

CHƯƠNG 2. TỔ HỢP XÁC SUẤT

BÀI 1. QUY TẮC ĐẾM

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. QUI TẮC CỘNG

Một công việc nào đó có thể được thực hiện theo một trong hai phương án A hoặc B. Nếu phương án A có m cách thực hiện, phương án B có n cách thực hiện và không trùng với bất kì cách nào trong phương án A thì công việc đó có $m + n$ cách thực hiện.

Quy tắc cộng được phát biểu ở trên thực chất là cách đếm số phần tử của hợp hai tập hợp hữu hạn không giao nhau, được phát biểu như sau:

Nếu A và B là các tập hữu hạn không giao nhau thì

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

Chú ý: Quy tắc cộng có thể mở rộng cho nhiều hành động

Ví dụ 1: Từ thành phố A đến thành phố B có 3 đường bộ và 2 đường thủy. Cần chọn một đường để đi từ A đến B. Hỏi có mấy cách chọn?

Giải

Chọn đường bộ thì có 3 cách; chọn đường thủy có 2 cách.

Vậy có : $3 + 2 = 5$ cách chọn.

Ví dụ 2: Một nhà hàng có 3 loại rượu, 4 loại bia và 6 loại nước ngọt. Thúc khách cần chọn đúng 1 loại thức uống. Hỏi có mấy cách chọn ?

Giải

Chọn rượu có 3 cách, chọn bia có 4 cách, chọn nước ngọt có 6 cách

Vậy có : $3 + 4 + 6 = 13$ cách chọn.

II. QUI TẮC NHÂN

Một công việc được hoàn thành bao gồm hai công đoạn A và B (hai hành động liên tiếp). Nếu công đoạn A có m cách thực hiện và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện công đoạn B thì công việc đó có $m.n$ cách thực hiện.

Ví dụ 1: Giữa thành phố Hồ Chí Minh và Hà Nội có 3 loại phương tiện giao thông: đường bộ, đường sắt và đường hàng không. Hỏi có mấy cách chọn phương tiện giao thông để đi từ thành phố Hồ Chí Minh đến Hà Nội rồi quay về?

Giải

Đi từ Hồ Chí Minh đến Hà Nội có 3 cách chọn phương tiện.

Khi đi về từ Hà Nội đến HCM có 3 cách.

Vậy có : $3 \times 3 = 9$ cách chọn.

Ví dụ 2: Một hội đồng nhân dân có 15 người, cần bầu ra 1 chủ tịch, 1 phó chủ tịch, 1 uỷ viên thư ký và không được bầu 1 người vào 2 hay 3 chức vụ. Hỏi có mấy cách bầu?

Giải

Có 15 cách chọn chủ tịch. Với mỗi cách chọn chủ tịch, có 14 cách chọn phó chủ tịch. Với mỗi cách chọn chủ tịch và phó chủ tịch, có 13 cách chọn thư ký.

Vậy có : $15 \times 14 \times 3 = 2730$ cách chọn.

3. Các dấu hiệu chia hết {kiến thức bổ sung}

- Chia hết cho 2: số tận cùng là 0, 2, 4, 6, 8.
- Chia hết cho 3: tổng các chữ số chia hết cho 3 (ví dụ: 276).
- Chia hết cho 4: số tận cùng là 00 hay hai chữ số cuối hợp thành số chia hết cho 4 (ví dụ : 1300, 2512, 708).
- Chia hết cho 5: số tận cùng là 0, 5.
- Chia hết cho 6: số chia hết cho 2 và chia hết cho 3.
- Chia hết cho 8: số tận cùng là 000 hay ba chữ số cuối hợp thành số chia hết cho 8 (ví dụ : 15000, 2016, 13824).
- Chia hết cho 9: tổng các chữ số chia hết cho 9 (ví dụ : 2835).
- Chia hết cho 25: số tận cùng là 00, 25, 50, 75.
- Chia hết cho 10: số tận cùng là 0.

Ví dụ. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 3 chữ số đôi một khác nhau không chia hết cho 9.

Giải

Gọi $n = \overline{abc}$ là số cần lập.

$m = \overline{a'b'c'}$ là số gồm 3 chữ số khác nhau.

$m' = \overline{a_1b_1c_1}$ là số gồm 3 chữ số khác nhau mà chia hết cho 9.

Ta có : Tập các số n Tập các số m Tập các số

* Tìm m : có 5 cách chọn a' (vì $a' \neq 0$), có 5 cách chọn b' (vì $b' \neq a'$), có 4 cách chọn c' (vì $c' \neq a'$ và $c' \neq b'$). Vậy có : $5.5.4 = 100$ số m .

* Tìm m' : trong các chữ số đã cho, 3 chữ số có tổng chia hết cho 9 là $\{0,4,5\}$, $\{1,3,5\}$, $\{2,3,4\}$

- Với $\{0,4,5\}$: có 2 cách chọn a_1 , 2 cách chọn b_1 , 1 cách chọn c_1 , được $2.2.1 = 4$ số m'
- Với $\{1,3,5\}$: có $3! = 6$ số m'
- Với $\{2,3,4\}$: có $3! = 6$ số m'
- Vậy có : $4 + 6 + 6 = 16$ số m'

Suy ra có : $100 - 16 = 84$ số n .

Chú ý: Qua ví dụ trên, ta thấy nếu số cách chọn thỏa tính chất p nào đó quá nhiều, ta có thể làm như sau: Số cách chọn thỏa p bằng số cách chọn tùy ý trừ số cách chọn không thỏa p . Người ta còn gọi cách làm này là dùng “phần bù”.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Quy tắc cộng

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Một bó hoa gồm có: 5 bông hồng trắng, 6 bông hồng đỏ và 7 bông hồng vàng. Hỏi có mấy cách chọn lấy 1 bông hoa?

Hướng dẫn giải

* TH 1: Chọn bông hồng trắng có 5 cách chọn

* TH 2: Chọn bông hồng đỏ có 6 cách chọn

* TH 3: Chọn bông hồng vàng có 7 cách chọn

Vậy có $5 + 6 + 7 = 18$ cách.

Ví dụ 2: Trong một hộp có 10 quả cầu trắng và 5 quả cầu đen. Có bao nhiêu cách chọn một trong các quả cầu ấy?

Hướng dẫn giải

Có 10 cách chọn một quả cầu trắng và 5 cách chọn một quả cầu đen.

Vậy cách chọn một trong các quả cầu ấy là: $10 + 5 = 15$ (cách).

Ví dụ 3: Lớp 11A có 30 học sinh và lớp 11B có 32 học sinh, có bao nhiêu cách chọn 1 học sinh từ 2 lớp trên để tham gia đội công tác xã hội?

Hướng dẫn giải

Có 30 cách chọn một học sinh lớp 11A và 32 cách chọn một học sinh lớp 11B. Vậy số cách chọn một học sinh từ 2 lớp trên là: $30 + 32 = 62$ (cách).

Ví dụ 4: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm một chữ số?

A. 36.

B. 720.

C. 6.

D. 120.

Hướng dẫn giải

Nếu gọi $\bar{x}$ là số tự nhiên gồm một chữ số thì $\bar{x} = 1$ hoặc $\bar{x} = 2$ hoặc $\bar{x} = 3$ hoặc $\bar{x} = 4$ hoặc $\bar{x} = 5$ hoặc $\bar{x} = 6$.

Vậy có 6 số tự nhiên gồm một chữ số.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Giả sử bạn muốn mua một áo sơ mi cỡ 39 hoặc cỡ 40. Áo cỡ 39 có 5 màu khác nhau, áo cỡ 40 có 4 màu khác nhau. Hỏi có bao nhiêu sự lựa chọn (về màu áo và cỡ áo)?

A. 9.

B. 5.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

- Nếu chọn cỡ áo 39 thì sẽ có 5 cách.
- Nếu chọn cỡ áo 40 thì sẽ có 4 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $5 + 4 = 9$ cách chọn mua áo.

Câu 2. Một người có 4 cái quần khác nhau, 6 cái áo khác nhau, 3 chiếc cà vạt khác nhau. Để chọn một cái quần hoặc một cái áo hoặc một cái cà vạt thì số cách chọn khác nhau là:

A. 13.

B. 72.

C. 12.

D. 30.

Lời giải

Chọn A

- Nếu chọn một cái quần thì sẽ có 4 cách.
- Nếu chọn một cái áo thì sẽ có 6 cách.
- Nếu chọn một cái cà vạt thì sẽ có 3 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $4 + 6 + 3 = 13$ cách chọn.

Câu 3. Trên bàn có 8 cây bút chì khác nhau, 6 cây bút bi khác nhau và 10 cuốn tập khác nhau. Một học sinh muốn chọn một đồ vật duy nhất hoặc một cây bút chì hoặc một cây bút bi hoặc một cuốn tập thì số cách chọn khác nhau là:

A. 480.

B. 24.

C. 48.

D. 60.

Lời giải

Chọn B

- Nếu chọn một cây bút chì thì sẽ có 8 cách.
- Nếu chọn một cây bút bi thì sẽ có 6 cách.
- Nếu chọn một cuốn tập thì sẽ có 10 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $8 + 6 + 10 = 24$ cách chọn.

Câu 4. Trong một trường THPT, khối 11 có 280 học sinh nam và 325 học sinh nữ. Nhà trường cần chọn một học sinh ở khối 11 đi dự dạ hội của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?

A. 45.

B. 280.

C. 325.

D. 605.

Lời giải

Chọn D

- Nếu chọn một học sinh nam có 280 cách.
- Nếu chọn một học sinh nữ có 325 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $280 + 325 = 605$ cách chọn.

Câu 5. Một trường THPT được cử một học sinh đi dự trại hè toàn quốc. Nhà trường quyết định chọn một học sinh tiên tiến lớp 11A hoặc lớp 12B. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn, nếu biết rằng lớp 11A có 31 học sinh tiên tiến và lớp 12B có 22 học sinh tiên tiến?

A. 31.

B. 9.

C. 53.

D. 682.

Lời giải

Chọn C

- Nếu chọn một học sinh lớp 11A có 31 cách.
- Nếu chọn một học sinh lớp 12B có 22 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $31 + 22 = 53$ cách chọn.

Câu 6. Trong một hộp chứa sáu quả cầu trắng được đánh số từ 1 đến 6 và ba quả cầu đen được đánh số 7, 8, 9. Có bao nhiêu cách chọn một trong các quả cầu ấy?

A. 27.

B. 9.

C. 6.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Vì các quả cầu trắng hoặc đen đều được đánh số phân biệt nên mỗi lần lấy ra một quả cầu bất kì là một lần chọn.

- Nếu chọn một quả trắng có 6 cách.
- Nếu chọn một quả đen có 3 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $6 + 3 = 9$ cách chọn.

Câu 7. Giả sử từ tỉnh A đến tỉnh B có thể đi bằng các phương tiện: ô tô, tàu hỏa, tàu thủy hoặc máy bay. Mỗi ngày có 10 chuyến ô tô, 5 chuyến tàu hỏa, 3 chuyến tàu thủy và 2 chuyến máy bay. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ tỉnh A đến tỉnh B?

A. 20.

B. 300.

C. 18.

D. 15.

Lời giải

Chọn A

- Nếu đi bằng ô tô có 10 cách.
- Nếu đi bằng tàu hỏa có 5 cách.
- Nếu đi bằng tàu thủy có 3 cách.
- Nếu đi bằng máy bay có 2 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $10 + 5 + 3 + 2 = 20$ cách chọn.

Câu 8. Trong một cuộc thi tìm hiểu về đất nước Việt Nam, ban tổ chức công bố danh sách các đề tài bao gồm: 8 đề tài về lịch sử, 7 đề tài về thiên nhiên, 10 đề tài về con người và 6 đề tài về văn hóa. Mỗi thí sinh được quyền chọn một đề tài. Hỏi mỗi thí sinh có bao nhiêu khả năng lựa chọn đề tài?

A. 20.

B. 3360.

C. 31.

D. 30.

Lời giải

Chọn C

- Nếu chọn đề tài về lịch sử có 8 cách.
- Nếu chọn đề tài về thiên nhiên có 7 cách.
- Nếu chọn đề tài về con người có 10 cách.
- Nếu chọn đề tài về văn hóa có 6 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $8+7+10+6=31$ cách chọn.

Dạng 2. Quy tắc nhân

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Một đội văn nghệ chuẩn bị được 2 vở kịch, 3 điệu múa và 6 bài hát. Tại hội diễn, mỗi đội chỉ được trình diễn 1 vở kịch, 1 điệu múa và 1 bài hát. Hỏi đội văn nghệ trên có bao nhiêu cách chọn chương trình biểu diễn, biết rằng chất lượng các vở kịch, điệu múa, các bài hát là như nhau?

Hướng dẫn giải

Mỗi đội chỉ được trình diễn 1 vở kịch, 1 điệu múa và 1 bài hát (gồm 3 tiết mục thuộc ba thể loại khác nhau)

- Chọn 1 vở kịch có: 2 cách chọn
- Chọn 1 điệu múa có: 3 cách chọn
- Chọn 1 bài hát có: 6 cách

Vậy có: $2 \times 3 \times 6 = 36$ cách.

Ví dụ 2: Dãy x_1, x_2, x_3, x_4 với mỗi kí tự x_i chỉ nhận giá trị 0 hoặc 1. Hỏi có bao nhiêu dãy như vậy?

Hướng dẫn giải

Mỗi kí tự x_i có hai cách chọn (0 hoặc 1).

Vậy có tất cả: $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ dãy x_1, x_2, x_3, x_4 .

Ví dụ 3: Trong một lớp học có 20 học sinh nam và 24 học sinh nữ. Giáo viên chủ nhiệm cần chọn hai học sinh: 1 nam và 1 nữ tham gia đội cờ đỏ. Hỏi giáo viên chủ nhiệm đó có bao nhiêu cách chọn?

Hướng dẫn giải

Có 20 cách chọn một học sinh nam và 24 cách chọn một học sinh nữ.

Vì vậy có $20 \times 24 = 480$ cách chọn hai học sinh (1 nam, 1 nữ).

Ví dụ 4: Số các số chẵn có hai chữ số là:

Hướng dẫn giải

Số chẵn có hai chữ số có dạng $\overline{ab}$ với $a \neq 0$, b chẵn.

+ Chọn $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, có 9 cách chọn.

+ Chọn $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$, có 5 cách chọn.

Vậy có tất cả $9 \times 5 = 45$ số.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Có 3 kiểu mặt đồng hồ đeo tay (vuông, tròn, elip) và 4 kiểu dây (kim loại, da, vải và nhựa). Hỏi có bao nhiêu cách chọn một chiếc đồng hồ gồm một mặt và một dây?

A. 4.

B. 7.

C. 12.

D. 16.

Lời giải

Chọn C

Để chọn một chiếc đồng hồ, ta có:

- Có 3 cách chọn mặt.
- Có 4 cách chọn dây.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $3 \times 4 = 12$ cách.

Câu 2: Một người có 4 cái quần, 6 cái áo, 3 chiếc cà vạt. Để chọn mỗi thứ một món thì có bao nhiêu cách chọn bộ "quần-áo-cà vạt" khác nhau?

A. 13.

B. 72.

C. 12.

D. 30.

Lời giải

Chọn B

Để chọn một bộ "quần-áo-cà vạt", ta có:

- Có 4 cách chọn quần.
- Có 6 cách chọn áo.
- Có 3 cách chọn cà vạt.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $4 \times 6 \times 3 = 72$ cách.

Câu 3: Một thùng trong đó có 12 hộp đựng bút màu đỏ, 18 hộp đựng bút màu xanh. Số cách khác nhau để chọn được đồng thời một hộp màu đỏ, một hộp màu xanh là?

A. 13.

B. 12.

C. 18.

D. 216.

Lời giải

Chọn D

Để chọn một hộp màu đỏ và một hộp màu xanh, ta có:

- Có 12 cách chọn hộp màu đỏ.
- Có 18 cách chọn hộp màu xanh.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $12 \times 18 = 216$ cách.

Câu 4: Trên bàn có 8 cây bút chì khác nhau, 6 cây bút bi khác nhau và 10 cuốn tập khác nhau. Số cách khác nhau để chọn được đồng thời một cây bút chì, một cây bút bi và một cuốn tập.

A. 24.

B. 48.

C. 480.

D. 60.

Lời giải

Chọn C

Để chọn "một cây bút chì - một cây bút bi - một cuốn tập", ta có:

- Có 8 cách chọn bút chì.
- Có 6 cách chọn bút bi.
- Có 10 cách chọn cuốn tập.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $8 \times 6 \times 10 = 480$ cách.

Câu 5: Một bó hoa có 5 hoa hồng trắng, 6 hoa hồng đỏ và 7 hoa hồng vàng. Hỏi có mấy cách chọn lấy ba bông hoa có đủ cả ba màu.

A. 240.

B. 210.

C. 18.

D. 120.

Lời giải

Chọn B

Để chọn ba bông hoa có đủ cả ba màu (nghĩa là chọn một bông hoa hồng trắng- một bông hoa hồng đỏ- hoa hồng vàng), ta có:

- Có 5 cách chọn hoa hồng trắng.
- Có 6 cách chọn hoa hồng đỏ.
- Có 7 cách chọn hoa hồng vàng.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $5 \times 6 \times 7 = 210$ cách.

Câu 6: Một người vào cửa hàng ăn, người đó chọn thực đơn gồm một món ăn trong năm món, một loại quả tráng miệng trong năm loại quả tráng miệng và một nước uống trong ba loại nước uống. Có bao nhiêu cách chọn thực đơn.

A. 25.

B. 75.

C. 100.

D. 15.

Lời giải

Chọn B

Để chọn thực đơn, ta có:

- Có 5 cách chọn món ăn.
- Có 5 cách chọn quả tráng miệng.
- Có 3 cách chọn nước uống.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $5 \times 5 \times 3 = 75$ cách.

Câu 7: Trong một trường THPT, khối 11 có 280 học sinh nam và 325 học sinh nữ. Nhà trường cần chọn hai học sinh trong đó có một nam và một nữ đi dự trại hè của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?

- A. 910000. B. 91000. C. 910. D. 625.

Lời giải

Chọn B

Để chọn một nam và một nữ đi dự trại hè, ta có:

- Có 280 cách chọn học sinh nam.
- Có 325 cách chọn học sinh nữ.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $280 \times 325 = 91000$ cách.

Câu 8: Một đội học sinh giỏi của trường THPT, gồm 5 học sinh khối 12, 4 học sinh khối 11, 3 học sinh khối 10. Số cách chọn ba học sinh trong đó mỗi khối có một em?

- A. 12. B. 220. C. 60. D. 3.

Lời giải

Chọn C

Để chọn một nam và một nữ đi dự trại hè, ta có:

- Có 5 cách chọn học sinh khối 12.
- Có 4 cách chọn học sinh khối 11.
- Có 3 cách chọn học sinh khối 10.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $5 \times 4 \times 3 = 60$ cách.

Câu 9: Có 10 cặp vợ chồng đi dự tiệc. Tổng số cách chọn một người đàn ông và một người đàn bà trong bữa tiệc phát biểu ý kiến sao cho hai người đó không là vợ chồng?

- A. 100. B. 91. C. 10. D. 90.

Lời giải

Chọn D

Để chọn một người đàn ông và một người đàn bà không là vợ chồng, ta có

- Có 10 cách chọn người đàn ông.
- Có 9 cách chọn người đàn bà.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $9 \times 10 = 90$ cách.

Câu 10: An muốn qua nhà Bình để cùng Bình đến chơi nhà Cường. Từ nhà An đến nhà Bình có 4 con đường đi, từ nhà Bình tới nhà Cường có 6 con đường đi. Hỏi An có bao nhiêu cách chọn đường đi đến nhà Cường?

- A. 6. B. 4. C. 10. D. 24.

Lời giải

Chọn D

- Từ An $\longrightarrow$ Bình có 4 cách.
- Từ Bình $\longrightarrow$ Cường có 6 cách.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $4 \times 6 = 24$ cách.

Câu 11: Các thành phố A, B, C, D được nối với nhau bởi các con đường như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến D mà qua B và C chỉ một lần?



- A. 9. B. 10. C. 18. D. 24.

Lời giải

Chọn D

- Từ A $\longrightarrow$ B có 4 cách.
- Từ B $\longrightarrow$ C có 2 cách.
- Từ C $\longrightarrow$ D có 2 cách.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $4 \times 2 \times 2 = 16$ cách.

Câu 12: Các thành phố A, B, C, D được nối với nhau bởi các con đường như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến D rồi quay lại A?



- A. 1296. B. 784. C. 576. D. 324.

Lời giải

Chọn C

Từ kết quả câu trên, ta có:

- Từ A $\longrightarrow$ D có 24 cách.
- Tương tự, từ D $\longrightarrow$ A có 24 cách.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $24 \times 24 = 576$ cách.

Câu 13: Trong một tuần bạn A dự định mỗi ngày đi thăm một người bạn trong 12 người bạn của mình. Hỏi bạn A có thể lập được bao nhiêu kế hoạch đi thăm bạn của mình (thăm một bạn không quá một lần)?

- A. 3991680. B. 12!. C. 35831808. D. 7!.

Lời giải

Chọn A

Một tuần có bảy ngày và mỗi ngày thăm một bạn.

- Có 12 cách chọn bạn vào ngày thứ nhất.
- Có 11 cách chọn bạn vào ngày thứ hai.
- Có 10 cách chọn bạn vào ngày thứ ba.
- Có 9 cách chọn bạn vào ngày thứ tư.
- Có 8 cách chọn bạn vào ngày thứ năm.
- Có 7 cách chọn bạn vào ngày thứ sáu.
- Có 6 cách chọn bạn vào ngày thứ bảy.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3991680$ cách.

Câu 14: Nhãn mỗi chiếc ghế trong hội trường gồm hai phần: phần đầu là một chữ cái (trong bảng 24 chữ cái tiếng Việt), phần thứ hai là một số nguyên dương nhỏ hơn 26. Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu chiếc ghế được ghi nhãn khác nhau?

- A. 624. B. 48. C. 600. D. 26.

Lời giải

Chọn C

Một chiếc nhãn gồm phần đầu và phần thứ hai $\in \{1; 2; \dots; 25\}$.

- Có 24 cách chọn phần đầu.
- Có 25 cách chọn phần thứ hai.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $24 \times 25 = 600$ cách.

Câu 15: Biển số xe máy của tỉnh A (nếu không kể mã số tỉnh) có 6 kí tự, trong đó kí tự ở vị trí đầu tiên là một chữ cái (trong bảng 26 cái tiếng Anh), kí tự ở vị trí thứ hai là một chữ số thuộc tập $\{1; 2; \dots; 9\}$, mỗi kí tự ở bốn vị trí tiếp theo là một chữ số thuộc tập $\{0; 1; 2; \dots; 9\}$. Hỏi nếu chỉ dùng một mã số tỉnh thì tỉnh A có thể làm được nhiều nhất bao nhiêu biển số xe máy khác nhau?

- A. 2340000. B. 234000. C. 75. D. 2600000.

Lời giải

Chọn A

Giả sử biển số xe là $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$.

- Có 26 cách chọn a_1
- Có 9 cách chọn a_2
- Có 10 cách chọn a_3
- Có 10 cách chọn a_4
- Có 10 cách chọn a_5
- Có 10 cách chọn a_6

Vậy theo qui tắc nhân ta có $26 \times 9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 2340000$ biển số xe.

Câu 16: Số 253125000 có bao nhiêu ước số tự nhiên?

A. 160.

B. 240.

C. 180.

D. 120.

Lời giải

Chọn C

Ta có $253125000 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^8$ nên mỗi ước số tự nhiên của số đã cho đều có dạng $2^m \times 3^n \times 5^p$ trong đó $m, n, p \in \mathbb{N}$ sao cho $0 \leq m \leq 3; 0 \leq n \leq 4; 0 \leq p \leq 8$.

- Có 4 cách chọn m .
- Có 5 cách chọn n .
- Có 9 cách chọn p .

Vậy theo qui tắc nhân ta có $4 \times 5 \times 9 = 180$ ước số tự nhiên.

Câu 17: Từ các chữ số 1, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu chữ số tự nhiên có 4 chữ số (không nhất thiết phải khác nhau)?

A. 324.

B. 256.

C. 248.

D. 124.

Lời giải

Chọn B

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$ với $(a, b, c, d) \in A = \{1, 5, 6, 7\}$.

Vì số cần tìm có 4 chữ số không nhất thiết khác nhau nên:

- a được chọn từ tập A (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.
- b được chọn từ tập A (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.
- c được chọn từ tập A (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.
- d được chọn từ tập A (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.

Như vậy, ta có $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ số cần tìm.

Câu 18: Từ các chữ số 1, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu chữ số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau?

A. 36.

B. 24.

C. 20.

D. 14.

Lời giải

Chọn B

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$ với $(a, b, c, d) \in A = \{1, 5, 6, 7\}$.

Vì số cần tìm có 4 chữ số khác nhau nên:

- a được chọn từ tập A (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.
- b được chọn từ tập $A \setminus \{a\}$ (có 3 phần tử) nên có 3 cách chọn.
- c được chọn từ tập $A \setminus \{a, b\}$ (có 2 phần tử) nên có 2 cách chọn.
- d được chọn từ tập $A \setminus \{a, b, c\}$ (có 1 phần tử) nên có 1 cách chọn.

Như vậy, ta có $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ số cần tìm.

Câu 19: Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà hai chữ số đều chẵn?

- A. 99. B. 50. C. 20. D. 10.

Lời giải

Chọn C

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{ab}$ với $(a, b) \in A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ và $a \neq 0$.

Trong đó:

- a được chọn từ tập $A \setminus \{0\}$ (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.
- b được chọn từ tập A (có 5 phần tử) nên có 5 cách chọn.

Như vậy, ta có $4 \times 5 = 20$ số cần tìm.

Câu 20: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu chữ số tự nhiên bé hơn 100 ?

- A. 36. B. 62. C. 54. D. 42.

Lời giải

Chọn D

Các số bé hơn 100 chính là các số có một chữ số và hai chữ số được hình thành từ tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Từ tập A có thể lập được 6 số có một chữ số.

Gọi số có hai chữ số có dạng $\overline{ab}$ với $(a, b) \in A$.

Trong đó:

- a được chọn từ tập A (có 6 phần tử) nên có 6 cách chọn.
- b được chọn từ tập A (có 6 phần tử) nên có 6 cách chọn.

Như vậy, ta có $6 \times 6 = 36$ số có hai chữ số.

Vậy, từ A có thể lập được $36 + 6 = 42$ số tự nhiên bé hơn 100.

Câu 21: Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số lẻ gồm 4 chữ số khác nhau?

- A. 154. B. 145. C. 144. D. 155.

Lời giải

Chọn C

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$ với $(a, b, c, d) \in A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Vì $\overline{abcd}$ là số lẻ $\Rightarrow d = \{1, 3, 5\} \Rightarrow d$: có 3 cách chọn.

Khi đó a : có 4 cách chọn (khác 0 và d), b : có 4 cách chọn và c : có 3 cách chọn.

Vậy có tất cả $3 \times 4 \times 4 \times 3 = 144$ số cần tìm.

Câu 22: Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số chẵn gồm 4 chữ số khác nhau?

A. 156.

B. 144.

C. 96.

D. 134.

Lời giải

Chọn A

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$ với $(a, b, c, d) \in A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Vì $\overline{abcd}$ là số chẵn $\Rightarrow d = \{0, 2, 4\}$.

TH1. Nếu $d = 0$, số cần tìm là $\overline{abc0}$. Khi đó:

- a được chọn từ tập $A \setminus \{0\}$ nên có 5 cách chọn.
- b được chọn từ tập $A \setminus \{0, a\}$ nên có 4 cách chọn.
- c được chọn từ tập $A \setminus \{0, a, b\}$ nên có 3 cách chọn.

Như vậy, ta có $5 \times 4 \times 3 = 60$ số có dạng $\overline{abc0}$.

TH2. Nếu $d = \{2, 4\} \Rightarrow d$: có 2 cách chọn.

Khi đó a : có 4 cách chọn (khác 0 và d), b : có 4 cách chọn và c : có 3 cách chọn.

Như vậy, ta có $2 \times 4 \times 4 \times 3 = 96$ số cần tìm như trên.

Vậy có tất cả $60 + 96 = 156$ số cần tìm.

BÀI 2. HOÁN VỊ- CHỈNH HỢP – TỔ HỢP

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. HOÁN VỊ

1. Định nghĩa

Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 1$)

Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là một hoán vị của n phần tử đó.

Nhận xét:

Hai hoán vị của n phần tử chỉ khác nhau ở thứ tự sắp xếp.

Chẳng hạn, hai hoán vị abc và acb của ba phần tử a, b, c là khác nhau.

2. Số hoán vị

Kí hiệu P_n là số hoán vị của n phần tử. Ta có công thức sau:

Ví dụ 1. Sắp xếp 5 người vào một băng ghế có 5 chỗ. Hỏi có bao nhiêu cách.

Giải

Mỗi cách đổi chỗ 1 trong 5 người trên băng ghế là 1 hoán vị.

Vậy có $P_5 = 5! = 120$ cách sắp.

Ví dụ 2. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4 có thể lập được mấy số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau.

Giải

Gọi $A = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$ với $a_1 \neq 0$ và a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 phân biệt là số cần lập.

- *Bước 1:* chữ số $a_1 \neq 0$ nên có 4 cách chọn a_1 .
- *Bước 2:* sắp 4 chữ số còn lại vào 4 vị trí có $4! = 24$ cách.

Vậy có $4 \times 24 = 96$ số.

II. CHỈNH HỢP

1. Định nghĩa

Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi cách sắp xếp k phần tử của A theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử của tập A.

2. Số các chỉnh hợp

Số chỉnh hợp chập k của n phần tử:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}, 1 \leq k \leq n$$

Công thức trên cũng đúng cho trường hợp $k=0$ hoặc $k=n$.

Khi $k = n$ thì $A_n^n = P_n = n!$.

Ví dụ 3: Có bao nhiêu số điện thoại bắt đầu bằng 2 chữ cái khác nhau lấy từ 26 chữ cái A, B, C, ..., Z và tiếp theo là 5 chữ số khác nhau không có số 0.

Giải

Chọn 2 chữ cái trong 26 chữ cái, xếp vào hai vị trí đầu tiên, đây là chỉnh hợp chập 2 của 26 phần tử. Tiếp theo, chọn 5 chữ số trong 9 chữ số khác 0, xếp vào 5 vị trí, đây là chỉnh hợp chập 5 của 9 phần tử.

Vậy có : $A_{26}^2 \cdot A_9^5 = 9828000$ số.

Ví dụ 4: Một đội bóng đá có 18 cầu thủ. Cần chọn ra 11 cầu thủ phân vào 11 vị trí trên sân để thi đấu chính thức. Hỏi có mấy cách chọn nếu:

- a) Ai cũng có thể chơi ở bất cứ vị trí nào?
- b) Chỉ có cầu thủ A làm thủ môn được, các cầu thủ khác chơi ở vị trí nào cũng được?
- c) Có 3 cầu thủ chỉ có thể làm thủ môn được, các cầu thủ khác chơi ở vị trí nào cũng được?

Giải

a) Chọn 11 người trong 18 người, xếp vào 11 vị trí. Đây là chỉnh hợp chập 11 của 18 phần tử. Có : $A_{18}^{11} = 1270312243$ cách.

b) Chọn A làm thủ môn. Tiếp đến, chọn 10 người trong 17 người còn lại, xếp vào 10 vị trí.

Vậy có : $A_{17}^{10} = 705729024$ cách.

c) Chọn 1 trong 3 người làm thủ môn, có 3 cách. Tiếp đến, chọn 10 người trong 15 người kia, xếp vào 10 vị trí, có A_{15}^{10} cách.

Vậy, có: $3A_{15}^{10} = 326918592$ cách.

III. TỔ HỢP

1. Định nghĩa

Cho tập A gồm n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi tập con gồm k phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử.

Chú ý:

Số k trong định nghĩa cần thỏa điều kiện $1 \leq k \leq n$.

Tuy vậy, tập hợp không có phần tử nào là tập rỗng nên ta quy ước gọi tập rỗng là tổ hợp chập 0 của n phần tử.

2. Số các tổ hợp

Số các tổ hợp chập k của n phần tử: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Ví dụ: Một nhóm có 5 nam và 3 nữ. Chọn ra 3 người sao cho trong đó có ít nhất 1 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách.

Giải

Cách 1: Ta có các trường hợp sau

- 3 người được chọn gồm 1 nữ và 2 nam.

chọn ra 1 trong 3 nữ ta có 3 cách.

chọn ra 2 trong 5 nam ta có C_5^2 cách

Suy ra có $3C_5^2$ cách chọn

- 3 người được chọn gồm 2 nữ và 1 nam.

chọn ra 2 trong 3 nữ có C_3^2 cách.

chọn ra 1 trong 5 nam có 5 cách.

Suy ra có $5C_3^2$ cách chọn.

- 3 người chọn ra gồm 3 nữ có 1 cách.

Vậy có $3C_5^2 + 5C_3^2 + 1 = 46$ cách chọn.

Cách 2: Số cách chọn 3 người bất kì là: C_8^3

Số cách chọn 3 người nam cả là: C_5^3

Vậy số cách chọn 3 người thỏa yêu cầu bài toán là:

$$C_8^3 - C_5^3 = 46 \text{ cách.}$$

3. Tính chất của các số C_n^k

a) **Tính chất 1:** $C_n^k = C_n^{n-k}$

b) **Tính chất 2:** $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Hoán vị

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Số các số có năm chữ số khác nhau lập nên từ năm chữ số 1, 2, 3, 4, 5 là:

Hướng dẫn giải

Một số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau lập nên từ năm chữ số 1, 2, 3, 4, 5 là một hoán vị của năm chữ số đó. Vậy có tất cả $5! = 120$ (số).

Ví dụ 2: Người ta xếp 5 quyển sách Toán, 4 quyển sách Hóa và 3 quyển sách Lý lên một giá sách theo từng môn. Số cách sắp xếp sẽ là:

Hướng dẫn giải

Có 3 môn học nên có $3!$ cách xếp sách theo môn.

Trong đó có $5!$ cách xếp sách Toán, $4!$ cách xếp sách Hóa, và $3!$ cách xếp sách Lý. Vậy số cách xếp tất cả là: $3! \times 4! \times 5! \times 3!$.

Ví dụ 3: Một nhóm học sinh gồm 5 nam và 5 nữ xếp thành một hàng ngang. Số cách xếp để học sinh nam và nữ xen kẽ nhau là:

- A. $5!$. B. $10!$.
C. $2 \cdot (5!)^2$. D. $(5!)^2$.

Hướng dẫn giải

Ví dụ 4: Số cách sắp xếp chỗ cho 10 khách ngồi quanh một bàn tròn (hai cách xếp được coi là như nhau nếu cách này nhận được từ cách kia bằng cách xoay bàn đi một góc nào đó) là:

Hướng dẫn giải

Ví dụ 5: Long và Hưng cùng 8 bạn rủ nhau đi xem bóng đá. Số cách xếp nhóm bạn trên vào 10 chỗ ngồi sắp hàng ngang sao cho Long và Hưng ngồi cạnh nhau là:

Hướng dẫn giải

Ví dụ 6: Có bao nhiêu cách dán 5 con tem khác nhau vào 5 phong bì khác nhau và mỗi phong bì một tem?

Hướng dẫn giải

Số cách dán 5 con tem vào 5 phong bì theo đề bài là số cách xếp có thứ tự 5 con tem vào 5 vị trí. Đó chính là số hoán vị của 5 phần tử.

Do đó đáp số là P_5 .

Ví dụ 7: Có bao nhiêu cách xếp 5 nam và 3 nữ ngồi trên một băng ghế dài sao cho nam ngồi kề nhau và nữ ngồi kề nhau?

Hướng dẫn giải

- Xem 5 nam và 3 nữ lần lượt như 2 phần tử α và β .
- Số cách sắp xếp α và β vào 2 vị trí là: $P_2 = 2$ (cách).
- Mỗi cách hoán vị 5 nam và 3 nữ cho nhau trong cùng một vị trí ta luôn thêm $5! \times 3!$ cách xếp khác nhau.

Vậy số cách xếp theo yêu cầu bài toán là: $2 \times 5! \times 3! = 1440$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Có bao nhiêu khả năng có thể xảy ra đối với thứ tự giữa các đội trong một giải bóng có 5 đội bóng? (giả sử rằng không có hai đội nào có điểm trùng nhau)

- A. 120. B. 100. C. 80. D. 60.

Lời giải

Chọn A

Số các khả năng có thể xảy ra đối với thứ tự giữa các đội trong một giải bóng có 5 đội bóng là một hoán vị của 5 phần tử nên có $5! = 120$ cách.

Câu 2: Có bao nhiêu cách xếp khác nhau cho 5 người ngồi vào một bàn dài?

- A. 120 B. 5 C. 20 D. 25

Lời giải

Chọn A

Số cách sắp xếp khác nhau cho 5 người ngồi vào một bàn dài là một hoán vị của 5 phần tử nên có $5! = 120$ cách.

Câu 3: Số cách sắp xếp 6 nam sinh và 4 nữ sinh vào một dãy ghế hàng ngang có 10 chỗ ngồi là:

- A. $6!4!$. B. $10!$. C. $6! - 4!$. D. $6! + 4!$.

Lời giải

Chọn B

Số cách sắp xếp 6 nam sinh và 4 nữ sinh vào một dãy ghế hàng ngang có 10 chỗ là một hoán vị của 10 phần tử nên có $10!$ cách.

Câu 4: Sắp xếp năm bạn học sinh An, Bình, Chi, Dũng, Lệ vào một chiếc ghế dài có 5 chỗ ngồi. Số cách sắp xếp sao cho bạn Chi luôn ngồi chính giữa là

- A. 24. B. 120. C. 60. D. 16.

Lời giải

Chọn A

Xếp bạn Chi ngồi giữa có 1 cách. Số cách xếp 4 bạn sinh An, Bình, Dũng, Lệ vào 4 chỗ còn lại là một hoán vị của 4 phần tử nên có $4!$ cách. Vậy có 24 cách xếp.

Câu 5: Sắp xếp năm bạn học sinh An, Bình, Chi, Dũng, Lệ vào một chiếc ghế dài có 5 chỗ ngồi. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho bạn An và bạn Dũng luôn ngồi ở hai đầu ghế?

- A. 120. B. 16 C. 12. D. 24.

Lời giải

Chọn C

Xếp An và Dũng ngồi hai đầu ghế có $2!$ cách xếp. Số cách xếp 3 bạn Bình, Chi, Lệ vào 3 ghế còn lại là một hoán vị của 3 phần tử nên có $3!$ cách. Vậy có $2! \cdot 3! = 12$ cách.

Câu 6: Sắp xếp năm bạn học sinh An, Bình, Chi, Dũng, Lệ vào một chiếc ghế dài có 5 chỗ ngồi. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho bạn An và bạn Dũng không ngồi cạnh nhau?

- A. 24. B. 48. C. 72. D. 12.

Lời giải

Chọn C

Số cách xếp 5 bạn vào 5 chỗ trên ghế dài là một hoán vị của 5 phần tử nên có $5! = 120$ cách.

Số cách xếp sao cho bạn An và bạn Dũng luôn ngồi cạnh nhau là $2 \cdot 4! = 48$ cách (An và Dũng ngồi cạnh nhau xem như 1 bạn; xếp 4 bạn vào 4 chỗ có $4!$ cách; cách xếp An và Dũng ngồi cạnh nhau là $2! = 2$)

Vậy số cách sắp xếp sao cho bạn An và bạn Dũng không ngồi cạnh nhau là $120 - 48 = 72$ cách.

Câu 7: Có 3 viên bi đen khác nhau, 4 viên bi đỏ khác nhau, 5 viên bi xanh khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các viên bi trên thành một dãy sao cho các viên bi cùng màu ở cạnh nhau?

A. 345600.

B. 725760.

C. 103680.

D. 518400.

Lời giải

Chọn C

Số các hoán vị về màu bi khi xếp thành dãy là $3!$

Số cách xếp 3 viên bi đen khác nhau thành dãy là $3!$

Số cách xếp 4 viên bi đỏ khác nhau thành dãy là $4!$

Số cách xếp 5 viên bi xanh khác nhau thành dãy là $5!$

$\Rightarrow$ Số cách xếp các viên bi trên thành một dãy sao cho các viên bi cùng màu ở cạnh nhau là $3! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5! = 103680$ cách.

Câu 8: Cô dâu và chú rể mời 6 người ra chụp ảnh kỉ niệm, người thợ chụp hình có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho cô dâu, chú rể đứng cạnh nhau.

A. $8! - 7!$.

B. $2 \cdot 7!$.

C. $6 \cdot 7!$.

D. $2! + 6!$.

Lời giải

Chọn B

Khi cô dâu, chú rể đứng cạnh nhau (có thể thay đổi vị trí cho nhau), ta coi đó là một phần tử và đứng với 6 vị khách mời để chụp ảnh nên có $2 \cdot 7!$ cách sắp xếp.

Câu 9: Trên giá sách muốn xếp 20 cuốn sách khác nhau. Có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho tập 1 và tập 2 đặt cạnh nhau.

A. $20! - 18!$.

B. $20! - 19!$.

C. $20! - 18! \cdot 2!$.

D. $19! \cdot 18$.

Lời giải

Chọn D

Sắp xếp 20 cuốn sách trên giá là một hoán vị của 20 phần tử nên ta có $20!$ cách sắp xếp.

Khi hai cuốn tập 1 và tập 2 đặt cạnh nhau (thay đổi vị trí cho nhau), ta coi đó là một phần tử và cùng sắp xếp với 18 cuốn sách còn lại trên giá nên có $2 \cdot 19!$ cách sắp xếp.

Vậy có tất cả $20! - 2 \cdot 19! = 19! \cdot 18$ cách sắp xếp theo yêu cầu bài toán.

Câu 10: Có bao nhiêu cách sắp xếp 4 người vào 4 ghế ngồi được bố trí quanh một bàn tròn?

A. 12.

B. 24.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn D

Chọn 1 người ngồi vào 1 vị trí bất kì. Xếp 3 người còn lại vào 3 ghế trống của bàn là một hoán vị của 3 phần tử nên có $3! = 6$ cách.

Câu 11: Có 4 nữ sinh tên là Huệ, Hồng, Lan, Hương và 4 nam sinh tên là An, Bình, Hùng, Dũng cùng ngồi quanh một bàn tròn có 8 chỗ ngồi. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp biết nam và nữ ngồi xen kẽ nhau?

A. 576.

B. 144.

C. 2880.

D. 1152.

Lời giải

Chọn B

Giả sử các ghế ngồi đánh số từ 1 đến 8.

Chọn 1 bạn bất kì ngồi vào 1 vị trí ngẫu nhiên trên bàn tròn có 1 cách. (Nếu chọn 8 cách thì tức là nhầm với bàn dài). Xếp 3 bạn cùng giới tính còn lại vào 3 ghế (có số ghế cùng tính chẵn hoặc lẻ với bạn đầu) có $3!$ cách.

Xếp 4 bạn còn lại ngồi xen kẽ 4 bạn đã xếp ở trên có $4!$ cách.

Vậy có $3! \cdot 4! = 144$ cách.

Câu 12: Từ các số tự nhiên 1, 2, 3, 4 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau:

A. 4^4 .

B. 24.

C. 1.

D. 42.

Lời giải

Chọn B

Số các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau được tạo thành là một hoán vị của 4 phần tử bằng $4! = 24$.

Dạng 2. Chính hợp

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Từ 10 bông hoa có chủng loại khác nhau và 4 cái lọ khác nhau, có bao nhiêu cách cắm 4 bông hoa vào 4 lọ và mỗi lọ 1 bông hoa?

A. P_{10} .

Hướng dẫn giải

Số cách cắm 4 bông hoa từ 10 bông hoa khác nhau vào 4 lọ khác nhau là một bộ 4 bông hoa có thứ tự.

Ví dụ: Gọi 4 bông hoa được chọn là A, B, C, D và 4 lọ hoa là $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Hai cách cắm sau đây là khác nhau:

α	β	γ	δ
A	B	C	D

α	β	γ	δ
B	A	C	D

Do đó số cách cắm bông theo yêu cầu bài toán là A_{10}^4 .

Ví dụ 2: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể thành lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số khác nhau và trong đó phải có chữ số 1?

Hướng dẫn giải

Cách 1: Đem chữ số 1 xếp trước

– Số cách xếp chữ số 1 vào 1 trong 4 vị trí là: 4 (cách)

– Số cách xếp 4 chữ số còn lại vào 3 vị trí còn lại là A_4^3 (cách)

Vậy số các số tự nhiên cần tìm là: $4 \times A_4^3 = 96$ (số).

Cách 2: Dùng phần bù:

- Số các số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau (không cần biết có hay không có chữ số 1) lấy từ $\{1,2,3,4,5\}$ là $A_5^4 = 120$ (số)
- Phần bù của tập các số phải có chữ số 1 là tập các số không có chữ số 1.

Số các số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau (và không có chữ số 1) lấy từ $\{2,3,4,5\}$ là $P_4 = 24$ (số)

Vậy số các số tự nhiên cần tìm là: $120 - 24 = 96$ (số).

Ví dụ 3: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập thành bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số khác nhau đôi một?

Hướng dẫn giải

Do đó số cách thành lập các số tự nhiên theo yêu cầu bài toán là số các chỉnh hợp chập 3 của 6 (chữ số): A_6^3 .

Ví dụ 4: Từ 10 điểm phân biệt và không có ba điểm nào thẳng hàng, có thể lập được bao nhiêu vectơ?

Hướng dẫn giải

Để có một vectơ ta cần có 2 điểm phân biệt và để ý hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$ là khác nhau. Do vậy số cách thành lập các vectơ là số cách chọn 2 điểm có thứ tự từ 10 điểm của đề bài.

Nghĩa là số cách thành lập các vectơ là số các chỉnh hợp chập 2 của 10 (điểm): A_{10}^2 .

Ví dụ 5: Một lớp có 30 học sinh gồm 20 nam và 10 nữ. Có bao nhiêu cách chọn 2 học sinh nam thi toán, lý và 2 học sinh nữ thi hóa, sinh? (Mỗi học sinh thi một môn).

Hướng dẫn giải

Số cách chọn 2 trong 20 nam thi toán, lý là A_{20}^2 (cách)

Số cách chọn 2 trong 10 nữ thi hóa, sinh là A_{10}^2 (cách)

Vậy số cách chọn theo yêu cầu bài toán là $A_{20}^2 \times A_{10}^2$ (cách).

Ví dụ 6: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể thành lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số trong đó phải có chữ số lẻ?

Hướng dẫn giải

- Số các số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau (không cần biết có hay không có chữ số lẻ) lấy từ các chữ số $\{1,2,3,4,5,6\}$ là $A_6^3 = 120$ (số).
- Số các số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau (cả 3 chữ số đều chẵn) lấy từ $\{2,4,6\}$ là $P_3 = 6$ (số)

Vậy số các số tự nhiên cần tìm là: $120 - 6 = 114$ (số).

Ví dụ 7: Có bao nhiêu số có hai chữ số, mà các chữ số đều là số lẻ và khác nhau?

Hướng dẫn giải

Xét tập $A = \{1,3,5,7,9\}$; có 5 phần tử.

Số $n = \overline{ab}$; $a, b \in A, a \neq b$. Vậy có $A_5^2 = 20$.

Ví dụ 8: Có thể có tối đa là bao nhiêu số điện thoại gồm 7 chữ số và các chữ số đều khác nhau?

Hướng dẫn giải

Xét tập $A = \{0,1,2,\dots,9\}$.

Số điện thoại $x = abcdefg$. Số $a \in A$ có 10 cách chọn. Vì $b \neq a$ và $b \in A$ nên có 9 cách chọn. Vậy có: $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 604800$ cách.

Cách giải khác: Các số a, b, c, d, e, f khác nhau từng đôi một nên ta có số cách chọn là $A_{10}^7 = 604800$.

Nhận xét: Các bài toán dùng quy tắc nhân, bạn cũng nên dùng công thức tính số chỉnh hợp chập k của n, A_n^k cho nhanh.

Ví dụ 9: Có 10 môn học và một ngày học 5 tiết. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các môn học trong ngày đó?

Hướng dẫn giải

Chọn 5 môn trong 10 môn cho ngày hôm đó, sau đó thay đổi thứ tự 5 môn học, ta có: $A_{10}^5 = 30240$.

Ví dụ 10: Cho tập $A = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$. Có thể lập được bao nhiêu số có 5 chữ số, các chữ số đôi một khác nhau và các chữ số 2; 4; 5 đồng thời có mặt?

- A. 1800. B. 3600.
C. 10800. D. 4320.

Hướng dẫn giải

Xét ba vị trí trong 5 vị trí của số có 5 chữ số cần tìm để cho các chữ số 2, 4, 5. Ta có A_5^3 cách chọn.

Còn lại hai vị trí cho các số khác trong $A \setminus \{2, 4, 5\}$. Ta còn 6 chữ số. Vậy có A_6^2 cách chọn.

Cuối cùng, ta được: $A_5^3 \cdot A_6^2 = 1800$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Có bao nhiêu cách xếp khác nhau cho 6 người ngồi vào 4 chỗ trên một bàn dài?

- A. 15. B. 720. C. 30. D. 360.

Lời giải

Chọn D

Số cách xếp khác nhau cho 6 người ngồi vào 4 chỗ trên một bàn dài là một chỉnh hợp chập 4 của 6 phần tử. Suy ra có $A_6^4 = 360$ cách.

Câu 2: Giả sử có bảy bông hoa khác nhau và ba lọ hoa khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách cắm ba bông hoa vào ba lọ đã cho (mỗi lọ cắm một bông)?

- A. 35. B. 30240. C. 210. D. 21.

Lời giải

Chọn C

Số cách xếp bảy bông hoa khác nhau vào ba lọ hoa khác nhau là một chỉnh hợp chập 3 của 7 phần tử. Suy ra có $A_7^3 = 210$ cách.

Câu 3: Có bao nhiêu cách cắm 3 bông hoa vào 5 lọ khác nhau (mỗi lọ cắm không quá một bông)?

- A. 60. B. 10. C. 15. D. 720.

Lời giải

Chọn A

Số cách cắm 3 bông hoa vào ba lọ hoa khác nhau là một chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử. Suy ra có $A_5^3 = 60$ cách.

Câu 4: Có bao nhiêu cách mắc nối tiếp 4 bóng đèn được chọn từ 6 bóng đèn khác nhau?

- A. 15. B. 360. C. 24. D. 17280.

Lời giải

Chọn B

Số cách mắc nối tiếp 4 bóng đèn được chọn từ 6 bóng đèn khác nhau là một chỉnh hợp chập 4 của 6 phần tử. Suy ra có $A_6^4 = 360$ cách.

Câu 5: Trong mặt phẳng cho một tập hợp gồm 6 điểm phân biệt. Có bao nhiêu vector khác vector $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối thuộc tập hợp điểm này?

- A. 15. B. 12. C. 1440. D. 30.

Lời giải

Chọn D

Mỗi cặp sắp thứ tự gồm hai điểm (A, B) cho ta một vector có điểm đầu A và điểm cuối B và ngược lại. Như vậy, mỗi vector có thể xem là một chỉnh hợp chập 2 của tập hợp 6 điểm đã cho. Suy ra có $A_6^2 = 30$ cách.

Câu 6: Trong trận chung kết bóng đá phải phân định thắng thua bằng đá luân lưu 11 mét. Huấn luyện viên mỗi đội cần trình với trọng tài một danh sách sắp thứ tự 5 cầu thủ trong số 11 cầu thủ để đá luân lưu 5 quả 11 mét. Hãy tính xem huấn luyện viên của mỗi đội có bao nhiêu cách lập danh sách gồm 5 cầu thủ.

- A. 462. B. 55. C. 55440. D. $11!.5!$

Lời giải

Chọn C

Số cách lập danh sách gồm 5 cầu thủ đá 5 quả 11 mét là số các chỉnh hợp chập 5 của 11 phần tử. Vậy có $A_{11}^5 = 55440$.

Câu 7: Giả sử có 8 vận động viên tham gia chạy thi. Nếu không kể trường hợp có hai vận động viên về đích cùng lúc thì có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra đối với các vị trí nhất, nhì, ba?

- A. 336. B. 56. C. 24. D. 120.

Lời giải

Chọn A

Số kết quả có thể xảy ra đối với các vị trí nhất, nhì, ba là số các chỉnh hợp chập 3 của 8 phần tử. Vậy có $A_8^3 = 336$.

Câu 8: Trong một ban chấp hành đoàn gồm 7 người, cần chọn ra 3 người vào ban thường vụ. Nếu cần chọn ban thường vụ gồm ba chức vụ Bí thư, Phó bí thư, Ủy viên thường vụ thì có bao nhiêu cách chọn?

- A. 210. B. 200. C. 180. D. 150.

Lời giải

Chọn A

Số cách chọn ban thường vụ gồm ba chức vụ Bí thư, Phó bí thư, Ủy viên thường vụ từ 7 người là số các chỉnh hợp chập ba của bảy phần tử. Vậy có $A_7^3 = 210$.

Câu 9: Một cuộc thi có 15 người tham dự, giả thiết rằng không có hai người nào có điểm bằng nhau. Nếu kết quả của cuộc thi là việc chọn ra các giải nhất, nhì, ba thì có bao nhiêu kết quả có thể?

A. 2730.

B. 2703.

C. 2073.

D. 2370.

Lời giải

Chọn A

Nếu kết quả của cuộc thi là việc chọn ra các giải nhất, nhì, ba thì mỗi kết quả ứng với một chỉnh hợp chập ba của 15 phần tử, do đó ta có: $A_{15}^3 = 2730$ kết quả.

Câu 10: Trong một dạ hội cuối năm ở một cơ quan, ban tổ chức phát ra 100 vé xổ số đánh số từ 1 đến 100 cho 100 người. Xổ số có 4 giải: 1 giải nhất, 1 giải nhì, 1 giải ba, 1 giải tư. Kết quả là việc công bố ai trúng giải nhất, giải nhì, giải ba, giải tư. Hỏi có bao nhiêu kết quả có thể?

A. 94109040.

B. 94109400.

C. 94104900.

D. 94410900.

Lời giải

Chọn B

Mỗi kết quả ứng với một chỉnh hợp chập 4 của 100 phần tử, do đó ta có: $A_{100}^4 = 94109400$ kết quả.

Câu 11: Trong một dạ hội cuối năm ở một cơ quan, ban tổ chức phát ra 100 vé xổ số đánh số từ 1 đến 100 cho 100 người. Xổ số có 4 giải: 1 giải nhất, 1 giải nhì, 1 giải ba, 1 giải tư. Kết quả là việc công bố ai trúng giải nhất, giải nhì, giải ba, giải tư. Hỏi có bao nhiêu kết quả có thể nếu biết rằng người giữ vé số 47 được giải nhất?

A. 944109.

B. 941409.

C. 941094.

D. 941049.

Lời giải

Chọn C

Vì người giữ vé số 47 trúng giải nhất nên mỗi kết quả ứng với một chỉnh hợp chập 3 của 99 phần tử, do đó ta có: $A_{99}^3 = 941094$ kết quả.

Câu 12: Trong một dạ hội cuối năm ở một cơ quan, ban tổ chức phát ra 100 vé xổ số đánh số từ 1 đến 100 cho 100 người. Xổ số có 4 giải: 1 giải nhất, 1 giải nhì, 1 giải ba, 1 giải tư. Kết quả là việc công bố ai trúng giải nhất, giải nhì, giải ba, giải tư. Hỏi có bao nhiêu kết quả có thể nếu biết rằng người giữ vé số 47 trúng một trong bốn giải?

A. 3766437.

B. 3764637.

C. 3764367.

D. 3764376.

Lời giải

Chọn D

Nếu người giữ vé số 47 trúng một trong bốn giải thì:

- Người giữ vé số 47 có 4 cách chọn giải.
- Ba giải còn lại ứng với một chỉnh hợp chập 3 của 99 phần tử, do đó ta có $A_{99}^3 = 941094$ cách.

Vậy số kết quả bằng $4 \times A_{99}^3 = 4 \times 941094 = 3764376$ kết quả.

Câu 13: Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được lập từ các số 1, 2, ..., 9?

- A. 15120. B. 9^5 . C. 5^9 . D. 126.

Lời giải

Chọn A

Mỗi cách xếp số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau từ các số 1, 2, ..., 9 là một chỉnh hợp chập 5 của 9 phần tử. Vậy có $A_9^5 = 15120$.

Câu 14: Cho tập $A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Số các số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau lấy ra từ tập A là?

- A. 30420. B. 27162. C. 27216. D. 30240.

Lời giải

Chọn C

Gọi số cần tìm là $\overline{abcde}, a \neq 0$.

- Chọn a có 9 cách.
- Chọn b, c, d, e từ 9 số còn lại có $A_9^4 = 3024$ cách.

Vậy có $9 \times 3024 = 27216$.

Câu 15: Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 7 chữ số khác nhau đôi một, trong đó chữ số 2 đứng liền giữa hai chữ số 1 và 3?

- A. 249. B. 7440. C. 3204. D. 2942.

Lời giải

Chọn B

Ta chia thành các trường hợp sau:

- TH1: Nếu số 123 đứng đầu thì có A_7^4 số.
- TH2: Nếu số 321 đứng đầu thì có A_7^4 số.
- TH3: Nếu số 123;321 không đứng đầu

Khi đó có 6 cách chọn số đứng đầu (khác 0;1;2;3), khi đó còn 6 vị trí có 4 cách xếp 3 số 321 hoặc 123, còn lại 3 vị trí có A_6^3 cách chọn các số còn lại. Do đó trường hợp này có $6.2.4.A_6^3 = 5760$

Suy ra tổng các số thoả mãn yêu cầu là $2A_7^4 + 5760 = 7440$.

Dạng 3. Tổ hợp

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho tập M có 10 phần tử. Số tập con gồm 2 phần tử của M là:

Hướng dẫn giải

Số tập con gồm 2 phần tử của M là số cách chọn 2 phần tử bất kì trong 10 phần tử của M . Do đó số tập con gồm hai phần tử của M là C_{10}^2 .

Ví dụ 2: Có bao nhiêu cách phân công hai bạn từ một tổ có 10 bạn để làm trực nhật?

Hướng dẫn giải

Kết quả của sự phân công một nhóm gồm 2 bạn là một tổ hợp chập 2 của 10. Vậy số cách phân công là: $C_{10}^2 = \frac{10!}{2!.8!} = 45$.

Ví dụ 3: Số đường chéo của một đa giác lồi 15 cạnh là:

Hướng dẫn giải

Số đoạn thẳng có hai đầu mút là hai đỉnh của đa giác đã cho là C_{15}^2 , trong đó số cạnh của đa giác là 15.

Vậy số các đường chéo là: $C_{15}^2 - 15 = 105 - 15 = 90$.

Ví dụ 4: Có bao nhiêu cách phân công 8 bạn học sinh thành hai nhóm: một nhóm có 5 bạn, nhóm kia có 3 bạn?

Hướng dẫn giải

Số cách phân nhóm 5 bạn trong số 8 bạn học sinh là C_8^5 .

Sau khi phân nhóm 5 bạn sẽ còn lại 3 bạn được phân công vào nhóm còn lại.

Vì vậy sẽ có $C_8^5 = 56$ cách.

Ví dụ 5: Lớp 11 của một trường THPT có 45 học sinh. Cần chọn 4 bạn vào Đội Cờ đỏ và 3 bạn vào Ban Chấp hành Đoàn. Số cách chọn là:

Hướng dẫn giải

Chọn 4 bạn trong số 45 bạn vào Đội Cờ đỏ nên có C_{45}^4 cách chọn. Sau khi chọn 4 bạn rồi, chọn 3 bạn trong số $45 - 4 = 41$ bạn còn lại vào Ban Chấp hành Đoàn nên có C_{41}^3 cách chọn. Từ đó, theo quy tắc nhân có $C_{45}^4 \times C_{41}^3$ cách chọn.

Ví dụ 6: Từ 10 điểm phân biệt trong mặt phẳng và không có ba điểm nào thẳng hàng, có thể vẽ được bao nhiêu tam giác?

Hướng dẫn giải

Từ 3 điểm không thẳng hàng ta có một tam giác và để ý các tam giác ABC , BCA , CAB ,... là giống nhau.

Do đó số tam giác có thể vẽ được là số cách chọn 3 điểm không có thứ tự từ 10 điểm của đề bài. Vậy đáp số là C_{10}^3 .

Ví dụ 7: Số đường chéo của một đa giác có 10 cạnh là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Một đa giác có 10 cạnh thì có 10 đỉnh.

Số đoạn thẳng được thành lập từ 10 đỉnh của đa giác là C_{10}^2

Số đường chéo của đa giác là số đoạn thẳng vừa tìm ở trên và bỏ đi số cạnh của đa giác.

Vậy số đường chéo cần tìm là: $C_{10}^2 - 10 = 35$ (đường chéo).

Ví dụ 8: Một người nông dân có 10 cây giống khác nhau gồm 6 cây xoài và 4 cây mít. Người ấy muốn chọn 4 cây để trồng sao cho phải có đủ 2 loại xoài và mít. Hỏi người ấy có mấy cách để chọn?

Hướng dẫn giải

Nhận xét: Phải có xoài và mít là phải có không cụ thể. Phải có cây mít nào? Và phải có cây xoài nào?

Do đó ta dùng cách chia trường hợp như sau:

TH1: 1 cây xoài và 3 cây mít.

Số cách chọn 1 trong 6 cây xoài là 6 (cách)

Số cách chọn 3 trong 4 cây mít là $C_4^3 = 4$ (cách)

Suy ra TH1 có $6 \times 4 = 24$ (cách).

TH2: 2 cây xoài và 2 cây mít.

Tương tự, ta có: $C_6^2 \times C_4^2 = 90$ (cách)

TH3: 3 cây xoài và 1 cây mít.

Tương tự ta có: $C_6^3 \times 4 = 80$ (cách)

Vậy số cách chọn theo yêu cầu bài toán là: $24 + 90 + 8 = 194$ (cách).

Ví dụ 9: Từ 3 bông hồng vàng, 4 bông hồng trắng và 5 bông hồng đỏ (các bông xem như đôi một khác nhau), có bao nhiêu cách chọn một bó hoa gồm 5 bông trong đó có đúng 1 bông hồng đỏ?

A. 175.

B. 4200.

C. 1650.

D. 787.

Hướng dẫn giải

Số cách chọn 1 trong 5 bông hồng đỏ là 5 (cách).

Số cách chọn 4 trong 7 bông hồng (vàng và trắng) là: $C_7^4 = 35$ (cách)

Vậy số cách chọn một bó bông theo yêu cầu bài toán là: $5 \times 35 = 175$ (cách).

Ví dụ 10: Một lớp có 20 học sinh trong đó có 15 nam và 5 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập một đội gồm 4 học sinh trong đó có ít nhất một nữ?

Hướng dẫn giải

Cách 1: Chia trường hợp

TH1: 1 nữ và 3 nam.

Số cách chọn 1 trong 5 nữ là 5 (cách)

Số cách chọn 3 trong 15 nam là $C_{15}^3 = 455$ (cách)

Suy ra TH1 có $5 \times 455 = 2275$ (cách).

TH2: 2 nữ và 2 nam.

Tương tự ta có: $C_5^2 \times C_{15}^2 = 1050$ (cách).

TH3: 3 nữ và 1 nam.

Tương tự ta có: $C_5^3 \times 15 = 150$ (cách).

TH4: 4 nữ.

Tương tự ta có: $C_5^4 = 5$ (cách).

Vậy số cách chọn theo yêu cầu bài toán là:

$2275 + 1050 + 150 + 5 = 3480$ (cách).

Cách 2: Dùng phần bù

- Số cách chọn 4 học sinh không phân biệt nam, nữ từ 20 học sinh là: $C_{20}^4 = 4845$ (cách)

- Số cách chọn 4 học sinh nam từ 15 học sinh nam là: $C_{15}^4 = 1365$ (cách)

Vậy số cách chọn theo yêu cầu bài toán là: $4845 - 1365 = 3480$ (cách).

Ví dụ 11: Có 20 quyển sách khác nhau gồm 15 quyển sách toán và 5 quyển sách lý. Có bao nhiêu cách chọn 5 quyển sách toán và 2 quyển sách lý để xếp có thứ tự lên 1 kệ sách dài?

Hướng dẫn giải

- Số cách chọn 5 trong 15 quyển sách toán là $C_{15}^5 = 3003$ (cách)
- Số cách chọn 2 trong 5 quyển sách lý là $C_5^2 = 10$ (cách)
- Số cách xếp 7 quyển sách toán, lý vừa chọn lên kệ sách dài là: $P_7 = 5040$ (cách). Vậy số cách xếp theo yêu cầu bài toán là:

$$3003 \times 10 \times 5040 = 151351200 \text{ (cách).}$$

Ví dụ 12: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể thành lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau trong đó có 3 chữ số lẻ và 2 chữ số chẵn?

Hướng dẫn giải

- Số cách chọn 3 trong 5 chữ số lẻ $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ là: $C_5^3 = 10$ (cách)
- Số cách chọn 2 trong 4 chữ số chẵn $\{2, 4, 6, 8\}$ là: $C_4^2 = 6$ (cách)
- Số cách xếp 5 chữ số vừa chọn vào 5 vị trí là: $P_5 = 120$ (cách)

Vậy số các số tự nhiên cần tìm là: $10 \times 6 \times 20 = 7200$ (số)

Ví dụ 13: Một học sinh có 10 cây viết khác nhau. Học sinh đó có bao nhiêu cách chọn 3 trong 10 cây viết đó để đi học?

Hướng dẫn giải

Gọi 3 cây viết được chọn là A, B, C không có thứ tự, nghĩa là A, B, C hoặc B, C, A hoặc C, A, B, ... là giống nhau.

Do đó đáp số là C_{10}^3 .

Ví dụ 14: Một lớp có 30 học sinh. Giáo viên chủ nhiệm có bao nhiêu cách chọn 3 học sinh làm ban cán sự lớp?

Hướng dẫn giải

Đề bài chỉ yêu cầu chọn 3 học sinh làm ban cán sự lớp mà không phân công cụ thể công việc của 3 học sinh đó.

Do vậy 3 học sinh được chọn không có thứ tự. Nghĩa là số cách chọn theo yêu cầu bài toán là C_{30}^3 (cách).

Ví dụ 15: Một hộp đựng 10 quả cầu khác nhau gồm 5 quả cầu trắng và 5 quả cầu đen. Có bao nhiêu cách chọn 2 quả cầu trắng và 2 quả cầu đen từ hộp đó?

Hướng dẫn giải

Số cách chọn 2 trong 5 quả cầu trắng là C_5^2 (cách).

Số cách chọn 2 trong 5 quả cầu đen là C_5^2 (cách).

Vậy số cách chọn theo yêu cầu bài toán là $C_5^2 \times C_5^2$ (cách).

Ví dụ 16: Một lớp có 30 học sinh gồm 20 nam và 10 nữ. Có bao nhiêu cách chọn 6 học sinh nam thi bóng chuyền và 2 học sinh nữ thi cầu lông?

Hướng dẫn giải

Số cách chọn 6 trong 20 học sinh nam thi bóng chuyền là C_{20}^6 (cách).

Số cách chọn 2 trong 10 học sinh nữ thi cầu lông là C_{10}^2 (cách).

Vậy số cách chọn theo yêu cầu bài toán là $C_{20}^6 \times C_{10}^2$ (cách).

Câu 17: Một lớp có 30 học sinh gồm 20 nam và 10 nữ. Có bao nhiêu cách chọn 3 học sinh nam thi toán và 2 học sinh nữ thi lý, hóa? (Mỗi học sinh thi một môn).

Hướng dẫn giải

Số cách chọn 3 trong 20 học sinh nam thi toán là C_{20}^3 (cách)

Số cách chọn 2 trong 10 học sinh nữ thi lý, hóa là A_{10}^2 (cách)

Vậy số cách chọn theo yêu cầu bài toán là $C_{20}^3 \times A_{10}^2$ (cách).

Câu 18: Một lớp có 30 học sinh. Có bao nhiêu cách chọn 3 học sinh tham gia văn nghệ và 2 học sinh tham gia phong trào thể thao của nhà trường?

Hướng dẫn giải

Số cách chọn 3 trong 30 học sinh tham gia văn nghệ là C_{30}^3 (cách)

Như vậy đã chọn được 3 học sinh và chỉ còn lại 27 học sinh.

Số cách chọn 2 trong 27 học sinh còn lại để tham gia phong trào thể thao là C_{27}^2 (cách). Vậy số cách chọn theo yêu cầu bài toán là $C_{30}^3 \times C_{27}^2$ (cách).

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Một lớp học có 40 học sinh gồm 25 nam và 15 nữ. Chọn 3 học sinh để tham gia vệ sinh công cộng toàn trường, hỏi có bao nhiêu cách chọn như trên?

A. 9880.

B. 59280.

C. 2300.

D. 455.

Lời giải

Chọn A

Nhóm học sinh 3 người được chọn (không phân biệt nam, nữ - công việc) là một tổ hợp chập 3 của 40 (học sinh).

Vì vậy, số cách chọn nhóm học sinh là $C_{40}^3 = \frac{40!}{37! \cdot 3!} = 9880$.

Câu 2: Một tổ có 10 người gồm 6 nam và 4 nữ. Cần lập một đoàn đại biểu gồm 5 người, hỏi có bao nhiêu cách lập?

A. 25.

B. 252.

C. 50.

D. 455.

Lời giải

Chọn D

Mỗi đoàn được lập là một tổ hợp chập 5 của 10 (người). Vì vậy, số đoàn đại biểu có thể có là $C_{10}^5 = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = 252$.

Câu 3: Trong một ban chấp hành đoàn gồm 7 người, cần chọn 3 người trong ban thường vụ. Nếu không có sự phân biệt về chức vụ của 3 người trong ban thường vụ thì có bao nhiêu cách chọn?

A. 25.

B. 42.

C. 50.

D. 35.

Lời giải

Chọn D

Vì không xét đến sự phân biệt chức vụ của 3 người trong ban thường vụ nên mỗi cách chọn ứng với một tổ hợp chập 3 của 7 phần tử.

Như vậy, ta có $C_7^3 = \frac{7!}{2!.5!} = 35$ cách chọn ban thường vụ.

Câu 4: Một cuộc thi có 15 người tham dự, giả thiết rằng không có hai người nào có điểm bằng nhau. Nếu kết quả cuộc thi và việc chọn ra 4 người có điểm cao nhất thì có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra?

- A. 1635. B. 1536. C. 1356. D. 1365.

Lời giải

Chọn D

Nếu kết quả cuộc thi là việc chọn ra 4 người có điểm cao nhất thì mỗi kết quả ứng với một tổ hợp chập 4 của 15 phần tử.

Như vậy, ta có $C_{15}^4 = 1365$ kết quả.

Câu 5: Một hộp đựng 5 viên bi màu xanh, 7 viên bi màu vàng. Có bao nhiêu cách lấy ra 6 viên bi bất kỳ?

- A. 665280. B. 924. C. 7. D. 942.

Lời giải

Chọn B

Số cách lấy 6 viên bi bất kỳ (không phân biệt màu) trong 12 viên bi là một tổ hợp chập 6 của 12 (viên bi). Vậy ta có $C_{12}^6 = 924$ cách lấy.

Câu 6: Có bao nhiêu cách lấy hai con bài từ cỗ bài tú lơ khơ gồm 52 con?

- A. 104. B. 450. C. 1326. D. 2652.

Lời giải

Chọn C

Mỗi cách lấy 2 con bài từ 52 con là một tổ hợp chập 2 của 52 phần tử.

Vậy số cách lấy hai con bài từ cỗ bài tú lơ khơ 52 con là $C_{52}^2 = 1326$.

Câu 7: Có 15 đội bóng đá thi đấu theo thể thức vòng tròn tính điểm. Hỏi cần phải tổ chức bao nhiêu trận đấu?

- A. 100. B. 105. C. 210. D. 200.

Lời giải

Chọn B

Lấy hai đội bất kỳ trong 15 đội bóng tham gia thi đấu ta được một trận đấu.

Vậy số trận đấu chính là một tổ hợp chập 2 của 15 phần tử (đội bóng đá).

Như vậy, ta có $C_{15}^2 = \frac{15!}{13!.2!} = 105$ trận đấu.

Câu 8: Có bao nhiêu cách cắm 3 bông hoa giống nhau vào 5 lọ khác nhau (mỗi lọ cắm không quá một bông)?

- A. 10. B. 30. C. 6. D. 60.

Lời giải

Chọn A

Cắm 3 bông hoa giống nhau, mỗi bông vào 1 lọ nên ta sẽ lấy 3 lọ bất kỳ trong 5 lọ khác nhau để cắm bông. Vậy số cách cắm bông chính là một tổ hợp chập 3 của 5 phần tử (lọ hoa). Như vậy, ta có $C_5^3 = \frac{5!}{2!.3!} = 10$ cách.

Câu 9: Trong mặt phẳng cho tập hợp P gồm 2018 điểm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu đoạn thẳng mà hai đầu mút thuộc P ?

- A. $\frac{2018!}{2016!}$. B. $\frac{2016!}{2!}$. C. $\frac{2018!}{2!}$. D. $\frac{2018!}{2016!.2!}$.

Lời giải

Chọn D

Với hai điểm bất kỳ trong n điểm ta luôn được một đoạn thẳng.

Vậy số đoạn thẳng cần tìm chính là một tổ hợp chập 2 của 2018 phần tử (điểm).

Như vậy, ta có $C_{2018}^2 = \frac{2018!}{2016!.2!}$ đoạn thẳng.

Câu 10: Cho 10 điểm, không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng khác nhau tạo bởi 2 trong 10 điểm nói trên?

- A. 90. B. 20. C. 45. D. Một số khác.

Lời giải

Chọn C

Với hai điểm bất kỳ trong n điểm ta luôn được một đoạn thẳng.

Vậy số đoạn thẳng cần tìm chính là một tổ hợp chập 2 của 10 phần tử (điểm).

Như vậy, ta có $C_{10}^2 = \frac{10!}{8!.2!} = 45$ đường thẳng.

Câu 11: Trong mặt phẳng, cho 6 điểm phân biệt sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tam giác mà các đỉnh của nó thuộc tập điểm đã cho?

- A. 15. B. 20. C. 60. D. Một số khác.

Lời giải

Chọn B

Cứ 3 điểm phân biệt không thẳng hàng tạo thành một tam giác.

Lấy 3 điểm bất kỳ trong 6 điểm phân biệt thì số tam giác cần tìm chính là một tổ hợp chập 3 của 6 phần tử (điểm). Như vậy, ta có $C_6^3 = 20$ tam giác.

Câu 12: Cho 10 điểm phân biệt $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ trong đó có 4 điểm A_1, A_2, A_3, A_4 thẳng hàng, ngoài ra không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh được lấy trong 10 điểm trên?

- A. 96 tam giác. B. 60 tam giác. C. 116 tam giác. D. 80 tam giác.

Lời giải

Chọn C

Số cách lấy 3 điểm từ 10 điểm phân biệt là $C_{10}^3 = 120$.

Số cách lấy 3 điểm bất kỳ trong 4 điểm A_1, A_2, A_3, A_4 là $C_4^3 = 4$.

Khi lấy 3 điểm bất kỳ trong 4 điểm A_1, A_2, A_3, A_4 thì sẽ không tạo thành tam giác.

Như vậy, số tam giác tạo thành $120 - 4 = 116$ tam giác.

Câu 13: Cho mặt phẳng chứa đa giác đều (H) có 20 cạnh. Xét tam giác có 3 đỉnh được lấy từ các đỉnh của (H) . Hỏi có bao nhiêu tam giác có đúng 1 cạnh là cạnh của (H) .

- A. 1440. B. 360. C. 1120. D. 816.

Lời giải

Chọn B

Lấy một cạnh bất kỳ của (H) làm cạnh của một tam giác có 20 cách.

Lấy một điểm bất kỳ trong 18 đỉnh còn lại của (H) (trừ đi hai đỉnh của một cạnh) có 18 cách. Vậy số tam giác cần tìm là $20 \cdot 18 = 360$.

Câu 14: Cho hai đường thẳng song song d_1 và d_2 . Trên d_1 lấy 17 điểm phân biệt, trên d_2 lấy 20 điểm phân biệt. Tính số tam giác mà có các đỉnh được chọn từ 37 điểm này.

- A. 5690. B. 5960. C. 5950. D. 5590.

Lời giải

Chọn C

Một tam giác được tạo bởi ba điểm phân biệt nên ta xét:

TH1. Chọn 1 điểm thuộc d_1 và 2 điểm thuộc $d_2 \longrightarrow$ có $C_{17}^1 \cdot C_{20}^2$ tam giác.

TH2. Chọn 2 điểm thuộc d_1 và 1 điểm thuộc $d_2 \longrightarrow$ có $C_{17}^2 \cdot C_{20}^1$ tam giác.

Như vậy, ta có $C_{17}^1 \cdot C_{20}^2 + C_{17}^2 \cdot C_{20}^1 = 5950$ tam giác cần tìm.

Câu 15: Số giao điểm tối đa của 5 đường tròn phân biệt là:

- A. 10. B. 20. C. 18. D. 22.

Lời giải

Chọn B

Hai đường tròn cho tối đa hai giao điểm. Và 5 đường tròn phân biệt cho số giao điểm tối đa khi 2 đường tròn bất kỳ trong 5 đường tròn đôi một cắt nhau.

Vậy số giao điểm tối đa của 5 đường tròn phân biệt là $2.C_5^2 = 20$.

Câu 16: Số giao điểm tối đa của 10 đường thẳng phân biệt là:

- A. 50. B. 100. C. 120. D. 45.

Lời giải**Chọn D**

Số giao điểm tối đa của 10 đường thẳng phân biệt khi không có ba đường thẳng nào đồng quy và không có hai đường thẳng nào song song.

Và cứ hai đường thẳng ta có một giao điểm suy ra số giao điểm chính là số cặp đường thẳng bất kỳ được lấy từ 10 đường thẳng phân biệt. Như vậy, ta có $C_{10}^2 = 45$ giao điểm.

Câu 17: Với đa giác lồi 10 cạnh thì số đường chéo là

- A. 90. B. 45. C. 35. D. Một số khác.

Lời giải**Chọn C**

Đa giác lồi 10 cạnh thì có 10 đỉnh. Lấy hai điểm bất kỳ trong 10 đỉnh của đa giác lồi ta được số đoạn thẳng gồm cạnh và đường chéo của đa giác lồi.

Vậy số đường chéo cần tìm là $C_{10}^2 - 10 = \frac{10!}{8!.2!} - 10 = 35$.

Câu 18: Cho đa giác đều n đỉnh, $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 3$. Tìm n biết rằng đa giác đã cho có 135 đường chéo.

- A. $n = 15$. B. $n = 27$. C. $n = 8$. D. $n = 18$.

Lời giải**Chọn D**

Đa giác lồi n đỉnh thì có n cạnh. Nếu vẽ tất cả các đoạn thẳng nối từng cặp trong n đỉnh này thì có một bộ gồm các cạnh và các đường chéo.

Vậy để tính số đường chéo thì lấy tổng số đoạn thẳng dựng được trừ đi số cạnh, với

- ☐ Tất cả đoạn thẳng dựng được là bằng cách lấy ra 2 điểm bất kỳ trong n điểm, tức là số đoạn thẳng chính là số tổ hợp chập 2 của n phần tử.

Như vậy, tổng số đoạn thẳng là C_n^2 .

- ☐ Số cạnh của đa giác lồi là n .

Suy ra số đường chéo của đa giác đều n đỉnh là $C_n^2 - n = \frac{n(n-3)}{2}$.

Theo bài ra, ta có $\begin{cases} n \geq 3 \\ \frac{n(n-3)}{2} = 135 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 3 \\ n^2 - 3n - 270 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow n = 18.$

Câu 19: Trong mặt phẳng có bao nhiêu hình chữ nhật được tạo thành từ bốn đường thẳng phân biệt song song với nhau và năm đường thẳng phân biệt vuông góc với bốn đường thẳng song song đó.

- A. 60. B. 48. C. 20. D. 36.

Lời giải

Chọn B

Cứ 2 đường thẳng song song với 2 đường thẳng vuông góc với chúng cắt nhau tại bốn điểm là 4 đỉnh của hình chữ nhật.

Vậy lấy 2 đường thẳng trong 4 đường thẳng song song và lấy 2 đường thẳng trong 5 đường thẳng vuông góc với 4 đường đó ta được số hình chữ nhật là $C_4^2 \cdot C_5^2 = 60$.

Câu 20: Một lớp có 15 học sinh nam và 20 học sinh nữ. Có bao nhiêu cách chọn 5 bạn học sinh sao cho trong đó có đúng 3 học sinh nữ?

- A. 110790. B. 119700. C. 117900. D. 110970.

Lời giải

Chọn B

Số cách chọn 3 học sinh nữ là: $C_{20}^3 = 1140$ cách.

Số cách chọn 2 bạn học sinh nam là: $C_{15}^2 = 105$ cách.

Số cách chọn 5 bạn thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $1140 \times 105 = 119700$.

Câu 21: Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau và khác 0 mà trong mỗi số luôn luôn có mặt hai chữ số chẵn và hai chữ số lẻ?

- A. $4!C_4^1C_5^1$. B. $3!C_3^2C_5^2$. C. $4!C_4^2C_5^2$. D. $3!C_4^2C_5^2$.

Lời giải

Chọn C

Số cách chọn 2 số chẵn trong tập hợp $\{2;4;6;8\}$ là: C_4^2 cách.

Số cách chọn 2 số lẻ trong tập hợp $\{1;3;5;7;9\}$ là: C_5^2 cách.

Số cách hoán vị 4 chữ số đã chọn lập thành 1 số tự nhiên là: $4!$ cách.

Vậy có $4! \times C_4^2 \times C_5^2$ số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 22: Một túi đựng 6 bi trắng, 5 bi xanh. Lấy ra 4 viên bi từ túi đó. Hỏi có bao nhiêu cách lấy mà 4 viên bi lấy ra có đủ hai màu.

- A. 300. B. 310. C. 320. D. 330.

Lời giải

Chọn B

Các viên bi lấy ra có đủ cả 2 màu nên ta có các trường hợp:

Số bi trắng	Số bi xanh	Số cách chọn
1	3	$C_6^1 \times C_5^3$
2	2	$C_6^2 \times C_5^2$
3	1	$C_6^3 \times C_5^1$

Vậy có tất cả $C_6^1 \times C_5^3 + C_6^2 \times C_5^2 + C_6^3 \times C_5^1 = 310$ cách lấy thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2. Dùng phần bù. Số cách chọn 4 viên bi tùy ý từ 11 viên bi là: C_{11}^4 cách.

Số cách chọn 4 viên bi màu trắng là: C_6^4 cách.

Số cách chọn 4 viên bi là màu xanh là: C_5^4 cách.

Vậy có $C_{11}^4 - (C_6^4 + C_5^4) = 310$ cách chọn 4 viên bi trong đó có cả 2 màu.

Câu 23: Một nhóm học sinh có 6 bạn nam và 5 bạn nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 5 học sinh trong đó có cả nam và nữ?

A. 455.

B. 7.

C. 456.

D. 462.

Lời giải**Chọn A**

Số cách chọn 5 học sinh tùy ý là: C_{11}^5 cách.

Số cách chọn 5 học sinh nam là: C_6^5 cách.

Số cách chọn 5 học sinh nữ là: C_5^5 cách.

Vậy có $C_{11}^5 - C_6^5 - C_5^5 = 455$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2. Do trong 5 học sinh được chọn có cả nam cả nữ nên ta có các trường hợp sau:

Số học sinh nam	Số học sinh nữ	Số cách chọn
1	4	$C_6^1 \times C_5^4$
2	3	$C_6^2 \times C_5^3$
3	2	$C_6^3 \times C_5^2$
4	1	$C_6^4 \times C_5^1$

Vậy có $C_6^1 \times C_5^4 + C_6^2 \times C_5^3 + C_6^3 \times C_5^2 + C_6^4 \times C_5^1 = 455$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 24: Để chào mừng kỉ niệm ngày thành lập Đoàn TNCS Hồ Chí Minh, nhà trường tổ chức cho học sinh cắm trại. Lớp 10A có 19 học sinh nam và 16 học sinh nữ. Giáo viên cần chọn 5 học sinh để trang trí trại. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 5 học sinh sao cho có ít nhất 1 học sinh nữ? Biết rằng học sinh nào trong lớp cũng có khả năng trang trí trại.

- A. C_{19}^5 . B. $C_{35}^5 - C_{19}^5$. C. $C_{35}^5 - C_{16}^5$. D. C_{16}^5 .

Lời giải

Chọn B

Tổng số học sinh lớp 10A là 35.

Có C_{35}^5 cách chọn 5 học sinh từ 35 học sinh lớp 10A.

Có C_{19}^5 cách chọn 5 học sinh từ 19 học sinh nam của lớp 10A.

Do đó có $C_{35}^5 - C_{19}^5$ cách chọn 5 học sinh sao cho có ít nhất một học sinh nữ.

Câu 25: Một lớp học có 40 học sinh, trong đó có 25 nam và 15 nữ. Giáo viên cần chọn 3 học sinh tham gia vệ sinh công cộng toàn trường. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 3 học sinh trong đó có nhiều nhất 1 học sinh nam?

- A. 2625. B. 455. C. 2300. D. 3080.

Lời giải

Chọn D

Do trong 3 học sinh được chọn có nhiều nhất 1 học sinh nam nên ta có các trường hợp sau:

Số học sinh nam	Số học sinh nữ	Số cách chọn
1	2	$C_{25}^1 \times C_{15}^2$
0	3	$C_{25}^0 \times C_{15}^3$

Vậy có $C_{25}^1 \times C_{15}^2 + C_{25}^0 \times C_{15}^3 = 3080$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2. Số cách chọn 3 học sinh bất kì trong lớp là: C_{40}^3 cách.

Số cách chọn 3 học sinh trong đó có 2 học sinh nam, 1 học sinh nữ là: $C_{25}^2 \times C_{15}^1$ cách.

Số cách chọn 3 học sinh nam là: $C_{25}^3 \times C_{15}^0$ cách.

Vậy có $C_{40}^3 - (C_{25}^2 \times C_{15}^1 + C_{25}^3 \times C_{15}^0) = 3080$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 26: Từ 20 người cần chọn ra một đoàn đại biểu gồm 1 trưởng đoàn, 1 phó đoàn, 1 thư kí và 3 ủy viên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn đoàn đại biểu?

- A. 4651200. B. 4651300. C. 4651400. D. 4651500.

Lời giải

Chọn A

Số cách chọn 1 người trong 20 người làm trưởng đoàn là: C_{20}^1 cách.

Số cách chọn 1 người trong 19 người còn lại làm phó đoàn là: C_{19}^1 cách.

Số cách chọn 1 người trong 18 người còn lại làm thư kí là: C_{18}^1 cách.

Số cách chọn 3 người trong 17 người còn lại làm ủy viên là: C_{17}^3 cách.

Vậy số cách chọn đoàn đại biểu là $C_{20}^1 \times C_{19}^1 \times C_{18}^1 \times C_{17}^3 = 4651200$.

Câu 27: Một tổ gồm 10 học sinh. Cần chia tổ đó thành ba nhóm có 5 học sinh, 3 học sinh và 2 học sinh. Số các chia nhóm là:

A. 2880.

B. 2520.

C. 2515.

D. 2510.

Lời giải

Chọn B

Số cách chọn ra nhóm có 5 học sinh từ 10 học sinh là: C_{10}^5 cách.

Số cách chọn ra nhóm 3 học sinh từ 5 học sinh còn lại là: C_5^3 cách.

Số cách chọn ra nhóm 2 học sinh từ 2 học sinh còn lại là: C_2^2 cách.

Vậy có $C_{10}^5 \times C_5^3 \times C_2^2 = 2520$ cách chia nhóm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 28: Một nhóm đoàn viên thanh niên tình nguyện về sinh hoạt tại một xã nông thôn gồm có 21 đoàn viên nam và 15 đoàn viên nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân chia 3 nhóm về 3 ấp để hoạt động sao cho mỗi ấp có 7 đoàn viên nam và 5 đoàn viên nữ?

A. $3C_{36}^{12}$.

B. C_{36}^{12} .

C. $3C_{21}^7 C_{15}^5$.

D. $C_{21}^7 C_{15}^5 C_{14}^7 C_{10}^5$.

Lời giải

Chọn D

Số cách chọn nhóm thứ nhất là: $C_{21}^7 \times C_{15}^5$ cách.

Số cách chọn nhóm thứ hai là: $C_{14}^7 \times C_{10}^5$ cách.

Số cách chọn nhóm thứ ba là: $C_7^7 \times C_5^5$ cách.

Vậy có $(C_{21}^7 \times C_{15}^5) \times (C_{14}^7 \times C_{10}^5) \times (C_7^7 \times C_5^5) = C_{21}^7 C_{15}^5 C_{14}^7 C_{10}^5$ cách chia nhóm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 29: Trong một giỏ hoa có 5 bông hồng vàng, 3 bông hồng trắng và 4 bông hồng đỏ (các bông hoa coi như đôi một khác nhau). Người ta muốn làm một bó hoa gồm 7 bông được lấy từ giỏ hoa đó. Hỏi có bao nhiêu cách chọn hoa biết bó hoa có đúng 1 bông hồng đỏ?

A. 56.

B. 112.

C. 224.

D. 448.

Lời giải

Chọn B

Số cách chọn 1 bông hồng đỏ từ giỏ hoa là: C_4^1 .

Bó hoa gồm 7 bông hồng mà có đúng 1 bông hồng đỏ nên tổng số bông hồng vàng và bông hồng trắng là 6. Ta có các trường hợp sau:

Số bông hồng vàng	Số bông hồng trắng	Số cách chọn
5	1	$C_5^5 \times C_3^1$
4	2	$C_5^4 \times C_3^2$
3	3	$C_5^3 \times C_3^3$

Vậy có $C_4^1 (C_5^5 \times C_3^1 + C_5^4 \times C_3^2 + C_5^3 \times C_3^3) = 112$ cách chọn bó hoa thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 30: Một hộp có 6 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ và 4 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 5 viên bi sao cho có đủ cả ba màu. Số cách chọn là:

- A. 2163. B. 3843. C. 3003. D. 840.

Lời giải

Chọn A

Số cách chọn 5 viên bi bất kì trong hộp là: C_{15}^5 cách.

Số cách chọn 5 viên bi mà trong đó không có viên bi nào màu vàng là: C_{11}^5 cách.

Số cách chọn 5 viên bi mà trong đó không có viên bi nào màu đỏ là: C_{10}^5 cách.

Số cách chọn 5 viên bi mà trong đó không có viên bi nào màu xanh là: C_9^5 cách.

Vậy có $C_{15}^5 - (C_{11}^5 + C_{10}^5 + C_9^5) = 2163$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 31: Đội văn nghệ của nhà trường gồm 4 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B và 2 học sinh lớp 12C. Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh từ đội văn nghệ để biểu diễn trong lễ bế giảng. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho lớp nào cũng có học sinh được chọn?

- A. 126. B. 102. C. 98. D. 100.

Lời giải

Chọn C

Do trong 5 học sinh có đủ học sinh ở các lớp 12A, 12B, 12C nên ta có các trường hợp sau:

Số học sinh lớp 12A	Số học sinh lớp 12B	Số học sinh lớp 12C	Số cách chọn
2	1	2	$C_4^2 \times C_3^1 \times C_2^2$
1	2	2	$C_4^1 \times C_3^2 \times C_2^2$
2	2	1	$C_4^2 \times C_3^2 \times C_2^1$

3	1	1	$C_4^3 \times C_3^1 \times C_2^1$
1	3	1	$C_4^1 \times C_3^3 \times C_2^1$

Vậy có $C_4^2 \times C_3^1 \times C_2^2 + C_4^1 \times C_3^2 \times C_2^2 + C_4^2 \times C_3^2 \times C_2^1 + C_4^3 \times C_3^1 \times C_2^1 + C_4^1 \times C_3^3 \times C_2^1 = 98$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2. Tổng số học sinh trong đội văn nghệ của nhà trường là 9 học sinh.

Số cách chọn 5 học sinh bất kì trong 9 học sinh là: C_9^5 cách.

Số cách chọn 5 học sinh mà trong đó không có học sinh lớp 12A là: C_5^5 cách.

Số cách chọn 5 học sinh mà trong đó không có học sinh lớp 12B là: C_6^5 cách.

Số cách chọn 5 học sinh mà trong đó không có học sinh lớp 12C là: C_7^5 cách.

Vậy có $C_9^5 - (C_5^5 + C_6^5 + C_7^5) = 98$ cách thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 32: Có 12 học sinh giỏi gồm 3 học sinh khối 12, 4 học sinh khối 11 và 5 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 6 học sinh trong số học sinh giỏi đó sao cho mỗi khối có ít nhất 1 học sinh?

- A. 85. B. 58. C. 508. D. 805.

Lời giải

Chọn D

Số cách chọn 6 học sinh bất kì trong 12 học sinh là: C_{12}^6 cách.

Số cách chọn 6 học sinh mà trong đó không có học sinh khối 10 là: C_7^6 cách.

Số cách chọn 6 học sinh mà trong đó không có học sinh khối 11 là: C_8^6 cách.

Số cách chọn 6 học sinh mà trong đó không có học sinh khối 12 là: C_9^6 cách.

Vậy có $C_{12}^6 - (C_7^6 + C_8^6 + C_9^6) = 805$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 33: Đội học sinh giỏi cấp trường môn Tiếng Anh của trường THPT X theo từng khối như sau: khối 10 có 5 học sinh, khối 11 có 5 học sinh và khối 12 có 5 học sinh. Nhà trường cần chọn một đội tuyển gồm 10 học sinh tham gia IOE cấp tỉnh. Tính số cách lập đội tuyển sao cho có học sinh cả ba khối và có nhiều nhất 2 học sinh khối 10.

- A. 50. B. 500. C. 502. D. 501.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết suy ra có 2 khả năng xảy ra như sau:

TH1: Có đúng 1 học sinh khối 10.

Số cách chọn 1 học sinh khối 10 là: C_5^1 cách.

Số cách chọn 9 học sinh còn lại khối 11 và 12 là: C_{10}^9 cách.

TH2: Có đúng 2 học sinh khối 10.

Số cách chọn 2 học sinh khối 10 là: C_5^2 cách.

Số cách chọn 8 học sinh còn lại từ khối 11 và 12 là: C_{10}^8 cách.

Vậy có $C_5^1 \times C_{10}^9 + C_5^2 \times C_{10}^8 = 500$ cách lập đội thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 34: Đội văn nghệ của một nhà trường gồm 4 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B và 2 học sinh lớp 12C. Cần chọn ngẫu nhiên 5 học sinh từ đội văn nghệ đó để biểu diễn trong lễ bế giảng. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho lớp nào cũng có học sinh được chọn và có ít nhất 2 học sinh lớp 12A?

A. 80.

B. 78.

C. 76.

D. 98.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết suy ra có 3 khả năng xảy ra như sau:

Số học sinh lớp 12A	Số học sinh lớp 12B	Số học sinh lớp 12C	Số cách chọn
2	2	1	$C_4^2 \times C_3^2 \times C_2^1$
2	1	2	$C_4^2 \times C_3^1 \times C_2^2$
3	1	1	$C_4^3 \times C_3^1 \times C_2^1$

Vậy có $C_4^2 \times C_3^2 \times C_2^1 + C_4^2 \times C_3^1 \times C_2^2 + C_4^3 \times C_3^1 \times C_2^1 = 78$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 35: Một hộp đựng 8 viên bi màu xanh, 5 viên bi đỏ, 3 viên bi màu vàng. Có bao nhiêu cách chọn từ hộp đó ra 4 viên bi sao cho số bi xanh bằng số bi đỏ?

A. 280.

B. 400.

C. 40.

D. 1160.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết suy ra có 2 trường hợp xảy ra như sau:

Số viên bi xanh	Số viên bi đỏ	Số viên bi vàng	Số cách chọn
1	1	2	$C_8^1 \times C_5^1 \times C_3^2$
2	2	0	$C_8^2 \times C_5^2 \times C_3^0$

Vậy có $C_8^1 \times C_5^1 \times C_3^2 + C_8^2 \times C_5^2 \times C_3^0 = 400$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 36: Một hộp bi có 5 viên bi đỏ, 3 viên bi vàng và 4 viên bi xanh. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra 4 viên bi trong đó số viên bi đỏ lớn hơn số viên bi vàng.

A. 654.

B. 275.

C. 462.

D. 357.

Lời giải

Chọn B

Tổng số bi lấy ra có 4 viên mà bi đỏ nhiều hơn bi vàng nên có 2 trường hợp xảy ra:

TH1: Không có bi vàng, khi đó số bi đỏ phải từ 1 viên trở lên.

Số cách lấy 4 viên bi bất kì trong tổng số 9 viên bi (gồm 5 đỏ và 4 xanh) là: C_9^4 cách.

Số cách lấy 4 viên bi xanh là: C_4^4 cách.

$\Rightarrow$ Số cách lấy thỏa mãn trong trường hợp này là: $C_9^4 - C_4^4 = 125$ cách.

TH2: Có 1 viên bi vàng, khi đó số bi đỏ phải từ 2 viên trở lên. Số cách lấy 1 viên bi vàng: C_3^1 cách.

Số cách lấy 3 viên bi còn lại trong đó có 2 bi đỏ và 1 bi xanh là: $C_5^2 \times C_4^1$ cách.

Số cách lấy 3 viên bi còn lại đều là bi đỏ là: $C_5^3 \times C_4^0$ cách.

$\Rightarrow$ Số cách lấy thỏa mãn trong trường hợp này là: $C_3^1 \times (C_5^2 \times C_4^1 + C_5^3 \times C_4^0) = 150$ cách.

Vậy có $125 + 150 = 275$ cách lấy thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 37: Có 5 tem thư khác nhau và 6 bì thư khác nhau. Từ đó người ta muốn chọn ra 3 tem thư, 3 bì thư và dán 3 tem thư ấy lên 3 bì đã chọn. Hỏi có bao nhiêu cách làm như thế?

A. 1000.

B. 1200.

C. 2000.

D. 2200.

Lời giải

Chọn B

Số cách chọn 3 tem thư trong 5 tem thư khác nhau là: C_5^3 cách.

Số cách chọn 3 bì thư trong 6 bì thư khác nhau là: C_6^3 cách.

Số cách dán tem thư thứ nhất vào 3 bì thư là: C_3^1 cách.

Số cách dán tem thư thứ hai vào 2 bì thư còn lại là: C_2^1 cách.

Số cách dán tem thư thứ hai vào bì thư cuối cùng là: C_1^1 cách.

Vậy có $(C_5^3 \times C_6^3) \times (C_3^1 \times C_2^1 \times C_1^1) = 1200$ cách làm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 38: Cho 10 câu hỏi, trong đó có 4 câu lý thuyết và 6 câu bài tập, người ta cấu tạo thành các đề thi. Biết rằng trong đề thi phải gồm 3 câu hỏi trong đó có ít nhất 1 câu lý thuyết và 1 câu hỏi bài tập. Hỏi có thể tạo được bao nhiêu đề như trên?

A. 69.

B. 88.

C. 96.

D. 100.

Lời giải

Chọn C

Theo bài ra, một đề thi gồm 3 câu hỏi vừa có câu hỏi lý thuyết vừa có câu hỏi bài tập nên ta xét:

TH1: Đề thi gồm 1 câu lý thuyết, 2 câu bài tập. Lấy 1 câu lý thuyết trong 4 câu lý thuyết có C_4^1 cách, tương ứng lấy 2 câu bài tập trong 6 câu bài tập có C_6^2 cách. Vậy có $C_4^1.C_6^2$ đề.

TH2: Đề thi gồm 2 câu lý thuyết, 1 câu bài tập. Lập luận tương tự **TH1**, ta sẽ tạo được $C_4^2.C_6^1$ đề.

Vậy có thể tạo được $C_4^1 \times C_6^2 + C_4^2 \times C_6^1 = 96$ đề thi thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng 4. Phương Trình – Bất Phương Trình

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tìm n biết $n! = 2!(n-2)!$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$.

Khi đó $n! = 2!(n-2)! \Leftrightarrow (n-2)!(n-1)n = 2(n-2)! \Leftrightarrow (n-1)n = 2$

$$\Leftrightarrow n^2 - n - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = -1 \\ n = 2. \end{cases}$$

Ví dụ 2: Tìm n thỏa mãn phương trình $\frac{P_n - P_{n-1}}{P_{n+1}} = \frac{1}{6}$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $n \geq 2$ và $n \in \mathbb{N}$. Ta có: $\frac{P_n - P_{n-1}}{P_{n+1}} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{n! - (n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{6}$

$$\frac{(n-1)!n - (n-1)!}{(n-1)!n(n+1)!} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{n-1}{n(n+1)} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow n^2 - 5n + 6 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2 \\ n = 3. \end{cases}$$

Ví dụ 4: Giải bất phương trình $A_x^3 + 5A_x^2 \leq 12x$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x \geq 3$ và $x \in \mathbb{N}$.

Ta có:

$$\begin{aligned} A_x^3 + 5A_x^2 \leq 12x &\Leftrightarrow \frac{x!}{(x-1)!} + 5 \cdot \frac{x!}{(x-2)!} \leq 12x \\ &\Leftrightarrow \frac{(x-3)!(x-2)(x-1)x}{(x-3)!} + 5 \cdot \frac{(x-2)!(x-1)x}{(x-2)!} \leq 12x \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-1) + 5(x-1) \leq 12 \quad (\text{vì } x \geq 3)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 24 \leq 0 \Leftrightarrow -6 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 4 \quad (\text{vì } x \geq 3)$$

$$\Leftrightarrow x = 3, x = 4. \quad (\text{vì } x \in \mathbb{N})$$

Ví dụ 5: Giải phương trình $C_n^5 = 17C_n^4$?

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $n \geq 5$ và $n \in \mathbb{N}$. Ta có: $C_n^5 = 17C_n^4 \Leftrightarrow \frac{n!}{5!(n-5)!} = 17 \cdot \frac{n!}{4!(n-4)!}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4!5(n-5)!} = 17 \cdot \frac{1}{4!(n-5)!(n-4)} \Leftrightarrow \frac{1}{5} = \frac{17}{n-4} \Leftrightarrow n = 89.$$

Ví dụ 6: Giải phương trình $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = \frac{7n}{2}$?

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $n \geq 3$ và $n \in \mathbb{N}$. Ta có: $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = \frac{7n}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{1!(n-1)!} + \frac{n!}{2!(n-2)!} + \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{7n}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-1)!n}{(n-1)!} + \frac{(n-2)!n(n-1)}{2(n-2)!} + \frac{(n-3)!n(n-1)(n-2)}{6(n-3)!} = \frac{7n}{2}$$

$$\Leftrightarrow n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{7n}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{n-1}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{6} = \frac{7}{2} \quad (\text{Vì } n \geq 3) \Leftrightarrow n^2 = 16.$$

$$\Leftrightarrow n = 4 \quad (\text{Vì } n \geq 3).$$

Ví dụ 7: Giải bất phương trình $C_{13}^m < C_{13}^{m+2}$?

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $0 \leq m \leq 11$ và $m \in \mathbb{N}$.

$$\text{Ta có: } C_{13}^m < C_{13}^{m+2} \Leftrightarrow \frac{13!}{m!(13-m)!} < \frac{13!}{(m+2)!(11-m)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{m!(11-m)!(12-m)(13-m)} < \frac{1}{m!(m+1)(m+2)(11-m)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(12-m)(13-m)} < \frac{1}{(m+1)(m+2)}$$

$$\Leftrightarrow (m+1)(m+2) < (12-m)(13-m) \quad (\text{vì } 0 \leq m \leq 11)$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 3m + 2 < m^2 - 25m + 156 \Leftrightarrow m < \frac{11}{2} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 5$$

$$\Leftrightarrow m \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Ví dụ 8: Giải hệ phương trình $\begin{cases} C_n^k - C_n^{k+1} = 0 \\ 4C_n^k - 5C_n^{k-1} = 0 \end{cases}$?

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $n \geq k+1, k \geq 1$ và $n, k \in \mathbb{N}$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} C_n^k - C_n^{k+1} = 0 & (1) \\ 4C_n^k - 5C_n^{k-1} = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow C_n^k = C_n^{k+1} \Leftrightarrow \begin{cases} k = k+1 \\ k+k+1 = n \end{cases} \Leftrightarrow n = 2k+1 \quad (\text{vì } k = k+1 \text{ loại})$$

$$(2) \Leftrightarrow 4C_n^k = 5C_n^{k-1} \Leftrightarrow 4C_{2k+1}^k = 5C_{2k+1}^{k-1} \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{(2k+1)!}{k!(k+1)!} = 5 \cdot \frac{(2k+1)!}{(k-1)!(k+2)!}$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot \frac{1}{k!k(k+1)!} = 5 \cdot \frac{1}{(k-1)!(k+1)!(k+2)!} \Leftrightarrow \frac{4}{k} = \frac{5}{k+2} \Leftrightarrow k = 8 \Rightarrow n = 17.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị $x \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $6(P_x - P_{x-1}) = P_{x+1}$.

- A. $x = 2$. B. $x = 3$. C. $x = 2; x = 3$. D. $x = 5$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x \geq 1$ và $x \in \mathbb{N}$.

Ta có $6(P_x - P_{x-1}) = P_{x+1} \Leftrightarrow 6[x! - (x-1)!] = (x+1)! \Leftrightarrow 6(x-1)!(x-1) = (x-1)!x(x+1)$

$$\Leftrightarrow 6(x-1) = x(x+1) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ (thỏa mãn)} \\ x = 3 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}.$$

Câu 2: Tính tổng S của tất cả các giá trị của x thỏa mãn $P_2.x^2 - P_3.x = 8$.

- A. $S = -4$. B. $S = -1$. C. $S = 4$. D. $S = 3$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } P_2.x^2 - P_3.x = 8 \Leftrightarrow 2!.x^2 - 3!.x = 8 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\longrightarrow S = -1 + 4 = 3.$$

Câu 3: Có bao nhiêu số tự nhiên x thỏa mãn $3A_x^2 - A_{2x}^2 + 42 = 0$?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 6.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x \geq 2$ và $x \in \mathbb{N}$.

$$\text{Ta có } 3A_x^2 - A_{2x}^2 + 42 = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{x!}{(x-2)!} - \frac{(2x)!}{(2x-2)!} + 42 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x-1).x - (2x-1).2x + 42 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 42 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 \text{ (loại)} \\ x = 6 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}.$$

Câu 4: Cho số tự nhiên x thỏa mãn $A_x^{10} + A_x^9 = 9A_x^8$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. x là số chính phương. B. x là số nguyên tố. C. x là số chẵn.
D. x là số chia hết cho 3.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x \geq 10$ và $x \in \mathbb{N}$.

$$\text{Ta có } A_x^{10} + A_x^9 = 9A_x^8 \Leftrightarrow \frac{x!}{(x-10)!} + \frac{x!}{(x-9)!} = 9 \frac{x!}{(x-8)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1} + \frac{1}{x-9} = \frac{9}{(x-9)(x-8)} \Leftrightarrow x^2 - 16x + 55 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 (\text{thỏa mãn}) \\ x = 5 (\text{loại}) \end{cases}$$

Câu 5: Có bao nhiêu số tự nhiên n thỏa mãn $A_n^3 + 5A_n^2 = 2(n+15)$?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $n \geq 3$ và $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Ta có } A_n^3 + 5A_n^2 = 2(n+15) \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-3)!} + 5 \cdot \frac{n!}{(n-2)!} - 2n - 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow (n-2) \cdot (n-1) \cdot n + 5 \cdot (n-1) \cdot n - 2n - 30 = 0 \Leftrightarrow n^3 + 2n^2 - 5n - 30 = 0 \Leftrightarrow n = 3.$$

Câu 6: Tìm giá trị $n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $C_{n+1}^1 + 3C_{n+2}^2 = C_{n+1}^3$.

A. $n = 12$.

B. $n = 9$.

C. $n = 16$.

D. $n = 2$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $n \geq 2$ và $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Ta có } C_{n+1}^1 + 3C_{n+2}^2 = C_{n+1}^3 \Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{1! \cdot n!} + 3 \cdot \frac{(n+2)!}{2! \cdot n!} = \frac{(n+1)!}{3! \cdot (n-2)!}$$

$$\Leftrightarrow n+1+3 \cdot \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{6} \Leftrightarrow 1+3 \cdot \frac{(n+2)}{2} = \frac{(n-1) \cdot n}{6}$$

$$\Leftrightarrow 6+9n+18 = n^2 - n \Leftrightarrow n^2 - 10n - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = -2 (\text{loại}) \\ n = 12 (\text{thỏa mãn}) \end{cases}$$

Câu 7: Tính tích P của tất cả các giá trị của x thỏa mãn $C_{14}^x + C_{14}^{x+2} = 2C_{14}^{x+1}$.

A. $P = 4$.

B. $P = 32$.

C. $P = -32$.

D. $P = 12$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $0 \leq x \leq 12$ và $x \in \mathbb{N}$.

$$\text{Ta có } C_{14}^x + C_{14}^{x+2} = 2C_{14}^{x+1} \Leftrightarrow \frac{14!}{x!(14-x)!} + \frac{14!}{(x+2)!(12-x)!} = 2 \frac{14!}{(x+1)!(13-x)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(14-x)(13-x)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} = 2 \cdot \frac{1}{(x+1)(13-x)}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+2) + (14-x)(13-x) = 2(x+2)(14-x)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 12x + 32 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 8 \end{cases} \longrightarrow P = 4.8 = 32.$$

Câu 8: Tính tổng S của tất cả các giá trị của n thỏa mãn $\frac{1}{C_n^1} - \frac{1}{C_{n+1}^2} = \frac{7}{6C_{n+4}^1}$.

- A. $S = 8$. B. $S = 11$. C. $S = 12$. D. $S = 15$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $n \geq 1$ và $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Ta có } \frac{1}{C_n^1} - \frac{1}{C_{n+1}^2} = \frac{7}{6C_{n+4}^1} \Leftrightarrow \frac{(n-1)!}{n!} - \frac{2! \cdot (n-1)!}{(n+1)!} = \frac{7(n+3)!}{6(n+4)!} \Leftrightarrow \frac{1}{n} - \frac{2}{n(n+1)} = \frac{7}{6(n+4)}$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 11n + 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 3 (\text{thỏa mãn}) \\ n = 8 (\text{thỏa mãn}) \end{cases} \longrightarrow S = 3 + 8 = 11.$$

Câu 9: Tìm giá trị $x \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $C_x^0 + C_x^{x-1} + C_x^{x-2} = 79$.

- A. $x = 13$. B. $x = 17$. C. $x = 16$. D. $x = 12$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x \in \mathbb{N}$.

$$\text{Ta có } C_x^0 + C_x^{x-1} + C_x^{x-2} = 79 \Leftrightarrow C_x^0 + C_x^1 + C_x^2 = 79$$

$$\Leftrightarrow 1 + x + \frac{x(x-1)}{2} = 79 \Leftrightarrow x^2 + x - 156 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 (\text{thỏa mãn}) \\ x = -13 (\text{loại}) \end{cases}.$$

Câu 10: Tìm giá trị $n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3)$.

- A. $n = 15$. B. $n = 18$. C. $n = 16$. D. $n = 12$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Ta có } C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3) \Leftrightarrow C_{n+4}^3 - C_{n+3}^3 = 7(n+3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+4)(n+2)}{3!} - \frac{(n+2)(n+1)}{3!} = 7 \Leftrightarrow 3n - 36 = 0 \Leftrightarrow n = 12 (\text{thỏa mãn}).$$

Câu 11: Tìm giá trị $n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = \frac{7n}{2}$.

- A. $n = 3$. B. $n = 4$. C. $n = 6$. D. $n = 8$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = \frac{7n}{2} \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{2!(n-2)!} + \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{7n}{2}$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 16 = 0 \longrightarrow n = 4.$$

Câu 12: Tính tổng S của tất cả các giá trị của x thỏa $C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x$.

A. $S = 2$.

B. $S = 7$.

C. $S = 9$.

D. $S = 14$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x \geq 3$ và $x \in \mathbb{N}$.

$$\text{Ta có } C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x \Leftrightarrow \frac{x!}{1!(x-1)!} + 6 \cdot \frac{x!}{2!(x-2)!} + 6 \cdot \frac{x!}{3!(x-3)!} = 9x^2 - 14x$$

$$\Leftrightarrow x + 3x(x-1) + (x-2)(x-1)x = 9x^2 - 14x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 (\text{loại}) \\ x = 2 (\text{loại}) \\ x = 7 (\text{thỏa mãn}) \end{cases}.$$

Câu 13: Tìm giá trị $n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $C_n^6 + 3C_n^7 + 3C_n^8 + C_n^9 = 2C_{n+2}^8$.

A. $n = 18$.

B. $n = 16$.

C. $n = 15$.

D. $n = 14$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $n \geq 9$ và $n \in \mathbb{N}$.

Áp dụng công thức $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$, ta có $C_n^6 + 3C_n^7 + 3C_n^8 + C_n^9 = 2C_{n+2}^8$

$$\Leftrightarrow C_n^6 + C_n^7 + 2(C_n^7 + C_n^8) + C_n^8 + C_n^9 = 2C_{n+2}^8 \Leftrightarrow C_{n+1}^7 + 2C_{n+1}^8 + C_{n+1}^9 = 2C_{n+2}^8$$

$$\Leftrightarrow (C_{n+1}^7 + C_{n+1}^8) + (C_{n+1}^8 + C_{n+1}^9) = 2C_{n+2}^8 \Leftrightarrow C_{n+2}^8 + C_{n+2}^9 = 2C_{n+2}^8$$

$$\Leftrightarrow C_{n+2}^9 = C_{n+2}^8 \longrightarrow n+2 = 9+8 \Leftrightarrow n = 15.$$

Câu 14: Đẳng thức nào sau đây là sai?

A. $C_{2007}^7 = C_{2006}^7 + C_{2006}^6$. **B.** $C_{2007}^7 = C_{2006}^{2000} + C_{2006}^6$. **C.** $C_{2007}^7 = C_{2006}^{2000} + C_{2006}^{1999}$. **D.**

$$C_{2007}^7 = C_{2006}^7 + C_{2006}^{2000}.$$

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$, ta có $C_{2006}^6 + C_{2006}^7 = C_{2007}^7$. Do đó A đúng.

$$\text{Áp dụng công thức } C_n^k = C_n^{n-k} \longrightarrow \begin{cases} C_{2006}^6 = C_{2006}^{2000} \\ C_{2006}^7 = C_{2006}^{1999} \end{cases}.$$

Suy ra $C_{2007}^7 = C_{2006}^6 + C_{2006}^7 = C_{2006}^{2000} + C_{2006}^{1999} = C_{2006}^{2000} + C_{2006}^7$. Do đó C, D đúng; B sai.

Câu 15: Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $1+2+3+4+\dots+n=C_{n+1}^2$.

B. $1+2+3+4+\dots+n=A_{n+1}^2$.

C. $1+2+3+4+\dots+n=C_n^1+C_n^2+\dots+C_n^n$.

D. $1+2+3+4+\dots+n=A_n^1+A_n^2+\dots+A_n^n$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $1+2+3+4+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ và $C_{n+1}^2=\frac{(n+1)!}{2!(n+1-2)!}=\frac{n(n+1)}{2}$.

Do đó A đúng.

Câu 16: Tính tích P của tất cả các giá trị của n thỏa mãn $P_n A_n^2 + 72 = 6(A_n^2 + 2P_n)$.

A. $P = 12$.

B. $P = 5$.

C. $P = 10$.

D. $P = 6$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $n \geq 2$ và $n \in \mathbb{N}$.

Ta có $P_n A_n^2 + 72 = 6(A_n^2 + 2P_n) \Leftrightarrow n! \cdot \frac{n!}{(n-2)!} + 72 = 6 \left[\frac{n!}{(n-2)!} + 2.n! \right]$

$\Leftrightarrow n! \cdot (n-1).n + 72 = 6[(n-1)n + 2.n!] \Leftrightarrow (n! - 6)(n^2 - n - 12) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} n^2 - n - 12 = 0 \\ n! - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 4 \text{ (thỏa mãn)} \\ n = -3 \text{ (loại)} \\ n = 3 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases} \longrightarrow P = 4.3 = 12.$

Câu 17: Tính tích P của tất cả các giá trị của x thỏa mãn $7(A_{x+1}^{x-1} + 2P_{x-1}) = 30P_x$.

A. $P = 7$.

B. $P = 4$.

C. $P = 28$.

D. $P = 14$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x \geq 1$ và $x \in \mathbb{N}$.

Ta có $7(A_{x+1}^{x-1} + 2P_{x-1}) = 30P_x \Leftrightarrow 7 \left[\frac{(x+1)!}{2!} + 2.(x-1)! \right] = 30.x!$

$\Leftrightarrow 7 \left[\frac{x(x+1)}{2} + 2 \right] = 30x \Leftrightarrow 7x^2 - 53x + 28 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \text{ (thỏa mãn)} \\ x = \frac{4}{7} \text{ (loại)} \end{cases} \longrightarrow P = 7.$

Câu 18: Tìm giá trị $n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $C_{n+8}^{n+3} = 5A_{n+6}^3$.

A. $n = 15$.

B. $n = 17$.

C. $n = 6$.

D. $n = 14$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $C_n^k = C_n^{n-k}$, ta có $C_{n+8}^{n+3} = 5A_{n+6}^3 \Leftrightarrow C_{n+8}^5 = 5.A_{n+6}^3$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+8)(n+7)}{5!} = 5 \Leftrightarrow n^2 + 15n - 544 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 17 \text{ (thỏa mãn)} \\ n = -32 \text{ (loại)} \end{cases}.$$

Câu 19: Tìm giá trị $x \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $A_x^2 \cdot C_x^{x-1} = 48$.

A. $x = 4$.

B. $x = 3$.

C. $x = 7$.

D. $x = 12$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x \geq 2$ và $x \in \mathbb{N}$.

$$\text{Ta có } A_x^2 \cdot C_x^{x-1} = 48 \Leftrightarrow \frac{x!}{(x-2)!} \cdot \frac{x!}{(x-1)! \cdot 1!} = 48$$

$$\Leftrightarrow (x-1)x \cdot x = 48 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 48 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Câu 20: Tìm giá trị $n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $A_n^2 - C_{n+1}^{n-1} = 5$.

A. $n = 3$.

B. $n = 5$.

C. $n = 4$.

D. $n = 6$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $n \geq 2$ và $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Ta có } A_n^2 - C_{n+1}^{n-1} = 5 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!} - \frac{(n+1)!}{(n-1)!2!} = 5 \Leftrightarrow (n-1)n - \frac{n(n+1)}{2} - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 3n - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = -2 \text{ (loại)} \\ n = 5 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}.$$

Câu 21: Tính tích P của tất cả các giá trị của n thỏa mãn $A_n^2 - 3C_n^2 = 15 - 5n$.

A. $P = 5$.

B. $P = 6$.

C. $P = 30$.

D. $P = 360$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $n \geq 2$ và $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Ta có } A_n^2 - 3C_n^2 = 15 - 5n \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!} - 3 \cdot \frac{n!}{2!(n-2)!} = 15 - 5n$$

$$\Leftrightarrow n(n-1) - 3 \frac{n(n-1)}{2} = 15 - 5n \Leftrightarrow -n^2 + 11n - 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 6 \text{ (thỏa mãn)} \\ n = 5 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

$$\longrightarrow P = 5 \cdot 6 = 30.$$

Câu 22: Tìm giá trị $x \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $3A_x^4 = 24(A_{x+1}^3 - C_x^{x-4})$.

A. $x = 3$.

B. $x = 1$.

C. $x = 5$.

D. $x = 1; x = 5$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x \geq 4$ và $x \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 3A_x^4 &= 24(A_{x+1}^3 - C_x^{x-4}) \Leftrightarrow 23 \cdot \frac{x!}{(x-4)!} = 24 \cdot \left[\frac{(x+1)!}{(x-2)!} - \frac{x!}{(x-4)! \cdot 4!} \right] \\ \Leftrightarrow 23 \cdot \frac{1}{(x-4)!} &= 24 \cdot \left[\frac{x+1}{(x-2)!} - \frac{1}{(x-4)! \cdot 4!} \right] \Leftrightarrow 23 \cdot \frac{1}{1} = 24 \cdot \left[\frac{x+1}{(x-2)(x-3)} - \frac{1}{1 \cdot 24} \right] \\ \Leftrightarrow 23 &= 24 \cdot \frac{x+1}{(x-2)(x-3)} - 1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{(x-2)(x-3)} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 (\text{loại}) \\ x = 5 (\text{thỏa mãn}) \end{cases} \end{aligned}$$

Câu 23: Có bao nhiêu số tự nhiên n thỏa mãn $\frac{A_{n+4}^4}{(n+2)!} < \frac{15}{(n-1)!}$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{A_{n+4}^4}{(n+2)!} < \frac{15}{(n-1)!} &\Leftrightarrow \frac{(n+4)!}{(n+2)! \cdot n!} < \frac{15}{(n-1)!} \Leftrightarrow \frac{(n+3)(n+4)}{n} < 15 \\ \Leftrightarrow (n+3)(n+4) < 15n &\Leftrightarrow n^2 - 8n + 12 < 0 \Leftrightarrow 2 < n < 6 \xrightarrow[n \in \mathbb{N}]{} n \in \{3, 4, 5\}. \end{aligned}$$

Câu 24: Có bao nhiêu số tự nhiên n thỏa mãn $2C_{n+1}^2 + 3A_n^2 - 20 < 0$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $n \geq 2$ và $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 2C_{n+1}^2 + 3A_n^2 - 20 < 0 &\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{(n+1)!}{2! \cdot (n-1)!} + 3 \cdot \frac{n!}{(n-2)!} - 20 < 0 \\ \Leftrightarrow n(n+1) + 3(n-1)n - 20 < 0 &\Leftrightarrow 2n^2 - n - 10 < 0 \Leftrightarrow -2 < n < \frac{5}{2} \xrightarrow[n \in \mathbb{N}, n \geq 2]{} n = 2. \end{aligned}$$

Câu 25: Có bao nhiêu số tự nhiên n thỏa mãn $2C_{n+1}^2 + 3A_n^2 < 30$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $n \geq 2$ và $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Ta có } 2C_{n+1}^2 + 3A_n^2 < 30 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} + 3 \cdot \frac{n!}{(n-2)!} < 30$$

$$\Leftrightarrow n(n+1) + 3(n-1)n < 30 \Leftrightarrow 2n^2 - n - 15 < 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} < n < 3 - \frac{n \geq 2}{n \in \mathbb{N}} \rightarrow n = 2.$$

Câu 26: Có bao nhiêu số tự nhiên n thỏa mãn $14.P_3C_{n-1}^{n-3} < A_{n+1}^4$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $n \geq 3$ và $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Ta có } 14.P_3C_{n-1}^{n-3} < A_{n+1}^4 \Leftrightarrow 14.3! \cdot \frac{(n-1)!}{(n-3)! \cdot 2!} < \frac{(n+1)!}{(n-3)!}$$

$$\Leftrightarrow 42(n-2)(n-1) < (n-2)(n-1)n(n+1) \Leftrightarrow 42 < n(n+1) \Leftrightarrow n^2 + n - 42 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n < -7 \\ n > 6 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[n \in \mathbb{N}]{n \geq 3} \begin{cases} n \geq 7 \\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Câu 27: Giải hệ phương trình $\begin{cases} C_x^y - C_x^{y+1} = 0 \\ 4C_x^y - 5C_x^{y-1} = 0 \end{cases}$.

A. $\begin{cases} x = 17 \\ y = 8 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = 17 \\ y = -8 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = 9 \\ y = 8 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = 7 \\ y = 9 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x \geq y+1$ và $x, y \in \mathbb{N}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} C_x^y - C_x^{y+1} = 0 & (1) \\ 4C_x^y - 5C_x^{y-1} = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow C_x^y = C_x^{y+1} \Leftrightarrow y + y + 1 = x \Leftrightarrow x - 2y - 1 = 0.$$

$$\text{Phương trình (2)} \Leftrightarrow 4C_x^y = 5C_x^{y-1} \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{x!}{y!(x-y)!} = 5 \cdot \frac{x!}{(y-1)!(x-y+1)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{y} = \frac{5}{x-y+1} \Leftrightarrow 4x - 9y + 4 = 0.$$

$$\text{Do đó hệ phương trình đã cho} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ 4x - 9y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 17 \\ y = 8 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}.$$

Câu 28: Tìm cặp số $(x; y)$ thỏa mãn $\frac{C_{x+1}^y}{6} = \frac{C_x^{y+1}}{5} = \frac{C_x^{y-1}}{2}$.

A. $(x; y) = (8; 3)$.

B. $(x; y) = (3; 8)$.

C. $(x; y) = (-1; 0)$.

D. $(x; y) = (-1; 0)$, $(x; y) = (8; 3)$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x \geq y+1$ và $x, y \in \mathbb{N}$.

$$\bullet \frac{C_{x+1}^y}{6} = \frac{C_x^{y+1}}{5} \Leftrightarrow 5.C_{x+1}^y = 6.C_x^{y+1} \Leftrightarrow \frac{5(x+1)!}{y!(x+1-y)!} = \frac{6x!}{(y+1)!(x-y-1)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5(x+1)}{(x-y)(x-y+1)} = \frac{6}{(y+1)} \Leftrightarrow 5(y+1)(x+1) = 6(x-y)(x-y+1). \quad (1)$$

$$\bullet \frac{C_x^{y+1}}{5} = \frac{C_x^{y-1}}{2} \Leftrightarrow 2.C_x^{y+1} = 5.C_x^{y-1} \Leftrightarrow \frac{x!}{5.(y+1)!(x-y-1)!} = \frac{x!}{2.(y-1)!(x-y+1)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5.y(y+1)} = \frac{1}{2.(x-y)(x-y+1)}$$

$$\Leftrightarrow 5.y(y+1) = 2.(x-y)(x-y+1) \Leftrightarrow 15.y(y+1) = 6.(x-y)(x-y+1). \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $\Leftrightarrow 5(y+1)(x+1) = 15.y(y+1) \Leftrightarrow x+1 = 3y$. Thay vào (1), ta được

$$\Leftrightarrow 15(y+1)y = 6(2y-1)2y \Leftrightarrow 3y^2 - 9y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \longrightarrow x=-1 (\text{loại}) \\ y=3 \longrightarrow x=8 (\text{thỏa mãn}) \end{cases}$$

Câu 29: Giải hệ phương trình $\begin{cases} C_y^x : C_{y+2}^x = \frac{1}{3} \\ C_y^x : A_y^x = \frac{1}{24} \end{cases}$.

A. $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x=4 \\ y=8 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}, \begin{cases} x=4 \\ y=8 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x=1 \\ y=8 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $y \geq x$ và $x, y \in \mathbb{N}$.

Ta có $\begin{cases} C_y^x : C_{y+2}^x = \frac{1}{3} & (1) \\ C_y^x : A_y^x = \frac{1}{24} & (2) \end{cases}$.

$$\text{Phương trình (2)} \Leftrightarrow \frac{C_y^x}{A_y^x} = \frac{1}{24} \Leftrightarrow 24C_y^x = A_y^x \Leftrightarrow 24 \cdot \frac{y!}{x!(y-x)!} = \frac{y!}{(y-x)!} \Leftrightarrow \frac{24}{x!} = 1 \Leftrightarrow x=4.$$

$$\text{Thay } x=4 \text{ vào (1), ta được } \frac{C_y^4}{C_{y+2}^4} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3C_y^4 = C_{y+2}^4 \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{y!}{4!(y-4)!} = \frac{(y+2)!}{4!(y-2)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{1} = \frac{(y+1)(y+2)}{(y-3)(y-2)} \Leftrightarrow y^2 - 9y + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 < 4 = x (\text{loại}) \\ y=8 > 4 = x (\text{thỏa mãn}) \end{cases}$$

Câu 30: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2A_x^y + 5C_x^y = 90 \\ 5A_x^y - 2C_x^y = 80 \end{cases}$.

A. $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = 20 \\ y = 10 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x \geq y$ và $x, y \in \mathbb{N}$.

Đặt $\begin{cases} u = A_x^y \\ v = C_x^y \end{cases}$, ta được $\begin{cases} 2u + 5v = 90 \\ 5u - 2v = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 20 \\ v = 10 \end{cases}$.

Ta có $A_n^k = k!C_n^k \longrightarrow u = y!.v \Leftrightarrow 20 = y!.10 \Leftrightarrow y! = 2 \Leftrightarrow y = 2$.

Với $u = 20$, suy ra $A_x^y = 20 \Leftrightarrow A_x^2 = 20 \Leftrightarrow \frac{x!}{(x-2)!} = 20 \Leftrightarrow (x-1)x = 20 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -4 \text{ (loại)} \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$.

BÀI 3. NHỊ THỨC NIU-TƠN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Ta thừa nhận công thức nhị thức Niu-ton sau:

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} = C_n^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + \dots + C_n^{n-1} a^{n-1} b^1 + C_n^n a^n.\end{aligned}$$

Hệ quả:

- Với $a = b = 1$ ta có $2^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$.
- Với $a = 1, b = -1$ ta có $0 = C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^k C_n^k + \dots + (-1)^n C_n^n$.

Chú ý:

- Số các số hạng của khai triển bằng $n+1$.
- Tổng các số mũ của a và b trong mỗi số hạng bằng n .
- Số hạng tổng quát (thứ $k+1$) có dạng:

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k, \quad (k=0, 1, 2, \dots, n).$$

- Các hệ số của các cặp số hạng cách đều số hạng đầu và cuối thì bằng nhau: $C_n^k = C_n^{n-k}$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Xác định hệ số hoặc số hạng chứa x^k

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Số hạng không chứa x trong khai triển $(x^2 + \frac{1}{x^3})^{10}$ là:

Hướng dẫn giải

Số hạng tổng quát thứ $k+1$ trong khai triển $(x^2 + \frac{1}{x^3})^{10}$ có dạng:

$$C_{10}^k (x^2)^{10-k} \left(\frac{1}{x^3}\right)^k = C_{10}^k x^{20-2k} x^{-3k} = C_{10}^k x^{20-5k}.$$

Từ yêu cầu bài toán ta có $20 - 5k = 0 \Leftrightarrow k = 4$.

Do đó số hạng không chứa x là $C_{10}^4 = 210$.

Ví dụ 2: Trong khai triển $\left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right)^{12}$, hệ số của số hạng chứa x^4 bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Số hạng tổng quát thứ $k+1$ trong khai triển $\left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right)^{12}$ là:

$$(-1)^k C_{12}^k \left(\frac{3}{x}\right)^{12-k} \left(\frac{x}{3}\right)^k = (-1)^k C_{12}^k x^{12-k} x^{-k} 3^{k-12} 3^k = (-1)^k C_{12}^k x^{12-2k} 3^{2k-12}.$$

Từ yêu cầu bài toán ta có: $12 - 2k = 4 \Leftrightarrow k = 4$.

Suy ra hệ số cần tìm là: $(-1)^4 \cdot C_{12}^4 \cdot 3^{-4} = \frac{55}{9}$.

Ví dụ 3: Khai triển và rút gọn $P(x) = (1+x)^2 + (1+x)^3 + \dots + (1+x)^{10}$ ta được $P(x) = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \dots + a_{10} x^{10}$. Hệ số a_9 bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Nhận xét: Trong khai triển $(1+x)^n$ thì đơn thức có bậc cao nhất là n .

Do đó a_9 là hệ số của x^9 chỉ có trong đa thức $(1+x)^9 + (1+x)^{10}$.

Hệ số của x^9 trong $(1+x)^9$ là $C_9^9 = 1$

Hệ số của x^9 trong $(1+x)^{10}$ là $C_{10}^9 = 10$

Suy ra $a_9 = 10 + 1 = 11$

Ví dụ 4: Trong khai triển của $\left(x^{\frac{1}{15}} y^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{5}}\right)^{2007}$, số hạng mà lũy thừa của x và y bằng nhau

Hướng dẫn giải

Số hạng tổng quát thứ $k+1$ trong khai triển của $\left(x^{\frac{1}{15}} y^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{5}}\right)^{2007}$ là:

$$C_{2007}^k x^{\frac{k}{15}} y^{\frac{k}{3}} x^{\frac{2007-k}{3}} y^{\frac{2007-k}{5}} = C_{2007}^k x^{\frac{10035-4k}{15}} y^{\frac{6021+2k}{3}}.$$

Ta cần có: $\frac{10035-4k}{15} = \frac{6021+2k}{3}$, do đó $k = 669$.

Ví dụ 5: Tìm hệ số của $x^{25} y^{10}$ trong khai triển $(x^3 + xy)^{15}$.

Hướng dẫn giải

Xét số hạng: $T_{k+1} = C_{15}^k (x^3)^{15-k} (xy)^k = C_{15}^k x^{45-3k+k} y^k = C_{15}^k x^{45-2k} y^k$

Ta có: $\begin{cases} 45-2k=25 \\ k=10 \end{cases} \Leftrightarrow k=10$.

Vậy hệ số của $x^{25}y^{10}$ là của $C_{15}^{10} = 3003$.

Ví dụ 6: Tổng các hệ số của khai triển $\left(\frac{1}{x} + x^3\right)^n$ bằng 1024. Tìm hệ số của x^6 trong khai triển.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\left(\frac{1}{x} + x^3\right)^n = C_n^0 \left(\frac{1}{x}\right)^n + C_n^1 \left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} x^3 + \dots + C_n^n x^{3n}$.

Tổng hệ số của khai triển là: $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$.

Vậy $2^n = 1024 \Leftrightarrow 2^n = 2^{10} \Leftrightarrow n = 10$.

Xét số hạng $T_{k+1} = C_{10}^k \left(\frac{1}{x}\right)^{10-k} x^{3k} = C_{10}^k \frac{x^{3k}}{x^{10-k}} = C_{10}^k x^{4k-10}$.

Ta được $4k - 10 = 6 \Leftrightarrow k = 4$. Vậy $C_{10}^4 = 210$.

Ví dụ 7. Với n là số nguyên dương thỏa $C_n^1 + C_n^2 = 55$, Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^3 + \frac{2}{x^2}\right)^n$

Hướng dẫn giải

Điều kiện $n \geq 2$ và $n \in \mathbb{Z}$

Ta có

$$C_n^1 + C_n^2 = 55 \Leftrightarrow \frac{n!}{1!(n-1)!} + \frac{n!}{2!(n-2)!} = 55 \Leftrightarrow n^2 + n - 110 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 10 \\ n = -11(L) \end{cases}$$

Với $n = 10$ ta có khai triển $\left(x^3 + \frac{2}{x^2}\right)^{10}$

Số hạng tổng quát của khai triển là $C_{10}^k x^{3(10-k)} \cdot \left(\frac{2}{x^2}\right)^k = C_{10}^k 2^k x^{30-5k}$, với $0 \leq k \leq 10$.

Số hạng không chứa x ứng với k thoả $30 - 5k = 0 \Leftrightarrow k = 6$.

Vậy số hạng không chứa x là $C_{10}^6 2^6 = 13440$.

Dạng 2 : Tìm số hạng đứng chính giữa

1. Phương pháp

- Khi n chẵn thì số hạng đứng giữa là số hạng thứ: $\frac{n}{2} + 1$.
- Khi n lẻ thì có hai số hạng đứng giữa là $\frac{n+1}{2}$ và $\frac{n+1}{2} + 1$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Trong khai triển $(2x+3y)^8$, hệ số của số hạng đứng chính giữa bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Trong khai triển $(2x+3y)^8$ có tất cả 9 số hạng

Do đó số hạng đứng giữa là số hạng thứ 5: $C_8^4(2x)^4(3y)^4$.

Suy ra hệ số cần tìm là: $C_8^4 \cdot 2^4 \cdot 3^4 = 90720$.

Ví dụ 2: Tìm số hạng ở chính giữa trong khai triển: $\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}} + \sqrt[3]{x}\right)^{10}$.

Hướng dẫn giải

Ta có số hạng $T_6 = C_{10}^5 \left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^5 \left(\sqrt[3]{x}\right)^5 = 252 \left(\sqrt[3]{x}\right)^2$.

Dạng 3: Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển nhị thức Niu-tơn của $(a+b)^n$

1. Phương pháp

Bước 1: Số hạng tổng quát thứ $k+1$ là: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$

Đặt $u_k = C_n^k a^{n-k} b^k, (0 \leq k \leq n)$.

Bước 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases} u_k \geq u_{k+1} \\ u_k \geq u_{k-1} \end{cases} \Rightarrow k_0$.

Bước 3: Hệ số lớn nhất trong khai triển là $C_n^{k_0} a^{n-k_0} b^{k_0}$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Câu 36: Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển thành đa thức biến x của $\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}x\right)^4$?

Hướng dẫn giải

Ta có: $\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}x\right)^4 = \frac{1}{256} + \frac{3}{64}x + \frac{27}{128}x^2 + \frac{27}{64}x^3 + \frac{27}{256}x^4$.

Vậy hệ số lớn nhất là $\frac{27}{64}$.

Ví dụ 2: Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển $(1+x)^n$, biết tổng các hệ số bằng 4096.

Hướng dẫn giải

Ta có: $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n - 2096 \Leftrightarrow 2^n = 2^{12} \Leftrightarrow n = 12$.

Xét $C_{12}^k \geq C_{12}^{k-1} (1 \leq k \leq 12) \Leftrightarrow \frac{12!}{k!(12-k)!} \geq \frac{12!}{(k-1)!(13-k)!} \Leftrightarrow 13-k \geq k \Leftrightarrow k \leq 6$.

Tương tự $C_{12}^{k+1} \leq C_{12}^k \Rightarrow k \geq 6$.

Vậy $k = 6$. Khi đó $T_7 = C_{12}^6 = 924$.

Dạng 4: Tìm số hạng hữu tỉ trong khai triển $(a+b)^n$

1. Phương pháp

Bước 1: hạng tổng quát thứ $k+1$ là: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^k a^{\frac{m}{p}} b^{\frac{r}{q}}$ (Với a, b là hữu tỉ.

Bước 2: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{m}{p} \in \mathbb{N} \\ \frac{r}{q} \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n) \Rightarrow k_0.$$

Bước 3: Số hạng cần tìm là $C_n^{k_0} a^{n-k_0} b^{k_0}$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tìm các số hạng là số nguyên trong khai triển $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^5$.

Hướng dẫn giải

Xét số hạng $T_{k+1} = C_5^k (\sqrt{2})^{5-k} \cdot (\sqrt[3]{3})^k, 0 \leq k \leq 5$.

$T_{k+1} \in \mathbb{Z}$ khi và chỉ khi $5-k$ chia hết cho 2 và k chia hết cho 3 mà $0 \leq k \leq 5$, nên $k=3$. Vậy

$$T_4 = C_5^3 (\sqrt{2})^2 \cdot (\sqrt[3]{3})^3 = 60.$$

Ví dụ 2: Có bao nhiêu số hạng là số hữu tỉ trong khai triển $(\sqrt[4]{4} + \sqrt[3]{4})^{100}$?

Hướng dẫn giải

Xét số hạng $T_{k+1} = C_{100}^k (\sqrt[4]{4})^{100-k} (\sqrt[3]{4})^k; 0 \leq k \leq 100$.

$T_{k+1} \in \mathbb{Q}$ khi và chỉ khi $100-k$ là bội của 4 và k là bội của 3. Vì 100 chia hết cho 4, nên k là bội của 4 và k là bội của 3.

Vậy k là bội của 12. Mà $0 \leq k \leq 100$, nên $k = 0; 12; 24; 36; 48; 60; 72; 84$ và 96. Tức là có 9 số.

Dạng 5: Tính tổng hoặc chứng minh đẳng thức

1. Phương pháp

- Khi các số hạng của tổng đó có dạng $C_n^k a^{n-k} b^k$ thì ta dùng trực tiếp nhị thức Niu-ton

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} = C_n^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + \dots + C_n^{n-1} a^{n-1} b^1 + C_n^n a^n.\end{aligned}$$

Việc còn lại chỉ chờ khéo léo chọn a, b .

Lưu ý hai kết quả thường dùng là:

- Với $a = b = 1$ ta có $2^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$.
- Với $a = 1, b = -1$ ta có $0 = C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^k C_n^k + \dots + (-1)^n C_n^n$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính tổng $C_{2007}^1 + C_{2007}^2 + C_{2007}^3 + \dots + C_{2007}^{2007}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $(1+1)^{2007} = C_{2007}^1 + C_{2007}^2 + C_{2007}^3 + \dots + C_{2007}^{2007}$.

Vậy $C_{2007}^1 + C_{2007}^2 + C_{2007}^3 + \dots + C_{2007}^{2007} = 2^{2007} - 1$.

Ví dụ 2: Tính tổng của $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2$ bằng:

Hướng dẫn giải

Khai triển: $C = C_{2n}^0 x^{2n} + C_{2n}^1 x^{2n-1} + \dots + C_{2n}^n x^n + \dots + C_{2n}^{2n}$.

Mặt khác

$$(x+1)^{2n} = (x+1)^n (x+1)^n = (C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \dots + C_n^n)(C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^n x^n).$$

Trong cách khai triển đầu, hệ số của x^n là C_{2n}^n . Trong cách sau, hệ số của x^n là:

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2.$$

$$\text{Vậy } (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

Ví dụ 3: Tính giá trị của biểu thức: $B = 2^{2006} C_{2007}^1 + 2^{2004} C_{2007}^3 + 2^{2002} C_{2007}^5 + \dots + 2^0 C_{2007}^{2007}$

Hướng dẫn giải

- Ta có: $(1+2x)^{2007} = C_{2007}^0 x^{2007} \cdot 2^{2007} + C_{2007}^1 2^{2006} \cdot 2^{2006} + \dots + C_{2007}^{2007}$

$$\text{Cho } x=1 \text{ ta có: } 3^{2007} = A + B \quad (1)$$

- Mặt khác: $(1-2x)^{2007} = -C_{2007}^0 x^{2007} \cdot 2^{2007} + C_{2007}^1 2^{2006} \cdot 2^{2006} - \dots + C_{2007}^{2007}$

$$\text{Cho } x=1 \text{ ta có: } 1 = A - B \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } A = \frac{1}{2}(3^{2007} + 1); B = \frac{1}{2}(3^{2007} - 1).$$

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tìm hệ số của x^{12} trong khai triển $(2x - x^2)^{10}$.

A. C_{10}^8 .

B. $C_{10}^2 2^8$.

C. C_{10}^2 .

D. $-C_{10}^2 2^8$.

Lời giải

Chọn B

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$(2x - x^2)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (2x)^{10-k} \cdot (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (2)^{10-k} \cdot x^{10-k+2k} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (2)^{10-k} \cdot x^{10+k}.$$

Hệ số của x^{12} ứng với $10+k=12 \Leftrightarrow k=2 \longrightarrow$ hệ số cần tìm $C_{10}^2 2^8$.

Câu 2: Khai triển đa thức $P(x) = (5x-1)^{2007}$ ta được $P(x) = a_{2007}x^{2007} + a_{2006}x^{2006} + \dots + a_1x + a_0$.

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a_{2000} = -C_{2007}^7 \cdot 5^7$.

B. $a_{2000} = C_{2007}^7 \cdot 5^7$.

C. $a_{2000} = -C_{2007}^{2000} \cdot 5^{2000}$.

D. $a_{2000} = C_{2007}^7 \cdot 5^7$.

Lời giải

Chọn C

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$(5x-1)^{2007} = \sum_{k=0}^{2007} C_{2007}^k (5x)^{2007-k} \cdot (-1)^k = \sum_{k=0}^{2007} C_{2007}^k (5)^{2007-k} \cdot (-1)^k \cdot x^{2007-k}.$$

Hệ số của x^{2000} ứng với $2007-k=2000 \Leftrightarrow k=7$

$\longrightarrow$ hệ số cần tìm $-C_{2007}^7 (5)^{2000} = -C_{2007}^{2000} \cdot 5^{2000}$.

Câu 3: Đa thức $P(x) = 32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1$ là khai triển của nhị thức nào dưới đây?

A. $(1-2x)^5$.

B. $(1+2x)^5$.

C. $(2x-1)^5$.

D. $(x-1)^5$.

Lời giải

Chọn C

Nhận thấy $P(x)$ có dấu đan xen nên loại đáp án B.

Hệ số của x^5 bằng 32 nên loại đáp án D và còn lại hai đáp án A và C thì chỉ có C phù hợp (vì khai triển số hạng đầu tiên của đáp án C là $32x^5$.)

Câu 4: Tìm số hạng chứa x^7 trong khai triển $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{13}$.

A. $-C_{13}^4 x^7$.

B. $-C_{13}^3$.

C. $-C_{13}^3 x^7$.

D. $C_{13}^3 x^7$.

Lời giải

Chọn C

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^{13} = \sum_{k=0}^{13} C_{13}^k \cdot x^{13-k} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{13} C_{13}^k \cdot (-1)^k \cdot x^{13-2k}.$$

Hệ số của x^7 ứng với $13 - 2k = 7 \Leftrightarrow k = 3 \longrightarrow$ số hạng cần tìm $-C_{13}^3 x^7$.

Câu 5: Tìm số hạng chứa x^3 trong khai triển $\left(x + \frac{1}{2x}\right)^9$.

A. $-\frac{1}{8}C_9^3 x^3$.

B. $\frac{1}{8}C_9^3 x^3$.

C. $-C_9^3 x^3$.

D. $C_9^3 x^3$.

Lời giải

Chọn B

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$\left(x + \frac{1}{2x}\right)^9 = \sum_{k=0}^9 C_9^k \cdot x^{9-k} \cdot \left(\frac{1}{2x}\right)^k = \sum_{k=0}^9 C_9^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot x^{9-2k}.$$

Hệ số của x^3 ứng với $9 - 2k = 3 \Leftrightarrow k = 3 \longrightarrow$ số hạng cần tìm $\frac{1}{8}C_9^3 x^3$.

Câu 6: Tìm số hạng chứa x^{31} trong khai triển $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{40}$.

A. $-C_{40}^{37} x^{31}$.

B. $C_{40}^{37} x^{31}$.

C. $C_{40}^2 x^{31}$.

D. $C_{40}^4 x^{31}$.

Lời giải

Chọn B

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{40} = \sum_{k=0}^{40} C_{40}^k \cdot x^{40-k} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{40} C_{40}^k \cdot x^{40-3k}.$$

Hệ số của x^{31} ứng với $40 - 3k = 31 \Leftrightarrow k = 3 \longrightarrow$ số hạng cần tìm $C_{40}^{37} x^{31}$.

Câu 7: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^6$.

A. $2^4 C_6^2$.

B. $2^2 C_6^2$.

C. $-2^4 C_6^4$.

D. $-2^2 C_6^4$.

Lời giải

Chọn A

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^6 = \sum_{k=0}^6 C_6^k \cdot (x^2)^{6-k} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^6 C_6^k \cdot (2)^k \cdot x^{12-3k}.$$

Số hạng không chứa x ứng với $12 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 4$

$\longrightarrow$ số hạng cần tìm $C_6^4 \cdot 2^4 = 2^4 C_6^2$.

Câu 8: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(xy^2 - \frac{1}{xy}\right)^8$.

A. $70y^4$.

B. $60y^4$.

C. $50y^4$.

D. $40y^4$.

Lời giải**Chọn A**

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$\left(xy^2 - \frac{1}{xy}\right)^8 = \sum_{k=0}^8 C_8^k \cdot (xy^2)^{8-k} \cdot \left(-\frac{1}{xy}\right)^k = \sum_{k=0}^8 C_8^k \cdot (-1)^k \cdot x^{8-2k} \cdot y^{16-3k}.$$

Số hạng không chứa x ứng với $8-2k=0 \Leftrightarrow k=4$ $\longrightarrow$ số hạng cần tìm $C_8^4 y^4 = 70y^4$.**Câu 9:** Tìm số hạng chứa x^3y trong khai triển $\left(xy + \frac{1}{y}\right)^5$.

A. $3x^3y$.

B. $5x^3y$.

C. $10x^3y$.

D. $4x^3y$.

Lời giải**Chọn C**

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$\left(xy + \frac{1}{y}\right)^5 = \sum_{k=0}^5 C_5^k \cdot (xy)^{5-k} \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^k = \sum_{k=0}^5 C_5^k \cdot x^{5-k} \cdot y^{5-2k}.$$

Hệ số của x^3y ứng với $\begin{cases} 5-k=3 \\ 5-2k=1 \end{cases} \Leftrightarrow k=2 \longrightarrow$ số hạng cần tìm $C_5^2 x^3 y = 10x^3 y$.**Câu 10:** Tìm hệ số của x^6 trong khai triển $\left(\frac{1}{x} + x^3\right)^{3n+1}$ với $x \neq 0$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn

$3C_{n+1}^2 + nP_2 = 4A_n^2.$

A. $210x^6$.

B. $120x^6$.

C. 120.

D. 210.

Lời giải**Chọn D**Từ phương trình $3C_{n+1}^2 + nP_2 = 4A_n^2 \longrightarrow n=3$.

$$\text{Với } n=3, \text{ ta có } \left(\frac{1}{x} + x^3\right)^{3n+1} = \left(\frac{1}{x} + x^3\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{10-k} \cdot (x^3)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot x^{4k-10}.$$

Hệ số của x^6 ứng với $4k-10=6 \Leftrightarrow k=4 \longrightarrow$ hệ số cần tìm $C_{10}^4 = 210$.**Câu 11:** Tìm hệ số của x^9 trong khai triển $(1-\sqrt{3}x)^{2n}$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn

$\frac{2}{C_n^2} + \frac{14}{3C_n^3} = \frac{1}{n}.$

A. $-C_{18}^9 (\sqrt{3})^9$.

B. $-C_{18}^9 (\sqrt{3})^9 x^9$.

C. $C_{18}^9 (\sqrt{3})^9 x^9$.

D. $C_{18}^9 (\sqrt{3})^9$.

Lời giải

Chọn A

Từ phương trình $\frac{2}{C_n^2} + \frac{14}{3C_n^3} = \frac{1}{n} \longrightarrow n = 9$.

Với $n = 9$, ta có

$$(1 - \sqrt{3}x)^{2n} = (1 - \sqrt{3}x)^{18} = \sum_{k=0}^{18} C_{18}^k \cdot (1)^{18-k} \cdot (-\sqrt{3}x)^k = \sum_{k=0}^{18} C_{18}^k \cdot (-\sqrt{3})^k \cdot x^k = \sum_{k=0}^{18} C_{18}^k \cdot (-1)^k \cdot (\sqrt{3})^k \cdot x^k$$

Hệ số của x^9 ứng với $k = 9 \longrightarrow$ hệ số cần tìm $-C_{18}^9 (\sqrt{3})^9$.

Câu 12: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(2x - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{2n}$ với $x \neq 0$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^3 + 2n = A_{n+1}^2$.

A. $-C_{16}^{12} \cdot 2^4 \cdot 3^{12}$.

B. $C_{16}^0 \cdot 2^{16}$.

C. $C_{16}^{12} \cdot 2^4 \cdot 3^{12}$.

D. $C_{16}^{16} \cdot 2^0$.

Lời giải**Chọn C**

Từ phương trình $C_n^3 + 2n = A_{n+1}^2 \longrightarrow n = 8$.

Với $n = 8$, ta có

$$\left(2x - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{2n} = \left(2x - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16} = \sum_{k=0}^{16} C_{16}^k \cdot (2x)^{16-k} \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^k = \sum_{k=0}^{16} C_{16}^k \cdot 2^{16-k} \cdot (-3)^k \cdot x^{16-\frac{4k}{3}}$$

Số hạng không chứa x ứng với $16 - \frac{4k}{3} = 0 \Leftrightarrow k = 12$

$\longrightarrow$ số hạng cần tìm $C_{16}^{12} \cdot 2^4 \cdot 3^{12}$.

Câu 13: Tìm hệ số của x^7 trong khai triển $\left(3x^2 - \frac{2}{x}\right)^n$ với $x \neq 0$, biết hệ số của số hạng thứ ba trong khai triển bằng 1080.

A. 1080.

B. -810.

C. 810.

D. 1080.

Lời giải**Chọn B**

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$\left(3x^2 - \frac{2}{x}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot (3x^2)^{n-k} \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot 3^{n-k} \cdot (-2)^k \cdot x^{2n-3k}$$

Số hạng thứ 3 ứng với $k = 2$, kết hợp với giả thiết ta có

$$C_n^2 \cdot 3^{n-2} \cdot 4 = 1080 \Leftrightarrow n(n-1) \cdot 3^n = 4 \cdot 5 \cdot 3^5 \Leftrightarrow n = 5.$$

Hệ số của x^7 ứng với $2n - 3k = 7 \Leftrightarrow 10 - 3k = 7 \Leftrightarrow k = 1$

$\longrightarrow$ hệ số cần tìm $C_5^1 \cdot 3^4 \cdot (-2) = -810$.

Câu 14: Tìm số tự nhiên n , biết hệ số của số hạng thứ 3 theo số mũ giảm dần của x trong khai triển $\left(x - \frac{1}{3}\right)^n$ bằng 4.

A. 8.

B. 17.

C. 9.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^k = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^1 + C_n^2 x^{n-2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + C_n^n \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

→ số hạng thứ 3 theo số mũ giảm dần của x là $C_n^2 \left(-\frac{1}{3}\right)^2 x^{n-2}$.

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow C_n^2 \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot \frac{1}{9} = 4 \longrightarrow n = 9.$$

Do $n \in \mathbb{N}$ nên ta chọn $n = 9$ thỏa mãn.

Câu 15: Tìm số hạng đứng giữa trong khai triển $(x^3 + xy)^{21}$.

A. $C_{21}^{10} x^{40} y^{10}$.

B. $C_{21}^{10} x^{43} y^{10}$.

C. $C_{21}^{11} x^{41} y^{11}$.

D. $C_{21}^{10} x^{43} y^{10}; C_{21}^{11} x^{41} y^{11}$.

Lời giải

Chọn D

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$(x^3 + xy)^{21} = \sum_{k=0}^{21} C_{21}^k (x^3)^{21-k} \cdot (xy)^k = \sum_{k=0}^{21} C_{21}^k x^{63-2k} \cdot y^k.$$

Suy ra khai triển $(x^3 + xy)^{21}$ có 22 số hạng nên có hai số hạng đứng giữa là số hạng thứ 11 (ứng với $k = 10$) và số hạng thứ 12 (ứng với $k = 11$).

Vậy hai số hạng đứng giữa cần tìm là $C_{21}^{10} x^{43} y^{10}; C_{21}^{11} x^{41} y^{11}$.

Câu 16: Tính tổng S tất cả các hệ số trong khai triển $(3x - 4)^{17}$.

A. $S = 1$.

B. $S = -1$.

C. $S = 0$.

D. $S = 8192$.

Lời giải

Chọn B

Tính tổng các hệ số trong khai triển → cho $x = 1$.

$$\text{Khi đó } S = (3 \cdot 1 - 4)^{17} = -1.$$

Câu 17: Khai triển đa thức $P(x) = (2x - 1)^{1000}$ ta được $P(x) = a_{1000} x^{1000} + a_{999} x^{999} + \dots + a_1 x + a_0$.

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a_{1000} + a_{999} + \dots + a_1 = 2^n$.

B. $a_{1000} + a_{999} + \dots + a_1 = 2^n - 1$.

C. $a_{1000} + a_{999} + \dots + a_1 = 1$. **D.** $a_{1000} + a_{999} + \dots + a_1 = 0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $P(x) = a_{1000}x^{1000} + a_{999}x^{999} + \dots + a_1x + a_0$.

Cho $x = 1$ ta được $P(1) = a_{1000} + a_{999} + \dots + a_1 + a_0$.

Mặt khác $P(x) = (2x - 1)^{1000} \longrightarrow P(1) = (2 \cdot 1 - 1)^{1000} = 1$.

Từ đó suy ra $a_{1000} + a_{999} + \dots + a_1 + a_0 = 1 \longrightarrow a_{1000} + a_{999} + \dots + a_1 = 1 - a_0$.

Mà là số hạng không chứa x trong khai triển $P(x) = (2x - 1)^{1000}$ nên

$$a_0 = C_{1000}^{1000} (2x)^0 (-1)^{1000} = C_{1000}^{1000} = 1.$$

Vậy $a_{1000} + a_{999} + \dots + a_1 = 0$.

Câu 18: Tìm hệ số của x^5 trong khai triển $P(x) = x(1 - 2x)^5 + x^2(1 + 3x)^{10}$.

A. 80.

B. 3240.

C. 3320.

D. 259200.

Lời giải

Chọn C

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$x(1 - 2x)^5 = x \cdot \sum_{k=0}^5 C_5^k \cdot (-2x)^{5-k} = \sum_{k=0}^5 C_5^k \cdot (-2)^{5-k} \cdot x^{6-k}.$$

$\longrightarrow$ số hạng chứa x^5 tương ứng với $6 - k = 5 \Leftrightarrow k = 1$.

Tương tự, ta có $x^2(1 + 3x)^{10} = x^2 \cdot \sum_{l=0}^{10} C_{10}^l \cdot (3x)^{10-l} = \sum_{l=0}^{10} C_{10}^l \cdot 3^{10-l} \cdot x^{12-l}$.

$\longrightarrow$ số hạng chứa x^5 tương ứng với $12 - l = 5 \Leftrightarrow l = 7$.

Vậy hệ số của x^5 cần tìm $P(x)$ là $C_5^1 \cdot (2)^4 + C_{10}^7 \cdot 3^3 = 3320$.

Câu 19: Tìm hệ số chứa x^{10} trong khai triển $f(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + x + 1\right)^2 (x + 2)^{3n}$ với n là số tự nhiên thỏa mãn hệ thức $A_n^3 + C_n^{n-2} = 14n$.

A. $2^5 C_{19}^{10}$.

B. $2^5 C_{19}^{10} x^{10}$.

C. $2^9 C_{19}^{10}$.

D. $2^9 C_{19}^{10} x^{10}$.

Lời giải

Chọn A

Từ phương trình $A_n^3 + C_n^{n-2} = 14n \longrightarrow n = 5$.

Với $n = 5$, ta có $f(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + x + 1\right)^2 (x + 2)^{3n} = \frac{1}{16}(x + 2)^4 (x + 2)^{15} = \frac{1}{16}(x + 2)^{19}$.

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có $f(x) = \frac{1}{16}(x+2)^{19} = \frac{1}{16} \sum_{k=0}^{19} C_{19}^k \cdot 2^k \cdot x^{19-k}$.

Số hạng chứa x^{10} trong khai triển tương ứng với $19-k=10 \Leftrightarrow k=9$.

Vậy hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển là $\frac{1}{16} C_{19}^{10} 2^9 = 2^5 C_{19}^{10}$.

Câu 20: Tìm hệ số của x^4 trong khai triển $P(x) = (1-x-3x^3)^n$ với n là số tự nhiên thỏa mãn hệ thức $C_n^{n-2} + 6n + 5 = A_{n+1}^2$.

A. 210.

B. 840.

C. 480.

D. 270.

Lời giải

Chọn C

Từ phương trình $C_n^{n-2} + 6n + 5 = A_{n+1}^2 \longrightarrow n = 10$.

Với $n = 10$, khi đó $P(x) = (1-x-3x^3)^{10} = (1-x-3x^3)^{10}$.

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$\begin{aligned} P(x) &= (1-x-3x^3)^{10} = \left[1 - (x+3x^3)\right]^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (-1)^k (x+3x^3)^k \\ &= \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (-1)^k x^k (1+3x^2)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \sum_{l=0}^k C_k^l (-1)^k 3^l x^{k+2l}. \end{aligned}$$

Số hạng chứa x^4 trong khai triển tương ứng với $\begin{cases} k+2l=4 \\ 0 \leq k \leq 10 \\ 0 \leq l \leq k \end{cases} \Leftrightarrow (k;l) = \{(4;0), (2;1)\}$.

Vậy hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển là $C_{10}^4 C_4^0 + C_{10}^2 C_2^1 3 = 480$.

Câu 21: Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển $(1+x+x^2+x^3)^5$.

A. 5.

B. 50.

C. 101.

D. 105.

Lời giải

Chọn C

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$(1+x+x^2+x^3)^5 = (1+x)^5 (1+x^2)^5 = \sum_{k=0}^5 C_5^k x^k \cdot \sum_{l=0}^5 C_5^l (x^2)^l = \sum_{k=0}^5 C_5^k \cdot \sum_{l=0}^5 C_5^l \cdot x^{k+2l}.$$

Số hạng chứa x^{10} trong khai triển tương ứng với $k+2l=10 \Leftrightarrow k=10-2l$.

Kết hợp với điều kiện ta có hệ $\begin{cases} k+2l=10 \\ 0 \leq k \leq 5, 0 \leq l \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow (k;l) = \{(0;5), (2;4), (4;3)\}$.

Vậy hệ số cần tìm là $C_5^0 \cdot C_5^5 + C_5^2 \cdot C_5^4 + C_5^4 \cdot C_5^3 = 101$.

Câu 22: Tìm hệ số của x^5 trong khai triển $P(x) = (1+x) + 2(1+x)^2 + \dots + 8(1+x)^8$.

A. 630.

B. 635.

C. 636.

D. 637.

Lời giải

Chọn C

Các biểu thức $(1+x)$, $(1+x)^2, \dots, (1+x)^4$ không chứa số hạng chứa x^5 .

Hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $5(1+x)^5$ là $5C_5^5$.

Hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $6(1+x)^6$ là $6C_6^5$.

Hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $7(1+x)^7$ là $7C_7^5$.

Hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $8(1+x)^8$ là $8C_8^5$.

Vậy hệ số của x^5 trong khai triển $P(x)$ là $5C_5^5 + 6C_6^5 + 7C_7^5 + 8C_8^5 = 636$.

Câu 23: Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + \dots + C_{2n}^n = C_{2n}^{n+1} + C_{2n}^{n+2} + \dots + C_{2n}^{2n}$.

B. $C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + \dots + C_{2n}^{n-1} = C_{2n}^{n+1} + C_{2n}^{n+2} + \dots + C_{2n}^{2n}$.

C. $C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + \dots + C_{2n}^{n-2} = C_{2n}^{n+1} + C_{2n}^{n+2} + \dots + C_{2n}^{2n}$.

D. $C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + \dots + C_{2n}^{n+1} = C_{2n}^{n+1} + C_{2n}^{n+2} + \dots + C_{2n}^{2n}$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $C_n^k = C_n^{n-k}$, ta có
$$\begin{cases} C_{2n}^0 = C_{2n}^{2n} \\ C_{2n}^1 = C_{2n}^{2n-1} \\ \dots \\ C_{2n}^{n-1} = C_{2n}^{n+1} \end{cases}$$

Cộng vế theo vế, ta được $C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + \dots + C_{2n}^{n-1} = C_{2n}^{n+1} + C_{2n}^{n+2} + \dots + C_{2n}^{2n}$.

Câu 24: Tính tổng $S = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$.

A. $S = 2^n - 1$.

B. $S = 2^n$.

C. $S = 2^{n-1}$.

D. $S = 2^n + 1$.

Lời giải

Chọn B

Khai triển nhị thức Niu-tơn của $(1+x)^n$, ta có

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n.$$

Cho $x = 1$, ta được $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$.

Câu 25: Tính tổng $S = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n}$.

A. $S = 2^{2n}$.

B. $S = 2^{2n} - 1$.

C. $S = 2^n$.

D. $S = 2^{2n} + 1$.

Lời giải

Chọn A

Khai triển nhị thức Niu-tơn của $(1+x)^{2n}$, ta có

$$(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + \dots + C_{2n}^{2n} x^{2n}.$$

Cho $x=1$, ta được $C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n} = (1+1)^{2n} = 2^{2n}$.

Câu 26: Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$.

A. $n=8$.

B. $n=9$.

C. $n=10$.

D. $n=11$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $(1+1)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} \cdot (1)$

Lại có $C_{2n+1}^0 = C_{2n+1}^{2n+1}$; $C_{2n+1}^1 = C_{2n+1}^{2n}$; $C_{2n+1}^2 = C_{2n+1}^{2n-1}$; $\dots$; $C_{2n+1}^n = C_{2n+1}^{n+1} \cdot (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \dots + C_{2n+1}^n = \frac{2^{2n+1}}{2}$

$$\Leftrightarrow C_{2n+1}^1 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{2n} - 1 \Leftrightarrow 2^{20} - 1 = 2^{2n} - 1 \Leftrightarrow n = 10.$$

Vậy $n=10$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 27: Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} = 1024$.

A. $n=5$.

B. $n=9$.

C. $n=10$.

D. $n=4$.

Lời giải

Chọn A

Xét khai triển $(x+1)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 x^{2n+1} + C_{2n+1}^1 x^{2n} + \dots + C_{2n+1}^{2n+1}$.

Cho $x=1$, ta được $2^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} \cdot (1)$

Cho $x=-1$, ta được $0 = -C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 - \dots + C_{2n+1}^{2n+1} \cdot (2)$

Cộng (1) và (2) về theo vế, ta được

$$2^{2n+1} = 2(C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1}) \Leftrightarrow 2^{2n+1} = 2 \cdot 1024 \Leftrightarrow n = 5.$$

Câu 28: Tính tổng $S = C_n^0 + 3C_n^1 + 3^2 C_n^2 + \dots + 3^n C_n^n$.

A. $S = 3^n$.

B. $S = 2^n$.

C. $S = 3 \cdot 2^n$.

D. $S = 4^n$.

Lời giải

Chọn D

Khai triển nhị thức Niu-tơn của $(1+x)^n$, ta có

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n.$$

Cho $x = 3$, ta được $C_n^0 + 3C_n^1 + 3^2C_n^2 + \dots + 3^n C_n^n = (1+3)^n = 4^n$.

Câu 29: Khai triển đa thức $P(x) = (1+2x)^{12} = a_0 + a_1x + \dots + a_{12}x^{12}$. Tìm hệ số a_k ($0 \leq k \leq 12$) lớn nhất trong khai triển trên.

A. $C_{12}^8 2^8$.

B. $C_{12}^9 2^9$.

C. $C_{12}^{10} 2^{10}$.

D. $1 + C_{12}^8 2^8$.

Lời giải

Chọn A

Khai triển nhị thức Niu-tơn của $(1+2x)^{12}$, ta có

$$(1+2x)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k (2x)^k = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k 2^k x^k.$$

Suy ra $a_k = C_{12}^k 2^k$.

$$\text{Hệ số } a_k \text{ lớn nhất khi } \begin{cases} a_k \geq a_{k+1} \\ a_k \geq a_{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^k C_{12}^k \geq 2^{k+1} C_{12}^{k+1} \\ 2^k C_{12}^k \geq 2^{k-1} C_{12}^{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{12-k} \geq \frac{2}{k+1} \\ \frac{2}{k} \geq \frac{1}{12-k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{23}{3} \leq k \leq \frac{26}{3}.$$

$\xrightarrow[k \in \mathbb{N}]{0 \leq k \leq 12} k = 8$. Vậy hệ số lớn nhất là $a_8 = C_{12}^8 2^8$.

Câu 30: Khai triển đa thức $P(x) = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\right)^{10} = a_0 + a_1x + \dots + a_9x^9 + a_{10}x^{10}$. Tìm hệ số a_k ($0 \leq k \leq 10$) lớn nhất trong khai triển trên.

A. $1 + \frac{2^7}{3^{10}} C_{10}^7$.

B. $\frac{2^7}{3^{10}} C_{10}^7$.

C. $\frac{2^6}{3^{10}} C_{10}^6$.

D. $\frac{2^8}{3^{10}} C_{10}^8$.

Lời giải

Chọn B

Khai triển nhị thức Niu-tơn của $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\right)^{10}$, ta có

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} \left(\frac{2}{3}x\right)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} \left(\frac{2}{3}\right)^k x^k.$$

Suy ra $a_k = C_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} \left(\frac{2}{3}\right)^k$.

Giả sử a_k là hệ số lớn nhất, khi đó $\begin{cases} a_k \geq a_{k+1} \\ a_k \geq a_{k-1} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \geq C_{10}^{k+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{10-(k+1)} \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} \\ C_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \geq C_{10}^{k-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{10-(k-1)} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq \frac{19}{3} \\ k \leq \frac{22}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{19}{3} \leq k \leq \frac{22}{3} \xrightarrow[k \in \mathbb{N}]{0 \leq k \leq 10} k = 7.$$

Vậy hệ số lớn nhất là $a_7 = \frac{2^7}{3^{10}} C_{10}^7$.

BÀI 4&5. BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

A. KIẾN THỨC LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

I. PHÉP THỬ, KHÔNG GIAN MẪU

1. Phép thử

Gieo một đồng tiền kim loại (gọi tắt là đồng tiền), rút một quân bài từ cỗ bài tú lơ khơ (cỗ bài 52 lá) hay bắn một viên đạn vào bia,... là những ví dụ về phép thử.

Khi gieo một đồng tiền, ta không thể đoán trước được mặt ghi số (mặt ngửa, viết tắt là N) hay mặt kia (mặt sấp, viết tắt là S) sẽ xuất hiện). Đó là phép thử ngẫu nhiên

Phép thử ngẫu nhiên là phép thử mà ta không đoán trước được kết quả của nó, mặc dù đã biết tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử đó.

Để đơn giản, từ nay phép thử ngẫu nhiên được gọi tắt là phép thử.

2. Không gian mẫu

Tập hợp các kết quả có thể xảy ra của một phép thử được gọi là không gian mẫu của phép thử và kí hiệu là Ω (đọc là ô-mê-ga)

II. BIẾN CỐ

- **Biến cố** là một tập con của không gian mẫu. Người ta thường kí hiệu các biến cố bằng các chữ in hoa A, B, C, ...
- Tập $\emptyset$ được gọi là biến cố không thể (gọi tắt là **biến cố không**). Còn tập Ω được gọi là **biến cố chắc chắn**.
- Ta nói rằng biến cố A xảy ra trong một phép thử nào đó khi và chỉ khi kết quả của phép thử đó là một phần tử của A (hay thuận lợi cho A)

III. PHÉP TOÁN TRÊN CÁC BIẾN CỐ

Giả sử A là biến cố liên quan đến phép thử

- Biến cố đối của A kí hiệu là $\overline{A} = \Omega \setminus A$
- Hợp hai biến cố A và B kí hiệu là $A \cup B$
- Giao hai biến cố A và B kí hiệu là $A \cap B$ (hoặc A.B)
- $A \cap B = \emptyset$ thì ta nói A và B xung khắc.

IV. ĐỊNH NGHĨA CỔ ĐIỂN CỦA XÁC SUẤT

1. Định nghĩa

Giả sử A là biến cố liên quan đến một phép thử với không gian mẫu Ω chỉ có một số hữu hạn kết quả đồng khả năng xảy ra xuất hiện.

Ta gọi tỉ số $\frac{n(A)}{n(\Omega)}$ là xác suất của biến cố A, kí hiệu là $P(A)$.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

Chú ý:

$n(A)$ là số phần tử của A hay cũng là số các kết quả thuận lợi cho biến cố A, còn $n(\Omega)$ là số các kết quả có thể xảy ra của phép thử.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Bộ bài tú - lơ khơ có 52 quân bài. Rút ngẫu nhiên ra 4 quân bài. Tìm xác suất của các biến cố:

A: “Rút ra được tứ quý K”

B: “4 quân bài rút ra có ít nhất một con Át”

C: “4 quân bài lấy ra có ít nhất hai quân bích”

Giải

Ta có số cách chọn ngẫu nhiên 4 quân bài là: $C_{52}^4 = 270725$

Suy ra $n(\Omega) = 270725$

Vì bộ bài chỉ có 1 tứ quý K nên ta có $n(A) = 1$

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{1}{270725}$$

Vì có C_{48}^4 cách rút 4 quân bài mà không có con Át nào,

$$\text{suy ra } N(B) = C_{52}^4 - C_{48}^4 \Rightarrow P(B) = \frac{15229}{54145}$$

Vì trong bộ bài có 13 quân bích, số cách rút ra bốn quân bài mà trong đó số quân bích không ít hơn 2 là: $C_{13}^2 \cdot C_{39}^2 + C_{13}^3 \cdot C_{39}^1 + C_{13}^4 \cdot C_{39}^0 = 69667$

$$\text{Suy ra } n(C) = 69667 \Rightarrow P(C) = \frac{5359}{20825}.$$

Ví dụ 2. Trong một chiếc hộp có 20 viên bi, trong đó có 8 viên bi màu đỏ, 7 viên bi màu xanh và 5 viên bi màu vàng. Lấy ngẫu nhiên ra 3 viên bi. Tìm xác suất để:

1. 3 viên bi lấy ra đều màu đỏ
2. 3 viên bi lấy ra có không quá hai màu.

Giải

Gọi biến cố A : “ 3 viên bi lấy ra đều màu đỏ”

B : “3 viên bi lấy ra có không quá hai màu”

Số các lấy 3 viên bi từ 20 viên bi là: C_{20}^3 nên ta có: $|\Omega| = C_{20}^3 = 1140$

1. Số cách lấy 3 viên bi màu đỏ là: $C_8^3 = 56$ nên $|\Omega_A| = 56$

Do đó: $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{56}{1140} = \frac{14}{285}$.

2. Ta có:

• Số cách lấy 3 viên bi chỉ có một màu: $C_8^3 + C_7^3 + C_5^3 = 101$

• Số các lấy 3 viên bi có đúng hai màu

Đỏ và xanh: $C_{15}^3 - (C_8^3 + C_7^3)$

Đỏ và vàng: $C_{13}^3 - (C_8^3 + C_5^3)$

Vàng và xanh: $C_{12}^3 - (C_5^3 + C_7^3)$

Nên số cách lấy 3 viên bi có đúng hai màu:

$$C_{15}^3 + C_{13}^3 + C_{12}^3 - 2(C_8^3 + C_7^3 + C_5^3) = 759$$

Do đó: $|\Omega_B| = 860$. Vậy $P(B) = \frac{|\Omega_B|}{|\Omega|} = \frac{43}{57}$.

V. TÍNH CHẤT CỦA XÁC SUẤT

1. Định lí

Định lí

a) $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$.

b) $0 \leq P(A) \leq 1$, với mọi biến cố A.

c) Nếu A và B xung khắc thì

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Hệ quả: Với mọi biến cố A, ta có $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

2. Ví dụ

Ví dụ 3: Cho hộp chứa ba quả cầu trắng và hai quả cầu đen như hình, lấy ngẫu nhiên đồng thời hai quả. Hãy tính xác suất sao cho hai quả đó:

a) khác màu;

b) Cùng màu.



Giải

Mỗi lần lấy đồng thời hai quả cầu cho ta một tổ hợp chập hai của năm phần tử. Do đó, không gian mẫu gồm các tổ hợp chập hai của năm phần tử và $n(\Omega) = C_5^2 = 10$.

Vì việc lấy quả cầu là ngẫu nhiên nên các kết quả đó là đồng khả năng. Ký hiệu A : "Hai quả cầu khác màu", B : "Hai quả cầu cùng màu".

Vì chỉ có hai màu đen hoặc trắng nên ta thấy $B = \overline{A}$.

a) theo quy tắc nhân, $n(A) = 2.3 = 6$.

$$\text{Do đó: } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

b) Vì $B = \overline{A}$ nên theo hệ quả ta có: $P(B) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.

Ví dụ 4: Một hộp chứa 20 quả cầu đánh số từ 1 đến 20. Lấy ngẫu nhiên một quả. Tính xác suất các biến cố sau:

a) A : "Nhận được quả cầu ghi số chẵn";

b) B : "Nhận được quả cầu ghi số chia hết cho 3"

c) $A \cap B$;

d) C : "Nhận được quả cầu ghi số không chia hết cho 6"

Giải

Không gian mẫu được mô tả là $\Omega = \{1, 2, \dots, 20\}$ gồm 20 kết quả đồng khả năng, $n(\Omega) = 20$.

a) $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$, $n(A) = 10$ nên

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}.$$

b) $B = \{3, 6, 9, 15, 18\}$, $n(B) = 6$. Từ đó:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}.$$

c) $A \cap B = \{6, 12, 18\}$, $n(A \cap B) = 3$ nên

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{20}.$$

d) Vì $A \cap B = \{6, 12, 18\}$, nên $A \cap B$ là biến cố "Nhận được quả cầu ghi số chia hết cho 6". Do đó, C là biến cố đối của biến cố $A \cap B$, ta có $C = \overline{A \cap B}$ và

$$P(C) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{3}{20} = \frac{17}{20}.$$

VI. CÁC BIẾN CỐ ĐỘC LẬP, CÔNG THỨC NHÂN XÁC SUẤT

Ví dụ 5: Bạn thứ nhất có một đồng tiền, bạn thứ hai có con súc sắc (cân đối, đồng chất). Xét phép thử "Bạn thứ nhất gieo đồng tiền, sau đó bạn thứ hai gieo con súc sắc" (hình.a).

a) Mô tả không gian mẫu của phép thử này.

b) Tính xác suất của các biến cố sau:

A: “Đồng tiền xuất hiện mặt sấp”;

B: “Con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm”;

C: “Con súc sắc xuất hiện mặt lẻ”.

c) Chứng tỏ: $P(A.B) = P(A).P(B)$; $P(A.C) = P(A).P(C)$.

Giải

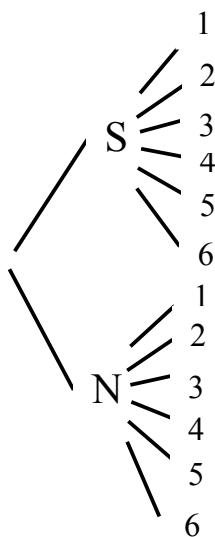
a) Không gian mẫu của phép thử có dạng

$$\Omega = \{S1, S2, S3, S4, S5, S6, N1, N2, N3, N4, N5, N6\}.$$

Theo giả thiết, Ω gồm 12 kết quả đồng khả năng xuất hiện.(hình.b)



Hình a



Hình b

b) Ta thấy $A = \{S1, S2, S3, S4, S5, S6\}, n(A) = 6$;

$$B = \{S6, N6\}, n(B) = 2;$$

$$C = \{N1, N3, N5, S1, S3, S5\}, n(C) = 6.$$

$$\text{Từ đó } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2};$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6};$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

c) Rõ ràng $A.B = \{S6\}$ và $P(A.B) = \frac{n(A.B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{12}$.

Ta có

$$P(A.B) = \frac{1}{12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = P(A)P(B).$$

Tương tự $A.C = \{S1, S3, S5\}$;

$$P(A.C) = \frac{n(A.C)}{n(\Omega)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A)P(C).$$

Trong ví dụ trên, xác suất xuất hiện mỗi mặt của con súc sắc là $\frac{1}{6}$, không phụ thuộc vào đồng tiền xuất hiện mặt “sấp” hoặc “ngửa”.

Nếu sự xảy ra của một biến cố không ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của một biến cố khác thì ta nói hai biến cố đó độc lập. Như vậy trong ví dụ trên biến cố A và B độc lập và cũng vậy, A và C độc lập.

Tổng quát, đối với hai biến cố bất kỳ thì ta có mối liên hệ sau:

A và B là hai biến cố độc lập khi và chỉ khi

$$P(A.B) = P(A).P(B).$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Tính xác suất dựa vào định nghĩa cổ điển

1. Phương pháp

- Tính xác suất theo thống kê ta sử dụng công thức:

$$P(A) = \frac{\text{Số lần xuất hiện của biến cố A}}{N}.$$

- Tính xác suất của biến cố theo định nghĩa cổ điển ta sử dụng công thức :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Một tổ có 8 nam và 4 nữ. Chọn ngẫu nhiên 2 người từ tổ đó. Xác suất để chọn được cả 2 nam bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Tổng số học sinh trong tổ là $8 + 4 = 12$ học sinh.

Số cách chọn 2 trong 12 học sinh trong tổ là $C_{12}^2 = 66$ (cách).

Suy ra $n(\Omega) = 66$.

Gọi A là biến cố: “Chọn được 2 nam”

Suy ra $n(A) = C_8^2 = 28$.

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{28}{66} = \frac{14}{33}.$$

Ví dụ 2: Một hộp đựng 4 viên bi đỏ và 5 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp đó. Xác suất để chọn được đúng một viên bi đỏ là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Tổng số viên bi trong hộp là $4 + 5 = 9$ (viên bi).

Số cách chọn 3 trong 9 viên bi là: $C_9^3 = 84$ (cách).

Suy ra: $n(\Omega) = 84$.

Gọi A là biến cố: “Chọn 3 viên bi và được đúng 1 viên bi đỏ”.

Số cách chọn 1 trong 4 viên bi đỏ là 4 (cách).

Số cách chọn 2 trong 5 viên bi trắng là $C_5^2 = 10$ (cách)

Suy ra $n(A) = 4 \times 10 = 40$.

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{40}{84} = \frac{10}{21}.$$

Ví dụ 3: Trong một hộp đựng 10 cây viết trong đó có 4 cây viết hư. Lấy ngẫu nhiên 3 cây viết. Xác suất để chọn được cả 3 cây đều tốt là bao nhiêu?

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{1}{6}$.

D. $\frac{1}{8}$.

Hướng dẫn giải

Số cách chọn 3 trong 10 cây viết là $C_{10}^3 = 120$ (cách).

Suy ra $n(\Omega) = 120$.

Gọi A là biến cố: “Chọn được cả 3 cây đều tốt”.

Số cây viết còn tốt là $10 - 4 = 6$ (cây viết).

Số cách chọn 3 trong 6 cây viết còn tốt là $C_6^3 = 20$ (cách).

Suy ra $n(A) = 20$.

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}.$$

Ví dụ 4: Gieo 2 con súc sắc. Xác suất để số chấm xuất hiện trên hai con súc sắc giống nhau là bao nhiêu?

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{1}{6}$.

D. $\frac{1}{8}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $n(\Omega) = 6^2 = 36$.

Gọi A là biến cố: “Số hiệu xuất hiện trên 2 con súc sắc giống nhau”.

Suy ra $A = \{(1;1), (2;2), (3;3), (4;4), (5;5), (6;6)\} \Rightarrow n(A) = 6$.

Vậy $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Ví dụ 5: Gieo một đồng tiền 5 lần. Xác suất để cả 5 lần đều xuất hiện mặt ngửa là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Ta có: $n(\Omega) = 2^5 = 32$.

Gọi A là biến cố: “Cả 5 lần xuất hiện mặt ngửa”.

Suy ra $A = \{(N N N N N)\} \Rightarrow n(A) = 1$.

Vậy $P(A) = \frac{1}{32}$.

Ví dụ 6: Từ cỗ bài tú lơ khơ 52 con rút ngẫu nhiên 4 con. Xác suất để được 1 con át và 3 con K là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Ta có: $n(\Omega) = C_{52}^4 = 270725$.

Gọi A là biến cố: “Rút được 1 con át và 3 con K”.

Số cách rút được 1 trong 4 con át là 4 cách.

Số cách rút được 3 trong 4 con K là $C_4^3 = 4$ (cách).

Suy ra $n(A) = 4 \times 4 = 16$.

Vậy $P(A) = \frac{16}{270725}$.

Ví dụ 7: Có 6 quả cầu được đánh số từ 1 đến 6 và đựng trong một hộp. Lấy ngẫu nhiên 4 quả và xếp chúng theo thứ tự thành hàng ngang từ trái sang phải. Xác suất để được tổng các chữ số bằng 10 là bao nhiêu?

A. $\frac{4}{15}$.

B. $\frac{3}{15}$.

C. $\frac{2}{15}$.

D. $\frac{1}{15}$.

Hướng dẫn giải

Lấy 4 quả cầu từ 6 quả cầu và xếp chúng có thứ tự là số chỉnh hợp chập 4 của 6 (cách xếp).

Suy ra $n(\Omega) = A_6^4 = 360$.

Gọi A là biến cố: “Tổng 4 chữ số trên 4 quả cầu bằng 10”.

Các chữ số trên 4 quả cầu chỉ có thể là 1, 2, 3, 4.

Vậy mỗi phần tử của A là một hoán vị của 4 chữ số 1, 2, 3, 4.

$$\text{Suy ra } P(A) = \frac{24}{360} = \frac{1}{15}.$$

Ví dụ 8: Trong 100 vé số có 1 vé trúng 10.000 đồng, 5 vé trúng 5.000 đồng và 10 vé trúng 1.000 đồng. Một người mua ngẫu nhiên 3 vé. Xác suất để người đó trúng thưởng đúng 3.000 đồng là bao nhiêu?

A. $\frac{4}{2695}$. B. $\frac{3}{2695}$. C. $\frac{2}{2695}$. D. $\frac{1}{2695}$.

Hướng dẫn giải

Số cách mua 3 trong 100 vé số là $C_{100}^3 = 161700$ (cách)

$$\text{Suy ra } n(\Omega) = 161700.$$

Gọi A là biến cố: “Mua 3 vé và trúng đúng 3000 đồng”.

Như vậy phải mua đúng 3 vé số loại trúng 1000 đồng.

$$\text{Suy ra } n(A) = C_{10}^3 = 120.$$

$$\text{Suy ra } P(A) = \frac{120}{161700} = \frac{2}{2695}.$$

Ví dụ 9: Một hộp đựng 100 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 100. Lấy ngẫu nhiên từ hộp một thẻ. Xác suất để số ghi trên thẻ lấy ra đó chia hết cho 2 hoặc 5 là bao nhiêu?

A. $\frac{3}{5}$. B. $\frac{7}{10}$. C. $\frac{4}{5}$. D. $\frac{9}{10}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $n(\Omega) = 100$.

Gọi A là biến cố: “Số ghi trên thẻ chia hết cho 2 hoặc cho 5”.

Nhận xét: Một số vừa chia hết cho 2 và vừa chia hết cho 5 thì số đó có chữ số tận cùng là chữ số 0. Do đó cách đếm số phần tử của A như sau:

- Các số chẵn từ 2 đến 100 có 50 số.
- Các số chia hết cho 5 và có chữ số tận cùng khác chữ số 0 từ 5 đến 95 có 10 số.

$$\text{Suy ra } n(A) = 50 + 10 = 60.$$

$$\text{Suy ra } P(A) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}.$$

Ví dụ 10: Cho 8 quả cân có trọng lượng lần lượt là 1kg, 2kg, 3kg, 4kg, 5kg, 6kg, 7kg, 8kg. Chọn ngẫu nhiên ba quả cân trong số đó. Xác suất để tổng trọng lượng 3 quả cân được chọn không vượt quá 9kg là bao nhiêu?

A. $\frac{1}{14}$.

B. $\frac{5}{56}$.

C. $\frac{1}{8}$.

D. $\frac{3}{28}$.

Hướng dẫn giải

Số cách chọn 3 trong 8 quả cân là $C_8^3 = 56$ (cách).

Suy ra $n(\Omega) = 56$.

Gọi A là biến cố: “Tổng trọng lượng 3 quả cân không vượt quá 9kg”.

Suy ra 3 quả cân được chọn chỉ có thể là:

1kg	1kg	1kg	1kg	1kg	1kg	2kg
2kg	2kg	2kg	2kg	3kg	3kg	3kg
3kg	4kg	5kg	6kg	4kg	5kg	4kg

Suy ra $n(A) = 7$.

Suy ra $P(A) = \frac{7}{56} = \frac{1}{8}$.

Ví dụ 11: Một hộp chứa 10 viên bi gồm 6 viên bi màu trắng và 4 viên bi màu đỏ. Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp đó. Xác suất để lấy được 2 viên bi màu trắng và 2 viên bi màu đỏ là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Số cách chọn 4 trong 10 viên bi là $C_{10}^4 = 210$ (cách).

Suy ra $n(\Omega) = 210$.

Gọi A là biến cố: “Lấy được 2 viên bi trắng và 2 viên bi đỏ”.

Số cách chọn 2 trong 6 viên bi trắng là $C_6^2 = 15$ (cách).

Số cách chọn 2 trong 4 viên bi đỏ là $C_4^2 = 6$ (cách).

Suy ra $n(A) = 15 \times 6 = 90$.

Suy ra $P(A) = \frac{90}{210} = \frac{3}{7}$.

Ví dụ 12. Một hộp chứa 11 quả cầu gồm 5 quả cầu xanh và 6 quả cầu đỏ. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 quả cầu từ hộp đó. Xác suất để chọn ra 2 quả cầu cùng màu bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Số cách chọn ngẫu nhiên 2 quả cầu từ 11 quả cầu là $C_{11}^2 = 55$.

Số các chọn hai quả cầu cùng màu là $C_5^2 + C_6^2 = 25$.

Xác suất để chọn ra hai quả cầu cùng màu là $\frac{25}{55} = \frac{5}{11}$.

Ví dụ 13. Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh gồm 2 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B và 5 học sinh lớp 12C thành một hàng ngang. Tính xác suất để trong 10 học sinh trên không có 2 học sinh cùng lớp đứng cạnh nhau.

A. $\frac{11}{630}$.

B. $\frac{1}{126}$.

C. $\frac{1}{105}$.

D. $\frac{1}{42}$.

Hướng dẫn giải

Số cách xếp 10 học sinh vào 10 vị trí: $n(\Omega) = 10!$ cách.

Gọi A là biến cố : “10 học sinh trên không có hai học sinh cùng lớp đứng cạnh nhau”.

Xếp 5 học sinh lớp 12C vào 5 vị trí có 5! cách.

Ứng mỗi cách xếp 5 học sinh lớp 12C sẽ có 6 khoảng trống gồm 4 vị trí ở giữa và 2 vị trí ở đầu để xếp các học sinh còn lại.

	C ₁		C ₂		C ₃		C ₄		C ₅	
--	----------------	--	----------------	--	----------------	--	----------------	--	----------------	--

TH1: Xếp 3 học sinh lớp 12B vào 4 vị trí ở giữa (không xếp vào hai đầu), có A_4^3 cách.

Ứng với mỗi cách xếp đó, chọn lấy 1 học sinh lớp 12A xếp vào vị trí thứ 4 (để hai học sinh lớp 12C không được ngồi cạnh nhau), có 2 cách.

Học sinh lớp 12A còn lại có 8 vị trí để xếp, có 8 cách.

Theo quy tắc nhân, ta có $5!.A_4^3.2.8$ cách.

TH2: Xếp hai học sinh trong 3 học sinh lớp 12B vào 4 vị trí ở giữa và học sinh còn lại xếp ở vị trí đầu có $C_3^1.2.A_4^2$ cách.

Ứng với mỗi cách xếp đó còn hai vị trí trống ở giữa, xếp 2 học sinh lớp 12A vào hai vị trí đó. Có 2 cách.

Theo quy tắc nhân, ta có $5!.C_3^1.2.A_4^2.2$ cách.

Do đó số cách xếp không có học sinh cùng lớp ngồi cạnh nhau là:

$$n(A) = 5!.A_4^3.2.8 + 5!.C_3^1.2.A_4^2.2 = 63360 \text{ cách.}$$

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{63360}{10!} = \frac{11}{630}.$$

Dạng 2: Quy tắc tính xác suất

1. Phương pháp

1. Quy tắc cộng xác suất

Nếu hai biến cố A và B xung khắc thì $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

- Mở rộng quy tắc cộng xác suất

Cho k biến cố $A_1, A_2, \dots, A_k$ đôi một xung khắc. Khi đó:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k).$$

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- Giả sử A và B là hai biến cố tùy ý cùng liên quan đến một phép thử. Lúc đó:
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

2. Quy tắc nhân xác suất

- Ta nói hai biến cố A và B độc lập nếu sự xảy ra (hay không xảy ra) của A không làm ảnh hưởng đến xác suất của B .
- Hai biến cố A và B độc lập khi và chỉ khi $P(AB) = P(A).P(B)$.

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Một hộp đựng 20 viên bi gồm 12 viên bi màu đỏ và 8 viên bi màu xanh. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp đó. Xác suất để có ít nhất một viên bi màu đỏ là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Số cách chọn 3 trong 20 viên bi là $C_{20}^3 = 1140$ (cách).

Suy ra $n(\Omega) = 1140$.

Gọi A là biến cố: “Có ít nhất một viên màu đỏ”.

Suy ra $\overline{A}$ là biến cố: “Cả 3 viên bi đều màu xanh”.

Suy ra $n(\overline{A}) = C_8^3 = 56$. Suy ra $P(\overline{A}) = \frac{56}{1140} = \frac{14}{285}$.

Ta có: $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{14}{285} = \frac{271}{285}$.

Ví dụ 2: Gieo liên tiếp 4 lần một đồng tiền cân đối và đồng chất. Xác suất của biến cố A : “Có ít nhất một lần mặt ngửa xuất” là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Ta có: $n(\Omega) = 2^4 = 16$.

Biến cố $\overline{A}$ là: “Không có mặt ngửa xuất hiện”. Nghĩa là cả 4 lần đều xuất hiện mặt sấp.

Suy ra $n(\overline{A}) = 1$. Suy ra $P(\overline{A}) = \frac{1}{16}$.

Ta có: $P(A) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.

Ví dụ 3: Một tổ có 10 nam và 5 nữ. Chọn ngẫu nhiên 4 người. Xác suất để có ít nhất một nữ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Số người trong tổ là $10 + 5 = 15$ (người).

Số cách chọn 4 trong 15 người là $C_{15}^4 = 1365$ (cách).

Suy ra $n(\Omega) = 1365$.

Gọi A là biến cố: “Có ít nhất một nữ”.

Suy ra $\bar{A}$ là biến cố: “Không có nữ”. Nghĩa là có 4 nam.

Suy ra $n(\bar{A}) = C_{10}^4 = 210$. Suy ra $P(\bar{A}) = \frac{210}{1365} = \frac{2}{13}$.

Ta có: $P(A) = 1 - \frac{2}{13} = \frac{11}{13}$.

Ví dụ 4: Có hai bình, mỗi bình chứa 6 viên bi. Bình thứ nhất có 3 bi xanh, 2 bi vàng và 1 bi đỏ. Bình thứ hai có 2 bi xanh, 1 bi vàng và 3 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi bình 1 viên bi. Xác suất để được 2 bi xanh là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Mỗi bình có 6 viên bi và lấy mỗi bình 1 viên nên $n(\Omega) = 6$.

Gọi A là biến cố: “Lấy được một viên bi xanh ở bình thứ nhất”.

Suy ra $n(A) = 3$. Suy ra $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Gọi B là biến cố: “Lấy được một viên bi xanh ở bình thứ hai”.

Suy ra $n(B) = 2$. Suy ra $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Ta có: A.B là biến cố: “Lấy được 1 viên bi xanh ở bình thứ nhất và 1 viên bi xanh ở bình thứ 2”.

Vì A và B là hai biến cố độc lập nên $P(A.B) = P(A).P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Ví dụ 5: Hai xạ thủ cùng bắn mỗi người một phát vào bia. Xác suất trúng đích của người thứ nhất là 0,9; người thứ hai và 0,7. Xác suất cả 2 người đều trúng là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Gọi A là biến cố: “Người thứ nhất bắn trúng”.

Gọi B là biến cố: “Người thứ hai bắn trúng”.

Như vậy A.B là biến cố “Hai người đều bắn trúng”.

Vì A và B là hai biến cố độc lập nên $P(A.B) = P(A).P(B) = 0,9.0,7 = 0,63$.

Ví dụ 6: Có 2 xạ thủ loại I và 8 xạ thủ loại II. Xác suất bắn trúng đích của các xạ thủ theo thứ tự là 0,9 và 0,8. Lấy ngẫu nhiên ra một xạ thủ và xạ thủ đó bắn một viên đạn. Xác suất để viên đạn đó trúng đích là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Gọi A là biến cố: “Lấy 1 xạ thủ loại I bắn trúng đích”.

Có 2 xạ thủ loại I nên $P(A) = \frac{0,9}{2} = 0,45$.

Gọi B là biến cố: “Lấy 1 xạ thủ loại II bắn trúng đích”.

Có 8 xạ thủ loại II nên $P(B) = \frac{0,8}{8} = 0,1$.

Ta có: $A \cup B$ là biến cố: “Lấy ngẫu nhiên một xạ thủ và xạ thủ này bắn trúng”.

Vì A và B là biến cố xung khắc nên: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,45 + 0,1 = 0,55$.

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Gieo một đồng tiền cân đối và đồng chất bốn lần. Xác suất để cả bốn lần xuất hiện mặt sấp là?

A. $\frac{4}{16}$.

B. $\frac{2}{16}$.

C. $\frac{1}{16}$.

D. $\frac{6}{16}$.

Lời giải

Chọn B

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 2.2.2.2 = 16$.

Gọi A là biến cố "Cả bốn lần gieo xuất hiện mặt sấp" $\longrightarrow |\Omega_A| = 1$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{1}{16}$.

Câu 2: Gieo một con súc sắc hai lần. Xác suất để ít nhất một lần xuất hiện mặt sáu chấm là?

A. $\frac{12}{36}$.

B. $\frac{11}{36}$.

C. $\frac{6}{36}$.

D. $\frac{8}{36}$.

Lời giải

Chọn B

Số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 6.6 = 36$.

Gọi A là biến cố "Ít nhất một lần xuất hiện mặt sáu chấm". Để tìm số phần tử của biến cố A, ta đi tìm số phần tử của biến cố đối $\bar{A}$ là "Không xuất hiện mặt sáu chấm" $\longrightarrow |\Omega_{\bar{A}}| = 5.5 = 25 \longrightarrow |\Omega_A| = 36 - 25 = 11$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{11}{36}$.

Câu 3: Gieo một con xúc xắc cân đối đồng chất 2 lần. Tính xác suất để biến cố có tổng hai mặt bằng 8.

A. $\frac{1}{6}$.

B. $\frac{5}{36}$.

C. $\frac{1}{9}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 6.6 = 36$.

Gọi A là biến cố "Số chấm trên mặt hai lần gieo có tổng bằng 8".

Gọi số chấm trên mặt khi gieo lần một là x , số chấm trên mặt khi gieo lần hai là y .

Theo bài ra, ta có
$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 6 \\ 1 \leq y \leq 6 \\ x + y = 8 \end{cases} \Rightarrow (x; y) = \{(2; 6), (3; 5), (4; 4), (5; 3), (6; 2)\}.$$

Khi đó số kết quả thuận lợi của biến cố là $|\Omega_A| = 6$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Câu 4: Gieo một con xúc xắc cân đối đồng chất 2 lần, tính xác suất để biến cố có tích 2 lần số chấm khi gieo xúc xắc là một số chẵn.

A. 0,25.

B. 0,5.

C. 0,75.

D. 0,85.

Lời giải

Chọn C

Số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 6.6 = 36$.

Gọi A là biến cố "Tích hai lần số chấm khi gieo xúc xắc là một số chẵn".

Ta xét các trường hợp:

TH1. Gieo lần một, số chấm xuất hiện trên mặt là **số lẻ** thì khi gieo lần hai, số chấm xuất hiện phải là **số chẵn**. Khi đó có $3.3 = 9$ cách gieo.

TH2. Gieo lần một, số chấm xuất hiện trên mặt là **số chẵn** thì có hai trường hợp xảy ra là số chấm xuất hiện trên mặt khi gieo lần hai là **số lẻ** hoặc **số chẵn**. Khi đó có $3.3 + 3.3 = 18$ cách gieo.

Suy ra số kết quả thuận lợi cho biến cố là $|\Omega_A| = 9 + 18 = 27$.

Vậy xác suất cần tìm tính $P(A) = \frac{27}{36} = 0,75$.

Câu 5: Gieo ba con súc sắc. Xác suất để số chấm xuất hiện trên ba con súc sắc như nhau là?

A. $\frac{12}{216}$.

B. $\frac{1}{216}$.

C. $\frac{6}{216}$.

D. $\frac{3}{216}$.

Lời giải

Chọn C

Số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 6.6.6 = 36$.

Gọi A là biến cố "Số chấm xuất hiện trên ba con súc sắc như nhau". Ta có các trường hợp thuận lợi cho biến cố A là $(1;1;1), (2;2;2), (3;3;3), \dots, (6;6;6)$.

Suy ra $|\Omega_A| = 6$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{6}{216}$.

Câu 6: Một đội gồm 5 nam và 8 nữ. Lập một nhóm gồm 4 người hát tốp ca, tính xác suất để trong 4 người được chọn có ít nhất 3 nữ.

A. $\frac{70}{143}$.

B. $\frac{73}{143}$.

C. $\frac{56}{143}$.

D. $\frac{87}{143}$.

Lời giải

Chọn A

Không gian mẫu là chọn tùy ý 4 người từ 13 người.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{13}^4 = 715$.

Gọi A là biến cố "4 người được chọn có ít nhất 3 nữ". Ta có hai trường hợp thuận lợi cho biến cố A như sau:

• **TH1:** Chọn 3 nữ và 1 nam, có $C_8^3 C_5^1$ cách.

• **TH2:** Chọn cả 4 nữ, có C_8^4 cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = C_8^3 C_5^1 + C_8^4 = 350$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{350}{715} = \frac{70}{143}$.

Câu 7: Một hộp có 5 viên bi xanh, 6 viên bi đỏ và 7 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 5 viên bi trong hộp, tính xác suất để 5 viên bi được chọn có đủ màu và số bi đỏ bằng số bi vàng.

A. $\frac{313}{408}$.

B. $\frac{95}{408}$.

C. $\frac{5}{102}$.

D. $\frac{25}{136}$.

Lời giải

Chọn B

Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 5 viên bi từ hộp chứa 18 viên bi. Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{18}^5 = 8568$.

Gọi A là biến cố "5 viên bi được chọn có đủ màu và số bi đỏ bằng số bi vàng". Ta có các trường hợp thuận lợi cho biến cố A là:

• **TH1:** Chọn 1 bi đỏ, 1 bi vàng và 3 bi xanh nên có $C_6^1 C_7^1 C_5^3$ cách.

• **TH2:** Chọn 2 bi đỏ, 2 bi vàng và 1 bi xanh nên có $C_6^2 C_7^2 C_5^1$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = C_6^1 C_7^1 C_5^3 + C_6^2 C_7^2 C_5^1 = 1995$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{1995}{8568} = \frac{95}{408}$.

Câu 8: Một hộp có 5 viên bi đỏ, 3 viên bi vàng và 4 viên bi xanh. Chọn ngẫu nhiên từ hộp 4 viên bi, tính xác suất để 4 viên bi được chọn có số bi đỏ lớn hơn số bi vàng và nhất thiết phải có mặt bi xanh.

- A. $\frac{1}{12}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{16}{33}$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp chứa 12 viên bi. Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{12}^4 = 495$.

Gọi A là biến cố "4 viên bi được chọn có số bi đỏ lớn hơn số bi vàng và nhất thiết phải có mặt bi xanh". Ta có các trường hợp thuận lợi cho biến cố A là:

- **TH1:** Chọn 1 bi đỏ và 3 bi xanh nên có $C_5^1 \cdot C_4^3$ cách.
- **TH2:** Chọn 2 bi đỏ và 2 bi xanh nên có $C_5^2 \cdot C_4^2$ cách.
- **TH3:** Chọn 3 bi đỏ và 1 bi xanh nên có $C_5^3 \cdot C_4^1$ cách.
- **TH4:** Chọn 2 bi đỏ, 1 bi vàng và 1 bi xanh nên có $C_5^2 \cdot C_3^1 \cdot C_4^1$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = C_5^1 \cdot C_4^3 + C_5^2 \cdot C_4^2 + C_5^3 \cdot C_4^1 + C_5^2 \cdot C_3^1 \cdot C_4^1 = 240$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{240}{495} = \frac{16}{33}$.

Câu 9: Có 3 bó hoa. Bó thứ nhất có 8 hoa hồng, bó thứ hai có 7 bông hoa ly, bó thứ ba có 6 bông hoa huệ. Chọn ngẫu nhiên 7 hoa từ ba bó hoa trên để cắm vào lọ hoa, tính xác suất để trong 7 hoa được chọn có số hoa hồng bằng số hoa ly.

- A. $\frac{3851}{4845}$. B. $\frac{1}{71}$. C. $\frac{36}{71}$. D. $\frac{994}{4845}$.

Lời giải

Chọn D

Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 7 hoa từ ba bó hoa gồm 21 hoa.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{21}^7 = 116280$.

Gọi A là biến cố "7 hoa được chọn có số hoa hồng bằng số hoa ly". Ta có các trường hợp thuận lợi cho biến cố A là:

- **TH1:** Chọn 1 hoa hồng, 1 hoa ly và 5 hoa huệ nên có $C_8^1 \cdot C_7^1 \cdot C_6^5$ cách.
- **TH2:** Chọn 2 hoa hồng, 2 hoa ly và 3 hoa huệ nên có $C_8^2 \cdot C_7^2 \cdot C_6^3$ cách.
- **TH3:** Chọn 3 hoa hồng, 3 hoa ly và 1 hoa huệ nên có $C_8^3 \cdot C_7^3 \cdot C_6^1$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = C_8^1 \cdot C_7^1 \cdot C_6^5 + C_8^2 \cdot C_7^2 \cdot C_6^3 + C_8^3 \cdot C_7^3 \cdot C_6^1 = 23856$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{23856}{116280} = \frac{994}{4845}$.

Câu 10: Có 13 học sinh của một trường THPT đạt danh hiệu học sinh xuất sắc trong đó khối 12 có 8 học sinh nam và 3 học sinh nữ, khối 11 có 2 học sinh nam. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh bất kỳ để trao thưởng, tính xác suất để 3 học sinh được chọn có cả nam và nữ đồng thời có cả khối 11 và khối 12.

A. $\frac{57}{286}$.

B. $\frac{24}{143}$.

C. $\frac{27}{143}$.

D. $\frac{229}{286}$.

Lời giải

Chọn A

Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 3 học sinh từ 13 học sinh.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{13}^3 = 286$.

Gọi A là biến cố "3 học sinh được chọn có cả nam và nữ đồng thời có cả khối 11 và khối 12". Ta có các trường hợp thuận lợi cho biến cố A là:

- **TH1:** Chọn 1 học sinh khối 11; 1 học sinh nam khối 12 và 1 học sinh nữ khối 12 nên có $C_2^1 C_8^1 C_3^1 = 48$ cách.

- **TH2:** Chọn 1 học sinh khối 11; 2 học sinh nữ khối 12 có $C_2^1 C_3^2 = 6$ cách.

- **TH3:** Chọn 2 học sinh khối 11; 1 học sinh nữ khối 12 có $C_2^2 C_3^1 = 3$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = 48 + 6 + 3 = 57$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{57}{286}$.

Câu 11: Một chiếc hộp đựng 7 viên bi màu xanh, 6 viên bi màu đen, 5 viên bi màu đỏ, 4 viên bi màu trắng. Chọn ngẫu nhiên ra 4 viên bi, tính xác suất để lấy được ít nhất 2 viên bi cùng màu.

A. $\frac{2808}{7315}$.

B. $\frac{185}{209}$.

C. $\frac{24}{209}$.

D. $\frac{4507}{7315}$.

Lời giải

Chọn B

Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 4 viên bi từ 22 viên bi đã cho.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{22}^4 = 7315$.

Gọi A là biến cố "Lấy được 4 viên bi trong đó có ít nhất hai viên bi cùng màu". Để tìm số phần tử của A , ta đi tìm số phần tử của biến cố $\bar{A}$, với biến cố $\bar{A}$ là lấy được 4 viên bi trong đó không có hai viên bi nào cùng màu.

Suy ra số phần tử của biến cố $\bar{A}$ là $|\Omega_{\bar{A}}| = C_7^1 C_6^1 C_5^1 C_4^1 = 840$.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = |\Omega| - |\Omega_{\bar{A}}| = 6475$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{6475}{7315} = \frac{185}{209}$.

Câu 12: Một hộp đựng 8 quả cầu trắng, 12 quả cầu đen. Lần thứ nhất lấy ngẫu nhiên 1 quả cầu trong hộp, lần thứ hai lấy ngẫu nhiên 1 quả cầu trong các quả cầu còn lại. Tính xác suất để kết quả của hai lần lấy được 2 quả cầu cùng màu.

A. $\frac{14}{95}$.

B. $\frac{48}{95}$.

C. $\frac{47}{95}$.

D. $\frac{81}{95}$.

Lời giải

Chọn C

Không gian mẫu là lấy 2 quả cầu trong hộp một cách lần lượt ngẫu nhiên.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{20}^1 \cdot C_{19}^1 = 380$.

Gọi A biến cố "2 quả cầu được lấy cùng màu". Ta có các trường hợp thuận lợi cho biến cố A như sau:

• **TH1:** Lần thứ nhất lấy quả màu trắng và lần thứ hai cũng màu trắng.

Do đó trường hợp này có $C_8^1 \cdot C_7^1$ cách.

• **TH2:** Lần thứ nhất lấy quả màu đen và lần thứ hai cũng màu đen.

Do đó trường hợp này có $C_{12}^1 \cdot C_{11}^1$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = C_8^1 \cdot C_7^1 + C_{12}^1 \cdot C_{11}^1$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{C_8^1 \cdot C_7^1 + C_{12}^1 \cdot C_{11}^1}{C_{20}^1 \cdot C_{19}^1} = \frac{47}{95}$.

Câu 13: Một hộp chứa 12 viên bi kích thước như nhau, trong đó có 5 viên bi màu xanh được đánh số từ 1 đến 5; có 4 viên bi màu đỏ được đánh số từ 1 đến 4 và 3 viên bi màu vàng được đánh số từ 1 đến 3. Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp, tính xác suất để 2 viên bi được lấy vừa khác màu vừa khác số.

A. $\frac{8}{33}$.

B. $\frac{14}{33}$.

C. $\frac{29}{66}$.

D. $\frac{37}{66}$.

Lời giải

Chọn D

Không gian mẫu là số sách lấy tùy ý 2 viên từ hộp chứa 12 viên bi.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{12}^2 = 66$.

Gọi A là biến cố "2 viên bi được lấy vừa khác màu vừa khác số".

• Số cách lấy 2 viên bi gồm: 1 bi xanh và 1 bi đỏ là $4 \cdot 4 = 16$ cách (do số bi đỏ ít hơn nên ta lấy trước, có 4 cách lấy bi đỏ. Tiếp tục lấy bi xanh nhưng không lấy viên trùng với số của bi đỏ nên có 4 cách lấy bi xanh).

• Số cách lấy 2 viên bi gồm: 1 bi xanh và 1 bi vàng là $3.4 = 12$ cách.

• Số cách lấy 2 viên bi gồm: 1 bi đỏ và 1 bi vàng là $3.3 = 9$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = 16 + 12 + 9 = 37$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{37}{66}$.

Câu 14: Một hộp chứa 3 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ và 6 viên bi vàng. Lấy ngẫu nhiên 6 viên bi từ hộp, tính xác suất để 6 viên bi được lấy ra có đủ cả ba màu.

A. $\frac{810}{1001}$.

B. $\frac{191}{1001}$.

C. $\frac{4}{21}$.

D. $\frac{17}{21}$.

Lời giải

Chọn A

Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 6 viên bi từ hộp chứa 14 viên bi. Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{14}^6 = 3003$.

Gọi A là biến cố "6 viên bi được lấy ra có đủ cả ba màu". Để tìm số phần tử của biến cố A ta đi tìm số phần tử của biến cố $\bar{A}$ tức là 6 viên bi lấy ra không có đủ ba màu như sau:

• **TH1:** Chọn 6 viên bi chỉ có một màu (chỉ chọn được màu vàng).

Do đó trường hợp này có $C_6^6 = 1$ cách.

• **TH2:** Chọn 6 viên bi có đúng hai màu xanh và đỏ, có C_8^6 cách.

Chọn 6 viên bi có đúng hai màu đỏ và vàng, có $C_{11}^6 - C_6^6$ cách.

Chọn 6 viên bi có đúng hai màu xanh và vàng, có $C_9^6 - C_6^6$ cách.

Do đó trường hợp này có $C_8^6 + (C_{11}^6 - C_6^6) + (C_9^6 - C_6^6) = 572$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố $\bar{A}$ là $|\Omega_{\bar{A}}| = 1 + 572 = 573$.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = |\Omega| - |\Omega_{\bar{A}}| = 3003 - 573 = 2430$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{2430}{3003} = \frac{810}{1001}$.

Câu 15: Trong một hộp có 50 viên bi được đánh số từ 1 đến 50. Chọn ngẫu nhiên 3 viên bi trong hộp, tính xác suất để tổng ba số trên 3 viên bi được chọn là một số chia hết cho 3.

A. $\frac{816}{1225}$.

B. $\frac{409}{1225}$.

C. $\frac{289}{1225}$.

D. $\frac{936}{1225}$.

Lời giải

Chọn B

Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp chứa 50 viên bi. Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{50}^3 = 19600$.

Gọi A là biến cố "3 viên bi được chọn là một số chia hết cho 3". Trong 50 viên bi được chia thành ba loại gồm: 16 viên bi có số chia hết cho 3; 17 viên bi có số chia cho 3 dư 1 và 17 viên bi còn lại có số chia cho 3 dư 2. Để tìm số kết quả thuận lợi cho biến cố A , ta xét các trường hợp

• **TH1:** 3 viên bi được chọn cùng một loại, có $(C_{16}^3 + C_{17}^3 + C_{17}^3) = 1920$ cách.

• **TH2:** 3 viên bi được chọn có mỗi viên mỗi loại, có $C_{16}^1 \cdot C_{17}^1 \cdot C_{17}^1 = 4624$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = (C_{16}^3 + C_{17}^3 + C_{17}^3) + C_{16}^1 \cdot C_{17}^1 \cdot C_{17}^1 = 6544$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{6544}{19600} = \frac{409}{1225}$.

Câu 16: Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Gọi S là tập hợp các số có 3 chữ số khác nhau được lập thành từ các chữ số của tập A . Chọn ngẫu nhiên một số từ S , tính xác suất để số được chọn có chữ số cuối gấp đôi chữ số đầu.

A. $\frac{1}{5}$.

B. $\frac{23}{25}$.

C. $\frac{2}{25}$.

D. $\frac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi số cần tìm của tập S có dạng $\overline{abc}$. Trong đó $\begin{cases} a, b, c \in A \\ a \neq 0 \\ a \neq b; b \neq c; c \neq a \end{cases}$.

Khi đó

- Số cách chọn chữ số a có 5 cách chọn vì $a \neq 0$.
- Số cách chọn chữ số b có 5 cách chọn vì $b \neq a$.
- Số cách chọn chữ số c có 4 cách chọn vì $c \neq a$ và $c \neq b$.

Do đó tập S có $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$ phần tử.

Không gian mẫu là chọn ngẫu nhiên 1 số từ tập S .

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{100}^1 = 100$.

Gọi X là biến cố "Số được chọn có chữ số cuối gấp đôi chữ số đầu". Khi đó ta có các bộ số là $\overline{1b2}$ hoặc $\overline{2b4}$ thỏa mãn biến cố X và cứ mỗi bộ thì b có 4 cách chọn nên có tất cả 8 số thỏa yêu cầu.

Suy ra số phần tử của biến cố X là $|\Omega_X| = 8$.

Vậy xác suất cần tính $P(X) = \frac{|\Omega_X|}{|\Omega|} = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}$.

Câu 17: Cho tập hợp $A = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau được lập thành từ các chữ số của tập A . Chọn ngẫu nhiên một số từ S , tính

xác suất để số được chọn mà trong mỗi số luôn luôn có mặt hai chữ số chẵn và hai chữ số lẻ.

A. $\frac{1}{5}$.

B. $\frac{3}{35}$.

C. $\frac{17}{35}$.

D. $\frac{18}{35}$.

Lời giải

Chọn D

Số phần tử của tập S là $A_7^4 = 840$.

Không gian mẫu là chọn ngẫu nhiên 1 số từ tập S .

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{840}^1 = 840$.

Gọi X là biến cố "Số được chọn luôn luôn có mặt hai chữ số chẵn và hai chữ số lẻ".

- Số cách chọn hai chữ số chẵn từ bốn chữ số 2; 4; 6; 8 là $C_4^2 = 6$ cách.
- Số cách chọn hai chữ số lẻ từ ba chữ số 3; 5; 7 là $C_3^2 = 3$ cách.
- Từ bốn chữ số được chọn ta lập số có bốn chữ số khác nhau, số cách lập tương ứng với một hoán vị của 4 phần tử nên có $4!$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố X là $|\Omega_X| = C_4^2 \cdot C_3^2 \cdot 4! = 432$.

Vậy xác suất cần tính $P(X) = \frac{|\Omega_X|}{|\Omega|} = \frac{432}{840} = \frac{18}{35}$.

Câu 18: Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau được lập thành từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 6. Chọn ngẫu nhiên một số từ S , tính xác suất để số được chọn chia hết cho 3.

A. $\frac{1}{10}$.

B. $\frac{3}{5}$.

C. $\frac{2}{5}$.

D. $\frac{1}{15}$.

Lời giải

Chọn C

Số phần tử của S là $A_5^3 = 60$.

Không gian mẫu là chọn ngẫu nhiên 1 số từ tập S .

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{60}^1 = 60$.

Gọi A là biến cố "Số được chọn chia hết cho 3". Từ 5 chữ số đã cho ta có 4 bộ gồm ba chữ số có tổng chia hết cho 3 là (1; 2; 3), (1; 2; 6), (2; 3; 4) và (2; 4; 6). Mỗi bộ ba chữ số này ta lập được $3! = 6$ số thuộc tập hợp S .

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = 6 \cdot 4 = 24$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$.

Câu 19: Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có ít nhất 3 chữ số, các chữ số đôi một khác nhau được lập thành từ các chữ số thuộc tập A . Chọn ngẫu nhiên một số từ S , tính xác suất để số được chọn có tổng các chữ số bằng 10.

A. $\frac{1}{30}$.

B. $\frac{3}{25}$.

C. $\frac{22}{25}$.

D. $\frac{2}{25}$.

Lời giải

Chọn B

Ta tính số phần tử thuộc tập S như sau:

- Số các số thuộc S có 3 chữ số là A_5^3 .
- Số các số thuộc S có 4 chữ số là A_5^4 .
- Số các số thuộc S có 5 chữ số là A_5^5 .

Suy ra số phần tử của tập S là $A_5^3 + A_5^4 + A_5^5 = 300$.

Không gian mẫu là chọn ngẫu nhiên 1 số từ tập S .

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{300}^1 = 300$.

Gọi X là biến cố "Số được chọn có tổng các chữ số bằng 10". Các tập con của A có tổng số phần tử bằng 10 là $A_1 = \{1; 2; 3; 4\}$, $A_2 = \{2; 3; 5\}$, $A_3 = \{1; 4; 5\}$.

- Từ A_1 lập được các số thuộc S là 4!.
- Từ A_2 lập được các số thuộc S là 3!.
- Từ A_3 lập được các số thuộc S là 3!.

Suy ra số phần tử của biến cố X là $|\Omega_X| = 4! + 3! + 3! = 36$.

Vậy xác suất cần tính $P(X) = \frac{|\Omega_X|}{|\Omega|} = \frac{36}{300} = \frac{3}{25}$.

Câu 20: Một hộp đựng 10 chiếc thẻ được đánh số từ 0 đến 9. Lấy ngẫu nhiên ra 3 chiếc thẻ, tính xác suất để 3 chữ số trên 3 chiếc thẻ được lấy ra có thể **ghép thành một số chia** hết cho 5.

A. $\frac{8}{15}$.

B. $\frac{7}{15}$.

C. $\frac{2}{5}$.

D. $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Không gian mẫu là số cách lấy ngẫu nhiên 3 chiếc thẻ từ 10 chiếc thẻ.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{10}^3 = 120$.

Gọi A là biến cố "3 chữ số trên 3 chiếc thẻ được lấy ra có thể ghép thành một số chia hết cho 5". Để cho biến cố A xảy ra thì trong 3 thẻ lấy được phải có thẻ mang chữ số 0

hoặc chữ số 5. Ta đi tìm số phần tử của biến cố $\overline{A}$, tức 3 thẻ lấy ra không có thể mang chữ số 0 và cũng không có thể mang chữ số 5 là C_8^3 cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = C_{10}^3 - C_8^3$.

$$\text{Vậy xác suất cần tính } P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{C_{10}^3 - C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{8}{15}.$$

Câu 21: Có 20 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 20. Chọn ngẫu nhiên ra 8 tấm thẻ, tính xác suất để có 3 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10.

- A. $\frac{560}{4199}$. B. $\frac{4}{15}$. C. $\frac{11}{15}$. D. $\frac{3639}{4199}$.

Lời giải

Chọn A

Không gian mẫu là cách chọn 8 tấm thẻ trong 20 tấm thẻ.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{20}^8 = 25970$.

Gọi A là biến cố "3 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10". Để tìm số phần tử của A ta làm như sau:

- Đầu tiên chọn 3 tấm thẻ trong 10 tấm thẻ mang số lẻ, có C_{10}^3 cách.
- Tiếp theo chọn 4 tấm thẻ trong 8 tấm thẻ mang số chẵn (không chia hết cho 10), có C_8^4 cách.
- Sau cùng ta chọn 1 trong 2 tấm thẻ mang số chia hết cho 10, có C_2^1 cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = C_{10}^3 \cdot C_8^4 \cdot C_2^1 = 16800$.

$$\text{Vậy xác suất cần tính } P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{C_{10}^3 \cdot C_8^4 \cdot C_2^1}{C_{20}^8} = \frac{560}{4199}.$$

Câu 22: Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có hai chữ số. Chọn ngẫu nhiên đồng thời hai số từ tập hợp S . Tính xác suất để hai số được chọn có chữ số hàng đơn vị giống nhau.

- A. $\frac{8}{89}$. B. $\frac{81}{89}$. C. $\frac{36}{89}$. D. $\frac{53}{89}$.

Lời giải

Chọn A

Số phần tử của tập S là $9 \cdot 10 = 90$.

Không gian mẫu là chọn ngẫu nhiên 2 số từ tập S .

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{90}^2 = 4005$.

Gọi X là biến cố "Số được chọn có chữ số hàng đơn vị giống nhau". Ta mô tả không gian của biến cố X như sau:

• Có 10 cách chọn chữ số hàng đơn vị (chọn từ các chữ số $\{0; 1; 2; 3; \dots; 9\}$).

• Có C_9^2 cách chọn hai chữ số hàng chục (chọn từ các chữ số $\{1; 2; 3; \dots; 9\}$).

Suy ra số phần tử của biến cố X là $|\Omega_X| = 10.C_9^2 = 360$.

Vậy xác suất cần tính $P(X) = \frac{|\Omega_X|}{|\Omega|} = \frac{360}{4005} = \frac{8}{89}$.

Câu 23: Gọi S là tập hợp các số tự nhiên gồm 9 chữ số khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số từ S , tính xác suất để chọn được một số gồm 4 chữ số lẻ và chữ số 0 luôn đứng giữa hai chữ số lẻ (hai số hai bên chữ số 0 là số lẻ).

A. $\frac{49}{54}$.

B. $\frac{5}{54}$.

C. $\frac{1}{7776}$.

D. $\frac{45}{54}$.

Lời giải

Chọn B

Số phần tử của tập S là $9.A_9^8$.

Không gian mẫu là chọn ngẫu nhiên 1 số từ tập S .

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 9.A_9^8 = 3265920$.

Gọi X là biến cố "Số được chọn gồm 4 chữ số lẻ và chữ số 0 luôn đứng giữa hai chữ số lẻ". Do số 0 luôn đứng giữa 2 số lẻ nên số 0 không đứng ở vị trí đầu tiên và vị trí cuối cùng. Ta có các khả năng

• Chọn 1 trong 7 vị trí để xếp số 0, có C_7^1 cách.

• Chọn 2 trong 5 số lẻ và xếp vào 2 vị trí cạnh số 0 vừa xếp, có A_5^2 cách.

• Chọn 2 số lẻ trong 3 số lẻ còn lại và chọn 4 số chẵn từ $\{2; 4; 6; 8\}$ sau đó xếp 6 số này vào 6 vị trí trống còn lại có $C_3^2.C_4^4.6!$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố X là $|\Omega_X| = C_7^1.A_5^2.C_3^2.C_4^4.6! = 302400$.

Vậy xác suất cần tính $P(X) = \frac{|\Omega_X|}{|\Omega|} = \frac{C_7^1.A_5^2.C_3^2.C_4^4.6!}{9.A_9^8} = \frac{5}{54}$.

Câu 24: Giải bóng chuyên **VTV Cup** gồm 9 đội bóng tham dự, trong đó có 6 đội nước ngoài và 3 đội của Việt Nam. Ban tổ chức cho bốc thăm ngẫu nhiên để chia thành 3 bảng A, B, C và mỗi bảng có 3 đội. Tính xác suất để 3 đội bóng của Việt Nam ở 3 bảng khác nhau.

A. $\frac{3}{56}$.

B. $\frac{19}{28}$.

C. $\frac{9}{28}$.

D. $\frac{53}{56}$.

Lời giải

Chọn C

Không gian mẫu là số cách chia tùy ý 9 đội thành 3 bảng.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_9^3.C_6^3.C_3^3$.

Gọi X là biến cố " 3 đội bóng của Việt Nam ở 3 bảng khác nhau".

- Bước 1. Xếp 3 đội Việt Nam ở 3 bảng khác nhau nên có $3!$ cách.
- Bước 2. Xếp 6 đội còn lại vào 3 bảng A, B, C này có $C_6^2.C_4^2.C_2^2$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố X là $|\Omega_X| = 3!.C_6^2.C_4^2.C_2^2$.

$$\text{Vậy xác suất cần tính } P(X) = \frac{|\Omega_X|}{|\Omega|} = \frac{3!.C_6^2.C_4^2.C_2^2}{C_9^3.C_6^3.C_3^3} = \frac{540}{1680} = \frac{9}{28}.$$

Câu 25: Trong giải cầu lông kỷ niệm ngày truyền thống học sinh sinh viên có 8 người tham gia trong đó có hai bạn Việt và Nam. Các vận động viên được chia làm hai bảng A và B , mỗi bảng gồm 4 người. Giả sử việc chia bảng thực hiện bằng cách bốc thăm ngẫu nhiên, tính xác suất để cả 2 bạn Việt và Nam nằm chung 1 bảng đầu.

- A. $\frac{6}{7}$. B. $\frac{5}{7}$. C. $\frac{4}{7}$. D. $\frac{3}{7}$.

Lời giải

Chọn D

Không gian mẫu là số cách chia tùy ý 8 người thành 2 bảng.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_8^4.C_4^4$.

Gọi X là biến cố " 2 bạn Việt và Nam nằm chung 1 bảng đầu".

- Bước 1. Xếp 2 bạn Việt và Nam nằm chung 1 bảng đầu nên có C_2^1 cách.
- Bước 2. Xếp 6 bạn còn lại vào 2 bảng A, B cho đủ mỗi bảng là 4 bạn thì có $C_6^2.C_4^2$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố X là $|\Omega_X| = C_2^1.C_6^2.C_4^2$.

$$\text{Vậy xác suất cần tính } P(X) = \frac{|\Omega_X|}{|\Omega|} = \frac{C_2^1.C_6^2.C_4^2}{C_8^4.C_4^4} = \frac{3}{7}.$$

Câu 26: Một bộ đề thi toán học sinh giỏi lớp 12 mà mỗi đề gồm 5 câu được chọn từ 15 câu dễ, 10 câu trung bình và 5 câu khó. Một đề thi được gọi là "Tốt" nếu trong đề thi có cả ba câu dễ, trung bình và khó, đồng thời số câu dễ không ít hơn 2. Lấy ngẫu nhiên một đề thi trong bộ đề trên. Tìm xác suất để đề thi lấy ra là một đề thi "Tốt".

- A. $\frac{941}{1566}$. B. $\frac{2}{5}$. C. $\frac{4}{5}$. D. $\frac{625}{1566}$.

Lời giải

Chọn D

Số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{30}^5 = 142506$.

Gọi A là biến cố "Đề thi lấy ra là một đề thi "Tốt" ".

Vì trong một đề thi "Tốt" có cả ba câu dễ, trung bình và khó, đồng thời số câu dễ không ít hơn 2 nên ta có các trường hợp sau đây thuận lợi cho biến cố A .

- Đề thi gồm 3 câu dễ, 1 câu trung bình và 1 câu khó: có $C_{15}^3 C_{10}^1 C_5^1$ đề.
- Đề thi gồm 2 câu dễ, 2 câu trung bình và 1 câu khó: có $C_{15}^3 C_{10}^1 C_5^1$ đề.
- Đề thi gồm 2 câu dễ, 1 câu trung bình và 2 câu khó: có $C_{15}^2 C_{10}^1 C_5^2$ đề.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = C_{15}^3 C_{10}^1 C_5^1 + C_{15}^3 C_{10}^1 C_5^1 + C_{15}^2 C_{10}^1 C_5^2 = 56875$.

$$\text{Vậy xác suất cần tính } P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{56875}{142506} = \frac{625}{1566}.$$

Câu 27: Trong một kỳ thi vấn đáp thí sinh A phải đứng trước ban giám khảo chọn ngẫu nhiên 3 phiếu câu hỏi từ một thùng phiếu gồm 50 phiếu câu hỏi, trong đó có 4 cặp phiếu câu hỏi mà mỗi cặp phiếu có nội dung khác nhau từng đôi một và trong mỗi một cặp phiếu có nội dung giống nhau. Tính xác suất để thí sinh A chọn được 3 phiếu câu hỏi có nội dung khác nhau.

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{12}{1225}$ C. $\frac{4}{7}$ D. $\frac{1213}{1225}$.

Lời giải

Chọn D

Không gian mẫu là số cách chọn tùy ý 3 phiếu câu hỏi từ 50 phiếu câu hỏi.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega_A| = C_{50}^3$.

Gọi X là biến cố "Thí sinh A chọn được 3 phiếu câu hỏi khác nhau".

Để tìm số phần tử của X ta tìm số phần tử của biến cố $\bar{X}$, lúc này cần chọn được 1 cặp trong 4 cặp phiếu có câu hỏi giống nhau và chọn 1 phiếu trong 48 phiếu còn lại.

Suy ra số phần tử của biến cố $\bar{X}$ là $|\Omega_{\bar{X}}| = C_4^1 \cdot C_{48}^1$.

$$\text{Vậy xác suất cần tính } P(X) = \frac{|\Omega_X|}{|\Omega|} = \frac{|\Omega| - |\Omega_{\bar{X}}|}{|\Omega|} = \frac{C_{50}^3 - C_4^1 \cdot C_{48}^1}{C_{50}^3} = \frac{1213}{1225}.$$

Trong kỳ thi THPT Quốc Gia năm 2016 có môn thi bắt buộc là môn Tiếng Anh. Môn thi này thi dưới hình thức trắc nghiệm với 4 phương án trả lời A, B, C, D. Mỗi câu trả lời đúng được cộng 0,2 điểm và mỗi câu trả lời sai bị trừ đi 0,1 điểm. Bạn Hoa vì học rất kém môn Tiếng Anh nên chọn ngẫu nhiên cả 50 câu trả lời. Tính xác suất để bạn Hoa đạt được 4 điểm môn Tiếng Anh trong kỳ thi trên.

- A. $\frac{C_{50}^{30} \cdot (3)^{20}}{4^{50}}$ B. $\frac{A_{50}^{30} \cdot (3)^{20}}{4^{50}}$ C. $\frac{C_{50}^{30} \cdot (3)^{20}}{50}$ D. $\frac{A_{50}^{30} \cdot (3)^{20}}{50}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi x là số câu trả lời đúng, suy ra $50 - x$ là số câu trả lời sai.

Ta có số điểm của Hoa là $0,2 \cdot x - 0,1 \cdot (50 - x) = 4 \Leftrightarrow x = 30$.

Do đó bạn Hoa trả lời đúng 30 câu và sai 20 câu.

Không gian mẫu là số phương án trả lời 50 câu hỏi mà bạn Hoa chọn ngẫu nhiên. Mỗi câu có 4 phương án trả lời nên có 4^{50} khả năng.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 4^{50}$.

Gọi X là biến cố "Bạn Hoa trả lời đúng 30 câu và sai 20 câu". Vì mỗi câu đúng có 1 phương án trả lời, mỗi câu sai có 3 phương án trả lời. Vì vậy có $C_{50}^{30} \cdot (3)^{20}$ khả năng thuận lợi cho biến cố X .

Suy ra số phần tử của biến cố X là $|\Omega_X| = C_{50}^{30} \cdot (3)^{20}$.

Vậy xác suất cần tính $P(X) = \frac{|\Omega_X|}{|\Omega|} = \frac{C_{50}^{30} \cdot (3)^{20}}{4^{50}}$.

Câu 28: Có 6 học sinh lớp 11 và 3 học sinh lớp 12 được xếp ngẫu nhiên vào 9 ghế thành một dãy. Tính xác suất để xếp được 3 học sinh lớp 12 xen kẽ giữa 6 học sinh lớp 11.

A. $\frac{5}{12}$.

B. $\frac{7}{12}$.

C. $\frac{1}{1728}$.

D. $\frac{5}{72}$.

Lời giải

Chọn A

Không gian mẫu là số cách sắp xếp tất cả 9 học sinh vào một ghế dài.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 9!$.

Gọi A là biến cố "Xếp 3 học sinh lớp 12 xen kẽ giữa 6 học sinh lớp 11". Ta mô tả khả năng thuận lợi của biến cố A như sau:

- Đầu tiên xếp 6 học sinh lớp 11 thành một dãy, có $6!$ cách.
- Sau đó xem 6 học sinh này như 6 vách ngăn nên có 7 vị trí để xếp 3 học sinh lớp 12 (gồm 5 vị trí giữa 6 học sinh và 2 vị trí hai đầu). Do đó có A_7^3 cách xếp 3 học sinh lớp 12.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = 6! \cdot A_7^3$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{6! \cdot A_7^3}{9!} = \frac{5}{12}$.

Câu 29: Đội tuyển học sinh giỏi của một trường THPT có 8 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Trong buổi lễ trao phần thưởng, các học sinh trên được xếp thành một hàng ngang. Tính xác suất để khi xếp sao cho 2 học sinh nữ không đứng cạnh nhau.

A. $\frac{653}{660}$.

B. $\frac{7}{660}$.

C. $\frac{41}{55}$.

D. $\frac{14}{55}$.

Lời giải

Chọn D

Không gian mẫu là số cách sắp xếp tất cả 12 học sinh thành một hàng ngang. Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 12!$.

Gọi A là biến cố "Xếp các học sinh trên thành một hàng ngang mà 2 học sinh nữ không đứng cạnh nhau". Ta mô tả khả năng thuận lợi của biến cố A như sau:

- Đầu tiên xếp 8 học sinh nam thành một hàng ngang, có $8!$ cách.
- Sau đó xem 8 học sinh này như 8 vách ngăn nên có 9 vị trí để xếp 4 học sinh nữ thỏa yêu cầu bài toán (gồm 7 vị trí giữa 8 học sinh và 2 vị trí hai đầu). Do đó có A_9^4 cách xếp 4 học sinh nữ.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = 8! \cdot A_9^4$.

$$\text{Vậy xác suất cần tính } P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{8! A_9^4}{12!} = \frac{14}{55}.$$

Câu 30: Có 3 bì thư giống nhau lần lượt được đánh số thứ tự từ 1 đến 3 và 3 con tem giống nhau lần lượt đánh số thứ tự từ 1 đến 3. Dán 3 con tem đó vào 3 bì thư sao cho không có bì thư nào không có tem. Tính xác suất để lấy ra được 2 bì thư trong 3 bì thư trên sao cho mỗi bì thư đều có số thứ tự giống với số thứ tự con tem đã dán vào nó.

- A. $\frac{5}{6}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Không gian mẫu là số cách dán 3 con tem trên 3 bì thư, tức là hoán vị của 3 con tem trên 3 bì thư. Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 3! = 6$.

Gọi A là biến cố "2 bì thư lấy ra có số thứ tự giống với số thứ tự con tem đã dán vào nó". Thế thì bì thư còn lại cũng có số thứ tự giống với số thứ tự con tem đã dán vào nó. Trường hợp này có 1 cách duy nhất.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = 1$.

$$\text{Vậy xác suất cần tính } P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{1}{6}.$$

Câu 31: Trong thư viện có 12 quyển sách gồm 3 quyển Toán giống nhau, 3 quyển Lý giống nhau, 3 quyển Hóa giống nhau và 3 quyển Sinh giống nhau. Có bao nhiêu cách xếp thành một dãy sao cho 3 quyển sách thuộc cùng 1 môn không được xếp liền nhau?

- A. 16800. B. 1680. C. 140. D. 4200.

Lời giải

Chọn A

Xếp 3 cuốn sách Toán kề nhau. Xem 3 cuốn sách Toán là 3 vách ngăn, giữa 3 cuốn sách Toán có 2 vị trí trống và thêm hai vị trí hai đầu, tổng cộng có 4 vị trí trống.

Bước 1. Chọn 3 vị trí trống trong 4 vị trí để xếp 3 cuốn Lý, có C_4^3 cách.

Bước 2. Giữa 6 cuốn Lý và Toán có 5 vị trí trống và thêm 2 vị trí hai đầu, tổng cộng có 7 vị trí trống. Chọn 3 vị trí trong 7 vị trí trống để xếp 3 cuốn Hóa, có C_7^3 cách.

Bước 3. Giữa 9 cuốn sách Toán, Lý và Hóa đã xếp có 8 vị trí trống và thêm 2 vị trí hai đầu, tổng cộng có 10 vị trí trống. Chọn 3 vị trí trong 10 vị trí trống để xếp 3 cuốn Sinh, có C_{10}^3 cách. Vậy theo quy tắc nhân có $C_4^3.C_7^3.C_{10}^3 = 16800$ cách.

Câu 32: Xếp 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ vào một bàn tròn 10 ghế. Tính xác suất để không có hai học sinh nữ ngồi cạnh nhau.

A. $\frac{37}{42}$.

B. $\frac{5}{42}$.

C. $\frac{5}{1008}$.

D. $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Cố định 1 vị trí cho một học sinh nam (hoặc nữ), đánh dấu các ghế còn lại từ 1 đến 9.

Không gian mẫu là hoán vị 9 học sinh (còn lại không cố định) trên 9 ghế đánh dấu.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 9!$.

Gọi A là biến cố "không có hai học sinh nữ ngồi cạnh nhau". Ta mô tả khả năng thuận lợi của biến cố A như sau:

- Đầu tiên ta cố định 1 học sinh nam, 5 học sinh nam còn lại có $5!$ cách xếp.
- Ta xem 6 học sinh nam như 6 vách ngăn trên vòng tròn, thế thì sẽ tạo ra 6 ô trống để ta xếp 4 học sinh nữ vào (mỗi ô trống chỉ được xếp 1 học sinh nữ). Do đó có A_6^4 cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = 5!.A_6^4$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{5!.A_6^4}{9!} = \frac{5}{42}$.

Câu 33: Có 4 hành khách bước lên một đoàn tàu gồm 4 toa. Mỗi hành khách độc lập với nhau và chọn ngẫu nhiên một toa. Tính xác suất để 1 toa có 3 người, 1 toa có 1 người, 2 toa còn lại không có ai.

A. $\frac{3}{4}$.

B. $\frac{3}{16}$.

C. $\frac{13}{16}$.

D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Không gian mẫu là số cách sắp xếp 4 hành khách lên 4 toa tàu. Vì mỗi hành khách có 4 cách chọn toa nên có 4^4 cách xếp.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 4^4$.

Gọi A là biến cố "1 toa có 3 người, 1 toa có 1 người, 2 toa còn lại không có ai". Để tìm số phần tử của A , ta chia làm hai giai đoạn như sau:

- **Giai đoạn thứ nhất.** Chọn 3 hành khách trong 4 hành khách, chọn 1 toa trong 4 toa và xếp lên toa đó 3 hành khách vừa chọn. Suy ra có $C_4^3.C_4^1$ cách.

• **Giai đoạn thứ hai.** Chọn 1 toa trong 3 toa còn lại và xếp lên toa đó 1 một hành khách còn lại. Suy ra có C_3^1 cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = C_4^3 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{C_4^3 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1}{4^4} = \frac{48}{4^4} = \frac{3}{16}$.

Câu 34: Có 8 người khách bước ngẫu nhiên vào một cửa hàng có 3 quầy. Tính xác suất để 3 người cùng đến quầy thứ nhất.

A. $\frac{10}{13}$.

B. $\frac{3}{13}$.

C. $\frac{4769}{6561}$.

D. $\frac{1792}{6561}$.

Lời giải

Chọn D

Không gian mẫu là số cách sắp xếp 8 người khách vào 3 quầy. Vì mỗi người khách có 3 cách chọn quầy nên có 3^8 khả năng xảy ra.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 3^8$.

Gọi A là biến cố "Có 3 người cùng đến quầy thứ nhất, 5 người còn lại đến quầy thứ hai hoặc ba". Để tìm số phần tử của A , ta chia làm hai giai đoạn như sau:

• **Giai đoạn thứ nhất.** Chọn 3 người khách trong 8 người khách và cho đến quầy thứ nhất, có C_8^3 cách.

• **Giai đoạn thứ hai.** Còn lại 5 người khách xếp vào 2 quầy. Mỗi người khách có 2 cách chọn quầy. Suy ra có 2^5 cách xếp.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = C_8^3 \cdot 2^5$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{C_8^3 \cdot 2^5}{3^8} = \frac{1792}{6561}$.

Câu 35: Trong một buổi liên hoan có 10 cặp nam nữ, trong đó có 4 cặp vợ chồng. Chọn ngẫu nhiên 3 người để biểu diễn một tiết mục văn nghệ. Tính xác suất để 3 người được chọn không có cặp vợ chồng nào.

A. $\frac{94}{95}$.

B. $\frac{1}{95}$.

C. $\frac{6}{95}$.

D. $\frac{89}{95}$.

Lời giải

Chọn D

Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 3 người trong 20 người.

Suy ra số phần tử không gian mẫu là $|\Omega| = C_{20}^3 = 1140$.

Gọi A là biến cố "3 người được chọn không có cặp vợ chồng nào". Để tìm số phần tử của A , ta đi tìm số phần tử của biến cố $\bar{A}$, với biến cố $\bar{A}$ là 3 người được chọn luôn có 1 cặp vợ chồng.

• Chọn 1 cặp vợ chồng trong 4 cặp vợ chồng, có C_4^1 cách.

• Chọn thêm 1 người trong 18 người, có C_{18}^1 cách.

Suy ra số phần tử của biến cố $\bar{A}$ là $|\Omega_{\bar{A}}| = C_4^1 \cdot C_{18}^1 = 72$.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = 1140 - 72 = 1068$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{1068}{1140} = \frac{89}{95}$.

Câu 36: Một lớp học có 40 học sinh trong đó có 4 cặp anh em sinh đôi. Trong buổi họp đầu năm thầy giáo chủ nhiệm lớp muốn chọn ra 3 học sinh để làm cán sự lớp gồm lớp trưởng, lớp phó và bí thư. Tính xác suất để chọn ra 3 học sinh làm cán sự lớp mà không có cặp anh em sinh đôi nào.

A. $\frac{64}{65}$.

B. $\frac{1}{65}$.

C. $\frac{1}{256}$.

D. $\frac{255}{256}$.

Lời giải

Chọn A

Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 3 học sinh trong 40 học sinh.

Suy ra số phần tử không gian mẫu là $|\Omega| = C_{40}^3 = 9880$.

Gọi A là biến cố "3 học sinh được chọn không có cặp anh em sinh đôi nào". Để tìm số phần tử của A , ta đi tìm số phần tử của biến cố $\bar{A}$, với biến cố $\bar{A}$ là 3 học sinh được chọn luôn có 1 cặp anh em sinh đôi.

• Chọn 1 cặp em sinh đôi trong 4 cặp em sinh đôi, có C_4^1 cách.

• Chọn thêm 1 học sinh trong 38 học sinh, có C_{38}^1 cách.

Suy ra số phần tử của biến cố $\bar{A}$ là $|\Omega_{\bar{A}}| = C_4^1 \cdot C_{38}^1 = 152$.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = 9880 - 152 = 9728$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{9728}{9880} = \frac{64}{65}$.

Câu 37: Một người có 10 đôi giày khác nhau và trong lúc đi du lịch vội vã lấy ngẫu nhiên 4 chiếc. Tính xác suất để trong 4 chiếc giày lấy ra có ít nhất một đôi.

A. $\frac{3}{7}$.

B. $\frac{13}{64}$.

C. $\frac{99}{323}$.

D. $\frac{224}{323}$.

Lời giải

Chọn C

Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 4 chiếc giày từ 20 chiếc giày.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{20}^4 = 4845$.

Gọi A là biến cố "4 chiếc giày lấy ra có ít nhất một đôi". Để tìm số phần tử của biến cố A , ta đi tìm số phần tử của biến cố $\bar{A}$, với biến cố $\bar{A}$ là 4 chiếc giày được chọn không có đôi nào.

- Số cách chọn 4 đôi giày từ 10 đôi giày là C_{10}^4 .
- Mỗi đôi chọn ra 1 chiếc, thế thì mỗi chiếc có C_2^1 cách chọn. Suy ra 4 chiếc có $(C_2^1)^4$ cách chọn.

Suy ra số phần tử của biến cố $\bar{A}$ là $|\Omega_{\bar{A}}| = C_{10}^4 \cdot (C_2^1)^4 = 3360$.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = 4845 - 3360 = 1485$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{1485}{4845} = \frac{99}{323}$.

Câu 38: Một trường THPT có 10 lớp 12, mỗi lớp cử 3 học sinh tham gia vẽ tranh cổ động. Các lớp tiến hành bắt tay giao lưu với nhau (các học sinh cùng lớp không bắt tay với nhau). Tính số lần bắt tay của các học sinh với nhau, biết rằng hai học sinh khác nhau ở hai lớp khác nhau chỉ bắt tay đúng 1 lần.

- A. 405. B. 435. C. 30. D. 45.

Lời giải

Chọn A

Mỗi lớp cử ra 3 học sinh nên 10 lớp cử ra 30 học sinh.

Suy ra số lần bắt tay là C_{30}^2 (bao gồm các học sinh cùng lớp bắt tay với nhau).

Số lần bắt tay của các học sinh học cùng một lớp là $10 \cdot C_3^2$.

Vậy số lần bắt tay của các học sinh với nhau là $C_{30}^2 - 10 \cdot C_3^2 = 405$.

Câu 39: Có 5 đoạn thẳng có độ dài lần lượt là $2cm$, $4cm$, $6cm$, $8cm$ và $10cm$. Lấy ngẫu nhiên 3 đoạn thẳng trong 5 đoạn thẳng trên, tính xác suất để 3 đoạn thẳng lấy ra lập thành một tam giác.

- A. $\frac{3}{10}$. B. $\frac{9}{10}$. C. $\frac{7}{10}$. D. $\frac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Không gian mẫu là số cách lấy 3 đoạn thẳng từ 5 đoạn thẳng.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_5^3 = 10$.

Gọi A là biến cố "3 đoạn thẳng lấy ra lập thành một tam giác". Để ba đoạn thẳng tạo thành một tam giác chỉ có các trường hợp: $(4cm, 6cm, 8cm)$ hoặc $(6cm, 8cm, 10cm)$ hoặc $(4cm, 8cm, 10cm)$.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = 3$.

Vậy xác suất cần tìm $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{3}{10}$.

Câu 40: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Ở góc phần tư thứ nhất ta lấy 2 điểm phân biệt; cứ thế ở các góc phần tư thứ hai, thứ ba, thứ tư ta lần lượt lấy 3, 4, 5 điểm phân biệt (các điểm không nằm trên các trục tọa độ). Trong 14 điểm đó ta lấy 2 điểm bất kỳ. Tính xác suất để đoạn thẳng nối hai điểm đó cắt hai trục tọa độ.

A. $\frac{68}{91}$.

B. $\frac{23}{91}$.

C. $\frac{8}{91}$.

D. $\frac{83}{91}$.

Lời giải

Chọn B

Không gian mẫu là số cách chọn 2 điểm bất kỳ trong 14 điểm đã cho.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{14}^2 = 91$.

Gọi A là biến cố "Đoạn thẳng nối 2 điểm được chọn cắt hai trục tọa độ". Để xảy ra biến cố A thì hai đầu đoạn thẳng đó phải ở góc phần tư thứ nhất và thứ ba hoặc phần tư thứ hai và thứ tư.

- Hai đầu đoạn thẳng ở góc phần tư thứ nhất và thứ ba, có $C_2^1 C_4^1$ cách.
- Hai đầu đoạn thẳng ở góc phần tư thứ hai và thứ tư, có $C_3^1 C_5^1$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = C_2^1 C_4^1 + C_3^1 C_5^1 = 23$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{23}{91}$.

Câu 41: Một lớp học có 30 học sinh gồm có cả nam và nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh để tham gia hoạt động của Đoàn trường. Xác suất chọn được 2 nam và 1 nữ là $\frac{12}{29}$. Tính số học sinh nữ của lớp.

A. 16.

B. 14.

C. 13.

D. 17.

Lời giải

Chọn B

Gọi số học sinh nữ của lớp là n ($n \in \mathbb{N}^*, n \leq 28$).

Suy ra số học sinh nam là $30 - n$.

Không gian mẫu là chọn bất kì 3 học sinh từ 30 học sinh.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{30}^3$.

Gọi A là biến cố "Chọn được 2 học sinh nam và 1 học sinh nữ".

- Chọn 2 nam trong $30 - n$ nam, có C_{30-n}^2 cách.
- Chọn 1 nữ trong n nữ, có C_n^1 cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = C_{30-n}^2 \cdot C_n^1$.

Do đó xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{C_{30-n}^2 \cdot C_n^1}{C_{30}^3}$.

Theo giả thiết, ta có $P(A) = \frac{12}{29} \Leftrightarrow \frac{C_{30-n}^2 \cdot C_n^1}{C_{30}^3} = \frac{12}{29} \longrightarrow n = 14$.

Vậy số học sinh nữ của lớp là 14 học sinh.

Câu 42: Một chi đoàn có 3 đoàn viên nữ và một số đoàn viên nam. Cần lập một đội thanh niên tình nguyện (TNTN) gồm 4 người. Biết xác suất để trong 4 người được chọn có 3 nữ bằng $\frac{2}{5}$ lần xác suất 4 người được chọn toàn nam. Hỏi chi đoàn đó có bao nhiêu đoàn viên.

A. 9.

B. 10.

C. 11.

D. 12.

Lời giải

Chọn A

Gọi số đoàn viên trong chi đoàn đó là n ($n \geq 7, n \in \mathbb{N}^*$).

Suy ra số đoàn viên nam trong chi đoàn là $n - 3$.

Xác suất để lập đội TNTN trong đó có 3 nữ là $\frac{C_3^3 \cdot C_{n-3}^1}{C_n^4}$.

Xác suất để lập đội TNTN có toàn nam là $\frac{C_{n-3}^4}{C_n^4}$.

Theo giả thiết, ta có $\frac{C_3^3 \cdot C_{n-3}^1}{C_n^4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{C_{n-3}^4}{C_n^4} \Leftrightarrow C_{n-3}^1 = \frac{2}{5} \cdot C_{n-3}^4 \longrightarrow n = 9$.

Vậy cho đoàn có 9 đoàn viên.

Câu 43: Một hộp có 10 phiếu, trong đó có 2 phiếu trúng thưởng. Có 10 người lần lượt lấy ngẫu nhiên mỗi người 1 phiếu. Tính xác suất người thứ ba lấy được phiếu trúng thưởng.

A. $\frac{4}{5}$.

B. $\frac{3}{5}$.

C. $\frac{1}{5}$.

D. $\frac{2}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Không gian mẫu là mỗi người lấy ngẫu nhiên 1 phiếu.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 10!$.

Gọi A là biến cố "Người thứ ba lấy được phiếu trúng thưởng". Ta mô tả khả năng thuận lợi của biến cố A như sau:

- Người thứ ba có $C_2^1 = 2$ khả năng lấy được phiếu trúng thưởng.
- 9 người còn lại có số cách lấy phiếu là $9!$.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = 2.9!$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{2.9!}{10!} = \frac{1}{5}$.

Câu 44: Trong kỳ thi THPT Quốc Gia, mỗi lớp thi gồm 24 thí sinh được sắp xếp vào 24 bàn khác nhau. Bạn Nam là một thí sinh dự thi, bạn đăng ký 4 môn thi và cả 4 lần thi đều thi tại một phòng duy nhất. Giả sử giám thị xếp thí sinh vào vị trí một cách ngẫu nhiên, tính xác suất để trong 4 lần thi thì bạn Nam có đúng 2 lần ngồi cùng vào một vị trí.

A. $\frac{253}{1152}$.

B. $\frac{899}{1152}$.

C. $\frac{4}{7}$.

D. $\frac{26}{35}$.

Lời giải

Chọn A

Không gian mẫu là số cách ngẫu nhiên chỗ ngồi trong 4 lần thi của Nam.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 24^4$.

Gọi A là biến cố "4 lần thi thì bạn Nam có đúng 2 lần ngồi cùng vào một vị trí". Ta mô tả không gian của biến cố A như sau:

- Trong 4 lần có 2 lần trùng vị trí, có C_4^2 cách.
- Giả sử lần thứ nhất có 24 cách chọn chỗ ngồi, lần thứ hai trùng với lần thứ nhất có 1 cách chọn chỗ ngồi. Hai lần còn lại thứ ba và thứ tư không trùng với các lần trước và cũng không trùng nhau nên có 23.22 cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = C_4^2 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{C_4^2 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{24^4} = \frac{C_4^2 \cdot 23 \cdot 22}{24^3} = \frac{253}{1152}$.