



# NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN

## ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

### BÀI 2. TÍCH PHÂN



#### I LÝ THUYẾT.

**Định nghĩa:** Cho hàm số  $f$  liên tục trên khoảng  $K$  và  $a, b$  là hai số bất kì thuộc  $K$ . Nếu  $F$  là một nguyên hàm của  $f$  trên  $K$  thì hiệu số  $F(b) - F(a)$  được gọi là tích phân của hàm số  $f$  từ  $a$  đến  $b$  và kí hiệu là  $\int_a^b f(x)dx$ .

**Ta gọi:**  $a$  là cận dưới,  $b$  là cận trên,  $f$  là hàm số dưới dấu tích phân,  $f(x)dx$  là biểu thức dưới dấu tích phân,  $x$  biến số lấy tích phân.

**Nhận xét :**

a) Nếu  $a < b$  thì ta gọi  $\int_a^b f(x)dx$  là tích phân của  $f$  trên đoạn  $[a; b]$ .

b) Hiệu số  $F(b) - F(a)$  còn được kí hiệu là  $F(x)\Big|_a^b$ . Khi đó :

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

c) Tích phân **không phụ thuộc biến số** (điều này sẽ mang lại lợi ích cho ta để tính một số tích phân đặc biệt), tức là  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \dots = F(b) - F(a)$ .

**Tính chất:** Cho  $k$  là hằng số

$$a) \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$b) \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

$$c) \int_a^b k \cdot f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

$$d) \int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

e) **Tính chất chèn cận:**  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$  (chèn cận  $c$ )



## HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

### DẠNG 1: SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA TÍCH PHÂN

**Câu 1:** Tính các tích phân sau:

$$a) I = \int_0^1 3x^2 dx \quad b) I = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad c) I = \int_0^{\ln 2} 2^x dx \quad d) I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx$$

**Câu 2:** Gọi  $F(x)$  là nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^x$ . Tính  $F(2\ln 2) - F(\ln 2)$ .

**Câu 3:** Gọi  $F(x)$  là nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{x}$  thỏa điều kiện  $F(1) = 2$ . Tính  $F(e)$ .

**Câu 4:** Chứng minh  $F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ . Từ đó tính tích phân  $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$ .

**Câu 5:** Chứng minh  $F(x) = \frac{1}{ad - bc} \ln \left| \frac{ax + b}{cx + d} \right|$  là một nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = \frac{1}{(ax + b)(cx + d)}. \text{ Từ đó tính tích phân } I = \int_0^1 \frac{1}{(2x + 1)(x + 1)} dx.$$

### DẠNG 2: SỬ DỤNG TÍNH CHẤT TÍCH PHÂN

**Câu 6:** Tính các tích phân sau:

$$a) I = \int_0^1 (4x^3 - e^x) dx \quad b) I = \int_1^2 \left( 3^x - \frac{1}{x} \right) dx \quad c) I = \int_0^{\pi} (\sin x + 2 \cos x) dx$$

**Câu 7:** Tính  $I = \int_1^2 e^x \ln x dx + \int_1^2 e^t (1 - \ln t) dt$ .

**Câu 8:** Tính  $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin \frac{t}{2} \ln t dt + \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{u}{2} \left( \ln u - \sin \frac{u}{2} \right) du$ .

### DẠNG 3: SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CHÈN CẬN ĐỂ TÍNH TÍCH PHÂN

Tích phân của hàm chứa dấu trị tuyệt đối

a) **Yêu cầu:** Tính tích phân  $I = \int_a^b |f(x)| dx$

b) **Phương pháp:**

+ Bước 1: Xét dấu của  $f(x)$  trên khoảng  $(a; b)$

- Giải phương trình  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_i \in (a; b)$
- Lập bảng xét dấu của  $f(x)$  trên khoảng  $(a; b)$

+ Bước 2: Chèn cận  $x_i$  và đồng thời bỏ dấu  $| |$  (căn cứ vào BXD) ta được các tích phân cơ bản

$$I = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^{x_i} |f(x)| dx + \int_{x_i}^b |f(x)| dx$$

**Chú ý:** Nếu  $f(x)$  không đổi dấu trên đoạn  $[a; b]$  thì  $I = \int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$

**Câu 9:** Tính các tích phân:

$$a) I = \int_0^2 |x-1| dx \quad b) I = \int_0^3 |x^2 - x| dx \quad c) \int_{-4}^2 |x^2 + 2x - 3| dx \quad d) \int_{-2}^2 |2x - |x+1|| dx$$

**Câu 10:** Tính  $I = \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$ .

**Câu 11:** Tính  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1 - \sin 2x}{2}} dx$ .

**Tích phân của hàm min, max**

a) **Yêu cầu:** Tính tích phân  $I = \int_a^b \min \{f(x); g(x)\} dx$ ;  $I = \int_a^b \max \{f(x); g(x)\} dx$

b) **Phương pháp:** Tính  $I = \int_a^b \min \{f(x); g(x)\} dx$  ( $I = \int_a^b \max \{f(x); g(x)\} dx$  tương tự)

+ Bước 1: Xét dấu của  $f(x) - g(x)$  trên khoảng  $(a; b)$

- Giải phương trình  $f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_i \in (a; b)$
- Lập bảng xét dấu của  $f(x) - g(x)$  trên khoảng  $(a; b)$

+ Bước 2: Chèn cận  $x_i$  và chọn hàm  $\min \{f(x); g(x)\}$  như sau:

- Nếu  $f(x) - g(x) > 0$  trên khoảng  $K$  thì  $\min \{f(x); g(x)\} = g(x)$ .
- Nếu  $f(x) - g(x) < 0$  trên khoảng  $K$  thì  $\min \{f(x); g(x)\} = f(x)$ .

Từ đó, ta được các tích phân cơ bản.

**Câu 12:** Tính  $I = \int_0^2 \min \{x; x^2\} dx$ .

**Câu 13:** Tính  $I = \int_{-1}^1 \max \{e^x; 2^x\} dx$ .

**Tích phân của hàm số xác định trên từng khoảng**

**Câu 14:** Cho hàm số  $y = f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \geq 0 \\ -x & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$ . Biết hàm số  $f$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ .

Tính  $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$ .

**Câu 15:** Cho hàm số  $y = f(x) = \begin{cases} (2x-1)^3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 2^x - 1 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ . Biết hàm số  $f$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ .

Tính  $I = \int_{-2}^3 f(x) dx$ .

**Câu 16:** Cho hàm số  $y = f(x) = \begin{cases} -2(x+1) & \text{khi } x \leq 0 \\ k(1-x^2) & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$ . Xác định  $k$  để  $\int_{-1}^1 f(x) dx = 1$ .

**MỘT SỐ DẠNG KHÁC**

**Câu 17:** Cho  $\int_1^2 f(x)dx = 3, \int_2^5 f(x)dx = 4$ . Tính  $I = \int_1^5 f(x)dx$ .

**Câu 18:** Gọi  $F(x)$  là nguyên hàm của hàm số  $f(x)$ .

Biết  $\int_0^3 f(x)dx = 12, \int_1^3 f(x)dx = 2$  và  $F(2) = 7$ . Tính  $F(0)$ .

**Câu 19:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0;10]$  thỏa mãn  $\int_0^{10} f(x)dx = 7; \int_2^6 f(x)dx = 3$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = \int_0^2 f(x)dx + \int_6^{10} f(x)dx$ .

**DẠNG 4: SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA TÍCH PHÂN VÀO CÁC BÀI TOÁN KHÁC**

**Câu 20:** Cho hàm số  $g(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2} \sqrt{t} \sin t dt$  xác định với  $x > 0$ . Tìm  $g'(x)$ .

**Câu 21:** Cho hàm số  $g(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} dt$ . Tìm  $g'(x)$ .

**Câu 22:** Cho hàm số  $f$  và số thực  $a > 0$  thỏa mãn điều kiện:  $\int_a^x \frac{f(t)}{t^2} dt + 6 = 2\sqrt{x}$  với  $x > 0$ .  
Tìm  $a$  và  $f$ .

**DẠNG 5: PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ LOẠI 1 ĐỂ TÍNH TÍCH PHÂN**

**Yêu cầu :** Tính tích phân  $I = \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx$

**Phương pháp:**

+ Biến đổi về dạng  $I = \int_a^b f[u(x)] u'(x) dx$ .

+ Đặt  $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x) dx$ .

+ **Đổi cận:**  $x = a \Rightarrow t = u(a) = t_1; x = b \Rightarrow t = u(b) = t_2$ .

+ Khi đó:  $I = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$  là tích phân đơn giản hơn.

**Một số dấu hiệu cơ bản và cách chọn  $t = u(x)$**

| Dấu hiệu                                 | Cách chọn $t$                                     |
|------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| Hàm số chứa mẫu số                       | $t$ là mẫu số                                     |
| Hàm số chứa căn $f(x, \sqrt{u(x)})$      | $t$ là căn: $t = \sqrt{u(x)}$                     |
| Hàm số có dạng $[f(x)]^n$ (xấu) lũy thừa | $t$ là biểu thức (xấu) trong lũy thừa, $t = f(x)$ |
| Hàm số lượng giác có góc xấu             | $t$ là góc xấu                                    |
| Hàm số mũ, mà mũ xấu                     | $t$ là mũ xấu                                     |
| Hàm số $\log u$ mà $u$ xấu               | $t = u$                                           |

|                                                                                             |                                                                                                                                                      |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Hàm số $f(x) = \frac{a \sin x + b \cos x}{c \sin x + d \cos x + e}$                         | $t = \tan \frac{x}{2} \quad \left( \cos \frac{x}{2} \neq 0 \right)$                                                                                  |
| Hàm $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$<br>Tổng quát đặt $t = \sqrt{ x+a } + \sqrt{ x+b }$ | + Với $x+a > 0 \wedge x+b > 0$ , đặt<br>$t = \sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}$<br>+ Với $x+a < 0 \wedge x+b < 0$ , đặt<br>$t = \sqrt{-(x+a)} + \sqrt{-(x+b)}$ |
| $R(\cos x) \cdot \sin x dx$ (theo biến $\cos x$ )                                           | Đặt $t = \cos x$                                                                                                                                     |
| $R(\sin x) \cdot \cos x dx$ (theo biến $\sin x$ )                                           | Đặt $t = \sin x$                                                                                                                                     |
| $R(\tan x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx$ (theo biến $\tan x$ )                               | Đặt $t = \tan x$                                                                                                                                     |
| $R(\cot x) \cdot \frac{1}{\sin^2 x} dx$ (theo biến $\cot x$ )                               | Đặt $t = \cot x$                                                                                                                                     |
| Hàm có $e^x, a^x$                                                                           | Đặt $t = e^x, t = a^x$                                                                                                                               |
| Hàm số vừa có $\ln x$ vừa có $\frac{1}{x}$                                                  | Đặt $t = \ln x$                                                                                                                                      |

**Câu 23:** Tính các tích phân sau

$$a) \int_1^2 \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x} dx$$

$$b) \int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x} + 2) dx$$

$$c) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin x) e^{x - \cos x} dx$$

$$d) \int_0^1 \frac{4x + 6}{(x^2 + 3x + 1)^{2017}} dx$$

$$e) \int_0^1 x \sqrt{x^2 + 4} dx$$

$$f) \int_0^1 (x+1)(x-1)^{2017} dx$$

$$g) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx$$

$$h) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cdot \cos x dx$$

$$i) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x}{\cos x + x \sin x} dx$$

**Câu 24:** Tính các tích phân sau (Đặt giảm bậc)

$$a) \int_2^3 \frac{2x}{x^4 - 1} dx$$

$$b) \int_0^1 \frac{6x^2 - 1}{\sqrt[3]{(2x^3 - x)^2 - 9}} dx$$

**Tích phân có sẵn dạng  $f(u(x))$**

**Câu 25:** Chứng minh rằng  $I = \int_{x_1}^{x_2} f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \int_{ax_1+b}^{ax_2+b} f(x) dx$ , với  $a \neq 0$ .

**Câu 26:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $\int_3^7 f(x) dx = 2$ . Tính  $I = \int_1^3 f(2x+1) dx$ .

**Câu 27:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $\int_1^4 f(1-2x) dx = 2$ . Tính  $I = \int_{-7}^{-1} f(x) dx$ .

**Câu 28:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $\int_1^3 f(3x-1) dx = 3$ . Tính  $I = \int_{-6}^0 f(2-x) dx$ .

**Câu 29:** Cho  $\int_0^1 f(x) dx = 2$  Tính  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\cos 2x) \sin x \cos x dx$ .

**Tích phân với hàm số chẵn và lẻ**

+ Hàm số  $y = f(x)$  là hàm số chẵn trên đoạn  $[-a; a]$  khi và chỉ khi  $\forall x \in [-a; a]$  ta có:

$$-x \in [-a; a] \text{ và } f(-x) = f(x).$$

+ Hàm số  $y = f(x)$  là hàm số lẻ trên đoạn  $[-a; a]$  khi và chỉ khi  $\forall x \in [-a; a]$  ta có:

$$-x \in [-a; a] \text{ và } f(-x) = -f(x).$$

+ Ta có thể thay đoạn  $[-a; a]$  bằng một tập đối xứng thì định nghĩa hàm số chẵn, hàm số lẻ vẫn như trên.

**Câu 30:** Cho  $f(x)$  là hàm số chẵn, liên tục trên đoạn  $[-a; a]$ . Chứng minh rằng:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

**Câu 31:** Cho  $f(x)$  là hàm số chẵn, liên tục trên đoạn  $[-a; a]$ . Chứng minh rằng:

$$I = \int_{-a}^a \frac{f(x)}{b^x + 1} dx = \int_0^a f(x) dx, \text{ với } a > 0, b > 0.$$

**Câu 32:** Tính tích phân  $I = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{2^x + 1} dx$ .

**Câu 33:** Tính tích phân  $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{e^x + 1} dx$

**Câu 34:** Biết hàm số  $y = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$  là hàm số chẵn trên  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  và  $f(x) + f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x + \cos x$ .

$$\text{Tính } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$$

**Câu 35:** Cho  $f(x)$  là hàm số lẻ, liên tục trên đoạn  $[-a; a]$ . Chứng minh rằng:  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ .

**Câu 36:** Tính tích phân  $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left( \cos 4x + \sin \frac{x}{2} \sin x \right) \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) dx$

**Câu 37:** Tính tích phân  $I = \int_0^{2\pi} \sin(\sin x + mx) dx$ , với  $m \in \mathbb{Z}$ .

**Một số kiểu đổi biến đặc biệt**

**Câu 38:** Cho  $f(x)$  là hàm số liên tục trên  $[0; 1]$ . Chứng minh rằng:  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$

**Câu 39:** Tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{1}{\cos^2(\sin x)} - \tan^2(\cos x) \right] dx$ .

**Câu 40:** Tính  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2017} x \cdot \cos x}{\sin^{2016} x + \cos^{2016} x} dx$ .

**Câu 41:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-1; 1]$ . Chứng minh rằng

$$I = \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

**Câu 42:** Tính  $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{3 + \sin^2 x} dx$

**Câu 43:** Cho  $f(x)$ ,  $g(x)$  là các hàm số liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $f(2) = 7$ ;  $f(-1) = 1$ ;  $g(2) = 9$ ;  $g(-1) = 3$ .

Tính  $I = \int_{-1}^2 \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[f(x) + g(x)]^2} dx$

**Câu 44:** Cho hàm số  $y = f(x)$  thỏa mãn  $f(x) \cdot f'(x) = 3x^5 + 6x^2$ . Biết  $f(0) = 2$ . Tính  $f^2(2)$ .

### DẠNG 6: PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ LOẠI 2 ĐỂ TÍNH TÍCH PHÂN

**Yêu cầu:** Tính tích phân  $I = \int_a^b f(x) dx$

**Phương pháp:** Đặt  $x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t) dt$

+ Đổi cận:  $x = a \Rightarrow t = t_1$ ;  $x = b \Rightarrow t = t_2$

+ Khi đó:  $I = \int_{t_1}^{t_2} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$

**Một số cách đổi biến cần nhớ:**

+  $a^2 + (bx + c)^2$ :  $bx + c = |a| \tan t$ ,  $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  +

+  $\sqrt{a^2 - (bx + c)^2}$ :  $bx + c = |a| \sin t$ ,  $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

+  $\sqrt{(bx + c)^2 - a^2}$ :  $bx + c = \frac{|a|}{\sin t}$ ,  $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$

+ Nhớ:  $\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx \stackrel{\Delta < 0, a > 0}{=} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}} dx$   
 $\stackrel{\sqrt{a}(x + \frac{b}{2a}) = \sqrt{\frac{-\Delta}{4a}} \tan t}{=} \int_{t_1}^{t_2} \frac{a}{\sqrt{-\Delta}} dt$

**Câu 45:** Tính các tích phân sau:

a)  $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

b)  $I = \int_0^1 \frac{1}{x^2+3} dx$

c)  $I = \int_0^1 \frac{1}{4x^2+4x+4} dx$

d)  $I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^8+1} dx$

e)  $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$

f)  $I = \int_0^1 \sqrt{-4x^2+4x+1} dx$

g)  $I = \int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx$

h)  $I = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$

## DẠNG 7: PHƯƠNG PHÁP TỪNG PHẦN ĐỂ TÍNH TÍCH PHÂN

Công thức từng phần:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

Viết gọn:  $\int_a^b u dv = (uv)|_a^b - \int_a^b v du$

**Áp dụng:** Tính tích phân  $I = \int_a^b f(x)dx$

**Phương pháp:**

+ Bước 1: Biến đổi  $I = \int_a^b f_1(x) \cdot f_2(x)dx$

+ Bước 2: Đặt  $\begin{cases} u = f_1(x) \\ dv = f_2(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f_1'(x)dx \\ v = \int f_2(x)dx \end{cases}$  (Chọn  $dv$  sao cho  $v$  dễ lấy nguyên hàm)

+ Bước 3: Khi đó  $I = (uv)|_a^b - \int_a^b v du$

• **Dạng 1.**  $I = \int P(x)\sin(ax+b)dx$ , trong đó  $P(x)$  là đa thức.

Với dạng này, ta đặt  $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \sin(ax+b)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = P'(x)dx \\ v = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) \end{cases}$ .

• **Dạng 2.**  $I = \int P(x)\cos(ax+b)dx$ , trong đó  $P(x)$  là đa thức.

Với dạng này, ta đặt  $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \cos(ax+b)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = P'(x)dx \\ v = \frac{1}{a}\sin(ax+b) \end{cases}$ .

• **Dạng 3.**  $I = \int P(x)e^{ax+b}dx$ , trong đó  $P(x)$  là đa thức.

Với dạng này, ta đặt  $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{ax+b}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = P'(x)dx \\ v = \frac{1}{a}e^{ax+b} \end{cases}$ .

• **Dạng 4.**  $I = \int P(x)\ln g(x)dx$ , trong đó  $P(x)$  là đa thức.

Với dạng này, ta đặt  $\begin{cases} u = \ln g(x) \\ dv = P(x)dx \end{cases}$ .

• **Dạng 5.**  $I = \int \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} e^x dx$ .

Với dạng này, ta đặt  $\begin{cases} u = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} \\ dv = e^x dx \end{cases}$ .

**Câu 46:** Tính các tích phân sau:

a)  $I = \int_1^e x \ln x dx$

b)  $I = \int_0^{\ln 2} x e^x dx$

c)  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$

d)  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$

**Câu 47:** Tính các tích phân sau: a)  $I = \int_0^1 x^2 e^{2x} dx$

b)  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$

**Câu 48:** Tính tích phân  $I = \int_0^{\pi} 2^x \sin 3x dx$

**Câu 49:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[a; b]$ . Chứng minh rằng:

$$I = \int_a^b [f'(x) + f(x)] e^x dx = f(b) \cdot e^b - f(a) \cdot e^a$$

**Câu 50:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[-1; 1]$  thỏa

$$f(x+1) - 2f(x) = 6x^2 - x^3 - 7 \quad \text{Tính } I = \int_{-1}^1 \frac{f'(x) - \ln 2 \cdot f(x)}{2^x} dx.$$

**Câu 51:** Tính các tích phân

$$a) I = \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx \quad b) I = \int_0^{\pi^2} \sin \sqrt{x} dx \quad c) I = \int_e^{e^e} \frac{\ln x \cdot \ln(\ln x)}{x} dx$$

**Câu 52:** Tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx$

**Câu 53:** Tính tích phân  $I = \int_0^{\ln 3} \frac{x e^x}{\sqrt{e^x + 1}} dx$

**Câu 54:** Chứng minh rằng:  $I = \int_0^1 x^2 \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{1}{4} \left( 2\sqrt{2} - \int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx \right)$

**Câu 55:** Tính  $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x^2}{(x \sin x + \cos x)^2} dx$

**Câu 56:** Cho hàm số  $f(x)$  có nguyên hàm là  $F(x)$  trên đoạn  $[1; 2]$ , biết  $F(2) = 1$  và  $\int_1^2 F(x) dx = 5$ .

$$\text{Tính } I = \int_1^2 (x-1) f(x) dx.$$

**Câu 57:** Cho  $f(x) = \frac{\sin^{2017} x}{\sin^{2017} x + \cos^{2017} x}$ . Tính  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f'(x) dx$ .

### **DẠNG 7. KỸ THUẬT TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN HÀM ẨN**

**Câu 58:** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $\int_0^3 x \cdot f'(x) \cdot e^{f(x)} dx = 8$  và  $f(3) = \ln 3$ . Tính  $I = \int_0^3 e^{f(x)} dx$ .

**Câu 59:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , thỏa mãn  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) \cos^2 x dx = 10$  và  $f(0) = 3$ .

$$\text{Tích phân } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin 2x dx \text{ bằng}$$

**Câu 60:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0; 1]$ , thỏa mãn  $\int_1^2 f(x-1) dx = 3$  và  $f(1) = 4$ .

$$\text{Tích phân } \int_0^1 x^3 f'(x^2) dx \text{ bằng}$$

**Câu 61:** Cho hàm số  $f(x)$  nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên  $[0; 2]$ . Biết  $f(0) = 1$  và

$$f(x)f(2-x) = e^{2x^2-4x} \text{ với mọi } x \in [0; 2]. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^2 \frac{(x^3 - 3x^2)f'(x)}{f(x)} dx.$$

### **DẠNG 8. TÍNH TÍCH PHÂN DỰA VÀO TÍNH CHẤT**

**Câu 62:** Cho hàm số  $f(x)$  là hàm số lẻ, liên tục trên  $[-4; 4]$ . Biết rằng  $\int_{-2}^0 f(-x) dx = 2$  và

$$\int_1^2 f(-2x) dx = 4. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^4 f(x) dx.$$

**Câu 63:** Cho hàm số  $f(x)$  là hàm số chẵn, liên tục trên  $[-1; 6]$ . Biết rằng  $\int_{-1}^2 f(x) dx = 8$  và

$$\int_1^3 f(-2x) dx = 3. \text{ Tính tích phân } I = \int_{-1}^6 f(x) dx.$$

**Câu 64:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $[3; 7]$ , thỏa mãn  $f(x) = f(10-x)$  với mọi  $x \in [3; 7]$  và

$$\int_3^7 f(x) dx = 4. \text{ Tính tích phân } I = \int_3^7 xf(x) dx.$$

**Câu 65:** Cho hàm số  $y = f(x)$  là hàm số chẵn và liên tục trên đoạn  $[-\pi; \pi]$ , thỏa mãn  $\int_0^\pi f(x) dx = 2018$ .

Giá trị của tích phân  $I = \int_{-\pi}^\pi \frac{f(x)}{2018^x + 1} dx$  bằng

**Câu 66:** Biết  $\int_0^\pi \frac{x \sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx = \frac{\pi^a}{b}$  với  $a, b \in \mathbb{Z}^+$ . Tính  $P = 2a + b$ .

### **DẠNG 9. KỸ THUẬT PHƯƠNG TRÌNH HÀM**

**Câu 67:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  và thỏa mãn  $2f(x) + f(-x) = \cos x$ . Tính tích

phân  $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ .

**Câu 68:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $[-2; 2]$  và thỏa mãn  $2f(x) + 3f(-x) = \frac{1}{4+x^2}$ . Tính tích

phân  $I = \int_{-2}^2 f(x) dx$ .

**Câu 69:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $[0; 1]$  và thỏa mãn  $x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4$ . Tính tích

phân  $I = \int_0^1 f(x) dx$ .

**Câu 70:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$  và thỏa mãn  $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$ . Tính tích phân

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx.$$

**Câu 71:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $[0;1]$  và thỏa mãn  $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$ . Tính tích phân  $I=\int_0^1 f(x)dx$ .

### DẠNG 10. KỸ THUẬT BIẾN ĐỔI

**Câu 72:** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa  $f(x)f'(x)=3x^5+6x^2$ . Biết rằng  $f(0)=2$ , tính  $f^2(2)$ .

**Câu 73:** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $[f'(x)]^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x$  với mọi  $x\in\mathbb{R}$  và  $f(0)=f'(0)=1$ . Giá trị của  $f^2(1)$  bằng

**Câu 74:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[1;2]$  và thỏa mãn  $f(x)>0, \forall x\in[1;2]$ . Biết rằng  $\int_1^2 f'(x)dx=10$  và  $\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln 2$ . Tính  $f(2)$ .

**Câu 75:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[-1;1]$ , thỏa mãn  $f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$  và  $f'(x)+2f(x)=0$ . Biết rằng  $f(1)=1$ , giá trị của  $f(-1)$  bằng

**Câu 76:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $(0;+\infty)$ , biết  $f'(x)+(2x+3)f^2(x)=0, f(x)>0$  với mọi  $x>0$  và  $f(1)=\frac{1}{6}$ . Tính  $P=1+f(1)+f(2)+\dots+f(2018)$ .

**Câu 77:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $[0;\sqrt{3}]$ , thỏa mãn  $f(x)>-1, f(0)=0$  và  $f'(x)\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{f(x)+1}$ . Giá trị của  $f(\sqrt{3})$  bằng

**Câu 78:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm và liên tục trên  $[1;4]$ , đồng biến trên  $[1;4]$ , thoả mãn  $x+2xf(x)=[f'(x)]^2$  với mọi  $x\in[1;4]$ . Biết rằng  $f(1)=\frac{3}{2}$ , tính tích phân  $I=\int_1^4 f(x)dx$ .

**Câu 79:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục, không âm trên  $[0;\frac{\pi}{2}]$ , thỏa  $f(x).f'(x)=\cos x\sqrt{1+f^2(x)}$  với mọi  $x\in[0;\frac{\pi}{2}]$  và  $f(0)=\sqrt{3}$ . Giá trị của  $f(\frac{\pi}{2})$  bằng

**Câu 80:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục, không âm trên  $[0;3]$ , thỏa  $f(x).f'(x)=2x\sqrt{f^2(x)+1}$  với mọi  $x\in[0;3]$  và  $f(0)=0$ . Giá trị của  $f(3)$  bằng

**Câu 81:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm không âm trên  $[0;1]$ , thỏa mãn  $f(x)>0$  với mọi  $x\in[0;1]$  và  $[f(x)]^4.[f'(x)]^2.(x^2+1)=1+[f(x)]^3$ . Biết  $f(0)=2$ , hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau đây.

**Câu 82:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$ , thỏa mãn  $x(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x$  với mọi  $x\in\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$  và  $f(1)=-2\ln 2$ . Biết  $f(2)=a+b\ln 3$  với  $a, b\in\mathbb{Q}$ , tính  $P=a^2+b^2$ .

**Câu 83:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm xác định, liên tục trên  $[0;1]$ , thỏa mãn  $f'(0)=-1$  và  $\begin{cases} [f'(x)]^2=f''(x) \\ f'(x)\neq 0 \end{cases}$  với mọi  $x\in[0;1]$ . Đặt  $P=f(1)-f(0)$ , khẳng định nào sau đây đúng?

**Câu 84:** Cho hai hàm số  $f(x)$  và  $g(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;2]$ , thỏa mãn  $f'(0).f'(2) \neq 0$  và  $g(x).f'(x) = x(x-2)e^x$ . Tính tích phân  $I = \int_0^2 f(x).g'(x)dx$ .

**Câu 85:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0;1]$  và thỏa mãn  $af(b) + bf(a) = 1$  với mọi  $a, b \in [0;1]$ . Tính tích phân  $I = \int_0^1 f(x)dx$ .

### **DẠNG 11. KỸ THUẬT ĐẠO HÀM ĐÚNG**

**Câu 86:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;1]$ , thỏa mãn  $3f(x) + xf'(x) = x^{2018}$  với mọi  $x \in [0;1]$ . Tính  $I = \int_0^1 f(x)dx$ .

**Câu 87:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ , thỏa mãn  $f'(x) - 2018f(x) = 2018x^{2017}e^{2018x}$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$  và  $f(0) = 2018$ . Tính giá trị  $f(1)$ .

**Câu 88:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm và liên tục trên  $\mathbb{R}$ , thỏa mãn  $f'(x) + xf(x) = 2xe^{-x^2}$  và  $f(0) = -2$ . Tính  $f(1)$ .

**Câu 89:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục và có đạo hàm trên  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ , thỏa mãn hệ thức  $f(x) + \tan xf'(x) = \frac{x}{\cos^3 x}$ . Biết rằng  $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right) = a\pi\sqrt{3} + b\ln 3$  trong đó  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = a + b$ .

### **DẠNG 12. KỸ THUẬT ĐƯA VỀ BÌNH PHƯƠNG LOẠI 1**

**Câu 90:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , thỏa  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ f^2(x) - 2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] dx = \frac{2-\pi}{2}$ . Tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ .

**Câu 91:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $[0;1]$  thỏa  $\int_0^1 \left[ f^2(x) + 2\ln^2 \frac{2}{e} \right] dx = 2 \int_0^1 \left[ f(x)\ln(x+1) \right] dx$ . Tính phân  $I = \int_0^1 f(x)dx$ .

**Câu 92:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;1]$ ,  $f(x)$  và  $f'(x)$  đều nhận giá trị dương trên  $[0;1]$  và thỏa mãn  $f(0) = 2$  và  $\int_0^1 \left[ f'(x) \cdot [f(x)]^2 + 1 \right] dx = 2 \int_0^1 \sqrt{f'(x)} \cdot f(x) dx$ . Tính  $I = \int_0^1 [f(x)]^3 dx$ .

**Câu 93:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm dương, liên tục trên đoạn  $[0;1]$  và thỏa mãn  $f(0) = 1$ ,  $3 \int_0^1 \left[ f'(x) \cdot [f(x)]^2 + \frac{1}{9} \right] dx = 2 \int_0^1 \sqrt{f'(x)} \cdot f(x) dx$ . Tính  $I = \int_0^1 [f(x)]^3 dx$ .

**Câu 94:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm dương, liên tục trên đoạn  $[0;1]$ , thỏa  $f(1) - f(0) = 1$  và  $\int_0^1 f'(x)[f^2(x) + 1]dx = 2 \int_0^1 \sqrt{f'(x)}f(x)dx$ . Giá trị của tích phân  $\int_0^1 [f(x)]^3 dx$  bằng

**DẠNG 13. KỸ THUẬT ĐƯA VỀ BÌNH PHƯƠNG LOẠI 2 - KỸ THUẬT HOLDER**

**Câu 95:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0;1]$ , thỏa mãn  $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = 1$  và  $\int_0^1 [f(x)]^2 dx = 4$ . Giá trị của tích phân  $\int_0^1 [f(x)]^3 dx$  bằng

**Câu 96:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0;1]$ , thỏa mãn  $\int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 \sqrt{x}f(x)dx = 1$  và  $\int_0^1 [f(x)]^2 dx = 5$ . Giá trị của tích phân  $\int_0^1 [f(x)]^3 dx$  bằng

**Câu 97:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0;1]$ , thỏa mãn  $\int_0^1 xf^2(x)dx = \int_0^1 x^2 f(x)dx - \frac{1}{16}$ . Giá trị của tích phân  $\int_0^1 f(x)dx$  bằng

**Câu 98:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[1;8]$  và thỏa mãn

$$\int_1^2 [f(x^3)]^2 dx + 2 \int_1^2 f(x^3)dx = \frac{2}{3} \int_1^8 f(x)dx - \frac{38}{15}.$$

Tích phân  $\int_1^8 f(x)dx$  bằng

**Câu 99:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;1]$ , thỏa mãn  $f(1) = 0$ ,  $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$  và  $\int_0^1 x^2 f(x)dx = \frac{1}{3}$ . Tích phân  $\int_0^1 f(x)dx$  bằng

**Câu 100:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;1]$ , thỏa mãn  $f(1) = 1$ ,  $\int_0^1 x^5 f(x)dx = \frac{11}{78}$  và  $\int_0^1 f'(x)d(f(x)) = \frac{4}{13}$ . Tính  $f(2)$ .

**Câu 101:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;1]$ , thỏa mãn  $f(1) = 2, f(0) = 0$  và  $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 4$ . . Tích phân  $\int_0^1 [f^3(x) + 2018x]dx$  bằng

**Câu 102:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[1;2]$ , thỏa mãn  $\int_1^2 (x-1)^2 f(x)dx = -\frac{1}{3}, f(2) = 0$  và  $\int_1^2 [f'(x)]^2 dx = 7$ . Tích phân  $\int_1^2 f(x)dx$  bằng

**Câu 103:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;1]$ , thỏa mãn  $f(1)=1$ ,  $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{9}{5}$  và

$$\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx = \frac{2}{5}. \text{ Tích phân } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

**Câu 104:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;1]$ , thỏa mãn  $f(0)+f(1)=0$ ,

$$\int_0^1 f'(x) \cos(\pi x) dx = \frac{\pi}{2} \text{ và } \int_0^1 f^2(x) dx = \frac{1}{2}. \text{ Tích phân } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

**Câu 105:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;\pi]$ , thỏa mãn  $\int_0^\pi f'(x) \sin x dx = -1$  và

$$\int_0^\pi f^2(x) dx = \frac{2}{\pi}. \text{ Tích phân } \int_0^\pi xf(x) dx \text{ bằng}$$

**Câu 106:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;1]$ , thỏa  $f(1)=0$ ,  $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{\pi^2}{8}$  và

$$\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) f(x) dx = \frac{1}{2}. \text{ Tích phân } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

**Câu 107:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;1]$ , thỏa mãn  $\int_0^1 f'(x) \sin(\pi x) dx = \pi$  và

$$\int_0^1 f^2(x) dx = 2. \text{ Tích phân } \int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right) dx \text{ bằng}$$

**Câu 108:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , thỏa  $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ ,  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x) dx = 3\pi$  và

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - x) f'\left(\frac{x}{2}\right) dx = 6\pi. \text{ Tích phân } \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f''(x)]^3 dx \text{ bằng}$$

**Câu 109:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0;1]$ , thỏa mãn  $f(1)=0$  và

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \int_0^1 (x+1)e^x f(x) dx = \frac{e^2-1}{4}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^1 f(x) dx.$$

**Câu 110:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;1]$ , thỏa mãn  $f(0)=0, f(1)=1$  và

$$\int_0^1 \frac{[f'(x)]^2}{e^x} dx = \frac{1}{e-1}. \text{ Tích phân } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

**Câu 111:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;1]$ , thỏa mãn  $f(0)=0, f(1)=1$  và

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2} [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{\ln(1+\sqrt{2})}. \text{ Tích phân } \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}} dx \text{ bằng}$$

**Câu 112:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[-1;1]$ , thỏa mãn  $f(-1)=0$ ,  $\int_{-1}^1 [f'(x)]^2 dx = 112$

$$\text{và } \int_{-1}^1 x^2 f(x) dx = \frac{16}{3}. \text{ Tính tích phân } I = \int_{-1}^1 f(x) dx.$$

**Câu 113:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;1]$ , thỏa mãn  $f(1)=0$ ,  $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{3}{2} - 2\ln 2$

và  $\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx = 2\ln 2 - \frac{3}{2}$ . Tích phân  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng

**Câu 114:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[1;2]$ , đồng biến trên  $[1;2]$ , thỏa mãn  $f(1)=0$ ,

$\int_1^2 [f'(x)]^2 dx = 2$  và  $\int_1^2 f(x).f'(x) dx = 1$ . Tích phân  $\int_1^2 f(x) dx$  bằng

**Câu 115:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;1]$ , thỏa mãn  $f(1)=0$ ,  $\int_0^1 f^2(x) dx = 1$  và

$\int_0^1 [f'(x)]^2 f^2(x) dx = \frac{3}{4}$ . Giá trị của  $f^2(\sqrt{2})$  bằng

**Câu 116:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;2]$ , thỏa mãn  $f(2)=1$ ,  $\int_0^2 x^2 f(x) dx = \frac{8}{15}$  và

$\int_0^2 [f'(x)]^4 dx = \frac{32}{5}$ . Giá trị của tích phân  $\int_0^2 f(x) dx$  bằng



# NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN

## ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

### BÀI 2. TÍCH PHÂN



#### I LÝ THUYẾT.

**Định nghĩa:** Cho hàm số  $f$  liên tục trên khoảng  $K$  và  $a, b$  là hai số bất kì thuộc  $K$ . Nếu  $F$  là một nguyên hàm của  $f$  trên  $K$  thì hiệu số  $F(b) - F(a)$  được gọi là tích phân của hàm số  $f$  từ  $a$  đến  $b$  và kí hiệu là  $\int_a^b f(x) dx$ .

**Ta gọi:**  $a$  là cận dưới,  $b$  là cận trên,  $f$  là hàm số dưới dấu tích phân,  $f(x)dx$  là biểu thức dưới dấu tích phân,  $x$  biến số lấy tích phân.

**Nhận xét:**

a) Nếu  $a < b$  thì ta gọi  $\int_a^b f(x) dx$  là tích phân của  $f$  trên đoạn  $[a; b]$ .

b) Hiệu số  $F(b) - F(a)$  còn được kí hiệu là  $F(x) \Big|_a^b$ . Khi đó :

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

c) Tích phân **không phụ thuộc biến số** (điều này sẽ mang lại lợi ích cho ta để tính một số tích phân đặc biệt), tức là  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \dots = F(b) - F(a)$ .

**Tính chất:** Cho  $k$  là hằng số

$$a) \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$b) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$c) \int_a^b k \cdot f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

$$d) \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

e) **Tính chất chèn cận:**  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$  (chèn cận  $c$ )



#### II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

##### DẠNG 1: SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA TÍCH PHÂN

**Câu 1:** Tính các tích phân sau:

$$a) I = \int_0^1 3x^2 dx$$

$$b) I = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$c) I = \int_0^{\ln 2} 2^x dx$$

$$d) I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx$$

**Lời giải**

$$a) I = \int_0^1 3x^2 dx = x^3 \Big|_0^1 = 1 - 0 = 1.$$

$$b) I = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_1^4 = 2(2 - 1) = 2.$$

$$c) I = \int_0^1 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_0^1 = \frac{1}{\ln 2} (2^1 - 2^0) = \frac{1}{\ln 2}.$$

$$d) I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

**Câu 2:** Gọi  $F(x)$  là nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^x$ . Tính  $F(2\ln 2) - F(\ln 2)$ .

**Lời giải**

Vì hàm số  $f(x) = e^x$  liên tục trên đoạn  $[\ln 2; 2\ln 2]$  nên ta có:

$$F(\ln 4) - F(\ln 2) = \int_{\ln 2}^{\ln 4} f(x) dx = \int_{\ln 2}^{\ln 4} e^x dx = e^x \Big|_{\ln 2}^{\ln 4} = 2.$$

**Câu 3:** Gọi  $F(x)$  là nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{x}$  thỏa điều kiện  $F(1) = 2$ . Tính  $F(e)$ .

**Lời giải**

Vì hàm số  $f(x) = \frac{1}{x}$  liên tục trên đoạn  $[1; e]$  nên ta có:

$$F(e) - F(1) = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_1^e = 1.$$

Suy ra:  $F(e) = 1 + F(1) = 1 + 2 = 3$ .

**Câu 4:** Chứng minh  $F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ . Từ đó

tính tích phân  $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$ .

**Lời giải**

Ta có:

$$F'(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})'}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = f(x).$$

Do đó:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \Big|_0^1 = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

**Câu 5:** Chứng minh  $F(x) = \frac{1}{ad - bc} \ln \left| \frac{ax + b}{cx + d} \right|$  là một nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = \frac{1}{(ax + b)(cx + d)}. \text{ Từ đó tính tích phân } I = \int_0^1 \frac{1}{(2x + 1)(x + 1)} dx.$$

**Lời giải**

Ta có:

$$F'(x) = \frac{1}{ad - bc} (\ln|ax + b| - \ln|cx + d|)' = \frac{1}{ad - bc} \left( \frac{a}{ax + b} - \frac{c}{cx + d} \right) = \frac{1}{(ax + b)(cx + d)} = f(x).$$

Do đó:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(2x+1)(x+1)} dx = \frac{1}{2-1} \ln \left| \frac{2x+1}{x+1} \right| \Big|_0^1 = \ln \frac{3}{2} - \ln 1 = \ln \frac{3}{2}.$$

## DẠNG 2: SỬ DỤNG TÍNH CHẤT TÍCH PHÂN

**Câu 6:** Tính các tích phân sau:

$$I = \int_0^1 (4x^3 - e^x) dx = \quad b) I = \int_1^2 \left( 3^x - \frac{1}{x} \right) dx \quad c) I = \int_0^\pi (\sin x + 2 \cos x) dx$$

**Lời giải**

$$a) I = \int_0^1 (4x^3 - e^x) dx = x^4 \Big|_0^1 - e^x \Big|_0^1 = 1 - (e - 1) = 2 - e.$$

$$b) I = \int_1^2 \left( 3^x - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{3^x}{\ln 3} \Big|_1^2 - \ln |x| \Big|_1^2 = \frac{1}{\ln 3} (9 - 3) - \ln 2 = \frac{6}{\ln 3} - \ln 2.$$

$$c) I = \int_0^\pi (\sin x + 2 \cos x) dx = -\cos x \Big|_0^\pi + 2 \sin x \Big|_0^\pi = 2.$$

**Câu 7:** Tính  $I = \int_1^2 e^x \ln x dx + \int_1^2 e^t (1 - \ln t) dt$ .

**Lời giải**

$$I = \int_1^2 e^x \ln x dx + \int_1^2 e^x (1 - \ln x) dx = \int_1^2 e^x dx = e^2 - e.$$

**Câu 8:** Tính  $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin \frac{t}{2} \ln t dt + \int_\pi^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{u}{2} \left( \ln u - \sin \frac{u}{2} \right) du$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin \frac{x}{2} \ln x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin \frac{x}{2} \left( \ln x - \sin \frac{x}{2} \right) dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin^2 \frac{x}{2} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{1 - \cos x}{2} dx = \frac{1}{2} x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^\pi - \frac{1}{2} \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^\pi = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

## DẠNG 3: SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CHÈN CẬN ĐỂ TÍNH TÍCH PHÂN

**Tích phân của hàm chứa dấu trị tuyệt đối**

a) **Yêu cầu:** Tính tích phân  $I = \int_a^b |f(x)| dx$

b) **Phương pháp:**

+ Bước 1: Xét dấu của  $f(x)$  trên khoảng  $(a; b)$

- Giải phương trình  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_i \in (a; b)$
- Lập bảng xét dấu của  $f(x)$  trên khoảng  $(a; b)$

+ Bước 2: Chèn cận  $x_i$  và đồng thời bỏ dấu  $| |$  (căn cứ vào BXD) ta được các tích phân cơ bản

$$I = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^{x_i} |f(x)| dx + \int_{x_i}^b |f(x)| dx$$

**Chú ý:** Nếu  $f(x)$  không đổi dấu trên đoạn  $[a; b]$  thì  $I = \int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$

**Câu 9:** Tính các tích phân:

$$a) I = \int_0^2 |x-1| dx \quad b) I = \int_0^3 |x^2 - x| dx \quad c) \int_{-4}^2 |x^2 + 2x - 3| dx \quad d) \int_{-2}^2 |2x - |x+1|| dx$$

**Lời giải**

$$a) I = \int_0^2 |x-1| dx = \int_0^1 |x-1| dx + \int_1^2 |x-1| dx = -\int_0^1 (x-1) dx + \int_1^2 (x-1) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

$$b) \text{ Xét trên khoảng } (0;3) \text{ ta có: } x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}.$$

BXD:

|           |   |   |   |
|-----------|---|---|---|
| $x$       | 0 | 1 | 3 |
| $x^2 - x$ | - | 0 | + |

Suy ra:

$$I = -\int_0^1 (x^2 - x) dx + \int_1^3 (x^2 - x) dx = \frac{1}{6} + \frac{14}{3} = \frac{29}{6}.$$

$$c) \text{ Xét trên khoảng } (-2;2) \text{ ta có: } x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=1 \end{cases}.$$

BXD:

|            |      |      |     |     |     |
|------------|------|------|-----|-----|-----|
| $x$        | $-4$ | $-3$ | $1$ | $2$ |     |
| $x^2+2x-3$ | $+$  | $0$  | $-$ | $0$ | $+$ |

Suy ra:

$$I = \int_{-4}^{-3} (x^2 + 2x - 3) dx - \int_{-3}^1 (x^2 + 2x - 3) dx + \int_1^2 (x^2 + 2x - 3) dx = \frac{7}{3} + \frac{32}{3} + \frac{7}{3} = \frac{46}{3}.$$

$$d) \text{ Xét trên khoảng } (-2;2) \text{ ta có: } x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$$

BXD:

|       |    |    |   |
|-------|----|----|---|
| $x$   | -2 | -1 | 2 |
| $x+1$ | -  | 0  | + |

Suy ra:

$$I = \int_{-2}^1 |2x + x + 1| dx + \int_1^2 |2x - x - 1| dx = \int_{-2}^1 |3x + 1| dx + \int_1^2 |x - 1| dx = I_1 + I_2$$

Ta có:

$$I_1 = \int_{-2}^1 |3x+1| dx = -\int_{-2}^{-\frac{1}{3}} (3x+1) dx + \int_{-\frac{1}{3}}^1 (3x+1) dx = \frac{41}{6}.$$

$$I_2 = \int_1^2 |x-1| dx = \int_1^2 (x-1) dx = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy: } I = \frac{41}{6} + \frac{1}{2} = \frac{22}{3}.$$

**Câu 10:** Tính  $I = \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$ .

**Lời giải**

$$I = \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}} dx = \int_0^{\pi} \sqrt{\cos^2 x} dx = \int_0^{\pi} |\cos x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx = 1 + 1 = 2.$$

**Câu 11:** Tính  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1 - \sin 2x}{2}} dx$ .

**Lời giải**

Ta có:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}{2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right| dx.$$

Xét trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ , ta có:  $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ .

BXD:

|                                      |   |                 |                 |
|--------------------------------------|---|-----------------|-----------------|
| $x$                                  | 0 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ | - | 0               | +               |

Suy ra:

$$I = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2 - \sqrt{2}.$$

**Tích phân của hàm min, max**

a) **Yêu cầu:** Tính tích phân  $I = \int_a^b \min\{f(x); g(x)\} dx$ ;  $I = \int_a^b \max\{f(x); g(x)\} dx$

b) **Phương pháp:** Tính  $I = \int_a^b \min\{f(x); g(x)\} dx$  ( $I = \int_a^b \max\{f(x); g(x)\} dx$  tương tự)

+ Bước 1: Xét dấu của  $f(x) - g(x)$  trên khoảng  $(a; b)$

- Giải phương trình  $f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_i \in (a; b)$
- Lập bảng xét dấu của  $f(x) - g(x)$  trên khoảng  $(a; b)$

+ Bước 2: Chèn cận  $x_i$  và chọn hàm  $\min\{f(x); g(x)\}$  như sau:

- Nếu  $f(x) - g(x) > 0$  trên khoảng  $K$  thì  $\min\{f(x); g(x)\} = g(x)$ .
- Nếu  $f(x) - g(x) < 0$  trên khoảng  $K$  thì  $\min\{f(x); g(x)\} = f(x)$ .

Từ đó, ta được các tích phân cơ bản.

**Câu 12:** Tính  $I = \int_0^2 \min\{x; x^2\} dx$ .

**Lời giải**

Xét trên khoảng  $(0; 2)$ , ta có:  $x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (l)} \\ x = 1 \end{cases}$ .

BXD:

|           |   |   |   |
|-----------|---|---|---|
| $x$       | 0 | 1 | 2 |
| $x - x^2$ | + | 0 | - |

**Ta có:**

$x - x^2 > 0$  với mọi  $x \in (0; 1)$  nên  $\min\{x; x^2\} = x^2$ .

$x - x^2 < 0$  với mọi  $x \in (1; 2)$  nên  $\min\{x; x^2\} = x$ .

Suy ra:

$$I = \int_0^1 \min\{x; x^2\} dx + \int_1^2 \min\{x; x^2\} dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x dx = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} = \frac{11}{6}.$$

**Câu 13:** Tính  $I = \int_{-1}^1 \max\{e^x; 2^x\} dx$ .

**Lời giải**

Xét trên khoảng  $(-1; 1)$ , ta có:  $e^x - 2^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

BXD:

|             |    |   |   |
|-------------|----|---|---|
| $x$         | -1 | 0 | 1 |
| $e^x - 2^x$ | -  | 0 | + |

**Ta có:**

$e^x - 2^x < 0$  với mọi  $x \in (-1; 0)$  nên  $\max\{x; x^2\} = 2^x$ .

$e^x - 2^x > 0$  với mọi  $x \in (0; 1)$  nên  $\max\{x; x^2\} = e^x$ .

Suy ra:

$$I = \int_{-1}^0 \max\{e^x; 2^x\} dx + \int_0^1 \max\{e^x; 2^x\} dx = \int_{-1}^0 2^x dx + \int_0^1 e^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_{-1}^0 + e^x \Big|_0^1 = \frac{1}{2 \ln 2} + e - 1.$$

**Tích phân của hàm số xác định trên từng khoảng**

**Câu 14:** Cho hàm số  $y = f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \geq 0 \\ -x & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$ . Biết hàm số  $f$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ .

Tính  $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$ .

**Lời giải**

Ta có:

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 -x dx + \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

**Câu 15:** Cho hàm số  $y = f(x) = \begin{cases} (2x-1)^3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 2^x - 1 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ . Biết hàm số  $f$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ .

Tính  $I = \int_{-2}^3 f(x) dx$ .

**Lời giải**

Ta có:

$$I = \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = \int_{-2}^1 (2^x - 1) dx + \int_1^3 (2x-1)^3 dx = \frac{7}{2 \ln 2} + 78.$$

**Câu 16:** Cho hàm số  $y = f(x) = \begin{cases} -2(x+1) & \text{khi } x \leq 0 \\ k(1-x^2) & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$ . Xác định  $k$  để  $\int_{-1}^1 f(x) dx = 1$ .

**Lời giải**

Ta có:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 -2(x+1) dx + \int_0^1 k(1-x^2) dx$$

$$\Leftrightarrow 1 = -1 + k \frac{2}{3} \Leftrightarrow k = 3.$$

**Một số dạng khác**

**Câu 17:** Cho  $\int_1^2 f(x)dx = 3, \int_2^5 f(x)dx = 4$ . Tính  $I = \int_1^5 f(x)dx$ .

**Lời giải**

$$I = \int_1^5 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^5 f(x)dx = 3 + 4 = 7.$$

**Câu 18:** Gọi  $F(x)$  là nguyên hàm của hàm số  $f(x)$ .

Biết  $\int_0^3 f(x)dx = 12, \int_1^3 f(x)dx = 2$  và  $F(2) = 7$ . Tính  $F(0)$ .

**Lời giải**

Ta có:

$$\begin{aligned} F(2) - F(0) &= \int_0^2 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx - \int_2^3 f(x)dx \\ &= \int_0^3 f(x)dx - \left( \int_1^3 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx \right) \\ &= \int_0^3 f(x)dx - \int_1^3 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = 12 - 2 = 10. \end{aligned}$$

Suy ra:

$$F(0) = F(2) - 10 = 7 - 10 = -3.$$

**Câu 19:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0;10]$  thỏa mãn  $\int_0^{10} f(x)dx = 7; \int_2^6 f(x)dx = 3$ . Tính giá

trị của biểu thức  $P = \int_0^2 f(x)dx + \int_6^{10} f(x)dx$ .

**Lời giải**

$$\int_0^{10} f(x)dx = 7 \Leftrightarrow 7 = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^6 f(x)dx + \int_6^{10} f(x)dx \Leftrightarrow 7 = P + 3 \Leftrightarrow P = 4.$$

#### **DẠNG 4: SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA TÍCH PHÂN VÀO CÁC BÀI TOÁN KHÁC**

**Câu 20:** Cho hàm số  $g(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2} \sqrt{t} \sin t dt$  xác định với  $x > 0$ . Tìm  $g'(x)$ .

**Lời giải**

Gọi  $F(t)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(t) = \sqrt{t} \sin t$ . Suy ra:  $F'(t) = f(t)$ .

Ta có:

$$g(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2} f(t)dt = F(t) \Big|_{\sqrt{x}}^{x^2} = F(x^2) - F(\sqrt{x}) \quad (*).$$

Lấy đạo hàm hai vế của (\*) theo biến  $x$  ta được:

$$g'(x) = 2x.F'(x^2) - \frac{1}{2\sqrt{x}}F'(\sqrt{x}) \Leftrightarrow g'(x) = 2x.f(x^2) - \frac{1}{2\sqrt{x}}f(\sqrt{x})$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = 2x.x \sin x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt{x} \sin \sqrt{x} \Leftrightarrow g'(x) = 2x^2 \sin x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin \sqrt{x}.$$

**Câu 21:** Cho hàm số  $g(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} dt$ . Tìm  $g'(x)$ .

**Lời giải**

Gọi  $F(t)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$ . Suy ra:  $F'(t) = f(t)$ .

Ta có:

$$g(x) = \int_{2x}^{3x} f(t) dt = F(t) \Big|_{2x}^{3x} = F(3x) - F(2x) \quad (*).$$

Lấy đạo hàm hai vế của (\*) theo biến  $x$  ta được:

$$g'(x) = 3.F'(3x) - 2F'(2x) \Leftrightarrow g'(x) = 3.f(3x) - 2f(2x)$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = 3 \frac{9x^2 - 1}{9x^2 + 1} - 2 \frac{4x^2 - 1}{4x^2 + 1}.$$

**Câu 22:** Cho hàm số  $f$  và số thực  $a > 0$  thỏa mãn điều kiện:  $\int_a^x \frac{f(t)}{t^2} dt + 6 = 2\sqrt{x}$  với  $x > 0$ .

Tìm  $a$  và  $f$ .

**Lời giải**

Gọi  $F(t)$  là một nguyên hàm của hàm số  $\frac{f(t)}{t^2}$ . Suy ra:  $F'(t) = \frac{f(t)}{t^2}$ .

Ta có:

$$2\sqrt{x} - 6 = \int_a^x \frac{f(t)}{t^2} dt = F(t) \Big|_a^x = F(x) - F(a) \quad (*).$$

Lấy đạo hàm hai vế của (\*) theo biến  $x$  ta được:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = F'(x) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{f(x)}{x^2} \Leftrightarrow f(x) = x\sqrt{x}.$$

$$\text{Với } f(x) = x\sqrt{x}, \text{ ta có: } \int_a^x \frac{t\sqrt{t}}{t^2} dt + 6 = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow \int_a^x \frac{1}{\sqrt{t}} dt + 6 = 2\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{t} \Big|_a^x + 6 = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow -2\sqrt{a} + 6 = 0 \Leftrightarrow a = 9.$$

## **DẠNG 5: PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ LOẠI 1 ĐỂ TÍNH TÍCH PHÂN**

**Yêu cầu :** Tính tích phân  $I = \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx$

**Phương pháp:**

+ Biến đổi về dạng  $I = \int_a^b f[u(x)] u'(x) dx.$

+ Đặt  $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x) dx.$

+ **Đổi cận:**  $x = a \Rightarrow t = u(a) = t_1; x = b \Rightarrow t = u(b) = t_2.$

+ Khi đó:  $I = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$  là tích phân đơn giản hơn.

**Một số dấu hiệu cơ bản và cách chọn  $t = u(x)$**

|                    |               |
|--------------------|---------------|
| Dấu hiệu           | Cách chọn $t$ |
| Hàm số chứa mẫu số | $t$ là mẫu số |

|                                                                                             |                                                                                                                                                      |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Hàm số chứa căn $f\left(x, \sqrt{u(x)}\right)$                                              | $t$ là căn: $t = \sqrt{u(x)}$                                                                                                                        |
| Hàm số có dạng $[f(x)]^n$ (xấu) lũy thừa                                                    | $t$ là biểu thức (xấu) trong lũy thừa, $t = f(x)$                                                                                                    |
| Hàm số lượng giác có góc xấu                                                                | $t$ là góc xấu                                                                                                                                       |
| Hàm số mũ, mà mũ xấu                                                                        | $t$ là mũ xấu                                                                                                                                        |
| Hàm số $\log u$ mà $u$ xấu                                                                  | $t = u$                                                                                                                                              |
| Hàm số $f(x) = \frac{a \sin x + b \cos x}{c \sin x + d \cos x + e}$                         | $t = \tan \frac{x}{2} \quad \left( \cos \frac{x}{2} \neq 0 \right)$                                                                                  |
| Hàm $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$<br>Tổng quát đặt $t = \sqrt{ x+a } + \sqrt{ x+b }$ | + Với $x+a > 0 \wedge x+b > 0$ , đặt<br>$t = \sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}$<br>+ Với $x+a < 0 \wedge x+b < 0$ , đặt<br>$t = \sqrt{-(x+a)} + \sqrt{-(x+b)}$ |
| $R(\cos x) \cdot \sin x dx$ (theo biến $\cos x$ )                                           | Đặt $t = \cos x$                                                                                                                                     |
| $R(\sin x) \cdot \cos x dx$ (theo biến $\sin x$ )                                           | Đặt $t = \sin x$                                                                                                                                     |
| $R(\tan x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx$ (theo biến $\tan x$ )                               | Đặt $t = \tan x$                                                                                                                                     |
| $R(\cot x) \cdot \frac{1}{\sin^2 x} dx$ (theo biến $\cot x$ )                               | Đặt $t = \cot x$                                                                                                                                     |
| Hàm có $e^x, a^x$                                                                           | Đặt $t = e^x, t = a^x$                                                                                                                               |
| Hàm số vừa có $\ln x$ vừa có $\frac{1}{x}$                                                  | Đặt $t = \ln x$                                                                                                                                      |

**Câu 23:** Tính các tích phân sau

$$a) \int_1^2 \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x} dx$$

$$b) \int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x} + 2) dx$$

$$c) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin x) e^{x - \cos x} dx$$

$$d) \int_0^1 \frac{4x + 6}{(x^2 + 3x + 1)^{2017}} dx$$

$$e) \int_0^1 x \sqrt{x^2 + 4} dx$$

$$f) \int_0^1 (x+1)(x-1)^{2017} dx$$

$$g) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx$$

$$h) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cdot \cos x dx$$

$$i) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x}{\cos x + x \sin x} dx$$

**Lời giải**

$$a) I = \int_1^2 \frac{1}{x^3 + x} \cdot (3x^2 + 1) dx$$

$$\text{Đặt } t = x^3 + x \Rightarrow dt = (3x^2 + 1) dx.$$

$$\text{Đổi cận: } x = 1 \Rightarrow t = 2; \quad x = 2 \Rightarrow t = 10.$$

$$\text{Suy ra: } I = \int_2^{10} \frac{1}{t} dt = \ln |t| \Big|_2^{10} = \ln 5.$$

$$b) I = \int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \sin\left(\sqrt{x} - \frac{\pi}{4}\right) \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x} - \frac{\pi}{4} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow 2dt = \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

$$\text{Đổi cận: } x = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}; x = \pi^2 \Rightarrow t = \frac{3\pi}{4}.$$

$$\text{Suy ra: } I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 2 \sin t dt = -2 \cos t \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = 2\sqrt{2}.$$

$$c) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x - \cos x} (1 + \sin x) dx$$

$$\text{Đặt } t = x - \cos x \Rightarrow dt = (1 + \sin x) dx.$$

$$\text{Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = -1; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Suy ra: } I = \int_{-1}^{\frac{\pi}{2}} e^t dt = e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-1}.$$

$$d) I = \int_0^1 \frac{2}{(x^2 + 3x + 1)^{2017}} (2x + 3) dx$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + 3x + 1 \Rightarrow dt = (2x + 3) dx.$$

$$\text{Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 1; x = 1 \Rightarrow t = 5.$$

$$\text{Suy ra: } I = \int_1^5 \frac{2}{t^{2017}} dt = -\frac{1}{1008} \frac{1}{t^{2016}} \Big|_1^5 = -\frac{1}{1008} \left( \frac{1}{5^{2016}} - 1 \right).$$

$$e) I = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 4} \cdot x dx$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2 + 4} \Rightarrow t^2 = x^2 + 4 \Rightarrow t dt = x dx.$$

$$\text{Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 2; x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{5}.$$

$$\text{Suy ra: } I = \int_2^{\sqrt{5}} t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_2^{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5} - 8}{3}.$$

$$f) I = \int_0^1 (x-1)^{2017} (x+1) dx$$

$$\text{Đặt } t = x-1 \Rightarrow dt = dx \text{ và } x = t+1.$$

$$\text{Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = -1; x = 1 \Rightarrow t = 0.$$

$$\text{Suy ra: } I = \int_{-1}^0 t^{2017} (t+2) dt = \int_{-1}^0 (t^{2018} + 2t^{2017}) dt = \frac{t^{2019}}{2019} \Big|_{-1}^0 + \frac{t^{2018}}{1009} \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{2019} - \frac{1}{1009}.$$

$$g) I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$\text{Đặt } t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx.$$

$$\text{Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 1.$$

Suy ra:  $I = \int_0^1 e^t dt = e - 1.$

h)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cdot \cos x dx$

Đặt  $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx.$

Đổi cận:  $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1.$

Suy ra:  $I = \int_0^1 t^3 dt = \frac{1}{4}.$

i)  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x}{\cos x + x \sin x} dx$

Đặt  $t = \cos x + x \sin x \Rightarrow dt = x \cos x dx.$

Đổi cận:  $x = 0 \Rightarrow t = 1; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}.$

Suy ra:  $I = \int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t} dt = \ln \frac{\pi}{2}.$

**Câu 24:** Tính các tích phân sau (Đặt giảm bậc)

a)  $\int_2^3 \frac{2x}{x^4 - 1} dx$       b)  $\int_0^1 \frac{6x^2 - 1}{\sqrt[3]{(2x^3 - x)^2 - 9}} dx$

**Lời giải**

a)  $I = \int_2^3 \frac{2x}{x^4 - 1} dx$

Đặt  $t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$

Đổi cận:  $x = 2 \Rightarrow t = 4; x = 3 \Rightarrow t = 9.$

Suy ra:

$I = \int_4^9 \frac{1}{t^2 - 1} dt = \int_4^9 \frac{1}{(t-1)(t+1)} dt = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_4^9 = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}.$

b)  $\int_0^1 \frac{6x^2 - 1}{\sqrt[3]{(2x^3 - x)^2 - 9}} dx$

Đặt  $t = \sqrt[3]{2x^3 - x} \Rightarrow t^3 = 2x^3 - x \Rightarrow 3t^2 dt = (6x^2 - 1) dx$

Đổi cận:

$x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = 1$

Suy ra:

$I = \int_0^1 \frac{3t^2}{t^2 - 9} dt = 3 \int_0^1 \left( 1 + \frac{1}{(t-3)(t+3)} \right) dt = 3 \left( t \Big|_0^1 - \frac{1}{6} \ln \left| \frac{t-3}{t+3} \right| \Big|_0^1 \right) = 3 + \frac{1}{2} \ln 2.$

**Tích phân có sẵn dạng  $f(u(x))$**

**Câu 25:** Chứng minh rằng  $I = \int_{x_1}^{x_2} f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \int_{ax_1+b}^{ax_2+b} f(x) dx$ , với  $a \neq 0$ .

**Lời giải**

Đặt  $t = ax + b \Rightarrow dt = a dx \Rightarrow \frac{1}{a} dt = dx.$

Đổi cận:

$$x = x_1 \Rightarrow t = ax_1 + b; \quad x = x_2 \Rightarrow t = ax_2 + b.$$

Suy ra:

$$I = \frac{1}{a} \int_{ax_1+b}^{ax_2+b} f(t) dt = \frac{1}{a} \int_{ax_1+b}^{ax_2+b} f(x) dx \quad (\text{Do tích phân không phụ thuộc vào biến số}).$$

Từ đây trở về sau, ta xem đây là một tính chất của tích phân.

**Câu 26:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $\int_3^7 f(x) dx = 2$ . Tính  $I = \int_1^3 f(2x+1) dx$ .

**Lời giải**

$$I = \int_1^3 f(2x+1) dx = \frac{1}{2} \int_{2 \cdot 1+1}^{2 \cdot 3+1} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_3^7 f(x) dx = 1.$$

**Câu 27:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $\int_1^4 f(1-2x) dx = 2$ . Tính  $I = \int_{-7}^{-1} f(x) dx$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \int_1^4 f(1-2x) dx &= \frac{1}{-2} \int_{-1}^{-7} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-7}^{-1} f(x) dx \\ \Leftrightarrow 2 &= \frac{1}{2} \int_{-7}^{-1} f(x) dx \Leftrightarrow \int_{-7}^{-1} f(x) dx = 4. \end{aligned}$$

**Câu 28:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $\int_1^3 f(3x-1) dx = 3$ . Tính  $I = \int_{-6}^0 f(2-x) dx$ .

**Lời giải**

Ta có:

$$3 = \int_1^3 f(3x-1) dx = \frac{1}{3} \int_2^8 f(x) dx \Leftrightarrow \int_2^8 f(x) dx = 9.$$

Ta có:

$$I = \int_{-6}^0 f(2-x) dx = - \int_8^2 f(x) dx = \int_2^8 f(x) dx = 9.$$

**Câu 29:** Cho  $\int_0^1 f(x) dx = 2$  Tính  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\cos 2x) \sin x \cos x dx$ .

**Lời giải**

$$\text{Đặt } t = \cos 2x \Rightarrow dt = -2 \sin 2x dx \Rightarrow -\frac{1}{4} dt = \sin x \cos x dx$$

Đổi cận:

$$x = 0 \Rightarrow t = 1; \quad x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 0$$

Suy ra:

$$I = \frac{1}{4} \int_1^0 f(t) dt = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}.$$

**Tích phân với hàm số chẵn và lẻ**

+ Hàm số  $y = f(x)$  là hàm số chẵn trên đoạn  $[-a; a]$  khi và chỉ khi  $\forall x \in [-a; a]$  ta có:

$$-x \in [-a; a] \text{ và } f(-x) = f(x).$$

+ Hàm số  $y = f(x)$  là hàm số lẻ trên đoạn  $[-a; a]$  khi và chỉ khi  $\forall x \in [-a; a]$  ta có:

$$-x \in [-a; a] \text{ và } f(-x) = -f(x).$$

+ Ta có thể thay đoạn  $[-a; a]$  bằng một tập đối xứng thì định nghĩa hàm số chẵn, hàm số lẻ vẫn như trên.

**Câu 30:** Cho  $f(x)$  là hàm số chẵn, liên tục trên đoạn  $[-a; a]$ . Chứng minh rằng:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } I = \int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = K + \int_0^a f(x) dx$$

$$\text{Tính } K = \int_{-a}^0 f(x) dx.$$

$$\text{Đặt } t = -x \Rightarrow dt = -dx.$$

Đổi cận:

$$x = -a \Rightarrow t = a; \quad x = 0 \Rightarrow t = 0.$$

Suy ra:

$$K = - \int_a^0 f(-x) dx = \int_0^a f(-x) dx = \int_0^a f(x) dx.$$

Do đó:

$$I = K + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

**Câu 31:** Cho  $f(x)$  là hàm số chẵn, liên tục trên đoạn  $[-a; a]$ . Chứng minh rằng:

$$I = \int_{-a}^a \frac{f(x)}{b^x + 1} dx = \int_0^a f(x) dx, \text{ với } a > 0, b > 0.$$

**Lời giải**

$$\text{Đặt } t = -x \Rightarrow dt = -dx$$

Đổi cận:

$$x = -a \Rightarrow t = a; \quad x = a \Rightarrow t = -a$$

Suy ra:

$$I = - \int_a^{-a} \frac{f(-t)}{b^{-t} + 1} dt = \int_{-a}^a \frac{b^t f(t)}{b^t + 1} dt = \int_{-a}^a \frac{b^x f(x)}{b^x + 1} dx$$

Do đó:

$$2I = \int_{-a}^a \frac{f(x)}{b^x + 1} dx + \int_{-a}^a \frac{b^x f(x)}{b^x + 1} dx = \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \Leftrightarrow I = \int_0^a f(x) dx.$$

**Câu 32:** Tính tích phân  $I = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{2^x + 1} dx.$

**Lời giải**

Vì  $f(x) = x^2$  là hàm số chẵn trên đoạn  $[-1; 1]$  nên ta có:

$$I = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

**Câu 33:** Tính tích phân  $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{e^x + 1} dx$

**Lời giải**

Vì  $f(x) = \cos x$  là hàm số chẵn trên đoạn  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  nên ta có:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

**Câu 34:** Biết hàm số  $y = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$  là hàm số chẵn trên  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  và  $f(x) + f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x + \cos x$ .

Tính  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ .

**Lời giải**

Đặt  $t = x - \frac{\pi}{2} \Rightarrow dt = dx$  và  $x = t + \frac{\pi}{2}$

Đổi cận:

$$x = 0 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}; \quad x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$$

Suy ra:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f\left(t + \frac{\pi}{2}\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(t + \frac{\pi}{2}\right) dt \quad (\text{Do } y = f\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ là hàm số chẵn trên } \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right])$$

Do đó:

$$2I = I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(t + \frac{\pi}{2}\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t + \cos t) dt = (-\cos t + \sin t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

Vậy  $I = 1$ .

**Câu 35:** Cho  $f(x)$  là hàm số lẻ, liên tục trên đoạn  $[-a; a]$ . Chứng minh rằng:  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ .

**Lời giải**

Ta có:  $I = \int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = K + \int_0^a f(x) dx$

Tính  $K = \int_{-a}^0 f(x) dx$ .

Đặt  $t = -x \Rightarrow dt = -dx$ .

Đổi cận:

$$x = -a \Rightarrow t = a; \quad x = 0 \Rightarrow t = 0.$$

Suy ra:

$$K = -\int_a^0 f(-x) dx = \int_0^a f(-x) dx = -\int_0^a f(x) dx.$$

Do đó:

$$I = K + \int_0^a f(x) dx = -\int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0$$

**Câu 36:** Tính tích phân  $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left( \cos 4x + \sin \frac{x}{2} \sin x \right) \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) dx$

**Lời giải**

Xét hàm  $f(x) = \left( \cos 4x + \sin \frac{x}{2} \sin x \right) \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$

Ta thấy  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$  và

$$f(-x) = \left( \cos 4x + \sin \frac{x}{2} \sin x \right) \ln \left( \frac{1-x}{1+x} \right) = \left( \cos 4x + \sin \frac{x}{2} \sin x \right) \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^{-1}$$

$$- \left( \cos 4x + \sin \frac{x}{2} \sin x \right) \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) = -f(x)$$

Nên  $f(x)$  là hàm số lẻ trên  $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$

Vậy  $I = 0$ .

**Câu 37:** Tính tích phân  $I = \int_0^{2\pi} \sin(\sin x + mx) dx$ , với  $m \in \mathbb{Z}$ .

**Lời giải**

Đặt  $t = x - \pi \Rightarrow dt = dx$ .

Đổi cận:

$$x = 0 \Rightarrow t = -\pi; \quad x = 2\pi \Rightarrow t = \pi.$$

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\sin(t + \pi) + mt + m\pi) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt - \sin t + m\pi) dt = (-1)^m \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt - \sin t) dt$$

Xét hàm  $f(t) = \sin(mt - \sin t)$ .

Ta thấy hàm số này liên tục trên đoạn  $[-\pi; \pi]$  và

$$f(-t) = \sin(-mt + \sin t) = -\sin(mt - \sin t) = -f(t)$$

Nên  $f(t)$  là hàm số lẻ trên  $[-\pi; \pi]$

$$\text{Vậy } I = (-1)^m \cdot 0 = 0.$$

**Một số kiểu đổi biến đặc biệt**

**Câu 38:** Cho  $f(x)$  là hàm số liên tục trên  $[0; 1]$ . Chứng minh rằng:  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$

**Lời giải**

$$\text{Đặt } t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow dt = -dx.$$

Đổi cận:

$$x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}; \quad x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0.$$

Suy ra:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx.$$

**Câu 39:** Tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{1}{\cos^2(\sin x)} - \tan^2(\cos x) \right] dx$ .

**Lời giải**

Ta có:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^2(\cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^2(\sin x) dx \quad \text{và} \quad \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \tan^2 \alpha = 1$$

Do đó:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{1}{\cos^2(\sin x)} - \tan^2(\sin x) \right] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}.$$

**Câu 40:** Tính  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2017} x \cdot \cos x}{\sin^{2016} x + \cos^{2016} x} dx$ .

**Lời giải**

Xét tích phân  $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2017} x \cdot \sin x}{\sin^{2016} x + \cos^{2016} x} dx$

Ta có:  $I = J$ . Suy ra:

$$2I = I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2017} x \cdot \cos x}{\sin^{2016} x + \cos^{2016} x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2017} x \cdot \sin x}{\sin^{2016} x + \cos^{2016} x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = -\frac{1}{4} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Vậy  $I = \frac{1}{4}$ .

**Câu 41:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-1; 1]$ . Chứng minh rằng

$$I = \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

**Lời giải**

Đặt  $t = \pi - x \Rightarrow dt = -dx$

Đổi cận:

$$x = 0 \Rightarrow t = \pi; \quad x = \pi \Rightarrow t = 0$$

Suy ra:

$$I = \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \int_0^{\pi} (\pi - t) f(\sin(\pi - t)) dt$$

$$= \pi \int_0^{\pi} f(\sin t) dt - \int_0^{\pi} t \cdot f(\sin t) dt = \pi \int_0^{\pi} f(\sin x) dx - I$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$$

**Câu 42:** Tính  $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{3 + \sin^2 x} dx$

**Lời giải**

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{3 + \sin^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{3 + \sin^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{4 - \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \cdot J$$

Đặt  $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$

Đổi cận:  $x = 0 \Rightarrow t = 1; \quad x = \pi \Rightarrow t = -1$ .

Suy ra:

$$J = \int_1^{-1} \frac{1}{(2-t)(2+t)} dt = -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{2-t}{2+t} \right| \Big|_1^{-1} = \frac{\ln 3}{2}.$$

**Câu 43:** Cho  $f(x)$ ,  $g(x)$  là các hàm số liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $f(2) = 7$ ;  $f(-1) = 1$ ;  $g(2) = 9$ ;  $g(-1) = 3$ .

Tính  $I = \int_{-1}^2 \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[f(x) + g(x)]^2} dx$

**Lời giải**

$$I = \int_{-1}^2 \frac{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' \cdot g^2(x)}{\left[f(x) + g(x)\right]^2} dx = \int_{-1}^2 \frac{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'}{\left[\frac{f(x)}{g(x)} + 1\right]^2} dx$$

$$\text{Đặt } t = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow dt = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' dx$$

$$\text{Đổi cận: } x = -1 \Rightarrow t = \frac{1}{3}; x = 2 \Rightarrow t = \frac{7}{9}.$$

Suy ra:

$$I = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{7}{9}} \frac{1}{(1+t)^2} dt = -\frac{1}{t+1} \Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{7}{9}} = \frac{3}{16}.$$

**Chú ý:** Trong lời giải trên đã sử dụng thêm giả thiết  $g(x) \neq 0$ . Điều này không ảnh hưởng đến lời giải.

**Câu 44:** Cho hàm số  $y = f(x)$  thỏa mãn  $f(x) \cdot f'(x) = 3x^5 + 6x^2$ . Biết  $f(0) = 2$ . Tính  $f^2(2)$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } I = \int_0^2 f(x) \cdot f'(x) dx = \int_0^2 (3x^5 + 6x^2) dx = 48$$

$$\text{Đặt } t = f(x) \Rightarrow dt = f'(x) dx$$

Đổi cận:

$$x = 0 \Rightarrow t = f(0) = 2; x = 2 \Rightarrow t = f(2).$$

Suy ra:

$$I = \int_2^{f(2)} t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_2^{f(2)} = \frac{f^2(2)}{2} - 2 \Leftrightarrow 48 = \frac{f^2(2)}{2} - 2 \Leftrightarrow f^2(2) = 100.$$

## DẠNG 6: PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ LOẠI 2 ĐỂ TÍNH TÍCH PHÂN

**Yêu cầu:** Tính tích phân  $I = \int_a^b f(x) dx$

**Phương pháp:** Đặt  $x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t) dt$

+ Đổi cận:  $x = a \Rightarrow t = t_1; x = b \Rightarrow t = t_2$

+ Khi đó:  $I = \int_{t_1}^{t_2} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$

**Một số cách đổi biến cần nhớ:**

$$+ a^2 + (bx + c)^2 : bx + c = |a| \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) +$$

$$\sqrt{a^2 - (bx + c)^2} : bx + c = |a| \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$+ \sqrt{(bx + c)^2 - a^2} : bx + c = \frac{|a|}{\sin t}, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$$

$$+ \text{Nhớ: } \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx \stackrel{\Delta < 0, a > 0}{=} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}} dx \stackrel{\sqrt{a} \left(x + \frac{b}{2a}\right) = \sqrt{\frac{-\Delta}{4a}} \tan t}{=} \int_{t_1}^{t_2} \frac{a}{\sqrt{-\Delta}} dt$$

**Câu 45:** Tính các tích phân sau:

$$a) I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$b) I = \int_0^1 \frac{1}{x^2+3} dx$$

$$c) I = \int_0^1 \frac{1}{4x^2+4x+4} dx$$

$$d) I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^8+1} dx$$

$$e) I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$f) I = \int_0^1 \sqrt{-4x^2+4x+1} dx$$

$$g) I = \int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx$$

$$h) I = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$$

**Lời giải**

$$a) I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\text{Đặt } x = \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = (1 + \tan^2 t) dt$$

$$\text{Đổi cận: } x=0 \Rightarrow t=0; x=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{4}.$$

Suy ra:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 t} \cdot (1 + \tan^2 t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{4}.$$

$$b) I = \int_0^1 \frac{1}{x^2+3} dx$$

$$\text{Đặt } x = \sqrt{3} \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = \sqrt{3} (1 + \tan^2 t) dt$$

$$\text{Đổi cận: } x=0 \Rightarrow t=0; x=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{6}.$$

Suy ra:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{3+3\tan^2 t} \cdot \sqrt{3} (1 + \tan^2 t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sqrt{3}} dt = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

$$c) I = \int_0^1 \frac{1}{3+(2x+1)^2} dx$$

$$\text{Đặt } 2x+1 = \sqrt{3} \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 2dx = \sqrt{3} (1 + \tan^2 t) dt \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2} (1 + \tan^2 t) dt$$

$$\text{Đổi cận: } x=0 \Rightarrow t=\frac{\pi}{6}; x=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{3}.$$

Suy ra:

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3+3\tan^2 t} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} (1 + \tan^2 t) dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2\sqrt{3}} dt = \frac{\pi}{12\sqrt{3}}.$$

$$d) I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^8+1} dx$$

$$\text{Đặt } x^4 = \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 4x^3 dx = (1 + \tan^2 t) dt \Rightarrow x^3 dx = \frac{1}{4} (1 + \tan^2 t) dt$$

Đổi cận:  $x = 0 \Rightarrow t = 0$ ;  $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$ .

Suy ra:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \tan^2 t} \cdot \frac{1}{4} (1 + \tan^2 t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4} dt = \frac{\pi}{16}.$$

e)  $I = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$

Đặt  $x = \sin t$ ,  $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = \cos t dt$

Đổi cận:  $x = 0 \Rightarrow t = 0$ ;  $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$ .

Suy ra:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 x} \cdot \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

f)  $I = \int_0^1 \sqrt{-4x^2 + 4x + 1} dx = \int_0^1 \sqrt{2 - (2x - 1)^2} dx$

Đặt  $2x - 1 = \sqrt{2} \sin t$ ,  $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t dt$

Đổi cận:  $x = 0 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{4}$ ;  $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$ .

Suy ra:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2 - 2 \sin^2 x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} t \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4} \sin 2t \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

g)  $I = \int_0^1 \sqrt{2x - x^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 - (x - 1)^2} dx$

Đặt  $x - 1 = \sin t$ ,  $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = \cos t dt$

Đổi cận:  $x = 0 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}$ ;  $x = 1 \Rightarrow t = 0$ .

Suy ra:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1 - \sin^2 x} \cdot \cos t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} t \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 + \frac{1}{4} \sin 2t \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{\pi}{4}.$$

h)  $I = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx$

Đặt  $x = \frac{1}{\sin t}$ ,  $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\} \Rightarrow dx = \frac{-\cos t}{\sin^2 t} dt$

Đổi cận:  $x = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$ ;  $x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$ .

Suy ra:

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1}} \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dt = \frac{\pi}{6}.$$

## DẠNG 7: PHƯƠNG PHÁP TỪNG PHẦN ĐỂ TÍNH TÍCH PHÂN

Công thức từng phần:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

Viết gọn:  $\int_a^b u dv = (uv)|_a^b - \int_a^b v du$

Áp dụng: Tính tích phân  $I = \int_a^b f(x)dx$

Phương pháp:

+ Bước 1: Biến đổi  $I = \int_a^b f_1(x) \cdot f_2(x)dx$

+ Bước 2: Đặt  $\begin{cases} u = f_1(x) \\ dv = f_2(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f_1'(x)dx \\ v = \int f_2(x)dx \end{cases}$  (Chọn  $dv$  sao cho  $v$  dễ lấy nguyên hàm)

+ Bước 3: Khi đó  $I = (uv)|_a^b - \int_a^b v du$

• **Dạng 1.**  $I = \int P(x)\sin(ax+b)dx$ , trong đó  $P(x)$  là đa thức.

Với dạng này, ta đặt  $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \sin(ax+b)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = P'(x)dx \\ v = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) \end{cases}.$

• **Dạng 2.**  $I = \int P(x)\cos(ax+b)dx$ , trong đó  $P(x)$  là đa thức.

Với dạng này, ta đặt  $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \cos(ax+b)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = P'(x)dx \\ v = \frac{1}{a}\sin(ax+b) \end{cases}.$

• **Dạng 3.**  $I = \int P(x)e^{ax+b}dx$ , trong đó  $P(x)$  là đa thức.

Với dạng này, ta đặt  $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{ax+b}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = P'(x)dx \\ v = \frac{1}{a}e^{ax+b} \end{cases}.$

• **Dạng 4.**  $I = \int P(x)\ln g(x)dx$ , trong đó  $P(x)$  là đa thức.

Với dạng này, ta đặt  $\begin{cases} u = \ln g(x) \\ dv = P(x)dx \end{cases}.$

• **Dạng 5.**  $I = \int \left[ \frac{\sin x}{\cos x} \right] e^x dx.$

Với dạng này, ta đặt  $\begin{cases} u = \left[ \frac{\sin x}{\cos x} \right] \\ dv = e^x dx \end{cases}.$

**Câu 46:** Tính các tích phân sau:

$$a) I = \int_1^e x \ln x dx \quad b) I = \int_0^{\ln 2} x e^x dx \quad c) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx \quad d) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$$

**Lời giải**

$$a) I = \int_1^e x \ln x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

Suy ra:

$$I = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^2}{2} - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}(e^2 - 1) = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}.$$

$$b) I = \int_0^{\ln 2} x e^x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$$

Suy ra:

$$I = x e^x \Big|_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} e^x dx = 2 \ln 2 - e^x \Big|_0^{\ln 2} = 2 \ln 2 - 1.$$

$$c) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$$

Suy ra:

$$I = x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

$$d) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sin x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \cos x dx \\ v = e^x \end{cases}$$

Suy ra:

$$I = e^x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = e^{\frac{\pi}{2}} - J$$

$$\text{Tính } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \cos x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin x dx \\ v = e^x \end{cases}$$

Suy ra:

$$J = e^x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = -1 + I$$

$$\text{Vậy: } I = e^{\frac{\pi}{2}} - (-1 + I) \Leftrightarrow I = \frac{1}{2} \left( e^{\frac{\pi}{2}} + 1 \right).$$

**Câu 47:** Tính các tích phân sau:

$$a) I = \int_0^1 x^2 e^{2x} dx \quad b) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$$

**Lời giải**

$$a) I = \int_0^1 x^2 e^{2x} dx$$

**Cách làm nhanh**

| Cột $u$ (cột đạo hàm) | Cột $v$ (cột nguyên hàm) |
|-----------------------|--------------------------|
| $x^2$                 | $e^{2x}$                 |
| $2x$                  | $\frac{1}{2} e^{2x}$     |
| $2$                   | $\frac{1}{4} e^{2x}$     |
| $0$                   | $\frac{1}{8} e^{2x}$     |

Dựa vào bảng, ta có:

$$I = \left( \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} x e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} \right) \Big|_0^1 = \left( \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \right) e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}$$

$$b) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3 \cos x dx$$

| Cột $u$ (cột đạo hàm) | Cột $v$ (cột nguyên hàm) |
|-----------------------|--------------------------|
| $x^3$                 | $\cos x$                 |
| $3x^2$                | $\sin x$                 |
| $6x$                  | $-\cos x$                |
| $6$                   | $-\sin x$                |
| $0$                   | $\cos x$                 |

Dựa vào bảng, ta có:

$$I = \left( x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{8} - 3\pi + 6.$$

**Câu 48:** Tính tích phân  $I = \int_0^{\pi} 2^x \sin 3x dx$

**Lời giải**

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sin 3x \\ dv = 2^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 3 \cos 3x dx \\ v = \frac{2^x}{\ln 2} \end{cases}$$

Suy ra:

$$I = \frac{2^x}{\ln 2} \sin 3x \Big|_0^\pi - \frac{3}{\ln 2} \int_0^\pi 2^x \cos 3x dx = -\frac{3}{\ln 2} J$$

$$\text{Tính } J = \int_0^\pi 2^x \cos 3x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \cos 3x \\ dv = 2^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -3 \sin 3x dx \\ v = \frac{2^x}{\ln 2} \end{cases}$$

Suy ra:

$$J = \frac{2^x}{\ln 2} \cos 3x \Big|_0^\pi + \frac{3}{\ln 2} \int_0^\pi 2^x \sin 3x dx = -\frac{1+2^\pi}{\ln 2} + \frac{3}{\ln 2} I$$

Do đó:

$$I = -\frac{3}{\ln 2} \left( -\frac{1+2^\pi}{\ln 2} + \frac{3}{\ln 2} I \right) \Leftrightarrow I = \frac{3(1+2^\pi)}{9 + \ln^2 2}.$$

**Câu 49:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[a; b]$ . Chứng minh rằng:

$$I = \int_a^b [f'(x) + f(x)] e^x dx = f(b) \cdot e^b - f(a) e^a$$

**Lời giải**

**Cách 1:**

Ta có:

$$I = \int_a^b [f'(x) + f(x)] e^x dx = \int_a^b f'(x) e^x dx + \int_a^b f(x) e^x dx = J + \int_a^b f(x) e^x dx$$

$$\text{Tính } J = \int_a^b f'(x) e^x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = e^x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

Suy ra:

$$J = f(x) e^x \Big|_a^b - \int_a^b f(x) e^x dx$$

Do đó:

$$I = J + \int_a^b f(x) e^x dx = f(x) e^x \Big|_a^b = f(b) e^b - f(a) e^a$$

**Cách 2:**

$$\text{Ta có: } (f(x) e^x)' = f'(x) e^x + f(x) e^x = [f'(x) + f(x)] e^x$$

Do đó:

$$I = \int_a^b (f(x) e^x)' dx = f(x) e^x \Big|_a^b = f(b) e^b - f(a) e^a.$$

**Câu 50:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[-1; 1]$  thỏa

$$f(x+1) - 2f(x) = 6x^2 - x^3 - 7 \quad \text{Tính } I = \int_{-1}^1 \frac{f'(x) - \ln 2 \cdot f(x)}{2^x} dx.$$

**Lời giải**

Ta có:

$$\frac{f'(x) - \ln 2 \cdot f(x)}{2^x} = \left( \frac{f(x)}{2^x} \right)' \quad \text{nên}$$

$$I = \int_{-1}^1 \left( \frac{f(x)}{2^x} \right)' dx = \left( \frac{f(x)}{2^x} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{f(1)}{2} - 2 \cdot f(-1) = \frac{1}{2} [f(1) - 4f(-1)]$$

Ta có:

$$\begin{cases} f(1) - 2f(0) = 7 \\ f(0) - 2f(-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) - 2f(0) = 7 \\ 2f(0) - 4f(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow f(1) - 4f(-1) = 7$$

$$\text{Vậy: } I = \frac{7}{2}.$$

**Câu 51:** Tính các tích phân

$$a) I = \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx \quad b) I = \int_0^{\pi^2} \sin \sqrt{x} dx \quad c) I = \int_e^{e^e} \frac{\ln x \cdot \ln(\ln x)}{x} dx$$

**Lời giải**

$$a) I = \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx = \int_0^1 x^2 e^{x^2} x dx$$

$$\text{Đặt } t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx \Rightarrow \frac{1}{2} dt = x dx$$

Đổi cận:

$$x = 0 \Rightarrow t = 0; \quad x = 1 \Rightarrow t = 1$$

Suy ra:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 t e^t dt = \frac{1}{2} \left( t e^t \Big|_0^1 - \int_0^1 e^t dt \right) = \frac{1}{2} (e - (e - 1)) = \frac{1}{2}.$$

$$b) I = \int_0^{\pi^2} \sin \sqrt{x} dx$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow 2t dt = dx$$

Đổi cận:

$$x = 0 \Rightarrow t = 0; \quad x = \pi^2 \Rightarrow t = \pi$$

Suy ra:

$$I = 2 \int_0^{\pi} t \sin t dt = 2 \left( -t \cos t \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos t dt \right) = 2\pi.$$

$$c) I = \int_{e^2}^{e^5} \frac{\ln x \cdot \ln(\ln x)}{x} dx$$

$$\text{Đặt } t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$$

Đổi cận:

$$x = e \Rightarrow t = 1; \quad x = e^e \Rightarrow t = e$$

Suy ra:

$$I = \int_1^e t \ln t dt = \frac{t^2 \ln t}{2} \Big|_1^e - \int_1^e \frac{t}{2} dt = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}.$$

**Câu 52:** Tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx$

**Lời giải**

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx \end{cases}$$

$$\text{Tìm } v = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$\text{Đặt } t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$$

$$\text{Suy ra: } v = \int \frac{-1}{t^2} dt = \frac{1}{t} + C = \frac{1}{\cos x} + C. \text{ Chọn } v = \frac{1}{\cos x}$$

Do đó:

$$I = \frac{x}{\cos x} \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx = \frac{2\pi}{3} - J.$$

$$\text{Tính } \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx$$

$$\text{Đặt } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx \text{ và } e^x = t^2 - 1$$

Đổi cận:

$$x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Suy ra:

$$J = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{1-t^2} dt = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{(1-t)(1+t)} dt = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-t}{1+t} \right| \Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2} \ln(7-4\sqrt{3}).$$

$$\text{Vậy } I = \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2} \ln(7-4\sqrt{3}).$$

**Câu 53:** Tính tích phân  $I = \int_0^{\ln 3} \frac{x e^x}{\sqrt{e^x + 1}} dx$

**Lời giải**

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \int \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}} dx \end{cases}$$

$$\text{Tìm } v = \int \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}} dx$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{e^x + 1} \Rightarrow t^2 = e^x + 1 \Rightarrow 2t dt = e^x dx$$

$$\text{Suy ra: } v = \int \frac{2t}{t} dt = \int 2 dt = 2t + C = 2\sqrt{e^x + 1} + C. \text{ Chọn } v = 2\sqrt{e^x + 1}$$

Do đó:

$$I = 2x\sqrt{e^x+1}\Big|_0^{\ln 3} - \int_0^{\ln 3} 2\sqrt{e^x+1}dx = 4\ln 3 - 2J.$$

Tính  $J = \int_0^{\ln 3} \sqrt{e^x+1}dx$

Đặt  $t = \sqrt{e^x+1} \Rightarrow t^2 = e^x+1 \Rightarrow 2tdt = e^x dx$  và  $e^x = t^2 - 1$

Đổi cận:

$x = 0 \Rightarrow t = \sqrt{2}; x = \ln 3 \Rightarrow t = 2$

Suy ra:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\ln 3} \frac{\sqrt{e^x+1}}{e^x} e^x dx = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{2t^2}{t^2-1} dt = 2 \int_{\sqrt{2}}^2 \left( 1 + \frac{1}{(t-1)(t+1)} \right) dt \\ &= 2t \Big|_{\sqrt{2}}^2 + \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_{\sqrt{2}}^2 = 2(2-\sqrt{2}) + \ln \frac{\sqrt{2}+1}{3(\sqrt{2}-1)} \end{aligned}$$

Vậy  $I = 4\ln 3 - 4(2-\sqrt{2}) - 2\ln \frac{\sqrt{2}+1}{3(\sqrt{2}-1)}.$

**Câu 54:** Chứng minh rằng:  $I = \int_0^1 x^2 \sqrt{x^2+1} dx = \frac{1}{4} \left( 2\sqrt{2} - \int_0^1 \sqrt{x^2+1} dx \right)$

**Lời giải**

$$I = \int_0^1 \frac{x^2(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_0^1 \frac{(x^3+x)x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

Đặt  $\begin{cases} u = x^3+x \\ dv = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (3x^2+1) dx \\ v = \sqrt{x^2+1} \end{cases}$

Suy ra:

$$I = (x^3+x)\sqrt{x^2+1} \Big|_0^1 - \int_0^1 (3x^2+1)\sqrt{x^2+1} dx = 2\sqrt{2} - 3I - \int_0^1 \sqrt{x^2+1} dx$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{1}{4} \left( 2\sqrt{2} - \int_0^1 \sqrt{x^2+1} dx \right).$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x^2}{(x \sin x + \cos x)^2} dx$$

**Câu 55:** Tính

**Lời giải**

Ta có:

$$-\left( \frac{1}{x \sin x + \cos x} \right)' = \frac{x \cos x}{(x \sin x + \cos x)^2}$$

Ta có:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos x} \cdot \frac{x \cos x}{(x \sin x + \cos x)^2} dx$$

Đặt  $\begin{cases} u = \frac{x}{\cos x} \\ dv = \frac{x \cos x}{(x \sin x + \cos x)^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{\cos x + x \sin x}{\cos^2 x} dx \\ v = -\frac{1}{x \sin x + \cos x} \end{cases}$

Suy ra:

$$I = -\frac{x}{\cos x(x \sin x + \cos x)} \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x} dx = -\frac{4\pi}{3 + \pi\sqrt{3}} + \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{4\pi}{3 + \pi\sqrt{3}} + \sqrt{3}.$$

**Câu 56:** Cho hàm số  $f(x)$  có nguyên hàm là  $F(x)$  trên đoạn  $[1; 2]$ , biết  $F(2) = 1$  và  $\int_1^2 f(x) dx = 5$ .

Tính  $I = \int_1^2 (x-1)f(x) dx$ .

**Lời giải**

Đặt  $\begin{cases} u = x-1 \\ dv = f(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = F(x) \end{cases}$

Suy ra:

$$I = (x-1)F(x) \Big|_1^2 - \int_1^2 F(x) dx = F(2) - \int_1^2 F(x) dx = 1 - 5 = -4$$

**Câu 57:** Cho  $f(x) = \frac{\sin^{2017} x}{\sin^{2017} x + \cos^{2017} x}$ . Tính  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf'(x) dx$ .

**Lời giải**

Ta có:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf'(x) dx = xf(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$$

Đặt  $g(x) = \frac{\cos^{2017} x}{\sin^{2017} x + \cos^{2017} x}$ . Theo phần trước, ta có:  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$

Do đó:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + g(x)] dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Vậy:  $I = 1 - \frac{\pi}{4}$ .

## DẠNG 7. KỸ THUẬT TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN HÀM ẨN

**Câu 58:** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $\int_0^3 x.f'(x).e^{f(x)} dx = 8$  và  $f(3) = \ln 3$ . Tính  $I = \int_0^3 e^{f(x)} dx$ .

**Lời giải**

Đặt  $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x).e^{f(x)} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^{f(x)} \end{cases}$ . Khi đó  $\int_0^3 x.f'(x).e^{f(x)} dx = x.e^{f(x)} \Big|_0^3 - \int_0^3 e^{f(x)} dx$ .

Suy ra  $8 = 3.e^{f(3)} - \int_0^3 e^{f(x)} dx \longrightarrow \int_0^3 e^{f(x)} dx = 9 - 8 = 1$ .

**Câu 59:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , thỏa mãn  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) \cos^2 x dx = 10$  và  $f(0) = 3$ .

Tích phân  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin 2x dx$  bằng

**Lời giải**

$$\text{Xét } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) \cos^2 x dx = 10, \text{ đặt } \begin{cases} u = \cos^2 x \\ dv = f'(x) \cos^2 x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin 2x dx \\ v = f(x) \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } 10 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) \cos^2 x dx = \cos^2 x f(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin 2x dx$$

$$\Leftrightarrow 10 = -f(0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin 2x dx \longrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin 2x dx = 10 + f(0) = 13.$$

**Câu 60:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0; 1]$ , thỏa mãn  $\int_1^2 f(x-1) dx = 3$  và  $f(1) = 4$ .

Tích phân  $\int_0^1 x^3 f'(x^2) dx$  bằng

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \int_1^2 f(x-1) dx = 3 \xrightarrow{t=x-1} \int_0^1 f(t) dt = 3 \text{ hay } \int_0^1 f(x) dx = 3.$$

$$\text{Xét } \int_0^1 x^3 f'(x^2) dx \xrightarrow{t=x^2} \frac{1}{2} \int_0^1 t f'(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 x f'(x) dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } \int_0^1 x^3 f'(x^2) dx \xrightarrow{t=x^2} \frac{1}{2} \int_0^1 t f'(t) dt = \frac{1}{2} \left[ x f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx \right] = \frac{1}{2} [4 - 3] = \frac{1}{2}.$$

**Câu 61:** Cho hàm số  $f(x)$  nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên  $[0; 2]$ . Biết  $f(0) = 1$  và  $f(x) f(2-x) = e^{2x^2-4x}$  với mọi  $x \in [0; 2]$ . Tính tích phân  $I = \int_0^2 \frac{(x^3 - 3x^2) f'(x)}{f(x)} dx$ .

**Lời giải**

$$\text{Từ giả thiết } f(x) f(2-x) = e^{2x^2-4x} \xrightarrow{x=2} f(2) = 1.$$

$$\text{Ta có } I = \int_0^2 \frac{(x^3 - 3x^2) f'(x)}{f(x)} dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = x^3 - 3x^2 \\ dv = \frac{f'(x)}{f(x)} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (3x^2 - 6x) dx \\ v = \ln |f(x)| \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } I = (x^3 - 3x^2) \ln |f(x)| \Big|_0^2 - \int_0^2 (3x^2 - 6x) \ln |f(x)| dx \stackrel{f(2)=1}{=} -3 \int_0^2 (x^2 - 2x) \ln |f(x)| dx = -3J.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } J &= \int_0^2 (x^2 - 2x) \ln |f(x)| dx \stackrel{x=2-t}{=} \int_2^0 [(2-t)^2 - 2(2-t)] \ln |f(2-t)| d(2-t) \\ &= \int_2^0 [(2-x)^2 - 2(2-x)] \ln |f(2-x)| d(2-x) = \int_0^2 (x^2 - 2x) \ln |f(2-x)| dx. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} 2J &= \int_0^2 (x^2 - 2x) \ln |f(x)| dx + \int_0^2 (x^2 - 2x) \ln |f(2-x)| dx = \int_0^2 (x^2 - 2x) \ln |f(x) f(2-x)| dx \\ &= \int_0^2 (x^2 - 2x) \ln e^{2x^2 - 4x} dx = \int_0^2 (x^2 - 2x)(2x^2 - 4x) dx = \frac{32}{15} \longrightarrow J = \frac{16}{15}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } I = -3J = -\frac{16}{5}.$$

### **DẠNG 8. TÍNH TÍCH PHÂN DỰA VÀO TÍNH CHẤT**

**Câu 62:** Cho hàm số  $f(x)$  là hàm số lẻ, liên tục trên  $[-4; 4]$ . Biết rằng  $\int_{-2}^0 f(-x) dx = 2$  và

$$\int_1^2 f(-2x) dx = 4. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^4 f(x) dx.$$

**Lời giải**

Do  $f(x)$  là hàm lẻ nên  $f(-x) = -f(x)$ .

$$\bullet \text{ Xét } A = \int_{-2}^0 f(-x) dx = 2. \text{ Đặt } t = -x \longrightarrow dt = -dx. \text{ Đổi cận: } \begin{cases} x = -2 \rightarrow t = 2 \\ x = 0 \rightarrow t = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } A = -\int_2^0 f(t) dt = \int_0^2 f(t) dt = \int_0^2 f(x) dx.$$

$$\bullet \text{ Xét } B = \int_1^2 f(-2x) dx = -\int_1^2 f(2x) dx. \text{ Đặt } u = 2x \longrightarrow du = 2dx. \text{ Đổi cận: } \begin{cases} x = 1 \rightarrow u = 2 \\ x = 2 \rightarrow u = 4 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } B = -\frac{1}{2} \int_2^4 f(u) du = -\frac{1}{2} \int_2^4 f(x) dx \longrightarrow \int_2^4 f(x) dx = -2B = -2.4 = -8.$$

$$\text{Vậy } I = \int_0^4 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx = 2 - 8 = -6. \text{ Chọn B.}$$

**Câu 63:** Cho hàm số  $f(x)$  là hàm số chẵn, liên tục trên  $[-1; 6]$ . Biết rằng  $\int_{-1}^2 f(x) dx = 8$  và

$$\int_1^3 f(-2x) dx = 3. \text{ Tính tích phân } I = \int_{-1}^6 f(x) dx.$$

**Lời giải**

$$\text{Vì } f(x) \text{ là hàm số chẵn nên } \int_1^3 f(-2x) dx = \int_1^3 f(2x) dx = 3.$$

Xét  $K = \int_1^3 f(2x) dx = 3$ . Đặt  $t = 2x \longrightarrow dt = 2dx$ . Đổi cận:  $\begin{cases} x=1 \rightarrow t=2 \\ x=3 \rightarrow t=6 \end{cases}$ .

Khi đó  $K = \frac{1}{2} \int_2^6 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_2^6 f(x) dx \longrightarrow \int_2^6 f(x) dx = 2K = 6$ .

Vậy  $I = \int_{-1}^6 f(x) dx = \int_{-1}^2 f(x) dx + \int_2^6 f(x) dx = 8 + 6 = 14$ . **Chọn D.**

**Câu 64:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $[3; 7]$ , thỏa mãn  $f(x) = f(10 - x)$  với mọi  $x \in [3; 7]$  và  $\int_3^7 f(x) dx = 4$ . Tính tích phân  $I = \int_3^7 xf(x) dx$ .

**Lời giải**

Đặt  $t = (3 + 7) - x \longrightarrow dt = -dx$ . Đổi cận  $\begin{cases} x=7 \rightarrow t=3 \\ x=3 \rightarrow t=7 \end{cases}$ .

Khi đó  $I = -\int_7^3 (10 - t) f(10 - t) dt = \int_3^7 (10 - t) f(10 - t) dt = \int_3^7 (10 - x) f(10 - x) dx$

$$\stackrel{f(x)=f(10-x)}{=} \int_3^7 (10 - x) f(x) dx = 10 \int_3^7 f(x) dx - \int_3^7 xf(x) dx = 10 \int_3^7 f(x) dx - I.$$

Suy ra  $2I = 10 \int_3^7 f(x) dx = 10 \cdot 4 = 40 \longrightarrow I = 20$ . **Chọn A.**

**Câu 65:** Cho hàm số  $y = f(x)$  là hàm số chẵn và liên tục trên đoạn  $[-\pi; \pi]$ , thỏa mãn  $\int_0^\pi f(x) dx = 2018$ .

Giá trị của tích phân  $I = \int_{-\pi}^\pi \frac{f(x)}{2018^x + 1} dx$  bằng

**Lời giải**

Đặt  $x = -t \longrightarrow dx = -dt$ . Đổi cận  $\begin{cases} x=-\pi \rightarrow t=\pi \\ x=\pi \rightarrow t=-\pi \end{cases}$ .

Khi đó  $I = -\int_\pi^{-\pi} \frac{f(-t)}{2018^{-t} + 1} dt = \int_{-\pi}^\pi \frac{f(-t)}{2018^{-t} + 1} dt = \int_{-\pi}^\pi \frac{2018^t f(-t)}{1 + 2018^t} dt = \int_{-\pi}^\pi \frac{2018^x f(-x)}{1 + 2018^x} dx$ .

Vì  $y = f(x)$  là hàm số chẵn trên đoạn  $[-\pi; \pi]$  nên  $f(-x) = f(x) \longrightarrow I = \int_{-\pi}^\pi \frac{2018^x f(x)}{2018^x + 1} dx$ .

Vậy  $2I = \int_{-\pi}^\pi \frac{f(x)}{2018^x + 1} dx + \int_{-\pi}^\pi \frac{2018^x f(x)}{2018^x + 1} dx = \int_{-\pi}^\pi f(x) dx = 2 \int_0^\pi f(x) dx = 2 \cdot 2018 \rightarrow I = 2018$ .

**Câu 66:** Biết  $\int_0^\pi \frac{x \sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx = \frac{\pi^a}{b}$  với  $a, b \in \mathbb{Z}^+$ . Tính  $P = 2a + b$ .

**Lời giải**

$$\text{Gọi } I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx$$

$$\text{Đặt } t = \pi - x \longrightarrow dt = -dx. \text{ Đổi cận } \begin{cases} x = 0 \rightarrow t = \pi \\ x = \pi \rightarrow t = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } I = - \int_{\pi}^0 \frac{(\pi - t) \sin^{2018}(\pi - t)}{\sin^{2018}(\pi - t) + \cos^{2018}(\pi - t)} dt = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t) \sin^{2018} t}{\sin^{2018} t + \cos^{2018} t} dt = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x) \sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx.$$

$$\text{Suy ra } 2I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx + \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x) \sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx$$

$$\longrightarrow I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx = \frac{\pi}{2} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx \right].$$

$$\text{Đặt } x = u + \frac{\pi}{2} \text{ ta suy ra}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2018} u}{\sin^{2018} u + \cos^{2018} u} du = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx.$$

$$\text{Vậy } I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi^2}{4} \longrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases} \longrightarrow P = 8. \text{ Chọn B.}$$

## DẠNG 9. KỸ THUẬT PHƯƠNG TRÌNH HÀM

**Câu 67:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  và thỏa mãn  $2f(x) + f(-x) = \cos x$ . Tính tích

$$\text{phân } I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$$

**Lời giải**

Từ giả thiết, thay  $x$  bằng  $-x$  ta được  $2f(-x) + f(x) = \cos x$ .

$$\text{Do đó ta có hệ } \begin{cases} 2f(x) + f(-x) = \cos x \\ 2f(-x) + f(x) = \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4f(x) + 2f(-x) = 2\cos x \\ f(x) + 2f(-x) = \cos x \end{cases} \longrightarrow f(x) = \frac{1}{3}\cos x.$$

$$\text{Khi đó } I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{1}{3} \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}.$$

**Câu 68:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $[-2; 2]$  và thỏa mãn  $2f(x) + 3f(-x) = \frac{1}{4+x^2}$ . Tính tích

$$\text{phân } I = \int_{-2}^2 f(x) dx.$$

**Lời giải**

Từ giả thiết, thay  $x$  bằng  $-x$  ta được  $2f(-x) + 3f(x) = \frac{1}{4+x^2}$ .

Do đó ta có hệ

$$\begin{cases} 2f(x) + 3f(-x) = \frac{1}{4+x^2} \\ 2f(-x) + 3f(x) = \frac{1}{4+x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4f(x) + 6f(-x) = \frac{2}{4+x^2} \\ 9f(x) + 6f(-x) = \frac{3}{4+x^2} \end{cases} \longrightarrow f(x) = \frac{1}{5(4+x^2)}.$$

Khi đó  $I = \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{1}{5} \int_{-2}^2 \frac{1}{4+x^2} dx = \frac{\pi}{20}$ . **Chọn C.**

**Câu 69:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $[0;1]$  và thỏa mãn  $x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4$ . Tính tích phân  $I = \int_0^1 f(x) dx$ .

**Lời giải**

Từ giả thiết, thay  $x$  bằng  $1-x$  ta được  $(1-x)^2 f(1-x) + f(x) = 2(1-x) - (1-x)^4$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1)f(1-x) + f(x) = 1 + 2x - 6x^2 + 4x^3 - x^4. \quad (1)$$

Ta có  $x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4 \longrightarrow f(1-x) = 2x - x^4 - x^2 f(x)$ . Thay vào (1) ta được

$$(x^2 - 2x + 1)[2x - x^4 - x^2 f(x)] + f(x) = 1 + 2x - 6x^2 + 4x^3 - x^4$$

$$\Leftrightarrow (1 - x^2 + 2x^3 - x^4)f(x) = x^6 - 2x^5 + 2x^3 - 2x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow (1 - x^2 + 2x^3 - x^4)f(x) = (1 - x^2)(1 - x^2 + 2x^3 - x^4)$$

$$\longrightarrow f(x) = 1 - x^2.$$

$$\text{Vậy } I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (1 - x^2) dx = \left( x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

**Câu 70:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$  và thỏa mãn  $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$ . Tính tích phân

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx.$$

**Lời giải**

Từ giả thiết, thay  $x$  bằng  $\frac{1}{x}$  ta được  $f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = \frac{3}{x}$ .

Do đó ta có hệ 
$$\begin{cases} f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x \\ f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = \frac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x \\ 4f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{6}{x} \end{cases} \longrightarrow f(x) = \frac{2}{x} - x.$$

Khi đó 
$$I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left( \frac{2}{x^2} - 1 \right) dx = \left( -\frac{2}{x} - x \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = \frac{3}{2}.$$

**Cách khác.** Từ  $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x \longrightarrow f(x) = 3x - 2f\left(\frac{1}{x}\right).$

Khi đó 
$$I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left( 3 - 2 \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \right) dx = 3 \int_{\frac{1}{2}}^2 dx - 2 \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x} dx.$$

Xét  $J = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x} dx$ . Đặt  $t = \frac{1}{x}$ , suy ra  $dt = -\frac{1}{x^2} dx = -t^2 dx \longrightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt$ .

Đổi cận:  $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \rightarrow t = 2 \\ x = 2 \rightarrow t = \frac{1}{2} \end{cases}$ . Khi đó 
$$J = \int_2^{\frac{1}{2}} t f(t) \left( -\frac{1}{t^2} \right) dt = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(t)}{t} dt = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx = I.$$

Vậy 
$$I = 3 \int_{\frac{1}{2}}^2 dx - 2I \longrightarrow I = \int_{\frac{1}{2}}^2 dx = \frac{3}{2}.$$

**Câu 71:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $[0;1]$  và thỏa mãn  $2f(x) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}$ . Tính tích phân 
$$I = \int_0^1 f(x) dx.$$

**Lời giải**

Từ giả thiết, thay  $x$  bằng  $1-x$  ta được  $2f(1-x) + 3f(x) = \sqrt{2x-x^2}$ .

Do đó ta có hệ 
$$\begin{cases} 2f(x) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2} \\ 2f(1-x) + 3f(x) = \sqrt{2x-x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4f(x) + 6f(1-x) = 2\sqrt{1-x^2} \\ 9f(x) + 6f(1-x) = 3\sqrt{2x-x^2} \end{cases}$$

$$\longrightarrow f(x) = \frac{3\sqrt{2x-x^2} - 2\sqrt{1-x^2}}{5}.$$

Vậy 
$$I = \frac{1}{5} \int_0^1 \left( 3\sqrt{2x-x^2} - 2\sqrt{1-x^2} \right) dx = \frac{\pi}{20}.$$

**Cách khác.** Từ  $2f(x) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2} \longrightarrow f(x) = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{1-x^2} - 3f(1-x) \right].$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \left[ \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx - 3 \int_0^1 f(1-x) dx \right].$$

$$\text{Xét } J = \int_0^1 f(1-x) dx. \text{ Đặt } t = 1-x \longrightarrow dt = -dx.$$

$$\text{Đổi cận: } \begin{cases} x=0 \rightarrow t=1 \\ x=1 \rightarrow t=0 \end{cases}. \text{ Khi đó } J = -\int_1^0 f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx = I.$$

$$\text{Vậy } I = \frac{1}{2} \left[ \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx - 3I \right] \longrightarrow I = \frac{1}{5} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{20}.$$

### DẠNG 10. KỸ THUẬT BIẾN ĐỔI

**Câu 72:** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa  $f(x)f'(x) = 3x^5 + 6x^2$ . Biết rằng  $f(0) = 2$ , tính  $f^2(2)$ .

**Lời giải**

$$\text{Từ giả thiết ta có } \int f(x).f'(x) dx = \int (3x^5 + 6x^2) dx \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^6}{2} + 2x^3 + C.$$

$$\text{Thay } x=0 \text{ vào hai vế, ta được } \frac{f^2(0)}{2} = C \Rightarrow C = 2.$$

$$\text{Suy ra } f^2(x) = x^6 + 4x^3 + 4 \longrightarrow f^2(2) = 2^6 + 4.2^3 + 4 = 100.$$

**Câu 73:** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $[f'(x)]^2 + f(x).f''(x) = 15x^4 + 12x$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$  và  $f(0) = f'(0) = 1$ . Giá trị của  $f^2(1)$  bằng

**Lời giải**

$$\text{Nhận thấy được } [f'(x)]^2 + f(x).f''(x) = [f(x).f'(x)]'.$$

$$\text{Do đó giả thiết tương đương với } [f(x).f'(x)]' = 15x^4 + 12x.$$

$$\text{Suy ra } f(x).f'(x) = \int (15x^4 + 12x) dx = 3x^5 + 6x^2 + C \xrightarrow{f(0)=f'(0)=1} C = 1$$

$$\longrightarrow f(x).f'(x) = 3x^5 + 6x^2 + 1$$

$$\longrightarrow \int f(x).f'(x) dx = \int (3x^5 + 6x^2 + 1) dx \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^6}{2} + 2x^3 + x + C'.$$

$$\text{Thay } x=0 \text{ vào hai vế ta được } \frac{f^2(0)}{2} = C' \Rightarrow C' = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } f^2(x) = x^6 + 4x^3 + 2x + 1 \longrightarrow f^2(1) = 8.$$

**Câu 74:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[1; 2]$  và thỏa mãn  $f(x) > 0, \forall x \in [1; 2]$ . Biết rằng  $\int_1^2 f'(x) dx = 10$  và  $\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln 2$ . Tính  $f(2)$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \int_1^2 f'(x) dx = 10 \Leftrightarrow f(x) \Big|_1^2 = 10 \Leftrightarrow f(2) - f(1) = 10. \quad (1)$$

$$\text{Lại có } \int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln 2 \Leftrightarrow \ln |f(x)| \Big|_1^2 = \ln 2 \Leftrightarrow \ln [f(x)] \Big|_1^2 = \ln 2 \quad (\text{do } f(x) > 0, \forall x \in [1; 2])$$

$$\Leftrightarrow \ln f(2) - \ln f(1) = \ln 2 \Leftrightarrow \ln \frac{f(2)}{f(1)} = \ln 2 \Leftrightarrow \frac{f(2)}{f(1)} = 2. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra  $f(2) = 20$ .

**Câu 75:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[-1; 1]$ , thỏa mãn  $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$  và  $f'(x) + 2f(x) = 0$ . Biết rằng  $f(1) = 1$ , giá trị của  $f(-1)$  bằng

**Lời giải**

$$\text{Ta có } f'(x) + 2f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -2f(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -2 \quad (\text{do } f(x) > 0)$$

$$\longrightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int -2 dx \Leftrightarrow \ln f(x) = -2x + C \quad (\text{do } f(x) > 0).$$

$$\text{Mà } f(1) = 1 \Rightarrow C = 2 \Rightarrow \ln f(x) = -2x + 2 \longrightarrow f(x) = e^{-2x+2} \longrightarrow f(-1) = e^4.$$

**Câu 76:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $(0; +\infty)$ , biết  $f'(x) + (2x+3)f^2(x) = 0, f(x) > 0$  với mọi  $x > 0$  và  $f(1) = \frac{1}{6}$ . Tính  $P = 1 + f(1) + f(2) + \dots + f(2018)$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } f'(x) + (2x+3)f^2(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = -(2x+3) \quad (\text{do } f(x) > 0)$$

$$\longrightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = -\int (2x+3) dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = -x^2 - 3x + C \longrightarrow f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x - C}.$$

$$\text{Mà } f(1) = \frac{1}{6} \longrightarrow \frac{1}{6} = \frac{1}{1^2 + 3 \cdot 1 - C} \Leftrightarrow C = -2 \longrightarrow f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}.$$

$$\text{Suy ra } P = 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2019} - \frac{1}{2020}\right) = \frac{3029}{2020}.$$

**Câu 77:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $[0; \sqrt{3}]$ , thỏa mãn  $f(x) > -1$ ,  $f(0) = 0$  và  $f'(x)\sqrt{x^2+1} = 2x\sqrt{f(x)+1}$ . Giá trị của  $f(\sqrt{3})$  bằng

**Lời giải**

$$\text{Từ giả thiết suy ra } \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} \longrightarrow \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}} dx = \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$\Leftrightarrow 2 \int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)+1}} dx = 2 \int \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}} dx \Leftrightarrow 2\sqrt{f(x)+1} = 2\sqrt{x^2+1} + C$$

$$\text{Mà } f(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = x^2 \longrightarrow f(\sqrt{3}) = 3.$$

**Câu 78:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm và liên tục trên  $[1; 4]$ , đồng biến trên  $[1; 4]$ , thỏa mãn  $x + 2xf(x) = [f'(x)]^2$  với mọi  $x \in [1; 4]$ . Biết rằng  $f(1) = \frac{3}{2}$ , tính tích phân  $I = \int_1^4 f(x) dx$ .

**Lời giải**

Nhận xét: Do  $f(x)$  đồng biến trên  $[1; 4]$  nên  $f'(x) \geq 0, \forall x \in [1; 4]$ .

$$\text{Từ giả thiết ta có } x[1 + 2f(x)] = [f'(x)]^2 \longrightarrow f'(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + 2f(x)}, \forall x \in [1; 4]$$

$$\longrightarrow \frac{2f'(x)}{2\sqrt{1+2f(x)}} = \sqrt{x} \longrightarrow \int \frac{2f'(x)}{2\sqrt{1+2f(x)}} dx = \int \sqrt{x} dx \Leftrightarrow \sqrt{1+2f(x)} = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C.$$

$$\text{Mà } f(1) = \frac{3}{2} \Rightarrow C = \frac{4}{3} \longrightarrow f(x) = \frac{\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{4}{3}\right)^2 - 1}{2} = \frac{2}{9}x^3 + \frac{8}{9}x\sqrt{x} + \frac{7}{18}$$

$$\longrightarrow \int_1^4 f(x) dx = \frac{1186}{45}.$$

**Câu 79:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục, không âm trên  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , thỏa  $f(x) \cdot f'(x) = \cos x \sqrt{1 + f^2(x)}$  với mọi  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  và  $f(0) = \sqrt{3}$ . Giá trị của  $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$  bằng

**Lời giải**

$$\text{Từ giả thiết ta có } \frac{2f(x) \cdot f'(x)}{2\sqrt{1+f^2(x)}} = \cos x, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\longrightarrow \int \frac{2f(x) \cdot f'(x)}{2\sqrt{1+f^2(x)}} dx = \int \cos x dx \Leftrightarrow \sqrt{1+f^2(x)} = \sin x + C.$$

$$\text{Mà } f(0) = \sqrt{3} \Rightarrow C = 2 \longrightarrow f(x) = \sqrt{(\sin x + 2)^2 - 1} = \sqrt{\sin^2 x + 4\sin x + 3}, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\longrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt{2}.$$

**Câu 80:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục, không âm trên  $[0;3]$ , thỏa  $f(x).f'(x) = 2x\sqrt{f^2(x)+1}$  với mọi  $x \in [0;3]$  và  $f(0) = 0$ . Giá trị của  $f(3)$  bằng

**Lời giải**

$$\text{Từ giả thiết ta có } \frac{2f(x).f'(x)}{2\sqrt{1+f^2(x)}} = 2x, \forall x \in [0;3]$$

$$\longrightarrow \int \frac{2f(x).f'(x)}{2\sqrt{1+f^2(x)}} dx = \int 2x dx \Leftrightarrow \sqrt{1+f^2(x)} = x^2 + C.$$

$$\text{Mà } f(0) = 0 \Rightarrow C = 1 \longrightarrow f(x) = \sqrt{(x^2+1)^2 - 1} = \sqrt{x^4 + 2x^2}, \forall x \in [0;3]$$

$$\longrightarrow f(3) = 3\sqrt{11}.$$

**Câu 81:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm không âm trên  $[0;1]$ , thỏa mãn  $f(x) > 0$  với mọi  $x \in [0;1]$  và  $[f(x)]^4 \cdot [f'(x)]^2 \cdot (x^2+1) = 1 + [f(x)]^3$ . Biết  $f(0) = 2$ , hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau đây.

**Lời giải**

$$\text{Từ giả thiết ta có } [f(x)]^2 \cdot f'(x) \cdot \sqrt{x^2+1} = \sqrt{1+[f(x)]^3} \Leftrightarrow \frac{[f(x)]^2 \cdot f'(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^3}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\longrightarrow \int_0^1 \frac{[f(x)]^2 \cdot f'(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^3}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx \Leftrightarrow \frac{2}{3} \times \int_0^1 \frac{d(1+[f(x)]^3)}{2\sqrt{1+[f(x)]^3}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \times \sqrt{1+[f(x)]^3} \Big|_0^1 = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \Big|_0^1 \xrightarrow{f(0)=2} f(1) \approx 2,605.$$

**Câu 82:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$ , thỏa mãn  $x(x+1).f'(x) + f(x) = x^2 + x$  với mọi  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$  và  $f(1) = -2 \ln 2$ . Biết  $f(2) = a + b \ln 3$  với  $a, b \in \mathbb{Q}$ , tính  $P = a^2 + b^2$ .

**Lời giải**

$$\text{Từ giả thiết ta có } \frac{x}{x+1} f'(x) + \frac{1}{(x+1)^2} f(x) = \frac{x}{x+1}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}.$$

$$\text{Nhận thấy } \frac{x}{x+1} f'(x) + \frac{1}{(x+1)^2} f(x) = \left[ f(x) \cdot \frac{x}{x+1} \right]'. \text{ Do đó giả thiết tương đương với}$$

$$\left[ f(x) \cdot \frac{x}{x+1} \right]' = \frac{x}{x+1}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}.$$

$$\text{Suy ra } f(x) \cdot \frac{x}{x+1} = \int \frac{x}{x+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = x - \ln|x+1| + C.$$

$$\text{Mà } f(1) = -2 \ln 2 \Rightarrow C = -1 \longrightarrow f(x) \cdot \frac{x}{x+1} = x - \ln|x+1| - 1.$$

$$\text{Cho } x = 2 \text{ ta được } f(2) \cdot \frac{2}{3} = 2 - \ln 3 - 1 \Rightarrow f(2) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \ln 3 \longrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow P = \frac{9}{2}.$$

**Câu 83:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm xác định, liên tục trên  $[0;1]$ , thỏa mãn  $f'(0) = -1$  và  $\begin{cases} [f'(x)]^2 = f''(x) \\ f'(x) \neq 0 \end{cases}$  với mọi  $x \in [0;1]$ . Đặt  $P = f(1) - f(0)$ , khẳng định nào sau đây đúng?

**Lời giải**

Nhận thấy  $P = f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(x) dx$  nên ta cần tìm  $f'(x)$ .

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Từ} & & \text{giả} & & \text{thiết} & & \text{ta} & & \text{có} \\ \frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} = 1 & \longrightarrow & \int \frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} dx = \int 1 dx & \Leftrightarrow & -\frac{1}{f'(x)} = x + C & \Leftrightarrow & f'(x) = -\frac{1}{x+C}. \end{array}$$

$$\text{Mà } f'(0) = -1 \Rightarrow C = 1 \longrightarrow f'(x) = -\frac{1}{x+1}.$$

$$\text{Vậy } P = \int_0^1 f'(x) dx = -\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = -\ln 2 \approx -0,69.$$

**Câu 84:** Cho hai hàm số  $f(x)$  và  $g(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;2]$ , thỏa mãn  $f'(0).f'(2) \neq 0$  và  $g(x).f'(x) = x(x-2)e^x$ . Tính tích phân  $I = \int_0^2 f(x).g'(x) dx$ .

**Lời giải**

$$\text{Từ giả thiết } f'(0).f'(2) \neq 0 \longrightarrow \begin{cases} f'(0) \neq 0 \\ f'(2) \neq 0 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó từ } g(x).f'(x) = x(x-2)e^x, \text{ suy ra } \begin{cases} g(2) = \frac{2(2-2)e^2}{f'(2)} = 0 \\ g(0) = \frac{0(0-2)e^0}{f'(0)} = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Tích phân từng phần ta được } I = \left[ f(x).g(x) \right]_0^2 - \int_0^2 g(x).f'(x) dx$$

$$= f(2) \cdot g(2) - f(0) \cdot g(0) - \int_0^2 x(x-2)e^x dx = -\int_0^2 x(x-2)e^x dx = 4.$$

**Câu 85:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0;1]$  và thỏa mãn  $af(b) + bf(a) = 1$  với mọi  $a, b \in [0;1]$ . Tính tích phân  $I = \int_0^1 f(x) dx$ .

**Lời giải**

Đặt  $a = \sin x, b = \cos x$  với  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

Từ giả thiết, suy ra  $\sin xf(\cos x) + \cos xf(\sin x) = 1$

$$\longrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xf(\cos x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos xf(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}. \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xf(\cos x) dx \stackrel{t=\cos x}{=} -\int_1^0 f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos xf(\sin x) dx \stackrel{t=\sin x}{=} \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx \end{cases} \cdot \text{Do đó (1)} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{4}.$$

## DẠNG 11. KỸ THUẬT ĐẠO HÀM ĐÚNG

**Câu 86:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;1]$ , thỏa mãn  $3f(x) + xf'(x) = x^{2018}$  với mọi  $x \in [0;1]$ . Tính  $I = \int_0^1 f(x) dx$ .

**Lời giải**

Từ giả thiết  $3f(x) + xf'(x) = x^{2018}$ , nhân hai vế cho  $x^2$  ta được

$$3x^2 f(x) + x^3 f'(x) = x^{2020} \longleftrightarrow [x^3 f(x)]' = x^{2020}.$$

$$\text{Suy ra } x^3 f(x) = \int x^{2020} dx = \frac{x^{2021}}{2021} + C.$$

$$\text{Thay } x = 0 \text{ vào hai vế ta được } C = 0 \longrightarrow f(x) = \frac{x^{2018}}{2021}.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{2021} x^{2018} dx = \frac{1}{2021} \cdot \frac{1}{2019} x^{2019} \Big|_0^1 = \frac{1}{2021 \times 2019}. \text{ Chọn C.}$$

Nhận xét: Ý tưởng nhân hai vế cho  $x^2$  là để thu được đạo hàm đúng dạng  $(uv)' = u'v + uv'$ .

**Câu 87:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ , thỏa mãn  $f'(x) - 2018f(x) = 2018x^{2017}e^{2018x}$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$  và  $f(0) = 2018$ . Tính giá trị  $f(1)$ .

**Lời giải**

Nhân hai vế cho  $e^{-2018x}$  để thu được đạo hàm đúng, ta được

$$f'(x)e^{-2018x} - 2018f(x)e^{-2018x} = 2018x^{2017} \Leftrightarrow [f(x)e^{-2018x}]' = 2018x^{2017}.$$

$$\text{Suy ra } f(x)e^{-2018x} = \int 2018x^{2017} dx = x^{2018} + C.$$

$$\text{Thay } x = 0 \text{ vào hai vế ta được } C = 2018 \longrightarrow f(x) = (x^{2018} + 2018)e^{2018x}.$$

$$\text{Vậy } f(1) = 2019e^{2018}.$$

**Câu 88:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm và liên tục trên  $\mathbb{R}$ , thỏa mãn  $f'(x) + xf(x) = 2xe^{-x^2}$  và  $f(0) = -2$ . Tính  $f(1)$ .

**Lời giải**

Nhân hai vế cho  $e^{\frac{x^2}{2}}$  để thu được đạo hàm đúng, ta được

$$f'(x)e^{\frac{x^2}{2}} + f(x)xe^{\frac{x^2}{2}} = 2xe^{\frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow \left[ e^{\frac{x^2}{2}} f(x) \right]' = 2xe^{\frac{x^2}{2}}.$$

$$\text{Suy ra } e^{\frac{x^2}{2}} f(x) = \int 2xe^{\frac{x^2}{2}} dx = -2e^{\frac{x^2}{2}} + C.$$

$$\text{Thay } x = 0 \text{ vào hai vế ta được } C = 0 \longrightarrow f(x) = -2e^{-x^2}.$$

$$\text{Vậy } f(1) = -2e^{-1} = -\frac{2}{e}.$$

**Câu 89:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục và có đạo hàm trên  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ , thỏa mãn hệ thức

$f(x) + \tan xf'(x) = \frac{x}{\cos^3 x}$ . Biết rằng  $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right) = a\pi\sqrt{3} + b\ln 3$  trong đó  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = a + b$ .

**Lời giải**

$$\text{Từ giả thiết, ta có } \cos xf(x) + \sin xf'(x) = \frac{x}{\cos^2 x} \Leftrightarrow [\sin xf(x)]' = \frac{x}{\cos^2 x}.$$

$$\text{Suy ra } \sin xf(x) = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \tan x + \ln |\cos x| + C.$$

$$\bullet \text{ Với } x = \frac{\pi}{3} \longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} \cdot \sqrt{3} - \ln 2 \longrightarrow \sqrt{3} f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot \pi \sqrt{3} - 2 \ln 2 + 2C.$$

$$\bullet \text{ Với } x = \frac{\pi}{6} \longrightarrow \frac{1}{2} f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} \ln 3 - \ln 2 + C \longrightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{9} \cdot \pi \sqrt{3} + \ln 3 - 2 \ln 2 + 2C.$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{9}\pi\sqrt{3} - \ln 3 \longrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{9} \\ b = -1 \end{cases} \longrightarrow P = a + b = -\frac{4}{9}.$$

## DẠNG 12. KỸ THUẬT ĐƯA VỀ BÌNH PHƯƠNG LOẠI 1

**Câu 90:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , thỏa  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ f^2(x) - 2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] dx = \frac{2-\pi}{2}$ . Tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx = -\frac{2-\pi}{2}.$$

$$\text{Do đó giả thiết tương đương với } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ f^2(x) - 2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ f(x) - \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right]^2 dx = 0 \Leftrightarrow f(x) - \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\text{Suy ra } f(x) = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \longrightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx = 0. \text{ Chọn A.}$$

**Câu 91:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $[0;1]$  thỏa  $\int_0^1 \left[ f^2(x) + 2\ln^2 \frac{2}{e} \right] dx = 2 \int_0^1 [f(x)\ln(x+1)] dx$ . Tính phân  $I = \int_0^1 f(x) dx$ .

**Lời giải**

Bằng phương pháp tích phân từng phần ta tính được

$$\int_0^1 \ln^2(x+1) dx = 2\ln^2 \frac{2}{e} = \int_0^1 2\ln^2 \frac{2}{e} dx.$$

$$\text{Do đó giả thiết tương đương với } \int_0^1 [f(x) - \ln(1+x)]^2 dx = 0 \Leftrightarrow f(x) \equiv \ln(1+x), \forall x \in [0;1].$$

$$\text{Suy ra } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \ln(1+x) dx = \ln \frac{4}{e}.$$

**Câu 92:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo liên tục trên  $[0;1]$ ,  $f(x)$  và  $f'(x)$  đều nhận giá trị dương trên  $[0;1]$  và thỏa mãn  $f(0)=2$  và  $\int_0^1 [f'(x) \cdot [f(x)]^2 + 1] dx = 2 \int_0^1 \sqrt{f'(x)} \cdot f(x) dx$ . Tính  $I = \int_0^1 [f(x)]^3 dx$ .

**Lời giải**

$$\text{Giả thiết tương đương với } \int_0^1 [\sqrt{f'(x)} \cdot f(x) - 1]^2 dx = 0$$

$$\longrightarrow \sqrt{f'(x)} \cdot f(x) = 1, \forall x \in [0;1] \longrightarrow f'(x) f^2(x) = 1 \longrightarrow \int f'(x) f^2(x) dx = \int dx$$

$$\longrightarrow \frac{f^3(x)}{3} = x + C \xrightarrow{f(0)=2} C = \frac{8}{3}.$$

$$\text{Vậy } f^3(x) = 3x + 8 \longrightarrow I = \int_0^1 [f(x)]^3 dx = \frac{19}{2}.$$

**Câu 93:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm dương, liên tục trên đoạn  $[0;1]$  và thỏa mãn  $f(0)=1$ ,  $3 \int_0^1 [f'(x) \cdot [f(x)]^2 + \frac{1}{9}] dx = 2 \int_0^1 \sqrt{f'(x)} \cdot f(x) dx$ . Tính  $I = \int_0^1 [f(x)]^3 dx$ .

**Lời giải**

$$\text{Giả thiết } \Leftrightarrow 3 \int_0^1 [\sqrt{f'(x)} \cdot f(x)]^2 dx + \frac{1}{3} = 2 \int_0^1 \sqrt{f'(x)} \cdot f(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 [3\sqrt{f'(x)} \cdot f(x)]^2 dx - 2 \int_0^1 3\sqrt{f'(x)} \cdot f(x) dx + \int_0^1 dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 [3\sqrt{f'(x)} \cdot f(x) - 1]^2 dx = 0$$

$$\longrightarrow 3\sqrt{f'(x)} \cdot f(x) - 1 = 0, \forall x \in [0;1] \longrightarrow 9f'(x) \cdot f^2(x) = 1 \longrightarrow \int 9f'(x) \cdot f^2(x) dx = \int dx$$

$$\longrightarrow 9 \cdot \frac{f^3(x)}{3} = x + C \xrightarrow{f(0)=1} C = 3.$$

$$\text{Vậy } f^3(x) = \frac{1}{3}x + 1 \longrightarrow \int_0^1 [f(x)]^3 dx = \frac{7}{6}.$$

**Câu 94:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm dương, liên tục trên đoạn  $[0;1]$ , thỏa  $f(1) - f(0) = 1$  và  $\int_0^1 f'(x) [f^2(x) + 1] dx = 2 \int_0^1 \sqrt{f'(x)} f(x) dx$ . Giá trị của tích phân  $\int_0^1 [f(x)]^3 dx$  bằng

**Lời giải**

$$\text{Nhóm hằng đẳng thức ta có } \int_0^1 f'(x) [f^2(x) + 1] dx = 2 \int_0^1 \sqrt{f'(x)} f(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 [f'(x)f^2(x) + f'(x)] dx - 2 \int_0^1 \sqrt{f'(x)} f(x) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 [\sqrt{f'(x)} f(x) - 1]^2 dx + \underbrace{\int_0^1 [f'(x) - 1] dx}_{=0 \text{ vì } f(1)-f(0)=1} = 0$$

$$\longrightarrow \sqrt{f'(x)} \cdot f(x) = 1, \forall x \in [0;1] \longrightarrow f'(x) f^2(x) = 1 \longrightarrow \int f'(x) f^2(x) dx = \int dx$$

$$\longrightarrow \frac{f^3(x)}{3} = x + C \longrightarrow f^3(x) = 3x + 3C \xrightarrow{f(1)-f(0)=1} C = \frac{5\sqrt{33}-27}{54}.$$

$$\text{Vậy } f^3(x) = 3x + \frac{5\sqrt{33}-27}{18} \longrightarrow \int_0^1 [f(x)]^3 dx = \frac{5\sqrt{33}}{18}.$$

### DẠNG 13. KỸ THUẬT ĐƯA VỀ BÌNH PHƯƠNG LOẠI 2 - KỸ THUẬT HOLDER

**Câu 95:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0;1]$ , thỏa mãn  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx = 1$  và

$$\int_0^1 [f(x)]^2 dx = 4. \text{ Giá trị của tích phân } \int_0^1 [f(x)]^3 dx \text{ bằng}$$

**Lời giải**

Ở đây các hàm xuất hiện dưới dấu tích phân là  $[f(x)]^2$ ,  $xf(x)$ ,  $f(x)$  nên ta sẽ liên kết với bình phương  $[f(x) + \alpha x + \beta]^2$ .

Với mỗi số thực  $\alpha, \beta$  ta có

$$\begin{aligned} \int_0^1 [f(x) + \alpha x + \beta]^2 dx &= \int_0^1 [f(x)]^2 dx + 2 \int_0^1 (\alpha x + \beta) f(x) dx + \int_0^1 (\alpha x + \beta)^2 dx \\ &= 4 + 2(\alpha + \beta) + \frac{\alpha^2}{3} + \alpha\beta + \beta^2. \end{aligned}$$

Ta cần tìm  $\alpha, \beta$  sao cho  $\int_0^1 [f(x) + \alpha x + \beta]^2 dx = 0$  hay  $4 + 2(\alpha + \beta) + \frac{\alpha^2}{3} + \alpha\beta + \beta^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + (3\beta + 6)\alpha + 3\beta^2 + 6\beta + 12 = 0. \text{ Để tồn tại } \alpha \text{ thì } \Delta = (3\beta + 6)^2 - 4(3\beta^2 + 6\beta + 12) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -3\beta^2 + 12\beta - 12 \geq 0 \Leftrightarrow -3(\beta - 2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \beta = 2 \longrightarrow \alpha = -6.$$

Vậy  $\int_0^1 [f(x) - 6x + 2]^2 dx = 0 \longrightarrow f(x) = 6x - 2, \forall x \in [0;1] \longrightarrow \int_0^1 [f(x)]^3 dx = 10. \text{ Chọn C.}$

**Câu 96:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0;1]$ , thỏa mãn  $\int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 \sqrt{x}f(x)dx = 1$  và  $\int_0^1 [f(x)]^2 dx = 5$ . Giá trị của tích phân  $\int_0^1 [f(x)]^3 dx$  bằng

**Lời giải**

Ở đây các hàm xuất hiện dưới dấu tích phân là  $[f(x)]^2$ ,  $xf(x)$ ,  $\sqrt{x}f(x)$  nên ta sẽ liên kết với bình phương  $[f(x) + \alpha x + \beta \sqrt{x}]^2$ .

Với mỗi số thực  $\alpha, \beta$  ta có

$$\begin{aligned} \int_0^1 [f(x) + \alpha x + \beta \sqrt{x}]^2 dx &= \int_0^1 [f(x)]^2 dx + 2 \int_0^1 (\alpha x + \beta \sqrt{x}) f(x) dx + \int_0^1 (\alpha x + \beta \sqrt{x})^2 dx \\ &= 5 + 2(\alpha + \beta) + \frac{\alpha^2}{3} + \frac{4\alpha\beta}{5} + \frac{\beta^2}{2}. \end{aligned}$$

Ta cần tìm  $\alpha, \beta$  sao cho  $\int_0^1 [f(x) + \alpha x + \beta \sqrt{x}]^2 dx = 0$  hay  $5 + 2(\alpha + \beta) + \frac{\alpha^2}{3} + \frac{4\alpha\beta}{5} + \frac{\beta^2}{2} = 0$ .

Tương tự như bài trước, ta tìm được  $\alpha = -15, \beta = 10$ .

$$\text{Vậy } \int_0^1 [f(x) - 15x + 10\sqrt{x}]^2 dx = 0 \longrightarrow f(x) = 15x - 10\sqrt{x}, \forall x \in [0;1] \longrightarrow \int_0^1 [f(x)]^3 dx = \frac{5}{6}.$$

**Câu 97:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0;1]$ , thỏa mãn  $\int_0^1 xf^2(x)dx = \int_0^1 x^2 f(x)dx - \frac{1}{16}$ . Giá trị của tích phân  $\int_0^1 f(x)dx$  bằng

**Lời giải**

Hàm bình phương không như thông thường là  $[f(x)]^2$  hoặc  $[f'(x)]^2$ .

Ở đây các hàm xuất hiện dưới dấu tích phân là  $[\sqrt{x}f(x)]^2$ ,  $x^2 f(x)$  nên ta sẽ liên kết với bình phương  $[\sqrt{x}f(x) + ???]^2 = xf^2(x) + 2??? \sqrt{x}f(x) + (???)^2$ . So sánh ta thấy được  $??? = \frac{x\sqrt{x}}{2}$ .

$$\text{Do đó giả thiết được viết lại } \int_0^1 \left( \sqrt{x}f(x) - \frac{x\sqrt{x}}{2} \right)^2 dx = \int_0^1 \left( \frac{x\sqrt{x}}{2} \right)^2 dx - \frac{1}{16} = 0.$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{x}f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{2}, \forall x \in [0;1] \longrightarrow f(x) = \frac{x}{2} \longrightarrow \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{4}.$$

**Câu 98:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[1;8]$  và thỏa mãn

$$\int_1^2 [f(x^3)]^2 dx + 2 \int_1^2 f(x^3) dx = \frac{2}{3} \int_1^8 f(x) dx - \frac{38}{15}.$$

Tích phân  $\int_1^8 f(x) dx$  bằng

**Lời giải**

Nhận thấy có một tích phân khác cận là  $\int_1^8 f(x) dx$ . Bằng cách đổi biến  $x = t^3$  ta thu được tích phân  $3 \int_1^2 t^2 f(t^3) dt = 3 \int_1^2 x^2 f(x^3) dx$ .

Do đó giả thiết được viết lại  $\int_1^2 [f(x^3)]^2 dx + 2 \int_1^2 f(x^3) dx = 2 \int_1^2 x^2 f(x^3) dx - \frac{38}{15}$ . (\*)

Ở đây các hàm xuất hiện dưới dấu tích phân là  $[f(x^3)]^2, f(x^3), x^2 f(x^3)$  nên ta sẽ liên kết với bình phương  $[f(x^3) + \alpha x^2 + \beta]^2$ .

Tương tự như các bài trên ta tìm được  $\alpha = -1, \beta = 1$ .

Do đó (\*)  $\Leftrightarrow \int_1^2 [f(x^3) - x^2 + 1]^2 dx = -\frac{38}{15} + \int_1^2 (1 - x^2)^2 dx = 0$

$\longrightarrow f(x^3) = x^2 - 1, \forall x \in [1; 2] \longrightarrow f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1, \forall x \in [1; 8] \longrightarrow \int_1^8 f(x) dx = \frac{3}{2}.$

**Câu 99:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0; 1]$ , thỏa mãn  $f(1) = 0, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$  và

$\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$ . Tích phân  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng

**Lời giải**

Hàm dưới dấu tích phân là  $[f'(x)]^2, x^2 f(x)$  không có mối liên hệ với nhau.

Dùng tích phân từng phần ta có  $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{x^3}{3} f(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 x^3 f'(x) dx$ . Kết hợp với giả thiết

$f(1) = 0$ , ta suy ra  $\int_0^1 x^3 f'(x) dx = -1$ .

Bây giờ giả thiết được đưa về  $\begin{cases} \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7 \\ \int_0^1 x^3 f'(x) dx = -1 \end{cases}$ . Hàm dưới dấu tích phân bây giờ là

$[f'(x)]^2, x^3 f'(x)$  nên ta sẽ liên kết với bình phương  $[f'(x) + \alpha x^3]^2$ .

$$\begin{aligned}\text{Với mỗi số thực } \alpha \text{ ta có } \int_0^1 [f'(x) + \alpha x^3]^2 dx &= \int_0^1 [f'(x)]^2 dx + 2\alpha \int_0^1 x^3 f'(x) dx + \alpha^2 \int_0^1 x^6 dx \\ &= 7 - 2\alpha + \frac{\alpha^2}{7} = \frac{1}{7}(\alpha - 7)^2.\end{aligned}$$

$$\text{Ta cần tìm } \alpha \text{ sao cho } \int_0^1 [f'(x) + \alpha x^3]^2 dx = 0 \text{ hay } \frac{1}{7}(\alpha - 7)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 7.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 [f'(x) + 7x^3]^2 dx = 0 \longrightarrow f'(x) = -7x^3, \forall x \in [0;1] \longrightarrow f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + C$$

$$\xrightarrow{f(1)=0} C = \frac{7}{4} \longrightarrow f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + \frac{7}{4} \longrightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{7}{5}.$$

**Cách 2.** Dùng tích phân từng phần ta có  $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{x^3}{3} f(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 x^3 f'(x) dx$ . Kết hợp với giả thiết  $f(1) = 0$ , ta suy ra  $\int_0^1 x^3 f'(x) dx = -1$ .

Theo Holder

$$(-1)^2 = \left( \int_0^1 x^3 f'(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 x^6 dx \cdot \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{x^7}{7} \Big|_0^1 \cdot 7 = 1.$$

Vậy đẳng thức xảy ra nên ta có  $f'(x) = kx^3$ , thay vào  $\int_0^1 x^3 f'(x) dx = -1$  ta được  $k = -7$ .

Suy ra  $f'(x) = -7x^3$  (làm tiếp như trên)

**Câu 100:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;1]$ , thỏa mãn  $f(1) = 1$ ,  $\int_0^1 x^5 f(x) dx = \frac{11}{78}$  và

$$\int_0^1 f'(x) d(f(x)) = \frac{4}{13}. \text{ Tính } f(2).$$

**Lời giải**

$$\text{Viết lại } \int_0^1 f'(x) d(f(x)) = \frac{4}{13} \Leftrightarrow \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{4}{13}.$$

Dùng tích phân từng phần ta có  $\int_0^1 x^5 f(x) dx = \frac{x^6}{6} f(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{6} \int_0^1 x^6 f'(x) dx$ . Kết hợp với giả thiết

$$f(1) = 1, \text{ ta suy ra } \int_0^1 x^6 f'(x) dx = \frac{2}{13}.$$

Bây giờ giả thiết được đưa về  $\begin{cases} \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{4}{13} \\ \int_0^1 x^6 f'(x) dx = \frac{2}{13} \end{cases}$ . Hàm dưới dấu tích phân bây giờ là

$[f'(x)]^2$ ,  $x^6 f'(x)$  nên ta sẽ liên kết với bình phương  $[f'(x) + \alpha x^6]^2$ . Tương tự như bài trên ta tìm được  $\alpha = -2 \longrightarrow f'(x) = 2x^6 \longrightarrow f(x) = \frac{2}{7}x^7 + C \xrightarrow{f(1)=1} C = \frac{5}{7}$ .

Vậy  $f(x) = \frac{2}{7}x^7 + \frac{5}{7} \longrightarrow f(2) = \frac{261}{7}$ .

**Cách 2.** Theo Holder

$$\left(\frac{2}{13}\right)^2 = \left(\int_0^1 x^6 f'(x) dx\right)^2 \leq \int_0^1 x^{12} dx \cdot \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{13} \cdot \frac{4}{13} = \frac{4}{169}.$$

**Câu 101:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;1]$ , thỏa mãn  $f(1)=2, f(0)=0$  và  $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 4$ . . Tích phân  $\int_0^1 [f^3(x) + 2018x] dx$  bằng

**Lời giải**

Từ giả thiết  $f(1)=2, f(0)=0$  suy ra  $\int_0^1 f'(x) dx = f(x) \Big|_0^1 = 2$ .

Hàm dưới dấu tích phân là  $[f'(x)]^2$ ,  $f'(x)$  nên sẽ liên kết với bình phương  $[f'(x) + \alpha]^2$ .

Ta tìm được  $\alpha = -2 \longrightarrow f'(x) = 2 \longrightarrow f(x) = 2x + C \xrightarrow{f(0)=0} C = 0$ .

Vậy  $f(x) = 2x \longrightarrow \int_0^1 [f^3(x) + 2018x] dx = 1011$ .

**Cách 2.** Theo Holder

$$2^2 = \left(\int_0^1 f'(x) dx\right)^2 \leq \int_0^1 dx \cdot \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 1 \cdot 4 = 4.$$

**Câu 102:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[1;2]$ , thỏa mãn  $\int_1^2 (x-1)^2 f(x) dx = -\frac{1}{3}, f(2)=0$

và  $\int_1^2 [f'(x)]^2 dx = 7$ . Tích phân  $\int_1^2 f(x) dx$  bằng

**Lời giải**

Chuyển thông tin  $\int_1^2 (x-1)^2 f(x) dx$  sang  $f'(x)$  bằng cách tích phân từng phần, ta được

$$\int_1^2 (x-1)^3 f'(x) dx = 1.$$

Hàm dưới dấu tích phân là  $[f'(x)]^2$ ,  $(x-1)^3 f'(x)$  nên liên kết với  $[f'(x) + \alpha(x-1)^3]^2$ .

Ta tìm được  $\alpha = -7 \longrightarrow f'(x) = 7(x-1)^3 \longrightarrow f(x) = \frac{7}{4}(x-1)^4 + C \xrightarrow{f(2)=0} C = -\frac{7}{4}$ .

Vậy  $f(x) = \frac{7}{4}(x-1)^4 - \frac{7}{4} \longrightarrow \int_1^2 f(x) dx = -\frac{7}{5}$ .

**Cách 2.** Theo Holder

$$1^1 = \left[ \int_1^2 (x-1)^3 f'(x) dx \right]^2 \leq \int_1^2 (x-1)^6 dx \int_1^2 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{7} \cdot 7 = 1.$$

**Câu 103:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;1]$ , thỏa mãn  $f(1)=1$ ,  $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{9}{5}$  và

$\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx = \frac{2}{5}$ . Tích phân  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng

**Lời giải**

Chuyển thông tin  $\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx$  sang  $f'(x)$  bằng cách:

● Đặt  $t = \sqrt{x} \longrightarrow \int_0^1 tf'(t) dt = \frac{1}{5}$  hay  $\int_0^1 xf'(x) dx = \frac{1}{5}$ .

● Tích phân từng phần  $\int_0^1 xf'(x) dx$ , ta được  $\int_0^1 x^2 f'(x) dx = \frac{3}{5}$ .

Hàm dưới dấu tích phân là  $[f'(x)]^2$ ,  $x^2 f'(x)$  nên liên kết với  $[f'(x) + \alpha x^2]^2$ .

Ta tìm được  $\alpha = -3 \longrightarrow f'(x) = 3x^2 \longrightarrow f(x) = x^3 + C \xrightarrow{f(1)=1} C = 0$ .

Vậy  $f(x) = x^3 \longrightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{4}$ .

**Cách 2.** Theo Holder

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \left[ \int_0^1 x^2 f'(x) dx \right]^2 \leq \int_0^1 x^4 dx \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{9}{5} = \frac{9}{25}.$$

**Câu 104:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;1]$ , thỏa mãn  $f(0)+f(1)=0$ ,

$\int_0^1 f'(x) \cos(\pi x) dx = \frac{\pi}{2}$  và  $\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{1}{2}$ . Tích phân  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng

**Lời giải**

Hàm dưới dấu tích phân là  $f^2(x)$  và  $f'(x) \cos(\pi x)$ , không thấy liên kết.

Do đó ta chuyển thông tin của  $f'(x)\cos(\pi x)$  về  $f(x)$  bằng cách tích phân từng phần của  $\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)dx = \frac{\pi}{2}$  cùng với kết hợp  $f(0) + f(1) = 0$ , ta được  $\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx = \frac{1}{2}$ .

Hàm dưới dấu tích phân bây giờ là  $f^2(x)$  và  $f(x)\sin(\pi x)$  nên ta sẽ liên kết với bình phương  $[f(x) + \alpha \sin(\pi x)]^2$ .

Ta tìm được  $\alpha = -1 \longrightarrow f(x) = \sin(\pi x) \longrightarrow \int_0^1 f(x)dx = \frac{2}{\pi}$ .

**Cách 2.** Theo Holder

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx\right)^2 \leq \int_0^1 f^2(x)dx \cdot \int_0^1 [\sin(\pi x)]^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}.$$

**Câu 105:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0; \pi]$ , thỏa mãn  $\int_0^\pi f'(x)\sin x dx = -1$  và

$$\int_0^\pi f^2(x)dx = \frac{2}{\pi}. \text{ Tích phân } \int_0^\pi xf(x)dx \text{ bằng}$$

**Lời giải**

Hàm dưới dấu tích phân là  $f^2(x)$  và  $f'(x)\sin x$ , không thấy liên kết.

Do đó ta chuyển thông tin của  $f'(x)\sin x$  về  $f(x)$  bằng cách tích phân từng phần của  $\int_0^\pi f'(x)\sin x dx = -1$ , ta được  $\int_0^\pi f(x)\cos x dx = 1$ .

Hàm dưới dấu tích phân bây giờ là  $f^2(x)$  và  $f(x)\cos x$  nên ta sẽ liên kết với bình phương  $[f(x) + \alpha \cos x]^2$ .

Ta tìm được  $\alpha = -\frac{2}{\pi} \longrightarrow f(x) = \frac{2}{\pi}\cos x \longrightarrow \int_0^\pi xf(x)dx = \int_0^\pi \frac{2x\cos x}{\pi}dx = -\frac{4}{\pi}$ .

**Cách 2.** Theo Holder

$$(1)^2 = \left(\int_0^\pi f(x)\cos x dx\right)^2 \leq \int_0^\pi f^2(x)dx \cdot \int_0^\pi \cos^2 x dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1.$$

**Câu 106:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0; 1]$ , thỏa  $f(1) = 0$ ,  $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{\pi^2}{8}$  và

$$\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)f(x)dx = \frac{1}{2}. \text{ Tích phân } \int_0^1 f(x)dx \text{ bằng}$$

**Lời giải**

Hàm dưới dấu tích phân là  $[f'(x)]^2$  và  $\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)f(x)$ , không thấy liên kết.

Do đó ta chuyển thông tin của  $\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)f(x)$  về  $f'(x)$  bằng cách tích phân từng phần của  $\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)f(x)dx = \frac{1}{2}$  cùng với kết hợp  $f(1)=0$ , ta được  $\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)f'(x)dx = -\frac{\pi}{4}$ .

Hàm dưới dấu tích phân bây giờ là  $[f'(x)]^2$  và  $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)f'(x)$  nên ta sẽ liên kết với bình phương  $\left[f'(x) + \alpha \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]^2$ .

Ta tìm được  $\alpha = \frac{\pi}{2} \longrightarrow f'(x) = -\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \longrightarrow f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + C \xrightarrow{f(1)=0} C = 0$ .

Vậy  $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \longrightarrow \int_0^1 f(x)dx = \frac{2}{\pi}$ .

**Cách 2.** Theo Holder

$$\left(-\frac{\pi}{4}\right)^2 = \left(\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)f'(x)dx\right)^2 \leq \int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx \cdot \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{8}.$$

**Câu 107:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;1]$ , thỏa mãn  $\int_0^1 f'(x)\sin(\pi x)dx = \pi$  và

$$\int_0^1 f^2(x)dx = 2. \text{ Tích phân } \int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx \text{ bằng}$$

**Lời giải**

Chuyển thông tin của  $f'(x)\sin(\pi x)$  về  $f(x)$  bằng cách tích phân từng phần của  $\int_0^1 f'(x)\sin(\pi x)dx = \pi$ , ta được  $\int_0^1 f(x)\cos(\pi x)dx = -1$ .

Hàm dưới dấu tích phân bây giờ là  $f^2(x)$  và  $\cos(\pi x)f(x)$  nên ta sẽ liên kết với bình phương  $[f(x) + \alpha \cos(\pi x)]^2$ .

Ta tìm được  $\alpha = 2 \longrightarrow f(x) = -2\cos(\pi x) \longrightarrow \int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = -2\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx = -\frac{4}{\pi}$ .

**Cách 2.** Theo Holder

$$(-1)^2 = \left[\int_0^1 f(x)\cos(\pi x)dx\right]^2 \leq \int_0^1 \cos^2(\pi x)dx \cdot \int_0^1 [f(x)]^2 dx = \frac{1}{2} \cdot 2.$$

**Câu 108:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , thỏa  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ,  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x) dx = 3\pi$  và

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - x) f'\left(\frac{x}{2}\right) dx = 6\pi. \text{ Tích phân } \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f''(x)]^3 dx \text{ bằng}$$

**Lời giải**

Tích phân từng phần của  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - x) f'\left(\frac{x}{2}\right) dx = 6\pi$ , kết hợp với  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$  ta được

$$\text{ta được } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x f(x) dx = \frac{3\pi}{4}.$$

Hàm dưới dấu tích phân bây giờ là  $f^2(x)$  và  $\sin^2 x f(x)$  nên ta sẽ liên kết với bình phương  $[f(x) + \alpha \sin^2 x]^2$ .

Ta tìm được  $\alpha = -4 \longrightarrow f(x) = 4 \sin^2 x \Rightarrow f'(x) = 4 \sin 2x \Rightarrow f''(x) = 8 \cos 2x$ .

$$\text{Vậy } \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f''(x)]^3 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [8 \cos 2x]^3 dx = 0.$$

**Cách 2.** Theo Holder

$$\left(\frac{3\pi}{4}\right)^2 = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x f(x) dx\right)^2 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x) dx = \frac{3\pi}{16} \cdot 3\pi.$$

**Câu 109:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0; 1]$ , thỏa mãn  $f(1) = 0$  và

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \int_0^1 (x+1)e^x f(x) dx = \frac{e^2 - 1}{4}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^1 f(x) dx.$$

**Lời giải**

Tích phân từng phần của  $\int_0^1 (x+1)e^x f(x) dx$ , kết hợp với  $f(1) = 0$  ta được

$$\int_0^1 x e^x f'(x) dx = -\frac{e^2 - 1}{4}.$$

Hàm dưới dấu tích phân bây giờ là  $[f'(x)]^2$  và  $x e^x f'(x)$  nên ta sẽ liên kết với  $[f(x) + \alpha x e^x]^2$ .

Ta tìm được  $\alpha = 1 \longrightarrow f'(x) = -x e^x \longrightarrow f(x) = -\int x e^x dx = (1-x)e^x + C \xrightarrow{f(1)=0} C = 0$ .

$$\text{Vậy } f(x) = (1-x)e^x \longrightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (1-x)e^x dx = e - 2.$$

**Cách 2.** Theo Holder

$$\left(-\frac{e^2-1}{4}\right)^2 = \left(\int_0^1 x e^x f'(x) dx\right)^2 \leq \int_0^1 x^2 e^{2x} dx \cdot \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{e^2-1}{4} \cdot \frac{e^2-1}{4}.$$

**Câu 110:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;1]$ , thỏa mãn  $f(0)=0, f(1)=1$  và

$$\int_0^1 \frac{[f'(x)]^2}{e^x} dx = \frac{1}{e-1}. \text{ Tích phân } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

**Lời giải**

Hàm dưới dấu tích phân là  $\frac{[f'(x)]^2}{e^x}$  nên ta cần tìm một thông tin liên quan  $f'(x)$ .

Từ giả thiết  $f(0)=0, f(1)=1$  ta nghĩ đến  $\int_0^1 f'(x) dx = f(x) \Big|_0^1 = f(1) - f(0) = 1$ .

Do đó ta có hàm dưới dấu tích phân là  $\frac{[f'(x)]^2}{e^x}$  và  $f'(x)$  nên sẽ liên kết với bình phương

$$\left[\frac{f'(x)}{\sqrt{e^x}} + \alpha \sqrt{e^x}\right]^2. \text{ Với mỗi số thực } \alpha \text{ ta có}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[\frac{f'(x)}{\sqrt{e^x}} + \alpha \sqrt{e^x}\right]^2 dx &= \int_0^1 \frac{[f'(x)]^2}{e^x} dx + 2\alpha \int_0^1 f'(x) dx + \alpha^2 \int_0^1 e^x dx \\ &= \frac{1}{e-1} + 2\alpha + \alpha^2(e-1) = \frac{1}{e-1} [(e-1)\alpha + 1]^2. \end{aligned}$$

Ta cần tìm  $\alpha$  sao cho  $\int_0^1 \left[\frac{f'(x)}{\sqrt{e^x}} + \alpha \sqrt{e^x}\right]^2 dx = 0$  hay  $\frac{1}{e-1} [(e-1)\alpha + 1]^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{e-1}$ .

Với  $\alpha = -\frac{1}{e-1}$  thì  $\int_0^1 \left[\frac{f'(x)}{\sqrt{e^x}} - \frac{1}{e-1} \sqrt{e^x}\right]^2 dx = 0 \Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{e^x}} \equiv \frac{1}{e-1} \sqrt{e^x}, \forall x \in [0;1]$ .

Suy ra  $f'(x) = \frac{e^x}{e-1} \longrightarrow f(x) = \int \frac{e^x}{e-1} dx = \frac{e^x}{e-1} + C \xrightarrow{f(0)=0, f(1)=1} C = -\frac{1}{e-1}$ .

Vậy  $f(x) = \frac{e^x-1}{e-1} \longrightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{e-2}{e-1}$ .

**Cách 2.** Theo Holder

$$1^2 = \left[\int_0^1 f'(x) dx\right]^2 = \left[\int_0^1 \frac{f'(x)}{\sqrt{e^x}} \cdot \sqrt{e^x} dx\right]^2 \leq \int_0^1 \frac{[f'(x)]^2}{e^x} dx \int_0^1 e^x dx = \frac{1}{e-1} \cdot (e-1) = 1.$$

**Câu 111:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;1]$ , thỏa mãn  $f(0)=0, f(1)=1$  và

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2} [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{\ln(1+\sqrt{2})}. \text{ Tích phân } \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}} dx \text{ bằng}$$

**Lời giải**

Tương tự bài trước, ta có  $\int_0^1 f'(x) dx = f(x) \Big|_0^1 = f(1) - f(0) = 1$ .

Do đó ta có hàm dưới dấu tích phân là  $\sqrt{1+x^2} [f'(x)]^2$  và  $f'(x)$  nên sẽ liên kết với bình phương  $\left[ \sqrt[4]{1+x^2} f'(x) + \frac{\alpha}{\sqrt[4]{1+x^2}} \right]^2$ .

Ta tìm được  $\alpha = -\frac{1}{\ln(1+\sqrt{2})} \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{\ln(1+\sqrt{2})} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\longrightarrow f(x) = \frac{1}{\ln(1+\sqrt{2})} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{\ln(1+\sqrt{2})} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$ .

Mà  $f(0) = 0, f(1) = 1 \Rightarrow C = 0 \longrightarrow f(x) = \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\ln(1+\sqrt{2})}$ .

Vậy

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \frac{1}{\ln(1+\sqrt{2})} \int_0^1 \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{\ln(1+\sqrt{2})} \int_0^1 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) d[\ln(x + \sqrt{1+x^2})] \\ &= \frac{1}{\ln(1+\sqrt{2})} \cdot \frac{\ln^2(x + \sqrt{1+x^2})}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln(1+\sqrt{2}). \end{aligned}$$

**Cách 2.** Theo Holder

$$\begin{aligned} 1^2 &= \left( \int_0^1 f'(x) dx \right)^2 = \int_0^1 \sqrt[4]{1+x^2} f'(x) \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^2}} dx \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^2} [f'(x)]^2 dx \cdot \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{1}{\ln(1+\sqrt{2})} \cdot \ln(1+\sqrt{2}) = 1. \end{aligned}$$

**Câu 112:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[-1;1]$ , thỏa mãn  $f(-1) = 0, \int_{-1}^1 [f'(x)]^2 dx = 112$

và  $\int_{-1}^1 x^2 f(x) dx = \frac{16}{3}$ . Tính tích phân  $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$ .

**Lời giải**

Như các bài trước, ta chuyển  $\int_{-1}^1 x^2 f(x) dx = \frac{16}{3}$  về thông tin của  $f'(x)$  bằng cách tích phân từng

phần. Đặt  $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$ .

Khi đó  $\int_{-1}^1 x^2 f(x) dx = \frac{x^3}{3} f(x) \Big|_{-1}^1 - \frac{1}{3} \int_{-1}^1 x^3 f'(x) dx = \frac{1}{3} f(1) + \frac{1}{3} f(-1) - \frac{1}{3} \int_{-1}^1 x^3 f'(x) dx$ . Tới đây ta bị vướng  $f(1)$  vì giả thiết không cho. Do đó ta điều chỉnh lại như sau

$$\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{x^3}{3} + k \end{cases} \quad \text{với } k \text{ là hằng số.}$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \int_{-1}^1 x^2 f(x) dx &= \left( \frac{x^3}{3} + k \right) f(x) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \left( \frac{x^3}{3} + k \right) f'(x) dx \\ &= \left( \frac{1}{3} + k \right) f(1) - \underbrace{\left( -\frac{1}{3} + k \right) f(-1)}_{=0 \text{ do } f(-1)=0} - \int_{-1}^1 \left( \frac{x^3}{3} + k \right) f'(x) dx. \end{aligned}$$

Ta chọn  $k$  sao cho  $\frac{1}{3} + k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{3}$ .

$$\text{Khi đó } \frac{16}{3} = \int_{-1}^1 x^2 f(x) dx = -\frac{1}{3} \int_{-1}^1 (x^3 - 1) f'(x) dx \longrightarrow \int_{-1}^1 (x^3 - 1) f'(x) dx = -16.$$

Hàm dưới dấu tích phân là  $[f'(x)]^2$ ,  $(x^3 - 1) f'(x)$  nên ta liên kết với  $[f'(x) + \alpha(x^3 - 1)]^2$ .

$$\text{Ta tìm được } \alpha = 7 \longrightarrow f'(x) = -7(x^3 - 1) \Rightarrow f(x) = -7 \int (x^3 - 1) dx = -\frac{7}{4} x^4 + 7x + C$$

$$\xrightarrow{f(-1)=0} C = \frac{35}{4} \longrightarrow f(x) = -\frac{7}{4} x^4 + 7x + \frac{35}{4}. \text{ Vậy } I = \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{84}{5}.$$

**Cách 2.** Theo Holder

$$(-16)^2 = \left( \int_{-1}^1 (x^3 - 1) f'(x) dx \right)^2 \leq \int_{-1}^1 (x^3 - 1)^2 dx \cdot \int_{-1}^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{16}{7} \cdot 112 = 256.$$

**Câu 113:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;1]$ , thỏa mãn  $f(1) = 0$ ,  $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{3}{2} - 2 \ln 2$

và  $\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx = 2 \ln 2 - \frac{3}{2}$ . Tích phân  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng

**Lời giải**

Như các bài trước, ta chuyển  $\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx = 2 \ln 2 - \frac{3}{2}$  về thông tin của  $f'(x)$  bằng cách tích

$$\text{phân từng phần. Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = \frac{1}{(x+1)^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = -\frac{1}{x+1} \end{cases}.$$

Khi đó  $\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx = -\frac{f(x)}{x+1} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{f'(x)}{x+1} dx = -\frac{f(1)}{2} + \frac{f(0)}{1} + \int_0^1 \frac{f'(x)}{x+1} dx$ . Tới đây ta bị vướng  $f'(0)$  vì giả thiết không cho. Do đó ta điều chỉnh lại như sau

$$\begin{cases} u = f(x) \\ dv = \frac{1}{(x+1)^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = -\frac{1}{x+1} + k \end{cases} \text{ với } k \text{ là hằng số.}$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx &= \left( -\frac{1}{x+1} + k \right) f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \left( -\frac{1}{x+1} + k \right) f'(x) dx = \\ &\stackrel{f(1)=0}{=} -(-1+k)f(0) - \int_0^1 \left( -\frac{1}{x+1} + k \right) f'(x) dx. \end{aligned}$$

Ta chọn  $k$  sao cho  $-1+k=0 \Leftrightarrow k=1$ .

$$\text{Khi đó } 2 \ln 2 - \frac{3}{2} = \int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx = -\int_0^1 \frac{x}{x+1} f'(x) dx \longrightarrow \int_0^1 \frac{x}{x+1} f'(x) dx = \frac{3}{2} - 2 \ln 2.$$

Hàm dưới dấu tích phân là  $[f'(x)]^2$ ,  $\frac{x}{x+1} f'(x)$  nên ta liên kết với  $\left[ f'(x) + \alpha \frac{x}{x+1} \right]^2$ .

$$\text{Ta tìm được } \alpha = -1 \longrightarrow f'(x) = \frac{x}{x+1} \Rightarrow f(x) = \int \frac{x}{x+1} dx = x - \ln|x+1| + C$$

$$\stackrel{f(1)=0}{\longrightarrow} C = \ln 2 - 1 \longrightarrow f(x) = x - \ln(x+1) + \ln 2 - 1. \text{ Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \frac{1-2 \ln 2}{2}.$$

**Cách 2.** Theo Holder

$$\left( \frac{3}{2} - 2 \ln 2 \right)^2 = \left[ \int_0^1 \frac{x}{x+1} f'(x) dx \right]^2 \leq \int_0^1 \left( \frac{x}{x+1} \right)^2 dx \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \left( \frac{3}{2} - 2 \ln 2 \right) \left( \frac{3}{2} - 2 \ln 2 \right).$$

**Câu 114:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[1;2]$ , đồng biến trên  $[1;2]$ , thỏa mãn  $f(1)=0$ ,  $\int_1^2 [f'(x)]^2 dx = 2$  và  $\int_1^2 f(x).f'(x) dx = 1$ . Tích phân  $\int_1^2 f(x) dx$  bằng

**Lời giải**

Hàm dưới dấu tích phân là  $[f'(x)]^2$ ,  $f(x).f'(x)$  nên ta sẽ liên kết với bình phương  $[f'(x) + \alpha f(x)]^2$ . Nhưng khi khai triển thì vướng  $\int_1^2 [f(x)]^2 dx$  nên hướng này không khả thi.

$$\text{Ta có } 1 = \int_1^2 f(x).f'(x) dx = \frac{f^2(x)}{2} \Big|_1^2 = \frac{f^2(2) - f^2(1)}{2} = \frac{f^2(2) - 0}{2} \longrightarrow f(2) = \sqrt{2} \text{ (do đồng biến trên } [1;2] \text{ nên } f(2) > f(1) = 0)$$

Từ  $f(1) = 0$  và  $f(2) = \sqrt{2}$  ta nghĩ đến  $\int_1^2 f'(x) dx = f(x) \Big|_1^2 = f(2) - f(1) = \sqrt{2} - 0 = \sqrt{2}$ .

Hàm dưới dấu tích phân bây giờ là  $[f'(x)]^2$ ,  $f'(x)$  nên ta sẽ liên kết với  $[f'(x) + \alpha]^2$ .

Ta tìm được  $\alpha = -\sqrt{2} \longrightarrow f'(x) = \sqrt{2} \longrightarrow f(x) = \sqrt{2}x + C \xrightarrow{f(1)=0} C = -\sqrt{2}$ .

Vậy  $f(x) = \sqrt{2}x - \sqrt{2} \longrightarrow \int_1^2 f(x) dx = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Câu 115:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;1]$ , thỏa mãn  $f(1) = 0$ ,  $\int_0^1 f^2(x) dx = 1$  và

$\int_0^1 [f'(x)]^2 f^2(x) dx = \frac{3}{4}$ . Giá trị của  $f^2(\sqrt{2})$  bằng

**Lời giải**

Hàm dưới dấu tích phân là  $[f'(x)]^2 f^2(x)$  và  $f^2(x)$  nên ta sẽ liên kết với bình phương  $[f'(x) f(x) + \alpha f(x)]^2$ . Nhưng khi khai triển thì vướng  $\int_0^1 f^2(x) f'(x) dx$  nên hướng này không khả thi.

Tích phân từng phần  $\int_0^1 f^2(x) dx = 1$  kết hợp với  $f(1) = 0$ , ta được  $\int_0^1 x f'(x) f^2(x) dx = -\frac{1}{2}$ .

Hàm dưới dấu tích phân bây giờ là  $[f'(x)]^2 f^2(x)$  và  $x f'(x) f^2(x)$  nên ta sẽ liên kết với bình phương  $[f(x) f'(x) + \alpha x]^2$ .

Ta tìm được

$$\alpha = \frac{3}{2} \longrightarrow f(x) f'(x) = -\frac{3}{2} x \Rightarrow \int f(x) f'(x) dx = -\frac{3}{2} \int x dx \Rightarrow \frac{f^2(x)}{2} = -\frac{3}{4} x^2 + C$$

$$\xrightarrow{f(1)=0} C = \frac{3}{4} \longrightarrow f^2(x) = \frac{3}{2} (1 - x^2) \longrightarrow f^2(\sqrt{2}) = -\frac{3}{2}.$$

**Câu 116:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;2]$ , thỏa mãn  $f(2) = 1$ ,  $\int_0^2 x^2 f(x) dx = \frac{8}{15}$  và

$\int_0^2 [f'(x)]^4 dx = \frac{32}{5}$ . Giá trị của tích phân  $\int_0^2 f(x) dx$  bằng

**Lời giải**

Hàm dưới dấu tích phân  $[f'(x)]^4$  và  $x^2 f(x)$ . Lời khuyên là đừng có cố liên kết với bình phương nào, vì có tìm cũng không ra.

Tích phân từng phần  $\int_0^2 x^2 f(x) dx = \frac{8}{15}$  kết hợp với  $f(2) = 1$ , ta được  $\int_0^2 x^3 f'(x) dx = \frac{32}{5}$ .

Áp dụng Holder 2 lần ta được

$$\begin{aligned} \left(\frac{32}{5}\right)^4 &= \left(\int_0^2 x^3 f'(x) dx\right)^4 = \left(\int_0^2 x^2 \cdot x f'(x) dx\right)^4 \leq \left(\int_0^2 x^4 dx\right)^2 \left(\int_0^2 x^2 [f'(x)]^2 dx\right)^2 \\ &\leq \left(\int_0^2 x^4 dx\right)^2 \times \left(\int_0^2 x^4 dx \cdot \int_0^2 [f'(x)]^4 dx\right) \\ &= \left(\int_0^2 x^4 dx\right)^3 \times \int_0^2 [f'(x)]^4 dx = \frac{1048576}{625} = \left(\frac{32}{5}\right)^4. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra, tức là  $xf'(x) = kx^2 \Rightarrow f'(x) = kx$  thay vào  $\int_0^2 [f'(x)]^4 dx = \frac{32}{5}$  tìm được  $k = 1$

$$\longrightarrow f'(x) = x \Rightarrow f(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C \xrightarrow{f(2)=1} C = -1.$$

$$\text{Vậy } f(x) = \frac{x^2}{2} - 1 \longrightarrow \int_0^2 f(x) dx = -\frac{2}{3}.$$

**Cách 2.** Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$[f'(x)]^4 + x^4 + x^4 + x^4 \geq 4x^3 f'(x).$$

Do vậy  $\int_0^2 [f'(x)]^4 dx + 3 \int_0^2 x^4 dx \geq 4 \int_0^2 x^3 f'(x) dx$ . Mà giá trị của hai vế bằng nhau, có nghĩa là dấu "=" xảy ra nên  $f'(x) = x$ . (Làm tiếp như trên).



# NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

## BÀI 2. TÍCH PHÂN



### HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRÍCH TỪ ĐỀ THAM KHẢO VÀ ĐỀ CHÍNH THỨC  
CỦA BỘ GIÁO DỤC TỪ NĂM 2017 ĐẾN NAY

- Câu 1: (MĐ 101-2022)** Nếu  $\int_0^2 f(x) dx = 4$  thì  $\int_0^2 \left[ \frac{1}{2} f(x) + 2 \right] dx$  bằng  
**A.** 6. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 2.
- Câu 2: (MĐ 101-2022)** Nếu  $\int_{-1}^5 f(x) dx = -3$  thì  $\int_5^{-1} f(x) dx$  bằng  
**A.** 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.
- Câu 3: (MĐ 102-2022)** Nếu  $\int_0^2 f(x) dx = 4$  thì  $\int_0^2 \left[ \frac{1}{2} f(x) + 2 \right] dx$  bằng  
**A.** 2. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 8.
- Câu 4: (MĐ 102-2022)** Nếu  $\int_{-1}^5 f(x) dx = -3$  thì  $\int_5^{-1} f(x) dx$  bằng  
**A.** 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.
- Câu 5: (MĐ 103-2022)** Nếu  $\int_0^3 f(x) dx = 6$  thì  $\int_0^3 \left[ \frac{1}{3} f(x) + 2 \right] dx$  bằng  
**A.** 8. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 6.
- Câu 6: (MĐ 103-2022)** Nếu  $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$  và  $\int_2^5 f(x) dx = -5$  thì  $\int_{-1}^5 f(x) dx$  bằng  
**A.** -7. **B.** -3. **C.** 4. **D.** 7.
- Câu 7: (MĐ 104-2022)** Nếu  $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$  và  $\int_2^5 f(x) dx = -5$  thì  $\int_{-1}^5 f(x) dx$  bằng  
**A.** 7. **B.** -3. **C.** -7. **D.** -4.
- Câu 8: (MĐ 104-2022)** Nếu  $\int_0^3 f(x) dx = 6$  thì  $\int_0^3 \left[ \frac{1}{3} f(x) + 2 \right] dx$  bằng  
**A.** 6. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 8.
- Câu 9: (TK 2020-2021)** Nếu  $\int_1^2 f(x) dx = 5$  và  $\int_2^3 f(x) dx = -2$  thì  $\int_1^3 f(x) dx$  bằng  
**A.** 3. **B.** 7. **C.** -10. **D.** -7.
- Câu 10: (TK 2020-2021)** Tích phân  $\int_1^2 x^3 dx$  bằng

A.  $\frac{15}{3}$ .

B.  $\frac{17}{4}$ .

C.  $\frac{7}{4}$ .

D.  $\frac{15}{4}$ .

**Câu 11: (TK 2020-2021)** Nếu  $\int_1^3 [2f(x)+1]dx = 5$  thì  $\int_1^3 f(x)dx$  bằng

A. 3.

B. 2.

C.  $\frac{3}{4}$ .

D.  $\frac{3}{2}$ .

**Câu 12: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1)** Nếu  $\int_1^4 f(x)dx = 3$  và  $\int_1^4 g(x)dx = -2$  thì  $\int_1^4 (f(x) - g(x))dx$  bằng

A. -1.

B. -5.

C. 5.

D. 1.

**Câu 13: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Nếu  $\int_1^4 f(x)dx = 6$  và  $\int_1^4 g(x)dx = -5$  thì  $\int_1^4 [f(x) - g(x)]dx$  bằng

A. -1.

B. -11.

C. 1.

D. 11.

**Câu 14: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Nếu  $\int_0^3 f(x)dx = 3$  thì  $\int_0^3 2f(x)dx$  bằng

A. 3.

B. 18.

C. 2.

D. 6.

**Câu 15: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Nếu  $\int_0^2 f(x)dx = 3$  thì  $\int_0^2 [2f(x) - 1]dx$  bằng

A. 6.

B. 4.

C. 8.

D. 5.

**Câu 16: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Nếu  $\int_1^4 f(x)dx = 5$  và  $\int_1^4 g(x)dx = -4$  thì  $\int_1^4 [f(x) - g(x)]dx$  bằng

A. -1.

B. -9.

C. 1.

D. 9.

**Câu 17: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Nếu  $\int_0^3 f(x)dx = 2$  thì  $\int_0^3 3f(x)dx$  bằng

A. 6.

B. 2.

C. 18.

D. 3.

**Câu 18: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1)** Nếu  $\int_1^4 f(x)dx = 4$  và  $\int_1^4 g(x)dx = -3$  thì  $\int_1^4 [f(x) - g(x)]dx$  bằng

A. 1.

B. -7.

C. -1.

D. 7.

**Câu 19: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1)** Nếu  $\int_0^3 f(x)dx = 3$  thì  $\int_0^3 4f(x)dx$  bằng

A. 3.

B. 12.

C. 36.

D. 4.

**Câu 20: (2020-2021 – ĐỢT 2)** Nếu  $\int_0^1 f(x)dx = 2$  và  $\int_1^3 f(x)dx = 5$  thì  $\int_0^3 f(x)dx$  bằng

A. 10.

B. 3.

C. 7.

D. -3.

- Câu 21: (2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho  $f(x)$  là hàm số liên tục trên đoạn  $[1; 2]$ . Biết  $F(x)$  là nguyên hàm của  $f(x)$  trên đoạn  $[1; 2]$  thỏa mãn  $F(1) = -2$  và  $F(2) = 4$ . Khi đó  $\int_1^2 f(x) dx$  bằng
- A. 6.                      B. 2.                      C. -6.                      D. -2.
- Câu 22: (2020-2021 – ĐỢT 2)** Nếu  $\int_0^1 f(x) dx = 5$  và  $\int_1^3 f(x) dx = 2$  thì  $\int_0^3 f(x) dx$  bằng
- A. 10.                      B. -3.                      C. 3.                      D. 7.
- Câu 23: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Nếu  $\int_0^1 f(x) dx = 3$  và  $\int_1^3 f(x) dx = 4$  thì  $\int_0^3 f(x) dx$  bằng
- A. -1.                      B. 1.                      C. 7.                      D. 12.
- Câu 24: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho  $f$  là một hàm số liên tục trên đoạn  $[1; 2]$ . Biết  $F$  là nguyên hàm của hàm  $f$  trên đoạn  $[1; 2]$  thỏa mãn  $F(1) = -1$  và  $F(2) = 3$ . Khi đó  $\int_1^2 f(x) dx$ .
- A. 4.                      B. -2.                      C. 2.                      D. -4.
- Câu 25: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2)** Nếu  $\int_0^1 f(x) dx = 4$  và  $\int_1^3 f(x) dx = 3$  thì  $\int_0^3 f(x) dx$  bằng
- A. -1.                      B. 1.                      C. 7.                      D. 12.
- Câu 26: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho  $f$  là hàm số liên tục trên đoạn  $[1; 2]$ . Biết  $F$  là nguyên hàm của  $f$  trên đoạn  $[1; 2]$  thỏa mãn  $F(1) = -1$  và  $F(2) = 4$ . Khi đó  $\int_1^2 f(x) dx$  bằng
- A. -5.                      B. 3.                      C. 5.                      D. -3.
- Câu 27: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Nếu  $\int_0^2 f(x) dx = 6$  thì  $\int_0^2 [2f(x) - 1] dx$  bằng
- A. 12.                      B. 10.                      C. 11.                      D. 14.
- Câu 28: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1)** Nếu  $\int_0^2 f(x) dx = 4$  thì  $\int_0^2 [2f(x) - 1] dx$  bằng
- A. 8.                      B. 10.                      C. 7.                      D. 6.
- Câu 29: (2020-2021 – ĐỢT 2)** Nếu  $\int_0^2 f(x) dx = 2$  thì  $\int_0^2 [4x - f(x)] dx$  bằng
- A. 12.                      B. 10.                      C. 4.                      D. 6.
- Câu 30: (2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho  $f$  là hàm số liên tục trên đoạn  $[1; 2]$ . Biết  $F$  là nguyên hàm của  $f$  trên đoạn  $[1; 2]$  thỏa mãn  $F(1) = -2$  và  $F(2) = 3$ . Khi đó  $\int_1^2 f(x) dx$  bằng
- A. -5.                      B. 1.                      C. -1.                      D. 5.
- Câu 31: (2020-2021 – ĐỢT 2)** Nếu  $\int_0^2 f(x) dx = 2$  thì  $\int_0^2 [2x - f(x)] dx$  bằng
- A. 2.                      B. 8.                      C. 6.                      D. 0.
- Câu 32: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Nếu  $\int_0^2 f(x) dx = 3$  thì  $\int_0^2 (2x - f(x)) dx$  bằng
- A. 7.                      B. -2.                      C. 10.                      D. 1.

**Câu 33:** (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2) Nếu  $\int_0^2 f(x)dx = 3$  thì  $\int_0^2 [4x - f(x)]dx$  bằng

- A. 14.                      B. 5.                      C. -2.                      D. 11.

**Câu 34:** (TK 2020-2021) Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \geq 2 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$ . Tích phân  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\sin x + 1)\cos x dx$  bằng

- A.  $\frac{23}{3}$ .                      B.  $\frac{23}{6}$ .                      C.  $\frac{17}{6}$ .                      D.  $\frac{17}{3}$ .

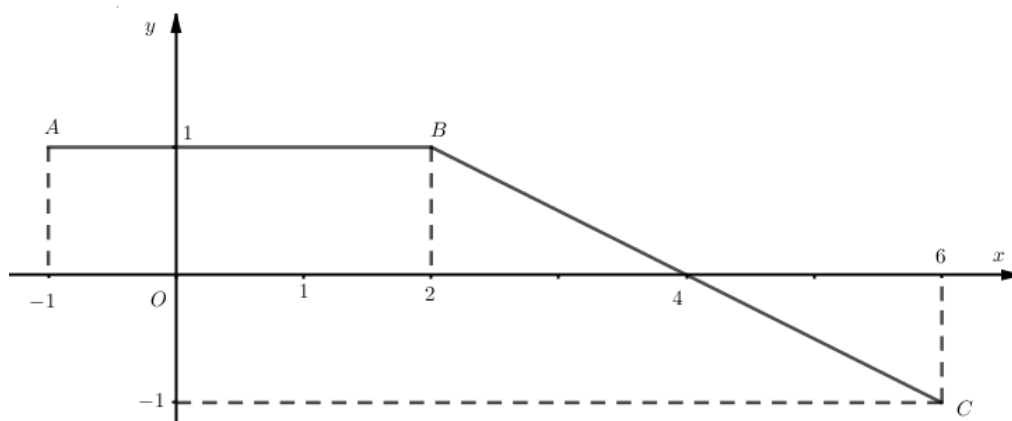
**Câu 35:** (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2 - 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ . Giả sử  $F$  là nguyên hàm của  $f$  trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $F(0) = 2$ . Giá trị  $F(-1) + 2F(2)$

- A. 9                      B. 15                      C. 11                      D. 6

**Câu 36:** (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2 + 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ . Giả sử  $F$  là nguyên hàm của  $f$  trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $F(0) = 2$ . Giá trị của  $F(-1) + 2F(2)$  bằng

- A. 18.                      B. 20.                      C. 9.                      D. 24.

**Câu 37:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-1; 6]$  và có đồ thị là đường gấp khúc  $ABC$  trong hình bên. Biết  $F$  là nguyên hàm của  $f$  thỏa mãn  $F(-1) = -1$ . Giá trị của  $F(4) + F(6)$  bằng



- A. 10.                      B. 5.                      C. 6.                      D. 7.

**Câu 38:** (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Nếu  $\int_1^2 f(x)dx = -2$  và  $\int_2^3 f(x)dx = 1$  thì  $\int_1^3 f(x)dx$  bằng

- A. -3.                      B. -1.                      C. 1.                      D. 3.

**Câu 39:** (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Nếu  $\int_0^1 f(x)dx = 4$  thì  $\int_0^1 2f(x)dx$  bằng

- A. 16.                      B. 4.                      C. 2.                      D. 8.

**Câu 40:** (Mã 101 - 2020 Lần 1) Biết  $\int_1^3 f(x)dx = 3$ . Giá trị của  $\int_1^3 2f(x)dx$  bằng

- A. 5.                      B. 9.                      C. 6.                      D.  $\frac{3}{2}$ .

- Câu 41:** (Mã 101 - 2020 Lần 1) Biết  $F(x) = x^2$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên  $\mathbb{R}$ . Giá trị của  $\int_1^2 [2 + f(x)] dx$  bằng
- A. 5.                                      B. 3.                                      C.  $\frac{13}{3}$ .                                      D.  $\frac{7}{3}$ .
- Câu 42:** (Mã 102 - 2020 Lần 1) Biết  $\int_1^5 f(x) dx = 4$ . Giá trị của  $\int_1^5 3f(x) dx$  bằng
- A. 7.                                      B.  $\frac{4}{3}$ .                                      C. 64.                                      D. 12.
- Câu 43:** (Mã 102 - 2020 Lần 1) Biết  $F(x) = x^3$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên  $\mathbb{R}$ . Giá trị của  $\int_1^2 (2 + f(x)) dx$  bằng
- A.  $\frac{23}{4}$ .                                      B. 7.                                      C. 9.                                      D.  $\frac{15}{4}$ .
- Câu 44:** (Mã 103 - 2020 Lần 1) Biết  $\int_1^2 f(x) dx = 2$ . Giá trị của  $\int_1^3 3f(x) dx$  bằng
- A. 5.                                      B. 6.                                      C.  $\frac{2}{3}$ .                                      D. 8.
- Câu 45:** (Mã 103 - 2020 Lần 1) Biết  $F(x) = x^3$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên  $\mathbb{R}$ . Giá trị của  $\int_1^3 (1 + f(x)) dx$  bằng
- A. 20.                                      B. 22.                                      C. 26.                                      D. 28.
- Câu 46:** (Mã 104 - 2020 Lần 1) Biết  $\int_2^3 f(x) dx = 6$ . Giá trị của  $\int_2^3 2f(x) dx$  bằng.
- A. 36.                                      B. 3.                                      C. 12.                                      D. 8.
- Câu 47:** (Mã 104 - 2020 Lần 1) Biết  $F(x) = x^2$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên  $\mathbb{R}$ . Giá trị của  $\int_1^3 [1 + f(x)] dx$  bằng
- A. 10.                                      B. 8.                                      C.  $\frac{26}{3}$ .                                      D.  $\frac{32}{3}$ .
- Câu 48:** (Mã 101 - 2020 Lần 2) Biết  $\int_2^3 f(x) dx = 4$  và  $\int_2^3 g(x) dx = 1$ . Khi đó:  $\int_2^3 [f(x) - g(x)] dx$  bằng:
- A. -3.                                      B. 3.                                      C. 4.                                      D. 5.
- Câu 49:** (Mã 101 - 2020 Lần 2) Biết  $\int_0^1 [f(x) + 2x] dx = 2$ . Khi đó  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng :
- A. 1.                                      B. 4.                                      C. 2.                                      D. 0.
- Câu 50:** (Mã 102 - 2020 Lần 2) Biết  $\int_2^3 f(x) dx = 3$  và  $\int_2^3 g(x) dx = 1$ . Khi đó  $\int_2^3 [f(x) + g(x)] dx$  bằng
- A. 4.                                      B. 2.                                      C. -2.                                      D. 3.
- Câu 51:** (Mã 102 - 2020 Lần 2) Biết  $\int_0^1 [f(x) + 2x] dx = 3$ . Khi đó  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng

A. 1. B. 5. C. 3. D. 2.

**Câu 52:** (Mã 103 - 2020 Lần 2) Biết  $\int_1^2 f(x)dx = 3$  và  $\int_1^2 g(x)dx = 2$ . Khi đó  $\int_1^2 [f(x) - g(x)]dx$  bằng?

A. 6. B. 1. C. 5. D. -1.

**Câu 53:** (Mã 103 - 2020 Lần 2) Biết  $\int_0^1 [f(x) + 2x]dx = 4$ . Khi đó  $\int_0^1 f(x)dx$  bằng

A. 3. B. 2. C. 6. D. 4.

**Câu 54:** (Mã 104 - 2020 Lần 2) Biết  $\int_1^2 f(x)dx = 2$  và  $\int_1^2 g(x)dx = 3$ . Khi đó  $\int_1^2 [f(x) + g(x)]dx$  bằng

A. 1. B. 5. C. -1. D. 6.

**Câu 55:** (Mã 104 - 2020 Lần 2) Biết  $\int_0^1 [f(x) + 2x]dx = 5$ . Khi đó  $\int_0^1 f(x)dx$  bằng

A. 7. B. 3. C. 5. D. 4.

**Câu 56:** (Mã 103 - 2019) Biết  $\int_1^2 f(x)dx = 2$  và  $\int_1^2 g(x)dx = 6$ , khi đó  $\int_1^2 [f(x) - g(x)]dx$  bằng

A. 8. B. -4. C. 4. D. -8.

**Câu 57:** (Mã 102 - 2019) Biết tích phân  $\int_0^1 f(x)dx = 3$  và  $\int_0^1 g(x)dx = -4$ . Khi đó  $\int_0^1 [f(x) + g(x)]dx$  bằng

A. -7. B. 7. C. -1. D. 1.

**Câu 58:** (Mã 104 - 2019) Biết  $\int_0^1 f(x)dx = 2$  và  $\int_0^1 g(x)dx = -4$ , khi đó  $\int_0^1 [f(x) + g(x)]dx$  bằng

A. 6. B. -6. C. -2. D. 2.

**Câu 59:** (Mã 101 2019) Biết  $\int_0^1 f(x)dx = -2$  và  $\int_0^1 g(x)dx = 3$ , khi đó  $\int_0^1 [f(x) - g(x)]dx$  bằng

A. -1. B. 1. C. -5. D. 5.

**Câu 60:** (Đề Tham Khảo 2019) Cho  $\int_0^1 f(x)dx = 2$  và  $\int_0^1 g(x)dx = 5$ , khi  $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)]dx$  bằng

A. -8 B. 1 C. -3 D. 12

**Câu 61:** (Mã 104 2018)  $\int_1^2 \frac{dx}{2x+3}$  bằng

A.  $\frac{1}{2} \ln 35$  B.  $\ln \frac{7}{5}$  C.  $\frac{1}{2} \ln \frac{7}{5}$  D.  $2 \ln \frac{7}{5}$

**Câu 62:** (Mã 103 2018)  $\int_1^2 \frac{dx}{3x-2}$  bằng

A.  $2 \ln 2$  B.  $\frac{1}{3} \ln 2$  C.  $\frac{2}{3} \ln 2$  D.  $\ln 2$

**Câu 63:** (Đề Tham Khảo 2018) Tích phân  $\int_0^2 \frac{dx}{x+3}$  bằng

- A.  $\frac{2}{15}$                       B.  $\frac{16}{225}$                       C.  $\log \frac{5}{3}$                       D.  $\ln \frac{5}{3}$

**Câu 64:** (Mã 105 2017) Cho  $\int_0^1 \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = a \ln 2 + b \ln 3$  với  $a, b$  là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $a + 2b = 0$                       B.  $a + b = 2$                       C.  $a - 2b = 0$                       D.  $a + b = -2$

**Câu 65:** (Mã 110 2017) Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ . Tính:  $I = F(e) - F(1)$  ?

- A.  $I = \frac{1}{2}$                       B.  $I = \frac{1}{e}$                       C.  $I = 1$                       D.  $I = e$

**Câu 66:** (Mã 102 2018)  $\int_0^1 e^{3x+1} dx$  bằng

- A.  $\frac{1}{3}(e^4 + e)$                       B.  $e^3 - e$                       C.  $\frac{1}{3}(e^4 - e)$                       D.  $e^4 - e$

**Câu 67:** (Mã 101 2018)  $\int_1^2 e^{3x-1} dx$  bằng

- A.  $\frac{1}{3}(e^5 + e^2)$                       B.  $\frac{1}{3}(e^5 - e^2)$                       C.  $\frac{1}{3}e^5 - e^2$                       D.  $e^5 - e^2$

**Câu 68:** (Mã 123 2017) Cho  $\int_0^6 f(x) dx = 12$  . Tính  $I = \int_0^2 f(3x) dx$ .

- A.  $I = 5$                       B.  $I = 36$                       C.  $I = 4$                       D.  $I = 6$

**Câu 69:** (Mã 103 - 2019) Cho hàm số  $f(x)$ . Biết  $f(0) = 4$  và  $f'(x) = 2 \sin^2 x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ , khi đó

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$  bằng

- A.  $\frac{\pi^2 + 16\pi - 4}{16}$  .                      B.  $\frac{\pi^2 - 4}{16}$  .                      C.  $\frac{\pi^2 + 15\pi}{16}$  .                      D.  $\frac{\pi^2 + 16\pi - 16}{16}$  .

**Câu 70:** (Mã 104 - 2019) Cho hàm số  $f(x)$ . Biết  $f(0) = 4$  và  $f'(x) = 2 \sin^2 x + 3, \forall x \in \mathbb{R}$ , khi đó

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$  bằng

- A.  $\frac{\pi^2 - 2}{8}$  .                      B.  $\frac{\pi^2 + 8\pi - 8}{8}$  .                      C.  $\frac{\pi^2 + 8\pi - 2}{8}$  .                      D.  $\frac{3\pi^2 + 2\pi - 3}{8}$  .

**Câu 71:** (Mã 102 - 2019) Cho hàm số  $f(x)$ . Biết  $f(0) = 4$  và  $f'(x) = 2 \cos^2 x + 3, \forall x \in \mathbb{R}$ , khi đó

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$  bằng?

- A.  $\frac{\pi^2 + 8\pi + 8}{8}$  .                      B.  $\frac{\pi^2 + 8\pi + 2}{8}$  .                      C.  $\frac{\pi^2 + 6\pi + 8}{8}$  .                      D.  $\frac{\pi^2 + 2}{8}$  .

- Câu 72:** (Đề Tham Khảo -2019) Cho  $\int_0^1 \frac{xdx}{(x+2)^2} = a + b \ln 2 + c \ln 3$  với  $a, b, c$  là các số hữu tỷ. Giá trị của  $3a + b + c$  bằng
- A. 2                                      B. 1                                      C. -2                                      D. -1
- Câu 73:** (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Cho hàm số  $f(x)$  có  $f(3) = 3$  và  $f'(x) = \frac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}$ ,  $\forall x > 0$ . Khi đó  $\int_3^8 f(x) dx$  bằng
- A. 7.                                      B.  $\frac{197}{6}$ .                                      C.  $\frac{29}{2}$ .                                      D.  $\frac{181}{6}$ .
- Câu 74:** (Mã 102 2018) Cho  $\int_5^{21} \frac{dx}{x\sqrt{x+4}} = a \ln 3 + b \ln 5 + c \ln 7$ , với  $a, b, c$  là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A.  $a - b = -2c$                                       B.  $a + b = -2c$                                       C.  $a + b = c$                                       D.  $a - b = -c$
- Câu 75:** (Mã 101 2018) Cho  $\int_{16}^{55} \frac{dx}{x\sqrt{x+9}} = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 11$ , với  $a, b, c$  là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A.  $a + b = 3c$                                       B.  $a - b = -3c$                                       C.  $a - b = -c$                                       D.  $a + b = c$
- Câu 76:** (Đề Tham Khảo 2017) Tính tích phân  $I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2-1} dx$  bằng cách đặt  $u = x^2 - 1$ , mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A.  $I = \int_0^3 \sqrt{u} du$                                       B.  $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{u} du$                                       C.  $I = 2 \int_0^3 \sqrt{u} du$                                       D.  $I = \int_1^2 \sqrt{u} du$
- Câu 77:** (Đề Tham Khảo 2018) Biết  $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+x\sqrt{x+1}}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} - c$  với  $a, b, c$  là các số nguyên dương. Tính  $P = a + b + c$
- A.  $P = 18$                                       B.  $P = 46$                                       C.  $P = 24$                                       D.  $P = 12$
- Câu 78:** (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Cho hàm số  $f(x)$  có  $f(0) = 0$  và  $f'(x) = \cos x \cos^2 2x, \forall x \in \mathbb{R}$ . Khi đó  $\int_0^\pi f(x) dx$  bằng
- A.  $\frac{1042}{225}$ .                                      B.  $\frac{208}{225}$ .                                      C.  $\frac{242}{225}$ .                                      D.  $\frac{149}{225}$ .
- Câu 79:** (Đề Minh Họa 2017) Tính tích phân  $I = \int_0^\pi \cos^3 x \cdot \sin x dx$ .
- A.  $I = -\frac{1}{4}$                                       B.  $I = -\frac{1}{4} \pi^4$                                       C.  $I = -\pi^4$                                       D.  $I = 0$
- Câu 80:** (Đề Tham Khảo 2017) Cho  $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} = a + b \ln \frac{1+e}{2}$ , với  $a, b$  là các số hữu tỉ. Tính  $S = a^3 + b^3$ .
- A.  $S = -2$ .                                      B.  $S = 0$ .                                      C.  $S = 1$ .                                      D.  $S = 2$ .
- Câu 81:** (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Xét  $\int_0^2 xe^{x^2} dx$ , nếu đặt  $u = x^2$  thì  $\int_0^2 xe^{x^2} dx$  bằng

A.  $2 \int_0^2 e^u du$ .

B.  $2 \int_0^4 e^u du$ .

C.  $\frac{1}{2} \int_0^2 e^u du$ .

D.  $\frac{1}{2} \int_0^4 e^u du$ .

**Câu 82:** (Đề Minh Họa 2017) Tính tích phân  $I = \int_1^e x \ln x dx$ :

A.  $I = \frac{e^2 - 1}{4}$

B.  $I = \frac{1}{2}$

C.  $I = \frac{e^2 - 2}{2}$

D.  $I = \frac{e^2 + 1}{4}$

**Câu 83:** (Mã 103 2018) Cho  $\int_1^e (1 + x \ln x) dx = ae^2 + be + c$  với  $a, b, c$  là các số hữu tỷ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A.  $a + b = c$

B.  $a + b = -c$

C.  $a - b = c$

D.  $a - b = -c$

**Câu 84:** (Mã 104 2018) Cho  $\int_1^e (2 + x \ln x) dx = ae^2 + be + c$  với  $a, b, c$  là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A.  $a + b = c$

B.  $a - b = c$

C.  $a - b = -c$

D.  $a + b = -c$

**Câu 85:** (Đề tham khảo 2017) Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $\int_0^1 (x+1)f'(x) dx = 10$  và  $2f(1) - f(0) = 2$ . Tính  $\int_0^1 f(x) dx$ .

A.  $I = -12$

B.  $I = 8$

C.  $I = 1$

D.  $I = -8$

**Câu 86:** (Mã 104 - 2019) Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $f(3) = 1$  và  $\int_0^1 xf(3x) dx = 1$ , khi đó  $\int_0^3 x^2 f'(x) dx$  bằng

A.  $\frac{25}{3}$ .

B. 3.

C. 7.

D. -9.

**Câu 87:** (Mã 101 - 2019) Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $f(4) = 1$  và  $\int_0^1 xf(4x) dx = 1$ , khi đó  $\int_0^4 x^2 f'(x) dx$  bằng

A. 8.

B. 14.

C.  $\frac{31}{2}$ .

D. -16.

**Câu 88:** (Mã 103 - 2019) Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $f(6) = 1$  và  $\int_0^1 xf(6x) dx = 1$ , khi đó  $\int_0^6 x^2 f'(x) dx$  bằng

A.  $\frac{107}{3}$ .

B. 34.

C. 24.

D. -36.

**Câu 89:** (Mã 102 - 2019) Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $f(5) = 1$  và  $\int_0^1 xf(5x) dx = 1$ , khi đó  $\int_0^5 x^2 f'(x) dx$  bằng

A. 15

B. 23

C.  $\frac{123}{5}$

D. -25

**Câu 90:** (Đề Tham Khảo 2018) Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0; 1]$  thỏa mãn  $f(1) = 0$ ,  $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$  và  $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$ . Tính tích phân  $\int_0^1 f(x) dx$

A. 4

B.  $\frac{7}{5}$

C. 1

D.  $\frac{7}{4}$

**Câu 91:** (Mã 102 2018) Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f(2) = -\frac{1}{3}$  và  $f'(x) = x[f(x)]^2$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

Giá trị của  $f(1)$  bằng

A.  $-\frac{2}{3}$

B.  $-\frac{2}{9}$

C.  $-\frac{7}{6}$

D.  $-\frac{11}{6}$

**Câu 92:** (Mã 104 2018) Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f(2) = -\frac{1}{5}$  và  $f'(x) = x^3[f(x)]^2$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

Giá trị của  $f(1)$  bằng

A.  $-\frac{4}{35}$

B.  $-\frac{71}{20}$

C.  $-\frac{79}{20}$

D.  $-\frac{4}{5}$

**Câu 93:** (Minh họa 2020 Lần 1) Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn

$$xf(x^3) + f(1-x^2) = -x^{10} + x^6 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Khi đó } \int_{-1}^0 f(x) dx = ?$$

A.  $\frac{-17}{20}$ .

B.  $\frac{-13}{4}$ .

C.  $\frac{17}{4}$ .

D.  $-1$ .

**Câu 94:** (Đề Tham Khảo 2017) Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn

$$f(x) + f(-x) = \sqrt{2 + 2 \cos 2x}, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tính } I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx.$$

A.  $I = -6$

B.  $I = 0$

C.  $I = -2$

D.  $I = 6$



# NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

## BÀI 2. TÍCH PHÂN



### HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

#### BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRÍCH TỪ ĐỀ THAM KHẢO VÀ ĐỀ CHÍNH THỨC CỦA BỘ GIÁO DỤC TỪ NĂM 2017 ĐẾN NAY

**Câu 1:** (MĐ 101-2022) Nếu  $\int_0^2 f(x) dx = 4$  thì  $\int_0^2 \left[ \frac{1}{2} f(x) + 2 \right] dx$  bằng

A. 6.

B. 8.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \int_0^2 \left[ \frac{1}{2} f(x) + 2 \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx + \int_0^2 2 dx = \frac{1}{2} \cdot 4 + 4 = 6.$$

**Câu 2:** (MĐ 101-2022) Nếu  $\int_{-1}^5 f(x) dx = -3$  thì  $\int_5^{-1} f(x) dx$  bằng

A. 5.

B. 6.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \int_5^{-1} f(x) dx = - \int_{-1}^5 f(x) dx = 3$$

**Câu 3:** (MĐ 102-2022) Nếu  $\int_0^2 f(x) dx = 4$  thì  $\int_0^2 \left[ \frac{1}{2} f(x) + 2 \right] dx$  bằng

A. 2.

B. 6.

C. 4.

D. 8.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int_0^2 \left[ \frac{1}{2} f(x) + 2 \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx + 2 \int_0^2 dx = \frac{1}{2} \cdot 4 + 2x \Big|_0^2 = 2 + 2(2-0) = 6.$$

**Câu 4:** (MĐ 102-2022) Nếu  $\int_{-1}^5 f(x) dx = -3$  thì  $\int_5^{-1} f(x) dx$  bằng

A. 3.

B. 4.

C. 6.

D. 5.

Lời giải

**Chọn A**

Theo tính chất tích phân thì  $\int_5^{-1} f(x) dx = -\int_{-1}^5 f(x) dx = -(-3) = 3$ .

**Câu 5: (MĐ 103-2022)** Nếu  $\int_0^3 f(x) dx = 6$  thì  $\int_0^3 \left[ \frac{1}{3} f(x) + 2 \right] dx$  bằng

- A. 8.** **B. 5.** **C. 9.** **D. 6.**

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có:  $\int_0^3 \left[ \frac{1}{3} f(x) + 2 \right] dx = \frac{1}{3} \int_0^3 f(x) dx + \int_0^3 2 dx = \frac{1}{3} \cdot 6 + 2x \Big|_0^3 = 2 + 6 = 8$ .

**Câu 6: (MĐ 103-2022)** Nếu  $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$  và  $\int_2^5 f(x) dx = -5$  thì  $\int_{-1}^5 f(x) dx$  bằng

- A. -7.** **B. -3.** **C. 4.** **D. 7.**

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có  $\int_{-1}^5 f(x) dx = \int_{-1}^2 f(x) dx + \int_2^5 f(x) dx = 2 + (-5) = -3$ .

**Câu 7: (MĐ 104-2022)** Nếu  $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$  và  $\int_2^5 f(x) dx = -5$  thì  $\int_{-1}^5 f(x) dx$  bằng

- A. 7.** **B. -3.** **C. -7.** **D. -4.**

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có  $\int_{-1}^5 f(x) dx = \int_{-1}^2 f(x) dx + \int_2^5 f(x) dx = 2 + (-5) = -3$ .

**Câu 8: (MĐ 104-2022)** Nếu  $\int_0^3 f(x) dx = 6$  thì  $\int_0^3 \left[ \frac{1}{3} f(x) + 2 \right] dx$  bằng

- A. 6.** **B. 5.** **C. 9.** **D. 8.**

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có:  $\int_0^3 \left[ \frac{1}{3} f(x) + 2 \right] dx = \frac{1}{3} \int_0^3 f(x) dx + \int_0^3 2 dx = \frac{1}{3} \cdot 6 + 6 = 8$ .

**Câu 9: (TK 2020-2021)** Nếu  $\int_1^2 f(x) dx = 5$  và  $\int_2^3 f(x) dx = -2$  thì  $\int_1^3 f(x) dx$  bằng

- A. 3.** **B. 7.** **C. -10.** **D. -7.**

**Lời giải**

Ta có  $\int_1^3 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx = 5 - 2 = 3$ .

**Câu 10: (TK 2020-2021)** Tích phân  $\int_1^2 x^3 dx$  bằng

A.  $\frac{15}{3}$ .

B.  $\frac{17}{4}$ .

C.  $\frac{7}{4}$ .

**D.  $\frac{15}{4}$ .**

**Lời giải**

Ta có  $\int_1^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_1^2 = \frac{2^4 - 1^4}{4} = \frac{15}{4}$ .

**Câu 11: (TK 2020-2021)** Nếu  $\int_1^3 [2f(x) + 1] dx = 5$  thì  $\int_1^3 f(x) dx$  bằng

A. 3.

B. 2.

C.  $\frac{3}{4}$ .

**D.  $\frac{3}{2}$ .**

**Lời giải**

Ta có  $5 = \int_1^3 [2f(x) + 1] dx = 2 \int_1^3 f(x) dx + 2 \Rightarrow \int_1^3 f(x) dx = \frac{3}{2}$ .

**Câu 12: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1)** Nếu  $\int_1^4 f(x) dx = 3$  và  $\int_1^4 g(x) dx = -2$  thì  $\int_1^4 (f(x) - g(x)) dx$  bằng

A. -1.

B. -5.

**C. 5.**

D. 1.

**Lời giải**

Ta có  $\int_1^4 (f(x) - g(x)) dx = \int_1^4 f(x) dx - \int_1^4 g(x) dx = 3 - (-2) = 5$ .

**Câu 13: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Nếu  $\int_1^4 f(x) dx = 6$  và  $\int_1^4 g(x) dx = -5$  thì  $\int_1^4 [f(x) - g(x)] dx$  bằng

A. -1.

B. -11.

C. 1.

**D. 11.**

**Lời giải**

$\int_1^4 [f(x) - g(x)] dx = \int_1^4 f(x) dx - \int_1^4 g(x) dx = 6 - (-5) = 11$ .

**Câu 14: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Nếu  $\int_0^3 f(x) dx = 3$  thì  $\int_0^3 2f(x) dx$  bằng

A. 3.

B. 18.

C. 2.

**D. 6.**

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có  $\int_0^3 2f(x) dx = 2 \int_0^3 f(x) dx = 2.3 = 6$ .

**Câu 15: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Nếu  $\int_0^2 f(x) dx = 3$  thì  $\int_0^2 [2f(x) - 1] dx$  bằng

A. 6.

**B. 4.**

C. 8.

D. 5.

Lời giải

$$\int_0^2 [2f(x) - 1] dx = 2 \int_0^2 f(x) dx - \int_0^2 1 dx = 2 \cdot 3 - x \Big|_0^2 = 6 - 2 = 4$$

**Câu 16:** (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1) Nếu  $\int_1^4 f(x) dx = 5$  và  $\int_1^4 g(x) dx = -4$  thì  $\int_1^4 [f(x) - g(x)] dx$  bằng

A. -1.

B. -9.

C. 1.

**D. 9.**

Lời giải

$$\text{Ta có: } \int_1^4 [f(x) - g(x)] dx = \int_1^4 f(x) dx - \int_1^4 g(x) dx = 5 + 4 = 9.$$

**Câu 17:** (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1) Nếu  $\int_0^3 f(x) dx = 2$  thì  $\int_0^3 3f(x) dx$  bằng

**A. 6.**

B. 2.

C. 18.

D. 3.

Lời giải

$$\text{Theo tính chất của tích phân ta có: } \int_0^3 3f(x) dx = 3 \int_0^3 f(x) dx = 3 \cdot 2 = 6.$$

**Câu 18:** (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1) Nếu  $\int_1^4 f(x) dx = 4$  và  $\int_1^4 g(x) dx = -3$  thì  $\int_1^4 [f(x) - g(x)] dx$  bằng

A. 1.

B. -7.

C. -1.

**D. 7.**

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_1^4 [f(x) - g(x)] dx = \int_1^4 f(x) dx - \int_1^4 g(x) dx = 4 - (-3) = 7.$$

**Câu 19:** (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1) Nếu  $\int_0^3 f(x) dx = 3$  thì  $\int_0^3 4f(x) dx$  bằng

A. 3.

**B. 12.**

C. 36.

D. 4.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \int_0^3 4f(x) dx = 4 \int_0^3 f(x) dx = 4 \cdot 3 = 12.$$

**Câu 20:** (2020-2021 – ĐỢT 2) Nếu  $\int_0^1 f(x) dx = 2$  và  $\int_1^3 f(x) dx = 5$  thì  $\int_0^3 f(x) dx$  bằng

A. 10.

B. 3.

**C. 7.**

D. -3.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = 2 + 5 = 7.$$

**Câu 21: (2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho  $f(x)$  là hàm số liên tục trên đoạn  $[1; 2]$ . Biết  $F(x)$  là nguyên hàm của  $f(x)$  trên đoạn  $[1; 2]$  thỏa mãn  $F(1) = -2$  và  $F(2) = 4$ . Khi đó  $\int_1^2 f(x) dx$  bằng

**A. 6.**

B. 2.

C. -6.

D. -2.

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \int_1^2 f(x) dx = F(x) \Big|_1^2 = F(2) - F(1) = 6.$$

**Câu 22: (2020-2021 – ĐỢT 2)** Nếu  $\int_0^1 f(x) dx = 5$  và  $\int_1^3 f(x) dx = 2$  thì  $\int_0^3 f(x) dx$  bằng

A. 10.

B. -3.

C. 3.

**D. 7.**

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = 5 + 2 = 7.$$

**Câu 23: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Nếu  $\int_0^1 f(x) dx = 3$  và  $\int_1^3 f(x) dx = 4$  thì  $\int_0^3 f(x) dx$  bằng

A. -1.

B. 1.

**C. 7.**

D. 12.

**Lời giải**

$$\int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = 3 + 4 = 7. \text{ Vậy } \textbf{Chọn C}$$

**Câu 24: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho  $f$  là một hàm số liên tục trên đoạn  $[1; 2]$ . Biết  $F$  là nguyên hàm của hàm  $f$  trên

đoạn  $[1; 2]$  thỏa mãn  $F(1) = -1$  và  $F(2) = 3$ . Khi đó  $\int_1^2 f(x) dx$ .

**A. 4**

B. -2.

C. 2.

D. -4.

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \int_1^2 f(x) dx = F(x) \Big|_1^2 = F(2) - F(1) = 3 - (-1) = 4.$$

**Câu 25: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2)** Nếu  $\int_0^1 f(x) dx = 4$  và  $\int_1^3 f(x) dx = 3$  thì  $\int_0^3 f(x) dx$  bằng

A. -1.

B. 1.

**C. 7.**

D. 12.

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = 4 + 3 = 7.$$

**Câu 26: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho  $f$  là hàm số liên tục trên đoạn  $[1; 2]$ . Biết  $F$  là nguyên hàm của  $f$  trên đoạn  $[1; 2]$  thỏa mãn  $F(1) = -1$  và  $F(2) = 4$ . Khi đó  $\int_1^2 f(x) dx$  bằng

A. -5.

B. 3.

**C. 5.**

D. -3.

## Lời giải

Ta có  $\int_1^2 f(x) dx = F(x)|_1^2 = F(2) - F(1) = 4 - (-1) = 5$ .

**Câu 27: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Nếu  $\int_0^2 f(x)dx = 6$  thì  $\int_0^2 [2f(x) - 1]dx$  bằng

A. 12.

**B. 10.**

**C. 11.**

**D. 14.**

## Lời giải

$$\int_0^2 [2f(x) - 1] dx = 2 \int_0^2 f(x) dx - \int_0^2 1 dx = 12 - 2 = 10.$$

**Câu 28: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1)** Nếu  $\int_0^2 f(x)dx = 4$  thì  $\int_0^2 [2f(x) - 1]dx$  bằng

A. 8.

**B. 10.**

C. 7.

D. 6.

### Lời giải

Ta có:  $\int_0^2 [2f(x) - 1] dx = 2 \int_0^2 f(x) dx - \int_0^2 dx = 2.4 - 2 = 6.$

**Câu 29: (2020-2021 – ĐQT 2)** Nếu  $\int_0^2 f(x)dx = 2$  thì  $\int_0^2 [4x - f(x)]dx$  bằng

A. 12.

## B. 10.

C. 4.

## D. 6.

## Lời giải

$$\text{Ta có } \int_0^2 [4x - f(x)] dx = \int_0^2 4x dx - \int_0^2 f(x) dx = 2x^2 \Big|_0^2 - 2 = 6.$$

**Câu 30:** (2020-2021 – ĐỢT 2) Cho  $f$  là hàm số liên tục trên đoạn  $[1; 2]$ . Biết  $F$  là nguyên hàm của  $f$  trên đoạn  $[1; 2]$  thỏa mãn  $F(1) = -2$  và  $F(2) = 3$ . Khi đó  $\int_1^2 f(x) dx$  bằng

**A.**  $-5$ .

### B. 1.

**C. -1.**

### D. 5.

### Lời giải

Ta có:  $\int_1^2 f(x) dx = F(x) \Big|_1^2 = F(2) - F(1) = 3 - (-2) = 5.$

**Câu 31: (2020-2021 – ĐỢT 2)** Nếu  $\int_0^2 f(x)dx = 2$  thì  $\int_0^2 [2x - f(x)]dx$  bằng

A. 2.

**B. 8.**

C. 6.

### D. 0.

### Lời giải

$$\text{Ta có } \int_0^2 [2x - f(x)] dx = \int_0^2 2x dx - \int_0^2 f(x) dx = 4 - 2 = 2.$$

- Câu 32: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Nếu  $\int_0^2 f(x)dx = 3$  thì  $\int_0^2 (2x - f(x))dx$  bằng
- A. 7.                                      B. -2.                                      C. 10.                                      **D. 1.**

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \int_0^2 (2x - f(x))dx = \int_0^2 2xdx - \int_0^2 f(x)dx = 2 \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 - 3 = 4 - 3 = 1.$$

- Câu 33: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2)** Nếu  $\int_0^2 f(x)dx = 3$  thì  $\int_0^2 [4x - f(x)]dx$  bằng
- A. 14.                                      **B. 5.**                                      C. -2.                                      D. 11.

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \int_0^2 [4x - f(x)]dx = \int_0^2 4xdx - \int_0^2 f(x)dx = 2x^2 \Big|_0^2 - 3 = 8 - 3 = 5.$$

- Câu 34: (TK 2020-2021)** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \geq 2 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$ . Tích phân  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\sin x + 1)\cos x dx$  bằng
- A.  $\frac{23}{3}$ .                                      **B.  $\frac{23}{6}$ .**                                      C.  $\frac{17}{6}$ .                                      D.  $\frac{17}{3}$ .

**Lời giải**

Trong tích phân  $I$  đã cho, đặt  $t = 2\sin x + 1$  thì  $dt = 2\cos x dx$ . Ta có

$$I = \frac{1}{2} \int_1^3 f(t)dt = \frac{1}{2} \int_1^2 (t^2 - 2t + 3)dt + \frac{1}{2} \int_2^3 (t^2 - 1)dt = \frac{23}{6}.$$

- Câu 35: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2 - 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ . Giả sử  $F$  là nguyên hàm của  $f$  trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $F(0) = 2$ . Giá trị  $F(-1) + 2F(2)$
- A. 9**                                      B. 15                                      C. 11                                      D. 6

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } F(x) = \begin{cases} x^2 - x + C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 - 2x + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}.$$

$$F(0) = 2 \Leftrightarrow C_2 = 2.$$

Hàm số liên tục tại  $x = 1$  nên ta có:  $1^2 - 1 + C_1 = 1^3 - 2 + 2 \Leftrightarrow C_1 = 1$ .

$$\text{Do đó } F(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 - 2x + 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } F(-1) + 2F(2) = (-1)^3 - 2(-1) + 2 + 2(2^2 - 2 + 1) = 9.$$

**Câu 36:** (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ . Giả sử  $F$  là nguyên hàm của  $f$  trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $F(0) = 2$ . Giá trị của  $F(-1) + 2F(2)$  bằng

**A. 18.**

**B. 20.**

**C. 9.**

**D. 24.**

**Lời giải**

Ta có:  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (3x^2 + 1) dx = 2 = F(1) - F(0) \Rightarrow F(1) = 2 + F(0) = 4$

Trên khoảng  $(-\infty; 1)$ , ta có:  $F(x) = \int (3x^2 + 1) dx = x^3 + x + C_1$

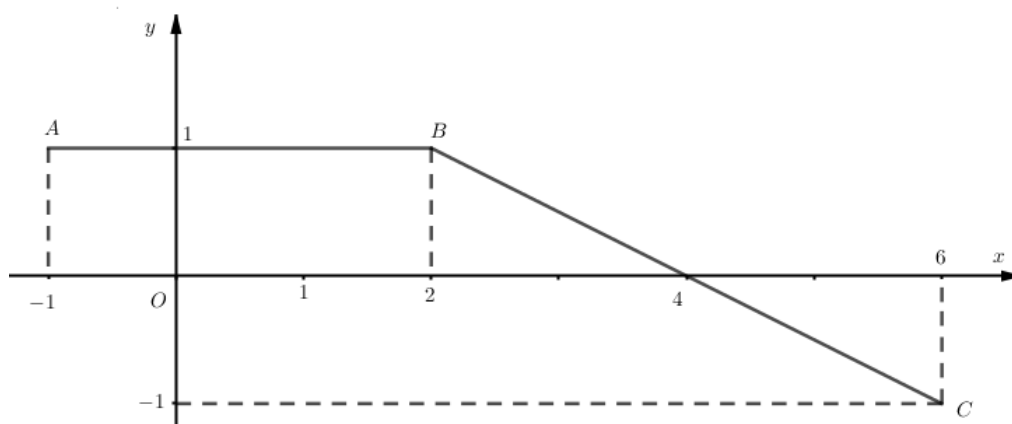
Mà  $F(0) = 2 \Rightarrow C_1 = 2 \Rightarrow F(x) = x^3 + x + 2$ .

Trên nửa khoảng  $[1; +\infty)$ , ta có:  $F(x) = \int (2x + 2) dx = x^2 + 2x + C_2$

Mà  $F(1) = 4 \Rightarrow C_2 = 1 \Rightarrow F(x) = x^2 + 2x + 1$ .

Do đó:  $F(-1) + 2F(2) = 0 + 2 \cdot 9 = 18$ .

**Câu 37:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-1; 6]$  và có đồ thị là đường gấp khúc  $ABC$  trong hình bên. Biết  $F$  là nguyên hàm của  $f$  thỏa mãn  $F(-1) = -1$ . Giá trị của  $F(4) + F(6)$  bằng



**A. 10.**

**B. 5.**

**C. 6.**

**D. 7.**

**Lời giải**

Từ đồ thị của hàm số ta xác định được  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } -1 \leq x < 2 \\ -\frac{1}{2}x + 2 & \text{khi } 2 \leq x \leq 6 \end{cases}$ .

Do  $F$  là nguyên hàm của  $f$  nên  $F(x) = \begin{cases} x + C_1 & \text{khi } -1 \leq x < 2 \\ -\frac{1}{4}x^2 + 2x + C_2 & \text{khi } 2 \leq x \leq 6 \end{cases}$ .

Ta có  $F(-1) = -1 \Leftrightarrow -1 + C_1 = -1 \Leftrightarrow C_1 = 0$ .

Hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-1; 6] \Rightarrow F(x)$  liên tục trên đoạn  $[-1; 6]$

$\Rightarrow F(x)$  liên tục tại  $x = 2$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} F(x) \Leftrightarrow 2 + C_1 = 3 + C_2 \Leftrightarrow C_2 = -1.$$

$$\text{Suy ra } F(x) = \begin{cases} x & \text{khi } -1 \leq x < 2 \\ -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 1 & \text{khi } 2 \leq x \leq 6 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } F(4) + F(6) = 5.$$

- Câu 38:** (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Nếu  $\int_1^2 f(x) dx = -2$  và  $\int_2^3 f(x) dx = 1$  thì  $\int_1^3 f(x) dx$  bằng
- A. -3.                      B. -1.                      C. 1.                      D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int_1^3 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx = -2 + 1 = -1.$$

- Câu 39:** (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Nếu  $\int_0^1 f(x) dx = 4$  thì  $\int_0^1 2f(x) dx$  bằng
- A. 16.                      B. 4.                      C. 2.                      D. 8.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \int_0^1 2f(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx = 2.4 = 8.$$

- Câu 40:** (Mã 101 - 2020 Lần 1) Biết  $\int_1^3 f(x) dx = 3$ . Giá trị của  $\int_1^3 2f(x) dx$  bằng
- A. 5.                      B. 9.                      C. 6.                      D.  $\frac{3}{2}$ .

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \int_1^3 2f(x) dx = 2 \int_1^3 f(x) dx = 2.3 = 6.$$

- Câu 41:** (Mã 101 - 2020 Lần 1) Biết  $F(x) = x^2$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên  $\mathbb{R}$ . Giá trị của  $\int_1^2 [2 + f(x)] dx$  bằng
- A. 5.                      B. 3.                      C.  $\frac{13}{3}$ .                      D.  $\frac{7}{3}$ .

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \int_1^2 [2 + f(x)] dx = (2x + x^2) \Big|_1^2 = 8 - 3 = 5$$

**Câu 42:** (Mã 102 - 2020 Lần 1) Biết  $\int_1^5 f(x) dx = 4$ . Giá trị của  $\int_1^5 3f(x) dx$  bằng

- A. 7.                      B.  $\frac{4}{3}$ .                      C. 64.                      D. 12.

Lời giải

**Chọn D**

$$\text{Ta có } \int_1^5 3f(x) dx = 3 \int_1^5 f(x) dx = 3 \cdot 4 = 12.$$

**Câu 43:** (Mã 102 - 2020 Lần 1) Biết  $F(x) = x^3$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên  $\mathbb{R}$ . Giá trị của  $\int_1^2 (2 + f(x)) dx$  bằng

- A.  $\frac{23}{4}$ .                      B. 7.                      C. 9.                      D.  $\frac{15}{4}$ .

Lời giải

**Chọn C**

$$\text{Ta có } \int_1^2 (2 + f(x)) dx = \int_1^2 2 dx + \int_1^2 f(x) dx = 2x \Big|_1^2 + F(x) \Big|_1^2 = 2x \Big|_1^2 + x^3 \Big|_1^2 = 9$$

**Câu 44:** (Mã 103 - 2020 Lần 1) Biết  $\int_1^2 f(x) dx = 2$ . Giá trị của  $\int_1^3 3f(x) dx$  bằng

- A. 5.                      B. 6.                      C.  $\frac{2}{3}$ .                      D. 8.

Lời giải

**Chọn B**

$$\text{Ta có : } \int_1^2 3f(x) dx = 3 \int_1^2 f(x) dx = 3 \cdot 2 = 6.$$

**Câu 45:** (Mã 103 - 2020 Lần 1) Biết  $F(x) = x^3$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên  $\mathbb{R}$ . Giá trị của  $\int_1^3 (1 + f(x)) dx$  bằng

- A. 20.                      B. 22.                      C. 26.                      D. 28.

Lời giải

**Chọn D**

$$\text{Ta có } \int_1^3 [1 + f(x)] dx = [x + F(x)] \Big|_1^3 = [x + x^3] \Big|_1^3 = 30 - 2 = 28.$$

**Câu 46:** (Mã 104 - 2020 Lần 1) Biết  $\int_2^3 f(x) dx = 6$ . Giá trị của  $\int_2^3 2f(x) dx$  bằng.

- A. 36.                      B. 3.                      C. 12.                      D. 8.

Lời giải

Chọn C

Ta có :  $\int_2^3 2f(x)dx = 2\int_2^3 f(x)dx = 12..$

**Câu 47:** (Mã 104 - 2020 Lần 1) Biết  $F(x) = x^2$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên  $\mathbb{R}$ . Giá trị của  $\int_1^3 [1 + f(x)]dx$  bằng

- A. 10.                      B. 8.                      C.  $\frac{26}{3}$ .                      D.  $\frac{32}{3}$ .

Lời giải

Chọn A

Ta có  $\int_1^3 [1 + f(x)]dx = (x + F(x))\Big|_1^3 = (x + x^2)\Big|_1^3 = 12 - 2 = 10.$

**Câu 48:** (Mã 101 - 2020 Lần 2) Biết  $\int_2^3 f(x)dx = 4$  và  $\int_2^3 g(x)dx = 1$ . Khi đó:  $\int_2^3 [f(x) - g(x)]dx$  bằng:

- A. -3.                      B. 3.                      C. 4.                      D. 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có  $\int_2^3 [f(x) - g(x)]dx = \int_2^3 f(x)dx - \int_2^3 g(x)dx = 4 - 1 = 3$

**Câu 49:** (Mã 101 - 2020 Lần 2) Biết  $\int_0^1 [f(x) + 2x]dx = 2$ . Khi đó  $\int_0^1 f(x)dx$  bằng :

- A. 1.                      B. 4.                      C. 2.                      D. 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$\begin{aligned} \int_0^1 [f(x) + 2x]dx = 2 &\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 2xdx = 2 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = 2 - x^2\Big|_0^1 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = 2 - 1 \\ &\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = 1 \end{aligned}$$

**Câu 50:** (Mã 102 - 2020 Lần 2) Biết  $\int_2^3 f(x)dx = 3$  và  $\int_2^3 g(x)dx = 1$ . Khi đó  $\int_2^3 [f(x) + g(x)]dx$  bằng

- A. 4.                      B. 2.                      C. -2.                      D. 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có:  $\int_2^3 [f(x) + g(x)] dx = \int_2^3 f(x) dx + \int_2^3 g(x) dx = 4.$

**Câu 51:** (Mã 102 - 2020 Lần 2) Biết  $\int_0^1 [f(x) + 2x] dx = 3$ . Khi đó  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng

- A. 1.                      B. 5.                      C. 3.                      D. 2.

Lời giải

**Chọn D**

Ta có  $\int_0^1 [f(x) + 2x] dx = 3 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx + 2 \int_0^1 x dx = 3 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx + 2 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = 3.$

Suy ra  $\int_0^1 f(x) dx = 3 - x^2 \Big|_0^1 = 3 - (1 - 0) = 2.$

**Câu 52:** (Mã 103 - 2020 Lần 2) Biết  $\int_1^2 f(x) dx = 3$  và  $\int_1^2 g(x) dx = 2$ . Khi đó  $\int_1^2 [f(x) - g(x)] dx$  bằng?

- A. 6.                      B. 1.                      C. 5.                      D. -1.

Lời giải

**Chọn B**

Ta có:  $\int_1^2 [f(x) - g(x)] dx = \int_1^2 f(x) dx - \int_1^2 g(x) dx = 3 - 2 = 1.$

**Câu 53:** (Mã 103 - 2020 Lần 2) Biết  $\int_0^1 [f(x) + 2x] dx = 4$ . Khi đó  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng

- A. 3.                      B. 2.                      C. 6.                      D. 4.

Lời giải

**Chọn A**

$\int_0^1 [f(x) + 2x] dx = 4 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 2x dx = 4 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = 4 - 1 = 3$

**Câu 54:** (Mã 104 - 2020 Lần 2) Biết  $\int_1^2 f(x) dx = 2$  và  $\int_1^2 g(x) dx = 3$ . Khi đó  $\int_1^2 [f(x) + g(x)] dx$  bằng

- A. 1.                      B. 5.                      C. -1.                      D. 6.

Lời giải

**Chọn D**

Ta có:  $\int_1^2 [f(x) + g(x)] dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_1^2 g(x) dx = 2 + 3 = 5.$

**Câu 55:** (Mã 104 - 2020 Lần 2) Biết  $\int_0^1 [f(x) + 2x] dx = 5$ . Khi đó  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng

- A. 7.                      B. 3.                      C. 5.                      D. 4.

Lời giải

**Chọn D**

$$\int_0^1 [f(x) + 2x] dx = 5 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 2x dx = 5$$

$$\int_0^1 f(x) dx + x^2 \Big|_0^1 = 5 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx + 1 = 5 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = 4.$$

- Câu 56:** (Mã 103 - 2019) Biết  $\int_1^2 f(x) dx = 2$  và  $\int_1^2 g(x) dx = 6$ , khi đó  $\int_1^2 [f(x) - g(x)] dx$  bằng  
 A. 8. B. -4. C. 4. D. -8.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \int_1^2 [f(x) - g(x)] dx = \int_1^2 f(x) dx - \int_1^2 g(x) dx = 2 - 6 = -4.$$

- Câu 57:** (Mã 102 - 2019) Biết tích phân  $\int_0^1 f(x) dx = 3$  và  $\int_0^1 g(x) dx = -4$ . Khi đó  $\int_0^1 [f(x) + g(x)] dx$  bằng  
 A. -7. B. 7. C. -1. D. 1.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int_0^1 [f(x) + g(x)] dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 g(x) dx = 3 + (-4) = -1.$$

- Câu 58:** (Mã 104 - 2019) Biết  $\int_0^1 f(x) dx = 2$  và  $\int_0^1 g(x) dx = -4$ , khi đó  $\int_0^1 [f(x) + g(x)] dx$  bằng  
 A. 6. B. -6. C. -2. D. 2.

Lời giải

Chọn C

$$\int_0^1 [f(x) + g(x)] dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 g(x) dx = 2 + (-4) = -2.$$

- Câu 59:** (Mã 101 2019) Biết  $\int_0^1 f(x) dx = -2$  và  $\int_0^1 g(x) dx = 3$ , khi đó  $\int_0^1 [f(x) - g(x)] dx$  bằng  
 A. -1. B. 1. C. -5. D. 5.

Lời giải

Chọn C

$$\int_0^1 [f(x) - g(x)] dx = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 g(x) dx = -2 - 3 = -5.$$

- Câu 60:** (Đề Tham Khảo 2019) Cho  $\int_0^1 f(x) dx = 2$  và  $\int_0^1 g(x) dx = 5$ , khi đó  $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx$  bằng  
 A. -8 B. 1 C. -3 D. 12

Lời giải

**Chọn A**

$$\text{Có } \int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx = \int_0^1 f(x) dx - 2 \int_0^1 g(x) dx = 2 - 2.5 = -8.$$

**Câu 61: (Mã 104 2018)**  $\int_1^2 \frac{dx}{2x+3}$  bằng

**A.**  $\frac{1}{2} \ln 35$

**B.**  $\ln \frac{7}{5}$

**C.**  $\frac{1}{2} \ln \frac{7}{5}$

**D.**  $2 \ln \frac{7}{5}$

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\text{Ta có } \int_1^2 \frac{dx}{2x+3} = \frac{1}{2} \ln |2x+3| \Big|_1^2 = \frac{1}{2} (\ln 7 - \ln 5) = \frac{1}{2} \ln \frac{7}{5}.$$

**Câu 62: (Mã 103 2018)**  $\int_1^2 \frac{dx}{3x-2}$  bằng

**A.**  $2 \ln 2$

**B.**  $\frac{1}{3} \ln 2$

**C.**  $\frac{2}{3} \ln 2$

**D.**  $\ln 2$

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\text{Ta có } \int_1^2 \frac{dx}{3x-2} = \frac{1}{3} \ln |3x-2| \Big|_1^2 = \frac{1}{3} (\ln 4 - \ln 1) = \frac{2}{3} \ln 2.$$

**Câu 63: (Đề Tham Khảo 2018)** Tích phân  $\int_0^2 \frac{dx}{x+3}$  bằng

**A.**  $\frac{2}{15}$

**B.**  $\frac{16}{225}$

**C.**  $\log \frac{5}{3}$

**D.**  $\ln \frac{5}{3}$

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\int_0^2 \frac{dx}{x+3} = \ln |x+3| \Big|_0^2 = \ln \frac{5}{3}$$

**Câu 64: (Mã 105 2017)** Cho  $\int_0^1 \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = a \ln 2 + b \ln 3$  với  $a, b$  là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.**  $a + 2b = 0$

**B.**  $a + b = 2$

**C.**  $a - 2b = 0$

**D.**  $a + b = -2$

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\int_0^1 \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = [\ln |x+1| - \ln |x+2|]_0^1 = 2 \ln 2 - \ln 3; \text{ do đó } a = 2; b = -1$$

**Câu 65:** (Mã 110 2017) Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ . Tính:  $I = F(e) - F(1)$  ?

A.  $I = \frac{1}{2}$

B.  $I = \frac{1}{e}$

C.  $I = 1$

D.  $I = e$

Lời giải

Chọn A

Theo định nghĩa tích phân:  $I = F(e) - F(1) = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^e \ln x \cdot d(\ln x) = \left. \frac{\ln^2 x}{2} \right|_1^e = \frac{1}{2}$ .

**Câu 66:** (Mã 102 2018)  $\int_0^1 e^{3x+1} dx$  bằng

A.  $\frac{1}{3}(e^4 + e)$

B.  $e^3 - e$

C.  $\frac{1}{3}(e^4 - e)$

D.  $e^4 - e$

Lời giải

Chọn C

$$\int_0^1 e^{3x+1} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 e^{3x+1} d(3x+1) = \frac{1}{3} e^{3x+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}(e^4 - e).$$

**Câu 67:** (Mã 101 2018)  $\int_1^2 e^{3x-1} dx$  bằng

A.  $\frac{1}{3}(e^5 + e^2)$

B.  $\frac{1}{3}(e^5 - e^2)$

C.  $\frac{1}{3}e^5 - e^2$

D.  $e^5 - e^2$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int_1^2 e^{3x-1} dx = \frac{1}{3} e^{3x-1} \Big|_1^2 = \frac{1}{3}(e^5 - e^2).$$

**Câu 68:** (Mã 123 2017) Cho  $\int_0^6 f(x) dx = 12$ . Tính  $I = \int_0^2 f(3x) dx$ .

A.  $I = 5$

B.  $I = 36$

C.  $I = 4$

D.  $I = 6$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } I = \int_0^2 f(3x) dx = \frac{1}{3} \int_0^2 f(3x) d3x = \frac{1}{3} \int_0^6 f(t) dt = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4.$$

**Câu 69:** (Mã 103 - 2019) Cho hàm số  $f(x)$ . Biết  $f(0) = 4$  và  $f'(x) = 2\sin^2 x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ , khi đó

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx \text{ bằng}$$

A.  $\frac{\pi^2 + 16\pi - 4}{16}$ .

B.  $\frac{\pi^2 - 4}{16}$ .

C.  $\frac{\pi^2 + 15\pi}{16}$ .

D.  $\frac{\pi^2 + 16\pi - 16}{16}$ .

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } f(x) = \int (2 \sin^2 x + 1) dx = \int (2 - \cos 2x) dx = 2x - \frac{1}{2} \sin 2x + C.$$

$$\text{Vì } f(0) = 4 \Rightarrow C = 4$$

$$\text{Hay } f(x) = 2x - \frac{1}{2} \sin 2x + 4.$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( 2x - \frac{1}{2} \sin 2x + 4 \right) dx \\ &= x^2 + \frac{1}{4} \cos 2x + 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{16} + \pi - \frac{1}{4} = \frac{\pi^2 + 16\pi - 4}{16}. \end{aligned}$$

**Câu 70:** (Mã 104 - 2019) Cho hàm số  $f(x)$ . Biết  $f(0) = 4$  và  $f'(x) = 2 \sin^2 x + 3, \forall x \in \mathbb{R}$ , khi đó

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx \text{ bằng}$$

A.  $\frac{\pi^2 - 2}{8}$ .

B.  $\frac{\pi^2 + 8\pi - 8}{8}$ .

C.  $\frac{\pi^2 + 8\pi - 2}{8}$ .

D.  $\frac{3\pi^2 + 2\pi - 3}{8}$ .

Lời giải

Chọn C

$$\int f'(x) dx = \int (2 \sin^2 x + 3) dx = \int (1 - \cos 2x + 3) dx = \int (4 - \cos 2x) dx = 4x - \frac{1}{2} \sin 2x + C.$$

$$\text{Ta có } f(0) = 4 \text{ nên } 4 \cdot 0 - \frac{1}{2} \sin 0 + C = 4 \Leftrightarrow C = 4.$$

$$\text{Nên } f(x) = 4x - \frac{1}{2} \sin 2x + 4.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( 4x - \frac{1}{2} \sin 2x + 4 \right) dx = \left( 2x^2 + \frac{1}{4} \cos 2x + 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2 + 8\pi - 2}{8}.$$

**Câu 71:** (Mã 102 - 2019) Cho hàm số  $f(x)$ . Biết  $f(0) = 4$  và  $f'(x) = 2 \cos^2 x + 3, \forall x \in \mathbb{R}$ , khi đó

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx \text{ bằng?}$$

A.  $\frac{\pi^2 + 8\pi + 8}{8}$ .

B.  $\frac{\pi^2 + 8\pi + 2}{8}$ .

C.  $\frac{\pi^2 + 6\pi + 8}{8}$ .

D.  $\frac{\pi^2 + 2}{8}$ .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } f(x) = \int f'(x) dx = \int (2 \cos^2 x + 3) dx = \int \left( 2 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} + 3 \right) dx$$

$$= \int (\cos 2x + 4) dx = \frac{1}{2} \sin 2x + 4x + C \text{ do } f(0) = 4 \Rightarrow C = 4.$$

Vậy  $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x + 4x + 4$  nên  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\frac{1}{2} \sin 2x + 4x + 4) dx$

$$= \left( -\frac{1}{4} \cos 2x + 2x^2 + 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2 + 8\pi + 2}{8}.$$

**Câu 72: (Đề Tham Khảo -2019)** Cho  $\int_0^1 \frac{x dx}{(x+2)^2} = a + b \ln 2 + c \ln 3$  với  $a, b, c$  là các số hữu tỷ. Giá trị

của  $3a + b + c$  bằng

**A.** 2

**B.** 1

**C.** -2

**D.** -1

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt  $t = x + 2 \Rightarrow dt = dx$

Đổi cận:  $x = 0 \Rightarrow t = 2; x = 1 \Rightarrow t = 3$

$$\int_0^1 \frac{x dx}{(x+2)^2} = \int_2^3 \frac{(t-2) dt}{t^2} = \int_2^3 \left( \frac{1}{t} - \frac{2}{t^2} \right) dt = \left( \ln |t| + \frac{2}{t} \right) \Big|_2^3 = \ln 3 + \frac{2}{3} - (\ln 2 + 1) = -\frac{1}{3} - \ln 2 + \ln 3$$

Suy ra  $a = -\frac{1}{3}; b = -1; c = 1$

$$3a + b + c = -1 - 1 + 1 = -1.$$

**Câu 73: (Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho hàm số  $f(x)$  có  $f(3) = 3$  và  $f'(x) = \frac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}, \forall x > 0$

. Khi đó  $\int_3^8 f(x) dx$  bằng

**A.** 7.

**B.**  $\frac{197}{6}$ .

**C.**  $\frac{29}{2}$ .

**D.**  $\frac{181}{6}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Xét  $\int f'(x) dx = \int \frac{x}{x+1-\sqrt{x+1}} dx$ . Đặt  $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow x+1 = t^2 \Rightarrow x = t^2 - 1 \Rightarrow dx = 2t dt$ .

$$\text{Khi đó, } \int f'(x) dx = \int \frac{x}{x+1-\sqrt{x+1}} dx = \int \frac{t^2-1}{t^2-t} \cdot 2t dt = \int \frac{(t-1) \cdot (t+1)}{t \cdot (t-1)} \cdot 2t dt = \int (2t+2) dt$$

$$= t^2 + 2t + C = (x+1) + 2\sqrt{x+1} + C.$$

$$\text{Mà } f(3) = 3 \Leftrightarrow (3+1) + 2\sqrt{3+1} + C = 3 \Leftrightarrow C = -5.$$

$$\Rightarrow f(x) = (x+1) + 2\sqrt{x+1} - 5 = x + 2\sqrt{x+1} - 4.$$

$$\Rightarrow \int_3^8 f(x) dx = \int_3^8 (x + 2\sqrt{x+1} - 4) dx = \left( \frac{x^2}{2} + \frac{4}{3} \sqrt{(x+1)^3} - 4x \right) \Big|_3^8 = 36 - \frac{19}{6} = \frac{197}{6}.$$

**Câu 74: (Mã 102 2018)** Cho  $\int_5^{21} \frac{dx}{x\sqrt{x+4}} = a \ln 3 + b \ln 5 + c \ln 7$ , với  $a, b, c$  là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.**  $a - b = -2c$

**B.**  $a + b = -2c$

**C.**  $a + b = c$

**D.**  $a - b = -c$

**Lời giải**

**Chọn B**

Đặt  $t = \sqrt{x+4} \Rightarrow 2tdt = dx$ .

Với  $x = 5 \Rightarrow t = 3$ ;  $x = 21 \Rightarrow t = 5$

Ta có  $\int_5^{21} \frac{dx}{x\sqrt{x+4}} = 2 \int_3^5 \frac{dt}{t^2-4} = \frac{1}{2} (\ln|t-2| - \ln|t+2|) \Big|_3^5 = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 5 - \frac{1}{2} \ln 7$ .

**Câu 75: (Mã 101 2018)** Cho  $\int_{16}^{55} \frac{dx}{x\sqrt{x+9}} = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 11$ , với  $a, b, c$  là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.**  $a + b = 3c$

**B.**  $a - b = -3c$

**C.**  $a - b = -c$

**D.**  $a + b = c$

**Lời giải**

**Chọn. A.**

Đặt  $t = \sqrt{x+9} \Rightarrow t^2 = x+9 \Rightarrow 2tdt = dx$ .

Đổi cận  $x = 16 \Rightarrow t = 5$ ,  $x = 55 \Rightarrow t = 8$ .

Do đó  $\int_{16}^{55} \frac{dx}{x\sqrt{x+9}} = \int_5^8 \frac{2tdt}{t(t^2-9)} = 2 \int_5^8 \frac{dt}{t^2-9} = \frac{1}{3} \int_5^8 \left( \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3} \right) dx = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| \Big|_5^8$   
 $= \frac{1}{3} \ln \frac{5}{11} - \frac{1}{3} \ln \frac{1}{4} = \frac{2}{3} \ln 2 + \frac{1}{3} \ln 5 - \frac{1}{3} \ln 11$ .

Vậy  $a = \frac{2}{3}$ ;  $b = \frac{1}{3}$ ;  $c = -\frac{1}{3} \Rightarrow a - b = -c$ .

**Câu 76: (Đề Tham Khảo 2017)** Tính tích phân  $I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2-1} dx$  bằng cách đặt  $u = x^2 - 1$ , mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.**  $I = \int_0^3 \sqrt{u} du$

**B.**  $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{u} du$

**C.**  $I = 2 \int_0^3 \sqrt{u} du$

**D.**  $I = \int_1^2 \sqrt{u} du$

**Lời giải**

**Chọn A**

$I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2-1} dx$

đặt  $u = x^2 - 1 \Rightarrow du = 2x dx$ . Đổi cận  $x = 1 \Rightarrow u = 0$ ;  $x = 2 \Rightarrow u = 3$

Nên  $I = \int_0^3 \sqrt{u} du$

**Câu 77: (Đề Tham Khảo 2018)** Biết  $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+x\sqrt{x+1}}} dx = \sqrt{a} - \sqrt{b} - c$  với  $a, b, c$  là các số nguyên

dương. Tính  $P = a + b + c$

**A.**  $P = 18$

**B.**  $P = 46$

**C.**  $P = 24$

**D.**  $P = 12$

**Lời giải**

**Chọn B**

**Cách 1**

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+x\sqrt{x+1}}} dx = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = \int_1^2 \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})^2} dx$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x+1} + \sqrt{x} \Rightarrow dt = \left( \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx \Leftrightarrow 2dt = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}} dx$$

$$\text{Khi đó } I = \int_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \frac{2}{t^2} dt = \left( \frac{-2}{t} \right) \Big|_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = -2\sqrt{3} + 4\sqrt{2} - 2 = \sqrt{32} - \sqrt{12} - 2$$

$$\Rightarrow P = a + b + c = 32 + 12 + 2 = 46.$$

**Cách 2**

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+x\sqrt{x+1}}} dx &= \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = \int_1^2 \frac{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})}{\sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} dx \\ &= \int_1^2 \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}} dx = \int_1^2 \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) dx = \left( 2\sqrt{x} - 2\sqrt{x+1} \right) \Big|_1^2 = 2\sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = \sqrt{32} - \sqrt{12} - 2 \end{aligned}$$

**Câu 78: (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Cho hàm số  $f(x)$  có  $f(0) = 0$  và  $f'(x) = \cos x \cos^2 2x, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Khi đó  $\int_0^\pi f(x) dx$  bằng

**A.**  $\frac{1042}{225}$ .

**B.**  $\frac{208}{225}$ .

**C.**  $\frac{242}{225}$ .

**D.**  $\frac{149}{225}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\text{Ta có } f(x) = \int f'(x) dx = \int \cos x \cos^2 2x dx = \int \cos x (1 - 2\sin^2 x)^2 dx.$$

$$\text{Đặt } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx.$$

$$\Rightarrow f(x) = \int (1 - 2t^2)^2 dt = \int (1 - 4t^2 + 4t^4) dt = t - \frac{4}{3}t^3 + \frac{4}{5}t^5 + C = \sin x - \frac{4}{3}\sin^3 x + \frac{4}{5}\sin^5 x + C.$$

$$\text{Mà } f(0) = 0 \Rightarrow C = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } f(x) &= \sin x - \frac{4}{3}\sin^3 x + \frac{4}{5}\sin^5 x = \sin x \left( 1 - \frac{4}{3}\sin^2 x + \frac{4}{5}\sin^4 x \right). \\ &= \sin x \left[ 1 - \frac{4}{3}(1 - \cos^2 x) + \frac{4}{5}(1 - \cos^2 x)^2 \right]. \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } \int_0^{\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} \sin x \left[ 1 - \frac{4}{3}(1 - \cos^2 x) + \frac{4}{5}(1 - \cos^2 x)^2 \right] dx.$$

$$\text{Đặt } t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$$

$$\text{Đổi cận } x = 0 \Rightarrow t = 1; x = \pi \Rightarrow t = -1.$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó, } \int_0^{\pi} f(x) dx &= \int_{-1}^1 \left[ 1 - \frac{4}{3}(1 - t^2) + \frac{4}{5}(1 - t^2)^2 \right] dt = \int_{-1}^1 \left( \frac{7}{15} - \frac{4}{15}t^2 + \frac{4}{5}t^4 \right) dt \\ &= \left( \frac{7}{15}t - \frac{4}{45}t^3 + \frac{4}{5}t^5 \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{242}{225}. \end{aligned}$$

**Câu 79:** (Đề Minh Họa 2017) Tính tích phân  $I = \int_0^{\pi} \cos^3 x \cdot \sin x dx$ .

**A.**  $I = -\frac{1}{4}$

**B.**  $I = -\frac{1}{4}\pi^4$

**C.**  $I = -\pi^4$

**D.**  $I = 0$

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Ta có: } I = \int_0^{\pi} \cos^3 x \cdot \sin x dx. \text{ Đặt } t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx \Leftrightarrow -dt = \sin x dx$$

$$\text{Đổi cận: Với } x = 0 \Rightarrow t = 1; \text{ với } x = \pi \Rightarrow t = -1.$$

$$\text{Vậy } I = -\int_1^{-1} t^3 dt = \int_{-1}^1 t^3 dt = \frac{t^4}{4} \Big|_{-1}^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = 0.$$

Cách khác : Bấm máy tính.

**Câu 80:** (Đề Tham Khảo 2017) Cho  $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} = a + b \ln \frac{1+e}{2}$ , với  $a, b$  là các số hữu tỉ. Tính  $S = a^3 + b^3$ .

**A.**  $S = -2$ .

**B.**  $S = 0$ .

**C.**  $S = 1$ .

**D.**  $S = 2$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Cách 1. Đặt } t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx. \text{ Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 1; x = 1 \Rightarrow t = e$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} &= \int_1^e \frac{e^x dx}{e^x(e^x + 1)} = \int_1^e \frac{dt}{t(t+1)} = \int_1^e \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = (\ln|t| - \ln|t+1|) \Big|_1^e = (1 - \ln(1+e)) - (-\ln 2) \\ &= 1 + \ln \frac{2}{1+e} = 1 - \ln \frac{1+e}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow S = a^3 + b^3 = 0. \end{aligned}$$

**Cách 2.**  $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1} = \int_0^1 \frac{(e^x+1)-e^x}{e^x+1} dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{d(e^x+1)}{e^x+1} = x \Big|_0^1 - \ln|e^x+1| \Big|_0^1 = 1 - \ln \frac{1+e}{2}.$

Suy ra  $a=1$  và  $b=-1$ . Vậy  $S=a^3+b^3=0$ .

**Câu 81:** (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Xét  $\int_0^2 xe^{x^2} dx$ , nếu đặt  $u=x^2$  thì  $\int_0^2 xe^{x^2} dx$  bằng

- A.  $2 \int_0^2 e^u du$ .      B.  $2 \int_0^4 e^u du$ .      C.  $\frac{1}{2} \int_0^2 e^u du$ .      D.  $\frac{1}{2} \int_0^4 e^u du$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt  $u=x^2 \Rightarrow du=2xdx \Leftrightarrow xdx=\frac{du}{2}$ .

Khi  $x=0 \Rightarrow u=0$ , khi  $x=2 \Rightarrow u=4$ .

Do đó  $\int_0^2 xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^4 e^u du$ .

**Câu 82:** (Đề Minh Họa 2017) Tính tích phân  $I = \int_1^e x \ln x dx$ :

- A.  $I = \frac{e^2-1}{4}$       B.  $I = \frac{1}{2}$       C.  $I = \frac{e^2-2}{2}$       D.  $I = \frac{e^2+1}{4}$

**Lời giải**

**Chọn D**

$I = \int_1^e x \ln x dx$ . Đặt  $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow I = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}.$

**Câu 83:** (Mã 103 2018) Cho  $\int_1^e (1+x \ln x) dx = ae^2 + be + c$  với  $a, b, c$  là các số hữu tỷ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $a+b=c$       B.  $a+b=-c$       C.  $a-b=c$       D.  $a-b=-c$

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có  $\int_1^e (1+x \ln x) dx = \int_1^e 1 dx + \int_1^e x \ln x dx = e-1 + \int_1^e x \ln x dx$ .

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \int_1^e x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4} x^2 \Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}.$$

$$\text{Suy ra } \int_1^e (1 + x \ln x) dx = e - 1 + \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + e - \frac{3}{4} \text{ nên } a = \frac{1}{4}, b = 1, c = -\frac{3}{4}.$$

Vậy  $a - b = c$ .

**Câu 84:** (Mã 104 2018) Cho  $\int_1^e (2 + x \ln x) dx = ae^2 + be + c$  với  $a, b, c$  là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.**  $a + b = c$

**B.**  $a - b = c$

**C.**  $a - b = -c$

**D.**  $a + b = -c$

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Ta có } \int_1^e (2 + x \ln x) dx = \int_1^e 2 dx + \int_1^e x \ln x dx = 2x \Big|_1^e + I = 2e - 2 + I \text{ với } I = \int_1^e x \ln x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4} (e^2 - 1) = \frac{e^2 + 1}{4}$$

$$\Rightarrow \int_1^e (2 + x \ln x) dx = 2e - 2 + \frac{e^2 + 1}{4} = \frac{1}{4} e^2 + 2e - \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = 2 \\ c = -\frac{7}{4} \end{cases} \Rightarrow a - b = c$$

**Câu 85:** (Đề tham khảo 2017) Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $\int_0^1 (x+1) f'(x) dx = 10$  và  $2f(1) - f(0) = 2$ .

Tính  $\int_0^1 f(x) dx$ .

**A.**  $I = -12$

**B.**  $I = 8$

**C.**  $I = 1$

**D.**  $I = -8$

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x + 1 \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}. \text{ Khi đó } I = (x+1)f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx$$

$$\text{Suy ra } 10 = 2f(1) - f(0) - \int_0^1 f(x) dx \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = -10 + 2 = -8$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = -8.$$

**Câu 86: (Mã 104 - 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $f(3) = 1$  và

$$\int_0^1 xf(3x) dx = 1, \text{ khi đó } \int_0^3 x^2 f'(x) dx \text{ bằng}$$

**A.**  $\frac{25}{3}$ .

**B.** 3.

**C.** 7.

**D.** -9.

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Đặt } t = 3x \Rightarrow dt = 3dx \Rightarrow dx = \frac{1}{3} dt.$$

$$\text{Suy ra } 1 = \int_0^1 xf(3x) dx = \frac{1}{9} \int_0^3 tf(t) dt \Leftrightarrow \int_0^3 tf(t) dt = 9.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(t) \\ dv = t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(t) dt \\ v = \frac{t^2}{2} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \int_0^3 tf(t) dt = \frac{t^2}{2} f(t) \Big|_0^3 - \int_0^3 \frac{t^2}{2} f'(t) dt = \frac{9}{2} f(3) - \frac{1}{2} \int_0^3 t^2 f'(t) dt.$$

$$\Leftrightarrow 9 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} \int_0^3 t^2 f'(t) dt \Leftrightarrow \int_0^3 t^2 f'(t) dt = -9.$$

$$\text{Vậy } \int_0^3 x^2 f'(x) dx = -9.$$

**Câu 87: (Mã 101 - 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $f(4) = 1$  và

$$\int_0^1 xf(4x) dx = 1, \text{ khi đó } \int_0^4 x^2 f'(x) dx \text{ bằng}$$

**A.** 8.

**B.** 14.

**C.**  $\frac{31}{2}$ .

**D.** -16.

**Lời giải**

**Chọn D**

Xét  $\int_0^1 xf(4x)dx = 1$ . Đặt:

$$t = 4x \Rightarrow \int_0^4 \frac{1}{4}t.f(t).\frac{1}{4}dt = 1 \Rightarrow \int_0^4 t.f(t)dt = 16 \Rightarrow \int_0^4 x.f(x)dx = 16.$$

$$\text{Xét } I = \int_0^4 x^2 f'(x)dx = \int_0^4 x^2 df(x)$$

$$\text{Suy ra: } I = x^2.f(x)\Big|_0^4 - \int_0^4 2x.f(x)dx = 4^2 f(4) - 2.16 = -16.$$

**Câu 88: (Mã 103 - 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $f(6) = 1$  và  $\int_0^1 xf(6x)dx = 1$

, khi đó  $\int_0^6 x^2 f'(x)dx$  bằng

**A.**  $\frac{107}{3}$ .

**B.** 34.

**C.** 24.

**D.** -36.

**Lời giải**

**Chọn D**

Theo bài ra:  $\int_0^1 xf(6x)dx = 1$ .

Đặt  $t = 6x \Rightarrow dt = 6dx$ .

Đổi cận:

|     |   |   |
|-----|---|---|
| $x$ | 0 | 1 |
| $t$ | 0 | 6 |

$$\text{Do đó: } \int_0^1 xf(6x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^6 \frac{1}{6}t.f(t).\frac{dt}{6} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{36} \int_0^6 t.f(t)dt = 1 \Leftrightarrow \int_0^6 t.f(t)dt = 36.$$

$$\text{Tính } I = \int_0^6 x^2 f'(x)dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x^2 \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = x^2 f(x)\Big|_0^6 - \int_0^6 2xf(x)dx = 36f(6) - 2 \int_0^6 xf(x)dx = 36.1 - 2.36 = -36.$$

**Câu 89: (Mã 102 - 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $f(5) = 1$  và

$$\int_0^1 xf(5x)dx = 1, \text{ khi đó } \int_0^5 x^2 f'(x)dx \text{ bằng}$$

**A.** 15

**B.** 23

**C.**  $\frac{123}{5}$

**D.** -25

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\begin{aligned}
 +) I &= \int_0^5 x^2 f'(x) dx = \int_0^5 x^2 df(x) = x^2 \cdot f(x) \Big|_0^5 - \int_0^5 f(x) dx^2 \\
 &= 25 \cdot f(5) - 0 \cdot f(x) - \int_0^5 f(x) \cdot 2x dx \\
 &= 25 - 2 \int_0^5 xf(x) dx
 \end{aligned}$$

$$+) \text{ Ta có: } \int_0^1 xf(5x) dx = 1$$

$$\text{Đặt } 5x = t \Rightarrow \int_0^5 \frac{t}{5} f(t) d\frac{t}{5} = 1 \Leftrightarrow \int_0^5 tf(t) dt = 25$$

$$\text{Vậy } I = 25 - 2 \times 25 = -25.$$

**Câu 90: (Đề Tham Khảo 2018)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;1]$  thỏa mãn

$$f(1) = 0, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7 \text{ và } \int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}. \text{ Tính tích phân } \int_0^1 f(x) dx$$

- A. 4                                      B.  $\frac{7}{5}$                                       C. 1                                      D.  $\frac{7}{4}$

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Cách 1: Đặt } u = f(x) \Rightarrow du = f'(x) dx, dv = x^2 dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3}.$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{3} = \frac{x^3}{3} f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3} f'(x) dx \Rightarrow \int_0^1 x^3 f'(x) dx = -1$$

$$\text{Ta có } \int_0^1 49x^6 dx = 7, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7, \int_0^1 2 \cdot 7x^3 \cdot f'(x) dx = -14 \Rightarrow \int_0^1 [7x^3 + f'(x)]^2 dx = 0$$

$$\Rightarrow 7x^3 + f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = -\frac{7x^4}{4} + C, \text{ mà } f(1) = 0 \Rightarrow C = \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left( -\frac{7x^4}{4} + \frac{7}{4} \right) dx = \frac{7}{5}.$$

**Cách 2:** Nhắc lại bất đẳng thức Holder tích phân như sau:

$$\left( \int_a^b f(x) g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx$$

Dấu bằng xảy ra khi  $f(x) = k \cdot g(x), (\forall x \in [a; b], k \in \mathbb{R})$

Ta có  $\frac{1}{9} = \left( \int_0^1 \frac{x^3}{3} f'(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 \frac{x^6}{9} dx \cdot \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{9}$ . Dấu bằng xảy ra khi  $f'(x) = k \cdot \frac{x^3}{3}$ .

Mặt khác  $\int_0^1 \frac{x^3}{3} f'(x) dx = \frac{-1}{3} \Rightarrow k = 21 \Rightarrow f'(x) = -7x^3$  suy ra  $f(x) = -\frac{7x^4}{4} + \frac{7}{4}$ .

Từ đó  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left( -\frac{7x^4}{4} + \frac{7}{4} \right) dx = \frac{7}{5}$ .

**Câu 91:** (Mã 102 2018) Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f(2) = -\frac{1}{3}$  và  $f'(x) = x[f(x)]^2$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

Giá trị của  $f(1)$  bằng

A.  $-\frac{2}{3}$

B.  $-\frac{2}{9}$

C.  $-\frac{7}{6}$

D.  $-\frac{11}{6}$

Lời giải

**Chọn A**

Từ hệ thức đề cho:  $f'(x) = x[f(x)]^2$  (1), suy ra  $f'(x) \geq 0$  với mọi  $x \in [1; 2]$ . Do đó  $f(x)$  là hàm không giảm trên đoạn  $[1; 2]$ , ta có  $f(x) \leq f(2) < 0$  với mọi  $x \in [1; 2]$ .

Chia 2 vế hệ thức (1) cho  $[f(x)]^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = x, \forall x \in [1; 2]$ .

Lấy tích phân 2 vế trên đoạn  $[1; 2]$  hệ thức vừa tìm được, ta được:

$$\int_1^2 \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} dx = \int_1^2 x dx \Rightarrow \int_1^2 \frac{1}{[f(x)]^2} df(x) = \frac{3}{2} \Rightarrow \left. \frac{-1}{f(x)} \right|_1^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{f(1)} - \frac{1}{f(2)} = \frac{3}{2}$$

Do  $f(2) = -\frac{1}{3}$  nên suy ra  $f(1) = -\frac{2}{3}$ .

Chú ý: có thể tự kiểm tra các phép biến đổi tích phân trên đây là có nghĩa.

**Câu 92:** (Mã 104 2018) Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f(2) = -\frac{1}{5}$  và  $f'(x) = x^3[f(x)]^2$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

Giá trị của  $f(1)$  bằng

A.  $-\frac{4}{35}$

B.  $-\frac{71}{20}$

C.  $-\frac{79}{20}$

D.  $-\frac{4}{5}$

Lời giải

**Chọn D**

Ta có:  $f'(x) = x^3[f(x)]^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = x^3 \Rightarrow \int_1^2 \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int_1^2 x^3 dx$

$$\Leftrightarrow \left( -\frac{1}{f(x)} \right) \Big|_1^2 = \frac{15}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(1)} = \frac{15}{4} \Leftrightarrow f(1) = -\frac{4}{5}.$$

**Câu 93:** (Minh họa 2020 Lần 1) Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn

$$xf(x^3) + f(1-x^2) = -x^{10} + x^6 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Khi đó } \int_{-1}^0 f(x) dx ?$$

**A.**  $\frac{-17}{20}.$

**B.**  $\frac{-13}{4}.$

**C.**  $\frac{17}{4}.$

**D.**  $-1.$

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Ta có } xf(x^3) + f(1-x^2) = -x^{10} + x^6 - 2x \Rightarrow x^2 f(x^3) + xf(1-x^2) = -x^{11} + x^7 - 2x^2.$$

Lấy tích phân hai vế cận từ 0 đến 1 ta được:

$$\int_0^1 x^2 f(x^3) dx + \int_0^1 xf(1-x^2) dx = \int_0^1 (-x^{11} + x^7 - 2x^2) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \int_0^1 f(x^3) d(x^3) - \frac{1}{2} \int_0^1 f(1-x^2) d(1-x^2) = -\frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{2} \int_1^0 f(t) dt = -\frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \int_0^1 f(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^1 f(t) dt = -\frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{6} \int_0^1 f(t) dt = -\frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(t) dt = -\frac{3}{4}$$

$$\text{Suy ra } \int_0^1 f(x) dx = -\frac{3}{4}.$$

Lấy tích phân hai vế cận từ -1 đến 0 ta được:

$$\int_{-1}^0 x^2 f(x^3) dx + \int_{-1}^0 xf(1-x^2) dx = \int_{-1}^0 (-x^{11} + x^7 - 2x^2) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \int_{-1}^0 f(x^3) d(x^3) - \frac{1}{2} \int_{-1}^0 f(1-x^2) d(1-x^2) = -\frac{17}{24}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \int_{-1}^0 f(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^1 f(t) dt = -\frac{17}{24}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \int_{-1}^0 f(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^1 f(t) dt = -\frac{17}{24}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \int_{-1}^0 f(t) dt = -\frac{17}{24} + \frac{1}{2} \int_0^1 f(t) dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \int_{-1}^0 f(x) dx = \frac{-17}{24} + \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx = \frac{-17}{24} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = -\frac{13}{12}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^0 f(x) dx = -\frac{13}{4}$$

**Câu 94:** (Đề Tham Khảo 2017) Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thoả mãn

$$f(x) + f(-x) = \sqrt{2 + 2\cos 2x}, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tính } I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx.$$

A.  $I = -6$

B.  $I = 0$

C.  $I = -2$

D.  $I = 6$

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Đặt } x = -t. \text{ Khi đó } \int_{-\frac{3\pi}{2}}^0 f(x) dx = \int_{\frac{3\pi}{2}}^0 f(-t) d(-t) = - \int_{\frac{3\pi}{2}}^0 f(-t) dt = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(-x) dx$$

$$\text{Ta có: } I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) d(x) = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^0 f(x) d(x) + \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x) d(x) = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(-x) d(x) + \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x) d(x)$$

$$\text{Hay } I = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (f(-x) + f(x)) d(x) = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2 + 2\cos 2x} d(x) = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2(1 + \cos 2x)} d(x)$$

$$\Leftrightarrow I = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{4\cos^2 x} d(x) = 2 \int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x| d(x) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x d(x) - 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x d(x)$$

$$\text{Vậy } I = 2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = 6.$$



# NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN

## ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

### BÀI 2. TÍCH PHÂN



#### HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**Câu 1:** Khẳng định nào trong các khẳng định sau đúng với mọi hàm  $f, g$  liên tục trên  $K$  và  $a, b$  là các số bất kỳ thuộc  $K$ ?

**A.**  $\int_a^b [f(x) + 2g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + 2 \int_a^b g(x)dx$ .     **B.**  $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$ .  
**C.**  $\int_a^b [f(x) \cdot g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$ .     **D.**  $\int_a^b f^2(x)dx = \left[ \int_a^b f(x)dx \right]^2$ .

**Câu 2:** Cho  $\int_{-2}^2 f(x)dx = 1$ ,  $\int_{-2}^4 f(t)dt = -4$ . Tính  $\int_2^4 f(y)dy$ .

**A.**  $I = 5$ .     **B.**  $I = -3$ .     **C.**  $I = 3$ .     **D.**  $I = -5$ .

**Câu 3:** Cho  $\int_0^2 f(x)dx = 3$  và  $\int_0^2 g(x)dx = 7$ , khi đó  $\int_0^2 [f(x) + 3g(x)]dx$  bằng

**A.** 16.     **B.** -18.     **C.** 24.     **D.** 10.

**Câu 4:** Cho  $\int_0^1 f(x)dx = -1$ ;  $\int_0^3 f(x)dx = 5$ . Tính  $\int_1^3 f(x)dx$

**A.** 1.     **B.** 4.     **C.** 6.     **D.** 5.

**Câu 5:** Cho  $\int_1^2 f(x)dx = -3$  và  $\int_2^3 f(x)dx = 4$ . Khi đó  $\int_1^3 f(x)dx$  bằng

**A.** 12.     **B.** 7.     **C.** 1.     **D.** -12.

**Câu 6:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục, có đạo hàm trên  $[-1; 2]$ ,  $f(-1) = 8$ ;  $f(2) = -1$ . Tích phân  $\int_{-1}^2 f'(x)dx$  bằng

**A.** 1.     **B.** 7.     **C.** -9.     **D.** 9.

**Câu 7:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $R$  và có  $\int_0^2 f(x)dx = 9$ ;  $\int_2^4 f(x)dx = 4$ . Tính  $I = \int_0^4 f(x)dx$ .

**A.**  $I = 5$ .     **B.**  $I = 36$ .     **C.**  $I = \frac{9}{4}$ .     **D.**  $I = 13$ .

**Câu 8:** Cho  $\int_{-1}^0 f(x)dx = 3$ ;  $\int_0^3 f(x)dx = 3$ . Tích phân  $\int_1^3 f(x)dx$  bằng

### D. 0

**Câu 9:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $\int_0^4 f(x) dx = 10$ ,  $\int_3^4 f(x) dx = 4$ . Tích phân  $\int_0^3 f(x) dx$  bằng

**D. 6.**

**Câu 10:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $\int_1^8 f(x) dx = 9$ ,  $\int_4^{12} f(x) dx = 3$ ,  $\int_4^8 f(x) dx = 5$ .

Tính  $I = \int_1^{12} f(x) dx$ .

#### D. $I = 7$ .

**Câu 11:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $[0;10]$  thỏa mãn  $\int_0^{10} f(x)dx = 7$ ,  $\int_2^6 f(x)dx = 3$ . Tính

$$P = \int_0^2 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx.$$

**D.**  $P = -6$ .

**Câu 12:** Cho  $f, g$  là hai hàm liên tục trên đoạn  $[1; 3]$  thoả:

$$\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10, \int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6. \text{ Tính } \int_1^3 [f(x) + g(x)] dx.$$

**D. 9.**

**Câu 13:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0;10]$  và  $\int_0^{10} f(x)dx = 7$ ;  $\int_2^6 f(x)dx = 3$ . Tính

$$P = \int_0^2 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx.$$

#### D. $P = -4$

**Câu 14:** Cho  $f, g$  là hai hàm số liên tục trên  $[1; 3]$  thỏa mãn điều kiện  $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10$  đồng thời

$$\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6. \text{ Tính } \int_1^3 [f(x) + g(x)] dx.$$

**D. 8.**

**Câu 15:** Cho  $f, g$  là hai hàm liên tục trên  $[1;3]$  thỏa:  $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10$  và

$$\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6. \text{ Tính } I = \int_1^3 [f(x) + g(x)] dx.$$

**D. 6.**

**Câu 16:** Cho  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 5$ . Tính  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx = 5$ .

#### D. $I = 5 + \pi$

**Câu 17:** Cho  $\int_{-1}^2 f(x)dx = 2$  và  $\int_{-1}^2 g(x)dx = -1$ . Tính  $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)]dx$ .

**D.**  $I = \frac{11}{2}$

- Câu 18:** Cho hai tích phân  $\int_{-2}^5 f(x)dx = 8$  và  $\int_5^{-2} g(x)dx = 3$ . Tính  $I = \int_{-2}^5 [f(x) - 4g(x) - 1]dx$
- A. 13.                                      B. 27.                                      C. -11.                                      D. 3.
- Câu 19:** Cho  $\int_{-1}^2 f(x)dx = 2$  và  $\int_{-1}^2 g(x)dx = -1$ , khi đó  $\int_{-1}^2 [x + 2f(x) + 3g(x)]dx$  bằng
- A.  $\frac{5}{2}$                                       B.  $\frac{7}{2}$                                       C.  $\frac{17}{2}$                                       D.  $\frac{11}{2}$
- Câu 20:** Cho  $\int_0^2 f(x)dx = 3$ ,  $\int_0^2 g(x)dx = -1$  thì  $\int_0^2 [f(x) - 5g(x) + x]dx$  bằng:
- A. 12.                                      B. 0.                                      C. 8.                                      D. 10
- Câu 21:** Cho  $\int_0^5 f(x)dx = -2$ . Tích phân  $\int_0^5 [4f(x) - 3x^2]dx$  bằng
- A. -140.                                      B. -130.                                      C. -120.                                      D. -133.
- Câu 22:** Cho  $\int_1^2 [4f(x) - 2x]dx = 1$ . Khi đó  $\int_1^2 f(x)dx$  bằng:
- A. 1.                                      B. -3.                                      C. 3.                                      D. -1.
- Câu 23:** Cho  $\int_0^1 f(x)dx = 1$  tích phân  $\int_0^1 (2f(x) - 3x^2)dx$  bằng
- A. 1.                                      B. 0.                                      C. 3.                                      D. -1.
- Câu 24:** Tính tích phân  $I = \int_{-1}^0 (2x+1)dx$ .
- A.  $I = 0$ .                                      B.  $I = 1$ .                                      C.  $I = 2$ .                                      D.  $I = -\frac{1}{2}$ .
- Câu 25:** Tích phân  $\int_0^1 (3x+1)(x+3)dx$  bằng
- A. 12.                                      B. 9.                                      C. 5.                                      D. 6.
- Câu 26:** Giá trị của  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$  bằng
- A. 0.                                      B. 1.                                      C. -1.                                      D.  $\frac{\pi}{2}$ .
- Câu 27:** Tính tích phân  $I = \int_0^2 (2x+1)dx$
- A.  $I = 5$ .                                      B.  $I = 6$ .                                      C.  $I = 2$ .                                      D.  $I = 4$ .
- Câu 28:** Với  $a, b$  là các tham số thực. Giá trị tích phân  $\int_0^b (3x^2 - 2ax - 1)dx$  bằng
- A.  $b^3 - b^2a - b$ .                                      B.  $b^3 + b^2a + b$ .                                      C.  $b^3 - ba^2 - b$ .                                      D.  $3b^2 - 2ab - 1$ .
- Câu 29:** Giả sử  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x dx = a + b\frac{\sqrt{2}}{2}$  ( $a, b \in \mathbb{Q}$ ). Khi đó giá trị của  $a - b$  là

A.  $-\frac{1}{6}$

B.  $-\frac{1}{6}$

C.  $-\frac{3}{10}$

D.  $\frac{1}{5}$

**Câu 30:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $\int_0^2 (f(x) + 3x^2) dx = 10$ . Tính  $\int_0^2 f(x) dx$ .

A. 2.

B. -2.

C. 18.

D. -18.

**Câu 31:** Cho  $\int_0^m (3x^2 - 2x + 1) dx = 6$ . Giá trị của tham số  $m$  thuộc khoảng nào sau đây?

A.  $(-1; 2)$ .

B.  $(-\infty; 0)$ .

C.  $(0; 4)$ .

D.  $(-3; 1)$ .

**Câu 32:** Tính tích phân  $I = \int_1^e \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$

A.  $I = \frac{1}{e}$

B.  $I = \frac{1}{e} + 1$

C.  $I = 1$

D.  $I = e$

**Câu 33:** Tính tích phân  $I = \int_0^3 \frac{dx}{x+2}$ .

A.  $I = -\frac{21}{100}$ .

B.  $I = \ln \frac{5}{2}$ .

C.  $I = \log \frac{5}{2}$ .

D.  $I = \frac{4581}{5000}$ .

**Câu 34:**  $\int_1^2 \frac{dx}{3x-2}$  bằng

A.  $2 \ln 2$ .

B.  $\frac{2}{3} \ln 2$ .

C.  $\ln 2$ .

D.  $\frac{1}{3} \ln 2$ .

**Câu 35:** Tính tích phân  $I = \int_1^2 \frac{x-1}{x} dx$ .

A.  $I = 1 - \ln 2$ .

B.  $I = \frac{7}{4}$ .

C.  $I = 1 + \ln 2$ .

D.  $I = 2 \ln 2$ .

**Câu 36:** Biết  $\int_1^3 \frac{x+2}{x} dx = a + b \ln c$ , với  $a, b, c \in \mathbb{Z}, c < 9$ . Tính tổng  $S = a + b + c$ .

A.  $S = 7$ .

B.  $S = 5$ .

C.  $S = 8$ .

D.  $S = 6$ .

**Câu 37:** Tích phân  $I = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$  có giá trị bằng

A.  $\ln 2 - 1$ .

B.  $-\ln 2$ .

C.  $\ln 2$ .

D.  $1 - \ln 2$ .

**Câu 38:** Tính  $K = \int_2^3 \frac{x}{x^2-1} dx$ .

A.  $K = \ln 2$ .

B.  $K = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{3}$ .

C.  $K = 2 \ln 2$ .

D.  $K = \ln \frac{8}{3}$ .

**Câu 39:** Biết rằng hàm số  $f(x) = mx + n$  thỏa mãn  $\int_0^1 f(x) dx = 3$ ,  $\int_0^2 f(x) dx = 8$ . Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A.  $m + n = 4$ .

B.  $m + n = -4$ .

C.  $m + n = 2$ .

D.  $m + n = -2$ .

**Câu 40:** Biết rằng hàm số  $f(x) = ax^2 + bx + c$  thỏa mãn  $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{7}{2}$ ,  $\int_0^2 f(x) dx = -2$  và

A.  $-\frac{3}{4}$ .

B.  $-\frac{4}{3}$ .

C.  $\frac{4}{3}$ .

D.  $\frac{3}{4}$ .

**Câu 41:** Cho  $I = \int_0^1 (4x - 2m^2) dx$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để  $I + 6 > 0$ ?

- A. 1.                                      B. 5.                                      C. 2.                                      D. 3.

**Câu 42:** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của  $a$  để  $\int_0^a (2x - 3) dx \leq 4$ ?

- A. 5.                                      B. 6.                                      C. 4.                                      D. 3.

**Câu 43:** Có bao nhiêu số thực  $b$  thuộc khoảng  $(\pi; 3\pi)$  sao cho  $\int_{\pi}^b 4 \cos 2x dx = 1$ ?

- A. 8.                                      B. 2.                                      C. 4.                                      D. 6.

**Câu 44:** Cho hàm số  $f(x)$  có  $f(0) = 4$  và  $f'(x) = 2 \cos^2 x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ . Khi đó  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$  bằng.

- A.  $\frac{\pi^2 + 16\pi + 16}{16}$ .                      B.  $\frac{\pi^2 + 4}{16}$ .                      C.  $\frac{\pi^2 + 14\pi}{16}$ .                      D.  $\frac{\pi^2 + 16\pi + 4}{16}$ .

**Câu 45:** Cho hàm số  $f(x)$  có  $f(0) = 0$  và  $f'(x) = \sin^4 x, \forall x \in \mathbb{R}$ . Tích phân  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$  bằng

- A.  $\frac{\pi^2 - 6}{18}$ .                                      B.  $\frac{\pi^2 - 3}{32}$ .                                      C.  $\frac{3\pi^2 - 16}{64}$ .                                      D.  $\frac{3\pi^2 - 6}{112}$ .

## TÍCH PHÂN HÀM SỐ HỮU TỶ

Tính  $I = \int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} dx$  ? với  $P(x)$  và  $Q(x)$  là các đa thức không chứa căn.

□ Nếu bậc của tử  $P(x) \geq$  bậc mẫu  $Q(x) \xrightarrow{PP}$  chia đa thức.

□ Nếu bậc của tử  $P(x) <$  bậc mẫu  $Q(x)$  mà mẫu số **phân tích được thành tích số**  $\xrightarrow{PP}$  đồng nhất thức để đưa thành tổng của các phân số.

Một số trường hợp đồng nhất thức thường gặp:

$$+ \frac{1}{(ax+m)(bx+n)} = \frac{1}{an-bm} \left( \frac{a}{ax+m} - \frac{b}{bx+n} \right) \quad (1)$$

$$+ \frac{mx+n}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{(A+B)x - (Ab+Ba)}{(x-a)(x-b)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=m \\ Ab+Ba=-n \end{cases}$$

$$+ \frac{1}{(x-m)(ax^2+bx+c)} = \frac{A}{x-m} + \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c} \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac < 0.$$

$$+ \frac{1}{(x-a)^2(x-b)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-b} + \frac{D}{(x-b)^2}.$$

□ Nếu bậc tử  $P(x) <$  bậc mẫu  $Q(x)$  mà **mẫu không phân tích được thành tích số**, ta xét một số trường hợp thường gặp sau:

$$+ I_1 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}, (n \in \mathbb{N}^*) \xrightarrow{PP} x = a \cdot \tan t.$$

$$+ I_2 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, (\Delta < 0) = \int \frac{dx}{a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left( -\frac{\Delta}{4a} \right) \right]}. \text{ Ta sẽ đặt } \longrightarrow x + \frac{b}{2a} = \sqrt{-\frac{\Delta}{4a}} \tan t.$$

$$+ I_3 = \int \frac{px+q}{ax^2+bx+c} \cdot dx \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac < 0. \text{ Ta sẽ phân tích:}$$

$$I_3 = \frac{p}{2a} \underbrace{\int \frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c}}_A + \left( q - \frac{b \cdot p}{2a} \right) \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}}_{I_2} \text{ và giải A bằng cách đặt } t = \text{mẫu số.}$$

**Câu 46:** Biết  $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)(2x+1)} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ . Khi đó giá trị  $a+b+c$  bằng

- A. -3.                      B. 2.                      C. 1.                      D. 0.

**Câu 47:** Biết  $I = \int_{-1}^0 \frac{3x^2+5x-1}{x-2} dx = a \ln \frac{2}{3} + b, (a, b \in \mathbb{R})$ . Khi đó giá trị của  $a+4b$  bằng

- A. 50                      B. 60                      C. 59                      D. 40

**Câu 48:** Biết  $\int_0^1 \frac{x^2-2}{x+1} dx = \frac{-1}{m} + n \ln 2$ , với  $m, n$  là các số nguyên. Tính  $m+n$ .

- A.  $S=1$ .                      B.  $S=4$ .                      C.  $S=-5$ .                      D.  $S=-1$ .

**Câu 49:** Tích phân  $I = \int_0^1 \frac{(x-1)^2}{x^2+1} dx = a - \ln b$  trong đó  $a, b$  là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức  $a+b$ .

A. 1. B. 0. C. -1. D. 3.

**Câu 50:** Biết  $\int_3^5 \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} dx = a + \ln \frac{b}{2}$  với  $a, b$  là các số nguyên. Tính  $S = a - 2b$ .

A.  $S = 2$ . B.  $S = -2$ . C.  $S = 5$ . D.  $S = 10$ .

**Câu 51:** Cho  $\int_1^2 \left( x^2 + \frac{x}{x+1} \right) dx = \frac{10}{b} + \ln \frac{a}{b}$  với  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Tính  $P = a + b$ ?

A.  $P = 1$ . B.  $P = 5$ . C.  $P = 7$ . D.  $P = 2$ .

**Câu 52:** Cho  $\int_1^3 \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ , với  $a, b, c$  là các số nguyên. Giá trị của  $a + b + c$  bằng

A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

**Câu 53:** Cho  $\int_3^4 \frac{5x-8}{x^2-3x+2} dx = a \ln 3 + b \ln 2 + c \ln 5$ , với  $a, b, c$  là các số hữu tỉ. Giá trị của  $2^{a-3b+c}$  bằng

A. 12 B. 6 C. 1 D. 64

**Câu 54:** Biết  $\int_3^5 \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} dx = a + \ln \frac{b}{2}$  với  $a, b$  là các số nguyên. Tính  $S = a - 2b$ .

A.  $S = 2$ . B.  $S = -2$ . C.  $S = 5$ . D.  $S = 10$ .

**Câu 55:** Biết rằng  $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \frac{\pi\sqrt{a}}{b}$  ( $a, b \in \mathbb{Z}, a < 10$ ). Khi đó  $a + b$  có giá trị bằng

A. 14. B. 15. C. 13. D. 12.

**Câu 56:** Biết  $\int_0^2 \frac{x^2 + 5x + 2}{x^2 + 4x + 3} dx = a + b \ln 3 + c \ln 5$ , ( $a, b, c \in \mathbb{Q}$ ). Giá trị của  $abc$  bằng

A. -8. B. -10. C. -12. D. 16.

**Câu 57:** Giả sử rằng  $\int_{-1}^0 \frac{3x^2 + 5x - 1}{x - 2} dx = a \ln \frac{2}{3} + b$ . Khi đó, giá trị của  $a + 2b$  là

A. 30. B. 60. C. 50. D. 40.

**Câu 58:** Biết  $\int_1^4 \frac{x^3 + x^2 + 7x + 3}{x^2 - x + 3} dx = \frac{a}{b} + c \ln 5$  với  $a, b, c$  là các số nguyên dương và  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Tính  $P = a - b^2 - c^3$ .

A. -5. B. -4. C. 5. D. 0.

**Câu 59:** Cho  $\int_0^1 \frac{4x^2 + 15x + 11}{2x^2 + 5x + 2} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$  với  $a, b, c$  là các số hữu tỷ. Biểu thức  $T = a.c - b$  bằng

A. 4. B. 6. C.  $-\frac{1}{2}$ . D.  $\frac{1}{2}$ .

**Câu 60:** Biết  $\int_0^1 \frac{x^2 - 2}{x + 1} dx = \frac{-1}{m} + n \ln 2$ , với  $m, n$  là các số nguyên. Tính  $S = m + n$ .

A.  $S = -1$ . B.  $S = -5$ . C.  $S = 1$ . D.  $S = 4$ .

**Câu 61:** Cho  $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx = a \ln 2 + b \ln 3$ , với  $a, b$  là các số hữu tỷ. Khi đó  $a + b$  bằng

A. 0. B. 2. C. 1. D. -1.

**Câu 62:** Cho  $\int_0^1 \frac{2x^2 + 3x}{x^2 + 3x + 2} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$  với  $a, b, c$  là các số nguyên. Tổng  $a + b + c$  bằng

- A.** 3.                      **B.** 2.                      **C.** 1.                      **D.** -1.

**Câu 63:** Cho biết  $\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4x+3} dx = a \ln 5 + b \ln 3$ , với  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Tính  $T = a^2 + b^2$  bằng

- A.** 13.                      **B.** 10.                      **C.** 25.                      **D.** 5.

**Câu 64:** Biết  $\int_0^2 \frac{x^2 + 5x + 2}{x^2 + 4x + 3} dx = a + b \ln 3 + c \ln 5$ ,  $(a, b, c \in \mathbb{Q})$ . Giá trị của  $abc$  bằng

- A.**  $-8$ .                      **B.**  $-10$ .                      **C.**  $-12$ .                      **D.**  $16$ .

**Câu 65:** Biết  $\int_1^4 \frac{x^3 + x^2 + 7x + 3}{x^2 - x + 3} dx = \frac{a}{b} + c \ln 5$  với  $a, b, c$  là các số nguyên dương và  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản.

Tính giá trị của  $P = a - b^2 - c^3$ .

- A.**  $-5$ .                      **B.**  $-3$ .                      **C.**  $6$ .                      **D.**  $-4$ .

**Câu 66:** Cho  $\int_2^3 \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$  với  $a, b, c$  là các số hữu tỉ. Giá trị của  $a + b^2 - c^3$  bằng

- A.** 3.                      **B.** 6.                      **C.** 5.                      **D.** 4.

**Câu 67:** Cho  $\int_3^4 \frac{2x+3}{x^2+3x} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 7$  với  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Giá trị của  $2a+3b+7c$  bằng

- A.** -9.                      **B.** 6.                      **C.** 15.                      **D.** 3.

**Câu 68:** Cho  $\int_1^2 \frac{x}{(x+1)^2} dx = a + b \cdot \ln 2 + c \cdot \ln 3$ , với  $a, b, c$  là các số hữu tỷ. Giá trị  $6a + b + c$  bằng:

- A.**  $-2$ .                      **B.**  $1$ .                      **C.**  $2$ .                      **D.**  $-1$ .

**Câu 69:** Biết  $\int_2^3 \frac{5x+12}{x^2+5x+6} dx = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 6$ . Tính  $S = 3a + 2b + c$ .

- A.** -11.                      **B.** -14.                      **C.** -2.                      **D.** 3.

TÍCH PHÂN ĐỔI BIẾN

② **Tích phân đổi biến:**  $\int_a^b [f(x)] \cdot u'(x) \cdot dx = F[u(x)] \Big|_a^b = F[u(b)] - F[u(a)]$ .

$\swarrow$  Có sẵn       $\downarrow$  Tách từ hàm       $\searrow$  Nhân thêm

**Các bước tính tích phân đổi biến số**

- **Bước 1.** Biến đổi để chọn phép đặt  $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x) \cdot dx$
- **Bước 2.** Đổi cận:  $\begin{cases} x = b \\ x = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = u(b) \\ t = u(a) \end{cases}$
- **Bước 3.** Đưa về dạng  $I = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) \cdot dt$  đơn giản hơn và dễ tính toán.

**Một số phương pháp đổi biến số thường gặp**

**Đổi biến dạng 1.**  $I = \int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} \cdot dx = \underbrace{\int_a^b h(x) \cdot dx}_{I_1} + \underbrace{\int_a^b f(g(x)) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)} \cdot dx}_{I_2}$  với

**Đổi biến dạng 2.**

Nghĩa là nếu gặp tích phân **chứa căn thức** thì có khoảng 80% sẽ đặt  $t =$  căn trừ một số trường hợp ngoại lệ sau:

1/  $I_1 = \int f(\sqrt{a^2 - x^2}) \cdot x^{\text{chẵn}} \cdot dx \longrightarrow$  đặt  $x = a \cdot \sin t$  hoặc  $x = a \cdot \cos t$ .

**Câu 70:** Cho tích phân  $I = \int_0^1 \frac{x^7}{(1+x^2)^5} dx$ , giả sử đặt  $t = 1 + x^2$ . Tìm mệnh đề đúng.

**A.**  $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^5} dt$ .      **B.**  $I = \int_1^3 \frac{(t-1)^3}{t^5} dt$ .      **C.**  $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^4} dt$ .      **D.**  $I = \frac{3}{2} \int_1^4 \frac{(t-1)^3}{t^4} dt$ .

**Câu 71:** Có bao nhiêu số thực  $a$  để  $\int_0^1 \frac{x}{a+x^2} dx = 1$ .

**A.** 2      **B.** 1      **C.** 0      **D.** 3

**Câu 72:** Cho hàm số  $f(x)$  có  $f(1) = 0$  và  $f'(x) = 2019 \cdot 2020 \cdot x(x-1)^{2018}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Khi đó  $\int_0^1 f(x) dx$

bằng

**A.**  $\frac{2}{2021}$ .      **B.**  $\frac{1}{1011}$ .      **C.**  $-\frac{2}{2021}$ .      **D.**  $-\frac{1}{1011}$ .

**Câu 73:** Biết  $\int_0^1 \frac{2x^2 + 3x + 3}{x^2 + 2x + 1} dx = a - \ln b$  với  $a, b$  là các số nguyên dương. Tính  $P = a^2 + b^2$ .

**A.** 13.      **B.** 5.      **C.** 4.      **D.** 10.

**Câu 74:** Cho  $\int_1^2 e^{3x-1} dx = m(e^p - e^q)$  với  $m, p, q \in \mathbb{Q}$  và là các phân số tối giản. Giá trị  $m + p + q$  bằng

**A.** 10.      **B.** 6.      **C.**  $\frac{22}{3}$ .      **D.** 8.

- Câu 75:** Biết rằng  $\int_0^1 x e^{x^2+2} dx = \frac{a}{2}(e^b - e^c)$  với  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Giá trị của  $a+b+c$  bằng
- A. 4. B. 7. C. 5. D. 6.
- Câu 76:** Biết  $\int_1^e \frac{x+1}{x^2+x \ln x} dx = \ln(ae+b)$  với  $a, b$  là các số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức  $T = a^2 - ab + b^2$ .
- A. 3. B. 1. C. 0. D. 8.
- Câu 77:** Biết  $\int_1^2 (x+1)^2 e^{\frac{x-1}{x}} dx = m e^{\frac{p}{q}} - n$ , trong đó  $m, n, p, q$  là các số nguyên dương và  $\frac{p}{q}$  là phân số tối giản. Tính  $T = m + n + p + q$ .
- A.  $T = 11$ . B.  $T = 10$ . C.  $T = 7$ . D.  $T = 8$ .
- Câu 78:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  đồng thời thỏa mãn  $f(0) = f(1) = 5$ . Tính tích phân  $I = \int_0^1 f'(x) e^{f(x)} dx$ .
- A.  $I = 10$  B.  $I = -5$  C.  $I = 0$  D.  $I = 5$
- Câu 79:** Giả sử tích phân  $I = \int_1^5 \frac{1}{1+\sqrt{3x+1}} dx = a + b \ln 3 + c \ln 5$ . Lúc đó
- A.  $a+b+c = \frac{5}{3}$ . B.  $a+b+c = \frac{4}{3}$ . C.  $a+b+c = \frac{7}{3}$ . D.  $a+b+c = \frac{8}{3}$ .
- Câu 80:** Biết tích phân  $\int_0^{\ln 6} \frac{e^x}{1+\sqrt{e^x+3}} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$ , với  $a, b, c$  là các số nguyên. Tính  $T = a + b + c$ .
- A.  $T = -1$ . B.  $T = 0$ . C.  $T = 2$ . D.  $T = 1$ .
- Câu 81:** Tích phân  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$  bằng
- A.  $\frac{4}{3}$ . B.  $\frac{3}{2}$ . C.  $\frac{1}{3}$ . D.  $\frac{2}{3}$ .
- Câu 82:** Biết  $\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx = a + b\sqrt{2}$  với  $a, b$  là các số hữu tỷ. Tính  $S = a + b$ .
- A.  $S = 1$ . B.  $S = \frac{1}{2}$ . C.  $S = \frac{3}{4}$ . D.  $S = \frac{2}{3}$ .
- Câu 83:** Cho tích phân  $I = \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{16-x^2} dx$  và  $x = 4 \sin t$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A.  $I = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt$ . B.  $I = 16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t dt$ . C.  $I = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2t) dt$ . D.  $I = -16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt$ .
- Câu 84:** Biết  $\int_1^5 \frac{1}{1+\sqrt{3x+1}} dx = a + b \ln 3 + c \ln 5$  ( $a, b, c \in \mathbb{Q}$ ). Giá trị của  $a + b + c$  bằng
- A.  $\frac{7}{3}$ . B.  $\frac{5}{3}$ . C.  $\frac{8}{3}$ . D.  $\frac{4}{3}$ .

**Câu 85:** Cho biết  $\int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx = \frac{m}{n}$  với  $\frac{m}{n}$  là một phân số tối giản. Tính  $m - 7n$

- A. 0.                      B. 1.                      C. 2.                      D. 91.

**Câu 86:** Biết rằng  $\int_0^1 \frac{dx}{3x+5\sqrt{3x+1}+7} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ , với  $a, b, c$  là các số hữu tỉ. Giá trị của  $a+b+c$  bằng

- A.  $-\frac{10}{3}$                       B.  $-\frac{5}{3}$                       C.  $\frac{10}{3}$                       D.  $\frac{5}{3}$

**Câu 87:** Biết  $\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx = a + b\sqrt{2}$  với  $a, b$  là các số hữu tỷ. Tính  $S = a + b$ .

- A.  $S = 1$ .                      B.  $S = \frac{1}{2}$ .                      C.  $S = \frac{3}{4}$ .                      D.  $S = \frac{2}{3}$ .

**Câu 88:** Cho  $\int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}} dx = \frac{a}{3} + b \ln 2 + c \ln 3$  với  $a, b, c$  là các số nguyên. Giá trị  $a+b+c$  bằng:

- A. 9                      B. 2                      C. 1                      D. 7

**Câu 89:** Cho  $I = \int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}} dx = \frac{a}{d} + b \ln 2 + c \ln d$ , với  $a, b, c, d$  là các số nguyên và  $\frac{a}{d}$  là phân số tối giản. Giá trị của  $a+b+c+d$  bằng

- A. 16.                      B. 4.                      C. 28.                      D. -2.

**Câu 90:** Tính  $I = \int_0^a \frac{x^3+x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ .

- A.  $I = (a^2+1)\sqrt{a^2+1} - 1$ .                      B.  $I = \frac{1}{3}[(a^2+1)\sqrt{a^2+1} - 1]$ .  
C.  $I = \frac{1}{3}[(a^2+1)\sqrt{a^2+1} + 1]$ .                      D.  $I = (a^2+1)\sqrt{a^2+1} + 1$ .

**Câu 91:** Giá trị của tích phân  $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$  bằng tích phân nào dưới đây?

- A.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin^2 y dy$ .                      B.  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx$ .                      C.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 y}{\cos y} dy$ .                      D.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2 y dy$ .

**Câu 92:** Biết  $\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x^2-1} dx = \frac{b}{a} \ln 5 - c \ln 2$  với  $a, b, c$  là các số nguyên và phân số  $\frac{a}{b}$  là tối giản.

Tính  $P = 3a + 2b + c$ .

- A. 11.                      B. 12.                      C. 14.                      D. 13.

**Câu 93:** Cho tích phân  $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$  nếu đổi biến số  $x = 2 \sin t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  thì ta được.

- A.  $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} dt$ .                      B.  $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt$ .                      C.  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t dt$ .                      D.  $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{t}$ .

**Câu 94:** Biết  $\int_0^1 \frac{x^3}{x+\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{a\sqrt{b}+c}{15}$  với  $a, b, c$  là các số nguyên và  $b \geq 0$ . Tính  $P = a + b^2 - c$ .

- A.  $P = 3$ .                      B.  $P = 7$ .                      C.  $P = -7$ .                      D.  $P = 5$ .

**Câu 95:** Cho  $n$  là số nguyên dương khác 0, hãy tính tích phân  $I = \int_0^1 (1-x^2)^n x dx$  theo  $n$ .

- A.  $I = \frac{1}{2n+2}$ .      B.  $I = \frac{1}{2n}$ .      C.  $I = \frac{1}{2n-1}$ .      D.  $I = \frac{1}{2n+1}$ .

**Câu 96:** Giả sử  $I = \int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = a \ln \frac{2}{3} + b$  với  $a, b$  là số nguyên. Khi đó giá trị  $a-b$  là

- A. -17.      B. 5.      C. -5.      D. 17.

**Câu 97:** Cho hàm số  $f(x)$  có  $f(\sqrt{2}) = -2$  và  $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{6-x^2}}, \forall x \in (-\sqrt{6}; \sqrt{6})$ . Khi đó  $\int_0^{\sqrt{3}} f(x) dx$  bằng

- A.  $-\frac{3\pi}{4}$ .      B.  $\frac{3\pi+6}{4}$ .      C.  $\frac{\pi+2}{4}$ .      D.  $-\frac{3\pi+6}{4}$ .

**Câu 98:** Biết  $\int_1^2 \frac{x}{3x + \sqrt{9x^2-1}} dx = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{35}$  với  $a, b, c$  là các số hữu tỷ, tính  $P = a + 2b + c - 7$ .

- A.  $-\frac{1}{9}$ .      B.  $\frac{86}{27}$ .      C. -2.      D.  $\frac{67}{27}$ .

**Câu 99:** Biết  $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x+1} + (x+1)\sqrt{x}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c}$  với  $a, b, c$  là các số nguyên dương. Tính  $P = a + b + c$ .

- A.  $P = 44$ .      B.  $P = 42$ .      C.  $P = 46$ .      D.  $P = 48$ .

**Câu 100:** Biết  $\int_0^4 \frac{\sqrt{2x+1} dx}{2x+3\sqrt{2x+1}+3} = a + b \ln 2 + c \ln \frac{5}{3}$  ( $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ). Tính  $T = 2a + b + c$ .

- A.  $T = 4$ .      B.  $T = 2$ .      C.  $T = 1$ .      D.  $T = 3$ .

**Câu 101:** Cho  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5 \sin x + 6} dx = a \ln \frac{4}{c} + b$ , tính tổng  $S = a + b + c$

- A.  $S = 1$ .      B.  $S = 4$ .      C.  $S = 3$ .      D.  $S = 0$ .

**Câu 102:** Cho tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2+\cos x} \cdot \sin x dx$ . Nếu đặt  $t = 2 + \cos x$  thì kết quả nào sau đây đúng?

- A.  $I = \int_3^2 \sqrt{t} dt$ .      B.  $I = \int_2^3 \sqrt{t} dt$ .      C.  $I = 2 \int_3^2 \sqrt{t} dt$ .      D.  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{t} dt$ .

**Câu 103:** Tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$  bằng cách đặt  $u = \tan x$ , mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} u^2 du$ .      B.  $I = \int_0^2 \frac{1}{u^2} du$ .      C.  $I = -\int_0^1 u^2 du$ .      D.  $I = \int_0^1 u^2 du$ .

**Câu 104:** Tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$ .

- A.  $I = \frac{5}{2}$ .      B.  $I = \frac{3}{2}$ .      C.  $I = \frac{\pi}{3} + \frac{9}{20}$ .      D.  $I = \frac{9}{4}$ .

**Câu 105:** Cho tích phân  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + 2} dx = a \ln 5 + b \ln 2$  với  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A.  $2a + b = 0$ . B.  $a - 2b = 0$ . C.  $2a - b = 0$ . D.  $a + 2b = 0$ .

**Câu 106:** Có bao nhiêu số  $a \in (0; 20\pi)$  sao cho  $\int_0^a \sin^5 x \sin 2x dx = \frac{2}{7}$ .

- A. 10. B. 9. C. 20. D. 19.

**Câu 107:** Biết  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{1 + \sin x} = \frac{a\sqrt{3} + b}{c}$ , với  $a, b \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{Z}^+$  và  $a, b, c$  là các số nguyên tố cùng nhau. Giá trị của tổng  $a + b + c$  bằng

- A. 5. B. 12. C. 7. D. -1.

**Câu 108:** Cho tích phân số  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + 2} dx = a \ln 5 + b \ln 2$  với  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A.  $2a + b = 0$ . B.  $a - 2b = 0$ . C.  $2a - b = 0$ . D.  $a + 2b = 0$ .

**Câu 109:** Cho  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos^2 x - 5 \cos x + 6} dx = a \ln \frac{4}{c} + b$ , với  $a, b$  là các số hữu tỉ,  $c > 0$ . Tính tổng  $S = a + b + c$ .

- A.  $S = 3$ . B.  $S = 0$ . C.  $S = 1$ . D.  $S = 4$ .

**Câu 110:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có  $f(0) = 1$  và  $f'(x) = \tan^3 x + \tan x, \forall x \in \mathbb{R}$ . Biết

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \frac{a + \pi}{b}; a, b \in \mathbb{Q}, \text{ khi đó } b - a \text{ bằng}$$

- A. 4. B. 12. C. 0. D. -4.

**Câu 111:** Cho tích phân  $I = \int_1^e \frac{3 \ln x + 1}{x} dx$ . Nếu đặt  $t = \ln x$  thì

- A.  $I = \int_0^1 \frac{3t + 1}{e^t} dt$ . B.  $I = \int_1^e \frac{3t + 1}{t} dt$ . C.  $I = \int_1^e (3t + 1) dt$ . D.  $I = \int_0^1 (3t + 1) dt$ .

**Câu 112:** Cho  $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)^2} dx = a \ln 3 + b \ln 2 + \frac{c}{3}$ , với  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Khẳng định nào sau đây **đúng**.

- A.  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . B.  $a^2 + b^2 + c^2 = 11$ . C.  $a^2 + b^2 + c^2 = 9$ . D.  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ .

**Câu 113:** Biết  $I = \int_0^4 x \ln(x^2 + 9) dx = a \ln 5 + b \ln 3 + c$  trong đó  $a, b, c$  là các số thực. Giá trị của biểu thức

$$T = a + b + c \text{ là:}$$

- A.  $T = 11$ . B.  $T = 9$ . C.  $T = 10$ . D.  $T = 8$ .

**Câu 114:** Cho  $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)^2} dx$  có kết quả dạng  $I = \ln a + b$  với  $a > 0, b \in \mathbb{R}$ . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A.  $2ab = -1$ . B.  $2ab = 1$ . C.  $-b + \ln \frac{3}{2a} = -\frac{1}{3}$ . D.  $-b + \ln \frac{3}{2a} = \frac{1}{3}$ .

**Câu 115:** Cho  $\int_1^e \frac{2\ln x + 1}{x(\ln x + 2)^2} dx = \ln \frac{a}{b} - \frac{c}{d}$  với  $a, b, c$  là các số nguyên dương, biết  $\frac{a}{b}; \frac{c}{d}$  là các phân số tối giản. Tính giá trị  $a + b + c + d$  ?  
**A.** 18. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 17.

**Câu 116:** Cho  $\int_1^e \frac{(3x^3 - 1)\ln x + 3x^2 - 1}{1 + x \ln x} dx = a.e^3 + b + c.\ln(e + 1)$  với  $a, b, c$  là các số nguyên và  $\ln e = 1$ .  
 Tính  $P = a^2 + b^2 + c^2$ .  
**A.**  $P = 9$ . **B.**  $P = 14$ . **C.**  $P = 10$ . **D.**  $P = 3$ .

**Câu 117:** Biết  $I = \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x + 3e^{-x} + 4} = \frac{1}{c}(\ln a - \ln b + \ln c)$  với  $a, b, c$  là các số nguyên dương.  
 Tính  $P = 2a - b + c$ .  
**A.**  $P = -3$ . **B.**  $P = -1$ . **C.**  $P = 4$ . **D.**  $P = 3$

**Câu 118:** Cho  $\int_0^1 \frac{(x^2 + x)e^x}{x + e^{-x}} dx = a.e + b \ln(e + c)$  với  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Tính  $P = a + 2b - c$ .  
**A.**  $P = 1$ . **B.**  $P = -1$ . **C.**  $P = 0$ . **D.**  $P = -2$ .

**Câu 119:** Cho hàm số  $y = f(x)$  biết  $f(0) = \frac{1}{2}$  và  $f'(x) = xe^{x^2}$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Khi đó  $\int_0^1 xf'(x) dx$  bằng  
**A.**  $\frac{e+1}{4}$ . **B.**  $\frac{e-1}{4}$ . **C.**  $\frac{e-1}{2}$ . **D.**  $\frac{e+1}{2}$ .

**Câu 120:** Biết rằng  $\int_1^e \frac{2\ln x + 1}{x(\ln x + 1)^2} dx = a \ln 2 - \frac{b}{c}$  với  $a, b, c$  là các số nguyên dương và  $\frac{b}{c}$  là phân số tối giản. Tính  $S = a + b + c$ .  
**A.**  $S = 3$ . **B.**  $S = 7$ . **C.**  $S = 10$ . **D.**  $S = 5$ .

## TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

Nếu  $u, v$  có đạo hàm liên tục trên  $(a; b)$  thì  $I = \int_a^b u \cdot dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$ .

Chọn  $\begin{cases} u = \dots\dots\dots \xrightarrow{\text{Vi phân}} du = \dots\dots\dots dx \\ dv = \dots\dots\dots dx \xrightarrow{\text{Nguyên hàm}} v = \dots\dots\dots \end{cases}$

Nhận dạng: **tích hai hàm khác loại nhân nhau**

Thứ tự ưu tiên **chọn u** là: "**log – đa – lượng – mũ**" và **dv** là **phần còn lại**.

Nghĩa là nếu có  $\ln$  hay  $\log_a x$  thì chọn  $u = \ln$  hay  $u = \log_a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x$  và  $dv =$  còn lại. Nếu không có  $\ln; \log$  thì chọn  $u =$  đa thức và  $dv =$  còn lại,...

**CHÚ Ý:**  $\int_a^b (\text{hàm mũ}) \cdot dx \longrightarrow$  tích phân từng phần luân hồi.

Nghĩa là sau khi đặt  $u, dv$  để tính tích phân từng phần và tiếp tục tính  $\int u dv$  sẽ xuất hiện lại tích phân ban đầu. Giả sử tích phân được tính ban đầu là  $I$  và nếu lặp lại, ta sẽ không giải tiếp mà xem đây là phương trình bậc nhất ẩn là  $I \xrightarrow{\text{giải}} I$ .

**Câu 121:** Biết  $\int_0^1 x \ln(x^2 + 1) dx = a \ln 2 - \frac{b}{c}$ . Tính  $P = 13a + 10b + 84c$ .

- A. 193.                      B. 191.                      C. 190.                      D. 189.

**Câu 122:** Cho hàm số  $f(x)$  có  $f(0) = -1$  và  $f'(x) = x(6 + 12x + e^{-x})$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Khi đó  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng

- A.  $3e$ .                      B.  $3e^{-1}$ .                      C.  $4 - 3e^{-1}$ .                      D.  $-3e^{-1}$ .

**Câu 123:** Biết  $I = \int_0^4 x \ln(x^2 + 9) dx = a \ln 5 + b \ln 3 + c$  trong đó  $a, b, c$  là các số thực. Tính giá trị của biểu thức  $T = a + b + c$ .

- A.  $T = 9$ .                      B.  $T = 11$ .                      C.  $T = 8$ .                      D.  $T = 10$ .

**Câu 124:** Tích phân  $\int_0^1 (x - 2)e^{2x} dx$  bằng

- A.  $\frac{-5 - 3e^2}{4}$ .                      B.  $\frac{5 - 3e^2}{4}$ .                      C.  $\frac{5 - 3e^2}{2}$ .                      D.  $\frac{5 + 3e^2}{4}$ .

**Câu 125:** Biết rằng tích phân  $\int_0^1 (2x + 1)e^x dx = a + b \cdot e$ , tích  $a \cdot b$  bằng

- A. -15.                      B. -1.                      C. 1.                      D. 20.

**Câu 126:** Cho tích phân  $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{b}{c} + a \ln 2$  với  $a$  là số thực,  $b$  và  $c$  là các số dương, đồng thời  $\frac{b}{c}$  là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức  $P = 2a + 3b + c$ .

- A.  $P = 6$ .                      B.  $P = 5$ .                      C.  $P = -6$ .                      D.  $P = 4$ .

**Câu 127:** Cho tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x-1) \sin 2x dx$ . Tìm đẳng thức đúng?

- A.  $I = -(x-1) \cos 2x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$ .  
 B.  $I = -\frac{1}{2}(x-1) \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$ .  
 C.  $I = -\frac{1}{2}(x-1) \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$ .  
 D.  $I = -(x-1) \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$ .

**Câu 128:** Biết rằng tồn tại duy nhất các bộ số nguyên  $a, b, c$  sao cho  $\int_2^3 (4x+2) \ln x dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$ .

Giá trị của  $a+b+c$  bằng

- A. 19. B. -19. C. 5. D. -5.

**Câu 129:** Cho  $\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx = a \ln 2 + b \ln 3$ , với  $a, b$  là các số hữu tỉ. Tính  $P = a + 4b$ .

- A.  $P = 0$  B.  $P = 1$  C.  $P = 3$  D.  $P = -3$

**Câu 130:** Biết  $\int_0^2 2x \ln(x+1) dx = a \ln b$ , với  $a, b \in \mathbb{N}^*$ ,  $b$  là số nguyên tố. Tính  $6a + 7b$ .

- A.  $6a + 7b = 33$ . B.  $6a + 7b = 25$ . C.  $6a + 7b = 42$ . D.  $6a + 7b = 39$ .

**Câu 131:** Biết rằng  $\int_1^a \ln x dx = 1 + 2a$ , ( $a > 1$ ). Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

- A.  $a \in (18; 21)$ . B.  $a \in (1; 4)$ . C.  $a \in (11; 14)$ . D.  $a \in (6; 9)$ .

**Câu 132:** Cho tích phân  $\int_0^1 (x-2)e^x dx = a + be$ , với  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Tổng  $a + b$  bằng

- A. 1. B. -3. C. 5. D. -1.

**Câu 133:** Tính tích phân  $I = \int_1^2 x e^x dx$ .

- A.  $I = e^2$ . B.  $I = -e^2$ . C.  $I = e$ . D.  $I = 3e^2 - 2e$ .

**Câu 134:** Biết rằng  $\int_2^3 x \ln x dx = m \ln 3 + n \ln 2 + p$  trong đó  $m, n, p \in \mathbb{Q}$ . Tính  $m + n + 2p$

- A.  $\frac{5}{4}$ . B.  $\frac{9}{2}$ . C. 0. D.  $-\frac{5}{4}$ .

**Câu 135:** Biết  $\int_0^2 2x \ln(1+x) dx = a \ln b$ , với  $a, b \in \mathbb{N}^*$ ,  $b$  là số nguyên tố. Tính  $3a + 4b$ .

- A. 42. B. 21. C. 12. D. 32.

**Câu 136:** Biết  $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = \frac{\sqrt{3}}{a} \pi - \ln b$ . Khi đó, giá trị của  $a^2 + b$  bằng

- A. 11. B. 7. C. 13. D. 9.

**Câu 137:** Cho  $\int_1^2 \frac{\ln(1+2x)}{x^2} dx = \frac{a}{2} \ln 5 + b \ln 3 + c \ln 2$ , với  $a, b, c$  là các số nguyên. Giá trị của  $a + 2(b+c)$

là:

- A. 0. B. 9. C. 3. D. 5.

**Câu 138:** Cho  $\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx = a \ln 2 + b \ln 3$ , với  $a, b$  là các số hữu tỉ. Tính  $P = ab$ .

A.  $P = \frac{3}{2}$ .

B.  $P = 0$ .

C.  $P = \frac{-9}{2}$ .

D.  $P = -3$ .

**Câu 139:** Cho tích phân  $\int_0^1 (x-2)e^x dx = a + be$ , với  $a; b \in \mathbb{Z}$ . Tổng  $a + b$  bằng

A. 1.

B. -3.

C. 5.

D. -1.

**Câu 140:** Biết  $\int_{\frac{1}{12}}^{12} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx = \frac{a}{b} e^{\frac{c}{d}}$  trong đó  $a, b, c, d$  là các số nguyên dương và các phân số  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$

là tối giản. Tính  $bc - ad$ .

A. 12.

B. 1.

C. 24.

D. 64.

**Câu 141:** Cho  $\int_0^2 \frac{x + \ln(x+1)}{(x+2)^2} dx = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \ln 3$ . Tính  $P = (a+b)(c+d)$ .

A. 7.

B. -7.

C. 3.

D. -3.

**Câu 142:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có  $f(1) = \frac{1}{2}$  và  $f'(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$  với  $x > -1$ . Biết  $\int_1^2 f(x) dx = a \ln \frac{b}{c} - d$

với  $a, b, c, d$  là các số nguyên dương,  $b \leq 3$  và  $\frac{b}{c}$  tối giản. Khi đó  $a + b + c + d$  bằng

A. 8.

B. 5.

C. 6.

D. 10.



# NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN

## ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

### BÀI 2. TÍCH PHÂN



#### HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**Câu 1:** Khẳng định nào trong các khẳng định sau đúng với mọi hàm  $f, g$  liên tục trên  $K$  và  $a, b$  là các số bất kỳ thuộc  $K$  ?

**A.**  $\int_a^b [f(x) + 2g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + 2 \int_a^b g(x)dx.$ 
**B.**  $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}.$

**C.**  $\int_a^b [f(x) \cdot g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx.$ 
**D.**  $\int_a^b f^2(x)dx = \left[ \int_a^b f(x)dx \right]^2.$

**Lời giải**

Theo tính chất tích phân ta có

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx; \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx, \text{ với } k \in \mathbb{R}.$$

**Câu 2:** Cho  $\int_{-2}^2 f(x)dx = 1$ ,  $\int_{-2}^4 f(t)dt = -4$ . Tính  $\int_2^4 f(y)dy$ .

**A.**  $I = 5.$

**B.**  $I = -3.$

**C.**  $I = 3.$

**D.**  $I = -5.$

**Lời giải**

Ta có:  $\int_{-2}^4 f(t)dt = \int_{-2}^4 f(x)dx, \int_2^4 f(y)dy = \int_2^4 f(x)dx.$

Khi đó:  $\int_{-2}^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx = \int_{-2}^4 f(x)dx.$

$$\Rightarrow \int_2^4 f(x)dx = \int_{-2}^4 f(x)dx - \int_{-2}^2 f(x)dx = -4 - 1 = -5.$$

Vậy  $\int_2^4 f(y)dy = -5.$

**Câu 3:** Cho  $\int_0^2 f(x)dx = 3$  và  $\int_0^2 g(x)dx = 7$ , khi đó  $\int_0^2 [f(x) + 3g(x)]dx$  bằng

A. 16.

B. -18.

**C. 24.**

D. 10.

Lời giải

Ta có

$$\int_0^2 [f(x) + 3g(x)] dx = \int_0^2 f(x) dx + 3 \int_0^2 g(x) dx = 3 + 3 \cdot 7 = 24.$$

**Câu 4:** Cho  $\int_0^1 f(x) dx = -1$ ;  $\int_0^3 f(x) dx = 5$ . Tính  $\int_1^3 f(x) dx$

A. 1.

B. 4.

**C. 6.**

D. 5.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx \Rightarrow \int_1^3 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx = 5 + 1 = 6$$

$$\text{Vậy } \int_1^3 f(x) dx = 6$$

**Câu 5:** Cho  $\int_1^2 f(x) dx = -3$  và  $\int_2^3 f(x) dx = 4$ . Khi đó  $\int_1^3 f(x) dx$  bằng

A. 12.

B. 7.

**C. 1.**

D. -12.

Lời giải

$$\int_1^3 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx = -3 + 4 = 1.$$

**Câu 6:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục, có đạo hàm trên  $[-1; 2]$ ,  $f(-1) = 8$ ;  $f(2) = -1$ . Tích phân  $\int_{-1}^2 f'(x) dx$  bằng

A. 1.

B. 7.

**C. -9.**

D. 9.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_{-1}^2 f'(x) dx = f(x) \Big|_{-1}^2 = f(2) - f(-1) = -1 - 8 = -9.$$

**Câu 7:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $R$  và có  $\int_0^2 f(x) dx = 9$ ;  $\int_2^4 f(x) dx = 4$ . Tính  $I = \int_0^4 f(x) dx$ .

A.  $I = 5$ .

B.  $I = 36$ .

C.  $I = \frac{9}{4}$ .

**D.  $I = 13$ .**

Lời giải

$$\text{Ta có: } I = \int_0^4 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx = 9 + 4 = 13.$$

**Câu 8:** Cho  $\int_{-1}^0 f(x) dx = 3$ ;  $\int_0^3 f(x) dx = 3$ . Tích phân  $\int_1^3 f(x) dx$  bằng

A. 6

**B. 4**

C. 2

D. 0

Lời giải

$$\text{Có } \int_{-1}^0 f(x) dx = 3; \int_0^3 f(x) dx = 1; \int_{-1}^3 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx = 3 + 1 = 4$$

**Câu 9:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $\int_0^4 f(x) dx = 10$ ,  $\int_3^4 f(x) dx = 4$ . Tích phân  $\int_0^3 f(x) dx$  bằng

- A. 4.                                      B. 7.                                      C. 3.                                      **D. 6.**

**Lời giải**

Theo tính chất của tích phân, ta có:  $\int_0^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx = \int_0^4 f(x) dx$ .

$$\text{Suy ra: } \int_0^3 f(x) dx = \int_0^4 f(x) dx - \int_3^4 f(x) dx = 10 - 4 = 6.$$

$$\text{Vậy } \int_0^3 f(x) dx = 6.$$

**Câu 10:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $\int_1^8 f(x) dx = 9$ ,  $\int_4^{12} f(x) dx = 3$ ,  $\int_4^8 f(x) dx = 5$ .

$$\text{Tính } I = \int_1^{12} f(x) dx.$$

- A.  $I = 17$ .                                      B.  $I = 1$ .                                      C.  $I = 11$ .                                      **D.  $I = 7$ .**

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } I = \int_1^{12} f(x) dx = \int_1^8 f(x) dx + \int_8^{12} f(x) dx = \int_1^8 f(x) dx + \int_8^4 f(x) dx - \int_4^8 f(x) dx = 9 + 3 - 5 = 7$$

.

**Câu 11:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $[0;10]$  thỏa mãn  $\int_0^{10} f(x) dx = 7$ ,  $\int_2^6 f(x) dx = 3$ . Tính

$$P = \int_0^2 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx.$$

- A.  $P = 10$ .                                      **B.  $P = 4$ .**                                      C.  $P = 7$ .                                      D.  $P = -6$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \int_0^{10} f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^6 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx$$

$$\text{Suy ra } \int_0^2 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx = \int_0^{10} f(x) dx - \int_2^6 f(x) dx = 7 - 3 = 4.$$

**Câu 12:** Cho  $f, g$  là hai hàm liên tục trên đoạn  $[1;3]$  thỏa:

$$\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10, \int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6. \text{ Tính } \int_1^3 [f(x) + g(x)] dx.$$

A. 7.

**B. 6.**

C. 8.

D. 9.

Lời giải

$$\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x) dx + 3 \int_1^3 g(x) dx = 10 \quad (1).$$

$$\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6 \Leftrightarrow 2 \int_1^3 f(x) dx - \int_1^3 g(x) dx = 6 \quad (2).$$

$$\text{Đặt } X = \int_1^3 f(x) dx, Y = \int_1^3 g(x) dx.$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: } \begin{cases} X + 3Y = 10 \\ 2X - Y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 4 \\ Y = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó ta được: } \int_1^3 f(x) dx = 4 \text{ và } \int_1^3 g(x) dx = 2.$$

$$\text{Vậy } \int_1^3 [f(x) + g(x)] dx = 4 + 2 = 6.$$

**Câu 13:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0;10]$  và  $\int_0^{10} f(x) dx = 7$ ;  $\int_2^6 f(x) dx = 3$ . Tính

$$P = \int_0^2 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx.$$

**A.  $P = 4$**

B.  $P = 10$

C.  $P = 7$

D.  $P = -4$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \int_0^{10} f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^6 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx.$$

$$\Rightarrow 7 = P + 3 \Rightarrow P = 4.$$

**Câu 14:** Cho  $f, g$  là hai hàm số liên tục trên  $[1;3]$  thỏa mãn điều kiện  $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10$  đồng thời

$$\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6. \text{ Tính } \int_1^3 [f(x) + g(x)] dx.$$

A. 9.

**B. 6.**

C. 7.

D. 8.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x) dx + 3 \int_1^3 g(x) dx = 10.$$

$$\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6 \Leftrightarrow 2 \int_1^3 f(x) dx - \int_1^3 g(x) dx = 6.$$

$$\text{Đặt } u = \int_1^3 f(x) dx; v = \int_1^3 g(x) dx.$$

Ta được hệ phương trình:  $\begin{cases} u+3v=10 \\ 2u-v=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=4 \\ v=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_1^3 f(x)dx=4 \\ \int_1^3 g(x)dx=2 \end{cases}$

Vậy  $\int_1^3 [f(x)+g(x)]dx=6$ .

**Câu 15:** Cho  $f, g$  là hai hàm liên tục trên  $[1;3]$  thỏa:  $\int_1^3 [f(x)+3g(x)]dx=10$  và

$\int_1^3 [2f(x)-g(x)]dx=6$ . Tính  $I=\int_1^3 [f(x)+g(x)]dx$ .

A. 8.

B. 7.

C. 9.

**D. 6.**

**Lời giải**

Đặt  $a=\int_1^3 f(x)dx$  và  $b=\int_1^3 g(x)dx$ .

Khi đó,  $\int_1^3 [f(x)+3g(x)]dx=a+3b$ ,  $\int_1^3 [2f(x)-g(x)]dx=2a-b$ .

Theo giả thiết, ta có  $\begin{cases} a+3b=10 \\ 2a-b=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=2 \end{cases}$ .

Vậy  $I=a+b=6$ .

**Câu 16:** Cho  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=5$ . Tính  $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x)+2\sin x]dx=5$ .

**A.  $I=7$**

B.  $I=5+\frac{\pi}{2}$

C.  $I=3$

D.  $I=5+\pi$

**Lời giải**

Ta có

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x)+2\sin x]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx+2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx-2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=5-2(0-1)=7.$$

**Câu 17:** Cho  $\int_{-1}^2 f(x)dx=2$  và  $\int_{-1}^2 g(x)dx=-1$ . Tính  $I=\int_{-1}^2 [x+2f(x)-3g(x)]dx$ .

**A.  $I=\frac{17}{2}$**

B.  $I=\frac{5}{2}$

C.  $I=\frac{7}{2}$

D.  $I=\frac{11}{2}$

**Lời giải**

Ta có:  $I=\int_{-1}^2 [x+2f(x)-3g(x)]dx=\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^2+2\int_{-1}^2 f(x)dx-3\int_{-1}^2 g(x)dx=\frac{3}{2}+2.2-3(-1)=\frac{17}{2}$ .

**Câu 18:** Cho hai tích phân  $\int_{-2}^5 f(x)dx=8$  và  $\int_5^{-2} g(x)dx=3$ . Tính  $I=\int_{-2}^5 [f(x)-4g(x)-1]dx$

**A. 13.**

**B. 27.**

**C. -11.**

**D. 3.**

**Lời giải**

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^5 [f(x) - 4g(x) - 1] dx = \int_{-2}^5 f(x) dx - \int_{-2}^5 4g(x) dx - \int_{-2}^5 1 dx = \int_{-2}^5 f(x) dx - 4 \int_{-2}^5 g(x) dx - \int_{-2}^5 1 dx \\ &= \int_{-2}^5 f(x) dx + 4 \int_5^{-2} g(x) dx - \int_{-2}^5 1 dx = 8 + 4.3 - x \Big|_{-2}^5 = 8 + 4.3 - 7 = 13. \end{aligned}$$

**Câu 19:** Cho  $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$  và  $\int_{-1}^2 g(x) dx = -1$ , khi đó  $\int_{-1}^2 [x + 2f(x) + 3g(x)] dx$  bằng

**A.  $\frac{5}{2}$**

**B.  $\frac{7}{2}$**

**C.  $\frac{17}{2}$**

**D.  $\frac{11}{2}$**

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \int_{-1}^2 [x + 2f(x) + 3g(x)] dx = \int_{-1}^2 x dx + 2 \int_{-1}^2 f(x) dx + 3 \int_{-1}^2 g(x) dx = \frac{3}{2} + 4 - 3 = \frac{5}{2}$$

**Câu 20:** Cho  $\int_0^2 f(x) dx = 3$ ,  $\int_0^2 g(x) dx = -1$  thì  $\int_0^2 [f(x) - 5g(x) + x] dx$  bằng:

**A. 12.**

**B. 0.**

**C. 8.**

**D. 10**

**Lời giải**

$$\int_0^2 [f(x) - 5g(x) + x] dx = \int_0^2 f(x) dx - 5 \int_0^2 g(x) dx + \int_0^2 x dx = 3 + 5 + 2 = 10$$

**Câu 21:** Cho  $\int_0^5 f(x) dx = -2$ . Tích phân  $\int_0^5 [4f(x) - 3x^2] dx$  bằng

**A. -140.**

**B. -130.**

**C. -120.**

**D. -133.**

**Lời giải**

$$\int_0^5 [4f(x) - 3x^2] dx = 4 \int_0^5 f(x) dx - \int_0^5 3x^2 dx = -8 - x^3 \Big|_0^5 = -8 - 125 = -133.$$

**Câu 22:** Cho  $\int_1^2 [4f(x) - 2x] dx = 1$ . Khi đó  $\int_1^2 f(x) dx$  bằng:

**A. 1.**

**B. -3.**

**C. 3.**

**D. -1.**

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \int_1^2 [4f(x) - 2x] dx &= 1 \Leftrightarrow 4 \int_1^2 f(x) dx - 2 \int_1^2 x dx = 1 \Leftrightarrow 4 \int_1^2 f(x) dx - 2 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow 4 \int_1^2 f(x) dx = 4 \Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx = 1 \end{aligned}$$

**Câu 23:** Cho  $\int_0^1 f(x) dx = 1$  tích phân  $\int_0^1 (2f(x) - 3x^2) dx$  bằng

**A.** 1.

**B.** 0.

**C.** 3.

**D.** -1.

**Lời giải**

Chọn. **A.**

$$\int_0^1 (2f(x) - 3x^2) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx - 3 \int_0^1 x^2 dx = 2 - 1 = 1.$$

**Câu 24:** Tính tích phân  $I = \int_{-1}^0 (2x+1) dx$ .

**A.**  $I = 0$ .

**B.**  $I = 1$ .

**C.**  $I = 2$ .

**D.**  $I = -\frac{1}{2}$ .

**Lời giải**

$$I = \int_{-1}^0 (2x+1) dx = (x^2 + x) \Big|_{-1}^0 = 0 - 0 = 0.$$

**Câu 25:** Tích phân  $\int_0^1 (3x+1)(x+3) dx$  bằng

**A.** 12.

**B.** 9.

**C.** 5.

**D.** 6.

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \int_0^1 (3x+1)(x+3) dx = \int_0^1 (3x^2 + 10x + 3) dx = (x^3 + 5x^2 + 3x) \Big|_0^1 = 9.$$

$$\text{Vậy: } \int_0^1 (3x+1)(x+3) dx = 9.$$

**Câu 26:** Giá trị của  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$  bằng

**A.** 0.

**B.** 1.

**C.** -1.

**D.**  $\frac{\pi}{2}$ .

**Lời giải**

$$+ \text{ Tính được } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

**Câu 27:** Tính tích phân  $I = \int_0^2 (2x+1) dx$

**A.**  $I = 5$ .

**B.**  $I = 6$ .

**C.**  $I = 2$ .

**D.**  $I = 4$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } I = \int_0^2 (2x+1) dx = (x^2 + x) \Big|_0^2 = 4 + 2 = 6.$$

**Câu 28:** Với  $a, b$  là các tham số thực. Giá trị tích phân  $\int_0^b (3x^2 - 2ax - 1)dx$  bằng

- A.**  $b^3 - b^2a - b$ .      **B.**  $b^3 + b^2a + b$ .      **C.**  $b^3 - ba^2 - b$ .      **D.**  $3b^2 - 2ab - 1$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \int_0^b (3x^2 - 2ax - 1)dx = \left(x^3 - ax^2 - x\right)\Big|_0^b = b^3 - ab^2 - b.$$

**Câu 29:** Giả sử  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x dx = a + b \frac{\sqrt{2}}{2}$  ( $a, b \in \mathbb{Q}$ ). Khi đó giá trị của  $a - b$  là

- A.**  $-\frac{1}{6}$       **B.**  $-\frac{1}{6}$       **C.**  $-\frac{3}{10}$       **D.**  $\frac{1}{5}$

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x dx = -\frac{1}{3} \cos 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Suy ra } a = b = \frac{1}{3} \Rightarrow a - b = 0.$$

**Câu 30:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $\int_0^2 (f(x) + 3x^2) dx = 10$ . Tính  $\int_0^2 f(x) dx$ .

- A.** 2.      **B.** -2.      **C.** 18.      **D.** -18.

**Lời giải**

Ta có:

$$\begin{aligned} \int_0^2 (f(x) + 3x^2) dx = 10 &\Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx + \int_0^2 3x^2 dx = 10 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx = 10 - \int_0^2 3x^2 dx \\ &\Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx = 10 - x^3 \Big|_0^2 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx = 10 - 8 = 2. \end{aligned}$$

**Câu 31:** Cho  $\int_0^m (3x^2 - 2x + 1) dx = 6$ . Giá trị của tham số  $m$  thuộc khoảng nào sau đây?

- A.**  $(-1; 2)$ .      **B.**  $(-\infty; 0)$ .      **C.**  $(0; 4)$ .      **D.**  $(-3; 1)$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \int_0^m (3x^2 - 2x + 1) dx = 6 \Leftrightarrow \left(x^3 - x^2 + x\right)\Big|_0^m = 6 \Leftrightarrow m^3 - m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 2.$$

Vậy  $m \in (0; 4)$ .

**Câu 32:** Tính tích phân  $I = \int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$

- A.**  $I = \frac{1}{e}$       **B.**  $I = \frac{1}{e} + 1$       **C.**  $I = 1$       **D.**  $I = e$

**Lời giải**

$$I = \int_1^e \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \left( \ln|x| + \frac{1}{x} \right) \Big|_1^e = \frac{1}{e}.$$

**Câu 33:** Tính tích phân  $I = \int_0^3 \frac{dx}{x+2}$ .

**A.**  $I = -\frac{21}{100}$ .

**B.**  $I = \ln \frac{5}{2}$ .

**C.**  $I = \log \frac{5}{2}$ .

**D.**  $I = \frac{4581}{5000}$ .

**Lời giải**

$$I = \int_0^3 \frac{dx}{x+2} = \ln(x+2) \Big|_0^3 = \ln 5 - \ln 2 = \ln \frac{5}{2}.$$

**Câu 34:**  $\int_1^2 \frac{dx}{3x-2}$  bằng

**A.**  $2 \ln 2$ .

**B.**  $\frac{2}{3} \ln 2$ .

**C.**  $\ln 2$ .

**D.**  $\frac{1}{3} \ln 2$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \int_1^2 \frac{dx}{3x-2} = \frac{1}{3} \ln|3x-2| \Big|_1^2 = \frac{2}{3} \ln 2.$$

**Câu 35:** Tính tích phân  $I = \int_1^2 \frac{x-1}{x} dx$ .

**A.**  $I = 1 - \ln 2$ .

**B.**  $I = \frac{7}{4}$ .

**C.**  $I = 1 + \ln 2$ .

**D.**  $I = 2 \ln 2$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } I = \int_1^2 \frac{x-1}{x} dx = \int_1^2 \left( 1 - \frac{1}{x} \right) dx = \left( x - \ln|x| \right) \Big|_1^2 = (2 - \ln 2) - (1 - \ln 1) = 1 - \ln 2.$$

**Câu 36:** Biết  $\int_1^3 \frac{x+2}{x} dx = a + b \ln c$ , với  $a, b, c \in \mathbb{Z}, c < 9$ . Tính tổng  $S = a + b + c$ .

**A.**  $S = 7$ .

**B.**  $S = 5$ .

**C.**  $S = 8$ .

**D.**  $S = 6$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \int_1^3 \frac{x+2}{x} dx = \int_1^3 \left( 1 + \frac{2}{x} \right) dx = \int_1^3 dx + \int_1^3 \frac{2}{x} dx = 2 + 2 \ln|x| \Big|_1^3 = 2 + 2 \ln 3.$$

$$\text{Do đó } a = 2, b = 2, c = 3 \Rightarrow S = 7.$$

**Câu 37:** Tích phân  $I = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$  có giá trị bằng

**A.**  $\ln 2 - 1$ .

**B.**  $-\ln 2$ .

**C.**  $\ln 2$ .

**D.**  $1 - \ln 2$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\text{Cách 1: Ta có: } I = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{d(x+1)}{x+1} = \ln|x+1| \Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2. \text{ Chọn đáp án } \mathbf{C}.$$

**Câu 38:** Tính  $K = \int_2^3 \frac{x}{x^2-1} dx$ .

**A.**  $K = \ln 2$ .

**B.**  $K = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{3}$ .

**C.**  $K = 2 \ln 2$ .

**D.**  $K = \ln \frac{8}{3}$ .

**Lời giải**

$$K = \int_2^3 \frac{x}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{1}{x^2-1} d(x^2-1) = \frac{1}{2} \ln |x^2-1| \Big|_2^3 = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{3}$$

**Câu 39:** Biết rằng hàm số  $f(x) = mx + n$  thỏa mãn  $\int_0^1 f(x) dx = 3$ ,  $\int_0^2 f(x) dx = 8$ . Khẳng định nào dưới đây là đúng?

**A.**  $m + n = 4$ .

**B.**  $m + n = -4$ .

**C.**  $m + n = 2$ .

**D.**  $m + n = -2$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\int f(x) dx = \int (mx + n) dx = \frac{m}{2} x^2 + nx + C$ .

Lại có:  $\int_0^1 f(x) dx = 3 \Rightarrow \left( \frac{m}{2} x^2 + nx \right) \Big|_0^1 = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} m + n = 3 \quad (1)$ .

$\int_0^2 f(x) dx = 8 \Rightarrow \left( \frac{m}{2} x^2 + nx \right) \Big|_0^2 = 8 \Leftrightarrow 2m + 2n = 8 \quad (2)$ .

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:  $\begin{cases} \frac{1}{2}m + n = 3 \\ 2m + 2n = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 2 \end{cases}$ .

$\Rightarrow m + n = 4$ .

**Câu 40:** Biết rằng hàm số  $f(x) = ax^2 + bx + c$  thỏa mãn  $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{7}{2}$ ,  $\int_0^2 f(x) dx = -2$  và

**A.**  $-\frac{3}{4}$ .

**B.**  $-\frac{4}{3}$ .

**C.**  $\frac{4}{3}$ .

**D.**  $\frac{3}{4}$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\int f(x) dx = \int (ax^2 + bx + c) dx = \frac{a}{3} x^3 + \frac{b}{2} x^2 + cx + C$ .

Lại có:  $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{7}{2} \Rightarrow \left( \frac{a}{3} x^3 + \frac{b}{2} x^2 + cx \right) \Big|_0^1 = -\frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{3} a + \frac{1}{2} b + c = -\frac{7}{2} \quad (1)$ .

$\int_0^2 f(x) dx = -2 \Rightarrow \left( \frac{a}{3} x^3 + \frac{b}{2} x^2 + cx \right) \Big|_0^2 = -2 \Leftrightarrow \frac{8}{3} a + 2b + 2c = -2 \quad (2)$ .

$\int_0^3 f(x) dx = \frac{13}{2} \Rightarrow \left( \frac{a}{3} x^3 + \frac{b}{2} x^2 + cx \right) \Big|_0^3 = \frac{13}{2} \Leftrightarrow 9a + \frac{9}{2} b + 3c = \frac{13}{2} \quad (3)$ .

Từ (1), (2) và (3) ta có hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + c = -\frac{7}{2} \\ \frac{8}{3}a + 2b + 2c = -2 \\ 9a + \frac{9}{2}b + 3c = \frac{13}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -\frac{16}{3} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow P = a + b + c = 1 + 3 + \left(-\frac{16}{3}\right) = -\frac{4}{3}.$$

**Câu 41:** Cho  $I = \int_0^1 (4x - 2m^2) dx$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để  $I + 6 > 0$ ?

A. 1.

B. 5.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

**Chọn D**

Theo định nghĩa tích phân ta có  $I = \int_0^1 (4x - 2m^2) dx = (2x^2 - 2m^2x) \Big|_0^1 = -2m^2 + 2$ .

Khi đó  $I + 6 > 0 \Leftrightarrow -2m^2 + 2 + 6 > 0 \Leftrightarrow -m^2 + 4 > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$

Mà  $m$  là số nguyên nên  $m \in \{-1; 0; 1\}$ . Vậy có 3 giá trị nguyên của  $m$  thỏa mãn yêu cầu.

**Câu 42:** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của  $a$  để  $\int_0^a (2x - 3) dx \leq 4$ ?

A. 5.

B. 6.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

**Chọn C**

Ta có:  $\int_0^a (2x - 3) dx = (x^2 - 3x) \Big|_0^a = a^2 - 3a$ .

Khi đó:  $\int_0^a (2x - 3) dx \leq 4 \Leftrightarrow a^2 - 3a \leq 4 \Leftrightarrow -1 \leq a \leq 4$

Mà  $a \in \mathbb{N}^*$  nên  $a \in \{1; 2; 3; 4\}$ .

Vậy có 4 giá trị của  $a$  thỏa đề bài.

**Câu 43:** Có bao nhiêu số thực  $b$  thuộc khoảng  $(\pi; 3\pi)$  sao cho  $\int_{\pi}^b 4 \cos 2x dx = 1$ ?

A. 8.

B. 2.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \int_{\pi}^b 4 \cos 2x dx = 1 \Leftrightarrow 2 \sin 2x \Big|_{\pi}^b = 1 \Leftrightarrow \sin 2b = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ b = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases}.$$

Do đó, có 4 số thực  $b$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 44:** Cho hàm số  $f(x)$  có  $f(0) = 4$  và  $f'(x) = 2\cos^2 x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ . Khi đó  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$  bằng.

- A.  $\frac{\pi^2 + 16\pi + 16}{16}$ .      B.  $\frac{\pi^2 + 4}{16}$ .      C.  $\frac{\pi^2 + 14\pi}{16}$ .      D.  $\frac{\pi^2 + 16\pi + 4}{16}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (2\cos^2 x + 1)dx = \int \left( 2\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) + 1 \right) dx = \int (\cos 2x + 2)dx \\ &= \int \cos 2x dx + \int 2dx = \frac{\sin 2x}{2} + 2x + C. \end{aligned}$$

$$\text{Lại có } f(0) = 4 \Leftrightarrow C = 4 \Rightarrow f(x) = \frac{\sin 2x}{2} + 2x + 4.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \frac{\sin 2x}{2} + 2x + 4 \right) dx = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x d(2x) + \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4dx \\ &= \left. \frac{-\cos 2x}{4} \right|_0^{\frac{\pi}{4}} + \left. (x^2 + 4x) \right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2 + 16\pi + 4}{16}. \end{aligned}$$

**Câu 45:** Cho hàm số  $f(x)$  có  $f(0) = 0$  và  $f'(x) = \sin^4 x, \forall x \in \mathbb{R}$ . Tích phân  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$  bằng

- A.  $\frac{\pi^2 - 6}{18}$ .      B.  $\frac{\pi^2 - 3}{32}$ .      C.  $\frac{3\pi^2 - 16}{64}$ .      D.  $\frac{3\pi^2 - 6}{112}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \sin^4 x &= \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) = \frac{1}{4} \left( 1 - 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) \\ &= \frac{1}{8} (\cos 4x - 4\cos 2x + 3). \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } f(x) = \int f'(x)dx = \frac{1}{8} \int (\cos 4x - 4\cos 2x + 3)dx = \frac{1}{32} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{8}x + C.$$

$$\text{Vì } f(0) = 0 \text{ nên } C = 0 \text{ hay } f(x) = \frac{1}{32} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{8}x.$$

$$\text{Do đó } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{32} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{8}x \right) dx = \left( -\frac{1}{128} \cos 4x + \frac{1}{8} \cos 2x + \frac{3}{16}x^2 \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi^2 - 16}{64}.$$

$$= \left( -\frac{1}{128} - \frac{1}{8} + \frac{3\pi^2}{64} \right) - \left( -\frac{1}{128} + \frac{1}{8} \right) = \frac{3\pi^2 - 16}{64}.$$

### TÍCH PHÂN HÀM SỐ HỮU TỶ

Tính  $I = \int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} dx$  ? với  $P(x)$  và  $Q(x)$  là các đa thức không chứa căn.

□ Nếu bậc của tử  $P(x) \geq$  bậc mẫu  $Q(x) \xrightarrow{PP}$  chia đa thức.

□ Nếu bậc của tử  $P(x) <$  bậc mẫu  $Q(x)$  mà mẫu số **phân tích được thành tích số**  $\xrightarrow{PP}$  đồng nhất thức để đưa thành tổng của các phân số.

Một số trường hợp đồng nhất thức thường gặp:

$$+ \frac{1}{(ax+m)(bx+n)} = \frac{1}{an-bm} \left( \frac{a}{ax+m} - \frac{b}{bx+n} \right) \quad (1)$$

$$+ \frac{mx+n}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{(A+B)x - (Ab+Ba)}{(x-a)(x-b)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=m \\ Ab+Ba=-n \end{cases}$$

$$+ \frac{1}{(x-m)(ax^2+bx+c)} = \frac{A}{x-m} + \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c} \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac < 0.$$

$$+ \frac{1}{(x-a)^2(x-b)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-b} + \frac{D}{(x-b)^2}.$$

□ Nếu bậc tử  $P(x) <$  bậc mẫu  $Q(x)$  mà **mẫu không phân tích được thành tích số**, ta xét một số trường hợp thường gặp sau:

$$+ I_1 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}, (n \in \mathbb{N}^*) \xrightarrow{PP} x = a \cdot \tan t.$$

$$+ I_2 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, (\Delta < 0) = \int \frac{dx}{a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left( -\frac{\Delta}{4a} \right) \right]}. \text{ Ta sẽ đặt } \longrightarrow x + \frac{b}{2a} = \sqrt{-\frac{\Delta}{4a}} \tan t.$$

$$+ I_3 = \int \frac{px+q}{ax^2+bx+c} \cdot dx \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac < 0. \text{ Ta sẽ phân tích:}$$

$$I_3 = \frac{p}{2a} \underbrace{\int \frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c}}_A + \left( q - \frac{b \cdot p}{2a} \right) \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}}_{I_2} \text{ và giải A bằng cách đặt } t = \text{mẫu số.}$$

**Câu 46:** Biết  $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)(2x+1)} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ . Khi đó giá trị  $a+b+c$  bằng

**A.** -3.

**B.** 2.

**C.** 1.

**D.** 0.

**Lời giải**

Ta có:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)(2x+1)} &= \int_1^2 \left( \frac{2}{2x+1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = 2 \int_1^2 \frac{1}{2x+1} dx - \int_1^2 \frac{1}{x+1} dx \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \ln|2x+1| \Big|_1^2 - \ln|x+1| \Big|_1^2 = \ln(2x+1) \Big|_1^2 - \ln(x+1) \Big|_1^2 = \ln 5 - \ln 3 - (\ln 3 - \ln 2) \\ &= \ln 2 - 2 \ln 3 + \ln 5.\end{aligned}$$

Do đó:  $a = 1, b = -2, c = 1$ . Vậy  $a + b + c = 1 + (-2) + 1 = 0$ .

- Câu 47:** Biết  $I = \int_{-1}^0 \frac{3x^2 + 5x - 1}{x - 2} dx = a \ln \frac{2}{3} + b, (a, b \in \mathbb{R})$ . Khi đó giá trị của  $a + 4b$  bằng
- A.** 50                                      **B.** 60                                      **C.** 59                                      **D.** 40

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\begin{aligned}\text{Ta có } I &= \int_{-1}^0 \frac{3x^2 + 5x - 1}{x - 2} dx = \int_{-1}^0 \left( 3x + 11 + \frac{21}{x - 2} \right) dx = \left( \frac{3}{2}x^2 + 11x + 21 \ln|x - 2| \right) \Big|_{-1}^0 \\ &= 21 \ln \frac{2}{3} + \frac{19}{2}.\end{aligned}$$

Suy ra  $a = 21, b = \frac{19}{2}$ . Vậy  $a + 4b = 59$

- Câu 48:** Biết  $\int_0^1 \frac{x^2 - 2}{x + 1} dx = \frac{-1}{m} + n \ln 2$ , với  $m, n$  là các số nguyên. Tính  $m + n$ .
- A.**  $S = 1$ .                                      **B.**  $S = 4$ .                                      **C.**  $S = -5$ .                                      **D.**  $S = -1$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2 - 2}{x + 1} dx &= \int_0^1 (x - 1) dx - \int_0^1 \frac{dx}{x + 1} = \frac{(x - 1)^2}{2} \Big|_0^1 - \ln|x + 1| \Big|_0^1 = \frac{-1}{2} - \ln 2 \\ \Rightarrow m &= 2, n = -1 \Rightarrow m + n = 1\end{aligned}$$

- Câu 49:** Tích phân  $I = \int_0^1 \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1} dx = a - \ln b$  trong đó  $a, b$  là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức  $a + b$ .
- A.** 1.                                      **B.** 0.                                      **C.** -1.                                      **D.** 3.

**Lời giải**

$$\begin{aligned}\text{Ta có } I &= \int_0^1 \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 \left( 1 - \frac{2x}{x^2 + 1} \right) dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} d(x^2 + 1) = x \Big|_0^1 - \ln(x^2 + 1) \Big|_0^1 = 1 - \ln 2 \\ \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} &\Rightarrow a + b = 3.\end{aligned}$$

- Câu 50:** Biết  $\int_3^5 \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} dx = a + \ln \frac{b}{2}$  với  $a, b$  là các số nguyên. Tính  $S = a - 2b$ .

**A.**  $S = 2$ .

**B.**  $S = -2$ .

**C.**  $S = 5$ .

**D.**  $S = 10$ .

**Lời giải**

$$\int_3^5 \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} dx = \int_3^5 \left( x + \frac{1}{x + 1} \right) dx = \left( \frac{x^2}{2} + \ln|x + 1| \right) \Big|_3^5 = 8 + \ln \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow S = a - 2b = 2.$$

**Câu 51:** Cho  $\int_1^2 \left( x^2 + \frac{x}{x + 1} \right) dx = \frac{10}{b} + \ln \frac{a}{b}$  với  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Tính  $P = a + b$ ?

**A.**  $P = 1$ .

**B.**  $P = 5$ .

**C.**  $P = 7$ .

**D.**  $P = 2$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_1^2 \left( x^2 + \frac{x}{x + 1} \right) dx &= \int_1^2 \left( x^2 + \frac{x + 1 - 1}{x + 1} \right) dx = \int_1^2 \left( x^2 + 1 - \frac{1}{x + 1} \right) dx \\ &= \left( \frac{x^3}{3} + x - \ln|x + 1| \right) \Big|_1^2 = \frac{10}{3} + \ln 2 - \ln 3 = \frac{10}{3} + \ln \frac{2}{3} = \frac{10}{b} + \ln \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

Suy ra  $a = 2; b = 3$ . Vậy  $a + b = 5$ .

**Câu 52:** Cho  $\int_1^3 \frac{x + 3}{x^2 + 3x + 2} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ , với  $a, b, c$  là các số nguyên. Giá trị của  $a + b + c$  bằng

**A.** 0.

**B.** 2.

**C.** 3.

**D.** 1.

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{x + 3}{x^2 + 3x + 2} dx &= \int_1^3 \frac{x + 3}{(x + 1)(x + 2)} dx = \int_1^3 \frac{2}{x + 1} dx - \int_1^3 \frac{1}{x + 2} dx \\ &= \left( 2 \ln|x + 1| - \ln|x + 2| \right) \Big|_1^3 = 2 \ln 2 + \ln 3 - \ln 5 \end{aligned}$$

Suy ra  $a = 2, b = 1, c = -1$ .

Nên  $a + b + c = 2 + 1 - 1 = 2$ .

**Câu 53:** Cho  $\int_3^4 \frac{5x - 8}{x^2 - 3x + 2} dx = a \ln 3 + b \ln 2 + c \ln 5$ , với  $a, b, c$  là các số hữu tỉ. Giá trị của  $2^{a - 3b + c}$  bằng

**A.** 12

**B.** 6

**C.** 1

**D.** 64

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } I &= \int_3^4 \frac{5x - 8}{x^2 - 3x + 2} dx = \int_3^4 \frac{5x - 8}{(x - 1)(x - 2)} dx = \int_3^4 \frac{3(x - 2) + 2(x - 1)}{(x - 1)(x - 2)} dx = \int_3^4 \left( \frac{3}{x - 1} + \frac{2}{x - 2} \right) dx \\ &= \left( 3 \ln|x - 1| + 2 \ln|x - 2| \right) \Big|_3^4 = 3 \ln 3 + 2 \ln 2 - 3 \ln 2 = 3 \ln 3 - \ln 2 + 0 \cdot \ln 5 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a=3 \\ b=-1 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow 2^{a-3b+c} = 2^6 = 64.$$

**Câu 54:** Biết  $\int_3^5 \frac{x^2+x+1}{x+1} dx = a + \ln \frac{b}{2}$  với  $a, b$  là các số nguyên. Tính  $S = a - 2b$ .

**A.**  $S = 2$ .

**B.**  $S = -2$ .

**C.**  $S = 5$ .

**D.**  $S = 10$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\int_3^5 \frac{x^2+x+1}{x+1} dx = \int_3^5 \left( x + \frac{1}{x+1} \right) dx = \left( \frac{x^2}{2} + \ln|x+1| \right) \Big|_3^5 = 8 + \ln \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} a=8 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow S = a - 2b = 2.$$

**Câu 55:** Biết rằng  $\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1} dx = \frac{\pi\sqrt{a}}{b}$  ( $a, b \in \mathbb{Z}, a < 10$ ). Khi đó  $a + b$  có giá trị bằng

**A.** 14.

**B.** 15.

**C.** 13.

**D.** 12.

**Lời giải**

$$\text{Xét } I = \int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1} dx = \int_0^1 \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx.$$

$$\text{Đặt } x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan t, \text{ với } t \in \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right). \text{ Khi đó } dx = \frac{\sqrt{3}}{2} (1 + \tan^2 t) dt.$$

$$\text{Với } x=0, \text{ ta có } t = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Với } x=1, \text{ ta có } t = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{Khi đó } I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} (1 + \tan^2 t)}{\frac{3}{4} (1 + \tan^2 t)} dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2}{\sqrt{3}} dt = \frac{2}{\sqrt{3}} t \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}. \text{ Từ đó suy ra } \begin{cases} a=3 \\ b=9 \end{cases} \Rightarrow a+b=12.$$

**Câu 56:** Biết  $\int_0^2 \frac{x^2+5x+2}{x^2+4x+3} dx = a + b \ln 3 + c \ln 5$ , ( $a, b, c \in \mathbb{Q}$ ). Giá trị của  $abc$  bằng

**A.**  $-8$ .

**B.**  $-10$ .

**C.**  $-12$ .

**D.** 16.

**Lời giải**

Ta có:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{x^2+5x+2}{x^2+4x+3} dx &= \int_0^2 \left( 1 + \frac{x-1}{(x+1)(x+3)} \right) dx = \int_0^2 \left( 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3} \right) dx = \left( x - \ln|x+1| + 2 \ln|x+3| \right) \Big|_0^2 \\ &= 2 - 3 \ln 3 + 2 \ln 5. \end{aligned}$$

Vậy  $a=2, b=-3, c=2$ , do đó  $abc = -12$ .

**Câu 57:** Giả sử rằng  $\int_{-1}^0 \frac{3x^2 + 5x - 1}{x - 2} dx = a \ln \frac{2}{3} + b$ . Khi đó, giá trị của  $a + 2b$  là

A. 30.

B. 60.

C. 50.

D. 40.

**Lời giải**

Ta có:

$$I = \int_{-1}^0 \frac{3x^2 + 5x - 1}{x - 2} dx = \int_{-1}^0 \left( 3x + 11 + \frac{21}{x - 2} \right) dx$$

$$\Rightarrow I = \left[ \frac{3x^2}{2} + 11x + 21 \ln |x - 2| \right]_{-1}^0 = 21 \ln 2 + \frac{19}{2} - 21 \ln 3$$

$$\Rightarrow I = 21 \ln \frac{2}{3} + \frac{19}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 21 \\ b = \frac{19}{2} \end{cases} \Rightarrow a + 2b = 40.$$

**Câu 58:** Biết  $\int_1^4 \frac{x^3 + x^2 + 7x + 3}{x^2 - x + 3} dx = \frac{a}{b} + c \ln 5$  với  $a, b, c$  là các số nguyên dương và  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Tính  $P = a - b^2 - c^3$ .

A. -5.

B. -4.

C. 5.

D. 0.

**Lời giải**

Ta có  $\int_1^4 \frac{x^3 + x^2 + 7x + 3}{x^2 - x + 3} dx = \int_1^4 \left( x + 2 + \frac{3(2x - 1)}{x^2 - x + 3} \right) dx$

$$= \left( \frac{1}{2} x^2 + 2x \right) \Big|_1^4 + 3 \int_1^4 \frac{d(x^2 - x + 3)}{x^2 - x + 3} = \frac{27}{2} + 3 \ln |x^2 - x + 3| \Big|_1^4 = \frac{27}{2} + 3 \ln 5.$$

Mà  $\int_1^4 \frac{x^3 + x^2 + 7x + 3}{x^2 - x + 3} dx = \frac{a}{b} + c \ln 5$ , suy ra  $a = 27, b = 2, c = 3$ .

Vậy  $P = a - b^2 - c^3 = -4$ .

**Câu 59:** Cho  $\int_0^1 \frac{4x^2 + 15x + 11}{2x^2 + 5x + 2} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$  với  $a, b, c$  là các số hữu tỷ. Biểu thức  $T = a.c - b$  bằng

A. 4.

B. 6.

C.  $-\frac{1}{2}$ .

D.  $\frac{1}{2}$ .

**Lời giải**

Ta có

$$\int_0^1 \frac{4x^2 + 15x + 11}{2x^2 + 5x + 2} dx = \int_0^1 \frac{(4x^2 + 10x + 4) + (5x + 7)}{2x^2 + 5x + 2} dx = \int_0^1 \left( 2 + \frac{5x + 7}{2x^2 + 5x + 2} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left( 2 + \frac{1}{x + 2} + \frac{3}{2x + 1} \right) dx = \left( 2x + \ln |x + 2| + \frac{3}{2} \ln |2x + 1| \right) \Big|_0^1 = 2 - \ln 2 + \frac{5}{2} \ln 3$$

Vậy  $a = 2$ ,  $b = -1$ ,  $c = \frac{5}{2}$  nên  $T = 6$ .

**Câu 60:** Biết  $\int_0^1 \frac{x^2 - 2}{x + 1} dx = \frac{-1}{m} + n \ln 2$ , với  $m, n$  là các số nguyên. Tính  $S = m + n$ .

A.  $S = -1$ .

B.  $S = -5$ .

C.  $S = 1$ .

D.  $S = 4$ .

Lời giải

**Chọn C**

$$\text{Ta có: } \int_0^1 \frac{x^2 - 2}{x + 1} dx = \int_0^1 \left( x - 1 - \frac{1}{x + 1} \right) dx = \left( \frac{x^2}{2} - x - \ln|x + 1| \right) \Big|_0^1 = \frac{-1}{2} - \ln 2.$$

Suy ra  $m = 2$ ;  $n = -1$ . Vậy  $S = 1$ .

**Câu 61:** Cho  $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx = a \ln 2 + b \ln 3$ , với  $a, b$  là các số hữu tỷ. Khi đó  $a + b$  bằng

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. -1.

Lời giải

**Chọn C**

$$\text{Xét } \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx = \int_0^1 \frac{1}{(x + 1)(x + 2)} dx = \int_0^1 \left( \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x + 2} \right) dx = \ln \left( \frac{x + 1}{x + 2} \right) \Big|_0^1 = 2 \ln 2 - \ln 3.$$

Vậy  $a = 2$ ,  $b = -1 \Rightarrow a + b = 1$ .

**Câu 62:** Cho  $\int_0^1 \frac{2x^2 + 3x}{x^2 + 3x + 2} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$  với  $a, b, c$  là các số nguyên. Tổng  $a + b + c$  bằng

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. -1.

Lời giải

**Chọn C**

$$\text{Ta có: } \int_0^1 \frac{2x^2 + 3x}{x^2 + 3x + 2} dx = \int_0^1 \left( 2 - \frac{3x + 4}{x^2 + 3x + 2} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left( 2 - \frac{1}{x + 1} - \frac{2}{x + 2} \right) dx = \left( 2x - \ln|x + 1| - 2 \ln|x + 2| \right) \Big|_0^1 = 2 + \ln 2 - 2 \ln 3.$$

Suy ra  $a = 2$ ;  $b = 1$ ;  $c = -2$ .

Vậy  $a + b + c = 1$ .

**Câu 63:** Cho biết  $\int_0^2 \frac{x - 1}{x^2 + 4x + 3} dx = a \ln 5 + b \ln 3$ , với  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Tính  $T = a^2 + b^2$  bằng

A. 13.

B. 10.

C. 25.

D. 5.

Lời giải

**Chọn A**

Ta có:  $\frac{x-1}{x^2+4x+3} = \frac{x-1}{(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3}$

$A = \frac{x-1}{x+3} \Big|_{x=-1} = -1, B = \frac{x-1}{x+1} \Big|_{x=-3} = 2$

$\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4x+3} dx = \int_0^2 \left( \frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x+3} \right) dx = -\ln|x+1| \Big|_0^2 + 2\ln|x+3| \Big|_0^2 = -\ln 3 + 2\ln 5 - 2\ln 3$   
 $= 2\ln 5 - 3\ln 3 = a\ln 5 + b\ln 3$   
 $\Rightarrow a = 2, b = -3 \Rightarrow T = 13.$

**Câu 64:** Biết  $\int_0^2 \frac{x^2+5x+2}{x^2+4x+3} dx = a + b\ln 3 + c\ln 5, (a, b, c \in \mathbb{Q})$ . Giá trị của  $abc$  bằng

A. -8.

B. -10.

C. -12.

D. 16.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có:

$\int_0^2 \frac{x^2+5x+2}{x^2+4x+3} dx = \int_0^2 \left( 1 + \frac{x-1}{x^2+4x+3} \right) dx = \int_0^2 \left( 1 + \frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x+3} \right) dx$   
 $= \left( x - \ln|x+1| + 2\ln|x+3| \right) \Big|_0^2 = 2 + 2\ln 5 - 3\ln 3 = a + b\ln 3 + c\ln 5.$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow a.b.c = -12.$

**Câu 65:** Biết  $\int_1^4 \frac{x^3+x^2+7x+3}{x^2-x+3} dx = \frac{a}{b} + c\ln 5$  với  $a, b, c$  là các số nguyên dương và  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản.

Tính giá trị của  $P = a - b^2 - c^3$ .

A. -5.

B. -3.

C. 6.

D. -4.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có  $\int_1^4 \frac{x^3+x^2+7x+3}{x^2-x+3} dx = \int_1^4 \left( x+2 + \frac{3(2x-1)}{x^2-x+3} \right) dx = \left( \frac{x^2}{2} + 2x + 3\ln(x^2-x+3) \right) \Big|_1^4 = \frac{27}{2} + 3\ln 5.$

Vậy  $P = a - b^2 - c^3 = -4.$

**Câu 66:** Cho  $\int_2^3 \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5$  với  $a, b, c$  là các số hữu tỉ. Giá trị của  $a + b^2 - c^3$  bằng

A. 3.

B. 6.

C. 5.

D. 4.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có  $\int_2^3 \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = \int_2^3 \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \ln \left| \frac{x+1}{x+2} \right| \Big|_2^3 = \ln \frac{4}{5} - \ln \frac{3}{4} = 4\ln 2 - \ln 3 - \ln 5.$

Suy ra  $a = 4, b = -1, c = -1$ . Vậy  $a + b^2 - c^3 = 6$ .

**Câu 67:** Cho  $\int_3^4 \frac{2x+3}{x^2+3x} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 7$  với  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Giá trị của  $2a + 3b + 7c$  bằng

A. -9.

B. 6.

C. 15.

D. 3.

Lời giải

**Chọn D**

$$\text{Ta có: } \int_3^4 \frac{2x+3}{x^2+3x} dx = \int_3^4 \frac{x+(x+3)}{x.(x+3)} dx = \int_3^4 \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} \right) dx = \left( \ln|x(x+3)| \right) \Big|_3^4 = \ln 28 - \ln 18$$

$$= \ln \frac{14}{9} = \ln 14 - \ln 9 = \ln 2 - 2 \ln 3 + \ln 7.$$

$$\Rightarrow a = 1, b = -2, c = 1.$$

$$\text{Vậy } 2a + 3b + 7c = 3.$$

**Câu 68:** Cho  $\int_1^2 \frac{x}{(x+1)^2} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$ , với  $a, b, c$  là các số hữu tỷ. Giá trị  $6a + b + c$  bằng:

A. -2.

B. 1.

C. 2.

D. -1.

Lời giải

**Chọn D**

$$\text{Ta có } \int_1^2 \frac{x}{(x+1)^2} dx = \int_1^2 \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx = \left( \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} \right) \Big|_1^2 = -\frac{1}{6} - \ln 2 + \ln 3.$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{6}, b = -1, c = 1, \text{ nên } 6a + b + c = -1.$$

**Câu 69:** Biết  $\int_2^3 \frac{5x+12}{x^2+5x+6} dx = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 6$ . Tính  $S = 3a + 2b + c$ .

A. -11.

B. -14.

C. -2.

D. 3.

Lời giải

**Chọn A**

$$\text{Ta có } \int_2^3 \frac{5x+12}{x^2+5x+6} dx = \int_2^3 \left( \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x+3} \right) dx = \left( 2 \ln|x+2| + 3 \ln|x+3| \right) \Big|_2^3$$

$$= (2 \ln 5 + 3 \ln 6) - (2 \ln 4 + 3 \ln 5) = -4 \ln 2 - \ln 5 + 3 \ln 6.$$

$$\Rightarrow a = -4, b = -1, c = 3.$$

$$\text{Do đó } \Rightarrow S = 3a + 2b + c = -12 - 2 + 3 = -11.$$

## TÍCH PHÂN ĐỔI BIẾN

② **Tích phân đổi biến:**  $\int_a^b [f(u)] \cdot u'(x) \cdot dx = F[u(x)] \Big|_a^b = F[u(b)] - F[u(a)].$

$\nwarrow$   
Có sẵn

$\downarrow$   
Tách từ hàm

$\nearrow$   
Nhân thêm

**Các bước tính tích phân đổi biến số**

□ **Bước 1.** Biến đổi để chọn phép đặt  $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x).dx$

□ **Bước 2.** Đổi cận:  $\begin{cases} x = b \\ x = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = u(b) \\ t = u(a) \end{cases}$

□ **Bước 3.** Đưa về dạng  $I = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t).dt$  đơn giản hơn và dễ tính toán.

**Một số phương pháp đổi biến số thường gặp**

**Đổi biến dạng 1.**  $I = \int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}.dx = \underbrace{\int_a^b h(x).dx}_{I_1} + \underbrace{\int_a^b f(g(x)).\frac{g'(x)}{g(x)}.dx}_{I_2}$  với

**Đổi biến dạng 2.**

Nghĩa là nếu gặp tích phân **chứa căn thức** thì có khoảng 80% sẽ đặt  $t =$  căn trừ một số trường hợp ngoại lệ sau:

1/  $I_1 = \int f(\sqrt{a^2 - x^2}).x^{\text{chẵn}}.dx \longrightarrow$  đặt  $x = a.\sin t$  hoặc  $x = a.\cos t$ .

**Câu 70:** Cho tích phân  $I = \int_0^1 \frac{x^7}{(1+x^2)^5} dx$ , giả sử đặt  $t = 1+x^2$ . Tìm mệnh đề đúng.

**A.**  $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^5} dt$ .    **B.**  $I = \int_1^3 \frac{(t-1)^3}{t^5} dt$ .    **C.**  $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^4} dt$ .    **D.**  $I = \frac{3}{2} \int_1^4 \frac{(t-1)^3}{t^4} dt$ .

**Lời giải**

Ta có:  $t = 1+x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$ .

Đổi cận:  $x = 0 \Rightarrow t = 1$ .

$x = 1 \Rightarrow t = 2$ .

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \frac{x^7}{(1+x^2)^5} dx = \int_0^1 \frac{x.x^6}{(1+x^2)^5} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^5} dt.$$

**Câu 71:** Có bao nhiêu số thực  $a$  để  $\int_0^1 \frac{x}{a+x^2} dx = 1$ .

**A.** 2

**B.** 1

**C.** 0

**D.** 3

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện tích phân tồn tại là  $a+x^2 \neq 0, \forall x \in [0;1] \Rightarrow \begin{cases} a < -1 \\ a > 0 \end{cases}$

Đặt  $t = a + x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$ . Khi đó

$$\int_0^1 \frac{x}{a+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_a^{1+a} \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+a}{a} \right| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1+a = e^2 a \\ 1+a = -e^2 a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{e^2 - 1} \\ a = \frac{-1}{e^2 + 1} \end{cases}$$

So sánh điều kiện ta được  $a = \frac{1}{e^2 - 1}$ .

**Câu 72:** Cho hàm số  $f(x)$  có  $f(1)=0$  và  $f'(x) = 2019.2020.x(x-1)^{2018}, \forall x \in \mathbb{R}$ . Khi đó  $\int_0^1 f(x) dx$

bằng

**A.**  $\frac{2}{2021}$ .

**B.**  $\frac{1}{1011}$ .

**C.**  $-\frac{2}{2021}$ .

**D.**  $-\frac{1}{1011}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Cần nhớ:  $\int f'(x) dx = f(x) + C$  và  $\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1)$ .

Ta có  $f(x) = \int f'(x) dx = \int 2019.2020.x(x-1)^{2018} dx = 2019.2020 \int x(x-1)^{2018} dx$ .

Đặt  $t = x-1 \Rightarrow dt = dx$  và  $x = t+1$ .

Suy ra  $f(x) = 2019.2020 \int (t+1)t^{2018} dt = 2019.2020 \int (t^{2019} + t^{2018}) dt$

$$= 2019.2020 \left( \frac{t^{2020}}{2020} + \frac{t^{2019}}{2019} \right) + C = 2019t^{2020} + 2020t^{2019} + C.$$

Từ đó  $f(x) = 2019(x-1)^{2020} + 2020(x-1)^{2019} + C$ .

Mà  $f(1) = 0 \Leftrightarrow 2019(1-1)^{2020} + 2020(1-1)^{2019} + C = 0 \Leftrightarrow C = 0$ .

Suy ra  $f(x) = 2019(x-1)^{2020} + 2020(x-1)^{2019}$ .

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left[ 2019(x-1)^{2020} + 2020(x-1)^{2019} \right] dx = \left[ 2019 \cdot \frac{(x-1)^{2021}}{2021} + 2020 \cdot \frac{(x-1)^{2020}}{2020} \right]_0^1$$

$$= - \left( -\frac{2019}{2021} + 1 \right) = -\frac{2}{2021}.$$

**Câu 73:** Biết  $\int_0^1 \frac{2x^2+3x+3}{x^2+2x+1} dx = a - \ln b$  với  $a, b$  là các số nguyên dương. Tính  $P = a^2 + b^2$ .

**A.** 13.

**B.** 5.

**C.** 4.

**D.** 10.

**Lời giải**

Ta có  $I = \int_0^1 \frac{2x^2 + 3x + 3}{x^2 + 2x + 1} dx$

Đặt  $t = x + 1 \Rightarrow \begin{cases} dt = dx \\ x = t - 1 \end{cases}$  suy ra  $\begin{cases} x = 0 \leftrightarrow t = 1 \\ x = 1 \leftrightarrow t = 2 \end{cases}$

Khi đó  $I = \int_1^2 \frac{2(t-1)^2 + 3(t-1) + 3}{t^2} dt = \int_1^2 \frac{2t^2 - t + 2}{t^2} dt = \int_1^2 \left( 2 - \frac{1}{t} + \frac{2}{t^2} \right) dt = \left( 2t - \ln t - \frac{2}{t} \right) \Big|_1^2$   
 $= 3 - \ln 2$ .

Suy ra  $P = 3^2 + 2^2 = 13$ .

**Câu 74:** Cho  $\int_1^2 e^{3x-1} dx = m(e^p - e^q)$  với  $m, p, q \in \mathbb{Q}$  và là các phân số tối giản. Giá trị  $m + p + q$  bằng

- A. 10.                                      B. 6.                                      C.  $\frac{22}{3}$ .                                      D. 8.

Lời giải

**Chọn C**

Ta có  $\int_1^2 e^{3x-1} dx = \int_1^2 e^{3x-1} d(3x-1) = \frac{1}{3} \cdot e^{3x-1} \Big|_1^2 = \frac{1}{3}(e^5 - e^2)$ . Suy ra  $m = \frac{1}{3}$ ,  $p = 5$  và  $q = 2$ .

Vậy  $m + p + q = \frac{1}{3} + 5 + 2 = \frac{22}{3}$ .

**Câu 75:** Biết rằng  $\int_0^1 xe^{x^2+2} dx = \frac{a}{2}(e^b - e^c)$  với  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Giá trị của  $a + b + c$  bằng

- A. 4.                                      B. 7.                                      C. 5.                                      D. 6.

Lời giải

Ta có:  $\int_0^1 xe^{x^2+2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{x^2+2} d(x^2+2) = \frac{1}{2} e^{x^2+2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e^3 - e^2)$ .

Nên  $a = 1$ ,  $b = 3$ ,  $c = 2$ .

Vậy  $a + b + c = 6$ .

**Câu 76:** Biết  $\int_1^e \frac{x+1}{x^2+x \ln x} dx = \ln(ae+b)$  với  $a, b$  là các số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức

$T = a^2 - ab + b^2$ .

- A. 3.                                      B. 1.                                      C. 0.                                      D. 8.

Lời giải

**Chọn B**

$$\int_1^e \frac{x+1}{x^2+x\ln x} dx = \int_1^e \frac{1+\frac{1}{x}}{x+\ln x} dx = \int_1^e \frac{d(x+\ln x)}{x+\ln x} = \ln(x+\ln x) \Big|_1^e = \ln(e+1)$$

Vậy  $a=1, b=1$  nên  $T=a^2-ab+b^2=1$ .

**Câu 77:** Biết  $\int_1^2 (x+1)^2 e^{\frac{x-1}{x}} dx = me^{\frac{p}{q}} - n$ , trong đó  $m, n, p, q$  là các số nguyên dương và  $\frac{p}{q}$  là phân số tối giản. Tính  $T = m + n + p + q$ .

**A.**  $T = 11$ .

**B.**  $T = 10$ .

**C.**  $T = 7$ .

**D.**  $T = 8$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Ta có: } I = \int_1^2 (x+1)^2 e^{\frac{x-1}{x}} dx = \int_1^2 (x^2 + 2x + 1) e^{\frac{x-1}{x}} dx = \int_1^2 (x^2 + 1) e^{\frac{x-1}{x}} dx + \int_1^2 2xe^{\frac{x-1}{x}} dx$$

$$\begin{aligned} \text{Xét } I_1 &= \int_1^2 (x^2 + 1) e^{\frac{x-1}{x}} dx = \int_1^2 x^2 \cdot e^{\frac{x-1}{x}} \cdot \frac{x^2+1}{x^2} dx = \int_1^2 x^2 \cdot e^{\frac{x-1}{x}} d\left(x - \frac{1}{x}\right) = \int_1^2 x^2 d\left(e^{\frac{x-1}{x}}\right) \\ &= x^2 e^{\frac{x-1}{x}} \Big|_1^2 - \int_1^2 e^{\frac{x-1}{x}} d(x^2) = x^2 e^{\frac{x-1}{x}} \Big|_1^2 - \int_1^2 2xe^{\frac{x-1}{x}} dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_1 + \int_1^2 2xe^{\frac{x-1}{x}} dx = x^2 e^{\frac{x-1}{x}} \Big|_1^2 \Rightarrow I = x^2 e^{\frac{x-1}{x}} \Big|_1^2 = 4e^{\frac{3}{2}} - 1$$

$$\text{Do } \int_1^2 (x+1)^2 e^{\frac{x-1}{x}} dx = me^{\frac{p}{q}} - n, \text{ trong đó } m, n, p, q \in \mathbb{Z}^+ \text{ và } \frac{p}{q} \text{ là phân số tối giản} \Rightarrow \begin{cases} m=4 \\ n=1 \\ p=3 \\ q=2 \end{cases}$$

Khi đó,  $T = m + n + p + q = 4 + 1 + 3 + 2 = 10$ .

**Câu 78:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  đồng thời thỏa mãn  $f(0) = f(1) = 5$ . Tính tích phân

$$I = \int_0^1 f'(x) e^{f(x)} dx.$$

**A.**  $I = 10$

**B.**  $I = -5$

**C.**  $I = 0$

**D.**  $I = 5$

**Lời giải**

**Chọn C**

$$I = \int_0^1 f'(x) e^{f(x)} dx = \int_0^1 e^{f(x)} d(f(x)) = e^{f(x)} \Big|_0^1 = e^{f(1)} - e^{f(0)} = e^5 - e^5 = 0.$$

**Câu 79:** Giả sử tích phân  $I = \int_1^5 \frac{1}{1+\sqrt{3x+1}} dx = a + b \ln 3 + c \ln 5$ . Lúc đó

**A.**  $a + b + c = \frac{5}{3}$ .

**B.**  $a + b + c = \frac{4}{3}$ .

**C.**  $a + b + c = \frac{7}{3}$ .

**D.**  $a + b + c = \frac{8}{3}$ .

Lời giải

**Chọn B**

Đặt  $t = \sqrt{3x+1}$ . Ta có  $t^2 = 3x+1 \Rightarrow dx = \frac{2}{3}tdt$ .

Đổi cận

|     |   |   |
|-----|---|---|
| $x$ | 1 | 5 |
| $t$ | 2 | 4 |

$$\begin{aligned} \text{Ta có } I &= \int_1^5 \frac{1}{1+\sqrt{3x+1}} dx = \int_2^4 \frac{1}{1+t} \cdot \frac{2}{3} t dt \\ &= \frac{2}{3} \int_2^4 \frac{t}{t+1} dt \\ &= \frac{2}{3} \int_2^4 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = \frac{2}{3} (t - \ln|t+1|) \Big|_2^4 \\ &= \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \ln 3 - \frac{2}{3} \ln 5. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } a = \frac{4}{3}; b = \frac{2}{3}; c = -\frac{2}{3}.$$

$$\text{Vậy } a+b+c = \frac{4}{3}.$$

**Câu 80:** Biết tích phân  $\int_0^{\ln 6} \frac{e^x}{1+\sqrt{e^x+3}} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$ , với  $a, b, c$  là các số nguyên. Tính

$$T = a + b + c.$$

**A.**  $T = -1$ .

**B.**  $T = 0$ .

**C.**  $T = 2$ .

**D.**  $T = 1$ .

Lời giải

Đặt  $t = \sqrt{e^x+3} \Rightarrow t^2 = e^x+3 \Rightarrow 2tdt = e^x dx$ .

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = \ln 6 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 2 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } \int_0^{\ln 6} \frac{e^x}{1+\sqrt{e^x+3}} dx &= \int_2^3 \frac{2tdt}{1+t} = \int_2^3 \left(2 - \frac{2}{1+t}\right) dt = (2t - 2\ln|t+1|) \Big|_2^3 \\ &= (6 - 2\ln 4) - (4 - 2\ln 3) \\ &= 2 - 4\ln 2 + 2\ln 3 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy  $T = 0$ .

**Câu 81:** Tích phân  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$  bằng

**A.**  $\frac{4}{3}$ .

**B.**  $\frac{3}{2}$ .

**C.**  $\frac{1}{3}$ .

**D.**  $\frac{2}{3}$ .

Lời giải

$$\text{Đặt } t = \sqrt{3x+1} \Rightarrow t^2 = 3x+1 \Rightarrow 2tdt = 3dx \Rightarrow \frac{2t}{3}dt = dx$$

$$\text{Đổi cận: } x=0 \Rightarrow t=1; x=1 \Rightarrow t=2$$

$$\text{Khi đó } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}} = \frac{2}{3} \int_1^2 \frac{1}{t} \cdot tdt = \frac{2}{3} \int_1^2 dt = \frac{2}{3}t \Big|_1^2 = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Cách khác: Sử dụng công thức } \int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b} + C \text{ thì } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}} = \frac{2}{3}\sqrt{3x+1} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

**Câu 82:** Biết  $\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx = a + b\sqrt{2}$  với  $a, b$  là các số hữu tỷ. Tính  $S = a + b$ .

**A.**  $S = 1$ .

**B.**  $S = \frac{1}{2}$ .

**C.**  $S = \frac{3}{4}$ .

**D.**  $S = \frac{2}{3}$ .

**Lời giải**

$$\text{Đặt } \sqrt{1+\ln x} = t \Rightarrow \ln x = t^2 - 1 \Rightarrow \frac{dx}{x} = 2tdt$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x=1 \rightarrow t=1 \\ x=e \rightarrow t=\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{(t^2-1)2tdt}{t} = 2 \int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1) dt = 2 \left( \frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

$$\text{Suy ra } a = \frac{4}{3}; b = -\frac{2}{3} \Rightarrow S = a + b = \frac{2}{3}$$

**Câu 83:** Cho tích phân  $I = \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{16-x^2} dx$  và  $x = 4 \sin t$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.**  $I = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt$ . **B.**  $I = 16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t dt$ .

**C.**  $I = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2t) dt$ . **D.**  $I = -16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt$ .

**Lời giải**

$$\text{Đặt } x = 4 \sin t \Rightarrow dx = 4 \cos t dt.$$

$$\text{Đổi cận: } x=0 \Rightarrow t=0; x=2\sqrt{2} \Rightarrow t=\frac{\pi}{4}.$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{16-16\sin^2 t} \cdot 4 \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4|\cos t| \cdot 4 \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4|\cos t| \cdot 4 \cos t dt = 16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\cos t| \cdot \cos t dt.$$

Mà vì  $t \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$  thì  $\cos t > 0$  nên khi đó  $I = 16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt$ .

**Câu 84:** Biết  $\int_1^5 \frac{1}{1 + \sqrt{3x+1}} dx = a + b \ln 3 + c \ln 5$  ( $a, b, c \in \mathbb{Q}$ ). Giá trị của  $a + b + c$  bằng

- A.  $\frac{7}{3}$ .                      B.  $\frac{5}{3}$ .                      C.  $\frac{8}{3}$ .                      **D.  $\frac{4}{3}$ .**

**Lời giải**

$$\text{Đặt } t = \sqrt{3x+1} \Rightarrow t^2 = 3x+1 \Rightarrow 2tdt = 3dx \Rightarrow dx = \frac{2}{3}tdt$$

$$\text{Đổi cận: } x=1 \Rightarrow t=2; x=5 \Rightarrow t=4$$

$$\int_1^5 \frac{1}{1 + \sqrt{3x+1}} dx = \frac{2}{3} \int_2^4 \frac{t}{1+t} dt = \frac{2}{3} \int_2^4 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = \frac{2}{3} (t - \ln|t+1|) \Big|_2^4 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \ln 5 + \frac{2}{3} \ln 3.$$

$$\Rightarrow a = \frac{4}{3}, b = \frac{2}{3}, c = -\frac{2}{3} \Rightarrow a + b + c = \frac{4}{3}.$$

**Câu 85:** Cho biết  $\int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx = \frac{m}{n}$  với  $\frac{m}{n}$  là một phân số tối giản. Tính  $m - 7n$

- A. 0.                      **B. 1.**                      C. 2.                      D. 91.

**Lời giải**

$$\text{Đặt } t = \sqrt[3]{1+x^2} \Rightarrow t^3 = 1+x^2 \Rightarrow 3t^2 dt = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{3t^2 dt}{2}.$$

Đổi cận:

|     |   |            |
|-----|---|------------|
| $x$ | 0 | $\sqrt{7}$ |
| $t$ | 1 | 2          |

$$\int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx = \int_1^2 \frac{t^3 - 1}{t} \cdot \frac{3t^2}{2} dt = \frac{3}{2} \int_1^2 (t^4 - t) dt = \frac{3}{2} \left( \frac{t^5}{5} - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_1^2 = \frac{141}{20}.$$

$$\Rightarrow m - 7n = 141 - 7 \cdot 20 = 1.$$

**Câu 86:** Biết rằng  $\int_0^1 \frac{dx}{3x + 5\sqrt{3x+1} + 7} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ , với  $a, b, c$  là các số hữu tỉ. Giá trị của

$a + b + c$  bằng

- A.  $-\frac{10}{3}$**                       B.  $-\frac{5}{3}$                       C.  $\frac{10}{3}$                       D.  $\frac{5}{3}$

**Lời giải**

**Chọn A**

$$A = \int_0^1 \frac{dx}{3x + 5\sqrt{3x+1} + 7}$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{3x+1} \Rightarrow t^2 = 3x+1 \Rightarrow 2tdt = 3dx$$

$$\text{Đổi cận: } x=0 \Rightarrow t=1; x=1 \Rightarrow t=2$$

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 \frac{\frac{2}{3}tdt}{t^2+5t+6} = \frac{2}{3} \int_1^2 \frac{t}{(t+2)(t+3)} dt = \frac{2}{3} \int_1^2 \left( \frac{-2}{t+2} + \frac{3}{t+3} \right) dt = \frac{2}{3} \left( -2\ln|t+2| + 3\ln|t+3| \right) \Big|_1^2 \\ &= \frac{2}{3} (-2\ln 4 + 3\ln 5 + 2\ln 3 - 3\ln 4) = \frac{2}{3} (-10\ln 2 + 2\ln 3 + 3\ln 5) = -\frac{20}{3}\ln 2 + \frac{4}{3}\ln 3 + 2\ln 5 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } a+b+c = -\frac{20}{3} + \frac{4}{3} + 2 = -\frac{10}{3}.$$

**Câu 87:** Biết  $\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx = a + b\sqrt{2}$  với  $a, b$  là các số hữu tỷ. Tính  $S = a + b$ .

**A.**  $S = 1$ .

**B.**  $S = \frac{1}{2}$ .

**C.**  $S = \frac{3}{4}$ .

**D.**  $S = \frac{2}{3}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Đặt } \sqrt{1+\ln x} = t \Rightarrow \ln x = t^2 - 1 \Rightarrow \frac{dx}{x} = 2tdt$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x=1 \rightarrow t=1 \\ x=e \rightarrow t=\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{(t^2-1)2tdt}{t} = 2 \int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1) dt = 2 \left( \frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

$$\text{Suy ra } a = \frac{4}{3}; b = -\frac{2}{3} \Rightarrow S = a + b = \frac{2}{3}$$

**Câu 88:** Cho  $\int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}} dx = \frac{a}{3} + b\ln 2 + c\ln 3$  với  $a, b, c$  là các số nguyên. Giá trị  $a + b + c$  bằng:

**A.** 9

**B.** 2

**C.** 1

**D.** 7

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}} dx &= \\ t = 4+2\sqrt{x+1} &\Rightarrow (t-4)^2 = 4(x+1) \\ \Rightarrow 2(t-4)dt &= 4dx \\ x=0 &\Rightarrow t=6 \\ x=3 &\Rightarrow t=8 \\ I &= \int_6^8 \frac{t^2-8t+16-4}{8t} \cdot (t-4)dt = \int_6^8 \frac{t^3-12t^2+44t-48}{8t} dt = \int_6^8 \left( \frac{t^2}{8} - \frac{3t}{2} + \frac{11}{2} - \frac{6}{t} \right) dt \\ &= \left( \frac{t^3}{24} - \frac{3t^2}{4} + \frac{11}{2}t - 6\ln|t| \right) \Big|_6^8 = \frac{7}{3} - 12\ln 2 + 6\ln 3 \\ &\Rightarrow a+b+c=1 \end{aligned}$$

**Câu 89:** Cho  $I = \int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}} dx = \frac{a}{d} + b \ln 2 + c \ln d$ , với  $a, b, c, d$  là các số nguyên và  $\frac{a}{d}$  là phân số tối giản. Giá trị của  $a+b+c+d$  bằng

A. 16.

B. 4.

C. 28.

D. -2.

**Lời giải**

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = t^2 - 1$$

$$\Rightarrow dx = 2t dt$$

$$\text{Đổi cận: } x=0 \rightarrow t=1; \quad x=3 \rightarrow t=2$$

$$I = \int_1^2 \frac{t^2-1}{4+2t} \cdot 2t dt = \int_1^2 \left( t^2 - 2t + 3 - \frac{6}{t+2} \right) dt = \left( \frac{t^3}{3} - t^2 + 3t - 6\ln|t+2| \right) \Big|_1^2 = \frac{7}{3} - 12\ln 2 + 6\ln 3.$$

Suy ra  $a=7, b=-12, c=6, d=3$ . Do đó  $a+b+c+d=4$ .

**Câu 90:** Tính  $I = \int_0^a \frac{x^3+x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ .

A.  $I = (a^2+1)\sqrt{a^2+1}-1$ .

B.  $I = \frac{1}{3} \left[ (a^2+1)\sqrt{a^2+1}-1 \right]$ .

C.  $I = \frac{1}{3} \left[ (a^2+1)\sqrt{a^2+1}+1 \right]$ .

D.  $I = (a^2+1)\sqrt{a^2+1}+1$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } I = \int_0^a \frac{x^3+x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_0^a \frac{x(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_0^a x\sqrt{x^2+1} dx.$$

$$\text{Đặt } u = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow u^2 = x^2+1 \Rightarrow udu = xdx.$$

$$\text{Đổi cận: } x=0 \Rightarrow u=1, \quad x=a \Rightarrow u=\sqrt{a^2+1}.$$

$$\text{Vậy } I = \int_1^{\sqrt{a^2+1}} u^2 du = \frac{u^3}{3} \Big|_1^{\sqrt{a^2+1}} = \frac{1}{3} \left[ (a^2+1)\sqrt{a^2+1}-1 \right].$$

**Câu 91:** Giá trị của tích phân  $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$  bằng tích phân nào dưới đây?

**A.**  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin^2 y dy.$

**B.**  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx.$

**C.**  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 y}{\cos y} dy.$

**D.**  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2 y dy.$

**Lời giải**

Đặt  $x = \sin^2 y$  ta có  $dx = d(\sin^2 y) \Leftrightarrow dx = 2 \sin y \cdot \cos y dy$

Khi  $x = 0 \Rightarrow y = 0$  và  $x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{\pi}{4}.$

Suy ra  $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin y}{\cos y} \cdot 2 \sin y \cos y dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin^2 y dy.$

**Câu 92:** Biết  $\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1+x^2-1}} dx = \frac{b}{a} \ln 5 - c \ln 2$  với  $a, b, c$  là các số nguyên và phân số  $\frac{a}{b}$  là tối giản.

Tính  $P = 3a + 2b + c.$

**A.** 11.

**B.** 12.

**C.** 14.

**D.** 13.

**Lời giải**

Đặt  $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow x dx = t dt$

Đổi cận:  $x = \sqrt{3} \Rightarrow t = 2, x = 2\sqrt{2} \Rightarrow t = 3.$

Khi đó  $\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1+x^2-1}} dx = \int_2^3 \frac{t dt}{t^2+t-2} = \left( \frac{1}{3} \ln |t-1| + \frac{2}{3} \ln |t+2| \right) \Big|_2^3$

$= \left( \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{2}{3} \ln 5 \right) - \left( \frac{2}{3} \ln 4 \right) = \frac{2}{3} \ln 5 - \ln 2.$

Vậy  $a = 3, b = 2, c = 1 \Rightarrow 3a + 2b + c = 14.$

**Câu 93:** Cho tích phân  $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$  nếu đổi biến số  $x = 2 \sin t, t \in \left( -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$  thì ta được.

**A.**  $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} dt.$

**B.**  $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt.$

**C.**  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t dt.$

**D.**  $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{t}.$

**Lời giải**

$x = 2 \sin t \Rightarrow dx = 2 \cos t dt.$

Với  $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}.$

$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2 \cos t dt}{2 \sqrt{1 - \sin^2 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t dt}{\cos t} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt.$

- Câu 94:** Biết  $\int_0^1 \frac{x^3}{x + \sqrt{1+x^2}} dx = \frac{a\sqrt{b}+c}{15}$  với  $a, b, c$  là các số nguyên và  $b \geq 0$ . Tính  $P = a + b^2 - c$ .
- A.**  $P = 3$ .                      **B.**  $P = 7$ .                      **C.**  $P = -7$ .                      **D.**  $P = 5$ .

**Lời giải.**

$$I = \int_0^1 \frac{x^3}{x + \sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 x^3 (\sqrt{1+x^2} - x) dx = \int_0^1 x^3 \sqrt{1+x^2} dx - \int_0^1 x^4 dx = A - \frac{1}{5}$$

+ Tính A: Đặt  $t = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow t dt = x dx$

$$A = \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1) t^2 dt = \int_1^{\sqrt{2}} (t^4 - t^2) dt = \left( \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{15}$$

$$I = \frac{-1 + 2\sqrt{2}}{15} \Rightarrow a = 2; b = 2; c = -1$$

$$P = a + b^2 - c = 7$$

- Câu 95:** Cho  $n$  là số nguyên dương khác 0, hãy tính tích phân  $I = \int_0^1 (1-x^2)^n x dx$  theo  $n$ .

**A.**  $I = \frac{1}{2n+2}$ .                      **B.**  $I = \frac{1}{2n}$ .                      **C.**  $I = \frac{1}{2n-1}$ .                      **D.**  $I = \frac{1}{2n+1}$ .

**Lời giải**

Với  $n \in \mathbb{N}^*$ , khi đó:

$$\text{Đặt } t = 1 - x^2 \Rightarrow dt = -2x dx \Rightarrow x dx = -\frac{1}{2} dt$$

Đổi cận:  $x = 0 \rightarrow t = 1; x = 1 \rightarrow t = 0$

$$\text{Khi đó } I = -\frac{1}{2} \int_1^0 t^n dt = \frac{1}{2} \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{2n+2}$$

**Cách 2:** Ta có  $d(1-x^2) = -2x dx \rightarrow -\frac{1}{2} d(1-x^2) = x dx$

$$I = \int_0^1 (1-x^2)^n x dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 (1-x^2)^n d(1-x^2) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{2n+2}$$

- Câu 96:** Giả sử  $I = \int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = a \ln \frac{2}{3} + b$  với  $a, b$  là số nguyên. Khi đó giá trị  $a - b$  là

**A.**  $-17$ .                      **B.**  $5$ .                      **C.**  $-5$ .                      **D.**  $17$ .

**Lời giải**

$$\text{Đặt } t = \sqrt[6]{x} \Rightarrow x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt$$

Đổi cận:  $x = 1 \Rightarrow t = 1; x = 64 \Rightarrow t = 2$ .

$$\begin{aligned}
 \text{Suy ra } I &= \int_1^2 \frac{6t^5}{t^3+t^2} dt = 6 \int_1^2 \frac{t^3}{t+1} dt = 6 \int_1^2 \left( t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt \\
 &= 6 \int_1^2 (t^2 - t + 1) dt - 6 \int_1^2 \frac{1}{t+1} d(t+1) \\
 &= 6 \left( \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t \right) \Big|_1^2 - 6 \ln|t+1| \Big|_1^2 = 6 \left( \frac{8}{3} - \frac{5}{6} \right) - 6(\ln 3 - \ln 2) = 11 - 6 \ln \frac{3}{2} = 6 \ln \frac{2}{3} + 11.
 \end{aligned}$$

Từ đó suy ra  $\begin{cases} a=6 \\ b=11 \end{cases} \Rightarrow a-b=-5.$

**Câu 97:** Cho hàm số  $f(x)$  có  $f(\sqrt{2}) = -2$  và  $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{6-x^2}}, \forall x \in (-\sqrt{6}; \sqrt{6})$ . Khi đó  $\int_0^{\sqrt{3}} f(x).dx$  bằng

**A.**  $-\frac{3\pi}{4}$ .      **B.**  $\frac{3\pi+6}{4}$ .      **C.**  $\frac{\pi+2}{4}$ .      **D.**  $-\frac{3\pi+6}{4}$ .

Lời giải

**Chọn D**

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } \forall x \in (-\sqrt{6}; \sqrt{6}) &\Rightarrow f(x) = \int f'(x).dx = \int \frac{x}{\sqrt{6-x^2}}.dx \\
 &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{6-x^2}}.d(6-x^2) = -\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{6-x^2} + C. \\
 \text{Mà } f(\sqrt{2}) &= -2 \Leftrightarrow -\sqrt{6-2} + C = -2 \Leftrightarrow C = 0. \\
 \text{Suy ra } f(x) &= -\sqrt{6-x^2}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } I = \int_0^{\sqrt{3}} f(x).dx = - \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{6-x^2}.dx.$$

$$\text{Đặt } x = \sqrt{6} \sin t, t \in \left[ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \Rightarrow dx = \sqrt{6} \cos t.d t.$$

$$\text{Đổi cận } x=0 \Rightarrow t=0; x=\sqrt{3} \Rightarrow t=\frac{\pi}{4}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Suy ra } I &= - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{6-6\sin^2 t} \cdot \sqrt{6} \cdot \cos t.d t = -6 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t.d t = -3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2t + 1).d t = -3 \left( \frac{1}{2} \sin 2t + t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= -3 \left( \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{3\pi+6}{4}.
 \end{aligned}$$

- Câu 98:** Biết  $\int_1^2 \frac{x}{3x + \sqrt{9x^2 - 1}} dx = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{35}$  với  $a, b, c$  là các số hữu tỷ, tính  $P = a + 2b + c - 7$ .
- A.**  $-\frac{1}{9}$ .                      **B.**  $\frac{86}{27}$ .                      **C.**  $-2$ .                      **D.**  $\frac{67}{27}$ .

**Lời giải**

Ta có

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{x}{3x + \sqrt{9x^2 - 1}} dx &= \int_1^2 x(3x + \sqrt{9x^2 - 1}) dx = \int_1^2 (3x^2 - x\sqrt{9x^2 - 1}) dx = \int_1^2 3x^2 dx - \int_1^2 x\sqrt{9x^2 - 1} dx \\ &= x^3 \Big|_1^2 + \int_1^2 x\sqrt{9x^2 - 1} dx = 7 + \int_1^2 x\sqrt{9x^2 - 1} dx. \end{aligned}$$

Tính  $\int_1^2 x\sqrt{9x^2 - 1} dx$ .

Đặt  $\sqrt{9x^2 - 1} = t \Rightarrow 9x^2 - 1 = t^2 \Rightarrow x dx = \frac{t dt}{9}$ .

Khi  $x = 1$  thì  $t = 2\sqrt{2}$ ; khi  $x = 2$  thì  $t = \sqrt{35}$ .

Khi đó  $\int_1^2 x\sqrt{9x^2 - 1} dx = \int_{2\sqrt{2}}^{\sqrt{35}} t \frac{t dt}{9} = \frac{t^3}{27} \Big|_{2\sqrt{2}}^{\sqrt{35}} = \frac{35}{27}\sqrt{35} - \frac{16}{27}\sqrt{2}$ .

Vậy  $\int_1^2 \frac{x}{3x + \sqrt{9x^2 - 1}} dx = 7 - \frac{35}{27}\sqrt{35} + \frac{16}{27}\sqrt{2} \Rightarrow a = 7, b = \frac{16}{27}, c = -\frac{35}{27}$ .

Vậy  $P = a + 2b + c - 7 = 7 + \frac{32}{27} - \frac{35}{27} - 7 = -\frac{1}{9}$ .

- Câu 99:** Biết  $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x+1} + (x+1)\sqrt{x}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c}$  với  $a, b, c$  là các số nguyên dương. Tính  $P = a + b + c$ .

- A.**  $P = 44$ .                      **B.**  $P = 42$ .                      **C.**  $P = 46$ .                      **D.**  $P = 48$ .

**Lời giải**

Đặt  $I = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x+1} + (x+1)\sqrt{x}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})}$ .

Đặt  $t = \sqrt{x} + \sqrt{x+1} \Rightarrow dt = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2\sqrt{x(x+1)}} dx \Leftrightarrow \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}} = 2 \frac{dt}{t}$ .

Khi  $x = 1$  thì  $t = \sqrt{2} + 1$ , khi  $x = 2$  thì  $t = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ .

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})} = 2 \int_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \frac{dt}{t^2} = -2 \frac{1}{t} \Big|_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = -2 \left( \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \right) = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 2 \\ &= \sqrt{32} - \sqrt{12} - \sqrt{4} \Rightarrow a = 32, b = 12, c = 4 \end{aligned}$$

Vậy  $P = a + b + c = 48$

**Câu 100:** Biết  $\int_0^4 \frac{\sqrt{2x+1}dx}{2x+3\sqrt{2x+1}+3} = a+b\ln 2+c\ln \frac{5}{3}$  ( $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ). Tính  $T = 2a+b+c$ .

A.  $T = 4$ .

B.  $T = 2$ .

C.  $T = 1$ .

D.  $T = 3$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} I &= \int_0^4 \frac{\sqrt{2x+1}dx}{2x+3\sqrt{2x+1}+3} = \int_0^4 \frac{\sqrt{2x+1}dx}{(\sqrt{2x+1}+1)(\sqrt{2x+1}+2)} = \int_0^4 \frac{2(\sqrt{2x+1}+1) - (\sqrt{2x+1}+2)dx}{(\sqrt{2x+1}+1)(\sqrt{2x+1}+2)} \\ &= \int_0^4 \frac{2dx}{(\sqrt{2x+1}+2)} - \int_0^4 \frac{dx}{(\sqrt{2x+1}+1)}. \end{aligned}$$

Đặt  $u = \sqrt{2x+1} \Rightarrow udu = dx$ . Với  $x = 0 \Rightarrow u = 1$ , với  $x = 4 \Rightarrow u = 3$ .

$$\text{Suy ra } I = \int_1^3 \frac{2udu}{u+2} - \int_1^3 \frac{udu}{u+1} = \int_1^3 \left(2 - \frac{4}{u+2}\right) du - \int_1^3 \left(1 - \frac{1}{u+1}\right) du$$

$$= \left(u - 4\ln|u+2| + \ln|u+1|\right) \Big|_1^3 = 2 - 4\ln \frac{5}{3} + \ln 2$$

$$\Rightarrow a = 2, b = 1, c = 1 \Rightarrow T = 2.1 + 1 - 4 = 1.$$

**Câu 101:** Cho  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5\sin x + 6} dx = a \ln \frac{4}{c} + b$ , tính tổng  $S = a + b + c$

A.  $S = 1$ .

B.  $S = 4$ .

C.  $S = 3$ .

D.  $S = 0$ .

**Lời giải**

Đặt  $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$ .  $x = 0 \Rightarrow t = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$ .

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5\sin x + 6} dx = \int_0^1 \frac{1}{t^2 - 5t + 6} dt = \int_0^1 \left( \frac{1}{t-3} - \frac{1}{t-2} \right) dt = \ln \left| \frac{t-3}{t-2} \right| \Big|_0^1 = \ln 2 - \ln \frac{3}{2} = \ln \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow a = 1, b = 0, c = 3 \Rightarrow S = a + b + c = 4.$$

**Câu 102:** Cho tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2+\cos x} \cdot \sin x dx$ . Nếu đặt  $t = 2 + \cos x$  thì kết quả nào sau đây đúng?

A.  $I = \int_3^2 \sqrt{t} dt$ .

B.  $I = \int_2^3 \sqrt{t} dt$ .

C.  $I = 2 \int_3^2 \sqrt{t} dt$ .

D.  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{t} dt$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2+\cos x} \cdot \sin x dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2+\cos x} d(\cos x)$$

$$= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2+\cos x} d(\cos x + 2) = - \int_3^2 \sqrt{t} dt = \int_2^3 \sqrt{t} dt.$$

**Câu 103:** Tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$  bằng cách đặt  $u = \tan x$ , mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} u^2 du$ .      B.  $I = \int_0^2 \frac{1}{u^2} du$ .      C.  $I = -\int_0^1 u^2 du$ .      D.  $I = \int_0^1 u^2 du$ .

**Lời giải**

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx.$$

$$\text{Đặt } u = \tan x \Rightarrow du = \frac{1}{\cos^2 x} dx.$$

$$\text{Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow u = 0, \quad x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = 1$$

$$\text{Suy ra: } I = \int_0^1 u^2 du.$$

**Câu 104:** Tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$ .

- A.  $I = \frac{5}{2}$ .      B.  $I = \frac{3}{2}$ .      C.  $I = \frac{\pi}{3} + \frac{9}{20}$ .      D.  $I = \frac{9}{4}$ .

**Lời giải**

$$\text{Đặt } t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx.$$

$$\text{Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 1; \quad x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Khi đó: } I = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{-1}{t^3} dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t^3} dt = \left. \frac{-1}{2t^2} \right|_{\frac{1}{2}}^1 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}.$$

**Câu 105:** Cho tích phân  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + 2} dx = a \ln 5 + b \ln 2$  với  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A.  $2a + b = 0$ .      B.  $a - 2b = 0$ .      C.  $2a - b = 0$ .      D.  $a + 2b = 0$ .

**Lời giải**

$$\text{Đặt } t = \cos x + 2 \Rightarrow dt = -\sin x dx$$

$$\text{Đổi cận } x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{5}{2}, \quad x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 2$$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + 2} dx = -\int_{\frac{5}{2}}^2 \frac{1}{t} dt = \int_2^{\frac{5}{2}} \frac{1}{t} dt = \ln t \Big|_2^{\frac{5}{2}} = \ln \frac{5}{2} - \ln 2 = \ln 5 - 2 \ln 2$$

Vậy ta được  $a = 1; b = -2$ .

**Câu 106:** Có bao nhiêu số  $a \in (0; 20\pi)$  sao cho  $\int_0^a \sin^5 x \sin 2x dx = \frac{2}{7}$ .

**A.** 10.

**B.** 9.

**C.** 20.

**D.** 19.

**Lời giải**

$$I = \int_0^a \sin^5 x \sin 2x dx = 2 \int_0^a \sin^6 x \cos x dx$$

$$\text{Đặt } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx \text{ và } \begin{cases} \sin a = b; & b \in [-1; 1] \\ \sin 0 = 0 \end{cases}$$

$$I = 2 \int_0^b t^6 dt = 2 \cdot \frac{t^7}{7} \Big|_0^b = \frac{2b^7}{7}.$$

$$\text{Theo giả thiết: } \int_0^a \sin^5 x \sin 2x dx = \frac{2}{7} \Rightarrow \frac{2b^7}{7} = \frac{2}{7} \Leftrightarrow b = 1 \Leftrightarrow \sin a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}.$$

$$a \in (0; 20\pi) \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{2} + k2\pi < 20\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < k2\pi < \frac{39\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < k < \frac{39}{4}.$$

Mà  $k \in \mathbb{Z}$  nên suy ra  $k \in \{0; 1; 2; \dots; 9\}$ .

**Câu 107:** Biết  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{1 + \sin x} = \frac{a\sqrt{3} + b}{c}$ , với  $a, b \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{Z}^+$  và  $a, b, c$  là các số nguyên tố cùng nhau. Giá trị của tổng  $a + b + c$  bằng

**A.** 5.

**B.** 12.

**C.** 7.

**D.** -1.

**Lời giải**

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{1 + \sin x} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\left(1 + \tan \frac{x}{2}\right)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right)}{\left(1 + \tan \frac{x}{2}\right)^2} dx.$$

$$\text{Đặt } t = 1 + \tan \frac{x}{2} \Rightarrow 2dt = \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) dx$$

$$\text{Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 1; x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = 3 - \sqrt{3}.$$

$$I = \int_1^{3-\sqrt{3}} \frac{2dt}{t^2} = -\frac{2}{t} \Big|_1^{3-\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3} + 3}{3}.$$

Suy ra  $a = -1, b = 3, c = 3$  nên  $a + b + c = 5$ .

**Câu 108:** Cho tích phân số  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + 2} dx = a \ln 5 + b \ln 2$  với  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.**  $2a + b = 0$ .

**B.**  $a - 2b = 0$ .

**C.**  $2a - b = 0$ .

**D.**  $a + 2b = 0$ .

**Lời giải**

+ Xét:  $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + 2} dx$

+ Đặt  $u = \cos x + 2 \Rightarrow du = -\sin x dx \Rightarrow \sin x dx = -du$

+ Đổi cận:  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow u = \frac{5}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow I = \int_{\frac{5}{2}}^2 \frac{-1}{u} du = -\ln|u| \Big|_{\frac{5}{2}}^2 = -\left(\ln 2 - \ln \frac{5}{2}\right) = \ln 5 - 2 \ln 2 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$

**Câu 109:** Cho  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos^2 x - 5 \cos x + 6} dx = a \ln \frac{4}{c} + b$ , với  $a, b$  là các số hữu tỉ,  $c > 0$ . Tính tổng  $S = a + b + c$ .

**A.**  $S = 3$ .

**B.**  $S = 0$ .

**C.**  $S = 1$ .

**D.**  $S = 4$ .

**Lời giải**

Đặt  $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$ .

Đổi cận:  $x = 0 \Rightarrow t = 1$ ;  $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$

Ta có:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(\cos x)^2 - 5 \cos x + 6} dx = -\int_1^0 \frac{1}{t^2 - 5t + 6} dt = \int_0^1 \left( \frac{1}{t-3} - \frac{1}{t-2} \right) dt = \ln \left| \frac{t-3}{t-2} \right| \Big|_0^1 = \ln 2 - \ln \frac{3}{2} = \ln \frac{4}{3}$$
  
 $= a \ln \frac{4}{c} + b$ .

Do đó:  $\begin{cases} a = 1 \\ c = 3 \\ b = 0 \end{cases}$

Vậy  $S = a + b + c = 4$ .

**Câu 110:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có  $f(0) = 1$  và  $f'(x) = \tan^3 x + \tan x, \forall x \in \mathbb{R}$ . Biết

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \frac{a + \pi}{b}; a, b \in \mathbb{Q}, \text{ khi đó } b - a \text{ bằng}$$

**A.** 4.

**B.** 12.

**C.** 0.

**D.** -4.

**Lời giải**

**Chọn A**

Từ giả thiết  $f'(x) = \tan^3 x + \tan x, \forall x \in \mathbb{R}$  ta có

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (\tan^3 x + \tan x) dx = \int \tan x (1 + \tan^2 x) dx = \int \tan x \cdot d(\tan x) = \frac{1}{2} \tan^2 x + C,$$

Ta có  $f(0) = 1$  suy ra  $C = 1$  vậy  $f(x) = \frac{1}{2} \tan^2 x + 1$ .

$$\text{Tích phân } \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^2 x + 2) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^2 x + 1 + 1) dx = \frac{1}{2} (\tan x + x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4 + \pi}{8}.$$

$$\text{Từ đây ta được } \begin{cases} a = 4 \\ b = 8 \end{cases} \Rightarrow b - a = 4.$$

Vậy  $b - a = 4$ .

**Câu 111:** Cho tích phân  $I = \int_1^e \frac{3 \ln x + 1}{x} dx$ . Nếu đặt  $t = \ln x$  thì

**A.**  $I = \int_0^1 \frac{3t + 1}{e^t} dt$ .

**B.**  $I = \int_1^e \frac{3t + 1}{t} dt$ .

**C.**  $I = \int_1^e (3t + 1) dt$ .

**D.**  $I = \int_0^1 (3t + 1) dt$ .

**Lời giải**

Đặt  $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$ . Đổi cận  $x = e \Rightarrow t = 1$ ;  $x = 1 \Rightarrow t = 0$ .

$$\text{Khi đó } I = \int_1^e \frac{3 \ln x + 1}{x} dx = \int_0^1 (3t + 1) dt.$$

**Câu 112:** Cho  $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)^2} dx = a \ln 3 + b \ln 2 + \frac{c}{3}$ , với  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Khẳng định nào sau đây đúng.

**A.**  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ .

**B.**  $a^2 + b^2 + c^2 = 11$ .

**C.**  $a^2 + b^2 + c^2 = 9$ .

**D.**  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có  $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)^2} dx$ , đặt  $\ln x + 2 = t \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt$

$$I = \int_2^3 \frac{t-2}{t^2} dt = \int_2^3 \frac{1}{t} dt - 2 \int_2^3 \frac{1}{t^2} dt = \ln t \Big|_2^3 + \frac{2}{t} \Big|_2^3 = \ln 3 - \ln 2 + \frac{2}{3} - \frac{2}{2} = \ln 3 - \ln 2 - \frac{1}{3}$$

Suy ra  $a = 1; b = -1; c = -1$ , vậy  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ . **Chọn D**

**Câu 113:** Biết  $I = \int_0^4 x \ln(x^2 + 9) dx = a \ln 5 + b \ln 3 + c$  trong đó  $a, b, c$  là các số thực. Giá trị của biểu thức

$T = a + b + c$  là:

**A.**  $T = 11$ .

**B.**  $T = 9$ .

**C.**  $T = 10$ .

**D.**  $T = 8$ .

**Lời giải**

Đặt  $x^2 + 9 = t \Rightarrow 2x dx = dt \Leftrightarrow x dx = \frac{1}{2} dt$ .

$$\text{Khi đó } I = \frac{1}{2} \int_9^{25} \ln t \cdot dt = \frac{1}{2} (t \cdot \ln t - t) \Big|_9^{25} = \frac{1}{2} [(25 \ln 25 - 25) - (9 \ln 9 - 9)] = 25 \ln 5 - 9 \ln 3 - 8.$$

Suy ra  $T = a + b + c = 25 - 9 - 8 = 8$ .

**Câu 114:** Cho  $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)^2} dx$  có kết quả dạng  $I = \ln a + b$  với  $a > 0, b \in \mathbb{R}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.**  $2ab = -1$ .

**B.**  $2ab = 1$ .

**C.**  $-b + \ln \frac{3}{2a} = -\frac{1}{3}$ .

**D.**  $-b + \ln \frac{3}{2a} = \frac{1}{3}$ .

**Lời giải**

Đặt  $\ln x + 2 = t \Leftrightarrow \ln x = t - 2 \Rightarrow \frac{1}{x} dx = dt$ .

Đổi cận: khi  $x = 1$  thì  $t = 2$ ; khi  $x = e$  thì  $t = 3$ .

$$\text{Khi đó } I = \int_2^3 \frac{t-2}{t^2} dt = \int_2^3 \left( \frac{1}{t} - \frac{2}{t^2} \right) dt = \left( \ln |t| + \frac{2}{t} \right) \Big|_2^3 = \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy  $2ab = -1$ .

**Câu 115:** Cho  $\int_1^e \frac{2 \ln x + 1}{x(\ln x + 2)^2} dx = \ln \frac{a}{b} - \frac{c}{d}$  với  $a, b, c$  là các số nguyên dương, biết  $\frac{a}{b}; \frac{c}{d}$  là các phân số

tối giản. Tính giá trị  $a + b + c + d$ ?

**A.** 18.

**B.** 15.

**C.** 16.

**D.** 17.

**Lời giải**

Đặt  $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$ .

Đổi cận:  $x = 1 \Rightarrow t = 0; x = e \Rightarrow t = 1$ . Khi đó:

$$I = \int_1^e \frac{2 \ln x + 1}{x(\ln x + 2)^2} dx = \int_0^1 \frac{2t + 1}{(t + 2)^2} dt = \int_0^1 \left( \frac{-3}{(t + 2)^2} + \frac{2}{t + 2} \right) dt = \left( \frac{3}{t + 2} + 2 \ln |t + 2| \right) \Big|_0^1 = \ln \frac{9}{4} - \frac{1}{2}.$$

Vậy  $a + b + c + d = 9 + 4 + 1 + 2 = 16$ .

**Câu 116:** Cho  $\int_1^e \frac{(3x^3 - 1) \ln x + 3x^2 - 1}{1 + x \ln x} dx = a.e^3 + b + c \ln(e + 1)$  với  $a, b, c$  là các số nguyên và  $\ln e = 1$ .

Tính  $P = a^2 + b^2 + c^2$ .

**A.**  $P = 9$ .

**B.**  $P = 14$ .

**C.**  $P = 10$ .

**D.**  $P = 3$ .

**Lời giải**

Ta có

$$I = \int_1^e \frac{(3x^3 - 1) \ln x + 3x^2 - 1}{1 + x \ln x} dx = \int_1^e \frac{3x^2(1 + x \ln x) - (1 + \ln x)}{1 + x \ln x} dx = \int_1^e 3x^2 dx - \int_1^e \frac{(1 + \ln x)}{1 + x \ln x} dx = e^3 - 1 - A$$

Tính  $A = \int_1^e \frac{(1 + \ln x)}{1 + x \ln x} dx$ . Đặt  $t = 1 + x \ln x \Rightarrow dt = (1 + \ln x) dx$ .

Đổi cận:  $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 1 \\ x = e \Rightarrow t = e + 1 \end{cases}$ . Khi đó  $A = \int_1^{e+1} \frac{dt}{t} = \ln t \Big|_1^{e+1} = \ln(e + 1)$ .

$$\text{Vậy } I = e^3 - 1 - \ln(e + 1) \longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \Rightarrow P = a^2 + b^2 + c^2 = 3. \\ c = -1 \end{cases}$$

**Câu 117:** Biết  $I = \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x + 3e^{-x} + 4} = \frac{1}{c}(\ln a - \ln b + \ln c)$  với  $a, b, c$  là các số nguyên dương.

Tính  $P = 2a - b + c$ .

**A.**  $P = -3$ .

**B.**  $P = -1$ .

**C.**  $P = 4$ .

**D.**  $P = 3$

**Lời giải**

$$\text{Ta có } I = \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x + 3e^{-x} + 4} = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x dx}{e^{2x} + 4e^x + 3}.$$

Đặt:  $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$ . Đổi cận:  $x = 0 \Rightarrow t = 1, x = \ln 2 \Rightarrow t = 2$ .

$$\text{Khi đó } I = \int_1^2 \frac{1}{t^2 + 4t + 3} dt = \frac{1}{2} \int_1^2 \left( \frac{1}{t + 1} - \frac{1}{t + 3} \right) dt = \frac{1}{2} \ln \frac{t + 1}{t + 3} \Big|_1^2 = \frac{1}{2} (\ln 3 - \ln 5 + \ln 2).$$

Suy ra  $a = 3, b = 5, c = 2$ . Vậy  $P = 2a - b + c = 3$ .

**Câu 118:** Cho  $\int_0^1 \frac{(x^2 + x)e^x}{x + e^{-x}} dx = a.e + b \ln(e + c)$  với  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Tính  $P = a + 2b - c$ .

**A.**  $P = 1$ .

**B.**  $P = -1$ .

**C.**  $P = 0$ .

**D.**  $P = -2$ .

**Lời giải**

Ta có:  $I = \int_0^1 \frac{(x^2 + x)e^x}{x + e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{(x+1)e^x x e^x}{x e^x + 1} dx.$

Đặt  $t = x e^x + 1 \Rightarrow dt = (1+x)e^x dx.$

Đổi cận:  $x = 0 \Rightarrow t = 1; x = 1 \Rightarrow t = e + 1.$

Khi đó:  $I = \int_1^{e+1} \frac{t-1}{t} dt = \int_1^{e+1} \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt = \left(t - \ln|t|\right) \Big|_1^{e+1} = e - \ln(e+1).$

Suy ra:  $a = 1, b = -1, c = 1.$

Vậy:  $P = a + 2b - c = -2.$

**Câu 119:** Cho hàm số  $y = f(x)$  biết  $f(0) = \frac{1}{2}$  và  $f'(x) = x e^{x^2}$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Khi đó  $\int_0^1 x f(x) dx$  bằng

**A.**  $\frac{e+1}{4}.$

**B.**  $\frac{e-1}{4}.$

**C.**  $\frac{e-1}{2}.$

**D.**  $\frac{e+1}{2}.$

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có  $f(x) = \int f'(x).dx = \int x.e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2}.d(x^2) = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$

Mà  $f(0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} + C = \frac{1}{2} \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} e^{x^2}.$

$\Rightarrow \int_0^1 x f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{4} \int_0^1 e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{4} e^{x^2} \Big|_0^1 = \frac{e-1}{4}.$

**Câu 120:** Biết rằng  $\int_1^e \frac{2 \ln x + 1}{x(\ln x + 1)^2} dx = a \ln 2 - \frac{b}{c}$  với  $a, b, c$  là các số nguyên dương và  $\frac{b}{c}$  là phân số tối giản. Tính  $S = a + b + c$ .

**A.**  $S = 3.$

**B.**  $S = 7.$

**C.**  $S = 10.$

**D.**  $S = 5.$

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt  $\ln x + 1 = t$ . Ta có:  $\frac{1}{x} dx = dt.$

Đổi cận:  $x = 1 \Rightarrow t = 1; x = e \Rightarrow t = 2.$

Ta có:  $\int_1^e \frac{2 \ln x + 1}{x(\ln x + 1)^2} dx = \int_1^2 \frac{2(t-1)+1}{t^2} dt = \int_1^2 \left(\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}\right) dt = \left(2 \ln|t| + \frac{1}{t}\right) \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - \frac{1}{2}.$

Suy ra:  $a = 2; b = 1; c = 2$ . Khi đó:  $S = a + b + c = 5.$

## TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

Nếu  $u, v$  có đạo hàm liên tục trên  $(a; b)$  thì  $I = \int_a^b u.dv = u.v \Big|_a^b - \int_a^b v.du.$

$$\text{Chọn } \begin{cases} u = \dots\dots\dots \longrightarrow du = \dots\dots\dots dx \\ dv = \dots\dots\dots dx \longrightarrow v = \dots\dots\dots \end{cases}$$

Nhận dạng: **tích hai hàm khác loại nhân nhau**

Thứ tự ưu tiên **chọn u** là: "**log – đa – lượng – mũ**" và **dv** là **phần còn lại**.

Nghĩa là nếu có  $\ln$  hay  $\log_a x$  thì chọn  $u = \ln$  hay  $u = \log_a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x$  và  $dv =$  còn lại. Nếu không có  $\ln$ ;  $\log$  thì chọn  $u =$  đa thức và  $dv =$  còn lại,...

**CHÚ Ý:**  $\int_a^b (\text{hàm mũ}). dx \longrightarrow$  tích phân từng phần luân hồi.

Nghĩa là sau khi đặt  $u, dv$  để tính tích phân từng phần và tiếp tục tính  $\int u dv$  sẽ xuất hiện lại tích phân ban đầu. Giả sử tích phân được tính ban đầu là  $I$  và nếu lập lại, ta sẽ không giải tiếp mà xem đây là phương trình bậc nhất ẩn là  $I \xRightarrow{\text{giải}} I$ .

**Câu 121:** Biết  $\int_0^1 x \ln(x^2 + 1) dx = a \ln 2 - \frac{b}{c}$ . Tính  $P = 13a + 10b + 84c$ .

**A.** 193.

**B.** 191.

**C.** 190.

**D.** 189.

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = \ln(x^2 + 1) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2x}{x^2 + 1} dx \\ v = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } \int_0^1 x \ln(x^2 + 1) dx = \left( \frac{x^2 + 1}{2} \right) \ln(x^2 + 1) \Big|_0^1 - \int_0^1 x dx = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a = 1, b = 1, c = 2. \text{ Vậy } P = 13a + 10b + 84c = 191.$$

**Câu 122:** Cho hàm số  $f(x)$  có  $f(0) = -1$  và  $f'(x) = x(6 + 12x + e^{-x}), \forall x \in \mathbb{R}$ . Khi đó  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng

**A.**  $3e$ .

**B.**  $3e^{-1}$ .

**C.**  $4 - 3e^{-1}$ .

**D.**  $-3e^{-1}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có:  $f'(x) = x(6 + 12x + e^{-x}), \forall x \in \mathbb{R}$  nên  $f(x)$  là một nguyên hàm của  $f'(x)$ .

$$\int f'(x) dx = \int x(6 + 12x + e^{-x}) dx = \int (6x + 12x^2) dx + \int xe^{-x} dx$$

$$\text{Mà } \int (6x + 12x^2) dx = 3x^2 + 4x^3 + C$$

$$\text{Xét } \int x e^{-x} dx : \text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C = -(x+1)e^{-x} + C$$

$$\text{Suy ra } f(x) = 3x^2 + 4x^3 - (x+1)e^{-x} + C, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Mà } f(0) = -1 \Rightarrow C = 0 \text{ nên } f(x) = 3x^2 + 4x^3 - (x+1)e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ta có

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (3x^2 + 4x^3 - (x+1)e^{-x}) dx = (x^3 + x^4) \Big|_0^1 - \int_0^1 (x+1)e^{-x} dx = 2 - \int_0^1 (x+1)e^{-x} dx$$

$$\text{Xét } \int_0^1 (x+1)e^{-x} dx : \text{Đặt } \begin{cases} u = x+1 \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\int_0^1 (x+1)e^{-x} dx = -(x+1)e^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -2e^{-1} + 1 - e^{-x} \Big|_0^1 = -2e^{-1} + 1 - e^{-1} + 1 = 2 - 3e^{-1}$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = 3e^{-1}.$$

**Câu 123:** Biết  $I = \int_0^4 x \ln(x^2 + 9) dx = a \ln 5 + b \ln 3 + c$  trong đó  $a, b, c$  là các số thực. Tính giá trị của biểu

thức  $T = a + b + c$ .

**A.**  $T = 9$ .

**B.**  $T = 11$ .

**C.**  $T = 8$ .

**D.**  $T = 10$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

**Cách 1**

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x^2 + 9) \\ dv = x dx \end{cases}, \text{ ta có } \begin{cases} du = \frac{2x}{x^2 + 9} dx \\ v = \frac{x^2 + 9}{2} \end{cases}.$$

Do đó

$$I = \frac{x^2 + 9}{2} \ln(x^2 + 9) \Big|_0^4 - \int_0^4 \frac{x^2 + 9}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + 9} dx = \frac{x^2 + 9}{2} \ln(x^2 + 9) \Big|_0^4 - \int_0^4 x dx$$

$$= \frac{x^2 + 9}{2} \ln(x^2 + 9) \Big|_0^4 - \left( \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^4 = \frac{25}{2} \ln 25 - \frac{9}{2} \ln 9 - 8 = 25 \ln 5 - 9 \ln 3 - 8 = a \ln 5 + b \ln 3 + c.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a = 25 \\ b = -9 \Rightarrow a + b + c = 8. \\ c = -8 \end{cases}$$

**Cách 2**

$$\text{Ta có } I = \int_0^4 x \ln(x^2 + 9) dx$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + 9 \Rightarrow dt = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{1}{2} dt$$

$$\text{Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 9, \quad x = 4 \Rightarrow t = 25$$

$$\text{Suy ra } I = \int_0^4 x \ln(x^2 + 9) dx = \frac{1}{2} \int_9^{25} \ln t dt$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln t \\ dv = dt \end{cases}, \text{ ta có } \begin{cases} du = \frac{1}{t} dt \\ v = t \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \frac{1}{2} \int_9^{25} t \ln t dt = \frac{1}{2} \left( t \cdot \ln t \Big|_9^{25} - \int_9^{25} t \cdot \frac{1}{t} dt \right) = \frac{1}{2} \left( t \cdot \ln t \Big|_9^{25} - \int_9^{25} dt \right) = \frac{1}{2} \left( t \cdot \ln t \Big|_9^{25} - t \Big|_9^{25} \right) \\ &= \frac{25}{2} \ln 25 - \frac{9}{2} \ln 9 - 8 = 25 \ln 5 - 9 \ln 3 - 8 = a \ln 5 + b \ln 3 + c. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a = 25 \\ b = -9 \Rightarrow a + b + c = 8. \\ c = -8 \end{cases}$$

**Câu 124:** Tích phân  $\int_0^1 (x-2)e^{2x} dx$  bằng

**A.**  $\frac{-5-3e^2}{4}.$

**B.**  $\frac{5-3e^2}{4}.$

**C.**  $\frac{5-3e^2}{2}.$

**D.**  $\frac{5+3e^2}{4}.$

**Lời giải**

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x-2 \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x-2)e^{2x} dx &= (x-2) \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} e^{2x} dx \\ &= -\frac{1}{2} e^2 + 1 - \frac{1}{4} e^{2x} \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} e^2 + 1 - \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} e^2 + \frac{5}{4} = \frac{5-3e^2}{4}. \end{aligned}$$

**Câu 125:** Biết rằng tích phân  $\int_0^1 (2x+1)e^x dx = a + b.e$ , tích  $a.b$  bằng

A. -15.

B. -1.

C. 1.

D. 20.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện:  $a, b \in \mathbb{Z}$ .

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2x+1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (2x+1)e^x dx = (2x+1)e^x \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 e^x dx = (2x-1)e^x \Big|_0^1 = 1 + e = a + b.e.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}. \text{ Vậy tích } a.b = 1.$$

**Câu 126:** Cho tích phân  $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{b}{c} + a \ln 2$  với  $a$  là số thực,  $b$  và  $c$  là các số dương, đồng thời  $\frac{b}{c}$  là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức  $P = 2a + 3b + c$ .

A.  $P = 6$ .

B.  $P = 5$ .

C.  $P = -6$ .

D.  $P = 4$ .

**Lời giải**

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow I = \left. -\frac{\ln x}{x} \right|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \left. \left( -\frac{\ln x}{x} + \frac{-1}{x} \right) \right|_1^2 = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2}$$

$$\Rightarrow b = 1, c = 2, a = \frac{-1}{2} \Rightarrow P = 2a + 3b + c = 4.$$

**Câu 127:** Cho tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x-1) \sin 2x dx$ . Tìm đẳng thức đúng?

A.  $I = -(x-1) \cos 2x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$ .

B.  $I = -\frac{1}{2}(x-1) \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$ .

C.  $I = -\frac{1}{2}(x-1) \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$ .

D.  $I = -(x-1) \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$ .

**Lời giải**

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = (x-1) \\ dv = \sin 2x dx \end{cases}, \text{ ta có } \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{cases}. \text{ Do đó:}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x-1) \sin 2x dx = -\frac{1}{2}(x-1) \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx.$$

**Câu 128:** Biết rằng tồn tại duy nhất các bộ số nguyên  $a, b, c$  sao cho  $\int_2^3 (4x+2) \ln x dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$ .

Giá trị của  $a + b + c$  bằng

**A.** 19.

**B.** -19.

**C.** 5.

**D.** -5.

**Lời giải**

$$\text{Đặt } \begin{cases} \ln x = u \Rightarrow \frac{1}{x} dx = du \\ (4x+2) dx = dv \Rightarrow 2x^2 + 2x = v \end{cases}$$

Khi đó

$$\int_2^3 (4x+2) \ln x dx = \ln x \cdot (2x^2 + 2x) \Big|_2^3 - 2 \int_2^3 (x+1) dx = 24 \ln 3 - 12 \ln 2 - 2 \cdot \frac{7}{2} = -7 - 12 \ln 2 + 24 \ln 3.$$

Vậy  $a = -7; b = -12; c = 24 \Rightarrow a + b + c = 5$ .

**Câu 129:** Cho  $\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx = a \ln 2 + b \ln 3$ , với  $a, b$  là các số hữu tỉ. Tính  $P = a + 4b$ .

**A.**  $P = 0$

**B.**  $P = 1$

**C.**  $P = 3$

**D.**  $P = -3$

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx &= \int_1^2 \ln(1+x) \left( \frac{-1}{x} \right)' dx = \ln(1+x) \cdot \frac{-1}{x} \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x+1} \cdot \frac{-1}{x} dx \\ &= \frac{-1}{2} \ln 3 + \ln 2 + \int_1^2 \frac{1}{x} dx - \int_1^2 \frac{1}{x+1} dx = \frac{-1}{2} \ln 3 + \ln 2 - \ln(1+x) \Big|_1^2 + \ln x \Big|_1^2 \\ &= \frac{-1}{2} \ln 3 + \ln 2 - \ln 3 + 2 \ln 2 = \frac{-3}{2} \ln 3 + 3 \ln 2 \Rightarrow a = 3, b = \frac{-3}{2}. \end{aligned}$$

Vậy  $a + 4b = -3$ .

**Câu 130:** Biết  $\int_0^2 2x \ln(x+1) dx = a \ln b$ , với  $a, b \in \mathbb{N}^*$ ,  $b$  là số nguyên tố. Tính  $6a + 7b$ .

**A.**  $6a + 7b = 33$ .

**B.**  $6a + 7b = 25$ .

**C.**  $6a + 7b = 42$ .

**D.**  $6a + 7b = 39$ .

**Lời giải**

$$\text{Xét } I = \int_0^2 2x \ln(x+1) dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = 2x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x+1} dx \\ v = x^2 - 1 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } I = (x^2 - 1) \ln(x+1) \Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{x^2 - 1}{x+1} dx = 3 \ln 3 - \int_0^2 (x-1) dx = 3 \ln 3 - \left( \frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_0^2 = 3 \ln 3.$$

Vậy  $a = 3, b = 3 \Rightarrow 6a + 7b = 39$ .

**Câu 131:** Biết rằng  $\int_1^a \ln x dx = 1 + 2a$ , ( $a > 1$ ). Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

- A.**  $a \in (18; 21)$ .      **B.**  $a \in (1; 4)$ .      **C.**  $a \in (11; 14)$ .      **D.**  $a \in (6; 9)$ .

**Lời giải**

$$\text{Đặt } u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$\text{Ta có } \int_1^a \ln x dx = a \cdot \ln a - \int_1^a dx = a \ln a - a + 1 = 1 + 2a$$

$$\Rightarrow a \ln a = 3a \Leftrightarrow \ln a = 3 \Leftrightarrow a = e^3.$$

Vậy  $a \in (18; 21)$ .

**Câu 132:** Cho tích phân  $\int_0^1 (x-2)e^x dx = a + be$ , với  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Tổng  $a + b$  bằng

- A.** 1.      **B.** -3.      **C.** 5.      **D.** -1.

**Chọn A**

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x-2 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 (x-2)e^x dx = (x-2)e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = -e + 2 - e^x \Big|_0^1 = 3 - 2e = a + be$$

$$\text{với } a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = 3, b = -2 \Rightarrow a + b = 1$$

**Câu 133:** Tính tích phân  $I = \int_1^2 xe^x dx$ .

- A.**  $I = e^2$ .      **B.**  $I = -e^2$ .      **C.**  $I = e$ .      **D.**  $I = 3e^2 - 2e$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$I = \int_1^2 xe^x dx = xe^x \Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = 2e^2 - e - e^x \Big|_1^2 = 2e^2 - e - (e^2 - e) = e^2.$$

**Câu 134:** Biết rằng  $\int_2^3 x \ln x dx = m \ln 3 + n \ln 2 + p$  trong đó  $m, n, p \in \mathbb{Q}$ . Tính  $m + n + 2p$

- A.**  $\frac{5}{4}$ .      **B.**  $\frac{9}{2}$ .      **C.** 0.      **D.**  $-\frac{5}{4}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \int_2^3 x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_2^3 - \frac{1}{2} \int_2^3 x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_2^3 - \frac{x^2}{4} \Big|_2^3 = \frac{9}{2} \ln 3 - 2 \ln 2 - \frac{5}{4}.$$

Suy ra  $m + n + 2p = 0$ .

**Câu 135:** Biết  $\int_0^2 2x \ln(1+x) dx = a \ln b$ , với  $a, b \in \mathbb{N}^*$ ,  $b$  là số nguyên tố. Tính  $3a + 4b$ .

**A.** 42.

**B.** 21.

**C.** 12.

**D.** 32.

**Lời giải**

$$\text{Xét } I = \int_0^2 2x \ln(1+x) dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = \ln(1+x) \\ dv = 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{1+x} dx \\ v = x^2 - 1 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } I = (x^2 - 1) \ln(x+1) \Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{x^2 - 1}{x+1} dx = 3 \ln 3 - \int_0^2 (x-1) dx = 3 \ln 3 - \left( \frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_0^2 = 3 \ln 3.$$

Vậy  $a = 3, b = 3 \Rightarrow 3a + 4b = 21$ .

**Câu 136:** Biết  $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = \frac{\sqrt{3}}{a} \pi - \ln b$ . Khi đó, giá trị của  $a^2 + b$  bằng

**A.** 11.

**B.** 7.

**C.** 13.

**D.** 9.

**Lời giải**

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= x \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx = \frac{\pi}{3} \cdot \sqrt{3} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \frac{\pi \sqrt{3}}{3} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(\cos x)}{\cos x} \\ &= \frac{\pi \sqrt{3}}{3} + \ln |\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi \sqrt{3}}{3} + \ln \frac{1}{2} - \ln 1 = \frac{\pi \sqrt{3}}{3} - \ln 2 \Rightarrow a = 3; b = 2. \text{ Vậy } a^2 + b = 11. \end{aligned}$$

**Câu 137:** Cho  $\int_1^2 \frac{\ln(1+2x)}{x^2} dx = \frac{a}{2} \ln 5 + b \ln 3 + c \ln 2$ , với  $a, b, c$  là các số nguyên. Giá trị của  $a + 2(b+c)$  là:

**A.** 0.

**B.** 9.

**C.** 3.

**D.** 5.

**Lời giải**

Áp dụng phương pháp tích phân từng phần:

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = \ln(1+2x) \\ dv = \frac{1}{x^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2}{2x+1} dx \\ \text{chọn } v = -\frac{1}{x} - 2 = \frac{-(2x+1)}{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{\ln(1+2x)}{x^2} dx = \frac{-(2x+1)}{x} \cdot \ln(1+2x) \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{2}{x} dx$$

$$= \left( -\frac{5}{2} \ln 5 + 3 \ln 3 \right) + 2 \ln |x| \Big|_1^2$$

$$= -\frac{5}{2} \ln 5 + 3 \ln 3 + 2 \ln 2.$$

$$\Rightarrow a = -5, b = 3, c = 2.$$

$$\text{Vậy } a + 2(b + c) = 5.$$

**Câu 138:** Cho  $\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx = a \ln 2 + b \ln 3$ , với  $a, b$  là các số hữu tỉ. Tính  $P = ab$ .

**A.**  $P = \frac{3}{2}$ .

**B.**  $P = 0$ .

**C.**  $P = \frac{-9}{2}$ .

**D.**  $P = -3$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } I = \int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx = a \ln 2 + b \ln 3.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(1+x) \\ dv = \frac{1}{x^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{1+x} dx \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = -\frac{1}{x} \ln(1+x) \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x(1+x)} dx = -\frac{1}{2} \ln 3 + \ln 2 + \int_1^2 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{2} \ln 3 + \ln 2 + \left( \ln \frac{x}{x+1} \right) \Big|_1^2 = -\frac{1}{2} \ln 3 + \ln 2 + 2 \ln 2 - \ln 3 = 3 \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 3.$$

$$\text{Suy ra } a = 3, b = -\frac{3}{2}. \text{ Vậy } P = ab = \frac{-9}{2}.$$

**Câu 139:** Cho tích phân  $\int_0^1 (x-2)e^x dx = a + be$ , với  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Tổng  $a + b$  bằng

**A.** 1.

**B.** -3.

**C.** 5.

**D.** -1.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt

$$\begin{cases} u = x - 2 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 (x-2)e^x dx = (x-2)e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = -e + 2 - e^x \Big|_0^1 = 3 - 2e = a + be$$

với  $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = 3, b = -2 \Rightarrow a + b = 1$

**Câu 140:** Biết  $\int_{\frac{1}{12}}^{12} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{x+1}{x}} dx = \frac{a}{b} e^{\frac{c}{d}}$  trong đó  $a, b, c, d$  là các số nguyên dương và các phân số  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$

là tối giản. Tính  $bc - ad$ .

**A.** 12.

**B.** 1.

**C.** 24.

**D.** 64.

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } I = \int_{\frac{1}{12}}^{12} \left[ x \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + 1 \right] e^{\frac{x+1}{x}} dx = \int_{\frac{1}{12}}^{12} x \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{x+1}{x}} dx + \int_{\frac{1}{12}}^{12} e^{\frac{x+1}{x}} dx.$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = x \\ dv = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{x+1}{x}} dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^{\frac{x+1}{x}} \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } I = \int_{\frac{1}{12}}^{12} x \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{x+1}{x}} dx + \int_{\frac{1}{12}}^{12} e^{\frac{x+1}{x}} dx = x \cdot e^{\frac{x+1}{x}} \Big|_{\frac{1}{12}}^{12} - \int_{\frac{1}{12}}^{12} e^{\frac{x+1}{x}} dx + \int_{\frac{1}{12}}^{12} e^{\frac{x+1}{x}} dx$$

$$= 12e^{12+\frac{1}{12}} - \frac{1}{12}e^{12+\frac{1}{12}} = \frac{143}{12}e^{\frac{145}{12}}.$$

Vậy:  $a = 143; b = 12; c = 145; d = 12$ . Đó đó:  $bc - ad = 12 \cdot 145 - 143 \cdot 12 = 24$ .

**Câu 141:** Cho  $\int_0^2 \frac{x + \ln(x+1)}{(x+2)^2} dx = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \ln 3$ . Tính  $P = (a+b)(c+d)$ .

**A.** 7.

**B.** -7.

**C.** 3.

**D.** -3.

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \int_0^2 \frac{x + \ln(x+1)}{(x+2)^2} dx = \int_0^2 \frac{1}{x+2} dx - \int_0^2 \frac{2}{(x+2)^2} dx + \int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{(x+2)^2} dx.$$

$$\int_0^2 \frac{1}{x+2} dx - \int_0^2 \frac{2}{(x+2)^2} dx = \left( \ln|x+2| + \frac{2}{x+2} \right) \Big|_0^2 = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

$$I = \int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{(x+2)^2} dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = \frac{1}{(x+2)^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x+1} dx \\ v = \frac{-1}{(x+2)} + 1 = \frac{x+1}{x+2} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } I = \left( \frac{(x+1)\ln(x+1)}{(x+2)} \right) \Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{1}{(x+2)} dx = \frac{3}{4} \ln 3 - \ln 2.$$

$$\text{Do đó } \int_0^2 \frac{x + \ln(x+1)}{(x+2)^2} dx = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \ln 3 \Rightarrow P = (-1+2)(3+4) = 7.$$

**Câu 142:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có  $f(1) = \frac{1}{2}$  và  $f'(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$  với  $x > -1$ . Biết  $\int_1^2 f(x) dx = a \ln \frac{b}{c} - d$

với  $a, b, c, d$  là các số nguyên dương,  $b \leq 3$  và  $\frac{b}{c}$  tối giản. Khi đó  $a + b + c + d$  bằng

**A.** 8.

**B.** 5.

**C.** 6.

**D.** 10.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có  $\int \frac{x}{(x+1)^2} dx = \int \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx = \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} + C$ , với  $C$  là hằng số tùy ý.

$$\text{Do } f(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \ln 2 + \frac{1}{2} + C = \frac{1}{2} \Leftrightarrow C = -\ln 2.$$

Khi đó, ta có

$$\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left[ \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} - \ln 2 \right] dx = \int_1^2 \ln(x+1) dx + \int_1^2 \frac{dx}{x+1} - \ln 2 \int_1^2 dx.$$

$$\text{Xét } I = \int_1^2 \ln(x+1) dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x+1} \\ v = x \end{cases}, \text{ khi đó ta có}$$

$$I = x \cdot \ln(x+1) \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x dx}{x+1} = 2 \ln 3 - \ln 2 - \int_1^2 \frac{x dx}{x+1} = 2 \ln 3 - \ln 2 - \int_1^2 dx + \int_1^2 \frac{dx}{x+1} = 2 \ln 3 - \ln 2 - 1 + \int_1^2 \frac{dx}{x+1}$$

Khi đó,

$$\int_1^2 f(x) dx = 2 \ln 3 - \ln 2 - 1 + 2 \int_0^1 \frac{dx}{x+1} - \ln 2 \int_1^2 dx = 2 \ln 3 - \ln 2 - 1 + 2 \ln 3 - 2 \ln 2 - \ln 2 = 4 \ln \frac{3}{2} - 1.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \\ c = 2 \\ d = 1 \end{cases} \Rightarrow a + b + c + d = 10.$$



# NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN – ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

## BÀI 2. TÍCH PHÂN



### HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

#### MỨC ĐỘ VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

##### DẠNG 1. TÍCH PHÂN HÀM ẨN

##### DẠNG 1.1 GIẢI BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN

**Câu 1:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn  $\int_{-5}^1 f(x)dx = 9$ . Tích phân  $\int_0^2 [f(1-3x)+9]dx$  bằng  
**A.** 15. **B.** 27. **C.** 75. **D.** 21.

**Câu 2:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0;10]$  thỏa mãn  $\int_0^{10} f(x)dx = 7, \int_2^{10} f(x)dx = 1$ . Tính  $P = \int_0^1 f(2x)dx$ .  
**A.**  $P = 6$ . **B.**  $P = -6$ . **C.**  $P = 3$ . **D.**  $P = 12$ .

**Câu 3:** Cho  $I = \int_1^5 f(x)dx = 26$ . Khi đó  $J = \int_0^2 x[f(x^2+1)+1]dx$  bằng  
**A.** 15. **B.** 13. **C.** 54. **D.** 52.

**Câu 4:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = 4$  và  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos xdx = 2$ .  
 Tích phân  $I = \int_0^3 f(x)dx$  bằng  
**A.**  $I = 8$ . **B.**  $I = 6$ . **C.**  $I = 4$ . **D.**  $I = 10$ .

**Câu 5:** Cho biết  $\int_{-1}^5 f(x)dx = 15$ . Tính giá trị của  $P = \int_0^2 [f(5-3x)+7]dx$ .  
**A.**  $P = 15$ . **B.**  $P = 37$ . **C.**  $P = 27$ . **D.**  $P = 19$ .

**Câu 6:** Cho  $\int_0^4 f(x)dx = 2018$ . Tính tích phân  $I = \int_0^2 [f(2x)+f(4-2x)]dx$ .  
**A.**  $I = 0$ . **B.**  $I = 2018$ . **C.**  $I = 4036$ . **D.**  $I = 1009$ .

**Câu 7:** Cho  $y = f(x)$  là hàm số chẵn, liên tục trên  $[-6;6]$ . Biết rằng  $\int_{-1}^2 f(x)dx = 8$ ;  $\int_1^3 f(-2x)dx = 3$ .  
 Giá trị của  $I = \int_{-1}^6 f(x)dx$  là

- A.**  $I = 5$ .                      **B.**  $I = 2$ .                      **C.**  $I = 14$ .                      **D.**  $I = 11$ .

**Câu 8:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $\int_0^{\pi^2} f(x)dx = 2018$ , tính  $I = \int_0^{\pi} xf(x^2)dx$ .

- A.**  $I = 1008$ .                      **B.**  $I = 2019$ .                      **C.**  $I = 2017$ .                      **D.**  $I = 1009$ .

**Câu 9:** Cho  $\int_1^2 f(x)dx = 2$ . Khi đó  $\int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$  bằng

- A.** 1.                      **B.** 4.                      **C.** 2.                      **D.** 8.

**Câu 10:** Cho  $\int_1^2 f(x^2 + 1)xdx = 2$ . Khi đó  $I = \int_2^5 f(x)dx$  bằng

- A.** 2.                      **B.** 1.                      **C.** 4.                      **D.** -1.

**Câu 11:** Cho  $f, g$  là hai hàm số liên tục trên  $[1;3]$  thỏa mãn điều kiện  $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)]dx = 10$  đồng thời

$$\int_1^3 [2f(x) - g(x)]dx = 6. \text{ Tính } \int_1^3 f(4-x)dx + 2\int_1^2 g(2x-1)dx$$

- A.** 9.                      **B.** 6.                      **C.** 7.                      **D.** 8.

**Câu 12:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa  $\int_0^1 f(x)dx = 2$  và  $\int_0^2 f(3x+1)dx = 6$ . Tính  $I = \int_0^7 f(x)dx$

- A.**  $I = 16$ .                      **B.**  $I = 18$ .                      **C.**  $I = 8$ .                      **D.**  $I = 20$ .

**Câu 13:** Cho  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f(x) = f(10-x)$  và  $\int_3^7 f(x)dx = 4$ . Tính  $I = \int_3^7 xf(x)dx$ .

- A.** 80.                      **B.** 60.                      **C.** 40.                      **D.** 20.

**Câu 14:** Cho  $\int_0^1 f(x)dx = 9$ . Tính  $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(\sin 3x)\cos 3xdx$ .

- A.**  $I = 5$ .                      **B.**  $I = 9$ .                      **C.**  $I = 3$ .                      **D.**  $I = 2$ .

**Câu 15:** Cho tích phân  $I = \int_0^4 f(x)dx = 32$ . Tính tích phân  $J = \int_0^2 f(2x)dx$ .

- A.**  $J = 32$                       **B.**  $J = 64$                       **C.**  $J = 8$                       **D.**  $J = 16$

**Câu 16:** Biết  $f(x)$  là hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $\int_0^9 f(x)dx = 9$ . Khi đó giá trị của  $\int_1^4 f(3x-3)dx$  là

- A.** 0.                      **B.** 24.                      **C.** 27.                      **D.** 3.

**Câu 17:** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $\int_0^1 f(2x)dx = 2$ . Tích phân  $\int_0^2 f(x)dx$  bằng

- A.** 8.                      **B.** 1.                      **C.** 2.                      **D.** 4.

**Câu 18:** Cho hàm  $f(x)$  thỏa mãn  $\int_0^{2017} f(x)dx = 1$ . Tính tích phân  $I = \int_0^1 f(2017x)dx$ .

- A.**  $I = \frac{1}{2017}$ .                      **B.**  $I = 0$ .                      **C.**  $I = 2017$ .                      **D.**  $I = 1$ .

**Câu 19:** Cho tích phân  $\int_1^2 f(x)dx = a$ . Hãy tính tích phân  $I = \int_0^1 xf(x^2 + 1)dx$  theo  $a$ .

A.  $I = 4a$ .

B.  $I = \frac{a}{4}$ .

C.  $I = \frac{a}{2}$ .

D.  $I = 2a$ .

**Câu 20:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = 2$  và  $\int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx = 2$ .

Tính  $\int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(2x)}{x} dx$ .

A. 0.

B. 1.

C. 4.

D. 8.

**Câu 21:** Cho hàm số  $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x^2; & x \geq 1 \\ 5 - x; & x < 1 \end{cases}$ . Tính  $I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx + 3 \int_0^1 f(3 - 2x) dx$ .

A.  $I = \frac{71}{6}$ .

B.  $I = 31$ .

C.  $I = 32$ .

D.  $I = \frac{32}{3}$ .

**Câu 22:** Cho  $I = \int_1^2 f(x) dx = 2$ . Giá trị của  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x f(\sqrt{3 \cos x + 1})}{\sqrt{3 \cos x + 1}} dx$  bằng

A. 2.

B.  $-\frac{4}{3}$ .

C.  $\frac{4}{3}$ .

D. -2.

**Câu 23:** Biết  $\int_1^4 f(x) dx = 5$  và  $\int_4^5 f(x) dx = 20$ . Tính  $\int_1^2 f(4x - 3) dx - \int_0^{\ln 2} f(e^{2x}) e^{2x} dx$ .

A.  $I = \frac{15}{4}$ .

B.  $I = 15$ .

C.  $I = \frac{5}{2}$ .

D.  $I = 25$ .

**Câu 24:** Cho  $f(x)$  là hàm số liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f(x) + f(2 - x) = x \cdot e^{x^2}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Tính tích phân

$I = \int_0^2 f(x) dx$ .

A.  $I = \frac{e^4 - 1}{4}$ .

B.  $I = \frac{2e - 1}{2}$ .

C.  $I = e^4 - 2$ .

D.  $I = e^4 - 1$ .

**Câu 25:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f(2x) = 3f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Biết rằng  $\int_0^1 f(x) dx = 1$ .

Tính tích phân  $I = \int_1^2 f(x) dx$ .

A.  $I = 5$

B.  $I = 6$

C.  $I = 3$

D.  $I = 2$

**Câu 26:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = \int_1^8 \frac{f(\sqrt[3]{x})}{x} dx = 6$ . Tính tích phân

$\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{f(x^2)}{x} dx$

A. 4

B. 6

C. 7

D. 10

**Câu 27:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa  $\int_0^{2018} f(x) dx = 2$ . Khi đó tích phân

$$\int_0^{\sqrt{e^{2018}-1}} \frac{x}{x^2+1} f(\ln(x^2+1)) dx \text{ bằng}$$

- A. 4.                                      B. 1.                                      C. 2.                                      D. 3.

**Câu 28:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 3$  và  $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1} dx = 1$ . Tính

$$I = \int_0^1 f(x) dx.$$

- A.  $I = 2$ .                                      B.  $I = 6$ .                                      C.  $I = 3$ .                                      D.  $I = 4$ .

**Câu 29:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x \cdot f(\sin^2 x) dx = \int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{x} dx = 1$ . Tính tích phân

$$\int_{\frac{1}{8}}^1 \frac{f(4x)}{x} dx.$$

- A.  $I = 3$ .                                      B.  $I = \frac{3}{2}$ .                                      C.  $I = 2$ .                                      D.  $I = \frac{5}{2}$ .

**Câu 30:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục và là hàm số lẻ trên đoạn  $[-2; 2]$ . Biết rằng

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = -1, \int_{\frac{1}{2}}^1 f(-2x) dx = 2. \text{ Mệnh đề nào sau đây đúng?}$$

- A.  $\int_{-2}^2 f(x) dx = 2 \int_0^2 f(x) dx$ .                                      B.  $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = -4$ .  
C.  $\int_0^1 f(x) dx = -1$ .                                      D.  $\int_0^2 f(x) dx = -3$ .

**Câu 31:** Cho  $f(x)$  là hàm số liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa  $f(1) = 1$  và  $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{3}$ . Tính

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f'(\sin x) dx$$

- A.  $I = \frac{4}{3}$ .                                      B.  $I = \frac{2}{3}$ .                                      C.  $I = -\frac{2}{3}$                                       D.  $I = \frac{1}{3}$ .

**Câu 32:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 4, \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 2$ . Tính tích phân

$$I = \int_0^3 f(x) dx.$$

- A.  $I = 6$ .                                      B.  $I = 4$ .                                      C.  $I = 10$ .                                      D.  $I = 2$ .

**Câu 33:** Cho  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f(x) = f(2020 - x)$  và  $\int_3^{2017} f(x)dx = 4$ . Khi đó  $\int_3^{2017} xf(x)dx$  bằng  
**A.** 16160. **B.** 4040. **C.** 2020. **D.** 8080.

**Câu 34:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn  $4xf(x^2) + 6f(2x) = \frac{3}{5}x^3 + 4$ . Giá trị  $\int_0^4 f(x)dx$  bằng  
**A.**  $\frac{52}{25}$ . **B.** 52. **C.**  $\frac{48}{25}$ . **D.** 48.

**Câu 35:** Cho  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn  $f(2) = 16, \int_0^1 f(2x)dx = 2$ . Tích phân  $\int_0^2 xf'(x)dx$  bằng  
**A.** 30. **B.** 28. **C.** 36. **D.** 16.

**Câu 36:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0;1]$  và  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = 5$ . Tính  $I = \int_0^{\pi} xf'(\sin x)dx$   
**A.**  $I = \frac{5}{2}\pi$ . **B.**  $I = 10\pi$ . **C.**  $I = 5$ . **D.**  $I = 5\pi$ .

**Câu 37:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$  thỏa mãn  $f(x) + x.f\left(\frac{1}{x}\right) = x^3 - x$ . Giá trị tích phân  $I = \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{f(x)}{x^2 + x} dx$  bằng:  
**A.**  $\frac{8}{9}$ . **B.**  $\frac{16}{9}$ . **C.**  $\frac{2}{3}$ . **D.**  $\frac{3}{4}$ .

## DẠNG 1.2 GIẢI BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỪNG PHẦN

*Thông thường nếu bài toán xuất hiện  $\int_a^b g(x)f'(x)dx$  ta sẽ đặt  $\begin{cases} u = g(x) \\ dv = f'(x)dx \end{cases}$*

**Câu 38:** Cho  $f(x)$  là hàm số có đạo hàm liên tục trên  $[0;1]$  và  $f(1) = -\frac{1}{18}, \int_0^1 x.f'(x)dx = \frac{1}{36}$ . Giá trị của  $\int_0^1 f(x)dx$  bằng  
**A.**  $-\frac{1}{12}$ . **B.**  $\frac{1}{36}$ . **C.**  $\frac{1}{12}$ . **D.**  $-\frac{1}{36}$ .

**Câu 39:** Cho hàm số  $f(x)$  có  $f(1) = e^2$  và  $f'(x) = \frac{2x-1}{x^2}e^{2x}$  với mọi  $x$  khác 0. Khi đó  $\int_1^{\ln 3} xf'(x)dx$  bằng  
**A.**  $6 - e^2$ . **B.**  $\frac{6 - e^2}{2}$ . **C.**  $9 - e^2$ . **D.**  $\frac{9 - e^2}{2}$ .

**Câu 40:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn  $f(2) = 16, \int_0^2 f(x)dx = 4$ . Tính  $I = \int_0^1 xf'(2x)dx$ .

A.  $I = 20$

B.  $I = 7$

C.  $I = 12$

D.  $I = 13$

**Câu 41:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;1]$  thỏa mãn  $\int_0^1 x^2 f(x) dx = -\frac{1}{21}$ ,  $f(1) = 0$  và  $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{7}$ . Giá trị của  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng

A.  $\frac{5}{12}$ .

B.  $-\frac{1}{5}$ .

C.  $\frac{4}{5}$ .

D.  $-\frac{7}{10}$ .

**Câu 42:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0;1]$  thỏa mãn  $f(1) = 0$ ,  $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$ .  
Tính  $\int_0^1 x^3 f'(x) dx$ .

A.  $-1$

B.  $1$

C.  $3$

D.  $-3$

**Câu 43:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0;1]$  và  $f(0) + f(1) = 0$ . Biết  $\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{1}{2}$ ,  $\int_0^1 f'(x) \cos(\pi x) dx = \frac{\pi}{2}$ . Tính  $\int_0^1 f(x) dx$ .

A.  $\pi$ .

B.  $\frac{3\pi}{2}$ .

C.  $\frac{2}{\pi}$ .

D.  $\frac{1}{\pi}$ .

**Câu 44:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0;1]$  thỏa mãn  $f(1) = 0$ ,  $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$  và  $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$ . Tích phân  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng

A.  $\frac{7}{5}$

B.  $1$

C.  $\frac{7}{4}$

D.  $4$

**Câu 45:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0;1]$  thỏa mãn  $f(1) = 4$ ,  $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 36$  và  $\int_0^1 x f(x) dx = \frac{1}{5}$ . Tích phân  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng

A.  $\frac{5}{6}$

B.  $\frac{3}{2}$

C.  $4$

D.  $\frac{2}{3}$

**Câu 46:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0;2]$  thỏa mãn  $f(2) = 3$ ,  $\int_0^2 [f'(x)]^2 dx = 4$  và  $\int_0^2 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$ . Tích phân  $\int_0^2 f(x) dx$  bằng

A.  $\frac{2}{115}$

B.  $\frac{297}{115}$

C.  $\frac{562}{115}$

D.  $\frac{266}{115}$

**Câu 47:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0;1]$  thỏa mãn  $f(1) = 4$ ,  $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 5$  và  $\int_0^1 x f(x) dx = -\frac{1}{2}$ . Tích phân  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng

A.  $\frac{15}{19}$

B.  $\frac{17}{4}$

C.  $\frac{17}{18}$

D.  $\frac{15}{4}$

**Câu 48:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0;2]$  thỏa mãn  $f(2)=6$ ,  $\int_0^2 [f'(x)]^2 dx = 7$

và  $\int_0^2 x.f(x)dx = \frac{17}{2}$ . Tích phân  $\int_0^2 f(x)dx$  bằng

- A. 8                                      B. 6                                      C. 7                                      D. 5

**Câu 49:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0;3]$  thỏa mãn  $f(3)=6$ ,  $\int_0^3 [f'(x)]^2 dx = 2$

và  $\int_0^3 x^2.f(x)dx = \frac{154}{3}$ . Tích phân  $\int_0^3 f(x)dx$  bằng

- A.  $\frac{53}{5}$                                       B.  $\frac{117}{20}$                                       C.  $\frac{153}{5}$                                       D.  $\frac{13}{5}$

**Câu 50:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0;1]$  thỏa mãn  $f(1)=2$ ,  $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 8$  và

$\int_0^1 x^3.f(x)dx = 10$ . Tích phân  $\int_0^1 f(x)dx$  bằng

- A.  $-\frac{2}{285}$                                       B.  $\frac{194}{95}$                                       C.  $\frac{116}{57}$                                       D.  $\frac{584}{285}$

**Câu 51:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0;1]$  thỏa mãn  $f(1)=0$  và

$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \int_0^1 (x+1)e^x f(x)dx = \frac{e^2-1}{4}$ . Tính tích phân  $I = \int_0^1 f(x)dx$ .

- A.  $I = 2 - e$ .                                      B.  $I = e - 2$ .                                      C.  $I = \frac{e}{2}$ .                                      D.  $I = \frac{e-1}{2}$ .

**Câu 52:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$  và  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ . Biết  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x) dx = \frac{\pi}{8}$ ,  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) \sin 2x dx = -\frac{\pi}{4}$ . Tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} f(2x) dx$

- A.  $I = 1$ . B.  $I = \frac{1}{2}$ . C.  $I = 2$ . D.  $I = \frac{1}{4}$ .

**Câu 53:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0; 1]$  và  $f(0) + f(1) = 0$ . Biết  $\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{1}{2}$ ,  $\int_0^1 f'(x) \cos(\pi x) dx = \frac{\pi}{2}$ . Tính  $\int_0^1 f(x) dx$ .

- A.  $\pi$ . B.  $\frac{1}{\pi}$ . C.  $\frac{2}{\pi}$ . D.  $\frac{3\pi}{2}$ .

**Câu 54:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0; 1]$  thỏa mãn  $f(1) = 1$ ,  $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 9$  và  $\int_0^1 x^3 f(x) dx = \frac{1}{2}$ . Tính phân  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng:

- A.  $\frac{2}{3}$ . B.  $\frac{5}{2}$ . C.  $\frac{7}{4}$ . D.  $\frac{6}{5}$ .

**Câu 55:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[1; 2]$  thỏa mãn  $\int_1^2 (x-1)^2 f(x) dx = -\frac{1}{3}$ ,  $f(2) = 0$  và  $\int_1^2 [f'(x)]^2 dx = 7$ . Tính tích phân  $I = \int_1^2 f(x) dx$ .

- A.  $I = \frac{7}{5}$ . B.  $I = -\frac{7}{5}$ . C.  $I = -\frac{7}{20}$ . D.  $I = \frac{7}{20}$ .

**Câu 56:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0; 1]$  thỏa mãn:  $f(1) = 0$ ,  $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$  và  $\int_0^1 x^2 \cdot f(x) dx = \frac{1}{3}$ . Tính tích phân  $I = \int_0^1 f(x) dx$ .

- A.  $I = 1$ . B.  $I = \frac{7}{5}$ . C.  $I = 4$ . D.  $I = \frac{7}{4}$ .

**Câu 57:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0; 1]$  thỏa mãn  $f(1) = 3$ ,  $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{4}{11}$  và  $\int_0^1 x^4 f(x) dx = \frac{7}{11}$ . Giá trị của  $\int_0^1 f(x) dx$  là

- A.  $\frac{35}{11}$ . B.  $\frac{65}{21}$ . C.  $\frac{23}{7}$ . D.  $\frac{9}{4}$ .

**Câu 58:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0; 1]$  thỏa mãn  $f(0) = 1$ ;  $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{30}$  và  $\int_0^1 (2x-1) f(x) dx = -\frac{1}{30}$ . Tính phân  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng

A.  $\frac{11}{30}$ .

B.  $\frac{11}{12}$ .

C.  $\frac{11}{4}$ .

D.  $\frac{1}{30}$ .

**Câu 59:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$  và  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ . Biết  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x) dx = \frac{\pi}{8}$

,  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) \sin 2x dx = -\frac{\pi}{4}$ . Tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} f(2x) dx$ .

A.  $I = 1$ .

B.  $I = \frac{1}{2}$ .

C.  $I = 2$ .

D.  $I = \frac{1}{4}$ .

**Câu 60:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục, có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ ,  $f(2) = 16$  và  $\int_0^2 f(x) dx = 4$ . Tích phân

$\int_0^4 xf'\left(\frac{x}{2}\right) dx$  bằng

A. 112.

B. 12.

C. 56.

D. 144.

**Câu 61:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $f(2) = 16$ ,  $\int_0^2 f(x) dx = 4$ . Tính  $I = \int_0^1 x \cdot f'(2x) dx$ .

A. 7.

B. 12.

C. 20.

D. 13.

### DẠNG 1.3 BIẾN ĐỔI

**Dạng 1.** Bài toán tích phân liên quan đến đẳng thức  $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x)$

**Phương pháp:**

Để dàng thấy rằng  $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = [u(x)f(x)]'$

Do đó  $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x) \Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = h(x)$

Suy ra  $u(x)f(x) = \int h(x)dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được  $f(x)$

**Dạng 2.** Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức  $f'(x) + f(x) = h(x)$

**Phương pháp:**

Nhân hai vế với  $e^x$  ta được  $e^x \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) = e^x \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^x \cdot f(x)]' = e^x \cdot h(x)$

Suy ra  $e^x \cdot f(x) = \int e^x \cdot h(x)dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được  $f(x)$

**Dạng 3.** Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức  $f'(x) - f(x) = h(x)$

**Phương pháp:**

Nhân hai vế với  $e^{-x}$  ta được  $e^{-x} \cdot f'(x) - e^{-x} \cdot f(x) = e^{-x} \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^{-x} \cdot f(x)]' = e^{-x} \cdot h(x)$

Suy ra  $e^{-x} \cdot f(x) = \int e^{-x} \cdot h(x)dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được  $f(x)$

**Dạng 4.** Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức  $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = h(x)$

**Phương pháp:**

Nhân hai vế với  $e^{\int p(x)dx}$  ta được

$$f'(x) \cdot e^{\int p(x)dx} + p(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \cdot f(x) = h(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \Leftrightarrow \left[ f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \right]' = h(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$$

Suy ra  $f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} = \int e^{\int p(x)dx} h(x)dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được  $f(x)$

**Dạng 5.** Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức  $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = 0$

**Phương pháp:**

Chia hai vế với  $f(x)$  ta được  $\frac{f'(x)}{f(x)} + p(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -p(x)$

Suy ra  $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = -\int p(x)dx \Leftrightarrow \ln |f(x)| = -\int p(x)dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được  $f(x)$

**Dạng 6.** Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức  $f'(x) + p(x) \cdot [f(x)]^n = 0$

**Phương pháp:**

Chia hai vế với  $[f(x)]^n$  ta được  $\frac{f'(x)}{[f(x)]^n} + p(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} = -p(x)$

Suy ra  $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^n}dx = -\int p(x)dx \Leftrightarrow \frac{[f(x)]^{-n+1}}{-n+1} = -\int p(x)dx$

**Câu 62:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $[0;1]$  thỏa mãn  $f(1-x) = 6x^2 f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}}$ . Khi đó  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng  
**A.** 4. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 6.

**Câu 63:** Cho hàm số  $f(x)$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  thỏa mãn  $x^2 f^2(x) + (2x-1)f(x) = xf'(x) - 1$ , với mọi  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  đồng thời thỏa  $f(1) = -2$ . Tính  $\int_1^2 f(x) dx$   
**A.**  $-\frac{\ln 2}{2} - 1$ . **B.**  $-\ln 2 - \frac{1}{2}$ . **C.**  $-\ln 2 - \frac{3}{2}$ . **D.**  $-\frac{\ln 2}{2} - \frac{3}{2}$ .

**Câu 64:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f(x) + (x^2 - 1)f\left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}\right) = x^5 - 4x^3 - 5x^2 + 7x + 6, \forall x \in \mathbb{R}$ . Tích phân  $\int_1^2 f(x) dx$  bằng  
**A.**  $\frac{1}{7}$ . **B.**  $\frac{1}{3}$ . **C.** 7. **D.**  $-\frac{19}{3}$ .

**Câu 65:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0;1]$  thỏa mãn  $f(1) = 1$  và  $(f'(x))^2 + 4(6x^2 - 1)f(x) = 40x^6 - 44x^4 + 32x^2 - 4, \forall x \in [0;1]$ . Tích phân  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng?  
**A.**  $\frac{23}{15}$ . **B.**  $\frac{13}{15}$ . **C.**  $-\frac{17}{15}$ . **D.**  $-\frac{7}{15}$ .

**Câu 66:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn  $f(0) = 3$  và  $f(x) + f(2-x) = x^2 - 2x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$ . Tích phân  $\int_0^2 xf'(x) dx$  bằng  
**A.**  $-\frac{4}{3}$ . **B.**  $\frac{2}{3}$ . **C.**  $\frac{5}{3}$ . **D.**  $-\frac{10}{3}$ .

**Câu 67:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[2;4]$  và  $f'(x) > 0, \forall x \in [2;4]$ . Biết  $4x^3 f(x) = [f'(x)]^3 - x^3, \forall x \in [2;4], f(2) = \frac{7}{4}$ . Giá trị của  $f(4)$  bằng  
**A.**  $\frac{40\sqrt{5}-1}{2}$ . **B.**  $\frac{20\sqrt{5}-1}{4}$ . **C.**  $\frac{20\sqrt{5}-1}{2}$ . **D.**  $\frac{40\sqrt{5}-1}{4}$ .

**Câu 68:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;2]$  và thỏa  $f(1) = 0$ ,  $(f'(x))^2 + 4f(x) = 8x^2 - 32x + 28$  với mọi  $x$  thuộc  $[0;2]$ . Giá trị của  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng  
**A.**  $-\frac{5}{3}$ . **B.**  $\frac{4}{3}$ . **C.**  $-\frac{2}{3}$ . **D.**  $-\frac{14}{3}$ .

**Câu 69:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $[0;1]$  và  $f(x) + f(1-x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x+1}, \forall x \in [0;1]$ . Tính  $\int_0^1 f(x) dx$   
**A.**  $\frac{3}{4} + 2\ln 2$ . **B.**  $3 + \ln 2$ . **C.**  $\frac{3}{4} + \ln 2$ . **D.**  $\frac{3}{2} + 2\ln 2$ .

**Câu 70:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $3f(x) + f(2-x) = 2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4$ . Tính tích phân  $I = \int_0^2 f(x)dx$  ta được kết quả:

- A.  $I = e + 4$ .                      B.  $I = 8$ .                      C.  $I = 2$ .                      D.  $I = e + 2$ .

**Câu 71:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn  $f(x) + 2xf(x^2) = 2x^7 + 3x^3 - x - 1$  với  $x \in \mathbb{R}$ . Tính tích phân  $\int_0^1 xf'(x)dx$ .

- A.  $\frac{1}{4}$ .                      B.  $\frac{5}{4}$ .                      C.  $\frac{3}{4}$ .                      D.  $-\frac{1}{2}$ .

**Câu 72:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn

$$x^2 f(1-x) + 2f\left(\frac{2x-2}{x}\right) = \frac{-x^4 + x^3 + 4x - 4}{x}, \forall x \neq 0, x \neq 1. \text{ Khi đó } \int_{-1}^1 f(x)dx \text{ có giá trị là}$$

- A. 0.                      B. 1.                      C.  $\frac{1}{2}$ .                      D.  $\frac{3}{2}$ .

**Câu 73:** Cho hàm số  $y = f(x)$  thỏa mãn  $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = x^3 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$  và  $f(0) = f'(0) = 2$ . Tính giá trị của  $T = f^2(2)$

- A.  $\frac{160}{15}$                       B.  $\frac{268}{15}$                       C.  $\frac{4}{15}$                       D.  $\frac{268}{30}$

**Câu 74:** Cho  $f(x)$  là hàm số liên tục trên tập xác định  $\mathbb{R}^+$  và thỏa mãn  $f(x^2 + 3x + 1) = x + 2$ . Tính  $I = \int_1^5 f(x)dx$

- A.  $\frac{37}{6}$ .                      B.  $\frac{527}{3}$ .                      C.  $\frac{61}{6}$ .                      D.  $\frac{464}{3}$ .

**Câu 75:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục, có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn điều kiện  $f(x) + x(f'(x) - 2\sin x) = x^2 \cos x, x \in \mathbb{R}$  và  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ . Tính  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf''(x)dx$

- A. 0.                      B.  $\frac{\pi}{2}$ .                      C. 1.                      D.  $\pi$ .

**Câu 76:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0;1]$  thỏa mãn  $4x.f(x^2) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}$ . Tính  $I = \int_0^1 f(x)dx$ .

- A.  $\frac{\pi}{4}$ .                      B.  $\frac{\pi}{16}$ .                      C.  $\frac{\pi}{20}$ .                      D.  $\frac{\pi}{6}$ .

- Câu 77:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên khoảng  $(0; +\infty)$ . Biết  $f(3) = 3$  và  $xf'(2x+1) - f(2x+1) = x^3, \forall x \in (0; +\infty)$ . Giá trị của  $\int_3^5 f(x)dx$  bằng
- A.  $\frac{914}{3}$ .                      B.  $\frac{59}{3}$ .                      C.  $\frac{45}{4}$ .                      D. 88.
- Câu 78:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm và đồng biến trên  $[1; 4]$ , thỏa mãn  $x + 2xf'(x) = [f'(x)]^2$  với mọi  $x \in [1; 4]$ . Biết  $f(1) = \frac{3}{2}$ , tính  $I = \int_1^4 f(x)dx$
- A.  $\frac{1188}{45}$ .                      B.  $\frac{1187}{45}$ .                      C.  $\frac{1186}{45}$ .                      D.  $\frac{9}{2}$ .
- Câu 79:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $x.f'(x).f''(x) = f^2(x) - x, \forall x \in \mathbb{R}$  và có  $f(2) = 1$ . Tích phân  $\int_0^2 f^2(x)dx$
- A.  $\frac{3}{2}$                       B.  $\frac{4}{3}$                       C. 2                      D. 4
- Câu 80:** Cho hàm số  $f(x)$  nhận giá trị không âm và có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f'(x) = (2x+1)[f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R}$  và  $f(0) = -1$ . Giá trị của tích phân  $\int_0^1 f(x)dx$  bằng
- A.  $-\frac{1}{6}$ .                      B.  $-\ln 2$ .                      C.  $-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$ .                      D.  $-\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$ .
- Câu 81:** Cho số thực  $a > 0$ . Giả sử hàm số  $f(x)$  liên tục và luôn dương trên đoạn  $[0; a]$  thỏa mãn  $f(x).f(a-x) = 1$ . Tính tích phân  $I = \int_0^a \frac{1}{1+f(x)}dx$ ?
- A.  $I = \frac{2a}{3}$ .                      B.  $I = \frac{a}{2}$ .                      C.  $I = \frac{a}{3}$ .                      D.  $I = a$ .
- Câu 82:** Cho hàm số  $f(x)$  đồng biến, có đạo hàm đến cấp hai trên đoạn  $[0; 2]$  và thỏa mãn  $[f(x)]^2 - f(x).f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$ . Biết  $f(0) = 1, f(2) = e^6$ . Khi đó  $f(1)$  bằng
- A.  $e^2$ .                      B.  $e^{\frac{3}{2}}$ .                      C.  $e^3$ .                      D.  $e^{\frac{5}{2}}$ .
- Câu 83:** Cho hàm số  $y = f(x)$  là hàm số lẻ trên  $\mathbb{R}$  và đồng thời thỏa mãn hai điều kiện  $f(x+1) = f(x) + 1, \forall x \in \mathbb{R}$  và  $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2}, \forall x \neq 0$ . Gọi  $I = \int_0^1 \frac{f(x)}{f^2(x)+1}dx$ . Hãy chọn khẳng định đúng về giá trị của  $I$ .
- A.  $I \in (-1; 0)$ .                      B.  $I \in (1; 2)$ .                      C.  $I \in (0; 1)$ .                      D.  $I \in (-2; -1)$ .
- Câu 84:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0; \pi]$ . Biết  $f(0) = 2e$  và  $f(x)$  thỏa mãn hệ thức  $f'(x) + \sin x.f(x) = \cos x.e^{\cos x}, \forall x \in [0; \pi]$ . Tính  $I = \int_0^\pi f(x)dx$ .
- A.  $I \approx 6,55$ .                      B.  $I \approx 17,30$ .                      C.  $I \approx 10,31$ .                      D.  $I \approx 16,91$ .

**Câu 85:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục và nhận giá trị dương trên  $[0;1]$ . Biết  $f(x) \cdot f(1-x) = 1$  với  $\forall x \in [0;1]$

. Tính giá trị  $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+f(x)}$

- A.  $\frac{3}{2}$ .                      B.  $\frac{1}{2}$ .                      C. 1.                      D. 2.

**Câu 86:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên khoảng  $(0; +\infty)$  thỏa mãn  $f(x) = x \cdot \ln \left( \frac{x^3}{x \cdot f'(x) - f(x)} \right)$

và  $f(1) = 0$ . Tính tích phân  $I = \int_1^5 f(x) dx$ .

- A.  $12 \ln 13 - 13$ .                      B.  $13 \ln 13 - 12$ .                      C.  $12 \ln 13 + 13$ .                      D.  $13 \ln 13 + 12$ .

**Câu 87:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$  thỏa mãn điều kiện  $f(1) = 2 \ln 2$  và  $x(x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + 3x + 2$ . Giá trị  $f(2) = a + b \ln 3$ , với  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Tính  $a^2 + b^2$ .

- A.  $\frac{5}{2}$ .                      B.  $\frac{13}{4}$ .                      C.  $\frac{25}{4}$ .                      D.  $\frac{9}{2}$ .

**Câu 88:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn:  $3f(x) + f(2-x) = 2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Tính giá trị của tích phân  $I = \int_0^2 f(x) dx$ .

- A.  $I = e + 2$ .                      B.  $I = 2e + 4$ .                      C.  $I = 2$ .                      D.  $I = 8$ .

## DẠNG 2. TÍCH PHÂN MỘT SỐ HÀM ĐẶC BIỆT

### DẠNG 2.1 TÍCH PHÂN CỦA HÀM SỐ LẺ VÀ HÀM SỐ CHẴN

Nhắc lại kiến thức về hàm số lẻ và hàm số chẵn:

Hàm số  $y = f(x)$  có miền xác định trên tập đối xứng  $D$  và

Nếu  $f(-x) = f(x), \forall x \in D \Rightarrow y = f(x)$ : là hàm số chẵn.

Nếu  $f(-x) = -f(x), \forall x \in D \Rightarrow y = f(x)$ : là hàm số lẻ.

Thường gặp cung góc đối nhau của  $\cos(-x) = \cos x, \sin(-x) = -\sin x$ .

□ Nếu hàm số  $f(x)$  liên tục và lẻ trên  $[-a; a]$  thì  $\int_{-a}^a f(x).dx = 0$ .

□ Nếu hàm số  $f(x)$  liên tục và chẵn trên  $[-a; a]$  thì  $\begin{cases} \int_{-a}^a f(x).dx = 2 \int_0^a f(x).dx \\ \int_{-a}^a \frac{f(x)}{b^x + 1} dx = \int_0^a f(x).dx \end{cases}$ .

Do những kết quả này không có trong SGK nên về mặt thực hành, ta làm theo các bước sau:

□ Bước 1. Phân tích:  $I = \int_{-a}^a f(x).dx = \int_{-a}^0 f(x).dx + \int_0^a f(x).dx = A + B$ .

□ Bước 2. Tính  $A = \int_{-a}^0 f(x).dx$  ? bằng cách đổi biến  $t = -x$  và cần nhớ rằng: tích phân không phụ

thuộc vào biến, mà chỉ phụ thuộc vào giá trị của hai cận, chẳng hạn luôn có:

$$\int_{-2014}^0 \frac{3t^2 \cos t}{1 + \sin^2 t} dt = \int_{-2014}^0 \frac{3x^2 \cos x}{1 + \sin^2 x} dx.$$

### 2. Tích phân của hàm số liên tục

□ Nếu hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $[a; b]$  thì  $\int_a^b f(x).dx = \int_a^b f(a+b-x).dx$ .

□ Nếu hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $[0; 1]$  thì

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x).dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x).dx.$$

$$+ \int_a^{\pi-a} xf(\sin x).dx = \frac{\pi}{2} \int_a^{\pi-a} f(\sin x).dx \text{ và } \int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x).dx.$$

$$+ \int_a^{2\pi-a} xf(\cos x).dx = \pi \int_a^{2\pi-a} f(\cos x).dx \text{ và } \int_0^{2\pi} x.f(\cos x).dx = \pi \int_0^{2\pi} f(\cos x).dx$$

→ Về mặt thực hành, sẽ đặt  $x =$  cận trên + cận dưới -  $t$  ( $x = a + b - t$ ). Từ đó tạo tích phân xoay vòng, rồi giải phương trình bậc nhất với ẩn  $I$ .

□ Nếu hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và tuần hoàn với chu kỳ  $T$  thì

$$\int_a^{a+T} f(x).dx = \int_0^T f(x).dx \text{ và } \int_0^{nT} f(x).dx = n \int_0^T f(x).dx.$$

**Lưu ý:** Hàm số  $f(x)$  có chu kỳ  $T$  thì  $f(x+T) = f(x)$ .

—→ Về mặt thực hành, ta sẽ làm theo các bước sau:

**Bước 1.** Tách:  $I = \int_a^{a+T} f(x) dx = \underbrace{\int_a^0 f(x) dx}_A + \underbrace{\int_0^T f(x) dx}_B + \underbrace{\int_T^{a+T} f(x) dx}_C \quad (i)$

**Bước 2.** Tính  $C = \int_T^{a+T} f(x) dx$ ?

Đặt  $x = t + T \Rightarrow dx = dt$ . Đổi cận:  $\begin{cases} x = a + T \\ x = T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = a \\ t = 0 \end{cases}$ . Khi đó:

$$C = \int_0^a f(t+T) dt = -\int_a^0 f(t) dt = -\int_a^T f(x) dx = -A \quad (ii)$$

Thế (i) vào (ii) ta được:  $I = B = \int_0^T f(x) dx$ .

**Câu 89:** Cho  $f(x)$  là hàm số chẵn trên đoạn  $[-a; a]$  và  $k > 0$ . Giá trị tích phân  $\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+e^{kx}} dx$  bằng

**A.**  $\int_0^a f(x) dx$ .      **B.**  $\int_{-a}^a f(x) dx$ .      **C.**  $2 \int_{-a}^a f(x) dx$ .      **D.**  $2 \int_0^a f(x) dx$ .

**Câu 90:** Cho  $f(x), f(-x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn  $2f(x) + 3f(-x) = \frac{1}{x^2 + 4}$ . Biết

$$I = \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{\pi}{m}. \text{ Khi đó giá trị của } m \text{ là}$$

**A.**  $m = 2$ .      **B.**  $m = 20$ .      **C.**  $m = 5$ .      **D.**  $m = 10$ .

**Câu 91:** Cho hàm số  $y = f(x)$  là hàm lẻ và liên tục trên  $[-4; 4]$  biết  $\int_{-2}^0 f(-x) dx = 2$  và  $\int_1^2 f(-2x) dx = 4$

. Tính  $I = \int_0^4 f(x) dx$ .

**A.**  $I = -10$ .      **B.**  $I = -6$ .      **C.**  $I = 6$ .      **D.**  $I = 10$ .

**Câu 92:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-\ln 2; \ln 2]$  và thỏa mãn  $f(x) + f(-x) = \frac{1}{e^x + 1}$ . Biết

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx = a \ln 2 + b \ln 3 \quad (a; b \in \mathbb{Q}). \text{ Tính } P = a + b.$$

**A.**  $P = \frac{1}{2}$ .      **B.**  $P = -2$ .      **C.**  $P = -1$ .      **D.**  $P = 2$ .

**Câu 93:** Cho  $y = f(x)$  là hàm số chẵn và liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^2 f(x) dx = 1$ . Giá trị của

$$\int_{-2}^2 \frac{f(x)}{3^x + 1} dx \text{ bằng}$$

**A.** 1.      **B.** 6.      **C.** 4.      **D.** 3.

**Câu 94:** Hàm số  $f(x)$  là hàm số chẵn liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $\int_0^2 f(x) dx = 10$ . Tính  $I = \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{2^x + 1} dx$ .

- A.  $I = 10$ .                      B.  $I = \frac{10}{3}$ .                      C.  $I = 20$ .                      D.  $I = 5$ .

**Câu 95:** Cho hàm số  $y = f(x)$  là hàm số chẵn, liên tục trên đoạn  $[-1; 1]$  và  $\int_{-1}^1 f(x) dx = 6$ . Kết quả của

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1 + 2018^x} dx \text{ bằng}$$

- A. 2.                      B. 3.                      C. 4.                      D. 5.

**Câu 96:** Tích phân  $\int_{-2}^2 \frac{x^{2020}}{e^x + 1} dx = \frac{2^a}{b}$ . Tính tổng  $S = a + b$ .

- A.  $S = 0$ .                      B.  $S = 2021$ .                      C.  $S = 2020$ .                      D.  $S = 4042$ .

**Câu 97:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-\ln 2; \ln 2]$  và thỏa mãn  $f(x) + f(-x) = \frac{1}{e^x + 1}$ . Biết

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx = a \ln 2 + b \ln 3, (a, b \in \mathbb{Q}). \text{ Tính } P = a + b.$$

- A.  $P = -2$ .                      B.  $P = \frac{1}{2}$ .                      C.  $P = -1$ .                      D.  $P = 2$ .

**Câu 98:** Cho  $f(x)$  là hàm số chẵn và  $\int_0^1 f(x) dx = 2$ . Giá trị của tích phân  $\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1 + 2019^x} dx$  là

- A.  $\frac{2}{2019}$ .                      B. 2.                      C. 4.                      D. 0.

## DẠNG 2.2 TÍCH PHÂN CỦA HÀM CHỨA DẤU TRỊ TUYỆT ĐỐI

Tính tích phân:  $I = \int_a^b |f(x)| dx$ ?

**Bước 1.** Xét dấu  $f(x)$  trên đoạn  $[a; b]$ . Giả sử trên đoạn  $[a; b]$  thì phương trình  $f(x) = 0$  có nghiệm  $x_0 \in [a; b]$  và có bảng xét dấu sau:

|        |  |     |       |     |  |
|--------|--|-----|-------|-----|--|
| $x$    |  | $a$ | $x_0$ | $b$ |  |
| $f(x)$ |  | +   | 0     | -   |  |

**Bước 2.** Dựa vào công thức phân đoạn và dấu của trên  $[a; x_0], [x_0; b]$  ta được:

$$I = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^b [-f(x)] dx = A + B.$$

Sử dụng các phương pháp tính tích phân đã học tính  $A, B \Rightarrow I$ .

**Câu 99:** Cho  $a$  là số thực dương, tính tích phân  $I = \int_{-1}^a |x| dx$  theo  $a$ .

- A.  $I = \frac{a^2 + 1}{2}$ .                      B.  $I = \frac{a^2 + 2}{2}$ .                      C.  $I = \frac{-2a^2 + 1}{2}$ .                      D.  $I = \frac{|3a^2 - 1|}{2}$ .

**Câu 100:** Cho số thực  $m > 1$  thỏa mãn  $\int_1^m |2mx - 1| dx = 1$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $m \in (4; 6)$ .                      B.  $m \in (2; 4)$ .                      C.  $m \in (3; 5)$ .                      D.  $m \in (1; 3)$ .

**Câu 101:** Cho tích phân  $\int_1^5 \left| \frac{x-2}{x+1} \right| dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$  với  $a, b, c$  là các số nguyên. Tính  $P = abc$ .

A.  $P = -36$

B.  $P = 0$

C.  $P = -18$

D.  $P = 18$

**Câu 102:** Tính tích phân  $I = \int_{-1}^1 |2^x - 2^{-x}| dx$ .

A.  $\frac{1}{\ln 2}$ .

B.  $\ln 2$ .

C.  $2 \ln 2$ .

D.  $\frac{2}{\ln 2}$ .

**Câu 103:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có  $\int_0^1 f(x) dx = 2$ ;  $\int_0^3 f(x) dx = 6$ . Tính

$$I = \int_{-1}^1 f(|2x-1|) dx$$

A.  $I = 8$

B.  $I = 6$

C.  $I = \frac{3}{2}$

D.  $I = 4$

**Câu 104:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có  $\int_0^3 f(x) dx = 8$  và  $\int_0^5 f(x) dx = 4$ . Tính  $\int_{-1}^1 f(|4x-1|) dx$ .

A.  $\frac{9}{4}$ .

B.  $\frac{11}{4}$ .

C. 3.

D. 6.

**Câu 105:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa  $\int_0^1 f(2x) dx = 2$  và  $\int_0^2 f(6x) dx = 14$ . Tính

$$\int_{-2}^2 f(5|x|+2) dx.$$

A. 30.

B. 32.

C. 34.

D. 36.

**Câu 106:** Cho số thực  $a$  và hàm số  $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \leq 0 \\ a(x-x^2) & \text{khi } x > 0 \end{cases}$ . Tính tích phân  $\int_{-1}^1 f(x) dx$  bằng:

A.  $\frac{a}{6} - 1$ .

B.  $\frac{2a}{3} + 1$ .

C.  $\frac{a}{6} + 1$ .

D.  $\frac{2a}{3} - 1$ .

**Câu 107:** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} e^x + m & \text{khi } x \geq 0 \\ 2x\sqrt{3+x^2} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $\int_{-1}^1 f(x) dx = ae + b\sqrt{3} + c$ , ( $a, b, c \in \mathbb{Q}$ )

. Tổng  $a + b + 3c$  bằng

A. 15.

B. -10.

C. -19.

D. -17.

**Câu 109:** Cho hàm số  $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 5 - x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ . Tính  $I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx + 3 \int_0^1 f(3-2x) dx$

A.  $I = \frac{71}{6}$ .

B.  $I = 31$ .

C.  $I = 32$ .

D.  $I = \frac{32}{3}$ .



# NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

## BÀI 2. TÍCH PHÂN



### HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

### MỨC ĐỘ VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

#### DẠNG 1. TÍCH PHÂN HÀM ẨN

##### DẠNG 1.1 GIẢI BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN

**Câu 1:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn  $\int_{-5}^1 f(x) dx = 9$ . Tích phân  $\int_0^2 [f(1-3x) + 9] dx$  bằng

A. 15.                                      B. 27.                                      C. 75.                                      D. 21.

Lời giải

**Chọn D**

$$\text{Ta có } \int_0^2 [f(1-3x) + 9] dx = \int_0^2 f(1-3x) dx + \int_0^2 9 dx = \int_0^2 f(1-3x) dx + 18.$$

$$\text{Xét } \int_0^2 f(1-3x) dx, \text{ đặt } t = 1-3x \Rightarrow dt = -3dx \Rightarrow dx = -\frac{dt}{3}.$$

$$\text{Đổi cận khi } x = 0 \Rightarrow t = 1; x = 2 \Rightarrow t = -5. \text{ Suy ra } \int_0^2 f(1-3x) dx = -\frac{1}{3} \int_1^{-5} f(t) dt = \frac{1}{3} \int_{-5}^1 f(t) dt.$$

$$\text{Khi đó } \int_0^2 [f(1-3x) + 9] dx = \frac{1}{3} \int_{-5}^1 f(t) dt + 18 = \frac{1}{3} \int_{-5}^1 f(x) dx + 18 = 21.$$

**Câu 2:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0;10]$  thỏa mãn  $\int_0^{10} f(x) dx = 7, \int_2^{10} f(x) dx = 1$ . Tính

$$P = \int_0^1 f(2x) dx.$$

A.  $P = 6$ .                                      B.  $P = -6$ .                                      C.  $P = 3$ .                                      D.  $P = 12$ .

Lời giải

**Chọn C**

Ta có:  $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^{10} f(x) dx - \int_2^{10} f(x) dx = 6.$

Xét  $P = \int_0^1 f(2x) dx$ . Đặt  $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt$ .

Đổi cận:

|     |   |   |
|-----|---|---|
| $x$ | 0 | 1 |
| $t$ | 0 | 2 |

Lúc đó:  $P = \int_0^1 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx = 3.$

**Câu 3:** Cho  $I = \int_1^5 f(x) dx = 26$ . Khi đó  $J = \int_0^2 x[f(x^2+1)+1] dx$  bằng

**A.** 15.

**B.** 13.

**C.** 54.

**D.** 52.

**Lời giải**

**Chọn A**

+ Ta có:  $J = \int_0^2 x[f(x^2+1)+1] dx = \int_0^2 x dx + \int_0^2 xf(x^2+1) dx.$

+ Xét  $A = \int_0^2 x dx.$

$$A = \int_0^2 x dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^2 = 2.$$

+ Xét  $B = \int_0^2 xf(x^2+1) dx.$

Đặt  $t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2x dx.$

Đổi cận:

|     |   |   |
|-----|---|---|
| $x$ | 0 | 2 |
| $t$ | 1 | 5 |

Ta có:

$$B = \int_0^2 xf(x^2+1) dx = \frac{1}{2} \int_1^5 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_1^5 f(x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 26 = 13.$$

Vậy  $J = A + B = 15.$

**Câu 4:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 4$  và  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 2$ .

Tích phân  $I = \int_0^3 f(x) dx$  bằng

A.  $I = 8$ .

B.  $I = 6$ .

C.  $I = 4$ .

D.  $I = 10$ .

Lời giải

**Chọn C**

Đặt  $t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ . Khi đó  $x = 1 \Rightarrow t = 1; x = 9 \Rightarrow t = 3$

Suy ra  $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^3 f(t) dt = 4 \Rightarrow \int_1^3 f(t) dt = 2$ .

Đặt  $t = \sin x; x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dt = \cos x dx$ . Khi đó.  $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$

Suy ra  $\int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = 2 + 2 = 4$ .

**Câu 5:** Cho biết  $\int_{-1}^5 f(x) dx = 15$ . Tính giá trị của  $P = \int_0^2 [f(5-3x) + 7] dx$ .

A.  $P = 15$ .

B.  $P = 37$ .

C.  $P = 27$ .

D.  $P = 19$ .

Lời giải

Đặt  $t = 5 - 3x \Rightarrow dt = -3dx \Rightarrow dx = -\frac{1}{3} dt$ .

Đổi cận:  $x = 0$  thì  $t = 5$ ;  $x = 2$  thì  $t = -1$ .

Ta có:  $P = \int_0^2 [f(5-3x) + 7] dx = \int_0^2 f(5-3x) dx + \int_0^2 7 dx = \int_5^{-1} f(t) \frac{dt}{-3} + 7x \Big|_0^2 = \frac{1}{3} \int_{-1}^5 f(t) dt + 14$   
 $= \frac{1}{3} \cdot 15 + 14 = 19$ .

**Câu 6:** Cho  $\int_0^4 f(x) dx = 2018$ . Tính tích phân  $I = \int_0^2 [f(2x) + f(4-2x)] dx$ .

A.  $I = 0$ .

B.  $I = 2018$ .

C.  $I = 4036$ .

D.  $I = 1009$ .

Lời giải

Ta có  $I = \int_0^2 f(2x) dx + \int_0^2 f(4-2x) dx = H + K$

Tính  $K = \int_0^2 f(2x) dx$ .

Đặt  $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx$ ; đổi cận:  $x = 0 \Rightarrow t = 2; x = 2 \Rightarrow t = 4$ . Nên  $K = \frac{1}{2} \int_2^4 f(t) dt = 1009$

Tính  $H = \int_0^2 f(4-2x) dx$ ,

Đặt  $t = 4-2x \Rightarrow dt = -2dx$ ; đổi cận:  $x = 0 \Rightarrow t = 4; x = 2 \Rightarrow t = 0$ . Nên  $H = \frac{1}{2} \int_4^0 f(t) dt = 1009$

Suy ra  $I = K + H = 2018$ .

**Câu 7:** Cho  $y = f(x)$  là hàm số chẵn, liên tục trên  $[-6; 6]$ . Biết rằng  $\int_{-1}^2 f(x) dx = 8$ ;  $\int_1^3 f(-2x) dx = 3$ .

Giá trị của  $I = \int_{-1}^6 f(x) dx$  là

**A.**  $I = 5$ .

**B.**  $I = 2$ .

**C.**  $I = 14$ .

**D.**  $I = 11$ .

**Lời giải**

Ta có  $y = f(x)$  là hàm số chẵn, suy ra  $f(-2x) = f(2x)$ . Khi đó:

$$\int_1^3 f(-2x) dx = \int_1^3 f(2x) dx = 3.$$

Xét tích phân:  $I_1 = \int_1^3 f(2x) dx$ .

Đặt  $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx \Leftrightarrow \frac{1}{2} dt = dx$ . Đổi cận:  $x = 1 \Rightarrow t = 2$ ;  $x = 3 \Rightarrow t = 6$ .

$$\Rightarrow I_1 = \int_2^6 f(t) \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int_2^6 f(t) dt = 3 \Rightarrow \int_2^6 f(t) dt = 6 \Rightarrow \int_2^6 f(x) dx = 6.$$

$$\text{Vậy } I = \int_{-1}^6 f(x) dx = \int_{-1}^2 f(x) dx + \int_2^6 f(x) dx = 8 + 6 = 14.$$

**Câu 8:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $\int_0^{\pi^2} f(x) dx = 2018$ , tính  $I = \int_0^{\pi} xf(x^2) dx$ .

**A.**  $I = 1008$ .

**B.**  $I = 2019$ .

**C.**  $I = 2017$ .

**D.**  $I = 1009$ .

**Lời giải**

Xét  $I = \int_0^{\pi} xf(x^2) dx$ .

Đặt  $t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx \Rightarrow xdx = \frac{1}{2} dt$ .

Đổi cận:  $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \pi \Rightarrow t = \pi^2$ .

Khi đó  $I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi^2} f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi^2} f(x) dx = 1009$ .

**Câu 9:** Cho  $\int_1^2 f(x)dx = 2$ . Khi đó  $\int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$  bằng

A. 1.                      B. 4.                      C. 2.

## Lời giải

Đặt  $\sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2dt$ . Khi  $x = 1$  thì  $t = 1$ ;  $x = 4$  thì  $t = 2$ .

$$\text{Suy ra } \int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \int_1^2 f(t) \cdot 2 dt = 2 \int_1^2 f(t) dt = 2 \cdot 2 = 4.$$

$$\text{Vậy } \int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 4.$$

**Câu 10:** Cho  $\int_1^2 f(x^2 + 1)xdx = 2$ . Khi đó  $I = \int_2^5 f(x)dx$  bằng  
A. 2. B. 1. C. 4.

## Lời giải

Đặt  $x^2 + 1 = t \Rightarrow 2x dx = dt \Rightarrow x dx = \frac{dt}{2}$ .

Đôi cận  $x = 1 \Rightarrow t = 2; x = 2 \Rightarrow t = 5$ .

Suy ra:  $2 = \int_1^2 f(x^2 + 1) dx = \frac{1}{2} \int_2^5 f(t) dt \Rightarrow \int_2^5 f(t) dt = 4 \Rightarrow I = \int_2^5 f(x) dx = 4.$

**Câu 11:** Cho  $f, g$  là hai hàm số liên tục trên  $[1;3]$  thỏa mãn điều kiện  $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10$  đồng thời

$$\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6. \text{ Tính } \int_1^3 f(4-x) dx + 2 \int_1^2 g(2x-1) dx$$

**A.** 9.                      **B.** 6.                      **C.** 7.                      **D.** 8.

## Lời giải

Ta có:  $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x) dx + 3 \int_1^3 g(x) dx = 10.$

$$\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6 \Leftrightarrow 2 \int_1^3 f(x) dx - \int_1^3 g(x) dx = 6.$$

$$\text{Đặt } u = \int_1^3 f(x)dx; v = \int_1^3 g(x)dx.$$

Ta được hệ phương trình:  $\begin{cases} u+3v=10 \\ 2u-v=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=4 \\ v=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_1^3 f(x)dx=4 \\ \int_1^3 g(x)dx=2 \end{cases}$

+ Tính  $\int_1^3 f(4-x)dx$

Đặt  $t = 4 - x \Rightarrow dt = -dx; x = 1 \Rightarrow t = 3; x = 3 \Rightarrow t = 1$ .

$$\int_1^3 f(4-x)dx = \int_3^1 f(t)(-dt) = \int_1^3 f(t)dt = \int_1^3 f(x)dx = 4.$$

+ Tính  $\int_1^2 g(2x-1)dx$

Đặt  $z = 2x - 1 \Rightarrow dz = 2dx; x = 1 \Rightarrow z = 1; x = 2 \Rightarrow z = 3$ .

$$\int_1^2 g(2x-1)dx = \frac{1}{2} \int_1^3 g(z)dz = \frac{1}{2} \int_1^3 g(x)dx = 1.$$

Vậy  $\int_1^3 f(4-x)dx + 2 \int_1^2 g(2x-1)dx = 6$ .

**Câu 12:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa  $\int_0^1 f(x)dx = 2$  và  $\int_0^2 f(3x+1)dx = 6$ . Tính  $I = \int_0^7 f(x)dx$ .

**A.**  $I = 16$ .

**B.**  $I = 18$ .

**C.**  $I = 8$ .

**D.**  $I = 20$ .

**Lời giải**

$A = \int_0^1 f(x)dx = 2, B = \int_0^2 f(3x+1)dx = 6$  đặt  $t = 3x+1 \Rightarrow dt = 3dx$ .

Đổi cận:  $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=2 \Rightarrow t=7 \end{cases}$

Ta có:  $B = \frac{1}{3} \int_1^7 f(t)dt = 6 \Rightarrow \int_1^7 f(t)dt = 18 \Rightarrow \int_1^7 f(x)dx = 18$ .

Vậy  $I = \int_0^7 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^7 f(x)dx = 20$ .

**Câu 13:** Cho  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f(x) = f(10-x)$  và  $\int_3^7 f(x)dx = 4$ . Tính  $I = \int_3^7 xf(x)dx$ .

**A.** 80.

**B.** 60.

**C.** 40.

**D.** 20.

**Lời giải**

Đặt  $t = 10 - x$ . Khi đó  $dt = -dx$ .

Đổi cận:  $x = 3 \Rightarrow t = 7$ .

$$x = 7 \Rightarrow t = 3.$$

$$\text{Khi đó } I = -\int_7^3 (10-t) f(10-t) dt = \int_3^7 (10-t) f(10-t) dt = \int_3^7 (10-x) f(10-x) dx$$

$$= \int_3^7 (10-x) f(x) dx = 10 \int_3^7 f(x) dx - \int_3^7 xf(x) dx = 10 \int_3^7 f(x) dx - I.$$

$$\text{Suy ra } 2I = 10 \int_3^7 f(x) dx = 10.4 = 40. \text{ Do đó } I = 20.$$

**Câu 14:** Cho  $\int_0^1 f(x) dx = 9$ . Tính  $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(\sin 3x) \cos 3x dx$ .

**A.**  $I = 5$ .                      **B.**  $I = 9$ .                      **C.**  $I = 3$ .                      **D.**  $I = 2$ .

**Lời giải**

$$\text{Đặt } t = \sin 3x \Rightarrow dt = 3 \cos 3x dx$$

$$\text{Đổi cận: } \begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = 1 \end{cases}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(\sin 3x) \cos 3x dx = \frac{1}{3} \int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3$$

**Câu 15:** Cho tích phân  $I = \int_0^4 f(x) dx = 32$ . Tính tích phân  $J = \int_0^2 f(2x) dx$ .

**A.**  $J = 32$                       **B.**  $J = 64$                       **C.**  $J = 8$                       **D.**  $J = 16$

**Lời giải**

$$\text{Đặt } t = 2x \Rightarrow dt = 2 dx \Rightarrow \frac{dt}{2} = dx.$$

$$\text{Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 2 \Rightarrow t = 4.$$

$$J = \int_0^2 f(2x) dx = \int_0^4 \frac{1}{2} f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^4 f(t) dt = \frac{1}{2} I = 16.$$

**Câu 16:** Biết  $f(x)$  là hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $\int_0^9 f(x) dx = 9$ . Khi đó giá trị của  $\int_1^4 f(3x-3) dx$  là

**A.** 0.                      **B.** 24.                      **C.** 27.                      **D.** 3.

**Lời giải**

$$\text{Xét } I = \int_1^4 f(3x-3) dx.$$

$$\text{Đặt } t = 3x-3 \Rightarrow dt = 3 dx.$$

Đổi cận:  $\begin{cases} x=4 \Rightarrow t=9 \\ x=1 \Rightarrow t=0 \end{cases}$ . Vậy  $I = \int_0^9 f(t) \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \int_0^9 f(x) dx = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3$ .

**Câu 17:** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $\int_0^1 f(2x)dx = 2$ . Tích phân  $\int_0^2 f(x)dx$  bằng

**A.** 8.

**B.** 1.

**C.** 2.

**D.** 4.

**Lời giải**

Đặt  $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$ ,

$x = 0 \Rightarrow t = 0$

$x = 1 \Rightarrow t = 2$

Ta có  $2 = \int_0^1 f(2x)dx = \int_0^2 \frac{f(t)dt}{2} = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t)dt \Rightarrow \int_0^2 f(t)dt = 4$

Theo tính chất tích phân  $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 f(t)dt = 4$

Vậy  $\int_0^2 f(x)dx = 4$

**Câu 18:** Cho hàm  $f(x)$  thỏa mãn  $\int_0^{2017} f(x)dx = 1$ . Tính tích phân  $I = \int_0^1 f(2017x)dx$ .

**A.**  $I = \frac{1}{2017}$ .

**B.**  $I = 0$ .

**C.**  $I = 2017$ .

**D.**  $I = 1$ .

**Lời giải**

Đặt  $t = 2017x \Rightarrow dt = 2017dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2017}dt$

Đổi cận:  $x = 0 \Rightarrow t = 0$  ;  $x = 1 \Rightarrow t = 2017$

Vậy  $I = \int_0^{2017} f(t) \cdot \frac{1}{2017} dt = \frac{1}{2017} \int_0^{2017} f(t) dt = \frac{1}{2017}$ .

**Câu 19:** Cho tích phân  $\int_1^2 f(x)dx = a$ . Hãy tính tích phân  $I = \int_0^1 xf(x^2 + 1)dx$  theo  $a$ .

**A.**  $I = 4a$ .

**B.**  $I = \frac{a}{4}$ .

**C.**  $I = \frac{a}{2}$ .

**D.**  $I = 2a$ .

**Lời giải**

Đặt  $t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2xdx$ .

Đổi cận

|     |   |   |
|-----|---|---|
| $x$ | 0 | 1 |
| $t$ | 1 | 2 |

$$I = \int_0^1 xf(x^2 + 1)dx = \int_1^2 f(t) \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int_1^2 f(t)dt = \frac{1}{2} \int_1^2 f(x)dx = \frac{a}{2}.$$

**Câu 20:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot f(\cos^2 x)dx = 2$  và  $\int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx = 2$ .

Tính  $\int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(2x)}{x} dx$ .

**A.** 0.

**B.** 1.

**C.** 4.

**D.** 8.

**Lời giải**

$$* I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot f(\cos^2 x)dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\cos^2 x)}{\cos^2 x} \cdot \sin 2x dx.$$

Đặt  $\cos^2 x = t \Rightarrow \sin 2x dx = -dt$ .

Đổi cận

|     |     |                 |
|-----|-----|-----------------|
| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{4}$ |
| $t$ | $1$ | $\frac{1}{2}$   |

Khi đó  $I_1 = -\frac{1}{2} \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{f(t)}{t} dt \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt = 4$ .

$$* I_2 = \int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx = \frac{1}{2} \int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{\ln^2 x} \cdot \frac{2 \ln x}{x} dx.$$

Đặt  $\ln^2 x = t \Rightarrow \frac{2 \ln x}{x} dx = dt$ .

Đổi cận

|     |     |       |
|-----|-----|-------|
| $x$ | $e$ | $e^2$ |
| $t$ | $1$ | $4$   |

Khi đó  $I_2 = \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{f(t)}{t} dt \Rightarrow \int_1^4 \frac{f(t)}{t} dt = 4$ .

\* Tính  $I = \int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(2x)}{x} dx$ . Đặt  $2x = t \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt$ .

Đổi cận

|     |               |     |
|-----|---------------|-----|
| $x$ | $\frac{1}{4}$ | $2$ |
| $t$ | $\frac{1}{2}$ | $4$ |

Khi đó  $I = \int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{f(t)}{t} dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt + \int_1^4 \frac{f(t)}{t} dt = 4 + 4 = 8.$

**Câu 21:** Cho hàm số  $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x^2; x \geq 1 \\ 5 - x; x < 1 \end{cases}$ . Tính  $I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx + 3 \int_0^1 f(3-2x) dx$ .

**A.**  $I = \frac{71}{6}$ . **B.**  $I = 31$ . **C.**  $I = 32$ . **D.**  $I = \frac{32}{3}$ .

**Lời giải**

Xét tích phân  $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx$ . Đặt  $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$

Đổi cận

|     |   |                 |
|-----|---|-----------------|
| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ |
| $t$ | 0 | 1               |

Ta có  $I_1 = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (5-x) dx = \left( 5x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{9}{2}$

Xét tích phân  $I_2 = \int_0^1 f(3-2x) dx$ . Đặt  $t = 3-2x \Rightarrow dt = -2dx \Rightarrow dx = \frac{-dt}{2}$

Đổi cận

|     |   |   |
|-----|---|---|
| $x$ | 0 | 1 |
| $t$ | 3 | 1 |

Ta có

$I_2 = \int_0^1 f(3-2x) dx = \frac{1}{2} \int_1^3 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_1^3 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^3 (x^2 + 3) dx = \frac{1}{2} \left( \frac{x^3}{3} + 3x \right) \Big|_1^3 = \frac{1}{2} \left( 18 - \frac{10}{3} \right) = \frac{22}{3}$

Vậy  $I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx + 3 \int_0^1 f(3-2x) dx = 9 + 22 = 31.$

**Câu 22:** Cho  $I = \int_1^2 f(x) dx = 2$ . Giá trị của  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x f(\sqrt{3 \cos x + 1})}{\sqrt{3 \cos x + 1}} dx$  bằng

**A.** 2. **B.**  $-\frac{4}{3}$ . **C.**  $\frac{4}{3}$ . **D.** -2.

**Lời giải**

Đặt  $u = \sqrt{3 \cos x + 1} \Rightarrow u^2 = 3 \cos x + 1 \Rightarrow -\frac{2}{3} u du = \sin x dx$ . Đổi cận  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1 \\ x = 0 \Rightarrow u = 2 \end{cases}$ .

$$\text{Do đó } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin xf(\sqrt{3\cos x+1})}{\sqrt{3\cos x+1}} dx = \int_2^1 \frac{-2uf(u)}{3u} du = \frac{2}{3} \int_1^2 f(u) du = \frac{2}{3} \int_1^2 f(x) dx = \frac{4}{3}.$$

**Câu 23:** Biết  $\int_1^4 f(x) dx = 5$  và  $\int_4^5 f(x) dx = 20$ . Tính  $\int_1^2 f(4x-3) dx - \int_0^{\ln 2} f(e^{2x}) e^{2x} dx$ .

**A.**  $I = \frac{15}{4}$ .

**B.**  $I = 15$ .

**C.**  $I = \frac{5}{2}$ .

**D.**  $I = 25$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt  $t = 4x - 3 \Rightarrow dt = 4dx$  thì

$$\int_1^2 f(4x-3) dx = \frac{1}{4} \int_1^5 f(t) dt = \frac{1}{4} \left( \int_1^4 f(t) dt + \int_4^5 f(t) dt \right) = \frac{1}{4} (5 + 20) = \frac{25}{4}.$$

Đặt  $u = e^{2x} \Rightarrow du = 2e^{2x} dx$  thì

$$\int_0^{\ln 2} f(e^{2x}) e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 f(u) du = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Vậy } I = \frac{25}{4} - \frac{5}{2} = \frac{15}{4}.$$

**Câu 24:** Cho  $f(x)$  là hàm số liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f(x) + f(2-x) = x.e^{x^2}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Tính tích phân  $I = \int_0^2 f(x) dx$ .

**A.**  $I = \frac{e^4 - 1}{4}$ .

**B.**  $I = \frac{2e - 1}{2}$ .

**C.**  $I = e^4 - 2$ .

**D.**  $I = e^4 - 1$ .

**Lời giải**

Đặt  $x = 2 - t \Rightarrow dx = -dt$ .

$$\Rightarrow I = \int_2^0 f(2-t)(-dt) = \int_0^2 f(2-t)(dt) = \int_0^2 f(2-x) dx.$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^2 [f(x) + f(2-x)] dx = \int_0^2 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^2 = \frac{e^4 - 1}{2}.$$

$$\text{Vậy } I = \frac{e^4 - 1}{4}.$$

**Câu 25:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f(2x) = 3f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Biết rằng  $\int_0^1 f(x) dx = 1$ .

Tính tích phân  $I = \int_1^2 f(x) dx$ .

**A.**  $I = 5$

**B.**  $I = 6$

**C.**  $I = 3$

**D.**  $I = 2$

**Lời giải.**

Ta có:  $3 = 3.1 = 3 \cdot \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 3f(x) dx = \int_0^1 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x) d(2x), \forall x \in \mathbb{R}.$

Đặt  $2x = t \Rightarrow d(2x) = dt$ , với  $x = 0 \Rightarrow t = 0$ ;  $x = 1 \Rightarrow t = 2$ .

$\Leftrightarrow 3 = \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x) d(2x) = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx, \forall x \in \mathbb{R}.$

$\Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx = 6, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = 6, \forall x \in \mathbb{R}.$

$\Leftrightarrow 1 + \int_1^2 f(x) dx = 6, \forall x \in \mathbb{R}.$

$\Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx = 5, \forall x \in \mathbb{R}.$

**Câu 26:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = \int_1^8 \frac{f(\sqrt[3]{x})}{x} dx = 6$ . Tính tích

phân  $\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{f(x^2)}{x} dx$

**A.** 4

**B.** 6

**C.** 7

**D.** 10

**Lời giải**

+) Đặt  $t = \sqrt[3]{x} \Rightarrow t^3 = x \Rightarrow 3t^2 dt = dx$

Đổi cận  $x = 1 \Rightarrow t = 1$  và  $x = 8 \Rightarrow t = 2$ .

Khi đó  $\int_1^8 \frac{f(\sqrt[3]{x})}{x} dx = \int_1^2 \frac{f(t)}{t^3} 3t^2 dt = 3 \int_1^2 \frac{f(t)}{t} dt = 6 \Rightarrow \int_1^2 \frac{f(t)}{t} dt = 2$

+) Đặt  $t = \cos^2 x \Rightarrow dt = -2 \cos x \sin x dx \Rightarrow dt = -2 \cos^2 x \tan x dx \Rightarrow \tan x dx = -\frac{1}{2t} dt$

Đổi cận:  $x = 0 \Rightarrow t = 1$  và  $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{1}{4}$ .

Khi đó  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = -\frac{1}{2} \int_1^{\frac{1}{4}} \frac{f(t)}{t} dt = 6 \Rightarrow \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{f(t)}{t} dt = 12$

+) Đặt  $t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx \Rightarrow dt = 2x^2 \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \frac{dt}{t}$

Đổi cận:  $x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{4}$  và  $x = \sqrt{2} \Rightarrow t = 2$  Khi đó

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{f(x^2)}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(t)}{t} dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{f(t)}{t} dt + \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{f(t)}{t} dt = \frac{2+12}{2} = 7$$

**Câu 27:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa  $\int_0^{2018} f(x) dx = 2$ . Khi đó tích phân

$$\int_0^{\sqrt{e^{2018}-1}} \frac{x}{x^2+1} f(\ln(x^2+1)) dx \text{ bằng}$$

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

**Lời giải**

$$\text{Đặt } I = \int_0^{\sqrt{e^{2018}-1}} \frac{x}{x^2+1} f(\ln(x^2+1)) dx.$$

$$\text{Đặt } t = \ln(x^2+1) \Rightarrow dt = \frac{2x}{x^2+1} dx.$$

$$\text{Đổi cận: } x=0 \Rightarrow t=0; x=\sqrt{e^{2018}-1} \Rightarrow t=2018.$$

$$\text{Vậy } I = \int_0^{2018} f(t) dt = \int_0^{2018} f(x) dx = 2.$$

**Câu 28:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 3$  và  $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1} dx = 1$ . Tính

$$I = \int_0^1 f(x) dx.$$

A.  $I = 2$ .

B.  $I = 6$ .

C.  $I = 3$ .

D.  $I = 4$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 3. \text{ Đặt } \tan x = t \Rightarrow dt = d \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} dx = (t^2 + 1) dx.$$

$$\text{Vậy } K = \int_0^1 f(t) \cdot \frac{1}{t^2+1} dt = \int_0^1 f(x) \cdot \frac{1}{x^2+1} dx = 3.$$

$$\text{Lại có } \int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1} dx = \int_0^1 \left[ f(x) - \frac{1}{x^2+1} f(x) \right] dx = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} f(x) dx.$$

$$\text{Vậy suy ra } I = \int_0^1 f(x) dx = 4.$$

**Câu 29:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x \cdot f(\sin^2 x) dx = \int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{x} dx = 1$ . Tính tích

phân  $\int_{\frac{1}{8}}^1 \frac{f(4x)}{x} dx$ .

**A.**  $I = 3$ .

**B.**  $I = \frac{3}{2}$ .

**C.**  $I = 2$ .

**D.**  $I = \frac{5}{2}$ .

**Lời giải**

Đặt  $I_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x \cdot f(\sin^2 x) dx = 1$ ,  $I_2 = \int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{x} dx = 1$ .

□ Đặt  $t = \sin^2 x \Rightarrow dt = 2 \sin x \cdot \cos x dx = 2 \sin^2 x \cdot \cot x dx = 2t \cdot \cot x dx$ .

|     |                 |                 |
|-----|-----------------|-----------------|
| $x$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| $t$ | $\frac{1}{2}$   | 1               |

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x \cdot f(\sin^2 x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) \cdot \frac{1}{2t} dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{f(4x)}{4x} d(4x) = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{f(4x)}{x} dx.$$

Suy ra  $\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{f(4x)}{x} dx = 2I_1 = 2$

□ Đặt  $t = \sqrt{x} \Rightarrow 2t dt = dx$ .

|     |   |    |
|-----|---|----|
| $x$ | 1 | 16 |
| $t$ | 1 | 4  |

$$I_2 = \int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{x} dx = \int_1^4 \frac{f(t)}{t^2} 2t dt = 2 \int_1^4 \frac{f(t)}{t} dt = 2 \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{f(4x)}{4x} d(4x) = 2 \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{f(4x)}{x} dx.$$

Suy ra  $\int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{f(4x)}{x} dx = \frac{1}{2} I_2 = \frac{1}{2}$

Khi đó, ta có:

$$\int_{\frac{1}{8}}^1 \frac{f(4x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{f(4x)}{x} dx + \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{f(4x)}{x} dx = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

**Câu 30:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục và là hàm số lẻ trên đoạn  $[-2; 2]$ . Biết rằng

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = -1, \int_{\frac{1}{2}}^1 f(-2x) dx = 2. \text{ Mệnh đề nào sau đây đúng?}$$

A.  $\int_{-2}^2 f(x) dx = 2 \int_0^2 f(x) dx.$

B.  $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = -4.$

C.  $\int_0^1 f(x) dx = -1.$

D.  $\int_0^2 f(x) dx = -3.$

Lời giải

**Chọn D**

Đặt  $t = -x \Rightarrow \int_{-1}^0 f(x) dx = - \int_1^0 f(-t) dt = \int_0^1 -f(t) dt$

$\Rightarrow \int_0^1 f(t) dt = 1.$

Đặt  $t = 2x \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 f(-2x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 -f(2x) dx = \frac{-1}{2} \int_1^2 f(t) dt$

$\Rightarrow \frac{-1}{2} \int_1^2 f(t) dt = 2 \Rightarrow \int_1^2 f(t) dt = -4.$

Vậy  $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = 1 - 4 = -3.$

**Câu 31:** Cho  $f(x)$  là hàm số liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa  $f(1) = 1$  và  $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{3}$ . Tính

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f'(\sin x) dx$

A.  $I = \frac{4}{3}.$

B.  $I = \frac{2}{3}.$

C.  $I = -\frac{2}{3}.$

D.  $I = \frac{1}{3}.$

Lời giải

**Chọn A**

Đặt  $t = \sin x, dt = \cos x dx.$

Đổi cận

|     |     |                 |
|-----|-----|-----------------|
| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| $t$ | $0$ | $1$             |

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f'(\sin x) dx = \int_0^1 2t \cdot f'(t) dt.$

Đặt  $\begin{cases} u = 2t \\ dv = f'(t) dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 dt \\ v = f(t) \end{cases}$

$$I = (2t \cdot f(t)) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 f(t) dt = 2 \cdot f(1) - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

**Câu 32:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 4, \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 2$ . Tính tích phân

$$I = \int_0^3 f(x) dx.$$

**A.**  $I = 6$ .

**B.**  $I = 4$ .

**C.**  $I = 10$ .

**D.**  $I = 2$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Ta có: } \int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^9 f(\sqrt{x}) d(\sqrt{x}) = 2 \int_1^3 f(t) dt.$$

$$\text{Mà } \int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 4 \text{ nên } 2 \int_1^3 f(t) dt = 4 \Leftrightarrow \int_1^3 f(t) dt = 2$$

$$\text{Vì tích phân không phụ thuộc vào biến số nên } \int_1^3 f(t) dt = 2 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x) dx = 2.$$

$$\text{Ta có: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) d(\sin x) = \int_0^1 f(t) dt.$$

$$\text{Mà } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 2 \text{ nên } \int_0^1 f(t) dt = 2.$$

$$\text{Vì tích phân không phụ thuộc vào biến số nên } \int_0^1 f(t) dt = 2 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = 2.$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = 2 + 2 = 4.$$

**Câu 33:** Cho  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f(x) = f(2020 - x)$  và  $\int_3^{2017} f(x) dx = 4$ . Khi đó  $\int_3^{2017} xf(x) dx$  bằng

**A.** 16160.

**B.** 4040.

**C.** 2020.

**D.** 8080.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đặt  $u = 2020 - x \Rightarrow x = 2020 - u$ . Ta có  $dx = -du$ .

Với  $x = 3$  thì  $u = 2017$ .

Với  $x = 2017$  thì  $u = 3$ .

$$\text{Khi đó } \int_3^{2017} xf(x)dx = \int_3^{2017} (2020-u)f(2020-u)du = \int_3^{2017} (2020-x)f(x)dx$$

$$\text{Suy ra } 2 \int_3^{2017} xf(x)dx = \int_3^{2017} 2020f(x)dx = 8080. \text{ Do đó } \int_3^{2017} xf(x)dx = 4040.$$

**Câu 34:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn  $4xf(x^2) + 6f(2x) = \frac{3}{5}x^3 + 4$ . Giá trị  $\int_0^4 f(x)dx$

bằng

**A.**  $\frac{52}{25}$ .

**B.** 52.

**C.**  $\frac{48}{25}$ .

**D.** 48.

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\begin{aligned} 4xf(x^2) + 6f(2x) &= \frac{3}{5}x^3 + 4 \Rightarrow \int_0^2 [4xf(x^2) + 6f(2x)]dx = \int_0^2 \left[ \frac{3}{5}x^3 + 4 \right] dx \\ \Rightarrow 2 \int_0^2 f(x^2)d(x^2) + 3 \int_0^2 f(2x)d(2x) &= \frac{52}{5} \Rightarrow 2 \int_0^4 f(t)dt + 3 \int_0^4 f(u)du = \frac{52}{5} \\ \Rightarrow 2 \int_0^4 f(x)dx + 3 \int_0^4 f(x)dx &= \frac{52}{5} \Rightarrow 5 \int_0^4 f(x)dx = \frac{52}{5} \Rightarrow \int_0^4 f(x)dx = \frac{52}{25} \end{aligned}$$

**Câu 35:** Cho  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn  $f(2) = 16, \int_0^1 f(2x)dx = 2$ . Tích phân  $\int_0^2 xf'(x)dx$  bằng

**A.** 30.

**B.** 28.

**C.** 36.

**D.** 16.

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Ta có: } \int_0^1 f(2x)dx = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x)d(2x) = 2 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx = 4.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^2 xf'(x)dx = xf(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 f(x)dx = 2f(2) - 4 = 32 - 4 = 28.$$

**Câu 36:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0;1]$  và  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = 5$ . Tính  $I = \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx$

**A.**  $I = \frac{5}{2}\pi$ .

**B.**  $I = 10\pi$ .

**C.**  $I = 5$ .

**D.**  $I = 5\pi$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Ta có } I = \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(\sin x)dx,$$

$$\text{Tính } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(\sin x)dx$$

$$\text{Đặt } x = \pi - t$$

$$dx = -dt$$

$$xf(\sin x)dx = (\pi - t)f[\sin(\pi - t)](-dt) = (t - \pi)f(\sin t)dt$$

$$\begin{aligned} \text{Đổi cận } x = \frac{\pi}{2} &\Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ x = \pi &\Rightarrow t = 0 \end{aligned}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(\sin x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (t - \pi)f(\sin t)dt = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} tf(\sin t)dt = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)dx$$

$$\text{Do đó } I = \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = 5\pi$$

Vậy **Chọn D**

**Câu 37:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$  thỏa mãn  $f(x) + x.f\left(\frac{1}{x}\right) = x^3 - x$ . Giá trị tích phân

$$I = \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{f(x)}{x^2 + x} dx \text{ bằng:}$$

**A.**  $\frac{8}{9}$ .

**B.**  $\frac{16}{9}$ .

**C.**  $\frac{2}{3}$ .

**D.**  $\frac{3}{4}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$f(x) + x.f\left(\frac{1}{x}\right) = x^3 - x \Rightarrow \frac{f(x)}{x^2 + x} + \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x+1} = x - 1 \Rightarrow \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{f(x)}{x^2 + x} dx + \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x+1} dx = \int_{\frac{1}{3}}^3 (x-1)dx = \frac{16}{9}.$$

$$\text{Xét } I' = \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x+1} dx.$$

$$\text{Đặt } \frac{1}{x} = t \Rightarrow \frac{-1}{x^2} dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{-t^2}.$$

$$I' = \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x+1} dx = \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{f(t)}{\frac{1}{t}+1} \frac{dt}{-t^2} = \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{f(t)}{t^2+t} dt = \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{f(x)}{x^2+x} dx = I.$$

Suy ra  $2I = \frac{16}{9} \Rightarrow I = \frac{8}{9}.$

## DẠNG 1.2 GIẢI BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỪNG PHẦN

Thông thường nếu bài toán xuất hiện  $\int_a^b g(x) f'(x) dx$  ta sẽ đặt  $\begin{cases} u = g(x) \\ dv = f'(x) dx \end{cases}$

**Câu 38:** Cho  $f(x)$  là hàm số có đạo hàm liên tục trên  $[0;1]$  và  $f(1) = -\frac{1}{18}$ ,  $\int_0^1 x.f'(x) dx = \frac{1}{36}$ . Giá trị của  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng

**A.**  $-\frac{1}{12}.$

**B.**  $\frac{1}{36}.$

**C.**  $\frac{1}{12}.$

**D.**  $-\frac{1}{36}.$

Lời giải

**Chọn A**

Đặt  $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$ , khi đó ta có

$$\int_0^1 x.f'(x) dx = x.f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = f(1) - \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{36} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = f(1) - \frac{1}{36} = -\frac{1}{12}.$$

**Câu 39:** Cho hàm số  $f(x)$  có  $f(1) = e^2$  và  $f'(x) = \frac{2x-1}{x^2} e^{2x}$  với mọi  $x$  khác 0. Khi đó  $\int_1^{\ln 3} xf'(x) dx$  bằng

**A.**  $6 - e^2.$

**B.**  $\frac{6-e^2}{2}.$

**C.**  $9 - e^2.$

**D.**  $\frac{9-e^2}{2}.$

Lời giải

**Chọn D**

Xét tích phân  $\int f'(x) dx = \int \frac{2x-1}{x^2} e^{2x} dx$

Đặt  $\begin{cases} u = (2x-1)e^{2x} \\ dv = \frac{1}{x^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 4xe^{2x} dx \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$ , khi đó

$$\int f'(x) dx = \int \frac{2x-1}{x^2} e^{2x} dx = -\frac{1}{x} (2x-1)e^{2x} + 4 \int e^{2x} dx = -\frac{1}{x} (2x-1)e^{2x} + 2e^{2x} + C.$$

Do  $f(1) = e^2 \Rightarrow C = 0$ . Vậy  $f(x) = -\frac{1}{x} (2x-1)e^{2x} + 2e^{2x}.$

Khi đó, ta có  $\int_1^{\ln 3} xf(x)dx = \int_1^{\ln 3} [(1-2x)e^{2x} + 2xe^{2x}]dx = \int_1^{\ln 3} e^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{2} \Big|_1^{\ln 3} = \frac{1}{2}(9 - e^2).$

**Câu 40:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn  $f(2) = 16, \int_0^2 f(x)dx = 4$ . Tính

$$I = \int_0^1 xf'(2x)dx.$$

**A.**  $I = 20$

**B.**  $I = 7$

**C.**  $I = 12$

**D.**  $I = 13$

**Lời giải**

Ta có:  $I = \int_0^1 xf'(2x)dx = \frac{1}{2}xf'(2x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}f'(2x)dx = \frac{1}{2}f(2) - \frac{1}{4} \int_0^2 f(x)d(2x)$

$$I = \frac{1}{2}f(2) - \frac{1}{4} \int_0^2 f(x)dx = \frac{1}{2} \cdot 16 - \frac{1}{4} \cdot 4 = 7.$$

**Câu 41:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;1]$  thỏa mãn  $\int_0^1 x^2 f(x)dx = -\frac{1}{21}$ ,  $f(1) = 0$  và

$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{7}$ . Giá trị của  $\int_0^1 f(x)dx$  bằng

**A.**  $\frac{5}{12}$ .

**B.**  $-\frac{1}{5}$ .

**C.**  $\frac{4}{5}$ .

**D.**  $-\frac{7}{10}$ .

**Lời giải**

Đặt  $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases}.$

$$\begin{aligned} \bullet -\frac{1}{21} &= \int_0^1 x^2 f(x)dx = \int_0^1 u dv = uv \Big|_0^1 - \int_0^1 v du = \frac{x^3}{3} f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3} f'(x)dx = -\frac{1}{3} \int_0^1 x^3 f'(x)dx \\ \Rightarrow \int_0^1 x^3 f'(x)dx &= \frac{1}{7}. \end{aligned}$$

$$\bullet \int_0^1 (x^3 - f'(x))^2 dx = \int_0^1 x^6 dx - 2 \int_0^1 x^3 f'(x)dx + \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{7} - 2 \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = 0$$

$$\Rightarrow (f'(x) - x^3)^2 = 0, \forall x \in [0;1] \Rightarrow f'(x) = x^3, \forall x \in [0;1].$$

Kết hợp điều kiện  $f(1) = 0$  ta có  $f(x) = \frac{1}{4}(x^4 - 1); \forall x \in [0;1]$

Vậy  $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{4}(x^4 - 1)dx = \frac{1}{4} \int_0^1 (x^4 - 1)dx = -\frac{1}{5}.$

**Câu 42:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0;1]$  thỏa mãn  $f(1) = 0, \int_0^1 x^2 f(x)dx = \frac{1}{3}$

Tính  $\int_0^1 x^3 f'(x)dx.$

A. -1

B. 1

C. 3

D. -3

Lời giải

**Chọn A**

$$\begin{cases} u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)dx \\ dv = x^2 dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$$

$$I = \frac{x^3}{3} f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3} f'(x) dx = \frac{1^3}{3} f(1) - 0 \cdot f(0) - \int_0^1 \frac{x^3}{3} f'(x) dx$$

$$\frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \int_0^1 x^3 f'(x) dx \Rightarrow \int_0^1 x^3 f'(x) dx = -1$$

**Câu 43:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0;1]$  và  $f(0) + f(1) = 0$ . Biết

$$\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 f'(x) \cos(\pi x) dx = \frac{\pi}{2}. \text{ Tính } \int_0^1 f(x) dx.$$

A.  $\pi$ .

B.  $\frac{3\pi}{2}$ .

C.  $\frac{2}{\pi}$ .

D.  $\frac{1}{\pi}$ .

Lời giải

$$\text{Xét tích phân } I = \int_0^1 f'(x) \cos(\pi x) dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \cos(\pi x) \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\pi \sin(\pi x) dx \\ v = f(x) \end{cases}, \text{ ta có}$$

$$I = f(x) \cos(\pi x) \Big|_0^1 + \pi \int_0^1 f(x) \sin(\pi x) dx = -f(1) - f(0) + \pi \int_0^1 f(x) \sin(\pi x) dx = \pi \int_0^1 f(x) \sin(\pi x) dx$$

$$\text{Mà } I = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \pi \int_0^1 f(x) \sin(\pi x) dx = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) \sin(\pi x) dx = \frac{1}{2}$$

$$\text{Mặt khác: } \int_0^1 \sin^2(\pi x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 [1 - \cos(2\pi x)] dx = \frac{1}{2} \left[ x - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi x) \right] \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 [f^2(x) - 2 \cdot f(x) \sin(\pi x) + \sin^2(\pi x)] dx = \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

$$\text{Khi đó } \int_0^1 [f(x) - \sin(\pi x)]^2 dx = 0$$

Vì  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0;1]$  và  $[f(x) - \sin(\pi x)]^2 \geq 0, \forall x \in [0;1]$  nên ta suy ra

$$f(x) - \sin(\pi x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \sin(\pi x).$$

$$\text{Do đó } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \sin(\pi x) dx = -\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}$$

**Câu 44:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0;1]$  thỏa mãn  $f(1)=0$ ,  $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$  và

$$\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}. \text{ Tích phân } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

**A.**  $\frac{7}{5}$

**B.** 1

**C.**  $\frac{7}{4}$

**D.** 4

**Lời giải**

Từ giả thiết:  $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3} \Rightarrow \int_0^1 3x^2 f(x) dx = 1.$

Tính:  $I = \int_0^1 3x^2 f(x) dx.$

Đặt:  $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = 3x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = x^3 \end{cases}.$

Ta có:

$$I = \int_0^1 3x^2 f(x) dx = x^3 f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 x^3 \cdot f'(x) dx = 1 \cdot f(1) - 0 \cdot f(0) - \int_0^1 x^3 \cdot f'(x) dx = - \int_0^1 x^3 \cdot f'(x) dx.$$

Mà:  $\int_0^1 3x^2 f(x) dx = 1 \Rightarrow 1 = - \int_0^1 x^3 \cdot f'(x) dx$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 x^3 \cdot f'(x) dx = -1 \Leftrightarrow 7 \int_0^1 x^3 \cdot f'(x) dx = -7 \Leftrightarrow \int_0^1 7x^3 \cdot f'(x) dx = - \int_0^1 [f'(x)]^2 dx,.$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 (7x^3 \cdot f'(x) + [f'(x)]^2) dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f'(x) [7x^3 + f'(x)] dx = 0$$

$$\Rightarrow 7x^3 + f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -7x^3 \Rightarrow f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + C.$$

Với  $f(1)=0 \Rightarrow -\frac{7}{4} \cdot 1^4 + C = 0 \Rightarrow C = \frac{7}{4}.$

Khi đó:  $f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + \frac{7}{4}.$

Vậy:  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(-\frac{7}{4}x^4 + \frac{7}{4}\right) dx = -\frac{7}{4} \left(\frac{x^5}{5} - x\right) \Big|_0^1 = \frac{7}{5}.$

**Câu 45:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0;1]$  thỏa mãn  $f(1)=4$ ,  $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 36$

và  $\int_0^1 x \cdot f(x) dx = \frac{1}{5}.$  Tích phân  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng

A.  $\frac{5}{6}$

B.  $\frac{3}{2}$

C. 4

D.  $\frac{2}{3}$

Lời giải

Từ giả thiết:  $\int_0^1 x.f(x) dx = \frac{1}{5} \Rightarrow \int_0^1 5x.f(x) dx = 1.$

Tính:  $I = \int_0^1 5x.f(x) dx.$

Đặt:  $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = 5x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{5}{2} x^2 \end{cases}.$

Ta có:  $I = \int_0^1 5x.f(x) dx = \frac{5}{2} x^2.f(x) \Big|_0^1 - \frac{5}{2} \int_0^1 x^2.f'(x) dx$

$= \frac{5}{2}.f(1) - \frac{5}{2} \int_0^1 x^2.f'(x) dx = 10 - \frac{5}{2} \int_0^1 x^2.f'(x) dx,$

Mà:  $I = \int_0^1 5x.f(x) dx = 1 \Rightarrow 1 = 10 - \frac{5}{2} \int_0^1 x^2.f'(x) dx \Leftrightarrow \int_0^1 x^2.f'(x) dx = \frac{18}{5}$

$\Leftrightarrow 10 \int_0^1 x^2.f'(x) dx = 36 \Leftrightarrow 10 \int_0^1 x^2.f'(x) dx = \int_0^1 [f'(x)]^2 dx,$

$\Leftrightarrow \int_0^1 [10x^2.f'(x) - [f'(x)]^2] dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f'(x)[10x^2 - f'(x)] dx = 0$

$\Rightarrow 10x^2 - f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 10x^2 \Rightarrow f(x) = \frac{10x^3}{3} + C$

Với  $f(1) = 4 \Rightarrow 4 = \frac{10.1}{3} + C \Rightarrow C = \frac{2}{3}.$

Khi đó:  $f(x) = \frac{10x^3}{3} + \frac{2}{3}.$

Vậy:  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left( \frac{10x^3}{3} + \frac{2}{3} \right) dx = \left( \frac{5x^4}{6} + \frac{2}{3}x \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{2}.$

**Câu 46:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0; 2]$  thỏa mãn  $f(2) = 3, \int_0^2 [f'(x)]^2 dx = 4$

và  $\int_0^2 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}.$  Tích phân  $\int_0^2 f(x) dx$  bằng

A.  $\frac{2}{115}$

B.  $\frac{297}{115}$

C.  $\frac{562}{115}$

D.  $\frac{266}{115}$

Lời giải

Từ giả thiết:  $\int_0^2 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3} \Rightarrow \int_0^2 3x^2 f(x) dx = 1.$

Tính:  $I = \int_0^2 3x^2 f(x) dx.$

Đặt:  $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = 3x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = x^3 \end{cases}.$

Ta có:  $I = \int_0^2 3x^2 f(x) dx = x^3 \cdot f(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 x^3 \cdot f'(x) dx = 24 - \int_0^2 x^3 \cdot f'(x) dx,$

Mà:  $I = \int_0^2 3x^2 f(x) dx = 1 \Rightarrow 1 = 24 - \int_0^2 x^3 \cdot f'(x) dx$

$\Leftrightarrow \int_0^2 x^3 \cdot f'(x) dx = 23 \Leftrightarrow \frac{4}{23} \int_0^2 x^3 \cdot f'(x) dx = 4$

$\Leftrightarrow \frac{4}{23} \int_0^2 x^3 \cdot f'(x) dx = \int_0^2 [f'(x)]^2 dx, \Leftrightarrow \int_0^2 \left[ \frac{4}{23} x^3 \cdot f'(x) - [f'(x)]^2 \right] dx = 0$

$\Leftrightarrow \int_0^2 f'(x) \left[ \frac{4}{23} x^3 - f'(x) \right] dx = 0$

$\Rightarrow \frac{4}{23} x^3 - f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{4}{23} x^3 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{23} x^4 + C$

Với  $f(2) = 3 \Rightarrow 3 = \frac{16}{23} + C \Rightarrow C = \frac{53}{23}.$

Khi đó:  $f(x) = \frac{1}{23} x^4 + \frac{53}{23}.$

Vậy  $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \left( \frac{1}{23} x^4 + \frac{53}{23} \right) dx = \left( \frac{1}{115} x^5 + \frac{53}{23} x \right) \Big|_0^2 = \frac{562}{115}.$

**Câu 47:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0;1]$  thỏa mãn  $f(1) = 4, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 5$  và

$\int_0^1 x \cdot f(x) dx = -\frac{1}{2}.$  Tích phân  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng

**A.**  $\frac{15}{19}$

**B.**  $\frac{17}{4}$

**C.**  $\frac{17}{18}$

**D.**  $\frac{15}{4}$

**Lời giải**

Tính:  $I = \int_0^1 x \cdot f(x) dx.$  Đặt:  $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{1}{2} x^2 \end{cases}$

$$\text{Ta có: } I = \frac{1}{2} x^2 \cdot f(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 f'(x) dx = 2 - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 f'(x) dx, .$$

$$\text{Mà: } \int_0^1 x \cdot f(x) dx = -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 f'(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 x^2 f'(x) dx = 5, \Leftrightarrow \int_0^1 x^2 f'(x) dx = \int_0^1 [f'(x)]^2 dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 (x^2 f'(x) - [f'(x)]^2) dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f'(x) \cdot [x^2 - f'(x)] dx = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3} x^3 + C .$$

$$\text{Với } f(1) = 4 \Rightarrow C = \frac{11}{3} .$$

$$\text{Khi đó: } f(x) = \frac{1}{3} x^3 + \frac{11}{3} .$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left( \frac{1}{3} x^3 + \frac{11}{3} \right) dx = \left( \frac{1}{12} x^4 + \frac{11}{3} x \right) \Big|_0^1 = \frac{15}{4} .$$

**Câu 48:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0; 2]$  thỏa mãn  $f(2) = 6$ ,  $\int_0^2 [f'(x)]^2 dx = 7$

$$\text{và } \int_0^2 x \cdot f(x) dx = \frac{17}{2} . \text{ Tích phân } \int_0^2 f(x) dx \text{ bằng}$$

**A.** 8

**B.** 6

**C.** 7

**D.** 5

**Lời giải**

$$\text{Tính: } I = \int_0^2 x \cdot f(x) dx .$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{1}{2} x^2 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } I = \frac{1}{2} x^2 \cdot f(x) \Big|_0^2 - \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 f'(x) dx = 12 - \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 f'(x) dx, .$$

$$\text{Theo giả thiết: } \int_0^2 x \cdot f(x) dx = \frac{17}{2} \Rightarrow \frac{17}{2} = 12 - \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 f'(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 x^2 f'(x) dx = 7$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 x^2 f'(x) dx = \int_0^2 [f'(x)]^2 dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 \left( x^2 f'(x) - [f'(x)]^2 \right) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 f'(x) \cdot [x^2 - f'(x)] dx = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x^3 + C.$$

$$\text{Với } f(2) = 6 \Rightarrow C = \frac{10}{3}.$$

$$\text{Khi đó: } f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{10}{3}.$$

$$\text{Vậy } \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \left( \frac{1}{3}x^3 + \frac{10}{3} \right) dx = \left( \frac{1}{12}x^4 + \frac{10}{3}x \right) \Big|_0^2 = 8.$$

**Câu 49:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0;3]$  thỏa mãn  $f(3) = 6$ ,  $\int_0^3 [f'(x)]^2 dx = 2$

và  $\int_0^3 x^2 \cdot f(x) dx = \frac{154}{3}$ . Tích phân  $\int_0^3 f(x) dx$  bằng

**A.**  $\frac{53}{5}$

**B.**  $\frac{117}{20}$

**C.**  $\frac{153}{5}$

**D.**  $\frac{13}{5}$

**Lời giải**

$$\text{Tính } I = \int_0^3 x^2 \cdot f(x) dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{1}{3}x^3 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } I = \frac{1}{3}x^3 \cdot f(x) \Big|_0^3 - \frac{1}{3} \int_0^3 x^3 f'(x) dx = 54 - \frac{1}{3} \int_0^3 x^3 f'(x) dx.$$

$$\text{Theo giả thiết: } \int_0^3 x^2 \cdot f(x) dx = \frac{154}{3} \Rightarrow \frac{154}{3} = 54 - \frac{1}{3} \int_0^3 x^3 f'(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^3 x^3 f'(x) dx = 8 \Leftrightarrow \int_0^3 x^3 f'(x) dx = 4 \int_0^3 [f'(x)]^2 dx \Leftrightarrow \int_0^3 \left( x^3 f'(x) - 4[f'(x)]^2 \right) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^3 f'(x) [x^3 - 4f'(x)] dx = 0.$$

$$\Rightarrow x^3 - 4f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{x^3}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{x^4}{16} + C.$$

$$\text{Với } f(3)=6 \Rightarrow C=\frac{15}{16}.$$

$$\text{Khi đó: } f(x)=\frac{x^4}{16}+\frac{15}{16}.$$

$$\text{Vậy } \int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 \left(\frac{1}{16}x^4 + \frac{15}{16}\right)dx = \left(\frac{1}{80}x^5 + \frac{15}{16}x\right)\Big|_0^3 = \frac{117}{20}.$$

**Câu 50:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0;1]$  thỏa mãn  $f(1)=2$ ,  $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 8$  và

$$\int_0^1 x^3 \cdot f(x)dx = 10. \text{ Tích phân } \int_0^1 f(x)dx \text{ bằng}$$

**A.**  $-\frac{2}{285}$

**B.**  $\frac{194}{95}$

**C.**  $\frac{116}{57}$

**D.**  $\frac{584}{285}$

**Lời giải**

$$\text{Tính: } I = \int_0^1 x^3 \cdot f(x)dx.$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^3 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{1}{4}x^4 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } I = \frac{1}{4}x^4 \cdot f(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 x^4 f'(x)dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\int_0^1 x^4 f'(x)dx,.$$

$$\text{Theo giả thiết: } \int_0^1 x^3 \cdot f(x)dx = 10 \Rightarrow \int_0^1 x^4 f'(x)dx = -38$$

$$\Leftrightarrow 8 \cdot \int_0^1 x^4 f'(x)dx = -38 \cdot 8 \Leftrightarrow 8 \cdot \int_0^1 x^4 f'(x)dx = -38 \cdot \int_0^1 [f'(x)]^2 dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 (8x^4 f'(x) + 38[f'(x)]^2)dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f'(x) \cdot [8x^4 + 38f'(x)]dx = 0$$

$$\Rightarrow 8x^4 + 38f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{4}{19}x^4 \Rightarrow f(x) = -\frac{4}{95}x^5 + C.$$

$$\text{Với } f(1)=2 \Rightarrow C=\frac{194}{95}.$$

$$\text{Khi đó: } f(x) = -\frac{4}{95}x^5 + \frac{194}{95}.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(-\frac{4}{95}x^5 + \frac{194}{95}\right)dx = \left(-\frac{2}{285}x^6 + \frac{194}{95}x\right)\Big|_0^1 = \frac{116}{57}.$$

**Câu 51:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0;1]$  thỏa mãn  $f(1)=0$  và

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \int_0^1 (x+1)e^x f(x) dx = \frac{e^2-1}{4}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^1 f(x) dx.$$

- A.**  $I = 2 - e$ .                      **B.**  $I = e - 2$ .                      **C.**  $I = \frac{e}{2}$ .                      **D.**  $I = \frac{e-1}{2}$ .

**Lời giải**

Xét  $A = \int_0^1 (x+1)e^x f(x) dx$

Đặt  $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = (x+1)e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = xe^x \end{cases}$

Suy ra  $A = xe^x f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 xe^x f'(x) dx = - \int_0^1 xe^x f'(x) dx \Rightarrow \int_0^1 xe^x f'(x) dx = \frac{1-e^2}{4}$

Xét  $\int_0^1 x^2 e^{2x} dx = e^{2x} \left( \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{e^2-1}{4}$

Ta có :  $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx + 2 \int_0^1 xe^x f'(x) dx + \int_0^1 x^2 e^{2x} dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f'(x) + xe^x)^2 dx = 0$

Suy ra  $f'(x) + xe^x = 0, \forall x \in [0;1]$

$\Rightarrow f'(x) = -xe^x \Rightarrow f(x) = (1-x)e^x + C$

Do  $f(1) = 0$  nên  $f(x) = (1-x)e^x$

Vậy  $I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (1-x)e^x dx = (2-x)e^x \Big|_0^1 = e - 2$ .

**Câu 52:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$  và  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ . Biết  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x) dx = \frac{\pi}{8}$

,  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) \sin 2x dx = -\frac{\pi}{4}$ . Tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} f(2x) dx$

- A.**  $I = 1$ .                      **B.**  $I = \frac{1}{2}$ .                      **C.**  $I = 2$ .                      **D.**  $I = \frac{1}{4}$ .

**Lời giải**

Tính  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) \sin 2x dx = -\frac{\pi}{4}$ . Đặt  $\begin{cases} \sin 2x = u \\ f'(x) dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cos 2x dx = du \\ f(x) = v \end{cases}$ , khi đó

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) \sin 2x dx = \sin 2x \cdot f(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \cos 2x dx$$

$$= \sin \frac{\pi}{2} \cdot f\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin 0 \cdot f(0) - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \cos 2x dx = -2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \cos 2x dx.$$

Theo đề bài ta có  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) \sin 2x dx = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \cos 2x dx = \frac{\pi}{8}.$

Mặt khác ta lại có  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x dx = \frac{\pi}{8}.$

Do  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} [f(x) - \cos 2x]^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [f^2(x) - 2f(x) \cdot \cos 2x + \cos^2 2x] dx = \left(\frac{\pi}{8} - 2 \cdot \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8}\right) = 0$  nên  $f(x) = \cos 2x.$

Ta có  $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos 4x dx = \frac{1}{4} \sin 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{4}.$

**Câu 53:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0;1]$  và  $f(0) + f(1) = 0$ . Biết

$$\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{1}{2}, \int_0^1 f'(x) \cos(\pi x) dx = \frac{\pi}{2}. \text{ Tính } \int_0^1 f(x) dx.$$

**A.**  $\pi.$

**B.**  $\frac{1}{\pi}.$

**C.**  $\frac{2}{\pi}.$

**D.**  $\frac{3\pi}{2}.$

**Lời giải**

Đặt  $\begin{cases} u = \cos(\pi x) \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = -\pi \sin(\pi x) dx \\ v = f(x) \end{cases}.$  Khi đó:

$$\int_0^1 f'(x) \cos(\pi x) dx = \cos(\pi x) f(x) \Big|_0^1 + \pi \int_0^1 f(x) \sin(\pi x) dx$$

$$= -(f(1) + f(0)) + \pi \int_0^1 f(x) \sin(\pi x) dx = \pi \int_0^1 f(x) \sin(\pi x) dx \Rightarrow \int_0^1 f(x) \sin(\pi x) dx = \frac{1}{2}.$$

**Cách 1:** Ta có  $\int_0^1 [f(x) - k \sin(\pi x)]^2 dx = \int_0^1 f^2(x) dx - 2k \int_0^1 f(x) \sin(\pi x) dx + k^2 \int_0^1 \sin^2(\pi x) dx$

$$= \frac{1}{2} - k + \frac{k^2}{2} = 0 \Leftrightarrow k = 1.$$

Do đó  $\int_0^1 [f(x) - \sin(\pi x)]^2 dx = 0 \Rightarrow f(x) = \sin(\pi x).$  Vậy  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \sin(\pi x) dx = \frac{2}{\pi}.$

**Cách 2:** Sử dụng BĐT Holder.

$$\left[ \int_a^b f(x)g(x)dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx.$$

Dấu “=” xảy ra  $\Leftrightarrow f(x) = kg(x), \forall x \in [a; b]$ .

$$\text{Áp dụng vào bài ta có } \frac{1}{4} = \left[ \int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx \right]^2 \leq \int_0^1 f^2(x)dx \cdot \int_0^1 \sin^2(\pi x)dx = \frac{1}{4},$$

suy ra  $f(x) = k \sin(\pi x)$ .

$$\text{Mà } \int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k \int_0^1 \sin^2(\pi x)dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = 1 \Rightarrow f(x) = \sin(\pi x).$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sin(\pi x)dx = \frac{2}{\pi}.$$

**Câu 54:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0;1]$  thỏa mãn  $f(1) = 1$ ,  $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 9$  và

$$\int_0^1 x^3 f(x)dx = \frac{1}{2}. \text{ Tích phân } \int_0^1 f(x)dx \text{ bằng:}$$

**A.**  $\frac{2}{3}$ .

**B.**  $\frac{5}{2}$ .

**C.**  $\frac{7}{4}$ .

**D.**  $\frac{6}{5}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 9 \quad (1)$$

$$\text{- Tính } \int_0^1 x^3 f(x)dx = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^3 \cdot dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \frac{x^4}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \int_0^1 x^3 f(x)dx = \left( \frac{x^4}{4} \cdot f(x) \right) \Big|_0^1 - \frac{1}{4} \int_0^1 x^4 \cdot f'(x)dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \int_0^1 x^4 \cdot f'(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^4 \cdot f'(x)dx = -1 \Rightarrow 18 \int_0^1 x^4 \cdot f'(x)dx = -18 \quad (2)$$

$$\text{- Lại có: } \int_0^1 x^8 dx = \frac{x^9}{9} \Big|_0^1 = \frac{1}{9} \Rightarrow 81 \int_0^1 x^8 dx = 9 \quad (3)$$

- Cộng vế với vế các đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:

$$\int_0^1 \left[ \left[ f'(x) \right]^2 + 18x^4 \cdot f'(x) + 81x^8 \right] dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[ f'(x) + 9x^4 \right] dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \pi \cdot \int_0^1 \left[ f'(x) + 9x^4 \right] dx = 0$$

Hay thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f'(x) + 9x^4$ , trục hoành  $Ox$ , các đường thẳng  $x = 0$ ,  $x = 1$  khi quay quanh  $Ox$  bằng 0

$$\Rightarrow f'(x) + 9x^4 = 0 \Rightarrow f'(x) = -9x^4 \Rightarrow f(x) = \int f'(x) \cdot dx = -\frac{9}{5}x^5 + C.$$

$$\text{Lại do } f(1) = 1 \Rightarrow C = \frac{14}{5} \Rightarrow f(x) = -\frac{9}{5}x^5 + \frac{14}{5}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left( -\frac{9}{5}x^5 + \frac{14}{5} \right) dx = \left( -\frac{3}{10}x^6 + \frac{14}{5}x \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{2}.$$

**Câu 55:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[1; 2]$  thỏa mãn  $\int_1^2 (x-1)^2 f(x) dx = -\frac{1}{3}$ ,

$$f(2) = 0 \text{ và } \int_1^2 \left[ f'(x) \right]^2 dx = 7. \text{ Tính tích phân } I = \int_1^2 f(x) dx.$$

**A.**  $I = \frac{7}{5}.$

**B.**  $I = -\frac{7}{5}.$

**C.**  $I = -\frac{7}{20}.$

**D.**  $I = \frac{7}{20}.$

**Lời giải**

$$\text{Đặt } u = f(x) \Rightarrow du = f'(x) dx, dv = (x-1)^2 dx \Rightarrow v = \frac{(x-1)^3}{3}$$

$$\text{Ta có } -\frac{1}{3} = \int_1^2 (x-1)^2 f(x) dx = \frac{(x-1)^3}{3} \cdot f(x) \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{(x-1)^3}{3} f'(x) dx$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \int_1^2 (x-1)^3 f'(x) dx \Leftrightarrow \int_1^2 (x-1)^3 f'(x) dx = 1 \Rightarrow -\int_1^2 2.7(x-1)^3 f'(x) dx = -14$$

$$\text{Tính được } \int_1^2 49(x-1)^6 dx = 7 \Rightarrow \int_1^2 \left[ f'(x) \right]^2 dx - \int_1^2 2.7(x-1)^3 f'(x) dx + \int_1^2 49(x-1)^6 dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \left[ 7(x-1)^3 - f'(x) \right]^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = 7(x-1)^3 \Rightarrow f(x) = \frac{7(x-1)^4}{4} + C.$$

$$\text{Do } f(2) = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{7(x-1)^4}{4} - \frac{7}{4}.$$

$$\text{Vậy } I = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left[ \frac{7(x-1)^4}{4} - \frac{7}{4} \right] dx = -\frac{7}{5}.$$

**Câu 56:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0;1]$  thỏa mãn:  $f(1)=0, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$  và

$$\int_0^1 x^2 \cdot f(x) dx = \frac{1}{3}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^1 f(x) dx.$$

**A.**  $I=1$ .

**B.**  $I=\frac{7}{5}$ .

**C.**  $I=4$ .

**D.**  $I=\frac{7}{4}$ .

**Lời giải**

Xét tích phân  $\int_0^1 x^2 \cdot f(x) dx$ .

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$$

$$\frac{1}{3} = \int_0^1 x^2 \cdot f(x) dx = \frac{x^3}{3} f(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 x^3 f'(x) dx = -\frac{1}{3} \int_0^1 x^3 f'(x) dx \Rightarrow \int_0^1 x^3 f'(x) dx = -1$$

$$\int_0^1 x^6 dx = \frac{1}{7}.$$

$$\text{Ta có: } \int_0^1 [f'(x)]^2 dx + 14 \int_0^1 x^3 f'(x) dx + 49 \int_0^1 x^6 dx = 0 \Rightarrow \int_0^1 (f'(x) + 7x^3)^2 dx = 0$$

$$\text{Mà } \int_0^1 (f'(x) + 7x^3)^2 dx \geq 0. \text{ Dấu “=” xảy ra khi } f'(x) + 7x^3 = 0 \Rightarrow f'(x) = -7x^3$$

$$\Rightarrow f(x) = \int f'(x) dx = -\int 7x^3 dx = -\frac{7x^4}{4} + C.$$

$$f(1)=0 \Rightarrow C = \frac{7}{4} \Rightarrow f(x) = -\frac{7x^4}{4} + \frac{7}{4}.$$

$$I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left( -\frac{7x^4}{4} + \frac{7}{4} \right) dx = -\frac{7x^5}{20} \Big|_0^1 + \frac{7x}{4} \Big|_0^1 = -\frac{7}{20} + \frac{7}{4} = \frac{7}{5}.$$

**Câu 57:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;1]$  thỏa mãn  $f(1)=3, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{4}{11}$  và

$$\int_0^1 x^4 f(x) dx = \frac{7}{11}. \text{ Giá trị của } \int_0^1 f(x) dx \text{ là}$$

**A.**  $\frac{35}{11}$ .

**B.**  $\frac{65}{21}$ .

**C.**  $\frac{23}{7}$ .

**D.**  $\frac{9}{4}$ .

**Lời giải**

$$\text{Xét } \int_0^1 x^4 f(x) dx = \frac{7}{11}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^4 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{x^5}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^4 f(x) dx = \frac{1}{5} x^5 f(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{5} \int_0^1 x^5 f'(x) dx = \frac{3}{5} - \frac{1}{5} \int_0^1 x^5 f'(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^5 f'(x) dx = 5 \left( \frac{3}{5} - \frac{7}{11} \right) = -\frac{2}{11}.$$

$$\text{Xét } \begin{cases} \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{4}{11} \\ \int_0^1 x^5 f'(x) dx = -\frac{2}{11} \Rightarrow \int_0^1 [f'(x)]^2 dx + 4 \int_0^1 x^5 f'(x) dx + 4 \int_0^1 x^{10} dx = 0 \\ \int_0^1 x^{10} dx = \frac{1}{11} x^{11} \Big|_0^1 = \frac{1}{11} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 [(f'(x) + 2x^5)]^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = -2x^5 \Rightarrow f(x) = \frac{-x^6}{6} + C. \text{ Do } f(1) = 3 \Rightarrow C = \frac{19}{6} \text{ nên}$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left( \frac{-x^6}{6} + \frac{19}{6} \right) dx = \frac{23}{6}$$

**Câu 58:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;1]$  thỏa mãn  $f(0)=1$ ;  $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{30}$  và

$$\int_0^1 (2x-1) f(x) dx = -\frac{1}{30}. \text{ Tích phân } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

**A.**  $\frac{11}{30}.$

**B.**  $\frac{11}{12}.$

**C.**  $\frac{11}{4}.$

**D.**  $\frac{1}{30}.$

**Lời giải**

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = (2x-1) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = x^2 - x \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } \int_0^1 (2x-1) f(x) dx = (x^2-x) f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 (x^2-x) f'(x) dx = -\int_0^1 (x^2-x) f'(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (x^2-x) f'(x) dx = \frac{1}{30}$$

$$\text{Ta có: } \int_0^1 (x^2-x)^2 dx = \int_0^1 (x^4 - 2x^3 + x^2) dx = \left( \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{30}.$$

$$\text{Do đó, } \int_0^1 [f'(x)]^2 dx - 2 \int_0^1 (x^2-x) f'(x) dx + \int_0^1 (x^2-x)^2 dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 [f'(x) - (x^2-x)]^2 dx = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = x^2 - x \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C.$$

$$\text{Vì } f(0)=1 \text{ nên } C=1 \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 1.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 1 \right) dx = \left( \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} + x \right) \Big|_0^1 = \frac{11}{12}.$$

**Câu 59:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$  và  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ . Biết  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x) dx = \frac{\pi}{8}$

$$\text{, } \int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) \sin 2x dx = -\frac{\pi}{4}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} f(2x) dx.$$

**A.**  $I = 1$ .

**B.**  $I = \frac{1}{2}$ .

**C.**  $I = 2$ .

**D.**  $I = \frac{1}{4}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) \sin 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x df(x) = \left[ f(x) \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) d \sin 2x$$

$$= f\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) - f(0) \sin(2 \cdot 0) - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \cos 2x dx$$

$$= f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \cos 2x dx = -2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \cos 2x dx.$$

$$\text{Do đó } 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \cos 2x dx = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Mặt khác: } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 4x) dx = \left( \frac{1}{2} x + \frac{1}{8} \sin 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}.$$

Bởi vậy:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x) dx - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \cos 2x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x dx = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} [f^2(x) - 2f(x) \cos 2x + \cos^2 2x] dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} [f(x) - \cos 2x]^2 dx = 0 \Rightarrow f(x) = \cos 2x.$$

Nên:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} f(2x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos 4x dx = \frac{1}{4} \sin 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{4}.$$

**Câu 60:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục, có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ ,  $f(2) = 16$  và  $\int_0^2 f(x) dx = 4$ . Tích phân

$$\int_0^4 x f'\left(\frac{x}{2}\right) dx \text{ bằng}$$

**A.** 112.

**B.** 12.

**C.** 56.

**D.** 144.

Lời giải

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2t \Rightarrow dx = 2dt.$$

$$\text{Đổi cận: } \begin{cases} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=4 \Rightarrow t=2 \end{cases}. \text{ Do đó } \int_0^4 xf'\left(\frac{x}{2}\right)dx = \int_0^2 4tf'(t)dt = \int_0^2 4xf'(x)dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u=4x \\ dv=f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=4dx \\ v=f(x) \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } \int_0^2 4xf'(x)dx = [4xf(x)]_0^2 - \int_0^2 4f(x)dx = 8f(2) - 4 \int_0^2 f(x)dx = 8.16 - 4.4 = 112.$$

**Câu 61:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $f(2) = 16, \int_0^2 f(x)dx = 4$ . Tính  $I = \int_0^1 x.f'(2x)dx$ .

**A.** 7.

**B.** 12.

**C.** 20.

**D.** 13.

Lời giải

$$\text{Đặt } t = 2x \Rightarrow dt = 2dx. \text{ Với } x=0 \Rightarrow t=0; \text{ Với } x=1 \Rightarrow t=2.$$

$$\text{Suy ra: } I = \int_0^2 \frac{t}{2} f'(t) \frac{dt}{2} = \frac{1}{4} \int_0^2 tf'(t)dt = \frac{1}{4} \int_0^2 xf'(x)dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u=x \\ dv=f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=f(x) \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } I = \frac{1}{4} \left[ xf(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 f(x)dx \right] = \frac{1}{4} [2f(2) - 0f(0) - 4] = \frac{1}{4} (2.16 - 4) = 7.$$

**DẠNG 1.3 BIẾN ĐỔI**

**Dạng 1.** Bài toán tích phân liên quan đến đẳng thức  $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x)$

**Phương pháp:**

$$\text{Dễ dàng thấy rằng } u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = [u(x)f(x)]'$$

$$\text{Do đó } u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x) \Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = h(x)$$

$$\text{Suy ra } u(x)f(x) = \int h(x)dx$$

Từ đây ta dễ dàng tính được  $f(x)$

**Dạng 2.** Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức  $f'(x) + f(x) = h(x)$

**Phương pháp:**

$$\text{Nhân hai vế với } e^x \text{ ta được } e^x \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) = e^x \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^x \cdot f(x)]' = e^x \cdot h(x)$$

Suy ra  $e^x \cdot f'(x) = \int e^x \cdot h(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được  $f(x)$

**Dạng 3.** Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức  $f'(x) - f(x) = h(x)$

**Phương pháp:**

Nhân hai vế với  $e^{-x}$  ta được  $e^{-x} \cdot f'(x) - e^{-x} \cdot f(x) = e^{-x} \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^{-x} \cdot f(x)]' = e^{-x} \cdot h(x)$

Suy ra  $e^{-x} \cdot f(x) = \int e^{-x} \cdot h(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được  $f(x)$

**Dạng 4.** Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức  $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = h(x)$

**Phương pháp:**

Nhân hai vế với  $e^{\int p(x) dx}$  ta được

$$f'(x) \cdot e^{\int p(x) dx} + p(x) \cdot e^{\int p(x) dx} \cdot f(x) = h(x) \cdot e^{\int p(x) dx} \Leftrightarrow \left[ f(x) \cdot e^{\int p(x) dx} \right]' = h(x) \cdot e^{\int p(x) dx}$$

Suy ra  $f(x) \cdot e^{\int p(x) dx} = \int e^{\int p(x) dx} h(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được  $f(x)$

**Dạng 5.** Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức  $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = 0$

**Phương pháp:**

Chia hai vế với  $f(x)$  ta được  $\frac{f'(x)}{f(x)} + p(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -p(x)$

Suy ra  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = -\int p(x) dx \Leftrightarrow \ln |f(x)| = -\int p(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được  $f(x)$

**Dạng 6.** Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức  $f'(x) + p(x) \cdot [f(x)]^n = 0$

**Phương pháp:**

Chia hai vế với  $[f(x)]^n$  ta được  $\frac{f'(x)}{[f(x)]^n} + p(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} = -p(x)$

Suy ra  $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} dx = -\int p(x) dx \Leftrightarrow \frac{[f(x)]^{-n+1}}{-n+1} = -\int p(x) dx$

**Câu 62:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $[0;1]$  thỏa mãn  $f(1-x) = 6x^2 f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}}$ . Khi đó  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng

**A.** 4.                                      **B.** -1.                                      **C.** 2.                                      **D.** 6.

## Lời giải

**Chọn A**

$$\text{Ta có } f(1-x) = 6x^2 f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow f(1-x) - 6x^2 f(x^3) = -\frac{6}{\sqrt{3x+1}}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(1-x) dx - \int_0^1 6x^2 f(x^3) dx = - \int_0^1 \frac{6}{\sqrt{3x+1}} dx \quad (*) .$$

$$\text{Ta có } \int_0^1 f(1-x) \mathrm{d}x = - \int_0^1 f(1-x) \mathrm{d}(1-x) \stackrel{u=1-x}{=} - \int_1^0 f(u) \mathrm{d}u = \int_0^1 f(x) \mathrm{d}x.$$

$$\text{Và } \int_0^1 6x^2 f(x^3) dx = 2 \int_0^1 f(x^3) d(x^3) \stackrel{u=x^3}{=} 2 \int_0^1 f(u) du = 2 \int_0^1 f(x) dx.$$

$$\text{Ta có } (*) \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx - 2 \int_0^1 f(x) dx = -6 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = 6 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx = 4.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = 4.$$

**Câu 63:** Cho hàm số  $f(x)$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  thỏa mãn  $x^2 f^2(x) + (2x-1)f(x) = xf'(x) - 1$ , với mọi  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  đồng thời thỏa  $f(1) = -2$ . Tính  $\int_1^2 f(x) dx$

**A.**  $-\frac{\ln 2}{2}-1$ .      **B.**  $-\ln 2-\frac{1}{2}$ .      **C.**  $-\ln 2-\frac{3}{2}$ .      **D.**  $-\frac{\ln 2}{2}-\frac{3}{2}$ .

## Lời giải

**Chọn D**

Ta có  $x^2 f^2(x) + 2xf(x) + 1 = xf'(x) + f(x) \Leftrightarrow (xf(x) + 1)^2 = (xf'(x) + 1)^2$

$$\text{Do đó } \frac{(xf(x)+1)'}{(xf(x)+1)^2} = 1 \Rightarrow \int \frac{(xf(x)+1)'}{(xf(x)+1)^2} dx = \int 1 dx \Rightarrow -\frac{1}{xf(x)+1} = x + c$$

$$\Rightarrow xf(x) + 1 = -\frac{1}{x+c}$$

Mặt khác  $f(1) = -2$  nên  $-2 + 1 = -\frac{1}{1+c} \Rightarrow c = 0 \Rightarrow xf(x) + 1 = -\frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$

$$\text{Vậy } \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \left( -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) dx = \left( \ln x + \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = \ln 2 + \frac{1}{2}.$$

**Câu 64:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn

$$f(x) + (x^2 - 1)f\left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}\right) = x^5 - 4x^3 - 5x^2 + 7x + 6, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tích phân } \int_1^2 f(x) dx \text{ bằng}$$

- A.  $\frac{1}{7}$ .                      B.  $\frac{1}{3}$ .                      C. 7.                      D.  $-\frac{19}{3}$ .

**Lời giải**

$$\text{Mặt khác : } (*) \Rightarrow \int_1^2 f(x) dx + \int_1^2 (x^2 - 1)f\left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}\right) dx = \int_1^2 (x^5 - 4x^3 - 5x^2 + 7x + 6) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx + \frac{4}{3} \int_1^2 f\left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}\right) d\left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \int_1^2 f(x) dx + \frac{4}{3} \int_1^2 f(x) dx = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx = \frac{1}{7}.$$

**Câu 65:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0;1]$  thỏa mãn  $f(1)=1$  và

$$(f'(x))^2 + 4(6x^2 - 1).f(x) = 40x^6 - 44x^4 + 32x^2 - 4, \forall x \in [0;1]. \text{ Tích phân } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng?}$$

- A.  $\frac{23}{15}$ .                      B.  $\frac{13}{15}$ .                      C.  $-\frac{17}{15}$ .                      D.  $-\frac{7}{15}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$(f'(x))^2 + 4(6x^2 - 1).f(x) = 40x^6 - 44x^4 + 32x^2 - 4$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (f'(x))^2 dx + \int_0^1 4(6x^2 - 1).f(x) dx = \int_0^1 (40x^6 - 44x^4 + 32x^2 - 4) dx. \quad (1)$$

$$\text{Xét } I = \int_0^1 4(6x^2 - 1).f(x) dx = \int_0^1 (24x^2 - 4).f(x) dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = (24x^2 - 4) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = 8x^3 - 4x \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I = (8x^3 - 4x).f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 (8x^3 - 4x).f'(x) dx = 4 - 2 \int_0^1 (4x^3 - 2x).f'(x) dx.$$

Do đó:

$$(1) \Rightarrow \int_0^1 (f'(x))^2 dx - 2 \int_0^1 (4x^3 - 2x).f'(x) dx + \int_0^1 (4x^3 - 2x)^2 dx = \int_0^1 (56x^6 - 60x^4 + 36x^2 - 8) dx.$$

$$\Rightarrow \int_0^1 [f'(x) - (4x^3 - 2x)]^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 2x \Rightarrow f(x) = x^4 - x^2 + c.$$

$$\text{Mà } f(1)=1 \Rightarrow c=1 \Rightarrow f(x)=x^4-x^2+1.$$

$$\text{Do đó } \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x^4 - x^2 + 1)dx = \frac{13}{15}.$$

**Câu 66:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn  $f(0)=3$  và

$$f(x)+f(2-x)=x^2-2x+2, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tích phân } \int_0^2 xf'(x)dx \text{ bằng}$$

**A.**  $-\frac{4}{3}.$

**B.**  $\frac{2}{3}.$

**C.**  $\frac{5}{3}.$

**D.**  $-\frac{10}{3}$

**Lời giải**

**Chọn D**

**Cách 1.**

$$\text{Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có: } \int_0^2 xf'(x)dx = xf(x)|_0^2 - \int_0^2 f(x)dx.$$

$$\text{Từ } f(x)+f(2-x)=x^2-2x+2, \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$\text{Thay } x=0 \text{ vào (1) ta được } f(0)+f(2)=2 \Rightarrow f(2)=2-f(0)=2-3=-1.$$

$$\text{Xét } I = \int_0^2 f(x)dx$$

$$\text{Đặt } x=2-t \Rightarrow dx=-dt, \text{ đổi cận: } \begin{cases} x=0 \Rightarrow t=2 \\ x=2 \Rightarrow t=0 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = -\int_2^0 f(2-t)dt = \int_0^2 f(2-t)dt \Rightarrow I = \int_0^2 f(2-x)dx$$

$$\text{Do đó ta có } \int_0^2 (f(x)+f(2-x))dx = \int_0^2 (x^2-2x+2)dx \Leftrightarrow 2\int_0^2 f(x)dx = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Vậy } \int_0^2 xf'(x)dx = xf(x)|_0^2 - \int_0^2 f(x)dx = 2.(-1) - \frac{4}{3} = -\frac{10}{3}.$$

**Cách 2.**

$$\text{Từ } \begin{cases} f(x)+f(2-x)=x^2-2x+2 \quad (1) \\ f(0)=3 \end{cases}$$

$$\text{Thay } x=0; x=1 \text{ vào (1) ta được } f(2)=-1; f(1)=\frac{1}{2}.$$

$$\text{Xét hàm số } f(x)=ax^2+bx+c \text{ từ giả thiết trên ta có } \begin{cases} c=3 \\ a+b+c=\frac{1}{2} \\ 4a+2b+c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=3 \\ a=\frac{1}{2} \\ b=-3 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+3 \Rightarrow f'(x)=x-3 \text{ suy ra } \int_0^2 xf'(x)dx = \int_0^2 x(x-3)dx = -\frac{10}{3}.$$

**Câu 67:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[2; 4]$  và  $f'(x) > 0, \forall x \in [2; 4]$ . Biết

$$4x^3 f(x) = [f'(x)]^3 - x^3, \forall x \in [2; 4], f(2) = \frac{7}{4}. \text{ Giá trị của } f(4) \text{ bằng}$$

- A.  $\frac{40\sqrt{5}-1}{2}$ .      B.  $\frac{20\sqrt{5}-1}{4}$ .      C.  $\frac{20\sqrt{5}-1}{2}$ .      D.  $\frac{40\sqrt{5}-1}{4}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có:  $f'(x) > 0, \forall x \in [2; 4]$  nên hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên  $[2; 4] \Rightarrow f(x) \geq f(2)$  mà  $f(2) = \frac{7}{4}$ . Do đó:  $f(x) > 0, \forall x \in [2; 4]$ .

$$\text{Từ giả thiết ta có: } 4x^3 f(x) = [f'(x)]^3 - x^3 \Leftrightarrow x^3 [4f(x) + 1] = [f'(x)]^3$$

$$\Leftrightarrow x \sqrt[3]{4f(x)+1} = f'(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{4f(x)+1}} = x.$$

$$\text{Suy ra: } \int \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{4f(x)+1}} dx = \int x dx \Leftrightarrow \frac{1}{4} \int \frac{d[4f(x)+1]}{\sqrt[3]{4f(x)+1}} = \frac{x^2}{2} + C \Leftrightarrow \frac{3}{8} \sqrt[3]{[4f(x)+1]^2} = \frac{x^2}{2} + C.$$

$$f(2) = \frac{7}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{2} = 2 + C \Leftrightarrow C = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy: } f(x) = \frac{\sqrt{\left[\frac{4}{3}(x^2-1)\right]^3} - 1}{4} \Rightarrow f(4) = \frac{40\sqrt{5}-1}{4}.$$

**Câu 68:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0; 2]$  và thỏa  $f(1) = 0$ ,

$$(f'(x))^2 + 4f(x) = 8x^2 - 32x + 28 \text{ với mọi } x \text{ thuộc } [0; 2]. \text{ Giá trị của } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

- A.  $-\frac{5}{3}$ .      B.  $\frac{4}{3}$ .      C.  $-\frac{2}{3}$ .      D.  $-\frac{14}{3}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Đặt } I = \int_1^2 2f(x) dx.$$

$$\text{Dùng tích phân từng phần, ta có: } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = 2dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = 2x - 4 \end{cases}.$$

$$I = (2x-4)f(x) \Big|_1^2 - \int_1^2 (2x-4)f'(x) dx = - \int_1^2 (2x-4)f'(x) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } (f'(x))^2 + 4f(x) &= 8x^2 - 32x + 28 \Rightarrow \int_1^2 (f'(x))^2 dx + 2 \int_1^2 2f(x) dx = \int_1^2 (8x^2 - 32x + 28) dx \\ &\Leftrightarrow \int_1^2 (f'(x))^2 dx - 2 \int_1^2 (2x-4)f'(x) dx + \int_1^2 (2x-4)^2 dx = \int_1^2 (8x^2 - 32x + 28) dx + \int_1^2 (2x-4)^2 dx \\ &\Leftrightarrow \int_1^2 [f'(x) - (2x-4)]^2 dx = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2x-4 \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + C, C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\text{Mà } f(1) = 0 \Rightarrow C = 3 \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3) dx = \frac{4}{3}.$$

**Câu 69:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $[0;1]$  và  $f(x) + f(1-x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x+1}, \forall x \in [0;1]$ . Tính

$$\int_0^1 f(x) dx$$

**A.**  $\frac{3}{4} + 2 \ln 2$ .

**B.**  $3 + \ln 2$ .

**C.**  $\frac{3}{4} + \ln 2$ .

**D.**  $\frac{3}{2} + 2 \ln 2$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Theo giả thiết, ta có:  $f(x) + f(1-x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x+1}, \forall x \in [0;1]$  và  $f(x)$  liên tục trên  $[0;1]$  nên

$$\int_0^1 [f(x) + f(1-x)] dx = \int_0^1 \frac{x^2 + 2x + 3}{x+1} dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 f(1-x) dx = \int_0^1 \frac{(x+1)^2 + 2}{x+1} dx$$

Đặt  $1-x=t$  thì  $dx = -dt$ , với  $x=0 \Rightarrow t=1$ , với  $x=1 \Rightarrow t=0$

$$\text{Do đó: } \int_0^1 f(1-x) dx = -\int_1^0 f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 f(1-x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx.$$

$$\text{Lại có } \int_0^1 \frac{(x+1)^2 + 2}{x+1} dx = \int_0^1 \left( x+1 + \frac{2}{x+1} \right) dx = \left( \frac{x^2}{2} + x + 2 \ln|x+1| \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{2} + 2 \ln 2$$

$$\text{Từ, và suy ra } 2 \int_0^1 f(x) dx = \frac{3}{2} + 2 \ln 2 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{3}{4} + \ln 2.$$

**Câu 70:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $3f(x) + f(2-x) = 2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4$ . Tính tích

phân  $I = \int_0^2 f(x) dx$  ta được kết quả:

**A.**  $I = e + 4$ .

**B.**  $I = 8$ .

**C.**  $I = 2$ .

**D.**  $I = e + 2$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Theo giả thuyết ta có  $\int_0^2 [3f(x) + f(2-x)] dx = \int_0^2 [2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4] dx$  (\*).

Ta tính  $\int_0^2 f(2-x) dx = -\int_0^2 f(2-x) d(2-x) = \int_0^2 f(x) dx$ .

Vì vậy  $\int_0^2 [3f(x) + f(2-x)] dx = 4 \int_0^2 f(x) dx$ .

Hơn nữa  $\int_0^2 2(x-1)e^{x^2-2x+1} dx = \int_0^2 e^{x^2-2x+1} d(x^2-2x+1) = e^{x^2-2x+1} \Big|_0^2 = 0$  và  $\int_0^2 4 dx = 8$ .

Suy ra  $4 \int_0^2 f(x) dx = 8 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx = 2$ .

**Câu 71:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn  $f(x) + 2xf(x^2) = 2x^7 + 3x^3 - x - 1$  với  $x \in \mathbb{R}$ .

Tính tích phân  $\int_0^1 xf'(x) dx$ .

A.  $\frac{1}{4}$ .

B.  $\frac{5}{4}$ .

C.  $\frac{3}{4}$ .

D.  $-\frac{1}{2}$ .

Lời giải

**Chọn B**

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có:  $\int_0^1 xf'(x) dx = xf(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx$  (\*)

Từ  $f(x) + 2xf(x^2) = 2x^7 + 3x^3 - x - 1$  (1)

Thay  $x = 1$  vào (1) ta được  $f(1) + 2f(1) = 3 \Rightarrow f(1) = 1$  (2)

Mặt khác từ (1) ta có  $\int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 2xf(x^2) dx = \int_0^1 (2x^7 + 3x^3 - x - 1) dx$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 f(x^2) d(x^2) = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2 \int_0^1 f(x) dx = -\frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = -\frac{1}{4}$  (3)

Thay (2), (3) vào (\*) ta được  $\int_0^1 xf'(x) dx = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

**Câu 72:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn

$x^2 f(1-x) + 2f\left(\frac{2x-2}{x}\right) = \frac{-x^4 + x^3 + 4x - 4}{x}, \forall x \neq 0, x \neq 1$ . Khi đó  $\int_{-1}^1 f(x) dx$  có giá trị là

A. 0.

B. 1.

C.  $\frac{1}{2}$ .

D.  $\frac{3}{2}$ .

Lời giải

**Chọn A**

$$\text{Từ giả thiết suy ra } f(1-x) + \frac{2}{x^2} f\left(\frac{2x-2}{x}\right) = \frac{-x^4 + x^3 + 4x - 4}{x^3}$$

$$\text{Ta có: } \int_1^2 f(1-x) dx + \int_1^2 f\left(\frac{2x-2}{x}\right) \cdot \frac{2}{x^2} dx = \int_1^2 \frac{-x^4 + x^3 + 4x - 4}{x^3} dx$$

$$\Leftrightarrow -\int_1^2 f(1-x) d(1-x) + \int_1^2 f\left(\frac{2x-2}{x}\right) d\left(\frac{2x-2}{x}\right) = \int_1^2 \left(-x + 1 + \frac{4}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right) dx$$

$$\Leftrightarrow -\int_0^{-1} f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt = \left(-\frac{x^2}{2} + x - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}\right) \Big|_1^2$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^0 f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt = 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^1 f(t) dt = 0.$$

$$\text{Vậy } \int_{-1}^1 f(x) dx = 0.$$

### Cách trắc nghiệm

$$\text{Ta có: } x^2 f(1-x) + 2f\left(\frac{2x-2}{x}\right) = \frac{-x^4 + x^3 + 4x - 4}{x}, \forall x \neq 0, x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 f(1-x) + 2f\left(\frac{2x-2}{x}\right) = \frac{-x^4 + x^3}{x} + \frac{4x - 4}{x}, \forall x \neq 0, x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 f(1-x) + 2f\left(\frac{2x-2}{x}\right) = x^2(1-x) + 2\left(\frac{2x-2}{x}\right), \forall x \neq 0, x \neq 1$$

$$\text{Chọn } f(x) = x \Rightarrow \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 x dx = 0.$$

**Câu 73:** Cho hàm số  $y = f(x)$  thỏa mãn  $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = x^3 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$  và  $f(0) = f'(0) = 2$ .

Tính giá trị của  $T = f^2(2)$

**A.**  $\frac{160}{15}$

**B.**  $\frac{268}{15}$

**C.**  $\frac{4}{15}$

**D.**  $\frac{268}{30}$

**Lời giải**

### Chọn B

$$\text{Ta có: } [f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = x^3 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (f'(x) \cdot f(x))' = x^3 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$$

Lấy nguyên hàm hai vế ta có:

$$\int (f'(x) \cdot f(x))' dx = \int (x^3 - 2x) dx$$

$$\Leftrightarrow f'(x) \cdot f(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + C$$

Theo đề ra ta có:  $f'(0) \cdot f(0) = C = 4$

Suy ra:

$$\int_0^2 f'(x) \cdot f(x) \cdot dx = \int_0^2 \left( \frac{x^4}{4} - x^2 + 4 \right) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} \Big|_0^2 = \frac{104}{15} \Leftrightarrow f^2(2) = \frac{268}{15}.$$

**Câu 74:** Cho  $f(x)$  là hàm số liên tục trên tập xác định  $\mathbb{R}^+$  và thỏa mãn  $f(x^2 + 3x + 1) = x + 2$ . Tính

$$I = \int_1^5 f(x) dx$$

**A.**  $\frac{37}{6}$ .

**B.**  $\frac{527}{3}$ .

**C.**  $\frac{61}{6}$ .

**D.**  $\frac{464}{3}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$f(x^2 + 3x + 1) = x + 2$$

$$\Leftrightarrow (2x + 3)f(x^2 + 3x + 1) = (2x + 3)(x + 2)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 (2x + 3)f(x^2 + 3x + 1) dx = \int_0^1 (2x + 3)(x + 2) dx = \frac{61}{6}$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + 3x + 1 \Rightarrow dt = (2x + 3) dx$$

|     |   |   |
|-----|---|---|
| $x$ | 0 | 1 |
| $t$ | 1 | 5 |

$$\text{Suy ra } \int_1^5 f(t) dt = \frac{61}{6}.$$

**Câu 75:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục, có đạo hàm trên  $R$  thỏa mãn điều kiện

$$f(x) + x(f'(x) - 2 \sin x) = x^2 \cos x, x \in R \text{ và } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}. \text{ Tính } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f''(x) dx$$

**A.** 0.

**B.**  $\frac{\pi}{2}$ .

**C.** 1.

**D.**  $\pi$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Từ giả thiết  $f(x) + x(f'(x) - 2 \sin x) = x^2 \cos x$

$$\Leftrightarrow f(x) + xf'(x) = x^2 \cos x + 2x \sin x$$

$$\Leftrightarrow (xf(x))' = (x^2 \sin x)'$$

$$\Leftrightarrow xf(x) = x^2 \sin x + C$$

Mặt khác:  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = x \sin x$ .

$$\text{Ta có: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf''(x) dx = xf'(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) dx = x^2 \cos x + 2x \sin x - 2f(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= x^2 \cos x + 2x \sin x - 2x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= x^2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

**Câu 76:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0;1]$  thỏa mãn  $4x.f(x^2) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}$ . Tính

$$I = \int_0^1 f(x) dx.$$

**A.**  $\frac{\pi}{4}$ .

**B.**  $\frac{\pi}{16}$ .

**C.**  $\frac{\pi}{20}$ .

**D.**  $\frac{\pi}{6}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Lấy tích phân hai vế, ta có  $\int_0^1 [4x.f(x^2) + 3f(1-x)] dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$  (\*).

Xét tích phân  $J = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ . Đặt  $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt$ . Khi đó, ta có

$$J = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left( t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Xét tích phân  $K = \int_0^1 4x.f(x^2) dx$ . Đặt  $t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$ . Khi đó, ta có

$$K = \int_0^1 4x.f(x^2) dx = 2 \int_0^1 f(t) dt = 2 \int_0^1 f(x) dx.$$

Xét tích phân  $L = \int_0^1 3f(1-x) dx$ . Đặt  $t = 1-x \Rightarrow dt = -dx$ . Khi đó, ta có

$$L = \int_0^1 3f(1-x) dx = 3 \int_1^0 f(t) (-dt) = 3 \int_0^1 f(t) dt = 3 \int_0^1 f(x) dx.$$

$$\text{Vậy } (*) \Leftrightarrow 5 \int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{20}.$$

**Câu 77:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên khoảng  $(0; +\infty)$ . Biết  $f(3) = 3$  và  $xf'(2x+1) - f(2x+1) = x^3, \forall x \in (0; +\infty)$ . Giá trị của  $\int_3^5 f(x) dx$  bằng

**A.**  $\frac{914}{3}$ .

**B.**  $\frac{59}{3}$ .

**C.**  $\frac{45}{4}$ .

**D.** 88.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có:

$$xf'(2x+1) - f(2x+1) = x^3 \Leftrightarrow \frac{2x^2 f'(2x+1) - 2xf(2x+1)}{x^4} = 2, \forall x \in (0; +\infty).$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{f(2x+1)}{x^2} \right)' = 2 \Leftrightarrow \frac{f(2x+1)}{x^2} = 2x + C. (1)$$

$$\text{Cho } x = 1 \text{ từ (1)} \Rightarrow \frac{f(3)}{1^2} = 2.1 + C \Leftrightarrow \frac{3}{1^2} = 2.1 + C \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(2x+1) = x^2(2x+1) = 2x^3 + x^2.$$

$$\Rightarrow \int_1^2 f(2x+1) dx = \int_1^2 (2x^3 + x^2) dx = \left( 2 \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \frac{59}{6}.$$

$$\Rightarrow \int_3^5 f(x) dx = 2 \int_1^2 f(2x+1) dx = \frac{59}{3}.$$

**Câu 78:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm và đồng biến trên  $[1; 4]$ , thỏa mãn  $x + 2xf'(x) = [f'(x)]^2$  với mọi  $x \in [1; 4]$ . Biết  $f(1) = \frac{3}{2}$ , tính  $I = \int_1^4 f(x) dx$

**A.**  $\frac{1188}{45}$ .

**B.**  $\frac{1187}{45}$ .

**C.**  $\frac{1186}{45}$ .

**D.**  $\frac{9}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Do  $f(x)$  đồng biến trên  $[1; 4]$  nên  $f(x) \geq f(1) = \frac{3}{2} > -\frac{1}{2}$ , ngoài ra  $f'(x) \geq 0, \forall x \in [1; 4]$ . Khi đó ta có biến đổi sau:

$$x + 2xf'(x) = [f'(x)]^2 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{2f(x)+1}} = \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \left( \sqrt{2f(x)+1} \right)' = \left( \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C \right)' \Leftrightarrow \sqrt{2f(x)+1} = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C$$

$$\text{Mà } f(1) = \frac{3}{2} \Rightarrow C = \frac{4}{3} \Rightarrow f(x) = \frac{\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{4}{3}\right)^2 - 1}{2} = \frac{2}{9}x^3 + \frac{8}{9}\sqrt{x^3} + \frac{7}{18}.$$

$$\text{Vậy } I = \int_1^4 f(x)dx = \left(\frac{1}{18}x^4 + \frac{16}{45}x^2\sqrt{x} + \frac{7}{18}x\right)\Big|_1^4 = \frac{1186}{45}.$$

**Câu 79:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $x.f(x).f'(x) = f^2(x) - x, \forall x \in \mathbb{R}$  và có  $f(2) = 1$ . Tích phân  $\int_0^2 f^2(x)dx$

**A.**  $\frac{3}{2}$

**B.**  $\frac{4}{3}$

**C.** 2

**D.** 4

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có:

$$x.f(x).f'(x) = f^2(x) - x \Leftrightarrow 2x.f(x).f'(x) = 2f^2(x) - 2x$$

$$\Leftrightarrow 2x.f(x).f'(x) + f^2(x) = 3f^2(x) - 2x \Leftrightarrow \int_0^2 (x.f^2(x))' dx = 3 \int_0^2 f^2(x)dx - \int_0^2 2xdx$$

$$\Leftrightarrow (x.f^2(x))\Big|_0^2 = 3I - 4 \Leftrightarrow 2 = 3I - 4 \Leftrightarrow I = 2$$

**Câu 80:** Cho hàm số  $f(x)$  nhận giá trị không âm và có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn

$$f'(x) = (2x+1)[f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(0) = -1. \text{ Giá trị của tích phân } \int_0^1 f(x)dx \text{ bằng}$$

**A.**  $-\frac{1}{6}$ .

**B.**  $-\ln 2$ .

**C.**  $-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$ .

**D.**  $-\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$ .

**Lời giải**

$$f'(x) = (2x+1)[f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{-f'(x)}{[f(x)]^2} = -(2x+1), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -(2x+1), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{f(x)} = -\int (2x+1)dx = -x^2 - x + C \Rightarrow f(x) = \frac{1}{-x^2 - x + C}.$$

$$\text{Do } f(0) = -1 \Rightarrow C = -1. \text{ Vậy } f(x) = -\frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

$$I = \int_0^1 f(x)dx = -\int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1}dx = -\int_0^1 \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}dx.$$

$$\text{Đặt } x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan t, t \in \left( -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right). \text{ Suy ra } I = - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} (1 + \tan^2 t)}{\frac{3}{4} (1 + \tan^2 t)} dt = - \frac{2\sqrt{3}}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dt = - \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

**Câu 81:** Cho số thực  $a > 0$ . Giả sử hàm số  $f(x)$  liên tục và luôn dương trên đoạn  $[0; a]$  thỏa mãn

$$f(x) \cdot f(a-x) = 1. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^a \frac{1}{1+f(x)} dx ?$$

**A.**  $I = \frac{2a}{3}.$

**B.**  $I = \frac{a}{2}.$

**C.**  $I = \frac{a}{3}.$

**D.**  $I = a.$

**Lời giải**

$$\text{Đặt } t = a - x \Rightarrow dt = -dx.$$

$$\text{Thay vào ta được } I = \int_0^a \frac{1}{1+f(x)} dx = \int_0^a \frac{1}{1+f(a-t)} dt = \int_0^a \frac{1}{1+f(a-x)} dx.$$

$$\text{Suy ra } 0 = \int_0^a \left[ \frac{f(a-x) - f(x)}{(1+f(x))(1+f(a-x))} \right] dx, \text{ do hàm số } f(x) \text{ liên tục và luôn dương trên đoạn } [0; a]. \text{ Suy ra } f(a-x) = f(x), \text{ trên đoạn } [0; a].$$

$$\text{Mà } f(x) \cdot f(a-x) = 1 \Rightarrow f(x) = 1. \text{ Vậy } I = \int_0^a \frac{1}{2} dx = \frac{a}{2}.$$

**Câu 82:** Cho hàm số  $f(x)$  đồng biến, có đạo hàm đến cấp hai trên đoạn  $[0; 2]$  và thỏa mãn  $[f(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$ . Biết  $f(0) = 1, f(2) = e^6$ . Khi đó  $f(1)$  bằng

**A.**  $e^2.$

**B.**  $e^{\frac{3}{2}}.$

**C.**  $e^3.$

**D.**  $e^{\frac{5}{2}}.$

**Lời giải**

Theo bài ra ta có hàm số  $f(x)$  đồng biến trên  $[0; 2] \Rightarrow f(x) \geq f(0) = 1 > 0$  do đó  $f(x) > 0 \quad \forall x \in [0; 2].$

$$\text{Ta có } \left[ \frac{f'(x)}{f(x)} \right]' = \frac{f''(x) \cdot f(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2}$$

$$\text{Theo đề bài } [f(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$$

$$\Rightarrow f''(x) \cdot f(x) - [f'(x)]^2 = [f(x)]^2 \Rightarrow \left[ \frac{f'(x)}{f(x)} \right]' = 1$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = x + C \Rightarrow \int_0^2 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int_0^2 (x + C) dx \Rightarrow \int_0^2 \frac{1}{f(x)} d(f(x)) = \left( \frac{x^2}{2} + Cx \right) \Big|_0^2$$

$$\Rightarrow \ln |f(x)| \Big|_0^2 = 2 + 2C \Rightarrow \ln |e^6| - \ln |1| = 2 + 2C \Rightarrow C = 2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = x + 2.$$

$$\text{Do đó } \ln f(x) \Big|_0^1 = \left( \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_0^1 \Rightarrow \ln f(1) = \frac{5}{2} \Rightarrow f(1) = e^{\frac{5}{2}}.$$

**Câu 83:** Cho hàm số  $y = f(x)$  là hàm số lẻ trên  $\mathbb{R}$  và đồng thời thỏa mãn hai điều kiện

$$f(x+1) = f(x) + 1, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2}, \forall x \neq 0. \text{ Gọi } I = \int_0^1 \frac{f(x)}{f^2(x)+1} dx. \text{ Hãy chọn}$$

khẳng định đúng về giá trị của  $I$ .

**A.**  $I \in (-1; 0)$ .

**B.**  $I \in (1; 2)$ .

**C.**  $I \in (0; 1)$ .

**D.**  $I \in (-2; -1)$ .

**Lời giải**

- Đặt  $y = f(x)$ . Khi đó từ giả thiết ta có :

$$f(x+1) = y+1, f\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{y+1}{(x+1)^2}, f\left(-\frac{1}{x+1}\right) = -\frac{y+1}{(x+1)^2}.$$

$$\text{Suy ra } f\left(\frac{x}{x+1}\right) = f\left(-\frac{1}{x+1} + 1\right) = f\left(-\frac{1}{x+1}\right) + 1 = -\frac{y+1}{(x+1)^2} + 1 = \frac{x^2 + 2x - y}{(x+1)^2} \quad (1)$$

$$\text{Và } f\left(\frac{x+1}{x}\right) = f\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 + f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{y}{x^2} = \frac{x^2 + y}{x^2},$$

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) = f\left(\frac{1}{\frac{x+1}{x}}\right) = \frac{f\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2} = \frac{\frac{x^2 + y}{x^2}}{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2} = \frac{x^2 + y}{(x+1)^2} \quad (2).$$

$$\text{- Từ (1) và (2) suy ra : } \frac{x^2 + 2x - y}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + y}{(x+1)^2} \Rightarrow x^2 + 2x - y = x^2 + y \Rightarrow y = x \text{ hay } f(x) = x.$$

$$\text{Do đó: } I = \int_0^1 \frac{f(x)}{f^2(x)+1} dx = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2 \approx 0,35.$$

Vậy  $I \in (0; 1)$ .

**Câu 84:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0; \pi]$ . Biết  $f(0) = 2e$  và  $f(x)$  thỏa mãn hệ thức

$$f'(x) + \sin x \cdot f(x) = \cos x \cdot e^{\cos x}, \forall x \in [0; \pi]. \text{ Tính } I = \int_0^\pi f(x) dx.$$

**A.**  $I \approx 6,55$ .

**B.**  $I \approx 17,30$ .

**C.**  $I \approx 10,31$ .

**D.**  $I \approx 16,91$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\text{Giả thiết } f'(x) + \sin x \cdot f(x) = \cos x \cdot e^{\cos x} \Leftrightarrow e^{-\cos x} \cdot f'(x) + e^{-\cos x} \cdot \sin x \cdot f(x) = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \left[ e^{-\cos x} \cdot f(x) \right]' = \cos x \Rightarrow e^{-\cos x} \cdot f(x) = \sin x + C_1.$$

$$\text{Do } f(0) = 2e, \text{ thế vào ta được } C_1 = 2 \text{ suy ra } f(x) = (2 + \sin x) e^{\cos x}.$$

Dùng máy tính thì  $I = \int_0^{\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} (2 + \sin x) \cdot e^{\cos x} dx \approx 10,30532891$ .

**Câu 85:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục và nhận giá trị dương trên  $[0;1]$ . Biết  $f(x) \cdot f(1-x) = 1$  với  $\forall x \in [0;1]$ . Tính giá trị  $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+f(x)}$

**A.**  $\frac{3}{2}$ .

**B.**  $\frac{1}{2}$ .

**C.** 1.

**D.** 2.

**Lời giải**

Ta có:  $f(x) \cdot f(1-x) + f(x) = 1 + f(x) \Rightarrow \frac{1}{f(1-x)+1} = \frac{f(x)}{1+f(x)}$

Xét  $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+f(x)}$

Đặt  $t = 1-x \Leftrightarrow x = 1-t \Rightarrow dx = -dt$ . Đổi cận:  $x=0 \Rightarrow t=1$ ;  $x=1 \Rightarrow t=0$ .

Khi đó  $I = -\int_1^0 \frac{dt}{1+f(1-t)} = \int_0^1 \frac{dt}{1+f(1-t)} = \int_0^1 \frac{dx}{1+f(1-x)} = \int_0^1 \frac{f(x) dx}{1+f(x)}$

Mặt khác  $\int_0^1 \frac{dx}{1+f(x)} + \int_0^1 \frac{f(x) dx}{1+f(x)} = \int_0^1 \frac{1+f(x)}{1+f(x)} dx = \int_0^1 dx = 1$  hay  $2I = 1$ . Vậy  $I = \frac{1}{2}$ .

**Câu 86:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên khoảng  $(0; +\infty)$  thỏa mãn  $f(x) = x \cdot \ln \left( \frac{x^3}{x \cdot f'(x) - f(x)} \right)$

và  $f(1) = 0$ . Tính tích phân  $I = \int_1^5 f(x) dx$ .

**A.**  $12 \ln 13 - 13$ .

**B.**  $13 \ln 13 - 12$ .

**C.**  $12 \ln 13 + 13$ .

**D.**  $13 \ln 13 + 12$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Từ giả thiết và  $f(x) = x \cdot \ln \left( \frac{x^3}{x \cdot f'(x) - f(x)} \right) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \ln \frac{x^3}{x \cdot f'(x) - f(x)}$

$\Leftrightarrow e^{\frac{f(x)}{x}} = \frac{x^3}{x \cdot f'(x) - f(x)} \Leftrightarrow \frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x^2} \cdot e^{\frac{f(x)}{x}} = x \Leftrightarrow \left[ \frac{f(x)}{x} \right]' \cdot e^{\frac{f(x)}{x}} = x$

Lấy nguyên hàm hai vế của suy ra  $e^{\frac{f(x)}{x}} = \frac{x^2}{2} + C$ .

Do  $f(1) = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$ , nên  $e^{\frac{f(x)}{x}} = \frac{x^2 + 1}{2} \Rightarrow f(x) = x \ln \frac{x^2 + 1}{2}$  với  $x \in (0; +\infty)$ .

$I = \int_1^5 f(x) dx = \int_1^5 x \ln \frac{x^2 + 1}{2} dx$ .

$$\text{Đặt } u = \ln \frac{x^2+1}{2} \Rightarrow du = \frac{2x}{x^2+1} dx; dv = x dx, \text{ chọn } v = \frac{x^2+1}{2}.$$

Theo công thức tích phân từng phần, ta được:

$$I = \left( \frac{x^2+1}{2} \cdot \ln \frac{x^2+1}{2} \right) \Big|_1^5 - \int_1^5 x dx = 13 \ln 13 - \frac{x^2}{2} \Big|_1^5 = 13 \ln 13 - 12.$$

**Câu 87:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$  thỏa mãn điều kiện  $f(1) = 2 \ln 2$  và  $x(x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + 3x + 2$ . Giá trị  $f(2) = a + b \ln 3$ , với  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Tính  $a^2 + b^2$ .

**A.**  $\frac{5}{2}$ .

**B.**  $\frac{13}{4}$ .

**C.**  $\frac{25}{4}$ .

**D.**  $\frac{9}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Do hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$  nên

$$x(x+1)f'(x) + f(x) = x^2 + 3x + 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x+1} f'(x) + \frac{1}{(x+1)^2} f(x) = \frac{x+2}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{x}{x+1} f(x) \right)' = \frac{x+2}{x+1}$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \left( \frac{x}{x+1} f(x) \right)' dx = \int_1^2 \frac{x+2}{x+1} dx$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{x}{x+1} f(x) \right) \Big|_1^2 = 1 + \ln \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} f(2) - \frac{1}{2} f(1) = 1 + \ln \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} f(2) - \ln 2 = 1 + \ln \frac{3}{2} \Leftrightarrow f(2) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \ln 3.$$

$$\Rightarrow a = b = \frac{3}{2} \Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{9}{2}.$$

**Câu 88:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn:  $3f(x) + f(2-x) = 2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Tính giá trị của tích phân  $I = \int_0^2 f(x) dx$ .

**A.**  $I = e + 2$ .

**B.**  $I = 2e + 4$ .

**C.**  $I = 2$ .

**D.**  $I = 8$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Cách 1:

$$3f(x) + f(2-x) = 2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow 3 \int_0^2 f(x) dx + \int_0^2 f(2-x) dx = \int_0^2 (2x-2) e^{x^2-2x+1} dx + 4 \int_0^2 dx \quad (1).$$

$$\text{Đặt } t = 2-x \Rightarrow \int_0^2 f(2-x) dx = -\int_2^0 f(t) dt = \int_0^2 f(t) dt = \int_0^2 f(x) dx \quad (2).$$

$$\text{Đặt } u = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow du = (2x-2) dx \Rightarrow \int_0^2 (2x-2) e^{x^2-2x+1} dx = \int_1^1 e^u du = 0 \quad (3).$$

$$\text{Thay (2) và (3) vào (1)} \Rightarrow 4 \int_0^2 f(x) dx = 4 \int_0^2 dx \Rightarrow I = \int_0^2 f(x) dx = 2. \text{ Chọn phương án C.}$$

$$\text{Cách 2: Do } 3f(x) + f(2-x) = 2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4, \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$\text{Thay } x = 2-x \text{ vào (1) ta có: } 3f(2-x) + f(x) = -2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4, \forall x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: } \begin{cases} 3f(x) + f(2-x) = 2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4, \forall x \in \mathbb{R} \\ f(x) + 3f(2-x) = -2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9f(x) + 3f(2-x) = 6(x-1)e^{x^2-2x+1} + 12 \\ f(x) + 3f(2-x) = -2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 1$$

$$\Rightarrow \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 1) dx = 2$$

## **DẠNG 2. TÍCH PHÂN MỘT SỐ HÀM ĐẶC BIỆT**

### **DẠNG 2.1 TÍCH PHÂN CỦA HÀM SỐ LẺ VÀ HÀM SỐ CHẴN**

Nhắc lại kiến thức về hàm số lẻ và hàm số chẵn:

Hàm số  $y = f(x)$  có miền xác định trên tập đối xứng  $D$  và

Nếu  $f(-x) = f(x), \forall x \in D \Rightarrow y = f(x)$ : là hàm số chẵn.

Nếu  $f(-x) = -f(x), \forall x \in D \Rightarrow y = f(x)$ : là hàm số lẻ.

.

Thường gặp cung góc đối nhau của  $\cos(-x) = \cos x, \sin(-x) = -\sin x$ .

□ Nếu hàm số  $f(x)$  liên tục và lẻ trên  $[-a; a]$  thì  $\int_{-a}^a f(x).dx = 0$ .

□ Nếu hàm số  $f(x)$  liên tục và chẵn trên  $[-a; a]$  thì  $\begin{cases} \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \\ \int_{-a}^a \frac{f(x)}{b^x + 1} dx = \int_0^a f(x) dx \end{cases}$ .

Do những kết quả này không có trong SGK nên về mặt thực hành, ta làm theo các bước sau:

□ Bước 1. Phân tích:  $I = \int_{-a}^a f(x).dx = \int_{-a}^0 f(x).dx + \int_0^a f(x).dx = A + B.$

□ Bước 2. Tính  $A = \int_{-a}^0 f(x).dx$  ? bằng cách đổi biến  $t = -x$  và cần nhớ rằng: tích phân không phụ thuộc vào biến, mà chỉ phụ thuộc vào giá trị của hai cận, chẳng hạn luôn có:

$$\int_{-2014}^0 \frac{3t^2 \cos t}{1 + \sin^2 t} dt = \int_{-2014}^0 \frac{3x^2 \cos x}{1 + \sin^2 x} dx.$$

## 2. Tích phân của hàm số liên tục

□ Nếu hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $[a; b]$  thì  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx.$

□ Nếu hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $[0; 1]$  thì

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx.$$

$$+ \int_a^{\pi-a} xf(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_a^{\pi-a} f(\sin x) dx \text{ và } \int_0^{\pi} x.f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$$

$$+ \int_a^{2\pi-a} xf(\cos x) dx = \pi \int_a^{2\pi-a} f(\cos x) dx \text{ và } \int_0^{2\pi} x.f(\cos x) dx = \pi \int_0^{2\pi} f(\cos x) dx$$

→ Về mặt thực hành, sẽ đặt  $x =$  cận trên  $+$  cận dưới  $- t$  ( $x = a + b - t$ ). Từ đó tạo tích phân xoay vòng, rồi giải phương trình bậc nhất với ẩn I.

□ Nếu hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và tuần hoàn với chu kỳ T thì

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx \text{ và } \int_0^{nT} f(x) dx = n \int_0^T f(x) dx.$$

**Lưu ý:** Hàm số  $f(x)$  có chu kỳ T thì  $f(x+T) = f(x).$

→ Về mặt thực hành, ta sẽ làm theo các bước sau:

**Bước 1.** Tách:  $I = \int_a^{a+T} f(x) dx = \underbrace{\int_a^0 f(x) dx}_A + \underbrace{\int_0^T f(x) dx}_B + \underbrace{\int_T^{a+T} f(x) dx}_C \quad (i)$

**Bước 2.** Tính  $C = \int_T^{a+T} f(x) dx$  ?

Đặt  $x = t + T \Rightarrow dx = dt$ . Đổi cận:  $\begin{cases} x = a + T \\ x = T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = a \\ t = 0 \end{cases}$ . Khi đó:

$$C = \int_0^a f(t+T) dt = -\int_a^0 f(t) dt = -\int_a^0 f(x) dx = -A \quad (ii)$$

Thế (i) vào (ii) ta được:  $I = B = \int_0^T f(x) dx$ .

- Câu 89:** Cho  $f(x)$  là hàm số chẵn trên đoạn  $[-a; a]$  và  $k > 0$ . Giá trị tích phân  $\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+e^{kx}} dx$  bằng
- A.**  $\int_0^a f(x) dx$ .      **B.**  $\int_{-a}^a f(x) dx$ .      **C.**  $2 \int_{-a}^a f(x) dx$ .      **D.**  $2 \int_0^a f(x) dx$ .

**Lời giải**

Ta có  $\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+e^{kx}} dx = \int_{-a}^0 \frac{f(x)}{1+e^{kx}} dx + \int_0^a \frac{f(x)}{1+e^{kx}} dx$ .

Xét tích phân  $\int_{-a}^0 \frac{f(x)}{1+e^{kx}} dx$ .

Đặt  $t = -x \Leftrightarrow x = -t$

$\Rightarrow dt = -dx \Leftrightarrow -dt = dx$

Đổi cận:

$x = -a \Rightarrow t = a$

$x = 0 \Rightarrow t = 0$

Khi đó,

$$\begin{aligned} \int_{-a}^0 \frac{f(x)}{1+e^{kx}} dx &= \int_a^0 \frac{f(-t)}{1+e^{k(-t)}} (-dt) = \int_0^a \frac{f(t)}{1+e^{-kt}} dt \\ &= \int_0^a \frac{e^{kt} \cdot f(t)}{1+e^{kt}} dt = \int_0^a \frac{e^{kx} \cdot f(x)}{1+e^{kx}} dx \end{aligned}$$

Do đó,  $\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+e^{kx}} dx = \int_0^a \frac{e^{kx} \cdot f(x)}{1+e^{kx}} dx + \int_0^a \frac{f(x)}{1+e^{kx}} dx = \int_0^a \frac{(e^{kx} + 1)f(x)}{1+e^{kx}} dx = \int_0^a f(x) dx$

- Câu 90:** Cho  $f(x), f(-x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn  $2f(x) + 3f(-x) = \frac{1}{x^2 + 4}$ . Biết

$I = \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{\pi}{m}$ . Khi đó giá trị của  $m$  là

- A.**  $m = 2$ .      **B.**  $m = 20$ .      **C.**  $m = 5$ .      **D.**  $m = 10$ .

**Lời giải**

Hàm số  $f(x), f(-x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn  $2f(x) + 3f(-x) = \frac{1}{x^2 + 4}$  nên ta có:

$$\int_{-2}^2 (2f(x) + 3f(-x)) dx = \int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2 + 4} \quad (1)$$

$$\text{Đặt } K = \int_{-2}^2 (2f(x) + 3f(-x)) dx = 2 \int_{-2}^2 f(x) dx + 3 \int_{-2}^2 f(-x) dx$$

$$\text{Đặt } -x = t \Rightarrow dx = -dt; f(-x) = f(t), x = -2 \Rightarrow t = 2; x = 2 \Rightarrow t = -2$$

$$\text{Do đó } \int_{-2}^2 f(-x) dx = \int_2^{-2} f(t) \cdot (-dt) = \int_{-2}^2 f(t) dt = \int_{-2}^2 f(x) dx$$

$$\Rightarrow K = 2 \int_{-2}^2 f(x) dx + 3 \int_{-2}^2 f(-x) dx = 2 \int_{-2}^2 f(x) dx + 3 \int_{-2}^2 f(x) dx = 5 \int_{-2}^2 f(x) dx \quad (2)$$

$$\text{Đặt } J = \int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2 + 4}; x = 2 \tan \alpha, \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text{Ta có: } dx = d(2 \tan \alpha) = \frac{2d\alpha}{\cos^2 \alpha} = 2(1 + \tan^2 \alpha) d\alpha.$$

$$\text{Với } x = -2 \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4}; \text{ Với } x = 2 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Do đó } J = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2(1 + \tan^2 \alpha)}{4 \tan^2 \alpha + 4} d\alpha = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\alpha}{2} = \frac{1}{2} \alpha \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3), ta có } K = J \Rightarrow 5 \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{\pi}{20}$$

$$\text{Mà theo giả thiết, } I = \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{\pi}{m} \text{ nên } \frac{\pi}{m} = \frac{\pi}{20} \Rightarrow m = 20.$$

**Chú ý:** Có thể tính nhanh  $\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2 + 4}$  bằng công thức:  $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$

$$\text{Từ đó: } \int \frac{dx}{x^2 + 4} = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + C$$

$$\Rightarrow \int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2 + 4} = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} \Big|_{-2}^2 = \frac{1}{2} (\arctan 1 - \arctan(-1)) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) \right] = \frac{\pi}{4}$$

**Câu 91:** Cho hàm số  $y = f(x)$  là hàm lẻ và liên tục trên  $[-4; 4]$  biết  $\int_{-2}^0 f(-x) dx = 2$  và  $\int_1^2 f(-2x) dx = 4$

$$\text{. Tính } I = \int_0^4 f(x) dx.$$

**A.**  $I = -10$ .

**B.**  $I = -6$ .

**C.**  $I = 6$ .

**D.**  $I = 10$ .

**Lời giải**

Xét tích phân  $\int_{-2}^0 f(-x) dx = 2$ .

Đặt  $-x = t \Rightarrow dx = -dt$ .

Đổi cận: khi  $x = -2$  thì  $t = 2$ ; khi  $x = 0$  thì  $t = 0$  do đó  $\int_{-2}^0 f(-x) dx = -\int_2^0 f(t) dt = \int_0^2 f(t) dt$

$$\Rightarrow \int_0^2 f(t) dt = 2 \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx = 2.$$

Do hàm số  $y = f(x)$  là hàm số lẻ nên  $f(-2x) = -f(2x)$ .

$$\text{Do đó } \int_1^2 f(-2x) dx = -\int_1^2 f(2x) dx \Rightarrow \int_1^2 f(2x) dx = -4.$$

Xét  $\int_1^2 f(2x) dx$ .

Đặt  $2x = t \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt$ .

Đổi cận: khi  $x = 1$  thì  $t = 2$ ; khi  $x = 2$  thì  $t = 4$  do đó  $\int_1^2 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_2^4 f(t) dt = -4$

$$\Rightarrow \int_2^4 f(t) dt = -8 \Rightarrow \int_2^4 f(x) dx = -8.$$

$$\text{Do } I = \int_0^4 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx = 2 - 8 = -6.$$

**Câu 92:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-\ln 2; \ln 2]$  và thỏa mãn  $f(x) + f(-x) = \frac{1}{e^x + 1}$ . Biết

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx = a \ln 2 + b \ln 3 \quad (a; b \in \mathbb{Q}). \text{ Tính } P = a + b.$$

**A.**  $P = \frac{1}{2}$ .

**B.**  $P = -2$ .

**C.**  $P = -1$ .

**D.**  $P = 2$ .

**Lời giải**

$$\text{Gọi } I = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx.$$

Đặt  $t = -x \Rightarrow dt = -dx$ .

Đổi cận: Với  $x = -\ln 2 \Rightarrow t = \ln 2$ ; Với  $x = \ln 2 \Rightarrow t = -\ln 2$ .

$$\text{Ta được } I = -\int_{\ln 2}^{-\ln 2} f(-t) dt = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-t) dt = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-x) dx.$$

$$\text{Khi đó ta có: } 2I = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx + \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-x) dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} [f(x) + f(-x)] dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} dx.$$

$$\text{Xét } \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} dx. \text{ Đặt } u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$$

Đổi cận: Với  $x = -\ln 2 \Rightarrow u = \frac{1}{2}$ ;  $x = \ln 2 \Rightarrow u = 2$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta được } \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} dx &= \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x(e^x + 1)} dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{u(u+1)} du \\ &= \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \left( \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du = (\ln|u| - \ln|u+1|) \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = \ln 2 \end{aligned}$$

Vậy ta có  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = 0 \Rightarrow a + b = \frac{1}{2}$ .

**Câu 93:** Cho  $y = f(x)$  là hàm số chẵn và liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$ ,  $\int_1^2 f(x) dx = 1$ . Giá trị của

$$\int_{-2}^2 \frac{f(x)}{3^x + 1} dx \text{ bằng}$$

**A.** 1.

**B.** 6.

**C.** 4.

**D.** 3.

**Lời giải**

$$\text{Do } \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}, \int_1^2 f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \text{ và } \int_1^2 f(x) dx = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx = \frac{3}{2}$$

$$\text{Mặt khác } \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{3^x + 1} dx = \int_{-2}^0 \frac{f(x)}{3^x + 1} dx + \int_0^2 \frac{f(x)}{3^x + 1} dx \text{ và } y = f(x) \text{ là hàm số chẵn, liên tục trên } \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Xét } I = \int_{-2}^0 \frac{f(x)}{3^x + 1} dx. \text{ Đặt } t = -x \Rightarrow dx = -dt$$

$$\Rightarrow I = \int_{-2}^0 \frac{f(x)}{3^x + 1} dx = - \int_2^0 \frac{f(-t)}{3^{-t} + 1} dt = \int_0^2 \frac{f(t)}{\frac{1}{3^t} + 1} dt = \int_0^2 \frac{3^t f(t)}{3^t + 1} dt = \int_0^2 \frac{3^x f(x)}{3^x + 1} dx$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{3^x + 1} dx &= \int_{-2}^0 \frac{f(x)}{3^x + 1} dx + \int_0^2 \frac{f(x)}{3^x + 1} dx = \int_0^2 \frac{3^x f(x)}{3^x + 1} dx + \int_0^2 \frac{f(x)}{3^x + 1} dx \\ &= \int_0^2 \frac{(3^x + 1)f(x)}{3^x + 1} dx = \int_0^2 f(x) dx = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

**Câu 94:** Hàm số  $f(x)$  là hàm số chẵn liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $\int_0^2 f(x) dx = 10$ . Tính  $I = \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{2^x + 1} dx$ .

**A.**  $I = 10$ .

**B.**  $I = \frac{10}{3}$ .

**C.**  $I = 20$ .

**D.**  $I = 5$ .

**Lời giải**

Đặt  $t = -x \Rightarrow dt = -dx$ . Đổi cận:  $x = -2 \Rightarrow t = 2$ ,  $x = 2 \Rightarrow t = -2$ .

$$I = \int_{-2}^2 \frac{f(t)}{2^{-t} + 1} dt = \int_{-2}^2 \frac{2^t}{2^t + 1} f(t) dt = \int_{-2}^2 \frac{2^x}{2^x + 1} f(x) dx$$

$$\Rightarrow 2I = \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{2^x + 1} dx + \int_{-2}^2 \frac{2^x}{2^x + 1} f(x) dx = \int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = \int_{-2}^0 f(x) dx + 10$$

Mặt khác do  $f(x)$  là hàm số chẵn nên  $f(-x) = f(x)$ .

Xét  $J = \int_{-2}^0 f(x) dx$ , đặt  $t = -x \Rightarrow dt = -dx$

$$\Rightarrow J = \int_0^2 f(-t) dt = \int_0^2 f(-x) dx = \int_0^2 f(x) dx = 10 \Rightarrow 2I = 20 \Rightarrow I = 10.$$

**Câu 95:** Cho hàm số  $y = f(x)$  là hàm số chẵn, liên tục trên đoạn  $[-1; 1]$  và  $\int_{-1}^1 f(x) dx = 6$ . Kết quả của

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1 + 2018^x} dx \text{ bằng}$$

**A.** 2.

**B.** 3.

**C.** 4.

**D.** 5.

**Lời giải**

Xét tích phân  $\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1 + 2018^x} dx$ . Đặt  $x = -t$ ;  $dx = -dt$ ;  $x = -1 \Rightarrow t = 1$ ;  $x = 1 \Rightarrow t = -1$ .

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1 + 2018^x} dx = - \int_1^{-1} \frac{f(-t)}{1 + 2018^{-t}} dt = \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{1 + \frac{1}{2018^t}} dt = \int_{-1}^1 \frac{2018^t \cdot f(t)}{1 + 2018^t} dt = \int_{-1}^1 \frac{2018^x f(x)}{1 + 2018^x} dx.$$

$$\text{Vậy } \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1 + 2018^x} dx + \int_{-1}^1 \frac{2018^x f(x)}{1 + 2018^x} dx = \int_{-1}^1 f(x) dx = 6.$$

$$\text{Do đó } \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1 + 2018^x} dx = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3.$$

**Câu 96:** Tích phân  $\int_{-2}^2 \frac{x^{2020}}{e^x + 1} dx = \frac{2^a}{b}$ . Tính tổng  $S = a + b$ .

**A.**  $S = 0$ .

**B.**  $S = 2021$ .

**C.**  $S = 2020$ .

**D.**  $S = 4042$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Xét } I = \int_{-2}^2 \frac{x^{2020}}{e^x + 1} dx.$$

Đặt  $x = -t \Rightarrow dx = -dt$ . Đổi cận  $x = -2 \Rightarrow t = 2$ ;  $x = 2 \Rightarrow t = -2$ .

$$\text{Ta được } I = \int_2^{-2} \frac{(-t)^{2020}}{e^{-t} + 1} (-dt) = \int_{-2}^2 \frac{t^{2020}}{\frac{1}{e^t} + 1} dt = \int_{-2}^2 \frac{t^{2020} \cdot e^t}{e^t + 1} dt = \int_{-2}^2 \frac{x^{2020} \cdot e^x}{e^x + 1} dx.$$

$$\text{Suy ra } 2I = I + I = \int_{-2}^2 \frac{x^{2020}}{e^x + 1} dx + \int_{-2}^2 \frac{x^{2020} \cdot e^x}{e^x + 1} dx = \int_{-2}^2 x^{2020} dx = \frac{x^{2021}}{2021} \Big|_{-2}^2 = \frac{2^{2021} - (-2)^{2021}}{2021} = \frac{2^{2022}}{2021}.$$

Do đó  $I = \frac{2^{2021}}{2021}$ . Suy ra  $a = b = 2021$ . Vậy  $S = a + b = 4042$ .

**Câu 97:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-\ln 2; \ln 2]$  và thỏa mãn  $f(x) + f(-x) = \frac{1}{e^x + 1}$ . Biết

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx = a \ln 2 + b \ln 3, (a, b \in \mathbb{Q}). \text{ Tính } P = a + b.$$

**A.**  $P = -2$ .

**B.**  $P = \frac{1}{2}$ .

**C.**  $P = -1$ .

**D.**  $P = 2$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Từ giả thiết suy ra  $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} [f(x) + f(-x)] dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} dx$ .

Ta có  $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} [f(x) + f(-x)] dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx - \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-x) d(-x) = 2 \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx$ .

Mặt khác  $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{(e^x + 1)e^x} d(e^x) = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \left[ \frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^x + 1} \right] d(e^x)$

$$= \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x} d(e^x) - \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} d(e^x + 1) = x \Big|_{-\ln 2}^{\ln 2} - \ln(e^x + 1) \Big|_{-\ln 2}^{\ln 2} = \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + \ln \frac{3}{2} = \ln 2.$$

Suy ra  $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx = \frac{1}{2} \ln 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = 0 \Rightarrow a + b = \frac{1}{2}$ .

**Câu 98:** Cho  $f(x)$  là hàm số chẵn và  $\int_0^1 f(x) dx = 2$ . Giá trị của tích phân  $\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1 + 2019^x} dx$  là

**A.**  $\frac{2}{2019}$ .

**B.** 2.

**C.** 4.

**D.** 0.

**Lời giải**

**Chọn B**

$$I = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1 + 2019^x} dx$$

Đặt  $t = -x \rightarrow -dt = dx$

Cận

|     |      |      |
|-----|------|------|
| $x$ | $-1$ | $1$  |
| $t$ | $1$  | $-1$ |

$$I = -\int_1^{-1} \frac{f(-t)}{1+2019^{-t}} dt = \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{1+2019^t} dt = \int_{-1}^1 \frac{2019^t f(t)}{1+2019^t} dt$$

$$\Rightarrow 2I = \int_{-1}^1 \frac{2019^t f(t)}{1+2019^t} dt + \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{1+2019^t} dt = \int_{-1}^1 \frac{f(t)(1+2019^t)}{1+2019^t} dt$$

$$\Rightarrow 2I = \int_{-1}^1 f(t) dt = 2 \int_0^1 f(t) dt = 2.2 \Rightarrow I = 2.$$

## DẠNG 2.2 TÍCH PHÂN CỦA HÀM CHỨA DẤU TRỊ TUYỆT ĐỐI

Tính tích phân:  $I = \int_a^b |f(x)|.dx$  ?

**Bước 1.** Xét dấu  $f(x)$  trên đoạn  $[a; b]$ . Giả sử trên đoạn  $[a; b]$  thì phương trình  $f(x) = 0$  có nghiệm  $x_0 \in [a; b]$  và có bảng xét dấu sau:

|        |  |     |       |     |  |
|--------|--|-----|-------|-----|--|
| $x$    |  | $a$ | $x_0$ | $b$ |  |
| $f(x)$ |  | +   | 0     | -   |  |

**Bước 2.** Dựa vào công thức phân đoạn và dấu của trên  $[a; x_0], [x_0; b]$  ta được:

$$I = \int_a^b |f(x)|.dx = \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^b [-f(x)] dx = A + B.$$

Sử dụng các phương pháp tính tích phân đã học tính  $A, B \Rightarrow I$ .

**Câu 99:** Cho  $a$  là số thực dương, tính tích phân  $I = \int_{-1}^a |x| dx$  theo  $a$ .

**A.**  $I = \frac{a^2 + 1}{2}$ .      **B.**  $I = \frac{a^2 + 2}{2}$ .      **C.**  $I = \frac{-2a^2 + 1}{2}$ .      **D.**  $I = \frac{|3a^2 - 1|}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Vì  $a > 0$  nên  $I = -\int_{-1}^0 x dx + \int_0^a x dx = \frac{1}{2} + \frac{a^2}{2} = \frac{1+a^2}{2}$

**Câu 100:** Cho số thực  $m > 1$  thỏa mãn  $\int_1^m |2mx - 1| dx = 1$ . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

**A.**  $m \in (4; 6)$ .      **B.**  $m \in (2; 4)$ .      **C.**  $m \in (3; 5)$ .      **D.**  $m \in (1; 3)$ .

**Lời giải**

Do  $m > 1 \Rightarrow 2m > 2 \Rightarrow \frac{1}{2m} < 1$ . Do đó với  $m > 1, x \in [1; m] \Rightarrow 2mx - 1 > 0$ .

Vậy  $\int_1^m |2mx - 1| dx = \int_1^m (2mx - 1) dx = (mx^2 - x) \Big|_1^m = m^3 - m - m + 1 = m^3 - 2m + 1$ .

Từ đó theo bài ra ta có  $m^3 - 2m + 1 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \pm\sqrt{2} \end{cases}$ . Do  $m > 1$  vậy  $m = \sqrt{2}$ .

**Câu 101:** Cho tích phân  $\int_1^5 \left| \frac{x-2}{x+1} \right| dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$  với  $a, b, c$  là các số nguyên. Tính  $P = abc$ .

**A.**  $P = -36$

**B.**  $P = 0$

**C.**  $P = -18$

**D.**  $P = 18$

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có

$$\begin{aligned} \int_1^5 \left| \frac{x-2}{x+1} \right| dx &= -\int_1^2 \frac{x-2}{x+1} dx + \int_2^5 \frac{x-2}{x+1} dx \\ &= -\int_1^2 \left( 1 - \frac{3}{x+1} \right) dx + \int_2^5 \left( 1 - \frac{3}{x+1} \right) dx \\ &= -\left( x - 3 \ln|x+1| \right) \Big|_1^2 + \left( x - 3 \ln|x+1| \right) \Big|_2^5 \\ &= -(2 - 3 \ln 3) + 1 - 3 \ln 2 + 5 - 3 \ln 6 - 2 + 3 \ln 3 \\ &= 2 - 6 \ln 2 + 3 \ln 3 \end{aligned}$$

Vậy  $a = 2, b = -6, c = 3 \Rightarrow P = abc = -36$ .

**Câu 102:** Tính tích phân  $I = \int_{-1}^1 |2^x - 2^{-x}| dx$ .

**A.**  $\frac{1}{\ln 2}$ .

**B.**  $\ln 2$ .

**C.**  $2 \ln 2$ .

**D.**  $\frac{2}{\ln 2}$ .

**Lời giải**

$$I = \int_{-1}^1 |2^x - 2^{-x}| dx \text{ ta có } 2^x - 2^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int_{-1}^1 |2^x - 2^{-x}| dx = \int_{-1}^0 |2^x - 2^{-x}| dx + \int_0^1 |2^x - 2^{-x}| dx = \left| \int_{-1}^0 (2^x - 2^{-x}) dx \right| + \left| \int_0^1 (2^x - 2^{-x}) dx \right| \\ &= \left| \left( \frac{2^x + 2^{-x}}{\ln 2} \right) \Big|_{-1}^0 \right| + \left| \left( \frac{2^x + 2^{-x}}{\ln 2} \right) \Big|_0^1 \right| = \frac{1}{\ln 2}. \end{aligned}$$

**Câu 103:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có  $\int_0^1 f(x) dx = 2$ ;  $\int_0^3 f(x) dx = 6$ . Tính

$$I = \int_{-1}^1 f(|2x-1|) dx$$

**A.**  $I = 8$

**B.**  $I = 6$

**C.**  $I = \frac{3}{2}$

**D.**  $I = 4$

**Lời giải**

**Chọn D**

$$I = \int_{-1}^1 f(|2x-1|)dx = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(1-2x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(2x-1)dx = I_1 + I_2.$$

$$\text{Xét } I_1 = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(1-2x)dx = -\frac{1}{2} \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(1-2x)d(1-2x) = \frac{1}{2} \int_0^3 f(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^3 f(x)dx = 3.$$

$$\text{Xét } I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(2x-1)dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 f(2x-1)d(2x-1) = \frac{1}{2} \int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x)dx = 1$$

$$\text{Vậy } I = I_1 + I_2 = 4.$$

**Câu 104:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có  $\int_0^3 f(x)dx = 8$  và  $\int_0^5 f(x)dx = 4$ . Tính  $\int_{-1}^1 f(|4x-1|)dx$ .

**A.**  $\frac{9}{4}$ .

**B.**  $\frac{11}{4}$ .

**C.** 3.

**D.** 6.

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \int_{-1}^1 f(|4x-1|)dx = \int_{-1}^{\frac{1}{4}} f(|4x-1|)dx + \int_{\frac{1}{4}}^1 f(|4x-1|)dx$$

$$= \int_{-1}^{\frac{1}{4}} f(1-4x)dx + \int_{\frac{1}{4}}^1 f(4x-1)dx = I + J.$$

$$+) \text{ Xét } I = \int_{-1}^{\frac{1}{4}} f(1-4x)dx.$$

$$\text{Đặt } t = 1-4x \Rightarrow dt = -4dx;$$

$$\text{Với } x = -1 \Rightarrow t = 5; x = \frac{1}{4} \Rightarrow t = 0.$$

$$I = \int_{-1}^{\frac{1}{4}} f(1-4x)dx = \int_5^0 f(t)\left(-\frac{1}{4}dt\right) = \frac{1}{4} \int_0^5 f(t)dt = \frac{1}{4} \int_0^5 f(x)dx = 1.$$

$$+) \text{ Xét } J = \int_{\frac{1}{4}}^1 f(4x-1)dx.$$

$$\text{Đặt } t = 4x-1 \Rightarrow dt = 4dx;$$

$$\text{Với } x = 1 \Rightarrow t = 3; x = \frac{1}{4} \Rightarrow t = 0.$$

$$J = \int_{\frac{1}{4}}^1 f(4x-1)dx = \int_0^3 f(t)\left(\frac{1}{4}dt\right) = \frac{1}{4} \int_0^3 f(t)dt = \frac{1}{4} \int_0^3 f(x)dx = 2.$$

$$\text{Vậy } \int_{-1}^1 f(|4x-1|)dx = 3.$$

**Câu 105:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa  $\int_0^1 f(2x)dx = 2$  và  $\int_0^2 f(6x)dx = 14$ . Tính

$$\int_{-2}^2 f(5|x|+2)dx.$$

**A.** 30.

**B.** 32.

**C.** 34.

**D.** 36.

**Lời giải**

$$+ \text{ Xét } \int_0^1 f(2x)dx = 2.$$

$$\text{Đặt } u = 2x \Rightarrow du = 2dx; x = 0 \Rightarrow u = 0; x = 1 \Rightarrow u = 2.$$

$$\text{Nên } 2 = \int_0^1 f(2x)dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(u)du \Rightarrow \int_0^2 f(u)du = 4.$$

$$+ \text{ Xét } \int_0^2 f(6x)dx = 14.$$

$$\text{Đặt } v = 6x \Rightarrow dv = 6dx; x = 0 \Rightarrow v = 0; x = 2 \Rightarrow v = 12.$$

$$\text{Nên } 14 = \int_0^2 f(6x)dx = \frac{1}{6} \int_0^{12} f(v)dv \Rightarrow \int_0^{12} f(v)dv = 84.$$

$$+ \text{ Xét } \int_{-2}^2 f(5|x|+2)dx = \int_{-2}^0 f(5|x|+2)dx + \int_0^2 f(5|x|+2)dx.$$

$$\square \text{ Tính } I_1 = \int_{-2}^0 f(5|x|+2)dx.$$

$$\text{Đặt } t = 5|x|+2.$$

$$\text{Khi } -2 < x < 0, t = -5x+2 \Rightarrow dt = -5dx; x = -2 \Rightarrow t = 12; x = 0 \Rightarrow t = 2.$$

$$I_1 = \frac{-1}{5} \int_{12}^2 f(t)dt = \frac{1}{5} \left[ \int_0^{12} f(t)dt - \int_0^2 f(t)dt \right] = \frac{1}{5}(84-4) = 16.$$

$$\square \text{ Tính } I_1 = \int_0^2 f(5|x|+2)dx.$$

$$\text{Đặt } t = 5|x|+2.$$

$$\text{Khi } 0 < x < 2, t = 5x+2 \Rightarrow dt = 5dx; x = 2 \Rightarrow t = 12; x = 0 \Rightarrow t = 2.$$

$$I_2 = \frac{1}{5} \int_2^{12} f(t) dt = \frac{1}{5} \left[ \int_0^{12} f(t) dt - \int_0^2 f(t) dt \right] = \frac{1}{5} (84 - 4) = 16.$$

$$\text{Vậy } \int_{-2}^2 f(5|x| + 2) dx = 32.$$

### DẠNG 2.3 TÍCH PHÂN NHIỀU HÀM

**Câu 106:** Cho số thực  $a$  và hàm số  $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \leq 0 \\ a(x - x^2) & \text{khi } x > 0 \end{cases}$ . Tính tích phân  $\int_{-1}^1 f(x) dx$  bằng:

**A.**  $\frac{a}{6} - 1$ .

**B.**  $\frac{2a}{3} + 1$ .

**C.**  $\frac{a}{6} + 1$ .

**D.**  $\frac{2a}{3} - 1$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\begin{aligned} \text{Ta thấy, } \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 2x dx + \int_0^1 a(x - x^2) dx \\ &= (x^2) \Big|_{-1}^0 + a \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = -1 + a \left( \frac{1}{6} \right) = \frac{a}{6} - 1. \end{aligned}$$

**Câu 107:** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} e^x + m & \text{khi } x \geq 0 \\ 2x\sqrt{3+x^2} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = ae + b\sqrt{3} + c, \quad (a, b, c \in \mathbb{Q}). \text{ Tổng } a + b + 3c \text{ bằng}$$

**A.** 15.

**B.** -10.

**C.** -19.

**D.** -17.

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + m) = m + 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x\sqrt{3+x^2}) = 0 \text{ và } f(0) = m + 1.$$

Vì hàm số đã cho liên tục trên  $\mathbb{R}$  nên liên tục tại  $x = 0$ .

$$\text{Suy ra } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \text{ hay } m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1.$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^0 2x\sqrt{3+x^2} dx + \int_0^1 (e^x - 1) dx = \int_{-1}^0 \sqrt{3+x^2} d(3+x^2) + \int_0^1 (e^x - 1) dx \\ &= \frac{2}{3} (3+x^2) \sqrt{3+x^2} \Big|_{-1}^0 + (e^x - x) \Big|_0^1 = e + 2\sqrt{3} - \frac{22}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } a = 1, \quad b = 2, \quad c = -\frac{22}{3}.$$

$$\text{Vậy tổng } a + b + 3c = -19.$$

**Câu 108:** Tính tích phân  $\int_0^1 \max \{e^x, e^{1-2x}\} dx$

- A.  $e-1$ .                      B.  $\frac{3}{2}(e-\sqrt[3]{e})$ .                      C.  $e-\sqrt[3]{e}$ .                      D.  $\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$ .

Lời giải

Ta có:  $e^x \geq e^{1-2x} \Leftrightarrow x \geq 1-2x \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$ . Suy ra:  $\max\{e^x, e^{1-2x}\} = \begin{cases} e^{1-2x} & \text{khi } 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ e^x & \text{khi } \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$

$$\text{Do đó } I = \int_0^1 \max\{e^x, e^{1-2x}\} dx = \int_0^{\frac{1}{3}} e^{1-2x} dx + \int_{\frac{1}{3}}^1 e^x dx = -\frac{1}{2} e^{1-2x} \Big|_0^{\frac{1}{3}} + e^x \Big|_{\frac{1}{3}}^1$$

$$= -\frac{1}{2} e^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} e + e - e^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}(e - \sqrt[3]{e}).$$

**Câu 109:** Cho hàm số  $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 5 - x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ . Tính  $I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx + 3 \int_0^1 f(3-2x) dx$

- A.  $I = \frac{71}{6}$ .                      B.  $I = 31$ .                      C.  $I = 32$ .                      D.  $I = \frac{32}{3}$ .

Lời giải

**Chọn B**

$$+ \text{ Xét tích phân: } I_1 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx.$$

$$\text{Đặt: } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx.$$

$$\text{Đổi cận: với } x = 0 \text{ thì } t = 0, \text{ với } x = \frac{\pi}{2} \text{ thì } t = 1.$$

$$I_1 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 2 \int_0^1 f(t) dt = 2 \int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 (5-x) dx = (10x - x^2) \Big|_0^1 = 9.$$

$$+ \text{ Xét tích phân: } I_2 = 3 \int_0^1 f(3-2x) dx.$$

$$\text{Đặt: } t = 3-2x \Rightarrow dt = -2dx \Rightarrow dx = -\frac{1}{2} dt$$

$$\text{Đổi cận: với } x = 0 \text{ thì } t = 3, \text{ với } x = 1 \text{ thì } t = 1.$$

$$\begin{aligned} I_2 &= 3 \int_0^1 f(3-2x)dx = -\frac{3}{2} \int_3^1 f(t)dt = -\frac{3}{2} \int_3^1 f(x)dx \\ &= -\frac{3}{2} \int_3^1 (x^2 + 3)dx = \left( -\frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x \right) \Big|_3^1 = 22. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx + 3 \int_0^1 f(3-2x)dx = 9 + 22 = 31.$$