để hàm số $g(x)=\left|f^2(x)-2f(x)-m\right|$ có 9 điểm cực trị?

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

Lời giải

Chọn A

Đặt $h(x)=f^2(x)-2f(x)-m\Rightarrow h'(x)=2f'(x)\left[f(x)-1\right]$

Khi đó $h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f(x)=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\\x=a\in(-2;-1)\\x=b\in(0;1)\\x=c>1\end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		a		-1		b		1		c		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	$-m-1$	↗	$8-m$	↘	$-m-1$	↗	$-m$	↘	$-m-1$	↗	$+\infty$

Ta có $h(x)$ có 5 điểm cực trị. Vậy để thoả mãn thì $h(x)=0$ có bốn nghiệm đơn hoặc bội lẻ hay $-m\le 0<8-m\Leftrightarrow 0\le m<8$. Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{0;1;2;3;4;5;6;7\}$.

Câu 88: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y=f'(x)=x^3-3x-2,\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $y=f\left(\left|x^4-8x^2\right|+m\right)$ có đúng 7 điểm cực trị.

A. 1. **B.** 16. **C.** 2. **D.** 17.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y=f'(x)=x^3-3x-2=(x+1)^2(x-2)$, suy ra $f'(x)=0$ có nghiệm đơn là 2, nghiệm kép là -1.

Xét hàm số $h(x)=x^4-8x^2$ có $h'(x)=4x^3-16x=4x\left(x^2-4\right)$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$y=h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$y=h(x)$	$+\infty$	↘	-16	↗	0	↘	-16	↗	$+\infty$

Suy ra ta có

x	$-\infty$		$-2\sqrt{2}$		-2		0		2		$2\sqrt{2}$		$+\infty$
$y=g(x)=\lvert x^4-8x^2\rvert+m$	$+\infty$	↘	m	↗	$16+m$	↘	m	↗	$16+m$	↘	m	↗	$+\infty$

Vậy ta thấy hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị là $-2\sqrt{2};-2;0;2;2\sqrt{2}$.

Ta xét hàm số $y=f\left(\left|x^4-8x^2\right|+m\right)=f\left(g(x)\right)$

$y'=f'\left(g(x)\right).g'(x)$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(g(x)\right)=0\\g'(x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}g(x)=-1 & (1)\\g(x)=2 & (2)\\g'(x)=0 & (3)\end{array}\right.$$

Theo phần trên thì hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị $-2\sqrt{2};-2;0;2;2\sqrt{2}$, tương đương với phương trình (3) có 5 nghiệm như trên; vậy điều kiện để hàm số $y=f\left(\left|x^4-8x^2\right|+m\right)=f\left(g(x)\right)$ có 7 điểm cực trị là phương trình $(2):\ g(x)=2$ có 2 nghiệm bội đơn khác các số $-2\sqrt{2};-2;0;2;2\sqrt{2}$ (ta không xét phương trình (1) vì $f'(x)=0$ có nghiệm kép là -1).

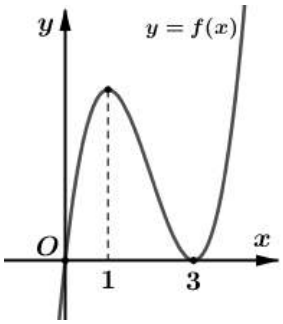
Từ bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-2\sqrt{2}$		-2		0		2		$2\sqrt{2}$		$+\infty$
$y=g(x)=\lvert x^4-8x^2\rvert+m$	$+\infty$	↘	m	↗	$16+m$	↘	m	↗	$16+m$	↘	m	↗	$+\infty$

ta thấy yêu cầu bài toán tương đương với $16+m\le 2\Leftrightarrow m\le -14$.

Kết hợp với điều kiện $m\in[-30;30]$, ta có $m\in\{-30;-29;...;-14\}$. Vậy ta có 17 giá trị thỏa mãn.

Câu 89: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-15;15]$ để hàm số $h(x)=\left|f^2(x)+f(x)+m\right|$ có đúng 3 điểm cực trị?

A. 16. **B.** 15. **C.** 17. **D.** 14.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x)=f^2(x)+f(x)+m$

Ta có: $g'(x)=2f(x).f'(x)+f'(x)=f'(x)(2f(x)+1)$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f(x)=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$

Với $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$; $f(x)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=a\,(a<0)$

Suy ra hàm số $g(x)$ có 3 cực trị.

Để hàm số $h(x)=|g(x)|$ có đúng 3 cực trị thì phương trình $g(x)=0$ vô nghiệm

Xét phương trình $g(x)=f^2(x)+f(x)+m=0$. Đặt $t=f(x)$, ta có: $t^2+t+m=0\,(*)$

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta có với mỗi $t\in R$ thì phương trình $t=f(x)$ luôn có nghiệm nên phương trình (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow\Delta<0\Leftrightarrow 1-4m<0\Leftrightarrow m>\frac{1}{4}$.

Mà m nguyên thuộc đoạn $[-15;15]$. Vậy có 15 giá trị của m.

Câu 90: Cho hàm số $y=|3x^4-4x^3-12x^2+2m-1|$. Khi tham số *m* thay đổi thì hàm số đã cho có số điểm cực trị được chia thành ba mức là a,b,c với $a>b>c$. Giá trị $a-b-c$ bằng

A. -1. **B.** 15. **C.** -2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số: $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+2m-1$ có $f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x\left(x^2-x-2\right)$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$2m-6$	↗	$2m-1$	↘	$2m-33$	↗	$+\infty$

Trường hợp 1: Nếu $2m-33\ge 0\Leftrightarrow m\ge\frac{33}{2}$, hàm số $y=|f(x)|$ có 3 điểm cực trị.

Trường hợp 2: Nếu $\left[\begin{array}{l}2m-33<0\le 2m-6\\2m-1\le 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3\le m<\frac{33}{2}\\m\le\frac{1}{2}\end{array}\right.$, phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm đơn (hoặc có thêm một nghiệm bội hai) $\Rightarrow$ Hàm số $y=|f(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Trường hợp 3: $2m-6<0<2m-1\Leftrightarrow\frac{1}{2}<m<3$, phương trình $f(x)=0$ có bốn nghiệm đơn

$\Rightarrow$ Hàm số $y=|f(x)|$ có 7 điểm cực trị.

Theo giả thiết, ta có: $a=7,b=5$ và $c=3\Rightarrow a-b-c=-1$

Câu 91: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x)=(x+3)(x-4)$. Tính tổng các giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;5]$ để hàm số $y=f\left(\left|x^2-3x+m\right|\right)$ có nhiều điểm cực trị nhất?

A. 54. **B.** 9. **C.** -54. **D.** -52.

Lời giải

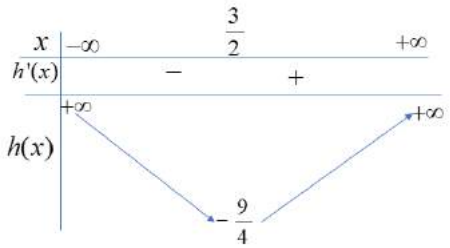
Cách 1:

Ta có: $y'=\dfrac{(2x-3)\left(x^2-3x+m\right)}{\left|x^2-3x+m\right|}.f'\left(\left|x^2-3x+m\right|\right)$.

y' không xác định tại các điểm thỏa mãn $x^2-3x+m=0(1)$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-3=0\\ \left|x^2-3x+m\right|=-3\\ \left|x^2-3x+m\right|=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}\\ x^2-3x=4-m\quad(2)\\ x^2-3x=-4-m\end{array}\right.$$

Xét hàm số $h(x)=x^2-3x$ có bảng biến thiên:



Đề hàm số có nhiều điểm cực trị nhất thì số nghiệm phương trình (1) và (2) là nhiều nhất $\Leftrightarrow -4-m>-\dfrac{9}{4}\Rightarrow m<-\dfrac{7}{4}$. Mà $m\in[-10;5]$ suy ra $m\in\{-10,-9,-8,...,-2\}$. Vậy tổng $S=-54$.

Cách 2:

$$y'=\dfrac{(2x-3)\left(x^2-3x+m\right)}{\left|x^2-3x+m\right|}.f'\left(\left|x^2-3x+m\right|\right).$$

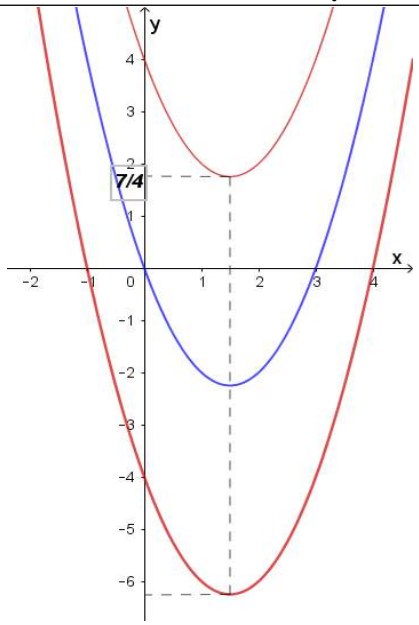
y' không xác định tại các điểm thỏa mãn $x^2-3x+m=0(1)$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-3=0\\ \left|x^2-3x+m\right|=-3\\ \left|x^2-3x+m\right|=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}\\ x^2-3x=4-m\quad(2)\\ x^2-3x=-4-m\end{array}\right.$$

Đề hàm số có nhiều điểm cực trị nhất thì số nghiệm phương trình (1) và (2) là nhiều nhất

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-3x=-m\\ x^2-3x-4=-m\\ x^2-3x+4=-m\end{array}\right.\text{ có nhiều nghiệm nhất}$$

Dựa vào đồ thị các hàm trên cùng hệ tọa độ



Suy ra hàm số có nhiều điểm cực trị nhất khi $\Leftrightarrow -m > \frac{7}{4} \Leftrightarrow m < -\frac{7}{4}$. Mà $m \in [-10;5]$ suy ra $m \in \{-10,-9,-8,...,-2\}$. Vậy tổng $S = -54$.

Cách 3: $y' = \frac{(2x-3)\left(x^2-3x+m\right)}{\left|x^2-3x+m\right|}.f'\left(\left|x^2-3x+m\right|\right)$.

y' không xác định tại các điểm thỏa mãn $x^2-3x+m=0(1)$

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-3=0 \\ \left|x^2-3x+m\right|=-3 \\ \left|x^2-3x+m\right|=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{3}{2} \\ x^2-3x=4-m \quad (2) \\ x^2-3x=-4-m \end{array}\right.$$

Đề hàm số có nhiều điểm cực trị nhất thì số nghiệm phương trình (1) và (2) là nhiều nhất

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x+m=0 \\ x^2-3x-4+m=0 \\ x^2-3x+4+m=0 \end{array}\right. \text{ có nhiều nghiệm nhất } \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \Delta_1 = 9-4m>0 \\ \Delta_2 = 9+16-4m>0 \\ \Delta_3 = 9-16-4m>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m < -\frac{7}{4}$$

Mà $m \in [-10;5]$ suy ra $m \in \{-10,-9,-8,...,-2\}$. Vậy tổng $S = -54$.

Câu 92: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ $f'(x)=(x+3)(x-4)$. Tính tổng các giá trị nguyên của tham số $m \in [-10;5]$ để hàm số $y = f\left(\left|x^2-3x+m\right|\right)$ có nhiều điểm cực trị nhất?

A. 54. **B.** 9. **C.** -52. **D.** -54.

Lời giải

Chọn D

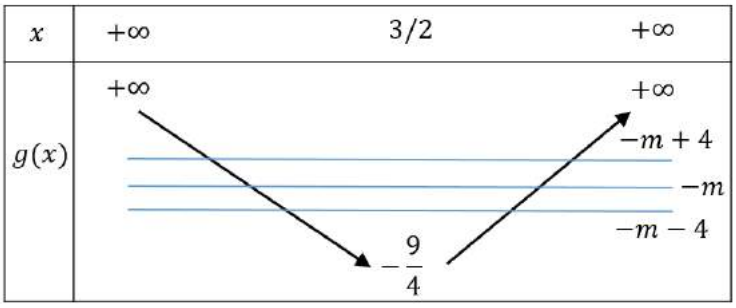
Ta có $f'(x)=(x+3)(x-4)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-3 \\ x=4 \end{array}\right.$.

Tính đạo hàm, $y' = f'\left(\left|x^2-3x+m\right|\right)\frac{x^2-3x+m}{\left|x^2-3x+m\right|}(2x-3)$.

$$y'=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}\\ x^2-3x+m=0\\ \left|x^2-3x+m\right|=-3\ (VN)\\ \left|x^2-3x+m\right|=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}\\ x^2-3x+m=0\\ x^2-3x+m=4\\ x^2-3x+m=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}\\ x^2-3x=-m\ (1)\\ x^2-3x=4-m\ (2)\\ x^2-3x=-4-m\ (3)\end{cases}$$

Suy ra.

Đặt $g(x)=x^2-3x$, khảo sát hàm số $y=g(x)$, ta được bảng biến thiên như bên dưới.



Để hàm số có nhiều điểm cực trị nhất khi và chỉ khi $-m-4>\dfrac{-9}{4}\Leftrightarrow m<-\dfrac{7}{4}$.

Kết hợp với điều kiện $m\in[-10;5]$ suy ra tập giá trị m là $S=\{-10,-9,-8,...,-2\}$.

Vậy tổng các giá trị nguyên của tham số m bằng -54.

Câu 93: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|3x^4+4x^3-12x^2+2m\right|$ có 7 điểm cực trị?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

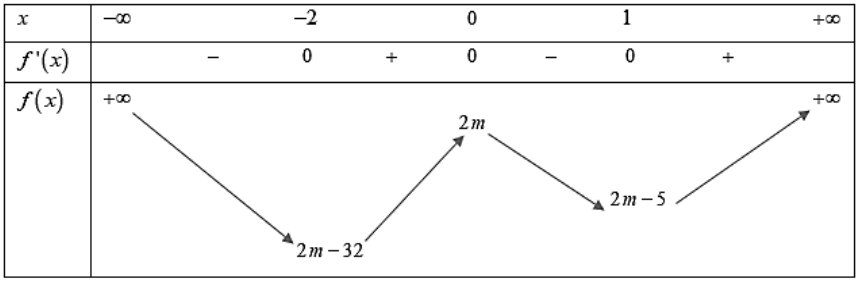
Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+2m$. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm: $f'(x)=12x^3+12x^2-24x=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ x=1\\ x=-2\end{cases}$.

Bảng biến thiên:



Hàm số $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+2m$ luôn có 3 điểm cực trị nên hàm số $y=\left|3x^4+4x^3-12x^2+2m\right|=\left|f(x)\right|$ có 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow 2m-5<0<2m\Leftrightarrow 0<m<\dfrac{5}{2}$.

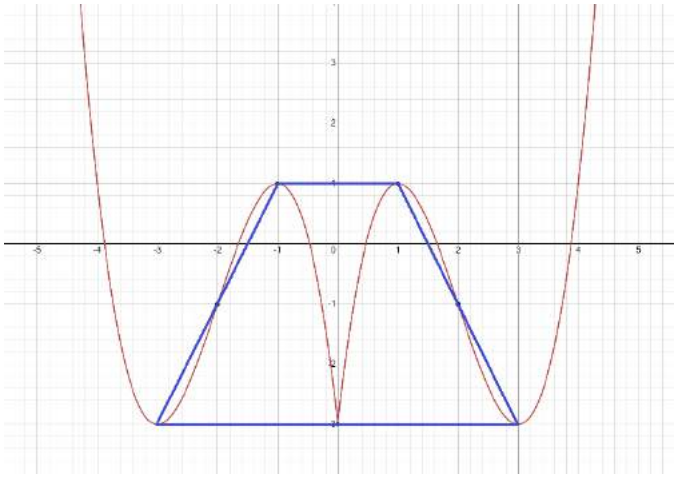
Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên có 2 số nguyên thỏa mãn.

Câu 94: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi A,B,C,D là 4 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=|x|^3-6x^2+9|x|-3$ với hoành độ đều khác 0. Bán kính đường tròn ngoại tiếp đi qua 4 điểm A,B,C,D bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



Xét $f(x)=x^3-6x^2+9x-3$

Ta có $f'(x)=3x^2-12x+9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=1\Rightarrow A(1;1)\\x=3\Rightarrow y=-3\Rightarrow B(3;-3)\end{array}\right.$

Do hàm số $f(x)$ có 2 cực trị dương nên $y=|x|^3-6x^2+9|x|-3$ có 5 cực trị là $A(1;1),B(3;-3),C(0;-3),A'(-1;1),B'(-3;-3)$

Gọi đường tròn ngoại tiếp tứ giác là $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

Ta có hệ $\begin{cases}-2a-2b+c=-2\\2a-2b+c=-2\\-6a-6b+c=-18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=4\Rightarrow R=\sqrt{a^2+b^2-c}=\sqrt{10}.\\c=6\end{cases}$

Câu 95: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+3)\left(x^2-2\right)\forall x\in\mathbb{R}$. Tìm tất cả các giá trị thực không âm của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(\left|\sin x+\sqrt{3}\cos x\right|+m\right)$ có nhiều điểm cực trị nhất trên $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{11\pi}{12}\right]$.

A. $m\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$. **B.** $m\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$. **C.** $m\in\left(\sqrt{2}-1,\sqrt{2}\right)$. **D.** $m\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x)=0\Leftrightarrow(x+3)\left(x^2-2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=\sqrt{2}\\x=-\sqrt{2}\end{array}\right.$

Khi đó: $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

$$g'(x)=\left(\sqrt{\left[2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]^2}+m\right)' f'\left(\left|\sin x+\sqrt{3}\cos x\right|+m\right)$$

$$g'(x)=\frac{2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right).2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{\left[2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]^2}}.f'\left(\left|2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|+m\right)$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=0\\ f'\left(\left|2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right|+m\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=0\\ \left|2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right|+m=-3\\ \left|2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right|+m=\sqrt{2}\\ \left|2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right|+m=-\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Xét $u=\left|2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right|$

x	$\frac{-\pi}{2}$		$\frac{-\pi}{3}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{11\pi}{12}$
$u=\left\|2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right\|$	1	↘	0	↗	2	↘	0	↗	$\sqrt{2}$

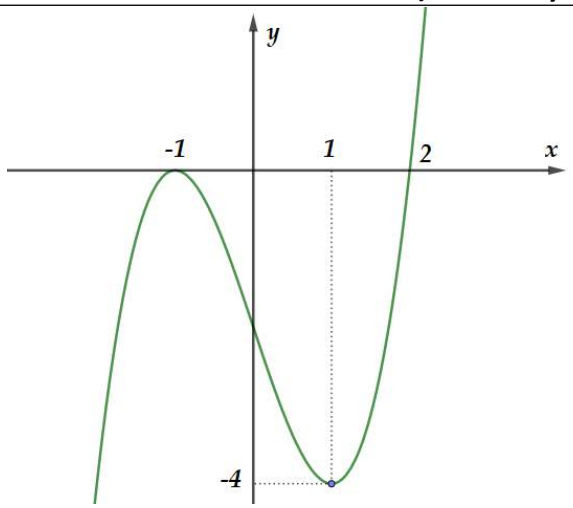
Để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì các phương trình $(1),(2),(3),(4)$ có nhiều nghiệm nhất $x\in\left[\dfrac{-\pi}{2};\dfrac{11\pi}{12}\right]$, suy ra $u=\left|2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right|\in(0,1)$

Khi đó $\left[\begin{array}{l}0<-m-3<1\\ 0<\sqrt{2}-m<1\\ 0<-\sqrt{2}-m<1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-4<m<-3\\ \sqrt{2}-1<m<\sqrt{2}\\ -\sqrt{2}-1<m<-\sqrt{2}\end{array}\right.$. Vì $m\ge 0\Rightarrow m\in\left(\sqrt{2}-1,\sqrt{2}\right)$.

.

Do đó $m\in\left(\sqrt{2}-1,\sqrt{2}\right)$.

Câu 96: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=g(x)=f\left(2x^2-4|x|+m-3\right)$ có 7 điểm cực trị.

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=\left(2x^2-4|x|+m-3\right)'.f'\left(2x^2-4|x|+m-3\right)$.

Suy ra $g'(x)=0\Leftrightarrow\left(2x^2-4|x|+m-3\right)'.f'\left(2x^2-4|x|+m-3\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(2x^2-4|x|+m-3\right)'=0\\ f'\left(2x^2-4|x|+m-3\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(2x^2-4|x|+m-3\right)'=0\\ 2x^2-4|x|+m-3=-1\\ 2x^2-4|x|+m-3=2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\left(2x^2-4|x|+m-3\right)'=0 & (1)\\ 2x^2-4|x|-3=-m-1 & (2).\\ 2x^2-4|x|-3=-m+2 & (3)\end{array}\right.$$

Xét phương trình $\left(2x^2-4|x|+m-3\right)'=0$ (1).

Với $x\geq 0\Rightarrow(1)\Leftrightarrow 4x-4=0\Leftrightarrow x=1$.

Với $x<0\Rightarrow(1)\Leftrightarrow 4x+4=0\Leftrightarrow x=-1$.

Khi đó $x=-1;x=0;x=1$ là 3 điểm cực trị của hàm số.

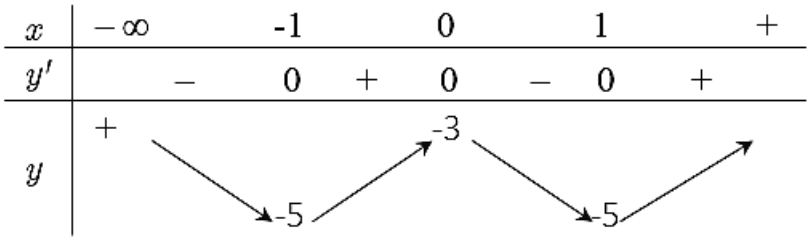
Xét phương trình $2x^2-4|x|-3=-m-1$ (2).

Từ đồ thị suy ra phương trình (2) nếu có nghiệm thì nghiệm là bội chẵn nên hàm số $g'(x)$ không đổi dấu nên không phải là cực trị.

Xét phương trình $2x^2-4|x|-3=-m+2$ (3).

Yêu cầu bài toán suy ra phương trình (3) có 4 nghiệm phân biệt khác $0,\pm1$.

Xét hàm số $y=2x^2-4|x|-3$ có bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên suy ra $-5<-m+2<-3\Leftrightarrow 5<m<7$.

Vì m nguyên nên $m=6$. Vậy có 1 giá trị nguyên của tham số m thoả mãn.

Câu 97: Cho hàm số $y=\left|x^3+(m+2)x^2+mx-m^2\right|$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thoả mãn $|m-1|<5$ để hàm số đã cho có đúng 5 điểm cực trị?

A. 6. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=\left|x^3+(m+2)x^2+mx-m^2\right|$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow y=x^3+(m+2)x^2+mx-m^2$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành $\Leftrightarrow x^3+(m+2)x^2+mx-m^2=0\,(1)$ có ba nghiệm phân biệt.

Ta có $x^3+(m+2)x^2+mx-m^2=0\Leftrightarrow (x+m)\left(x^2+2x-m\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-m\\x^2+2x-m=0\,(2)\end{array}\right.$.

Để (1) có ba nghiệm phân biệt thì (2) có hai nghiệm phân biệt khác $-m$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m+1>0\\m^2-3m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-1\\m\neq 0,m\neq 3\end{cases}$.

Do m nguyên và $-4<m<6$ nên suy ra $m\in\{1;2;4;5\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 98: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=f(x)=\left|x^2-2mx+1\right|+4x$ có điểm cực đại với giá trị cực đại tương ứng nằm trong khoảng $(3;4)$ và đồng thời thỏa mãn $10m$ là số nguyên. Tìm số phần tử của tập S.

Lời giải

Xét phương trình $x^2-2mx+1=0$ có $\Delta'=m^2-1$.

Trường hợp 1. Nếu $\Delta'=m^2-1\le 0$ thì ta có $y=f(x)=x^2-2mx+1+4x=x^2-2(m-2)x+1$

Dễ thấy hàm số này không tồn tại điểm cực đại.

Trường hợp 2. Nếu $\Delta'=m^2-1>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>1\end{array}\right.$; khi đó hai nghiệm phân biệt của phương trình $x^2-2mx+1=0$ lần lượt là $x_1=m-\sqrt{m^2-1};x_2=m+\sqrt{m^2-1}$.

- Với $\left[\begin{array}{l}x\le x_1\\x\ge x_2\end{array}\right.$ thì $y=f(x)=x^2-2mx+1+4x=x^2-2(m-2)x+1$ không có điểm cực đại.
- Với $x_1<x<x_2$ thì $y=f(x)=-x^2+2mx-1+4x=-x^2+2(m+2)x-1$.

Hàm số này có điểm cực đại là: $x=m+2$ và giá tri cực đại là: $y=f(m+2)=m^2+4m+3$.

Suy ra điều kiện: $\begin{cases} x_1 < x = m+2 < x_2 \\ f(m+2) = m^2+4m+3 \in (3;4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-\sqrt{m^2-1} < m+2 < m+\sqrt{m^2-1} \\ 3 < m^2+4m+3 < 4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{m^2-1} > 2 \\ m^2+4m+3 < 4 \\ m^2+4m+3 > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -\sqrt{5} \\ m > \sqrt{5} \end{array}\right. \\ -2-\sqrt{5} < m < -2+\sqrt{5} \\ \left[\begin{array}{l} m < -4 \\ m > 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow -2-\sqrt{5} < m < -4 .$$

Suy ra $10\left(-2-\sqrt{5}\right) < 10m < -40$

$\Rightarrow -42,3 < 10m < -40 \Rightarrow 10m \in \{-42;-41\} \Leftrightarrow m \in \{-4,2;-4,1\} = S$.

Vậy S có 2 phần tử.

Câu 99: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = \left| f\left(4x^3+1\right)+m \right|$ có 7 điểm cực trị?

A. Vô số. **B.** 3 . **C.** 0 . **D.** 1 .

Lời giải

Chọn D

Ta có: $g'(x) = \dfrac{12x^2 f'\left(4x^3+1\right)\left[f\left(4x^3+1\right)+m \right]}{\left| f\left(4x^3+1\right)+m \right|}$.

Dễ thấy: $12x^2 \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Từ bảng biến thiên ta có: $f'\left(4x^3+1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^3+1 = -3 \\ 4x^3+1 = 1 \\ 4x^3+1 = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Ta có: $f\left(4x^3+1\right)+m = 0$ $(*) \Leftrightarrow f\left(4x^3+1\right) = -m$.

Đặt: $t = 4x^3+1 \Rightarrow t' = 12x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
t	$-\infty$	-3	1	5	$+\infty$
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$ -4 $\nearrow$	2	$\searrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

Để hàm số $g(x)$ có 7 điểm cực trị thì phương trình $(*)$ phải có 4 nghiệm bội lẻ khác 0 và ± 1.

Suy ra $0 < -m < 2 \Rightarrow -2 < m < 0$.

Vậy có tất cả 1 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 100: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-9)\left(x^2-16\right), \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f\left(\left|x^3+7x\right|+m\right)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 9. **B.** 16. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x) = (x-9)(x-4)(x+4) \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 9 \\ x = 4 \\ x = -4 \end{array}\right.$.

$$g'(x) = \frac{x^3+7x}{\left|x^3+7x\right|}.\left(3x^2+7\right) f'\left(\left|x^3+7x\right|+m\right) = \frac{x\left(x^2+7\right)}{\left|x^3+7x\right|}.\left(3x^2+7\right) f'\left(\left|x^3+7x\right|+m\right).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'\left(\left|x^3+7x\right|+m\right) = 0 \end{array}\right.$$

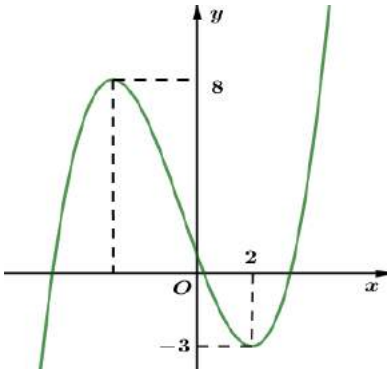
Do đó điều kiện để $g(x)$ có ít nhất 3 điểm cực trị là phương trình $f'\left(\left|x^3+7x\right|+m\right) = 0$ có ít nhất 2 nghiệm bội lẻ khác 0.

$$f'\left(\left|x^3+7x\right|+m\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|x^3+7x\right|+m = 9 \\ \left|x^3+7x\right|+m = 4 \\ \left|x^3+7x\right|+m = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|x^3+7x\right|-9 = -m \\ \left|x^3+7x\right|-4 = -m \\ \left|x^3+7x\right|+4 = -m \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ Phương trình $f'\left(\left|x^3+7x\right|+m\right) = 0$ có ít nhất 2 nghiệm bội lẻ khác $0 \Leftrightarrow -m > -9 \Leftrightarrow m < 9$

Vậy có tất cả 8 giá trị nguyên dương m thỏa mãn.

Câu 101: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là một đường cong như hình bên dưới.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f\left(\left|f^2(x)-2f(x)-m\right|\right)$ có nhiều điểm cực trị nhất?

A. 11. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 13.

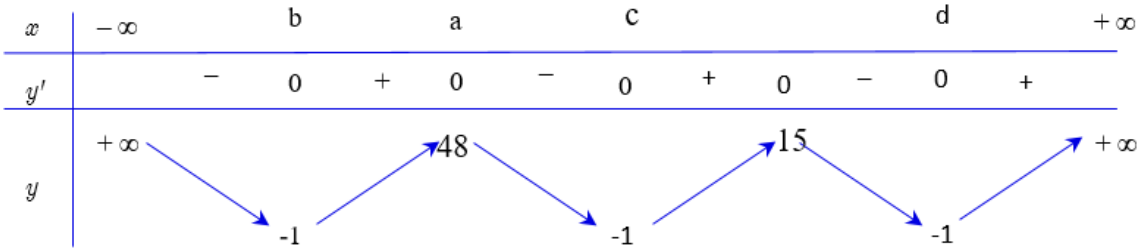
Lời giải

Chọn A

Đặt: $u = f^2(x) - 2f(x) \Rightarrow u' = 2f'(x)\left(f(x) - 1\right)$.

Đạo hàm: $u' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \{a; 2\} \\ x \in \{b; c; d\} \end{array}\right.$ trong đó $b < a < c < 2 < d$.

Bảng biến thiên của hàm số $u = f^2(x) - 2f(x)$:



Mặt khác: $g(x) = f\left(|u - m|\right) \Rightarrow g'(x) = \left(|u - m|\right)' f'\left(|u - m|\right)$. Do đó số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f\left|f^2(x) - 2f(x) - m\right|$ chính là số nghiệm nghiệm bội lẻ của hệ:

$$\left[\begin{array}{l} u - m = 0 \\ \left(|u - m|\right)' = 0 \\ f'\left(|u - m|\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = m \\ x \in \{b; a; c; 2; d\} \\ |u - m| = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = m \\ x \in \{b; a; c; 2; d\} \\ u \in \{m - 2; m + 2\} \end{array}\right.$$

Hàm số $g(x) = f\left(\left|f^2(x) - 2f(x) - m\right|\right)$ có nhiều điểm cực trị nhất khi và chỉ khi:

$\left\{\begin{array}{l} -1 < m - 2 < 15 \\ -1 < m + 2 < 15 \end{array}\right. \Leftrightarrow 1 < m < 13$. Do m nguyên nên có 11 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 102: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^3\left[x^2 + (1-3m)x + 2m^2 - 2m\right]$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị của tham số $m \in [-5; 5]$ để hàm số $g(x) = f\left(|x| + m\right)$ có tối thiểu 3 cực trị.

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 + (1-3m)x + 2m^2 - 2m = 0 (*) \end{array}\right.$

$\Delta_{(*)} = (1-3m)^2 - 4\left(2m^2 - 2m\right) = (m+1)^2$; $g'(x) = f'\left(|x| + m\right).\dfrac{x}{|x|}$

Trường hợp 1: $m = -1$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ |x| + m = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ |x| = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$. Vậy nhận $m = -1$.

Trường hợp 2: $m \neq -1$. Khi đó $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt $m - 1$ và $2m$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ |x| + m = 1 \\ |x| + m = m - 1 \\ |x| + m = 2m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ |x| = 1 - m \\ |x| = -1 (VN) \\ |x| = m \end{array}\right.$$

Với $1-m>m\Leftrightarrow m<\dfrac{1}{2}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 1-m>0\Leftrightarrow m<1$. Vậy $\begin{cases} m<\dfrac{1}{2} \\ m\neq -1 \end{cases} \xrightarrow{m\in[-5;5]} m\in\{-5;-4;-3;-2;0\}$.

Với $1-m<m\Leftrightarrow m>\dfrac{1}{2}$. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m>0$.

Vậy $m>\dfrac{1}{2}\xrightarrow{m\in[-5;5]} m\in\{1;2;3;4;5\}$. Vậy có 11 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 103: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=12x\left(x^2-x-2\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-10;10)$ để hàm số $y=f\left(|x|+m\right)$ có 7 điểm cực trị?

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

Lời giải

Chọn A

Đạo hàm: $f'(x)=0\Leftrightarrow 12x\left(x^2-x-2\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1. \\ x=2 \end{cases}$

Do đó hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị là $x=0;x=-1;x=2$.

Hàm số $f\left(|x|+m\right)$ luôn có một điểm cực trị $x=0$.

$y=f\left(|x|+m\right)=\begin{cases} f(x+m);(x\geq 0) \\ f(-x+m);(x<0) \end{cases}$.

Hàm số $f(x+m)$ có ba điểm cực trị là $x=-1-m;x=-m;x=2-m$.

Hàm số $f(-x+m)$ có ba điểm cực trị là $x=m+1;x=m;x=m-2$.

Do đó hàm số $f\left(|x|+m\right)$ có tối đa 7 điểm cực trị là

$x=0;x=m+1;x=m;x=m-2;x=-m-1;x=-m;x=2-m$.

Yêu cầu bài toán tương đương với $\begin{cases} -m-1>0 \\ -m>0 \\ -m+2>0 \\ m+1<0 \\ m<0 \\ m-2<0 \end{cases} \Leftrightarrow m<-1$.

Vì m nguyên và $m\in(-10;10) \Rightarrow m\in\{-9;-8;...;-2\}$.Vậy có 8 giá trị của tham số m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 104: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y=f'(x)=(x-5)(x^2-4), x\in R$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-100;100]$ để hàm số $y=g(x)=f\left(\left|x^3+3x\right|+m\right)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 105. **B.** 106. **C.** 104. **D.** 103.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x)=(x-5)(x^2-4)=0\Leftrightarrow x=5;x=2;x=-2$

$$g'(x)=\frac{(x^3+3x)(3x^2+3)}{|x^3+3x|}.f'(|x^3+3x|+m)=\frac{x(x^2+3)(3x^2+3)}{|x^3+3x|}.f'(|x^3+3x|+m)$$

$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(|x^3+3x|+m)=0$

Do đạo hàm không xác định tại $x=0$ nên để hàm số $y=g(x)=f(|x^3+3x|+m)$ có ít nhất 3 cực trị thì $f'(|x^3+3x|+m)=0$ có ít nhất hai nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ khác 0.

$$f'(|x^3+3x|+m)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|x^3+3x|+m=5\Rightarrow|x^3+3x|=5-m\\|x^3+3x|+m=2\Rightarrow|x^3+3x|=2-m\\|x^3+3x|+m=-2\Rightarrow|x^3+3x|=-2-m\end{array}\right.$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 5-m>0\Rightarrow m<5, m\in Z, m\in[-100;100]\Rightarrow m\in\{-100;-99;....4\}$

Vậy có tất cả 105 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

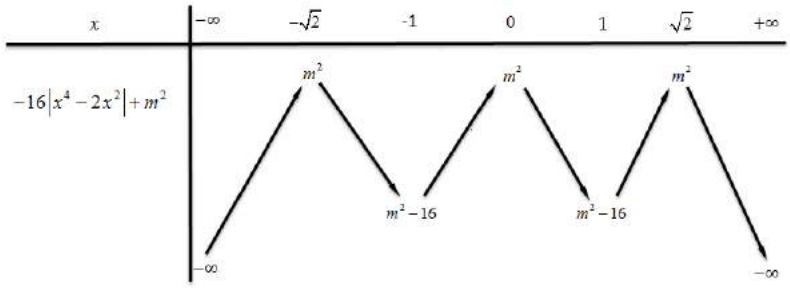
Câu 105: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f'(x)=(x-8).(x^2-8x+15)$ Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(-16|x^4-2x^2|+m^2)$ có nhiều cực trị nhất?

A. 4. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

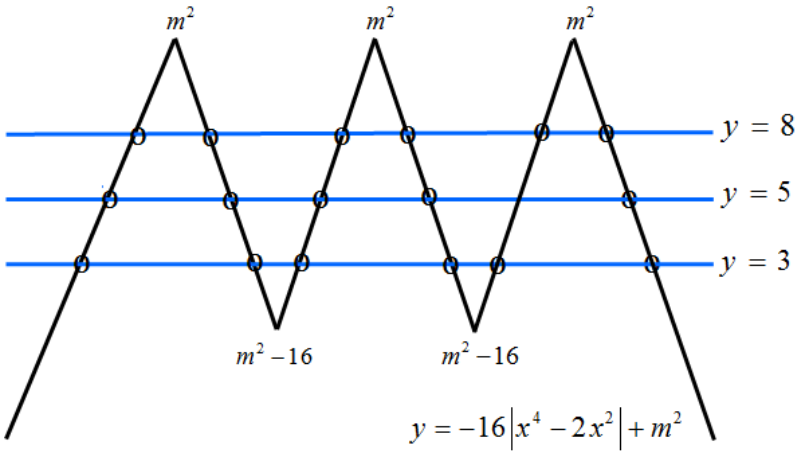
Chọn A

Xét hàm số $y=-16|x^4-2x^2|+m^2$ có bảng biến thiên có dạng:



Hàm số $f'(x)=(x-8).(x^2-8x+15)$ có 3 điểm cực trị là $x=3$, $x=5$; $x=8$.

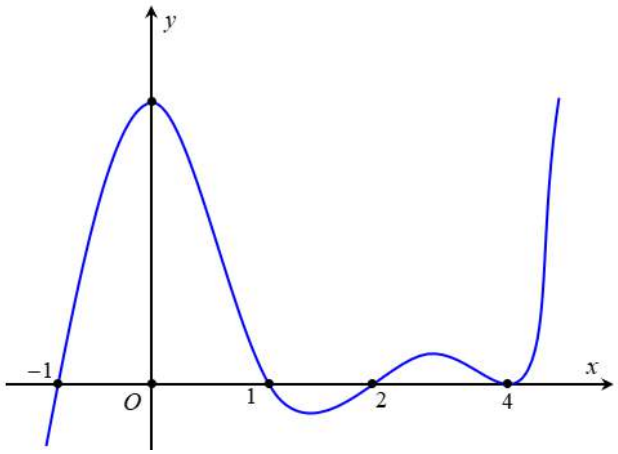
Số giao điểm tối đa của hàm số $y=-16|x^4-2x^2|+m^2$ với các đường thẳng $y=3$, $y=5$; $y=8$ thể hiện ở hình vẽ sau:



Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > 8 \\ m^2 - 16 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 8 < m^2 < 19 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} < |m| < \sqrt{19} \approx 4,36$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-4;-3;3;4\}$. Vậy có 4 giá trị nguyên $m \in \mathbb{Z}$.

Câu 106: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có đúng 4 điểm chung với trục hoành như hình vẽ bên dưới:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f\left(|x|^3 - 3|x| + m + 2021\right) + 2022m^3$ có đúng 11 điểm cực trị?

A. 0. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Với mỗi tham số m thì số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(|x|^3 - 3|x| + m + 2021\right) + 2022m^3$ và $y = f\left(|x|^3 - 3|x| + m + 2021\right)$ bằng nhau.

Do đó ta chỉ cần tìm giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f\left(|x|^3 - 3|x| + m + 2021\right)$ có đúng 11 điểm cực trị.

Xét $x > 0$: Hàm số có dạng $y = f\left(x^3 - 3x + m + 2021\right)$.

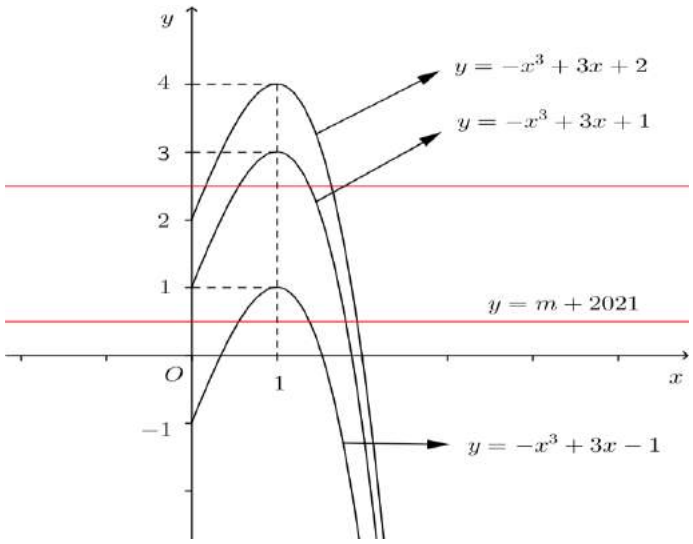
Khi đó ta có đạo hàm như sau: $y' = \left(3x^2 - 3\right) f'\left(x^3 - 3x + m + 2021\right)$.

Do nghiệm của phương trình $x^3 - 3x + m + 2021 = 4$ là các nghiệm bội bậc chẵn của phương trình $y' = 0$ nên ta chỉ cần quan tâm đến các nghiệm còn lại. Tức là

$$y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 3x^2 - 3 = 0 \\ f'\left(x^3 - 3x + m + 2021\right) = 0 \end{array}\right. \quad \Leftarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 1 \ (\text{do } x > 0) \\ x^3 - 3x + m + 2021 = -1 \\ x^3 - 3x + m + 2021 = 1 \\ x^3 - 3x + m + 2021 = 2 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 1 \ (\text{do } x > 0) \\ m + 2021 = -x^3 + 3x - 1 \\ m + 2021 = -x^3 + 3x + 1 \\ m + 2021 = -x^3 + 3x + 2 \end{array}\right.$$

Vẽ đồ thị ba hàm số $y=-x^3+3x-1$; $y=-x^3+3x+1$; $y=-x^3+3x+2$ với $x>0$ trên cùng một hệ trụ**C.**



Hàm số $y=f\left(|x|^3-3|x|+m+2021\right)$ có đúng 11 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ Hàm số $y=f\left(x^3-3x+m+2021\right)$ có đúng 5 điểm cực trị dương

$\Leftrightarrow$ Phương trình $f'\left(x^3-3x+m+2021\right)=0$ có đúng 4 nghiệm bội lẻ dương và khác 1

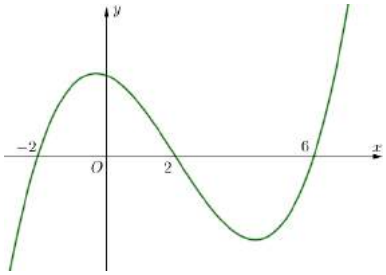
$\Leftrightarrow$ Đường thẳng $y=m+2021$ cắt đồ thị ba hàm số $y=-x^3+3x-1$; $y=-x^3+3x+1$; $y=-x^3+3x+2$ tại 4 điểm phân biệt có hoành độ dương khác 1

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1<m+2021<1\\2<m+2021<3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2022<m<-2020\\-2019<m<-2018\end{array}\right.$.

Do điều kiện m nguyên nên $m=-2021$.

Vậy chỉ có 1 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 107: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ là hàm bậc 3 có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(\left|2x^3+3x\right|-m+1\right)$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

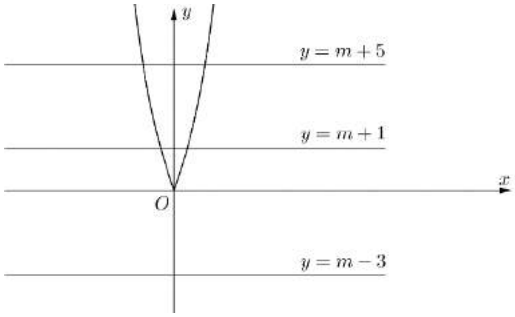
Lời giải

Chọn A

Ta có: $g'(x)=\dfrac{\left(6x^2+3\right)\left(2x^3+3x\right)}{\left|2x^3+3x\right|}\cdot f'\left(\left|2x^3+3x\right|-m+1\right)$; $g'(x)$ không xác định tại $x=0$.

$$g'(x)=0\Rightarrow f'\left(\left|2x^3+3x\right|-m+1\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\left|2x^3+3x\right|-m+1=-2\\ \left|2x^3+3x\right|-m+1=2\\ \left|2x^3+3x\right|-m+1=6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|2x^3+3x\right|=m-3\\ \left|2x^3+3x\right|=m+1\\ \left|2x^3+3x\right|=m+5\end{array}\right.(*)$$

$h(x)=\left|2x^3+3x\right|$ có đồ thị



Do $g(x)$ luôn có một cực trị là $x=0$ nên $g(x)$ có 5 cực trị $\Leftrightarrow$ $(*)$ có 4 nghiệm hoặc 5 nghiệm (1 nghiệm $x=0$) $\Leftrightarrow\begin{cases}m+1>0\\ m-3\le 0\end{cases}\Leftrightarrow -1<m\le 3$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa điều kiện bài toán.

Câu 108: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		1		5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=\left|f\left(4x^3+1\right)+m\right|$ có 7 điểm cực trị?

A. 3 **B.** 1 **C.** 0 **D.** Vô số

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x)=\dfrac{12x^2f'\left(4x^3+1\right)\left[f\left(4x^3+1\right)+m\right]}{\left|f\left(4x^3+1\right)+m\right|}$.

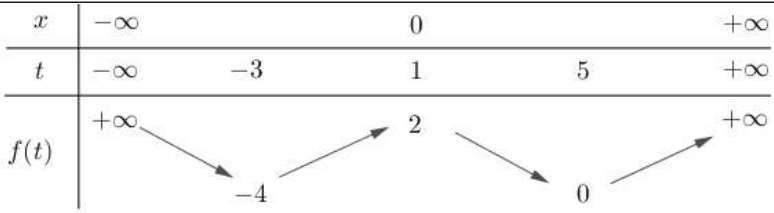
Dễ thấy: $12x^2\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Từ bảng biến thiên ta có: $f'\left(4x^3+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x^3+1=-3\\ 4x^3+1=1\\ 4x^3+1=5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-1\\ x=1\end{array}\right.$.

Ta có: $f\left(4x^3+1\right)+m=0$ $(*)$ $\Leftrightarrow f\left(4x^3+1\right)=-m$.

Đặt: $t=4x^3+1\Rightarrow t'=12x^2=0\Leftrightarrow x=0$.

Ta có bảng biến thiên:

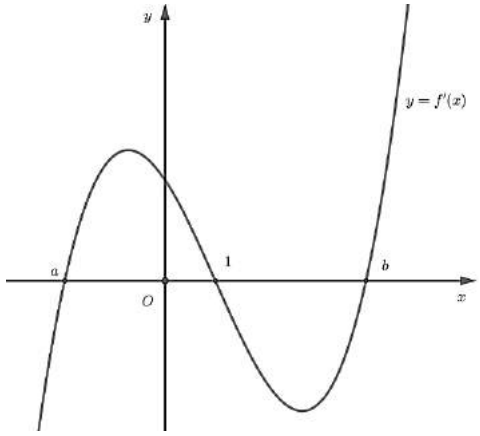


Để hàm số $g(x)$ có 7 điểm cực trị thì phương trình $(*)$ phải có 4 nghiệm bội lẻ khác 0 và ± 1.

Suy ra $0 < -m < 2 \Rightarrow -2 < m < 0$.

Vậy có tất cả 1 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 109: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ. Gọi tập S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên $m \in [-21;21]$ để hàm số $f\left(\left|x^2 + 2mx - 1\right|\right)$ có đúng 7 điểm cực trị. Số phần tử của S là:



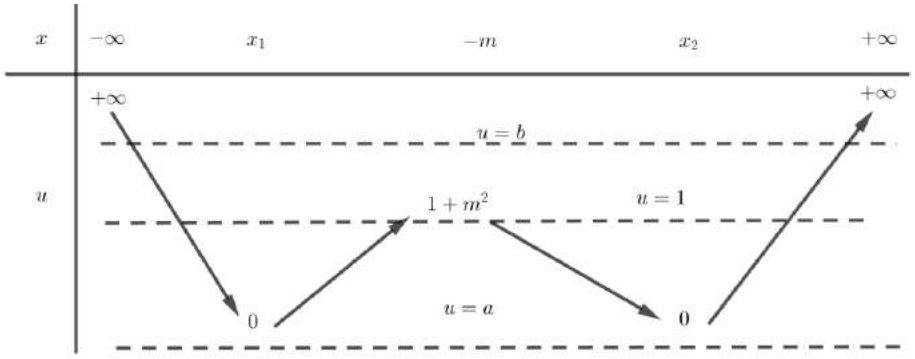
A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị là: $x = a < 0; x = 1; x = b > 1$

Xét hàm số $f\left(\left|x^2 + 2mx - 1\right|\right) = f(u)$. Ta có bảng biến thiên của $u = \left|x^2 + 2mx - 1\right|$ như sau:



Do SĐCT $\{u\} = 3$ nên để hàm số $f(u)$ có 7 điểm cực trị thì SNBL $\left\{\left[\begin{array}{l} u = a \\ u = b \\ u = 1 \end{array}\right.\right\} = 4 \Rightarrow 1 \geq 1 + m^2$

$\Rightarrow m = 0$. Vậy có 1 giá trị của tham số m.

Câu 110: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định trên R và có đồ thị đạo hàm $y = f'(x) = x(x-1)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(\left|2x+1\right| - 1\right)$ là:

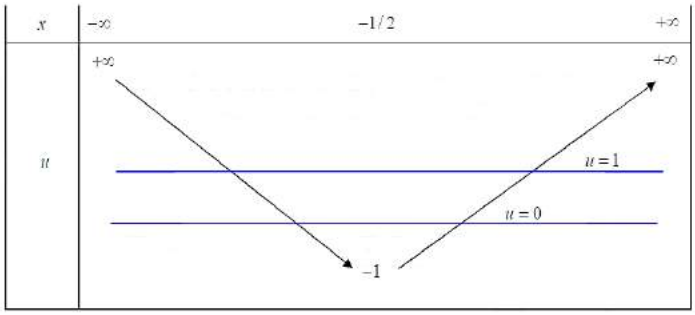
A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại 2 điểm $x=0;x=1.$

Xét hàm số $y=f(|2x+1|-1)=f(u)$. Bảng biến thiên của $u=|2x+1|-1$ như sau:



Ta có SĐCT $f(u)=\text{SĐCT}\{u\}+\text{SNBL}\left\{\left[\begin{array}{l}u=0\\u=1\end{array}\right.\right\}=4+1=5$.

Câu 111: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên R và có biểu thức đạo hàm $y=f'(x)=x(x-2)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f(|2x+m|-m)$ có đúng ba điểm cực trị

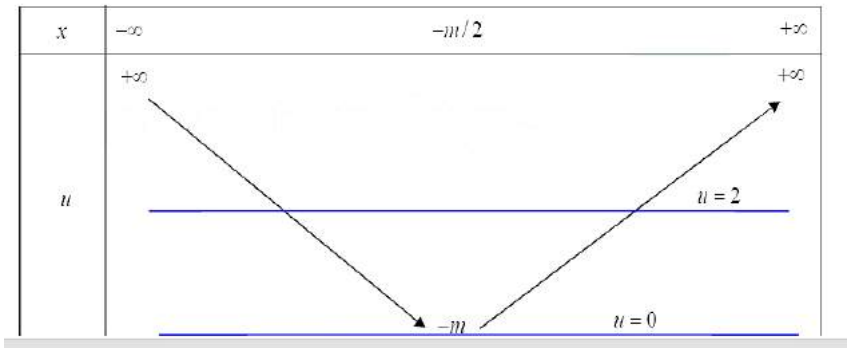
A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại 2 điểm $x=0;x=2.$

Xét hàm số $y=f(|2x+m|-m)=f(u)$. Bảng biến thiên của $u=|2x+m|-m$ như sau:



Ta có SĐCT $f(u)=\text{SĐCT}\{u\}+\text{SNBL}\left\{\left[\begin{array}{l}u=0\\u=2\end{array}\right.\right\}$

$\Leftrightarrow 3=1+SNBL\left\{\left[\begin{array}{l}u=1\\u=2\end{array}\right.\right\}\Leftrightarrow SNBL\left\{\left[\begin{array}{l}u=1\\u=2\end{array}\right.\right\}=2$

Suy ra $0\le -m<2$ hay $-2<m\le 0\to m\in\{-1;0\}$.

Câu 112: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có biểu thức đạo hàm $f'(x)=x(x-m)(x-6+m)$, với m là tham số. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $f(|3x-2|+1)$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2

Lời giải

Chọn D

Nhận xét: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi đó $y=f(|ax+b|+c)$ luôn có cực trị tại điểm $x=-\dfrac{b}{a}$.

$y=f(|3x-2|+1)=\begin{cases} f(3x-1) \ khi\ x>\dfrac{2}{3} \\ f(-3x+3) \ khi\ x<\dfrac{2}{3} \end{cases}$, tại $x=\dfrac{2}{3}$ là một điểm cực trị của hàm số.

$$y'=\begin{cases} 3f'(3x-1) \ khi\ x>\dfrac{2}{3} \\ -3f'(-3x+3) \ khi\ x<\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y'=\begin{cases} 3(3x-1)(3x-1-m)(3x-7+m) \ \ khi\ x>\dfrac{2}{3} \\ -3(-3x+3)(-3x+3-m)(-3x-3+m) \ khi\ x<\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Hàm số có đúng 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $y'=0$ có 4 nghiệm phân biệt khác $\dfrac{2}{3}$

Khi: $x>\dfrac{2}{3}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\begin{cases} x_1=\dfrac{1+m}{3}>\dfrac{2}{3} \\ x_2=\dfrac{7-m}{3}>\dfrac{2}{3} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 1<m<5 \\ x_1\neq x_2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 1<m<5 \\ \dfrac{1+m}{3}\neq\dfrac{7-m}{3} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 1<m<5 \\ m\neq 3 \end{cases}$

Khi $x<\dfrac{2}{3}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\begin{cases} x_3=\dfrac{3-m}{3}<\dfrac{2}{3} \\ x_4=\dfrac{m-3}{3}<\dfrac{2}{3} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 1<m<5 \\ x_3\neq x_4 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 1<m<5 \\ m\neq 3 \end{cases}$

Vậy $m\in(1;5)\setminus\{3\}$ và $m\in\mathbb{Z}$ nên có 2 giá trị nguyên thỏa yêu cầu.

Câu 113: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có biểu thức đạo hàm $f'(x)=x\left(x^2-2mx+12+m\right)$, với m là tham số. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $f(|2x-m^2|+m)$ có đúng 5 điểm cực trị?

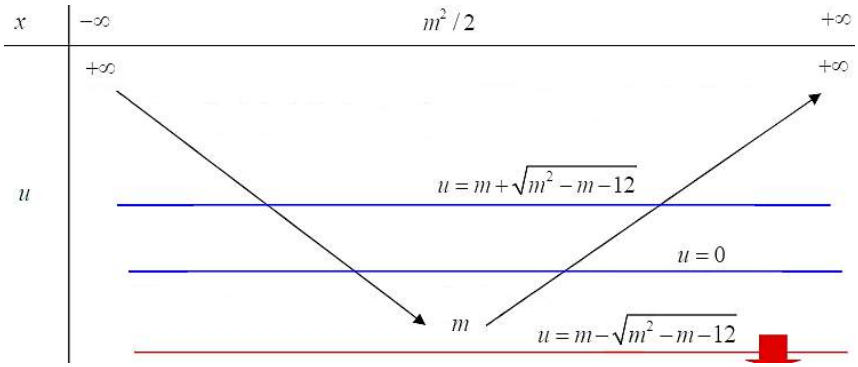
A. 27. **B.** 26. **C.** 25. **D.** 29

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(|2x-m^2|+m)=f(u)$

Bảng biến thiên của hàm số $u=\left|2x-m^2\right|+m$ như sau



Ta có số điểm cực trị của hàm số u là 1 điểm.

Nhận xét, nếu hàm số $f(x)$ có đúng 1 điểm cực trị thì cùng lắm hàm số $f(u)$ có 3 điểm cực trị.

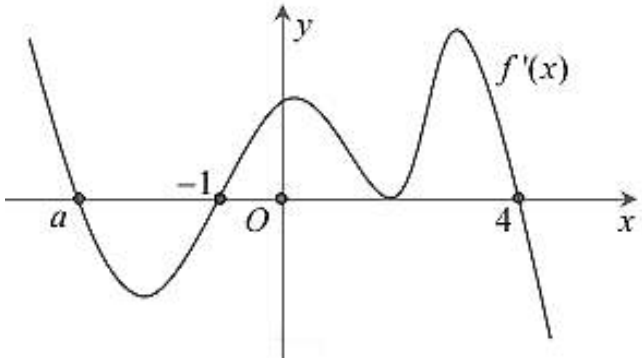
Do đó, xét trường hợp $m^2-m-12>0\Leftrightarrow m<-3\vee m>4$ thì hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị là $x=0;x=m\pm\sqrt{m^2-m-12}$

Áp dụng công thức:

Số điểm cực trị $f(u)=$ số điểm cực trị u + số nghiệm bội lẻ của phương trình $\left[\begin{array}{l}u=0\\u=m-\sqrt{m^2-m-12}\\u=m+\sqrt{m^2-m-12}\end{array}\right.$ suy ra $\begin{cases}m<0\\m\neq-12\end{cases}$ kết hợp với điều kiện $m<-3\vee m>4$ suy ra $\begin{cases}m<-3\\m\neq12\end{cases}$

và $\begin{cases}m\in[-30;30]\\m\in\mathbb{Z}\end{cases}$ suy ra có 26 giá trị nguyên.

Câu 114: Cho đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $f\left(\left|x^3-3m^2x\right|\right)$ có đúng 11 điểm cực trị?



A. 29. **B.** 23. **C.** 21. **D.** 22

Lời giải

Chọn A

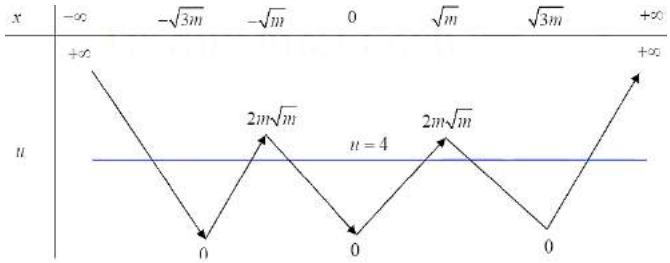
Hàm số đạt cực trị tại $x=a<-1;x=-1;x=4$

Xét hàm số $f\left(\left|x^3-3mx\right|\right)=f(u)$

Bảng biến thiên của hàm số $u=\left|x^3-3mx\right|\geq0$ suy ra chỉ có phương trình $u=\left|x^3-3mx\right|=4$ cho ta nghiệm bội lẻ.

Nếu $m \le 0$ suy ra số điểm cực trị u là 1, suy ra số nghiệm bội lẻ của phương trình $u = 4$ tối đa 2 nghiệm bội lẻ. Không thỏa yêu cầu.

Khi $m > 0$ số điểm cực trị u là 5, ta có bảng biến thiên của hàm số $u = \left|x^3 - 3mx\right|$

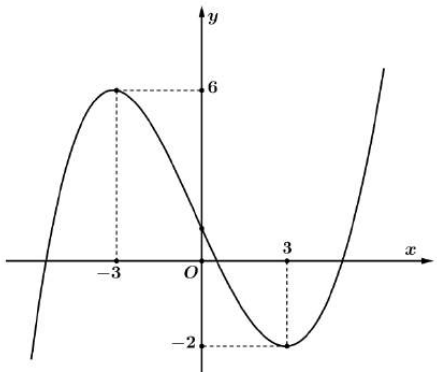


Áp dụng công thức:

Số điểm cực trị của hàm số $f(u)$ = Số nghiệm bội lẻ của phương trình $u = 4$ + số điểm cực trị của u.

Suy ra $\begin{cases} m > 0 \\ 2m\sqrt{m} > 4 \end{cases} \Leftrightarrow m > \sqrt[3]{4}$ kết hợp $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-30;30] \end{cases}$ suy ra có 29 giá trị nguyên thỏa yêu cầu.

Câu 115: Cho hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f\left(\left|f(x) - m\right|\right)$ có đúng 11 điểm cực trị?



A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -3 \end{array}\right.$.

Ta lại có: $g'(x) = f\left(\left|f(x) - m\right|\right) = \dfrac{f(x) - m}{\left|f(x) - m\right|} . f'(x) . f'\left(\left|f(x) - m\right|\right)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ \left|f(x) - m\right| = 0 \\ \left|f(x) - m\right| = 3 \\ \left|f(x) - m\right| = -3 \,(ptvn) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 3 \\ f(x) = m \quad (1) \\ f(x) = m + 3 \quad (2) \\ f(x) = m - 3 \quad (3) \end{array}\right.$$

Để hàm số $g(x) = f\left(\left|f(x) - m\right|\right)$ có đúng 11 điểm cực trị thì các phương trình $(1);(2);(3)$ mỗi phương trình phải có 3 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<6 \\ -2<m+3<6 \\ -2<m-3<6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<6 \\ -5<m<3 \\ 1<m<9 \end{cases} \Leftrightarrow 1<m<3.$$

Vì m nguyên nên $m=2$.

Câu 116: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases} x^2-2(m-4)x-1 \quad neu \begin{bmatrix} x\le 1 \\ x\ge 3 \end{bmatrix} \\ 4x^2-2(m-a)x+b \; neu 1<x<3 \end{cases}$, với a và b là những số thực xác định và hàm số liên tục trên toàn $\mathbb{R}$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có đúng 3 điểm cực trị?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định của hàm số đã cho là $D=\mathbb{R}$.

Khi đó:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)=-2m+8;\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=f(3)=-6m+32$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2a+b-2m+4;\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=6a+b-6m+36$

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải liên tục tại $x=1;x=3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1) \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=f3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b-2m+4=-2m+8 \\ 6a+b-6m+36=-6m+32 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=4 \\ 6a+b=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=8 \end{cases}.$$

Từ đó $y=f(x)=\begin{cases} x^2-2(m-4)x-1 \quad neu \begin{bmatrix} x\le 1 \\ x\ge 3 \end{bmatrix} \\ 4x^2-2(m+2)x+8 \; neu 1<x<3 \end{cases}$.

Để hàm số có đúng 3 điểm cực trị thì hoành độ đỉnh của các parabol phải thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} m-4<1 \\ m-4>3 \end{bmatrix} \\ 1<\dfrac{m+2}{4}<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} m<5 \\ m>7 \end{bmatrix} \\ 2<m<10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2<m<5 \\ 7<m<10 \end{bmatrix}.$$

Vì m nguyên nên $m\in\{3;4;8;9\}$.

Câu 117: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} mx+n & \text{neu } x<-1 \\ x^2+nx+m-9 & \text{neu } x\ge -1 \end{cases}$, với hai tham số thực m và n. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $f(x)$ có đúng 2 điểm cực trị?

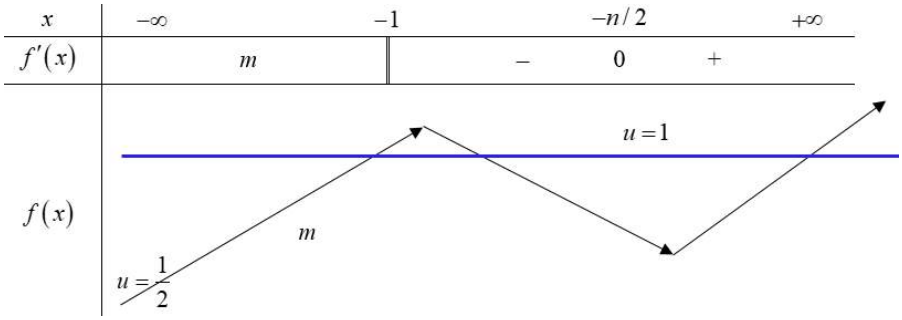
A. 6. **B.** 36. **C.** 11. **D.** 5

Lời giải

Chọn D

Đạo hàm: $f'(x)=\begin{cases} m & \text{neu } x<-1 \\ 2x+n & \text{neu } x>-1 \end{cases}$.

Khi đó, ta có bảng biến thiên của $f(x)$ như sau:



Hàm số $f(x)$ phải liên tục và xác định tại $x=-1$. Suy ra $\begin{cases} m>0 \\ f(-1)=-m+n=-n+m-8. \\ -\dfrac{n}{2}>-1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ n=m-4 \\ -\dfrac{n}{2}=-\dfrac{m}{2}+2>-1 \end{cases} \Rightarrow 0<m<6 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} 1\le m\le 5.$$

Vậy có tất cả 5 giá trị tự nhiên m thỏa mãn bài toán.

Câu 118: Cho hàm số $f(x)$ có biểu thức đạo hàm $f'(x)=2x^2-3x+1$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $f\left(\left|x^2-4x+3\right|+mx\right)$ có 9 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 31

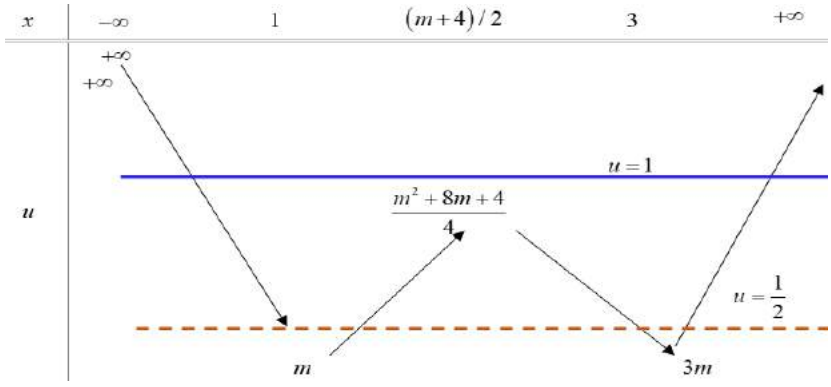
Lời giải

Chọn B

Ta có: $\begin{cases} SDCT\{u\}=1 \\ SNBL\left\{\left[\begin{array}{l} u=4 \\ u=2 \end{array}\right.\right\}\le 4 \end{cases} \Rightarrow SDCT\{u\}+SNBL\left\{\left[\begin{array}{l} u=1 \\ u=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.\right\}\le 5$ {Không thỏa mãn}

Như vậy, bắt buộc u phải có 3 điểm cực trị. Khi đó phải có: $-2<m<\sqrt{4^2-4.3}=2$ (*)

Khi đó, ta có bảng biến thiên của $u=\left|x^2-4x+3\right|$ như sau:



Suy ra $SDCT\{u\}=3\Rightarrow SNBL\left\{\left[\begin{array}{l}u=1\\u=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\right\}=6$

Từ bảng biến thiên, suy ra: $\begin{cases}\dfrac{1}{2}>m\\\dfrac{1}{2}>3m\\\dfrac{1}{2}<\dfrac{m^2+8m+4}{4}\\1\geq\dfrac{m^2+8m+4}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-4+\sqrt{14}<m\leq 0\\m<-4-\sqrt{14}\end{array}\right.$ (**)

Kết hợp (*) và (**), suy ra: $-4+\sqrt{14}<m\leq 0\xrightarrow{m\in\mathbb{Z},m\in[-30;30]}m=\{0\}$.

Vậy có đúng 1 giá trị m nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 119: Cho hàm số $y=|x-1|+|x+1|+|x-2|-2x+1$. Hàm số đạt cực tiểu tại

A. $x=2$ **B.** $x=1$ **C.** $x=-1$ **D.** $x=0$

Lời giải

Chọn A

Với $x<-1\Leftrightarrow y=|x-1|+|x+1|+|x-2|-2x+1=1-x-x-1+2-x-2x+1=-5x+3$

Tương tự, ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-5x+3$	$-3x+5$	$-x+3$	$x-1$	
$f'(x)$	-5	-3	-1	1	
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$	

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$.

Câu 120: Cho hàm số $y=|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|+|x-5|-m^2x+1$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có cực trị?

A. 4 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 5

Lời giải

Chọn C

Với $x<-1\Leftrightarrow y=1-x+2-x+3-x+4-x+5-x-m^2x+1=\left(-5-m^2\right)x+16$

Tương tự, ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	2	3	4	5	$+\infty$
$f(x)$	$(-5-m^2)x+16$	$(-3-m^2)x+14$	$(-1-m^2)x+10$	$(1-m^2)x+4$	$(3-m^2)x-4$	$(5-m^2)x-14$	
$f'(x)$	$-5-m^2$	$-3-m^2$	$-1-m^2$	$1-m^2$	$3-m^2$	$5-m^2$	
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$				

Để hàm số có cực trị thì ít nhất phải có 1 đoạn $f'(x)$ phải đổi dấu từ âm sang dương:

$\Leftrightarrow 5-m^2 \Leftrightarrow -\sqrt{5} \le m \le \sqrt{5} \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m \in \{0;\pm 1;2\}$

Thử lại $m=\pm 1$ thì $f(x)$ là hàm hằng (Loại)

Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn

Câu 121: Cho hàm số $f(x)=|x-1|+3|x-2|+5|x-3|+mx$; với m là tham số. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có cực trị?

A. 17. **B.** 15. **C.** 16. **D.** vô số.

Lời giải

Chọn B

Ta có bảng xét hàm và bảng biến thiên ghép làm một như sau:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f(x)$	$(-9+m)x+22$	$(-7+m)x+20$	$(-1+m)x+8$	$(9+m)x-22$	
$f'(x)$	$-9+m$	$-7+m$	$-1+m$	$9+m$	
$f'(x)$	$-$	$\neq 0$	$\neq 0$	$+$	

Để hàm số có cực trị thì đạo hàm phải đổi dấu ít nhất một lần. Mà ta lại có :

$-9+m<-7+m<-1+m<9+m$. Suy ra số nhỏ nhất phải âm và số lớn nhất phải dương, đồng thời trên các khoảng $(1;2)$, $(2;3)$ đạo hàm phải khác 0. Tức là :

$$\Rightarrow \begin{cases} -9+m<0 \\ 9+m>0 \\ -7+m\neq 0 \\ -1+m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9<m<9 \\ m\neq 7 \\ m\neq 1 \end{cases} \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}$$ vậy có tất cả 15 giá trị m nguyên thỏa mãn.

Câu 122: Cho hàm số $f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-3|+...+|x-n|$. với n là số nguyên dương không lớn hơn 2021. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số n để hàm số có cực trị?

A. 1010. **B.** 1011. **C.** 1009. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn B

Dạng bài toán này chúng ta xét một số giá trị cụ thể của số nguyên dương n rồi rút ra quy luật về những giá trị của tham số n để hàm số có cực trị như sau:

Trường hợp 1:

Xét $n=2$, ta có $y=f(x)=|x-1|+|x-2|$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-2x+3$	1	$2x-3$	
$f'(x)$	-2	0	2	
$f'(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$ 1	$\nearrow$

Hàm số không có cực trị.

Trường hợp 2:

Xét $n=3$, ta có $y=f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-3|$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f(x)$	$-3x+6$	$-x+4$	x	$3x-6$	
$f'(x)$	-3	-1	1	3	
$f'(x)$	$\searrow$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\nearrow$

Hàm số có cực trị.

Nhận xét thấy khi n là số nguyên dương lẻ thì hàm số $y=|x-1|+|x-2|+|x-3|+...+|x-n|$ có điểm cực trị. Khi n là số nguyên dương chẵn thì không tồn tại điểm cực trị.

Suy ra $1\le n\le 2021$ và n lẻ nên có 1011 giá trị n nguyên dương thỏa mãn.

Câu 123: Số điểm cực trị của hàm số $f(x)=|x^2-4x+3|+|x+1|$ là:

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Những hàm trị tuyệt đối cụ thể luôn được tối ưu bằng bảng xét hàm như sau :

x	$-\infty$	-1	1	$5/2$	3	$+\infty$
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$	$x+1$		
$\lvert x^2+2x-3\rvert$	x^2-4x+3	x^2-4x+3	$-x^2+4x-3$	x^2-4x+3		
$f(x)$	x^2-5x+2	x^2-3x+4	$-x^2+5x-2$	x^2-3x+4		
$f'(x)$	$2x-5$	$2x-3$	$-2x+5$	$2x-3$		
$f'(x)$	$-$	$-$	$+\ 0\ -$	$+$		

Suy ra hàm số có một điểm cực tiểu tại $x=1$; $x=3$ và một điểm cực đại tại $x=\dfrac{5}{2}$.

Câu 124: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=f\left(x\right)=\left|x^2-2mx+1\right|+4x$ có điểm cực đại với giá trị cực đại tương ứng nằm trong khoảng $\left(3;4\right)$ và đồng thời thỏa mãn $10m$ là số nguyên. Số phần tử của tập S là

A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $x^2-2mx+1=0\left(*\right)$, có $\Delta'=m^2-1$.

Nếu $\Delta'=m^2-1\le 0$ thì hàm số $y=f\left(x\right)=x^2-2mx+1+4x=x^2-2\left(m-2\right)x+1$ không có điểm cực đại.

Nếu $\Delta'=m^2-1>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>1\end{array}\right.$ thì phương trình $\left(*\right)$ có hai nghiệm phân biệt là $x_1=m-\sqrt{m^2-1}$ và $x_2=m+\sqrt{m^2-1}$.

Với $\left[\begin{array}{l}x\le x_1\\x\ge x_2\end{array}\right.$ thì $y=f\left(x\right)=x^2-2mx+1+4x=x^2-2\left(m-2\right)x+1$ không có điểm cực đại.

Với $x_1<x<x_2$ thì $y=-x^2+2mx-1+4x=-x^2+2\left(m+2\right)x-1$.

Hàm số này đạt cực đại tại $x=m+2$ và giá trị cực đại là $y_{CD}=m^2+4m+3$.

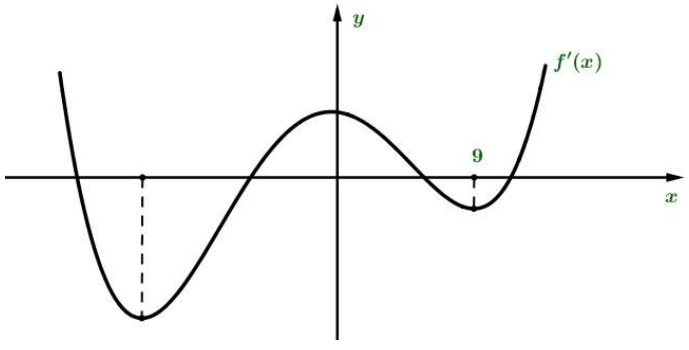
Vậy điều kiện để hàm số có cực đại là

$$\begin{cases}x_1<x=m+2<x_2\\3<m^2+4m+3<4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m-\sqrt{m^2-1}<m+2<m+\sqrt{m^2-1}\\0<m^2+4m<1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{m^2-1}>2\\m^2+4m-1<0\\m^2+4m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<-\sqrt{5}\\m>\sqrt{5}\end{array}\right.\\-2-\sqrt{5}<m<-2+\sqrt{5}\\\left[\begin{array}{l}m<-4\\m>0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow -2-\sqrt{5}<m<-4.$$

Do $10m$ là số nguyên nên có hai giá trị thỏa mãn là $m=-\dfrac{42}{10}$ và $m=-\dfrac{41}{10}$.

Câu 125: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị đạo hàm $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ. Hàm số $y=f\left(6\left|x\right|-x^2\right)$ có số điểm cực trị là.



A. 9. **B.** 7. **C.** 13. **D.** 11

Lời giải

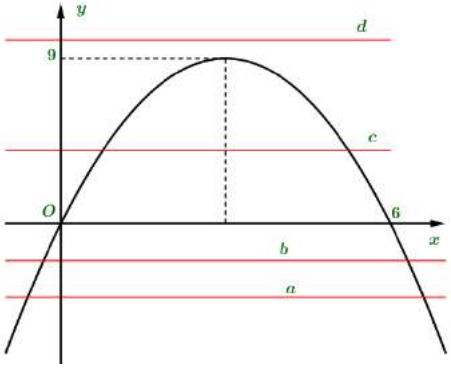
Chọn D

Từ đồ thị $f'(x)$, ta suy ra hàm số $y=f(x)$ có 4 điểm cực trị.

Đặt $g(x)=f\left(6x-x^2\right)$. Ta suy ra $y=g(|x|)$. Do đó số điểm cực trị của hàm y sẽ bằng số điểm cực trị dương của hàm số $g(x)$ cộng thêm 1.

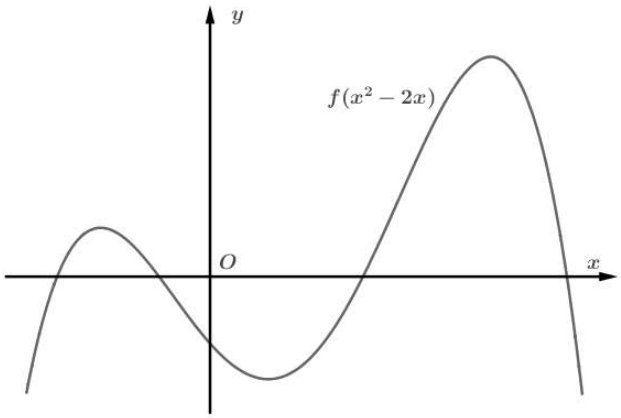
Ta có $g'(x)=(6-2x)f'\left(6x-x^2\right)$, cho $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ 6x-x^2=a<0 \\ 6x-x^2=b<0 \\ 6x-x^2=c\ (0<c<9) \\ 6x-x^2=d>9 \end{array}\right.$

Dựa vào hình vẽ, ta nhận thấy phương trình $g'(x)=0$ có tất cả là 5 nghiệm dương phân biệt.



Suy ra số điểm cực trị của $g(x)$ là 5. Do đó số điểm cực trị của $y=g(|x|)$ là 11.

Câu 126: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y=f\left(x^2-x\right)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-2mx-|x-m|+m^2\right)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị.



A. 7. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 9

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=f\left(|x-m|^2-|x-m|\right)$

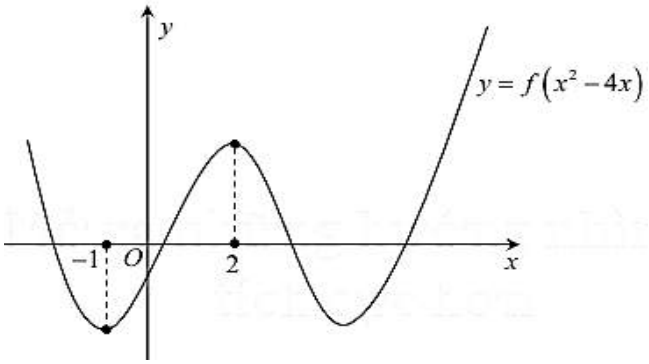
Đặt $g(x)=f\left(x^2-x\right)$. Suy ra $g(|x|)=f\left(x^2-|x|\right)$. Suy ra $g(|x-m|)=f\left(|x-m|^2-|x-m|\right)$

Ta biết số điểm cực trị của hàm $g(|x|)$ và $g(|x-m|)$ là như nhau.

Hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị dương nên hàm $g(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Suy ra hàm $g(|x-m|)$ có tất cả là 5 điểm cực trị.

Câu 127: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y=f\left(x^2-4x\right)$ được cho như hình vẽ. Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-8|x|+12\right)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



A. 3. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

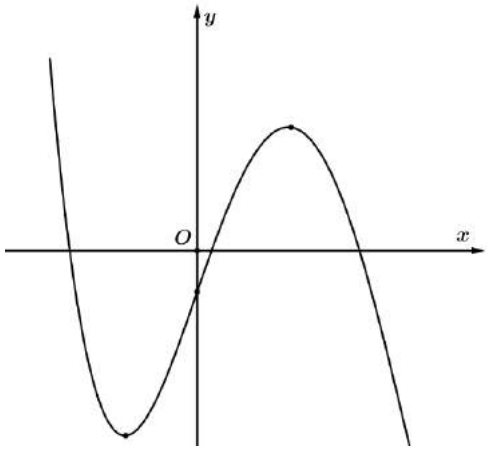
Ta có $y=f\left(x^2-8|x|+12\right)=f\left(x^2-4|x|+4-4|x|+8\right)=f\left(\left(|x|-2\right)^2-4\left(|x|-2\right)\right)=g\left(|x|-2\right)$.

Ta thấy hàm số $y=g(x)$ có các điểm cực trị $x=-1, x=2, x=c>2$. Suy ra hàm số $y=g(x-2)$ có các điểm cực trị là $x=1, x=4, x=c+2$ (3 điểm cực trị dương).

Vậy hàm số $y=g\left(|x|-2\right)=f\left(x^2-8|x|+12\right)$ có 7 điểm cực trị.

Lí giải: $y=f\left(x^2-4x\right)\to g\left(|x|-2\right)$, với $\left(|x|+\alpha\right)^2-4\left(|x|+\alpha\right)=x^2-8|x|+12\Rightarrow\alpha=-2$.

Câu 128: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $f(|x|+|x-1|)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại 3 điểm là $x=a<0; x=b\in(0;1); x=c>1$

Xét hàm số $f(u)=f(|x|+|x-1|)$ với $u=|x|+|x-1|$

Ta có bảng khảo sát hàm số $u=|x|+|x-1|$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\lvert x\rvert$	$-x$		0	x		x	
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$			$-x+1$	0	$x-1$	
u	$-2x+1$			1		$2x-1$	
u'	-2			0		2	
u'	-			0		+	
u		↘	1		1		↗

Ta có: $(f(u))' = u'.f'(u)$ nên số điểm cực trị của hàm số $f(u)$ là: số điểm cực trị của u cộng với số nghiệm bội lẻ của phương trình $f'(u) = 0$ hay $\left[\begin{array}{l} u = a \\ u = b \\ u = c \end{array}\right.$

Hàm u không có điểm cực trị

$u = a$ vô nghiệm; $u = b$ vô nghiệm; $u = c$ có 2 nghiệm; Vậy: $f(u)$ có hai điểm cực trị.

CHƯƠNG 1

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

CHỦ ĐỀ 3 GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa.

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập D.

Số M gọi là **giá trị lớn nhất** của hàm số $y=f(x)$ trên D nếu: $\begin{cases} f(x)\le M, \forall x\in D \\ \exists x_0\in D, f(x_0)=M \end{cases}$.

Kí hiệu: $M=\max\limits_{x\in D} f(x)$.

Số m gọi là **giá trị nhỏ nhất** của hàm số $y=f(x)$ trên D nếu: $\begin{cases} f(x)\ge m, \forall x\in D \\ \exists x_0\in D, f(x_0)=m \end{cases}$.

Kí hiệu: $m=\min\limits_{x\in D} f(x)$.

2. Phương pháp tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng cách khảo sát trực tiếp

Bước 1: Tính $f'(x)$ và tìm các điểm $x_1,x_2,...,x_n\in D$ mà tại đó $f'(x)=0$ hoặc hàm số không có đạo hàm.

Bước 2: Lập bảng biến thiên và từ đó suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn

Bước 1:

Hàm số đã cho $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a;b]$.

Tìm các điểm $x_1,x_2,...,x_n$ trên khoảng $(a;b)$, tại đó $f'(x)=0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.

Bước 2: Tính $f(a), f(x_1), f(x_2),..., f(x_n), f(b)$.

Bước 3: Khi đó: $\max\limits_{[a,b]} f(x)=\max\left\{f(x_1), f(x_2),..., f(x_n), f(a), f(b)\right\}$.

$\min\limits_{[a,b]} f(x)=\min\left\{f(x_1), f(x_2),..., f(x_n), f(a), f(b)\right\}$.

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một khoảng

Bước 1: Tính đạo hàm $f'(x)$.

Bước 2: Tìm tất cả các nghiệm $x_i\in(a;b)$ của phương trình $f'(x)=0$ và tất cả các điểm $\alpha_i\in(a;b)$ làm cho $f'(x)$ không xác định.

Bước 3. Tính $A=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $B=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$, $f(x_i)$, $f(\alpha_i)$.

Bước 4. So sánh các giá trị tính được và kết luận $M=\max\limits_{(a;b)} f(x)$, $m=\min\limits_{(a;b)} f(x)$.

Nếu giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) là A hoặc B thì ta kết luận không có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất).

Nếu $y=f(x)$ đồng biến trên $[a;b]$ thì $\begin{cases}\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(a)\\ \max\limits_{[a;b]} f(x)=f(b)\end{cases}$.

Nếu $y=f(x)$ nghịch biến trên $[a;b]$ thì $\begin{cases}\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(b)\\ \max\limits_{[a;b]} f(x)=f(a)\end{cases}$.

Hàm số liên tục trên một khoảng **có thể** không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên khoảng đó.

❖ **Bất đẳng thức trị tuyệt đối:**

Cho hai số thực a,b khi đó ta có: $|a|+|b|\ge|a+b|\ge|a|-|b|$.

Dấu " = " vế trái xảy ra khi a,b cùng dấu. Dấu " = " vế phải xảy ra khi a,b trái dấu.

Tính chất của hàm trị tuyệt đối: $max\{|a|,|b|\}=\dfrac{|a-b|+|a+b|}{2}$.

❖ **Phương pháp chung để giải các bài toán tìm GTLN – GTNN của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối.**

Bước 1: Xét hàm số $y=f(x)$ trên $[a,b]$.

Tính đạo hàm $y'=f(x)$.

Giải phương trình $f'(x)=0$ và tìm các nghiệm a_i thuộc $[a,b]$.

Bước 2: Giải phương trình $f(x)=0$ và tìm các nghiệm b_j thuộc $[a,b]$.

Bước 3: Tính các giá trị $|f(a)|;|f(b)|;|f(a_i)|;|f(b_j)|$. So sánh và kết luận.

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ bằng 3. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $(5-2f(x))$ trên đoạn $[a;b]$ bằng bao nhiêu?

A. 1. **B.** 2. **C.** -1. **D.** -3.

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{3x-1}{x+1}$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;2]$. Khi đó $M+2m$ bằng

A. 2. **B.** 0. **C.** $-\dfrac{2}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

✍ Lời giải

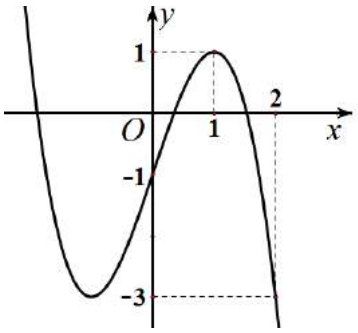
.....

.....

.....

.....

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)=-x^3+3x-1$ có đồ thị như hình vẽ. Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0;2]$ là bao nhiêu?



A. -1. **B.** -3. **C.** 1. **D.** 2.

✍ Lời giải

……

……

……

……

Câu 4: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3+3x+1$ trên đoạn $[1;3]$ là

A. 5. **B.** 37. **C.** 3. **D.** 6.

✍ Lời giải

……

……

……

……

Câu 5: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=-x^3+3x+1$ trên khoảng $(0;+\infty)$ bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** -1. **D.** 5.

✍ Lời giải

……

……

……

……

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1: Mở đầu về GTLN và GTNN của hàm số

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập D. Số M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên D nếu

A. $f(x)\ge M$ với mọi $x\in D$.

B. $f(x)\ge M$ với mọi $x\in D$ và tồn tại $x_o\in D$ sao cho $f(x_o)=M$.

C. $f(x)\le M$ với mọi $x\in D$.

D. $f(x)\le M$ với mọi $x\in D$ và tồn tại $x_o\in D$ sao cho $f(x_o)=M$.

Câu 2: Tập giá trị của hàm số $y=\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}$

A. $T=(2;4)$. **B.** $T=[2;2\sqrt{2}]$. **C.** $T=[2;4]$. **D.** $T=[2\sqrt{2};4]$.

Câu 3: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^4-4x^2+5$ trên đoạn $[-1;2]$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 4: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x^2$ trên đoạn $[1;5]$ bằng

A. -4. **B.** 50. **C.** -2. **D.** 45.

Câu 5: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-x^3+3x^2-1$ trên đoạn $[-3;1]$. Tổng $M+m$ bằng

A. 0. **B.** 52. **C.** -3. **D.** 54.

Câu 6: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3+3x^2$ trên đoạn $[-5;-1]$ bằng

A. 0. **B.** 4. **C.** 2. **D.** -50.

Câu 7: Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x+\sqrt{4-x^2}$ lần lượt là M và m. Giá trị của biểu thức $T=M^2-m^2$

A. 2. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 8: Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x-2}$ trên $[-1;1]$. Khi đó giá trị của m là

A. $m=-\dfrac{2}{3}$. **B.** $m=4$. **C.** $m=-4$. **D.** $m=\dfrac{2}{3}$.

Câu 9: Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{1}{2}x-\sqrt{x+2}$ trên đoạn $[-1;34]$. Tổng $S=3m+M$ bằng.

A. $S=\dfrac{13}{2}$. **B.** $S=\dfrac{25}{2}$. **C.** $S=\dfrac{63}{2}$. **D.** $S=\dfrac{11}{2}$.

Câu 10: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^4+2x^2-1$ trên $[-1;1]$ bằng

A. 2. **B.** -1. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 11: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 + 2x^2 - 7x - 3$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

A. $\frac{311}{27}$. **B.** -7. **C.** -1. **D.** 5.

Câu 12: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 4$ trên đoạn $[0;2]$. Tổng $M + m$ bằng?

A. 8. **B.** 12. **C.** 6. **D.** 10.

Câu 13: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 2$ trên đoạn $[0;2]$. Tổng $M + m$ bằng

A. $-\frac{122}{27}$. **B.** -2. **C.** $-\frac{41}{27}$. **D.** -4.

Câu 14: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 30x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. $20\sqrt{10}$. **B.** -63. **C.** $-20\sqrt{10}$. **D.** -52.

Câu 15: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{1}{2020}x^4 - \frac{1}{2020}x^2 + 2021$ trên đoạn $[-1;1]$ là

A. $2021 - \frac{1}{4040}$ **B.** $2021 - \frac{1}{8080}$. **C.** 2020. **D.** 2021.

Câu 16: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ trên đoạn $[1;3]$. Giá trị $M + m$ bằng:

A. 8. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 17: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ trên đoạn $[-1;2]$ là

A. 6. **B.** 11. **C.** 15. **D.** 10.

Câu 18: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[2;4]$ bằng

A. $\frac{19}{3}$. **B.** 6. **C.** -3. **D.** -2.

Câu 19: Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - 4x}{2x + 1}$ trên đoạn $[0;3]$.

A. $\min\limits_{[0;3]} y = 0$. **B.** $\min\limits_{[0;3]} y = -\frac{7}{3}$. **C.** $\min\limits_{[0;3]} y = -4$. **D.** $\min\limits_{[0;3]} y = -1$.

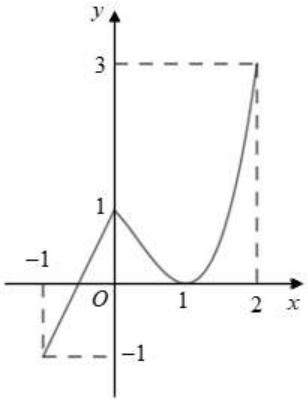
Câu 20: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ trên đoạn $[-2;2]$.

A. -1. **B.** -17. **C.** -22. **D.** 3.

Câu 21: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x + 1}{x - 1}$ trên $[2;+\infty)$ là

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;2]$. Giá trị của $M.m$ bằng



A. -3. **B.** 1. **C.** -2. **D.** 3.

Câu 23: Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-1$ nhận giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[-\frac{1}{3};10\right]$ tại

A. $x=-\frac{1}{3}$. **B.** $x=1$. **C.** $x=3$. **D.** $y=\frac{10}{3}$.

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=-\frac{x}{x^2+1}$. Với a,b là các số dương, thỏa mãn $a<b$. Gía trị nhỏ nhất của hàm số trên $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ bằng.

A. $f(b)$. **B.** $f(a)$. **C.** $\frac{f(a)+f(b)}{2}$. **D.** $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

Câu 25: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x+2$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng

A. 20. **B.** 0. **C.** 4. **D.** -16.

Câu 26: Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\frac{x-1}{1-2x}$ trên đoạn $[2;5]$. Tính $A=M-3m$.

A. $A=-\frac{10}{3}$. **B.** $A=-1$. **C.** $A=1$. **D.** $A=-\frac{5}{3}$.

Câu 27: Cho hàm số $f(x)=\frac{3x-1}{x+1}$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;2]$. Khi đó $M+2m$ bằng

A. 2. **B.** 0. **C.** $-\frac{2}{3}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

Câu 28: Tính tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^4-x^3-x$ trên đoạn $[0;2]$.

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** -1.

Câu 29: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2+\frac{16}{x}$ trên $(0;+\infty)$ bằng

A. 24. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 4.

Câu 30: Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$ lần lượt là

A. 3 và -1. **B.** $2+\sqrt{2}$ và $2-\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{2}$ và $-\sqrt{2}$. **D.** 2 và 0.

Câu 31: Hàm số $y = 99x - \sqrt{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng

A. $-\frac{1}{396}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** 0. **D.** $-\frac{1}{198}$.

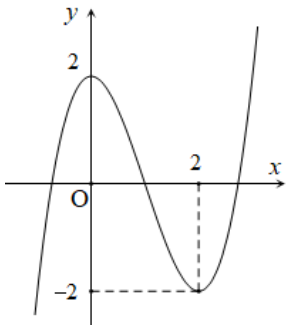
Câu 32: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m$ (với m là tham số thực). Biết $\max\limits_{(-\infty;0)} f(x) = 5$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $(0;+\infty)$ là

A. $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x) = 1$. **B.** $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x) = 2$. **C.** $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x) = 3$. **D.** $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x) = -1$.

Câu 33: Hàm số nào dưới đây có giá trị lớn nhất trên tập xác định?

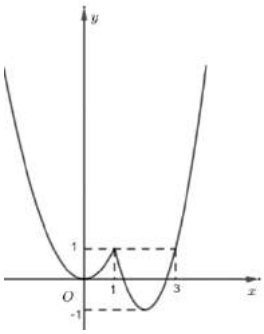
A. $-x^4 + x^2 + 2$. **B.** $-x^3 + 2x^2 + 1$. **C.** $x^3 - 3x + 1$. **D.** $x^4 - 3x^2 + 1$.

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;2]$. Khẳng định nào sau đây là đúng?



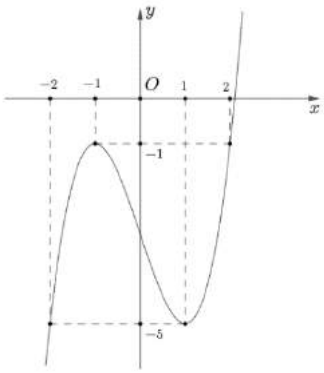
A. $m + M = 2$. **B.** $m + M = -2$. **C.** $m + M = 0$. **D.** $m + M = 4$.

Câu 35: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0;3]$ bằng



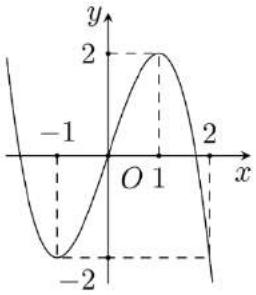
A. 0. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 36: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;2]$.



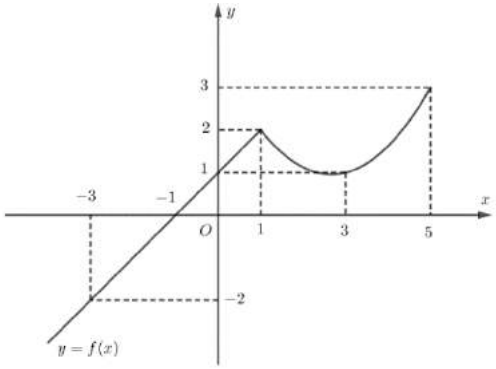
A. $M=0$. **B.** $M=-1$. **C.** $M=1$. **D.** $M=2$.

Câu 37: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[0;2]$ là



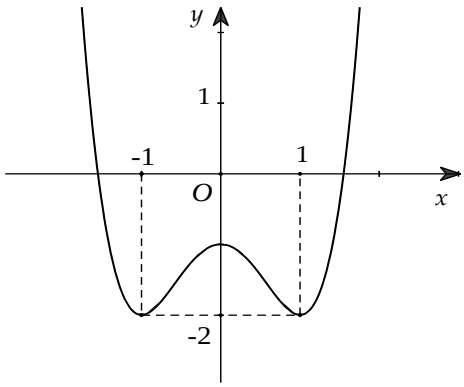
A. -2. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 38: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3;5]$ và có đồ thị như hình vẽ. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-3;5]$ bằng



A. 3. **B.** 5. **C.** -3. **D.** 2.

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình sau



Hàm số đã cho đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(-\infty;0)$ tại điểm

A. $x=0$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-2$.

Câu 40: Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ và $g(x)=x+\dfrac{4}{x^2}$. Trên đoạn $[1;4]$, hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có cùng giá trị nhỏ nhất và đạt tại cùng một điểm. Biết rằng điểm $A(1;4)$ thuộc đồ thị hàm số $f(x)$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[1;4]$.

A. $\max\limits_{[1;4]} f(x)=9$. **B.** $\max\limits_{[1;4]} f(x)=23$. **C.** $\max\limits_{[1;4]} f(x)=11$. **D.** $\max\limits_{[1;4]} f(x)=19$.

Câu 41: Cho hàm số $y=(x+m)^3-3(x+m)+1+n$. Biết hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ và giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;1]$ bằng 4. Tính $m+n$

A. $m+n=0$. **B.** $m+n=2$. **C.** $m+n=-1$. **D.** $m+n=1$.

Câu 42: Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x+2\cos x$ trên $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ lần lượt là M và m. Khi đó giá trị của biểu thức $T=20M-12m$ tương ứng bằng:

A. $8\sqrt{2}$. **B.** $12\sqrt{3}$. **C.** $6+3\sqrt{2}$. **D.** $6\sqrt{3}$.

Câu 43: Biết giá trị lớn nhất của hàm số $y=x+\sqrt{4-x^2}+m$ là $3\sqrt{2}$. Giá trị của m là

A. $m=2\sqrt{2}$. **B.** $m=-\sqrt{2}$. **C.** $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $m=\sqrt{2}$.

Câu 44: Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		0		0		0	

Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(2x)-\sin^2 x$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng

A. $f(-1)-\sin^2\frac{1}{2}$. **B.** $f(2)-\sin^2 1$. **C.** $f(0)$. **D.** $f(1)-\sin^2\frac{1}{2}$.

Câu 45: Biết rằng trên đoạn $[-2;4]$ hàm số $f(x)=x^3-3x^2+1$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=a$ và đạt giá trị lớn nhất tại $x=b$. Tính giá trị của a^2+b^2.

A. 4. **B.** 8. **C.** 16. **D.** 20.

Dạng 2: GTLN và GTNN trên một đoạn, khoảng

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn

Bước 1:

Hàm số đã cho $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a;b]$.

Tìm các điểm $x_1,x_2,...,x_n$ trên khoảng $(a;b)$, tại đó $f'(x)=0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.

Bước 2: Tính $f(a), f(x_1), f(x_2),..., f(x_n), f(b)$.

Bước 3: Khi đó: $\max\limits_{[a,b]} f(x)=\max\{f(x_1), f(x_2),..., f(x_n), f(a), f(b)\}$.

$\min\limits_{[a,b]} f(x)=\min\{f(x_1), f(x_2),..., f(x_n), f(a), f(b)\}$.

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ trên $[2;4]$ là:

A. $\underset{[2;4]}{Max}\, y=\dfrac{19}{3}$. **B.** $\underset{[2;4]}{Max}\, y=6$. **C.** $\underset{[2;4]}{Max}\, y=\dfrac{11}{3}$. **D.** $\underset{[2;4]}{Max}\, y=7$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 2: Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x^2$ trên đoạn $[-2;1]$. Tính giá trị $T=M+m$

A. 2. **B.** -4. **C.** -24. **D.** -20.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$ khi đó $M-m$ bằng:

A. 3. **B.** -2. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 4: Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ trên đoạn $[0;4]$ là:

A. 20. **B.** 18. **C.** 0. **D.** 16.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 5: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{3x-1}{x-3}$ trên $[0;2]$ là

A. -5. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** 5. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 6: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ trên đoạn $[0;2]$ bằng

A. 1. **B.** -2. **C.** 0. **D.** $\dfrac{-50}{27}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 7: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+1}$ trên đoạn $[0;2]$ bằng

A. -3 **B.** 2 **C.** 0 **D.** -2

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 8: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 7x + 1$ trên đoạn $[-2;1]$ bằng

A. -8. **B.** -7. **C.** 5. **D.** -1.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 9: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^4 + 12x^2 + 3$ trên đoạn $[-2;1]$ bằng

A. 34. **B.** 35. **C.** 33. **D.** 32.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 10: Cho hàm số $y = \left(x^3 - 3x - m + 1\right)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng 4 là

A. -2. **B.** 2. **C.** -4. **D.** 4.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ trên đoạn $[0;1]$ lần lượt bằng

A. -1 và 3. **B.** -3 và -1. **C.** 1 và -3. **D.** -1 và -3.

Câu 2: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x+5$ trên $[2;4]$ là

A. $\min\limits_{[2;4]} y=0$. **B.** $\min\limits_{[2;4]} y=7$. **C.** $\min\limits_{[2;4]} y=5$. **D.** $\min\limits_{[2;4]} y=3$.

Câu 3: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3-3x$ trên $[0;3]$ bằng

A. 0. **B.** -2. **C.** 18. **D.** 2.

Câu 4: Giá trị nhỏ nhất cuả hàm số $y=\dfrac{x-4}{x+2}$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

A. -2. **B.** -4. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** -5.

Câu 5: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^4-2x^2+2$ trên đoạn $[0;2]$ là

A. $\min\limits_{x\in[0;2]} y=0$. **B.** $\min\limits_{x\in[0;2]} y=2$. **C.** $\min\limits_{x\in[0;2]} y=-1$. **D.** $\min\limits_{x\in[0;2]} y=1$.

Câu 6: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3+3x$ trên đoạn $[-1;1]$.

A. $m=0$. **B.** $m=-4$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=4$.

Câu 7: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-36x$ trên đoạn $\left[2;5\sqrt{3}\right]$ bằng

A. -64. **B.** $48\sqrt{3}$. **C.** $-48\sqrt{3}$. **D.** $-47\sqrt{3}$.

Câu 8: Trên đoạn $[1;6]$, hàm số $y=x+\dfrac{9}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

A. $x=2$. **B.** $x=6$. **C.** $x=1$. **D.** $x=3$.

Câu 9: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=-x^3+3x+1$ trên đoạn $[0;2]$ bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 10: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^4-2x^2+2$ trên đoạn $[0;2]$ bằng bao nhiêu?

A. 1. **B.** 0. **C.** -1. **D.** 2.

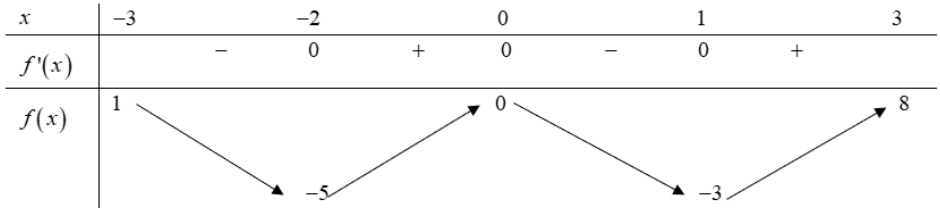
Câu 11: Xét hàm số $y=\dfrac{x-1}{2x+1}$ trên $[0;1]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\min\limits_{[0;1]} y=-\dfrac{1}{2}$. **B.** $\max\limits_{[0;1]} y=0$. **C.** $\max\limits_{[0;1]} y=1$. **D.** $\min\limits_{[0;1]} y=\dfrac{1}{2}$.

Câu 12: Gọi m,M là giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x-2}$ trên $[-1;1]$. Khi đó giá trị của $m+M$ là

A. $m+M=-4$ **B.** $m+M=-\dfrac{10}{3}$ **C.** $m+M=-\dfrac{14}{3}$ **D.** $m+M=\dfrac{2}{3}$

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên.



Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-3;3]$ bằng

A. 1 **B.** 0 **C.** 8 **D.** 3

Câu 14: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+1}$ trên đoạn $[0;2]$ bằng

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** 2. **C.** 3. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Câu 15: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$ là

A. $\min\limits_{x\in[0;3]} y=-2$. **B.** $\min\limits_{x\in[0;3]} y=-\dfrac{1}{2}$. **C.** $\min\limits_{x\in[0;3]} y=-3$. **D.** $\min\limits_{x\in[0;3]} y=\dfrac{1}{4}$.

Câu 16: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-6x^2+2$ trên đoạn $[-3;3]$ là

A. 2. **B.** 25. **C.** 17. **D.** 5.

Câu 17: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+2}$ trên đoạn $[0;2]$ là:

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** 2.

Câu 18: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ trên đoạn $[0;2]$

A. 2.. **B.** -3. **C.** -2.. **D.** 0.

Câu 19: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3-3x+5$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{3}{2}\right]$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 7. **D.** $\dfrac{31}{8}$.

Câu 20: Giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=x^3+6x^2-3$ trên đoạn $[-2;2]$ là

A. $m=29$. **B.** $m=13$. **C.** $m=-3$. **D.** $m=-4$.

Câu 21: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3-3x+3$ trên đoạn $\left[-3;\dfrac{3}{2}\right]$ là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 22: Hàm số $y=-x^3+3x-2$ trên đoạn $[-3;0]$ có giá trị lớn nhất M, giá trị nhỏ nhất m. Tính giá trị của $M+m$.

A. -6. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 16.

Câu 23: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng

A. 18. **B.** 2. **C.** -2. **D.** -18.

Câu 24: Giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=x^3-3x^2$ trên đoạn $[-1;1]$ là:

A. $m=0$. **B.** $m=-4$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=2$.

Câu 25: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^4-2x^2+3$ trên đoạn $[-3;2]$ bằng

A. 0. **B.** 11. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 26: Cho hàm số $y=2x^3-2x^2+7x+1$. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;0]$ lần lượt là M và m. Giá trị của $M+m$ là

A. -10. **B.** 1. **C.** -11. **D.** -9.

Câu 27: Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x\sqrt{16-x^2}$. Tính $M+m$

A. $8-\sqrt{8}$. **B.** $\sqrt{8}$. **C.** 0. **D.** 8.

Câu 28: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-x^3-3x^2+m$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 0.

A. $m=0$. **B.** $m=6$. **C.** $m=4$. **D.** $m=2$.

Câu 29: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3+3x^2-9x+8$ trên đoạn $[-2;2]$.

A. $\max\limits_{[-2;2]} y=3$. **B.** $\max\limits_{[-2;2]} y=34$. **C.** $\max\limits_{[-2;2]} y=10$. **D.** $\max\limits_{[-2;2]} y=30$.

Câu 30: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-8x^2+16x-9$ trên đoạn $[1;3]$

A. $\max\limits_{x\in[1;3]} f(x)=5$. **B.** $\max\limits_{x\in[1;3]} f(x)=\dfrac{13}{27}$. **C.** $\max\limits_{x\in[1;3]} f(x)=-6$. **D.** $\max\limits_{x\in[1;3]} f(x)=0$.

Câu 31: Trên đoạn $[-4;-1]$, hàm số $y=x+\dfrac{9}{x-1}$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. -5. **B.** $-\dfrac{29}{5}$. **C.** $-\dfrac{11}{2}$. **D.** 4.

Câu 32: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-2x^2+x-2$ trên $[0;2]$ bằng

A. 1. **B.** -2. **C.** 0. **D.** $-\dfrac{50}{27}$.

Câu 33: Gọi m là giá trị nhỏ nhất và M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=2x^3+3x^2-1$ trên đoạn $\left[-2;-\dfrac{1}{2}\right]$. Khi đó giá trị của $M-m$ bằng

A. -5. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 34: Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$ trên đoạn $[1;3]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $m+M=\dfrac{13}{3}$. **B.** $m+M=5$. **C.** $m+M=9$. **D.** $m+M=4$.

Câu 35: Gọi m,M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm số $y=x-\ln x$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2};e\right]$. Giá trị của $M-m$ là:

A. $e-\ln 2-\frac{1}{2}$. **B.** $e-1$. **C.** $\ln 2-\frac{1}{2}$. **D.** $e-2$.

Câu 36: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-2)$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;4]$ bằng

A. $f(2)$. **B.** $f(1)$. **C.** $f(4)$. **D.** $f(3)$.

Câu 37: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2x^3-5x^2+4x-2$ trên đoạn $[0;2]$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** $-\frac{74}{27}$. **D.** -1.

Câu 38: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{4}{x}+x+1$ trên đoạn $[1;3]$. Tính $M-m$.

A. 9. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 39: Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$ trên đoạn $[0;4]$. Tính tổng $S=M+m$.

A. $S=\frac{10}{3}$. **B.** $S=4$. **C.** $S=1$. **D.** $S=\frac{7}{3}$.

Câu 40: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\frac{x-1}{x-2}$ trên đoạn $[3;4]$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 41: Trên đoạn $\left[\frac{1}{3};\frac{3}{2}\right]$, hàm số $y=2x^3+\frac{1}{2x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

A. $x=\frac{1}{2}$. **B.** $x=\frac{3}{2}$. **C.** $x=\frac{1}{3}$. **D.** $x=1$.

Câu 42: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x+5$ trên đoạn $[2;4]$ là

A. $\min\limits_{[2;4]} y=3$. **B.** $\min\limits_{[2;4]} y=0$. **C.** $\min\limits_{[2;4]} y=5$. **D.** $\min\limits_{[2;4]} y=7$.

Câu 43: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=-x^4+2x^2+2021$ trên $[0;3]$ là

A. 1958. **B.** 2019. **C.** 2022. **D.** 2021.

Câu 44: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+35$ trên đoạn $[-4;4]$. Khi đó $M+m$ bằng bao nhiêu?

A. -1. **B.** 48. **C.** 11. **D.** 55.

Câu 45: Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$. Tìm giá trị của $M+m$.

A. 5. **B.** 13. **C.** $\frac{37}{3}$. **D.** $\frac{43}{3}$.

Câu 46: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$ trên đoạn $[1;3]$ bằng

A. $\dfrac{2}{5}$. **B.** 2. **C.** 0. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 47: Trên đoạn $[0;2]$, hàm số $f(x)=x^4-2x^2+1$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm nào sau đây?

A. $x=2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=0$. **D.** $x=9$.

Câu 48: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=(x+3)(x-2)^3(x^2-4)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f(-2)>\max\{f(-3);f(2)\}$. **B.** $f(-3)<f(-2)<f(2)$

C. $f(-2)<\min\{f(-3);f(2)\}$ **D.** $f(-3)>f(-2)>f(2)$

Câu 49: Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$, biết $\min\limits_{[1;3]}f(x)+\max\limits_{[1;3]}f(x)=6$ khi $m=\dfrac{a}{b}$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. giá trị của $a-3b$ bằng

A. 13. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 15.

Câu 50: Cho hàm số $f(x)=\sqrt{2x+14}+\sqrt{5-x}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=-7$. **B.** Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng $2\sqrt{6}$.

C. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=1$. **D.** Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt{3}$.

Câu 51: Trên đoạn $[2;4]$ hàm số $y=x^2+\dfrac{2}{x}$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm

A. $x=\dfrac{33}{2}$. **B.** $x=4$. **C.** $x=5$. **D.** $x=2$.

Câu 52: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+10$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng

A. 17. **B.** -15. **C.** 15. **D.** 5.

Câu 53: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-x^3+3x-1$ trên đoạn $[-2;0]$. Giá trị của $2M+m$ bằng

A. -1. **B.** -5. **C.** 0. **D.** -2.

Câu 54: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-24x^2-4$ trên đoạn $[0;19]$ bằng

A. -144. **B.** -150. **C.** -148. **D.** -149.

Câu 55: Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2+1$ trên đoạn $[1;2]$. Giá trị $M-m$ bằng

A. 2. **B.** -2. **C.** 4. **D.** -4.

Câu 56: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x-m^2}{x+1}$, với m là tham số. Gọi $m_1,m_2\,(m_1<m_2)$ là các giá trị của tham số m thỏa mãn $2\max\limits_{[0;2]}f(x)-\min\limits_{[0;2]}f(x)=8$. Tổng $2m_1+3m_2$ bằng

A. 1. **B.** -2. **C.** 4. **D.** -1.

Câu 57: Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\frac{3}{4}x^4-2x^2+1$ trên đoạn $[0;2]$, khi đó tích $M.m$ bằng:

A. 5. **B.** $\frac{1}{9}$. **C.** $\frac{-5}{3}$. **D.** $\frac{-1}{3}$.

Câu 58: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2x^3+3x^2-12x+2$ trên đoạn $[-1;2]$. Tỉ số $\frac{M}{m}$ bằng

A. $-\frac{6}{5}$. **B.** -3. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** -2.

Câu 59: Tổng giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)=(x-6)\sqrt{x^2+4}$ trên đoạn $[0;3]$ có dạng $a-b\sqrt{c}$ với a là số nguyên, b là số nguyên dương và c là số nguyên tố.Tính $S=a+b+c$.

A. 5. **B.** -22. **C.** -2. **D.** 4.

Câu 60: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=-x(x-2)^2(x-3),\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0;4]$ bằng

A. $f(2)$. **B.** $f(3)$. **C.** $f(4)$. **D.** $f(0)$.

Câu 61: Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{x^2+x+3}{x-2}$ trên $[-2;1]$. Giá trị của $M+m$ bằng

A. -6. **B.** $\frac{-9}{4}$. **C.** $\frac{-25}{4}$. **D.** -5.

Câu 62: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-1)^2(x-2)$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(x)+\frac{1}{3}x^3-x-2$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

A. $f(2)-\frac{4}{3}$. **B.** $f(1)-\frac{8}{3}$. **C.** $f(0)-2$. **D.** $f(-1)-\frac{4}{3}$.

Câu 63: Cho hàm số $y=\frac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực). Gọi m_0 là giá trị của m thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]}y=3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m_0<-1$. **B.** $m_0>4$. **C.** $1\le m_0<3$. **D.** $3<m_0\le 4$.

Câu 64: Cho hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)+e^x$ trên đoạn $[0;1]$ bằng

A. $f(1)$. **B.** $f(1)+e$. **C.** $f(0)+1$. **D.** $f(0)$.

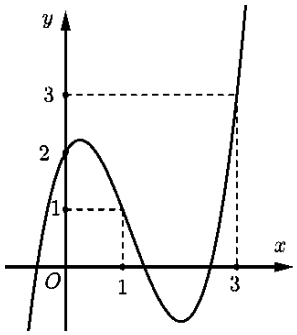
Câu 65: Cho hàm số $f(x)=10^x+x$ và hàm số $g(x)=x^3-mx^2+(m^2+1)x-2$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $g(x+f(x))$ trên đoạn $[0;1]$. Khi M đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của tham số m bằng

A. $\frac{21}{2}$. **B.** 6. **C.** 21. **D.** 5.

Câu 66: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-x^3-3x^2+m$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng 1.

A. $m=20$. **B.** $m=19$. **C.** $m=18$. **D.** $m=21$.

Câu 67: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Trên $[-2;4]$, gọi x_0 là điểm mà tại đó hàm số $g(x)=f\left(\frac{x}{2}+1\right)-\ln\left(x^2+8x+16\right)$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó x_0 thuộc khoảng nào?



A. $\left(\frac{1}{2};2\right)$ **B.** $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ **C.** $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$ **D.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$

Câu 68: Cho hàm số $y=e^x\left(x^2-3\right)$, gọi $M=\frac{a}{e^b}\left(a\in\mathbb{N},b\in\mathbb{N}\right)$ là giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-5;-2]$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b$?

A. 27. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 17.

Câu 69: Cho hàm số $y=ax^3+bx+c\left(a\neq 0\right)$, biết $\min\limits_{x\in(0;+\infty)} f(x)=f(1)$. Tìm giá trị lớn nhất của $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;0]$.

A. $\max\limits_{x\in[-2;0]} f(x)=c+16a$. **B.** $\max\limits_{x\in[-2;0]} f(x)=c-16a$.

C. $\max\limits_{x\in[-2;0]} f(x)=c-2a$. **D.** $\max\limits_{x\in[-2;0]} f(x)=c+2a$.

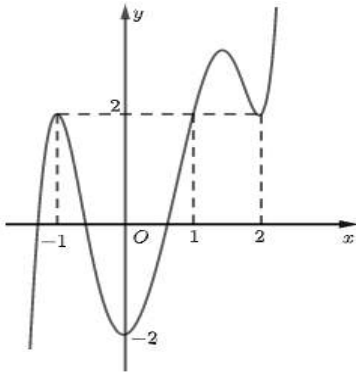
Câu 70: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\frac{x-m^2}{x+8}$ có giá trị nhỏ nhất trên $[0;3]$ bằng $-\frac{9}{2}$?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 71: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f(0)>0$ và $\left[f(x)+6x\right].f(x)=9x^4+3x^2+4,\forall x\in\mathbb{R}$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(2x^2-3x+1\right)$ trên đoạn $[0;1]$.

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{167}{69}$. **C.** $\frac{17}{7}$. **D.** $\frac{155}{64}$.

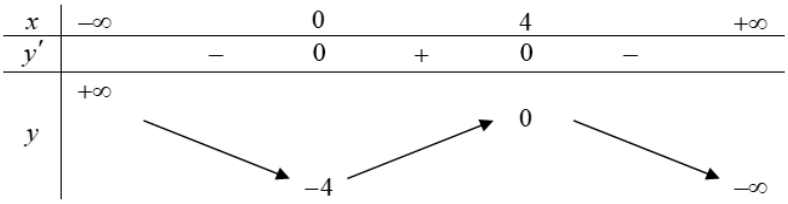
Câu 72: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ.



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(2x+1)-4x-3$ trên đoạn $\left[-1;\frac{1}{2}\right]$ bằng

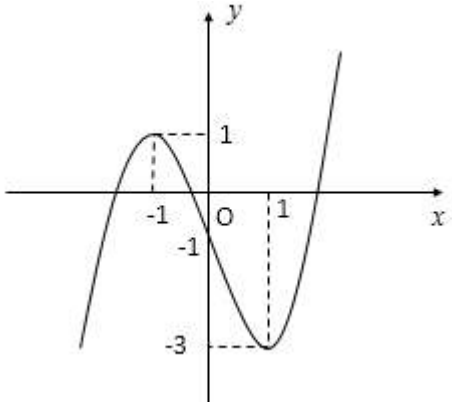
A. $f(0)$. **B.** $f(-1)+1$. **C.** $f(1)-3$. **D.** $f(2)-5$.

Câu 73: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f\left(4x-x^2\right)+\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x+\frac{1}{3}$ trên đoạn $[1;3]$ bằng



A. 12. **B.** $\frac{10}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** 7.

Câu 74: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



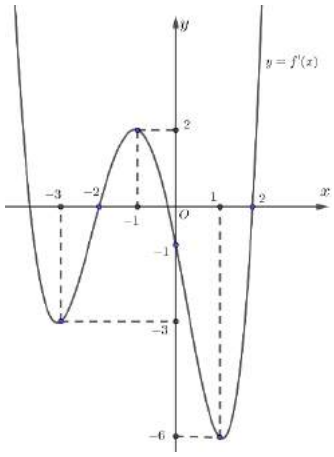
Đặt $g(x)=x^2-4x+f\left(\sqrt{x^2-4x+8}\right)$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ trên $[0;4]$ là

A. $10\sqrt{2}-4$. **B.** $10\sqrt{2}-1$. **C.** $10\sqrt{2}$. **D.** $8\sqrt{2}-4$.

Câu 75: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y'=f'(x)=-3x^2+6x$. Biết $f(0)=-1$, giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f\left(x^2-3x+2\right)+2022$ trên đoạn $\left[-3;\frac{1}{2}\right]$ bằng

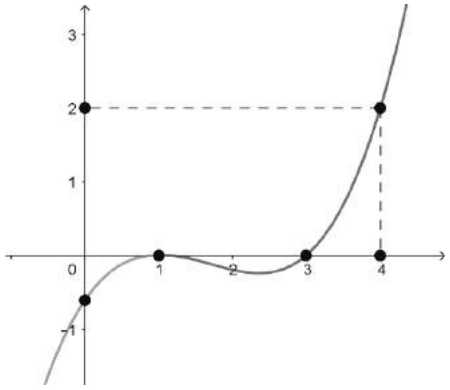
A. $f\left(\frac{21}{16}\right)+2022$. **B.** 2024. **C.** 2025. **D.** $f\left(\frac{3}{2}\right)+2022$.

Câu 76: Cho hàm số $y=f(x)$, đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(3x)+3x^2-4x+1$ trên đoạn $\left[-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right]$ bằng



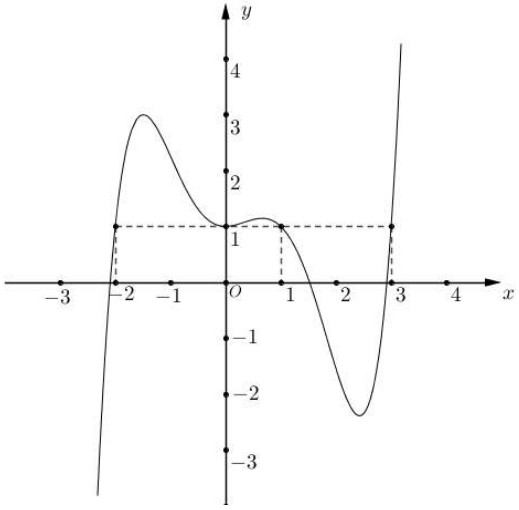
A. $f(0)+1$. **B.** $f(6)$. **C.** $f(2)-\frac{1}{3}$. **D.** $f(-3)+8$.

Câu 77: Cho hàm số $y=f(x)$, có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên R và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0;4]$, biết $f(0)+f(3)=f(1)+f(4)$. Khẳng định nào sao đây đúng?



A. $m+M=f(1)+f(3)$. **B.** $m+M=f(0)+f(4)$.
C. $m+M=f(3)+f(4)$. **D.** $m+M=f(0)+f(3)$.

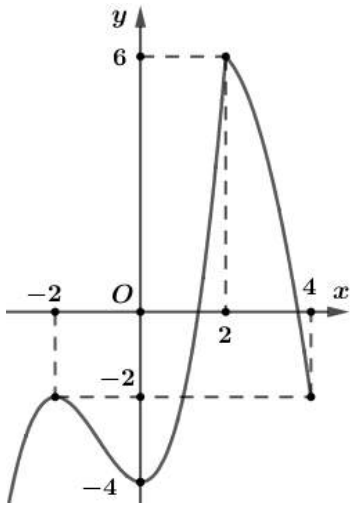
Câu 78: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây.



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(2x^2+x)-2x^2-x$ trên đoạn $\left[-1;\frac{1}{2}\right]$ là

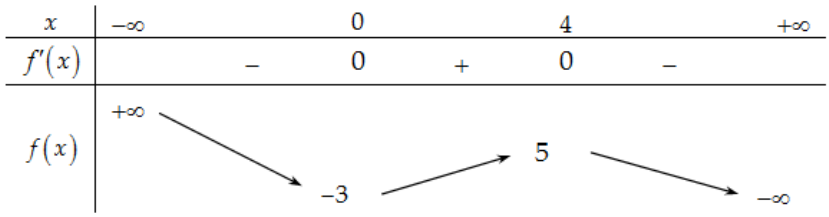
A. $f(1)+1$. **B.** $f\left(\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{8}$. **C.** $f(-3)+3$. **D.** $f\left(-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{8}$.

Câu 79: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2;4]$. Giá trị của M^2+m^2 bằng



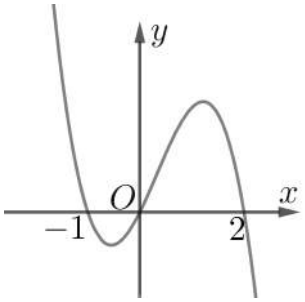
A. 52. **B.** 2. **C.** 40. **D.** 20.

Câu 80: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f\left(4x-x^2\right)+\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x+\frac{1}{3}$ trên đoạn $[1;3]$.



A. 15. **B.** $\frac{25}{3}$. **C.** $\frac{19}{3}$. **D.** 12.

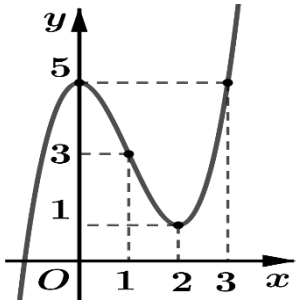
Câu 81: Cho hàm số $f(x)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên.



Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x=-1;x=0$ bằng 3. Hiệu giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $[-1;1]$ là

A. $\frac{39}{5}$. **B.** $\frac{29}{4}$. **C.** $\frac{35}{4}$. **D.** $\frac{42}{5}$.

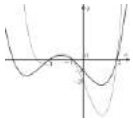
Câu 82: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Ký hiệu $g(x)=f\left(2\sqrt{2x}+\sqrt{1-x}\right)+m$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho $\max\limits_{[0;1]} g(x) > 4\min\limits_{[0;1]} g(x)$.

A. $m>\frac{1}{3}$. **B.** $m<\frac{1}{3}$. **C.** $1<m<5$.To **D.** $m<-\frac{5}{3}$.

Câu 83: Cho hai hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$ và $y=g(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới, trong đó đường **đậm hơn** là đồ thị hàm số $y=f(x)$. Biết rằng hai đồ thị này tiếp xúc với nhau tại điểm có hoành độ là -3 và cắt nhau tại hai điểm nữa có hoành độ lần lượt là -1 và 3. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $u(x)=f(x)-g(x)$ trên đoạn $[-3;3]$bằng



A. $\frac{12-8\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\frac{12-10\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\frac{12-10\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\frac{12-8\sqrt{3}}{9}$.

Câu 84: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(-6)=42$ và bảng xét dấu đạo hàm như

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(-3x^4+12x^2-15\right)+2x^6+6x^4-48x^2$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Dạng 3: GTLN và GTNN của hàm số có chứa tham số

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Cho hàm số $y = x^3 + \left(m^2 + 1\right)x + m^2 - 2$. Tìm số thực dương m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;2\right]$ bằng 2.

A. $m = 1$. **B.** $m = 4$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2: Cho hàm số $y = \dfrac{mx + 2}{x}$ (với m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[1;3]} y = 19$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

A. $m > 18$. **B.** $m < 0$. **C.** $3 < m \le 17$. **D.** $1 \le m \le 3$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Cho hàm số $y = x^3 + \left(m^2 + 3\right)x + m^2 - 4$. Biết hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $\left[-2;0\right]$ bằng $\dfrac{1}{4}$ tại $m = m_0$ $\left(m_0 > 0\right)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $1 < m_0 < 2$. **B.** $3 < m_0 < 4$. **C.** $2 < m_0 < 3$. **D.** $0 < m_0 < 1$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4: Hàm số $f(x)=x^3-3x^2+m(m\in\mathbb{R})$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[1;2]$ bằng 1. Khi đó m thuộc khoảng

A. $(-3;-1)$. **B.** $(4;6)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(-1;1)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5: Số giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-x^3+3x^2-1-m^2$ trên đoạn $[-2;1]$ bằng -1

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 6: Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-m}{x+2}$ trên $[0;2]$ bằng 8 (m là tham số thực). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m>10$. **B.** $-15<m\le -10$. **C.** $0<m\le 8$. **D.** $-9<m\le -2$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x+m}{x+1}$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $\min\limits_{[0;4]} f(x)+\max\limits_{[0;4]} f(x)=10$.

A. $m=3$. **B.** $m=1$. **C.** $m=7$. **D.** $m=5$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 8: Cho hàm số $f(x)=x^3+\left(m^2+1\right).x+m^2-2$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$ bằng 7.

A. $m=\pm 1$. **B.** $m=\pm\sqrt{7}$. **C.** $m=\pm\sqrt{2}$. **D.** $m=\pm 3$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0;2]$ tại một điểm $x_0\in(0,2)$.

A. $0<m<1$. **B.** $m>1$. **C.** $m>2$. **D.** $-1<m<1$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 10: Biết giá trị lớn nhất của hàm số $y=-\dfrac{1}{2}x^2+2x+m$ trên đoạn $[1;4]$ bằng 10. Giá trị của tham số m là

A. $m=0$. **B.** $m=\dfrac{17}{2}$. **C.** $m=10$. **D.** $m=8$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm số $y=\dfrac{mx+2}{x}$ (với m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[1;3]} y=19$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $m>18$. **B.** $m<0$. **C.** $3<m\le 17$. **D.** $1\le m\le 3$.

Câu 2: Biết giá trị lớn nhất của hàm số $y=-\dfrac{1}{2}x^2+2x+m$ trên đoạn $[1;4]$ bằng 10. Giá trị của tham số m là

A. $m=0$. **B.** $m=\dfrac{17}{2}$. **C.** $m=10$. **D.** $m=8$.

Câu 3: Cho hàm số $y=x^3+3x+2m-1$ với m là tham số thực. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;3]$ bằng $\dfrac{11}{2}$. Khi đó giá trị của tham số m là

A. $m=\dfrac{1}{4}$. **B.** $m=\dfrac{13}{2}$. **C.** $m=\dfrac{21}{4}$. **D.** $m=\dfrac{17}{4}$.

Câu 4: Tìm m biết giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2x^3-3x^2+m$ trên đoạn $[0;5]$ bằng 5.

A. $m=6$. **B.** $m=10$. **C.** $m=7$. **D.** $m=5$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x+1}+m}{\sqrt{x+1}+1}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;8]$ nhỏ hơn 3. Số phần tử của S là

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x+1}+m}{\sqrt{x+1}+1}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;8]$ nhỏ hơn 3. Số phần tử của tập S là:

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 7: Cho hàm số $y=\dfrac{2x+m}{x+1}$. Biết $\min\limits_{[0;2]} y+3\max\limits_{[0;2]} y=10$. Chọn khẳng định đúng

A. $m\in(1;3)$. **B.** $m\in[3;5)$. **C.** $m\in(5;7)$. **D.** $m\in[7;9)$.

Câu 8: Tìm số thực dương m thỏa mãn giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-m}{mx+1}$ trên đoạn $[1;2]$ bằng $-\dfrac{1}{3}$

A. $m=1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=4$. **D.** $m=3$.

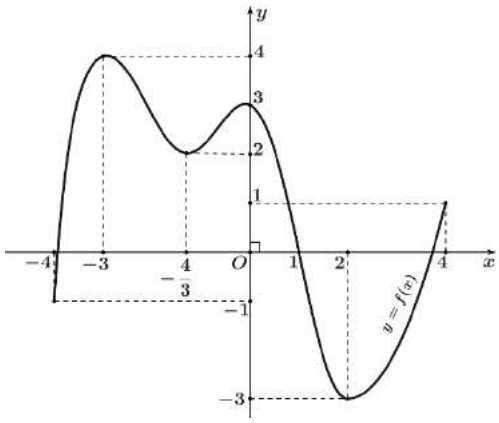
Câu 9: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-m^2}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[-3;-2]} y=\dfrac{1}{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m>4$. **B.** $3<m\le 4$. **C.** $m\le -2$. **D.** $-2<m\le 3$.

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x-m^2}{x+8}$ có giá trị nhỏ nhất trên $[0;3]$ bằng $-\dfrac{9}{2}$?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 11: Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[-4;4]$, có các điểm cực trị trên khoảng $(-4;4)$ là $-3;-\dfrac{4}{3};0;2$ và có đồ thị như hình vẽ.



Đặt $g(x)=f\left(x^3+3x\right)+m$ với m là tham số. Gọi m_1 là giá trị của m để $\max\limits_{x\in[0;1]} g(x)=2022$, m_2 là giá trị của m để $\min\limits_{x\in[-1;0]} g(x)=2004$. Giá trị của m_1-m_2 bằng

A. 12. **B.** 13. **C.** 11. **D.** 14.

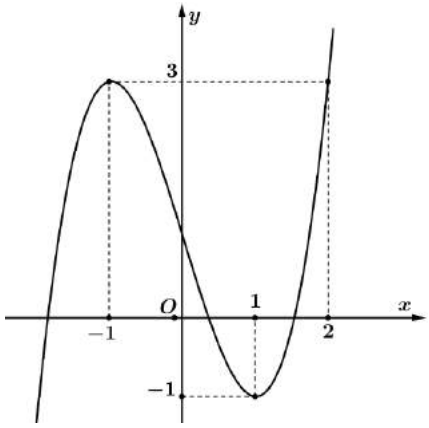
Câu 12: Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ với m là tham số thực, thoả mãn : $\min\limits_{[1;2]} y+\max\limits_{[1;2]} y=\dfrac{17}{6}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m\le 0$. **B.** $2<m\le 4$. **C.** $m>4$. **D.** $0<m\le 2$.

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{x-m}{x+1}$. Tìm m để $\max\limits_{x\in[1;2]} f(x)+\min\limits_{x\in[1;2]} f(x)=-8$.

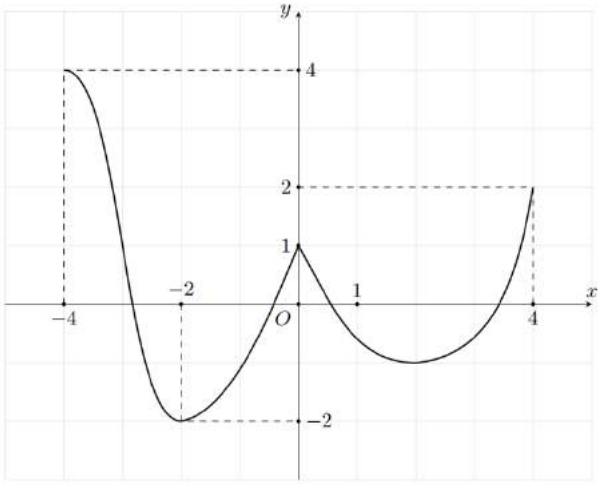
A. $m=5$. **B.** $m=11$. **C.** $m=-5$. **D.** $m=-11$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ là hàm đa thức bậc 3 và có đồ thị như hình vẽ. Xét hàm số $g(x)=f\left(2x^3+x-1\right)+m$. Với giá trị nào của m thì giá trị nhỏ nhất của g(x) trên đoạn $[0;1]$ bằng 2022.



A. 2023. **B.** 2000. **C.** 2021. **D.** 2022.

Câu 15: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên đoạn $[-4;4]$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Biết rằng hàm số $y=f(4\sin x)$ đạt giá trị nhỏ nhất là m và giá trị lớn nhất là M trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]$. Giá trị của $m+M$ là

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** -1.

Câu 16: Cho hàm số $y=\frac{mx-m^2-1}{x+2m}$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị của m để giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[1;3]$ bằng $\frac{1}{5}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 17: Hàm số $y=\frac{2x-m}{x+1}$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;1]$ bằng 1 khi

A. $m=1$. **B.** $m=0$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=2$.

Câu 18: Tìm tất cả giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\frac{2x+m-1}{x+1}$ trên đoạn $[1;2]$ bằng 1.

Câu 19: Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2020;2020]$ để biểu thức $y=4x^2\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x^2}+4mx^3-3mx+m^2$ có giá trị lớn nhất không nhỏ hơn 5.

Câu 20: Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{x-m}{x+2}$ trên $[0;2]$ bằng 8 (m là tham số thực). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m>10$. **B.** $-15<m\le -10$. **C.** $0<m\le 8$. **D.** $-9<m\le -2$.

Câu 21: Biết rằng các số thực a,b thay đổi sao cho hàm số $f(x)=-x^3+(x+a)^3+(x+b)^3$ luôn đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+b^2-4a-4b+2$.

A. -2. **B.** -4. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 22: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{2x-m}{x+1}\right|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 2. Tổng các phần tử của S bằng

A. 0. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)=m.\sqrt{x-1}$,. Gọi $m_1;m_2$ là hai giá trị của m thỏa mãn

$\min\limits_{[2;5]} f(x)+\max\limits_{[2;5]} f(x)=m^2-1$. Giá trị của m_1+m_2 bằng

A. 5. **B.** −3. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 24: Cho hàm số $y=\dfrac{3-m\sqrt{3}.\cos x}{\sin x+2}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2022;2022]$ để giá trị lớn nhất của hàm số lớn hơn 4 ?

A. 4042. **B.** 4044. **C.** 2021. **D.** 2022.

Câu 25: Trên đoạn $[1;3]$, hàm số $y=\dfrac{mx+3}{x-m+1}$ đạt giá trị lớn nhất bằng 5 khi $m=m_0$. Khi đó m_0 thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(5;+\infty)$. **D.** $\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right)$.

Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2-9x+m$ (m là tham số thực) thoả mãn $\min\limits_{x\in[-2;4]} y+2\max\limits_{x\in[-2;4]} y=1$. Giá trị của m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-4;1)$. **B.** $(-2;5)$. **C.** $(-10;-1)$. **D.** $(2;9)$.

Câu 27: Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2-9x+m$ thỏa mãn $\min\limits_{x\in[-2;4]} y+2\max\limits_{x\in[-2;4]} y=-32$. Giá trị của m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-4;1)$. **B.** $(-2;5)$. **C.** $(-10;-1)$. **D.** $(2;9)$.

Câu 28: Cho hàm số $y=\dfrac{mx-m^2-2}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\max\limits_{[-2;0]} y=\dfrac{-1}{3}$. Có bao nhiêu giá trị dương của m thỏa mãn điều kiện bài toán.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 29: Cho hàm số $y=\left|x^4-4x^3+4x^2+a\right|$. Có bao nhiêu số thực a để $\max\limits_{[2,3]} y+\min\limits_{[2,3]} y=11$

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 30: Biết rằng giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=mx+\dfrac{36}{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 20. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $2<m\le 4$. **B.** $4<m\le 8$. **C.** $0<m\le 2$. **D.** $m>8$.

Câu 31: Trên đoạn $[0;4]$, hàm số $y=\dfrac{1}{4}x^4-2x^2+2+m$ đạt giá trị lớn nhất bằng 5 tại $x=a$. Tính $m-a$

A. −25. **B.** 31. **C.** 25. **D.** −33.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x-2m}{x+1}$. Gọi S là tập hợp các giá trị m nguyên sao cho $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]}\left|f(7\sin x)\right|=0$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 10. **B.** 3. **C.** 15. **D.** 6.

Câu 33: Gọi S là tập tất cả giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left(x^3-3x+m\right)^2$

trên đoạn $[-1;1]$ bằng 4. Tính tổng các phần tử của S

A. 0. **B.** -5. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 34: Cho biết hàm số $y=f(x)=\left|x^2-4x-1+m\right|$ có giá trị lớn nhất bằng 3 khi $x\in[0;3]$. Số các giá trị của tham số m thỏa mãn là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 35: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\left|x-m^2\right|}{x+1}$ trên $[0;3]$ có giá trị lớn nhất bằng 5. Tích các giá trị của m bằng

A. -5. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 36: Tìm tổng các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3-x^2+6x+9-m\right|$ trên đoạn $[0;1]$ bằng 5.

A. 24. **B.** 10. **C.** 14. **D.** 5.

Câu 37: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{3}\left(m^2-2\right)x^3-m^2x^2+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ luôn bé hơn hoặc bằng 5?

A. 0. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 38: Cho hàm số $f(x)=\left|x^4-2x^2+m-1\right|$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;2]$ bằng 18. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -5. **B.** 4. **C.** -14. **D.** -10.

Câu 39: Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\left|x^2-4x+m-2\right|$ trên $[-2;3]$ bằng 6.

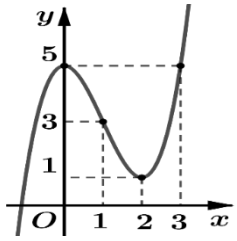
A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 40: Cho hàm số $f(x)=\left|x^6+x^3+m\right|-2x^3$. Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ bằng 1. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{5}{4}$. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 41: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=mx+\dfrac{36}{x+1}$ trên $[0;3]$ bằng 20.

Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|f\left(x^2+2x\right)+m\right|$ trên đoạn $[0;1]$ không lớn 4.

A. -9. **B.** 0. **C.** 25. **D.** -39.

Câu 43: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x+1$. Với giá trị nào của tham số m thì giá trị lớn nhất của hàm số $h(x)=|f(x)+m|$ trên đoạn $[0;2]$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $m=-2$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=1$.

Câu 44: Cho hàm số $f(x)=x^3+3x^2+m-1$. Số giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=|f(x)|$ trên đoạn $[0;2]$ nhỏ nhất là

A. 1. **B.** 12. **C.** 9. **D.** 11.

Câu 45: Cho hàm số $f(x)=x^2-2x$. Có bao nhiêu giá trị m để giá trị lớn nhất của hàm số $|f(1+\sin x)+m|$ bằng 3?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 46: Gọi S là tập các giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=|x^2-4x+m-1|$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;3]$ bằng 4. Tổng các phần tử của tập S bằng

A. 0. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 8.

Câu 47: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+m^2-5m$. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=|f(x)|$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 2.

A. 5. **B.** 10. **C.** -10. **D.** -5.

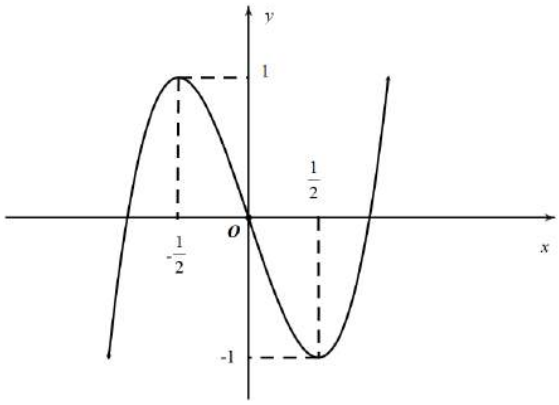
Câu 48: Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)=|2x^3-12x^2+9x+m+8|+9x$ (với m là tham số) trên đoạn $[0;5]$ bằng 78. Tính tổng các giá trị của tham số m?

A. 6. **B.** 12. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 49: Cho hàm số $y=\left|\dfrac{x^2-2mx+1}{x^2-x+2}\right|$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ để giá trị lớn nhất của hàm số lớn hơn hoặc bằng 4.

A. 14 **B.** 10 **C.** 20 **D.** 18

Câu 50: Cho hàm số $y=f(x)$ đồ thị như hình vẽ



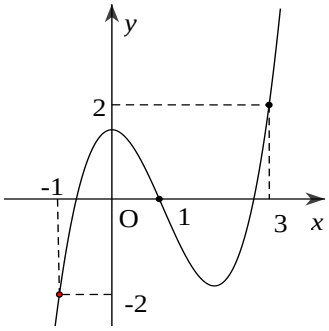
Đặt $g(x)=|f(x)|-\sqrt{1-2|x|}+f\left(\dfrac{\sqrt{1+2m}-\sqrt{1-2m}}{2\sqrt{2}}\right)$. Với giá trị nào của m thì giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ là 0.

A. Không tồn tại. **B.** 0. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{1}{2}$.

Câu 51: Cho hàm số $f(x)=x^4-2x^2$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|f(\cos x+1)+m\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng các phần tử của S bằng

A. 4. **B.** -7. **C.** $-\frac{7}{2}$. **D.** 6.

Câu 52: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;0]$ sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm $g(x)=\left|\left|2f(x)+m-4\right|+f(x)-3\right|$ trên đoạn $[-1;3]$ lớn hơn 1?

A. 9. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 6.

Câu 53: Tổng các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 5 là bao nhiêu?

A. 6. **B.** 0. **C.** 8. **D.** 10.

Dạng 4: GTLN và GTNN của hàm đa thức và ứng dụng PT, BPT

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=x^{20-m}-x^7+2$, với m là tham số nguyên dương. Hỏi có bao nhêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 10.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=x^{30-m}-x^6+1$, với m là tham số nguyên dương. Hỏi có bao nhêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$.

A. 6. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=\left(m^2-3m\right)x^{11}-mx^6+x^3-3$, với m là tham số. Hỏi có bao nhêu giá trị thực của tham số m để hàm số có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$.

A. 0. **B.** 2. **C.** Vô số. **D.** 1.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=\left(m^3-m\right)x^{13}-mx^6+x^4+1$, với m là tham số. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f\left(x\right)$ có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=x^4+x^3-\left(m-1\right)x^2+2mx+1$. Để hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=0$ thì giá trị của tham số m nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-3;-1\right)$. **B.** $\left(1;3\right)$. **C.** $\left(3;4\right)$. **D.** $\left(-1;1\right)$.

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-21;21]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 2mx^3 + 4mx^2 - (2m+2)x - 2021$ đạt tại $x_0 = 2$. Số phần tử của tập S là

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 12.

Câu 2: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x) = -x^4 - 2m.x^3 + 3m.x^2 - 2mx - 2021$ đạt giá trị lớn nhất tại $x_0 = 1$. Số phần tử của tập S là:

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 0

Câu 3: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-21;21]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^6 + (m-2)x^5 + (m^2-11)x^4 + 2021$ đạt tại $x_0 = 0$. Số phần tử của tập S là:

A. 34 **B.** 42 **C.** 35 **D.** 37

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = (x-1)(x-2)(x^2 - ax + b) + 2021$. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2021. Giá trị của biểu thức $S = 4a + b$ tương ứng bằng:

A. 5 **B.** 0 **C.** 10 **D.** 14

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = x^6 + ax^2 + bx + 2a + b,$ với a,b là hai số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 1$. Giá trị nhỏ nhất có thể của $f(3)$ bằng bao nhiêu?

A. 128. **B.** 243. **C.** 81. **D.** 696.

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = x^4 + x^3 + ax^2 + bx + b - 1$. Biết rằng hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 1$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $a \in [-20;20]$ thỏa mãn bài toán?

A. 30. **B.** 23. **C.** 22. **D.** 24.

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = (m+n-2)x^7 + x^4 + (m+2n-1)x^3 + x^2 + (2n-1)x + 2.$ Với m và n là hai tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 2$. Giá trị của biểu thức $T = 16m + 2n$ bằng:

A. 22. **B.** 38. **C.** 46. **D.** 79.

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = x^4 + ax^3 + 2bx^2 + 2cx + 2b$ với a,b,c là những tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_1 = 1$ và $x_2 = 2$. Giá trị của biểu thức $T = a + 2b$ bằng:

A. 7. **B.** 8. **C.** 3. **D.** 9.

Câu 9: Cho hàm số $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$ với a,b,c là những tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_1 = 0$ và $x_2 = 1$. Giá trị của biểu thức $T = a + 2b + c$ bằng:

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -3.

Câu 10: Cho hàm số $f(x) = x^6 - ax^5 + 2bx^4 + 1$ với a,b là hai tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_1 = 0$ và $x_2 = 1$. Giá trị của biểu thức $T = 3a + 4b$ bằng:

A. 7. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 0.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx-1$, với a, b, c là những tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng. Giá trị của biểu thức $T=a+3b+c$ bằng:

A. 3. **B.** 5. **C.** -6. **D.** -1.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)=x^8+ax^5+bx^4+cx+2021$, với a, b là những tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=a+b$ bằng:

A. -1. **B.** 1. **C.** -2. **D.** 3.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)=x^6+ax^5+bx^4+1$, với a, b là những tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=2a-b$ bằng:

A. 4. **B.** 8. **C.** 16. **D.** -2.

Câu 14: Cho hàm số $f\left(x\right)=x^4-4x^3+\left(m+1\right)x^2-mx+1$ với m là tham số thực. Biết rằng $\alpha=\min f\left(x\right)$Giá trị lớn nhất của α bằng:

A. 1. **B.** -1. **C.** -2. **D.** 0.

Câu 15: Cho hàm số $f\left(x\right)=x^4-4x^3+\left(m+1\right)x^2-mx+1$ với m là tham số thực. Biết rằng $\alpha=\min f\left(x\right)$. Khi α đạt giá trị lớn nhất thì $x=x_o;m=m_o$. Giá trị của biểu thức $\left(x_o+m_o\right)$ bằng:

A. 0. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** -1. **D.** $-\frac{3}{4}$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)=-x^4+2x^3+mx^2-\left(m+2\right)x$, với m là tham số thực. Biết rằng $\beta=\max f\left(x\right)$. Khi β đạt giá trị nhỏ nhất bằng:

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -1.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)=x^6-6a^5x-5b$, với a và b là hai số thực không âm. Biết rằng hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng -5. Giá trị lớn nhất của biểu thức ab tương ứng bằng:

A. 1. **B.** $\frac{6}{7}$. **C.** $\frac{2}{7\sqrt{6}}$. **D.** $\frac{6}{7\sqrt[6]{7}}$.

Câu 18: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2+4y^2=4$. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x^2+2xy+1}{2y^2+2}$ lần lượt là M và m. Giá trị của biểu thức $T=4M-4m$ bằng:

A. $\sqrt{113}$. **B.** 36. **C.** 12. **D.** 64.

Câu 19: Biết rằng để giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=x^3-mx+1$ trên đoạn $\left[1;2\right]$ bằng 4 thì giá trị thực của tham số $m=\frac{a}{b}$, trong đó a,b là những số nguyên dương và phân số $m=\frac{a}{b}$ tối giản. Giá trị của biểu thức $T=a+b$ bằng:

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 5

Câu 20: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m\in\left[-50;50\right]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=x^4-mx$ trên đoạn $\left[-1;3\right]$ nhỏ hơn hoặc bằng 60?

A. 53. **B.** 44. **C.** 58. **D.** 8

Câu 21: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m \in [-50;50]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - mx$ trên đoạn $[1;3]$ lớn hơn hoặc bằng 40?

A. 52. **B.** 51. **C.** 49. **D.** 50

Câu 22: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 + mx^2$ trên đoạn $[1;2]$ nằm trong $(6;20)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 23: Để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - mx^2$ trên đoạn $[1;2]$ bằng 1 thì giá trị thực của tham số m bằng:

A. -1. **B.** 1. **C.** -2. **D.** 0.

Câu 24: Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30;30]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x} - mx}{x+1}$ trên đoạn $[1;4]$ lớn hơn hoặc bằng 2.

A. 3. **B.** 27. **C.** 28. **D.** 33.

Câu 25: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-30;30]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 + mx + 1}{x+1}$ trên đoạn $[1;2]$ nhỏ hơn hoặc bằng 3?

A. 35. **B.** 26. **C.** 11. **D.** 31

Câu 26: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-44;44)$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 + mx - 1$ trên $[0;3]$ nằm trong $[-2;0]$. Số phần tử của tập S là:

A. 41. **B.** 45. **C.** 72. **D.** 5

Câu 27: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 + 2mx}{x^2 + x + 1}$ bằng $-\dfrac{1}{2}$. Tổng bình phương tất cả các phần tử của tập S bằng:

A. $\dfrac{13}{8}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{11}{4}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$

Câu 28: Gọi S là tập chứ tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-30;30]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 + m}{x^2 + 2x + 2}$ lớn hơn $-\dfrac{1}{3}$. Số phần tử của tập S bằng:

A. 31. **B.** 32. **C.** 11. **D.** 2

Câu 29: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - 2mx + 4}{x^2 + 2x + 3}$ nhỏ hơn $\dfrac{1}{4}$. Số phần tử của tập S bằng :

A. 2. **B.** 3. **C.** 59. **D.** 58

Câu 30: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - mx + 3}{x^2 + 2x + 2}$ bằng 2. Tổng bình phương các phần tử của tập S bằng :

A. 32. **B.** 36. **C.** 40. **D.** 48

Câu 31: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-mx+2}{x^2+x+1}$ nhỏ hơn 4. Số phần tử của tập S bằng

A. 2. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 9.

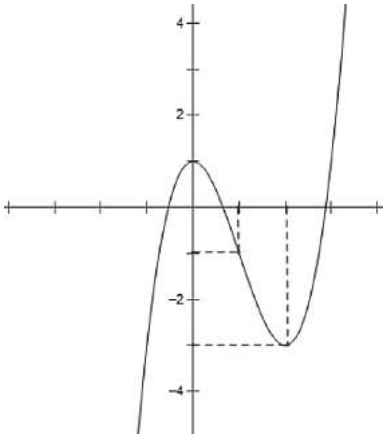
Câu 32: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2-mx+3}{x^2-2x+2}$ lớn hơn 6. Số phần tử của tập S bằng

A. 17. **B.** 16. **C.** 43. **D.** 35.

Câu 33: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho $\left|2x^3-3x^2+m\right|\le 16, \forall x\in[0;3]$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -65. **B.** -74. **C.** -42. **D.** 87.

Câu 34: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Bất phương trình $f(x)-\dfrac{1}{3}x^3+x^2+3x-m>0$ nghiệm đúng với mọi $x\in(0;2)$ khi và chỉ khi

A. $m<f(0)$. **B.** $m<f(2)+\dfrac{22}{3}$. **C.** $m\le f(0)$. **D.** $m\le f(2)+\dfrac{22}{3}$.

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Biết rằng $f(0)=f(3)=2, f(1)=4$, hãy tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho bất phương trình $f(x)+x^2-m>0$ nghiệm đúng với mọi $x\in(0;3)$.

A. $m<2$. **B.** $m\le 13$. **C.** $m<13$. **D.** $m\le 2$.

Câu 36: Cho x, y là các số thực dương thoả mãn $\log_5 x+\log_5 y\ge\log_5\left(x^2+y\right)$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2x+y$ là $a\sqrt{b}+c$, trong đó a, b, c là các số tự nhiên và $a>1$. Giá trị của tổng $a+b+c$ bằng

A. 9. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 8.

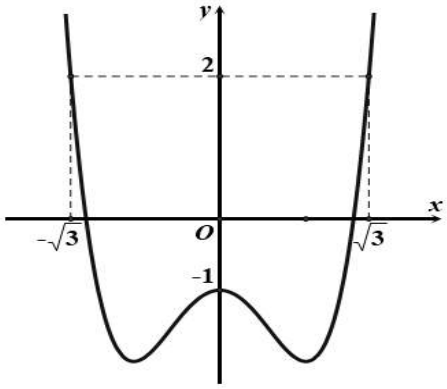
Câu 37: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Bất phương trình $f(x) < e^x + m$ (m là tham số) nghiệm đúng với mọi $x \in (-3;1)$ khi và chỉ khi

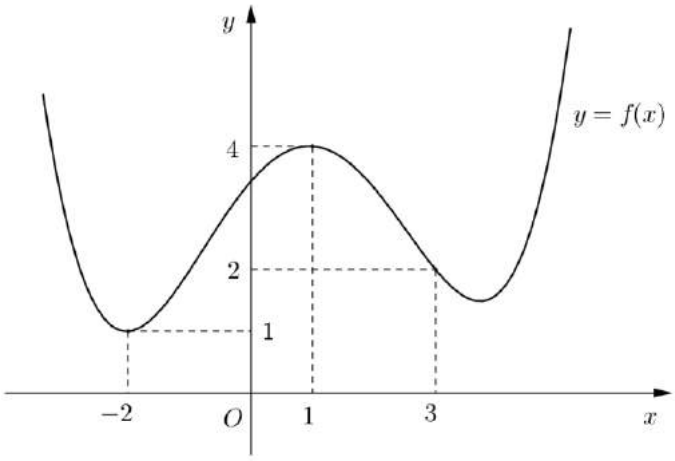
A. $m > f(1) - e$. **B.** $m \geq f(1) - e$. **C.** $m \geq f(-3) - \frac{1}{e^3}$. **D.** $m > -3 - \frac{1}{e^3}$.

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $3f(x) \geq x^3 - 3x + m$ đúng với mọi $x \in \left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$ là



A. $m \geq 3f(1)$. **B.** $m \geq 3f\left(-\sqrt{3}\right)$. **C.** $m \leq 3f(0)$. **D.** $m \leq 3f\left(\sqrt{3}\right)$.

Câu 39: Cho Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



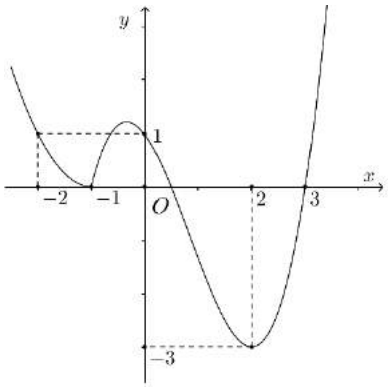
Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m không vượt quá 2022 để bất phương trình $\frac{m}{f(x)} - \sqrt{mf(x)} - 1 \geq \frac{3}{4} f^2(x)$ đúng với mọi $x \in [-2;3]$?

A. 1875. **B.** 1872. **C.** 1874. **D.** 1873.

Câu 40: Cho hàm số $y = g(x)$ thỏa mãn $2g^3(x) - 6g^2(x) + 7g(x) = 3 - (2x-3)\sqrt{1-x}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2g(x) + x$

A. 6. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 41: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên.



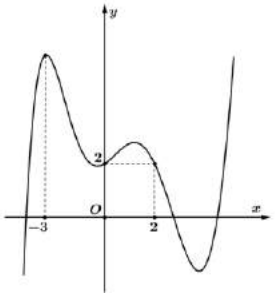
Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-20;20]$ để bất phương trình $2f(x)+x^3>m+3x^2$ nghiệm đúng với mọi $x\in(-1;3)$?

A. 9. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 12.

Dạng 5: GTLN và GTNN của hàm hợp

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(2x)-4x$ trên đoạn $\left[-\frac{3}{2};2\right]$ bằng



A. $f(0)$. **B.** $f(-3)+6$. **C.** $f(2)-4$. **D.** $f(4)-8$.

Lời giải

.....

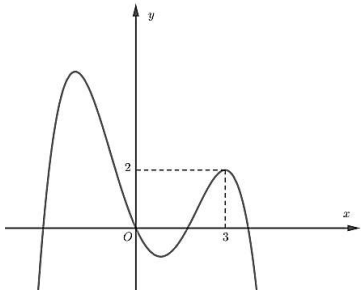
.....

.....

.....

.....

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx$, $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$, biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ.



Gọi S là tập hợp các giá trị của x sao cho hàm số $g(x)=\dfrac{2f(x)-2}{f^2(x)-2f(x)+2}$ đạt giá trị lớn nhất hoặc đạt giá trị nhỏ nhất. Số phần tử của tập S là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Cho các số thực x, y thỏa mãn $x-3\sqrt{x+1}=3\sqrt{y+2}-y$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y$ là

A. $\min P=\dfrac{9+3\sqrt{21}}{2}$. **B.** $\min P=9+3\sqrt{15}$. **C.** $\min P=-63$. **D.** $\min P=-91$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{2x^2+2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x)$. Có bao nhiêu cặp số (a,b) với $a,b\in\mathbb{Z}$ sao cho $M^2+m^2\le 5$?

A. 51. **B.** 89. **C.** 198. **D.** 102.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn biểu thức $\left[f(x)-x\right].f(x)=x^6+3x^4+2x^2, \forall x\in\mathbb{R}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;2]$. Giá trị của $3M-m$ bằng

A. 33. **B.** -3. **C.** 4. **D.** -28.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

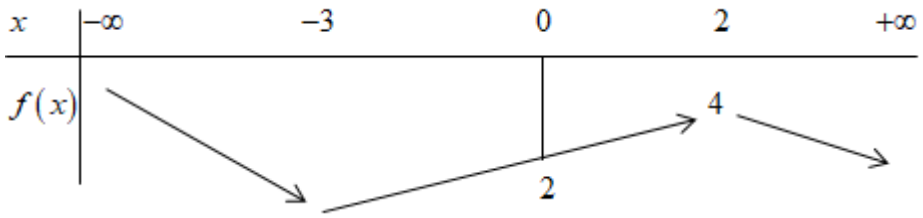
.....

.....

.....

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ và $f''(x)<0,\forall x\in(0;+\infty)$.



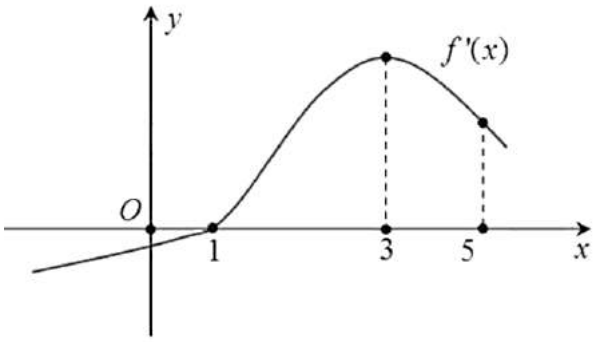
Biết a,x thay đổi trên đoạn $[0;2]$ và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$S=\dfrac{\left[\left(f'(x)\right)^2+1\right]\left[2f'(0)+(a-x)f'(a)+6\right]}{\left[f\left(2-\sqrt{4-2x}\right)+f(x)\right]^2\left[f\left(2-\sqrt{4-2x}\right)+f(a)\right]}$ bằng $\dfrac{m}{n}$ (phân số tối giản, $m,n\in\mathbb{Z}_+$).

Tổng $m+n$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(20;25)$. **B.** $(95;145)$. **C.** $(45;75)$. **D.** $(75;95)$.

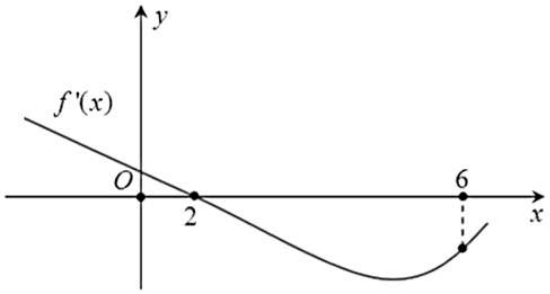
Câu 2: Cho đồ thị hàm số $f(x)=f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $f(0)-f(3)=f(5)-f(1)$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trênđoạn $[0;5]$. Đáp án đúng là



A. $M=f(5);m=f(1)$. **B.** $M=f(0);m=f(1)$.

C. $M=f(3);m=f(0)$. **D.** $M=f(1);m=f(5)$.

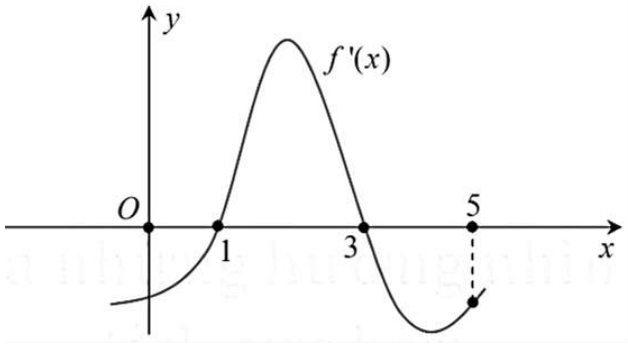
Câu 3: Cho đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $2f(6)=f(0)+f(2)$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;6]$. Đáp án đúng là



A. $M=f(6);m=f(0)$. **B.** $M=f(2);m=f(6)$.

C. $M=f(2);m=f(0)$. **D.** $M=f(6);m=f(0)$.

Câu 4: Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $f(0)+f(2)=f(1)+f(3)$ và $f(0)+f(1)=f(3)+f(5)$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$. Đáp án đúng là



A. $M = f(3); m = f(1)$.
B. $M = f(0); m = f(1)$.
C. $M = f(0); m = f(5)$.
D. $M = f(3); m = f(5)$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ tương ứng là m. Khi đó giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = 3f(x) + x^2 - 2x$ thỏa mãn điều kiện nào dưới đây?

A. $\min g(x) \ge 3m$.
B. $\min g(x) = 3m - 2$.
C. $\min g(x) \le 3m - 2$.
D. $\min g(x) \ge 3m - 1$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ tương ứng là 3 và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = 4f(x) + x^2 - 4x$ tương ứng bằng 8. Kết luận nào dưới đây luôn đúng?

A. $f(2) = 3$.
B. $f(2) > 3$.
C. $f(3) < 3$.
D. $f(3) \ge 4$.

Câu 7: Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, có giá trị lớn nhất lần lượt là 3 và 6. Khi đó giá trị lớn nhất của hàm số $y = 3f(x) + 2g(x)$ luôn thỏa mãn điều kiện nào dưới đây?

A. $\max\left(3f(x) + 2g(x)\right) \le 21$.
B. $\max\left(3f(x) + 2g(x)\right) \ge 24$.
C. $\max\left(3f(x) + 2g(x)\right) \le 30$.
D. $\max\left(3f(x) + 2g(x)\right) \ge 21$.

Câu 8: Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, có giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ là 6 và giá trị nhỏ nhất $y = g(x)$ là 3. Khi đó giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2f(x) - 3g(x) + 2$ luôn thỏa mãn điều kiện nào dưới đây?

A. $\max\left(2f(x) - 3g(x) + 2\right) \ge 5$.
B. $\max\left(2f(x) - 3g(x) + 2\right) \le 3$.
C. $\max\left(2f(x) - 3g(x) + 2\right) \le 5$.
D. $\max\left(2f(x) - 3g(x) + 2\right) \ge 2$.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có giá trị lớn nhất là 2. Biết hàm số $y = 2f(x) - x^2 + 6x$ có giá trị lớn nhất bằng 8. Chọn đáp án đúng trong các đáp án sau?

A. $f(0) \le 4$.
B. $f(3) \le -1$.
C. $f(2) \ge 0$.
D. $f(2) \le -2$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 2ax + 6a - 3$ có giá trị nhỏ nhất bằng m. Nhận xét nào trong các đáp án dưới đây luôn đúng?

A. $m \ge -3$.
B. $m < -3$.
C. $m \le 78$.
D. $m \le 3$.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có giá trị lớn nhất và nhỏ bằng M và m. Biết rằng $f(a)+2f(b)=18$, trong đó a và b là hai số thực dương. Nhận xét nào trong các đáp án dưới đây là **luôn đúng?**

A. $m\le 3$. **B.** $M\ge 9$. **C.** $m\le 5$. **D.** $M\ge 6$.

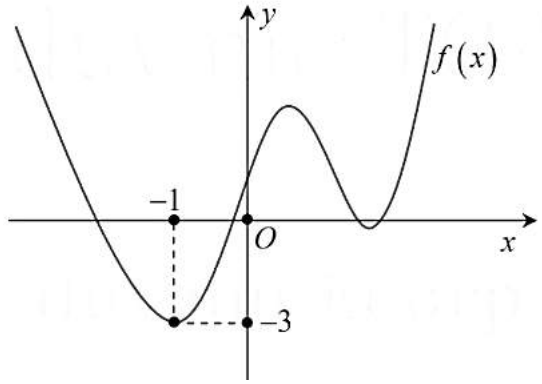
Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất lần lượt là M và m. Biết rằng $f(a)+2f(b)=12$, trong đó a và b là hai số thực dương. Khi đó giá trị biểu thức $(M-2)(m-5)$ có thể bằng

A. -1. **B.** -3. **C.** 0. **D.** 10.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)=x^4-2ax+4a-7$, có giá trị nhỏ nhất là m. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương mà m có thể nhận?

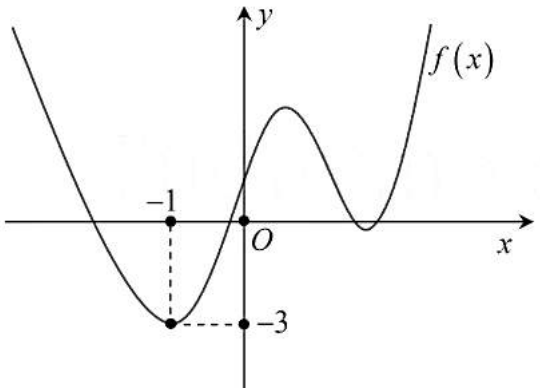
A. 11. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

Câu 14: Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Biết rằng m là tham số thực, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)+x^2-2mx+m^2+1$ tương ứng bằng:



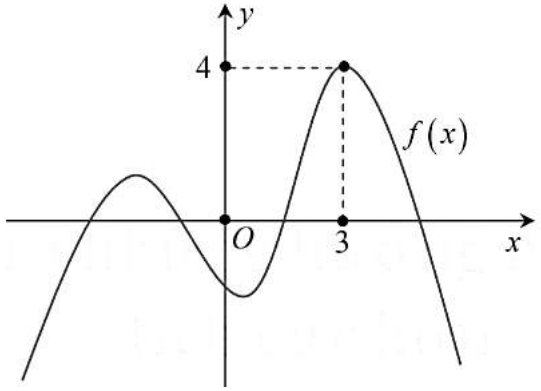
A. 1. **B.** 3. **C.** -1. **D.** -2.

Câu 15: Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Biết rằng m là tham số thực, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(2x+3)+x^2-4mx+4m^2-1$ bằng -4 thì tham số m bằng:



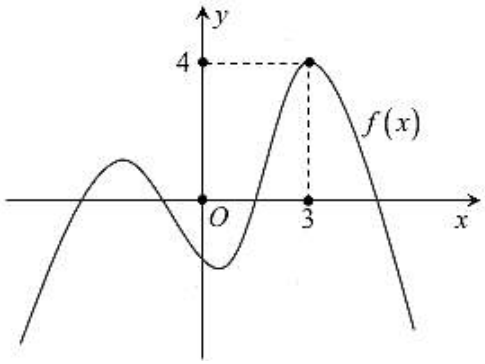
A. -1. **B.** 0. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** 2.

Câu 16: Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Biết rằng m là tham số thực. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(3x-m)+2f\left(x^2-2x\right)$ đạt giá trị lớn nhất. Tổng các giá trị của tất cả các phần tử thuộc tập S bằng:



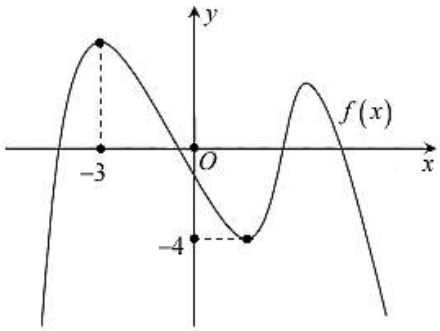
A. 6. **B.** 3. **C.** 0. **D.** −2.

Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Biết rằng m, n là hai số thực. Để hàm số $3f(3x-m)+f(x+n)-x^2+4x$ đạt giá trị lớn nhất thì $(2m-n)$ bằng



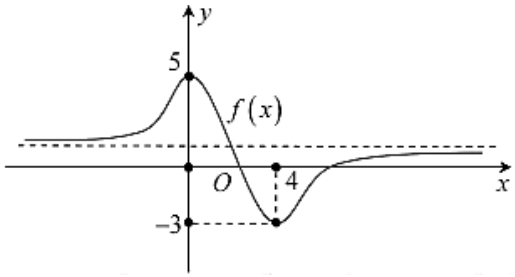
A. 3. **B.** 0. **C.** 5. **D.** 1.

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x)=x^2-2m^2x+m^4-f(f(x))$ đạt giá trị nhỏ nhất?



A. 6. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 8.

Câu 19: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Biết rằng m, n là hai số thực. Để hàm số $2f(2x-m)-f(3x+n)+x^2-2x$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $T=2m+3n$ bằng



A. −11. **B.** −7. **C.** −13. **D.** 5.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)=x^2-2mx$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $(-1;3)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)=-x^2+2(2m-1)x$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $(-3;11]$?

A. 6. **B.** 31. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 22: Cho hàm số $y=x^3-3mx$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị nhỏ nhất nhất trên $(1;3)$?

A. 8. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 11.

Câu 23: Cho hàm số $y=x^3-3mx^2$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $(-2;3)$?

A. 30. **B.** 18. **C.** 32. **D.** 1.

Dạng 2: Cực trị hàm bậc ba

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2+4x-5\right|$ trên đoạn $[-3;0]$. Khi đó tổng $M+m$ là

A. 5. **B.** 9. **C.** 14. **D.** 8.

Lời giải

.....

Câu 2: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x^2-7\right|$ trên đoạn $[0;4]$ là

A. 0. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải

.....

Câu 3: Cho hàm số $y=\left|x^4-16x^2-7\right|$, gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;4]$. Tính giá trị biểu thức $M-2m$.

A. 14. **B.** 57. **C.** 64. **D.** 60.

Lời giải

.....

Câu 4: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\left|\dfrac{2x-1}{x+2}\right|$ trên đoạn $[-1;1]$. Giá trị của biểu thức $2M-3m$ là

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** 0. **D.** 6.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}\right|$ trên đoạn $\left[-2;\dfrac{1}{2}\right]$. Giá trị của biểu thức $3M+m$ bằng

A. $\dfrac{27}{2}$. **B.** 10. **C.** $-\dfrac{40}{3}$. **D.** 16.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 6: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|e^{3x}-4e^{2x}+4e^{x}-10\right|$ trên đoạn $[0;\ln 4]$

A. 9. **B.** 6. **C.** 10. **D.** 5.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

……

……

……

……

Câu 7: Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\left|\ln^2 x-2\ln x-3\right|$ trên đoạn $\left[1;e^2\right]$. Giá trị $M+m$ bằng

A. 4. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

……

……

……

……

……

……

……

……

Câu 8: Giả sử M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|\cos 2x+2\sin x-3\right|$ trên $\left[0;\dfrac{3\pi}{2}\right]$. Tính $M-4m$.

A. 6. **B.** 0. **C.** -2. **D.** 3.

Lời giải

……

……

……

……

……

……

……

……

Câu 9: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2-1+\sqrt{3-x^2}\right|$. Khi đó $M+m=\dfrac{a}{4}+b\sqrt{c}$, với a, b, c nguyên. Tính $T=a+bc$.

A. 7. **B.** 9. **C.** 12. **D.** 8.

Lời giải

……

Câu 10: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=|x-1|+x^2-5x+3$ trên đoạn $[-2;4]$. Tính giá trị biểu thức $T=M+m$.

A. $T=18$. **B.** $T=19$. **C.** $T=20$. **D.** $T=2$.

Lời giải

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tích giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2-4x+3\right|+x^2-1$ trên $[-4;2]$ bằng

A. -200. **B.** 200. **C.** 50. **D.** 0.

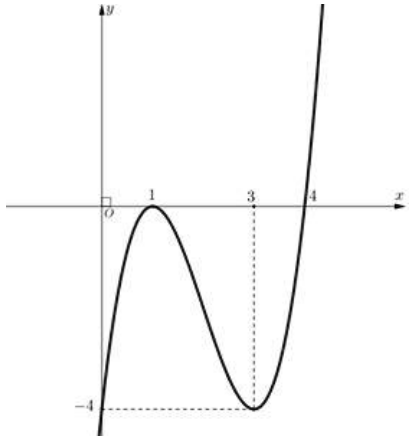
Câu 2: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2-3x+2\right|+\left|x+3\right|$ là 2^a. Tìm a.

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 3: Cho hàm số $y=\left|\left|3x-1\right|-1\right|+\left|x^2-2\right|$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[0;\frac{3}{2}\right]$. Giả sử $\frac{M}{m}=\frac{a}{b}$ ($\frac{a}{b}$ là phân số tối giản), biểu thức $T=a+b$ có giá trị bằng

A. 37. **B.** 40. **C.** 13. **D.** 20.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị (C) như hình vẽ sau



Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|f(x)\right|$ trên đoạn $[0;4]$. Khi đó biểu thức $M+2m$ có giá trị

A. 4. **B.** 1. **C.** 8. **D.** 0.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|f\left(\left|x\right|+1\right)-1\right|$ trên đoạn $[-2;2]$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 6: Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\left|x^2-2x+m\right|$ trên $[-1;2]$ bằng 5.

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 7: Tính tích tất cả các số thực m để hàm số $y=\left|\frac{4}{3}x^3-6x^2+8x+m\right|$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng 18 là.

A. 432. **B.** -216. **C.** -432. **D.** 288.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)=\left|x^4-2x^2+m-1\right|$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;2]$ bằng 18. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -5. **B.** 4. **C.** -14. **D.** -10.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)=\frac{2x-m}{1-x}$. Gọi S là tập hợp tất các giá trị của m để $\min\limits_{[-2;0]}\left|f(x)\right|=2$.Tổng các phần tử của tập S là

A. 2. **B.** -8. **C.** -5. **D.** 3.

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)=\frac{x^2}{x-1}+m$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp các giá trị của m sao cho $\min\limits_{[2;3]}\left|f(x)\right|=5$. Số phần tử của S là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=\left|f(x)+m\right|$ trên đoạn $[0;4]$ bằng 9.

A. -10. **B.** -6. **C.** 4. **D.** 8.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|f(\sin x+1)+m\right|$ bằng 4. Tổng các phần tử của S bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 6.

Câu 13: Biết đồ thị hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đúng ba điểm chung với trục hoành và $f(1)=-1; f'(1)=0$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $\left|f(x)-m\right|\le 12$ nghiệm đúng $\forall x\in[0;2]$. Số phần tử của S là

A. 10. **B.** 16. **C.** 11. **D.** 0.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)=\frac{x+2020}{x-m}$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m sao cho $\max\limits_{[0;2019]}\left|f(x)\right|=2020$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

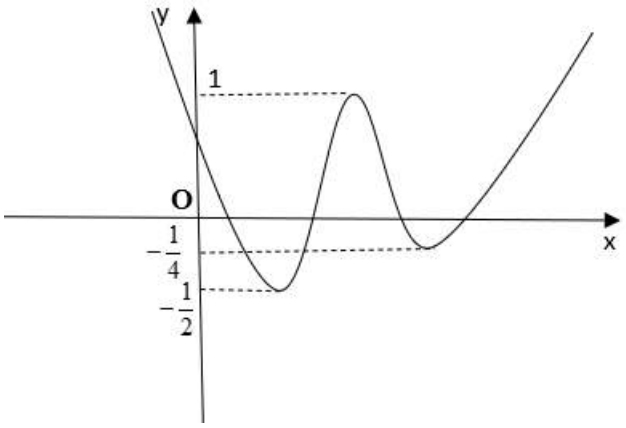
Câu 15: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|\frac{x^2+2mx+4m}{x+2}\right|$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 3. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 1. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{3}{2}$.

Câu 16: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x^2-7\right|$ trên đoạn $[0;4]$ là

A. 7. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 0.

Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau:



Cho $a=\left|f(x)-\left|f(x)\right|\right|$, $b=-a^2+a+\frac{3}{4}$ và $S=\frac{3}{8}\sqrt[3]{(b+1)^2\left[1+b^2.(2-b)^2\right]}-\frac{2}{1+b.\sqrt{2-b}}$.

Có giá trị lớn nhất của S bằng $\frac{m}{n}$ và $k=\frac{(m+n)^2}{|mn|}$. Khẳng định đúng là

A. $k=1$. **B.** $\frac{49}{6}$ **C.** $\frac{25}{4}$. **D.** $\frac{9}{4}$.

Câu 18: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|x^3-3x+m\right|$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 16. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -16. **B.** 16. **C.** -12. **D.** -2.

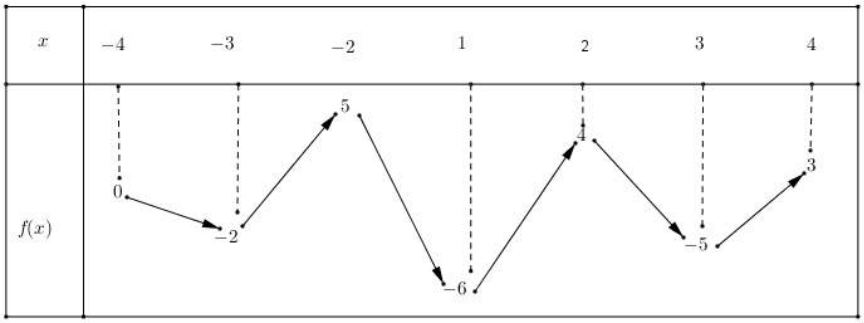
Câu 19: Cho hàm số $f(x)=(x-1)^2\left(x+m^2\right)-\frac{3}{2}m$ (m là số thực). Gọi tổng các giá trị của m sao cho $\max\limits_{[1;2]}\left|f(x)\right|+\min\limits_{[1;2]}\left|f(x)\right|=\frac{9}{4}$ là $S=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$ (với $a,b\in\mathbb{N}$). Giá trị $\frac{b}{a}$ bằng

A. $\frac{5}{18}$. **B.** $\frac{9}{5}$. **C.** $\frac{36}{5}$. **D.** $\frac{18}{5}$.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)=\left|\frac{x+m}{x+1}\right|$. Số giá trị của m thỏa mãn $\min\limits_{[1;2]}f(x)+\max\limits_{[1;2]}f(x)=\frac{16}{3}$ là

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 21: Cho hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-4;4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.



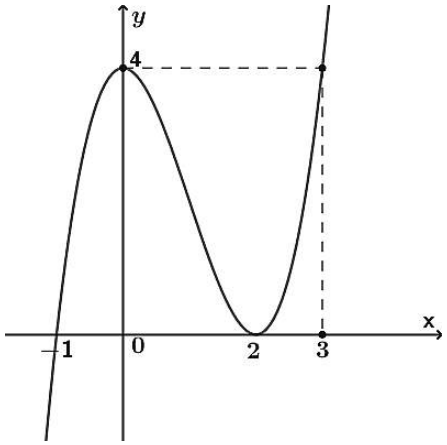
Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m thuộc đoạn $[-4;4]$ để hàm số $g(x)=\left|f\left(x^3+2x\right)+3f(m)\right|$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng 8?

A. 12. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 10.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)=8x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ thỏa mãn $|f(x)|\le 1,\forall x\in[-1;1]$. Tính $S=a^2+b^2+c^2+d^2$?

A. 60. **B.** 75. **C.** 70. **D.** 65.

Câu 23: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ và hàm số $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}+|4x-2|+|6-4x|}{|2x-1|+|2x-3|}$. Đặt $h(x)=f(g(x))-f\left(3-2x+x^2\right)+f\left(2-\sqrt{4-m^2}\right)$. Gọi M là giá trị lớn nhất của $h(x)$. Giá trị lớn nhất của M thuộc khoảng nào sau đây:



A. $(0;2)$. **B.** $(2;4)$. **C.** $(4;5)$. **D.** $(5;10)$.

Câu 24: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x^4-mx-4}{x+2}$, với m là tham số. Tìm tham số m để $\min\limits_{[-1;1]}|f(x)|>\dfrac{3}{4}$?

A. $m>\dfrac{1}{4}$. **B.** $m<\dfrac{1}{5}$. **C.** $m\in\mathbb{R}$. **D.** $\dfrac{1}{4}<m<\dfrac{5}{4}$.

Câu 25: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x$ và $g(x)=|f(2-\cos x)+m|$ (m là tham số thực) gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $3\max\limits_{\mathbb{R}}g(x)+\min\limits_{\mathbb{R}}g(x)=100$. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. -16. **B.** 12. **C.** -32. **D.** -28.

Câu 26: Cho hàm số $y=\left|\dfrac{1}{3}x^3-(m+2)x^2+\left(3-3m^2\right)x+1\right|$. Tìm $m\in\left(-\dfrac{2}{3};0\right)$ để giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;1]$ bằng 4.

A. $m=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$. **B.** $m=\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$. **C.** $m=\dfrac{1-\sqrt{2}}{4}$. **D.** $m=\dfrac{1-\sqrt{5}}{6}$.

Câu 27: Tìm số giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-6mx^2+12mx+m\right|$ trên đoạn $[1;2]$ bằng 18.

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 28: Có bao nhiêu số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=|x^2-2x+m|+4x$ bằng -1.

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

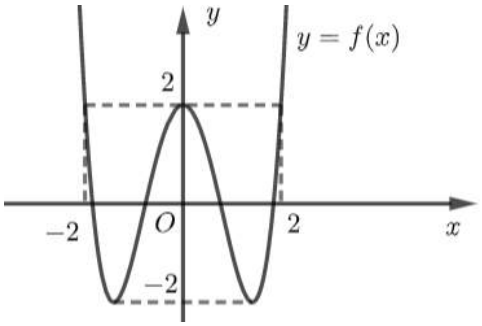
Câu 29: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|x^3-12x+m\right|$ trên $[1;3]$ không vượt quá 20.

A. 33. **B.** 34. **C.** 35. **D.** 36.

Câu 30: Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|x^2+ax+b\right|$ trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của biểu thức $a+2b$ khi M nhỏ nhất là

A. 3. **B.** -4. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 31: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0;20]$ sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=\left|\left|2f(x)+m+4\right|-f(x)-3\right|$ trên đoạn $[-2;2]$ không bé hơn 1?



A. 18. **B.** 19. **C.** 20. **D.** 21.

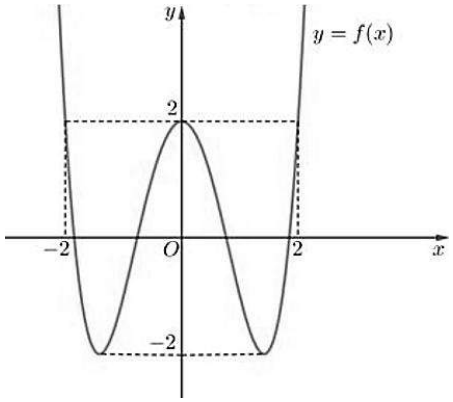
Câu 32: Tìm tất cả các giá trị của a để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=4ax+\left|x^2-4x+3\right|$ lớn hơn 2?

A. $a>\frac{1}{2}$ **B.** $a<-1$ **C.** $\frac{1}{2}<a<\frac{3}{2}$ **D.** $a<0$

Câu 33: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f(x)=\left|\frac{2mx-2\sqrt{4x+8}}{x+2}\right|$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ là a thỏa mãn $0<a<1$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2.

Câu 34: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[1;20]$ sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=\left|2f(x)+m+4\right|+\left|f(x)+3m-2\right|$ trên đoạn $[-2;2]$ không bé hơn 2. Tổng tất cả các phần tử của S bằng:



A. 207. **B.** 209. **C.** 210. **D.** 212.

Câu 35: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2-5x+4\right|+mx$ lớn hơn 1. Số phần tử của S là:

A. 7. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 3.

Câu 36: Đặt $M=max\left|\sqrt{4x-x^2}-mx\right|$. Giá trị nhỏ nhất của M là

A. 1. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** 2.

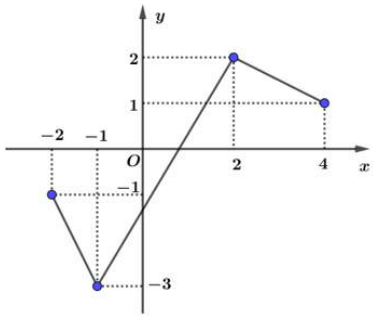
Câu 37: Cho hàm số $f(x)=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn. $[-1;3]$. Giá trị nhỏ nhất của M bằng

A. $\frac{57}{2}$. **B.** $\frac{59}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** 16.

Câu 38: Cho biết hàm số $y=f(x)=\left|x^2-4x-1+m\right|$ có giá trị lớn nhất bằng 3 khi $x\in[0;3]$. Số các giá trị của tham số m thỏa mãn là

A. $x=2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=3$. **D.** $x=4$.

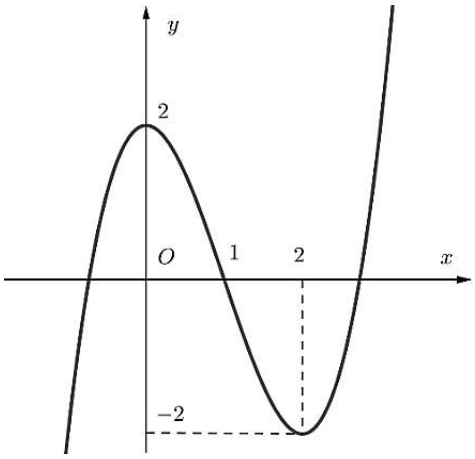
Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-2;4]$ như hình vẽ.



Giá trị của $\max\limits_{[-2;4]}\left|f(x)\right|$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 40: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|\frac{3}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)\right|$ trên đoạn $[2;4]$. Khi đó $M+m$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 41: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x+1$. Với giá trị nào của tham số m thì giá trị lớn nhất của hàm số $h(x)=|f(x)+m|$ trên đoạn $[0;2]$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $m=-2$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=1$.

Câu 42: Cho hàm số $f(x)=-x^3+3x$ và $g(x)=|f(2+\sin x)+m|$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để $\max\limits_{\mathbb{R}} g(x)+\min\limits_{\mathbb{R}} g(x)=50$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 43: Cho hàm số $f(x)=|4x^4-ax^2+b|$, trong đó a,b là tham số thực. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng $\frac{1}{2}$. Tính $a+b$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 4. **C.** $\frac{7}{2}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Câu 44: Tính tổng tất cả các giá trị nguyên lớn hơn 6 của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=|x^2-(m+1)x+m|$ trên $[2;m-1]$ nhỏ hơn 2020.

A. 2043210. **B.** 2034201. **C.** 3421020 **D.** 3412020.

Câu 45: Cho hàm số $y=\left|x^3-\frac{9}{2}x^2+6x-3+m\right|$. Tổng các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;3]$ không bé hơn 5.

A. 1. **B.** -1. **C.** 0. **D.** -7.

Câu 46: Cho hàm số $y=\left|\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2+m\right|$. Tính tổng tất cả các số nguyên m để $\max\limits_{[-1;2]} y\le 11$.

A. -19. **B.** -37. **C.** -30. **D.** -11.

Câu 47: Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=|-4\cos^2 x+2\sin x+m+4|$ trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ nhỏ hơn hoặc bằng 4?

A. 12. **B.** 14. **C.** 13. **D.** 15.

Câu 48: Cho hàm số $f(x)=|x^2-2mx+3|$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[1;2]$ không lớn hơn 3?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 49: Cho hàm số $y=|x^3-3x^2-9x+m|$ (với m là tham số thực). Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để $\max\limits_{[-2;3]} y<50$. Tổng các phần tử của M là

A. 0. **B.** 737. **C.** 759. **D.** -215.

Câu 50: Cho hàm số $y=\left|x^4-2x^3+x^2+a\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để $\max\limits_{[-1;\,2]} y \le 100$

A. 197. **B.** 196. **C.** 200. **D.** 201.

Câu 51: Cho hàm số $y=\left|\sin x+\cos x+m\right|$, có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số có giá trị lớn nhất bé hơn 2.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 52: Gọi M là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2+2x+m\right|$ trên đoạn $[-2;1]$. Với $m\in[-3;3]$, giá trị lớn nhất của M bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 53: Gọi M là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^3+3x^2+m-1\right|$ trên đoạn $[-1;1]$. Với $m\in[-4;3]$, giá trị lớn nhất của M bằng

B. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 54: Cho hàm số $f(x)=\left|x^4-4x^3+4x^2+m\right|$. Khi m thuộc $[-3;3]$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;2]$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 55: Cho hàm số $y=\left|x^2-4x+2m-3\right|$ với m là tham số thực. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[1;3]$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng a khi $m=b$. Tính $P=2b-a$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{13}{4}$. **C.** $\frac{-9}{4}$. **D.** 6.

Câu 56: Cho hàm số $y=\left|x^3+x^2+\left(m^2+1\right)x+27\right|$. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-3;-1]$ có giá trị nhỏ nhất. Khi đó tích các phần tử của S là

A. 4. **B.** -4. **C.** 8. **D.** -8.

Câu 57: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{1}{4}x^4-\frac{19}{2}x^2+30x+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 58: Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^2-2x+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 4.

Câu 59: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^3-mx^2-9x+9m\right|$ trên đoạn $[-2;2]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 60: Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)=\left|-x^4+8x^2+m\right|$ trên đoạn $[-1;3]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 23. **B.** 24. **C.** 25. **D.** 26.

Câu 61: Cho hàm số $y=\left|x^4-2x^3+x^2+a\right|$. Có bao nhiêu số thực a để $\min\limits_{[-1;2]} y+\max\limits_{[-1;2]} y=10$

A. 1. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 62: Cho hàm số $y=\left|\dfrac{x^2+ax-4}{x}\right|$ (a là tham số). Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[1;4]$. Có bao nhiêu giá trị thực của a để $M+2m=7$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4

Câu 63: Cho hàm số $f(x)=x^4-2x^3+m$ (m là tham số thực). Tìm tổng tất cả các giá trị của m sao cho $\max\limits_{[0;1]}\left|f(x)\right|+2\min\limits_{[0;1]}\left|f(x)\right|=10$.

A. 4. **B.** -3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 64: Cho hàm số $f\left(x\right)=\left|x^3-3x^2+m\right|$. Tìm tất cả các giá trị của m thỏa mãn $3\max\limits_{[1;3]} f\left(x\right)-2\min\limits_{[1;3]} f\left(x\right)=17$.

A. $m\in\{9;-5;29\}$. **B.** $m\in\left\{9;-5;\dfrac{-5}{3}\right\}$. **C.** $m\in\{9;-5\}$. **D.** $m\in\{9;-5;5\}$.

Câu 65: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=x^3-3x+m$. Tích tất cả các giá trị của tham số m để $\min\limits_{[0;2]}\left|f\left(x\right)\right|+\max\limits_{[0;2]}\left|f\left(x\right)\right|=6$ là

A. -16 **B.** -9 **C.** 16 **D.** 144

Câu 66: Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x+m}{x+2}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp các giá trị của m sao cho $2\max\limits_{[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|+3\min\limits_{[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|=6$. Số phần tử của S là

A. 6. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

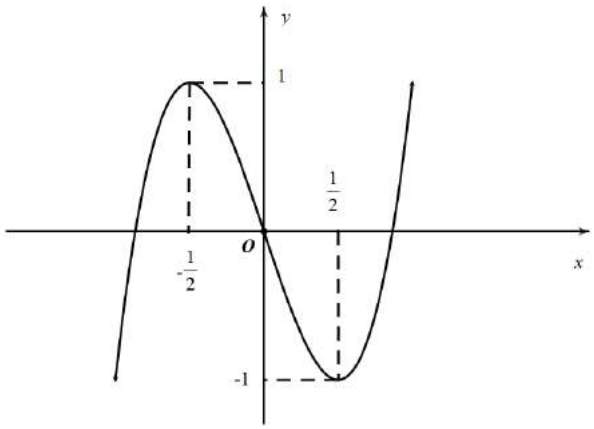
Câu 67: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên trên đoạn $[-4;4]$ như sau

x	-4		-3		-1		0		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-4	↗	4	↘	2	↗	3	↘	-3	↗	1

Có bao nhiêu giá trị của tham số $m\in[-4;4]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|x^3\right|+3\left|x\right|\right)+f\left(m\right)$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng $\dfrac{11}{2}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 68: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ



Đặt $g(x)=|f(x)|-\sqrt{1-2|x|}+f\left(\frac{\sqrt{1+2m}-\sqrt{1-2m}}{2\sqrt{2}}\right)$. Với giá trị nào của m thì giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ là 0.

A. $-\frac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** Không tồn tại.

Dạng 7: Bài toán tối ưu, ứng dụng, thực tế

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t)=45t^2-t^3$. Nếu xem $f'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t. Tốc độ truyền bệnh sẽ lớn nhất vào ngày thứ bao nhiêu?

A. 12. **B.** 20. **C.** 30. **D.** 15.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2: Khi nuôi tôm trong một hồ tự nhiên, một nhà khoa học đã thống kê được rằng: nếu trên mỗi mét vuông mặt hồ thả x con tôm giống thì cuối vụ mỗi con tôm có cân nặng trung bình là $108-x^2$ (gam). Hỏi nên thả bao nhiêu con tôm giống trên mỗi mét vuông mặt hồ tự nhiên đó để cuối vụ thu hoạch được nhiều tôm nhất.

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Một cái hồ rộng có hình chữ nhật. Tại một góc nhỏ của hồ người ta đóng một cái cọc ở vị trí K cách bờ AB là $1\,\text{m}$ và cách bờ AC là $8\,\text{m}$, rồi dùng một cây sào ngăn một góc nhỏ của hồ để thả bèo. Tính chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB, AC và cây cọc K.

A. $\dfrac{5\sqrt{65}}{4}$. **B.** $5\sqrt{5}$. **C.** $9\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{5\sqrt{71}}{4}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4: Một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 25\,\text{m}$, chiều rộng $AD = 20\,\text{m}$ được chia thành hai phần bằng nhau bởi vạch chắn MN (M, N lần lượt là trung điểm BC và AD). Một đội xây dựng làm một con đường đi từ A đến C qua vạch chắn MN, biết khi làm đường trên miền $ABMN$ mỗi giờ làm được $15\,\text{m}$ và khi làm trong miền $CDNM$ mỗi giờ làm được $30\,\text{m}$. Tính thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C.

A. $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\dfrac{10+2\sqrt{725}}{30}$. **C.** $\dfrac{20+\sqrt{725}}{30}$. **D.** 5.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Một vật chuyển động theo quy luật $s = t^3 - 6t^2 + 42t + 1$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc nhỏ nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. $16(m/s)$. **B.** $30(m/s)$. **C.** $40(m/s)$. **D.** $10(m/s)$.

Câu 2: Một vật chuyển động theo quy luật $S = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$, với $t(giây)$ là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và $S(m)$ là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng:

A. $400(m/s)$. **B.** $216(m/s)$. **C.** $30(m/s)$. **D.** $54(m/s)$.

Câu 3: Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$ với t là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. 24. **B.** 108. **C.** 64. **D.** 18.

Câu 4: Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2$ với $t(s)$ là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và $s(m)$ là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Tìm vận tốc lớn nhất mà vật có thể đạt được trong khoảng thời gian $3s$ kể từ lúc vật bắt đầu chuyển động.

A. $2(m/s)$. **B.** $\frac{16}{3}(m/s)$. **C.** $3(m/s)$. **D.** $4(m/s)$.

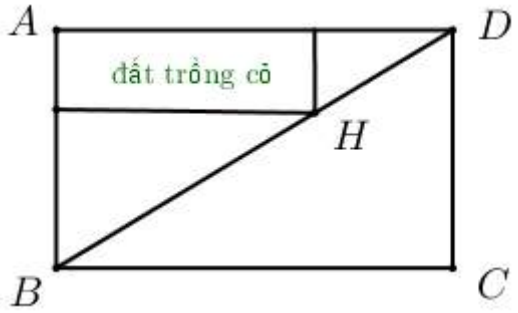
Câu 5: Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 7 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. $180(m/s)$. **B.** $24(m/s)$. **C.** $144(m/s)$. **D.** $36(m/s)$.

Câu 6: Một cửa hàng bán vải Thanh Hà với giá bán mỗi kg là 50.000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 25kg. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm 4000 đồng cho một kg thì số vải bán được tăng thêm là 50kg. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi kg là 30.000 đồng.

A. 41.000 đồng. **B.** 34.000 đồng. **C.** 38.000 đồng. **D.** 45.000 đồng.

Câu 7: Trên mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích $25m^2$, người chủ lấy một phần đất để trồng cỏ. Biết phần đất trồng cỏ này có dạng hình chữ nhật với hai đỉnh đối diện là A và H, với H thuộc cạnh BD. Hỏi số tiền lớn nhất người chủ cần chuẩn bị để trồng cỏ là khoảng bao nhiêu, với chi phí trồng cỏ là 70.000 đồng$/m^2$?

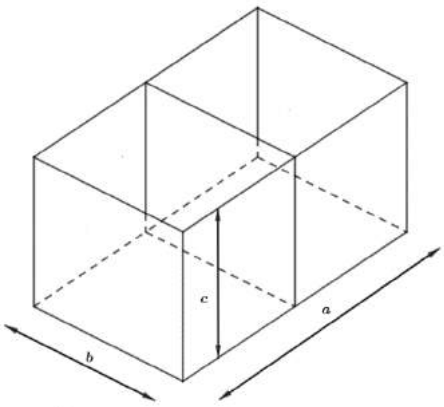


A. 337.500 đồng. **B.** 875.000 đồng. **C.** 584.000 đồng. **D.** 437.500 đồng.

Câu 8: Một kiến trúc sư mốn thiết kế một mô hình kim tự tháp Ai Cập có dạng là một hình chóp tứ giác đều ngoại tiếp một mặt cầu có bán kính bằng $6m$.Đề tiết kiệm nguyên liệu xây dựng thì kiến trúc sư đó phải thiết kế kim tự tháp sao cho có thể tích nhỏ nhất. Chiều cao của kim tự tháp đó là:

A. $12m$. **B.** $18m$. **C.** $36m$. **D.** $24m$.

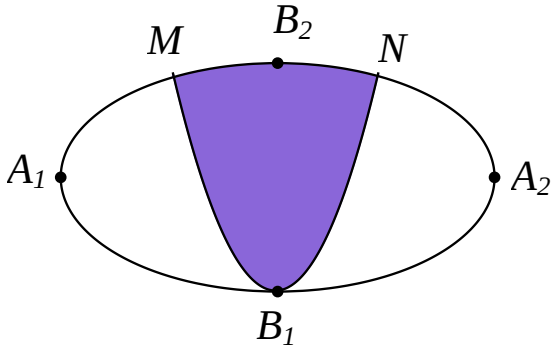
Câu 9: Người ta cần làm một cái bể cá có hai ngăn, không có nắp ở phía trên với thể tích $1,296m^3$. Người ta cắt các tấm kính ghép lại một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật (hình vẽ minh họa) với ba kích thước là a,b,c. Người ta phải thiết kế các kích thước là bao nhiêu để đỡ tốn kính nhất (giả sử độ dày của kính không đáng kể).



A. $a=1,2m;b=1,2m;c=0,9m$. **B.** $a=3,6m;b=0,6m;c=0,6m$.

C. $a=2,4m;b=0,9m;c=0,6m$. **D.** $a=1,8m;b=1,2m;c=0,6m$.

Câu 10: Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1,A_2,B_1,B_2 như hình vẽ bên. Người ta chia elip bởi parabol có đỉnh B_1, trục đối xứng B_1B_2 và đi qua các điểm M,N. Sau đó sơn phần tô đậm với giá 200.000 đồng/m^2 và trang trí đèn led phần còn lại với giá 500.000 đồng/m^2. Hỏi kinh phí sử dụng gần nhất với giá trị nào dưới đây? Biết rằng $A_1A_2=4m,B_1B_2=2m,MN=2m$.



A. 2.341.000 đồng. **B.** 2.057.000 đồng. **C.** 2.760.000 đồng. **D.** 1.664.000 đồng.

Câu 11: Một chất điểm chuyển động thẳng với quãng đường biến thiên theo thời gian bởi quy luật $s(t)=t^3-4t^2+12$, trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Vận tốc của chất điểm đó đạt giá trị bé nhất khi t bằng bao nhiêu?

A. 2. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** 0. **D.** $\frac{4}{3}$.

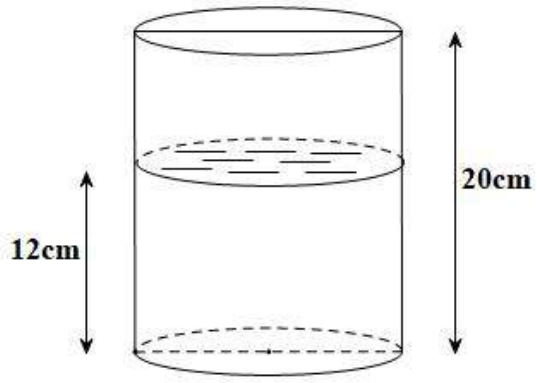
Câu 12: Tính diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp trong nửa đường tròn có bán kính $10cm$.

A. $160cm^2$. **B.** $100cm^2$. **C.** $80cm^2$. **D.** $200cm^2$.

Câu 13: Người ta muốn xây một cái bể hình hộp đứng có thể tích $V=18\left(m^3\right)$, biết đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp 3 lần chiều rộng và bể không có nắp. Hỏi cần xây bể có chiều cao h bằng bao nhiêu mét để nguyên vật liệu xây dựng là ít nhất?

A. $2(m)$. **B.** $\frac{5}{2}(m)$. **C.** $1(m)$. **D.** $\frac{3}{2}(m)$.

Câu 14: Một cốc hình trụ có bán kính đáy là $2cm$, chiều cao $20cm$. Trong cốc đang có một ít nước, khoảng cách giữa đáy cốc và mặt nước là $12cm$. Một con quạ muốn uống được nước trong cốc thì mặt nước phải cách miệng cốc không quá $6cm$. Con quạ thông minh mổ những viên đá hình cầu có bán kính $0,6cm$ thả vào cốc để mực nước dâng lên. Để uống được nước thì con quạ cần thả vào cốc ít nhất bao nhiêu viên đá?



A. 30. **B.** 27. **C.** 28. **D.** 29.

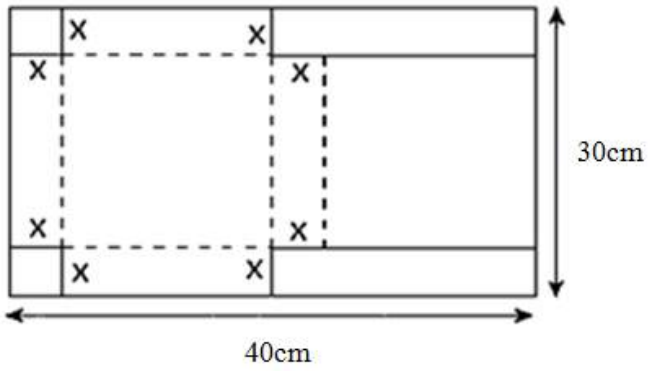
Câu 15: Một sợi dây có chiều dài $28m$ được cắt thành hai đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất?

A. $\frac{56}{4+\pi}$. **B.** $\frac{112}{4+\pi}$. **C.** $\frac{84}{4+\pi}$. **D.** $\frac{92}{4+\pi}$.

Câu 16: Để chuẩn bị cho đợt phát hành sách giáo khoa mới, một nhà xuất bản yêu cầu xưởng in phải đảm bảo các yêu cầu sau: Mỗi cuốn sách giáo khoa cần một trang chữ có diện tích là $384cm^2$, lề trên và lề dưới là $3\,cm$, lề trái và lề phải là $2\,cm$. Muốn chi phí sản xuất là thấp nhất thì xưởng in phải in trang sách có kích thước tối ưu nhất, với yêu cầu chất lượng giấy và mực in vẫn đảm bảo. Tìm chu vi của trang sách.

A. 82 cm. **B.** 100 cm. **C.** 90 cm. **D.** 84 cm.

Câu 17: Với tấm nhôm hình chữ nhật có kích thước $30cm$; $40cm$. Người ta phân chia tấm nhôm như hình vẽ và cắt bỏ một phần để được gấp lên một cái hộp có nắp. Tìm x để thể tích hộp lớn nhất.



A. $\frac{35+5\sqrt{13}}{3}cm$. **B.** $\frac{35-4\sqrt{13}}{3}cm$. **C.** $\frac{35-5\sqrt{13}}{3}cm$. **D.** $\frac{35+4\sqrt{13}}{3}cm$.

Câu 18: Ông A dự định sử dụng hết $6,5\text{m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng khối hình hộp chữ nhật chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng. Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. $2,26\text{m}^3$. **B.** $1,01\text{m}^3$. **C.** $1,33\text{m}^3$. **D.** $1,50\text{m}^3$.

Câu 19: Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\frac{1}{3}t^3+6t^2$ với t là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. 243. **B.** 144. **C.** 27. **D.** 36.

Câu 20: Một bác nông dân cần xây dựng một hố ga không có nắp dạng hình hộp chữ nhật có thể tích 3200cm^2, tỉ số giữa chiều cao của hố và chiều rộng của đáy bằng 2. Hãy xác định diện tích của đáy hố ga để khi xây tiết kiệm nguyên vật liệu nhất?

A. 1200cm^2. **B.** 120cm^2. **C.** 160cm^2. **D.** 1600cm^2.

Câu 21: Ông An có một khu đất hình elip với độ dài trục lớn 10 m và độ dài trục bé 8 m. Ông An muốn chia khu đất thành hai phần, phần thứ nhất là một hình chữ nhật nội tiếp elip dùng để xây bể cá cảnh và phần còn lại dùng để trồng hoa. Biết chi phí xây bể cá là 1000000 đồng trên $1m^2$ và chi phí trồng hoa là 1200000 đồng trên $1m^2$. Hỏi ông An có thể thiết kế xây dựng như trên với tổng chi phí thấp nhất gần nhất với số nào sau đây?

A. 67398224 đồng. **B.** 67593346 đồng. **C.** 63389223 đồng. **D.** 67398228 đồng.

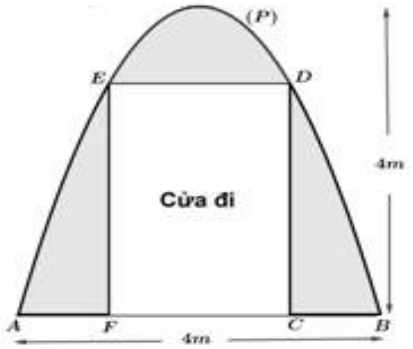
Câu 22: Để thiết kế một chiếc bể cá không có nắp đậy hình hộp chữ nhật có chiều cao 60cm, thể tích là 96.000cm^3, người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành là 70.000 đồng/m^2 và loại kính để làm mặt đáy có giá thành là 100.000 đồng/m^2. Chi phí thấp nhất để làm bể cá là

A. 283.000 đồng. **B.** 382.000 đồng. **C.** 83.200 đồng. **D.** 832.000 đồng.

Câu 23: Một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích bằng 48 và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chất liệu làm đáy và 4 mặt bên của hộp có giá thành gấp ba lần giá thành của chất liệu làm nắp hộp. Gọi h là chiều cao của hộp để giá thành của hộp là thấp nhất. Biết $h=\frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tổng $m+n$ là

A. 12. **B.** 13. **C.** 11. **D.** 10.

Câu 24: Một chiếc cổng có hình dạng là một Parabol (P) có kích thước như hình vẽ, biết chiều cao cổng bằng $4\ m$, $AB = 4\ m$. Người ta thiết kế cửa đi là một hình chữ nhật $CDEF$, phần còn lại dùng để trang trí. Biết chi phí để trang trí phần tô đậm là $1.000.000$ đồng/m^2. Hỏi số tiền ít nhất dùng để trang trí phần tô đậm gần với số tiền nào dưới đây?



A. 4.450.000 đồng. **B.** 4.605.000 đồng. **C.** 4.505.000 đồng. **D.** 4.509.000 đồng.

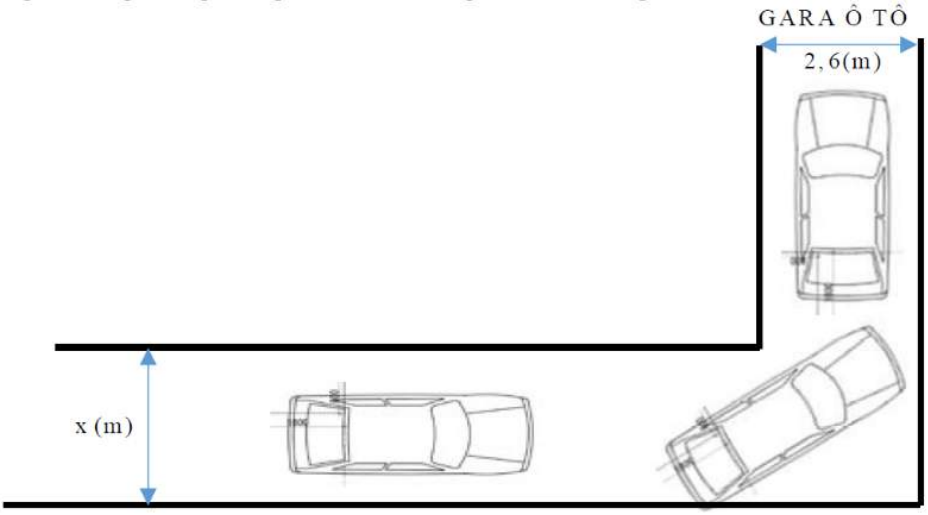
Câu 25: Một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích bằng 48 và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chất liệu làm đáy và 4 mặt bên của hộp có giá thành gấp ba lần giá thành của chất liệu làm nắp hộp. Gọi h là chiều cao của hộp để giá thành của hộp là thấp nhất. Biết $h = \dfrac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tổng $m+n$ là

A. 12. **B.** 13. **C.** 11. **D.** 10.

Câu 26: Một trang trại rau sạch mỗi ngày thu hoạch được một tấn rau. Mỗi ngày, nếu bán rau với giá 30000 đồng/kg thì hết rau sạch, nếu giá bán rau tăng 1000 đồng/kg thì số rau thừa tăng thêm 20 kg. Số rau thừa này được thu mua làm thức ăn chăn nuôi với giá 2000 đồng/kg. Hỏi tiền bán rau nhiều nhất trang trại có thể thu được mỗi ngày là bao nhiêu?

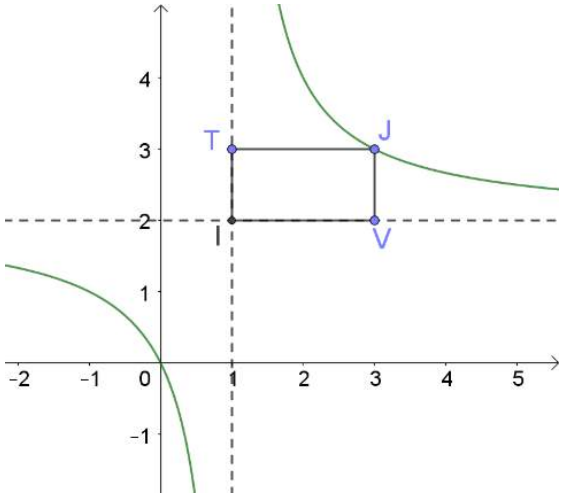
A. 32400000 đồng. **B.** 34400000 đồng. **C.** 32420000 đồng. **D.** 34240000 đồng.

Câu 27: Hình vẽ bên dưới mô tả đoạn đường đi vào GARA Ô TÔ nhà cô Hiền. Đoạn đường đầu tiên có chiều rộng bằng $x\,(\text{m})$, đoạn đường thẳng vào cổng GARA có chiều rộng $2,6\,(\text{m})$. Biết kích thước xe ô tô là $5\text{m} \times 1,9\text{m}$. Để tính toán và thiết kế đường đi cho ô tô người ta coi ô tô như một khối hộp chữ nhật có kích thước chiều dài $5\,(\text{m})$, chiều rộng $1,9\,(\text{m})$. Hỏi chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên gần nhất với giá trị nào trong các giá trị bên dưới để ô tô có thể đi vào GARA được?



A. $x = 3,7\,(\text{m})$. **B.** $x = 2,6\,(\text{m})$. **C.** $x = 3,55\,(\text{m})$. **D.** $x = 4,27\,(\text{m})$.

Câu 28: Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm J thay đổi thuộc (C) như hình vẽ bên. Hình chữ nhật $ITJV$ có chu vi nhỏ nhất bằng:



A. $2\sqrt{2}$. **B.** 6. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** 4.

CHƯƠNG 1

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

CHỦ ĐỀ 3 GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa.

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập D.

Số M gọi là **giá trị lớn nhất** của hàm số $y=f(x)$ trên D nếu: $\begin{cases} f(x)\le M, \forall x\in D \\ \exists x_0\in D, f(x_0)=M \end{cases}$.

Kí hiệu: $M=\max\limits_{x\in D} f(x)$.

Số m gọi là **giá trị nhỏ nhất** của hàm số $y=f(x)$ trên D nếu: $\begin{cases} f(x)\ge m, \forall x\in D \\ \exists x_0\in D, f(x_0)=m \end{cases}$.

Kí hiệu: $m=\min\limits_{x\in D} f(x)$.

2. Phương pháp tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng cách khảo sát trực tiếp

Bước 1: Tính $f'(x)$ và tìm các điểm $x_1,x_2,...,x_n\in D$ mà tại đó $f'(x)=0$ hoặc hàm số không có đạo hàm.

Bước 2: Lập bảng biến thiên và từ đó suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn

Bước 1:

Hàm số đã cho $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a;b]$.

Tìm các điểm $x_1,x_2,...,x_n$ trên khoảng $(a;b)$, tại đó $f'(x)=0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.

Bước 2: Tính $f(a), f(x_1), f(x_2),..., f(x_n), f(b)$.

Bước 3: Khi đó: $\max\limits_{[a,b]} f(x)=\max\left\{f(x_1), f(x_2),..., f(x_n), f(a), f(b)\right\}$.

$\min\limits_{[a,b]} f(x)=\min\left\{f(x_1), f(x_2),..., f(x_n), f(a), f(b)\right\}$.

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một khoảng

Bước 1: Tính đạo hàm $f'(x)$.

Bước 2: Tìm tất cả các nghiệm $x_i\in(a;b)$ của phương trình $f'(x)=0$ và tất cả các điểm $\alpha_i\in(a;b)$ làm cho $f'(x)$ không xác định.

Bước 3. Tính $A=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $B=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$, $f(x_i)$, $f(\alpha_i)$.

Bước 4. So sánh các giá trị tính được và kết luận $M=\max\limits_{(a;b)} f(x)$, $m=\min\limits_{(a;b)} f(x)$.

Nếu giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) là A hoặc B thì ta kết luận không có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất).

Nếu $y=f(x)$ đồng biến trên $[a;b]$ thì $\begin{cases}\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(a)\\ \max\limits_{[a;b]} f(x)=f(b)\end{cases}$.

Nếu $y=f(x)$ nghịch biến trên $[a;b]$ thì $\begin{cases}\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(b)\\ \max\limits_{[a;b]} f(x)=f(a)\end{cases}$.

Hàm số liên tục trên một khoảng **có thể** không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên khoảng đó.

❖ **Bất đẳng thức trị tuyệt đối:**

Cho hai số thực a,b khi đó ta có: $|a|+|b|\ge|a+b|\ge|a|-|b|$.

Dấu " = " vế trái xảy ra khi a,b cùng dấu. Dấu " = " vế phải xảy ra khi a,b trái dấu.

Tính chất của hàm trị tuyệt đối: $max\{|a|,|b|\}=\dfrac{|a-b|+|a+b|}{2}$.

❖ **Phương pháp chung để giải các bài toán tìm GTLN – GTNN của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối.**

Bước 1: Xét hàm số $y=f(x)$ trên $[a,b]$.

Tính đạo hàm $y'=f(x)$.

Giải phương trình $f'(x)=0$ và tìm các nghiệm a_i thuộc $[a,b]$.

Bước 2: Giải phương trình $f(x)=0$ và tìm các nghiệm b_j thuộc $[a,b]$.

Bước 3: Tính các giá trị $|f(a)|;|f(b)|;|f(a_i)|;|f(b_j)|$. So sánh và kết luận.

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ bằng 3. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $(5-2f(x))$ trên đoạn $[a;b]$ bằng bao nhiêu?

A. 1. **B.** 2. **C.** -1. **D.** -3.

Lời giải

Chọn A

Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ bằng 3. Nên giá trị nhỏ nhất của hàm số $(5-2f(x))$ trên đoạn $[a;b]$ bằng -1

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{3x-1}{x+1}$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;2]$. Khi đó $M+2m$ bằng

A. 2. **B.** 0. **C.** $-\dfrac{2}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D

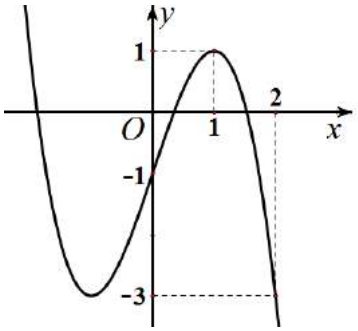
Xét hàm số $f(x)=\dfrac{3x-1}{x+1}$.

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$; Hàm số liên tục trên đoạn $[0;2]$.

$f'(x)=\dfrac{4}{(x+1)^2}>0,\forall x\ne-1$; $f(0)=-1$; $f(2)=\dfrac{5}{3}$. Khi đó $M=\dfrac{5}{3}$; $m=-1$.

Suy ra $M+2m=-\dfrac{1}{3}$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)=-x^3+3x-1$ có đồ thị như hình vẽ. Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0;2]$ là bao nhiêu?



A. -1. **B.** -3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Nhìn vào đồ thị hàm số $y=f(x)=-x^3+3x-1$ ta thấy giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;2]$ là -3.

Câu 4: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3+3x+1$ trên đoạn $[1;3]$ là

A. 5. **B.** 37. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x)=x^3+3x+1\Rightarrow f'(x)=3x^2+3>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[1;3]$ do đó $\min\limits_{x\in[1;3]} f(x)=f(1)=5$

Câu 5: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=-x^3+3x+1$ trên khoảng $(0;+\infty)$ bằng

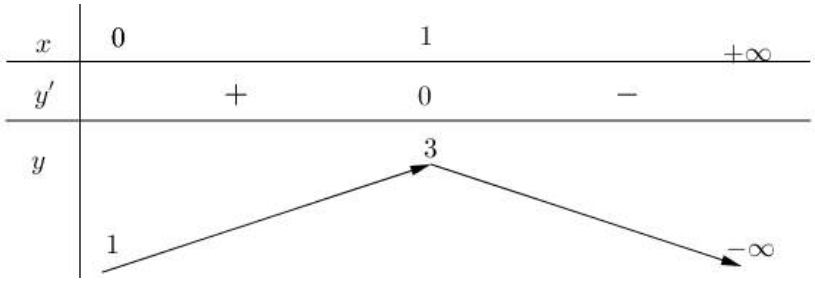
A. 1. **B.** 3. **C.** -1. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=-3x^2+3$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in(0;+\infty)\\x=-1\notin(0;+\infty)\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số $y=-x^3+3x+1$ trên khoảng $(0;+\infty)$ bằng 3.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1: Mở đầu về GTLN và GTNN của hàm số

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập D. Số M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên D nếu

A. $f(x)\ge M$ với mọi $x\in D$.

B. $f(x)\ge M$ với mọi $x\in D$ và tồn tại $x_o\in D$ sao cho $f(x_o)=M$.

C. $f(x)\le M$ với mọi $x\in D$.

D. $f(x)\le M$ với mọi $x\in D$ và tồn tại $x_o\in D$ sao cho $f(x_o)=M$.

Lời giải

Chọn D

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập D. Số M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên D nếu $f(x)\le M$ với mọi $x\in D$ và tồn tại $x_o\in D$ sao cho $f(x_o)=M$.

Kí hiệu: $M=\max\limits_{D} f(x)$.

Câu 7: Tập giá trị của hàm số $y=\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}$

A. $T=(2;4)$. **B.** $T=[2;2\sqrt{2}]$. **C.** $T=[2;4]$. **D.** $T=[2\sqrt{2};4]$.

Lời giải

Tập xác định $D=[-1;3]$.

Ta có: $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{3-x}}$.

$y'=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{3-x}}=0\Leftrightarrow\sqrt{x+1}=\sqrt{3-x}\Leftrightarrow x+1=3-x\Leftrightarrow x=1\in[-1;3]$.

Khi đó: $y(-1)=2$; $y(1)=2\sqrt{2}$; $y(3)=2$.

Vậy tập giá trị của hàm số là $T=[2;2\sqrt{2}]$.

Câu 8: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^4-4x^2+5$ trên đoạn $[-1;2]$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=4x^3-8x$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$

$y(-1)=2;\ y(0)=5;\ y(\sqrt{2})=1;\ y(2)=5$

Do đó giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-1;2]$ là 5.

Câu 9: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x^2$ trên đoạn $[1;5]$ bằng

A. -4. **B.** 50. **C.** -2. **D.** 45.

Lời giải

Chọn A

Ta có trên đoạn $[1;5]$: $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \notin [1;5] \\ x = 2 \in [1;5] \end{array}\right.$.

$y(1) = -2$; $y(2) = -4$; $y(5) = 50$. Vậy $\min\limits_{[1;5]} y = y(2) = -4$.

Câu 10: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 1$ trên đoạn $[-3;1]$. Tổng $M + m$ bằng

A. 0. **B.** 52. **C.** -3. **D.** 54.

Lời giải

Ta có: $y' = -3x^2 + 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-3;1] \\ x = 2 \notin [-3;1] \end{array}\right.$.

Khi đó: $y(-3) = 53$, $y(0) = -1$, $y(1) = 1$.

Suy ra $M = \underset{[-3;1]}{Max}\, y = y(-3) = 53$, $m = \underset{[-3;1]}{Min}\, y = y(0) = -1$.

Vậy $M + m = 53 + (-1) = 52$.

Câu 11: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 3x^2$ trên đoạn $[-5;-1]$ bằng

A. 0. **B.** 4. **C.** 2. **D.** -50.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \notin [-5;-1] \\ x = -2 \in [-5;-1] \end{array}\right.$

$y(-5) = -50; y(-2) = 4; y(-1) = 2;$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 3x^2$ trên đoạn $[-5;-1]$ là -50

Câu 12: Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$ lần lượt là M và m. Giá trị của biểu thức $T = M^2 - m^2$

A. 2. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D = [-2;\ 2]$

$y' = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} - x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 4 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$. $f(2) = 2$; $f(-2) = -2$; $f\left(\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}$

$M = \max\limits_{[-2;2]} f(x) = f\left(\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}$, $m = \min\limits_{[-2;2]} f(x) = f(-2) = -2$

$T = M^2 - m^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 - (-2)^2 = 4$

Câu 13: Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x-2}$ trên $[-1;1]$. Khi đó giá trị của m là

A. $m=-\dfrac{2}{3}$. **B.** $m=4$. **C.** $m=-4$. **D.** $m=\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y=\dfrac{3x+1}{x-2}\Rightarrow y'=\dfrac{-7}{(x-2)^2}<0$ nên hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Do đó: $m=\min\limits_{[-1;1]}y=y(1)=-4$.

Câu 14: Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{1}{2}x-\sqrt{x+2}$ trên đoạn $[-1;34]$. Tổng $S=3m+M$ bằng.

A. $S=\dfrac{13}{2}$. **B.** $S=\dfrac{25}{2}$. **C.** $S=\dfrac{63}{2}$. **D.** $S=\dfrac{11}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$y'=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}=\dfrac{\sqrt{x+2}-1}{2\sqrt{x+2}}$; $y'=0\Leftrightarrow\sqrt{x+2}=1\Leftrightarrow x=-1$. $f(-1)=-\dfrac{3}{2}$; $f(34)=11$.

$m=-\dfrac{3}{2};M=11$. $S=3\left(-\dfrac{3}{2}\right)+11=\dfrac{-9}{2}+11=\dfrac{13}{2}$.

Câu 15: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^4+2x^2-1$ trên $[-1;1]$ bằng

A. 2. **B.** -1. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=4x^3+4x=0\Leftrightarrow 4x\left(x^2+1\right)=0\Leftrightarrow x=0$

Khi đó $f(0)=-1$, $f(1)=2$, $f(-1)=2$

Vậy $\min\limits_{[-1;1]}y=\min\{f(0),f(1),f(-1)\}=-1$

Câu 16: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3+2x^2-7x-3$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

A. $\dfrac{311}{27}$. **B.** -7. **C.** -1. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=3x^2+4x-7\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\dfrac{7}{3}\end{array}\right.$ vì $x\in[-1;2]\Rightarrow x=1$.

Khi đó $y(-1)=5$; $y(1)=-7$ và $y(2)=-1$. Vậy $\max\limits_{[-1;2]}y=5$.

Câu 17: Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x+4$ trên đoạn $[0;2]$. Tổng $M+m$ bằng?

A. 8. **B.** 12. **C.** 6. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(x)=x^3-3x+4 \Rightarrow f'(x)=3x^2-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \notin [0;2] \end{array}\right.$

$f(0)=4$

$f(2)=6=\max\limits_{[0;2]} f(x)=M \Rightarrow M+m=8.$

$f(1)=2=\min\limits_{[0;2]} f(x)=m$

Câu 18: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-5x^2+3x+2$ trên đoạn $[0;2]$. Tổng $M+m$ bằng

A. $-\frac{122}{27}$. **B.** -2. **C.** $-\frac{41}{27}$. **D.** -4.

Lời giải

Chọn C

Xét trên đoạn $[0;2]$

$y'=3x^2-10x+3; y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \notin (0;2) \\ x=\frac{1}{3} \in (0;2) \end{array}\right.$; $y(0)=2$; $y(2)=-4$; $y\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{67}{27}$

Vậy $M+n=\frac{67}{27}+(-4)=-\frac{41}{27}$.

Câu 19: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-30x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. $20\sqrt{10}$. **B.** -63. **C.** $-20\sqrt{10}$. **D.** -52.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=3x^2-30$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{10}$.

Hàm số $f(x)=x^3-30x$ liên tục trên đoạn $[2;19]$

$f(2)=-52; f\left(\sqrt{10}\right)=-20\sqrt{10}; f(19)=6289.$

So sánh các giá trị trên, ta có giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-30x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng $-20\sqrt{10}$

Câu 20: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\frac{1}{2020}x^4-\frac{1}{2020}x^2+2021$ trên đoạn $[-1;1]$ là

A. $2021-\frac{1}{4040}$ **B.** $2021-\frac{1}{8080}$. **C.** 2020. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=\frac{1}{2020}.4x^3-\frac{1}{2020}.2x=\frac{x}{1010}\left(2x^2-1\right)$. Cho $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\\x=0\\x=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.$

Mặt khác $f(-1)=f(0)=f(1)=2021 f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2021-\frac{1}{8080}$.

Do đó $\min\limits_{[-1;1]} f(x)=2021-\frac{1}{8080}$

Câu 21: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x^2+3$ trên đoạn $[1;3]$. Giá trị $M+m$ bằng:

A. 8. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

$f(x)=x^3-3x^2+3$ là hàm đa thức nên $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;3]$.

Trên đoạn $[1;3]$ ta có $f'(x)=3x^2-6x$; $3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\notin[1;3]\\x=2\in[1;3]\end{array}\right.$.

$f(1)=1$; $f(2)=-1$; $f(3)=3$. Suy ra $M+m=f(3)+f(2)=2$.

Câu 22: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=2x^3+3x^2-12x+2$ trên đoạn $[-1;2]$ là

A. 6. **B.** 11. **C.** 15. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[-1;2]$.

Ta có $y'=6x^2+6x-12$. $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\notin[-1;2]\\x=1\in[-1;2]\end{array}\right.$.

$y(-1)=15; y(2)=6; y(1)=-5$. Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 15.

Câu 23: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$ bằng

A. $\frac{19}{3}$. **B.** 6. **C.** -3. **D.** -2.

Lời giải

Chọn B

Hàm số đã cho xác định với mọi $x\in[2;4]$. Ta có $f'(x)=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$.

Trên đoạn $[2;4]$ ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow x=3$.

$f(2)=7$, $f(3)=6$, $f(4)=\frac{19}{3}$. Vậy $\min\limits_{[2;4]} f(x)=6$.

Câu 24: Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2-4x}{2x+1}$ trên đoạn $[0;3]$.

A. $\min\limits_{[0;3]} y=0$. **B.** $\min\limits_{[0;3]} y=-\dfrac{7}{3}$. **C.** $\min\limits_{[0;3]} y=-4$. **D.** $\min\limits_{[0;3]} y=-1$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=\dfrac{x^2-4x}{2x+1}$ liên tục trên đoạn $[0;3]$

$y'=\dfrac{2x^2+2x-4}{(2x+1)^2}$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in[0;3]\\x=-2\notin[0;3]\end{array}\right.$.

Ta có: $y(0)=0;\ y(1)=-1;\ y(3)=-\dfrac{3}{7}$; $y(1)<y(3)<y(0)$ nên $\min\limits_{[0;3]} y=y(1)=-1$.

Câu 25: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+5$ trên đoạn $[-2;2]$.

A. -1. **B.** -17. **C.** -22. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Với $x\in[-2;2]$, ta có: $y'=3x^2-6x-9$; $y'=0\Leftrightarrow x=-1$.

Ta có: $y(-2)=3; y(-1)=10; y(2)=-17$.

Do đó $\min\limits_{[-2;2]} y=-17$ tại $x=2$.

Câu 26: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ trên $[2;+\infty)$ là

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

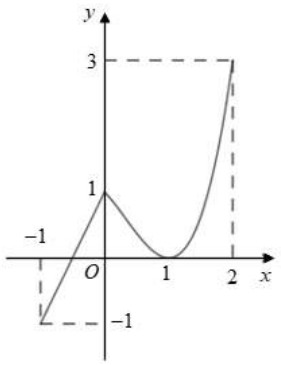
Chọn B

Tập xác định: $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$y'=-\dfrac{2}{(x-1)^2}<0$ với mọi $x\in[2;+\infty)$ $\Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $[2;+\infty)$.

Vậy $\max\limits_{[2;+\infty)} y=y(2)=3$.

Câu 27: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;2]$. Giá trị của $M.m$ bằng



A. -3. **B.** 1. **C.** -2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị ta có $M=3$ và $m=-1$. Vậy $M.m=-3$.

Câu 28: Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-1$ nhận giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[-\frac{1}{3};10\right]$ tại

A. $x=-\frac{1}{3}$. **B.** $x=1$. **C.** $x=3$. **D.** $y=\frac{10}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$y=f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-1;\ y'=x^2-4x+3;\ y'=0\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$.

$f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{181}{81};\ f(10)=\frac{487}{3};\ f(1)=\frac{1}{3};\ f(3)=-1$

$\min\limits_{\left[-\frac{1}{3};10\right]} y=\frac{-181}{81}$ khi $x=-\frac{1}{3}$.

Câu 29: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=-\frac{x}{x^2+1}$. Với a,b là các số dương, thỏa mãn $a<b$. Gía trị nhỏ nhất của hàm số trên $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ bằng.

A. $f(b)$. **B.** $f(a)$. **C.** $\frac{f(a)+f(b)}{2}$. **D.** $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x)=-\frac{x}{x^2+1}<0$ với $\forall x\in[a;b]$ vì a,b là các số dương nên hàm số nghịch biến trên $[a;b]$. Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[a;b]$ là $f(b)$..

Câu 30: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x+2$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng

A. 20. **B.** 0. **C.** 4. **D.** -16.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=3x^2-3;f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\end{array}\right.$

Do $f(x)$ liên tục trên $[-3;3]$ nên từ $f(-3)=-16;f(-1)=4;f(1)=0;f(3)=20$ ta được giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x+2$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng -16.

Câu 31: Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\frac{x-1}{1-2x}$ trên đoạn $[2;5]$. Tính $A=M-3m$.

A. $A=-\frac{10}{3}$. **B.** $A=-1$. **C.** $A=1$. **D.** $A=-\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $f(x)=\dfrac{x-1}{1-2x}$ có TXĐ $D=\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Ta có: $f'(x)=-\dfrac{1}{(1-2x)^2}<0\forall x\in D$.

Suy ra hàm số $f(x)=\dfrac{x-1}{1-2x}$ nghịch biến trên đoạn $[2;5]$.

$\Rightarrow m=\min\limits_{[2;5]} f(x)=f(5)=-\dfrac{4}{9}; M=\max\limits_{[2;5]} f(x)=f(2)=-\dfrac{1}{3}\Rightarrow A=M-3m=1.$

Câu 32: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{3x-1}{x+1}$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;2]$. Khi đó $M+2m$ bằng

A. 2. **B.** 0. **C.** $-\dfrac{2}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{3x-1}{x+1}$.

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$; Hàm số liên tục trên đoạn $[0;2]$.

$f'(x)=\dfrac{4}{(x+1)^2}>0,\forall x\neq -1;\ f(0)=-1;\ f(2)=\dfrac{5}{3}$. Khi đó $M=\dfrac{5}{3}; m=-1.$

Suy ra $M+2m=-\dfrac{1}{3}$.

Câu 33: Tính tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^4-x^3-x$ trên đoạn $[0;2]$.

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** -1.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y'=4x^3-3x^2-1=0\Leftrightarrow(x-1)(4x^2+x+1)=0\Leftrightarrow x=1$.

$y(1)=-1;\ y(0)=0;\ y(2)=6\ \Rightarrow \min\limits_{[0;2]} y=-1;\ \max\limits_{[0;2]} y=6\Rightarrow \min\limits_{[0;2]} y+\max\limits_{[0;2]}=-1+6=5$.

Câu 34: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2+\dfrac{16}{x}$ trên $(0;+\infty)$ bằng

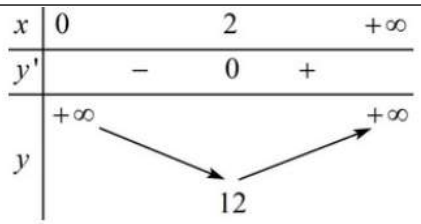
A. 24. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=2x-\dfrac{16}{x^2}=\dfrac{2x^3-16}{x^2}$. Trên $(0;+\infty)$, $y'=0\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2x^3-16}{x^2}=0\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow x=2$.

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $\min\limits_{x\in(0;+\infty)} f(x)=f(2)=12$.

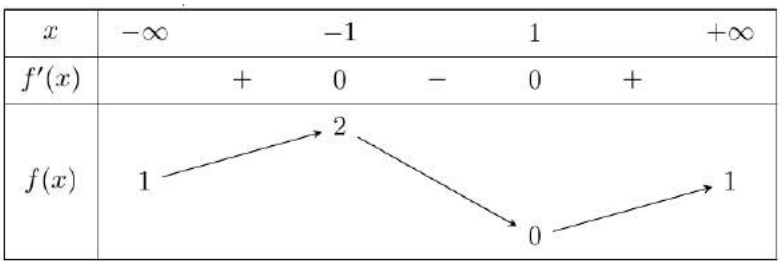
Câu 35: Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}$ lần lượt là

A. 3 và -1. **B.** $2+\sqrt{2}$ và $2-\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{2}$ và $-\sqrt{2}$. **D.** 2 và 0.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=\dfrac{2\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$. Suy ra $f'(x)=0$ khi $x=\pm1$. Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$



Từ bảng biến thiên, ta có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho lần lượt là 2 và 0.

Câu 36: Hàm số $y=99x-\sqrt{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng

A. $-\dfrac{1}{396}$. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** 0. **D.** $-\dfrac{1}{198}$.

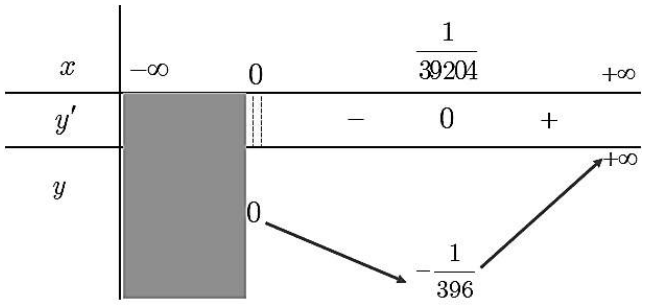
Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=[0;+\infty)$.

Xét trên $(0;+\infty)$ ta có: $y'=99-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $y'=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{39204}$.

Bảng biến thiên:



Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=99x-\sqrt{x}$ bằng $-\dfrac{1}{396}$ khi $x=\dfrac{1}{39204}$.

Câu 37: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x+m$ (với m là tham số thực). Biết $\max\limits_{(-\infty;0)} f(x)=5$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $(0;+\infty)$ là

A. $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x)=1.$ **B.** $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x)=2.$ **C.** $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x)=3.$ **D.** $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x)=-1.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=3x^2-3=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$			$-$			$+$	
y	$-\infty$	↗	$m+2$	↘			$m-2$	↗	$+\infty$

Vậy $\max\limits_{(-\infty;0)} f(x)=f(-1)\Rightarrow f(-1)=5\Leftrightarrow m+2=5\Leftrightarrow m=3.$

$\min\limits_{(0;+\infty)} f(x)=f(1)=\mathrm{m}-2=3-2=1.$

Câu 38: Hàm số nào dưới đây có giá trị lớn nhất trên tập xác định?

A. $-x^4+x^2+2.$ **B.** $-x^3+2x^2+1.$ **C.** $x^3-3x+1.$ **D.** $x^4-3x^2+1.$

Lời giải

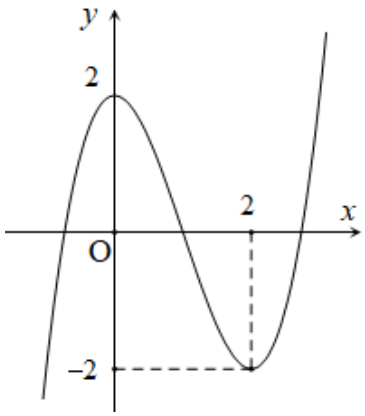
Chọn A

Ta thấy đáp án A là hàm số trùng phương và có hệ số $a<0$ nên có giá trị lớn nhất trên tập xác định.

Các đáp án C, D có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ nên không có giá trị lớn nhất trên tập xác định.

Đáp án B có $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ nên không có giá trị lớn nhất trên tập xác định.

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;2]$. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $m+M=2.$ **B.** $m+M=-2.$ **C.** $m+M=0.$ **D.** $m+M=4.$

Lời giải

Chọn C

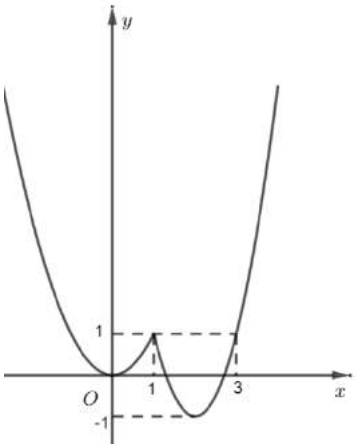
Dựa vào đồ thị, ta thấy trên đoạn $[0;2]$, hàm số đạt:

Giá trị lớn nhất $M=2$ tại $x=0$.

Giá trị nhỏ nhất $m=-2$ tại $x=2$.

Suy ra $m+M=0$.

Câu 40: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0;3]$ bằng



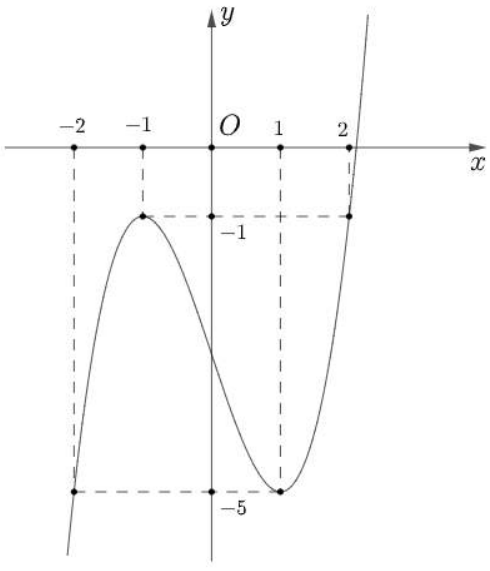
A. 0. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị của hàm số, giá trị nhỏ nhất của hàm số $[0;3]$ bằng -1.

Câu 41: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;2]$.

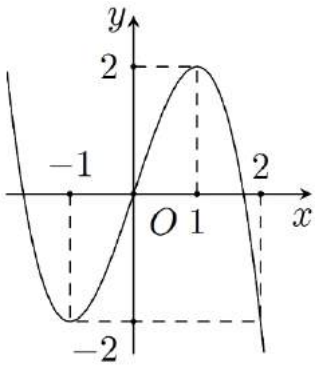


A. $M=0$. **B.** $M=-1$. **C.** $M=1$. **D.** $M=2$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta thấy $\max\limits_{x\in[-2;2]} f(x)=-1$ tại $x=-1$ hoặc $x=2$.

Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[0;2]$ là



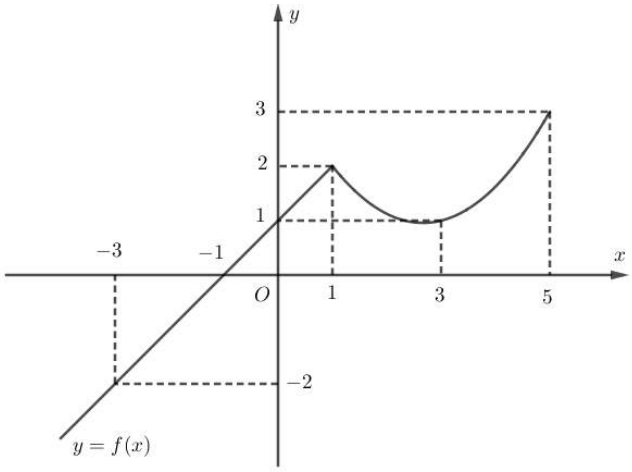
A. -2. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị ta có giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0;2]$ là 2.

Câu 43: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3;5]$ và có đồ thị như hình vẽ. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-3;5]$ bằng



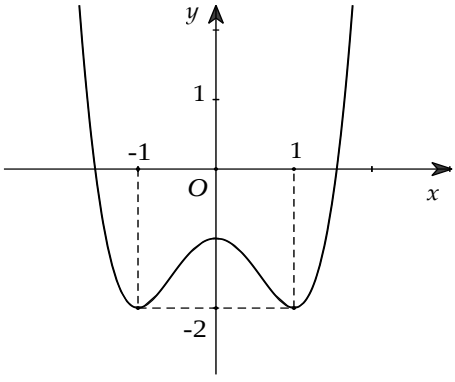
A. 3. **B.** 5. **C.** -3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị hàm số ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-3;5]$ bằng 3 đạt được tại $x=5$.

Câu 44: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình sau



Hàm số đã cho đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(-\infty;0)$ tại điểm

A. $x=0$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-2$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị đã cho, ta có hàm số $y=f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(-\infty;0)$ tại $x=-1$

Câu 45: Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ và $g(x)=x+\dfrac{4}{x^2}$. Trên đoạn $[1;4]$, hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có cùng giá trị nhỏ nhất và đạt tại cùng một điểm. Biết rằng điểm $A(1;4)$ thuộc đồ thị hàm số $f(x)$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[1;4]$.

A. $\max\limits_{[1;4]} f(x)=9$. **B.** $\max\limits_{[1;4]} f(x)=23$. **C.** $\max\limits_{[1;4]} f(x)=11$. **D.** $\max\limits_{[1;4]} f(x)=19$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $g(x)$ liên tục trên $[1;4]$.

Ta có $g'(x)=1-\dfrac{8}{x^3}$; $g'(x)=0\Leftrightarrow x^3=8\Leftrightarrow x=2\in[1;4]$.

$g(1)=5; g(4)=\dfrac{17}{4}; g(2)=3$

$\min\limits_{[1;4]} g(x)=g(2)=3$

Điểm $A(1;4)$ thuộc đồ thị hàm số $f(x)$ nên ta có: $a+b+c=3$ (1)

Ta có $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$\min\limits_{[1;4]} f(x)=f(2)=3\Rightarrow\begin{cases}4a+2b+c=-5\\4a+b=-12\end{cases}$ (2)

Từ (1), (2) ta có hệ $\begin{cases}a+b+c=3\\4a+2b+c=-5\\4a+b=-12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-4\\b=4\\c=3\end{cases}$

Suy ra $f(x)=x^3-4x^2+4x+3$.

Dễ thấy $\max\limits_{[1;4]} f(x)=19$.

Câu 46: Cho hàm số $y=(x+m)^3-3(x+m)+1+n$. Biết hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ và giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;1]$ bằng 4. Tính $m+n$

A. $m+n=0$. **B.** $m+n=2$. **C.** $m+n=-1$. **D.** $m+n=1$.

Lời giải

Chọn A

$y'=3(x+m)^2-3=3(x+m+1)(x+m-1)$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1-m=x_2\\x=-1-m=x_1\end{array}\right.$

Để hàm số nghịch biến trên $(0;2)$ thì $x_1 \le 0 < 2 \le x_2$ hay

$$\begin{cases} 3.y'(0) \le 0 \\ 3.y'(2) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y'(0) \le 0 \\ y'(2) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 - 3 \le 0 \\ 3(2+m)^2 - 3 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 \le 0 \\ (2+m)^2 - 1 \le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le m \le 1 \\ -1 \le 2+m \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le m \le 1 \\ -3 \le m \le -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1 \,(1)$$

Với $m = -1$ thì $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-1;1] \\ x = 2 \notin [-1;1] \end{array} \right.$

Ta có $y(0) = n+3,\ y(1) = n+1,\ y(-1) = n-1 \Rightarrow \max\limits_{[-1;1]} y = n+3 = 4 \Rightarrow n = 1 \,(2)$

Từ (1) vào $(2) \Rightarrow m+n = 0$.

Câu 47: Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + 2\cos x$ trên $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ lần lượt là M và m. Khi đó giá trị của biểu thức $T = 20M - 12m$ tương ứng bằng:

A. $8\sqrt{2}$. **B.** $12\sqrt{3}$. **C.** $6+3\sqrt{2}$. **D.** $6\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) = x + 2\cos x \Rightarrow f'(x) = 1 - 2\sin x$

Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6}$ vì $\left(x \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right] \right)$

Khi đó ta có $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2};\ f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3};\ f(\pi) = \pi - 2 \Rightarrow M = \frac{\pi}{2}; m = \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$

Vậy $T = 20M - 12m = 12\sqrt{3}$.

Câu 48: Biết giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \sqrt{4 - x^2} + m$ là $3\sqrt{2}$. Giá trị của m là

A. $m = 2\sqrt{2}$. **B.** $m = -\sqrt{2}$. **C.** $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $m = \sqrt{2}$.

Lời giải

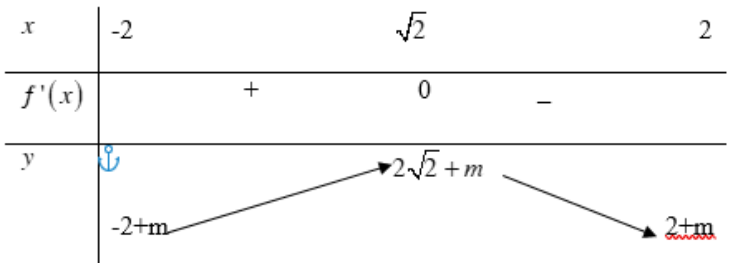
Chọn D

Điều kiện xác định: $-2 \le x \le 2$.

Ta có: $y = x + \sqrt{4 - x^2} + m \Rightarrow y' = 1 + \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = x$.

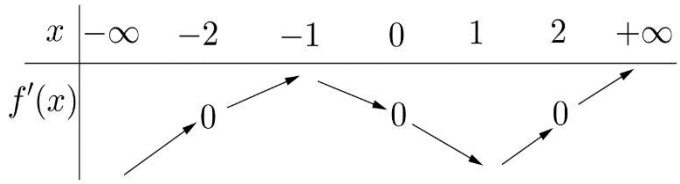
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 4 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên suy ra giá trị lớn nhất của hàm số là $3\sqrt{2}$ khi và chỉ khi $2\sqrt{2}+m=3\sqrt{2}\Leftrightarrow m=\sqrt{2}$.

Câu 49: Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ



Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(2x)-\sin^2 x$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng

A. $f(-1)-\sin^2\frac{1}{2}$. **B.** $f(2)-\sin^2 1$. **C.** $f(0)$. **D.** $f(1)-\sin^2\frac{1}{2}$.

Lời giải

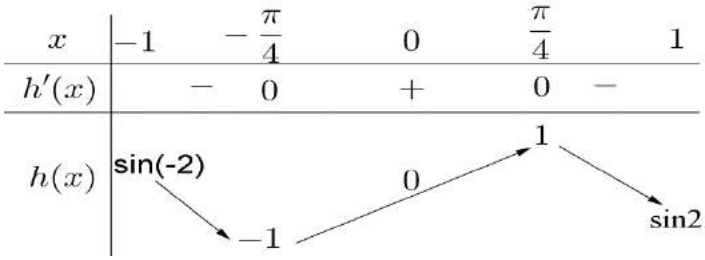
Chọn C

Ta có: $g'(x)=2f'(2x)-2\sin x.\cos x=2f'(2x)-\sin 2x$

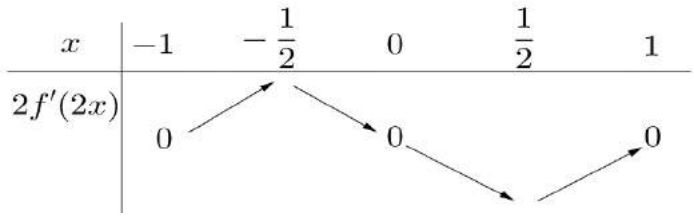
Đặt $h(x)=\sin 2x\Rightarrow h'(x)=2\cos 2x=0\Leftrightarrow\cos 2x=0\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

Với $x\in[-1;1]\Rightarrow x\in\left\{-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right\}$

Bảng biến thiên của hàm số $h(x)$

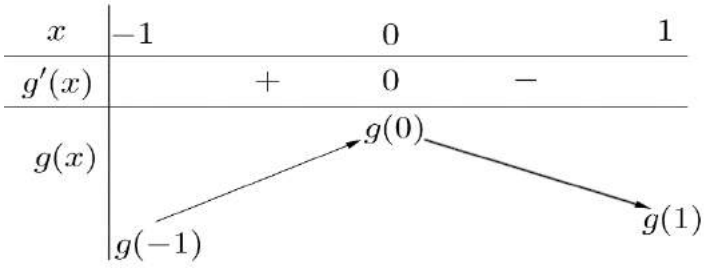


Bảng biến thiên của hàm số $2f'(2x)$



Ta có $g'(x)=0\Rightarrow x=0$

Từ đó ta có bảng biến thiên của $g(x)$



Khi đó $\max\limits_{[-1;1]}g(x)=g(0)=f(0)$

Câu 50: Biết rằng trên đoạn $[-2;4]$ hàm số $f(x)=x^3-3x^2+1$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=a$ và đạt giá trị lớn nhất tại $x=b$. Tính giá trị của a^2+b^2.

A. 4. **B.** 8. **C.** 16. **D.** 20.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=3x^2-6x$. $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

$f(-2)=-19$ $f(4)=17$ $f(0)=1$ $f(2)=-3$

Vậy $\max\limits_{[-2;4]} f(x)=17$ đạt được tại $x=4$ và $\min\limits_{[-2;4]} f(x)=-19$ đạt được tại $x=-2$.

Suy ra $a^2+b^2=(-2)^2+4^2=20$.

Dạng 2: GTLN và GTNN trên một đoạn, khoảng

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn

Bước 1:

Hàm số đã cho $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a;b]$.

Tìm các điểm $x_1,x_2,...,x_n$ trên khoảng $(a;b)$, tại đó $f'(x)=0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.

Bước 2: Tính $f(a),f(x_1),f(x_2),...,f(x_n),f(b)$.

Bước 3: Khi đó: $\max\limits_{[a,b]} f(x)=\max\{f(x_1),f(x_2),...,f(x_n),f(a),f(b)\}$.

$\min\limits_{[a,b]} f(x)=\min\{f(x_1),f(x_2),...,f(x_n),f(a),f(b)\}$.

2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một khoảng

Bước 1: Tính đạo hàm $f'(x)$.

Bước 2: Tìm tất cả các nghiệm $x_i\in(a;b)$ của phương trình $f'(x)=0$ và tất cả các điểm $\alpha_i\in(a;b)$ làm cho $f'(x)$ không xác định.

Bước 3. Tính $A=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$, $B=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$, $f(x_i)$, $f(\alpha_i)$.

Bước 4. So sánh các giá trị tính được và kết luận $M=\max\limits_{(a;b)}f(x)$, $m=\min\limits_{(a;b)}f(x)$.

Nếu giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) là A hoặc B thì ta kết luận không có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất).

Nếu $y=f(x)$ đồng biến trên $[a;b]$ thì $\begin{cases}\min\limits_{[a;b]}f(x)=f(a)\\ \max\limits_{[a;b]}f(x)=f(b)\end{cases}$.

Nếu $y=f(x)$ nghịch biến trên $[a;b]$ thì $\begin{cases}\min\limits_{[a;b]}f(x)=f(b)\\ \max\limits_{[a;b]}f(x)=f(a)\end{cases}$.

Hàm số liên tục trên một khoảng **có thể** không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên khoảng đó.

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ trên $[2;4]$ là:

A. $\underset{[2;4]}{Max}\,y=\dfrac{19}{3}$. **B.** $\underset{[2;4]}{Max}\,y=6$. **C.** $\underset{[2;4]}{Max}\,y=\dfrac{11}{3}$. **D.** $\underset{[2;4]}{Max}\,y=7$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ có $y'=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$ không xác định tại $x=1$.

$y'=0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x-3=0\\ x-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=-1\notin(2;4)\\ x=3\in(2;4)\end{bmatrix}$. Ta có $y(2)=7;\ y(3)=6;\ y(4)=\dfrac{19}{3}$.

Vậy $\underset{[2;4]}{Max}\,y=y(2)=7$.

Câu 2: Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x^2$ trên đoạn $[-2;1]$. Tính giá trị $T=M+m$

A. 2. **B.** -4. **C.** -24. **D.** -20.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=3x^2-6x$; $y'=0\leftrightarrow 3x^2-6x=0\leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in[-2;1] \\ x=2\notin[-2;1] \end{array}\right.$

$y(-2)=-20; y(0)=0; y(1)=-2$.

$M=\max\limits_{[-2;1]} y=0$ tại $x=0$; $m=\min\limits_{[-2;1]} y=-20$ tại $x=-2$. Vậy $T=M+m=20$.

Câu 3: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$ khi đó $M-m$ bằng:

A. 3. **B.** -2. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=\dfrac{-3}{(x-1)^2}<0\Rightarrow$Hàm số luôn nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$

$m=\min\limits_{[2;4]} y=y(4)=3$ và $M=\max\limits_{[2;4]} y=y(2)=5$. Vậy $M-m=5-3=2$.

Câu 4: Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x^2+2$ trên đoạn $[0;4]$ là:

A. 20. **B.** 18. **C.** 0. **D.** 16.

Lời giải

Chọn D

$y'=3x^2-6x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$; $y(0)=2, y(2)=-2, y(4)=18$

$\Rightarrow$GTNN của hàm số là -2, GTLN của hàm số là 18

Vậy tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất là 16.

Câu 5: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{3x-1}{x-3}$ trên $[0;2]$ là

A. -5. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** 5. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=\dfrac{-8}{(x-3)^2}<0, \forall x\in[0;2]$ suy ra $\max\limits_{[0;2]} y=y(0)=\dfrac{1}{3}$.

Câu 6: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-2x^2+x-2$ trên đoạn $[0;2]$ bằng

A. 1. **B.** -2. **C.** 0. **D.** $\dfrac{-50}{27}$.

Lời giải

Chọn C

Xét trên đoạn $[0;2]$: $f'(x)=3x^2-4x+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$.

$f(0)=-2, f(2)=0, f(1)=-2, f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{-50}{27}$. Vậy $\underset{[0;2]}{Max} f(x)=0$.

Câu 7: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\frac{x-2}{x+1}$ trên đoạn $[0;2]$ bằng

A. -3 **B.** 2 **C.** 0 **D.** -2

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y=\frac{x-2}{x+1}$ liên tục trên đoạn đoạn $[0;2]$.

Ta có $y'=\frac{3}{(x+1)^2}>0$ với $\forall x\in[0;2]$ nên hàm số đã cho đồng biến trên đoạn $[0;2]$.

Vậy $\underset{[0;2]}{Max}\, y=y(2)=0$

Câu 8: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-2x^2-7x+1$ trên đoạn $[-2;1]$ bằng

A. -8. **B.** -7. **C.** 5. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=3x^2-4x-7$; $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-4x-7=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=\frac{7}{3}\notin[-2;1]\end{array}\right.$

$y(-2)=-1; y(-1)=5; y(1)=-7.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-2x^2-7x+1$ trên đoạn $[-2;1]$ bằng -7.

Câu 9: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=-x^4+12x^2+3$ trên đoạn $[-2;1]$ bằng

A. 34. **B.** 35. **C.** 33. **D.** 32.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=-4x^3+24x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{6}\notin[-2;1]\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	-2		0		1
y'		$-$	0	$+$	
y	35	↘	3	↗	14

Từ bảng biến thiên ta có giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-2;1]$ bằng 35.

Câu 10: Cho hàm số $y=\left(x^3-3x-m+1\right)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng 4 là

A. -2. **B.** 2. **C.** -4. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = g(x) = x^3 - 3x + 1$ là hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[-1;1]$.

Ta khảo sát hàm số $g(x)$ trên đoạn $[-1;1]$.

Bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $x \in [-1;1]$ thì $t \in [-3;1]$

Bài toán trở thành: Tìm m để hàm số $y = f(t) = (t-m)^2$ có giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-3;1]$ bằng 4.

Ta có $f'(t) = 2(t-m) = 0 \Leftrightarrow t = m$.

Nếu $m \in [-3;1]$ thì $\min\limits_{[-3;1]} f(t) = f(m) = 0$, tức là không tồn tại m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nếu $m > 1$ thì $\min\limits_{[-3;1]} f(t) = f(1) = (1-m)^2 \Leftrightarrow (1-m)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \ (KTM) \\ m = 3 \ (TM) \end{array}\right.$

Nếu $m < -3$ thì $\min\limits_{[-3;1]} f(t) = f(-3) = (-3-m)^2 \Leftrightarrow (-3-m)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -5 \ (nhan) \\ m = -1 \ (loai) \end{array}\right.$

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán: $m = 3; m = -5$, từ đó tổng tất cả các giá trị của m là -2.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ trên đoạn $[0;1]$ lần lượt bằng

A. -1 và 3. **B.** -3 và -1. **C.** 1 và -3. **D.** -1 và -3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=\dfrac{4}{(x+1)^2}>0,\forall x\in[0;1]$.

Do vậy $\max\limits_{[0;1]} y=y(1)=-1$ và $\min\limits_{[0;1]} y=y(0)=-3$.

Câu 2: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x+5$ trên $[2;4]$ là

A. $\min\limits_{[2;4]} y=0$. **B.** $\min\limits_{[2;4]} y=7$. **C.** $\min\limits_{[2;4]} y=5$. **D.** $\min\limits_{[2;4]} y=3$.

Lời giải

Chọn B

Có $y=x^3-3x+5\Rightarrow y'=3x^2-3\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\notin[2;4]\\x=-1\notin[2;4]\end{array}\right.$.

$y(2)=2^3-3.2+5=7; y(4)=4^3-3.4+5=57$.

$\min\limits_{[2;4]} y=7$.

Câu 3: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3-3x$ trên $[0;3]$ bằng

A. 0. **B.** -2. **C.** 18. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y'=3x^2-3$.

$y'=0\Leftrightarrow 3x^2-3=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in[0;3]\\x=-1\notin[0;3]\end{array}\right.$.

Có: $y(0)=0$; $y(1)=-2$; $y(3)=18$ và hàm số đã cho liên tục trên $[0;3]$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3-3x$ trên $[0;3]$ bằng 18.

Câu 4: Giá trị nhỏ nhất cuả hàm số $y=\dfrac{x-4}{x+2}$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

A. -2. **B.** -4. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** -5.

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

Ta có: $y'=\dfrac{6}{(x+2)^2}>0,\forall x\in[-1;2]\Rightarrow$Hàm số đồng biến trên đoạn $[-1;2]$

Vậy $\underset{x\in[-1;2]}{\text{Min}}\, y = y(-1) = -5$

Câu 5: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$ trên đoạn $[0;2]$ là

A. $\min\limits_{x\in[0;2]} y = 0$. **B.** $\min\limits_{x\in[0;2]} y = 2$. **C.** $\min\limits_{x\in[0;2]} y = -1$. **D.** $\min\limits_{x\in[0;2]} y = 1$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$ liên tục trên đoạn $[0;2]$.

Ta có $y' = 4x^3 - 4x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [0;2] \\ x = -1 \notin [0;2] \\ x = 1 \in [0;2] \end{array}\right.$$

$y(1) = 1;\ y(0) = 2;\ y(2) = 10 \Rightarrow \min\limits_{x\in[0;2]} y = 1$.

Câu 6: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 3x$ trên đoạn $[-1;1]$.

A. $m = 0$. **B.** $m = -4$. **C.** $m = -2$. **D.** $m = 4$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 3x^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \Rightarrow m = \min\limits_{[-1;1]} y = y(-1) = -4$.

Câu 7: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 36x$ trên đoạn $\left[2;5\sqrt{3}\right]$ bằng

A. -64. **B.** $48\sqrt{3}$. **C.** $-48\sqrt{3}$. **D.** $-47\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $f(x) = x^3 - 36x$ liên tục trên đoạn $\left[2;5\sqrt{3}\right]$.

Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 36;\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\sqrt{3} \in \left[2;5\sqrt{3}\right] \\ x = -2\sqrt{3} \notin \left[2;5\sqrt{3}\right] \end{array}\right.$

$f(2) = -64;\ f\left(2\sqrt{3}\right) = -48\sqrt{3};\ f\left(5\sqrt{3}\right) = 195\sqrt{3}$.

Vậy $\min\limits_{\left[2;5\sqrt{3}\right]} f(x) = f\left(2\sqrt{3}\right) = -48\sqrt{3}$.

Câu 8: Trên đoạn $[1;6]$, hàm số $y = x + \dfrac{9}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

A. $x = 2$. **B.** $x = 6$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = 3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 1 - \dfrac{9}{x^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$ (vì $x \in [1;6]$).

Khi đó $y(1) = 10$, $y(6) = \dfrac{15}{2}$ và $y(3) = 6$.

Do đó $\min\limits_{[1;6]} y = 6$ tại $x = 3$.

Câu 9: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ trên đoạn $[0;2]$ bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$y = -x^3 + 3x + 1 \Rightarrow y' = -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [0;2] \\ x = -1 \notin [0;2] \end{array}\right.$$

Mặt khác: $y(0) = 1$; $y(1) = 3$; $y(2) = -1$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 3.

Câu 10: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$ trên đoạn $[0;2]$ bằng bao nhiêu?

A. 1. **B.** 0. **C.** -1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 4x^3 - 4x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$.

Mà $x \in [0;2] \Rightarrow x = 0; x = 1$. Khi đó $f(0) = 2$; $f(1) = 1$ và $f(2) = 10$.

Vậy $\min\limits_{[0;2]} f(x) = f(1) = 1$.

Câu 11: Xét hàm số $y = \dfrac{x-1}{2x+1}$ trên $[0;1]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\min\limits_{[0;1]} y = -\dfrac{1}{2}$. **B.** $\max\limits_{[0;1]} y = 0$. **C.** $\max\limits_{[0;1]} y = 1$. **D.** $\min\limits_{[0;1]} y = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = \dfrac{3}{(2x+1)^2} > 0 \ \ \forall x \in [0;1]$ nên hàm số luôn đồng biến trên $[0;1]$.

Hàm số có giá trị lớn nhất trên $[0;1]$ bằng 0 tại $x = 1$.

Câu 12: Gọi m, M là giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{3x+1}{x-2}$ trên $[-1;1]$. Khi đó giá trị của $m + M$ là

A. $m + M = -4$ **B.** $m + M = -\dfrac{10}{3}$ **C.** $m + M = -\dfrac{14}{3}$ **D.** $m + M = \dfrac{2}{3}$

Lời giải

Chọn B

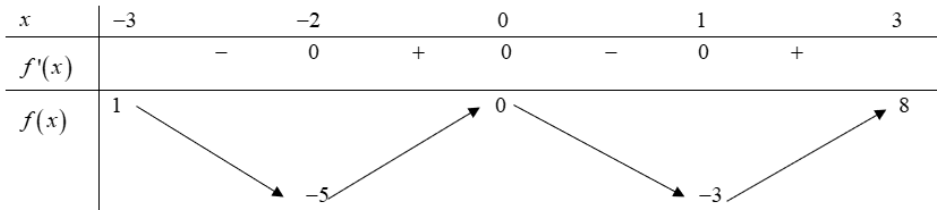
TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Ta có $y' = \dfrac{-7}{(x-2)^2} < 0$ với mọi $x \neq 2$ nên hàm số đã cho luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Do đó $m=\min\limits_{[-1;1]} y=y(1)=-4$ và $M=\max\limits_{[-1;1]} y=y(-1)=\dfrac{2}{3}$

Suy ra $m+M=-4+\dfrac{2}{3}=-\dfrac{10}{3}$

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên.



Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-3;3]$ bằng

A. 1 **B.** 0 **C.** 8 **D.** 3

Lời giải

Chọn C

Câu 14: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+1}$ trên đoạn $[0;2]$ bằng

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** 2. **C.** 3. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=\dfrac{-1}{(x+1)^2}<0, \forall x\in\mathbb{R}$ nên giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+1}$ trên đoạn $[0;2]$ bằng $y(0)=2$.

Câu 15: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$ là

A. $\min\limits_{x\in[0;3]} y=-2$. **B.** $\min\limits_{x\in[0;3]} y=-\dfrac{1}{2}$. **C.** $\min\limits_{x\in[0;3]} y=-3$. **D.** $\min\limits_{x\in[0;3]} y=\dfrac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}>0\ \forall x\in[0;3]\rightarrow \min\limits_{[0;3]} y=y(0)=-2$.

Câu 16: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-6x^2+2$ trên đoạn $[-3;3]$ là

A. 2. **B.** 25. **C.** 17. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=3x^2-12x\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in(-3;3)\\x=4\notin(-3;3)\end{array}\right.$.

Khi đó $f(-3)=-79; f(0)=2; f(3)=-25$.

Vậy $\max\limits_{[-3;3]} f(x)=2$.

Câu 17: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+2}$ trên đoạn $[0;2]$ là:

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ nên nó xác định và liên tục trên đoạn $[0;2]$.

$y'=\dfrac{3}{(x+2)^2}>0,\forall x\in D$ nên hàm số đồng biến trên đoạn $[0;2]$.

Suy ra $\max\limits_{[0;2]} y=y(2)=\dfrac{1}{4}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+2}$ trên đoạn $[0;2]$ là $\dfrac{1}{4}$.

Câu 18: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ trên đoạn $[0;2]$

A. 2.. **B.** -3. **C.** -2.. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định khi $x\neq -1$

Ta có $y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}>0$ với mọi $x\neq -1\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1),(-1;+\infty)$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $[0;2]\Rightarrow \min\limits_{[0;2]} y=y(0)=-2$.

Câu 19: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3-3x+5$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{3}{2}\right]$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 7. **D.** $\dfrac{31}{8}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=3x^2-3\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in\left(0;\dfrac{3}{2}\right)\\ x=-1\notin\left(0;\dfrac{3}{2}\right)\end{array}\right.$.

$y(0)=5; y(1)=3; y\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{31}{8}$. Vậy $\max\limits_{\left[0;\frac{3}{5}\right]} y=5$.

Câu 20: Giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=x^3+6x^2-3$ trên đoạn $[-2;2]$ là

A. $m=29$. **B.** $m=13$. **C.** $m=-3$. **D.** $m=-4$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y=x^3+6x^2-3$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\Rightarrow$ hàm số liên tục trên $[-2;2]$.

$y' = 3x^2 + 12x$. $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-2;2] \\ x = -4 \notin [-2;2] \end{array}\right.$.

Ta có: $y(-2) = 13$; $y(0) = -3$; $y(2) = 29$. Vậy $\min\limits_{[-2;2]} y = y(0) = -3 = m$.

Câu 21: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 3$ trên đoạn $\left[-3; \frac{3}{2}\right]$ là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = x^3 - 3x + 3$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số liên tục trên $\left[-3; \frac{3}{2}\right]$.

$y' = 3x^2 - 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \in \left[-3; \frac{3}{2}\right] \\ x = 1 \in \left[-3; \frac{3}{2}\right] \end{array}\right.$.

Ta có: $y(-3) = -15$; $y(-1) = 5$; $y(1) = 1$; $y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{8}$. Vậy $\max\limits_{\left[-3; \frac{3}{2}\right]} y = y(-1) = 5$.

Câu 22: Hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$ trên đoạn $[-3;0]$ có giá trị lớn nhất M, giá trị nhỏ nhất m. Tính giá trị của $M + m$.

A. -6. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 16.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số liên tục trên $[-3;0]$.

$y' = -3x^2 + 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \in [-3;0] \\ x = 1 \notin [-3;0] \end{array}\right.$.

Ta có: $y(-3) = 16$; $y(-1) = -4$; $y(0) = -2$.

Vậy $\min\limits_{[-3;0]} y = y(-1) = -4 = m$; $\max\limits_{[-3;0]} y = y(-3) = 16 = M$.

Vậy $M + m = 12$.

Câu 23: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng

A. 18. **B.** 2. **C.** -2. **D.** -18.

Lời giải

Chọn D

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $[-3;3]$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1\,(N) \\ x = -1\,(N) \end{array}\right.$.

$f(-1) = 2, f(1) = -2; f(-3) = -18; f(3) = 18$.

Vậy $\underset{[-3;3]}{Min}\, f(x) = f(-3) = -18$.

Câu 24: Giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^3 - 3x^2$ trên đoạn $[-1;1]$ là:

A. $m = 0$. **B.** $m = -4$. **C.** $m = -2$. **D.** $m = 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-1;1] \\ x = 2 \notin [-1;1] \end{array}\right.$.

Tính: $f(1) = -2; f(-1) = -4; f(0) = 0$. Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $m = -4$.

Câu 25: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$ trên đoạn $[-3;2]$ bằng

A. 0. **B.** 11. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Đặt $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$. Ta có: $f'(x) = 4x^3 - 4x$.

Vậy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-3;2] \\ x = -1 \in [-3;2] \\ x = 1 \in [-3;2] \end{array}\right.$.

Ta có $f(0) = 3$; $f(-1) = 2$; $f(1) = 2$; $f(-3) = 66$; $f(2) = 11$.

Suy ra: $\min\limits_{[-3;2]} f(x) = 2$ khi $x = \pm 1$.

Câu 26: Cho hàm số $y = 2x^3 - 2x^2 + 7x + 1$. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;0]$ lần lượt là M và m. Giá trị của $M + m$ là

A. -10. **B.** 1. **C.** -11. **D.** -9.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 6x^2 - 4x + 7 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 4x + 7 = 0$ (vô nghiệm).

Khi đó $y(-1) = -10$, $y(0) = 1$ do vậy $M = 1$ và $m = -10$.

Vậy $M + m = -9$.

Câu 27: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x\sqrt{16 - x^2}$. Tính $M + m$

A. $8 - \sqrt{8}$. **B.** $\sqrt{8}$. **C.** 0. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện xác định $-4 \le x \le x$.

Đạo hàm $y' = \sqrt{16 - x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = \dfrac{16 - 2x^2}{\sqrt{16 - x^2}}$.

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow 16 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{8}$

Các giá trị $y(-4) = y(4) = 0$; $y(-\sqrt{8}) = -8$; $y(\sqrt{8}) = 8$ do đó $M = 8, m = -8$.

Vậy $M + m = 0$.

Câu 28: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 0.

A. $m=0$. **B.** $m=6$. **C.** $m=4$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn C

$y=-x^3-3x^2+m \Rightarrow y'=-3x^2-6x;\ y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \quad (\text{n}) \\ x=-2 \ (\text{l}) \end{array}\right.$

$f(0)=m, f(-1)=m-2, f(1)=m-4 \Rightarrow \min\limits_{[-1;1]} y = f(1)=m-4$.

Do đó $m-4=0 \Leftrightarrow m=4$.

Câu 29: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3+3x^2-9x+8$ trên đoạn $[-2;2]$.

A. $\max\limits_{[-2;2]} y=3$. **B.** $\max\limits_{[-2;2]} y=34$. **C.** $\max\limits_{[-2;2]} y=10$. **D.** $\max\limits_{[-2;2]} y=30$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=3x^2+6x-9;\ y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in(-2;2) \\ x=-3\notin(-2;2) \end{array}\right.$.

Vì $y(-2)=30;\ y(1)=3;\ y(2)=10$ nên $\max\limits_{[-2;2]} y=30$.

Câu 30: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-8x^2+16x-9$ trên đoạn $[1;3]$

A. $\max\limits_{x\in[1;3]} f(x)=5$. **B.** $\max\limits_{x\in[1;3]} f(x)=\dfrac{13}{27}$. **C.** $\max\limits_{x\in[1;3]} f(x)=-6$. **D.** $\max\limits_{x\in[1;3]} f(x)=0$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số đã cho xác định trên đoạn $[1;3]$.

Ta có $f(x)=x^3-8x^2+16x-9 \Rightarrow f'(x)=3x^2-16x+16$.

Nên $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-16x+16=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4\notin[1;3] \\ x=\dfrac{4}{3}\in[1;3] \end{array}\right.$.

Khi đó $f(1)=0; f(3)=-6; f\left(\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{13}{27}$.

Vậy $\max\limits_{x\in[1;3]} f(x)=\dfrac{13}{27}$.

Câu 31: Trên đoạn $[-4;-1]$, hàm số $y=x+\dfrac{9}{x-1}$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. -5. **B.** $-\dfrac{29}{5}$. **C.** $-\dfrac{11}{2}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có $y'=1-\dfrac{9}{(x-1)^2} \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow 1-\dfrac{9}{(x-1)^2}=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4\notin[-4;-1] \\ x=-2\in[-4;-1] \end{array}\right.$.

Ta thấy $y(-4)=-\frac{29}{5}$; $y(-2)=-5$; $y(-1)=-\frac{11}{2}$.

Vậy $\max\limits_{[-4;-1]} y=y(-2)=-5$.

Câu 32: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-2x^2+x-2$ trên $[0;2]$ bằng

A. 1. **B.** -2. **C.** 0. **D.** $-\frac{50}{27}$.

Lời giải

Chọn C

$$f'(x)=3x^2-4x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\frac{1}{3}\end{array}\right.$$

$f(0)=-2$; $f(2)=0$; $f(1)=-2$; $f\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{50}{27}$.

Vậy $\max\limits_{[0;2]} f(x)=f(2)=0$.

Câu 33: Gọi m là giá trị nhỏ nhất và M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=2x^3+3x^2-1$ trên đoạn $\left[-2;-\frac{1}{2}\right]$. Khi đó giá trị của $M-m$ bằng

A. -5. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $f(x)=2x^3+3x^2-1$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[-2;-\frac{1}{2}\right]$.

Ta có

$$f'(x)=6x^2+6x;\ f'(x)=0\Leftrightarrow 6x^2+6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\notin\left[-2;-\frac{1}{2}\right]\\x=-1\in\left[-2;-\frac{1}{2}\right]\end{array}\right.$$

$f(-2)=-5$; $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$; $f(-1)=0$

Suy ra $m=\underset{\left[-2;-\frac{1}{2}\right]}{Min} f(x)=-5$, $M=\underset{\left[-2;-\frac{1}{2}\right]}{Max} f(x)=0$

Vậy $M-m=0-(-5)=5$.

Câu 34: Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x+\frac{4}{x}$ trên đoạn $[1;3]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $m+M=\frac{13}{3}$. **B.** $m+M=5$. **C.** $m+M=9$. **D.** $m+M=4$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Tính đạo hàm, $\forall x\neq 0,\ f'(x)=1-\dfrac{4}{x^2}=\dfrac{x^2-4}{x^2}$. Suy ra $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\in[1;3]\\x=-2\notin[1;3]\end{array}\right.$.

Ta có $f(1)=5;\ f(2)=4;\ f(3)=\dfrac{13}{3}$. Vậy $m=4;M=5\Rightarrow m+M=9$.

Câu 35: Gọi m,M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm số $y=x-\ln x$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2};e\right]$. Giá trị của $M-m$ là:

A. $e-\ln 2-\dfrac{1}{2}$. **B.** $e-1$. **C.** $\ln 2-\dfrac{1}{2}$. **D.** $e-2$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=(0;+\infty)$

Ta có $y'=1-\dfrac{1}{x}$. Xét $y'=0\Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{x}=0\Leftrightarrow x=1\in\left[\dfrac{1}{2};e\right]$

Xét $y\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}+\ln 2,\ y(1)=1, y(e)=e-1$

Do đó $m=\min\limits_{\left[\frac{1}{2};e\right]}y=1$ và $M=\max\limits_{\left[\frac{1}{2};e\right]}y=e-1$

Suy ra $M-m=e-1-1=e-2$.

Câu 36: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-2)$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;4]$ bằng

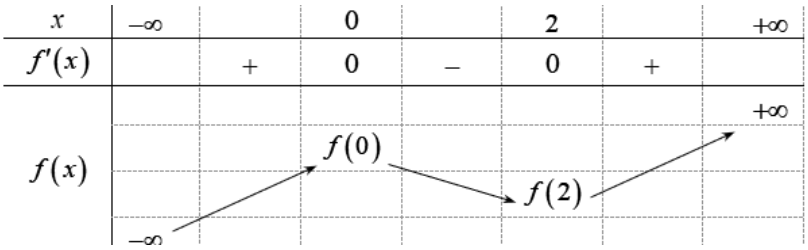
A. $f(2)$. **B.** $f(1)$. **C.** $f(4)$. **D.** $f(3)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[1;4]$ là $f(2)$.

Câu 37: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2x^3-5x^2+4x-2$ trên đoạn $[0;2]$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** $-\dfrac{74}{27}$. **D.** -1.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[0;2]$.

$f'(x)=6x^2-10x+4$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 6x^2-10x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in[0;2] \\ x=\dfrac{2}{3}\in[0;2] \end{array}\right.$.

$y(0)=-2;\ y(1)=-1;\ y\left(\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{26}{27};\ y(2)=2$.

Vậy $\min\limits_{[0;2]} f(x)=y(0)=-2$.

Câu 38: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{4}{x}+x+1$ trên đoạn $[1;3]$. Tính $M-m$.

A. 9. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y'=-\dfrac{4}{x^2}+1=\dfrac{x^2-4}{x^2}$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\in[1;3] \\ x=-2\notin[1;3] \end{array}\right.$

Có: $y(1)=6,\ y(2)=5,\ y(3)=\dfrac{16}{3} \Rightarrow M=6, m=5 \Rightarrow M-m=1.$

Câu 39: Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$ trên đoạn $[0;4]$. Tính tổng $S=M+m$.

A. $S=\dfrac{10}{3}$. **B.** $S=4$. **C.** $S=1$. **D.** $S=\dfrac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$y'=x^2-4x+3$

Cho $y'=x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$\frac{7}{3}$	↘	1	↗	$+\infty$

Xét hàm số trên $[0;4]$, ta có: $f(0)=1 và\ f(4)=\dfrac{7}{3}$

Kết hợp với BBT, $M=\dfrac{7}{3} và\ m=1$ nên $S=M+m=\dfrac{10}{3}$

Câu 40: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x-2}$ trên đoạn $[3;4]$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y'=\dfrac{-1}{(x-2)^2}<0 \quad \forall x\neq 2$

Suy ra hàm số nghịch biến trên $[3;4]$

Do đó giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x-2}$ trên đoạn $[3;4]$ bằng $y(3)=\dfrac{3-1}{3-2}=2$

Câu 41: Trên đoạn $\left[\dfrac{1}{3};\dfrac{3}{2}\right]$, hàm số $y=2x^3+\dfrac{1}{2x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

A. $x=\dfrac{1}{2}$. **B.** $x=\dfrac{3}{2}$. **C.** $x=\dfrac{1}{3}$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$$y'=8x^2-\frac{1}{2x^2},\ y'=0\Leftrightarrow 8x^2-\frac{1}{2x^2}=0\Leftrightarrow 16x^4=1\Leftrightarrow x^4=\frac{1}{16}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\in\left[\dfrac{1}{3};\dfrac{3}{2}\right]\\ x=-\dfrac{1}{2}\notin\left[\dfrac{1}{3};\dfrac{3}{2}\right]\end{array}\right.$$

Ta có: $y\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{85}{54},\ y\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{4},\ y\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{85}{12}\Rightarrow \max\limits_{\left[\frac{1}{3};\frac{3}{2}\right]} y=y\left(\dfrac{1}{2}\right).$

Câu 42: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x+5$ trên đoạn $[2;4]$ là

A. $\min\limits_{[2;4]} y=3.$ **B.** $\min\limits_{[2;4]} y=0.$ **C.** $\min\limits_{[2;4]} y=5.$ **D.** $\min\limits_{[2;4]} y=7.$

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y=x^3-3x+5$ trên đoạn $[2;4]$.

Ta có $y'=3x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\notin[2;4]\\ x=1\notin[2;4]\end{array}\right.$.

$y(2)=7.\ ;\ y(4)=57.$

Vậy $\min\limits_{[2;4]} y=7\Leftrightarrow x=2.$

Câu 43: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=-x^4+2x^2+2021$ trên $[0;3]$ là

A. 1958. **B.** 2019. **C.** 2022. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = -4x^3 + 4x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \notin (0;3) \\ x = 1 \in (0;3) \\ x = -1 \notin (0;3) \end{array}\right.$ Và: $y(0) = 2021;\ y(1) = 2022;\ y(3) = 1958$.

Vậy: $\max\limits_{[0;3]} y = y(1) = 2022$

Câu 44: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên đoạn $[-4;4]$. Khi đó $M + m$ bằng bao nhiêu?

A. -1. **B.** 48. **C.** 11. **D.** 55.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 3x^2 - 6x - 9$.

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1. \end{array}\right.$

Ta tính các giá trị sau $y(-4) = -41$, $y(-1) = 40$, $y(3) = 8$, $y(4) = 15$.

Như vậy, $M = y(-1) = 40$ và $m = y(-4) = -41$ suy ra $M + m = -1$.

Câu 45: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[2;4]$.

Tìm giá trịcủa $M + m$.

A. 5. **B.** 13. **C.** $\dfrac{37}{3}$. **D.** $\dfrac{43}{3}$.

Lờigiải

Chọn B

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên tập hợp $D = [2;4]$.

$f'(x) = \dfrac{2x(x-1) - x^2 - 3}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \notin D \\ x = 3 \in D \end{array}\right.$.

Ta có $f(2) = 7$, $f(3) = 6$, $f(4) = \dfrac{19}{3}$.

Nên ta được $M = 7$ khi $x = 2$ và $m = 6$ khi $x = 3$.

Vậy $M + m = 13$.

Câu 46: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$ trên đoạn $[1;3]$ bằng

A. $\dfrac{2}{5}$. **B.** 2. **C.** 0. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$ có $f'(x) = \dfrac{3}{(x+2)^2} > 0 \forall x \in (1;3)$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(1;3)$.

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số: $\underset{[1;3]}{Max}\, f(x) = f(3) = \frac{2}{5}$.

Câu 47: Trên đoạn $[0;2]$, hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm nào sau đây?

A. $x = 2$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = 0$. **D.** $x = 9$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 4x$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1. \end{array}\right.$$

Ta chỉ xét hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;2]$ nên $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$

$f(0) = 1;\ f(1) = 0;\ f(2) = 9$.

Hàm số liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[0;2]$ suy ra $\max\limits_{[0;2]} f(x) = 9$ khi $x = 2$.

Câu 48: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x+3)(x-2)^3(x^2-4)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f(-2) > \max\{f(-3); f(2)\}$. **B.** $f(-3) < f(-2) < f(2)$

C. $f(-2) < \min\{f(-3); f(2)\}$ **D.** $f(-3) > f(-2) > f(2)$

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$f'(x) = (x+3)(x+2)^3(x^2-4) = (x+3)(x+2)^3(x-2)(x+2) = (x+3)(x+2)^4(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Xét bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-3;2]$:

x	-3		-2		2
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$f(-3)$	↘	$f(-2)$	↘	$f(2)$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f(-3) > f(-2) > f(2)$

Câu 49: Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$, biết $\min\limits_{[1;3]} f(x) + \max\limits_{[1;3]} f(x) = 6$ khi $m = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. giá trị của $a - 3b$ bằng

A. 13. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 15.

Lời giải

Chọn B

Với điều kiện: $x \neq -1$, ta có $f'(x) = \dfrac{1-m}{(x+1)^2}$.

Để hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[1;3]$ thì $m \neq 1$.

Khi đó:

$\min\limits_{[1;3]} f(x) + \max\limits_{[1;3]} f(x) = 6 \Leftrightarrow f(1) + f(3) = 6 \Leftrightarrow \dfrac{1+m}{2} + \dfrac{3+m}{4} = 6 \Leftrightarrow m = \dfrac{19}{3}$ (tmđk).

Suy ra $a = 19, b = 3$ và $a - 3b = 19 - 3.3 = 10$.

Câu 50: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{2x+14} + \sqrt{5-x}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = -7$. **B.** Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng $2\sqrt{6}$.

C. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 1$. **D.** Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = [-7;5]$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+14}} - \dfrac{1}{2\sqrt{5-x}}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+14} = 2\sqrt{5-x} \Leftrightarrow x = 1(n)$.

$f(1) = 16$; $f(-7) = 2\sqrt{3}$; $f(5) = 2\sqrt{6}$.

$\Rightarrow \max\limits_{[-7;5]} f(x) = 16$ tại $x = 1$ và $\min\limits_{[-7;5]} f(x) = 2\sqrt{3}$ tại $x = -7$.

Vậy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt{3}$ là mệnh đề đúng.

Câu 51: Trên đoạn $[2;4]$ hàm số $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm

A. $x = \dfrac{33}{2}$. **B.** $x = 4$. **C.** $x = 5$. **D.** $x = 2$.

Lời giải

Chọn B

Xét $y' = 2x - \dfrac{2}{x^2}$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 2x - \dfrac{2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \notin [2;4]$

$f(2) = 5$; $f(4) = \dfrac{33}{2}$

Vậy hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 4$.

Câu 52: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng

A. 17. **B.** -15. **C.** 15. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \in [-2;2] \\ x = 3 \notin [-2;2] \end{array}\right.$.

$y(2) = -12$; $y(-2) = 8$; $y(-1) = 15$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng 15.

Câu 53: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-x^3+3x-1$ trên đoạn $[-2;0]$. Giá trị của $2M+m$ bằng

A. -1. **B.** -5. **C.** 0. **D.** -2.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y=-x^3+3x-1$ ta có $y'=-3x^2+3; y'=0\Leftrightarrow x=\pm 1$.

Xét trên đoạn $[-2;0]$ ta có $y(-2)=1; y(0)=-1; y(-1)=-3$ nên $M=1; m=-3\Rightarrow 2M+m=-1$.

Câu 54: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-24x^2-4$ trên đoạn $[0;19]$ bằng

A. -144. **B.** -150. **C.** -148. **D.** -149.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$$y'=4x^3-48x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\notin(0;19)\\ x=\sqrt{12}\in(0;19)\\ x=-\sqrt{12}\notin(0;19)\end{array}\right.$$

$y(0)=-4; y(\sqrt{12})=-148; y(19)=121653$.

Vậy $\min\limits_{[0;19]} y=-148$ tại $x=\sqrt{12}$.

Câu 55: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2+1$ trên đoạn $[1;2]$. Giá trị $M-m$ bằng

A. 2. **B.** -2. **C.** 4. **D.** -4.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x)$ trên đoạn $[1;2]$.

Ta có: $f'(x)=3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0(l)\\ x=2\end{array}\right.$.

$f(1)=-1, f(2)=-3$. Suy ra: $M=-1, m=-3$.

Vậy $M-m=-1-(-3)=2$.

Câu 56: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x-m^2}{x+1}$, với m là tham số. Gọi $m_1, m_2 (m_1<m_2)$ là các giá trị của tham số m thỏa mãn $2\max\limits_{[0;2]} f(x)-\min\limits_{[0;2]} f(x)=8$. Tổng $2m_1+3m_2$ bằng

A. 1. **B.** -2. **C.** 4. **D.** -1.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x)=\dfrac{2+m^2}{(x+1)^2}>0, \forall x\in[0;2]$.

$\Rightarrow \underset{[0;2]}{Min} f(x) = f(0) = -m^2; \underset{[0;2]}{Max} f(x) = f(2) = \dfrac{4-m^2}{3}$

Do đó: $2\max\limits_{[0;2]} f(x) - \min\limits_{[0;2]} f(x) = 8 \Leftrightarrow 2\left(\dfrac{4-m^2}{3}\right) + m^2 = 8 \Leftrightarrow m^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-4 \\ m=4 \end{array}\right.$

Vậy $2m_1 + 3m_2 = 2.(-4) + 3.4 = 4$.

Câu 57: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{3}{4}x^4 - 2x^2 + 1$ trên đoạn $[0;2]$, khi đó tích $M.m$ bằng:

A. 5. **B.** $\dfrac{1}{9}$. **C.** $\dfrac{-5}{3}$. **D.** $\dfrac{-1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x) = 3x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \ (n) \\ x = 0 \ (n) \\ x = \dfrac{-2\sqrt{3}}{3} \ (l) \end{array}\right.$, khi đó $\left\{\begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{-1}{3} \\ f(2) = 5 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \max\limits_{x\in[0;2]} f(x) = 5 \\ \min\limits_{x\in[0;2]} f(x) = \dfrac{-1}{3} \end{array}\right.$.

Câu 58: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ trên đoạn $[-1;2]$. Tỉ số $\dfrac{M}{m}$ bằng

A. $-\dfrac{6}{5}$. **B.** -3. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** -2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 6x^2 + 6x - 12$. Nghiệm của đạo hàm trên đoạn $[-1;2]$ là $x = 1$.

Vì $y(-1) = 15$, $y(1) = -5$ và $y(2) = 6$. Suy ra $M = 15$ và $m = -5$, suy ra tỉ số $\dfrac{M}{m} = -3$.

Câu 59: Tổng giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = (x-6)\sqrt{x^2+4}$ trên đoạn $[0;3]$ có dạng $a - b\sqrt{c}$ với a là số nguyên, b là số nguyên dương và c là số nguyên tố.Tính $S = a + b + c$.

A. 5. **B.** -22. **C.** -2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Suy ra: Hàm số liên tục và xác định trên $[0;3]$

$$f'(x) = \sqrt{x^2+4} + (x-6)\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{x^2+4+x^2-6x}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{2x^2-6x+4}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-6x+4}{\sqrt{x^2+4}} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \in [0;3] \\ x = 1 \in [0;3] \end{array}\right.$$

Ta có:

$f(0)=-12$; $f(1)=-5\sqrt{5}$; $f(2)=-8\sqrt{2}$; $f(3)=-3\sqrt{13}$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=(x-6)\sqrt{x^2+4}$ trên đoạn $[0;3]$ là $M=-3\sqrt{13}$ tại $x=3$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=(x-6)\sqrt{x^2+4}$ trên đoạn $[0;3]$ là $m=-12$ tại $x=-12$.

Khi đó: $M+m=-12-3\sqrt{13} \Rightarrow \begin{cases} a=-12 \\ b=3 \\ c=13 \end{cases} \Rightarrow a+b+c=4$.

Câu 60: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=-x(x-2)^2(x-3), \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0;4]$ bằng

A. $f(2)$. **B.** $f(3)$. **C.** $f(4)$. **D.** $f(0)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=-x(x-2)^2(x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $[0;4]$

x	0		2		3		4
$f'(x)$	0	+	0	+	0		−
$f(x)$	$f(0)$	↗		↗	$f(3)$	↘	$f(4)$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0;4]$ bằng $f(3)$.

Câu 61: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2+x+3}{x-2}$ trên $[-2;1]$. Giá trị của $M+m$ bằng

A. -6. **B.** $\dfrac{-9}{4}$. **C.** $\dfrac{-25}{4}$. **D.** -5.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

Ta có $y'=\dfrac{(2x+1)(x-2)-\left(x^2+x+3\right)}{x-2}=\dfrac{x^2-4x-5}{x-2}=\dfrac{(x+1)(x-5)}{x-2}$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \in [-2;1] \\ x=5 \notin [-2;1] \end{array}\right.$.

$f(-2)=\dfrac{-5}{4}$; $f(1)=-5$; $f(-1)=-1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M=-1 \\ m=-5 \end{array}\right.$

Suy ra $M+m=-6$.

Câu 62: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-1)^2(x-2)$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(x)+\frac{1}{3}x^3-x-2$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

A. $f(2)-\frac{4}{3}$. **B.** $f(1)-\frac{8}{3}$. **C.** $f(0)-2$. **D.** $f(-1)-\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=f'(x)+x^2-1$.

Khi đó: $g'(x)=0\Leftrightarrow(x+1)(x-1)^2(x-2)+x^2-1=0\Leftrightarrow(x^2-1)(x^2-3x+3)=0\Leftrightarrow x=\pm1$.

Do phương trình $x^2-3x+3=0$ vô nghiệm.

Bảng biến thiên:

x	-1		1		2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	$g(1)$	↗	

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=1$ và GTNN bằng $g(1)=f(1)-\frac{8}{3}$.

Câu 63: Cho hàm số $y=\frac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực). Gọi m_0 là giá trị của m thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]}y=3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m_0<-1$. **B.** $m_0>4$. **C.** $1\le m_0<3$. **D.** $3<m_0\le4$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=\frac{-m-1}{(x-1)^2}$. Với $x\neq1$.

Nếu $-m-1>0\Leftrightarrow m<-1$

$\Rightarrow y'>0\Rightarrow$ hàm số đã cho đồng biến trên $[2;4]\Rightarrow\min\limits_{[2;4]}y=y(2)=m+2$.

Theo giả thiết: $m+2=3\Leftrightarrow m=1$(loại).

Nếu $-m-1<0\Leftrightarrow m>-1$

$\Rightarrow y'<0\Rightarrow$ hàm số đã cho nghịch biến trên $[2;4]\Rightarrow\min\limits_{[2;4]}y=y(4)=\frac{4+m}{3}$.

Theo giả thiết: $\frac{m+4}{3}=3\Leftrightarrow m=5$.

Vậy $m_0=5$..

Câu 64: Cho hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)+e^x$ trên đoạn $[0;1]$ bằng

A. $f(1)$. **B.** $f(1)+e$. **C.** $f(0)+1$. **D.** $f(0)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = f'(x) + e^x > 0; \forall x \in \mathbb{R}$.

Khi đó: $y(0) = f(0) + 1$; $y(1) = f(1) + e$.

Vậy $\min\limits_{[0;1]} y = f(0) + 1$.

Câu 65: Cho hàm số $f(x) = 10^x + x$ và hàm số $g(x) = x^3 - mx^2 + (m^2+1)x - 2$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $g(x + f(x))$ trên đoạn $[0;1]$. Khi M đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của tham số m bằng

A. $\frac{21}{2}$. **B.** 6. **C.** 21. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = x + f(x)$ vì $x \in [0;1] \Rightarrow t \in [1;12]$.

Xét $g(t) = t^3 - mt^2 + (m^2+1)t - 2$ trên $[1;12]$

$\Rightarrow g'(t) = 3t^2 - 2mt + m^2 + 1$ có $\Delta' = m^2 - 3(m^2+1) = -2m^2 - 3 < 0 \ \forall m$.

$\Rightarrow g'(t) > 0 \forall t \in [1;12] \Rightarrow y = g(t)$ đồng biến trên $[1;12]$.

Vậy $M = \max\limits_{t\in[1;12]} g(t) = g(12) = 12m^2 - 144m + 1738$.

$\Rightarrow M$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $m = \frac{144}{2.12} = 6$.

Câu 66: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng 1.

A. $m = 20$. **B.** $m = 19$. **C.** $m = 18$. **D.** $m = 21$.

Lời giải

Chọn D

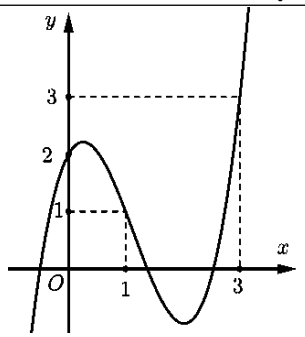
Hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$ liên tục trên đoạn $[-1;2]$ và $y' = -3x^2 - 6x$

Ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-1;2] \\ x = -2 \notin [-1;2] \end{array}\right.$

$y(-1) = m - 2; y(0) = m; y(2) = m - 20$

Suy ra: $\min\limits_{x\in[-1;2]} y = 1 \Leftrightarrow m - 20 = 1 \Leftrightarrow m = 21$.

Câu 67: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Trên $[-2;4]$, gọi x_0 là điểm mà tại đó hàm số $g(x) = f\left(\frac{x}{2} + 1\right) - \ln(x^2 + 8x + 16)$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó x_0 thuộc khoảng nào?



A. $\left(\frac{1}{2};2\right)$ **B.** $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ **C.** $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$ **D.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$

Lời giải

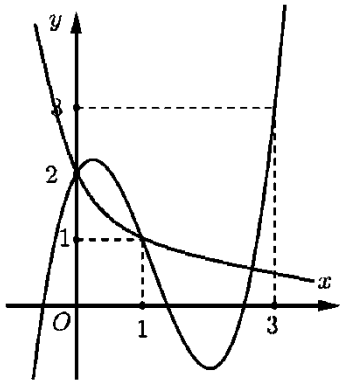
Chọn B

Ta có: $g'(x)=\frac{1}{2}f'\left(\frac{x}{2}+1\right)-\frac{2x+8}{x^2+8x+16}=\frac{1}{2}f'\left(\frac{x}{2}+1\right)-\frac{2}{x+4}$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow f'\left(\frac{x}{2}+1\right)=\frac{4}{x+4}$ (1)

Đặt $t=\frac{x}{2}+1$, $(t\in[0;3])$; khi đó: $(1)\Leftrightarrow f'(t)=\frac{2}{t+1}$.

Ta có đồ thị biểu diễn sự tương giao của hai đồ thị là:



Dựa vào đồ thị ta có GTLN của $g(x)$ là tại $g(1)$ hoặc $g(3)$.

Ta thấy: $\int_1^a\left[\frac{2}{t+1}-f'(t)\right]dt>\int_a^3\left[f'(t)-\frac{2}{t+1}\right]dt$

$\Leftrightarrow\left(2\ln|t+1|-f(t)\right)\Big|_1^a>\left(f(t)-2\ln|t+1|\right)\Big|_a^3$

$\Leftrightarrow 2\ln(a+1)-f(a)-2\ln 2+f(1)>f(3)-4\ln 2-f(a)+2\ln(a+1)$

$\Leftrightarrow f(1)-f(3)+2\ln 2>0$ (*)

Xét $g(x)=f\left(\frac{x}{2}+1\right)-\ln\left(x^2+8x+16\right)$, khi đó:

$g(1)=f(1)-4\ln 2$.

$g(3)=f(3)-8\ln 2$.

$\Rightarrow g(1)-g(3)=f(1)-f(3)+4\ln 2$, từ (*) ta suy ra $\Rightarrow g(1)-g(3)>0\Leftrightarrow g(1)>g(3)$.

Vậy hàm số đã cho đạt GTLN tại $t=1\Rightarrow x=0$.

Câu 68: Cho hàm số $y=e^x\left(x^2-3\right)$, gọi $M=\frac{a}{e^b}\left(a\in\mathbb{N},b\in\mathbb{N}\right)$ là giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $\left[-5;-2\right]$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b$?

A. 27. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 17.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y'=e^x\left(x^2+2\text{x}-3\right)$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=1(L)\end{array}\right.$

Ta có $y(-5)=\frac{22}{e^5};y(-3)=\frac{6}{e^3};y(-2)=\frac{1}{e^2}$

Khi đó $\max\limits_{[-5;-2]}y=\frac{6}{e^3}\Rightarrow a=6;b=3\Rightarrow a+b=9$.

Câu 69: Cho hàm số $y=ax^3+bx+c\left(a\neq0\right)$, biết $\min\limits_{x\in(0;+\infty)}f\left(x\right)=f\left(1\right)$. Tìm giá trị lớn nhất của $y=f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-2;0\right]$.

A. $\max\limits_{x\in[-2;0]}f\left(x\right)=c+16a$. **B.** $\max\limits_{x\in[-2;0]}f\left(x\right)=c-16a$.

C. $\max\limits_{x\in[-2;0]}f\left(x\right)=c-2a$. **D.** $\max\limits_{x\in[-2;0]}f\left(x\right)=c+2a$.

Lời giải

Chọn D

TXD: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=3ax^2+b$.

Vì tồn tại giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)$ trên $\left(0;+\infty\right)$ tại $x=1$ nên $x=1$ là một điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x\right)$.

Ta có: $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{-\frac{b}{3a}}\\x=-\sqrt{-\frac{b}{3a}}\end{array}\right.$

Do đó $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$ và $\sqrt{-\frac{b}{3a}}=1\Leftrightarrow b=-3a$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	↗	$f(-1)$	↘	$f(1)$	↗ $+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $\max\limits_{x\in[-2;0]}f\left(x\right)=f\left(-1\right)=c+2a$.

Câu 70: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x-m^2}{x+8}$ có giá trị nhỏ nhất trên $[0;3]$ bằng $-\dfrac{9}{2}$?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=\dfrac{x-m^2}{x+8}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-8\}$ nên hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[0;3]$.

Ta có $y'=\dfrac{8+m^2}{(x+8)^2}>0, \forall m\in\mathbb{R}, x\neq -8$ nên hàm số đồng biến trên đoạn $[0;3]$.

Suy ra $\min\limits_{[0;3]} y=y(0)=-\dfrac{m^2}{8}$. Từ giả thiết suy ra $-\dfrac{m^2}{8}=-\dfrac{9}{2}\Leftrightarrow m^2=36\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=6\\ m=-6\end{array}\right.$.

Vậy có hai giá trị nguyên của tham số m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 71: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f(0)>0$ và $\left[f(x)+6x\right].f(x)=9x^4+3x^2+4, \forall x\in\mathbb{R}$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(2x^2-3x+1\right)$ trên đoạn $[0;1]$.

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{167}{69}$. **C.** $\dfrac{17}{7}$. **D.** $\dfrac{155}{64}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\left[f(x)+6x\right]f(x)=9x^4+3x^2+4 \Leftrightarrow f^2(x)+6x.f(x)+9x^2=9x^4+12x^2+4$

$\Leftrightarrow\left[f(x)+3x\right]^2=\left(3x^2+2\right)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)=3x^2-3x+2\\ f(x)=-3x^2-3x-2\end{array}\right.$. Vì $f(0)>0$ nên $f(x)=3x^2-3x+2$.

Xét hàm số $y=f\left(2x^2-3x+1\right)$.

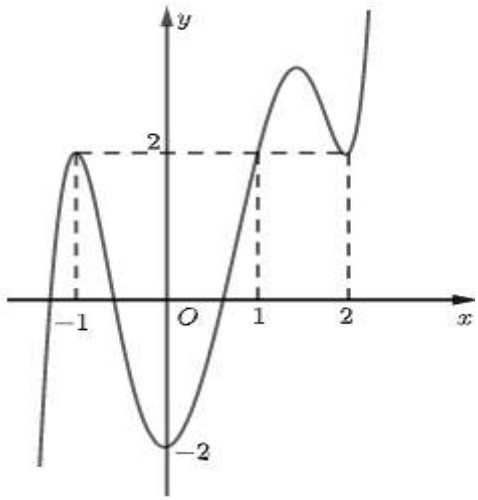
Đặt $2x^2-3x+1=t$, với $x\in[0;1]\Rightarrow t\in\left[-\dfrac{1}{8};1\right]$.

Bài toán trở thành: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(t)=3t^2-3t+2$ trên $\left[-\dfrac{1}{8};1\right]$.

Xét $f'(t)=6t-3$, $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$.

Khi đó $\begin{cases} f\left(-\dfrac{1}{8}\right)=\dfrac{155}{64}\\ f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{4}\\ f(1)=2\end{cases}$. Do vậy $\max\limits_{[0;1]} f\left(2x^2-3x+1\right)=\dfrac{155}{64}$.

Câu 72: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ.



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(2x+1)-4x-3$ trên đoạn $\left[-1;\frac{1}{2}\right]$ bằng

A. $f(0)$. **B.** $f(-1)+1$. **C.** $f(1)-3$. **D.** $f(2)-5$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(x)=f(2x+1)-4x-3$ trên đoạn $\left[-1;\frac{1}{2}\right]$, ta có $g'(x)=2f'(2x+1)-4$.

Suy ra $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(2x+1)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+1=-1\\2x+1=1\\2x+1=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=0\\x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$.

Ta có BBT của hàm số $g(x)=f(2x+1)-4x-3$ trên đoạn $\left[-1;\frac{1}{2}\right]$ như sau:

x	-1		0		$\frac{1}{2}$
g'		$-$	0	$+$	
g		↘	$g(0)$	↗	

Vậy $\min\limits_{\left[-1;\frac{1}{2}\right]}g(x)=g(0)=f(1)-3$.

Câu 73: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f\left(4x-x^2\right)+\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x+\frac{1}{3}$ trên đoạn $[1;3]$ bằng

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-4	↗	0	↘	$-\infty$

A. 12. **B.** $\frac{10}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $g'(x)=(4-2x)f'\left(4x-x^2\right)+x^2-6x+8$

$=2(2-x)f'\left(4x-x^2\right)+(x-4)(x-2)=(2-x)\left[2f'\left(4x-x^2\right)+4-x\right]$.

Ta thấy $3\le 4x-x^2\le 4,\ \forall x\in[1;3]\Rightarrow f'\left(4x-x^2\right)>0$. Hơn nữa, $4-x>0,\forall x\in[1;3]$.

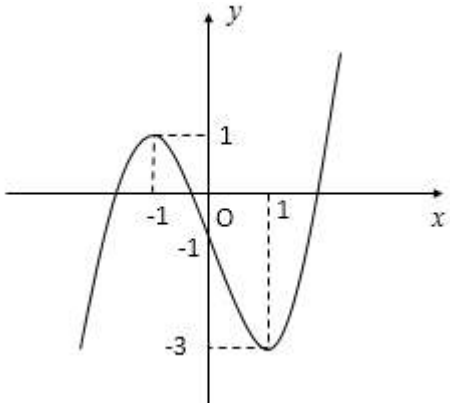
Suy ra $2f'\left(4x-x^2\right)+4-x>0$. Do đó, $g'(x)=0\Leftrightarrow x=2$

Bảng biến thiên

x	1		2		3
g'		$+$	0	$-$	
g	$g(1)$	↗	$g(2)$	↘	$g(3)$

Vậy $\max\limits_{[1;3]}g(x)=g(2)=f(4)+7=0+7=7$.

Câu 74: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Đặt $g(x)=x^2-4x+f\left(\sqrt{x^2-4x+8}\right)$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ trên $[0;4]$ là

A. $10\sqrt{2}-4$. **B.** $10\sqrt{2}-1$. **C.** $10\sqrt{2}$. **D.** $8\sqrt{2}-4$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta có $f(0)=-1\Leftrightarrow d=-1$, suy ra $f(x)=ax^3+bx^2+cx-1$.

Ta cũng có $\begin{cases} f(-1)=1 \\ f(1)=-3 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+b-c=2 \\ a+b+c=-2 \\ 3a+2b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-3 \end{cases}$.

Như vậy $y=f(x)=x^3-3x-1$.

Đặt $t=\sqrt{x^2-4x+8} \Leftrightarrow t^2=x^2-4x+8$, $x\in[0;4]$. Ta có bảng biến thiên

x	0		2		4
t^2	8	↘	4	↗	8

Suy ra $4\le t^2\le 8 \Leftrightarrow 2\le t\le 2\sqrt{2}$.

Hàm số $g(x)$ thành $h(t)=t^2-8+f(t)$.

Xét hàm số $h(t)=t^2-8+f(t)$ trên $\left[2;2\sqrt{2}\right]$. Ta có: $h'(t)=2t+f'(t)>0,\ \forall t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$, (vì từ đồ thị của hàm số $f(t)$ suy ra $f'(t)>0,\ \forall t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$).

Như vậy hàm số $h(t)=t^2-8+f(t)$ đồng biến trên $\left[2;2\sqrt{2}\right]$, suy ra $\min\limits_{\left[2;2\sqrt{2}\right]}h(t)=h(2)=4-8+f(2)=-3=\min\limits_{[0;4]}g(x)$;

$\max\limits_{\left[2;2\sqrt{2}\right]}h(t)=h\left(2\sqrt{2}\right)=10\sqrt{2}-1=\max\limits_{[0;4]}g(x)$

Vậy tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ trên $[0;4]$ là: $10\sqrt{2}-4$.

Câu 75: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y'=f'(x)=-3x^2+6x$. Biết $f(0)=-1$, giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f\left(x^2-3x+2\right)+2022$ trên đoạn $\left[-3;\dfrac{1}{2}\right]$ bằng

A. $f\left(\dfrac{21}{16}\right)+2022$. **B.** 2024. **C.** 2025. **D.** $f\left(\dfrac{3}{2}\right)+2022$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y'=f'(x)=-3x^2+6x$ và $f(0)=-1$ nên hàm số:

$y=f(x)=-x^3+3x^2-1$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

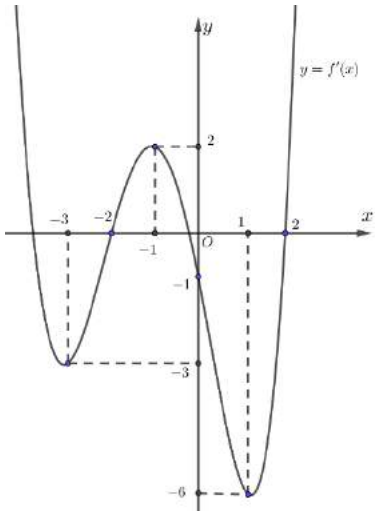
Xét: $g'(x)=(2x-3).f'\left(x^2-3x+2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-3=0\\x^2-3x+2=0\\x^2-3x+2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}\notin\left[-3;\dfrac{1}{2}\right]\\x=1\notin\left[-3;\dfrac{1}{2}\right]\\x=2\notin\left[-3;\dfrac{1}{2}\right]\\x=0\in\left[-3;\dfrac{1}{2}\right]\\x=3\notin\left[-3;\dfrac{1}{2}\right]\end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)$ trên đoạn $\left[-3;\dfrac{1}{2}\right]$ là:

x	-3		0		$\frac{1}{2}$
$2x-3$	|	$-$	|	$-$	|
$f'\left(x^2-3x+2\right)$	|	$-$	0	$+$	|
$g'(x)$	|	$+$	0	$-$	|
$g(x)$		↗		↘	

Suy ra: $\max\limits_{\left[-3;\frac{1}{2}\right]}g(x)=g(0)=f(2)+2022=2025$.

Câu 76: Cho hàm số $y=f(x)$, đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(3x)+3x^2-4x+1$ trên đoạn $\left[-\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right]$ bằng



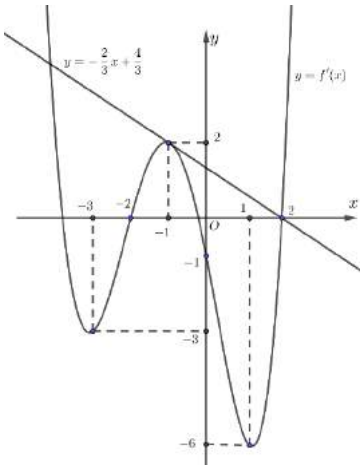
A. $f(0)+1$. **B.** $f(6)$. **C.** $f(2)-\dfrac{1}{3}$. **D.** $f(-3)+8$.

Lời giải

Xét hàm số $g(x)=f(3x)+3x^2-4x+1$ trên đoạn $\left[-\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right]$ có $g'(x)=3f'(3x)+6x-4$.

Cho $g'(x)=0 \Leftrightarrow 3f'(3x)=-6x+4$.

Đặt $t=3x$. Vì $x\in\left[-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right]$ nên $t\in[-2;2]$ khi đó phương trình trở thành: $f'(t)=-\frac{2}{3}t+\frac{4}{3}$ (*).



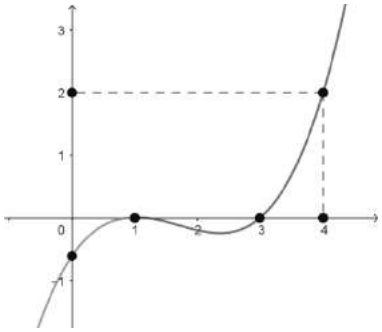
Theo đồ thị có $(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{1}{3}\\x=\frac{2}{3}\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)$ trên đoạn $\left[-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right]$

x	$-\frac{2}{3}$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
$g(x)$	$g(-\frac{2}{3})$	↘		↘	$g(\frac{2}{3})$

Vậy $\min\limits_{\left[-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right]}g(x)=g\left(\frac{2}{3}\right)=f(2)-\frac{1}{3}$.

Câu 77: Cho hàm số $y=f(x)$, có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên R và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0;4]$, biết $f(0)+f(3)=f(1)+f(4)$. Khẳng định nào sao đây đúng?



A. $m+M=f(1)+f(3)$.
B. $m+M=f(0)+f(4)$.
C. $m+M=f(3)+f(4)$.
D. $m+M=f(0)+f(3)$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên R. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	3	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

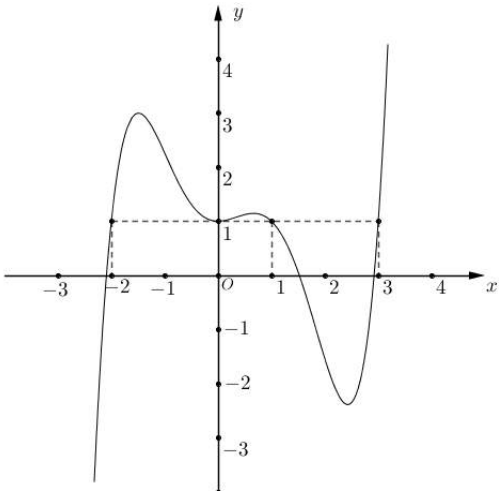
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $m=\min\limits_{[0;4]} f(x)=f(3)$.

Theo bài ra ta có: $f(0)+f(3)=f(1)+f(4)>f(3)+f(4)\Rightarrow f(0)>f(4)$.

Từ đó, kết hợp với bảng biến thiên suy ra $M=\max\limits_{[0;4]} f(x)=f(0)$.

Vậy $m+M=f(3)+f(0)$.

Câu 78: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây.



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(2x^2+x)-2x^2-x$ trên đoạn $\left[-1;\frac{1}{2}\right]$ là

A. $f(1)+1$. **B.** $f\left(\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{8}$. **C.** $f(-3)+3$. **D.** $f\left(-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn D

Vì hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $g(x)=f(2x^2+x)-2x^2-x$ liên tục trên $\left[-1;\frac{1}{2}\right]$.

Ta có: $g'(x)=(4x+1)f'(2x^2+x)-(4x+1)=(4x+1)\left[f'(2x^2+x)-1\right]$

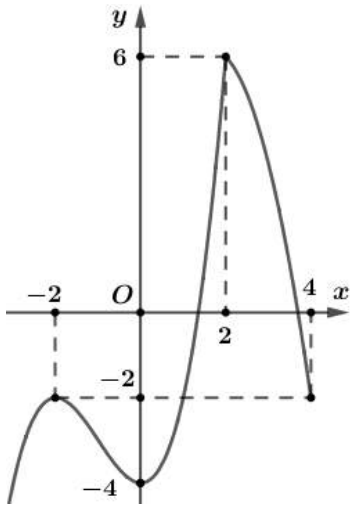
$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x+1=0\\ f'(2x^2+x)=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x+1=0\\ 2x^2+x=-2(vo\,nghiem)\\ 2x^2+x=0(nghiem\,kep)\\ 2x^2+x=1\\ 2x^2+x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{1}{4}\\ x=0;x=-\frac{1}{2}(nghiem\,kep)\\ x=\frac{1}{2};x=-1\\ x=1;x=-\frac{3}{2}\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	-1		$\frac{-1}{2}$		$\frac{-1}{4}$		0		$\frac{1}{2}$
$f'(x)$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0
$f(x)$		↘		↘		↗		↗	

Từ bảng biến thiên ta thấy giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(2x^2+x)-2x^2-x$ trên đoạn $\left[-1;\frac{1}{2}\right]$ là $g\left(-\frac{1}{4}\right)=f\left(-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{8}$.

Câu 79: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2;4]$. Giá trị của M^2+m^2 bằng



A. 52. **B.** 2. **C.** 40. **D.** 20.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị của hàm số $y=f(x)$ ta thấy $-4\le y\le 6$ khi $-2\le x\le 4$.

Do đó $M=\max\limits_{[-2;4]} f(x)=6$ tại $x=2$ và $m=\min\limits_{[-2;4]} f(x)=-4$ tại $x=0$

$\Rightarrow M^2+m^2=6^2+(-4)^2=52$.

Câu 80: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f\left(4x-x^2\right)+\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x+\frac{1}{3}$ trên đoạn $[1;3]$.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	5	↘	$-\infty$

A. 15. **B.** $\frac{25}{3}$. **C.** $\frac{19}{3}$. **D.** 12.

Lời giải

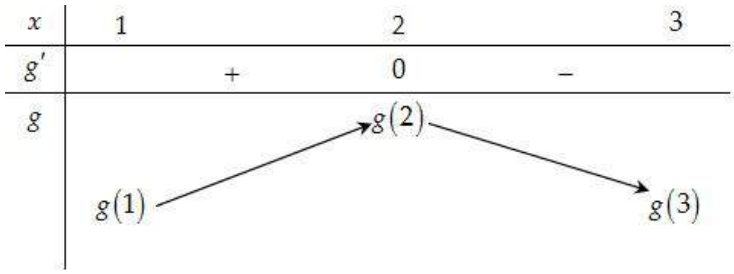
Chọn D

Ta có: $g(x)=f\left(4x-x^2\right)+\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x+\frac{1}{3}$

$g'(x)=(4-2x)f'\left(4x-x^2\right)+x^2-6x+8=(2-x)\left[2f'\left(4x-x^2\right)+4-x\right]$.

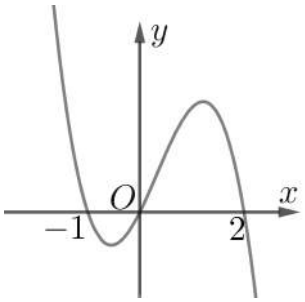
Với $x\in[1;3]$ thì $4-x>0$; $3\le 4x-x^2\le 4$ nên dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $f'\left(4x-x^2\right)>0$. Vậy: $2f'\left(4x-x^2\right)+4-x>0,\ \forall x\in[1;3]$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)=f\left(4x-x^2\right)+\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x+\frac{1}{3}$ trên đoạn $[1;3]$



Suy ra $\max\limits_{[1;3]}g(x)=g(2)=f(4)+7=12$.

Câu 81: Cho hàm số $f(x)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên.



Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x=-1;x=0$ bằng 3. Hiệu giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $[-1;1]$ là

A. $\frac{39}{5}$. **B.** $\frac{29}{4}$. **C.** $\frac{35}{4}$. **D.** $\frac{42}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị ta có $f'(x)=a.(x+1)x(x-2)$; với $a<0$

Ta có: $S=\int_{-1}^{0}\left|a(x+1)(x-2)x\right|dx=3\Leftrightarrow(-a).\frac{5}{12}=3\Leftrightarrow a=-\frac{36}{5}$.

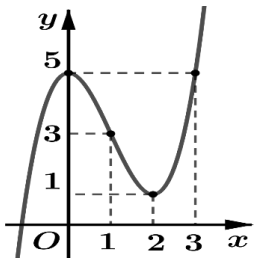
Vậy $f'(x)=-\frac{36}{5}.(x+1)x(x-2)=-\frac{36}{5}\left(x^3-x^2-2x\right)\Rightarrow f(x)=-\frac{36}{5}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right)+C$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1(tm)\\x=0\ (tm)\\x=2\ (L)\end{array}\right.$$.

$f(-1)=3+C;\ f(0)=C;\ f(1)=\frac{39}{5}+C\Rightarrow\min\limits_{[-1;1]}f(x)=C;\ \max\limits_{[-1;1]}f(x)=\frac{39}{5}+C$;

Do đó hiệu GTLN và GTNN bằng $\frac{39}{5}$.

Câu 82: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Ký hiệu $g(x)=f\left(2\sqrt{2x}+\sqrt{1-x}\right)+m$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho $\max\limits_{[0;1]} g(x) > 4\min\limits_{[0;1]} g(x)$.

A. $m>\frac{1}{3}$. **B.** $m<\frac{1}{3}$. **C.** $1<m<5$.To **D.** $m<-\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn B

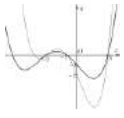
Đặt $t=2\sqrt{2x}+\sqrt{1-x} \to t^2=7x+1+4\sqrt{2x(1-x)} \overset{0\le x\le 1}{\ge} 1 \longrightarrow t\ge 1$.

Ta lại có $t=2\sqrt{2x}+\sqrt{1-x}=2\sqrt{2}.\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\le\sqrt{\left[\left(2\sqrt{2}\right)^2+1\right]\left[\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{1-x}\right)^2\right]}=3$. (Hoặc dùng đạo hàm)

Khi đó $g(x)=f(t)+m$ với $t\in[1;3]$. Dựa vào đồ thị ta có $\begin{cases}\max\limits_{[1;3]} f(t)=f(3)=5\\ \min\limits_{[1;3]} f(t)=f(2)=1\end{cases}$.

Ycbt $\Leftrightarrow \max\limits_{[1;3]}\left[f(x)+m\right] > 4\min\limits_{[1;3]}\left[f(x)+m\right] \Leftrightarrow 5+m>4(1+m) \Leftrightarrow m<\frac{1}{3}$.

Câu 83: Cho hai hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$ và $y=g(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới, trong đó đường **đậm hơn** là đồ thị hàm số $y=f(x)$. Biết rằng hai đồ thị này tiếp xúc với nhau tại điểm có hoành độ là -3 và cắt nhau tại hai điểm nữa có hoành độ lần lượt là -1 và 3. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $u(x)=f(x)-g(x)$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng



A. $\frac{12-8\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\frac{12-10\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\frac{12-10\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\frac{12-8\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

Chọn A

Do đồ thị của hai hàm số tiếp xúc với nhau tại điểm có hoành độ là -3 và cắt nhau tại hai điểm nữa có hoành độ lần lượt là -1 và 3 nên $u(x)=f(x)-g(x)$ có dạng $u(x)=f(x)-g(x)=k(x+3)^2(x+1)(x-3)$.

$u(0)=f(0)-g(0)=k.9.1.(-3)$ (1)

Mặt khác từ đồ thị ta có $u(0)=f(0)-g(0)=-1-(-2)=1$(2).

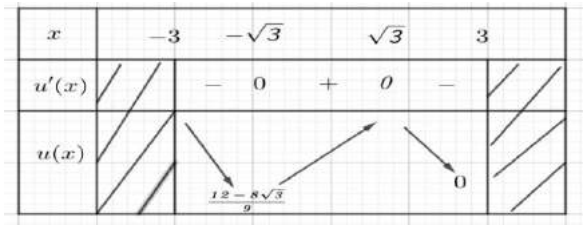
Từ (1) và (2) ta được $1=k.9.1.(-3)\Rightarrow k=\dfrac{-1}{27}$.

Do đó $u(x)=f(x)-g(x)=\dfrac{-1}{27}(x+3)^2(x+1)(x-3)$.

Xét hàm $u(x)$ ta có: $u'(x)=(\dfrac{-1}{27}(x+3)^2(x+1)(x-3))'=\dfrac{-1}{27}(4x^3+12x^2-12x-36)$.

Khi đó: $u'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\sqrt{3}\\x=-3\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:



Do đó (1) $\min\limits_{[-3;3]}u(x)=\dfrac{12-8\sqrt{3}}{9}$.

Câu 84: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(-6)=42$ và bảng xét dấu đạo hàm như

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(-3x^4+12x^2-15\right)+2x^6+6x^4-48x^2$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Đặt $y=g(x)=f\left(-3x^4+12x^2-15\right)+2x^6+6x^4-48x^2$

$g'(x)=\left(-12x^3+24x\right)f'\left(-3x^4+12x^2-15\right)+12x^5+24x^3-96x$

$=-12x\left(x^2-2\right)f'\left(-3x^4+12x^2-15\right)+12x\left(x^2-2\right)\left(x^2+4\right)$

$=-12x\left(x^2-2\right)\left[f'\left(-3x^4+12x^2-15\right)-\left(x^2+4\right)\right]$.

Vì $-3x^4+12x^2-15=-3\left(x^2-2\right)^2-3\le-3$

$\Rightarrow f'\left(-3x^4+12x^2-15\right)<0\Rightarrow f'\left(-3x^4+12x^2-15\right)-\left(x^2+4\right)<0$

$$\Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow 12x^3-24x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \end{array}\right. .$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Ta có $\min g(x)=g(-1)=g(1)=f(-6)-40=2$.

Dạng 3: GTLN và GTNN của hàm số có chứa tham số

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Cho hàm số $y = x^3 + \left(m^2+1\right)x + m^2 - 2$. Tìm số thực dương m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$ bằng 2.

A. $m=1$. **B.** $m=4$. **C.** $m=2$. **D.** $m=0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 3x^2 + m^2 + 1 \Rightarrow y' > 0, \forall x \in [0;2] \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $[0;2]$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;2]$ bằng 2

$\Leftrightarrow y(0) = 2 \Leftrightarrow m^2 - 2 = 2 \Rightarrow m = 2$ (vì m dương).

Câu 2: Cho hàm số $y = \dfrac{mx+2}{x}$ (với m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[1;3]} y = 19$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

A. $m > 18$. **B.** $m < 0$. **C.** $3 < m \le 17$. **D.** $1 \le m \le 3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = \dfrac{-2}{x^2} < 0, \forall x \neq 0$. Khi đó $\min\limits_{[1;3]} y = y(3) = \dfrac{3m+2}{3} = 19$. Suy ra $m = \dfrac{55}{3}$.

Câu 3: Cho hàm số $y = x^3 + \left(m^2+3\right)x + m^2 - 4$. Biết hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-2;0]$ bằng $\dfrac{1}{4}$ tại $m = m_0$ $(m_0 > 0)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $1 < m_0 < 2$. **B.** $3 < m_0 < 4$. **C.** $2 < m_0 < 3$. **D.** $0 < m_0 < 1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 3x^2 + m^2 + 3 \Rightarrow y' > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $[-2;0]$.

Suy ra $\text{Max}\limits_{[-2;0]} y = y(0) = m^2 - 4$.

Theo đề bài hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-2;0]$ bằng $\dfrac{1}{4}$ nên $m^2 - 4 = \dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow m^2 = \dfrac{17}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -\dfrac{\sqrt{17}}{2} \quad (loai) \\ m = \dfrac{\sqrt{17}}{2} \quad (nhan) \end{array}\right.$. Vậy $m = m_0 = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$.

Câu 4: Hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + m (m \in \mathbb{R})$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[1;2]$ bằng 1. Khi đó m thuộc khoảng

A. $(-3;-1)$. **B.** $(4;6)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(-1;1)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $f(x)=x^3-3x^2+m(m\in\mathbb{R})$ liên tục trên đoạn $[1;2]$.

Ta có $f'(x)=3x^2-6x$; $f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\notin[1;2]\\x=2\in[1;2]\end{array}\right.$.

Khi đó $f(1)=m-2; f(2)=m-4$.

Nên $\min\limits_{x\in[1;2]} f(x)=f(2)=m-4=1\Leftrightarrow m=5$.

Câu 5: Số giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-x^3+3x^2-1-m^2$ trên đoạn $[-2;1]$ bằng -1

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=-3x^2+6x\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\ \ (\text{nhaän})\\x=2\ \ (\text{loaïi})\end{array}\right.$.

Khi đó $f(-2)=19-m^2$; $f(0)=-1-m^2$ và $f(1)=1-m^2$.

Do đó $\min\limits_{[-2;1]} f(x)=f(0)=-1-m^2$ suy ra $-1-m^2=-1\Leftrightarrow m^2=0\Leftrightarrow m=0$.

Vậy có 1 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6: Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-m}{x+2}$ trên $[0;2]$ bằng 8 (m là tham số thực). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m>10$. **B.** $-15<m\le -10$. **C.** $0<m\le 8$. **D.** $-9<m\le -2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y(0)=-\dfrac{m}{2}; y(2)=\dfrac{2-m}{4}$.

Hàm số $y=\dfrac{x-m}{x+2}$ xác định trên $[0;2]$ và đạt các giá trị lớn nhất, nhỏ nhất tại hai đầu mút.

Do đó $\max\limits_{[0;2]} y+\min\limits_{[0;2]} y=-\dfrac{m}{2}+\dfrac{2-m}{4}=\dfrac{-3m+2}{4}$.

Từ giả thiết suy ra $\dfrac{-3m+2}{4}=8\Leftrightarrow -3m+2=32\Leftrightarrow m=-10$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x+m}{x+1}$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $\min\limits_{[0;4]} f(x)+\max\limits_{[0;4]} f(x)=10$.

A. $m=3$. **B.** $m=1$. **C.** $m=7$. **D.** $m=5$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ nên hàm số $f(x)=\dfrac{2x+m}{x+1}$ luôn liên tục trên $[0;4]$.

Và $y'=\dfrac{2-m}{(x+1)^2}$ nên hàm số luôn đơn điệu trên $[0;4]$. Suy ra:

$\min\limits_{[0;4]} f(x)+\max\limits_{[0;4]} f(x)=10 \Leftrightarrow f(0)+f(4)=10 \Leftrightarrow m+\dfrac{8+m}{5}=10 \Leftrightarrow m=7$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)=x^3+(m^2+1).x+m^2-2$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$ bằng 7.

A. $m=\pm 1$. **B.** $m=\pm\sqrt{7}$. **C.** $m=\pm\sqrt{2}$. **D.** $m=\pm 3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x)=3x^2+m^2+1>0, \forall x\in R$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[0;2]$ nên $\min\limits_{[0,2]} f(x)=f(0)=m^2-2$.

Theo bài ra: $\min\limits_{[0,2]} f(x)=7 \Leftrightarrow m^2-2=7 \Leftrightarrow m=\pm 3$.

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0;2]$ tại một điểm $x_0\in(0,2)$.

A. $0<m<1$. **B.** $m>1$. **C.** $m>2$. **D.** $-1<m<1$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định $x\neq -m$

Hàm số liên tục trên đoạn $[0;2]$ nên $-m\notin[0;2]\Rightarrow\left[\begin{array}{l}-m<0\\-m>2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>0\\m<-2\end{array}\right.(*)$

Ta có: $y'=\dfrac{x^2+2mx+m^2-1}{(x+m)^2}=\dfrac{(x+m)^2-1}{(x+m)^2}$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=-m+1\\x_2=-m-1\end{array}\right.$

Vì $x_1-x_2=2$ nên chỉ có nhiều nhất một nghiệm thuộc $(0,2)$.

Ta thấy: $-m+1>-m-1, \forall m$ do đó để hàm số liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0;2]$ tại một điểm $x_0\in(0,2)$ thì $0<-m+1<2\Leftrightarrow -1<m<1(**)$

Từ $(*)$ và $(**)$ ta có $0<m<1$.

Câu 10: Biết giá trị lớn nhất của hàm số $y=-\dfrac{1}{2}x^2+2x+m$ trên đoạn [1;4] bằng 10. Giá trị của tham số m là

A. $m=0$. **B.** $m=\dfrac{17}{2}$. **C.** $m=10$. **D.** $m=8$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=-x+2, y'=0\Leftrightarrow x=2$

$y(2)=2+m, y(1)=\dfrac{3}{2}+m, y(4)=m$, theo giả thiết ta có $2+m=10\Leftrightarrow m=8$

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm số $y=\dfrac{mx+2}{x}$ (với m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[1;3]} y=19$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $m>18$. **B.** $m<0$. **C.** $3<m\le 17$. **D.** $1\le m\le 3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=\dfrac{-2}{x^2}<0,\forall x\in[1;3]$. Suy ra $\min\limits_{[1;3]} y=y(3)=\dfrac{3m+2}{3}$.

Theo giả thiết: $\min\limits_{[1;3]} y=19\Leftrightarrow\dfrac{3m+2}{3}=19\Leftrightarrow m=\dfrac{55}{3}$.

Câu 2: Biết giá trị lớn nhất của hàm số $y=-\dfrac{1}{2}x^2+2x+m$ trên đoạn $[1;4]$ bằng 10. Giá trị của tham số m là

A. $m=0$. **B.** $m=\dfrac{17}{2}$. **C.** $m=10$. **D.** $m=8$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y^{'}=-x+2, y'=0\Leftrightarrow x=2$

$y(2)=2+m, y(1)=\dfrac{3}{2}+m, y(4)=m$, theo giả thiết ta có $2+m=10\Leftrightarrow m=8$

Câu 3: Cho hàm số $y=x^3+3x+2m-1$ với m là tham số thực. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;3]$ bằng $\dfrac{11}{2}$. Khi đó giá trị của tham số m là

A. $m=\dfrac{1}{4}$. **B.** $m=\dfrac{13}{2}$. **C.** $m=\dfrac{21}{4}$. **D.** $m=\dfrac{17}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=3x^2+3>0,\forall x\in[-1;3]$ nên hàm số đồng biến trên $[-1;3]$.

Do đó $\min\limits_{[-1;3]} y=y(-1)=2m-5$. Suy ra $2m-5=\dfrac{11}{2}\Leftrightarrow m=\dfrac{21}{4}$.

Câu 4: Tìm m biết giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2x^3-3x^2+m$ trên đoạn $[0;5]$ bằng 5.

A. $m=6$. **B.** $m=10$. **C.** $m=7$. **D.** $m=5$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số liên tục trên $[0;5]$.

$\Delta ABC;\ y'=0\Leftrightarrow 6x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\ (\text{nhaän})\\x=1\ (\text{nhaän})\end{array}\right.$.

$y(0)=m;\ y(1)=m-1;\ y(5)=175+m$.

Ta có $y(5)>y(0)>y(1), \forall m\in\mathbb{R}$ nên $\min\limits_{[0;5]} y=y(1)=m-1$.

Theo đề bài, $\min\limits_{[0;5]} y=5\Leftrightarrow m-1=5\Leftrightarrow m=6$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x+1}+m}{\sqrt{x+1}+1}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;8]$ nhỏ hơn 3. Số phần tử của S là

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Dễ thấy hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;8]$ nên để thỏa mãn bài ra thì $f(x)<3$ với mọi $x\in[-1;8]$. Do đó $\dfrac{2\sqrt{x+1}+m}{\sqrt{x+1}+1}<3,\quad \forall x\in[-1;8]$

$\Leftrightarrow m<\sqrt{x+1}+3,\quad \forall x\in[-1;8]\Leftrightarrow m<\min\limits_{[-1;8]}\left(\sqrt{x+1}+3\right)=3$ hay $m<3$.

Vì m nguyên dương nên $m\in\{1;2\}=S$. Vậy S có 2 phần tử.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x+1}+m}{\sqrt{x+1}+1}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;8]$ nhỏ hơn 3. Số phần tử của tập S là:

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\sqrt{x+1}$, khi đó mới mọi $x\in[-1;8]\Rightarrow t\in[0;3]$. Bài toán trở thành tìm m để hàm số $f(t)=\dfrac{2t+m}{t+1}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;3]$ nhỏ hơn 3. Xét $f'(t)=\dfrac{2-m}{(t+1)^2}$.

TH1: $f'(t)>0\Leftrightarrow m<2\ (*)$ thì hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $t=3$. Khi đó $\max\limits_{[0;3]} f(t)=f(3)=\dfrac{6+m}{4}$. Theo bài ra ta có $\dfrac{6+m}{4}<3\Leftrightarrow m<6$, kết hợp với điều kiện $(*)$ suy ra $m<2$.

TH2: $f'(t)<0\Leftrightarrow m>2\ (**)$ thì hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $t=0$. Khi đó $\max\limits_{[0;3]} f(t)=f(0)=m$. Theo bài ra ta có $m<3$, kết hợp với điều kiện $(**)$ suy ra $2<m<3$.

Vậy $S=\{1\}$.

Câu 7: Cho hàm số $y=\dfrac{2x+m}{x+1}$. Biết $\min\limits_{[0;2]} y+3\max\limits_{[0;2]} y=10$. Chọn khẳng định đúng

A. $m\in(1;3)$. **B.** $m\in[3;5)$. **C.** $m\in(5;7)$. **D.** $m\in[7;9)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=\dfrac{2-m}{(x+1)^2}$

TH1: Nếu $2-m>0\Leftrightarrow m<2$ thì $\min\limits_{[0;2]}y=f(0)=m;\max\limits_{[0;2]}y=f(2)=\dfrac{m+4}{3}$

Khi đó $\min\limits_{[0;2]}y+3\max\limits_{[0;2]}y=10\Leftrightarrow m+m+4=10\Leftrightarrow m=3$ (loại)

TH2: Nếu $2-m<0\Leftrightarrow m>2$ thì $\max\limits_{[0;2]}y=f(0)=m;\min\limits_{[0;2]}y=f(2)=\dfrac{m+4}{3}$

Khi đó $\min\limits_{[0;2]}y+3\max\limits_{[0;2]}y=10\Leftrightarrow 3m+\dfrac{m+4}{3}=10\Leftrightarrow m=2,6$ (tm)

Vậy $m=2,6\in(1;3)$.

Câu 8: Tìm số thực dương m thỏa mãn giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-m}{mx+1}$ trên đoạn $[1;2]$ bằng $-\dfrac{1}{3}$

A. $m=1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=4$. **D.** $m=3$.

Lời giải

Ta có $y'=\dfrac{1+m^2}{(mx+1)^2}>0,\forall x\neq-\dfrac{1}{m}\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

Điều kiện trước tiên để trên đoạn $[1;2]$ ta có giá trị nhỏ nhất là

$y(1)=\dfrac{1-m}{m+1}=-\dfrac{1}{3}\Rightarrow 3-3m=-m-1\Rightarrow m=2$(kiểm tra lại thỏa mãn).

Câu 9: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-m^2}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[-3;-2]}y=\dfrac{1}{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m>4$. **B.** $3<m\leq 4$. **C.** $m\leq -2$. **D.** $-2<m\leq 3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=\dfrac{-m^2-1}{(x-m^2)^2}<0$ với mọi $x\in[-3;-2]$.

Do $m^2\notin[-3;-2]$ nên hàm số xác định và liên tục trên $[-3;-2]$.

Suy ra hàm số nghịch biến trên $[-3;-2]$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của y đạt tại $x=-2$.

Xét $y(-2)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{-1}{-2-m^2}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow m=0$.

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x-m^2}{x+8}$ có giá trị nhỏ nhất trên $[0;3]$ bằng $-\dfrac{9}{2}$?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

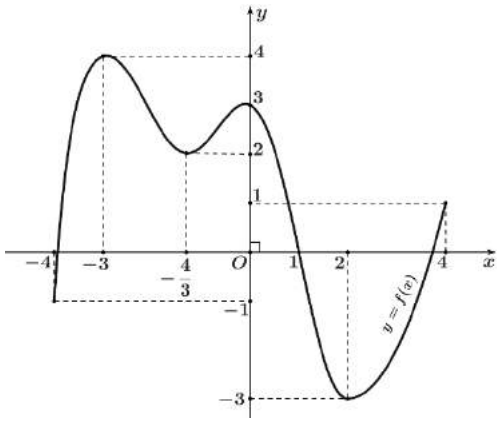
Chọn B

Ta có $y=\dfrac{x-m^2}{x+8}\Rightarrow y'=\dfrac{m^2+8}{(x+8)^2}>0,\forall x\neq-8.$

Do đó, $\underset{[0;3]}{Miny} = y(0) \Rightarrow \frac{-m^2}{8} = -\frac{9}{2} \Leftrightarrow m^2 = 36 \Leftrightarrow m = \pm 6 \in \mathbb{Z}$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của tham số m thoả đề.

Câu 11: Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[-4;4]$, có các điểm cực trị trên khoảng $(-4;4)$ là $-3; -\frac{4}{3}; 0; 2$ và có đồ thị như hình vẽ.



Đặt $g(x) = f\left(x^3 + 3x\right) + m$ với m là tham số. Gọi m_1 là giá trị của m để $\max\limits_{x\in[0;1]} g(x) = 2022$, m_2 là giá trị của m để $\min\limits_{x\in[-1;0]} g(x) = 2004$. Giá trị của $m_1 - m_2$ bằng

A. 12. **B.** 13. **C.** 11. **D.** 14.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $g'(x) = \left(3x^2 + 3\right).f'\left(x^3 + 3x\right)$

Cho $g'(x) = 0 \Rightarrow f'\left(x^3 + 3x\right) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 + 3x = -3 \\ x^3 + 3x = -\frac{4}{3} \\ x^3 + 3x = 0 \\ x^3 + 3x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \approx -0,82 \\ x \approx -0,42 \\ x = 0 \\ x \approx 0,6 \end{array}\right.$.

Vậy: $\left.\begin{array}{l} \max\limits_{x\in[0;1]} g(x) = g(0) = f(0) + m = 2022 \Rightarrow m = 2019 \\ \min\limits_{x\in[-1;0]} g(x) = g(-1) = f(-4) + m = 2004 \Rightarrow m = 2005 \end{array}\right\} \Rightarrow m_1 - m_2 = 2019 - 2005 = 14.$

Câu 12: Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ với m là tham số thực, thoả mãn : $\min\limits_{[1;2]} y + \max\limits_{[1;2]} y = \frac{17}{6}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m \le 0$. **B.** $2 < m \le 4$. **C.** $m > 4$. **D.** $0 < m \le 2$.

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Có $y' = \frac{1-m}{(x+1)^2}$.

TH1: $m = 1 \Rightarrow y = 1$ là hàm hằng và không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

TH2: $m \ne 1 \Rightarrow$ Hàm số đơn điệu trên từng khoảng xác định $(-\infty;-1), (-1;+\infty)$.

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\min\limits_{[1;2]} y = y(1)\\ \max\limits_{[1;2]} y = y(2)\end{cases}\\ \begin{cases}\min\limits_{[1;2]} y = y(2)\\ \max\limits_{[1;2]} y = y(1)\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = y(2) + y(1) = \frac{2+m}{3} + \frac{1+m}{2}.$$

Theo giả thiết:

$$\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{17}{6} \Leftrightarrow \frac{2+m}{3} + \frac{1+m}{2} = \frac{17}{6} \Leftrightarrow 4 + 2m + 3 + 3m = 17 \Leftrightarrow 5m = 10 \Leftrightarrow m = 2.$$

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x-m}{x+1}$. Tìm m để $\max\limits_{x\in[1;2]} f(x) + \min\limits_{x\in[1;2]} f(x) = -8$.

A. $m = 5$. **B.** $m = 11$. **C.** $m = -5$. **D.** $m = -11$.

Lời giải

Chọn B

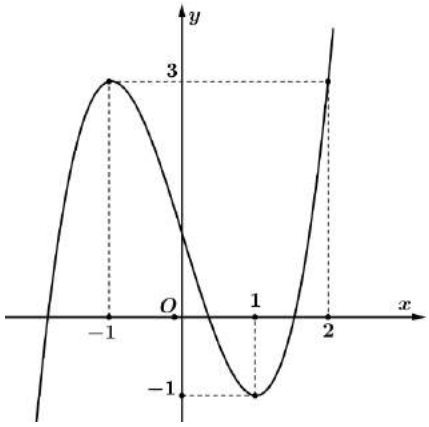
$$y' = \frac{1+m}{(x+1)^2}.$$

Do hàm số $y = f(x) = \dfrac{x-m}{x+1}$ chỉ đồng biến hoặc nghịch biến trên $[1;2]$ khi $m \neq -1$. Do đó

$$\max_{x\in[1;2]} f(x) + \min_{x\in[1;2]} f(x) = -8$$

$$\Leftrightarrow y(1) + y(2) = -8 \Leftrightarrow \frac{1-m}{2} + \frac{2-m}{3} = -8 \Leftrightarrow 3(1-m) + 2(2-m) = -48 \Leftrightarrow m = 11$$

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ là hàm đa thức bậc 3 và có đồ thị như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f\left(2x^3 + x - 1\right) + m$. Với giá trị nào của m thì giá trị nhỏ nhất của $g(x)$ trên đoạn $[0;1]$ bằng 2022.



A. 2023. **B.** 2000. **C.** 2021. **D.** 2022.

Lời giải

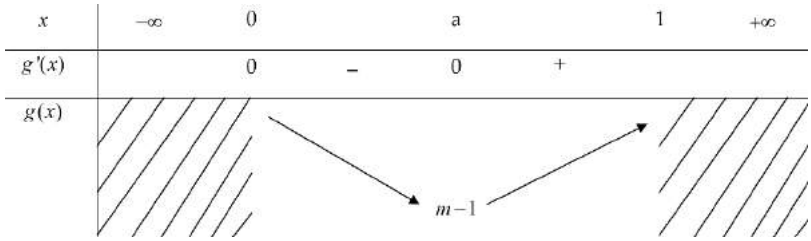
Chọn A

Ta có:

$$g(x) = f\left(2x^3 + x - 1\right) + m \Rightarrow g'(x) = (6x+1) f'\left(2x^3 + x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}6x + 1 = 0\\ f'\left(2x^3 + x - 1\right) = 0\end{array}\right.$$

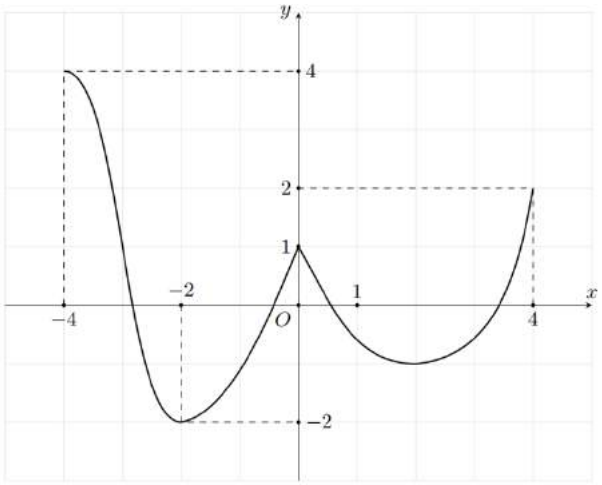
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6x+1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1}{6} \\ f'\left(2x^3+x-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^3+x-1=-1 \\ 2x^3+x-1=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=a(0<a<1) \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:



Suy ra: $\underset{[0;1]}{Min}\, g(x)=m-1=2022 \Leftrightarrow m=2023.$

Câu 15: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên đoạn $\left[-4;4\right]$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Biết rằng hàm số $y=f\left(4\sin x\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất là m và giá trị lớn nhất là M trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{6}\right]$. Giá trị của $m+M$ là

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=4\sin x$. Ta có $x\in\left[-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{6}\right]\Rightarrow \sin x\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]\Rightarrow t\in\left[-2;2\right]$.

Khi đó $y=f\left(4\sin x\right)=f\left(t\right)$. Hàm số $f\left(t\right)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[-2;2\right]$.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $t\in\left[-2;2\right]\Rightarrow f\left(t\right)\in\left[-2;1\right]$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(4\sin x\right)$ là $m=-2$ và giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(4\sin x\right)$ là $M=1$.

Vậy $m+M=-2+1=-1$.

Câu 16: Cho hàm số $y=\dfrac{mx-m^2-1}{x+2m}$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị của m để giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $\left[1;3\right]$ bằng $\dfrac{1}{5}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = \dfrac{3m^2+1}{(x+2m)^2} > 0, \forall x \neq -2m$

Hàm số đạt GTLN trên $[1;3]$ khi $\begin{cases} -2m \notin [1;3] \\ y(3) = \dfrac{-m^2+3m-1}{2m+3} = \dfrac{1}{5} \ (*) \end{cases}$

Giải (*): $\dfrac{-m^2+3m-1}{2m+3} = \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow -5m^2+15m-5 = 2m+3 \Leftrightarrow -5m^2+13m-8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \ (tm) \\ m = \dfrac{8}{5} \ (tm) \end{array}\right.$

Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 17: Hàm số $y = \dfrac{2x-m}{x+1}$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;1]$ bằng 1 khi

A. $m = 1$. **B.** $m = 0$. **C.** $m = -1$. **D.** $m = 2$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ta có: $y' = \dfrac{2+m}{(x+1)^2}$, $\forall x \in D$.

Trường hợp 1: $y' > 0, \forall x \in D \Leftrightarrow 2+m > 0 \Leftrightarrow m > -2$.

Khi đó hàm số đồng biến trên $[0;1]$ nên $\max\limits_{[0;1]} y = y(1) = \dfrac{2-m}{2}$.

Yêu cầu bài toán suy ra $\dfrac{2-m}{2} = 1 \Leftrightarrow m = 0$ (nhận).

Trường hợp 2: $y' < 0, \forall x \in D \Leftrightarrow 2+m < 0 \Leftrightarrow m < -2$

Khi đó hàm số nghịch biến trên $[0;1]$ nên $\max\limits_{[0;1]} y = y(0) = -m$.

Yêu cầu bài toán suy ra $-m = 1 \Leftrightarrow m = -1$ (loại).

Trường hợp 3: $m = -2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow Max\ y = 2$ (loại)

Vậy $m = 0$.

Câu 18: Tìm tất cả giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{2x+m-1}{x+1}$ trên đoạn $[1;2]$ bằng 1.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ta có $f'(x) = \dfrac{3-m}{(x+1)^2}$.

Nếu $m < 3$: $f'(x) = \dfrac{3-m}{(x+1)^2} > 0$ nên hàm số đồng biến trên $(1;2)$

$\Rightarrow \min\limits_{[1;2]} f(x) = f(1) = 1$. Vậy $\min\limits_{[1;2]} f(x) = 1 \Leftrightarrow f(1) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{m+1}{2} = 1 \Leftrightarrow m = 1$ (nhận).

Nếu $m>3$: $f'(x)=\dfrac{3-m}{(x+1)^2}<0$ nên hàm số nghịch biến trên $(1;2)$

$\Rightarrow \min\limits_{[1;2]} f(x)=f(2)=1$. Vậy $\min\limits_{[1;2]} f(x)=1 \Leftrightarrow f(2)=1 \Leftrightarrow \dfrac{3+m}{3}=1 \Leftrightarrow m=0$ (loại).

Vậy $m=1$.

Câu 19: Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2020;2020]$ để biểu thức $y=4x^2\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x^2}+4mx^3-3mx+m^2$ có giá trị lớn nhất không nhỏ hơn 5.

Lời giải

Điều kiện $1-x^2\ge 0 \Leftrightarrow -1\le x\le 1$.

Ta có $y=-4\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}+3\sqrt{1-x^2}+m\left(4x^3-3x\right)+m^2$.

Đặt $x=\cos t; t\in[0;\pi] \Rightarrow \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\cos^2 t}=|\sin t|=\sin t$.

Biểu thức y có dạng

$g(t)=3\sin t-4\sin^3 t+m\left(4\cos^3 t-3\cos t\right)+m^2=\sin 3t+m\cos 3t+m^2\le \sqrt{1+m^2}+m^2$.

Giá trị lớn nhất của y là $M=\sqrt{1+m^2}+m^2\ge 5 \Leftrightarrow m^2+1+\sqrt{1+m^2}-6\ge 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{1+m^2}\ge 2\\ \sqrt{1+m^2}\le -3\end{array}\right. \Leftrightarrow m^2\ge 3 \Leftrightarrow |m|\ge\sqrt{3}$.

Do m nguyên thuộc đoạn $[-2020;2020]$ nên $m\in\{\pm 2;\pm 3;\pm 4;...;\pm 2020\}$.

Vậy có 4038 số nguyên m thỏa mãn đề bài.

Câu 20: Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-m}{x+2}$ trên $[0;2]$ bằng 8 (m là tham số thực). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m>10$. **B.** $-15<m\le -10$. **C.** $0<m\le 8$. **D.** $-9<m\le -2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y(0)=-\dfrac{m}{2}; y(2)=\dfrac{2-m}{4}$.

Hàm số $y=\dfrac{x-m}{x+2}$ xác định trên $[0;2]$ và đạt các giá trị lớn nhất, nhỏ nhất tại hai đầu mút. Do đó $\max\limits_{[0;2]} y+\min\limits_{[0;2]} y=-\dfrac{m}{2}+\dfrac{2-m}{4}=\dfrac{-3m+2}{4}$.

Từ giả thiết suy ra $\dfrac{-3m+2}{4}=8 \Leftrightarrow -3m+2=32 \Leftrightarrow m=-10$.

Câu 21: Biết rằng các số thực a,b thay đổi sao cho hàm số $f(x)=-x^3+(x+a)^3+(x+b)^3$ luôn đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+b^2-4a-4b+2$.

A. -2. **B.** -4. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x)=-x^3+(x+a)^3+(x+b)^3$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=-3x^2+3(x+a)^2+3(x+b)^2=3x^2+6(a+b)x+3\left(a^2+b^2\right)$.

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty) \Leftrightarrow f'(x)\ge 0, \forall x\in(-\infty;+\infty)$.

$\Leftrightarrow \Delta'\le 0 \Leftrightarrow 18ab\le 0 \Leftrightarrow ab\le 0$.

Với $ab\le 0$ ta có $P=a^2+b^2-4a-4b+2\ge a^2+b^2+2ab-4a-4b+2$

$\Rightarrow P\ge (a+b)^2-4a-4b+2 \Rightarrow P\ge (a+b-2)^2-2 \Rightarrow P\ge -2$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}a+b=2\\ab=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a=2\\b=0\end{cases}$.

Vậy $\min P=-2$ khi $\begin{cases}a=0\\b=2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a=2\\b=0\end{cases}$.

Câu 22: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{2x-m}{x+1}\right|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 2. Tổng các phần tử của S bằng

A. 0. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

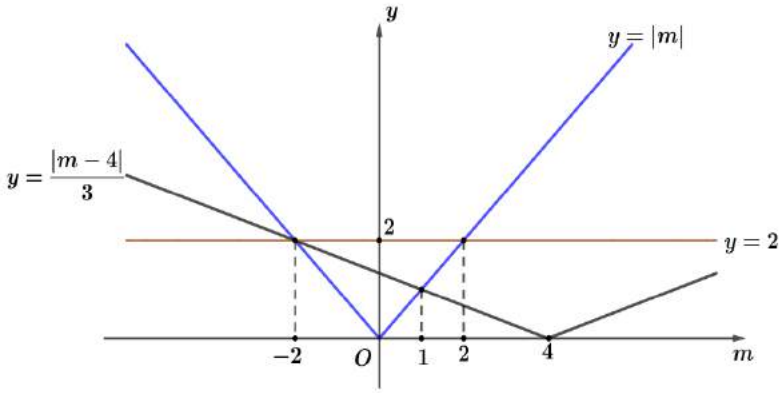
Đặt $f(x)=\dfrac{2x-m}{x+1}$.

Ta có hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;2]$ và có đạo hàm $f'(x)=\dfrac{m+2}{(x+1)^2}$.

Nếu $m=-2$ thì hàm số $f(x)=2, \forall x\ne -1$. Khi đó, giá trị lớn nhất của hàm số $y=|f(x)|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 2. Do đó $m=-2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán $(*)$.

Nếu $m\ne -2$ thì $M=\max\limits_{x\in[0;2]}|f(x)|=\max\limits_{m\in\mathbb{R}}\{|f(0)|;|f(2)|\}=\max\limits_{m\in\mathbb{R}}\left\{|m|;\dfrac{|m-4|}{3}\right\}$.

Phác thảo đồ thị hàm số $y=|m|$ và đồ thị hàm số $y=\dfrac{|m-4|}{3}$ trên cùng một hệ trục tọa độ ta được:



Khi $m<-2$ thì $2=M=-m\Leftrightarrow m=-2$ (loại).

Khi $-2<m<1$ thì $2=M=\dfrac{4-m}{3}\Leftrightarrow m=-2$ (loại).

Khi $m \ge 1$ thì $2 = M = m$. Suy ra $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán $(**)$.

Từ $(*)$ và $(**)$ suy ra $S = \{-2; 2\}$ do đó tổng các phần tử của S bằng 0.

Câu 23: Cho hàm số $f(x) = m.\sqrt{x-1}$,. Gọi $m_1; m_2$ là hai giá trị của m thỏa mãn $\min\limits_{[2;5]} f(x) + \max\limits_{[2;5]} f(x) = m^2 - 1$. Giá trị của $m_1 + m_2$ bằng

A. 5. **B.** –3. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

ĐKXĐ: $x \ge 1$. Ta có : $f'(x) = \dfrac{m}{2\sqrt{x-1}}$,

TH1: $m > 0$ ta có : $f'(x) = \dfrac{m}{2\sqrt{x-1}} > 0$

Khi đó : $\min\limits_{[2;5]} f(x) = f(2) = m$; $\max\limits_{[2;5]} f(x) = f(5) = 2m$

Theo giả thiết : $\min\limits_{[2;5]} f(x) + \max\limits_{[2;5]} f(x) = m^2 - 1$

Ta có: $m + 2m = m^2 - 1 \Rightarrow m^2 - 3m - 1 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2} (TM) \\ m = \dfrac{3-\sqrt{13}}{2} (loai) \end{array}\right.$

TH2: $m < 0$ ta có : $f'(x) = \dfrac{m}{2\sqrt{x-1}} < 0$

Khi đó : $\min\limits_{[2;5]} f(x) = f(5) = 2m$; $\max\limits_{[2;5]} f(x) = f(2) = m$

Theo giả thiết: $\min\limits_{[2;5]} f(x) + \max\limits_{[2;5]} f(x) = m^2 - 1$

Ta có: $2m + m = m^2 - 1 \Rightarrow m^2 - 3m - 1 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2} (loai) \\ m = \dfrac{3-\sqrt{13}}{2} (TM) \end{array}\right.$

Vậy $m_1 + m_2 = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2} + \dfrac{3-\sqrt{13}}{2} = 3$.

Câu 24: Cho hàm số $y = \dfrac{3 - m\sqrt{3}.\cos x}{\sin x + 2}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2022; 2022]$ để giá trị lớn nhất của hàm số lớn hơn 4 ?

A. 4042 . **B.** 4044 . **C.** 2021 . **D.** 2022 .

Lời giải

Chọn A

Hàm số đã cho xác định $\forall x \in \mathbb{R}$ do $\sin x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có $y = \dfrac{3 - m\sqrt{3}.\cos x}{\sin x + 2} \Leftrightarrow y \sin x + 2y = 3 - m\sqrt{3}.\cos x$

$\Leftrightarrow y \sin x + m\sqrt{3}\cos x = 3 - 2y$.

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $y^2+\left(m\sqrt{3}\right)^2\ge(3-2y)^2$

$\Leftrightarrow y^2-4y+3-m^2\le 0 \Leftrightarrow (y-2)^2\le m^2+1$

$\Leftrightarrow |y-2|\le\sqrt{m^2+1} \Leftrightarrow -\sqrt{m^2+1}\le y-2\le\sqrt{m^2+1} \Leftrightarrow 2-\sqrt{m^2+1}\le y\le 2+\sqrt{m^2+1}$.

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số đã cho bằng $2+\sqrt{m^2+1}$.

Ta có $2+\sqrt{m^2+1}>4\Leftrightarrow\sqrt{m^2+1}>2\Leftrightarrow m^2-3>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-\sqrt{3}\\m>\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Vì m là số nguyên thuộc đoạn $[-2022;2022]$

nên $m\in\{-2022;-2021;...;-3;-2;2;3;4;...;2022\}$.

Vậy có 4042 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 25: Trên đoạn $[1;3]$, hàm số $y=\dfrac{mx+3}{x-m+1}$ đạt giá trị lớn nhất bằng 5 khi $m=m_0$. Khi đó m_0 thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(5;+\infty)$. **D.** $\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định của hàm số: $D=\mathbb{R}\setminus\{m-1\}$.

Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[1;3]$ khi $m-1\notin[1;3]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m-1<1\\m-1>3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<2\\m>4\end{array}\right.(*)$.

Ta có $y'=\dfrac{-m^2+m-3}{(x-m+1)^2}<0$ với $x\ne m-1$ và m thoả (*). Do đó, hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định, từ đó suy ra $\underset{x\in[1;3]}{Max}\,y=y(1)=\dfrac{m+3}{2-m}$.

Theo đề bài, ta có $\dfrac{m+3}{2-m}=5\Leftrightarrow m=\dfrac{7}{6}$ (thoả điều kiện (*) nên nhận).

Vậy $m_0=\dfrac{7}{6}\in\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right)$.

Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2-9x+m$ (m là tham số thực) thoả mãn $\min\limits_{x\in[-2;4]}y+2\max\limits_{x\in[-2;4]}y=1$. Giá trị của m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-4;1)$. **B.** $(-2;5)$. **C.** $(-10;-1)$. **D.** $(2;9)$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y=x^3-3x^2-9x+m$ liên tục trên đoạn $[-2;4]$

$y'=3x^2-6x-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3.\end{array}\right.$

Ta có $f(-2)=m-2,\ f(-1)=m+5,\ f(3)=m-27,\ f(4)=m-20$.

Suy ra $\max\limits_{x\in[-2;4]} y = m+5,\ \min\limits_{x\in[-2;4]} y = m-27$.

$\min\limits_{x\in[-2;4]} y + 2\max\limits_{x\in[-2;4]} y = 1 \Leftrightarrow m-27+2(m+5)=1 \Leftrightarrow 3m=18 \Leftrightarrow m=6.$

Câu 27: Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2-9x+m$ thỏa mãn $\min\limits_{x\in[-2;4]} y + 2\max\limits_{x\in[-2;4]} y = -32$. Giá trị của m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-4;1)$. **B.** $(-2;5)$. **C.** $(-10;-1)$. **D.** $(2;9)$.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D=\mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số liên tục trên đoạn $[-2;4]$

$f'(x)=3x^2-6x-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3\in[-2;4] \\ x=-1\in[-2;4] \end{array}\right.$

$f(-2)=m-2$; $f(-1)=m+5$; $f(3)=m-27$; $f(4)=m-20$

Ta có:

$\min\limits_{x\in[-2;4]} y + 2\max\limits_{x\in[-2;4]} y = -32 \Leftrightarrow f(3)+2f(-1)=-32 \Leftrightarrow m-27+2(m+5)=-32 \Leftrightarrow m=-5$.

Câu 28: Cho hàm số $y=\dfrac{mx-m^2-2}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\max\limits_{[-2;0]} y = \dfrac{-1}{3}$. Có bao nhiêu giá trị dương của m thỏa mãn điều kiện bài toán.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=\dfrac{m^2-m+2}{(x-1)^2}>0$ với $\forall x\in[-2;0]$

$\Rightarrow$ hàm số $y=\dfrac{mx-m^2-2}{-x+1}$ đồng biến trên $[-2;0] \Rightarrow \max\limits_{[-2;0]} y = y(0)=m^2+2$.

Theo đề bài ta có $\Rightarrow m^2+2=3 \Rightarrow m=\pm 1$ mà $m>0$ nên ta nhận giá trị $m=1$.

Vậy có 1 giá trị dương của m thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 29: Cho hàm số $y=\left|x^4-4x^3+4x^2+a\right|$. Có bao nhiêu số thực a để $\max\limits_{[2,3]} y + \min\limits_{[2,3]} y = 11$

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Đặt $y=\left|x^4-4x^3+4x^2+a\right|=|f(x)|$.

Xét hàm số $f(x)=x^4-4x^3+4x^2+a$.

Khi đó $f'(x)=4x^3-12x^2+8x=4x(x^2-3x+2)=0 \Leftrightarrow x\in\{0;1;2\}$.

$\Rightarrow f'(x)\geq 0, \forall x\in[2;3]$ và $f(2)=a; f(3)=a+9$.

Ta có $\forall x\in[2;3]$ thì $\begin{cases} \max y\in\{|a|,|a+9|\} \\ \min y\in\{|a|,0,|a+9|\} \end{cases}$.

Xét các trường hợp:

$a \ge 0 \Rightarrow \max y = a+9; \min y = a \Rightarrow 2a+9 = 11 \Rightarrow a = 1$, nhận.

$a \le -9 \Rightarrow \max y = -a; \min y = -a-9 \Rightarrow -a-9-a = 11 \Rightarrow a = -10$, nhận.

$\begin{cases} a < 0 \\ a+9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -9 < a < 0 \Rightarrow \min y = 0; \max y \in \{a+9; -a\}$.

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a+9 = 11 \\ -a = 11 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = -11 \end{array}\right.$ **(Loại)**.

Do đó $a \in \{-10;\ 1\}$.

Vậy tồn tại hai giá trị a thỏa mãn.

Câu 30: Biết rằng giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = mx + \dfrac{36}{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 20. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $2 < m \le 4$. **B.** $4 < m \le 8$. **C.** $0 < m \le 2$. **D.** $m > 8$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác đinh: $x \ne -1$.

Tính đạo hàm: $y' = m - \dfrac{36}{(x+1)^2}$, $\forall x \ne 1$ và $y(0) = 36;\ y(3) = 3m+9$.

TH1: Với $m \le 0$, $y' = m - \dfrac{36}{(x+1)^2} < 0, \forall x \in [0;3]$. Suy ra $\begin{cases} m \le 0 \\ \min\limits_{x\in[0;3]} y = 3m+9 = 20 \end{cases}$ (vô nghiệm).

TH2: Với $m > 0,\ y' = 0 \Leftrightarrow x = -1 + \dfrac{6}{\sqrt{m}}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 20 nên ta có:

$$y\left(-1+\frac{6}{\sqrt{m}}\right) = 20 \Leftrightarrow m\left(-1+\frac{6}{\sqrt{m}}\right) + \frac{36}{-1+\frac{6}{\sqrt{m}}+1} = 20 \Leftrightarrow -m+12\sqrt{m} = 20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 100 \\ m = 4 \end{array}\right.$$

Loại $m = 100$ vì $x_0 = -1 + \dfrac{6}{\sqrt{100}} = \dfrac{-2}{5} \notin [0;3]$. Vậy $m = 4$.

Câu 31: Trên đoạn $[0;4]$, hàm số $y = \dfrac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 2 + m$ đạt giá trị lớn nhất bằng 5 tại $x = a$. Tính $m - a$

A. -25. **B.** 31. **C.** 25. **D.** -33.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y = \dfrac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 2 + m$

Hàm số liên tục trên đoạn $[0;4]$ có $y' = x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [0;4] \\ x = -2 \notin [0;4] \\ x = 2 \in [0;4] \end{array}\right.$.

Ta có $y(0) = 2+m; y(2) = -2+m; y(4) = 34+m$.

Vậy hàm số $y = \dfrac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 2 + m$ đạt giá trị lớn nhất bằng $34+m$ tại điểm $x = 4$.

Mà $34+m=5\Leftrightarrow m=-29$, nên $m-a=-29-4=-33$

Câu 32: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x-2m}{x+1}$. Gọi S là tập hợp các giá trị m nguyên sao cho $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]}\left|f(7\sin x)\right|=0$.

Tổng các phần tử của S bằng

A. 10. **B.** 3. **C.** 15. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=7\sin x$. Với $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow t\in[0;7]$

$YCBT\Leftrightarrow\min\limits_{[0;7]}\left|f(t)\right|=0$

Ta có: $f(t)=\dfrac{t-2m}{t+1}$ luôn xác định trên $[0;7]$

Với $m=-\dfrac{1}{2}$ thì $f(t)=1\Rightarrow$Loại $m=-\dfrac{1}{2}$

Với $m\neq-\dfrac{1}{2}$ thì ta có: $f(0)=-2m;\ f(7)=\dfrac{7-2m}{8}$. Ta xét các trường hợp sau:

TH1: $f(0).f(7)\le 0\Leftrightarrow -2m.\dfrac{7-2m}{8}\le 0\Leftrightarrow 0\le m\le\dfrac{7}{2}$

Khi đó: $\min\limits_{[0;7]}\left|f(t)\right|=0\Rightarrow 0\le m\le\dfrac{7}{2}$ thỏa yêu cầu bài toán mà m nguyên nên $m\in\{0;1;2;3\}$

TH2: $f(0).f(7)>0\Leftrightarrow -2m.\dfrac{7-2m}{8}>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>\dfrac{7}{2}\\ m<0\end{array}\right.$

Khi đó: $\min\limits_{[0;7]}\left|f(t)\right|>0\Rightarrow$ Không có giá trị m thỏa đề bài. Do đó: $S=\{0;1;2;3\}$

Vậy tổng các phần tử của S bằng 6.

Câu 33: Gọi S là tập tất cả giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left(x^3-3x+m\right)^2$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 4. Tính tổng các phần tử của S

A. 0. **B.** -5. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

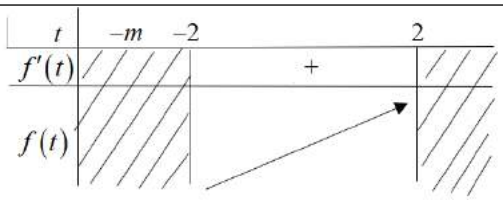
Đặt $t=x^3-3x$. Với $\forall x\in[-1;1]\Rightarrow t\in[-2;2]$

Ta được hàm số: $f(t)=(t+m)^2$, xét trên đoạn $[-2;2]$

Ta có: $f'(t)=2(t+m)$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=-m$

Trường hợp 1: Nếu $-m\le-2\Leftrightarrow m\ge 2$

Ta có bảng biến thiên:

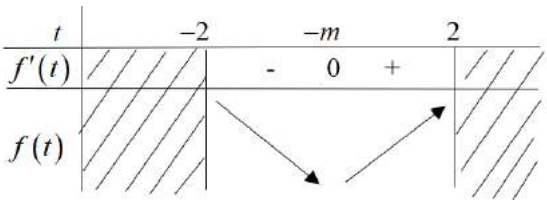


Từ bảng biến thiên suy ra: $\min\limits_{[-1;1]} y = \min\limits_{[-2;2]} f(t) = f(-2) = (m-2)^2$

Theo giả thiết: $\min\limits_{[-1;1]} y = 4 \Rightarrow (m-2)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \ \ (l) \\ m=4 \ \ (t/m) \end{array}\right.$

Trường hợp 2: Nếu $-2 < -m < 2 \Leftrightarrow -2 < m < 2$

Ta có bảng biến thiên:

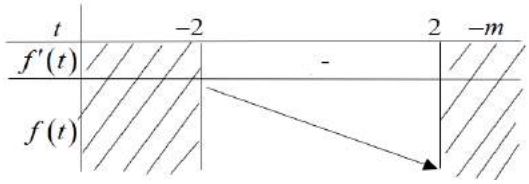


Từ bảng biến thiên suy ra: $\min\limits_{[-1;1]} y = \min\limits_{[-2;2]} f(t) = f(-m) = 0$

Theo giả thiết: $\min\limits_{[-1;1]} y = 4 \Rightarrow$ không có m thỏa mãn.

Trường hợp 3: Nếu $-m \geq 2 \Leftrightarrow m \leq -2$

Ta có bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên suy ra: $\min\limits_{[-1;1]} y = \min\limits_{[-2;2]} f(t) = f(2) = (m+2)^2$

Theo giả thiết: $\min\limits_{[-1;1]} y = 4 \Rightarrow (m+2)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \ \ (l) \\ m=-4 \ \ (t/m) \end{array}\right.$

Vậy $S = \{-4;4\}$. Tổng các phần tử của S bằng 0.

Câu 34: Cho biết hàm số $y = f(x) = \left|x^2 - 4x - 1 + m\right|$ có giá trị lớn nhất bằng 3 khi $x \in [0;3]$. Số các giá trị của tham số m thỏa mãn là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x) = x^2 - 4x - 1 + m$. Ta có: $g'(x) = 2x - 4$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Ta có: $g(0) = -1 + m$; $g(2) = -5 + m$; $g(3) = -4 + m$ suy ra $y_{\max} = \left\{\left|-5+m\right|; \left|-1+m\right|\right\}$.

TH1: $\left\{\begin{array}{l} \left|-5+m\right| \geq \left|-1+m\right| \\ \left|-5+m\right| = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left|-5+m\right| \geq \left|-1+m\right| \\ \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=8 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow m = 2$.

TH2: $\begin{cases}|-5+m|<|-1+m| \\ |-1+m|=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|-5+m|<|-1+m| \\ \left[\begin{array}{l}m=4 \\ m=-2\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow m=4$.

Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn đề bài.

Câu 35: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{|x-m^2|}{x+1}$ trên $[0;3]$ có giá trị lớn nhất bằng 5. Tích các giá trị của m bằng

A. -5. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Với $x\in[0;3]$ thì $f(x)=\dfrac{|x-m^2|}{x+1}=\left|\dfrac{x-m^2}{x+1}\right|$.

Hàm $y=\dfrac{x-m^2}{x+1}$ đồng biến trên $[0;3]$ nên $\max\limits_{[0;3]} y=y(3)=\dfrac{3-m^2}{4}$; $\min\limits_{[0;3]} y=y(0)=-m^2$

$$\Rightarrow \max_{[0;3]} f(x)=\frac{\left|m^2+\dfrac{3-m^2}{4}\right|+\left|m^2-\dfrac{3-m^2}{4}\right|}{2}=5 \Leftrightarrow 3+3m^2+\left|5m^2-3\right|=40$$

$$\Leftrightarrow \left|5m^2-3\right|=37-3m^2 \Leftrightarrow \begin{cases}m^2\le\dfrac{37}{3} \\ \left[\begin{array}{l}m^2=5(tm) \\ m^2=-17(l)\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow m=\pm\sqrt{5}.$$

Câu 36: Tìm tổng các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3-x^2+6x+9-m\right|$ trên đoạn $[0;1]$ bằng 5.

A. 24. **B.** 10. **C.** 14. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x)=x^3-x^2+6x+9-m \Rightarrow g'(x)=3x^2-2x+6>0,\forall x$

$$\Rightarrow \max_{[0;1]} y=\max\left\{|9-m|,|15-m|\right\}$$

TH1: $\begin{cases}|9-m|=5 \\ |9-m|\ge|15-m|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=4 \\ m=14\end{array}\right. \\ |9-m|\ge|15-m|\end{cases} \Leftrightarrow m=14$

TH2: $\begin{cases}|15-m|=5 \\ |9-m|\le|15-m|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=10 \\ m=20\end{array}\right. \\ |9-m|\le|15-m|\end{cases} \Leftrightarrow m=10$

Vậy $m=10;m=14$ thỏa mãn bài toán $\Rightarrow$ tổng các giá trị của tham số m bằng 24.

Câu 37: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{3}\left(m^2-2\right)x^3-m^2x^2+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ luôn bé hơn hoặc bằng 5 ?

A. 0. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}\left(m^2-2\right)x^3-m^2x^2+m$ trên đoạn $[0;2]$.

Ta có $g'(x)=x^3+\left(m^2-2\right)x^2-2m^2x=x(x-2)\left(x+m^2\right)\le 0,\ \forall x\in[0;2]$.

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $[0;2]$

Để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}\left(m^2-2\right)x^3-m^2x^2+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ luôn bé hơn hoặc bằng 5 $\Leftrightarrow\begin{cases}g(0)\le 5\\ g(2)\ge -5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le 5\\ 4+\frac{8}{3}\left(m^2-2\right)-4m^2+m\ge -5\end{cases}$.

$\Leftrightarrow\frac{3-\sqrt{185}}{8}\le m\le\frac{3+\sqrt{185}}{8}\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m\in\{-1;0;1;2\}$.

Câu 38: Cho hàm số $f(x)=\left|x^4-2x^2+m-1\right|$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;2]$ bằng 18. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -5. **B.** 4. **C.** -14. **D.** -10.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x)=x^4-2x^2+m-1$ liên tục trên đoạn $[0;2]$.

Ta có: $g'(x)=4x^3-4x$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\notin[0;2]\\ x=0\in[0;2]\\ x=1\in[0;2]\end{cases}$

$g(0)=m-1$, $g(1)=m-2$, $g(2)=m+7$.

$\Rightarrow\min\limits_{x\in[0;2]}g(x)=m-2$, $\max\limits_{x\in[0;2]}g(x)=m+7\Rightarrow\min\limits_{x\in[0;2]}f(x)=\min\{0,|m-2|,|m+7|\}$.

Trường hợp 1: $m>2$.

$\min\limits_{x\in[0;2]}f(x)=m-2\Leftrightarrow m-2=18\Leftrightarrow m=20$ (nhận).

Trường hợp 2: $m+7<0\Leftrightarrow m<-7$.

$\min\limits_{x\in[0;2]}f(x)=-m-7\Leftrightarrow -m-7=18\Leftrightarrow m=-25$ (nhận).

Trường hợp 3: $(m-2)(m+7)\le 0\Leftrightarrow -7\le m\le 2$.

$\min\limits_{x\in[0;2]}f(x)=0$ (loại).

Suy ra $m\in\{20;-25\}$.

Vậy tổng tất cả các phần tử của S bằng -5.

Câu 39: Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\left|x^2-4x+m-2\right|$ trên $[-2;3]$ bằng 6.

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Đặt $g(x)=x^2-4x+m-2$.

Ta có: $g'(x)=2x-4 \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-4=0 \Leftrightarrow x=2$ và $\begin{cases} g(-2)=m+10 \\ g(2)=m-6 \\ g(3)=m-5 \end{cases}$

Suy ra $\begin{cases} \min\limits_{[-2;3]} g(x)=m-6 \\ \max\limits_{[-2;3]} g(x)=m+10 \end{cases}$. Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $m>6$.

$\min\limits_{[-2;3]} f(x)=m-6 \Leftrightarrow m=12$.

Trường hợp 2: $m+10<0 \Leftrightarrow m<-10$.

$\min\limits_{[-2;3]} f(x)=-m-10 \Leftrightarrow -m-10=6 \Leftrightarrow m=-16$.

Trường hợp 3: $m-6\le 0\le m+10 \Leftrightarrow -10\le m\le 6$.

$\min\limits_{[-2;3]} f(x)=0$ mà theo bài $\min\limits_{[-2;3]} f(x)=6$ nên không có m thỏa mãn.

Vậy có hai giá trị của tham số m thỏa mãn.

Câu 40: Cho hàm số $f(x)=\left|x^6+x^3+m\right|-2x^3$. Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ bằng 1. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $\mathbb{R}$

$y=f(x)=\left|x^6+x^3+m\right|-2x^3$.

Đặt $t=x^3$ hàm số ban đầu trở thành hàm số $y=g(t)=\left|t^2+t+m\right|-2t$, $t\in\mathbb{R}$.

Tam thức bậc hai $h(t)=t^2+t+m$ có biệt thức $\Delta=1-4m$. Ta xét 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\Delta=1-4m\le 0 \Leftrightarrow m\ge\frac{1}{4} \Rightarrow h(t)=t^2+t+m\ge 0,\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Khi đó, $y=g(t)=t^2+t+m-2t=t^2-t+m=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+m-\frac{1}{4}\ge m-\frac{1}{4},\ \forall t\in\mathbb{R}$.

$\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=\min\limits_{t\in\mathbb{R}} g(t)=g\left(\frac{1}{2}\right)=m-\frac{1}{4}$.

Theo đề $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=1 \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge\frac{1}{4} \\ m-\frac{1}{4}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge\frac{1}{4} \\ m=\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m=\frac{5}{4}$.

Trường hợp 2: $\Delta=1-4m>0 \Leftrightarrow m<\frac{1}{4} \Rightarrow h(t)=t^2+t+m$ có 2 nghiệm phân biệt t_1, t_2 $(t_1<t_2)$.

Vì $t_1+t_2=-1<0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t_1<t_2<0\\t_1<0\le t_2\end{array}\right.$.

Nếu $t_1<t_2<0$ thì $P=t_1t_2=m>0$ kết hợp với $m<\frac{1}{4}$ ta có $0<m<\frac{1}{4}$. Khi đó:

$g\left(\frac{1}{2}\right)=\left|\frac{3}{4}+m\right|-1<0\Rightarrow\min\limits_{t\in\mathbb{R}}g(t)\le\left|\frac{3}{4}+m\right|-1<0$

+) Nếu $t_1<0\le t_2$ thì $g(t_2)=\left|t_2^2+t_2+m\right|-2t_2=-2t_2\le 0\Rightarrow\min\limits_{t\in\mathbb{R}}g(t)\le 0$.

Suy ra trong **trường hợp 2** hàm số $y=g(t)$ không thể có giá trị nhỏ nhất bằng 1 trên $\mathbb{R}$.

Vậy $m=\frac{5}{4}$. Suy ra tổng các phần tử của S là $\frac{5}{4}$.

Câu 41: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=mx+\frac{36}{x+1}$ trên $[0;3]$ bằng 20.

Lời giải

Ta có $y'=m-\frac{36}{(x+1)^2}=\frac{m(x+1)^2-36}{(x+1)^2}$ và $y(0)=36;y(3)=3m+9.$

TH1: $m\le\frac{9}{4}$ thì hàm số nghịch biến trên đoạn $[0;3]$, nên $\min\limits_{[0;3]}y=y(3)=3m+9=20\Leftrightarrow m=\frac{11}{3}$ không thỏa mãn.

TH2: $m>\frac{9}{4}$ khi đó $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1+\frac{6}{\sqrt{m}}\\x=-1-\frac{6}{\sqrt{m}}<0\end{array}\right.$

Nếu $0\le-1+\frac{6}{\sqrt{m}}\le 3\Leftrightarrow\frac{9}{4}\le m\le 36\Rightarrow m\in\left(\frac{9}{4};36\right]$

Khi đó $\min\limits_{[0;3]}y=y\left(-1+\frac{6}{\sqrt{m}}\right)=20$

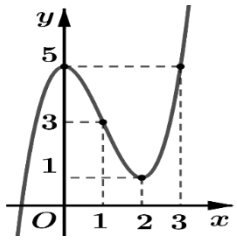
$\Leftrightarrow m.\left(-1+\frac{6}{\sqrt{m}}\right)+\frac{36}{-1+\frac{6}{\sqrt{m}}+1}=20\Leftrightarrow-m+12\sqrt{m}-20=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=4\\m=100\end{array}\right.$.

Suy ra $m=4;m=100$ (loại).

Nếu $m>36$ thì $-1+\frac{6}{\sqrt{m}}<0$ nên hàm số đồng biến trên $[0;3]$ vậy $\min\limits_{[0;3]}y=y(0)=36$ không thỏa mãn.

Vậy $m=4$ là giá trị cần tìm.

Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|f\left(x^2+2x\right)+m\right|$ trên đoạn $[0;1]$ không lớn 4.

A. -9. **B.** 0. **C.** 25. **D.** -39.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=x^2+2x$, với $x\in[0;1]\Rightarrow t\in[0;3]$.

Ta quy về bài toán: Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|f\left(t\right)+m\right|$ trên đoạn $[0;3]$ không lớn 4.

Dựa vào đồ thị ta có $\begin{cases}\max\limits_{[1;3]} f\left(t\right)=f\left(0\right)=f\left(3\right)=5\\ \min\limits_{[1;3]} f\left(t\right)=f\left(2\right)=1\end{cases}$.

Như vậy: $\max\limits_{[1;3]}\left[f\left(t\right)+m\right]=m+5,\ \min\limits_{[1;3]}\left[f\left(t\right)+m\right]=m+1.$

Trường hợp 1: $m+1\ge 0\Leftrightarrow m\ge -1$. Khi đó $\min\limits_{[1;3]}\left|f\left(t\right)+m\right|=m+1$.

Theo đề bài: $\min\limits_{[-1;1]}\left|f\left(t\right)\right|\le 4$ nên $m+1\le 4\Leftrightarrow m\le 3.$

Kết hợp điều kiện: $-1\le m\le 3.$ Khi đó $m\in\{-1,0,1,2,3\}.$

Trường hợp 2: $m+5\le 0\Leftrightarrow m\le -5.$ Khi đó $\min\limits_{[1;3]}\left|f\left(t\right)+m\right|=-m-5$.

Theo đề bài: $\min\limits_{[-1;1]}\left|f\left(t\right)\right|\le 4$ nên $-m-5\le 4\Leftrightarrow m\ge -9.$

Kết hợp điều kiện: $-9\le m\le -5.$ Khi đó $m\in\{-9,-8,-7,-6,-5\}.$

Trường hợp 3: $(m+1)(m+5)<0\Leftrightarrow -5<m<-1.$ Khi đó $\min\limits_{[1;3]}\left|f\left(t\right)+m\right|=0$.

Suy ra $\min\limits_{[-1;1]}\left|f\left(t\right)\right|\le 4$ hiển nhiên thỏa mãn.

Khi đó $m\in\{-4,-3,-2\}$ suy ra $m\in\{-9,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3\}.$

Vậy tổng tất cả giá trị nguyên của tham số m bằng -39.

Câu 43: Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x+1$. Với giá trị nào của tham số m thì giá trị lớn nhất của hàm số $h(x)=\left|f\left(x\right)+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $m=-2$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=3x^2-3=0\Leftrightarrow x=\pm 1$ nên $f\left(0\right)=1;\ f\left(1\right)=-1$ và $f\left(2\right)=3$.

Khi đó $\max\limits_{[0;2]}\left\{f\left(x\right)+m\right\}=3+m$ và $\min\limits_{[0;2]}\left\{f\left(x\right)+m\right\}=-1+m$.

Do đó $\max\limits_{[0;2]}\left\{h(x)\right\}=\dfrac{\left|(3+m)+(-1+m)\right|+\left|(3+m)-(-1+m)\right|}{2}=\left|m+1\right|+2\ge 2$.

Dấu "$=$" xảy ra khi $m=-1$.

Câu 44: Cho hàm số $f(x)=x^3+3x^2+m-1$. Số giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=|f(x)|$ trên đoạn $[0;2]$ nhỏ nhất là

A. 1. **B.** 12. **C.** 9. **D.** 11.

Lời giải

Chọn D

Theo giả thiết: $f(x)=x^3+3x^2+m-1$. Ta có: $f'(x)=3x^2+6x$

Xét hàm số $f(x)=x^3+3x^2+m-1$ trên $[0;2]$, ta có:

x	0		2
y'		+	
y	$m-1$	↗	$m+19$

TH1: $m-1\ge 0\Leftrightarrow m\ge 1$. Ta có: $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=m+19$

TH2: $m+19\le 0\Leftrightarrow m\le -19$. Ta có: $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=1-m$

TH3: $m-1<0<m+19\Leftrightarrow -19<m<1$

Ta có: $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=\dfrac{|m-1|+|m+19|}{2}=\dfrac{|1-m|+|m+19|}{2}\ge 10$, dấu "=" xảy ra khi $-19<m<1$

Suy ra: $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=\begin{cases}m+19 \,khi\, m\ge 1\\ 10 \quad khi -19<m<1\\ 1-m \,khi\, m\le -19\end{cases}$

Do đó giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=|f(x)|$ trên đoạn $[0;2]$ nhỏ nhất là 10 khi $-19<m<1$

Mà $m\in[-10;10]\cap\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-10,-9,...,0\}$.

Vậy có 11 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 45: Cho hàm số $f(x)=x^2-2x$. Có bao nhiêu giá trị m để giá trị lớn nhất của hàm số $|f(1+\sin x)+m|$ bằng 3?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y=f(1+\sin x)$ có TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Đặt: $t=1+\sin x$ suy ra: $t\in[0;2]$

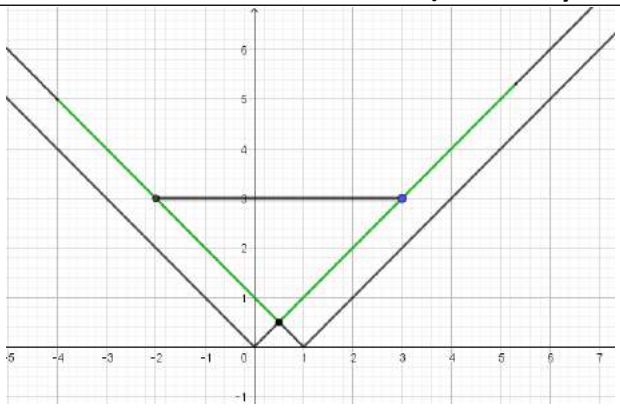
Xét: $f(t)=t^2-2t$ với $t\in[0;2]$; Hàm số $f(t)$ liên tục trên $[0;2]$

Ta có: $f'(t)=2t-2$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=1\in[0;2]$

Nhận thấy: $f(0)=0; f(1)=-1; f(2)=0$

Vậy: GTLN của hàm số $g(x)=|f(1+\sin x)+m|$ là $\max\{|m|;|m-1|\}$

Vẽ đồ thị hàm số: $y=|m|; y=|m-1|$ lên cùng một hệ trục toạ độ với biến số m ta có:



Vậy: có 2 giá trị của m để GTLN của hàm số bằng 3.

Câu 46: Gọi S là tập các giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=\left|x^2-4x+m-1\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;3]$ bằng 4. Tổng các phần tử của tập S bằng

A. 0. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Đặt $g(x)=x^2-4x+m-1$.

Ta có $g'(x)=2x-4\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow 2x-4=0\Leftrightarrow x=2$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$.

x	-1		2		3
y	$m+4$	$\searrow$	$m-5$	$\nearrow$	$m-4$

Dựa vào bảng biên thiên của hàm số $g(x)$ ta có:

Trường hợp 1: Nếu $(m+4)(m-5)\le 0$ thì $\min\limits_{[-1;3]} f(x)=\min\limits_{[-1;3]}\left|g(x)\right|=0$.

Trường hợp 2: Nếu $(m+4)<0\Leftrightarrow m<-4$ thì

$$\min_{[-1;3]} f(x)=\min_{[-1;3]}\left|g(x)\right|=\left|m+4\right|=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} m=0 & (l)\\ m=-8 & (tm)\end{array}\right.$$

+) Trường hợp 3: Nếu $(m-5)>0\Leftrightarrow m>5$ thì

$$\min_{[-1;3]} f(x)=\min_{[-1;3]}\left|g(x)\right|=\left|m-5\right|=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} m=1 & (l)\\ m=9 & (tm)\end{array}\right.$$

Vậy $S=\{9;-8\}$ nên tổng các phần tử của S là $9-8=1$.

Câu 47: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+m^2-5m$. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|f(x)\right|$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 2.

A. 5. **B.** 10. **C.** -10. **D.** -5.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x)=3x^2-6x$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Do $f(0)=m^2-5m$; $f(2)=m^2-5m-4$; $f(3)=m^2-5m$ nên

$m^2-5m-4\le f(x)\le m^2-5m\ \forall x\in[0;3]$.

Vì $\min\limits_{[0;3]}|f(x)|=2\neq 0$ nên xảy ra hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $m^2-5m-4>0$ (*)

Khi đó $f(x)>0\ \forall x\in[0;3]$ và $|f(x)|=f(x)\ge m^2-5m-4\ \forall x\in[0;3]$.

Suy ra $\min\limits_{[0;3]}|f(x)|=m^2-5m-4$. Do $\min\limits_{[0;3]}|f(x)|=2$

$\Rightarrow m^2-5m-4=2\Leftrightarrow m^2-5m-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=6\\m=-1\end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện (*))

Trường hợp 2: $m^2-5m<0$.

Khi đó $f(x)<0\ \forall x\in[0;3]$ và $|f(x)|=-f(x)\ge -m^2+5m\ \forall x\in[0;3]$.

Suy ra $\min\limits_{[0;3]}|f(x)|=-m^2+5m$. Do $\min\limits_{[0;3]}|f(x)|=2$

$\Rightarrow -m^2+5m=2\Leftrightarrow m^2-5m+2=0\Leftrightarrow m=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{2}$ (không thỏa mãn m là số nguyên).

Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn điề kiện là $m=6;m=-1$. Suy ra tổng tất cả các giá trị nguyên của m thỏa mãn là: $6+(-1)=5$.

Câu 48: Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)=|2x^3-12x^2+9x+m+8|+9x$ (với m là tham số) trên đoạn $[0;5]$ bằng 78. Tính tổng các giá trị của tham số m?

A. 6. **B.** 12. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Do giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)=|2x^3-12x^2+9x+m+8|+9x$ (m là tham số) trên đoạn $[0;5]$ là 78 nên

$|2x^3-12x^2+9x+m+8|+9x\le 78\ \ \forall x\in[0;5]$ và dấu bằng phải xảy ra tại ít nhất một điểm

$\Leftrightarrow|2x^3-12x^2+9x+m+8|\le 78-9x\ \ \forall x\in[0;5]$

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}78-9x\ge 0\ dung\ \forall x\in[0;5]\\9x-78\le 2x^3-12x^2+9x+m+8\le 78-9x\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow -2x^3+12x^2-86\le m\le -2x^3+12x^2-18x+70\ \ \forall x\in[0;5]$

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\ge\max\limits_{x\in[0;5]}\left(-2x^3+12x^2-86\right)\\m\le\min\limits_{x\in[0;5]}\left(-2x^3+12x^2-18x+70\right)\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}m\ge -22\\m\le 30\end{array}\right.$

Và dấu bằng phải xảy ra nên $\left[\begin{array}{l} m=-22 \\ m=30 \end{array}\right.$. Vậy tổng tất cả giá trị m là 8

Câu 49: Cho hàm số $y=\left|\dfrac{x^2-2mx+1}{x^2-x+2}\right|$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ để giá trị lớn nhất của hàm số lớn hơn hoặc bằng 4.

A. 14 **B.** 10 **C.** 20 **D.** 18

Lời giải

Chọn A

Theo đề ra ta có $\max\left\{\left|\dfrac{x^2-2mx+1}{x^2-x+2}\right|\right\}\geq 4$

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-2mx+1}{x^2-x+2}=1$ do đó luôn tồn tại $\max\left\{\left|\dfrac{x^2-2mx+1}{x^2-x+2}\right|\right\}$ trên $\mathbb{R}$ thoả yêu cầu bài toán.

Ta tìm m để $\max\left\{\left|\dfrac{x^2-2mx+1}{x^2-x+2}\right|\right\}<4,\forall x\in\mathbb{R}$

Ta có $\left|\dfrac{x^2-2mx+1}{x^2-x+2}\right|<4,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2-2mx+1}{x^2-x+2}>-4,\forall x\in\mathbb{R}\\ \dfrac{x^2-2mx+1}{x^2-x+2}<4,\forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}5x^2-(2m+4)x+9>0,\forall x\in\mathbb{R}\\ -3x^2-(2m-4)x-7<0,\forall x\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+4m-41<0\\ m^2-4m-17<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2-3\sqrt{5}<m<-2+3\sqrt{5}\\ 2-\sqrt{21}<m<2+\sqrt{21}\end{cases}$

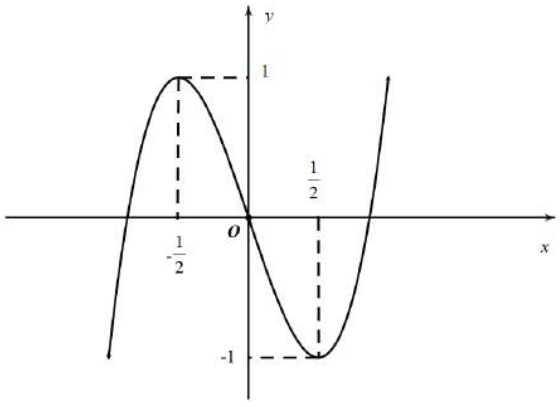
$\Leftrightarrow 2-\sqrt{21}<m<-2+3\sqrt{5}$

Khi đó

$\max\left\{\left|\dfrac{x^2-2mx+1}{x^2-x+2}\right|\right\}\geq 4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m\leq 2-\sqrt{21} \\ m\geq -2+3\sqrt{5}\end{array}\right.$.

Giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ là $m\in\{-10;-9;...;-3;5;6;...;10\}$.

Câu 50: Cho hàm số $y=f(x)$ đồ thị như hình vẽ



Đặt $g(x)=|f(x)|-\sqrt{1-2|x|}+f\left(\dfrac{\sqrt{1+2m}-\sqrt{1-2m}}{2\sqrt{2}}\right)$. Với giá trị nào của m thì giá trị nhỏ

nhất của hàm số $g(x)$ là 0.

A. Không tồn tại. **B.** 0. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định của hàm số $g(x)$ là $1-2|x|\ge 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le x\le \frac{1}{2}$.

Ta có: $|f(x)|\ge 0$ và $-\sqrt{1-2|x|}\ge -1$

Do đó: $|f(x)|-\sqrt{1-2|x|}\ge -1$.Dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases} f(x)=0 \\ 1-2|x|=1 \end{cases} \Rightarrow x=0$

$$\Rightarrow g(x)\ge f\left(\frac{\sqrt{1+2m}-\sqrt{1-2m}}{2\sqrt{2}}\right)-1$$

Để giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ là 0 thì:

$$f\left(\frac{\sqrt{1+2m}-\sqrt{1-2m}}{2\sqrt{2}}\right)-1=0 \Leftrightarrow f\left(\frac{\sqrt{1+2m}-\sqrt{1-2m}}{2\sqrt{2}}\right)=1$$

Từ đồ thị hàm số $\Rightarrow \frac{\sqrt{1+2m}-\sqrt{1-2m}}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+2m}-\sqrt{1-2m}=-\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \left\{\sqrt{1+2m}+\sqrt{2}=\sqrt{1-2m}\right. \\ -\frac{1}{2}\le m\le \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2m+2+2\sqrt{2+4m}=1-2m \\ -\frac{1}{2}\le m\le \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2+4m}=-2m-1 \\ -2m-1\ge 0 \\ -\frac{1}{2}\le m\le \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2+4m}=-2m-1 \\ m\le -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\le m\le \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow m=-\frac{1}{2}.$$

Câu 51: Cho hàm số $f(x)=x^4-2x^2$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=|f(\cos x+1)+m|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng các phần tử của S bằng

A. 4. **B.** -7. **C.** $-\frac{7}{2}$. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\cos x+1,\ t\in[0;2]$. Khi đó $y=|t^4-2t^2+m|$ với $t\in[0;2]$.

Xét $f(t)=t^4-2t^2+m$ với $t\in[0;2]$.

$$f'(t)=4t^3-4t=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \ (\text{nhan}) \\ t=1 \ (\text{nhan}) \\ t=-1(\text{loai}) \end{cases}.$$

Ta có $f(0)=m$, $f(1)=-1+m$, $f(2)=8+m$.

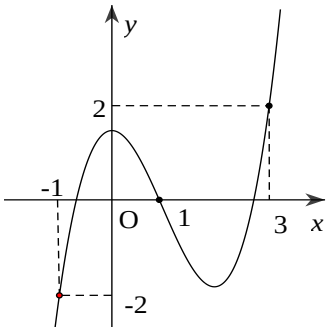
Do đó $\max\limits_{[0;2]} f(t)=8+m$, $\min\limits_{[0;2]} f(t)=m-1$.

Suy ra $\max\limits_{[0;2]}\left|f(t)\right|=\dfrac{\left|m+8+m-1\right|+\left|m+8-m+1\right|}{2}=\dfrac{\left|2m+7\right|+9}{2}$.

Ta có $\max y=\max\limits_{[0;2]}\left|f(t)\right|=\dfrac{\left|2m+7\right|+9}{2}\geq\dfrac{9}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $2m+7=0\Leftrightarrow m=-\dfrac{7}{2}$.

Câu 52: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;0]$ sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm $g(x)=\left|\left|2f(x)+m-4\right|+f(x)-3\right|$ trên đoạn $[-1;3]$ lớn hơn 1?

A. 9. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(x)=t, t\in[-2;2]$

$\min\limits_{[-1;3]} g(x)>1\Leftrightarrow g(x)>1,\forall x\in[-1;3]\Leftrightarrow\left|\left|2t+m-4\right|+t-3\right|>1,\forall t\in[-2;2]$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|2t+m-4\right|+t-3>1\\ \left|2t+m-4\right|+t-3<-1\end{array}\right.,\forall t\in[-2;2]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|2t+m-4\right|>-t+4\\ \left|2t+m-4\right|<-t+2\end{array}\right.,\forall t\in[-2;2]$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2t+m-4>-t+4\\ 2t+m-4<t-4\\ t-2<2t+m-4<-t+2\end{array}\right.,\forall t\in[-2;2]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>-3t+8\\ m<-t\\ -t+2<m<-3t+6\end{array}\right.,\forall t\in[-2;2]$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>14\\ m<-2\\ 4<m<0(VL)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>14\\ m<-2\end{array}\right.$

Do $m\in[-10;0]\Rightarrow m\in\{-10;-9;...;-3\}$

Vậy có 8 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 53: Tổng các giá trị của tham số *m* sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 5 là bao nhiêu?

A. 6. **B.** 0. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x+m$, ta có $f'(x)=3x^2-3$. Ta có bảng biến thiên của $f(x)$:

x	0		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	m	↘	$-2+m$	↗	$2+m$

TH 1: $2+m<0\Leftrightarrow m<-2$. Khi đó $\max\limits_{[0;2]}\left|f(x)\right|=-(-2+m)=2-m$

Khi đó $2-m=5\Leftrightarrow m=-3$ (thỏa mãn).

TH 2: $\begin{cases}2+m>0\\ m<0\end{cases}\Leftrightarrow -2<m<0$. Khi đó : $|m-2|=2-m>2>2+m$

$\Rightarrow \max\limits_{[0;2]}\left|f(x)\right|=-(-2+m)=2-m$

Khi đó $2-m=5\Leftrightarrow m=-3$ (loại).

TH 3: $\begin{cases}m>0\\ -2+m<0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<2$. Khi đó: $|m-2|=2-m<2<2+m\Rightarrow \max\limits_{[0;2]}\left|f(x)\right|=2+m$

Khi đó $2+m=5\Leftrightarrow m=3$ (loại).

TH 4: $-2+m>0\Leftrightarrow m>2$. Khi đó $\max\limits_{[0;2]}\left|f(x)\right|=2+m$

$2+m=5\Leftrightarrow m=3$ (thỏa mãn).

Vậy tổng các giá trị của m là 0.

Cách khác: (Dùng công thức tính nhanh)

Ta có $A=\max\limits_{[0;2]} f(x)=m+2$, $a=\min\limits_{[0;2]} f(x)=-2+m$

Nên $\max\limits_{[0;2]}\left|f(x)\right|=\dfrac{|m+2-2+m|+|m+2-(-2+m)|}{2}=5\Leftrightarrow\dfrac{|2m|+4}{2}=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3\\ m=-3\end{array}\right.$.

Dạng 4: GTLN và GTNN của hàm đa thức và ứng dụng PT, BPT

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=x^{20-m}-x^7+2$, với m là tham số nguyên dương. Hỏi có bao nhêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 10.

Lời giải:

Chọn C

Trường hợp 1: $m=13\Rightarrow f(x)=2\Rightarrow \min\limits_{\mathbb{R}} f(x)=2$. Vậy $m=13$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: $m\neq 13\ (*)$

Khi đó một hàm đa thức có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow$ bậc cao nhất phải là bậc chẵn và hệ số của nó phải dương $\Leftrightarrow\begin{cases}20-m>7\\20-m=2k\\m,k\in\mathbb{Z}^+\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\le m<13\\m=20-2k\\m,k\in\mathbb{Z}^+\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\le m<13\\\dfrac{7}{2}<k\le\dfrac{19}{2}\\m=20-2k\\m,k\in\mathbb{Z}^+\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4\le k\le 9\\m=20-2k\\m,k\in\mathbb{Z}^+\end{cases}$

$\Leftrightarrow m\in\{2;4;6;8;10;12\}$ (thỏa mãn điều kiện $(*)$).

Vậy có 7 giá trị m nguyên dương thỏa mãn.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=x^{30-m}-x^6+1$, với m là tham số nguyên dương. Hỏi có bao nhêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$.

A. 6. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải:

Chọn C

Trường hợp 1: $m=24\Rightarrow f(x)=1\Rightarrow \max\limits_{\mathbb{R}} f(x)=1$. Vậy $m=24$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: $m\neq 24\ (*)$

Khi đó một hàm đa thức có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow$ bậc cao nhất phải là bậc chẵn và hệ số của nó phải âm $\Leftrightarrow\begin{cases}0\le 30-m\le 6\\m\in\mathbb{Z}^+\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}24\le m\le 30\\m\in\mathbb{Z}^+\end{cases}\Leftrightarrow m\in\{24;25;26;27;28;29;30\}$

Trong trường hợp này kết hợp với $(*)$ ta có $m\in\{25;26;27;28;29;30\}$.

Vậy $m\in\{24;25;26;27;28;29;30\}$. Suy ra có 7 giá trị . m . nguyên dương thỏa mãn.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=\left(m^2-3m\right)x^{11}-mx^6+x^3-3$, với m là tham số. Hỏi có bao nhêu giá trị thực của tham số m để hàm số có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$.

A. 0. **B.** 2. **C.** Vô số. **D.** 1.

Lời giải:

Chọn D

Một hàm đa thức có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ bậc cao nhất phải là bậc chẵn và hệ số của nó phải âm, suy ra $m^2-3m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=3 \end{array}\right.$.

Với $m=0 \Rightarrow f(x)=x^3-3 \Rightarrow$ không tồn tại giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Với $m=3 \Rightarrow f(x)=-3x^6+x^3-3 \Rightarrow$ tồn tại giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Vậy có duy nhất một giải trị thực của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=\left(m^3-m\right)x^{13}-mx^6+x^4+1$, với m là tham số. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải:

Chọn C

Hàm đa thức $y=f(x)$ đạt giải trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi bậc cao nhất phải là bậc chẵn suy ra $m^3-m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\pm 1 \end{array}\right.$

Với $m=0 \Rightarrow f(x)=x^4+1$, tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ nên $m=0$ thỏa mãn.

Với $m=1 \Rightarrow f(x)=-x^6+x^4+1$, không tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ nên $m=1$ không thỏa mãn.

Với $m=-1 \Rightarrow f(x)=x^6+x^4+1$, tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ nên $m=-1$ thỏa mãn.

Vậy có 2 giá trị thực của m thỏa mãn bài toán.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=x^4+x^3-(m-1)x^2+2mx+1$. Để hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=0$ thì giá trị của tham số m nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $(-3;-1)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $(-1;1)$.

Lời giải:

Chọn D

Ta có: $f'(x)=4x^3+3x^2-2(m-1)x+2m,\ f''(x)=12x^2+6x-2(m-1)$

Hàm đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x_0=0$ thì hàm số phải đạt cực tiểu tại $x_0=0$. Suy ra:

$$\begin{cases} f'(0)=2m=0 \\ f''(0)=-2m+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow m=0$$

Thử lại: với $m=0 \Rightarrow f(x)=x^4+x^3+x^2+1$ và $f(0)=1$

Xét $f(x)-f(0)=x^4+x^3+x^2=x^2\left(x^2+x+1\right) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra $m=0$ thỏa mãn bài toán.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-21;21]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 2mx^3 + 4mx^2 - (2m+2)x - 2021$ đạt tại $x_0 = 2$. Số phần tử của tập S là

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 12.

Lời giải:

Chọn B

$f'(x) = 4x^3 - 6mx^2 + 28mx - 2m - 2$

$f''(x) = 12x^2 - 12mx + 8m$

Hàm đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x_0 = 2$ thì hàm số phải đạt cực tiểu tại $x_0 = 2$. Suy ra:

$$\begin{cases} f'(2) = 30 - 10m = 0 \\ f''(0) = 48 - 16m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$$

Thử lại: với $m = 3 \Rightarrow f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x - 2021$ và $f(2) = -2021$

Xét $f(x) - f(2) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x = (x-2)^2(x^2 - 2x)$ không thảo mãn điều kiện không âm, $\forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra không có giá trị nào của m thỏa mãn bài toán.

Câu 2: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x) = -x^4 - 2m.x^3 + 3m.x^2 - 2mx - 2021$ đạt giá trị lớn nhất tại $x_0 = 1$. Số phần tử của tập S là:

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 0

Lời giải:

Chọn C

Ta có: $f'(x) = -4x^3 - 6mx^2 + 6mx - 2m;\ f''(x) = -12x^2 - 12mx + 6m$

Hàm đa thức đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x_0 = 1$ thì hàm số phải đạt cực đại tại $x_0 = 1$.Suy ra:

$$\begin{cases} f'(1) = -4 - 2m = 0 \\ f''(1) = -12 - 6m \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$$

Thử lại:

Với $m = -2 \Rightarrow f(x) = -x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x - 2021$ và $f(1) = -2020$

Xét: $f(x) - f(1) = -x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1 = -(x-1)^4 \le 0$ đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra: $m = -2$ thỏa mãn bài toán.

Câu 3: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-21;21]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^6 + (m-2)x^5 + (m^2 - 11)x^4 + 2021$ đạt tại $x_0 = 0$. Số phần tử của tập S là:

A. 34 **B.** 42 **C.** 35 **D.** 37

Lời giải:

Chọn C

Cách 1: Lập luận bản chất theo tư duy bất phương trình:

Ta có: $f(x)=x^6+(m-2)x^5+(m^2-11)x^4+2021\geq f(0)=2021$ với $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^4.\left[x^2+(m-2)x+m^2-11\right]\geq 0\Leftrightarrow x^2+(m-2)x+m^2-11\geq 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \Delta=(m-2)^2-4(m^2-11)\leq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\leq \dfrac{-2-2\sqrt{37}}{3} \\ m\geq \dfrac{-2+2\sqrt{37}}{3}\end{array}\right. \xrightarrow{m\in\mathbb{Z};m\in[-21;21]} \left[\begin{array}{l} -21\leq m\leq -5 \\ 4\leq m\leq 21\end{array}\right.$$

Vậy có tất cả 35 giá trị nguyên m thỏa mãn bài toán.

Cách 2: Áp dụng kiến thức GTLN và GTNN hàm đa thức trên $\mathbb{R}$

Ta có: $f'(x)=6x^5+5(m-2)x^4+4(m^2-11)x^3;\ f''(x)=30x^4+20(m-2)x^3+12(m^2-11)x^2$

Hàm đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x_0=0$ thì: $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow \forall m$

Thử lại. Xét: $f(x)-f(0)=x^6+(m-2)x^5+(m^2-11)x^4=x^4.(x^2+(m-2)x+m^2-11)\geq 0$

$x^2+(m-2)^2+m^2-11\geq 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \Delta=(m-2)^2-4(m^2-11)\leq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\leq \dfrac{-2-2\sqrt{37}}{3} \\ m\geq \dfrac{-2+2\sqrt{37}}{3}\end{array}\right. \xrightarrow{m\in\mathbb{Z};m\in[-21;21]} \left[\begin{array}{l} -21\leq m\leq -5 \\ 4\leq m\leq 21\end{array}\right.$$

Vậy có tất cả 35 giá trị nguyên m thỏa mãn bài toán.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=(x-1)(x-2)(x^2-ax+b)+2021$. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2021. Giá trị của biểu thức $S=4a+b$ tương ứng bằng:

A. 5 **B.** 0 **C.** 10 **D.** 14

Lời giải:

Chọn D

Cách 1: Áp dụng kiến thức GTLN và GTNN hàm đa thức trên $\mathbb{R}$

Ta có: $f'(x)=(2x-3)(x^2-ax+b)+(x^2-3x+2)(2x-a)$

$f''(x)=2(x^2-ax+b)+(2x-3)(2x-a)+(2x-3)(2x-a)+2(x^2-3x+2)$

Hàm đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x_0=1$ thì hàm số phải đạt cực tiểu tại x_0: $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)\geq 0\end{cases}$

Nhận thấy rằng $\min f(x)=2021=f(1)=f(2)$. Tức là hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=1;x=2$

Suy ra $\begin{cases} f'(1)=a-b-1=0 \\ f'(2)=4-2a+b=0 \\ f''(1)=2b-2\geq 0 \\ f''(2)=16-6a+2b\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=3 \\ b=2\end{cases}$

Thử lại:

Với $a=3;b=2\Rightarrow f(x)=(x-1)(x-2)\left(x^2-3x+2\right)+2021=(x-1)^2(x-2)^2+2021\geq 2021$ (TM)

Suy ra $a=3;b=2$ thỏa mãn.Suy ra: $4a+b=14$.

Cách 2: Theo cách tư duy bất phương trình:

Ta có $f(x)=(x-1)(x-2)\left(x^2-ax+b\right)+2021\geq 2021\Leftrightarrow (x-1)(x-2)\left(x^2-ax+b\right)\geq 0$ với $\forall x$

Suy ra: $\left(x^2-ax+b\right)\big|_{x=1;x=2}=0\Rightarrow\begin{cases}1-a+b=0\\4-2a+b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=2\end{cases}$

Thử lại:

Với $a=3,b=2$ thỏa mãn. Suy ra: $4a+b=14$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=x^6+ax^2+bx+2a+b,$ với a,b là hai số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=1$. Giá trị nhỏ nhất có thể của $f(3)$ bằng bao nhiêu?

A. 128. **B.** 243. **C.** 81. **D.** 696.

Lời giải:

Chọn D

Có đạo hàm $f'(x)=6x^5+2ax+b;\ f''(x)=30x^4+2a$

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=1$, suy ra hàm số đạt giá trị cực tiểu tại $x_0=1$. Suy ra:

$$\begin{cases}f'(1)=6+2a+b=0\\f''(1)=30+2a\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-2a-6\\a\geq -15\end{cases}$$

Thử lại:

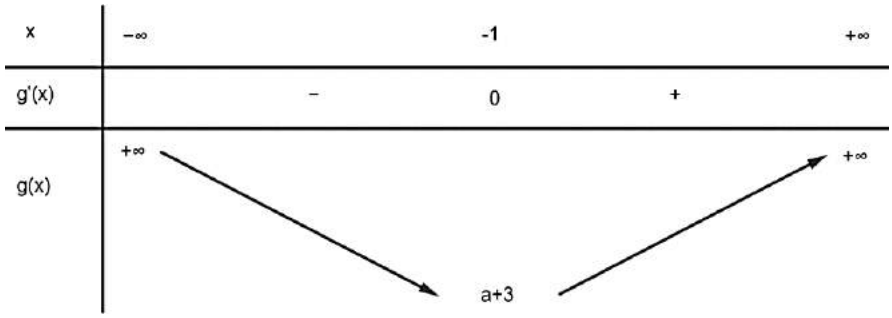
Với $\begin{cases}b=-2a-6\\a\geq -15\end{cases}\Rightarrow f(x)=x^6+ax^2-2(a+3)x-6$ và $f(1)=-a-11$

$f(x)-f(1)=x^6+ax^2-2(a+3)x+a+5=(x-1)^2(x^4+2x^3+3x^2+4x+a+5)\geq 0$ với $\forall x\in R\Leftrightarrow x^4+2x^3+3x^2+4x+a+5\geq 0$ với $\forall x\in R$

Xét hàm số: $g(x)=x^4+2x^3+3x^2+4x+a+5$ có:

$g'(x)=4x^3+6x^2+6x+4=(x+1)(4x^2+2x+4)$

Khảo sát nhanh hàm số: $y=g(x)$ ta có bảng biến thiên:



Để $g(x)=x^4+2x^3+3x^2+4x+a+5\geq 0$ với $\forall x\in R$ thì $a+3\geq 0\Leftrightarrow a\geq -3$

Có $f(3)=11a+4b+729=11a+4(-2a-6)+729=3a+705\geq 3.(-3)+705=696$

Suy ra giá trị nhỏ nhất cùa $f(3)$ là 696.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=x^4+x^3+ax^2+bx+b-1$. Biết rằng hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=1$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $a\in[-20;20]$ thỏa mãn bài toán?

A. 30. **B.** 23. **C.** 22. **D.** 24.

Lời giải:

Chọn B

Ta có: $f'(x)=4x^3+3x^2+2ax+b;\ f''(x)=12x^2+6x+2a$

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=1$, thì:

$$\begin{cases} f'(1)=2a+b+7=0 \\ f''(1)=2a+18\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=-2a-7 \\ a\ge -9 \end{cases}$$

Thử lại: Xét $\begin{cases} b=-2a-7 \\ a\ge -9 \end{cases}$ suy ra $f(x)=x^4+x^3+ax^2+(-2a-7)x-2a-8$ và $f(1)=-3a-13$

Xét $f(x)-f(1)=x^4+x^3+ax^2+(-2a-7)x+a+5=(x-1)^2(x^2+3x+a+5)\ge 0$ với $\forall x\in R$

$\Leftrightarrow x^2+3x+a+5\ge 0$ với $\forall x\in R$

$\Leftrightarrow \Delta=3^2-4(a+5)\ge 0\Leftrightarrow a\ge -\dfrac{11}{4}\xrightarrow{a\in Z;a\in[-20;20]}-2\le a\le 20$

Vậy có tất cả 23 giá trị a nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=(m+n-2)x^7+x^4+(m+2n-1)x^3+x^2+(2n-1)x+2$. Với m và n là hai tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=2$. Giá trị của biểu thức $T=16m+2n$ bằng:

A. 22. **B.** 38. **C.** 46. **D.** 79.

Lời giải:

Chọn D

Điều kiện để hàm số tồn tại giá trị nhỏ nhất là: $m+n-2=0\Leftrightarrow m=2-n.$

$f(x)=x^4+(n+1)x^3+x^2+(2n-1)x+2.$

$f'(x)=4x^3+3(n+1)x^2+2x+2n-1;\ f''(x)=12x^2+6(n+1)x+2$

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=2$, thì:

$$\begin{cases} f'(2)=2n+47=0 \\ f''(1)=62+12n\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow n=-\frac{47}{14}.$$

Thử lại: Thay $n=-\dfrac{47}{14}$ vào ta được

$f(x)-f(2)=x^4-\dfrac{33}{14}x^3+x^2-\dfrac{54}{7}x+\dfrac{100}{7}=(x-2)^2(x^2+\dfrac{23}{14}x+\dfrac{25}{7})\ge 0$ với $\forall x\in R$

Suy ra $n=-\dfrac{47}{14};m=2-n=\dfrac{75}{14}\Rightarrow T=2n+3m=79.$

Câu 8: Cho hàm số $f(x)=x^4+ax^3+2bx^2+2cx+2b$ với a,b,c là những tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_1=1$ và $x_2=2$. Giá trị của biểu thức $T=a+2b$ bằng:

A. 7. **B.** 8. **C.** 3. **D.** 9.

Lời giải:

Chọn A

Ta có: $f'(x)=4x^3+3ax^2+4bx+2c$; $f''(x)=12x^2+6ax+4b$.

Để hàm đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại đồng thời hai điểm $x_1=1$ và $x_2=2$, thì phải có:

$$\begin{cases} f(1)=f(2) \\ f'(1)=0 \\ f'(2)=0 \\ f''(1)\ge 0 \\ f''(2)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7a+6b+2c=-15 \\ 3a+4b+2c=-4 \\ 12a+8b+2c=-32 \\ 12+6a+4b\ge 0 \\ 48+12a+4b\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-6 \\ b=\dfrac{13}{2} \\ c=-6 \end{cases}.$$

Thử lại, thay $a=-6;b=\dfrac{13}{2};c=-6$ vào ta được $f(x)=x^4-6x^3+13x^2-12x+13$ và $f(1)=9$

.

Xét $f(x)-f(1)=x^4-6x^3+13x^2-12x+4=(x-1)^2(x-2)^2\ge 0$ thỏa mãn.

Vậy $T=a+2b=7$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+1$ với a,b,c là những tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_1=0$ và $x_2=1$. Giá trị của biểu thức $T=a+2b+c$ bằng:

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -3.

Lời giải:

Chọn B

Ta có: $f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$; $f''(x)=12x^2+6ax+2b$.

Để hàm đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại đồng thời hai điểm $x_1=0$ và $x_2=1$, thì phải có:

$$\begin{cases} f(0)=f(1) \\ f'(0)=0 \\ f'(1)=0 \\ f''(0)\ge 0 \\ f''(1)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=-1 \\ c=0 \\ 3a+2b+c=-4 \\ 2b\ge 0 \\ 12+6a+2b\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \\ c=0 \end{cases}.$$

Thử lại, thay $a=-2;b=1;c=0$ vào ta được $f(x)=x^4-2x^3+x^2+1$ và $f(0)=1$.

Xét $f(x)-f(1)=x^4-2x^3+x^2=x^2(x-1)^2\ge 0$ thỏa mãn.

Vậy $T=a+2b+c=0$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=x^6-ax^5+2bx^4+1$ với a,b là hai tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_1=0$ và $x_2=1$. Giá trị của biểu thức $T=3a+4b$ bằng:

A. 7. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 0.

Lời giải:

Chọn B

Ta có: $f'(x)=6x^5-5ax^4+8bx^3$; $f''(x)=30x^4-20ax^3+24bx^2$.

Để hàm đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại đồng thời hai điểm $x_1=0$ và $x_2=1$, thì phải có:

$$\begin{cases} f(0)=f(1) \\ f'(0)=0 \\ f'(1)=0 \\ f''(0)\ge 0 \\ f''(1)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+2b=-1 \\ 0=0 \\ -5a+8b=-6 \\ 0\ge 0 \\ 30-20a+24b\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Thử lại, thay $a=2;b=\dfrac{1}{2}$ vào ta được $f(x)=x^6-2x^5+x^4+1$ và $f(0)=1$.

Xét $f(x)-f(1)=x^6-2x^5+x^4=x^4(x-1)^2\ge 0$ thỏa mãn.

Vậy $T=3a+4b=8$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx-1$, với a, b, c là những tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng . Giá trị của biểu thức $T=a+3b+c$ bằng:

A. 3. **B.** 5. **C.** -6. **D.** -1.

Lời giải:

Chọn C

Dễ thấy: $\dfrac{f(-1)+f(1)}{2}=b$

Ta có $\begin{cases} \min f(x)=b\le f(-1) \\ \min f(x)=b\le f(1) \end{cases} \Rightarrow b\le \dfrac{f(-1)+f(1)}{2}$

Bài toán cho dấu "=" xảy ta nên $\min f(x)=f(-1)=f(1)$.

Ta có $f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c;\ f''(x)=12x^2+6ax+2b$

Để hàm số đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại đồng thời hai điểm $x_1=-1, x_2=1$ thì phải có:

$$\begin{cases} f(-1)=f(1) \\ f'(-1)=0 \\ f'(1)=0 \\ f''(-1)\ge 0 \\ f''(1)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+b-c=a+b+c \\ -4+3a-2b+c=0 \\ 4+3a+2b+c=0 \\ 12-6a+2b\ge 0 \\ 12+6a+2b\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-2 \\ c=0 \end{cases}$$

Thử lại, thay $a=0,b=-2,c=0$ vào ta được $f(x)=x^4-2x^2-1,\ f(1)=b=-2$

Xét $f(x)-b=x^4-2x^2+1=(x-1)^2(x+1)^2\ge 0$ thỏa mãn.

Vậy $a=0,b=-2,c=0\Rightarrow T=a+3b+c=-6$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)=x^8+ax^5+bx^4+cx+2021$, với a, b là những tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=a+b$ bằng:

A. -1. **B.** 1. **C.** -2. **D.** 3.

Lời giải:

Chọn A

Ta có $\min f(x)=f(0)\Rightarrow f(x)\ge f(0)=2021,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Dễ thấy để xuất hiện $(a+b)$ thì ta xét $f(1)=1+a+b+2021\ge f(0)=2021\Leftrightarrow a+b\ge -1$.

Dấu "=" xảy khi $f(1)=f(0)$ tức là khi đó $\min f(x)=f(0)=f(1)$

Ta có $f'(x)=8x^7+5ax^4+4bx^3;\ f''(x)=56x^6+20ax^3+12bx^2$

Để hàm số đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại đồng thời hai điểm $x_1=0, x_2=1$ thì phải có:

$$\begin{cases} f(0)=f(1) \\ f'(0)=0 \\ f'(1)=0 \\ f''(0)\geq 0 \\ f''(1)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-1 \\ 0=0 \\ 5a+4b=-8 \\ 0\geq 0 \\ 56+20a+12b\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=3 \end{cases}$$

Thử lại, thay $a=4, b=-3$ vào ta được $f(x)=x^8-4x^5+3x^4+2021,\ f(0)=2021$

Xét $f(x)-f(0)=x^8-4x^5+3x^4=x^4(x-1)^2(x^2+2x+3)\geq 0$ thỏa mãn.

Vậy $a=4, b=-3 \Rightarrow T_{\min}=(a+b)_{\min}=-1$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)=x^6+ax^5+bx^4+1$, với a, b là những tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=2a-b$ bằng:

A. 4. **B.** 8. **C.** 16. **D.** -2.

Lời giải:

Chọn A

Ta có $\min f(x)=f(0) \Rightarrow f(x)\geq f(0)=1, \forall x\in\mathbb{R}$

Dễ thấy để xuất hiện $(2a-b)$ thì ta xét $f(-2)=64-32a+16b+1\geq f(0)=1 \Leftrightarrow 2a-b\leq 4$.

Dấu "=" xảy khi $f(-2)=f(0)$ tức là khi đó $\min f(x)=f(0)=f(-2)$

Ta có $f'(x)=6x^5+5ax^4+4bx^3;\ f''(x)=30x^4+20ax^3+12bx^2$

Để hàm số đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại đồng thời hai điểm $x_1=0, x_2=-2$ thì phải có:

$$\begin{cases} f(0)=f(-2) \\ f'(0)=0 \\ f'(-2)=0 \\ f''(0)\geq 0 \\ f''(-2)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-b=4 \\ 0=0 \\ 5a-2b=12 \\ 0\geq 0 \\ 480-160a+48b\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=4 \end{cases}$$

Thử lại, thay $a=4, b=4$ vào ta được $f(x)=x^6+4x^5+4x^4+1,\ f(0)=1$

Xét $f(x)-f(0)=x^6+4x^5+4x^4=x^4(x+2)^2\geq 0$ thỏa mãn.

Vậy $a=4, b=4 \Rightarrow T_{\max}=(2a-b)_{\max}=4$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)=x^4-4x^3+(m+1)x^2-mx+1$ với m là tham số thực. Biết rằng $\alpha=\min f(x)$ Giá trị lớn nhất của α bằng:

A. 1. **B.** -1. **C.** -2. **D.** 0.

Lời giải:

Chọn B

Ta có: $f(x)=x^4-4x^3+(m+1)x^2-mx+1=m(x^2-x)+(x^4-4x^3+x^2+1)$

Dễ thấy: $x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$

Biết rằng $\alpha=\min f(x)\leq f(x), \forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra $\begin{cases} \alpha\leq f(0)=1 \\ \alpha\leq f(1)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha\leq f(1)=-1$

Ta tìm điều kiện dấu bằng xảy ra: $\alpha = \min f(x) = f(1) = -1$

Tức là ta tìm điều kiện để hàm số *f(x)* đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_o = 1$

Ta có: $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 2(m+1)x - m; f''(x) = 12x^2 - 24x + 2m + 2$

$$\begin{cases} f'(1) = m - 6 = 0 \\ f''(1) = 2m - 10 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 6$$

Thay *m=6* ta được:

$f(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 1; f(1) = -1$

$f(x) - f(1) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 2 = (x-1)^2(x^2 - 2x + 2) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Vậy khi *m=6* thì $\alpha = \min f(x) = f(1) = -1$ là giá trị lớn nhất của α.

Câu 15: Cho hàm số $f(x) = x^4 - 4x^3 + (m+1)x^2 - mx + 1$ với m là tham số thực. Biết rằng $\alpha = \min f(x)$. Khi α đạt giá trị lớn nhất thì $x = x_o; m = m_o$. Giá trị của biểu thức $(x_o + m_o)$ bằng:

A. 0. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** -1. **D.** $-\frac{3}{4}$.

Lời giải:

Chọn D

Ta có: $f(x) = x^4 - 4x^3 + (m+1)x^2 - mx + 1 = m(-x^2 + 2x + 3) + (x^4 + x^3)$

Dễ thấy: $-x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Biết rằng: $\alpha = \min f(x) \le f(x) \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra: $\begin{cases} \alpha \le f(-1) = 0 \\ \alpha \le f(3) = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \le f(-1) = 0$

Dấu bằng xảy ra: $\alpha = \min f(x) = f(-1) = 0$ hay hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_o = -1$

Ta có: $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2mx + 2m; f''(x) = 12x^2 + 6x - 2m$

$$\begin{cases} f'(-1) = 4m - 1 = 0 \\ f''(-1) = 6 - 2m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$$

Thử lại: thay $m = \frac{1}{4}$ vào ta được $f(x) = x^4 + x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}; f(-1) = 0$

Xét: $f(x) - f(-1) = x^4 + x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} = (x+1)^2\left(x^2 - x + \frac{3}{4}\right) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Vậy khi $m = \frac{1}{4} = m_o \Rightarrow \alpha = \min f(x) = f(x_o) = f(-1) = 0$ là giá trị lớn nhất của α

Suy ra $(x_o + m_o) = -\frac{3}{4}$

Câu 16: Cho hàm số $f(x) = -x^4 + 2x^3 + mx^2 - (m+2)x$, với m là tham số thực. Biết rằng $\beta = \max f(x)$. Khi β đạt giá trị nhỏ nhất bằng:

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** −1.

Lời giải:

Chọn A

Ta có: $f(x)=-x^4+2x^3-2x+m(x^2-x)$,

$\forall x\in\mathbb{R}$ ta có $\begin{cases} f(0)=0 \\ f(1)=-1 \end{cases} \Rightarrow \max f(x)\geq 0$. Ta chỉ ra tồn tại m để $\max f(x)=0$ tại $x=0$. Khi đó hàm số đạt cực đại tại $x=0\Rightarrow f'(0)=0\Rightarrow m=-2$.

Thử lại với $m=-2$ thì $f(x)=-x^4+2x^3-2x^2\Rightarrow f'(x)=-4x^3+6x^2-4x$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$+\infty$

Vậy với $m=-2$ thì $\max f(x)=0$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)=x^6-6a^5x-5b$, với a và b là hai số thực không âm. Biết rằng hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng -5. Giá trị lớn nhất của biểu thức ab tương ứng bằng:

A. 1. **B.** $\frac{6}{7}$. **C.** $\frac{2}{7\sqrt{6}}$. **D.** $\frac{6}{7\sqrt[6]{7}}$.

Lời giải:

Chọn D

Ta có $f(x)=x^6-6a^5x-5b\Rightarrow f'(x)=6x^5-6a^5; f'(x)=0\Leftrightarrow x=a$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↘	$-5a^6-5b$	↗	$+\infty$

Theo bài ra hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng $-5\Leftrightarrow -5a^6-5b=-5\Leftrightarrow b=1-a^6$.

Giả sử $h(a)=a.b=a\left(1-a^6\right)=a-a^7\Rightarrow h'(a)=1-7a^6=0\Rightarrow a=\frac{1}{\sqrt[6]{7}}$.

Ta có bảng biến thiên

a	0		$\frac{1}{\sqrt[6]{7}}$		$+\infty$
$h'(a)$		$+$	0	$-$	
$h(a)$	$-\infty$	↗	$\frac{6}{7\sqrt[6]{7}}$	↘	$+\infty$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức ab bằng $\frac{6}{7\sqrt[6]{7}}$.

Câu 18: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2+4y^2=4$. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x^2+2xy+1}{2y^2+2}$ lần lượt là M và m. Giá trị của biểu thức $T=4M-4m$ bằng:

A. $\sqrt{113}$. **B.** 36. **C.** 12. **D.** 64.

Lời giải:

Chọn A

Nếu $y=0 \Rightarrow x^2=4$ khi đó $P=\dfrac{5}{2}$.

Nếu $y\neq 0$ ta có: $P=\dfrac{4x^2+8xy+4}{8y^2+8}=\dfrac{5x^2+8xy+4y^2}{2x^2+16y^2}=\dfrac{5\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+8\left(\dfrac{x}{y}\right)+4}{2\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+16}$.

Đặt $t=\dfrac{x}{y}$ ta được: $P=\dfrac{5t^2+8t+4}{2t^2+16} \Leftrightarrow (5-2P)t^2+8t+4-16P=0 \ (2)$.

Nếu $P=\dfrac{5}{2}$ thì $t=\dfrac{9}{2}$.

Nếu $P\neq\dfrac{5}{2}$ thì phương trình (2) là phương trình bậc hai.

$\Delta=4^2-(5-2P)(4-16P)=16-\left(20-88P+32P^2\right)=-32P^2+88P-4$

$-32P^2+88P-4\geq 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \dfrac{11-\sqrt{113}}{8}\leq y\leq \dfrac{11+\sqrt{113}}{8}$

$\Rightarrow \text{Max}P=\dfrac{11+\sqrt{113}}{8}=M$, $\text{Min}P=\dfrac{11-\sqrt{113}}{8}=m \Rightarrow T=4M-4m=\sqrt{113}$.

Câu 19: Biết rằng để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-mx+1$ trên đoạn $[1;2]$ bằng 4 thì giá trị thực của tham số $m=\dfrac{a}{b}$, trong đó a,b là những số nguyên dương và phân số $m=\dfrac{a}{b}$ tối giản. Giá trị của biểu thức $T=a+b$ bằng:

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 5

Lời giải:

Chọn A

Ta có: $\underset{[1;2]}{Max}\left\{x^2-mx+1\right\}=4 \Leftrightarrow x^3-mx+1\leq 4, \forall x\in[1;2]$

$\Leftrightarrow m\geq\dfrac{x^3-3}{x}, \forall x\in[1;2]$; $m\geq \underset{[1;2]}{Max}\left\{\dfrac{x^3-3}{x}\right\}=\dfrac{5}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $m=\dfrac{5}{2}\Rightarrow a=5, b=2\Rightarrow T=a+b=5+2=7.$

Câu 20: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m\in[-50;50]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^4-mx$ trên đoạn $[-1;3]$ nhỏ hơn hoặc bằng 60?

A. 53. **B.** 44. **C.** 58. **D.** 8

Lời giải:

Chọn B

Ta có: $\underset{[1;2]}{Max}\left\{x^4-mx\right\}\le 60\Leftrightarrow x^4-mx+1\le 60,\forall x\in\left[-1;3\right]\Leftrightarrow mx\ge x^4-60,\forall x\in\left[-1;3\right]$

Với $x=0,$ thỏa mãn.

Với $x\ne 0$ ta xét

$$\begin{cases}\begin{cases}m\in\left[-1;0\right)\\ mx\ge x^4-60\end{cases}\Leftrightarrow m\le\dfrac{x^4-60}{x},\forall x\in\left[-1;0\right)\Leftrightarrow m\le\min\limits_{[-1;0)}\left\{\dfrac{x^4-60}{x}\right\}\Leftrightarrow m\le 59\\ \begin{cases}m\in\left(0;2\right]\\ mx\ge x^4-60\end{cases}\Leftrightarrow m\ge\dfrac{x^4-60}{x},\forall x\in\left(0;2\right]\Leftrightarrow m\ge\min\limits_{(0;2]}\left\{\dfrac{x^4-60}{x}\right\}\Leftrightarrow m\ge 7\end{cases}\Leftrightarrow 7\le m\le 59$$

Kết hợp với điều kiện $m\in\mathbb{Z},m\in\left[-50;50\right]\Rightarrow m\in\left\{7;8;...;50\right\}$

Có 44 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 21: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m\in\left[-50;50\right]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=x^3-mx$ trên đoạn $\left[1;3\right]$ lớn hơn hoặc bằng 40?

A. 52. **B.** 51. **C.** 49. **D.** 50

Lời giải:

Chọn C

Ta có: $\underset{[1;3]}{max}\left\{x^3-3mx\right\}<\Leftrightarrow 40x^3-3mx<40,\forall x\in\left[1;3\right]$

$\Leftrightarrow m>\dfrac{x^3-40}{3x},\forall x\in\left[1;3\right]\Leftrightarrow m>\underset{[1;3]}{Max}\left\{\dfrac{x^3-40}{3x}\right\}=-\dfrac{13}{9}$

Suy ra, để giá trị lớn nhất của hàm số lớn hơn hoặc bằng 40 thì $m\le-\dfrac{13}{9}$

Kết hợp với $m\in\mathbb{Z},m\in\left[-50;50\right]\Rightarrow m\in\left\{-50;-49;...;-2\right\}$ có 49 số thỏa mãn.

Câu 22: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3+mx^2$ trên đoạn $\left[1;2\right]$ nằm trong $\left(6;20\right)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải:

Chọn D

Đặt M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3+mx^2$ trên đoạn $\left[1;2\right]$. Ta có: $6<M<20$

Để $M<20$ thì $x^3+mx^2<20\ \ \forall x\in\left[1;2\right]$.

Từ đó suy ra: $m<\dfrac{20-x^3}{x^2}\ \forall x\in\left[1;2\right]\Rightarrow m<\min\limits_{[1;2]}\dfrac{20-x^3}{x^2}=3$.

Tương tự để $M\le 6$ thì $x^3+mx^2\le 6\ \forall x\in\left[1;2\right]\Rightarrow m\le\underset{[1;2]}{\text{Min}}\dfrac{6-x^3}{x^2}=\dfrac{-1}{2}$.

Do đó để $M>6$ thì $m>\dfrac{-1}{2}$. Vậy $\dfrac{-1}{2}<m<3$, do đó có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 23: Để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-mx^2$ trên đoạn $[1;2]$ bằng 1 thì giá trị thực của tham số m bằng:

A. -1. **B.** 1. **C.** -2. **D.** 0.

Lời giải:

Chọn D

Để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-mx^2$ trên đoạn $[1;2]$ bằng 1 thì:

$x^3-mx^2\ge 1\ \forall x\in[1;2]$ và dấu "=" phải xảy ra. Khi đó ta có: $m=\min\limits_{[1;2]}\dfrac{x^3-1}{x^2}=0.$

Câu 24: Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}-mx}{x+1}$ trên đoạn $[1;4]$ lớn hơn hoặc bằng 2.

A. 3. **B.** 27. **C.** 28. **D.** 33.

Lời giải:

Chọn C

Để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}-mx}{x+1}$ trên đoạn $[1;4]$ lớn hơn hoặc bằng 2 thì:

$\dfrac{x\sqrt{x}-mx}{x+1}\ge 2\ \forall x\in[1;4]\Rightarrow mx\le x\sqrt{x}-2x-2\ \forall x\in[1;4]$

$\Rightarrow m\le\dfrac{x\sqrt{x}-2x-2}{x}\ \forall x\in[1;4]\Rightarrow m\le\min\limits_{[1;4]}\dfrac{x\sqrt{x}-2x-2}{x}.$

Lại có: đặt $g(x)=\dfrac{x\sqrt{x}-2x-2}{x}$ thì $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{2}{x^2}>0\ \forall x\in[1;4].$

Do đó: $m\le\underset{[1;4]}{\text{Min}}\dfrac{x\sqrt{x}-2x-2}{x}=g(1)=-3$. Vậy có tất cả 28 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 25: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-30;30]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+mx+1}{x+1}$ trên đoạn $[1;2]$ nhỏ hơn hoặc bằng 3?

A. 35. **B.** 26. **C.** 11. **D.** 31

Lời giải:

Chọn A

Vì $f(x)=\dfrac{x^2+mx+1}{x+1}$ là hàm liên tục trên $[1;2]$ nên $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất trên $[1;2]$.

Ta có: $\min\limits_{[1;2]}f(x)\le 3\Leftrightarrow\exists x\in[1;2]:\dfrac{x^2+mx+1}{x+1}\le 3\Leftrightarrow\exists x\in[1;2]:m\le\dfrac{-x^2+3x+2}{x}(1)$

Đặt: $g(x)=\dfrac{-x^2+3x+2}{x}$. Khi đó $(1)\Leftrightarrow m\le\underset{[1;2]}{Max}\,g(x)\Leftrightarrow m\le 4.$

Như vậy có 35 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 26: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-44;44)$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3+mx-1$ trên $[0;3]$ nằm trong $[-2;0]$. Số phần tử của tập S là:

A. 41. **B.** 45. **C.** 72. **D.** 5

Lời giải:

Chọn B

Vì hàm số $f(x)=x^3+mx-1$ là hàm liên tục trên $[0;3]$ nên $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất trên $[0;3]$

Ta có: $\min\limits_{[0;3]} f(x)\in[-2;0]\Leftrightarrow -2\le \min\limits_{[0;3]} f(x)\le 0(1)$ và $f(0)=-1<0\forall m$ nên $\min\limits_{[0;3]} f(x)\le 0\forall m$.

Suy ra: $(1)\Leftrightarrow -2\le \min\limits_{[0;3]} f(x)\Leftrightarrow -2\le f(x)\forall x\in[0;3]\Leftrightarrow x^3+mx-1\ge -2\forall x\in[0;3]$

$\Leftrightarrow m\ge -x^2-\dfrac{1}{x}\forall x\in(0;3]\Leftrightarrow m\ge \max\limits_{(0;3]}\left(-x^2-\dfrac{1}{x}\right)\Leftrightarrow m\ge -\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}-\sqrt[3]{2}$

Vậy số giá trị nguyên của m thuộc $(-44;44)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là 45.

Câu 27: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+2mx}{x^2+x+1}$ bằng $-\dfrac{1}{2}$. Tổng bình phương tất cả các phần tử của tập S bằng:

A. $\dfrac{13}{8}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{11}{4}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$

Lời giải:

Chọn A

Ta có: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+2mx}{x^2+x+1}$ bằng $-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow f(x)\ge -\dfrac{1}{2}\forall x\in\mathbb{R}$ và phương trình $f(x)=-\dfrac{1}{2}$ có nghiệm $\Leftrightarrow 3x^2+(4m+1)x+1\ge 0\forall x\in\mathbb{R}$ và phương trình $3x^2+(4m+1)x+1=0$ có nghiệm

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=(4m+1)^2-12\le 0\\ \Delta=(4m+1)^2-12\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \Delta=(4m+1)^2-12=0\Leftrightarrow 16m^2+8m-11=0$

Theo định lý Vi-et, ta có phương trình $16m^2+8m-11=0$ có hai nghiệm phân biệt m_1,m_2 thỏa mãn: $\begin{cases}m_1+m_2=-\dfrac{1}{2}\\ m_1.m_2=-\dfrac{11}{16}\end{cases}\Rightarrow {m_1}^2+{m_2}^2=(m_1+m_2)^2-2m_1.m_2=\dfrac{13}{8}$.

Vậy tổng bình phương tất cả các phần tử của tập S bằng $\dfrac{13}{8}$

Câu 28: Gọi S là tập chứ tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+m}{x^2+2x+2}$ lớn hơn $-\dfrac{1}{3}$. Số phần tử của tập S bằng:

A. 31. **B.** 32. **C.** 11. **D.** 2

Lời giải:

Chọn A

Để hàm số có giá trị nhỏ nhất thì $\left[\begin{array}{l}\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\ge\dfrac{c}{c'}\\ \dfrac{a}{a'}\ne\dfrac{b}{b'}\end{array}\right.$. Dễ thấy $\dfrac{a}{a'}\ne\dfrac{b}{b'}$ nên hàm số luôn có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

Khi đó $f(x)=\dfrac{x^2+m}{x^2+2x+2}\ge\min f(x)>-\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow 3x^2+3m>-x^2-2x-2$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow 4x^2+2x+3m+2\ge 0$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $\Delta'=1-12m-8<0\Leftrightarrow m>-\dfrac{7}{12}\xrightarrow{m\in\mathbb{Z},\ m\in[-30;30]}0\le m\le 30$.

Vậy có 31 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 29: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-2mx+4}{x^2+2x+3}$ nhỏ hơn $\dfrac{1}{4}$. Số phần tử của tập S bằng :

A. 2. **B.** 3. **C.** 59. **D.** 58

Lời giải:

Chọn D

Để hàm số có giá trị nhỏ nhất thì $\left[\begin{array}{l}\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\ge\dfrac{c}{c'}\\ \dfrac{a}{a'}\ne\dfrac{b}{b'}\end{array}\right.$.

Trường hợp 1: Ta có $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}>\dfrac{c}{c'}\Leftrightarrow\dfrac{1}{1}=\dfrac{-2m}{2}>\dfrac{4}{3}$ nên vô nghiệm.

Trường hợp 2: $\dfrac{a}{a'}\ne\dfrac{b}{b'}\Leftrightarrow\dfrac{1}{1}\ne\dfrac{-2m}{2}\Leftrightarrow m\ne-1$. Khi đó hàm số có cả giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất. Ta sẽ đi tìm điều kiện để $\min f(x)\ge\dfrac{1}{4}$

Khi đó $f(x)=\dfrac{x^2-2mx+4}{x^2+2x+3}\ge\min f(x)\ge\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow 4x^2-8mx+16\ge x^2+2x+3$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$. Suy ra $3x^2-2(4m+1)x+13\ge 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $\Delta'=(4m+1)^2-39\le 0\Leftrightarrow\dfrac{-1-\sqrt{39}}{4}\le m\le\dfrac{-1+\sqrt{39}}{4}$

Suy ra để $\min f(x)<\dfrac{1}{4}$ thì $\left[\begin{array}{l}m>\dfrac{-1+\sqrt{39}}{4}\\ m<\dfrac{-1-\sqrt{39}}{4}\end{array}\right.\xrightarrow{m\ne1,m\in[-30;30],m\in\mathbb{Z}}\left[\begin{array}{l}-30\le m\le-2\\ 2\le m\le 30\end{array}\right.$

Có tất cả 58 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 30: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-mx+3}{x^2+2x+2}$ bằng 2. Tổng bình phương các phần tử của tập S bằng :

A. 32. **B.** 36. **C.** 40. **D.** 48

Lời giải:

Chọn C

Để hàm số có giá trị lớn nhất thì $\left[\begin{array}{l}\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\le\dfrac{c}{c'}\\ \dfrac{a}{a'}\ne\dfrac{b}{b'}\end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\le\dfrac{c}{c'}\Leftrightarrow\dfrac{1}{1}=\dfrac{-m}{2}\le\dfrac{3}{2}\Rightarrow m=-2$.

Trường hợp 2: $\dfrac{a}{a'}\ne\dfrac{b}{b'}\Rightarrow m\ne-2$.

Khi đó ta tìm điều kiện để $\max f(x)=2$.

Mặt khác : $f(x)=\dfrac{x^2-mx+3}{x^2+2x+2}\le\max f(x)=2$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Phải có điều kiện dấu bằng xảy ra. Ta suy ra $x^2+(m+4)x+1\ge0$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $\Delta=(m+4)^2-4\le0\Leftrightarrow-6\le m\le-2$. Kết hợp điều kiện suy ra $m=-6$.

Kết hợp cả hai trường hợp, ta suy ra $m=\{-6;-2\}\Rightarrow S=\{-6;-2\}$.

Tổng bình phương các giá trị của S bằng 40.

Câu 31: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-mx+2}{x^2+x+1}$ nhỏ hơn 4. Số phần tử của tập S bằng

A. 2. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải:

Chọn D

Để hàm số có giá trị lớn nhất thì $\left[\begin{array}{l}\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\le\dfrac{c}{c'}\\ \dfrac{a}{a'}\ne\dfrac{b}{b'}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{1}=\dfrac{-m}{1}\le\dfrac{2}{1}\\ \dfrac{1}{1}\ne\dfrac{-m}{1}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\ m\ne-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\forall m$.

Ta có: $f(x)=\dfrac{x^2-mx+2}{x^2+x+1}\le\max f(x)<4$ đúng $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2-mx+2\le4(x^2+x+1)$ đúng $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow3x^2+(m+4)x+2\ge0$ đúng $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\Delta\le0\Leftrightarrow(m+4)^2-24\le0\Leftrightarrow-4-2\sqrt{6}\le m\le-4+2\sqrt{6}$

$\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m\in\{-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;0\}$

Vậy có tất cả 9 giá trị của m thỏa mãn điều kiện.

Câu 32: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2-mx+3}{x^2-2x+2}$ lớn hơn 6. Số phần tử của tập S bằng

A. 17. **B.** 16. **C.** 43. **D.** 35.

Lời giải:

Chọn D

Để hàm số có giá trị lớn nhất thì $\left[\begin{array}{l}\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\le\dfrac{c}{c'}\\ \dfrac{a}{a'}\ne\dfrac{b}{b'}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{2}{1}=\dfrac{-m}{-2}\le\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{2}{1}\ne\dfrac{-m}{-2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}VN\\ m\ne-4\end{array}\right.\Leftrightarrow m\ne-4.$

Để tìm điều kiện của m để $\max f(x)>6$ ta đi tìm điều kện để $\max f(x)\le 6$

Ta có: $f(x)=\dfrac{2x^2-mx+3}{x^2-2x+2}\le\max f(x)\le 6$ đúng $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 2x^2-mx+3\le 6\left(x^2-2x+2\right)$ đúng $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 4x^2+(m-12)x+9\ge 0$ đúng $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\Delta\le 0\Leftrightarrow(m-12)^2-144\le 0\Leftrightarrow 0\le m\le 24$

Vậy để $\max f(x)>6$ thì $\left[\begin{array}{l}m<0\\ m>24\end{array}\right.\xrightarrow{m\in\mathbb{Z},m\ne-4,m\in[-30;30]}\left\{\begin{array}{l}m\ne-4\\ \left[\begin{array}{l}-30\le m\le-1\\ 25\le m\le 30\end{array}\right.\end{array}\right.$

Vậy có tất cả 35 giá trị của m thỏa mãn điều kiện.

Câu 33: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho $\left|2x^3-3x^2+m\right|\le 16,\forall x\in[0;3]$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -65. **B.** -74. **C.** -42. **D.** 87.

Lời giải

Chọn A

$\left|2x^3-3x^2+m\right|\le 16,\forall x\in[0;3]\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2x^3-3x^2+m\le 16,\forall x\in[0;3]\\ 2x^3-3x^2+m\ge -16,\forall x\in[0;3]\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2x^3-3x^2\le 16-m,\forall x\in[0;3]\\ 2x^3-3x^2\ge -16-m,\forall x\in[0;3]\end{array}\right.\ (I)$

Xét hàm số $f(x)=2x^3-3x^2$ trên đoạn $[0;3]$:

$f(x)=2x^3-3x^2$ liên tục trên đoạn $[0;3]$; $f'(x)=6x^2-6x$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\end{array}\right.$;

$f(0)=0$; $f(1)=-1$; $f(3)=27$.

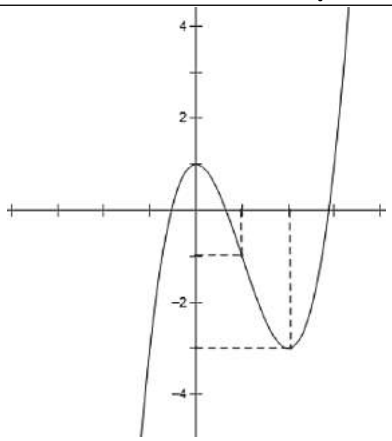
Suy ra: $\max\limits_{[0;3]}f(x)=27$; $\min\limits_{[0;3]}f(x)=-1$.

Vậy $(I)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\max\limits_{[0;3]}f(x)\le 16-m\\ \min\limits_{[0;3]}f(x)\ge -16-m\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}27\le 16-m\\ -1\ge -16-m\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\le-11\\ m\ge-15\end{array}\right.$.

Suy ra: $S=\{-15;-14;...;-11\}$.

Vậy tổng tất cả các phần tử của S bằng -65.

Câu 34: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Bất phương trình $f(x)-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x-m>0$ nghiệm đúng với mọi $x\in(0;2)$ khi và chỉ khi

A. $m<f(0)$. **B.** $m<f(2)+\frac{22}{3}$. **C.** $m\le f(0)$. **D.** $m\le f(2)+\frac{22}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình $f(x)-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x-m>0\Leftrightarrow f(x)-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x>m(1)$

Xét $g(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x, x\in(0;2)$ có $g'(x)=f'(x)-x^2+2x+3$.

Ta thấy trên khoảng $(0;2)$ thì $f'(x)>-3$ và $-x^2+2x+3>3\Rightarrow g'(x)>0,\forall x\in(0;2)$.

Do đó $g(x)$ là hàm đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x\in(0;2)$ khi và chỉ khi $m\le g(0)=f(0)$.

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Biết rằng $f(0)=f(3)=2, f(1)=4$, hãy tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho bất phương trình $f(x)+x^2-m>0$ nghiệm đúng với mọi $x\in(0;3)$.

A. $m<2$. **B.** $m\le 13$. **C.** $m<13$. **D.** $m\le 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$ 0	$-$ 0	$-$ 0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	4		2	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $f(x)>2,\forall x\in(0;3)$.

Mà $x^2>0,\forall x\in(0;3)$ nên $f(x)+x^2>2,\forall x\in(0;3)$.

Do đó: $f(x)+x^2>m, \forall x\in(0;3)\Leftrightarrow m\le 2$.

Câu 36: Cho x, y là các số thực dương thoả mãn $\log_5 x+\log_5 y\ge\log_5\left(x^2+y\right)$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2x+y$ là $a\sqrt{b}+c$, trong đó a, b, c là các số tự nhiên và $a>1$. Giá trị của tổng $a+b+c$ bằng

A. 9. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Theo đề ta có $\log_5 x+\log_5 y\ge\log_5\left(x^2+y\right)\Leftrightarrow\log_5(xy)\ge\log_5\left(x^2+y\right)\Leftrightarrow xy\ge x^2+y$

$\Leftrightarrow y(x-1)\ge x^2$ (*)

Mặt khác do $x>0$ và $y>0$ nên từ (*) ta có $\begin{cases}x-1>0\\ y\ge\dfrac{x^2}{x-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\ y\ge\dfrac{x^2}{x-1}\end{cases}$.

Lúc đó $P=2x+y\ge 2x+\dfrac{x^2}{x-1}=\dfrac{3x^2-2x}{x-1}=f(x)$, với $x>1$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{3x^2-6x+2}{(x-1)^2}$. Khi đó $f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-6x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\ (n)\\ x=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}\ (l)\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	1		$\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$4+2\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min P=\min\limits_{x\in(1;+\infty)} f(x)=4+2\sqrt{3}$, đạt được khi $x=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$ và $y=\dfrac{6+4\sqrt{3}}{3}$.

Đối chiếu với đề bài ta có $a=2, b=3, c=4$. Vậy $a+b+c=2+3+4=9$.

Câu 37: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-3	↗	0	↘	$-\infty$

Bất phương trình $f(x)<\mathrm{e}^x+m$ (m là tham số) nghiệm đúng với mọi $x\in(-3;1)$ khi và chỉ khi

A. $m > f(1) - \mathrm{e}$. **B.** $m \geq f(1) - \mathrm{e}$. **C.** $m \geq f(-3) - \frac{1}{\mathrm{e}^3}$. **D.** $m > -3 - \frac{1}{\mathrm{e}^3}$.

Lời giải

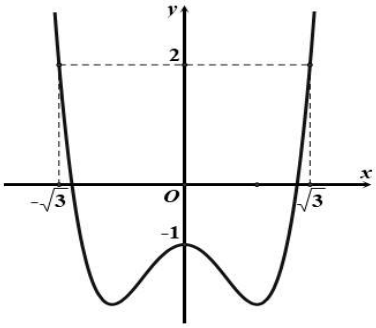
Chọn C

Đặt $g(x) = f(x) - \mathrm{e}^x$, ta có $g'(x) = f'(x) - \mathrm{e}^x < 0, \forall x \in (-3;1)$. Lập bảng biến thiên

x	-3		1
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$g(-3)$	$\searrow$	$g(1)$

Vậy $m > g(x), \forall x \in (-3;1) \Leftrightarrow m \geq g(-3) = f(-3) - \frac{1}{\mathrm{e}^3}$.

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $3f(x) \geq x^3 - 3x + m$ đúng với mọi $x \in \left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$ là



A. $m \geq 3f(1)$. **B.** $m \geq 3f\left(-\sqrt{3}\right)$. **C.** $m \leq 3f(0)$. **D.** $m \leq 3f\left(\sqrt{3}\right)$.

Lời giải

Chọn D

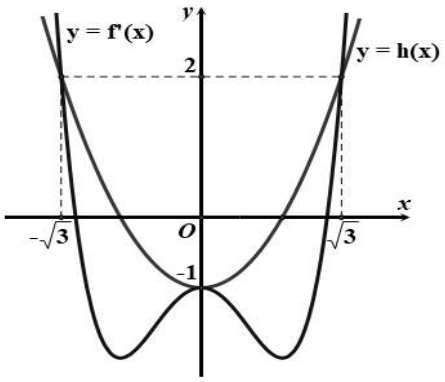
Bpt $\Leftrightarrow 3f(x) \geq x^3 - 3x + m \Leftrightarrow m \leq 3f(x) - x^3 + 3x, \ \forall x \in \left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$ (1)

$\Leftrightarrow m \leq \underset{\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]}{Min} g(x)$, trong đó $g(x) = 3f(x) - x^3 + 3x$.

Có $g'(x) = 3f'(x) - 3x^2 + 3$.

Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3f'(x) - 3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow f'(x) - \left(x^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 - 1$ (*)

Phương trình (*) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y = f'(x)$ và $y = h(x) = x^2 - 1$.



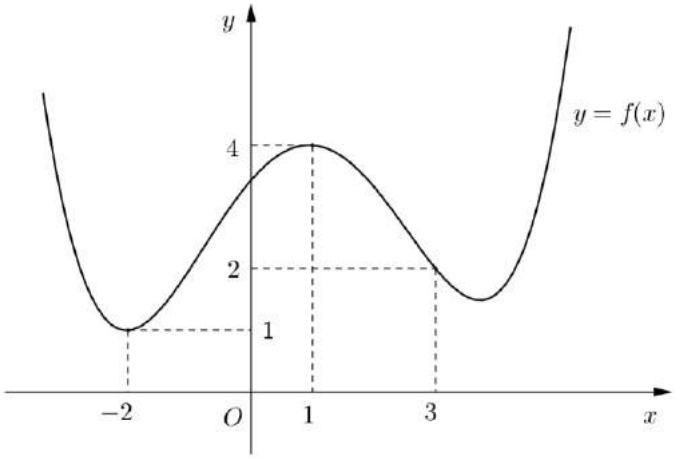
Dựa vào đồ thị ta suy ra nghiệm của $(*)$ là $x=0;\ x=-\sqrt{3};\ x=\sqrt{3}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
$g(x)$	$g(-\sqrt{3})$	$\searrow$	$g(1)$	$\searrow$	$g(\sqrt{3})$

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow \underset{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]}{Min}\, g(x)=g(\sqrt{3})=3f(\sqrt{3})$. Do đó $(1)\Leftrightarrow m\le 3f(\sqrt{3})$.

Câu 39: Cho Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m không vượt quá 2022 để bất phương trình $\dfrac{m}{f(x)}-\sqrt{mf(x)}-1\ge\dfrac{3}{4}f^2(x)$ đúng với mọi $x\in[-2;3]$?

A. 1875. **B.** 1872. **C.** 1874. **D.** 1873.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $mf(x)\ge 0$ vì $f(x)>0\ \forall x\in[-2;3]\Rightarrow m\ge 0$.

Ta có $\dfrac{m}{f(x)}-\sqrt{mf(x)}-1\ge\dfrac{3}{4}f^2(x)\Leftrightarrow\dfrac{m}{f(x)}-\sqrt{mf(x)}+\dfrac{f^2(x)}{4}\ge f^2(x)+1$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{m}{f(x)}}-\frac{f(x)}{2}\right)^2 \geq f^2(x)+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{\frac{m}{f(x)}}-\frac{f(x)}{2} \geq \sqrt{f^2(x)+1} \\ \sqrt{\frac{m}{f(x)}}-\frac{f(x)}{2} \leq -\sqrt{f^2(x)+1}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{m} \geq \sqrt{\left[f^2(x)+1\right]f(x)}+\frac{1}{2}f(x)\sqrt{f(x)} \\ \sqrt{m} \leq -\sqrt{\left[f^2(x)+1\right]f(x)}+\frac{1}{2}f(x)\sqrt{f(x)}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{m} \geq \max\left\{\sqrt{\left[f^2(x)+1\right]f(x)}+\frac{1}{2}f(x)\sqrt{f(x)}\right\} \\ \sqrt{m} \leq \min\left\{-\sqrt{\left[f^2(x)+1\right]f(x)}+\frac{1}{2}f(x)\sqrt{f(x)}\right\}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{m} \geq 4+2\sqrt{17} \\ \sqrt{m} \leq 4-2\sqrt{17}\,(vo\ ly)\end{array}\right. \quad \forall x \in [-2;3]$$

$\Leftrightarrow m \geq \left(4+2\sqrt{17}\right)^2 \simeq 149{,}96$. Vì $m \leq 2022$. Nên có $2022-150+1=1873$.

Câu 40: Cho hàm số $y=g(x)$ thỏa mãn $2g^3(x)-6g^2(x)+7g(x)=3-(2x-3)\sqrt{1-x}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2g(x)+x$

A. 6. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định của phương trình là $x \leq 1$.

Ta có: $2g^3(x)-6g^2(x)+7g(x)=3-(2x-3)\sqrt{1-x}$

$\Leftrightarrow 2g^3(x)-6g^2(x)+6g(x)-2+g(x)-1=-(2x-2)\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x}$

$\Leftrightarrow 2(g(x)-1)^3+g(x)-1=2(1-x)\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x}$

$\Leftrightarrow 2(g(x)-1)^3+g(x)-1=2\left(\sqrt{1-x}\right)^3+\sqrt{1-x}$ (1)

Xét hàm số $f(t)=2t^3+t$. Dễ thấy $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $g(x)-1=\sqrt{1-x} \Leftrightarrow g(x)=1+\sqrt{1-x}$.

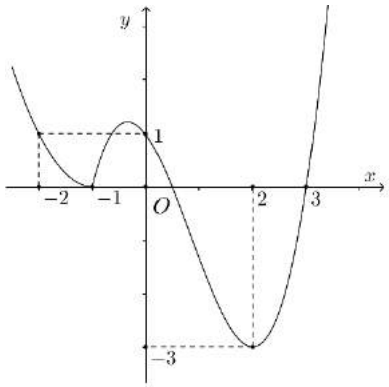
Do đó $P=2+2\sqrt{1-x}+x$

Ta có $P'=\frac{-1}{\sqrt{1-x}}+1$; $P'=0 \Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$		0		1
P'		$+$	0	$-$	
P		↗	4	↘	

Vậy $\max P=4 \Leftrightarrow x=0$.

Câu 41: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-20;20]$ để bất phương trình $2f(x)+x^3>m+3x^2$ nghiệm đúng với mọi $x\in(-1;3)$?

A. 9. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 12.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2f(x)+x^3>m+3x^2 \Leftrightarrow f(x)>\dfrac{-x^3+3x^2+m}{2}\ \forall\ x\in(-1;3)$

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{-x^3+3x^2+m}{2}\Rightarrow g'(x)=\dfrac{-3x^2+6x}{2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	-1		0		2		3
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\dfrac{m+2}{2}$	↘	$\dfrac{m}{2}$	↗	$\dfrac{m+4}{2}$	↘	$\dfrac{m}{2}$

Từ bảng biến thiên ta thấy được $\max\limits_{x\in(-1;3)}g(x)=g(2)=\dfrac{m+4}{2}$

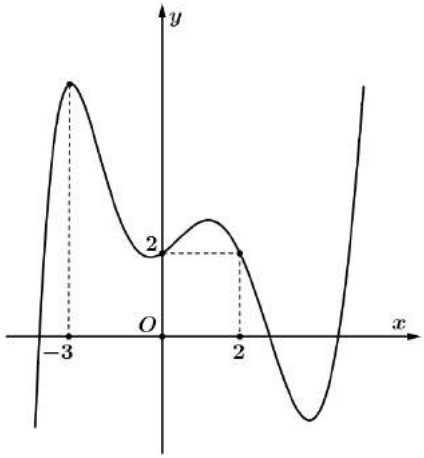
Ta có $\min\limits_{x\in(-1;3)}f(x)=f(2)=-3$.

Để $f(x)>g(x)\ \forall\ x\in(-1;3)\Leftrightarrow f(2)>g(2)\Leftrightarrow -3>\dfrac{m+4}{2}\Leftrightarrow m<-10$. Mà m nguyên và $m\in[-20;20]$ nên $m\in\{-20,-19,...,-11\}$. Vậy có 10 giá trị nguyên của m thoả mãn.

Dạng 5: GTLN và GTNN của hàm hợp

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(2x)-4x$ trên đoạn $\left[-\frac{3}{2};2\right]$ bằng



A. $f(0)$. **B.** $f(-3)+6$. **C.** $f(2)-4$. **D.** $f(4)-8$.

Lời giải:

Chọn C

Xét $g(x)=f(2x)-4x$ $(*)$

Đặt $u=2x, x\in\left[-\frac{3}{2};2\right]\Rightarrow u\in[-3;4]$

Khi đó theo cách đặt $(*)$ trở thành: $g_1(u)=f(u)-2u \Rightarrow g_1'(u)=f'(u)-2$

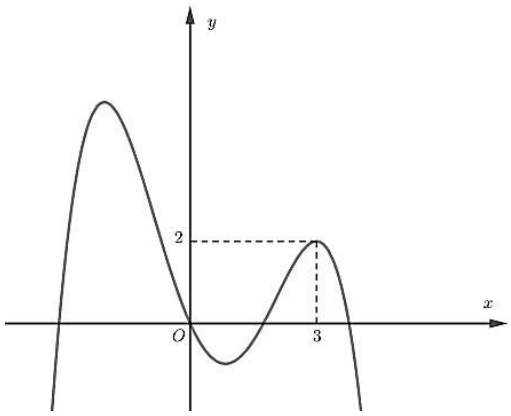
$$g_1'(u)=0\Leftrightarrow f'(u)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=0\in[-3;4]\\u=2\in[-3;4]\end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g_1(u)$ trên $[-3;4]$

u	-3		0		2		4
$g'(u)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$g(u)$		↗		↗	$g(2)$	↘	

Từ bảng biến thiên suy ra $\max\limits_{[-3;4]} g_1(u)=g_1(2)=f(2)-4$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx$, $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$, biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ.



Gọi S là tập hợp các giá trị của x sao cho hàm số $g(x)=\dfrac{2f(x)-2}{f^2(x)-2f(x)+2}$ đạt giá trị lớn nhất hoặc đạt giá trị nhỏ nhất. Số phần tử của tập S là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 7.

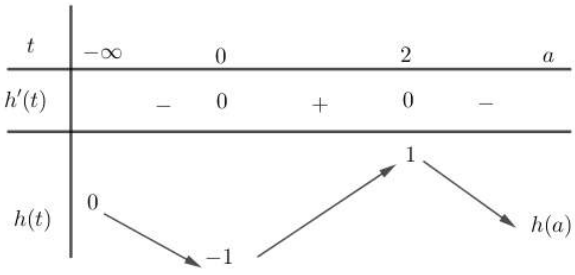
Lời giải:

Chọn D

Đặt $f(x)=t$, $t\in(-\infty;a], a>2$. Ta có $g(x)=\dfrac{2f(x)-2}{f^2(x)-2f(x)+2}=\dfrac{2t-2}{t^2-2t+2}$.

Đặt $h(t)=\dfrac{2t-2}{t^2-2t+2}$, $t\in(-\infty;a], a>2$ có $h'(t)=\dfrac{-2\left(t^2-2t\right)}{\left(t^2-2t+2\right)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=2\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(t)$.



Ta có $h(a)=\dfrac{2a-2}{a^2-2a+2}>0\ \forall a>2$ nên từ bảng biến thiên suy ra:

$\max\limits_{\mathbb{R}} g(x)=\max\limits_{(-\infty;a]} h(t)=1\Leftrightarrow t=2$ hay $f(x)=2$ (phương trình này có 3 nghiệm).

$\min\limits_{\mathbb{R}} g(x)=\min\limits_{(-\infty;a]} h(t)=-1\Leftrightarrow t=0$ hay $f(x)=0$ (phương trình này có 4 nghiệm).

Vậy có tất cả 7 giá trị của x sao cho hàm số $g(x)$ đạt giá trị lớn nhất hoặc đạt giá trị nhỏ nhất.

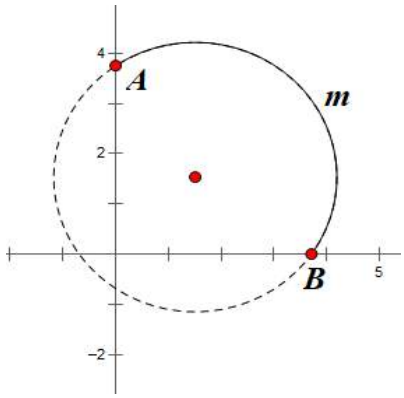
Câu 3: Cho các số thực x, y thỏa mãn $x-3\sqrt{x+1}=3\sqrt{y+2}-y$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y$ là

A. $\min P=\dfrac{9+3\sqrt{21}}{2}$. **B.** $\min P=9+3\sqrt{15}$. **C.** $\min P=-63$. **D.** $\min P=-91$.

Lời giải:

Chọn A

Cách 1:



Đặt $X=\sqrt{x+1}, Y=\sqrt{y+2}$ với $X,Y\ge 0$ suy ra: $x=X^2-1, y=Y^2-2$

Ta có: $x-3\sqrt{x+1}=3\sqrt{y+2}-y\Rightarrow X^2+Y^2-3X-3Y-3=0$ (1)

Tập hợp các điểm $M(X,Y)$ thỏa mãn phương trình (1) là đường tròn (C) có tâm $I\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$, bán kính $R=\frac{\sqrt{30}}{2}$. Gọi $A=(C)\cap(Oy)\Rightarrow A\left(0;\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)$; $B=(C)\cap(Ox)\Rightarrow B\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2};0\right)$. Vì $X,Y\ge 0$ nên ta chỉ xét các điểm $M\in AmB$.

Ta có: $P=x+y=X^2+Y^2-3=OM^2-3$ suy ra $P_{\min}\Leftrightarrow OM_{\min}=OA=OB$.

Mặt khác: $OA=\sqrt{0^2+\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)^2}=\frac{3+\sqrt{21}}{2}$.

Vậy $\min P=OA^2-3=\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)^2-3=\frac{9+3\sqrt{21}}{2}$.

Cách 2:

ĐK: $x\ge 1; y\ge -2$. Ta có: $x-3\sqrt{x+1}=3\sqrt{y+2}-y\Leftrightarrow x+y=3\sqrt{x+1}+3\sqrt{y+2}$, $(x+y>0)$.

$\Rightarrow (x+y)^2=9(x+y+3)+18\sqrt{(x+1)(y+2)}$

$\Rightarrow (x+y)^2-9(x+y)-27\ge 0\Rightarrow x+y\ge\frac{9+3\sqrt{21}}{2}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=\frac{11+3\sqrt{21}}{2}\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}y=-2\\ x=\frac{13+3\sqrt{21}}{2}\end{cases}$

Vậy $\min P=\frac{9+3\sqrt{21}}{2}$ khi và chỉ khi $\begin{cases}x=-1\\ y=\frac{11+3\sqrt{21}}{2}\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}y=-2\\ x=\frac{13+3\sqrt{21}}{2}\end{cases}$.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)=\frac{ax+b}{2x^2+2}$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x)$. Có bao nhiêu cặp số (a,b) với $a,b\in\mathbb{Z}$ sao cho $M^2+m^2\le 5$?

A. 51. **B.** 89. **C.** 198. **D.** 102.

Lời giải:

Chọn B

Cách 1:

Tập xác định $D=\mathbb{R}\Rightarrow \forall x\in \mathbb{R}: y=\dfrac{ax+b}{2x^2+2}\Leftrightarrow 2yx^2-ax+2y-b=0 \quad (1)$

Để có $\max y, \min y$ thì phương trình (1) phải có nghiệm x

Trường hợp 1: $y=0$, khi đó $(1)\Leftrightarrow -ax-b=0$. Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=0 \\ a\neq 0 \end{array}\right.$.

Với $a=b=0$ thì $y=0, \forall x\in \mathbb{R}$, do đó $\min y+\max y=0\leq 5$ (thoả mãn).

Với $a\neq 0$ thì $y=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{b}{a}$.

Trường hợp 2: $y\neq 0$. Xét $\Delta=-16y^2+8by+a^2$.

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta\geq 0\Leftrightarrow -16y^2+8by+a^2\geq 0\Leftrightarrow \dfrac{b-\sqrt{a^2+b^2}}{4}\leq y\leq \dfrac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{4}$

$\Rightarrow M=\dfrac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{4}; m=\dfrac{b-\sqrt{a^2+b^2}}{4}$

$M^2+m^2=\dfrac{a^2+2b^2}{8}\leq 5\Rightarrow a^2+2b^2\leq 40(*)$.

Suy ra $b^2\leq 20\Rightarrow -4\leq b\leq 4$ (do $b\in\mathbb{Z}$).

Nhận xét nếu $a^2\leq M$ thì có $2\times\left[\sqrt{M}\right]+1$ số nguyên a thoả mãn.

Với $b=\pm 4\Rightarrow a^2\leq 8$. Có 5 số nguyên a thoả mãn.Vậy có 10 cặp $(a;b)$.

Với $b=\pm 3\Rightarrow a^2\leq 22$. Có 9 số nguyên a thoả mãn.Vậy có 18 cặp $(a;b)$.

Với $b=\pm 2\Rightarrow a^2\leq 32$. Có 11 số nguyên a thoả mãn.Vậy có 22 cặp $(a;b)$.

Với $b=\pm 1\Rightarrow a^2\leq 38$. Có 13 số nguyên a thoả mãn.Vậy có 26 cặp $(a;b)$.

Với $b=0\Rightarrow a^2\leq 40$. Có 13 số nguyên a thoả mãn.Vậy có 13 cặp $(a;b)$.

Tổng cộng có 89 cặp $(a;b)$ cần tìm.

Cách 2:

$(C): y=\dfrac{ax+b}{2x^2+2}\Rightarrow y'=\dfrac{-ax^2-2bx+a}{2\left(x^2+1\right)^2}$

Nếu $a=b=0$ thì $y=0, \forall x\in \mathbb{R}$, do đó $M=m=0\Rightarrow M^2+m^2\leq 5$ (thoả mãn).

Xét a,b không đồng thời bằng 0. Khi đó $y'=0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

Ta có $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-2b}{a} \\ x_1.x_2=-1 \end{cases}$ (Giả sử $x_1<x_2$)

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=0$ nên (C) có dạng



hoặc



M, m nhận $y(x_1)$, $y(x_2)$.

Ta có công thức cực trị của hàm số $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ là $y(x_{ct})=\dfrac{u'}{v'}=\dfrac{a}{4x_{ct}}$

$$\Rightarrow M^2+m^2=\frac{a^2}{4^2x_1^{\,2}}+\frac{a^2}{4^2x_2^{\,2}}=\frac{a^2}{16}\left(\frac{4b^2}{a^2}+2\right)\le 5\Leftrightarrow 2b^2+a^2\le 40.$$

(đến đây thực hiện tương tự cách 1.)

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn biểu thức $\left[f(x)-x\right].f(x)=x^6+3x^4+2x^2, \forall x\in\mathbb{R}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;2]$. Giá trị của $3M-m$ bằng

A. 33. **B.** -3. **C.** 4. **D.** -28.

Lời giải:

Chọn A

$$\left[f(x)-x\right].f(x)=x^6+3x^4+2x^2\Leftrightarrow\left[f(x)-x\right].f(x)=\left(x^3+2x\right)\left[x^3+2x-x\right], \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow\left[f(x)-x^3-2x\right].\left[f(x)+x^3-x\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=x^3+2x\\ f(x)=-x^3+x\end{array}\right.$$

Vì $f(x)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên loại $f(x)=-x^3+x$.

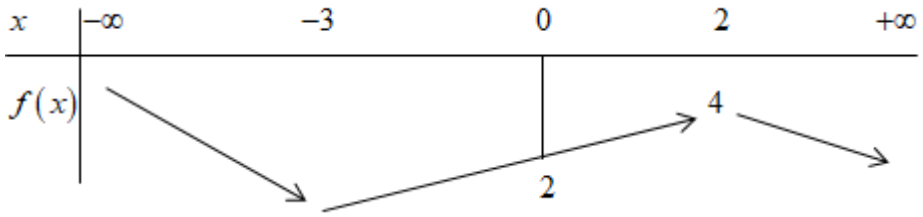
$$\Rightarrow f(x)=x^3+2x\Rightarrow f'(x)=3x^2+2>0, \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(1)=3=\min_{[1;2]} f(x)=m; f(2)=12=\max_{[1;2]} f(x)=M$$

Suy ra: $3M-m=3.12-3=33$

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ và $f''(x)<0,\forall x\in(0;+\infty)$.



Biết a,x thay đổi trên đoạn $[0;2]$ và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$S=\dfrac{\left[\left(f'(x)\right)^2+1\right]\left[2f'(0)+(a-x)f'(a)+6\right]}{\left[f\left(2-\sqrt{4-2x}\right)+f(x)\right]^2\left[f\left(2-\sqrt{4-2x}\right)+f(a)\right]}$ bằng $\dfrac{m}{n}$ (phân số tối giản, $m,n\in\mathbb{Z}_+$).

Tổng $m+n$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(20;25)$. **B.** $(95;145)$. **C.** $(45;75)$. **D.** $(75;95)$.

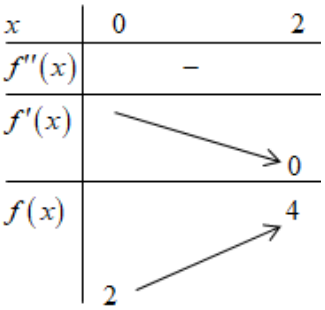
Lời giải:

Chọn C

Do $f''(x)<0,\forall x\in(0;+\infty)$ nên $f(x)$ có đồ thị lồi trên $(0;+\infty)$, tức là tiếp tuyến ở phía trên đồ thị. Suy ra $f(x)\le f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0),\forall x\in(0;+\infty)$

$\Rightarrow f(a)\le f'(0)(a-0)+f(0)=af'(0)+2$.

Xét trên $[0;2]$, ta có



Suy ra $f\left(2-\sqrt{4-2x}\right)\le f(2)=4$, do đó $f(a)+f\left(2-\sqrt{4-2x}\right)\le af'(0)+6$.

Ta chứng minh $2f'(0)+(a-x)f'(a)+6\ge af'(0)+6\Leftrightarrow(2-a)f'(0)\ge(x-a)f'(a)(*)$

Thật vậy:

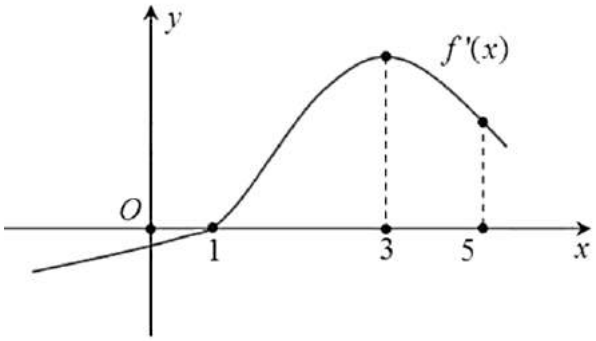
Nếu $x\le a$ thì $VT(*)\ge 0\ge VP(*)$.

Nếu $x\ge a$ thì $\begin{cases}2-a\ge x-a>0\\ f'(0)\ge f'(a)\end{cases}$ nên $(*)$ đúng. Do đó $\dfrac{2f'(0)+(a-x)f'(a)+6}{f\left(2-\sqrt{4-2x}\right)+f(a)}\ge 1$.

Lại có $\left[f'(x)\right]^2+1\ge 1$ và $f\left(2-\sqrt{4-2x}\right)+f(x)\le 2f(2)=8$ nên suy ra $S\ge\dfrac{1}{64}$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=0;x=2$. Như vậy $m=1,n=64\Rightarrow m+n=65$.

Câu 2: Cho đồ thị hàm số $f(x)=f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $f(0)-f(3)=f(5)-f(1)$. Gọi *M*, *m* lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trênđoạn $[0;5]$. Đáp án đúng là



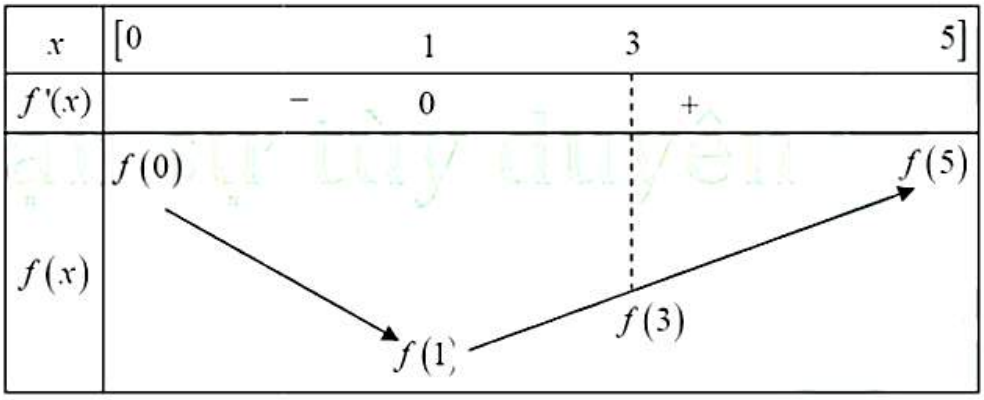
A. $M=f(5);m=f(1)$. **B.** $M=f(0);m=f(1)$.

C. $M=f(3);m=f(0)$. **D.** $M=f(1);m=f(5)$.

Lời giải:

Chọn B

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$ như sau:

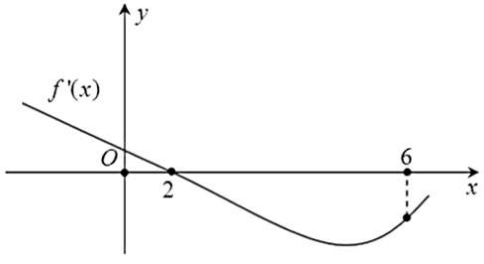


Suy ra: $\min\limits_{x\in[0;5]} f(x)=f(1)=m$ và $\left[\begin{array}{l}\max\limits_{x\in[0;5]} f(x)=f(0)\\ \max\limits_{x\in[0;5]} f(x)=f(5)\end{array}\right.$.

Từ giả thiết: $f(0)-f(3)=f(5)-f(1)\Leftrightarrow f(5)-f(0)=f(1)-f(3)<0\Leftrightarrow f(5)<f(0)$.

Suy ra, $\max\limits_{x\in[0;5]} f(x)=f(0)=M$.

Câu 3: Cho đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $2f(6)=f(0)+f(2)$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;6]$. Đáp án đúng là



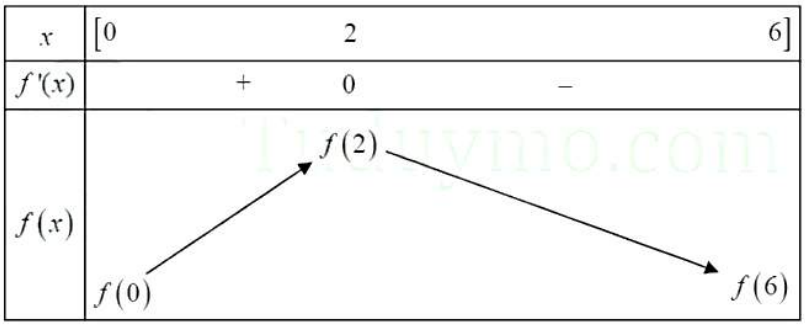
A. $M=f(6);m=f(0)$. **B.** $M=f(2);m=f(6)$.

C. $M=f(2);m=f(0)$. **D.** $M=f(6);m=f(0)$.

Lời giải:

Chọn C

Bảng biến thiên của $f(x)$ trên đoạn $[0;6]$ như sau:



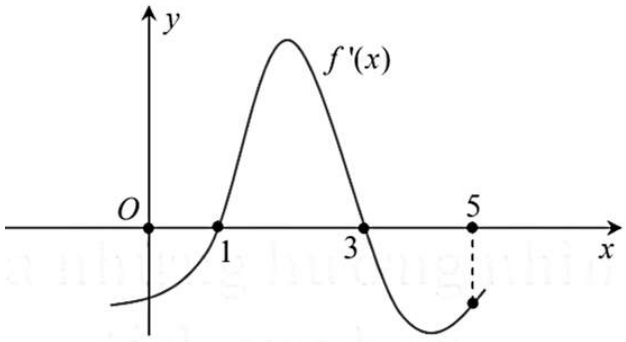
Suy ra: $\max\limits_{x\in[0;6]} f(x) = f(2) = M$

Và $\min\limits_{x\in[0,6]} f(x) = f(0)$; $\min\limits_{x\in[0;6]} f(x) = f(6)$

Từ giả thiết: $2f(6) = f(0) + f(2) \Leftrightarrow f(6) - f(0) = f(2) - f(6) > 0 \Leftrightarrow f(6) > f(0)$

Suy ra: $\min\limits_{x\in[0;6]} f(x) = f(0) = m$

Câu 4: Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $f(0) + f(2) = f(1) + f(3)$ và $f(0) + f(1) = f(3) + f(5)$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$. Đáp án đúng là



A. $M = f(3); m = f(1)$.

B. $M = f(0); m = f(1)$.

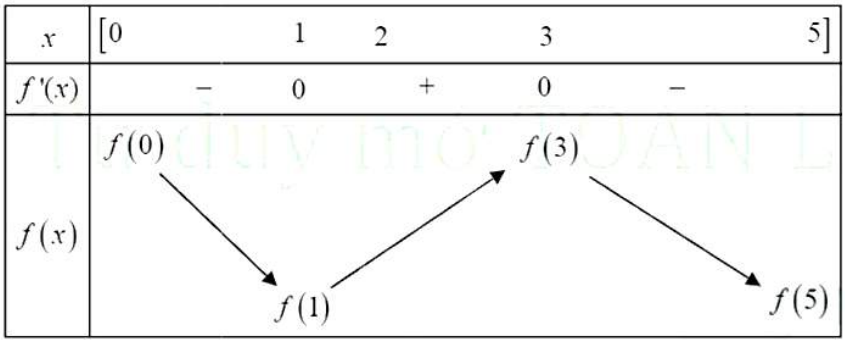
C. $M = f(0); m = f(5)$.

D. $M = f(3); m = f(5)$.

Lời giải:

Chọn D

Bảng biến thiên của $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$ như sau:



Suy ra: $\left[\begin{array}{l}\max\limits_{x\in[0,5]} f(x)=f(0)\\ \max\limits_{x\in[0,5]} f(x)=f(3)\end{array}\right.$ và $\left[\begin{array}{l}\min\limits_{x\in[0,5]} f(x)=f(1)\\ \min\limits_{x\in[0,5]} f(x)=f(5)\end{array}\right.$

Từ giả thiết: $f(0)+f(2)=f(1)+f(3)\Leftrightarrow f(0)-f(3)=f(1)-f(2)<0\Leftrightarrow f(0)<f(3)$

Suy ra: $\max\limits_{x\in[0,5]} f(x)=f(3)=M$

Từ giả thiết: $f(0)+f(1)=f(3)+f(5)\Leftrightarrow f(1)-f(5)=f(3)-f(0)>0\Leftrightarrow f(1)>f(5)$

Suy ra: $\min\limits_{x\in[0,5]} f(x)=f(5)=m$

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ tương ứng là m. Khi đó giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=3f(x)+x^2-2x$ thỏa mãn điều kiện nào dưới đây?

A. $\min g(x)\geq 3m$. **B.** $\min g(x)=3m-2$.

C. $\min g(x)\leq 3m-2$. **D.** $\min g(x)\geq 3m-1$.

Lời giải:

Chọn D

Tồn tại một giá trị $x_0\in R$ sao cho: $f(x)\geq f(x_0)=m$ với $\forall x\in\mathbb{R}$

Suy ra: $3f(x)\geq 3f(x_0)=3m$ với $\forall x\in\mathbb{R}$

Lại có: $x^2-2x=(x-1)^2-1\geq -1$

Suy ra: $y=3f(x)+x^2-2x\geq 3.m+(-1)=3m-1$. Suy ra $\min f(x)\geq 3m-1$

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ tương ứng là 3 và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=4f(x)+x^2-4x$ tương ứng bằng 8. Kết luận nào dưới đây luôn đúng?

A. $f(2)=3$. **B.** $f(2)>3$. **C.** $f(3)<3$. **D.** $f(3)\geq 4$.

Lời giải:

Chọn A

Ta có: $f(x)\geq 3,\forall x\in\mathbb{R}$

Mà: $g(x)=4f(x)+x^2-4x=4f(x)+(x-2)^2-4\geq 4.3-4=8$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=3\\(x-2)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=3\\x=2\end{cases}\Rightarrow f(2)=3$.

Câu 7: Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, có giá trị lớn nhất lần lượt là 3 và 6. Khi đó giá trị lớn nhất của hàm số $y=3f(x)+2g(x)$ luôn thỏa mãn điều kiện nào dưới đây?

A. $\max\left(3f(x)+2g(x)\right)\leq 21$. **B.** $\max\left(3f(x)+2g(x)\right)\geq 24$.

C. $\max\left(3f(x)+2g(x)\right)\leq 30$. **D.** $\max\left(3f(x)+2g(x)\right)\geq 21$.

Lời giải:

Chọn A

Ta có: $f(x)\le 3,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $g(x)\le 6,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow y=3f(x)+2g(x)\le 3.3+2.6=21\Rightarrow \max\left(3f(x)+2g(x)\right)\le 21$.

Câu 8: Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, có giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ là 6 và giá trị nhỏ nhất $y=g(x)$ là 3. Khi đó giá trị lớn nhất của hàm số $y=2f(x)-3g(x)+2$ luôn thỏa mãn điều kiện nào dưới đây?

A. $\max\left(2f(x)-3g(x)+2\right)\ge 5$.
B. $\max\left(2f(x)-3g(x)+2\right)\le 3$.
C. $\max\left(2f(x)-3g(x)+2\right)\le 5$.
D. $\max\left(2f(x)-3g(x)+2\right)\ge 2$.

Lời giải:

Chọn C

Ta có: $f(x)\le 6,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $g(x)\ge 3,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow y=2f(x)-3g(x)+2\le 2.6-3.3+2=5\Rightarrow \max\left(2f(x)-3g(x)+2\right)\le 5$.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có giá trị lớn nhất là 2. Biết hàm số $y=2f(x)-x^2+6x$ có giá trị lớn nhất bằng 8. Chọn đáp án đúng trong các đáp án sau?

A. $f(0)\le 4$. **B.** $f(3)\le -1$. **C.** $f(2)\ge 0$. **D.** $f(2)\le -2$.

Lời giải:

Chọn A

Theo giả thiết ta có: $y=g(x)=2f(x)-x^2+6x\le 8$.

Do đó: $g(0)=2f(0)\le 8\Leftrightarrow f(0)\le 4$.

$g(3)=2f(3)+9\le 8\Leftrightarrow f(3)\le -\frac{1}{2}$.

$g(2)=2f(2)+8\le 8\Leftrightarrow f(2)\le 0$.

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)=x^4-2ax+6a-3$ có giá trị nhỏ nhất bằng m. Nhận xét nào trong các đáp án dưới đây luôn đúng?

A. $m\ge -3$. **B.** $m<-3$. **C.** $m\le 78$. **D.** $m\le 3$.

Lời giải:

Chọn C

Ta có $y=f(x)=x^4-2ax+6a-3\ge m,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $f(3)=3^4-2a.3+6a-3\ge m\Leftrightarrow 78\ge m$.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có giá trị lớn nhất và nhỏ bằng M và m. Biết rằng $f(a)+2f(b)=18$, trong đó a và b là hai số thực dương. Nhận xét nào trong các đáp án dưới đây là **luôn đúng?**

A. $m\le 3$. **B.** $M\ge 9$. **C.** $m\le 5$. **D.** $M\ge 6$.

Lời giải:

Chọn D

Ta có: $m \le y = f(x) \le M$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} f(a) \ge m \\ f(b) \ge m \end{cases} \Rightarrow 18 = f(a) + 2f(b) \ge m + 2m = 3m \Rightarrow m \le 6$.

Tương tự ta cũng có $\begin{cases} f(a) \le M \\ f(b) \le M \end{cases} \Rightarrow 18 = f(a) + 2f(b) \le M + 2M = 3M \Rightarrow M \ge 6$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất lần lượt là M và m. Biết rằng $f(a) + 2f(b) = 12$, trong đó a và b là hai số thực dương. Khi đó giá trị biểu thức $(M-2)(m-5)$ có thể bằng

A. -1. **B.** -3. **C.** 0. **D.** 10.

Lời giải:

Chọn B

Ta có $m \le y = f(x) \le M$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} f(a) \ge m \\ f(b) \ge m \end{cases} \Rightarrow 12 = f(a) + 2f(b) \ge m + 2m = 3m \Rightarrow m \le 4 \Leftrightarrow (m-5) \le -1$.

Tương tự, ta cũng có được:

$\begin{cases} f(a) \le M \\ f(b) \le M \end{cases} \Rightarrow 12 = f(a) + 2f(b) \le M + 2M = 3M \Rightarrow M \ge 4 \Rightarrow M - 2 \ge 2$.

Suy ra $(M-2)(m-5) \le -2$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2ax + 4a - 7$, có giá trị nhỏ nhất là m. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương mà m có thể nhận?

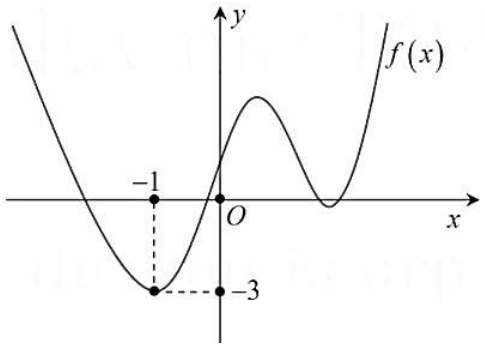
A. 11. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải:

Chọn D

Ta có: $m \le f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $m \le f(2) = 9$. Suy ra các giá trị nguyên dương của m thỏa $1 \le m \le 9$. Có 9 giá trị.

Câu 14: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Biết rằng m là tham số thực, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) + x^2 - 2mx + m^2 + 1$ tương ứng bằng:



A. 1. **B.** 3. **C.** -1. **D.** -2.

Lời giải:

Chọn D

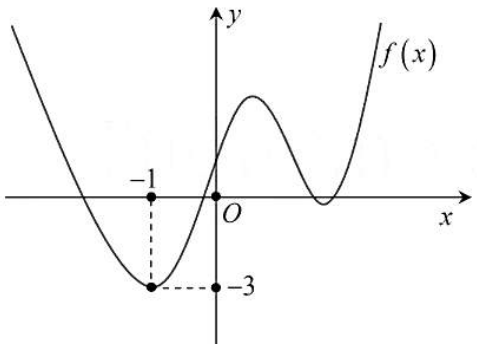
Ta thấy $\min f(x) = f(-1) = -3$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) + x^2 - 2mx + m^2 + 1 = f(x) + (x-m)^2 + 1$.

Có $\begin{cases} f(x) \ge f(-1) = -3 \\ (x-m)^2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) = f(x) + (x-m)^2 + 1 \ge (-3) + 0 + 1 = -2$.

Dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases} x = -1 \\ x = m \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$. Khi đó $\min g(x) = g(-1) = -2$.

Câu 15: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Biết rằng m là tham số thực, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(2x+3) + x^2 - 4mx + 4m^2 - 1$ bằng -4 thì tham số m bằng:



A. -1. **B.** 0. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** 2.

Lời giải:

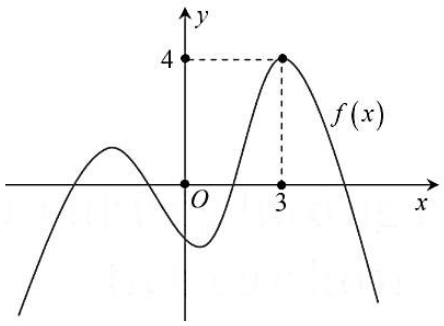
Chọn A

Ta thấy $\min f(x) = f(-1) = -3$.

Xét hàm số $g(x) = f(2x+3) + (x-2m)^2 - 1 \ge -3 + 0 - 1 = -4$.

Dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases} f(2x+3) = -3 \\ x - 2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 = -1 \\ x = 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ m = -1 \end{cases}$.

Câu 16: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Biết rằng m là tham số thực. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(3x-m) + 2f(x^2 - 2x)$ đạt giá trị lớn nhất. Tổng các giá trị của tất cả các phần tử thuộc tập S bằng:



A. 6. **B.** 3. **C.** 0. **D.** -2.

Lời giải:

Chọn C

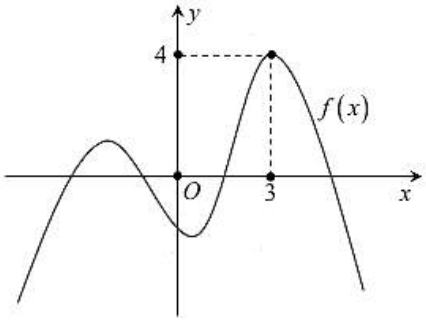
Ta thấy $maxf\left(x\right)=f\left(3\right)=4\Leftrightarrow f\left(x\right)\le f\left(3\right)=4,x\in\mathbb{R}$.

Ta có $\begin{cases}f\left(3x-m\right)\le f\left(3\right)=4\\f\left(x^2-2x\right)\le f\left(3\right)=4\end{cases}\Leftrightarrow 2f\left(x^2-2x\right)+f\left(3x-m\right)\le 2.4+4=12$.

Dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases}3x-m=3\\x^2-2x=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=3x-3\\\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow m\in\left\{-6;6\right\}=S$.

Vậy tổng các phần tử thuộc tập S bằng 0.

Câu 17: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Biết rằng m, n là hai số thực. Để hàm số $3f\left(3x-m\right)+f\left(x+n\right)-x^2+4x$ đạt giá trị lớn nhất thì $\left(2m-n\right)$ bằng



A. 3. **B.** 0. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải:

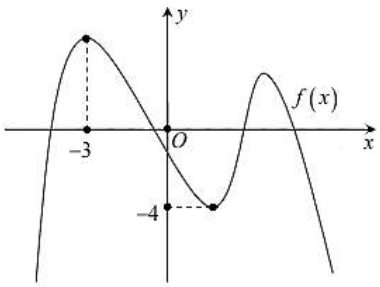
Chọn C

Ta thấy $\max f\left(x\right)=f\left(3\right)=4$ nên $\begin{cases}f\left(3x-m\right)\le 4\\f\left(x+n\right)\le 4\\-x^2+4x\le 4\end{cases}\Rightarrow 3f\left(3x-m\right)+f\left(x+n\right)-x^2+4x\le 20$.

Để xảy ra dấu bằng thì $\begin{cases}x=2\\3x-m=3\\x+n=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\m=3\\n=1\end{cases}$.

Vậy $2m-n=5$.

Câu 18: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $g\left(x\right)=x^2-2m^2x+m^4-f\left(f\left(x\right)\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất?



A. 6. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 8.

Lời giải:

Chọn A

Ta thấy $\max f(x) = f(-3)$ nên $-f(f(x)) \geq -f(-3)$.

Mặt khác, $x^2 - 2m^2x + m^4 = (x - m^2)^2 \geq 0$.

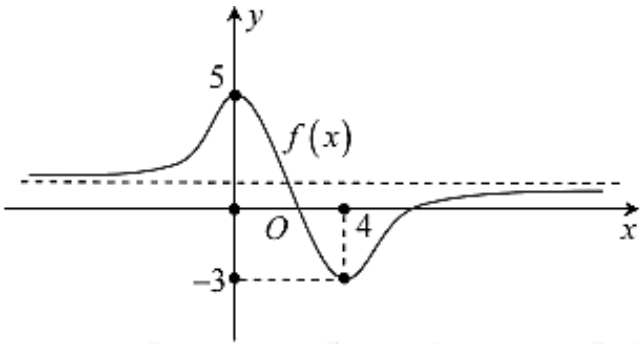
Từ đó, ta có $g(x) = x^2 - 2m^2x + m^4 - f(f(x)) \geq -f(-3)$

Để xảy ra dấu bằng thì $\begin{cases} x = m^2 \\ f(x) = -3 \end{cases} \Rightarrow f(m^2) = -3 (*)$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ và (*) tồn tại $a < 0 < b < c < d$ để $\left[\begin{array}{l} m^2 = a \\ m^2 = b \\ m^2 = c \\ m^2 = d \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \pm\sqrt{b} \\ m = \pm\sqrt{c} \\ m = \pm\sqrt{d} \end{array}\right.$.

Vậy có 6 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Biết rằng m, n là hai số thực. Để hàm số $2f(2x - m) - f(3x + n) + x^2 - 2x$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $T = 2m + 3n$ bằng



A. -11. **B.** -7. **C.** -13. **D.** 5.

Lời giải:

Chọn C

Ta thấy $\begin{cases} \max f(x) = f(0) = 5 \\ \min f(x) = f(4) = -3 \end{cases}$ nên

$\begin{cases} f(2x - m) \geq -3 \\ f(3x + n) \leq 5 \\ x^2 - 2x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow 2f(2x - m) - f(3x + n) + x^2 - 2x \geq -12$.

Để xảy ra dấu bằng thì $\begin{cases} x = 1 \\ 2x - m = 4 \\ 3x + n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ m = -2 \\ n = -3 \end{cases}$

Vậy $T = 2m + 3n = -13$.

Câu 20: Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2mx$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30;30]$ để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $(-1;3)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải:

Chọn A

Ta có đạo hàm: $f'(x)=2x-2m$.

Bảng biến thiên:

x	$(-1$		m		$3)$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(-1)$	↘	$f(m)$	↗	$f(3)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m\in(-1;3)\xrightarrow{m\in\mathbb{Z};\ m\in[-30;30]}0\le m\le 2$.

Vậy có tất cả 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)=-x^2+2(2m-1)x$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $(-3;11]$?

A. 6. **B.** 31. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải:

Chọn B

Ta có đạo hàm: $f'(x)=-2x+4m-2$.

Bảng biến thiên:

x	$(-3$		$2m-1$		$11]$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(-3)$	↗	$f(2m-1)$	↘	$f(11)$

x	$(-3$		$11]$		$2m-1$
$f'(x)$		$+$			$0\ -$
$f(x)$	$f(-3)$	↗	$f(11)]$		

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -3<2m-1\Leftrightarrow -1<m\xrightarrow{m\in\mathbb{Z};\ m\in[-30;30]}0\le m\le 30$.

Vậy có tất cả 31 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 22: Cho hàm số $y=x^3-3mx$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị nhỏ nhất nhất trên $(1;3)$?

A. 8. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 11.

Lời giải:

Chọn C

Ta có đạo hàm: $y' = 3x^2 - 3m$. Hàm số $y = x^3 - 3mx$ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $(1;3)$ khi có điểm cực tiểu trên $(1;3)$ và giá trị cực tiểu nhỏ hơn giá trị của hàm số tại hai đầu mút.

Nhận thấy, khi $m \le 0$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ (cũng đồng biến trên $(1;3)$) nên không tồn tại giá trị nhỏ nhất nhất trên $(1;3)$.

Khi $m > 0$, hàm số có điểm cực tiểu là $x = \sqrt{m}$

x	$-\sqrt{m}$	$(1$	$\sqrt{m}$	$3)$
$f'(x)$	$+$ 0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	↘ $f(1)$	↘ $f(\sqrt{m})$	↗ $f(3)$

Khi đó, ta phải có: $\begin{cases} \sqrt{m} \in (1;3) \\ f(\sqrt{m}) \le f(1) \\ f(\sqrt{m}) \le f(3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < m < 9 \\ f(\sqrt{m}) \le f(1) \\ f(\sqrt{m}) \le f(3) \end{cases}$.

Yêu cầu bài toán tương đương với $\sqrt{m} \in (1;3) \Leftrightarrow 1 < m < 9 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} 2 \le m \le 8$.

Vậy có tất cả 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 23: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30;30]$ để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $(-2;3)$?

A. 30. **B.** 18. **C.** 32. **D.** 1.

Lời giải:

Chọn A

Ta có đạo hàm: $y' = 3x^2 - 6mx$. Hàm số $y = x^3 - 3mx^2$ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $(1;3)$ khi có điểm cực đại trên $(-2;3)$ và giá trị cực đại lớn hơn giá trị của hàm số tại hai đầu mút.

Nhận thấy, khi $m = 0$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ (cũng đồng biến trên $(-2;3)$) nên không tồn tại giá trị lớn nhất nhất trên $(-2;3)$.

Khi $m > 0$ thì $y' = 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 2m \Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại $x = 0$

Khi đó ta phải có: $\begin{cases} m > 0 \\ 0 \in (-2;3) \\ f(0) \ge f(-2) \\ f(0) \ge f(3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 0 \ge -8 - 12m \\ 0 \ge 27 - 27m \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 1$

Khi $m < 0$ thì $y' = 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 2m \Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại $x = 2m$

Khi đó ta phải có: $\begin{cases} m<0 \\ 2m\in(-2;3) \\ f(2m)\geq f(-2) \\ f(2m)\geq f(3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<m<0 \\ -4m^3\geq -8-12m \\ -4m^3\geq 27-27m \end{cases} \Leftrightarrow vo\ nghiem$

Kết hợp lại ta được: $m\geq 1 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z};\ m\in[-30;30]} 1\leq m\leq 30$.

Vậy có tất cả 30 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Dạng 6: GTLN và GTNN của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2+4x-5\right|$ trên đoạn $[-3;0]$. Khi đó tổng $M+m$ là

A. 5. **B.** 9. **C.** 14. **D.** 8.

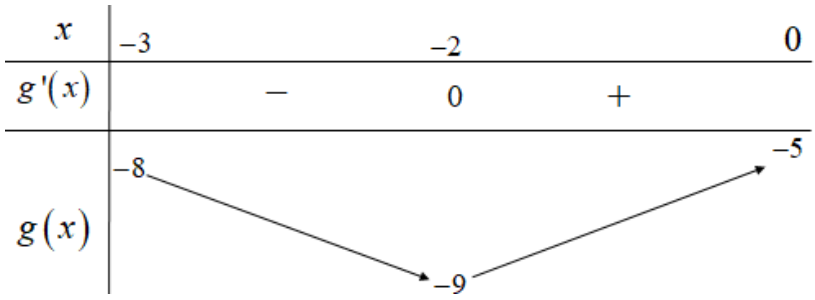
Lời giải:

Chọn C

Xét $g(x)=x^2+4x-5$ liên tục trên đoạn $[-3;0]$.

Ta có $g'(x)=2x+4$, $g'(x)=0\Leftrightarrow x=-2\in[-3;0]$.

Bảng biến thiên của hàm số trên đoạn $[-3;0]$



Dựa vào bảng biến thiên của hàm số suy ra $M=\max\limits_{[-3;0]}\left|g(x)\right|=\max\left\{\left|-8\right|;\left|-9\right|;\left|-5\right|\right\}=9$, $m=\min\limits_{[-3;0]}\left|g(x)\right|=\min\left\{\left|-8\right|;\left|-9\right|;\left|-5\right|\right\}=5$. Vậy $M+m=14$.

Câu 2: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x^2-7\right|$ trên đoạn $[0;4]$ là

A. 0. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải:

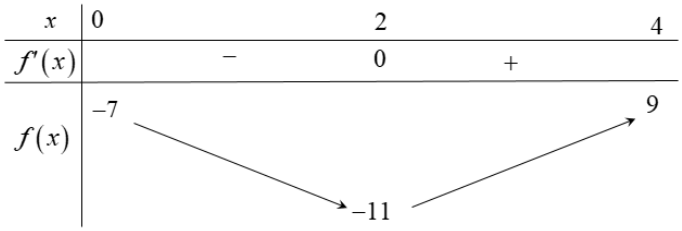
Chọn B

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2-7$ liên tục trên đoạn $[0;4]$.

Ta có: $f'(x)=3x^2-6x$, $f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in[0;4]\\x=2\in[0;4]\end{array}\right.$.

Ta có: $f(0)=-7$, $f(2)=-11$, $f(4)=9$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;4]$



Khi đó $\max\limits_{[0;4]}f(x)=9$, $\min\limits_{[0;4]}f(x)=-11$. Suy ra $\max\limits_{[0;4]}\left|f(x)\right|=11$.

Câu 3: Cho hàm số $y=\left|x^4-16x^2-7\right|$, gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;4]$. Tính giá trị biểu thức $M-2m$.

A. 14. **B.** 57. **C.** 64. **D.** 60.

Lời giải:

Chọn B

Xét hàm số $y=x^4-16x^2-7$ liên tục trên $[0;4]$.

Ta có $f'(x)=4x^3-32x$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in 4[0;4]\\x=2\sqrt{2}\in[0;4]\\x=-2\sqrt{2}\notin[0;4]\end{array}\right.$

Có bảng biến thiên

x	0		$2\sqrt{2}$		4
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	-7	↘	-71	↗	-7

Từ bảng biến thiên suy ra: $\min\limits_{[0;4]}\left|f(x)\right|=\left|f(0)\right|=\left|f(4)\right|=7$; $\max\limits_{[0;4]}\left|f(x)\right|=\left|f\left(2\sqrt{2}\right)\right|=71$.

Vậy $M-2m=57$.

Câu 4: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\left|\dfrac{2x-1}{x+2}\right|$ trên đoạn $[-1;1]$. Giá trị của biểu thức $2M-3m$ là

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** 0. **D.** 6.

Lời giải:

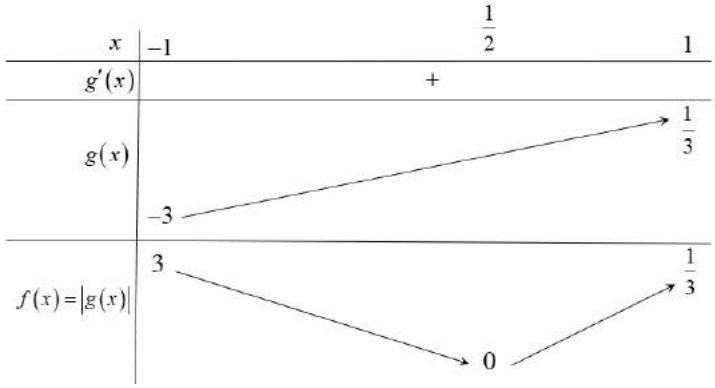
Chọn D

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$.

$g'(x)=\dfrac{5}{(x+2)^2}>0$, $\forall x\in[-1;1]$. Do đó hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên đoạn $[-1;1]$.

$g(-1)=-3$; $g(1)=\dfrac{1}{3}$.

Ta có bảng biến thiên của $g(x)$ và $f(x)$ trên đoạn $[-1;1]$:



Suy ra $M=\max\limits_{[-1;1]} f\left(x\right)=\max\limits_{[-1;1]}\left|g\left(x\right)\right|=\max\limits_{[-1;1]}\left\{\left|-3\right|;\left|\frac{1}{3}\right|\right\}=3$ khi $x=-1$.

Và $m=\min\limits_{[-1;1]} f\left(x\right)=\min\limits_{[-1;1]}\left|g\left(x\right)\right|=\min\limits_{[-1;1]}\left\{\left|-3\right|;0;\left|\frac{1}{3}\right|\right\}=0$ khi $x=\frac{1}{2}$.

Vậy $2M-3m=2.3-3.0=6$.

Câu 5: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|\frac{x^2-3x+3}{x-1}\right|$ trên đoạn $\left[-2;\frac{1}{2}\right]$. Giá trị của biểu thức $3M+m$ bằng

A. $\frac{27}{2}$. **B.** 10. **C.** $-\frac{40}{3}$. **D.** 16.

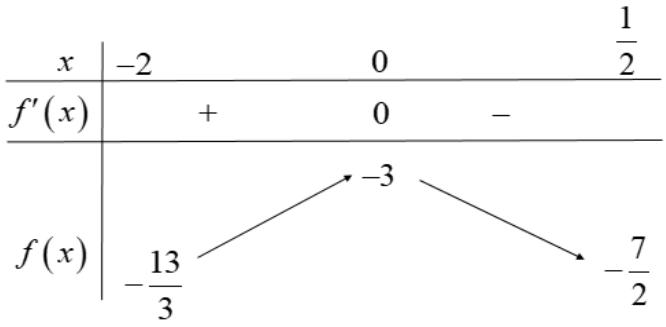
Lời giải:

Chọn D.

Đặt $y=f\left(x\right)=\frac{x^2-3x+3}{x-1}$. Hàm số xác định và liên tục trên $D=\left[-2;\frac{1}{2}\right]$.

Ta có $f'\left(x\right)=\frac{x^2-2x}{\left(x-1\right)^2}$, $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in D\\x=2\notin D\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên



Ta có $f\left(-2\right)=-\frac{13}{3}$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{7}{2}$, $f\left(0\right)=-3$.

Suy ra $\max\limits_{\left[-2;\frac{1}{2}\right]} f\left(x\right)=-3$ tại $x=0$, $\min\limits_{\left[-2;\frac{1}{2}\right]} f\left(x\right)=\frac{-13}{3}$ tại $x=-2$.

Từ đó ta có, $M=\max\limits_{\left[-2;\frac{1}{2}\right]}\left|f\left(x\right)\right|=\dfrac{13}{3}$ tại $x=-2$, $m=\min\limits_{\left[-2;\frac{1}{2}\right]}\left|f\left(x\right)\right|=3$ tại $x=0$.

Vậy $3M+m=16$.

Câu 6: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=\left|\mathrm{e}^{3x}-4\mathrm{e}^{2x}+4\mathrm{e}^{x}-10\right|$ trên đoạn $\left[0\,;\ln 4\right]$

A. 9. **B.** 6. **C.** 10. **D.** 5.

Lời giải:

Chọn C

Đặt $\mathrm{e}^{x}=t$. Ta có $0\le x\le \ln 4 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{0}\le \mathrm{e}^{x}\le \mathrm{e}^{\ln 4}\Rightarrow 1\le t\le 4$.

Khi đó hàm số $f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[0;\ln 4\right]$ trở thành $g\left(t\right)=\left|t^3-4t^2+4t-10\right|$, với $t\in\left[1;4\right]$.

Xét hàm số $h\left(t\right)=t^3-4t^2+4t-10$. Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $\left[1;4\right]$.

$h'\left(t\right)=3t^2-8t+4$; $h'\left(t\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\in\left[1;4\right]\\ t=\dfrac{2}{3}\notin\left[1;4\right]\end{array}\right.$; $h\left(1\right)=-9$, $h\left(2\right)=-10$, $h\left(4\right)=6$.

Khi đó $\max\limits_{\left[1;4\right]}h\left(t\right)=6,\min\limits_{\left[1;4\right]}h\left(t\right)=-10$.

Suy ra $\max\limits_{\left[0;\ln 4\right]}f\left(x\right)=\max\limits_{\left[1;4\right]}\left|h\left(t\right)\right|=10$ khi $t=2\Leftrightarrow x=\ln 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[0\,;\ln 4\right]$ là 10.

Câu 7: Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)=\left|\ln^2 x-2\ln x-3\right|$ trên đoạn $\left[1;\,e^2\right]$. Giá trị $M+m$ bằng

A. 4. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải:

Chọn B

Xét $u\left(x\right)=\ln^2 x-2\ln x-3$ trên $\left[1;e^2\right]$; $u\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\left[1;e^2\right]$.

Ta có $u'\left(x\right)=\dfrac{2\ln x}{x}-\dfrac{2}{x}$, $u'\left(x\right)=0\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow x=e\in\left(1;\,e^2\right)$.

Ta có $u\left(1\right)=-3,\,u\left(e\right)=-4,\,u\left(e^2\right)=-3.$

$M=\max\limits_{\left[1;e^2\right]}f\left(x\right)=\max\limits_{\left[1;e^2\right]}\left|u\left(x\right)\right|=\max\left\{\left|u\left(1\right)\right|,\left|u\left(e\right)\right|,\left|u\left(e^2\right)\right|\right\}=4$ khi $x=e$.

$m=\min\limits_{\left[1;e^2\right]}f\left(x\right)=\min\limits_{\left[1;e^2\right]}\left|u\left(x\right)\right|=\min\left\{\left|u\left(1\right)\right|,\left|u\left(e\right)\right|,\left|u\left(e^2\right)\right|\right\}=3$ khi $x=1$.

Vậy $M+m=4+3=7.$

Câu 8: Giả sử M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|\cos 2x+2\sin x-3\right|$ trên $\left[0;\dfrac{3\pi}{2}\right]$. Tính $M-4m$.

A. 6. **B.** 0. **C.** -2. **D.** 3.

Lời giải:

Chọn B

Xét hàm số $u(x)=\cos 2x+2\sin x-3$ với $x\in\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$. $u(x)$ liên tục trên $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$.

$u'(x)=-2\sin 2x+2\cos x$.

$u'(x)=0\Leftrightarrow -2\sin 2x+2\cos x=0\Leftrightarrow \cos x(2\sin x-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ 2\sin x-1=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$. Mà $x\in\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$ nên $x\in\left\{\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right\}$.

$u(0)=-2$, $u\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-6$, $u\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2$, $u\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{3}{2}$, $u\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{3}{2}$.

Khi đó: $\max\limits_{\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]}u(x)=-\frac{3}{2}$, $\min\limits_{\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]}u(x)=-6$.

Suy ra: $M=\max\limits_{\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]}\left|u(x)\right|=6$ khi $x=\frac{3\pi}{2}$, $m=\min\limits_{\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]}\left|u(x)\right|=\frac{3}{2}$ khi $x\in\left\{\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right\}$.

Vậy $M-4m=0$.

Câu 9: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2-1+\sqrt{3-x^2}\right|$. Khi đó $M+m=\frac{a}{4}+b\sqrt{c}$, với a, b, c nguyên. Tính $T=a+bc$.

A. 7. **B.** 9. **C.** 12. **D.** 8.

Lời giải:

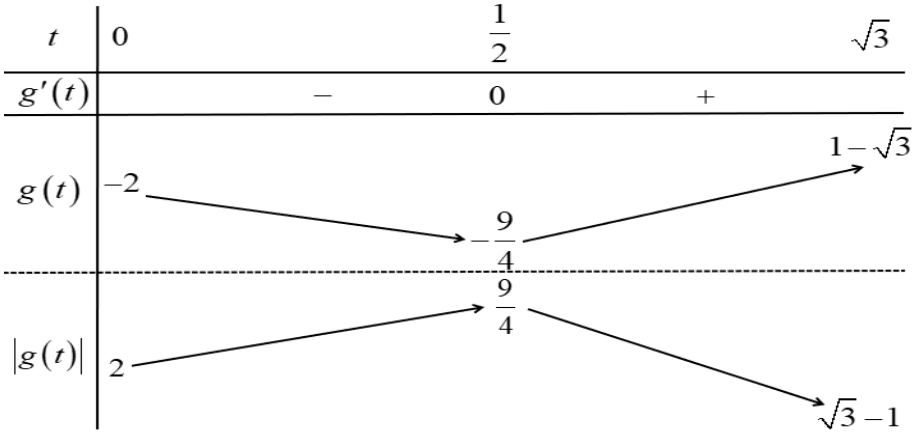
Chọn D

Tập xác định: $D=\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$. Đặt $t=\sqrt{3-x^2}, t\in\left[0;\sqrt{3}\right]$.

Khi đó hàm số đã cho trở thành: $y=\left|-t^2+t+2\right|=\left|t^2-t-2\right|$.

Xét $g(t)=t^2-t-2$ liên tục trên đoạn $\left[0;\sqrt{3}\right]$ ta có: $g'(t)=2t-1=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên của $y=g(t)$ và $y=\left|g(t)\right|$ trên đoạn $\left[0;\sqrt{3}\right]$.



Từ bảng biến thiên ta có: $M=\left|g\left(\frac{1}{2}\right)\right|=\frac{9}{4}$; $m=\left|g\left(\sqrt{3}\right)\right|=\sqrt{3}-1$.

$\Rightarrow M+m=\frac{5}{4}+\sqrt{3}\Rightarrow a=5$; $b=1$; $c=3$. Vậy $T=a+bc=5+1.3=8$.

Câu 10: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)=\left|x-1\right|+x^2-5x+3$ trên đoạn $\left[-2;4\right]$. Tính giá trị biểu thức $T=M+m$.

A. $T=18$. **B.** $T=19$. **C.** $T=20$. **D.** $T=2$.

Lời giải:

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

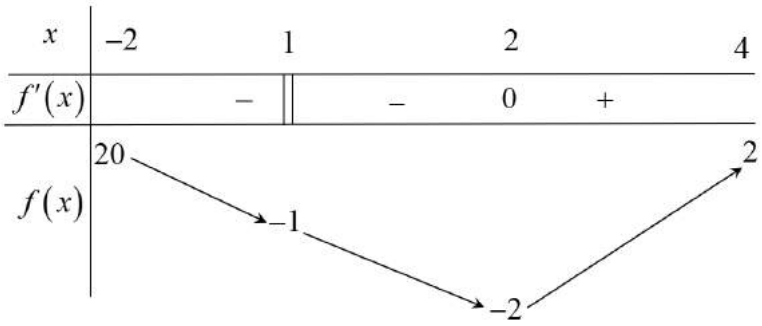
Ta có $f\left(x\right)=\left|x-1\right|+x^2-5x+3=\begin{cases}x^2-4x+2 & khi\ x\geq 1\\ x^2-6x+4 & khi\ x<1\end{cases}$.

Với $x\geq 1$: Ta có $f\left(x\right)=x^2-4x+2$. Đạo hàm: $f'\left(x\right)=2x-4$; $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=2$ (nhận).

Với $x<1$: Ta có $f\left(x\right)=x^2-6x+4$. Đạo hàm: $f'\left(x\right)=2x-6$; $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=3$ (loại).

$f\left(-2\right)=20$; $f\left(2\right)=-2$; $f\left(4\right)=2$.

Bảng biến thiên của hàm số $f\left(x\right)=\left|x-1\right|+x^2-5x+3$ trên đoạn $\left[-2;4\right]$.



Ta có $M=\max\limits_{x\in[-2;4]}f\left(x\right)=f\left(-2\right)=20$; $m=\min\limits_{x\in[-2;4]}f\left(x\right)=f\left(2\right)=-2$. Vậy $T=M+m=18$.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tích giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2-4x+3\right|+x^2-1$ trên $[-4;2]$ bằng

A. -200. **B.** 200. **C.** 50. **D.** 0.

Lời giải:

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y=\begin{cases}2x^2-4x+2 \text{ khi } x\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)\\ 4x-4 \quad \text{khi } x\in(1;3)\end{cases}\Rightarrow y'=\begin{cases}4x-4 \ khi \ x\in(-\infty;1]\cup[3;+\infty)\\ 4 \quad khi \ x\in(1;3)\end{cases}$.

Có $y'=0$ (Vô nghiệm).

Bảng biến thiên

x	-4		1		2
y'		$-$	‖	$+$	
y	50	↘	0	↗	4

Ta có: $\begin{cases}y(-4)=50\\ y(1)=0\\ y(2)=4\end{cases}$. Suy ra $\max\limits_{[-4;2]}y=50$ tại $x=-4$; $\min\limits_{[-4;2]}y=0$ tại $x=0$.

Vậy $\left(\max\limits_{[-4;2]}y\right).\left(\min\limits_{[-4;2]}y\right)=0$.

Câu 2: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2-3x+2\right|+\left|x+3\right|$ là 2^a. Tìm a.

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải:

Chọn B

Ta có $y=\left|x^2-3x+2\right|+\left|x+3\right|=\begin{cases}x^2-4x-1 \quad \text{khi } x<-3\\ x^2-2x+5 \quad \text{khi } -3\le x<1\\ -x^2+4x+1 \text{ khi } 1\le x<2\\ x^2-2x+5 \quad \text{khi } x\ge 2\end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	20	↘	4	↗	5	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số là $4\Rightarrow 2^a=4\Rightarrow a=2$.

Câu 3: Cho hàm số $y=\left|\left|3x-1\right|-1\right|+\left|x^2-2\right|$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[0;\frac{3}{2}\right]$. Giả sử $\frac{M}{m}=\frac{a}{b}$ ($\frac{a}{b}$ là phân số tối giản), biểu thức $T=a+b$ có giá trị bằng

A. 37. **B.** 40. **C.** 13. **D.** 20.

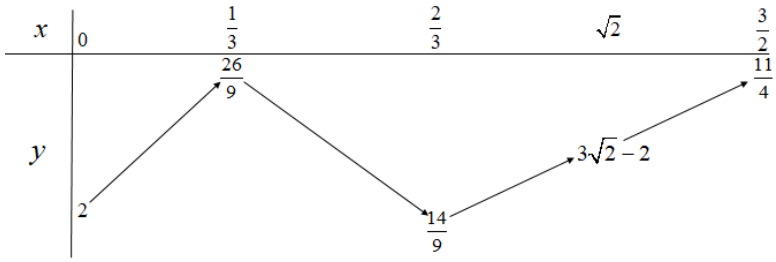
Lời giải:

Chọn D

Ta có $y=\begin{cases}|3x|+x^2-2 & \text{khi } x\le -\sqrt{2}\\ |3x|+2-x^2 & \text{khi } -\sqrt{2}<x\le \dfrac{1}{3}\\ |3x-2|+2-x^2 & \text{khi } \dfrac{1}{3}\le x<\sqrt{2}\\ |3x-2|+x^2-2 & \text{khi } x\ge \sqrt{2}\end{cases}$.

Xét trên đoạn $\left[0;\dfrac{3}{2}\right]$ ta có: $y=\begin{cases}-x^2+3x+2 & \text{khi } 0\le x\le \dfrac{1}{3}\\ -x^2-3x+4 & \text{khi } \dfrac{1}{3}<x\le \dfrac{2}{3}\\ -x^2+3x & \text{khi } \dfrac{2}{3}<x\le \sqrt{2}\\ x^2+3x-4 & \text{khi } \sqrt{2}<x\le \dfrac{3}{2}\end{cases}$.

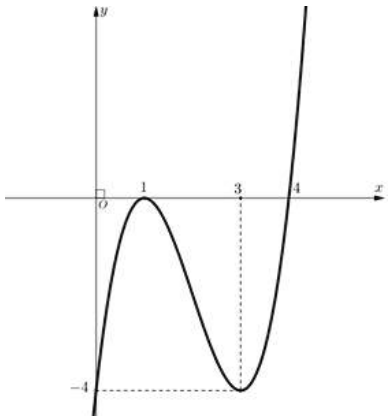
Bảng biến thiên của hàm số trên đoạn $\left[0;\dfrac{3}{2}\right]$



Từ bảng biến thiên của hàm số suy ra $M=\max\limits_{\left[0;\frac{3}{2}\right]} y=\dfrac{26}{9}; m=\min\limits_{\left[0;\frac{3}{2}\right]} y=\dfrac{14}{9}$.

Vậy $\dfrac{M}{m}=\dfrac{13}{7}$ hay $a=13; b=7\Rightarrow T=a+b=20$.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị (C) như hình vẽ sau



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=|f(x)|$ trên đoạn $[0;4]$. Khi đó biểu thức $M+2m$ có giá trị

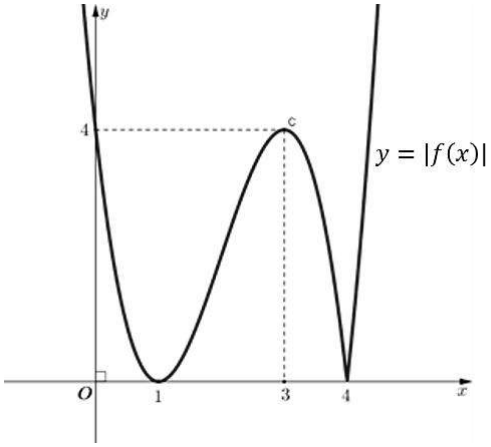
A. 4. **B.** 1. **C.** 8. **D.** 0.

Lời giải:

Chọn A

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta suy ra đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ như sau:

Giữ nguyên phần đồ thị trên trục hoành và phía trên trục hoành của (C) (ứng với $f(x)\ge 0$), lấy đối xứng qua trục hoành phần đồ thị phía dưới trục hoành của (C) (ứng với $f(x)<0$). Bỏ phần đồ thị phía dưới trục hoành của (C).



Dựa vào đồ thị ta suy ra $M=\max\limits_{[0;4]}|f(x)|=4$, đạt được khi $x=0$ hoặc $x=3$.

$m=\min\limits_{[0;4]}|f(x)|=0$, đạt được khi $x=1$ hoặc $x=4$. Vậy $M+2m=4$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=|f(|x|+1)-1|$ trên đoạn $[-2;2]$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

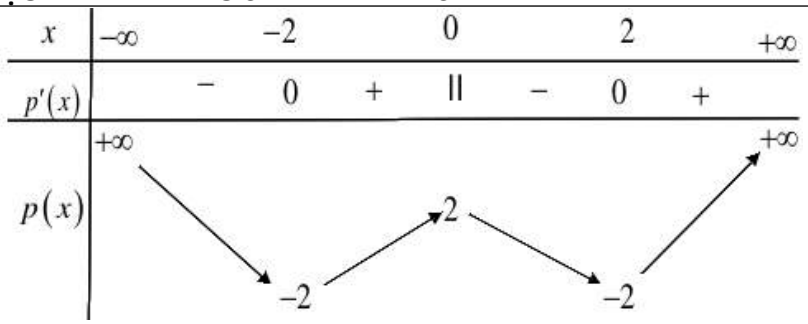
Lời giải:

Chọn C

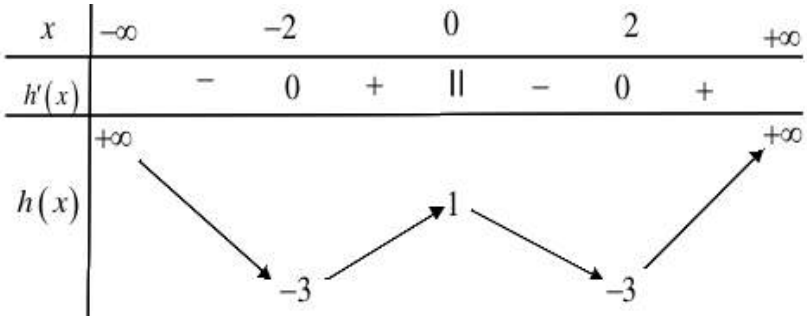
Xét hàm số $g(x)=f(x+1)$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

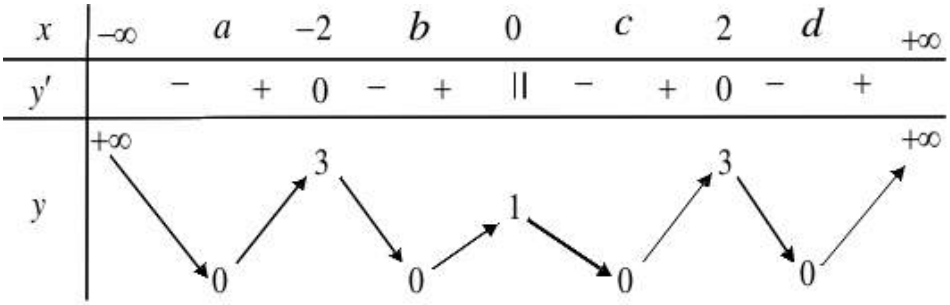
Khi đó hàm số $p(x)=g(|x|)=f(|x|+1)$ là hàm chẵn nên có bảng biến thiên như sau



Xét hàm số $h(x)=f\left(|x|+1\right)-1=g\left(|x|\right)-1=p(x)-1$. Ta có bảng biến thiên



Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y=\left|f\left(|x|+1\right)-1\right|=\left|h(x)\right|$



Từ bảng biến thiên suy ra giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|f\left(|x|+1\right)-1\right|$ trên đoạn $[-2;2]$ là 3 tại $x=2$.

Câu 6: Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\left|x^2-2x+m\right|$ trên $[-1;2]$ bằng 5.

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải:

Chọn C

Đặt $g(x)=x^2-2x+m$. Ta có: $g'(x)=2x-2 \Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow 2x-2=0\Leftrightarrow x=1.$

Ta có: $\begin{cases} g(-1)=m+3 \\ g(1)=m-1 \\ g(2)=m \end{cases}$. Suy ra $\begin{cases} \min\limits_{[-1;2]} g(x)=m-1 \\ \max\limits_{[-1;2]} g(x)=m+3 \end{cases}$.

Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $m-1>0\Leftrightarrow m>1$ suy ra $\min\limits_{[-1;2]} f(x)=m-1 \Leftrightarrow m-1=5\Leftrightarrow m=6$ (thoả mãn).

Trường hợp 2: $m+3<0\Leftrightarrow m<-3$ suy ra $\min\limits_{[-1;2]} f(x)=-m-3 \Leftrightarrow -m-3=5\Leftrightarrow m=-8$ (tm).

Trường hợp 3: $m-1\le 0\le m+3\Leftrightarrow -3\le m\le 1$ suy ra $\min\limits_{[-1;2]} f(x)=0$ mà theo bài $\min\limits_{[-1;2]} f(x)=5$ nên không có m thỏa mãn.

Vậy có hai giá trị của tham số m thỏa mãn.

Câu 7: Tính tích tất cả các số thực m để hàm số $y=\left|\frac{4}{3}x^3-6x^2+8x+m\right|$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng 18 là.

A. 432. **B.** -216. **C.** -432. **D.** 288.

Lời giải:

Chọn C

Xét hàm số $f(x)=\frac{4}{3}x^3-6x^2+8x+m$ liên tục trên đoạn $[0;3]$.

Ta có $f'(x)=4x^2-12x+8$; $f'(x)=0\Leftrightarrow 4x^2-12x+8=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in[0;3] \\ x=2\in[0;3] \end{array}\right.$.

Mặt khác: $f(0)=m$; $f(1)=\frac{10}{3}+m$; $f(2)=\frac{8}{3}+m$; $f(3)=6+m$.

Khi đó $\begin{cases} \max\limits_{[0;3]} f(x)=\max\{f(0);f(1);f(2);f(3)\}=f(3)=m+6 \\ \min\limits_{[0;3]} f(x)=\min\{f(0);f(1);f(2);f(3)\}=f(0)=m \end{cases}$.

Suy ra $\min\limits_{[0;3]} y=\min\{0;|m|;|m+6|\}$.

Trường hợp 1. $m>0$ suy ra $\min\limits_{[0;3]} y=m\Leftrightarrow m=18$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2. $m+6<0\Leftrightarrow m<-6$ suy ra $\min\limits_{[0;3]} y=-m-6\Leftrightarrow -m-6=18\Leftrightarrow m=-24$ (tm).

Trường hợp 3. $m(m+6)\le 0\Leftrightarrow -6\le m\le 0\Rightarrow \min\limits_{[0;3]} y=0$ (loại).

Kết luận: tích các số thực m thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $-24.18=-432$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)=\left|x^4-2x^2+m-1\right|$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;2]$ bằng 18. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -5. **B.** 4. **C.** -14. **D.** -10.

Lời giải:

Chọn A

Xét hàm số $g(x)=x^4-2x^2+m-1$ liên tục trên đoạn $[0;2]$ có $g'(x)=4x^3-4x$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\notin[0;2] \\ x=0\in[0;2] \\ x=1\in[0;2] \end{array}\right.$; $g(0)=m-1$, $g(1)=m-2$, $g(2)=m+7$.

$\Rightarrow \min\limits_{x\in[0;2]} g(x)=m-2$, $\max\limits_{x\in[0;2]} g(x)=m+7\Rightarrow \min\limits_{x\in[0;2]} f(x)=\min\{0,|m-2|,|m+7|\}$.

Trường hợp 1: $m>2$ suy ra $\min\limits_{x\in[0;2]} f(x)=m-2\Leftrightarrow m-2=18\Leftrightarrow m=20$ (nhận).

Trường hợp 2: $m+7<0\Leftrightarrow m<-7$ $\Rightarrow \min\limits_{x\in[0;2]} f(x)=-m-7\Leftrightarrow -m-7=18\Leftrightarrow m=-25$ (nhận).

Trường hợp 3: $(m-2)(m+7)\le 0\Leftrightarrow -7\le m\le 2\Rightarrow \min\limits_{x\in[0;2]} f(x)=0$ (loại).

Suy ra $m \in \{20; -25\}$. Vậy tổng tất cả các phần tử của S bằng -5.

Câu 9: Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2x-m}{1-x}$. Gọi S là tập hợp tất các giá trị của m để $\min\limits_{[-2;0]} |f(x)| = 2$.Tổng các phần tử của tập S là

A. 2. **B.** -8. **C.** -5. **D.** 3.

Lời giải:

Chọn B

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Với $m = 2$. Ta có $f(x) = \dfrac{2x-2}{1-x} = -2$ nên $\min\limits_{[-2;0]} |f(x)| = 2$. Vậy $m = 2$ (nhận).

Với $m \neq 2$. Khi đó, $f'(x) = \dfrac{2-m}{(1-x)^2}, \forall x \neq 1$.

Ta có $f(-2) = \dfrac{-m-4}{3}$, $f(0) = -m$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - m \Leftrightarrow x = \dfrac{m}{2}$. Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại một điểm có hoành độ thuộc $[-2; 0]$ tức là $-2 \le \dfrac{m}{2} \le 0 \Leftrightarrow -4 \le m \le 0$. Khi đó $\min\limits_{[-2;0]} |f(x)| = 0$ (loại).

Trường hợp 2: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không cắt trục hoành hoặc cắt trục hoành tại một điểm có hoành độ nằm ngoài đoạn $[-2; 0]$, tức là $\left[\begin{array}{l} \dfrac{m}{2} < -2 \\ \dfrac{m}{2} > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -4 \\ m > 0 \end{array}\right.$ (*).

Khi đó: $\min\limits_{[-2;0]} |f(x)| = \min\{|f(-2)|; |f(0)|\} = \min\left\{\left|\dfrac{-m-4}{3}\right|; |-m|\right\} = \min\left\{\left|\dfrac{m+4}{3}\right|; |m|\right\}$.

Nếu $\left|\dfrac{m+4}{3}\right| \le |m| \Leftrightarrow |m+4| \le 3|m| \Leftrightarrow (m+4)^2 \le (3m)^2 \Leftrightarrow (4-2m)(4m+4) \le 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 2 \\ m \le -1 \end{array}\right.$ (**) thì $\min\limits_{[-2;0]} |f(x)| = \left|\dfrac{m+4}{3}\right|$.

Ta có $\left|\dfrac{m+4}{3}\right| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+4 = 6 \\ m+4 = -6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \text{ (loai, } m \neq 2) \\ m = -10 \text{ (nhan)} \end{array}\right.$ (do điều kiện (*) và (**)).

Nếu $\left|\dfrac{m+4}{3}\right| > |m| \Leftrightarrow -1 < m < 2$ thì $\min\limits_{[-2;0]} |f(x)| = |m|$.

Ta có $|m| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \text{ (loai)} \\ m = -2 \text{ (loai)} \end{array}\right.$. Suy ra $S = \{2; -10\}$. Vậy tổng các phần tử của S là -8.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2}{x-1} + m$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp các giá trị của m sao cho $\min\limits_{[2;3]} |f(x)| = 5$. Số phần tử của S là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải:

Chọn B

Hàm số $y=f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}+m$ liên tục trên đoạn $[2;3]$ có $f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$.

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$; $x=0,x=2\notin(2;3)$ và $f(2)=m+4$, $f(3)=m+\dfrac{9}{2}$.

Nếu $f(2).f(3)\le 0\Leftrightarrow -\dfrac{9}{2}\le m\le -4$ thì $\min\limits_{[2;3]}|f(x)|=0$. Trường hợp này không thoả yêu cầu bài toán.

Ta xét trường hợp $f(2).f(3)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-\dfrac{9}{2}\\m>-4\end{array}\right.$.

Khi đó $\min\limits_{[2;3]}|f(x)|=\min\{|f(2)|;|f(3)|\}=\min\left\{|m+4|;\left|m+\dfrac{9}{2}\right|\right\}$.

Trường hợp 1: $\min\limits_{[2;3]}|f(x)|=|m+4|=5\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}|m+4|=5\\\left|m+\dfrac{9}{2}\right|\ge 5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-9\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}m\le -\dfrac{19}{2}\\m\ge\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow m=1$(thoả mãn).

Trường hợp 2: $\min\limits_{[2;3]}|f(x)|=\left|m+\dfrac{9}{2}\right|=5\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left|m+\dfrac{9}{2}\right|=5\\|m+4|\ge 5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{1}{2}\\m=-\dfrac{19}{2}\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}m\le -9\\m\ge 1\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow m=-\dfrac{19}{2}$ (thoả mãn).

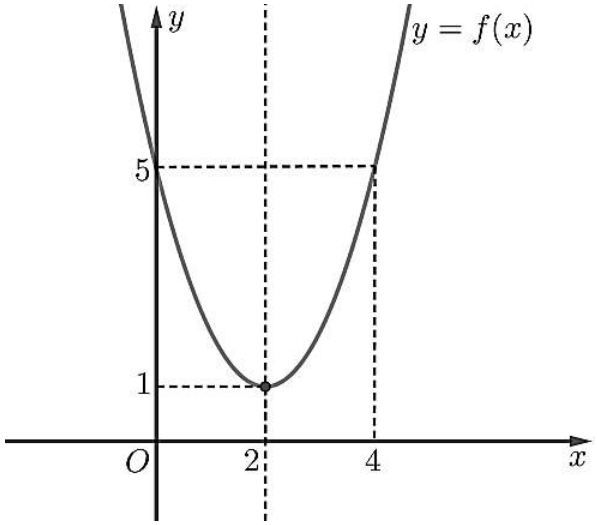
Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=|f(x)+m|$ trên đoạn $[0;4]$ bằng 9.

A. -10. **B.** -6. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải:

Chọn B



Từ đồ thị hàm số $y=f(x)=ax^2+bx+c$ ta có đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x=2$ là trục đối xứng, mà $f(0)=5\Rightarrow f(4)=5$. Suy ra: $1\le f(x)\le 5, \forall x\in[0;4]$.

Xét hàm số $g(x)=|f(x)+m|$, $\forall x\in[0;4]$.

Ta có: $\max\limits_{[0;4]} g(x)=\max\{|m+1|;|m+5|\}$.

Trường hợp 1: $\begin{cases}|m+1|\ge|m+5|\\ \max\limits_{[0;4]} g(x)=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le -3\\ |m+1|=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le -3\\ \left[\begin{array}{l}m=8\\ m=-10\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m=-10$.

Trường hợp 2: $\begin{cases}|m+1|<|m+5|\\ \max\limits_{[0;4]} g(x)=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-3\\ |m+5|=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-3\\ \left[\begin{array}{l}m=4\\ m=-14\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m=4$.

Vậy tổng tất cả giá trị nguyên của m là: $-10+4=-6$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=|f(\sin x+1)+m|$ bằng 4. Tổng các phần tử của S bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 6.

Lời giải:

Chọn C

Đặt $t=\sin x+1\left(t\in[0;2]\right)$, khi đó $y=|f(\sin x+1)+m|=|f(t)+m|=|t^3-3t+m|$.

Xét hàm số $u(t)=t^3-3t+m$ liên tục trên đoạn $[0;2]$ có $u'(t)=3t^2-3$.

$u'(t)=0\Leftrightarrow 3t^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\in[0;2]\\ t=-1\notin[0;2]\end{array}\right.$.

Ta có $u(0)=m; u(1)=m-2; u(2)=m+2\Rightarrow\max\limits_{[0;2]}u(x)=m+2$, $\min\limits_{[0;2]}u(x)=m-2$.

Khi đó $\max y=\max\{|m-2|;|m+2|\}$.

Trường hợp 1: $\begin{cases}|m-2|=4\\ |m-2|\ge|m+2|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=6\\ m=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow m=-2\\ m\le 0\end{cases}$.

Trường hợp 2: $\begin{cases}|m+2|=4\\ |m+2|\ge|m-2|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=2\\ m=-6\end{array}\right.\Leftrightarrow m=2\\ m\ge 0\end{cases}$.

Vậy $S\in\{-2;2\}\Rightarrow -2+2=0$.

Câu 13: Biết đồ thị hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đúng ba điểm chung với trục hoành và $f(1)=-1; f'(1)=0$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $|f(x)-m|\le 12$ nghiệm đúng $\forall x\in[0;2]$. Số phần tử của S là

A. 10. **B.** 16. **C.** 11. **D.** 0.

Lời giải:

Chọn B

Đồ thị hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đúng ba điểm chung với trục hoành nên đồ thị hàm số tiếp xúc với trục hoành tại gốc toạ độ, suy ra $f(0)=0\Rightarrow c=0\,(I)$.

Ta có $f'(x)=4ax^3+2bx$.

Theo giả thiết $\begin{cases} f(1)=-1 \\ f'(1)=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a+b+c=-1 \\ 4a+2b=0 \end{cases}(II)$.

Từ (I) và (II) suy ra $a=1;b=-2;c=0\Rightarrow f(x)=x^4-2x^2$.

Xét hàm số $y=x^4-2x^2-m$ trên đoạn $[0;2]$.

Dễ thấy hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[0;2]$ và có $y'=0\Leftrightarrow 4x^3-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0\in[0;2] \\ x=1\in[0;2] \\ x=-1\notin[0;2] \end{array}\right.$.

Khi đó $y(0)=-m;\ y(1)=-m-1;\ y(2)=-m+8.\Rightarrow\begin{cases}\max\limits_{[0;2]} y=-m+8 \\ \min\limits_{[0;2]} y=-m-1\end{cases}$.

Theo bài ra

$$\left|x^4-2x^2-m\right|\le 12,\forall x\in[0;2]\Leftrightarrow\max\left\{\left|-m-1\right|;\left|-m+8\right|\right\}\le 12\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left|-m+8\right|\le 12\\ \left|-m+8\right|\ge\left|-m-1\right|\end{cases}\\ \begin{cases}\left|-m-1\right|\le 12\\ \left|-m-1\right|\ge\left|-m+8\right|\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-4\le m\le 20\\ m\le\dfrac{7}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}-13\le m\le 11\\ m\ge\dfrac{7}{2}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-4\le m\le\dfrac{7}{2}\\ \dfrac{7}{2}\le m\le 11\end{array}\right.\Leftrightarrow -4\le m\le 11$$

. Suy ra S có 11 phần tử.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x+2020}{x-m}$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m sao cho $\max\limits_{[0;2019]}\left|f(x)\right|=2020$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải:

Chọn A

Hàm số $f(x)$ xác định với mọi $x\ne m$.

Nếu $m=-2020$ thì $f(x)=1,\forall x\ne -2020$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nếu $m\ne -2020$ thì $f(x)$ đơn điệu trên mỗi khoảng $(-\infty;m)$ và $(m;+\infty)$ nên yêu cầu bài toán

$$\max_{[0;2019]}\left|f(x)\right|=2020\Leftrightarrow\begin{cases}m\notin[0;2019]\\ \max\left\{\left|f(0)\right|;\left|f(2019)\right|\right\}=2020\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\notin[0;2019]\\ \max\left\{\dfrac{2020}{|m|};\dfrac{4039}{|m-2019|}\right\}=2020\end{cases}.$$

Ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\begin{cases} m \notin [0;2019] \\ \dfrac{2020}{|m|} = 2020 \\ \dfrac{4039}{|m-2019|} \le 2020 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>2019 \end{array}\right. \\ m = \pm 1 \\ \dfrac{4039}{|m-2019|} \le 2020 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$

Trường hợp 2: $\begin{cases} m \notin [0;2019] \\ \dfrac{4039}{|m-2019|} = 2020 \\ \dfrac{2020}{|m|} \le 2020 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>2019 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{4082419}{2020} \approx 2021 \\ m = \dfrac{4074341}{2020} \approx 2017 \end{array}\right. \\ \dfrac{2020}{|m|} \le 2020 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{4082419}{2020} \approx 2021.$

Vậy có 2 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 15: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \left|\dfrac{x^2+2mx+4m}{x+2}\right|$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 3. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 1. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải:

Chọn B

Tập xác định $D = R \setminus \{-2\}$.

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{x^2+2mx+4m}{x+2}$ trên đoạn $[-1;1]$. Hàm số xác định và liên tục trên $[-1;1]$.

Ta có $g'(x) = \dfrac{x^2+4x}{(x+2)^2}$. $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2+4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-1;1] \\ x = -4 \notin [-1;1] \end{array}\right.$.

Ta có $g(0) = 2m$; $g(-1) = 2m+1$; $g(1) = 2m + \dfrac{1}{3}$.

$\Rightarrow \max\limits_{[-1;1]} g(x) = 2m+1$; $\min\limits_{[-1;1]} g(x) = 2m$.

Suy ra $\max\limits_{[-1;1]} f(x) = \max\{|2m+1|;|2m|\}$. Ta có $\max\limits_{[-1;1]} f(x) = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |2m+1| = 3 \\ |2m+1| \ge |2m| \end{cases} \\ \begin{cases} |2m| = 3 \\ |2m| \ge |2m+1| \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$.

Suy ra $S = \left\{1; -\dfrac{3}{2}\right\}$. Vậy tổng các phần tử thuộc tập S bằng $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 16: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x^2 - 7|$ trên đoạn $[0;4]$ là

A. 7. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 0.

Lời giải

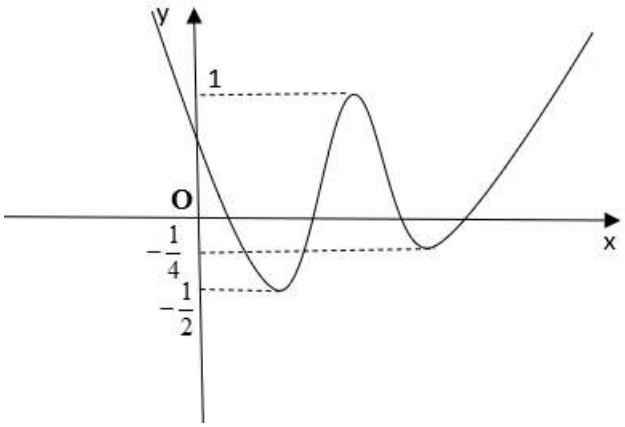
Chọn B

Đặt $f(x)=x^3-3x^2-7$ trên đoạn $[0;4]$.

$f'(x)=3x^2-6x$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

$f(0)=-7; f(2)=-11; f(4)=9\Rightarrow \max\limits_{[0;4]} y=\max\limits_{[0;4]}|f(x)|=max\{|f(0)|,|f(2)|,|f(4)|\}=11$.



Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau:

Cho $a=\left|f(x)-|f(x)|\right|$, $b=-a^2+a+\frac{3}{4}$ và $S=\frac{3}{8}\sqrt[3]{(b+1)^2\left[1+b^2.(2-b)^2\right]}-\frac{2}{1+b.\sqrt{2-b}}$.

Có giá trị lớn nhất của S bằng $\frac{m}{n}$ và $k=\frac{(m+n)^2}{|mn|}$. Khẳng định đúng là

A. $k=1$. **B.** $\frac{49}{6}$ **C.** $\frac{25}{4}$. **D.** $\frac{9}{4}$.

Lời giải:

Chọn D

Ta có: $f(x)-|f(x)|=\begin{cases}0 & khi\ f(x)\ge 0\\ 2f(x) & khi\ f(x)<0\end{cases}$

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)\Rightarrow a=\left|f(x)-|f(x)|\right|\in[0;1], \forall x\in\mathbb{R}$.

Có $b=-a^2+a+\frac{3}{4}\in\left[\frac{3}{4};1\right], \forall a\in[0;1]$. Xét $g(b)=(b+1)^2\left[1+b^2.(2-b)^2\right]$

$\Rightarrow g'(b)=2(b+1)\left[1+b^2.(2-b)^2\right]+(b+1)^2\left[2b.(2-b)^2-2b^2.(2-b)\right]$

$=2(b+1)\left[1+b^2.\left(4-4b+b^2\right)+(b+1).\left(4b-4b^2+b^3\right)-(b+1).\left(2b^2-b^3\right)\right]$

$=2(b+1)\left[1+4b^2-4b^3+b^4+4b^2-4b^3+b^4+4b-4b^2+b^3-2b^3+b^4-2b^2+b^3\right]$

$=2(b+1)\left[3b^4-8b^3+2b^2+4b+1\right]$

$=2(b+1)\left[b(b-2)\left(3b^2-2b-2\right)+1\right]$

Ta có $b\in\left[\frac{3}{4};1\right]\Rightarrow b-2<0;3b^2-2b-2<0\Rightarrow g'(b)>0,\forall b\in\left[\frac{3}{4};1\right]$

$\Rightarrow$Hàm số $g(b)=(b+1)^2\left[1+b^2.(2-b)^2\right]$ đồng biến trên $\left[\frac{3}{4};1\right]$

$\Rightarrow g(b)\le g(1)=8,\forall b\in\left[\frac{3}{4};1\right]$

Xét $h(b)=-\frac{2}{1+b.\sqrt{2-b}}\Rightarrow h'(b)=-\frac{4-3b}{\sqrt{2-b}\left(1+b.\sqrt{2-b}\right)^2}$

$\Rightarrow h'(b)>0,\forall b\in\left[\frac{3}{4};1\right]\Rightarrow h(b)\le h(1)=-1,\forall b\in\left[\frac{3}{4};1\right]$

$\Rightarrow S=\frac{3}{8}\sqrt[3]{(b+1)^2\left[1+b^2.(2-b)^2\right]}-\frac{2}{1+b.\sqrt{2-b}}\le\frac{3}{8}\sqrt[3]{8}-1=-\frac{1}{4}$. Đẳng thức xảy ra khi $b=1$.

$\Rightarrow$Giá trị lớn nhất của S bằng $-\frac{1}{4}$ và $k=\frac{9}{4}$.

Câu 18: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|x^3-3x+m\right|$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 16. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -16. **B.** 16. **C.** -12. **D.** -2.

Lời giải:

Chọn A

Ta có :

$\left|x^3-3x+m\right|\le 16\ \forall x\in[0;3]$

$\Leftrightarrow -16\le x^3-3x+m\le 16\ \forall x\in[0;3]$

$\Leftrightarrow -16-m\le x^3-3x\le 16-m\ \forall x\in[0;3]$

Xét hàm số $g(x)=x^3-3x$ với $x\in[0;3]$. Khi đó : $\begin{cases}\max\limits_{[0;3]}g(x)=18\\ \min\limits_{[0;3]}g(x)=-2\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}18\le 16-m\\ -2\ge -16-m\end{cases}\Leftrightarrow -14\le m\le -2$.

Dấu ‘ = ’ xảy ra khi $\left[\begin{array}{l}m=-14\\ m=-2\end{array}\right.$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng -16.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)=(x-1)^2\left(x+m^2\right)-\frac{3}{2}m$ (m là số thực). Gọi tổng các giá trị của m sao cho $\max\limits_{[1;2]}\left|f(x)\right|+\min\limits_{[1;2]}\left|f(x)\right|=\frac{9}{4}$ là $S=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$ (với $a,b\in\mathbb{N}$). Giá trị $\frac{b}{a}$ bằng

A. $\frac{5}{18}$. **B.** $\frac{9}{5}$. **C.** $\frac{36}{5}$. **D.** $\frac{18}{5}$.

Lời giải:

Chọn A

$f'(x)=(x-1)\left(3x+2m^2-1\right)$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow(x-1)\left(3x+2m^2-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\notin(1;2)\\ x=\dfrac{1-2m^2}{3}\notin(1;2)\,\forall m\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	1		2
$f'(x)$	0	+	
$f(x)$	$-\frac{3}{2}m$	↗	$m^2+2-\frac{3}{2}m$

Từ bảng biến thiên ta có: $\min\limits_{[1;2]} f(x)=-\dfrac{3}{2}m$ và $\max\limits_{[1;2]} f(x)=m^2-\dfrac{3}{2}m+2>0\,\forall m$.

Xét phương trình $\max\limits_{[1;2]}\left|f(x)\right|+\min\limits_{[1;2]}\left|f(x)\right|=\dfrac{9}{4}\,(1)$.

Trường hợp 1: $-\dfrac{3}{2}m>0\Leftrightarrow m<0$.

$$(1)\Leftrightarrow m^2-\frac{3}{2}m+2-\frac{3}{2}m=\frac{9}{4}\Leftrightarrow m^2-3m-\frac{1}{4}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{3+\sqrt{10}}{2}\\ m=\dfrac{3-\sqrt{10}}{2}\end{array}\right.$$

Do $m<0$ nên $m=\dfrac{3-\sqrt{10}}{2}$.

Trường hợp 2: $-\dfrac{3}{2}m\le 0\Leftrightarrow m\ge 0$.

$$(1)\Leftrightarrow\max\left|f(x)\right|=\frac{9}{4};\ \max\left|f(x)\right|=\max\left\{\frac{3m}{2};m^2-\frac{3m}{2}+2\right\}$$

$$\max\left|f(x)\right|=\frac{9}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{3m}{2}=\dfrac{9}{4}\\ \dfrac{3m}{2}\ge m^2-\dfrac{3m}{2}+2\end{cases}\Leftrightarrow m=\frac{3}{2}\,(\text{nhận})$$

$$\max\left|f(x)\right|=\frac{9}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-\dfrac{3m}{2}+2=\dfrac{9}{4}\\ \dfrac{3m}{2}\le m^2-\dfrac{3m}{2}+2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{3+\sqrt{13}}{4}\,(ktm)\\ m=\dfrac{3-\sqrt{13}}{4}\,(ktm)\end{array}\right.$$

Vậy $S=\dfrac{3-\sqrt{10}}{2}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{36}-\sqrt{10}\right)$ nên $a=36,b=10$ giá trị $\dfrac{b}{a}=\dfrac{10}{36}=\dfrac{5}{18}$.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)=\left|\dfrac{x+m}{x+1}\right|$. Số giá trị của m thỏa mãn $\min\limits_{[1;2]} f(x)+\max\limits_{[1;2]} f(x)=\dfrac{16}{3}$ là

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải:

Chọn D

Ta có: $\min\limits_{[1;2]} f(x)+\max\limits_{[1;2]} f(x)=\dfrac{16}{3}$ (1). Đặt $h(x)=\dfrac{x+m}{x+1}$ có đạo hàm: $h'(x)=\dfrac{1-m}{(x+1)^2}$.

Nếu $m=1$ thì $\min\limits_{[1;2]} f(x)=\max\limits_{[1;2]} f(x)=1$ (loại)

Nếu $m=1$ thì $h'(x)\neq 0,\forall x\neq 1$ và $h(1)=\dfrac{m+1}{2};h(2)=\dfrac{m+2}{3}$

Trường hợp 1: $h(1),h(2)\geq 0$ khi đó $m\geq -1$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \dfrac{m+1}{2}+\dfrac{m+2}{3}=\dfrac{16}{3}\Rightarrow m=5$ (TM)

Trường hợp 2: $h(1),h(2)\leq 0$ khi đó $m\leq -2$

Phương trình 1 (1) $\Leftrightarrow \dfrac{m+1}{2}+\dfrac{m+2}{3}=-\dfrac{16}{3}\Rightarrow m=\dfrac{-39}{5}$ (TM)

Trường hợp 3: $\begin{cases} h(1).h(2)<0 \\ \left|\dfrac{m+1}{2}\right|\leq\left|\dfrac{m+2}{3}\right| \end{cases}$ khi đó $-\dfrac{7}{5}<m<-1$

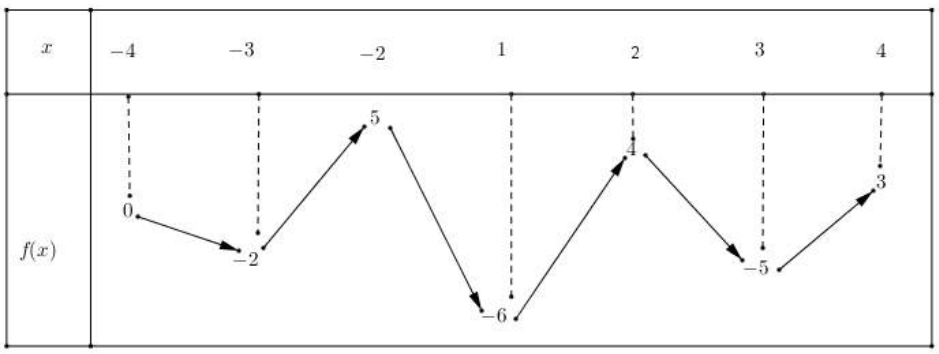
Phương trình (1) $\Leftrightarrow \dfrac{m+2}{3}=\dfrac{16}{3}\Rightarrow m=14$ (không TM)

Trường hợp 4: $\begin{cases} h(1).h(2)<0 \\ \left|\dfrac{m+2}{3}\right|<\left|\dfrac{m+1}{2}\right| \end{cases}$ khi đó $-2<m<\dfrac{-7}{5}$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow -\dfrac{m+1}{2}=\dfrac{16}{3}\Rightarrow m=-\dfrac{35}{3}$ (không TM)

Vậy $m=5,m=\dfrac{-39}{5}$ nên có 2 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 21: Cho hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-4;4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.



Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m thuộc đoạn $[-4;4]$ để hàm số $g(x)=\left|f\left(x^3+2x\right)+3f(m)\right|$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng 8?

A. 12. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải:

Chọn B

Cách 1:

Đặt $t = f\left(x^3+2x\right)$. Vì $x\in[-1;1]$ nên $t\in[-6;5]$. Khi đó, $g(x)=|t+n|$ với $n=3f(m)$.

Do đó, $\max\limits_{[-1;1]} g(x)=\max\{|n+5|;|n-6|\}=8\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|n+5|=8\\|n+5|\geq|n-6|\end{cases}\Leftrightarrow n=3\\\begin{cases}|n-6|=8\\|n-6|>|n+5|\end{cases}\Leftrightarrow n=-2\end{array}\right.$

Với $n=3\Leftrightarrow 3.f(m)=3\Leftrightarrow f(m)=1$, suy ra có 5 giá trị của m.

Với $n=-2\Leftrightarrow 3.f(m)=-2\Leftrightarrow f(m)=\dfrac{-2}{3}$, suy ra có 6 giá trị của m.

Vậy có 11 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Cách 2:

Vì $x\in[-1;1]$ nên $-3\leq x^3+3x\leq 3\Rightarrow -6\leq f\left(x^3+3x\right)\leq 5$..

Ta có : $\left|f\left(x^3+3x\right)+3f(m)\right|\leq 8,\forall x\in[-1;1]\Leftrightarrow -8\leq f\left(x^3+3x\right)+3f(m)\leq 8,\ \forall x\in[-1;1]$

$\Leftrightarrow\begin{cases}f\left(x^3+3x\right)\leq 8-3f(m)\\-8-3f(m)\leq f\left(x^3+3x\right)\end{cases}\forall x\in[-1;1]\Rightarrow\begin{cases}5\leq 8-3f(m)\\-8-3f(m)\leq -6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(m)\leq 1\\f(m)\geq -\dfrac{2}{3}\cdot\end{cases}$

Do đó $\max\left|f\left(x^3+3x\right)+3f(m)\right|=8\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(m)=1\\f(m)=-\dfrac{2}{3}\cdot\end{array}\right.$

Với $f(m)=1$, có 5 giá trị của m. Với $f(m)=\dfrac{-2}{3}$, có 6 giá trị của m.

Vậy có 11 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)=8x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ thỏa mãn $\left|f(x)\right|\leq 1,\forall x\in[-1;1]$. Tính $S=a^2+b^2+c^2+d^2$?

A. 60. **B.** 75. **C.** 70. **D.** 65.

Lời giải:

Chọn D

Ta có: $\begin{cases}\left|f(-1)\right|\leq 1\\\left|f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right|\leq 1\\\left|f(0)\right|\leq 1\\\left|f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right|\leq 1\\\left|f(1)\right|\leq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|8-a+b-c+d|\leq 1\\\left|2-\dfrac{a}{2\sqrt{2}}+\dfrac{b}{2}-\dfrac{c}{\sqrt{2}}+d\right|\leq 1\\|d|\leq 1\\\left|2+\dfrac{a}{2\sqrt{2}}+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{\sqrt{2}}+d\right|\leq 1\\|8+a+b+c+d|\leq 1\end{cases}$

$\left|4+b+2d\right| \le \left|2-\frac{a}{2\sqrt{2}}+\frac{b}{2}-\frac{c}{\sqrt{2}}+d\right| + \left|2+\frac{a}{2\sqrt{2}}+\frac{b}{2}+\frac{c}{\sqrt{2}}+d\right| \le 2 \Rightarrow \left|2+\frac{b}{2}+d\right| \le 1$

Tương tự: $\left|16+2b+2d\right| \le 2 \Rightarrow \left|8+b+d\right| \le 1$

Dấu "=" xảy ra kết hợp với $\left|d\right| \le 1$ khi: $\begin{cases} 2+\frac{b}{2}+d=-1 \\ 8+b+d=1 \\ d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=1 \\ b=-8 \end{cases}$

Khi đó: $\begin{cases} \left|-a-c+1\right| \le 1 \\ \left|-\frac{a}{2\sqrt{2}}-\frac{c}{\sqrt{2}}-1\right| \le 1 \\ \left|\frac{a}{2\sqrt{2}}+\frac{c}{\sqrt{2}}-1\right| \le 1 \\ \left|a+c+1\right| \le 1 \end{cases}$ dấu "=" xảy ra khi $a=c=0$

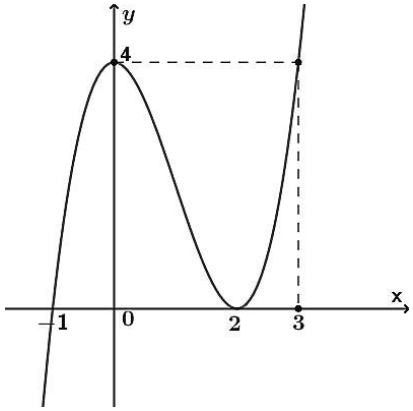
Vậy $f\left(x\right)=8x^4-8x^2+1$

Suy ra: $a^2+b^2+c^2+d^2=65$

Chú ý: Ta có thể suy luận như sau để được nhanh đáp số:

Vì $\cos\left(4t\right)=8\cos^4 t-8\cos^2 t+1$ nên nếu đặt $x=\cos t$ thì $\cos\left(4t\right)=8x^4-8x^2+1$ và như vậy hàm $f\left(x\right)=8x^4-8x^2+1$ thỏa mãn $\left|f\left(x\right)\right| \le 1, \forall x \in \left[-1;1\right]$

Câu 23: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ và hàm số $g\left(x\right)=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}+\left|4x-2\right|+\left|6-4x\right|}{\left|2x-1\right|+\left|2x-3\right|}$. Đặt $h\left(x\right)=f\left(g\left(x\right)\right)-f\left(3-2x+x^2\right)+f\left(2-\sqrt{4-m^2}\right)$. Gọi M là giá trị lớn nhất của $h\left(x\right)$. Giá trị lớn nhất của M thuộc khoảng nào sau đây:



A. $\left(0;2\right)$. **B.** $\left(2;4\right)$. **C.** $\left(4;5\right)$. **D.** $\left(5;10\right)$.

Lời giải:

Chọn D

Điều kiện: $x \in \left[0;2\right]$. Ta có: $g\left(x\right)=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}+\left|4x-2\right|+\left|6-4x\right|}{\left|2x-1\right|+\left|2x-3\right|}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}}{\left|2x-1\right|+\left|2x-3\right|}+2$.

Do $\left(\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\right)^2=2+2\sqrt{x\left(2-x\right)} \le 4$ vì $\sqrt{x\left(2-x\right)} \le 1, \forall x \in \left[0;2\right]$.

$\Rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{2-x} \le 2 \le |2x-1|+|3-2x| \Rightarrow 2 < g(x) \le 3 \Rightarrow f(g(x)) \le 4 \quad (1)$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=1$.

Ta có: $3-2x+x^2 \in [2;3], \forall x \in [0;2] \Rightarrow -f(3-2x+x^2) \le 0 \quad (2)$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=1$.

Ta có: $2-\sqrt{4-m^2} \in [0;2] \Rightarrow f\left(2-\sqrt{4-m^2}\right) \le 4 \quad (3)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m=0$.

Từ $(1),(2),(3) \Rightarrow h(x) \le 4-0+4=8 \Rightarrow \max h(x)=8 \Leftrightarrow x=1; m=0$.

Câu 24: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x^4-mx-4}{x+2}$, với m là tham số. Tìm tham số m để $\min\limits_{[-1;1]}|f(x)| > \dfrac{3}{4}$?

A. $m > \dfrac{1}{4}$. **B.** $m < \dfrac{1}{5}$. **C.** $m \in \mathbb{R}$. **D.** $\dfrac{1}{4} < m < \dfrac{5}{4}$.

Lời giải:

Chọn D

Ta có: $\min\limits_{[-1;1]}|f(x)| > \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow |f(x)| > \dfrac{3}{4}, \forall x \in [-1;1] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > \dfrac{3}{4}, \forall x \in [-1;1] \quad (1) \\ f(x) < -\dfrac{3}{4}, \forall x \in [-1;1] \quad (2) \end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $f(x) > \dfrac{3}{4}, \forall x \in [-1;1]$.

Nhận thấy $f(0) = -2 < \dfrac{3}{4}$. Nên trường hợp (1) không tìm được m.

Trường hợp 2: $f(x) < -\dfrac{3}{4}, \forall x \in [-1;1]$.

Ta có: $f(x) < -\dfrac{3}{4}, \forall x \in [-1;1]$.

$\Leftrightarrow \dfrac{2x^4-mx-4}{x+2} < -\dfrac{3}{4}, \forall x \in [-1;1] \Leftrightarrow 8x^4-4mx-16 < -3x-6, \forall x \in [-1;1]$

$\Leftrightarrow 4mx > 8x^4+3x-10, \forall x \in [-1;1] \Leftrightarrow \begin{cases} 0 > -10, \text{ khi } x=0 \\ 4m > 8x^3+3-\dfrac{10}{x}, \forall x \in (0;1] \quad (*) \\ 4m < 8x^3+3-\dfrac{10}{x}, \forall x \in [-1;0) \end{cases}$

Xét hàm số $g(x)=8x^3+3-\dfrac{10}{x}$ có $g'(x)=24x^2+\dfrac{10}{x^2}=\dfrac{24x^4+10}{x^2} > 0, \forall x \ne 0$.

Bảng biến thiên:

x	-1		0		1
$g'(x)$	$+$		$\|$	$+$	
$g(x)$	5	$\nearrow +\infty$	$\|$	$-\infty \nearrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên:

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}\forall m\in\mathbb{R}\ khi\ x=0\\ 4m>\max\limits_{(0;1]}g(x)\\ 4m<\min\limits_{[-1;0)}g(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4m>1\\ 4m<5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>\dfrac{1}{4}\\ m<\dfrac{5}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{1}{4}<m<\frac{5}{4}.$$

Câu 25: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x$ và $g(x)=\left|f(2-\cos x)+m\right|$ (m là tham số thực) gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $3\max\limits_{\mathbb{R}}g(x)+\min\limits_{\mathbb{R}}g(x)=100$. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. -16. **B.** 12. **C.** -32. **D.** -28.

Lời giải:

Chọn A

Đặt $t=2-\cos x,\ t\in[1;3]$. Ta có $f(t)=t^3-3t$; $g_1(t)=\left|t^3-3t+m\right|$

Xét hàm số $h(t)=t^3-3t+m$ trên đoạn $[1;3]$; $h'(t)=3t^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\ \ (tm)\\ t=-1\ (l)\end{array}\right.$.

$h(1)=m-2,\ h(3)=m+18.$

Trường hợp 1: $m>2\Rightarrow\begin{cases}\min\limits_{[1;3]}g_1(t)=m-2\\ \max\limits_{[1;3]}g_1(t)=m+18\end{cases}$

Từ giả thiết bài toán ta có : $3(m+18)+m-2=100\Leftrightarrow m=12$ (tm)

Trường hợp 2: $m<-18\Rightarrow\begin{cases}\min\limits_{[1;3]}g_1(t)=-m-18\\ \max\limits_{[1;3]}g_1(t)=-m+2\end{cases}$

Từ giả thiết bài toán ta có : $3(-m+2)-m-18=100\Leftrightarrow m=-28$ (tm)

Trường hợp 3: $-18\le m\le 2\Rightarrow\begin{cases}\min\limits_{[1;3]}g_1(t)=0\\ \max\limits_{[1;3]}g_1(t)=\max\{|m-2|;|m+18|\}\end{cases}$

Nếu $|m-2|\ge|m+18|\Leftrightarrow m\le-8.$

Từ giả thiết bài toán ta có : $3|m-2|=100\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{106}{3}\ (l)\\ m=\dfrac{-94}{3}\ (l)\end{array}\right.$ vì $-18\le m\le-8$

Nếu $|m+18|\ge|m-2|\Leftrightarrow m\ge-8.$

Từ giả thiết bài toán ta có : $3|m+18|=100\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{-154}{3}\ (l)\\ m=\dfrac{46}{3}\ (l)\end{array}\right.$ vì $-8\le m\le 2$

Vậy $S=\{12;-28\}\Rightarrow 12-28=-16$

Câu 26: Cho hàm số $y=\left|\frac{1}{3}x^3-(m+2)x^2+(3-3m^2)x+1\right|$. Tìm $m\in\left(-\frac{2}{3};0\right)$ để giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;1]$ bằng 4.

A. $m=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$. **B.** $m=\frac{1-\sqrt{3}}{4}$. **C.** $m=\frac{1-\sqrt{2}}{4}$. **D.** $m=\frac{1-\sqrt{5}}{6}$.

Lời giải:

Chọn D

Đặt $f(x)=\frac{x^3}{3}-(m+2)x^2+(3-3m^2)x+1$. Suy ra

$f'(x)=x^2-2(m+2)x+3-3m^2=(x+m-1)(x-3m-3)$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=1-m\\x_2=3+3m.\end{array}\right.$. Vì $m\in\left(-\frac{2}{3};0\right)$ nên $\left\{\begin{array}{l}x_1\in\left(1;\frac{5}{3}\right)\\x_2\in(1;3)\end{array}\right.\Rightarrow x_1,x_2\notin[-1;1]$.

Do đó hàm số $f(x)$ đơn điệu trên đoạn $[-1;1]$. Suy ra $\max\limits_{[-1;1]}|f(x)|=\max\limits_{[-1;1]}\{|f(-1)|;|f(1)|\}$.

$|f(1)|=\left|-3m^2-m+\frac{7}{3}\right|=-3m^2-m+\frac{7}{3}\Leftrightarrow|f(-1)|=\left|3m^2-m-\frac{13}{3}\right|=-3m^2+m+\frac{13}{3}$.

$$\max_{[-1;1]}y=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}|f(1)|=4\\|f(-1)|\le 4\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}|f(1)|\le 4\\|f(-1)|=4\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}-3m^2-m+\frac{7}{3}=4\\-3m^2+m+\frac{13}{3}\le 4\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}-3m^2-m+\frac{7}{3}\le 4\\-3m^2+m+\frac{13}{3}=4\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow m=\frac{1-\sqrt{5}}{6}.$$

Câu 27: Tìm số giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-6mx^2+12mx+m\right|$ trên đoạn $[1;2]$ bằng 18.

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải:

Chọn D

Đặt $f(x)=3x^4-4x^3-6mx^2+12mx+m$. Ta có: $f(1)=7m-1$ và $f(2)=m+16$.

Điều kiện cần: giả sử $\max\limits_{[1;2]}|f(x)|=18\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}|f(1)|=|7m-1|\le 18\\|f(2)|=|m+16|\le 18\end{array}\right.\Rightarrow-\frac{17}{7}\le m\le 2$.

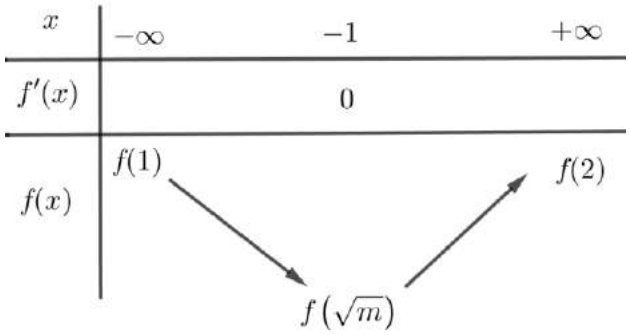
Vậy chỉ cần xét $m\in\left[-\frac{17}{7};2\right]$.

Điều kiện đủ: Ta có: $f'(x)=12(x-1)(x^2-m)$.

Trường hợp 1: $-\frac{17}{7} \le m \le 1$, khi đó: $f'(x) \ge 0, \forall x \in [1;2]$ suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[1;2]$, mà $f(2) = m+16 \in (0;17)$ nên yêu cầu bài toán tương đương $f(1) = 7m-1 = -18 \Leftrightarrow m = -\frac{17}{7}$.

Trường hợp 2: $1 < m \le 2$, khi đó: $f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = \sqrt{m} \in [1;2]$

Bảng biến thiên:



Với: $f(\sqrt{m}) = 3m^2 - 4m\sqrt{m} - 6m^2 + 12m\sqrt{m} + m = 3m\sqrt{m}(2-\sqrt{m}) + 2m\sqrt{m} + m > 0$.

Do đó YCBT $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(1) = 7m-1 = 18 \\ f(2) = m+16 = 18 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \frac{19}{7} \ (l) \\ m = 2 \end{array}\right.$.

Vậy có hai giá trị m thỏa mãn là: $m = -\frac{17}{7}, m = 2$.

Câu 28: Có bao nhiêu số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 - 2x + m| + 4x$ bằng -1.

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải:

Chọn D

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y \ge -1, \forall x \in \mathbb{R}$ và $y = -1$ có nghiệm.

Ta có $y \ge -1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |x^2 - 2x + m| + 4x \ge -1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |x^2 - 2x + m| \ge -4x - 1, \forall x \in \mathbb{R} (*)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x + m \le 4x + 1, \forall x \le -\frac{1}{4} \\ x^2 - 2x + m \ge -4x - 1, \forall x \le -\frac{1}{4} \end{array}\right.$ (vì $x > -\frac{1}{4}$ thì (*) luôn đúng)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -x^2 + 6x + 1, \forall x \le -\frac{1}{4} \\ m \ge -x^2 - 2x - 1, \forall x \le -\frac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow m \ge 0 \ (1).$

Ta có $y=-1$ có nghiệm $\Leftrightarrow \left|x^2-2x+m\right|=-4x-1$ có nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x+m=4x+1 \\ x^2-2x+m=-4x-1 \end{array}\right.$ có nghiệm $x\le -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-x^2+6x+1 \\ m=-x^2-2x-1 \end{array}\right.$ có nghiệm $x\le -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le -\frac{9}{16} \\ m\le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m\le 0$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $m=0$

Câu 29: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|x^3-12x+m\right|$ trên $[1;3]$ không vượt quá 20.

A. 33. **B.** 34. **C.** 35. **D.** 36.

Lời giải:

Chọn B

Đặt $g(x)=x^3-12x+m \Rightarrow g'(x)=3x^2-12$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\in(1;3) \\ x=-2\notin(1;3) \end{array}\right.$

Ta có: $g(1)=m-11$; $g(2)=m-16$; $g(3)=m-9 \Rightarrow \min\limits_{[1;3]} g(x)=m-16; \max\limits_{[1;3]} g(x)=m-9$

Do đó: $\max\limits_{[1;3]} f(x)=\max\left\{\left|m-9\right|;\left|m-16\right|\right\}$

$\left\{\begin{array}{l} \left|m-9\right|\le 20 \\ \left|m-16\right|\le 20 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -20\le m-9\le 20 \\ -20\le m-16\le 20 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -11\le m\le 29 \\ -4\le m\le 36 \end{array}\right. \Leftrightarrow -4\le m\le 29$.

Vậy có 34 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 30: Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|x^2+ax+b\right|$ trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của biểu thức $a+2b$ khi M nhỏ nhất là

A. 3. **B.** -4. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải:

Chọn B

M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|x^2+ax+b\right|$ trên đoạn $[-1;3]$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} M\ge f(-1) \\ M\ge f(3) \\ 2M\ge 2f(1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} M\ge \left|1-a+b\right| \\ M\ge \left|9+3a+b\right| \\ 2M\ge 2\left|1+a+b\right| \end{array}\right.$

$\Rightarrow 4M\ge \left|1-a+b\right|+\left|9+3a+b\right|+2\left|-1-a-b\right|\ge \left|1-a+b+9+3a+b-2-2a-2b\right|$

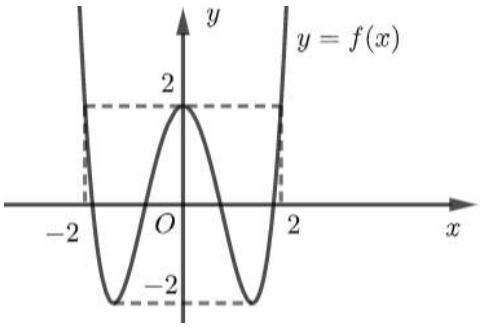
$\Rightarrow 4M\ge 8 \Rightarrow M\ge 2 \Rightarrow M_{\min}=2$.

Dấu bằng xảy ra khi: $\left\{\begin{array}{l} -a+b+1=2 \\ 3a+b+9=2 \\ -1-a-b=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-2 \\ b=-1 \end{array}\right.$.

Thử lại thấy thỏa $M=2$ là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;3]$.

Vậy $a+2b=-4$.

Câu 31: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0;20]$ sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=\left|\left|2f(x)+m+4\right|-f(x)-3\right|$ trên đoạn $[-2;2]$ không bé hơn 1?



A. 18. **B.** 19. **C.** 20. **D.** 21.

Lời giải:

Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy $f(x)\in[-2;2]$ với $x\in[-2;2]$.

Đặt $t=f(x)+2$ với $x\in[-2;2]\Rightarrow t\in[0;4]$ với $x\in[-2;2]$.

Xét $h(t)=\left|\left|2t+m\right|-t-1\right|=\left|2t+m-t-1\right|=\left|t+m-1\right|$ (vì $2t+m\ge 0$ do $t\in[0;4]$, $m\in[0;20]$).

Trường hợp 1: Xét $m-1\ge 0\Leftrightarrow m\ge 1\Rightarrow \underset{[-2;2]}{Min}\, g(x)=\underset{[0;4]}{Min}\, h(t)=m-1\ge 1\Rightarrow m\ge 2$ *(tm)*

Trường hợp 2: Xét $\begin{cases}m-1\le 0\\ m+3\ge 0\end{cases}\Rightarrow 0\le m\le 1$ (do $m\in[0;20]$)

$\Rightarrow \underset{x\in[-2;2]}{Min}\, g(x)=\underset{t\in[0;4]}{Min}\left|h(t)\right|=0\ge 1$ *(ktm).*

Trường hợp 3: Xét $m+3\le 0\Rightarrow m\le -3$ (không thõa mãn $m\in[0;20]$).

Ta có $\underset{[-2;2]}{Min}\, g(x)\ge 1\Leftrightarrow m-1\ge 1\Leftrightarrow m\ge 2$ mà $m\in\mathbb{Z}$, $m\in[0;20]$ nên $m\in\{2;3;...;20\}$.

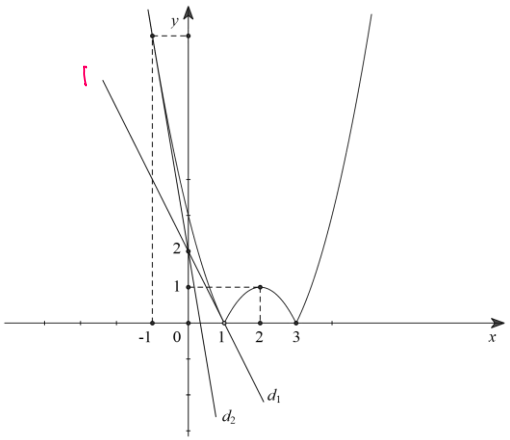
Suy ra có 19 giá trị nguyên m thỏa mãn đề bài.

Câu 32: Tìm tất cả các giá trị của a để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=4ax+\left|x^2-4x+3\right|$ lớn hơn 2?

A. $a>\dfrac{1}{2}$ **B.** $a<-1$ **C.** $\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{3}{2}$ **D.** $a<0$

Lời giải:

Chọn C



Để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=4ax+\left|x^2-4x+3\right|$ lớn hơn 2 thì:

$4ax+\left|x^2-4x+3\right|>2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$

Suy ra $\left|x^2-4x+3\right|>2-4ax$ với mọi $x\in\mathbb{R}$

Hàm số $y=\left|x^2-4x+3\right|$ có đồ thị (C)

Đường thẳng $d:\ y=2-4ax$ đi qua điểm cố định $(0;2)$.

Đường thẳng $d:\ y=2-4ax$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^2-4x+3\ (x\le 1)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2-4ax=x^2-4x+3\\-4a=2x-4\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}\Rightarrow d_1:y=2-2x\\x=-1\Rightarrow a=\dfrac{3}{2}\Rightarrow d_2:y=2-6x\end{array}\right.$$

Để $\left|x^2-4x+3\right|>2-4ax$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ thì $d:\ y=2-4ax$ nằm giữa $d_1,d_2\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{3}{2}$.

Câu 33: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f(x)=\left|\dfrac{2mx-2\sqrt{4x+8}}{x+2}\right|$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ là a thỏa mãn $0<a<1$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải:

Chọn D

Đặt $t=\sqrt{x+2}$ với $x\in[-1;1]\Rightarrow t\in\left[1;\sqrt{3}\right]$ và $x=t^2-2$.

Hàm số đã cho trở thành $g(t)=\left|\dfrac{2mt^2-4t-4m}{t^2}\right|$. Khi đó: $\min\limits_{[-1;1]}f(x)=\min\limits_{\left[1;\sqrt{3}\right]}g(t)$.

Xét hàm số $h(t)=\dfrac{2mt^2-4t-4m}{t^2}$ trên đoạn $\left[1;\sqrt{3}\right]$.

$h'(t)=\dfrac{4t^2+8mt}{t^4}>0,\forall t\in\left[1;\sqrt{3}\right]$ và $m>0$.

suy ra $\min\limits_{\left[1;\sqrt{3}\right]}h(t)=-2m-4$ và $\max\limits_{\left[1;\sqrt{3}\right]}h(t)=\dfrac{2m-4\sqrt{3}}{3}$

Điều kiện cần: Ta có: $\min\limits_{\left[1;\sqrt{3}\right]}g(t)=a\in(0;1)\Rightarrow h(1).h\left(\sqrt{3}\right)>0\Leftrightarrow(-2m-4)\left(\dfrac{2m-4\sqrt{3}}{3}\right)>0$

$\Leftrightarrow -2<m<2\sqrt{3}$.

Vì m nguyên dương nên $m\in\{1;2;3\}$.

Điều kiện đủ: $m\in\{1;2;3\}$

Khi đó: $\min\limits_{\left[1;\sqrt{3}\right]}g(t)=\min\left\{g(1);g\left(\sqrt{3}\right)\right\}=\min\left\{|2m+4|;\left|\dfrac{2m-4\sqrt{3}}{3}\right|\right\}$.

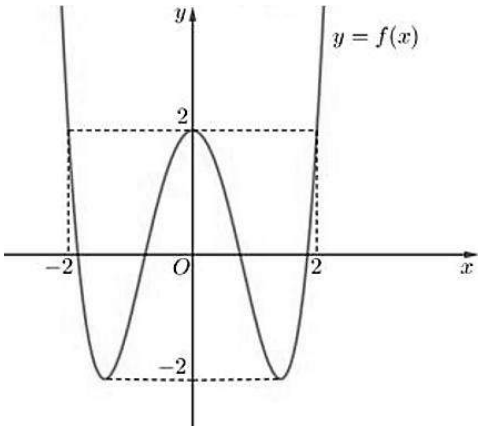
+ $m=1$: $\min\limits_{[1;\sqrt{3}]} g(t)=\min\left\{6;\dfrac{4\sqrt{3}-2}{3}\right\}=\dfrac{4\sqrt{3}-2}{3}>1$ (loại).

+ $m=2$: $\min\limits_{[1;\sqrt{3}]} g(t)=\min\left\{8;\dfrac{4\sqrt{3}-4}{3}\right\}=\dfrac{4\sqrt{3}-4}{3}\in(0;1)$ (nhận).

+ $m=3$: $\min\limits_{[1;\sqrt{3}]} g(t)=\min\left\{10;\dfrac{4\sqrt{3}-6}{3}\right\}=\dfrac{4\sqrt{3}-6}{3}\in(0;1)$ (nhận).

Vậy $m\in\{2;3\}$ nên có 2 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 34: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[1;20]$ sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=|2f(x)+m+4|+|f(x)+3m-2|$ trên đoạn $[-2;2]$ không bé hơn 2. Tổng tất cả các phần tử của S bằng:



A. 207. **B.** 209. **C.** 210. **D.** 212.

Lời giải:

Chọn C

Với $m\in\mathbb{N}^*$, $m\le 20$, ta có $x\in[-2;2]\Rightarrow t=f(x)\in[-2;2]$.

Khi đó $h(t)=|2t+m+4|+|t+3m-2|-2\ge 0,\forall t\in[-2;2]$

$\Rightarrow h(t)=2t+m+2+|t+3m-2|\ge 0,\forall t\in[-2;2]$

Trường hợp 1: $t\ge 2-3m\Rightarrow h(t)=3t+4m$

$$\begin{cases}2-3m\in[-2;2]\\ \min\limits_{[-2;2]}h(t)=h(2-3m)=6-5m\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 0\le m\le\frac{6}{5}\Rightarrow m=1$$

$$\begin{cases}2-3m\le -2\\ \min\limits_{[-2;2]}h(t)=h(-2)=4m-6\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow m\ge\frac{3}{2}\Rightarrow m\in\{2;3;...;20\}\Rightarrow m\in\{1;2;...;20\}$$

Trường hợp 2: $t<2-3m$ không cần xét nữa vì đã lấy tất cả các giá trị m nguyên thuộc đoạn cho trong đề bài.

Vậy tổng các phần tử của S là $1+2+....+20=\dfrac{(1+20)20}{2}=210$.

Câu 35: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2-5x+4\right|+mx$ lớn hơn 1. Số phần tử của S là:

A. 7. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 3.

Lời giải:

Chọn A

Ta có $y=\left|x^2-5x+4\right|+mx=\begin{cases}x^2-(5-m)x+4, & x\in(-\infty;1]\cup[4;+\infty)\\ -x^2+(5+m)x+4, & x\in[1,4]\end{cases}$

Trường hợp 1: $0<m<3\Rightarrow 1<\dfrac{5-m}{2}<\dfrac{m+5}{2}<4$

Bảng biến thiên của hàm số đã cho

x	$-\infty$	1	$\dfrac{5-m}{2}$	$\dfrac{m+5}{2}$	4	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$ m	$\nearrow$	$\searrow$ $4m$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2-5x+4\right|+mx$ lớn hơn 1 thì $m>1$, kết hợp với điều kiện $m<3$ và m nguyên dương ta được $m=2$.

Trường hợp 2: $m\ge 3\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{m+5}{2}\ge 4\\ \dfrac{5-m}{2}\le 1\end{cases}$

Bảng biến thiên của hàm số đã cho

x	$-\infty$	$\dfrac{5-m}{2}$	1	4	$\dfrac{m+5}{2}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$ $\dfrac{-m^2+10m-9}{4}$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2-5x+4\right|+mx$ lớn hơn 1 thì $\dfrac{-m^2+10m-9}{4}>1\Leftrightarrow -m^2+10m-9>4\Leftrightarrow m^2-10m+13<0\Leftrightarrow 5-2\sqrt{3}<m<5+2\sqrt{3}$. Kết hợp với điều kiện $m\ge 3$ và m nguyên dương ta được $m\in\{3;4;5;6;7;8\}$.

Gộp hai trường hợp ta được tập các giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán $S=\{2;3;4;5;6;7;8\}$.

Câu 36: Đặt $M=max\left|\sqrt{4x-x^2}-mx\right|$. Giá trị nhỏ nhất của M là

A. 1. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** 2.

Lời giải:

Chọn B

Ta có: $\left|\sqrt{4x-x^2}-mx\right|\le M, \forall x\in[0;4]$ và $M\ge 0$

Với $x=0$ thỏa mãn.

Với $x\in(0;4]$ ta có:

$$-M\le\sqrt{4x-x^2}-mx\le M\Leftrightarrow\begin{cases}m\le\sqrt{\dfrac{4}{x}-1}+\dfrac{M}{x}=g(x)\\ m\ge\sqrt{\dfrac{4}{x}-1}-\dfrac{M}{x}=h(x)\end{cases},\forall x\in(0;4]$$

Ta có $g(x)$ nghịch biến trên $(0;4]$ nên: $m\le\min\limits_{(0;4]}g(x)=g(4)=\dfrac{M}{4}$

Ta có $h'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{4M^2}{4+M^2}<4\Rightarrow \text{Max}\,h(x)=\dfrac{4-M^2}{4M}$

Vậy: $\dfrac{4-M^2}{4M}\le m\le\dfrac{M}{4}\Leftrightarrow M^2\ge 2\Leftrightarrow M\ge\sqrt{2}\Rightarrow M_{Min}=\sqrt{2}$

Câu 37: Cho hàm số $f(x)=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn. $[-1;3]$. Giá trị nhỏ nhất của M bằng

A. $\dfrac{57}{2}$. **B.** $\dfrac{59}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** 16.

Lời giải

Chọn B

Đặt $g(x)=3x^4-4x^3-12x^2+m$ trên $[-1;3]$.

Ta có: $g'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x\left(x^2-x-2\right)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\in[-1;3]\\ x=0\in[-1;3]\\ x=2\in[-1;3]\end{cases}$$

$g(-1)=m-5;\ g(0)=m;\ g(2)=m-32;\ g(3)=m+27$

Thấy: $m-32<m-5<m<m+27,\forall m\in\mathbb{R}$. Vậy $\max\limits_{[-1;3]}=\max\left\{\left|m-32\right|;\left|m+27\right|\right\}$.

TH1: $\left|m+27\right|\le\left|m-32\right|\Leftrightarrow m\le\dfrac{5}{2}$. Khi đó $M=\left|m-32\right|\ge\dfrac{59}{2},\forall m\le\dfrac{5}{2}\Rightarrow\min M=\dfrac{59}{2}$.

TH2: $\left|m+27\right|\ge\left|m-32\right|\Leftrightarrow m\ge\dfrac{5}{2}$. Khi đó $M=\left|m+27\right|\ge\dfrac{59}{2},\forall m\ge\dfrac{5}{2}\Rightarrow\min M=\dfrac{59}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $\dfrac{59}{2}$.

Câu 38: Cho biết hàm số $y=f(x)=\left|x^2-4x-1+m\right|$ có giá trị lớn nhất bằng 3 khi $x\in[0;3]$. Số các giá trị của tham số m thỏa mãn là

A. $x=2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=3$. **D.** $x=4$.

Lời giải

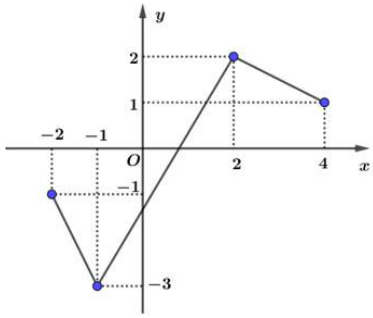
Chọn D

Ta xét $g(x)=x^2-4x-1+m$ có $g'(x)=\left(x^2-4x-1+m\right)'=2x-4=0\Leftrightarrow x=2$

Nên $\underset{[0;3]}{Max}\, f(x)=Max\{|m-1|;|m-5|;|m-4|\}$

Mà $m-1>m-4>m-5$ suy ra $\left[\begin{array}{l}\underset{[0;3]}{Max}\, f(x)=|m-1|\\ \underset{[0;3]}{Max}\, f(x)=|m-5|\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|m-1|=3\\ |m-5|=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=4\\ m=-2\\ m=8\\ m=2\end{array}\right.$

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-2;4]$ như hình vẽ.



Giá trị của $\max\limits_{[-2;\,4]}\left|f(x)\right|$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

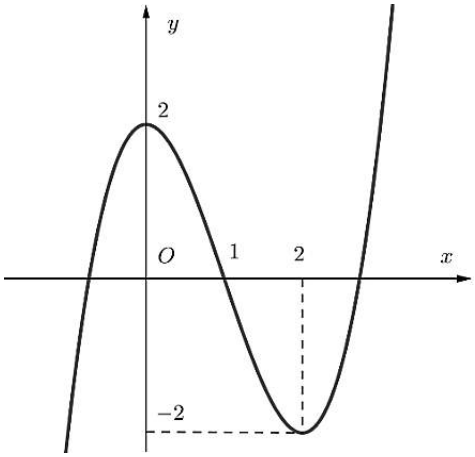
Chọn A

Ta có: $\max\limits_{[-2;\,4]}\left|f(x)\right|=\max\left\{\left|\max\limits_{[-2;\,4]}f(x)\right|;\left|\min\limits_{[-2;\,4]}f(x)\right|\right\}$.

Dựa vào đồ thị hàm số ta có: $\max\limits_{[-2;4]}f(x)=2$ và $\min\limits_{[-2;4]}f(x)=-3$.

Khi đó ta có: $\max\limits_{[-2;\,4]}\left|f(x)\right|=\max\{|2|;|-3|\}=3$.

Câu 40: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|\frac{3}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)\right|$ trên đoạn $[2;4]$. Khi đó $M+m$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Với mọi $x\in[2;4]\Rightarrow\frac{x}{2}\in[1;2]\Rightarrow f\left(\frac{x}{2}\right)\in[-2;0]\Rightarrow\frac{3}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)\in[-3;0]\Rightarrow\left|\frac{3}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)\right|\in[0;3]$

Suy ra $M=3;m=0$.

Câu 41: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x+1$. Với giá trị nào của tham số m thì giá trị lớn nhất của hàm số $h(x)=|f(x)+m|$ trên đoạn $[0;2]$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $m=-2$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Chọn B

Xét $g(x)=f(x)+m$ trên $[0;2]$

$g'(x)=f'(x)=3x^2-3;\ g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in[0;2]\\x=-1\notin[0;2]\end{array}\right.$

Ta có: $g(0)=m+1, g(1)=m-1, g(2)=m+3$

Khi đó: $\max\limits_{[0;2]}g(x)=g(2)=m+3;\ \min\limits_{[0;2]}g(x)=g(1)=m-1$

Suy ra: $\max\limits_{[0;2]}h(x)=\max\{|m-1|;|m+3|\}$

TH1: $(m-1)+(m+3)\geq 0\Leftrightarrow m\geq -1$

$\max\limits_{[0;2]}h(x)=m+3\geq -1+3=2$. Dấu "=" xảy ra khi $m=-1$

TH2: $(m-1)+(m+3)\leq 0\Leftrightarrow m\leq -1$

$\max\limits_{[0;2]}h(x)=-m+1\geq -(-1)+1=2$. Dấu "=" xảy ra khi $m=-1$

Vậy $m=-1$ thỏa mãn đề bài.

Câu 42: Cho hàm số $f(x)=-x^3+3x$ và $g(x)=|f(2+\sin x)+m|$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để $\max\limits_{\vdots}g(x)+\min\limits_{\vdots}g(x)=50$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=2+\sin x\in[1;3]\Rightarrow g(t)=|t^3-3t-m|, t\in[1;3]\Rightarrow\max\limits_{[1;3]}g(t)+\min\limits_{[1;3]}g(t)=50$.

Xét hàm số: $y=t^3-3t-m\Rightarrow y'=3t^2-3\geq 0\ \forall t\in[1;3]$.

$y(1)=-m-2, y(3)=18-m\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\max\limits_{[1;3]}g(t)=\max\{|-m-2|;|18-m|\}\\\left[\begin{array}{l}\min\limits_{[1;3]}g(t)=\min\{|-m-2|;|18-m|\}\\\min\limits_{[1;3]}g(t)=0\end{array}\right.\end{array}\right.$.

TH1: Nếu $-m-2>0\Leftrightarrow m<-2$ thì

$$\begin{cases}\max\limits_{[1;3]} g(t)=|18-m|=18-m\\ \min\limits_{[1;3]} g(t)=|-2-m|=-m-2\end{cases}\Rightarrow -2-m+18-m=50\Leftrightarrow m=-17(t/m).$$

TH2: Nếu $18-m<0\Leftrightarrow m>18$ thì

$$\begin{cases}\min\limits_{[1;3]} g(t)=|18-m|=m-18\\ \max\limits_{[1;3]} g(t)=|-2-m|=m+2\end{cases}\Rightarrow m+2+m-18=50\Leftrightarrow m=33(t/m)$$

TH3: Nếu $(-m-2)(-m+18)\le 0\Leftrightarrow -2\le m\le 18$ thì $\begin{cases}\max\limits_{[1;3]} g(t)=\max\{|-m-2|;|18-m|\}\\ \min\limits_{[1;3]} g(t)=0\end{cases}$.

Nhận xét: $\max\limits_{[1;3]} g(t)=\max\{|-m-2|;|18-m|\}<50,\ \forall m\in[-2;18]\Rightarrow m\in\varnothing$.

Vậy $m\in\{-17;33\}$.

Câu 43: Cho hàm số $f(x)=|4x^4-ax^2+b|$, trong đó a,b là tham số thực. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng $\frac{1}{2}$. Tính $a+b$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 4. **C.** $\frac{7}{2}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=\frac{1}{2}$ nên $|4x^4-ax^2+b|\le\frac{1}{2},\forall x\in[-1;1]$.

Khi đó ta có: $\begin{cases}f(1)\le\frac{1}{2}\\ f(0)\le\frac{1}{2}\\ f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\le\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|4-a+b|\le\frac{1}{2}\\ |b|\le\frac{1}{2}\\ \left|4.\frac{1}{4}-a.\frac{1}{2}+b\right|\le\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|4-a+b|\le\frac{1}{2}\\ |b|\le\frac{1}{2}\\ |-2+a-2b|\le 1\end{cases}$.

Suy ra $|4-a+b+b-2+a-2b|\le|4-a+b|+|b|+|-2+a-2b|\le 2$

$\Leftrightarrow 2\le|4-a+b|+|b|+|-2+a-2b|\le 2$.

Dấu "=" xảy ra khi:

Trường hợp 1: $\begin{cases}4-a+b=\frac{1}{2}\\ b=\frac{1}{2}\\ -2+a-2b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\ b=\frac{1}{2}\end{cases}$.

Thử lại ta thấy giá trị lớn nhất của $f(x)=\left|4x^4-4x^2+\frac{1}{2}\right|$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng $\frac{1}{2}$.

Trường hợp 2: $\begin{cases} 4-a+b=-\dfrac{1}{2} \\ b=-\dfrac{1}{2} \\ -2+a-2b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=8 \\ b=\dfrac{7}{2} \\ b=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ (loại).

Vậy $a+b=\dfrac{9}{2}$.

Câu 44: Tính tổng tất cả các giá trị nguyên lớn hơn 6 của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2-(m+1)x+m\right|$ trên $[2;m-1]$ nhỏ hơn 2020.

A. 2043210. **B.** 2034201. **C.** 3421020 **D.** 3412020.

Lời giải:

Chọn A

Cách 1:

Xét hàm số $f(x)=x^2-(m+1)x+m$ liên tục trên $[2;m-1]$ với $m>6$.

Ta có: $f'(x)=2x-(m+1); f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{m+1}{2}\in[2;m-1]$.

Khi đó: $f(2)=2-m; f\left(\dfrac{m+1}{2}\right)=-\dfrac{(m-1)^2}{4}; f(m-1)=2-m.$

Vì $-\dfrac{(m-1)^2}{4}\le 2-m<0, \forall m>6$ nên

$\max\limits_{[2;m-1]} f(x)=\max\left\{f(2); f\left(\dfrac{m+1}{2}\right); f(m-1)\right\}=2-m;$

và $\min\limits_{[2;m-1]} f(x)=\min\left\{f(2); f\left(\dfrac{m+1}{2}\right); f(m-1)\right\}=-\dfrac{(m-1)^2}{4}$.

Do đó: $\min\limits_{[2;m-1]} y=\min\left\{|2-m|; \left|-\dfrac{(m-1)^2}{4}\right|\right\}=|2-m|$

Theo yêu cầu bài toán: $|2-m|<2020 \Leftrightarrow -2020<2-m<2020 \Leftrightarrow -2018<m<2022$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ và $m>6$ nên $m\in\{7;8;9;\cdots;2021\}$.

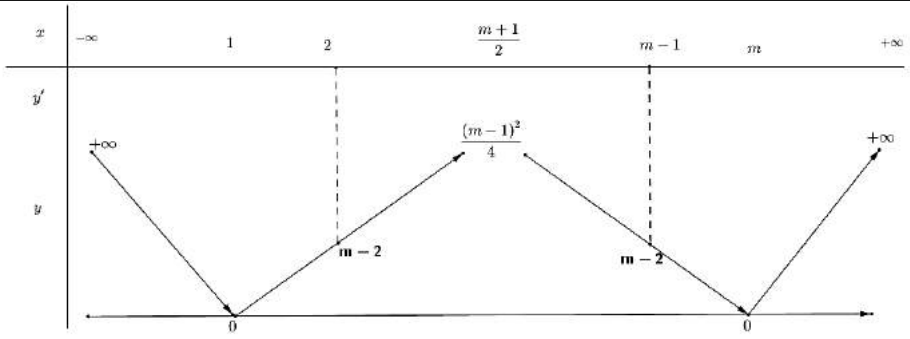
Vậy tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m là: $\sum\limits_{n=7}^{2021} n=\dfrac{(7+2021)2015}{2}=2043210$.

Cách 2:

Xét hàm số $f(x)=x^2-(m+1)x+m$ liên tục trên $[2;m-1]$ với $m>6$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-(m+1)x+m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=m \end{array}\right.$. Do $m>6$ nên ta có: $\begin{cases} \dfrac{m+1}{2}>2 \\ \dfrac{m+1}{2}<m-1 \end{cases}$.

$f(2)=2-m; f\left(\dfrac{m+1}{2}\right)=-\dfrac{(m-1)^2}{4}; f(m-1)=2-m.$



Từ bảng biến thiên suy ra: $\min\limits_{[2;m-1]}\left|f(x)\right| = m-2$

Theo bài ra ta có: $\min\limits_{[2;m-1]}\left|f(x)\right| < 2020 \Leftrightarrow m-2 < 2020 \Leftrightarrow m < 2022$.

Kết hợp với điều kiện $m > 6$ suy ra $m \in \{7;8;...;2021\}$.

Vậy tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m là: $\sum\limits_{n=7}^{2021} n = \dfrac{(7+2021)2015}{2} = 2043210$.

Câu 45: Cho hàm số $y = \left|x^3 - \dfrac{9}{2}x^2 + 6x - 3 + m\right|$. Tổng các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;3]$ không bé hơn 5.

A. 1. **B.** -1. **C.** 0. **D.** -7.

Lời giải:

Chọn D

Xét hàm số $f(x) = x^3 - \dfrac{9}{2}x^2 + 6x - 3 + m$ liên tục trên đoạn $[0;3]$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 9x + 6$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [0;3] \\ x = 2 \in [0;3] \end{array}\right.$.

$f(0) = -3 + m$; $f(1) = -\dfrac{1}{2} + m$; $f(2) = -1 + m$; $f(3) = \dfrac{3}{2} + m$.

Suy ra $\max\limits_{[0;3]} f(x) = \dfrac{3}{2} + m$; $\min\limits_{[0;3]} f(x) = -3 + m$.

Trường hợp 1: $\left(\dfrac{3}{2} + m\right)(-3 + m) \le 0$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của hàm số y trên đoạn $[0;3]$ là 0 (loại).

Trường hợp 2: $\left(\dfrac{3}{2} + m\right)(-3 + m) > 0$. Khi đó: $\min\limits_{[0;3]} y = \min\left\{\left|\dfrac{3}{2} + m\right|; \left|-3 + m\right|\right\}$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;3]$ không bé hơn 5

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left|\frac{3}{2}+m\right| \ge \left|-3+m\right| \\ \left|-3+m\right| \ge 5\end{cases} \\ \begin{cases}\left|\frac{3}{2}+m\right| \le \left|-3+m\right| \\ \left|\frac{3}{2}+m\right| \ge 5\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m \ge \frac{3}{4} \\ \left[\begin{array}{l}m \ge 8 \\ m \le -2\end{array}\right.\end{cases} \\ \begin{cases}m \le \frac{3}{4} \\ \left[\begin{array}{l}m \ge \frac{7}{2} \\ m \le -\frac{13}{2}\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m \ge 8 \\ m \le -\frac{13}{2}\end{array}\right.\cdot$$

Suy ra các giá trị $m \in [-10;10]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $S = \{-10;-9;-8;-7;8;9;10\}$.

Vậy tổng các giá trị m cần tìm là -7.

Câu 46: Cho hàm số $y = \left|\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 + m\right|$. Tính tổng tất cả các số nguyên m để $\max\limits_{[-1;2]} y \le 11$.

A. -19. **B.** -37. **C.** -30. **D.** -11.

Lời giải:

Chọn C

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 + m$ liên tục trên đoạn $[-1;2]$.

Ta có $f'(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 0 \in [-1;2] \\ x = 1 \in [-1;2] \\ x = 2 \in [-1;2]\end{array}\right.\cdot$$

$$f(-1) = \frac{9}{4} + m;\ f(0) = m;\ f(1) = \frac{1}{4} + m;\ f(2) = m.$$

Khi đó $\begin{cases}\max\limits_{[-1;2]} f(x) = \max\{f(-1); f(0); f(1); f(2)\} = f(-1) = m + \frac{9}{4} \\ \min\limits_{[-1;2]} f(x) = \min\{f(-1); f(0); f(1); f(2)\} = f(0) = f(2) = m\end{cases}$.

Vậy $\max\limits_{[0;3]} y = \max\left\{\left|m + \frac{9}{4}\right|, |m|\right\}$, theo yêu cầu bài toán $\max\limits_{[0;3]} y \le 11 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left|m + \frac{9}{4}\right| \le 11 \\ \left|m + \frac{9}{4}\right| \ge |m|\end{cases} \\ \begin{cases}|m| \le 11 \\ |m| \ge \left|m + \frac{9}{4}\right|\end{cases}\end{array}\right.$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-\dfrac{53}{4}\le m\le\dfrac{35}{4}\\ m\ge-\dfrac{9}{8}\end{cases}\\ \begin{cases}-11\le m\le 11\\ m\le-\dfrac{9}{8}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\dfrac{9}{8}\le m\le\dfrac{35}{4}\\ -11\le m\le-\dfrac{9}{8}\end{array}\right. \Leftrightarrow -11\le m\le\frac{35}{4}.$$

Vì m nguyên nên $m=\{-11;-10;...;8\}$.

Kết luận: tổng các số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $-11-10-9-...+8=-30$.

Câu 47: Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|-4\cos^2 x+2\sin x+m+4\right|$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ nhỏ hơn hoặc bằng 4?

A. 12. **B.** 14. **C.** 13. **D.** 15.

Lời giải:

Chọn D

Ta có: $y=\left|-4\cos^2 x+2\sin x+m+4\right|=\left|4\left(1-\cos^2 x\right)+2\sin x+m\right|=\left|4\sin^2 x+2\sin x+m\right|$.

Đặt $t=\sin x$, do $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ nên suy ra $t\in[0;1]$.

Ta tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|4t^2+2t+m\right|$ trên đoạn $[0;1]$.

Xét hàm số $f(t)=4t^2+2t+m$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, ta có:

$f'(t)=8t+2$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{1}{4}\notin[0;1]$.

$f(0)=m$; $f(1)=m+6$.

Trường hợp 1: Nếu $m\ge 0\Rightarrow \min\limits_{[0;1]} y=m$. Kết hợp với giả thiết ta có $0\le m\le 4$. (1)

Trường hợp 2: Nếu $m+6\le 0\Leftrightarrow m\le -6\Rightarrow \min\limits_{[0;1]} y=-m-6$. Kết hợp với giả thiết ta có $\begin{cases}-m-6\le 4\\ m\le -6\end{cases}\Leftrightarrow -10\le m\le -6$. (2)

Trường hợp 3: Nếu $m(m+6)<0\Leftrightarrow -6<m<0\Rightarrow \min\limits_{[0;1]} y=0\le 4$. Trường hợp này thỏa mãn. (3)

Từ $(1),(2)$ và (3) ta được $m\in[-10;4]$. Vì m là số nguyên nên $m\in\{-10,-9,-8,...,2,3,4\}$.

Vậy có 15 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 48: Cho hàm số $f(x)=\left|x^2-2mx+3\right|$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[1;2]$ không lớn hơn 3?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải:

Chọn A

Ta có giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[1;2]$ không lớn hơn 3, tức là $\max\limits_{[1;2]} f(x) \le 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2mx+3 \le 3, \forall x \in [1;2] \\ x^2-2mx+3 \ge -3, \forall x \in [1;2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m \ge x, \forall x \in [1;2] \\ 2m \le \dfrac{x^2+6}{x}, \forall x \in [1;2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m \ge \max\limits_{[1;2]}(x) \quad (1) \\ 2m \le \min\limits_{[1;2]}\left(\dfrac{x^2+6}{x}\right) \quad (2) \end{cases}.$$

$(1) \Leftrightarrow 2m \ge 2 \Leftrightarrow m \ge 1.$

Xét hàm $g(x) = \dfrac{x^2+6}{x} = x + \dfrac{6}{x}$ với $x \in [1;2]$ có $g'(x) = 1 - \dfrac{6}{x^2}$.

Suy ra: $g'(x) < 0, \forall x \in [1;2] \Rightarrow \min\limits_{[1;2]} g(x) = g(2) = 5$. Do đó $(2) \Leftrightarrow m \le \dfrac{5}{2}$.

Vậy $1 \le m \le \dfrac{5}{2}$, mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1;2\}$.

Câu 49: Cho hàm số $y = \left|x^3 - 3x^2 - 9x + m\right|$ (với m là tham số thực). Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để $\max\limits_{[-2;3]} y < 50$. Tổng các phần tử của M là

A. 0. **B.** 737. **C.** 759. **D.** -215.

Lời giải:

Chọn B

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + m$ liên tục trên đoạn $[-2;3]$. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$. Có $f(-2) = m-2;\ f(-1) = m+5;\ f(3) = m-27$.

Suy ra $\max\limits_{[-2;3]} f(x) = m+5$; $\min\limits_{[-2;3]} f(x) = m-27$.

Do đó $M = \max\limits_{[-2;3]} y = \max\left\{|m+5|;|m-27|\right\}$.

$$M < 50 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |m+5| \ge |m-27| \\ |m+5| < 50 \end{cases} \\ \begin{cases} |m+5| < |m-27| \\ |m-27| < 50 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2m-22 \ge 0 \\ -50 < m+5 < 50 \end{cases} \\ \begin{cases} 2m-22 < 0 \\ -50 < m-27 < 50 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \in [11;45) \\ m \in (-23;11) \end{array}\right. \Leftrightarrow m \in (-23;45).$$

Do đó $S = \{-22;-21;-20;...;-1;0;1;2;...;44\}$.

Vậy tổng các phần tử của M là 737.

Câu 50: Cho hàm số $y = \left|x^4 - 2x^3 + x^2 + a\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để $\max\limits_{[-1;2]} y \le 100$

.

A. 197. **B.** 196. **C.** 200. **D.** 201.

Lời giải:

Chọn A

Xét $u = x^4 - 2x^3 + x^2 + a$ liên tục trên đoạn $[-1;2]$ có $u' = 4x^3 - 6x^2 + 2x$.

Giải phương trình $u'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in[-1;2] \\ x=1\in[-1;2] \\ x=\dfrac{1}{2}\in[-1;2] \end{array}\right.$

Suy ra $\left\{\begin{array}{l} M=\max\limits_{[-1;\,2]} u=\max\left\{u(-1),u(0),u\left(\dfrac{1}{2}\right),u(1),u(2)\right\}=u(-1)=u(2)=a+4 \\ m=\min\limits_{[-1;\,2]} u=\min\left\{u(-1),u(0),u\left(\dfrac{1}{2}\right),u(1),u(2)\right\}=u(0)=u(1)=a \end{array}\right.$.

Vậy $\max\limits_{[-1;\,2]} y=\max\{|a+4|,|a|\}\le 100 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |a+4|\le|a|\le 100 \\ |a|\le|a+4|\le 100 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -100\le a\le -2 \\ -2\le a\le 96 \end{array}\right.$.

Vậy $a\in\{-100,-99,...,96\}$ có 197 số nguyên thỏa mãn.

Câu 51: Cho hàm số $y=|\sin x+\cos x+m|$, có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số có giá trị lớn nhất bé hơn 2.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải:

Chọn B

Xét hàm số $f(x)=\sin x+\cos x+m$, có tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $-\sqrt{2}+m\le\sin x+\cos x+m\le\sqrt{2}+m$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $-\sqrt{2}+m\le f(x)\le\sqrt{2}+m$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy: $\max\limits_{D} y=\left|m+\sqrt{2}\right|$ hoặc $\max\limits_{D} y=\left|m-\sqrt{2}\right|$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \left|m+\sqrt{2}\right|<2 \\ \left|m-\sqrt{2}\right|\le\left|m+\sqrt{2}\right| \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \left|m-\sqrt{2}\right|<2 \\ \left|m+\sqrt{2}\right|\le\left|m-\sqrt{2}\right| \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} -2-\sqrt{2}<m<2-\sqrt{2} \\ m\ge 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} -2+\sqrt{2}<m<2+\sqrt{2} \\ m\le 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0\le m<2-\sqrt{2} \\ -2+\sqrt{2}<m\le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow -2+\sqrt{2}<m<2-\sqrt{2}$.

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=0$. Vậy chỉ có một giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 52: Gọi M là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2+2x+m\right|$ trên đoạn $[-2;1]$. Với $m\in[-3;3]$, giá trị lớn nhất của M bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải:

Chọn B

Xét $f(x)=x^2+2x+m$ liên tục trên $[-2;1]$. Ta có: $f'(x)=2x+2$;

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1\in(-2;1)$; $f(-2)=m$; $f(1)=m+3$; $f(-1)=m-1$;

Trường hợp 1: $(m-1)(m+3)\le 0\Leftrightarrow -3\le m\le 1$, lúc đó $M=\min\limits_{[-2;1]} y=0$.

Trường hợp 2: $(m-1)(m+3)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-3 \\ m>1 \end{array}\right.$ (*).

Do đó: $M=\min\limits_{[-2;1]} y=\min\left\{|m-1|;|m+3|\right\}$.

Khi $|m-1|\le|m+3| \Leftrightarrow (m-1)^2\le(m+3)^2 \Leftrightarrow m\ge -1$, kết hợp với điều kiện (*) ta được $m>1$, lúc đó: $M=\min\limits_{[-2;1]} y=|m-1|$.

Khi $|m-1|>|m+3| \Leftrightarrow m<-1$, kết hợp với điều kiện (*) ta được $m<-3$, lúc đó:

$M=\min\limits_{[-2;1]} y=|m+3|$.

Xét các giá trị $m\in[-3;3]$

$$M=\begin{cases} 0 & \text{khi } -3\le m\le 1 \\ |m-1| & \text{khi } 1<m\le 3 \end{cases}=\begin{cases} 0 & \text{khi } -3\le m\le 1 \\ m-1 & \text{khi } 1<m\le 3 \end{cases}.$$

Dễ dàng nhận thấy M đạt giá trị lớn nhất bằng 2 khi $m=3$.

Câu 53: Gọi M là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^3+3x^2+m-1\right|$ trên đoạn $[-1;1]$. Với $m\in[-4;3]$, giá trị lớn nhất của M bằng

B. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải:

Chọn B

Xét $f(x)=x^3+3x^2+m-1$ trên $[-1;1]$.

Ta có: $f'(x)=3x^2+6x$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in[-1;1] \\ x=-2\notin[-1;1] \end{array}\right.$.

$f(-1)=m+1$; $f(0)=m-1$; $f(1)=m+3$;

Trường hợp 1: $(m-1)(m+3)\le 0 \Leftrightarrow -3\le m\le 1$, $M=\min\limits_{[-1;1]} y=0$.

Trường hợp 2: $(m-1)(m+3)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-3 \end{array}\right.$ (*).

Do đó: $M=\min\limits_{[-1;1]} y=\min\left\{|m-1|;|m+3|\right\}$.

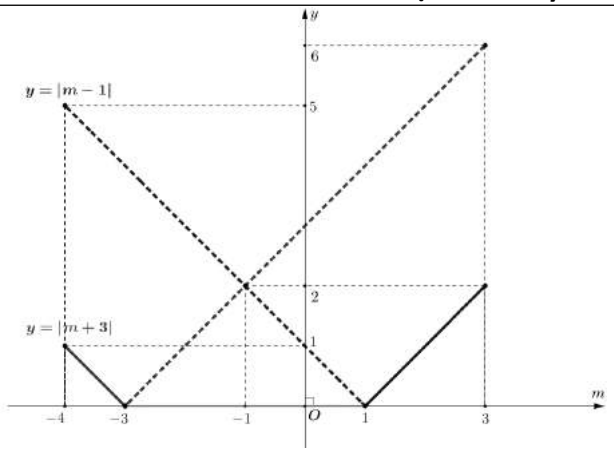
Khi $|m-1|\le|m+3| \Leftrightarrow (m-1)^2\le(m+3)^2 \Leftrightarrow m\ge -1$, kết hợp với điều kiện (*) ta được $m>1$, lúc đó: $M=\min\limits_{[-1;1]} y=|m-1|$.

Khi $|m-1|>|m+3| \Leftrightarrow m<-1$, kết hợp với điều kiện (*) ta được $m<-3$, lúc đó:

$M=\min\limits_{[-1;1]} y=|m+3|$.

Xét các giá trị $m\in[-4;3]$:

$$M=\begin{cases} |m+3| & khi\ -4\le m<-3 \\ 0 & khi\ -3\le m\le 1 \\ |m-1| & khi\ 1<m\le 3 \end{cases}$$



Dựa vào đồ thị, M đạt giá trị lớn nhất bằng 2 khi $m=3$.

Câu 54: Cho hàm số $f(x)=\left|x^4-4x^3+4x^2+m\right|$. Khi m thuộc $[-3;3]$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;2]$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải:

Chọn B

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Xét $u(x)=x^4-4x^3+4x^2+m$ liên tục trên $[0;2]$.

Ta có $u'(x)=4x^3-12x^2+8x$, $u'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right.$. Ta có: $\left\{\begin{array}{l}u(0)=m\\u(1)=m+1\\u(2)=m\end{array}\right.$.

Suy ra: $\left\{\begin{array}{l}\min\limits_{[0;2]}u(x)=m\\\max\limits_{[0;2]}u(x)=m+1\end{array}\right.$.

$\min\limits_{[0;2]}f(x)=\min\left\{0;|m|;|m+1|\right\}$ hoặc $\min\limits_{[0;2]}f(x)=0$, với $m\in[-3;3]$ (*).

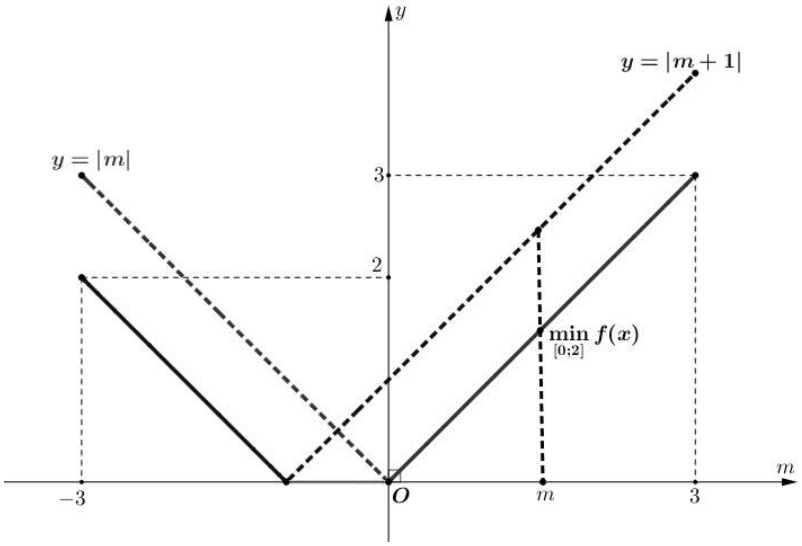
Trường hợp 1: $m(m+1)\le 0\Leftrightarrow -1\le m\le 0$ suy ra $\min\limits_{[0;2]}f(x)=0$

Trường hợp 2: $m>0$ kết hợp với (*) ta có: $0<m\le 3$ suy ra $\min\limits_{[0;2]}f(x)=|m|$.

Trường hợp 3: $m+1<0\Leftrightarrow m<-1$ kết hợp với (*) ta có $-3\le m<-1$ suy ra $\min\limits_{[0;2]}f(x)=|m+1|$

.

Khi đó: $\min\limits_{[0;2]}f(x)=\left\{\begin{array}{ll}|m| & ,m\in(0;3]\\|m+1| & ,m\in[-3;-1)\\0 & ,m\in[-1;0]\end{array}\right.$.



Dựa vào đồ thị ta thấy $\min\limits_{[0;2]} f(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 3 khi $m=3$.

Câu 55: Cho hàm số $y=\left|x^2-4x+2m-3\right|$ với m là tham số thực. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[1;3]$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng a khi $m=b$. Tính $P=2b-a$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{13}{4}$. **C.** $\frac{-9}{4}$. **D.** 6.

Lời giải:

Chọn D

Xét hàm số $y=f(x)=x^2-4x+2m-3$ liên tục trên đoạn $[1;3]$.

$f'(x)=2x-4$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=2\in[1;3]$; $f(1)=2m-6$, $f(2)=2m-7$, $f(3)=2m-6$.

Khi đó $\max\limits_{[1;3]}\left|f(x)\right|=\max\left\{\left|2m-6\right|;\left|2m-7\right|\right\}=M$.

Ta có: $\begin{cases}M\ge\left|2m-6\right|\\ M\ge\left|2m-7\right|=\left|7-2m\right|\end{cases}\Rightarrow 2M\ge\left|2m-6\right|+\left|7-2m\right|\ge\left|2m-6+7-2m\right|=1\Rightarrow M\ge\frac{1}{2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}\left|2m-6\right|=\left|2m-7\right|=\frac{1}{2}\\ (2m-6)(7-2m)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow m=\frac{13}{4}$.

Do đó $M=\frac{1}{2}=a$ khi $m=\frac{13}{4}=b\Rightarrow P=2b-a=6$.

Câu 56: Cho hàm số $y=\left|x^3+x^2+\left(m^2+1\right)x+27\right|$. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-3;-1]$ có giá trị nhỏ nhất. Khi đó tích các phần tử của S là

A. 4. **B.** -4. **C.** 8. **D.** -8.

Lời giải:

Chọn D

Xét hàm số $f(x)=x^3+x^2+\left(m^2+1\right)x+27$ liên tục trên đoạn $[-3;-1]$.

Ta có $f'(x)=3x^2+2x+m^2+1>0$ với $\forall x\in[-3;-1]$.

Ta có $f(-3)=6-3m^2$; $f(-1)=26-m^2$.

Khi đó $\max\limits_{[-3;-1]}\left|f(x)\right|=\max\left\{\left|6-3m^2\right|;\left|26-m^2\right|\right\}=M$.

Lại có $\begin{cases}M\ge\left|6-3m^2\right|\\M\ge\left|26-m^2\right|\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}M\ge\left|6-3m^2\right|\\3M\ge\left|3m^2-78\right|\end{cases}\Rightarrow 4M\ge 72\Leftrightarrow M\ge 18$.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}\left|6-3m^2\right|=\left|26-m^2\right|=18\\\left(6-3m^2\right)\left(3m^2-78\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow m^2=8\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\sqrt{2}\\m=-2\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Vậy với $\left[\begin{array}{l}m=2\sqrt{2}\\m=-2\sqrt{2}\end{array}\right.$ thì giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-3;-1]$ có giá trị nhỏ nhất.

Khi đó tích các giá trị là $2\sqrt{2}.\left(-2\sqrt{2}\right)=-8$.

Câu 57: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{1}{4}x^4-\frac{19}{2}x^2+30x+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải:

Chọn D

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{19}{2}x^2+30x+m$ liên tục trên đoạn $[0;2]$.

Ta có $f'(x)=x^3-19x+30$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-5\notin[0;2]\\x=3\notin[0;2]\\x=2\in[0;2]\end{array}\right.$.

Ta có: $f(0)=m;\ f(2)=m+26$.

Khi đó $\max\limits_{[0;2]}f(x)=\max\{m;m+26\}=m+26$; $\min\limits_{[0;2]}f(x)=\min\{m;m+26\}=m$.

Suy ra $\max\limits_{[0;2]}\left|f(x)\right|=\max\{|m|;|m+26|\}=M$.

Ta có $\begin{cases}M\ge|m|=|-m|\\M\ge|m+26|\end{cases}\Rightarrow 2M\ge|-m|+|m+26|\Leftrightarrow M\ge\frac{|-m|+|m+26|}{2}\ge\frac{|-m+m+26|}{2}=13$.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}|m|=|m+26|=13\\-m(m+26)>0\end{cases}\Leftrightarrow m=-13$.

Do đó giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{1}{4}x^4-\frac{19}{2}x^2+30x+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 13 khi $m=-13$. Vậy có 1 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 58: Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^2-2x+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 4.

Lời giải:

Chọn A

Xét $u=x^2-2x+m$ liên tục trên trên đoạn $[0;2]$.

Ta có: $u' = 2x-2$; $u' = 0 \Leftrightarrow 2x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [0;2]$.

$u(0) = m, u(1) = m-1, u(2) = m$

Khi đó: $\max\limits_{[0;2]} u = \max\{u(0), u(1), u(2)\} = m\max\{m, m-1, m\} = m$.

$\min\limits_{[0;2]} u = \min\{u(0), u(1), u(2)\} = \min\{m, m-1, m\} = m-1$.

Suy ra $\max\limits_{[0;2]} y = \max\{|m-1|, |m|\} = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |m| = 3 \\ |m| \geq |m-1| \end{cases} \\ \begin{cases} |m-1| = 3 \\ |m-1| \geq |m| \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = -3 \end{array}\right. \\ |m| \geq |m-1| \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = -2 \end{array}\right. \\ |m-1| \geq |m| \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m = 3, m = -2$.

Vậy số phần tử của S là 2.

Câu 59: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^3 - mx^2 - 9x + 9m|$ trên đoạn $[-2;2]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải:

Chọn B

Đặt $f(x) = x^3 - mx^2 - 9x + 9m$. Dễ thấy $\min\limits_{[-2;2]} |f(x)| \geq 0$, dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x \in [-2;2]$.

Ta có: $f(x) = x^2(x-m) - 9(x-m) = (x^2-9)(x-m)$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -3 \\ x = m \end{array}\right.$.

Do đó điều kiện cần và đủ để $f(x) = 0$ có nghiệm $x \in [-2;2]$ là $m \in [-2;2]$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2;-1;0;1;2\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 60: Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = |-x^4 + 8x^2 + m|$ trên đoạn $[-1;3]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 23. **B.** 24. **C.** 25. **D.** 26.

Lời giải:

Chọn D

Ta có $y = f(x) = |-x^4 + 8x^2 + m| = |x^4 - 8x^2 - m| = |(x^2-4)^2 - 16 - m|$.

Đặt $t = (x^2-4)^2$, vì $x \in [-1;3]$, suy ra $t \in [0;25]$.

Khi đó $y = g(t) = |t - 16 - m|$.

Ta có $\min\limits_{[-1;3]} f(x) = \min\limits_{[-0;25]} g(t) = \min\{|m-9|, |m+16|\}$.

Nếu $m - 9 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 9$, khi đó $\min\limits_{[-1;3]} f(x) = m - 9 \geq 0$, khi đó $\min\left(\min\limits_{[-1;3]} f(x)\right) = 0$, khi $m = 9$.

Nếu $m+16\ge 0\Leftrightarrow m\ge -16$, khi đó $\min\limits_{x\in[-1;3]} f(x)=-m-16\ge 0$, khi đó $\min\left(\min\limits_{[-1;3]} f(x)\right)=0$, khi $m=-16$.

Nếu $(m-9)(m+16)<0\Leftrightarrow -16<m<9$, khi đó $\min\limits_{x\in[-1;3]} f(x)=0$, khi đó $\min\left(\min\limits_{[-1;3]} f(x)\right)=0$.

Vậy $\min\left(\min\limits_{[-1;3]} f(x)\right)=0$, khi $-16\le m\le 9$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$, nên có 26 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 61: Cho hàm số $y=\left|x^4-2x^3+x^2+a\right|$. Có bao nhiêu số thực a để $\min\limits_{[-1;2]} y+\max\limits_{[-1;2]} y=10$

A. 1. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải:

Chọn D

Xét hàm số $u=x^4-2x^3+x^2+a$ liên tục trên đoạn $[-1;2]$ có $u'=4x^3-6x^2+2x$.

$$u'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in[-1;2]\\x=1\in[-1;2]\\x=\dfrac{1}{2}\in[-1;2]\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}M=\max\limits_{[-1;2]}u=\max\left\{u(-1),u(2),u(0),u\left(\dfrac{1}{2}\right),u(1)\right\}=u(-1)=u(2)=a+4.\\m=\min\limits_{[-1;2]}u=\min\left\{u(-1),u(2),u(0),u\left(\dfrac{1}{2}\right),u(1)\right\}=u(0)=u(1)=a\end{array}\right.$$

Trường hợp 1: Nếu $m\ge 0\Leftrightarrow a\ge 0\Rightarrow \min\limits_{[-1;2]} y=m;\ \max\limits_{[-1;2]} y=M$.

Ta có điều kiện $\begin{cases}a\ge 0\\a+a+4=10\end{cases}\Leftrightarrow a=3$ (thoả mãn).

Trường hợp 2: Nếu $M\le 0\Leftrightarrow a\le -4$. Khi đó: $\min\limits_{[-1;2]} y=-M;\ \max\limits_{[-1;2]} y=-m$.

Ta có điều kiện $\begin{cases}a\le -4\\-(a+4)-a=10\end{cases}\Leftrightarrow a=-7$ (thoả mãn).

Trường hợp 3: $m<0<M\Leftrightarrow -4<a<0$.

Khi đó: $\min\limits_{[-1;2]} y=0;\ \max\limits_{[-1;2]} y=\max\left\{|a+4|,|a|\right\}=\max\left\{a+4;-a\right\}<10$.

Suy ra $\min\limits_{[-1;2]} y+\max\limits_{[-1;2]} y<0+10=10$ (loại).

Vậy có 2 giá trị của tham số a thỏa mãn đề bài là $\left[\begin{array}{l}a=3\\a=-7\end{array}\right.$.

Câu 62: Cho hàm số $y=\left|\dfrac{x^2+ax-4}{x}\right|$ (a là tham số). Gọi M , m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[1;4]$. Có bao nhiêu giá trị thực của a để $M+2m=7$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4

Lời giải:

Chọn B

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{x^2+ax-4}{x}$ liên tục trên đoạn $[1;4]$.

Ta có $g'(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2}>0 \quad \forall x\in[1;4] \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $[1;4]$

$$\Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{[1;4]} g(x)=g(1)=a-3 \\ \max\limits_{[1;4]} g(x)=g(4)=a+3 \end{cases}.$$

Trường hợp 1: $a-3>0\Leftrightarrow a>3$.

Ta có $\begin{cases} |a-3|=a-3 \\ |a+3|=a+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=\min\limits_{[1;4]}|g(x)|=a-3 \\ M=\max\limits_{[1;4]}|g(x)|=a+3 \end{cases}.$

Khi đó $M+2m=7\Leftrightarrow a+3+2(a-3)=7\Leftrightarrow a=\dfrac{10}{3}$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2: $a+3<0\Leftrightarrow a<-3$.

Ta có $\begin{cases} |a-3|=-a+3 \\ |a+3|=-a-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=\min\limits_{[1;4]}|g(x)|=-a-3 \\ M=\max\limits_{[1;4]}|g(x)|=-a+3 \end{cases}.$

Khi đó $M+2m=7\Leftrightarrow -a+3+2(-a-3)=7\Leftrightarrow a=-\dfrac{10}{3}$ (thỏa mãn).

Trường hợp 3: $a-3\le 0\le a+3\Leftrightarrow -3\le a\le 3$.

Ta có $\begin{cases} |a+3|=a+3 \\ |a-3|=-a+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=\min\limits_{[1;4]}|g(x)|=0 \\ M=\max\limits_{[1;4]}|g(x)|=\max\{a+3;-a+3\} \end{cases}$

Khi đó $M+2m=7\Leftrightarrow \left[\begin{cases} a+3+2.0=7 \\ a+3\ge -a+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ a\ge 0 \end{cases} \right.$
$\left. \begin{cases} -a+3+2.0=7 \\ -a+3>a+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ a<0 \end{cases} \right] \Leftrightarrow a=\pm 4$ (không thỏa mãn).

Vậy có 2 giá trị của a thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $a=\pm\dfrac{10}{3}$.

Câu 63: Cho hàm số $f(x)=x^4-2x^3+m$ (m là tham số thực). Tìm tổng tất cả các giá trị của m sao cho $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|+2\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=10$.

A. 4. **B.** -3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải:

Chọn C

Ta xét $f(x)=x^4-2x^3+m$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, $f'(x)=4x^3-6x^2$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \in [0;1] \\ x=\dfrac{3}{2} \notin [0;1] \end{array}\right.$.

$f(0)=m;\ f(1)=m-1$.

Ta xét các trường hợp sau:

Nếu $m \le 0$ thì $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|=1-m;\ \min\limits_{[0;1]}|f(x)|=-m$.

Khi đó: $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|+2\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=10 \Leftrightarrow (1-m)+2(-m)=10 \Leftrightarrow m=-3$ (thỏa điều kiện).

Nếu $m \ge 1$ thì $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|=m;\ \min\limits_{[0;1]}|f(x)|=m-1$.

Khi đó: $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|+2\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=10 \Leftrightarrow m+2(m-1)=10 \Leftrightarrow m=4$ (thỏa điều kiện).

Nếu $\dfrac{1}{2} \le m<1$ thì $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|=m;\ \min\limits_{[0;1]}|f(x)|=0$.

Khi đó: $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|+2\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=10 \Leftrightarrow m=10$ (không thỏa điều kiện).

Nếu $0<m<\dfrac{1}{2}$ thì $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|=1-m;\ \min\limits_{[0;1]}|f(x)|=0$.

Khi đó: $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|+2\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=10 \Leftrightarrow 1-m=10 \Leftrightarrow m=-9$ (không thỏa điều kiện).

Do đó có hai giá trị $m=-3$ và $m=4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy tổng tất cả các giá trị của m sao cho $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|+2\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=10$ là 1.

Câu 64: Cho hàm số $f(x)=\left|x^3-3x^2+m\right|$. Tìm tất cả các giá trị của m thỏa mãn $3\max\limits_{[1;3]} f(x)-2\min\limits_{[1;3]} f(x)=17$.

A. $m \in \{9;-5;29\}$. **B.** $m \in \left\{9;-5;\dfrac{-5}{3}\right\}$. **C.** $m \in \{9;-5\}$. **D.** $m \in \{9;-5;5\}$.

Lời giải:

Chọn C

Hàm số $f(x)=\left|x^3-3x^2+m\right|$ liên tục trên đoạn $[1;3]$.

Xét hàm số $y=x^3-3x^2+m$

Ta có $y'=3x^2-6x$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \notin [1;3] \\ x=2 \in [1;3] \end{array}\right.$

Khi đó

$\begin{cases} \min\limits_{[1;3]} y=\min\{y(1);y(3);y(2)\}=\min\{m-2;m;m-4\}=m-4 \\ \max\limits_{[1;3]} y=\max\{y(1);y(3);y(2)\}=\max\{m-2;m;m-4\}=m \end{cases}$

Nếu $m-4 \ge 0 \Leftrightarrow m \ge 4 \Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{[1;3]} f(x)=m-4 \\ \max\limits_{[1;3]} f(x)=m \end{cases}$.

Ta có $3\max\limits_{[1;3]} f(x)-2\min\limits_{[1;3]} f(x)=17 \Leftrightarrow 3m-2(m-4)=17 \Leftrightarrow m=9$ (thoả mãn).

Nếu $m\le 0 \Rightarrow \begin{cases}\min\limits_{[1;3]} f(x)=-m\\ \max\limits_{[1;3]} f(x)=4-m\end{cases}$.

Ta có $3\max\limits_{[1;3]} f(x)-2\min\limits_{[1;3]} f(x)=17 \Leftrightarrow 3(4-m)+2m=17 \Leftrightarrow m=-5$ (thoả mãn).

Nếu $0<m<2 \Rightarrow \begin{cases}\min\limits_{[1;3]} f(x)=0\\ \max\limits_{[1;3]} f(x)=4-m\end{cases}$.

Ta có $3\max\limits_{[1;3]} f(x)-2\min\limits_{[1;3]} f(x)=17 \Leftrightarrow 3(4-m)=17 \Leftrightarrow m=\dfrac{-5}{3}$ (không thoả mãn).

Nếu $2\le m<4 \Rightarrow \begin{cases}\min\limits_{[1;3]} f(x)=0\\ \max\limits_{[1;3]} f(x)=m\end{cases}$.

Ta có $3\max\limits_{[1;3]} f(x)-2\min\limits_{[1;3]} f(x)=17 \Leftrightarrow 3m=17 \Leftrightarrow m=\dfrac{17}{3}$ (không thoả mãn).

Vậy $m\in\{9;-5\}$.

Câu 65: Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3x+m$. Tích tất cả các giá trị của tham số m để $\min\limits_{[0;2]}|f(x)|+\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=6$ là

A. -16 **B.** -9 **C.** 16 **D.** 144

Lời giải:

Chọn B

Xét hàm số: $f(x)=x^3-3x+m$ trên $[0;2]$

Ta có: $f'(x)=3x^2-3$.

Khi đó $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1\end{array}\right.$.

Ta có: $\begin{cases}f(0)=m\\ f(1)=-2+m\\ f(2)=2+m\end{cases}$ suy ra $\begin{cases}\min\limits_{[0;2]} f(x)=-2+m\\ \max\limits_{[0;2]} f(x)=2+m\end{cases}$.

Trường hợp 1: $(-2+m)(2+m)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m<-2\\ m>2\end{array}\right.$.

Khi đó: $\min\limits_{[0;2]}|f(x)|+\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=6 \Leftrightarrow |-2+m|+|2+m|=6$.

Nếu $m<-2$ ta có: $2-m-2-m=6 \Leftrightarrow m=-3$ (thỏa).

Nếu $m>2$ ta có: $-2+m+2+m=6 \Leftrightarrow m=3$ (thỏa).

Trường hợp 2: $(-2+m)(2+m)\le 0 \Leftrightarrow -2\le m\le 2$ (*)

Khi đó: $\min\limits_{[0;2]}|f(x)|=0$ và

$\min\limits_{[0;2]}\left|f\left(x\right)\right|+\max\limits_{[0;2]}\left|f\left(x\right)\right|=6\Leftrightarrow\max\limits_{[0;2]}\left|f\left(x\right)\right|=6$.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left|m+2\right|\geq\left|-2+m\right|\\\left|m+2\right|=6\end{cases}\\\begin{cases}\left|m+2\right|\leq\left|-2+m\right|\\\left|-2+m\right|=6\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left|m+2\right|\geq\left|-2+m\right|\\m=4\vee m=-8\end{cases}\\\begin{cases}\left|m+2\right|\leq\left|-2+m\right|\\m=-4\vee m=8\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=4\\m=-4\end{array}\right.$$ (không thỏa (*))

Vậy tích các giá trị của tham số m thỏa yêu cầu bài toán là: $-3.3=-9$.

Câu 66: Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x+m}{x+2}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp các giá trị của m sao cho $2\max\limits_{[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|+3\min\limits_{[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|=6$. Số phần tử của S là

A. 6. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải:

Chọn B

Ta thấy hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x+m}{x+2}$ liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$, $f\left(0\right)=\dfrac{m}{2};f\left(1\right)=\dfrac{m+1}{3}$ và đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x=-m$.

Trường hợp 1: Nếu $0\leq-m\leq1\Leftrightarrow-1\leq m\leq0$ thì $\max\limits_{[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|=\max\left\{\left|\dfrac{m}{2}\right|;\left|\dfrac{m+1}{3}\right|\right\}$;

$\min\limits_{[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|=0$.

Do đó $2\max\limits_{[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|+3\min\limits_{[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|=6\Rightarrow\left[\begin{array}{l}2\left|\dfrac{m}{2}\right|=6\\2\left|\dfrac{m+1}{3}\right|=6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\pm6\\m=8\\m=-10\end{array}\right.$ (không thỏa mãn).

Trường hợp 2: Nếu $-m<0\Leftrightarrow m>0$ thì $\max\limits_{[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|=\max\left\{\dfrac{m}{2};\dfrac{m+1}{3}\right\}$;

$\min\limits_{[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|=\min\left\{\dfrac{m}{2};\dfrac{m+1}{3}\right\}$.

Ta có $\dfrac{m}{2}-\dfrac{m+1}{3}=\dfrac{m-2}{6}$ suy ra $\begin{cases}\dfrac{m}{2}\geq\dfrac{m+1}{3}\text{ khi }m\geq2\\\dfrac{m}{2}<\dfrac{m+1}{3}\text{ khi }0<m<2\end{cases}$.

Với $m\geq2$, ta có

$2\max\limits_{[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|+3\min\limits_{[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|=6\Leftrightarrow m+m+1=6\Leftrightarrow m=\dfrac{5}{2}$ (thỏa mãn).

Với $0<m<2$, ta có

$$2\max\limits_{[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|+3\min\limits_{[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|=6\Leftrightarrow2.\frac{m+1}{3}+3.\frac{m}{2}=6\Leftrightarrow m=\frac{32}{13}$$ (không thỏa mãn).

Trường hợp 3: Nếu $-m>1\Leftrightarrow m<-1$ thì

$\max\limits_{[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|=\max\left\{-\dfrac{m}{2};-\dfrac{m+1}{3}\right\};\min\limits_{[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|=\min\left\{-\dfrac{m}{2};-\dfrac{m+1}{3}\right\}$.

Ta có $-\frac{m}{2}+\frac{m+1}{3}=\frac{-m+2}{6}>0,\forall m<-1$ suy ra $-\frac{m}{2}>-\frac{m+1}{3}$ khi $m<-1$. Do đó:

$2\max\limits_{[0;1]}\left|f(x)\right|+3\min\limits_{[0;1]}\left|f(x)\right|=6\Leftrightarrow 2.\frac{-m}{2}+3.\frac{-m-1}{3}=6\Leftrightarrow m=-\frac{7}{2}$ (thỏa mãn).

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu 67: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên trên đoạn $[-4;4]$ như sau

x	-4		-3		-1		0		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-4	↗	4	↘	2	↗	3	↘	-3	↗	1

Có bao nhiêu giá trị của tham số $m\in[-4;4]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f\left(\left|x^3\right|+3|x|\right)+f(m)$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng $\frac{11}{2}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải:

Chọn C

Xét hàm số $y=g(x)$ trên đoạn $[-4;4]$.

Ta có $\begin{cases}x\in[-4;4]\Rightarrow -x\in[-4;4]\\ g(-x)=g(x)\end{cases}\Rightarrow y=g(x)$ là hàm số chẵn trên $[-4;4]$.

Do đó: $\max\limits_{[-1;1]}g(x)=\max\limits_{[0;1]}g(x)=\frac{11}{2}$.

Xét $x\in[0;1]$ khi đó: $g(x)=f\left(x^3+3x\right)+f(m)$

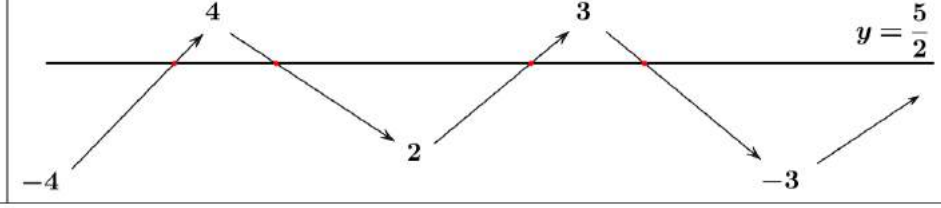
Đặt $u=x^3+3x$, $u'=3x^2+3>0,\forall x\in[0;1]$. Suy ra $u(0)\le u\le u(1)\Leftrightarrow 0\le u\le 4$.

Hàm số trở thành $h(u)=f(u)+f(m)$ với $u\in[0;4]$.

$\max\limits_{[0;1]}g(x)=\max\limits_{[0;4]}h(u)=f(0)+f(m)=3+f(m)$

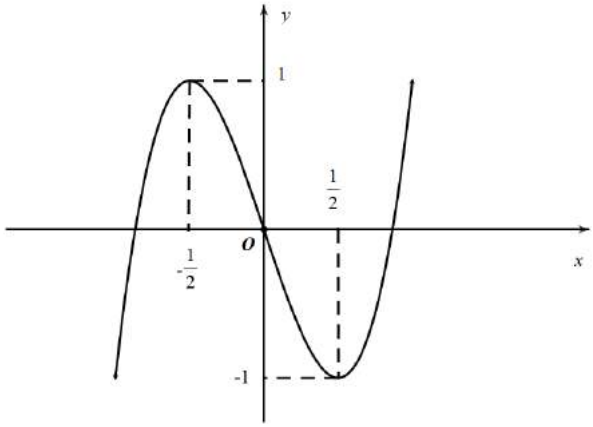
Mà $\max\limits_{[0;1]}g(x)=\frac{11}{2}\Rightarrow 3+f(m)=\frac{11}{2}\Leftrightarrow f(m)=\frac{5}{2}$.

x	-4		-3		-1		0		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-4	↗	4	↘	2	↗	3	↘	-3	↗	1



Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ suy ra có 4 giá trị của m.

Câu 68: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Đặt $g(x)=|f(x)|-\sqrt{1-2|x|}+f\left(\dfrac{\sqrt{1+2m}-\sqrt{1-2m}}{2\sqrt{2}}\right)$. Với giá trị nào của m thì giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ là 0.

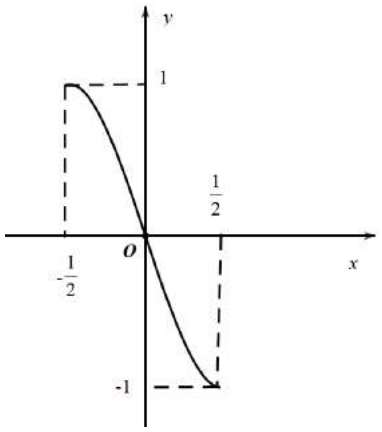
A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** Không tồn tại.

Lời giải:

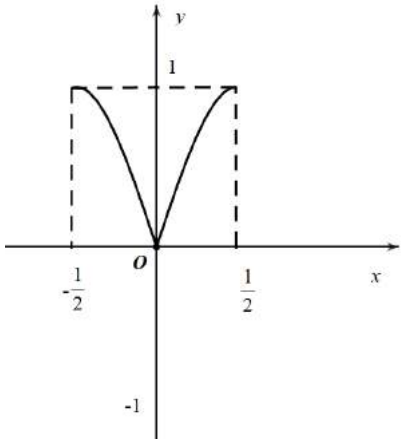
Chọn A

Với $m\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$ điều kiện xác định của $g(x)$ là: $1-2|x|\ge 0\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}\le x\le\dfrac{1}{2}$.

Trên tập $D=\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$ hàm số $f(x)$ có đồ thị



Do đó đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ có dạng:



Ta có $0 \le \left| f\left(x\right) \right| \le 1, \forall x \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2} \right]$ và $0 \le 1-2\left| x \right| \le 1 \Rightarrow -1 \le -\sqrt{1-2\left| x \right|} \le 0$

$\Rightarrow -1 \le \left| f\left(x\right) \right| - \sqrt{1-2\left| x \right|} \le 1.$

Do đó $\min\limits_{\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2} \right]} g\left(x\right) = -1 + f\left(\frac{\sqrt{1+2m}-\sqrt{1-2m}}{2\sqrt{2}} \right)$ vị trí $x = 0$.

Theo yêu cầu bài toán $\min\limits_{\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2} \right]} g\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{\sqrt{1+2m}-\sqrt{1-2m}}{2\sqrt{2}} \right) = 1.$

Đặt $t = \frac{\sqrt{1+2m}-\sqrt{1-2m}}{2\sqrt{2}}$, $m \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2} \right]$.

Ta có $t' = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+2m}} + \frac{1}{\sqrt{1-2m}} \right) > 0, \forall m \in \left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2} \right) \Rightarrow t$ đồng biến trên $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2} \right]$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2}.$

Khi đó $f\left(t\right) = 1 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1+2m}-\sqrt{1-2m}}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$

Vậy $m = -\frac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng 7: Bài toán tối ưu, ứng dụng, thực tế

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t)=45t^2-t^3$. Nếu xem $f'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t. Tốc độ truyền bệnh sẽ lớn nhất vào ngày thứ bao nhiêu?

A. 12. **B.** 20. **C.** 30. **D.** 15.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(t)=-3t^2+90t=-3(t-15)^2+675\le 675$.

Tốc độ truyền bệnh lớn nhất là 675 (người/ngày) vào ngày thứ 15.

Câu 2: Khi nuôi tôm trong một hồ tự nhiên, một nhà khoa học đã thống kê được rằng: nếu trên mỗi mét vuông mặt hồ thả x con tôm giống thì cuối vụ mỗi con tôm có cân nặng trung bình là $108-x^2$ (gam). Hỏi nên thả bao nhiêu con tôm giống trên mỗi mét vuông mặt hồ tự nhiên đó để cuối vụ thu hoạch được nhiều tôm nhất.

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

Sau một vụ lượng tôm trung bình trên mỗi m^2 mặt hồ nặng $x\left(108-x^2\right)=108x-x^3$ (gam)

Xét hàm số $f(x)=108x-x^3$ trên khoảng $(0;+\infty)$ ta có

$$f'(x)=108-3x^2;\quad f'(x)=0\Leftrightarrow 108-3x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=6\\x=-6<0\end{array}\right.$$

x	0		6		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$f(6)$	↘	

Trên khoảng $(0;+\infty)$ hàm số $f(x)=108x-x^3$ đạt GTLN tại $x=6$.

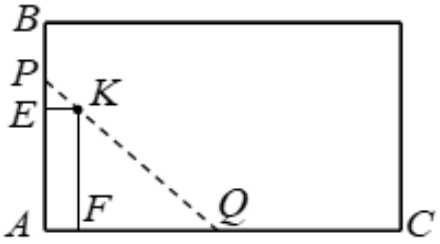
Vậy nên thả 6 con tôm giống trên mỗi mét vuông mặt hồ thì cuối vụ thu hoạch được nhiều tôm nhất.

Câu 3: Một cái hồ rộng có hình chữ nhật. Tại một góc nhỏ của hồ người ta đóng một cái cọc ở vị trí K cách bờ AB là 1 m và cách bờ AC là 8 m, rồi dùng một cây sào ngăn một góc nhỏ của hồ để thả bèo. Tính chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB, AC và cây cọc K.

A. $\frac{5\sqrt{65}}{4}$. **B.** $5\sqrt{5}$. **C.** $9\sqrt{2}$. **D.** $\frac{5\sqrt{71}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Đặt $AP=a$, $AQ=b\ (a,b>0)$. Gọi E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của K xuống AB và AC. Suy ra $KE=1$, $KF=8$.

Ta có: $\frac{KE}{AQ}=\frac{PK}{PQ};\frac{KF}{AP}=\frac{QK}{PQ}\Rightarrow\frac{KF}{AP}+\frac{KE}{AQ}=1$ hay $\frac{8}{a}+\frac{1}{b}=1$.

Cách 1:

Ta có: $PQ^2=a^2+b^2$. Vì $\frac{8}{a}+\frac{1}{b}=1\Rightarrow\frac{8k}{a}+\frac{k}{b}=k\ \forall k>0$.

$$a^2+b^2+k=\left(a^2+\frac{8k}{a}\right)+\left(b^2+\frac{k}{b}\right)=\left(a^2+\frac{4k}{a}+\frac{4k}{a}\right)+\left(b^2+\frac{k}{2b}+\frac{k}{2b}\right)\geq 3\sqrt[3]{16k^2}+3\sqrt[3]{\frac{k^2}{4}}.$$

Suy ra PQ nhỏ nhất $\Leftrightarrow a^2+b^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=\frac{4k}{a}\\ b^2=\frac{k}{2b}\\ \frac{8}{a}+\frac{1}{b}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=250\\ a=10\\ b=5\end{cases}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của PQ là $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$. Từ đó suy ra chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB, AC và cây cọc K là $5\sqrt{5}$.

Cách 2:

Vì $\frac{8}{a}+\frac{1}{b}=1\Rightarrow b=\frac{a}{a-8}$ với $a>8$. Khi đó $PQ^2=a^2+b^2=a^2+\left(\frac{a}{a-8}\right)^2$ với $a>8$.

Xét hàm số $f(a)=a^2+\left(\frac{a}{a-8}\right)^2$ với $a>8$.

Ta có $f'(a)=2a+\frac{2a}{a-8}.\frac{-8}{(a-8)^2}=\frac{2a\left[(a-8)^3-8\right]}{(a-8)^3}$; $f'(a)=0\Rightarrow a=10$.

Bảng biến thiên của $f(a)$:

a	8		10		$+\infty$
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	$+\infty$	↘	125	↗	$+\infty$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(a)$ là 125 khi $a=10$.

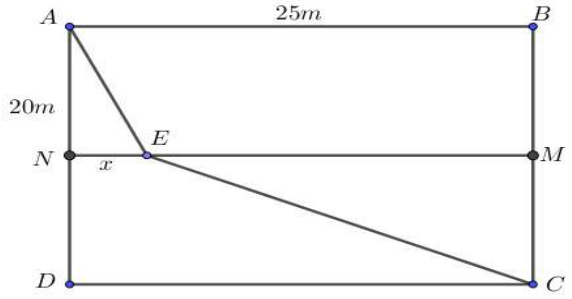
Từ đó suy ra chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB, AC và cây cọc K là $\sqrt{125}=5\sqrt{5}$.

Câu 4: Một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 25\text{m}$, chiều rộng $AD = 20\text{m}$ được chia thành hai phần bằng nhau bởi vạch chắn MN (M, N lần lượt là trung điểm BC và AD). Một đội xây dựng làm một con đường đi từ A đến C qua vạch chắn MN, biết khi làm đường trên miền $ABMN$ mỗi giờ làm được 15m và khi làm trong miền $CDNM$ mỗi giờ làm được 30m. Tính thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C.

A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\frac{10+2\sqrt{725}}{30}$. **C.** $\frac{20+\sqrt{725}}{30}$. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A



Do cần thời gian xây là ngắn nhất nên con đường làm trên mỗi miền phải là những đường thẳng.

Gọi AE và EC lần lượt là đoạn đường cần làm. Với $NE = x(\text{m})$.

$\Rightarrow EM = 25 - x(\text{m})$.

Ta được $\begin{cases} AE = \sqrt{AN^2 + EN^2} = \sqrt{100 + x^2} \\ EC = \sqrt{MC^2 + EM^2} = \sqrt{100 + (25-x)^2} \end{cases}$.

$\Rightarrow$ Thời gian để làm đoạn đường từ A đến C là:

$$t(x) = \frac{AE}{15} + \frac{EC}{30} = \frac{\sqrt{100+x^2}}{15} + \frac{\sqrt{(25-x)^2+100}}{30}(\text{h})$$

$$\Rightarrow t'(x) = \frac{x}{15\sqrt{100+x^2}} - \frac{25-x}{30.\sqrt{(25-x)^2+100}}.$$

Xét $t'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{15\sqrt{100+x^2}} - \frac{25-x}{30.\sqrt{(25-x)^2+100}} = 0$

$$\Leftrightarrow 2x\sqrt{(25-x)^2+100} = (25-x)\sqrt{100+x^2} \Leftrightarrow 4x^2\left((25-x)^2+100\right) = (25-x)^2\left(100+x^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2(25-x)^2 + 400x^2 - 100(25-x)^2 - (25-x)^2x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(25-x)^2\left(x^2-25\right) + x^2\left(20^2 - (25-x)^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)\left(4(25-x)^2(x+5) + x^2(45-x)\right) = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

Ta được $\begin{cases} t(0)=\dfrac{4+\sqrt{29}}{6} \\ t(5)=\dfrac{2\sqrt{5}}{3} \\ t(25)=\dfrac{1+\sqrt{29}}{3} \end{cases}$.

Vậy thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C là $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}(\text{h})$.

Cách 2:

Xét $t(x)=\dfrac{\sqrt{10^2+x^2}}{15}+\dfrac{\sqrt{(25-x)^2+10^2}}{30}=\dfrac{\sqrt{20^2+(2x)^2}+\sqrt{(25-x)^2+10^2}}{30}$.

Lại có $\sqrt{20^2+(2x)^2}+\sqrt{(25-x)^2+10^2}\geq\sqrt{(45-x)^2+(2x+10)^2}$ $\left(\text{do } |\vec{u}|+|\vec{v}|\geq|\vec{u}+\vec{v}|\right)$.

$\Leftrightarrow\sqrt{20^2+(2x)^2}+\sqrt{(25-x)^2+10^2}\geq\sqrt{5(x-5)^2+2000}$.

Do đó $t(x)\geq\dfrac{\sqrt{5(x-5)^2+2000}}{30}\geq\dfrac{\sqrt{2000}}{30}=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$.

Vậy $t(x)_{\min}=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}(\text{h})$ khi và chỉ khi $x=5(\text{m})$.

Vậy thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C là $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}(\text{h})$.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Một vật chuyển động theo quy luật $s = t^3 - 6t^2 + 42t + 1$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc nhỏ nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

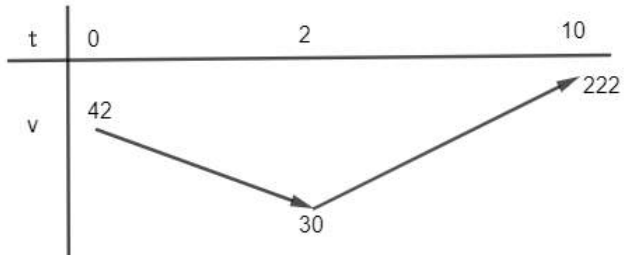
A. $16(m/s)$. **B.** $30(m/s)$. **C.** $40(m/s)$. **D.** $10(m/s)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $s = t^3 - 6t^2 + 42t + 1 \Rightarrow v = s' = 3t^2 - 12t + 42$

Theo đề, ta cần tìm GTNN của v, với $t \in [0;10]$



Dựa vào BBT, vận tốc nhỏ nhất của vật đạt được là $30(m/s)$.

Câu 2: Một vật chuyển động theo quy luật $S = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$, với $t(giây)$ là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và $S(m)$ là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng:

A. $400(m/s)$. **B.** $216(m/s)$. **C.** $30(m/s)$. **D.** $54(m/s)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $v(t) = S'(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 18t$

$v'(t) = -3t + 18;\ v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 6 \in [0;10]$

Mặt khác $v(0) = 0;\ v(6) = 54;\ v(10) = 30$.

Do $\max\limits_{t\in[0;10]} v(t) = max\{v(0);v(6);v(10)\} = max\{0;54;30\} = 54(m/s)$.

Vậy trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển đông, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng $54(m/s)$.

Câu 3: Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$ với t là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. 24. **B.** 108. **C.** 64. **D.** 18.

Lời giải

Chọn A

Ta có $v(t)=s'=-\frac{3}{2}t^2+12t$; $v'(t)=-3t+12=0\Leftrightarrow t=4$

Bảng biến thiên:

t	0		4		6
$v'(t)$		+	0	−	
$v(t)$		↗	24	↘	

Vậy $\max v(t)=24(m/s)$ khi $t=4$.

Câu 4: Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\frac{1}{3}t^3+2t^2$ với $t(s)$ là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và $s(m)$ là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Tìm vận tốc lớn nhất mà vật có thể đạt được trong khoảng thời gian $3s$ kể từ lúc vật bắt đầu chuyển động.

A. $2(m/s)$. **B.** $\frac{16}{3}(m/s)$. **C.** $3(m/s)$. **D.** $4(m/s)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $v(t)=s'(t)=-t^2+4t$ với $t\in[0;3]$.

$v'(t)=-2t+4$; $v'(t)=0\Leftrightarrow t=2$; $v(0)=0$; $v(2)=4$; $v(3)=3$

Vậy vận tốc lớn nhất của vật trong khoảng thời gian 3 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động là $4(m/s)$.

Câu 5: Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\frac{1}{3}t^3+6t^2$ với t là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 7 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. $180(m/s)$. **B.** $24(m/s)$. **C.** $144(m/s)$. **D.** $36(m/s)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $v=s'=-t^2+12t\Rightarrow v'=-2t+12$

$v'=0\Leftrightarrow -2t+12=0\Leftrightarrow t=6$.

t	0		6		+ ∞
V'(t)		+	0	−	
V(t)		↗	36	↘	

$\Rightarrow v_{\max}=v(6)=36(m/s)$.

Câu 6: Một cửa hàng bán vải Thanh Hà với giá bán mỗi kg là 50.000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 25kg. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm 4000 đồng cho một kg thì số vải bán được tăng thêm là 50kg. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi kg là 30.000 đồng.

A. 41.000 đồng. **B.** 34.000 đồng. **C.** 38.000 đồng. **D.** 45.000 đồng.

Lời giải

Chọn A

Gọi x đồng $(30.000 < x < 50.000)$ là giá bán vải mới để cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất.

Suy ra giá bán ra đã giảm là $(50.000 - x)$ đồng.

Số lượng vải bán ra đã tăng thêm là $\frac{50(50000-x)}{4000} = 625 - 0,0125.x$.

Tổng số vải bán được là $25 + 625 - 0,0125.x = 650 - 0,0125.x$.

Doanh thu của cửa hàng là $(650 - 0,0125.x)x$.

Số tiền vốn ban đầu để mua vải là $(650 - 0,0125.x)30000$.

Vậy lợi nhuận của cửa hàng là

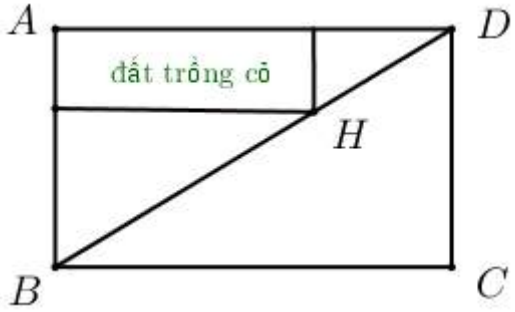
$(650 - 0,0125.x)x - (650 - 0,0125.x)30000 = -0,0125x^2 + 1025x - 19500000$.

Ta có: $f(x) = -0,0125x^2 + 1025x - 19500000 = -0,0125(x - 41000)^2 + 1512500 \le 1512500$.

Suy ra $\max f(x) = 1512500$ khi $x = 41.000$ đồng.

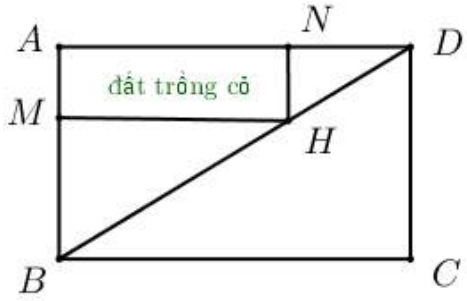
Vậy giá bán mỗi cân vải là 41.000 đồng thì cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất.

Câu 7: Trên mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích $25m^2$, người chủ lấy một phần đất để trồng cỏ. Biết phần đất trồng cỏ này có dạng hình chữ nhật với hai đỉnh đối diện là A và H, với H thuộc cạnh BD. Hỏi số tiền lớn nhất người chủ cần chuẩn bị để trồng cỏ là khoảng bao nhiêu, với chi phí trồng cỏ là 70.000 đồng$/m^2$?



A. 337.500 đồng. **B.** 875.000 đồng. **C.** 584.000 đồng. **D.** 437.500 đồng.

Lời giải



Chọn D

Ta có $AB.AD = 25(m^2)$; $\frac{NH}{AB} = \frac{DN}{DA}$

Đặt $\frac{NH}{AB} = \frac{DN}{DA} = x \Rightarrow NH = x.AB; AN = (1-x)AD$

Diện tích đất trồng cỏ là: $S = AN.NH = x.(1-x).AB.AD = 25.x.(1-x)$

Diện tích lớn nhất khi $x.(1-x)$ lớn nhất. Mà $x.(1-x) \le \dfrac{(x+1-x)^2}{4} = \dfrac{1}{4}$

Diện tích đất trồng cỏ lớn nhất $S = \dfrac{1}{4}.25 = \dfrac{25}{4}$

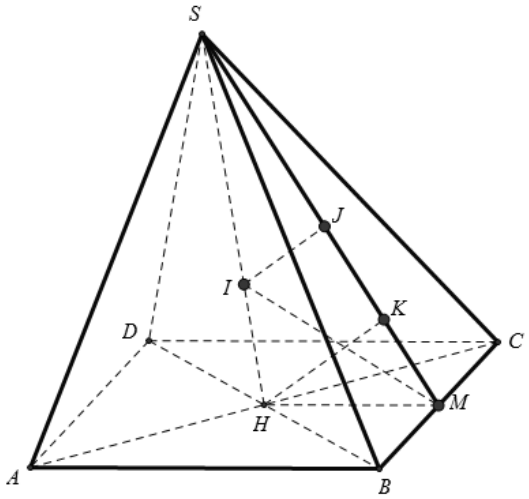
Số tiền lớn nhất để trồng cỏ: $T = \dfrac{25}{4}.70000 = 437500$ đồng.

Câu 8: Một kiến trúc sư mốn thiết kế một mô hình kim tự tháp Ai Cập có dạng là một hình chóp tứ giác đều ngoại tiếp một mặt cầu có bán kính bằng $6m$.Đề tiết kiệm nguyên liệu xây dựng thì kiến trúc sư đó phải thiết kế kim tự tháp sao cho có thể tích nhỏ nhất. Chiều cao của kim tự tháp đó là:

A. $12m$. **B.** $18m$. **C.** $36m$. **D.** $24m$.

Lời giải

Chọn D



Giả sử kim tự tháp là hình chóp đều $S.ABCD$, gọi M là trung điểm của BC

Kẻ phân giác trong góc $\hat{SMH}$ cắt SH tại I . I là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp đã cho

Từ I hạ IJ vuông góc (SBC), Từ H hạ HK vuông góc (SBC), IJ=R=6

Theo Ta-lét. $\dfrac{SI}{SH} = \dfrac{IJ}{HK} \Leftrightarrow \dfrac{h-6}{h} = \dfrac{6}{HK} \Leftrightarrow HK = \dfrac{6h}{h-6}; SH = h; HM = \dfrac{a}{2}$

$$HK = \frac{SH.HM}{\sqrt{SH^2 + HM^2}} \Leftrightarrow \frac{6h}{h-6} = \frac{ah}{2\sqrt{h^2 + \dfrac{a^2}{4}}}$$

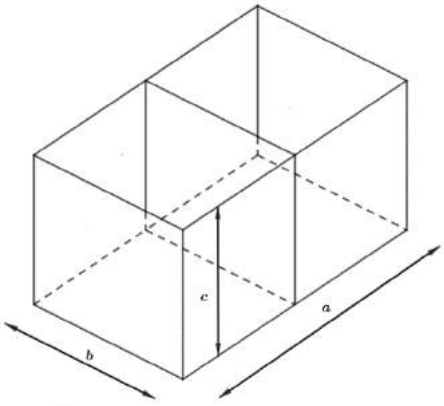
$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{144h^2}{h^2 - 12h} = \frac{144h}{h-12} \Rightarrow V = \frac{1}{3}.\frac{144h}{h-12}h$$

Xét hàm

$$f(h) = \frac{h^2}{h-12} \Rightarrow f'(h) = \frac{h(h-24)}{(h-12)^2} \Rightarrow f'(h) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h = 0 \\ h = 24 \end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên có Thể tích V đạt GTNN khi $h = 24$.

Câu 9: Người ta cần làm một cái bể cá có hai ngăn, không có nắp ở phía trên với thể tích $1,296\,m^3$. Người ta cắt các tấm kính ghép lại một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật (hình vẽ minh họa) với ba kích thước là a, b, c . Người ta phải thiết kế các kích thước là bao nhiêu để đỡ tốn kính nhất (giả sử độ dày của kính không đáng kể).



A. $a=1,2m;b=1,2m;c=0,9m$.
B. $a=3,6m;b=0,6m;c=0,6m$.
C. $a=2,4m;b=0,9m;c=0,6m$.
D. $a=1,8m;b=1,2m;c=0,6m$.

Lời giải

Chọn D

Thể tích bể cá là $V=abc=1,296$.

Kể cả miếng kính ở giữa, diện tích tổng các miếng kính là $S=ab+2ac+3bc$.

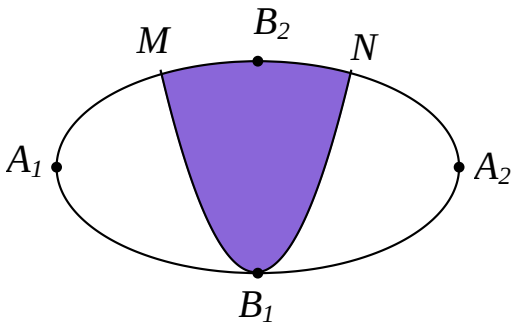
Suy ra $\frac{S}{V}=\frac{S}{1,296}=\frac{ab+2ac+3bc}{abc}=\frac{1}{c}+\frac{2}{b}+\frac{3}{a}$.

Áp dụng Cô si cho 3 số $\frac{1}{c};\frac{2}{b};\frac{3}{a}$ ta có: $\frac{1}{c}+\frac{2}{b}+\frac{3}{a}\geq 3.\sqrt[3]{\frac{1}{c}.\frac{2}{b}.\frac{3}{a}}=3.\sqrt[3]{\frac{6}{1,296}}=5.$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}abc=1,296\\\frac{1}{c}=\frac{2}{b}=\frac{3}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1,8\\b=1,2\\c=0,6\end{cases}$.

Vậy để đỡ tốn kính nhất thì $a=1,8m;b=1,2m;c=0,6m$.

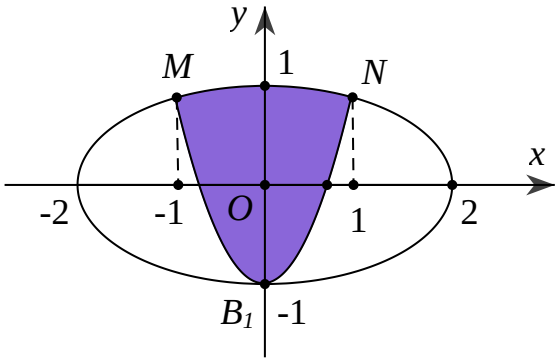
Câu 10: Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1,A_2,B_1,B_2 như hình vẽ bên. Người ta chia elip bởi parabol có đỉnh B_1, trục đối xứng B_1B_2 và đi qua các điểm M,N. Sau đó sơn phần tô đậm với giá 200.000 đồng/m^2 và trang trí đèn led phần còn lại với giá 500.000 đồng/m^2. Hỏi kinh phí sử dụng gần nhất với giá trị nào dưới đây? Biết rằng $A_1A_2=4m,B_1B_2=2m,MN=2m$.



A. 2.341.000 đồng. **B.** 2.057.000 đồng. **C.** 2.760.000 đồng. **D.** 1.664.000 đồng.

Lời giải

Chọn A



Phương trình đường Elip là: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$. Diện tích hình Elip là $S_{(E)}=\pi a.b=2\pi\left(m^2\right)$

Tọa độ giao điểm M,N là nghiệm hệ: $\begin{cases}x=\pm1\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm1\\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$.

Vậy $M\left(-1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\mathrm{N}\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Parabol (P) đối xứng qua Oy có dạng $y=ax^2+c\left(a\neq0\right)$.

Vì $B_1(0;-1),N\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\in(P)\Rightarrow\begin{cases}c=-1\\ a=\frac{\sqrt{3}}{2}+1\end{cases}\Rightarrow(P):y=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)x^2-1$.

Diện tích phần tô đậm là: $S_1=2\int_0^1\left[\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)x^2+1\right]dx$

Tính $I_1=\int_0^1\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}dx$. Đặt $\frac{x}{2}=\sin t\Rightarrow\frac{dx}{2}=\cos t dx.$ Đổi cận $\begin{cases}x=0\to t=0\\ x=1\to t=\frac{\pi}{6}\end{cases}$.

Suy ra $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1-\sin^2t}.2\cos tdt=\int_0^{\frac{\pi}{6}}2\cos^2tdt=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(1+\cos2t\right)dt=\left(t+\frac{1}{2}\sin2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Tính $I_2=\int_0^1\left[-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)x^2+1\right]dx=\left[-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)\frac{x^3}{3}+x\right]\Big|_0^1=-\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{2}{3}$.

Vậy $S_1=2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{4}{3}\ \mathrm{m}^2$.

Tổng số tiền sử dụng là: $S_1.200000+\left(S_{(E)}-S_1\right).500000\approx2.341.000$ đồng

Câu 11: Một chất điểm chuyển động thẳng với quãng đường biến thiên theo thời gian bởi quy luật $s(t)=t^3-4t^2+12$, trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Vận tốc của chất điểm đó đạt giá trị bé nhất khi t bằng bao nhiêu?

A. 2. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** 0. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn D

$v(t)=s'(t)=3t^2-8t$. $v'(t)=6t-8$. Có $v'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{4}{3}$.

t	0		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
v'		$-$	0	$+$	
v	0	$\searrow$	$-\frac{16}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{[0;+\infty)} v=v\left(\frac{4}{3}\right)=-\frac{16}{3}$.

Vậy vận tốc của chất điểm đó đạt giá trị bé nhất khi $t=\frac{4}{3}$.

Câu 12: Tính diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp trong nửa đường tròn có bán kính $10cm$.

A. $160cm^2$. **B.** $100cm^2$. **C.** $80cm^2$. **D.** $200cm^2$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $OA=x\ \ (0<x<10)$. Suy ra: $AB=2x;\ AD=\sqrt{OD^2-OA^2}=\sqrt{100-x^2}$.

Khi đó: $S_{ABCD}=S=AB.AD=2x.\sqrt{100-x^2}=2\sqrt{100x^2-x^4}$

Suy ra: $S'=\frac{200x-4x^3}{\sqrt{100x^2-x^4}}\Rightarrow S'=0\Leftrightarrow 200x-4x^3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=5\sqrt{2}\\x=-5\sqrt{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=5\sqrt{2}$

x	0		$5\sqrt{2}$		10
$S(x)$		$+$	0	$-$	
$S'(x)$		$\nearrow$	100	$\searrow$	

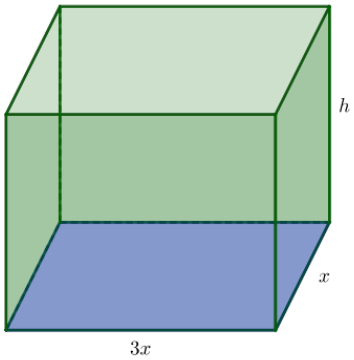
Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $ABCD$ bằng $100\,\text{cm}^2$ khi $x=5\sqrt{2}\,\text{cm}$.

Câu 13: Người ta muốn xây một cái bể hình hộp đứng có thể tích $V=18\left(m^3\right)$, biết đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp 3 lần chiều rộng và bể không có nắp. Hỏi cần xây bể có chiều cao h bằng bao nhiêu mét để nguyên vật liệu xây dựng là ít nhất?

A. $2(m)$. **B.** $\frac{5}{2}(m)$. **C.** $1(m)$. **D.** $\frac{3}{2}(m)$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $x\,(x>0)$ là chiều rộng hình chữ nhật đáy bể, suy ra chiều dài hình chữ nhật đáy bể là $3x$.

$V = h.x.3x = h.3x^2 = 18\ \ (x>0)$.

$\Rightarrow h = \dfrac{18}{3x^2} = \dfrac{6}{x^2}$,

Gọi P là diện tích xung quanh cộng với diện tích một đáy bể của hình hộp chữ nhật.

Nguyên vật liệu ít nhất khi P nhỏ nhất.

$P = 2hx + 2.h.3x + 3x^2 = 2.\dfrac{6}{x^2}.x + 2.\dfrac{6}{x^2}.3x + 3x^2 = \dfrac{48}{x} + 3x^2.$

Đặt $f(x) = \dfrac{48}{x} + 3x^2,\ (x>0)$.

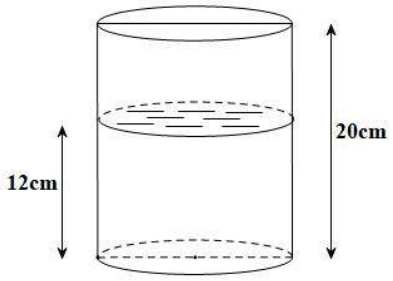
Ta có $f'(x) = \dfrac{-48}{x^2} + 6x$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-48}{x^2} + 6x = 0 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2$.

Bảng biến thiên:

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	36	↗	

Suy ra vật liệu ít nhất khi $h = \dfrac{6}{x^2} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}(m)$.

Câu 14: Một cốc hình trụ có bán kính đáy là $2cm$, chiều cao $20cm$. Trong cốc đang có một ít nước, khoảng cách giữa đáy cốc và mặt nước là $12cm$. Một con quạ muốn uống được nước trong cốc thì mặt nước phải cách miệng cốc không quá $6cm$. Con quạ thông minh mổ những viên đá hình cầu có bán kính $0,6cm$ thả vào cốc để mực nước dâng lên. Để uống được nước thì con quạ cần thả vào cốc ít nhất bao nhiêu viên đá?



A. 30. **B.** 27. **C.** 28. **D.** 29.

Lời giải

Chọn C

Gọi bán kính hình trụ là r, bán kính viên đá hình cầu là R.

Thể tích một viên đá là $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi.(0,6)^3$.

Gọi n là số viên đá con quạ thả vào cốc, n nguyên dương.

Thể tích nước cần đổ thêm vào cốc để mực nước cách miệng cốc $6cm$ là $\pi.r^2.2 = 8\pi$.

Để con quạ uống được nước thì lượng đá bỏ vào cốc phải làm mực nước dâng lên cách miệng cốc không quá $6cm$ nên ta phải có: $n.\frac{4}{3}.\pi.(0,6)^3 \geq 8\pi \Leftrightarrow n \geq \frac{24}{4.(0,6)^3} \Leftrightarrow n \geq \frac{250}{9}$.

Do n nguyên dương nên suy ra $n \geq 28$.

Vậy con quạ cần thả vào cốc ít nhất 28 viên đá.

Câu 15: Một sợi dây có chiều dài $28m$ được cắt thành hai đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất?

A. $\frac{56}{4+\pi}$. **B.** $\frac{112}{4+\pi}$. **C.** $\frac{84}{4+\pi}$. **D.** $\frac{92}{4+\pi}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi l_1, l_2 (m) lần lượt là chu vi hình vuông và hình tròn. $(0 < l_1, l_2 < 28)$

Gọi a, R (m) lần lượt là cạnh của hình vuông và bán kính của hình tròn. Khi đó ta có:

$l_1 + l_2 = 28$; $l_1 = 4a \Leftrightarrow a = \frac{l_1}{4}$; $l_2 = 2\pi R \Leftrightarrow R = \frac{l_2}{2\pi} = \frac{28 - l_1}{2\pi}$

Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là:

$S = a^2 + \pi.R^2 = \frac{l_1^2}{16} + \pi.\left(\frac{28 - l_1}{2\pi}\right)^2$, $0 < l_1 < 28$

Yêu cầu bài toán tương đương với tìm $l_1 \in (0,28)$ để S đạt giá trị nhỏ nhất. Ta có:

$S' = \frac{l_1}{8} - \left(\frac{28 - l_1}{2\pi}\right) = 0 \Leftrightarrow l_1 = \frac{112}{\pi + 4}$

Lập bảng biến thiên ta được S đạt giá trị nhỏ nhất tại $l_1 = \frac{112}{\pi + 4}$.

Câu 16: Để chuẩn bị cho đợt phát hành sách giáo khoa mới, một nhà xuất bản yêu cầu xưởng in phải đảm bảo các yêu cầu sau: Mỗi cuốn sách giáo khoa cần một trang chữ có diện tích là $384cm^2$, lề trên và lề dưới là $3\,cm$, lề trái và lề phải là $2\,cm$. Muốn chi phí sản xuất là thấp nhất thì xưởng in phải in trang sách có kích thước tối ưu nhất, với yêu cầu chất lượng giấy và mực in vẫn đảm bảo. Tìm chu vi của trang sách.

A. $82\,cm$. **B.** $100\,cm$. **C.** $90\,cm$. **D.** $84\,cm$.

Lời giải

Chọn B

Ta thấy muốn chi phí sản xuất nhỏ nhất thì kích thước tối ưu là khi diện tích mỗi trang sách phải nhỏ nhất đồng thời vẫn bảo đảm yêu cầu đề ra.

Gọi x, y thứ tự là chiều dài và chiều rộng của trang sách, đơn vị cm, điều kiện: $x > 6; y > 4$.

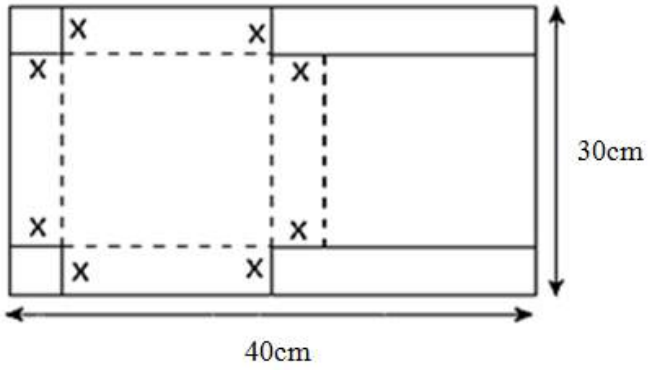
Diện tích phần chữ trên mỗi trang là:

$(x-6)(y-4)=384 \Leftrightarrow xy=4x+6y+360 \geq 2\sqrt{4x.6y}+360$.

Khi đó $xy-4\sqrt{6xy}-360\geq 0 \Rightarrow \sqrt{xy}\geq 10\sqrt{6} \Rightarrow xy\geq 600$, dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} xy=600 \\ 4x=6y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=30 \\ y=20 \end{cases}$.

Vậy chu vi trang sách khi sản xuất theo kích thước tối ưu là $2(x+y)=100\,(cm)$.

Câu 17: Với tấm nhôm hình chữ nhật có kích thước $30cm;\ 40cm$. Người ta phân chia tấm nhôm như hình vẽ và cắt bỏ một phần để được gấp lên một cái hộp có nắp. Tìm x để thể tích hộp lớn nhất.



A. $\frac{35+5\sqrt{13}}{3}cm$. **B.** $\frac{35-4\sqrt{13}}{3}cm$. **C.** $\frac{35-5\sqrt{13}}{3}cm$. **D.** $\frac{35+4\sqrt{13}}{3}cm$.

Lời giải

Chọn C

Khối hộp chữ nhật thu được có kích thước là $30-2x;\ 20-x;\ x$ với $x\in[0;15]$.

Khi đó $V=x(30-2x)(20-x)=f(x)\leq \max_{[0;15]} f(x)=f\left(\frac{35-5\sqrt{13}}{3}\right)$.

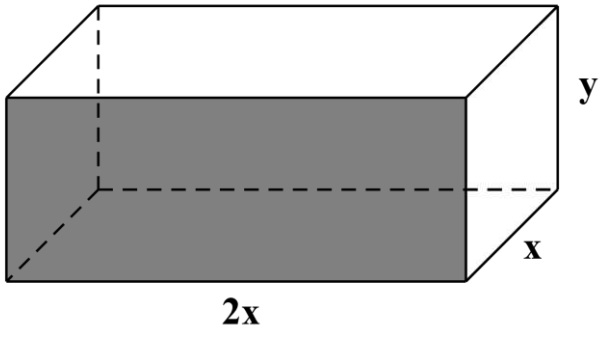
Dấu "=" đạt tại $x=\frac{35-5\sqrt{13}}{3}$.

Câu 18: Ông A dự định sử dụng hết $6,5\,m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng khối hình hộp chữ nhật chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng. Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. $2,26\,m^3$. **B.** $1,01\,m^3$. **C.** $1,33\,m^3$. **D.** $1,50\,m^3$.

Lời giải

Chọn D



Gọi chiều rông của bể cá là $x(\mathrm{m})$, chiều cao là $y(\mathrm{m})(x, y>0)$, khi đó chiều dài bể cá là $2x(\mathrm{m})$. Diên tích kính sử dụng là $S=2x^2+2xy+4xy\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Theo bài ra ta có: $2x^2+2xy+4xy=6,5 \Rightarrow y=\dfrac{6.5-2x^2}{6x}=\dfrac{13-4x^2}{12x}$.

Thể tích bể cá là $V(x)=2x^2.\dfrac{13-4x^2}{12x}=\dfrac{x\left(13-4x^2\right)}{6}\left(\mathrm{m}^3\right)$.

Ta xét hàm số $V(x)=\dfrac{x\left(13-4x^2\right)}{6}$ với $x \in\left(0;\dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)$.

Suy ra $V'(x)=\dfrac{13-12x^2}{6} \Rightarrow V'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{39}}{6}$.

Ta có $V'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $x=\dfrac{\sqrt{39}}{6}$ nên hàm số đạt cực đại tại điểm $x=\dfrac{\sqrt{39}}{6}$.

Trên khoảng $\left(0;\dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)$ hàm số $V(x)$ chỉ có một điểm cực đại nên hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=\dfrac{\sqrt{39}}{6}$.

Thể tích của bể cá có giá trị lớn nhất là $\max\limits_{\left(0;\frac{\sqrt{13}}{2}\right)} V(x)=V\left(\dfrac{\sqrt{39}}{6}\right)=\dfrac{13\sqrt{39}}{54} \approx 1,50\left(\mathrm{m}^3\right)$.

Vậy bể cá có dung tích lớn nhất bằng $1,50\ \mathrm{m}^3$.

Cách 2: Xử lý tìm giá trị lớn nhất của $V(x)$ bằng bất đẳng thức Cauchy.

Theo cách 1, ta tính được $V(x)=\dfrac{x\left(13-4x^2\right)}{6}$ với $x \in\left(0;\dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)$.

Ta có $V(x)=\dfrac{x\left(13-4x^2\right)}{6}=\dfrac{1}{6}\sqrt{\dfrac{8x^2(13-4x^2)(13-4x^2)}{8}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$8x^2(13-4x^2)(13-4x^2) \leq\left(\frac{8x^2+13-4x^2+13-4x^2}{3}\right)^3=\frac{26^3}{27}.$$

Suy ra $V(x) \le \frac{1}{6}\sqrt{\frac{26^3}{8.27}} = \frac{13\sqrt{39}}{54} \approx 1,50$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $8x^2 = 13 - 4x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{13}{12}} = \frac{\sqrt{39}}{6}$.

Vậy bể cá có dung tích lớn nhất bằng $1,50\ \ m^3$.

Câu 19: Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. 243. **B.** 144. **C.** 27. **D.** 36.

Lời giải

Chọn D

Ta có $v(t) = s'(t) = \left(-\frac{1}{3}t^3 + 6t^2\right)' = -t^2 + 12t$. Tập xác định $\mathrm{D} = \mathbb{R}$.

Vì $-t^2 + 12t = -(t-6)^2 + 36 \le 36$ với mọi $t > 0$.

Suy ra $\max\limits_{t>0} v(t) = 36$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(t-6)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 6$.

Vậy trong khoảng thời gian 9 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng 36.

Câu 20: Một bác nông dân cần xây dựng một hố ga không có nắp dạng hình hộp chữ nhật có thể tích $3200\,\mathrm{cm}^2$, tỉ số giữa chiều cao của hố và chiều rộng của đáy bằng 2. Hãy xác định diện tích của đáy hố ga để khi xây tiết kiệm nguyên vật liệu nhất?

A. $1200\,\mathrm{cm}^2$. **B.** $120\,\mathrm{cm}^2$. **C.** $160\,\mathrm{cm}^2$. **D.** $1600\,\mathrm{cm}^2$.

Lời giải

Chọn C

Gọi x, y lần lượt là chiều rộng và chiều dài của đáy hố ga; h là chiều cao của hố ga $(x, y, h > 0)$

Ta có: $h = 2x$

$$V = xyh = 2x^2 y = 3200 \Rightarrow y = \frac{1600}{x^2}$$

Diện tích bề mặt sử dụng của hố ga không nắp là $S = xy + 2xh + 2yh = 4x^2 + 5xy = 4x^2 + \frac{8000}{x}$

Đặt $f(x) = 4x^2 + \frac{8000}{x}$. Ta có $f'(x) = 8x - \frac{8000}{x^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$

Vậy S nhỏ nhất khi $x = 10 \Rightarrow y = 16$.

Diện tích đáy hố ga khi đó là $160\,\mathrm{cm}^2$.

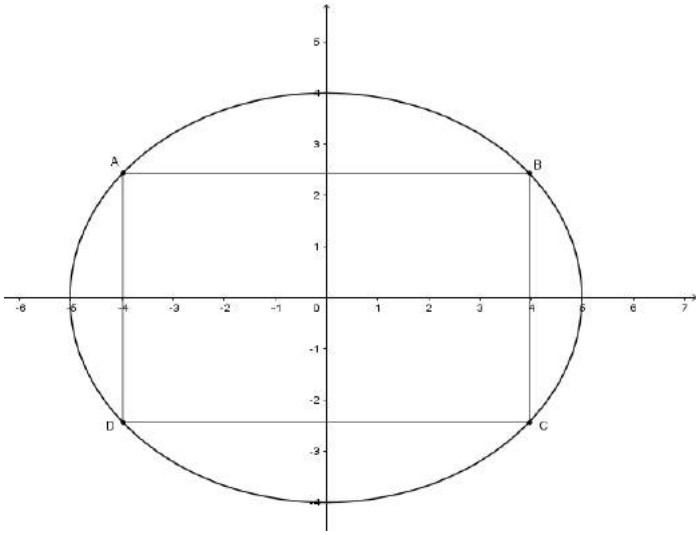
Câu 21: Ông An có một khu đất hình elip với độ dài trục lớn 10 m và độ dài trục bé 8 m. Ông An muốn chia khu đất thành hai phần, phần thứ nhất là một hình chữ nhật nội tiếp elip dùng để xây bể cá cảnh và phần còn lại dùng để trồng hoa. Biết chi phí xây bể cá là 1000000 đồng trên $1m^2$ và chi phí trồng

hoa là 1200000 đồng trên $1m^2$. Hỏi ông An có thể thiết kế xây dựng như trên với tổng chi phí thấp nhất gần nhất với số nào sau đây?

A. 67398224 đồng. **B.** 67593346 đồng. **C.** 63389223 đồng. **D.** 67398228 đồng.

Lời giải

Chọn A



Gắn mảnh vườn hình elip của ông An vào hệ trục tọa độ như hình vẽ. Độ dài trục lớn 10m và độ dài trục bé bằng 8m nên ta có $a=5$ và $b=4$.

Phương trình của elip là: $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

Diện tích của elip là: $S_{(E)}=\pi ab=20\pi$.

Hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp elip. Đặt $AB=2x\ (0<x<5)\Rightarrow AD=8\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}$.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là: $S_{ABCD}=16x\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}$.

Diện tích phần còn lại trồng hoa là: $S_{hoa}=20\pi-16x\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}$.

Tổng chi phí xây dựng là:

$$T=16000000.x\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}+1200000.\left(20\pi-16x\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}\right)=24000000\pi-3200000x\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}.$$

Mặt khác ta có: $16000000.\frac{x}{5}\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}\le 16000000.\frac{\frac{x^2}{25}+1-\frac{x^2}{25}}{2}=8000000$.

$$\Rightarrow T=24000000\pi-3200000x\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}\ge 24000000\pi-8000000=67398223.69.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{x}{5}=\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}\Leftrightarrow x=\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

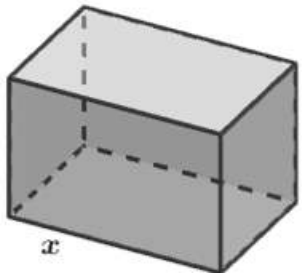
Vậy tổng chi phí thiết kế xây dựng thấp nhất gần với số 67398224.

Câu 22: Để thiết kế một chiếc bể cá không có nắp đậy hình hộp chữ nhật có chiều cao 60cm, thể tích là $96.000\,\text{cm}^3$, người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành là 70.000 đồng/m^2 và loại kính để làm mặt đáy có giá thành là 100.000 đồng/m^2. Chi phí thấp nhất để làm bể cá là

A. 283.000 đồng. **B.** 382.000 đồng. **C.** 83.200 đồng. **D.** 832.000 đồng.

Lời giải

Chọn C



Gọi $x(\text{m})$ là chiều dài của hình chữ nhật đáy $(x>0)$.

Khi đó chiều rộng là: $\dfrac{0,096}{0,6x}=\dfrac{4}{25x}$.

Khi đó diện tích mặt xung quanh là: $1,2\left(x+\dfrac{4}{25x}\right)$.

Chi phí để làm mặt xung quanh là: $70.1,2\left(x+\dfrac{4}{25x}\right)=84\left(x+\dfrac{4}{25x}\right)$.

Diện tích mặt đáy là: $x.\dfrac{4}{25x}=\dfrac{4}{25}$.

Cho phí để làm mặt đáy là: $100.\dfrac{4}{25}=16$.

Chi phí để làm bể cá thấp nhất khi và chỉ khi chi phí làm mặt bên thấp nhất

Xét hàm số $f(x)=x+\dfrac{4}{25x},x>0;f'(x)=1-\dfrac{4}{25x^2}=\dfrac{25x^2-4}{25x^2}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 25x^2-4=0\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{5}$.

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{2}{5}$		$-\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{4}{5}$	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó chi phí thấp nhất là: $84.\dfrac{4}{5}+16=83.200$ đồng.

Câu 23: Một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích bằng 48 và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chất liệu làm đáy và 4 mặt bên của hộp có giá thành gấp ba lần giá thành của chất liệu làm nắp hộp. Gọi h là chiều cao của hộp để giá thành của hộp là thấp nhất. Biết $h=\dfrac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tổng $m+n$ là

A. 12. **B.** 13. **C.** 11. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

Gọi chiều rộng của hộp là x $(x>0)$ $\Rightarrow$ Chiều dài của hình hộp là $2x$.

Thể tích của hộp là $V = x.2x.h = 48 \Leftrightarrow h = \dfrac{24}{x^2}$.

Tổng diện tích mặt đáy và 4 mặt bên của hộp là $2x^2 + 6xh = 2x^2 + 6x.\dfrac{24}{x^2} = 2x^2 + \dfrac{144}{x}$.

Diện tích nắp hộp là $2x^2$.

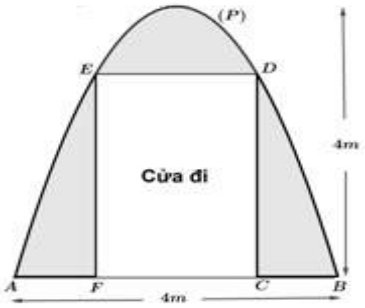
Giá thành hộp thấp nhất $\Leftrightarrow f(x) = 3\left(2x^2 + \dfrac{144}{x}\right) + 2x^2$ đạt giá trị nhỏ nhất với $x>0$.

Ta có $f(x) = 8x^2 + \dfrac{432}{x} = 8x^2 + \dfrac{216}{x} + \dfrac{216}{x} \ge 3.\sqrt[3]{8x^2.\dfrac{216}{x}.\dfrac{216}{x}} = 216$.

Vậy $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x) = 216$ xảy ra khi và chỉ khi $8x^2 = \dfrac{216}{x} \Leftrightarrow x^3 = 27 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow h = \dfrac{24}{9} = \dfrac{8}{3}$.

Vậy $m = 8;\ n = 3 \Rightarrow m + n = 8 + 3 = 11$.

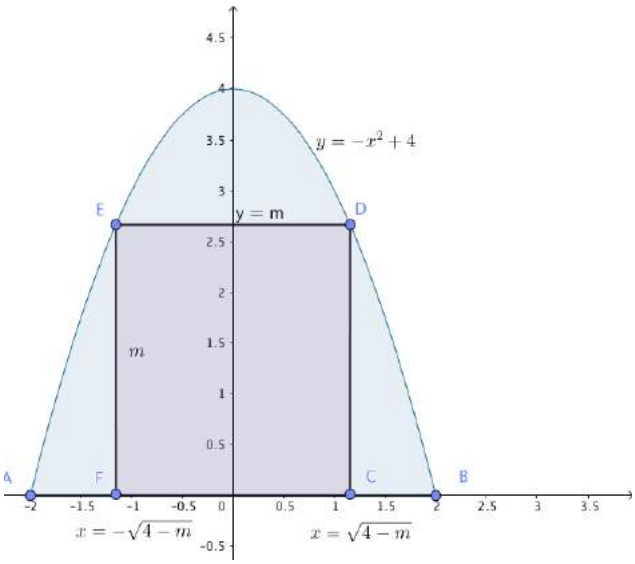
Câu 24: Một chiếc cổng có hình dạng là một Parabol (P) có kích thước như hình vẽ, biết chiều cao cổng bằng 4 m, $AB = 4$ m. Người ta thiết kế cửa đi là một hình chữ nhật $CDEF$, phần còn lại dùng để trang trí. Biết chi phí để trang trí phần tô đậm là $1.000.000$ đồng/m^2. Hỏi số tiền ít nhất dùng để trang trí phần tô đậm gần với số tiền nào dưới đây?



A. 4.450.000 đồng. **B.** 4.605.000 đồng. **C.** 4.505.000 đồng. **D.** 4.509.000 đồng.

Lời giải

Chọn D



Xét $(P): y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ có toạ độ đỉnh $(0;4)$ và qua điểm có toạ độ $(2;0)$.

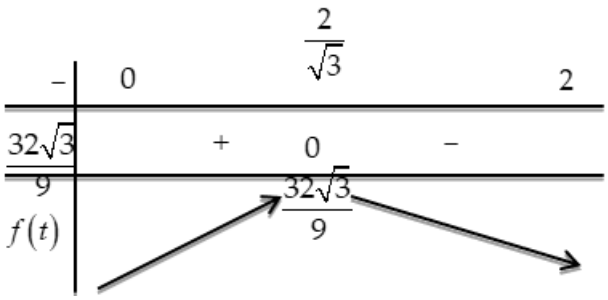
Ta có hoành độ đỉnh: $\frac{-b}{2a} = 0 \Rightarrow b = 0$; (P) qua điểm $(0;4) \Rightarrow c = 4$ và (P) qua điểm $(2;0)$ $\Rightarrow a = -1$. Suy ra: $(P): y = -x^2 + 4$

Xét đường thẳng qua E, D: $y = m$. Khi đó $E\left(-\sqrt{4-m}; m\right)$ và $D\left(\sqrt{4-m}; m\right)$ là giao điểm của (P) và đường thẳng $y = m$. Suy ra: $ED = 2\sqrt{4-m}$, $EF = m$.

Yêu cầu của bài toán đạt được khi diện tích hình chữ nhật $CDEF$ phải lớn nhất.

Ta có: $S_{CDEF} = ED.EF = 2\sqrt{4-m}.m$. Đặt $t = \sqrt{4-m} \Rightarrow t^2 = 4 - m \Rightarrow m = 4 - t^2$

Khi đó: $S_{CDEF} = f(t) = 2t\left(4 - t^2\right) = -2t^3 + 8t$; $f'(t) = -6t^2 + 8 = 0 \Rightarrow t = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$



Suy ra: $MaxS_{CDEF} = \frac{32\sqrt{3}}{9}$ khi $t = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow m = \frac{8}{3}$

Mặt khác diện tích của chiếc cổng: $S = \int_{-2}^{2} \left|-x^2 + 4\right| = \frac{32}{3}\ (m^2)$

Suy ra diện tích nhỏ nhất của phần dùng để trang trí là: $S - MaxS_{CDEF} = \frac{32}{3} - \frac{32\sqrt{3}}{9} \approx 4{,}5083\ (m^2)$

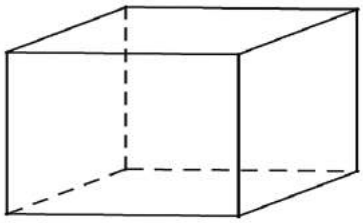
Vậy số tiền ít nhất dùng để trang trí phần tô đậm: $4{,}5083 \times 1.000.000 = 4.508.300$.

Câu 25: Một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích bằng 48 và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chất liệu làm đáy và 4 mặt bên của hộp có giá thành gấp ba lần giá thành của chất liệu làm nắp hộp. Gọi h là chiều cao của hộp để giá thành của hộp là thấp nhất. Biết $h = \frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tổng $m + n$ là

A. 12. **B.** 13. **C.** 11. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C



Gọi chiều dài, chiều rộng của hộp là $2x$ và x $(x>0)$. Khi đó, ta có thể tích của cái hộp là

$$V=2x^2.h \Rightarrow 2x^2.h=48 \Leftrightarrow x^2.h=24$$

Do giá thành làm đáy và mặt bên hộp là 3, giá thành làm nắp hộp là 1nên giá thành làm hộp là

$$L=3\left(2x^2+2xh+4xh\right)+2x^2$$

Áp dụng bất đẳng thức côsi cho ba số không âm, ta được

$$L=8x^2+9xh+9xh\geq 3\sqrt[3]{8x^2.9xh.9xh}=3\sqrt[3]{648\left(x^2h\right)^2}=216$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}8x^2=9xh\\x^2h=24\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{9h}{8}\\\dfrac{9^2}{8^2}.h^3=24\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\h=\dfrac{8}{3}\end{cases}$

Vậy $m=8$, $n=3$ và $m+n=11$.

Câu 26: Một trang trại rau sạch mỗi ngày thu hoạch được một tấn rau. Mỗi ngày, nếu bán rau với giá 30000 đồng/kg thì hết rau sạch, nếu giá bán rau tăng 1000 đồng/kg thì số rau thừa tăng thêm 20 kg. Số rau thừa này được thu mua làm thức ăn chăn nuôi với giá 2000 đồng/kg. Hỏi tiền bán rau nhiều nhất trang trại có thể thu được mỗi ngày là bao nhiêu?

A. 32400000 đồng. **B.** 34400000 đồng. **C.** 32420000 đồng. **D.** 34240000 đồng.

Lời giải

Chọn C

Gọi số lần tăng giá là $y\left(y\geq 0\right)$

Giá bán rau sau mỗi lần tăng giá là $30000+1000y$ đồng/kg.

Số rau thừa được thu mua cho chăn nuôi là $20y\left(y\leq 50\right)$ kg.

Số rau bán được trước khi thu mua cho chăn nuôi là $1000-20y$ kg.

Tổng số tiền bán rau thu được mỗi ngày là:

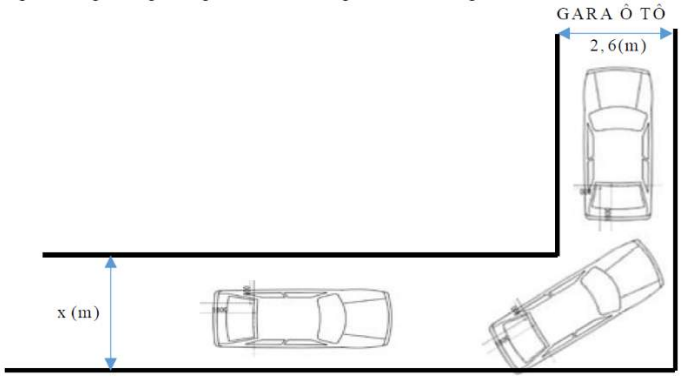
$P=\left(1000-20y\right).(30000+1000y)+20y.2000 \Leftrightarrow P=-20000y^2+440000y+30000000.$

$P=32420000-20000\left(y-11\right)^2.$

$32420000-20000\left(y-11\right)^2\leq 32420000 \Rightarrow P\leq 32420000.$

$\Rightarrow P_{\max}=324200000$ khi $y=11(N).$

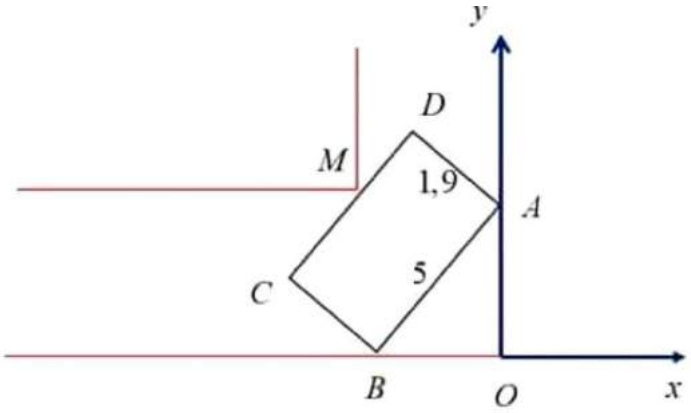
Câu 27: Hình vẽ bên dưới mô tả đoạn đường đi vào GARA Ô TÔ nhà cô Hiền. Đoạn đường đầu tiên có chiều rộng bằng $x\,(\mathrm{m})$, đoạn đường thẳng vào cổng GARA có chiều rộng $2,6\,(\mathrm{m})$. Biết kích thước xe ô tô là $5\mathrm{m}\times 1,9\mathrm{m}$. Để tính toán và thiết kế đường đi cho ô tô người ta coi ô tô như một khối hộp chữ nhật có kích thước chiều dài $5\,(\mathrm{m})$, chiều rộng $1,9\,(\mathrm{m})$. Hỏi chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên gần nhất với giá trị nào trong các giá trị bên dưới để ô tô có thể đi vào GARA được?



A. $x=3,7\,(\text{m})$. **B.** $x=2,6\,(\text{m})$. **C.** $x=3,55\,(\text{m})$. **D.** $x=4,27\,(\text{m})$.

Lời giải

Chọn A



Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ. Khi đó $M\left(-2,6\,;\,x\right)$.

Gọi $B(-a\,;0)$ suy ra $A\left(0\,;\sqrt{25-a^2}\right)$. Phương trình $AB:\dfrac{x}{-a}+\dfrac{y}{\sqrt{25-a^2}}-1=0$.

Do $CD\,//\,AB$ nên phương trình $CD:\dfrac{x}{-a}+\dfrac{y}{\sqrt{25-a^2}}-T=0$.

Mà khoảng cách giữa AB và CD bằng $1,9(m)$ nên

$$\frac{\left|T-1\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{25-a^2}}\right)^2}}=1,9\Rightarrow T=1+\frac{9,5}{a\sqrt{25-a^2}}.$$

Điều kiện để ô tô đi qua được là M,O nằm khác phía đối với bờ là đường thẳng CD.

Suy ra: $\dfrac{-2,6}{-a}+\dfrac{x}{\sqrt{25-a^2}}-1-\dfrac{9,5}{a\sqrt{25-a^2}}\ge 0\Leftrightarrow x\ge\sqrt{25-a^2}+\dfrac{9,5}{a}-\dfrac{2,6\times\sqrt{25-a^2}}{a}$

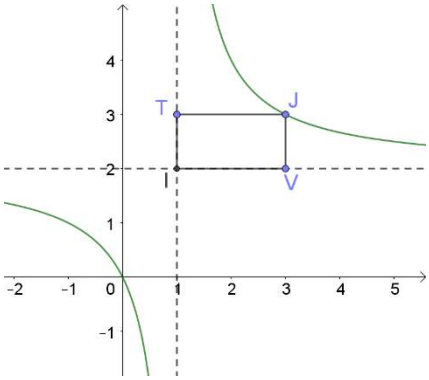
Để cho nhanh, chúng ta dùng chức năng **TABLE** trong máy tính **Casio570ES PLUS**.

$f(\mathrm{X})=\sqrt{25-X^2}+\dfrac{9,5}{X}-\dfrac{2,6\times\sqrt{25-X^2}}{X}$ với STEP = $\dfrac{5}{29}$; START = 0; END = 5.

Thấy giá trị lớn nhất của $f\left(X\right)=\sqrt{25-X^2}+\dfrac{9,5}{X}-\dfrac{2,6\times\sqrt{25-X^2}}{X}$ xấp xỉ $3,698$.

Vậy chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên gần nhất với giá trị ở câu **A.**

Câu 28: Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm J thay đổi thuộc (C) như hình vẽ bên. Hình chữ nhật $ITJV$ có chu vi nhỏ nhất bằng:



A. $2\sqrt{2}$. **B.** 6. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị (C) có tiệm cận đứng là $x=1$ và tiệm cận ngang là $y=2$

với $J\left(x;\dfrac{2x}{x-1}\right)\in(C)\Rightarrow TJ=d\left(J;\text{TCD}\right)=\left|x-1\right|, JV=d\left(J,TCN\right)=\left|\dfrac{2x}{x-1}-2\right|=\dfrac{2}{\left|x-1\right|}$

Khi đó, chu vì hình chữ nhật $ITJV$ là:

$$P=2(TJ+JV)=2\left(\left|x-1\right|+\frac{2}{\left|x-1\right|}\right)\geq 2.2\sqrt{\left|x-1\right|.\frac{2}{\left|x-1\right|}}=4\sqrt{2}$$

Dấu $"="$ xảy ra khi: $\left|x-1\right|=\dfrac{2}{\left|x-1\right|}\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1+\sqrt{2}\\x=1-\sqrt{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}J\left(1+\sqrt{2};2+\sqrt{2}\right)\\J\left(1-\sqrt{2};2-\sqrt{2}\right)\end{array}\right.$

Vậy hình chữ nhật $ITJV$ có chu vi nhỏ nhất bằng $4\sqrt{2}$.

CHƯƠNG 1

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

CHỦ ĐỀ 4 TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Đường tiệm cận ngang

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a;+\infty),(-\infty;b)$ hoặc $(-\infty;+\infty)$).

Đường thẳng $y=y_0$ là đường **tiệm cận ngang** *(hay tiệm cận ngang)* của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=y_0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=y_0$.

2. Đường tiệm cận đứng

Đường thẳng $x=x_0$ được gọi là đường **tiệm cận đứng** (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$$

Lưu ý:

Với đồ thị hàm phân thức dạng $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0;\ ad-bc\neq 0)$ luôn có tiệm cận ngang là $y=\dfrac{a}{c}$ và tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$.

3. Dấu hiệu nhận biết các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

Hàm phân thức mà nghiệm của mẫu không là nghiệm của tử có tiệm cận đứng.

Hàm phân thức mà bậc của tử $\leq$ bậc của mẫu có TCN.

Hàm căn thức dạng: $y=\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}, y=\sqrt{f(x)}-g(x), y=g(x)-\sqrt{f(x)}$ có tiệm cận ngang. (dùng liên hợp)

Hàm $y=a^x,(0<a\neq 1)$ có tiệm cận ngang $y=0$.

Hàm số $y=\log_a x,(0<a\neq 1)$ có tiệm cận đứng $x=0$.

4. Cách tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

Tiệm cận đứng: ta đi tìm nghiệm của mẫu không là nghiệm của tử.

Tiệm cận ngang: tính 2 giới hạn: $\lim\limits_{x\to+\infty} y$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty} y$

5. Một số chú ý trong quá trình tìm tiệm cận.

Nếu $x\to+\infty\Rightarrow x>0\Rightarrow\sqrt{x^2}=|x|=x$.

Nếu $x\to-\infty\Rightarrow x<0\Rightarrow\sqrt{x^2}=|x|=-x$.

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Đồ thị hàm số nào sau đây không có tiệm cận đứng

A. $y=\dfrac{3}{x}$ **B.** $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **C.** $y=\dfrac{3x-1}{x^2-2}$ **D.** $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-2}$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 2: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$ là đường thẳng

A. $x=2$. **B.** $x=-2$. **C.** $y=2$. **D.** $y=-2$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x=1$ và $x=-1$.

B. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=1$ và $y=-1$.

C. Hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=1$ và $y=-1$.

D. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 4: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2+2x-3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 5: Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-1}$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 6: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 7: Đồ thị hàm số nào dưới đây có đúng một đường tiệm cận ngang?

A. $y=\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}}$. **B.** $y=\dfrac{x^2}{2x+3}$. **C.** $y=\dfrac{3x+1}{x+\sqrt{2x^2-1}}$. **D.** $y=\dfrac{4x-2}{x^2-3x+2}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	$-\infty$ | 2	↘	-3	↗	3

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

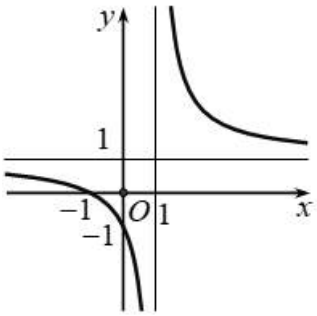
.....

.....

.....

.....

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

A. $x=1; y=-1$. **B.** $x=-1; y=-1$. **C.** $x=1; y=1$. **D.** $x=-1; y=1$.

Lời giải

……

……

……

……

……

……

……

……

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1: Mở đầu về GTLN và GTNN của hàm số

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$ và đường thẳng $y=-1$.

B. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là đường thẳng $x=1$ và đường thẳng $x=-1$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ khi đó khẳng định nào sau đây đúng?

A. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=2$.

B. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=2$.

C. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=0$.

D. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=2$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

A. Đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận ngang là các đường thẳng $x=1$ và $x=-1$

B. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=1$ và $y=-1$

D. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x=2$ và $x=-2$.

B. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=2$ và $y=-1$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-3$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=3$ và $y=-3$.

C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x=3$ và $x=-3$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x=2$ và $x=-2$.

B. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=2$ và $y=-2$.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$. Khẳng định nào sau đây là ***đúng?***

A. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=1$ và $y=-1$.

C. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $y=1$ và $y=-1$.

D. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$. Số tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=m$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số đã cho có đúng một đường tiệm cận ngang?

A. Vô số. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=m$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số đã cho có đúng một đường tiệm cận ngang?

A. Vô số. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là hai đường thẳng $x=2$ và $x=-2$.

D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là hai đường thẳng $y=2$ và $y=-2$.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận ngang l.

B. Đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng là $x=3$.

C. Đồ thị hàm số có duy nhất một đường tiệm cận ngang.

D. Đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang là $x=3$.

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(-5;-1)$ và có $\lim\limits_{x\to(-5)^+} f(x)=5$ $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=+\infty$.

Hỏi khẳng định nào dưới đây là khẳng định **đúng?**

A. Đồ thị hàm số $f(x)$ không có tiệm cận đứng.

B. Đồ thị hàm số $f(x)$ có đúng một tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-1$.

C. Đồ thị hàm số $f(x)$ có hai đường tiệm cận ngang.

D. Đồ thị hàm số $f(x)$ có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x=-5$ và $x=-1$.

Câu 14: Có bao nhiêu hàm số sau đây mà đồ thị có đúng một tiệm cận ngang

(1) $y=\dfrac{1}{x}$ (2) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-3x}}$

(3) $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ (4) $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 15: Đồ thị hàm số nào dưới đây có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=2$?

A. $y=x^2+x$. **B.** $y=\dfrac{2021}{2x+3}$. **C.** $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{2x^2+1}{x-2}$.

Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên D và tồn tại các giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-a-2$ trong đó a là số thự **C.** Để đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đúng một đường tiệm cận ngang thì a bằng

A. $a=1$. **B.** $a=-1$.

C. $a=0$. **D.** Không tồn tại a.

Câu 17: Cho hàm số $y=f\ x$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=1$ và $y=-1$.

D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x=1$ và $x=-1$.

Câu 18: Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-7}{x+2}$ có toạ độ là

A. $(-2;3)$. **B.** $(3;-2)$. **C.** $(-3;2)$. **D.** $(2;-3)$.

Câu 19: Biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một tiệm cận ngang là $y=3$. Khi đó đồ thị hàm số $y=-3f(x)+11$ có một tiệm cận ngang là

A. $y=-4$. **B.** $y=3$. **C.** $y=2$. **D.** $y=1$.

Câu 20: Nếu hàm số $y=f(x)$ thõa mãn điều kiện $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$ thì số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 21: Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right|$ là:

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 22: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-5x+4}$ có đồ thị (C). Số đường tiệm cận đứng của đồ thị (C) là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 23: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ có đường tiệm cận ngang là:

A. $y=2$. **B.** $y=0$. **C.** $y=1$. **D.** $y=-2$.

Câu 24: Đồ thị hàm số $y=f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 25: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 26: Cho hàm số $y=\dfrac{2020}{x+2021}$. Số tiệm cận của đồ thị hàm số bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 27: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận ngang?

A. $y=x^3-x-1$. **B.** $y=\sqrt{2x^2+3}$. **C.** $y=\dfrac{x^3+1}{x^2+1}$. **D.** $y=\dfrac{3x^2+2x-1}{4x^2+5}$.

Câu 28: Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+x-2}{x-2}$ là:

A. $x=2$. **B.** $x=-2$. **C.** $y=-2$. **D.** $y=2$.

Câu 29: Phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3}{x+2}$ là

A. $x=-2$. **B.** $x=0$. **C.** $x=3$. **D.** $y=0$.

Câu 30: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+6}{x-2}$ là đường thẳng

A. $x=3$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=-3$. **D.** $x=2$.

Câu 31: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2}{x-1}$ là đường thẳng :

A. $x=1$ **B.** $y=2$ **C.** $x=0$ **D.** $y=0$

Câu 32: Đồ thị hàm số nào dưới đây có đúng một đường tiệm cận ngang?

A. $y=\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}}$. **B.** $y=\dfrac{x^2}{2x+3}$. **C.** $y=\dfrac{3x+1}{x+\sqrt{2x^2-1}}$. **D.** $y=\dfrac{4x-2}{x^2-3x+2}$.

Câu 33: Tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+2x}$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 34: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-7}}{x^2+3x-4}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 35: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{(x-2)^2(x-1)}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 36: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{2-x}-x}{\sqrt{x^2+3}-2}$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 37: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 38: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{x+1}}$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 39: Hỏi đồ thị hàm số $y=\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+3}-2}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận (nếu ta chỉ tính đến các đường TCĐ và TCN)?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Dạng 2: Đường tiệm cận của đồ thị hàm số bậc nhất trên bậc nhất

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x-1}$.

A. $y=\dfrac{1}{3}$. **B.** $y=3$. **C.** $y=-1$. **D.** $y=1$.

Lời giải

.....

.....

Câu 2: Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+4}{x-2}$ là

A. $x=2$. **B.** $y=2$. **C.** $x=-2$. **D.** $y=-2$.

Lời giải

.....

.....

Câu 3: Phương trình đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{2-x}$ lần lượt là

A. $x=2; y=-1$. **B.** $x=-2; y=1$. **C.** $x=1; y=2$. **D.** $x=2; y=1$.

Lời giải

.....

.....

Câu 4: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là:

A. $x=1$ và $y=-3$. **B.** $x=2$ và $y=1$. **C.** $x=-1$ và $y=2$. **D.** $x=1$ và $y=2$.

Lời giải

.....

.....

.....

Câu 5: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

.....

.....

.....

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Đường thẳng nào sau đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-2}$?

A. $x=2$. **B.** $x=-2$. **C.** $y=1$. **D.** $y=-1$.

Câu 2: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ là

A. $x=1$. **B.** $x=-1$. **C.** $y=-1$. **D.** $y=2$.

Câu 3: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x-3}{2-x}$ là đường thẳng có phương trình:

A. $y=\dfrac{5}{2}$. **B.** $y=-5$. **C.** $x=-5$. **D.** $x=2$.

Câu 4: Đường thẳng nào dưới đây là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{2x+1}$?

A. $y=\dfrac{1}{2}$. **B.** $y=-\dfrac{1}{2}$. **C.** $x=-\dfrac{1}{2}$. **D.** $x=\dfrac{1}{2}$.

Câu 5: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3}{x-2}$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 6: Đường thẳng nào sau đây là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x-1}{x+2}$?

A. $y=5$. **B.** $x=5$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-2$.

Câu 7: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+2}{x-2}$ là đường thẳng có phương trình

A. $y=\dfrac{3}{2}$. **B.** $y=-\dfrac{2}{3}$. **C.** $y=3$. **D.** $y=2$.

Câu 8: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ có đồ thị (C), tiệm cận đứng của đồ thị (C) là đường thẳng có phương trình

A. $x=1$. **B.** $x=2$. **C.** $y=1$. **D.** $y=2$.

Câu 9: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{1-x}$ có phương trình là

A. $x=1$. **B.** $y=2$. **C.** $y=-2$. **D.** $x=-2$.

Câu 10: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình

A. $x=2$. **B.** $y=-2$. **C.** $x=1$. **D.** $y=2$.

Câu 11: Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ là

A. $x=1$. **B.** $y=-2$. **C.** $x=2$. **D.** $y=2$.

Câu 12: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ là đường thẳng có phương trình

A. $y=1$. **B.** $y=-1$. **C.** $y=2$. **D.** $y=-2$.

Câu 13: Đồ thị hàm số nào sau đây có đường tiệm cận đứng là $x=1$ và tiệm cận ngang là $y=2$?

A. $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{x+3}{x-2}$. **C.** $y=x^3-3x^2+2$. **D.** $y=x^4-5x^2+4$.

Câu 14: Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$?

A. $x=2$. **B.** $y=1$. **C.** $x=1$. **D.** $y=2$.

Câu 15: Tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-4}{x-1}$.

A. $y=1$. **B.** $x=1$. **C.** $y=3$. **D.** $x=3$.

Câu 16: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-2x}{x-1}$ là

A. $y=1$. **B.** $y=2$. **C.** $y=-2$. **D.** $x=1$.

Câu 17: Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-5}{x-1}$.

A. $y=5$. **B.** $y=1$. **C.** $x=1$. **D.** $x=5$.

Câu 18: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình

A. $x=1$. **B.** $x=2$. **C.** $x=-1$. **D.** $y=1$.

Câu 19: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+2}{x-2}$ là đường thẳng có phương trình

A. $x=2$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=3$. **D.** $x=-2$.

Câu 20: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ là đường thẳng có phương trình nào sau đây?

A. $y=2$. **B.** $y=-1$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-1$.

Câu 21: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x-3}$ là

A. $x=-1$. **B.** $x=3$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-3$.

Câu 22: Đường thẳng nào dưới đây là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-1}{-x-1}$.

A. $y=1$. **B.** $x=3$. **C.** $y=-3$. **D.** $x=1$.

Câu 23: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2022}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình

A. $x=0$. **B.** $y=2022$. **C.** $x=1$. **D.** $y=0$.

Câu 24: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+2}{x-2}$ là đường thẳng có phương trình

A. $y=2$. **B.** $y=-1$. **C.** $y=3$. **D.** $y=-2$.

Câu 25: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ là

A. $y=-1.$ **B.** $x=1.$ **C.** $y=2.$ **D.** $x=\dfrac{-1}{2}.$

Câu 26: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx-8}{x+2}$ có hai đường tiệm cận.

A. $m\neq 4..$ **B.** $m\neq -4..$ **C.** $m=4..$ **D.** $m=-4..$

Câu 27: Tìm tổng tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x-m}$ có hai đường tiệm cận tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 5.

A. $2.$ **B.** $4.$ **C.** $0.$ **D.** $5.$

Câu 28: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+2},$ tổng số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là

A. $1.$ **B.** $2.$ **C.** $3.$ **D.** $0.$

Câu 29: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{(m+1)x-3}{x-m+3}$ có tiệm cận ngang $y=-2$ thì có tiệm cận đứng có phương trình:

A. $y=-3.$ **B.** $x=6.$ **C.** $x=0.$ **D.** $x=-6.$

Câu 30: Đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-x}{-x+2}$ có phương trình lần lượt là

A. $x=1;y=2.$ **B.** $x=2;y=\dfrac{1}{2}.$ **C.** $x=2;y=-1.$ **D.** $x=2;y=1.$

Câu 31: Cho hàm số $y=\dfrac{ax-2}{cx+d}$ với $a,b,c,d\in R$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'	$+$		$+$		
y	3	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	3

Giá trị nguyên âm lớn nhất mà c có thể nhận là

A. $-3\cdot$ **B.** $-2\cdot$ **C.** $-4\cdot$ **D.** $-1\cdot$

Câu 32: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{2x+1}$ là đường thẳng có phương trình

A. $y=-\dfrac{1}{2}.$ **B.** $x=-\dfrac{1}{2}.$ **C.** $y=\dfrac{1}{2}.$ **D.** $x=\dfrac{1}{2}.$

Câu 33: Biết rằng đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận đứng là $x=2$ và tiệm cận ngang là $y=3$. Hiệu $a-2b$ có giá trị là

A. $0\cdot$ **B.** $5.$ **C.** $1.$ **D.** $V=4.$

Câu 34: Đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2-x}{x-1}$ lần lượt là:

A. $x=-1;y=-1$ **B.** $x=1;y=2$ **C.** $x=-1;y=2$ **D.** $x=1;y=-1$

Câu 35: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{x^2-4}$ là đường thẳng có phương trình

A. $x=-\dfrac{1}{2}$. **B.** $x=\pm 2$. **C.** $x=4$. **D.** $x=2$.

Câu 36: Gọi I là giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+2}$. Toạ độ điểm I là

A. $I(2;1)$. **B.** $I(-2;2)$. **C.** $I(-2;-1)$. **D.** $I(-2;1)$.

Câu 37: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{3-2x}$. Hàm số có tiệm ngang và tiệm cận đứng là:

A. $y=\dfrac{2}{3};x=1$. **B.** $y=-1;x=\dfrac{2}{3}$. **C.** $y=-1;x=\dfrac{3}{2}$. **D.** $y=\dfrac{2}{3};x=\dfrac{3}{2}$.

Câu 38: Đồ thị $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng

A. $x=1$. **B.** $y=2$. **C.** $y=1$. **D.** $x=2$.

Câu 39: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{4x+1}{mx-1}$ **không** có tiệm cận đứng?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** Vô số.

Câu 40: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{4x+1}$ là đường thẳng có phương trình:

A. $y=4$. **B.** $y=1$. **C.** $y=\dfrac{1}{4}$. **D.** $y=-1$.

Câu 41: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x+1}$ là đường thẳng có phương trình:

A. $x=1$. **B.** $y=-1$. **C.** $y=0$. **D.** $x=-1$.

Câu 42: Phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+4}{3x}$ là

A. $x=2$. **B.** $x=\dfrac{2}{3}$. **C.** $x=0$. **D.** $x=3$.

Câu 43: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x-4}$ là đường thẳng có phương trình

A. $y=\dfrac{1}{2}$. **B.** $y=2$. **C.** $x=\dfrac{1}{2}$. **D.** $y=2$.

Câu 44: Gọi S là tập hợp các số thực m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+3}{x^2-2mx+9}$ có đúng hai đường tiệm cận. Tính tổng các phần tử của S.

A. -3. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 45: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+m}{mx+1}$ **không** có đường tiệm cận đứng?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 46: Giá trị m nào dưới đây làm cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{4mx+3m}{x-2}$ có đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 2020 ?

A. $m=505$. **B.** $m=1010$. **C.** $m=\dfrac{505}{2}$. **D.** $m=\dfrac{505}{4}$.

Câu 47: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{|2x-1|-3}{x-1}$

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 48: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+4}{x-m}$ có tiệm cận đứng.

A. $m>-2$. **B.** $m\neq -2$. **C.** $m<-2$. **D.** $m=-2$.

Câu 49: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{m^2x-2}{4x-m}$ đi qua điểm $A\left(\dfrac{-1}{2};1\right)$?

A. 2. **B.** 0 **C.** 3. **D.** 1.

Câu 50: Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right|$ là:

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Dạng 3: Đường tiệm cận của đồ thị hàm số phân thức hữu tỷ

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-5x+4}$ có đồ thị (C). Số đường tiệm cận đứng của đồ thị (C) là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 2: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ có đường tiệm cận ngang là:

A. $y=2$. **B.** $y=0$. **C.** $y=1$. **D.** $y=-2$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Đồ thị hàm số $y=f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 4: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 5: Cho hàm số $y=\dfrac{2020}{x+2021}$. Số tiệm cận của đồ thị hàm số bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 6: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận ngang?

A. $y=x^3-x-1$. **B.** $y=\sqrt{2x^2+3}$. **C.** $y=\dfrac{x^3+1}{x^2+1}$. **D.** $y=\dfrac{3x^2+2x-1}{4x^2+5}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 7: Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+x-2}{x-2}$ là:

A. $x=2$. **B.** $x=-2$. **C.** $y=-2$. **D.** $y=2$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 8: Phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3}{x+2}$ là

A. $x=-2$. **B.** $x=0$. **C.** $x=3$. **D.** $y=0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 9: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+6}{x-2}$ là đường thẳng

A. $x=3$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=-3$. **D.** $x=2$.

Lời giải

.....

……

……

……

……

……

……

……

Câu 10: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2}{x-1}$ là đường thẳng :

A. $x=1$ **B.** $y=2$ **C.** $x=0$ **D.** $y=0$

Lời giải

……

……

……

……

……

……

……

……

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x-3}$ là

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 2: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số: $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2-x-2}$

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 3: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2021}{x^2-2}$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 4: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2-x-2}$ là

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 5: Cho hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x^2-2}$. Đồ thị hàm số đã cho có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 6: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x}{x^2-6x+9}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 7: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 8: Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2x}{x^2-4}$.

A. $x=\pm 2$. **B.** $x=-2$. **C.** $y=\pm 2$. **D.** $y=1$.

Câu 9: Số tất cả các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2+1}{x^2-3}$ là.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 10: Tổng số các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{4x^2-4x-8}{(x-2)(x+1)^2}$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 11: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-m}$ không có tiệm cận đứng?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 12: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3-9x}{x^3-x^2-5x-3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 13: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx^2-1}{x^2-3x+2}$ có đúng 2 đường tiệm cận?

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 14: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-m}$ không có tiệm cận đứng?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 15: Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in[-10;10]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{2x^2+6x-m-3}$ có hai đường tiệm cận đứng?

A. 19. **B.** 15. **C.** 17. **D.** 18.

Câu 16: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^3-x^2-x+1}$ là

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 17: Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 18: Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}$.

A. 2 **B.** 3 **C.** 0 **D.** 1

Câu 19: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ có mấy tiệm cận.

A. 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 0

Câu 20: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-8x+m}$ có 3 đường tiệm cận?

A. 14. **B.** 8. **C.** 15. **D.** 16.

Câu 21: Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x^3-3mx^2+\left(2m^2+1\right)x-m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2020;2020]$ để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận?

A. 4039. **B.** 4040. **C.** 4038. **D.** 4037.

Câu 22: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+m}{x^2-3x+2}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A. $m=-1$ **B.** $m\in\{1;4\}$ **C.** $m=4$ **D.** $m\in\{-1;-4\}$

Câu 23: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\dfrac{x+1}{x^2-2mx+4}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị có ba đường tiệm cận

A. $m>2$ **B.** $\begin{cases} m<-2 \\ m\neq -\dfrac{5}{2} \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right. \\ m\neq -\dfrac{5}{2} \end{cases}$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$

Câu 24: Biết rằng đồ thị của hàm số $y=\dfrac{(n-3)x+n-2017}{x+m+3}$ (m,n là các số thực) nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung là tiệm cận đứng. Tính tổng $m+n$.

A. 0 **B.** -3 **C.** 3 **D.** 6

Câu 25: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$. Tìm a,b để đồ thị hàm số có $x=1$ là tiệm cận đứng và $y=\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang.

A. $a=-1;b=2$. **B.** $a=4;b=4$. **C.** $a=1;b=2$. **D.** $a=-1;b=-2$.

Câu 26: Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in[-10;10]$ sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{2x^2+6x-m-3}$ có hai đường tiệm cận đứng?

A. 19. **B.** 15. **C.** 17. **D.** 18.

Câu 27: Tổng các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2+2(m-1)x+m^2-2}$ có đúng một tiệm cận đứng.

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** -3. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 28: Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x^3 \quad 3mx^2 \mid 2m^2 \nmid 1\ x \quad m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $-6;6$ của tham số m để đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận?

A. 12. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 11.

Câu 29: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2+3x+m}{x-m}$ không có tiệm cận đứng.

A. $m=1$. **B.** $m>1$. **C.** $m=1$ và $m=0$. **D.** $m\neq 0$.

Câu 30: Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to\cdot\cdot\cdot} f(x)=2019m$, $\lim\limits_{x\to\cdot\cdot\cdot} f(x)=2020m^4$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị của m để đồ thị của hàm số $y=f(x)$ có duy nhất một tiệm cận ngang?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 31: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{6x-3}{\left(mx^2-6x+3\right)\left(9x^2+6mx+1\right)}$ có đúng 1 đường tiệm cận?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Câu 32: Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{mx^2-2x+4}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 33: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-(2m+1)x+m^2-3}$ có đúng hai đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 34: Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2-2x+m}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A. -4. **B.** -2. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 35: Tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x+m}$ có hai tiệm cận đứng là

A. $\begin{cases}m<1\\ m\neq -8\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}m\neq 1\\ m\neq -8\end{cases}$. **C.** $m<1$. **D.** $\begin{cases}m>1\\ m\neq 8\end{cases}$.

Câu 36: Tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x+m}$ có hai tiệm cận đứng là

A. $\begin{cases}m<1\\ m\neq -8\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}m\neq 1\\ m\neq -8\end{cases}$. **C.** $m<1$. **D.** $\begin{cases}m>1\\ m\neq 8\end{cases}$.

Câu 37: Gọi S là tập hợp các số thực m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+3}{x^2-2mx+9}$ có đúng hai tiện cận. Tính tổng các phần tử của S.

A. -3. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 38: Xác định m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-(2m+3)x+(m+2)}{x+1}$ không có đường tiệm cận đứng.

A. $m=-1$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=2$.

Câu 39: Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{mx^2+4x}$ có một đường tiệm cận đứng và một đường tiệm cận ngang. Tổng các phần tử của S bằng

A. 4. **B.** -4. **C.** -6. **D.** 2.

Câu 40: Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2}{(x-2)(x^2+2mx-m)}$ có 2 đường tiệm cận đứng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 41: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx^2-1}{x^2-3x+2}$ có đúng 2 đường tiệm cận?

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 42: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2+10x+m}$ có 3 đường tiệm cận?

A. 24. **B.** 10. **C.** 25. **D.** 23.

Câu 43: Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-2mx+1}$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-10;10)$ để đồ thị hàm

số có hai tiệm cận đứng $x=a, x=b$ sao cho $a<3<b$.

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 44: Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-mx+1}$ có đúng ba đường tiệm cận.

A. $-2<m<2$. **B.** $\begin{cases} m>2 \\ \begin{cases} m<-2 \\ m\neq -\dfrac{5}{2} \end{cases} \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} m<-2 \\ m>2 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} m<-2 \\ \begin{cases} m>2 \\ m\neq \dfrac{5}{2} \end{cases} \end{cases}$.

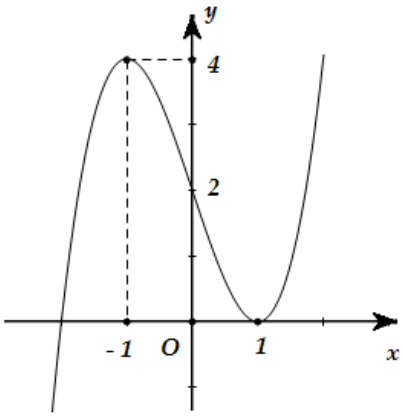
Câu 45: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{(x-m)(x^2-n^2)}$ có đồ thị (C), với m và n là hai tham số nguyên. Hỏi có tất cả bao nhiêu bộ số $(m;n)$ để (C) có đúng 2 đường tiệm cận (nếu chỉ xét TCĐ và TCN)?

A. 5. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 11.

Câu 46: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-|x|-2}$ có tất cả bao nhiêu tiệm cận?

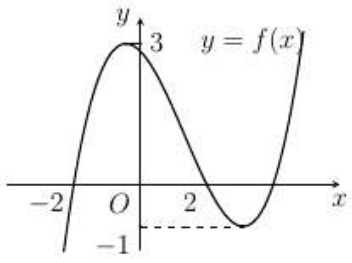
A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 47: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x^2-1)(x-1)}{f^2(x)-4f(x)}$ bằng



A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 48: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{1}{|3f(x^3-3x)|-m}$ có 8 tiệm cận đứng?

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 3.

Dạng 4: Đường tiệm cận của đồ thị hàm số căn thức

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

.....

Câu 2: Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{(2x-1)\sqrt{x^2+1}}{x^2-1}$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2

Lời giải

.....

Câu 3: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{2-x}-x}{\sqrt{x^2+3}-2}$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

.....

Câu 4: Tổng số đường TCĐ và TCN của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x\left(\sqrt{x^2+3}+x-1\right)}{x^2-2x-3}$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{x+1}}$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 6: Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{|x+1|}{\sqrt{x^2+3}-2}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận (nếu ta chỉ tính đến các đường TCĐ và TCN)?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 7: Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{1+\sqrt{x+1}}{x^2-2x-m}$ có đúng hai tiệm cận đứng là

A. $[-1;3]$. **B.** $(-1;3]$. **C.** $(-1;3)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

Lời giải

……

……

……

……

……

……

Câu 8: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-3x-10}}{x-2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

……

……

……

……

……

……

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-2}+\sqrt{9-x}}{\sqrt{x-1}}$ là:

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 2: Đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau có tiệm cận đứng?

A. $y=\dfrac{1}{x^2+x+1}$. **B.** $y=\dfrac{1}{x^2+1}$. **C.** $y=\dfrac{1}{x^4+1}$. **D.** $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Câu 3: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2+8x+15}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 0.

Câu 4: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{2-x}}{x^2-4x+3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 5: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}{x^2+2x-8}$ có tổng số bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 6: Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)=\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}$ có số đường tiệm cận đứng là bao nhiêu?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 7: Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+15}-4}{x^2-x}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 8: Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-2}+\sqrt{9-x}}{\sqrt{x-1}}$ là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 9: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-3x+2}$

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 10: Tổng số đường tiệm cận ngang và đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x-3}$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 11: Có bao nhiêu số nguyên $m\in\left(-2021;2021\right)$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-m}}{x-2}$ có tiệm cận đứng?

A. 2019. **B.** 2023. **C.** 2022. **D.** 2021.

Câu 12: Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 13: Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-1}+1}{5x^2-3x-2}$ là

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 14: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-2x-\sqrt{x+10}}{x^2-2x-3}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 15: Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x^2+x}$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 16: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-4}$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 17: Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 18: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 19: Cho đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x+1}$, hỏi (C) có bao nhiêu đường tiệm cận

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 20: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-8}}{x^2+4x-5}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 21: Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-3x+2}$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 22: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{\sqrt{4-x^2}}$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 23: Đường thẳng nào dưới đây là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{2x}+1}{x+2}$?

A. $y=0$. **B.** $y=\sqrt{2}$. **C.** $y=2$. **D.** $y=1$.

Câu 24: Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x(4x-6)}-2}{x-2}$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 25: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{10-\sqrt{2x-3}}{x^2-3x+2}$ là

A. $x=1;x=2$. **B.** $x=2;y=0$. **C.** $x=2;x=\dfrac{3}{2}$. **D.** $x=2$.

Câu 26: Cho hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2+2x-3}$. Tìm số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Câu 27: Số tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x(4x+6)}-2}{x+2}$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 28: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2}$ là

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 29: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-5}}{x^2-5x+6}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 30: Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 31: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $[-10;10]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{(x-1).\sqrt{x^2+3x}}{x^2+(m+1)x-m-2}$ có đúng ba đường tiệm cận?

A. 19. **B.** 18. **C.** 17. **D.** 20.

Câu 32: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $[-10;10]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{(x-1)\sqrt{x^2+3x}}{x^2+(m+1)x-m-2}$ có đúng ba đường tiệm cận?

A. 19. **B.** 18. **C.** 17. **D.** 20.

Câu 33: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, biết hàm số đạt cực đại tại $x=3$ và đạt cực tiểu tại $x=-2$. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{(x-1)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{f(x)-f(1)}}$

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 34: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{1+\sqrt{-2x^2+9x-4}}{\sqrt{\left(1-m^3\right)x^3+3x^2+3x+1}}$ (với m là tham số) có đúng một đường tiệm cận.

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 35: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$ có tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng là

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 36: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 37: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{2020+2021\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-(1-m)x+m+2}}$ có đúng ba đường tiệm cận.

A. $m<-2$. **B.** $2<m<3$.

C. $-2<m<-1$.` **D.** $m<-2$ hoặc $m>-1$.

Câu 38: Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-2021;2021)$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-m}}{x-2}$ có tiệm cận đứng?

A. 2019. **B.** 2023. **C.** 2022. **D.** 2021.

Câu 39: Tìm số giá trị nguyên thuộc đoạn $[-1000;1000]$ của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2+2x-m}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A. 909. **B.** 908. **C.** 907. **D.** 906.

Câu 40: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2021;2021]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-2x+m}}$ có hai đường tiệm cận đứng?

A. 2020. **B.** 2021. **C.** 2022. **D.** 2019.

Câu 41: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$ có đồ thị là (C). Xác định phương trình các đường tiệm cận đứng của (C).

A. $x=2$. **B.** $x=3$. **C.** $x=2$ và $x=3$. **D.** $x=\dfrac{1}{2}$ và $x=3$.

Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$; $f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=3$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Số tiệm cận của hàm số $h(x)=\dfrac{\sqrt{5}}{f(x)}+\dfrac{2022\sqrt{x+1}}{x^2+15}$ là

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 43: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 44: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số thực m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-5x}{\sqrt{9-3mx^2}}$ có hai đường tiệm cận ngang.

A. $m\in\mathbb{R}$. **B.** $\nexists m$. **C.** $m\in(0;+\infty)$. **D.** $m\in(-\infty;0)$.

Câu 45: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm

số $y=\dfrac{\sqrt{x-1}+2022}{\sqrt{x^2-2mx+m+2}}$ bằng 3.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x-1}+2022}{\sqrt{x^2-2mx+m+2}}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x-1}+2022}{\sqrt{x^2-2mx+m+2}}$ không tồn tại vì $x\ge 1$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $y=0$ nên phải có hai tiệm cận đứng để tổng số tiệm cận là 3.

Mặt khác, $x=a$ là tiệm cận đứng $\Leftrightarrow \sqrt{a-1}+2022$ tồn tại và $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x^2-2mx+m+2}=0$

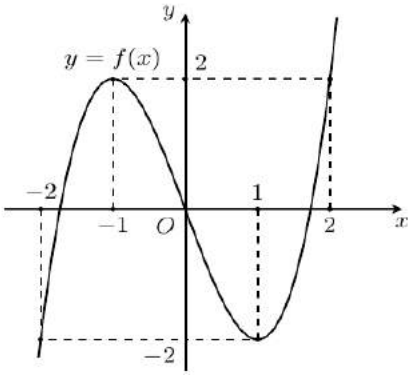
Do đó, $f(x)=x^2-2mx+m+2$ có 2 nghiệm phân biệt lớn hơn hoặc bằng 1 $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ a.f\ 1\ >0\\ \dfrac{S}{2}>1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-m-2>0\\ 3-m>0\\ m>1\end{cases}\Leftrightarrow 2<m\le 3.$

Câu 46: Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[-10;10]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{(x-1)\sqrt{x^2+3x}}{x^2+(m+1)x-m-2}$ có đúng 2 đường tiệm cận?

A. 19. **B.** 18. **C.** 17. **D.** 2.

Câu 47: Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Với giá trị nào của m thì hàm số $g(x)=\dfrac{\sqrt{m-x}}{f^2(x)-2f(x)}$ có 5 tiệm cận đứng?



A. $m>2$. **B.** $m<2$. **C.** $m\le 2$. **D.** $m\ge 2$.

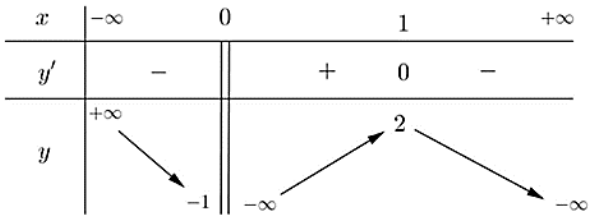
Câu 48: Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-2mx+2m^2-3m+3}}{x^3-3x^2-m}$ có ít nhất một tiệm cận đứng tiếp xúc với đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+2)^2=9$. Tính tổng các phần tử của tập S.

A. 6. **B.** −4. **C.** 2. **D.** 5.

Dạng 5: Tìm đường tiệm cận của đồ thị hàm số dựa vào đồ thị, BBT

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau:



Tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

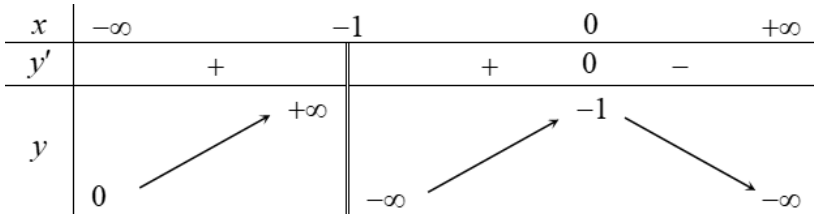
.....

.....

.....

.....

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, liên tục trên các khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?



A. Đường thẳng $x=0$ và $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

B. Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

C. Đồ thị hàm số có duy nhất đường tiệm cận đứng là $x=0$.

D. Đồ thị hàm số có duy nhất đường tiệm cận đứng là $x=-1$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	‖ $-\infty$	↘	-3	↗	3

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

……

……

……

……

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	1	↘	‖ $-\infty$	↘	$+\infty$ ↘ 1

Trong các mệnh đề sau về hàm số $y=f(x)$, mệnh đề nào đúng?

A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$. **B.** Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. **D.** Hàm số có một điểm cực trị.

Lời giải

……

……

……

……

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$+$	
y	0	↗	2	↘	‖ $-\infty$	↗	3 ↗ 5

A. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y=0$ và $y=5$ và tiệm cận đứng là $x=1$

B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 5.

C. Giá trị cực đại của hàm số là $y_{CD}=5$.

D. Giá trị cực tiểu của hàm số là $y_{CT}=3$.

✍ Lời giải

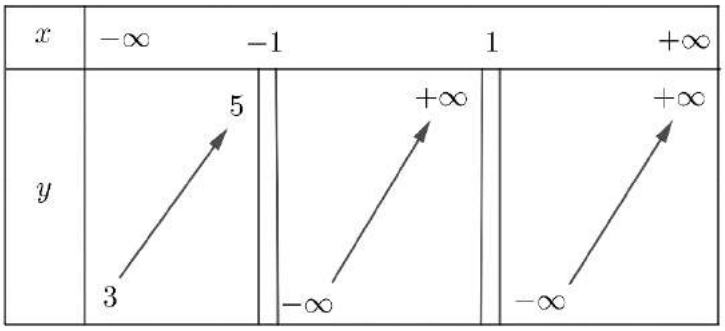
.....

.....

.....

.....

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, có bảng biến thiên như hình vẽ:



Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

✍ Lời giải

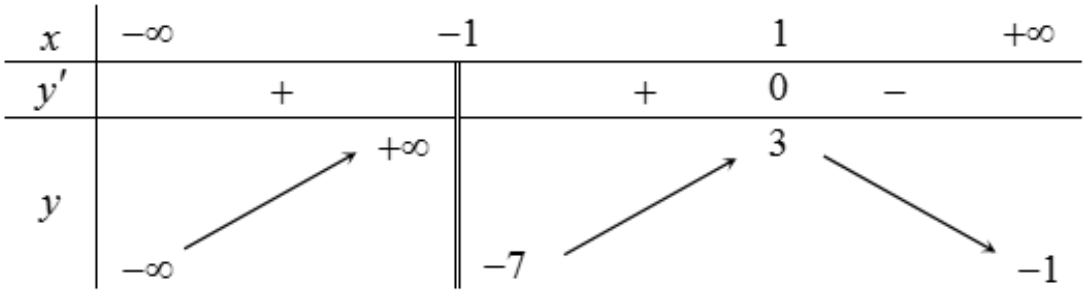
.....

.....

.....

.....

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ có xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ liên tục trên các khoảng xác định của nó và có bảng biến thiên như hình vẽ



Tổng số đường tiệm cậm đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

✍ Lời giải

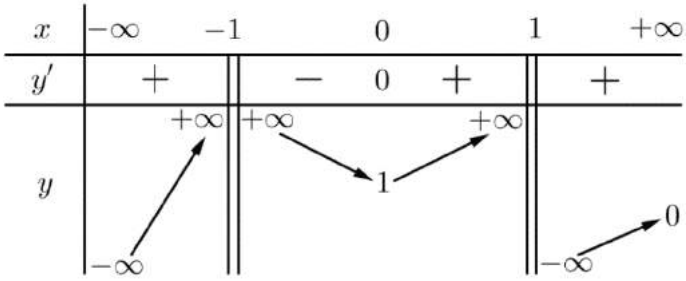
…… ……

…… ……

…… ……

…… ……

Câu 8: Hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, có bảng biến thiên như sau:



Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{1}{f(x)-2}$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

✍ Lời giải

…… ……

…… ……

…… ……

…… ……

…… ……

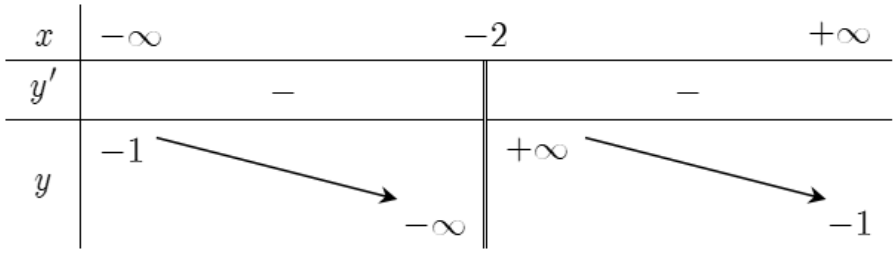
…… ……

…… ……

…… ……

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

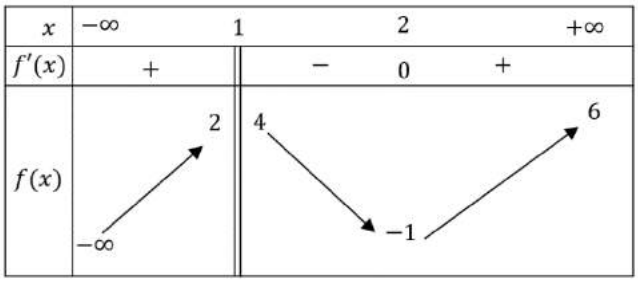
Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ và liên tục trên mỗi khoảng xác định. Hàm số có bảng biến thiên như hình vẽ sau



Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

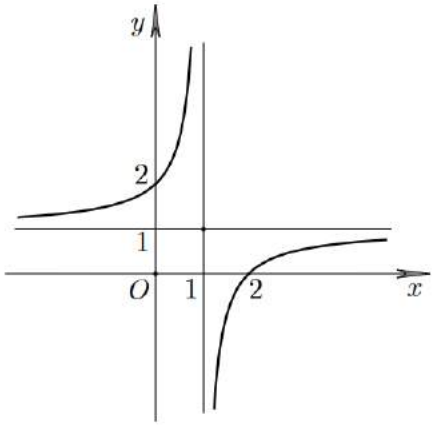
Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:



Tổng số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là:

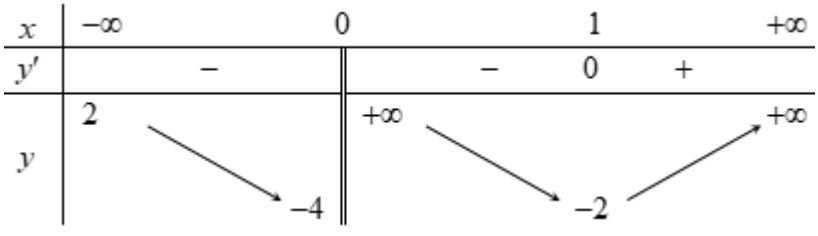
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 3: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq 0;ac\neq 0)$ cso đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tìm phương trình đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.



A. $x=1,y=1$. **B.** $x=-1,y=1$. **C.** $x=1,y=2$. **D.** $x=2,y=1$.

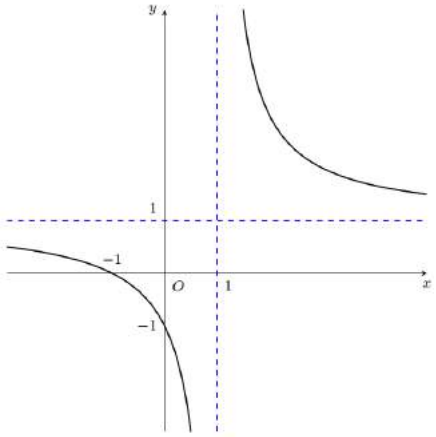
Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số lần lượt là



A. $x=-1; y=1$. **B.** $x=1; y=1$. **C.** $x=-1; y=-1$. **D.** $x=1; y=-1$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$-$				$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0		0	$\nearrow$	$-\infty$

Tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$		$-$	
y	2	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	2
		$-\infty$			

Tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho lần lượt là

A. $x=1, y=2$. **B.** $x=2, y=1$. **C.** $x=2, y=2$. **D.** $x=1, y=1$..

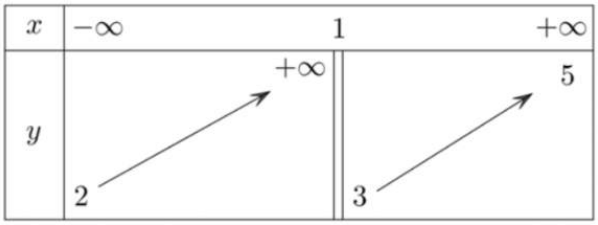
Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	3	$\nearrow$	$+\infty$	$\nearrow$	3
			$-\infty$		

A. $y=2$. **B.** $y=3$. **C.** $x=2$. **D.** $x=3$.

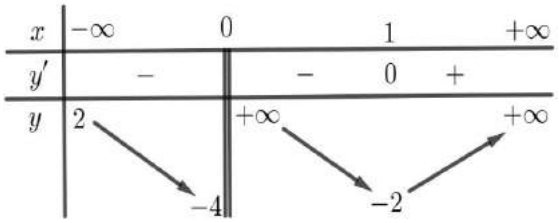
Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên ở hình vẽ dưới đây. Tổng số đường tiệm cận ngang và

đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là



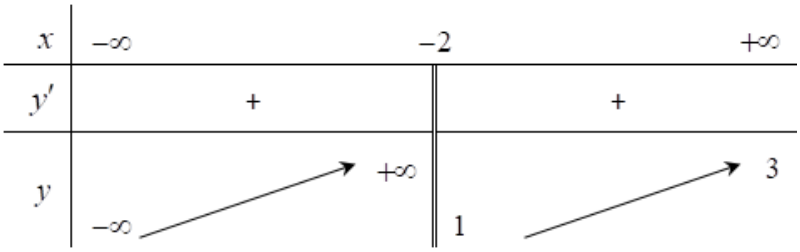
A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau. **Tổng số** tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là



A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

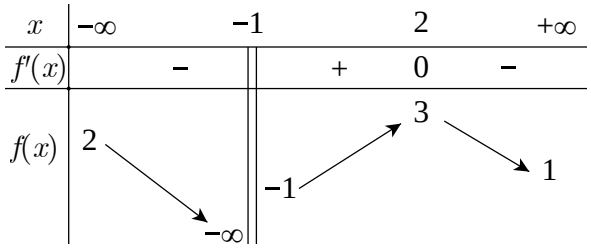
Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là:

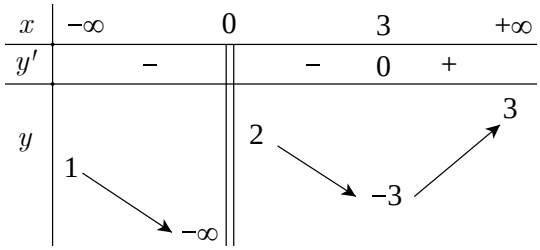
A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là



A. $x=1$. **B.** $y=-1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-1$.

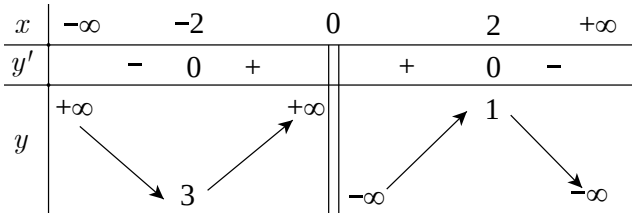
Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ có báng biến thiên như sau:



Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

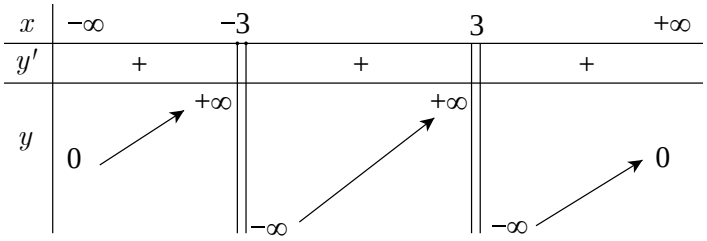
Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên:



Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là đường thẳng có phương trình

A. $x=-2$. **B.** $x=0$. **C.** $x=2$. **D.** $x=3$.

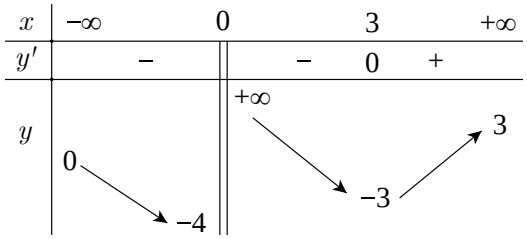
Câu 15: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. $y=3$. **B.** $y=0$. **C.** $y=-3$. **D.** $x=0$.

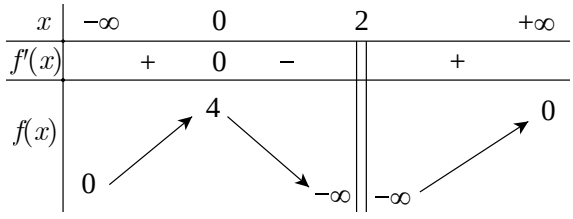
Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.



Các đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. $x=0;x=3$. **B.** $y=0;y=-3$. **C.** $y=-4;y=-3$. **D.** $y=0;y=3$.

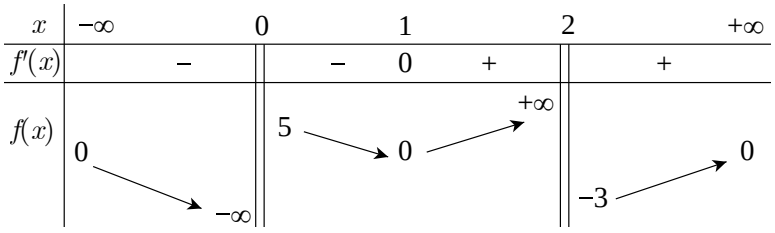
Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ có bảng biến thiên như sau



Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

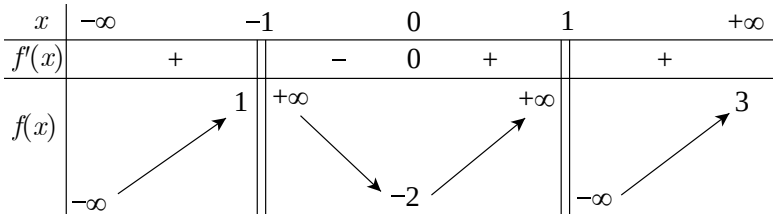
Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0;2\}$ có bảng biến thiên như sau



Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

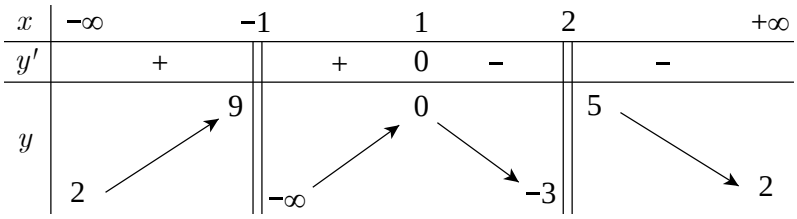
Câu 19: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Hỏi đồ thị hàm số trên có bao nhiêu tiệm cận ngang?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

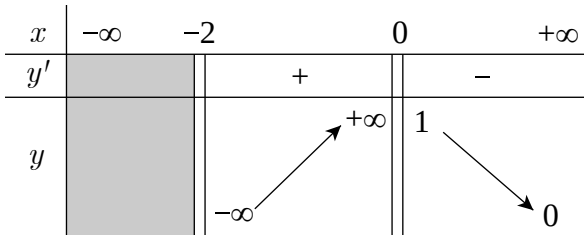
Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Số tiệm cận của đồ thị hàm số trên là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

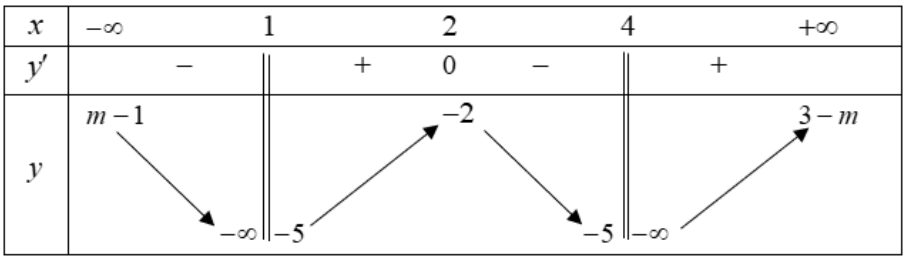
Câu 21: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.



Đồ thị hàm số có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 22: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây, trong đó $m\in\mathbb{R}$.



Chọn khẳng định đúng:

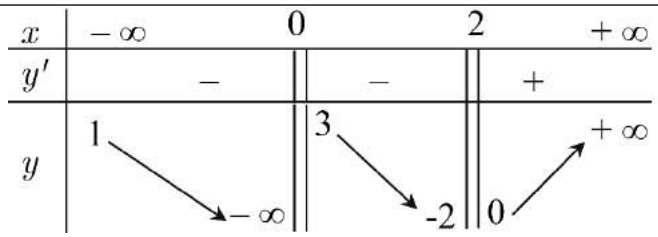
A. Đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận đứng và 1 đường tiệm cận ngang với mọi $m\in\mathbb{R}$.

B. Đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận đứng và 2 đường tiệm cận ngang với mọi $m\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$..

C. Đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận đứng và 2 đường tiệm cận ngang với mọi $m\in\mathbb{R}$.

D. Đồ thị hàm số có đúng 1 đường tiệm cận đứng và 2 đường tiệm cận ngang với mọi $m\in\mathbb{R}$.

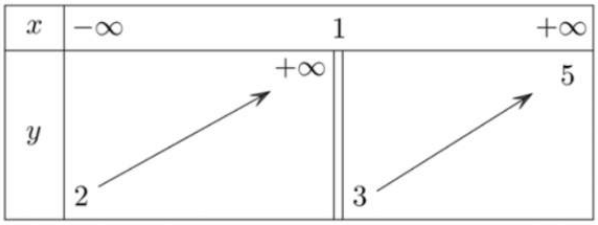
Câu 23: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:



Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

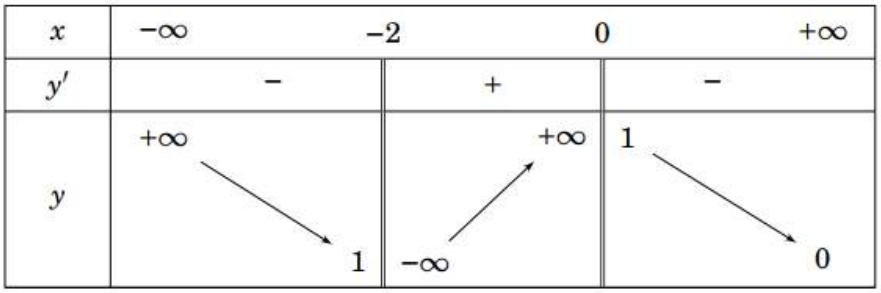
A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên ở hình vẽ dưới đây. Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là



A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

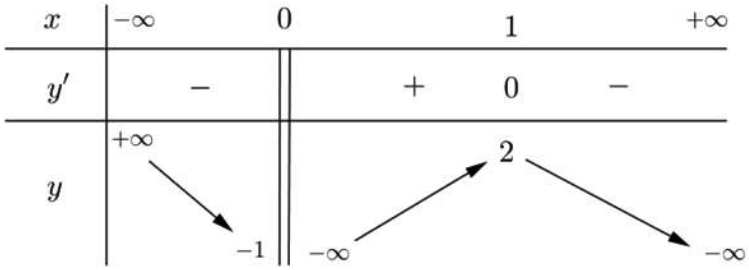
Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ



Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

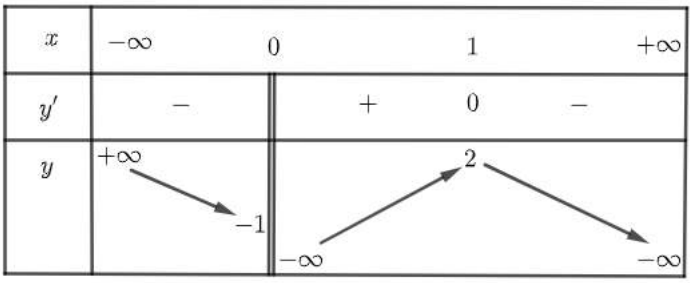
Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $R\setminus\{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau



Hỏi đồ thị hàm số trên có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3

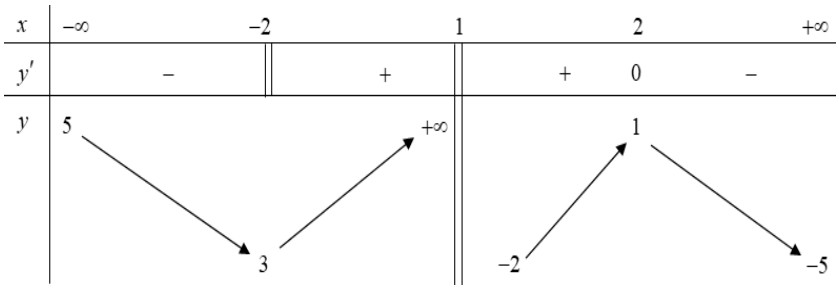
Câu 27: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau



Hỏi đồ thị hàm số trên có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

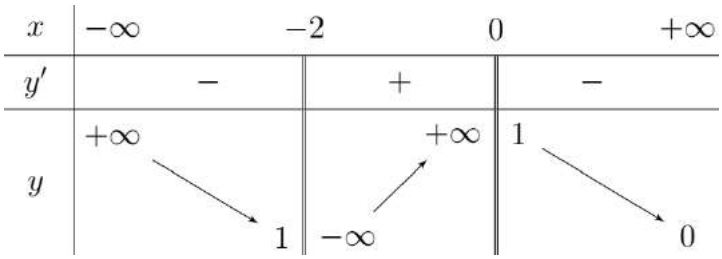
Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên như sau



Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

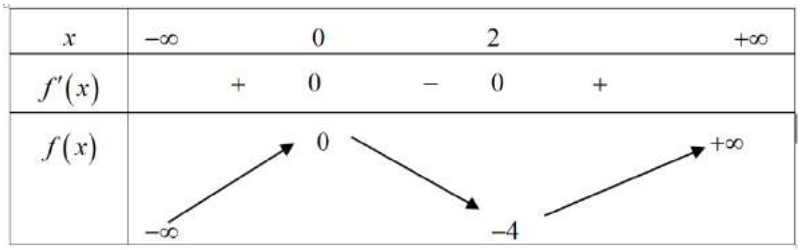
Câu 29: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

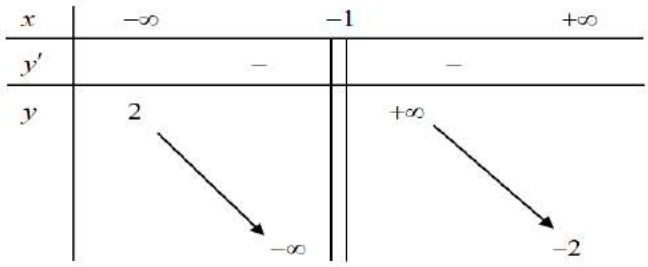
Câu 30: Cho $y=f(x)$ là hàm số bậc và có bảng biến thiên như sau:



Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{1}{2f(x)+3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 2. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 4.

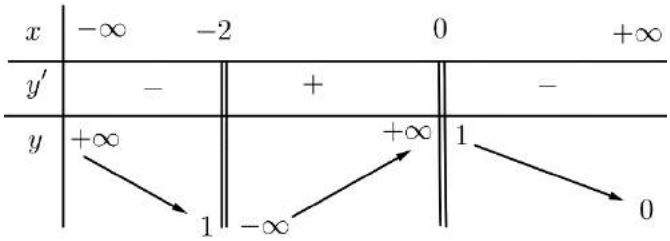
Câu 31: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ có bảng biến thiên như sau:



Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{2022}{f(x)}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

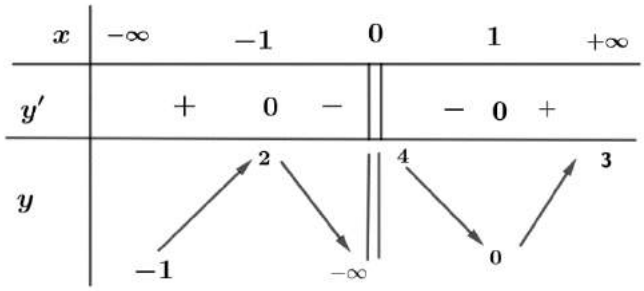
Câu 32: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

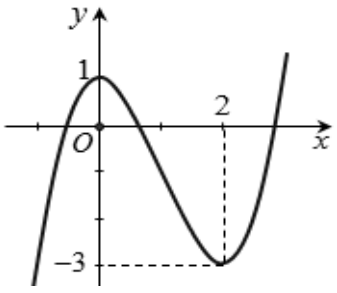
Câu 33: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-2}$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 34: Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\left(x^2-2x\right)\sqrt{2-x}}{(x-3)\left[f^2(x)+3f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A. 6. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}\setminus\{\pm 2\}$. Hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
y	$+\infty$	↘	-3	↘	2	↗	$+\infty$	↗	10
							$-\infty$		

Tính tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f\left(x\right)+6}$.

A. 6. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

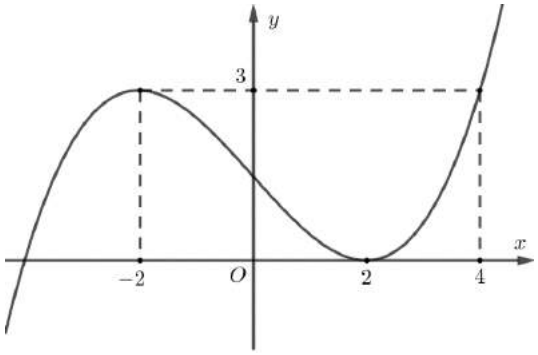
Câu 36: Cho $f\left(x\right)$ là hàm bậc bốn và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	1	↘	$+\infty$

Đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{\left(x^2-4\right)\left(x-2\right)}{f\left(x\right)-1}$ có mấy đường tiệm cận?

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

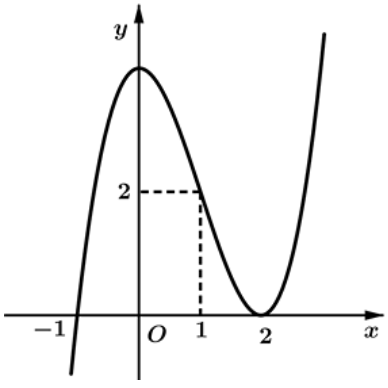
Câu 37: Cho hàm số bậc ba $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$, $\left(a,b,c,d\in\mathbb{R}\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hỏi đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{1}{f\left(4-x^2\right)-3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 38: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ $\left(a,b,c,d\in\mathbb{R}\right)$ có đồ thị như hình bên dưới



Hỏi đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{2022\sqrt{x-1}}{\left[f(x)\right]^2-2f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	2	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	2

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f^2(x)-9}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

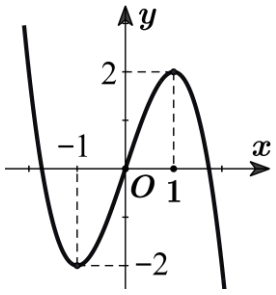
Câu 40: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$		$-$	
y	2	$\searrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\searrow$	-2

Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 41: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ:



Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f\left(x^2-5x+4\right)}$

A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

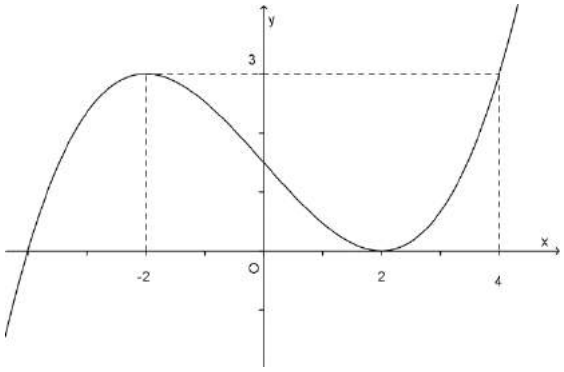
Câu 42: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	2	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	2

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f\left(x^3+2x-9\right)$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 43: Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a;b;c;d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Tính tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{1}{f\left(4-x^2\right)-3}$:

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

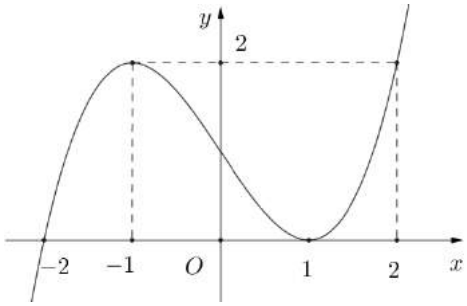
Câu 44: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số bậc bốn và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	1	↘	$-\infty$

Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{x^4-2x^2}{f^2(x)+2f(x)-3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận

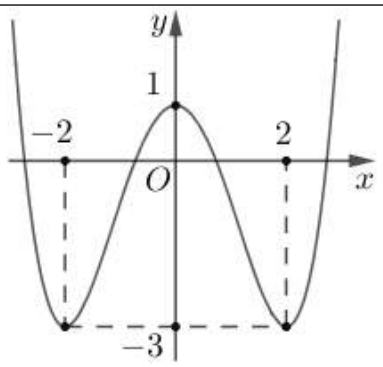
A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 45: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,(a\neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Gọi S là tập các giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019;2021)$ để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x+1)\sqrt{f(x)}}{\left(f(x)-2\right)\left(x^2-2mx+m+2\right)}$ có 5 đường tiệm cận (tiệm cận đứng hoặc tiệm cận ngang). Số phần tử của tập S là



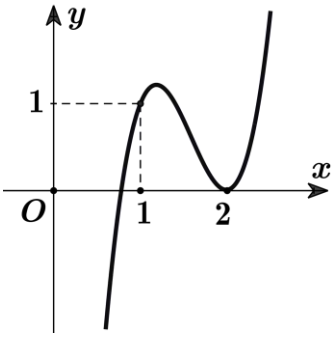
A. 4036. **B.** 4034. **C.** 2017. **D.** 2016.

Câu 46: Cho hàm số trùng phương $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3-4x}{\left(f(x)\right)^2+2f(x)-3}$ có tổng cộng bao nhiêu tiệm cận đứng?



A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 47: Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\left(x^2-3x+2\right)\sqrt{2x-1}}{x\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

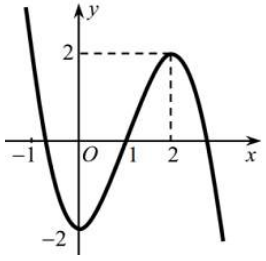
Câu 48: Cho hàm số $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ với a,b,c,d,e là các số thực và $a\neq 0$, có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	-1	↘	-3	↗	2	↘	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2}{f^2(x)+3f(x)}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 49: Cho $f(x)$ là hàm đa thức bậc ba và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-100;100]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{1+mx^2}}{f(x)-m}$ có đúng hai đường tiệm cận?

A. 100. **B.** 99. **C.** 2. **D.** 196.

CHƯƠNG 1

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

CHỦ ĐỀ 4 TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Đường tiệm cận ngang

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a;+\infty),(-\infty;b)$ hoặc $(-\infty;+\infty)$).

Đường thẳng $y=y_0$ là đường **tiệm cận ngang** *(hay tiệm cận ngang)* của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=y_0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=y_0$.

2. Đường tiệm cận đứng

Đường thẳng $x=x_0$ được gọi là đường **tiệm cận đứng** (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$$

Lưu ý:

Với đồ thị hàm phân thức dạng $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0;\ ad-bc\neq 0)$ luôn có tiệm cận ngang là $y=\dfrac{a}{c}$ và tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$.

3. Dấu hiệu nhận biết các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

Hàm phân thức mà nghiệm của mẫu không là nghiệm của tử có tiệm cận đứng.

Hàm phân thức mà bậc của tử $\leq$ bậc của mẫu có TCN.

Hàm căn thức dạng: $y=\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}, y=\sqrt{f(x)}-g(x), y=g(x)-\sqrt{f(x)}$ có tiệm cận ngang. (dùng liên hợp)

Hàm $y=a^x,(0<a\neq 1)$ có tiệm cận ngang $y=0$.

Hàm số $y=\log_a x,(0<a\neq 1)$ có tiệm cận đứng $x=0$.

4. Cách tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

Tiệm cận đứng: ta đi tìm nghiệm của mẫu không là nghiệm của tử.

Tiệm cận ngang: tính 2 giới hạn: $\lim\limits_{x\to+\infty} y$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty} y$

5. Một số chú ý trong quá trình tìm tiệm cận.

Nếu $x\to+\infty\Rightarrow x>0\Rightarrow\sqrt{x^2}=|x|=x$.

Nếu $x\to-\infty\Rightarrow x<0\Rightarrow\sqrt{x^2}=|x|=-x$.

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Đồ thị hàm số nào sau đây không có tiệm cận đứng

A. $y=\dfrac{3}{x}$ **B.** $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **C.** $y=\dfrac{3x-1}{x^2-2}$ **D.** $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-2}$

Lời giải

Chọn D

Do không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-2}$ và $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-2}$

Câu 2: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$ là đường thẳng

A. $x=2$. **B.** $x=-2$. **C.** $y=2$. **D.** $y=-2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty} y=2$, do đó $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x=1$ và $x=-1$.

B. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=1$ và $y=-1$.

C. Hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=1$ và $y=-1$.

D. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

Lời giải

Chọn B

Ta có định nghĩa tiệm cận ngang là:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$ thì các đường thẳng $y=a$ và $y=b$ là các tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 4: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2+2x-3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $\mathbb{R}\setminus\{1;-3\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x+1}{x^2+2x-3}=0$. Vậy $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to(-3)^+} y=\lim\limits_{x\to(-3)^+}\dfrac{x+1}{x^2+2x-3}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} y=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+1}{x^2+2x-3}=+\infty$.

Vậy $x=1; x=-3$ là các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 5: Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-1}$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{2-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}}\right)=2\Rightarrow$ đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là $y=2$.

Vì $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\left(\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-1}\right)=+\infty$,

Suy ra đồ thị có đường tiệm cận đứng là $x=-1$.

Vì $\lim\limits_{x\to(1)^+} y=\lim\limits_{x\to(1)^+}\left(\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-1}\right)=\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to(1)^-} y=\lim\limits_{x\to(1)^-}\left(\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-1}\right)=\dfrac{1}{2}$

Suy ra $x=1$ không phải là đường tiệm cận đứng của đồ thị.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận.

Câu 6: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

TXĐ $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Vì $\lim\limits_{x\to-1^+} y=+\infty$ nên đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x=-1$ làm đường tiệm cận đứng $(*)$

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}}=-1$ nên đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y=-1$ làm đường tiệm cận ngang.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}}=1$ nên đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y=1$ làm đường tiệm cận ngang.

Vậy đồ thị hàm số có tổng số đường tiệm cận là 3.

Câu 7: Đồ thị hàm số nào dưới đây có đúng một đường tiệm cận ngang?

A. $y=\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}}$. **B.** $y=\dfrac{x^2}{2x+3}$. **C.** $y=\dfrac{3x+1}{x+\sqrt{2x^2-1}}$. **D.** $y=\dfrac{4x-2}{x^2-3x+2}$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y=\dfrac{4x-2}{x^2-3x+2}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$.

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x-2}{x^2-3x+2}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x-2}{x^2-3x+2}=0\end{cases}$

Suy ra đồ thị hàm số $y=\dfrac{4x-2}{x^2-3x+2}$ chỉ có một đường tiệm cận ngang là $y=0$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	‖ $-\infty$	2 ↘	-3	↗	3

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

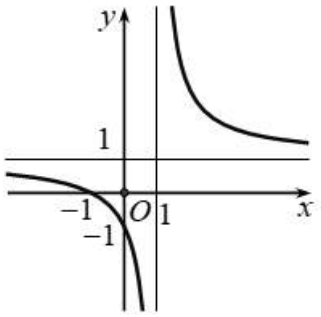
A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Quan sát bảng biến thiên ta có $\lim\limits_{x\to 0^-} y=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=0$.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

A. $x=1; y=-1$. **B.** $x=-1; y=-1$. **C.** $x=1; y=1$. **D.** $x=-1; y=1$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị hàm số, đường tiệm cận đứng $x=1$ và đường tiệm cận ngang $y=1$.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1: Mở đầu về đường tiệm cận của đồ thị hàm số

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$ và đường thẳng $y=-1$.

B. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là đường thẳng $x=1$ và đường thẳng $x=-1$.

Lời giải

Chọn A

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ nên đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$ và đường thẳng $y=-1$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ khi đó khẳng định nào sau đây đúng?

A. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=2$.

B. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=2$.

C. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=0$.

D. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=2$.

Lời giải

Chọn C

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

A. Đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận ngang là các đường thẳng $x=1$ và $x=-1$

B. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=1$ và $y=-1$

D. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

Lời giải

Chọn C

Ta có

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1 \Rightarrow$ đường thẳng $y=1$ là một tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1 \Rightarrow$ đường thẳng $y=-1$ là một tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x=2$ và $x=-2$.

B. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=2$ và $y=-1$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào định nghĩa đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số ta **Chọn D**

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-3$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=3$ và $y=-3$.

C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x=3$ và $x=-3$.

Lời giải

Chọn B

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3 \Rightarrow$ TCN: $y=3$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-3 \Rightarrow$TCN: $y=-3$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x=2$ và $x=-2$.

B. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=2$ và $y=-2$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào định nghĩa đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số ta có các đường thẳng $y=2$ và $y=-2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$. Khẳng định nào sau đây là ***đúng?***

A. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=1$ và $y=-1$.

C. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $y=1$ và $y=-1$.

D. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

Lời giải

Chọn B

Theo giả thiết ta có:

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, suy ra đường $y=1$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$, suy ra đường $y=-1$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=1$ và $y=-1$.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$. Số tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$ nên $y=-1$ là một TCN của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=m$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số đã cho có đúng một đường tiệm cận ngang?

A. Vô số. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=-1$.

Vậy để đồ thị hàm số đã cho có đúng một đường tiệm cận ngang thì $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=m=-1$.

Suy ra có một giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=m$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số đã cho có đúng một đường tiệm cận ngang?

A. Vô số. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=-1$.

Vậy để đồ thị hàm số đã cho có đúng một đường tiệm cận ngang thì $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=m=-1$.

Suy ra có một giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

Câu 11: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=-2$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=2$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là hai đường thẳng $x=2$ và $x=-2$.

D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là hai đường thẳng $y=2$ và $y=-2$.

Lời giải

Chọn D

Theo định nghĩa về tiệm cận, ta có:

$\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=-2$ suy ra $y=-2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=2$ suy ra $y=2$ là đường tiệm cân ngang của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$.

Câu 12: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=3$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=3$. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận ngang l.

B. Đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng là $x=3$.

C. Đồ thị hàm số có duy nhất một đường tiệm cận ngang.

D. Đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang là $x=3$.

Lời giải

Chọn C

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=3$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=3$ nên đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang là $y=3$.

Câu 13: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên khoảng $\left(-5;-1\right)$ và có $\lim\limits_{x\to(-5)^{+}}f\left(x\right)=5$ $\lim\limits_{x\to(-1)^{-}}f\left(x\right)=+\infty$.

Hỏi khẳng định nào dưới đây là khẳng định **đúng?**

A. Đồ thị hàm số $f(x)$ không có tiệm cận đứng.

B. Đồ thị hàm số $f(x)$ có đúng một tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-1$.

C. Đồ thị hàm số $f(x)$ có hai đường tiệm cận ngang.

D. Đồ thị hàm số $f(x)$ có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x=-5$ và $x=-1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=+\infty$ nên đồ thị hàm số $f(x)$ có một tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-1$

Câu 14: Có bao nhiêu hàm số sau đây mà đồ thị có đúng một tiệm cận ngang

(1) $y=\dfrac{1}{x}$

(2) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-3x}}$

(3) $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$

(4) $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

(1): $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x}=0$ nên đồ thị hàm số (1) có 1 tiệm cận ngang: $y=0$.

(2): Hàm số $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-3x}}$ không tồn tại giới hạn tại vô cực nên đồ thị hàm số (2) không có tiệm cận ngang.

(3): $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=2$ nên đồ thị hàm số (3) có 1 tiệm cận ngang: $y=2$.

(4): $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=1;\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=-1$ nên đồ thị hàm số (4) có 2 tiệm cận ngang: $y=1;y=-1$.

Câu 15: Đồ thị hàm số nào dưới đây có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=2$?

A. $y=x^2+x$. **B.** $y=\dfrac{2021}{2x+3}$. **C.** $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{2x^2+1}{x-2}$.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số $y=x^2+x$ không có đường tiệm cận ngang.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2021}{2x+3}$ có đường tiệm cận ngang là $y=0$ vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2021}{2x+3}=0$.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$ có đường tiệm cận ngang là $y=2$ vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x+3}{x+1}=2$.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2+1}{x-2}$ không có đường tiệm cận ngang vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2+1}{x-2}=\pm\infty$.

Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên D và tồn tại các giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-a-2$ trong đó a là số thực **C.** Để đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đúng một đường tiệm cận ngang thì a bằng

A. $a=1$. **B.** $a=-1$.

C. $a=0$. **D.** Không tồn tại a.

Lời giải

Chọn C

Để đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đúng một đường tiệm cận ngang thì

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\Leftrightarrow a=-a-2\Leftrightarrow a=-1$

Câu 17: Cho hàm số $y=f\ x$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=1$ và $y=-1$.

D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x=1$ và $x=-1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là $y=1$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là $y=-1$.

Vậy đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=1$ và $y=-1$.

Câu 18: Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-7}{x+2}$ có toạ độ là

A. $(-2;3)$. **B.** $(3;-2)$. **C.** $(-3;2)$. **D.** $(2;-3)$.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-7}{x+2}$ có tiệm cận đứng $x=-2$ và tiệm cận ngang $y=3$.

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là giao điểm của 2 đường tiệm cận nên điểm $(-2;3)$ là tâm đối xứng của đồ thị hàm số.

Câu 19: Biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một tiệm cận ngang là $y=3$. Khi đó đồ thị hàm số $y=-3f(x)+11$ có một tiệm cận ngang là

A. $y=-4$. **B.** $y=3$. **C.** $y=2$. **D.** $y=1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=3 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[-3f(x)+11\right]=2$.

Câu 20: Nếu hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn điều kiện $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$ thì số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1\end{cases}$ nên đồ thị hàm số $y=f(x)$ có 1 đường tiệm cận ngang.

Câu 21: Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right|$ là:

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^+} y=\lim\limits_{x\to1^+}\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right|=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to1^-} y=\lim\limits_{x\to1^-}\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right|=\lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{x+2}{1-x}\right)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow x=1 \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số trên.}$$

Vậy đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng.

Câu 22: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-5x+4}$ có đồ thị (C). Số đường tiệm cận đứng của đồ thị (C) là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có $D=\mathbb{R}\setminus\{1;4\}$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+2x-3}{x^2-5x+4}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x-4)}=\lim_{x\to1^+}\frac{x+3}{x-4}=-\frac{4}{3};$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+2x-3}{x^2-5x+4}=\lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x-4)}=\lim_{x\to1^-}\frac{x+3}{x-4}=-\frac{4}{3};$$

$$\lim_{x\to4^+}\frac{x^2+2x-3}{x^2-5x+4}=\lim_{x\to4^+}\frac{x+3}{x-4}=+\infty;\ \lim_{x\to4^-}\frac{x^2+2x-3}{x^2-5x+4}=\lim_{x\to4^-}\frac{x+3}{x-4}=-\infty.$$

Suy ra đồ thị hàm số (C) có một tiệm cần đứng $x=4$.

Câu 23: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ có đường tiệm cận ngang là:

A. $y=2$. **B.** $y=0$. **C.** $y=1$. **D.** $y=-2$.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{\pm2\}$

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-2}{x^2-4}=0$ suy ra đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=0$.

Câu 24: Đồ thị hàm số $y=f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$

Do đó

Vì $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)=+\infty$. Suy ra $x=1$ là một đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vì $\lim\limits_{x\to2^+}\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to2^-}\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)=-\infty$. Suy ra $x=2$ là một đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)=0$. Suy ra $y=0$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số $y=f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ có tất cả 3 đường tiệm cận.

Câu 25: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=0$ nên $y=0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Phương trình $x^2+1=0$ vô nghiệm nên đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận đứng.

Câu 26: Cho hàm số $y=\dfrac{2020}{x+2021}$. Số tiệm cận của đồ thị hàm số bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2020}{x+2021}=0$ suy ra tiệm cận ngang $y=0$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to-2021^+}y=\lim\limits_{x\to-2021^+}\dfrac{2020}{x+2021}=+\infty$ suy ra tiệm cận đứng $x=-2021$.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Câu 27: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận ngang?

A. $y=x^3-x-1$. **B.** $y=\sqrt{2x^2+3}$. **C.** $y=\dfrac{x^3+1}{x^2+1}$. **D.** $y=\dfrac{3x^2+2x-1}{4x^2+5}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+2x+1}{4x^2+5}=\dfrac{3}{4}$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=\dfrac{3}{4}$.

Câu 4: Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2x}{x^2-4}$

A. $x=-2$. **B.** $x=\pm 2$. **C.** $y=\pm 2$. **D.** $y=1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=\dfrac{x^2-2x}{x^2-4}\Rightarrow y=\dfrac{x}{x+2}$.

Có $\lim\limits_{x\to-2^-} y=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-2^+} y=-\infty$ nên đường thẳng $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 28: Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+x-2}{x-2}$ là:

A. $x=2$. **B.** $x=-2$. **C.** $y=-2$. **D.** $y=2$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

$\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2+x-2}{x-2}=+\infty\Rightarrow$ TCĐ: $x=2$.

Câu 29: Phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3}{x+2}$ là

A. $x=-2$. **B.** $x=0$. **C.** $x=3$. **D.** $y=0$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác đinh $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

$\lim\limits_{x\to-2^+} y=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{3}{x+2}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-2^-} y=\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{3}{x+2}=-\infty$, suy ra $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 30: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+6}{x-2}$ là đường thẳng

A. $x=3$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=-3$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{3x+6}{x-2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{3x+6}{x-2}=-\infty$ nên đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng.

Câu 31: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2}{x-1}$ là đường thẳng :

A. $x=1$ **B.** $y=2$ **C.** $x=0$ **D.** $y=0$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x-1}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x-1}=0$

Vậy đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 32: Đồ thị hàm số nào dưới đây có đúng một đường tiệm cận ngang?

A. $y=\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}}$. **B.** $y=\dfrac{x^2}{2x+3}$. **C.** $y=\dfrac{3x+1}{x+\sqrt{2x^2-1}}$. **D.** $y=\dfrac{4x-2}{x^2-3x+2}$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y=\dfrac{4x-2}{x^2-3x+2}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$.

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x-2}{x^2-3x+2}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x-2}{x^2-3x+2}=0\end{cases}$

Suy ra đồ thị hàm số $y=\dfrac{4x-2}{x^2-3x+2}$ chỉ có một đường tiệm cận ngang là $y=0$.

Câu 33: Tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+2x}$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có TXĐ: $D=[-1;1]\setminus\{0\}$.

Vì TXĐ của hàm số không chứa $-\infty$ và $+\infty$ nên đồ thị hàm số không có đường tiệm cận ngang.

Lại có: $\lim\limits_{x\to0^-}y=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+2x}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to0^+}y=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+2x}=+\infty$.

Vậy đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=0$.

Câu 34: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-7}}{x^2+3x-4}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D=[7;+\infty)$.

Phương trình $x^2+3x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\notin[7;+\infty)\\ x=-4\notin[7;+\infty)\end{array}\right.$

Do đó không tồn tại các giới hạn $\lim\limits_{x\to-4^-}y,\lim\limits_{x\to-4^+}y;\lim\limits_{x\to1^-}y,\lim\limits_{x\to1^+}y$. Vì vậy đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng.

Câu 35: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{(x-2)^2(x-1)}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D=[-2;+\infty)\setminus\{1;2\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^-} y=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{(x-2)^2(x-1)}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to 2^-} y=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{(x-2)^2(x-1)}=-\infty$

Suy ra đường thẳng $x=1$ và $x=2$ là hai đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 36: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{2-x}-x}{\sqrt{x^2+3}-2}$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định của hàm số: $\begin{cases}2-x\ge 0\\ \sqrt{x^2+3}-2\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 2\\ \sqrt{x^2+3}\ne 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 2\\ x\ne\pm 1\end{cases}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{2-x}-x}{\sqrt{x^2+3}-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x}}-1}{-\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}-\dfrac{2}{x}}=1$. Suy ra đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$.

$\lim\limits_{x\to 1} y=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2-x}-x}{\sqrt{x^2+3}-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(2-x-x^2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{2-x}+x\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2+x)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{(x+1)\left(\sqrt{2-x}+x\right)}=-3$.

Suy ra đường thẳng $x=1$ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to-1^-} y=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{\sqrt{2-x}-x}{\sqrt{x^2+3}-2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+} y=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{\sqrt{2-x}-x}{\sqrt{x^2+3}-2}=-\infty$.

Suy ra đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận.

Câu 37: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

$\lim\limits_{x\to 2} y=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}=\dfrac{2}{3}$ nên $x=2$ không phải tiệm cận đứng.

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}-\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}=-1$$

$\Rightarrow y=-1$ là một tiệm cận ngang.

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}-\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}=1$$

$\Rightarrow y=1$ là một tiệm cận ngang.

Vậy số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$ là 2.

Câu 38: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{x+1}}$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có tập xác định của hàm số là $D=(-1;4]\Rightarrow$ Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận xiên.

$\lim\limits_{x\to-1^+} y=+\infty\Rightarrow$ Đồ thị nhận đường thẳng $x=-1$ làm tiệm cận đứng. Vậy đồ thị hàm số có một đường tiệm cận.

Câu 39: Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{|x+1|}{\sqrt{x^2+3}-2}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận (nếu ta chỉ tính đến các đường TCĐ và TCN)?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định của hàm số là: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{|x+1|}{\sqrt{x^2+3}-2}=1$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=1$.

$$y=\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+3}-2}=\frac{|x+1|\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{x^2-1}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+2}{x-1}, x\ge-1\\ -\dfrac{\sqrt{x^2+3}+2}{x-1}, x<-1\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to1^+} y=+\infty;\lim\limits_{x\to1^-} y=+\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Dạng 2: Đường tiệm cận của đồ thị hàm số bậc nhất trên bậc nhất

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x-1}$.

A. $y=\dfrac{1}{3}$. **B.** $y=3$. **C.** $y=-1$. **D.** $y=1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x+1}{x-1}=3$

Do đó đường thẳng $y=3$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 2: Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+4}{x-2}$ là

A. $x=2$. **B.** $y=2$. **C.** $x=-2$. **D.** $y=-2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty} y=2$.

Suy ra $y=2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 3: Phương trình đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{2-x}$ lần lượt là

A. $x=2; y=-1$. **B.** $x=-2; y=1$. **C.** $x=1; y=2$. **D.** $x=2; y=1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^-} y=+\infty; \lim\limits_{x\to 2^+} y=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-1; \lim\limits_{x\to-\infty} y=-1$ suy ra $x=2$ và $y=-1$ lần lượt là đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 4: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là:

A. $x=1$ và $y=-3$. **B.** $x=2$ và $y=1$. **C.** $x=-1$ và $y=2$. **D.** $x=1$ và $y=2$.

Lời giải

Chọn D

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x-3}{x-1}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x-3}{x-1}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x-3}{x-1}=2\Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=2$

Vậy tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số lần lượt là $x=1$ và $y=2$.

Câu 5: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} y=-\infty;\lim\limits_{x\to 1^-} y=+\infty \Rightarrow x=1$ là đường tiệm cận đứng.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}=2\Rightarrow y=2$ là đường tiệm cận ngang.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có 2 đường tiệm cận.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Đường thẳng nào sau đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-2}$?

A. $x=2$. **B.** $x=-2$. **C.** $y=1$. **D.** $y=-1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)=1\Rightarrow y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 2: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ là

A. $x=1$. **B.** $x=-1$. **C.** $y=-1$. **D.** $y=2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim\limits_{x\to(-1)^+}y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{2x-1}{x+1}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-1)^-}y=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{2x-1}{x+1}=-\infty$.

Nên đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng $x=-1$.

Câu 3: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x-3}{2-x}$ là đường thẳng có phương trình:

A. $y=\dfrac{5}{2}$. **B.** $y=-5$. **C.** $x=-5$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=-5\Rightarrow y=-5$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 4: Đường thẳng nào dưới đây là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{2x+1}$?

A. $y=\dfrac{1}{2}$. **B.** $y=-\dfrac{1}{2}$. **C.** $x=-\dfrac{1}{2}$. **D.** $x=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-3}{2x+1}=\dfrac{1}{2}$

Suy ra đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 5: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3}{x-2}$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\lim\limits_{x\to2^\pm}y=\lim\limits_{x\to2^\pm}\dfrac{3}{x-2}=\pm\infty$ nên đồ thị có tiệm cận đứng là $x=2$.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3}{x-2} = 0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 0$.

Vậy số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là 2.

Câu 6: Đường thẳng nào sau đây là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{5x-1}{x+2}$?

A. $y = 5$. **B.** $x = 5$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = -2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{5x-2}{x+2} = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{5x-2}{x+2} = -\infty$ nên đồ thi có TCĐ: $x = -2$.

Câu 7: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x+2}{x-2}$ là đường thẳng có phương trình

A. $y = \dfrac{3}{2}$. **B.** $y = -\dfrac{2}{3}$. **C.** $y = 3$. **D.** $y = 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x+2}{x-2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3+\dfrac{2}{x}}{1-\dfrac{2}{x}} = 3.$

Vậy tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng $y = 3$.

Câu 8: Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ có đồ thị (C), tiệm cận đứng của đồ thị (C) là đường thẳng có phương trình

A. $x = 1$. **B.** $x = 2$. **C.** $y = 1$. **D.** $y = 2$.

Lời giải

Chọn B

Câu 9: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{1-x}$ có phương trình là

A. $x = 1$. **B.** $y = 2$. **C.** $y = -2$. **D.** $x = -2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x-1}{1-x} = -2 \Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = -2$.

Câu 10: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình

A. $x = 2$. **B.** $y = -2$. **C.** $x = 1$. **D.** $y = 2$.

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}=2\Rightarrow$ Đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 11: Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ là

A. $x=1$. **B.** $y=-2$. **C.** $x=2$. **D.** $y=2$.

Lời giải

Chọn C

Vì $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x+1}{x-2}=+\infty$ đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số trên là đường thẳng $x=2$.

Câu 12: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ là đường thẳng có phương trình

A. $y=1$. **B.** $y=-1$. **C.** $y=2$. **D.** $y=-2$.

Lời giải

Chọn C

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=2$ nên tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y=2$.

Câu 13: Đồ thị hàm số nào sau đây có đường tiệm cận đứng là $x=1$ và tiệm cận ngang là $y=2$?

A. $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{x+3}{x-2}$. **C.** $y=x^3-3x^2+2$. **D.** $y=x^4-5x^2+4$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x+3}{x-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2+\dfrac{3}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}=2\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$ có đường tiệm cận ngang là $y=2$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x+3}{x-1}=+\infty$ (do $\lim\limits_{x\to 1+}(2x+3)=5;\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0;x-1>0\ \forall x>1$)

Và $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x+3}{x-1}=-\infty$ (do $\lim\limits_{x\to 1+}(2x+3)=5;\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0;x-1<0\ \forall x<1$)

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$ có đường tiệm cận đứng là $x=1$.

Câu 14: Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$?

A. $x=2$. **B.** $y=1$. **C.** $x=1$. **D.** $y=2$.

Lời giải

Chọn C

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x-1}{x-1}=+\infty;\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x-1}{x-1}=-\infty$.

Vậy đường thẳng $x=1$ là đường tiệm cận đứng

Câu 15: Tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-4}{x-1}$.

A. $y=1$. **B.** $x=1$. **C.** $y=3$. **D.** $x=3$.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-4}{x-1}=3$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-4}{x-1}=3$.

Vậy đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-4}{x-1}$ là $y=3$.

Câu 16: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-2x}{x-1}$ là

A. $y=1$. **B.** $y=2$. **C.** $y=-2$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-2x}{x-1}=-2$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-2x}{x-1}=-2$

Vậy đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là đường thẳng $y=-2$.

Câu 17: Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-5}{x-1}$.

A. $y=5$. **B.** $y=1$. **C.** $x=1$. **D.** $x=5$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-5}{x-1}=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$.

Câu 18: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình

A. $x=1$. **B.** $x=2$. **C.** $x=-1$. **D.** $y=1$.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đường tiệm cận đứng là $x=1$.

Câu 19: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+2}{x-2}$ là đường thẳng có phương trình

A. $x=2$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=3$. **D.** $x=-2$.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+2}{x-2}$ có $x=2$ là tiệm cận đứng vì $\lim\limits_{x\to2^+} y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to2^-} y=-\infty$.

Câu 20: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ là đường thẳng có phương trình nào sau đây?

A. $y=2$. **B.** $y=-1$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

Chon D

TXĐ: $D = R \setminus \{-1\}$

Ta có $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{2x+1}{x+1} = -\infty \Rightarrow x = -1$ là TCĐ.

Câu 21: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+3}{x-3}$ là

A. $x = -1$. **B.** $x = 3$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = -3$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

Ta có: $\lim\limits_{x \to 3^+} y = \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{2x+3}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{2x+3}{x-3} = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to 3^-} y = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{2x+3}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{2x+3}{x-3} = -\infty$.

Nên tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = 3$.

Câu 22: Đường thẳng nào dưới đây là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x-1}{-x-1}$.

A. $y = 1$. **B.** $x = 3$. **C.** $y = -3$. **D.** $x = 1$.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Vì $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x-1}{-x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3-\dfrac{1}{x}}{-1-\dfrac{1}{x}} = -3$; $\lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x-1}{-x-1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3-\dfrac{1}{x}}{-1-\dfrac{1}{x}} = -3$

suy ra đường thẳng $y = -3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 23: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2022}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình

A. $x = 0$. **B.** $y = 2022$. **C.** $x = 1$. **D.** $y = 0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2022}{x-1} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2022}{x-1} = 0$

Suy ra, đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y = 0$.

Câu 24: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x+2}{x-2}$ là đường thẳng có phương trình

A. $y = 2$. **B.** $y = -1$. **C.** $y = 3$. **D.** $y = -2$.

Lời giải

Chọn C

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3x+2}{x-2} = 3$

$\Rightarrow$ Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng $y = 3$.

Câu 25: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ là

A. $y=-1$. **B.** $x=1$. **C.** $y=2$. **D.** $x=\dfrac{-1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x+1}{x-1}=+\infty$ suy ra đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 26: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx-8}{x+2}$ có hai đường tiệm cận.

A. $m\neq 4.$. **B.** $m\neq -4.$. **C.** $m=4.$. **D.** $m=-4.$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $x+2=0\Leftrightarrow x=-2$

Đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận $\Leftrightarrow m(-2)-8\neq 0\Leftrightarrow m\neq -4$.

Câu 27: Tìm tổng tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x-m}$ có hai đường tiệm cận tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 5.

A. 2. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm nhất biến $y=\dfrac{x-1}{x-m}$ có tiệm cận đứng $x=m$ và tiệm cận ngang $y=1$.

Để hai đường tiệm cận tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 5

khi và chỉ khi: $|m|.1=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=5\\m=-5\end{array}\right.$.

Vậy có hai giá trị m thỏa mãn và tổng chúng bằng 0.

Câu 28: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$, tổng số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{2}{x}}=2$; $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{2}{x}}=2$ nên đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to-2^+}y=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{2x-1}{x+2}=-\infty;\ \lim\limits_{x\to-2^-}y=+\infty\Rightarrow$ đường thẳng $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Câu 29: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{(m+1)x-3}{x-m+3}$ có tiệm cận ngang $y=-2$ thì có tiệm cận đứng có phương trình:

A. $y=-3$. **B.** $x=6$. **C.** $x=0$. **D.** $x=-6$.

Lời giải

Chọn D

Do đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=-2$ nên $m+1=-2\Rightarrow m=-3$. Vậy tiệm cận đứng của đồ thị hàm số có phương trình: $x=-6$.

Câu 30: Đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-x}{-x+2}$ có phương trình lần lượt là

A. $x=1; y=2$. **B.** $x=2; y=\dfrac{1}{2}$. **C.** $x=2; y=-1$. **D.** $x=2; y=1$.

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-x}{-x+2}=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-x}{-x+2}=1$, $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1-x}{-x+2}=+\infty$.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-x}{-x+2}$ có đường tiệm cận đứng là $x=2$ và đường tiệm cận ngang là $y=1$

Câu 31: Cho hàm số $y=\dfrac{ax-2}{cx+d}$ với $a,b,c,d\in R$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	3	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	3

Giá trị nguyên âm lớn nhất mà c có thể nhận là

A. $-3\cdot$ **B.** $-2\cdot$ **C.** $-4\cdot$ **D.** $-1\cdot$

Lời giải

Chọn D

+ Thông tin về tiệm cận ngang cho ta: $\dfrac{a}{c}=3\Rightarrow a=3c,(1)$

+ Thông tin về tiệm cận đứng cho ta: $\dfrac{-d}{c}=-1\Rightarrow d=c,(2)$

+ $y'=\dfrac{ad+2c}{(cx+d)^2}>0\Rightarrow ad+2c>0\Rightarrow 3c^2+2c>0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}c<\dfrac{-2}{3}\\ c>0\end{array}\right.$.

Vậy giá trị nguyên âm lớn nhất mà c có thể nhận là -1

Câu 32: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{2x+1}$ là đường thẳng có phương trình

A. $y=-\dfrac{1}{2}$. **B.** $x=-\dfrac{1}{2}$. **C.** $y=\dfrac{1}{2}$. **D.** $x=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x-1}{2x+1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{2+\dfrac{1}{x}} = \dfrac{1}{2}.$

Suy ra tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{2x+1}$ là: $y=\dfrac{1}{2}$.

Câu 33: Biết rằng đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận đứng là $x=2$ và tiệm cận ngang là $y=3$. Hiệu $a-2b$ có giá trị là

A. $0\cdot$ **B.** $5.$ **C.** $1.$ **D.** $V=4.$

Lời giải

Chọn C

Tiêm cận đứng của đồ thị hàm $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$ là: $x=\dfrac{2}{b}$.

Tiêm cận ngang của đồ thị hàm $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$ là: $y=\dfrac{a}{b}$.

Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases}\dfrac{2}{b}=2\\ \dfrac{a}{b}=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\ b=1\end{cases}.$$

$\Rightarrow a-2b=3-2.1=1$

Câu 34: Đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2-x}{x-1}$ lần lượt là:

A. $x=-1; y=-1$ **B.** $x=1; y=2$ **C.** $x=-1; y=2$ **D.** $x=1; y=-1$

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2-x}{x-1}=+\infty; \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2-x}{x-1}=-\infty$ nên hàm số có một tiệm cận đứng $x=1$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-x}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-x}{x-1}=-1$ nên hàm số có một tiệm cận ngang $y=-1$.

Câu 35: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{x^2-4}$ là đường thẳng có phương trình

A. $x=-\dfrac{1}{2}$. **B.** $x=\pm2$. **C.** $x=4$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$.

Ta tính được các giới hạn sau:

Vì $\lim\limits_{x\to-2^+} y=\lim\limits_{x\to-2^-} y=-\dfrac{1}{4}\Rightarrow x=-2$ không phải tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vì $\lim\limits_{x\to2^+} y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to2^-} y=-\infty\Rightarrow x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng có phương trình là $x=2$.

Câu 36: Gọi I là giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+2}$.

Toạ độ điểm I là

A. $I(2;1)$. **B.** $I(-2;2)$. **C.** $I(-2;-1)$. **D.** $I(-2;1)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

Hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+2}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty} y=1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y=1$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$.

Vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-2)^-} y=+\infty\\ \lim\limits_{x\to(-2)^+} y=-\infty\end{cases}$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-2$.

Vậy giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là điểm $I(-2;1)$.

Câu 37: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{3-2x}$. Hàm số có tiệm ngang và tiệm cận đứng là:

A. $y=\dfrac{2}{3};x=1$. **B.** $y=-1;x=\dfrac{2}{3}$. **C.** $y=-1;x=\dfrac{3}{2}$. **D.** $y=\dfrac{2}{3};x=\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{3-2x}=-1\Rightarrow y=-1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số,

$\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^+}\dfrac{2x-1}{3-2x}=-\infty\Rightarrow x=\dfrac{3}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 38: Đồ thị $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng

A. $x=1$. **B.** $y=2$. **C.** $y=1$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-3}{x-1}=2\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{x-1}=2\end{cases}\Rightarrow y=2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$.

Câu 39: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{4x+1}{mx-1}$ **không** có tiệm cận đứng?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng khi $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\neq 0\\ 4.(-1)-1.m=0\end{cases}\\ m=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-4\\ m=0\end{array}\right.$.

Câu 40: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{4x+1}$ là đường thẳng có phương trình:

A. $y=4$. **B.** $y=1$. **C.** $y=\dfrac{1}{4}$. **D.** $y=-1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-1}{4x+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{4+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{1}{4}$.

Vậy tiệm cận ngang đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng có phương trình: $y=\dfrac{1}{4}$.

Câu 41: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x+1}$ là đường thẳng có phương trình:

A. $x=1$. **B.** $y=-1$. **C.** $y=0$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^+} f\ x\ =-\infty\\ \lim\limits_{x\to -1^-} f\ x\ =+\infty\end{array}\right\}\longrightarrow x=-1$ là TCĐ.

Vậy tiệm cận đứng đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng có phương trình: $x=-1$.

Câu 42: Phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+4}{3x}$ là

A. $x=2$. **B.** $x=\dfrac{2}{3}$. **C.** $x=0$. **D.** $x=3$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} y=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x+4}{3x}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^-} y=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2x+4}{3x}=-\infty$, suy ra $x=0$ là tiệm cận đứng.

Câu 43: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x-4}$ là đường thẳng có phương trình

A. $y=\dfrac{1}{2}$. **B.** $y=2$. **C.** $x=\dfrac{1}{2}$. **D.** $y=2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{2x-4}=\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+2}{2x-4}=\dfrac{1}{2}$

Vậy $y=\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 44: Gọi S là tập hợp các số thực m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+3}{x^2-2mx+9}$ có đúng hai đường tiệm cận. Tính tổng các phần tử của S.

A. -3. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{1-\dfrac{2m}{x}+\dfrac{9}{x^2}}=0$ nên đồ thị hàm số đã cho luôn có một tiệm cận ngang là $y=0$.

Do đó đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận

$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow$ Phương trình $f(x)=x^2-2mx+9=0$ có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng -3

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\Delta'=m^2-9=0\\ \begin{cases}\Delta'=m^2-9>0\\ f(-3)=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3\\ m=-3\\ \begin{cases}m^2-9>0\\ m=-3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3\\ m=-3\end{array}\right.$$

$\Rightarrow S=\{-3;3\}$.

Vậy tổng các phần tử của S bằng 0.

Câu 45: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+m}{mx+1}$ **không** có đường tiệm cận đứng?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+m}{mx+1}$ không có tiệm cận đứng $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\ 1-m^2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=1\\ m=-1\end{array}\right.$.

Câu 46: Giá trị m nào dưới đây làm cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{4mx+3m}{x-2}$ có đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 2020?

A. $m=505$. **B.** $m=1010$. **C.** $m=\dfrac{505}{2}$. **D.** $m=\dfrac{505}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Vì tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đô thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ lần lượt là $y=\dfrac{a}{c}$ và $x=\dfrac{-d}{c}$

Do đó tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đô thị hàm số $y=\dfrac{4mx+3m}{x-2}$ là $y=4m; x=2$.

Để hai đường tiệm cận tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 2020

$\Leftrightarrow |4m|.2 = 2020 \Leftrightarrow m = \pm\dfrac{505}{2}$.

Câu 47: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{|2x-1|-3}{x-1}$

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|2x-1|-3}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1-3}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-4}{x-1} = 2$ $\Rightarrow$Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 2$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|2x-1|-3}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x+1-3}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x-2}{x-1} = -2 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = -2$.

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{|2x-1|-3}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x-1-3}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x-2}{x-1} = 2$

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{|2x-1|-3}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-2x+1-3}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-2x-2}{x-1} = +\infty$ (vì $\lim\limits_{x\to1^-}(-2x-2) = -4$ và $\lim\limits_{x\to1^-}(x-1) = 0$)

$\Rightarrow$Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.

Câu 48: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+4}{x-m}$ có tiệm cận đứng.

A. $m > -2$. **B.** $m \neq -2$. **C.** $m < -2$. **D.** $m = -2$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y = \dfrac{2x+4}{x-m} = 2 + \dfrac{2m+4}{x-m}$.

Tập xác định $D = \mathbb{R}\setminus\{m\}$.

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+4}{x-m}$ có tiệm cận đứng $x = m$ khi ít nhất một trong các điều kiện sau thỏa mãn: $\lim\limits_{x\to m^+} y = \pm\infty$; $\lim\limits_{x\to m^-} y = \pm\infty$.

Mặt khác:

$\lim\limits_{x\to m^+} y = \lim\limits_{x\to m^+}\left(2 + \dfrac{2m+4}{x-m}\right) = \pm\infty$ khi $2m+4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2$.

$\lim\limits_{x\to m^-} y = \lim\limits_{x\to m^-}\left(2 + \dfrac{2m+4}{x-m}\right) = \pm\infty$ khi $2m+4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2$.

Vậy $m \neq -2$ là giá trị cần tìm.

Câu 49: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{m^2x-2}{4x-m}$ đi qua điểm $A\left(\dfrac{-1}{2};1\right)$?

A. 2. **B.** 0 **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{m^2x-2}{4x-m}=\dfrac{m^2}{4}$, do đó phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là $y=\dfrac{m^2}{4}$

Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{m^2x-2}{4x-m}$ đi qua điểm $A\left(\dfrac{-1}{2};1\right)$ khi và chỉ khi $\dfrac{m^2}{4}=1\Leftrightarrow m=\pm 2$.

Vậy có 2 giá trị của tham số m để đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{m^2x-2}{4x-m}$ đi qua điểm $A\left(\dfrac{-1}{2};1\right)$

Câu 50: Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right|$ là:

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

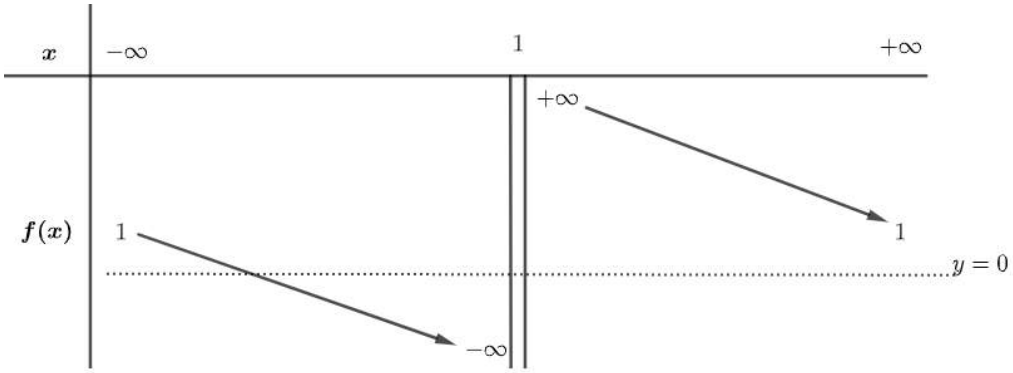
Lời giải

Chọn D

Cách 1:

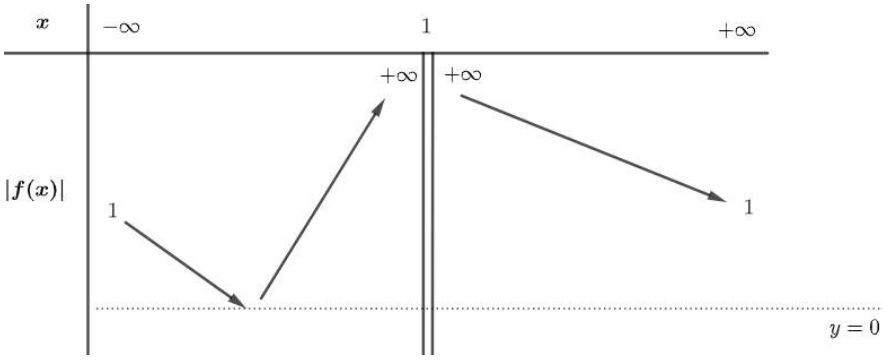
Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$, $f'(x)=\dfrac{-3}{(x-1)^2}<0,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có bảng biến thiên sau:



Từ đó suy ra đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ bao gồm phần đồ thị nằm phía trên trục hoành của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đối xứng qua trục hoành của phần đồ thị hàm số $y=f(x)$ ở phía dưới trục hoành.

Ta có bảng biến thiên sau:



Suy ra hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có 1 đường tiệm cận đứng $x=1$.

Cách 2

Hàm số $y=\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right|$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^-}\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right|=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+2}{1-x}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1^+}\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right|=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+2}{x-1}=+\infty$

Vậy hàm số có 1 đường tiệm cận đứng là $x=1$.

Dạng 3: Đường tiệm cận của đồ thị hàm số phân thức hữu tỷ

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-5x+4}$ có đồ thị (C). Số đường tiệm cận đứng của đồ thị (C) là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có $D=\mathbb{R}\setminus\{1;4\}$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x-4)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+3}{x-4}=-\dfrac{4}{3}$;

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x-4)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+3}{x-4}=-\dfrac{4}{3}$;

$\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{x+3}{x-4}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{x+3}{x-4}=-\infty$.

Suy ra đồ thị hàm số (C) có một tiệm cần đứng $x=4$.

Câu 2: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ có đường tiệm cận ngang là:

A. $y=2$. **B.** $y=0$. **C.** $y=1$. **D.** $y=-2$.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{\pm 2\}$

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-2}{x^2-4}=0$ suy ra đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=0$.

Câu 3: Đồ thị hàm số $y=f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$

Do đó

$\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)=+\infty$. Suy ra $x=1$ là một đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)=-\infty$. Suy ra $x=2$ là một đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)=0$. Suy ra $y=0$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số $y=f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ có tất cả 3 đường tiệm cận.

Câu 4: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=0$ nên $y=0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Phương trình $x^2+1=0$ vô nghiệm nên đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận đứng.

Câu 5: Cho hàm số $y=\dfrac{2020}{x+2021}$. Số tiệm cận của đồ thị hàm số bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2020}{x+2021}=0$ suy ra tiệm cận ngang $y=0$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to-2021^+}y=\lim\limits_{x\to-2021^+}\dfrac{2020}{x+2021}=+\infty$ suy ra tiệm cận đứng $x=-2021$.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Câu 6: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận ngang?

A. $y=x^3-x-1$. **B.** $y=\sqrt{2x^2+3}$. **C.** $y=\dfrac{x^3+1}{x^2+1}$. **D.** $y=\dfrac{3x^2+2x-1}{4x^2+5}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+2x+1}{4x^2+5}=\dfrac{3}{4}$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=\dfrac{3}{4}$.

Câu 7: Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+x-2}{x-2}$ là:

A. $x=2$. **B.** $x=-2$. **C.** $y=-2$. **D.** $y=2$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

$\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2+x-2}{x-2}=+\infty\Rightarrow$ TCĐ: $x=2$.

Câu 8: Phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3}{x+2}$ là

A. $x=-2$. **B.** $x=0$. **C.** $x=3$. **D.** $y=0$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác đinh $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

$\lim\limits_{x\to -2^+} y=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{3}{x+2}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to -2^-} y=\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{3}{x+2}=-\infty$, suy ra $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 9: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+6}{x-2}$ là đường thẳng

A. $x=3$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=-3$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{3x+6}{x-2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3x+6}{x-2}=-\infty$ nên đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng.

Câu 10: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2}{x-1}$ là đường thẳng :

A. $x=1$ **B.** $y=2$ **C.** $x=0$ **D.** $y=0$

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2}{x-1}=0$

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2}{x-1}=0$

Vậy đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x-3}$ là

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=1\Rightarrow y=1$ là tiệm cận ngang

Do $\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^+} y=-\dfrac{1}{4}\\ \lim\limits_{x\to1^-} y=-\dfrac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow x=1$ không là tiệm cận đứng

$\lim\limits_{x\to(-3)^+} y=-\infty\Rightarrow x=-3$ là tiệm cận đứng

Vậy tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị là 2.

Câu 2: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số: $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2-x-2}$

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Xét $x^2-x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=2\end{array}\right.$

Ta có: $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x^2-x+1}{x^2-x-2}=-\infty;\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2-x+1}{x^2-x-2}=+\infty$ nên TCĐ: $x=-1$ và $x=2$

Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-x+1}{x^2-x-2}=1$ nên TCN: $y=1$

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.

Câu 3: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2021}{x^2-2}$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\sqrt{2}\right\}$.

Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=0\Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang.

Vì $\lim\limits_{x\to\left(\sqrt{2}\right)^+} y=+\infty$ (hoặc $\lim\limits_{x\to\left(\sqrt{2}\right)^-} y=-\infty$) $\Rightarrow x=\sqrt{2}$ là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to\left(-\sqrt{2}\right)^+} y=-\infty$ (hoặc $\lim\limits_{x\to\left(-\sqrt{2}\right)^-} y=+\infty$) $\Rightarrow x=-\sqrt{2}$ là tiệm cận đứng.

Vậy tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là 3.

Câu 4: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2-x-2}$ là

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Vì $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} y=1$ nên tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là đường thẳng có phương trình $y=1.$

Vì $\lim\limits_{x\to-1} y=-\infty$ nên tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng có phương trình $x=-1.$

Vì $\lim\limits_{x\to2} y=-\infty$ nên tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng có phương trình $x=2.$

Vậy **số** đường tiệm cận của đồ thị hàm số là 3.

Câu 5: Cho hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x^2-2}$. Đồ thị hàm số đã cho có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=0\Rightarrow$ đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là $y=0$.

$\lim\limits_{x\to(\sqrt{2})^+} y=+\infty;\ \lim\limits_{x\to(-\sqrt{2})^+} y=+\infty\Rightarrow$ đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là $x=\pm\sqrt{2}$

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận.

Câu 6: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x}{x^2-6x+9}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

$y=\dfrac{x^2-3x}{x^2-6x+9}=\dfrac{x}{x-3}.$

Đồ thị hàm số có TCĐ $x=3$ và TCN $y=1$.

Câu 7: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=0$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang là $y=0$.

Nghiệm của phương trình $x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$

Xét $\lim\limits_{x\to2^+} y=+\infty$ nên đồ thị có 1 tiệm cận đứng $x=2$.

Vậy đồ thị hàm số có 2 tiệm cận.

Câu 8: Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2x}{x^2-4}$.

A. $x=\pm2$. **B.** $x=-2$. **C.** $y=\pm2$. **D.** $y=1$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{\pm 2\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $x=2$ không là tiệm cận đứng của hàm số.

Ta có:

$\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x^2-2x}{x^2-4}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x^2-2x}{x^2-4}=-\infty$.

Suy ra $x=-2$ là tiệm cận đứng của hàm số đã cho.

Câu 9: Số tất cả các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2+1}{x^2-3}$ là.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^2-3}=2$ suy ra $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to(\sqrt{3})^+}\dfrac{2x^2+1}{x^2-3}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to(-\sqrt{3})^-}\dfrac{2x^2+1}{x^2-3}=+\infty$ suy ra $x=\sqrt{3};x=-\sqrt{3}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy có 3 tiệm cận.

Câu 10: Tổng số các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{4x^2-4x-8}{(x-2)(x+1)^2}$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4x^2-4x-8}{(x-2)(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2\left(4-\dfrac{4}{x}-\dfrac{8}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\dfrac{2}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2}=0$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=0$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2}y=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-4x-8}{(x-2)(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4}{x+1}=\dfrac{4}{3}$

$\lim\limits_{x\to -1^+}y=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{4x^2-4x-8}{(x-2)(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{4(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{4}{x+1}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to -1^-}y=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{4x^2-4x-8}{(x-2)(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{4(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{4}{x+1}=-\infty$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-1$.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Câu 11: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-m}$ không có tiệm cận

đứng?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-m}$ không có tiệm cận đứng khi $x=m$ là nghiệm của phương trình $2x^2-3x+m=0$. Khi đó $2m^2-2m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=1\end{array}\right.$.

Vậy có 2 giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-m}$ không có tiệm cận đứng.

Câu 12: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3-9x}{x^3-x^2-5x-3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $\mathsf{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1;3\}$. Ta có:

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=1$ nên đường thẳng $y=1$ là TCN.
- $\lim\limits_{x\to-1}y=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+1)^2}=-\infty$ nên đường thẳng $x=-1$ là TCĐ;

$\lim\limits_{x\to3}y=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x(x+3)}{(x+1)^2}=\dfrac{18}{16}=\dfrac{9}{8}$ nên đường thẳng $x=3$ không là TCĐ.

Vậy đồ thị hàm số có 1 đường TCN và 1 đường TCĐ.

Câu 13: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx^2-1}{x^2-3x+2}$ có đúng 2 đường tiệm cận?

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{mx^2-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{m-\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}=m$.

Suy ra đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang: $y=m$.

Đồ thị hàm số đã cho có đúng 2 đường tiệm cận $\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số đã cho có đúng 1 tiệm cận đứng $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m-1=0\\4m-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=\dfrac{1}{4}\end{array}\right.$.

Vậy có 2 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 14: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-m}$ không có tiệm cận đứng?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-m}$ không có tiệm cận đứng khi $x=m$ là nghiệm của phương trình $2x^2-3x+m=0$. Khi đó $2m^2-2m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=1\end{array}\right.$.

Vậy có 2 giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-m}$ không có tiệm cận đứng.

Câu 15: Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in[-10;10]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{2x^2+6x-m-3}$ có hai đường tiệm cận đứng?

A. 19. **B.** 15. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{2x^2+6x-m-3}$ có hai đường tiệm cận đứng khi phương trình $2x^2+6x-m-3=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow\begin{cases}3^2-2(-m-3)>0\\2.1^2+6.1-m-3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-\dfrac{15}{2}\\m\neq 5\end{cases}$

Suy ra tập các giá trị nguyên của m thỏa mãn là $\{-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4;6;7;8;9;10\}$

Vậy có 17 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 16: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^3-x^2-x+1}$ là

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-1}{x^3-x^2-x+1}=0$ do đó tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^3-x^2-x+1}$ là đường thẳng $y=0$.

Ta có $x^3-x^2-x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$.

Vì $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{x^3-x^2-x+1}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x-1}{x^3-x^2-x+1}=-\infty$ do đó tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^3-x^2-x+1}$ là đường thẳng $x=1$ và $x=-1$.

Câu 17: Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Tiệm cận ngang:

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(5-\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5-\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}}=5$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $y=5$.

Tiệm cận đứng:

Cho $x^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$

Ta có: $\lim\limits_{x\to1} y=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(5x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x+1}{x+1}=\dfrac{6}{2}=3$ nên $x=1$ không là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{5x^2-4x-1}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(\dfrac{1}{x+1}.\dfrac{5x^2-4x-1}{x-1}\right)=-\infty$

vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{1}{x+1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{5x^2-4x-1}{x-1}=-4<0\end{cases}$.

Khi đó, đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng $x=-1$.

Tổng cộng đồ thị hàm số có 2 tiệm cận.

Câu 18: Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}$.

A. 2 **B.** 3 **C.** 0 **D.** 1

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}}=1\Rightarrow y=1$ là đường tiệm cận ngang.

Mặc khác:

$\lim\limits_{x\to1} y=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-4)}{(x+1)}=-\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow x=1$ không là đường tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{(x-4)}{(x+1)}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} y=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{(x-4)}{(x+1)}=+\infty$

$\Rightarrow x=-1$ là đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận

Câu 19: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ có mấy tiệm cận.

A. 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 0

Lời giải

Chọn C

Ta có $x^2-4=0\Leftrightarrow x=\pm 2$

$\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x-2}{x^2-4}\right)=\dfrac{1}{4}$ nên đường thẳng $x=2$ không phải là tiệm cân đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to -2^+}\left(\dfrac{x-2}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{1}{x+2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to (-2)^-}\left(\dfrac{x-2}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to (-2)^-}\dfrac{1}{x+2}=-\infty$, nên đường thẳng $x=-2$ là tiệm cân đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(\dfrac{x-2}{x^2-4}\right)=0$ nên đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy có đồ thị có hai đường tiệm cận.

Câu 20: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-8x+m}$ có 3 đường tiệm cận?

A. 14. **B.** 8. **C.** 15. **D.** 16.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x-1}{x^2-8x+m}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x-1}{x^2-8x+m}=0$ nên hàm số có một tiện cận ngang $y=0$.

Hàm số có 3 đường tiệm cận khi và chỉ khi hàm số có hai đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình $x^2-8x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=16-m>0\\ m-7\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<16\\ m\neq 7\end{cases}$.

Kết hợp với điều kiện m nguyên dương ta có $m\in\{1;2;3;...;6;8;...;15\}$. Vậy có 14 giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Câu 21: Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x^3-3mx^2+\left(2m^2+1\right)x-m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2020;2020]$ để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận?

A. 4039. **B.** 4040. **C.** 4038. **D.** 4037.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim\limits_{x\to +\infty}y=0,\ \lim\limits_{x\to -\infty}y=0\Rightarrow$ đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận ngang.

Do đó đồ thị hàm số đã cho có 4 đường tiệm cận khi và chỉ khi nó có 3 tiệm cận đứng $(*)$.

Có $x^3-3mx^2+\left(2m^2+1\right)x-m=(x-m)\left(x^2-2mx+1\right)$

$x^3-3mx^2+\left(2m^2+1\right)x-m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\ x^2-2mx+1=0\end{array}\right.\qquad(2)$

$(*)\Leftrightarrow x^3-3mx^2+\left(2m^2+1\right)x-m=0$ có 3 nghiệm phân biệt khác 3.

$\Leftrightarrow m\neq 3$ và (2) có 2 nghiệm phân biệt khác m và khác 3.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m^2 - 2m.m + 1 \neq 0 \\ 3^2 - 2m.3 + 1 \neq 0 \\ \Delta_2' = m^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3, m \neq \dfrac{5}{3} \\ \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -1 \end{array} \right. \end{cases}$$

Do đó tập tất cả giá trị nguyên của m thỏa ycbt là $\{-2020; -2019; ...; -2; 2; 4; 5; ...; 2020\}$.

Vậy có 4037 giá trị m thỏa ycbt.

Câu 22: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 + m}{x^2 - 3x + 2}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A. $m = -1$ **B.** $m \in \{1; 4\}$ **C.** $m = 4$ **D.** $m \in \{-1; -4\}$

Lời giải

Chọn D

$y = \dfrac{x^2 + m}{x^2 - 3x + 2} = \dfrac{x^2 + m}{(x-1)(x-2)}$.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = 1 \Rightarrow y = 1$ là đường tiệm cận ngang.

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 + m}{x^2 - 3x + 2}$ có đúng hai đường tiệm cận $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ pt $x^2 + m = 0$ nhận nghiệm $x = 1$ hoặc $x = 2$.

Khi đó: $\left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = -4 \end{array} \right.$.

Với $m = -1$ có một tiệm cận đứng $x = 2$.

Với $m = -4$ có một tiệm cận đứng $x = 1$.

Vậy $m \in \{-1; -4\}$.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 2mx + 4}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị có ba đường tiệm cận

A. $m > 2$ **B.** $\begin{cases} m < -2 \\ m \neq -\dfrac{5}{2} \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array} \right. \\ m \neq -\dfrac{5}{2} \end{cases}$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 2 \end{array} \right.$

Lời giải

Chọn C

Để đồ thị có ba đường tiệm cận thì $x^2 - 2mx + 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\neq -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (-1)^2 - 2m(-1) + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array} \right. \\ m \neq -\dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

Câu 24: Biết rằng đồ thị của hàm số $y = \dfrac{(n-3)x + n - 2017}{x + m + 3}$ (m, n là các số thực) nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung là tiệm cận đứng. Tính tổng $m + n$.

A. 0 **B.** -3 **C.** 3 **D.** 6

Lời giải

Chọn A

Theo công thức tìm nhanh tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ta có

Đồ thị hàm số nhận $x=-\dfrac{d}{c}=-m-3=0$ làm TCĐ $\Rightarrow m=-3$

Đồ thị hàm số nhận $y=\dfrac{a}{c}=n-3=0$ làm TCN $\Rightarrow n=3$.

Vậy $m+n=0$.

Câu 25: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$. Tìm a,b để đồ thị hàm số có $x=1$ là tiệm cận đứng và $y=\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang.

A. $a=-1;b=2$. **B.** $a=4;b=4$. **C.** $a=1;b=2$. **D.** $a=-1;b=-2$.

Lời giải

Chọn C

+ $b=0\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+1}{-2}$ không có tiệm cận.

+ $b\neq 0$, tập xác định của hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$ là $D=R\setminus\left\{\dfrac{2}{b}\right\}$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{ax+1}{bx-2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{a+\dfrac{1}{x}}{b-\dfrac{2}{x}}=\dfrac{a}{b}$.

$\Rightarrow$đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\dfrac{a}{b}\Rightarrow\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow b=2a$.

$\lim\limits_{x\to\frac{2^+}{b}} y=\lim\limits_{x\to\frac{2^+}{b}}\dfrac{ax+1}{bx-2}=\left[\begin{array}{l}+\infty\\-\infty\end{array}\right.$.

$\Rightarrow$đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=\dfrac{2}{b}\Rightarrow\dfrac{2}{b}=1\Leftrightarrow b=2\Rightarrow a=1$.

Vậy $a=1;b=2$.

Câu 26: Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in[-10;10]$ sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{2x^2+6x-m-3}$ có hai đường tiệm cận đứng?

A. 19. **B.** 15. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Chọn C

Ta có đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{2x^2+6x-m-3}$ có hai đường tiệm cận đứng khi phương trình $2x^2+6x-m-3=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow\begin{cases}3^2-2(-m-3)>0\\2.1^2+6.1-m-3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-\dfrac{15}{2}\\m\neq 5\end{cases}$

Từ đó ta suy ra tập các giá trị nguyên của m thỏa mãn là $\{-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,6,7,8,9,10\}$. Vậy có 17 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 27: Tổng các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2+2(m-1)x+m^2-2}$ có đúng một tiệm cận đứng.

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** -3. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $f(x)=x^2+2(m-1)x+m^2-2$

Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng khi và chỉ khi $f(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm $x=1$ hoặc $f(x)=0$ có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow\left[\begin{cases}\Delta'>0\\ f(1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m-1)^2-(m^2-2)>0\\ 1+2(m-1)+m^2-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<\dfrac{3}{2}\\ m=1;m=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=1\\ m=-3.\\ m=\dfrac{3}{2}\end{cases}\right.$$

$$\Delta'=0\qquad m=\frac{3}{2}\qquad m=\frac{3}{2}\qquad m=\frac{3}{2}$$

Vậy tổng các giá trị m thỏa mãn là: $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 28: Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x^3-3mx^2+2m^2+1\,x-m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-6;6]$ của tham số m để đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận?

A. 12. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 11.

Lời giải

Chọn B

$\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}y=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=0$.

Do đó, đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận khi phương trình $x^3-3mx^2+2m^2+1\,x-m=0$ có 3 nghiệm phân biệt $x\neq 3$.

Xét phương trình $x^3-3mx^2+2m^2+1\,x-m=0$ ta có

$$x^3-3mx^2+2m^2+1\,x-m=0\Leftrightarrow x-m\quad x^2-2mx+1=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=m\\ x^2-2mx+1=0\end{cases}.$$

Phương trình có ba nghiệm phân biệt $x\neq 3$ khi và chỉ khi $m\neq 3$ và phương trình $x^2-2mx+1=0$ có hai nghiệm phân biệt $x\neq 3$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 3\\ m^2-1>0\\ 3^2-2.3.m-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 3\\ \left[\begin{array}{l}m>1\\ m<-1\end{array}\right.\\ m\neq\dfrac{5}{3}\end{cases}.$$

Do m nguyên và $m\in[-6;6]$ nên $m\in\{-6;-5;-4;-3;-2;2;4;5;6\}$.

Vậy có 9 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Câu 29: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2+3x+m}{x-m}$ không có tiệm cận đứng.

A. $m=1$. **B.** $m>1$. **C.** $m=1$ và $m=0$. **D.** $m\neq 0$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $\mathbb{R}\backslash\{m\}$.

Có $\lim\limits_{x\to m}\dfrac{2x^2-3x+m}{x-m}=\lim\limits_{x\to m}\left(2x+2m-3+\dfrac{2m^2-2m}{x-m}\right)$.

Để đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng thì phải tồn tại $\lim\limits_{x\to m}\dfrac{2x^2-3x+m}{x-m}$,

$\Rightarrow 2m^2-2m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=1\end{array}\right.$

Câu 30: Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2019m$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2020m^4$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị của m để đồ thị của hàm số $y=f(x)$ có duy nhất một tiệm cận ngang?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có duy nhất một tiệm cận ngang

$\Leftrightarrow 2019m=2020m^4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=\sqrt[3]{\dfrac{2019}{2020}}\end{array}\right.$.

Vậy có 2 giá trị của m thỏa bài toán

Câu 31: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{6x-3}{\left(mx^2-6x+3\right)\left(9x^2+6mx+1\right)}$ có đúng 1 đường tiệm cận?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

Đặt $f\left(x\right)=mx^2-6x+3$ và $g\left(x\right)=9x^2+6mx+1$. Ta xét các trường hợp:

Trường hợp 1: $m=0$ khi đó ta có $y=\dfrac{6x-3}{\left(-6x+3\right)\left(9x^2+1\right)}$ đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y=0$ do đó $m=0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: $m\neq 0$ và cả hai tam thức $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ đều vô nghiệm

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'_f<0\\\Delta'_g<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9-3m<0\\9m^2-9<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>3\\-1<m<1\end{cases}\Leftrightarrow m\in\varnothing$.

Trường hợp 3: Tam thức $g(x)$ nhận $x=\frac{1}{2}$ làm nghiệm $g\left(\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow m=-\frac{13}{12}$ khi đó $f(x)$ luôn có 2 nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số đã cho có nhiều hơn 1 đường tiệm cận.

Vậy có 1 giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y=\frac{6x-3}{\left(mx^2-6x+3\right)\left(9x^2+6mx+1\right)}$ có đúng 1 đường tiệm cận

Câu 32: Cho hàm số $y=\frac{x-2}{mx^2-2x+4}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Với $m=0$; ta có hàm số $y=\frac{x-2}{-2x+4}=-2\Rightarrow$ Không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m\neq 0$, ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x-2}{mx^2-2x+4}=0\Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số có đúng 1 tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ $mx^2-2x+4=0$ có nghiệm duy nhất hoặc $mx^2-2x+4=0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $x=2$.

$mx^2-2x+4=0$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow\Delta'=0\Leftrightarrow 1-4m=0\Leftrightarrow m=\frac{1}{4}$.

$mx^2-2x+4=0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $x=2$. $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\4m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<\frac{1}{4}\\m=0\end{cases}$

$\Rightarrow m=0$ không thỏa mãn điều kiện.

Vậy chỉ có một giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 33: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{x-1}{x^2-\left(2m+1\right)x+m^2-3}$ có đúng hai đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số $y=\frac{x-1}{x^2-\left(2m+1\right)x+m^2-3}$ có 1 tiệm cận ngang là $y=0$.

Đồ thị hàm số $y=\frac{x-1}{x^2-\left(2m+1\right)x+m^2-3}$ có đúng hai đường tiệm cận

$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số $y=\frac{x-1}{x^2-\left(2m+1\right)x+m^2-3}$ có đúng 1 tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow$ Phương trình $x^2-\left(2m+1\right)x+m^2-3=0$ có nghiệm kép hoặc phương trình $x^2-\left(2m+1\right)x+m^2-3=0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 1.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\Delta=0\\ \begin{cases}\Delta>0\\ 1-(2m+1)+m^2-3=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(2m+1)^2-4(m^2-3)=0\\ \begin{cases}(2m+1)^2-4(m^2-3)>0\\ m^2-2m-3=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-\dfrac{13}{4}\\ m=3\\ m=-1\end{array}\right.$$

Vậy có ba giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 34: Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2-2x+m}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A. -4. **B.** -2. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(x)=x^2-2x+m$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}y=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}y=0$ nên hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2-2x+m}$ luôn có tiệm cận ngang $y=0$ với mọi m.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2-2x+m}$ có đúng hai đường tiệm cận khi và chỉ khi phương trình $f(x)=0$ có đúng 1 nghiệm hoặc phương trình $f(x)=0$ có nghiệm $x=-1$.

Suy ra $\left[\begin{array}{l}\Delta'_f=0\\ f(-1)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-m=0\\ m+3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=-3.\end{array}\right.$

Vậy tổng tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2-2x+m}$ có đúng hai đường tiệm cận là $1+(-3)=-2$.

Câu 35: Tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x+m}$ có hai tiệm cận đứng là

A. $\begin{cases}m<1\\ m\neq-8\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}m\neq1\\ m\neq-8\end{cases}$. **C.** $m<1$. **D.** $\begin{cases}m>1\\ m\neq8\end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng thì phương trình $x^2-2x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác nghiệm của phương trình $x^2+x-2=0$.

Hay phương trình $f(x)=x^2-2x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 và -2.

Khi đó ta có $\begin{cases}\Delta'>0\\ f(1)\neq0\\ f(-2)\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-m>0\\ m-1\neq0\\ 8+m\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<1\\ m\neq1\\ m\neq-8\end{cases}\Leftrightarrow-8\neq m<1.$

Câu 36: Tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x+m}$ có hai tiệm cận đứng là

A. $\begin{cases}m<1\\ m\neq-8\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}m\neq1\\ m\neq-8\end{cases}$. **C.** $m<1$. **D.** $\begin{cases}m>1\\ m\neq8\end{cases}$.

Lờigiải

Để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng thì phương trình $x^2-2x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác nghiệm của phương trình $x^2+x-2=0$.

Hay phương trình $f(x)=x^2-2x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 và -2.

Khi đó ta có $\begin{cases}\Delta'>0\\ f(1)\neq 0\\ f(-2)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-m>0\\ m-1\neq 0\\ 8+m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<1\\ m\neq 1\\ m\neq -8\end{cases}\Leftrightarrow -8\neq m<1.$

Câu 37: Gọi S là tập hợp các số thực m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+3}{x^2-2mx+9}$ có đúng hai tiện cận. Tính tổng các phần tử của S.

A. -3. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

$y=\dfrac{x+3}{x^2-2mx+9}$

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=0$ suy ra tiệm cận ngang $y=0$.

Để hàm số có đúng hai tiệm cận thì phải có đúng một tiệm cận đứng.

Trường hợp 1: Phương trình $x^2-2mx+9=0$ có nghiệm kép.

$\Leftrightarrow \Delta'=m^2-9=0\Leftrightarrow m=\pm 3$

Trường hợp 2: Phương trình $x^2-2mx+9=0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng -3.

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=m^2-9>0\\ (-3)^2-2m.(-3)+9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>3\\ m<-3\end{array}\right.\Leftrightarrow m\in\varnothing.\\ m=-3\end{cases}$

$\Rightarrow S=\{3;-3\}$

Tổng các phần tử của $S=0$

Câu 38: Xác định m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-(2m+3)x+(m+2)}{x+1}$ không có đường tiệm cận đứng.

A. $m=-1$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-(2m+3)x+(m+2)}{x+1}$ không có tiệm cận đứng

khi phương trình $f(x)=0$ có nghiệm $x=-1$ (với $f(x)=x^2-(2m+3)x+(m+2)$)

Ta có $f(-1)=0\Leftrightarrow 1+(2m+3)+(m+2)=0\Leftrightarrow 3m+6=0\Leftrightarrow m=-2$.

Câu 39: Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{mx^2+4x}$ có một đường tiệm cận đứng và một đường tiệm cận ngang. Tổng các phần tử của S bằng

A. 4. **B.** -4. **C.** -6. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{mx^2+4x}=\dfrac{1}{m}$. Suy ra để hàm số có một tiệm cận ngang thì $m\neq 0$ (1).

Lại có $\dfrac{x^2-3x+2}{mx^2+4x}=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x(mx+4)}$.

Để đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng thì m thỏa mãn $\left[\begin{array}{l}m+4=0\\2m+4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-4\\m=-2\end{array}\right.$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra để đồ thị hàm số đã cho có một đường tiệm cận đứng và một đường tiệm cận ngang thì $\left[\begin{array}{l}m=-4\\m=-2\end{array}\right.$. Vậy tổng các phần tử của S bằng -6.

Câu 40: Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2}{(x-2)\left(x^2+2mx-m\right)}$ có 2 đường tiệm cận đứng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $x^2+2>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ nên để đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận đứng thì $(x-2)\left(x^2+2mx-m\right)=0$ phải có 2 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow x^2+2mx-m=0$ có nghiệm kép khác 2 hoặc có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm bằng 2.

TH1: $x^2+2mx-m=0$ có nghiệm kép khác 2 $\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m^2+m=0\\4+3m\neq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-1\end{array}\right.\\m\neq-\dfrac{4}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-1\end{array}\right.$

TH2: $x^2+2mx-m=0$ có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm bằng 2

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m^2+m>0\\4+3m=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}m>0\\m<-1\end{array}\right.\\m=-\dfrac{4}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow m=-\dfrac{4}{3}$

Vậy có tất cả 3 giá trị của m thỏa mãn

Câu 41: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx^2-1}{x^2-3x+2}$ có đúng 2 đường tiệm cận?

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{mx^2-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{m-\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}=m$.

Suy ra đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang: $y=m$.

Đồ thị hàm số đã cho có đúng 2 đường tiệm cận $\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số đã cho có đúng 1 tiệm cận

đứng $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-1=0 \\ 4m-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\dfrac{1}{4} \end{array}\right.$.

Vậy có 2 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 42: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2+10x+m}$ có 3 đường tiệm cận?

A. 24. **B.** 10. **C.** 25. **D.** 23.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{x^2+10x+m}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x^2+10x+m}=0$ nên đồ thị hàm số có một tiện cận ngang $y=0$.

Đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận khi và chỉ khi đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình $x^2+10x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác $-1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=25-m>0 \\ m-9\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<25 \\ m\neq 9 \end{cases}$

.

Kết hợp với điều kiện m nguyên dương ta có $m\in\{1;2;3;...;8;10;...;24\}$. Vậy có 23 giá trị nguyên dương m thỏa mãn đề bài.

Câu 43: Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-2mx+1}$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-10;10)$ để đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng $x=a, x=b$ sao cho $a<3<b$.

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng thì phương trình $g(x)=x^2-2mx+1=0$ phải có hai nghiệm phân biệt a,b khác 2 tức là

$$\begin{cases} \Delta'>0 \\ g(2)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-1>0 \\ 2^2-2m.2+1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-1 \end{array}\right. \\ m\neq\dfrac{5}{4} \end{cases}.$$

Hệ thức Vi-et $\begin{cases} a+b=2m \\ ab=1 \end{cases}$

Ta cần $a<3<b \Leftrightarrow (a-3)(b-3)<0 \Leftrightarrow ab-3(a+b)+9<0 \Leftrightarrow 1-6m+9<0 \Leftrightarrow m>\dfrac{5}{3}$.

Kết hợp các điều kiện thì có 8 giá trị nguyên m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 44: Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-mx+1}$ có đúng ba đường tiệm cận.

A. $-2<m<2$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m>2 \\ \begin{cases} m<-2 \\ m\neq-\dfrac{5}{2} \end{cases} \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ \begin{cases} m>2 \\ m\neq\dfrac{5}{2} \end{cases} \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x^2-mx+1\neq 0$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-2}{x^2-mx+1}=0\Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-mx+1}$ có đúng ba đường tiệm cận $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-mx+1}$ có đúng hai đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow x^2-mx+1=0$ có đúng hai nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=m^2-4>0\\ 2^2-2m+1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<-2\\ m>2\end{array}\right.\\ m\neq\dfrac{5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-2\\ \begin{cases}m>2\\ m\neq\dfrac{5}{2}\end{cases}\end{array}\right..$$

Câu 45: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{(x-m)(x^2-n^2)}$ có đồ thị (C), với m và n là hai tham số nguyên. Hỏi có tất cả bao nhiêu bộ số $(m;n)$ để (C) có đúng 2 đường tiệm cận (nếu chỉ xét TCĐ và TCN)?

A. 5. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 11.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{(x-m)(x^2-n^2)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}}{\left(1-\dfrac{m}{x}\right)\left(1-\dfrac{n^2}{x^2}\right)}=0$ nên đường thẳng $y=0$ luôn là đường TCN của $(C),\forall m,n\in\mathbb{Z}$. Do đó (C) có đúng 2 đường tiệm cận khi và chỉ khi (C) có một đường TCĐ tức là mẫu số có đúng 1 nghiệm mà không phải là nghiệm của tử số, hàm số.

Mặt khác, $y=\dfrac{x^2-3x+2}{(x-m)(x^2-n^2)}=\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-m)(x-n)(x+n)}$.

TH1: $m=1\Rightarrow y=\dfrac{(x-2)}{(x-n)(x+n)}$. Trường hợp này có 3 giá trị nguyên của n thỏa mãn là $n\in\{2;-2;0\}$.

TH2: $m=2\Rightarrow y=\dfrac{(x-1)}{(x-n)(x+n)}$. Trường hợp này có 3 giá trị nguyên của n thỏa mãn là $n\in\{1;-1;0\}$.

TH3: $n=1\Rightarrow y=\dfrac{(x-2)}{(x-m)(x+1)}$. Trường hợp này có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn là $m\in\{2;-1\}$.

TH4: $n=2\Rightarrow y=\dfrac{(x-2)}{(x-m)(x+2)}$. Trường hợp này có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn là $m\in\{1;-2\}$.

TH5: $n=-1\Rightarrow y=\dfrac{(x-2)}{(x-m)(x+1)}$. Trường hợp này có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn là $m\in\{2;-1\}$.

TH6: $n=-2\Rightarrow y=\dfrac{(x-1)}{(x-m)(x+2)}$. Trường hợp này có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn là $m\in\{1;-2\}$.

TH7: $\begin{cases}m\neq 1,m\neq 2\\ n\neq\pm 1,n\neq\pm 2\end{cases}\Rightarrow y=\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-m)(x-n)(x+n)}$ có 3 nghiệm của mẫu đều không là nghiệm của tử. Nên yêu cầu bài toán tương đương $m=n=0$.

Vậy có 11 cặp $(m;n)$ nguyên thỏa mãn đề bài.

Câu 46: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-|x|-2}$ có tất cả bao nhiêu tiệm cận?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

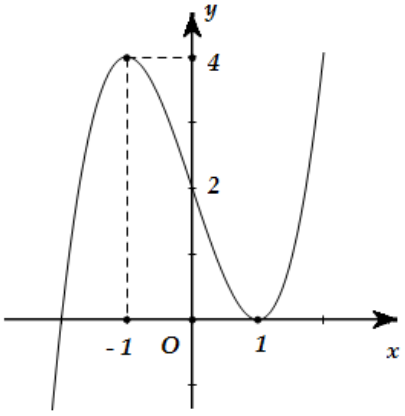
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2-|x|-2}=1$ suy ra TCN: $y=1$.

Cho $x^2-|x|-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|x|=-1(VN)\\ |x|=2\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pm 2$.

$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2+1}{x^2-|x|-2}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{x^2+1}{x^2-|x|-2}=-\infty$, suy ra có 2 TCĐ: $x=\pm 2$.

Vậy đồ thị có tất cả 3 tiệm cận.

Câu 47: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x^2-1)(x-1)}{f^2(x)-4f(x)}$ bằng



A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Tiệm cận đứng:

Dựa vào đồ thị ta có: $f\ x\ = m\ x\quad a\quad x\quad 1\ ^{2}, m>0, a<\quad 1$

$\Rightarrow f\ x\quad 4 = m\ x\ \mid 1\ ^{2}\ x\quad b\ , m>0, b>1.$

Ta có: $g\ x\ = \dfrac{x\ \mid 1\quad x\quad 1\ ^{2}}{f\ x\ \left[f\ x\ -4\right]} = \dfrac{x\ \mid 1\quad x\quad 1\ ^{2}}{m^{2}\ x\quad a\quad x\quad 1\ ^{2}\ x\ \mid 1\ ^{2}\ x\quad b}$

$= \dfrac{1}{m^{2}\ x-a\quad x-1\quad x-b}.$

Dễ thấy đồ thị hàm số có 3 tiệm cận đứng $x=a, x=-1, x=b$.

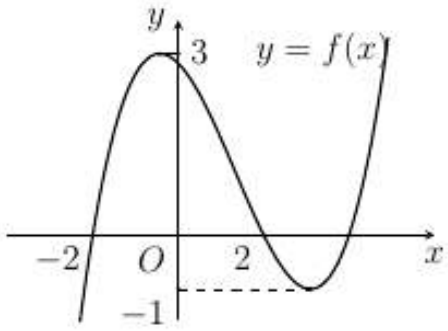
Tiệm cận ngang:

Ta có: $\lim\limits_{x\ \cdot\ \searrow} y = \lim\limits_{x\ \cdots\searrow} y = 0.$

Đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang $y=0$.

Vậy đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

Câu 48: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{1}{\left|3f\left(x^3-3x\right)\right|-m}$ có 8 tiệm cận đứng?

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

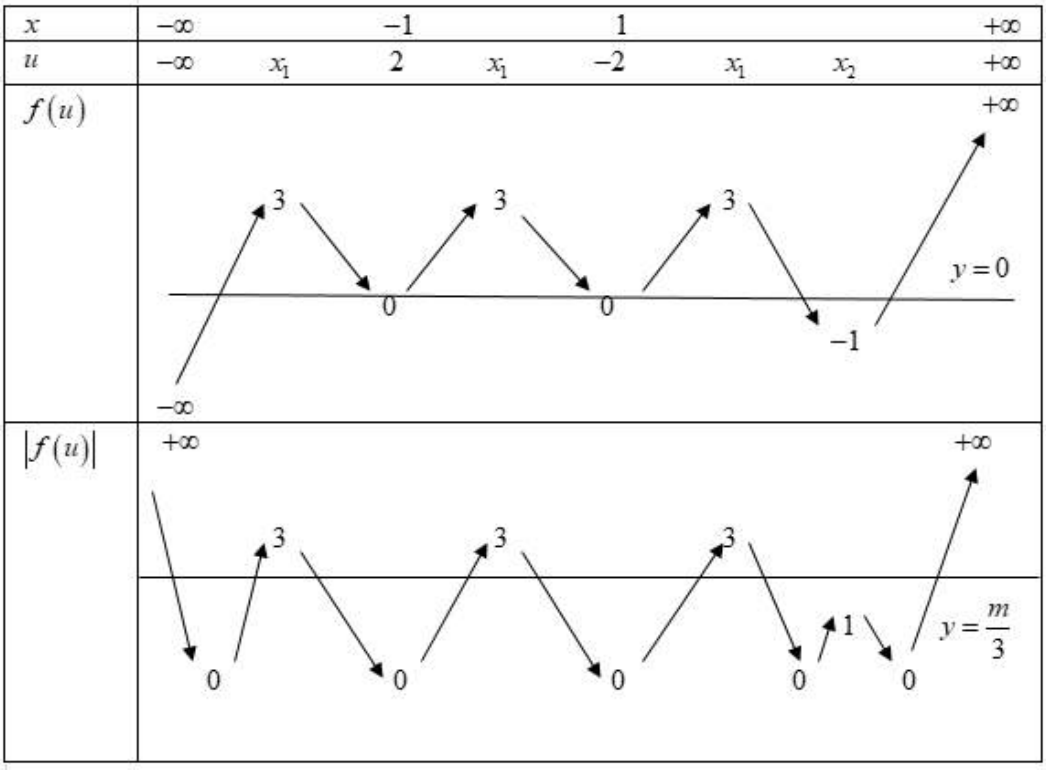
Chọn C

Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{1}{\left|3f\left(x^3-3x\right)\right|-m}$ có 8 tiệm cận đứng khi phương trình $\left|3f\left(x^3-3x\right)\right|=m$ hay $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\dfrac{m}{3}$ có đúng 8 nghiệm phân biệt.

Đặt $u=x^3-3x \Rightarrow u'=3x^2-3 \Rightarrow u'=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta có đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(x_1;3), B(x_2;-1)$ với $-2<x_1<0<2<x_2$.

Bảng ghép trục



Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\frac{m}{3}$ có 8 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $1<\frac{m}{3}<3\Leftrightarrow 3<m<9$ mà $m\in Z\Rightarrow m\in\{4,5,6,7,8\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của tham số m.

Dạng 4: Đường tiệm cận của đồ thị hàm số căn thức

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

TXĐ $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Vì $\lim\limits_{x\to -1^+} y=+\infty$ nên đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x=-1$ làm đường tiệm cận đứng $(*)$

Vì $\lim\limits_{x\to -\infty} y=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}}=-1$ nên đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y=-1$ làm đường tiệm cận ngang.

Vì $\lim\limits_{x\to -\infty} y=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}}=1$ nên đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y=1$ làm đường tiệm cận ngang.

Vậy đồ thị hàm số có tổng số đường tiệm cận là 3.

Câu 2: Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{(2x-1)\sqrt{x^2+1}}{x^2-1}$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to +\infty} y=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\left(2x^2-x\right)\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\left(2-\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{1-\dfrac{1}{x^2}}=2.$

$\lim\limits_{x\to -\infty} y=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\left(-2x^2+x\right)\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\left(-2+\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{1-\dfrac{1}{x^2}}=-2.$

$\Rightarrow y=\pm 2$ là tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to 1^{\pm}} y=\lim\limits_{x\to 1^{\pm}}\dfrac{(2x-1)\sqrt{x^2+1}}{x^2-1}=\pm\infty\Rightarrow x=1$ là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to (-1)^{\pm}} y=\lim\limits_{x\to (-1)^{\pm}}\dfrac{(2x-1)\sqrt{x^2+1}}{x^2-1}=\pm\infty\Rightarrow x=-1$ là tiệm cận đứng.

Câu 3: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{2-x}-x}{\sqrt{x^2+3}-2}$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định của hàm số: $\begin{cases}2-x\ge 0\\ \sqrt{x^2+3}-2\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 2\\ \sqrt{x^2+3}\ne 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 2\\ x\ne\pm 1\end{cases}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{2-x}-x}{\sqrt{x^2+3}-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x}}-1}{-\sqrt{1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x}}}=1$. Suy ra đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$.

$\lim\limits_{x\to 1}y=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2-x}-x}{\sqrt{x^2+3}-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(2-x-x^2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{2-x}+x\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2+x)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{(x+1)\left(\sqrt{2-x}+x\right)}=-3$.

Suy ra đường thẳng $x=1$ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to-1^-}y=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{\sqrt{2-x}-x}{\sqrt{x^2+3}-2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+}y=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{\sqrt{2-x}-x}{\sqrt{x^2+3}-2}=-\infty$.

Suy ra đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận.

Câu 4: Tổng số đường TCĐ và TCN của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x\left(\sqrt{x^2+3}+x-1\right)}{x^2-2x-3}$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D=\mathbb{R}/\{-1;3\}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(\sqrt{x^2+3}+x-1\right)}{x^2-2x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(\sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}}+1-\dfrac{1}{x}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}}+1-\dfrac{1}{x}\right)}{\left(1-\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)}=2$.

Suy ra $y=2$ là TCN.

$\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(\sqrt{x^2+3}+x-1\right)}{x^2-2x-3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2\left(-\sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}}+1-\dfrac{1}{x}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}}+1-\dfrac{1}{x}}{\left(1-\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)}=0$.

Suy ra $y=0$ là TCN.

$$\lim_{x\to -1} y=\lim_{x\to -1}\frac{x\left(\sqrt{x^2+3}+x-1\right)}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to -1}\frac{x\left(\sqrt{x^2+3}+x-1\right)\left(\sqrt{x^2+3}-x+1\right)}{\left(x^2-2x-3\right)\left(\sqrt{x^2+3}-x+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{2x\left(x+1\right)}{\left(x+1\right)\left(x-3\right)\left(\sqrt{x^2+3}-x+1\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{2x}{\left(x-3\right)\left(\sqrt{x^2+3}-x+1\right)}=\frac{-2}{-16}=\frac{1}{8}.$$

Suy ra $x=-1$ không phải là TCĐ của đồ thị hàm số đã cho.

$$\lim_{x\to 3^+} y=\lim_{x\to 3^+}\frac{x\left(\sqrt{x^2+3}+x-1\right)}{x^2-2x-3}=+\infty;\lim_{x\to 3^-} y=\lim_{x\to 3^-}\frac{x\left(\sqrt{x^2+3}+x-1\right)}{x^2-2x-3}=-\infty.$$

Suy ra $x=3$ là TCĐ của đồ thị hàm số đã cho.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 TCN và 1 TCĐ.

Câu 5: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{x+1}}$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có tập xác định của hàm số là $D=(-1;4]\Rightarrow$ Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận xiên.

$\lim\limits_{x\to -1^+} y=+\infty\Rightarrow$ Đồ thị nhận đường thẳng $x=-1$ làm tiệm cận đứng. Vậy đồ thị hàm số có một đường tiệm cận.

Câu 6: Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{|x+1|}{\sqrt{x^2+3}-2}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận (nếu ta chỉ tính đến các đường TCĐ và TCN)?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định của hàm số là: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{|x+1|}{\sqrt{x^2+3}-2}=1$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=1$.

$$y=\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+3}-2}=\frac{|x+1|\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{x^2-1}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+2}{x-1}, x\ge -1\\ -\dfrac{\sqrt{x^2+3}+2}{x-1}, x<-1\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 1^+} y=+\infty;\lim\limits_{x\to 1^-} y=+\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Câu 7: Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{1+\sqrt{x+1}}{x^2-2x-m}$ có đúng hai tiệm cận đứng là

A. $[-1;3]$. **B.** $(-1;3]$. **C.** $(-1;3)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

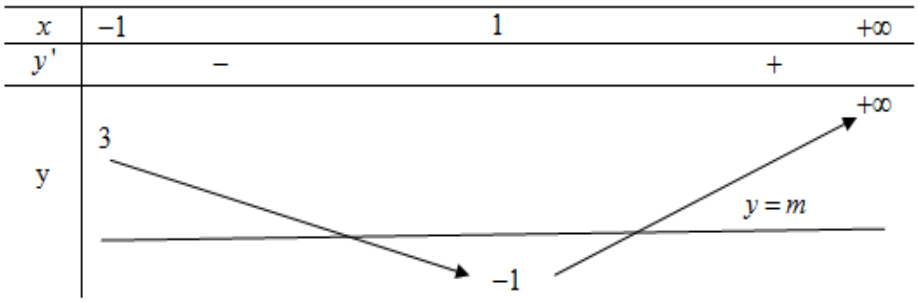
Điều kiện xác định: $x \ge -1$.

Vì $1+\sqrt{x+1} > 0$ với $\forall x \ge -1$ nên để đồ thị hàm số có đúng hai tiệm cận đứng thì phương trình $x^2 - 2x = m$ (1) phải có hai nghiệm phân biệt lớn hơn -1.

Xét hàm số $f(x) = x^2 - 2x$ trên $[-1;+\infty)$.

$f'(x) = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên:



Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn -1 khi $-1 < m \le 3$.

Câu 8: Đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2-3x-10}}{x-2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases} x^2-3x-10 \ge 0 \\ x-2 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le -2 \\ x \ge 5 \end{array}\right. \\ x \ne 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -2 \\ x \ge 5 \end{array}\right.$

Vậy $D = (-\infty;-2] \cup [5;+\infty)$

Xét $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-3x-10}}{x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\sqrt{1-\dfrac{3}{x}-\dfrac{10}{x^2}}}{x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{1-\dfrac{3}{x}-\dfrac{10}{x^2}}}{1-\dfrac{2}{x}} = 1$

Vậy $y = 1$ là TCN của đồ thị hàm số

Xét $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-3x-10}}{x-2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x\sqrt{1-\dfrac{3}{x}-\dfrac{10}{x^2}}}{x-2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-\sqrt{1-\dfrac{3}{x}-\dfrac{10}{x^2}}}{1-\dfrac{2}{x}} = -1$

Vậy $y = -1$ là một TCN của đồ thị hàm số

Vì $\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{\sqrt{x^2-3x-10}}{x-2}; \lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{\sqrt{x^2-3x-10}}{x-2}$ không tồn tại nên đồ thị hàm số không có TCĐ.

Vậy đồ thị hàm số có 2 tiệm cận.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-2}+\sqrt{9-x}}{\sqrt{x-1}}$ là:

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=[2;9]\Rightarrow$ hàm số không có đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng.

Câu 2: Đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau có tiệm cận đứng?

A. $y=\dfrac{1}{x^2+x+1}$. **B.** $y=\dfrac{1}{x^2+1}$. **C.** $y=\dfrac{1}{x^4+1}$. **D.** $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ có tập xác định $D=(0;+\infty)$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} y=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$ nên đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận đứng là $x=0$.

Câu 3: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2+8x+15}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $\begin{cases}-2\le x\le 2\\ x\ne -5\\ x\ne -3\end{cases}$

Vì $x=-3$ và $x=-5$ không thỏa mãn điều kiện $4-x^2\ge 0$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Từ điều kiện của hàm số suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2+8x+15}$ không có đường tiệm cận.

Câu 4: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{2-x}}{x^2-4x+3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D=(-\infty;2]\setminus\{1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ vậy đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=0$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$ vậy đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=1$.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Câu 5: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}{x^2+2x-8}$ có tổng số bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D=[1;+\infty)\setminus\{2\}$

$$y=\frac{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}{x^2+2x-8}=\frac{\dfrac{(x-2)^2}{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}}{(x-2)(x+4)}=\frac{(x-2)}{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2(x+4)}$$

Hàm số có tiệm cận ngang $y=0$, không có tiệm cận đứng.

Câu 6: Đồ thị hàm số $y=f(x)=\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}$ có số đường tiệm cận đứng là bao nhiêu?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x\neq 0$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} y=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}=\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to 0^-} y=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}=\dfrac{1}{2}$.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}$ không có tiệm cận đứng.

Câu 7: Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+15}-4}{x^2-x}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D=[-15;+\infty)\setminus\{0;1\}$.

Xét

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{x+15}-4}{x^2-x}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x+15}-4}{x^2-x}=+\infty\Rightarrow x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+15}-4}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+15-16}{x(x-1)\left(\sqrt{x+15}+4\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x\left(\sqrt{x+15}+4\right)}=\dfrac{1}{8}\Rightarrow x=1$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho. Vậy đồ thị hàm số đã cho có một đường tiệm cận đứng.

Câu 8: Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-2}+\sqrt{9-x}}{\sqrt{x-1}}$ là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Do tập xác định của hàm số là $D=[2;9]$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x-2}+\sqrt{9-x}}{\sqrt{x-1}}\right)$ do đó theo định nghĩa đồ thị hàm số không có đường tiệm cận ngang.

Ta có: $x-1=0\Leftrightarrow x=1\notin[2;9]$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to1^{\pm}}\left(\dfrac{\sqrt{x-2}+\sqrt{9-x}}{\sqrt{x-1}}\right)$ do đó theo định nghĩa đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng.

Câu 9: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-3x+2}$

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D=(2;+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-3x+2}=+\infty\Rightarrow$ TCĐ: $x=2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-3x+2}=0\Rightarrow$ TCN: $y=0$.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Câu 10: Tổng số đường tiệm cận ngang và đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x-3}$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}}}{1-\dfrac{3}{x}}=1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x-3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}}}{1-\dfrac{3}{x}}=-1$

Do đó đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận ngang là $y=1$ và $y=-1$.

Lại có $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=+\infty$ nên đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng là $x=3$.

Vậy tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là 3.

Câu 11: Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-2021;2021)$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-m}}{x-2}$ có tiệm cận đứng?

A. 2019. **B.** 2023. **C.** 2022. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định $\begin{cases}x\geq m\\x\neq2\end{cases}$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $\Leftrightarrow2\in[m;+\infty)\Leftrightarrow m\leq2$.

Mà m nguyên và $m \in (-2021;2021)$ nên $m \in \{-2020;-2019;...;2\}$ nên có 2023 số.

Câu 12: Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện : $\begin{cases} x+4 \ge 0 \\ x^2+x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -4 \\ x \ne -1 \\ x \ne 0 \end{cases}$.

Tập xác định : $D=[-4;+\infty)\setminus\{-1;0\}$.

Ta có : $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}\right)=0$.

Vậy đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=0$.

Ta có : $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\left(\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}\right)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}\right)=+\infty$.

Vậy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-1$.

Ta có : $\lim\limits_{x\to0^+} y=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}\right)=\dfrac{1}{4}$, $\lim\limits_{x\to0^-} y=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}\right)=\dfrac{1}{4}$.

Vậy đồ thị hàm số có tổng cộng 2 đường tiệm cận.

Câu 13: Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-1}+1}{5x^2-3x-2}$ là

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D=(1;+\infty)$

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x-1}+1}{5x^2-3x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x^4}}+\dfrac{1}{x^2}}{5-\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x^2}}=0$ nên đồ thị hàm số đã cho chỉ có một đường tiệm cận ngang là $y=0$.

Lại có $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$ nên đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận đứng là $x=1$.

Do đó số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là 2.

Câu 14: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-2x-\sqrt{x+10}}{x^2-2x-3}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D=[-10;+\infty)\setminus\{-1;3\}$.

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-2x-\sqrt{x+10}}{x^2-2x-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}-\sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{10}{x^4}}}{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}} = 0$$

$\Rightarrow y=0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to3^+} y = \lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{1-2x-\sqrt{x+10}}{x^2-2x-3} = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to3^-} = \lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{1-2x-\sqrt{x+10}}{x^2-2x-3} = +\infty$

$\Rightarrow x=3$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x\to-1} y = \lim_{x\to-1} \frac{1-2x-\sqrt{x+10}}{x^2-2x-3} = \lim_{x\to-1} \frac{(1-2x)^2-(x+10)}{(x^2-2x-3)(1-2x+\sqrt{x+10})}$$

$$= \lim_{x\to-1} \frac{4x^2-5x-9}{(x^2-2x-3)(1-2x+\sqrt{x+10})} = \lim_{x\to-1} \frac{4x-9}{(x-3)(1-2x+\sqrt{x+10})} = \frac{13}{24}$$

$\Rightarrow x=-1$ không là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả 2 đường tiệm cận.

Câu 15: Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x^2+x}$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định của hàm số: $D=(-1;+\infty)\setminus\{0\}$

Ta có: $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y = \lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x^2+x} = +\infty$ và không tồn tại $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y$

$\Rightarrow$ TCĐ: $x=-1$.

$$\lim_{x\to0^+} y = \lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2+x} = \lim_{x\to0^+} \frac{x}{(x^2+x)(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to0^-} y = \lim_{x\to0^-} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2+x} = \lim_{x\to0^-} \frac{x}{(x^2+x)(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x\to0^-} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{2}.$$

$\Rightarrow x=0$ không là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng.

Câu 16: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-4}$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D=[-1;+\infty)\setminus\{2\}$.

Có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}}}{1-\frac{4}{x^2}} = 0$ nên đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang là $y=0$.

$\lim\limits_{x\to 2^+} y = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-4} = +\infty$ nên đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng là $x=2$.

Vậy tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-4}$ là 2.

Câu 17: Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = [-4;+\infty)\setminus\{-1;0\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = \dfrac{1}{4}$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = \dfrac{1}{4}$.

$\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = +\infty$

$\Rightarrow x=-1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{4}{x^4}}-\dfrac{2}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}} = 0$

$\Rightarrow y=0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Câu 18: Đồ thị hàm số $y = \dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = [-1;+\infty)\setminus\{0\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-x-1}{x(x+2)\left(1+\sqrt{x+1}\right)} = -\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{(x+2)\left(1+\sqrt{x+1}\right)} = -\dfrac{1}{4}$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x} = 0$.

Vậy đồ thị hàm số có duy nhất một đường tiệm cân ngang là đường thẳng $y=0$.

Câu 19: Cho đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x+1}$, hỏi (C) có bao nhiêu đường tiệm cận

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D=(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x+1}=\pm 1$ do đó (C) có 2 đường tiệm cận ngang.

(C) không có đường tiệm cận đứng.

Câu 20: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-8}}{x^2+4x-5}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D=[8;+\infty)$. Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x-8}}{x^2+4x-5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{8}{x^4}}}{1+\dfrac{4}{x}-\dfrac{5}{x^2}}=\dfrac{0}{1}=0$, suy ra đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang: $y=0$. Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng.

Câu 21: Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-3x+2}$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D=(1;+\infty)\setminus\{2\}$

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x^4}}}{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}=\dfrac{0}{1}=0$

Do đó đồ thị hàm số đã cho chỉ có một đường tiệm cận ngang là $y=0$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-3x+2}=-\infty$ nên đồ thị hàm số nhận $x=1$ là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to 2^+}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-3x+2}=+\infty$ nên đồ thị hàm số nhận $x=2$ là tiệm cận đứng.

Do đó số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là 3.

Câu 22: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{\sqrt{4-x^2}}$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D=(-2;2)$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2^-} y = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2x+1}{\sqrt{4-x^2}} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -2^+} y = \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{2x+1}{\sqrt{4-x^2}} = -\infty$.

Suy ra đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2$ và đường thẳng $x=-2$.

Do hàm số có tập xác định $D=(-2;2)$ suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Vậy đồ thị hàm số có tổng số đường tiệm cận là: 2.

Câu 23: Đường thẳng nào dưới đây là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{2x}+1}{x+2}$?

A. $y=0$. **B.** $y=\sqrt{2}$. **C.** $y=2$. **D.** $y=1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2x}+1}{x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{2}{x}} = 0$. Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{2x}+1}{x+2}$ có đường tiệm cận ngang.

Câu 24: Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x(4x-6)}-2}{x-2}$ là

A. 1. **B.** 3. **C. 2.** **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x(4x-6)}-2}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4-\dfrac{6}{x}}-\dfrac{2}{x}}{1-\dfrac{2}{x}} = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x(4x-6)}-2}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{4-\dfrac{6}{x}}-\dfrac{2}{x}}{1-\dfrac{2}{x}} = -2$$

Suy ra đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang là $y=2$ và $y=-2$.

$$\lim_{x\to 2^{\pm}} \frac{\sqrt{x(4x-6)}-2}{x-2} = \lim_{x\to 2^{\pm}} \frac{(x-2)(4x+2)}{(x-2)\left(\sqrt{x(4x-6)}+2\right)} = \lim_{x\to 2^{\pm}} \frac{4x+2}{\sqrt{x(4x-6)}+2} = \frac{5}{2}$$

Do đó đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng

Vậy đồ thị hàm số có tổng số 2 đường tiệm cận

Câu 25: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{10-\sqrt{2x-3}}{x^2-3x+2}$ là

A. $x=1; x=2$. **B.** $x=2; y=0$. **C.** $x=2; x=\dfrac{3}{2}$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định : có $D=\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right)\setminus\{2\}$.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+} y=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{10-\sqrt{2x-3}}{(x-1)(x-2)}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^-} y=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{10-\sqrt{2x-3}}{(x-1)(x-2)}=-\infty\end{cases}\Rightarrow$$ đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=2$.

Câu 26: Cho hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2+2x-3}$. Tìm số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định của hàm số $D=[-2;2]\setminus\{1\}$

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} y=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{(x-1)(x+3)}=+\infty$

Nên đường thẳng $x=1$ là đường TCĐ của đồ thị hàm số

Vậy đồ thị trên có 1 đường TCĐ

Câu 27: Số tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x(4x+6)}-2}{x+2}$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x(4x+6)}-2}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4+\dfrac{6}{x}}-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{2}{x}}=2.$$

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x(4x+6)}-2}{x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4+\dfrac{6}{x}}-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{2}{x}}=-2.$$

Vậy đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang $y=\pm 2$.

Câu 28: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2}$ là

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Đkxđ: $\begin{cases}x-2\ge 0\\ x^2-3x+2\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\ x\ne 2, x\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow x>2$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2}\right)=+\infty$ nên đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2}\right)=0$ nên đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 29: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-5}}{x^2-5x+6}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D=\left(-\infty;-\sqrt{5}\right]\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right)\setminus\{3\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{1-\dfrac{5}{x^2}}}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}\sqrt{1-\dfrac{5}{x^2}}}{1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{x^2}}=0$

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{1-\dfrac{5}{x^2}}}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\dfrac{1}{x}\sqrt{1-\dfrac{5}{x^2}}}{1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{x^2}}=0$

$\Rightarrow y=0$ là đường tiệm cận ngang.

Ta có $\lim\limits_{x\to3^+}y=\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{\sqrt{x^2-5}}{(x-2)(x-3)}=+\infty$ vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to3^+}\left(\sqrt{x^2-5}\right)=4>0\\ \lim\limits_{x\to3^+}(x-2)(x+3)=0\\ x\to3^+\Rightarrow(x-2)(x+3)>0\end{cases}$.

và $\lim\limits_{x\to3^-}y=\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{\sqrt{x^2-5}}{(x-2)(x-3)}=-\infty$.

$\Rightarrow x=3$ là đường tiệm cận đứng.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-5}}{x^2-5x+6}$ có 2 đường tiệm cận.

Câu 30: Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D=(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-3x+2}}=1$ nên $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-3x+2}}=-1$ nên $y=-1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$

Ta có $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-3x+2}}=0$ và $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$ không tồn tại nên $x=1$ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-3x+2}}=+\infty$ nên $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$.

Vậy đồ thị hàm số có 3 tiệm cận ngang và đứng.

Câu 31: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $[-10;10]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{(x-1).\sqrt{x^2+3x}}{x^2+(m+1)x-m-2}$ có đúng ba đường tiệm cận?

A. 19. **B.** 18. **C.** 17. **D.** 20.

Lời giải

Chọn A

Đk: $\left[\begin{array}{l} x\geq 0 \\ x\leq -3 \end{array}\right.$.

Dễ thấy đồ thị hàm số luôn có 2 tiệm cận ngang $y=1$ và $y=-1$.

Xét phương trình $x^2+(m+1)x-m-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-m-2 \end{array}\right.$.

Vì $x=1$ là nghiệm của tử số nên đồ thị hàm số có ba đường đường tiệm cận khi và chỉ khi nó có một tiệm cận đứng nữa là $x=-m-2$.

Khi đó $\left[\begin{array}{l} -m-2\geq 0 \\ -m-2\leq -3 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\leq -2 \\ m\geq 1 \end{array}\right.$.

Vì m nguyên thuộc $[-10;10]$ nên $m\in\{-10;-9;-8;....;-2;1;2;...;10\}$

Vậy có 19 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 32: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $[-10;10]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{(x-1)\sqrt{x^2+3x}}{x^2+(m+1)x-m-2}$ có đúng ba đường tiệm cận?

A. 19. **B.** 18. **C.** 17. **D.** 20.

Lời giải

Chọn B

Xét $x^2+3x\geq 0\Leftrightarrow x\leq -3\ \vee\ x\geq 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)\sqrt{x^2+3x}}{x^2+(m+1)x-m-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right).x\sqrt{1+\frac{3}{x}}}{x^2\left(1+\frac{m+1}{x}+\frac{-m-2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right).\sqrt{1+\frac{3}{x}}}{1+\frac{m+1}{x}+\frac{-m-2}{x^2}}=1.$$

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=1$.

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-1)\sqrt{x^2+3x}}{x^2+(m+1)x-m-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right).(-x)\sqrt{1+\frac{3}{x}}}{x^2\left(1+\frac{m+1}{x}+\frac{-m-2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\left(1-\frac{1}{x}\right).\sqrt{1+\frac{3}{x}}}{1+\frac{m+1}{x}+\frac{-m-2}{x^2}}=-1.$$

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=-1$.

Xét $x^2+(m+1)x-m-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-m-2 \end{array}\right.$.

Khi đó, đồ thị hàm số có đúng ba đường tiệm cận khi và chỉ khi $\left\{\begin{array}{l} -m-2\neq 1 \\ \left[\begin{array}{l} -m-2\leq -3 \\ -m-2\geq 0 \end{array}\right. \end{array}\right.\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m\neq -3 \\ \left[\begin{array}{l} m\geq 1 \\ m\leq -2 \end{array}\right. \end{array}\right.$.

Lại có $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in[-10;10]$ nên $m\in[1;10]\cup[-10;-2]\setminus\{-3\}$.

Do vậy có 18 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 33: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, biết hàm số đạt cực đại tại $x=3$ và đạt cực tiểu tại $x=-2$. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{(x-1)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{f(x)-f(1)}}$

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x\ge 0$.

Vì hàm số đạt cực đại tại $x=3$ và đạt cực tiểu tại $x=-2$ nên hệ số $a<0$.

Xét $x\to+\infty\Rightarrow f(x)-f(1)\to-\infty$. Do đó hàm số đề bài không có tiệm cận ngang.

Xét $f(x)-f(1)=0\Leftrightarrow f(x)=f(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=a<-2\notin[0;+\infty).\\x=b>3\end{array}\right.$

Khi $\lim\limits_{x\to 1}y=\dfrac{0}{0}$: không xác định.

$\lim\limits_{x\to b}y=+\infty$: đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=b>3$.

Vậy đồ thị hàm số đề bài có duy nhất 1 tiệm cận đứng.

Câu 34: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{1+\sqrt{-2x^2+9x-4}}{\sqrt{\left(1-m^3\right)x^3+3x^2+3x+1}}$ (với m là tham số) có đúng một đường tiệm cận.

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $\begin{cases}-2x^2+9x-4\ge 0\\\left(1-m^3\right)x^3+3x^2+3x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{2}\le x\le 4\\x^3+3x^2+3x+1>m^3x^3\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{2}\le x\le 4\\(x+1)^3>m^3x^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{2}\le x\le 4\\x+1>mx\end{cases}$.

Do $\dfrac{1}{2}\le x\le 4$ nên đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

Suy ra đồ thị có đúng một tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $\left(1-m^3\right)x^3+3x^2+3x+1=0$ (1) có đúng một nghiệm thuộc đoạn $\left[\dfrac{1}{2};4\right]$.

Ta có $(1)\Leftrightarrow x+1=mx\Leftrightarrow m=\dfrac{x+1}{x}\in\left[\dfrac{5}{4};3\right],\ \forall x\in\left[\dfrac{1}{2};4\right]$.

So với điều kiện, suy ra $\dfrac{5}{4}\le m<3$.

Vậy có một giá trị nguyên $m=2$ thỏa mãn.

Câu 35: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$ có tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng là

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định của hàm số là $D=(-\infty\ ;\ -2]\cup(2\ ;\ +\infty)$.

Ta có

$\lim\limits_{x\to 2^+} y=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}=+\infty\Rightarrow x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to +\infty} y=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}}{x-2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}}{1-\dfrac{2}{x}}=1\Rightarrow y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to -\infty} y=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}}{x-2}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}}{1-\dfrac{2}{x}}=-1\Rightarrow y=-1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy tổng số tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số đã cho là 3.

Câu 36: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định: $\begin{cases}\sqrt{x+7}-3\neq 0\\ x+2\geq 0\\ x+7\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 2\\ x\geq -2\\ x\geq -7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 2\\ x\geq -2\end{cases}$.

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2-4)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{(x+7-9)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+2}+2}=\dfrac{3}{2}$.

$\Rightarrow x=2$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\dfrac{7}{x}}-\dfrac{3}{\sqrt{x}}}=1\Rightarrow y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là 1.

Câu 37: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{2020+2021\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-(1-m)x+m+2}}$ có đúng ba đường tiệm cận.

A. $m<-2$. **B.** $2<m<3$.

C. $-2<m<-1$.` **D.** $m<-2$ hoặc $m>-1$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện xác định của hàm số $\begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 - (1-m)x + m + 2 > 0 \end{cases}$.

Ta thấy $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 0$ nên đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận ngang $y = 0$. Vậy yêu cầu bài toán tương đương đồ thị hàm số phải có hai đường tiệm cận đứng.

TH1: Phương trình $x^2 - (1-m)x + m + 2 = 0$ có một nghiệm $x = 0$ và một nghiệm dương, ta tìm được $m = -2$. Khi đó hàm số trở thành $y = \dfrac{2020 + 2021\sqrt{x}}{\sqrt{x^2 - 3x}} = \dfrac{2020 + 2021\sqrt{x}}{\sqrt{x(x-3)}}$, hàm số chỉ có một tiệm cận đứng $x = 3$, suy ra $m = -2$ không thỏa mãn.

TH2: Phương trình $x^2 - (1-m)x + m + 2 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt (khi đó hàm số luôn có hai đường tiệm cận đứng) $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 . x_2 > 0 \end{cases}$

Ta có hệ điều kiện $\begin{cases} (1-m)^2 - 4(m+2) > 0 \\ 1 - m > 0 \\ m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m - 7 > 0 \\ m < 1 \\ m > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 7 \\ m < -1 \end{array} \right. \\ -2 < m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < -1.$

Câu 38: Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-2021; 2021)$ để đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x-m}}{x-2}$ có tiệm cận đứng?

A. 2019. **B.** 2023. **C.** 2022. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định $\begin{cases} x \ge m \\ x \ne 2 \end{cases}$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $\Leftrightarrow 2 \in [m; +\infty) \Leftrightarrow m \le 2$.

Mà m nguyên và $m \in (-2021; 2021)$ nên $m \in \{-2020; -2019; ...; 2\}$ nên có 2023 số.

Câu 39: Tìm số giá trị nguyên thuộc đoạn $[-1000; 1000]$ của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2 + 2x - m}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A. 909. **B.** 908. **C.** 907. **D.** 906.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x \ge 1 \\ x^2 + 2x \ne m \end{cases}$.

Dựa vào điều kiện xác định ta suy ra hàm số đã cho không có giới hạn khi $x \to -\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2 + 2x - m} = 0, \forall m$.

$\Rightarrow y = 0$ là phương trình đường tiệm cận ngang.

Cần tìm điều kiện để hàm số có 1 tiệm cận đứng.

Xét hàm số $f(x) = x^2 + 2x$.

$f'(x)=2x+2;\ f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1.$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$			
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

Khi $m<3$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Khi $m\ge 3$ thì đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng.

Kết hợp đề bài, để đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận thì $\begin{cases}m\in[3;1000]\\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}$.

Vậy có 908 giá trị nguyên của m.

Câu 40: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2021;2021]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-2x+m}}$ có hai đường tiệm cận đứng?

A. 2020. **B.** 2021. **C.** 2022. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-2x+m}}$ có hai đường tiệm cận đứng khi phương trình $x^2-2x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt và khác $-2\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ (-2)^2-2(-2)+m\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-m>0\\ m\ne -8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<1\\ m\ne -8\end{cases}$.

Mà m nguyên và $m\in[-2021;2021]$ nên suy ra $m\in\{-2021;-2020;...;-3;-2;-1;0\}\setminus\{-8\}$.

Vậy có 2021 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 41: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$ có đồ thị là (C). Xác định phương trình các đường tiệm cận đứng của (C).

A. $x=2$. **B.** $x=3$. **C.** $x=2$ và $x=3$. **D.** $x=\dfrac{1}{2}$ và $x=3$.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{2,3\}$

Ta có: $y=\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}=\dfrac{3x^2-5x-2}{(x^2-5x+6)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)}$

$=\dfrac{(x-2)(3x+1)}{(x-2)(x-3)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)}=\dfrac{3x+1}{(x-3)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)}$

Dễ thấy: $\lim\limits_{x\to 2^+}y=\lim\limits_{x\to 2^-}y=-\dfrac{7}{6}\Rightarrow x=2$ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to 3^-} y=-\infty;\lim\limits_{x\to 3^+} y=+\infty \Rightarrow x=3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số chỉ có một tiệm cận đứng là $x=3$.

Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$; $f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Số tiệm cận của hàm số $h(x)=\dfrac{\sqrt{5}}{f(x)}+\dfrac{2022\sqrt{x+1}}{x^2+15}$ là

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$; $f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

Mà $x^2+15>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $x+1\ge 0\Leftrightarrow x\ge -1$

Suy ra tập xác định của hàm số $y=h(x)$: $D=[-1;+\infty)$.

Xét: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{5}}{f(x)}+\dfrac{2022\sqrt{x+1}}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{5}}{f(x)}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2022\sqrt{x+1}}{x^2+1}=0$.

Suy ra $y=0$ là tiệm cận ngang.

Vậy hàm số $y=h(x)$ có 1 đường tiệm cận ngang.

Câu 43: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=[-1;+\infty)\setminus\{0\}$.

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}-\sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}}}{1+\frac{2}{x}}=0$$

Suy ra đường thẳng $y=0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x\to 0} y=\lim_{x\to 0}\frac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(5x+1)^2-x-1}{(x^2+2x)\left(5x+1+\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{25x^2+9x}{(x^2+2x)\left(5x+1+\sqrt{x+1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{25x+9}{(x-2)\left(5x+1+\sqrt{x+1}\right)}=\frac{-9}{4}$$

Suy ra đường thẳng $x=0$ **không** là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả 1 đường tiệm cận.

Câu 44: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số thực m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-5x}{\sqrt{9-3mx^2}}$ có hai đường tiệm cận ngang.

A. $m\in\mathbb{R}$. **B.** $\nexists m$. **C.** $m\in(0;+\infty)$. **D.** $m\in(-\infty;0)$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $9-3mx^2>0 \Leftrightarrow 3mx^2-9<0$ (*)

Nếu $m=0$ thì $y=\dfrac{1-5x}{3}$

Ta có TXĐ $D=\mathbb{R}$.

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty \Rightarrow$ đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

Nếu $m>0$ ta có (*) $\Leftrightarrow x^2<\dfrac{3}{m} \Leftrightarrow -\sqrt{\dfrac{3}{m}}<x<\sqrt{\dfrac{3}{m}}$ thì TXĐ $D=\left(-\sqrt{\dfrac{3}{m}};\sqrt{\dfrac{3}{m}}\right)$

Do đó không tồn tại $\lim\limits_{x\to+\infty} y$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y \Rightarrow$ đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

Nếu $m<0$ ta có (*) đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ nên TXĐ $D=\mathbb{R}$

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}-5}{\sqrt{\dfrac{9}{x^2}-3m}}=\dfrac{-5}{\sqrt{-3m}} \Rightarrow y=\dfrac{-5}{\sqrt{-3m}}$ là đường tiệm cận ngang khi $x\to+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}-5}{-\sqrt{\dfrac{9}{x^2}-3m}}=\dfrac{5}{\sqrt{-3m}} \Rightarrow y=\dfrac{5}{\sqrt{-3m}}$ là đường tiệm cận ngang khi $x\to-\infty$.

Khi đó đồ thị hàm số có hai đường tiệm ngang là $y=\pm\dfrac{5}{\sqrt{-3m}}$.

Vậy $m<0$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 45: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-1}+2022}{\sqrt{x^2-2mx+m+2}}$ bằng 3.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x-1}+2022}{\sqrt{x^2-2mx+m+2}}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x-1}+2022}{\sqrt{x^2-2mx+m+2}}$ không tồn tại vì $x\ge 1$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $y=0$ nên phải có hai tiệm cận đứng để tổng số tiệm cận là 3.

Mặt khác, $x=a$ là tiệm cận đứng $\Leftrightarrow \sqrt{a-1}+2022$ tồn tại và $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x^2-2mx+m+2}=0$

Do đó, $f(x)=x^2-2mx+m+2$ có 2 nghiệm phân biệt lớn hơn hoặc bằng 1 $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ a.f\ 1\ >0\\ \dfrac{S}{2}>1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-m-2>0\\ 3-m>0\\ m>1\end{cases} \Leftrightarrow 2<m\le 3.$

Câu 46: Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[-10;10]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{(x-1)\sqrt{x^2+3x}}{x^2+(m+1)x-m-2}$ có đúng 2 đường tiệm cận?

A. 19. **B.** 18. **C.** 17. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases} x^2+3x\ge 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-3]\cup[0;+\infty) \\ x^2+(m+1)x-m-2\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x\ge 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-3]\cup[0;+\infty) \\ x\ne 1 \\ x\ne -m-2 \end{cases}$

Do $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-1)\sqrt{x^2+3x}}{x^2+(m+1)x-m-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1-\frac{1}{x})\sqrt{1+\frac{3}{x}}}{1+\frac{(m+1)}{x}-\frac{m+2}{x^2}}=1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x-1)\sqrt{x^2+3x}}{x^2+(m+1)x-m-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-(1-\frac{1}{x})\sqrt{1+\frac{3}{x}}}{1+\frac{(m+1)}{x}-\frac{m+2}{x^2}}=-1$

Nên đồ thị hàm số luôn có 2 tiệm cận ngang với mọi giá trị của m. Do đó để đồ thị hàm số có đúng 2 tiệm cận thì đồ thị hàm số phải không có tiệm cận đứng.

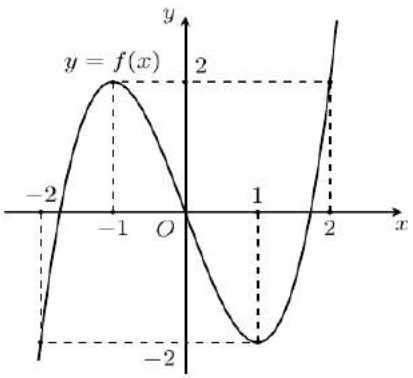
Nhận thấy phương trình: $x^2+(m+1)x-m-2=0\Leftrightarrow(x-1)(x+m+2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-m-2 \end{array}\right.$

Để đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng thì nghiệm

$x=-m-2\in(-3;0)\Leftrightarrow -3<-m-2<0\Leftrightarrow -2<m<1$

Vì m nguyên và $m\in[-10;10]$ nên $m\in\{-1;0\}$. Vậy có 2 giá trị của m.

Câu 47: Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Với giá trị nào của m thì hàm số $g(x)=\dfrac{\sqrt{m-x}}{f^2(x)-2f(x)}$ có 5 tiệm cận đứng?



A. $m>2$. **B.** $m<2$. **C.** $m\le 2$. **D.** $m\ge 2$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{\sqrt{m-x}}{f^2(x)-2f(x)}$

Biểu thức $\sqrt{m-x}$ xác định khi $m-x\ge 0\Leftrightarrow x\le m(1)$

Ta có

$f^2(x)-2f(x)=0(2)$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ fx)=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1\in(-2;-1) \\ x=0 \\ x=x_2\in(1;2) \\ x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Hàm số có 5 tiệm cận đứng khi phương trình (2) có 5 nghiệm thỏa mãn điều kiện của (1) $\Leftrightarrow m\geq 2$

Câu 48: Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-2mx+2m^2-3m+3}}{x^3-3x^2-m}$ có ít nhất một tiệm cận đứng tiếp xúc với đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+2)^2=9$. Tính tổng các phần tử của tập S.

A. 6. **B.** -4. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\Delta'=m^2-\left(2m^2-3m+3\right)=-m^2+3m-3<0$ với mọi giá trị của m.

Suy ra $x^2-2mx+2m^2-3m+3>0$ với mọi giá trị của $x\in R$.

Gọi $\Delta: x+c=0$ là đường thẳng tiếp xúc với đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+2)^2=9$.

Khoảng cách từ tâm $I(1;-2)$ đến đường thẳng Δ bằng bán kính $R=3$.

Suy ra $d(I;\Delta)=|1+c|=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 1+c=3 \\ 1+c=-3 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} c=2 \\ c=-4 \end{array}\right.$

Vậy đường thẳng Δ có phương trình $x+2=0\Leftrightarrow x=-2$ hoặc $x-4=0\Leftrightarrow x=4$.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2mx+2m^2-3m+3}{x^3-3x^2-m}$ có ít nhất một đường tiệm đứng tiếp xúc với đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+2)^2=9$.

Suy ra phương trình $x^3-3x^2-m=0$ có nghiệm $x=-2$ hoặc $x=4$.

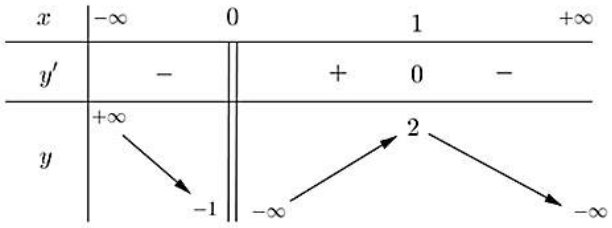
$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} (-2)^3-3(-2)^2-m=0 \\ 4^3-3.4^2-m=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} -20-m=0 \\ 16-m=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=-20 \\ m=16 \end{array}\right.$$

Vậy tổng các phần tử của tập S là $-20+16=-4$.

Dạng 5: Tìm đường tiệm cận của đồ thị hàm số dựa vào đồ thị, BBT

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau:



Tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

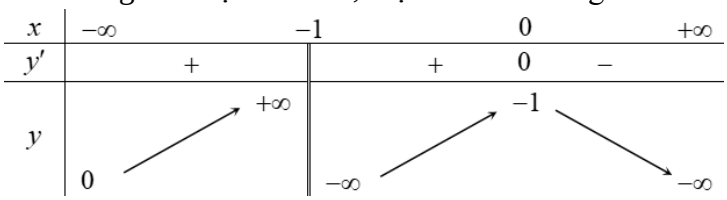
Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Ta có $\lim\limits_{x\to0^+} y=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=0$

Vậy tổng số đường tiệm cận đứng và ngang là 1.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, liên tục trên các khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?



A. Đường thẳng $x=0$ và $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

B. Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

C. Đồ thị hàm số có duy nhất đường tiệm cận đứng là $x=0$.

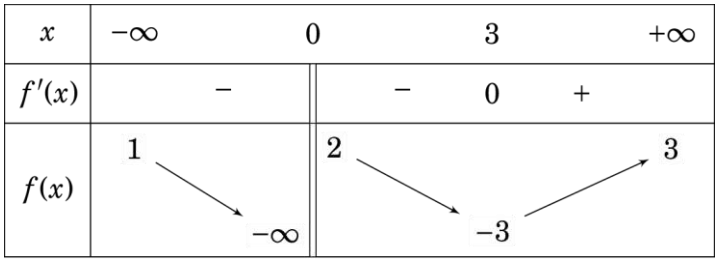
D. Đồ thị hàm số có duy nhất đường tiệm cận đứng là $x=-1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=-\infty\end{cases}\Rightarrow x=-1$ đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

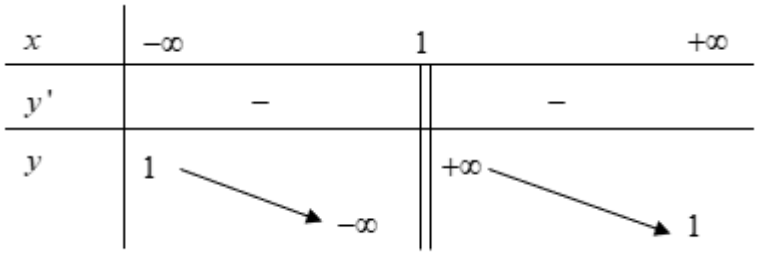
A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Quan sát bảng biến thiên ta có $\lim\limits_{x\to 0^-} y=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=0$.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Trong các mệnh đề sau về hàm số $y=f(x)$, mệnh đề nào đúng?

A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$. **B.** Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. **D.** Hàm số có một điểm cực trị.

Lời giải

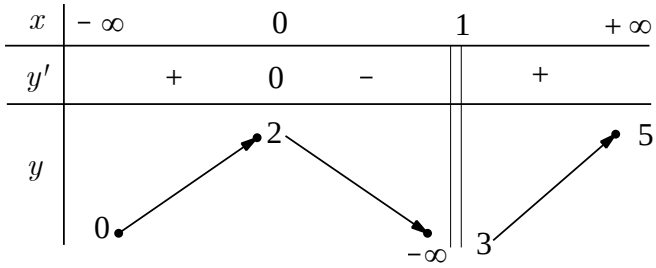
Chọn A

Quan sát bảng biến thiên thấy:

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$.

Hàm số không xác định tại $x=1$ và $y'<0$ với $\forall x\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$ nên hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



A. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y=0$ và $y=5$ và tiệm cận đứng là $x=1$

B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 5.

C. Giá trị cực đại của hàm số là $y_{CD}=5$.

D. Giá trị cực tiểu của hàm số là $y_{CT}=3$.

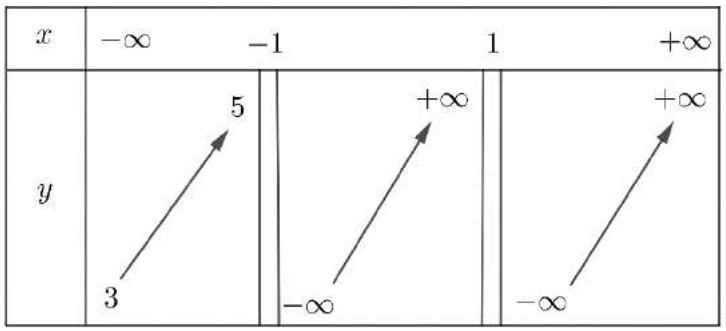
Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y=0; \lim\limits_{x\to+\infty} y=5$ do đó đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y=0$ và $y=5$.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to 1^-} y=-\infty$ do đó đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, có bảng biến thiên như hình vẽ:



Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

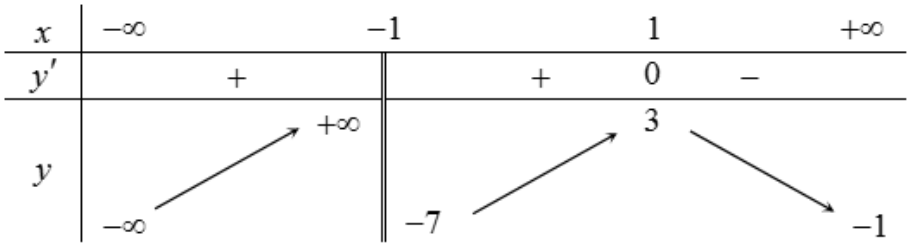
Lời giải

Chọn A.

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$ nên tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y=3$

Vì $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-1$ và $x=1$.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ có xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ liên tục trên các khoảng xác định của nó và có bảng biến thiên như hình vẽ



Tổng số đường tiệm cậm đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

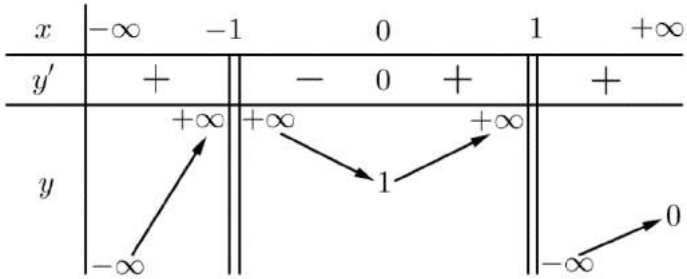
Chọn B

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1\Rightarrow y=-1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=+\infty\Rightarrow x=-1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Câu 8: Hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, có bảng biến thiên như sau:



Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{1}{f(x)-2}$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

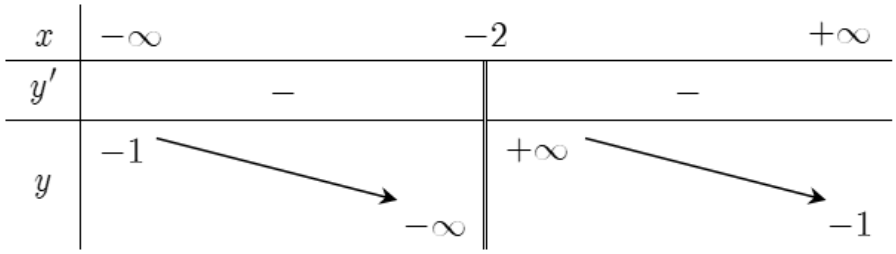
Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $f(x)-2=0 \Leftrightarrow f(x)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\in(-\infty;-1) \\ x=b\in(-1;0) \\ x=c\in(0;1) \end{array}\right.$.

Suy ra đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{1}{f(x)-2}$ có 3 tiệm cận đứng.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ và liên tục trên mỗi khoảng xác định. Hàm số có bảng biến thiên như hình vẽ sau



Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

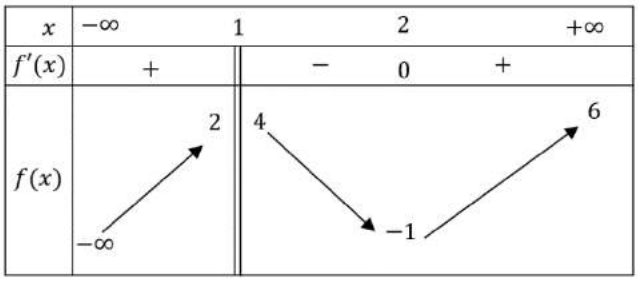
Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=-1$ suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=-1$

Ta có $\lim\limits_{x\to(-2)^-} y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to(-2)^+} y=+\infty$ suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-2$

Vậy tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là 2.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:



Tổng số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

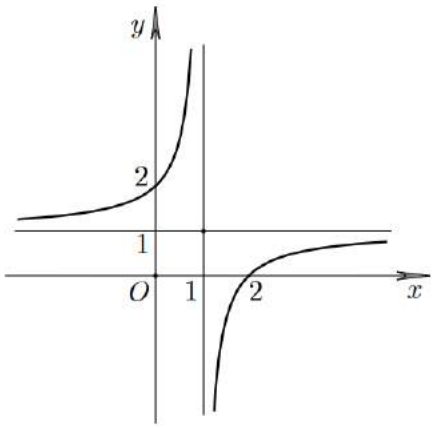
Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=2\\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=4\end{cases}$ nên đồ thị hàm số không có một tiệm cận đứng.

Câu 3: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\left(ad-bc\neq0;ac\neq0\right)$ cso đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tìm phương trình đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.



A. $x=1, y=1$. **B.** $x=-1, y=1$. **C.** $x=1, y=2$. **D.** $x=2, y=1$.

Lời giải

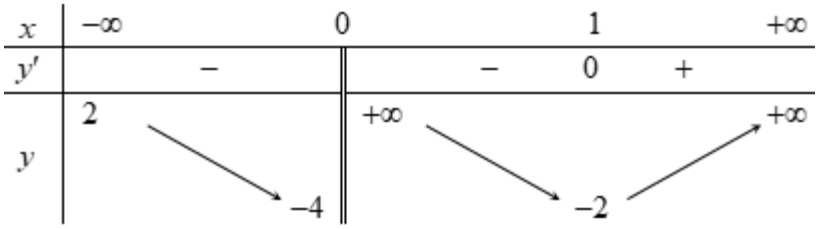
Chọn A

Dựa vào đồ thị hàm số, ta suy ra

Phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số: $x=1$.

Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số: $y=1$.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



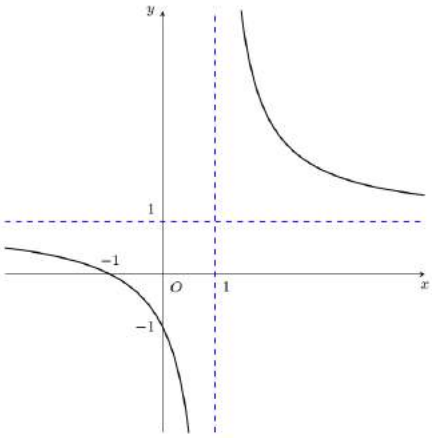
Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số lần lượt là



A. $x=-1; y=1$. **B.** $x=1; y=1$. **C.** $x=-1; y=-1$. **D.** $x=1; y=-1$.

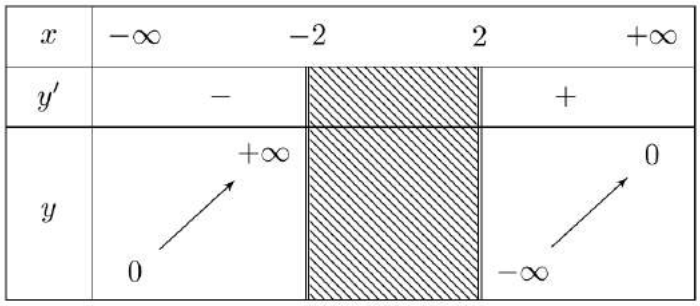
Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị, đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số lần lượt là $x=1; y=1$

.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ



Tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

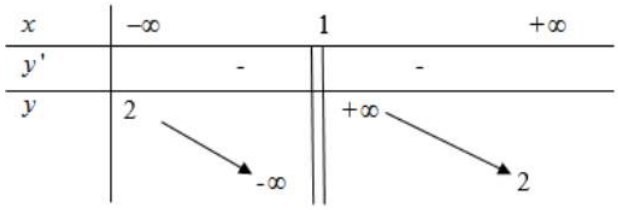
Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\lim\limits_{x\to -2^-} y=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to 2^+} y=-\infty$ suy ra đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x=-2$ và $x=2$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\lim\limits_{x\to -\infty} y=0$ và $\lim\limits_{x\to +\infty} y=0$ suy ra đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là đường thẳng $y=0$.

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.



Tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho lần lượt là

A. $x=1, y=2$. **B.** $x=2, y=1$. **C.** $x=2, y=2$. **D.** $x=1, y=1$..

Lời giải

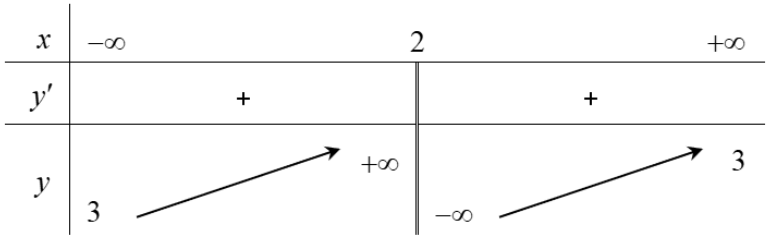
Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên, ta có

$\lim\limits_{x\to 1^+} y=+\infty;\ \lim\limits_{x\to 1^-} y=-\infty \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} y=2;\ \lim\limits_{x\to -\infty} y=2 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=2$.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.



A. $y=2$. **B.** $y=3$. **C.** $x=2$. **D.** $x=3$.

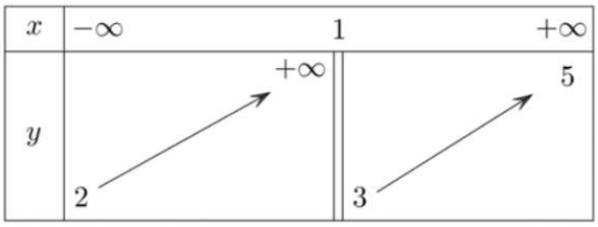
Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} y=3 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} y=3 \end{cases}$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=3$

.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên ở hình vẽ dưới đây. Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là



A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

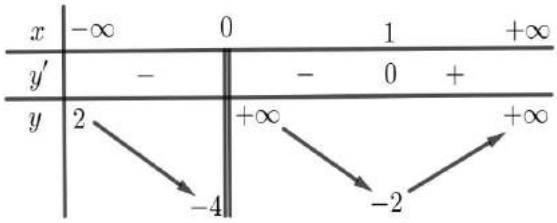
Chọn C

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty} y=2$ nên $y=2$ là 1 đường tiệm cận ngang của hàm số đã cho

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} y=5$ nên $y=5$ là 1 đường tiệm cận ngang của hàm số đã cho

Vì $\lim\limits_{x\to1^-} y=+\infty$ nên $x=1$ là 1 đường tiệm cận đứng của hàm số đã cho.

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau. **Tổng số** tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là



A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

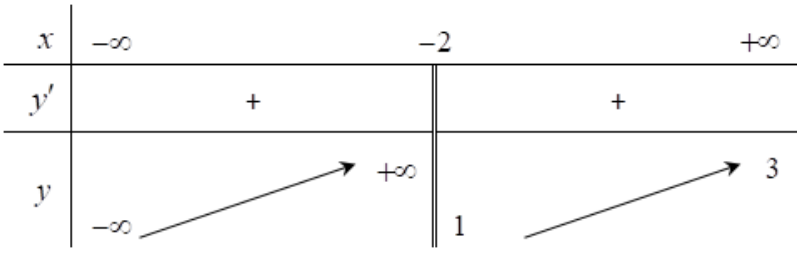
Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=2$.

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=0$.

Kết luận: đồ thị hàm số $y=f(x)$ có 2 tiệm cận.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

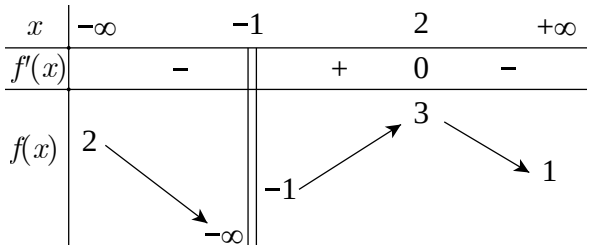
Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$, ta có

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=+\infty$ nên $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=3$ nên $y=3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là 2.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là



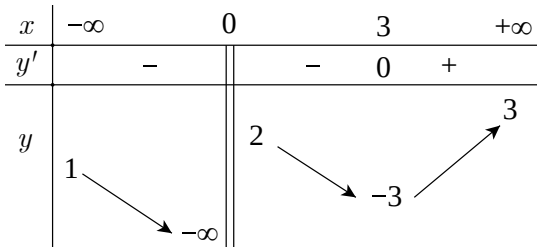
A. $x=1$. **B.** $y=-1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-\infty$ nên đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ có báng biến thiên như sau:



Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

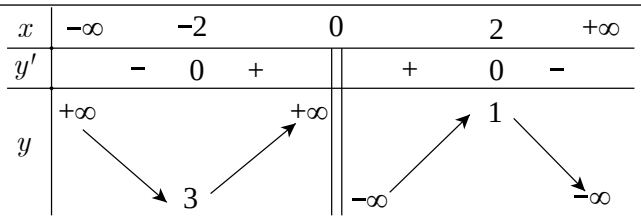
Từ bảng biến thiên ta thấy $x=0$ thì hàm số không xác định và $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty,$ nên $x=0$ là TCĐ của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=3\Rightarrow y=3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=1\Rightarrow y=1$là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy hàm số có 3 tiệm cận.

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên:



Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là đường thẳng có phương trình

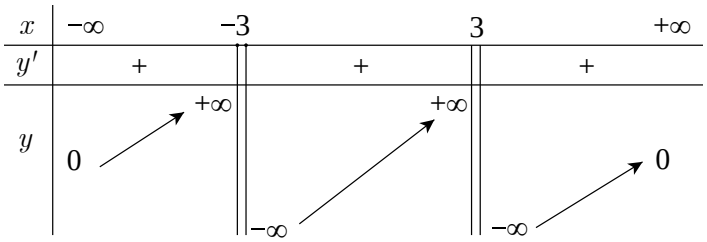
A. $x=-2$. **B.** $x=0$. **C.** $x=2$. **D.** $x=3$.

Lời giải

Chọn B

Vì $\lim\limits_{x\to 0^+} y=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to 0^-} y=+\infty$ nên đường thẳng $x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 15: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. $y=3$. **B.** $y=0$. **C.** $y=-3$. **D.** $x=0$.

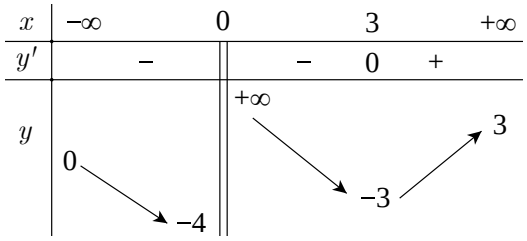
Lời giải

Chọn B

Dựa vào BBT ta có

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=0\Rightarrow y=0$ là đường tiệm cận ngang.

Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.



Các đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

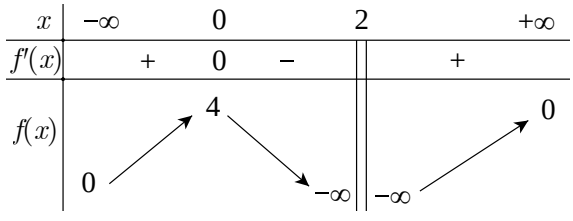
A. $x=0;x=3$. **B.** $y=0;y=-3$. **C.** $y=-4;y=-3$. **D.** $y=0;y=3$.

Lời giải

Chọn D

Qua bảng biến thiên ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ nên đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang: $y=0$ và $y=3$.

Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ có bảng biến thiên như sau



Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

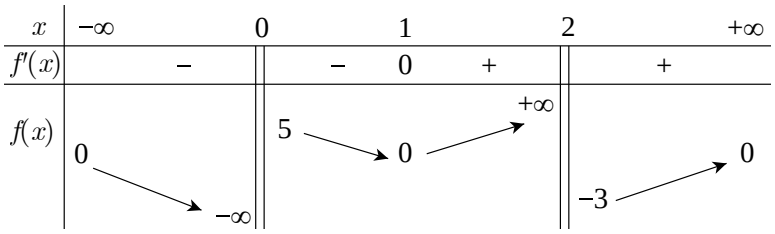
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$ nên đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0;2\}$ có bảng biến thiên như sau



Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

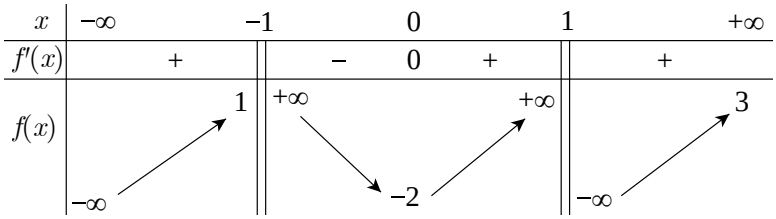
Dựa vào bảng biến thiên ta có:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ nên đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$ nên đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng.

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 2 đường tiệm cận đứng là: $x = 0$ và $x = 2$.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Hỏi đồ thị hàm số trên có bao nhiêu tiệm cận ngang?

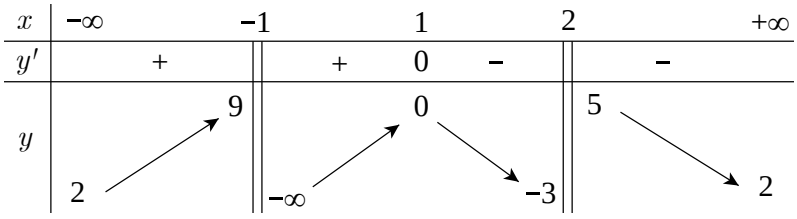
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy: $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 3$ nên đồ thị có 01 tiệm cận ngang là $y = 3$.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Số tiệm cận của đồ thị hàm số trên là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

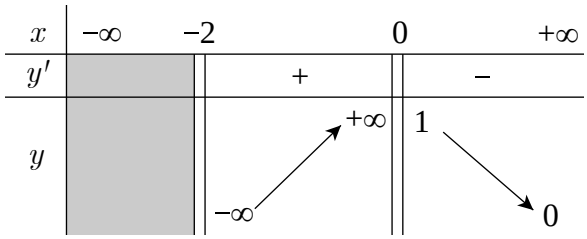
Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy:

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=2,\ \lim\limits_{x\to-\infty} y=2$ nên đồ thị có 01 tiệm cận ngang là $y=2$.

$\lim\limits_{x\to-1^+} y=-\infty$ nên đồ thị có 01 tiệm cận đứng là $x=-1$.

Vậy đồ thị hàm số có 02 tiệm cận.

Câu 21: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.



Đồ thị hàm số có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên ta có:

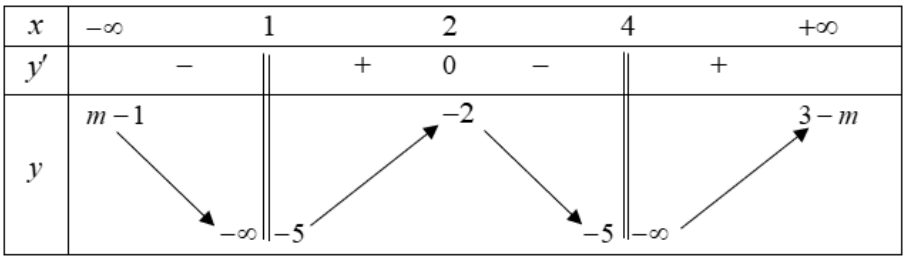
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0\Rightarrow y=0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=-\infty\Rightarrow x=-2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=+\infty\Rightarrow x=0$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận.

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây, trong đó $m\in\mathbb{R}$.



Chọn khẳng định đúng:

A. Đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận đứng và 1 đường tiệm cận ngang với mọi $m\in\mathbb{R}$.

B. Đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận đứng và 2 đường tiệm cận ngang với mọi $m\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$..

C. Đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận đứng và 2 đường tiệm cận ngang với mọi $m\in\mathbb{R}$.

D. Đồ thị hàm số có đúng 1 đường tiệm cận đứng và 2 đường tiệm cận ngang với mọi $m\in\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn B

Từ BBT ta có:

+ $\lim\limits_{x\to1^-} y=-\infty$ nên đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là đường thẳng $x=1$.

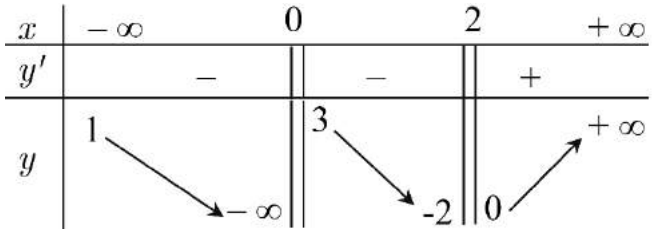
+ $\lim\limits_{x\to4^+} y=-\infty$ nên đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là đường thẳng $x=4$.

+ $\lim\limits_{x\to-\infty} y=m-1$ nên đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là đường thẳng $y=m-1$.

+ $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 3-m$ nên đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là đường thẳng $y=3-m.$

Với $m-1\neq 3-m \Leftrightarrow m\neq 2$ thì đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai đường tiệm cận ngang

Câu 23: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:



Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

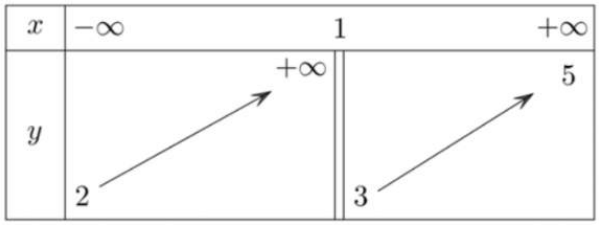
Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$ suy ra tiệm cận đứng $x=0$

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ suy ra tiệm cận ngang $y=1$

Vậy số đường tiệm cận của hàm số đã cho bằng 2

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên ở hình vẽ dưới đây. Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là



A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

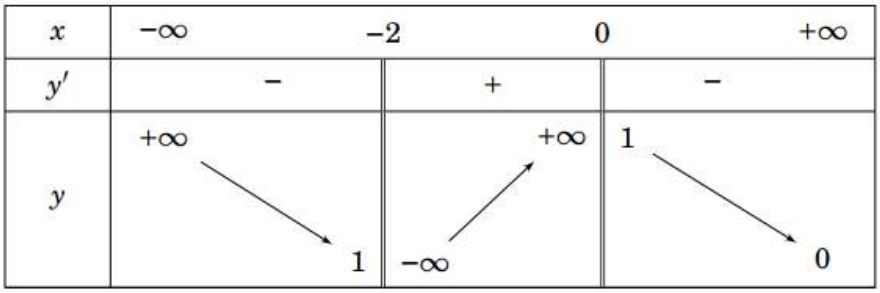
Chọn C

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty} y=2$ nên $y=2$ là 1 đường tiệm cận ngang của hàm số đã cho

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} y=5$ nên $y=5$ là 1 đường tiệm cận ngang của hàm số đã cho

Vì $\lim\limits_{x\to 1^-} y=+\infty$ nên $x=1$ là 1 đường tiệm cận đứng của hàm số đã cho.

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ



Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$, ta có

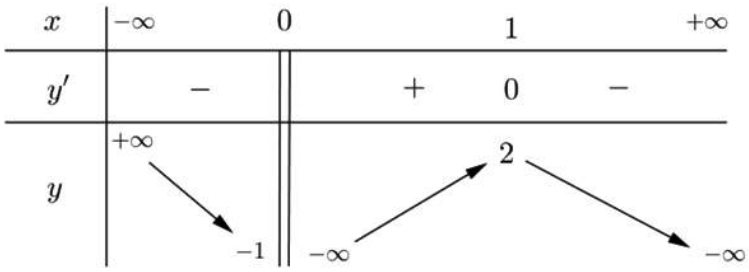
$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=-\infty$ nên đường thẳng $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$ nên đường thẳng $x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$ nên đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là 3.

Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $R\setminus\{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau



Hỏi đồ thị hàm số trên có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3

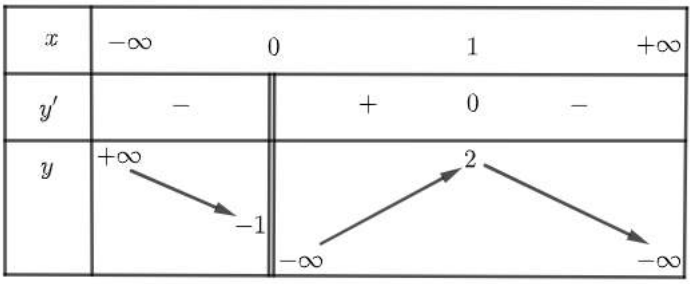
Lời giải

Chọn B

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty \Rightarrow x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vì $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$ nên đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

Câu 27: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau



Hỏi đồ thị hàm số trên có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết của hàm số và bảng biến thiên ta có

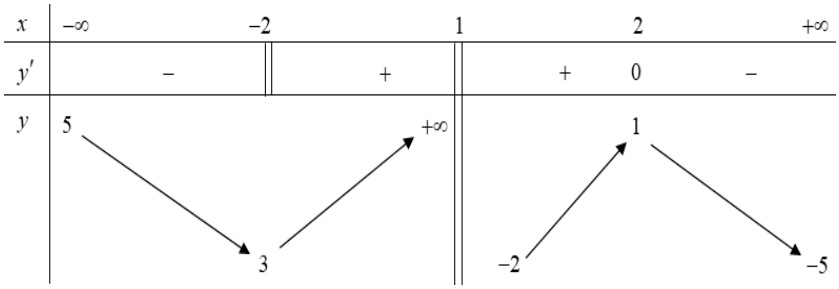
$\begin{cases}\lim\limits_{x\to +\infty} y=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -\infty} y=+\infty\end{cases}\Rightarrow$ đồ thị hàm số không có đường tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to 0^+} y=-\infty$ nên đường thẳng $x=0$ là một đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\forall x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\lim\limits_{x\to x_0} y=f(x_0)$ nên $x=x_0$ không phải đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Do đó, đồ thị hàm số chỉ có 1 đường tiệm cận.

Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên như sau



Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên ta thấy:

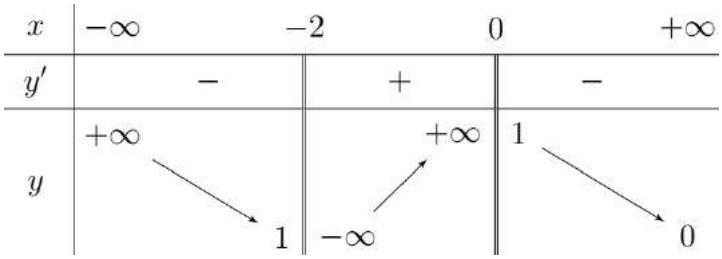
$\lim\limits_{x\to -\infty} y=5$ nên đồ thị hàm số $y=f(x)$ nhận đường thẳng $y=5$ làm tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to +\infty} y=-5$ nên đồ thị hàm số $y=f(x)$ nhận đường thẳng $y=-5$ làm tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to 1^-} y=+\infty$ nên đồ thị hàm số $y=f(x)$ nhận đường thẳng $x=1$ làm tiệm cận đứng.

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là 3.

Câu 29: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

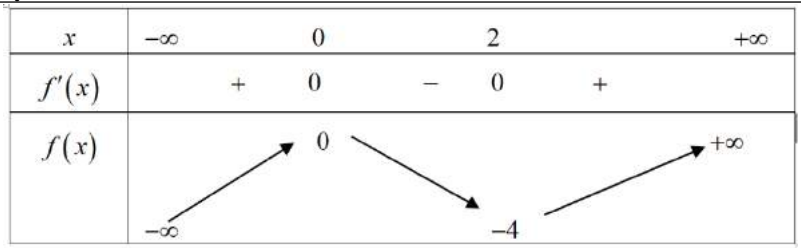
Chọn B

Ta có $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0 \Rightarrow y=0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

$\lim\limits_{x\to (-2)^+} f(x)=-\infty \Rightarrow x=-2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty \Rightarrow x=0$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Câu 30: Cho $y=f(x)$ là hàm số bậc và có bảng biến thiên như sau:



Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{1}{2f(x)+3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 2. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 4.

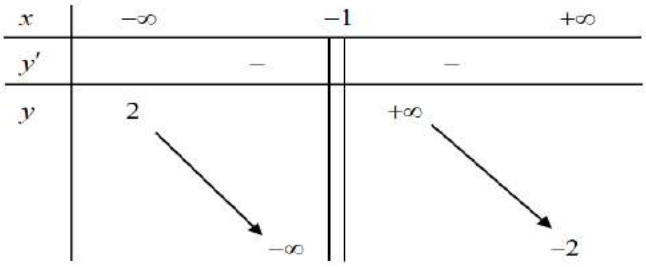
Lời giải

Chọn D

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2f(x)+3}=0\Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Lại có: $2f(x)+3=0\Leftrightarrow f(x)=-\dfrac{3}{2}$ có ba nghiệm phân biệt, suy ra đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận đứng.

Câu 31: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ có bảng biến thiên như sau:



Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{2022}{f(x)}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

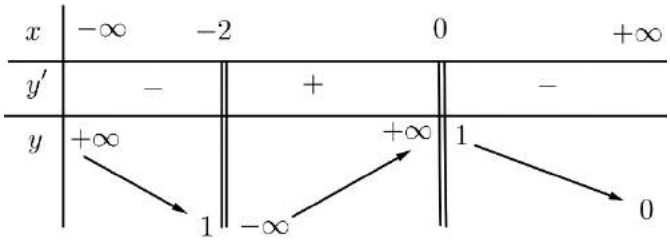
Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ ta thấy phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1<-1<x_2$. Khi đó: $f(x_1)=f(x_2)=0$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to x_1^-}\dfrac{2022}{f(x)}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_1^+}\dfrac{2022}{f(x)}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to x_2^-}\dfrac{2022}{f(x)}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_2^+}\dfrac{2022}{f(x)}=-\infty$

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{2022}{f(x)}$ có hai tiệm cận đứng.

Câu 32: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có

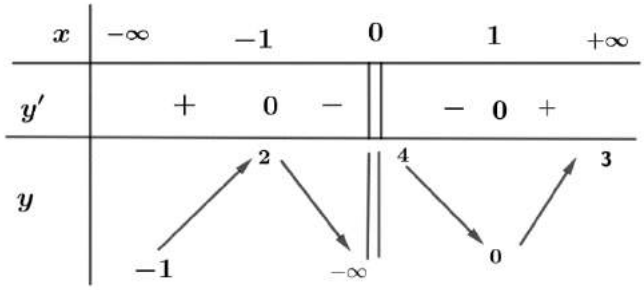
$\lim\limits_{x\to -2^+} y=-\infty \Rightarrow x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$\lim\limits_{x\to 0^-} y=+\infty \Rightarrow x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$\lim\limits_{x\to +\infty} y=0 \Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là 3.

Câu 33: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-2}$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

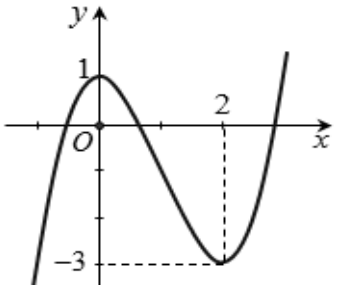
Từ bảng biến thiên ta thấy $f(x)=2$ có ba nghiệm phân biệt. Do đó đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-2}$ có ba đường tiệm cận đứng.

Lại có $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=3 \Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{f(x)-2}=1$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{f(x)-2}=-\dfrac{1}{3}$.

Nên đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-2}$ có hai đường tiệm cận ngang.

Vậy tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là 5.

Câu 34: Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\left(x^2-2x\right)\sqrt{2-x}}{(x-3)\left[f^2(x)+3f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A. 6. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

ĐK xác định của $\sqrt{2-x}$ là $x \le 2$ $(*)$.

Ta có $(x-3)\left[f^2(x)+3f(x)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ f(x)=0 \\ f(x)=-3 \end{array}\right.$.

* Ta có $x=3$ không thỏa mãn (*)

* $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a<0 \\ x=b\in(0;2) \\ x=c>2 \end{array}\right.$. Ta có $x=c$ không thỏa mãn (*)

Ta có $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=+\infty; \lim\limits_{x\to b^+} g(x)=+\infty$. Vậy $x=a; x=b$ là các đường tiệm cận đứng.

* $f(x)=-3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=d<0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Ta có $\lim\limits_{x\to d^+} g(x)=+\infty; \lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=+\infty$ .Vậy $x=d; x=2$ là các đường tiệm cận đứng.

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}\setminus\{\pm 2\}$. Hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
y	$+\infty$	↘	-3	$+\infty$	↘	2	↗ $+\infty$	↗	10
									$-\infty$

Tính tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)+6}$.

A. 6. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Đặt $g(x)=\dfrac{1}{2f(x)+6}$, ta có hàm số xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{\pm 2; a\}$, trong đó $f(a)=-3$ và $a\in(2;+\infty)$. Khi đó ta có

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\dfrac{1}{2\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+6}=0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\dfrac{1}{2\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+6}=\dfrac{1}{26}$ nên $y=0$ và $y=\dfrac{1}{26}$

là hai đường tiệm cận ngang.

Mặt khác ta có

$\lim\limits_{x\to(-2)^-} g(x)=\dfrac{1}{2\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)+6}=+\infty \Rightarrow x=-2$ là tiệm cận đứng;

$\lim\limits_{x\to 2^{\pm}} g(x)=\dfrac{1}{2\lim\limits_{x\to 2^{\pm}} f(x)+6}=0 \Rightarrow x=2$ không là tiệm cận đứng;

$\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=\dfrac{1}{2\lim\limits_{x\to a^+} f(x)+6}=+\infty \Rightarrow x=a$ là tiệm cận đứng;

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)+6}$ có 4 đường tiệm cận.

Câu 36: Cho $f(x)$ là hàm bậc bốn và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	1	↘	$+\infty$

Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x^2-4)(x-2)}{f(x)-1}$ có mấy đường tiệm cận?

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $f(x)-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2(b2) \\ x=-2(b2) \end{array}\right.$.

Do $f(x)$ là hàm số bậc bốn có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ nên $f(x)-1=a(x+2)^2(x-2)^2$ $(a<0)$.

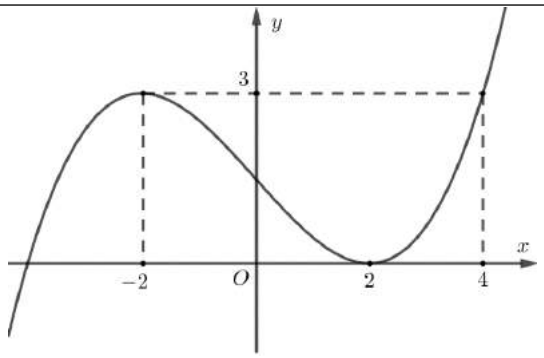
Khi đó, $g(x)=\dfrac{(x^2-4)(x-2)}{a(x+2)^2(x-2)^2}=\dfrac{1}{a(x+2)}$.

Do $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{a(x+2)}=0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{a(x+2)}=0$, nên $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Và $\lim\limits_{x\to-2^+} g(x)=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{1}{a(x+2)}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to-2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{1}{a(x+2)}=+\infty$, nên $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 đường tiệm cận.

Câu 37: Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{1}{f\left(4-x^2\right)-3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

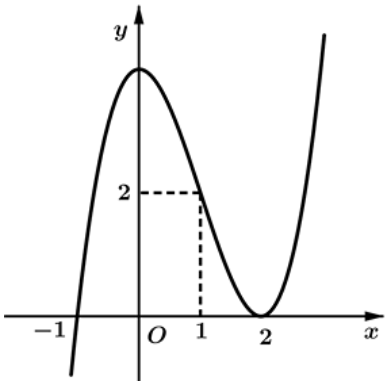
Từ đồ thị ta có $f\left(4-x^2\right)-3=0 \Leftrightarrow f\left(4-x^2\right)=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4-x^2=-2\\4-x^2=4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2=6\\x^2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\sqrt{6}\\x=0\end{array}\right.$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $g(x)$ có ba đường tiệm cận đứng.

Lại có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f\left(4-x^2\right)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=0 \Rightarrow$đường thẳng $y=0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có bốn đường tiệm cận.

Câu 38: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình bên dưới



Hỏi đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{2022\sqrt{x-1}}{\left[f(x)\right]^2-2f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Do đồ thị hàm $f(x)$ cắt và tiếp xúc với trục Ox lần lượt tại điểm có hoành độ $x=-1$ và $x=2$ nên ta suy ra hàm số có dạng: $f(x)=a(x+1)(x-2)^2$.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(1;2) \Rightarrow f(1)=a(1+1)(1-2)^2=2a=2 \Rightarrow a=1$.

Vậy $f(x)=(x+1)(x-2)^2=x^3-3x^2+4$.

$$g(x)=\frac{2022\sqrt{x-1}}{\left[f(x)\right]^2-2f(x)}=\frac{2022\sqrt{x-1}}{\left(x^3-3x^2+4\right)\left(x^3-3x^2+2\right)}=\frac{2022\sqrt{x-1}}{(x+1)(x-2)^2(x-1)\left(x^2-2x-2\right)}$$

Tập xác định $D=(1;+\infty)\setminus\left\{2,1+\sqrt{3}\right\}$.

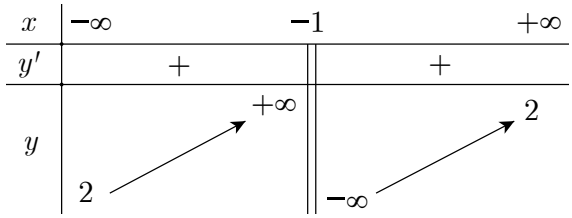
Ta có: $\lim\limits_{x\to1^+}g(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2022}{(x+1)(x-2)^2\sqrt{x-1}\left(x^2-2x-2\right)}=-\infty$

Vì $\lim\limits_{x\to1^+}2022=2022>0$, $\lim\limits_{x\to1^+}(x+1)(x-2)^2\sqrt{x-1}\left(x^2-2x-2\right)=0$ và $(x+1)(x-2)^2\sqrt{x-1}\left(x^2-2x-2\right)<0$ khi $x\to1^+$. Nên $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$.

Nhận xét: Các giá trị $x=2$ và $x=1+\sqrt{3}$ làm cho mẫu của $g(x)$ bằng 0 và tử của $g(x)$ khác 0 nên suy ra $x=2$ và $x=1+\sqrt{3}$ là các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 3 tiệm cận đứng.

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau



Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f^2(x)-9}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

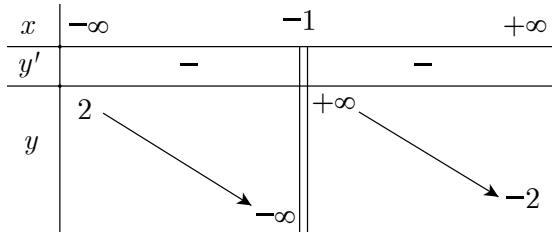
Chọn D

Xét phương trình $f^2(x)-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=3\quad(1)\\f(x)=-3\quad(2)\end{array}\right.$

Dựa vào BBT ta nhận thấy, phương trình (1) có 1 nghiệm và phương trình (2) có 1 nghiệm (rõ ràng 2 nghiệm này không trùng nhau).

Do đó, đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng.

Câu 40: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ có bảng biến thiên như sau:



Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)}=-\dfrac{1}{2}$.

Suy ra đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)}$ có hai đường tiệm cận ngang là $y=\dfrac{1}{2}$ và $y=-\dfrac{1}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ ta thấy: phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1<-1<x_2$.

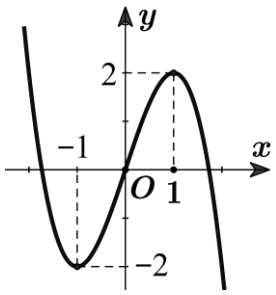
Khi đó: $f(x_1)=f(x_2)=0$.

Ta có: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_1^-} f(x)=0\\ f(x)>0 khi\, x\to x_1^-\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_1^-} \dfrac{1}{f(x)}=+\infty$ và

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_2^-} f(x)=0\\ f(x)>0 khi\, x\to x_2^-\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_2^-} \dfrac{1}{f(x)}=+\infty$.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)}$ có hai tiệm cận đứng là đường thẳng $x=x_1$ và $x=x_2$.

Câu 41: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ:



Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f\left(x^2-5x+4\right)}$

A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Vì hàm số $y=f(x)$ là hàm số bậc 3 do đó

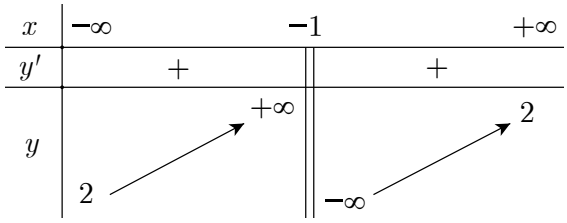
Dựa vào đồ thị ta có: $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=x_1<-\dfrac{3}{2}\\ x=x_2=0\\ x=x_3>\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$.

Suy ra $f\left(x^2-5x+4\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-5x+4=x_1(1)\\ x^2-5x+4=x_2(2)\\ x^2-5x+4=x_3(3)\end{array}\right.$.

Xét phương trình $x^2-5x+4=a$ có nghiệm khi $a\ge\dfrac{-9}{4}$. Từ đó suy ra phương trình (1), phương

trình (2) và phương trình (3) đều có 2 nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f\left(x^2-5x+4\right)}$ có 6 đường tiệm cận đứng.

Câu 42: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có bảng biến thiên như hình vẽ:



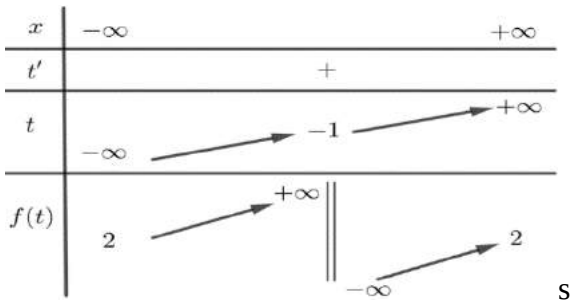
Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f\left(x^3+2x-9\right)$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

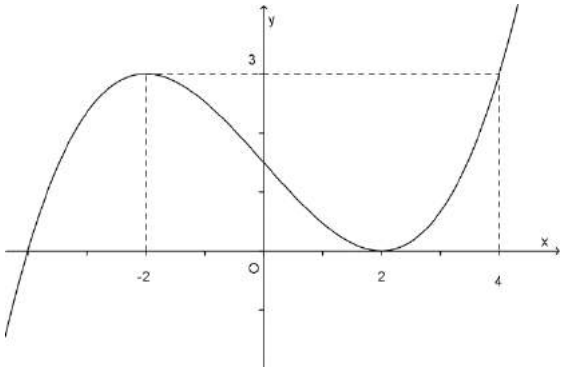
Đặt $t(x)=x^3+2x-9$, thì $t'(x)=3x^2+2>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Ta có bảng biến thiên của $y=f(t)$.



s

Từ bảng biến thiên trên, ta thấy đồ thị hàm số $y=f\left(x^3+2x-9\right)$ có một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang.

Câu 43: Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\left(a;b;c;d\in\mathbb{R}\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Tính tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{1}{f\left(4-x^2\right)-3}$:

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình: $f\left(4-x^2\right)=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4-x^2=-2\\4-x^2=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\sqrt{6}\\x=0\end{array}\right.$

Giới hạn bên phải, bên trái của hàm số $g(x)$ tại các điểm $x=\pm\sqrt{6}$; $x=0$ bằng $+\infty$ hoặc $-\infty$ nên đồ thị hàm số $g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng

Lại có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(4-x^2\right)=-\infty$ nên $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f\left(4-x^2\right)-3\right]=\pm\infty$ (tùy theo dấu của a)

Khi đó $\lim\limits_{x\to\pm\infty}g(x)=0\Rightarrow$Đồ thị hàm số $g(x)$ có 1 đường tiệm cận ngang

Vậy tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $g(x)$ là 4.

Câu 44: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số bậc bốn và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	1	↘	$-\infty$

Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{x^4-2x^2}{f^2(x)+2f(x)-3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

+ Mẫu của $g(x)$ là một đa thức bậc 8 nên $\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\(x\to+\infty)}}g(x)=0$ nên tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $g(x)$ là đường thẳng $y=0$.

+ $f^2(x)+2f(x)-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=1\\f(x)=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\sqrt{2}\\x=\sqrt{2}\\x=0\\x=a,\left(a<-\sqrt{2}\right)\\x=b,\left(b>\sqrt{2}\right)\end{array}\right.$ do đó

$g(x)=\dfrac{x^4-2x^2}{f^2(x)+2f(x)-3}=\dfrac{x^2\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)}{x^2\left(x+\sqrt{2}\right)^2\left(x-\sqrt{2}\right)^2(x-a)(x-b)}$ nên

i) $\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)(x-a)(x-b)}=y_0\in R$ nên đường thẳng $x=0$ **không phải** là tiệm cận đứng của đồ thị $g(x)$.

ii) $\lim\limits_{x\to(-\sqrt{2})^+}g(x)=\lim\limits_{x\to(-\sqrt{2})^+}\dfrac{1}{\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)(x-a)(x-b)}=+\infty$ nên đường thẳng $x=-\sqrt{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị $g(x)$.

iii) $\lim\limits_{x\to(\sqrt{2})^+}g(x)=\lim\limits_{x\to(\sqrt{2})^+}\dfrac{1}{\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)(x-a)(x-b)}=-\infty$ nên đường thẳng $x=\sqrt{2}$ là

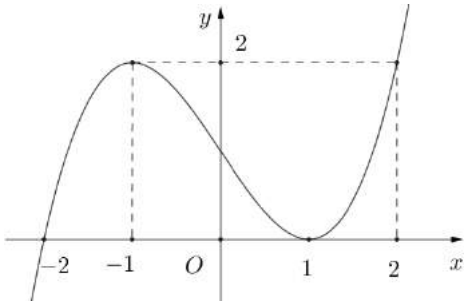
tiệm cận đứng của đồ thị $g(x)$.

iv) $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{1}{\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)(x-a)(x-b)}=-\infty$ nên đường thẳng $x=a$ là tiệm cận đứng của đồ thị $g(x)$.

v) $\lim\limits_{x\to b^+} g(x)=\lim\limits_{x\to b^+}\dfrac{1}{\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)(x-a)(x-b)}=+\infty$ nên đường thẳng $x=b$ là tiệm cận đứng của đồ thị $g(x)$.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 5 đường tiệm cận.

Câu 45: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,(a\neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Gọi S là tập các giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019;2021)$ để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x+1)\sqrt{f(x)}}{\left(f(x)-2\right)\left(x^2-2mx+m+2\right)}$ có 5 đường tiệm cận (tiệm cận đứng hoặc tiệm cận ngang). Số phần tử của tập S là



A. 4036. **B.** 4034. **C.** 2017. **D.** 2016.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ đi qua bốn điểm $(-2;0),(-1;2),(1;0),(2;2)$ nên ta có

$$\begin{cases}-8a+4b-2c+d=0\\-a+b-c+d=2\\a+b+c+d=0\\8a+4b+2c+d=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\b=0\\c=-\dfrac{3}{2}\\d=1\end{cases}.$$

Do đó, $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x^2-3x+2\right)=\dfrac{1}{2}(x-1)^2(x+2)$.

$$g(x)=\frac{(x+1)\sqrt{\dfrac{1}{2}(x-1)^2(x+2)}}{\dfrac{1}{2}\left(x^3-3x-2\right)\left(x^2-2mx+m+2\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}(x+1)\sqrt{(x-1)^2(x+2)}}{(x-2)(x+1)^2\left(x^2-2mx+m+2\right)}=\frac{\sqrt{2}|x-1|\sqrt{x+2}}{(x-2)(x+1)\left(x^2-2mx+m+2\right)}$$

Điều kiện xác định của $g(x)$ là $\begin{cases} x \ge -2 \\ x \ne 2 \\ x \ne -1 \\ x^2 - 2mx + m + 2 \ne 0 \end{cases}$

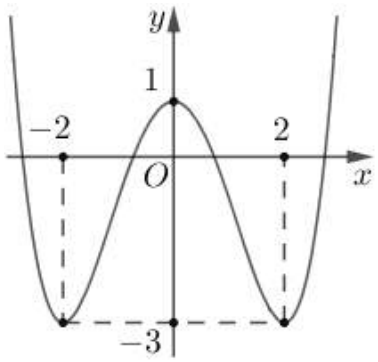
Dễ thấy đồ thị hàm số $g(x)$ có duy nhất tiệm cận ngang là $y = 0$, các đường thẳng $x = 2; x = -1$ là những tiệm cận đứng. Bởi thế, để đồ thị hàm số có 5 đường tiệm cận thì đồ thị này phải có thêm 2 tiệm cận đứng nữa. Tức là, phương trình $x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác $2;1;-1$ và cùng lớn hơn hoặc bằng -2.

Đặt $h(x) = x^2 - 2mx + m + 2$, điều kiện kể trên tương đương với

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ h(2)h(1)h(-1) \ne 0 \\ h(-2) \ge 0 \\ x_1 + x_2 > -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 > 0 \\ (6-3m)(3-m)(3m+3) \ne 0 \\ 6 + 5m \ge 0 \\ 2m > -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -1 \end{array}\right. \\ m \ne 2; m \ne 3; m \ne -1 \\ m \ge -\dfrac{6}{5} \\ m > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m > 2 \\ m \ne 3 \end{cases} \\ -\dfrac{6}{5} \le m < -1 \end{array}\right.$$

Vậy các giá trị nguyên của $m \in (-2019; 2021)$ thỏa yêu cầu bài toán là $4;5;...;2020$, có 2017 giá trị nguyên.

Câu 46: Cho hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^3 - 4x}{\left(f(x)\right)^2 + 2f(x) - 3}$ có tổng cộng bao nhiêu tiệm cận đứng?

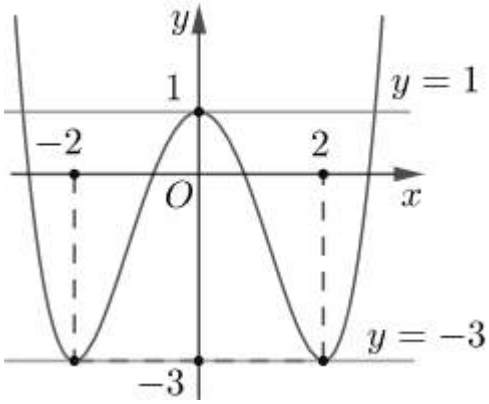


A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình $\left(f(x)\right)^2 + 2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 1 \\ f(x) = -3 \end{array}\right.$.



Quan sát đồ thị, ta có:

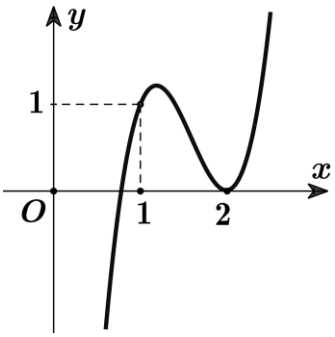
+) $f\left(x\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm u,\left(-u<-2<2<u\right)\end{array}\right.$ (trong đó $x=0$ là nghiệm kép và $x=\pm u$ là các nghiệm đơn).

+) $f\left(x\right)=-3\Leftrightarrow x=\pm 2$ (đều là nghiệm kép).

Xét phương trình $x^3-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm 2\end{array}\right.$ (đều là các nghiệm đơn)

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 5 đường tiệm cận đứng.

Câu 47: Cho hàm số bậc ba $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{\left(x^2-3x+2\right)\sqrt{2x-1}}{x\left[f^2\left(x\right)-f\left(x\right)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $x\left[f^2\left(x\right)-f\left(x\right)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f^2\left(x\right)-f\left(x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f\left(x\right)=0\\f\left(x\right)=1\end{array}\right.$

$x=0$ loại do điều kiện $x\ge\dfrac{1}{2}$

$f\left(x\right)=0$ cho nghiệm $x=a>\dfrac{1}{2}$; $x=2$ là nghiệm kép

$f\left(x\right)=1$ cho ba nghiệm đơn $x=1;x=b;x=c$

Khi đó có thể viết mẫu thành $x\left(x-a\right)\left(x-b\right)\left(x-1\right)\left(x-c\right)\left(x-2\right)^2.g\left(x\right)$ trong đó $g\left(x\right)$ vô

nghiệm; tử phân tích thành $(x-1)(x-2)\sqrt{2x-1}$.

Suy ra $g(x)=\dfrac{(x^2-3x+2)\sqrt{2x-1}}{x\left[f^2(x)-f(x)\right]}=\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x(x-a)(x-b)(x-c)(x-2).g(x)}$

Ta dễ dàng kiểm tra được hàm số có 4 tiệm cận đứng là $x=a;x=b;x=c;x=2$.

Câu 48: Cho hàm số $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ với a,b,c,d,e là các số thực và $a\neq 0$, có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	-1	↘	-3	↗	2	↘	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2}{f^2(x)+3f(x)}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f^2(x)+3f(x)=0\Leftrightarrow f(x)\left[f(x)+3\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\f(x)=-3\end{array}\right.$.

Từ BBT ta có $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\ \ (0<x_1<1)\\x=x_2\ \ (x_2>1)\end{array}\right.$.

$\Rightarrow f(x)=(x-x_1)(x-x_2)h(x)$ (trong đó $h(x)$ là hàm bậc hai và vô nghiệm).

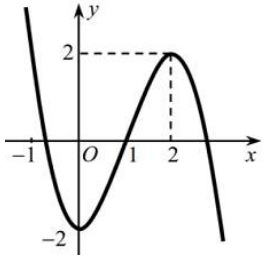
Từ BBT $f(x)=-3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_3\ \ (x_3<-2)\\x=x_4\ \ (x_4>1)\\x=0\end{array}\right.\Rightarrow f(x)+3=ax^2(x-x_3)(x-x_4)$

$\Rightarrow y=\dfrac{x^2}{f^2(x)+3f(x)}=\dfrac{x^2}{(x-x_1)(x-x_2)h(x)ax^2(x-x_3)(x-x_4)}$

$=\dfrac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)h(x)(x-x_3)(x-x_4)}$.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2}{f^2(x)+3f(x)}$ có 4 tiệm cận đứng.

Câu 49: Cho $f(x)$ là hàm đa thức bậc ba và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-100;100]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{1+mx^2}}{f(x)-m}$ có đúng hai đường tiệm cận?

A. 100. **B.** 99. **C.** 2. **D.** 196.

Lời giải

Chọn B

TH1: $m=0\Rightarrow y=\dfrac{1}{f(x)}$.

Đồ thị hàm số có một TCN $y=0$ và ba tiệm cận đứng nên $m=0$ không thoả mãn.

TH2: $m<0$

Đồ thị hàm số không có TCN

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(x)=m$ có nghiệm, trong đó có đúng hai nghiệm thoả mãn $1+mx^2\geq 0$.

Mà m là số nguyên nên dựa vào đồ thị ta chỉ cần xét $m\in\{-2;-1\}$.

Với $m=-2\Rightarrow y=\dfrac{\sqrt{1-2x^2}}{f(x)+2}$. Khi đó $f(x)=-2$ có hai nghiệm $x_1=0;x_2=a>2$. Nghiệm x_2 không thoả mãn điều kiện $1-2x^2\geq 0$ nên $m=-2$ không thoả mãn

Với $m=-1\Rightarrow y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{f(x)+1}$ Khi đó $f(x)=-1$ có hai nghiệm $x_1=b\in(-1;0);x_2=c\in(0;1)$. Cả hai nghiệm đều thoả mãn điều kiện $1-x^2\geq 0$ nên $m=-1$ thoả mãn.

TH3: $m>0$. Khi đó $1+mx^2\geq 0,\forall x\in R$.

Đồ thị hàm số có một TCN $y=0$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(x)=m$ có đúng một nghiệm $x\in R\Leftrightarrow m>2$

Vì m nguyên thuộc đoạn $[-100;100]\Rightarrow\begin{cases}m\in Z\\ m\in[3;100]\cup\{-1\}\end{cases}$ nên có 99 giá trị.

CHƯƠNG 1

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

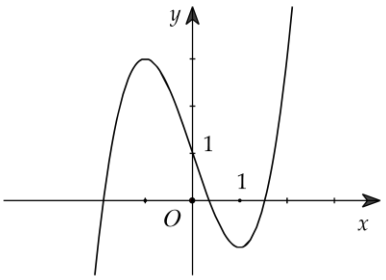
CHỦ ĐỀ 5 NHẬN DIỆN HÀM SỐ VÀ BIẾN ĐỔI ĐỒ THỊ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

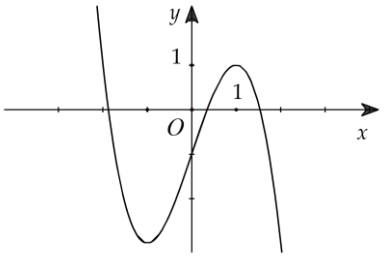
KHẢO SÁT MỘT SỐ HÀM ĐA THỨC VÀ PHÂN THỨC:

1. Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ \ (a \neq 0)$

- **Trường hợp 1:** phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

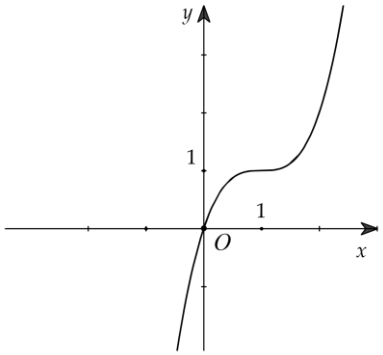


Với $a > 0$.

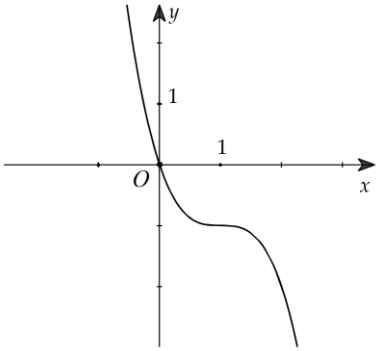


Với $a < 0$.

- **Trường hợp 2:** phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép

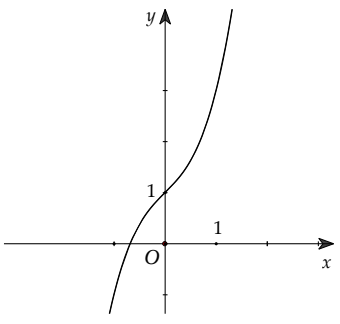


Với $a > 0$.

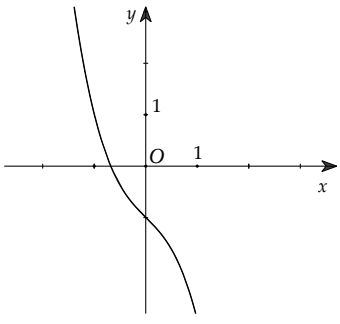


Với $a < 0$.

- **Trường hợp 2:** phương trình $y' = 0$ vô nghiệm



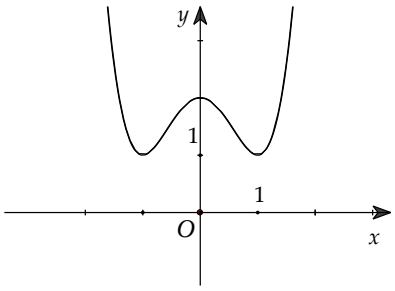
Với $a > 0$.



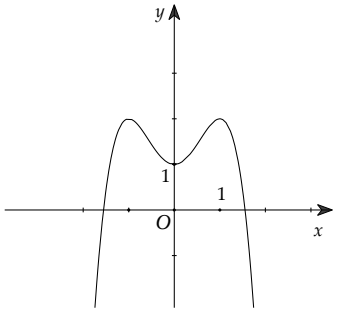
Với $a < 0$.

2. Hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c \ \ (a \neq 0)$

- Đạo hàm: $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x\left(2ax^2 + b\right),\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2ax^2 + b = 0 \end{array}\right.$
- Để hàm số có 3 cực trị: $ab < 0$
- Nếu $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$ hàm số có 2 cực đại và 1 cực tiểu
- Nếu $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$ hàm số có 1 cực đại và 2 cực tiểu
- Để hàm số có 1 cực trị $ab \geq 0$
- Nếu $\begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$ hàm số có 1 cực tiểu và không có cực đại
- Nếu $\begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$ hàm số có 1 cực đại và không có cực tiểu
- **Trường hợp 1:** phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\left(ab < 0\right)$.

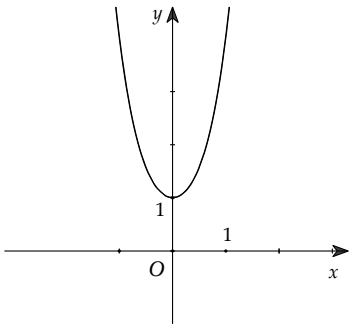


Với $a > 0$.

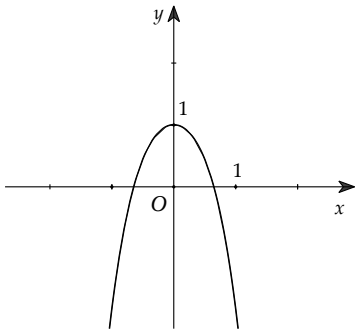


Với $a < 0$.

- **Trường hợp 2:** phương trình $y' = 0$ có 1 nghiệm



Với $a > 0$.



Với $a < 0$.

3. Hàm số bậc nhất $y = \dfrac{ax + b}{cx + d} \ \ \left(c \neq 0,\ ad - bc \neq 0\right)$

- Tập xác định: $D = R \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ Đạo hàm: $y = \dfrac{ad - bc}{\left(cx + d\right)^2}$
- Nếu $ad - bc > 0$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định. Đồ thị nằm góc phần tư 2 và 4.
- Nếu $ad - bc < 0$ hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định. Đồ thị nằm góc phần tư 1 và 3.
- Đồ thị hàm số có: TCĐ: $x = -\dfrac{d}{c}$ và TCN: $y = \dfrac{a}{c}$

- Đồ thị có tâm đối xứng: $I\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$

CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI ĐỒ THỊ:

1. Dạng 1: Từ đồ thị $(C): y=f(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y=f(|x|)$.

Ta có: $y=f(|x|)=\begin{cases} f(x) & \text{khi } x\geq 0 \\ f(-x) & \text{khi } x<0 \end{cases}$

và $y=f(|x|)$ là *hàm chẵn* nên đồ thị (C') nhận *Oy* làm trục đối xứng.

- Cách vẽ (C') từ (C):

  Giữ nguyên phần đồ thị bên phải Oy của đồ thị $(C): y=f(x)$.

  Bỏ phần đồ thị bên trái Oy của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị** được giữ qua Oy.

2. Dạng 2: Từ đồ thị $(C): y=f(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y=|f(x)|$.

Ta có: $y=|f(x)|=\begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x)\geq 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x)<0 \end{cases}$

- **Cách vẽ (C') từ (C):**

  Giữ nguyên phần đồ thị phía trên Ox của đồ thị (C): $y=f(x)$.

  Bỏ phần đồ thị phía dưới Ox của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ** qua Ox.

3. Dạng 3: Từ đồ thị $(C): y=u(x).v(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y=|u(x)|.v(x)$.

Ta có: $y=|u(x)|.v(x)=\begin{cases} u(x).v(x)=f(x) & \text{khi } u(x)\geq 0 \\ -u(x).v(x)=f(x) & \text{khi } u(x)<0 \end{cases}$

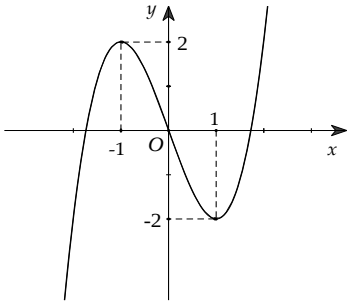
- **Cách vẽ (C') từ (C):**

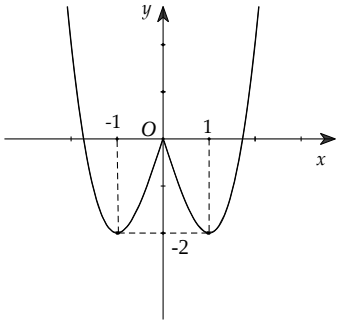
  Giữ nguyên phần đồ thị trên miền $u(x)\geq 0$ của đồ thị $(C): y=f(x)$.

  Bỏ phần đồ thị trên miền $u(x)<0$ của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ** qua Ox.

VÍ DỤ 1: Từ đồ thị $(C): y=f(x)=x^3-3x$ suy ra đồ thị $(C'): y=|x|^3-3|x|$.

- Bỏ phần đồ thị của (C) bên trái Oy, giữ nguyên (C) bên phải Oy.
- Lấy đối xứng phần đồ thị được giữ qua Oy.

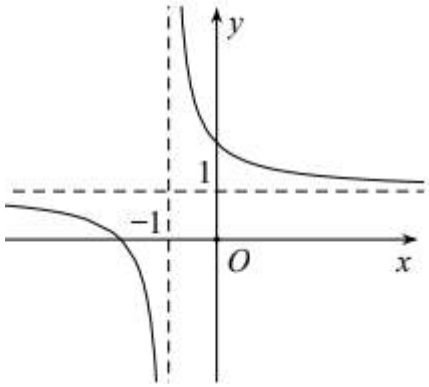




$(C'): y=|x|^3-3|x|$

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị hàm số như hình vẽ dưới đây



Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $0<b<a$. **B.** $0<a<b$. **C.** $b<0<a$. **D.** $a<b<0$.

Lời giải

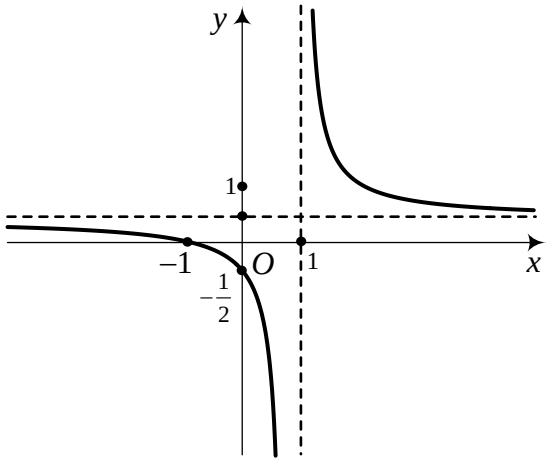
.....

.....

.....

.....

Câu 2: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau?



A. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{2x-4}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x+1}{2x-2}$. **D.** $y=\dfrac{2x}{3x-3}$.

Lời giải

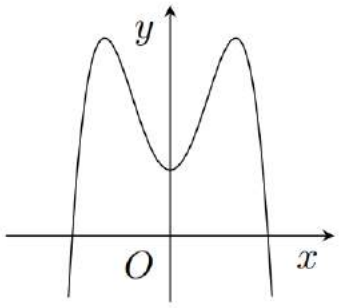
.....

.....

.....

.....

Câu 3: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?



A. $y=2x^4-4x^2+1$. **B.** $y=-2x^4+4x^2+1$. **C.** $y=2x^3-3x+1$. **D.** $y=-2x^3+3x+1$.

✍ Lời giải

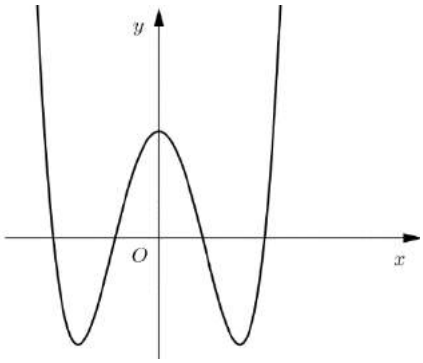
……

……

……

……

Câu 4: Cho đồ thị hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ như hình vẽ. Nhận xét đúng về dấu của các hệ số thực a,b,c là



A. $a>0,b<0,c>0$. **B.** $a>0,b>0,c>0$. **C.** $a>0,b<0,c<0$. **D.** $a<0,b>0,c>0$.

✍ Lời giải

……

……

……

……

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Có bao nhiêu số âm trong các số a,b,c,d ?

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

✍ Lời giải

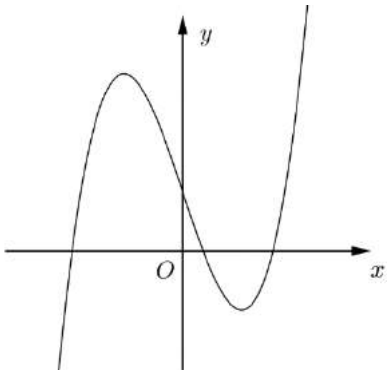
……

……

……

……

Câu 6: Đồ thị dưới đây có thể là đồ thị của hàm số nào?



A. $y=x^3-3x+1$. **B.** $y=x^3+3x-1$. **C.** $y=-x^3+3x+1$. **D.** $y=x^3-3x^2+2$.

✍ Lời giải

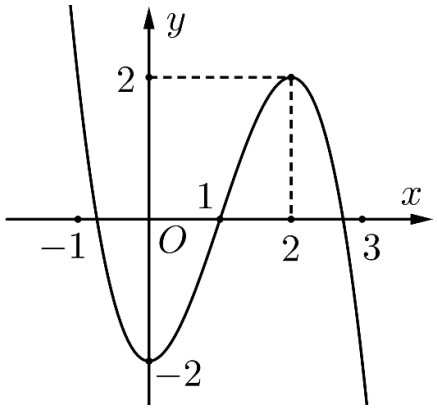
……

……

……

……

Câu 7: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên dưới?



A. $y=x^3-3x^2+2$. **B.** $y=x^3-3x+2$. **C.** $y=-x^3+3x^2-2$. **D.** $y=-x^3+3x-2$.

✍ Lời giải

……

……

……

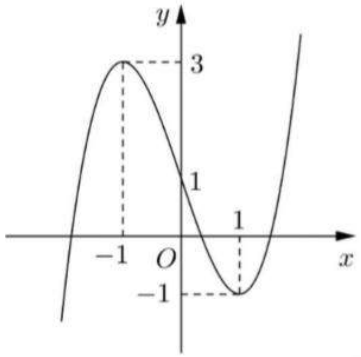
……

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1: Nhận diện đồ thị hàm số

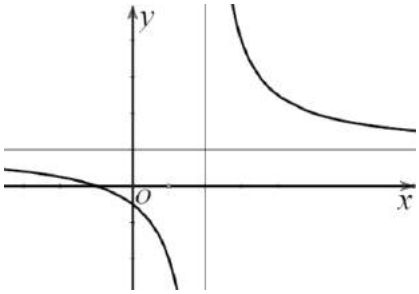
Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

Câu 1: Đồ thị sau đây là của hàm số nào?



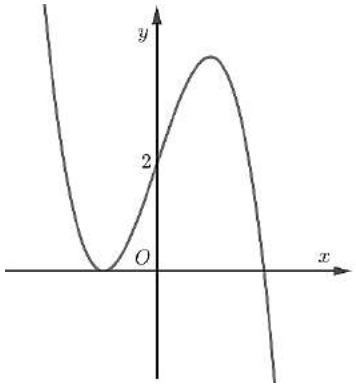
A. $y=x^3-3x+1$. **B.** $y=x^3-3x-1$. **C.** $y=-x^3-3x^2-1$. **D.** $y=-x^3+3x^2+1$.

Câu 2: Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị như hình vẽ dưới đây?



A. $y=x^3+x^2-x+1$. **B.** $y=\sqrt{x}$. **C.** $y=\dfrac{x+1}{x-2}$. **D.** $y=\log_3 x$.

Câu 3: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một hàm số nào?



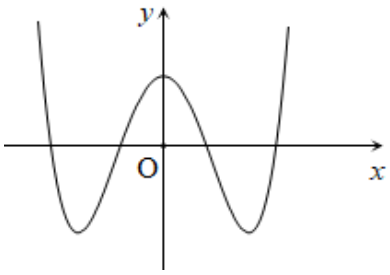
A. $y=-x^3+3x+2$. **B.** $y=-x^3-3x+2$. **C.** $y=x^4-x^2+2$. **D.** $y=x^3-3x+2$.

Câu 4: Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như hình bên?

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	$-$	$-$	
y	-1 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ -1	

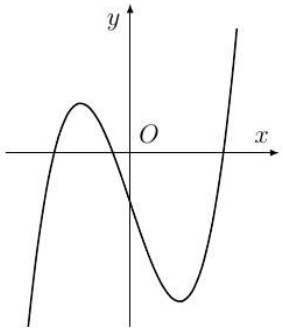
A. $y=\dfrac{-x-3}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{x+3}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{-x-2}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{-x+3}{x-1}$.

Câu 5: Hàm số nào dưới đây có đồ thị như đường cong trong hình dưới?



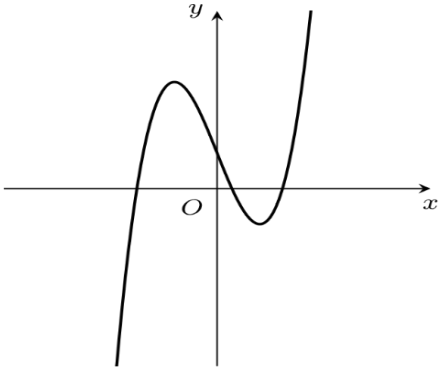
A. $y=x^4-3x^2+1$. **B.** $y=x^4-3x^2-1$. **C.** $y=x^4+x^2+1$. **D.** $y=-x^4+x^2+1$.

Câu 6: Hàm số nào dưới đây có đồ thị như đường cong trong hình bên?



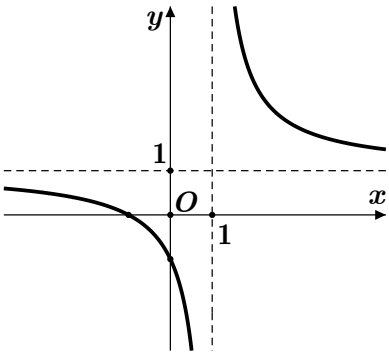
A. $y=x^4-2x^2-1$. **B.** $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. **C.** $y=x^3-3x-1$. **D.** $y=x^2+x-1$.

Câu 7: Đường cong ở hình dưới đây là đồ thị của hàm số nào?



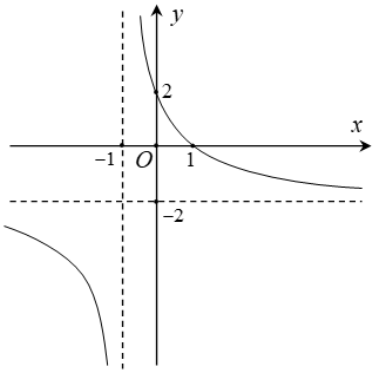
A. $y=x^3-3x+1$. **B.** $y=-x^4+2x^2+1$. **C.** $y=-x^3+3x+1$. **D.** $y=x^4-2x^2+1$.

Câu 8: Hàm số nào dưới đây có đồ thị dạng như đường cong trong hình vẽ bên dưới?



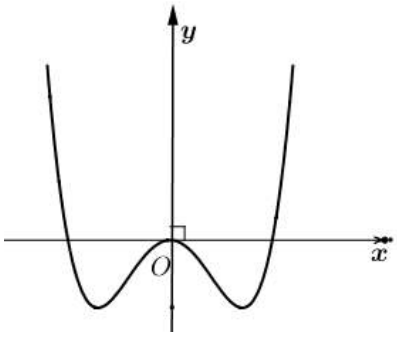
A. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x-1}{x+1}$.

Câu 9: Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số nào sau đây?



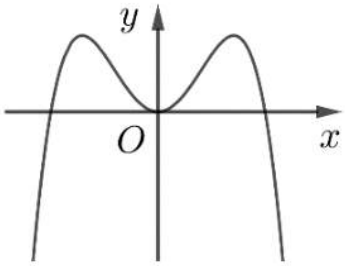
A. $y=\dfrac{2-2x}{x+1}$. **B.** $y=2x^3-x+1$. **C.** $y=\dfrac{-2x+1}{x+2}$. **D.** $y=x^4+2x^2+2$.

Câu 10: Hàm số nào dưới đây có đồ thị như đường cong trong hình vẽ bên dưới?



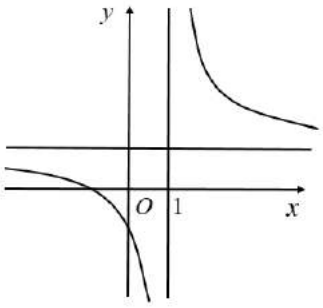
A. $y=x^4-2x^2$. **B.** $y=\dfrac{x-1}{2x}$. **C.** $y=-x^4+x^2$. **D.** $y=x^3-2x^2+1$.

Câu 11: Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y=x^4-2x^2$. **B.** $y=-x^4+2x^2$. **C.** $y=x^3-3x$. **D.** $y=-x^3+3x$.

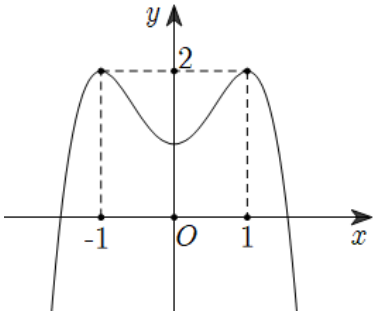
Câu 12: Cho đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với a,b,c,d là các số thực.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

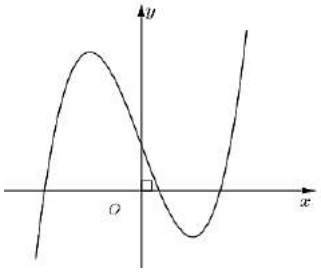
A. $y'<0,\forall x\in\mathbb{R}$. **B.** $y'>0,\forall x\neq 1$. **C.** $y'<0,\forall x\neq 1$. **D.** $y'>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 13: Hàm số nào dưới đây có đồ thị như hình sau?



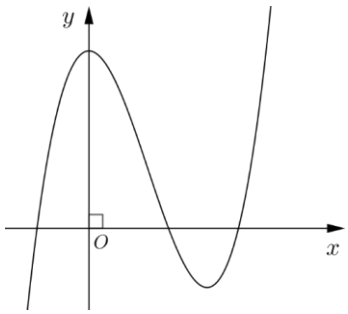
A. $y=x^4-2x^2+1$. **B.** $y=x^3-3x+1$. **C.** $y=-x^3+3x+1$. **D.** $y=-x^4+2x^2+1$.

Câu 14: Hàm số nào dưới đây có đồ thị như đường cong trong hình sau?



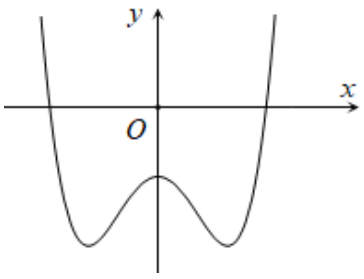
A. $y=-x^4+2x^2+1$. **B.** $y=x^3-3x+1$. **C.** $y=x^4-2x^2+1$. **D.** $y=-x^3+3x+1$.

Câu 15: Đường cong ở hình bên dưới là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



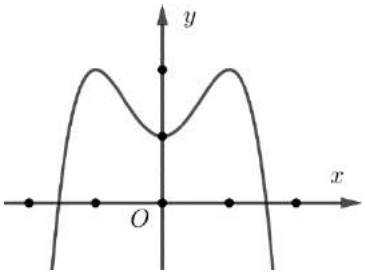
A. $y=x^3-3x^2+3$. **B.** $y=-x^3+3x^2+1$. **C.** $y=x^4-2x^2+1$. **D.** $y=-x^4+2x^2+1$.

Câu 16: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có hình dạng như đường cong trong hình dưới?



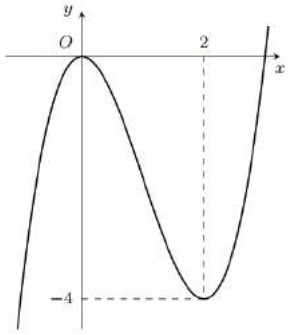
A. $y=x^2-1$. **B.** $y=-x^4+2x^2-1$. **C.** $y=x^4-2x^2-1$. **D.** $y=x^3-3x^2-1$.

Câu 17: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ dưới?



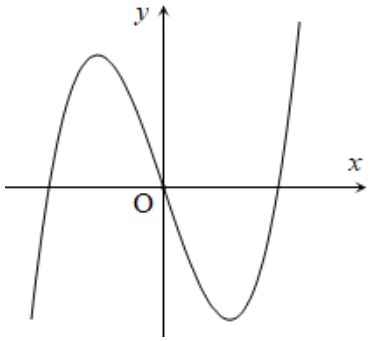
A. $y=-x^4+2x^2+1$. **B.** $y=x^3-3x^2+1$. **C.** $y=x^3-3x+1$. **D.** $y=x^4-2x^2+1$.

Câu 18: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



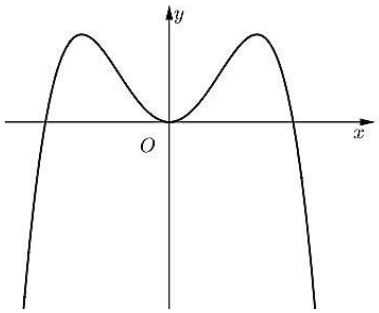
A. $y=-x^3+3x^2$. **B.** $y=x^3-12x$. **C.** $y=x^3-3x^2$. **D.** $y=-x^4+2x^2$.

Câu 19: Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình dưới?



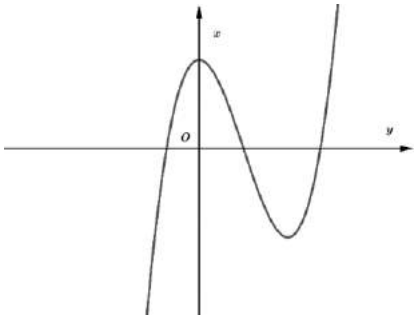
A. $y=x^4-x^2$. **B.** $y=x^3-3x$. **C.** $y=-x^3+3x$. **D.** $y=-x^4+x^2$.

Câu 20: Hàm số nào dưới đây có đồ thị như đường cong trong hình sau?



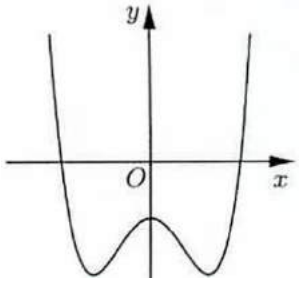
A. $y=-x^4+2x^2$. **B.** $y=x^3-2x^2$. **C.** $y=-x^3+2x^2$. **D.** $y=x^4-2x^2$.

Câu 21: Đường cong hình dưới đây là đồ thị của hàm số nào?



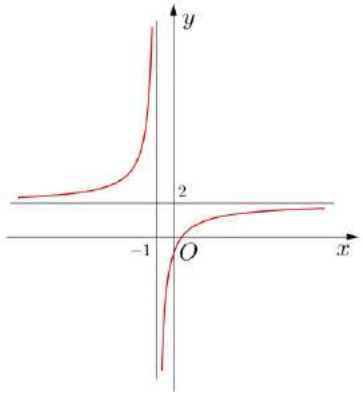
A. $y=x^4-2x^2+2$. **B.** $y=x^3-3x^2-2$. **C.** $y=x^3-3x^2+2$. **D.** $y=-x^3+3x^2+2$.

Câu 22: Hàm số nào dưới đây có đồ thị như đường cong trong hình bên?



A. $y=x^4-2x-1$. **B.** $y=-x^4+2x-1$. **C.** $y=x^3-3x$. **D.** $y=-x^3+3x^2-2$.

Câu 23: Hàm số nào dưới đây có đồ thị như hình vẽ:



A. $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x+2}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{2x-2}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$.

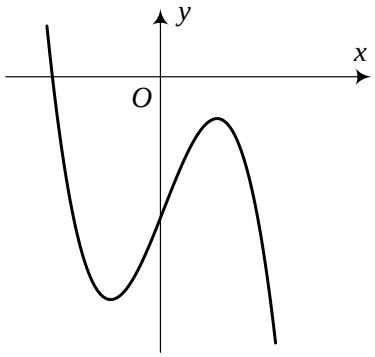
Câu 24: Trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây, hàm số nào có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	$\dfrac{-29}{3}$	↗	$+\infty$

A. $y=-x^3+3x^2+9x-2$. **B.** $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-3x-\dfrac{2}{3}$.

C. $y=x^3-3x^2-9x-2$. **D.** $y=-\dfrac{1}{3}x^3+x^2+3x+\dfrac{2}{3}$.

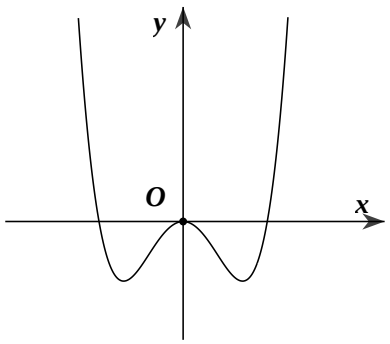
Câu 25: Hàm số nào dưới đây có đồ thị như hình vẽ bên dưới?



A. $y=x^4+2x^2-2$. **B.** $y=-x^3+2x+2$.

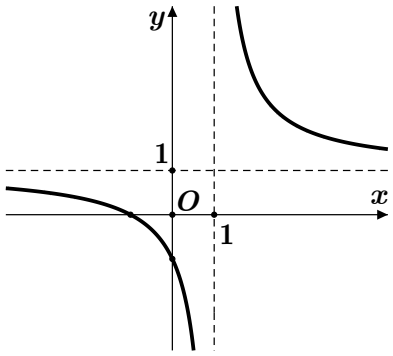
C. $y=-x^3+2x-2$. **D.** $y=-x^4+2x^2-2$.

Câu 26: Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số nào sau đây?



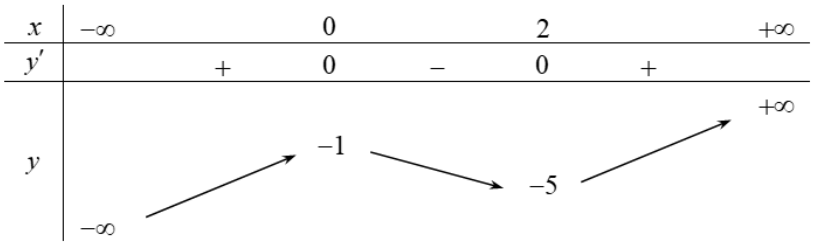
A. $y=-x^4+x^2$. **B.** $y=x^3-2x^2+1$. **C.** $y=x^4-2x^2$. **D.** $y=\dfrac{x-1}{2x}$.

Câu 27: Hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số nào?



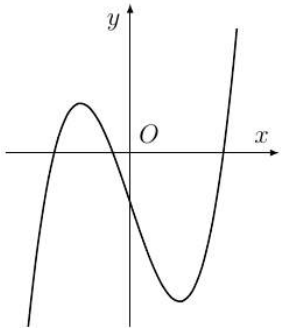
A. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{x-1}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{x+1}{2x-2}$. **D.** $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$.

Câu 28: Bảng biến thiên sau là bảng biến thiên của hàm số nào sau đây?



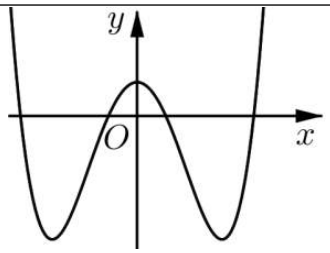
A. $y=-x^3-3x-2$. **B.** $y=x^3-3x^2-1$. **C.** $y=-x^3+3x^2+2$. **D.** $y=x^4+3x^2-1$.

Câu 29: Hàm số nào dưới đây có đồ thị như đường cong trong hình bên?



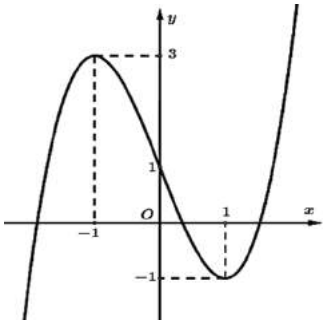
A. $y=x^4-2x^2-1$. **B.** $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. **C.** $y=x^3-3x-1$. **D.** $y=x^2+x-1$.

Câu 30: Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên dưới



A. $y=-x^4+2x^2-1$. **B.** $y=-x^4+x^2+1$. **C.** $y=2x^4-4x^2+1$. **D.** $y=x^4+x^2+1$.

Câu 31: Đồ thị sau đây là của hàm số nào?



A. $y=x^3-3x+1$. **B.** $y=x^3-3x-1$. **C.** $y=-x^3-3x-1$. **D.** $y=-x^3+3x+1$.

Câu 32: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+1}$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'	$+$		$+$		
y	2	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	2

Xét các mệnh đề

(1) $c=1$.

(2) $a=2$.

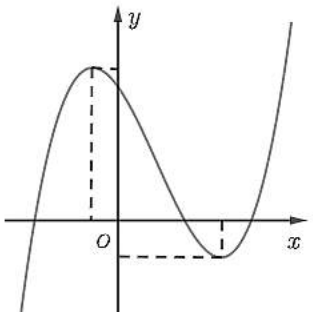
(3) Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$.

(4) Nếu $y'=\dfrac{1}{(x+1)^2}$ thì $b=1$.

Số mệnh đề đúng trong các mệnh đề trên là

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 33: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ \ (a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ

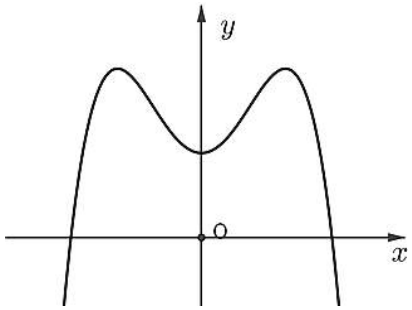


Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a>0,b<0,c<0,d>0$. **B.** $a>0,b>0,c>0,d>0$.

C. $a>0,b<0,c>0,d<0$. **D.** $a>0,b>0,c<0,d>0$.

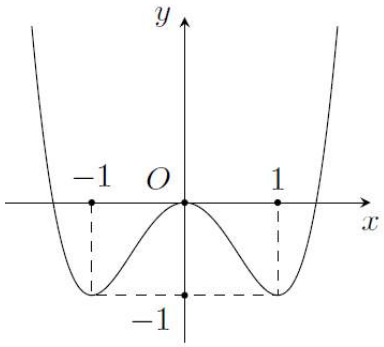
Câu 34: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình bên.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

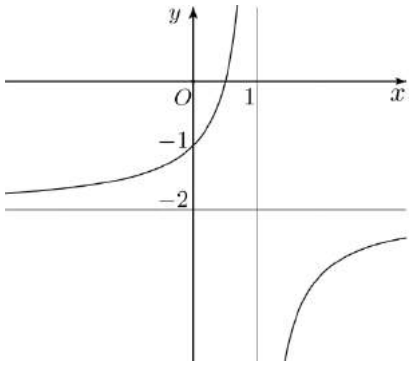
A. $a > 0; b < 0; c < 0$. **B.** $a < 0; b > 0; c < 0$. **C.** $a < 0; b < 0; c < 0$. **D.** $a < 0; b > 0; c > 0$.

Câu 35: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y = x^4 - 2x^2$. **B.** $y = -x^4 + 2x^2$. **C.** $y = x^4 + 2x^2$. **D.** $y = x^4 - 3x^2 + 1$.

Câu 36: Hàm số nào trong các hàm số sau có đồ thị như hình bên dưới



A. $y = \dfrac{1-2x}{1+x}$. **B.** $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$. **C.** $y = \dfrac{x-1}{1-2x}$. **D.** $y = \dfrac{2x-1}{1-x}$.

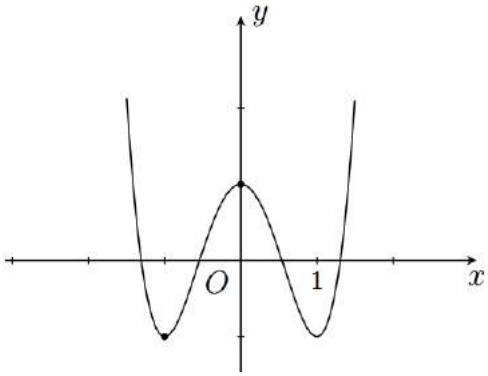
Câu 37: Cho bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	2	↗	3	↘	$+\infty$

Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như hình trên?

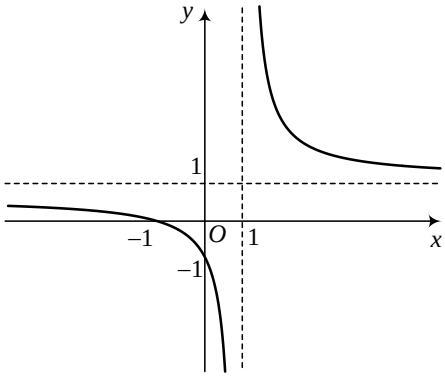
A. $y = x^4 - 2x^2 + 2$. **B.** $y = x^4 - 2x^2 + 1$. **C.** $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. **D.** $y = -x^4 + 2x^2 + 2$.

Câu 38: Hàm số nào có đồ thị như đường cong trong hình dưới đây?



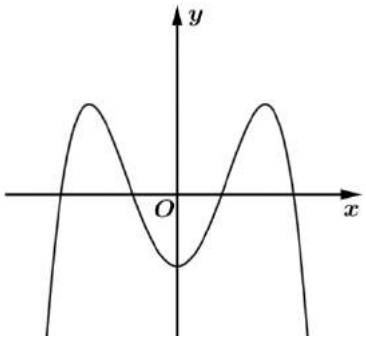
A. $y=2x^4-4x^2-1$. **B.** $y=2x^4-4x^2+1$. **C.** $y=-x^4+4x^2+1$. **D.** $y=2x^4+4x^2+1$.

Câu 39: Hình bên dưới là đồ thị của hàm số nào sau đây?



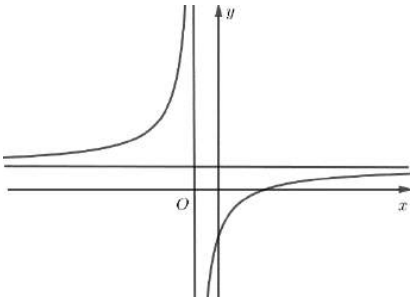
A. $y=\dfrac{x+1}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{x+2}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{x+2}{x-1}$.

Câu 40: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=-x^4+3x^2-1$. **B.** $y=x^4-3x^2-1$. **C.** $y=x^3-3x^2-1$. **D.** $y=-x^3+3x^2-1$.

Câu 41: Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

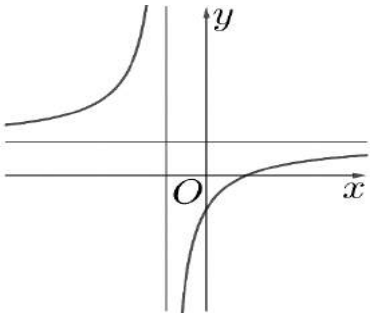


Mệnh đề nào say đây đúng

A. $ad<0$ và $ab<0$. **B.** $bd<0$ và $ab>0$.

C. $ad>0$ và $ab<0$. **D.** $ad>0$ và $bd>0$.

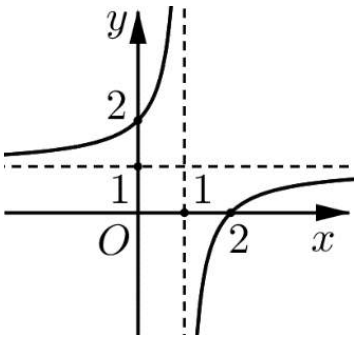
Câu 42: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx-2}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có đồ thị như sau:



Trong các số a, b và c có bao nhiêu số dương?

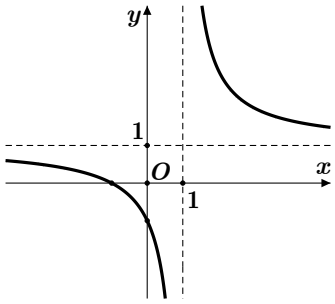
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 43: Đường cong ở hình dưới đây là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+a}{bx+c}$, $(a,b,c\in\mathbb{R})$. Trong các số a, b và c có bao nhiêu số dương?



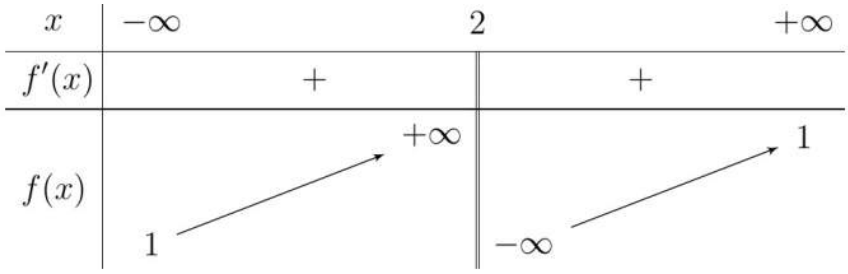
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 44: Hàm số nào dưới đây có đồ thị dạng như đường cong trong hình vẽ bên dưới?



A. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x-1}{x+1}$.

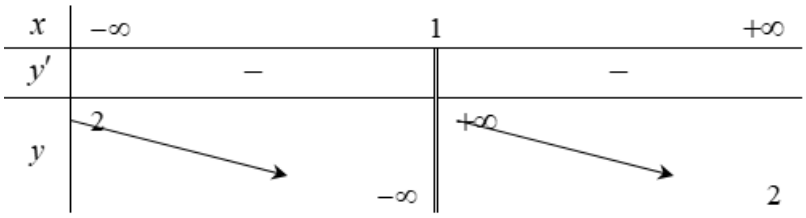
Câu 45: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+1}{bx+c}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:



Trong các số a,b,c có bao nhiêu số dương?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

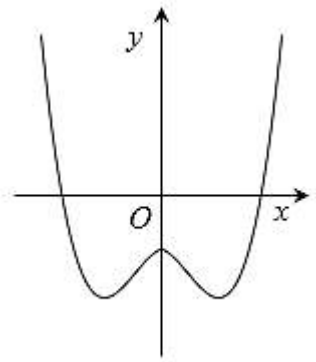
Câu 46: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Hàm số $y=f(x)$ là hàm số nào sau đây?

A. $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{2-x}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{2+x}{x-1}$.

Câu 47: Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$, $(a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ

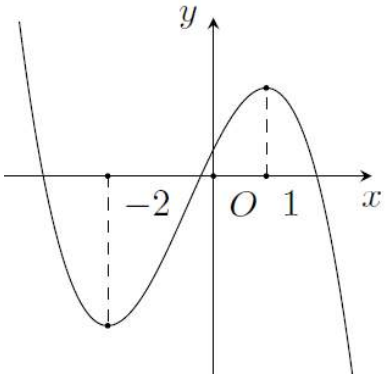


Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a<0$, $b>0$, $c<0$. **B.** $a>0$, $b<0$, $c<0$.

C. $a>0$, $b>0$, $c<0$. **D.** $a>0$, $b<0$, $c>0$.

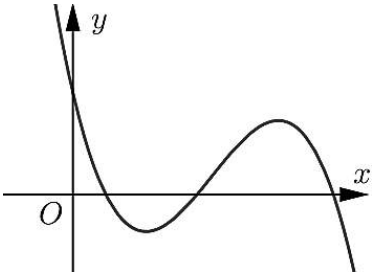
Câu 48: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Chọn khẳng định đúng?



A. $ab>0, bc<0, cd<0$. **B.** $ab>0, bc<0, cd>0$.

C. $ab>0, bc>0, cd>0$. **D.** $ab<0, bc<0, cd>0$.

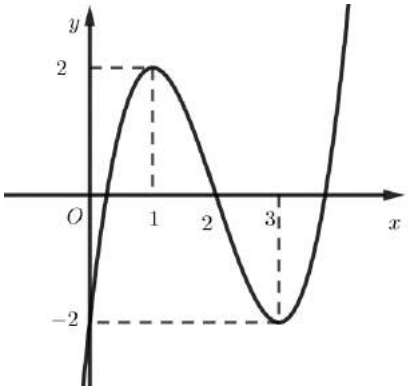
Câu 49: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $a<0, b>0, c>0, d>0$. **B.** $a<0, b<0, c<0, d>0$.

C. $a>0, b>0, c<0, d>0$. **D.** $a<0, b>0, c<0, d>0$.

Câu 50: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.



Số lớn nhất trong các số a, b, c, d là:

A. c. **B.** a. **C.** b. **D.** d.

CHƯƠNG 1

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

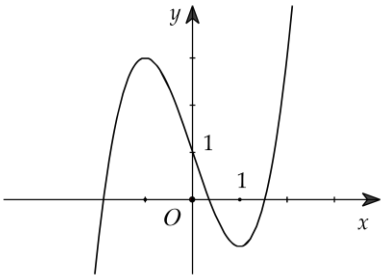
CHỦ ĐỀ 5 NHẬN DIỆN HÀM SỐ VÀ BIẾN ĐỔI ĐỒ THỊ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

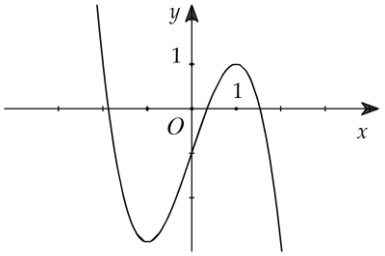
KHẢO SÁT MỘT SỐ HÀM ĐA THỨC VÀ PHÂN THỨC:

1. Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ \ (a \neq 0)$

- **Trường hợp 1:** phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

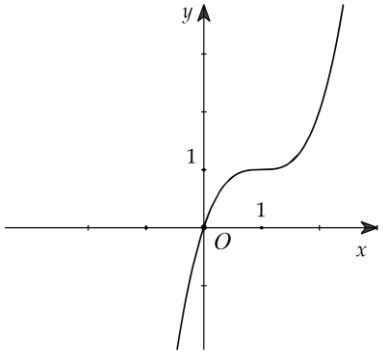


Với $a > 0$.

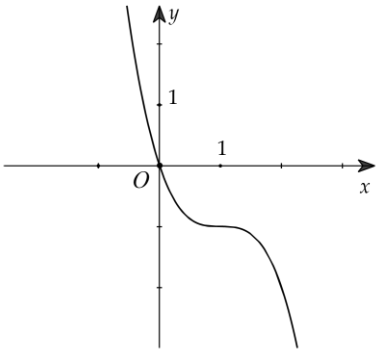


Với $a < 0$.

- **Trường hợp 2:** phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép

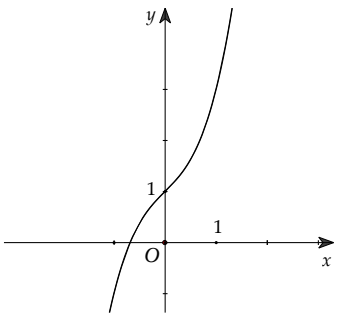


Với $a > 0$.

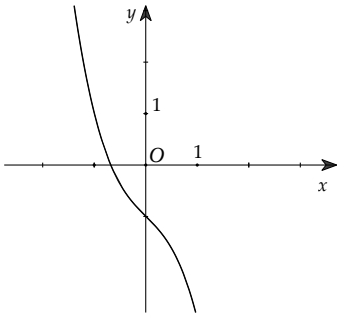


Với $a < 0$.

- **Trường hợp 2:** phương trình $y' = 0$ vô nghiệm



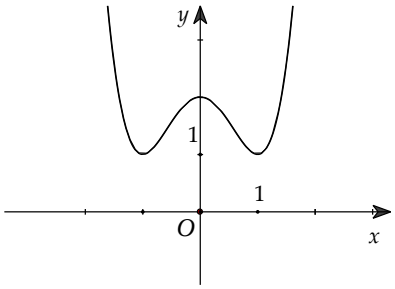
Với $a > 0$.



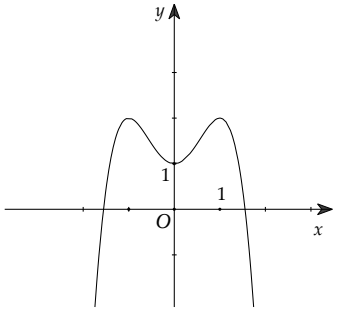
Với $a < 0$.

2. Hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c \ \ (a \neq 0)$

- Đạo hàm: $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x\left(2ax^2 + b\right),\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2ax^2 + b = 0 \end{array}\right.$
- Để hàm số có 3 cực trị: $ab < 0$
- Nếu $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$ hàm số có 2 cực đại và 1 cực tiểu
- Nếu $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$ hàm số có 1 cực đại và 2 cực tiểu
- Để hàm số có 1 cực trị $ab \geq 0$
- Nếu $\begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$ hàm số có 1 cực tiểu và không có cực đại
- Nếu $\begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$ hàm số có 1 cực đại và không có cực tiểu
- **Trường hợp 1:** phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\left(ab < 0\right)$.

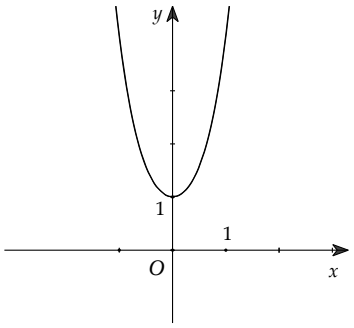


Với $a > 0$.

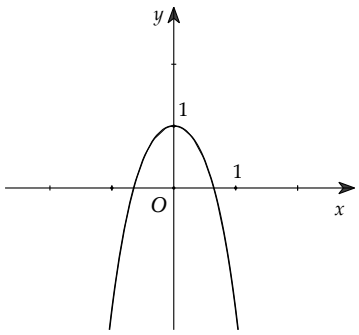


Với $a < 0$.

- **Trường hợp 2:** phương trình $y' = 0$ có 1 nghiệm



Với $a > 0$.



Với $a < 0$.

3. Hàm số bậc nhất $y = \dfrac{ax + b}{cx + d} \ \ \left(c \neq 0,\ ad - bc \neq 0\right)$

- Tập xác định: $D = R \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ Đạo hàm: $y = \dfrac{ad - bc}{\left(cx + d\right)^2}$
- Nếu $ad - bc > 0$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định. Đồ thị nằm góc phần tư 2 và 4.
- Nếu $ad - bc < 0$ hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định. Đồ thị nằm góc phần tư 1 và 3.
- Đồ thị hàm số có: TCĐ: $x = -\dfrac{d}{c}$ và TCN: $y = \dfrac{a}{c}$

- Đồ thị có tâm đối xứng: $I\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$

CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI ĐỒ THỊ:

1. Dạng 1: Từ đồ thị $(C): y=f(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y=f(|x|)$.

Ta có: $y=f(|x|)=\begin{cases} f(x) & \text{khi } x\geq 0 \\ f(-x) & \text{khi } x<0 \end{cases}$

và $y=f(|x|)$ là *hàm chẵn* nên đồ thị (C') nhận *Oy* làm trục đối xứng.

- Cách vẽ (C') từ (C):

  Giữ nguyên phần đồ thị bên phải Oy của đồ thị $(C): y=f(x)$.

  Bỏ phần đồ thị bên trái Oy của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị** được giữ qua Oy.

2. Dạng 2: Từ đồ thị $(C): y=f(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y=|f(x)|$.

Ta có: $y=|f(x)|=\begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x)\geq 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x)<0 \end{cases}$

- **Cách vẽ (C') từ (C):**

  Giữ nguyên phần đồ thi phía trên Ox của đồ thị (C): $y=f(x)$.

  Bỏ phần đồ thị phía dưới Ox của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ** qua Ox.

3. Dạng 3: Từ đồ thị $(C): y=u(x).v(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y=|u(x)|.v(x)$.

Ta có: $y=|u(x)|.v(x)=\begin{cases} u(x).v(x)=f(x) & \text{khi } u(x)\geq 0 \\ -u(x).v(x)=f(x) & \text{khi } u(x)<0 \end{cases}$

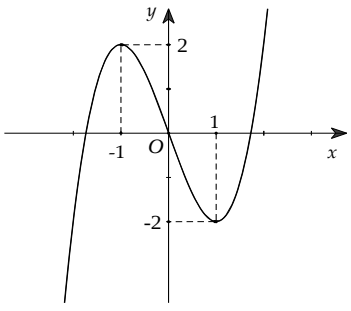
- **Cách vẽ (C') từ (C):**

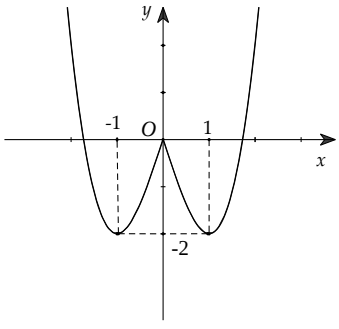
  Giữ nguyên phần đồ thị trên miền $u(x)\geq 0$ của đồ thị $(C): y=f(x)$.

  Bỏ phần đồ thị trên miền $u(x)<0$ của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ** qua Ox.

VÍ DỤ 1: Từ đồ thị $(C): y=f(x)=x^3-3x$ suy ra đồ thị $(C'): y=|x|^3-3|x|$.

- Bỏ phần đồ thị của (C) bên trái Oy, giữ nguyên (C) bên phải Oy.
- Lấy đối xứng phần đồ thị được giữ qua Oy.

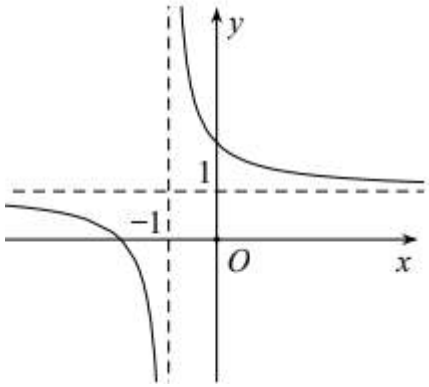




$(C'): y=|x|^3-3|x|$

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị hàm số như hình vẽ dưới đây



Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $0<b<a$. **B.** $0<a<b$. **C.** $b<0<a$. **D.** $a<b<0$.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang và tiệm cận đứng lần lượt là $y=1;x=-1$

$\Rightarrow \dfrac{a}{c}=1;\dfrac{-d}{c}=-1\Rightarrow a=c;d=c\Rightarrow a=c=d$.

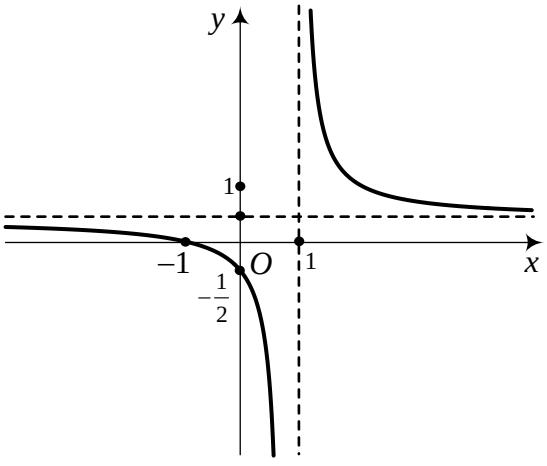
Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ nhỏ hơn $-1\Rightarrow \dfrac{-b}{a}<-1\Rightarrow \dfrac{b}{a}>1$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ lớn hơn $1\Rightarrow \dfrac{b}{d}>1$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định nên $ad-bc<0$.

Mà $a=c=d;\dfrac{b}{a}>1\Rightarrow b>a>0$

Câu 2: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau?



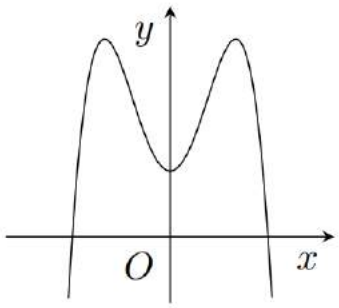
A. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{2x-4}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x+1}{2x-2}$. **D.** $y=\dfrac{2x}{3x-3}$.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$ và tiệm cận ngang là $y=\frac{1}{2}$

Câu 3: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?



A. $y=2x^4-4x^2+1$. **B.** $y=-2x^4+4x^2+1$. **C.** $y=2x^3-3x+1$. **D.** $y=-2x^3+3x+1$.

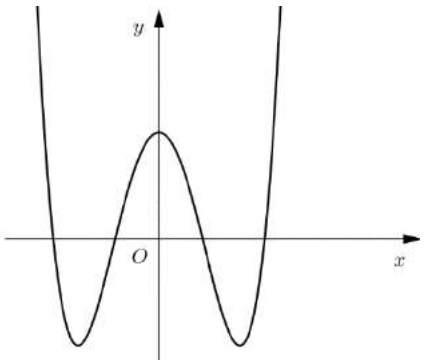
Lời giải

Chọn B

Từ hình vẽ ta thấy đây là đồ thị hàm trùng phương $y=ax^4+bx^2+c$ nên loại **C**, **D.**

Lại thấy $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=-\infty$ nên $a<0$, suy ra loại **A** chọn **B.**

Câu 4: Cho đồ thị hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ như hình vẽ. Nhận xét đúng về dấu của các hệ số thực a,b,c là



A. $a>0,b<0,c>0$. **B.** $a>0,b>0,c>0$. **C.** $a>0,b<0,c<0$. **D.** $a<0,b>0,c>0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có đồ thị có ba điểm cực trị trong đó có hai điểm cực tiểu và một cực đại nên $a>0,b<0$; đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $c>0$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Có bao nhiêu số âm trong các số a,b,c,d ?

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Cách 1

Từ bảng biến thiên ta có $a<0$ vì $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$ (1)

Đạo hàm $y'=3ax^2+2bx+c=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\end{array}\right.$

Theo Viet $\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{-2b}{3a}=0\\x_1.x_2=\dfrac{c}{3a}=-1<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=0\\c>0\end{cases}(2)$

Lại có $y''=6ax+2b=0\Leftrightarrow x=0\Rightarrow\dfrac{y(-1)+y(1)}{2}=\dfrac{(-1)+3}{2}=1.$

Gọi U là điểm uốn của đồ thị ta có $U(0;1)$, nên đồ thị cắt trục Oy tại $U(0;1)\Rightarrow d=1>0$ (3)

Từ $(1),(2)\&(3)$ ta thấy hàm số có 1 số âm trong các số a,b,c,d.

Cách 2

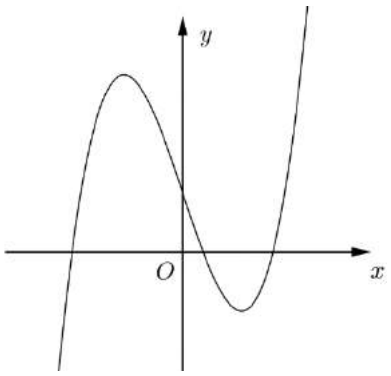
Đạo hàm: $y'=3ax^2+2bx+c=0$.

Theo bài ra ta có:

$$\begin{cases}f'(-1)=0\\f'(1)=0\\f(-1)=-1\\f(1)=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a-2b+c=0\\3a+2b+c=0\\-a+b-c+d=-1\\a+b+c+d=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=0\\c=3\\d=1\end{cases}.$$

Vậy có 1 số âm trong các số a,b,c,d.

Câu 6: Đồ thị dưới đây có thể là đồ thị của hàm số nào?



A. $y=x^3-3x+1.$ **B.** $y=x^3+3x-1.$ **C.** $y=-x^3+3x+1.$ **D.** $y=x^3-3x^2+2.$

Lời giải

Chọn A

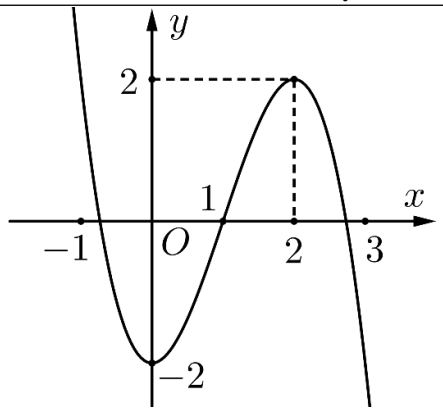
Từ đồ thị ta thấy đây là hình ảnh đồ thị hàm bậc $y=ax^3+bx^2+cx+d$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty\Rightarrow a>0$, loại phương án **C.**

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương $\Rightarrow d>0$, loại phương án **B.**

Xét phương án D có $y'=3x^2-6x\Rightarrow y'=0$ có hai nghiệm là $x=0$ và $x=2$ nên hàm số đạt cực trị tại $x=0$ và $x=2$, loại phương án **D.**

Vậy phương án đúng là **A.**

Câu 7: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên dưới?



A. $y=x^3-3x^2+2$. **B.** $y=x^3-3x+2$. **C.** $y=-x^3+3x^2-2$. **D.** $y=-x^3+3x-2$.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số đã cho là đồ thị hàm số bậc ba có dạng $y=ax^3+bx^2+cx+d$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$ nên $a<0$.

Mặt khác, đồ thị hàm số đã cho có 1 cực trị thuộc Oy nên $c=0$.

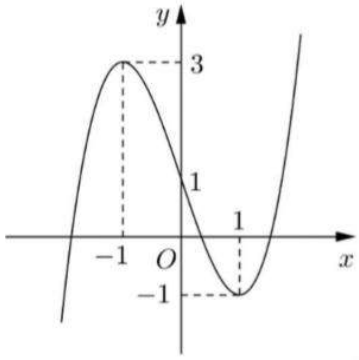
Vậy chỉ có đáp án **C** thỏa mãn.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1: Nhận diện đồ thị hàm số

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

Câu 1: Đồ thị sau đây là của hàm số nào?



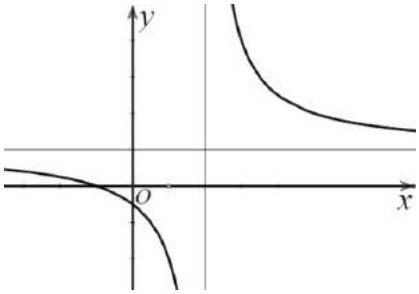
A. $y=x^3-3x+1$. **B.** $y=x^3-3x-1$. **C.** $y=-x^3-3x^2-1$. **D.** $y=-x^3+3x^2+1$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ với $a>0$ và cắt Oy tại $(0;1)$.

Câu 2: Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị như hình vẽ dưới đây?



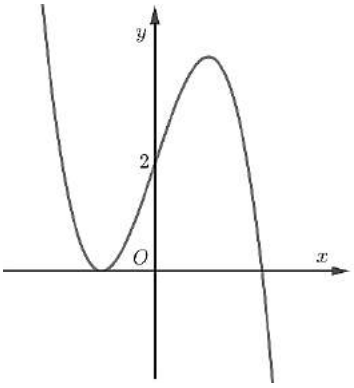
A. $y=x^3+x^2-x+1$. **B.** $y=\sqrt{x}$. **C.** $y=\dfrac{x+1}{x-2}$. **D.** $y=\log_3 x$.

Lời giải

Chọn C

Dễ nhận thấy dạng đồ thị cho trong bài là của hàm số dạng $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Câu 3: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một hàm số nào?



A. $y=-x^3+3x+2$. **B.** $y=-x^3-3x+2$. **C.** $y=x^4-x^2+2$. **D.** $y=x^3-3x+2$.

Lời giải

Chọn A

Nhánh cuối của đồ thị đi xuống nên $a<0$, đồ thị có hai điểm cực trị nên $a.c<0$.

Câu 4: Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như hình bên?

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	$-$	$\|\|$	$-$
y	$-1 \searrow -\infty$	$\|\|$	$+\infty \searrow -1$

A. $y=\dfrac{-x-3}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{x+3}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{-x-2}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{-x+3}{x-1}$.

Lời giải

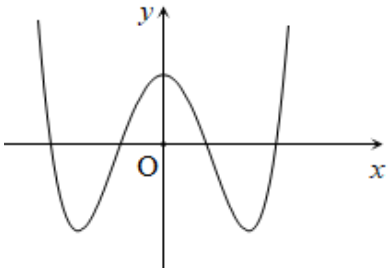
Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy:

Hàm số có tiệm cận ngang $y=-1$. (Loại B)

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$ nên $y'<0,\forall x\neq 1$.

Câu 5: Hàm số nào dưới đây có đồ thị như đường cong trong hình dưới?



A. $y=x^4-3x^2+1$. **B.** $y=x^4-3x^2-1$. **C.** $y=x^4+x^2+1$. **D.** $y=-x^4+x^2+1$.

Lời giải

Chọn A

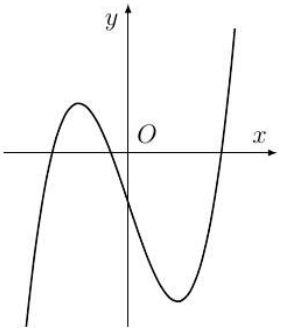
Đường cong trong hình vẽ là đồ thị của hàm số $y=ax^4+bx^2+c\ (a\neq 0)$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty \Rightarrow a>0$.

Đồ thị giao với Oy tại điểm có tung độ dương $\Rightarrow c>0$.

Hàm số có ba điểm cực trị $\Rightarrow ab<0$.

Câu 6: Hàm số nào dưới đây có đồ thị như đường cong trong hình bên?



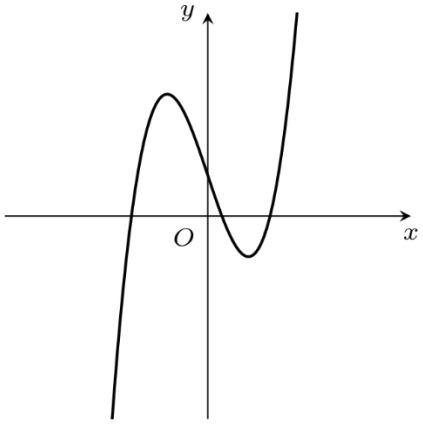
A. $y=x^4-2x^2-1$. **B.** $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. **C.** $y=x^3-3x-1$. **D.** $y=x^2+x-1$.

Lời giải

Chọn C

Đường cong trong hình vẽ là đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a > 0$ nên đồ thị đã cho là đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x - 1$.

Câu 7: Đường cong ở hình dưới đây là đồ thị của hàm số nào?



A. $y = x^3 - 3x + 1$. **B.** $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. **C.** $y = -x^3 + 3x + 1$. **D.** $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

Lời giải

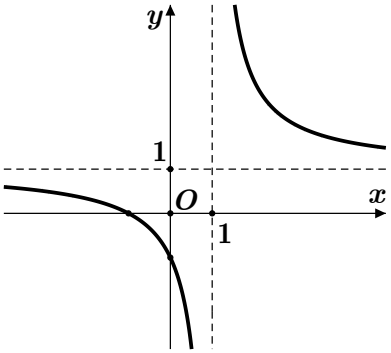
Chọn A

Đường cong trên là đồ thị của hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Nhìn vào nhánh phải của đồ thị ta thấy đồ thị có hướng đi lên suy ra $a > 0$

Suy ra hàm số thỏa là $y = x^3 - 3x + 1$.

Câu 8: Hàm số nào dưới đây có đồ thị dạng như đường cong trong hình vẽ bên dưới?



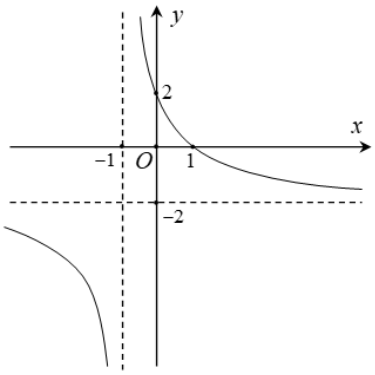
A. $y = \dfrac{x+1}{x-1}$. **B.** $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$. **C.** $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$. **D.** $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số có phương trình tiệm cận đứng là $x = 1$, tiệm cận ngang $y = 1$.

Câu 9: Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số nào sau đây?



A. $y=\dfrac{2-2x}{x+1}$. **B.** $y=2x^3-x+1$. **C.** $y=\dfrac{-2x+1}{x+2}$. **D.** $y=x^4+2x^2+2$.

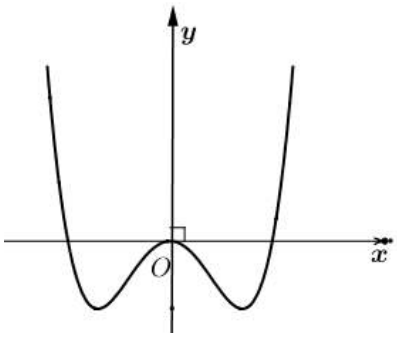
Lời giải

Chọn A

Ta có đây là đồ thị của hàm số dạng $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

Mặt khác đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng $x=-1$

Câu 10: Hàm số nào dưới đây có đồ thị như đường cong trong hình vẽ bên dưới?



A. $y=x^4-2x^2$. **B.** $y=\dfrac{x-1}{2x}$. **C.** $y=-x^4+x^2$. **D.** $y=x^3-2x^2+1$.

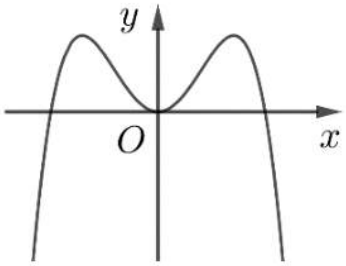
Lời giải

Chọn A

Từ dáng điệu đồ thị suy ra đây là đồ thị hàm bậc 4, do đó loại các phương án B và **D.**

Ta thấy $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$ nên loại phương án **C.**

Câu 11: Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



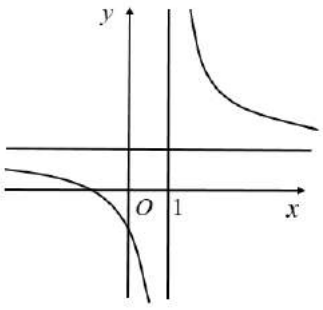
A. $y=x^4-2x^2$. **B.** $y=-x^4+2x^2$. **C.** $y=x^3-3x$. **D.** $y=-x^3+3x$.

Lời giải

Chọn B

Ta thấy đường trong trong hình bên là đồ thị của hàm số trùng phương với hệ số $a<0$.

Câu 12: Cho đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với a,b,c,d là các số thực.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

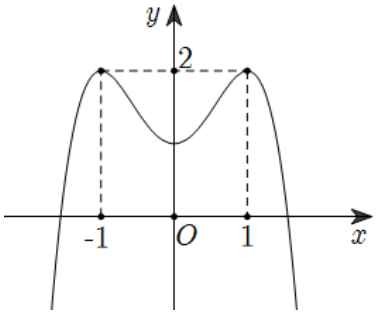
A. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. **B.** $y' > 0, \forall x \neq 1$. **C.** $y' < 0, \forall x \neq 1$. **D.** $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

Tiệm cận đứng $x = 1$. Hàm số nghịch biến.

Câu 13: Hàm số nào dưới đây có đồ thị như hình sau?



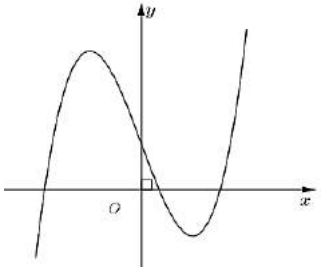
A. $y = x^4 - 2x^2 + 1$. **B.** $y = x^3 - 3x + 1$. **C.** $y = -x^3 + 3x + 1$. **D.** $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị ta thấy đây là đồ thị của hàm số bậc bốn trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có hệ số $a < 0$ nên nhận đáp án $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

Câu 14: Hàm số nào dưới đây có đồ thị như đường cong trong hình sau?



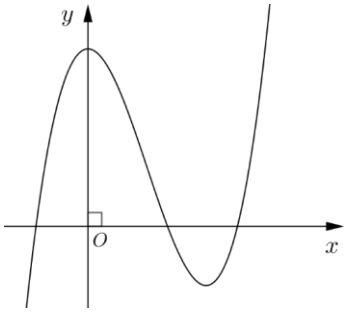
A. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. **B.** $y = x^3 - 3x + 1$. **C.** $y = x^4 - 2x^2 + 1$. **D.** $y = -x^3 + 3x + 1$.

Lời giải

Chọn A

Vì đường cong trong hình là đồ thị của hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với hệ số $a > 0$ nên ta chọn đáp án $y = x^3 - 3x + 1$.

Câu 15: Đường cong ở hình bên dưới là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = x^3 - 3x^2 + 3$. **B.** $y = -x^3 + 3x^2 + 1$. **C.** $y = x^4 - 2x^2 + 1$. **D.** $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

Lời giải

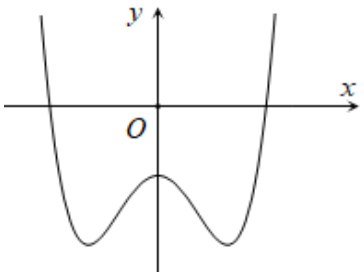
Chọn A

Đây là đồ thị của hàm số bậc ba.

Giả sử hoành độ của điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là x_0

Trên khoảng $(x_0;+\infty)$ đồ thị hàm số có hướng đi lên nên hệ số của x^3 là số dương.

Câu 16: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có hình dạng như đường cong trong hình dưới?



A. $y=x^2-1$. **B.** $y=-x^4+2x^2-1$. **C.** $y=x^4-2x^2-1$. **D.** $y=x^3-3x^2-1$.

Lời giải

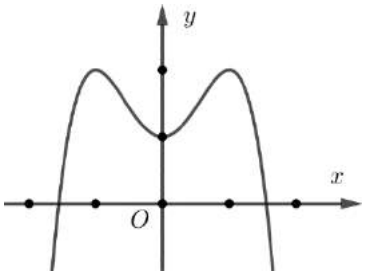
Chọn C

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số bậc bốn trùng phương $y=ax^4+bx^2+c\,(a\neq 0)$.

Nhìn vào hình vẽ ta thấy: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty \Rightarrow a>0$.

Hàm số có ba điểm cực trị $\Rightarrow ab<0$.

Câu 17: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ dưới?

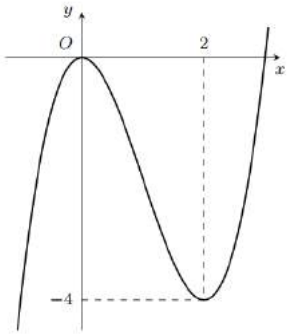


A. $y=-x^4+2x^2+1$. **B.** $y=x^3-3x^2+1$. **C.** $y=x^3-3x+1$. **D.** $y=x^4-2x^2+1$.

Lời giải

Ta thấy đường cong trên có dạng đồ thị hàm số bậc 4 trùng phương, nhánh ngoài cùng đi xuống nên $a<0$

Câu 18: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y=-x^3+3x^2$. **B.** $y=x^3-12x$. **C.** $y=x^3-3x^2$. **D.** $y=-x^4+2x^2$.

Lời giải

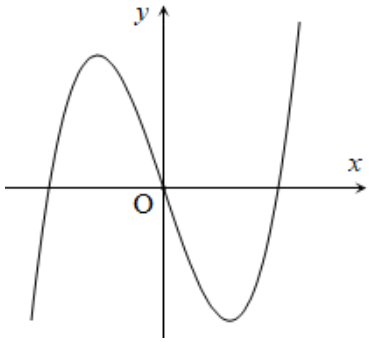
Chọn C

Đường cong là đồ thị của dạng hàm số bậc 3 với hệ số $a>0$.

Xét hàm số $y=x^3-3x^2$, có $y'=3x^2-6x$ nên $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=0\\x=2\Rightarrow y=-4.\end{array}\right.$

Vậy đường cong trong hình là đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2$.

Câu 19: Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình dưới?



A. $y = x^4 - x^2$. **B.** $y = x^3 - 3x$. **C.** $y = -x^3 + 3x$. **D.** $y = -x^4 + x^2$.

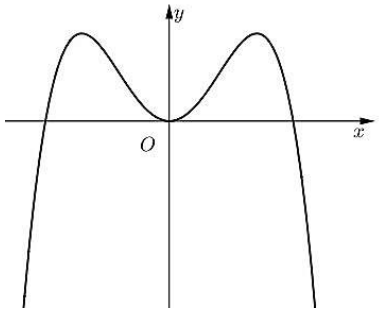
Lời giải

Chọn B

Đồ thị đã cho là đồ thị của hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$.

Ta thấy $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty \Rightarrow a > 0$.

Câu 20: Hàm số nào dưới đây có đồ thị như đường cong trong hình sau?



A. $y = -x^4 + 2x^2$. **B.** $y = x^3 - 2x^2$. **C.** $y = -x^3 + 2x^2$. **D.** $y = x^4 - 2x^2$.

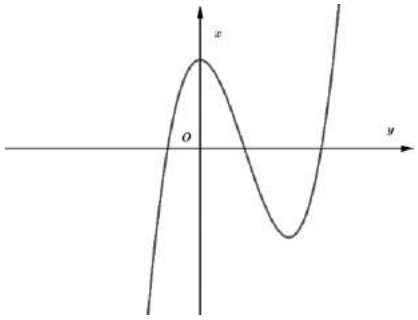
Lời giải

Chọn A

Đồ thị đã cho là của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c,\ (a \neq 0)$ với hệ số $a < 0$.

Vậy $y = -x^4 + 2x^2$.

Câu 21: Đường cong hình dưới đây là đồ thị của hàm số nào?



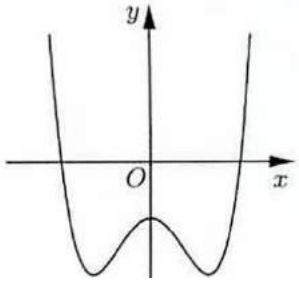
A. $y = x^4 - 2x^2 + 2$. **B.** $y = x^3 - 3x^2 - 2$. **C.** $y = x^3 - 3x^2 + 2$. **D.** $y = -x^3 + 3x^2 + 2$.

Lời giải

Chọn C

Đường cong có dạng đồ thị hàm số bậc ba với hệ số $a > 0$. Cắt trục tung tại điểm có tung độ dương, do đó $d > 0$

Câu 22: Hàm số nào dưới đây có đồ thị như đường cong trong hình bên?



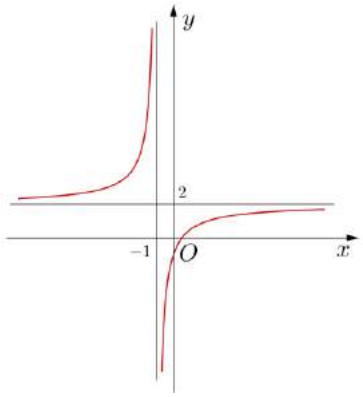
A. $y=x^4-2x-1$. **B.** $y=-x^4+2x-1$. **C.** $y=x^3-3x$. **D.** $y=-x^3+3x^2-2$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị, ta thấy đây là đồ thị của số dạng $y=ax^4+bx^2+c$ với hệ số $a>0$. Do đó, đường cong trong hình có hàm số tương ứng là $y=x^4-2x^2-1$.

Câu 23: Hàm số nào dưới đây có đồ thị như hình vẽ:



A. $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x+2}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{2x-2}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$.

Lời giải

Chọn A

Nhận thấy đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-1$ và đường tiệm cận ngang là $y=2$

Câu 24: Trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây, hàm số nào có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	$\dfrac{-29}{3}$	↗	$+\infty$

A. $y=-x^3+3x^2+9x-2$. **B.** $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-3x-\dfrac{2}{3}$.

C. $y=x^3-3x^2-9x-2$. **D.** $y=-\dfrac{1}{3}x^3+x^2+3x+\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

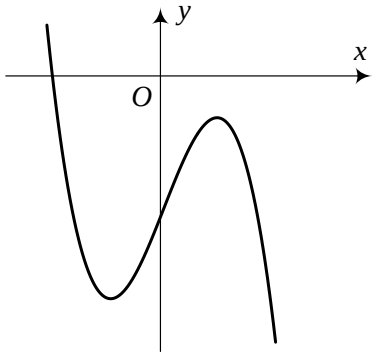
Chọn B

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$ nên loại **A**, **D**.

Xét **B**, thay $x=3\Rightarrow y=\dfrac{-29}{3}$.

Xét **C**, thay $x=3\Rightarrow y=-29$ (không thoả mãn bảng biến thiên).

Câu 25: Hàm số nào dưới đây có đồ thị như hình vẽ bên dưới?



A. $y=x^4+2x^2-2$.

B. $y=-x^3+2x+2$.

C. $y=-x^3+2x-2$.

D. $y=-x^4+2x^2-2$.

Lời giải

Chọn C

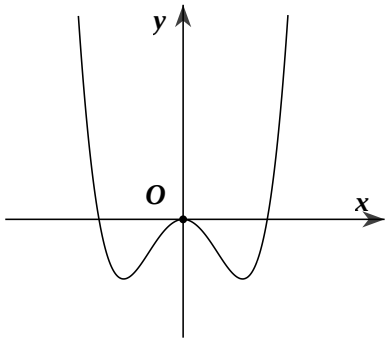
Ta thấy đồ thị là của hàm số bậc 3 có hệ số $a<0\Rightarrow$ loại A, D.

Giao điểm của đồ thị và trục Oy là điểm $(0;y_0)$ với $y_0<0\Rightarrow$ chọn C vì:

Đồ thị hàm số $y=-x^3+2x-2$ cắt Oy tại điểm $(0;-2)$.

Đồ thị hàm số $y=-x^3+2x+2$ cắt Oy tại điểm $(0;2)$.

Câu 26: Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số nào sau đây?



A. $y=-x^4+x^2$.

B. $y=x^3-2x^2+1$.

C. $y=x^4-2x^2$.

D. $y=\dfrac{x-1}{2x}$.

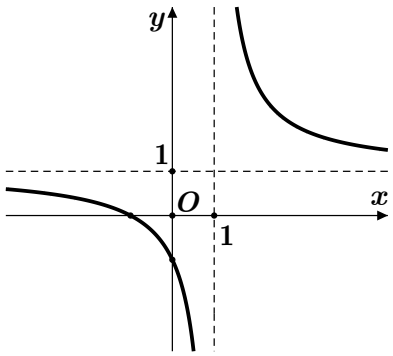
Lời giải

Chọn C

Dựa vào hình dạng đồ thị ta thấy đây là đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ nên loại đồ thị $y=x^3-2x^2+1$ và $y=\dfrac{x-1}{2x}$.

Dựa vào đồ thị đã cho cho ta hệ số $a>0$ suy ra đường cong trong hình vẽ trên là đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2$.

Câu 27: Hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số nào?



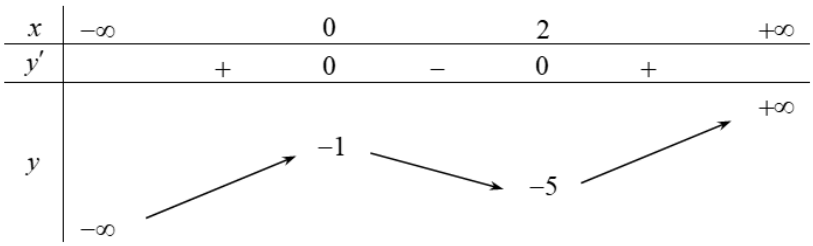
A. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{x-1}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{x+1}{2x-2}$. **D.** $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số phải có phương trình tiệm cận đứng là $x=1$ ta tiệm cận ngang $y=1$.

Câu 28: Bảng biến thiên sau là bảng biến thiên của hàm số nào sau đây?



A. $y=-x^3-3x-2$. **B.** $y=x^3-3x^2-1$. **C.** $y=-x^3+3x^2+2$. **D.** $y=x^4+3x^2-1$.

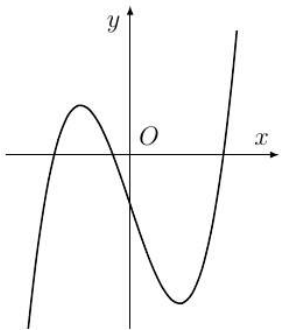
Lời giải

Chọn B

Từ BBT ta thấy: đây là BBT của một hàm số bậc ba, có hệ số của x^3 là $a>0$.

Do đó, đáp án A, D, C sai.

Câu 29: Hàm số nào dưới đây có đồ thị như đường cong trong hình bên?



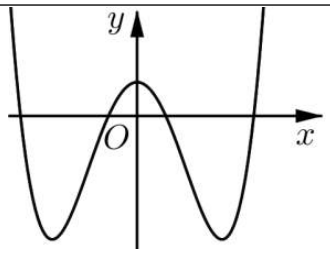
A. $y=x^4-2x^2-1$. **B.** $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. **C.** $y=x^3-3x-1$. **D.** $y=x^2+x-1$.

Lời giải

Chọn C

Đường cong trong hình vẽ là đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ với $a>0$ nên đồ thị đã cho là đồ thị của hàm số $y=x^3-3x-1$.

Câu 30: Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên dưới



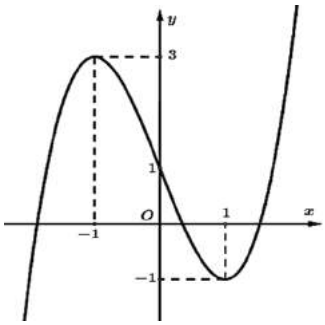
A. $y=-x^4+2x^2-1$. **B.** $y=-x^4+x^2+1$. **C.** $y=2x^4-4x^2+1$. **D.** $y=x^4+x^2+1$.

Lời giải

Chọn C

Nhìn vào hình vẽ ta thấy đồ thị hàm số có dạng như đường cong là $y=2x^4-4x^2+1$.

Câu 31: Đồ thị sau đây là của hàm số nào?



A. $y=x^3-3x+1$. **B.** $y=x^3-3x-1$. **C.** $y=-x^3-3x-1$. **D.** $y=-x^3+3x+1$.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số trên là đồ thị hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d\ \ (a\neq 0)$.

Nhìn vào nhánh phải của đồ thị ta thấy đồ thị có hướng đi lên suy ra $a>0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ $y=1$

Vậy hàm số thỏa đề là $y=x^3-3x+1$.

Câu 32: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+1}$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	$+$	$+$	
y	2 ↗	$+\infty$	$-\infty$ ↗ 2

Xét các mệnh đề

(1) $c=1$.

(2) $a=2$.

(3) Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$.

(4) Nếu $y'=\dfrac{1}{(x+1)^2}$ thì $b=1$.

Số mệnh đề đúng trong các mệnh đề trên là

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

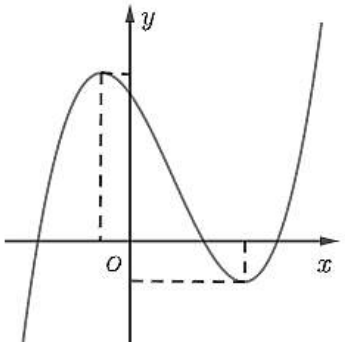
Ta có $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{ax+b}{cx+1}=+\infty \Rightarrow x=\dfrac{-1}{c}=-1\Rightarrow c=1$ suy ra (1) đúng

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{ax+b}{cx+1}=\dfrac{a}{c}=2\Rightarrow a=2c=2$ suy ra (2) đúng

Theo bảng biến thiên thì trên khoảng $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$ ta thấy $y'>0$ nên (3) đúng.

$y'=\dfrac{a-bc}{(cx+1)^2}=\dfrac{2-b}{(x+1)^2}=1\Rightarrow b=1$ suy ra (4) đúng

Câu 33: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ \ (a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a>0,b<0,c<0,d>0$. **B.** $a>0,b>0,c>0,d>0$.

C. $a>0,b<0,c>0,d<0$. **D.** $a>0,b>0,c<0,d>0$.

Lời giải

Chọn A

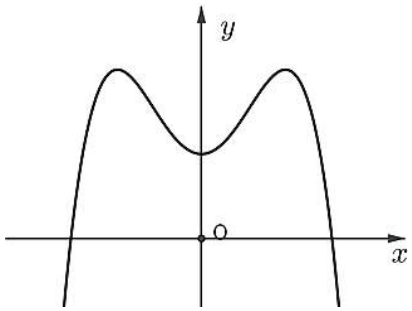
Ta có $y'=3ax^2+2bx+c$ theo hình vẽ:

Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0,d)$ nằm phía trên trục hoành nên $d>0$;

Hàm số có hai cực trị trái dấu nên $ac<0$ mà $a>0$, do đó $c<0$.

Điểm uốn của đồ thị có hoành độ dương nên $\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{2b}{6a}>0\Leftrightarrow ab<0$. Do $a>0$ nên $b<0$

Câu 34: Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình bên.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a>0;b<0;c<0$. **B.** $a<0;b>0;c<0$. **C.** $a<0;b<0;c<0$. **D.** $a<0;b>0;c>0$.

Lời giải

Chọn B

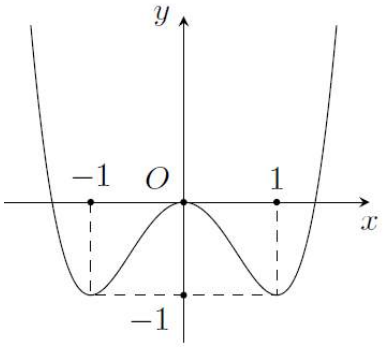
Dựa vào đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c\ \ (a\neq 0)$ ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=-\infty\Rightarrow a<0$.

Đồ thị hàm số có 3 cực trị $\Rightarrow y'=4ax^3+2bx=2x\left(2ax^2+b\right)=0$ có 3 nghiệm phân biệt nên $ab<0\Rightarrow b>0$.

Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm có tung độ dương nên $c>0$.

Vậy $a<0;b>0;c<0$.

Câu 35: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



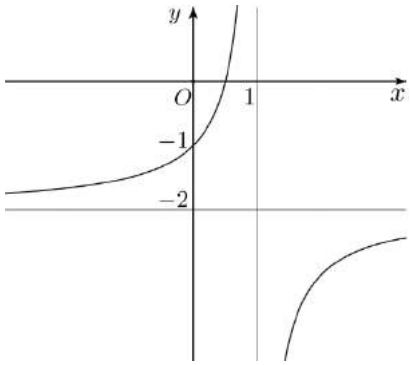
A. $y=x^4-2x^2$. **B.** $y=-x^4+2x^2$. **C.** $y=x^4+2x^2$. **D.** $y=x^4-3x^2+1$.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị hàm số, ta thấy đây là đồ thị hàm số bậc 4 trùng phương $y=ax^4+bx^2+c$ có hệ số $a>0$ và đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị nên $ab<0$, đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ nên $c=0$.

Câu 36: Hàm số nào trong các hàm số sau có đồ thị như hình bên dưới



A. $y=\dfrac{1-2x}{1+x}$. **B.** $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x-1}{1-2x}$. **D.** $y=\dfrac{2x-1}{1-x}$.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị ta có:

Đường tiệm cận đứng của đồ thị là $x=1$ nên loại phương án $y=\dfrac{1-2x}{1+x}$ và $y=\dfrac{x-1}{1-2x}$.

Đường tiệm cận ngang của đồ thị là $y=-2$ nên loại phương án $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$.

Do đó hàm số $y=\dfrac{2x-1}{1-x}$ thoả mãn.

Câu 37: Cho bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	2	↗	3	↘	$+\infty$

Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như hình trên?

A. $y=x^4-2x^2+2$. **B.** $y=x^4-2x^2+1$. **C.** $y=-x^4+2x^2+1$. **D.** $y=-x^4+2x^2+2$.

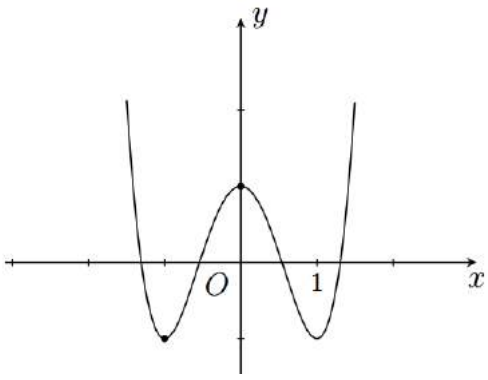
Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên, đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(0;2)$ nên loại B, **C.**

Khi $x\to-\infty\Rightarrow y\to-\infty$ nên hệ số $a<0$. Chọn **D.**

Câu 38: Hàm số nào có đồ thị như đường cong trong hình dưới đây?



A. $y=2x^4-4x^2-1$. **B.** $y=2x^4-4x^2+1$. **C.** $y=-x^4+4x^2+1$. **D.** $y=2x^4+4x^2+1$.

Lời giải

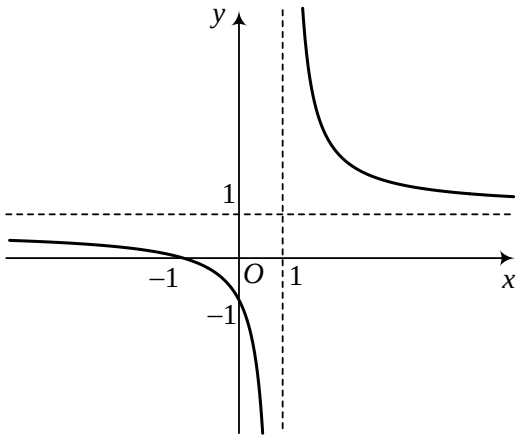
Chọn B

Gọi hàm số cần tìm có dạng $y=ax^4+bx^2+c\ (a\neq0)$.

Đồ thị cắt trục Oy tại điểm $(0;1)$, suy ra $c=1$.

Phương trình $2x^4-4x^2+1=0$ có 4 nghiệm $x_1\approx1.31, x_2\approx0.54, x_3\approx-0.54, x_4\approx-1.31$.

Câu 39: Hình bên dưới là đồ thị của hàm số nào sau đây?



A. $y=\dfrac{x+1}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{x+2}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{x+2}{x-1}$.

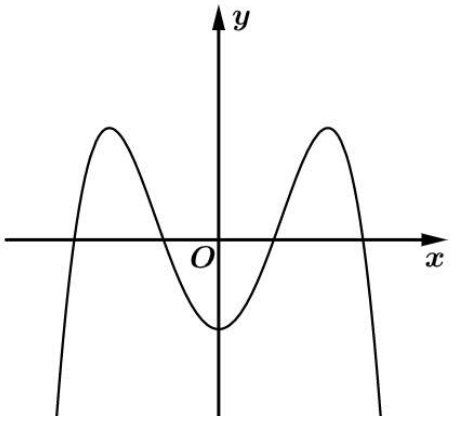
Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=1$ và đi qua các điểm $(-1;0)$, $(0;-1)$

$\Rightarrow$ chọn C.

Câu 40: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



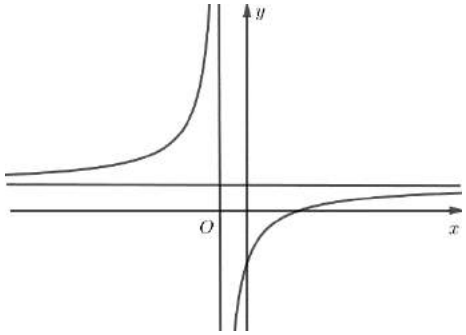
A. $y=-x^4+3x^2-1$. **B.** $y=x^4-3x^2-1$. **C.** $y=x^3-3x^2-1$. **D.** $y=-x^3+3x^2-1$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị ta thấy đây là đồ thị của hàm số $y=ax^4+bx^2+c\ (a<0)$

Câu 41: Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$



Mệnh đề nào say đây đúng

A. $ad<0$ và $ab<0$. **B.** $bd<0$ và $ab>0$.

C. $ad>0$ và $ab<0$. **D.** $ad>0$ và $bd>0$.

Lời giải

Chọn C

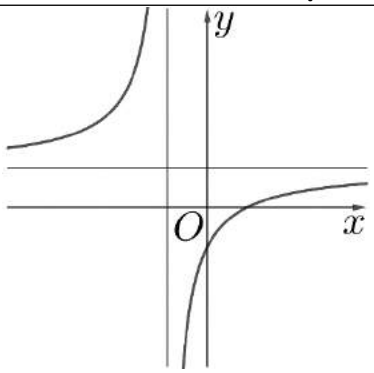
Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $\dfrac{b}{d}<0\Rightarrow b,d$ trái dấu.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}<0\Rightarrow c,d$ cùng dấu.

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{c}>0\Rightarrow a,c$ cùng dấu.

Suy ra b trái dấu với $a,c,d\Rightarrow ad>0$ và $ab<0$.

Câu 42: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx-2}\ (a,b,c\in\mathbb{R})$ có đồ thị như sau:



Trong các số a, b và c có bao nhiêu số dương?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

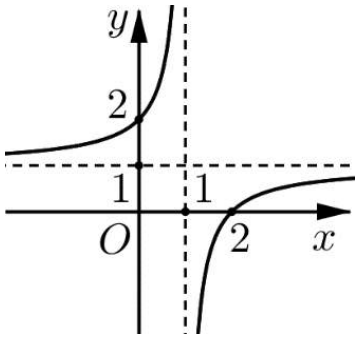
Chọn B

Đồ thị hàm số có: Tiệm cận đứng: $x=\frac{2}{c}$, tiệm cận ngang: $y=\frac{a}{c}$, giao điểm với Oy: $\left(0;\frac{-b}{2}\right)$.

Từ đồ thị hàm số ta có: $\begin{cases}\frac{2}{c}<0\\ \frac{a}{c}>0\\ \frac{-b}{2}<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c<0\\ a<0\\ b>0\end{cases}$.

Vậy trong các số a, b và c có 1 số dương.

Câu 43: Đường cong ở hình dưới đây là đồ thị của hàm số $y=\frac{x+a}{bx+c}$, $(a,b,c\in\mathbb{R})$. Trong các số a, b và c có bao nhiêu số dương?



A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị, ta có các nhận xét sau:

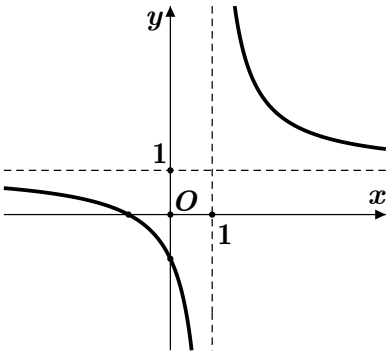
ĐTHS có TCN: $y=\frac{1}{b}=1\Leftrightarrow b=1$.

ĐTHS có TCĐ: $x=\frac{-c}{b}=1\Leftrightarrow c=-b\Rightarrow c=-1$.

ĐTHS đi qua điểm $(0;2)$, nên $\frac{a}{c}=2\Leftrightarrow a=-2$.

Vậy trong các số a, b và c có 1 số dương.

Câu 44: Hàm số nào dưới đây có đồ thị dạng như đường cong trong hình vẽ bên dưới?



A. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x-1}{x+1}$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số có phương trình tiệm cận đứng là $x=1$, tiệm cận ngang $y=1$. Chỉ có hàm số ở **Chọn A** là thỏa mãn.

Câu 45: Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{ax+1}{bx+c}$ $\left(a,b,c\in\mathbb{R}\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	1

Trong các số a,b,c có bao nhiêu số dương?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Từ BBT suy ra

Với $x=0\Rightarrow f\left(x\right)=\dfrac{1}{c}>0\Rightarrow c>0.$

Với $f\left(x\right)=0\Rightarrow x=-\dfrac{1}{a}>0\Rightarrow a<0.$

Tiệm cận đứng $x=-\dfrac{c}{b}=2\Rightarrow c=-2b\Rightarrow b<0.$

Vậy trong các số a,b,c có duy nhất một số dương.

Câu 46: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$		$-$	
y	2	$\searrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\searrow$	2

Hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm số nào sau đây?

A. $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{2-x}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{2+x}{x-1}$.

Lời giải

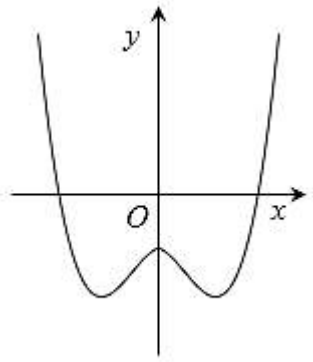
Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số, ta suy ra:

Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là $x=1$ và một tiệm cận ngang là $y=2$. Loại C,D

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó, hàm số ở **Chọn B** thỏa yêu cầu.

Câu 47: Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$, $(a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a<0$, $b>0$, $c<0$. **B.** $a>0$, $b<0$, $c<0$.

C. $a>0$, $b>0$, $c<0$. **D.** $a>0$, $b<0$, $c>0$.

Lời giải

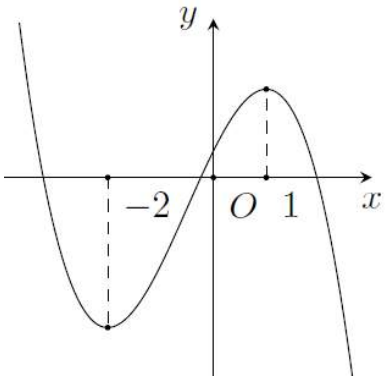
Chọn B

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty \Rightarrow a>0$.

Vì đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $c<0$.

Lại có hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có ba điểm cực trị do đó $ab<0$ Suy ra $b<0$.

Câu 48: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Chọn khẳng định đúng?



A. $ab>0, bc<0, cd<0$. **B.** $ab>0, bc<0, cd>0$.

C. $ab>0, bc>0, cd>0$. **D.** $ab<0, bc<0, cd>0$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị, ta có các nhận xét.

Dựa vào dáng điệu đồ thị, ta suy ra $a<0$.

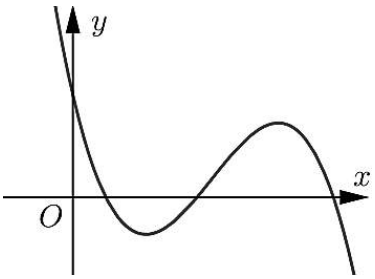
Đồ thị cắt trục tung lại điểm có tung độ dương suy ra $d>0$.

Hàm số có các điểm cực trị $x=1$ và $x=-2$ nên phương trình $y'=3ax^2+2bx+c=0$ có hai

nghiệm là $x=1$ và $x=-2$. Ta có $\frac{-2b}{3a}=-1$ và $\frac{c}{3a}=-2$. Do đó $b<0$ và $c>0$.

Như vậy $ab>0$, $bc<0$ và $cd>0$.

Câu 49: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $a<0,b>0,c>0,d>0$.
B. $a<0,b<0,c<0,d>0$.
C. $a>0,b>0,c<0,d>0$.
D. $a<0,b>0,c<0,d>0$.

Lời giải

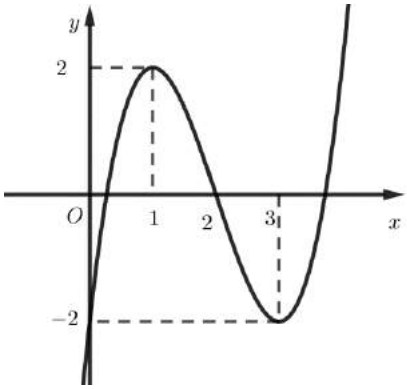
Chọn D

Ta có $a<0$ và đồ thị cắt Oy tại điểm có tung độ dương nên $d>0$.

Mặt khác: $y'=3ax^2+2bx+c; y''=6ax+2b$ và từ đồ thị ta thấy đồ thị hàm số có hai điểm cực trị có hoành độ dương và điểm uốn có hoành độ dương.

Khi đó $\begin{cases} a.c>0 \\ -\dfrac{b}{3a}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b>0 \\ c<0 \end{cases}$ do $a<0$.

Câu 50: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ.

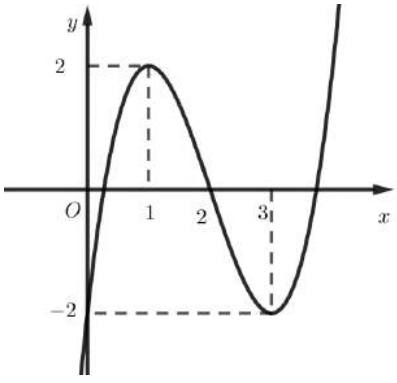


Số lớn nhất trong các số a, b, c, d là:

A. c.
B. a.
C. b.
D. d.

Lời giải

Chọn A



Đạo hàm $y'=3ax^2+2bx+c$

Đồ thị ham số có hai điểm cực trị là $M\left(1;2\right)$ và $N\left(3;-2\right)$ nên:

$$\begin{cases} a.1^3+b.1^2+c.1+d=2 \\ a.3^3+b.3^2+c.3+d=-2 \\ 3a.1^2+2b.1+c=0 \\ 3a.3^2+2b.3+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c+d=2 \\ 27a+9b+3c+d=-2 \\ 3a+2b+c=0 \\ 27a+6b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-6 \\ c=9 \\ d=-2 \end{cases}$$

Vậy $c=9$ là số lớn nhất.

CHƯƠNG 1

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

CHỦ ĐỀ 6 TƯƠNG GIAO ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số:

- **Phương pháp:** Cho 2 hàm số $y=f(x), y=g(x)$ có đồ thị lần lượt là (C) và (C').
  - Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (C'): $f(x)=g(x)$ (*)
  - Giải phương trình tìm x từ đó suy ra y và tọa độ giao điểm.
  - Số nghiệm của (*) là số giao điểm của (C) và (C').

2. Tương giao của đồ thị hàm bậc ba

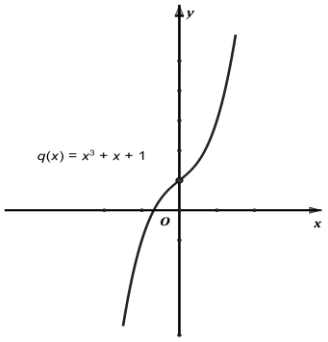
- **Phương pháp 1: Bảng biến thiên (phương pháp đồ thị)**
  - Lập phương trình hoành độ giao điểm dạng $F(x,m)=0$ (phương trình ẩn x tham số m)
  - Cô lập m đưa phương trình về dạng $m=f(x)$
  - Lập bảng biến thiên cho hàm số $y=f(x)$.
  - Dựa và giả thiết và bảng biến thiên từ đó suy ra m.

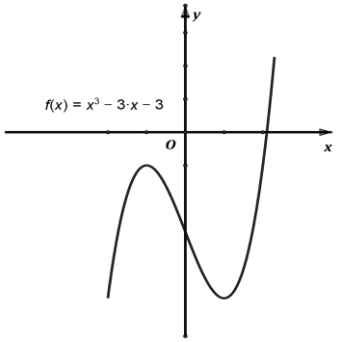
➢ **Dấu hiệu:** Sử dụng phương pháp bảng biến thiên khi m độc lập với x.

- **Phương pháp 2: Nhẩm nghiệm – tam thức bậc 2.**
  - Lập phương trình hoành độ giao điểm $F(x,m)=0$
  - Nhẩm nghiệm: (Khử tham số). Giả sử $x=x_0$ là 1 nghiệm của phương trình.
  - Phân tích: $F(x,m)=0 \Leftrightarrow (x-x_0).g(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_0 \\ g(x)=0 \end{array}\right.$ (là $g(x)=0$ là phương trình bậc hai ẩn x tham số m).
  - Dựa vào yêu cầu bài toán đi xử lý phương trình bậc hai $g(x)=0$.
- **Phương pháp 3: Cực trị**

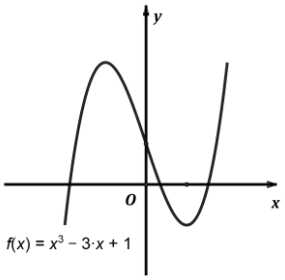
  Nhận dạng: Khi bài toán không cô lập được m và cũng không nhẩm được nghiệm.

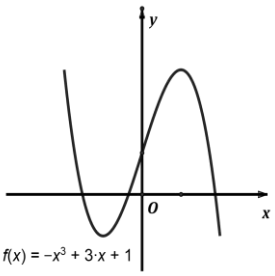
  Quy tắc:
  - Lập phương trình hoành độ giao điểm $F(x,m)=0$ (1). Xét hàm số $y=F(x,m)$
  - Để (1) có đúng 1 nghiệm thì đồ thị $y=F(x,m)$ cắt trục hoành tại đúng 1 điểm.
  - Hoặc hàm số luôn đơn điệu trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ hoặc vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta_{y'} \le 0$
  - Hoặc hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{cd}.y_{ct}>0$ (tham khảo hình vẽ)



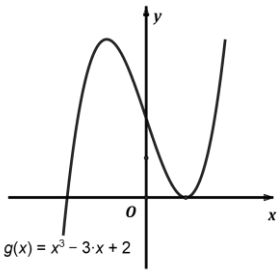


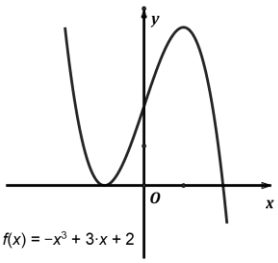
- Để (1) có đúng 3 nghiệm thì đồ thị $y = F(x,m)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{cd}.y_{ct} < 0$ (tham khảo hình vẽ).





- Để (1) có đúng 2 nghiệm thì đồ thị $y = F(x,m)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{cd}.y_{ct} = 0$ (tham khảo hình vẽ)





3. Tương giao của hàm số phân thức

- Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}(C)$ và đường thẳng $d: y = px + q$. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d): $\dfrac{ax+b}{cx+d} = px + q \Leftrightarrow F(x,m) = 0$ (phương trình bậc 2 ẩn x tham số m).
- Các câu hỏi thường gặp:
- Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{d}{c}$.
- Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt cùng thuộc nhánh phải của (C) $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và thỏa mãn : $-\dfrac{d}{c} < x_1 < x_2$.
- Tìm m để d cắt (C) tại . 2 . điểm phân biệt cùng thuộc nhánh trái của $(C) \Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và thỏa mãn $x_1 < x_2 < -\dfrac{d}{c}$.

- Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt thuộc hai nhánh của $(C) \Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và thỏa mãn $x_1 < -\dfrac{d}{c} < x_2$.
- Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A và B thỏa mãn điều kiện hình học cho trước:
  - ✓ Đoạn thẳng $AB = kS$
  - ✓ Tam giác ABC vuông.
  - ✓ Tam giác ABC có diện tích S_0

- **Quy tắc:**
  - Tìm điều kiện tồn tại A, B $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt.
  - Xác định tọa độ của A và B (chú ý Vi ét)
  - Dựa vào giả thiết xác lập phương trình ẩn m. Từ đó suy ra m.
- **Chú ý:** Công thức khoảng cách:
  - $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B): AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
  - $\begin{cases} M(x_0; y_0) \\ \Delta: Ax_0 + By_0 + C = 0 \end{cases} \Rightarrow d(M, \Delta) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

4. Tương giao của hàm số bậc bốn

- Nghiệm của phương trình bậc bốn trùng phương: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (1)
- **Nhẩm nghiệm:**
  - Nhẩm nghiệm: Giả sử $x = x_0$ là một nghiệm của phương trình.
  - Khi đó ta phân tích: $f(x,m) = (x^2 - x_0^2)g(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm x_0 \\ g(x) = 0 \end{array}\right.$
  - Dựa vào giả thiết xử lý phương trình bậc hai $g(x) = 0$
- **Ẩn phụ - tam thức bậc hai:**
  - Đặt $t = x^2, (t \ge 0)$. Phương trình: $at^2 + bt + c = 0$ (2).
  - Để (1) có đúng 1 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $\left[\begin{array}{l} t_1 < 0 = t_2 \\ t_1 = t_2 = 0 \end{array}\right.$
  - Để (1) có đúng 2 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $\left[\begin{array}{l} t_1 < 0 < t_2 \\ 0 < t_1 = t_2 \end{array}\right.$
  - Để (1) có đúng 3 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 = t_1 < t_2$
  - Để (1) có đúng 4 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 < t_1 < t_2$
- Bài toán: tìm m để $(C): y = ax^4 + bx^2 + c$ (1) cắt Ox tại bốn điểm có hoành độ lập thành một cấp số cộng.
  - Đặt $t = x^2, (t \ge 0)$. Phương trình: $at^2 + bt + c = 0$ (2).
  - Để (1) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt thì (2) phải có 2 nghiệm dương $t_1, t_2 (t_1 < t_2)$ thỏa mãn $t_2 = 9t_1$.
  - Kết hợp $t_2 = 9t_1$ vơi định lý vi – ét tìm được m.

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-x^2$ và đồ thị hàm số $y=-x^2+5x$ là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 2: Đồ thị hàm số $y=-x^3+3x^2+2x-1$ và đồ thị hàm số $y=3x^2-2x-1$ có tất cả bao nhiêu điểm chung?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^4+x^2-2$ với trục hoành.

A. 4. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 4: Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{1-x}$ với trục tung là

A. $(-3;0)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(0;-3)$. **D.** $(3;0)$.

Lời giải

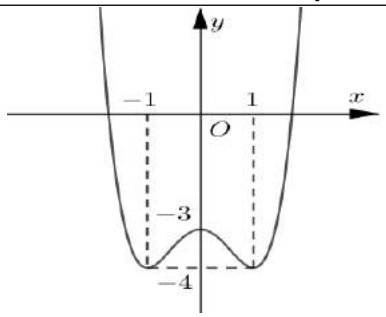
.....

.....

.....

.....

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số giao điểm của đồ thị hàm số trên và đường thẳng $y=-\dfrac{7}{2}$ là



A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 6: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ và trục hoành là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

✍ Lời giải

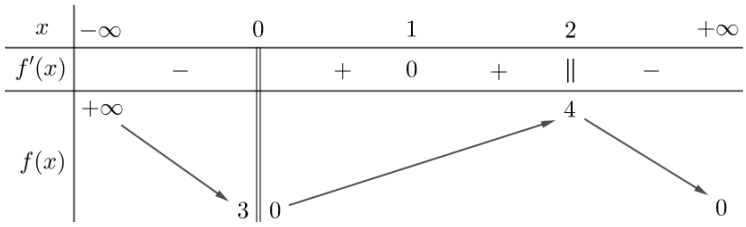
.....

.....

.....

.....

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $3f(x) - 4 = 0$ là



A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 8: Số điểm chung của hai đồ thị $(C): y = -x^4 + 2x^2 - 3$ và $(C'): y = x^3 - 3$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

✍ Lời giải

.....

.....

Câu 9: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ và đường thẳng $y = x + 2$ là

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

✍ Lời giải

……

……

……

……

Câu 10: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - x + 1$ và đường thẳng $y = 2x - 1$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

✍ Lời giải

……

……

……

……

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1: Nhận diện đồ thị hàm số

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

Câu 1: Đồ thị hàm số $y=x^3-6x^2+11x-6$ cắt trục hoành tại đúng bao nhiêu điểm phân biệt?

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 2: Đồ thị hàm số $y=x^3-3x+2$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. -1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** -2.

Câu 3: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-4x$ và trục hoành là

A. 2. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 4: Giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+5x-2$ với trục tung có toạ độ là

A. $\left(\frac{2}{3};0\right)$. **B.** $\left(0;\frac{2}{3}\right)$. **C.** $(1;0)$. **D.** $(0;-2)$.

Câu 5: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2$ và trục hoành là

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 6: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^4+3x^2$ và trục hoành là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 7: Đồ thị của hàm số $y=-x^4-3x^2+5$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 5. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 8: Đồ thị hàm số $y=x^3+x^2-2x-2$ cắt trục tung tại điểm nào sau đây?

A. $M(0;-1)$. **B.** $N(-1;0)$. **C.** $P(-2;0)$. **D.** $Q(0;-2)$.

Câu 9: Đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+3x-1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 3. **B.** 0. **C.** -1. **D.** 1.

Câu 10: Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\frac{x-2}{x+1}$ với trục hoành là

A. $(0;2)$. **B.** $(0;-2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(2;0)$.

Câu 11: Đồ thị hàm số $y=-x^3+2x^2-1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ

A. 3. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 0.

Câu 12: Đồ thị hàm số $y=x^3+1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng bao nhiêu?

A. 0. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 13: Đồ thị của hàm số $y=-x^4+x^2-2$ cắt trục Oy tại điểm có tọa độ là

A. $(0;-2)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(0;-1)$. **D.** $(-2;0)$.

Câu 14: Đồ thị hàm số $y=x^4-5x^2+4$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 2. **B.** -1. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 15: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-2x^3+6x$ với trục hoành là:

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 16: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-\frac{x^4}{2}+x^2+\frac{3}{2}$ và trục hoành là

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 17: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+3$ và đường thẳng $y=x$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 4.

Câu 18: Đồ thị hàm số $y=\frac{2x+1}{2x-1}$ có tọa độ giao điểm với trục tung là

A. $\left(\frac{1}{2};0\right)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $\left(-\frac{1}{2};0\right)$. **D.** $(0;-1)$.

Câu 19: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+1$ với trục Ox là

A. 1. **B. 3.** **C. 2.** **D. 0.**

Câu 20: Số giao điểm của hai đồ thị $y=x^4+3x^2+2$ và $y=x^2+2$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 4.

Câu 21: Đồ thị hàm số $y=x^2-3x$ cắt đường thẳng $y=x-4$ tại bao nhiêu điểm?

A. 2 điểm. **B.** 1 điểm. **C.** 4 điểm. **D.** 0 điểm.

Câu 22: Biết đồ thị hai hàm số $y=x-1$ và $y=\frac{2x-1}{x+1}$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A,\ B$. Tọa độ trung điểm của $A,\ B$ là $I(a;b)$. Tính a^2+b^2.

A. $a^2+b^2=4$. **B.** $a^2+b^2=2$. **C.** $a^2+b^2=1$. **D.** $a^2+b^2=5$.

Câu 23: Đồ thị hàm số $y=x^2+2x-3$ và đồ thị hàm số $y=x-3$ có bao nhiêu điểm chung?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 24: Đồ thị hàm số $y=3x^2+x-2$ và trục tung có bao nhiêu điểm chung?

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 25: Cho hàm số $y=\frac{3x-2}{x-2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=x+1$. Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm A và B. Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là

A. $M(2;3)$. **B.** $M(2;2)$. **C.** $M(4;6)$. **D.** $M(4;4)$.

Câu 26: Đồ thị hàm số nào sau đây không cắt trục hoành?

A. $y=x^5+5x+2$. **B.** $y=x^4-3x^2+3$. **C.** $y=\frac{x-1}{2-x}$. **D.** $y=x^3-3x+1$.

Câu 27: Đường thẳng $y=x-1$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{2x+1}{x-2}$ tại hai điểm A,B có độ dài

A. $AB=\sqrt{46}$. **B.** $AB=\sqrt{42}$. **C.** $AB=5\sqrt{2}$. **D.** $AB=2\sqrt{5}$.

Câu 28: Biết đường thẳng $y=x-2$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A và B có hoành độ $x_A,\ x_B$. Giá trị của biểu thức x_A+x_B bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 5.

Câu 29: Cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-4}{x+2}(C)$. Gọi $A(x_A;y_A),B(x_b;y_B)$ là tọa độ giao điểm của (C) và các trục tọa độ. Khi đó ta có $x_A+x_B+y_A+y_B$ bằng

A. 6. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 30: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^4-4x^2+1$ với trục hoành là

A. 4. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 31: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x^2-12}{2-x}$ và đồ thị hàm số $y=2x^3+4x^2$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 32: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+3$ và đường thẳng $y=x$ là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 4.

Câu 33: Cho hai hàm số $y=x^3-2x$ và $y=x^2-x-1$. Biết rằng đồ thị của hai hàm số trên cắt nhau tại A và tiếp xúc nhau tại B. Xác định tọa độ điểm A.

A. $A(-1;-1)$. **B.** $A(1;1)$. **C.** $A(1;-1)$. **D.** $A(-1;1)$.

Câu 34: Đồ thị hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tiếp xúc với trục hoành tại gốc tọa độ và cắt đường thẳng $x=1$ tại điểm có tung độ bằng 3 khi

A. $a=2;b=c=0$. **B.** $a=b=0;c=2$. **C.** $a=c=0;b=2$. **D.** $a=2;b=2;c=0$.

Câu 35: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+x+1$ có đồ thị là (C) và đường thẳng $(d):y=1-x$. Biết (d) cắt (C) tại ba điểm phân biệt có hoành độ là x_1,x_2,x_3. Tính $T=x_1+x_2+x_3$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

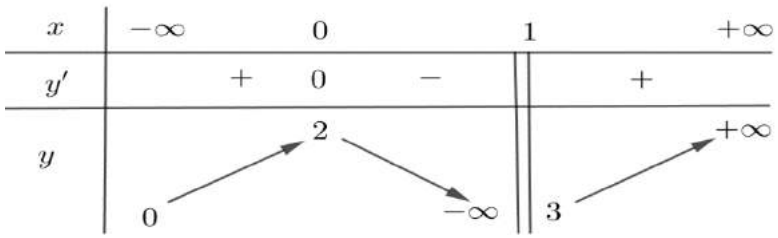
Câu 36: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-x-3}{x-1}$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm phân biệt?

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 37: Cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ là (C). Biết đường thẳng $d:y=x+2$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B có hoành độ lần lượt là x_1 và x_2. Giá trị của biểu thức x_1+x_2 bằng

A. 5. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 38: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới.



Số nghiệm của phương trình $f(x)=0$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 39: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$ cắt trục *Oy* tại điểm có tung độ bằng

A. 1. **B.** – 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 40: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+3x-1$ và đường thẳng $y=-1$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 41: Cho (C_1) là đồ thị của hàm số $y=2x^3-3x+1$ và (C_2) là đồ thị của hàm số $y=x^3+x+1$. Gọi n là số điểm chung phân biệt của (C_1) và (C_2). Chọn khẳng định đúng.

A. $n=0$. **B.** $n=1$. **C.** $n=2$. **D.** $n=3$.

Câu 42: Biết hai đồ thị hàm số $y=x^3+11$ và $y=x^2+11$ cắt nhau tại hai điểm A, B. Tính độ dài đoạn AB.

A. $AB=\sqrt{2}$. **B.** $AB=\sqrt{3}$. **C.** $AB=2$. **D.** $AB=\sqrt{5}$.

Câu 43: Tìm tích các hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^4-3x^2+4$ với trục hoành?

A. 4. **B.** -1. **C.** -4. **D.** 1.

Câu 44: Đồ thị $(C):y=\dfrac{x-2}{x+2}$ cắt đường thẳng $d:y=2x-1$ tại các điểm có tọa độ là

A. $(0;-1);(-3;-1)$. **B.** $(0;-1);(-1;-3)$. **C.** $(-1;-5);(0;-1)$. **D.** $(-1;-3)$.

Câu 45: Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $d:y=x-1$ và đường cong $(C):y=\dfrac{2x-1}{x+5}$. Hoành độ trung điểm I của đoạn thẳng MN bằng:

A. 2. **B.** 1. **C.** -1. **D.** -2.

Câu 46: Cho hàm số $y=f(x)=x^2+1$. Số nghiệm của phương trình $f(x+3)=1$ là

A. 0. **B.** -3. **C.** 2. **D.** 1.

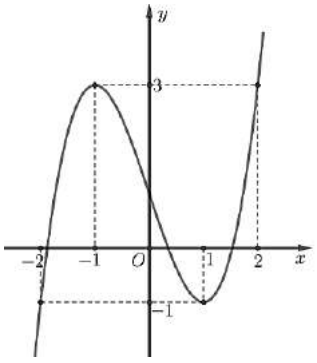
Câu 47: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^4+4x^2$ với trục hoành bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 48: Tọa độ tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+2}{2-x}$ là

A. $\left(2;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(2;-3)$. **D.** $(-3;2)$.

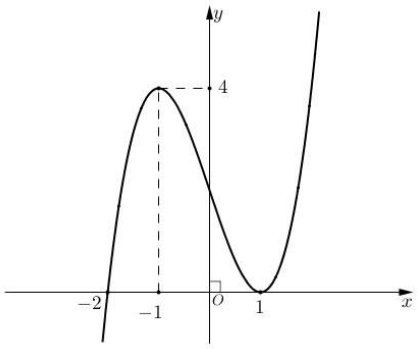
Câu 49: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(2-f(x))=0$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 7.

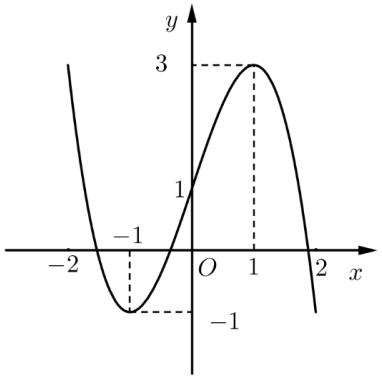
Câu 50: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f'\left(f\left(x\right)-2\right)=0$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

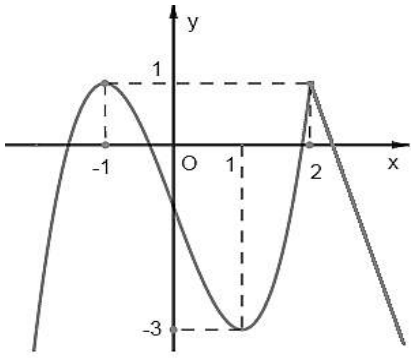
Câu 51: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Hỏi đồ thị hàm số $y=f\left(3x-2\right)$ cắt đường thẳng $y=2x-3$ tại nhiều nhất bao nhiêu điểm?

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 52: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=-\infty$ và có đồ thị như hình dưới đây



Với giả thiết, phương trình $f\left(1-\sqrt{x^3+x}\right)=a$ có nghiệm. Giả sử khi tham số a thay đổi, phương trình đã cho có nhiều nhất m nghiệm và có ít nhất n nghiệm. Giá trị của $m+n$ bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 53: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$ và có bảng biến thiên như hình sau.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$ $+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f\left(x^2\right)=1$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 54: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình $\left|f\left(2-3x\right)+2\right|=5$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 3.

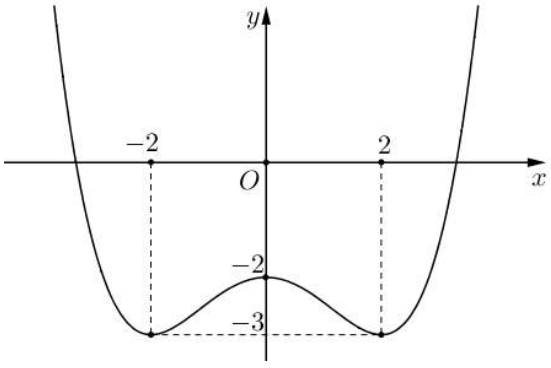
Câu 55: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-1		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $f'\left(5-3f\left(x\right)\right)=0$ là

A. 12. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

Câu 56: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f'\left(2f\left(x\right)+3\right)=0$ là

A. 7. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 9.

Dạng 2: Tương giao đồ thị hàm số không chứa tham số

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-x^2$ và đồ thị hàm số $y=-x^2+5x$ là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 2: Gọi A,B là hai giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ và đường thẳng $y=3x-2$. Khi đó trung điểm của đoạn thẳng có tung độ là.

A. $x=\dfrac{7}{6}$. **B.** $x=\dfrac{7}{3}$. **C.** $y=\dfrac{3}{2}$. **D.** $y=-5$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+3$ và đường thẳng $y=x$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3 **D.** 0.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 4: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+6x$ với trục hoành là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

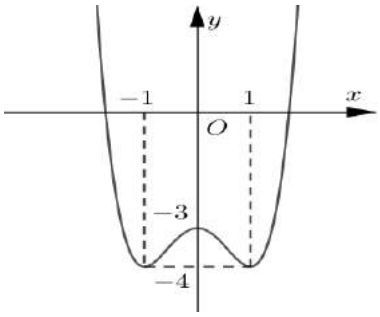
.....

.....

.....

.....

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số giao điểm của đồ thị hàm số trên và đường thẳng $y=-\dfrac{7}{2}$ là



A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

✍ Lời giải

……

……

……

……

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, với $a\neq 0$ có đồ thị tiếp xúc với trục hoành Ox tại điểm có hoành độ bằng 1 và cắt đường thẳng $y=2m-1$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là 0 và 4, với m là tham số thự **C.** Phương trình $f(x)=f(-3)$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

✍ Lời giải

……

……

……

……

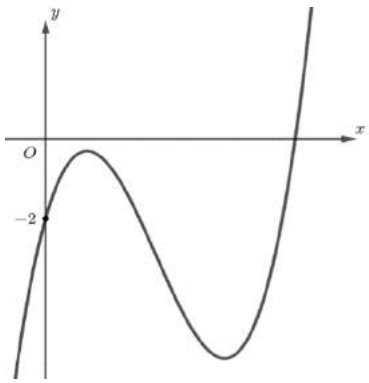
……

……

……

……

Câu 7: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ sau.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(3^x f\left(x\right)\right)+2=0$ là

A. 3. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 8: Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-2}{2x+1}$ cắt hai trục Ox và Oy tại A và B. Khi đó diện tích tam giác OAB (O là gốc tọa độ) bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

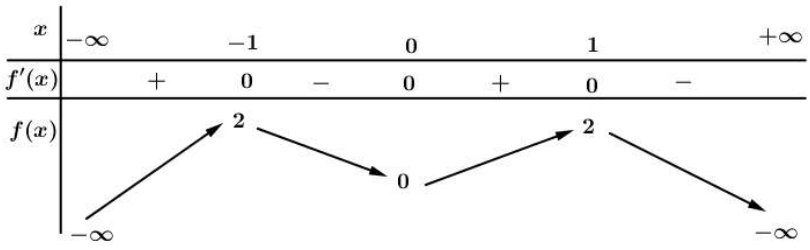
.....

.....

.....

.....

Câu 9: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:



Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\pi;\dfrac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình $f\left(\cos x\right)=1$ là

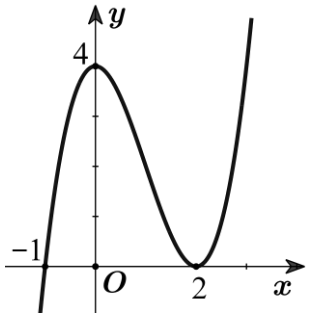
A. 6. **B.** 7. **C.** 4. **D.** 5.

✍ Lời giải

.....

.....

Câu 10: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $2f\left(x+1-\sqrt{6x+3}\right)=1$ có bao nhiêu nghiệm?



A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{2x-1}$ có tọa độ giao điểm với trục tung là

A. $\left(\dfrac{1}{2};0\right)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$. **D.** $(0;-1)$.

Câu 2: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+1$ với trục Ox là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 3: Số giao điểm của hai đồ thị $y=x^4+3x^2+2$ và $y=x^2+2$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 4.

Câu 4: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-5x$ và đường thẳng $y=x$ là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 5: Đồ thị của hàm số nào sau đây không cắt trục hoành?

A. $y=x^3+x^2$. **B.** $y=2x-3$. **C.** $y=-x^2+8x$. **D.** $y=\dfrac{2022}{x-12}$.

Câu 6: Đồ thị hàm số $y=x^3+2x+12$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 1. **B.** 12. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 7: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+6}{x-2}$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng

A. 0. **B.** -3. **C.** 3. **D.** -2.

Câu 8: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+6}{x-2}$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng

A. 0. **B.** -3. **C.** 3. **D.** -2.

Câu 9: Đồ thị của hàm số nào sau đây không cắt trục hoành?

A. $y=x^3+x^2$. **B.** $y=2x-3$. **C.** $y=-x^2+8x$. **D.** $y=\dfrac{2022}{x-12}$.

Câu 10: Đồ thị hàm số $y=x^3+2x+12$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 1. **B.** 12. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 11: Số điểm chung của hai đồ thị $(C): y=x^3-3x^2+3x-1$ và $(P): y=x^2-x-1$ là

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 12: Cho hàm số $y=\dfrac{3x-2}{x-2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=x+1$. Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm A và B. Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là

A. $M(2;3)$. **B.** $M(2;2)$. **C.** $M(4;6)$. **D.** $M(4;4)$.

Câu 13: Cho hàm số $y=\dfrac{3x-2}{x-2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=x+1$. Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm A và B. Tọa độ trung điểm M của đoạn AB là

A. $M(2;3)$. **B.** $M(2;2)$. **C.** $M(4;6)$. **D.** $M(4;4)$.

Câu 14: Đồ thị hàm số nào sau đây không cắt trục hoành?

A. $y=x^5+5x+2$. **B.** $y=x^4-3x^2+3$. **C.** $y=\dfrac{x-1}{2-x}$. **D.** $y=x^3-3x+1$.

Câu 15: Đường thẳng $y=x-1$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$ tại hai điểm A,B có độ dài

A. $AB=\sqrt{46}$. **B.** $AB=\sqrt{42}$. **C.** $AB=5\sqrt{2}$. **D.** $AB=2\sqrt{5}$.

Câu 16: Biết đường thẳng $y=x-2$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A và B có hoành độ x_A, x_B. Giá trị của biểu thức x_A+x_B bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 5.

Câu 17: Cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-4}{x+2}(C)$. Gọi $A(x_A;y_A),B(x_b;y_B)$ là tọa độ giao diểm của (C) và các trục tọa độ. Khi đó ta có $x_A+x_B+y_A+y_B$ bằng

A. 6. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 18: Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** -2. **D.** 2.

Câu 19: Đồ thị hàm số $y=x^3+2x-3$ cắt trục hoành tại điểm có tọa độ là

A. $(0;-3)$. **B.** $(0;-1)$. **C.** $(1;0)$. **D.** $(-1;0)$.

Câu 20: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+4x^2-11x-30$ với trục hoành là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 21: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^4-4x^2+1$ với trục hoành là

A. 4. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 22: Cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-4}{x+2}(C)$. Gọi $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ là tọa độ giao điểm của (C) với các trục tọa độ. Khi đó ta có $x_A+x_B+y_A+y_B$ bằng

A. 6. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 23: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+2}{x+1}$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** -2. **C.** 2. **D.** $-\dfrac{2}{3}$.

Câu 24: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x^2-12}{2-x}$ và đồ thị hàm số $y=2x^3+4x^2$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 25: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+x+1$ có đồ thị là (C) và đường thẳng $(d):y=1-x$. Biết (d) cắt (C) tại ba điểm phân biệt có hoành độ là x_1,x_2,x_3. Tính $T=x_1+x_2+x_3$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 26: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-x-3}{x-1}$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm phân biệt?

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 27: Cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ là (C). Biết đường thẳng $d: y=x+2$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B có hoành độ lần lượt là x_1 và x_2. Giá trị của biểu thức x_1+x_2 bằng

A. 5. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

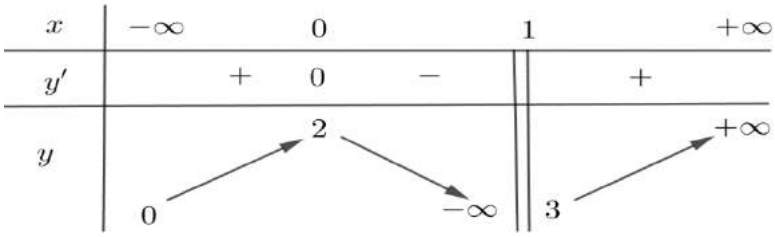
Câu 28: Đồ thị hàm số $y=15x^4-3x^2-2021$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm?

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 29: Đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau cắt trục tung tại điểm có tung độ dương?

A. $y=\left(x^2+3\right)\left(x-2\right)$. **B.** $y=\dfrac{3x-2}{-2x-5}$. **C.** $y=\dfrac{3x+2}{-2x-5}$. **D.** $y=2x^4+4x^2-1$.

Câu 30: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới.



Số nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=0$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 31: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$ cắt trục *Oy* tại điểm có tung độ bằng

A. 1. **B.** – 1. **C.** 2. **D.** 3.

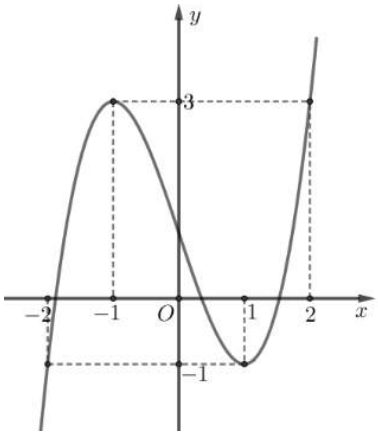
Câu 32: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+3x-1$ và đường thẳng $y=-1$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 33: Cho $\left(C_1\right)$ là đồ thị của hàm số $y=2x^3-3x+1$ và $\left(C_2\right)$ là đồ thị của hàm số $y=x^3+x+1$. Gọi n là số điểm chung phân biệt của $\left(C_1\right)$ và $\left(C_2\right)$. Chọn khẳng định đúng.

A. $n=0$. **B.** $n=1$. **C.** $n=2$. **D.** $n=3$.

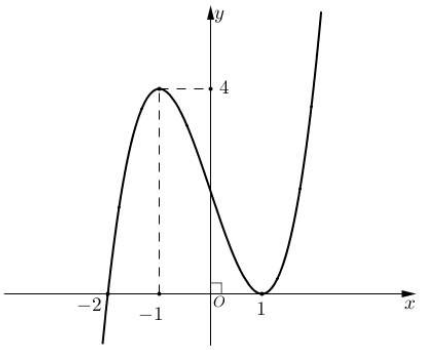
Câu 34: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(2-f(x)\right)=0$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 7.

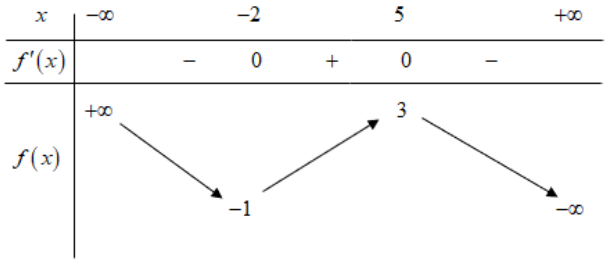
Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f'\left(f(x)-2\right)=0$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

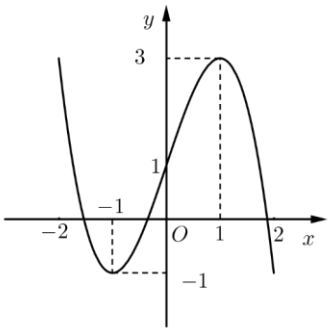
Câu 36: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Số nghiệm thực của phương trình $f'\left(f(x)\right)=0$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 4.

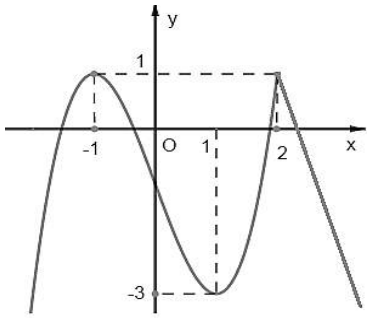
Câu 37: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Hỏi đồ thị hàm số $y=f(3x-2)$ cắt đường thẳng $y=2x-3$ tại nhiều nhất bao nhiêu điểm?

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 38: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ và có đồ thị như hình dưới đây



Với giả thiết, phương trình $f\left(1-\sqrt{x^3+x}\right)=a$ có nghiệm. Giả sử khi tham số a thay đổi, phương trình đã cho có nhiều nhất m nghiệm và có ít nhất n nghiệm. Giá trị của $m+n$ bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 39: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và có bảng biến thiên như hình sau.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$ $+\infty$		$+\infty$ $\searrow$		$\nearrow$ $+\infty$	
	-1				-2		

Số nghiệm của phương trình $f\left(x^2\right)=1$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

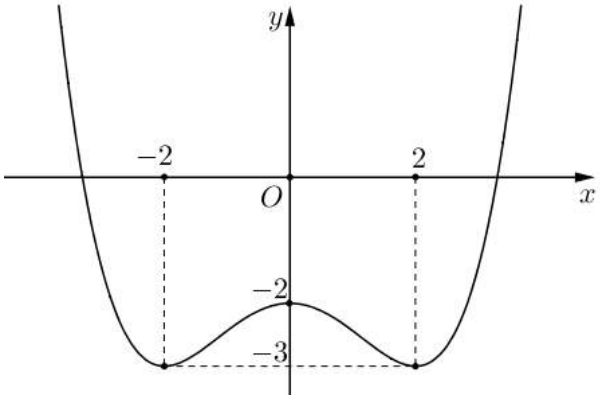
Câu 40: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-1		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $f'\left(5-3f\left(x\right)\right)=0$ là

A. 12. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

Câu 41: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f'\left(2f\left(x\right)+3\right)=0$ là

A. 7. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 9.

Dạng 3: Tương giao đồ thị hàm hợp không chứa tham số

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình $f(x+1)-2=0$ có bao nhiêu nghiệm thực x?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

.....

.....

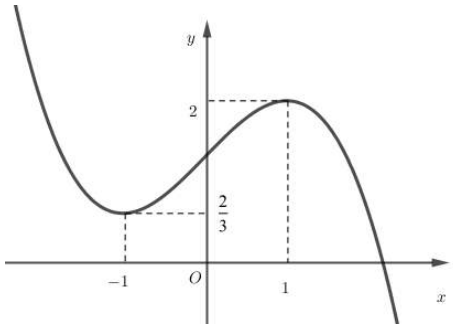
.....

.....

.....

.....

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Tìm số nghiệm của phương trình $f(x+2024)=1$.



A. 1 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 2

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	5	↘	$-\infty$

Số nghiệm của phương trình $3f(x)-7=0$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

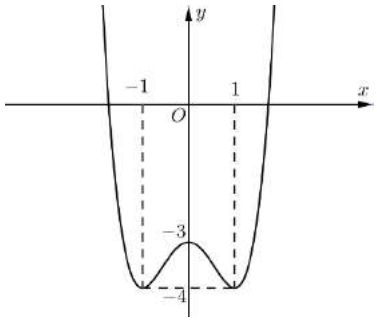
.....

.....

.....

.....

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm bậc 4 và có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $2f(x)+7=0$ có bao nhiêu nghiệm?



A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** Vô nghiệm.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f(3x-1)$ có bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	3	↘	1	↗	$+\infty$

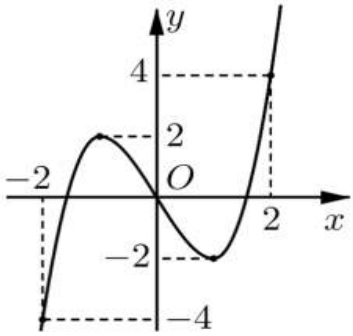
Tìm số nghiệm của phương trình $f(x^3-3x)=1$.

A. 7. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 3.

✍ Lời giải

……

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên dưới. Hỏi phương trình $|f(x)-1|=1$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt trên $[-2;2]$?



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

✍ Lời giải

……

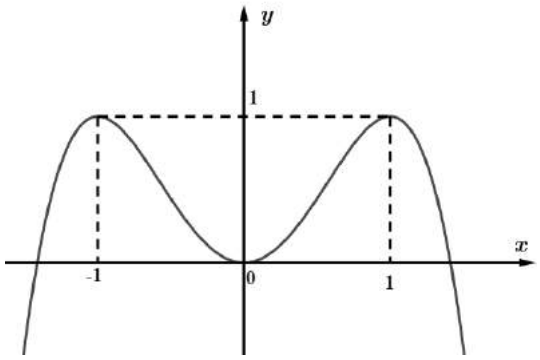
C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như bên. Số nghiệm của phương trình $f(x)-6=0$ là

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	5	↘	$\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

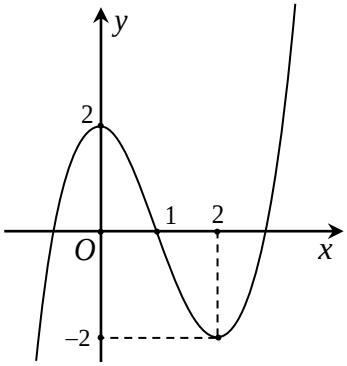
Câu 2: Cho hàm đa thức bậc 4: $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Tìm số nghiệm thực của phương trình $4f(x)+3=0$

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 0.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên dưới



Số nghiệm của phương trình $f(x)=-2$ bằng

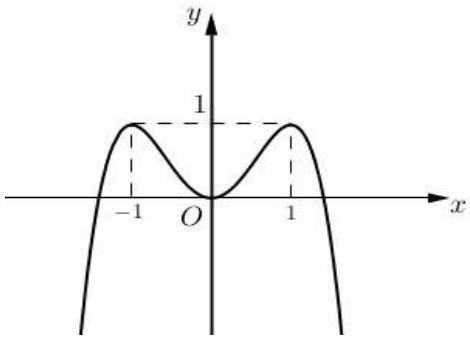
A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên tập số thực $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên. Số nghiệm của phương trình $2f(x)+3=0$ là

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	1	↘	$-\infty$

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

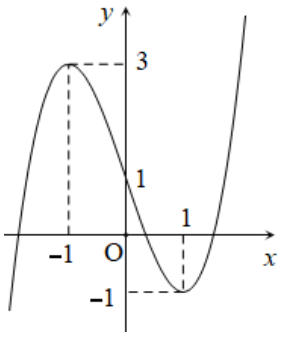
Câu 5: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c\,(a,b,c\in\mathbb{R})$. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình bên.



Số nghiệm của phương trình $f(x)=1$ là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 6: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ.



Số nghiệm thực của phương trình $2f(x)-7=0$ là:

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

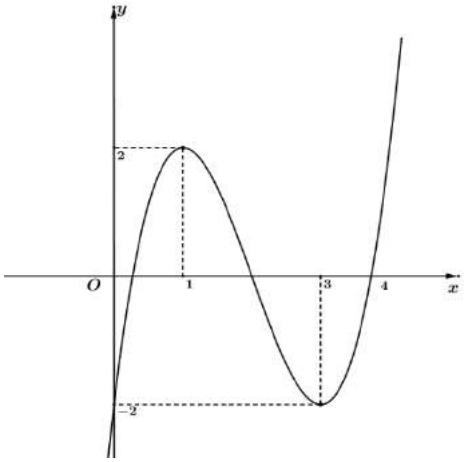
Câu 7: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	2	↘	1	↗	$+\infty$

Số nghiệm thực dương của phương trình $2f(x)-3=0$ là

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 8: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình sau:



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $2f\left(f\left(x\right)+2\right)+1=0$ là

A. 7. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 9: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	2	↗	3	↘	$-\infty$

Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f'\left(f\left(x\right)\right)=0$ là

A. 3. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 9.

Câu 10: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $5^{\left|f\left(x\right)\right|}-125=0$ là

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 11: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$			0		0		0		
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;2\pi\right]$ của phương trình $f\left(\cos x\right)=-2$ là

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

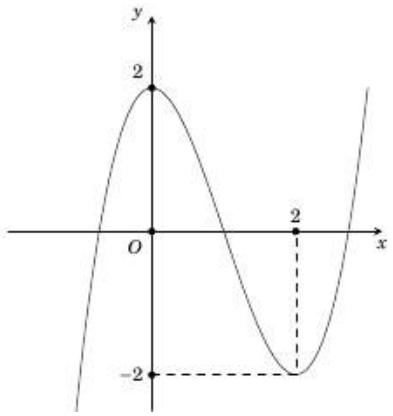
Câu 12: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	3	↘	1	↗	5	↘	3

Số nghiệm của phương trình $\dfrac{f^3(x)+26f(x)}{3f^2(x)+8}=3$ là:

A. 9. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 5.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ \ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $f^2(x)+2f(x)-3=0$ là



A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 5.

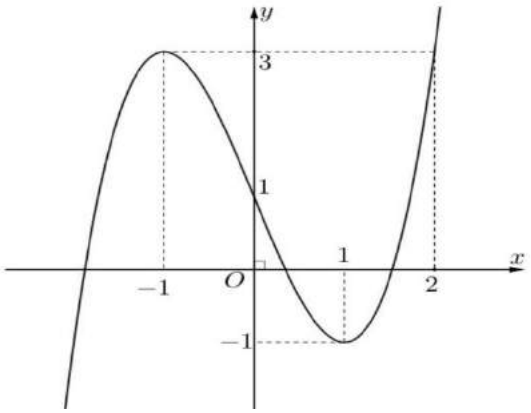
Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f\left(f\left(f(x)\right)\right)=0$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 8.

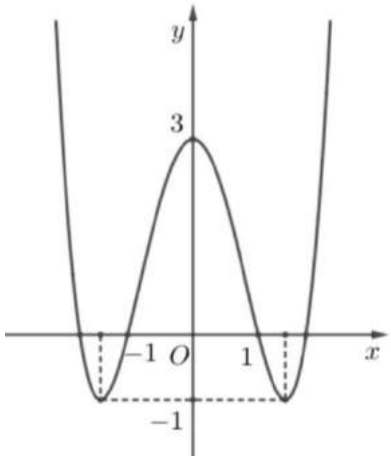
Câu 15: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(2f\left(x\right)+1\right)=3$ là

A. 9. **B.** 3. **C.** 6 **D.** 5.

Câu 16: Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(-2x^3+3x^2\right)=\frac{3}{2}$ là

A. 7. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 6.

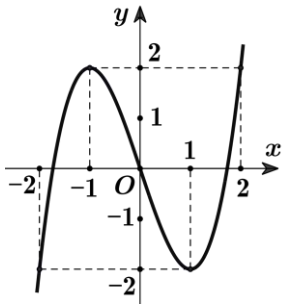
Câu 17: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f^2\left(x\right)-f\left(x\right)-2=0$ là

A. 4. **B.** 8. **C.** 3. **D.** 2.

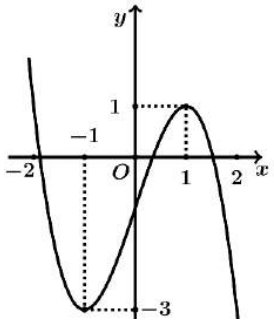
Câu 18: Cho hàm bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(1-f\left(x\right)\right)+1=0$ là

A. 8. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 9.

Câu 19: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(f\left(x-1\right)\right)=0$ là

A. 8. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 7.

Câu 20: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-16	↗	0	↘	-16	↗	$+\infty$

Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $2\left[f'\left(f\left(x\right)\right)\right]^3+4\left[f'\left(f\left(x\right)\right)\right]^2+3f'\left(f\left(x\right)\right)=0$ là:

A. 3. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 21: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f\left(x\right)$	$-\infty$	↗	3	↘	-5	↗	$+\infty$

Tìm số nghiệm phương trình $g'\left(x\right)=0$ với $g\left(x\right)=f\left(f\left(x\right)\right)$

A. 2. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 6.

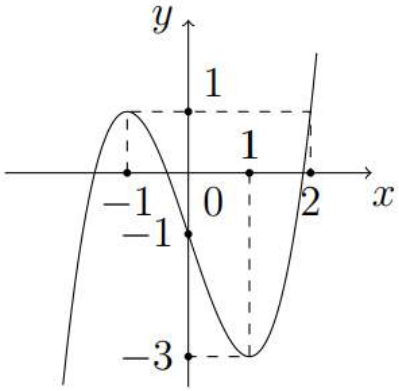
Câu 22: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f^2(x)-f(x)-2=0$ là

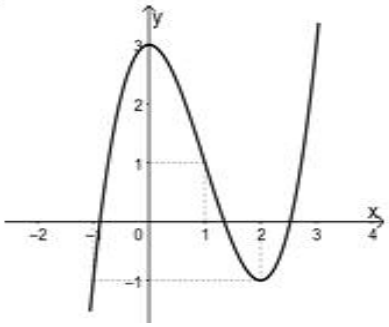
A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên. Phương trình $f\left(f(\cos x)-1\right)=0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0;2\pi]$?



A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};4\pi\right)$ của phương trình $f^2(\cos x)-5\left|f(\cos x)\right|+6=0$ là:

A. 13. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 12.

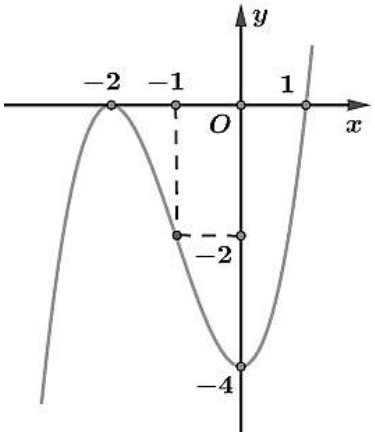
Câu 25: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2022;2022]$ để phương trình $\left(f^2(x)+x^2\right)^2-\left(m^2+2m+14\right)\left(f^2(x)+x^2\right)+4(m+1)^2+36=0$ có đúng 5 nghiệm thực phân biệt?

A. 4043. **B.** 4044. **C.** 1. **D.** 0.

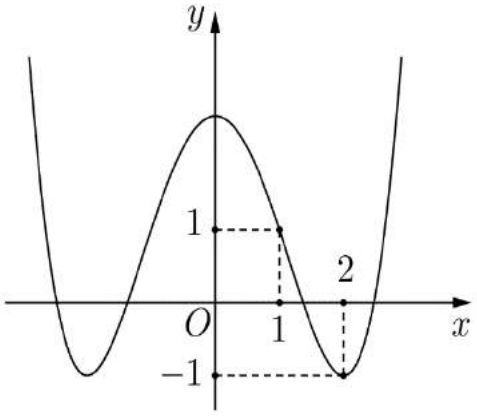
Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R có đồ thị như hình vẽ.



Tìm số nghiệm của phương trình $f(\sin x+\cos x)+3=0$ trên đoạn $[0;2\pi]$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 27: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$. Biết rằng hàm số $y=f'(1-x^2)$ có đồ thị đối xứng qua trục Oy, như hình vẽ.



Đặt $g(x)=f\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)+\dfrac{2}{x}$. Đồ thị hàm số $y=g'(x)$ cắt trục Ox tại bao nhiêu điểm?

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 7.

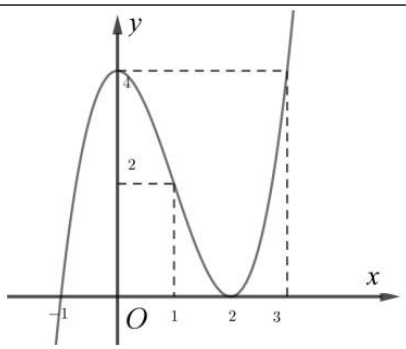
Câu 28: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	1	↗	$\frac{4}{3}$	↘	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right]$ của phương trình $3f(\cos 2x)-4=0$ là

A. 14. **B.** 3. **C.** 11. **D.** 16.

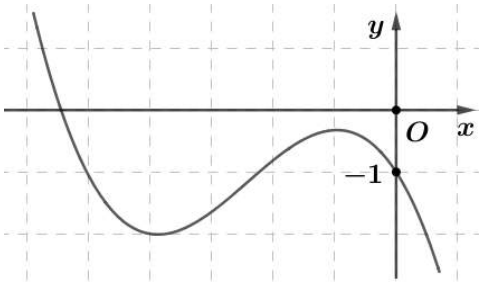
Câu 29: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+4$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số nghiệm thực của phương trình $\dfrac{f\left[f\left(x\right)\right]}{3f^2\left(x\right)-5f\left(x\right)+4}=1$ là

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 8.

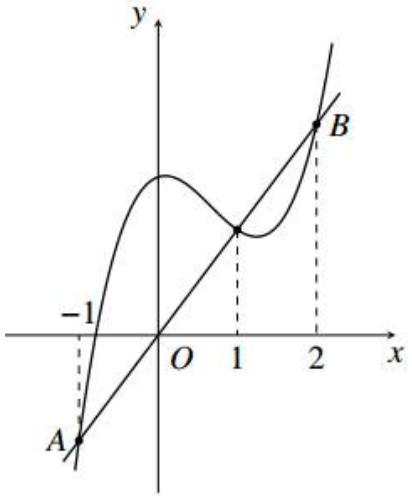
Câu 30: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^3f\left(x\right)\right)+1=0$ là

A. 6. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 8.

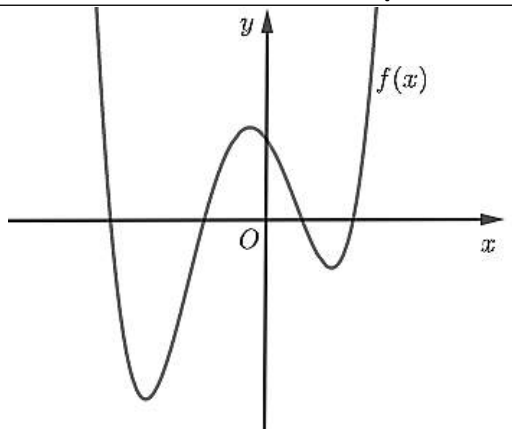
Câu 31: Cho đồ thị hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+\dfrac{1}{3}x+c$ và đường thẳng $y=g\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Biết $AB=5$, tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=g\left(x\right)+x^2+2$.

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 32: Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi $\left(C_1\right)$ và $\left(C_2\right)$ lần lượt là đồ thị của hàm số $y=f''\left(x\right).f\left(x\right)-\left[f'\left(x\right)\right]^2$ và $y=2021^x$. Số giao điểm của $\left(C_1\right)$ và $\left(C_2\right)$ là?



A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 4.

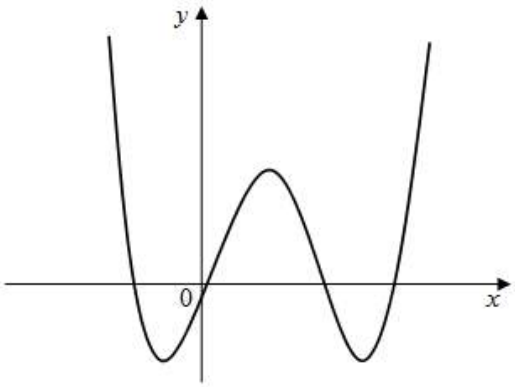
Câu 33: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Biết $f(2)+f(6)=2f(3)$. Tập nghiệm của phương trình $f\left(x^2+1\right)=f(3)$ có số phần tử bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 34: Biết rằng đồ thị hàm số bậc bốn $y=f(x)$ được cho như hình vẽ bên.



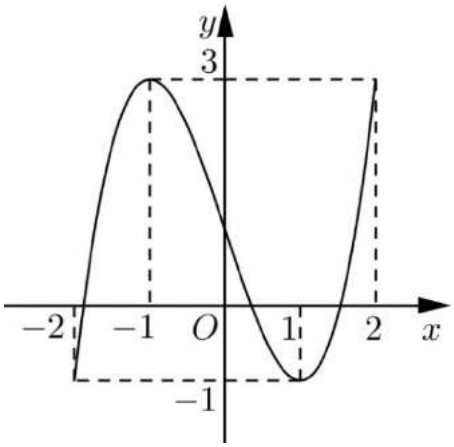
Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $\left[f'(x)\right]^2-f(x).f''(x)=0$ bằng

A. 4. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Dạng 4: Tương giao đồ thị hàm hợp có chứa tham số

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Đồ thị ở hình vẽ bên là của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $x^3 - 3x + 1 - m = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt



A. $-1 \le m < 3$. **B.** $-1 < m < 3$. **C.** $-2 < m < 2$. **D.** $-1 \le m \le 3$.

Lời giải

.....

.....

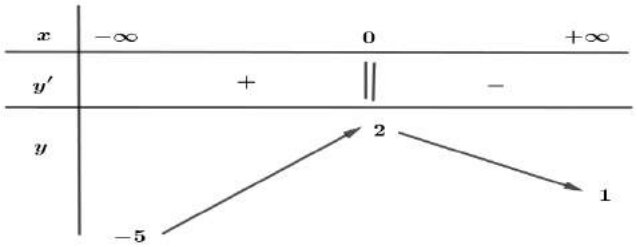
.....

.....

.....

.....

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(x) = m$ có nghiệm duy nhất?

A. 8. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

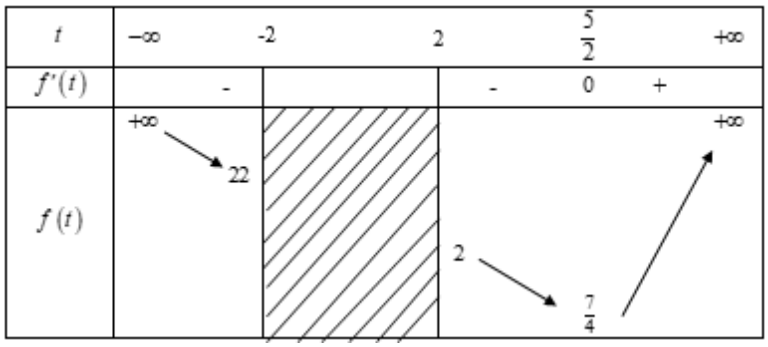
.....

.....

.....

.....

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên mỗi nửa khoảng $(-\infty;-2]$ và $[2;+\infty)$, có bảng biến thiên như hình bên. Tập hợp các giá trị của m để phương trình $f(x)=m$ có hai nghiệm phân biệt là:



A. $\left(\frac{7}{4};2\right]\cup[22;+\infty)$. **B.** $\left(\frac{7}{4};+\infty\right)$. **C.** $\left[\frac{7}{4};2\right]\cup[22;+\infty)$. **D.** $[22;+\infty)$.

✍ Lời giải

.....

.....

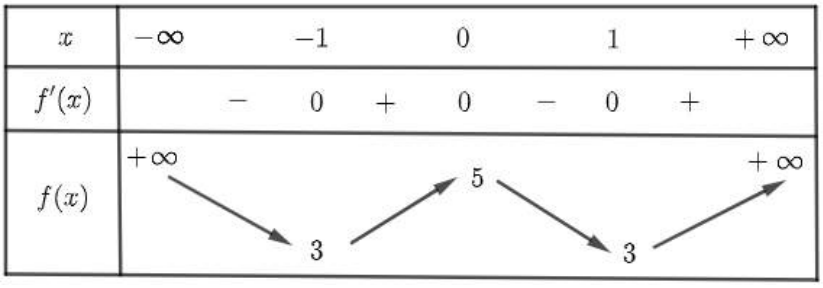
.....

.....

.....

.....

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:



Tìm m để phương trình $f(x)=2-3m$ có bốn nghiệm phân biệt

A. $m\le -1$. **B.** $m=\frac{1}{3}$.

C. $-1<m<-\frac{1}{3}$. **D.** $m<-1$ hoặc $m>-\frac{1}{3}$.

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(-\infty;+\infty)$, có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-4	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $2f(x)+m=0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt?

A. 7. **B.** 11. **C.** 8. **D.** 13.

✍ Lời giải

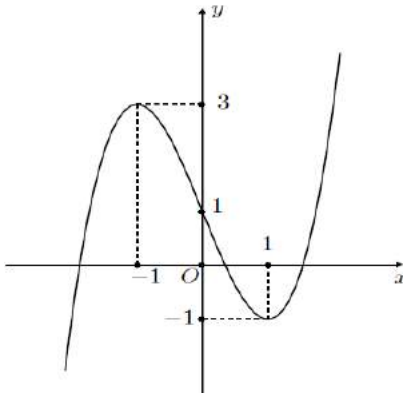
.....

.....

.....

.....

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như sau.



Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2f(x)+3m-3=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

A. $-1<m<\dfrac{5}{3}$ **B.** $-\dfrac{5}{3}<m<1$ **C.** $-\dfrac{5}{3}\le m\le 1$ **D.** $-1\le m\le\dfrac{5}{3}$

✍ Lời giải

.....

.....

.....

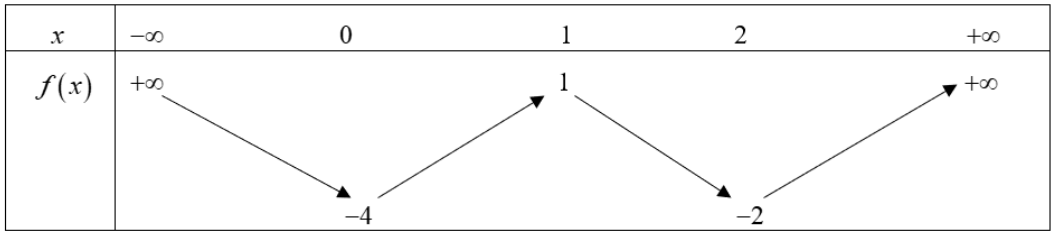
.....

Câu 7: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hai hàm số $y=(2x^2+1)\sqrt{x-1}$ và $y=\dfrac{11}{3x-4}-\dfrac{1}{2-x}+11+m$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-\infty;1]$. **D.** $(-\infty;2]$.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

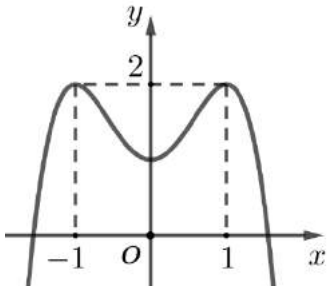
Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để phương trình $f^2(x)-mf(x)+m-1=0$ có đúng 3 nghiệm dương phân biệt

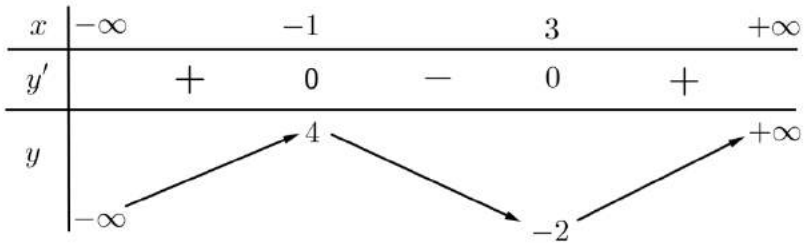
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)=-x^4+2x^2+1$ có đồ thị là đường cong như bên dưới. Số các giá trị nguyên dương của m để phương trình $9x^4-18x^2+3+m=0$ có 4 nghiệm phân biệt là



A. 5. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 4.

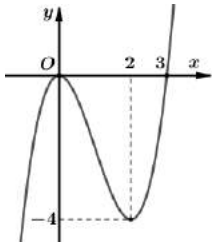
Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Tìm m để phương trình $3f(x)-m=0$ có 3 nghiệm thực phân biêt?

A. $-2<m<4$. **B.** $-6\le m\le 12$. **C.** $-2\le m\le 4$. **D.** $-6<m<12$.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(4\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)-1\right)=m$ có nghiệm.



A. 6. **B.** 4. **C.** 3 **D.** 5.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+1$, gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để

phương trình $\left[f\left(x\right)\right]^2-\left(2m+4\right)f\left(x\right)+m\left(m+4\right)=0$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt. Tổng các phần tử thuộc S bằng:

A. -17. **B.** -18. **C.** -21. **D.** -5.

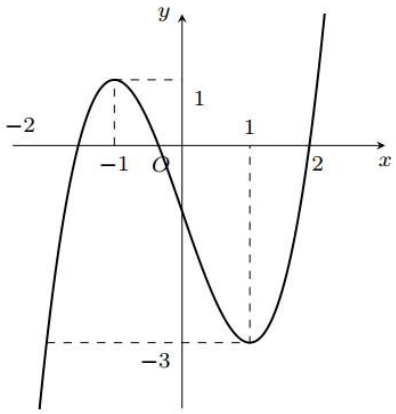
Câu 6: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $[1;3]$ và có bảng biến thiên như sau

x	1		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↗	4	↘	3

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(x+1)=\dfrac{m}{x^2-4x+5}$ có nghiệm trên khoảng $(1;2)$?

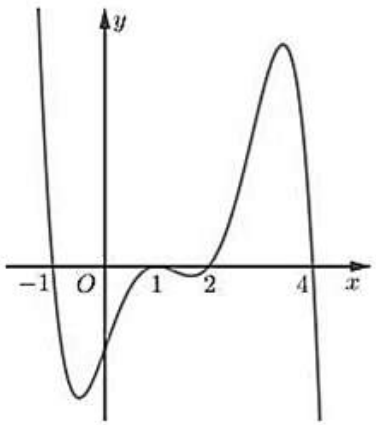
A. 4. **B.** 10. **C.** 0. **D.** 5.

Câu 7: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(1-2\sin x\right)=m$ có đúng hai nghiệm trên đoạn $\left[0;\pi\right]$?



A. -6. **B.** -3. **C.** -2. **D.** 0.

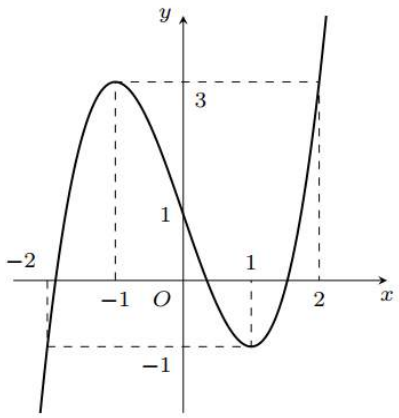
Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm liên tục trên R. Hàm số $y=f'(x)$ liên tục và có đạo hàm như hình vẽ



Số nghiệm nhiều nhất của phương trình $f(x^2)=2022m-2021$ (với m là tham số) là

A. 5. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 6.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình $f(\sin x)=f(m+1)$ có nghiệm?



A. $-1\le m\le 3$. **B.** $-2\le m\le 0$. **C.** $-3\le m\le 1$. **D.** $-2\le m\le 2$.

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	2	↘	-3	↗	$+\infty$

Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3f\left(x^2-4x\right)=m+5$ có ít nhất 5 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$ là

A. 12. **B.** 14. **C.** 13. **D.** 11.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↘	-2	↗	2	↘	-3	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $6f\left(x^2-4x\right)=m$ có ít nhất ba nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$ là

A. 30. **B.** 29. **C.** 25. **D.** 24.

Câu 12: Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên đoạn $[-2;9]$, biết $f(-1)=f(2)=f(9)=3$ và $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

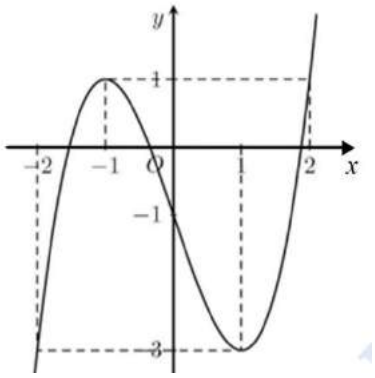
x	-2		0		6		9
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-4	↗	6	↘	-4	↗	3

Tìm m để phương trình $f(x)=f(m)$ có ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-2;9]$.

A. $m\in(-2;9]\setminus((-1;2)\cup\{6\})$.. **B.** $m\in[-2;9]\setminus((-1;2)\cup\{6\})$.

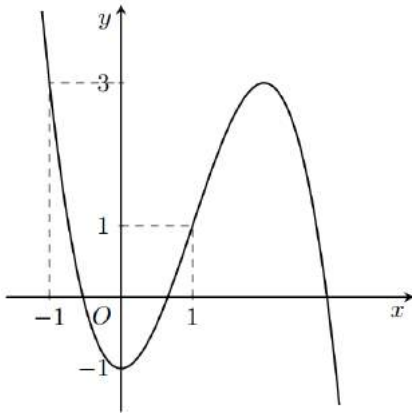
C. $m\in(-2;9]\setminus\{6\}$. **D.** $m\in[-2;9]\setminus\{-2;6\}$.

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(f(x)+2m\right)+1=f(x)+2m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt trên $[-1;1]$ là



A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x)+(m-2019)f(\cos x)+m-2020=0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0;2\pi]$ là



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

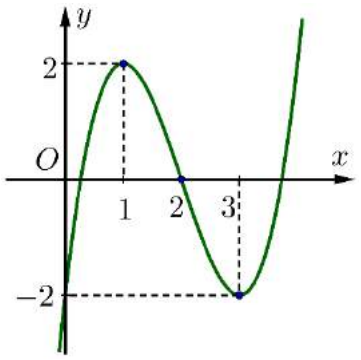
Câu 15: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	-2	↗	5	↘	$-\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $f\left(\sqrt{3}\sin x-\cos x\right)=2m-1$ có hai nghiệm phân biệt trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

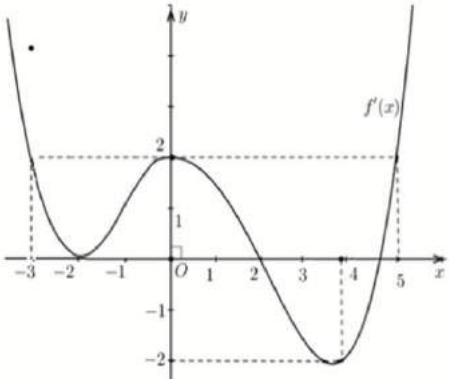
Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ sau:



Phương trình $f\left(x^4-2m^2x^2+3\right)=x$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm thực?

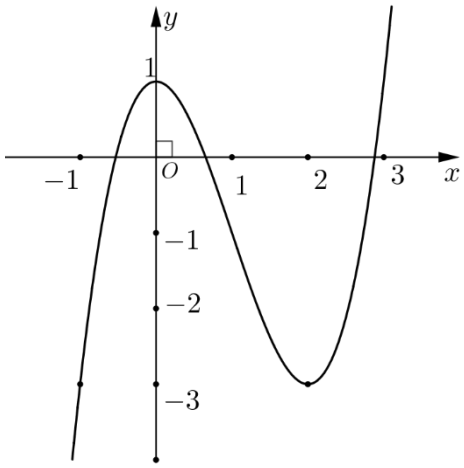
A. 9. **B.** 12. **C.** 11. **D.** 10.

Câu 17: Cho hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng $f(-3)=2f(5)=4$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\frac{1}{2}f(x)-m\right)=2x+2m$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.



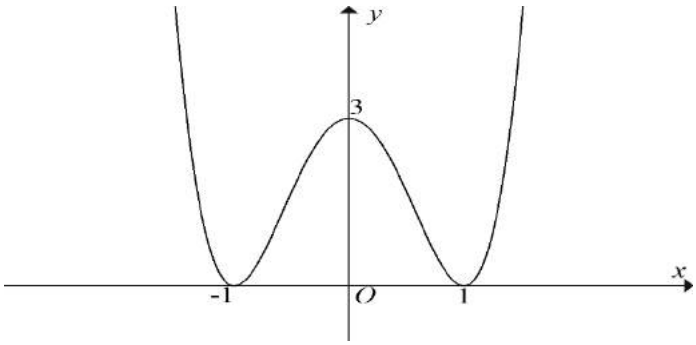
A. 8. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 7.

Câu 18: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(x^3-3x^2+m\right)+3=0$ có nghiệm thuộc đoạn $[-1;2]$.



A. 7. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 5.

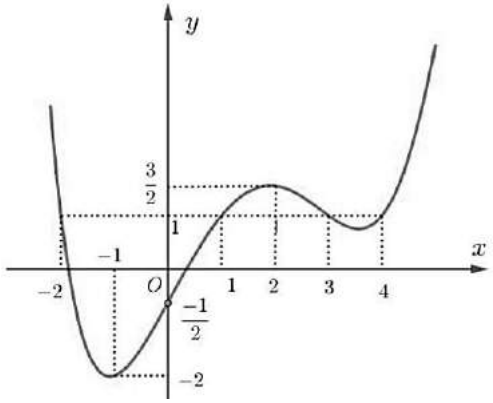
Câu 19: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2021;2021]$ để phương trình $\left(f^2(x)+x^2\right)^2-\left(m^2+2m+14\right)\left(f^2(x)+x^2\right)+4(m+1)^2+36=0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt.

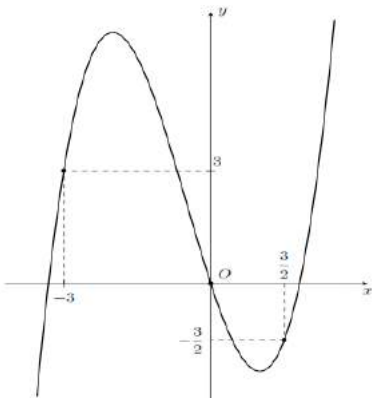
A. 2022. **B.** 4043. **C.** 4042. **D.** 2021.

Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2f\left(\sqrt{9-x^2}\right)-m+2022=0$ có nghiệm?



A. 7. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 4.

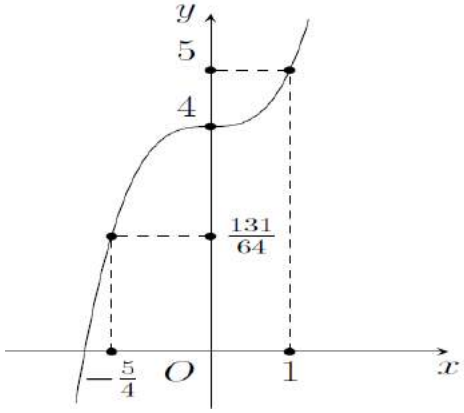
Câu 21: Cho hàm $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn. Biết rằng $f(0)=0$, $f(-3)=f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{19}{4}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có dạng như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x)=\left|4f(x)+2x^2\right|-2m^2+1$ với m là tham số thực. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên $m\in(-50;50)$ để phương trình $g(x)=1$ có đúng hai nghiệm thực?

A. 94. **B.** 96. **C.** 47. **D.** 48.

Câu 22: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có $f'(1)=3$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m và $m\in[-10;10]$ để phương trình $\ln\dfrac{f(x)}{3mx^2}+x\left[f(x)-3mx\right]=3mx^3-f(x)$ có hai nghiệm dương phân biệt?

A. 18. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 15.

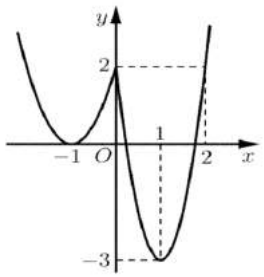
Câu 23: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	4	↗	8	↘	$-\infty$

Số giá trị nguyên của m để phương trình $\dfrac{f(f(x))}{f(x)+1}=m$ có 5 nghiệm phân biệt là

A. 10. **B.** 13. **C.** 12. **D.** 11.

Câu 24: Cho hai hàm số $u(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+3}}$ và $f(x)$, trong đó đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ:



Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f\left(u(x)\right)=m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt?

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;3]$ và có bảng biến thiên như sau

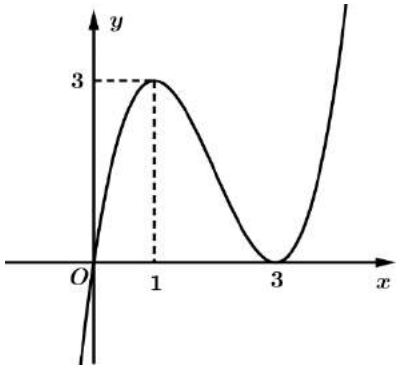
x	1		2		3
y'		$+$	0	$-$	
y	-6	↗	-1	↘	-3

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$f\left(x-1\right)=\dfrac{m}{x^2-6x+12}$ có nhiều nghiệm nhất trên đoạn $\left[2;4\right]$. Tổng các phần tử của S là

A. -297. **B.** -294. **C.** -75. **D.** -72.

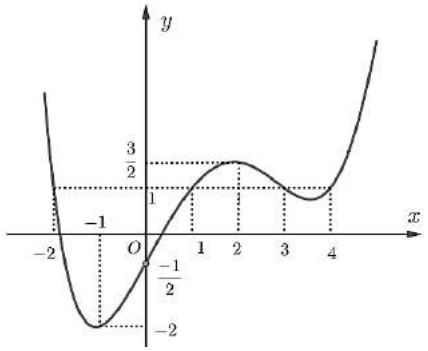
Câu 26: Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ sau:



Tập hợp tất cả các giá trị thực của m để phương trình $f\left(e^{x^2}\right)=m$ có 4 nghiệm phân biệt là

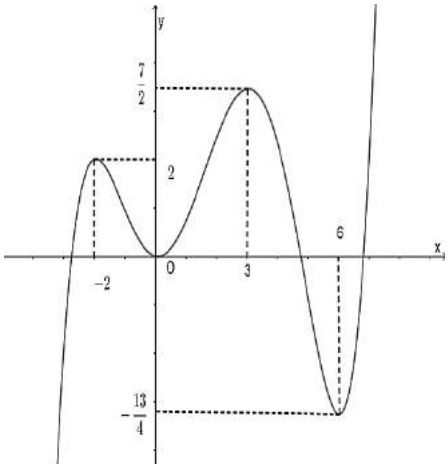
A. $\left(0;3\right]$. **B.** $\left\{0;3\right\}$. **C.** $\left(0;3\right)$. **D.** $\left(3;+\infty\right)$.

Câu 27: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2f\left(\sqrt{9-x^2}\right)=m-2020$ có nghiệm?



A. 4. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 8.

Câu 28: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f\left(2x^3-6x+2\right)=2m-1$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-1;2\right]$?



A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

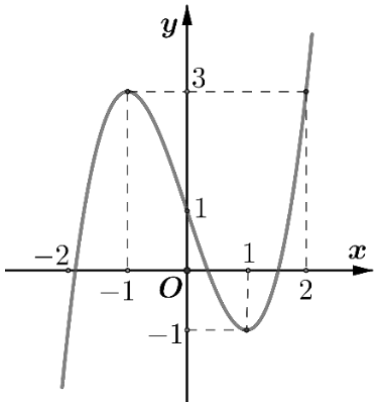
Câu 29: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	-2	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{x-1}+2\right)=m$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

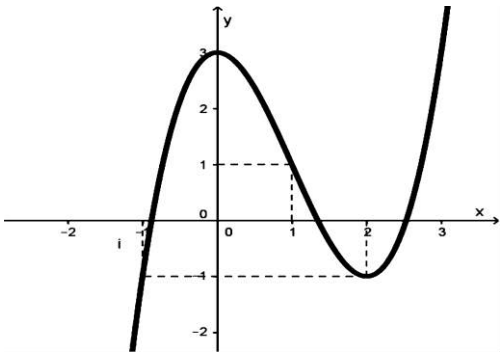
Câu 30: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{4-x^2}\right)=m$ có nghiệm thuộc nữa khoảng $\left[-\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$ là

A. $\left(-1;f\left(\sqrt{2}\right)\right)$. **B.** $(-1;3]$. **C.** $[-1;3]$. **D.** $\left[-1;f\left(\sqrt{2}\right)\right]$.

Câu 31: Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên m thuộc $[-10;10]$ sao cho phương trình $\left[f\left(x^2+1\right)\right]^2-(2m+1)f\left(x^2+1\right)+m(m+1)=0$ có nghiệm và số nghiệm thực phân biệt là số chẵn. Số phần tử của S là

A. 19. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 12.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)=(x-1)(x-2)...(x-2022)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2022;2022]$ để phương trình $f'(x)=(m+1)f(x)$ có 2022 nghiệm phân biệt.

A. 2022. **B.** 4044. **C.** 2023. **D.** 4045.

Câu 33: Cho hàm số $y=f(x)=2022^{x}-2022^{-x}+x+\sin x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(x+3)+f\left(x^{3}-4x+m\right)=0$ có ba nghiệm phân biệt?

A. 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 34: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(-1)=5, f(-3)=0$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Tìm tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $3f(2-x)+\sqrt{x^{2}+4}-x=m$ có nghiệm trong khoảng $(3;5)$.

A. 15. **B.** 16. **C.** 12. **D.** 13.

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $[-5;3]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	-5		-3		-1		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	↗	2	↘	$\frac{1}{3}$	↗	4

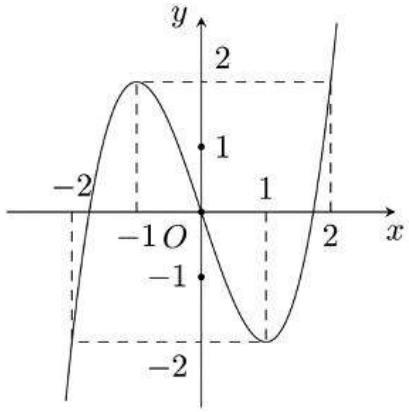
Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $3f(-x-2)=x^{3}-3x+2+m$ có đúng 3 nghiệm thuộc $[-5;3]$?

A. 2. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 8.

Câu 36: Cho hàm số $y=x^{6}+9x^{4}-m^{3}x^{3}+\left(28-3m^{2}\right)x^{2}-4mx+28$ có đồ thị (C). Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để (C) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt trên đoạn $[1;2]$. Tập S có dạng $(\alpha;\beta]$. Giá trị của biểu thức $\left(\beta^{2}-\alpha^{2}\right)$ tương ứng là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 37: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{f(\sin x)+2}\right)=f(m)$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$?



A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 38: Cho hai hàm số $y=(x-1)(x-2)(x-3)(m-|x|)$; $y=-x^4+6x^3-5x^2-16x+18$ có đồ thị lần lượt là (C_1); (C_2). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2021;2021]$ để (C_1) cắt (C_2) tại 4 điểm phân biệt?

A. 4042. **B.** 2022. **C.** 2019. **D.** 2021.

Câu 39: Cho đồ thị hàm số bậc bốn có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m và $m\in[-2021;2021]$ để phương trình $\log\dfrac{f(x)}{mx^2}+x\left[f(x)-mx\right]=mx^3-f(x)$ có 2 nghiệm dương phân biệt?

A. 2021. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 2022.

Câu 40: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+5$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(2f(x)-1)=m$ có đúng 3 nghiệm thực x?

A. 484. **B.** 486. **C.** 485. **D.** 3.

Câu 41: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+8x$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f(x)+m}\right)=x^3-m$ có 3 nghiệm thực phân biệt?

A. 21. **B.** 5. **C.** 19. **D.** 3.

Câu 42: Cho hai hàm số $y=\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+3}$ và $y=|x+2|-x-m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là $(C_1),(C_2)$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

A. $(-2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2]$. **C.** $[-2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Câu 43: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[-2;4]$ và có bảng biến thiên như sau

x	-2		0		1		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-3	↗	2	↘	$1{,}5$	↘	1	↗	6

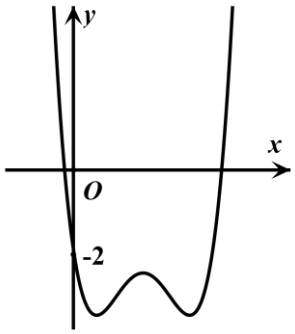
Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hệ phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{9}{x^2}-4\ge 0\\ 6f(-2x+1)-8x^3+6x-m=0\end{cases}$$

có ba nghiệm phân biệt?

A. 9. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 8.

Câu 44: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ và hàm số $g(x)=\sqrt{x^2+4}+x$. Số nghiệm thực của phương trình $f\left[g(x)f(x)\right]+2=0$ là

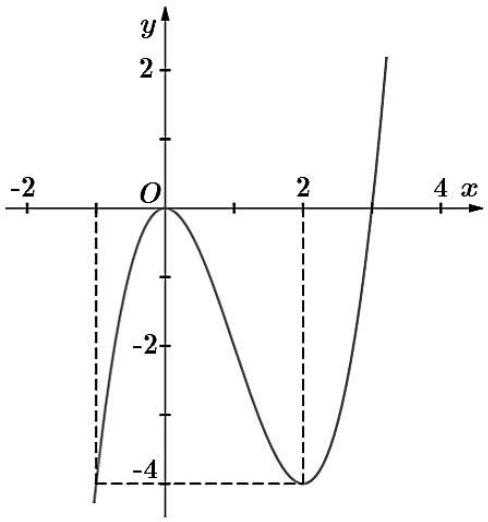


A. 6. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 12.

Câu 45: Cho đồ thị hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị là $A(0;3)$ và $B(2;-1)$. Số nghiệm thực của phương trình $4^{f(f(x))}-2^{f(x)+f(f(x))}+3.2^{f(f(x))}=3.2^{f(x)}$ là.

A. 3. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 9.

Câu 46: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm bậc ba liên tục trên . $\mathbb{R}$. và có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $\dfrac{f'(f(x))}{f^2(x)+f(x)}=0$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

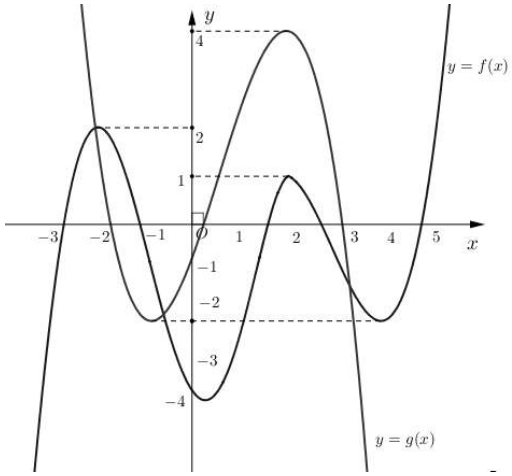
Câu 47: Cho hàm số $f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $xf(x)-\dfrac{1+\sqrt{4x+m-1}}{f\left(-1-\sqrt{4x+m-1}\right)}=0$ có hai nghiệm phân biệt là

A. 2. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 48: Cho hàm số $y=f(x)=2x^3-3x^2+1$. Tập hợp các giá trị m để phương trình $f\left(f\left(\dfrac{2\sin x+1}{2}\right)\right)=f(m)$ có nghiệm là đoạn $[a;b]$. Khi đó giá trị $4a^2+8b$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(7;\dfrac{23}{2}\right)$. **B.** $(-2;5)$. **C.** $\left(\dfrac{43}{3};\dfrac{39}{2}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{37}{3};\dfrac{65}{4}\right)$.

Câu 49: Cho hai hàm $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Khi đó tổng số nghiệm của phương trình $f(g(x))=0$ và $g(f(x))=0$ là



A. 25. **B.** 22. **C.** 21. **D.** 26.

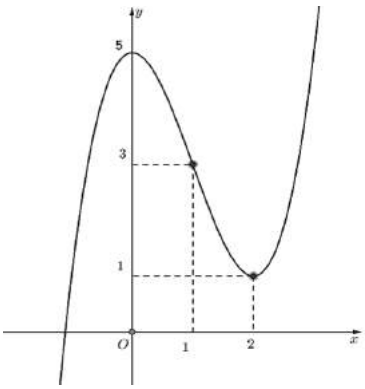
Câu 50: Cho hàm số $y=x^4-32x^2+4$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m thì tổng các nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-3;2)$ của phương trình $f\left(x^2+2x+3\right)=m$ bằng -4?

A. 145. **B.** 142. **C.** 144. **D.** 143.

Dạng 5: Tương giao đồ thị hàm số có chứa giá trị tuyệt đối

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|\frac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\right|+2\right)=f\left(\sqrt{(m+2)^2+4}\right)$ có nghiệm?

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

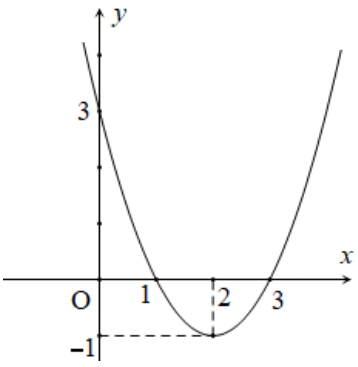
.....

.....

.....

.....

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)=ax^2+bx+c$ có đồ thị (C)

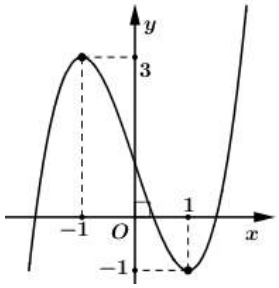


Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(|x|)+(m-2)f(|x|)+m-3=0$ có 6 nghiệm phân biệt?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Câu 3: Cho hàm đa thức $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

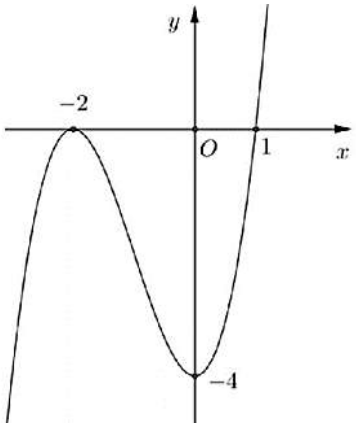


Đặt $g(x)=\left|f\left(x^2\right)\right|$. Số nghiệm của phương trình $g(x).\left[2g(x)-1\right]=0$ là

A. 11. **B.** 10. **C.** 13. **D.** 12.

Lời giải

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình dưới đây



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-5;5)$ để phương trình $f^2(x)-(m+4)|f(x)|+2m+4=0$ $(*)$ có 6 nghiệm phân biệt

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5: Có bao nhiêu m nguyên dương để hai đường cong $(C_1): y=\left|2+\frac{2}{x-10}\right|$ và $(C_2): y=\sqrt{4x-m}$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ dương?

A. 35. **B.** 37. **C.** 36. **D.** 34.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

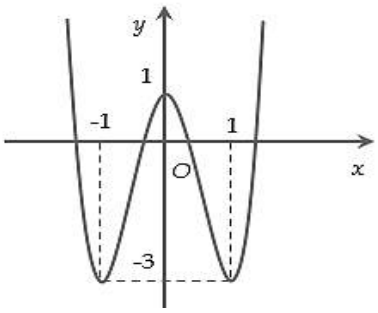
.....

.....

.....

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

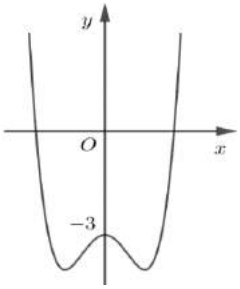
Câu 1: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên.



Hỏi phương trình $\left|f(x)\right|=1$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 3. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 2: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Phương trình $\left|f(x)\right|=3$ có số nghiệm là:

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 6.

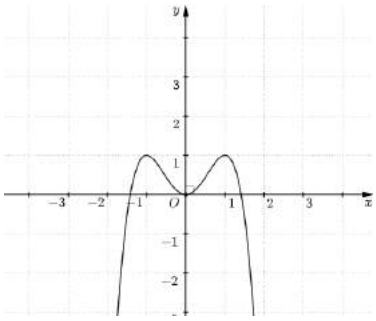
Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(x)=4$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	5	↘	3	↗	$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ tại 6 điểm phân biệt.

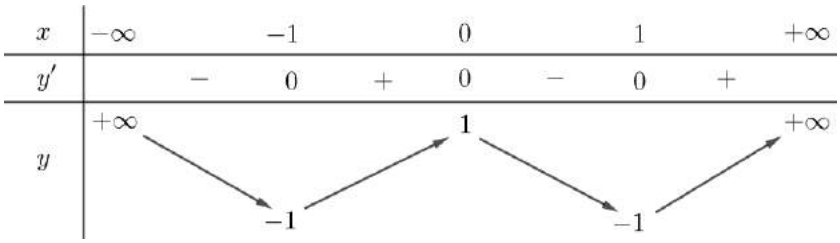
A. $3<m<5$. **B.** $0<m<5$. **C.** $3<m<4$. **D.** $4<m<5$.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong tròn hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $2\left|f(x)\right|-1=0$ là



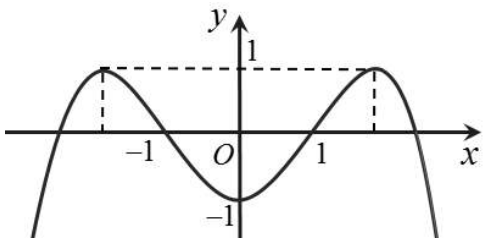
A. 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên. Số điểm cực trị của hàm số $y=|f(x)|$ là



A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 4.

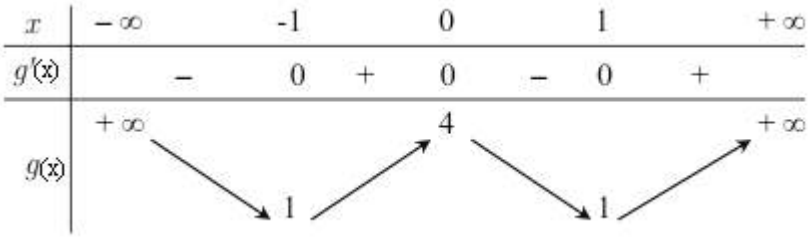
Câu 6: Cho hàm số $f(x)=\left(x^2-1\right)\left(m^2-x^2\right), m$ là tham số dương và có đồ thị (C) như hình vẽ.



Hỏi phương trình $\left(x^2-1\right)\left|m^2-x^2\right|-1=0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt.

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

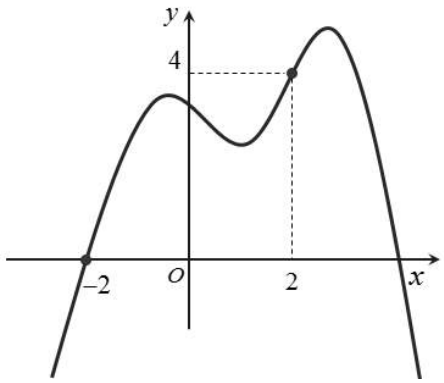
Câu 7: Cho hàm số $y=g(x)$ xác định liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:



Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=|g(x)-2|$ và đường thẳng $y=1$ là:

A. 3. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ.



Hỏi đồ thị hàm số $y=|f(x)-2|-|x|$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm

A. 4. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 0.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-2	↗	$+\infty$

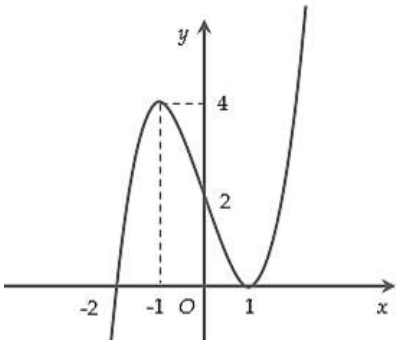
Số nghiệm của phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=2$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

Câu 10: Gọi m_0 là số thực sao cho phương trình $\left|x^3-12x\right|=m_0$ có ba nghiệm dương phân biệt x_1; x_2; x_3 thỏa mãn $x_1+x_2+x_3=1+4\sqrt{3}$. Biết rằng m_0 có dạng $a\sqrt{3}+b$ với a; b là các số hữu tỷ. Tính $4a^2+8b$:

A. 106. **B.** 115. **C.** 113. **D.** 101.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\left|f^2(x)-f(x)-12\right|=m$ có 6 nghiệm phân biệt?



A. 3. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 11.

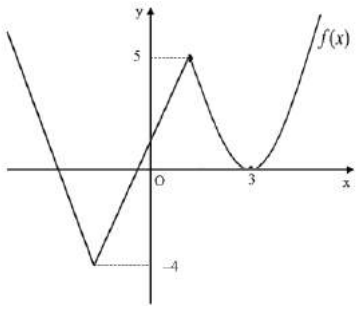
Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	-3	↗	$+\infty$

Phương trình $\left|f(2-3x)+2\right|=5$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 13: Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên dưới. Số nghiệm thực của phương trình $\left|2f(x)+1\right|=5$ là



A. 6. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

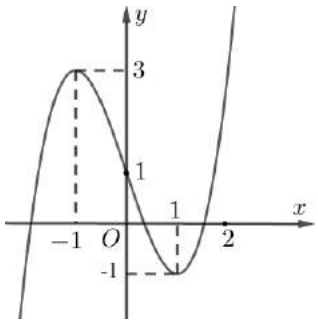
Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	2	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Đặt $g(x)=f\left(\left|f(x)\right|\right)$. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $g'(x)=0$ là:

A. 11. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 12.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Giả sử m là tham số thực. Hỏi phương trình $f\left(\left|f(x)\right|\right)=m$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm thực?



A. 5. **B.** 10. **C.** 7. **D.** 12.

Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $5^{|f(x)|}-125=0$ là

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	2	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $\left|f\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right|=4$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 18: Cho đồ thị hàm số có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-3		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{3};2\pi\right)$ của phương trình $\left|f\left(2\cos x-1\right)\right|=2$ là

A. 3. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 6.

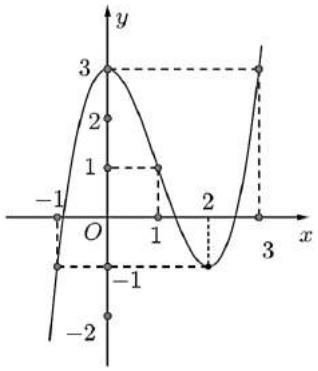
Câu 19: Cho hàm số $y=f(x)$ có $f(-4)=0$ và bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $\left|f\left(x^3-3x^2\right)\right|=\frac{3}{2}$ là

A. 14. **B.** 6. **C.** 10. **D.** 9.

Câu 20: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^4-2x^2\right)\right|=2$ là



A. 8. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 10.

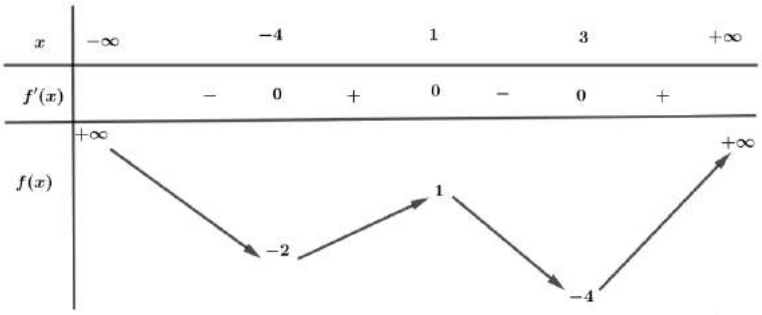
Câu 21: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f'\left(\left|f\left(x\right)\right|-3\right)=0$ là

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 3.

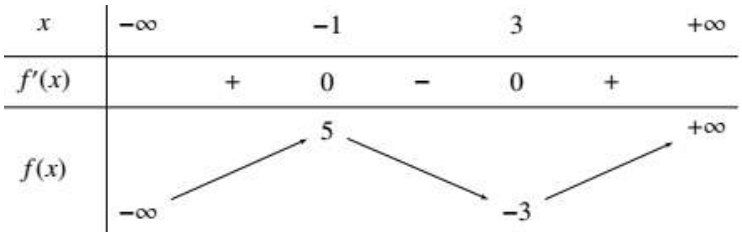
Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ



Phương trình $\left|f\left(f\left(x\right)\right)\right|=1$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm

A. 14. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 13.

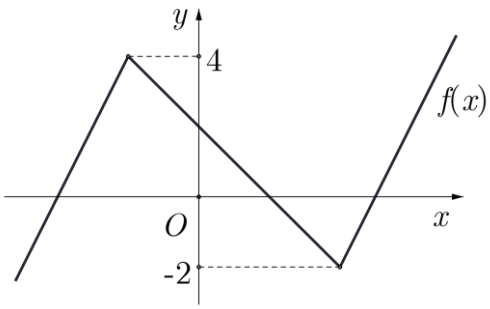
Câu 23: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ



Phương trình $\left|f\left(1-3x\right)+1\right|=3$ có bao nhiêu nghiệm?

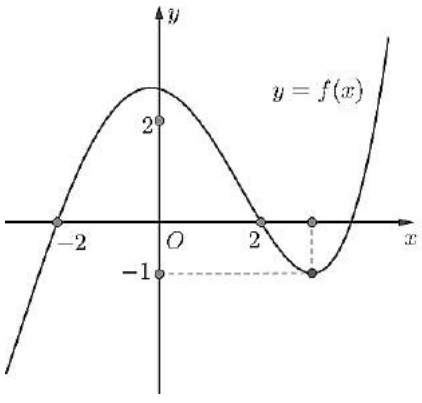
A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi phương trình $\left|2f\left(x\right)-3\right|=5$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực?



A. 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 2.

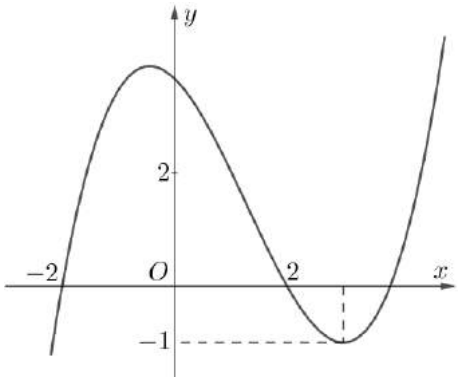
Câu 25: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\dfrac{2}{3}$ là

A. 3. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 10.

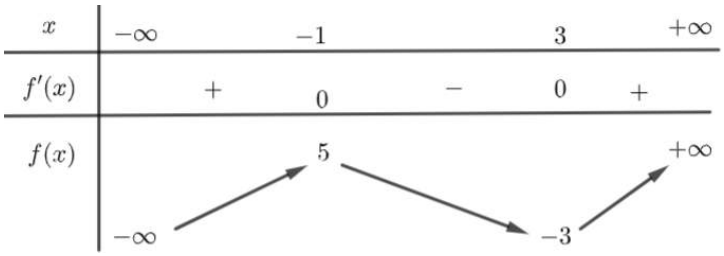
Câu 26: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\frac{4}{3}$ là

A. 7. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 8.

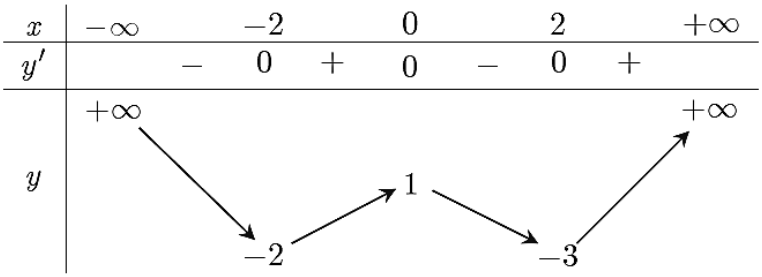
Câu 27: Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ



Phương trình $\left|f\left(2x^2+3\right)-2\right|=5$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

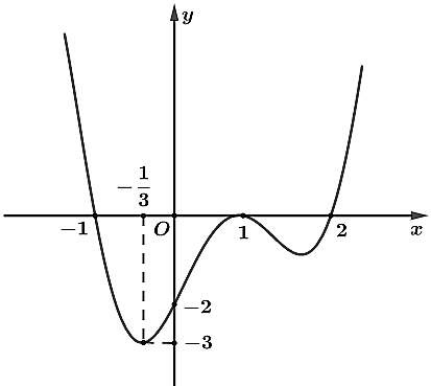
Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)$ có $f(-4)=0$ và bảng biến thiên như sau:



Số nghiệm của phương trình $\left|f\left(x^3-3x^2\right)\right|=\frac{3}{2}$ là

A. 14. **B.** 6. **C.** 10. **D.** 9.

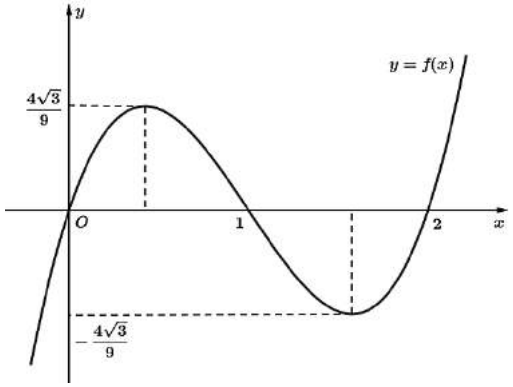
Câu 29: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ sau



Số nghiệm thực của phương trình $f\left(\left|f\left(x\right)\right|-1\right)=0$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 10. **D.** 9.

Câu 30: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(\left|\sqrt{4-x^2}-\left|x^2-1\right|\right|\right)=\dfrac{1}{2021}$ là



A. 14. **B.** 10. **C.** 24. **D.** 12.

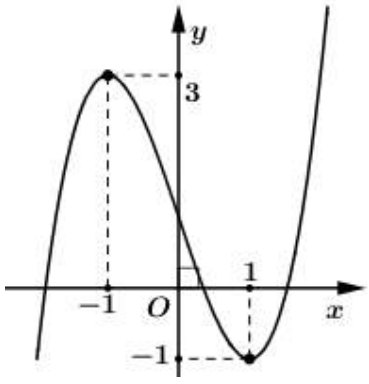
Câu 31: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		3		7		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	-1	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f\left(\left|x^3-6x^2+9x+3\right|\right)=0$ là

A. 9. **B.** 7. **C.** $T=8$. **D.** 6.

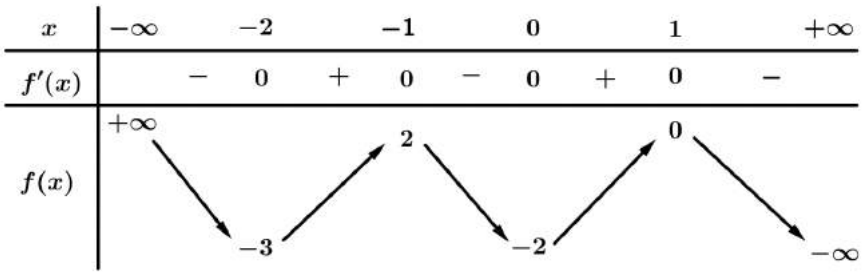
Câu 32: Cho hàm đa thức $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Đặt $g\left(x\right)=\left|f\left(x^2\right)\right|$. Số nghiệm của phương trình $g\left(x\right).\left[2g\left(x\right)-1\right]=0$ là

A. 11. **B.** 10. **C.** 13. **D.** 12.

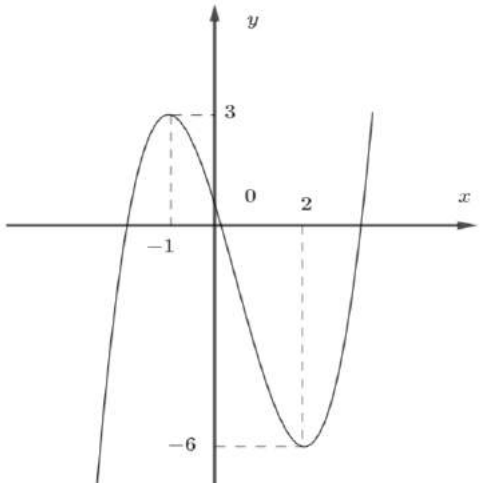
Câu 33: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:



Hỏi phương trình $\left|f\left(3\sin x-4\sin^3 x\right)\right|=\dfrac{3}{4}$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt trong khoảng $(0;2\pi)$?

A. 18. **B.** 24. **C.** 36. **D.** 30.

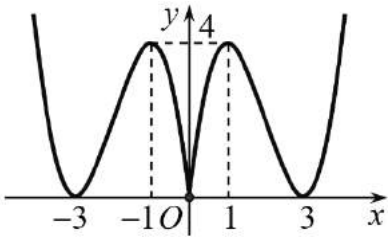
Câu 34: . Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Số các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(\left|f^2(x)-4f(x)+m\right|\right)$ có 23 điểm cực trị là

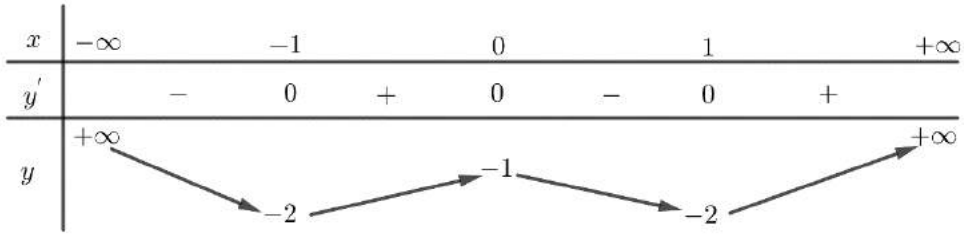
A. 0. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $5f\left(2\left|\sin x\right|+1\right)-m=0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ là



A. $[0;4)$. **B.** $(0;20)$. **C.** $(5;15]$. **D.** $[0;20)$.

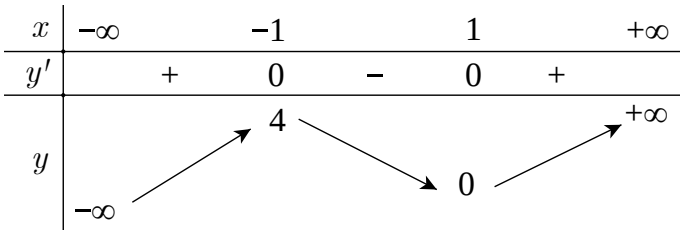
Câu 36: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(-2)=7$ và có bảng biến thiên như dưới đây:



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|x^2-1\right|-2\right)=m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt?

A. 9. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 6.

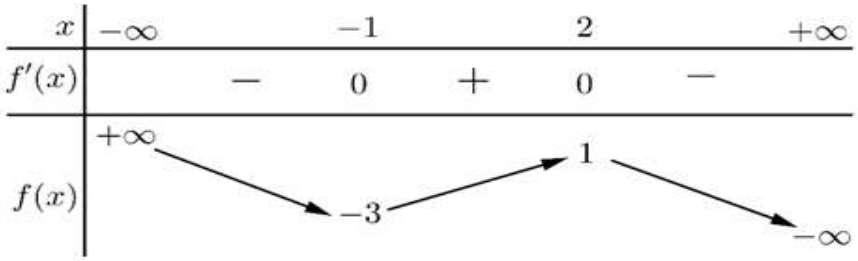
Câu 37: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên như sau:



Tìm m để phương trình $\left|f(x-1)+2\right|=m$ có 4 nghiệm thỏa mãn $x_1<x_2<x_3<1<x_4$.

A. $2<m<6$. **B.** $3<m<6$. **C.** $2<m<4$. **D.** $4<m<6$.

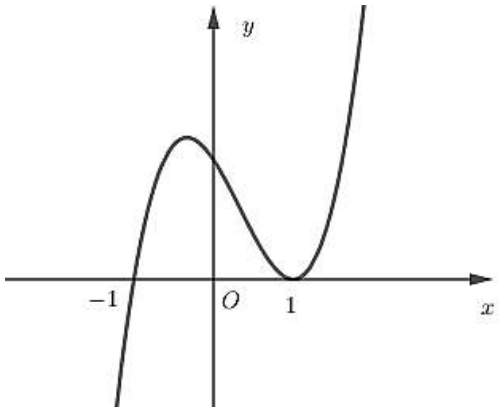
Câu 38: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ



Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\left|f\left(x^3+1\right)+3m\right|=1$ có đúng 6 nghiệm phân biệt là $\left(a;b\right)$. Chon khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $b-a=-\dfrac{2}{3}$. **B.** $b-a=2$. **C.** $b-a=\dfrac{4}{3}$. **D.** $b-a=\dfrac{2}{3}$.

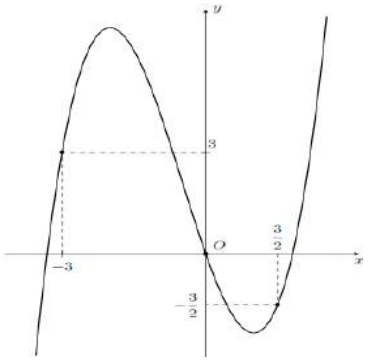
Câu 39: Cho hàm số $y=f\left(x\right)\left(x-1\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình dưới đây.



Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $f\left(x\right)\left|x-1\right|=m^2-m$ có hai nghiệm có hoành độ nằm ngoài đoạn $\left[-1;1\right]$.

A. $m>0$. **B.** $m>1$ hoặc $m<0$. **C.** $m<1$. **D.** $0<m<1$.

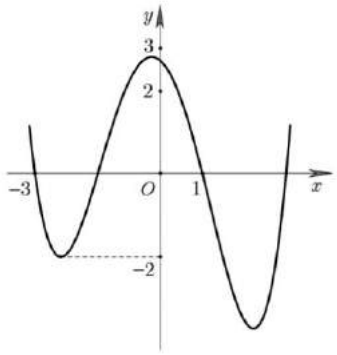
Câu 40: Cho hàm $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn. Biết rằng $f(0)=0$, $f(-3)=f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{19}{4}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có dạng như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x)=\left|4f(x)+2x^2\right|-2m^2+1$ với m là tham số thực. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên $m\in(-50;50)$ để phương trình $g(x)=1$ có đúng hai nghiệm thực?

A. 94. **B.** 96. **C.** 47. **D.** 48.

Câu 41: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên a để phương trình $f\left(\left|x^2-4x\right|-3\right)=a$ có không ít hơn 10 nghiệm thực phân biệt?

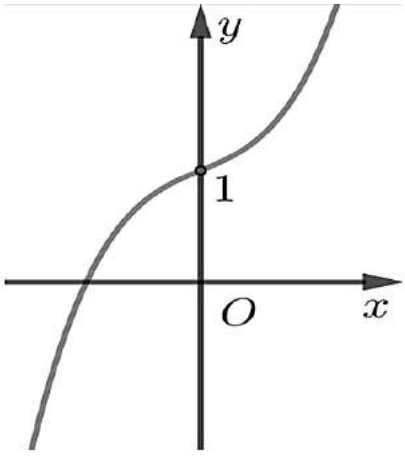


A. 4. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 8.

Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\left|f(x)\right|-m=0$ có 8 nghiệm phân biệt.

A. $0<m<2$. **B.** $1<m<6$. **C.** $0<m<3$. **D.** $-6<m<2$.

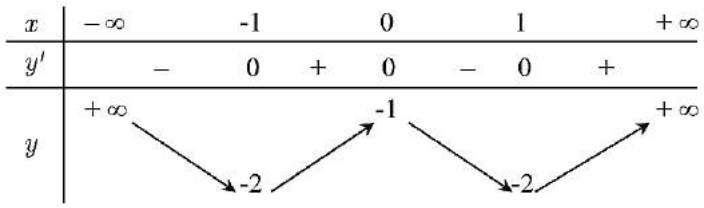
Câu 43: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tìm số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\frac{f(x)}{f(x)+1}+\frac{f(x)+1}{f(x)+2}+\frac{f(x)+2}{f(x)+3}=|f(x)-2|-f(x)+m$ (*) có đúng ba nghiệm âm và một nghiệm dương.

A. 5. **B.** 3. **C.** 7. **D. Vô số**.

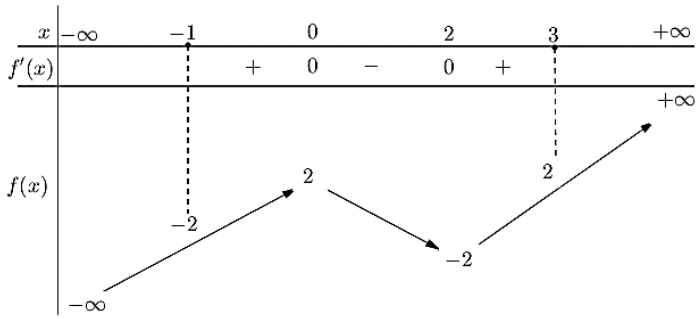
Câu 44: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(-2)=7$ và có bảng biến thiên như sau:



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|x^2-1\right|-2\right)=m$ có đúng 6 nghiệm phân biệt?

A. 9. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 6.

Câu 45: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Có bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình $f(1-2\sin x)=f\left(|m|\right)$ có nghiệm thực?

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 46: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\left|x^4-2x^2-3\right|=2m-1$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt.

A. $1<m<\frac{3}{2}$. **B.** $4<m<5$. **C.** $3<m<4$. **D.** $2<m<\frac{5}{2}$.

Câu 47: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $|\sin x-\cos x|+4\sin 2x=m$ có nghiệm thực

A. 7. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 48: Cho hai hàm số $y=(x-1)(x-2)(x-3)(m-|x|)$; $y=-x^4+6x^3-5x^2-16x+18$ có đồ thị lần lượt là (C_1); (C_2). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2021;2021]$ để (C_1) cắt (C_2) tại 4 điểm phân biệt?

A. 4042. **B.** 2022. **C.** 2019. **D.** 2021.

Câu 49: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2021;2021]$ đê phương trình $\left|x^4-8x^2\right|-mx+2m-16=0$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt?

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

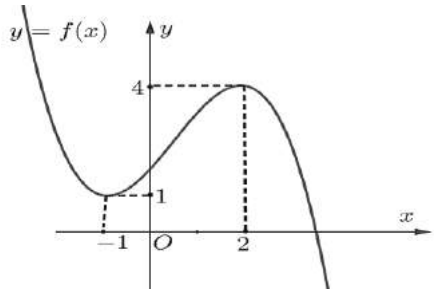
Câu 50: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^3-15x-|3x-m|=0$ có đúng 3 nghiệm thực?

A. 43. **B.** 44. **C.** 45. **D.** 41.

Câu 51: Cho hàm số $y=f(x)=x^2-4x+3$. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(|x|)-(m-6)f(|x|)-m+5=0$ có 6 nghiệm thực phân biệt. Tính tổng các phần tử của S.

A. 3. **B.** 22. **C.** 30. **D.** 18.

Câu 52: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m, để phương trình $|3f^2(2x)-12f(2x)-m|=1$ có ít nhất 7 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-\infty;1)$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2..

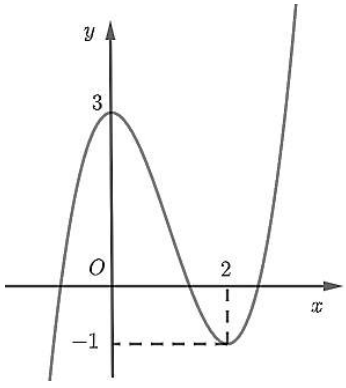
Câu 53: Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	m	↘	n	↗	$+\infty$

Với m,n là các số nguyên thuộc đoạn $[-10;10]$. Hỏi có bao nhiêu cặp số nguyên $(m;n)$ để phương trình $f(|x+5|)=4$ có đúng 4 nghiệm phân biệt?

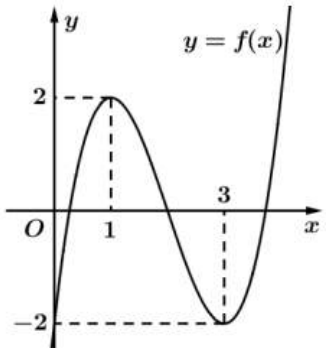
A. 18. **B.** 21. **C.** 19. **D.** 20.

Câu 54: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $||f(x)-2|-1|=1$ là



A. 10. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 4.

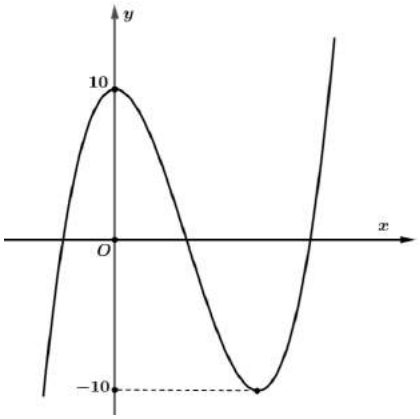
Câu 55: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^4(x)+2=3f^2(x)+\left|f(x)+2m\right|$ có đúng 4 nghiệm phân biệt?

A. 6. **B.** 2. **C.** 8. **D.** 3.

Câu 56: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-23;23]$ để phương trình $\left|f(x)\right|^3-4f^2(x)+2mf(x)-m^2=0$ có đúng hai nghiệm thực (Giả thiết rằng các nghiệm bội chỉ được tính là một nghiệm)?



A. 3971. **B.** 3974. **C.** 1780. **D.** 2972.

Dạng 6: Tương giao đồ thị hàm số bậc ba

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Tìm các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y=(2m-1)x+3+m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$.

A. $m=\frac{3}{4}$. **B.** $m=\frac{3}{2}$. **C.** $m=-\frac{1}{2}$. **D.** $m=\frac{1}{4}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2: Tìm m để đồ thị của hàm số $y=x^3+3mx^2-2x-4$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1+x_2=2x_3$.

A. $m=0$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=3$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3-3x+m-2022=0$ có ba nghiệm thực phân biệt.

A. $m\in(-2;2)$. **B.** $m\in(-\infty;2020)\cup(2024;+\infty)$.

C. $m\in(-2;+\infty)$. **D.** $m\in(2020;2024)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4: Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ cắt đường thẳng $y = m(x-1)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thoả mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 5$.

A. $m \geq -3$. **B.** $m > -2$. **C.** $m > -3$. **D.** $m \geq -2$.

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5: Tìm giá trị tham số m để đường thẳng $(d): mx - y + m = 0$ cắt đường cong $(C): y = x^3 - 3x^2 + 4$ tại ba điểm phân biệt A, B và $C(-1;0)$ sao cho tam giác AOB có diện tích bằng $5\sqrt{5}$. (Với O là gốc tọa độ).

A. $m = 5$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = 4$. **D.** $m = 6$.

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 6: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$, (C_m). Tìm các giá trị của m để đường thẳng d đi qua $I(-1;2)$ có hệ số góc bằng $-m$ cắt đồ thị hàm số (C_m) tại 3 điểm phân biệt.

A. $m < \frac{3}{2}$. **B.** $m > \frac{3}{2}$. **C.** $m \leq -2$ **D.** $m > 2$.

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 7: Cho hàm số $y=2x^3-7x^2+3x$ có đồ thị (C) và hàm số $y=x^3-5x^2+(3-m)x+2m$ (với $m\in\mathbb{R}$) có đồ thị (P). Biết đồ thị hàm số (C) cắt (P) tại ba điểm phân biệt có hoành độ nằm trong $[-2;4]$. Tổng các giá trị nguyên của m bằng

A. -6. **B.** -10. **C.** -8. **D.** -5.

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 8: Cho hàm số $y=x^3+2x^2+(m+1)x+m$ (m là tham số) có đồ thị (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn $x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 6$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm số $y=x^3-2x^2-1$ có đồ thị (C), đường thẳng $(d): y=mx-1$ và điểm $K(4;11)$. Biết rằng (C) và (d) cắt nhau tại ba điểm phân biệt A,B,C trong đó $A(0;-1)$ còn trọng tâm tam giác KBC nằm trên đường thẳng $y=2x+1$. Mệnh đề nào sau đây **đúng?**

A. $m=4$. **B.** $m=2$. **C.** $m=3$. **D.** Không có m.

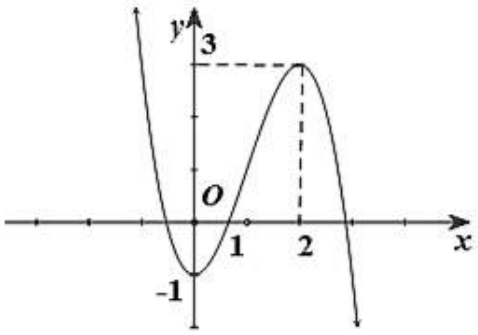
Câu 2: Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=3x+m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=x^3+1$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** -1.

Câu 3: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=2x^3-(2+m)x+m$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt

A. $m>\frac{1}{2}$. **B.** $m\le\frac{1}{2}$. **C.** $m>-\frac{1}{2}$. **D.** $m>-\frac{1}{2}; m\neq 4$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2020;2020]$ của tham số m để phương trình $2f(|x|)-m=0$ có đúng 2 nghiệm thực phân biệt?

A. 2020. **B.** 2022. **C.** 2021. **D.** 2019.

Câu 5: Biết đường thẳng $y=(3m-1)x+6m+3$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ tại ba điểm phân biệt sao cho một giao điểm cách đều hai giao điểm còn lại. Khi đó m thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};2\right)$. **D.** $(-1;0)$.

Câu 6: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-(2m+1)x^2+(3m+1)x-(m+1)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 7: Cho đồ thị $(C_m): y=x^3-2x^2+(1-m)x+m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3 thỏa $x_1^2+x_2^2+x_3^2=4$

A. $m\neq 0$. **B.** $m\in(0;2)$. **C.** $m=1$. **D.** $m>-\frac{1}{4}$ và $m\neq 0$.

Câu 8: Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2$ tại 3 điểm phân biệt A,B,C (B nằm giữa A,C) sao cho $AB=2BC$. Tính tổng các phần tử thuộc S.

A. -4. **B.** $\dfrac{7-\sqrt{7}}{7}$. **C.** -2. **D.** 0.

Câu 9: Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của a để đồ thị hàm số $y=x^3+(a+10)x^2-x+1$ cắt trục hoành tại đúng một điểm?

A. 10. **B.** 8. **C.** 11. **D.** 9.

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc $[-2020;2021]$ của hàm số m để đường thẳng $y=mx-m-1$ cắt đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2+x$ tại ba điểm phân biệt A,B,C sao cho $AB=BC$.

A. 2021. **B.** 2023. **C.** 2024. **D.** 2022.

Câu 11: Cho bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số $y=-x^3+mx^2-2m$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 12: Gọi S là tập hợp các số nguyên m để phương trình $x^3-(2m+1)x^2+2(3m-2)x-8=0$ có ba nghiệm lập thành một cấp số nhân. Tổng các phần tử của S bằng

A. 0. **B.** -2. **C.** 3. **D.** -1.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)=x^3-\dfrac{1}{2}mx+m-8$, $x\in\mathbb{R}$ với m là một hằng số khác 0. Biết rằng phương trình $f(x)=0$ có đúng 2 nghiệm phân biệt thì có bao nhiêu giá trị nguyên dương k thỏa mãn phương trình $f(x)=k$ có 3 nghiệm phân biệt?

A. 3. **B.** 6. **C.** 34. **D.** 31.

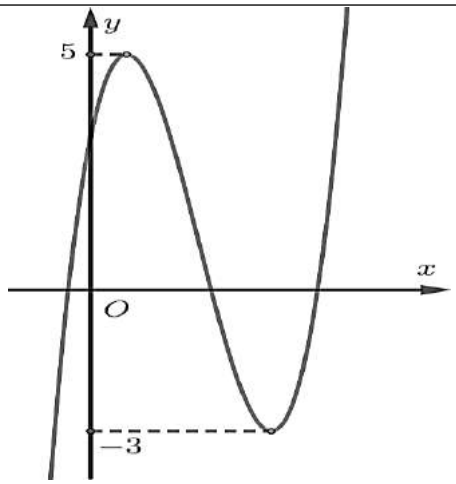
Câu 14: Cho hàm số $y=x^3-(m+2)x^2-(2m+13)x-m-2$ có đồ thị (C_m), đường thẳng $d: y=mx+m+8$ và điểm $I(1;4)$. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m, biết rằng đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt A,B,C với A có hoành độ bằng -2 và tam giác IBC cân tại I.

A. -12. **B.** -6. **C.** -4. **D.** -10.

Câu 15: Gọi d là đường thẳng đi qua $A(2;0)$ có hệ số góc $m(m>0)$ cắt đồ thị $(C): y=-x^3+6x^2-9x+2$ tại ba điểm phân biệt A,B,C. Gọi B',C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của B,C lên trục tung. Biết rằng hình thang $BB'C'C$ có diện tích bằng 8, giá trị của m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(5;8)$. **B.** $(-5;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(1;5)$.

Câu 16: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^3(x)-2mf^2(x)+\left(m^2-3m-9\right)f(x)+3m^2+9m=0$ có đúng 8 nghiệm phân biệt?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 17: Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $f(x)=x^3-6(m+1)x^2+3(2m+1)x+2$ cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn -1. Biết rằng $S=\left(\dfrac{-a}{b};+\infty\right)$; trong đó a,b là các số nguyên dương và phân số $\dfrac{a}{b}$ là tối giản. Giá trị biểu thức $T=a+b$ tương ứng bằng

A. 4. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 18: Điều kiện cần và đủ của tham số thực m để đường thẳng $y=3x+m-2$ cắt đồ thị hàm số $y=(x-1)^3$ tại ba điểm phân biệt là

A. $-3\le m\le 1$. **B.** $-3<m<1$. **C.** $-1<m<3$. **D.** $-1\le m\le 3$.

Câu 19: Cho hàm số $y=x^3+3x^2+m$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt A,B,C sao cho B là trung điểm AC. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. $m\in(-4;0)$. **B.** $m\in(0;+\infty)$. **C.** $m\in(-\infty;-4)$. **D.** $m\in(-4;-2)$.

Câu 20: Cho hàm số $y=x^3-2x^2-1$ có đồ thị (C), đường thẳng $(d):y=mx-1$ và điểm $K(4;11)$. Biết rằng (C) và (d) cắt nhau tại ba điểm phân biệt A,B,C trong đó $A(0;-1)$ còn trọng tâm tam giác KBC nằm trên đường thẳng $y=2x+1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m=4$. **B.** $m=2$. **C.** $m=3$. **D.** Không tồn tại m

Câu 21: Cho hàm số $y=x^3-2x^2+(1-m)x+m$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1^2+x_2^2+x_3^2<4$.

A. $\begin{cases}-\dfrac{1}{4}<m<1\\ m\neq 0\end{cases}$. **B.** $m<1$. **C.** $-\dfrac{1}{4}<m<1$. **D.** $\dfrac{1}{4}<m<1$.

Câu 22: Cho hàm số $y=x^3-2x^2+(1-m)x+m$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt x_1,x_2,x_3 sao cho $x_1^2+x_2^2+x_3^2<4$.

A. $\begin{cases} -\frac{1}{4} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$. **B.** $m < 1$. **C.** $-\frac{1}{4} < m < 1$. **D.** $\frac{1}{4} < m < 1$.

Câu 23: Cho hàm số $y = x^3 - (m+2)x^2 - (2m+13)x - m - 2$ có đồ thị là (C_m), đường thẳng $d: y = mx + m + 8$ và điểm $I(1;4)$. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m, biết rằng đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt A, B, C với A có hoành độ bằng -2 và tam giác IBC cân tại I.

A. -12. **B.** -6. **C.** -4. **D.** -10.

Câu 24: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2021.f(f(x)) = m$ có 7 nghiệm phân biệt?

A. 8078. **B.** 0. **C.** 4041. **D.** 8076.

Câu 25: Cho hàm số $f(x) = (1 - m^3)x^3 + 3x^2 + (4 - m)x + 2$ với m là tham số. Có bao nhiêu số tự nhiên m sao cho phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên đoạn $\left[\frac{1}{5};5\right]$.

A. 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$. Tập hợp các giá trị m để phương trình $f\left(f\left(\frac{2\sin x + 1}{2}\right)\right) = f(m)$ có nghiệm là đoạn $[a;b]$. Khi đó giá trị $4a^2 + 8b$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(7;\frac{23}{2}\right)$. **B.** $(-2;5)$. **C.** $\left(\frac{43}{3};\frac{39}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{37}{3};\frac{65}{4}\right)$.

Câu 27: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2x^3 - 3x^2 + 2 - 2^{1-2m} = 0$ có 3 nghiệm thực phân biệt.

A. $\frac{1}{2} < m < 1$. **B.** $-1 < m < 0$. **C.** $0 < m < \frac{1}{2}$. **D.** $-1 < m < \frac{1}{2}$.

Câu 28: Cho hàm số $y = x^3 - 2(m+1)x^2 + (5m+1)x - 2m - 2$ có đồ thị là (C_m), với m là tham số. Tập S là tập hợp các giá trị nguyên của $m \in (-2021;2021)$ để (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt $A(2;0), B, C$ sao cho trong hai điểm B, C có một điểm nằm trong và một điểm nằm ngoài đường tròn có phương trình $x^2 + y^2 = 1$. Tính số các phần tử của S?

A. 4041. **B.** 2020. **C.** 2021. **D.** 4038.

Câu 29: Cho hàm số $f(x) = x^3 - mx^2 + (m-2)x + 1$ với m là tham số. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình sau có 3 nghiệm thực phân biệt $f'(x).e^{f(x)} + f(x).\pi^{f'(x)} = f'(x) + f(x)$

A. 1. **B.** vô số. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 30: Cho hàm số $y = x^3 - x$ (C) và đường thẳng $(d): y = m(x-1)$. Đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt $A(1;0), B, C$ sao cho $M\left(-\frac{1}{2};-9\right)$ là trung điểm của đoạn BC, khi đó giá

trị của m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(4;7)$. **C.** $(0;4)$. **D.** $(7;+\infty)$.

Câu 31: Cho hàm số $y=2x^3-3(m+1)x^2+6mx-m^2$ có đồ thị (C). Gọi P là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-50;50]$ để (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ thỏa mãn điều kiện $x_1<1<x_2<3<x_3$. Số phần tử của P là:

A. 48. **B.** 32. **C.** 37. **D.** 25.

Câu 32: Cho hàm số $y=x^3-2x^2+(1-m)x+m$ có đồ thị là đường cong (C_m). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2+x_3^2=6$.

Câu 33: Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x+m+2021$ có đồ thị là (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $1<x_1<3<x_2<4<x_3$. **B.** $0<x_1<1<x_2<3<x_3<4$.

C. $1<x_1<x_2<3<x_3<4$. **D.** $x_1<0<1<x_2<3<x_3<4$.

Câu 34: Cho hàm số $y=x^3+2mx^2+3(m-1)x+2$ có đồ thị là (C) và đường thẳng $d:y=-x+2$. S là tập các giá trị m thỏa mãn (d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt $A(0;2),B,C$ sao cho diện tích tam giác MBC bằng $2\sqrt{2}$, với $M(3;1)$. Tính tổng bình phương các phần tử của S?

A. 4. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 25.

Câu 35: Cho hàm số $y=x^3+2mx^2+(3m-4)x+2$ có đồ thị (C) và cho điểm $M(3;1)$. Số giá trị nguyên dương của tham số m để đường thẳng $d:y=-x+2$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt $A(0;2),B$ và C đồng thời tam giác MBC có diện tích $2\sqrt{7}$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 36: Cho hàm số $y=x^3-2(m-1)x^2+2(m^2-2m)x+4m^2(C)$ và đường thẳng d đi qua điểm $A(0;8)$ và có hệ số góc bằng 4. Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$

A. $\min P=1$. **B.** $\min P=-4$. **C.** $\min P=-6$. **D.** $\min P=0$.

Dạng 7: Tương giao hàm trùng phương và một số bài toán khác

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^4-3x^2+m=0$ có 4 nghiệm thực phân biệt?

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2: Biết đồ thị hàm số $y=(x-1)(x+1)(x^2-7)-m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ là x_1,x_2,x_3,x_4. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để $\frac{1}{1-x_1}+\frac{1}{1-x_2}+\frac{1}{1-x_3}+\frac{1}{1-x_4}>1.$

A. 9. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Cho hàm số $y = x^4 - (3m+2)x^2 + 3m$ có đồ thị (C_m). Xác định tất cả các giá trị của tham số thực m để (C_m) cắt đường thẳng $y = -1$ tại bốn điểm phân biệt

A. $\begin{cases} m \neq 0 \\ m < -\frac{1}{3} \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\frac{1}{3} \end{cases}$. **C.** $m > -\frac{1}{3}$. **D.** $m < -\frac{1}{3}$.

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4: Tập các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 2x^2 - 3m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt là

A. $(1;+\infty) \cup \{0\}$. **B.** $\left(\frac{1}{3};+\infty\right) \cup \{0\}$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(1;+\infty)$.

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

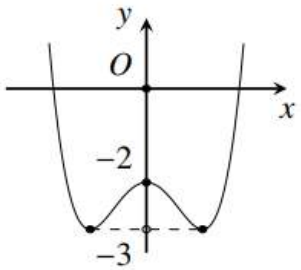
Câu 1: Cho hàm số $y=x^4-4x^2-2$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=m$. Tất cả các giá trị của tham số m để d cắt (C) tại bốn điểm phân biệt là

A. $2\le m\le 6$. **B.** $-6<m<-2$. **C.** $-6\le m\le -2$. **D.** $2<m<6$.

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+2021$ tại 3 điểm phân biệt.

A. $m=2021$. **B.** $0<m<2021$. **C.** $m>2021$. **D.** $m<0$.

Câu 3: Đường cong trong hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số $y=x^4-2x^2-2$.



Tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4-2x^2=m$ có bốn nghiệm phân biệt là

A. $-3<m<-2$. **B.** $-1<m<0$. **C.** $m>-3$. **D.** $m<-2$.

Câu 4: Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+2021$ tại 3 điểm phân biệt.

A. $m=2021$. **B.** $0<m<2021$. **C.** $m>2021$. **D.** $m<0$.

Câu 5: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^4-3x^2-m-1=0$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $m>-1$ hoặc $m=-\dfrac{13}{4}$. **B.** $m>-1$.

C. $m\ge -1$ hoặc $m=-\dfrac{13}{4}$. **D.** $m\ge -1$.

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-8x^2+5$ cắt đường thẳng $d: y=2m+1$ tại bốn điểm phân biệt

A. $-6<m<5$. **B.** $-11<m<5$. **C.** $m>-6$. **D.** $-6<m<2$.

Câu 7: Gọi m là số thực dương sao cho đường thẳng $y=m+1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^4-3x^2-2$ tại hai điểm A, B thỏa mãn tam giác OAB vuông tại O (O là gốc tọa độ). Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $m\in\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4}\right)$. **B.** $m\in\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{5}{4}\right)$. **C.** $m\in\left(\dfrac{5}{4};\dfrac{7}{4}\right)$. **D.** $m\in\left(\dfrac{7}{4};\dfrac{9}{4}\right)$.

Câu 8: Cho hàm số $y=\dfrac{x^4}{4}-2x^2+6$, có đồ thị là (C). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị (C) tiếp xúc với parabol $(P): y=-x^2+3m$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=(m+1)x^4-2(2m-3)x^2+6m+5$ cắt

trục hoành tại bốn điểm phân biệt có các hoành độ $x_1;x_2;x_3;x_4$ thỏa mãn $x_1<x_2<x_3<1<x_4$

A. $m\in\left(-1;-\frac{5}{6}\right)$. **B.** $m\in(-3;-1)$. **C.** $m\in(-3;1)$. **D.** $m\in(-4;-1)$.

Câu 10: Biết rằng với tham số $m\in\left(a;\frac{b}{c}\right)$, với $b,c\in\mathbb{N},c>0$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản, thì đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+3m+15,(Cm)$ cắt đường thẳng $y=5$ tại 4 điểm phân biệt có hoành độ đều nhỏ hơn 3. Khi đó $a+b+c$ bằng

A. 108. **B.** 115. **C.** 105. **D.** 111.

Câu 11: Biết tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4+2mx^2+2m+3$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt là khoảng $(a;b)$, tính tổng $a+b$.

A. $a+b=\frac{-3}{2}$. **B.** $a+b=-1$. **C.** $a+b=-2$. **D.** $a+b=\frac{-5}{2}$.

Câu 12: Đường thẳng $y=m^2$ cắt đồ thị hàm số $y=x^4-x^2-10$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho tam giác OAB vuông (với O là gốc tọa độ). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m^2\in(5;7)$. **B.** $m^2\in(3;5)$. **C.** $m^2\in(0;1)$. **D.** $m^2\in(1;3)$.

Câu 13: Đồ thị của hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+2m+1$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m\in(6;9)$. **B.** $m\in(-6;-3)$. **C.** $m\in(-3;2)$. **D.** $m\in(2;6)$.

Câu 14: Cho hàm số $y=x^4-(3m+2)x^2+3m$ có đồ thị (C_m). Xác định tất cả các giá trị của tham số thực m để (C_m) cắt đường thẳng $y=-1$ tại bốn điểm phân biệt

A. $\begin{cases}m\neq 0\\ m<-\frac{1}{3}\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}m\neq 0\\ m>-\frac{1}{3}\end{cases}$. **C.** $m>-\frac{1}{3}$. **D.** $m<-\frac{1}{3}$.

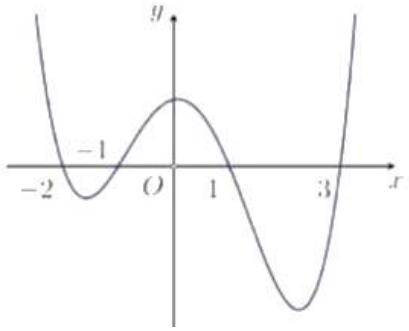
Câu 15: Cho hàm số $y=x^4-(3m+2)x^2+3m$ có đồ thị (C_m). Xác định tất cả các giá trị của tham số thực m để (C_m) cắt đường thẳng $y=-1$ tại bốn điểm phân biệt

A. $\begin{cases}m\neq 0\\ m<-\frac{1}{3}\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}m\neq 0\\ m>-\frac{1}{3}\end{cases}$. **C.** $m>-\frac{1}{3}$. **D.** $m<-\frac{1}{3}$.

Câu 16: Cho hai hàm số $y=\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}$ và $y=e^{-x}-2019+2022m$, (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng ba điểm phân biệt là

A. $(1;+\infty)$. **B.** $[1;+\infty)$. **C.** $[3;+\infty)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f(1)=2020$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ



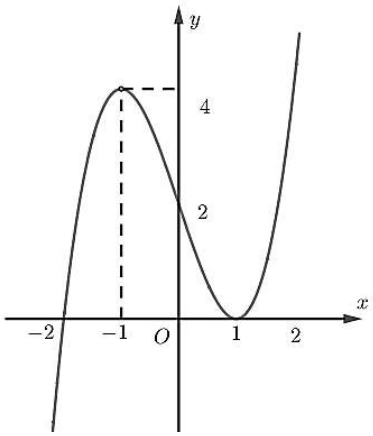
Với m là tham số, số nghiệm của phương trình $f\left(x^2\right)=m^4+2021$ là

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 18: Cho phương trình $\left(x^2-2x+m\right)^2-2x^2+3x-m=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2022;2022]$ để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt?

A. 2022. **B.** 4045. **C.** 2024. **D.** 2023.

Câu 19: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3f\left(\left|x\right|^3-3\left|x\right|+2\right)-m+1=0$ có 8 nghiệm phân biệt.

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 20: Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị cắt trục hoành tại 2 điểm $x=-1$ và $x=3$. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f\left(x\right)=am+3bx+d$ có 3 nghiệm phân biệt?

A. $2\cdot$ **B.** $3\cdot$ **C.** $5\cdot$ **D.** $4\cdot$

Câu 21: Cho hàm số $y=x^3+2mx^2+\left(3m-4\right)x+2$ có đồ thị $\left(C\right)$ và cho điểm $M\left(3;1\right)$. Số giá trị nguyên dương của tham số m để đường thẳng $d:y=-x+2$ cắt đồ thị $\left(C\right)$ tại ba điểm phân biệt $A\left(0;2\right),B$ và C đồng thời tam giác MBC có diện tích $2\sqrt{7}$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 22: Cho hàm số $f\left(x\right)=x^5+3x^3-4m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f\left(x\right)+m}\right)=x^3-m$ có nghiệm thuộc $[1;2]$?

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

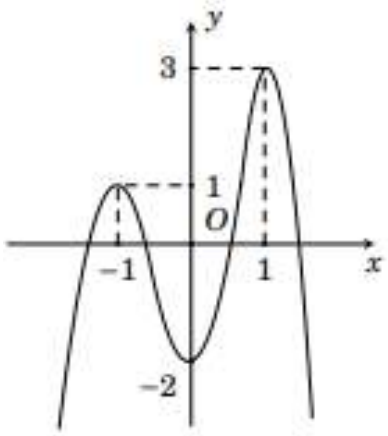
Câu 23: Cho hàm số $f(x)=e^{-x}-4x^3+2023$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2022;2022]$ để phương trình $f\left(4^x+2^8\right)=f\left(2^{x+10}+m^2-2\right)$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 32. **B.** 33. **C.** 31. **D.** 34.

Câu 24: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+mx-1}{x-1}$ có đồ thị (C) (m là tham số thực). Tổng bình phương các giá trị của m để đường thẳng $(d):y=m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm A,B sao cho $OA\perp OB$ bằng

A. 3. **B.** 12. **C.** 5. **D.** 4.

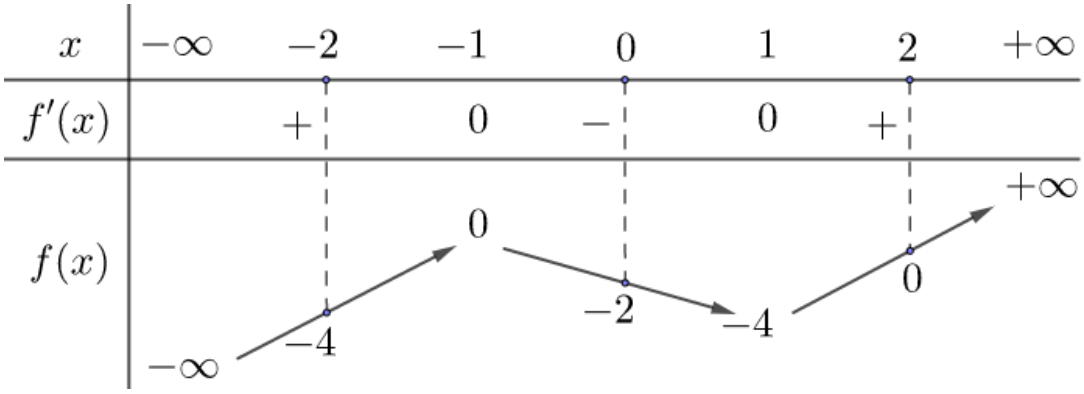
Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f(1-x)$ được cho trong hình vẽ có đúng 3 điểm cực trị là $A(-1;1)$, $B(0;-2)$, $C(1;3)$.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\dfrac{1-x}{x+2}\right)-\dfrac{2x+1}{x+2}+m=0$ có đúng 4 nghiệm?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:



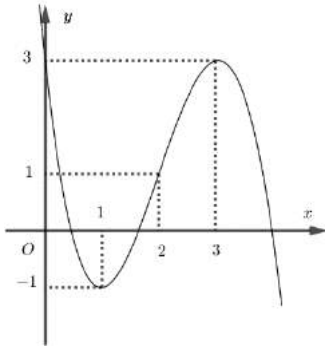
Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(f\left(|x+1|\right)+2\right)=m$ có 10 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-3;1]$

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 27: Cho hàm số $y=f(x)=e^x-e^{-x}+2021x$ có bao nhiêu giá trị nguyên m để $f(3-x)+f(-x^3+3x^2+x+m)=0$ có ba nghiệm phân biệt?

A. 3 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 5

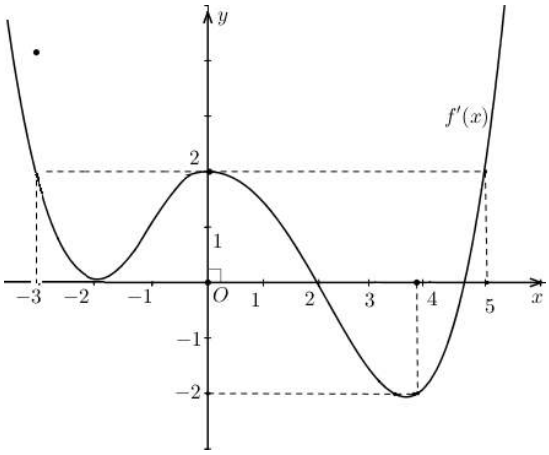
Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số bậc ba và có đồ thị $y=f(2-x)$ như hình vẽ



Hỏi phương trình $\left|f\left(\left|x^2-2x\right|\right)\right|=1$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A. 8. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 6.

Câu 29: Cho hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $f(3)=2f(5)=4$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\frac{1}{2}f(x)-m\right)=2x+2m$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.



A. $8\cdot$ **B.** $6\cdot$ **C.** $3\cdot$ **D.** $7\cdot$

Câu 30: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có $f'(x)=x^4-3x^2-4$ và hàm số $g(x)=f\left(\left|\frac{x^4}{4}-4x^2+12\right|+m\right)$, tìm các giá trị nguyên của $m\in[-30;10]$ để hàm số $g'(x)$ cắt trục Ox tại 11 điểm phân biệt

A. 18. **B.** 10. **C.** 16. **D.** 15.

Câu 31: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y=\left|x^3-3x-1\right|$ và đồ thị hàm số $y=\left|mx^3-6mx^2+9mx-7m\right|$ cắt nhau tại ít nhất một điểm có hoành độ $x_0\in[0;2]$

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)=x^{2021}+2021x$. Gọi m_0 là số lớn nhất trong các số nguyên m thỏa mãn $f(m-2020)+f\left(2021m-5^8\right)\le 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m_0\in[180;191]$. **B.** $m_0\in(191;204]$. **C.** $m_0\in(204;223)$. **D.** $m_0\in[223;234)$.

CHƯƠNG 1

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

CHỦ ĐỀ 6 TƯƠNG GIAO ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số:

- **Phương pháp:** Cho 2 hàm số $y=f(x), y=g(x)$ có đồ thị lần lượt là (C) và (C').
  - Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (C'): $f(x)=g(x)$ (*)
  - Giải phương trình tìm x từ đó suy ra y và tọa độ giao điểm.
  - Số nghiệm của (*) là số giao điểm của (C) và (C').

2. Tương giao của đồ thị hàm bậc ba

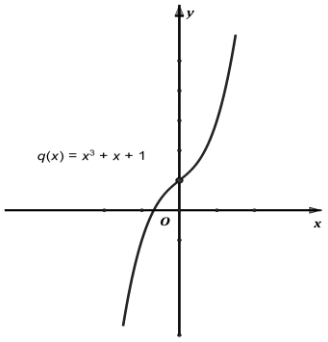
- **Phương pháp 1: Bảng biến thiên (phương pháp đồ thị)**
  - Lập phương trình hoành độ giao điểm dạng $F(x,m)=0$ (phương trình ẩn x tham số m)
  - Cô lập m đưa phương trình về dạng $m=f(x)$
  - Lập bảng biến thiên cho hàm số $y=f(x)$.
  - Dựa và giả thiết và bảng biến thiên từ đó suy ra m.

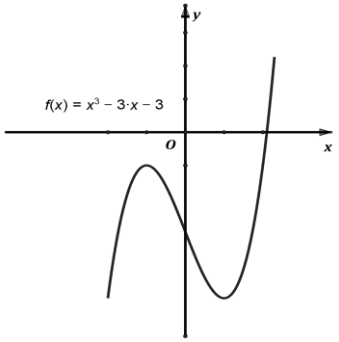
➢ **Dấu hiệu:** Sử dụng phương pháp bảng biến thiên khi m độc lập với x.

- **Phương pháp 2: Nhẩm nghiệm – tam thức bậc 2.**
  - Lập phương trình hoành độ giao điểm $F(x,m)=0$
  - Nhẩm nghiệm: (Khử tham số). Giả sử $x=x_0$ là 1 nghiệm của phương trình.
  - Phân tích: $F(x,m)=0 \Leftrightarrow (x-x_0).g(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_0 \\ g(x)=0 \end{array}\right.$ (là $g(x)=0$ là phương trình bậc hai ẩn x tham số m).
  - Dựa vào yêu cầu bài toán đi xử lý phương trình bậc hai $g(x)=0$.
- **Phương pháp 3: Cực trị**

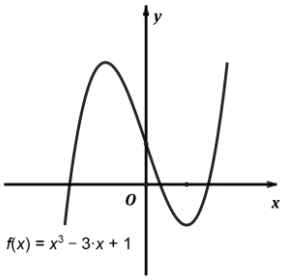
  Nhận dạng: Khi bài toán không cô lập được m và cũng không nhẩm được nghiệm.

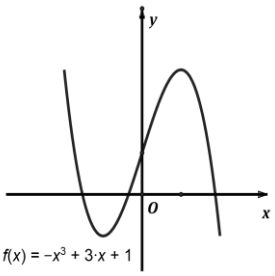
  Quy tắc:
  - Lập phương trình hoành độ giao điểm $F(x,m)=0$ (1). Xét hàm số $y=F(x,m)$
  - Để (1) có đúng 1 nghiệm thì đồ thị $y=F(x,m)$ cắt trục hoành tại đúng 1 điểm.
  - Hoặc hàm số luôn đơn điệu trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ hoặc vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta_{y'} \le 0$
  - Hoặc hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{cd}.y_{ct}>0$ (tham khảo hình vẽ)



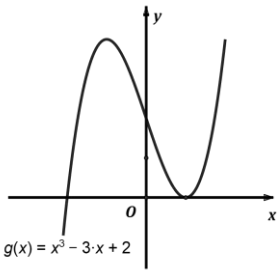


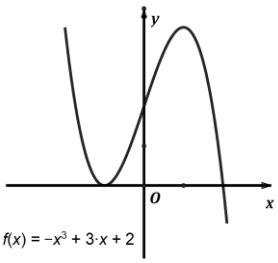
- Để (1) có đúng 3 nghiệm thì đồ thị $y = F(x,m)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{cd}.y_{ct} < 0$ (tham khảo hình vẽ).





- Để (1) có đúng 2 nghiệm thì đồ thị $y = F(x,m)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{cd}.y_{ct} = 0$ (tham khảo hình vẽ)





3. Tương giao của hàm số phân thức

- Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}(C)$ và đường thẳng $d: y = px + q$. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d): $\dfrac{ax+b}{cx+d} = px + q \Leftrightarrow F(x,m) = 0$ (phương trình bậc 2 ẩn x tham số m).
- Các câu hỏi thường gặp:
- Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{d}{c}$.
- Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt cùng thuộc nhánh phải của (C) $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và thỏa mãn : $-\dfrac{d}{c} < x_1 < x_2$.
- Tìm m để d cắt (C) tại . 2 . điểm phân biệt cùng thuộc nhánh trái của $(C) \Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và thỏa mãn $x_1 < x_2 < -\dfrac{d}{c}$.

- Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt thuộc hai nhánh của $(C) \Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và thỏa mãn $x_1 < -\dfrac{d}{c} < x_2$.
- Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A và B thỏa mãn điều kiện hình học cho trước:
  - ✓ Đoạn thẳng $AB = kS$
  - ✓ Tam giác ABC vuông.
  - ✓ Tam giác ABC có diện tích S_0

- **Quy tắc:**
  - Tìm điều kiện tồn tại A, B $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt.
  - Xác định tọa độ của A và B (chú ý Vi ét)
  - Dựa vào giả thiết xác lập phương trình ẩn m. Từ đó suy ra m.
- **Chú ý:** Công thức khoảng cách:
  - $A(x_A;y_A), B(x_B;y_B): AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
  - $\begin{cases} M(x_0;y_0) \\ \Delta: Ax_0 + By_0 + C = 0 \end{cases} \Rightarrow d(M,\Delta) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

4. Tương giao của hàm số bậc bốn

- Nghiệm của phương trình bậc bốn trùng phương: $ax^4 + bx^2 + c = 0 \ (1)$
- **Nhẩm nghiệm:**
  - Nhẩm nghiệm: Giả sử $x = x_0$ là một nghiệm của phương trình.
  - Khi đó ta phân tích: $f(x,m) = (x^2 - x_0^2)g(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm x_0 \\ g(x) = 0 \end{array}\right.$
  - Dựa vào giả thiết xử lý phương trình bậc hai $g(x) = 0$
- **Ẩn phụ - tam thức bậc hai:**
  - Đặt $t = x^2, (t \ge 0)$. Phương trình: $at^2 + bt + c = 0 \ (2)$.
  - Để (1) có đúng 1 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $\left[\begin{array}{l} t_1 < 0 = t_2 \\ t_1 = t_2 = 0 \end{array}\right.$
  - Để (1) có đúng 2 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $\left[\begin{array}{l} t_1 < 0 < t_2 \\ 0 < t_1 = t_2 \end{array}\right.$
  - Để (1) có đúng 3 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 = t_1 < t_2$
  - Để (1) có đúng 4 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 < t_1 < t_2$
- Bài toán: tìm m để $(C): y = ax^4 + bx^2 + c \ (1)$ cắt Ox tại bốn điểm có hoành độ lập thành một cấp số cộng.
  - Đặt $t = x^2, (t \ge 0)$. Phương trình: $at^2 + bt + c = 0$ (2).
  - Để (1) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt thì (2) phải có 2 nghiệm dương $t_1, t_2 (t_1 < t_2)$ thỏa mãn $t_2 = 9t_1$.
  - Kết hợp $t_2 = 9t_1$ vơi định lý vi – ét tìm được m.

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-x^2$ và đồ thị hàm số $y=-x^2+5x$ là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3-x^2=-x^2+5x\Leftrightarrow x^3-5x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=0\\x=\sqrt{5}\Rightarrow y=-5+\sqrt{5}\\x=-\sqrt{5}\Rightarrow y=-5-\sqrt{5}\end{array}\right.$$

Vậy số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-x^2$ và đồ thị hàm số $y=-x^2+5x$ là 3.

Câu 2: Đồ thị hàm số $y=-x^3+3x^2+2x-1$ và đồ thị hàm số $y=3x^2-2x-1$ có tất cả bao nhiêu điểm chung?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là

$$-x^3+3x^2+2x-1=3x^2-2x-1\Leftrightarrow -x^3+4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm 2\end{array}\right.\!.$$

Vậy đồ thị hai hàm số có tất cả 3 điểm chung.

Câu 3: Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^4+x^2-2$ với trục hoành.

A. 4. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4+x^2-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=1\\x^2=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pm 1$.

Số nghiệm của phương trình hoành độ bằng số giao điểm của đồ thị và trục hoành nên số giao điểm là 2.

Câu 4: Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{1-x}$ với trục tung là

A. $(-3;0)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(0;-3)$. **D.** $(3;0)$.

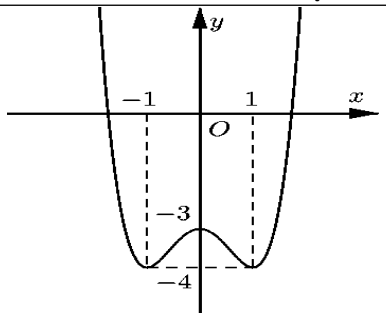
Lời giải

Chọn C

Gọi $A(0;y)$ là điểm thuộc trục tung, A thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{1-x}$ nên $y=-3$.

Vậy giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{1-x}$ và trục tung là $A(0;-3)$.

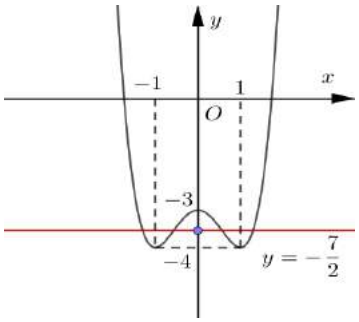
Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số giao điểm của đồ thị hàm số trên và đường thẳng $y=-\dfrac{7}{2}$ là



A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B



Số giao điểm của đồ thị hàm số trên và đường thẳng $y=-\dfrac{7}{2}$ là 4.

Câu 6: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ và trục hoành là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ và trục hoành là nghiệm phương trình

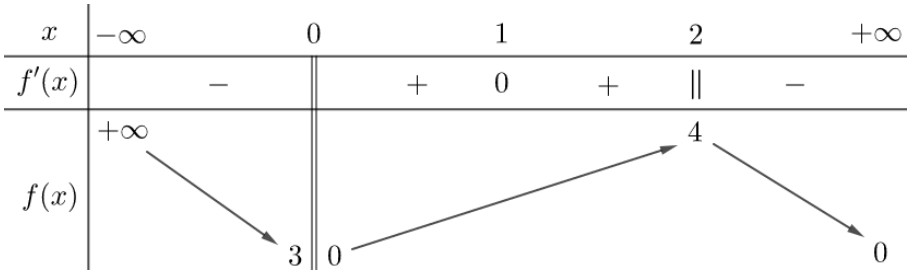
$x^3-3x^2+2=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-2x-2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x^2-2x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1-\sqrt{3} \\ x=1+\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Vậy có 3 giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ và trục hoành là các điểm $(1;0)$; $\left(1-\sqrt{3};0\right);\left(1+\sqrt{3};0\right)$.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $3f(x)-4=0$ là



A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $3f(x)-4=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{4}{3}$.

Vì $0<\frac{4}{3}<3$ nên phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Câu 8: Số điểm chung của hai đồ thị $(C): y=-x^4+2x^2-3$ và $(C'): y=x^3-3$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số (C) và (C') là nghiệm của phương trình:

$$-x^4+2x^2-3=x^3-3 \Leftrightarrow -x^4-x^3+2x^2=0 \Leftrightarrow x^2\left(-x^2-x+2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-2 \end{array}\right. .$$

Vậy số điểm chung của (C) và (C') là 3.

Câu 9: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+2$ và đường thẳng $y=x+2$ là

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3-3x+2=x+2 \Leftrightarrow x^3-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Vậy đồ thị hai hàm số cắt nhau tịa 3 điểm.

Câu 10: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=2x^3-3x^2-x+1$ và đường thẳng $y=2x-1$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm: $2x^3-3x^2-x+1=2x-1$

$$\Leftrightarrow 2x^3-3x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\frac{1}{2} \\ x=2 \end{array}\right. .$$

Vậy số giao điểm của hai đồ thị hàm số đã cho là 3.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1: Nhận diện đồ thị hàm số

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

Câu 1: Đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ cắt trục hoành tại đúng bao nhiêu điểm phân biệt?

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Do phương trình có 3 nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm.

Câu 2: Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. -1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** -2.

Lời giải

Chọn B

Giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ với trục tung có $x = 0 \Rightarrow y = 2$.

Câu 3: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 4x$ và trục hoành là

A. 2. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$.

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 4x$ và trục hoành là 3.

Câu 4: Giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 5x - 2$ với trục tung có toạ độ là

A. $\left(\frac{2}{3}; 0\right)$. **B.** $\left(0; \frac{2}{3}\right)$. **C.** $(1; 0)$. **D.** $(0; -2)$.

Lời giải

Chọn D

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm có hoành độ $x = 0 \Rightarrow y = -2$

Vậy toạ độ giao điểm đó là $(0; -2)$.

Câu 5: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2$ và trục hoành là

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm $x^4 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Câu 6: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^4 + 3x^2$ và trục hoành là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm $-x^4+3x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$

Vậy số giao điểm là 3.

Câu 7: Đồ thị của hàm số $y=-x^4-3x^2+5$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 5. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Giao điểm của đồ thị hàm số đã cho với trục tung có hoành độ $x=0 \Rightarrow y=5$.

Câu 8: Đồ thị hàm số $y=x^3+x^2-2x-2$ cắt trục tung tại điểm nào sau đây?

A. $M(0;-1)$. **B.** $N(-1;0)$. **C.** $P(-2;0)$. **D.** $Q(0;-2)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $x=0 \Rightarrow y=-2$. Vậy đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $Q(0;-2)$.

Câu 9: Đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+3x-1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 3. **B.** 0. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Cho $x=0; y=-1$

Đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+3x-1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -1

Câu 10: Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ với trục hoành là

A. $(0;2)$. **B.** $(0;-2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(2;0)$.

Lời giải

Chọn D

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ với trục hoành là nghiệm của phương trình

$\dfrac{x-2}{x+1}=0 \Leftrightarrow x=2$.

Vậy tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ với trục hoành là $(2;0)$.

Câu 11: Đồ thị hàm số $y=-x^3+2x^2-1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ

A. 3. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Câu 12: Đồ thị hàm số $y=x^3+1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng bao nhiêu?

A. 0. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Tọa độ giao điểm là nghiệm hệ $\begin{cases} y = x^3 + 1 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$.

Vậy đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1.

Câu 13: Đồ thị của hàm số $y = -x^4 + x^2 - 2$ cắt trục Oy tại điểm có tọa độ là

A. $(0;-2)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(0;-1)$. **D.** $(-2;0)$.

Lời giải

Chọn A

Cho $x = 0 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow$ Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục Oy là A $(0;-2)$.

Câu 14: Đồ thị hàm số $y = x^4 - 5x^2 + 4$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 2. **B.** -1. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Thay $x = 0$ vào biểu thức $y = x^4 - 5x^2 + 4 \Rightarrow y = 4$

Vậy đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 4.

Câu 15: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -2x^3 + 6x$ với trục hoành là:

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có phương trình hoành độ giao điểm là:

$$-2x^3 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Suy ra có ba giao điểm.

Câu 16: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -\frac{x^4}{2} + x^2 + \frac{3}{2}$ và trục hoành là

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và trục hoành là: $-\frac{x^4}{2} + x^2 + \frac{3}{2} = 0$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$.

Câu 17: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3$ và đường thẳng $y = x$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3 - 3x^2 + 3 = x \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2 - 2x - 3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

Do đó tọa độ các giao điểm của hai đồ thị là $(1;1);(-1;-1);(3;3)$.

Vậy hai đồ thị cắt nhau tại ba giao điểm.

Câu 18: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{2x-1}$ có tọa độ giao điểm với trục tung là

A. $\left(\dfrac{1}{2};0\right)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$. **D.** $(0;-1)$.

Lời giải

Chọn D

Với $x=0\Rightarrow y=-1$.

Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là: $(0;-1)$.

Câu 19: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+1$ với trục Ox là

A. 1. **B. 3.** **C. 2.** **D. 0.**

Lời giải

Chọn C

Số giao điểm là số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm $x^4-2x^2+1=0$

$\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)^2=0\Leftrightarrow x^2-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$.

Vậy phương trình $x^4-2x^2+1=0$ có 2 nghiệm $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$ nên số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+1$ với trục Ox là 2.

Câu 20: Số giao điểm của hai đồ thị $y=x^4+3x^2+2$ và $y=x^2+2$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Số giao điểm của hai đồ thị $y=x^4+3x^2+2$ và $y=x^2+2$ là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm: $x^4+3x^2+2=x^2+2\Leftrightarrow x^4+2x^2=0\Leftrightarrow x=0$.

Câu 21: Đồ thị hàm số $y=x^2-3x$ cắt đường thẳng $y=x-4$ tại bao nhiêu điểm?

A. 2 điểm. **B.** 1 điểm. **C.** 4 điểm. **D.** 0 điểm.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$x^2-3x=x-4\Leftrightarrow x^2-4x+4=0\Leftrightarrow x=2\Rightarrow y=-2$.

Vậy: đồ thị hàm số $y=x^2-3x$ cắt đường thẳng $y=x-4$ tại một điểm.

Câu 22: Biết đồ thị hai hàm số $y=x-1$ và $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A,\ B$. Tọa độ trung điểm của $A,\ B$ là $I(a;b)$. Tính a^2+b^2.

A. $a^2+b^2=4$. **B.** $a^2+b^2=2$. **C.** $a^2+b^2=1$. **D.** $a^2+b^2=5$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng $y=x-1$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A và B. Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x-1=\dfrac{2x-1}{x+1} \\ y=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x=0 \\ y=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right. \\ y=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Do đó, $A(0;-1)$ và $B(2;1)$.

Vậy tọa độ trung điểm của A, B là $I(1;0)$. Do đó $a^2+b^2=1^2+0^2=1$.

Câu 23: Đồ thị hàm số $y=x^2+2x-3$ và đồ thị hàm số $y=x-3$ có bao nhiêu điểm chung?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình $x^2+2x-3=x-3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Vậy hai đồ thị hàm số có 2 điểm chung.

Câu 24: Đồ thị hàm số $y=3x^2+x-2$ và trục tung có bao nhiêu điểm chung?

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Cho $x=0 \Rightarrow y=-2$.

Vậy đồ thị hàm số $y=3x^2+x-2$ cắt trục tung tại 1 điểm có tung độ bằng -2.

Câu 25: Cho hàm số $y=\dfrac{3x-2}{x-2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=x+1$. Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm A và B. Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là

A. $M(2;3)$. **B.** $M(2;2)$. **C.** $M(4;6)$. **D.** $M(4;4)$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm giữa đồ thị hàm số (C) và đường thẳng d:

$\dfrac{3x-2}{x-2}=x+1$ (điều kiện $x\neq 2$).

$$\Leftrightarrow 3x-2=(x-2)(x+1) \Leftrightarrow 3x-2=x^2+x-2x-2 \Leftrightarrow x^2-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \ (n) \\ x=4 \ (n) \end{array}\right.$$

Với $x=0$ suy ra $y=0+1=1$. Suy ra $A(0;1)$.

Với $x=4$ suy ra $y=4+1=5$. Suy ra $B(4;5)$.

Vậy tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là $M(2;3)$.

Câu 26: Đồ thị hàm số nào sau đây không cắt trục hoành?

A. $y=x^5+5x+2$. **B.** $y=x^4-3x^2+3$. **C.** $y=\dfrac{x-1}{2-x}$. **D.** $y=x^3-3x+1$.

Lời giải

Chọn B

Vì phương trình $x^4-3x^2+3=0$ vô nghiệm nên đồ thị hàm số $y=x^4-3x^2+3$ không cắt trục

hoành.

Câu 27: Đường thẳng $y=x-1$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$ tại hai điểm A,B có độ dài

A. $AB=\sqrt{46}$. **B.** $AB=\sqrt{42}$. **C.** $AB=5\sqrt{2}$. **D.** $AB=2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x-1=\frac{2x+1}{x-2}\Rightarrow\begin{cases}x\neq 2\\ x^2-5x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 2\\ \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}\\ x=\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}\\ x=\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}\end{array}\right..$$

Với $x=\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}\Rightarrow y=\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}\Rightarrow A\left(\dfrac{5+\sqrt{21}}{2};\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}\right)$.

Với $x=\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}\Rightarrow y=\dfrac{3-\sqrt{21}}{2}\Rightarrow B\left(\dfrac{5-\sqrt{21}}{2};\dfrac{3-\sqrt{21}}{2}\right)$.

Khi đó $AB=\sqrt{42}$.

Câu 28: Biết đường thẳng $y=x-2$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A và B có hoành độ $x_A,\ x_B$. Giá trị của biểu thức x_A+x_B bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x-2=\dfrac{2x+1}{x-1}\Rightarrow(x-2)(x-1)=2x+1$ với $x\neq 1$

$\Leftrightarrow x^2-5x+1=0\ (*)$

$x_A,\ x_B$ là hai nghiệm của phương trình $(*)$, vậy $x_A+x_B=5$.

Câu 29: Cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-4}{x+2}(C)$. Gọi $A(x_A;y_A),B(x_b;y_B)$ là tọa độ giao diểm của (C) và các trục tọa độ. Khi đó ta có $x_A+x_B+y_A+y_B$ bằng

A. 6. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có (C) cắt Ox tại $A(4;0)$, (C) cắt Oy tại $A(0;-2)$.

Khi đó ta có $x_A+x_B+y_A+y_B=2$.

Câu 30: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^4-4x^2+1$ với trục hoành là

A. 4. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^4-4x^2+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=2+\sqrt{3}\\x^2=2-\sqrt{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{2+\sqrt{3}}\\x=-\sqrt{2+\sqrt{3}}\\x=\sqrt{2-\sqrt{3}}\\x=-\sqrt{2-\sqrt{3}}\end{array}\right..$$

Câu 31: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x^2-12}{2-x}$ và đồ thị hàm số $y=2x^3+4x^2$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số: $\dfrac{3x^2-12}{2-x}$ $2x^3+4x^2$ $x\neq 2$

$\Leftrightarrow 3x^2-12$ $2x^3+4x^2$ $2-x$ $\Leftrightarrow 3x^2-12$ $8x^2-2x^4\Leftrightarrow 2x^4-5x^2-12$ $0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.$.

Vì $x\neq 2$ nên phương trình có duy nhất 1 nghiệm $x=-2$.

Câu 32: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+3$ và đường thẳng $y=x$ là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Số giao điểm của 2 đồ thị hàm số là số nghiệm của phương trình:

$$x^3-3x^2+3=x\Rightarrow x^3-3x^2-x+3=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm 1\\x=3\end{array}\right.\Rightarrow \text{có 3 giao điểm.}$$

Câu 33: Cho hai hàm số $y=x^3-2x$ và $y=x^2-x-1$. Biết rằng đồ thị của hai hàm số trên cắt nhau tại A và tiếp xúc nhau tại B. Xác định tọa độ điểm A.

A. $A(-1;-1)$. **B.** $A(1;1)$. **C.** $A(1;-1)$. **D.** $A(-1;1)$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là

$$x^3-2x=x^2-x-1\Leftrightarrow x^3-x^2-x+1=0\Leftrightarrow (x-1)^2.(x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right..$$

Do $x=-1$ là nghiệm đơn nên hai đồ thị hàm số cắt nhau tại điểm có hoành độ $x=-1$, khi đó tung độ $y=1$.

Vậy tọa độ điểm $A(-1;1)$.

Câu 34: Đồ thị hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tiếp xúc với trục hoành tại gốc tọa độ và cắt đường thẳng $x=1$ tại điểm có tung độ bằng 3 khi

A. $a=2;b=c=0$. **B.** $a=b=0;c=2$. **C.** $a=c=0;b=2$. **D.** $a=2;b=2;c=0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=3x^2+2ax+b$.

Đồ thị hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tiếp xúc với trục hoành tại gốc tọa độ suy ra đồ thị hàm số có điểm cực trị $O(0;0)\Rightarrow\begin{cases}f'(0)=0\\f(0)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=0\\c=0\end{cases}$.

Đồ thị hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ cắt đường thẳng $x=1$ tại điểm có tung độ bằng 3 suy ra $f(1)=3\Rightarrow 1+a+b+c=3\Rightarrow a=2$.

Vậy $a=2;b=c=0$.

Câu 35: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+x+1$ có đồ thị là (C) và đường thẳng $(d):y=1-x$. Biết (d) cắt (C) tại ba điểm phân biệt có hoành độ là x_1,x_2,x_3. Tính $T=x_1+x_2+x_3$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và đồ thị (C) là:

$$x^3-3x^2+x+1=1-x\Leftrightarrow x^3-3x^2+2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=1\\x=0\end{array}\right.$$

Vậy $T=x_1+x_2+x_3=2+1+0=3$.

Câu 36: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-x-3}{x-1}$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm phân biệt?

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Trục hoành có phương trình là $y=0$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-x-3}{x-1}$ và trục hoành $y=0$ là

$$\frac{2x^2-x-3}{x-1}=0(*)$$

Điều kiện $x\neq 1$, khi đó $(*)\Leftrightarrow 2x^2-x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}(n)\\x=-1(n)\end{array}\right.$.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-x-3}{x-1}$ cắt trục hoành tại hai điểm có tọa độ $(-1;0)$ và $\left(\dfrac{3}{2};0\right)$

Câu 37: Cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ là (C). Biết đường thẳng $d:y=x+2$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B có hoành độ lần lượt là x_1 và x_2. Giá trị của biểu thức x_1+x_2 bằng

A. 5. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

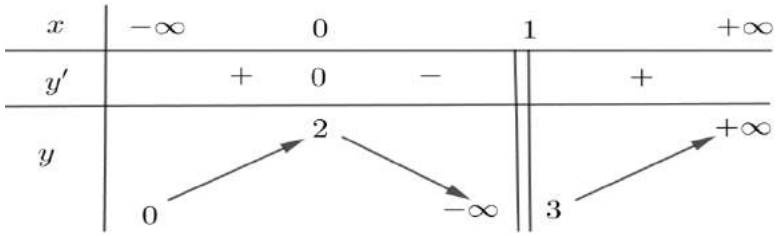
Lời giải

Chọn B

Hoành độ của A và B là nghiệm của phương trình $\dfrac{2x+1}{x-1}=x+2\Rightarrow x^2-x-3=0$

Theo Viet, $x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}=\dfrac{-(-1)}{1}=1$.

Câu 38: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới.



Số nghiệm của phương trình $f(x)=0$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại duy nhất một điểm. Vậy phương trình $f(x)=0$ có đúng một nghiệm.

Câu 39: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$ cắt trục *Oy* tại điểm có tung độ bằng

A. 1. **B.** – 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có *y*(0) = 3 nên đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$ cắt trục *Oy* tại điểm có tung độ bằng 3.

Câu 40: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+3x-1$ và đường thẳng $y=-1$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y=-x^3+3x-1$ và đường thẳng $y=-1$ là

$$-x^3+3x-1=-1\Leftrightarrow -x^3+3x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=\sqrt{3}\\x=-\sqrt{3}\end{array}\right. .$$

Vậy đồ thị hàm số $y=-x^3+3x-1$ và đường thẳng $y=-1$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt.

Câu 41: Cho (C_1) là đồ thị của hàm số $y=2x^3-3x+1$ và (C_2) là đồ thị của hàm số $y=x^3+x+1$. Gọi n là số điểm chung phân biệt của (C_1) và (C_2). Chọn khẳng định đúng.

A. $n=0$. **B.** $n=1$. **C.** $n=2$. **D.** $n=3$.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2):

$$2x^3-3x+1=x^3+x+1\Leftrightarrow x^3-4x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\x=-2\end{array}\right. .$$

Vì phương trình có 3 nghiệm phân biệt nên (C_1) và (C_2) có 3 điểm chung phân biệt.

Vậy $n=3$.

Câu 42: Biết hai đồ thị hàm số $y=x^3+11$ và $y=x^2+11$ cắt nhau tại hai điểm A, B. Tính độ dài đoạn AB.

A. $AB=\sqrt{2}$. **B.** $AB=\sqrt{3}$. **C.** $AB=2$. **D.** $AB=\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $y=x^3+11$ và $y=x^2+11$ ta có

$$x^3+11=x^2+11\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=11\\y=12\end{array}\right.$$

Gọi $A(0;11)$, $B(1;12)$ suy ra $AB=\sqrt{2}$.

Câu 43: Tìm tích các hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^4-3x^2+4$ với trục hoành?

A. 4. **B.** -1. **C.** -4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm: $-x^4-3x^2+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=1\\x^2=-4(VN)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$.

Vậy tích các hoành độ giao điểm là -1.

Câu 44: Đồ thị $(C):y=\dfrac{x-2}{x+2}$ cắt đường thẳng $d:y=2x-1$ tại các điểm có tọa độ là

A. $(0;-1);(-3;-1)$. **B.** $(0;-1);(-1;-3)$. **C.** $(-1;-5);(0;-1)$. **D.** $(-1;-3)$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d là:

$$\frac{x-2}{x+2}=2x-1\Leftrightarrow\begin{cases}x-2=(x+2)(2x-1)\\x\neq-2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+2x=0\\x\neq-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\end{array}\right.\\x\neq-2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\end{array}\right.$$

Với $x=0\Rightarrow y=-1$.

Với $x=-1\Rightarrow y=-3$.

Vậy đồ thị (C) cắt đường thẳng d tại các điểm có tọa độ là $(0;-1)$; $(-1;-3)$.

Câu 45: Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $d:y=x-1$ và đường cong $(C):y=\dfrac{2x-1}{x+5}$. Hoành độ trung điểm I của đoạn thẳng MN bằng:

A. 2. **B.** 1. **C.** -1. **D.** -2.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm: $x-1=\dfrac{2x-1}{x+5}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+5x-x-5=2x-1\\x\neq-5\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-4=0 \\ x\neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=1+\sqrt{5} \\ x_2=1-\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow x_I=\frac{1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}}{2}=1.$$

Câu 46: Cho hàm số $y=f(x)=x^2+1$. Số nghiệm của phương trình $f(x+3)=1$ là

A. 0. **B.** -3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=x+3$ ta được $t^2+1=1\Leftrightarrow t^2=0\Leftrightarrow t=0$.

Với $t=0$ ta có $x+3=0\Leftrightarrow x=-3$.

Vậy phương trình $f(x+3)=1$ có một nghiệm.

Câu 47: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^4+4x^2$ với trục hoành bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^4+4x^2$ với trục hoành bằng số nghiệm của phương trình $x^4+4x^2=0\Leftrightarrow x^2\left(x^2+4\right)=0\Leftrightarrow x=0$. Vậy có 1 giao điểm.

Câu 48: Tọa độ tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y=\frac{3x+2}{2-x}$ là

A. $\left(2;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(2;-3)$. **D.** $(-3;2)$.

Lời giải

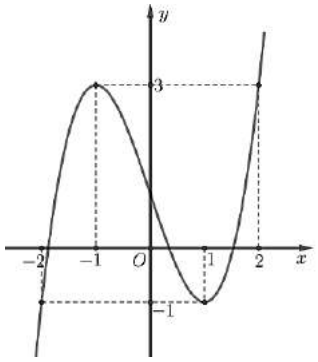
Chọn C

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Ta có các đường thẳng $x=2$, $y=-3$ lần lượt là đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Vậy tọa độ tâm đối xứng của đồ thị là $(2;-3)$.

Câu 49: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(2-f(x))=0$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

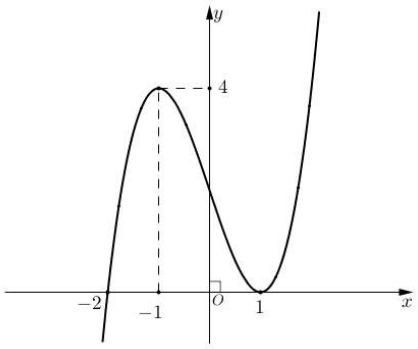
Từ đồ thị của hàm số $y=f(x)$ ta có:

$$f\left(2-f(x)\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-f(x)=a \ \left(a\in(-2;-1)\right) \\ 2-f(x)=b \ \left(b\in(0;1)\right) \\ 2-f(x)=c \ \left(c\in(1;2)\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=2-a \ (1) \ \left(2-a\in(3;4)\right) \\ f(x)=2-b \ (2) \ \left(2-b\in(1;2)\right). \\ f(x)=2-c \ (3) \ \left(2-c\in(0;1)\right) \end{array}\right.$$

Từ đồ thị của hàm số $y=f(x)$ ta thấy phương trình $(1),(2),(3)$ lần lượt có đúng 1, 3, 3 nghiệm và các nghiệm này là phân biệt.

Vậy phương trình $f\left(2-f(x)\right)=0$ có 7 nghiệm.

Câu 50: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f'\left(f\left(x\right)-2\right)=0$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị ta suy ra $f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

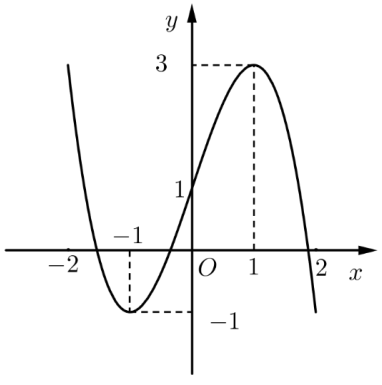
Khi đó $f'\left(f\left(x\right)-2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)-2=1 \\ f\left(x\right)-2=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=3 \\ f\left(x\right)=1 \end{array}\right.$.

Phương trình $f\left(x\right)=3$ có 3 nghiệm thực phân biệt.

Phương trình $f\left(x\right)=1$ có 3 nghiệm thực phân biệt.

Vậy phương trình $f'\left(f\left(x\right)-2\right)=0$ có 6 nghiệm thực phân biệt.

Câu 51: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Hỏi đồ thị hàm số $y=f\left(3x-2\right)$ cắt đường thẳng $y=2x-3$ tại nhiều nhất bao nhiêu điểm?

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 6.

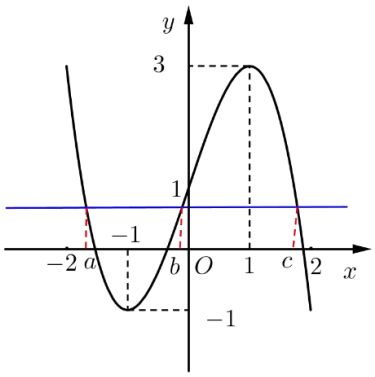
Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $f\left(3x-2\right)=2x-3\Leftrightarrow f\left(3x-2\right)-2x+3=0$.

Đặt $g\left(x\right)=f\left(3x-2\right)-2x+3$.

Ta có $g'\left(x\right)=3f'\left(3x-2\right)-2$; $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow f'\left(3x-2\right)=\frac{2}{3}$.

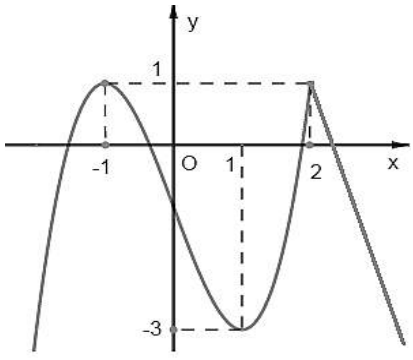


Ta có $f'\left(3x-2\right)=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x-2=a\in\left(-2;-1\right)\\3x-2=b\in\left(-1;0\right)\\3x-2=c\in\left(1;2\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{a+2}{3}\in\left(0;\frac{1}{3}\right)\\x=\frac{b+2}{3}\in\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)\\x=\frac{c+2}{3}\in\left(1;\frac{4}{3}\right)\end{array}\right.$.

Phương trình $g'\left(x\right)=0$ có 3 nghiệm phân biệt. Suy ra phương trình $g\left(x\right)=0$ có nhiều nhất là 4 nghiệm.

Vậy đồ thị hàm số $y=f\left(3x-2\right)$ cắt đường thẳng $y=2x-3$ tại nhiều nhất 4 điểm.

Câu 52: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=-\infty$ và có đồ thị như hình dưới đây



Với giả thiết, phương trình $f\left(1-\sqrt{x^3+x}\right)=a$ có nghiệm. Giả sử khi tham số a thay đổi, phương trình đã cho có nhiều nhất m nghiệm và có ít nhất n nghiệm. Giá trị của $m+n$ bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

$f\left(1-\sqrt{x^3+x}\right)=a$ (1). Điều kiện xác định: $x^3+x\ge 0\Leftrightarrow x\ge 0$.

Đặt $t=1-\sqrt{x^3+x}$, phương trình (1) thành $f\left(t\right)=a\ \ (2)$.

Xét hàm số $y=1-\sqrt{x^3+x}$ trên nửa khoảng $\left[0;+\infty\right)$.

$y'=-\dfrac{3x^2+1}{2\sqrt{x^3+x}}<0$, $\forall x\in\left(0;+\infty\right)$ $\Rightarrow$Hàm số $y=1-\sqrt{x^3+x}$ nghịch biến trên $\left(0;+\infty\right)$.

Do $\lim\limits_{x\to+\infty}y=-\infty$ và $y\left(0\right)=1$ nên $t\le 1$ với mọi $x\in\left[0;+\infty\right)$.

Với mỗi giá trị $t\le 1$ có duy nhất giá trị $x\in\left[0;+\infty\right)\Rightarrow$ số nghiệm của phương trình (1) là số nghiệm $t\le 1$ của phương trình (2).

Theo giả thiết, phương trình (1) có nghiệm $\Rightarrow$phương trình (2) có nghiệm $t\le 1$ và từ đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ đã cho thì phương trình (2) có nhiều nhất 2 nghiệm và ít nhất 1 nghiệm $t\le 1$.

Vậy $m+n=3$.

Câu 53: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$ và có bảng biến thiên như hình sau.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$
					-2		

Số nghiệm của phương trình $f\left(x^2\right)=1$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Số nghiệm của phương trình $f\left(x^2\right)=1$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(x^2\right)$ và đường thẳng $y=1$

x	$-\infty$	a	0	b	2	c	$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$
					-2		

Dựa vào bảng biến thiên ta có phương trình $f\left(x^2\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=a<0\ (1)\\x^2=b>0\ (2)\\x^2=c>0\ (3)\end{array}\right.$

Phương trình (1) vô nghiệm

Phương trình (2) có 2 nghiệm $x=\pm\sqrt{b}$

Phương trình (3) có 2 nghiệm $x=\pm\sqrt{c}$

Vậy phương trình có 4 nghiệm.

Câu 54: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	-3	↗	$+\infty$

Phương trình $\left|f(2-3x)+2\right|=5$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x)=f(2-3x)+2,\ x\in\mathbb{R}$.

Ta có : $g'(x)=-3f'(2-3x)$, suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(2-3x)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-3x=-1\\2-3x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$$

$g(1)=f(-1)+2=5+2=7;\ g\left(-\dfrac{1}{3}\right)=f(3)+2=-3+2=-1.$

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $g(x)$:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	7	↘	$-\infty$

Phương trình $\left|f(2-3x)+2\right|=5\Leftrightarrow\left|g(x)\right|=5$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}g(x)=5\\g(x)=-5\end{array}\right.$$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra

Phương trình $g\ x\ =5$ có 3 nghiệm phân biệt.

Phương trình $g\ x\ =-5$ có 1 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $\left|f(2-3x)+2\right|=5$ có 4 nghiệm.

Câu 55: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-1		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $f'\left(5-3f\left(x\right)\right)=0$ là

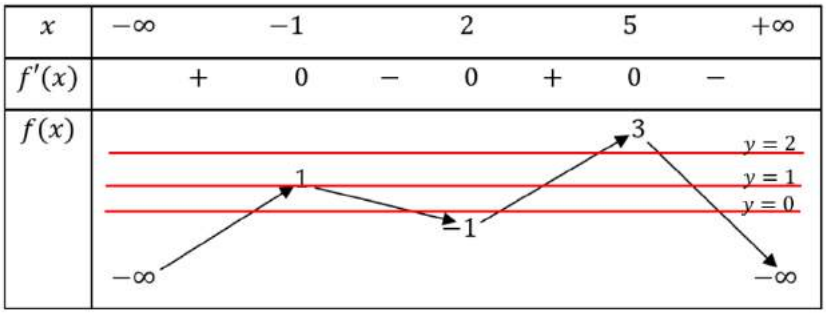
A. 12. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$. Ta có: $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\\x=5\end{array}\right.$.

Khi đó: $f'\left(5-3f\left(x\right)\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}5-3f\left(x\right)=-1\\5-3f\left(x\right)=2\\5-3f\left(x\right)=5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=2\\f\left(x\right)=1\\f\left(x\right)=0\end{array}\right.$.



Từ bảng biến thiên ta thấy:

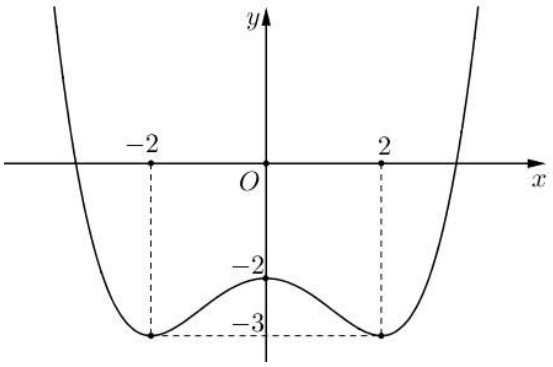
Phương trình: $f\left(x\right)=2$ có 2 nghiệm phân biệt.

Phương trình: $f\left(x\right)=1$ có 3 nghiệm phân biệt.

Phương trình: $f\left(x\right)=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $f'\left(5-3f\left(x\right)\right)=0$ có 9 nghiệm phân biệt.

Câu 56: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f'\left(2f\left(x\right)+3\right)=0$ là

A. 7. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình $f'\left(2f\left(x\right)+3\right)=0$ $\left(*\right)$.

Đặt $t=2f\left(x\right)+3$, từ phương trình $\left(*\right)$ ta có $f'\left(t\right)=0$.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$, ta suy ra: $f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\\t=0\\t=2\end{array}\right.$.

Với $t=-2\Leftrightarrow f\left(x\right)=-\frac{5}{2}$, dựa vào đồ thị ta thấy phương trình có 4 nghiệm thực phân biệt.

Với $t=0\Leftrightarrow f\left(x\right)=-\frac{3}{2}$, dựa vào đồ thị ta thấy phương trình có 2 nghiệm thực phân biệt.

Với $t=2\Leftrightarrow f\left(x\right)=-\frac{1}{2}$, dựa vào đồ thị ta thấy phương trình có 2 nghiệm thực phân biệt.

Vậy số nghiệm thực phân biệt của phương trình đã cho là: $4+2+2=8$ nghiệm.

Dạng 2: Tương giao đồ thị hàm số không chứa tham số

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-x^2$ và đồ thị hàm số $y=-x^2+5x$ là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3-x^2=-x^2+5x \Leftrightarrow x^3-5x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=0 \\ x=\sqrt{5} \Rightarrow y=-5+\sqrt{5} \\ x=-\sqrt{5} \Rightarrow y=-5-\sqrt{5} \end{array}\right.$$

Vậy số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-x^2$ và đồ thị hàm số $y=-x^2+5x$ là 3.

Câu 2: Gọi A,B là hai giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ và đường thẳng $y=3x-2$. Khi đó trung điểm của đoạn thẳng có tung độ là.

A. $x=\dfrac{7}{6}$. **B.** $x=\dfrac{7}{3}$. **C.** $y=\dfrac{3}{2}$. **D.** $y=-5$.

Lời giải

Chọn C

Gọi x_A, x_B là hoành độ giao điểm A,B của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ và đường thẳng $y=3x-2$

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số đã cho là nghiệm của phương trình:

$$\frac{2x+1}{x-1}=3x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ 2x-1=(x-1)(3x-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ 3x^2-7x+1=0 \end{cases} \Rightarrow x_A+x_B=\frac{7}{3}$$

Gọi $I(x_I;y_I)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Ta có $x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{7}{6} \Rightarrow y_I=3x_I-2=\dfrac{3}{2}$.

Câu 3: Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+3$ và đường thẳng $y=x$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3 **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là:

$$x^3-3x+3=x \Leftrightarrow x^3-4x+3=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy số giao điểm của hai đồ thị bằng 3.

Câu 4: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+6x$ với trục hoành là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

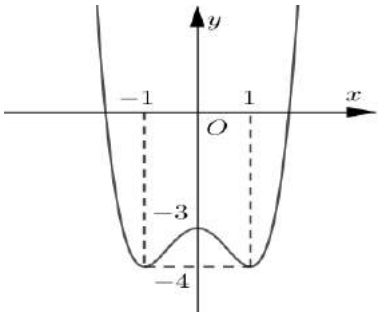
Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+6x$ với trục hoành là:

$$-x^3+6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\sqrt{6}\\x=-\sqrt{6}\end{array}\right.\text{.}$$

Vậy đồ thị hàm số $y=-x^3+6x$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

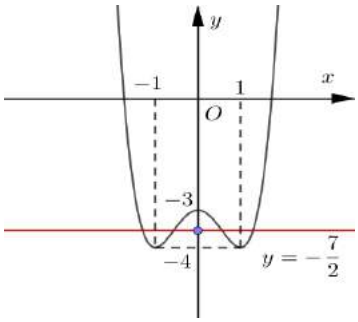
Câu 5: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số giao điểm của đồ thị hàm số trên và đường thẳng $y=-\dfrac{7}{2}$ là



A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B



Số giao điểm của đồ thị hàm số trên và đường thẳng $y=-\dfrac{7}{2}$ là 4.

Câu 6: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$, với $a\neq 0$ có đồ thị tiếp xúc với trục hoành Ox tại điểm có hoành độ bằng 1 và cắt đường thẳng $y=2m-1$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là 0 và 4, với m là tham số thự **C.** Phương trình $f\left(x\right)=f\left(-3\right)$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Do đồ thị $y=f\left(x\right)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1 nên $f\left(x\right)=a\left(x-1\right)^2\left(x-x_1\right)$

Đồ thị cắt đường thẳng $y=2m-1$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là 0 và 4 nên phương trình $a\left(x-1\right)^2\left(x-x_1\right)=2m-1$ có hai nghiệm là 0 và 4.

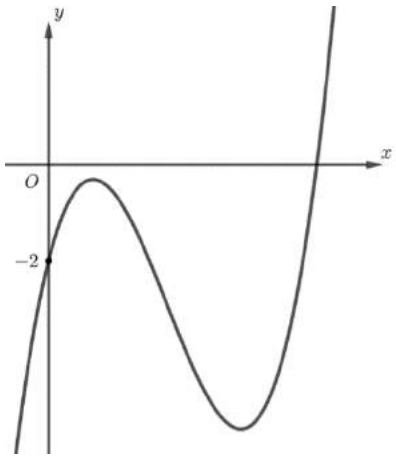
Khi đó ta có: $\begin{cases} -ax_1 = 2m-1 \\ 9a(4-x_1) = 2m-1 \end{cases} \Leftrightarrow 9a(4-x_1) = -ax_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{9}{2} \\ a \neq 0 \end{cases}$

Vậy $f(x) = a(x-1)^2\left(x-\dfrac{9}{2}\right)$

Có $f(x) = f(-3) \Leftrightarrow a(x-1)^2\left(x-\dfrac{9}{2}\right) = a.(-120)$ với $a \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\left(x-\dfrac{9}{2}\right) = -120$

Phương trình này có 1 nghiệm duy nhất

Câu 7: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ sau.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(3^x f(x)\right) + 2 = 0$ là

A. 3. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f\left(3^x f(x)\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow f\left(3^x f(x)\right) = -2$ (*).

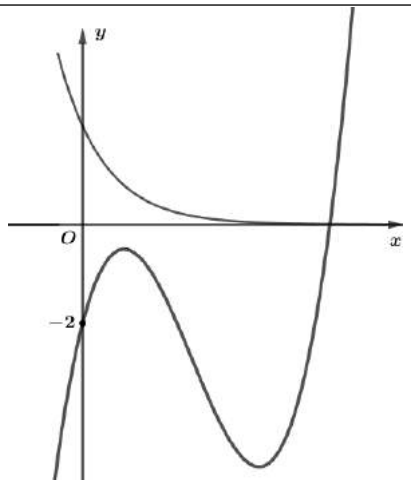
Từ đồ thị ta có: $(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 3^x f(x) = 0 & (1) \\ 3^x f(x) = a > 0 & (2) \\ 3^x f(x) = b > a & (3) \end{array}\right.$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1$. Do đó phương trình (1) có một nghiệm.

Phương trình $(2) \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{a}{3^x}$.

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{a}{3^x}$ có $g'(x) = \dfrac{-a\ln 3}{3^x} < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Phác thảo nhanh đồ thị hàm số $y = \dfrac{a}{3^x}$ ta thấy hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại một điểm nằm phía trên trục hoành. Do đó phương trình (2) có một nghiệm $x = x_2$.



Tương tự, phương trình (3) cũng có một nghiệm $x = x_3$.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm.

Câu 8: Đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x-2}{2x+1}$ cắt hai trục Ox và Oy tại A và B. Khi đó diện tích tam giác OAB (O là gốc tọa độ) bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

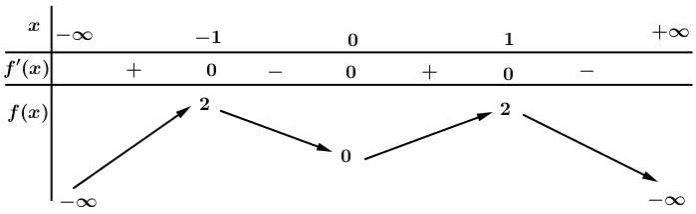
Chọn D

Đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x-2}{2x+1}$ cắt trục Ox tại điểm $A(2;0)$.

Đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x-2}{2x+1}$ cắt trục Oy tại điểm $B(0;-2)$.

Tam giác OAB vuông tại O nên $S_{OAB} = \dfrac{1}{2}OA.OB = \dfrac{1}{2}.|2|.|-2| = 2$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\pi;\dfrac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(\cos x) = 1$ là

A. 6. **B.** 7. **C.** 4. **D.** 5.

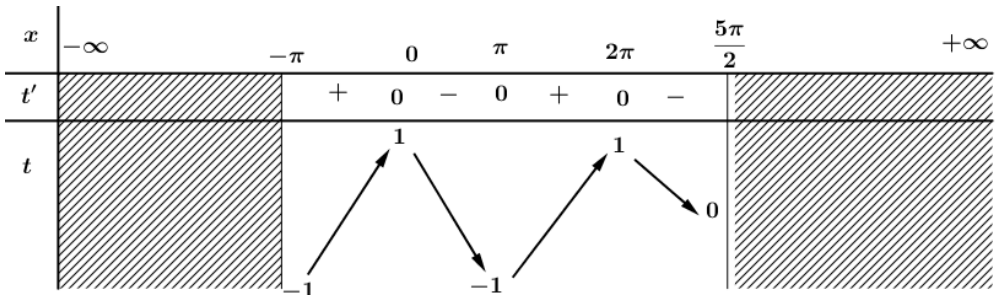
Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên phương trình $f(\cos x) = 1$ có nghiệm

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = a < -1 \ \text{(VN)} \\ \cos x = b \in (-1;0) \\ \cos x = c \in (0;1) \\ \cos x = d > 1 \ \text{(VN)} \end{array}\right.$$

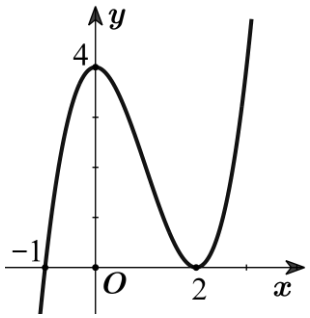
Xét $t=\cos x \Rightarrow t'=-\sin x=0 \Rightarrow x\in\{-\pi;0;\pi;2\pi\}$ trên đoạn $\left[-\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$.



Từ bảng biến thiên phương trình $\cos x=b\in(-1;0)$ có 3 nghiệm phân biệt; $\cos x=c\in(0;1)$ có 4 nghiệm phân biệt.

Vậy số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(\cos x)=1$ là 7.

Câu 10: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $2f\left(x+1-\sqrt{6x+3}\right)=1$ có bao nhiêu nghiệm?



A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Ta có phương trình $2f\left(x+1-\sqrt{6x+3}\right)=1\Leftrightarrow f\left(x+1-\sqrt{6x+3}\right)=\frac{1}{2}$.

Đặt $u(x)=x+1-\sqrt{6x+3}$. Tập xác định của $u(x)$: $D_{u(x)}=\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

$u'(x)=1-\frac{3}{\sqrt{6x+3}}=\frac{\sqrt{6x+3}-3}{\sqrt{6x+3}}$, $u'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Hàm số $u(x)=x+1-\sqrt{6x+3}$ có bảng biến thiên:

x	$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$u'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$u(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ và $u(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $f\left(u(x)\right)=f\left(x+1-\sqrt{6x+3}\right)$ như sau:

x	$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$u(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow 0$	-1	$\nearrow 0$	$2 \nearrow +\infty$
$f(u)$	a	$\nearrow 4$	$\searrow 0$	$\nearrow 4$	$\searrow 0 \nearrow +\infty$

Từ bảng biến thiên ta có ta có phương trình $2f\left(x+1-\sqrt{6x+3}\right)=1\Leftrightarrow f\left(x+1-\sqrt{6x+3}\right)=\frac{1}{2}$ có 4 nghiệm. (ta có $f\left(\frac{1}{2}\right)=a>2$)

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{2x-1}$ có tọa độ giao điểm với trục tung là

A. $\left(\dfrac{1}{2};0\right)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$. **D.** $(0;-1)$.

Lời giải

Chọn D

Với $x=0\Rightarrow y=-1$.

Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là: $(0;-1)$.

Câu 2: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+1$ với trục Ox là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Số giao điểm là số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm $x^4-2x^2+1=0$

$\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)^2=0\Leftrightarrow x^2-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$.

Vậy phương trình $x^4-2x^2+1=0$ có 2 nghiệm $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$ nên số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+1$ với trục Ox là 2.

Câu 3: Số giao điểm của hai đồ thị $y=x^4+3x^2+2$ và $y=x^2+2$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Số giao điểm của hai đồ thị $y=x^4+3x^2+2$ và $y=x^2+2$ là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm: $x^4+3x^2+2=x^2+2\Leftrightarrow x^4+2x^2=0\Leftrightarrow x=0$.

Câu 4: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-5x$ và đường thẳng $y=x$ là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-5x=x\Leftrightarrow x^3-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{6}\end{array}\right.$

Vậy có 3 giao điểm.

Câu 5: Đồ thị của hàm số nào sau đây không cắt trục hoành?

A. $y=x^3+x^2$. **B.** $y=2x-3$. **C.** $y=-x^2+8x$. **D.** $y=\dfrac{2022}{x-12}$.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $\frac{2022}{x-12}=0$ vô nghiệm nên đồ thị hàm số không cắt trục hoành.

Câu 6: Đồ thị hàm số $y=x^3+2x+12$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 1. **B.** 12. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $x=0 \Rightarrow y=0^3 \cdot 2.0 \mid 12=12$

Câu 7: Đồ thị hàm số $y=\frac{3x+6}{x-2}$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng

A. 0. **B.** -3. **C.** 3. **D.** -2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y=0 \Rightarrow 3x+6=0 \Leftrightarrow x=-2$. Vậy hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -2.

Câu 8: Đồ thị hàm số $y=\frac{3x+6}{x-2}$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng

A. 0. **B.** -3. **C.** 3. **D.** -2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y=0 \Rightarrow 3x+6=0 \Leftrightarrow x=-2$. Vậy hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -2.

Câu 9: Đồ thị của hàm số nào sau đây không cắt trục hoành?

A. $y=x^3+x^2$. **B.** $y=2x-3$. **C.** $y=-x^2+8x$. **D.** $y=\frac{2022}{x-12}$.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $\frac{2022}{x-12}=0$ vô nghiệm nên đồ thị hàm số không cắt trục hoành.

Câu 10: Đồ thị hàm số $y=x^3+2x+12$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 1. **B.** 12. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $x-0->y-0^3+2.0+12-12$

Câu 11: Số điểm chung của hai đồ thị $(C): y=x^3-3x^2+3x-1$ và $(P): y=x^2-x-1$ là

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-3x^2+3x-1=x^2-x-1 \Leftrightarrow x^3-4x^2+4x=0$

$\Leftrightarrow x\left(x^2-4x+4\right)=0 \Leftrightarrow x(x-2)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Vậy số điểm chung của hai đồ thị là 2.

Câu 12: Cho hàm số $y=\dfrac{3x-2}{x-2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=x+1$. Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm A và B. Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là

A. $M(2;3)$. **B.** $M(2;2)$. **C.** $M(4;6)$. **D.** $M(4;4)$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm giữa đồ thị hàm số (C) và đường thẳng d:

$\dfrac{3x-2}{x-2}=x+1$ (điều kiện $x\neq 2$).

$\Leftrightarrow 3x-2=(x-2)(x+1)\Leftrightarrow 3x-2=x^2+x-2x-2\Leftrightarrow x^2-4x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\ (n) \\ x=4\ (n) \end{array}\right.$.

Với $x=0$ suy ra $y=0+1=1$. Suy ra $A(0;1)$.

Với $x=4$ suy ra $y=4+1=5$. Suy ra $B(4;5)$.

Vậy tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là $M(2;3)$.

Câu 13: Cho hàm số $y=\dfrac{3x-2}{x-2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=x+1$. Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm A và B. Tọa độ trung điểm M của đoạn AB là

A. $M(2;3)$. **B.** $M(2;2)$. **C.** $M(4;6)$. **D.** $M(4;4)$.

Lời giải

Chọn A

Có $\dfrac{3x-2}{x-2}=x+1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\Rightarrow y=1\Rightarrow A(0;1) \\ x=4\Rightarrow y=5\Rightarrow B(4;5). \end{array}\right.$

Tọa độ trung điểm M của đoạn AB là $M(2;3)$.

Câu 14: Đồ thị hàm số nào sau đây không cắt trục hoành?

A. $y=x^5+5x+2$. **B.** $y=x^4-3x^2+3$. **C.** $y=\dfrac{x-1}{2-x}$. **D.** $y=x^3-3x+1$.

Lời giải

Chọn B

Vì phương trình $x^4-3x^2+3=0$ vô nghiệm nên đồ thị hàm số $y=x^4-3x^2+3$ không cắt trục hoành.

Câu 15: Đường thẳng $y=x-1$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$ tại hai điểm A, B có độ dài

A. $AB=\sqrt{46}$. **B.** $AB=\sqrt{42}$. **C.** $AB=5\sqrt{2}$. **D.** $AB=2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x-1=\frac{2x+1}{x-2}\Rightarrow\begin{cases}x\neq 2\\ x^2-5x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 2\\ \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}\\ x=\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}\\ x=\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}\end{array}\right.$$

Với $x=\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}\Rightarrow y=\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}\Rightarrow A\left(\dfrac{5+\sqrt{21}}{2};\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}\right)$.

Với $x=\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}\Rightarrow y=\dfrac{3-\sqrt{21}}{2}\Rightarrow B\left(\dfrac{5-\sqrt{21}}{2};\dfrac{3-\sqrt{21}}{2}\right)$.

Khi đó $AB=\sqrt{42}$.

Câu 16: Biết đường thẳng $y=x-2$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A và B có hoành độ x_A, x_B. Giá trị của biểu thức x_A+x_B bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x-2=\dfrac{2x+1}{x-1}\Rightarrow(x-2)(x-1)=2x+1$ với $x\neq 1$

$\Leftrightarrow x^2-5x+1=0\ (*)$

x_A, x_B là hai nghiệm của phương trình $(*)$, vậy $x_A+x_B=5$.

Câu 17: Cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-4}{x+2}(C)$. Gọi $A(x_A;y_A),B(x_b;y_B)$ là tọa độ giao diểm của (C) và các trục tọa độ. Khi đó ta có $x_A+x_B+y_A+y_B$ bằng

A. 6. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có (C) cắt Ox tại $A(4;0)$, (C) cắt Oy tại $A(0;-2)$.

Khi đó ta có $x_A+x_B+y_A+y_B=2$.

Câu 18: Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** -2. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ cắt trục hoành nên tung độ giao điểm: y = 0.

$\Rightarrow\dfrac{x-2}{x+1}=0\Leftrightarrow x=2$. Vậy, hoành độ giao điểm là $x=2$.

Câu 19: Đồ thị hàm số $y=x^3+2x-3$ cắt trục hoành tại điểm có tọa độ là

A. $(0;-3)$. **B.** $(0;-1)$. **C.** $(1;0)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn C

Xét $y=0 \Leftrightarrow x^3+2x-3=0 \Leftrightarrow x=1$

Vậy đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại điểm $(1;0)$.

Câu 20: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+4x^2-11x-30$ với trục hoành là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

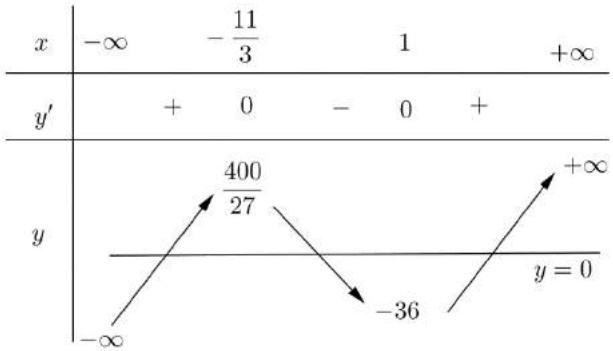
Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y=x^3+4x^2-11x-30$ trên tập xác định $\mathbb{R}$ ta có:

$$y'=3x^2+8x-11;\ y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{-11}{3} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Cách giải khác:

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3+4x^2-11x-30=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-2 \\ x=-5 \end{array}\right.$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho tạo với trục hoành 3 giao điểm.

Câu 21: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^4-4x^2+1$ với trục hoành là

A. 4. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^4-4x^2+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=2+\sqrt{3} \\ x^2=2-\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2+\sqrt{3}} \\ x=-\sqrt{2+\sqrt{3}} \\ x=\sqrt{2-\sqrt{3}} \\ x=-\sqrt{2-\sqrt{3}} \end{array}\right.$$

Câu 22: Cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-4}{x+2}(C)$. Gọi $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ là tọa độ giao điểm của (C) với các trục tọa độ. Khi đó ta có $x_A+x_B+y_A+y_B$ bằng

A. 6. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Gọi $A=(C)\cap Ox\Rightarrow A(4;0)$; $B=(C)\cap Oy\Rightarrow B(0;-2)$.

Nên $x_A+x_B+y_A+y_B=4+0+0+(-2)=2$.

Câu 23: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+2}{x+1}$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** -2. **C.** 2. **D.** $-\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Lập phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+2}{x+1}$ và trục tung $Oy: x=0$

Khi đó: $y=\dfrac{3.0+2}{0+1}=2$.

Câu 24: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x^2-12}{2-x}$ và đồ thị hàm số $y=2x^3+4x^2$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số: $\dfrac{3x^2-12}{2-x}$ $2x^3+4x^2$ $x\neq 2$

$\Leftrightarrow 3x^2-12$ $2x^3+4x^2$ $2-x$ $\Leftrightarrow 3x^2-12$ $8x^2-2x^4\Leftrightarrow 2x^4-5x^2-12$ $0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.$.

Vì $x\neq 2$ nên phương trình có duy nhất 1 nghiệm $x=-2$.

Câu 25: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+x+1$ có đồ thị là (C) và đường thẳng $(d): y=1-x$. Biết (d) cắt (C) tại ba điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2, x_3. Tính $T=x_1+x_2+x_3$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và đồ thị (C) là:

$$x^3-3x^2+x+1=1-x\Leftrightarrow x^3-3x^2+2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=1\\x=0\end{array}\right.$$.

Vậy $T=x_1+x_2+x_3=2+1+0=3$.

Câu 26: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-x-3}{x-1}$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm phân biệt?

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Trục hoành có phương trình là $y=0$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-x-3}{x-1}$ và trục hoành $y=0$ là

$\dfrac{2x^2-x-3}{x-1}=0(*)$

Điều kiện $x\neq 1$, khi đó $(*)\Leftrightarrow 2x^2-x-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2}(n) \\ x=-1(n) \end{array}\right.$.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-x-3}{x-1}$ cắt trục hoành tại hai điểm có tọa độ $(-1;0)$ và $\left(\dfrac{3}{2};0\right)$

Câu 27: Cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ là (C). Biết đường thẳng $d: y=x+2$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B có hoành độ lần lượt là x_1 và x_2. Giá trị của biểu thức x_1+x_2 bằng

A. 5. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Hoành độ của A và B là nghiệm của phương trình $\dfrac{2x+1}{x-1}=x+2\Rightarrow x^2-x-3=0$

Theo Viet, $x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}=\dfrac{-(-1)}{1}=1$.

Câu 28: Đồ thị hàm số $y=15x^4-3x^2-2021$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm?

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình hoành độ giao điểm $15x^4-3x^2-2021=0$

Đặt $t=x^2\geq 0$ phương trình trở thành $15t^2-3t-2021=0$. Vì $ac<0$ nên phương trình có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} t_1>0 \\ t_2<0\ (l) \end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{t_1}$.

Vậy đồ thị hàm số $y=15x^4-3x^2-2021$ cắt trục hoành tại 2 điểm.

Câu 29: Đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau cắt trục tung tại điểm có tung độ dương?

A. $y=(x^2+3)(x-2)$. **B.** $y=\dfrac{3x-2}{-2x-5}$. **C.** $y=\dfrac{3x+2}{-2x-5}$. **D.** $y=2x^4+4x^2-1$.

Lời giải

Chọn B

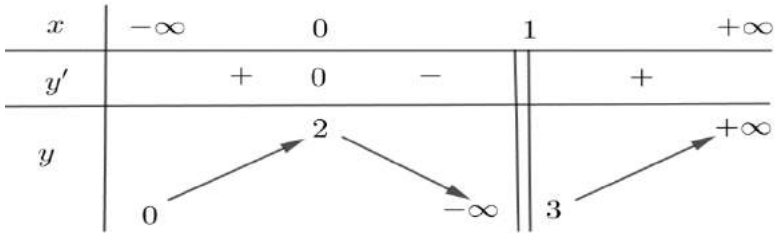
Điểm cắt trục tung của đồ thị hàm số có dạng $(0;y_0)$ với $y_0>0$.

Thay $x=0$ lần lượt vào 4 hàm số ở 4 phương án.

Ta thấy đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-2}{-2x-5}$ đi qua điểm $\left(0;\dfrac{2}{5}\right)$.

Như vậy hàm số $y=\dfrac{3x-2}{-2x-5}$ có đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương.

Câu 30: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới.



Số nghiệm của phương trình $f(x)=0$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại duy nhất một điểm. Vậy phương trình $f(x)=0$ có đúng một nghiệm.

Câu 31: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$ cắt trục *Oy* tại điểm có tung độ bằng

A. 1. **B.** – 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có *y*(0) = 3 nên đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$ cắt trục *Oy* tại điểm có tung độ bằng 3.

Câu 32: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+3x-1$ và đường thẳng $y=-1$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y=-x^3+3x-1$ và đường thẳng $y=-1$ là

$$-x^3+3x-1=-1\Leftrightarrow -x^3+3x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=\sqrt{3}\\ x=-\sqrt{3}\end{array}\right. .$$

Vậy đồ thị hàm số $y=-x^3+3x-1$ và đường thẳng $y=-1$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt.

Câu 33: Cho (C_1) là đồ thị của hàm số $y=2x^3-3x+1$ và (C_2) là đồ thị của hàm số $y=x^3+x+1$. Gọi n là số điểm chung phân biệt của (C_1) và (C_2). Chọn khẳng định đúng.

A. $n=0$. **B.** $n=1$. **C.** $n=2$. **D.** $n=3$.

Lời giải

Chọn D

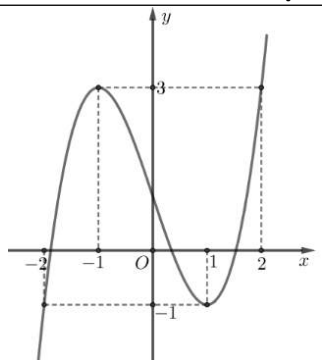
Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2):

$$2x^3-3x+1=x^3+x+1\Leftrightarrow x^3-4x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=2\\ x=-2\end{array}\right. .$$

Vì phương trình có 3 nghiệm phân biệt nên (C_1) và (C_2) có 3 điểm chung phân biệt.

Vậy $n=3$.

Câu 34: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(2-f(x)\right)=0$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

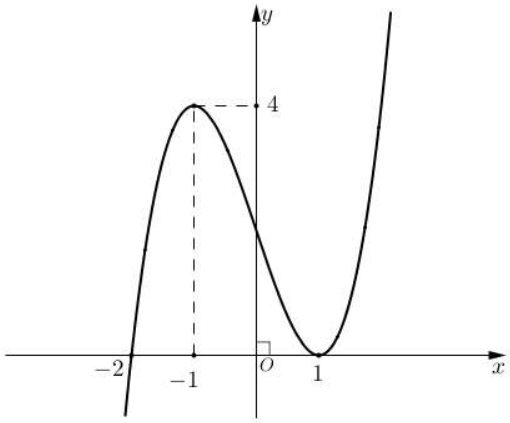
Từ đồ thị của hàm số $y=f(x)$ ta có:

$$f\left(2-f(x)\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-f(x)=a\ \left(a\in(-2;-1)\right)\\2-f(x)=b\ \left(b\in(0;1)\right)\\2-f(x)=c\ \left(c\in(1;2)\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=2-a\ (1)\ \left(2-a\in(3;4)\right)\\f(x)=2-b\ (2)\ \left(2-b\in(1;2)\right)\\f(x)=2-c\ (3)\ \left(2-c\in(0;1)\right)\end{array}\right.$$

Từ đồ thị của hàm số $y=f(x)$ ta thấy phương trình $(1),(2),(3)$ lần lượt có đúng 1, 3, 3 nghiệm và các nghiệm này là phân biệt.

Vậy phương trình $f\left(2-f(x)\right)=0$ có 7 nghiệm.

Câu 35: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f'\left(f\left(x\right)-2\right)=0$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị ta suy ra $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$.

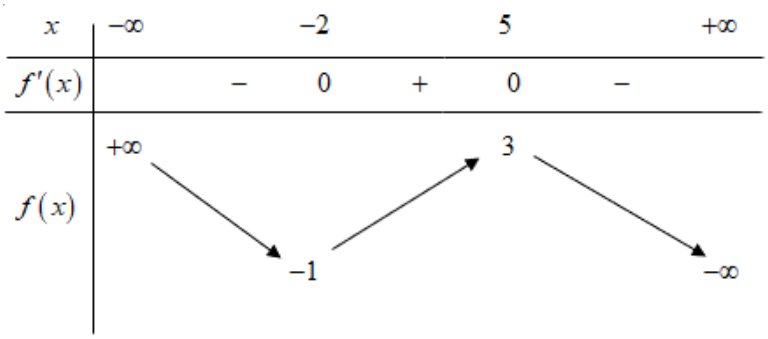
Khi đó $f'\left(f\left(x\right)-2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)-2=1\\f\left(x\right)-2=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=3\\f\left(x\right)=1\end{array}\right.$.

Phương trình $f\left(x\right)=3$ có 3 nghiệm thực phân biệt.

Phương trình $f\left(x\right)=1$ có 3 nghiệm thực phân biệt.

Vậy phương trình $f'\left(f\left(x\right)-2\right)=0$ có 6 nghiệm thực phân biệt.

Câu 36: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:



Số nghiệm thực của phương trình $f'\left(f\left(x\right)\right)=0$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'\left(f\left(x\right)\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=-2\\f\left(x\right)=5\end{array}\right.$

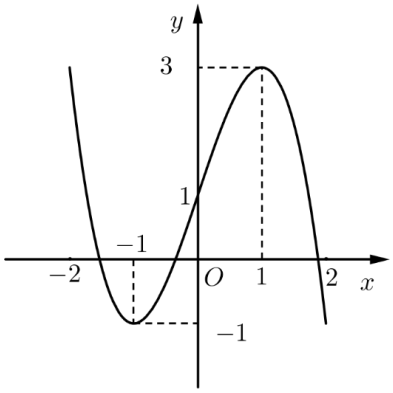
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

Phương trình $f\left(x\right)=-2$ có 1 nghiệm.

Phương trình $f\left(x\right)=5$ có 1 nghiệm.

Do đó phương trình $f'\left(f\left(x\right)\right)=0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 37: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Hỏi đồ thị hàm số $y=f\left(3x-2\right)$ cắt đường thẳng $y=2x-3$ tại nhiều nhất bao nhiêu điểm?

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 6.

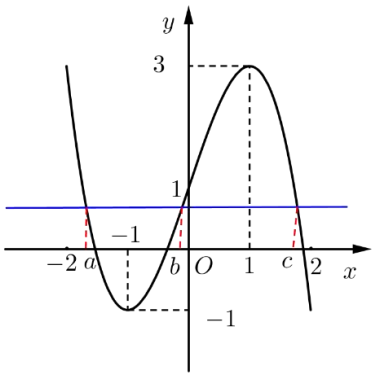
Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $f\left(3x-2\right)=2x-3\Leftrightarrow f\left(3x-2\right)-2x+3=0$.

Đặt $g\left(x\right)=f\left(3x-2\right)-2x+3$.

Ta có $g'\left(x\right)=3f'\left(3x-2\right)-2$; $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow f'\left(3x-2\right)=\frac{2}{3}$.

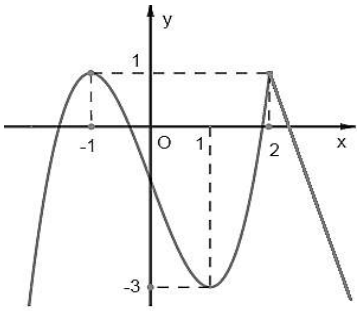


Ta có $f'(3x-2)=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x-2=a\in(-2;-1)\\3x-2=b\in(-1;0)\\3x-2=c\in(1;2)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{a+2}{3}\in\left(0;\dfrac{1}{3}\right)\\x=\dfrac{b+2}{3}\in\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right)\\x=\dfrac{c+2}{3}\in\left(1;\dfrac{4}{3}\right)\end{array}\right.$.

Phương trình $g'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt. Suy ra phương trình $g(x)=0$ có nhiều nhất là 4 nghiệm.

Vậy đồ thị hàm số $y=f(3x-2)$ cắt đường thẳng $y=2x-3$ tại nhiều nhất 4 điểm.

Câu 38: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ và có đồ thị như hình dưới đây



Với giả thiết, phương trình $f\left(1-\sqrt{x^3+x}\right)=a$ có nghiệm. Giả sử khi tham số a thay đổi, phương trình đã cho có nhiều nhất m nghiệm và có ít nhất n nghiệm. Giá trị của $m+n$ bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

$f\left(1-\sqrt{x^3+x}\right)=a$ (1). Điều kiện xác định: $x^3+x\geq 0\Leftrightarrow x\geq 0$.

Đặt $t=1-\sqrt{x^3+x}$, phương trình (1) thành $f(t)=a$ (2).

Xét hàm số $y=1-\sqrt{x^3+x}$ trên nửa khoảng $[0;+\infty)$.

$y'=-\dfrac{3x^2+1}{2\sqrt{x^3+x}}<0$, $\forall x\in(0;+\infty)$ $\Rightarrow$Hàm số $y=1-\sqrt{x^3+x}$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Do $\lim\limits_{x\to+\infty}y=-\infty$ và $y(0)=1$ nên $t\leq 1$ với mọi $x\in[0;+\infty)$.

Với mỗi giá trị $t \le 1$ có duy nhất giá trị $x \in [0;+\infty) \Rightarrow$ số nghiệm của phương trình (1) là số nghiệm $t \le 1$ của phương trình (2).

Theo giả thiết, phương trình (1) có nghiệm $\Rightarrow$phương trình (2) có nghiệm $t \le 1$ và từ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ đã cho thì phương trình (2) có nhiều nhất 2 nghiệm và ít nhất 1 nghiệm $t \le 1$.

Vậy $m+n=3$.

Câu 39: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như hình sau.

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f\left(x^2\right)=1$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Số nghiệm của phương trình $f\left(x^2\right)=1$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f\left(x^2\right)$ và đường thẳng $y=1$

x	$-\infty$		a		-1		0		b		2		c		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$							
$f(x)$		$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$y=1$						$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có phương trình $f\left(x^2\right)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = a < 0 \ (1) \\ x^2 = b > 0 \ (2) \\ x^2 = c > 0 \ (3) \end{array}\right.$

Phương trình (1) vô nghiệm

Phương trình (2) có 2 nghiệm $x = \pm\sqrt{b}$

Phương trình (3) có 2 nghiệm $x = \pm\sqrt{c}$

Vậy phương trình có 4 nghiệm.

Câu 40: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-1		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $f'\left(5-3f\left(x\right)\right)=0$ là

A. 12. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$. Ta có: $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\\x=5\end{array}\right.$.

Khi đó: $f'\left(5-3f\left(x\right)\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}5-3f\left(x\right)=-1\\5-3f\left(x\right)=2\\5-3f\left(x\right)=5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=2\\f\left(x\right)=1\\f\left(x\right)=0\end{array}\right.$.

x	$-\infty$		-1		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

$y=2$, $y=1$, $y=0$

Từ bảng biến thiên ta thấy:

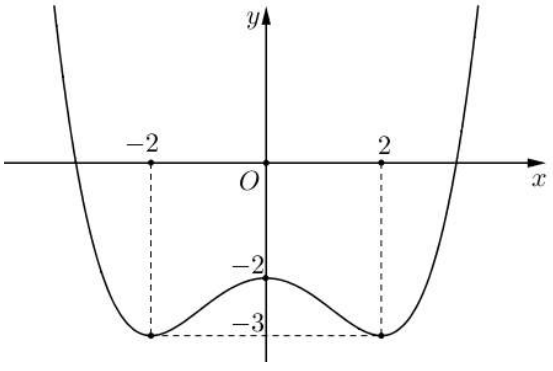
Phương trình: $f\left(x\right)=2$ có 2 nghiệm phân biệt.

Phương trình: $f\left(x\right)=1$ có 3 nghiệm phân biệt.

Phương trình: $f\left(x\right)=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $f'\left(5-3f\left(x\right)\right)=0$ có 9 nghiệm phân biệt.

Câu 41: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f'\left(2f\left(x\right)+3\right)=0$ là

A. 7. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình $f'\left(2f\left(x\right)+3\right)=0$ $\left(*\right)$.

Đặt $t=2f\left(x\right)+3$, từ phương trình $\left(*\right)$ ta có $f'\left(t\right)=0$.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$, ta suy ra: $f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\\t=0\\t=2\end{array}\right.$.

Với $t=-2\Leftrightarrow f\left(x\right)=-\dfrac{5}{2}$, dựa vào đồ thị ta thấy phương trình có 4 nghiệm thực phân biệt.

Với $t=0\Leftrightarrow f\left(x\right)=-\dfrac{3}{2}$, dựa vào đồ thị ta thấy phương trình có 2 nghiệm thực phân biệt.

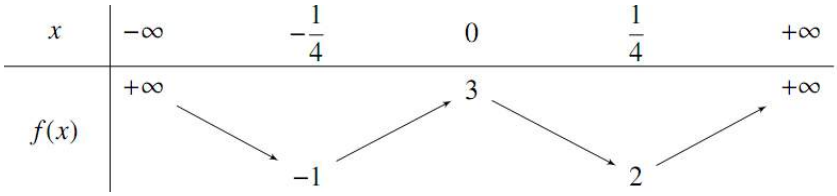
Với $t=2\Leftrightarrow f\left(x\right)=-\dfrac{1}{2}$, dựa vào đồ thị ta thấy phương trình có 2 nghiệm thực phân biệt.

Vậy, số nghiệm thực phân biệt của phương trình đã cho là: $4+2+2=8$ nghiệm.

Dạng 3: Tương giao đồ thị hàm hợp không chứa tham số

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:



Phương trình $f(x+1)-2=0$ có bao nhiêu nghiệm thực x?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

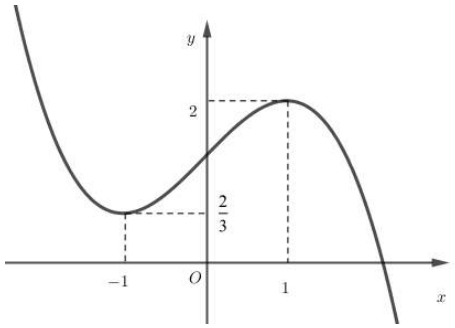
Chọn D

Ta có: $f(x+1)-2=0 \Leftrightarrow$ f(x+1) = 2.

Xét phương trình f(x) = 2 có 3 nghiệm phân biệt. Số nghiệm của phương trình f(x) = 2 là số nghiệm của phương trình f(x+1) = 2.

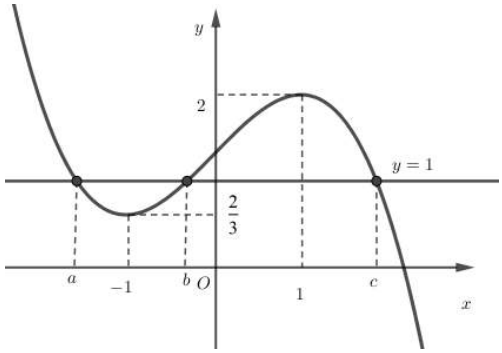
Từ đây ta suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Tìm số nghiệm của phương trình $f(x+2024)=1$.



A. 1 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 2

Lời giải



Chọn B

Đồ thị hàm số $y=f(x+2024)$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f(x)$ sang trái 2024 đơn vị. Do đó số nghiệm của phương trình $f(x+2024)=1$ cũng là số nghiệm của phương trình $f(x)=1$. Từ đồ thị hàm số ta được số nghiệm là 3.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	5	↘	$-\infty$

Số nghiệm của phương trình $3f(x)-7=0$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

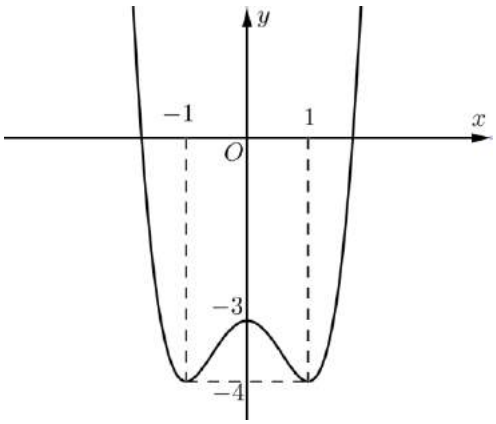
Lời giải

Chọn D

Ta có $3f(x)-7=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{7}{3}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị $y=f(x)$ cắt đường thẳng $y=\frac{7}{3}$ tại 4 điểm phân biệt nên phương trình $f(x)=\frac{7}{3}$ có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm bậc 4 và có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $2f(x)+7=0$ có bao nhiêu nghiệm?



A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** Vô nghiệm.

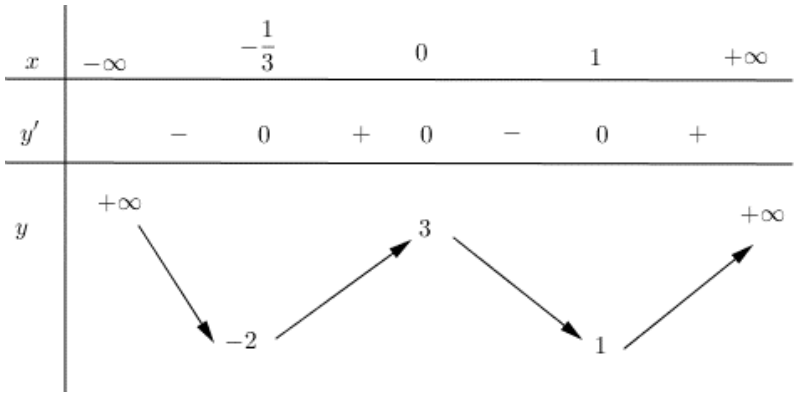
Lời giải

Chọn C

Ta có: $2f(x)+7=0 \Leftrightarrow f(x)=-\frac{7}{2}$.

Số nghiệm của phương trình đã cho là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=-\frac{7}{2}$. Dựa vào hình vẽ, nhận thấy đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt đường thẳng $y=-\frac{7}{2}$ tại 4 điểm phân biệt. Vậy phương trình $2f(x)+7=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f(3x-1)$ có bảng biến thiên như hình bên.



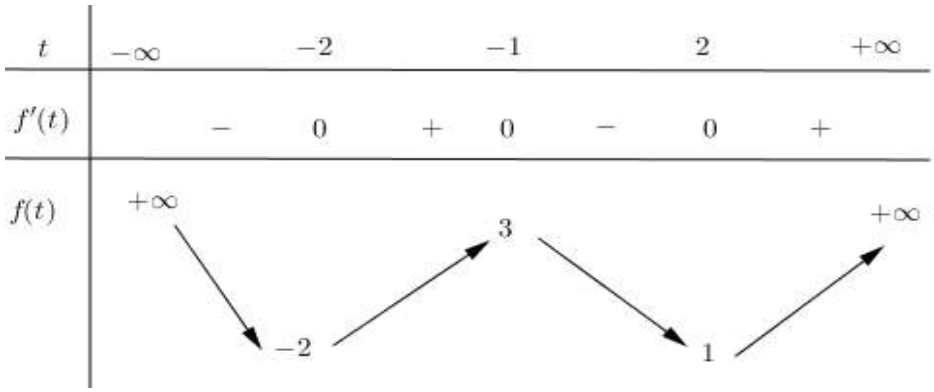
Tìm số nghiệm của phương trình $f\left(x^3-3x\right)=1$.

A. 7. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

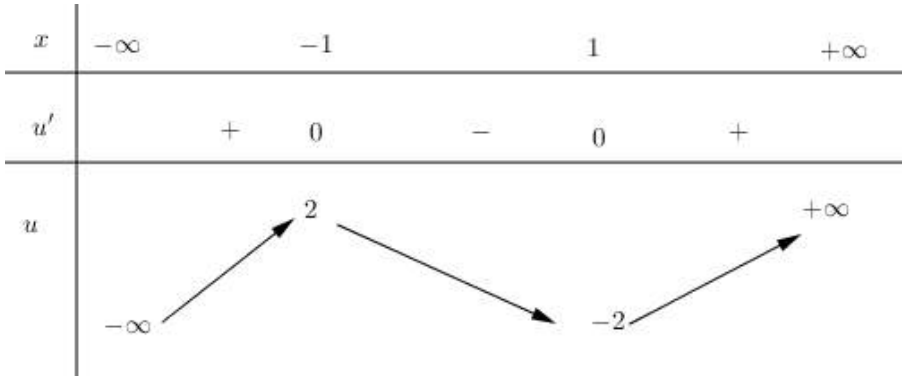
Đặt $t=3x-1$ ta có bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ như sau:



Từ đó ta có $f\left(x^3-3x\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3-3x=2\\x^3-3x=a\ (-2<a<-1)\\x^3-3x=b\ (b<-2)\end{array}\right.$

Đặt: $u=x^3-3x\Rightarrow u'=3x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\Rightarrow u=2\\x=1\Rightarrow u=-2\end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên của $u(x)$:



Do đó phương trình $x^3-3x=2$ có 2 nghiệm phân biệt

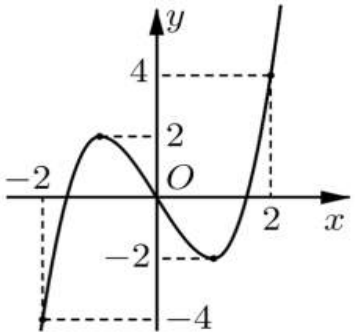
$x^3-3x=a\ (-2<a<-1)$ có ba nghiệm phân biệt

$x^3-3x=b\ (b<-2)$ có một nghiệm

Nhận thấy 6 nghiệm của ba phương trình trên là phân biệt với nhau

Từ đó ta có $f\left(x^3-3x\right)=1$ có 6 nghiệm phân biệt.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên dưới. Hỏi phương trình $\left|f(x)-1\right|=1$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt trên $[-2;2]$?



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\left|f(x)-1\right|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)-1=1\\f(x)-1=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=2\quad(1)\\f(x)=0\quad(2)\end{array}\right.$

Xét (1): Đường thẳng $y=2$ cắt đồ thị của hàm số $y=f(x)$ tại 2 điểm phân biệt trên $[-2;2]$

$\Rightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt trên $[-2;2]$.

Xét (2): Đường thẳng $y=0$ cắt đồ thị của hàm số $y=f(x)$ tại 3 điểm phân biệt trên $[-2;2]$

$\Rightarrow$ phương trình (2) có 3 nghiệm phân biệt trên $[-2;2]$.

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm phân biệt trên $[-2;2]$.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như bên. Số nghiệm của phương trình $f(x)-6=0$ là

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	5	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

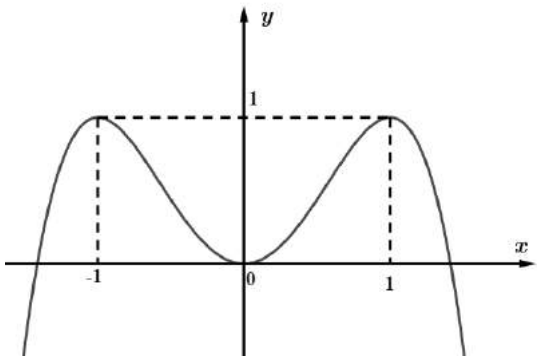
Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x)-6=0 \Leftrightarrow f(x)=6$.

Kẻ đường thẳng $y=6$ song song với trục Ox sẽ cắt đồ thị tại 2 điểm phân biệt cũng chính là hai nghiệm của phương trình $f(x)-6=0$.

Câu 2: Cho hàm đa thức bậc 4: $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ

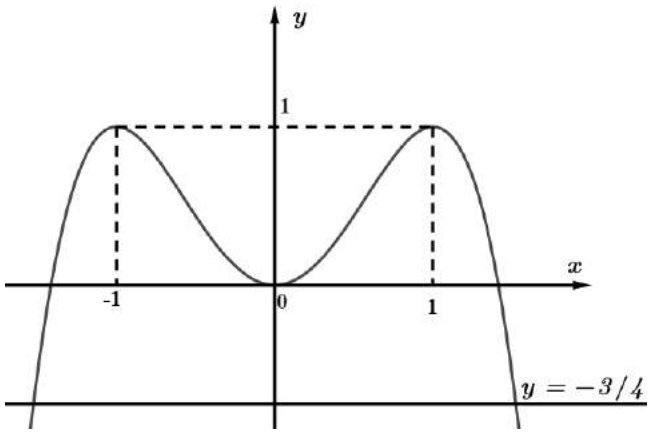


Tìm số nghiệm thực của phương trình $4f(x)+3=0$

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 0.

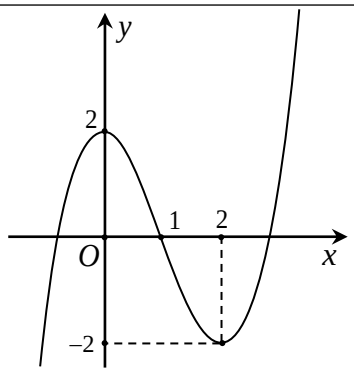
Lời giải

Chọn A



Ta có: $4f(x)+3=0 \Leftrightarrow f(x)=-\frac{3}{4}$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên dưới



Số nghiệm của phương trình $f(x)=-2$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có số nghiệm của phương trình $f(x)=-2$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=-2$.

Căn cứ vào đồ thị hàm số ta có số giao điểm bằng 2

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên tập số thực $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên. Số nghiệm của phương trình $2f(x)+3=0$ là

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

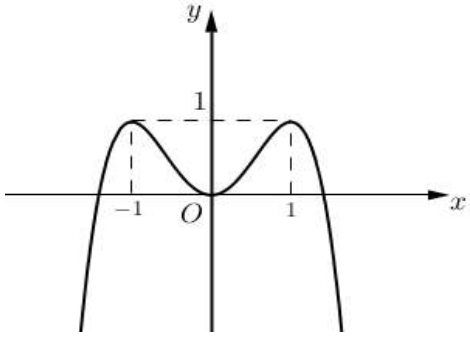
Chọn C

Xét phương trình $2f(x)+3=0 \Leftrightarrow f(x)=-\dfrac{3}{2}$.

Số nghiệm của phương trình trên là số giao điểm của đồ thị các hàm số $y=f(x)$ và $y=-\dfrac{3}{2}$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình trên có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c\ (a,b,c\in\mathbb{R})$. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình bên.

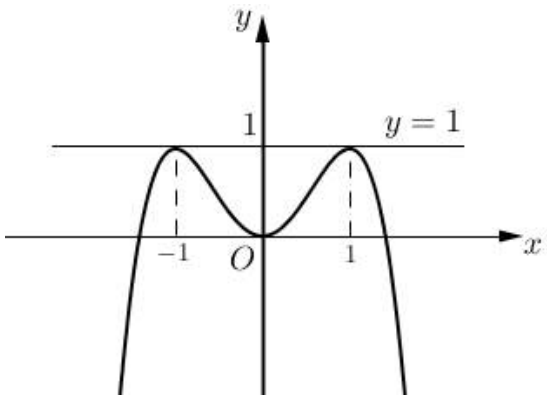


Số nghiệm của phương trình $f(x)=1$ là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

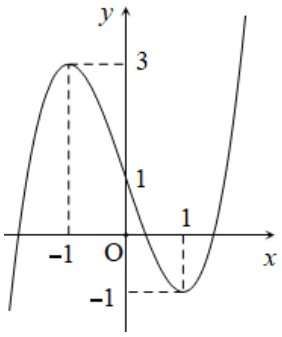
Chọn C



Từ hình vẽ suy ra $f(x)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-1\end{array}\right.$.

Vậy phương trình $f(x)=1$ có hai nghiệm phân biệt.

Câu 6: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ.



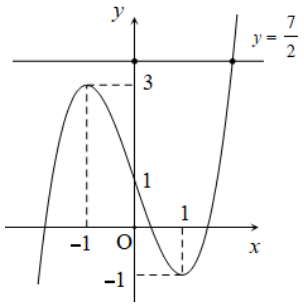
Số nghiệm thực của phương trình $2f(x)-7=0$ là:

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

$2f(x)-7=0\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{7}{2}$.



Ta có số nghiệm thực của phương trình $2f(x)-7=0$ cũng chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=\dfrac{7}{2}$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy đường thẳng $y=\dfrac{7}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại một điểm duy nhất.

Suy ra phương trình $2f(x)-7=0$ có một nghiệm thực.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thực dương của phương trình $2f(x)-3=0$ là

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

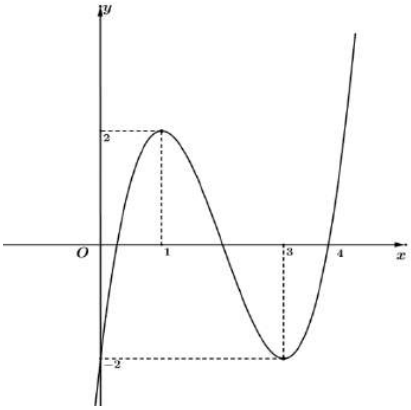
Ta có $2f(x)-3=0\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{3}{2}$.

Đây là phương trình hoành độ giao điểm giữa đồ thị $y=f(x)$ và đường thẳng $y=\dfrac{3}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên, đường thẳng $y=\dfrac{3}{2}$ cắt đồ thị $y=f(x)$ tại 4 điểm phân biệt, trong đó có 2 nghiệm dương phân biệt.

Vậy phương trình $2f(x)-3=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt.

Câu 8: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình sau:

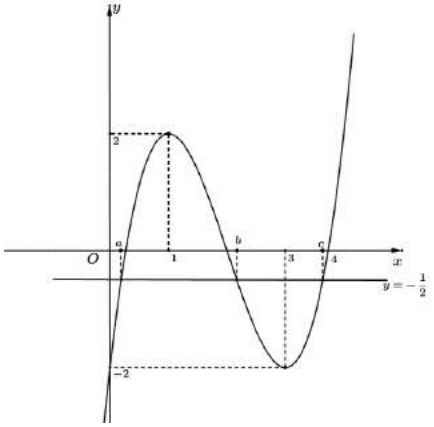


Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $2f\left(f(x)+2\right)+1=0$ là

A. 7. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D



Xét: $2f\left(f\left(x\right)+2\right)+1=0\Leftrightarrow f\left(f\left(x\right)+2\right)=-\dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)+2=a\left(a\in\left(0;1\right)\right)\\f\left(x\right)+2=b\left(b\in\left(1;3\right)\right)\\f\left(x\right)+2=c\left(c\in\left(3;4\right)\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=a-2\left(a-2\in\left(-2;-1\right)\right):3nghiem\\f\left(x\right)=b-2\left(b\in\left(-1;1\right)\right):\quad 3nghiem\\f\left(x\right)=c-2\left(c\in\left(1;2\right)\right):\quad 3nghiem\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có 9 nghiệm thực phân biệt.

Câu 9: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	2	↗	3	↘	$-\infty$

Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f'\left(f\left(x\right)\right)=0$ là

A. 3. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$ ta có: $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Khi đó: $f'\left(f\left(x\right)\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}f\left(x\right)=-2 & \left(1\right)\\f\left(x\right)=0 & \left(2\right)\\f\left(x\right)=2 & \left(3\right)\end{array}\right.$.

Từ bảng biến thiên suy ra
Phương trình (1) có 2 nghiệm.
Phương trình (2) có 2 nghiệm.
Phương trình (3) có 3 nghiệm.
Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm.

Câu 10: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $5^{\left|f\left(x\right)\right|}-125=0$ là

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Giải.

Theo giả thiết, $5^{|f(x)|}=5^3 \Leftrightarrow |f(x)|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=3 \\ f(x)=-3 \end{array}\right.$

Số nghiệm thực của phương trình $5^{|f(x)|}=125$ chính là số hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với đường thẳng $y=\pm 3$

Từ bảng biến thiên, ta thấy số hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với đường thẳng $y=3$ là 2, số hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với đường thẳng $y=-3$ là 2.

Vậy số nghiệm thực của phương trình $5^{|f(x)|}=125$ là 4.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$			0		0		0		
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[0;2\pi]$ của phương trình $f(\cos x)=-2$ là

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Đặt $t=\cos x$. Do $x\in[0;2\pi]$ nên $t\in[-1;1]$.

Phương trình trở thành $f(t)=-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=-1 \\ \cos x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=k\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

Mà $x\in[0;2\pi]$ suy ra $0\le k\pi\le 2\pi \Leftrightarrow 0\le k\le 2$.

Lại có $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow k\in\{0;1;2\}\Rightarrow x\in\{0;\pi;2\pi\}$.

Kết luận: Phương trình đã cho có 3 nghiệm thuộc đoạn $[0;2\pi]$.

Nhận xét: Ta nhận thấy với cách đặt như trên mà $t=-1$ thì cho ta 1 giá trị $x\in[0;2\pi]$; khi $t\in(-1;1]$ thì cho ta 2 giá trị $x\in[0;2\pi]$. Thế nên khi giải được $t=\pm 1$ ta có thể kết luận được bài toán.

Cách 2: Ghép bảng biến thiên

Đặt $t=\cos x$. Do $x\in[0;2\pi]$ nên $t\in[-1;1]$ và phương trình trở thành $f(t)=-2$.

Có $t'=-\sin x$; $t'=0\Leftrightarrow \sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi,(k\in\mathbb{Z})$. Mà $x\in[0;2\pi]\Rightarrow x\in\{0;\pi;2\pi\}$.

Bảng biến thiên:

x	0		π		2π
$t=\cos x$	1	0	-1	0	1
$f(t)$	-2	↗ -1	↘ -2	↗ -1	↘ -2

$y=-2$

Dựa vào bảng biến thiên ta có phương trình có 3 nghiệm thuộc đoạn $[0;2\pi]$.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	3	↘	1	↗	5	↘	3

Số nghiệm của phương trình $\dfrac{f^3(x)+26f(x)}{3f^2(x)+8}=3$ là:

A. 9. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\dfrac{f^3(x)+26f(x)}{3f^2(x)+8}=3 \Leftrightarrow f^3(x)+26f(x)=3\left[3f^2(x)+8\right]$

$$\Leftrightarrow f^3(x)-9f^2(x)+26f(x)-24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=2 \\ f(x)=4 \\ f(x)=3 \end{array}\right.$$

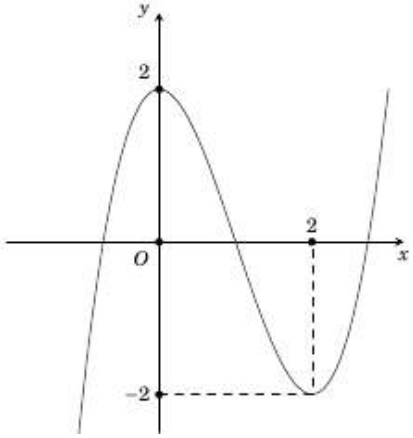
Xét $f(x)=2$, phương trình có 2 nghiệm.

Xét $f(x)=4$, phương trình có 2 nghiệm.

Xét $f(x)=3$, phương trình có 1 nghiệm.

Vậy số nghiệm của phương trình đã cho là 5 nghiệm.

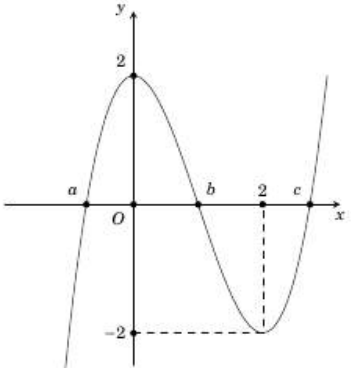
Câu 13: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \ \ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $f^2(x)+2f(x)-3=0$ là



A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B



Ta có $f^2(x)+2f(x)-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=1 \\ f(x)=-3 \end{array}\right.$.

Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=1$ là số giao điểm giữa đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=1$. Do đó phương trình $f(x)=1$ có 3 nghiệm thực phân biệt $x_1, x_2 \in (a;b)$ và $x_3 \in (c;+\infty)$.

Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=-3$ là số giao điểm giữa đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=-3$. Do đó phương trình $f(x)=-3$ có 1 nghiệm thực $x_4 \in (-\infty;a)$.

Vậy số nghiệm thực của phương trình $f^2(x)+2f(x)-3=0$ là 4 nghiệm.

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f\left(f\left(f(x)\right)\right)=0$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=2 & \\ x=a & (a<-2) \end{array}\right.$ (Tương giao của hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=0$)

$\Rightarrow f\left(f\left(f(x)\right)\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f\left(f(x)\right)=2 & \\ f\left(f(x)\right)=a & (a<-2) \end{array}\right.$

Ta lại có:

$f(x)=2 \Leftrightarrow x=b \quad (b>2)$ (Tương giao của hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=2$)

$f(x)=2 \Leftrightarrow x=c \quad (c<-2)$ (Tương giao của hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=c$)

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(f(x)\right)=2 \\ f\left(f(x)\right)=a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=b \\ f(x)=c \end{array}\right.$

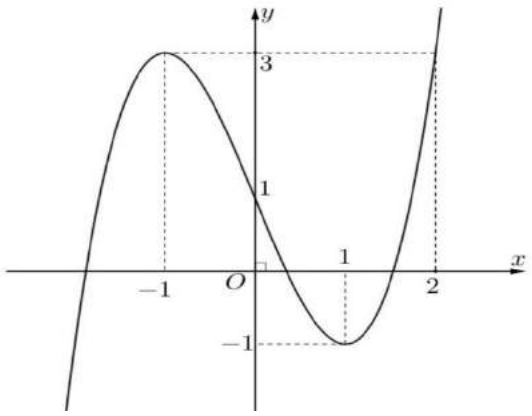
Mà

$f(x)=b \Leftrightarrow x=d \quad (d>2)$ (Tương giao của hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=b$)

$f(x)=c \Leftrightarrow x=e \quad (e<-2)$ (Tương giao của hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=e$)

Vậy phương trình có 2 nghiệm

Câu 15: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(2f(x)+1)=3$ là

A. 9. **B.** 3. **C.** 6 **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số đã cho ta thấy: $f(2f(x)+1)=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2f(x)+1=-1 \\ 2f(x)+1=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=-1 \\ f(x)=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

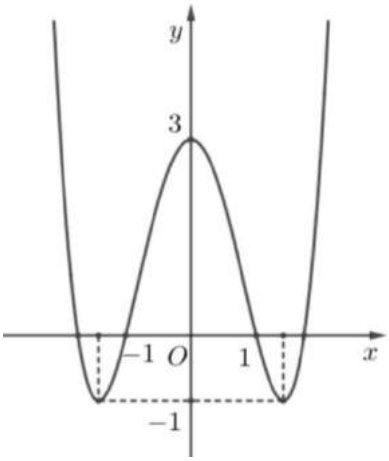
Căn cứ vào đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta có:

Phương trình $f(x)=-1$ có hai nghiệm thực phân biệt.

Phương trình $f(x)=\dfrac{1}{2}$ có ba nghiệm thực phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm thực phân biệt.

Câu 16: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ sau.

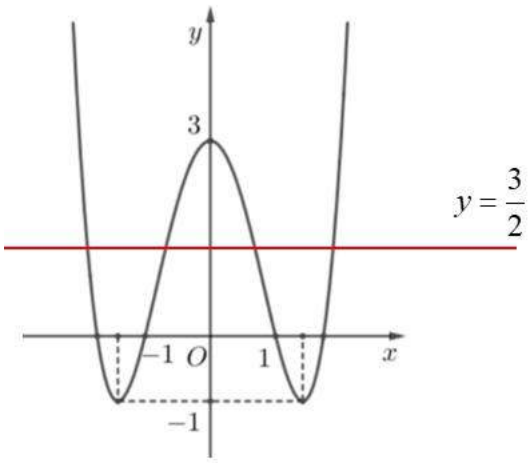


Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(-2x^3+3x^2)=\dfrac{3}{2}$ là

A. 7. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D



Dựa vào đồ thị ta có:

$$f\left(-2x^3+3x^2\right)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2x^3+3x^2=t_1\ (t_3<-1)\ (1)\\ -2x^3+3x^2=t_2\ (-1<t_2<0)\ (2)\\ -2x^3+3x^2=t_3\ (0<t_1<1)\ (3)\\ -2x^3+3x^2=t_4\ (t_4>1)\ (4)\end{array}\right.$$

Xét hàm số $g(x)=-2x^3+3x^2$.

Ta có $g'(x)=-6x^2+6x\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của $g(x)$:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên của $g(x)$, ta có:

Phương trình (3) có 3 nghiệm phân biệt.

Các phương trình $(1),(2),(4)$ mỗi phương trình có 1 nghiệm.

Nghiệm các phương trình $(1),(2),(3),(4)$ không trùng nhau.

Vậy phương trình $f\left(-2x^3+3x^2\right)=\frac{3}{2}$ có 6 nghiệm thực phân biệt.

Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f^2(x)-f(x)-2=0$ là

A. 4. **B.** 8. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f^2(x)-f(x)-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=-1 \\ f(x)=2 \end{array}\right.$

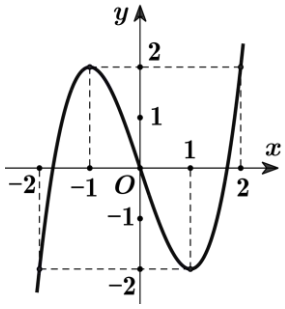
Dựa vào bảng biến thiên ta có:

Phương trình $f(x)=-1$ vô nghiệm

Phương trình $f(x)=2$ có 2 nghiệm

Vậy phương trình $f^2(x)-f(x)-2=0$ có 2 nghiệm.

Câu 18: Cho hàm bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(1-f(x))+1=0$ là

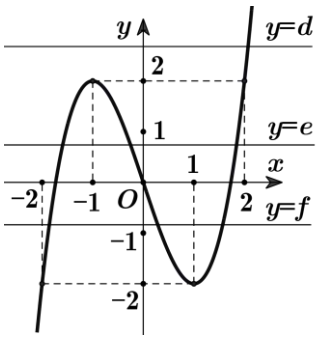
A. 8. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Có $f(1-f(x))+1=0 \Leftrightarrow f(1-f(x))=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-f(x)=a \\ 1-f(x)=b \\ 1-f(x)=c \end{array}\right.$ với $-2<a<-1; 0<b<1<c<2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=1-a=d \\ f(x)=1-b=e \\ f(x)=1-c=f \end{array}\right.$ (với $-1<f<0<e<1; 2<d<3$)



Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy:

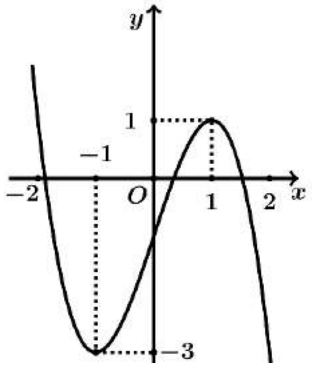
Phương trình $f(x)=d$ có 1 nghiệm.

Phương trình $f(x)=e$ có 3 nghiệm.

Phương trình $f(x)=f$ có 3 nghiệm.

Vậy phương trình $f(1-f(x))+1=0$ có tất cả 7 nghiệm thực phân biệt.

Câu 19: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(f(x-1)\right)=0$ là

A. 8. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải

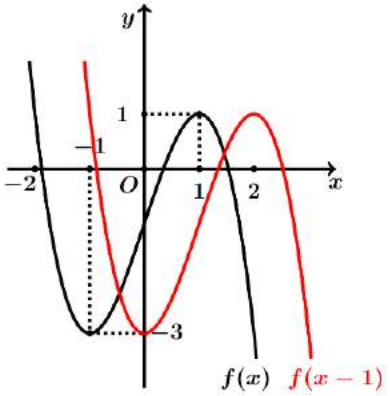
Chọn D

Từ đồ thị của hàm số ta có $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\in(-2\,;\,-1)\\x=x_2\in(0\,;1)\\x=x_3\in(1\,;2)\end{array}\right.$.

Vì thế ta có $f\left(f(x-1)\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}f(x-1)=x_1 & (1)\\f(x-1)=x_2 & (2).\\f(x-1)=x_3 & (3)\end{array}\right.$

Đồ thị của hàm số $f(x-1)$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị $f(x)$ sang phải 1 đơn vị nên số nghiệm của (1), (2) và (3) tương ứng bằng với số nghiệm của $(1')$, $(2')$ và $(3')$ như sau

$$\left[\begin{array}{ll}f(x)=x_1 & (1')\\f(x)=x_2 & (2')\\f(x)=x_3 & (3')\end{array}\right.$$



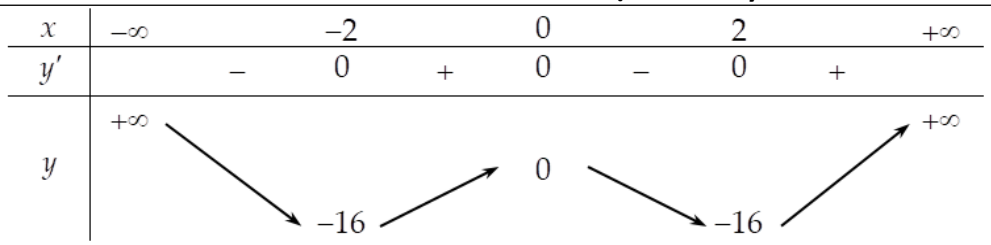
Vì $x_1\in(-2\,;\,-1)$ nên $(1')$ có 3 nghiệm.

Vì $x_2\in(0\,;1)$ nên $(2')$ có 3 nghiệm.

Vì $x_3\in(1\,;2)$ nên $(3')$ có 1 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có tổng cộng 7 nghiệm.

Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



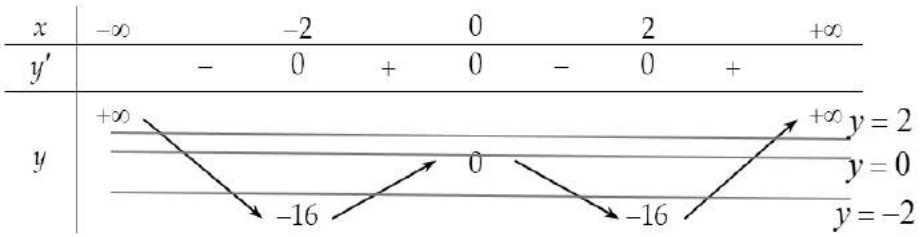
Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $2\left[f'\left(f\left(x\right)\right)\right]^3+4\left[f'\left(f\left(x\right)\right)\right]^2+3f'\left(f\left(x\right)\right)=0$ là:

A. 3. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

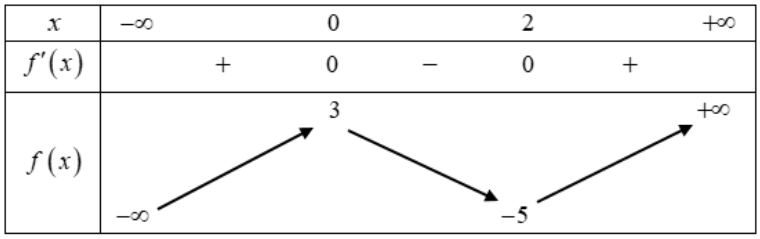
Chọn D

Ta có $2\left[f'\left(f\left(x\right)\right)\right]^3+4\left[f'\left(f\left(x\right)\right)\right]^2+3f'\left(f\left(x\right)\right)=0\Leftrightarrow f'\left(f\left(x\right)\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=2\\f\left(x\right)=-2\\f\left(x\right)=0\end{array}\right.$.



Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình $f\left(x\right)=2$ có hai nghiệm, phương trình $f\left(x\right)=0$ có 3 nghiệm và phương trình $f\left(x\right)=-2$ có 4 nghiệm. Vậy phương trình đã cho có 9 nghiệm.

Câu 21: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên:



Tìm số nghiệm phương trình $g'\left(x\right)=0$ với $g\left(x\right)=f\left(f\left(x\right)\right)$

A. 2. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'\left(x\right)=f'\left(x\right).f'\left(f\left(x\right)\right)$.

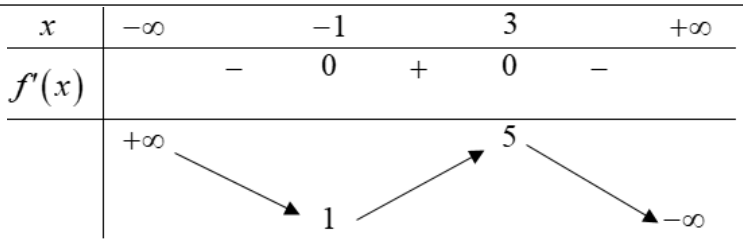
$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

$f'\left(f\left(x\right)\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=0\\f\left(x\right)=2\end{array}\right.$.

Phương trình $f\left(x\right)=0$ có 3 nghiệm, phương trình $f\left(x\right)=2$ có 3 nghiệm.

$\Rightarrow$ Phương trình $g'\left(x\right)=0$ có 8 nghiệm.

Câu 22: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau



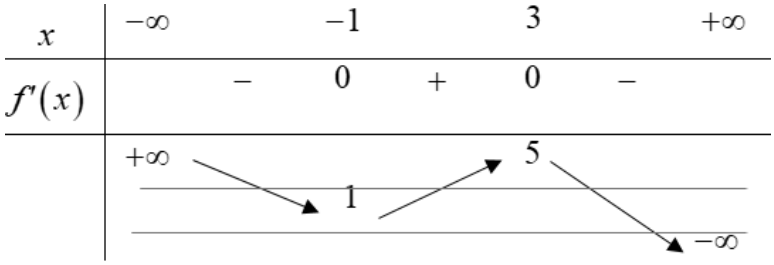
Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f^2(x)-f(x)-2=0$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f^2(x)-f(x)-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=-1 \\ f(x)=2 \end{array}\right.$



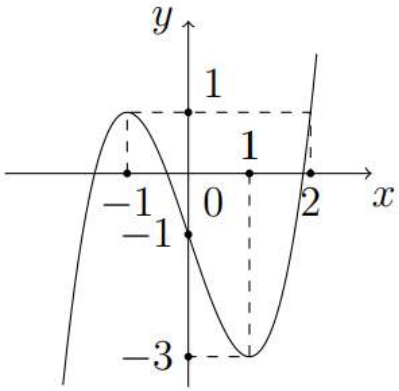
Từ bảng biến thiên ta có:

$f(x)=-1$ có nghiệm duy nhất

$f(x)=2$ có ba nghiệm phân biệt

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

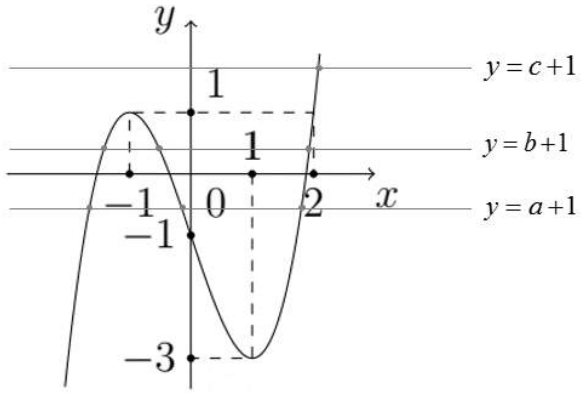
Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên. Phương trình $f\left(f(\cos x)-1\right)=0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0;2\pi]$?



A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C



Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy:

$$f\left(f\left(\cos x\right)-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(\cos x\right)-1=a\in\left(-2;-1\right)\\f\left(\cos x\right)-1=b\in\left(-1;0\right)\\f\left(\cos x\right)-1=c\in\left(1;2\right)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(\cos x\right)=a+1\in\left(-1;0\right)\\f\left(\cos x\right)=b+1\in\left(0;1\right)\\f\left(\cos x\right)=c+1\in\left(2;3\right)\end{array}\right.$$

Xét phương trình $f\left(\cos x\right)=a+1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\cos x=\alpha_1<-1 & (1)\\\cos x=\alpha_2\in\left(-1;0\right) & (2)\\\cos x=\alpha_3>1 & (3)\end{array}\right.$

Vì $\cos x\in\left[-1;1\right]$ nên phương trình $(1),(3)$ vô nghiệm và phương trình (2) có 2 nghiệm thuộc đoạn $\left[0;2\pi\right]$.

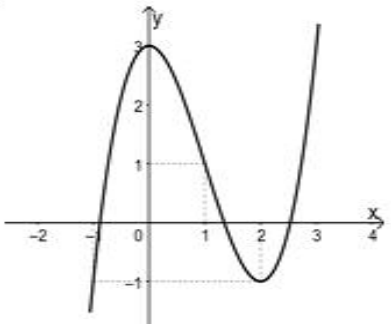
Xét phương trình $f\left(\cos x\right)=b+1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\cos x=\beta_1<-1 & (4)\\\cos x=\beta_2\in\left(-1;0\right) & (5)\\\cos x=\beta_3>1 & (6)\end{array}\right.$

Vì $\cos x\in\left[-1;1\right]$ nên phương trình $(4),(6)$ vô nghiệm và phương trình (5) có 2 nghiệm thuộc đoạn $\left[0;2\pi\right]$.

Xét phương trình $f\left(\cos x\right)=c+1\Leftrightarrow\cos x=t>2$ (vô nghiệm)

Nhận xét hai nghiệm của phương trình (5) không trùng với nghiệm nào của phương trình (2) nên phương trình $f\left[f\left(\cos x\right)-1\right]=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 24: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d\ \left(a\neq0\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};4\pi\right)$ của phương trình $f^2(\cos x)-5\left|f(\cos x)\right|+6=0$ là:

A. 13. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 12.

Lời giải

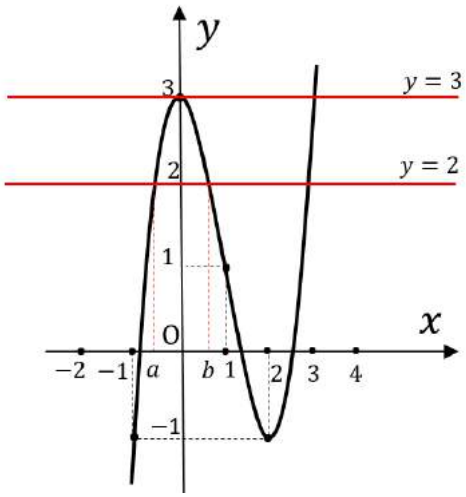
Chọn A

$x\in\left(-\frac{\pi}{2};4\pi\right)\Rightarrow\cos x\in[-1;1]\Rightarrow f(\cos x)\in[-1;3].$

Phương trình đã cho tương đương:

$f^2(\cos x)-5\left|f(\cos x)\right|+6=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|f(\cos x)\right|=2\\ \left|f(\cos x)\right|=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|f(\cos x)\right|=2\\ \left|f(\cos x)\right|=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(\cos x)=-2\,(VN)\\ f(\cos x)=2\\ f(\cos x)=-3\,(VN)\\ f(\cos x)=3\end{array}\right..$$



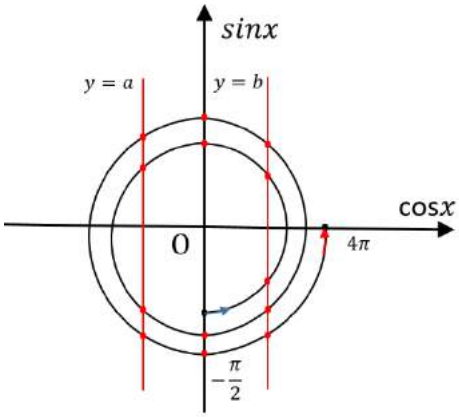
TH1: $f(\cos x)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=a\,(-1<a<0),(1)\\ \cos x=b\,(0<b<1),(2)\end{array}\right.$.

Phương trình số (1) có 4 nghiệm phân biệt thỏa mãn.

Phương trình số (2) có 5 nghiệm phân biệt thỏa mãn.

TH2: $f(\cos x)=3\Leftrightarrow\cos x=0,(3)$.

Phương trình số (3) có 4 nghiệm phân biệt thỏa mãn (lưu ý không lấy nghiệm tại $x=\frac{-\pi}{2}$).



Vậy kết hợp cả hai trường hợp, phương trình đã cho có tổng cộng 13 nghiệm

Câu 25: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2022;2022]$ để phương trình $\left(f^2(x)+x^2\right)^2-\left(m^2+2m+14\right)\left(f^2(x)+x^2\right)+4(m+1)^2+36=0$ có đúng 5 nghiệm thực phân biệt?

A. 4043. **B.** 4044. **C.** 1. **D.** 0 .

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên của hàm số cho ta có: $\begin{cases} f(x)=a\left(x^2-1\right)^2 \\ f(0)=3 \end{cases} \Rightarrow f(x)=3\left(x^2-1\right)^2$.

$\left(f^2(x)+x^2\right)^2-\left(m^2+2m+14\right)\left(f^2(x)+x^2\right)+4(m+1)^2+36=0 \ (1)$

$\Leftrightarrow \left(f^2(x)+x^2\right)^2-\left((m+1)^2+13\right)\left(f^2(x)+x^2\right)+4\left((m+1)^2+9\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f^2(x)+x^2=4 \\ f^2(x)+x^2=(m+1)^2+9 \end{array}\right. \ (I)$

Hàm số $g(x)=f^2(x)+x^2=9\left(x^2-1\right)^4+x^2$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$ và $g(0)=9$ nên để (1) có đúng 5 nghiệm thực phân biệt thì (1) phải có nghiệm bằng 0. Suy ra: $(m+1)^2+9=9 \Leftrightarrow m=-1$.

Thay $m=-1$ vào (I) ta được: $\left[\begin{array}{l} 9\left(x^2-1\right)^4+x^2=4 \\ 9\left(x^2-1\right)^4+x^2=9 \end{array}\right. \ (II)$

Đặt $t=x^2-1(*)(t\geq -1)$, thay vào (II) ta được: $\left[\begin{array}{l} 9t^4+t=3 \ (2) \\ 9t^4+t=8 \ (3) \end{array}\right.$

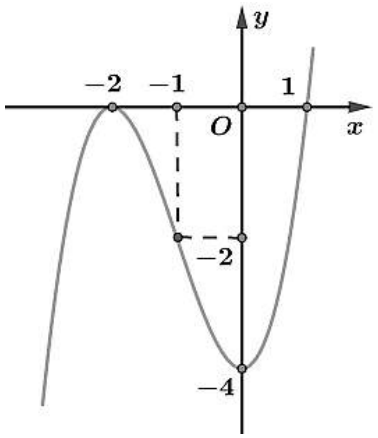
Xét hàm số $h(t)=9t^4+t$ trên $[-1;+\infty)$: $h'(t)=36t^3+1$; $h'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{-1}{\sqrt[3]{36}}$

t	-1		$\dfrac{-1}{\sqrt[3]{36}}$		$+\infty$
$h'(t)$		$-$	0	$+$	
$h(t)$	8	$\searrow$	$\dfrac{-\sqrt[3]{6}}{8}$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra: (2) có 2 nghiệm phân biệt $t_1,t_2>-1$ $t_1,t_2>-1$; (3) có 2 nghiệm phân biệt $t_3=-1,t_4>-1$ và các nghiệm của $(2),(3)$ là khác nhau.

Thay các nghiệm trên vào $(*)$ ta được (1) có đúng 7 nghiệm phân biệt (không thỏa mãn).

Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R có đồ thị như hình vẽ.



Tìm số nghiệm của phương trình $f(\sin x+\cos x)+3=0$ trên đoạn $[0;2\pi]$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(\sin x+\cos x)+3=0 \Leftrightarrow f(\sin x+\cos x)=-3$

Đặt $u=\sin x+\cos x$

Ta có $u'=\cos x-\sin x$;

$u'=0 \Leftrightarrow \cos x-\sin x=0 \Leftrightarrow \sin x=\cos x \Leftrightarrow \tan x=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$.

Mà $x\in[0;2\pi] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{4} \\ x=\dfrac{5\pi}{4} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $u(x)$:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		2π
u'		$+$	0	$-$	0	$+$	
u	1	↗	$\sqrt{2}$	↘	$-\sqrt{2}$	↗	1

Hàm số u có 2 điểm cực trị là $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{4} \\ x=\dfrac{5\pi}{4} \end{array}\right.$.

Ta có $f(\sqrt{2})=a$, $f(-\sqrt{2})=b$ với $a>0$, $-2<b<0$.

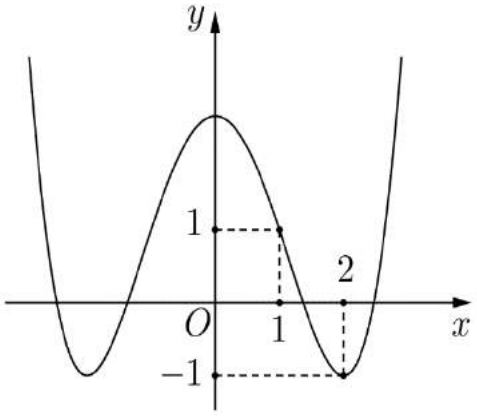
Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ và từ bảng biến thiên của hàm số $u=\sin x+\cos x$ ta có bảng sau:

x	0	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		2π
u'	1	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	0	1
$f(u)$	0	a	-4	b	-4	0

Từ bảng trên ta thấy phương trình $f(u)=-3$ có 4 nghiệm x.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm x.

Câu 27: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$. Biết rằng hàm số $y=f'\left(1-x^2\right)$ có đồ thị đối xứng qua trục Oy, như hình vẽ.



Đặt $g(x)=f\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)+\frac{2}{x}$. Đồ thị hàm số $y=g'(x)$ cắt trục Ox tại bao nhiêu điểm?

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Do hàm số $y=f(x)$ là hàm bậc ba nên hàm số $y=f'\left(1-x^2\right)$ phải là hàm bậc bốn. Vì hàm số này có đồ thị đối xứng qua Oy nên hàm số $y=f'\left(1-x^2\right)$ phải là hàm trùng phương.

Đặt $h(x)=f'\left(1-x^2\right)=ax^4+bx^2+c\ (a>0)$.

Ta có $h'(x)=4ax^3+2bx$.

Do đồ thị $y=h(x)$ có điểm cực trị $A(2;-1)$ và đi qua điểm $B(1;1)$ nên ta có:

$$\begin{cases} h'(2)=0 \\ h(2)=-1 \\ h(1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 32a+4b=0 \\ 16a+4b+c=-1 \\ a+b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{2}{9} \\ b=-\frac{16}{9} \\ c=\frac{23}{9} \end{cases}.$$

Suy ra $h(x)=f'\left(1-x^2\right)=\frac{2}{9}x^4-\frac{16}{9}x^2+\frac{23}{9}$.

Ta có $g(x)=f\left(1-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{2}{x},(x\neq 0)$.

$g'(x)=\frac{2}{x^3}f'\left(1-\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{x^2}=\frac{2}{x^2}\left(\frac{1}{x}f'\left(1-\frac{1}{x^2}\right)-1\right)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y=g'(x)$ và Ox là:

$g'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{x}f'\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=1$.

Đặt $t=\frac{1}{x}$ ta được phương trình $t.f'\left(1-t^2\right)=1\Rightarrow f'\left(1-x^2\right)=\frac{1}{x}\ (\forall x\neq 0)$.

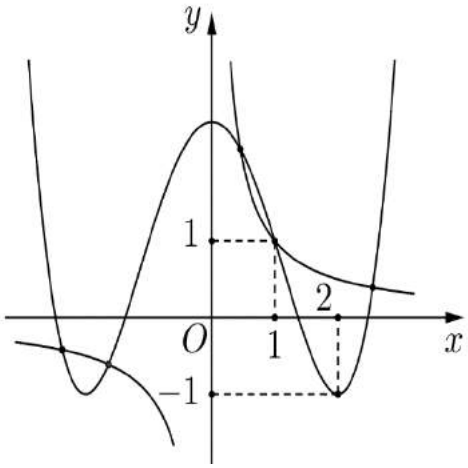
Xét phương trình: $f'\left(1-x^2\right)=\frac{1}{x}\Leftrightarrow\frac{2}{9}x^4-\frac{16}{9}x^2+\frac{23}{9}=\frac{1}{x}\Leftrightarrow 2x^4-16x^2-\frac{9}{x}+23=0$.

Ta thấy hàm số $F(x)=2x^4-16x^2-\frac{9}{x}+23$ lên tục trên $(0;+\infty)$.

Có $F\left(\frac{1}{10}\right)=-67{,}1598;\ F\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{337}{126};\ F(1)=0;\ F\left(\frac{4}{3}\right)=-\frac{1903}{324};\ F(3)=38$.

Suy ra $F\left(\frac{1}{10}\right).F\left(\frac{3}{4}\right)<0;\ F(1)=0;\ F\left(\frac{4}{3}\right).F(3)<0$ nên phương trình có 3 nghiệm phân biệt $x_1\in(0;1),\ x_2=1,\ x_3\in(2;+\infty)$.

Trên $(-\infty;0)$ dễ dàng nhận thấy $F(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_4\in(-3;-2),\ x_5\in(-2;-1)$ do $F(-3)=44;\ F(-2)=-\frac{9}{2};\ F(-1)=18$.



Từ đó suy ra phương trình: $f'\left(1-x^2\right)=\frac{1}{x}$ có 5 nghiệm phân biệt (minh họa đồ thị). Suy ra phương trình $g'(x)=0$ có 5 nghiệm phân biệt.

Vậy đồ thị hàm số $y=g'(x)$ cắt trục Ox tại 5 điểm phân biệt.

Câu 28: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	1	↗	$\frac{4}{3}$	↘	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$ của phương trình $3f\left(\cos 2x\right)-4=0$ là

A. 14. **B.** 3. **C.** 11. **D.** 16.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\cos 2x,-1\le t\le 1$

Phương trình $3f\left(\cos 2x\right)-4=0$ trở thành $3f\left(t\right)-4=0\Leftrightarrow f\left(t\right)=\frac{4}{3}$.

Từ bảng biến thiên ta có $t=1,t=a\in\left(-1;0\right)$.

Ta có bảng biến thiên của $y=\cos x$ trên $\left[-\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$

x	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	$\searrow -1$	$\nearrow 0$	$\nearrow 1$	$\searrow 0$	$\searrow -1$	$\nearrow 0$	$\nearrow 1$

Với $t=1\Rightarrow\cos 2x=1\Leftrightarrow 2\cos^2 x=2\Leftrightarrow\cos x=\pm 1$

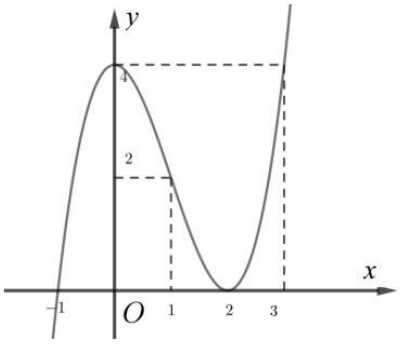
Từ bảng biến thiên của hàm $y=\cos x$ trên $\left[-\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$ ta có $\cos x=\pm 1$ có bốn nghiệm phân biệt

Với $t=a,a\in\left(-1;0\right)\Rightarrow\cos 2x=a\Leftrightarrow 2\cos^2 x=a+1\Leftrightarrow\cos x=\pm\sqrt{\frac{a+1}{2}}$

Khi đó, từ bảng biến thiên của hàm $y=\cos x$ trên $\left[-\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$ ta có $\cos x=\sqrt{\frac{a+1}{2}}\in\left(0;1\right)$ có ba nghiệm phân biệt; $\cos x=-\sqrt{\frac{a+1}{2}}\in\left(-1;0\right)$ có bốn nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình có 11 nghiệm.

Câu 29: Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x^2+4$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số nghiệm thực của phương trình $\frac{f\left[f\left(x\right)\right]}{3f^2\left(x\right)-5f\left(x\right)+4}=1$ là

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $\dfrac{f\left[f(x)\right]}{3f^2(x)-5f(x)+4}=1$.

Điều kiện: $3f^2(x)-5f(x)+4\neq 0$ (luôn đúng với mọi x)

Vì $f(x)=x^3-3x^2+4$ nên $f\left[f(x)\right]=f^3(x)-3f^2(x)+4$.

Khi đó, phương trình đã cho tương đương với

$$f^3(x)-3f^2(x)+4=3f^2(x)-5f(x)+4\Leftrightarrow f^3(x)-6f^2(x)+5f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\f(x)=1\\f(x)=5\end{array}\right.$$

Quan sát đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta thấy:

Đường thẳng $y=0$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 2 điểm phân biệt nên phương trình $f(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt;

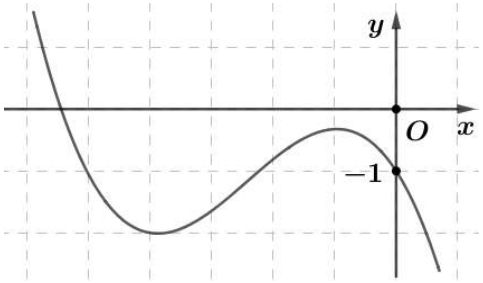
Đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình $f(x)=1$ có 3 nghiệm phân biệt;

Đường thẳng $y=5$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 1 điểm nên phương trình $f(x)=5$ có 1 nghiệm.

Sáu giao điểm ở trên là phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt.

Câu 30: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^3f(x)\right)+1=0$ là

A. 6. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f\left(x^3f(x)\right)+1=0\Leftrightarrow f\left(x^3f(x)\right)=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x^3f(x)=a & (-3<a<-1)\ (1)\\x^3f(x)=b & (-6<b<-3)(2)\\x^3f(x)=0 & (3)\end{array}\right.$.

+ Với $m<0$, xét phương trình $x^3f(x)=m\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{m}{x^3}$.

Đặt $g(x)=\dfrac{m}{x^3}$, $g'(x)=\dfrac{-3m}{x^4}>0,\forall x\neq 0$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0^-}g(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=-\infty$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$	$+$		$\|$	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0

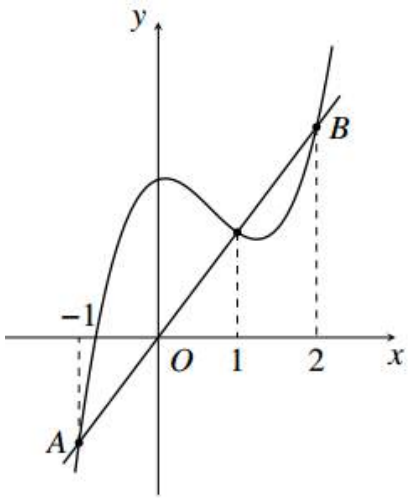
Dựa vào bảng biến thiên và đề bài, suy ra trong mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$ phương trình $f(x)=g(x)$ có đúng một nghiệm.

Suy ra mỗi phương trình (1) và (2) có 2 nghiệm và các nghiệm đều khác nhau.

Xét phương trình $(3): x^3 f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=c<0 \end{array}\right.$, với c khác các nghiệm của (1) và (2).

Vậy phương trình $f\left(x^3 f(x)\right)+1=0$ có đúng 6 nghiệm.

Câu 31: Cho đồ thị hàm số bậc ba $y=f(x)=ax^3+bx^2+\frac{1}{3}x+c$ và đường thẳng $y=g(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Biết $AB=5$, tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $f(x)=g(x)+x^2+2$.

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị, ta thấy: $y=g(x)=mx\ (m>0)$. Suy ra: $A(-1;-m)$, $B(2;2m)$

$AB=5 \Leftrightarrow AB^2=25 \Leftrightarrow 9+9m^2=25 \Rightarrow m=\frac{4}{3}\ (m>0)$

$\Rightarrow y=g(x)=\frac{4}{3}x$

Vì hai đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ chỉ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt có hoành độ là $-1;1;2$ nên ta có: $f(x)-g(x)=a(x+1)(x-1)(x-2)$

$\Leftrightarrow ax^3+bx^2+\frac{1}{3}x+c-\frac{4}{3}x=a\left(x^3-2x^2-x+2\right)$

$\Leftrightarrow ax^3+bx^2-x+c=ax^3-2ax^2-ax+2a$

Đồng nhất hệ số của x ở hai vế, ta được: $-1=-a\Rightarrow a=1$

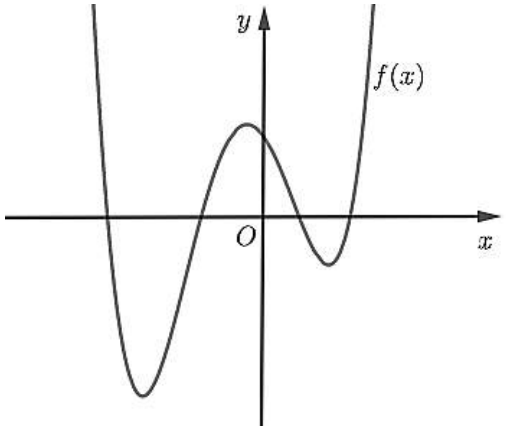
Suy ra: $f(x)-g(x)=(x+1)(x-1)(x-2)=x^3-2x^2-x+2$

Do đó: $f(x)=g(x)+x^2+2\Leftrightarrow f(x)-g(x)=x^2+2$

$$\Leftrightarrow x^3-2x^2-x+2=x^2+2\Leftrightarrow x^3-3x^2-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\\x=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.$$

Vậy tổng tất cả các nghiệm là: 3.

Câu 32: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi (C_1) và (C_2) lần lượt là đồ thị của hàm số $y=f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2$ và $y=2021^x$. Số giao điểm của (C_1) và (C_2) là?



A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Do hàm $y=f(x)$ là hàm bậc bốn, cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x_1<x_2<x_3<x_4$ và $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=+\infty$ nên đồ thị hàm $y=f(x)$ có dạng: $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$.

Ta có:

$$f'(x)=a\left[(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)+(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)+(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)+(x-x_1)(x-x\right.$$

Khi đó: $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{x-x_1}+\dfrac{1}{x-x_2}+\dfrac{1}{x-x_3}+\dfrac{1}{x-x_4}$.

Suy ra:

$$\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]'=\frac{f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2}{f^2(x)}=-\frac{1}{(x-x_1)^2}-\frac{1}{(x-x_2)^2}-\frac{1}{(x-x_3)^2}-\frac{1}{(x-x_4)^2}<0$$

$\forall x\neq x_i, i=1,...,4$

$\Rightarrow y=f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2<0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Mà $y=2021^x>0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó phương trình $f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2=2021^x$ vô nghiệm.

Câu 33: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Biết $f(2)+f(6)=2f(3)$. Tập nghiệm của phương trình $f\left(x^2+1\right)=f(3)$ có số phần tử bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Theo đề bài $f(2)+f(6)=2f(3)\Leftrightarrow f(2)-f(3)=f(3)-f(6)$.

Do $f(2)<f(3)\Rightarrow f(3)-f(6)<0\Leftrightarrow f(3)<f(6)$.

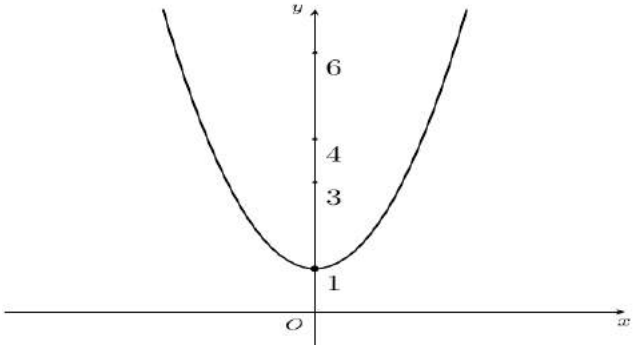
Do $X=x^2+1\geq 1$.

Ta có bảng biến thiên

X	1		2		3		4		b		6		$+\infty$
$f'(X)$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$			$+$		
$f(X)$	$f(1)$	↗		↗	$f(3)$	↘	$f(4)$	↗			$f(6)$	↗	

Ta có $f\left(x^2+1\right)=f(3)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+1=3 \quad (1)\\ x^2+1=b\ (4<b<6)\ (2)\end{array}\right.$.

Xét đồ thị hàm số $y=x^2+1$ (P).



Dựa vào đồ thị (P) suy ra:

Phương trình $x^2+1=a$ vô nghiệm.

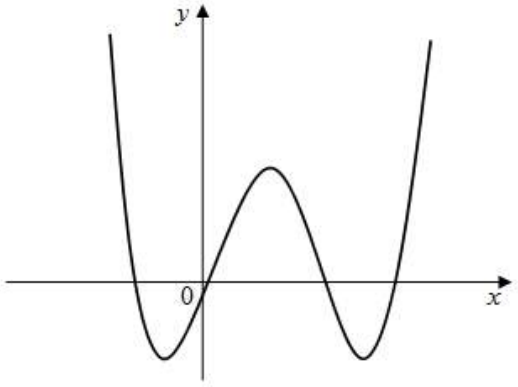
Phương trình $x^2+1=3$ có 2 nghiệm phân biệt.

Phương trình $x^2+1=b$ có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $f\left(x^2+1\right)=f(3)$ có 4 nghiệm phân biệt.

Suy ra tập nghiệm của phương trình $f\left(x^2+1\right)=f(3)$ có số phần tử bằng 4.

Câu 34: Biết rằng đồ thị hàm số bậc bốn $y=f(x)$ được cho như hình vẽ bên.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $\left[f'(x) \right]^2 - f(x).f''(x) = 0$ bằng

A. 4. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\left[f'(x) \right]^2 - f(x).f''(x) = 0 \Leftrightarrow f(x).f''(x) - \left[f'(x) \right]^2 = 0 \quad (*)$

Giả sử x_0 là một nghiệm của $(*)$. Nếu $f(x_0) = 0$ thì từ $(*)$ suy ra $f'(x_0) = 0$. Điều này vô lý vì đồ thị hàm số $y = f(x)$ không tiếp xúc với trục hoành. Do đó $f(x_0) \neq 0$.

Vì vậy, $(*) \Leftrightarrow \dfrac{f(x).f''(x) - \left[f'(x) \right]^2}{\left(f(x) \right)^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{f'(x)}{f(x)} \right)' = 0$.

Từ hình vẽ ta thấy, đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4.

Ta có $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4), (a > 0)$.

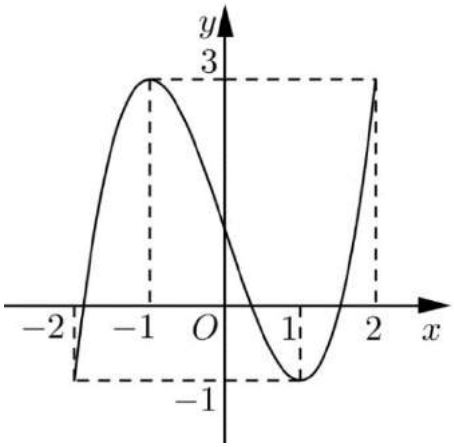
Dễ thấy $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{x - x_1} + \dfrac{1}{x - x_2} + \dfrac{1}{x - x_3} + \dfrac{1}{x - x_4}$ nên

$(*) \Leftrightarrow -\dfrac{1}{(x - x_1)^2} - \dfrac{1}{(x - x_2)^2} - \dfrac{1}{(x - x_3)^2} - \dfrac{1}{(x - x_4)^2} = 0$ (vô nghiệm).

Dạng 4: Tương giao đồ thị hàm hợp có chứa tham số

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Đồ thị ở hình vẽ bên là của hàm số $y=x^3-3x+1$. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $x^3-3x+1-m=0$ có ba nghiệm thực phân biệt



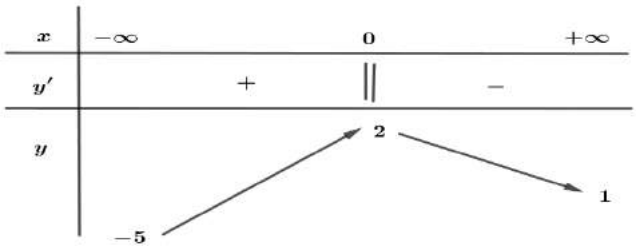
A. $-1\le m<3$. **B.** $-1<m<3$. **C.** $-2<m<2$. **D.** $-1\le m\le 3$.

Lời giải

Chọn B

Số nghiệm của phương trình $x^3-3x+1-m=0$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ và đường thẳng $y=m$. Để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thì: $-1<m<3$

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:



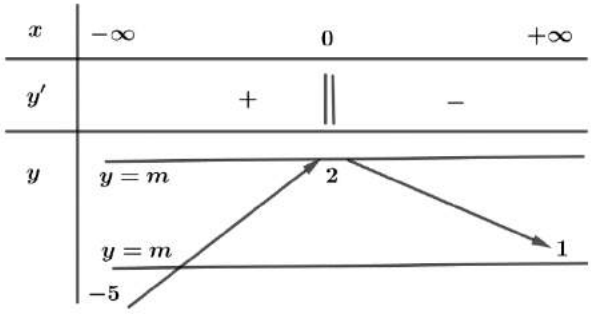
Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(x)=m$ có nghiệm duy nhất?

A. 8. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

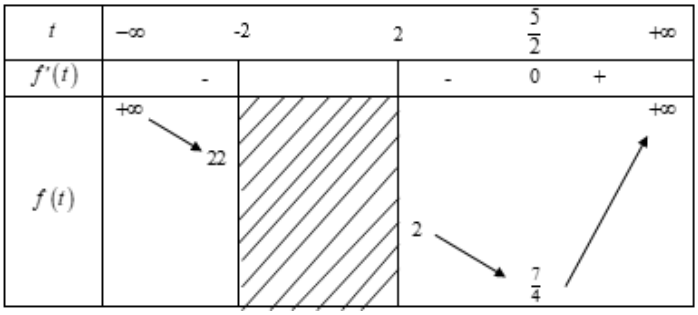
Số nghiệm của phương trình $f(x)=m$ là số giao điểm của đồ thị $y=f(x)$ và đường thẳng $y=m$.



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy để phương trình $f(x)=m$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ -5<m\le 1 \end{array}\right.$

Vậy có 7 số nguyên m thỏa mãn ycbt.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên mỗi nửa khoảng $(-\infty;-2]$ và $[2;+\infty)$, có bảng biến thiên như hình bên. Tập hợp các giá trị của m để phương trình $f(x)=m$ có hai nghiệm phân biệt là:



A. $\left(\frac{7}{4};2\right]\cup[22;+\infty)$. **B.** $\left(\frac{7}{4};+\infty\right)$. **C.** $\left[\frac{7}{4};2\right]\cup[22;+\infty)$. **D.** $[22;+\infty)$.

Lời giải

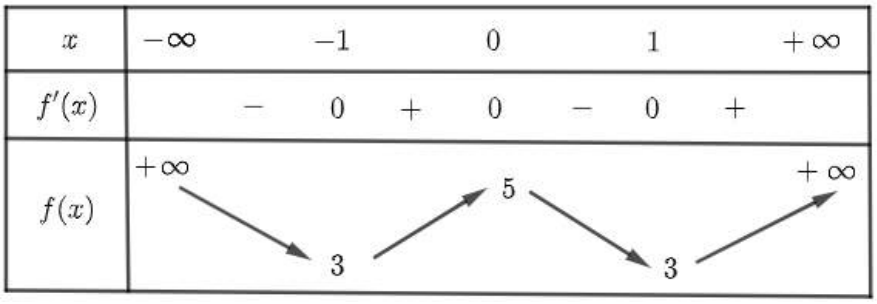
Chọn A

Xét phương trình $f(x)=m$ (1).

Số nghiệm của phương trình (1) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với đường thẳng $y=m$ (là đường thẳng song song hoặc trùng với trục Ox).

Từ BBT, để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m\in\left(\frac{7}{4};2\right]\cup[22;+\infty)$.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:



Tìm m để phương trình $f(x)=2-3m$ có bốn nghiệm phân biệt

A. $m\le -1$. **B.** $m=\frac{1}{3}$.

C. $-1<m<-\frac{1}{3}$. **D.** $m<-1$ hoặc $m>-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Để phương trình $f(x)=2-3m$ có bốn nghiệm phân biệt thì: $3<2-3m<5\Leftrightarrow -1<m<-\frac{1}{3}$.

Vậy $-1<m<-\frac{1}{3}$ thì phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(-\infty;+\infty)$, có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-4	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $2f(x)+m=0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt?

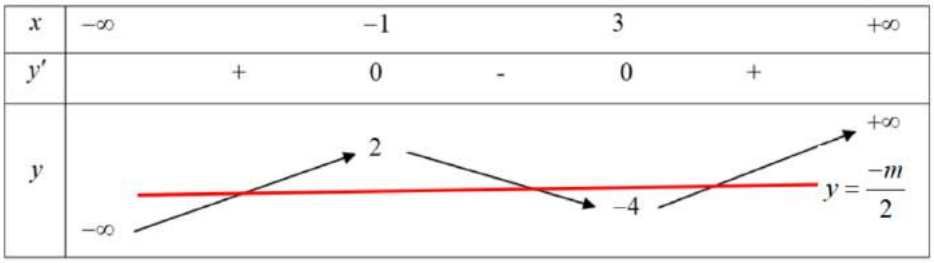
A. 7. **B.** 11. **C.** 8. **D.** 13.

Lời giải

Chọn A

Phương trình: $2f(x)+m=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{-m}{2}$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-4	↗	$+\infty$



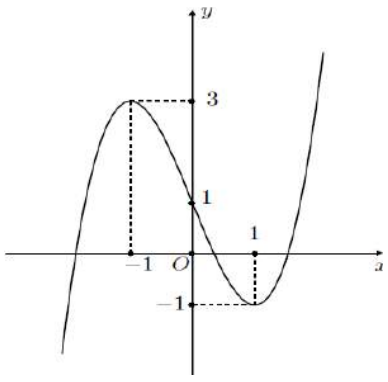
Đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt đường thẳng $y=\dfrac{-m}{2}$ tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi:

$-4<\dfrac{-m}{2}<2 \Leftrightarrow 8>m>-4$.

Mà $m\in\mathbb{Z}^+$

Suy ra: $m\in\{1;2;3;4;5;6;7\}$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như sau.



Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2f(x)+3m-3=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

A. $-1<m<\dfrac{5}{3}$ **B.** $-\dfrac{5}{3}<m<1$ **C.** $-\dfrac{5}{3}\le m\le 1$ **D.** $-1\le m\le\dfrac{5}{3}$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $2f(x)+3m-3=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{-3m+3}{2}$

Dựa vào đồ thị suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow -1<\dfrac{-3m+3}{2}<3\Leftrightarrow -1<m<\dfrac{5}{3}$.

Câu 7: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hai hàm số $y=\left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}$ và $y=\dfrac{11}{3x-4}-\dfrac{1}{2-x}+11+m$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-\infty;1]$. **D.** $(-\infty;2]$.

Lời giải:

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $\left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}=\dfrac{11}{3x-4}-\dfrac{1}{2-x}+11+m\quad (*)$

Điều kiện: $\begin{cases}x-1\ge 0\\ x\ne\dfrac{4}{3}\\ x\ne 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ x\ne\dfrac{4}{3}\\ x\ne 2\end{cases}$

Ta có: $(*)\Leftrightarrow\left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}-\dfrac{11}{3x-4}+\dfrac{1}{2-x}-11=m$

Xét hàm số $f(x)=\left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}-\dfrac{11}{3x-4}+\dfrac{1}{2-x}-11$ trên $[1;+\infty)\setminus\left\{\dfrac{4}{3};2\right\}$

Nhận thấy, hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $\left[1;\dfrac{4}{3}\right),\left(\dfrac{4}{3};2\right),(2;+\infty)$

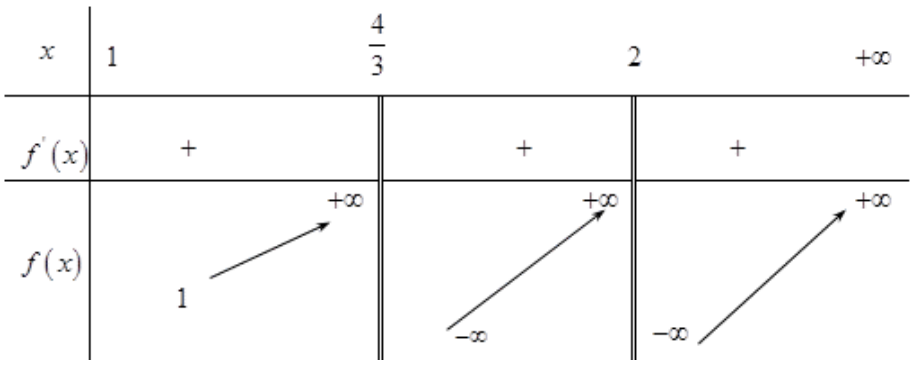
Ta có, $f'(x)=\left(\left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}-\dfrac{11}{3x-4}+\dfrac{1}{2-x}-11\right)'$

$=4x\sqrt{x-1}+\left(2x^2+1\right)\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}+\dfrac{33}{(3x-4)^2}+\dfrac{1}{(2-x)^2}=\dfrac{10x^2-8x+1}{2\sqrt{x-1}}+\dfrac{33}{(3x-4)^2}+\dfrac{1}{(2-x)^2}>0$

với $\forall x\in[1;+\infty)\setminus\left\{\dfrac{4}{3};2\right\}$

Suy ra, hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[1;+\infty)\setminus\left\{\dfrac{4}{3};2\right\}$.

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên ta suy ra đồ thị hai hàm số $y=\left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}$ và $y=\dfrac{11}{3x-4}-\dfrac{1}{2-x}+11+m$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt khi $m\in(-\infty;1]$.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	1	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
			-4				-2		

Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để phương trình $f^2(x)-mf(x)+m-1=0$ có đúng 3 nghiệm dương phân biệt

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f^2(x)-mf(x)+m-1=0\Leftrightarrow\left(f(x)-1\right).\left(f(x)+1-m\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)=1 \\ f(x)=m-1 \end{array}\right.$$

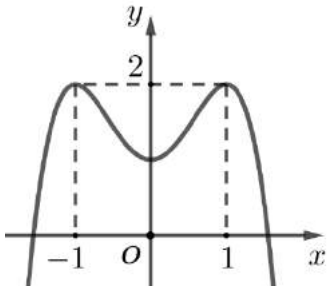
Từ bảng biến thiên ta có phương trình $f(x)=1$ có hai nghiệm dương phân biệt $x_1=1, x_2=a>2$

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(x)=m-1$ có 1 nghiệm dương

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} m-1>1 \\ -4<m-1<-2 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m>2 \\ -3<m<-1 \end{array}\right.$$

Vậy có 1 giá trị nguyên âm $m=-2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)=-x^4+2x^2+1$ có đồ thị là đường cong như bên dưới. Số các giá trị nguyên dương của m để phương trình $9x^4-18x^2+3+m=0$ có 4 nghiệm phân biệt là



A. 5. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

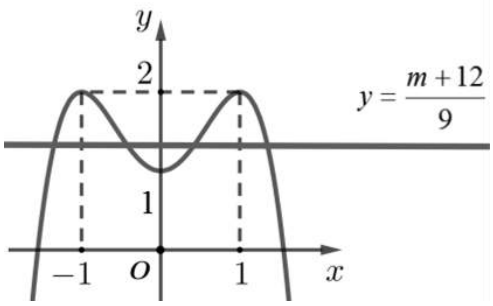
Ta có

$9x^4-18x^2+3+m=0\ \ (*)\Leftrightarrow 9\left(x^4-2x^2-1\right)+12+m=0$

$\Leftrightarrow 9\left(x^4-2x^2-1\right)=-12-m\Leftrightarrow -x^4+2x^2+1=\dfrac{m+12}{9}$

Số nghiệm của phương trình (*) là là số giao điểm của đồ thị hai hàm số

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=\dfrac{m+12}{9}\cdot \end{cases}$$

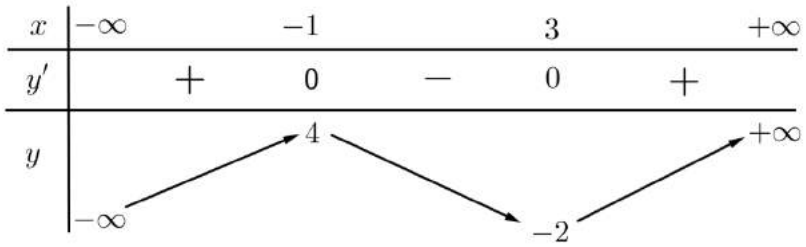


Dựa vào đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và đồ thị của hàm số $y=\dfrac{m+12}{9}\Rightarrow$ PT (*) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 1<\dfrac{m+12}{9}<2\Leftrightarrow -3<m<6$, mà m là số nguyên dương.

Suy ra $m\in\left\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\right\}$

Vậy có 5 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Câu 3: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:



Tìm m để phương trình $3f\left(x\right)-m=0$ có 3 nghiệm thực phân biệt?

A. $-2<m<4$. **B.** $-6\le m\le 12$. **C.** $-2\le m\le 4$. **D.** $-6<m<12$.

Lời giải

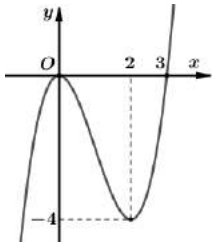
Chọn D

Ta có $3f\left(x\right)-m=0\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{m}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow -2<\dfrac{m}{3}<4\Leftrightarrow -6<m<12$

Câu 4: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(4\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)-1\right)=m$ có nghiệm.



A. 6. **B.** 4. **C.** 3 **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Xét: $t=4(\sin^6 x+\cos^6 x)-1$

Ta có: $\sin^6 x+\cos^6 x=1-3\sin^2 x.\cos^2 x=1-\dfrac{3}{4}\sin^2 2x=\dfrac{1}{4}(1+3\cos^2 2x)$

$\Rightarrow t = 4(\sin^6 x + \cos^6 x) - 1 = 4(\frac{1}{4}(1 + 3\cos^2 2x)) - 1 = 3\cos^2 2x$

Lại có $0 \le \cos^2 2x \le 1 \Rightarrow 0 \le 3\cos^2 2x \le 3$ hay $t \in [0;3] \Rightarrow f(t) \in [-4;0]$

$\Rightarrow$ Để $f\left(4\left(\sin^6 x + \cos^6 x\right) - 1\right) = m$ có nghiệm $m \in [-4;0]$

$\Rightarrow m \in \{-4;-3;-2;-1;0\}$

Vậy có 5 giá trị m thỏa mãn

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\left[f(x)\right]^2 - (2m+4) f(x) + m(m+4) = 0$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt. Tổng các phần tử thuộc S bằng:

A. -17. **B.** -18. **C.** -21. **D.** -5.

Lời giải

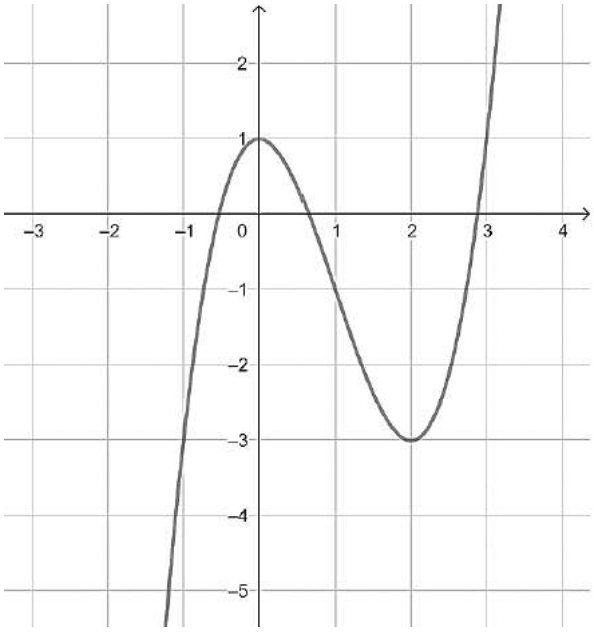
Chọn C

Ta có: $\left[f(x)\right]^2 - (2m+4) f(x) + m(m+4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = m \\ f(x) = m+4 \end{array}\right.$

Cách 1.

Nhận xét: số nghiệm của phương trình $f(x) = a$ chính bằng số giao điểm của đường thẳng $y = a$ với đồ thị (C) hàm số $y = f(x)$.

Ta có đồ thị (C)



Phương trình đã cho có 4 nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow$ có 4 nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow -7 < m < 1$

Vậy $S = \{-6;-5;-4;-3;-2;-1;0\}$

Cách 2: $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 - 3x^2 + 1 = m \\ x^3 - 3x^2 - 3 = m \end{array}\right.$

Phương trình đã cho có 4 nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow$ có 4 nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow$ đường thẳng $y = m$ cắt cả hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x) = x^3 - 3x^2 - 3$ tại 4 điểm phân biệt.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[1;3]$ và có bảng biến thiên như sau

x	1		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↗	4	↘	3

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(x+1)=\dfrac{m}{x^2-4x+5}$ có nghiệm trên khoảng $(1;2)$?

A. 4. **B.** 10. **C.** 0. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x+1)=\dfrac{m}{x^2-4x+5}\Leftrightarrow m=\left(x^2-4x+5\right).f\left(x+1\right).(1)$

Xét $g(x)=\left(x^2-4x+5\right).f\left(x+1\right);\ x\in(1;2)$.

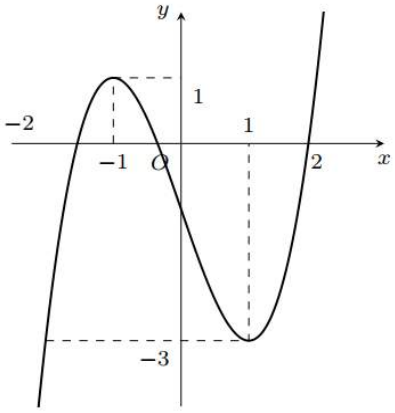
Có $g'(x)=\left(2x-4\right)f(x+1)+\left(x^2-4x+5\right)f'\left(x+1\right)$; vì $\forall x\in(1;2)\Rightarrow\begin{cases}2x-4<0\\ f(x+1)>0\\ x^2-4x+5>0\\ f'(x+1)<0\end{cases}$.

Suy ra $g'(x)<0,\forall x\in\left(1;2\right)$.

Do đó phương trình (1) có nghiệm $x\in(1;2)\Leftrightarrow g(2)<m<g(1)\Leftrightarrow 3<m<8$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\left\{4;;5;6;7\right\}$. Vậy có 4 giá trị nguyên.

Câu 7: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(1-2\sin x\right)=m$ có đúng hai nghiệm trên đoạn $\left[0;\pi\right]$?



A. -6. **B.** -3. **C.** -2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=1-2\sin x$; $t'=-2\cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}$.

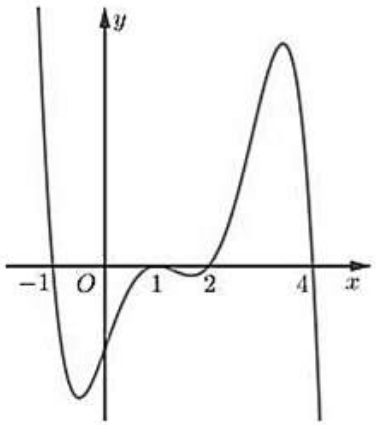
Lập bảng biến thiên

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
t	1	-1	1
$f(t)$	-3	1	-3

Dựa vào bảng biến thiên, yêu cầu bài toán tương đương

$-3 \le m < 1 \Rightarrow m \in \{-3;-2;-1;0\} \Rightarrow \sum m = -6$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm liên tục trên R. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục và có đạo hàm như hình vẽ



Số nghiệm nhiều nhất của phương trình $f(x^2) = 2022m - 2021$(với m là tham số) là

A. 5. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

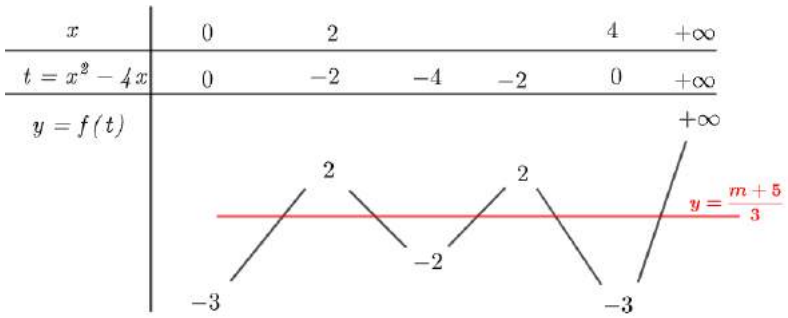
Đặt $x^2 = t, t > 0$, ta có $f(x^2) = 2022m - 2021$ có số nghiệm nhiều nhất khi pt $f(t) = 2022m - 2021$ có số nghiệm dương t nhiều nhất.

Từ đồ thị ta thấy $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 1 \\ t = 2 \\ t = 4 \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

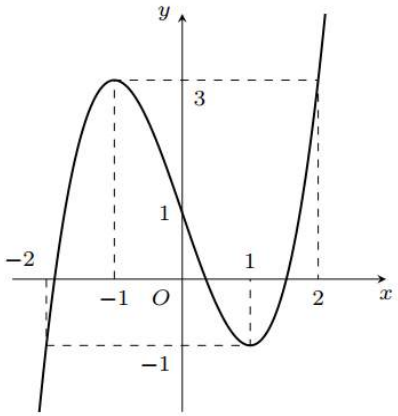
x	$-\infty$		-1		0		1		2		4		$+\infty$
y'		$+$	0		$-$	0		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	$f(-1)$	↘				↘	$f(2)$	↗	$f(4)$	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy pt có nhiều nghiệm $t > 0$ nhất là 3 nghiệm $\left[\begin{array}{l} t = a, 4 < a \\ t = b, 2 < b < 4 \\ t = c, 0 < c < 2 \end{array}\right.$



$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=a \\ t=b \\ t=c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=a \\ x^2=b \\ x^2=c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{a} \\ x=\pm\sqrt{b} \\ x=\pm\sqrt{c} \end{array}\right.$. Vậy phương trình đã cho có nhiều nhất là 6 nghiệm

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình $f(\sin x)=f(m+1)$ có nghiệm?



A. $-1\le m\le 3$. **B.** $-2\le m\le 0$. **C.** $-3\le m\le 1$. **D.** $-2\le m\le 2$.

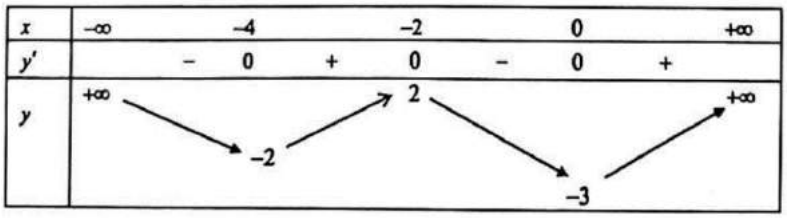
Lời giải

Chọn C

Ta có $\sin x\in[-1;1]$ nên $f(\sin x)\in[-1;3]$.

Do đó $f(m+1)\in[-1;3]$ nên $-2\le m+1\le 2\Leftrightarrow -3\le m\le 1$.

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3f\left(x^2-4x\right)=m+5$ có ít nhất 5 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$ là

A. 12. **B.** 14. **C.** 13. **D.** 11.

Lời giải

Chọn D

Để phương trình có ít nhất 5 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$ thì:

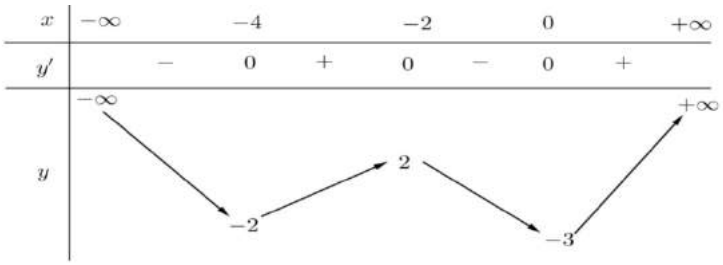
$-2<\dfrac{m+5}{3}<2\Leftrightarrow -6<m+5<6\Leftrightarrow -11<m<1$

Mà $m\in\mathbb{Z}$

Nên $m\in\{-10,-9,-8,...,0\}$

Vậy có 11 m thỏa đề.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $6f\left(x^2-4x\right)=m$ có ít nhất ba nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$ là

A. 30. **B.** 29. **C.** 25. **D.** 24.

Lời giải

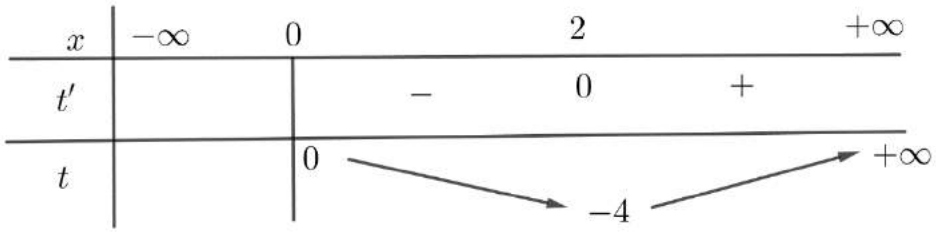
Chọn A

Ta có: $6f\left(x^2-4x\right)=m\Leftrightarrow f\left(x^2-4x\right)=\dfrac{m}{6}$.

Đặt: $t=x^2-4x\Rightarrow t'=2x-4$

Cho $t'=0\Leftrightarrow x=2$ (nhận)

Bảng biến thiên



Dựa trên bảng biến thiên ta có:

Nếu $\left[\begin{array}{l}t=-4\\t\geq 0\end{array}\right.$ khi đó với một giá trị t cho duy nhất một giá trị x thuộc khoảng $(0;+\infty)$.

Nếu $t\in(-4;0)$ khi đó với một giá trị t cho hai giá trị x thuộc khoảng $(0;+\infty)$.

Như vậy dựa trên bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$, phương trình có ít nhất ba nghiệm thuộc khoảng $(0;+\infty)$ khi $-3<\dfrac{m}{6}\leq 2\Leftrightarrow -18<m\leq 12$.

Do m nguyên nên $m\in\{-17;-16;...;12\}$ suy ra có 30 giá trị nguyên của m. Chọn A.

Câu 12: Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên đoạn $[-2;9]$, biết $f(-1)=f(2)=f(9)=3$ và $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	-2		0		6		9
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-4	↗	6	↘	-4	↗	3

Tìm m để phương trình $f(x)=f(m)$ có ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-2;9]$.

A. $m\in(-2;9]\setminus((-1;2)\cup\{6\})$..

B. $m\in[-2;9]\setminus((-1;2)\cup\{6\})$.

C. $m\in(-2;9]\setminus\{6\}$.

D. $m\in[-2;9]\setminus\{-2;6\}$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình $f(x)=f(m)$ có ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-2;9]$ khi $-4<f(m)\le 3$.

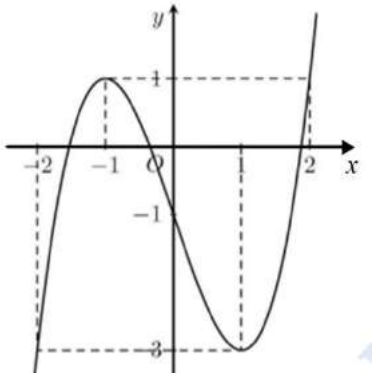
Trên $(-2;0)$, hàm số $f(x)$ đồng biến và $f(-1)=3$ nên $-4<f(m)\le 3\Leftrightarrow -2<m\le -1$.

Trên $(0;6)$, hàm số $f(x)$ nghịch biến và $f(2)=3$ nên $-4<f(m)\le 3\Leftrightarrow 6>m\ge 2$.

Trên $(6;9)$, hàm số $f(x)$ đồng biến và $f(9)=3$ nên $-4<f(m)\le 3\Leftrightarrow 6<m\le 9$.

Vậy điều kiện của m là: $m\in(-2;-1]\cup[2;6)\cup(6;9]\Leftrightarrow m\in(-2;9]\setminus((-1;2)\cup\{6\})$..

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(f(x)+2m\right)+1=f(x)+2m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt trên $[-1;1]$ là



A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f\left(f(x)+2m\right)+1=f(x)+2m\Leftrightarrow f(t)=t-1$

Với $t=f\ x\ +2m$

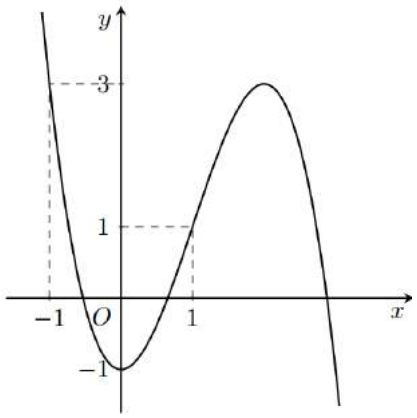
Dựa vào đồ thị ta có $f\ t\ =t-1\Leftrightarrow\begin{bmatrix}t=-2\\t=0\\t=2\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}f\ x\ =-2m-2\\f\ x\ =-2m\\f\ x\ =-2m+2\end{bmatrix}$

Dựa vào đồ thị trên $-1;1$, phương trình $f\left(f(x)+2m\right)+1=f(x)+2m\Leftrightarrow f(t)=t-1$ có đúng 3 nghiệm phân biệt khi

$$\begin{cases} -3 \le -2m-2 \le 1 \\ -3 \le -2m \le 1 \\ -3 \le -2m+2 \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le 2m \le 1 \\ -1 \le 2m \le 3 \\ 1 \le 2m \le 5 \end{cases} \Rightarrow m = \frac{1}{2}.$$

Vậy không có giá trị nguyên nào của tham số m thỏa mãn bài toán.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x)+(m-2019)f(\cos x)+m-2020=0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0;2\pi]$ là



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f^2(\cos x)+(m-2019)f(\cos x)+m-2020=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(\cos x)=-1 \\ f(\cos x)=2020-m \end{array}\right.$$

$$f(\cos x)=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=0 \\ \cos x=a>1(L) \end{array}\right. \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}; x=\frac{3\pi}{2}$$

$f(\cos x)=2020-m$

Đặt $t=\cos x \in [-1;1]$

Phương trình trở thành $f(t)=2020-m$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có 4 nghiệm phân biệt thuộc $[0;2\pi]$ khác $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

$\Leftrightarrow f(t)=2020-m$ có 2 nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $\begin{cases} -1 < t_1 < t_2 \le 1 \\ t_1 \ne 0 \\ t_2 \ne 0 \end{cases}$

$-1 < 2020-m \le 1 \Leftrightarrow 2019 \le m < 2021$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m=2019; m=2020$.

Câu 15: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	-2	↗	5	↘	$-\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $f\left(\sqrt{3}\sin x-\cos x\right)=2m-1$ có hai nghiệm phân biệt trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

Với $x\in\left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow x-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow t\in\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$.

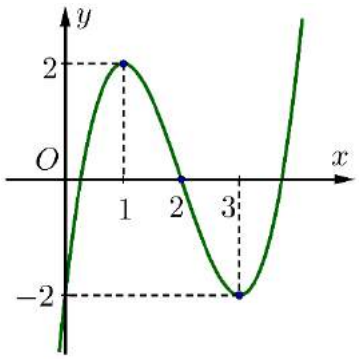
Khi đó phương trình đã cho trở thành $f\left(t\right)=2m-1$.

Với mỗi giá trị của $t\in\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$ có duy nhất một giá trị $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $t=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.Do đó phương trình $f\left(\sqrt{3}\sin x-\cos x\right)=2m-1$ có hai nghiệm phân biệt trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi phương trình $f\left(t\right)=2m-1$ có hai nghiệm phân biệt trên khoảng $\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$.

Từ bảng biến thiên suy ra $-2<2m-1<4\Leftrightarrow-\frac{1}{2}<m<\frac{5}{2}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 16: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị $\left(C\right)$ như hình vẽ sau:



Phương trình $f\left(x^4-2m^2x^2+3\right)=x$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm thực?

A. 9. **B.** 12. **C.** 11. **D.** 10.

Lời giải

Chọn D

$g\left(x\right)=f\left(x^4-2m^2x^2+3\right)$

Ta có $g'(x)=\left(4x^3-4m^2x\right).f'\left(x^4-2m^2x^2+3\right)$

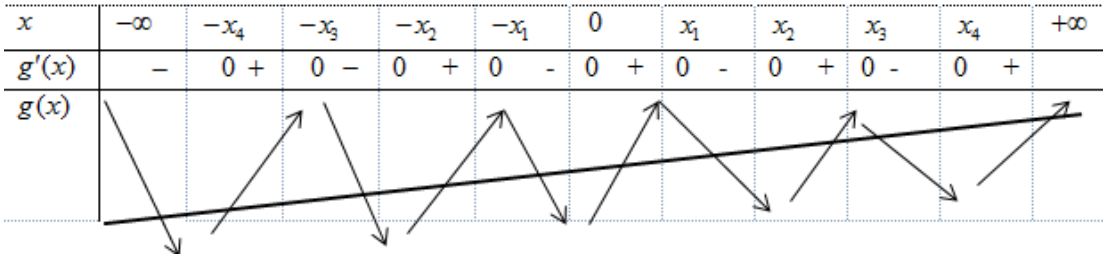
$g'(x)=0\Leftrightarrow\left(4x^3-4m^2x\right).f'\left(x^4-2m^2x^2+3\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x^3-4m^2x=0\\ f'\left(x^4-2m^2x^2+3\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0;x=\pm|m|\\ x^4-2m^2x^2+3=1\ (1)\\ x^4-2m^2x^2+3=3\ (2)\end{array}\right.$$

$$(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\ (\text{keùp})\\ x=\pm|m|\sqrt{2}\end{array}\right.$$

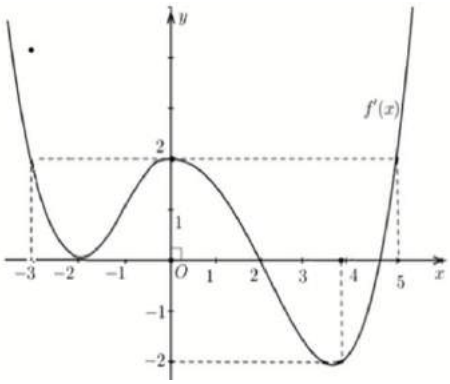
Phương trình (1) có nhiều nhất 4 nghiệm đơn suy ra $g'(x)$ có một nghiệm bội ba $x=0$ và tối đa 8 nghiệm đơn nữa đôi một khác nhau và $g(0)=f(3)=-2$

Bảng biến thiên:



Tối đa 10 nghiệm.

Câu 17: Cho hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng $f(-3)=2f(5)=4$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\frac{1}{2}f(x)-m\right)=2x+2m$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.



A. 8. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$f\left(\frac{1}{2}f(x)-m\right)=2x+2m\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}f(x)-m\right)+2\left(\frac{1}{2}f(x)-m\right)=2\left(\frac{1}{2}f(x)-m\right)+2x+2m$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}f(x)-m\right)+2\left(\frac{1}{2}f(x)-m\right)=f(x)+2x\ (*).$$

Xét hàm số $g(t)=f(t)+2t$ trên $\mathbb{R}$.

$g'(t)=f'(t)+2\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên $g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$).

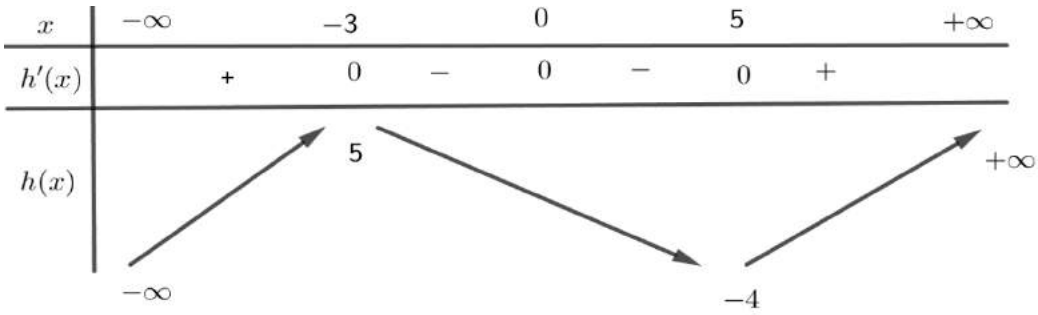
Mà $g(t)$ làm hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow \frac{1}{2} f(x) - m = x \Leftrightarrow \frac{1}{2} f(x) - x = m$.

Xét hàm $h(x) = \frac{1}{2} f(x) - x$; $h'(x) = \frac{1}{2} f'(x) - 1$.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -3 \Rightarrow h(-3) = \frac{1}{2} f(-3) + 3 = 5 \\ x = 5 \Rightarrow h(5) = \frac{1}{2} f(5) - 5 = -4 \end{array}\right.$$

Dựa vào đồ thị $y = f'(x)$, ta có BBT:

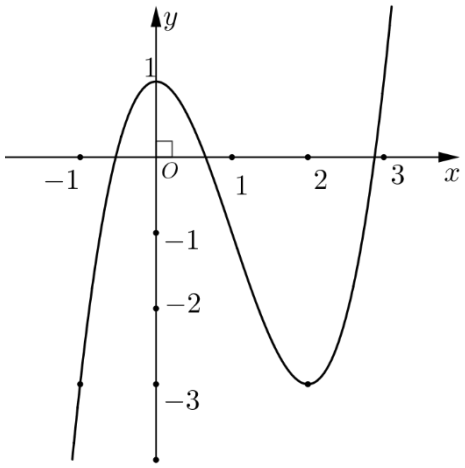


Dựa vào BBT, phương trình $h(x) = m$ có đúng 3 nghiệm khi $-4 < m < 5$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

Vậy có 8 giá trị.

Câu 18: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x^3 - 3x^2 + m) + 3 = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $[-1; 2]$.



A. 7. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Từ hình vẽ, ta suy ra được hình vẽ là đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

$$f(x^3 - 3x^2 + m) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x^3 - 3x^2 + m) = -3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 - 3x^2 + m = -1 \\ x^3 - 3x^2 + m = 2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3-3x^2+1=-m \\ x^3-3x^2+1=-m+3 \end{array}\right.$$

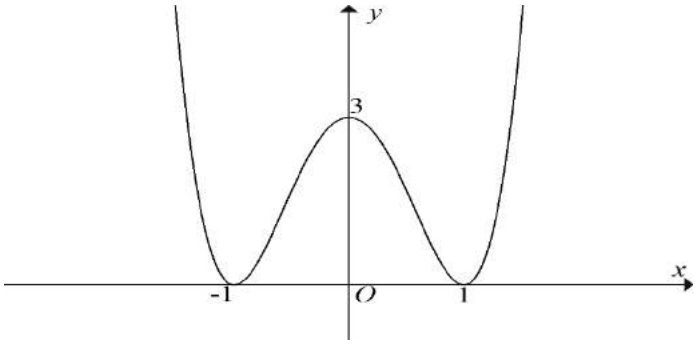
Để phương trình đã cho có nghiệm thuộc đoạn $[-1;2]$ thì

$$\left[\begin{array}{l} \min\limits_{[-1;2]}(x^3-3x^2+1)\le -m\le \max\limits_{[-1;2]}(x^3-3x^2+1) \\ \min\limits_{[-1;2]}(x^3-3x^2+1)\le -m+3\le \max\limits_{[-1;2]}(x^3-3x^2+1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3\le -m\le 1 \\ -3\le -m+3\le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1\le m\le 3 \\ 2\le m\le 6 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow m\in[-1;6]$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên có 8 giá trị m để phương trình đã cho có nghiệm.

Câu 19: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2021;2021]$ để phương trình $\left(f^2(x)+x^2\right)^2-\left(m^2+2m+14\right)\left(f^2(x)+x^2\right)+4(m+1)^2+36=0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt.

A. 2022. **B.** 4043. **C.** 4042. **D.** 2021.

Lời giải

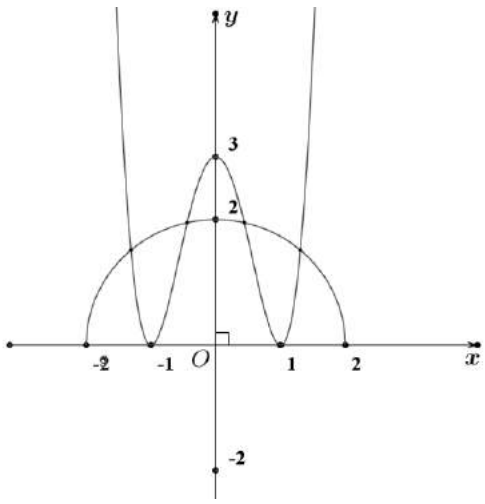
Chọn C

Đặt $t=f^2(x)+x^2,(t\ge 0)$ ta có phương trình

$$t^2-\left(m^2+2m+14\right)t+4(m+1)^2+36=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=4 \\ t=m^2+2m+10 \end{array}\right.$$

Với $t=4$ hay $f^2(x)+x^2=4\Leftrightarrow f^2(x)=4-x^2\Rightarrow f(x)=\sqrt{4-x^2}$ (Do $f(x)\ge 0$).

Số nghiệm của phương trình $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ là số giao điểm của đường cong $y=f(x)$ và nửa đường tròn $C(O;2)$

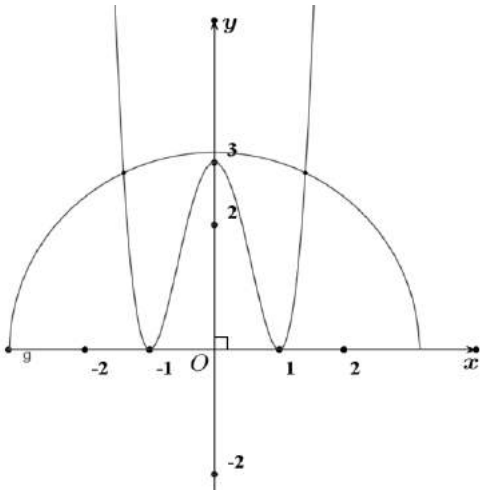


Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Với $t = m^2 + 2m + 10$ hay

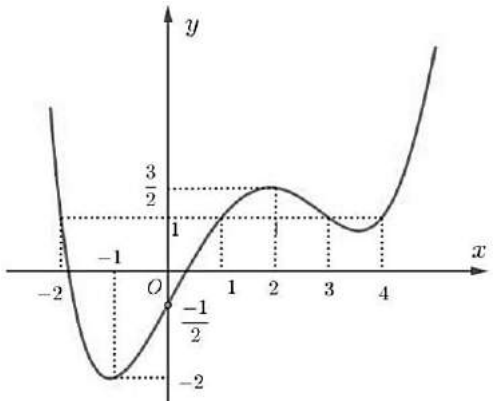
$f^2(x) + x^2 = m^2 + 2m + 10 \Leftrightarrow f^2(x) = m^2 + 2m + 10 - x^2 \Rightarrow f(x) = \sqrt{m^2 + 2m + 10 - x^2}$ (Do $f(x) \geq 0$).

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đường cong $y = f(x)$ và nửa đường tròn $C\left(O; \sqrt{m^2 + 2m + 10}\right)$



$\left(f^2(x) + x^2\right)^2 - \left(m^2 + 2m + 14\right)\left(f^2(x) + x^2\right) + 4(m+1)^2 + 36 = 0$ chỉ có 6 nghiệm phân biệt thì phương trình $f(x) = \sqrt{m^2 + 2m + 10 - x^2}$ chỉ có 2 nghiệm phân biệt.Dựa vào đồ thị ta có điều kiện $m^2 + 2m + 10 > 9 \Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 > 0 \Leftrightarrow m \neq -1$. Vậy có 4042 giá trị của $m \in \lfloor -2021; 2021 \rfloor$.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2f\left(\sqrt{9 - x^2}\right) - m + 2022 = 0$ có nghiệm?



A. 7. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

$2f\left(\sqrt{9 - x^2}\right) - m + 2022 = 0 \Leftrightarrow f\left(\sqrt{9 - x^2}\right) = \dfrac{m - 2022}{2}$

Đặt $t = \sqrt{9 - x^2}$, điều kiện: $-3 \leq x \leq 3$

$t' = \dfrac{-x}{\sqrt{9 - x^2}} \Rightarrow t' = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Bảng biết thiên của t là

x	-3	0	3
t'	‖	0	‖
t	0	3	0

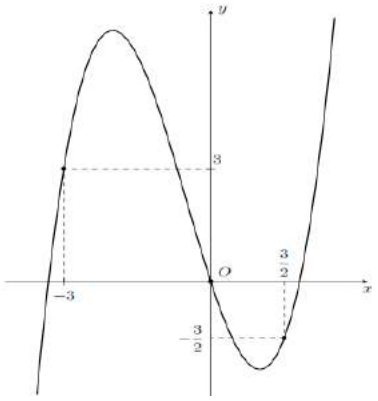
$\Rightarrow t\in[0;3]$. Khi đó: $f\left(\sqrt{9-x^2}\right)=\dfrac{m-2022}{2}\Rightarrow f\left(t\right)=\dfrac{m-2022}{2}$, $t\in[0;3]$

Dựa vào đồ thị hàm số suy ra

$f\left(t\right)=\dfrac{m-2022}{2}$ có nghiệm khi: $-\dfrac{1}{2}\le\dfrac{m-2022}{2}\le\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow 2021\le m\le 2025$

Vậy, có 5 giá trị nguyên của m.

Câu 21: Cho hàm $y=f\left(x\right)$ là hàm đa thức bậc bốn. Biết rằng $f\left(0\right)=0$, $f\left(-3\right)=f\left(\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{19}{4}$ và đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ có dạng như hình vẽ.



Xét hàm số $g\left(x\right)=\left|4f\left(x\right)+2x^2\right|-2m^2+1$ với m là tham số thực. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên $m\in\left(-50;50\right)$ để phương trình $g\left(x\right)=1$ có đúng hai nghiệm thực?

A. 94. **B.** 96. **C.** 47. **D.** 48.

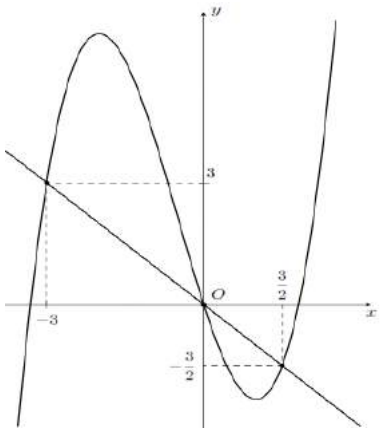
Lời giải

Chọn A

Ta có $\left|4f\left(x\right)+2x^2\right|-2m^2+1=1\Leftrightarrow\left|4f\left(x\right)+2x^2\right|=2m^2,\left(1\right)$.

Xét hàm số $h\left(x\right)=4f\left(x\right)+2x^2$, ta có $h'\left(x\right)=4\left[f'\left(x\right)-\left(-x\right)\right]$.

Dựa vào đồ thị hàm số $f'\left(x\right)$ và đường thẳng $y=-x$.



Ta thấy: $h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=0 \\ x=\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

và $h(-3)=4f(-3)+2(-3)^2=-1$, $h(0)=0$, $h\left(\dfrac{3}{2}\right)=4f\left(\dfrac{3}{2}\right)+2\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=-\dfrac{29}{2}$.

Do đó ta có bảng biến thiên hàm số $h(x)$ như sau

x	$-\infty$		-3		0		$\dfrac{3}{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\dfrac{29}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó suy ra bảng biến thiên của hàm số $|h(x)|$ như sau

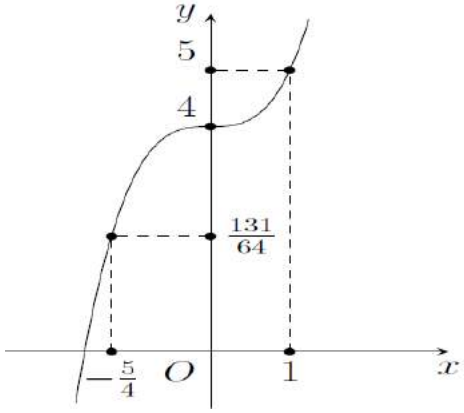
x	$-\infty$		x_1		-3		0		$\dfrac{3}{2}$		x_2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\dfrac{29}{2}$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$
$\lvert h(x)\rvert$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{29}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó để phương trình (1) có đúng hai nghiệm thực thì $2m^2>\dfrac{29}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>\dfrac{\sqrt{29}}{2} \\ m<-\dfrac{\sqrt{29}}{2} \end{array}\right.$.

Mà m là số nguyên thuộc $(-50;50)$ nên $\left[\begin{array}{l} 3\le m\le 49 \\ -49\le m\le -3 \end{array}\right.$.

Vậy có 94 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 22: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có $f'(1)=3$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m và $m\in[-10;10]$ để phương trình $\ln\frac{f(x)}{3mx^2}+x\left[f(x)-3mx\right]=3mx^3-f(x)$ có hai nghiệm dương phân biệt?

A. 18. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 15.

Lời giải

Chọn B

Do yêu cầu bài toán là phương trình có hai nghiệm dương phân biệt nên ta chỉ xét $x>0$.

Giả sử $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Vì đồ thị đi qua các điểm $A(-\frac{5}{4};\frac{131}{64})$, $B(0;4)$, $C(1;5)$ nên ta có $\begin{cases}-\frac{125}{64}a+\frac{25}{16}b-\frac{5}{4}c+d=\frac{131}{64}\\ d=4\\ a+b+c+d=5.\end{cases}$ (1)

Ta có $f'(1)=3\Leftrightarrow 3a+2b+c=3$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $a=1$, $b=0$, $c=0$, $d=4$, suy ra $f(x)=x^3+4$.

Điều kiện $\frac{f(x)}{3mx^2}>0\Rightarrow m>0$.

$$\ln\frac{f(x)}{3mx^2}+x\left[f(x)-3mx\right]=3mx^3-f(x)$$

$$\Leftrightarrow \ln f(x)-\ln\left(3mx^2\right)+x\left[f(x-3mx^2)\right])+f(x)-3mx^2=0. \quad (3)$$

Nếu $f(x)>mx^2$ thì $\log f(x)>\log(mx^2)$ và $xf(x)>x(mx^2),\forall x>0\Rightarrow(3)$ vô nghiệm.

Tương tự nếu $f(x)<mx^2$ thì phương trình (3) vô nghiệm.

Do đó $f(x)=3mx^2\Leftrightarrow x^3+4=3mx^2\Leftrightarrow\frac{x^3+4}{3x^2}=m$, vì $x>0$.

Xét hàm số $g(x)=\frac{x^3+4}{3x^2}$ với $x>0$.

$$g'(x)=\frac{3x^4-24x}{9x^4}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2.\end{array}\right.$$

Vì $x>0$ nên ta nhận $x=2$. Ta có bảng biến thiên

x	0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Để phương trình $\frac{x^3+4}{3x^2}=m$ có hai nghiệm dương phân biệt thì $m>1$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in[-10;10]$ nên $m\in\{2;3;...;10\}$. Vậy có 9 giá trị nguyên của tham số m thoả yêu cầu bài toán.

Câu 23: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	8	$\searrow$	$-\infty$

Số giá trị nguyên của m để phương trình $\dfrac{f(f(x))}{f(x)+1}=m$ có 5 nghiệm phân biệt là

A. 10. **B.** 13. **C.** 12. **D.** 11.

Lời giải

Chọn D

$$f'(x)=ax(x-2)=a(x^2-2x)\Rightarrow f(x)=a\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)+C$$

$$\begin{cases} f(0)=4 \\ f(2)=8 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} C=4 \\ a=3 \end{cases}\Rightarrow f(x)=-x^3+3x^2+4\Rightarrow\frac{f(x)}{x+1}=\frac{-x^3+3x^2+4}{x+1}=h(x)$$

$$\Rightarrow h'(x)=\frac{-2(x-1)^2(x+2)}{(x+1)^2}$$

Đặt $g(x)=\dfrac{f(f(x))}{f(x)+1}\Rightarrow g'(x)=\dfrac{-2\left(f(x)-1\right)^2\left(f(x)+2\right)f'(x)}{\left(f(x)+1\right)^2}$

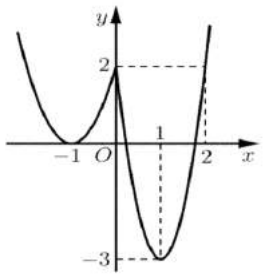
$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)=1 \\ f(x)=-2 \\ f'(x)=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=a(a>2) \\ x=b(b>a) \\ x=0,x=2 \end{array}\right.$$

$g'(x)$ không xác định $\Leftrightarrow f(x)=-1\Leftrightarrow x=c\in(a;b)$

x	$-\infty$		0		2		a		c		b		$+\infty$
g'(x)		+	0	−	0	+	0	+		+	0	−	
g(x)	$-\infty$	↗	$\frac{-12}{5}$	↘	$\frac{-316}{9}$	↗	$+\infty$		$-\infty$	↗	-24	↘	$-\infty$

Phương trình $g(x)=m$ có 5 nghiệm phân biệt $\dfrac{-316}{9}<m<-24\Rightarrow m\in\{-35;-34;...;-25\}$

Câu 24: Cho hai hàm số $u(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+3}}$ và $f(x)$, trong đó đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ:



Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f\left(u\left(x\right)\right)=m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt?

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $u\left(x\right)=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+3}}$, Lập bảng biến thiên ta có:

Nếu $\left[\begin{array}{l} t\le -1 \\ t>2 \end{array}\right.\Rightarrow u\left(x\right)=t$ vô nghiệm.

Nếu $\left[\begin{array}{l} -1<t\le 1 \\ t=2 \end{array}\right.\Rightarrow u\left(x\right)=t$ có 1 nghiệm.

Nếu $1<t<2\Rightarrow u\left(x\right)=t$ có 2 nghiệm phân biệt.

Xét $f\left(u\right)=m$

Nếu $m<-3\Rightarrow$ không tồn tại u.

Nếu $m=-3\Rightarrow u=1$

Nếu $\left[\begin{array}{l} m>2 \\ -3<m<0 \end{array}\right.\Rightarrow$ có hai nghiệm u

Với $m>2\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} u_1<-1 \\ u_2>2 \end{array}\right.$

Với $-3<m<0\Rightarrow u_1\in\left(0;1\right),u_2\in\left(1;2\right)$

Nếu $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \end{array}\right.\Rightarrow$ có 3 nghiệm u

Với $m=0\Rightarrow u_1=-1,u_2\in\left(0;1\right),u_3\in\left(1;2\right)$

Với $m=2\Rightarrow u=0,u=\pm 2$

Dựa vào đồ thị ta có

Khi $-3<m<0\Rightarrow\left[\begin{array}{l} u\left(x\right)=u_1\in\left(0;1\right) \\ u\left(x\right)=u_2\in\left(1;2\right) \end{array}\right.\Rightarrow$ Có 3 nghiệm x

Khi $m=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l} u\left(x\right)=u_1=-1 \\ u\left(x\right)=u_2\in\left(0;1\right) \\ u\left(x\right)=u_3\in\left(1;2\right) \end{array}\right.\Rightarrow$ Có 3 nghiệm x

Vì m là số nguyên nên $m\in\left\{-2;-1;0\right\}$.

Câu 25: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[1;3\right]$ và có bảng biến thiên như sau

x	1		2		3
y'		$+$	0	$-$	
y	-6	↗	-1	↘	-3

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$f\left(x-1\right)=\dfrac{m}{x^2-6x+12}$ có nhiều nghiệm nhất trên đoạn $\left[2;4\right]$. Tổng các phần tử của S là

A. -297. **B.** -294. **C.** -75. **D.** -72.

Lời giải

Chọn D

$f\left(x-1\right)=\dfrac{m}{x^2-6x+12}\Leftrightarrow m=\left(x^2-6x+12\right)f\left(x-1\right)$.

Đặt $x-1=t$ và $g\left(t\right)=\left(t^2-4t+7\right)f\left(t\right)$. Với $x\in\left[2;4\right]$ thì $t\in\left[1;3\right]$.

Yêu cầu bài toán trở thành tìm giá trị nguyên của tham số m để phương trình $m=g\left(t\right)$ có nhiều nghiệm nhất trên đoạn $\left[1;3\right]$. $g'\left(t\right)=\left(2t-4\right)f\left(t\right)+\left(t^2-4t+7\right)f'\left(t\right)$.

Vì $f'\left(2\right)=0$ nên $f'\left(t\right)=\left(t-2\right)h\left(t\right)$, suy ra

$g'\left(t\right)=\left(2t-4\right)f\left(t\right)+\left(t^2-4t+7\right)\left(t-2\right)h\left(t\right)=\left(t-2\right)\left(2f\left(t\right)+\left(t^2-4t+7\right)h\left(t\right)\right)$

Từ bảng biến thiên ta có được $h\left(t\right)<0,\forall t\in\left[1;3\right]$ nên $2f\left(t\right)+\left(t^2-4t+7\right)h\left(t\right)<0,\forall t\in\left[1;3\right]$.

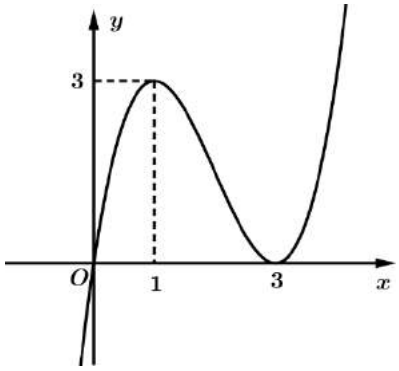
Ta có bảng biến thiên:

t	1		2		3
g'		$+$	0	$-$	
g	-24	↗	-3	↘	-12

Vậy với $m\in\left[-12;-3\right)$ thì phương trình đã cho có nhiều nhất 2 nghiệm phân biệt.

Tổng các phần tử của S là -72.

Câu 26: Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ sau:



Tập hợp tất cả các giá trị thực của m để phương trình $f\left(e^{x^2}\right)=m$ có 4 nghiệm phân biệt là

A. $\left(0;3\right]$. **B.** $\left\{0;3\right\}$. **C.** $\left(0;3\right)$. **D.** $\left(3;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=e^{x^2}$. Phương trình đã cho trở thành $f\left(t\right)=m$ (2).

Ta có $t'=2x.e^{x^2}$; $t'=0\Leftrightarrow x=0$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
t'		$-$ 0 $+$	
$t=e^{x^2}$	$+\infty$	1	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy:

Với $t<1$ thì phương trình đã cho vô nghiệm

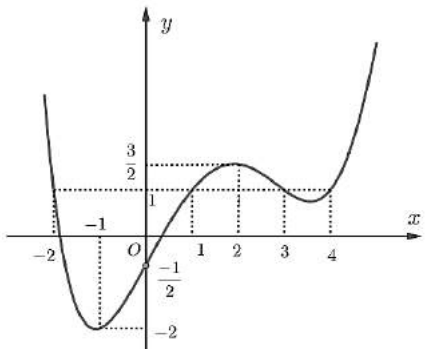
Với $t=1$ thì phương trình đã cho có 1 nghiệm

Với $t>1$ thì phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

Do đó phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có 2 nghiệm phân biệt $t\in(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow$ đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị $y=f(t)$ tại 2 điểm phân biệt $t\in(1;+\infty)\Leftrightarrow 0<m<3$.

Câu 27: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2f\left(\sqrt{9-x^2}\right)=m-2020$ có nghiệm?



A. 4. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

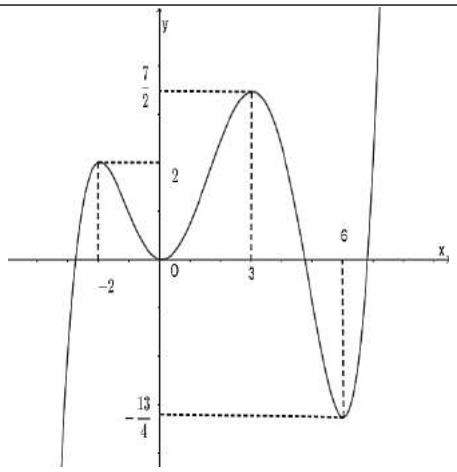
Với $x\in[-3;3]\Rightarrow 0\le\sqrt{9-x^2}\le 3$, dựa vào đồ thị ta có $-\frac{1}{2}\le f\left(\sqrt{9-x^2}\right)\le\frac{3}{2}$

Suy ra $-1\le 2f\left(\sqrt{9-x^2}\right)\le 3$

Để $2f\left(\sqrt{9-x^2}\right)=m-2020$ có nghiệm thì $-1\le m-2020\le 3$ hay $2019\le m\le 2023$

Vậy có 5 giá trị nguyên m thoả điều kiện bài toán.

Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f\left(2x^3-6x+2\right)=2m-1$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$?



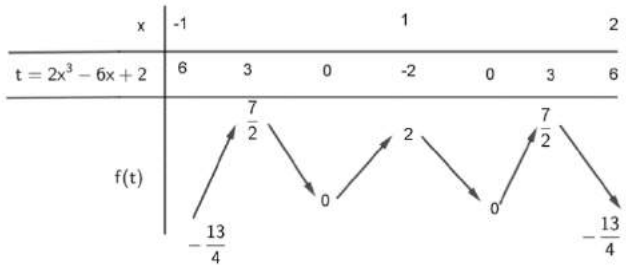
A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = 2x^3 - 6x + 2 \Rightarrow t' = 6x^2 - 6$; $t' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f\left(2x^3 - 6x + 2\right)$ như sau



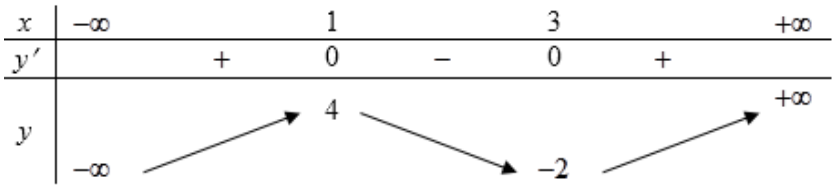
Số nghiệm của phương trình $f\left(2x^3 - 6x + 2\right) = 2m - 1$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f\left(2x^3 - 6x + 2\right)$ và đường thẳng $y = 2m - 1$.

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$ $\Leftrightarrow 0 < 2m - 1 < 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < m < \dfrac{3}{2}$.

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 1$.

Vậy có 1 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên :



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{x-1} + 2\right) = m$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x) = f\left(\sqrt{x-1} + 2\right)$ trên $[1;+\infty)$

Ta có: $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}f'\left(\sqrt{x-1}+2\right)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}f'\left(\sqrt{x-1}+2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-1}+2=1\\\sqrt{x-1}+2=3\end{array}\right.\Leftrightarrow x=2$$

Suy ra bảng biến thiên

x	1		2		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$f(2)$	↘	-2	↗	$+\infty$

Phương trình $f\left(\sqrt{x-1}+2\right)=m$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -2<m<f(2)$.

Chú ý: Bài toán thiếu dữ kiện nên không chọn được đáp án.

Đề nghị thêm dữ kiện: "Giả sử hàm số $y=f(x)$ là hàm số bậc 3", khi đó $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Từ bảng biến thiên ta tìm được

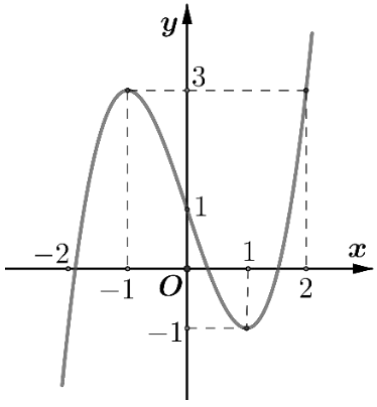
$$f(x)=\dfrac{3}{2}x^3-9x^2+\dfrac{27}{2}x-2\Rightarrow f(2)=1$$

Suy ra phương trình $f\left(\sqrt{x-1}+2\right)=m$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -2<m\le f(2)$

$\Leftrightarrow -2<m\le 1$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn điều kiện đề bài.

Câu 30: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{4-x^2}\right)=m$ có nghiệm thuộc nữa khoảng $\left[-\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$ là

A. $\left(-1;f\left(\sqrt{2}\right)\right)$. **B.** $(-1;3]$. **C.** $[-1;3]$. **D.** $\left[-1;f\left(\sqrt{2}\right)\right]$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sqrt{4-x^2}\Rightarrow t'=\dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}$; $t'=0\Leftrightarrow x=0$

Với $x\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $t=\sqrt{4-x^2}$.

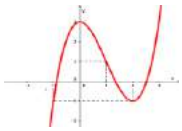
x	$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{3}$
t'		$+$	0	$-$	
t	$\sqrt{2}$	↗	2	↘	1

Với $x \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{3}\right) \Rightarrow t \in (1;2]$

Từ đồ thị ta có: $t \in (1;2] \Rightarrow f(t) \in (-1;3]$

Vậy để phương trình $f\left(\sqrt{4-x^2}\right)=m$ có nghiệm thì $m \in (-1;3]$.

Câu 31: Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên m thuộc $[-10;10]$ sao cho phương trình $\left[f\left(x^2+1\right)\right]^2-(2m+1)f\left(x^2+1\right)+m(m+1)=0$ có nghiệm và số nghiệm thực phân biệt là số chẵn. Số phần tử của S là

A. 19. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\left[f\left(x^2+1\right)\right]^2-(2m+1)f\left(x^2+1\right)+m(m+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x^2+1\right)=m \\ f\left(x^2+1\right)=m+1 \end{array}\right.$

Đặt $t=x^2+1 \Rightarrow t \geq 1 \Rightarrow f(t) \in [-1;+\infty)$

Phương trình đã cho tương đương với $\left[\begin{array}{ll} f(t)=m & (1) \\ f(t)=m+1 & (2) \end{array}\right.$.

Phương trình đã cho có nghiệm khi (1) hoặc (2) có nghiệm $t \geq 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq -1 \\ m+1 \geq -1 \end{array}\right. \Rightarrow m \geq -2$.

Phương trình đã cho có số nghiệm thực phân biệt là số chẵn trong các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Cả hai phương trình (1) và (2) đều có nghiệm $t>1 \Rightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m+1 \geq -1 \\ m \neq 1 \\ m+1 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m \neq 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$.

Trường hợp 2: Phương trình (2) và phương trình (1) vô nghiệm $\Rightarrow \begin{cases} m<-1 \\ m+1\geq -1 \\ m+1\neq 1 \end{cases} \Rightarrow -2\leq m<-1$

$\Rightarrow m\in[-2;10]\setminus\{0;1\}$.

Số phần tử của S là 11.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)=(x-1)(x-2)...(x-2022)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2022;2022]$ để phương trình $f'(x)=(m+1)f(x)$ có 2022 nghiệm phân biệt.

A. 2022. **B.** 4044. **C.** 2023. **D.** 4045.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$f'(x)=(x-2)(x-3)...(x-2022)+(x-1)(x-3)...(x-2022)+...+(x-1)(x-2)+...+(x-2021)$

Xét phương trình $f'(x)=(m+1)f(x)$ (1)

Ta thấy: $f(1)=f(2)=...=f(2022)=0;\ f'(1)=f'(2)=...=f'(2022)\neq 0$ nên

$x=1;x=2;...;x=2022$ không là nghiệm phương trình.

Xét $x\in\mathbb{R}\setminus\{1;2;...;2022\}$, phương trình (1) tương đương

$$m+1=\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+...+\frac{1}{x-2022}=g(x)$$

Ta có $g'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-2)^2}-...-\frac{1}{(x-2022)^2}<0,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1;2;...;2022\}$

x	$-\infty$		1		2		3	...	2020		2021		2022		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	...	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$-$	
$g(x)$		0	$+\infty$ $-\infty$		$+\infty$ $-\infty$		$+\infty$ $-\infty$		$+\infty$ $-\infty$		$+\infty$ $-\infty$		$+\infty$ $-\infty$	0	

Dựa vào bảng biến thiên của $g(x)$, ta suy ra phương trình (1) có 2022 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m+1\neq 0\Leftrightarrow m\neq -1$.

Vì m nguyên thuộc đoạn $[-2022;2022]$ nên có 4044 giá trị của tham số m.

Câu 33: Cho hàm số $y=f(x)=2022^x-2022^{-x}+x+\sin x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(x+3)+f\left(x^3-4x+m\right)=0$ có ba nghiệm phân biệt?

A. 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=f(x)=2022^x-2022^{-x}+x+\sin x$ xác định trên $\mathbb{R}$ và

$f(-x)=2022^{-x}-2022^{-x}-x-\sin x=-f(x)$

Suy ra $f(x)$ là hàm số lẻ.

Mặt khác, $y' = f'(x) = 2022^x.\ln 2022 + 2022^{-x}.\ln 2022 + 1 + \cos x > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó, $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó, phương trình

$f(x+3) + f\left(x^3 - 4x + m\right) = 0 \Leftrightarrow f(x+3) = -f\left(x^3 - 4x + m\right)$

$\Leftrightarrow f(x+3) = f\left(-x^3 + 4x - m\right) \Leftrightarrow x + 3 = -x^3 + 4x - m$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x + 3 = -m$

Đặt $g(x) = x^3 - 3x + 3 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 - 3$. $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y = -m$ cắt đồ thị hàm số $g(x) = x^3 - 3x + 3$ tại 3 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow 1 < -m < 5 \Leftrightarrow -5 < m < -1$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thoả đề.

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(-1) = 5,\ f(-3) = 0$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Tìm tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $3f(2-x) + \sqrt{x^2+4} - x = m$ có nghiệm trong khoảng $(3;5)$.

A. 15. **B.** 16. **C.** 12. **D.** 13.

Lời giải

Chọn A

Xét $g(x) = 3f(2-x) + \sqrt{x^2+4} - x$ trên khoảng $(3;5)$.

$g'(x) = -3f'(2-x) + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}} - 1.$

Ta có $3 < x < 5 \Leftrightarrow -3 < 2 - x < -1$.

Suy ra $f'(2-x) > 0,\ \forall x \in (3;5) \Rightarrow -3f'(2-x) < 0,\ \forall x \in (3;5)\ (1)$.

$\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}} < 1,\ \forall x \in (3;5) \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}} - 1 < 0,\ \forall x \in (3;5)\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $g'(x) < 0\ \ \forall x \in (3;5)$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên khoảng $(3;5)$

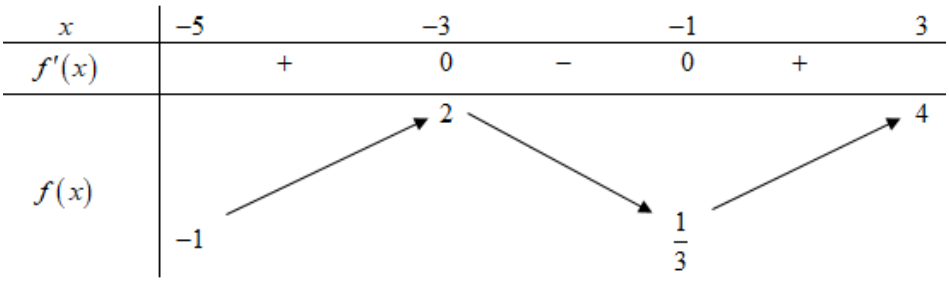
x	3		5
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$12+\sqrt{13}$	$\searrow$	$\sqrt{29}-5$

Từ bảng biến thiên suy ra, để phương trình $3f(2-x) + \sqrt{x^2+4} - x = m$ có nghiệm thuộc

khoảng $(3;5)$ thì $\sqrt{29}-5<m<12+\sqrt{13}$. Vì m nguyên dương nên $m\in\{1;2;3.....;15\}$.

Vậy có 15 giá trị của m thoả mãn yêu cầu bài toán

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $[-5;3]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $3f(-x-2)=x^3-3x+2+m$ có đúng 3 nghiệm thuộc $[-5;3]$?

A. 2. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

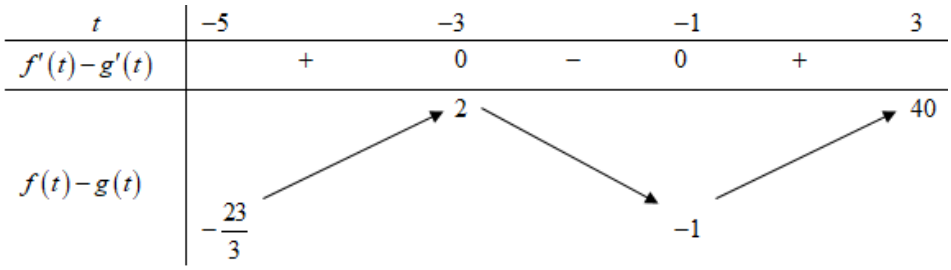
Đặt $t=-x-2\Rightarrow 3f(t)=-t^3-6t^2-9t+m$.

Gọi $g(t)=\dfrac{-t^3}{3}-2t^2-3t\Rightarrow f(t)-g(t)=\dfrac{m}{3}$.

Ta có $g'(t)=-t^2-4t-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=-3\end{array}\right.$.

Dựa vào bảng xét dấu của $y=f'(t)$ và $y=g'(t)$ suy ra: $f'(t)-g'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=-3\end{array}\right.$.

Khi đó ta có bảng biến thiên của $f(t)-g(t)$:



Dựa vào bảng biến thiên, phương trình có 3 nghiệm phân biệt $\Rightarrow -1<\dfrac{m}{3}<2\Rightarrow -3<m<6$.

Vậy có 8 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 36: Cho hàm số $y=x^6+9x^4-m^3x^3+(28-3m^2)x^2-4mx+28$ có đồ thị (C). Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để (C) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt trên đoạn $[1;2]$. Tập S có dạng $(\alpha;\beta]$. Giá trị của biểu thức $(\beta^2-\alpha^2)$ tương ứng là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $x^6+9x^4-m^3x^3+(28-3m^2)x^2-4mx+28=0$

$\Leftrightarrow x^6+9x^4+28x^2+28=m^3x^3+3m^2x^2+4mx$

$\Leftrightarrow \left(x^2+2\right)^3+3\left(x^2+2\right)^2+4\left(x^2+2\right)=(mx)^3+3(mx)^2+4(mx)\,(1).$

Xét hàm số : $f(t)=t^3+3t^2+4t$:

$f'(t)=3t^2+6t+4>0, \forall t\in\mathbb{R}$

Suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $(1)\Leftrightarrow x^2+2=mx \Leftrightarrow g(x)=\dfrac{x^2+2}{x}=m\,(2).$

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{x^2+2}{x}$ trên $[1;2]$

Bảng biến thiên $g(x)=\dfrac{x^2+2}{x}=x+\dfrac{2}{x}(x\neq 0)$

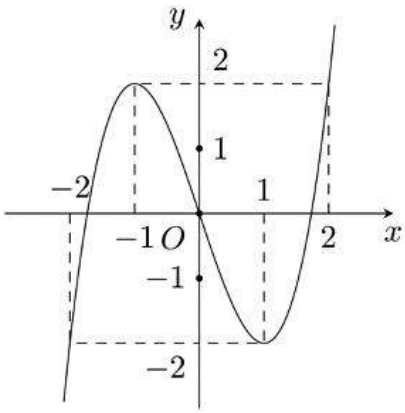
$g'(x)=\dfrac{x^2-2}{x^2}$

x	1		$\sqrt{2}$		2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	3	↘	$2\sqrt{2}$	↗	3

Để (2) có hai nghiệm phân biệt thì đồ thị hàm số $y=m$ cắt đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{x^2+2}{x}$ tại hai điểm phân biệt.

Suy ra $m\in\left(2\sqrt{2};3\right]$ suy ra $\beta^2-\alpha^2=3^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2=1.$

Câu 37: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{f(\sin x)+2}\right)=f(m)$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$?



A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Với mỗi $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ ta có duy nhất một giá trị $\sin x\in(-1;1]$.

Từ đồ thị suy ra $-2\le f(\sin x)<2\Rightarrow 0\le f(\sin x)+2<4\Rightarrow 0\le\sqrt{f(\sin x)+2}<2.$

Đặt $t=\sqrt{f\left(\sin x\right)+2}\Rightarrow t\in\left[0;2\right)$, ta được phương trình $f\left(t\right)=f\left(m\right)$ với $t\in\left[0;2\right)$.

Từ đồ thị suy ra phương trình $f\left(\sqrt{f\left(\sin x\right)+2}\right)=f\left(m\right)$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ khi và chỉ khi phương trình $f\left(t\right)=f\left(m\right)$ có nghiệm $t\in\left[0;2\right)$

$\Leftrightarrow -2\le f\left(m\right)<2\Leftrightarrow\begin{cases}-2\le m<2\\ m\ne -1\end{cases}$.

(Vì nếu $f\left(m\right)=2$ từ đồ thị suy ra $\left[\begin{array}{l}m=2\\ m=-1\end{array}\right.$ thì phương trình $f\left(t\right)=f\left(m\right)$ có nghiệm $\left[\begin{array}{l}t=-1\notin\left[0;2\right)\\ t=2\notin\left[0;2\right)\end{array}\right.$ nên phương trình đã cho vô nghiệm. suy ra $\left[\begin{array}{l}m=2\\ m=-1\end{array}\right.$ không thoả mãn).

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\left\{-2;0\right\}$. Vậy có 2 giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{f\left(\sin x\right)+2}\right)=f\left(m\right)$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Câu 38: Cho hai hàm số $y=\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x-3\right)\left(m-\left|x\right|\right)$; $y=-x^4+6x^3-5x^2-16x+18$ có đồ thị lần lượt là $\left(C_1\right)$; $\left(C_2\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $\left[-2021;2021\right]$ để $\left(C_1\right)$ cắt $\left(C_2\right)$ tại 4 điểm phân biệt?

A. 4042. **B.** 2022. **C.** 2019. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của $\left(C_1\right)$ và $\left(C_2\right)$ là

$\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x-3\right)\left(m-\left|x\right|\right)=-x^4+6x^3-5x^2-16x+18$ $\left(1\right)$

Ta thấy $x=1,\ x=2,\ x=3$ không là nghiệm của $\left(1\right)$ nên

$\left(1\right)\Leftrightarrow m=\left|x\right|+\frac{-x^4+6x^3-5x^2-16x+18}{\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x-3\right)}$ $\left(2\right)$.

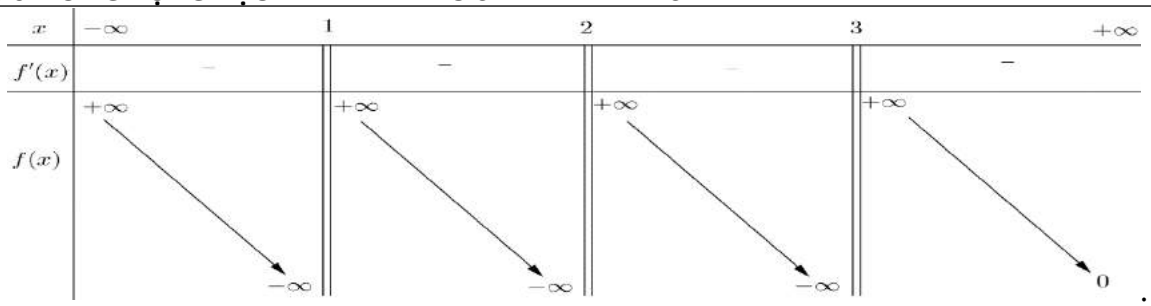
Biến đổi $\frac{-x^4+6x^3-5x^2-16x+18}{\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x-3\right)}=-x+a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x-2}+\frac{d}{x-3}$

Đồng nhất thức hai vế ta xác định được $a=0;\ b=1;\ c=2;\ d=3$ nên

$\left(2\right)\Leftrightarrow m=\left|x\right|-x+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}$ với $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{1;2;3\right\}$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=\left|x\right|-x+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}$ với $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{1;2;3\right\}$.

Ta có $f'\left(x\right)=-\frac{1}{\left(x-1\right)^2}-\frac{2}{\left(x-2\right)^2}-\frac{3}{\left(x-3\right)^2}+\frac{x-\left|x\right|}{\left|x\right|}<0$ với $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{1;2;3\right\}$



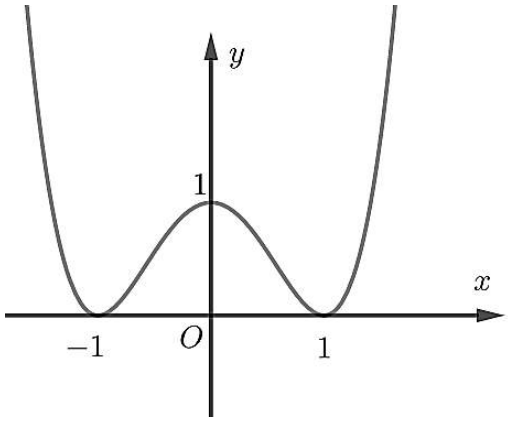
Bảng biến thiên của hàm $f\left(x\right)$

Từ bảng biến thiên, để phương trình $\left(1\right)$ có 4 nghiệm phân biệt thì $m>0$

Vì m nguyên thuộc đoạn $\left[-2021;2021\right]$ nên $m\in\left\{1;2;3;...;2021\right\}$. Vậy có 2021 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 39: Cho đồ thị hàm số bậc bốn có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m và $m\in\left[-2021;2021\right]$ để phương trình $\log\dfrac{f\left(x\right)}{mx^2}+x\left[f\left(x\right)-mx\right]=mx^3-f\left(x\right)$ có 2 nghiệm dương phân biệt?

A. 2021. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 2022.



Lời giải

Chọn A

Theo đề bài ta chỉ xét $x>0$

Điều kiện của phương trình đã cho: $\begin{cases}m>0\\x\neq1\end{cases}$

Theo hình vẽ ta dễ dàng tìm được hàm số $f\left(x\right)=x^4-2x^2+1$

Ta có:

$$\log\frac{f\left(x\right)}{mx^2}+x\left[f\left(x\right)-mx\right]=mx^3-f\left(x\right)$$

$$\Leftrightarrow\log f\left(x\right)-\log mx^2+xf\left(x\right)-mx^2=mx^3-f\left(x\right)$$

$$\Leftrightarrow\log f\left(x\right)+xf\left(x\right)+f\left(x\right)=\log mx^2+mx^3+mx^2$$

$$\Leftrightarrow\log f\left(x\right)+\left(x+1\right)f\left(x\right)=\log mx^2+\left(x+1\right)mx^2$$

$$\Leftrightarrow\log\left[f\left(x\right).\left(x+1\right)\right]+\left(x+1\right)f\left(x\right)=\log\left[mx^2\left(x+1\right)\right]+\left(x+1\right)mx^2,\left(1\right)$$

Xét hàm số $f\left(t\right)=\log t+t,\left(t>0\right)\Rightarrow f'\left(t\right)=\dfrac{1}{t\ln10}+1>0,\forall t>0$

Suy ra hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$

Từ (1) suy ra.

$$f(x).(x+1)=(x+1)mx^2 \Leftrightarrow f(x)=mx^2 \Leftrightarrow m=\frac{f(x)}{x^2}$$

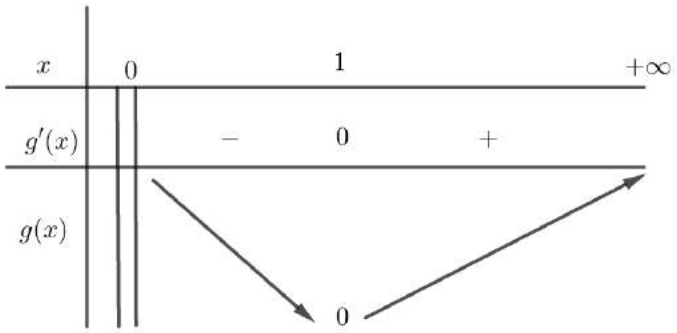
$$\Leftrightarrow m=\frac{x^4-2x^2+1}{x^2}=x^2-2+\frac{1}{x^2}$$

Đặt

$$g(x)=x^2-2+\frac{1}{x^2} \Rightarrow g'(x)=2x-\frac{2}{x^3}$$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$

Dễ thấy TCĐ $x=0$.



Như vậy YCBT $\Leftrightarrow m>0$. Kết hợp điều kiện ta có $m\in\{1,2,3,...,2021\}$

Vậy có 2021 giá trị m.

Câu 40: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+5$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(2f(x)-1)=m$ có đúng 3 nghiệm thực x?

A. 484. **B.** 486. **C.** 485. **D.** 3.

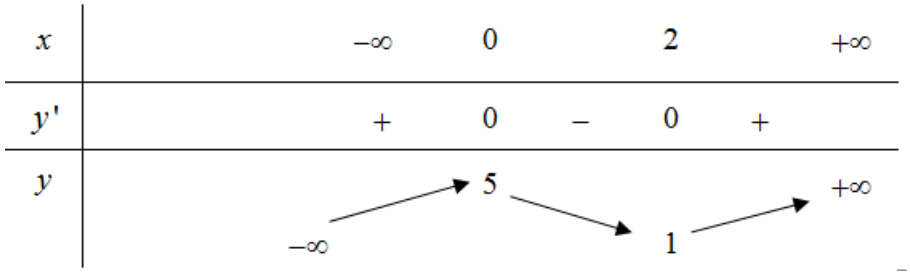
Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(2f(x)-1)=m$

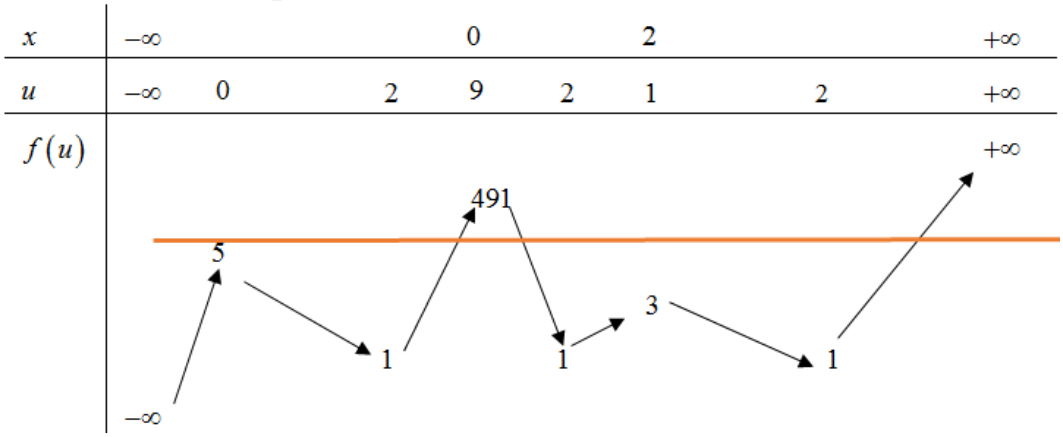
$\Leftrightarrow f(2x^3-6x^2-1)=m$

Dưới đây là bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2+5$



Đặt $u=2x^3-6x^2+9$

$$u'=6x^2-12x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$$



Để phương trình $f\left(2x^3-6x^2-1\right)=m$ có đúng 3 nghiệm thực x thì $5<m<491$.

Suy ra có 485 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 41: Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3+8x$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f(x)+m}\right)=x^3-m$ có 3 nghiệm thực phân biệt?

A. 21. **B.** 5. **C.** 19. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $u=\sqrt[3]{f(x)+m}\Leftrightarrow m=u^3-f(x)\ (1)$, thay vào phương trình ban đầu, ta được: $f(u)=x^3-m\Leftrightarrow m=x^3-f(u)\ (2)$

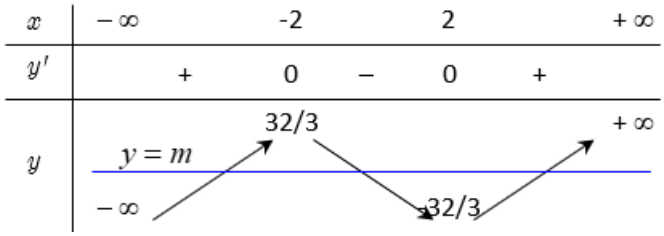
Từ (1) và (2) suy ra: $m=x^3-f(u)=u^3-f(x)\Leftrightarrow x^3+f(x)=u^3+f(u)$.

Xét hàm số $g(t)=f(t)+t^3=\frac{4}{3}t^3+8t\Rightarrow g'(t)=4t^2+8>0$ nên hàm số $g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $m=f(x)+x^3=f(u)+u^3\Leftrightarrow x=u\Leftrightarrow m=\frac{2}{3}x^3-8x.$

Xét hàm số: $h(x)=\frac{2}{3}x^3-8x\Rightarrow h'(x)=2x^2-8=0\Leftrightarrow x=\pm 2$.

Bảng biến thiên:



Để phương trình luôn có 3 nghiệm phân biệt thì $-\frac{32}{3}<m<\frac{32}{3}$.

Kết hợp với điều kiện $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow -10\le m\le 10$, nên có tất cả 21 giá trị m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 42: Cho hai hàm số $y=\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}$ và $y=|x+2|-x-m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là $(C_1),(C_2)$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

A. $(-2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2]$. **C.** $[-2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Lời giải:

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm

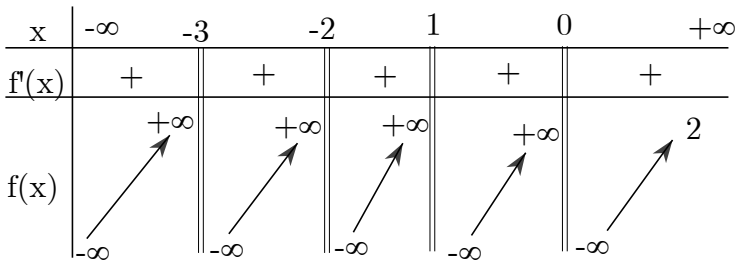
$$\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}=|x+2|-x-m \Leftrightarrow \frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}-|x+2|+x=-m \ (1)$$

Xét $f(x)=\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}-|x+2|+x, x\in D=\mathbb{R}\setminus\{-3;-2;-1;0\}$

Ta có $f(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}-2, x\in(-2;+\infty)\cup D=D_1\\ \frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}+2x+2, x\in(-\infty;-2)\cup D=D_2\end{cases}$

Có $f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}, \forall x\in D_1\\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}+2, \forall x\in D_2\end{cases}$

Dễ thấy $f'(x)>0, \forall x\in D_1\cup D_2$, ta có bảng biến thiên



Hai đồ thị cắt nhau tại đúng 4 điểm phân biện khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng 4 nghiệm phân biệt, từ bảng biến thiên ta có: $-m\geq 2 \Leftrightarrow m\leq -2$.

Câu 43: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[-2;4]$ và có bảng biến thiên như sau

x	-2		0		1		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-3	↗	2	↘	$1{,}5$	↘	1	↗	6

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases}\frac{9}{x^2}-4\geq 0\\ 6f(-2x+1)-8x^3+6x-m=0\end{cases}$ có ba nghiệm phân biệt?

A. 9. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 8.

Lời giải:

Chọn D

Ta có: $\frac{9}{x^2}-4\ge 0\Leftrightarrow \frac{9-4x^2}{x^2}\ge 0\Leftrightarrow \begin{cases}9-4x^2\ge 0\\ x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}-\frac{3}{2}\le x\le \frac{3}{2}\\ x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]\setminus\{0\}$.

Xét phương trình $6f\left(-2x+1\right)-8x^3+6x-m=0\Leftrightarrow m=6f\left(-2x+1\right)-8x^3+6x$

Xét hàm số $g\left(x\right)=6f\left(-2x+1\right)-8x^3+6x$, với $x\in\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]\setminus\{0\}$.

Ta có $g'\left(x\right)=-12f'\left(-2x+1\right)-24x^2+6=-6\left[2f'\left(-2x+1\right)+4x^2-1\right]$

Từ giả thiết ta suy ra $f'\left(-2x+1\right)<0\Leftrightarrow \begin{cases}-2x+1<2\\ -2x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2};$

$f'\left(-2x+1\right)>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2<-2x+1<0\\ 2<-2x+1<4\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\\ -\frac{3}{2}<x<-\frac{1}{2}\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $g\left(x\right)=6f\left(-2x+1\right)-8x^3+6x$ trên $\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]\setminus\{0\}$.

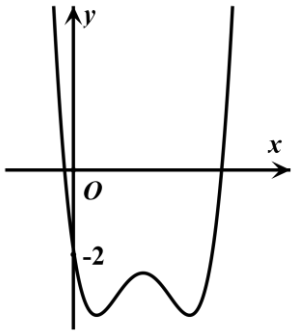
x	$-\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$
$f'\left(-2x+1\right)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$4x^2-1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$g'\left(x\right)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$g\left(x\right)$	54	↘	4	↗	9	↗	14	↘	-36

Từ bảng biến thiên ta suy ra hệ có đúng ba nghiệm $\Leftrightarrow$ có đúng ba nghiệm $x\in\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]\setminus\{0\}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}4<m<14\\ m\ne 9\end{cases}$. Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=5;6;7;8;10;11;12;13$.

Vậy có 8 số nguyên m.

Câu 44: Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ và hàm số $g\left(x\right)=\sqrt{x^2+4}+x$. Số nghiệm thực của phương trình $f\left[g\left(x\right)f\left(x\right)\right]+2=0$ là



A. 6. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 12.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\sqrt{x^2+4}>\sqrt{x^2}=|x| \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x^2+4}+x>|x|+x\ge 0\\ \sqrt{x^2+4}-x>|x|-x\ge 0\end{cases}$

Khi đó, phương trình: $f\left[g(x)f(x)\right]+2=0 \Leftrightarrow f\left[g(x)f(x)\right]=-2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x).f(x)=0\\ g(x).f(x)=a\in(0;1)\\ g(x).f(x)=b\in(2;3)\\ g(x).f(x)=c\in(3;4)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x)=0 & (1)\ \left(do\ g(x)=x+\sqrt{x^2+4}>0,\forall x\in\mathbb{R}\right)\\ f(x)=\frac{1}{4}a\left(\sqrt{x^2+4}-x\right) & (2)\\ f(x)=\frac{1}{4}b\left(\sqrt{x^2+4}-x\right) & (3)\\ f(x)=\frac{1}{4}c\left(\sqrt{x^2+4}-x\right) & (4)\end{array}\right.$$

Dễ thấy phương trình $f(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt

Xét hàm số $h(x)=\frac{1}{4}t\left(\sqrt{x^2+4}-x\right),\ x\in\mathbb{R}\ (t>0)$ có $h'(x)=\frac{1}{4}t\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}}<0,\ x\in\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{t}{\sqrt{x^2+4}+x}=0$

Từ đồ thị ta thấy các phương trình $(2),(3),(4)$ mỗi phương trình có 2 nghiệm phân biệt

Vậy phương trình đã cho có 8 nghiệm phân biệt.

Câu 45: Cho đồ thị hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị là $A(0;3)$ và $B(2;-1)$. Số nghiệm thực của phương trình $4^{f(f(x))}-2^{f(x)+f(f(x))}+3.2^{f(f(x))}=3.2^{f(x)}$ là.

A. 3. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$

Đồ thị hàm số $f(x)$ có điểm cực trị $A(0;3) \Rightarrow \begin{cases}c=0\\ d=3\end{cases}$

Đồ thị hàm số $f(x)$ có điểm cực trị $B(2;-1) \Rightarrow \begin{cases}12a+4b+c=0\\ 8a+4b+2c+d=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=1\\ b=-3\end{cases}$.

$\Rightarrow f(x)=x^3-3x^2+3$.

Xét phương trình: $4^{f(f(x))}-2^{f(x)+f(f(x))}+3.2^{f(f(x))}=3.2^{f(x)}$.

$\Leftrightarrow 2^{2f(f(x))}-2^{f(x)}.2^{f(f(x))}+3.2^{f(f(x))}-3.2^{f(x)}=0$

$\Leftrightarrow 2^{f(f(x))}\left(2^{f(f(x))}+3\right)-2^{f(x)}\left(2^{f(f(x))}+3\right)=0$

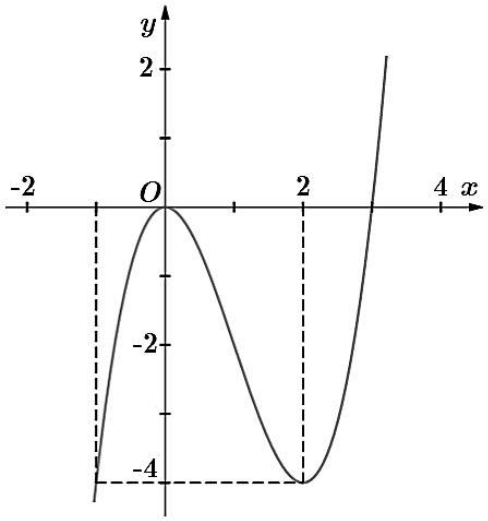
$\Leftrightarrow \left(2^{f(f(x))}+3\right)\left(2^{f(f(x))}-2^{f(x)}\right)=0 \Leftrightarrow 2^{f(f(x))}=2^{f(x)} \Leftrightarrow f\left(f(x)\right)=f(x)$.

$\Leftrightarrow f^3(x)-3f^2(x)+3=f(x) \Leftrightarrow f^3(x)-3f^2(x)-f(x)+3=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=3 \\ f(x)=1 \\ f(x)=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3-3x^2+3=3 \\ x^3-3x^2+3=1 \\ x^3-3x^2+3=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^3-3x^2=0 & (2ng) \\ x^3-3x^2=-2 & (3ng) \\ x^3-3x^2=-4 & (2ng) \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm.

Câu 46: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm bậc ba liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $\dfrac{f'\left(f(x)\right)}{f^2(x)+f(x)}=0$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $\left\{\begin{array}{l} f(x)\neq 0 \\ f(x)\neq -1 \end{array}\right.$.

Ta có $f'\left(f(x)\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x)=0 & (l) \\ f(x)=2 & (n) \end{array}\right.$.

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta thấy phương trình $f(x)=2$ có một nghiệm nên phương trình $\dfrac{f'\left(f(x)\right)}{f^2(x)+f(x)}=0$ có một nghiệm.

Câu 47: Cho hàm số $f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $xf(x)-\dfrac{1+\sqrt{4x+m-1}}{f\left(-1-\sqrt{4x+m-1}\right)}=0$ có hai nghiệm phân biệt là

A. 2 . **B.** 3 . **C.** 6 . **D.** 4 .

Lời giải:

Chọn D

Ta có: $f(x)=x+\sqrt{1+x^2}\Rightarrow f'(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác, ta lại có: $f(-x)=-x+\sqrt{1+x^2}=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1}{f(x)}$.

Nên phương trình tiếp theo tương đương với: $xf(x)-\dfrac{1+\sqrt{4x+m-1}}{f\left(-1-\sqrt{4x+m-1}\right)}=0$.

$\Leftrightarrow xf(x)-\left(1+\sqrt{4x+m-1}\right)f\left(1+\sqrt{4x+m-1}\right)=0$.

$\Leftrightarrow xf(x)=\left(1+\sqrt{4x+m-1}\right)f\left(1+\sqrt{4x+m-1}\right)$.

Đến đây ta xét hàm đặc trưng $y=g(t)=tf(t)=t.\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)=t^2+t\sqrt{t^2+1}$.

Có $g'(t)=2t+\sqrt{t^2+1}+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên suy ra $g(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow g(x)=g\left(1+\sqrt{4x+m-1}\right)\Leftrightarrow x=1+\sqrt{4x+m-1}\Leftrightarrow\sqrt{4x+m-1}=x-1$.

Do $\sqrt{4x+m-1}\geq 0$ nên suy ra $\begin{cases}x-1\geq 0\\4x+m-1=(x-1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\m=x^2-6x+2\end{cases}$.

Xét hàm $y=p(x)=x^2-6x+2,\forall x\geq 1\Rightarrow p'(x)=2x-6=0\Leftrightarrow x=3$.

Ta có bảng biến thiên của hàm $p(x)$ như sau:

x	1		3		$+\infty$
$p'(x)$		$-$	0	$+$	
$p(x)$	-3	$\searrow$	-7	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT trên để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $m\in\left(p(3);p(1)\right]\Leftrightarrow m\in(-7;-3]$.

Như vậy, ta kết luận có tất cả 4 giá trị nguyên thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 48: Cho hàm số $y=f(x)=2x^3-3x^2+1$. Tập hợp các giá trị m để phương trình $f\left(f\left(\frac{2\sin x+1}{2}\right)\right)=f(m)$ có nghiệm là đoạn $[a;b]$. Khi đó giá trị $4a^2+8b$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(7;\frac{23}{2}\right)$. **B.** $(-2;5)$. **C.** $\left(\frac{43}{3};\frac{39}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{37}{3};\frac{65}{4}\right)$.

Lời giải:

Chọn D

Ta có: $y'=6x^2-6x$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

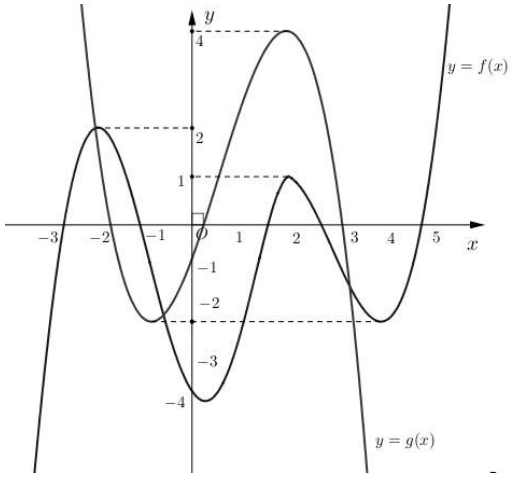
Ta có: $\frac{2\sin x+1}{2}=\sin x+\frac{1}{2}\in\left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$ suy ra $f\left(\frac{2\sin x+1}{2}\right)\in[0;1]$ nên $f\left(f\left(\frac{2\sin x+1}{2}\right)\right)\in[0;1]$.

Phương trình $f\left(f\left(\frac{2\sin x+1}{2}\right)\right)=f(m)$ có nghiệm $\Leftrightarrow 0\le f(m)\le 1\Leftrightarrow\begin{cases}2m^3-3m^2+1\ge 0\\2m^3-3m^2\le 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le m\le\frac{3}{2}$.

Vậy $4a^2+8b=4.\frac{1}{4}+8.\frac{3}{2}=13$.

Câu 49: Cho hai hàm $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Khi đó tổng số nghiệm của phương trình $f(g(x))=0$ và $g(f(x))=0$ là



A. 25. **B.** 22. **C.** 21. **D.** 26.

Lời giải:

Chọn C

Ta có $g\left(f\left(x\right)\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=-2\ \ (1)\\ f\left(x\right)=\alpha,\left(\alpha\in\left(0;1\right)\right)\ (2)\\ f\left(x\right)=3\ \ (3)\end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị hàm số $g\left(x\right)$ suy ra phương trình $\left(1\right)$ có 4 nghiệm; phương trình $\left(2\right)$ có 5 nghiệm và phương trình $\left(3\right)$ có 1 nghiệm. Vậy phương trình $g\left(f\left(x\right)\right)=0$ có 10 nghiệm.

Ta có $f\left(g\left(x\right)\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}g\left(x\right)=-3\ \ (4)\\ g\left(x\right)=-1\ \ (5)\\ g\left(x\right)=1\ \ (6)\\ g\left(x\right)=a,\left(a\in\left(1;2\right)\right)\ (7)\\ g\left(x\right)=b,\left(b\in\left(4;5\right)\right)\ \ (8)\end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị hàm số $g\left(x\right)$ suy ra phương trình $\left(4\right)$ có 1 nghiệm; phương trình $\left(5\right);\left(6\right);\left(7\right)$ mỗi phương trình có 3 nghiệm và phương trình $\left(8\right)$ có 1 nghiệm. suy ra phương trình $f\left(g\left(x\right)\right)=0$ có 11 nghiệm.

Vậy tổng số nghiệm của phương trình $f\left(g\left(x\right)\right)=0$ và $g\left(f\left(x\right)\right)=0$ là 21.

Câu 50: Cho hàm số $y=x^4-32x^2+4$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m thì tổng các nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(-3;2\right)$ của phương trình $f\left(x^2+2x+3\right)=m$ bằng -4?

A. 145. **B.** 142. **C.** 144. **D.** 143.

Lời giải:

Chọn D

Nhận xét: Phương trình $x^2+2x+3=a\ \left(a\in\mathbb{R}\right)$ có hai nghiệm x_1,x_2 thì ta luôn có $x_1+x_2=-2$.

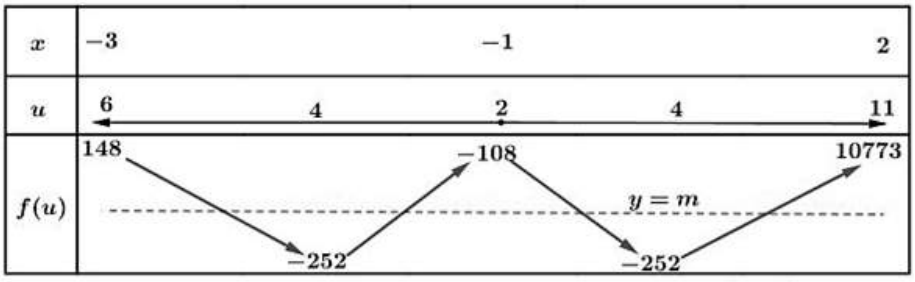
Phương trình $f\left(x^2+2x+3\right)=m\ \left(*\right)$ có tổng nghiệm phân biệt bằng -4 khi và chỉ khi phương trình $\left(*\right)$ có nghiệm xảy ra trường hợp có 4 nghiệm phân biệt là x_1,x_2,x_3,x_4 tức là phương trình $f\left(x^2+2x+3\right)=m$ phải có 4 nghiệm phân biệt.

Ta có: $f'\left(x\right)=4x^3-64x$. Giải phương trình $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow4x^4-64x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm4\end{array}\right.$.

Đặt $u\left(x\right)=x^2+2x+3\Rightarrow u'\left(x\right)=2x+2$

Giải phương trình $u'\left(x\right)=0\Leftrightarrow2x+2=0\Leftrightarrow x=-1$

Ta áp dụng phương pháp ghép trục để vẽ bảng biến thiên của hàm số $f\left(u\left(x\right)\right)$ như sau:



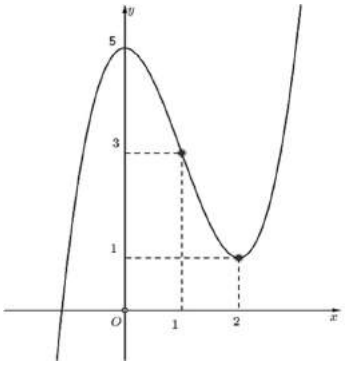
Từ bảng biến thiên, hàm số có 4 nghiệm phân biệt khi $-252 < m < -108$.

Vậy có tất cả 143 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng 5: Tương giao đồ thị hàm số có chứa giá trị tuyệt đối

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|\frac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\right|+2\right)=f\left(\sqrt{(m+2)^2+4}\right)$ có nghiệm?

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải:

Chọn B

Ta có: $-1\le \sin x\le 1,\ -1\le \cos x\le 1$ nên suy ra $2\cos x-\sin x+4>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Đặt $t=\frac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\Rightarrow t(2\cos x-\sin x+4)=3\sin x-\cos x-1$

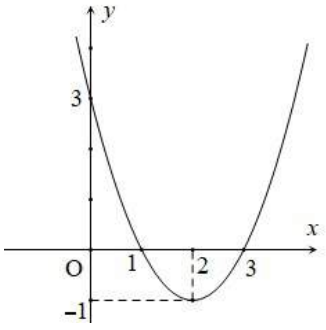
$\Leftrightarrow (2t+1)\cos x-(t+3)\sin x=-(4t+1)$.

Phương trình trên có nghiệm khi $(2t+1)^2+(t+3)^2\ge(4t+1)^2\Leftrightarrow \frac{-9}{11}\le t\le 1\Rightarrow 2\le |t|+2\le 3$.

Nhìn vào hình trên ta thấy hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên $[2;3]$ nên phương trình $f\left(\left|\frac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\right|+2\right)=f\left(\sqrt{(m+2)^2+4}\right)$ hay phương trình $f\left(|t|+2\right)=f\left(\sqrt{(m+2)^2+4}\right)$ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $|t|+2=\sqrt{(m+2)^2+4}$ có nghiệm t thỏa mãn điều kiện $2\le |t|+2\le 3\Leftrightarrow 2\le\sqrt{(m+2)^2+4}\le 3\Rightarrow m^2+4m-1\le 0\Leftrightarrow 2-\sqrt{5}\le m\le 2+\sqrt{5}$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên có tất cả 5 giá trị m thỏa mãn.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)=ax^2+bx+c$ có đồ thị (C)



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2\left(|x|\right)+\left(m-2\right)f\left(|x|\right)+m-3=0$ có 6 nghiệm phân biệt?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

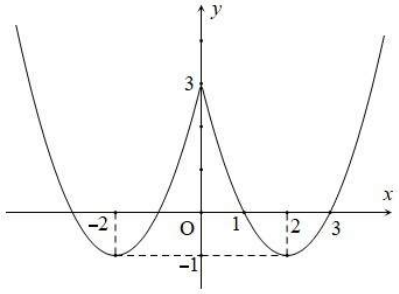
Lời giải:

Chọn B

Xét phương trình $f^2\left(|x|\right)+\left(m-2\right)f\left(|x|\right)+m-3=0$.

Nhận thấy $1-\left(m-2\right)+\left(m-3\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(|x|\right)=-1\\f\left(|x|\right)=3-m\end{array}\right.$.

Từ đồ thị hàm số $f\left(x\right)$, suy ra đồ thị hàm số $f\left(|x|\right)$ như sau:



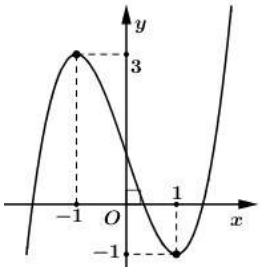
Với $f\left(|x|\right)=-1$, ta được 2 nghiệm x.

Để phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt, tức là phương trình $f\left(|x|\right)=3-m$ có 4 nghiệm phân biệt.

Hay $-1<3-m<3\Leftrightarrow 0<m<4\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m\in\left\{1;2;3\right\}$.

Như vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 3: Cho hàm đa thức $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Đặt $g\left(x\right)=\left|f\left(x^2\right)\right|$. Số nghiệm của phương trình $g\left(x\right).\left[2g\left(x\right)-1\right]=0$ là

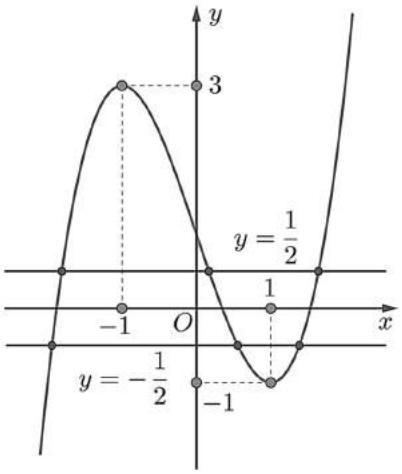
A. 11. **B.** 10. **C.** 13. **D.** 12.

Lời giải:

Chọn D

Ta có $g\left(x\right).\left[2g\left(x\right)-1\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}g\left(x\right)=0\\g\left(x\right)=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|f\left(x^2\right)\right|=0\\\left|f\left(x^2\right)\right|=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}f\left(x^2\right)=0 & (1)\\f\left(x^2\right)=\dfrac{1}{2} & (2)\\f\left(x^2\right)=-\dfrac{1}{2} & (3)\end{array}\right.$.

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ suy ra:



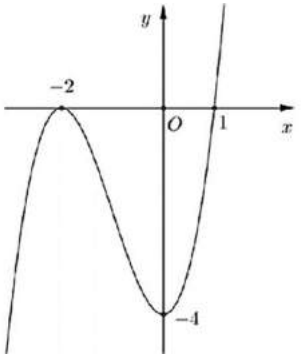
$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=a<-1\\x^2=b\in(0;1)\\x^2=c>1\end{array}\right.$. Suy ra phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

$(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=d<-1,(d\neq a)\\x^2=e\in(0;1),(e\neq b)\\x^2=f>1,(f\neq c)\end{array}\right.$. Suy ra phương trình có 4 nghiệm phân biệt khác 4 nghiệm phân biệt của phương trình.

$(3)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=m<-1,(m\neq d,a)\\x^2=n\in(0;1),(n\neq e,b)\\x^2=p>1,(p\neq f,c)\end{array}\right.$. Suy ra phương trình có 4 nghiệm phân biệt khác 4 nghiệm phân biệt của phương trình và 4 nghiệm phân biệt của phương trình.

Vậy phương trình $g(x).\left[2g(x)-1\right]=0$ có tất cả 12 nghiệm

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình dưới đây



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-5;5)$ để phương trình $f^2(x)-(m+4)\left|f(x)\right|+2m+4=0\ (*)$ có 6 nghiệm phân biệt

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

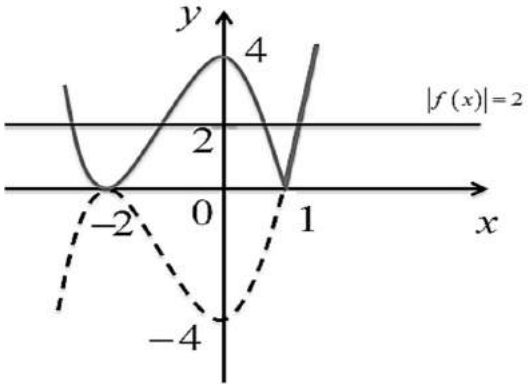
Lời giải:

Chọn C

Ta có: $f^2(x)-(m+4)\left|f(x)\right|+2m+4=0$

$\Leftrightarrow \left(\left|f(x)\right|-2\right)\left(\left|f(x)\right|-2-m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\left|f(x)\right|=2 & (1)\\ \left|f(x)\right|=2+m & (2)\end{array}\right.$

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt



Vậy để phương trình $(*)$ có 6 nghiệm phân biệt thì phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác nghiệm của phương trình (1).

Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác nghiệm của phương (1) khi và chi khi $\left[\begin{array}{l}m+2=0\\ m+2>4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-2\\ m>2\end{array}\right.$. Vì $m\in Z; m\in(-5;5)$ nên $m=\{-2;3;4\}$

Vậy m có 3 giá trị.

Câu 5: Có bao nhiêu m nguyên dương để hai đường cong $(C_1): y=\left|2+\dfrac{2}{x-10}\right|$ và $(C_2): y=\sqrt{4x-m}$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ dương?

A. 35. **B.** 37. **C.** 36. **D.** 34.

Lời giải:

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases}x\neq 10\\ x\geq \dfrac{m}{4}\end{cases}$.

Xét trên $(0;+\infty)\setminus\{10\}$, phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là

$\left|2+\dfrac{2}{x-10}\right|=\sqrt{4x-m} \Leftrightarrow m=4x-\left(\dfrac{2x-18}{x-10}\right)^2$.

Đặt $g(x)=4x-\left(\dfrac{2x-18}{x-10}\right)^2$ với $x\in(0;+\infty)\setminus\{10\}$.

Ta có: $g'(x)=4\left(1+\dfrac{2x-18}{(x-10)^3}\right)$; $g''(x)=\dfrac{-4x+34}{(x-10)^4}$.

$g'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	0	$\frac{17}{2}$	10	$+\infty$
$g''(x)$	$+$	0 $-$	$\|\|$	$-$
$g'(x)$	$4{,}072$ ↗	↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘	0

Suy ra phương trình $g'(x)=0$ có một nghiệm duy nhất $\alpha \in \left(\frac{17}{2};10\right)$. Lại có $g'(9,22)>0$ nên $\alpha \in (9,22;10)$. Ta có bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(0;+\infty)\setminus\{10\}$:

x	0	9	α	10	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$+$	0 $-$	$\|\|$	$+$
$g(x)$	$\frac{-81}{25}$ ↗	36 ↗	$g(\alpha)$ ↘	$-\infty$ $\|\|$ $-\infty$	↗ $+\infty$

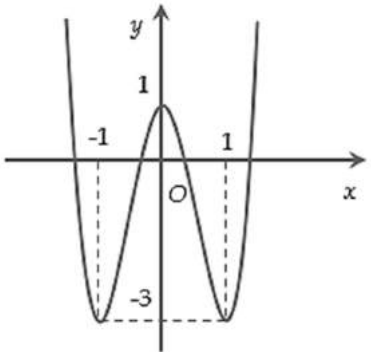
Từ đó suy ra phương trình $m=g(x)$ có 3 nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi $\frac{-81}{25}<m<g(\alpha)$.

Trên khoảng $(9,22;10)$ thì $\begin{cases}4x<40\\ 3<\left(\frac{2x-18}{x-10}\right)^2\end{cases}$ nên $g(x)<37 \Rightarrow g(\alpha)\in(36;37)$.

Vậy những giá trị m nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán là 1; 2; 3; …; 36 hay có 36 giá trị của m cần tìm.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên.



Hỏi phương trình $|f(x)|=1$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 3. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Cách 1.

Phương trình $|f(x)|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=1 \\ f(x)=-1 \end{array}\right.$.

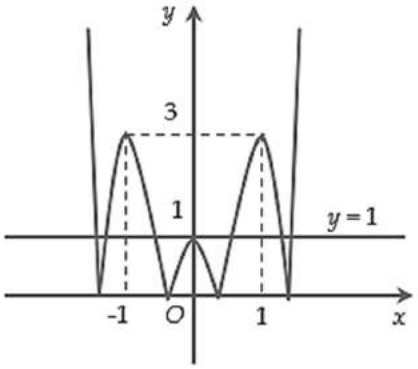
Dựa vào đồ thị ta có $f(x)=1$ có ba nghiệm và $f(x)=-1$ có bốn nghiệm.

Các nghiệm của phương trình không trùng nhau, do đó phương trình đã cho có 7 nghiệm.

Cách 2.

Nhận xét: Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của hai đồ thị hàm số: $(C_1): y=|f(x)|$ và đường thẳng $d: y=1$.

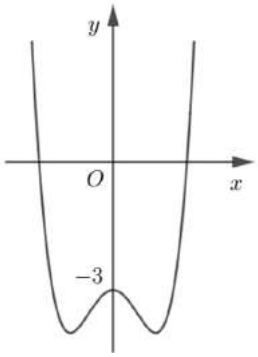
Đồ thị vẽ trên cùng hệ trục như sau:



Dựa vào đồ thị ta thấy đường thẳng d và đồ thị (C) cắt nhau tại 7 điểm phân biệt.

Vậy phương trình (1) có 7 nghiệm phân biệt.

Câu 2: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Phương trình $\left|f\left(x\right)\right|=3$ có số nghiệm là:

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\left|f\left(x\right)\right|=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=3\\f\left(x\right)=-3\end{array}\right.$

Vì đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ cắt đường thẳng $y=3$ tại 2 điểm nên phương trình $f\left(x\right)=3$ có 2 nghiệm

Vì đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ cắt đường thẳng $y=-3$ tại 3 điểm nên phương trình $f\left(x\right)=3$ có 3 nghiệm

Câu 3: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ thỏa mãn $f\left(x\right)=4$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	5	↘	3	↗	$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ tại 6 điểm phân biệt.

A. $3<m<5$. **B.** $0<m<5$. **C.** $3<m<4$. **D.** $4<m<5$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ là hàm chẵn nên đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng.

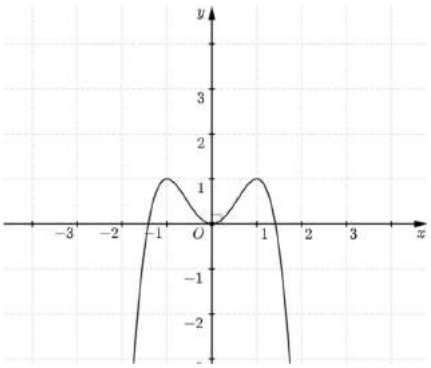
Từ bảng biến thiên của hàm $y=f\left(x\right)$ ta suy ra bảng biến thiên của hàm $y=f\left(\left|x\right|\right)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
y'													
y	$+\infty$	↘	3	↗	5	↘	4	↗	5	↘	3	↗	$+\infty$

$y=m$

Đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ tại 6 điểm phân biệt khi $4<m<5$.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong tròn hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $2|f(x)|-1=0$ là

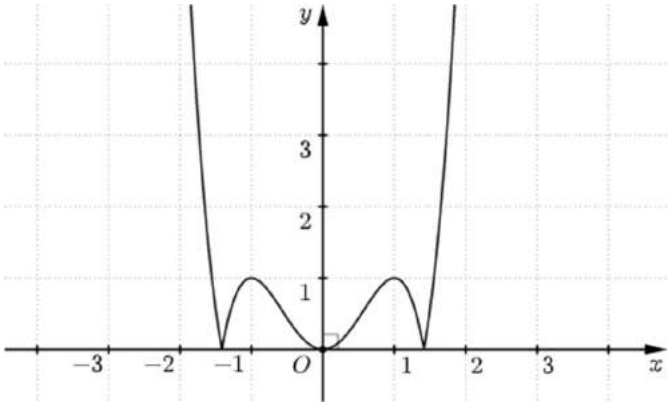


A. 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

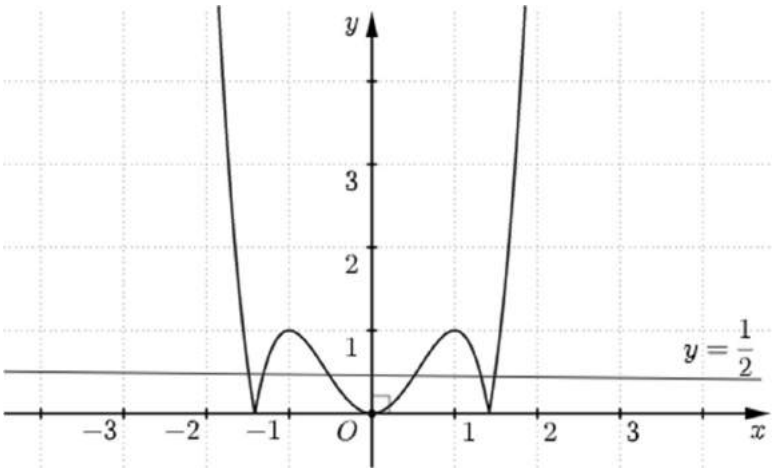
Chọn B

Từ đồ thị hàm số $f(x)$ ta suy ra đồ thị hàm số $|f(x)|$ như hình vẽ



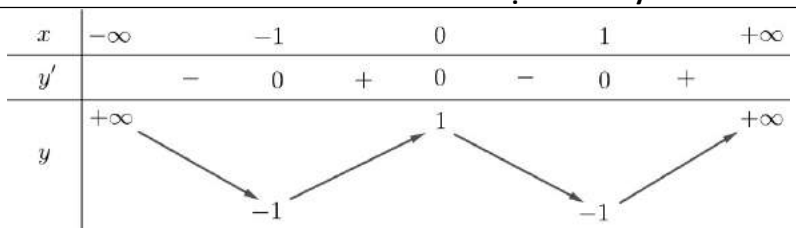
Ta có $2|f(x)|-1=0 \Leftrightarrow |f(x)|=\frac{1}{2}$ (1).

Số nghiệm phương trình (1) là số giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ và $y=\frac{1}{2}$.



Từ hình vẽ ta thấy hai đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ và $y=\frac{1}{2}$ cắt nhau tại 6 điểm phân biệt, nên phương trình (1) có 6 nghiệm.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên. Số điểm cực trị của hàm số $y=|f(x)|$ là

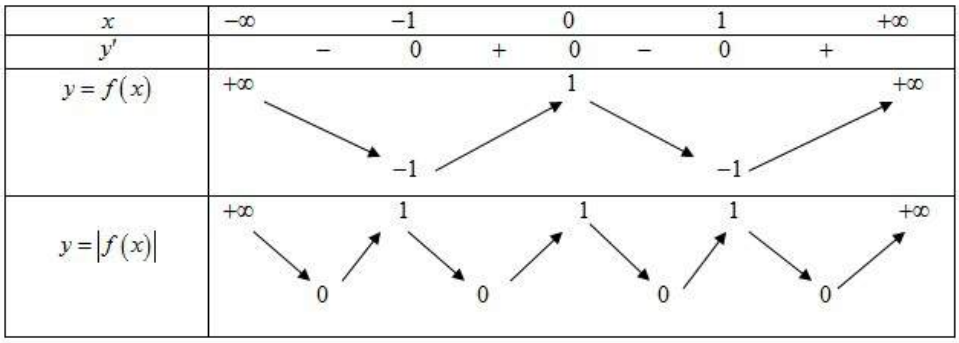


A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

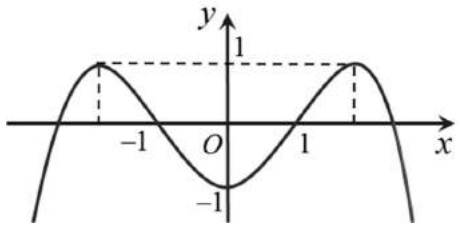
Chọn C

Ta có bảng biến thiên sau:



Từ bảng biến thiên ta suy ra hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có 7 điểm cực trị.

Câu 6: Cho hàm số $f\left(x\right)=\left(x^2-1\right)\left(m^2-x^2\right),m$ là tham số dương và có đồ thị $\left(C\right)$ như hình vẽ.



Hỏi phương trình $\left(x^2-1\right)\left|m^2-x^2\right|-1=0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt.

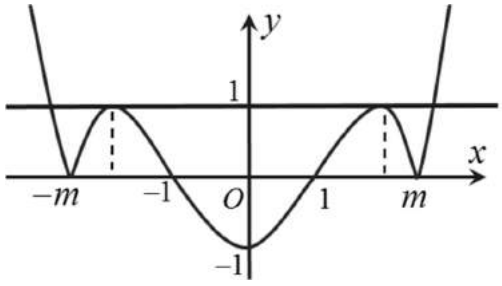
A. 4 . **B.** 3 . **C.** 1 . **D.** 2 .

Lời giải

Chọn A

Hai giao điểm còn lại của đồ thị với trục Ox là $x=\pm m$.

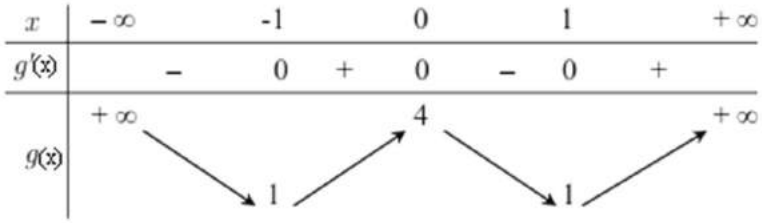
Ta có $\left(x^2-1\right)\left|m^2-x^2\right|-1=0\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)\left|m^2-x^2\right|=1$



Thực hiện biến đổi đồ thịgiữ nguyên phần đồ thị $\left(C\right)$ứng với $x\in\left(-1;1\right)$, lấy đối xứng phần đồ thị $\left(C\right)$ứng với $x\in\left(-\infty;-1\right)\cup\left(1;+\infty\right)$.

Ta thấy đường thẳng $y=1$ và đồ thị thu được có 4 giao điểm khác nhau. Suy ra phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 7: Cho hàm số $y=g(x)$ xác định liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:



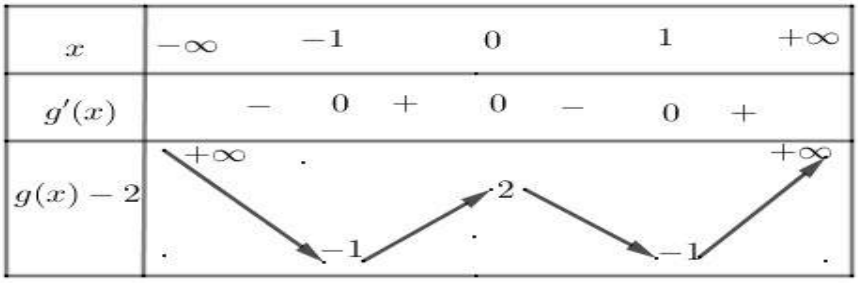
Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left|g(x)-2\right|$ và đường thẳng $y=1$ là:

A. 3 . **B.** 6 . **C.** 5 . **D.** 7 .

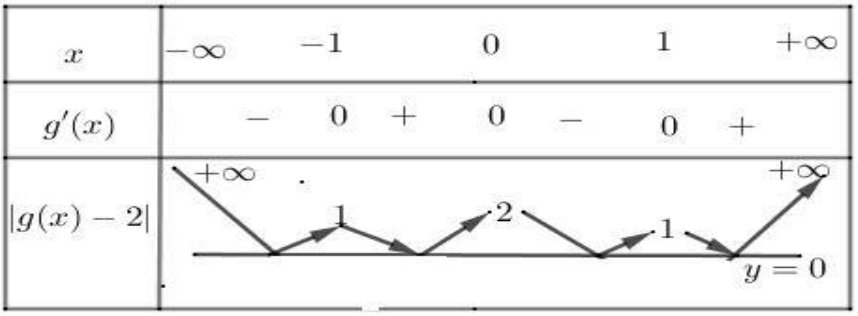
Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)-2$ như sau:

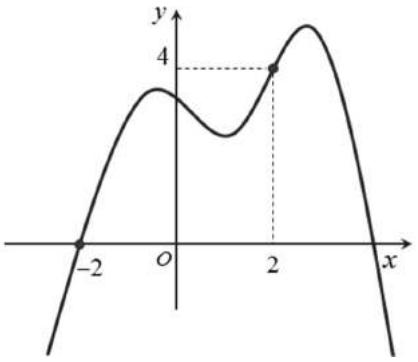


Từ đó suy diễn bảng biến thiên hàm số $y=\left|g(x)-2\right|$ như sau:



Quan sát bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị hàm số $y=\left|g(x)-2\right|$ tại 6 điểm phân biệt.

Câu 8: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ.



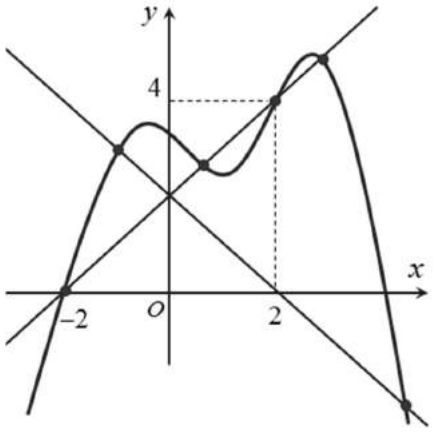
Hỏi đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)-2\right|-\left|x\right|$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm

A. 4 . **B.** 2 . **C.** 6 . **D.** 0 .

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm $\left|f\left(x\right)-2\right|=\left|x\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)-2=x \\ f\left(x\right)-2=-x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=x+2 \\ f\left(x\right)=-x+2 \end{array}\right.$.



Kết hợp đồ thị ta thấy hệ phương trình có 6 nghiệm phân biệt.

Suy ra đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)-2\right|-\left|x\right|$ cắt trục hoành tại 6 điểm phân biệt.

Câu 9: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-2	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=2$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên suy ra $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=2 \Leftrightarrow \left|x^2-2x\right|=a,\ a>3$.

Xét phương trình $\left|x^2-2x\right|=a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x=a \quad (1) \\ x^2-2x=-a \quad (2) \end{array}\right.$

Xét hàm số $y=x^2-2x$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

Do $a>3$ nên phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

Do $a>3 \Leftrightarrow -a<-3$ nên phương trình (2) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm.

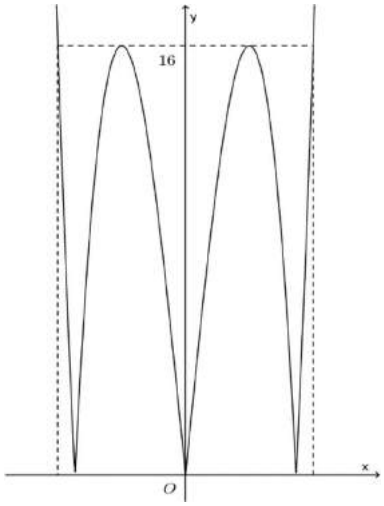
Câu 10: Gọi m_0 là số thực sao cho phương trình $\left|x^3-12x\right|=m_0$ có ba nghiệm dương phân biệt $x_1;\ x_2;\ x_3$ thỏa mãn $x_1+x_2+x_3=1+4\sqrt{3}$. Biết rằng m_0 có dạng $a\sqrt{3}+b$ với $a;\ b$ là các số hữu tỷ. Tính $4a^2+8b$:

A. 106. **B.** 115. **C.** 113. **D.** 101.

Lời giải

Chọn A

Vẽ đồ thị hàm số $y=\left|x^3-12x\right|$



Do đó với mọi $m\in(0;16)$ thì phương trình đã cho luôn có ba nghiệm dương phân biệt $x_1;\ x_2;$ $x_3\ (x_1<x_2<x_3)$ thỏa mãn: $\begin{cases}-x_1^3+12x_1=m_0\\-x_2^3+12x_2=m_0\\x_3^3-12x_3=m_0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(-x_1)^3-12(-x_1)-m_0=0\\(-x_2)^3-12(-x_2)-m_0=0\\x_3^3-12x_3-m_0=0\end{cases}$

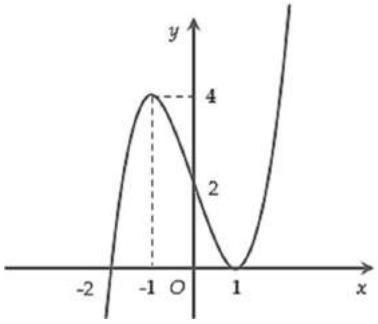
$\Rightarrow -x_1;\ -x_2;\ x_3$ là ba nghiệm của phương trình $x^3-12x-m_0=0$

$\Rightarrow -x_1-x_2+x_3=0\Rightarrow x_3=x_1+x_2$

Mà $x_1+x_2+x_3=1+4\sqrt{3}\Rightarrow x_3=\dfrac{1+4\sqrt{3}}{2}\Rightarrow m_0=\left(\dfrac{1+4\sqrt{3}}{2}\right)^3-12\left(\dfrac{1+4\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+\dfrac{97}{8}$

$\Rightarrow a=\dfrac{3}{2};\ b=\dfrac{97}{8}\Rightarrow 4a^2+8b=106$.

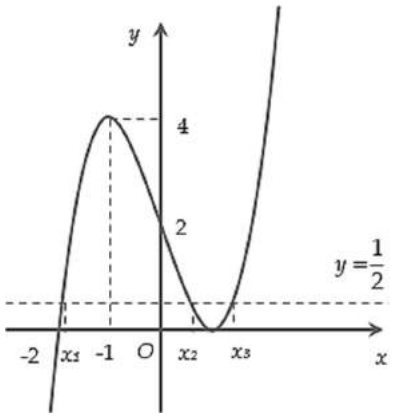
Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\left|f^2(x)-f(x)-12\right|=m$ có 6 nghiệm phân biệt?



A. 3. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 11.

Lời giải

Chọn D



Xét hàm số $h(x)=f^2(x)-f(x)-12 \Rightarrow h'(x)=2f(x)f'(x)-f'(x)=f'(x)\left[2f(x)-1\right]$

$$h'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)\left[2f(x)-1\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f(x)=\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \\ x=x_1\in(-2;-1) \\ x=x_2\in(0;1) \\ x=x_3\in(1;2) \end{array}\right.$$

Ta có: $h'(x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f(x)>\frac{1}{2} \\ f'(x)<0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} f(x)<\frac{1}{2} \\ f'(x)>0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x>x_3 \\ x_1<x<x_2 \end{array}\right. \\ -1<x<1 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x<x_1 \\ x_2<x<x_3 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x>1 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x<x_2 \\ x<x_1 \\ 1<x<x_3 \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		x_1		-1		x_2		1		x_3		∞
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{49}{4}$	↗	0	↘	$-\frac{49}{4}$	↗	-12	↘	$-\frac{49}{4}$	↗	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{49}{4}$	↘	0	↗	$\frac{49}{4}$	↘	12	↗	$\frac{49}{4}$ ↘ 0 ↗ $+\infty$

Để phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt thì $0<m<12$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\} \Rightarrow$ có 11 giá trị m.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	-3	↗	$+\infty$

Phương trình $\left|f(2-3x)+2\right|=5$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x)=f(2-3x)+2,\ x\in\mathbb{R}$.

Ta có : $g'(x)=-3f'(2-3x)$, suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(2-3x)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-3x=-1\\2-3x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$$

$g(1)=f(-1)+2=5+2=7$; $g\left(-\dfrac{1}{3}\right)=f(3)+2=-3+2=-1$.

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $g(x)$:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	7	↘	$-\infty$

Phương trình $\left|f(2-3x)+2\right|=5\Leftrightarrow|g(x)|=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}g(x)=5\\g(x)=-5\end{array}\right.$

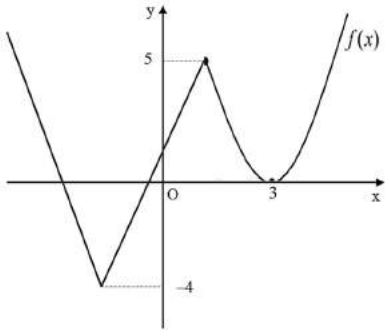
Dựa vào bảng biến thiên suy ra:

Phương trình $g(x)=5$ có 3 nghiệm phân biệt.

Phương trình $g(x)=-5$ có 1 nghiệm phân biệt.

Vậy: phương trình $\left|f(2-3x)+2\right|=5$ có 4 nghiệm.

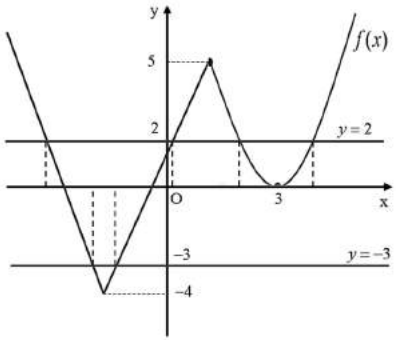
Câu 13: Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên dưới. Số nghiệm thực của phương trình $\left|2f(x)+1\right|=5$ là



A. 6. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\left|2f\left(x\right)+1\right|=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=2\\f\left(x\right)=-3\end{array}\right.$.

Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ cắt đồ thị hàm số $y=2$ tại 4 điểm phân biệt nên phương trình $f\left(x\right)=2$ có 4 nghiệm phân biệt.

Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ cắt đồ thị hàm số $y=-3$ tại 2 điểm phân biệt khác 4 điểm trên nên phương trình $f\left(x\right)=-3$ có 2 nghiệm phân biệt khác 4 nghiệm trên.

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt.

Câu 14: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-5	↗	2	↘	-5	↗	$+\infty$

Đặt $g\left(x\right)=f\left(\left|f\left(x\right)\right|\right)$. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $g'\left(x\right)=0$ là:

A. 11. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 12.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Có $g\left(x\right)=f\left(\left|f\left(x\right)\right|\right)=f\left(\sqrt{f^2\left(x\right)}\right)$.

Có $g'\left(x\right)=f'\left(\sqrt{f^2\left(x\right)}\right).\dfrac{f\left(x\right).f'\left(x\right)}{\sqrt{f^2\left(x\right)}}=f'\left(\left|f\left(x\right)\right|\right).\dfrac{f\left(x\right).f'\left(x\right)}{\left|f\left(x\right)\right|}$.

$$\Rightarrow g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(\left|f\left(x\right)\right|\right)=0\\f'\left(x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|f\left(x\right)\right|=-3(vn)\\\left|f\left(x\right)\right|=0(ktm)\\\left|f\left(x\right)\right|=3\\f'\left(x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=-3\\f\left(x\right)=3\\f'\left(x\right)=0\end{array}\right..$$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ ta thấy:

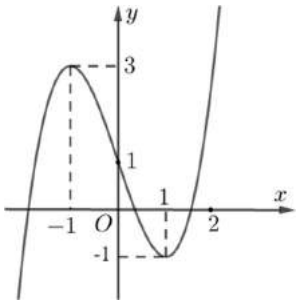
Phương trình $f(x)=-3$ có 4 nghiệm phân biệt.

Phương trình $f(x)=3$ có 2 nghiệm phân biệt.

Phương trình $f'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt là $x=-3;x=0;x=3$.

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có tất cả 9 nghiệm phân biệt.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Giả sử m là tham số thực. Hỏi phương trình $f\left(\left|f(x)\right|\right)=m$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm thực?

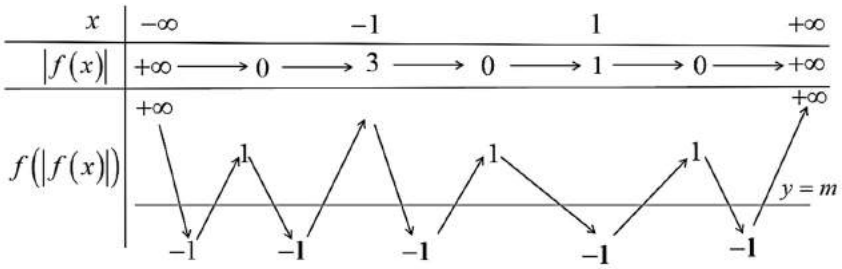


A. 5. **B.** 10. **C.** 7. **D.** 12.

Lời giải

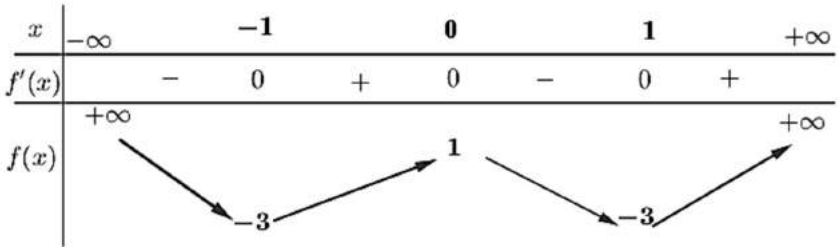
Chọn C

Ta có



Từ bảng biến thiên ta có phương trình có nhiều nhất 10 nghiệm $\Leftrightarrow m\in(-1;1)$.

Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên.



Số nghiệm thực của phương trình $5^{|f(x)|}-125=0$ là

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Theo giả thiết, $5^{|f(x)|}=5^3\Leftrightarrow|f(x)|=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=3\\f(x)=-3\end{array}\right.$

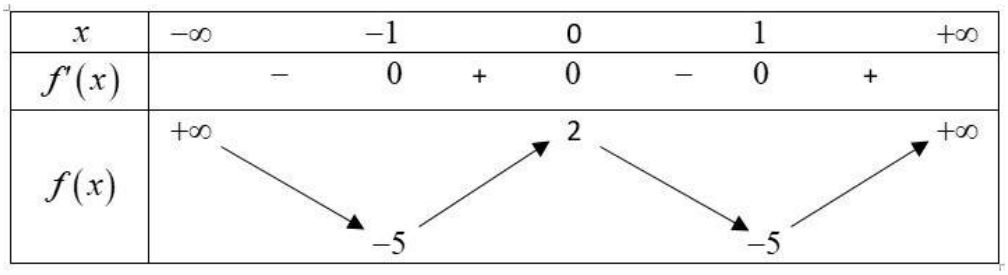
Số nghiệm thực của phương trình $5^{|f(x)|}=125$ chính là số hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số

$y=f(x)$ với đường thẳng $y=\pm 3$

Từ bảng biến thiên, ta thấy số hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với đường thẳng $y=3$ là 2, số hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với đường thẳng $y=-3$ là 2.

Vậy số nghiệm thực của phương trình $5^{|f(x)|}=125$ là 4.

Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ



Số nghiệm của phương trình $\left|f\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right|=4$ bằng

A. 2 . **B.** 4 . **C.** 3 . **D.** 5 .

Lời giải

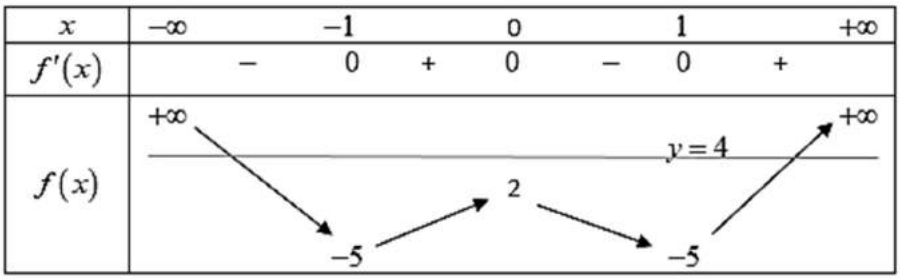
Chọn A

Đặt $t=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow 0\le t\le 1$ ta được $\left|f(t)\right|=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(t)=4(*)\\f(t)=-4(**)\end{array}\right.$

Với mỗi $0\le t<1$ ta tìm được 2 nghiệm $x=\pm\sqrt{1-t}$ phân biệt

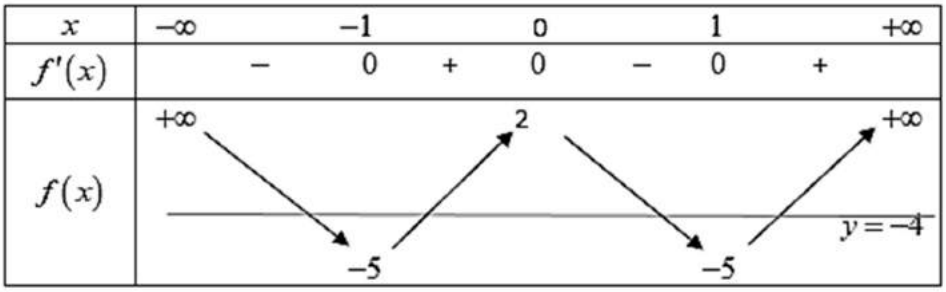
Với $t=1$ ta tìm được 1 nghiệm $x=0$

Xét phương trình $(*):\ f(t)=4$



Từ bảng biến thiên ta có $f(t)=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=a<-1\\t=b>1\end{array}\right.$ nên phương trình $\left|f\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right|=4$ vô nghiệm.

Xét phương trình $(**):\ f(t)=-4$



Từ bảng biến thiên ta có $f(t)=-4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=m & (m<-1) \\ t=n & (-1<n<0) \\ t=p & (0<p<1) \\ t=q & (q>1) \end{array}\right.$ Phương trình có một nghiệm $t=p \in (0;1)$ nên phương trình $\left|f\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right|=4$ có 2 nghiệm x.

Câu 18: Cho đồ thị hàm số có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-3		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{3};2\pi\right)$ của phương trình $\left|f\left(2\cos x-1\right)\right|=2$ là

A. 3. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 6.

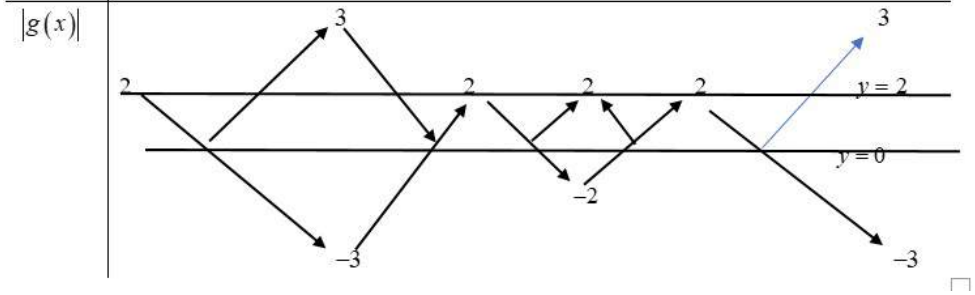
Lời giải

Chọn D

Ta có $g(x)=f\left(u(x)\right)$; $u(x)=2\cos x-1$

$u'(x)=-2\sin x$; $u'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pi \end{array}\right.$ thoả mãn thuộc $\left(-\frac{\pi}{3};2\pi\right)$

x	$-\frac{\pi}{3}$		0		π		2π
$u'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$u(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1
$\lvert g(x)\rvert$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	3



Dó đó $\left|g(x)\right|=2$ có 6 nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{3};2\pi\right)$.

Vậy $\left|f\left(2\cos x-1\right)\right|=2$ có 6 nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{3};2\pi\right)$.

Cách 2:

Xét trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{3};2\pi\right)$

Ta có $\left(2\cos x-1\right) \in [-3;1]$.

Do đó $\left|f\left(2\cos x-1\right)\right|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(2\cos x-1\right)=2\\f\left(2\cos x-1\right)=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\cos x-1=0\\\left[\begin{array}{l}2\cos x-1=a\ \text{ với }\ 0<a<1\\2\cos x-1=-3\end{array}\right.\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{1}{2}\\\cos x=\dfrac{a+1}{2}\\\cos x=-1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\x=\pm\alpha+k2\pi\ \text{ với }\ 0<\alpha<\dfrac{\pi}{3}\ \text{ vì }\ \dfrac{1}{2}<\dfrac{a+1}{2}<1.\\x=\pi+k2\pi\end{array}\right.$$

Ta chọn được 6 nghiệm là $\left\{\pi;\dfrac{\pi}{3};\dfrac{5\pi}{3};\alpha;-\alpha,-\alpha+2\pi\right\}$ với $0<\alpha<\dfrac{\pi}{3}$.

Câu 19: Cho hàm số $y=f(x)$ có $f(-4)=0$ và bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $\left|f\left(x^3-3x^2\right)\right|=\dfrac{3}{2}$ là

A. 14. **B.** 6. **C.** 10. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\left|f\left(x^3-3x^2\right)\right|=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x^3-3x^2\right)=\dfrac{3}{2}\quad(1)\\f\left(x^3-3x^2\right)=-\dfrac{3}{2}\quad(2)\end{array}\right.$.

$$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3-3x^2=a_1;\ \ a_1\in(-\infty;-4)\ \ (3)\\x^3-3x^2=a_2;\ \ a_2\in(2;+\infty)\ \ (4)\end{array}\right.;\ (2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3-3x^2=a_3;\ a_3\in(-4;-2)\ \ (5)\\x^3-3x^2=a_4;\ a_4\in(-2;0)\ \ (6)\\x^3-3x^2=a_5;\ a_5\in(0;2)\ \ (7)\\x^3-3x^2=a_6;\ a_6\in(2;+\infty)\ \ (8)\end{array}\right.$$

Ta có $a_6<a_2$.

Xét hàm số $y=x^3-3x^2$ có $y'=3x^2-6x$ và bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

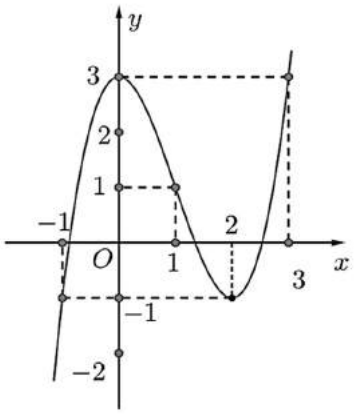
Từ bảng biến thiên trên suy ra

Các phương trình,,, mỗi phương trình có 1 nghiệm.

Các phương trình, mỗi phương trình có 3 nghiệm.

Vậy phương trình $\left|f\left(x^3-3x^2\right)\right|=\frac{3}{2}$ có 10 nghiệm.

Câu 20: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^4-2x^2\right)\right|=2$ là

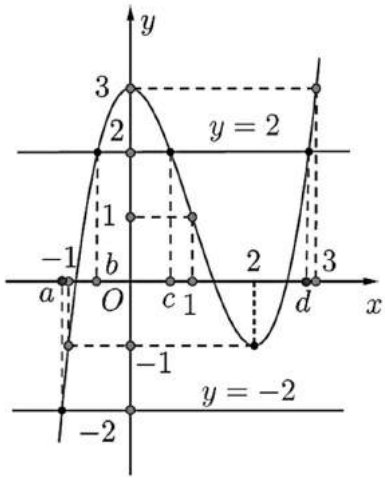


A. 8. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

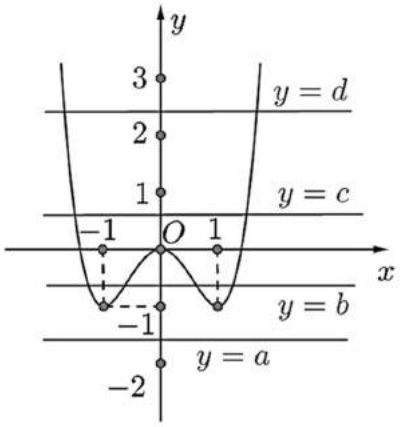
Phương trình $\left|f\left(x^4-2x^2\right)\right|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x^4-2x^2\right)=2\\f\left(x^4-2x^2\right)=-2\end{array}\right.$.



Phương trình $f\left(x^4-2x^2\right)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^4-2x^2=b,(-1<b<0)\\x^4-2x^2=c,(0<c<1)\\x^4-2x^2=d,(2<d<3)\end{array}\right.$.

Phương trình $f\left(x^4-2x^2\right)=-2\Leftrightarrow x^4-2x^2=a,(-2<a<-1)$.

Đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2$ như hình vẽ sau:



Dựa vào đồ thị trên ta có:

Phương trình $x^4-2x^2=a,(-2<a<-1)$ không có nghiệm thực

Phương trình $x^4-2x^2=b,(-1<b<0)$ có 4 nghiệm thực phân biệt.

Phương trình $x^4-2x^2=c,(0<c<1)$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

Phương trình $x^4-2x^2=d,(2<d<3)$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

Vậy phương trình $\left|f\left(x^4-2x^2\right)\right|=2$ có 8 nghiệm thực phân biệt.

Câu 21: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f'\left(\left|f(x)\right|-3\right)=0$ là

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Do đó: $f'\left(\left|f(x)\right|-3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|f(x)\right|-3=0\\\left|f(x)\right|-3=2\end{array}\right.$.

TH1: $\left|f(x)\right|=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=3\ (1)\\f(x)=-3(2)\end{array}\right.$

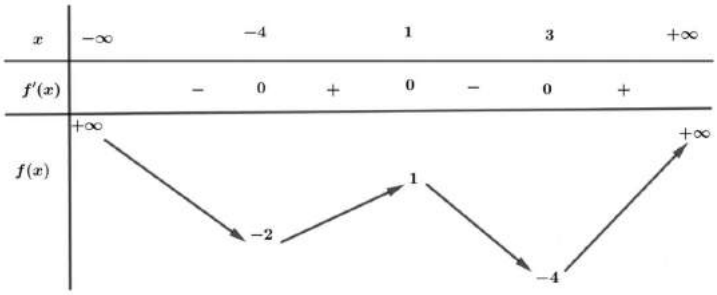
Dựa vào BBT ta có: phương trình **(1)** có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2; phương trình **(2)** có một nghiệm x_3.

TH2: $\left|f(x)\right|=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=5\ (3)\\f(x)=-5\ (4)\end{array}\right.$

Dựa vào BBT ta có: phương trình **(3)** có một nghiệm x_4; phương trình **(4)** có một nghiệm x_5.

Nhận thấy: Các giá trị x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 đôi một khác nhau nên phương trình $f'\left(\left|f\left(x\right)\right|-3\right)=0$ có 5 nghiệm thực phân biệt.

Câu 22: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ



Phương trình $\left|f\left(f\left(x\right)\right)\right|=1$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm

A. 14. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 13.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\left|f\left(f\left(x\right)\right)\right|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(f\left(x\right)\right)=1\\f\left(f\left(x\right)\right)=-1\end{array}\right.$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

$f\left(f\left(x\right)\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=a\left(a\in\left(-\infty;-4\right)\right)\\f\left(x\right)=1\\f\left(x\right)=b\left(b\in\left(3;+\infty\right)\right)\end{array}\right.$, $f\left(f\left(x\right)\right)=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=c\left(c\in\left(-\infty;-4\right)\right)\\f\left(x\right)=d\left(d\in\left(-4;1\right)\right)\\f\left(x\right)=e\left(e\in\left(1;3\right)\right)\\f\left(x\right)=f\left(f\in\left(3;+\infty\right)\right)\end{array}\right.$.

$f\left(x\right)=a\left(a\in\left(-\infty;-4\right)\right)$ vô nghiệm.

$f\left(x\right)=1$ có 3 nghiệm.

$f\left(x\right)=b\left(b\in\left(3;+\infty\right)\right)$ có 2 nghiệm.

$f\left(x\right)=c\left(c\in\left(-\infty;-4\right)\right)$ vô nghiệm.

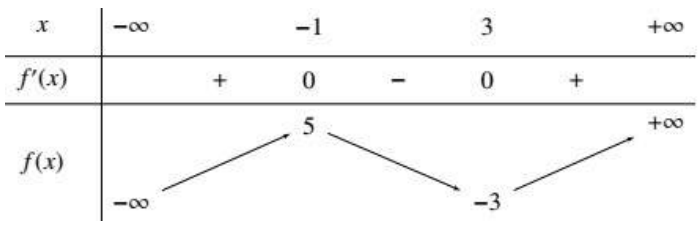
$f\left(x\right)=d\left(d\in\left(-4;1\right)\right)$ có nhiều nhất 4 nghiệm.

$f\left(x\right)=e\left(e\in\left(1;3\right)\right)$ có 2 nghiệm.

$f\left(x\right)=f\left(f\in\left(3;+\infty\right)\right)$ có 2 nghiệm.

$\Rightarrow$ phương trình $\left|f\left(f\left(x\right)\right)\right|=2$ có nhiều nhất 13 nghiệm

Câu 23: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ



Phương trình $\left|f\left(1-3x\right)+1\right|=3$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x)=f(1-3x)+1,\ x\in\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x)=-3f'(1-3x)$ suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(1-3x)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-3x=-1\\1-3x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2}{3}\\x=-\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$$

$g\left(\frac{2}{3}\right)=f(-1)+1=6;\ g\left(-\frac{2}{3}\right)=f(3)+1=-2$.

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	
$g(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	6	↘	$-\infty$

Phương trình $\left|f(1-3x)+1\right|=3\Leftrightarrow\left|g(x)\right|=3$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}g(x)=3\\g(x)=-3\end{array}\right.$$

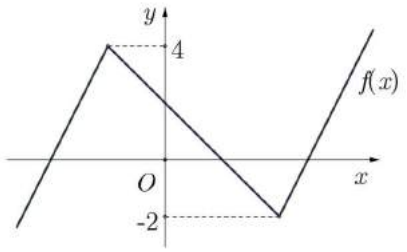
Phương trình $g(x)=3$ có 3 nghiệm phân biệt.

Phương trình $g(x)=-3$ có 1 nghiệm phân biệt.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $\left|g(x)\right|=3$ có 4 nghiệm.

Vậy phương trình $\left|f(1-3x)+1\right|=3$ có 4 nghiệm.

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi phương trình $\left|2f(x)-3\right|=5$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực?



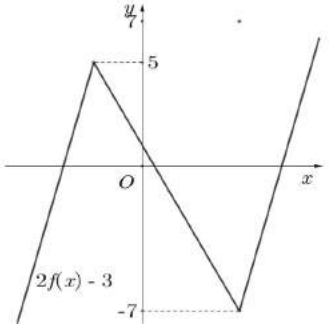
A. 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

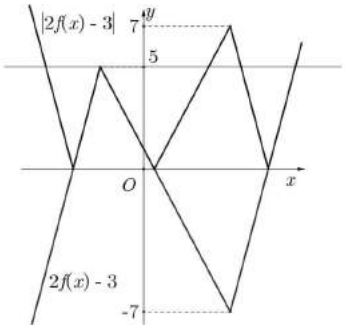
Chọn A

Từ đồ thị hàm số ta thấy hàm số $y=f(x)$ có $y_{CĐ}=4$ và $y_{CT}=-2$ suy ra hàm số $2f(x)-3$ có $y_{CĐ}=5$ và $y_{CT}=-7$

Từ đó ta có đồ thị hàm số $y=2f(x)-3$

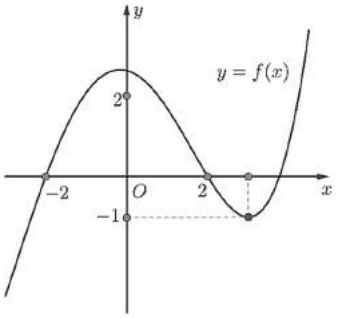


Suy ra đồ thị hàm số $y=\left|2f\left(x\right)-3\right|$



Từ đồ thị ta suy ra phương trình $\left|2f\left(x\right)-3\right|=5$ có 5 nghiệm.

Câu 25: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



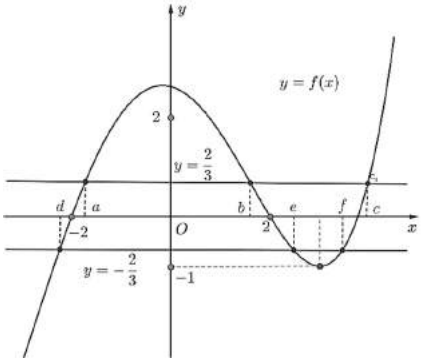
Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\dfrac{2}{3}$ là

A. 3. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 10.

Lời giải

Chọn D

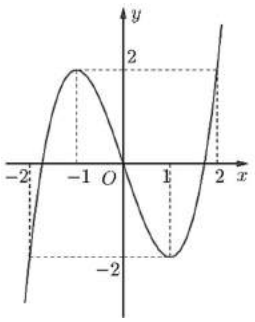
Ta có $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x^3-3x\right)=\dfrac{2}{3}\\f\left(x^3-3x\right)=-\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$.



Từ đồ thị suy ra $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^3-3x=a\in(-2;0) & (1) \\ x^3-3x=b\in(0;2) & (2) \\ x^3-3x=c>2 & (3) \\ x^3-3x=d<-2 & (4) \\ x^3-3x=e>2 & (5) \\ x^3-3x=f>2 & (6) \end{array}\right.$

Nhận xét: $2<e<f<c$.

Xét đồ thị hàm số $g(x)=x^3-3x$.



Ta có:

Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt.

Phương trình (2) có 3 nghiệm phân biệt.

Phương trình (3) có 1 nghiệm.

Phương trình (4) có 1 nghiệm.

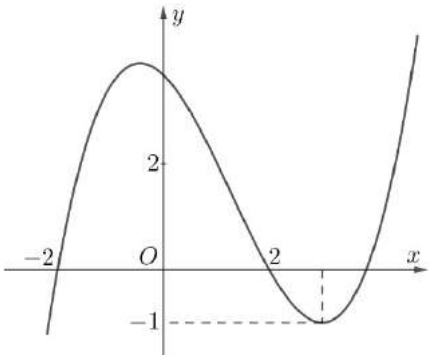
Phương trình (5) có 1 nghiệm.

Phương trình (6) có 1 nghiệm.

Nhận xét: các nghiệm trong các phương trình (1), (2), (3), (4), (5) và (6) đôi một khác nhau.

Vậy phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\frac{2}{3}$ có 10 nghiệm phân biệt.

Câu 26: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

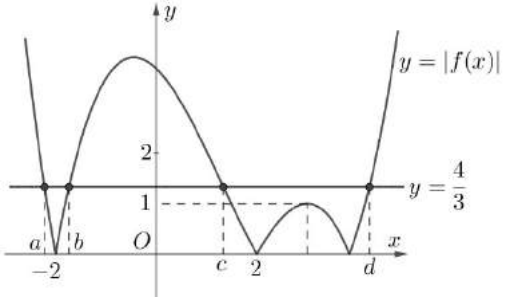


Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\frac{4}{3}$ là

A. 7. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 8.

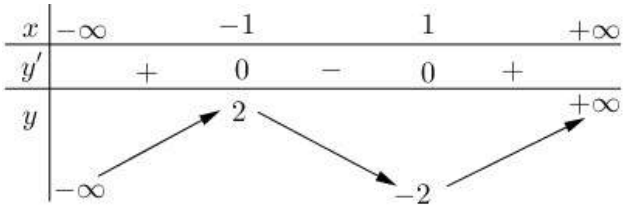
Lời giải

Chọn D



Dựa vào đồ thị trên, ta có: $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\frac{4}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3-3x=a\in(-\infty;-2)\quad(1)\\x^3-3x=b\in(-2;0)\quad(2)\\x^3-3x=c\in(0;2)\quad(3)\\x^3-3x=d\in(2;+\infty)\quad(4)\end{array}\right.$

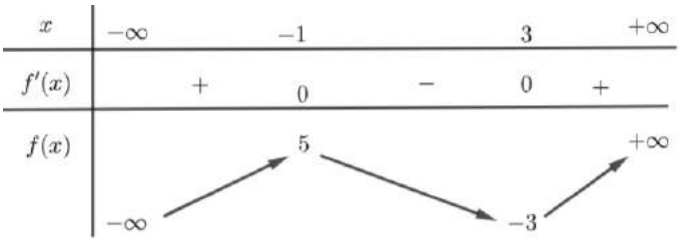
Xét hàm số $y=x^3-3x$ có bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên trên, mỗi phương trình $(2),(3)$ có 3 nghiệm phân biệt và $(1),(4)$ có 1 nghiệm.

Vậy tổng số nghiệm của phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\frac{4}{3}$ là 8.

Câu 27: Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ



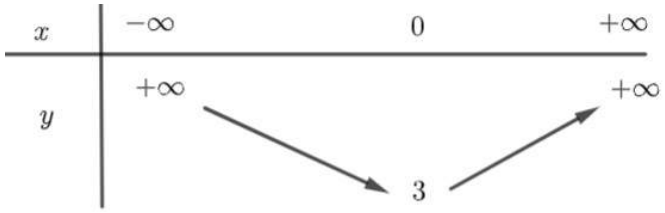
Phương trình $\left|f\left(2x^2+3\right)-2\right|=5$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

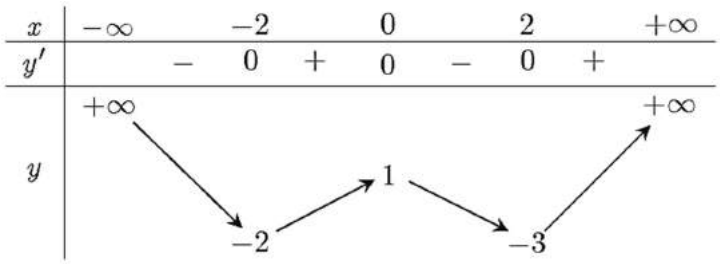
Hàm số $y=2x^2+3$ có bảng biến thiên như sau:



$\left|f\left(2x^2+3\right)-2\right|=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(2x^2+3\right)=7\\f\left(2x^2+3\right)=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x^2+3=a>3\quad(1)\\2x^2-3=3\quad(2)\\2x^2-3=b<-1\,(3)\end{array}\right.$

Nhận xét: Phương trình (1) có 2 nghiệm, phương trình (2) có 1 nghiệm, phương trình (3) vô nghiệm. Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm.

Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)$ có $f(-4)=0$ và bảng biến thiên như sau:



Số nghiệm của phương trình $\left|f\left(x^3-3x^2\right)\right|=\frac{3}{2}$ là

A. 14. **B.** 6 . **C.** 10. **D.** 9 .

Lời giải

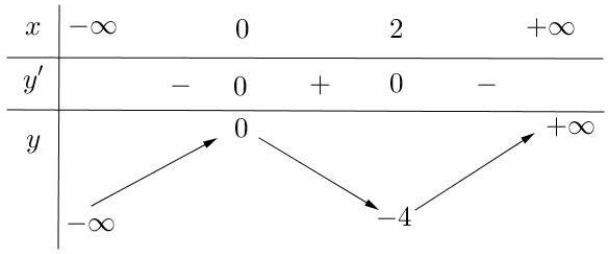
Chọn C

Ta có $\left|f\left(x^3-3x^2\right)\right|=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x^3-3x^2\right)=\frac{3}{2}\quad(1)\\ f\left(x^3-3x^2\right)=-\frac{3}{2}\quad(2)\end{array}\right.$.

$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3-3x^2=a_1;\ a_1\in(-\infty;-4)\ (3)\\ x^3-3x^2=a_2;\ a_2\in(2;+\infty)\quad(4)\end{array}\right.$; $(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3-3x^2=a_3;\ a_3\in(-4;-2)\quad(5)\\ x^3-3x^2=a_4;\ a_4\in(-2;0)\quad(6)\\ x^3-3x^2=a_5;\ a_5\in(0;2)\quad(7)\\ x^3-3x^2=a_6;\ a_6\in(2;+\infty)\quad(8)\end{array}\right.$.

Ta có $a_6<a_2$.

Xét hàm số $y=x^3-3x^2$ có $y'=3x^2-6x$ và bảng biến thiên như sau



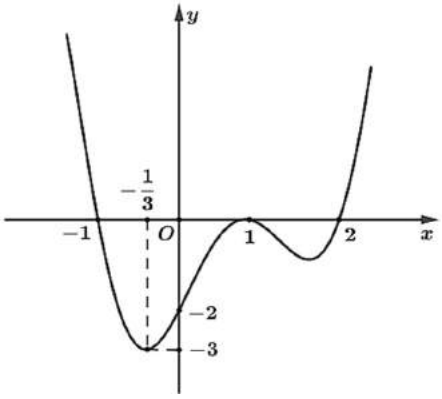
Từ bảng biến thiên trên suy ra

Các phương trình,,, mỗi phương trình có 1 nghiệm.

Các phương trình, mỗi phương trình có 3 nghiệm.

Vậy phương trình $\left|f\left(x^3-3x^2\right)\right|=\frac{3}{2}$ có 10 nghiệm.

Câu 29: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau



Số nghiệm thực của phương trình $f\left(\left|f\left(x\right)\right|-1\right)=0$ là

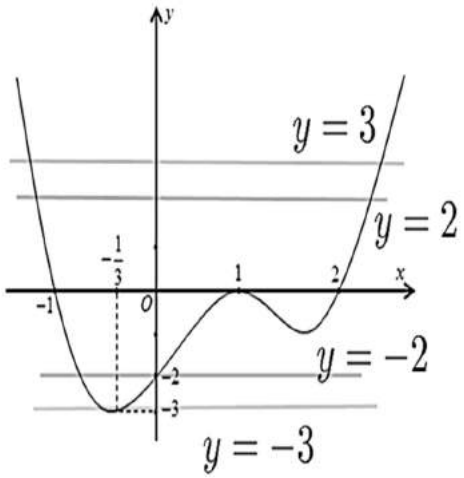
A. 3. **B.** 5. **C.** 10. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

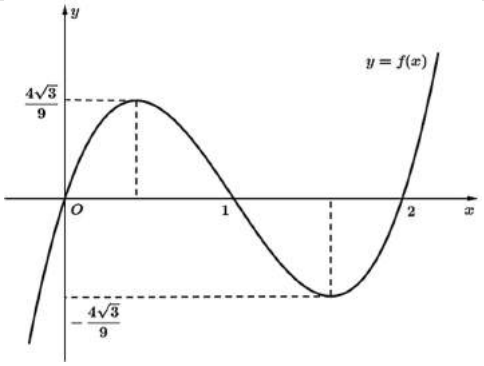
Ta có: $f\left(\left|f\left(x\right)\right|-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|f\left(x\right)\right|-1=-1\\\left|f\left(x\right)\right|-1=1\\\left|f\left(x\right)\right|-1=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|f\left(x\right)\right|=0\\\left|f\left(x\right)\right|=2\\\left|f\left(x\right)\right|=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}f\left(x\right)=0 & (1)\\f\left(x\right)=2 & (2)\\f\left(x\right)=-2 & (3)\\f\left(x\right)=3 & (4)\\f\left(x\right)=-3 & (5)\end{array}\right.$

Số nghiệm của phương trình (1) chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và đường thẳng $y=0\Rightarrow f\left(x\right)=0$ có 3 nghiệm phân biệt.



Tương tự phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt.
Phương trình (3) có 2 nghiệm phân biệt.
Phương trình (4) có 2 nghiệm phân biệt.
Phương trình (5) có 1 nghiệm.
Vậy phương trình $f\left(\left|f\left(x\right)\right|-1\right)=0$ có 10 nghiệm.

Câu 30: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(\left|\sqrt{4-x^2}-\left|x^2-1\right|\right|\right)=\frac{1}{2021}$ là



A. 14. **B.** 10. **C.** 24. **D.** 12.

Lời giải

Chọn B

$y=g(x)=f\left(\left|\sqrt{4-x^2}-\left|x^2-1\right|\right|\right)$ với $g(x)=\dfrac{1}{2021}$

Ta đặt: $t=\sqrt{4-x^2},\forall x\in[-2;2]$ thì suy ra $y=g(t)=f\left(\left|t-\left|t^2-3\right|\right|\right),\forall t\in[0;2]$

Suy ra: $h(t)=t-\left|t^2-3\right|=\begin{cases}t^2+t-3,t\in\left[0;\sqrt{3}\right]\\-t^2+t+3,t\in\left[\sqrt{3};2\right]\end{cases}$.

Từ đó ta có BBT của hàm số $h(t)$ như hình vẽ bên:

t	0		$\sqrt{3}$		2
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$		↗	$\sqrt{3}$	↘	
	-3				1

Đặt $u=\left|t-\left|t^2-3\right|\right|$ thì ta cũng có bảng biến thiên của u như sau:

x	−2		0		2
t	0		2		0
$t-\lvert t^2-3\rvert$	−3	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	−3
$\lvert t-\lvert t^2-3\rvert\rvert$	3 ↘ 0	↗ $\sqrt{3}$	↘ 1	↗ $\sqrt{3}$	↘ 3

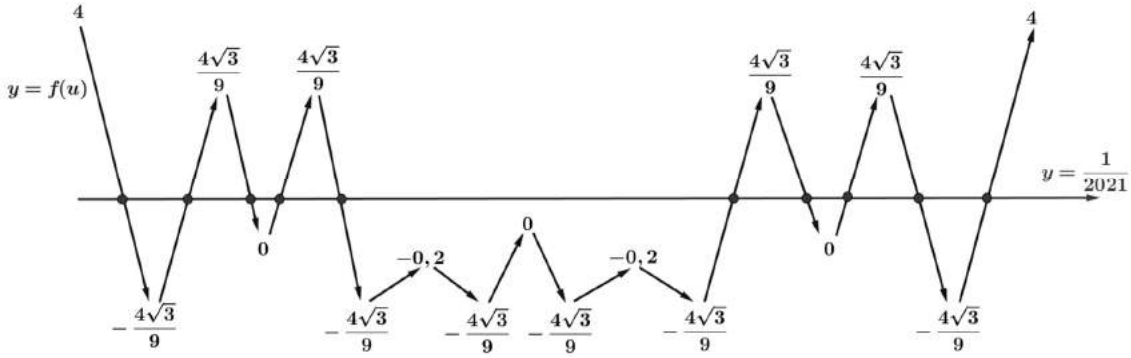
Nhìn vào đồ thị $y=f(x)$ trên ta có được:

$$\Rightarrow\begin{cases}f(x)=ax^3+bx^2+cx,a\neq 0\\f(1)=f(2)=0,f''(1)=0\end{cases}\Rightarrow a=\frac{2}{3}>0$$

Như vậy ta suy ra $f(x)=\dfrac{2}{3}x(x-1)(x-2)$. Mà hàm số đó có cực trị bằng $-\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$ tại $x=x_0$ nên suy ra $f(x_0)=\dfrac{-4\sqrt{3}}{9}\Rightarrow x_0=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$

Như vậy: $f(3)=4, f\left(\sqrt{3}\right)=-0,2, f\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{-4\sqrt{3}}{9}$

Từ đó, ta phác họa được đồ thị $y=f\left(u\right)$ với $u=\left|t-\left|t^2-3\right|\right|$ như sau:



Dựa vào hình vẽ trên, ta kết luận phương trình $g(x)=\dfrac{1}{2021}$ có tất cả 10 nghiệm phân biệt.

Câu 31: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		3		7		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	-1	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f\left(\left|x^3-6x^2+9x+3\right|\right)=0$ là

A. 9 . **B.** 7 . **C.** $T=8$. **D.** 6 .

Lời giải

Chọn B

x	$-\infty$		0		3	t_1	7	t_2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	-1	↗	$+\infty$

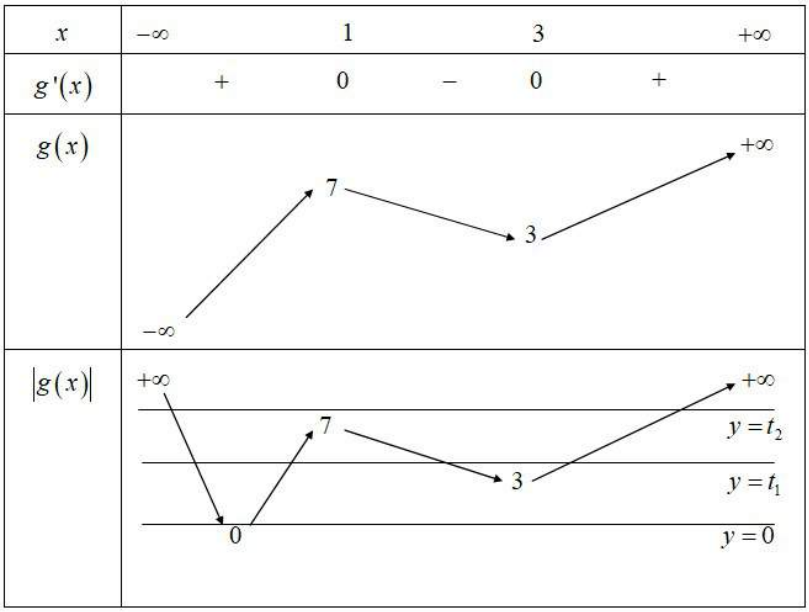
y=0

$$f\left(\left|x^3-6x^2+9x+3\right|\right)=0\Leftrightarrow\begin{cases}\left|x^3-6x^2+9x+3\right|=0\\ \left|x^3-6x^2+9x+3\right|=t_1\in(3;7)\\ \left|x^3-6x^2+9x+3\right|=t_2\in(7;+\infty)\end{cases}$$

Đặt $g\left(x\right)=x^3-6x^2+9x+3$.

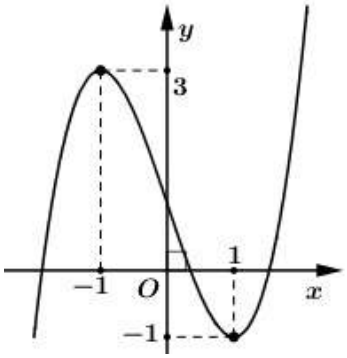
Tập xác định $D=\mathbb{R}$; $g'(x)=3x^2-12x+9$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên



Vậy phương trình $f\left(\left|x^3-6x^2+9x+3\right|\right)=0$ có 7 nghiệm.

Câu 32: Cho hàm đa thức $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Đặt $g(x)=\left|f\left(x^2\right)\right|$. Số nghiệm của phương trình $g(x).\left[2g(x)-1\right]=0$ là

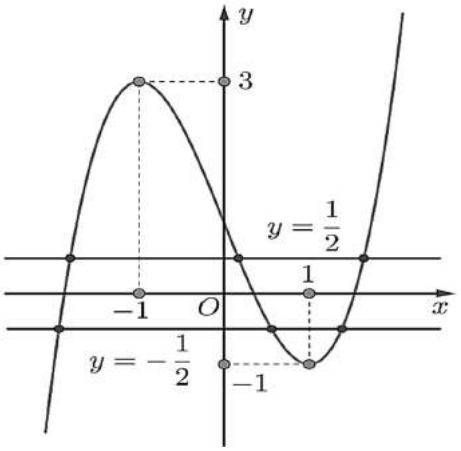
A. 11. **B.** 10. **C.** 13. **D.** 12.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g(x).\left[2g(x)-1\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}g(x)=0\\g(x)=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|f\left(x^2\right)\right|=0\\\left|f\left(x^2\right)\right|=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}f\left(x^2\right)=0 & (1)\\f\left(x^2\right)=\dfrac{1}{2} & (2)\\f\left(x^2\right)=-\dfrac{1}{2} & (3)\end{array}\right.$.

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ suy ra



$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = a < -1 \\ x^2 = b \in (0;1) \\ x^2 = c > 1 \end{array}\right.$. Suy ra phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt.

$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = d < -1, (d \neq a) \\ x^2 = e \in (0;1), (e \neq b) \\ x^2 = f > 1, (f \neq c) \end{array}\right.$. Suy ra phương trình (2) có 4 nghiệm phân biệt khác 4 nghiệm phân biệt của phương trình (1).

$(3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = m < -1, (m \neq d, a) \\ x^2 = n \in (0;1), (n \neq e, b) \\ x^2 = p > 1, (p \neq f, c) \end{array}\right.$. Suy ra phương trình (3) có 4 nghiệm phân biệt khác 4 nghiệm phân biệt của phương trình (1) và 4 nghiệm phân biệt của phương trình (2).

Vậy phương trình $g(x).\left[2g(x)-1\right]=0$ có tất cả 12 nghiệm

Câu 33: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	2	↘	-2	↗	0	↘	$-\infty$

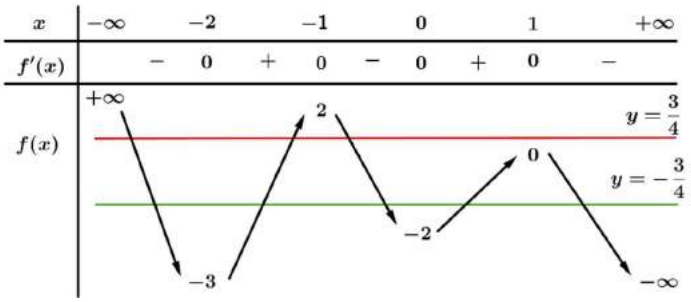
Hỏi phương trình $\left|f\left(3\sin x - 4\sin^3 x\right)\right| = \dfrac{3}{4}$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt trong khoảng $(0\,;\,2\pi)$?

A. 18. **B.** 24. **C.** 36. **D.** 30.

Lời giải

Chọn A

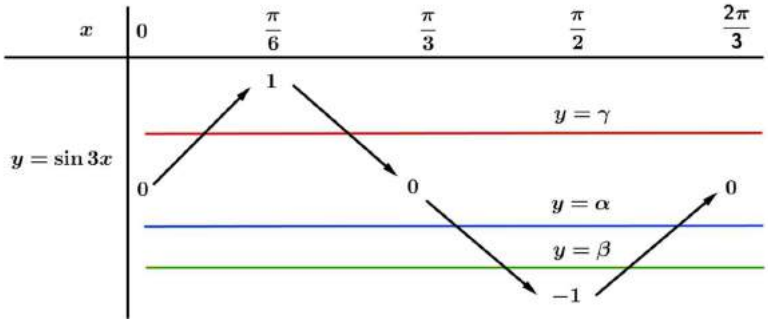
Ta có $\left|f\left(3\sin x-4\sin^3 x\right)\right|=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\left|f\left(\sin 3x\right)\right|=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(\sin 3x\right)=\frac{3}{4}\\ f\left(\sin 3x\right)=-\frac{3}{4}\end{array}\right.\quad(*)$.



Do $-1\le\sin 3x\le 1,\forall x$ nên từ bảng biến thiên, ta có $(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\sin 3x=\alpha\in(-1;0) & (1)\\ \sin 3x=\beta\in(-1;0),(\beta<\alpha) & (2)\\ \sin 3x=\gamma\in(0;1) & (3)\end{array}\right.$

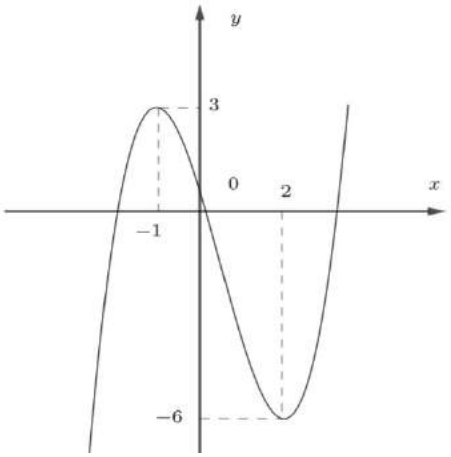
.

Do hàm số $y=\sin 3x$ tuần hoàn với chu kỳ $T=\frac{2\pi}{3}$ nên số nghiệm của phương trình $\sin x=t$ trên mỗi khoảng $\left(0;\frac{2\pi}{3}\right),\left(\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}\right),\left(\frac{4\pi}{3};2\pi\right)$ là bằng nhau.



Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=\sin 3x$ trên $\left(0;\frac{2\pi}{3}\right)$ ta có số nghiệm trên khoảng $\left(0;\frac{2\pi}{3}\right)$ của các phương trình $(1),(2),(3)$ đều bằng 2 và nghiệm của mỗi phương trình đều không trùng với nghiệm nào của hai phương trình còn lại. Suy ra số nghiệm của $(*)$ trên mỗi khoảng $\left(0;\frac{2\pi}{3}\right),\left(\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}\right),\left(\frac{4\pi}{3};2\pi\right)$ đều là 6. Ngoài ra $x=\frac{2\pi}{3}$ và $x=\frac{4\pi}{3}$ không là nghiệm của $(*)$. Vậy phương trình đã cho có tất cả 18 nghiệm thực phân biệt trong khoảng $(0;2\pi)$.

Câu 34: . Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Số các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(\left|f^2(x)-4f(x)+m\right|\right)$ có 23 điểm cực trị là

A. 0 . **B.** 3 . **C.** 4 . **D.** 6 .

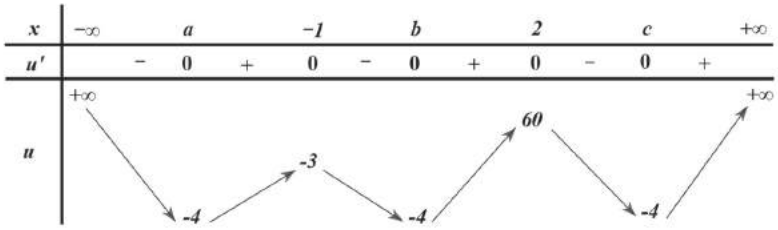
Lời giải

Chọn A

Đặt $u=u(x)=f^2(x)-4f(x)\Rightarrow u'=2f'(x)\left(f(x)-2\right)\Rightarrow u'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\in\{-1;2\}\\x\in\{a;b;c\}\end{array}\right.$.

Trong đó: $a<-1<b<2<c$.

Bảng biến thiên của hàm số $u=f^2(x)-4f(x)$.



Ta có $g(x)=f\left(|u+m|\right)\Rightarrow g'(x)=\left(|u+m|\right)'.f'\left(|u+m|\right)$. Do đó số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(\left|f^2(x)-4f(x)+m\right|\right)$ chính là số nghiệm bội lẻ của hệ sau:

$$\left[\begin{array}{l}u+m=0\\\left(|u+m|\right)'=0\\f'\left(|u+m|\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=-m\\x\in\{a;-1;b;2;c\}\\|u+m|=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=-m\\x\in\{a;-1;b;2;c\}\\u\in\{-m-2;-m+2\}\end{array}\right.$$

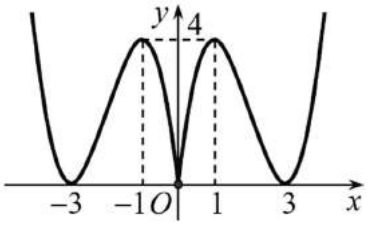
Suy ra số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ phụ thuộc vào số giao điểm của các đường thẳng $y=-m-2;y=-m+2;\ y=-m$ với đồ thị $u(x)$.

Mặt khác các nghiệm $x\in\{a;-1;b;2;c\}$ là các nghiệm đơn, do đó yêu cầu bài toán trở thành tìm m nguyên để các đường thẳng trên cắt đồ thị $u(x)$ tại 18 điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-4<-m-2<-3\\-4<-m+2<-3\\-4<-m<-3\end{array}\right.\Leftrightarrow m\in\varnothing.$$

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá

trị thực của tham số m để phương trình $5f\left(2\left|\sin x\right|+1\right)-m=0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ là



A. $[0;4)$. **B.** $(0;20)$. **C.** $(5;15]$. **D.** $[0;20)$.

Lời giải

Chọn D

◦ Đặt $t=2\left|\sin x\right|+1$. Vì $x\in(0;\pi)$ nên $0<\sin x\le 1 \Rightarrow 0<\left|\sin x\right|\le 1\Rightarrow 1<2\left|\sin x\right|+1\le 3$ $\Rightarrow 1<t\le 3$.

◦ Do đó phương trình $5f\left(2\left|\sin x\right|+1\right)-m=0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t)=\dfrac{m}{5}$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $(1;3]$.

◦ Quan sát đồ thị ta suy ra điều kiện của tham số m là $\dfrac{m}{5}\in[0;4)\Leftrightarrow m\in[0;20)$.

Câu 36: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(-2)=7$ và có bảng biến thiên như dưới đây:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|x^2-1\right|-2\right)=m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt?

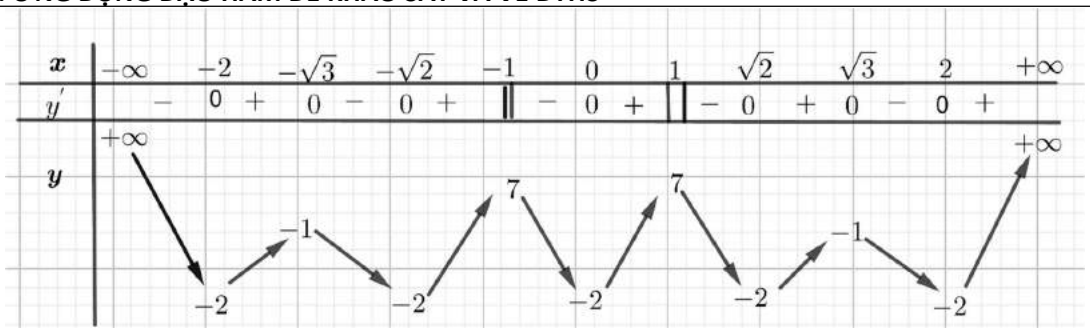
A. 9. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

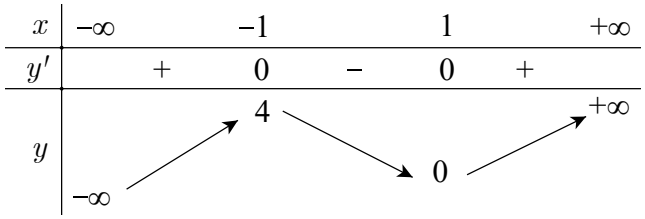
Phương trình: $f\left(\left|x^2-1\right|-2\right)=m$ là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $\begin{cases}y=f\left(\left|x^2-1\right|-2\right)\\ y=m\end{cases}$. Xét: $y=f\left(\left|x^2-1\right|-2\right)$ có: $y'=\dfrac{2x\left(x^2-1\right)}{\left|x^2-1\right|}.f'\left(\left|x^2-1\right|-2\right)$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \left|x^2-1\right|-2=-1\\ \left|x^2-1\right|-2=0\\ \left|x^2-1\right|-2=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm\sqrt{2}\\ x=\pm\sqrt{3}\\ x=\pm 2\end{array}\right.$; y' không xác định tại $x=\pm 1$. Ta có bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên ta có: $-1 < m < 7$. Vậy có 7 giá trị cần tìm.

Câu 37: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như sau:



Tìm m để phương trình $|f(x-1)+2| = m$ có 4 nghiệm thỏa mãn $x_1 < x_2 < x_3 < 1 < x_4$.

A. $2 < m < 6$. **B.** $3 < m < 6$. **C.** $2 < m < 4$. **D.** $4 < m < 6$.

Lời giải

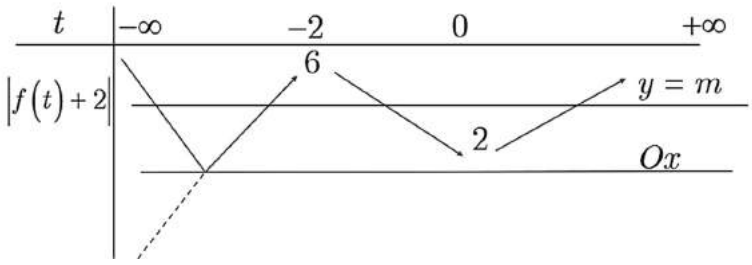
Chọn A

Phương trình $|f(x-1)+2| = m$ có 4 nghiệm thỏa mãn $x_1 < x_2 < x_3 < 1 < x_4$.

$\Leftrightarrow$ Phương trình $|f(x-1)+2| = m$ có 4 nghiệm thỏa mãn $x_1 - 1 < x_2 - 1 < x_3 - 1 < 0 < x_4 - 1$.

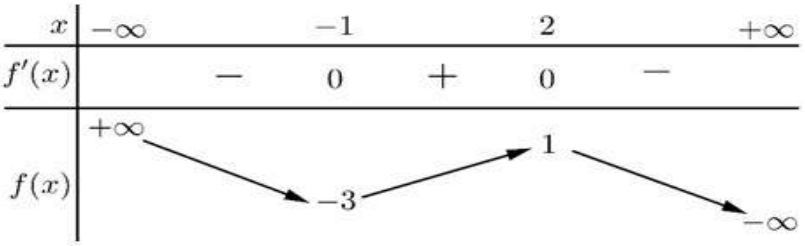
Đặt $t = x - 1$ khi đó bài toán tương đương: Tìm m để phương trình $|f(t)+2| = m$ có 4 nghiệm thỏa mãn $t_1 < t_2 < t_3 < 0 < t_4$.

Bảng biến thiên $|f(t)+2|$



Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 2 < m < 6$.

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ



Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $|f(x^3+1)+3m| = 1$ có đúng 6 nghiệm phân biệt là $(a;b)$. Chon khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $b-a=-\frac{2}{3}$. **B.** $b-a=2$. **C.** $b-a=\frac{4}{3}$. **D.** $b-a=\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $g(x)=f\left(x^3+1\right)+3m \Rightarrow g'(x)=3x^2f'\left(x^3+1\right)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ x^3+1=-1 \\ x^3+1=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\sqrt[3]{2} \\ x=1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên.

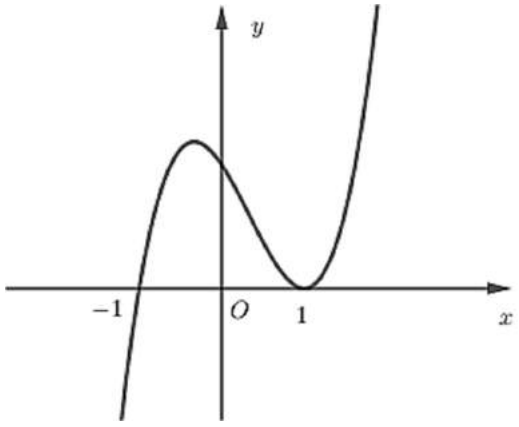
x	$-\infty$		$-\sqrt[3]{2}$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$				$g(x)=1$		$3m+1$		
						$g(x)=-1$			
			$-3+3m$						$-\infty$

$\left|f\left(x^3+1\right)+3m\right|=1\,(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x^3+1\right)+3m=1 \\ f\left(x^3+1\right)+3m=-1 \end{array}\right.$

Từ bảng biến thiên ta thấy để phương trình (1) có 6 nghiệm phân biệt thì

$\left\{\begin{array}{l} 3m+1>1 \\ 3m-3<-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m>0 \\ m<\frac{2}{3} \end{array}\right. \Rightarrow m \in \left(0;\frac{2}{3}\right) \Rightarrow b-a=\frac{2}{3}$.

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)(x-1)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình dưới đây.



Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $f(x)|x-1|=m^2-m$ có hai nghiệm có hoành độ nằm ngoài đoạn $[-1;1]$.

A. $m>0$. **B.** $m>1$ hoặc $m<0$.

C. $m<1$. **D.** $0<m<1$.

Lời giải

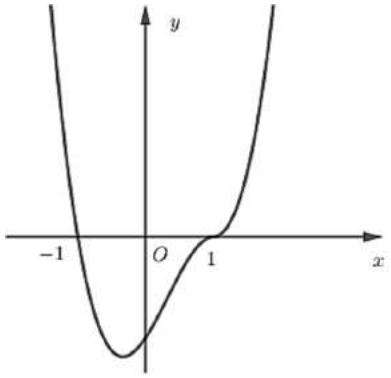
Chọn B

Số nghiệm của phương trình $f(x)|x-1|=m^2-m$ bằng số giao điểm của đường thẳng $y=m^2-m$ và đồ thị hàm số $y=f(x)|x-1|$.

Ta có $y=f(x)|x-1|=\begin{cases} f(x)(x-1) & \text{khi } x\geq 1 \\ -f(x)(x-1) & \text{khi } x<1 \end{cases}$ nên hàm số $y=f(x)|x-1|$ có đồ thị:

Giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y=f(x)(x-1)$ ứng với miền $x\geq 1$.

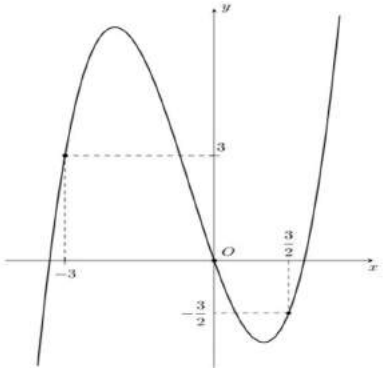
Lấy đối xứng qua Ox phần đồ thị của hàm số $y=f(x)(x-1)$ ứng với miền $x<1$ và bỏ phần đồ thị của hàm số $y=f(x)(x-1)$ ứng với miền $x<1$.



Để đường thẳng $y=m^2-m$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)|x-1|$ tại 2 điểm có hoành độ nằm ngoài đoạn $[-1;1]$ thì đường thẳng $y=m^2-m$ nằm hoàn toàn trên trục hoành.

Khi đó $m^2-m>0 \Leftrightarrow m>1$ hoặc $m<0$.

Câu 40: Cho hàm $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn. Biết rằng $f(0)=0$, $f(-3)=f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{19}{4}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có dạng như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x)=\left|4f(x)+2x^2\right|-2m^2+1$ với m là tham số thực. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên $m\in(-50;50)$ để phương trình $g(x)=1$ có đúng hai nghiệm thực?

A. 94. **B.** 96. **C.** 47. **D.** 48.

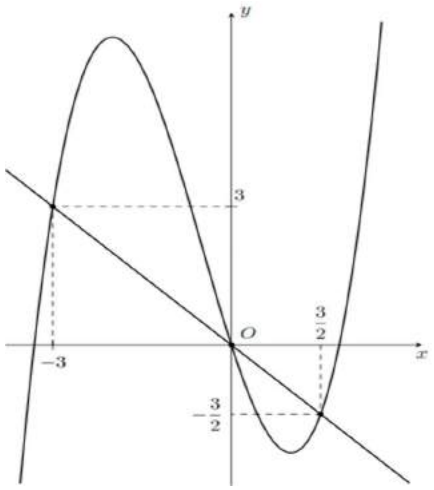
Lời giải

Chọn A

Ta có $\left|4f(x)+2x^2\right|-2m^2+1=1 \Leftrightarrow \left|4f(x)+2x^2\right|=2m^2, (1)$.

Xét hàm số $h(x)=4f(x)+2x^2$, ta có $h'(x)=4\left[f'(x)-(-x)\right]$.

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ và đường thẳng $y=-x$.



Ta thấy: $h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=0 \\ x=\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

và $h(-3)=4f(-3)+2(-3)^2=-1$, $h(0)=0$, $h\left(\dfrac{3}{2}\right)=4f\left(\dfrac{3}{2}\right)+2\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=-\dfrac{29}{2}$.

Do đó ta có bảng biến thiên hàm số $h(x)$ như sau

x	$-\infty$		-3		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{29}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó suy ra bảng biến thiên của hàm số $\left|h(x)\right|$ như sau

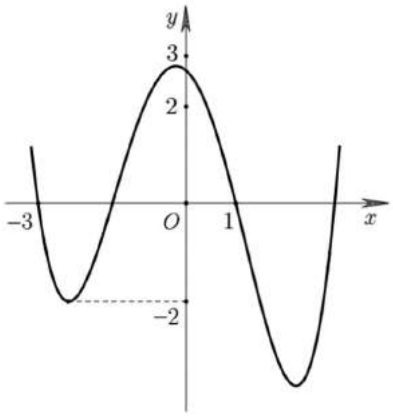
x	$-\infty$		x_1		-3		0		$\frac{3}{2}$		x_2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$			-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{29}{2}$	$\nearrow$			$+\infty$
$\lvert h(x)\rvert$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{29}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó để phương trình (1) có đúng hai nghiệm thực thì $2m^2>\dfrac{29}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>\dfrac{\sqrt{29}}{2} \\ m<-\dfrac{\sqrt{29}}{2} \end{array}\right.$.

Mà m là số nguyên thuộc $(-50;50)$ nên $\left[\begin{array}{l}3\le m\le 49\\ -49\le m\le -3\end{array}\right.$.

Vậy có 94 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 41: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên a để phương trình $f\left(\left|x^2-4x\right|-3\right)=a$ có không ít hơn 10 nghiệm thực phân biệt?

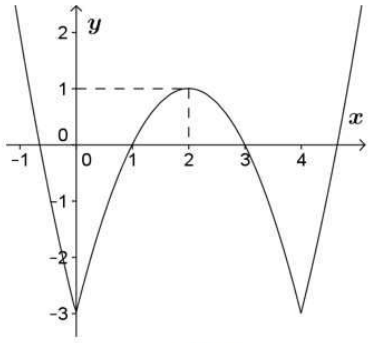


A. 4. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 8.

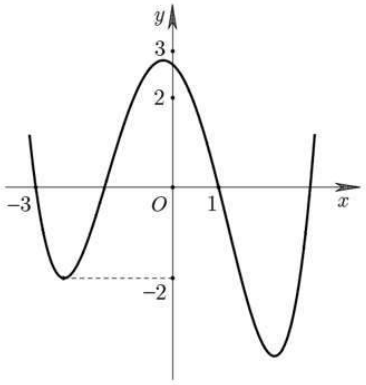
Lời giải

Chọn A

Hàm số $g(x)=\left|x^2-4x\right|-3$ có đồ thị như hình vẽ



$y=g(x)$



$y=f(x)$

Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $g(x)=k$ có nhiều nhất 4 nghiệm phân biệt và $g(x)\ge -3,\forall x$. Do đó, để phương trình $f\left(\left|x^2-4x\right|-3\right)=a$ có không ít hơn 10 nghiệm thực phân biệt thì phương trình $f(t)=a$ phải có ít nhất 3 nghiệm phân biệt $t\ge -3$.

Dựa vào ĐTHS $y=f(x)$ và a nguyên suy ra $-2\le a\le 2$. Với các trường hợp sau, các nghiệm phân biệt và không xét phương trình vô nghiệm $g(x)=k,\ k<-3$.

Với $a=-2$ phương trình $f\left(\left|x^2-4x\right|-3\right)=a$ tương đương $\left[\begin{array}{ll}g(x)=m,\ -3<m<0 & (1)\\ g(x)=n,\ n>1 & (2)\\ g(x)=p,\ p>n & (3)\end{array}\right.$

Phương trình (1) có 4 nghiệm, phương trình (2), (3) đều có 2 nghiệm nên không thỏa mãn.

Với $a=-1$ phương trình $f\left(\left|x^2-4x\right|-3\right)=a$ tương đương $\left[\begin{array}{ll} g(x)=m,\ -3<m<0 & (4)\\ g(x)=q,\ m<q<0 & (5)\\ g(x)=n,\ n>1 & (6)\\ g(x)=p,\ p>n & (7)\end{array}\right.$

Phương trình (4) và (5) đều có 2 nghiệm, phương trình (6) và (7) đều có 2 nghiệm, do đó thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $a=0$ phương trình $f\left(\left|x^2-4x\right|-3\right)=a$ tương đương $\left[\begin{array}{ll} g(x)=-3 & (8)\\ g(x)=m,\ -3<m<0 & (9)\\ g(x)=1 & (10)\\ g(x)=p,\ p>1 & (11)\end{array}\right.$

Phương trình (8), (10), (11) đều có 2 nghiệm, phương trình (9) có 4 nghiệm, do đó thỏa mãn YCBT.

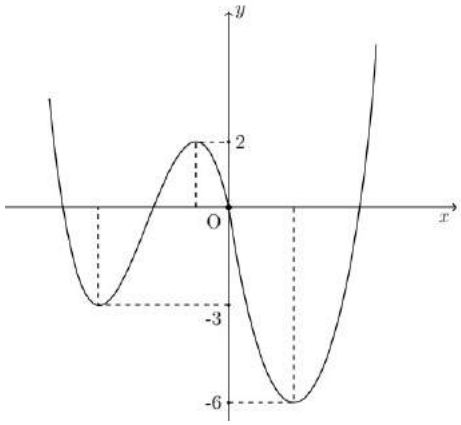
Với $a=1$ hoặc $a=2$ phương trình $f\left(\left|x^2-4x\right|-3\right)=a$ tương đương

$\left[\begin{array}{ll} g(x)=m,\ -3<m<0 & (12)\\ g(x)=n,\ 0<n<1 & (13)\\ g(x)=p,\ p>1 & (14)\end{array}\right.$. Phương trình (12), (13) đều có 4 nghiệm, phương trình (14) có 2 nghiệm, do đó thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy có tất cả 4 giá trị của a thỏa mãn

Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\left|f(x)\right|-m=0$ có 8 nghiệm phân biệt.

A. $0<m<2$. **B.** $1<m<6$. **C.** $0<m<3$. **D.** $-6<m<2$.



Lời giải

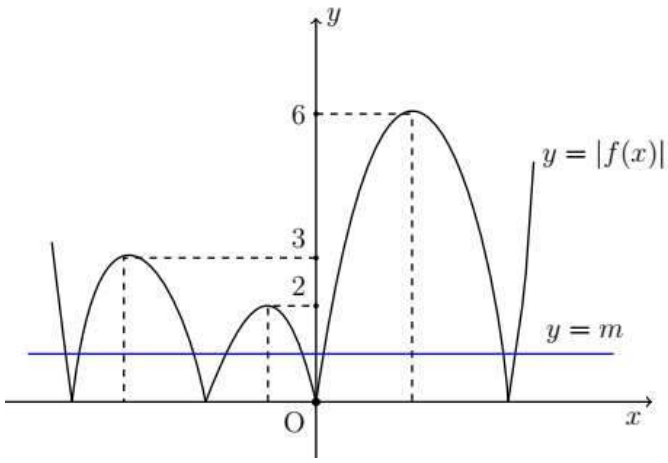
Chọn A

Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $y=\left|f(x)\right|$ bằng cách:

Giữ nguyên phần đồ thị (C) phía trên trục Ox và các giao điểm với trục Ox ta được phần đồ thị (C_1) và bỏ phần đồ thị (C) phía dưới trục Ox.

Lấy đối xứng phần đồ thị (C) phía dưới trục Ox qua trục Ox, ta được phần đồ thị (C_2).

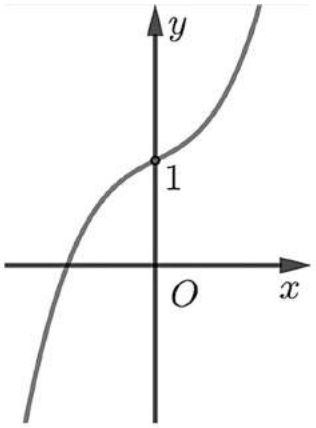
Đồ thị hàm số $y=\left|f(x)\right|$ là $(C')=(C_1)\cup(C_2)$.



Ta có $\left|f\left(x\right)\right|-m=0\Leftrightarrow\left|f\left(x\right)\right|=m\left(1\right)$. Số nghiệm của phương trình $\left(1\right)$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|\left(C'\right)$ và đường thẳng $y=m\left(d\right)$.

Phương trình $\left(1\right)$ có 8 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\left(C'\right)$ cắt $\left(d\right)$ tại 8 điểm phân biệt $\Leftrightarrow 0<m<2$.

Câu 43: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tìm số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\frac{f\left(x\right)}{f\left(x\right)+1}+\frac{f\left(x\right)+1}{f\left(x\right)+2}+\frac{f\left(x\right)+2}{f\left(x\right)+3}=\left|f\left(x\right)-2\right|-f\left(x\right)+m$ (*) có đúng ba nghiệm âm và một nghiệm dương.

A. 5 **.** **B.** 3 . **C.** 7 . **D. Vô số**.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=f(x)$. Từ đồ thị $y=f\left(x\right)$ ta có:

Với mỗi $t<1$ ta có một x âm, với mỗi $t>1$ ta có một x dương.

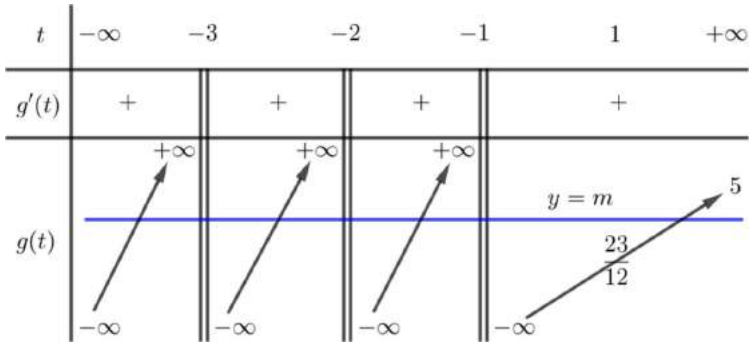
Phương trình (*) trở thành: $\frac{t}{t+1}+\frac{t+1}{t+2}+\frac{t+2}{t+3}=\left|t-2\right|-t+m$

$\Leftrightarrow\frac{t}{t+1}+\frac{t+1}{t+2}+\frac{t+2}{t+3}+t-\left|t-2\right|=m;(**)$

Xét $g(t)=\frac{t}{t+1}+\frac{t+1}{t+2}+\frac{t+2}{t+3}+t-\left|t-2\right|$; TXĐ: $D=\left(-\infty;-3\right)\cup\left(-3;-2\right)\cup\left(-2;-1\right)\cup\left(-1;+\infty\right)$

. Ta có: $g'(t)=\frac{1}{\left(t+1\right)^2}+\frac{1}{\left(t+2\right)^2}+\frac{1}{\left(t+3\right)^2}+\frac{\left|t-2\right|-t+2}{\left|t-2\right|}>0,\forall t\in D$ và $t\neq 2$.

Ta có bảng biến thiên của $y=g(t)$:

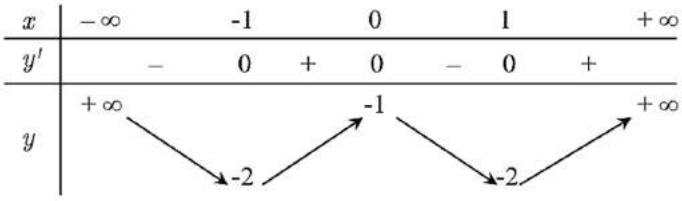


Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ Phương trình (**) có đúng 3 nghiệm nhỏ hơn 1 và 1 nghiệm lớn hơn 1.

$\Leftrightarrow \dfrac{23}{12} < m < 5$

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 44: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(-2)=7$ và có bảng biến thiên như sau:



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|x^2-1\right|-2\right)=m$ có đúng 6 nghiệm phân biệt?

A. 9. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 6.

Lời giải

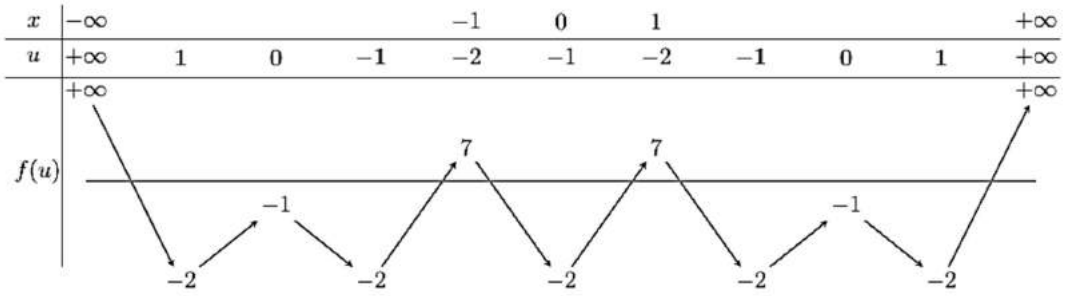
Chọn C

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=0$ hoặc $x=1$.

Đặt $u=\left|x^2-1\right|-2$. Ta có $u'=\dfrac{2x\left(x^2-1\right)}{\left|x^2-1\right|}$.

$u'=0 \Leftrightarrow x=0$; u' không xác định khi $x=\pm 1$.

Bảng biến thiên:

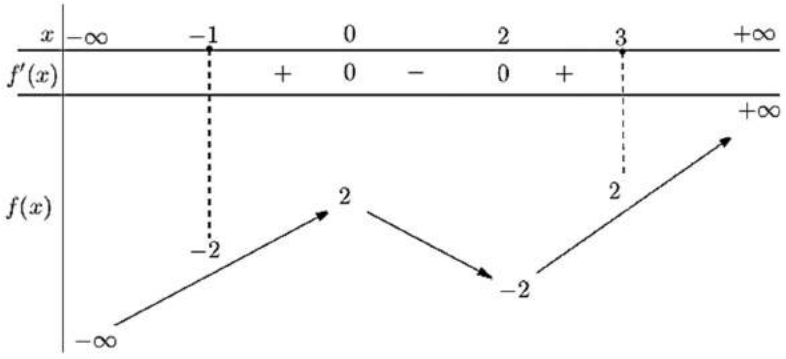


Để phương trình $f\left(\left|x^2-1\right|-2\right)=m$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thì $-1<m<7$.

Với $m\in\mathbb{Z}$ thì $m\in\{0;1;2;3;4;5;6\}$.

Vậy có 7 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 45: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



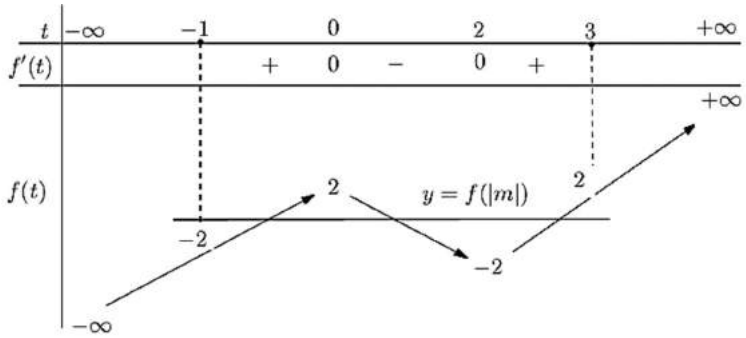
Có bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình $f\left(1-2\sin x\right)=f\left(\left|m\right|\right)$ có nghiệm thực?

A. 7 . **B.** 6 . **C.** 5 . **D.** 4 .

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=1-2\sin x$ từ $-1\le \sin x\le 1$ suy ra $t\in\left[-1;3\right]$ do đó ta có bảng biến thiên của $y=f\left(t\right)$



Từ bảng biến thiên phương trình $f\left(1-2\sin x\right)=f\left(\left|m\right|\right)$ có nghiệm thực khi và chỉ khi

$-2\le f\left(\left|m\right|\right)\le 2\Leftrightarrow -1\le \left|m\right|\le 3\Leftrightarrow -3\le m\le 3$.

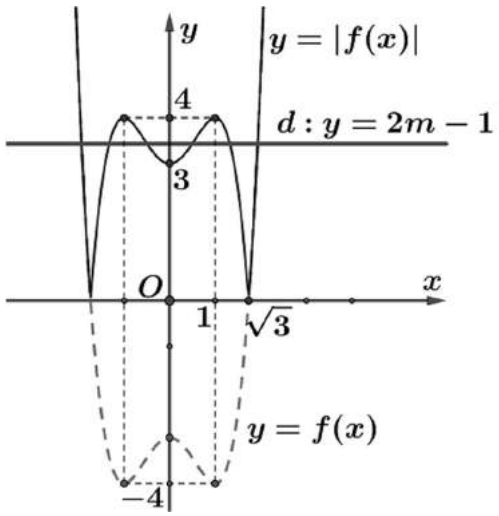
Vậy có tất cả là 7 số nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 46: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\left|x^4-2x^2-3\right|=2m-1$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt.

A. $1<m<\dfrac{3}{2}$. **B.** $4<m<5$. **C.** $3<m<4$. **D.** $2<m<\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Phương trình $\left|x^4-2x^2-3\right|=2m-1$ có 6 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y=\left|x^4-2x^2-3\right|$ cắt đường thẳng $d: y=2m-1$ tại 6 điểm phân biệt.

Cách vẽ đồ thị $(G): y=\left|x^4-2x^2-3\right|$

Bước 1: Vẽ đồ thị (C) của hàm số $y=f(x)=x^4-2x^2-3$.

Bước 2: Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm trên và phía trên trục Ox, gọi đó là (C_1).

Bước 3: Lấy đối xứng phần đồ thị (C) nằm và phía dưới trục Ox qua Ox, gọi phần nhận được là là (C_2). Đồ thị (G) của hàm số $y=\left|x^4-2x^2-3\right|$ bao gồm (C_1) và (C_2).

Từ đồ thị ta thấy, đường $d: y=2m-1$ cắt (G) tại 6 điểm phân biệt khi và chỉ khi

$$3<2m-1<4 \Leftrightarrow 2<m<\frac{5}{2}.$$

Câu 47: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $|\sin x-\cos x|+4\sin 2x=m$ có nghiệm thực

A. 7. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=|\sin x-\cos x|=\sqrt{2}\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|\in\left[0;\sqrt{2}\right] \Rightarrow t^2=1-\sin 2x \Leftrightarrow \sin 2x=1-t^2$.

Phương trình đã cho trở thành $t+4\left(1-t^2\right)=m \Leftrightarrow -4t^2+t+4=m$ (2)

Phương trình đã cho có nghiệm thực $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm thực trên $\left[0;\sqrt{2}\right]$.

Xét hàm số $f(t)=-4t^2+t+4$ trên $\left[0;\sqrt{2}\right]$.

Ta có $f'(t)=-8t+1$; $f'(t)=0 \Leftrightarrow -8t+1=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{8}$.

Bảng biến thiên

t	0		$\frac{1}{8}$		$\sqrt{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	4	↗	$\frac{65}{16}$	↘	$\sqrt{2}-4$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \sqrt{2}-4\le m\le\frac{65}{16}$.

Do $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{-2;-1;0;1;2;3;4\}$. Vậy có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 48: Cho hai hàm số $y=(x-1)(x-2)(x-3)(m-|x|)$; $y=-x^4+6x^3-5x^2-16x+18$ có đồ thị lần lượt là (C_1); (C_2). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2021;2021]$ để (C_1) cắt (C_2) tại 4 điểm phân biệt?

A. 4042. **B.** 2022. **C.** 2019. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là

$(x-1)(x-2)(x-3)(m-|x|)=-x^4+6x^3-5x^2-16x+18$ (1)

Ta thấy $x=1, x=2, x=3$ không là nghiệm của (1) nên

$(1)\Leftrightarrow m=|x|+\dfrac{-x^4+6x^3-5x^2-16x+18}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ (2).

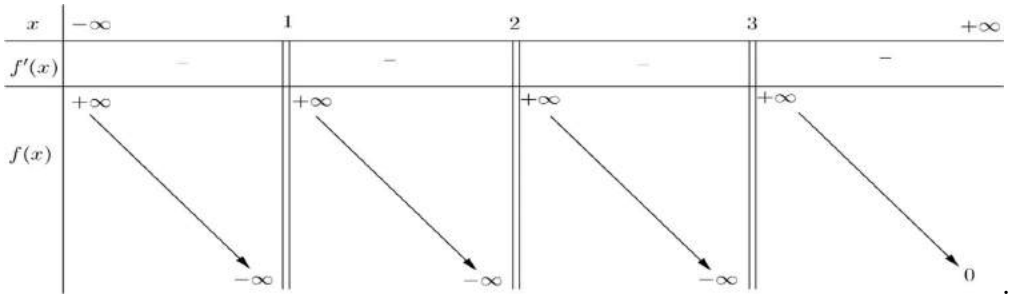
Biến đổi $\dfrac{-x^4+6x^3-5x^2-16x+18}{(x-1)(x-2)(x-3)}=-x+a+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{x-2}+\dfrac{d}{x-3}$

Đồng nhất thức hai vế ta xác định được $a=0; b=1; c=2; d=3$ nên

$(2)\Leftrightarrow m=|x|-x+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{x-3}$ với $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1;2;3\}$.

Xét hàm số $f(x)=|x|-x+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{x-3}$ với $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1;2;3\}$.

Ta có $f'(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{2}{(x-2)^2}-\dfrac{3}{(x-3)^2}+\dfrac{x-|x|}{|x|}<0$ với $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1;2;3\}$



Bảng biến thiên của hàm $f(x)$

Từ bảng biến thiên, để phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt thì $m>0$

Vì m nguyên thuộc đoạn $[-2021;2021]$ nên $m\in\{1;2;3;...;2021\}$. Vậy có 2021 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 49: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2021;2021]$ đê phương trình $|x^4-8x^2|-mx+2m-16=0$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt?

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

$|x^4-8x^2|-mx+2m-16=0\Leftrightarrow|x^4-8x^2|-16=m(x-2)$ (1).

Ta có phương trình (1) có một nghiệm $x=2$.

Xét $x\neq 2$ ta có $|x^4-8x^2|-16=m(x-2)\Leftrightarrow m=\dfrac{|x^4-8x^2|-16}{x-2}$ (2).

Để phương trình (1) có 6 nghiệm phân biệt thì phương trình (2) có 5 nghiệm phân biệt khác 2.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{|x^4-8x^2|-16}{x-2}=\begin{cases}\dfrac{x^4-8x^2-16}{x-2}, & x\le-2\sqrt{2}\vee x\ge2\sqrt{2}\\ -x^3-2x^2+4x+8, & -2\sqrt{2}<x<2\sqrt{2}\end{cases}$.

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2+4x-4+\dfrac{32}{(x-2)^2}, & x<-2\sqrt{2},\ x>2\sqrt{2}\\ -3x^2-4x+4, & -2\sqrt{2}<x<2\sqrt{2}\end{cases}.$$

Với $x<-2\sqrt{2},\ x>2\sqrt{2}$ ta có $f'(x)=3x^2+4x-4+\dfrac{32}{(x-2)^2}$.

Vì $3x^2+4x-4>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-2)\cup\left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$.

$\Rightarrow 3x^2+4x-4>0,\forall x\in\left(-\infty;-2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2};+\infty\right)$.

Suy ra $f'(x)=3x^2+4x-4+\dfrac{32}{(x-2)^2}>0,\forall x\in\left(-\infty;-2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2};+\infty\right)$

Với $-2\sqrt{2}<x<2\sqrt{2}$ ta có $f'(x)=-3x^2-4x+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-2\sqrt{2}$		-2		$\frac{2}{3}$		$2\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$8\left(\sqrt{2}-1\right)$	↘	0	↗	$\frac{256}{27}$	↘	$-8\left(\sqrt{2}+1\right)$	↗	$+\infty$

Phương trình (1) có 6 nghiệm khi $0<m<8\left(\sqrt{2}-1\right), m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{1;2;3\}$.

Suy ra có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 50: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^3-15x-|3x-m|=0$ có đúng 3 nghiệm thực?

A. 43. **B.** 44. **C.** 45. **D.** 41.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $x^3-15x-|3x-m|=0\Leftrightarrow x^3-15x=|3x-m|$

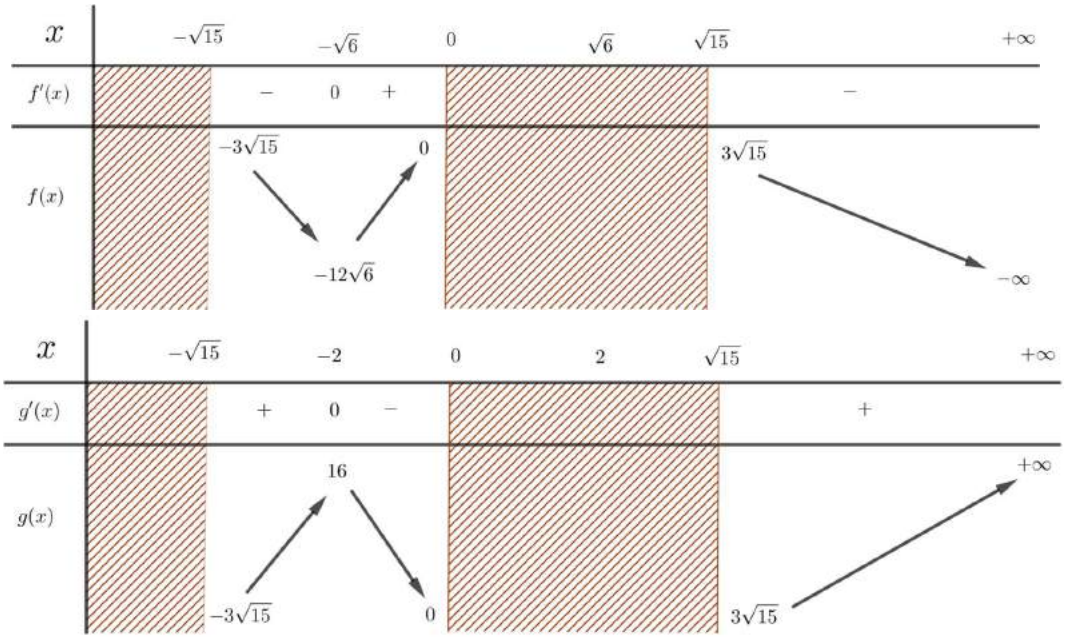
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-15x\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}x^3-15x=3x-m\\ x^3-15x=-3x+m\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge\sqrt{15}\\ -\sqrt{15}\le x\le 0\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}m=-x^3+18x\\ m=x^3-12x\end{array}\right.\end{cases}.$$

Xét hàm $f(x)=-x^3+18x$ với $x\in\left[-\sqrt{15};0\right]\cup\left[\sqrt{15};+\infty\right)$.

Ta có: $f'(x)=-3x^2+18;\ f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{6}$.

Xét hàm $g(x)=x^3-12x$ với $x\in\left[-\sqrt{15};0\right]\cup\left[\sqrt{15};+\infty\right)$.

Ta có: $g'(x)=3x^2-12$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm 2$.



Theo bảng biến thiên của hàm $f(x), g(x)$ số nghiệm của phương trình $x^3-15x-|3x-m|=0$ là tổng số giao điểm của đường thẳng $y=m$ và đồ thị hàm $y=f(x); y=g(x)$. Suy ra phương trình $x^3-15x-|3x-m|=0$ có 3 nghiệm phân biệt khi $-12\sqrt{6}<m<16$. Vậy có 45 giá trị nguyên của m để phương trình có 3 nghiệm.

Câu 51: Cho hàm số $y=f(x)=x^2-4x+3$. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(|x|)-(m-6)f(|x|)-m+5=0$ có 6 nghiệm thực phân biệt. Tính tổng các phần tử của S.

A. 3. **B.** 22. **C.** 30. **D.** 18.

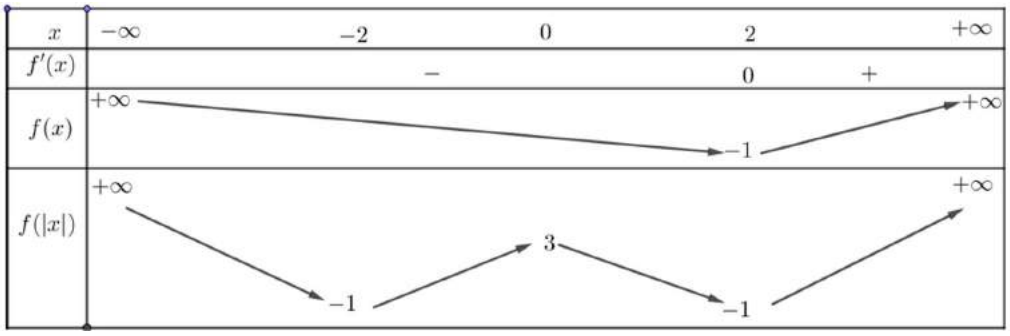
Lời giải

Chọn D

Xét hàm $y=f(x)=x^2-4x+3$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$f'(x)=2x-4$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-4=0 \Leftrightarrow x=2$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)=x^2-4x+3$ và hàm số $y=f(|x|)$



Ta có $f^2(|x|)-(m-6)f(|x|)-m+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(|x|)=-1 \\ f(|x|)=m-5 \end{array}\right.$.

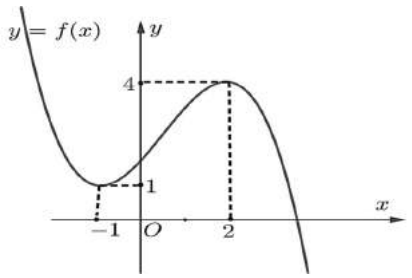
Từ bảng biến thiên ta có

Phương trình $f\left(\left|x\right|\right)=-1$ có hai nghiệm phân biệt $x=\pm 2$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f\left(\left|x\right|\right)=m-5$ có bốn nghiệm thực phân biệt khác ± 2 $\Leftrightarrow -1<m-5<3$ $\Leftrightarrow 4<m<8$. Vậy tập $S=\{5;6;7\}$.

Tổng các phần tử của tập S là $5+6+7=18$.

Câu 52: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m, để phương trình $\left|3f^2\left(2x\right)-12f\left(2x\right)-m\right|=1$ có ít nhất 7 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(-\infty;1\right)$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2..

Lời giải

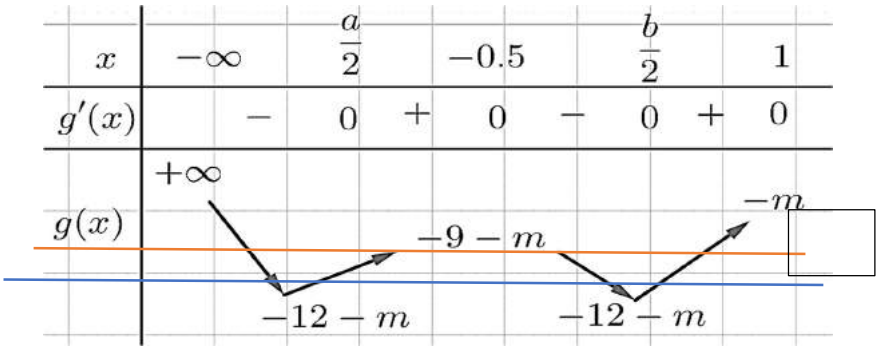
Chọn C

Đặt $g\left(x\right)=3f^2\left(2x\right)-12f\left(2x\right)-m$.

Ta có $g'\left(x\right)=12f\left(2x\right).f'\left(2x\right)-24.f'\left(2x\right)=12f'\left(2x\right)\left[f\left(2x\right)-2\right]$.

$$\text{Cho } g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(2x\right)=0\\f\left(2x\right)=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=-1\\2x=2\\2x=a\in\left(-\infty;-1\right)\\2x=b\in\left(-1;2\right)\\2x=c\in\left(2;+\infty\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-0,5\\x=1\\x=\dfrac{a}{2}\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)\\x=\dfrac{b}{2}\in\left(-\dfrac{1}{2};1\right)\\x=\dfrac{c}{2}\in\left(1;+\infty\right)\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của hàm số $g\left(x\right)$ trên khoảng $\left(-\infty;1\right)$.



Tính giá trị:

Tại $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{a}{2} \\ x=\dfrac{b}{x} \end{array}\right. \Rightarrow f(2x)=2 \Rightarrow g(x)=3f^2(2x)-12f(2x)-m=3.2^2-12.2-m=-12-m$

Tại $x=-0,5 \Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow f(2x)=f(-1)=1 \Rightarrow g(x)=3.1^2-12.1-m=-9-m$

$\left|3f^2(2x)-12f(2x)-m\right|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x)=1 \\ g(x)=-1 \end{array}\right.$, ta vẽ hai đường thẳng $y=\pm 1$ vào BBT để có ít nhất 7 nghiệm khi $-12-m<-1<1\le -9-m \Leftrightarrow -11<m\le -10, m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m=-10$.

Câu 53: Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	m	↘	n	↗	$+\infty$

Với m,n là các số nguyên thuộc đoạn $[-10;10]$. Hỏi có bao nhiêu cặp số nguyên $(m;n)$ để phương trình $f(|x+5|)=4$ có đúng 4 nghiệm phân biệt?

A. 18. **B.** 21. **C.** 19. **D.** 20.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $g(x)=f(|x+5|) \Rightarrow g'(x)=\dfrac{(x+5)}{|x+5|}f'(|x+5|)$

$g'(x)$ không xác định tại $x=-5$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(|x+5|)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x+5|=3 \\ |x+5|=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-8 \\ x=-2 \\ x=-10 \\ x=0 \end{array}\right.$

Từ đó, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-10		-8		-5		-2		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	n	↗	m	↘		↗	m	↘	n	↗	$+\infty$

Từ bbt của hàm số $y=g(x)=f(|x+5|)$, ta có

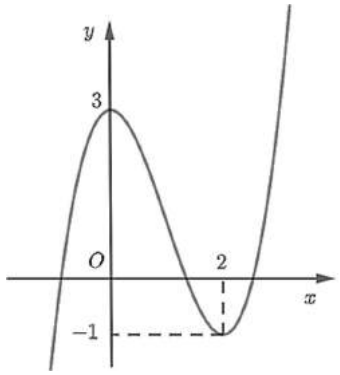
Phương trình $f(|x+5|)=4$ có đúng 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y=4$ cắt đồ thị hàm số $y=f(|x+5|)$ tại đúng 4 điểm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=4 \\ n=4 \end{array}\right.$.

Với $m=4$ ta phải có $-10\le n<m=4$ nên có 14 cặp số nguyên $(m;n)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Với $n=4$ ta phải có $4=n<m\le 10$ nên có 6 cặp số nguyên $(m;n)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy có 20 cặp số nguyên $(m;n)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 54: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $\left|\left|f(x)-2\right|-1\right|=1$ là



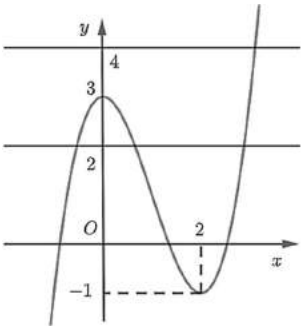
A. 10. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

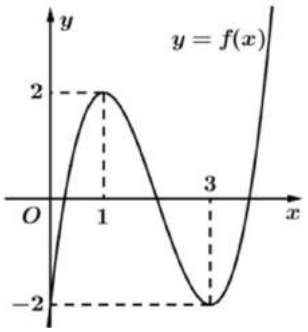
Xét phương trình: $\left|\left|f(x)-2\right|-1\right|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|f(x)-2\right|-1=1\\ \left|f(x)-2\right|-1=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|f(x)-2\right|=2\\ \left|f(x)-2\right|=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)-2=2\\ f(x)-2=-2\\ f(x)-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=4\\ f(x)=0\\ f(x)=2\end{array}\right.$



Từ đồ thị hàm số ta thấy, phương trình có 7 nghiệm phân biệt.

Câu 55: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^4(x)+2=3f^2(x)+\left|f(x)+2m\right|$ có đúng 4 nghiệm phân biệt?

A. 6. **B.** 2. **C.** 8. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = f(x)$, dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có:

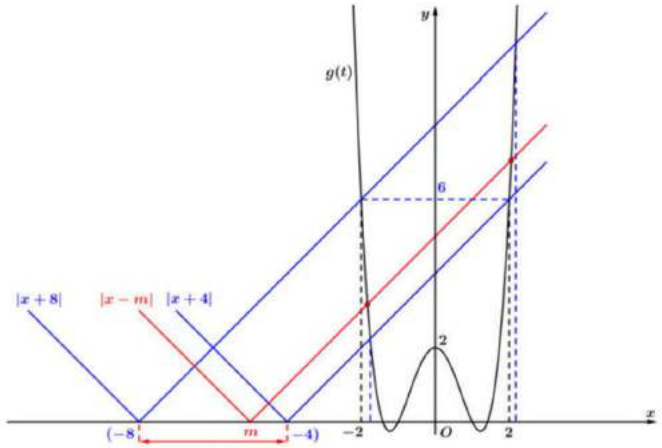
Với $t > 2$ hoặc $t < -2$ thì phương trình $f(x) = t$ có đúng một nghiệm.

Với $t = \pm 2$ thì phương trình $f(x) = t$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

Với $-2 < t < 2$ thì phương trình $f(x) = t$ có đúng ba nghiệm phân biệt.

Từ $f^4(x) + 2 = 3f^2(x) + |f(x) + 2m|$ ta có phương trình: $t^4 - 3t^2 + 2 = |t + 2m|$ $(*)$.

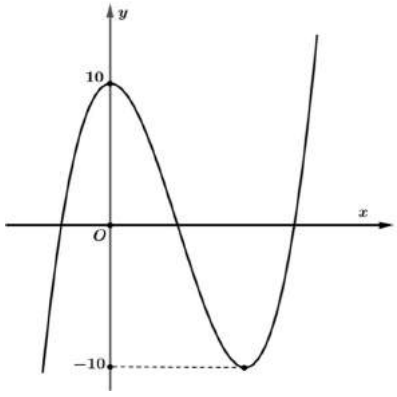
Phương trình đã cho có đúng 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $(*)$ có một nghiệm $t \in (-2;2)$ và một nghiệm $t \in (-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$.



Vẽ đồ thị các hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 2; y = |x + 2m|$ trên cùng một hệ trục, ta thấy yêu cầu bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi: $2m \in (-8;-4) \cup (4;8) \Leftrightarrow m \in (-4;-2) \cup (2;4)$.

Kết hợp với m nguyên nên ta có hai giá trị của m là $m \in \{\pm 3\}$.

Câu 56: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-23;23]$ để phương trình $|f(x)|^3 - 4f^2(x) + 2mf(x) - m^2 = 0$ có đúng hai nghiệm thực (Giả thiết rằng các nghiệm bội chỉ được tính là một nghiệm)?



A. 3971. **B.** 3974. **C.** 1780. **D.** 2972.

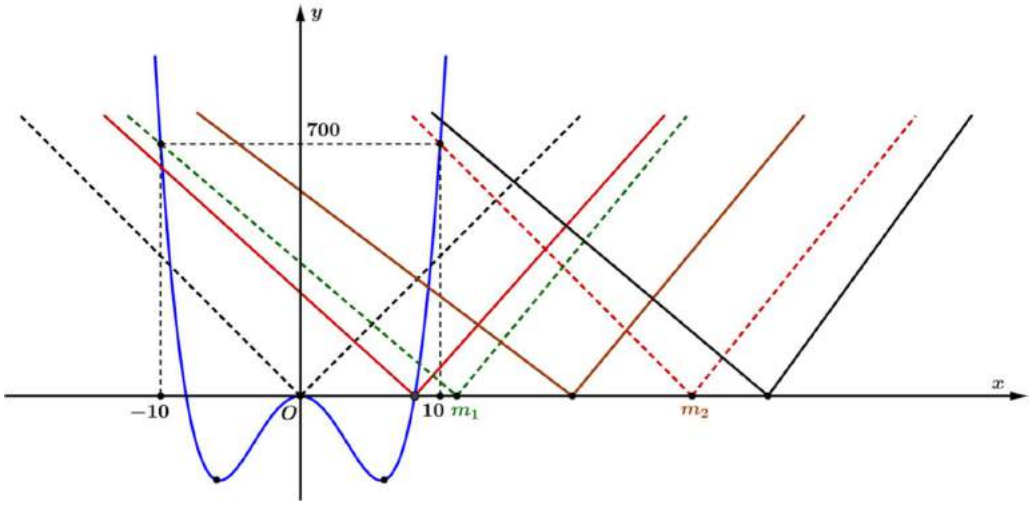
Lời giải

Xét phương trình $f(x) = t$.

Nếu $|t| < 10$ thì phương trình có 3 nghiệm, $|t| = 10$ thì phương trình có 2 nghiệm và $|t| > 10$ thì phương trình có 1 nghiệm duy nhất.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \left|f\left(x\right)\right|^3-3f^2\left(x\right)=f^2\left(x\right)-2mf\left(x\right)+m^2$

Đặt $t=f\left(x\right)$ thì phương trình trở thành $\left|t\right|^3+t^2=\left(t-m\right)^2\Leftrightarrow g\left(\left|t\right|\right)=h\left(t\right)$ và $g\left(\left|\pm10\right|\right)=700$.



Từ sơ đồ ta có các nhận xét như sau :

Nếu $\left|m\right|=0$ thì có 3 nghiệm $t\in\left(-10;10\right)$ $\Rightarrow$ Có tất cả 9 nghiệm thực của x nên không thỏa mãn.

Nếu $0<\left|m\right|<m_1$ thì có 2 nghiệm $t\in\left(-10;10\right)\Rightarrow$Có tất cả 6 nghiệm thực của x nên không thỏa mãn.

Nếu $\left|m\right|=m_1$ thì có 1 nghiệm $\left|t\right|=10$ và 1 nghiệm $t\in\left(-10;10\right)\Rightarrow$Có tất cả 5 nghiệm thực của x nên không thỏa mãn.

Nếu $m_1<\left|m\right|<m_2$ thì có 1 nghiệm $t\in\left(-10;10\right)$ và 1 nghiệm $\left|t\right|>10$ và $\Rightarrow$Có tất cả 4 nghiệm thực của x nên không thỏa mãn.

Nếu $\left|m\right|=m_2$ thì có 1 nghiệm $\left|t\right|=10$ và 1 nghiệm $\left|t\right|>10\Rightarrow$Có tất cả 3 nghiệm thực của x nên không thỏa mãn.

Nếu $\left|m\right|>m_2$ thì có 2 nghiệm $\left|t\right|>10\Rightarrow$Có tất cả 2 nghiệm thực của x nên không thỏa mãn.

Ta có hàm số $y=\left(t-m_2\right)^2$ đi qua $\left(10;700\right)$ nên $m_2=36,5$

Suy ra yêu cầu bài toán $\left|m\right|>36,5\Rightarrow\left[\begin{array}{l}-2023\le m\le-37\\37\le m\le2023\end{array}\right.\Rightarrow$ có 3974 giá trị m thỏa mãn.

Dạng 6: Tương giao đồ thị hàm số bậc ba

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Tìm các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y=(2m-1)x+3+m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$.

A. $m=\frac{3}{4}$. **B.** $m=\frac{3}{2}$. **C.** $m=-\frac{1}{2}$. **D.** $m=\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2+1$.

Ta có $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$ và đạo hàm đổi dấu khi x qua các nghiệm này.

Do đó, đồ thị (C) có hai điểm cực trị là $A(0;1)$ và $B(2;-3)$.

Đường thẳng Δ đi qua hai điểm A và B có phương trình là $y=-2x+1$.

$d\perp\Delta\Leftrightarrow(2m-1).(-2)=-1\Leftrightarrow m=\frac{3}{4}$.

Vậy $m=\frac{3}{4}$ là giá trị cần tìm để đường thẳng d vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C).

Câu 2: Tìm m để đồ thị của hàm số $y=x^3+3mx^2-2x-4$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1+x_2=2x_3$.

A. $m=0$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=3$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $y=x^3+3mx^2-2x-4$ và trục hoành ta có

$x^3+3mx^2-2x-4=0\ (1)$.

Áp dụng định lý Vi-et ta có $x_1+x_2+x_3=3x_3=-3m\Rightarrow x_3=-m$.

Thay $x_3=-m$ vào (1) ta được $2m^3+2m-4=0\Leftrightarrow m=1$.

Thử lại: Thay $m=1$ vào (1) ta được $x^3+3x^2-2x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-1\pm\sqrt{5} \end{array}\right.$, thỏa mãn điều kiện.

Vậy $m=1$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 3: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3-3x+m-2022=0$ có ba nghiệm thực phân biệt.

A. $m\in(-2;2)$. **B.** $m\in(-\infty;2020)\cup(2024;+\infty)$.

C. $m\in(-2;+\infty)$. **D.** $m\in(2020;2024)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $x^3-3x+m-2022=0 \Leftrightarrow -x^3+3x=m-2022 \ (*)$

Xét hàm số $y=-x^3+3x$ có đồ thị là (C) và đường thẳng $d: y=m-2022$.

Số nghiệm của phương trình $(*)$ phụ thuộc vào số giao điểm của đồ thị hàm số (C) và đường thẳng d

Ta có: $y'=-3x^2+3$, cho $y'=0 \Leftrightarrow -3x^2+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Nhìn bảng biến thiên suy ra:

Phương trình $(*)$ có ba nghiệm phân biệt khi $-2<m-2022<2 \Leftrightarrow 2020<m<2024$.

Câu 4: Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ cắt đường thẳng $y=m(x-1)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thoả mãn $x_1^2+x_2^2+x_3^2>5$.

A. $m \geq -3$. **B.** $m>-2$. **C.** $m>-3$. **D.** $m \geq -2$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3-3x^2+2=m(x-1) \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-2x-2-m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x-2-m=0 \ (*) \end{array}\right.$$

Đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ cắt đường thẳng $y=m(x-1)$ tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác $1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2+m>0 \\ 1-2-2-m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m>-3$.

Gọi x_2, x_3 là hai nghiệm của phương trình $(*)$.

Ta có: $x_1^2+x_2^2+x_3^2>5 \Leftrightarrow (x_2+x_3)^2-2x_2x_3>4 \Leftrightarrow 4-2(-2-m)>4 \Leftrightarrow m>-2$.

Vậy $m>-2$.

Câu 5: Tìm giá trị tham số m để đường thẳng $(d): mx-y+m=0$ cắt đường cong $(C): y=x^3-3x^2+4$ tại ba điểm phân biệt A, B và $C(-1;0)$ sao cho tam giác AOB có diện tích bằng $5\sqrt{5}$. (Với O là gốc tọa độ).

A. $m=5$. **B.** $m=3$. **C.** $m=4$. **D.** $m=6$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $(d): y=mx+m$

Ta có $d(O,(d))=\dfrac{|m|}{\sqrt{m^2+1}}$

Phương trình hoành độ giao điểm

$x^3-3x^2+4=mx+m \Leftrightarrow x^3-3x^2-mx+4-m=0$

$\Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-4x+4-m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ (x-2)^2=m \end{array}\right.$.

Để (d) cắt (C) tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi $m>0$.

Ta có $A\left(2+\sqrt{m};3m+m\sqrt{m}\right), B\left(2-\sqrt{m};3m-m\sqrt{m}\right) \Rightarrow AB=\sqrt{4m+4m^3}$.

Theo giả thiết $S_{OAB}=5\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{4m+4m^3}.\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}=5\sqrt{5} \Leftrightarrow m\sqrt{m}=5\sqrt{5} \Leftrightarrow m=5.$

Câu 6: Cho hàm số $y=x^3+3x^2+mx+m,\ (C_m)$. Tìm các giá trị của m để đường thẳng d đi qua $I(-1;2)$ có hệ số góc bằng $-m$ cắt đồ thị hàm số (C_m) tại 3 điểm phân biệt.

A. $m<\frac{3}{2}$. **B.** $m>\frac{3}{2}$. **C.** $m\le -2$ **D.** $m>2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có phương trình đường thẳng $d: y=-mx-m+2$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (C_m) :

$x^3+3x^2+mx+m=-mx-m+2,\ (1) \Leftrightarrow x^3+3x^2+2mx+2m-2=0$

$\Leftrightarrow (x+1)\left(x^2+2x+2m-2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x^2+2x+2m-2=0,\ (2) \end{array}\right.$

Để cho d và (C_m) cắt nhau tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi (1) có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm phân biệt khác -1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=1-(2m-2)>0 \\ 1-2+2m-2\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow m<\frac{3}{2}$

Câu 7: Cho hàm số $y=2x^3-7x^2+3x$ có đồ thị (C) và hàm số $y=x^3-5x^2+(3-m)x+2m$ (với $m\in\mathbb{R}$) có đồ thị (P). Biết đồ thị hàm số (C) cắt (P) tại ba điểm phân biệt có hoành độ nằm trong $[-2;4]$. Tổng các giá trị nguyên của m bằng

A. -6. **B.** -10. **C.** -8. **D.** -5.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$2x^3-7x^2+3x=x^3-5x^2+(3-m)x+2m \Leftrightarrow x^3-2x^2+mx-2m=0$ (1).

Đồ thị hàm số (C) cắt (P) tại ba điểm phân biệt có hoành độ nằm trong $[-2;4]$ khi và chỉ khi phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt thuộc $[-2;4]$.

$(1) \Leftrightarrow \left(x^2+m\right)(x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\in[-2;4] \\ x^2+m=0\ (2) \end{array}\right.$

Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt thuộc $[-2;4] \Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm phân biệt thuộc

$[-2;4]$ và khác 2.

Đặt $g(x)=x^2+m \Rightarrow g'(x)=2x$, ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

Bảng biến thiên của $y=g(x)$

x	-2		0		2		4
$g'(x)$		-	0		+		
$g(x)$	$m+4$	↘	m	↗	$m+4$	↗	$m+16$

Từ bảng biến thiên phương trình $g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $[-2;4]$ và khác 2 $\Leftrightarrow m<0<m+4 \Leftrightarrow -4<m<0$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$, nên $m\in\{-3;-2;-1\}$. Tổng các giá trị nguyên của m bằng -6.

Câu 8: Cho hàm số $y=x^3+2x^2+(m+1)x+m$ (m là tham số) có đồ thị (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn $x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 6$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $x^3+2x^2+(m+1)x+m=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+x+m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x^2+x+m=0. \quad (1)\end{array}\right.$

(C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \Delta=1-4m>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m<\dfrac{1}{4}.\end{cases} \quad (2)$

Giả sử $x_3=-1 \Rightarrow x_1, x_2$ là nghiệm của (1). Theo định lý Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1+x_2=-1 \\ x_1x_2=m.\end{cases}$

Khi đó: $x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 6 \Leftrightarrow x_1^2+x_2^2+(-1)^2\le 6 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2\le 5$

$\Leftrightarrow 1-2m\le 5 \Leftrightarrow m\ge -2.$

Kết hợp với (2) suy ra $\begin{cases} m\neq 0 \\ -2\le m<\dfrac{1}{4}.\end{cases}$

Vậy có 2 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm số $y=x^3-2x^2-1$ có đồ thị (C), đường thẳng $(d): y=mx-1$ và điểm $K(4;11)$. Biết rằng (C) và (d) cắt nhau tại ba điểm phân biệt A,B,C trong đó $A(0;-1)$ còn trọng tâm tam giác KBC nằm trên đường thẳng $y=2x+1$. Mệnh đề nào sau đây **đúng?**

A. $m=4$. **B.** $m=2$. **C.** $m=3$. **D.** Không có m.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là:

$$x^3-2x^2-1=mx-1\Leftrightarrow x^3-2x^2-mx=0\Leftrightarrow x\left(x^2-2x-m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-2x-m=0(1)\end{array}\right.$$

Để (C) và (d) cắt nhau tại ba điểm phân biệt thì **(1)** có hai nghiệm phân biệt khác 0. Ta có:

$$\begin{cases}\Delta'>0\\0^2-0-m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+m>0\\m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-1\\m\neq 0\end{cases}$$

Gọi x_1,x_2 là nghiệm của **(1)**, ta có $B(x_1;mx_1-1);C(x_2;mx_2-1)$. Trọng tâm G của tam giác KBC, ta có

$$\begin{cases}x_G=\dfrac{4+x_1+x_2}{3}=2\\y_G=\dfrac{11+mx_1+mx_2-2}{3}=\dfrac{2m+9}{3}\end{cases}$$

Theo giả thiết G thuộc đường thẳng $(d): y=2x+1$ nên ta có: $\dfrac{2m+9}{3}=2.2+1\Rightarrow m=3(tm)$

Câu 2: Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=3x+m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=x^3+1$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** -1.

Lời giải

Chọn C

$y'=3x^2$.

Giả sử đường thẳng $y=3x+m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=x^3+1$ tại điểm x_0 thì $y'(x_0)=3\Leftrightarrow x_0=\pm 1.$

Đk đủ: $x_0=1\Rightarrow y_0=2$ thì PTTT là $y=3x-2\Rightarrow m=-1$.

$x_0=-1\Rightarrow y_0=0$ thì PTTT là $y=3x+3\Rightarrow m=3$.

Tổng các phần tử của S bằng 2.

Cách 2: Điều kiện tiếp xúc $\begin{cases}x^3+1=3x+m\\3x^2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+1-3x=m\\x=\pm 1\end{cases}\Leftrightarrow m=-1;m=3.$

Câu 3: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=2x^3-(2+m)x+m$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt

A. $m>\frac{1}{2}$. **B.** $m\le\frac{1}{2}$. **C.** $m>-\frac{1}{2}$. **D.** $m>-\frac{1}{2};\ m\neq 4$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị với trục Ox:

$2x^3-(2+m)x+m=0\Leftrightarrow 2x^3-2x-mx+m=0\Leftrightarrow (x-1)\left[2x^2+2x-m\right]=0\ \ (1)$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\2x^2+2x-m=0\ \ (2)\end{array}\right.$

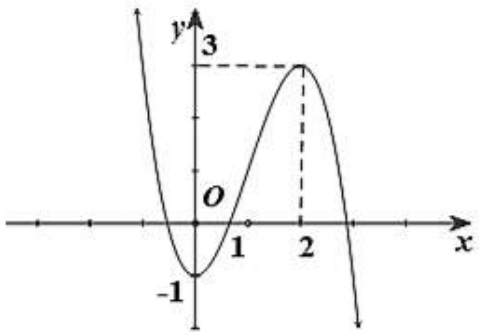
Để đồ thị hàm số cắt Ox tại 3 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow (1)$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (2)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1.

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=1+2m>0\\g(1)=2+2-m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-\frac{1}{2}\\m\neq 4\end{cases}$

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2020;2020]$ của tham số m để phương trình $2f(|x|)-m=0$ có đúng 2 nghiệm thực phân biệt?

A. 2020. **B.** 2022. **C.** 2021. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn D

$2f(|x|)-m=0\Leftrightarrow f(|x|)=\frac{m}{2}\ \ (1)$

Dựa vào đồ thị hàm $y=f(|x|)$ ta có: để phương trình (1) có đúng 2 nghiệm thực phân biệt

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{m}{2}=3\\\frac{m}{2}<-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=6\\m<-2\end{array}\right.$

Vì $m\in[-2020;2020]\Leftrightarrow m\in\{-2020;-2019;.....-3;6\}$. Vậy có 2019 số.

Câu 5: Biết đường thẳng $y=(3m-1)x+6m+3$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ tại ba điểm phân biệt sao cho một giao điểm cách đều hai giao điểm còn lại. Khi đó m thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};2\right)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm là $(3m-1)x+6m+3=x^3-3x^2+1$

$\Leftrightarrow x^3-3x^2-(3m-1)x-6m-2=0\ \ (1)$.

Xét hàm số $g(x)=x^3-3x^2-(3m-1)x-6m-2\ \ (C_m)$.

$g'(x)=3x^2-6x-3m+1\Rightarrow g''(x)=6x-6$; $g''(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Đồ thị (C_m) có điểm uốn là $I(1;-9m-3)$.

Để đường thẳng $y=(3m-1)x+6m+3$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ tại ba điểm phân biệt sao cho một giao điểm cách đều hai giao điểm còn lại

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=(-3)^2-3.(-3m+1)>0\\ I\in Ox\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m>-\frac{2}{3}\\ m=-\frac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow m=-\frac{1}{3}\in(-1;0).$$

Câu 6: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-(2m+1)x^2+(3m+1)x-(m+1)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình

$x^3-(2m+1)x^2+(3m+1)x-(m+1)=0\Leftrightarrow(x-1)\left[x^2-2mx+m+1\right]=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2-2mx+m+1=0\ \ (*)\end{array}\right.$$

Theo yêu cầu bài toán phương trình $(*)$ xảy ra 2 trường hợp

TH1: phương trình có nghiệm kép khác 1, tức là $\begin{cases}\Delta'=m^2-m-1=0\\ 1-2m+m+1\neq 0\end{cases}$ loại, do nghiệm không nguyên.

TH2: phương trình có 2 nghiệm phân biệt trong đó 1 là một nghiệm, tức là $\begin{cases}\Delta'=m^2-m-1>0\\ 1-2m+m+1=0\end{cases}\Leftrightarrow m=2$.

Nhận xét: cụm từ "cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt" được người ra đề hiểu là "có đúng 2 điểm chung với trục hoành". Theo ý kiến chủ quan của người giải, ta nên phát biểu rõ ràng hơn.

Câu 7: Cho đồ thị $(C_m): y=x^3-2x^2+(1-m)x+m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3 thỏa $x_1^2+x_2^2+x_3^2=4$

A. $m \neq 0$. **B.** $m \in (0;2)$. **C.** $m = 1$. **D.** $m > -\frac{1}{4}$ và $m \neq 0$.

Lời giải

Chọn C

Để hàm số đã cho cắt trục hoành tại 3 điểm phàn biệt thì phương trình hoành độ giao điểm phải có 3 nghiệm phân biệt:

$x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m = 0$

$(x-1)\left(x^2 - x - m\right) = 0$

Ta đặt $x_1 = 1$. Khi đó, đế phương trình có 3 nghiệm phân biệt thì phương trình sau phải có 2 nghiệm phân biệt khác 1.

$x^2 - x - m = 0$

Do có nghiệm khác 1 nên $1 - 1 - m \neq 0$ hay $m \neq 0$.

Ta có $\Delta = 1 + 4m$

Để có 2 nghiệm phàn biệt thì $\Delta > 0$ hay $m > -\frac{1}{4}$.

Theo điều kiện của đề bài ta có $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$

$\Leftrightarrow 1 + \left(x_2 + x_3\right)^2 - 2x_2x_3 = 4 \Leftrightarrow \left(x_2 + x_3\right)^2 - 2x_2x_3 = 3$

Với x_2, x_3 là nghiệm của phương trình bậc 2 trên.

Áp dụng Viet ta có: $1^2 - 2(-m) = 3 \Leftrightarrow m = 1$

Kết hợp các điều kiện ta có $\Leftrightarrow m = 1$.

Câu 8: Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ tại 3 điểm phân biệt A, B, C (B nằm giữa A, C) sao cho $AB = 2BC$. Tính tổng các phần tử thuộc S.

A. -4. **B.** $\frac{7-\sqrt{7}}{7}$. **C.** -2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = x^3 - 3x^2$ như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

Suy ra đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ tại 3 điểm phân biệt A, B, C $\Leftrightarrow -4 < m < 0$.

Khi đó $x_A + x_B + x_C = 3, x_Ax_B + x_Bx_C + x_Cx_A = 0, x_Ax_Bx_C = m$.

Để B nằm giữa A, C và $AB = 2BC$ thì $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_A < x_B < x_C \\ x_B - x_A = 2\left(x_C - x_B\right) \end{cases} \\ \begin{cases} x_C < x_B < x_A \\ x_A - x_B = 2\left(x_B - x_C\right) \end{cases} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow 3x_B = x_A + 2x_C \Leftrightarrow 4x_B - 3 = x_C \Rightarrow x_A = 6 - 5x_B$.

Suy ra $\begin{cases} (6-5x_B).x_B + x_B.(4x_B-3) + (4x_B-3).(6-5x_B) = 0 \ (*) \\ (4x_B-3).x_B.(6-5x_B) = m \qquad\qquad (**) \end{cases}$.

Từ **(*)** được $x_B = \dfrac{7 \pm \sqrt{7}}{7}$. Thay vào **(**)** được $m = -\dfrac{98+20\sqrt{7}}{49}$ và $m = \dfrac{-98+20\sqrt{7}}{49}$.

Vậy $S = \left\{ -\dfrac{98+20\sqrt{7}}{49}; \dfrac{-98+20\sqrt{7}}{49} \right\}$.

Câu 9: Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của a để đồ thị hàm số $y = x^3 + (a+10)x^2 - x + 1$ cắt trục hoành tại đúng một điểm?

A. 10. **B.** 8. **C.** 11. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và trục hoành là:

$x^3 + (a+10)x^2 - x + 1 = 0 (1) \Leftrightarrow x^3 + 10x^2 - x + 1 = -ax^2$.

Ta thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên

$(1) \Leftrightarrow -\dfrac{x^3 + 10x^2 - x + 1}{x^2} = a$.

Xét hàm số $f(x) = -\dfrac{x^3 + 10x^2 - x + 1}{x^2}$ với $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Ta có $f'(x) = -\dfrac{x^3 + x - 2}{x^3} = -\dfrac{(x-1).(x^2+x+2)}{x^3}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-11	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại đúng một điểm khi (1) có đúng 1 nghiệm $\Leftrightarrow a > -11$.

Do a nguyên âm nên $a \in \{-10, -9, -8, ..., -1\}$. Vậy có 10 giá trị của a thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc $[-2020; 2021]$ của hàm số m để đường thẳng $y = mx - m - 1$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x$ tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $AB = BC$.

A. 2021. **B.** 2023. **C.** 2024. **D.** 2022.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3 - 3x^2 + x = mx - m - 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + (1-m)x + m + 1 = 0$.

$(x-1)\left(x^2-2x-1-m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x-1-m=0 \ (1) \end{array}\right.$

Để để đường thẳng $y=mx-m-1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+x$ tại ba điểm phân biệt A, B, C thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2+m>0 \\ -2-m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m>-2$.

Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1+x_2=2$ với mọi tham số m.

Trường hợp 1: $x_B=1$.

Khi đó yêu cầu bài toán trở thành $\begin{cases} x_A+x_C=2x_B \\ y_A+y_C=2y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=2 \\ y_1+y_2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=2 \\ m\left(x_1+x_2\right)-2m+2=2 \end{cases}$.

Điều này thỏa mãn với mọi $m>-2$.

Trường hợp 2: $x_B\neq 1$ và giả sử $x_1<x_2$.

Khi đó yêu cầu bài toán trở thành

$\begin{cases} x_A+x_C=2x_B \\ y_A+y_C=2y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+1=2x_2 \\ y_1+1=2y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+1=2x_2 \\ mx_1-m+2=2\left(mx_2-m+1\right)(*) \end{cases}$.

Ta có hệ $\begin{cases} x_1+1=2x_2 \\ x_1+x_2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=1 \\ x_1=1 \end{cases}$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy giá trị m cần tìm là $m>-2$.

Vì $m\in\mathbb{Z}, m\in[-2020;2021] \Rightarrow m\in[-1;2021] \Rightarrow$ có 2023 giá trị của m.

Câu 11: Cho bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số $y=-x^3+mx^2-2m$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $-x^3+mx^2-2m=0$ **(*)**.

Giả sử phương trình **(*)** có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng, theo tính chất của cấp số cộng ta có: $x_1+x_3=2x_2$.

Áp dụng định lí Vi-et ta có: $x_1+x_2+x_3=m \Rightarrow 3x_2=m \Leftrightarrow x_2=\dfrac{m}{3}$.

Vì $x_2=\dfrac{m}{3}$ là một nghiệm của phương trình **(*)** nên ta có:

$-\left(\dfrac{m}{3}\right)^3+m.\left(\dfrac{m}{3}\right)^2-2m=0 \Leftrightarrow 2m^3-54m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=3\sqrt{3} \\ m=-3\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Thử lại:

Với $m=0$, phương trình trở thành: $-x^3=0 \Leftrightarrow x=0$ **(loại)**.

Với $m=3\sqrt{3}$, phương trình trở thành: $-x^3+3\sqrt{3}x^2-6\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-3+\sqrt{3} \\ x_2=\sqrt{3} \\ x_3=3+\sqrt{3} \end{array}\right.$ và 3 nghiệm này lập thành 1 CSC.

Với $m=-3\sqrt{3}$, phương trình trở thành: $-x^3-3\sqrt{3}x^2+6\sqrt{3}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=-3-\sqrt{3}\\x_2=-\sqrt{3}\\x_3=3-\sqrt{3}\end{array}\right.$ và 3 nghiệm này lập thành 1 CSC.

Vậy có 2 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán là $m=3\sqrt{3}$ và $m=-3\sqrt{3}$.

Câu 12: Gọi S là tập hợp các số nguyên m để phương trình $x^3-(2m+1)x^2+2(3m-2)x-8=0$ có ba nghiệm lập thành một cấp số nhân. Tổng các phần tử của S bằng

A. 0. **B.** -2. **C.** 3. **D.** -1.

Lời giải

Chọn C

Giả sử x_1,x_2,x_3 là ba nghiệm của phương trình $x^3-(2m+1)x^2+2(3m-2)x-8=0$.

Khi đó ta có $x^3-(2m+1)x^2+2(3m-2)x-8=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

Ta có $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=2m+1\\x_1x_2x_3=8\\x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=2(3m+2)\end{cases}$

Do x_1,x_2,x_3 lập thành một cấp số nhân nên ta có $x_1x_2x_3=8\Leftrightarrow x_2=2$.

Thay $x_2=2$ vào phuognw trình $x^3-(2m+1)x^2+2(3m-2)x-8=0$ ta có

$8-(2m+1).4+4(3m-2)-8=0\Leftrightarrow 4m=12\Leftrightarrow m=3$.

Thử lại với $m=3$ ta thấy thỏa mãn. Vậy $m=3$. Dó đó tổng tất cả các giá trị của m bằng 3

Câu 13: Cho hàm số $f(x)=x^3-\frac{1}{2}mx+m-8$, $x\in\mathbb{R}$ với m là một hằng số khác 0. Biết rằng phương trình $f(x)=0$ có đúng 2 nghiệm phân biệt thì có bao nhiêu giá trị nguyên dương k thỏa mãn phương trình $f(x)=k$ có 3 nghiệm phân biệt?

A. 3. **B.** 6. **C.** 34. **D.** 31.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $f(x)=0\Leftrightarrow(x-2)\left(x^2+2x+4-\frac{m}{2}\right)=0$ có đúng 2 nghiệm phân biệt

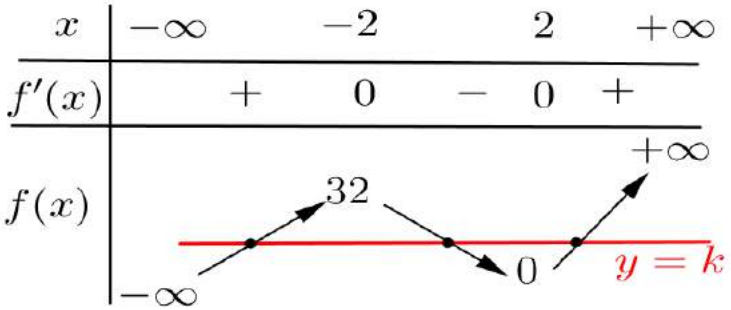
$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\\underbrace{x^2+2x+4-\frac{m}{2}=0}_{g(x)}\end{array}\right.$ (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt

$g(2)=0\Rightarrow m=24$ (nhận)

$f(x)=x^3-12x+16\rightarrow f'(x)=3x^2-12$

$f'(x)=0\Rightarrow x=\pm 2$

BBT



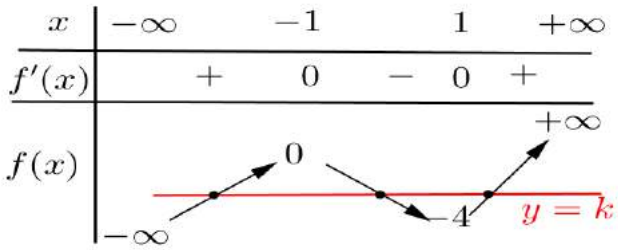
Phương trình $f(x)=k$ có 3 nghiệm phân biệt khi $0<k<32$ và $k\in\mathbb{N}^*\to k=\{1;2;3;....;31\}$

Phương trình (1) có nghiệm kép và khác 2 $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=0\\ g(2)\neq 0\end{cases}\Rightarrow m=6$ **(nhận)**

$f(x)=x^3-3x-2\to f'(x)=3x^2-3$

$f'(x)=0\Rightarrow x=\pm 1$

Bảng biến thiên:



Phương trình $f(x)=k$ có 3 nghiệm phân biệt khi $-4<k<0$ và $k\in\mathbb{N}^*\to k\in\varnothing$

Vậy có 31 giá trị k thỏa điều kiện bài toán.

Câu 14: Cho hàm số $y=x^3-(m+2)x^2-(2m+13)x-m-2$ có đồ thị (C_m), đường thẳng $d: y=mx+m+8$ và điểm $I(1;4)$. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m, biết rằng đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt A,B,C với A có hoành độ bằng -2 và tam giác IBC cân tại I.

A. -12. **B.** -6. **C.** -4. **D.** -10.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C_m) là:

$$x^3-(m+2)x-(3m+13)x-2m-10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=-1\\ x=m+5\end{array}\right.$$

Để đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt A,B,C thì $\begin{cases}m\neq -7\\ m\neq -6\end{cases}$

Giả sử $B(-1;8), C(m+5;m^2+6m+8)$. Để tam giác IBC cân tại I thì

$$IB^2=IC^2\Leftrightarrow 20=(m+4)^2+(m^2+6m+4)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2\\ m=-6(l)\\ m=-2\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Vậy có ba giá trị của m thỏa mãn nên tổng các giá trị của m bằng -6.

Câu 15: Gọi d là đường thẳng đi qua $A(2;0)$ có hệ số góc $m(m>0)$ cắt đồ thị $(C): y=-x^3+6x^2-9x+2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C. Gọi B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C lên trục tung. Biết rằng hình thang $BB'C'C$ có diện tích bằng 8, giá trị của m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(5;8)$. **B.** $(-5;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(1;5)$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình đường thẳng $d: y=m(x-2)$. Phương trình hoành độ giao điểm

$$-x^3+6x^2-9x+2=m(x-2)\Leftrightarrow (x-2)\left(x^2-4x+m+1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\Rightarrow A(2;0) \\ x^2-4x+m+1=0 \end{array}\right.$$

Để (C) cắt d tại 3 điểm phân biệt thì $\Delta>0\Leftrightarrow 4-m-1>0\Leftrightarrow m<3$.

Giả sử $B(x_1, mx_1-2m), C(x_2, mx_2-2m)\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=4 \\ x_1x_2=m+1 \end{cases}$.

Ta có $B'(0, mx_1-2m), C'(0, mx_2-2m)$.

$$S_{BB'C'C}=\frac{1}{2}B'C'\left(BB'+CC'\right)=8\Leftrightarrow B'C'\left(BB'+CC'\right)=16.$$

Mà $B'C'=\left|m(x_1-x_2)\right|, BB'=|x_1|, CC'=|x_2|$.

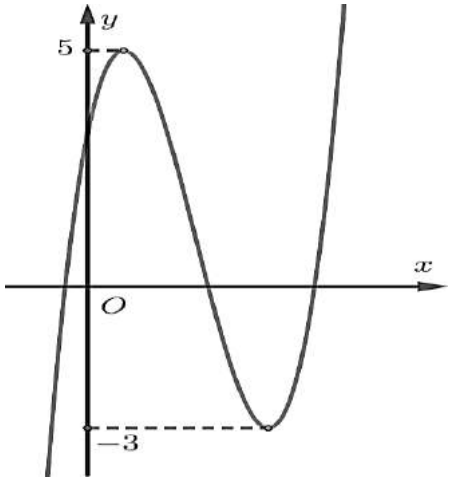
Do m dương nên $x_1x_2=m+1>0$ mà $x_1+x_2=4>0\Rightarrow x_1>0, x_2>0$.

$$\Rightarrow B'C'=m|x_1-x_2|, BB'=x_1, CC'=x_2\Rightarrow m|x_1-x_2|(x_1+x_2)=16\Leftrightarrow m|x_1-x_2|=4$$

$$\Leftrightarrow m^2(x_1-x_2)^2=16\Leftrightarrow m^2\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]=16\Leftrightarrow m^2(16-4m-4)=16$$

$$\Leftrightarrow m^3-3m^2+4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1(l) \\ m=2 \end{array}\right.$$

Câu 16: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^3(x)-2mf^2(x)+\left(m^2-3m-9\right)f(x)+3m^2+9m=0$ có đúng 8 nghiệm phân biệt?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

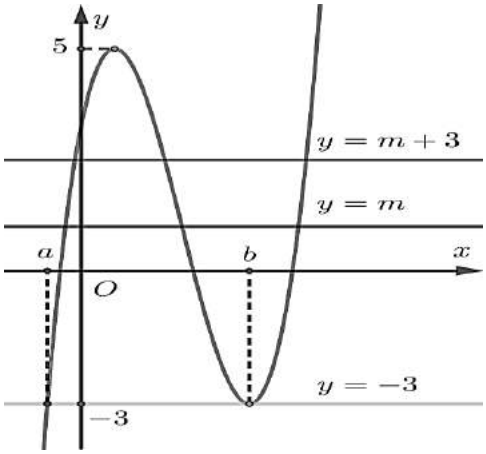
$f^3(x)-2mf^2(x)+\left(m^2-3m-9\right)f(x)+3m^2+9m=0$

Đặt $t=f(x)$, phương trình trở thành: $t^3-2mt^2+\left(m^2-3m-9\right)t+3m^2+9m=0$

$\Leftrightarrow (t+3)\left[t^2-(2m+3)t+m^2+3m\right]=0 \Leftrightarrow (t+3)(t-m)(t-m-3)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-3 \\ t=m \\ t=m+3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=-3 \quad (1) \\ f(x)=m \quad (2) \\ f(x)=m+3\,(3) \end{array}\right.$

Nhận xét các phương trình (2) và (3) không có nghiệm chung.



Dựa vào đồ thị, ta thấy: $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \\ x=b \end{array}\right.$

$YCBT \Leftrightarrow$ Các phương trình (2) và (3) đều có 3 nghiệm phân biệt khác a, b

$\Leftrightarrow \begin{cases} m+3<5 \\ m>-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<2 \\ m>-3 \end{cases} \Leftrightarrow -3<m<2$

Mà m là số nguyên nên $m\in\{-2;-1;0;1\}$.

Câu 17: Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $f(x)=x^3-6(m+1)x^2+3(2m+1)x+2$ cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn -1. Biết rằng $S=\left(\dfrac{-a}{b};+\infty\right)$; trong đó a,b là các số nguyên dương và phân số $\dfrac{a}{b}$ là tối giản. Giá trị biểu thức $T=a+b$ tương ứng bằng

A. 4. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-6(m+1)x^2+3(2m+1)x+2=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-(6m+5)x-2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-(6m+5)x-2=0\,(*) \end{array}\right.$

Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ lớn hơn -1 và khác 1.Ta có:

$$\begin{cases}\Delta>0\\ x_1+x_2>-2\\ (x_1+1)(x_2+1)>0\\ 1^2-(6m+5)-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}36m^2+60m+33>0\\ 6m+5>-2\\ 6m+4>0\\ m\neq -1\end{cases}\Leftrightarrow m>\frac{-2}{3}$$

Do đó $a=2;b=3\Rightarrow T=a+b=5$

Câu 18: Điều kiện cần và đủ của tham số thực m để đường thẳng $y=3x+m-2$ cắt đồ thị hàm số $y=(x-1)^3$ tại ba điểm phân biệt là

A. $-3\le m\le 1$. **B.** $-3<m<1$. **C.** $-1<m<3$. **D.** $-1\le m\le 3$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình: $(x-1)^3=3x+m-2\Leftrightarrow x^3-3x^2+1=m$ **(*).**

Đường thẳng $y=3x+m-2$ cắt đồ thị $y=(x-1)^3$ tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt.

Đặt $f(x)=x^3-3x^2+1\Rightarrow f'(x)=3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $f(x)=x^3-3x^2+1$ tại ba điểm phân biệt. Vậy $-3<m<1$.

Câu 19: Cho hàm số $y=x^3+3x^2+m$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt A,B,C sao cho B là trung điểm AC. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. $m\in(-4;0)$. **B.** $m\in(0;+\infty)$. **C.** $m\in(-\infty;-4)$. **D.** $m\in(-4;-2)$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành là $x^3+3x^2+m=0(1)$.

Giả sử (1) có 3 nghiệm phân biệt $x_1;x_2;x_3(x_1<x_2<x_3)$ thì $x_1;x_2;x_3$ lần lượt là hoành độ của A,B,C và $x^3+3x^2+m=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

$\Leftrightarrow x^3+3x^2+m=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x-x_1x_2x_3$

Nên ta có $x_1+x_2+x_3=-3$.

Để B là trung điểm AC thì $x_1+x_3=2x_2$ nên $3x_2=-3\Leftrightarrow x_2=-1$.

Tức là (1) có 1 nghiệm là $x=-1$. Suy ra $-1+3+m=0\Leftrightarrow m=-2$.

Thử lại với $m=-2$ thì (1) trở thành $x^3+3x^2-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1-\sqrt{3}\\x=-1\\x=-1+\sqrt{3}\end{array}\right.$ (thỏa điều kiện bài toán).

Cách 2: Ta có $y'=3x^2+6x$ và $y''=6x+6$ nên (C) có điểm uốn $I(-1;m+2)$.

Để (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt A,B,C sao cho B là trung điểm AC thì $I\in Ox$

$\Leftrightarrow m+2=0\Leftrightarrow m=-2$.

Câu 20: Cho hàm số $y=x^3-2x^2-1$ có đồ thị (C), đường thẳng $(d):y=mx-1$ và điểm $K(4;11)$. Biết rằng (C) và (d) cắt nhau tại ba điểm phân biệt A,B,C trong đó $A(0;-1)$ còn trọng tâm tam giác KBC nằm trên đường thẳng $y=2x+1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m=4$. **B.** $m=2$. **C.** $m=3$. **D.** Không tồn tại m

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ:

$$x^3-2x^2-1=mx-1\Leftrightarrow x^3-2x^2-mx=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-2x-m=0(1)\end{array}\right.$$

Suy ra $A(0;-1)$ và hoành độ của điểm B và C là nghiệm của phương trình (1)

Để (C) và (d) cắt nhau tại ba điểm phân biệt A,B,C khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0

Khi và chỉ khi: $\begin{cases}\Delta'_{(1)}>0\\m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+m>0\\m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-1\\m\neq 0\end{cases}(*)$

Giả sử: $B(x_1;\mathrm{m}\,x_1-1)$, $C(x_2;\mathrm{m}\,x_2-1)$. Theo Vi–ét ta có $x_1+x_2=2$

Gọi G là trọng tâm của tam giác KBC:

$$\begin{cases}x_G=\dfrac{4+x_1+x_2}{3}\\y_G=\dfrac{11+mx_1-1+mx_2-1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_G=2\\y_G=\dfrac{2m+9}{3}\end{cases}\Rightarrow G\left(2;\dfrac{2m+9}{3}\right)$$

Trọng tâm G nằm trên đường thẳng $y=2x+1$ suy ra $\dfrac{2m+9}{3}=2.2+1\Leftrightarrow m=3$ thỏa mãn $(*)$

Câu 21: Cho hàm số $y=x^3-2x^2+(1-m)x+m$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1^2+x_2^2+x_3^2<4$.

A. $\begin{cases}-\dfrac{1}{4}<m<1\\m\neq 0\end{cases}$. **B.** $m<1$. **C.** $-\dfrac{1}{4}<m<1$. **D.** $\dfrac{1}{4}<m<1$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành là:

$x^3-2x^2+(1-m)x+m=0\Leftrightarrow(x-1)\left(x^2-x-m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-x-m=0\ \ (*)\end{array}\right.$.

(C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow\begin{cases}1+4m>0\\1^2-1-m\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-\dfrac{1}{4}\\m\neq0\end{cases}$.

Khi đó $x_1=1$, x_2 và x_3 là hai nghiệm của $(*)$.

$x_1^2+x_2^2+x_3^2<4\Leftrightarrow\left(x_2+x_3\right)^2-2x_2x_3<3\Leftrightarrow1+2m<3\Leftrightarrow m<1$.

Vậy các giá trị cần tìm của m là $\begin{cases}-\dfrac{1}{4}<m<1\\m\neq0\end{cases}$.

Câu 22: Cho hàm số $y=x^3-2x^2+(1-m)x+m$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt x_1,x_2,x_3 sao cho $x_1^2+x_2^2+x_3^2<4$.

A. $\begin{cases}-\dfrac{1}{4}<m<1\\m\neq0\end{cases}$. **B.** $m<1$. **C.** $-\dfrac{1}{4}<m<1$. **D.** $\dfrac{1}{4}<m<1$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm:

$x^3-2x^2+(1-m)x+m=0\Leftrightarrow(x-1)\left(x^2-x-m\right)=0\ (1)$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_3=1\\x^2-x-m=0\ (2)\end{array}\right.$. Điều kiện để phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt là phương trình

(2) có 2 nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq1\\\Delta=1+4m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq0\\m>-\dfrac{1}{4}\end{cases}$.

Khi đó phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2.

Ta có $x_1^2+x_2^2+x_3^2<4\Leftrightarrow x_1^2+x_2^2<3\Leftrightarrow\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2<3\Leftrightarrow1^2+2m<3\Leftrightarrow m<1$.

Vậy $\begin{cases}-\dfrac{1}{4}<m<1\\m\neq0\end{cases}$.

Câu 23: Cho hàm số $y=x^3-(m+2)x^2-(2m+13)x-m-2$ có đồ thị là (C_m), đường thẳng $d:y=mx+m+8$ và điểm $I(1;4)$. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m, biết rằng đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt A,B,C với A có hoành độ bằng -2 và tam giác IBC cân tại I.

A. -12. **B.** -6. **C.** -4. **D.** -10.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) với đường thẳng $d: y = mx + m + 8$ là

$x^3 - (m+2)x^2 - (2m+13)x - m - 2 = mx + m + 8$

$\Leftrightarrow x^3 - (m+2)x^2 - (3m+13)x - 2m - 10 = 0 \Leftrightarrow (x+2)\left[x^2 - (m+4)x - (m+5)\right] = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ g(x) = 0 \end{array}\right.$ (với $g(x) = x^2 - (m+4)x - (m+5)$)

Đồ thị (C_m) cắt đường thẳng d tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi $g(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt khác -2, nghĩa là $\begin{cases} g(-2) \neq 0 \\ \Delta_g > 0 \end{cases}$.

Ta có $\Delta_g = (m+4)^2 + 4(m+5) = m^2 + 12m + 36 > 0, \forall m \neq -6.$ và $g(-2) = m + 7$ do vậy

$\begin{cases} g(-2) \neq 0 \\ \Delta_g > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 7 \neq 0 \\ m \neq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -6 \\ m \neq -7 \end{cases}$ (*).

Với điều kiện (*) ta có đồ thị (C_m) cắt đường thẳng d tại 3 điểm phân biệt $A(-2; 8-m)$ và hai điểm $B(x_1; y_1), C(x_2; y_2)$ trong đó x_1, x_2 là hai nghiệm của $g(x) = 0$ và $x_1 + x_2 = m + 4$.

Gọi K là trung điểm của BC ta có $K\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{m(x_1 + x_2) + 2m + 16}{2}\right)$ hay $K\left(\frac{m+4}{2}; \frac{m^2 + 6m + 16}{2}\right)$.

Tam giác IBC cân tại I nên ta có $IK \perp BC$ hay $\overrightarrow{IK}$ cùng phương với pháp tuyến của đường thẳng d.

Ta có $\overrightarrow{IK} = \left(\frac{m+2}{2}; \frac{m^2 + 6m + 8}{2}\right)$ và $\vec{n} = (m; -1)$ là một pháp tuyến của đường thẳng d, do đó ta cần có $\frac{m+2}{m} = \frac{m^2 + 6m + 8}{-1} \Leftrightarrow m^3 + 6m^2 + 9m + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = -2 \pm \sqrt{3} \end{array}\right.$.

Kiểm tra lại thấy $m = -2$ không thỏa do khi đó $I \in d$.

Vậy có 2 giá trị của tham số m để thỏa mãn bài toán và tổng tất cả các giá trị đó bằng -4.

Câu 24: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2021.f(f(x)) = m$ có 7 nghiệm phân biệt?

A. 8078. **B.** 0. **C.** 4041. **D.** 8076.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $2021.f(f(x)) = m \Leftrightarrow f(f(x)) = \frac{m}{2021}$.

Khảo sát hàm số $y = f(f(x))$ trên $\mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = f'(x).f'\left(f(x)\right) = \left(3x^2 - 6x\right)\left(3\left(f(x)\right)^2 - 6f(x)\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 = x_1 \\ x = 2 = x_2 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{array}\right.$.

Chú ý rằng: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_3 \approx 2{,}879 \\ x = x_4 \approx 0{,}653 \\ x = x_5 \approx -0{,}532 \end{array}\right.$ và $f(x) = 2 \Leftrightarrow x = x_6 \approx 3{,}104$.

Do 6 nghiệm trên đều là nghiệm đơn nên hàm số $y = f\left(f(x)\right)$ có 6 cực trị là x_i, $i = 1,2,...,6$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_5	x_1	x_4	x_2	x_3	x_6	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0 $-$	0 $+$	0 $-$	0 $+$	0 $-$	0 $+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 1	$\searrow$ -1	$\nearrow$ 1	$\searrow$ -1	$\nearrow$ 1	$\searrow$ -1	$\nearrow$ $+\infty$

Phương trình $2021.f\left(f(x)\right) = m$ có 7 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -1 < \dfrac{m}{2021} < 1 \Leftrightarrow -2021 < m < 2021$

Do m nguyên nên $m \in \{-2020, -2019, ..., 2019, 2020\}$, do đó có 4041 số thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 25: Cho hàm số $f(x) = \left(1 - m^3\right)x^3 + 3x^2 + (4 - m)x + 2$ với m là tham số. Có bao nhiêu số tự nhiên m sao cho phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên đoạn $\left[\dfrac{1}{5}; 5\right]$.

A. 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^3 + x + 1 = (mx)^3 + mx$ (*).

Xét $f(t) = t^3 + t$ với $t \in \mathbb{R}$; $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow x + 1 = mx \Leftrightarrow (m-1)x = 1$.

Để phương trình có nghiệm trên đoạn $\left[\dfrac{1}{5}; 5\right]$ thì $\begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ \dfrac{1}{5} \leq \dfrac{1}{m-1} \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ \dfrac{6}{5} \leq m \leq 6 \end{cases}$.

Vì m là số tự nhiên nên $m \in \{2;3;4;5;6\}$. Vậy có 5 giá trị m thỏa để.

Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)=2x^3-3x^2+1$. Tập hợp các giá trị m để phương trình $f\left(f\left(\frac{2\sin x+1}{2}\right)\right)=f(m)$ có nghiệm là đoạn $[a;b]$. Khi đó giá trị $4a^2+8b$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(7;\frac{23}{2}\right)$. **B.** $(-2;5)$. **C.** $\left(\frac{43}{3};\frac{39}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{37}{3};\frac{65}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=6x^2-6x$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

Ta có: $\frac{2\sin x+1}{2}=\sin x+\frac{1}{2}\in\left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$ suy ra $f\left(\frac{2\sin x+1}{2}\right)\in[0;1]$ nên $f\left(f\left(\frac{2\sin x+1}{2}\right)\right)\in[0;1]$.

Phương trình $f\left(f\left(\frac{2\sin x+1}{2}\right)\right)=f(m)$ có nghiệm $\Leftrightarrow 0\le f(m)\le 1\Leftrightarrow\begin{cases}2m^3-3m^2+1\ge 0\\2m^3-3m^2\le 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le m\le\frac{3}{2}$. Vậy $4a^2+8b=4.\frac{1}{4}+8.\frac{3}{2}=13$.

Câu 27: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2x^3-3x^2+2-2^{1-2m}=0$ có 3 nghiệm thực phân biệt.

A. $\frac{1}{2}<m<1$. **B.** $-1<m<0$. **C.** $0<m<\frac{1}{2}$. **D.** $-1<m<\frac{1}{2}$.

Lời giải

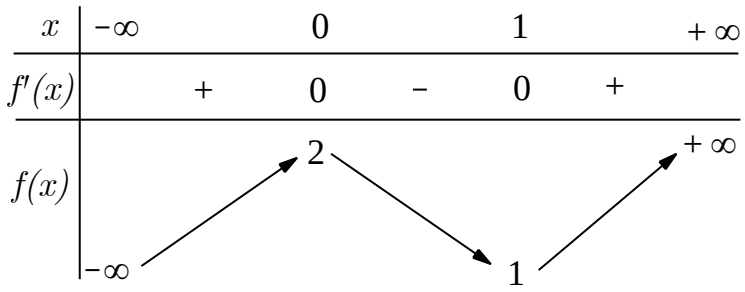
Chọn C

$2x^3-3x^2+2-2^{1-2m}=0\Leftrightarrow 2x^3-3x^2+2=2^{1-2m}\,(1)$

Xét hàm số $f(x)=2x^3-3x^2+2$; $f'(x)=6x^2-6x$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 6x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$

Bảng biến thiên



Phương trình (1) có 3 nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow 1<2^{1-2m}<2\Leftrightarrow 0<1-2m<1\Leftrightarrow 0<m<\frac{1}{2}$

Câu 28: Cho hàm số $y=x^3-2(m+1)x^2+(5m+1)x-2m-2$ có đồ thị là (C_m), với m là tham số. Tập S là tập hợp các giá trị nguyên của $m\in(-2021;2021)$ để (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt $A(2;0),B,C$ sao cho trong hai điểm B,C có một điểm nằm trong và một điểm nằm ngoài đường tròn có phương trình $x^2+y^2=1$. Tính số các phần tử của S ?

A. 4041. **B.** 2020. **C.** 2021. **D.** 4038.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $x^3-2(m+1)x^2+(5m+1)x-2m-2=0(1)$

$(1)\Leftrightarrow(x-2)(x^2-2mx+m+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\g(x)=x^2-2mx+m+1=0\end{array}\right.$ (2)

C_m) cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ khác 2

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\g(2)\neq 0\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}m^2-m-1>0\\4-4m+m+1\neq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\in\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)\\m\neq\frac{5}{3}\end{cases}(*)$$

Khi đó: $A(2;0),B(x_1;0),C(x_2;0)$;

Hai điểm B,C thỏa mãn điều kiện đầu bài $\Leftrightarrow(OB-1)(OC-1)<0$

$\Leftrightarrow(|x_1|-1)(|x_2|-1)<0\Leftrightarrow|x_1x_2|+1<|x_1|+|x_2|$

$\Leftrightarrow(x_1x_2)^2+1<(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

$\Leftrightarrow 3m^2-4m-4>0\Leftrightarrow m\in(-\infty;\frac{-2}{3})\cup(2;+\infty)$

Kết hợp với đk ta có $m\in(-\infty;\frac{-2}{3})\cup(2;+\infty)$ thỏa mãn ycbt.

Vậy số các phần tử của S là 4038.

Câu 29: Cho hàm số $f(x)=x^3-mx^2+(m-2)x+1$ với m là tham số. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình sau có 3 nghiệm thực phân biệt $f'(x).e^{f(x)}+f(x).\pi^{f'(x)}=f'(x)+f(x)$

A. 1. **B.** vô số. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Xét $f'(x).e^{f(x)}+f(x).\pi^{f'(x)}=f'(x)+f(x)$ $(*)$.

Ta có $f(x)=x^3-mx^2+(m-2)x+1=(x-1)\left[x^2+(1-m)x-1\right]=(x-1).g(x)$.

Với $g(x)=x^2+(1-m)x-1$ và $g(1)=1-m$ và $g(m-1)=-1$.

Lại có $f'(x)=3x^2-2mx+m-2$ với $\begin{cases}f'(1)=1-m\\ f(1)=0\end{cases}$.

Với $f(1)$ nếu $f'(1)>0\Leftrightarrow m<1$ thì $f(x)\ge 0,\forall x\ge 1$ suy ra $\begin{cases}e^{f(x)}\ge f(x)+1\\ \pi^{f(x)}\ge f(x)+1\end{cases}$.

Khi đó $(*)\Rightarrow f(x)+f'(x)\ge f'(x)\left[f(x)+1\right]+f(x)\left[f'(x)+1\right]\Leftrightarrow 2f(x).f'(x)\le 0$ $(**)$.

Trường hợp 1. Nếu $f(x)=0$ thì $f'(x)=0$.

Trường hợp 2. Nếu $f(x)>0$ thì $(**)\Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}\le 0$.

Mặt khác $\Delta'_{f'(x)}=m^2-3m+6=\left(m-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{15}{4}>0,\forall m\Rightarrow f'(x)=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt hay hàm số luôn có 2 điểm cực trị.

Giả sử rằng $f(x)=0$ có các nghiệm $x=(x_1;x_2;...)$, ta có $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x-x_i}\le 0$ (1).

Do $f(x)=0$ có ba nghiệm nên (1) có 2 nghiệm **(vô lí)**.

Như vậy $\begin{cases}f(x)=0\\ f'(x)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1\\ g(x)=x^2+(1-m)x-1=0;\Delta_{g(x)}=(1-m)^2+4>0\end{array}\right.\\ h(x)=3x^2-2mx+m-2=0;\Delta_{h(x)}=m^2-3m+6>0\end{cases}$.

Với $g(1)=0\Leftrightarrow 1-m=0\Leftrightarrow m=1$ và $h(1)=0\Leftrightarrow -m+1=0\Leftrightarrow m=1$.

Do đó với $m\ne 1$, phương trình $f'(x).e^{f(x)}+f(x).\pi^{f'(x)}=f'(x)+f(x)$ luôn có 3 nghiệm thực phân biệt.

Vậy có vô số giá trị của m thỏa đề.

Câu 30: Cho hàm số $y=x^3-x$ (C) và đường thẳng $(d):y=m(x-1)$. Đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt $A(1;0),B,C$ sao cho $M\left(-\dfrac{1}{2};-9\right)$ là trung điểm của đoạn BC, khi đó giá trị của m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(4;7)$. **C.** $(0;4)$. **D.** $(7;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng (d) là:

$x\left(x^2-1\right)-m\left(x-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{c}x=1\\x^2+x-m=0(1)\end{array}\right.$

(d) cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt $A,B,C\Leftrightarrow(1)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow\begin{cases}1+4m>0\\2-m\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-\dfrac{1}{4}\\m\neq2\end{cases}$

Khi đó gọi $x_1;x_2$ là các nghiệm của (1) ta có $B\left(x_1;m\left(x_1-1\right)\right);C\left(x_2;m\left(x_2-1\right)\right)$

$M\left(-\dfrac{1}{2};-9\right)$ là trung điểm của đoạn $BC\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2=-1\\m\left(x_1-1\right)+m\left(x_2-1\right)=-18\end{cases}\Leftrightarrow m=6(TM)$.

Câu 31: Cho hàm số $y=2x^3-3(m+1)x^2+6mx-m^2$ có đồ thị (C). Gọi P là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-50;50]$ để (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ thỏa mãn điều kiện $x_1<1<x_2<3<x_3$. Số phần tử của P là:

A. 48. **B.** 32. **C.** 37. **D.** 25.

Lời giải

Chọn A

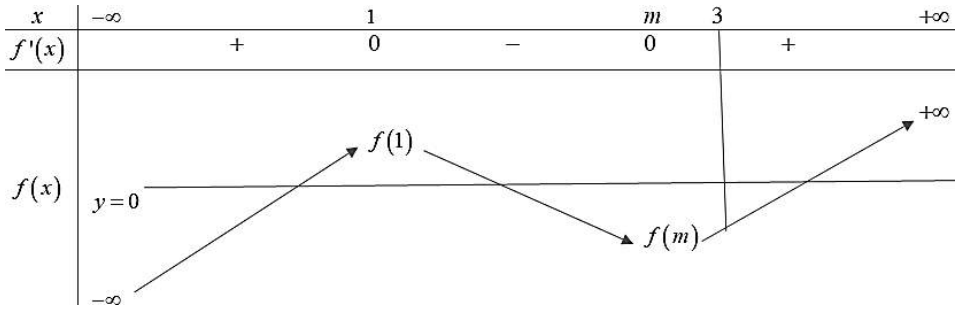
Xét hàm số $y=f(x)=2x^3-3(m+1)x^2+6mx-m^2$

Có đạo hàm $f'(x)=6x^2-6(m+1)x+6m$;

$f'(x)=0\Leftrightarrow6x^2-6(m+1)x+6m=0\Leftrightarrow x=1;x=m$

Dễ thấy để phương trình hoành độ giao điểm $f(x)=0\Leftrightarrow2x^3-3(m+1)x^2+6mx-m=0$ có ba nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1<1<x_2<3<x_3$ thì ít nhất hàm số phải có hai điểm cực trị, suy ra: $m>1$.

Khi đó ta có bảng biến thiên:



Điều kiện thỏa mãn bài toán là: $\begin{cases}m>1\\f(1).f(m)<0\\f(3)<0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}m>1\\\left(-1+3m-m^2\right)\left(-m^3+2m^2\right)<0\\27-9m-m^2<0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{c}m>\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\\1<m<2\end{array}\right.$

Mà $m\in Z,m\in\left[-50;50\right]\Rightarrow\begin{cases}m\in Z\\3\leq m\leq50\end{cases}$. Vậy có tất cả 48 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn bài toán.

Câu 32: Cho hàm số $y=x^3-2x^2+(1-m)x+m$ có đồ thị là đường cong (C_m). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2+x_3^2=6$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^3-2x^2+(1-m)x+m=0\Leftrightarrow(x-1)\left(x^2-x-m\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1(=x_3)\\x^2-x-m=0(*)\end{array}\right.$

Đề đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt x_1, x_2, x_3 thì phương trình $(*)$ phải có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 1 và thỏa mãn: $x_1^2+x_2^2+1^2=6$.

Từ đó ta có điều kiện sau: $\left\{\begin{array}{l}\Delta=1+4m>0\\x_1^2+x_2^2=5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m>-\dfrac{1}{4}\\(x_1+x_2)^2-2x_1.x_2=5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m>-\dfrac{1}{4}\\1+2m=5\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m>-\dfrac{1}{4}\\m=2(t/m)\end{array}\right.$

Vậy $m=2$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Câu 33: Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x+m+2021$ có đồ thị là (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $1<x_1<3<x_2<4<x_3$. **B.** $0<x_1<1<x_2<3<x_3<4$.

C. $1<x_1<x_2<3<x_3<4$. **D.** $x_1<0<1<x_2<3<x_3<4$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm giữa (C_m) và trục hoành:

$x^3-6x^2+9x+m+2021=0\Leftrightarrow x^3-6x^2+9x+2021=-m$.

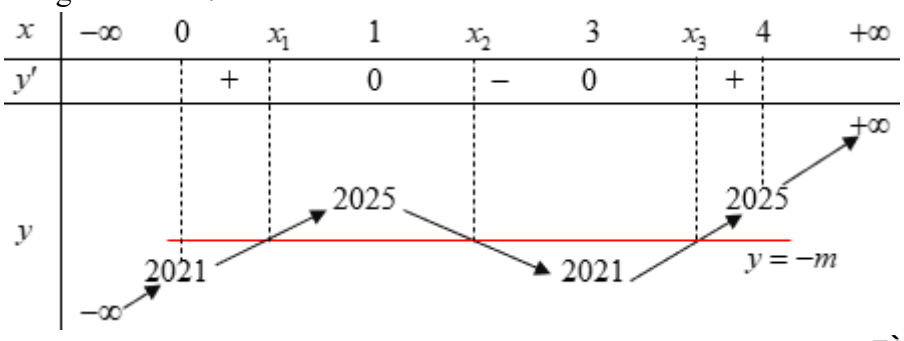
(C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ đường thẳng $y=-m$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)=x^3-6x^2+9x+2021$ tại 3 điểm phân biệt.

Xét $f(x)=x^3-6x^2+9x+2021$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $f'(x)=3x^2-12x+9$

Cho $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:



Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 2021 < -m < 2025 \Leftrightarrow -2025 < m < -2021$ và ta thấy các hoành độ giao điểm thỏa $0 < x_1 < 1 < x_2 < 3 < x_3 < 4$.

Câu 34: Cho hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + 3(m-1)x + 2$ có đồ thị là (C) và đường thẳng $d : y = -x + 2$. S là tập các giá trị m thỏa mãn (d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt $A(0;2), B, C$ sao cho diện tích tam giác MBC bằng $2\sqrt{2}$, với $M(3;1)$. Tính tổng bình phương các phần tử của S?

A. 4. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 25.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và đồ thị (C):

$x^3 + 2mx^2 + 3(m-1)x + 2 = -x + 2 \Leftrightarrow x^3 + 2mx^2 + 3(m-1)x + x = 0$

$\Leftrightarrow x^3 + 2mx^2 + (3m-2)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 + 2mx + 3m - 2 = 0 \end{array}\right.$ (1)

Với $x = 0$, ta có giao điểm là $A(0;2)$.

(d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3m - 2 \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - 3m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \dfrac{2}{3} \\ \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < 1 \end{array}\right. \end{cases}$ (*).

Ta gọi các giao điểm của d và (C) lần lượt là $A(0;2), B(x_B; -x_B + 2), C(x_C; -x_C + 2)$ với x_B, x_C là nghiệm của phương trình (1).

Theo định lí Viet, ta có: $\begin{cases} x_B + x_C = -2m \\ x_B . x_C = 3m - 2 \end{cases}$.

Ta có diện tích của tam giác MBC là $S_{\Delta MBC} = \dfrac{1}{2} \cdot BC \cdot d(M, BC) = 2\sqrt{2}$.

Phương trình d được viết lại là: $d : y = -x + 2 \Leftrightarrow x + y - 2 = 0$.

Mà $d(M, BC) = d(M, d) = \dfrac{|3 + 1 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Do đó: $BC = \dfrac{2S_{\Delta MBC}}{d(M, BC)} = \dfrac{2.2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4 \Leftrightarrow BC^2 = 16$.

Ta lại có: $BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = (x_C - x_B)^2 + \left[(-x_C + 2) - (-x_B + 2)\right]^2$.

$= (x_C - x_B)^2 + (x_B - x_C)^2 = 2(x_C - x_B)^2 = 16 \Leftrightarrow (x_C - x_B)^2 = 8$

$\Leftrightarrow (x_B + x_C)^2 - 4x_B . x_C = 8 \Leftrightarrow (-2m)^2 - 4(3m - 2) = 8$.

$\Leftrightarrow 4m^2 - 12m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 3 \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Vậy $S = \{0;3\} \Rightarrow 0^2 + 3^2 = 9$.

Câu 35: Cho hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (3m-4)x + 2$ có đồ thị (C) và cho điểm $M(3;1)$. Số giá trị

nguyên dương của tham số m để đường thẳng $d: y=-x+2$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt $A(0;2), B$ và C đồng thời tam giác MBC có diện tích $2\sqrt{7}$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$x^3+2mx^2+(3m-4)x+2=-x+2 \Leftrightarrow x^3+2mx^2+(3m-3)x=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+2mx+(3m-3)=0 \end{array}\right.$.

Để đồ thị (C) cắt đường thẳng d tại ba điểm thỏa mãn bài toán, khi và chỉ khi

$x^2+2mx+(3m-3)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ m\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-3m+3>0 \\ m\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m\neq 1$.

Gọi $x_1; x_2$ là nghiệm phương trình $x^2+2mx+(3m-3)=0$, theo định lí Viet có

$\begin{cases} x_1+x_2=-2m \\ x_1.x_2=3m-3 \end{cases}$

Do $B; C\in d$ nên $d(M,BC)=d(M;d)=\dfrac{|3+1-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

Diện tích tam giác MBC bằng $2\sqrt{7} \Leftrightarrow BC=2\sqrt{14}\ (1)$

Khi đó $B(x_1;-x_1+2); C(x_2;-x_2+2) \Rightarrow \overrightarrow{BC}=(x_2-x_1;x_1-x_2) \Rightarrow BC^2=2(x_1-x_2)^2\ (2)$

Từ (1) và (2) ta có

$56=2(x_1+x_2)^2-8x_1.x_2 \Leftrightarrow 8m^2-24m-32=0 \Leftrightarrow m^2-3m-4=0 \Leftrightarrow m=-1; m=4$.

Vậy có 1 giá trị nguyên dương của tham số m thỏa mãn bài toán.

Câu 36: Cho hàm số $y=x^3-2(m-1)x^2+2(m^2-2m)x+4m^2\ (C)$ và đường thẳng d đi qua điểm $A(0;8)$ và có hệ số góc bằng 4. Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$

A. $\min P=1$. **B.** $\min P=-4$. **C.** $\min P=-6$. **D.** $\min P=0$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng d có phương trình là $y=4x+8$

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng d và đồ thị (C) là:

$x^3-2(m-1)x^2+2(m^2-2m)x+4m^2=4x+8\ (1)$

$\Leftrightarrow x^3-2(m-1)x^2+2(m^2-2m-2)x+4m^2-8=0$

$\Leftrightarrow (x+2)(x^2-2mx+2m^2-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2mx+2m^2-4=0\quad (2) \\ x+2=0 \end{array}\right.$

Để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm phân biệt khác -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4+4m+2m^2-4\neq 0 \\ \Delta' = m^2-2m^2+4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m\neq -2 \\ 4-m^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ -2<m<2 \end{cases} (*).$$

Khi đó d cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3, giả sử $x_3 = -2$, x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1). Theo định lý Viet, ta có: $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2 = 2m \\ x_1.x_2 = 2m^2-4 \end{cases}$.

Ta có $P = x_1x_2 - 2x_2 - 2x_1 = x_1x_2 - 2(x_1+x_2) = 2m^2-4m-4$

Xét hàm số $f(m) = 2m^2-4m-4 \quad \forall m\in(-2;2), m\neq 0$

$f'(m) = 4m-4;\ f'(m) = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Lập bảng biến thiên

x	-2		0		1		2
y'		$-$		$-$	0	$+$	
y	12	↘	-4	↘	-6	↗	-4
					-4		

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = -6$ khi $m = 1$.

Dạng 7: Tương giao hàm trùng phương và một số bài toán khác

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^4-3x^2+m=0$ có 4 nghiệm thực phân biệt?

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=x^2\left(t\ge 0\right)$. Ta được phương trình $t^2-3t+m=0,\quad (1)$.

Phương trình đã cho có 4 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\S>0\\P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9-4m>0\\3>0\\m>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<\dfrac{9}{4}$.

Do m nguyên nên $m\in\{1;2\}$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của tham số m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2: Biết đồ thị hàm số $y=\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x^2-7\right)-m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ là x_1,x_2,x_3,x_4. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để $\dfrac{1}{1-x_1}+\dfrac{1}{1-x_2}+\dfrac{1}{1-x_3}+\dfrac{1}{1-x_4}>1.$

A. 9. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x^2-7\right)-m=x^4-8x^2+7-m$.

Mặc khác ta có $y'=4x^3-16x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm 2\end{array}\right.$. Ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-9-m$	$\nearrow$	$7-m$	$\searrow$	$-9-m$	$\nearrow$	$+\infty$

Để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì $-9<m<7$. Vì hàm số chẵn nên có 2 cặp nghiệm đối xứng. Giả sử $x_1+x_2=0$ và $x_3+x_4=0$.

Theo đề bài ta có: $\dfrac{1}{1-x_1}+\dfrac{1}{1+x_1}+\dfrac{1}{1-x_3}+\dfrac{1}{1+x_3}=\dfrac{2}{1-x^2{}_1}+\dfrac{2}{1-x^2{}_3}=\dfrac{4-2\left(x^2{}_3+x^2{}_1\right)}{1-\left(x^2{}_3+x^2{}_1\right)+x^2{}_3.x^2{}_1}>1$

$\dfrac{4-2.8}{1-8+\left(7-m\right)}>1\Leftrightarrow 0<m<12.$ Kết hợp điều kiện suy ra $0<m<7\Rightarrow m\in\{1;2;3;4;5;6\}$.

Câu 3: Cho hàm số $y=x^4-\left(3m+2\right)x^2+3m$ có đồ thị $\left(C_m\right)$. Xác định tất cả các giá trị của tham số thực m để $\left(C_m\right)$ cắt đường thẳng $y=-1$ tại bốn điểm phân biệt

A. $\begin{cases} m \neq 0 \\ m < -\dfrac{1}{3} \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\dfrac{1}{3} \end{cases}$. **C.** $m > -\dfrac{1}{3}$. **D.** $m < -\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm $x^4 - (3m+2)x^2 + 3m = -1$

$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 - 3m(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 - 3m(x^2 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 3m - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 1 = 0 \\ x^2 - 3m - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, x = -1 \\ x^2 = 3m + 1 \end{array}\right.$

Đồ thị (C_m) cắt $y = -1$ tại bốn điểm phân biệt khi và chỉ khi $x^2 = 3m + 1$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 và -1.

Khi đó, ta có $\begin{cases} 3m + 1 > 0 \\ 3m + 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{1}{3} \\ m \neq 0 \end{cases}$.

Câu 4: Tập các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 2x^2 - 3m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt là

A. $(1; +\infty) \cup \{0\}$. **B.** $\left(\dfrac{1}{3}; +\infty\right) \cup \{0\}$. **C.** $(0; +\infty)$. **D.** $(1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $x^4 - 2x^2 - 3m + 1 = 0 \Leftrightarrow 3m = x^4 - 2x^2 + 1$.

Xét hàm số $y = f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$, $y' = 4x^3 - 4x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Yêu cầu bài toán tương đương đường thẳng $(d): y = 3m$ cắt đường cong $(C): y = f(x)$ tại hai điểm phân biệt.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $\left[\begin{array}{l} 3m = 0 \\ 3m > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m > \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 - 2$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = m$. Tất cả các giá trị của tham số m để d cắt (C) tại bốn điểm phân biệt là

A. $2 \le m \le 6$. **B.** $-6 < m < -2$. **C.** $-6 \le m \le -2$. **D.** $2 < m < 6$.

Lời giải

Chọn B

$y = x^4 - 4x^2 - 2$ có $y' = 4x^3 - 8x^2$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-6	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy để đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2 - 2$ cắt đường thẳng $d: y = m$ tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow -6 < m < -2$.

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2021$ tại 3 điểm phân biệt.

A. $m = 2021$. **B.** $0 < m < 2021$. **C.** $m > 2021$. **D.** $m < 0$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = m$ và đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2021$ là $x^4 - 2x^2 + 2021 = m$.

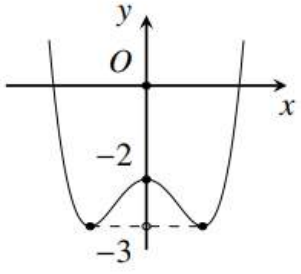
Đặt $g(x) = x^4 - 2x^2 + 2021$

$g'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $m = 2021$ là giá trị cần tìm.

Câu 3: Đường cong trong hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 2$.



Tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 2x^2 = m$ có bốn nghiệm phân biệt là

A. $-3<m<-2$. **B.** $-1<m<0$. **C.** $m>-3$. **D.** $m<-2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $x^4-2x^2=m \Leftrightarrow x^4-2x^2-2=m-2$ (1).

(1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2-2$ và đường thẳng $y=m-2$

Dựa vào đồ thị, suy ra (1) có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -3<m-2<-2 \Leftrightarrow -1<m<0$.

Câu 4: Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+2021$ tại 3 điểm phân biệt.

A. $m=2021$. **B.** $0<m<2021$. **C.** $m>2021$. **D.** $m<0$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y=f(x)=x^4-2x^2+2021$.

Ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2020	$\nearrow$	2021	$\searrow$	2020	$\nearrow$	$+\infty$

Để đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+2021$ tại 3 điểm phân biệt thì $m=2021$

Câu 5: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^4-3x^2-m-1=0$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $m>-1$ hoặc $m=-\dfrac{13}{4}$. **B.** $m>-1$.

C. $m\geq -1$ hoặc $m=-\dfrac{13}{4}$. **D.** $m\geq -1$.

Lời giải

Chọn A

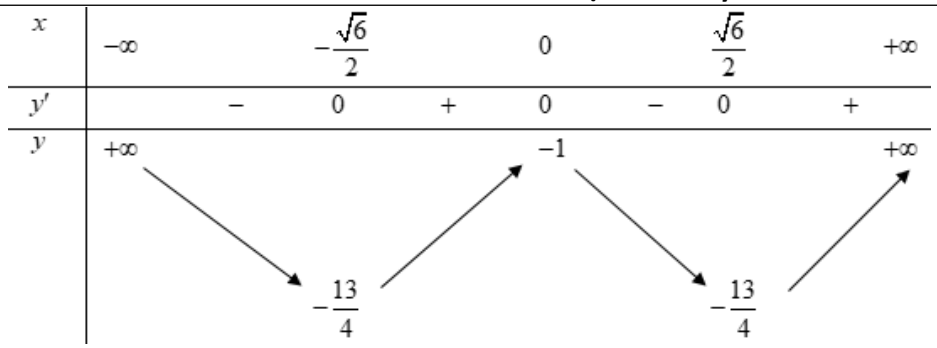
Số nghiệm của phương trình $x^4-3x^2-m-1=0 \Leftrightarrow m=x^4-3x^2-1$ $(*)$ bằng số giao điểm của đồ thị của hàm số $f(x)=x^4-3x^2-1$ và đường thẳng $y=m$.

Do đó phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khi đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị của hàm số $f(x)=x^4-3x^2-1$ tại hai điểm phân biệt.

Xét hàm số $f(x)=x^4-3x^2-1$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$f'(x)=4x^3-6x$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên



Từ đồ thị, ta thấy phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khi $m>-1$ hoặc $m=-\frac{13}{4}$.

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-8x^2+5$ cắt đường thẳng $d: y=2m+1$ tại bốn điểm phân biệt

A. $-6<m<5$. **B.** $-11<m<5$. **C.** $m>-6$. **D.** $-6<m<2$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là: $x^4-8x^2+5=2m+1$ (*)

Xét hàm số $y=x^4-8x^2+5$ có $y'=4x^3-16x$; $y'=0\Leftrightarrow x=\pm 2\vee x=0$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y_{CT}<2m+1<y_{CĐ}\Leftrightarrow y(-2)<2m+1<y(0)\Leftrightarrow -11<2m+1<5$

$\Leftrightarrow -6<m<2$.

Câu 7: Gọi m là số thực dương sao cho đường thẳng $y=m+1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^4-3x^2-2$ tại hai điểm A, B thỏa mãn tam giác OAB vuông tại O (O là gốc tọa độ). Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $m\in\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$. **B.** $m\in\left(\frac{3}{4};\frac{5}{4}\right)$. **C.** $m\in\left(\frac{5}{4};\frac{7}{4}\right)$. **D.** $m\in\left(\frac{7}{4};\frac{9}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4-3x^2-2=m+1\Leftrightarrow x^4-3x^2-3-m=0$.

Đặt $x^2=t$, $(t\ge 0)$ ta có phương trình $t^2-3t-m-3=0$ (*).

Theo giả thiết ta có $m>0$ nên phương trình (*) luôn có hai nghiệm trái dấu $\Rightarrow$ đường thẳng $y=m+1$ luôn cắt đồ thị hàm số $y=x^4-3x^2-2$ tại hai điểm A, B.

Vì A, B đối xứng với nhau qua Oy nên $A(x;m+1)$ và $B(-x;m+1)$.

Tam giác OAB vuông tại $O\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0\Leftrightarrow x^2=(m+1)^2$.

Thay $x^2=(m+1)^2$ vào phương trình $x^4-3x^2-3-m=0$ ta được $m^4+4m^3+3m^2-3m-5=0$

$\Leftrightarrow (m-1)(m^3+5m^2+8m+5)=0\Leftrightarrow m=1$ (do $m>0$).

Câu 8: Cho hàm số $y=\frac{x^4}{4}-2x^2+6$, có đồ thị là (C). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị (C) tiếp xúc với parabol $(P): y=-x^2+3m$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị (C) tiếp xúc $(P): y=-x^2+3m$ tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ sau có nghiệm x_0:

$$\begin{cases} \dfrac{x_0^4}{4}-2x_0^2+6=-x_0^2+3m \\ x_0^3-4x_0=-2x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_0=0 \\ m=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x_0=\pm\sqrt{2} \\ m=\dfrac{5}{3} \end{cases} \end{array}\right.$$

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=2$.

Vậy $m=2$ thì đồ thị (C) tiếp xúc với parabol $(P): y=-x^2+3m$.

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=(m+1)x^4-2(2m-3)x^2+6m+5$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có các hoành độ $x_1;x_2;x_3;x_4$ thỏa mãn $x_1<x_2<x_3<1<x_4$

A. $m\in\left(-1;-\dfrac{5}{6}\right)$. **B.** $m\in(-3;-1)$. **C.** $m\in(-3;1)$. **D.** $m\in(-4;-1)$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành là

$(m+1)x^4-2(2m-3)x^2+6m+5=0\ (1)$

Đặt $t=x^2\geq 0$ pt trở thành $(m+1)t^2-2(2m-3)t+6m+5=0\quad (2)$

$g(t)=(m+1)t^2-2(2m-3)t+6m+5$

Để phương trình (1) có 4 nghiệm thỏa mãn $x_1<x_2<x_3<1<x_4$ thì phương trình (2) phải có 2 nghiệm thỏa $0<t_1<1<t_2$

Hay $\begin{cases} (m+1)g(1)<0 \\ t_1+t_2>0 \\ t_1t_2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)(3m+12)<0 \\ \dfrac{2m-3}{m+1}>0 \\ \dfrac{6m+5}{m+1}>0 \end{cases} \Leftrightarrow m\in(-4;-1)$.

Câu 10: Biết rằng với tham số $m\in\left(a;\dfrac{b}{c}\right)$, với $b,c\in\mathbb{N},c>0$ và $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản, thì đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+3m+15,(Cm)$ cắt đường thẳng $y=5$ tại 4 điểm phân biệt có hoành độ đều nhỏ hơn 3. Khi đó $a+b+c$ bằng

A. 108. **B.** 115. **C.** 105. **D.** 111.

Lời giải

Chọn D

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (Cm) và đường thẳng $y=5$ là: $x^4-2mx^2+3m+15=5\Leftrightarrow x^4-2mx^2+3m+10=0,(1)$.

Đặt $t=x^2,t\geq 0$, ta được phương trình $t^2-2mt+3m+10=0,(2)$.

Đồ thị (Cm) cắt đường thẳng $y=5$ tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\Delta'>0\\ -\dfrac{b}{a}>0\\ \dfrac{c}{a}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-3m-10>0\\ 2m>0\\ 3m+10>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<-2\\ m>5\end{array}\right.\\ m>0\\ m>-\dfrac{10}{3}\end{cases}\Leftrightarrow m>5(*)$$

Với Đk $(*)$ giả sử PT (2) có hai nghiệm phân biệt $t_1,t_2,(t_1<t_2)$, theo định lí Vi ét ta có $\begin{cases}t_1+t_2=2m\\ t_1.t_2=3m+10\end{cases}$, khi đó PT (1) có 4 nghiệm $x_1,x_2,x_3,x_4\,(x_1<x_2<x_3<x_4)$ với $x_1=-\sqrt{t_2},x_2=-\sqrt{t_1},x_3=\sqrt{t_1},x_4=\sqrt{t_2}$. Lại có $x_4<3\Leftrightarrow t_2<9$.

Phương trình (1) có cả 4 nghiệm đều nhỏ hơn 3 khi và chỉ khi PT (2) có hai nghiệm thỏa mãn

$$t_1<t_2<9\Leftrightarrow\begin{cases}(t_1-9)(t_2-9)>0\\ (t_1-9)+(t_2-9)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_1.t_2-9(t_1+t_2)+81>0\\ t_1+t_2-18<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3m+10-9.2m+81>0\\ 2m-18<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<\dfrac{91}{15}\\ m<9\end{cases}\Leftrightarrow m<\frac{91}{15}.$$

Kết hợp với $(*)$ ta được $5<m<\dfrac{91}{15}$. Ta được $\begin{cases}a=5\\ b=91\end{cases}\Rightarrow a+b+c=111.$
$c=15$

Câu 11: Biết tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4+2mx^2+2m+3$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt là khoảng $(a;b)$, tính tổng $a+b$.

A. $a+b=\dfrac{-3}{2}$. **B.** $a+b=-1$. **C.** $a+b=-2$. **D.** $a+b=\dfrac{-5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số đã cho với trục hoành:

$x^4+2mx^2+2m+3=0,(1)$

Đặt $t=x^2,t\ge 0$. Phương trình (1) trở thành: $t^2+2mt+2m+3=0,(2)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm t dương phân biệt $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\Delta'>0\\ S>0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-2m-3>0\\ -2m>0\\ 2m+3>0\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{-3}{2}<m<-1$. Vậy $(a;b)=\left(\dfrac{-3}{2};-1\right)\Rightarrow a+b=\dfrac{-5}{2}$.

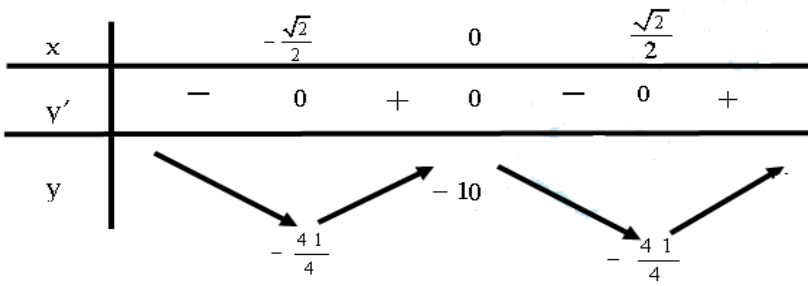
Câu 12: Đường thẳng $y=m^2$ cắt đồ thị hàm số $y=x^4-x^2-10$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho tam giác OAB vuông (với O là gốc tọa độ). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m^2\in(5;7)$. **B.** $m^2\in(3;5)$. **C.** $m^2\in(0;1)$. **D.** $m^2\in(1;3)$.

Lời giải

Chọn D

Xét: $y=x^4-x^2-10$; $y'=4x^3-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$



Vì $m^2\ge 0$ với mọi m nên từ bảng biến thiên thấy đường thẳng $y=m^2$ luôn cắt đồ thị hàm số $y=x^4-x^2-10$ tại những cặp điểm đối xứng nhau qua Oy. Giả sử $A\left(x_1;m^2\right);B\left(-x_1;m^2\right)$.Tam giác OAB vuông (với O là gốc tọa độ)

$\Leftrightarrow \dot{OA}.\dot{OB}=\dot{0}\Rightarrow -{x_1}^2+m^4=0\Rightarrow {x_1}^2=m^4\Rightarrow x_1=m^2$

$\Rightarrow A\left(m^2;m^2\right)$ vì $A\left(m^2;m^2\right)$ thuộc đồ thị hàm số nên $m^8-m^4-10=m^2\Rightarrow m^2=2$.

Câu 13: Đồ thị của hàm số $y=x^4-2\left(m+1\right)x^2+2m+1$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m\in\left(6;9\right)$. **B.** $m\in\left(-6;-3\right)$. **C.** $m\in\left(-3;2\right)$. **D.** $m\in\left(2;6\right)$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4-2\left(m+1\right)x^2+2m+1=0$. (1)

Đặt $t=x^2,t\ge 0$. Phương trình trở thành $t^2-2\left(m+1\right)t+2m+1=0$. (2)

Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt, nghĩa là $\begin{cases}\Delta'>0\\S>0\\P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(m+1\right)^2-\left(2m+1\right)>0\\m+1>0\\2m+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ne 0\\m>-1\\m>-\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-\dfrac{1}{2}\\m\ne 0\end{cases}$.

Cách 1. Gọi $x_1,x_2,x_3,x_4\left(x_1<x_2<x_3<x_4\right)$ là nghiệm của phương trình (1) và $t_1,t_2\left(t_1<t_2\right)$ là nghiệm của phương trình (2).

Theo giả thiết, ta có

$x_4-x_3=x_3-x_2=x_2-x_1\Leftrightarrow x_4-x_3=x_3-x_2\Leftrightarrow\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1}=\sqrt{t_1}+\sqrt{t_1}\Leftrightarrow t_2=9t_1>0$

Ta có hệ

$$\begin{cases}t_1+t_2=2\left(m+1\right)\\t_1t_2=2m+1\\t_2=9t_1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_1=\dfrac{m}{5}+\dfrac{1}{5}\\t_2=\dfrac{9m}{5}+\dfrac{9}{5}\\t_1t_2=2m+1\end{cases}\Rightarrow\left(\frac{m}{5}+\frac{1}{5}\right)\left(\frac{9m}{5}+\frac{9}{5}\right)=2m+1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=4\\m=-\dfrac{4}{9}\end{array}\right.\text{(nhận)}$$

Cách 2. Với $\Delta' > 0$, phương trình (1) có nghiệm $t_1 = 1, t_2 = 2m+1$. Biện luận như trên, ta có hai trường hợp $\left[\begin{array}{l} t_2 = 9t_1 \\ t_1 = 9t_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = -\dfrac{4}{9} \end{array}\right.$ (nhận).

Câu 14: Cho hàm số $y = x^4 - (3m+2)x^2 + 3m$ có đồ thị (C_m). Xác định tất cả các giá trị của tham số thực m để (C_m) cắt đường thẳng $y = -1$ tại bốn điểm phân biệt

A. $\begin{cases} m \neq 0 \\ m < -\dfrac{1}{3} \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\dfrac{1}{3} \end{cases}$. **C.** $m > -\dfrac{1}{3}$. **D.** $m < -\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm $x^4 - (3m+2)x^2 + 3m = -1$

$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 - 3m(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 - 3m(x^2 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 3m - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 1 = 0 \\ x^2 - 3m - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, x = -1 \\ x^2 = 3m + 1 \end{array}\right.$

Đồ thị (C_m) cắt $y = -1$ tại bốn điểm phân biệt khi và chỉ khi $x^2 = 3m+1$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 và -1. Khi đó, ta có $\begin{cases} 3m+1 > 0 \\ 3m+1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{1}{3} \\ m \neq 0 \end{cases}$.

Câu 15: Cho hàm số $y = x^4 - (3m+2)x^2 + 3m$ có đồ thị (C_m). Xác định tất cả các giá trị của tham số thực m để (C_m) cắt đường thẳng $y = -1$ tại bốn điểm phân biệt

A. $\begin{cases} m \neq 0 \\ m < -\dfrac{1}{3} \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\dfrac{1}{3} \end{cases}$. **C.** $m > -\dfrac{1}{3}$. **D.** $m < -\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm $x^4 - (3m+2)x^2 + 3m = -1$

$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 - 3m(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 - 3m(x^2 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 3m - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 1 = 0 \\ x^2 - 3m - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, x = -1 \\ x^2 = 3m + 1 \end{array}\right.$

Đồ thị (C_m) cắt $y = -1$ tại bốn điểm phân biệt khi và chỉ khi $x^2 = 3m+1$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 và -1.

Khi đó, ta có $\begin{cases} 3m+1 > 0 \\ 3m+1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{1}{3} \\ m \neq 0 \end{cases}$.

Câu 16: Cho hai hàm số $y=\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}$ và $y=e^{-x}-2019+2022m$, (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng ba điểm phân biệt là

A. $(1;+\infty)$. **B.** $[1;+\infty)$. **C.** $[3;+\infty)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2;-1;0\}$

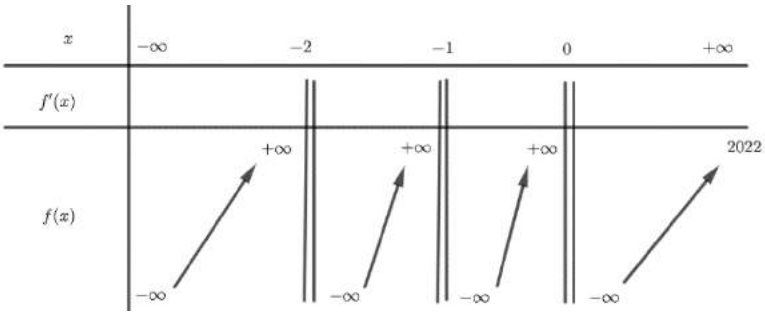
Xét phương trình hoàng độ giao điểm: $\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}=e^{-x}-2019+2022m$

$\Leftrightarrow \frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}-e^{-x}+2019=2022m$

Xét: $f(x)=\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}-e^{-x}+2019$

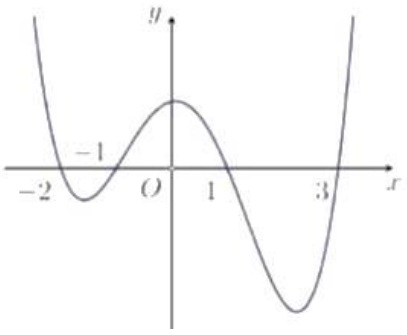
Có: $f'(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+e^{-x}>0\ \forall x\in D$

Bảng biến thiên:



Để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thì: $2022m\geq 2022\Leftrightarrow m\geq 1$.

Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f(1)=2020$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ



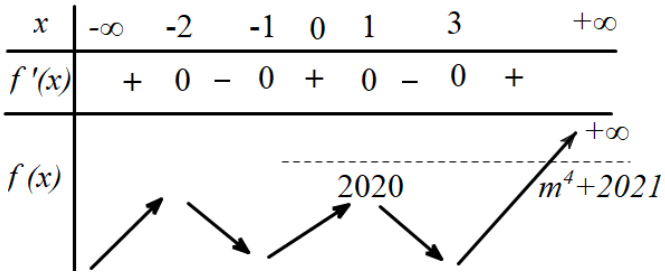
Với m là tham số, số nghiệm của phương trình $f(x^2)=m^4+2021$ là

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị đã cho, ta có bảng biến thiên



Đặt $t = x^2$. Phương trình đã cho trở thành $f(t) = m^4 + 2021$, $t \in [0;+\infty)$.

Vì $m^4 + 2021 > 2020$ với mọi $m \in \mathbb{R}$ nên từ bảng biến thiên, ta thấy phương trình $f(t) = m^4 + 2021$ có nghiệm duy nhất trên $[0;+\infty)$ và nghiệm này khác 0 với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Vậy phương trình $f(x^2) = m^4 + 2021$ có đúng hai nghiệm phân biệt (là hai số đối nhau) với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Câu 18: Cho phương trình $(x^2 - 2x + m)^2 - 2x^2 + 3x - m = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2022; 2022]$ để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt?

A. 2022. **B.** 4045. **C.** 2024. **D.** 2023.

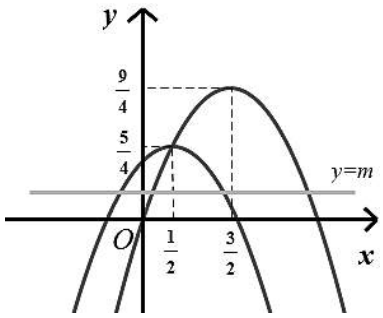
Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $(x^2 - 2x + m)^2 - 2x^2 + 3x - m = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + m)^2 - x^2 - (x^2 - 3x + m) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 3x + m)(x^2 - x + m) - (x^2 - 3x + m) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 3x + m)(x^2 - x + m - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 3x + m = 0 \\ x^2 - x + m - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -x^2 + 3x \\ m = -x^2 + x + 1 \end{array}\right.$.

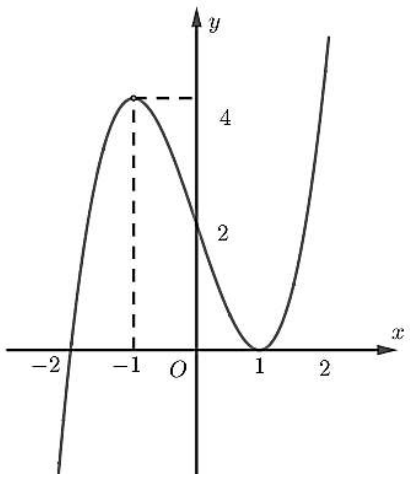


Lần lượt vẽ đồ thị của hai hàm số $(P_1): y = -x^2 + 3x$ và $(P_2): y = -x^2 + x + 1$ trên cùng một hệ trục tọa độ. Dễ thấy (P_1) và (P_2) có một điểm chung duy nhất là $M\left(\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right)$.

Dựa vào đồ thị, để phương trình có 4 nghiệm thì $m < \frac{5}{4}$.

Vậy tập hợp các giá trị nguyên của m là $\{-2022; -2021; ...; 0; 1\}$. Có tất cả 2024 giá trị nguyên.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3f\left(|x|^3-3|x|+2\right)-m+1=0$ có 8 nghiệm phân biệt.

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Ta có bảng sau

x	$-\infty$	-1	2	-1	$+\infty$
$\|x\|^3-3\|x\|+2$	$+\infty$	$\searrow$ 0	$\nearrow$ 2	$\searrow$ 0	$\nearrow$ $+\infty$
$f\left(\|x\|^3-3\|x\|+2\right)$	$+\infty$	$\searrow$ 0	$\nearrow$ 2	$\searrow$ 0 $\nearrow$ 4	$\searrow$ 0 $\nearrow$ 2 $\searrow$ 0 $\nearrow$ $+\infty$

Nhìn từ kết quả trên, để phương trình $3f\left(|x|^3-3|x|+2\right)-m+1=0$ có 8 nghiệm phân biệt thì phương trình $f\left(|x|^3-3|x|+2\right)=\dfrac{m-1}{3}$ cũng phải có 8 nghiệm phân biệt.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi $0<\dfrac{m-1}{3}<2\Leftrightarrow 1<m<7$.

Do m nguyên nên có 5 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị cắt trục hoành tại 2 điểm $x=-1$ và $x=3$. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(x)=am+3bx+d$ có 3 nghiệm phân biệt?

A. $2\cdot$ **B.** $3\cdot$ **C.** $5\cdot$ **D.** $4\cdot$

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=3ax^2+2bx+c\ (a\neq 0)$.

$\begin{cases} f'(-1)=0 \\ f'(3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-2b+c=0 \\ 27a+6b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-3a \\ c=-9a \end{cases}$

Ta có phương trình $f(x)=am+3bx+d \Leftrightarrow ax^3+bx^2+(c-3b)x=am$

$\Leftrightarrow ax^3-3ax^2=am \Leftrightarrow x^3-3x^2=m$.

Đặt $g(x)=x^3-3x^2$; $g'(x)=3x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên $g(x)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

Phương trình có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -4<m<0$. Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-3;-2;-1\}$.

Câu 21: Cho hàm số $y=x^3+2mx^2+(3m-4)x+2$ có đồ thị (C) và cho điểm $M(3;1)$. Số giá trị nguyên dương của tham số m để đường thẳng $d: y=-x+2$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt $A(0;2), B$ và C đồng thời tam giác MBC có diện tích $2\sqrt{7}$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$x^3+2mx^2+(3m-4)x+2=-x+2 \Leftrightarrow x^3+2mx^2+(3m-3)x=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+2mx+(3m-3)=0 \end{array}\right.$.

Để đồ thị (C) cắt đường thẳng d tại ba điểm thỏa mãn bài toán, khi và chỉ khi

$x^2+2mx+(3m-3)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ m\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-3m+3>0 \\ m\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m\neq 1.$

Gọi $x_1; x_2$ là nghiệm phương trình $x^2+2mx+(3m-3)=0$, theo định lí Viet có

$\begin{cases} x_1+x_2=-2m \\ x_1.x_2=3m-3 \end{cases}$

Do $B; C\in d$ nên $d(M,BC)=d(M;d)=\dfrac{|3+1-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

Diện tích tam giác MBC bằng $2\sqrt{7} \Leftrightarrow BC=2\sqrt{14}$ (1)

Khi đó $B(x_1;-x_1+2); C(x_2;-x_2+2) \Rightarrow \overrightarrow{BC}=(x_2-x_1;x_1-x_2) \Rightarrow BC^2=2(x_1-x_2)^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có

$56 = 2\left(x_1 + x_2\right)^2 - 8x_1.x_2 \Leftrightarrow 8m^2 - 24m - 32 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = -1; m = 4$.

Vậy có 1 giá trị nguyên dương của tham số m thỏa mãn bài toán.

Câu 22: Cho hàm số $f(x) = x^5 + 3x^3 - 4m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f(x)+m}\right) = x^3 - m$ có nghiệm thuộc $[1;2]$?

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\sqrt[3]{f(x)+m} = u \Rightarrow f(x) + m = u^3 \Rightarrow \begin{cases} f(u) = x^3 - m \\ f(x) = u^3 - m \end{cases}$

$\Rightarrow f(u) - f(x) = x^3 - u^3 \Leftrightarrow f(u) + u^3 = f(x) + x^3$

Xét hàm $g(x) = f(x) + x^3 = x^5 + 3x^3 - 4m + x^3 = x^5 + 4x^3 - 4m$ có $g'(x) = 5x^4 + 12x^2 > 0, \forall x \in [1;2]$

Do đó $y = g(x)$ đồng biến trên $[1;2]$.

$\Rightarrow f(u) + u^3 = f(x) + x^3 \Leftrightarrow u = x \Leftrightarrow \sqrt[3]{f(x)+m} = x \Leftrightarrow f(x) + m = x^3$

$\Leftrightarrow x^5 + 3x^3 - 4m + m = x^3 \Leftrightarrow x^5 + 2x^3 = 3m$

Xét hàm $h(x) = x^5 + 2x^3$ trên $[1;2]$ có $h'(x) = 5x^4 + 6x^2 > 0, \forall x \in [1;2]$

$\Rightarrow h(x)$ đồng biến trên $[1;2] \Rightarrow h(1) \le h(x) \le h(2) \Rightarrow 3 \le h(x) \le 48$.

Phương trình $h(x) = 3m$ có nghiệm thuộc $[1;2] \Rightarrow 3 \le 3m \le 48 \Rightarrow 1 \le m \le 16$

Vậy có 16 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 23: Cho hàm số $f(x) = e^{-x} - 4x^3 + 2023$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2022; 2022]$ để phương trình $f\left(4^x + 2^8\right) = f\left(2^{x+10} + m^2 - 2\right)$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 32. **B.** 33. **C.** 31. **D.** 34.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x) = e^{-x} - 4x^3 + 2023$ có tập xác định là $D = R$

Khi đó: $f'(x) = -e^{-x} - 12x^2 < 0$ với $\forall x \in R \Rightarrow$ hàm số đơn điệu giảm trên R.

Áp dụng tính chất hàm đơn điệu ta có:

$f\left(4^x + 2^8\right) = f\left(2^{x+10} + m^2 - 2\right) \Leftrightarrow 4^x + 2^8 = 2^{x+10} + m^2 - 2 \Leftrightarrow 4^x - 2^{10} \cdot 2^x + 258 - m^2 = 0$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì:

$\begin{cases} \Delta' = 2^{18} + m^2 - 258 > 0 \\ 258 - m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{258} < m < \sqrt{258}$. Mà $m \in Z, m \in [-2022; 2022] \Rightarrow -16 \le m \le 16$

Vậy có tất cả 33 giá trị m nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 24: Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx - 1}{x - 1}$ có đồ thị (C) (m là tham số thực). Tổng bình phương các giá trị của m để đường thẳng $(d): y = m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm A, B sao cho $OA \perp OB$ bằng

A. 3. **B.** 12. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d):

Với điều kiện $x \neq 1$ thì $\dfrac{x^2+mx-1}{x-1}=m \Leftrightarrow x^2=1-m \ (*)$.

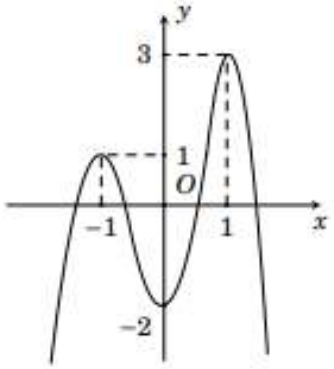
Đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại hai điểm A,B phân biệt khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $x \neq 1$ hay $\begin{cases}1-m>0\\1-m\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m<1\\m\neq 0\end{cases}$.

Khi đó $\begin{cases}A\left(\sqrt{1-m};m\right)\\B\left(-\sqrt{1-m};m\right)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{OA}=\left(\sqrt{1-m};m\right)\\\overrightarrow{OB}=\left(-\sqrt{1-m};m\right)\end{cases}$.

Như vậy $OA \perp OB \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0 \Leftrightarrow -(1-m)+m^2=0 \Leftrightarrow m^2+m-1=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ (thỏa điều kiện $m<1, m\neq 0$).

Vậy tổng bình phương các giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán là $\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^2=3$.

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f(1-x)$ được cho trong hình vẽ có đúng 3 điểm cực trị là $A(-1;1)$, $B(0;-2)$, $C(1;3)$.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\dfrac{1-x}{x+2}\right)-\dfrac{2x+1}{x+2}+m=0$ có đúng 4 nghiệm?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 5.

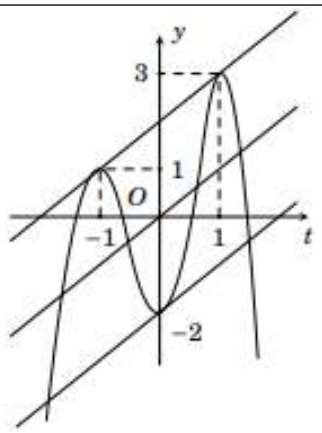
Lời giải

Chọn D

Đặt $1-t=\dfrac{1-x}{x+2} \Leftrightarrow x=\dfrac{2t-1}{2-t}, \forall t\neq 2$, khi đó phương trình $f\left(\dfrac{1-x}{x+2}\right)-\dfrac{2x+1}{x+2}+m=0$ trở thành $f(1-t)=t-m \ (*)$.

Nhận thấy với mỗi nghiệm $t\neq 2$ của phương trình $(*)$ ta có được một nghiệm x. Do đó để phương trình $f\left(\dfrac{1-x}{x+2}\right)-\dfrac{2x+1}{x+2}+m=0$ có đúng 4 nghiệm thì phương trình $(*)$ có đúng 4 nghiệm $t\neq 2$.

Ta thấy đồ thị hàm số $y=t-m$ là một đường thẳng song song với đường thẳng $y=t$ cắt trục tung tại điểm $(0;-m)$.



Từ đồ thị ta có phương trình $(*)$ có 4 nghiệm phân biệt khi $-2 \le m \le 2$. Mặt khác $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2;-1;0;1;2\} \Rightarrow$ có 5 giá trị nguyên của tham số m.

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$			0	$-$			0	$+$			
$f(x)$	$-\infty$	↗	-4	↗	0	↘	-2	↘	-4	↗	0	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(f\left(|x+1|\right)+2\right) = m$ có 10 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-3;1]$

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = |x+1| \Rightarrow x \in [-3;1] \Rightarrow t \in [0;2]$

Mỗi $t \in (0;2]$ cho 2 giá trị $x \in [-3;1]$.

Mỗi $t = 0$ cho 1 giá trị $x \in [-3;1]$.

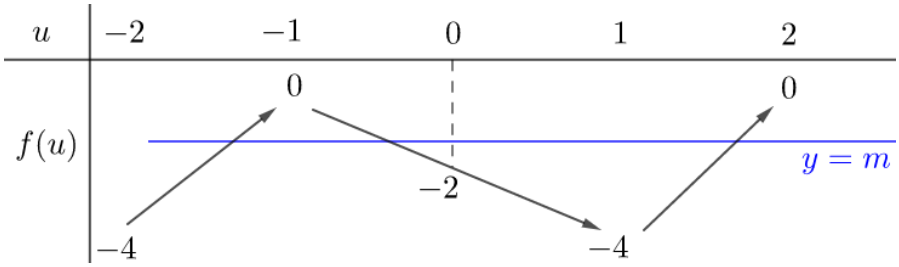
Đặt $u = f(t) + 2$

t	0		1		2
$f(t)$	-2	↘	-4	↗	0
$u = f(t)+2$	0	↘	-2	↗	2

Mỗi $u \in (-2;0)$ cho 2 giá trị $t \in (0;2]$ tức là cho 4 giá trị $x \in [-3;1]$.

Mỗi $u \in (0;2)$ cho 1 giá trị $t \in (0;2]$ tức là cho 2 giá trị $x \in [-3;1]$.

Với $u=0$ cho 2 giá trị $t=0$ và $t=a\in(1;2)$ tức là cho 3 giá trị $x\in[-3;1]$.



Để phương trình $f\left(f\left(|x+1|\right)+2\right)=m$ có 10 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-3;1]$ thì phương trình $f(u)=m$ có 3 nghiệm phân biệt $t_1;t_2;t_3$ trong đó $t_1;t_2\in(-2;0);t_3\in(0;2]\Rightarrow -2<m<0$.

$\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{-1\}$.

Vậy có 1 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 27: Cho hàm số $y=f(x)=e^x-e^{-x}+2021x$ có bao nhiêu giá trị nguyên m để $f(3-x)+f(-x^3+3x^2+x+m)=0$ có ba nghiệm phân biệt?

A. 3 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 5

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=f(x)=e^x-e^{-x}+2021x\Rightarrow f'(x)=e^x+e^{-x}+2021>0,\forall x\in R$ nên $y=f(x)$ là hàm đồng biến trên R

Lại có $\begin{cases} f(x)=e^x-e^{-x}+2021x \\ f(-x)=e^{-x}-e^x-2021x \\ -f(x)=-(e^x-e^{-x}+2021x)=e^{-x}-e^x-2021x \end{cases}$ nên $y=f(x)$ là hàm lẻ

Xét $f(3-x)+f(-x^3+3x^2+x+m)=0\Leftrightarrow -f(3-x)=f(-x^3+3x^2+x+m)$

Do $y=f(x)$ là hàm lẻ nên $\begin{matrix} -f(3-x)=f(-x^3+3x^2+x+m) \\ \Leftrightarrow f(x-3)=f(-x^3+3x^2+x+m) \end{matrix}$ và $y=f(x)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra $x-3=-x^3+3x^2+x+m\Leftrightarrow x^3-3x^2-3=m$ xét $g(x)=x^3-3x^2-3$

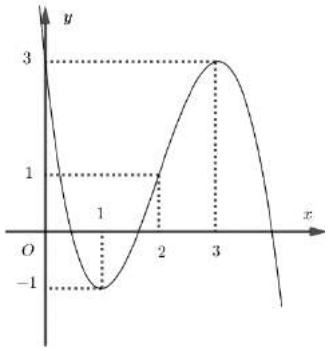
$g(x)=x^3-3x^2-3\Rightarrow g'(x)=3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{matrix} x=2\Rightarrow g(2)=-7 \\ x=0\Rightarrow g(0)=-3 \end{matrix}\right.$

Lập bảng biến thiên dễ dàng kết luận

Để có ba nghiệm phân biệt thì $g(x)=x^3-3x^2-3=m$ cắt nhau tại 3 điểm $-7<m<-3$

Nên có 3 nghiệm m

Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số bậc ba và có đồ thị $y=f(2-x)$ như hình vẽ



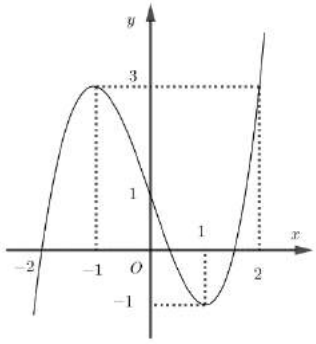
Hỏi phương trình $\left|f\left(\left|x^2-2x\right|\right)\right|=1$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A. 8. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị hàm số $y=f\left(2-x\right)$ suy ra đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có hình vẽ như sau:



Đặt $\left|x^2-2x\right|=t, t\geq 0$, phương trình trở thành $\left|f\left(t\right)\right|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f\left(t\right)=1 \\ f\left(t\right)=-1 \end{array}\right.$

Khi $f\left(t\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \left|x^2-2x\right|=0 \\ \left|x^2-2x\right|=a_1, a_1<-1 \\ \left|x^2-2x\right|=a_2, a_2>1 \end{array}\right.$

Phương trình $\left|x^2-2x\right|=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Phương trình $\left|x^2-2x\right|=a_1, a_1<-1$ vô nghiệm.

Phương trình $\left|x^2-2x\right|=a_2, a_2>1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x^2-2x-a_2=0 \\ x^2-2x+a_2=0 \end{array}\right.$

Phương trình $x^2-2x-a_2=0$ có hai nghiệm phân biệt.

Phương trình $x^2-2x+a_2=0$ vô nghiệm do $\Delta'=1-a_2<0$, với $a_2>1$.

Khi $f\left(t\right)=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \left|x^2-2x\right|=1 \\ \left|x^2-2x\right|=a_3, a_3<-2 \end{array}\right.$

Phương trình $\left|x^2-2x\right|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x^2-2x-1=0 \\ x^2-2x+1=0 \end{array}\right.$

Phương trình $x^2-2x-1=0$ có hai nghiệm $x=1-\sqrt{2}$ và $x=1+\sqrt{2}$.

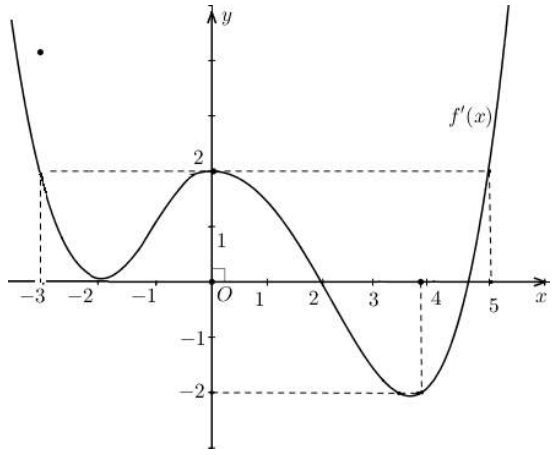
Phương trình $x^2-2x+1=0$ có một nghiệm $x=1$.

Phương trình $\left|x^2-2x\right|=a_3, a_3<-2$ vô nghiệm.

Mà các nghiệm đều phân biệt nên phương trình $\left|f\left(\left|x^2-2x\right|\right)\right|=1$ có 7 nghiệm phân biệt.

Câu 29: Cho hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ. Biết rằng $f\left(3\right)=2f\left(5\right)=4$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\frac{1}{2}f\left(x\right)-m\right)=2x+2m$ có đúng 3 nghiệm thực phân

biệt.



A. 8 · **B.** 6 · **C.** 3 · **D.** 7 ·

Lời giải

Chọn A

Đặt $\frac{1}{2}f(x)-m=u \Rightarrow \begin{cases} f(x)=2u+2m \\ f(u)=2x+2m \end{cases} \Rightarrow f(u)+2u=f(x)+2x$.

Xét hàm số $g(t)=f(t)+2t \Rightarrow g'(t)=f'(t)+2 \geq -2+2=0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow u=x \Leftrightarrow \frac{1}{2}f(x)-m=x \Leftrightarrow h(x)=\frac{1}{2}f(x)-x=m$

Xét hàm số $h(x)=\frac{1}{2}f(x)-x \Rightarrow h'(x)=\frac{1}{2}f'(x)-1$.

$$\Rightarrow h'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}f'(x)=1 \Leftrightarrow f'(x)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \Rightarrow h(-3)=\frac{1}{2}f(-3)-(-3)=5 \\ x=0 \\ x=5 \Rightarrow h(5)=\frac{1}{2}f(5)-(5)=-4 \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)=\frac{1}{2}f(x)-x$ như sau:

x	$-\infty$		-3		0		5		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↗	5	↘		↘	-4	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra phương trình có 3 nghiệm khi $-4<m<5$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$

Vậy có 8 giá trị nguyên của m.

Câu 30: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có $f'(x)=x^4-3x^2-4$ và hàm số $g(x)=f\left(\left|\frac{x^4}{4}-4x^2+12\right|+m\right)$, tìm các giá trị nguyên của $m \in [-30;10]$ để hàm số $g'(x)$ cắt trục Ox tại 11 điểm phân biệt

A. 18. **B.** 10. **C.** 16. **D.** 15.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x)=0\Leftrightarrow(x^2+1)(x+2)(x-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.$.

Có: $g'(x)=\dfrac{\left(\dfrac{x^4}{4}-4x^2+12\right)(x^3-8x)}{\left|\dfrac{x^4}{4}-4x^2+12\right|}f'\left(\left|\dfrac{x^4}{4}-4x^2\right|+m\right)$

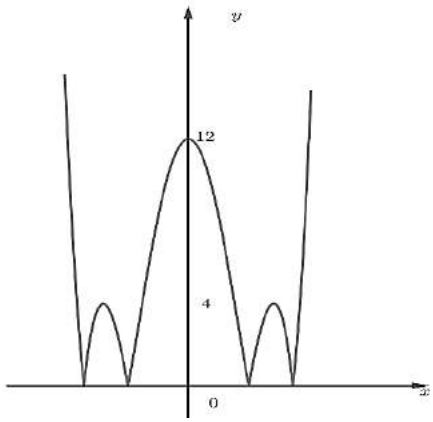
Phương trình hoành độ giao điểm của $g'(x)$ và trục Ox là: $g'(x)=0$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(\dfrac{x^4}{4}-4x^2+12\right)(x^3-8x)}{\left|\dfrac{x^4}{4}-4x^2+12\right|}f'\left(\left|\frac{x^4}{4}-4x^2+12\right|+m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm2\sqrt{2}\\x=\pm2\\f'\left(\left|\dfrac{x^4}{4}-4x^2+12\right|+m\right)=0\\x=\pm2\sqrt{3}\end{array}\right.$$

$$f'\left(\left|\frac{x^4}{4}-4x^2+12\right|+m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|\dfrac{x^4}{4}-4x^2+12\right|+m=2\\\left|\dfrac{x^4}{4}-4x^2+12\right|+m=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|\dfrac{x^4}{4}-4x^2+12\right|=2-m(1)\\\left|\dfrac{x^4}{4}-4x^2+12\right|=-2-m(2)\end{array}\right.$$

Xét hàm $h(x)=\dfrac{x^4}{4}-4x^2+12$, có $h'(x)=x^3-8x, h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\sqrt{2}\\x=0\\x=-2\sqrt{2}\end{array}\right.$

Suy ra ta có đồ thị hàm $y=|h(x)|$ như hình vẽ:



Để hàm số $g'(x)$ cắt trục Ox tại 11 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $(1),(2)$ có 4 nghiệm

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4\le-2-m<12\\-2-m\le0\end{cases}\\-2-m\ge12\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-10<m\le-2\\m\ge-2\end{cases}\\m\le-14\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2\\m\le-14\end{array}\right.\Rightarrow m\in\{-30;-29;...-14;-2\}$$

Suy ra có 18 giá trị nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 31: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y=\left|x^3-3x-1\right|$ và đồ thị hàm số $y=\left|mx^3-6mx^2+9mx-7m\right|$ cắt nhau tại ít nhất một điểm có hoành độ $x_0\in[0;2]$

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

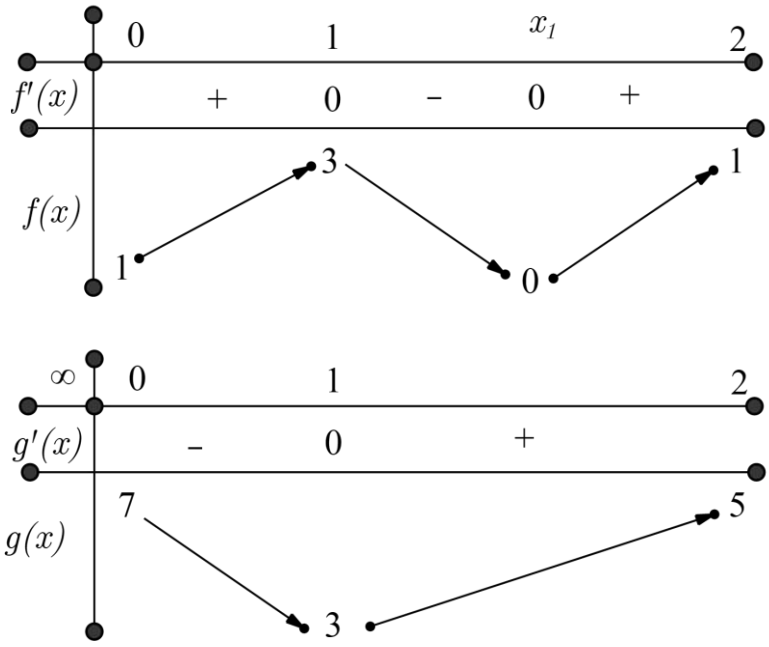
Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm: $\left|x^3-3x-1\right|=\left|mx^3-6mx^2+9mx-7m\right|$

$\Leftrightarrow\left|x^3-3x-1\right|=|m|\left|x^3-6x^2+9x-7\right|$ (*)

Xét hai hàm số $f(x)=\left|x^3-3x-1\right|$, $g(x)=\left|x^3-6x^2+9x-7\right|$ có bảng biến thiên trên $[0;2]$ như sau:



Vì $g(x)>0$ nên $(*)\Leftrightarrow\dfrac{\left|x^3-3x-1\right|}{\left|x^3-6x^2+9x-7\right|}=|m|\Leftrightarrow h(x)=|m|$.

Ta có hàm số $h(x)=\dfrac{\left|x^3-3x-1\right|}{\left|x^3-6x^2+9x-7\right|}$ liên tục trên đoạn $[0;2]$ và $h(x)\geq 0$.

Phương trình $(*)$ có nghiệm $x_0\in[0;2]$ khi và chỉ khi $\min\limits_{[0;2]}h(x)\leq|m|\leq\max\limits_{[0;2]}h(x)$

Vì $f(x_1)=0$ nên $h(x)$ có giá trị nhỏ nhất là $\min\limits_{[0;2]}h(x)=h(x_1)=0$

Vì khi $x=1$ ta có $f(x)$ lớn nhất và $g(x)$ nhỏ nhất nên $\max\limits_{[0;2]}h(x)=h(1)=\dfrac{\max\limits_{[0;2]}f(x)}{\min\limits_{[0;2]}g(x)}=1$

Vậy phương trình $(*)$ có nghiệm $x_0\in[0;2]$ khi và chỉ khi $0\leq|m|\leq 1\Leftrightarrow-1\leq m\leq 1$

Kết luận có 3 giá trị nguyên của m thoả mãn.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)=x^{2021}+2021x$. Gọi m_0 là số lớn nhất trong các số nguyên m thỏa mãn

$f\left(m-2020\right)+f\left(2021m-5^8\right)\le 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m_0\in\left[180;191\right]$. **B.** $m_0\in\left(191;204\right]$. **C.** $m_0\in\left(204;223\right)$. **D.** $m_0\in\left[223;234\right)$.

Lời giải

Chọn B

Xét $f\left(x\right)=x^{2021}+2021x$. Ta chứng minh hàm $f\left(x\right)=x^{2021}+2021x$ là hàm lẻ và tăng trên $\mathbb{R}$.

Ta có tập xác định $D=\mathbb{R}$, $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.

$f\left(-x\right)=\left(-x\right)^{2021}+2021\left(-x\right)=-\left(x^{2021}+2021x\right)$, do đó $f\left(x\right)$ là hàm số lẻ.

Ta có $f'\left(x\right)=2021.x^{2020}+2021>0,\forall x\in\mathbb{R}$, nên $f\left(x\right)$ là hàm số tăng.

Yêu cầu bài toán $f\left(m-2020\right)+f\left(2021m-5^8\right)\le 0\Leftrightarrow f\left(2021m-5^8\right)\le -f\left(m-2020\right)$

$\Leftrightarrow f\left(2021m-5^8\right)\le f\left[-\left(m-2020\right)\right]$ (do tính chất hàm lẻ).

$\Leftrightarrow 2021m-5^8\le -\left(m-2020\right)$ (do tính đồng biến của hàm số $\forall x\in\mathbb{R}$).

$\Leftrightarrow 2022m\le 5^8+2020\Leftrightarrow m\le\dfrac{5^8+2020}{2022}$

Do m_0 là số lớn nhất trong các số nguyên m nên $m_0=\left[\dfrac{5^8+2020}{2022}\right]=194$.

CHƯƠNG 1

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

CHỦ ĐỀ 7 TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ thuộc đồ thị hàm số:

- Cho hàm số $\left(C\right):y=f\left(x\right)$ và điểm $M\left(x_0;y_0\right)\in\left(C\right)$. Viết phương trình tiếp tuyến với đường cong $\left(C\right)$ tại điểm M.
  - **Bước 1:** Tính đạo hàm $f'\left(x\right)$. Tìm hệ số góc của tiếp tuyến là $f'\left(x_0\right)$.
  - **Bước 2:** Phương trình tiếp tuyến tại điểm M là: $y=f'\left(x\right)\left(x-x_0\right)+y_0$.

2. Viết phương trình tiếp tuyến có hệ số góc k cho trước.

- Gọi $\left(\Delta\right)$ là tiếp tuyến cần tìm có hệ số góc k.
- Giả sử $M\left(x_0;y_0\right)$ là tiếp điểm. Khi đó x_0 thỏa mãn: $f'\left(x_0\right)=k \quad (1)$.
- Giải (1) tìm x_0. Suy ra $y_0=f\left(x_0\right)$.
- Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=k\left(x-x_0\right)+y_0$

3. Điều kiện để hai hàm số tiếp xúc

- Cho hai hàm số $\left(C\right):y=f\left(x\right)$ và $\left(C'\right):y=g\left(x\right)$. Đồ thị (C) và (C') **tiếp xúc nhau** khi chỉ khi hệ phương trình: $\begin{cases}f\left(x\right)=g\left(x\right)\\f'\left(x\right)=g'\left(x\right)\end{cases}$ có nghiệm.

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{2x-3}$ tại điểm có hoành độ $x_0=-1$ có hệ số góc bằng bao nhiêu?

A. 5. **B.** $\dfrac{1}{5}$. **C.** $-\dfrac{1}{5}$. **D.** -5.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 2: Hàm số $f(x)=x^3-3x^2+4$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm A có hoành độ $x_A=1$ nằm trên (C).

A. $y=-3x+5$. **B.** $y=3x-5$. **C.** $y=-5x+3$. **D.** $y=5x-3$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Hệ số góc của tiếp tuyến tại $A(1;0)$ của đồ thị hàm số $y=-x^3+3x-1$ là

A. 6. **B.** -1. **C.** -6. **D.** 0.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 4: Tìm tất cả các điểm M trên đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ mà tiếp tuyến của đồ thị tại điểm đó song song với đường thẳng $d: y=3x+10$.

A. $M\left(3;\dfrac{1}{4}\right)$. **B.** $M(0;-2)$.

C. $M(0;-2)$ và $M(-2;4)$. **D.** $M\left(-\dfrac{5}{2};3\right)$.

Lời giải

.....

.....

……

……

……

……

……

……

Câu 5: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{1-x}$ và điểm $I(1;-1)$. Tìm tất cả các điểm M nằm trên đồ thị hàm số sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với IM.

A. $M\left(1+\sqrt{2};-1-\sqrt{2}\right)$ và $M\left(1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2}\right)$.

B. $M(-1;0)$ và $M(3;-2)$.

C. $M\left(\sqrt{2};-3-2\sqrt{2}\right)$.

D. $M(2;-3)$ và $M(0;1)$.

✍ Lời giải

……

……

……

……

……

……

……

……

Câu 6: Qua điểm $M(2;0)$ kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=x^4-4x^2$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

✍ Lời giải

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

Câu 7: Biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + 2$ tại điểm $A(-1;1)$ vuông góc với đường thẳng $x - 2y + 3 = 0$. Tính $a^2 - b^2$

A. $a^2 - b^2 = -2$. **B.** $a^2 - b^2 = 10$. **C.** $a^2 - b^2 = 13$. **D.** $a^2 - b^2 = -5$.

✍ Lời giải

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

Câu 1: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ tại điểm $A(3;1)$ là

A. $y=-9x-3$.. **B.** $y=9x+2$. **C.** $y=-9x-26$. **D.** $y=9x-26$.

Câu 2: Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=x^3+x$ tại điểm $M(-1;0)$ là:

A. 4. **B.** 0. **C.** -2. **D.** 1.

Câu 3: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-x^3+2x-1$ tại điểm $M(0;-1)$ có hệ số góc k là

A. $k=-1$. **B.** $k=1$. **C.** $k=2$. **D.** $k=-2$.

Câu 4: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị là (C). Biết rằng trên (C) có 2 điểm phân biệt mà các tiếp tuyến của (C) tại các điểm đó song song với đường thẳng $y=x$. Tính tổng hoành độ của 2 điểm đó.

A. 2. **B.** -2. **C.** -1. **D.** 1.

Câu 5: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=e^x$ song song đường thẳng $y=x+3$ có phương trình là

A. $y=ex+1$. **B.** $y=x$. **C.** $y=x+e$. **D.** $y=x+1$.

Câu 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x-2}$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của đồ thị (C) với trục hoành là

A. $y=x-1$. **B.** $y=-x+1$. **C.** $y=x-2$. **D.** $y=-x+2$.

Câu 7: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là

A. $y=-24x-40$. **B.** $y=24x+40$. **C.** $y=-24x+40$. **D.** $y=24x-40$.

Câu 8: Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ song song với đường thẳng $y=9x+7$ là:

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 9: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ tại điểm $A(3;1)$ là

A. $y=-9x-3$.. **B.** $y=9x+2$. **C.** $y=-9x-26$. **D.** $y=9x-26$.

Câu 10: Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ song song với đường thẳng $y=9x+7$ là:

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

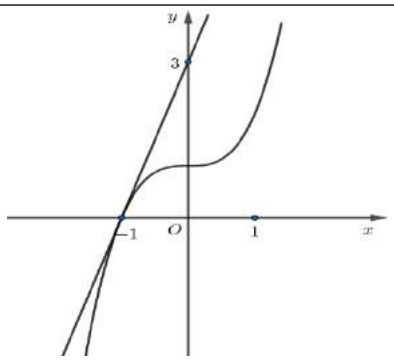
Câu 11: Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4-4x^2$ mà song song với trục Ox là

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 12: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-2x+3$ tại điểm $M(2;7)$ là

A. $y=x+5$. **B.** $y=10x-27$. **C.** $y=7x-7$. **D.** $y=10x-13$.

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $g(x)=x.f(x)$ tại $x=-1$ bằng



A. 1. **B.** -1. **C.** -3. **D.** 3.

Câu 14: Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, gọi (C) là đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x-2}$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của đồ thị (C) với trục hoành là

A. $y=x-1$. **B.** $y=-x+1$. **C.** $y=x-2$. **D.** $y=-x+2$.

Câu 15: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-2}{x+1}$ tại điểm $A(4;2)$ cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại M và N. Tính diện tích tam giác OMN.

A. $S_{\Delta OMN}=\dfrac{6}{5}$. **B.** $S_{\Delta OMN}=\dfrac{18}{5}$. **C.** $S_{\Delta OMN}=\dfrac{36}{5}$. **D.** $S_{\Delta OMN}=\dfrac{5}{18}$.

Câu 16: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x=2$.

A. $y=x-7$. **B.** $y=-3x+11$. **C.** $y=-3x+9$. **D.** $y=-x+7$.

Câu 17: Cho hàm số $y=x^4+2x^2-3$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến với (C) tại điểm cực trị của nó có phương trình là

A. $x=-3$. **B.** $x=3$. **C.** $y=3$. **D.** $y=-3$.

Câu 18: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=5^x$ tại điểm có hoành độ bằng 0 là:

A. $y=x+1$. **B.** $y=(\ln 5)x+1$. **C.** $y=(\ln 5)x$. **D.** $y=x$.

Câu 19: Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{2x-1}$ có đồ thị (C). Gọi Δ là tiếp tuyến thay đổi của đồ thị (C). Khoảng cách từ giao điểm hai đường tiệm cận của đồ thị (C) đến đường thẳng Δ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** 1. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 20: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3+4x^2+4x+1$ tại điểm $A(-3;-2)$ cắt đồ thị hàm số tại điểm thứ hai là B. Điểm B có tọa độ là

A. $B(2;33)$. **B.** $B(-1;0)$. **C.** $B(-2;1)$. **D.** $B(1;10)$.

Câu 21: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(1)=2$ và $f'(x)+\dfrac{f(x)}{x}=4x^2+3x.$ Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=-1$ là

A. $y=x+1$. **B.** $y=-x-1$. **C.** $y=x-1$. **D.** $y=-x+1$.

Câu 22: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{2x-2}$ có đồ thị (C). Gọi $M(x_0;y_0)$ (với $x_0>1$) là điểm thuộc (C), biết tiếp tuyến của (C) tại M cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại A và B sao cho $S_{\Delta OIB}=8S_{\Delta OIA}$ (trong đó O là gốc tọa độ, I là giao điểm hai tiệm cận). Tính giá trị của $S=x_0+4y_0$.

A. $S=8$. **B.** $S=\dfrac{17}{4}$. **C.** $S=\dfrac{23}{4}$. **D.** $S=2$.

Câu 23: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}(C)$. Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(2;1)$ cắt các đường tiệm cận của đồ thị (C) tạo thành tam giác có diện tích S bằng

A. $S=2$. **B.** $S=6$. **C.** $S=12$. **D.** $S=1$.

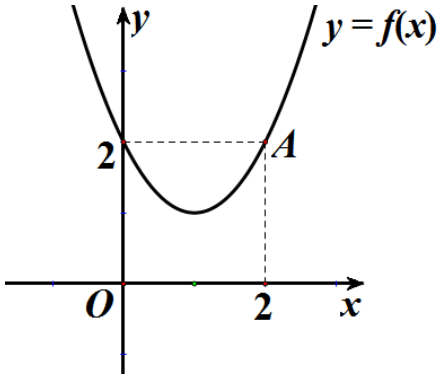
Câu 24: Cho hàm số $y=x^3+3x^2+2x+m$ có đồ thị (C). Biết tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của đồ thị (C) với trục tung cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+4}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A,B. Với giá trị nào của tham số m thì độ dài AB ngắn nhất?

A. $m\in(-3;-2)$. **B.** $m\in(-2;-1)$. **C.** $m\in(1;2)$. **D.** $m\in(-1;1)$.

Câu 25: Xét điểm M có hoành độ là số nguyên thuộc đồ thị $(C):y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M cắt đường tiệm cận ngang của (C) tại điểm A. Hỏi có bao nhiêu điểm M thỏa điều kiện A cách gốc tọa độ một khoảng cách nhỏ hơn $2\sqrt{10}$?

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 4.

Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (P) như hình bên và đường thẳng $\Delta:y=2x-2$ là tiếp tuyến của (P) tại điểm A. Xét hàm số $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$. Tính $g'(2)$.



A. $g'(2)=\dfrac{1}{2}$. **B.** $g'(2)=\dfrac{1}{4}$. **C.** $g'(2)=-\dfrac{1}{4}$. **D.** $g'(2)=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 27: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, giả sử đồ thị (G) của hàm số $y=\dfrac{(\sqrt{3})^x}{\ln 3}$ cắt trục tung tại điểm A và tiếp tuyến của (G) tại A cắt trục hoành tại điểm B. Tính diện tích của tam giác OAB (kết quả làm tròn đến hang phần nghìn).

A. $0,603$. **B.** $0,414$ **C.** $0,829$. **D.** $1,207$.

Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3x$ có đồ thị (C) và hàm số $y=g(x)=x^2$ có đồ thị (P). Hỏi hai đồ thị (C) và (P) có tất cả bao nhiêu tiếp tuyến chung?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

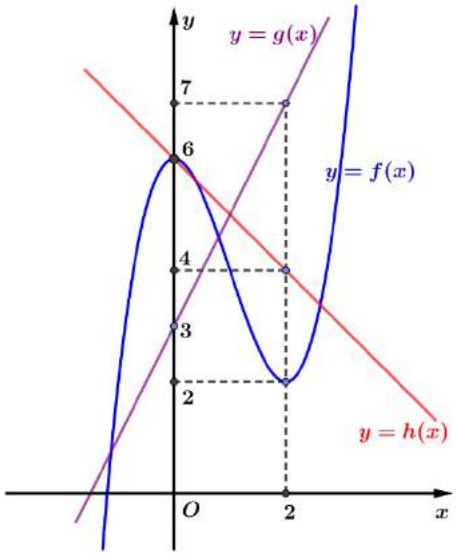
Câu 29: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=-2x+m-1$ (m là tham số thực). Gọi k_1, k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của d và (C). Tính tích $k_1.k_2$.

A. $k_1.k_2=2$. **B.** $k_1.k_2=\dfrac{1}{4}$. **C.** $k_1.k_2=4$. **D.** $k_1.k_2=3$.

Câu 30: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+4}{x-1}$ và (P) là Parabol có phương trình $y=ax^2+bx-8$. Biết từ điểm $A(4;1)$ kẻ được hai tiếp tuyến với (C). Gọi $k_1;k_2$ là hệ số góc của hai tiếp tuyến đó và gọi I là đỉnh của (P). Khi (P) đi qua $M(k_1;0), N(k_2;0)$, tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN.

A. $R=\dfrac{47}{100}$. **B.** $R=\dfrac{9}{2}$. **C.** $R=\dfrac{12}{25}$. **D.** $R=\dfrac{161}{36}$.

Câu 31: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hai đường thẳng $\Delta_1: y=h(x)$ và $\Delta_2: y=g(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



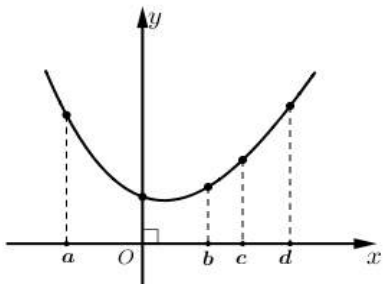
Hệ số góc k của tiếp tuyến với đồ thị $(C'): y=\dfrac{f(x).h(x)}{g(x)}$ tại điểm có hoành độ $x=2$ có dạng $k=\dfrac{a}{b}$ (với $a\in\mathbb{Z}; b\in\mathbb{N}$ và $\dfrac{a}{b}$ tối giản). Khi đó $a+b$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(15;25)$. **B.** $(-20;10)$. **C.** $(60;80)$. **D.** $(-30;-21)$.

Câu 32: Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=3x+m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=x^3+1$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 3.

Câu 33: Cho $f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi $S=\{f'(a), f'(b), f'(c), f'(d), f'(0)\}$. Phần tử lớn nhất trong tập hợp S là:



A. $f'(a)$. **B.** $f'(b)$. **C.** $f'(0)$. **D.** $f'(d)$.

Câu 34: Cho biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là $y=2x-1$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f\left(2x^2-1\right)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là

A. $y=4x-3$. **B.** $y=5x-4$. **C.** $y=8x-7$. **D.** $y=6x-5$.

Câu 35: Cho hàm số $y=x^4-2x^2$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại $B(x_2;y_2)$ với B khác A thỏa $y_2-y_1=-24(x_2-x_1)$. Số điểm A thỏa mãn là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 36: Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(0;a)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của a trong đoạn $[-2018;2018]$ để từ A kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía của trục hoành

A. 2019. **B.** 2020. **C.** 2017. **D.** 2018.

Câu 37: Cho hàm số $y=x^4-2x^2$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại $B(x_2;y_2)$ với B khác A thỏa $y_2-y_1=-24(x_2-x_1)$. Số điểm A thỏa mãn là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 38: Tìm điểm M có hoành độ âm trên đồ thị $(C): y=\dfrac{1}{3}x^3-x+\dfrac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $d: y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$.

A. $M(-2;-4)$. **B.** $M\left(-1;\dfrac{4}{3}\right)$. **C.** $M(-2;0)$. **D.** $M\left(2;-\dfrac{4}{3}\right)$.

Câu 39: Cho đa thức $f(x)$ với hệ số thực và thỏa mãn điều kiện $2f(x)+f(1-x)=x^2, \forall x\in\mathbb{R}$. Biết tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=1$ của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác. Tính diện tích của tam giác đó?

A. $\dfrac{1}{6}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Câu 40: Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e(a\neq 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng (C) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt là $A(x_1;0), B(x_2;0), C(x_3;0), D(x_4;0)$; với x_1, x_2, x_3, x_4 theo thứ tự lập thành cấp số cộng và hai tiếp tuyến của (C) tại A, B vuông góc với nhau. Khi đó, giá trị của biểu thức $P=\left[f'(x_3)+f'(x_4)\right]^{2022}$ bằng

A. $\left(\frac{4}{3}\right)^{1011}$. **B.** $\left(\frac{4}{3}\right)^{2022}$. **C** $\left(\frac{4a}{3}\right)^{1011}$. **D.** $\left(\frac{4a}{3}\right)^{2022}$.

Câu 41: Cho các hàm số $y=f(x); y=f\left(f(x)\right); y=f\left(x^2+2x-1\right)$ có đồ thị lần lượt là $(C_1);(C_2);(C_3)$. Đường thẳng $x=2$ cắt $(C_1);(C_2);(C_3)$ lần lượt tại A,B,C. Biết phương trình tiếp tuyến của (C_1) tại A và của (C_2) tại B lần lượt là $y=2x+3$ và $y=8x+5$. Phương trình tiếp tuyến của (C_3) tại C là

A. $y=8x-9$. **B.** $y=12x+3$. **C.** $y=24x-27$. **D.** $y=4x+1$.

Câu 42: Cho hàm số $y=x^3+3x^2+4x+m$ có đồ thị (C), $A(3;2)$, $B(-3;1)$. Điểm M thuộc trục hoành thỏa mãn $MA+MB$ nhỏ nhất. Có bao nhiêu giá trị của m để tiếp tuyến của (C) đi qua điểm M tạo với Ox một góc $45°$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 43: Gọi (P) là đồ thị của hàm số $y=x^2+2x+2$ và điểm M di chuyển trên (P). Gọi $(d_1),(d_2)$ là các đường thẳng qua M sao cho (d_1) song song với trục tung và $(d_1),(d_2)$ đối xứng nhau qua tiếp tuyến của (P) tại M. Biết rằng M di chuyển trên (P) thì (d_2) luôn đi qua điểm cố định $I(a;b)$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $3a+2b=0$. **B.** $a+b=0$. **C.** $an=-1$. **D.** $5a+4b=0$.

Câu 44: Cho hàm số $f(x)=x+\frac{1}{x}$. Cho điểm $M(a;b)$ sao cho có đúng hai tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua M, đồng thời hai tiếp tuyến này vuông góc với nhau. Biết điểm M luôn thuộc một đường tròn cố định, bán kính của đường tròn đó là

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 45: Cho hàm số $y=f(x)=x^4-2x^3+x^2$ có đồ thị (C). Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số a để có đúng 2 tiếp tuyến kẻ từ $A=(a;0)$ đến (C). Số phần tử của S là

A. 0. **B.** 4. **C.** 2. **D.** Vô số.

Câu 46: Cho hàm số $y=f(x)=x^4-2x^3+x^2$ có đồ thị (C). Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số a để có đúng 2 tiếp tuyến kẻ từ $A(a;0)$ đến (C). Số phần tử của S là

A. 0. **B.** 4. **C.** 2. **D.** vô số.

Câu 47: Gọi m là giá trị để đồ thị (C_m) của hàm số $y=\frac{x^2+2mx+2m^2-1}{x-1}$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và các tiếp tuyến với (C_m) tại hai điểm này vuông góc với nhau. Khi đó ta có :

A. $m\in(1;2)$. **B.** $m\in(-2;-1)$. **C.** $m\in(0;1)$. **D.** $m\in(-1;0)$.

Câu 48: Trên đường thẳng $d: y=2x+1$ có bao nhiêu điểm có thể kẻ được đến đồ thị $(C): y=\frac{x+3}{x-1}$ đúng một tiếp tuyến.

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** Vô số.

CHƯƠNG 1

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

CHỦ ĐỀ 7 TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ thuộc đồ thị hàm số:

- Cho hàm số $\left(C\right):y=f\left(x\right)$ và điểm $M\left(x_0;y_0\right)\in\left(C\right)$. Viết phương trình tiếp tuyến với đường cong $\left(C\right)$ tại điểm M.
  - **Bước 1:** Tính đạo hàm $f'\left(x\right)$. Tìm hệ số góc của tiếp tuyến là $f'\left(x_0\right)$.
  - **Bước 2:** Phương trình tiếp tuyến tại điểm M là: $y=f'\left(x\right)\left(x-x_0\right)+y_0$.

2. Viết phương trình tiếp tuyến có hệ số góc k cho trước.

- Gọi $\left(\Delta\right)$ là tiếp tuyến cần tìm có hệ số góc k.
- Giả sử $M\left(x_0;y_0\right)$ là tiếp điểm. Khi đó x_0 thỏa mãn: $f'\left(x_0\right)=k \quad (1)$.
- Giải (1) tìm x_0. Suy ra $y_0=f\left(x_0\right)$.
- Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=k\left(x-x_0\right)+y_0$

3. Điều kiện để hai hàm số tiếp xúc

- Cho hai hàm số $\left(C\right):y=f\left(x\right)$ và $\left(C'\right):y=g\left(x\right)$. Đồ thị (C) và (C') **tiếp xúc nhau** khi chỉ khi hệ phương trình: $\begin{cases}f\left(x\right)=g\left(x\right)\\f'\left(x\right)=g'\left(x\right)\end{cases}$ có nghiệm.

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{2x-3}$ tại điểm có hoành độ $x_0=-1$ có hệ số góc bằng bao nhiêu?

A. 5. **B.** $\dfrac{1}{5}$. **C.** $-\dfrac{1}{5}$. **D.** -5.

Lời giải

Chọn C

Ta có : $y=\dfrac{x+1}{2x-3}\Rightarrow y'=\dfrac{-5}{(2x-3)^2}$

Vậy hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0=-1$ là: $y'(-1)=-\dfrac{1}{5}$.

Câu 2: Hàm số $f(x)=x^3-3x^2+4$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm A có hoành độ $x_A=1$ nằm trên (C).

A. $y=-3x+5$. **B.** $y=3x-5$. **C.** $y=-5x+3$. **D.** $y=5x-3$.

Lời giải

Chọn A

Tung độ của điểm A là $y_A=2$

Ta có : $f(x)=x^3-3x^2+4\Rightarrow f'(x)=3x^2-6x\Rightarrow f'(1)=-3$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y-2=-3(x-1)\Leftrightarrow y=-3x+5$.

Câu 3: Hệ số góc của tiếp tuyến tại $A(1;0)$ của đồ thị hàm số $y=-x^3+3x-1$ là

A. 6. **B.** -1. **C.** -6. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'(x)=-3x^2+3$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại $A(1;0)$ của đồ thị hàm số đã cho là: $y'(1)=-3(1)^2+3=0$.

Câu 4: Tìm tất cả các điểm M trên đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ mà tiếp tuyến của đồ thị tại điểm đó song song với đường thẳng $d: y=3x+10$.

A. $M\left(3;\dfrac{1}{4}\right)$. **B.** $M(0;-2)$.

C. $M(0;-2)$ và $M(-2;4)$. **D.** $M\left(-\dfrac{5}{2};3\right)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $M\left(a;1-\dfrac{3}{a+1}\right)$ là điểm thuộc đồ thị.

Ta có $y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}\Rightarrow y'(M)=\dfrac{3}{(a+1)^2}$. Tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y=3x+10$

nên ta suy ra $y'(M)=3\Leftrightarrow \dfrac{3}{(a+1)^2}=3\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=-2 \end{array}\right.$.

Với $a=0$, ta có phương trình tiếp tuyến $y=3x-2$ (nhận).

Với $a=-2$, ta có phương trình tiếp tuyến $y=3x+10$ (loại).

Vậy $M(0;-2)$.

Câu 5: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{1-x}$ và điểm $I(1;-1)$. Tìm tất cả các điểm M nằm trên đồ thị hàm số sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với IM.

A. $M\left(1+\sqrt{2};-1-\sqrt{2}\right)$ và $M\left(1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2}\right)$.

B. $M(-1;0)$ và $M(3;-2)$.

C. $M\left(\sqrt{2};-3-2\sqrt{2}\right)$.

D. $M(2;-3)$ và $M(0;1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=\dfrac{x+1}{1-x}=\dfrac{x-1+2}{1-x}=-1+\dfrac{2}{1-x}$.

Gọi $M\left(a;-1+\dfrac{2}{1-a}\right)$ là điểm thuộc đồ thị. Ta có $\overrightarrow{IM}=\left(a-1;\dfrac{2}{1-a}\right)\Rightarrow k_{IM}=\dfrac{-2}{(a-1)^2}$.

Ta có $y'=\dfrac{2}{(x-1)^2}\Rightarrow y'(M)=\dfrac{2}{(a-1)^2}$. Tiếp tuyến vuông góc với IM nên ta có

Khi đó: $y'(M).k_{IM}=-1\Leftrightarrow \dfrac{2}{(a-1)^2}\dfrac{-2}{(a-1)^2}=-1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1-\sqrt{2} \\ a=1+\sqrt{2} \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M\left(1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2}\right) \\ M\left(1+\sqrt{2};-1-\sqrt{2}\right) \end{array}\right.$.

Câu 6: Qua điểm $M(2;0)$ kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=x^4-4x^2$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Gọi đồ thị hàm số $y=x^4-4x^2$ là (C). Ta có $y'=4x^3-8x$

Gọi $A(x_0;y_0)\in(C)$ là tiếp điểm. Suy ra phương trình tiếp tuyến với (C) tại A là

$y=\left(4x_0^3-8x_0\right)(x-x_0)+x_0^4-4x_0^2$ (d).

Vì (d) đi qua điểm $M(2;0)$ nên $\left(4x_0^3-8x_0\right)(2-x_0)+x_0^4-4x_0^2=0$

$\Leftrightarrow x_0\left(4x_0^2-8\right)(2-x_0)+x_0^2(x_0-2)(x_0+2)=0$

$$\Leftrightarrow x_0\left(2-x_0\right)\left(3x_0^2-2x_0-8\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=2 \\ x_0=-\dfrac{4}{3} \end{array}\right. .$$

Suy ra có 3 tiếp tuyến với (C) đi qua điểm M .

Câu 7: Biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+2$ tại điểm $A(-1;1)$ vuông góc với đường thẳng $x-2y+3=0$. Tính a^2-b^2

A. $a^2-b^2=-2$. **B.** $a^2-b^2=10$. **C.** $a^2-b^2=13$. **D.** $a^2-b^2=-5$.

Lời giải

Chọn D

Vì điểm $A(-1;1)$ thuộc đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+2$ nên $a+b=-1\ (1)$.

Ta có: $y'=4ax^3+2bx$ và $x-2y+3=0 \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$.

Vì tiếp tuyến của đồ thị tại $A(-1;1)$ vuông góc với đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$ nên

$y'(-1).\dfrac{1}{2}=-1 \Leftrightarrow y'(-1)=-2 \Leftrightarrow -4a-2b=-2 \Leftrightarrow 2a+b=1\ (2)$.

Từ (1), (2) ta được hệ phương trình $\begin{cases} a+b=-1 \\ 2a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases}$.

Vậy $a^2-b^2=2^2-(-3)^2=-5$.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

Câu 1: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ tại điểm $A(3;1)$ là

A. $y=-9x-3.$. **B.** $y=9x+2.$ **C.** $y=-9x-26.$ **D.** $y=9x-26.$

Lời giải

Chọn D

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số có dạng:

$y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$, với $(x_0;y_0)$ là tiếp điểm. Ta có $y'=3x^2-6x \Rightarrow f'(3)=y'(3)=9$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ tại điểm $A(3;1)$ là $y=9x-26.$

Câu 2: Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=x^3+x$ tại điểm $M(-1;0)$ là:

A. 4. **B.** 0. **C.** -2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=3x^2+1$.

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số là $k=y'(x_0)=y'(-1)=4$.

Câu 3: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-x^3+2x-1$ tại điểm $M(0;-1)$ có hệ số góc k là

A. $k=-1$. **B.** $k=1$. **C.** $k=2$. **D.** $k=-2$.

Lời giải

Chọn C

$y'=-3x^2+2$.

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-x^3+2x-1$ tại điểm $M(0;-1)$ có hệ số góc: $k=y'(0)=2.$

Câu 4: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị là (C). Biết rằng trên (C) có 2 điểm phân biệt mà các tiếp tuyến của (C) tại các điểm đó song song với đường thẳng $y=x$. Tính tổng hoành độ của 2 điểm đó.

A. 2. **B.** -2. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}\ \forall x\in D$

Vì tiếp tuyến tại $x=x_0$ song song với đường thẳng $y=x$ nên

$$y'(x_0)=1 \Leftrightarrow \frac{3}{(x_0+1)^2}=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=\sqrt{3}-1 \\ x_0=-\sqrt{3}-1 \end{array}\right.$$

Vậy tổng hoành độ của hai điểm cần tìm là $x_{01}+x_{02}=\sqrt{3}-1+(-\sqrt{3}-1)=-2$

Câu 5: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=e^x$ song song đường thẳng $y=x+3$ có phương trình là

A. $y=ex+1$. **B.** $y=x$. **C.** $y=x+e$. **D.** $y=x+1$.

Lời giải

Chọn D

Gọi (d) là tiếp tuyến của đồ thị hàm số và $(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta có: $y'=e^x$

Theo giả thiết: (d) song song với đường thẳng $y=x+3 \Rightarrow k_d=y'(x_0)=1$

$\Leftrightarrow e^{x_0}=1 \Leftrightarrow x_0=0 \Rightarrow y_0=1$.

Vậy phương trình tiếp tuyến $(d): y=x+1$.

Câu 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x-2}$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của đồ thị (C) với trục hoành là

A. $y=x-1$. **B.** $y=-x+1$. **C.** $y=x-2$. **D.** $y=-x+2$.

Lời giải

Chọn B

Giao điểm của đồ thị (C) và trục hoành là $M(1;0)$.

Ta có $f'(x)=\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)'=\dfrac{-1}{(x-2)^2} \Rightarrow f'(1)=-1.$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) với trục hoành là:

$y-0=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y=-x+1.$

Câu 7: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là

A. $y=-24x-40$. **B.** $y=24x+40$. **C.** $y=-24x+40$. **D.** $y=24x-40$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=4x^3-4x$ nên $y'(2)=24$ và $y(2)=8$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số

$y=y'(2)(x-2)+y(2)=24x-40$.

Câu 8: Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ song song với đường thẳng $y=9x+7$ là:

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến.

Ta có: $y'=3x^2-6x$

Khi đó hệ số góc của tiếp tuyến là: $y'(x_0)=3x_0^2-6x_0$.

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=9x+7$ nên:

$$y'(x_0)=3x_0^2-6x_0=9 \Leftrightarrow 3x_0^2-6x_0-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1 \\ x_0=3 \end{array}\right.$$

+ Với $x_0=-1\Rightarrow y_0=-2$: Tiếp tuyến tại điểm $M\left(-1;-2\right)$ có phương trình là:

$y=9\left(x+1\right)-2\Leftrightarrow y=9x+7$ (loại)

+ Với $x_0=3\Rightarrow y_0=2$: Tiếp tuyến tại điểm $N\left(3;2\right)$ có phương trình là:

$y=9\left(x-3\right)+2\Leftrightarrow y=9x-25$ (thỏa mãn)

Vậy có 1 tiếp tuyến thỏa mãn.

Câu 9: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ tại điểm $A\left(3;1\right)$ là

A. $y=-9x-3.$. **B.** $y=9x+2.$ **C.** $y=-9x-26.$ **D.** $y=9x-26.$

Lời giải

Chọn D

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số có dạng:

$y=f'(x_0)\left(x-x_0\right)+y_0,$ với $\left(x_0;y_0\right)$ là tiếp điểm. Ta có $y'=3x^2-6x\Rightarrow f'(3)=y'\left(3\right)=9$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ tại điểm $A\left(3;1\right)$ là $y=9x-26.$

Câu 10: Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ song song với đường thẳng $y=9x+7$ là:

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến.

Ta có: $y'=3x^2-6x$

Khi đó hệ số góc của tiếp tuyến là: $y'\left(x_0\right)=3x_0^2-6x_0$.

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=9x+7$ nên:

$$y'\left(x_0\right)=3x_0^2-6x_0=9\Leftrightarrow 3x_0^2-6x_0-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1\\x_0=3\end{array}\right.$$

+ Với $x_0=-1\Rightarrow y_0=-2$: Tiếp tuyến tại điểm $M\left(-1;-2\right)$ có phương trình là:

$y=9\left(x+1\right)-2\Leftrightarrow y=9x+7$ (loại)

+ Với $x_0=3\Rightarrow y_0=2$: Tiếp tuyến tại điểm $N\left(3;2\right)$ có phương trình là:

$y=9\left(x-3\right)+2\Leftrightarrow y=9x-25$ (thỏa mãn)

Vậy có 1 tiếp tuyến thỏa mãn.

Câu 11: Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4-4x^2$ mà song song với trục Ox là

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm. Vì tiếp tuyến song song với trục hoành nên tiếp tuyến có hệ số góc $y'\left(x_0\right)=0$ và $y\left(x_0\right)\neq 0$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 8x$; $y'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 4x_0^3 - 8x_0 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$

Do $y(\pm\sqrt{2}) = -4 \neq 0$ (thỏa mãn) và $y(0) = 0$ (loại vì khi đó tiếp tuyến trùng với trục hoành) nên có một tiếp tuyến thỏa mãn là $y = -4$.

Câu 12: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x + 3$ tại điểm $M(2;7)$ là

A. $y = x + 5$. **B.** $y = 10x - 27$. **C.** $y = 7x - 7$. **D.** $y = 10x - 13$.

Lời giải

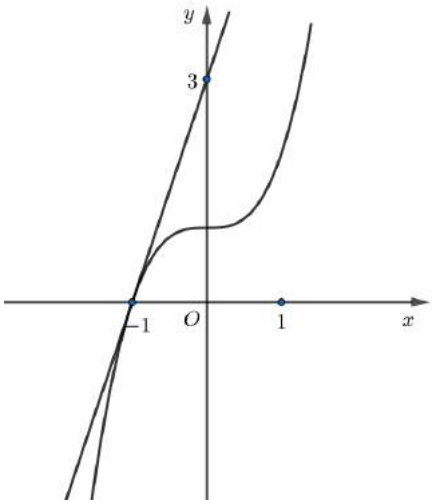
Chọn D

Ta có $y' = 3x^2 - 2 \Rightarrow y'(2) = 10$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(2;7)$ là

$y = y'(2)(x-2) + 7 \Leftrightarrow y = 10(x-2) + 7$ hay $y = 10x - 13$.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $g(x) = x.f(x)$ tại $x = -1$ bằng



A. 1.**B.** -1. **C.** -3. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Gọi phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x = -1$ có dạng $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$.

Ta có: $f'(-1) = k = \dfrac{3-0}{0-(-1)} = 3$. (Vì $k = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$).

Lại có: $g'(x) = f(x) + x.f'(x) \Rightarrow g'(-1) = f(-1) - f'(-1) = 0 - 3 = -3$.

Câu 14: Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, gọi (C) là đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{x-2}$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của đồ thị (C) với trục hoành là

A. $y = x - 1$. **B.** $y = -x + 1$. **C.** $y = x - 2$. **D.** $y = -x + 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có (C) cắt trục hoành tại điểm $A(1;0)$.

Khi đó hệ số góc của tiếp tuyến tại A là $k = y'(1) = -1$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm có dạng: $y = -1(x-1)+0$ hay $y = -x+1$.

Câu 15: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x-2}{x+1}$ tại điểm $A(4;2)$ cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại M và N. Tính diện tích tam giác OMN.

A. $S_{\Delta OMN} = \dfrac{6}{5}$. **B.** $S_{\Delta OMN} = \dfrac{18}{5}$. **C.** $S_{\Delta OMN} = \dfrac{36}{5}$. **D.** $S_{\Delta OMN} = \dfrac{5}{18}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = \dfrac{5}{(x+1)^2} \Rightarrow y'(4) = \dfrac{1}{5}$.

Phương trình tiếp tuyến tại $A(4;2)$ là $d: y-2 = \dfrac{1}{5}(x-4) \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{6}{5}$.

Từ đó ta có $M(-6;0)$ và $N\left(0;-\dfrac{6}{5}\right)$ nên $S_{\Delta OMN} = \dfrac{1}{2}OM \cdot ON = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{6}{5}\cdot|-6| = \dfrac{18}{5}$.

Suy ra: **Chọn B**

Câu 16: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x = 2$.

A. $y = x-7$. **B.** $y = -3x+11$. **C.** $y = -3x+9$. **D.** $y = -x+7$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có: $y(2) = 5$

$y' = \dfrac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow y'(2) = -3$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -3(x-2)+5 \Leftrightarrow y = -3x+11$.

Câu 17: Cho hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 3$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến với (C) tại điểm cực trị của nó có phương trình là

A. $x = -3$. **B.** $x = 3$. **C.** $y = 3$. **D.** $y = -3$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = 4x^3 + 4x = 4x(x^2+1)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = -3$.

Đồ thị hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 3$ có một điểm cực trị là $M(0;-3)$.

$y'(0) = 0$.

Tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm $M(0;-3)$ có phương trình là: $y = -3$.

Câu 18: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=5^x$ tại điểm có hoành độ bằng 0 là:

A. $y=x+1$. **B.** $y=(\ln 5)x+1$. **C.** $y=(\ln 5)x$. **D.** $y=x$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y(0)=1,\ y'=5^x\ln 5\Rightarrow y'(0)=\ln 5$.

PTTT tại điểm có hoành độ bằng 0 là: $y=(\ln 5)x+1$.

Câu 19: Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{2x-1}$ có đồ thị (C). Gọi Δ là tiếp tuyến thay đổi của đồ thị (C). Khoảng cách từ giao điểm hai đường tiệm cận của đồ thị (C) đến đường thẳng Δ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** 1. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

TCĐ: $x=\dfrac{1}{2}$ và TCN: $y=\dfrac{1}{2}$. Suy ra $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

$y'=\dfrac{1}{(2x-1)^2}$. PTTT tại điểm $M(x_0,y_0)$ là $\Delta: y=\dfrac{1}{(2x_0-1)^2}(x-x_0)+\dfrac{x_0+1}{2x_0-1}$

$\Leftrightarrow x-(2x_0-1)^2y+2x_0^2-1=0$

Khoảng cách từ $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ đến tiếp tuyến là

$$d(I;\Delta)=\frac{\left|\frac{1}{2}-(2x_0-1)^2.\frac{1}{2}+2x_0^2-1\right|}{\sqrt{1^2+(2x_0-1)^4}}=\frac{|2x_0-1|}{\sqrt{1^2+(2x_0-1)^4}}$$

Áp dụng bất đẳng thức cosi ta có $\dfrac{|2x_0-1|}{\sqrt{1^2+(2x_0-1)^4}}\le\dfrac{|2x_0-1|}{\sqrt{2(2x_0-1)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Suy ra $d(I;\Delta)$ lớn nhất bằng $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi $(2x_0-1)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=1\end{array}\right.$.

Câu 20: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3+4x^2+4x+1$ tại điểm $A(-3;-2)$ cắt đồ thị hàm số tại điểm thứ hai là B. Điểm B có tọa độ là

A. $B(2;33)$. **B.** $B(-1;0)$. **C.** $B(-2;1)$. **D.** $B(1;10)$.

Lời giải

Chọn A

$y'=3x^2+8x+4;\ y'(-3)=7$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3+4x^2+4x+1$ tại điểm $A(-3;-2)$ là:

$y=7(x+3)-2\Leftrightarrow y=7x+19$.

Tiếp tuyến tại $A(-3;-2)$ có phương trình $\Delta: y=7x+19$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng Δ với đồ thị hàm số $y=x^3+4x^2+4x+1$

$$x^3+4x^2+4x+1=7x+19 \Leftrightarrow x^3+4x^2-3x-18=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3; y=-2 \\ x=2; y=33 \end{array}\right.$$

Vậy tọa độ điểm $B(2;33)$.

Câu 21: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(1)=2$ và $f'(x)+\dfrac{f(x)}{x}=4x^2+3x.$ Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=-1$ là

A. $y=x+1.$ **B.** $y=-x-1.$ **C.** $y=x-1.$ **D.** $y=-x+1.$

Lời giải

Chọn A

Có $f'(x)+\dfrac{f(x)}{x}=4x^2+3x \Leftrightarrow x.f'(x)+f(x)=4x^3+3x^2 \Leftrightarrow (x.f(x))'=4x^3+3x^2.$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được: $\int (x.f(x))'.dx=\int (4x^3+3x^2)dx \Rightarrow x.f(x)=x^4+x^3+C.$

Với $x=1$ ta có $1.f(1)=2+C$ hay $1.2=2+C \Rightarrow C=0.$

Do đó ta có $x.f(x)=x^4+x^3 \Rightarrow f(x)=x^3+x^2$. Suy ra $f'(x)=3x^2+2x.$

Với $x=-1 \Rightarrow f'(-1)=1$ và $f(-1)=0.$

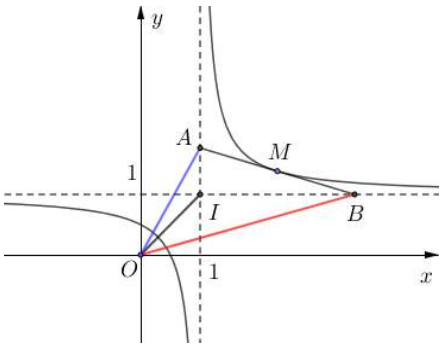
Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tai điểm có hoành độ $x=-1$ là $y=1.(x+1)+0 \Rightarrow y=x+1.$

Câu 22: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{2x-2}$ có đồ thị (C). Gọi $M(x_0;y_0)$ (với $x_0>1$) là điểm thuộc (C), biết tiếp tuyến của (C) tại M cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại A và B sao cho $S_{\Delta OIB}=8S_{\Delta OIA}$ (trong đó O là gốc tọa độ, I là giao điểm hai tiệm cận). Tính giá trị của $S=x_0+4y_0.$

A. $S=8.$ **B.** $S=\dfrac{17}{4}.$ **C.** $S=\dfrac{23}{4}.$ **D.** $S=2.$

Lời giải

Chọn A



Tập xác định: $\mathbb{R}\setminus\{1\}.$

Tiệm cận đứng: $x=1$ (d_1), tiệm cận ngang: $y=1$ (d_2) $\Rightarrow I(1;1).$

Ta có $y' = \dfrac{-2}{(2x-2)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến Δ tại điểm $M(x_0;y_0)$ có dạng $y = \dfrac{-2}{(2x_0-2)^2}(x-x_0) + \dfrac{2x_0-1}{2x_0-2}$.

$A = \Delta \cap d_1 \Rightarrow A\left(1; \dfrac{x_0}{x_0-1}\right)$. $B = \Delta \cap d_2 \Rightarrow B(2x_0-1;1)$.

$\overrightarrow{IB} = (2x_0-2;0)$, $\overrightarrow{IA} = \left(0; \dfrac{1}{x_0-1}\right)$.

Ta có $S_{\Delta OIB} = 8S_{\Delta OIA} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}d(O,d_2).IB = 8.\dfrac{1}{2}d(O,d_1).IA$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}.1.IB = 8.\dfrac{1}{2}1.IA \Leftrightarrow IB = 8IA \Leftrightarrow |2x_0-2| = 8\left|\dfrac{1}{x_0-1}\right|$

$\Leftrightarrow (x_0-1)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 3 \\ x_0 = -1 \end{array}\right.$, do $x_0 > 1 \Rightarrow x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = \dfrac{5}{4}$.

$\Rightarrow S = x_0 + 4y_0 = 3 + 4.\dfrac{5}{4} = 8$.

Câu 23: Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}(C)$. Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(2;1)$ cắt các đường tiệm cận của đồ thị (C) tạo thành tam giác có diện tích S bằng

A. $S = 2$. **B.** $S = 6$. **C.** $S = 12$. **D.** $S = 1$.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị $y = \dfrac{2x-1}{x+1}(C)$ có các đường tiệm cận đứng $d_1 : x = -1$, đường tiệm cận ngang $d_2 : y = 2$

Ta có $y' = \dfrac{3}{(x+1)^2}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(2;1)$:

$y = y'(2).(x-2)+1 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3}$ (Δ)

Gọi $A = d_1 \cap \Delta$, tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình

$\begin{cases} y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3} \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-1;0)$

tương tự $B = d_2 \cap \Delta \Rightarrow B(5;2)$, $I = d_1 \cap d_2 \Rightarrow I(-1;2)$.

Đường tiếp tuyến tạo với 2 đường tiệm cận tam giác IAB vuông tại I.

$\overrightarrow{IA} = (0;-2) \Rightarrow IA = 2$, $\overrightarrow{IB} = (6;0) \Rightarrow IB = 6$

Diện tích tam giác IAB là $S = \dfrac{1}{2}IA.IB = \dfrac{1}{2}.2.6 = 6$ (đvdt).

Câu 24: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 2x + m$ có đồ thị (C). Biết tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của đồ thị (C) với trục tung cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+4}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B. Với giá

trị nào của tham số m thì độ dài AB ngắn nhất?

A. $m\in(-3;-2)$. **B.** $m\in(-2;-1)$. **C.** $m\in(1;2)$. **D.** $m\in(-1;1)$.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị (C) cắt trục tung tại điểm $(0;m)$ và $f'(0)=2$.

Vậy tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $(0;m)$ có phương trình là $y=2x+m$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+4}{x-1}$ và đường thẳng $y=2x+m$ là: $\dfrac{2x+4}{x-1}=2x+m\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\2x^2+(m-4)x-4-m=0\quad(*)\end{cases}$.

Đường thẳng $y=2x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+4}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt khi $(*)$ có hai nghiệm phân biệt và khác 1 $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\2.1^2+(m-4).1-4-m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\Delta>0\Leftrightarrow m^2+48>0,\forall m$.

Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $(*)$ suy ra $A(x_1;2x_1+m),B(x_2;2x_2+m)$.

Ta có $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+4(x_2-x_1)^2}=\sqrt{5\left[(x_2+x_1)^2-4x_1x_2\right]}=\sqrt{5\left[\dfrac{(m-4)^2}{4}+2(m+4)\right]}$

$=\sqrt{5\left(\dfrac{m^2+48}{4}\right)}\geq 2\sqrt{15}$. Dấu "=" xảy ra khi $m=0$.

Câu 25: Xét điểm M có hoành độ là số nguyên thuộc đồ thị $(C):y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M cắt đường tiệm cận ngang của (C) tại điểm A. Hỏi có bao nhiêu điểm M thỏa điều kiện A cách gốc tọa độ một khoảng cách nhỏ hơn $2\sqrt{10}$?

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=-\dfrac{3}{(x-1)^2},\forall x\neq 1.$

Giả sử $M(a;b)\in(C)$. Khi đó $b=\dfrac{2a+1}{a-1}$ với $a\in\mathbb{Z},a\neq 1$.

Tiếp tuyến với (C) tại điểm M có phương trình là

$\Delta:y=-\dfrac{3}{(a-1)^2}.(x-a)+\dfrac{2a+1}{a-1}$.

Đồ thị (C) có TCN là đường thẳng $d:y=2$.

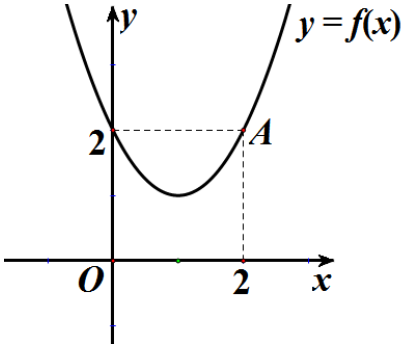
Ta có $\Delta\cap d=A(2a-1;2)$.

Theo bài ra ta có $OA<2\sqrt{10}\Leftrightarrow(2a-1)^2+4<40$

$\Leftrightarrow 4a^2-4a-35<0\Leftrightarrow a\in\left(-\dfrac{5}{2};\dfrac{7}{2}\right)$.

Do $a\in\mathbb{Z}, a\neq 1\Rightarrow a\in\{-2;-1;0;2;3\}$. Vậy có 5 điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (P) như hình bên và đường thẳng $\Delta: y=2x-2$ là tiếp tuyến của (P) tại điểm A. Xét hàm số $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$. Tính $g'(2)$.



A. $g'(2)=\dfrac{1}{2}$. **B.** $g'(2)=\dfrac{1}{4}$. **C.** $g'(2)=-\dfrac{1}{4}$. **D.** $g'(2)=-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $y=f(x)=ax^2+bx+c$, với a,b,c là các số thực và $a>0$.

Vì (P) đi qua các điểm $A(2;2), B(0;2)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}2=4a+2b+c\\2=c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+b=0\\c=2\end{cases},\ (1).$$

Vì đường thẳng $\Delta: y=2x-2$ là tiếp tuyến của (P) tại điểm A nên ta có

$f'(2)=2\Leftrightarrow 4a+b=2,(2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases}a=1\\b=-2\\c=2\end{cases}$.

Ta có $y=f(x)=x^2-2x+2$ suy ra $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{x^2-2x+2}{x}=x-2+\dfrac{2}{x}$.

Ta có $g'(x)=1-\dfrac{2}{x^2}\Rightarrow g'(2)=1-\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 27: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, giả sử đồ thị (G) của hàm số $y=\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^x}{\ln 3}$ cắt trục tung tại điểm A và tiếp tuyến của (G) tại A cắt trục hoành tại điểm B. Tính diện tích của tam giác OAB (kết quả làm tròn đến hang phần nghìn).

A. $0,603$. **B.** $0,414$ **C.** $0,829$. **D.** $1,207$.

Lời giải

Chọn C

Cho $x=0\Rightarrow y=\dfrac{1}{\ln 3}=\log_3 e$. Khi đó $A(0;\log_3 e)$.

Ta có $y'=\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^x\ln\sqrt{3}}{\ln 3}=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right)^x$.

Tiếp tuyến của (G) tại A có phương trình dạng:

$y = y'(0)(x-0) + y(0) = \frac{1}{2}x + \log_3 e$.

Tiếp tuyến của (G) tại A cắt trục hoành tại điểm B nên $B(-2\log_3 e; 0)$.

Diện tích tam giác OAB là:

$S = \frac{1}{2}.OA.OB = \frac{1}{2}.\log_3 e.|-2\log_3 e| \approx 0,829$ (đvdt).

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x$ có đồ thị (C) và hàm số $y = g(x) = x^2$ có đồ thị (P). Hỏi hai đồ thị (C) và (P) có tất cả bao nhiêu tiếp tuyến chung?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Gọi $A(a; a^2)$ thuộc đồ thị (P). Phương trình tiếp tuyến tại A có dạng $y = g'(a)(x-a) + a^2$.

Hay $y = 2a(x-a) + a^2 = 2ax - a^2\ (d)$.

Để (d) là tiếp tuyến của (C) thì (d) và (C) phải tiếp xúc với nhau.

Ta có điều kiện tiếp xúc: $\begin{cases} x^3 - 3x = 2ax - a^2 & (1) \\ 3x^2 - 3 = 2a & (2) \end{cases}$.

Thế (2) vào (1) ta được $x^3 - 3x = (3x^2 - 3)x - \left(\frac{3x^2-3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^3 - 3x = 3x^3 - 3x - \frac{9x^4 - 18x^2 + 9}{4}$

$\Leftrightarrow 9x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \approx 1,82 \\ x \approx 0,68 \end{array}\right.$.

Vậy hai đồ thị (C) và (P) có tất cả hai tiếp tuyến chung.

Câu 29: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x+2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = -2x + m - 1$ (m là tham số thực). Gọi k_1, k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của d và (C). Tính tích $k_1.k_2$.

A. $k_1.k_2 = 2$. **B.** $k_1.k_2 = \frac{1}{4}$. **C.** $k_1.k_2 = 4$. **D.** $k_1.k_2 = 3$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $\frac{x+1}{x+2} = -2x + m - 1 \Leftrightarrow 2x^2 + (6-m)x + 3 - 2m = 0 (x \neq -2) (1)$

Đặt $f(x) = 2x^2 + (6-m)x + 3 - 2m$. Ta có $f(-2) = -1 \neq 0$. $\Delta = m^2 + 4m + 12 > 0, \forall m$.

Vậy phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2. Theo Viet ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m-6}{2} \\ x_1.x_2 = \frac{3-2m}{2} \end{cases}$$

Từ $y = \frac{x+1}{x+2}$ ta có $y' = \frac{1}{(x+2)^2}$. Do đó ta có $k_1 = \frac{1}{(x_1+2)^2}; k_2 = \frac{1}{(x_2+2)^2}$.

$k_1.k_2 = \dfrac{1}{(x_1+2)^2(x_2+2)^2} = \dfrac{1}{\left[x_1.x_2+2(x_1+x_2)+4\right]^2} =$

Mà $\left[x_1.x+2(x_1+x_2)+4\right]^2 = \left(\dfrac{3-2m}{2}+\dfrac{2m-12}{2}+4\right)^2 = \dfrac{1}{4}$.

Vậy $k_1.k_2 = 4$.

Câu 30: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2-3x+4}{x-1}$ và (P) là Parabol có phương trình $y = \mathrm{a}x^2+bx-8$. Biết từ điểm $A(4;1)$ kẻ được hai tiếp tuyến với (C). Gọi $k_1;k_2$ là hệ số góc của hai tiếp tuyến đó và gọi I là đỉnh của (P). Khi (P) đi qua $M(k_1;0), N(k_2;0)$, tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN.

A. $R = \dfrac{47}{100}$. **B.** $R = \dfrac{9}{2}$. **C.** $R = \dfrac{12}{25}$. **D.** $R = \dfrac{161}{36}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $y = \dfrac{x^2-3x+4}{x-1} = x-2+\dfrac{2}{x-1} \Rightarrow y' = 1-\dfrac{2}{(x-1)^2}$

Gọi $Q(x_0;y_0), y_0 = x_0-2+\dfrac{2}{x_0-1}$

Giả sử phương trình tiếp tuyến của (C) tại Q có dạng $y = f'(x_0).(x-x_0)+y_0$.

Vì tiếp tuyến đi qua $A(4;1)$ nên: $1 = f'(x_0).(4-x_0)+y_0$.

$\Leftrightarrow 1 = \left[1-\dfrac{2}{(x_0-1)^2}\right].(4-x_0)+x_0-2+\dfrac{2}{x_0-1}$

$\Leftrightarrow x_0^2-2x_0+1 = (x_0^2-2x_0-1).(4-x_0)+(x_0^2-3x_0+4)(x_0-1)$

$\Leftrightarrow x_0^2-2x_0+1 = -x_0^3+6x_0^2-7x_0-4+x_0^3-4x_0^2+7x_0-4 \Leftrightarrow x_0^2+2x_0-9 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1+\sqrt{10} \Rightarrow k_1 = \dfrac{2-2\sqrt{10}}{9} \\ x_0 = -1-\sqrt{10} \Rightarrow k_1 = \dfrac{2+2\sqrt{10}}{9} \end{array}\right. \Rightarrow M\left(\dfrac{2-2\sqrt{10}}{9};0\right), N\left(\dfrac{2+2\sqrt{10}}{9};0\right)$

Vì (P) đi qua $M\left(\dfrac{2-2\sqrt{10}}{9};0\right), N\left(\dfrac{2+2\sqrt{10}}{9};0\right)$ nên

$\begin{cases} a\left(\dfrac{2-2\sqrt{10}}{9}\right)^2+b\left(\dfrac{2-2\sqrt{10}}{9}\right)-8 = 0 \\ a\left(\dfrac{2+2\sqrt{10}}{9}\right)^2+b\left(\dfrac{2+2\sqrt{10}}{9}\right)-8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 18 \\ b = -8 \end{cases}$

Do đó Parabol cần tìm là $y = 18x^2-8x-8$.

Tọa độ đỉnh $I\left(\dfrac{2}{9};\dfrac{-80}{9}\right)$.

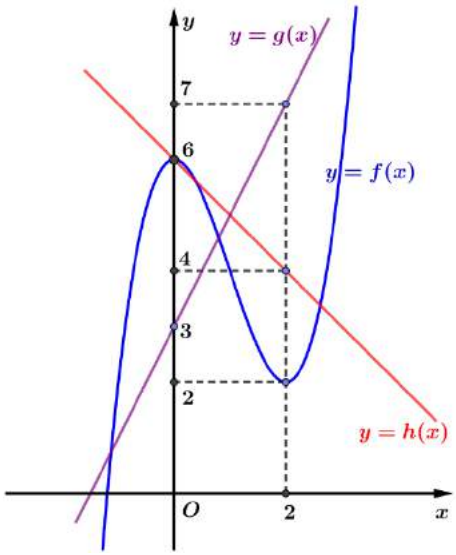
Phương trình đường thẳng $MN: y = 0$.

$d\left(I,MN\right)=\dfrac{80}{9};MN=\dfrac{4\sqrt{10}}{9},\ MI=\dfrac{\sqrt{664}}{9},NI=\dfrac{\sqrt{664}}{9}$

$S_{IMN}=\dfrac{1}{2}.MN.d\left(I,MN\right)=\dfrac{1}{2}.\dfrac{4\sqrt{10}}{9}.\dfrac{80}{9}=\dfrac{160\sqrt{10}}{81}$

$R=\dfrac{MN.MI.NI}{4S_{IMN}}=\dfrac{161}{36}$

Câu 31: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hai đường thẳng $\Delta_1:y=h\left(x\right)$ và $\Delta_2:y=g\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hệ số góc k của tiếp tuyến với đồ thị $\left(C'\right):y=\dfrac{f\left(x\right).h\left(x\right)}{g\left(x\right)}$ tại điểm có hoành độ $x=2$ có dạng $k=\dfrac{a}{b}$ (với $a\in\mathbb{Z};b\in\mathbb{N}$ và $\dfrac{a}{b}$ tối giản). Khi đó $a+b$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(15;25\right)$. **B.** $\left(-20;10\right)$. **C.** $\left(60;80\right)$. **D.** $\left(-30;-21\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\left(C'\right):y=\dfrac{f\left(x\right).h\left(x\right)}{g\left(x\right)}\Rightarrow y'=\dfrac{\left[f'\left(x\right).h\left(x\right)+f\left(x\right).h'\left(x\right)\right].g\left(x\right)-f\left(x\right).h\left(x\right).g'\left(x\right)}{\left[g\left(x\right)\right]^2}$.

Dựa vào đồ thị ta có $g\left(x\right)=2x+3,\ h\left(x\right)=-x+6$ và $\begin{cases}f\left(2\right)=2;g\left(2\right)=7;h\left(2\right)=4\\f'\left(2\right)=0;g'\left(2\right)=2;h'\left(2\right)=-1\end{cases}$.

Hệ số góc k của tiếp tuyến với đồ thị $\left(C'\right):y=\dfrac{h\left(x\right).g\left(x\right)}{f\left(x\right)}$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là

$k=y'\left(2\right)=\dfrac{\left[f'\left(2\right).h\left(2\right)+f\left(2\right).h'\left(2\right)\right].g\left(2\right)-f\left(2\right).h\left(2\right).g'\left(2\right)}{\left[g\left(2\right)\right]^2}=\dfrac{-30}{49}$.

Như vậy $k=\dfrac{-30}{49}=\dfrac{a}{b}\Rightarrow\begin{cases}a=-30\\b=49\end{cases}\Rightarrow a+b=19$.

Câu 32: Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=3x+m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=x^3+1$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

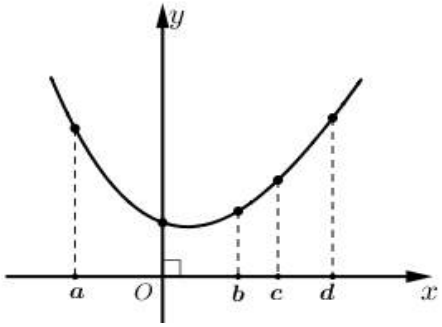
Để đường thẳng $y=3x+m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=x^3+1$ khi và chỉ khi $\begin{cases}x^3+1=3x+m\\3x^2=3\end{cases}$

(1) có nghiệm.

Giải hệ (1) $\begin{cases}x^3+1=3x+m\\3x^2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=x^3-3x+1\\\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=3\end{array}\right.$

Vậy tổng các giá trị m là: $-1+3=2$.

Câu 33: Cho $f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi $S=\{f'(a),f'(b),f'(c),f'(d),f'(0)\}$. Phần tử lớn nhất trong tập hợp S là:



A. $f'(a)$. **B.** $f'(b)$. **C.** $f'(0)$. **D.** $f'(d)$.

Lời giải

Gọi α, β lần lượt là góc tạo bởi tiếp tuyến tại c,d.

$$\Rightarrow\begin{cases}f'(c)=\tan\alpha\\f'(d)=\tan\beta\Rightarrow 0<f'(c)<f'(d).\\\alpha<\beta\end{cases}$$

Vậy phần tử lớn nhất trong tập hợp S là: $f'(d)$.

Câu 34: Cho biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là $y=2x-1$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f\left(2x^2-1\right)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là

A. $y=4x-3$. **B.** $y=5x-4$. **C.** $y=8x-7$. **D.** $y=6x-5$.

Lời giải

Chọn C

Theo đề, ta có $f'(1)=2$ và tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=1$ là $y=2(x-1)+f(1)=2x+f(1)-2$, suy ra $f(1)=1$.

Xét hàm số $y=f\left(2x^2-1\right)$. Ta có $y'=4xf'\left(2x^2-1\right)$. Suy ra $y'(1)=4f'(1)=8$.

Từ đây ta loại ba đáp án **A, B, D.**

Câu 35: Cho hàm số $y=x^4-2x^2$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại $B(x_2;y_2)$ với B khác A thỏa $y_2-y_1=-24(x_2-x_1)$. Số điểm A thỏa mãn là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Tiếp tuyến của (C) tại A có phương trình $y-y_1=y'(x_1).(x-x_1)$

Do B thuộc tiếp tuyến của (C) tại A nên $y_2-y_1=y'(x_1)(x_2-x_1)$

$\Rightarrow y'(x_1)=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-24$.

Do đó x_1 là nghiệm của phương trình $4x^3-4x=-24\Leftrightarrow x^3-x+6=0\Leftrightarrow x=-2$

Từ đó suy ra có duy nhất điểm A thỏa mãn bài toán.

Câu 36: Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(0;a)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của a trong đoạn $[-2018;2018]$ để từ A kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía của trục hoành

A. 2019. **B.** 2020. **C.** 2017. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=-\dfrac{3}{(x-1)^2}$.

Tiếp tuyến với đồ thị (C) qua $A(0;a)$ là $(\Delta):y=kx+a$.

(Δ) tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{x+2}{x-1}=kx+a\\ -\dfrac{3}{(x-1)^2}=k\end{cases}$ $(*)$ có nghiệm.

Từ hệ $(*)$ ta có $\dfrac{x+2}{x-1}=-\dfrac{3x}{(x-1)^2}+a\Leftrightarrow(a-1)x^2-2(2+a)x+2+a=0$ $(**)$.

Yêu cầu bài toán là tìm a để phương trình $(**)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa $\dfrac{x_1+2}{x_1-1}.\dfrac{x_2+2}{x_2-1}<0$.

Ta có $\begin{cases}S=x_1+x_2=\dfrac{2+a}{a-1}\\ P=x_1x_2=\dfrac{2(2+a)}{a-1}\end{cases}$.

Yêu cầu bài toán tương đương $\begin{cases}a\neq1\\ \Delta'>0\\ \dfrac{P+2S+4}{P-S+1}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq1\\ 3a+6>0\\ \dfrac{9a+6}{-3}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq1\\ a>-2\\ a>-\dfrac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq1\\ a>-\dfrac{2}{3}\end{cases}$.

Do m nguyên thuộc đoạn $[-2018;2018]$ nên $m\in\{0;2;3;4;\ldots;2018\}$.

Vậy có 2018 giá trị thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 37: Cho hàm số $y=x^4-2x^2$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại $B(x_2;y_2)$ với B khác A thỏa $y_2-y_1=-24(x_2-x_1)$. Số điểm A thỏa mãn là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Tiếp tuyến của (C) tại A có phương trình $y-y_1=y'(x_1).(x-x_1)$

Do B thuộc tiếp tuyến của (C) tại A nên $y_2-y_1=y'(x_1)(x_2-x_1)$

$\Rightarrow y'(x_1)=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-24$.

Do đó x_1 là nghiệm của phương trình $4x^3-4x=-24\Leftrightarrow x^3-x+6=0\Leftrightarrow x=-2$

Từ đó suy ra có duy nhất điểm A thỏa mãn bài toán.

Câu 38: Tìm điểm M có hoành độ âm trên đồ thị $(C):y=\dfrac{1}{3}x^3-x+\dfrac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $d:y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$.

A. $M(-2;-4)$. **B.** $M\left(-1;\dfrac{4}{3}\right)$. **C.** $M(-2;0)$. **D.** $M\left(2;-\dfrac{4}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng $d:y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$ có hệ số góc $-\dfrac{1}{3}$ cho nên tiếp tuyến có hệ số góc bằng 3.

Gọi tọa độ của M là $M(x_0;y_0)$ thì hệ số góc của tiếp tuyến tại M bằng $y'(x_0)=x_0^2-1$.

Từ đó ta có $x_0^2-1=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=2\\x_0=-2\end{array}\right.$.

Theo giả thiết, điểm M có hoành độ âm nên $x_0=-2$. Vậy tọa độ $M(-2;0)$.

Câu 39: Cho đa thức $f(x)$ với hệ số thực và thỏa mãn điều kiện $2f(x)+f(1-x)=x^2,\forall x\in\mathbb{R}$. Biết tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=1$ của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác. Tính diện tích của tam giác đó?

A. $\dfrac{1}{6}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $2f(x)+f(1-x)=x^2,\forall x\in\mathbb{R}\ \ (1)$.

Đặt $t=1-x\Rightarrow 2f(1-t)+f(t)=(1-t)^2,\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow 2f(1-t)+f(x)=(1-x)^2,\forall t\in\mathbb{R}\ \ (2)$.

Từ (1) và (2) ta có: $\begin{cases}2f(x)+f(1-x)=x^2\\2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2\end{cases}\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{3}(x^2+2x-1)$.

Suy ra: $f(1)=\dfrac{2}{3};f'(1)=\dfrac{4}{3}$

Suy ra phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là: $y=\frac{4}{3}(x-1)+\frac{2}{3}\Leftrightarrow y=\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}$

Tiếp tuyến cắt trục hoành tại $A\left(\frac{1}{2};0\right)$ và cắt trục tung tại $B\left(0;-\frac{2}{3}\right)$

Suy ra diện tích tam giác OAB là: $S=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\left|-\frac{2}{3}\right|=\frac{1}{6}$.

Câu 40: Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e(a\neq 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng (C) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt là $A(x_1;0),B(x_2;0),C(x_3;0),D(x_4;0)$; với x_1,x_2,x_3,x_4 theo thứ tự lập thành cấp số cộng và hai tiếp tuyến của (C) tại A,B vuông góc với nhau. Khi đó, giá trị của biểu thức $P=\left[f'(x_3)+f'(x_4)\right]^{2022}$ bằng

A. $\left(\frac{4}{3}\right)^{1011}$. **B.** $\left(\frac{4}{3}\right)^{2022}.+\left(\frac{4a}{3}\right)^{1011}$. **D.** $\left(\frac{4a}{3}\right)^{2022}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: x_1,x_2,x_3,x_4 là bốn nghiệm phân biệt của phương trình $f(x)=0$

$\Rightarrow f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$. Gọi m là công sai của cấp số cộng

$f'(x)=a(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)+(x-x_1)\left[a(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\right]'$

$\Rightarrow f'(x_1)=a(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)=a(x_1-x_1-m)(x_1-x_1-2m)(x_1-x_1-3m)=-6am^3$

Tương tự: $f'(x_2)=2am^3;f'(x_3)=-2am^3;f'(x_4)=6am^3$

Tiếp tuyến của (C) tại A,B vuông góc với nhau $\Rightarrow f'(x_1).f'(x_2)=-1\Rightarrow a^2m^6=\frac{1}{12}$

Do đó: $P=\left[f'(x_3)+f'(x_4)\right]^{2022}=\left(-2am^3+6am^3\right)^{2022}=\left(4am^3\right)^{2022}=\left(16a^2m^6\right)^{1011}=\left(\frac{4}{3}\right)^{1011}$.

Câu 41: Cho các hàm số $y=f(x);y=f(f(x));y=f(x^2+2x-1)$ có đồ thị lần lượt là $(C_1);(C_2);(C_3)$. Đường thẳng $x=2$ cắt $(C_1);(C_2);(C_3)$ lần lượt tại A,B,C. Biết phương trình tiếp tuyến của (C_1) tại A và của (C_2) tại B lần lượt là $y=2x+3$ và $y=8x+5$. Phương trình tiếp tuyến của (C_3) tại C là

A. $y=8x-9$. **B.** $y=12x+3$. **C.** $y=24x-27$. **D.** $y=4x+1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $A(2;f(2));B(2;f(f(2)));C(2;f(7))$.

Khi đó phương trình tiếp tuyến của (C_1) tại A là $y=f'(2)(x-2)+f(2)=2x+3$ nên $f'(2)=2$ và $f(2)=7$.

Phương trình tiếp tuyến của (C_2) tại B là $y=f'(2)f'(f(2))(x-2)+f(f(2))=8x+5$ nên $f'(7)=4$ và $f(7)=21$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của (C_3) tại C là $y=6f'(7)(x-2)+f(7)=24x-27$.

Câu 42: Cho hàm số $y=x^3+3x^2+4x+m$ có đồ thị (C), $A(3;2)$, $B(-3;1)$. Điểm M thuộc trục hoành thỏa mãn $MA+MB$ nhỏ nhất. Có bao nhiêu giá trị của m để tiếp tuyến của (C) đi qua điểm M tạo với Ox một góc $45°$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Gọi $M(a;0)$ thuộc trục hoành. Lấy điểm $A'(3;-2)$ là điểm đối xứng của A qua Ox.

Vì $MA+MB=MA'+MB\geq A'B$ nên $MA+MB$ nhỏ nhất khi M là giao điểm của $A'B$ và Ox.

Ta có $\overrightarrow{A'B}=(6;-3)=3(2;-1)\Rightarrow \overrightarrow{n_{A'B}}=(1;2)$.

Suy ra phương trình $A'B$ là $1.(x+3)+2(y-1)=0\Leftrightarrow x+2y+1=0$. Do đó $M(-1;0)$.

Gọi phương trình tiếp tuyến đi qua M có dạng $y=k(x+1)$ có đồ thị (d).

Theo bài ra (d) tạo với Ox một góc $45°$, suy ra $|k|=\tan 45°=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=1\\k=-1\end{array}\right.$.

Điều kiện tiếp xúc của (d) và (C) là $\begin{cases}x^3+3x^2+4x+m=k(x+1)\\3x^2+6x+4=k\end{cases}$

$\Rightarrow m=(3x^2+6x+4).(x+1)-(x^3+3x^2+4x)=2x^3+6x^2+6x+4\ (1)$.

Trường hợp 1: Khi $k=1\Leftrightarrow 3x^2+6x+4=1\Leftrightarrow x=-1$, thay vào (1) ta được $m=2$.

Trường hợp 2: Khi $k=-1\Leftrightarrow 3x^2+6x+4=-1\Leftrightarrow 3x^2+6x+5=0$, phương trình vô nghiệm.

Vậy có 1 giá trị m thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 43: Gọi (P) là đồ thị của hàm số $y=x^2+2x+2$ và điểm M di chuyển trên (P). Gọi $(d_1),(d_2)$ là các đường thẳng qua M sao cho (d_1) song song với trục tung và $(d_1),(d_2)$ đối xứng nhau qua tiếp tuyến của (P) tại M. Biết rằng M di chuyển trên (P) thì (d_2) luôn đi qua điểm cố định $I(a;b)$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $3a+2b=0$. **B.** $a+b=0$. **C.** $an=-1$. **D.** $5a+4b=0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y=x^2+2x+2\Rightarrow y'=2x+2$.

Gọi $M(m;m^2+2m+2)$, phương trình tiếp tuyến tại M có dạng:

$\Delta: y=(2m+2)(x-m)+m^2+2m+2=(2m+2)x-m^2+2$.

Ta có $d_1: x=m\Rightarrow \cos(d_1;\Delta)=\dfrac{|2m+2|}{\sqrt{(2m+2)^2+1}}$

Gọi $d_2: y=kx+n\Rightarrow \cos(d_2;\Delta)=\dfrac{|k(2m+2)+1|}{\sqrt{(2m+2)^2+1}.\sqrt{a^2+1}}$

$\Rightarrow |k(2m+2)+1|=|2m+2|\sqrt{a^2+1}$

$\Leftrightarrow k=\dfrac{4m^2+8m+3}{2(2m+2)}\Rightarrow n=\dfrac{4m^2+13m+8}{4m+4}.$

$\Rightarrow d_2: y=\dfrac{4m^2+8m+3}{4m+4}x+\dfrac{4m^2+13m+8}{4m+4}$

Với $x=-1\Rightarrow y=\dfrac{5m+5}{4m+4}=\dfrac{5}{4}\Rightarrow d_2$ luôn đi qua điểm $I\left(-1;\dfrac{5}{4}\right)$ cố định.

Câu 44: Cho hàm số $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$. Cho điểm $M(a;b)$ sao cho có đúng hai tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua *M*, đồng thời hai tiếp tuyến này vuông góc với nhau. Biết điểm *M* luôn thuộc một đường tròn cố định, bán kính của đường tròn đó là

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Giả sử điểm $A\left(t;\dfrac{t^2+1}{t}\right),(t\neq 0)$ thuộc đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Ta có $f(x)=x+\dfrac{1}{x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}$

Phương trình tiếp tuyến tại *A* của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là:

$y=\dfrac{t^2-1}{t^2}(x-t)+\dfrac{t^2+1}{t}$

Mà tiếp tuyến này đi qua điểm *M* nên ta có:

$b=\dfrac{t^2-1}{t^2}(a-t)+\dfrac{t^2+1}{t}\Leftrightarrow (a-b)t^2+2t-a=0.$ (1)

Qua M kẻ được hai tiếp tuyến tới đồ thị hàm số $y=f(x)$, đồng thời hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau nên phương trình **(1)** phải có hai nghiệm phân biệt $t_1,t_2\neq 0$ thỏa mãn

$f'(t_1).f'(t_2)=-1$ hay $\begin{cases}a\neq b\\ a\neq 0\\ \Delta'=1+a(a-b)>0\\ \dfrac{t_1^2-1}{t_1^2}.\dfrac{t_2^2-1}{t_2^2}=-1\end{cases}$

Theo định lý Vi-et, ta có $\begin{cases}t_1+t_2=\dfrac{2}{b-a}\\ t_1.t_2=\dfrac{a}{b-a}\end{cases}$

nên $\dfrac{t_1^2-1}{t_1^2}.\dfrac{t_2^2-1}{t_2^2}=-1\Leftrightarrow 2t_1^2t_2^2-(t_1^2+t_2^2)+1=0\Leftrightarrow 2t_1^2t_2^2-(t_1+t_2)^2+2t_1t_2+1=0$

$\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{a}{b-a}\right)^2-\left(\dfrac{2}{b-a}\right)^2+2\dfrac{a}{b-a}+1=0\Leftrightarrow a^2+b^2=4.$

Do $a \neq 0$ nên từ $a^2+b^2=4$ suy ra $|b|<2$, do đó $a^2+1 \geq 2|a|>|ab| \geq ab$. Suy ra $\begin{cases} a^2+b^2=4 \\ a \neq b \\ a \neq 0 \end{cases}$

Như vậy, tập hợp tất cả các điểm $M(a;b)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài là đường tròn tâm O, bán kính

bằng 2, bỏ đi các điểm $B(0;2)$, $C(0;2)$, $D\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right), E\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$..

Câu 45: Cho hàm số $y=f(x)=x^4-2x^3+x^2$ có đồ thị (C). Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số a để có đúng 2 tiếp tuyến kẻ từ $A=(a;0)$ đến (C). Số phần tử của S là

A. 0. **B.** 4. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Gọi Δ là đường thẳng đi qua $A(a;0)$ và có hệ số góc là k, khi đó phương trình đường thẳng Δ là $y=k(x-a)$.

Do Δ là tiếp tuyến của (C), xét hệ phương trình (I): $\begin{cases} x^4-2x^3+x^2=k(x-a) & (1) \\ 4x^3-6x^2+2x=k & (2) \end{cases}$

Thế (2) vào (1), ta có:

$x^4-2x^3+x^2=\left(4x^3-6x^2+2x\right)(x-a) \Leftrightarrow x(x-1)\left[3x^2-(4a+1)x+2a\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ 3x^2-(4a+1)x+2a=0 \quad (3) \end{array}\right.$.

Do $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right. \Rightarrow k=0$**, ta xét** $k=0 \Leftrightarrow 4x^3-6x^2+2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{1}{2} \\ x=1 \end{array}\right.$.

Khi $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$**, ta thu được một phương trình tiếp tuyến là** $\Delta: y=0$**.**

Khi $x=\dfrac{1}{2}$ **phương trình tiếp tuyến là** $\Delta: y=\dfrac{1}{16}$**, tiếp tuyến không đi qua** $A(a;0)$**.**

(*Nói cách khác* $x=\dfrac{1}{2}$ *không thỏa mãn hệ* (I) *và* (3))

Bài toán trở thành tìm a để (3) **có 2 nghiệm phân biệt trong đó có đúng 1 nghiệm thuộc** $\{0;1\}$ **hoặc** (3) **có nghiệm kép khác** $0;1;\dfrac{1}{2}$.

Trường hợp 1: (3) **có 2 nghiệm phân biệt trong đó có đúng 1 nghiệm thuộc** $\{0;1\}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=\left[-(4a+1)\right]^2-4.3.2a>0\\ \left[\begin{array}{l}2a=0\\ 3-(4a+1)+2a=0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\ a=1\end{array}\right.$$

Trường hợp 2: Phương trình (3) **có nghiệm kép khác** $0;1;\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=16a^2-16a+1=0\\ 2a\neq 0\\ 3-4(a+1)+2a\neq 0\\ \frac{3}{4}-\frac{1}{2}(4a+1)+2a\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\frac{2+\sqrt{3}}{4}\\ a=\frac{2-\sqrt{3}}{4}\end{array}\right.$$

Vậy đáp án của bài toán là $S=\left\{0;1;\frac{2-\sqrt{3}}{4};\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right\}$.

Câu 46: Cho hàm số $y=f(x)=x^4-2x^3+x^2$ có đồ thị (C). Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số a để có đúng 2 tiếp tuyến kẻ từ $A(a;0)$ đến (C). Số phần tử của S là

A. 0. **B.** 4. **C.** 2. **D.** vô số.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y=f(x)=x^4-2x^3+x^2$, suy ra $y'=f'(x)=4x^3-6x^2+2x$.

Đường thẳng d đi qua $A(a;0)$ với hệ số góc k có phương trình $y=k(x-a)$.

Đường thẳng d là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases}x^4-2x^3+x^2=k(x-a) & (1)\\ 4x^3-6x^2+2x=k & (2)\end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta được

$$x^4-2x^3+x^2=(4x^3-6x^2+2x)(x-a)\Leftrightarrow 3x^4-(4a+4)x^3+(6a+1)x^2-2ax=0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)\left[3x^2-(4a+1)x+2a\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\\ g(x)=3x^2-(4a+1)x+2a=0 \quad (3)\end{array}\right.$$

Nhận xét: $\begin{cases}x=0\Rightarrow k=0\\ x=1\Rightarrow k=0\end{cases}$ và phương trình tiếp tuyến tại các điểm có hoành độ $x=0$, $x=1$ đều có dạng $y=0$.

Khi đó để có đúng 2 tiếp tuyến kẻ từ $A(a;0)$ đến (C) thì xảy ra 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1: Phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm hoặc bằng 0 hoặc bằng 1

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\ \left[\begin{array}{l}g(0)=0\\ g(1)=0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}16a^2-16a+1>0\\ \left[\begin{array}{l}2a=0\\ 3.1^2-(4a+1).1+2a=0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}16a^2-16a+1>0\\ \left[\begin{array}{l}a=0\\ a=1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\ a=1\end{array}\right.$$

Trường hợp 2: Phương trình (3) có nghiệm kép không thuộc tập hợp $\{0;1\}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ g(0) \neq 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16a^2 - 16a + 1 = 0 \\ a \neq 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4} \\ a = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4} \end{array} \right.$$

Do đó $S = \left\{0;1;\dfrac{2+\sqrt{3}}{4};\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}\right\}$.

Vậy tập S có 4 phần tử.

Câu 47: Gọi m là giá trị để đồ thị (C_m) của hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2mx + 2m^2 - 1}{x-1}$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và các tiếp tuyến với (C_m) tại hai điểm này vuông góc với nhau. Khi đó ta có :

A. $m \in (1;2)$. **B.** $m \in (-2;-1)$. **C.** $m \in (0;1)$. **D.** $m \in (-1;0)$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) với trục hoành là : $f(x) = x^2 + 2mx + 2m^2 - 1 = 0 (x \neq 1) (1)$.

(C_m) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 1 > 0 \\ 2m + 2m^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$.

Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình (1), theo vi et ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1 x_2 = 2m^2 - 1 \end{cases}$

Ta có : $y' = \dfrac{x^2 - 2x - 2m^2 - 2m + 1}{(x-1)^2}$.

Tiếp tuyến tại hai giao điểm vuông góc với nhau $\Leftrightarrow y'(x_1).y'(x_2) = -1$

$\Leftrightarrow (x_1^2 - 2x_1 - 2m^2 - 2m + 1)(x_2^2 - 2x_2 - 2m^2 - 2m + 1) + (x_1 - 1)^2 (x_2 - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow 2(x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1)^2 - (2m^2 + 2m)((x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 2) + (2m^2 + 2m)^2 = 0$

$\Leftrightarrow 2(2m^2 + 2m)^2 - (2m^2 + 2m)(4m^2 - 4m^2 + 2 + 4m + 2) + (2m^2 + 2m)^2 = 0$

$\Leftrightarrow 3(2m^2 + 2m) - 4m - 4 = 0 \Leftrightarrow 6m^2 + 2m - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 (l) \\ m = \dfrac{2}{3} (tm) \end{array} \right.$. Vậy $m = \dfrac{2}{3}$.

Câu 48: Trên đường thẳng $d : y = 2x + 1$ có bao nhiêu điểm có thể kẻ được đến đồ thị $(C) : y = \dfrac{x+3}{x-1}$ đúng một tiếp tuyến.

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Gọi $M \in d \Rightarrow M(a; 2a+1)$.

Gọi $A(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến d_1 kẻ từ M với (C).

Phương trình tiếp tuyến $d_1: y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = \dfrac{-4}{(x_0 - 1)^2}(x - x_0) + \dfrac{x_0 + 3}{x_0 - 1}$

Vì $M \in d_1$ nên $2a + 1 = \dfrac{-4}{(x_0 - 1)^2}(a - x_0) + \dfrac{x_0 + 3}{x_0 - 1}$

$\Rightarrow (2a + 1)(x_0 - 1)^2 = -4(a - x_0) + (x_0 + 3)(x_0 - 1),\ (x_0 \neq 1).$

$\Leftrightarrow a.x_0^2 - 2(a + 2)x_0 + 3a + 2 = 0$ (1)

Từ M kẻ đến (C) đúng 1 tiếp tuyến $\Leftrightarrow$ (1) có đúng 1 nghiệm $x_0 \neq 1$.

TH1: $a = 0$

(1) $\Leftrightarrow x_0 = \dfrac{1}{2}$. Suy ra $a = 0$ thỏa mãn.

TH2: $a \neq 0$, PT (1) có nghiệm kép $x_0 \neq 1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (a + 2)^2 - a(3a + 2) = 0 \\ -\dfrac{2(a + 2)}{2a} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = 2 \end{array}\right. \\ \dfrac{a + 2}{a} \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = 2 \end{array}\right.$$

TH3: $a \neq 0$, PT (1) có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = -2a^2 + 2a + 4 > 0 \\ a.1^2 - 2(a + 2).1 + 3a + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < a < 2 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1.$$

Kết hợp 3 trường hợp suy ra có 4 điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán.