NGUYỄN HỮU NGỌC

CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

ĐẠI SỐ 10

(TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM)

BIÊN SOẠN THEO CHƯƠNG TRÌNH TOÁN 10 CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

(Tái bản lần thứ năm)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Chương I.

MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP

§ 1. MỆNH ĐỀ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Mệnh đề

- Mệnh đề là những khẳng định có tính đúng (Đ) hoặc sai (S).
- Mỗi mệnh đề phải hoặc (Đ) hoặc (S).
- Một mệnh đề không thể vừa (Đ), vừa (S).

2. Phủ định của một mệnh đề

- Phủ định của một mệnh đề A là mệnh đề kí hiệu $\overline{A}$:

$\overline{A}$ (Đ) nếu A (S) ;

$\overline{A}$ (S) nếu A (Đ).

3. Mệnh đề kéo theo

- Mệnh đề kéo theo $A \Rightarrow B$ là một mệnh đề chỉ (S) khi A (Đ) và B (S).
- $B \Rightarrow A$ là mệnh đề đảo của $A \Rightarrow B$.
- Nếu $A \Rightarrow B$ (Đ) thì :
  - A là điều kiện ĐỦ để có B ;
  - B là điều kiện CẦN để có A.

4. Mệnh đề tương đương

- Mệnh đề tương đương $A \Leftrightarrow B$ là một mệnh đề (Đ) nếu A và B cùng (Đ) hoặc cùng (S).
- Nếu $A \Leftrightarrow B$ (Đ) thì :
  - $A \Rightarrow B$ là định lí thuận.
  - $B \Rightarrow A$ là định lí đảo.
  - $A \Leftrightarrow B$ là định lí thuận đảo.
  - A là điều kiện cần và đủ để có B.
  - B là điều kiện cần và đủ để có A.

5. Mệnh đề chứa biến, kí hiệu *p(x)*

- Mệnh đề chứa biến $p(x)$ là một phát biểu có liên quan đến một đại lượng thay đổi (thường là số) x.

- Mệnh đề chứa biến là một mệnh đề nếu ta cho biến đó một giá trị nhất định.

6. Mệnh đề phổ biến : $\forall x \in X : p(x)$

- Mệnh đề phổ biến : $\forall x \in X : p(x)$ nghĩa là mọi đối tượng x thuộc X đều có tính p.

7. Mệnh đề tồn tại : $\exists x \in X : p(x)$

- Mệnh đề tồn tại : $\exists x \in X : p(x)$ nghĩa là có một đối tượng x thuộc X có tính p.

$$A = \forall x \in X : p(x) \Rightarrow \overline{A} = \exists x \in X : \overline{p(x)};$$

$$A = \exists x \in X : p(x) \Rightarrow \overline{A} = \forall x \in X : \overline{p(x)}.$$

8. Phương pháp chứng minh bằng phản chứng

- Để chứng minh P đúng, ta giả thiết P sai, từ đó bằng lập luận toán học ta suy ra mâu thuẫn.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. ĐỊNH GIÁ TRỊ CỦA MỘT MỆNH ĐỀ

Phương pháp

- Mệnh đề : xác định giá trị (Đ) hoặc (S) của mệnh đề đó.
- Mệnh đề chứa biến : Tìm tập hợp D của các biến x để $p(x)$ (Đ) hoặc (S).

Ví dụ 1. Xác định giá trị (Đ), (S) của các mệnh đề :

1) 2 là số chẵn.
2) 2 là số nguyên tố.
3) 2 là số chính phương.

Giải

1) (Đ). 2) (Đ). 3) (S).

Ví dụ 2. Xác định giá trị của các mệnh đề :

1) Mọi số nguyên chẵn thì chia hết cho 2.
2) Số nguyên tận cùng bằng số 0 hoặc số 2 thì nó chia hết cho 2.
3) Tứ giác có hai cạnh đối không song song và không bằng nhau thì không phải là một hình bình hành.

Giải

1) (Đ). 2) (Đ).

3) (S) : Chỉ cần hai cạnh đối không song song hoặc không bằng nhau thì nó không phải là hình bình hành.

Ví dụ 3. Điều chỉnh kí hiệu $\forall, \exists$ để được mệnh đề đúng.

1) $\forall x \in \mathbb{R} : 2x + 3 = 0$.

2) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 3 = 0$.

3) $\forall x \in \mathbb{N} : x^2 + 1$ là số lẻ.

Giải

1) $\exists x \in \mathbb{R} : 2x + 3 = 0$. 2) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 3 = 0$.

3) $\exists x \in \mathbb{N} : x^2 + 1$ lẻ.

Ví dụ 4. Tìm $x \in D$ để được mệnh đề đúng.

1) $x^2 - 4x + 3 = 0$. 2) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} \geq 0$.

3) $x^2 - x + 1 = 0$.

Giải

1) $D = \{1; 3\}$. 2) $D = [1; +\infty)$. 3) $D = \varnothing$.

Dạng 2. PHÁT BIỂU ĐỊNH LÍ DƯỚI DẠNG ĐIỀU KIỆN CẦN, ĐỦ

Phương pháp

- Nếu $A \Rightarrow B$ (Đ) : A là điều kiện đủ để có B ;
  Nếu $B \Rightarrow A$ (S) : B là điều kiện cần để có A.
  (Không được phát biểu định lí đảo, điều kiện cần và đủ).
- Nếu $A \Rightarrow B$ (Đ) và $B \Rightarrow A$ (Đ) : A (hoặc B) là điều kiện cần và đủ để có B (hoặc A).

Ví dụ 1. Xét mệnh đề : "Hai tam giác bằng nhau thì diện tích của chúng cũng bằng nhau". Hãy phát biểu điều kiện cần, điều kiện đủ, định lí đảo, điều kiện cần và đủ.

Giải

1) Điều kiện cần : Hai tam giác có diện tích bằng nhau là điều kiện cần để hai tam giác đó bằng nhau.

2) Điều kiện đủ : Hai tam giác bằng nhau là điều kiện đủ để hai tam giác đó có diện tích bằng nhau.

3) Định lí đảo : Không có.

4) Điều kiện cần và đủ : Không có.

Vì $A \Rightarrow B$ (định lí) và $B \Rightarrow A$: sai. Hai tam giác có diện tích bằng nhau chưa chắc đã bằng nhau.

Ví dụ 2. Cùng câu hỏi ở Ví dụ 1 với mệnh đề : "Phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm thì $\Delta = b^2-4ac \geq 0$".

Giải

1) Điều kiện cần : $\Delta = b^2-4ac \geq 0$ là điều kiện cần để phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm.

2) Điều kiện đủ : Phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm là điều kiện đủ để $\Delta = b^2-4ac \geq 0$.

3) Định lí đảo : Nếu $\Delta = b^2-4ac \geq 0$ thì phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm.

4) Điều kiện cần và đủ :

- Phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm là điều kiện cần và đủ để $\Delta = b^2-4ac \geq 0$.
- $\Delta = b^2-4ac \geq 0$ là điều kiện cần và đủ để phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm.

Dạng 3. PHỦ ĐỊNH MỆNH ĐỀ

Phương pháp

1) • $\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$;
   • $\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$.

2) • $\overline{\forall x \in D : p(x)} \Leftrightarrow \exists x \in D : \overline{p(x)}$;
   • $\overline{\exists x \in D : p(x)} \Leftrightarrow \forall x \in D : \overline{p(x)}$.

Ví dụ 1. Phủ định các mệnh đề :

A : n chia hết cho 2 và cho 3 thì nó chia hết cho 6.

B : ΔABC vuông cân tại A.

C : $\sqrt{2}$ là số thực.

Giải

$\overline{A}$: n không chia hết cho 2 hoặc không chia hết cho 3 thì nó không chia hết cho 6.

$\overline{B}$: ΔABC không vuông cân tại $A \Leftrightarrow \Delta ABC$ không vuông tại A hoặc không cân tại A.

$\overline{C}$: $\overline{\sqrt{2} \in \mathbb{R}} \Leftrightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{R}$.

Ví dụ 2. Phủ định các mệnh đề và cho biết tính (Đ), (S).

$A : \forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 > 0$;

$B : \exists x \in \mathbb{R} : x^3 + x^2 + x + 1 = 0$;

$C : \forall A, \forall B : A \cap B \subset A$.

Giải

$\overline{A}$: $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \leq 0$ (S).

$\overline{B}$: $\forall x \in \mathbb{R} : x^3 + x^2 + x + 1 \neq 0$ (S).

C : $\forall A, \forall B : A \cap B \subset A \Leftrightarrow \forall x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ (Đ);

$\overline{C}$: $\exists x \in A \cap B \Rightarrow x \notin A$ (S).

Dạng 4. PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẰNG PHẢN CHỨNG

Phương pháp

Để chứng minh A (Đ), ta giả thiết $\overline{A} \Rightarrow B \Rightarrow C$.
Nếu C (S) ta dừng phép chứng minh và kết luận A (Đ).

Ví dụ 1. Chứng minh "n^2 chẵn $\Rightarrow$ n chẵn".

Giải

A : n chẵn.

$\overline{A}$: n lẻ $\Rightarrow n = 2p + 1 \ (p \in \mathbb{N}) \Rightarrow n^2 = 4p^2 + 4p + 1$

$\Rightarrow n^2 = 2(2p^2 + 2p) + 1 \Rightarrow n^2 = 2k + 1 \ (k = 2p^2 + 2p)$

$\Rightarrow n^2$ lẻ (trái giả thiết).

Vậy n chẵn.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng : $\forall a, b > 0 : \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$.

Giải

Giả sử $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} < 2 \Rightarrow a^2 + b^2 < 2ab \Rightarrow (a-b)^2 < 0$ (Sai).

Vậy : $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2 \ \forall a,b>0.$

Ví dụ 3. Chứng minh $A\subset B \Rightarrow A\cap B=A$.

Giải

Giả sử $A\cap B\neq A \Rightarrow \exists x\in A$ và $x\notin (A\cap B)$

$\Rightarrow x\in A$ và ($x\notin A$ hay $x\notin B$)

$\Rightarrow x\in A$ và ($x\notin A$ hay $x\notin A$) (do $A\subset B$)

$\Rightarrow x\in A$ và $x\notin A$: mâu thuẫn.

Vậy $A\cap B=A$.

C. BÀI TẬP

Bài 1. Cho biết tính (Đ), (S) của các mệnh đề sau. Hãy tìm mệnh đề phủ định của chúng.

1) $\exists x\in\mathbb{Z} : 6x^2-13x+6=0$;

2) $\forall x\in\mathbb{R} : x^2>1$;

3) $\forall x\in\mathbb{N}, \exists y\in\mathbb{N} : y=x+1$;

4) $\forall x\in\mathbb{R}, \forall y\in\mathbb{R} : \frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$;

5) $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$ mà a + b + c = 0 : $-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}=ab+bc+ca$.

Bài 2. Cho biết tính (Đ), (S) của các mệnh đề sau. Hãy sửa lại cho đúng :

1) ΔABC đều $\Leftrightarrow$ Tam giác có ít nhất một góc bằng 60^0.

2) $\begin{cases} ax^2+bx+c=0 \\ a\neq 0 \end{cases}$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta=b^2-4ac=0$.

3) ΔABC cân tại $A \Leftrightarrow$ Hai đường cao BE và CF bằng nhau.

4) $\forall a,b,c\in\mathbb{R} : \begin{cases} a>b \\ b>c \end{cases} \Leftrightarrow a>c.$

5) $\forall a,b\in\mathbb{Z} : \begin{cases} a\vdots 3 \\ b\vdots 2 \end{cases} \Leftrightarrow ab\vdots 6.$

Bài 3. Phát biểu "điều kiện cần" các mệnh đề :

1) Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau.

2) Hai tam giác có hai cặp cạnh bằng nhau kèm giữa một cặp góc bằng nhau thì bằng nhau.

3) Hai tam giác có hai cặp góc bằng nhau thì bằng nhau.
4) Một số chia hết cho 3 khi và chỉ khi tổng các chữ số chia hết cho 3.
5) $\forall a, b \in \mathbb{R} : a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$.

Bài 4. Hãy sửa lại, nếu cần, để được định lí :
1) Hai số thực $a > b$ là điều kiện cần để $a^2 > b^2$.
2) $a \vdots 9$ là điều kiện đủ để $a \vdots 3$.
3) n chẵn là điều kiện cần và đủ để n^2 chẵn.
4) $ac \leq 0$ là điều kiện cần để $ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$ có nghiệm.
5) $ac > 0$ là điều kiện đủ để $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm.

Bài 5. Xét mệnh đề $A : "a.c \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \text{ có nghiệm"} \\ (a \neq 0). \end{cases}$

Tìm mệnh đề :
1) Phủ định của A.
2) Tương đương với A.
3) Mệnh đề đảo của A.
Trong ba mệnh đề đó, mệnh đề nào là định lí ?

Bài 6. Tìm mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau và cho biết tính đúng, sai :
1) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} : (a+b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
2) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} : a^2 + 2 > b^2 + 1$.
3) $\exists a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} : a + b > 1$.
4) $\exists a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} : a^2 < b$.
5) $\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} : a^2 = b + 1$.

Bài 7. Cùng câu hỏi với Bài 6.
1) $\forall m \in \mathbb{R}$: Phương trình $x^2 - 2(m+2)x + 4m = 0$ có nghiệm.
2) $\forall m \in \mathbb{R}$: Hai phương trình sau có nghiệm chung

$$x^2 + x + m = 0; \qquad (1)$$

$$x^2 + mx + 1 = 0. \qquad (2)$$

3) $\forall a, b \in \mathbb{R} : a^2 - ab + b^2 > 0$.

Bài 8. Chứng minh : $\begin{cases} |x| < 1 \\ |y| < 1 \end{cases} \Rightarrow |x + y| < |1 + xy|$.

Bài 9. Chứng minh rằng $\forall a>0:\sqrt{a}+\sqrt{a+2}<2\sqrt{a+1}$.

Bài 10. Nếu $ac\geq 2(b+d)$ thì ít nhất một phương trình sau có nghiệm :

$$x^2+ax+b=0; \quad (1)$$

$$x^2+cx+d=0. \quad (2)$$

LỜI GIẢI

Bài 1. 1) $6x^2-13x+6=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=2/3\\x=3/2\end{bmatrix}$ (S).

Phủ định : $\forall x\in\mathbb{Z}:6x^2-13x+6\neq 0$ (Đ).

2) $\forall x\in\mathbb{R}:x^2>1$ (S), ví dụ x = 0. Phủ định : $\exists x\in\mathbb{R}:x^2\leq 1$ (Đ).

3) $\forall x\in\mathbb{N},\exists y\in\mathbb{N}:y=x+1$ (Đ).

Phủ định : $\exists x\in\mathbb{N},\forall y\in\mathbb{N}:y\neq x+1$ (S).

4) $\forall x\in\mathbb{R},\forall y\in\mathbb{R}:\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\geq 2$ (S), ví dụ x = 3, y = -2.

Phủ định : $\exists x\in\mathbb{R},\exists y\in\mathbb{R}:\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}<2$ (Đ).

5) (Đ) vì $0=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$, suy ra

$$ab+bc+ca=-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

Phủ định : $\exists a,b,c\in\mathbb{R}:-\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}\neq ab+bc+ca$ (S).

Bài 2. Các mệnh đề dạng $A\Leftrightarrow B$.

1) $A\Rightarrow B$ (Đ).

$B\Rightarrow A$ (S). Vậy (1) là sai.

Sửa lại : ΔABC đều $\Rightarrow\Delta ABC$ có ít nhất một góc 60^0.

2) $A\Rightarrow B$ (Đ) ; $B\Rightarrow A$ (Đ). Vậy $A\Leftrightarrow B$ (Đ).

3) $A\Rightarrow B$ (Đ) ; $B\Rightarrow A$ (Đ). Vậy $A\Leftrightarrow B$ (Đ).

4) $A\Rightarrow B$ (Đ) ; $B\Rightarrow A$ (S). Vậy $A\Rightarrow B$.

5) $A\Rightarrow B$ (Đ) ; $B\Rightarrow A$ (Đ). Vậy $A\Leftrightarrow B$.

Bài 3. 1) Hai góc bằng nhau là điều kiện cần để chúng là hai góc đối đỉnh.

2) Hai tam giác bằng nhau là điều kiện cần để chúng có hai cặp cạnh bằng nhau kèm giữa một cặp góc bằng nhau.

3) Hai tam giác có hai cặp góc bằng nhau là hai tam giác bằng nhau : Sai, nên không phải định lí.

4) Một số chia hết cho 3 là điều kiện cần để tổng các chữ số chia hết cho 3 hoặc một số có tổng các chữ số chia hết cho 3 là điều kiện cần để nó chia hết cho 3.

5) $a^2 > b^2$ là điều kiện cần để $a > b$ (vì $a^2 > b^2 \Rightarrow a > b$ là sai) . $a = -5 < b = 3 \Rightarrow a^2 = 25 > b^2 = 9$.

Bài 4. 1) $a > b$ là điều kiện đủ để $a^2 > b^2$.

2) Đúng, vì $a \vdots 9 \Rightarrow a \vdots 3$.

3) Đúng, vì $\begin{cases} n \text{ chẵn} \Rightarrow n^2 \text{ chẵn} \\ n^2 \text{ chẵn} \Rightarrow n \text{ chẵn.} \end{cases}$

4) $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4ac \geq 0$. Đúng, nếu $ac \leq 0$. Vậy $a.c \leq 0$ là điều kiện cần và đủ để phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có nghiệm.

5) $ac > 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$ có thể dương và có thể âm nên không kết luận được số nghiệm của phương trình. Câu 5) sai : không phải định lí.

Bài 5. 1) Phủ định : $\overline{A \Rightarrow B} \Leftrightarrow \overline{\overline{A} \vee B} \Leftrightarrow A \wedge \overline{B}$.

$a.c \leq 0$ và $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ vô nghiệm (S).

2) Tương đương : $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ vô nghiệm $\Rightarrow a.c \geq 0$ (Đ).

3) Mệnh đề đảo :

$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có nghiệm $\Rightarrow a.c \geq 0$ (Đ).

Chỉ có câu 2) và 3) là định lí.

Bài 6. 1) $\exists a, b \in \mathbb{R} : (a+b)^2 \neq a^2 - 2ab + b^2$ (Đ).

2) $\exists a, b \in \mathbb{R} : a^2 + 2 \leq b^2 + 1$ (Đ).

3) $\forall a, b \in \mathbb{R} : a + b \leq 1$ (S).

4) $\exists\, a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} : a^2 < b$ là sai, ví dụ với $a = 0$ và $b = -1$, ta có $a^2 = 0 < -1 = b$ (S).

Phủ định : $\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} : a^2 \geq b$ (Đ).

5) $\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} : a^2 = b + 1$ là đúng, vì hàm số $y = x^2 - 1$ có tập xác định $\mathbb{R}$. Phủ định : $\exists a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} : a^2 \neq b + 1$ (S).

Bài 7. 1) $\Delta' = (m+2)^2 - 4m = m^2 + 4 > 0$ $\forall m$. Mệnh đề 1) là đúng.

Phủ định : $\exists m \in \mathbb{R} : x^2 - 2(m+2)x + 4m = 0$ vô nghiệm (S).

2) Sai vì $m = 0$ thì (1) có nghiệm là 0 và -1 ; (2) vô nghiệm.

Phủ định : $\exists m \in \mathbb{R}$ để hai phương trình có nghiệm chung, đó là $m = -2$ (Đ).

3) $a^2 - ab + b^2 = a^2 - ab + \frac{b^2}{4} + \frac{3b^2}{4} = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} > 0 \ \forall a, b$.

Đúng. Phủ định : $\exists a, b \in \mathbb{R} : a^2 - ab + b^2 \le 0$ (S).

Bài 8. Giả sử : $|x+y| \ge |1+xy| \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy \ge 1 + x^2y^2 + 2xy$

$$\Rightarrow (1-x^2)(1-y^2) \le 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1-x^2 \le 0 \\ 1-y^2 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1-x^2 \ge 0 \\ 1-y^2 \le 0. \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |x| \ge 1 \\ |y| \le 1 \end{cases} \\ \begin{cases} |x| \le 1 \\ |y| \ge 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

(Sai : trái giả thiết).

Vậy : $|x+y| < |1+xy| \ \ (|x| < 1 ; |y| < 1)$.

Bài 9. Giả sử : $\sqrt{a} + \sqrt{a+2} \ge 2\sqrt{a+1} \quad (a > 0)$

$$\Rightarrow a + a + 2 + 2\sqrt{a(a+2)} \ge 4(a+1)$$

$$\Rightarrow \sqrt{a(a+2)} \ge a + 1 > 0 \ \ (\text{do } a > 0)$$

$$\Rightarrow a^2 + 2a \ge a^2 + 2a + 1 \ (\text{S}).$$

Vậy : $\sqrt{a} + \sqrt{a+2} < 2\sqrt{a+1} \quad (a > 0)$.

Bài 10. Giả sử cả hai phương trình đều vô nghiệm, ta có :

$$\begin{cases} \Delta_1 = a^2 - 4b < 0 \\ \Delta_2 = c^2 - 4d < 0 \end{cases} \Rightarrow a^2 + c^2 < 4(b+d)$$

$$\Rightarrow a^2 + c^2 < 2ac \ (\text{do } 2(b+d) \le ac)$$

$$\Rightarrow (a-c)^2 < 0 \ (\text{sai}).$$

Vậy ít nhất một trong hai phương trình đã cho phải có nghiệm.

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho biết tính đúng (Đ), sai (S). Hãy tìm mệnh đề phủ định :

1) $\exists x \in \mathbb{N} : -2x^2 + 5x + 7 = 0$.

2) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$.

3) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : y = x^2 + 1$.

4) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y = x^2$.

5) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x^3 + y^3 \geq x^2 y + xy^2$.

6) $\exists a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} : \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 0$.

Bài 2. Cho biết tính đúng (Đ), sai (S). Hãy sửa lại cho đúng :

1) $ABCD$ là 4 đỉnh theo thứ tự tạo thành một hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

2) $\begin{cases} a \geq b \\ b \geq a \end{cases} \Leftrightarrow a = b$.

3) AM là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$ của $\triangle ABC$ khi và chỉ khi $\frac{\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{MC}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}}$.

4) $\begin{cases} a \text{ chẵn} \\ b \text{ lẻ} \end{cases} \Leftrightarrow a + b$ lẻ.

5) G là trọng tâm của $\triangle ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Bài 3. Phát biểu "điều kiện đủ" các mệnh đề :

1) Hai góc có hai cặp cạnh vuông góc nhau từng đôi một thì chúng bằng nhau hoặc bù nhau.

2) Trong một hình thoi, hai đường chéo vuông góc nhau.

3) $\triangle ABC$ vuông tại A $\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$.

4) $\triangle ABC = \triangle DEF \Rightarrow dt(ABC) = dt(DEF)$.

5) $a = 2b + 1 \Rightarrow a$ là số lẻ $\forall a, b \in \mathbb{Z}$.

6) $a = \text{bs}(b) \Leftrightarrow$ phép chia a cho b không có số dư.

Bài 4. Xét mệnh đề A :

"$\exists \alpha \in \mathbb{R} : af(\alpha) \leq 0 \Rightarrow f(x) = \text{ax}^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có nghiệm".

Tìm mệnh đề phủ định và tương đương của A.

Bài 5. Chứng minh trong ba phương trình sau thì ít nhất một phương trình có nghiệm :

$$ax^2 + 2bx + c = 0;$$
$$bx^2 + 2cx + a = 0; \quad (a, b, c \neq 0)$$
$$cx^2 + 2\text{ax} + \text{b} = 0.$$

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. 1) Nghiệm $\begin{cases} x_1 = -1 \notin \mathbb{N} \\ x_2 = \dfrac{7}{2} \notin \mathbb{N}. \end{cases}$ (S)

2) (S) : $x = 0$.

3) (Đ) vì tập xác định $D = \mathbb{R}$.

4) (S) : chọn y = $-1 \neq x^2$.

5) (S) : Chọn $x = -1; y = -2 \Rightarrow x^3 + y^3 = -9 \geq -6 = x^2y + xy^2$ là sai.

6) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = 0 \Rightarrow \dfrac{a^2 + b^2}{ab} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0 \\ ab \neq 0. \end{cases}$ (vô nghiệm). Sai.

Bài 2. 1) (Đ).

2) (Đ).

3) (S). Sửa lại :

AM là tia phân giác trong của $\widehat{BAC} \Leftrightarrow \dfrac{\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{MC}} = -\dfrac{AB}{AC}$.

AM là tia phân giác ngoài của $\widehat{BAC} \Leftrightarrow \dfrac{\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{MC}} = +\dfrac{AB}{AC}$.

4) $\begin{cases} a \text{ chẵn} \\ b \text{ lẻ} \end{cases} \Rightarrow a + b$ lẻ (Đ).

Đảo lại là sai, ví dụ với $a = 1, b = 2$ ta có $a + b = 3$ lẻ, suy ra a lẻ, b chẵn.

5) (Đ).

Bài 3. $A \Rightarrow B$ (Đ) : A là điều kiện đủ để có B.

1) Hai góc có hai cặp cạnh vuông góc từng đôi một là điều kiện đủ để chúng bằng hoặc bù nhau.

2) Hình thoi là điều kiện đủ để hai đường chéo vuông góc nhau.

3) $\triangle ABC$ vuông tại A là điều kiện đủ để $AB^2 + AC^2 = BC^2$ hoặc $AB^2 + AC^2 = BC^2$ là điều kiện đủ để $\triangle ABC$ vuông tại A.

4) $\triangle ABC = \triangle DEF$ là điều kiện đủ để diện tích của chúng bằng nhau.

5) Vì $a, b \in \mathbb{Z}$ nên a là số lẻ, suy ra $a = 2b - 1$ nên mệnh đề đảo của (5) là sai. Vậy $a = 2b + 1$ là điều kiện đủ để a là số lẻ.

6) $a = \text{bs}(b)$ là điều kiện đủ để phép chia a cho b không có số dư.

Hoặc a chia cho b không có số dư là điều kiện đủ để $a = \text{bs}(b)$.

Bài 4. $\overline{A}: \exists \alpha \in \mathbb{R}: af(\alpha) \leq 0$ và $f(x) = 0$ vô nghiệm.

$B \Leftrightarrow A: f(x) = 0$ vô nghiệm $\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}: af(\alpha) > 0$.

Bài 5. Phép phản chứng và bất đẳng thức Cô-si.

§ 2. TẬP HỢP

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Tập hợp - Phần tử

- Tập hợp, phần tử là những khái niệm cơ bản của toán học.
- Các đối tượng có chung một hay nhiều tính chất quy tụ lại thành một tập hợp ; mỗi đối tượng là một phần tử.
- Một tập hợp được xác định bởi :
  - Phép liệt kê : $A = \{a_1 ; a_2 ; a_3 ; ...\}$.
  - Phép nêu tính đặc trưng : $A = \{x \in X \,|\, p(x)\}$.

2. Tập hợp rỗng

- Tập rỗng kí hiệu $\varnothing$, nếu tập hợp đó không có phần tử nào cả.

$$A \neq \varnothing \Leftrightarrow \exists x : x \in A \quad (1)$$

3. Tập hợp con

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$$
$$A \not\subset B \Leftrightarrow \exists x \in A \Rightarrow x \notin B \quad (2)$$

4. Tập hợp bằng nhau

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ và } B \subset A$$
$$A = B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in \text{B}) \quad (3)$$

5. Giao của hai tập hợp

$$A \cap B = \{x / x \in A \text{ và } x \in B\}$$
$$\forall x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ và } x \in B \quad (4)$$

6. Hợp của hai tập hợp

$$A \cup B = \{x / x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$$
$$\forall x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ hoặc } x \in B \quad (5)$$

7. Hiệu của hai tập hợp

$$A \setminus B = \{x / x \in A \text{ và } x \notin B\}$$
$$\forall x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \text{ và } x \notin B \quad (6)$$

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. XÁC ĐỊNH TẬP HỢP

Phương pháp

- Phép liệt kê : $A = \{a_1 ; a_2 ; a_3 ; ...\}$.
- Phép nêu tính đặc trưng : $A = \{x \in X \,|\, p(x)\}$.

Ví dụ 1. Tìm tập hợp các số tự nhiên chẵn, khác 0 và nhỏ hơn 10.

Giải

$A = \{2 ; 4 ; 6 ; 8\}$; $A = \{x \in \mathbb{N}^* / x = \text{bs}(2) \text{ và } x < 10\}$.

Ví dụ 2. Tìm tập hợp các nghiệm của phương trình :

$$x(x-1)(x-2)(x^2-1) = 0 .$$

Giải

$A = \{0 ; -1 ; 1 ; 2\}$; $A = \{x \in \mathbb{Z} / x(x+1)(x^2-3x+2) = 0\}$.

Ví dụ 3. Viết tập hợp $A = \{2 ; 3\}$ theo cách nêu ra tính chất đặc trưng.

Giải

$A = \{x \in \mathbb{N} / 1 < x < 4\}$; $A = \{x \in \mathbb{N} / 2 \le x \le 3\}$;
$A = \{x \in \mathbb{N} / (x-2)(x-3) = 0\}$; $A = \{x \in \mathbb{N} / x^2 - 5x + 6 = 0\}$.

Dạng 2. TẬP HỢP CON

Phương pháp

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B;$$
$$A \not\subset B \Leftrightarrow \exists x \in A \Rightarrow x \notin B.$$

Ví dụ 1. Cho hai tập hợp : $A = \{x \in \mathbb{Z} / x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0\}$;
$B = \{x \in \mathbb{Z} / x^2 - 3x + 2 = 0\}$.
Hãy đặt dấu $\subset, \not\subset$ giữa A và B.

Giải

$A = \{-1 ; 1 ; 2\}, B = \{1 ; 2\} \Rightarrow A \not\subset B$ và $B \subset A$.

Ví dụ 2. Cho $A = \{x / x(x-1)(x-2) = 0\}$. Hãy tìm các tập hợp con của A và tập con đó có chứa phần tử 0.

Giải

$A = \{0 ; 1 ; 2\}$ có $2^3 = 8$ tập hợp con của A là :
$\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0;1\}, \{0;2\}, \{1;2\}, \{0;1;2\} = A$ và $\varnothing$.
Các tập hợp con có chứa số 0 là : $\{0\}, \{0 ; 1\}, \{0 ; 2\}, \{0 ; 1 ; 2\}$.

Dạng 3. TẬP HỢP BẰNG NHAU

Phương pháp

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ và } B \subset A ;$$
$$A \neq B \Leftrightarrow A \not\subset B \text{ hoặc } B \not\subset A.$$

Ví dụ 1. Hai tập hợp : $A = \{x \in \mathbb{Z} / x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0\}$;
$B = \{x \in \mathbb{Z} / x^2 - 3x + 2 = 0\}$
có bằng nhau không ?

Giải

$A \neq B$ vì $-1 \in A \Rightarrow -1 \notin B$ nên $A \not\subset B$.

Ví dụ 2. A : Tập hợp các học sinh lớp 10 (sĩ số).
B : Tập hợp các học sinh của lớp 10 có đi học (hiện diện).

C : Tập hợp các học sinh của lớp 10 vắng mặt.
Hãy đặt dấu $=, \neq$ thích hợp, nếu :

1) Học sinh không vắng mặt.

2) Có 1 học sinh vắng mặt.

Giải

1) Học sinh không vắng mặt.

$$\begin{cases} C = \varnothing \\ A = B. \end{cases}$$

2) Có 1 học sinh vắng mặt.

$$\begin{cases} C \neq \varnothing \\ A \neq B. \end{cases}$$

Ví dụ 3. Cho ba tập hợp : $A = \{x \in \mathbb{R}^* / -2 \leq x \leq 3\}$;

$$B = \{x \in \mathbb{R}^* / x^2 - x - 6 < 0\};$$

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^* / \frac{(3x - x^2)(-2x - x^2)}{\sqrt{3x - x^2}} > 0 \right\}.$$

Hãy đặt quan hệ $=, \neq$ giữa các tập A, B, C.

Giải

Ta có : $A = [-2;0) \cup (0;3]$; $B = (-2;0) \cup (0;3)$;

Xét tập C : $\begin{cases} (3x - x^2)(-2x - x^2) > 0 \\ 3x - x^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3x - x^2 > 0 \\ -2x - x^2 > 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 < x < 3 \\ -2 < x < 0. \end{bmatrix}$

Do đó : $C = (-2;0) \cup (0;3)$.

Vậy : $A \neq B$; $B = C$; $C \neq A$.

Dạng 4. CÁC PHÉP TOÁN : GIAO, HỢP, HIỆU

Phương pháp

- Liệt kê A, B.
- $A \cap B$: Lấy các phần tử giống nhau (chung).
  $A \cup B$: Lấy tất cả các phần tử của A, của B, và của $A \cap B$ (chung).
  Chú ý. Chỉ ghi 1 lần các phần tử giống nhau.
  $A \setminus B$: Lấy phần tử của A và không phải của B.

Ví dụ 1. Cho hai tập hợp : $A=\{x\in\mathbb{R}/x^2-4x+3=0\}$;

$B=\{x\in\mathbb{R}/x^2-3x+2=0\}$.

Tính $A\cap B, A\cup B, A\setminus B, B\setminus A$.

Giải

$A=\{1\ ;\ 3\}$, $B=\{1\ ;\ 2\}$, $A\cap B=\{1\}$, $A\cup B=\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$,

$A\setminus B=\{3\}$, $B\setminus A=\{2\}$.

Ví dụ 2. Cho hai tập hợp : $A=\{x\in\mathbb{R}/x^2-3x+2\le 0\}$;

$B=\{x\in\mathbb{R}/x^2-4x+3\le 0\}$.

Tính $A\cap B, A\cup B, A\setminus B, B\setminus A$.

Giải

$A=[1;2]$, $B=[1;3]$, $A\cap B=[1;2]$,

$A\cup B=[1;3]$, $A\setminus B=\varnothing$, $B\setminus A=(2;3]$.

Ví dụ 3. Cho hai tập hợp : $N_1=\{x\in\mathbb{N}^*/x$ là số lẻ$\}$;

$N_2=\{x\in\mathbb{N}^*/x$ là số chẵn$\}$.

Tính $N_1\cap N_2, N_1\cup N_2, \mathbb{N}^*\setminus N_1, \mathbb{N}^*\setminus N_2$.

Giải

$N_1=\{1\ ;\ 3\ ;\ 5\ ;\ 7\ ;\ ...\}\subset\mathbb{N}^*$, $N_2=\{2\ ;\ 4\ ;\ 6\ ;\ 8\ ;\ ...\}\subset\mathbb{N}^*$,

$N_1\cap N_2=\varnothing$, $N_1\cup N_2=\mathbb{N}^*$,

$\mathbb{N}^*\setminus N_1=N_2$, $\mathbb{N}^*\setminus N_2=N_1$.

C. BÀI TẬP

Bài 1. Cho hai tập hợp : $A=\{x\in\mathbb{Z}/x^2-6x+8\le 0\}$;

$B=\{x\in\mathbb{Z}/x^2-8x+15\le 0\}$.

Tính $A\cap B, A\cup B, A\setminus B, B\setminus A$.

Bài 2. Cho hai tập hợp : $A=\{x\in\mathbb{Z}/x^2+3x+2=0\}$;

$B=\{x\in\mathbb{Z}/-x^2+3x-2=0\}$

Tính $A\cap B, A\cup B, A\setminus B, B\setminus A$.

Bài 3. Cho hai tập hợp : $A=\{x\in\mathbb{Z}/x^4-5x^2+4=0\}$;

$$B=\{x\in\mathbb{Z}/-x^4-3x^2+4=0\}.$$

Tính $A\cap B, A\cup B, A\setminus B, B\setminus A$.

Bài 4. Cho ba tập hợp : $A=\{x\in\mathbb{Z}/x\vdots 2\}$;

$$B=\{x\in\mathbb{Z}/x\vdots 3\};$$

$$C=\{x\in\mathbb{Z}/x\vdots 6\}.$$

Tìm quan hệ giữa $A\cap B$ và C.

Bài 5. Cho ba tập hợp : $E=\{x\in\mathbb{Z}/x(x^2-1)(x^2-4)=0\}$;

$$A=\{x\in\mathbb{N}/x(x^2-1)=0\};$$

$$B=\{x\in\mathbb{N}/x(x^2-4)=0\}.$$

1) Tìm $E\setminus A$, $E\setminus B$, $E\setminus(A\cap B)$.

2) Chứng minh : $E\setminus(A\cap B)=(E\setminus A)\cup(E\setminus B)$.

Bài 6. Cho ba tập hợp : $A=\{x\in\mathbb{Z}/x^4-5x^2+4=0\}$;

$$B=\{x\in\mathbb{Z}/x(x^2-4x+3)=0\};$$

$$C=\{x\in\mathbb{Z}/x(x^2-5x+6)=0\}.$$

1) Tính $A\cap B$, $A\cap C$, $B\cup C$.

2) Chứng minh : $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

Bài 7. Chứng minh : $A\cap B=\varnothing\Rightarrow A\setminus B=A$.

Bài 8. Cho $A\subset E$, $B\subset E$. Chứng minh : $A\subset B\Rightarrow(E\setminus B)\subset(E\setminus A)$.

Bài 9. Chứng minh : $(A\setminus B)\cap(A\cap B)=A$.

Bài 10. Cho hai tập hợp : $A=\{x\in\mathbb{N}/-2\le x<3\}$;

$$B=\{x\in\mathbb{Z}/-2<x\le 3\}.$$

Tìm tập X thỏa các tính chất : $\begin{cases}-1\in X\\ X\subset B\\ A\cap B\subset X.\end{cases}$

LỜI GIẢI

Bài 1. $A=\{2;3;4\}$, $B=\{3;4;5\}$, $A\cap B=\{3;4\}$, $A\cup B=\{2;3;4;5\}$

$A\setminus B=\{2\}$, $B\setminus A=\{5\}$.

Bài 2. $A=\{-1;-2\}$, $B=\{1;2\}$, $A\cap B=\varnothing$, $A\cup B=\{-1;-2;1;2\}$, $A\setminus B=A$, $B\setminus A=B$.

Bài 3. $A=\{-1;1;-2;2\}$, $B=\{-1;1\}$, $A\cap B=B$, $A\cup B=A$, $A\setminus B=\{-2;2\}$, $B\setminus A=\varnothing$.

Bài 4. • $\forall x\in A\cap B\Rightarrow x\in A$ và $x\in B\Rightarrow x\vdots 2$ và $x\vdots 3\Rightarrow x\vdots 6\Rightarrow x\in C$.

Vậy: $A\cap B\subset C$. (1)

• $\forall x\in C\Rightarrow x\vdots 6\Rightarrow x\vdots 2$ và $x\vdots 3\Rightarrow x\in A$ và $x\in B\Rightarrow x\in A\cap B$.

Vậy: $C\subset A\cap B$. (2)

Từ (1), (2): $A\cap B=C$.

Bài 5. $E=\{-2;-1;0;1;2\}$, $A=\{0;1\}\subset E$, $B=\{0;2\}\subset E$.

1) $E\setminus A=\{-2;-1;2\}$, $E\setminus B=\{-2;-1;1\}$,

$E\setminus(A\cap B)=\{-2;-1;1;2\}$.

2) $(E\setminus A)\cup(E\setminus B)=\{-2;-1;1;2\}$.

Vậy: $E\setminus(A\cap B)=(E\setminus A)\cup(E\setminus B)$.

Bài 6. $A=\{-2;-1;1;2\}$, $B=\{0;1;3\}$, $C=\{0;2;3\}$.

1) $A\cap B=\{1\}$, $A\cap C=\{2\}$, $B\cup C=\{0;1;2;3\}$.

2) $A\cap(B\cup C)=\{1;2\}$, $(A\cap B)\cup(A\cap C)=\{1;2\}$.

Vậy: $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

Bài 7. Giả sử $A\neq A\setminus B\Rightarrow\exists x\in A$ và $x\notin(A\setminus B)$

$\Rightarrow x\in A$ và $(x\notin A$ hay $x\in B)$

$\Rightarrow \underbrace{(x\in A \text{ và } x\notin A)}_{\text{mâu thuẫn}}$ hay $(x\in A \text{ và } x\in B)$

$\Rightarrow x\in A\cap B=\varnothing$ (sai).

Vậy: $A\setminus B=A$.

Bài 8. $\forall x\in(E\setminus B)\Rightarrow x\in E$ và $x\notin B\Rightarrow x\in E$ và $x\notin A$ (do $A\subset B$)

$\Rightarrow x\in E\setminus A$.

Vậy: $(E\setminus B)\subset(E\setminus A)$.

Bài 9. $A\neq(A\setminus B)\cap(A\cap B)\Rightarrow x\in(A\setminus B)\cap(A\cap B)$ và $x\notin A$

$\Rightarrow(x\in A\setminus B$ và $x\in A\cap B)$ và $x\notin A$

$\Rightarrow(x\in A \text{ và } x\notin B \text{ và } x\in A \text{ và } x\in B)$ và $x\notin A$

$\Rightarrow (x \in A$ và $x \in \varnothing)$ và $x \notin A \Rightarrow x \in \varnothing$ (sai).

Vậy : $A = (A \setminus B) \cap (A \cap B)$.

Bài 10. $A = \{0;1;2\}$, $B = \{-1;0;1;2;3\}$, $A \cap B = \{0;1;2\} = A$.

Yêu cầu đề bài trở thành tìm X thỏa : $\begin{cases} -1 \in X \\ A \subset X \subset B. \end{cases}$

Vậy : $\begin{bmatrix} X = \{-1;0;1;2\} \\ X = \{-1;0;1;2;3\} = B. \end{bmatrix}$

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. A : Tập hợp các tam giác cân ; B : Tập hợp các tam giác vuông. Tìm $A \cap B$.

Bài 2. Cho ba tập hợp : $A = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2 - 3x + 1 = 0\}$;

$B = \{x \in \mathbb{R} / -x^2 - x + 2 = 0\}$;

$C = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 3x + 2 = 0\}$.

1) Hãy đặt dấu $\subset, \not\subset, =, \neq$ thích hợp giữa A, B, C.

2) Tính $A \cap B$, $B \cap C$, $C \cap A$, $A \cap B \cap C$.

3) Tính $A \cup B \cup C$.

Bài 3. Cho hai tập hợp : $A = [-2;3) \setminus \{0\}$, $B = [-3\ ;\ 1]$. Tính :

$A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Bài 4. Chứng minh : $(A \cap B) \subset (A \cup B)$.

Bài 5. Cho ví dụ kiểm tra đẳng thức : $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Bài 6. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} / x(x^2 - 1)(x^2 - 2)(x^2 - 4) = 0\}$. Tìm tất cả các tập hợp con của A.

Bài 7. Cho A, B là hai tập hợp tùy ý. Chứng minh $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \varnothing$.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. $A \cap B$: Tập hợp các tam giác vuông cân.

Bài 2. 1) $A \not\subset B$, $B \not\subset C$, $C \not\subset A$, $A \neq B \neq C$.

2) $A \cap B = B \cap C = C \cap A = A \cap B \cap C = \{1\}$,

$A \cup B \cup C = \left\{-2; \frac{1}{2}; 1; 2\right\}$.

Bài 3. $A \cap B = [-2;1] \setminus \{0\}$, $A \cup B = [-3;3)$, $B \setminus A = [-3;-2) \cup \{0\}$, $A \setminus B = (1;3)$,

Bài 4. Dùng định nghĩa.

Bài 5. Lấy ba tập hợp : $A = \{0;1;2;3\}, B = \{1;2;4;5\}, C = \{1;3;4;6\}$, ta có :

$$\begin{cases} A \setminus (B \cap C) = \{0;2;3\} \\ (A \setminus B) \cup (A \setminus C) = \{0;2;3\} \end{cases} \Rightarrow A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Bài 6. $A = \{0;1;2\}$. Có 8 tập con của A. Lưu ý có 2 tập con đặc biệt là $\varnothing$ và A.

Bài 7. Dùng phản chứng :
Giả sử : $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) \neq \varnothing \Rightarrow \exists x \in (A \setminus B) \cap (B \setminus A) \Rightarrow x \in \varnothing$.
Sai.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

A. BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Sửa lại cho đúng :
1) Số a chia hết cho 9 là điều kiện cần để nó chia hết cho 3.
2) Số a chia hết cho 3 là điều kiện đủ để nó chia hết cho 9.
3) Số a chia hết cho 9 là điều kiện cần và đủ để nó chia hết cho 3.
4) Số a chia hết cho 3 là điều kiện cần và đủ để nó chia hết cho 9.
5) Số a không chia hết cho 3 thì nó không chia hết cho 9.

Bài 2. Mệnh đề nào sau đây phát biểu được bằng điều kiện cần và đủ ?
1) $\forall n \in \mathbb{N}$: n lẻ $\Rightarrow n^2$ lẻ.
2) $\forall a,b \in \mathbb{R} : 0 < a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.
3) $\forall a,b \in \mathbb{R} : a = b \Rightarrow |a| = |b|$.
4) $\forall a,b \in \mathbb{R} : \sqrt{ab} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$.
5) $\forall x \in \mathbb{R} : x$ là số vô tỉ $\Rightarrow x^2$ là số hữu tỉ.

Bài 3. Phủ định các mệnh đề sau và cho biết giá trị đúng, sai :
1) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$: $x^2 \neq y^2$.

2) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}: \ x^2 \geq y$.

3) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}: \ x^2 = y$.

4) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}: \ x^2 = y$.

Bài 4. Tìm mệnh đề tương đương với mệnh đề : "Hình bình hành là tứ giác có hai đường chéo giao nhau tại trung điểm mỗi đường".

Bài 5. Chứng minh : $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) : \frac{1+\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1-\sin x}$.

Bài 6. Cho ba tập hợp $A = (-2;0) \cup (0;2)$, $B = (-3;1) \setminus \{0\}$, $C = (-1;3)$.
Tìm : $A \setminus B$, $B \setminus C$, $C \setminus A$, $A \cup B \cup C$,
$A \cap B$, $B \cap C$, $C \cap A$, $A \cap B \cap C$.

Bài 7. Chứng minh rằng $\forall A, B, C : A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Bài 8. Chứng minh : $\begin{cases} A \subset B \\ B \subset C \end{cases} \Rightarrow A \subset C$.

Bài 9. Chứng minh : $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Bài 10. Cho hai tập hợp : $A = \{x \in \mathbb{Z} / x(x^2 - 3x + 2) = 0\}$;
$B = \{x \in \mathbb{Z} / x^4 - 5x^2 + 4 = 0\}$.
Tìm tập X có 3 phần tử không âm thoả $(A \cap B) \subset X \subset (A \cup B)$.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. $a \vdots 9 \Rightarrow a \vdots 3$ (Đ) ; $a \vdots 3 \Rightarrow a \vdots 9$ (S).
1) Điều kiện đủ.
2) Điều kiện cần.
3), 4) Không có điều kiện cần và đủ.
5) Đ.

Bài 2. 1) Được. 2) Được. 3) Không. 4) Sai.
5) Không.

Bài 3. 1) Sai 2) Đúng. 3) Đúng. 4) Sai.

Bài 4. Tứ giác có hai đường chéo không giao nhau tại trung điểm mỗi đường thì nó không phải là hình bình hành.

Bài 5. Dùng phản chứng dẫn đến $\sin^2 x + \cos^2 x \neq 1$.

Bài 6. $A\cap B=(-2;1)\setminus\{0\}$, $B\cap C=(-1;1)\setminus\{0\}$,
$C\cap A=(-1;2)\setminus\{0\}$, $A\cap B\cap C=(-1;1)\setminus\{0\}$,
$A\setminus B=[1;2)$, $B\setminus C=(-3;-1]$,
$C\setminus A=[2;3)\cup\{0\}$, $A\cup B\cup C=(-3;3)$.

Bài 7. Dùng định nghĩa.

$\forall x\in \mathscr{A}=A\setminus(B\cap C)\Rightarrow x\in A$ và $x\notin B\cap C$
$\Rightarrow x\in A$ và ($x\notin B$ hay $x\notin C$)
$\Rightarrow$ ($x\in A$ và $x\notin B$) hay ($x\in A$ và $x\notin C$)
$\Rightarrow x\in A\setminus B$ hay $x\in A\setminus C$
$\Rightarrow x\in(A\setminus B)\cup(A\setminus C)=\mathscr{B}$.

Vậy : $\mathscr{A}\subset\mathscr{B}$.

$\forall x\in \mathscr{B}=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)\Rightarrow x\in(A\setminus B)$ hay $x\in(A\setminus C)$
$\Rightarrow(x\in A$ và $x\notin B)$ hay $(x\in A$ và $x\notin C)$
$\Rightarrow x\in A$ và $(x\notin B$ hay $x\notin C)$
$\Rightarrow x\in A$ và $x\notin B\cap C$
$\Rightarrow x\in A\setminus(B\cap C)=\mathscr{A}$.

Vậy : $\mathscr{B}\subset\mathscr{A}$.

Tóm lại : $\mathscr{A}=\mathscr{B}$.

Bài 8. Dùng định nghĩa. Làm tương tự như Bài 7.

Bài 9. Dùng định nghĩa. Làm tương tự như Bài 7.

Bài 10. Yêu cầu bài toán suy ra : $\{1;2\}\subset X\subset\{-2;-1;0;1;2\}$. Vì $x\geq 0$ nên $X=\{1;2;0\}$.

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Xét mệnh đề X : "2 là số lẻ". Mệnh đề nào là mệnh đề phủ định của X.

A) 2 là số nguyên tố. B) 2 là số chẵn.
C) 2 là số chính phương. D) 2 là số vô tỉ.

Câu 2. Mệnh đề nào sau đây là sai :

A) 2 là số chẵn. B) 2 là số nguyên tố.
C) 2 là số chính phương. D) 2 là ước số của số 4.

Câu 3. Mệnh đề nào sau đây là sai :

A) Một số chia hết cho 2 và chia hết cho 3 thì nó chia hết cho 6.

B) Hai tam giác bằng nhau thì diện tích bằng nhau.

C) Hai tam giác có diện tích bằng nhau thì chúng là hai tam giác bằng nhau.

D) Tam giác cân có một góc 60^0 nếu và chỉ nếu tam giác đó có hai góc bằng nhau và mỗi góc bằng 60^0.

Câu 4. Xét xem các mệnh đề tương đương sau đây, mệnh đề nào sai :

A) $x^2+bx+c=0$ có nghiệm $\Leftrightarrow b^2 \geq 4c$.

B) $\begin{cases} a>b \\ b>c \end{cases} \Leftrightarrow a>c$.

C) ΔABC vuông tại $A \Leftrightarrow \widehat{B}+\widehat{C}=90^0$.

D) n^2 chẵn $\Leftrightarrow n$ chẵn.

Câu 5. Gọi X : hai góc đối đỉnh ; Y : hai góc bằng nhau. Phát biểu nào sai :

A) $X \Rightarrow Y$ là định lí.

B) $X \Leftrightarrow Y$.

C) Hai góc đối đỉnh là <u>điều kiện đủ</u> để hai góc đó bằng nhau.

D) Hai góc bằng nhau là <u>điều kiện cần</u> để hai góc đó đối đỉnh.

Câu 6. Mệnh đề nào sau đây đúng :

A) Hai tam giác bằng nhau là <u>điều kiện đủ</u> để diện tích chúng bằng nhau.

B) Hai tam giác bằng nhau là <u>điều kiện cần</u> để diện tích chúng bằng nhau.

C) Hai tam giác bằng nhau là <u>điều kiện cần và đủ</u> để chúng có diện tích bằng nhau.

D) Hai tam giác có diện tích bằng nhau là <u>điều kiện cần và đủ</u> để chúng bằng nhau.

Câu 7. Mệnh đề nào sau đây sai :

A) Hai góc bằng nhau là <u>điều kiện cần</u> để chúng có hai cặp cạnh vuông góc từng đôi một.

B) Hai góc khác nhau là <u>điều kiện đủ</u> để chúng có hai cặp cạnh không vuông góc nhau.

C) Hai góc có hai cặp cạnh vuông góc từng đôi một là <u>điều kiện đủ</u> để chúng bằng nhau.

D) Hai góc có hai cặp cạnh vuông góc từng đôi một là <u>điều kiện cần và đủ</u> để chúng bằng nhau.

Câu 8. Câu nào sau đây sai :

A) Điều kiện cần và đủ để phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ vô nghiệm là $\Delta=b^2-4ac<0$.

B) Điều kiện cần và đủ để hai vecto $\vec{a},\vec{b}$ khác vecto $\vec{0}$ vuông góc nhau là $\vec{a}.\vec{b}=0$.

C) Điều kiện cần và đủ để tam thức bậc hai

$$f(x)=ax^2+bx+c>0 \ \ \forall x$$

là $\Delta>0$ và $a>0$.

D) Điều kiện cần và đủ để số nguyên n chia đúng cho 5 là số tận cùng của n phải là số 0 hoặc số 5.

Câu 9. Mệnh đề nào sau đây đúng :

A) $\exists n\in\mathbb{N}:n^2=n$. B) $\forall n\in\mathbb{N}:n^2>0$.

C) $\exists n\in\mathbb{N}:n^2-2=0$. D) $\forall n\in\mathbb{N}:n^2+1$ lẻ.

Câu 10. Mệnh đề nào sau đây sai :

A) $\forall x\in\mathbb{R}:\ x\le x+1$. B) $\forall x\in\mathbb{R}:\ x^2>0$.

C) $\exists x\in\mathbb{R}:\ x^2+1=3x$. D) $\exists x\in\mathbb{R}:\ \dfrac{1}{x}>x$.

Câu 11. Phủ định của mệnh đề "$\forall x\in\mathbb{R}:\ x^2+1>0$" là :

A) $\forall x\in\mathbb{R}:\ x^2+1<0$. B) $\exists x\in\mathbb{R}:\ x^2+1\le 0$.

C) $\exists x\in\mathbb{R}:\ x^2+1>0$. D) $\forall x\in\mathbb{R}:\ x^2+1=0$.

Câu 12. Phủ định của mệnh đề "$\exists x\in\mathbb{N}:x^2-4x+3=0$" là :

A) $\forall x\in\mathbb{N}:x^2-4x+3\neq 0$. B) $\forall x\in\mathbb{N}:x^2-4x+3=0$.

C) $\forall x\in\mathbb{N}:x^2-4x+3>0$. D) $\forall x\in\mathbb{N}:x^2-4x+3<0$.

Câu 13. Kí hiệu $a\vdots p$ " số a chia hết cho số p". Mệnh đề nào sau đây sai :

A) $\forall x\in\mathbb{N}:n\vdots 3$ và $n\vdots 2\Rightarrow n\vdots 6$.

B) $\forall x\in\mathbb{N}:\overline{n\vdots 6}\Rightarrow\overline{n\vdots 3}$ hoặc $\overline{n\vdots 2}$.

C) $\forall x\in\mathbb{N}:n\vdots 6\Rightarrow n\vdots 3$ và $n\vdots 2$.

D) $\forall x\in\mathbb{N}:\overline{n\vdots 6}\Rightarrow\overline{n\vdots 3}$ và $\overline{n\vdots 2}$.

Câu 14. Câu nào sau đây đúng :

A) $\exists x\in\mathbb{R}:x^2=x+1$. B) $\forall x\in\mathbb{R}:\ x^2=x+1$.

C) $\exists x\in\mathbb{Z}:x^2=x+1$. D) $\exists x\in\mathbb{N}:x^2=x+1$.

Câu 15. Để chứng minh "n^2 số chẵn $\Rightarrow n$ số chẵn", một học sinh lập luận :

Giả sử n là số lẻ $\Rightarrow n=2p+1(p\in\mathbb{N})\Rightarrow n^2=4p^2+4p+1$

$\Rightarrow n^2=2(2p^2+2p)+1$

$\Rightarrow n^2=2k+1$ (lẻ). Sai.

Vậy n^2 số chẵn.

Học sinh đó đã sử dụng phương pháp chứng minh:

A) Phép chứng minh mệnh đề $A\Rightarrow B$.

B) Phép chứng minh mệnh đề $A\Leftrightarrow B$.

C) Phép chứng minh phản ví dụ.

D) Phép chứng minh bằng phản chứng.

Câu 16. Xét $E=\{x\in\mathbb{Z}/(x^2-1)(x^2-2)\sqrt{3-x^2}=0\}$. Tập hợp nào sau đây đúng :

A) $E=\{-\sqrt{3};-\sqrt{2};-1;0;1;\sqrt{2};\sqrt{3}\}$.

B) $E=\{0;1;\sqrt{2};\sqrt{3}\}$.

C) $E=\{-1;0;1\}$.

D) $E=\{-1;1\}$.

Câu 17. Tập hợp nào sau đây là khác tập hợp $\varnothing$:

A) $A=\{x\in\mathbb{R}/x^2-x+1=0\}$.

B) $B=\{x\in\mathbb{Z}/-x^2+3x-2>0\}$.

C) $C=\{x\in\mathbb{Z}/2x^2+x-3=0\}$

D) $D=\{x\in\mathbb{Z}/\sqrt{x^2+1}=2\}$.

Câu 18. Tập hợp nào sau đây là tập hợp con của tập hợp :

$E=\{0;1;2;3;\ldots;8;9\}$.

A) $A=\{x\in\mathbb{Z}/x^2-11x+10<0\}$.

B) $B=\{x\in\mathbb{N}/x^2-11x+10\le 0\}$.

C) $C=\{x\in\mathbb{Z}/x^2(x^2-4)=0\}$.

D) $D=\{x\in\mathbb{Z}/x^4-13x^2+36=0\}$.

Câu 19. Mệnh đề nào sau đây sai :

A) $A\cap B\subset A$.

B) $A\cap B\subset A\cup B$.

C) $A\setminus B\subset A$.

D) $A\cap B\subset A\setminus B$.

Câu 20. Mệnh đề nào sau đây đúng :

A) $A \cup B \subset A \cap B$. B) $A \setminus B \subset B$.

C) $A \setminus B = B \setminus A$. D) $A \setminus B \cap B \setminus A = \varnothing$.

Câu 21. Xét hai tập hợp : $E = \{x / x \in \mathbb{Z} \text{ và } x^2 - 5x + 6 \leq 0\}$;

$F = \{x / x \in \mathbb{Z} \text{ và } x^2 - 7x + 12 \leq 0\}$.

Phát biểu nào sau đây sai :

A) $E \cap F = \{3\}$. B) $E \setminus F = \{2\}$.

C) $F \setminus E = \{4\}$. D) $E \cup F = \{2,4\}$.

Câu 22. Xét hai tập hợp : $E = \{x \in \mathbb{Z} / - x^2 + 3x - 2 > 0\}$;

$F = \{x \in \mathbb{Z} / \ x^2 - 1 < 0\}$.

Phát biểu nào sau đây sai :

A) $E = F$. B) $E \cap F = \varnothing$.

C) $E \setminus F = \varnothing$. D) $F \setminus E = \{0\}$.

Câu 23. Cho hai tập hợp : $E = \{x / \ x^2 - 4x + 3 < 0\}$;

$F = \{x / \ x^2 - 6x + 8 < 0\}$.

Câu nào sau đây sai :

A) $E \cap F = (2;3)$.

B) $E \setminus F = (1;2)$.

C) $E \cup F = (1;4)$.

D) $(E \cup F) \setminus (E \cap F) = (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$.

Câu 24. Xét hai tập hợp : $N_c = \{2;4;6;8;10;...\}$;

$N_l = \{1;3;5;7;9;11;...\}$.

Câu nào sau đây sai :

A) $N_c \cap N_l = \varnothing$ B) $N_c \cup N_l = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

C) $N_c = \{x \in \mathbb{N} / x = \text{BS}(2)\}$ D) $N_c \setminus N_l = N_l \setminus N_c$.

($x = \text{BS}(2)$: x bằng bội số của 2).

Câu 25. Câu nào sau đây sai :

A) $(X \setminus Y) \cap (X \cap Y) = \varnothing$.

B) $(X \setminus Y) \cup (X \cap Y) = (Y \setminus X) \cup (X \cap Y)$.

C) $(X \setminus Y) \cap (X \cap Y) = (Y \setminus X) \cap (X \cap Y)$.

D) $(X \setminus Y) \cup (X \cap Y) \cup (Y \setminus X) = X \cup Y$.

Câu 26. Cho hàm số : $y = f(x) = \dfrac{1-\sqrt{3+2x-x^2}}{(x^2-3x+2)\sqrt{4-x^2}}$. Tập xác định của f là :

A) $D_f = [-1;1) \cup (1;2)$. B) $D_f = [-1;2)$.

C) $D_f = [-1;3] \setminus \{1;2\}$. D) $D_f = [-1,3] \setminus (1,2)$.

Câu 27. Cho hai tập hợp X và Y mà $X \cap Y = \varnothing$. Câu nào sau đây sai ?

A) $X \setminus Y = X$. B) $Y \setminus X = Y$.

C) $X \cup Y \neq (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$. D) $(X \setminus Y) \cap (Y \setminus X) = \varnothing$.

Câu 28. Xét 6 mệnh đề :

(I) $x \in E \cup F$. (IV) $x \in E$ và $x \in F$.

(II) $x \in E \cap F$. (V) $x \in E$ hoặc $x \in F$.

(III) $x \in E \setminus F$. (VI) $x \in E$ và $x \notin F$.

Mệnh đề tương đương nào sai :

A) (I) $\Leftrightarrow$ (V). B) (II) $\Leftrightarrow$ (IV).

C) (III) $\Leftrightarrow$ (VI) D) (I) $\Leftrightarrow$ (VI).

Câu 29. Cho hai tập $A = \{1;2;3;4\}$, $B\{3;4;5;6\}$. Tập hợp X có quan hệ $(A \cap B) \subset X \subset B$ và $X \neq B$. Tập hợp nào không phải là tập hợp X ?

A) $\{3;4\}$ B) $\{3;5\}$

C) $\{3;4;5\}$ D) $\{3;4;6\}$.

Câu 30. Để chứng minh "$A \cap B = \varnothing \Rightarrow A = A \setminus B$" một học sinh lập luận theo phép chứng minh bằng phản chứng :

(b_1) Giả sử $A \neq A \setminus B \Rightarrow \exists x \in A$ và $x \notin (A \setminus B)$.

(b_2) $\Rightarrow x \in A$ và ($x \notin A$ hoặc $x \in B$)

$\Rightarrow$ ($x \in A$ và $x \notin A$) hoặc ($x \in A$ và $x \in B$).

(b_3) $\Rightarrow x \in \varnothing$ hoặc $x \in A \cap B = \varnothing \Rightarrow x \in \varnothing$ (sai).

Vậy $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A = A \setminus B$.

Hỏi phép chứng minh đó, nếu sai thì sai ở bước nào ?

A) (b_1). B) (b_2).

C) (b_3). D) Không bước nào sai.

GIẢI THÍCH - HƯỚNG DẪN

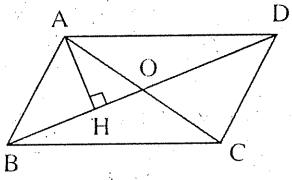
Câu 1. X : 2 là số lẻ $\Rightarrow \overline{X}$: 2 là số chẵn. Câu B).

Câu 2. 2 là số chính phương : Sai. Câu C).

Câu 3. Câu C). Phản ví dụ, hình bình hành $ABCD$ tâm O, trong đó : $\text{dt}(AOB) = \text{dt}(AOD)$ nhưng $\Delta AOB \neq \Delta AOD$. Câu C).

Câu 4. $a > c \Rightarrow a > b$ và $b > c$ là sai vì cho :

$a, c \in \mathbb{N} : \begin{cases} a = 4 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow a > c$ nhưng không có $b \in \mathbb{N}$ để $4 > b$ và $b > 3$. Câu B).



Câu 5. Hai góc bằng nhau chưa chắc là phải đối đỉnh. Câu B).

Câu 6. Xét X : hai tam giác bằng nhau ; Y : hai tam giác có diện tích bằng nhau.

$X \Rightarrow Y$ là định lí. Câu B) sai ; $Y \Rightarrow X$ không phải định lí (sai). C), D) sai. Vậy A) đúng. Câu A).

Câu 7. X : hai góc có hai cặp cạnh vuông góc ; Y : hai góc bằng nhau.

$X \Rightarrow Y$: định lí ; $\overline{Y} \Rightarrow \overline{X}$: định lí ; $Y \Rightarrow X$: sai $\Rightarrow$ câu D) sai.

Câu 8. $\begin{cases} f(x) = ax^2 + bx + c > 0 \ \forall x \\ (a \neq 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0. \end{cases}$

Câu 9. Câu A) đúng vì chọn $n = 1$ thì $n^2 = n$.

Câu 10. Chọn $x = 0 \in \mathbb{R} : 0^2 > 0$ là sai. Câu B).

Câu 11. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : \overline{x^2 + 1 > 0} \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \leq 0$.

Câu B).

Câu 12. $\exists x \in \mathbb{N} : x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N} : \overline{x^2 - 4x + 3 = 0}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N} : x^2 - 4x + 3 \neq 0$. Câu A).

Câu 13. Mệnh đề đúng. $\forall n \in \mathbb{N} : \overline{n \vdots 6} \Rightarrow \overline{n \vdots 2}$ hoặc $\overline{n \vdots 3}$. Vậy chọn câu D).

Câu 14. $x^2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} \in \mathbb{R} \\ x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \in \mathbb{R}. \end{cases}$ Câu A).

Câu 15. Phép chứng minh bằng phản chứng. Câu D).

Câu 16. $(x^2-1)(x^2-2)\sqrt{3-x^2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1\in\mathbb{Z} \\ x=\pm\sqrt{2}\notin\mathbb{Z} \\ x=\pm\sqrt{3}\notin\mathbb{Z}. \end{cases}$ Câu D).

Câu 17. $2x^2+x-3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1\in\mathbb{Z} \\ x=-\dfrac{3}{2}\notin\mathbb{Z}. \end{cases}$ Câu C).

Câu 18. $x^2-11x+10<0 \Leftrightarrow 1<x<10 \Rightarrow A=\{2;3;4;...;8;9\}\subset E$. Câu A).

Câu 19. Phản ví dụ.

$$\begin{cases} A=\{0;1;2;4\} \\ B=\{-1;0;1;3\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\cap B=\{0;1\} \\ A\setminus B=\{2;4\}. \end{cases}$$

Nhưng $A\cap B\not\subset A\setminus B$. Câu D.

Câu 20. Chứng minh bằng phản chứng :

$$A\setminus B\cap B\setminus A=\varnothing \qquad (1)$$

Giả sử $A\,|\,B\cap B\setminus A\neq\varnothing \Leftrightarrow \exists x\in(A\setminus B\cap B\setminus A)$

$\Leftrightarrow (x\in A\setminus B)$ và $(x\in B\setminus A)$

$\Leftrightarrow (x\in A$ và x $\notin$ B$)$ và $(x\in B$ và x $\notin A)$

$\Leftrightarrow (x\in A$ và x $\notin A)$ và $(x\in B$ và x $\notin B)$

$\Leftrightarrow (x\in A\setminus A)$ và $(x\in B\setminus B)$

$\Rightarrow x\in\varnothing$ (sai). Câu D).

Câu 21. $E=\{2;3\}$, $F=\{3;4\}\Rightarrow E\cup F=\{2;3;4\}$. Câu D).

Câu 22. $x\in\mathbb{Z}$ và $-x^2+3x-2>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{Z} \\ 1<x<2 \end{cases} \Rightarrow E=\varnothing$.

$x\in\mathbb{Z}$ và $x^2-1<0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{Z} \\ -1<x<1 \end{cases} \Rightarrow F=\{0\}$.

Vậy $E\neq F$. Câu A).

Câu 23. $E=(1;3)$, $F=(2;4)$, $E\setminus F=(1;2]$. Câu B).

Câu 24. $\begin{cases} N_c\setminus N_l=N_c \\ N_l\setminus N_c=N_l \end{cases} \Rightarrow N_c\setminus N_l\neq N_l\,|\,N_c$.

Câu 25. $\begin{cases}(X\setminus Y)\cup(X\cap Y)=X\\(Y\setminus X)\cup(X\cap Y)=Y\end{cases}\Rightarrow(X\setminus Y)\cup(X\cap Y)\neq(Y\setminus X)\cup(X\cap Y).$

Câu 26. Điều kiện :

$$\begin{cases}-x^2+2x+3\geq 0\\4-x^2>0\\x^2-3x+2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\leq x\leq 3\\-2<x<2\\x\neq 1 \text{ và } x\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow x\in[-1;1)\cup(1;2).$$ Câu A).

Câu 27. Với mọi tập hợp X, Y, ta đều có :

$$X\cup Y=(X\setminus Y)\cup(Y\setminus X)\cup(X\cap Y)$$
$$=(X\setminus Y)\cup(Y\setminus X) \text{ do } X\cap Y=\varnothing.$$ Câu C).

Câu 28. Câu D) sai vì $(\mathrm{I})\Leftrightarrow(\mathrm{V})$.

Câu 29. $X=\{3;5\}$ sai vì $A\cap B=\{3;4\}\not\subset\{3;5\}=X$. Câu B).

Câu 30. Chứng minh đúng. Câu D).

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG I

1	B	11	B	21	D
2	C	12	A	22	A
3	C	13	D	23	B
4	B	14	A	24	D
5	B	15	D	25	B
6	A	16	D	26	A
7	D	17	C	27	C
8	C	18	A	28	D
9	A	19	D	29	B
10	B	20	D	30	D

Chương II.

HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

§ 1. HÀM SỐ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Cho $D \subset \mathbb{R}$ và $D \neq \varnothing$

❶ Hàm số f xác định trên D là một quy tắc cho tương ứng mỗi $x \in D$ với một và chỉ một số y.

$$f: D \to \mathbb{R}$$
$$x \in D \mapsto y = f(x) \in \mathbb{R}$$

D là tập xác định của f : $D = \{x / x \in \mathbb{R} : f(x) \text{ có nghĩa}\}$.

❷ Đồ thị của hàm số f trên tập D là tập hợp tất cả các điểm $M(x; f(x))$ trên mặt phẳng tọa độ khi x thay đổi trên tập D.

Nếu đồ thị của hàm số f trên tập D là một đường $(\mathscr{C})$, ta bảo $y = f(x)$ là phương trình của $(\mathscr{C})$.

❸ Hàm số f là đồng biến (tăng) trên $(a ; b)$ khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \forall x_1, x_2 \in (a;b) \\ x_1 \neq x_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0.$$

Nếu dấu bất đẳng thức đổi chiều thì f nghịch biến (giảm) trên $(a ; b)$.

❹ Hàm số f là chẵn trên tập xác định D khi và chỉ khi :

$$\forall x \in D \Rightarrow \begin{cases} -x \in D \\ f(-x) = f(x). \end{cases}$$

- Nếu $f(-x) = -f(x)$ thì f là hàm số lẻ.
- Một hàm số không nhất thiết phải là hàm số chẵn hoặc hàm số lẻ.
- Đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.
- Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc O là tâm đối xứng.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. TÌM TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ

Phương pháp

- Hàm hữu tỉ (hàm phân thức) : $y = f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

  Tập xác định : $D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$.
- Hàm vô tỉ (hàm căn thức) : $y = f(x) = \sqrt{R(x)}$.

  Tập xác định : $D_f = \{x \in \mathbb{R} / R(x) \geq 0\}$.

Ví dụ 1. Tìm tập xác định D_f :

$$y = f(x) = \frac{2x-5}{|x^2-1|+|x^2-3x+2|}.$$

Giải

f xác định $\Leftrightarrow |x^2-1|+|x^2-3x+2| \neq 0$

$\Leftrightarrow |(x-1)(x+1)|+|(x-1)(x-2)| \neq 0 \Rightarrow x \neq 1.$

Vậy : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ví dụ 2. Tìm tập xác định D_f : $y = f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x\left(2-\sqrt{x+1}\right)}$.

Giải

$$f \text{ xác định } \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1 \geq 0 \\ x \neq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ 2-\sqrt{x+1} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \geq -1 \\ x \neq 3. \end{cases}$$

Vậy : $D_f = [-1;0) \cup (0;3) \cup (3;+\infty)$.

Ví dụ 3. Tìm tập xác định D_f :

$$y = f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2-6x+9}}{\sqrt{x^2-x+1}}.$$

Giải

$$f \text{ xác định } \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+4=(x-2)^2 \geq 0 \\ x^2-6x+9=(x-3)^2 \geq 0 \ (\forall x) \\ x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0. \end{cases}$$

Vậy : $D_f = \mathbb{R}$.

Dạng 2. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ

Phương pháp

Để khảo sát sự biến thiên của hàm f trong tập xác định D_f ta thực hiện các bước sau :

- Lập tỉ số $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ $\forall x_1, x_2 \in D_f$.
- Xét dấu tỉ số đó.
- Kết luận.

Ví dụ 1. Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y=f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$.

Giải

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$$\forall x_1, x_2 \in D_f, x_1 \neq x_2 : \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{-2(x_2-x_1)}{(x_2-x_1)\cdot(x_2-1)\cdot(x_1-1)}$$

$$= \frac{-2}{(x_2-1)(x_1-1)} (\text{do } x_1 \neq x_2)$$

+ $\forall x_1, x_2 \in (-\infty;1)$ với $x_1 \neq x_2$:

$$\begin{cases} x_1<1 \\ x_2<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-1<0 \\ x_2-1<0 \end{cases} \Rightarrow (x_1-1)(x_2-1)>0.$$

+ $\forall x_1, x_2 \in (1;+\infty)$ với $x_1 \neq x_2$:

$$\begin{cases} x_1>1 \\ x_2>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-1>0 \\ x_2-1>0 \end{cases} \Rightarrow (x_1-1)(x_2-1)>0.$$

Vậy : $\forall x_1, x_2 \in D_f, x_1 \neq x_2 \Rightarrow \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < 0$

$\Rightarrow f$ giảm trong $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ví dụ 2. Chứng minh hàm $y = f(x) = \sqrt{x+2}$ tăng $(-2; +\infty)$.

Giải

Xét : $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \dfrac{\sqrt{x_2+2}-\sqrt{x_1+2}}{x_2-x_1}$ với $\forall x_1, x_2 > -2; x_1 \neq x_2$.

$$= \frac{x_2-x_1}{(x_2-x_1)\left(\sqrt{x_2+2}+\sqrt{x_1+2}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x_2+2}+\sqrt{x_1+2}} > 0 \quad \forall x \in (-2; +\infty).$$

Vậy f tăng trong $D_f = (-2; +\infty)$.

Dạng 3. KHẢO SÁT TÍNH CHẴN, LẺ CỦA HÀM SỐ

Phương pháp

Để khảo sát tính chẵn, lẻ của hàm số, ta thực hiện các bước sau :

- Tìm D_f : "đối xứng" qua 0.
- Thay x bởi $-x$ và tính $f(-x)$.
- Xét dấu :
  - $f(-x) = f(x)$: f chẵn.
  - $f(-x) = -f(x)$: f lẻ.
  - Trường hợp khác : f không có tính chẵn, lẻ.

Ví dụ 1. Khảo sát tính chẵn, lẻ của hàm số $y = f(x) = |x+2| - |x-2|$.

Giải

$D = \mathbb{R}$.

$f(-x) = |-x+2| - |-x-2| = |-(x-2)| - |-(x+2)| = |x-2| - |x+2|$

$= -(|x+2| - |x-2|) = -f(x)$.

Vậy : f lẻ.

Ví dụ 2. Khảo sát tính chẵn, lẻ của hàm số $y=f(x)=\dfrac{|x+1|+|x-1|}{\sqrt{x^2+|x|}}$.

Giải

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$$f(-x)=\frac{|-x+1|+|-x-1|}{\sqrt{(-x)^2+|-x|}}=\frac{|-(x-1)|+|-(x+1)|}{\sqrt{x^2+|x|}}=\frac{|x-1|+|x+1|}{\sqrt{x^2+|x|}}$$

$$=f(x).$$

Vậy f là hàm chẵn.

C. BÀI TẬP

Bài 1. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{\sqrt{3}(x-1)}{\sqrt{x^2-x+1}}$. Tính giá trị $f\left(2+\sqrt{3}\right)$.

Bài 2. Cho hàm số $f(x)=\sqrt{x^2+2\sqrt{x^2-1}}-\sqrt{x^2-2\sqrt{x^2-1}}$.

1) Viết lại hàm f dưới dạng đơn giản.

2) Tính $f\left(\sqrt{5}\right)$ và $f(-5)$.

Bài 3. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}}{\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2-\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2}$.

1) Tìm D_f.

2) Chứng minh f là hàm số hằng.

Bài 4. Tìm tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}-\dfrac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}$.

Bài 5. Tìm tập xác định của hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}}$.

Bài 6. Tìm tập xác định của hàm số

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x-\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{2x+\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{1-x^2}}$$

Bài 7. Khảo sát tính tăng, giảm của hàm số :

1) $f(x)=-3x^4+4x^3$ trên $(1;+\infty)$.

2) $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$ trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

3) $f(x)=-x^2+4x-3$ trên $\mathbb{R}$.

Bài 8. Khảo sát tính chẵn, lẻ của hàm số :

1) $f(x)=|2x+1|+|2x-1|$.

2) $f(x)=\dfrac{|x+1|+|x-1|}{|x+1|-|x-1|}$.

3) $f(x)=|x-1|^2$.

Bài 9. Cho hàm số : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x-m}}-\sqrt{2-m-x}$.

Định m để $D_f=(-1;3]$.

Bài 10. Cho hàm số : $f(x)=(m-2)x^2+(m-3)x+m^2-4$.

1) Tìm m để f có tính chẵn, lẻ.

2) Tìm m để f luôn luôn giảm.

LỜI GIẢI

Bài 1. $y^2=\dfrac{3(x-1)^2}{x^2-x+1}=\dfrac{6(2+\sqrt{3})}{3(2+\sqrt{3})}=2$.

Do $x=2+\sqrt{3}\Rightarrow x-1=1+\sqrt{3}>0\Rightarrow y=\sqrt{2}>0$.

Vậy : $f(2+\sqrt{3})=\sqrt{2}$

Bài 2. 1) $\sqrt{x^2+2\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{x^2-1+1+2\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{\left(\sqrt{x^2-1}+1\right)^2}$

$=\sqrt{x^2-1}+1$.

$f(x)=\sqrt{x^2-1}+1-\left|\sqrt{x^2-1}-1\right|$ với $|x|\geq 1$.

$$f(x)=\begin{cases}2 & \text{khi } x\leq-\sqrt{2} \text{ hoặc } x\geq\sqrt{2}\\ 2\sqrt{x^2-1} & \text{khi } -\sqrt{2}<x\leq-1 \text{ hoặc } 1\leq x<\sqrt{2}.\end{cases}$$

2) $f(\sqrt{5})=f(-5)=2$.

Bài 3. 1) Điều kiện :

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ x+1 \ge 0 \\ \sqrt{x}-\sqrt{x+1} \ne 0 \\ \left(\sqrt{x+1}-1\right)^2 \ne \left(\sqrt{x+1}+1\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x \ge -1 \\ \forall x \\ x \ne -1 \end{cases} \Rightarrow x \ge 0.$$

$D_f = [0;+\infty)$.

2) $f'(x) = \dfrac{-2\sqrt{x+1}}{-\left(2\sqrt{x+1}\right)(-2)} = -\dfrac{1}{2}$ với $x \ge 0$.

Vậy f là hàm hằng trên $[0;+\infty)$.

Bài 4. Điều kiện :

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ 1-\sqrt{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x < 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \le x < 1.$$

$D_f = [0;1)$.

Bài 5. Điều kiện :

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ \dfrac{x+1}{x-1} > 0 \\ \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} \ne \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 1 \end{array}\right. \\ x \ne 0 \end{cases} \Rightarrow x > 1.$$

$D_f = (1;+\infty)$.

Bài 6. Điều kiện :

$$\begin{cases} 1-x^2 > 0 \\ 2x-\sqrt{x^2+1} \ge 0 \\ 2x+\sqrt{x^2+1} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| < 1 \\ -2x \le \sqrt{x^2+1} \le 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| < 1 \\ x^2+1 \le 4x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x| < 1 \\ |x| \ge \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$D_f = \left(-1;\frac{-\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{3};1\right).$$

Bài 7. 1) $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{-3(x_2^4-x_1^4)+4(x_2^3-x_1^3)}{x_2-x_1}$

$=-3(x_2^2+x_1^2)(x_2+x_1)+4(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)>0,$

với mọi $x_1\neq x_2\in(1;+\infty)$.

Vậy f tăng $(1;+\infty)$.

2) $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{-2(x_2-x_1)}{(x_2-x_1)\cdot(x_2-1)\cdot(x_1-1)}$

$=\dfrac{-2}{(x_2-1)\cdot(x_1-1)}<0 \quad (\forall\, x_1, x_2\neq 1).$

- $\forall\, x_1,x_2\,(x_1\neq x_2)>1\Rightarrow\begin{cases}x_1-1>0\\x_2-1>0.\end{cases}$
- $\forall\, x_1, x_2\,(x_1\neq x_2)<1\Rightarrow\begin{cases}x_1-1<0\\x_2-1<0.\end{cases}$

Vậy f giảm trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

3) $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{-x_2^2+x_1^2+4(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$

$=4-(x_2+x_1)=2-x_1+2-x_2.$

- $\forall\, x_1, x_2\,(x_1\neq x_2)>2\Rightarrow\begin{cases}2-x_1<0\\2-x_2<0\end{cases}\Rightarrow\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0.$

Vậy f giảm trên $(2;+\infty)$.

- $\forall\, x_1, x_2\,(x_1\neq x_2)<2\Rightarrow\begin{cases}2-x_1>0\\2-x_2>0\end{cases}\Rightarrow\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0.$

Vậy f tăng trên $(-\infty;2)$.

Bài 8. 1) $D=\mathbb{R}$.

$f(-x)=|-2x+1|+|-2x-1|=|-(2x-1)|+|-(2x+1)|$

$=|(2x-1)|+|(2x+1)|=f(x).$

Vậy f là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$.

2) $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$f(-x)=\dfrac{|-(x-1)|+|-(x+1)|}{|-(x-1)|-|-(x+1)|}=\dfrac{|x-1|+|x+1|}{|x-1|-|x+1|}$

$$= -\frac{|x-1|+|x-1|}{|x+1|-|x-1|} = -f(x).$$

Vậy f là hàm lẻ trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

3) $D=\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} f(1)=0 \\ f(-1)=4 \end{cases} \Rightarrow f(1)\neq f(-1).$$

f không có tính chẵn, lẻ.

Bài 9. Điều kiện : $\begin{cases} x>m \\ x\leq 2-m. \end{cases}$

1) $m=1$: $\begin{cases} x>1 \\ x\leq 1 \end{cases} \Rightarrow D=\varnothing$ (loại).

2) $m>1$: $2-m<m \Rightarrow D=\varnothing$ (loại).

3) $m<1$: $m<2-m \Rightarrow D=(m\,;2-m]$.

Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\begin{cases} -1=m \\ 3=2-m \end{cases} \Rightarrow m=-1 \text{ (nhận).}$$

Vậy : $m=-1$.

Bài 10. $D=\mathbb{R}$.

1) $f(-x)=(m-2)x^2-(m-3)x+m^2-4$.

a) f chẵn $\Leftrightarrow f(-x)=f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 2(m-3)x=0\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m=3$.

Vậy $m=3\Rightarrow f(x)=x^2+5$: chẵn.

b) f lẻ $\Leftrightarrow f(-x)=-f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow (m-2)x^2=4-m^2\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2=0 \\ 4-m^2=0 \end{cases} \Rightarrow m=2.$$

Vậy $m=2\Rightarrow f(x)=-x$: lẻ

2) Hàm f là hàm bậc hai, muốn f luôn luôn giảm thì điều kiện cần và đủ là :

$$\begin{cases} a=0 \\ b<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2=0 \\ m-3<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ m<3 \end{cases} \Rightarrow m=2.$$

Vậy $m=2\ \Rightarrow f(x)=-x$ luôn luôn giảm.

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hàm số $y = f(x) = (\sqrt{3} - \sqrt{5})x + \sqrt{3} + \sqrt{5}$. Tính x_0, nếu :

$$\left(f(x_0)\right)^2 = 8 + 2\sqrt{15}.$$

Bài 2. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{(2-\sqrt{x})^2 - (3+\sqrt{x})^2}{1+2\sqrt{x}}$.

1) Tìm tập xác định D_f.

2) Chứng minh f là hàm số hằng.

Bài 3. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x}-1}{(x+x\sqrt{x}+\sqrt{x})\cdot(x-\sqrt{x})}$.

1) Tìm tập xác định D_f.

2) Chứng tỏ f giảm trên D_f.

Bài 4. Tìm tập xác định D_f của các hàm số sau đây :

1) $f(x) = \sqrt{x+8-2\sqrt{x+7}} - \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$.

2) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3) $f(x) = \sqrt{x - \dfrac{1}{x}} + \sqrt{1 - \dfrac{1}{x}}$.

4) $f(x) = \sqrt{\sqrt{x-1}-1} - \sqrt{\sqrt{x-1}-2}$.

5) $f(x) = \dfrac{1}{1-\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

Bài 5. Khảo sát tính chẵn, lẻ của các hàm số :

1) $f(x) = \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}$.

2) $f(x) = \sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}$.

3) $f(x) = \sqrt{2+x}\cdot\sqrt{2-x}$.

4) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}}$.

5) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} - \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

Bài 6. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x}{|x+1|-|x-1|}$.

1) Tìm tập xác định. 2) Khảo sát tính chẵn, lẻ.

3) Khảo sát tính tăng, giảm.

HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài 1. Chú ý : $\left(f(x_0)\right)^2=8+2\sqrt{15}=\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2$.

Đáp số: $x_0=0$, $x_0=\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2$.

Bài 2. $D_f=[0;+\infty)$; $f(x)=\dfrac{-5-10\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}=-5$.

Bài 3. $D_f=(0;1)\cup(1;+\infty)$; $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x(\sqrt{x}-1)\cdot(x+\sqrt{x}+1)}=\dfrac{1}{x}$.

f giảm trên D_f.

Bài 4. 1) $f(x)=\left|\sqrt{x+7}-1\right|-\left|\sqrt{x-1}-1\right|$; $D=[1;+\infty)$.

2) $D=(0;1)$. 3) $D=(-1;0)\cup(1;+\infty)$.

4) $D=[5;+\infty)$. 5) $D=[-1;0)\cup(0;1]$.

Bài 5. 1) f chẵn trên $[-2;2]$. 2) f lẻ trên $[-2;2]$.

3) f chẵn trên $[-2;2]$.

4) f không có tính chẵn, lẻ. Ví dụ : $f(1)=\sqrt{3}\neq f(-1)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

5) f lẻ trên $[-1;1]$.

Bài 6. $|x+1|-|x-1|=\begin{cases}-2 & \text{khi } x\le -1\\ 2x & \text{khi } -1<x<1\\ 2 & \text{khi } x\ge 1.\end{cases}$

1) $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

2) f chẵn.

3) f giảm trên $(-\infty;-1]$, f là hàm hằng trên $(-1;1)\setminus\{0\}$, f tăng trên $[1;+\infty)$.

§ 2. HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Hàm số bậc nhất :

a) Định nghĩa : $y = ax + b (a \neq 0)$

- Tập xác định : $D = \mathbb{R}$.
- $a > 0 : y = ax + b$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- $a < 0 : y = ax + b$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- Đồ thị là một đường thẳng không song song và không trùng với các trục tọa độ.

b) Hàm hằng : $y = b (a = 0)$.

- Đồ thị là đường thẳng song song hoặc trùng với trục hoành (nằm ngang) và cắt trục tung tại điểm $(0 ; b)$.

c) Hàm số : $y = |x| = \begin{cases} x & \text{khi } x \geq 0 \\ -x & \text{khi } x < 0. \end{cases}$

- Đồ thị là hai nửa đường thẳng vuông góc nhau tại gốc O và nằm phía trên trục hoành.

d) Hàm số : $y = |ax + b|$.

- Đồ thị là hai nửa đường thẳng cắt nhau nằm trên trục hoành.
- $a > 0 : y = |ax + b| = \begin{cases} ax + b & \text{khi } x > -\dfrac{b}{a} \\ -ax - b & \text{khi } x < -\dfrac{b}{a}. \end{cases}$
- $a < 0 : y = |ax + b| = \begin{cases} -ax - b & \text{khi } x > -\dfrac{b}{a} \\ ax + b & \text{khi } x < -\dfrac{b}{a}. \end{cases}$

e) Hàm phần nguyên :

- Phần nguyên của số x, kí hiệu $[x]$ là số nguyên a thỏa $a \leq x < a + 1$.
- $[x] \leq x < [x] + 1, \forall x$.
- $y = [x] = a, \forall x \in [a ; a + 1)$.

2. Hàm số bậc hai

a) Định nghĩa : $y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$.

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- $a > 0$: Hàm nghịch biến $\left(-\infty ; -\dfrac{b}{2a}\right)$ và đồng biến $\left(-\dfrac{b}{2a} ; +\infty\right)$.
- $a < 0$: Hàm đồng biến $\left(-\infty ; -\dfrac{b}{2a}\right)$ và nghịch biến $\left(-\dfrac{b}{2a} ; +\infty\right)$.
- Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ là một parabol (P) có đỉnh $S\left(-\dfrac{b}{2a} ; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$, nhận đường thẳng $(d) : x = -\dfrac{b}{2a}$ làm trục đối xứng.
- $a > 0$: (P) quay bề lõm lên trên.
- $a < 0$: (P) quay bề lõm xuống dưới.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. XÁC ĐỊNH HÀM SỐ BẬC NHẤT

Phương pháp

Hàm số bậc nhất có dạng : $y = ax + b$.

Xác định hàm số bậc nhất là xác định các hệ số :

- a : Hệ số góc của đường thẳng.
- b : Tung độ gốc của đường thẳng.

Ví dụ 1. Tìm phương trình đường thẳng (D) đi qua hai điểm $A(-3 ; 1)$ và $B(2 ; -4)$.

Giải

Phương trình đường thẳng (D) có dạng : $y = ax + b$.

Theo giả thiết :

$$\left.\begin{array}{l} A(-3 ; 1) \in (D) \Leftrightarrow 1 = -3a + b \\ B(2 ; -4) \in (D) \Leftrightarrow -4 = 2a + b \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2. \end{cases}$$

Vậy phương trình của đường thẳng cần tìm :

$$(D) : y = -x - 2.$$

Ví dụ 2. Tìm phương trình đường thẳng (D) song song với đường thẳng $(\Delta): y=-2x+1$, biết rằng (D) đi qua $M(-3;2)$.

Giải

Phương trình đường thẳng (D) có dạng : $y=-2x+b$.

$M(-3;2)\in(D)\Leftrightarrow 2=(-2)\cdot(-3)+b\Rightarrow b=-4$.

Vậy phương trình $(D): y=-2x-4$.

Dạng 2. VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y=|ax+b|$

Phương pháp

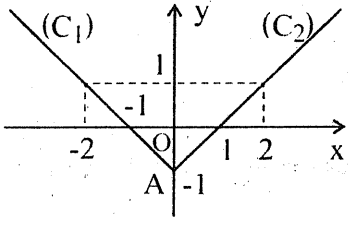
- Dùng định nghĩa : $\begin{cases}|A|=A & \text{khi } A\geq 0\\ |A|=-A & \text{khi } A\leq 0\end{cases}$

  chuyển hàm số về hai hàm thành phần, mỗi hàm là hàm bậc nhất với tập xác định riêng.
- Vẽ từng đồ thị thành phần với tập xác định riêng. Đồ thị của hàm số là hợp các đồ thị riêng lại !

Ví dụ 1. Vẽ đồ thị (C) của hàm số : $y=f(x)=|x|-1$.

Giải

$$y=f(x)=\begin{cases}x-1 & \text{khi } x\geq 0\ (C_1)\\ -x-1 & \text{khi } x\leq 0\ (C_2).\end{cases}$$



Đồ thị $(C)=(C_1)\cup(C_2)$ là đường gấp khúc hình chữ V có đỉnh là điểm $A(0;-1)$.

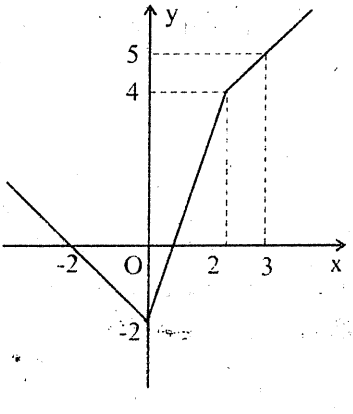
Ví dụ 2. Vẽ đồ thị của hàm số :

$$y=f(x)=2|x|-\sqrt{x^2-4x+4}\,.$$

Giải

$$y=f(x)=2|x|-|x-2|$$
$$=\begin{cases}-x-2 & \text{khi } x\leq 0\\ 3x-2 & \text{khi } 0\leq x\leq 2\\ x+2 & \text{khi } x\geq 2.\end{cases}$$

(C) là đường gấp khúc.



Dạng 3. XÁC ĐỊNH HÀM SỐ BẬC HAI

Phương pháp

Hàm số bậc hai có dạng : $y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$.

Đồ thị của hàm số bậc hai là parabol (P) có :

- Hoành độ đỉnh $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
- Trục đối xứng là đường thẳng $(\Delta): x = -\dfrac{b}{2a}$.

Ví dụ 1. Xác định parabol (P) đi qua 3 điểm $A(-1;0), B(0;3), C(5;0)$

Giải

Phương trình parabol (P) có dạng :

$$y = ax^2 + bx + c.$$

$$\left.\begin{array}{l} A(-1;0) \in (P) \Leftrightarrow 0 = a - b + c \\ B(0;3) \in (P) \Leftrightarrow 3 = c \\ C(5;0) \in (P) \Leftrightarrow 0 = 25a + 5b + c \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{-3}{5} \\ b = \dfrac{12}{5} \\ c = 3. \end{cases}$$

Vậy phương trình của (P) là :

$$y = -\frac{3}{5}x^2 + \frac{12}{5}x + 3.$$

Ví dụ 2. Xác định parabol qua gốc O, nhận điểm $S(4;-1)$ làm đỉnh.

Giải

Theo giả thiết :

$$\begin{cases} c = 0 \\ -\dfrac{b}{2a} = 4 \\ \dfrac{4ac - b^2}{4a} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{16} \\ b = -\dfrac{1}{2} \\ c = 0. \end{cases}$$

Vậy phương trình của (P) là :

$$y = \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{2}x.$$

Dạng 4. VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ DẠNG HÀM BẬC HAI CÓ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Phương pháp

- Hàm số bậc hai $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị là parabol (P) qua đỉnh $S\left(-\frac{b}{2a};\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ và đối xứng qua đường thẳng $(\Delta): x=-\frac{b}{2a}$.
- Đối với hàm số dạng hàm bậc hai có chứa dấu giá trị tuyệt đối, ta dùng định nghĩa :

$$|A|=A \quad \text{khi } A\geq 0$$
$$|A|=-A \quad \text{khi } A<0$$

đưa về hàm thành phần.

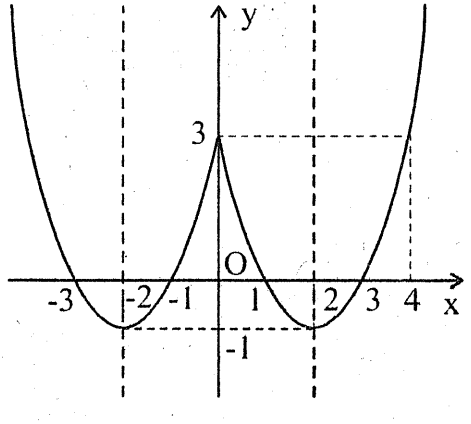
- Đặc biệt : $y=|ax^2+bx+c|$.
  - Vẽ parabol $(P): y=ax^2+bx+c$.
  - Giữ nguyên phần (P) trên Ox.
  - Lấy đối xứng phần (P) dưới Ox qua Ox.

Ví dụ 1. Vẽ đồ thị hàm số $y=f(x)=x^2-4|x|+3$.

Giải

Ta có : $$y=\begin{cases} x^2-4x+3 & \text{khi } x\geq 0 \\ x^2+4x+3 & \text{khi } x<0. \end{cases}$$

Đồ thị gồm hai nhánh parabol đối xứng qua Oy (hàm chẵn).



Ví dụ 2. Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x) = \sqrt{(4x - x^2)^2}$.

Giải

Ta có (P) : $y = f(x) = \sqrt{(4x - x^2)^2} = |-x^2 + 4x|$.

1) Vẽ (P_1): $y_1 = -x^2 + 4x$.

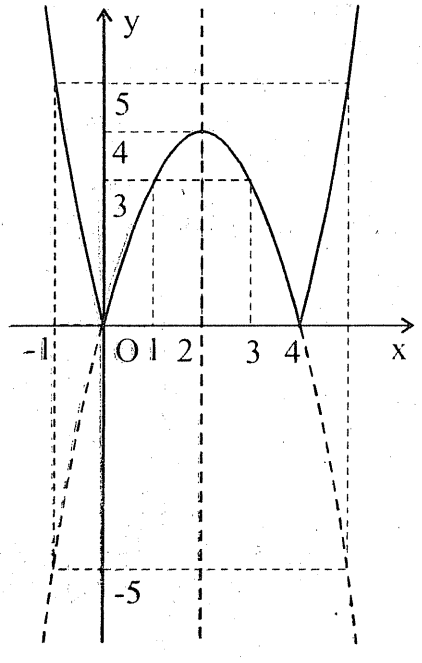
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		2		3		4		$+\infty$
$y_1 = -x^2 + 4x$	$-\infty$	↗	-5	↗	0	↗	3	↗	4	↘	3	↘	0	↘	$-\infty$

2) Giữ nguyên phần đồ thị (P_1) ở trên Ox.

Phần (P_1) ở dưới Ox, lấy đối xứng qua Ox.

Đồ thị (P) ở trên Ox.



C. BÀI TẬP

Bài 1. Viết phương trình đường thẳng (D)

1) Đi qua hai điểm $A(-3;0)$ và $B(0;4)$.

2) Đi qua $A(-3;4)$ và $(D)//Ox$.

3) Đi qua $A(2;-3)$ và $(D)//(\Delta): y=4x-3$.

4) Đi qua $A(-2;3)$ và $(D)\perp(\Delta): y=\frac{3}{2}x$.

5) Đi qua gốc tọa độ và có hệ số góc m.

Bài 2. Vẽ đồ thị hàm số và cho biết tính tăng, giảm :

1) $y=\begin{cases}\dfrac{x+1}{2} & khi\ x\geq 1\\ x & khi\ -1<x<1\\ \dfrac{x-1}{2} & khi\ x\leq -1.\end{cases}$

2) $y=\sqrt{x^2-2x+2+2|x-1|}+\sqrt{x^2+2x+2+2|x+1|}$.

3) $y=|x-2|+|x-1|-|x|$.

Bài 3. Viết phương trình parabol (P) :

1) Đi qua $A(-3;0)$, $B(1;3)$, $C(2;0)$.

2) Qua gốc O và nhận $S(4;-2)$ làm đỉnh.

3) Cắt Ox tại $A(1;0)$, $B(5;0)$ và đỉnh có tung độ $y=-4$.

4) Đối xứng qua Oy và cắt Oy tại $A(0;-3)$ và qua $B(-5;4)$.

5) Tiếp xúc với Ox tại $A(2;0)$ và cắt Oy tại $B(0;1)$.

Bài 4. Vẽ đồ thị (P) của hàm số :

1) $y=(x-2)^2$.

2) $y=-x^2+4|x-1|+x$.

3) $y=|-x^2+4x-3|$.

Bài 5. Cho parabol $(P): y=\frac{x^2}{4}-x+\frac{3}{4}$ và đường thẳng $(d): y=\frac{x}{2}+\frac{3}{4}$

1) Vẽ (P) và (d) trên cùng mặt phẳng toạ độ.

2) Tìm giao điểm của (P) và (d).

Bài 6. Cho parabol $(P): y=-\frac{x^2}{4}+x$ và đường thẳng $(d): y=mx+1$.

Tìm m để (d) tiếp xúc với (P).

Bài 7. Cho hai parabol $(P_1): y=x^2-2x$ và $(P_2): y=-x^2+2x-m$.

Tìm m để (P_2) cắt (P_1) tại 2 điểm phân biệt.

Bài 8. Vẽ trên cùng mặt phẳng tọa độ 3 đồ thị $(P): y=x^2-2x$, $(d_1): y=-x+2$, $(d_2): y=2x-4$.

1) Có nhận xét gì về (d_1) và (P) ; (d_2) và (P) ?

2) Chứng tỏ 3 đồ thị có cùng điểm chung.

Bài 9. Cho hàm số $y=x^2-2mx+4$ có đồ thị (P).

1) Tìm m để đỉnh S của (P) thuộc Ox.

2) Tìm m để (P) cắt Ox tại 2 điểm phân biệt.

3) Tìm m để điểm $I(-4;-12)$ là đỉnh của (P).

Bài 10. Vẽ đồ thị của hàm số $y=\sqrt{x^4+4x^2-4|x|x^2}$.

LỜI GIẢI

Bài 1. $(D): y=ax+b$.

1) Ta có :

$$\left.\begin{array}{l} A(-3;0)\in(D)\Leftrightarrow 0=-3a+b \\ B(0;4)\in(D)\Leftrightarrow 4=b \end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases} a=\frac{4}{3} \\ b=4 \end{cases}\Rightarrow (D): y=\frac{4}{3}x+4.$$

2) $(D): y=0x+b=b$.

$A(-3\,;\,4)\in(D)\Leftrightarrow 4=b$. Vậy $(D): y=4$.

3) $(D): y=4x+b$.

$A(2\,;\,-3)\in(D)\Leftrightarrow -3=8+b\Rightarrow b=-11$.

Vậy $(D): y=4x-11$.

4) $(D): y=-\frac{2}{3}x+b$.

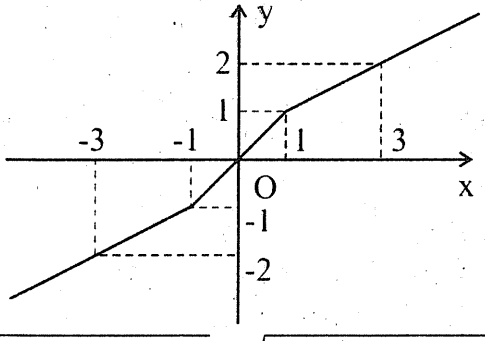
$A(-2\,;\,3)\in(D)\Leftrightarrow 3=-\frac{2}{3}(-2)+b\Rightarrow b=\frac{5}{3}$.

Vậy $(D): y=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$.

5) $(D): y = mx$.

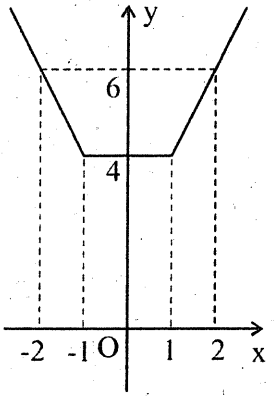
Bài 2. 1) Hàm f tăng trên $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-3	-1	0	1	3	$+\infty$
$y = \frac{x-1}{2}$	$-\infty$	$\nearrow$ -2	$\nearrow$ -1				
$y = x$			-1	$\nearrow$ 0	$\nearrow$ 1		
$y = \frac{x+1}{2}$					1	$\nearrow$ 2	$\nearrow +\infty$



2) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 2 + 2|x-1|} + \sqrt{x^2 + 2x + 2 + 2|x+1|}$

$$= |x-1| + |x+1| + 2 = \begin{cases} -2x+2 & \text{khi } x \le -1 \\ 4 & \text{khi } -1 < x < 1 \\ 2x+2 & \text{khi } x \ge 1. \end{cases}$$

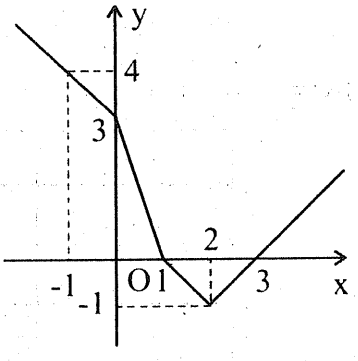


Hàm f tăng trên $(1;+\infty)$;

Hàm f giảm trên $(-\infty;-1)$;

Hàm f là hàm hằng trên $(-1;1)$.

3) $y=\begin{cases}-x+3 & \text{khi } x\le 0\\ -3x+3 & \text{khi } 0<x\le 1\\ -x+1 & \text{khi } 1<x<2\\ x-3 & \text{khi } x\ge 2.\end{cases}$



f giảm trên $(-\infty;2)$;

f tăng trên $(2;+\infty)$.

Bài 3. $y=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$

1) (P) qua $A(-3;0), B(1;3), C(2;0)$ nên ta có :

$$\begin{cases}0=9a-3b+c\\ 3=a+b+c\\ 0=4a+2b+c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{3}{4}\\ b=-\dfrac{3}{4}\\ c=\dfrac{9}{2}.\end{cases}$$

Vậy (P) : $y=-\dfrac{3}{4}x^2-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{9}{2}=-\dfrac{3}{4}(x^2+x-6)$.

2) $\begin{cases}0=c\\ -\dfrac{b}{2a}=4\\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{8}\\ b=-1\\ c=0\end{cases}\Rightarrow (P): y=+\dfrac{1}{8}x^2-x$.

3) (P) cắt Ox tại $A(1;0)$, $B(5;0)$ nên trục đối xứng là trung trực đoạn AB : $x_0=\dfrac{1+5}{2}=3$.

Yêu cầu bài toán tương đương với :

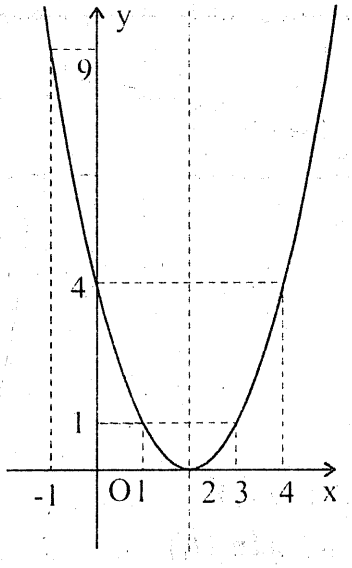
$$\begin{cases}0=a+b+c\\ 0=25a+5b+c\\ -4=\dfrac{4ac-b^2}{4a}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-6\\ c=5.\end{cases}\Rightarrow (P): y=x^2-6x+5.$$

4) $\begin{cases}4=25a-5b+c\\ 0=\dfrac{-b}{2a}\\ -3=\dfrac{4ac-b^2}{4a}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{7}{25}\\ b=0\\ c=-3\end{cases}\Rightarrow (P): y=\dfrac{7}{25}x^2-3.$

5) $\begin{cases} \dfrac{-b}{2a}=2 \\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}=0 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{4} \\ b=-1 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow (P): y=\dfrac{1}{4}x^2-x+1.$

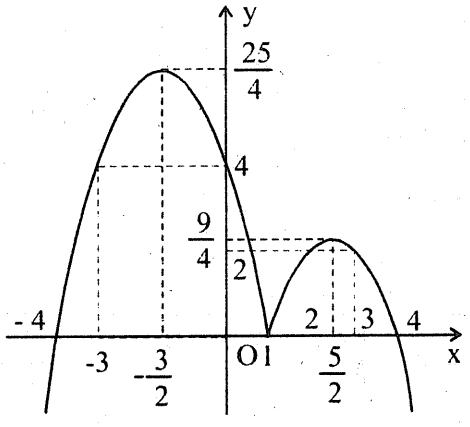
Bài 4. 1) $y=(x-2)^2$

x	$-\infty$ -1 0 1 2 3 4 $+\infty$
$y=(x-2)^2$	$+\infty \searrow 9 \searrow 4 \searrow 1 \searrow 0 \nearrow 1 \nearrow 4 \nearrow +\infty$



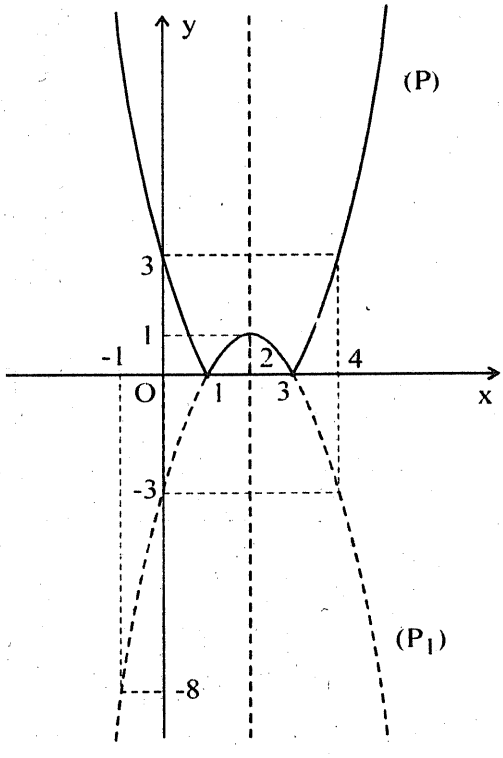
2) $y=-x^2+4|x-1|+x=\begin{cases} -x^2+5x-4 & \text{khi } x\geq 1 \\ -x^2-3x+4 & \text{khi } x<1. \end{cases}$

x	$-\infty$ -4 -3/2 1 5/2 4 $+\infty$
$y=-x^2-3x+4$	$-\infty \nearrow 0 \nearrow 25/4 \searrow 0$
$y=-x^2+5x+4$	$0 \nearrow 9/4 \searrow 0 \searrow -\infty$



3) $y=|-x^2+4x-3|$.

x	∞ - 1 0 1 2 3 4 $+\infty$
y_1	$-\infty$ → - 8 → -3 → 0 → 1 → 0 → -3 → $-\infty$



- Vẽ (P_1):

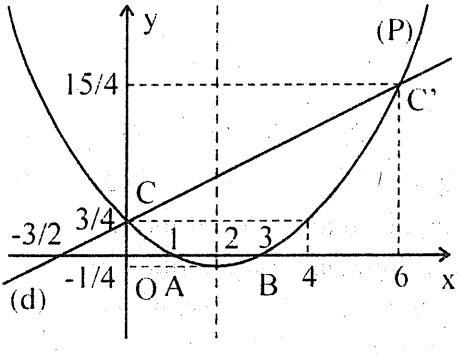
  $y_1=-x^2+4x-3$.

- Giữ nguyên phần (P_1) ở trên Ox.
- Đối xứng phần (P_1) ở dưới Ox qua Ox.

Bài 5. $(P): y=\frac{1}{4}(x^2-4x+3)$ qua đỉnh $S\left(2;-\frac{1}{4}\right)$; cắt Ox tại $A(1;0)$, $B(3;0)$; cắt Oy tại $C\left(0;\frac{3}{4}\right)$.

$(d): y=\frac{x}{2}+\frac{3}{4}$ qua $C\left(0;\frac{3}{4}\right)$ và $D\left(-\frac{3}{2};0\right)$.

Nhìn đồ thị (d) cắt (P) tại $C\left(0;\frac{3}{4}\right), C'\left(6;\frac{15}{4}\right)$.



Bài 6. $(P): y=-\frac{x^2}{4}+x$; $(d): y=mx+1$. (d) tiếp xúc (P) khi và chỉ khi phương trình sau đây có nghiệm kép :

$$-\frac{x^2}{4}+x=mx+1 \Leftrightarrow x^2+4(m-1)x+4=0,$$

tức là : $\Delta'=4(m-1)^2-4=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m=0 \\ m=2. \end{bmatrix}$

Bài 7. Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình

$$x^2-2x=-x^2+2x-m \Leftrightarrow 2x^2-4x+m=0$$

có hai nghiệm phân biệt, tức là :

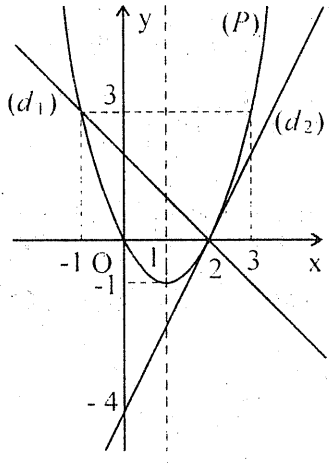
$$\Delta'=4-2m>0 \Leftrightarrow m<2.$$

Bài 8. (d_1) cắt (P) tại $A(-1;3)$ và $B(2;0)$;

(d_2) tiếp xúc (P) tại $B(2;0)$;

(d_1) cắt (d_2) tại $B(2;0)$.

Vậy 3 đồ thị có chung điểm $B(2;0) \in Ox$.



Bài 9. $(P): y = x^2 - 2mx + 4$. Đỉnh $S(m; 4 - m^2)$.

1) $S \in Ox \Leftrightarrow 4 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

2) Yêu cầu bài toán tương đương với : $\Delta' = m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow |m| > 2$.

3) Yêu cầu bài toán tương đương với :

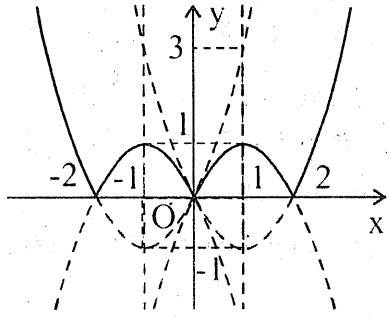
$$\begin{cases} m = -4 \\ 4 - m^2 = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -4 \\ m = \pm 4 \end{cases} \Rightarrow m = -4.$$

Bài 10. $y = \sqrt{x^4 + 4x^2 - 4|x|x^2}$

$$= \sqrt{x^2(x^2 + 4 - 4|x|)} = |x|\sqrt{(|x| - 2)^2} = |x|(||x| - 2|)$$

$$= \begin{cases} x|x-2| & \text{khi } x \geq 0 \\ -x|-x-2| = -x|x+2| & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x(x+2) = x^2 + 2x & \text{khi } x \leq -2 \\ -x(x+2) = -x^2 - 2x & \text{khi } -2 \leq x \leq 0 \\ -x(x-2) = -x^2 + 2x & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \\ x(x-2) = x^2 - 2x & \text{khi } x \geq 2. \end{cases}$$



D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Viết phương trình đường thẳng (D) :

1) Qua hai điểm $A\left(\frac{1}{2};-\frac{2}{3}\right)$, $B\left(-\frac{1}{3};\frac{3}{2}\right)$.

2) Qua $A\left(-\sqrt{2};0\right)$ và hợp với $\overrightarrow{Ox}$ góc 45^0.

3) Qua $A(0;-3)$ và song song Ox.

Bài 2. Vẽ đồ thị của hàm số :

1) $y=\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}$ với $x\geq 0$.

2) $y=|x|-\frac{\sqrt{x^2}}{x}+1$.

3) $y=|1-x|+|x|-|1+x|$.

Bài 3. Viết phương trình parabol (P), biết :

1) (P) qua $A(-3;3), B(6;6)$ và gốc O.

2) (P) qua $A(-3;3)$ nhận $S\left(\frac{3}{2};9\right)$ làm đỉnh.

3) (P) có trục đối xứng $(\Delta): x=-2$, cắt Ox tại $M(-5;0)$, cắt trục tung tại $N(0;-2)$.

Bài 4. Vẽ đồ thị của hàm số :

1) $y=x|x|+x+|x|+1$.

2) $y=|x^2-4|-|x^2-1|$.

3) $y=\sqrt{(x^2-2|x|)^2}$.

Bài 5. Cho $(P): y=-\frac{1}{4}x^2+x$; $(d_1): y=2x+1$; $(d_2): y=-x+4$.

1) Vẽ $(P), (d_1), (d_2)$ trong cùng mặt phẳng Oxy.

2) Chứng tỏ (d_1) tiếp xúc (P) tại E ; (d_2) tiếp xúc (P) tại F và (d_1) cắt (d_2) tại M.

3) Viết phương trình parabol (P') đi qua E, F, M.

Bài 6. Tìm m để phương trình sau có nghiệm :

$$\sqrt{x^2+4|x|+4}-2\sqrt{x^2+2|x|+1}=m.$$

Bài 7. Tìm m để phương trình sau vô nghiệm :

$$\sqrt{-x^2+4x-3}-m=0.$$

HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài 1. 1) $y=-\frac{13}{5}x+\frac{19}{30}$; 2) $y=x+\sqrt{2}$;

3) $y=-3$

Bài 2. 1) $y=\sqrt{x+1}+1-\left(\left|\sqrt{x+1}-1\right|\right)$; $x\geq 0\Rightarrow y=2$ là hàm hằng.

2) $y=|x|-\frac{|x|}{x}+1\,(\forall x\neq 0)=\begin{cases}x & \text{khi } x>0\\ -x+2 & \text{khi } x<0.\end{cases}$

3) $y=|1-x|+|x|-|1+x|=\begin{cases}-x+2 & \text{khi } x\leq -1\\ -3x & \text{khi } -1<x<0\\ -x & \text{khi } 0<x<1\\ x-2 & \text{khi } x\geq 1.\end{cases}$

Bài 3. 1) $y=\frac{2}{9}x^2-\frac{1}{3}x$. 2) $y=-\frac{8}{27}x^2+\frac{8}{9}x+\frac{25}{3}$.

3) $y=\frac{2}{5}x^2+\frac{8}{5}x-2$.

Bài 4. 1) $y=x|x|+x+|x|+1=\begin{cases}x^2+2x+1=(x+1)^2 & \text{khi } x\geq 0\\ -x^2+1 & \text{khi } x<0.\end{cases}$

2) $y=|x^2-4|-|x^2-1|=\begin{cases}-3 & \text{khi } x\leq -2\vee x\geq 2\\ -2x^2+5 & \text{khi } -2<x<-1\vee 1<x<2\\ 3 & \text{khi } -1\leq x\leq 1.\end{cases}$

3) $y=|x^2-2|x||=\begin{cases}|x^2-2x|\,(x\geq 0)\\ |x^2+2x|\,(x<0)\end{cases}=\begin{cases}-x^2+2x & \text{khi } 0\leq x\leq 2\\ x^2-2x & \text{khi } x>2\\ x^2+2x & \text{khi } x\leq -2\\ -x^2-2x & \text{khi } -2<x<0.\end{cases}$

Bài 5. 2) $E(-2;-3)$, $F(4;0)$.

3) $M(1;3)$, $(P'):y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2$.

Bài 6. Phương trình đã cho tương đương với $|x|=-m$. Yêu cầu bài toán tương đương với $m\leq 0$ (nghiệm $x=\pm m$).

Bài 7. Phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} m \geq 0 \\ -x^2 + 4x - 3 = m^2 : \text{vô nghiệm,} \end{cases}$$

nghĩa là đường thẳng $(\Delta): y = m^2$ không cắt parabol (P): $y = -x^2 + 4x - 3$ trong đoạn $[1;3]$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m \geq 0 \\ m^2 > 1 \end{cases} \Rightarrow m > 1.$$

E. ÁP DỤNG

Dạng 1. PHƯƠNG TRÌNH $f(x) = 0$ CÓ NGHIỆM $x \in D$

Phương pháp

- Biến đổi tương đương $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = m$. Số nghiệm của phương trình đã cho là số giao điểm của hai đồ thị (C_g) của $y = g(x)$ và $(\Delta): y = m$ trong miền D.
- Bài toán giải được nếu :
  - Vẽ được (C_g).
  - Biểu thức bên phải là m hoặc làm đơn giản theo m.

Ví dụ 1. Tìm m để phương trình sau có đúng 1 nghiệm :

$$\frac{x}{x+1} + \frac{4}{x-1} = \frac{m+2}{x^2-1}. \quad (1)$$

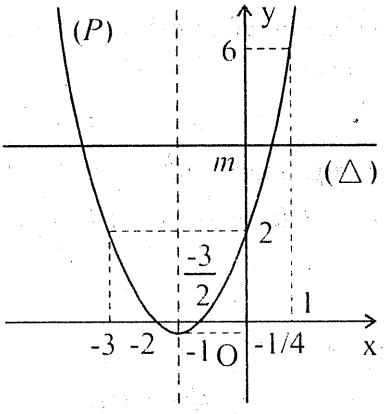
Giải

Ta có : $$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x^2 + 3x + 2 = m. \end{cases}$$

Vẽ $(P): y = x^2 + 3x + 2$. (P) có đỉnh $S\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$, cắt Ox tại $A(-1;0)$, $B(-2;0)$, cắt Oy tại $C(0;2)$.

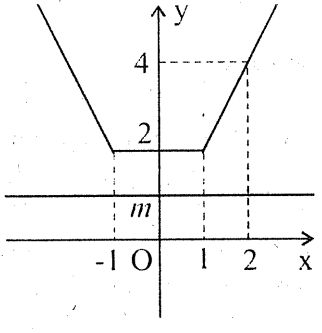
Vẽ $(\Delta): y = m$. $(\Delta) // Ox$.

Yêu cầu bài toán được thoả mãn khi $m \in \left\{-\frac{1}{4}; 0; 6\right\}$.



Ví dụ 2. Tìm m để phương trình sau vô nghiệm :

$$\frac{4x}{|x+1|-|x-1|}=m. \qquad (1)$$



Giải

Ta có : $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\|x+1|+|x-1|=m.\end{cases}$

Yêu cầu bài toán được thoả mãn khi và chỉ khi $m<2$.

Dạng 2. TÌM GTLN (GIÁ TRỊ LỚN NHẤT) – GTNN (GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT) CỦA MỘT HÀM SỐ NHỜ PARABOL

Phương pháp

Xét parabol $(P): y=ax^2+bx+c$, $a>0$.

Tìm $\max\limits_{D} y=\text{GTLN}(y)$, $\min\limits_{D} y=\text{GTNN}(y)$, với $D=(\alpha;\beta)$.

Hoành độ đỉnh parabol (P): $x_0=-\dfrac{b}{2a}$.

- $x_0\in D:\begin{cases}\text{GTLN}(y)=\max\{f(\alpha);f(\beta)\}\\\text{GTNN}(y)=f(x_0).\end{cases}$
- $x_0\notin D:\begin{cases}\text{GTLN}(y)=\max\{f(\alpha);f(\beta)\}\\\text{GTNN}(y)=\min\{f(\alpha);f(\beta)\}.\end{cases}$

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 \ (x \neq 0)$. Tìm $\min_{\mathbb{R}^*} y$.

Giải

Đặt : $t = x + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2 \geq 2 \Rightarrow |t| \geq 2$ (Cô-si). Vậy :

$$\begin{cases} y = t^2 + 2t + 6 \\ |t| \geq 2. \end{cases}$$

Hoành độ đỉnh parabol $t_0 = -1 \notin (-\infty ; -2] \cup [2 ; +\infty)$. Do đó :

$$\min_{x \neq 0} y = \min_{t \in D} y = \min \{f(-2) ; f(2)\} = \min \{6 ; 14\} = 6,$$

đạt được khi $t = -2 \Leftrightarrow x = -1$.

Ví dụ 2. Gọi $(x ; y)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = m + 1 & (1) \\ x^2 + y^2 = 2m^2 - 2. & (2) \end{cases}$$

Tìm m để $u = xy$ đạt GTLN.

Giải

Bình phương (1) và ghép với (2) ta có:

$$u = xy = \frac{1}{2}(-m^2 + 2m + 3) = f(m),$$

với x, y là hai nghiệm của phương trình :

$$t^2 - (m+1)t + \frac{1}{2}(-m^2 + 2m + 3) = 0.$$

Điều kiện có nghiệm tương đương với :

$$\Delta' = 3m^2 - 2m - 5 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m \leq -1 \\ m \geq \frac{5}{3}. \end{bmatrix}$$

Vậy : $u = f(m) = \frac{1}{2}(-m^2 + 2m + 3)$, $m \in D = (-\infty ; -1] \cup \left[\frac{5}{3} ; +\infty\right)$.

Hoành độ đỉnh của parabol là $m_0 = 1 \notin D$, do đó :

$$\max u = \max \left\{ f(-1) ; f\left(\frac{5}{3}\right) \right\} = \max \left\{ 0 ; \frac{16}{9} \right\} = \frac{16}{9} \text{ khi } m = \frac{5}{3}.$$

Ví dụ 3. Cho hàm số $y=\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2+2m\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)+m$. Tìm $\min\limits_{\mathbb{R}} y$ theo m.

Giải

Đặt $t=\frac{2x}{x^2+1}\Leftrightarrow tx^2-2x+t=0$ có nghiệm $\Leftrightarrow -1\le t\le 1$.

Vậy ta có parabol (P): $y=f(t)=t^2+2mt+m,\ t\in D=[-1;1]$.

Hoành độ đỉnh parabol (P) là $t_0=-m$.

- Trường hợp 1 : $-1\le -m\le 1\Leftrightarrow -1\le m\le 1$.

$$\min_{\mathbb{R}} y=f(-m)=-m^2+m.$$

- Trường hợp 2 : $\begin{bmatrix}-m<-1\\-m>1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}m<-1\\m>1.\end{bmatrix}$

$$\min_{\mathbb{R}} y=\min\{f(-1);f(1)\}=\min\{1-m;1+3m\}$$

$$=\begin{cases}1-m & \text{khi } m>1\\1+3m & \text{khi } m<-1.\end{cases}$$

Vậy : $$\min_{\mathbb{R}} y=\begin{cases}1+3m & \text{khi } m<-1\\-m^2+m & \text{khi } -1\le m\le 1\\1-m & \text{khi } m>1.\end{cases}$$

BÀI TẬP

Bài 1. Tìm m để phương trình $\sqrt{2x^2-x-2m}=x-2$ có nghiệm.
Đáp số : $m\ge 3$.

Bài 2. Tìm m để hệ sau có nghiệm :

$$\begin{cases}-x^2+4x\ge 0\\\frac{x^2}{4}=m+1.\end{cases}$$

Đáp số : $-1\le m\le 3$

Bài 3. Tìm m để phương trình sau có 6 nghiệm : $|x|\sqrt{x^2+4-4|x|}=m$.
Đáp số : $0<m<1$.

Bài 4. Tìm m để phương trình sau chỉ có 1 nghiệm :

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=m.$$

Đáp số : $m\in\{-1\}\cup\left(\frac{9}{16};+\infty\right)$.

Bài 5. Cho hàm số $y=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+m$. Tính $\min\limits_{\mathbb{R}} y$.

Đáp số : $\min y=m-1$, khi $x=-1$.

Bài 6. Cho hàm số $y=\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)^2+\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)+1,(x>0)$. Tìm $\min\limits_{(0;+\infty)} y$.

Đáp số : $\min\limits_{(0;+\infty)} y=7$, khi $x=1$.

Bài 7. Cho hệ phương trình :

$$\begin{cases}x+y=2m-1\\x^2+y^2=m^2+2m-3.\end{cases}$$

Tìm m để $u=(xy)$ đạt GTNN.

Đáp số : $\min u=\frac{2}{3}$ khi $m=\frac{2}{3}$.

Bài 8. Cho phương trình $x^2-(a-1)x+a^2-7a+6=0$ có nghiệm x_1 và x_2. Tìm a để $\left(x_1^2+x_2^2\right)$ đạt GTLN.

Đáp số : $\max\left(x_1^2+x_2^2\right)=25$ khi $a=6$.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

A. BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Cho hàm số : $y=f(x)=\frac{\sqrt{4x+4+\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}\left|2x^2-x-1\right|}$.

1) Tìm tập xác định D_f.

2) Cho $x_0=\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)$. Tính $f\left(x_0\right)$.

Bài 2. Cho hàm số : $y=\frac{x-2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-4x\sqrt{2}+8}}+\frac{x+2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+4x\sqrt{2}+8}}$.

Chứng minh y là hàm số hằng.

Bài 3. Tìm hàm số f định bởi :

1) $f(x)+3f(-x)=4-4x \quad \forall x$.

2) $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2+3x+2}{x} \quad \forall x\neq 0$.

Bài 4. Tìm $D(f)$:

1) $f(x)=\frac{2x^2-1}{|x^2-4x+3|-\sqrt{x^2-2x+1}}$.

2) $f(x)=\frac{2}{2+\sqrt{4-x^2}}+\frac{1}{2-\sqrt{4-x^2}}$.

3) $f(x)=\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}$.

Bài 5. Cho hàm số $f(x)=\frac{2x}{4-x^2}$. Chứng minh f tăng trên D_f.

Bài 6. Cho hàm số $f(x)=\frac{4x}{|x+1|-|x-1|}$ có đồ thị (C_f) và hàm số $g(x)=|x+1|+|x-1|$ có đồ thị (C_g).

1) Chứng minh f và g là hai hàm số chẵn, có chiều biến thiên giống nhau.

2) f và g có bằng nhau không ? Tại sao ?

3) Từ f, tạo hàm h để $(C_g)\equiv(C_h)$.

Bài 7. Vẽ đồ thị của $y=\sqrt{x^4+4x^2+4}+\sqrt{x^4-8x^2+16}$.

Bài 8. 1) Lập phương trình parabol (P_1) đỉnh $S_1\left(\frac{2}{3};\frac{-49}{12}\right)$ và qua $A(1;-4)$; (P_2) đỉnh $S_2\left(-\frac{2}{3};\frac{121}{12}\right)$ và qua $B(-1;10)$.

2) Chứng tỏ (P_1) cắt (P_2) tại E và F.

3) Chứng minh AEBF là hình bình hành.

Bài 9. Cho hàm số $y=x^2+2(m+1)x+m^2-1$ có đồ thị (P).

1) Tìm m để đỉnh S của (P) nằm trên Ox.

2) Tìm m để đồ thị (P) đi qua gốc O.

3) Chứng tỏ đường thẳng $(\Delta): y=2x-1$ tiếp xúc với hai parabol ở câu 2).

Bài 10. 1) Vẽ parabol $(P): y = \frac{x^2}{4} - 1$.

2) Gọi S là đỉnh ; A, B là hai giao điểm của (P) với Ox. Xét điểm $M \in (P)$ có hoành độ là m. Tìm m để $\text{dt}(MAB) = 4\text{dt}(SAB)$

HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài 1. 1) $D_f = (0;1) \cup (1;+\infty)$.

2) Chú ý :

$$(\sqrt{10} - \sqrt{6})^2 = 4(4 - \sqrt{15}) \Rightarrow x_0 = 2\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right) = 2$$

$$\Rightarrow f(x_0) = \frac{1}{2}.$$

Bài 2. Điều kiện $x \neq \pm 2\sqrt{2}$.

$$y = \frac{x-2\sqrt{2}}{|x-2\sqrt{2}|} + \frac{x+2\sqrt{2}}{|x+2\sqrt{2}|} = \begin{cases} -2 & \text{khi } x < -2\sqrt{2} \\ 0 & \text{khi } -2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2} \\ 2 & \text{khi } x > 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Bài 3. 1) $f(x) = 2x + 1$.

2) Đặt $t = \frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = x + 1$.

Bài 4. 1) $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{|(x-1)(x-3)| - |x-1|}$; $D = R \setminus \{1;2;4\}$.

2) $D = [-2;0) \cup (0;+2]$.

3) $D = [1;+\infty)$.

Bài 5. Xét dấu biểu thức $\frac{4 + x_1 x_2}{(4 - x_1^2)(4 - x_2^2)}$ $\forall x_1, x_2 \neq \pm 2$ theo các khoảng $(-\infty;-2)$, $(-2;0)$, $(0;2)$, $(2;+\infty)$.

Bài 6. 1), 2) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ và $D_g = \mathbb{R}$. Nhân tử và mẫu của $f(x)$ cho $|x+1| + |x-1|$ thì $f(x) = g(x)$ với $x \neq 0 \Rightarrow f \neq g$.

3) $h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \neq 0 \\ 2 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ thì $D_h = D_g \Rightarrow (C_h) = (C_g)$.

Bài 7. $y = x^2 + 2 + |x^2 - 4| = \begin{cases} 2x^2 - 2 & \text{khi } x \le -2 \vee x \ge 2 \\ 6 & \text{khi } -2 < x < 2. \end{cases}$

Bài 8. 1) $y = \begin{cases} \dfrac{1}{4}(3x^2 - 4x - 15) & (P_1) \\ \dfrac{1}{4}(-3x^2 - 4x + 39) & (P_2). \end{cases}$

2) $(P_1) \cap (P_2) = \{E; F\}$ với $E(3;0), F(-3;6)$.

3) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FB} = (2;4) \Leftrightarrow AEBF$ là hình bình hành.

Bài 9. 1) $m = -1$.

2) $m = \pm 1$.

3) Yêu cầu bài toán được thoả mãn khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} x^2 + 4x = 2x - 1 & \text{có nghiệm kép} \\ x^2 = 2x - 1 & \text{có nghiệm kép.} \end{cases}$$

Bài 10. $M\left(m; \dfrac{m^2 - 4}{4}\right) \in (P)$. Yêu cầu bài toán được thoả mãn khi và chỉ khi :

$$\left|\frac{m^2 - 4}{4}\right| = 4|\overline{OS}| = 4 \Rightarrow m = \pm 2\sqrt{5}.$$

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Hàm số nào sau đây có tập xác định $\mathbb{R}$?

A) $y = x - |x|$.

B) $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$.

C) $y = \dfrac{2|x|}{x^2 + 1}$.

D) Cả ba hàm số trên.

Câu 2. Hàm số nào sau đây có tập xác định không phải là tập $\mathbb{R}$?

A) $y = \sqrt{x^2 + |x|}$.

B) $y = \dfrac{2x - 1}{|x - 1| + |x + 1|}$.

C) $y = \dfrac{\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2 + 1}}{x^2}$.

D) Cả ba hàm số trên.

Câu 3. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{|x - 1|} - \sqrt{|2 - x|}$ là :

A) $[1;2]$.

B) $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$.

C) $\mathbb{R}$. D) $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$.

Câu 4. Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1}{|x|\sqrt{4-x^2}}$ là :

A) $(-2;2)$. B) $(-2;0)\cup(0;2)$.

C) $\mathbb{R}\setminus\{-2;0;2\}$. D) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Câu 5. Cho ba hàm số :

(I) $y=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2}\left(\sqrt{x^2}+1\right)}$; (II) $y=\dfrac{2x}{|x|\sqrt{x^2-1}}$; (III) $y=\dfrac{2x+1}{x\sqrt{x^2+|x|}}$

Những hàm số nào có tập xác định bằng nhau ?

A) (I) và (II). B) (I) và (III).

C) (II) và (III). D) Cả 3 hàm số trên.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & \text{khi } x>1\\ \sqrt{1-x} & \text{khi } x\le 1.\end{cases}$

Tập xác định của f là :

A) $(1;+\infty)$. B) $(-\infty;1]$.

C) $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. D) $\mathbb{R}$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{4x-4}{-2x^2+6x-4}$. Điểm nào sau đây không thuộc đồ thị của hàm số ?

A) $A(0;1)$. B) $B(1;2)$.

C) $C(2;2)$. D) $D(3;-2)$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x}$ có đồ thị (C). Phát biểu nào sau đây sai ?

A) $M_1(2;0)\in(C)$. B) $M_2(-2;-2)\in(C)$.

C) $M_3(-2;2)\notin(C)$. D) Cả 3 đều đúng.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)=2x-\sqrt{x^2-2x+1}$. Đồ thị của hàm số là :

A) Parabol. B) Đường thẳng.

C) Hai đường thẳng song song. D) Hai đường thẳng cắt nhau.

Câu 10. Cho hàm số $y=|x|+|x-1|$ có đồ thị (C). Đồ thị (C) là :

A) Hai nửa đường thẳng song song.

B) Hai nửa đường thẳng cắt nhau.

C) Hai nửa đường thẳng và một đoạn thẳng.

D) Hai nửa đường thẳng và một cung parabol.

Câu 11. Cho hàm số $y=x^2-\sqrt{x^2-2x+1}$ có đồ thị (C). Đồ thị (C) là :

A) Một đường parabol. B) Hai đường parabol.

C) Hai nhánh parabol. D) Một đường thẳng.

Câu 12. Cho hàm số $y=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$. Phát biểu nào sau đây sai ?

A) Tập xác định $D=[1;+\infty)$.

B) Hàm số luôn luôn tăng.

C) Đồ thị nằm trên trục hoành.

D) Đồ thị gồm một đoạn thẳng và một nhánh cong.

Câu 13. Cho ba hàm số : $(C_1): y=f(x)=|x|+x$;

$$(C_2): y=g(x)=|x|-x \ ;$$

$$(C_3): y=h(x)=\frac{|x|}{x}.$$

Câu nào sau đây sai ?

A) Mọi $x<0$ hàm f là hàm hằng, và mọi $x>0$ hàm f tăng.

B) Mọi $x<0$ hàm g giảm, và mọi $x>0$ hàm g là hàm hằng.

C) $\forall x\neq 0, h$ là hàm hằng.

D) $(C_1),(C_2),(C_3)$ đi qua gốc O .

Câu 14. Xét hàm số $y=f(x)=-x^2+4x-3$. Câu nào sau đây đúng ?

A) f luôn luôn giảm.

B) f luôn luôn giảm trong hai khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

C) f tăng trong khoảng $(-\infty;2)$ và giảm trong $(2;+\infty)$.

D) f giảm trong khoảng $(-\infty;2)$ và tăng trong $(2;+\infty)$.

Câu 15. Xét hàm số $y=f(x)=\frac{2}{x-1}$. Câu nào sau đây sai ?

A) f luôn luôn giảm.

B) f luôn luôn giảm trong tập xác định.

C) f luôn giảm trong $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

D) Đồ thị của f đối xứng qua điểm $I(1\ ;\ 0)$.

Câu 16. Xét hai đồ thị hàm số : $(C_1): y=f(x)=|x|+|x-1|$;

$(C_2): y=g(x)=|x|-|x-1|$.

Câu nào sau đây sai ?

A) (C_1) luôn luôn nằm trên (C_2).

B) (C_1) có một trục đối xứng song song với trục tung.

C) (C_2) có một tâm đối xứng ở trên Ox.

D) f và g mỗi hàm có hai khoảng : một khoảng tăng, một khoảng giảm.

Câu 17. Hàm số nào sau đây là hàm số lẻ ?

A) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-2$. B) $g(x)=|x+1|+|x-1|$.

C) $h(x)=x+\dfrac{1}{x}$. D) $k(x)=x^2+x$.

Câu 18. Hàm số nào sau đây là hàm chẵn ?

A) $f(x)=|x+1|+|x-1|$. B) $g(x)=|x+1|-|x-1|$.

C) $h(x)=x^3+x$. D) $k(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$.

Câu 19. Xét hàm số $f(x)=|x+1|-|x-1|$. Câu nào sau đây sai ?

A) Đồ thị nhận gốc O làm tâm đối xứng.

B) Hàm số giảm trong khoảng $(-1\ ;1)$.

C) Hàm số f là hàm hằng trong $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

D) $\forall x:|f(x)|\le 2$.

Câu 20. Cho hàm số $y=|3x+2|-|-3x+2|$. Phát biểu nào sau đây sai ?

A) $y=4$ thì ta tìm được vô số x mà $x\ge\dfrac{2}{3}$.

B) Hàm số y tăng trong khoảng $\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)$.

C) Hàm số y là hàm chẵn.

D) Gốc toạ độ thuộc đồ thị.

Câu 21. Đường thẳng nào có phương trình sau đây đi qua hai điểm $A\left(\dfrac{2}{3};1\right)$ và $B\left(-1;-\dfrac{3}{2}\right)$?

A) $y=\frac{3}{2}x$. B) $y=\frac{2}{3}x$.

C) $y=-\frac{2}{3}x$. D) $y=\pm\frac{3}{2}x$.

Câu 22. Parabol đi qua $A(0;-1), B\left(-1;-\frac{5}{3}\right)$ và $C(3;-7)$ có phương trình là :

A) $y=-\frac{2}{3}x^2+1$. B) $y=-\frac{2}{3}x^2-1$.

C) $y=-\frac{3}{2}x^2+1$. D) $y=-\frac{3}{2}x^2-1$.

Câu 23. Parabol đi qua $M(4;0)$ có đỉnh $S(2;-1)$ có phương trình :

A) $y=\frac{1}{4}x^2-x$. B) $y=-\frac{1}{4}x^2+x$.

C) $y=\frac{1}{2}x^2-2x$. D) $y=-\frac{1}{2}x^2+2x$.

Câu 24. Parabol (P) có phương trình $y=-x^2+3x-2$. Câu nào sau đây sai ?

A) (P) qua điểm $M(0;-2)$.

B) (P) cắt trục hoành tại $A(1;0)$ và $B(2;0)$.

C) Trục đối xứng của (P) là đường thẳng $(D): x=\frac{3}{2}$.

D) Tâm đối xứng của (P) là điểm $I\left(\frac{3}{2};\frac{1}{4}\right)$.

Câu 25. Phương trình parabol (P) có trục đối xứng $(D): x=2$, qua gốc tọa độ và đỉnh có tung độ bằng 4 là :

A) $y=x^2-4x$. B) $y=-2x^2+8$.

C) $y=-x^2+4x$. D) $y=2x^2-8$.

Giả thiết sau dùng cho các câu từ 26 đến 30 :

Cho hàm số $y=(m-1)x^2-2(m-2)x+m-3$ có đồ thị (P).

Câu 26. Để đồ thị (P) không phải là một parabol, ta chọn :

A) $m=1$. B) $m=-1$.

C) $m=2$. D) $m=3$.

Câu 27. Để đồ thị (P) là một parabol đi qua gốc tọa độ, ta chọn :

A) $m=1$. B) $m=2$.

C) $m=3$. D) Không có m.

Câu 28. Để đồ thị (P) là parabol nhận trục đối xứng $(D): x=-\dfrac{3}{2}$, ta chọn :

A) $m=5$. B) $m=\dfrac{7}{5}$.

C) $m=7$. D) Kết quả khác.

Câu 29. Để đồ thị là parabol (P) có đỉnh là điểm $S(-1;-2)$, ta chọn :

A) $m=\dfrac{2}{3}$. B) $m=\dfrac{3}{2}$.

C) $m=0$. D) $m=1$.

Câu 30. Để đồ thị là parabol (P) tiếp xúc với trục hoành, ta chọn :

A) $m=0$. B) $m=-1$.

C) Kết quả khác. D) Không có m.

GIẢI THÍCH - HƯỚNG DẪN

Câu 1. Câu D).

Câu 2. Hàm $y=\dfrac{\sqrt{x^2}-\sqrt{x^2+1}}{x^2}$ có $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Câu C).

Câu 3. $D=\mathbb{R}$. Câu C).

Câu 4. Điều kiện : $\begin{cases} x\neq 0 \\ 4-x^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ |x|<2. \end{cases}$ Câu B).

Câu 5. (I) : $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$;

(II) : $D=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$;

(III) : $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Câu B).

Câu 6. $D=\mathbb{R}$. Câu D).

Câu 7. $y=f(x)=\dfrac{4(x-1)}{-2(x-1)(x-2)}=-\dfrac{2}{x-2}\Rightarrow C(2;2)$ không thuộc đồ thị. Câu C).

Câu 8. $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x}=\dfrac{|x-2|}{x}=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x} & \text{khi } x\geq 2\\ \dfrac{2-x}{x} & \text{khi } x<2 \text{ và } x\neq 0.\end{cases}$ Câu D).

Câu 9. $y=2x-\sqrt{x^2-2x+1}=2x-|x-1|=\begin{cases}x+1 & \text{khi } x\geq 1\\ 3x-1 & \text{khi } x<1.\end{cases}$ Câu D).

Câu 10. $y=|x|+|x-1|=\begin{cases}-2x+1 & \text{khi } x\leq 0\\ 1 & \text{khi } 0<x<1.\\ 2x-1 & \text{khi } x\geq 0\end{cases}$ Câu C).

Câu 11. $y=x^2-\sqrt{x^2-2x+1}=x^2-|x-1|=\begin{cases}x^2-x+1 & \text{khi } x\geq 1\\ x^2+x-1 & \text{khi } x<1.\end{cases}$ Câu C).

Câu 12. $y=\sqrt{x-1}+1+\left|\sqrt{x-1}-1\right|=\begin{cases}2\sqrt{x-1} & \text{khi } x\geq 2\\ 2 & \text{khi } 1\leq x\leq 2.\end{cases}$

Câu B) vì $\forall x\in[1;2]$: hàm số là hàm hằng.

Câu 13. $D_3=\mathbb{R}\setminus\{0\}\Rightarrow O\notin(C_3)$. Câu D).

Câu 14. $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{(x_2-x_1)(4-x_1-x_2)}{(x_2-x_1)}$

$$\left.\begin{array}{l}x_1<2\\ x_2<2\\ x_1\neq x_2\end{array}\right\}\Rightarrow\left|\begin{array}{l}2-x_1>0\\ 2-x_2>0\end{array}\right.\Rightarrow 4-x_1-x_2>0.$$

Vậy $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}>0\Leftrightarrow y$ tăng trong $(-\infty;2)$.

Tương tự, y giảm trong $(2;+\infty)$. Câu C).

Câu 15. Câu A) sai.

Câu 16. $f(x)=\begin{cases}-2x+1 & \text{khi } x\leq 0\\ 1 & \text{khi } 0<x<1\\ 2x-1 & \text{khi } x\geq 1.\end{cases}$; $g(x)=\begin{cases}-1 & \text{khi } x\leq 0\\ 2x-1 & \text{khi } 0<x<1\\ 1 & \text{khi } x\geq 1.\end{cases}$

g tăng trong khoảng $(0;1)$. Câu D) sai.

Câu 17. Xét $h(x)=x+\dfrac{1}{x}$. $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.

$h(-x)=-x+\dfrac{1}{-x}=-x-\dfrac{1}{x}=-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=-h(x)$.

Vậy h là hàm lẻ. Câu C).

Câu 18. Xét $f(x)=|x+1|+|x-1|$. $D=\mathbb{R}$.

$f(-x)=|-x+1|+|-x-1|=|-(x-1)|+|-(x+1)|$

$=|x-1|+|x+1|=f(x)$

Vậy f là hàm chẵn. Câu A).

Câu 19. $f(x)=\begin{cases}-2 & \text{khi } x\le -1\\ 2x & \text{khi } -1<x<1\\ 2 & \text{khi } x\ge 1.\end{cases}$.

Vậy $\forall x\in(-1;1): f(x)=2x$ là hàm tăng. Câu B).

Câu 20. $f(x)=|3x+2|-|-3x+2|$. $D=\mathbb{R}$.

$f(-x)=|3(-x)+2|-|-3(-x)+2|=|-3x+2|-|3x+2|$

$=-(|3x+2|-|-3x+2|)=-f(x)$.

Vậy f là hàm lẻ. Câu C).

Câu 21. $(D): y=ax+b$.

$$\left.\begin{array}{l}A\left(\dfrac{2}{3};1\right)\in(D)\Leftrightarrow 1=\dfrac{2}{3}a+b\\ B\left(-1;-\dfrac{3}{2}\right)\in(D)\Leftrightarrow -\dfrac{3}{2}=-a+b\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{3}{2}\\ b=0.\end{cases}$$

Vậy : $y=\dfrac{3}{2}x$. Câu A).

Câu 22. (P): $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$.

$$\begin{cases}A(0;-1)\in(P)\\ B\left(-1;-\dfrac{5}{3}\right)\in(P)\\ C(3;-7)\in(P)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1=c\\ -\dfrac{5}{3}=a-b+c\\ -7=9a+3b+c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{2}{3}\\ b=0\\ c=-1.\end{cases}$$

Vậy $y=-\dfrac{2}{3}x^2-1$. Câu B).

Câu 23. $(P): y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$. Yêu cầu bài toán tương đương với

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ \dfrac{4ac - b^2}{4a} = -1 \\ 16a + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{4} \\ b = -1 \\ c = 0. \end{cases}$$

Vậy : $y = \dfrac{1}{4}x^2 - x$. Câu A).

Câu 24. Parabol không có tâm đối xứng. Câu D).

Câu 25. $(P): y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$. Yêu cầu bài toán tương đương với

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ \dfrac{4ac - b^2}{4a} = 4 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 0. \end{cases}$$

Vậy : $y = -x^2 + 4x$. Câu C).

Câu 26. $m = 1 \Rightarrow a = 0$. (P) là đường thẳng $y = 2x - 2$. Câu A).

Câu 27. Yêu cầu bài toán được thoả mãn khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ m - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$$. Câu C).

Câu 28. Yêu cầu bài toán được thoả mãn khi và chỉ khi :

$$\frac{m-2}{m-1} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow m = \frac{7}{5}$$. Câu B).

Câu 29. Yêu cầu bài toán được thoả mãn khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{m-2}{m-1} = -1 \\ \dfrac{4ac - b^2}{4a} = \dfrac{-1}{m-1} = -2 \end{cases} \Rightarrow m = \frac{3}{2}$$. Câu B).

Câu 30. Yêu cầu bài toán được thoả mãn khi và chỉ khi :

$$1 = \frac{m-2}{m-1}$$ (vô nghiệm). Câu D).

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG II

1	D	11	C	21	A
2	C	12	B	22	B
3	C	13	D	23	A
4	B	14	C	24	D
5	B	15	A	25	C
6	D	16	D	26	A
7	C	17	C	27	C
8	D	18	A	28	B
9	D	19	B	29	B
10	C	20	C	30	D

Chương III.

PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

§ 1. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Phương trình

a) Phương trình chứa biến x là một mệnh đề chứa biến có dạng :

$$f(x) = g(x). \qquad (1)$$

- Điều kiện của phương trình là những điều kiện quy định của biến x sao cho các biểu thức của (1) đều có nghĩa.
- x_0 thoả điều kiện của phương trình và làm cho (1) nghiệm đúng thì x_0 là một nghiệm số của phương trình.
- Giải một phương trình là tìm tập hợp S của tất cả các nghiệm của phương trình đó.
- $S = \varnothing$ ta bảo phương trình vô nghiệm.

b) Phương trình hệ quả

Gọi S_1 là tập nghiệm của phương trình (1) ;

S_2 là tập nghiệm của phương trình (2).

- Phương trình (1) và (2) tương đương khi và chỉ khi : $S_1 = S_2$.
- Phương trình (2) là phương trình hệ quả của phương trình (1) khi và chỉ khi : $S_1 \subset S_2$.

2. Phương trình bậc nhất

a) Giải và biện luận : $ax + b = 0.$ (1)

- $a \neq 0$: $S = \{-b/a\}$
- $a = 0$ và $b \neq 0$: $S = \varnothing$ (I)
- $a = 0$ và $b = 0$: $S = \mathbb{R}$.

b) Giải và biện luận : $ax+by=c$. (2)

- $a\neq 0$ và $b\neq 0$: $S=\left(x \text{ tuỳ ý}; \dfrac{c-ax}{b}\right)$ hoặc $S=\left(\dfrac{c-by}{a}; y \text{ tuỳ ý}\right)$.
- $a=0$ và $b\neq 0$: $S=\left(x \text{ tuỳ ý}; \dfrac{c}{b}\right)$. (II)
- $a\neq 0$ và $b=0$: $S=\left(\dfrac{c}{a}; y \text{ tuỳ ý}\right)$.

c) Giải và biện luận : $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$ (3)

Quy tắc CRAME :

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1;$$

$$D_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=c_1b_2-c_2b_1;$$

$$D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=a_1c_2-a_2c_1.$$

- $D\neq 0 \Leftrightarrow S=\left(\dfrac{D_x}{D}; \dfrac{D_y}{D}\right)$
- $D=0$ và $\begin{bmatrix} D_x\neq 0 \\ D_y\neq 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow S=\varnothing$ (III)
- $D=D_x=D_y=0 \Rightarrow$ Giải $a_1x+b_1y=c_1$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. GIẢI VÀ BIỆN LUẬN PHƯƠNG TRÌNH $ax+b=0$

Phương pháp

Nghiệm của phương trình $ax+b=0$ cho ở (I).

Ví dụ 1. Tuỳ theo m, biện luận số nghiệm của phương trình :

$$m^2(x-1)=2(mx-2). \quad (1)$$

Giải

Ta có : $(1) \Leftrightarrow m(m-2)x = (m-2)(m+2)$. (2)

- $m \neq 0$ và $m \neq 2$: $(2) \Leftrightarrow x = \dfrac{(m-2)(m+2)}{m(m-2)} = \dfrac{m+2}{m}$.
- $m = 0$: $(2) \Leftrightarrow 0x = -4$ (Vô nghiệm).
- $m = 2$: $(2) \Leftrightarrow 0x = 0$ $(\forall x)$.

Kết luận : $m \neq 0$ và $m \neq 2$: $S = \left\{\dfrac{m+2}{m}\right\}$;

$m = 0$: $S = \varnothing$;

$m = 2$: $S = \mathbb{R}$.

Ví dụ 2. Giải và biện luận phương trình : $\dfrac{x+m}{1-x} + \dfrac{x-2}{1+x} = 0$. (1)

Giải

Ta có : $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ (m+4)x = 2-m. \end{cases}$ (2)

- $m \neq -4$: $(2) \Leftrightarrow x = \dfrac{2-m}{4+m}$.

Điều kiện : $x \neq \pm 1 \Leftrightarrow \dfrac{2-m}{4+m} \neq \pm 1 \Rightarrow m \neq -1$.

- $m = -4$: $(2) \Leftrightarrow 0x = 6$ (Vô nghiệm).

Vậy : $m \neq -4$ và $m \neq -1$: $S = \left\{\dfrac{2-m}{4+m}\right\}$.

$m = -4$ hoặc $m = -1$: $S = \varnothing$.

Dạng 2. XÁC ĐỊNH THAM SỐ ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM THOẢ ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Ví dụ 1. Định m để phương trình sau vô nghiệm :

$$\frac{x+m}{x+1} + \frac{x-2}{x} = 2. \quad (1)$$

Giải

Ta có : $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \text{ và } x \neq 0 \\ (m-3)x = 2. \end{cases}$ (2)

$$(1) \text{ vô nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} m-3=0 \\ (1) \text{ có nghiệm } \begin{cases} x=-1 \\ x=0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m=3 \\ \begin{cases} m\neq 3 \\ \dfrac{2}{m-3}=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} m\neq 3 \\ \dfrac{2}{m-3}=0 \text{ (loại)} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=3 \\ m=1. \end{cases}$$

Ví dụ 2. Tìm m để phương trình sau có nghiệm :

$$\frac{3x-m}{\sqrt{x-2}}+\sqrt{x-2}=\frac{2x+2m-1}{\sqrt{x-2}}. \qquad (1)$$

Giải

Ta có : $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ 4x-m-2=2x+2m-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ 2x=3m+1. \end{cases}$

Yêu cầu bài toán được thoả mãn khi và chỉ khi :

$$\frac{3m+1}{2}>2 \Leftrightarrow m>1.$$

Vậy khi $m>1$, phương trình (1) có nghiệm $x=\dfrac{3m+1}{2}$.

Dạng 3. PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA ẨN TRONG DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Phương pháp

Dùng tính chất :

- $|A|=B \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} B\geq 0 \\ A=B \end{cases} \\ \begin{cases} B\geq 0 \\ A=-B. \end{cases} \end{cases}$
- $|A|=|B| \Leftrightarrow A=\pm B.$

Ví dụ 1. Giải và biện luận phương trình :

$$|2x-m|=2-x. \qquad (1)$$

Giải

Ta có : $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2-x\geq 0\\2x-m=2-x\end{cases}\\\begin{cases}2-x\geq 0\\2x-m=x-2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\leq 2\\x=\dfrac{m+2}{3}\end{cases}\\\begin{cases}x\leq 2\\x=m-2.\end{cases}\end{array}\right.$

1) $\dfrac{m+2}{3}\leq 2\Leftrightarrow m\leq 4$.

2) $m-2\leq 2\Leftrightarrow m\leq 4$.

Kết luận : $m\leq 4$: Phương trình (1) có nghiệm $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{m+2}{3}\\x=m-2.\end{array}\right.$

$m>4$: Phương trình (1) vô nghiệm .

Ví dụ 2. Giải và biện luận phương trình :

$$|mx-2|=|2x+m|. \qquad (1)$$

Giải

Ta có : $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}mx-2=2x+m & (2)\\mx-2=-2x-m. & (3)\end{array}\right.$

- Giải (2) : $(2)\Leftrightarrow (m-2)x=m+2$.

  $m\neq 2$: (2) có nghiệm $x_1=\dfrac{m+2}{m-2}$.

  $m=2$: $(2)\Leftrightarrow 0x=4$ (Vô nghiệm).

- Giải (3) : $(3)\Leftrightarrow (m+2)x=2-m$.

  $m\neq -2$: (3) có nghiệm $x_2=\dfrac{2-m}{2+m}$.

  $m=-2$: $(3)\Leftrightarrow 0x=4$ (Vô nghiệm).

Nhận xét : $m=2\Rightarrow x_2=0$; $m=-2\Rightarrow x_1=0$.

Kết luận : $m\neq \pm 2$: (1) có 2 nghiệm là $x_1=\dfrac{m+2}{m-2}$; $x_2=\dfrac{2-m}{2+m}$.

$m=2$: (1) có nghiệm $x=0$.

$m=-2$: (1) có nghiệm $x=0$.

Ví dụ 3. Xác định m để phương trình sau có nghiệm duy nhất :

$$|x|+|1-x|=m\,. \qquad (1)$$

Giải

Ví dụ này có thể giải bằng phương pháp chia khoảng, nhưng ở đây ta giải theo cách khác.

Dễ thấy rằng, nếu x_0 là nghiệm của (1) thì $1-x_0$ cũng là nghiệm của (1), do đó (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi : $1-x_0=x_0 \Leftrightarrow x_0=\dfrac{1}{2}$.

Thay $x_0=\dfrac{1}{2}$ vào (1) ta được : $m=1$.

Với $m=1$, phương trình (1) trở thành : $|x|+|1-x|=1$. (2)

Ta thấy (2) có ít nhất 3 nghiệm là $x=0$, $x=1$, $x=\dfrac{1}{2}$.

Vậy không tồn tại m để (1) có nghiệm duy nhất.

Dạng 4. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Phương pháp

Để giải và biện luận hệ : $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2, \end{cases}$ ta dùng quy tắc CRAME xem bảng (III).

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x+y=2. \end{cases}$

Giải

Ta có : $$x=\frac{D_x}{D}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{3}{3}=1\ ;$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{3}{3}=1.$$

Vậy nghiệm của hệ là $(1;1)$.

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases}\cos\alpha.x-\sin\alpha.y=1\\ \sin\alpha.x+\cos\alpha.y=0.\end{cases}$$

Giải

Ta có : $x=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & -\sin\alpha\\ 0 & \cos\alpha\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{vmatrix}}=\dfrac{\cos\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\cos\alpha$;

$$y=\frac{\begin{vmatrix}\cos\alpha & 1\\ \sin\alpha & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{vmatrix}}=\frac{-\sin\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=-\sin\alpha.$$

Vậy nghiệm của hệ là $(\cos\alpha\,;-\sin\alpha)$.

Ví dụ 3. Giải và biện luận hệ phương trình :

$$\begin{cases}mx+4y=0\\ x+(m+3)y=m-1.\end{cases}\qquad(1)$$

Giải

Ta có :

$$D=\begin{vmatrix}m & 4\\ 1 & m+3\end{vmatrix}=m^2+3m-4=(m-1)(m+4);$$

$$D_x=\begin{vmatrix}0 & 4\\ m-1 & m+3\end{vmatrix}=-4(m-1)\ ;$$

$$D_y=\begin{vmatrix}m & 0\\ 1 & m-1\end{vmatrix}=m(m-1).$$

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}(m-1)(m+4)x=-4(m-1) & (2)\\ (m-1)(m+4)y=m(m-1). & (3)\end{cases}$$

- $\begin{cases}m\neq-4\\ m\neq1\end{cases}$: Hệ có nghiệm $\left(\dfrac{-4}{m+4}\,;\dfrac{m}{m+4}\right)$.
- $m=-4$: Hệ vô nghiệm.
- $m=-1$: Hệ có nghiệm tuỳ ý.

C. BÀI TẬP

Bài 1. Xét phương trình : $x+6=5\sqrt{x}$. (1)

1) Chứng minh các số 0 ; 1 ; 16 không phải là nghiệm của (1).

2) Chứng minh các số 4 ; 9 là nghiệm của (1).

Bài 2. Chứng minh $\alpha=\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$ và $\beta=\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$ là nghiệm của phương trình $(x^2-6)(x^2-2)=0$.

Bài 3. Cho ba phương trình : $|x+1|+|x-1|=2$; (1)

$$|x+1|-|x-1|=2x ; \quad (2)$$

$$\frac{2x}{|x+1|-|x-1|}=1. \quad (3)$$

Hãy đặt các dấu $\Leftrightarrow$ (tương đương) hoặc $\Rightarrow$ (hệ quả) giữa (1), (2), (3).

Bài 4. Giải và biện luận phương trình :

1) $m^3x+m=m(x+m)$. 2) $2m^2(x-1)+3(m+1)=2(x+2)$.

Bài 5. Giải và biện luận phương trình :

1) $\dfrac{x+1}{x-m}=\dfrac{x-1}{x}$. 2) $\dfrac{x-m}{x-1}+\dfrac{x-1}{x-m}=2$.

Bài 6. Giải và biện luận các phương trình :

1) $\left|\dfrac{1-m}{2x}\right|=\dfrac{1}{1+x}$. 2) $\left|\dfrac{1-m}{2x}\right|=\left|\dfrac{1}{1+x}\right|$.

Bài 7. Giải và biện luận phương trình :

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=m.$$

Bài 8. Cho phương trình : $\dfrac{x^2-(m+1)x+1}{\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}(x-m^2)$. (1)

Tìm m để (1) :

1) Có nghiệm. 2) Có nghiệm thoả $1<x<2$.

Bài 9. Giải và biện luận hệ phương trình :

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{m}{y}=3m\\[2mm]\dfrac{m}{x}+\dfrac{1}{y}=2m+1.\end{cases}$$

Bài 10. Tìm m để hệ sau có nghiệm nguyên duy nhất :

$$\begin{cases} mx+y=2m \\ x+my=m+1. \end{cases}$$

LỜI GIẢI

Bài 1. Ta xét :

1) $\begin{cases} x=0 & \Rightarrow & 6\neq 0 \\ x=1 & \Rightarrow & 7\neq 5 \\ x=16 & \Rightarrow & 22\neq 20 \end{cases} \Rightarrow x=0;1;16$ không phải là nghiệm.

2) $\begin{cases} x=4 & \Rightarrow & 10=5\times 2 \\ x=9 & \Rightarrow & 15=5\times 3 \end{cases} \Rightarrow x=4;9$ là nghiệm.

Bài 2. $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\dfrac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}.$

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\sqrt{6} \\ \beta &= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2-6=0 \\ \beta^2-2=0. \end{cases}$$

Vậy α,β là nghiệm của phương trình đã cho.

Bài 3. $(1)\Leftrightarrow \begin{cases} -2x=2 & \text{khi } x\leq -1 \\ 2=2 & \text{khi } -1<x<1 \\ 2x=2 & \text{khi } x\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[-1;1]=S_{(1)}.$

$(2)\Leftrightarrow \begin{cases} -2=2x & \text{khi } x\leq -1 \\ 2x=2x & \text{khi } -1<x<1 \\ 2=2x & \text{khi } x\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[-1;1]=S_{(2)}.$

$(3)\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=|x+1|-|x-1| \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[-1;1]\setminus\{0\}=S_{(3)}.$

Vậy : $S_{(1)}=S_{(2)}:(1)\Leftrightarrow(2).$

$S_{(3)}\subset S_{(1)}:(3)\Rightarrow(1).$

$S_{(3)}\subset S_{(2)}:(3)\Rightarrow(2).$

Bài 4. 1) $m^3x+m=m(x+m)\Leftrightarrow m(m^2-1)x=m(m-1).$

$m \neq 0$ và $m \neq \pm 1$: $S = \left\{\dfrac{1}{m+1}\right\}$.

$m = 0$ hay $m = 1$: $S = \mathbb{R}$.

$m = -1$: $S = \varnothing$.

2) $2m^2(x-1)+3(m+1)=2(x+2) \Leftrightarrow 2(m^2-1)x = 2(m-1)\left(m-\dfrac{1}{2}\right)$.

$m \neq \pm 1$: $S = \left\{\dfrac{2m-1}{2(m+1)}\right\}$.

$m = 1$: $S = \mathbb{R}$.

$m = -1$: $S = \varnothing$.

Bài 5. 1) $\dfrac{x+1}{x-m} = \dfrac{x-1}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \text{ và } x \neq m \\ (m+2)x = m. \end{cases}$

$m \neq -2, m \neq -1, m \neq 0$: $S = \left\{\dfrac{m}{m+2}\right\}$.

$m = -2$ hoặc $m = -1$ hoặc $m = 0$: $S = \varnothing$.

2) $\dfrac{x-m}{x-1} + \dfrac{x-1}{x-m} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \text{ và } x \neq m \\ 0x = (m-1)^2. \end{cases}$

$m \neq 1$: $S = \varnothing$.

$m = 1$: $S = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Bài 6. 1) $\left|\dfrac{1-m}{2x}\right| = \dfrac{1}{1+x} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > -1; x \neq 0 \\ (1+m)x = 1-m \end{cases} \\ \begin{cases} x > -1; x \neq 0 \\ (3-m)x = m-1 \end{cases} \end{array}\right.$

a) $m = -1$: Phương trình vô nghiệm.

$m \neq -1$: $x = \dfrac{1-m}{1+m}$ là nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1-m}{1+m} \neq 0 \\ \dfrac{1-m}{1+m} > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > -1. \end{cases}$

b) $m = 3$: Phương trình vô nghiệm.

$m \neq 3$: $x = \dfrac{m-1}{3-m}$ là nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m-1}{3-m} \neq 0 \\ \dfrac{m-1}{3-m} > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m < 3. \end{cases}$

Kết luận : $m = 1$: $S = \varnothing$.

$m \le -1 \quad : S = \left\{\dfrac{m-1}{3-m}\right\}.$

$m \ge 3 \quad : S = \left\{\dfrac{1-m}{1+m}\right\}.$

$\begin{bmatrix} -1 < m < 1 \\ 1 < m < 3 \end{bmatrix} : S = \left\{\dfrac{m-1}{3-m}; \dfrac{1-m}{1+m}\right\}.$

2) $\left|\dfrac{1-m}{2x}\right| = \left|\dfrac{1}{1+x}\right| \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} x \ne 0; x \ne -1 \\ (1+m)x = 1-m \end{cases} \\ \begin{cases} x \ne 0; x \ne -1 \\ (3-m)x = m-1. \end{cases} \end{bmatrix}$

Tương tự câu 1) :

$m = 1 \quad : S = \varnothing.$

$m = -1 \quad : S = \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}.$

$m = 3 \quad : S = \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}.$

$\begin{cases} m \ne \pm 1 \\ m \ne 3 \end{cases} : S = \left\{\dfrac{m-1}{3-m}; \dfrac{1-m}{1+m}\right\}.$

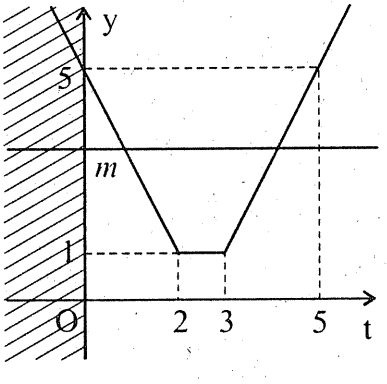
Bài 7. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = m.$ (1)

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ \left|\sqrt{x-1}-2\right| + \left|\sqrt{x-1}-3\right| = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ t = \sqrt{x-1} \ge 0 \\ |t-2| + |t-3| = m. \end{cases}$ (2)

Biện luận (2) nhờ đồ thị : $y = f(t) = |t-2| + |t-3|$ với $t \ge 0$;

$y = m.$

$y = \begin{cases} -2t+5 & \text{khi } 0 \le t \le 2 \\ 1 & \text{khi } 2 \le t \le 3 \\ 2t-5 & \text{khi } t \ge 3. \end{cases}$



Nhìn đồ thị :

$m < 1$: Vô nghiệm (t).

$m = 1$: $2 \le t \le 3$.

$1 < m \le 5$: $0 \le t < 2$ hay $3 < t \le 5$.

$m > 5$: $t > 5$.

Kết luận : $m<1$: $S=\varnothing$.

$m=1$: $S=[5;10]$.

$1<m\le 5$: $S=\left\{\left(\frac{5-m}{2}\right)^2+1;\left(\frac{5+m}{2}\right)^2+1\right\}$.

$m>5$: $S=\left\{\left(\frac{5+m}{2}\right)^2+1\right\}$.

Bài 8. $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\ m(m-1)x=(m-1)(m+1).\end{cases}$ (2)

$m\neq 0$ và $m\neq 1$: $x=\frac{m+1}{m}$ là nghiệm $\Leftrightarrow \frac{m+1}{m}>1\Leftrightarrow m>0$.

1) (1) có nghiệm $\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ m\neq 1.\end{cases}$ Khi đó nghiệm $x=\frac{m+1}{m}$.

2) Yêu cầu bài toán được thoả mãn khi và chỉ khi :

$$\begin{cases}m>0\\ m\neq 1\\ \frac{m+1}{m}<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ m\neq 1\\ \left[\begin{array}{l}m<0\\ m>1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m>1.$$

Bài 9. $D=\begin{vmatrix}1 & m\\ m & 1\end{vmatrix}=1-m^2$; $D_x=\begin{vmatrix}3m & m\\ 2m+1 & 1\end{vmatrix}=2m(1-m)$;

$D_y=\begin{vmatrix}1 & 3m\\ m & 2m+1\end{vmatrix}=-3(m-1)\left(m+\frac{1}{3}\right)$.

Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\begin{cases}1-m^2\neq 0\\ u=\frac{1}{x}=\frac{2m}{1+m}\\ v=\frac{1}{y}=\frac{3m+1}{1+m}\end{cases}(x\neq 0;y\neq 0)\Rightarrow\begin{cases}m\neq\pm 1\\ 2m\neq 0\\ 3m+1\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m\neq\pm 1\\ m\neq 0\\ m\neq -\frac{1}{3}.\end{cases}$$

Bài 10. $D=\begin{vmatrix}m & 1\\ 1 & m\end{vmatrix}=m^2-1$;

$D_x=\begin{vmatrix}2m & 1\\ m+1 & m\end{vmatrix}=2m^2-m-1=2(m-1)\left(m+\frac{1}{2}\right)$;

$$D_y = \begin{vmatrix} m & 2m \\ 1 & m+1 \end{vmatrix} = m(m+1) - 2m = m(m-1).$$

Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\begin{cases} m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1 \\ x = \dfrac{2m+1}{m+1} = 2 - \dfrac{1}{m+1} \in \mathbb{Z} \\ y = \dfrac{m}{m+1} = 1 - \dfrac{1}{m+1} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \pm 1 \\ m+1 = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \pm 1 \\ \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -2. \end{array}\right. \end{cases}$$

Vậy $m = 0$; $m = -2$ là các giá trị cần tìm.

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải và biện luận các phương trình :

1) $m^2(x-2) + 2m^2 = 4x + 2m + 4$.

2) $2(x-m) + mx = m + 4$.

3) $\dfrac{x+1}{x-m} = \dfrac{x-1}{x+1}$.

Bài 2. Giải các phương trình :

1) $|x-1| = 2 - x$.

2) $|x-1| + |x+1| = 4$.

3) $\dfrac{2x}{\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-1} = \sqrt{\dfrac{x^2}{x-1}}$.

Bài 3. Giải và biện luận :

1) $|x-m| = 2 - x$.

2) $|mx+1| = |(m+1)x - 2|$.

3) $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = m$.

Bài 4. Giải và biện luận hệ phương trình :

$$\begin{cases} mx - y + 1 = 0 \\ x + my + 2 = 0. \end{cases}$$

Bài 5. Tìm m để hệ sau có nghiệm :

$$\begin{cases} (m-2)\sqrt{x} + (m-4)\sqrt{y} - 2 = 0 \\ (m+1)\sqrt{x} + (3m+2)\sqrt{y} + 1 = 0. \end{cases}$$

Bài 6. Giải các phương trình :

1) $\dfrac{3x(x+1)}{x-1}-\dfrac{2x(x-1)}{x+1}=\dfrac{x^3+10x^2+x}{x^2-1}$.

2) $\sqrt{x-5}+\dfrac{x-14}{3-\sqrt{x-5}}=2$.

Bài 7. Tìm m để phương trình sau có nghiệm :

1) $\dfrac{mx^2}{|x|-1}=m|x|+2m+1$. 2) $\sqrt{x^2-x+1-3m^2}=x-m$.

Bài 8. Tìm m để phương trình sau có nghiệm là tập $\mathbb{R}$:

$$m^2x-1=\frac{1-x}{m}.$$

Bài 9. Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất :

$$\frac{x^2-1}{(x-1)^2}=\frac{x+2}{x-m}.$$

Bài 10. Tìm m để hệ sau có nghiệm :

$$\begin{cases}\dfrac{m}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{y+1}}=m\\[2ex]\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{m}{\sqrt{y+1}}=2m-1.\end{cases}$$

HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài 1. 1) $m\neq\pm2$: $x=\dfrac{2}{m-2}$; $m=-2:\forall x$; $m=2$: Vô nghiệm.

2) $m\neq-2$: $x=\dfrac{3m+4}{m+2}$; $m=-2$: Vô nghiệm.

3) $m\neq-3$ và $m\neq-1$: $x=\dfrac{m-1}{m+3}$; $m=-3$ hoặc $m=-1$: Vô nghiệm.

Bài 2. 1) $x=\dfrac{3}{2}$. 2) $x=\pm2$. 3) Vô nghiệm.

Bài 3. 1) $m<2$: $x=\dfrac{m+2}{2}$; $m=2$: $x\leq2$; $m>2$: Vô nghiệm.

2) $m=-\frac{1}{2}: x=3$; $m\neq -\frac{1}{2}$: $x=3$; $x=\frac{1}{2m+1}$.

3) $\begin{bmatrix} m<0 \\ m>2 \end{bmatrix}$: Vô nghiệm ; $0\le m<2$: $x=\frac{m^2}{4}+1$; $m=2$: $x\ge 2$.

Bài 4. Với mọi m nghiệm $\left(\frac{-(m+2)}{m^2+1};\frac{-2m+1}{m^2+1}\right)$.

Bài 5. Hệ vô nghiệm với mọi m.

Bài 6. 1) $\forall x\neq \pm 1$. 2) Vô nghiệm.

Bài 7. 1) $\frac{mx^2}{|x|-1}=m|x|+2m+1 \Leftrightarrow \begin{cases} |x|\neq 1 \\ (m+1)|x|=2m+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\neq -1 \\ m\neq 0. \end{cases}$

2) $\sqrt{x^2-x+1-3m^2}=x-m \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge m \\ (2m-1)x=4m^2-1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} m\neq \frac{1}{2} \\ m\ge -1. \end{cases}$

Bài 8. Yêu cầu bài toán được thoả mãn khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} m\neq 0 \\ m^3+1=0\Rightarrow m=-1. \\ m+1=0 \end{cases}$$

Bài 9. $\frac{x^2-1}{(x-1)^2}=\frac{x+2}{x-m} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1\,;\, x\neq m \\ mx=2-m. \end{cases}$

Yêu cầu bài toán được thoả mãn khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} m\neq 0 \\ m\neq 1 \\ m^2+m-2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\notin\{-2\,;0\,;1\}.$$

Bài 10. Đặt : $\begin{cases} u=\frac{1}{\sqrt{x-1}}>0,\ x>1 \\ v=\frac{1}{\sqrt{y+1}}>0,\ y>-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=\frac{m-1}{m+1}>0 \\ v=\frac{2m}{m+1}>0 \\ \begin{bmatrix} m<-1 \\ m>1. \end{bmatrix} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2(m^2+1)}{(m-1)^2} > 1 \\ y = \dfrac{-3m^2+2m+1}{4m^2} > -1 \end{cases} \quad \text{(thoả).}$$

Vậy : $m \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$.

§ 2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Giải và biện luận phương trình

$$ax^2+bx+c=0 \ (a \neq 0) \qquad (1)$$

$$\Delta = b^2-4ac$$

- $\Delta < 0 \Leftrightarrow S = \varnothing$
- $\Delta = 0 \Leftrightarrow S = \left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$ (I)
- $\Delta > 0 \Leftrightarrow S = \left\{\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}; \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$.

Đặc biệt : $b = 2b' \Rightarrow \Delta' = b'^2 - ac$.

2. Định lí Vi-ét

Nếu (1) có 2 nghiệm x_1 và x_2 thì :

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases} \qquad (II)$$

- Nhẩm nghiệm : $a+b+c=0 \Rightarrow x_1 = 1$ và $x_2 = \dfrac{c}{a}$.

$$a-b+c=0 \Rightarrow x_1 = -1 \text{ và } x_2 = -\frac{c}{a}.$$

- Nếu hai số x và y có $S = x+y$ và $P = xy$ thì x, y là nghiệm của phương trình $t^2 - St + P = 0$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. GIẢI VÀ BIỆN LUẬN PHƯƠNG TRÌNH $ax^2+bx+c=0$

Phương pháp

$$ax^2+bx+c=0.$$

1. Giải : Xét các khả năng đặc biệt :

- $a+b+c=0$.
- $a-b+c=0$.
- $b=2b'$ (hệ số b chẵn)
- Phương trình dạng $x^2-Sx+P=0$ (nhẩm nghiệm).

2. Biện luận :

- Xét trường hợp $a=0$.
- Khi $a\neq 0$, xét : ▪ Dấu của tích ac.
  ▪ $\Delta=b^2-4ac$ (xem bảng (I)).

Ví dụ 1. Giải các phương trình :

1) $(\sqrt{5}-\sqrt{3})x^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})x+\sqrt{2}-\sqrt{5}=0$.

2) $x^2-(\sqrt{3}+\sqrt{2})x+\sqrt{6}=0$.

3) $(m-1)x^2+2(m-2)x+m-3=0$.

Giải

1) Vì $a+b+c=0$ nên phương trình đã cho có 2 nghiệm $x_1=1$ và $x_2=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

2) Ta có $S=\sqrt{3}+\sqrt{2}$, $P=\sqrt{6}=\sqrt{3}.\sqrt{2}$. Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x_1=\sqrt{3}$ và $x_2=\sqrt{2}$.

3) Xét $m=1$: Phương trình đã cho có nghiệm $x=-1$.

$m\neq 1$: Ta có $a-b+c=0$ nên phương trình đã cho có 2 nghiệm $x_1=-1$ và $x_2=-\dfrac{m-3}{m-1}$.

Ví dụ 2. Giải và biện luận các phương trình :

1) $(m+1)x^2+(3m+1)x+2(m-1)=0$.

2) $\dfrac{mx+m-3}{x-2}+\dfrac{x-m}{x}=1$.

Giải

1) $m=-1$: Phương trình có nghiệm $x=-2$.

$m\neq -1$: $\Delta = m^2+6m+9=(m+3)^2$.

▪ $m=-3$: Phương trình có nghiệm kép $x_0=-\dfrac{3m+1}{2(m+1)}=-2$.

▪ $m\neq -3$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1=\dfrac{-m+1}{m+1}$ và $x_2=-2$.

2) $\dfrac{mx+m-3}{x-2}+\dfrac{x-m}{x}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \text{ và } x\neq 2 \\ mx^2-3x+2m=0. \end{cases}$ (*)

● $m=0$: (*) $\Leftrightarrow x=0$ (loại).

● $m\neq 0$: $\Delta = 9-8m^2$.

▪ $|m|>\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$ $(\Delta<0)$: Phương trình vô nghiệm.

▪ $|m|=\pm\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$: Phương trình có nghiệm kép $x_0=\dfrac{3}{2m}$.

$m=\dfrac{3}{2\sqrt{2}} \Rightarrow x_0=\sqrt{2}$ (nhận).

$m=\dfrac{-3}{2\sqrt{2}} \Rightarrow x_0=-\sqrt{2}$ (nhận).

▪ $|m|<\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$ $(\Delta>0)$: Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{9-8m^2}}{2m}$ nhận được khi và chỉ khi : $\begin{cases} f(0)\neq 0 \\ f(2)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m\neq 1. \end{cases}$

Kết luận :

● $\begin{cases} m<-\dfrac{3\sqrt{2}}{4} \\ m>\dfrac{3\sqrt{2}}{4} \end{cases}$: Vô nghiệm.

● $m=-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$: Nghiệm kép $x=-\sqrt{2}$.

● $m=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$: Nghiệm kép $x=\sqrt{2}$.

- $m=0$: Vô nghiệm.
- $m=1$: Nghiệm đơn $x=2$.
- $\begin{cases} -\dfrac{3\sqrt{2}}{4} < m < \dfrac{3\sqrt{2}}{4} \\ m \neq 0 ; m \neq 1 \end{cases}$: Hai nghiệm phân biệt.

Ví dụ 3. Một đám đất hình tam giác vuông, cạnh huyền hơn cạnh dài 1m, cạnh dài hơn cạnh ngắn 7m. Hỏi diện tích đám đất bao nhiêu ?

Giải

Gọi cạnh dài: $x(m)$. Điều kiện $x>7$. Áp dụng Định lí Pi-ta-go :

$$x^2+(x-7)^2=(x+1)^2 \Leftrightarrow x^2-16x+48=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=12 \\ x=4 \ \text{(loại)}. \end{bmatrix}$$

Vậy : Cạnh dài 12m ; cạnh ngắn 5m ; diện tích : $30\ m^2$.

Dạng 2. XÁC ĐỊNH THAM SỐ ĐỂ NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH THOẢ MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Ví dụ 1. Cho phương trình : $(m+1)x^2-4m(m+1)x-m=0$. (1)
Tìm m để phương trình có nghiệm kép. Tính nghiệm kép đó.

Giải

Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\begin{cases} a=m+1\neq 0 \\ \Delta'=4m^2(m+1)^2+m(m+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq -1 \\ m(m+1)(2m+1)^2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq -1 \\ \begin{bmatrix} m=0 \\ m=-1 \\ m=-\dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m=0 \\ m=-\dfrac{1}{2}. \end{bmatrix}$$

- $m=0$: $x_0=\dfrac{2m(m+1)}{m+1}=2m=0$.
- $m=-1/2$: $x_0=-1$.

Ví dụ 2. Cho phương trình : $x^2-2x+m=0$. (1)
Tìm m để (1) có hai nghiệm phân biệt mà nghiệm này bằng bình phương nghiệm kia.

Giải

Gọi x_0 là 1 nghiệm của (1), điều kiện $x_0 \neq 0$ và $x_0 \neq 1$.

Yêu cầu bài toán được thoả mãn khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \Delta' = 1-m > 0 \\ x_0^2 - 2x_0 + m = 0 \\ x_0^4 - 2x_0^2 + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ (x_0^2 - x_0)(x_0^2 + x_0 - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \text{ (loại)} \\ x_0 = 1 \text{ (loại)} \\ x_0 = -2. \end{array}\right. \end{cases}$$

Với $x_0 = -2 \Rightarrow m = -8$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 3. Cho phương trình : $mx^2 - 2(m-1)x + m = 0$. (1)

Tìm m để (1) có hai nghiệm thoả :

1) $\dfrac{x_1^2}{x_2^2} + \dfrac{x_2^2}{x_1^2} \leq 2$. 2) $x_1 = 4x_2$.

Giải

Điều kiện để (1) có hai nghiệm x_1, x_2 là :

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = 1 - 2m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \dfrac{1}{2} \\ m \neq 0. \end{cases}$$

1) $\dfrac{x_1^2}{x_2^2} + \dfrac{x_2^2}{x_1^2} \leq 2 \Leftrightarrow x_1^4 + x_2^4 \leq 2x_1^2x_2^2 \Leftrightarrow (x_1^2 - x_2^2)^2 \leq 0$

$$\Rightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta' = 0 \\ S = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{1}{2} \\ m = 1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow m = \frac{1}{2}.$$

2) Yêu cầu bài toán được thoả mãn khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} x_1 = 4x_2 & (1) \\ x_1 . x_2 = P = 1 & (2) \\ x_1 + x_2 = S = \dfrac{2}{m}(m-1). & (3) \end{cases}$$

(1) và (3) $\Rightarrow x_1 = \dfrac{4S}{5}$ và $x_2 = \dfrac{S}{5}$.

(2) $\Rightarrow S^2 = \dfrac{25}{4} \Leftrightarrow S = \dfrac{\pm 5}{2}$.

Do đó : $\begin{cases} \dfrac{2(m-1)}{m}=\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{2(m-1)}{m}=-\dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-4 \\ m=\dfrac{4}{9} \end{cases}$ (thoả).

Vậy $m=-4$; $m=\dfrac{4}{9}$ là các giá trị cần tìm.

Dạng 3. DẤU CÁC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Phương pháp

$ax^2+bx+c=0 \ (a\neq 0)$

- $x_1<0<x_2 \Leftrightarrow P<0.$
- $x_1\leq x_2<0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta\geq 0 \\ P>0 \\ S<0. \end{cases}$
- $x_1\geq x_2>0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta\geq 0 \\ P>0 \\ S>0. \end{cases}$

Ví dụ 1. Cho phương trình : $(m^2+1)x^2+2(m^2-1)x-(m^2-1)=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng dương.

Giải

Yêu cầu bài toán được thoả mãn khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \Delta'=(m^2-1)^2+(m^2+1)(m^2-1)\geq 0 \\ P=\dfrac{-(m^2-1)}{m^2+1}>0 \\ S=\dfrac{-2(m^2-1)}{m^2+1}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2(m^2-1)\geq 0 \\ m^2-1<0 \end{cases} \Leftrightarrow m\in\varnothing.$$

Vậy không có giá trị m nào để phương trình có hai nghiệm dương.

Ví dụ 2. Giả sử phương trình :

$$(m-1)x^2-2(m^2-1)x+m^2-3m+2=0. \qquad (1)$$

có hai nghiệm x' và x''. Trên trục $x'Ox$ lấy hai điểm M, N

mà $\overline{OM} = x'$ và $\overline{ON} = x''$. Qua gốc O, vẽ tiếp tuyến OT cho đường tròn đường kính MN. Tìm m để $OT = 2$.

Giải

Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt cùng dấu sao cho $OT^2 = x'x'' = 4$.

Ta có :

- $a = m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.
- $\Delta' = (m^2-1)^2 - (m-1)(m-1)(m-2)$

$$= (m-1)^2\left[(m+1)^2 - (m-2)\right] = (m-1)^2(m^2+m+3)$$

$$= (m-1)^2\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}\right]^2 > 0 \Rightarrow m \neq 1.$$

- $P = \dfrac{(m-1)(m-2)}{m-1} = m-2 > 0 \Leftrightarrow m > 2$.
- $P = 4 \Leftrightarrow m-2 = 4 \Leftrightarrow m = 6$ (thỏa).

Vậy $m = 6$ là giá trị cần tìm.

Dạng 4. CÁC PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Phương pháp

1) $ax^4 + bx^2 + c = 0$: Đặt $t = x^2 \geq 0$.

2) $a(P(x))^2 + b(P(x)) + c = 0$: Đặt $t = P(x)$.

3) $P(x)[P(x)+b] + c = 0$: Đặt $t = P(x)$.

4) $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = e$: Đặt $t = (x+a)(x+d)$, điều kiện $a+d = b+c$.

5) $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$: Chia cho $x^2 \neq 0$, đặt $t = x + \dfrac{1}{x}$.

6) $(x+a)^4 + (x+b)^4 + c = 0$: Đặt $t = x + \dfrac{a+b}{2}$.

7) Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối.

8) Phương trình chứa dấu căn thức.

Ví dụ 1. Giải các phương trình :

1) $(x-1)(x+5)(x^2+4x+8) + 40 = 0$. (1)

2) $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$. (2)

Giải

1) Đặt $t=(x-1)(x+5)=x^2+4x-5$.

$(1)\Leftrightarrow (x^2+4x-5)(x^2+4x-5+13)+40=0\Leftrightarrow t(t+13)+40=0$

$\Leftrightarrow t^2+13t+40=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-5 \\ t=-8. \end{array}\right.$

- $t=-5\Rightarrow x^2+4x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-4. \end{array}\right.$
- $t=-8\Rightarrow x^2+4x+3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-3. \end{array}\right.$

Phương trình có tập nghiệm $S=\{0;-4;-1;-3\}$.

2) Vì $x=0$ không phải là nghiệm nên chia cho $x^2\neq 0$, ta được :

$$(2)\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t=x+\dfrac{1}{x},\ |t|\geq 2 \\ t^2-3t+2=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} |t|\geq 2 \\ \left[\begin{array}{l} t=1\,(\text{loại}) \\ t=2. \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow x+\frac{1}{x}=2\Leftrightarrow x=1.$$

Ví dụ 2. Giải các phương trình :

1) $\left|x^2+|x-1|\right|=x$. (1)

2) $\sqrt{x+3}+\sqrt{6-x}-\sqrt{(x+3)(6-x)}=3$. (2)

Giải

1) Xét hai trường hợp :

- $x\geq 1$: $(1)\Leftrightarrow |x^2+x-1|=x\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x-1=x \\ x^2+x-1=-x \end{array}\right.$

($x\geq 0$ thoả do $x\geq 1$)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\,(\text{loại}) \\ x=1 \\ x=-1-\sqrt{2}\,(\text{loại}) \\ x=-1+\sqrt{2}\,(\text{loại}). \end{array}\right. \Rightarrow x=1 \text{ là nghiệm.}$$

• $x<1$: $(1)\Leftrightarrow |x^2-x+1|=x\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x+1=x & \text{khi } x\geq 0 \\ x^2-x+1=-x & \text{khi } x<0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ (loại)} \\ \text{Vô nghiệm.} \end{cases}$$

Tóm lại, nghiệm của phương trình là $x=1$.

2) Điều kiện : $\begin{cases} x+3\geq 0 \\ 6-x\geq 0 \\ (x+3)(6-x)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3\leq x\leq 6$.

Đặt : $t=\sqrt{x+3}+\sqrt{6-x}\geq 0$. Khi đó phương trình (2) trở thành :

$$t^2-2t-3=0\Rightarrow \begin{cases} t=-1(\text{loại}) \\ t=3. \end{cases}$$

$$t=\sqrt{x+3}+\sqrt{6-x}=3\Rightarrow 2\sqrt{(x+3)(6-x)}=0\Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=6. \end{cases}$$

Kiểm tra : $x=-3$: $\sqrt{9}=3$ (đúng).

$x=6$: $\sqrt{9}=3$ (đúng).

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x=-3$; $x=6$.

Dạng 5. GIẢI HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI CHỨA HAI ẨN

Phương pháp

1. ***Hệ gồm một phương trình bậc nhất và một phương trình bậc hai :*** Rút một ẩn ở phương trình bậc nhất, thay vào phương trình bậc hai ta được phương trình bậc hai chứa một ẩn.
2. ***Hệ đối xứng*** (đổi vai trò giữa x và y ta thấy các phương trình không đổi) : Đặt hai ẩn phụ $S=x+y$ và $P=xy$. Tính S,P suy ra x,y.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x-3y=1 \\ 2x^2+y^2-xy+x-2y=31. \end{cases}$ (1)

Giải

Ta có : $(1)\Leftrightarrow \begin{cases} x=3y+1 \\ 4y^2+3y-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=-7/4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-17/4 \\ y=-7/4. \end{cases} \end{cases}$

Vậy hệ có hai nghiệm : $(4;1)$, $\left(-\frac{17}{4};-\frac{7}{4}\right)$.

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2y+xy^2=6 \\ xy+x+y=5. \end{cases}$ (1)

Giải

Đặt : $\begin{cases} x+y=S \\ xy=P. \end{cases}$

Khi đó : $(1)\Leftrightarrow \begin{cases} PS=6 \\ P+S=5. \end{cases}$

Vậy P, S là hai nghiệm của phương trình bậc hai :

$$t^2-5t+6=0\Leftrightarrow \begin{bmatrix} t=2 \\ t=3. \end{bmatrix}$$

- $S=2$ và $P=3$: x và y là nghiệm của phương trình :

$$t^2-2t+3=0 \text{ (Vô nghiệm).}$$

- $S=3$ và $P=2$: x và y là nghiệm của phương trình :

$$t^2-3t+2=0\Leftrightarrow \begin{bmatrix} t=1 \\ t=2. \end{bmatrix}$$

Vậy hệ (1) có hai nghiệm $(1;2)$, $(2;1)$.

C. BÀI TẬP

Bài 1. Giải các phương trình :

1) $x^2-(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})x+6\sqrt{6}=0$.

2) $(1+m^2)x^2-2x+1-m^2=0$.

3) $(x^2-5x)^2-30(x^2-5x)-216=0$.

4) $(m+3)x^2+2(m+2)x+m+1=0$.

Bài 2. Giải các phương trình :

1) $(x^2-6x+5)^2-(x^2-4x+3)^2=0$.

2) $\frac{50}{(x-2)(x+3)}+\frac{2}{x-2}+\frac{10}{x+3}+1=0$.

3) $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2-x+1}=\frac{2x+5}{x^3+1}$.

Bài 3. Giải và biện luận phương trình :

1) $mx^2-2(m-1)x+2m-2=0$.

2) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{m}{x-1}=1$.

3) $\dfrac{x+2}{x}+\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{2}{m}$.

Bài 4. Tìm m để phương trình có đúng một nghiệm :

$x^4-(m+2)x^3+2(m+1)x^2-(m+2)x+1=0$.

Bài 5. Cho phương trình : $mx^2-2(m^2+4m)x+m^2(m+4)=0$. (1)

1) Tìm m để (1) có nghiệm kép. Tìm nghiệm kép đó.

2) Tìm m để (1) có hai nghiệm trái dấu và có trị tuyệt đối bằng nhau.

Bài 6. Cho phương trình : $x^2-|x|+m=0$. (1)

Tìm m để (1) có hai nghiệm phân biệt.

Bài 7. Cho hai phương trình : $x^2+x+m=0$; (1)

$x^2+mx+1=0$. (2)

Tìm m để :

1) (1) và (2) có nghiệm chung.

2) (1) tương đương (2).

Bài 8. Giải các phương trình :

1) $\sqrt{-x^2+3x+4}=2x^2-6x+2$.

2) $\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x(x+2)}=2|x|$.

3) $\dfrac{x}{x+1}-3=2\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$.

Bài 9. Cho phương trình : $mx^4-2(m-3)x^2+4m=0$. (1)

Tìm m để (1) có 4 ; 3 ; 2 ; 1 ; 0 nghiệm.

Bài 10. Cho phương trình : $x^2+\dfrac{1}{x^2}+(1-3m)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+3m=0$. (1)

Tìm m để (1) có nghiệm $x\neq 0$.

LỜI GIẢI

Bài 1. 1) Vì $6\sqrt{6}=(2\sqrt{3})(3\sqrt{2})$ nên nghiệm của phương trình là $x_1=2\sqrt{3}$, $x_2=3\sqrt{2}$.

2) $a+b+c=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1=1 \\ x_2=\dfrac{1-m^2}{1+m^2}. \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} x^2-5x=36 \\ x^2-5x=-6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1=9 \\ x_2=-4 \\ x_3=3 \\ x_4=2. \end{bmatrix}$

4) $a-b+c=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1=-1 \\ x_2=-\dfrac{m+1}{m+3} \ (m\neq -3). \end{bmatrix}$

$m=-3 \Rightarrow x=-1.$

Bài 2. 1) $(x^2-6x+5)^2-(x^2-4x+3)^2=0 \Leftrightarrow (-2x+2)(2x^2-10x+8)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1=1 \\ x_2=4. \end{bmatrix}$$

2) $\dfrac{50}{(x-2)(x+3)}+\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{10}{x+3}+1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 2\,;\, x\neq -3 \\ x^2+13x+30=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=-3 \text{ (loại)} \\ x=-10. \end{bmatrix}$$

3) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2-x+1}=\dfrac{2x+5}{x^3+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1 \\ x^2-x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=-1 \text{(loại)} \\ x=2. \end{bmatrix}$

Bài 3. 1) $m=0 \quad : x=1.$

$m\neq 0 \quad : \Delta'=1-m^2$

$\begin{bmatrix} m<-1 \\ m>1 \end{bmatrix}$: Vô nghiệm.

$m=-1$: $x=2.$

$m=1$: $x=0.$

$\begin{bmatrix} -1<m<0 \\ 0<m<1 \end{bmatrix}$: $x_{1,2}=\dfrac{m-1\pm\sqrt{1-m^2}}{m}.$

2) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{m}{x-1}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1\,;\, x\neq 2 \\ x^2+(m-4)x+3-2m=0. \end{cases}$ (1)

$$\left(\Delta=m^2+4>0 \ \forall m\right)$$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} f(1) \neq 0 \\ f(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -1 \neq 0 \text{ (thoả).} \end{cases}$$

Vậy : $m = 0$: 1 nghiệm $x = 3$.

$m \neq 0$: 2 nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \dfrac{4 - m \pm \sqrt{m^2 + 4}}{2}$.

3) $\dfrac{x+2}{x} + \dfrac{x}{x-2} = \dfrac{2}{m} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ x \neq 0 \; ; \; x \neq 2 \\ (m-1)x^2 + 2x - 2m = 0. \end{cases}$ (2)

a) $m = 1$: $(2) \Leftrightarrow x = 1$ (nhận).

b) $m \neq 1 \left(\Delta' = 2m^2 - 2m + 1 = 2\left(m - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2} > 0 \; \forall m \right)$:

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m \neq 0 \\ 4(m-1) + 4 - 2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Rightarrow m \neq 0.$$

Kết luận : $m = 1$: $x = 1$.

$m \neq 0$ và $m \neq 1$: $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{2m^2 - 2m + 1}}{m - 1}$.

Bài 4. Vì $x = 0$ không phải là nghiệm, chia cho $x^2 \neq 0$ ta được :

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - (m+2)\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2(m+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = x + \dfrac{1}{x}, \; |t| \geq 2 \\ t^2 - (m+2)t + 2m = 0. \end{cases} \qquad \left(\Delta = (m-2)^2 \geq 0, \forall m\right).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |t| \geq 2 \\ \left[\begin{array}{l} t = x + \dfrac{1}{x} = m \\ t = x + \dfrac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1 \end{array} \right. \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán được thoả mãn khi và chỉ khi $m = 2$.

Bài 5. 1) Yêu cầu bài toán được thoả mãn khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} a = m \neq 0 \\ \Delta' = m^2(m+4)^2 - m^3(m+4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 4m^2(m+4) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m = -4.$$

Nghiệm kép $x_0 = \dfrac{m^2+4m}{m} = m+4 = 0$.

2) Yêu cầu bài toán thoả mãn khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} P<0 \ (m\neq 0) \\ |x_1| = |x_2| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(m+4)<0 \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ x_1 = -x_2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -4<m<0 \\ \Delta = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -4<m<0 \\ S = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -4<m<0 \\ m=-4 \end{cases} \\ \begin{cases} -4<m<0 \\ m(m+4)=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m \in \varnothing.$$

Không có giá trị m nào !

Bài 6. $x^2 - |x| + m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2 - x + m = 0 & \text{khi } x \geq 0 \quad (1) \\ x^2 + x + m = 0 & \text{khi } x < 0 \quad (2) \end{array}\right.$

Yêu cầu bài toán được thoả mãn khi và chỉ khi :

$\left[\begin{array}{ll} \text{(1) có 2 nghiệm dương phân biệt và (2) vô nghiệm ;} & (3) \\ \text{(2) có 2 nghiệm âm phân biệt và (1) vô nghiệm ;} & (4) \\ \text{Mỗi phương trình có hai nghiệm trái dấu.} & (5) \end{array}\right.$

(3) và (4) loại vì $\Delta_1 = \Delta_2 = 1-4m$.

$(5) \Leftrightarrow \begin{cases} P_1 < 0 \\ P_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow m < 0$.

Bài 7. 1) Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình. Ta có :

$$\begin{cases} x_0^2 + x_0 + m = 0 \\ x_0^2 + mx_0 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_0^2 + x_0\left(-x_0^2 - x_0\right) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow m = -2.$$

2) $\begin{cases} \Delta_1 = 1-4m \\ P_1 = m \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} m > \dfrac{1}{4}: & S_1 = \varnothing \\ m = \dfrac{1}{4}: & S_1 = \left\{-\dfrac{1}{2}\right\} \\ m < \dfrac{1}{4}: & S_1 = \{x_1 ; x_2\}. \end{array}\right.$

$$\begin{cases}\Delta_2 = m^2 - 4 \\ P_2 = 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-2 < m < 2 : \ S_2 = \varnothing \\ m = -2 \quad : \ S_2 = \{1\} \\ m = 2 \quad : \ S_2 = \{-1\} \\ \begin{bmatrix}m < -2 \\ m > 2\end{bmatrix} : \ S_2 = \{x_3 ; x_4\}.\end{cases}$$

- $m < -2$: (1) có 1 nghiệm âm, 1 nghiệm dương ; (2) có 2 nghiệm cùng dấu, suy ra $S_1 \neq S_2$ (loại).
- $-2 \le m \le \dfrac{1}{4}$: $\begin{cases}S_1 \neq \varnothing \\ S_2 = \varnothing\end{cases} \Rightarrow S_1 \neq S_2$ (loại).
- $\dfrac{1}{4} < m < 2$: $S_1 = S_2 = \varnothing$ (nhận).
- $m \ge 2$: $\begin{cases}S_1 = \varnothing \\ S_2 \neq \varnothing\end{cases} \Rightarrow S_1 \neq S_2$ (loại).

Vậy (1) $\Leftrightarrow$ (2) khi $\dfrac{1}{4} < m < 2$.

Bài 8. 1) Điều kiện : $-x^2 + 3x + 4 \ge 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 4$.

Đặt : $t = \sqrt{-x^2 + 3x + 4} \ge 0$. Khi đó :

$$\sqrt{-x^2 + 3x + 4} = 2x^2 - 6x + 2 \Leftrightarrow t = -2t^2 + 10$$

$$\Leftrightarrow 2t^2 + t - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}t = -\dfrac{5}{2} \text{ (loại)} \\ t = 2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow -x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}x = 0 \\ x = 3\end{bmatrix} \text{ (thoả).}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = 0$, $x = 3$.

2) Điều kiện : $\begin{cases}x(x-1) \ge 0 \\ x(x+2) \ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix}x \le -2 \\ x \ge 1.\end{bmatrix}$

$$\sqrt{x(x-1)} + \sqrt{x(x+2)} = 2|x| \Rightarrow 2|x|\sqrt{(x-1)(x+2)} = x(2x-1) \ (1)$$

a) $x \ge 1$: $(1) \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + x - 2} = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases}2x - 1 \ge 0 \text{ (thoả)} \\ x = \dfrac{9}{8} \text{ (nhận).}\end{cases}$

b) $x \le -2$: $(1) \Leftrightarrow -2\sqrt{x^2+x-2} = 2x-1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x \ge 0 \\ x = \dfrac{9}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{9}{8} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \dfrac{9}{8}$.

3) Điều kiện : $\begin{cases} \dfrac{x+1}{x} \ge 0 \\ x+1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x < -1 \\ x > 0. \end{bmatrix}$

Đặt : $t = \sqrt{\dfrac{x+1}{x}} \ge 0$.

$$\frac{x}{x+1} - 3 = 2\sqrt{\frac{x+1}{x}} \Leftrightarrow \frac{1}{t^2} - 3 = 2t \Leftrightarrow 2t^3 + 3t^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} t+1=0 \\ 2t^2+t-1=0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = -1 \text{ (loại)} \\ t = \dfrac{1}{2}. \end{bmatrix}$$

Ta có : $\sqrt{\dfrac{x+1}{x}} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\dfrac{4}{3}$ (nhận).

Phương trình có nghiệm $x = -\dfrac{4}{3}$.

Bài 9. $mx^4 - 2(m-3)x^2 + 4m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = x^2 \ge 0 \\ mt^2 - 2(m-3)t + 4m = 0. \end{cases}$ (1)

- $m = 0$: $(1) \Leftrightarrow 6t = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (1 nghiệm).
- $m \ne 0$: $\Delta' = (m-3)^2 - 4m^2 = -3(m-1)(m+3)$.
  - $\begin{bmatrix} m < -3 \\ m > 1 \end{bmatrix}$: Vô nghiệm.
  - $m = -3$: $t_0 = \dfrac{m-3}{m} = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$ (2 nghiệm).
  - $m = 1$: $t_0 = \dfrac{m-3}{m} = -2 < 0$. Vô nghiệm.

• $-3<m<1$: $\begin{cases} P=4>0 \\ S=\dfrac{2(m-3)}{m} \end{cases}$

$-3<m<0$ $(S>0)$: $0<t_1<t_2$: 4 nghiệm

$0<m<1$ $(S<0)$: $0>t_1>t_2$: Vô nghiệm.

Vậy :

- $-3<m<0$: 4 nghiệm.
- $m=-3$: 2 nghiệm $x=\pm\sqrt{2}$.
- $m=0$: 1 nghiệm $x=0$.
- $m<-3 \vee m>0$: Vô nghiệm.

Bài 10. Đặt : $t=x+\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow t^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2\geq 4$ (Cô-si). Phương trình (1) đã cho trở thành :

$$\begin{cases} |t|\geq 2 \\ t^2+(1-3m)t+3m-2=0. \end{cases} \qquad (2)$$

Yêu cầu bài toán tương đương với việc tìm m để (2) có nghiệm $t\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$.

Cách 1. $\Delta=9(m-1)^2$: (2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=1 \\ t_2=3m-2. \end{array}\right.$

- $m=1$: $t_1=t_2=1\notin(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$ (loại)
- $m>1$: Yêu cầu bài toán tương đương với

$$2\leq 3m-2 \Leftrightarrow m\geq\frac{4}{3} \text{ (nhận).}$$

- $m<1$: Yêu cầu bài toán tương đương với

$$3m-2\leq -2 \Leftrightarrow m\leq 0 \text{ (nhận).}$$

Vậy $m\in(-\infty;0]\cup\left[\dfrac{4}{3};+\infty\right)$ là các giá trị cần tìm.

Cách 2. Trước hết, ta tìm m để phương trình (2) có hai nghiệm $t\in(-2;2) \Leftrightarrow -2<3m-2<2$ (do nghiệm $t_1=1$ đã thuộc $(-2;2)$) $\Leftrightarrow 0<m<\dfrac{4}{3}$.

Vậy yêu cầu bài toán tương đương với $m\leq 0 \vee m\geq\dfrac{4}{3}$.

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải các phương trình :

1) $x^2-(2+\sqrt{2}+\sqrt{3})x+1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}=0$.

2) $(m^2+1)x^2-x-m^2=0$.

3) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$.

4) $(2x^2-3x+1)^2-(x^2-2x+1)^2=0$.

Bài 2. Giải và biện luận các phương trình :

1) $x^2-2(m+1)x-2(m+2)=0$.

2) $\frac{3}{x-6}-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{x-m}$.

Bài 3. Tìm m để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt :

$$m(2x^2-x)^2+(2m^2-m)(2x^2-x)+m^2(m-1)=0.$$

Bài 4. Cho phương trình : $x^2-(m+2)x+2m=0$. (1)

Tìm m để :

1) (1) có nghiệm kép. Tính nghiệm kép đó.

2) (1) có hai nghiệm thoả : $\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}}+\frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}=2$.

3) (1) có hai nghiệm thoả : $\sqrt{x_1}=2\sqrt{x_2}$.

Bài 5. Tìm nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=5\\ \sqrt{xy}=2\sqrt{6}.\end{cases}$$

Bài 6. Giải phương trình : $x^2+4=3|x-\sqrt{2}|+2\sqrt{2}.x$.

Bài 7. Giải các phương trình :

1) $x^2-|x-2|=4x+2$.

2) $3|x|+2|x-1|=5|x-3|$.

Bài 8. Giải các phương trình :

1) $6x+4\sqrt{x^2-6x+6}=x^2+9$.

2) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\frac{x+3}{2}$.

3) $\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}-\sqrt{(3+x)(6-x)}=3$.

Bài 9. Cho phương trình : $x^2+2mx+4=0$. (1)

Tìm m để (1) có hai nghiệm thoả $x_1^4+x_2^4\le 32$.

Bài 10. Tìm m để hai phương trình sau tương đương :

$$mx^2-2(m+1)x+m+2=0; \quad (1)$$

$$(m+2)x^2-2(m+1)x+m=0. \quad (2)$$

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. 1) Ta có : $2+\sqrt{2}+\sqrt{3}=(1+\sqrt{2})+(1+\sqrt{3})$;

$$1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}=(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{3}).$$

$S=\{1+\sqrt{2}\,;1+\sqrt{3}\}$.

2) $S=\left\{1\,;x=\dfrac{-m^2}{m^2+1}\right\}$.

3) $S=\{1\}$.

4) $S=\left\{0;\ 1;\dfrac{2}{3}\right\}$.

Bài 2. 1) $\Delta'=(m+2)^2+1>0\ \ \forall m$: Hai nghiệm phân biệt.

2) $\begin{cases}x\notin\{m\ ;2;6\}\\ x^2-2(m-4)x-12=0.\end{cases}$ $\left(\Delta'=(m-4)^2+12>0\ \ \forall m\right)$.

Vậy :

$\begin{cases}m\ne 2\\ m\ne 6\end{cases}$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt.

$m=2$: $x=-6$.

$m=6$: $x=-2$.

Bài 3. Yêu cầu bài toán được thoả mãn khi và chỉ khi :

$\begin{cases}m\ne 0\\ 2x^2-x+m=0\\ 2x^2-x+m-1=0\end{cases}$ có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m<\dfrac{1}{8}$ và $m\ne 0$.

Bài 4. 1) Với $m=2$ phương trình đã cho có nghiệm kép : $x_0=2$.

2) $\begin{cases} m>0 \\ m=2 \end{cases} \Rightarrow m=2$.

3) $\begin{cases} m>0 \\ m\neq 2 \\ \left[\begin{array}{l} m=8 \\ m=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=8 \\ m=\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

Bài 5. Hướng dẫn. Đặt : $\begin{cases} u=\sqrt{x+1}\geq 0,\ x\geq -1 \\ v=\sqrt{y+1}\geq 0,\ y\geq -1. \end{cases}$

Khi đó : $\begin{cases} S=5 \\ P=6 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3 \\ y=8 \end{cases} \\ \begin{cases} x=8 \\ y=3. \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm.

Bài 6. Đặt $t=|x-\sqrt{2}|\geq 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2}\pm 1 \\ x=\sqrt{2}\pm 2. \end{array}\right.$

Bài 7. 1) $S=\{-1;5\}$.

2) $S=\left\{\dfrac{17}{10}\right\}$.

Bài 8. 1) $S=\{1;5;3+2\sqrt{3};3-2\sqrt{3}\}$.

2) $S=\{1;5\}$.

3) $S=\{-3;6\}$.

Bài 9. $m=\pm 2$.

Bài 10. Xét 3 trường hợp :

1) $m=0$ (loại).

2) $m=-2$ (loại).

3) $m\neq 0$ và $m\neq -2$: $S_1=\left\{1;\dfrac{m+2}{m}\right\}$, $S_2=\left\{1;\dfrac{m}{m+2}\right\}$.

Yêu cầu bài toán được thoả mãn khi và chỉ khi $m=-1$.

ÔN TẬP CHƯƠNG III

A. BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Giải và biện luận các phương trình :

1) $mx-2(x-m)=m^2-3m+6$.

2) $\dfrac{x+m}{x-1}-\dfrac{x-m}{x+1}=\dfrac{-m^2+m+2}{x^2-1}$.

Bài 2. Giải và biện luận các phương trình :

1) $\left|\dfrac{x+2m}{x-2}\right|=\left|\dfrac{x-m}{x-1}\right|$.

2) $\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=m$.

Bài 3. Giải và biện luận phương trình : $\sqrt{x^2+1}=x-m$.

Bài 4. Tìm m để phương trình sau có nghiệm :

$$\frac{(2m+1)x+3}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{(2m+3)x-m-2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Bài 5. Tìm m để hệ sau có nghiệm :

$$\begin{cases}(2m+1)\sqrt{x}+m\sqrt{y}=-1\\(m+2)\sqrt{x}+\sqrt{y}=m+2.\end{cases}$$

Bài 6. Giải và biện luận theo tham số m các phương trình :

1) $\dfrac{2x}{x+m}+\dfrac{x}{x-m}=\dfrac{m^2}{4(x^2-m^2)}$.

2) $\sqrt{x^2+5m^2}=2x-m$.

Bài 7. Cho phương trình bậc hai : $x^2-2(m-1)x+m-1=0$. (1)

1) Tìm hệ thức độc lập đối với m giữa các nghiệm của (1).

2) Tìm m để $\dfrac{x_1^2}{x_2^2}+\dfrac{x_2^2}{x_1^2}\le 7$.

3) Viết phương trình bậc hai theo ẩn y có hai nghiệm là $y_1=\dfrac{x_1}{x_2}$ và $y_2=\dfrac{x_2}{x_1}$.

Bài 8. Cho phương trình : $(m-1)x^2-(m^2+1)x+m(m+1)=0$. (1)
Tìm $m\in\mathbb{Z}$ để (1) có hai nghiệm nguyên phân biệt.

Bài 9. Tìm m để hệ sau có nghiệm :

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{xy}=2m-2\\ x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=2m-3.\end{cases}$$

Bài 10. Tìm m để phương trình sau có nghiệm :

$$\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2+\frac{4x}{x^2+1}-3=m.$$

HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài 1. 1) $m\neq 2 : S=\{m-3\}$; $m=2 : S=\mathbb{R}$.

2) $\begin{cases}m\neq -1\\ m\neq 0\\ m\neq 4\end{cases} : S=\left\{\frac{2-m}{2}\right\}$; $m=-1 : S=\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$;

$\begin{cases}m=0\\ m=4\end{cases} : S=\varnothing$.

Bài 2. 1) $m=\pm 1 : S=\{0\}$; $m=-\frac{1}{3} : S=\left\{0;\frac{5}{3}\right\}$;

$\begin{cases}m\neq -\frac{1}{3}\\ m\neq \pm 1\end{cases} : S=\left\{0;\frac{3-m}{2};\frac{4m}{3m+1}\right\}$.

2) $m<5 : S=\varnothing$; $m=5 : S=[-1;10]$;

$m>5 : S=\left\{\left(\frac{m+1}{2}\right)^2+1\right\}$.

Bài 3. $m\geq 0 : S=\varnothing$; $m<0 : S=\left\{\frac{m^2-1}{2m}\right\}$.

Bài 4. $-7<m<-3$; $x=\frac{m+5}{2}$.

Bài 5. $-2\leq m<-1$.

Bài 6. 1) $\dfrac{2x}{x+m}+\dfrac{x}{x-m}=\dfrac{m^2}{4(x^2-m^2)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm m \\ 12x^2-4mx-m^2=0. \end{cases}$

$(\Delta' = 16m^2)$

$m=0$: Phương trình có nghiệm kép $x=0$.

$m \neq 0$: Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1=\dfrac{m}{2}$; $x_2=-\dfrac{m}{6}$.

2) $\sqrt{x^2+5m^2}=2x-m \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{m}{2} \\ 3x^2-4mx-4m^2=0. \end{cases}$

$m<0 : x=-\dfrac{2m}{3}$; $m=0 : x=0$; $m>0 : x=2m.$

Bài 7. $\Delta' = (m-1)(m-2)$.

1) $x_1+x_2=2x_1.x_2$ khi $m \leq 1 \vee m \geq 2$.

2) Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<1 \\ m \geq 2 \end{array}\right. \\ -P<S^2<5P \end{cases} \Rightarrow 2 \leq m \leq \frac{9}{4}.$$

3) $y^2-2(2m-3)y+1=0$ với $m<1 \vee m \geq 2$.

Bài 8. Hướng dẫn. $m=0 : \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1. \end{array}\right.$ (thoả)

$m \neq 0$ và $m \neq 1 : \Delta = (m^2+1)^2-4m(m^2-1)$

$= m^4-4m^3+2m^2+4m+1$.

Suy ra : $\dfrac{\Delta}{m^2}=m^2+\dfrac{1}{m^2}-4\left(m-\dfrac{1}{m}\right)+2=(t-2)^2 \quad (t=m-\dfrac{1}{m})$

$=\left(\dfrac{m^2-2m-1}{m}\right)^2$

Do đó : $\Delta=(m^2-2m-1)^2 \geq 0$, suy ra phương trình có nghiệm :

$$\left[\begin{array}{l} x_1=m \\ x_2=\dfrac{m+1}{m-1}=1+\dfrac{2}{m-1} \end{array}\right. (m \neq 0 \text{ và } m \neq 1).$$

Vậy $m \in \{-1;2;3;0\}$ là các giá trị cần tìm.

Bài 9. $\begin{cases} \dfrac{3}{2} \le m < \dfrac{13}{8} \\ m > \dfrac{5}{2} \end{cases}$: $\begin{cases} S = \sqrt{x} + \sqrt{y} \\ P = \sqrt{x}.\sqrt{y}. \end{cases}$

Bài 10. Hướng dẫn. Đặt $t = \dfrac{2x}{x^2+1} \Rightarrow$ phương trình $tx^2 - 2x + t = 0$ có nghiệm $\Leftrightarrow -1 \le t \le 1$.

Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $t^2 + 2t - 3 = m$ có nghiệm $t \in [-1;1]$, tức là parabol (P) : $y = t^2 + 2t - 3$ phải cắt đường thẳng $(\Delta): y = m$ trong đoạn $[-1;1] \Leftrightarrow -4 \le m \le 0$.

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Phương trình $x^2 + \sqrt{x-1} + 1 = 2x - \sqrt{1-x^2}$ có tập nghiệm là :

A) $\{1\}$. B) $\{0\}$.

C) $\varnothing$. D) Tập hợp khác.

Câu 2. Phương trình $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}} + x^2 = 1 - \sqrt{-x}$ có tập nghiệm là :

A) $\{1\}$. B) $\{0\}$.

C) $\varnothing$. D) Tập hợp khác.

Câu 3. Phương trình $\dfrac{|x+1| + |x-1|}{|x+1| - |x-1|} = 1$ có tập nghiệm là :

A) $\{1\}$. B) $\{0\}$.

C) $\varnothing$. D) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Câu 4. Phương trình $x^2 + \dfrac{1}{x^2-1} = 1 + \dfrac{1}{x^2-1}$ có tập nghiệm là :

A) $\{0\}$. B) $\{-1;1\}$.

C) $\varnothing$. D) Tập hợp khác.

Câu 5. Tập nghiệm phương trình $x^4 + x^2 - x + 2 = 0$ là :

A) $\{0\}$. B) $\varnothing$.

C) Tập hợp khác. D) Không xác định được.

Câu 6. Tập nghiệm phương trình $x^2 + \sqrt{x-2} = 4 + \sqrt{1-x}$ là :

A) $\{2\}$. B) $\{-2;+2\}$.

C) $\{-2\}$. D) $\varnothing$.

Câu 7. Tập nghiệm phương trình $x^2+\sqrt{3-x}=\sqrt{x+1}-4$ là :

A) $\{-2;+2\}$. B) $[-1;3]$

C) $\varnothing$. D) Tập hợp khác.

Câu 8. Gọi S_1 là tập nghiệm của phương trình (I) ; S_2 là tập nghiệm của phương trình (II). Cho biết (II) là phương trình hệ quả của (I). Câu nào sau đây đúng :

A) $S_1=S_2$. B) $S_1\subset S_2$.

C) $S_2\subset S_1$. D) $S_1\cap S_2=\varnothing$.

Câu 9. Câu nào sau đây đúng :

A) $\sqrt{x^2+1}=x+1\Leftrightarrow x^2+1=(x+1)^2$.

B) $x^2+\dfrac{1}{x^2+1}=1+\dfrac{1}{x^2+1}\Leftrightarrow x^2=1$.

C) $x^2+\dfrac{1}{x^2-1}=1+\dfrac{1}{x^2-1}\Leftrightarrow x^2=1$.

D) $-\sqrt{x^2+1}=1\Leftrightarrow x^2+1=1$.

Câu 10. Để giải phương trình $\sqrt{4-3x-x^2}=x+2$ (1) một học sinh lập luận :

(I) (1) có nghĩa $\Leftrightarrow -4\le x\le 1$.

(II) Bình phương 2 vế và thu gọn, ta được $x(2x+7)=0$.

(III) Giải phương trình tích, ta được $x=0$, $x=-\dfrac{7}{2}$.

(IV) Vì $x=0;x=-\dfrac{7}{2}$ thỏa điều kiện (I) nên là nghiệm phương trình.

Hỏi bước nào sai ?

A) (I). B) (II).

C) (III). D) (IV).

Câu 11. Cho phương trình $m^2(x-2)=4(x+m)$ (1). Câu nào sau đây sai ?

A) (1) có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{2m}{m-2}$ khi $m\neq -2$ và $m\neq 2$.

B) (1) có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi $m=-2$.

C) (1) có tập nghiệm là $\varnothing$ khi $m=2$.

D) Cả 3 câu đều đúng.

Câu 12. Cho phương trình $m^2(x-1)=x+1$. Để phương trình có tập nghiệm $\mathbb{R}$ thì chọn :

A) $m \neq \pm 1$.
B) $m=1$.
C) $m=-1$.
D) Không có m.

Câu 13. Cho phương trình $(m-1)x=-m^2+3m-2$. Để phương trình có nghiệm $x=1$, ta chọn :

A) $m=1$.
B) $m=2$.
C) $m \neq 1$.
D) Không có m.

Câu 14. Cho phương trình $m^2(x+3)=m^2+2$. Để phương trình vô nghiệm, ta chọn :

A) $m=\pm 1$.
B) Không có m.
C) $m=0$.
D) $m \neq 0$.

Câu 15. Cho phương trình $\dfrac{mx-1}{x-1}=2$ (1). Để (1) có nghiệm, ta chọn :

A) $m \neq 0$.
B) $m \neq 1$ và $m \neq 2$.
C) $m \neq 2$.
D) $m \neq 0$ và $m \neq 2$.

Giả thiết sau dùng cho các câu 16 và 17 :

Cho phương trình : $\dfrac{m}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2}{x^2-1}$ (1).

Câu 16. Với $m \neq 1$, (1) có tập nghiệm :

A) $\varnothing$.
B) $\{-1\}$.
C) $\{1\}$.
D) $\{-1;1\}$.

Câu 17. Với $m=1$, (1) có tập nghiệm :

A) $\varnothing$.
B) $\{-1\}$.
C) $\mathbb{R}$.
D) $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$.

Câu 18. Cho phương trình $\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}-\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}=\dfrac{m}{x^2-1}$ (1). Để (1) có nghiệm ta chọn :

A) $m \geq 0$.
B) $m \neq \pm 2$.
C) $m \geq 0$ và $m \neq 2$.
D) m tuỳ ý.

Câu 19. Phương trình $|x-2|=2-x$ có nghiệm là :

A) $\{2\}$ B) $\mathbb{R}$.

C) $(-\infty;2)$. D) $(-\infty;2]$.

Câu 20. Cho phương trình : $|x+1|+|x-1|=4$. Tập nghiệm của phương trình là :

A) $\{-2\}$. B) $\{+2\}$.

C) $\{-2;+2\}$. D) $\mathbb{R}$.

Câu 21. Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{3}x-3y=6\sqrt{2}\\2x+\sqrt{3y}=\sqrt{6}\end{cases}$ là :

A) $(\sqrt{6};-\sqrt{2})$. B) $(\sqrt{6};\sqrt{2})$.

C) $(-\sqrt{6};\sqrt{2})$. D) $(-\sqrt{6};-\sqrt{2})$.

Câu 22. Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{3}{x}-\dfrac{5}{y}-4=0\\\dfrac{2}{x}-\dfrac{7}{y}-5=0\end{cases}$ là :

A) $\left(\dfrac{3}{11};\dfrac{-7}{11}\right)$. B) $\left(\dfrac{11}{3};-\dfrac{11}{7}\right)$.

C) $\left(-\dfrac{7}{11};\dfrac{3}{11}\right)$. D) $\left(-\dfrac{11}{7};\dfrac{3}{7}\right)$.

Câu 23. Hệ phương trình $\begin{cases}3\sqrt{x}+2\sqrt{y}=1\\\sqrt{x}+2\sqrt{y}=3\end{cases}$ có tập nghiệm là :

A) $\{(-1;2)\}$. B) $\{(1;4)\}$.

C) $\{(1;\sqrt{2})\}$. D) $\varnothing$.

Câu 24. Để hệ phương trình $\begin{cases}mx+y=m-1\\x+my=m-2\end{cases}$ có nghiệm, ta chọn :

A) $m\neq 0$. B) $m\neq 1$.

C) $m\neq 2$. D) $m\neq \pm 1$.

Câu 25. Cho hệ phương trình $\begin{cases}6x-2y-\dfrac{2}{3}=0\\-9x+3y+1=0.\end{cases}$ Tập nghiệm của hệ là :

A) $\left\{\left(-\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)\right\}$. B) $\left\{\left(-\frac{2}{3};1\right)\right\}$.

C) $\mathbb{R}$. D) $\varnothing$.

Câu 26. Để hệ phương trình $\begin{cases} mx+y=2 \\ 2x+3y=0 \end{cases}$ có nghiệm là $(6;-4)$, ta chọn :

A) $m=-1$. B) $m=1$.

C) $m=-2$. D) $m=2$.

Câu 27. Hệ phương trình $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ x+3y+2z=4 \\ 4x+3y+2z=1 \end{cases}$ có nghiệm là :

A) $(-1;1;1)$. B) $(1;-1;1)$.

C) $(!;1;-1)$. D) $(1;1;1)$.

Câu 28. Hệ phương trình $\begin{cases} x-3y+2z+2=0 \\ 2x-5y-z+5=0 \\ 3x-7y+4z-8=0 \end{cases}$ có nghiệm là :

A) (9 ; 2 ; 11). B) (2 ; 9 ; 21).

C) (21 ; 9 ; 2) D) Vô nghiệm.

Câu 29. Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=0 \\ \frac{3}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}=0 \\ \frac{1}{x}+\frac{3}{y}+\frac{2}{z}=3 \end{cases}$ là :

A) (− 1 ; 2 ; − 1). B) (1 ; − 2 ; 1).

C) (1 ; 2 ; 1). D) Kết quả khác.

Câu 30. Cho hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x}+2\sqrt{y}+3\sqrt{z}=4 \\ 3\sqrt{x}-2\sqrt{y}+\sqrt{z}=m \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}=m+2 \end{cases}$. Để hệ có nghiệm là $\left(\frac{25}{36};\frac{16}{9};\frac{1}{36}\right)$ ta chọn m bằng :

A) $m=0$. B) $m=-1$.

C) $m=1$. D) Kết quả khác.

Câu 31. Phương trình $\frac{4|x|}{x^2-1}+1=\frac{2x}{x-1}-\frac{2}{x+1}$ có tập nghiệm là :

A) $\{-1;1\}$.

B) $\{-3;3\}$.

C) $\{1;3\}$.

D) $\{-1;-3;1;3\}$.

Câu 32. Phương trình $(x+1)^4+4=5(x+1)^2$ có tập nghiệm là :

A) $\{-2;0\}$.

B) $\{-3;1\}$.

C) $\{-3;-2;0;1\}$.

D) $\{0;1\}$.

Câu 33. Phương trình $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ có hai nghiệm x_1 và x_2 thì $S=x_1+x_2$ cho bởi :

A) $S=-\frac{b}{a}$.

B) $S=-\frac{b}{2a}$.

C) $S=\frac{c}{a}$.

D) $S=\frac{b}{a}$.

Câu 34. Cho phương trình $x^2-2(m+1)x+5m^2+10m+5=0$ (1). Câu nào sau đây sai ?

A) (1) có nghiệm kép khi $m=-1$.

B) Khi $m=-1$ phương trình có nghiệm $x=0$.

C) (1) vô nghiệm với mọi m.

D) (1) không thể có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 35. Cho 4 phương trình :

A) $(m-1)x^2+(m-2)x+3-2m=0$.

B) $(m+1)x^2-2(m+2)x+m+3=0$.

C) $x^2-2(m+2)x+4m=0$.

D) $x^2-2(m+1)x+2m+1=0$.

Phương trình nào luôn luôn có 2 nghiệm phân biệt ?

Câu 36. Cho phương trình $(m-3)x^2+2(m-3)x-1=0$. Để phương trình có nghiệm kép, ta chọn :

A) $m=3$.

B) $m=2$.

C) $m=2$ hay $m=3$.

D) $m\neq 3$.

Câu 37. Phương trình $(2-m)x^2-2mx+m-1=0$ có đúng 1 nghiệm thì :

A) $m=2$.

B) $m\neq 2$.

C) $m=1$.

D) Không có m.

Câu 38. Phương trình $(m+1)x^2+(m-5)x+4m-2=0$ có một nghiệm bằng -1 thì :

A) $m \neq -1$. B) $m=-1$.

C) $m=1$. D) $m=\frac{1}{2}$.

Câu 39. Để phương trình $(m^2-4)x^2+2(m+2)x+1=0$ có hai nghiệm phân biệt thì :

A) $m \neq \pm 2$. B) $m>-2$.

C) $m>2$. D) $m>-2$ và $m \neq 2$.

Câu 40. Cho phương trình $(2-m)x^2-(m+1)x+m+3=0$. Để phương trình có hai nghiệm trái dấu, chọn :

A) $-3<m\leq 2$. B) $-3\leq m\leq 2$.

C) $-1<m\leq 2$. D) $m<-3$ hay $m>2$.

Câu 41. Cho phương trình $(m-2)x^2-2(m-3)x+m-4=0$. (1)

A) (1) luôn luôn có hai nghiệm phân biệt.

B) (1) luôn luôn có một nghiệm bằng -1.

C) (1) luôn luôn có một nghiệm bằng 1.

D) (1) luôn luôn có hai nghiệm trái dấu.

Câu nào đúng ?

Câu 42. Để phương trình $(m^2-9)x^2-2(m-3)x+1=0$ vô nghiệm thì :

A) $m=3$. B) $m>3$.

C) $m\geq 3$. D) $m<3$.

Câu 43. Phương trình $(m^2-m+1)x^2+(2m-1)x+1=0$ có nghiệm, ta chọn :

A) $m=0$. B) $m=-1$.

C) $m=1$. D) Không có m.

Câu 44. Số nghiệm của phương trình $x^2-5|x-1|-1=0$ là :

A) 1. B) 2.

C) 3. D) 4.

Câu 45. Phương trình $\sqrt{x-1}+1=\frac{2x-4}{\sqrt{x-1}}$ có tập nghiệm là :

A) $(1;+\infty)$. B) $\{2\}$.

C) $\{5\}$. D) $\{2;5\}$.

Câu 46. Phương trình $x^2-2(m+1)x+2m+1=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thoả $x_1^2+x_2^2=2$ thì chọn :

A) $m=0$.
B) $m=-1$.
C) $m=0 \vee m=-1$.
D) Kết quả khác.

Câu 47. Để phương trình $x^2-2(m+1)x-(2m+3)=0$ có hai nghiệm cùng dấu, ta chọn :

A) $m<-\frac{3}{2}$.
B) $m>-\frac{3}{2}$.
C) $m=-\frac{3}{2}$.
D) $m<-\frac{3}{2}$ và $m\neq -2$.

Phương trình $x^2-2(m+1)x+2m+1=0$ (1) được dùng cho các câu 48, 49, 50, 51, 52.

Câu 48. Câu nào sau đây sai ?

A) (1) luôn luôn có một nghiệm bằng 1.
B) (1) luôn luôn có nghiệm.
C) (1) có nghiệm kép khi $m=0$.
D) Có thể chọn được m một giá trị thích hợp để (1) vô nghiệm.

Câu 49. Câu nào sau đây sai ?

A) (1) có hai nghiệm dương, ta chọn $m>-\frac{1}{2}$.
B) (1) có hai nghiệm âm, ta chọn $m<-\frac{1}{2}$.
C) (1) có một nghiệm bằng -3, ta chọn $m=-1$.
D) (1) có hai nghiệm cùng dấu, ta chọn $m>-\frac{1}{2}$.

Câu 50. Để (1) có một nghiệm gấp đôi nghiệm kia, ta chọn :

A) $m=\frac{1}{2}$.
B) $m=-\frac{1}{4}$.
C) $m=\frac{1}{2} \vee m=-\frac{1}{4}$.
D) $m=0$.

Câu 51. Để (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thoả $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=2$ thì chọn :

A) $m=-1$.
B) $m=-\frac{1}{2}$.

C) $m = 0$. D) Kết quả khác.

Câu 52. Để (1) có hai nghiệm đều thuộc khoảng (0 ; 2) ta chọn :

A) $m < \frac{1}{2}$. B) $m > -\frac{1}{2}$.

C) $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$. D) $-1 < m < 1$.

Phương trình $x^4 - 2(m-1)x^2 + 1 - 2m = 0$ (1) dùng cho các câu 53, 54, 55.

Câu 53. Để (1) có đúng một nghiệm, ta chọn :

A) $m = \frac{1}{2}$. B) $m > \frac{1}{2}$.

C) $m < \frac{1}{2}$. D) Không có m.

Câu 54. Để (1) có 4 nghiệm, ta chọn :

A) $m \geq \frac{1}{2}$. B) $m > \frac{1}{2}$.

C) m tuỳ ý. D) Không có m.

Câu 55. Câu nào sau đây sai ?

A) (1) vô nghiệm nếu $m < \frac{1}{2}$.

B) Phương trình có tối đa hai nghiệm.

C) Khi $m = 1$, phương trình có nghiệm bằng 1.

D) Khi $m > \frac{1}{2}$, phương trình có hai nghiệm đều dương.

Câu 56. Cho ba phương trình : (I) : $x^4 + 1 = 2x^2$;

(II) : $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12$;

(III) : $x^2 - 3x + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + 4 = 0$.

Cặp phương trình nào sau đây có tập nghiệm bằng nhau :

A) (I) và (II). B) (II) và (III).

C) (III) và (I). D) Không có.

Câu 57. Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x - 2y + 12 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0 \end{cases}$ là :

A) $(0\,;\,6)$.
B) $(4\,;\,8)$.
C) $(0\,;\,6)$ hoặc $(4\,;\,8)$
D) Kết quả khác.

Câu 58. Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x+y+xy=8 \\ x^2y+y^2x=16 \end{cases}$ là :

A) $(-2\,;-2)$.
B) $(2\,;2)$.
C) $(-2\,;2)$.
D) $(2\,;-2)$.

Câu 59. Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=13 \\ \sqrt{xy}=36 \end{cases}$ là :

A) $(81;16)$.
B) $(16;81)$.
C) $(3;2)$ hoặc $(2;3)$.
D) $(81;16)$ hoặc $(16;81)$.

Câu 60. Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x^2=3x+2y \\ y^2=3y+2x \end{cases}$ là :

A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) 4.

GIẢI THÍCH - HƯỚNG DẪN

Câu 1. Tập xác định của phương trình :

$$\begin{cases} x-1\geq 0 \\ 1-x^2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ -1\leq x\leq 1 \end{cases} \Rightarrow x=1.$$

Thay $x=1 \Rightarrow$ phương trình nghiệm đúng. Vậy $S=\{1\}$. Câu A).

Câu 2. $\begin{cases} x-1>0 \\ -x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x\leq 0 \end{cases}$

$D=\varnothing \Rightarrow S=\varnothing$. Câu C).

Câu 3. Điều kiện : $|x+1|-|x-1|\neq 0 \Leftrightarrow |x+1|\neq |x-1| \Leftrightarrow x\neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với $2|x-1|=0 \Leftrightarrow x=1$. $S=\{1\}$. Câu A).

Câu 4. Phương trình đã cho tương đương với :

$$\begin{cases} x\neq \pm 1 \\ x^2+\dfrac{1}{x^2-1}=1+\dfrac{1}{x^2-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq \pm 1 \\ x^2-1=0 \end{cases} \Rightarrow S=\varnothing.$$ Câu C).

Câu 5. $x^4+x^2-x+2=0 \Leftrightarrow x^2-x+1=-x^4-1$.

Vế phải : $-x^4-1<0 \ \forall x$.

Vế trái : $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0 \ \forall x$.

Phương trình vô nghiệm. Câu B).

Câu 6. Điều kiện : $\begin{cases} x-2\geq 0 \\ 1-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2 \\ x\leq 1. \end{cases}$

$D=\varnothing \Rightarrow S=\varnothing$. Câu D).

Câu 7. Phương trình đã cho tương đương với :

$$\begin{cases} x^2+4=\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x} \\ -1\leq x\leq 3. \end{cases}$$

Vế trái : $x^2+4\geq 4 \quad \forall x$.

Vế phải : $\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}\leq 2\sqrt{2} \ \ \forall x\in[-1;3]$.

$D=\varnothing \Rightarrow S=\varnothing$. Câu C).

Câu 8. (II) là phương trình hệ quả của (I) $\Leftrightarrow S_1 \subset S_2$. Câu B).

Câu 9. Câu B) đúng do $D=\mathbb{R}$.

Câu 10. (IV) sai vì : $x=0:(1) \Leftrightarrow \sqrt{4}=2$ (đúng) : $x=0$ là nghiệm.

$$x=-\frac{7}{2}:(1) \Leftrightarrow \sqrt{4+\frac{21}{2}-\frac{49}{4}}=-\frac{7}{2}+2 \text{ (loại).}$$

Vậy (1) chỉ có một nghiệm $x=0$. Câu D).

Câu 11. $(1) \Leftrightarrow (m+2)(m-2)x=2m(m+2)$.

- $m\neq -2$ và $m\neq 2$: $(1) \Leftrightarrow x=\frac{2m}{m-2}$.
- $m=-2$: $(1) \Leftrightarrow 0x=0 : S=\mathbb{R}$.
- $m=2$: $(1) \Leftrightarrow 0x=16 : S=\varnothing$.

Vậy 3 câu đều đúng. Câu D).

Câu 12. Phương trình đã cho tương đương với $(m-1)(m+1)x=m^2+1$.

Vì $m^2+1\neq 0 \ \forall m$ nên không chọn được m để phương trình có nghiệm tuỳ ý. Câu D).

Câu 13. Nếu $x=1$ phương trình trở thành :

$(m-1)(1) = -m^2 + 3m - 2 \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (m-1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Nhưng với $m = 1$, phương trình trở thành $0x = 0 \Leftrightarrow \forall x$ (nên dĩ nhiên vẫn có nghiệm $x = 1$). Câu A).

Câu 14. $m^2(x+3) = m^2 + 2 \Leftrightarrow m^2 x = 2(1-m^2)$. Yêu cầu bài toán được thoả mãn khi và chỉ khi $m = 0$. Câu C).

Câu 15. $\dfrac{mx-1}{x-1} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ (m-2)x = -1. \end{cases}$

Yêu cầu bài toán được thoả mãn khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m \neq 2 \\ \dfrac{-1}{m-2} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq 1. \end{cases}$$ Câu B).

Câu 16. $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ (m-1)x = -(m-1). \end{cases}$

Với $m \neq 1$ phương trình tương đương với $\begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x = -1 \end{cases}$ (loại). Câu A).

Câu 17. $m = 1 : \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ 0x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall x \neq \pm 1$. Vậy $S = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$. Câu D).

Câu 18. $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \text{ và } x \neq 1 \\ \sqrt{x} = \dfrac{m}{2}. \end{cases}$

Yêu cầu bài toán được thoả mãn khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m \geq 0 \\ m^2 \neq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m \neq 2 \end{cases}$$. Câu C).

Câu 19. $|x-2| = 2 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 2 - x \text{ khi } x \geq 2 \\ x - 2 = x - 2 \text{ khi } x < 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \forall x < 2 \end{cases} \Rightarrow S = (-\infty; 2]$. Câu D).

Câu 20. Phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} x = -2 & \text{khi } x \leq -1 \\ \text{Vô nghiệm} & \text{khi } -1 < x < 1 \\ x = 2 & \text{khi } x \geq 1. \end{cases}$

$S = \{-2;2\}$ Câu C).

Câu 21. Hệ đã cho tương đương với : $\begin{cases}\sqrt{3}x-3y=6\sqrt{2}\\2\sqrt{3}x+3y=3\sqrt{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\sqrt{6}\\y=-\sqrt{2}.\end{cases}$

Câu A).

Câu 22. Hệ đã cho tương đương với :

$$\begin{cases}x\neq 0, y\neq 0\\u=\dfrac{1}{x}, v=\dfrac{1}{y}\\3u-5v=4\\2u-7v=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u=\dfrac{3}{11}\\v=-\dfrac{7}{11}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{11}{3}\\y=-\dfrac{11}{7}\end{cases}.$$ Câu B).

Câu 23. Hệ đã cho tương đương với :

$$\begin{cases}x\geq 0, y\geq 0\\u=\sqrt{x}\geq 0, v=\sqrt{y}\geq 0\\3u+2v=1\\u+2v=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u=-1<0\\v=2\end{cases}$$ (vô nghiệm).

Vậy $S=\varnothing$. Câu D).

Câu 24. Yêu cầu bài toán được thoả mãn khi và chỉ khi :

$$D=\begin{vmatrix}m & 1\\1 & m\end{vmatrix}\neq 0 \Leftrightarrow m^2-1\neq 0 \Leftrightarrow m\neq \pm 1.$$ Câu D).

Câu 25. Hệ đã cho tương đương với : $\begin{cases}9x-3y-1=0\\9x-3y-1=0\end{cases}$. $S=\mathbb{R}$. Câu C).

Câu 26. Yêu cầu bài toán được thoả mãn khi và chỉ khi :

$$\begin{cases}6m-4=2\\12-12=0\end{cases} \Rightarrow m=1.$$ Câu B).

Câu 27. Lấy phương trình thứ ba trừ phương trình thứ hai trong hệ ta được : $x=-1$. Hệ đã cho tương đương với :

$$\begin{cases}x=-1\\2y+3z=5\\3y+2z=5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-1\\y=1\\z=1.\end{cases}$$ Câu A).

Câu 28. Nhân phương trình thứ hai cho 2 và cộng với phương trình đầu vế theo vế ; nhân phương trình thứ hai cho 4 và cộng với phương trình thứ ba vế theo vế. Hệ đã cho tương đương với :

$$\begin{cases} z = 2x - 5y + 5 \\ 5x - 13y + 12 = 0 \\ 11x - 27y + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} -12 & -13 \\ -12 & -27 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -13 \\ 11 & -27 \end{vmatrix}} = \dfrac{168}{8} = 21 \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & -12 \\ 11 & -12 \end{vmatrix}}{8} = \dfrac{72}{8} = 9 \end{cases} \Rightarrow z = 2.$$

Vậy (21 ; 9 ; 2) là nghiệm. Câu C).

Câu 29. Hệ đã cho tương đương với :

$$\begin{cases} x, y, z \neq 0 \\ u = \dfrac{1}{x}, v = \dfrac{1}{y}, w = \dfrac{1}{z} \\ u + 2v + 3w = 0 \\ 3u + 2v + w = 0 \\ u + 3v + 2w = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + 2v + 3w = 0 \\ v - w = 3 \\ 7v + 5w = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = -1 \\ v = 2 \\ w = -1. \end{cases}$$

Vậy nghiệm là $\left(-1; \dfrac{1}{2}; -1\right)$. Câu D).

Câu 30. Giải hệ, ta có : $\sqrt{x} = \dfrac{20 + 13m}{24}$; $\sqrt{y} = \dfrac{32 + 4m}{24}$; $\sqrt{z} = \dfrac{4 - 7m}{24}$.

Do nghiệm là $\left(\dfrac{25}{36}; \dfrac{16}{9}; \dfrac{1}{36}\right)$ nên $m = 0$. Câu A).

Câu 31. Phương trình tương đương với :

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \text{ khi } x \geq 0 \text{ và } x \neq 1 \\ x^2 + 4x + 3 = 0 \text{ khi } x < 0 \text{ và } x \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (loại)} \\ x = 3 \text{ (nhận)} \\ x = -1 \text{ (loại)} \\ x = -3 \text{ (nhận).} \end{cases}$$ Câu B).

Câu 32. Phương trình tương đương với :

$$\begin{cases} t = (x+1)^2 \geq 0 \\ t^2 - 5t + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = -3 \\ x = 1. \end{cases}$$. Câu C).

Câu 33. Câu A).

Câu 34. $\Delta' = (m+1)^2 - (5m^2+10m+5) = -4(m+1)^2 \le 0$. Câu C) sai vì $m = -1 \Leftrightarrow \Delta' = 0$: phương trình có nghiệm kép.

Câu 35. Câu A) loại vì $m = 1 \Rightarrow x = 1$, chỉ có 1 nghiệm.

Câu B) loại vì $m = -1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$, chỉ có 1 nghiệm.

$\Delta'_{C)} = (m+2)^2 - 4m = m^2 + 4 > 0 \ \forall m$.

$\Delta'_{D)} = (m+1)^2 - (2m+1) = m^2 \ge 0$ (loại).

Câu C).

Câu 36. Yêu cầu bài toán được thoả khi :

$$\begin{cases} m-3 \neq 0 \\ (m-3)(m-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 2 \text{ . Câu B).}$$

Câu 37. Yêu cầu bài toán được thoả khi :

$$\begin{cases} 2-m = 0 \\ 2m^2 - 3m + 2 = 0 \ (\text{vô nghiệm}) \end{cases} \Rightarrow m = 2 \text{ . Câu A).}$$

Câu 38. Yêu cầu bài toán được thoả khi :

$(m+1)(-1)^2 + (m-5)(-1) + 4m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -1$. Câu B).

Câu 39. Yêu cầu bài toán được thoả khi :

$$\begin{cases} m^2 - 4 \neq 0 \\ (m+2)^2 - (m^2-4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \pm 2 \\ 4(m+2) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m > -2. \end{cases} \text{ Câu D).}$$

Câu 40. Yêu cầu bài toán được thoả khi :

$$\begin{cases} 2-m \neq 0 \\ \dfrac{m+3}{2-m} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ \dfrac{m+3}{m-2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m \neq 2 \\ m+3 > 0 \\ m-2 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m \neq 2 \\ m+3 < 0 \\ m-2 < 0 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -3. \end{array} \right. \text{ Câu D).}$$

Câu 41. A) loại vì $m = 2$ thì phương trình chỉ có 1 nghiệm.

D) loại vì $m = 1$ thì $P = \dfrac{m-4}{m-2} = 3 > 0$.

$a-b+c=m-2+2m-6+m-4=4m-12=0 \Leftrightarrow m=3$ (loại).
$a+b+c=m-2-2m+6+m-4=0 \ \forall m$.
Câu C).

Câu 42. Yêu cầu bài toán được thoả khi :

$$\begin{cases} m^2-9\neq 0 \\ -6(m-3)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq \pm 3 \\ m>3 \end{cases} \Rightarrow m>3 \text{. Câu B).}$$

Câu 43. Yêu cầu bài toán được thoả khi :

$$\begin{cases} m^2-m+1=0 \text{ (vô nghiệm)} \\ (2m-1)^2-4(m^2-m+1) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow -3\geq 0 \text{ (vô nghiệm).}$$

Không có m. Câu D).

Câu 44. Phương trình tương đương với :

$$\begin{cases} x^2-5x+4=0 \text{ khi } x\geq 1 \\ x^2+5x-6=0 \text{ khi } x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=4 \\ x=1 \\ x=-6. \end{cases} \Rightarrow S=\{-6;1;4\} \text{. Câu C).}$$

Câu 45. Phương trình tương đương với :

$$\begin{cases} x>1 \\ \sqrt{x-1}=x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x\geq 3 \\ x^2-7x+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 3 \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=5 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x=5 \text{. Câu C).}$$

Câu 46. Yêu cầu bài toán được thoả khi :

$$\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ S^2-2P=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2\geq 0 \ \forall m \\ m(m+1)=0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=0. \end{array}\right. \text{ Câu C).}$$

Câu 47. Yêu cầu bài toán được thoả khi :

$$\begin{cases} \Delta'=(m+1)^2+2m+3\geq 0 \\ P=-(2m+3)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)^2\geq 0 \ \forall m \\ m<-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow m<-\frac{3}{2}.$$

Câu A).

Câu 48. $\Delta'=m^2\geq 0 \ \ \forall m$: Δ' không có giá trị âm. Câu D).

Câu 49. Câu B) sai vì $\forall m$: $a+b+c=0$ nên (1) luôn luôn có một nghiệm bằng $1>0$. Câu B).

Câu 50. Yêu cầu bài toán được thoả khi :

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} 2m+1=2 \\ 1=2(2m+1) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{1}{2} \\ m=-\dfrac{1}{4} \end{array}\right. .$$ Câu C).

Câu 51. Yêu cầu bài toán được thoả khi :

$$\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ x_1^2+x_2^2-2x_1x_2=0 \end{cases} \Rightarrow (x_1-x_2)^2=0 \Leftrightarrow x_1=x_2 \Leftrightarrow m=0.$$ Câu C).

Câu 52. Yêu cầu bài toán được thoả khi :

$$0<2m+1<2 \ \left(\text{do} 1 \in (0;2)\right) \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<m<\frac{1}{2}.$$ Câu C).

Câu 53. Do $a-b+c=0$ nên nghiệm của phương trình cho bởi :

$$\left[\begin{array}{l} x^2=-1<0 \ \ (\text{loại}) \\ x^2=2m-1. \end{array}\right.$$

Yêu cầu bài toán được thoả khi :

$2m-1=0$ (để nghiệm $x=0$ duy nhất) $\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$. Câu A).

Câu 54. $\left[\begin{array}{l} x^2=-1<0 \\ x^2=2m-1. \end{array}\right.$ Phương trình không thể có 4 nghiệm. Câu D).

Câu 55. $m>\dfrac{1}{2} \Rightarrow x^2=2m-1>0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2m-1}$. Câu D) sai.

Câu 56. (I) $\Leftrightarrow (x^2-1)^2=0 : S_1=\{-1;1\}$.

(II) $\Leftrightarrow (x^2+x+1)^2+(x^2+x+1)-12=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x+1=-4 \\ x^2+x+1=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2. \end{array}\right. \ S_2=\{-2;1\}.$$

(III) $\Leftrightarrow \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+2=0 \ (x \neq 0)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\dfrac{1}{x}=1 \\ x+\dfrac{1}{x}=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x+1=0 \\ (x-1)^2=0 \end{array}\right. \Rightarrow x=1. \ S_3=\{1\}.$$ Câu D).

Câu 57. Hệ đã cho tương đương với :

$$\begin{cases} x = 2y - 12 \\ 5y^2 - 70y + 240 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 12 \\ \left[\begin{array}{l} y = 8 \\ y = 6. \end{array}\right. \end{cases}$$

Vậy $(4\ ;8)$, $(0\ ;6)$ là nghiệm . Câu C).

Câu 58. Hệ đã cho tương đương với :

$$\begin{cases} S + P = 8 \\ SP = 16 \end{cases} \Rightarrow S = P = 4 \Rightarrow x = y = 2.$$

Nghiệm $(2\ ;2)$. Câu B).

Câu 59. Hệ đã cho tương đương với :

$$\begin{cases} x \geq 0\ , y \geq 0 \\ S = 13 \\ P = 36 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x} = 9 \\ \sqrt{y} = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x} = 4 \\ \sqrt{y} = 9 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow (81\ ;16),\ (16\ ;81) \text{ là nghiệm .}$$

Câu D).

Câu 60. Hệ đã cho tương đương với :

$$\begin{cases} x^2 = 3x + 2y \\ (x - y)(x + y - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = x \\ x^2 - 5x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 1 - x \\ x^2 - x - 2 = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Hệ có 4 nghiệm là $(0\ ;0)$, $(5\ ;5)$, $(-1\ ;2)$, $(2\ ;-1)$. Câu D).

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG III

1	A	16	A	31	B	46	C
2	C	17	D	32	C	47	A
3	A	18	C	33	A	48	D
4	C	19	D	34	C	49	B
5	B	20	C	35	C	50	C

6	D	21	A	36	B	51	C
7	C	22	B	37	A	52	C
8	B	23	D	38	B	53	A
9	B	24	D	39	D	54	D
10	D	25	C	40	D	55	D
11	D	26	B	41	C	56	D
12	D	27	A	42	B	57	C
13	A	28	C	43	D	58	B
14	C	29	D	44	C	59	D
15	B	30	A	45	C	60	D

Chương IV.

BẤT ĐẲNG THỨC VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

§ 1. BẤT ĐẲNG THỨC

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Định nghĩa. $a \geq b \Leftrightarrow a - b \geq 0$;
$a \leq b \Leftrightarrow a - b \leq 0$.

2. Các tính chất.

a) $\begin{cases} a \leq b \\ b \leq c \end{cases} \Rightarrow a \leq c.$

b) $a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c$.

c) $a \leq b + c \Leftrightarrow a - c \leq b$.

d) $\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \Rightarrow a + c \leq b + d$.

e) $a \leq b \Rightarrow ac \leq bc \ (c > 0)$;
$a \leq b \Rightarrow ac \geq bc \ (c < 0)$.

f) $\begin{cases} 0 < a \leq b \\ 0 < c \leq d \end{cases} \Rightarrow ac \leq bd$.

g) $0 < a \leq b \Leftrightarrow a^n \leq b^n$ (n nguyên dương).

h) $0 < a \leq b \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b}$.

3. Bất đẳng thức Cô-si

- $\forall a, b \geq 0 : a + b \geq 2\sqrt{ab}$. (1)
  Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.
- Hai số dương x và y mà $x + y = S$ (hằng số) thì :
$$(xy)_{\max} = \frac{S^2}{4} \Leftrightarrow x = y = \frac{S}{2}.$$
- Hai số dương x và y mà $xy = P$ (hằng số), thì :

$$(x+y)_{\min} = 2\sqrt{P} \Leftrightarrow x = y = \sqrt{P}.$$

4. Bất đẳng thức chứa giá trị tuyệt đối

a) $|a+b| \le |a|+|b|$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $ab \ge 0$.

b) $|a-b| \le |a|+|b|$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $ab \le 0$.

c) $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$; $|x| \ge a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -a \\ x \ge a. \end{array}\right.$

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC NHỜ ĐỊNH NGHĨA

Phương pháp.

- Áp dụng định nghĩa : $A \ge B \Leftrightarrow A - B \ge 0$.
- Nhiều khi kết hợp phép biến đổi tương đương để việc chứng minh được thuận lợi.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng với mọi a : $\dfrac{a^2}{a^4+1} \le \dfrac{1}{2}$.

Giải

Ta có : $\dfrac{a^2}{a^4+1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2a^2 - a^4 - 1}{2(a^4+1)} = -\dfrac{(a^2-1)^2}{2(a^4+1)} \le 0 \ \ \forall a.$

Vậy : $\dfrac{a^2}{a^4+1} \le \dfrac{1}{2} \ \ \forall a.$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng với mọi $a > 0, b > 0$: $\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} \le \sqrt{ab}$.

Giải

Ta có : $\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} - \sqrt{ab} = \dfrac{2ab}{a+b} - \sqrt{ab} = \sqrt{ab}\left(\dfrac{2\sqrt{ab} - a - b}{a+b}\right)$.

$$= -\frac{\sqrt{ab}}{a+b}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \le 0 \text{ (do } a+b>0\text{)}.$$

Vậy : $$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng : $\forall a, b, c, d \ge 0$

$$\sqrt{(a+b)(c+d)} \ge \sqrt{ac}+\sqrt{bd}. \qquad (1)$$

Giải

Ta có : $(1) \Leftrightarrow ac+ad+bc+bd \ge ac+bd+2\sqrt{abcd}$

$\Leftrightarrow ad+bc-2\sqrt{ad}.\sqrt{bc} \ge 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{ad}-\sqrt{bc}\right)^2 \ge 0$ (đúng).

Vậy (1) đúng.

Dạng 2. SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔ-SI

Phương pháp

Bất đẳng thức Cô-si : $\forall a, b \ge 0 : a+b \ge 2\sqrt{ab}$.
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Ví dụ 1. Chứng minh bất đẳng thức :

a) $\forall a, b>0 : (a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \ge 4.$

b) $\forall a, b, c>0 : \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{9}{a+b+c}.$

Giải

a) Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si cho 2 số dương, ta có :

$$a+b \ge 2\sqrt{ab};$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \ge \frac{2}{\sqrt{ab}}.$$

Nhân hai bất đẳng thức trên vế theo vế, ta được :

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \ge 4.$$

b) Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si cho 3 số dương, ta được :

$$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} ;$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} .$$

Nhân hai bất đẳng thức trên vế theo vế, ta được :

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9 \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} .$$

Ví dụ 2. Chứng minh rằng : $\forall a, b, c > 0$

$$\left(\frac{a+b}{c}\right)\left(\frac{b+c}{a}\right)\left(\frac{c+a}{b}\right) \geq 8.$$

Giải

Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si cho 2 số dương, ta được :

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} ;$$

$$b+c \geq 2\sqrt{bc} ;$$

$$c+a \geq 2\sqrt{ca} .$$

Nhân ba bất đẳng thức trên vế theo vế, ta được :

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8\sqrt{ab.bc.ca} = 8abc .$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh (đpcm).

Ví dụ 3. Cho ba số $a, b, c > 0$ thoả $abc = 25$. Chứng minh :

$$(1+a)(1+b)(1+c) \geq 40 .$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2 số, ta được :

$$1+a \geq 2\sqrt{a} ;$$

$$1+b \geq 2\sqrt{b} ;$$

$$1+c \geq 2\sqrt{c} .$$

Nhân ba bất đẳng thức trên vế theo vế, ta được :

$$(1+a)(1+b)(1+c) \geq 8\sqrt{abc} = 8\sqrt{25} = 40.$$

C. BÀI TẬP

Bài 1. Chứng minh rằng với mọi a, b : $\frac{a^2}{a^4+1}+\frac{b^2}{b^4+1} \leq 1 .$

Bài 2. Chứng minh rằng với mọi a, b, c, d :

$$(a^2-b^2)(c^2-d^2)\le(ac-bd)^2.$$

Bài 3. Cho ba số a, b, c thoả $a\ge 1$, $b\ge 1$, $c\ge 1$ và $abc=8$. Chứng minh : $ab\sqrt{c-1}+bc\sqrt{a-1}+ac\sqrt{b-1}\le 12$.

Bài 4. Cho ba số $a, b, c>0$ thoả $a+b+c=1$. Chứng minh :

$$(1-a)(1-b)(1-c)\ge 8abc$$

Bài 5. Cho ba số $a, b, c>0$. Chứng minh :

1) $\dfrac{a}{bc}+\dfrac{b}{ca}+\dfrac{c}{ab}\ge\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$.

2) $\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}+\dfrac{ab}{c}\ge a+b+c$.

Bài 6. Cho ba số $a, b, c>0$ mà $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh :

$$1+ab+bc+ca\ge 2\left(a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}\right).$$

Bài 7. Cho ba số $a, b, c>0$ thoả $a+b+c=1$. Chứng minh :

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\ge 64.$$

Bài 8. Cho ba số a, b, c với $a>c>0$ và $b>c>0$. Chứng minh :

$$\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\le\sqrt{ab}.$$

Bài 9. Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh :

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\ge 3.$$

Bài 10. Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng phương trình $b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2=0$ vô nghiệm.

LỜI GIẢI

Bài 1. Ta có : $\dfrac{a^2}{a^4+1}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{(a^2-1)^2}{2(a^4+1)}\le 0\Rightarrow\dfrac{a^2}{a^4+1}\le\dfrac{1}{2}\ (\forall a)$.

Tương tự : $\dfrac{b^2}{b^4+1}\le\dfrac{1}{2}\ (\forall b)$..

Từ đó suy ra đpcm.

Bài 2. $(a^2-b^2)(c^2-d^2)\le(ac-bd)^2$

$\Leftrightarrow a^2c^2-a^2d^2-b^2c^2+b^2d^2\le a^2c^2+b^2d^2-2abcd$

$\Leftrightarrow a^2d^2+b^2c^2-2ad.bc\ge 0$

$\Leftrightarrow (ad-bc)^2\ge 0$ (đúng).

Bài 3. Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si cho hai số 1 và $c-1\ge 0$, ta được :

$$1+(c-1)=c\ge 2\sqrt{c-1}\Rightarrow abc\ge 2ab\sqrt{c-1}.$$

Tương tự : $abc\ge 2bc\sqrt{a-1}$;

$abc\ge 2ca\sqrt{b-1}$.

Từ đó suy ra : $ab\sqrt{c-1}+bc\sqrt{a-1}+ca\sqrt{b-1}\le\dfrac{3abc}{2}\le 12.$

Bài 4. Ta có : $a+b+c=1\Rightarrow b+c=1-a>0$. Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si cho 2 số b và c, ta được :

$1-a=b+c\ge 2\sqrt{bc}$;

$1-b=c+a\ge 2\sqrt{ca}$;

$1-c=a+b\ge 2\sqrt{ab}$.

Do đó : $(1-a)(1-b)(1-c)\ge 8abc$.

Bài 5. 1) Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si cho 2 số, ta được :

$$\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}\ge\frac{2}{c}\ ;\ \frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\ge\frac{2}{a}\ ;\frac{c}{ab}+\frac{a}{bc}\ge\frac{2}{b}.$$

Do đó : $2\left(\dfrac{a}{bc}+\dfrac{b}{ca}+\dfrac{c}{ab}\right)\ge 2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\Rightarrow$ đpcm.

2) Chứng minh tương tự : $\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}\ge 2c$.

Bài 6. Áp dụng Bất đẳng thức Cô si cho 2 số, ta được :

$$a+b\ge 2\sqrt{ab}\ ;\ b+c\ge 2\sqrt{bc}\ ;\ c+a\ge 2\sqrt{ca}.$$

Do đó : $a+b+c\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}>0\Rightarrow$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\ge ab+bc+ca+$

$+2\left(b\sqrt{ac}+c\sqrt{ba}+a\sqrt{bc}\right)$

$\Rightarrow 1+ab+bc+ca\ge 2\left(a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}\right).$

Bài 7. $\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\left(1+\dfrac{1}{b}\right)\left(1+\dfrac{1}{c}\right)\ge 64\Leftrightarrow(a+1)(b+1)(c+1)\ge 64abc$

Theo Cô-si : $a+1=a+a+b+c\geq 4\sqrt[4]{a^2bc}$.

Tương tự : $b+1=b+a+b+c\geq 4\sqrt[4]{ab^2c}$;

$c+1=c+a+b+c\geq 4\sqrt[4]{abc^2}$.

Do đó : $(a+1)(b+1)(c+1)\geq 64\sqrt[4]{a^4b^4c^4}=64abc.$

Bài 8. Đặt $\begin{cases}x=a-c\\ y=b-c.\end{cases}$

$$\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\leq\sqrt{ab}\Leftrightarrow\sqrt{cx}+\sqrt{cy}\leq\sqrt{(c+x)(c+y)}$$

$$\Leftrightarrow cx+cy+2\sqrt{c^2xy}\leq c^2+cy+cx+xy$$

$$\Leftrightarrow c^2-2c\sqrt{xy}+xy\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\left(c-\sqrt{xy}\right)^2\geq 0\ \text{(đúng).}$$

Vậy (1) đúng.

Bài 9. Đặt : $\begin{cases}x=b+c-a>0\\ y=c+a-b>0\\ z=a+b-c>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{y+z}{2}\\ b=\dfrac{z+x}{2}\\ c=\dfrac{x+y}{2}.\end{cases}$

Ta có : $\dfrac{a}{b+c-a}+\dfrac{b}{c+a-b}+\dfrac{c}{a+b-c}\geq 3$

$$\Leftrightarrow\frac{y+z}{2x}+\frac{z+x}{2y}+\frac{x+y}{2z}\geq 3$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)\geq 6.\qquad (*)$$

(*) đúng do $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\geq 2$, $\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}\geq 2$ và $\dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z}\geq 2$.

Bài 10. $\Delta=\left(b^2+c^2-a^2\right)^2-4b^2c^2$

$$=\left(b^2+c^2+2bc-a^2\right)\left(b^2+c^2-2bc-a^2\right)$$

$$=\left((b+c)^2-a^2\right)\left((b-c)^2-a^2\right)$$

$$=(b+c+a)(b+c-a)(b-c+a)(b-c-a)$$

$$=-(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(c+a-b)<0$$

Ta có $\Delta < 0$ do bất đẳng thức tam giác. Vậy phương trình vô nghiệm.

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Chứng minh rằng với mọi a, b, c, d :

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geq (ac-bd)^2.$$

Bài 2. Chứng minh rằng với mọi $a, b \geq 0$:

$$(a+2)(b+2)(a+b) \geq 16ab.$$

Bài 3. Cho ba số $a, b, c > 0$ mà $a+b+c=1$. Chứng minh :

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} < 5.$$

Bài 4. Cho ba số $a, b, c > 0$. Chứng minh :

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geq 8.$$

Bài 5. Cho bốn số $a, b, c, d > 0$. Chứng minh :

$$\sqrt{ab}+\sqrt{cd} \leq \sqrt{(a+d)(b+c)}$$

Bài 6. Cho $0 < b < a$. Chứng minh :

$$a^2+\frac{1}{b(a-b)} \geq 4.$$

Bài 7. Cho $a > 0$ và $b > 0$. Chứng minh :

$$(1+a+b)\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 9.$$

Bài 8. Cho $a > 0, b > 0$ và $ab = 1$. Chứng minh :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{a+b} \geq 4.$$

Bài 9. Cho $a, b, c > 0$ với $a+b+c=1$. Chứng minh :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 9.$$

Bài 10. Cho $a, b, c > 0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh :

$$(a+b)(b+c)(c+a) \leq 8.$$

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. Sử dụng phép chứng minh bằng định nghĩa, chứng minh :
$(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac-bd)^2=(ad-bc)^2\geq 0 \quad \forall a,b,c,d$.

Bài 2. Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si cho 2 số với 3 lần.

Bài 3. Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si cho 1 và $1+4a$:
$1+1+4a=2+4a\geq 2\sqrt{1+4a} \Rightarrow \sqrt{1+4a}\leq 1+2a$.
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $1=1+4a \Leftrightarrow a=0$ (trái giả thiết).

Bài 4. Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si cho 2 số, 3 lần.

Bài 5. Bình phương hai vế :
$\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\leq\sqrt{(a+d)(b+c)} \Leftrightarrow 2\sqrt{(ac).(bd)}\leq ac+bd$ (Cô-si).

Bài 6. Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si cho $a-b$ và b và cho $\frac{4}{a^2}$ và a^2.

Bài 7. Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si cho 3 số, 2 lần.

Bài 8. Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si cho $a+b$ và $\frac{4}{a+b}$.

Bài 9. Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si cho 3 số, 2 lần.

Bài 10. Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si cho $a+b$, $b+c$, $c+a$.

E. ÁP DỤNG

TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA MỘT ĐẠI LƯỢNG NHỜ BẤT ĐẲNG THỨC

Phương pháp

Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định D. Nếu ta có $A\leq f(x)\leq B$ $\forall x\in D$ thì :

$$\max_D f=\text{GTLN}(y)=B;$$

$$\min_D f=\text{GTNN}(y)=A,$$

với điều kiện $\exists x_0\in D$ sao cho $f(x_0)=B$ (hoặc $f(x_0)=A$).

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{9x^2-9x+1}{x-1}$ $(x>1)$. Tìm $\min\limits_{(1;+\infty)} y$.

Giải

Ta có : $y=9x+\dfrac{1}{x-1}=9(x-1)+\dfrac{1}{x-1}+9$.

Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si cho 2 số $9(x-1)$ và $\dfrac{1}{x-1}$, ta được :

$$9(x-1)+\frac{1}{x-1}\geq 2\sqrt{9}=6 \Rightarrow y\geq 6+9=15.$$

$$\min_{(1;+\infty)} y=15 \text{ với } 9(x-1)=\frac{1}{x-1}\Leftrightarrow |x-1|=\frac{1}{3}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{3}<1 \ \text{(loại)} \\ x=\dfrac{4}{3}>1 \ \text{(nhận)} \end{array}\right.$$

Vậy : $\min\limits_{(1;+\infty)} y=15$ khi $x=\dfrac{4}{3}$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=\sqrt{-4x^2+12x-8}$. Tìm $\max y$.

Giải

Tập xác định : $D=[1;2]$.

Ta có : $y=\sqrt{(x-1)(8-4x)}$.

Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si cho 2 số $4x-4$ và $8-4x$, ta được :

$4=(4x-4)+(8-4x)\geq 2\sqrt{4(x-1)(8-4x)} \Leftrightarrow 1\geq\sqrt{y}\Leftrightarrow y\leq 1$.

Vậy : $\max\limits_{D} y=1$ nếu $4x-4=8-4x\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}\in D$.

Ví dụ 3. Cho hai số x và y thoả $3x-4y=5$. Tìm $\min\left(x^2+y^2\right)$.

Giải

$u=x^2+y^2=x^2+\left(\dfrac{3x-5}{4}\right)^2 \Leftrightarrow 25x^2-30x+25-16u=0$ có nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta'=15^2-25(25-16u)\geq 0\Leftrightarrow u\geq 1$.

Vậy : $\min u=\min\left(x^2+y^2\right)=1$ khi $x=\dfrac{3}{5}$ và $y=-\dfrac{4}{5}$.

BÀI TẬP

Bài 1. Tìm $\min\limits_{D} y$ với D là tập xác định :

1) $y=\dfrac{x^2+7x+19}{x+2}$; $D=(-2;+\infty)$.

Hướng dẫn : $y=x+5+\dfrac{9}{x+2}=x+2+\dfrac{9}{x+2}+3\geq 9$.

2) $y=\dfrac{x^2+2x+33}{4(x-1)}$; $D=(1;+\infty)$.

Hướng dẫn : $y=\dfrac{x+3}{4}+\dfrac{9}{x-1}=\dfrac{x-1}{4}+\dfrac{9}{x-1}+1\geq 4$.

3) $y=\dfrac{4}{x}+\dfrac{x}{1-x}$; $D=(0;1)$.

Hướng dẫn : $y=4\left(\dfrac{1-x}{x}\right)+\left(\dfrac{x}{1-x}\right)+4\geq 8$.

4) $y=x^2+\dfrac{4x^2+13}{x^2+1}$; $D=\mathbb{R}$.

Hướng dẫn : $y=x^2+4+\dfrac{9}{x^2+1}=x^2+1+\dfrac{9}{x^2+1}+3\geq 9$.

5) $y=81x^3+\dfrac{3}{x}$; $D=(0;+\infty)$.

Hướng dẫn : $y=81x^3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\geq 4\sqrt[4]{81}=12$.

Bài 2. Tìm $\max\limits_{D} y$:

1) $y=\dfrac{\sqrt{2x-4}}{x}$; $D=[2;+\infty)$.

Hướng dẫn : Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si cho 4 và $(2x-4)$.

2) $y=\dfrac{x}{x^2+9}$; $D=[0;+\infty)$.

Hướng dẫn : Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si cho 9 và x^2.

3) $y=\dfrac{x}{(x+1)^3}$; $D=[0;+\infty)$.

Hướng dẫn : Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si cho ba số x, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$.

4) $y=\dfrac{x^2}{(x^2+3)^4}$; $D=\mathbb{R}$.

Hướng dẫn : Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si cho $4-x^2$ và x^2.

Bài 3. Tìm $\min u$ với $u=x+\dfrac{4}{(x-y)(y+1)^2}$ $(0\le y\le x)$.

Hướng dẫn : Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si cho $(6-2x)$, $(2x-2y)$, $(y+1)$, $(y+1)$.

Bài 4. Tìm $\max u$ với $u=(3-x)(4-y)(2x+3y)$, trong đó $0\le x\le 3$ và $0\le y\le 4$.

Hướng dẫn : Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si cho $(6-2x)$, $(12-3y)$, $(2x+3y)$.

Bài 5. Tìm $\min u$ với $u=\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{x^2+y^2}$, trong đó $x>0$, $y>0$ và $x+y=1$.

Hướng dẫn : $x+y=1\Rightarrow u=\dfrac{(x+y)^2}{xy}+\dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$

$$=3+\frac{x^2+y^2}{2xy}+\frac{x^2+y^2}{2xy}+\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

$$=3+\frac{x}{2y}+\frac{y}{2x}+\frac{x^2+y^2}{2xy}+\frac{2xy}{x^2+y^2}\ge 6.$$

Bài 6. Tìm $\min u$ với $u=\left(2+\dfrac{1}{x}\right)\left(2+\dfrac{1}{y}\right)\left(2+\dfrac{1}{z}\right)$, trong đó $x, y, z>0$ và $x+y+z=1$.

Hướng dẫn : Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si cho 5 số, ta được :

$$2x+1=x+x+x+y+z\ge 5\sqrt[5]{x^3yz}$$

$$\Rightarrow (2x+1)(2y+1)(2z+1)\ge 5^3xyz$$

$$\Rightarrow \min u=125\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3}.$$

Bài 7. Tìm $\max u$ với $u=\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}$, trong đó $x, y, z>0$ và $x+y+z=1$.

Hướng dẫn : Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si cho 3 số :

$$x+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\geq 3\sqrt[3]{\frac{x}{9}}=\frac{3}{\sqrt[3]{9}}\cdot\sqrt[3]{x}\Rightarrow\sqrt[3]{x}\leq\frac{\sqrt[3]{9}}{3}\left(x+\frac{2}{3}\right).$$

Vậy : $u=\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}\leq\sqrt[3]{9}$.

Do đó : $\max u=\sqrt[3]{9}\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3}$.

§ 2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Dấu nhị thức bậc nhất - Bất phương trình bậc nhất

a) Bất phương trình ẩn x.

Bất phương trình ẩn x là những bất phương trình có dạng :

$$f(x)<g(x); \quad (1)$$

$$f(x)>g(x). \quad (2)$$

b) Bất phương trình bậc nhất một ẩn

Bất phương trình bậc nhất một ẩn có dạng :

$$\begin{cases} ax+b<0 & (3)\\ ax+b>0 & (4)\\ ax+b\leq 0 & (5)\\ ax+b\geq 0. & (6)\end{cases}$$

Tập nghiệm : Xét $ax+b<0$

$$a>0 : S=\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right).$$

$$a<0 : S=\left(-\frac{b}{a};+\infty\right).$$

c) *Xét dấu của* $f(x)=ax+b$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)=ax+b$	Trái dấu a		0	Cùng dấu a	

(I)

d) Hệ bất phương trình

Gọi S_1 và S_2 là tập nghiệm của bất phương trình (1) và bất phương trình (2).

- (1) và (2) có nghiệm $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$.
- (1) và (2) vô nghiệm $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 = \varnothing$.
- (1) tương đương (2) $\Leftrightarrow S_1 = S_2$.
- (2) là hệ quả của (1) $\Leftrightarrow S_1 \subset S_2$.

2) Dấu tam thức bậc hai - Bất phương trình bậc hai - Hệ bất phương trình

a) Dấu của tam thức bậc hai

$$f(x)=ax^2+bx+c \ \ (a\neq 0)$$

$$\Delta = b^2-4ac$$

(II)

$\Delta<0 \Rightarrow f(x)$ luôn luôn cùng dấu với $a \Leftrightarrow a f(x)>0 \ \ \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Delta=0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) \text{ có nghiệm kép } x=-\dfrac{b}{2a} \\ f(x) \text{ cùng dấu với } a, \ \forall x\neq -\dfrac{b}{2a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=0 \\ a f(x)>0, \ \forall x\neq -\dfrac{b}{2a}. \end{cases}$$

$$\Delta>0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) \text{ có 2 nghiệm } x_1<x_2 \\ \text{Khoảng ngoài 2 nghiệm : } f(x) \text{ cùng dấu với } a \\ \text{Khoảng giữa 2 nghiệm : } f(x) \text{ trái dấu với } a. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a f(x)>0 \ \ \forall x\in(-\infty\,;\,x_1)\cup(x_2\,;+\infty) \\ a f(x)<0 \ \ \forall x\in(x_1\,;\,x_2). \end{cases}$$

b) Hệ quả. Xét $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$

$$f(x)>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta<0.\end{cases}$$

$$f(x)<0\ \ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta<0.\end{cases}$$

(III)

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. GIẢI VÀ BIỆN LUẬN BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

Phương pháp

$$ax+b<0\Leftrightarrow ax<-b.$$

- $a>0:S=\left(-\infty;-\dfrac{b}{a}\right).$
- $a<0:S=\left(-\dfrac{b}{a};+\infty\right).$
- $a=0:0x<-b.$
  - $b\geq 0:S=\varnothing.$
  - $b<0:S=\mathbb{R}.$

Ví dụ 1. Giải và biện luận bất phương trình : $m^2(x-2)>x-2m.$ (1)

Giải

Ta có : $(1)\Leftrightarrow(m^2-1)x>2m(m-1).$ (2)

- $m=1$: $(2)\Leftrightarrow 0x>0$ (vô nghiệm).
- $m=-1$: $(2)\Leftrightarrow 0x>4$ (vô nghiệm).
- $m>1$: $(2)\Leftrightarrow(m+1)x>2m\Leftrightarrow x>\dfrac{2m}{m+1}.$
- $-1<m<1$: $(2)\Leftrightarrow(m+1)x<2m\Leftrightarrow x<\dfrac{2m}{m+1}.$
- $m<-1$: $(2)\Leftrightarrow(m+1)x<2m\Leftrightarrow x>\dfrac{2m}{m+1}.$

Vậy : $m = \pm 1$: $S = \varnothing$.

$-1 < m < 1$: $S = \left(-\infty ; \dfrac{2m}{m+1}\right)$.

$m < -1 \vee m > 1$: $S = \left(\dfrac{2m}{m+1} ; +\infty\right)$.

Ví dụ 2. Giải và biện luận bất phương trình : $\dfrac{x-m}{2m} + \dfrac{x-1}{m} \le \dfrac{x+1}{2}$. (1)

Giải

Ta có : $(1) \Leftrightarrow \dfrac{(3-m)x}{2m} \le \dfrac{m+1}{m}$ $(m \neq 0)$. (2)

Lập bảng xét dấu $\dfrac{3-m}{2m}$:

m		0		3	
$3 - m$	+		+	0	−
$2m$	−	0	+		+
$\dfrac{3-m}{2m}$	−	‖	+	0	−

$m = 3$: $(2) \Leftrightarrow 0x \le \dfrac{4}{3}$ $\forall x$.

$m < 0 \vee m > 3$: $(2) \Leftrightarrow x \ge \dfrac{2(m+1)}{3-m}$.

$0 < m < 3$: $(2) \Leftrightarrow x \le \dfrac{2(m+1)}{3-m}$.

Vậy : ▪ $m = 3$: $S = \mathbb{R}$.

▪ $0 < m < 3$: $S = \left(-\infty ; \dfrac{2(m+1)}{3-m}\right]$.

▪ $m < 0 \vee m > 3$: $S = \left[\dfrac{2(m+1)}{3-m} ; +\infty\right)$.

Ví dụ 3. Tìm m để hai bất phương trình sau tương đương :

$(m-1)x + 3 - m > 0$; (1)

$(m+1)x + 2 - m > 0$. (2)

Giải

• Giải (1) : $m=1$: $(1) \Leftrightarrow 0x>-2 \ (\forall x)$.

$m>1$: $(1) \Leftrightarrow x>\dfrac{m-3}{m-1}$.

$m<1$: $(1) \Leftrightarrow x<\dfrac{m-3}{m-1}$.

$$\begin{cases} m<1: & S_1=\left(-\infty;\dfrac{m-3}{m-1}\right) \\ m=1: & S_1=\mathbb{R} \\ m>1: & S_1=\left(\dfrac{m-3}{m-1};+\infty\right). \end{cases}$$

• Giải (2) : $m=-1$: $(2) \Leftrightarrow 0x>-3 \ (\forall x)$.

$m>-1$: $(2) \Leftrightarrow x>\dfrac{m-2}{m+1}$.

$m<-1$: $(2) \Leftrightarrow x<\dfrac{m-2}{m+1}$.

$$\begin{cases} m<-1: & S_2=\left(-\infty;\dfrac{m-2}{m+1}\right) \\ m=-1: & S_2=\mathbb{R} \\ m>-1: & S_2=\left(\dfrac{m-2}{m+1};+\infty\right). \end{cases}$$

• $m<-1$: $S_1=S_2 \Leftrightarrow \dfrac{m-3}{m-1}=\dfrac{m-2}{m+1} \Rightarrow m=5$ (loại).

• $-1<m<1$: $S_1=S_2 \Leftrightarrow$ (vô nghiệm).

• $m>1$: $S_1=S_2 \Leftrightarrow \dfrac{m-3}{m-1}=\dfrac{m-2}{m+1} \Rightarrow m=5$ (nhận).

• $m=-1$: $S_1=S_2 \Leftrightarrow (-\infty;2)=\mathbb{R}$ (vô nghiệm).

• $m=1$: $S_1=S_2 \Leftrightarrow \mathbb{R}=\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ (vô nghiệm).

Vậy : $m=5$.

Dạng 2. GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT QUY VỀ VIỆC XÉT DẤU MỘT TÍCH HOẶC MỘT THƯƠNG

Ví dụ 1. Giải và biện luận bất phương trình : $(x+m)(x-m+2)\geq 0$. (1)

Giải

$$f(x)=(x+m)(x-m+2).$$

Trường hợp 1. $m<1$.

x	$-\infty$		$m-2$		$-m$		$+\infty$
$x+m$	$-$		$-$	0	$+$		
$x-m+2$	$-$	0	$+$		$+$		
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		

$$S=(-\infty;m-2]\cup[-m;+\infty).$$

Trường hợp 2. $m=1$: $S=\mathbb{R}$.

Trường hợp 3. $m>1$:

x	$-\infty$		$-m$		$m-2$		$+\infty$
$x+m$	$-$	0	$+$		$+$		
$x-m+2$	$-$		$-$	0	$+$		
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		

$$S=(-\infty;-m]\cup[m-2;+\infty).$$

Ví dụ 2. Giải bất phương trình : $(x^2-5x+4)^2\geq(x^2-9x-4)^2$. (1)

Giải

$$(1)\Leftrightarrow(2x^2-14x)(4x+8)\geq 0\Leftrightarrow 2x(x-7)\cdot 4(x+2)\geq 0$$
$$\Leftrightarrow 8x(x-7)(x+2)\geq 0.$$

x	$-\infty$		-2		0		7		$+\infty$
$8x$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		
$x-7$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		

Vậy : $S=[-2;0]\cup[7;+\infty)$.

Ví dụ 3. Giải và biện luận bất phương trình : $\dfrac{(m-2)x-m+2}{x-m}\le 0$. (1)

Giải

Ta có : $(1)\Leftrightarrow \dfrac{(m-2)(x-1)}{x-m}\le 0$. (2)

$f(x)=\dfrac{(m-2)(x-1)}{x-m}$, điều kiện : $x\neq m$.

Trường hợp 1. $m=2$: $(2)\Leftrightarrow\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)(0)\le 0\ \ (\forall x\neq 2)$.

Trường hợp 2. $m>2$: $(2)\Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x-m}\le 0$. (3)

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		m		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-m$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$		$+$	

$(3)\Leftrightarrow 1\le x<m$.

Trường hợp 3. $1<m<2$: $(2)\Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x-m}\ge 0$. (4)

Theo bảng xét dấu trên :

$(4)\Leftrightarrow x\le 1\vee x>m$.

Trường hợp 4. $m=1$: $(2)\Leftrightarrow 1\ge 0\ \ (\forall x\neq 1)$.

Trường hợp 5. $m<1$: $(2)\Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x-m}\ge 0$. (5)

x	$-\infty$		m		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-m$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$		$-$	0	$+$	

$(5)\Leftrightarrow x<m\vee x\ge 1$.

Kết luận : $m<1$: $S=(-\infty;m)\cup[1;+\infty)$.

$m=1$: $S=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$1<m<2$: $S=(-\infty;1]\cup(m;+\infty)$.

$m=2$: $S=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

$m>2$: $S=[1;m)$.

Dạng 3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Phương pháp

- $|A|\le|B|\Leftrightarrow -B\le A\le B$.
- $|A|\ge|B|\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A\le -B \\ A\ge B. \end{array}\right.$

Ví dụ 1. Giải bất phương trình : $|1-x|+|x-2|>|x-4|$. (1)

Giải

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		1		2		4	$+\infty$
$1-x$	+	0	−		−		−	
$x-2$	−		−	0	+		+	
$x-4$	−		−		−	0	+	

Trường hợp 1. $x<1$: $(1)\Leftrightarrow x<-1$ (thoả).

Trường hợp 2. $1\le x\le 2$: $(1)\Leftrightarrow x>3$ (vô nghiệm).

Trường hợp 3. $2<x<4$: $(1)\Leftrightarrow x>\dfrac{7}{3}\Rightarrow\dfrac{7}{3}<x<4$.

Trường hợp 4. $x\ge 4$: $(1)\Leftrightarrow x>-1\Rightarrow x\ge 4$.

Vậy : $S=(-\infty;-1)\cup\left(\dfrac{7}{3};+\infty\right)$.

Ví dụ 2. Giải và biện luận bất phương trình : $|mx-1|<2m-2$. (1)

Giải

Ta có : $(1)\Leftrightarrow \begin{cases} mx<2m-1 \\ mx>3-2m. \end{cases}$ (2)

Trường hợp 1. $m=0$: $(2)\Leftrightarrow\begin{cases}0x<-1\\0x>3\end{cases}$ (vô nghiệm).

Trường hợp 2. $m>0$: $(2)\Leftrightarrow\begin{cases}x<\dfrac{2m-1}{m}\\x>\dfrac{3-2m}{m}.\end{cases}$

Xét dấu : $\dfrac{2m-1}{m}-\dfrac{3-2m}{m}=\dfrac{4m-4}{m}$.

m	$-\infty$		0		1	$+\infty$
$4m-4$	$-$		$-$	0	$+$	
m	$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{4m-4}{m}$	$+$	‖	$-$	0	$+$	

$0<m<1$: $\dfrac{2m-1}{m}<\dfrac{3-2m}{m}$ (vô nghiệm).

$m=1$: $\begin{cases}x<1\\x>1\end{cases}$ (vô nghiệm).

$m>1$: $\dfrac{3-2m}{m}<x<\dfrac{2m-1}{m}$.

Trường hợp 3. $m<0$: $(2)\Leftrightarrow\begin{cases}x>\dfrac{2m-1}{m}\\x<\dfrac{3-2m}{m}.\end{cases}$

Do $m<0$ nên $\dfrac{3-2m}{m}<\dfrac{2m-1}{m}$ (vô nghiệm).

Vậy : $m\le 1$: $S=\varnothing$.

$m>1$: $S=\left(\dfrac{3-2m}{m};\dfrac{2m-1}{m}\right)$.

Dạng 4. XÉT DẤU MỘT BIỂU THỨC

Phương pháp

- Biểu thức $f(x)$ là nhị thức bậc nhất : Xem (I).

- Biểu thức $f(x)$ là tam thức bậc hai : Xem (II).
- Biểu thức $f(x)$ đưa được về dạng tích hoặc thương của nhiều thừa số mà mỗi thừa số là nhị thức bậc nhất hoặc tam thức bậc hai, ta lập bảng xét dấu.

Lưu ý. Dấu của phân thức $Q(x)=\dfrac{ax+m}{bx+n}$ tương đương dấu của tích $P(x)=(ax+m)(bx+n)$.

Ví dụ 1. Cho phương trình bậc hai :

$$(m+5)x^2-2(m+1)x+m^2+3m+2=0. \qquad (1)$$

Tìm m để (1) có :

1) Hai nghiệm trái dấu.

2) Hai nghiệm dương phân biệt.

Giải

1) Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\begin{cases} a=m+5\neq 0 \\ P=\dfrac{m^2+3m+2}{m+5}<0. \end{cases}$$

Bảng xét dấu :

m	$-\infty$		-5		-2		-1		$+\infty$
m^2+3m+2		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$m+5$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
P		$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

Yêu cầu bài toán được thoả mãn khi : $m\in(-\infty;-5)\cup(-2;-1)$.

2) Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\begin{cases} m\neq -5 \\ \Delta'=-(m+1)(m+3)^2>0 \\ P=\dfrac{m^2+3m+2}{m+5}>0 \\ S=\dfrac{2(m+1)}{m+5}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq -5;\ m\neq -3 \\ m<-1 \\ \left[\begin{array}{l} -5<m<-2 \\ m>-1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m<-5 \\ m>-1 \end{array}\right. \end{cases} \quad \text{(vô nghiệm).}$$

Vậy không có giá trị nào của m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.

Ví dụ 2. Xét ΔABC vuông tại A, số đo của hai cạnh cho bởi $AB=|x_1|$ và $AC=|x_2|$ với x_1, x_2 là hai nghiệm phương trình bậc hai

$$mx^2-2(m-2)x+m-3=0. \qquad (1)$$

Tính m để $S_{\Delta ABC}=2$.

Giải

Theo giả thiết :

$$\begin{cases} m\neq 0 \\ \Delta'=-m+4\geq 0 \\ P=\dfrac{m-3}{m}>0 \\ S=2\left(\dfrac{m-2}{m}\right)>0 \\ P=x_1.x_2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0,\ m\leq 4 \\ \left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>3 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>2 \end{array}\right. \\ \left|\dfrac{m-3}{m}\right|=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<0 \\ 3<m\leq 4 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=\dfrac{3}{5}\ (\text{loại}) \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow m=-1.$$

Dạng 5. GIẢI VÀ BIỆN LUẬN BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Phương pháp

Để giải bất phương trình bậc hai ta áp dụng định lí về dấu tam thức bậc hai (xem bảng (II)).

Ví dụ 1. Giải bất phương trình : $\dfrac{x-3}{x+1}-\dfrac{x-2}{x-1}\leq\dfrac{x^2+4x+15}{x^2-1}$. (1)

Giải

Ta có : $(1)\Leftrightarrow\begin{cases} x\neq\pm 1 \\ f(x)=\dfrac{x^2+7x+10}{x^2-1}\geq 0. \end{cases}$

x	$-\infty$		-5		-2		-1		1		$+\infty$
$x^2+7x+10$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$		
x^2-1	$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$		

Vậy : $S=(-\infty;-5]\cup[-2;-1)\cup(1;\infty)$.

Ví dụ 2. Giải và biện luận bất phương trình : $\dfrac{mx^2-2mx+2m+1}{x^2+1}<1$.(1)

Giải

Ta có : $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}\forall x\\ \dfrac{(m-1)x^2-2mx+2m}{x^2+1}<0\end{cases}$

$\Leftrightarrow f(x)=(m-1)x^2-2mx+2m<0$. (2)

Trường hợp 1. $m=1$: $f(x)=-2x+2<0\Leftrightarrow x>1$.

Trường hợp 2. $m\neq 1$: $\Delta'=-m^2+2m$.

Bảng xét dấu

m	$-\infty$		0		1		2	$+\infty$
$a=m-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\Delta'=-m^2-2m$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$

Vậy : $m<0$: $f(x)<0,\ \forall x\Rightarrow S=\mathbb{R}$.

$m>2$: $f(x)>0,\ \forall x\Rightarrow S=\varnothing$.

$0<m<1$: $S=(-\infty;\ x_1)\cup(x_2;+\infty)$.

$1<m<2$: $S=(x_1;x_2)$.

$m=0$: $S=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$m=2$: $S=\varnothing$.

Dạng 6. TAM THỨC CÓ DẤU NHẤT ĐỊNH TRÊN $\mathbb{R}$.

Phương pháp

Sử dụng bảng (III).

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=\sqrt{3x^2+2(m-4)x-4m+4}$. Tìm m để hàm số có tập xác định $\mathbb{R}$.

Giải

Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$3x^2+2(m-4)x-4m+4\geq 0\ \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a=3>0 \\ \Delta'=(m-4)^2+12(m-1)\leq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow (m+2)^2\leq 0 \Rightarrow m=-2.$$

Ví dụ 2. Tìm m để $-3\leq \dfrac{x^2+mx-2}{x^2-x+1}\leq 2,\ \forall x.$

Giải

Do $x^2-x+1>0\ \forall x\ (a=1>0;\Delta=-3<0)$ nên yêu cầu bài toán được thoả mãn khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} 4x^2+(m-3)x+1\geq 0 & \forall x \\ x^2-(m+2)x+4\geq 0 & \forall x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1=(m+1)(m-7)\leq 0 \\ \Delta_2=(m+6)(m-2)\leq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1\leq m\leq 7 \\ -6\leq m\leq 2 \end{cases} \Rightarrow -1\leq m\leq 2.$$

Ví dụ 3. Chứng minh rằng $\forall a, b : a^2+5b^2-4ab+2a-6b+2\geq 0$.

Giải

Xét $f(a)=a^2-2(2b-1)a+5b^2-6b+2$. Ta có :

$$\Delta'_a=-b^2+2b-1=-(b-1)^2\leq 0\ (\forall b).$$

Vậy $f(a)\geq 0\ (\forall a, \forall b)$ (đpcm).

Dạng 7. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÔ NGHIỆM, CÓ NGHIỆM

Phương pháp

- Sử dụng phép tương đương :
$$f(x)>0 \text{ vô nghiệm } \Leftrightarrow f(x)\leq 0\ \forall x.$$
- Sử dụng hai lần phủ định :
$$f(x)>0 \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow \left(\overline{f(x)\leq 0\ (\forall x)}\right).$$

Ví dụ 1. Tìm m để bất phương trình sau vô nghiệm :

$$(m+1)x^2-2mx-m<0.$$

Giải

Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$(m+1)x^2-2mx-m\geq 0\ \ \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} m+1>0 \\ \Delta' = m(2m+1)\leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m>-1 \\ -\dfrac{1}{2}\leq m\leq 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2}\leq m\leq 0.$$

Ví dụ 2. Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm :

$$mx^2-2(m-1)x+m-3\geq 0.$$

Giải

Yêu cầu bài toán tương đương với phủ định của mệnh đề $(a=m<0$ và $\Delta' = m+1<0) \Leftrightarrow$ phủ định mệnh đề $(m<-1) \Leftrightarrow m\geq 1$.

Dạng 8. BẤT PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA CĂN THỨC

Phương pháp

Hai dạng cơ bản :

- $\sqrt{A}<B \Leftrightarrow \begin{cases} A\geq 0 \\ B\geq 0 \\ A<B^2. \end{cases}$

- $\sqrt{A}>B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A\geq 0 \\ B<0 \end{cases} \\ \begin{cases} B\geq 0 \\ A>B^2. \end{cases} \end{array}\right.$

Ví dụ 1. Giải bất phương trình :

$$\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}+2\sqrt{49x^2+7x-42}\geq 1-14x. \qquad (1)$$

Giải

Điều kiện : $\begin{cases} 7x+7\geq 0 \\ 7x-6\geq 0 \\ 49x^2+7x-42\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x\geq \frac{6}{7}.$ (2)

Ta có : $\left(\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}\right)^2 = 1+14x+2\sqrt{49x^2+7x-42}$. Do đó :

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}+\left(\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}\right)^2-2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}\geq 0 \\ t^2+t-2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\leq -2 \text{ (loại)} \\ t\geq 1 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}\geq 1 \Leftrightarrow 1+14x+2\sqrt{49x^2+7x-42}\geq 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{49x^2+7x-42}\geq -7x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}49x^2+7x-42\geq 0\\ -7x<0\end{cases}\\ \begin{cases}-7x\geq 0\\ 49x^2+7x-42\geq 49x^2\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x\leq -1\\ x\geq \dfrac{6}{7}\end{array}\right.\\ x>0\end{array}\right. \Rightarrow x\geq \frac{6}{7} \text{ (thoả (2)).}$$

$$\left[\begin{array}{l}x\leq 0\\ x\geq 6\end{array}\right. \text{(vô nghiệm)}$$

Vậy $S=\left[\frac{6}{7};+\infty\right)$.

Ví dụ 2. Tìm m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x :

$$\sqrt{x^2-2mx+m^2+4}\leq 2x-2. \qquad (1)$$

Giải

$$(1)\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-2mx+m^2+4\geq 0 \text{ (thoả)}\\ 2x-2\geq 0\\ x^2-2mx+m^2+4\leq 4x^2-8x+4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\geq 1\\ f(x)=3x^2+2(m-4)x-m^2\geq 0.\end{cases} \qquad (2)$$

$$\Delta'_{f(x)}=(m-4)^2+3m^2>0 \ \ \forall m.$$

Yêu cầu bài toán tương đương với $f(x)\geq 0$ nghiệm đúng $\forall x\geq 1$, tức là (2) có hai nghiệm x_1, x_2 thoả $x_1\leq x_2\leq 1$. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases}\Delta'>0 \ \ (\forall m)\\ x_1-1\leq 0\\ x_2-1\leq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x_1-1)(x_2-1)\geq 0\\ (x_1-1)+(x_2-1)\leq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1x_2-(x_1+x_2)+1\geq 0\\ x_1+x_2-2\leq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{m^2}{3}+\dfrac{2(m-4)}{3}+1\geq 0 \\ -\dfrac{2(m-4)}{3}-2\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2+2m-5\geq 0 \ \text{(vô nghiệm)} \\ m\geq 1 \end{cases}$$

Vậy không có giá trị nào của m để bất phương trình thoả mãn yêu cầu bài toán.

C. BÀI TẬP

Bài 1. Giải và biện luận bất phương trình :

$$\sqrt{x-1}(x-2m)-\frac{x^2-mx+m^2-3}{\sqrt{x-1}}>0.$$

Bài 2. Giải các bất phương trình :

1) $\dfrac{3x(x+1)}{x-1}+\dfrac{2(x-1)x}{x+1}\geq\dfrac{4x(x^2+1)}{x^2-1}$.

2) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x+4}<\dfrac{3}{x+3}$.

Bài 3. Giải các bất phương trình :

1) $x^2+(x+1)^2\leq\dfrac{15}{x^2+x+1}$.

2) $x(x+1)(x+2)(x+3)>24$.

3) $5\sqrt{x}+\dfrac{5}{2\sqrt{x}}<2x+\dfrac{1}{2x}+4$.

Bài 4. Giải bất phương trình : $\dfrac{1}{|x^2-4x+3|}>\dfrac{1}{2x^2-x-1}$.

Bài 5. Giải bất phương trình : $1+\sqrt{x^2-4}<2|1-x|$.

Bài 6. a) Chứng minh : $\dfrac{1}{3}\leq\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\leq 3 \quad \forall x$.

b) Cho hàm số : $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$. Tính $\max y$ và $\min y$.

Bài 7. Cho phương trình bậc hai :

$$(m-1)x^2-2m(m-1)x+m(m+3)=0.$$

1) Giải và biện luận phương trình.

2) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thoả

$$\frac{x_1^2}{x_2^2}+\frac{x_2^2}{x_1^2}\le 2.$$

Bài 8. Tìm m để phương trình sau đây vô nghiệm :

$$(m^2-3m+2)x^4-2(m^2-5m+6)x^2+m^2-4m+3=0.$$

Bài 9. Cho bất phương trình :

$$f(x)=(m-2)x^2+2(2m-3)x+5m-6>0.$$

Tìm m để :

1) $f(x)>0\ \forall x$.

2) $f(x)>0$ vô nghiệm.

3) $f(x)>0$ nghiệm đúng với $\forall x>0$.

Bài 10. Cho bất phương trình : $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\frac{1+x^2}{1-x^2}\le m$. Tìm m để bất phương trình có nghiệm.

Bài 11. Tìm m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x :

$$(x+1)(x+3)(x^2+4x+1)\ge m.$$

LỜI GIẢI

Bài 1. Điều kiện : $x>1$. Bất phương trình đã cho tương đương với :

$$(m+1)x<-(m+1)(m-3). \qquad (1)$$

- $m=-1$: (1) vô nghiệm.
- $m>-1$: $(1)\Rightarrow x<3-m$ là nghiệm nếu : $1<3-m\Leftrightarrow m<2$.

Vậy $-1<m<2 : S=(1;3-m)$.

- $m<-1$: $(1)\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>3-m. \end{cases}$

a) $3-m\le 1\Leftrightarrow m\ge 2$ (loại).

b) $3-m>1\Leftrightarrow m<2\Rightarrow x>3-m$.

Vậy $m<-1 : S=(3-m;+\infty)$.

Kết luận : $m<-1 \quad : S=(3-m;+\infty)$.

$-1<m<2 : S=(1;3-m)$.

$m=-1 \quad : S=\varnothing$.

$m\ge 2 \quad : S=\varnothing$.

Bài 2. 1) $\dfrac{3x(x+1)}{x-1}+\dfrac{2(x-1)x}{x+1}\ge\dfrac{4x(x^2+1)}{x^2-1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\pm1\\ \dfrac{x(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}\ge0.\end{cases}$ (1)

• $x>-1$: $(1)\Leftrightarrow\dfrac{x^2+x}{x-1}\ge0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}-1\le x\le0\\ x>1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x\le0\\ x>1.\end{array}\right.$ (2)

• $x<-1$: $(1)\Leftrightarrow\dfrac{x^2+x}{x-1}\le0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x\le-1\\ 0\le x<1\end{array}\right.\Rightarrow x<-1.$ (3)

Tóm lại : $S=(-\infty;-1)\cup(-1;0]\cup(1;+\infty)$.

2) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x+4}<\dfrac{3}{x+3}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq0,\ x\neq-4,\ x\neq-3\\ \dfrac{x+12}{x(x+4)(x+3)}<0\end{cases}$

Lập bảng xét dấu (nhị thức hoặc tam thức).

$S=(-12;-4)\cup(-3;0)$.

Bài 3. 1) Đặt $t=x^2+x+1>0$.

$x^2+(x+1)^2\le\dfrac{15}{x^2+x+1}\Leftrightarrow2t^2-t-15\le0\Leftrightarrow-\dfrac{5}{2}\le t\le3$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x-2\le0\\ 2x^2+2x+7\ge0\ \ (\forall x)\end{cases}$

$\Rightarrow-2\le x\le1.$

2) Đặt $t=x^2+3x$.

$x(x+1)(x+2)(x+3)>24\Leftrightarrow t^2+2t-24>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t<-6\\ t>4\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+3x+6<0\ \text{(vô nghiệm)}\\ x^2+3x-4>0\end{array}\right.$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x<-4\\ x>1.\end{array}\right.$

3) Điều kiện $x>0$. Đặt $t=\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}>0.$

$5\sqrt{x}+\dfrac{5}{2\sqrt{x}}<2x+\dfrac{1}{2x}+4\Leftrightarrow2t^2-5t+2>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t<\dfrac{1}{2}\\ t>2\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+3x+1<0 \text{ (vô nghiệm)} \\ 4x^2-12x+1>0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x<\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2} \\ x>\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Vậy : $S=\left(0;\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$.

Bài 4. Điều kiện $x\neq 1,\ x\neq 3,\ x\neq -\dfrac{1}{2}$.

- $\begin{cases} x<-\dfrac{1}{2} \\ x>1 \end{cases}$ $(2x^2-x-1>0)$:

$$\frac{1}{|x^2-4x+3|}>\frac{1}{2x^2-x-1}\Leftrightarrow |x^2-4x+3|<2x^2-x-1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-5x+2>0 \\ x^2+3x-4>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-4 \\ x>1. \end{cases} \quad (1)$$

- $-\dfrac{1}{2}<x<1$ $(2x^2-x-1<0)$:

$$\frac{1}{|x^2-4x+3|}>\frac{1}{2x^2-x-1}\Leftrightarrow |x^2-4x+3|>2x^2-x-1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-5x+2<0 \\ x^2+3x-4<0 \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{3}<x<1. \quad (2)$$

Hợp (1) và (2) : $S=(-\infty;-4)\cup\left(\dfrac{2}{3};1\right)\cup(1;3)\cup(3;+\infty)$.

Bài 5. Điều kiện $x^2-4\geq 0\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq -2 \\ x\geq 2. \end{cases}$

- $x\geq 2\Rightarrow x>1$ $(1-x<0)$:

$$1+\sqrt{x^2-4}<2|1-x|\Leftrightarrow \sqrt{x^2-4}<2x-3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4\geq 0 \\ 2x-3\geq 0 \\ 3x^2-12x+13>0 \quad (\forall x) \end{cases} \Rightarrow x\geq 2.$$

• $x \le -2 \Rightarrow x < 1 \ (1-x>0)$:

$1+\sqrt{x^2-4} < 2|1-x| \Leftrightarrow \sqrt{x^2-4} < 1-2x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4 \ge 0 \\ 1-2x \ge 0 \\ 3x^2-4x+5>0 \ (\forall x) \end{cases} \Rightarrow x \le -2.$$

Vậy : $S = (-\infty ; -2] \cup [2 ; +\infty)$.

Bài 6. a) Do $x^2-x+1>0 \ (\forall x) \ (a=1>0, \Delta=-3<0)$ nên :

$$\frac{1}{3} \le \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} \le 3 \ \ \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-1)^2 \ge 0 \\ 2(x+1)^2 \ge 0 \end{cases} \text{(đúng)} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

b) $D_y = \mathbb{R}$.

Hàm y tồn tại $\Leftrightarrow$ phương trình $y = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ có nghiệm x

$$\Leftrightarrow (y-1)x^2 - (y+1)x + y - 1 = 0. \qquad (1)$$

• $y=1$: (1) có nghiệm $x=0$.

• $y \ne 1$: (1) có nghiệm $x \Leftrightarrow \Delta \ge 0 \Leftrightarrow (3-y)(3y-1) \ge 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \le y \le 3.$$

$\max y = 3$ khi $x=1$; $\min y = \dfrac{1}{3}$ khi $x=-1$.

Bài 7. $(m-1)x^2 - 2m(m-1)x + m(m+3) = 0. \qquad (1)$

$m=1$: (1) $\Leftrightarrow 0x = 4$ (vô nghiệm)

$m \ne 1$: $\Delta' = m(m-1)(m^2-2m-3)$.

1) Trường hợp 1. $\begin{bmatrix} -1<m<0 \\ 1<m<3 \end{bmatrix}$: (1) vô nghiệm.

Trường hợp 2. $m=-1$: (1) có nghiệm kép $x_0 = -1$.

$m=0$: (1) có nghiệm kép $x_0 = 0$.

$m=3$: (1) có nghiệm kép $x_0 = 3$.

Trường hợp 3. $\begin{bmatrix} m<-1 \\ 0<m<1 \\ m>3 \end{bmatrix}$: (1) có hai nghiệm phân biệt

$$x_{1,2}=\frac{m(m-1)\pm\sqrt{m(m-1)(m^2-2m-3)}}{m-1}.$$

2) $\dfrac{x_1^2}{x_2^2}+\dfrac{x_2^2}{x_1^2}\le 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m\ne 1,\ m\ne 0,\ m\ne -3 \\ \Delta'\ge 0 \\ \left(x_1^2-x_2^2\right)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m\le -1 \\ 0<m<1 \\ m\ge 3 \end{array}\right. \\ |x_1|=|x_2| \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta'=0 \\ S=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=3 \\ m=0 \ \text{(loại)}. \end{array}\right.$$

Vậy : $m\in\{-1;3\}$.

Bài 8. $(m^2-3m+2)x^4-2(m^2-5m+6)x^2+m^2-4m+3=0$ (1)

$$(1)\Leftrightarrow \begin{cases} t=x^2\ge 0 \\ (m-1)(m-2)t^2-2(m-2)(m-3)t+(m-1)(m-3)=0 \quad (2) \end{cases}$$

- $m=1$: $(2)\Leftrightarrow t=0\Leftrightarrow x=0$ (loại).
  $m=2$: $(2)\Leftrightarrow 0t=1$ (vô nghiệm) (nhận). (3)
- $\Delta'<0\Leftrightarrow \begin{cases} m\ne 1 \text{ và } m\ne 2 \\ (m-2)(m-3)(5-3m)<0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{5}{3}<m<2 \\ m>3. \end{array}\right.$ (4)
- $\begin{cases} \Delta'\ge 0 & (5) \\ P=\dfrac{m^2-4m+3}{m^2-3m+2}=\dfrac{(m-1)(m-3)}{(m-1)(m-2)}>0 & (6) \\ S=\dfrac{2(m-2)(m-3)}{(m-1)(m-2)}<0 & (7) \end{cases}$

Xét (6) : $m>1$: $P>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<2 \\ m>3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1<m<2 \\ m>3. \end{array}\right.$ (8)

$m<1$: $P>0\Leftrightarrow 2<m<3$ (loại).

Xét (7) : $m>2$: $S<0\Leftrightarrow 1<m<3\Rightarrow 2<m<3$. (9)

$m<2$: $S<0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>3 \end{array}\right. \Rightarrow m<1$. (10)

Giao các kết quả (5), (8), (9), (10) : Vô nghiệm.

Vậy : $m\in\left(\dfrac{5}{3};2\right]\cup(3;+\infty)$.

Bài 9. $f(x)=(m-2)x^2+2(2m-3)x+5m-6>0$. (1)

1) $m=2: f(x)>0\ (\forall x)\Leftrightarrow x+2>0\ (\forall x)$ (loại).

$$m\neq 2: f(x)>0\ (\forall x)\Leftrightarrow \begin{cases} a=m-2>0 \\ \Delta'=-m^2+4m-3<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m>2 \\ \left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>3 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow m>3.$$

2) $f(x)>0$ (vô nghiệm) $\Leftrightarrow f(x)\leq 0\ \forall x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=m-2<0 \\ \Delta'=-m^2+4m-3\leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m<2 \\ \left[\begin{array}{l} m\leq 1 \\ m\geq 3 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow m\leq 1.$$

3) • $\left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>3 \end{array}\right.$ $(\Delta'<0)$

$m<1 (a=m-2<0): f(x)<0\ \forall x$ (loại).

$m>3 (a=m-2>0): f(x)>0\ \forall x \Rightarrow f(x)>0\ \forall x>0$ (nhận) (2)

• $m=1: f(x)=-(x+1)^2<0\ \ \forall x>0$ (loại).

$m=3: f(x)=(x+3)^2>0\ \ \forall x>0$ (nhận). (3)

• $1<m<3\ (\Delta'>0)$

$1<m<2\ (a=m-2<0): f(x)>0: \forall x>0$ (loại).

$2<m<3\ (a=m-2>0):$

$$f(x)>0\ \forall x>0 \Leftrightarrow x_1<x_2<0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \text{ (thoả)} \\ x_1<0 \\ x_2<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5m-6}{m-2}>0 \\ \dfrac{2m-3}{m-2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<\dfrac{6}{5} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m<\dfrac{3}{2} \\ m>2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<\dfrac{6}{5} \end{array}\right. \Rightarrow 2<m<3. \quad (4)$$

Vậy : $m>2$.

Bài 10. $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\frac{1+x^2}{1-x^2}\le m$. (1)

Điều kiện : $\begin{cases} x\neq\pm 1 \\ \frac{1-x}{1+x}>0 \end{cases} \Rightarrow -1<x<1$.

Đặt : $t=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\ge 2$ (Cô-si) $\Rightarrow t^2=\frac{1-x}{1+x}+\frac{1+x}{1-x}+2$

$$=2\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)+2$$

$$(1)\Leftrightarrow f(t)=\frac{t^2}{2}+t-1\le m. \quad (2)$$

Yêu cầu bài toán tương đương với :

(1) có nghiệm $x\in(-1;1)\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t\in[2;+\infty)$.

$$\Leftrightarrow \min_{[2;+\infty)} f\le m\Leftrightarrow 3\le m.$$

Bài 11. $(x+1)(x+3)(x^2+4x+1)\ge m$. (1)

Đặt : $t=(x+1)(x+3)=x^2+4x+3$. Xét điều kiện của t :

Phương trình $x^2+4x+3-t=0$ có nghiệm x khi và chỉ khi :

$$\Delta'=4-(3-t)\ge 0\Leftrightarrow t\ge -1.$$

$$(1)\Leftrightarrow f(t)=t^2-2t\ge m$$

(1) có nghiệm với mọi x $\Leftrightarrow \min_{[1;+\infty)} f\ge m\Leftrightarrow f(1)\ge m\Leftrightarrow -1\ge m.$

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải và biện luận bất phương trình : $\sqrt{x-m}\,(2x-m+2)\le 0$.

Bài 2. Giải các bất phương trình :

1) $|x|-|x-2|\le 2|x-4|$. 2) $\frac{1}{|x-1|(x-3)}>-1$.

Bài 3. Giải các bất phương trình :

1) $x(x+1)<\frac{42}{x^2+x+1}$.

2) $-1<\frac{10x^2-3x-2}{-x^2+3x-2}<1$.

3) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15<0$.

Bài 4. Giải các bất phương trình sau :

1) $x^2-3|x-1|+3<2x$.

2) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3x-2}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{3x-2}}\le 2$.

Bài 5. Cho phương trình $x^2-2(m-2)x+m^2-9=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm thoả : $0<x_1<x_2<2$.

Bài 6. Cho bất phương trình $(m^2-m)x^2-2mx+2\ge 0$. Tìm m để :

1) Bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

2) Bất phương trình có nghiệm.

Bài 7. Cho bất phương trình $x^2-2x+(m-2)^2>0$. Tìm m để :

a) Bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

b) Bất phương trình vô nghiệm.

c) Bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x<0$.

Bài 8. Cho hai bất phương trình : $x^2-2(m+1)x+m(m+2)<0$; (1)

$x^2-2(m-1)x+m(m-2)>0$; (2)

Chứng minh với mọi m, (2) là bất phương trình hệ quả của (1).

Bài 9. Tìm m để bất phương trình sau đây nghiệm đúng với mọi x :

$$(3x^2-4x)^2+(3x^2-4x)-(5m^2-3m)\ge 0.$$

HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài 1. $\sqrt{x-m}\,(2x-m+2)\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge m \\ x\le \dfrac{m-2}{2}. \end{cases}$

$m<-2 : S=\left[m;\dfrac{m-2}{2}\right]$. $\quad m=-2 : S=\{-2\}$.

$m>-2 : S=\varnothing$.

Bài 2. 1) $S=(-\infty;3]\cup[4;+\infty)$.

2) $x<1 : \dfrac{1}{|x-1|(x-3)}>-1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-4x+2}{x^2-4x+3}>0 \Rightarrow x<2-\sqrt{2}$.

$x>1:\dfrac{1}{|x-1|(x-3)}>-1\Leftrightarrow\dfrac{(x-2)^2}{x^2-4x+3}>0\Rightarrow x>3.$

Vậy : $S=(-\infty;2-\sqrt{2})\cup(3;+\infty)$.

Bài 3. 1) $-3<x<2$. 2) $-\dfrac{2}{3}<x<0\vee\dfrac{6}{11}<x<\dfrac{2}{3}$.

3) $-4-\sqrt{6}<x<-6$.

Bài 4. 1) $-1<x<0\vee 2<x<3$. 2) $\dfrac{2}{3}\le x<1\vee x\ge 2$.

Bài 5. $3<m\le\dfrac{13}{4}$.

Bài 6. 1) $\begin{bmatrix}m=0\\m<0\vee m\ge 2\end{bmatrix}\Rightarrow m\le 0\vee m\ge 2$.

2) $\forall m$.

Bài 7. 1) $m<1\vee m>3$. 2) Không có m.

3) $\forall m$.

Bài 8. Hướng dẫn : Vì $(m;m+2)\subset(m;+\infty)\,(\forall m)\Rightarrow S_{(1)}\subset S_{(2)}\,(\forall m)$.

Bài 9. Hướng dẫn : Đặt $t=3x^2-4x$ và $p=5m^2-3m$. Yêu cầu bài toán tương đương với :

$f(t)=t^2+t\ge p$ nghiệm đúng $\forall t\ge-\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow p\le-\dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{10}\le m\le\dfrac{1}{2}$.

ÔN TẬP CHƯƠNG IV

A. BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Chứng minh rằng với mọi $a, b, c, d\in\mathbb{R}$:

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\ge\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}.$$

Bài 2. a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng :

$$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a+b)^2>a^3+b^3+c^3.$$

Bài 3. Cho phương trình $ax^2+bx+c=0$ $(a, b, c \neq 0)$ và giả sử phương trình có hai nghiệm dương x_1, x_2.

1) Chứng minh phương trình $cx^2+bx+a=0$ cũng có hai nghiệm dương x_3, x_4.

2) Chứng minh $x_1+x_2+x_3+x_4 \geq 4$.

Bài 4. Chứng minh rằng với mọi $a, b>0$:

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+6} \leq \sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

Dấu "=" xảy ra khi nào.

Bài 5. a, b, c là 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh :

$$ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca).$$

Bài 6. Giải và biện luận phương trình :

$$(m-1)x^2-2m(m-1)x+m(m+3)=0.$$

Bài 7. Chứng minh rằng $\forall x, \forall y$: $x^2+3xy+3y^2+2x+2y+3 \geq 0$.

Bài 8. Cho phương trình $(m^2-1)x^4-2(m^2-2m)x^2+m^2-4m=0$. Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Bài 9. Tìm m để hai phương trình sau tương đương :

$$x^2-(m+1)x+m \leq 0 \text{ và } mx^2-(m^2+1)x+m \leq 0.$$

Bài 10. Cho bất phương trình : $1-\sqrt{1-x^2} \leq m+x^2$. Tìm m để :

1) Bất phương trình luôn luôn nghiệm đúng.

2) Bất phương trình có nghiệm .

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. Sử dụng phép biến đổi tương đương :

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \geq ac+bd \Leftrightarrow a^2d^2+b^2c^2 \geq 2ad.bc$$

$$\Leftrightarrow (ad-bc)^2 \geq 0 \text{ (đúng).}$$

Bài 2. Sử dụng định nghĩa.

$$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a+b)^2-a^3+b^3+c^3=$$

$= (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) > 0.$

Bài 3. 1) Theo giả thiết :

$$\begin{cases} \Delta_1 = b^2 - 4ac > 0 \\ P_1 = \dfrac{c}{a} > 0 \\ S_1 = -\dfrac{b}{a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_2 = b^2 - 4ac > 0 \\ P_2 = \dfrac{a}{c} > 0 \\ S_2 = -\dfrac{b}{c} > 0. \end{cases}$$

2) Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si ta được :

$$x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{P_1} \; ; \; x_3 + x_4 \geq 2\sqrt{P_2}$$

Suy ra đpcm.

Bài 4. Luỹ thừa bậc 3 hai vế và dùng Bất đẳng thức Cô-si. Dấu "=" khi $a = b$.

Bài 5. Vế trái : Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si cho 2 số, 3 lần.

Vế phải : Thêm hai vế $a^2 + b^2 + c^2$ và sử dụng bất đẳng thức tam giác.

Bài 6. $m = 1$: (1) vô nghiệm .

$m \neq 1$: $\Delta' = m(m-1)(m^2 - 2m - 3)$ với $m \neq 1$.

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = 0 \vee m = -1 \vee m = 3.$$

Kết luận :

$-1 < m < 0 \vee 1 \leq m < 3$: Vô nghiệm.

$m < -1 \vee 0 < m < 1 \vee m > 3$: 2 nghiệm.

$m = -1$: Nghiệm kép $x = -1$.

$m = 0$: Nghiệm kép $x = 0$.

$m = 3$: Nghiệm kép $x = 3$.

Bài 7. Xét dấu tam thức (với y là tham số) :

$$f(x) = x^2 + (3y+2)x + 3y^2 + 2y + 3.$$

Bài 8. Phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} a = m^2 - 1 \neq 0 \\ \Delta' = 5m^2 - 4m > 0 \\ P = \dfrac{m^2 - 4m}{m^2 - 1} > 0 \\ S = \dfrac{2(m^2 - 2m)}{m^2 - 1} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < -1 \\ \dfrac{4}{5} < m < 1 \\ m > 4. \end{cases}$$

Bài 9. $\begin{cases} m=1: & S_1=\{1\} \\ m<1: & S_1=[m;1] \\ m>1: & S_1=[1;m]. \end{cases}$

$$\begin{cases} m=0 & : S_2=[0;+\infty) \\ m<-1 \vee 0<m<1: & S_2=\left[m;\dfrac{1}{m}\right] \\ -1<m<0 \vee m>1: & S_2=\left[\dfrac{1}{m};m\right] \\ m=1 & : S_2=\{1\} \\ m=-1 & : S_2=\{-1\}. \end{cases}$$

Hai phương trình đã cho tương đương khi và chỉ khi :

$$S_1=S_2 \Leftrightarrow m=1.$$

Bài 10. $1-\sqrt{1-x^2} \le m+x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ t=\sqrt{1-x^2} \ge 0 \\ f(t)=t^2-t \le m \end{cases}$

1) Bất phương trình nghiệm đúng $\forall x \in [-1;1] \Leftrightarrow \max\limits_{[-1;1]} f = 2 \le m$.

2) Bất phương trình có nghiệm $x \in [-1;1] \Leftrightarrow \min\limits_{[-1;1]} f = -\dfrac{1}{4} \le m$.

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho $a>b$ và c tuỳ ý. Câu nào sau đây đúng ?

A) $a-c>b-c$. B) $a^2>b^2$.

C) $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$. D) $\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}$ $(c\neq 0)$.

Câu 2. Câu nào sau đây sai ?

A) $\begin{cases} a<b \\ c<d \end{cases} \Rightarrow a+c<b+d$. B) $\begin{cases} 0<a<b \\ 0<c<d \end{cases} \Rightarrow a.c<b.d$.

C) $\begin{cases} a<b \\ c<d \end{cases} \Rightarrow a-c<b-d$. D) $0<a<b \Rightarrow \sqrt{a}<\sqrt{b}$.

Câu 3. Câu nào sau đây đúng ?

A) $\begin{cases} a<b \\ c<d \end{cases} \Rightarrow a.c<b.d$.

B) $\begin{cases} 0<a<b \\ 0<c<d \end{cases} \Rightarrow \dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{d}$.

C) $c<a<b \Rightarrow ac<bc$.

D) $\begin{cases} a<b \\ b<c \end{cases} \Rightarrow a<c$.

Câu 4. Cho $b<0<a$. Câu nào sau đây sai ?

A) $a-b>0$.

B) $-a<-b$.

C) $ab>0$.

D) $ab<0$.

Câu 5. Cho $b<0<a$. Câu nào sau đây đúng ?

A) $-a>b$.

B) $a>-b$.

C) $a^2>b^2$.

D) $-a<-b$.

Câu 6. Câu nào sau đây đúng ?

A) $a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2 \quad \forall a, b$.

B) $a^3+b^3 \leq a^2b+ab^2 \quad \forall a, b$.

C) $a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2 \quad \forall a, b>0$.

D) Không có câu nào đúng cả.

Câu 7. Với mọi $a>0$; $b>0$, câu nào sau đây đúng ?

A) $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$.

B) $\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$.

C) $\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} \leq \dfrac{a+b}{2}$.

D) Cả 3 câu đều đúng.

Câu 8. Với mọi a, b, câu nào sau đây sai ?

A) $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$.

B) $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3 \leq \dfrac{a^3+b^3}{2}$.

C) $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^4 \leq \dfrac{a^4+b^4}{2}$.

D) $\dfrac{a^2}{a^4+1} \leq \dfrac{1}{2}$.

Câu 9. Câu nào sau đây sai ?

A) $a+\dfrac{1}{a} \geq 2 \quad \forall a>0$.

B) $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \geq 4 \quad \forall a>0, \ b>0$.

C) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9 \quad \forall a>0, b>0, c>0$.

D) Cả 3 câu đều đúng.

Câu 10. Nếu $\frac{a}{\sqrt{b}}-\sqrt{a}\geq\sqrt{b}-\frac{b}{\sqrt{a}}$ thì dấu "=" xảy ra khi nào ?

A) $a>0, b>0$.
B) $a=b$.
C) $a=b>0$.
D) Dấu "=" không xảy ra.

Câu 11. Cho 3 hàm số :

(I) $y=f(x)=x^2-2x+3$.
(II) $y=g(x)=\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$.

(III) $y=h(x)=\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$.

Cặp hàm số nào có cùng giá trị nhỏ nhất ?

A) (I) và (II).
B) (II) và (III).
C) (I) và (III).
D) Cả 3 hàm số.

Câu 12. Để tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)=\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$. Một học sinh lập luận như sau :

(I) $D_f=\mathbb{R}$ và $f(x)=\sqrt{x^2+4}+\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$.

(II) Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si cho 2 số dương, ta có $f(x)\geq 2$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x^2+4}=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\Leftrightarrow x^2=-3$ (vô nghiệm).

(III) Vì dấu "=" không xảy ra nên hàm số f không đạt giá trị nhỏ nhất.

Lập luận trên, nếu sai, thì sai tại :

A) (I).
B) (II).
C) (III).
D) Lập luận đúng.

Câu 13. Cho hàm số $y=\frac{x^2+2x+2}{x+1}$ $(x>-1)$. $\min y$ bằng :

A) 2.
B) 0.
C) 1.
D) Kết quả khác.

Câu 14. Cho hàm số : $y = x + \dfrac{4}{x-1}$ $(x > 1)$. min y bằng :

A) 2. B) 4.
C) 5. D) Kết quả khác.

Câu 15. Cho hàm số $y = \dfrac{(x+2)(x+8)}{x}$ $(x > 0)$. min y bằng :

A) 4. B) 6.
C) 16. D) 18.

Câu 16. Cho hàm số $y = \dfrac{4}{x} + \dfrac{x}{1-x}$ $(0 < x < 1)$. min y bằng :

A) 2. B) 4.
C) 8. D) Kết quả khác.

Câu 17. Cho 3 hàm số có tập xác định $(2; +\infty)$:

(I) $y = f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{18}{x-2}$. (II) $y = g(x) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{36}{x^2-4}$.

(III) $y = h(x) = \dfrac{x^2+32}{4(x-2)}$.

Cặp hàm số nào có giá trị nhỏ nhất bằng nhau ?

A) (I) và (II). B) (II) và (III).
C) (I) và (III). D) Cả ba hàm số.

Câu 18. Cho 3 hàm số có tập xác định $D = (0; +\infty)$:

(I) $y = f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$. (II) $y = g(x) = \dfrac{2x^3+4}{x}$.

(III) $y = h(x) = \dfrac{x^4+3}{x}$.

Cặp hàm số nào có giá trị nhỏ nhất bằng nhau ?

A) (I) và (II). B) (II) và (III).
C) (I) và (III). D) Không có cặp nào.

Câu 19. Cho hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$ $(x \geq 1)$. max y bằng :

A) 1. B) $\dfrac{1}{2}$.
C) 2. D) 0.

Câu 20. Cho hàm số $y = |x|\sqrt{1-x^2}$ $(-1 \leq x \leq 1)$. max y bằng :

A) 0. B) 1/2.

C) 1. D) 2.

Câu 21. Cho hàm số $y=\dfrac{x}{(x+1)^2}$ $(x\geq 0)$. max y bằng :

A) 0. B) 1/2.

C) 1/4. D) 1.

Câu 22. Cho hàm số $y=\dfrac{x}{x^2+4}$ $(x\geq 0)$. max y bằng :

A) 1/4. B) 1/2.

C) 1. D) 2.

Câu 23. Cho $A=(3-x)(4-y)(2x+3y)$ với $0\leq x\leq 3, 0\leq y\leq 4$. Biểu thức A đạt giá trị lớn nhất nếu cặp $(x\,;\,y)$ bằng :

A) $(3\,;\,4)$. B) $(0\,;\,2)$.

C) $(0\,;\,4)$. D) $(3\,;\,0)$.

Câu 24. Tập nghiệm của bất phương trình

$$\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-2x+1}>1$$

là :

A) $(-\infty\,;\,-2)$. B) $[-2\,;\,1]$.

C) $(1\,;\,+\infty)$. D) $\mathbb{R}$.

Câu 25. Tập nghiệm của bất phương trình

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}\leq 1$$

là :

A) $\varnothing$. B) $[2\,;\,3]$.

C) $[5\,;\,10]$. D) $[4\,;\,9]$.

Câu 26. Cho bất phương trình theo ẩn x : $m^2(x-1)+2x>m(3x-1)$. Với $1<m<2$, tập nghiệm của bất phương trình là :

A) $\varnothing$. B) $\mathbb{R}$.

C) $\left(-\infty\,;\,\dfrac{m}{m-2}\right)$. D) $\left(\dfrac{m}{m-2}\,;\,+\infty\right)$.

Câu 27. Cho bất phương trình $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{m}{x-1}>1$. Để nghiệm của bất

phương trình là tập $S=(1;+\infty)$ ta chọn m :

A) $m=0$. B) $m=1$.

C) $m>1$. D) Không có m.

Câu 28. Cho hai bất phương trình : $(m-1)x+3-m>0$; (I)

$(m+1)x+2-m>0$ (II)

Để (I) tương đương (II) ta chọn :

A) $m=3$. B) $m=2$.

C) $m=5$. D) Không có m.

Câu 29. Nghiệm của bất phương trình $\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\geq\frac{1}{\sqrt{x}}$ là :

A) $x=1$. B) $x\geq 1$.

C) $\varnothing$. D) $0<x\leq 1$.

Câu 30. Tập nghiệm của $1+\sqrt{x-3}<|2-x|$ là :

A) $[3;+\infty)$. B) $(4;+\infty)$.

C) $\varnothing$. D) $\{3\}$.

Câu 31. Cho 4 bất phương trình :

A) $(x-1)\sqrt{x(x-2)}<0$. B) $|x-1|\sqrt{x}.\sqrt{x-2}<0$.

C) $|x-1|\sqrt{x(x-2)}<0$. D) $(x-1)\sqrt{x}.\sqrt{x-2}<0$.

Bất phương trình nào có tập nghiệm khác rỗng ?

Câu 32. Nghiệm của bất phương trình $(x^2-6x+9)(-x^2+4x-4)\geq 0$ là :

A) $x=2$. B) $x=3$.

C) $x=2, x=3$. D) $x\geq 3$.

Câu 33. Nghiệm của bất phương trình $(x^2-6x+9)(x^2+2x+3)>0$ là :

A) $x=3$. B) $x\neq 3$.

C) Vô nghiệm. D) Mọi x.

Câu 34. Bất phương trình $(2x+1)^4\leq(x-2)^4$ có tập nghiệm là :

A) $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$. B) $[2;+\infty)$.

C) $(-\infty;-3)\cup\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$. D) $\left[-3;\frac{1}{3}\right]$.

Câu 35. Tập nghiệm của bất phương trình $|2x+4|>\sqrt{x^2-6x+9}$ là :

A) $(-\infty;-7)\cup\left(-\frac{1}{3};+\infty\right)$. B) $\left(-7;-\frac{1}{3}\right)$.

C) $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup(7;+\infty)$. D) $\left(\frac{1}{3};7\right)$.

Câu 36. Tập nghiệm của bất phương trình $|x^2-5x+2|+2\le 5x$ là :

A) $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. B) $[-2;2]$.

C) $(-\infty;0]\cup[10;+\infty)$. D) $[0;10]$.

Câu 37. Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{9x^2-30x+25}>2x^2$ là :

A) $\left[-1;\frac{5}{2}\right)$. B) $\left(-\frac{5}{2};1\right]$.

C) $\varnothing$. D) $\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right)\cup(1;+\infty)$.

Câu 38. Cho tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\ne 0)$. Câu nào sau đây sai ?

A) $f(x)>0\ \forall x\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta<0.\end{cases}$

B) $a.c<0\Rightarrow f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt.

C) $f(x)<0\ \forall x\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta<0.\end{cases}$

D) $\exists\alpha : af(\alpha)>0\Rightarrow f(x)=0$ vô nghiệm.

Câu 39. Để giải bất phương trình $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}\ge 2$, một học sinh lập luận như sau :

(I) Điều kiện để bất phương trình tồn tại : $x\ne\pm 1$.

(II) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}\ge 2\Leftrightarrow x^2+2x+1\ge 2(x^2-1)\Leftrightarrow x^2-2x-3\le 0$.

(III) Xét dấu tam thức và chọn nghiệm $(-1;1)\cup(1;3]$.

Hỏi lập luận trên nếu sai, thì sai ở bước nào ?

A) (I). B) (II).

C) (III). D) Lập luận đúng.

Câu 40. Để phương trình $x^2-(4m+3)x+m^2=0$ có hai nghiệm thoả

$x_1 < -1 < x_2$, ta chọn :

A) $m = -2$.
B) $m = 0$.
C) m tuỳ ý.
D) Không có m.

Câu 41. Để phương trình $(m+2)x^2 - 2(m+4)x + m + 8 = 0$ có một nghiệm thuộc $(1;2)$ và nghiệm kia không thuộc $[1;2]$ ta chọn :

A) $m < -2$.
B) $m > -2$.
C) $m < 0$.
D) $m > 0$.

Câu 42. Để phương trình $x^2 - 2(m+2)x + m^2 = 0$ có hai nghiệm thoả $1 < x_1 \leq x_2$, ta chọn :

A) $m > 3$.
B) $m < 3$.
C) $m > -1$.
D) $-1 < m < 3$.

Phương trình : $(m-1)x^2 - 2(m-2)x - 4 = 0$ (1) được dùng cho các câu 43 $\rightarrow$ 47.

Câu 43. Để (1) có đúng 1 nghiệm dương ta chọn :

A) $m = 1$.
B) $m = 0$.
C) $m > 1$.
D) Cả 3 kết quả trên.

Câu 44. Để (1) có 2 nghiệm trái dấu và có giá trị tuyệt đối bằng nhau, thì :

A) $m = 0$.
B) $m \neq 1$.
C) $m > 1$.
D) $m = 2$.

Câu 45. Để (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thoả $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > -1$ ta chọn :

A) $m > 1$.
B) $m < 1$.
C) $m > 4$.
D) $m < 4$ và $m \neq 1$.

Câu 46. Để (1) có 1 nghiệm gấp đôi nghiệm kia thì :

A) $m = 2$.
B) $m = -1$.
C) $m = \frac{1}{2}$.
D) $m = -1 \vee m = \frac{1}{2}$.

Câu 47. Để (1) có nghiệm, ta chọn :

A) $m = 1$.
B) $m \neq 1$.
C) Mọi m.
D) Không có m.

Phương trình $x^4 - 2mx^2 + 4m - 3 = 0$ (2) dùng cho các câu từ 48 đến 50.

Câu 48. Để (2) có 4 nghiệm phân biệt, ta chọn :

A) $m>0$.

B) $m<1 \vee m>3$.

C) $m>\frac{3}{4}$.

D) $\frac{3}{4}<m<1 \vee m>3$.

Câu 49. Để (1) vô nghiệm, ta chọn :

A) $1<m<3$.

B) $1 \leq m \leq 3$.

C) $m<0$.

D) Không có m.

Câu 50. Để (1) có đúng 2 nghiệm, ta chọn :

A) $m=0$.

B) $m=1 \vee m=3$.

C) $m<\frac{3}{4}$.

D) $m<\frac{3}{4} \vee m=1 \vee m=3$.

Câu 51. Để $f(x)=(m^2+1)x^2-2(m^2-2)x-1>0 \ \forall x$, ta chọn :

A) $m=0$.

B) $m=\pm\sqrt{2}$.

C) Không có m.

D) $\forall m$.

Câu 52. Cho hàm số $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-(m+3)x+m^2+m+2}}$. Để hàm số y có tập xác định $\mathbb{R}$, ta chọn :

A) $m<-\frac{1}{3}$.

B) $m>1$.

C) $-\frac{1}{3}<m<1$.

D) $m<-\frac{1}{3} \vee m>1$.

Câu 53. Để $0<\frac{x^2+mx+1}{x^2+1}<2$ nghiệm đúng $\forall x$, ta chọn :

A) $|m|<2$.

B) $|m|>2$.

C) $m>0$.

D) $m=\pm 2$.

Bất phương trình $(m+1)x^2-2mx-m<0$ (3) dùng cho hai câu 54 – 55.

Câu 54. Để (3) vô nghiệm, ta chọn :

A) $-\frac{1}{2} \leq m \leq 0$.

B) $-\frac{1}{2}<m<0$.

C) $m<-\frac{1}{2} \vee m>0$.

D) $m>-1$.

Câu 55. Để (3) có nghiệm, ta chọn :

A) $-\frac{1}{2} \le m \le 0$. B) $-\frac{1}{2} < m < 0$.

C) $m < -\frac{1}{2} \vee m > 0$. D) Kết quả khác.

Câu 56. Cho bất phương trình $x^2 - 2(m+2)x + 4m \le 0$. Để bất phương trình nghiệm đúng $\forall x \in [0\,;\,1]$, ta chọn :

A) $m = 0$. B) $m \le 0$.

C) $m \le \frac{3}{2}$. D) $\forall m$.

Giả thiết sau dùng cho các câu từ 57 đến 60 : Cho hai bất phương trình

$$\sqrt{\sqrt{x-1}+4} - \sqrt{\sqrt{x-1}+1} \ge 1; \quad (1)$$

$$x^2 - x + m(1-m) \le 0. \quad (2)$$

Câu 57. Tập nghiệm S_1 của (1) là :

A) $S_1 = \{1\}$. B) $S_1 = [1\,;\,+\infty)$.

C) $S_1 = \varnothing$. D) $S_1 = \mathbb{R}$.

Câu 58. Tập nghiệm S_2 của (2) là :

(I) $S_1 = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ với $m = \frac{1}{2}$. (II) $S_2 = [1-m\,;\,m]$ với $m > \frac{1}{2}$.

(III) $S_2 = [m\,;\,1-m]$ với $m < \frac{1}{2}$.

Khẳng định nào sau đây đúng ?

A) (I). B) (II).

C) (III). D) Cả 3 đều đúng.

Câu 59. Để (2) là bất phương trình hệ quả của (1) thì kết quả nào sau đây đúng ?

A) $m = \frac{1}{2}$. B) $m \le 0$.

C) $m \ge 1$. D) $m \le 0 \vee m \ge 1$.

Câu 60. Để (1) tương đương (2), ta chọn :

A) $m = \frac{1}{2}$. B) $m \le 0$.

C) $m \ge 1$. D) Không có m.

Câu 1. Câu B) và C) : Cho $a=3, b=-4$

$a>b \Rightarrow 9>16$ (sai). $\quad a>b \Rightarrow \frac{1}{3}<-\frac{1}{4}$ (sai).

Câu D) : Cho $a=3, b=c=-4$

$a>b \Rightarrow \frac{3}{-4}>\frac{-4}{-4} \Leftrightarrow -\frac{3}{4}>1$ (sai).

Chọn câu A).

Câu 2. Phản ví dụ.

Câu C) : $\begin{cases} a=0<b=2 \\ c=-2<d=1 \end{cases} \Rightarrow a-c=2<b-d=1$ (sai). Câu C).

Câu 3. Câu A) : $\begin{cases} a=-1<b=1 \\ c=-4<d=2 \end{cases} \Rightarrow ac=4<bd=2$ (sai).

Câu B) : $\begin{cases} 0<a=10<b=15 \\ 0<c=1<d=3 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{c}=10<\frac{b}{d}=5$ (sai).

Câu C) : $-2=c<a=-1<b=3 \Rightarrow ac=2<-b=bc$ (sai).

Câu D).

Câu 4. Câu C) sai vì a và b trái dấu nên $a.b<0$. Đáp án : Câu C).

Câu 5. Cho $b=-1<0<a=2 \Rightarrow -a=-2>b=-1$. Câu A) sai.

Cho $b=-3<0<a=2 \Rightarrow a=2>-b=3$. Câu B) sai.

Cho $b=-3<0<a=2 \Rightarrow a^2=4>b^2=9$. Câu C) sai.

Câu D).

Câu 6. Câu C) :

$$a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2 \Leftrightarrow a^3+b^3-a^2b-ab^2 \geq 0 \quad \forall a, b>0$$
$$\Leftrightarrow (a-b)(a^2-b^2) \geq 0 \quad \forall a, b>0$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b) \geq 0 \quad \forall a, b>0$$

Đúng $\forall a, b>0$ do $(a-b)^2 \geq 0$. Vậy chọn câu C).

Câu 7. Câu A) : Bất đẳng thức Cô-si.

Câu B) : $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 4 \Leftrightarrow \frac{2ab}{a+b}-\sqrt{ab} \leq 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{ab}}{a+b}\left(a+b-2\sqrt{ab}\right) \leq 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng do $a+b>0$ và $a+b\ge 2\sqrt{ab}$ (Cô-si).

A (đúng) và B (đúng) $\Rightarrow$ C (đúng) do tính bắc cầu. Câu D).

Câu 8. Xét câu B) :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \le \frac{a^3+b^3}{2} \Leftrightarrow \frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{8} - \frac{a^3+b^3}{2} \le 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{8}(a-b)^2(a+b) \le 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng chỉ đúng nếu $a+b\ge 0$.

Vậy $\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \le \frac{a^3+b^3}{2}$ với mọi a, b là sai. Câu B).

Câu 9. Câu A) : Bất đẳng thức Cô-si với hai số dương a và $1/a$.

Câu B) : Bất đẳng thức Cô-si với hai số dương $a+b$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

Câu C) : Bất đẳng thức Cô-si với hai số dương $a+b+c$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

Câu D).

Câu 10. $\frac{a}{\sqrt{b}} - \sqrt{a} \ge \sqrt{b} - \frac{b}{\sqrt{a}} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0, b>0 \\ \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \ge \sqrt{a}+\sqrt{b} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a>0, b>0 \\ \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right) \ge 0. \end{cases}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a>0, b>0 \\ \sqrt{a}-\sqrt{b}=0 \end{cases} \Rightarrow a=b>0$. Câu C).

Câu 11. $f(x)=(x-1)^2+2\ge 2$; $\min f = 2 \Leftrightarrow x=1$.

$$g(x)=\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \ge 2 \text{ (Cô-si) ;}$$

$$\min g = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow x=0.$$

$$h(x)=\sqrt{x^2+4}+\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \ge 2 \text{ (Cô-si) ;}$$

$\min h = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+4} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}} \Leftrightarrow x^2+4=1$ (vô nghiệm).

Vậy $\min h \neq 2$.

Câu A).

Câu 12. Câu C) là sai : vì dấu "=" không xảy ra thì $\min f \neq 2$ chứ không phải hàm f không đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 13. $y = \dfrac{x^2+2x+2}{x+1} = x+1+\dfrac{1}{x+1} \geq 2 \quad (x>-1)$.

$\min y = 2 \Leftrightarrow x+1 = \dfrac{1}{x+1} \Leftrightarrow x = 0$. Câu A).

Câu 14. $(x>1)$, $y = x+\dfrac{4}{x-1} = x-1+\dfrac{4}{x-1}+1 \geq 5$.

$\min y = 5 \Leftrightarrow x-1 = \dfrac{4}{x-1} \Leftrightarrow x = 3$. Câu C).

Câu 15. $(x>0)$, $y = \dfrac{(x+2)(x+8)}{x} = x+\dfrac{16}{x}+10 \geq 18$.

$\min y = 18 \Leftrightarrow x = \dfrac{16}{x} \Leftrightarrow x = 4$. Đáp án : Câu D).

Câu 16. $(0<x<1)$, $y = \dfrac{4}{x}+\dfrac{x}{1-x} = 4\left(\dfrac{1-x}{x}\right)+\dfrac{x}{1-x}+4 \geq 8$.

$\min y = 8 \Leftrightarrow 4\left(\dfrac{1-x}{x}\right) = \dfrac{x}{1-x} \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$. Câu C).

Câu 17. $f(x) = \dfrac{x}{2}+\dfrac{18}{x-2} = \dfrac{x-2}{2}+\dfrac{18}{x-2}+1 \geq 7$.

$\min f = 7 \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{18}{x-2} \Leftrightarrow x = 8$.

$g(x) = \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{36}{x^2-4} = \dfrac{x^2-4}{4}+\dfrac{36}{x^2-4}+1 \geq 7$.

$\min g = 7 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-4}{4} = \dfrac{36}{x^2-4} \Leftrightarrow x = 4$.

$h(x) = \dfrac{x^2+140}{4(x-2)} = \dfrac{x^2-4+144}{4(x-2)} = \dfrac{x+2}{4}+\dfrac{36}{x-2}$

$$= \frac{x-2}{4} + \frac{36}{x-2} + 1 \geq 7.$$

$$\min h = 7 \Leftrightarrow \frac{x-2}{4} = \frac{36}{x-2} \Leftrightarrow x = 14.$$

Câu D).

Câu 18. $f(x) = x + \frac{1}{x} \geq 2$; $\min f = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1$.

$$g(x) = 2x^2 + \frac{4}{x} = x^2 + x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geq 6.$$

$$\min g = 6 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1.$$

$$h(x) = x^3 + \frac{3}{x} = x^3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geq 4.$$

$$\min h = 4 \Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1.$$

Câu D).

Câu 19. Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si :

$$1 + (x-1) = x \geq 2\sqrt{x-1} \quad (x \geq 1) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq \frac{1}{2}.$$

$\max y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 = x - 1 \Leftrightarrow x = 2$. Câu B).

Câu 20. Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si :

$$x^2 + (1-x^2) = 1 \geq 2|x|\sqrt{1-x^2} \Rightarrow y = |x|\sqrt{1-x^2} \leq \frac{1}{2}.$$

$\max y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = 1 - x^2 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Câu B).

Câu 21. Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si :

$$x + 1 \geq 2\sqrt{x} \Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 4x \Rightarrow y = \frac{x}{(x+1)^2} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = 1.$$ Câu C).

Câu 22. Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si :

$$x^2 + 4 \geq 4x \Rightarrow y = \frac{x}{x^2+4} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2.$$ Câu A).

Câu 23. Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si cho 3 số $6-2x$, $12-3y$, $2x+3y$:

$$18 = 6-2x+12-3y+2x+3y \ge 3\sqrt[3]{6A} \Rightarrow A \le 36$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6-2x = 12-3y \\ 6-2x = 2x+3y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2. \end{cases}$$ Câu B).

Câu 24. $\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-2x+1} > 1 \Leftrightarrow |x+2|+|x-1| > 1.$ (1)

$x \le 2$: (1) $\Leftrightarrow x < -1$ nghiệm $x \le -2$.

$-2 < x < 1$: (1) $\Leftrightarrow 2 > 0$ nghiệm $-2 < x < 1$

$x \ge 1$: (1) $\Leftrightarrow x > 0$ nghiệm $x \ge 1$.

Vậy $S = \mathbb{R}$. Câu D).

Câu 25. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ t = \sqrt{x-1} \ge 0 \\ |t-2|+|t-3| \le 1. \end{cases}$ (1)

$t < 2$: (1) $\Leftrightarrow t \ge 2$ (loại).

$2 \le t \le 3$: (1) $\Leftrightarrow 1 \le 1$ nghiệm $2 \le t \le 3$

$t > 3$: (1) $\Leftrightarrow t \le 3$ (loại)

Vậy : $2 \le \sqrt{x-1} \le 3 \Leftrightarrow 5 \le x \le 10$. Câu C).

Câu 26. $m^2(x-1)+2x > m(3x-1) \Leftrightarrow (m-1)(m-2)x > m(m-1).$ (1)

$m = 1$: (1) $\Leftrightarrow 0x > 0$: $S = \varnothing$.

$m = 2$: (1) $\Leftrightarrow 0x > 2$: $S = \varnothing$.

$1 < m < 2$: (1) $\Leftrightarrow x < \dfrac{m}{m-2}$: $S = \left(-\infty; \dfrac{m}{m-2}\right)$.

$\begin{bmatrix} m < 1 \\ m > 2 \end{bmatrix}$: (1) $\Leftrightarrow x > \dfrac{m}{m-2}$: $S = \left(\dfrac{m}{m-2}; +\infty\right)$.

Câu C).

Câu 27. $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{m}{x-1} > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne \pm 1 \\ \dfrac{(m-1)x+m+1}{x^2-1} > 0. \end{cases}$ (1)

Vì tập nghiệm $S = (1; +\infty) \Leftrightarrow x > 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0$.

$$(1) \Leftrightarrow (m-1)x+m+1 > 0.$$

$m = 1$: $0x > -2$: $S = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ (loại).

$m > 1$: $x > -\dfrac{m+1}{m-1}$: $S = \left(-\dfrac{m+1}{m-1}, +\infty\right)$. Yêu cầu bài toán được

thoả khi $1=-\dfrac{m+1}{m-1}\Leftrightarrow m=0$ (loại).

$m<1$: $x<-\dfrac{m+1}{m-1}$: $S=\left(-\infty;-\dfrac{m+1}{m-1}\right)$ không xét.

Vậy không có m. Câu D).

Câu 28. $m=1$: $S_1=\mathbb{R}$.

$m>1$: $S_1=\left(\dfrac{m-3}{m-1};+\infty\right)$.

$m<1$: $S_1=\left(-\infty;\dfrac{m-3}{m-1}\right)$.

$m=-1$: $S_2=\mathbb{R}$.

$m>-1$: $S_2=\left(\dfrac{m-2}{m+1};+\infty\right)$.

$m<-1$: $S_2=\left(-\infty;\dfrac{m-2}{m+1}\right)$.

$m<-1$: $S_1=S_2\Leftrightarrow\dfrac{m-3}{m-1}=\dfrac{m-2}{m+1}\Rightarrow m=5$ (loại).

$-1\le m\le 1$: $S_1\neq S_2$.

$m>1$: $S_1=S_2\Leftrightarrow\dfrac{m-3}{m-1}=\dfrac{m-2}{m+1}\Rightarrow m=5$ (nhận).

Vậy $m=5$. Câu C).

Câu 29. $\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\ge\dfrac{1}{\sqrt{x}}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ x-1-\sqrt{x}\sqrt{x-1}\ge 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ \sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\right)\ge 0\end{cases}\Rightarrow x=1$. Câu A).

Câu 30. $1+\sqrt{x-3}<|2-x|\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 3\\ \sqrt{x-3}<x-3\end{cases}\Rightarrow x>4$. Câu B).

Câu 31. Ta có $S_{B)}=\varnothing$ và $S_{C)}=\varnothing$.

A) $\begin{cases}x\le 0\\ x>2\Rightarrow x\le 0.\\ x<1\end{cases}$ D) $\begin{cases}x\ge 0\\ x\ge 2\Rightarrow \text{ vô nghiệm}.\\ x<1\end{cases}$

Vậy $S_{A)} = (-\infty ; 0] \neq \varnothing$. Câu A).

Câu 32. $(x^2-6x+9)(-x^2+4x-4) \geq 0 \Leftrightarrow -(x-3)^2(x-2)^2 \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x=3 \\ x=2. \end{bmatrix}$$ Câu C).

Câu 33. $(x^2-6x+9)(x^2+2x+3) > 0 \Leftrightarrow (x-3)^2\left[(x+1)^2+2\right] > 0$

$\Rightarrow x \neq 3$. Câu B).

Câu 34. $(2x+1)^4 \leq (x-2)^4 \Leftrightarrow \left[(2x+1)^2+(x-2)^2\right]\left[(2x+1)^2-(x-2)^2\right] \leq 0$

$$\Leftrightarrow (3x-1)(x+3) \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq \frac{1}{3}.$$ Câu D).

Câu 35. $|2x-4| > \sqrt{x^2-6x+9} \Leftrightarrow |2x+4| > |x-3|$

$$\Leftrightarrow (3x+1)(x+7) > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x < -7 \\ x > -\frac{1}{3}. \end{bmatrix}$$

Câu A).

Câu 36. $|x^2-5x+2|+2 \leq 5x \Leftrightarrow |x^2-5x+2| \leq 5x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4 \geq 0 & \forall x \\ x^2-10x \leq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow 0 \leq x \leq 10.$

Câu D).

Câu 37. $\sqrt{9x^2-30x+25} > 2x^2 \Leftrightarrow |3x-5| > 2x^2$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x^2+3x-5 < 0 \\ 2x^2-3x+5 > 0 \quad \forall x \end{bmatrix} \Rightarrow -\frac{5}{2} < x < 1.$$

Câu B).

Câu 38. Phản ví dụ cho câu D) : $f(x) = x^2-3x+2$, với $\alpha = 3$ suy ra $af(3) = 2 > 0$ nhưng $f(x) = 0$ vẫn có nghiệm $x = 1$ hoặc $x = 2$. Câu D).

Câu 39. Câu B) sai vì ở (II) nhân cho x^2-1 vào hai vế của (1) chỉ đúng nếu $x^2-1 > 0$. Đáp án : Câu B).

Câu 40. Không có m . Đáp án : Câu D).

Câu 41. $m < 0$. Đáp án : Câu C).

Câu 42. $m > 3$. Đáp án : Câu A).

Câu 43. Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\begin{cases} a = 0\ (m = 1) \Rightarrow x_0 = 2 > 0 \\ \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \\ x_0 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m = 0 \\ x_0 = \dfrac{m-2}{m-1} = 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow m = 0. \\ P < 0 \Leftrightarrow \dfrac{-4}{m-1} < 0 \Rightarrow m > 1 \end{cases}$$

Vậy $m = 0 \vee m \geq 1$. Đáp án : Câu D).

Câu 44. Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ P < 0 \\ |x_1| = |x_2| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > 1 \\ \left[\begin{array}{l} \Delta' = 0 \\ S = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > 1 \\ \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 2 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow m = 2.$$ Đáp án : Câu D).

Câu 45. Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \\ \dfrac{S}{P} + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ \forall m \\ m < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m \neq 1. \end{cases}$$ Đáp án : Câu D).

Câu 46. Yêu cầu bài toán tương đương với x_0 là nghiệm thì $2x_0$ là nghiệm, tức là :

$$\begin{cases} a \neq 0\ (m \neq 1) \\ S = 3x_0 = \dfrac{2(m-2)}{m-1} \\ P = 2x_0^2 = \dfrac{-4}{m-1} \end{cases} \Rightarrow 2m^2 + m - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Đáp án : Câu D).

Câu 47. Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\begin{cases} a = m-1 = 0 \\ \begin{cases} a = m-1 \neq 0 \\ \Delta' = m^2 \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \forall m.$$ Đáp án : Câu C).

Câu 48. Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\begin{cases} \Delta' = m^2 - 4m + 3 > 0 \\ P = 4m - 3 > 0 \\ S = 2m > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{4} < m < 1 \\ m > 3. \end{cases}$$ Đáp án : Câu D).

Câu 49. Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\begin{cases} \Delta = m^2 - 4m + 3 < 0 \\ \begin{cases} \Delta = m^2 - 4m + 3 \geq 0 \\ P = 4m - 3 \geq 0 \\ S = 2m < 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < m < 3 \\ \begin{cases} m \leq 1 \vee m \geq 3 \\ m \geq \dfrac{3}{4} \\ m < 0 \end{cases} \end{cases}$$ (vô nghiệm)

$\Rightarrow 1 < m < 3.$ Đáp án : Câu A).

Câu 50. Vì $a = 1 \neq 0$ nên yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\begin{cases} P = 4m - 3 < 0 \\ \Delta' = m^2 - 4m + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{3}{4} \\ m = 1 \vee m = 3. \end{cases}$$ Đáp án : Câu D).

Câu 51. Vì $a = m^2 + 1 > 0 \ \forall m$ và $c = -1 < 0 \ \forall m$ nên suy ra :

$$ac < 0 \ \forall m \Leftrightarrow \Delta > 0 \ \forall m.$$

Không có m. Đáp án : Câu C).

Câu 52. Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\begin{cases} a = 1 > 0 \ \forall m \\ \Delta = -3m^2 + 2m + 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow m < -\frac{1}{3} \vee m > 1.$$ Đáp án : Câu D).

Câu 53. Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\begin{cases} x^2 + mx + 1 > 0 \quad \forall x \\ x^2 - mx + 1 > 0 \quad \forall x \end{cases} \Rightarrow |m| < 2.$$ Đáp án : Câu A).

Câu 54. Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$f(x) < 0 : \text{vô nghiệm} \Leftrightarrow \forall x : f(x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = m+1 > 0 \\ \Delta' = m(2m+1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le m \le 0.$$ Đáp án : Câu A).

Câu 55. Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$f(x) < 0 \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow \overline{(\forall x : f(x) \ge 0)} \Leftrightarrow \overline{\begin{cases} a = m+1 > 0 \\ \Delta' = m(2m+1) \le 0 \end{cases}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{\left(-\frac{1}{2} \le m \le 0\right)} \Rightarrow m < -\frac{1}{2} \vee m > 0.$$

Đáp án : Câu C).

Câu 56. $m \le 0$. Đáp án : Câu B).

Câu 57. $\sqrt{\sqrt{x-1}+4} - \sqrt{\sqrt{x-1}+1} \ge 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ t = \sqrt{x-1} \ge 0 \\ \sqrt{t+4} \ge 1 + \sqrt{t+1} \end{cases}$

$$\Rightarrow 0 < \sqrt{t+1} \le 1 \Rightarrow t = \sqrt{x-1} = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1.$$

$S_1 = \{1\}$. Đáp án : Câu A).

Câu 58. $\Delta = (2m-1)^2$.

$m = \frac{1}{2} : S_2 = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

$m > \frac{1}{2} : S_2 = [1-m;\ m]$.

$m < \frac{1}{2} : S_2 = [m;1-m]$.

Đáp án : Câu D).

Câu 59. $m = \frac{1}{2} : S_1 \not\subset S_2$ (loại).

$m > \frac{1}{2} : S_1 \subset S_2 \Leftrightarrow 1-m \le 1 \le m \Rightarrow m \ge 1$ (thoả).

$m < \frac{1}{2} : S_1 \subset S_2 \Leftrightarrow m \le 1 \le 1-m \Rightarrow m \le 0$ (thoả).

Vậy $m \le 0 \vee m \ge 1$.

Đáp án : Câu D).

Câu 60. $m=\frac{1}{2}:\{1\}\neq\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

$m>\frac{1}{2}:S_1=S_2\Leftrightarrow 1-m=1=m$ (vô nghiệm).

$m<\frac{1}{2}:S_1=S_2\Leftrightarrow m=1=1-m$ (vô nghiệm).

Không có m. Đáp án : Câu D).

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG IV

1	A	16	C	31	A	46	D
2	C	17	D	32	C	47	C
3	D	18	D	33	B	48	D
4	C	19	B	34	D	49	A
5	D	20	B	35	A	50	D
6	C	21	C	36	D	51	C
7	D	22	A	37	B	52	D
8	B	23	B	38	D	53	A
9	D	24	D	39	B	54	A
10	C	25	C	40	D	55	C
11	A	26	C	41	C	56	B
12	C	27	D	42	A	57	A
13	A	28	C	43	D	58	D
14	C	29	A	44	D	59	D
15	D	30	B	45	D	60	D

Chương V.

THỐNG KÊ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

§ 1. BẢNG PHÂN PHỐI THỰC NGHIỆM

1. Bảng phân phối thực nghiệm tần số và tần suất rời rạc

• ***Số liệu thống kê.***

Số liệu thống kê là tập hợp các dữ liệu thu thập được của các đối tượng khảo sát.

Ví dụ. Điểm Toán của 30 học sinh lớp 10 (lấy tròn số) khảo sát đầu năm như sau :

Bảng 1.

3	[5]	7	1	2	10	8	[8]	3	4
7	6	6	[5]	1	4	2	[5]	7	6
1	[5]	4	6	[5]	7	6	[5]	4	9

• ***Tần số.***

Tần số là số lần xuất hiện của một đối tượng khảo sát, kí hiệu n_i.

Ở bảng 1, số em đạt điểm 5 là 6 em, ta bảo $n_5 = 6$.

• ***Tần suất*** (tính bằng %).

Tần suất là tỉ số của tần số n_i của đối tượng khảo sát với tổng số N của các đối tượng khảo sát, kí hiệu f_i. Ta có :

$$f_i = \frac{n_i}{N}. \qquad (1)$$

Ở bảng 1 : $f_5 = \frac{n_5}{N} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5} = 20\%$, nghĩa là có 20 em trên 100 em đạt điểm 5.

● ***Bảng phân phối thực nghiệm rời rạc***

Ta tính tần số và tần suất của từng đối tượng khảo sát và lập bảng.

Bảng 2.

Điểm số x_i (1)	Tần số n_i (2)	Tần suất f_i (%) (3)
0	0	0,0
1	3	10,0
2	2	6,7
3	2	6,7
4	4	13,3
5	6	20,0
6	5	16,7
7	4	13,3
8	2	6,7
9	1	3,3
10	1	3,3
	$N = 30$	100 (%)

▪ Bảng gồm 3 cột (1), (2), (3) là bảng phân phối thực nghiệm *tần số và tần suất rời rạc.*

▪ Bảng gồm 2 cột (1), (2) là bảng phân phối thực nghiệm *tần số rời rạc.*

▪ Bảng gồm 2 cột (1), (3) là bảng phân phối thực nghiệm *tần suất rời rạc.*

2. Bảng phân phối thực nghiệm tần số và tần suất ghép lớp

● ***Lớp.***

Lớp là tập hợp các đối tượng khảo sát xếp gần nhau, kí hiệu lớp $i : [x_i ; x_{i+1}]$.

Ở bảng 1, ta chia làm 5 lớp là : $[0;2)$, $[2;4)$, $[4;6)$, $[6;8)$, $[8;10]$.

● ***Giá trị trung tâm***

Giá trị trung tâm kí hiệu là x_i^0. Ta có :

$$x_i^0 = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}. \qquad (2)$$

Ở bảng 1 : $x_1^0 = 1$, $x_2^0 = 3$, $x_3^0 = 5$, $x_4^0 = 7$, $x_5^0 = 9$.

● ***Tần số của lớp***

Tần số của lớp là tổng số của số lần xuất hiện của các đối tượng thuộc lớp đó, kí hiệu n_i.

Ở bảng 1 : $n_1 = 3$, $n_2 = 4$, $n_3 = 10$, $n_4 = 9$, $n_5 = 4$.

● ***Tần suất của lớp***

$$f_i = \frac{n_i}{N}. \qquad (3)$$

Ở bảng 1 : $f_1 = 10,0$; $f_2 = 13,3$; $f_3 = 33,3$; $f_4 = 30,0$; $f_5 = 13,3$.

● ***Bảng phân phối thực nghiệm ghép lớp***

Phân lớp, tính giá trị trung tâm, tần số, tần suất của các lớp và lập bảng.

Bảng 3.

Các lớp điểm X (1)	x_i^0 (2)	n_i (3)	f_i (%) (4)
$[0;2)$	1	3	10,0
$[2;4)$	3	4	13,3
$[4;6)$	5	10	33,3
$[6;8)$	7	9	30,0
$[8;10]$	9	4	13,3
		$N = 30$	

▪ Bảng gồm 4 cột (1), (2), (3), (4) là bảng phân phối thực nghiệm *tần số và tần suất ghép lớp.*

▪ Bảng gồm 3 cột (1), (2), (3) là bảng phân phối thực nghiệm *tần số ghép lớp.*

▪ Bảng gồm 3 cột (1), (2), (4) là bảng phân phối thực nghiệm *tần suất ghép lớp.*

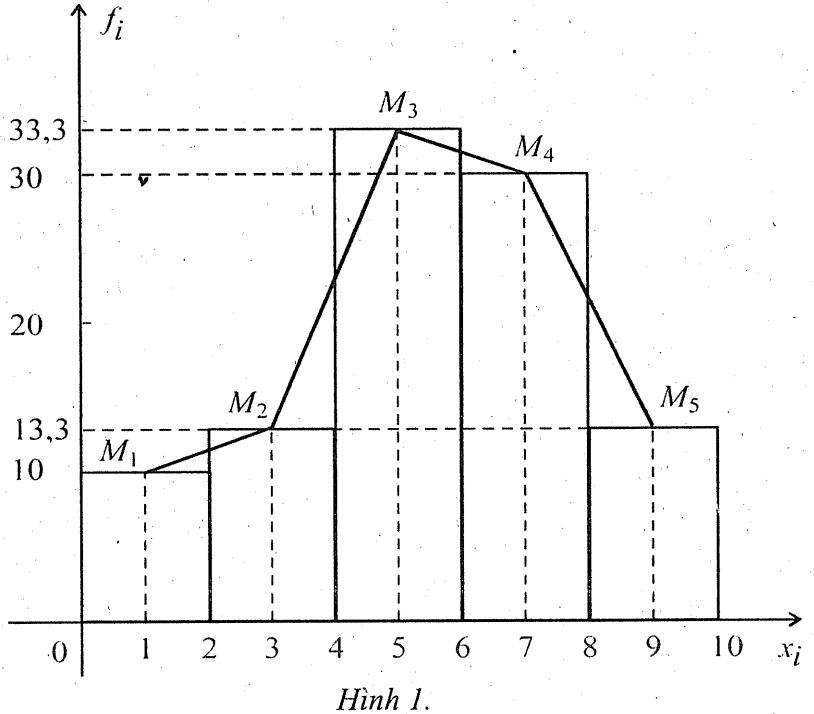
§ 2. BIỂU ĐỒ

1. Biểu đồ tần suất

● ***Biểu đồ tần suất hình cột***

Trong hệ thống trục toạ độ vuông góc, trục hoành chỉ các số liệu thống kê, trục tung chỉ tần suất (rời rạc hoặc ghép lớp). Biểu đồ hình cột mô tả hình ảnh các bảng phân phối thực nghiệm rời rạc hoặc ghép lớp.

Ví dụ. Vẽ biểu đồ tần suất hình cột của bảng 3.



Hình 1.

● ***Đường gấp khúc tần suất***

Trong mặt phẳng toạ độ xét các điểm $M_i\left(x_i^0\,;f_i\right)$ $(i=1,2,3...$ là số lớp tương ứng).

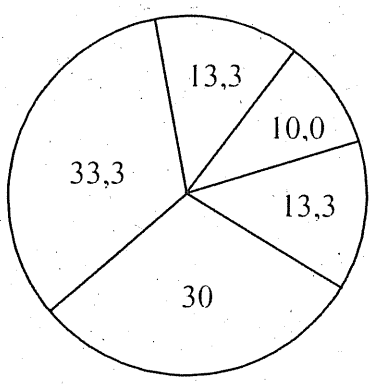
Nối các điểm $M_1, M_2, M_3, ...$ ta được đường gấp khúc gọi là đường gấp khúc tần suất.

Ví dụ. Đường gấp khúc tần suất của bảng 3 là đường gấp khúc vẽ ở hình 1 (chung với biểu đồ tần suất hình cột).

• ***Biểu đồ hình quạt***

Chia đường tròn thành n hình quạt tương ứng với n lớp. Góc ở tâm tỉ lệ với tần suất của lớp đó.

Ví dụ. Biểu đồ hình quạt ở bảng 3.



Hình 2.

§ 3. SỐ TRUNG BÌNH CỘNG - MỐT - SỐ TRUNG VỊ

1. Số trung bình cộng $(\bar{x})$

• ***Bảng phân phối thực nghiệm rời rạc***

$$\bar{x} = \frac{1}{N}(n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_kx_k) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_ix_i$$

$$\bar{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_kx_k = \sum_{i=1}^{k} f_ix_i \qquad (4)$$

• ***Bảng phân phối thực nghiệm ghép lớp***

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_ix_i^0 = \sum_{i=1}^{k} f_ix_i^0, \qquad (5)$$

với x_i^0, n_i, f_i là giá trị trung tâm, tần số, tần suất của lớp thứ i.

Ta có : $\sum_{i=1}^{k} n_i = n_1 + n_2 + \cdots + n_k = N$.

Ví dụ. Tính số trung bình cộng $\bar{x}$ của các số liệu thống kê cho ở bảng 2 (phân phối rời rạc) và ở bảng 3 (phân phối ghép lớp).

Ở bảng 2 : $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{10} n_i.x_i$

$$= \frac{1}{30}(3+4+6+16+30+30+28+16+9+10)$$

$$= \frac{152}{30} = 5,1.$$

Ở bảng 3 : $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{5} n_i.x_i^0 = \frac{1}{30}(3+12+50+63+36) = \frac{164}{30} = 5,5.$

2. Mốt (M_0)

● Trong bảng phân phối thực nghiệm tần số, *mốt* M_0 *là giá trị có tần số lớn nhất.*

● Nếu có hai giá trị có tần số bằng nhau và lớn hơn tất cả các tần số khác thì :

▪ Mốt là trung bình cộng của hai giá trị đó, nếu chúng kề nhau (nếu số này có nghĩa).

▪ Trường hợp khác, có hai mốt.

Ví dụ. Ở bảng 2 : $M_0 = 5$.

3. Số trung vị (M_e)

● Số trung vị (kí hiệu M_e) của một dãy không giảm (hoặc không tăng) gồm N số liệu thống kê là số :

▪ Nếu N lẻ thì đó là số đứng thứ $\frac{N+1}{2}$.

▪ Nếu N chẵn thì đó là số trung bình cộng của hai số đứng thứ $\frac{N}{2}$ và $\frac{N}{2}+1$.

Ví dụ. Số trung vị của 2 dãy điểm số :

a) 3 3 $\boxed{5}$ 7 8.

b) 3 3 5 7 8 9.

Câu a) : $N = 5$ (lẻ) $\Rightarrow M_e$ có thứ hạng $\frac{N+1}{2} = 3 \Rightarrow M_e = 5$.

Câu b) : $N = 6$ (chẵn) $\Rightarrow M_e = \frac{5+7}{2} = 6$.

● ***Cách tìm M_e trong phân phối thực nghiệm tần số rời rạc.***

Trong bảng phân phối, ta ghi thêm cột tần số tích luỹ (cộng dồn các tần số)

▪ N lẻ $\Rightarrow M_e$ có tần số tích luỹ $\dfrac{N+1}{2}$.

▪ N chẵn $\Rightarrow M_e$ là trung bình cộng của 2 số hạng thứ $\dfrac{N}{2}$ và $\dfrac{N}{2}+1$.

Ví dụ. Thảy con xí ngầu N lần. Gọi x_i là số nút xuất hiện ở mặt trên, sau mỗi lần thảy, ta được kết quả :

a) Thảy 45 lần $(N=45)$

x_i	1	2	3	4	5	6	...
n_i	5	6	8	10	7	9	$N=45$

b) Thảy 50 lần $(N=50)$

x_i	1	2	3	4	5	6	...
n_i	7	8	10	9	8	8	$N=50$

Bảng 4

Câu a)

x_i	n_i	Tích luỹ	
1	5		
2	6	11	$N=45$ (lẻ)
3	8	19	$\dfrac{N+1}{2}=23$
4	10	29	
5	7	36	$M_e=4$
6	9	45	
		$N=45$	

Câu b)

x_i	n_i	Tích luỹ	
1	7		$N=50$ (chẵn)
2	8	15	$\dfrac{N}{2}=25$
3	10	25	
4	9	34	$\dfrac{N}{2}+1=26$
5	8	42	
6	8	50	$M_e=\dfrac{3+4}{2}=3,5$
		$N=50$	

§ 4. PHƯƠNG SAI - ĐỘ LỆCH CHUẨN

1. Phương sai

Phương sai của bảng phân phối thực nghiệm, kí hiệu s_x^2 được tính bởi

- Phân phối thực nghiệm rời rạc :

$$s_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} f_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2 \qquad (6)$$

- Phân phối thực nghiệm ghép lớp :

$$s_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i \left(x_i^0 - \bar{x}\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} f_i \left(x_i^0 - \bar{x}\right)^2 \qquad (7)$$

Ví dụ. Tính phương sai s_x^2 của các số liệu thống kê cho ở bảng phân phối thực nghiệm tần số rời rạc.

x_i	1	2	3	4	5	6	
n_i	5	3	3	6	2	1	$N = 20$

Bảng 5

Số trung bình cộng :

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \frac{1}{20}(5+6+9+24+10+6) = \frac{60}{20} = 3.$$

Phương sai :

$$s_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

$$= \frac{1}{20}\left[5(1-3)^2 + 3(2-3)^2 + 3(3-3)^2 + 6(4-3)^2 + 2(5-3)^2 + 1(6-3)^2\right]$$

$$= \frac{46}{20} = 2{,}3.$$

Định lí. $$s_x^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2, \qquad (8)$$

trong đó :

$$\overline{x^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 \quad \text{(bảng phân phối rời rạc).}$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i^0)^2 \quad \text{(bảng phân phối ghép lớp).}$$

Trở lại ví dụ trên :

$$\overline{x^2} = \frac{1}{20}\left[5(1)^2 + 3(2)^2 + 3(3)^2 + 6(4)^2 + 2(5)^2 + 1(6)^2\right]$$

$$= \frac{1}{20}.226 = 11,3.$$

$$s_x^2 = 11,3 - (3)^2 = 2,3.$$

2. Độ lệch chuẩn

Độ lệch chuẩn của bảng phân phối thực nghiệm là căn bậc hai của phương sai : $s_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}$. (9)

Trở lại ví dụ trên : $s_x = \sqrt{2,3} = 1,5$.

§ 5. HỆ SỐ BIẾN THIÊN

Hệ số biến thiên của các số liệu thống kê (hay bảng phân phối thực nghiệm) cho bởi : $V_x = \frac{s_x}{\overline{x}} \times 100\%$. (10)

Ví dụ ở trên : $V = \frac{1,5}{3} \times 100\% = 50\%$.

B. BÀI TẬP

Bài 1. Doanh thu của một siêu thị trong 30 ngày là :

180	186	190	205	192	200	201	203	191	202
200	212	205	211	239	213	216	208	209	222
221	220	203	225	206	228	231	220	239	210

(đơn vị 100 000 đồng)

1) Hãy lập bảng phân phối thực nghiệm tần số và tần suất rời rạc.

2) Hãy lập bảng phân phối thực nghiệm tần số và tần suất ghép lớp (ghép thành 5 lớp).

Bài 2. Lương của 30 công nhân của một xí nghiệp là :

300 000đ	3 người
500 000đ	6 người
700 000đ	5 người
800 000đ	5 người
900 000đ	6 người
1 100 000đ	5 người

1) Hãy lập bảng phân phối thực nghiệm tần số rời rạc.
2) Hãy lập bảng phân phối thực nghiệm tần suất ghép lớp (4 lớp).
3) Hãy vẽ biểu đồ tần suất hình cột và đường gấp khúc tần suất.

Bài 3. Diện tích các lục địa trên thế giới cho bởi :

Lục địa	Diện tích
Châu Á	47,4
Châu Âu	4,9
Châu Mĩ	42,0
Châu Phi	30,5
Châu Úc	8,5

(đơn vị : triệu km^2)

1) Hỏi châu Á chiếm bao nhiêu phần trăm diện tích và góc ở tâm của hình quạt trong biểu đồ.
2) Vẽ biểu đồ hình quạt.

Bài 4. Cho biết giá trị trung tâm của các lớp trong một phân phối thực nghiệm ghép lớp lần lượt là 156 , 158 , 160 , 162 , 164 , 166.
1) Tìm các lớp tương ứng.
2) Lập bảng phân phối thực nghiệm tần suất ghép lớp, cho biết tần số tương ứng các lớp là 1 , 2 , 2 , 4 , 5 , 2.
3) Vẽ biểu đồ tần suất hình cột và đường gấp khúc tần suất.

Bài 5. Thảy con xí ngầu 20 lần. Quan sát số nút hiện ra ở mặt trên, ta được kết quả :

x_i	1	2	3	4	5	6	
n_i	1	4	2	4	5	4	$N = 20$

Hãy tính : Số trung bình cộng, mốt, số trung vị, phương sai, độ lệch chuẩn, hệ số biến thiên của các số liệu thống kê đã cho.

Bài 6. Điểm số của 40 bài trắc nghiệm toán (thang điểm 20) được sắp xếp như sau :

Lớp yếu $[1;5]$: 3 bài.

Lớp trung bình $[6;10]$: 17 bài.

Lớp khá $[11;15]$: 13 bài.

Lớp giỏi $[16;20]$: 7 bài.

1) Hãy lập bảng phân phối tần số ghép lớp.
2) Tính số trung bình cộng, độ lệch chuẩn của các số liệu thống kê đã cho.

Bài 7. Thử hai lô bóng đèn của hai công ti A, B ta được kết quả :

Đời sống (tính bằng giờ)	Mẫu	
	Công ti A	Công ti B
$[700;900)$	10	3
$[900;1100)$	16	42
$[1100;1300)$	26	12
$[1300;1500]$	8	3
Cộng	$N = 60$	$M = 60$

Bóng đèn công ti nào có đời sống trung bình dài hơn ?

Bài 8. Hai xạ thủ, mỗi người bắn 30 viên đạn vào bia. Kết quả như sau :

Xạ thủ X

x_i	6	7	8	9	10	Cộng
n_i	3	3	8	9	7	30

Xạ thủ Y

x_i	6	7	8	9	10	Cộng
m_i	3	4	7	8	8	30

Tính s_x^2 và s_y^2.

Bài 9. Chiều cao của 100 học sinh cho bởi bảng phân phối thực nghiệm tần số ghép lớp :

x_i (đơn vị cm)	n_i
$[151;155)$	15
$[155;159)$	25
$[159;163)$	40
$[163;167)$	10
$[167;171)$	10

Hãy tính hệ số biến thiên của các số liệu thống kê.

Bài 10. Mức lương hàng tháng của 25 nhân viên trong một công ti cho bởi (đơn vị 1000 đ) :

x_i	800	1000	1200	1300	1500	1800	2000	2500	3000
n_i	1	3	2	4	5	4	3	2	1

(Cộng 25)

Hãy tính mức lương tháng bình quân của công ti.

LỜI GIẢI

Bài 1. 1) Bảng phân phối thực nghiệm tần số và tần suất rời rạc :

Doanh thu (x_i) (đơn vị 100.000đ)	Tần số (x_i)	Tần suất (f_i), (%)
180	1	3,3
186	1	3,3
190	1	3,3
191	1	3,3
192	1	3,3
200	2	6,7
201	1	3,3
202	1	3,3
203	2	6,7
205	2	6,7
206	1	3,3
208	1	3,3
209	1	3,3
210	1	3,3
211	1	3,3
212	1	3,3
213	1	3,3
216	1	3,3
220	2	6,7
221	1	3,3
222	1	3,3
225	1	3,3
228	1	3,3
231	1	3,3
239	2	6,7

2) Bảng phân phối thực nghiệm tần số và tần suất ghép lớp :

Các lớp X	x_i^0	n_i	f_i (%)
$[180;192)$	186	4	13,3
$[192;204)$	198	7	23,3
$[204;216)$	210	9	30,0
$[216;228)$	222	6	20,0
$[228;240)$	234	4	13,0
Cộng		$N=30$	

Bài 2. 1) Bảng phân phối thực nghiệm tần số rời rạc (đơn vị đồng) :

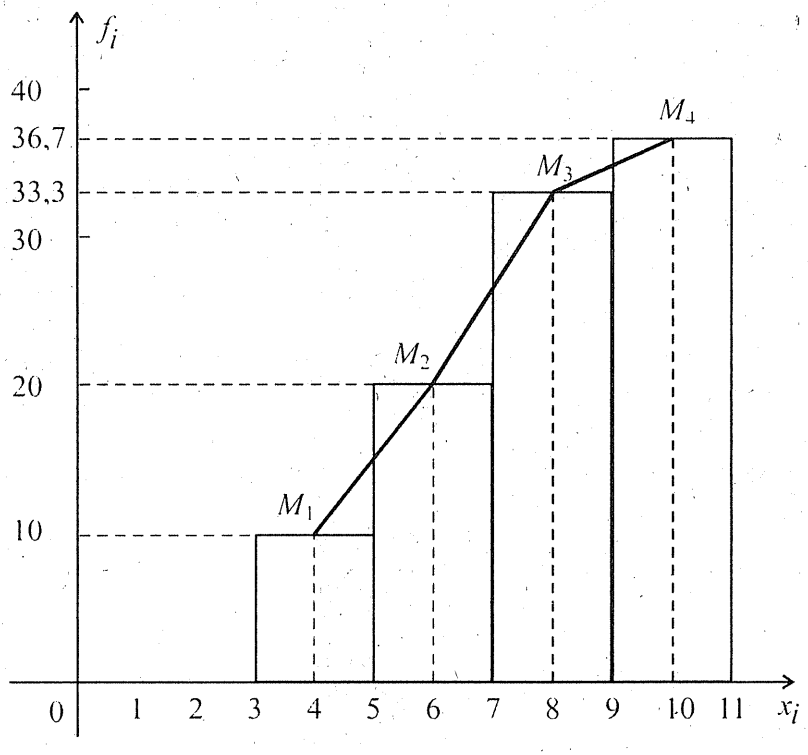
Lương tháng x_i	n_i
300.000	3
500.000	6
700.000	5
800.000	5
900.000	6
1.100.000	5
	$N=30$

2) Bảng phân phối thực nghiệm tần suất ghép lớp :

Lương tháng x_i	x_i^0	f_i (%)
$[300;500)$	400	10,0
$[500;700)$	600	20,0
$[700;900)$	800	33,3
$[900;1100]$	1000	36,7
		100%

(Đơn vị 100.000)

3) Biểu đồ tần suất hình cột và đường gấp khúc tần suất :



Bài 3. Châu Á chiếm 47,7 triệu km^2 trong tổng số 133,3 triệu km^2, nên châu Á chiếm tỉ lệ $\frac{47,4\times100}{133,3}\simeq35,6\%$ và góc ở tâm của hình quạt là $\frac{35,6\times360^0}{100}\simeq128^0$.

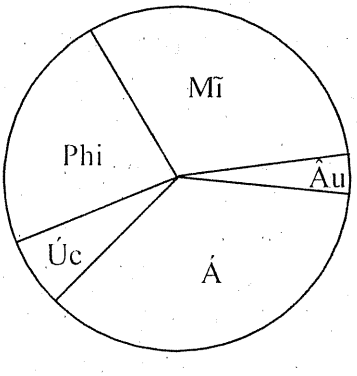
Châu Âu ứng góc $\simeq13^0$.

Châu Mĩ ứng góc $\simeq113^0$.

Châu Phi ứng góc $\simeq82^0$.

Châu Úc ứng góc $\simeq23^0$.

Từ các số liệu đó suy ra biểu đồ hình quạt.



Bài 4. Ta có $x_1^0=156, x_2^0=158, x_3^0=160$, ... nên bề rộng các lớp là :

$$d=x_3^0-x_2^0=x_2^0-x_1^0=2.$$

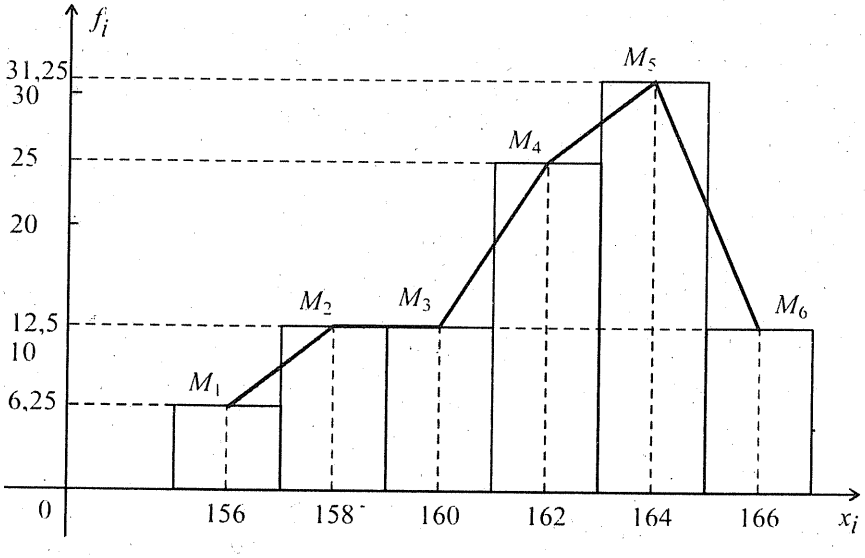
1) Vậy các lớp được ghép là :

$[155;157),[157;159),[159;161),[161;163),[163;165),[165;167]$.

2) Bảng phân phối thực nghiệm tần suất ghép lớp :

Các lớp x_i	x_i^0	f_i (%)
$[155;157)$	156	6,25
$[157;159)$	158	12,5
$[159;161)$	160	12,5
$[161;163)$	162	25,0
$[163;165)$	164	31,25
$[165;167)$	166	12,5

3) Biểu đồ tần suất hình cột và đường gấp khúc tần suất :



Bài 5. Trước hết ta lập bảng phân phối thực nghiệm tần số rời rạc của các số liệu thống kê đã cho. Trong bảng này, ta lập thêm cột tần số tích luỹ, kí hiệu N_i bằng cách cộng các tần số theo quy tắc : Tần số tích luỹ của x_i bằng tổng các tần số của $x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i$ (để tính số trung vị) và cột $n_i x_i$ để tính số trung bình cộng, cột $n_i x_i^2$ để tính phương sai.

x_i	n_i	N_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
1	1	1	1	1
2	4	5	8	16
3	2	7	6	18

$M_e = \boxed{4}$	4	$\leftarrow 11$	16	64
$M_0 = \boxed{5}$	$\leftarrow \boxed{5}$	16	25	125
6	4	20	24	144
Cộng	$N = 20$		80	368

1) Số trung bình cộng : $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \frac{80}{20} = 4$.

2) Mốt : x_i tương ứng $\max\{n_1, n_2, n_3, ...\} \Rightarrow M_0 = 5$.

3) Số trung vị : $N = 20$ (chẵn)

$$\begin{cases} \frac{N}{2} = 10 \rightarrow x_i = 4 \\ \frac{N}{2} + 1 = 11 \rightarrow x_i = 4 \end{cases} \Rightarrow M_e = \frac{4+4}{2} = 4.$$

4) Phương sai : $s_x^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$

$$\begin{cases} \overline{x^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 = \frac{368}{20} = 18,4 \\ \bar{x} = 4 \end{cases} \Rightarrow s_x^2 = 18,4 - 16 = 2,4.$$

5) Độ lệch chuẩn : $s_x = \sqrt{2,4} = 1,55$.

6) Hệ số biến thiên : $V_x = \frac{s_x}{\bar{x}} \times 100\% = 38,7\%$.

Bài 6. 1) Bảng phân phối tần số ghép lớp.

Trong bảng này lập thêm cột $n(x_i^0)$ và $n_i(x_i^0)^2$ để tính số trung bình cộng và phương sai.

Lớp (x_i)	x_i^0	n_i	$n_i(x_i^0)$	$n_i(x_i^0)^2$
$[1;5]$	3	3	9	27
$[6;10]$	8	17	136	1088
$[11;15]$	13	13	169	2197
$[16;20]$	18	7	126	2268
		$N = 40$	$\sum = 440$	$\sum = 5580$

2) Số trung bình cộng :

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i\left(x_i^0\right) = \frac{440}{40} = 11.$$

Phương sai :

$$s_x^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i\left(x_i^0\right)^2 - (\bar{x})^2$$

$$= \frac{5580}{40} - 11^2 = 139{,}5 - 121 = 18{,}5.$$

Độ lệch chuẩn $s_x = \sqrt{18{,}5} = 4{,}3$.

Bài 7. Lập bảng phân phối thực nghiệm tần số ghép lớp của hai công ti A, B, có thêm hai cột $n_i x_i^0$ và $m_i x_i^0$ của hai công ti đó.

Lớp x_i	x_i^0	Công ti A		Công ti B	
		n_i	$n_i x_i^0$	m_i	$m_i x_i^0$
$[700;900)$	800	10	8 000	3	2 400
$[900;1100)$	1 000	16	16 000	42	42 000
$[1100;1300)$	1 200	26	31 200	12	14 400
$[1300;1500]$	1 400	8	11 200	3	4 200
		$N = 60$	$\sum_1 = 66400$	$M = 60$	$\sum_2 = 63000$

$$\overline{x_A} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^0 = \frac{66400}{60} = 1106{,}7;$$

$$\overline{x_B} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{k} m_i x_i^0 = \frac{63000}{60} = 1050.$$

Bóng đèn của công ti A có đời sống trung bình dài hơn.

Bài 8. Ta lập bảng phân phối thực nghiệm tần số rời rạc của hai xạ thủ A và B vào chung một bảng có phụ thêm các cột $n_i x_i$, $m_i y_i$, $n_i\left(x_i\right)^2$ và $m_i\left(y_i\right)^2$.

Điểm số $x_i = y_i$	Xạ thủ A			Xạ thủ B		
	n_i	$n_i.x_i$	$n_i(x_i)^2$	m_i	$m_i.y_i$	$m_i(y_i)^2$
6	3	18	108	3	18	108
7	3	21	147	4	28	196
8	8	64	512	7	56	448
9	9	81	729	8	72	648
10	7	70	700	8	80	800
	$N = 30$	254	$\sum_A = 2196$	$M = 30$	254	$\sum_B = 2200$

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \frac{254}{30} = 8,5$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{k} m_i y_i = \frac{254}{30} = 8,5$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i)^2 = \frac{2196}{30} = 73,2.$$

$$s_x^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 73,2 - 8,5^2 = 0,95.$$

$$\overline{y^2} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{k} m_i (y_i)^2 = \frac{2200}{30} = 73,3.$$

$$s_y^2 = \overline{y^2} - (\bar{y})^2 = 73,3 - 8,5^2 = 1,08.$$

Bài 9. Ta thêm vào bảng phân phối thực nghiệm tần số ghép lớp các cột $n_i x_i^0$, $n_i (x_i^0)^2$.

Chiều cao x_i	x_i^0	n_i	$n_i x_i^0$	$n_i (x_i^0)^2$
[151;155)	153	15	2 295	351 135
[155;159)	157	25	3 925	616 225
[159;163)	161	40	6 440	1 036 840
[163;167)	165	10	1 650	272 250
[167;171)	169	10	1 690	285 610
		$N = 100$	16 000	2 562 060

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \frac{16000}{100} = 160.$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i \left(x_i^0\right)^2 = \frac{2562060}{100} = 25620,6.$$

$$s_x^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 20;6.$$

$$s_x = \sqrt{20,6} = 4,5.$$

$$V_x = \frac{s_x}{\bar{x}} \times 100\% = \frac{4,5 \times 100}{160} = 2,8\%.$$

Bài 10. Mức lương tháng bình quân là số trung bình cộng của các số liệu thống kê.

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \frac{40\,100}{25} = 1604.$$

Vậy lương tháng bình quân 1 604 000 đ.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Điểm thi học kì của 60 em về môn Toán sau khi chấm cho bởi :

3	1	4	6	9	2	8	8	5	2
6	6	6	1	3	4	3	4	5	5
7	5	4	3	6	7	7	1	6	8
6	2	5	4	9	6	7	9	8	7
4	3	5	5	9	6	6	4	8	3
3	4	5	8	6	7	7	7	6	4

1) Lập bảng phân phối thực nghiệm tần số rời rạc.
2) Lập bảng phân phối thực nghiệm tần suất ghép lớp theo các lớp $[1;3), [3;5), [5;7)$ và $[7;9]$.
3) Hãy vẽ đường gấp khúc tần suất.
4) Tính số trung bình cộng ở bảng 1) và 2).

Bài 2. Sức nặng của 50 học sinh được cho bởi :

Sức nặng (kg)	39	45	51	57
Số em	15	20	10	5
				$N = 50$

Cho biết bề rộng của các lớp là 6.

1) Hãy vẽ biểu đồ tần suất hình cột và đường gấp khúc tần suất.

2) Tính số trung bình cộng.

Bài 3. Lương tổng cộng của hai vợ chồng làm tròn là 2 000 000đ, chi phí ăn tiêu 1 200 000đ, tiền thuê nhà 200 000đ, dịch vụ điện, nước, điện thoại 300 000đ, tiền học cho con và tiền thuốc khi ốm đau 200 000đ, còn là tiền tích luỹ.

1) Hỏi hàng tháng gia đình đó tích luỹ được bao nhiêu phần trong tổng số thu nhập ?

2) Vẽ biểu đồ hình quạt biểu diễn sự chi tiêu của gia đình đó.

Bài 4. Điểm Toán và Văn của 20 học sinh thi học kì 2 được cho bởi kết quả :

Điểm số	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Toán	1	0	0	1	3	3	4	2	3	2	1
Văn	0	0	1	2	5	6	3	2	1	0	0

Hãy tính số trung bình cộng, mốt, số trung vị và hệ số biến thiên của hai môn Toán và Văn.

Bài 5. Lương tháng của 10 chuyên viên cho bởi :

x_i	$[1;3)$	$[3;5)$	$[5;7]$
n_i	2	5	3

(Đơn vị : triệu)

Hãy tính số trung bình cộng và phương sai của số liệu thống kê đã cho.

HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài 1.

1)

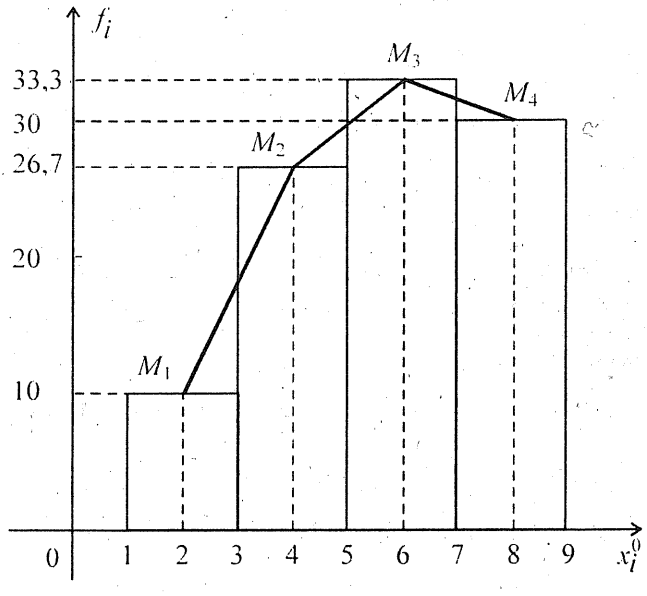
x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Cộng
n_i	3	3	7	9	8	12	8	6	4	(60)
$n_i x_i$	3	6	21	36	40	72	56	48	36	(318)

2)

x_i	$[1;3)$	$[3;5)$	$[5;7)$	$[7;9]$	Cộng
n_i	6	16	20	18	(60)

x_i^0	2	4	6	8	
$n_i x_i^0$	12	64	120	164	(340)
f_i	10,0	26,7	33,3	30,0	(100%)

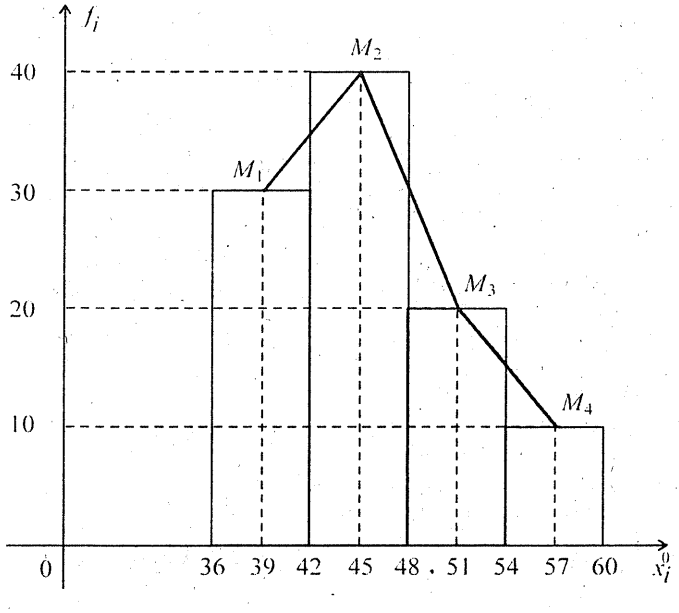
3)



4) Số trung bình cộng bảng 1) : $\overline{x_1} = 5,3$.

Số trung bình cộng bảng 2) : $\overline{x_2} = 5,7$.

Bài 2. 1)



2) Số trung bình cộng : $\bar{x} = 45,6$.

Bài 3. 1) Phần tích luỹ hàng tháng 5%

Ăn : 60%.

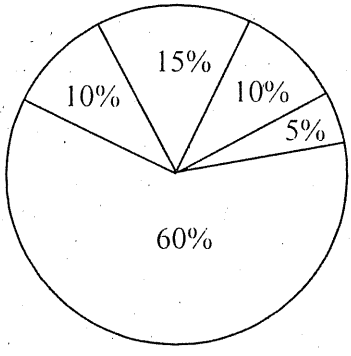
Nhà : 10%.

Dịch vụ : 15%.

Học, thuốc : 10%.

Tích luỹ : 5%.

2) Biểu đồ (xem hình bên).



Bài 4. 1) Môn Toán :

Số trung bình cộng : $\bar{x} = 6$. Mốt : $M_0 = 6$.

Số trung vị : $M_e = 6$. Hệ số biến thiên : $V_x = 38,7$.

2) Môn Văn :

Số trung bình cộng : $\bar{y} = 4,5$. Mốt : $M_0 = 5$.

Số trung vị : $M_e = 5$. Hệ số biến thiên : $V_y = 53,7$.

Bài 5. 1) Số trung bình cộng : $\bar{x} = 4,2$.

2) Phương sai : $s_x^2 = 1,96$.

D. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Số liệu thống kê sau đây được sử dụng cho các câu 1, 2, 3 và 4 : Chiều cao, tính bằng cm, của 30 em học sinh lớp 10 được cho theo bảng sau :

Lớp x_i	$[150;156)$	$[156;162)$	$[162;168)$
n_i	10	13	7

Câu 1. Bề rộng của các lớp bằng :

A) 5. B) 6.

C) Không tính được. D) Kết quả khác.

Câu 2. Giá trị trung tâm của lớp $[156;162)$ là :

A) 10. B) 13.

C) 153. D) 159.

Câu 3. Có bao nhiêu em cao dưới 162cm ?

A) 10. B) 13.

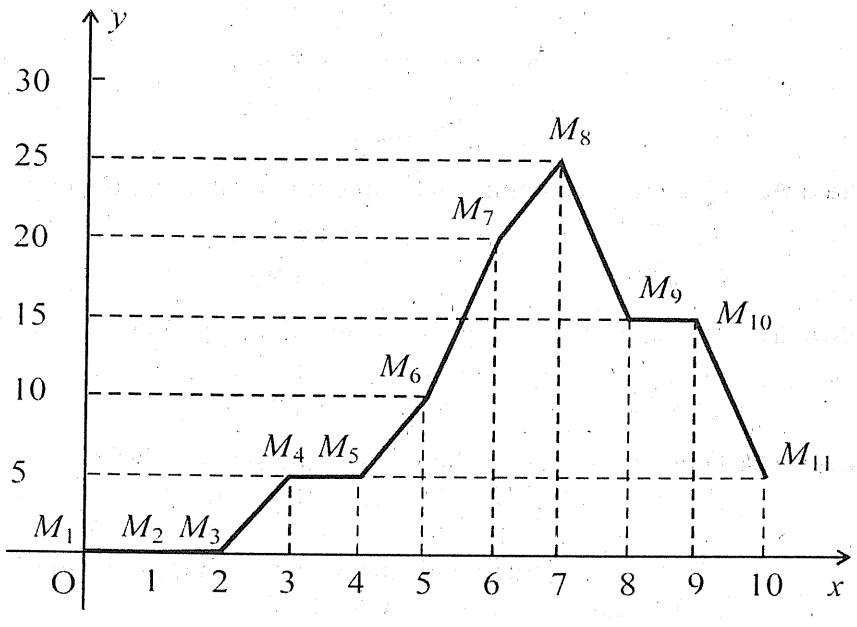
C) 23. D) Kết quả khác.

Câu 4. Tỉ lệ phần trăm (tần suất) của các em có chiều cao không nhỏ hơn 162cm là :

A) 33,3%. B) 43,3%.

C) 76,7%. D) 23,3%.

Số liệu thống kê sau đây dành cho các câu 5, 6, 7 :
Điểm số của 100 học sinh được biểu diễn bằng đồ thị là đường gấp khúc sau đây :



Trục hoành chỉ điểm số.
Trục tung chỉ số học sinh.

Câu 5. Có bao nhiêu em đạt điểm cao nhất ?

A) 25. B) 5.

C) 15. D) 10.

Câu 6. Điểm số có số học sinh nhiều nhất đạt được là :

A) Điểm 7. B) Điểm 6.

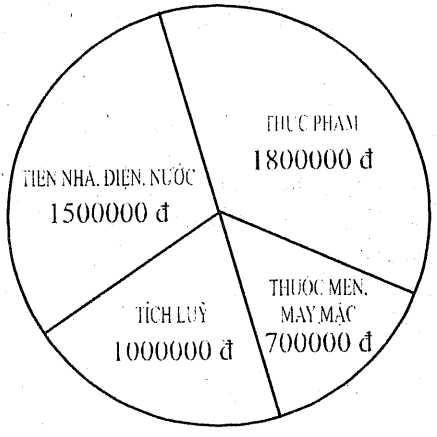
C) Điểm tối thiểu. D) Điểm tối đa.

Câu 7. Điểm trung bình của 100 học sinh đó là :

A) 7,0. B) 6,9.

C) 6,5. D) 7,2.

Số liệu thống kê sau đây dùng cho các câu 8, 9 :
Ngân quỹ hàng tháng của một gia đình cho bởi biểu đồ hình quạt :



Câu 8. Góc ở tâm của hình quạt tương ứng phần tích luỹ là

A) 72^0. B) 75^0.

C) 60^0. D) 90^0.

Câu 9. Tần suất (tỉ lệ bách phân) ở phần thực phẩm là :

A) 30%. B) 36%.

C) 40%. D) 42%.

Câu 10. Điểm Toán tháng 4/2006 của 4 học sinh cho bởi :

(I) 6 6 7 9 (II) 6 7 8 9 10

(III) 4 5 8 9 (IV) 6 8 9

Sắp xếp điểm trung bình của 4 em theo thứ tự từ cao đến thấp theo 4 cách sau. Hỏi cách nào đúng ?

A) (II) , (IV) , (III) , (I). B) (II) , (IV) , (I) , (III).

C) (II) , (III) , (IV) , (I). D) (II) , (III) , (I) , (IV).

Câu 11. Cho 4 dãy số :

A) 10 28 28 40 59 107 200

B) 10 28 28 40 59 107

C) 10 28 34 40 59 107 200

D) 10 28 28 34 59 107

Số $M_e = 34$ là số trung vị của dãy nào ?

Câu 12. Thảy con xí ngầu 15 lần, ta được kết quả sau :

x_i	1	2	3	4	5	6	Cộng
n_i	1	4	3	2	4	1	(15)

Câu nào sau đây sai ?

A) Số trung bình cộng là $\bar{x} = 3,5$.

B) Mốt là số $M_0 = 2$ hoặc $M_0 = 5$.

C) Số trung vị là $M_e = 4$.

D) Không có câu nào sai.

Số liệu thống kê sau đây được dùng cho các câu 13, 14, 15 và 16 : Điểm Toán của 40 em học sinh ở một lớp chuyên Toán cho bởi :

Điểm x_i	6	7	8	9	10
Tần số n_i	7	9	10	9	5
					$N = 40$

Câu 13. Số trung bình cộng của các số liệu thống kê :

A) 7. B) 7,8.

C) 7,9. D) 8.

Câu 14. Mốt (M_0) là số :

A) 10. B) 8.

C) 7. D) 7 hoặc 9.

Câu 15. Số trung vị (M_e) là :

A) 7. B) 8.

C) 10. D) 20.

Câu 16. Giá trị 1,6 là :

A) Phương sai. B) Độ lệch chuẩn.

C) Hệ số biến thiên. D) Không phải A), B), C).

Số liệu thống kê sau đây được dùng cho các câu 17, 18 và 19 : Chế độ bảo hành (đơn vị năm) của các đồ dùng điện của một nhà máy được khảo sát theo bảng phân phối tần số ghép lớp sau :

Lớp x_i	$[1;3)$	$[3;5)$	$[5;7]$
Tần số n_i	2	6	7

Câu 17. Số trung bình cộng $\bar{x}$ của các số liệu thống kê là :

A) 4,5. B) 6.

C) 4,7. D) Kết quả khác.

Câu 18. Số M_0 của các số liệu thống kê là :

A) 4. B) 6.

C) 8. D) 15.

Câu 19. Số trung vị M_e là :

A) 4. B) 6.

C) 8. D) 15.

Câu 20. Điểm bắn 25 viên đạn của một xạ thủ được ghi bởi :

x_i	$[0;4)$	$[4;8)$	$[8;12]$
n_i	5	15	5

Hệ số biến thiên của bảng phân phối thực nghiệm tần số ghép lớp là (tính theo %) :

A) 42. B) 42,1.

C) 42,2. D) 42,3.

GIẢI THÍCH - HƯỚNG DẪN

Câu 1. Bề rộng $d = 156 - 150 = 6$. Câu B).

Câu 2. $x_2^0 = \dfrac{156+162}{2} = 159$. Câu D).

Câu 3. Yêu cầu bài toán : 10 + 13 = 23. Câu C).

Câu 4. Yêu cầu bài toán : $\dfrac{7\times 100}{30} = 23,3\%$. Câu D).

Câu 5. Điểm cao nhất là điểm 10, suy ra có 5 em. Câu B).

Câu 6. Yêu cầu bài toán : $M_8(7,25)$, suy ra điểm 7. Câu A).

Câu 7. $\bar{x} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{8} n_i x_i = \dfrac{685}{100} = 6,9$. Câu B).

Câu 8. $\alpha = \dfrac{1\,000\,000\times 360^0}{5\,000\,000} = 72^0$. Câu A).

Câu 9. Yêu cầu bài toán : $\dfrac{1\,800\,000}{5\,000\,000}\times 100 = 36\%$. Câu B).

Câu 10. $\overline{x_1} = 7$; $\overline{x_2} = 8$; $\overline{x_3} = 6,5$; $\overline{x_4} = 7,7$. Yêu cầu bài toán : (II), (IV), (I), (III). Câu B).

Câu 11. A) $N = 7 \Rightarrow \dfrac{N+1}{2} = 4 \Rightarrow M_e = 40$.

B) $N=6 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{N}{2}=3 \\ \dfrac{N}{2}+1=4 \end{cases} \Rightarrow M_e=\dfrac{28+40}{2}=34.$

C) $N=7 \Rightarrow \dfrac{N+1}{2}=4 \Rightarrow M_e=40.$

D) $N=6 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{N}{2}=3 \\ \dfrac{N}{2}+1=4 \end{cases} \Rightarrow M_e=\dfrac{28+34}{2}=31.$

Vậy $M_e=34$. Câu B).

Câu 12. Ta lập bảng phân phối thực nghiệm tần số rời rạc :

x_i	n_i	N_i	$n_i x_i$
1	1	1	1
2	4	5	8
3	3	8	9
4	2	10	8
5	4	14	20
6	1	15	6
	$N=15$		52

$$\bar{x}=\frac{52}{15}=3,5.$$

Tần số lớn nhất là :

$$\begin{cases} 4 \rightarrow x_2=2 \\ 4 \rightarrow x_5=5. \end{cases}$$

Vậy $M_0=2$ hay $M_0=5$.

Vì $N=15$ lẻ nên M_e tương ứng với tần số tích luỹ lớn nhất $\dfrac{N+1}{2}=8 \Rightarrow M_e=3$. Câu C).

Câu 13.

x_i	n_i	N_i	$n_i x_i$	$n_i (x_i)^2$
6	7	7	42	252
7	9	16	63	441
8	10	26	80	640
9	9	35	81	729
10	5	40	50	500
	$N = 40$		316	2562

$$\overline{x} = \frac{316}{40} = 7,9 \text{ . Câu C).}$$

Câu 14. Tần số lớn nhất là $10 \Rightarrow M_0 = 8$. Câu B).

Câu 15. $N = 40$ chẵn $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{N}{2} = 20 \\ \dfrac{N}{2}+1 = 21 \end{cases} \Rightarrow M_e = \dfrac{8+8}{2} = 8$. Câu B).

Câu 16. Phương sai : $s_x^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 = \dfrac{2562}{40} - (7,9)^2 = 1,6$.

Độ lệch chuẩn : $s_x = \sqrt{1,6} = 1,3$.

Hệ số biến thiên : $V_x = \dfrac{s_x \times 100\%}{\overline{x}} = 16,2\%$.

Yêu cầu bài toán : Câu A).

Câu 17.

Lớp x_i	x_i^0	n_i	N_i	$n_i x_i^0$
$[1;3)$	2	2	2	4
$[3;5)$	4	6	8	24
$[5;7]$	6	7	15	42
		$N = 15$		70

$$\overline{x} = \frac{70}{15} = 4,7 \text{ . Câu C).}$$

Câu 18. $M_0 = 6$. Câu B).

Câu 19. $N = 15$ lẻ $\Rightarrow \dfrac{N+1}{2} = 8 \Rightarrow M_e = 4$. Câu A).

Câu 20.

x_i	x_i^0	n_i	$n_i x_i^0$	$n_i \left(x_i^0\right)^2$
$[0;4)$	2	5	10	20
$[4;8)$	6	15	90	540
$[8;12]$	10	5	50	500
		$N = 25$	150	1060

$$\bar{x} = \frac{150}{25} = 6.$$

$$s_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} = \sqrt{6,4} = 2,5.$$

$$V_x = \frac{\sqrt{6,4}}{6} \times 100\% = 42,2\%.$$

Câu C).

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG V

1	B	6	A	11	B	16	A
2	D	7	B	12	C	17	C
3	C	8	A	13	C	18	B
4	D	9	B	14	B	19	A
5	B	10	B	15	B	20	C

Chương VI.

GÓC LƯỢNG GIÁC VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

§ 1. GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC (CUNG) LƯỢNG GIÁC

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Số đo của một cung lượng giác, góc lượng giác

- Số đo của góc lượng giác (OA,OB) là số đo của cung lượng giác tương ứng $\overset{\frown}{AB}$.
- sđ $\overset{\frown}{AB} = \alpha + k2\pi$
  $= a^0 + k360^0 \ (k \in \mathbb{Z})$,
  với $\overset{\frown}{AB} = \alpha\,(rad) = a^0$.
- sđ$\overset{\frown}{AB}$ + sđ$\overset{\frown}{BC}$ = sđ$\overset{\frown}{AC}$ $+k2\pi$.

2. Giá trị lượng giác của cung α

sđ$\overset{\frown}{AM} = \alpha$

- $\sin\alpha =$ Tung độ của điểm M.
- $\cos\alpha =$ Hoành độ của điểm M.
- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $(\cos\alpha \neq 0)$. (1)
- $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $(\sin\alpha \neq 0)$.
- $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ gọi là giá trị lượng giác của cung α.
- Các định nghĩa (1) cũng áp dụng cho các góc lượng giác :
  $(OA,OM) = \alpha + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

- $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ xác định $\forall\alpha\in\mathbb{R}$.
- $\tan\alpha$ xác định với $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$.
- $\cot\alpha$ xác định với $\alpha\neq k\pi$.
- $-1\leq\sin\alpha\leq 1$ và $-1\leq\cos\alpha\leq 1$.
- $\sin(\alpha+k2\pi)=\sin\alpha$

  $\cos(\alpha+k2\pi)=\cos\alpha\ \ (\forall k\in\mathbb{Z})$.

3. Các hằng đẳng thức lượng giác cơ bản

- $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\quad(\forall\alpha)$
- $\tan\alpha.\cot\alpha=1\quad\left(\alpha\neq\dfrac{k\pi}{2}\right)$
- $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\quad\left(\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)\quad(k\in\mathbb{Z})$ (2)
- $1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\quad(\alpha\neq k\pi)$

4. Giá trị lượng giác của hai cung (góc) có liên quan đặc biệt

- ***Cung đối*** (3)

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$$

- ***Cung bù*** (4)

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$$

- ***Cung hơn kém*** π (5)

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$$
$$\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$$

• *Cung phụ*	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$	(6)
	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$	
	$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$	
	$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$	

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. TÍNH CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CÒN LẠI KHI ĐÃ CHO TRƯỚC MỘT GIÁ TRỊ

Phương pháp

Sử dụng công thức ở bảng (2).

Ví dụ 1. Cho biết $\cos\alpha=-\frac{4}{5}\ \left(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$. Tính các giá trị lượng giác còn lại.

Giải

Từ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\sin^2\alpha=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}\Rightarrow\sin\alpha=\pm\frac{3}{5}$.

Do $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\Rightarrow\sin\alpha>0\Rightarrow\sin\alpha=\frac{3}{5}$.

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{3}{4}$ và $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\frac{4}{3}$.

Ví dụ 2. Cho $\tan\alpha=-\sqrt{2}$. Tính $\sin\alpha,\cos\alpha,\cot\alpha\ \left(\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi\right)$.

Giải

Từ $\tan\alpha.\cot\alpha=1\Rightarrow\cot\alpha=\frac{1}{-\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$.

Từ $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow\cos^2\alpha=\dfrac{1}{1+2}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\cos\alpha=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Do $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi\Rightarrow\cos\alpha>0\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Từ $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\Rightarrow\sin\alpha=\tan\alpha.\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Ví dụ 3. Tính giá trị biểu thức $A=\dfrac{3\sin^2\alpha-4\cos^2\alpha}{4\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha}$ với $\tan\alpha=\sqrt{2}$.

Giải

Có thể tính $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$ rồi tính A nhưng phức tạp ; ở đây, do tính đẳng cấp, ta chia tử và mẫu của A cho $\cos^2\alpha$, ta được :

$$A=\frac{3\tan^2\alpha-4}{4\tan^2\alpha+3}=\frac{2}{11}.$$

Dạng 2. CHỨNG MINH MỘT ĐẲNG THỨC GIỮA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

Phương pháp

- Để chứng minh đẳng thức lượng giác có dạng $A=B$, ta thường sử dụng phương pháp chứng minh đại số, nghĩa là sử dụng các phép toán đại số kết hợp với các công thức lượng giác thích hợp, biến đổi vế phức tạp, ví dụ A thành A_1 đơn giản hơn A, từ A_1 thành A_2,... cuối cùng là B.
- Đôi khi sử dụng phép chứng minh tương đương hoặc chứng minh phản chứng.

Ví dụ 1. Chứng minh : $\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}-1\right)^2-(1-\cos\alpha)^2=(\tan\alpha-\sin\alpha)^2$.

Giải

Sử dụng hằng đẳng thức a^2-b^2, biến đổi :

$$\left(\frac{1}{\cos\alpha}-1\right)^2-(1-\cos\alpha)^2=\left(\frac{1}{\cos\alpha}-1+1-\cos\alpha\right)\left(\frac{1}{\cos\alpha}--1-1+\cos\alpha\right)$$

$$= \left(\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos\alpha}\right)\left(\frac{1-2\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha}\right) = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}(1-\cos\alpha)^2$$

$$= \left(\frac{\sin\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 = (\tan\alpha-\sin\alpha)^2.$$

Ví dụ 2. Chứng minh : $\cos\alpha(1+\cos\alpha)(\tan\alpha-\sin\alpha)=\sin^3\alpha$.

Giải

$$\cos\alpha(1+\cos\alpha)(\tan\alpha-\sin\alpha) = \cos\alpha(1+\cos\alpha)\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\sin\alpha\right)$$

$$= \sin\alpha(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)$$

$$= \sin\alpha(1-\cos^2\alpha) = \sin^3\alpha.$$

Ví dụ 3. Chứng minh : $\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$. (1)

Giải

Sử dụng phép chứng minh tương đương :

$(1) \Leftrightarrow (1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha) = \sin^2\alpha \Leftrightarrow 1-\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$

$\Leftrightarrow 1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$ (đúng $\forall\alpha$)

Vậy (1) đúng.

Dạng 3. THU GỌN MỘT BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC

Phương pháp

Để thu gọn biểu thức chứa góc α, phép toán hoàn toàn giống như dạng 2, chỉ khác là kết quả bài toán chưa được cho trước. Trường hợp kết quả thu gọn là hằng số, ta nói rằng chứng minh biểu thức độc lập với α.

Ví dụ 1. Thu gọn $A = \dfrac{(1+\cot^2\alpha)\left(\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1\right)\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$.

Giải

$$A = \frac{\left(1+\dfrac{1}{\tan^2\alpha}\right)(1+\tan^2\alpha-1)\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{(\tan^2\alpha+1)\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \tan\alpha.$$

Ví dụ 2. Thu gọn $B=\underbrace{\frac{\sin^2\alpha}{1+\cot\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{1+\tan\alpha}}_{B_1}+\underbrace{\frac{\sin^3\alpha}{1-\tan\alpha}+\frac{\cos^3\alpha}{1-\cot\alpha}}_{B_2}$.

Giải

$$B_1=\frac{\sin^2\alpha}{1+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}+\frac{\cos^2\alpha}{1+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$$

$$=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)}{(\sin\alpha+\cos\alpha)}=1-\sin\alpha\cos\alpha.$$

$$B_2=\frac{\sin^3\alpha}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}+\frac{\cos^3\alpha}{1-\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{\sin^3\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}+\frac{\cos^3\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\alpha(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)}{\cos\alpha-\sin\alpha}=-\sin\alpha\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)$$

$$B=1-\sin\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha).$$

Ví dụ 3. Chứng minh biểu thức sau độc lập đối với x :

$$A=2(\sin^4x+\cos^4x+\sin^2x\cos^2x)^2-(\sin^8x+\cos^8x).$$

Giải

Đặt : $\begin{cases}a=\sin^2x\\b=\cos^2x\end{cases}\Rightarrow a+b=1.$

Ta biến đổi, đưa A về dạng chỉ chứa $a+b$.

$$A=2(a^2+b^2+ab)^2-(a^4+b^4)$$

$$=2\left[(a+b)^2-ab\right]^2-\left[(a^2+b^2)^2-2a^2b^2\right]$$

$$=2(1-ab)^2-\left[\left((a+b)^2-2ab\right)^2-2a^2b^2\right]$$

$$=2(1-ab)^2-\left[(1-2ab)^2-2a^2b^2\right]$$

$$=2(1+a^2b^2-2ab)-(1+2a^2b^2-4ab)=1.\text{ (đpcm)}$$

Ví dụ 4. Thu gọn $A=\dfrac{3\sin^2\left(\dfrac{19\pi}{6}\right)-2\cos^2\left(\dfrac{-8\pi}{3}\right)}{2\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\cos\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)}$.

Giải

$$\sin\frac{19\pi}{6}=\sin\left(\frac{\pi}{6}+3\pi\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}.$$

$$\cos\left(\frac{-8\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{8\pi}{3}\right)=\cos\left(3\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}.$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}.$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=-\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}.$$

Vậy : $$A=\frac{3\left(\frac{1}{4}\right)-2\left(\frac{1}{4}\right)}{2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{2}.$$

Ví dụ 5. Tính $B=\tan 1^0.\tan 2^0.\tan 3^0...\tan 87^0.\tan 88^0.\tan 89^0$.

Giải

$$B=(\tan 1^0.\tan 89^0)(\tan 2^0.\tan 88^0)(\tan 3^0.\tan 87^0)...$$
$$...(\tan 43^0.\tan 47^0)(\tan 44^0.\tan 46^0)\tan 45^0$$
$$=(\tan 1^0\cot 1^0)(\tan 2^0\cot 2^0)(\tan 3^0\cot 3^0)...(\tan 44^0\cot 44^0)\tan 45^0$$
$$=1 \text{ (do } \tan\alpha.\cot\alpha=1 \text{ và } \tan 45^0=1).$$

Ví dụ 6. A,B,C là 3 góc của tam giác. Thu gọn biểu thức :

$$P=\sin(A+B).\sin(B+C).\sin(C+A)+\sin(A+B+C).$$

Giải

$$A+B=\pi-C\Rightarrow\sin(A+B)=\sin C.$$

$$A+B+C=\pi\Rightarrow\sin(A+B+C)=\sin\pi=0.$$

Vậy : $$P=\sin A.\sin B.\sin C.$$

C. BÀI TẬP

Bài 1. Tính các giá trị lượng giác nếu cho biết :

1) $\sin\alpha=-\frac{12}{13}\quad\left(\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}\right)$.

2) $\cot\alpha = 2+\sqrt{3} \quad \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Bài 2. Tính giá trị biểu thức :

1) $A=\dfrac{\sqrt{3}\sin^2\alpha-\sqrt{2}\cos^2\alpha}{\sqrt{3}\cos^2\alpha+\sqrt{2}\sin^2\alpha}$ với $\tan\alpha=\sqrt{2}$.

2) $B=\dfrac{\cot\alpha-\tan\alpha}{\cot\alpha+\tan\alpha}$ với $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$.

Bài 3. Chứng minh các đẳng thức lượng giác :

1) $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\dfrac{1+\cot^2\alpha}{1-\cot^2\alpha}$.

2) $\left(\dfrac{\cos\alpha+\tan\alpha}{1+\cos\alpha.\cot\alpha}\right)^2=\dfrac{\cos^2\alpha+\tan^2\alpha}{1+\cos^2\alpha.\cot^2\alpha}$.

Bài 4. Thu gọn các biểu thức :

1) $A=\dfrac{\cos^6\alpha+\sin^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^4\alpha+\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$.

2) $B=\dfrac{\cos^4\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha}$.

3) $C=\sqrt{1+2\sin\alpha\cos\alpha}-\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha} \quad \left(\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<\dfrac{7\pi}{4}\right)$.

Bài 5. Chứng minh các biểu thức sau độc lập đối với α :

1) $A=\cos^4\alpha(2\cos^2\alpha-3)+\sin^4\alpha(2\sin^2\alpha-3)$.

2) $B=\dfrac{1+\tan^2\alpha}{1-\tan^2\alpha}(\cos^4\alpha-\sin^4\alpha)$.

Bài 6. Tính giá trị biểu thức lượng giác :

1) $A=\sin^2 10^0+\sin^2 20^0+\sin^2 30^0+...+\sin^2 80^0+\sin^2 90^0$.

2) $B=\left(\dfrac{\tan\dfrac{5\pi}{6}+\tan\dfrac{\pi}{6}}{\tan\dfrac{\pi}{4}-\tan\dfrac{\pi}{6}}\right)+\left(\dfrac{\cot\dfrac{3\pi}{4}+\cot\dfrac{\pi}{4}}{\tan\dfrac{\pi}{3}-\tan\dfrac{\pi}{4}}\right)$.

Bài 7. Cho $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$. Tính giá trị của biểu thức :

1) $P=\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$. 2) $Q=\sin^5\alpha+\cos^5\alpha$.

Bài 8. Cho $3\sin\alpha-4\cos\alpha=5$ $\left(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$. Tính $\tan\alpha$.

Bài 9. Chứng minh : $\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\beta}+\cos^2\alpha.\tan^2\beta=\sin^2\alpha+\tan^2\beta$.

Bài 10. Cho $a\sin x.\sin y+b\cos x.\cos y=0$ với $a\neq 0,\ b\neq 0,\ a+b\neq 0,$ $x, y\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$. Chứng minh :

$$\frac{1}{a\sin^2 x+b\cos^2 x}+\frac{1}{a\sin^2 y+b\cos^2 y}=\frac{a+b}{ab}.$$

LỜI GIẢI

Bài 1. 1) $\cos^2\alpha=1-\frac{144}{169}=\frac{25}{169}.\ \pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}\Rightarrow\cos\alpha<0\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{5}{13}$.

$\tan\alpha=\frac{12}{5}$ và $\cot\alpha=\frac{5}{12}$.

2) $\tan\alpha=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$.

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{8}$$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}>0.$

$\sin\alpha=\tan\alpha.\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Bài 2. $A=\frac{\sqrt{3}\tan^2\alpha-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\tan^2\alpha}=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}=\sqrt{6}-2$.

$$B=\frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

$$=2\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}\right)^2-1=\frac{3-2\sqrt{6}}{2}.$$

Bài 3. 1) $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha-(\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$$

$$=\frac{1}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{\dfrac{1}{\sin^2\alpha}}{1-\cot^2\alpha}=\frac{1+\cot^2\alpha}{1-\cot^2\alpha}.$$

2) $\left(\dfrac{\cos\alpha+\tan\alpha}{1+\cos\alpha.\cot\alpha}\right)^2=\left(\dfrac{\cos\alpha+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}}\right)^2=\tan^2\alpha$;

$$\frac{\cos^2\alpha+\tan^2\alpha}{1+\cos^2\alpha.\cot^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\dfrac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha}}=\tan^2\alpha.$$

Bài 4. 1) Đặt $a=\cos^2\alpha$ và $b=\sin^2\alpha$.

$$A=\frac{a^3+b^3+3ab}{a^2+b^2+2ab}=\frac{a^3+b^3+3ab(a+b)}{(a+b)^2}=\frac{(a+b)^3}{(a+b)^2}=1.$$

2) $B=\dfrac{\cos^2\alpha(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+\cos^2\alpha}=\dfrac{\cos^2+\sin^2\alpha}{\sin^2+\cos^2\alpha}=1.$

3) $C=\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}-$

$$-\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=|\sin\alpha+\cos\alpha|-|\sin\alpha-\cos\alpha|.$$

Do $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<\dfrac{7\pi}{4}\Rightarrow\begin{cases}\sin\alpha<0<\cos\alpha\\|\sin\alpha|>|\cos\alpha|\end{cases}$ nên :

$$C=-\sin\alpha-\cos\alpha-(\cos\alpha-\sin\alpha)=-2\cos\alpha.$$

Bài 5. 1) Đặt $a=\cos^2\alpha,\ b=\sin^2\alpha$.

$$A=2(a^3+b^3)-3(a^2+b^2)$$

$$=2\left[(a+b)(a^2+b^2-ab)\right]-3(a^2+b^2)$$

$$=2\left[(a+b)^2-3ab\right]-3\left[(a+b)^2-2ab\right]$$

$$=-(a+b)^2=-1.$$

2) $B=\dfrac{1+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)$

$=\dfrac{1}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=1.$

Bài 6. 1) $A=(\sin^2 10^0+\sin^2 80^0)+(\sin^2 20^0+\sin^2 70^0)+\cdots$

$\cdots+(\sin^2 40^0+\sin^2 50^0)+\sin^2 90^0$

$=(\sin^2 10^0+\cos^2 10^0)+(\sin^2 20^0+\cos^2 20^0)+\cdots$

$\cdots+(\sin^2 40^0+\cos^2 40^0)+\sin^2 90^0$

$=5.$

2) $\begin{cases}\tan\dfrac{5\pi}{6}=\tan\left(\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\tan\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\\ \cot\dfrac{3\pi}{4}=\cot\left(\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\cot\dfrac{\pi}{4}=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\tan\dfrac{5\pi}{6}+\tan\dfrac{\pi}{6}=0\\ \cot\dfrac{3\pi}{4}+\cot\dfrac{\pi}{4}=0\end{cases}$

$\Rightarrow B=0.$

Bài 7. $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\Rightarrow\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2-1\right]=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}.$

1) $P=\sin^3\alpha+\cos^3\alpha=\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^3-3\sin\alpha\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)$

$=\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^3-3\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}-1}{8}.$

2) Ta có : $\cos^3\alpha+\sin^3\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^3\alpha+\cos^3\alpha)$

$=\sin^5\alpha+\cos^5\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)$

Do đó : $Q=\cos^3\alpha+\sin^3\alpha-\sin^2\alpha.\cos^2\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)$

$=\dfrac{3\sqrt{3}-1}{8}-\dfrac{3}{16}\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)=\dfrac{9\sqrt{3}-1}{32}.$

Bài 8. $3\sin\alpha-4\cos\alpha=5\Rightarrow 25=9\sin^2\alpha+16\cos^2\alpha-24\sin\alpha.\cos\alpha.$

Chia hai vế cho $\cos^2\alpha\neq 0$ (vì $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$), ta được :

$9\tan^2\alpha+16-24\tan\alpha=25(1+\tan^2\alpha)\Leftrightarrow 16\tan^2\alpha+24\tan+9=0$

$$\Leftrightarrow (4\tan\alpha+3)^2=0\Leftrightarrow \tan\alpha=-\frac{3}{4}.$$

Do $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\Rightarrow \tan\alpha<0$. Vậy : $\tan\alpha=-\frac{3}{4}$.

Bài 9. $\sin^2\alpha+\tan^2\beta-\cos^2\alpha.\tan^2\beta=\sin^2\alpha+\tan^2\beta(1-\cos^2\alpha)$

$$=\sin^2\alpha+\tan^2\beta.\sin^2\alpha$$
$$=\sin^2\alpha(1+\tan^2\beta)$$
$$=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\beta}\Rightarrow(\text{đpcm}).$$

Bài 10. Chia cả hai vế của giả thiết cho $\cos x.\cos y$ ta được :

$$a\tan x.\tan y+b=0. \qquad (1)$$

Ta có :

$$\frac{1}{a\sin^2 x+b\cos^2 x}+\frac{1}{a\sin^2 y+b\cos^2 y}=$$

$$=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{a\tan^2 x+b}+\frac{\frac{1}{\cos^2 y}}{a\tan^2 y+b}=\frac{1+\tan^2 x}{a\tan^2 x+b}+\frac{1+\tan^2 y}{a\tan^2 y+b}$$

$$=\frac{1+\tan^2 x}{a\tan^2 x+b}+\frac{1+\frac{b^2}{a^2\tan^2 x}}{a\left(\frac{b^2}{a^2\tan^2 x}\right)+b} \quad (\text{theo (1)})$$

$$=\frac{1+\tan^2 x}{a\tan^2 x+b}+\frac{a^2\tan^2 x+b^2}{ab(a\tan^2 x+b)}$$

$$=\frac{ab(1+\tan^2 x)+a^2\tan^2 x+b^2}{ab(a\tan^2 x+b)}$$

$$=\frac{(a+b)(a\tan^2 x+b)}{ab(a\tan^2 x+b)}=\frac{a+b}{ab}.$$

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tính giá trị biểu thức $A=\frac{3\sin^2\alpha-4\cos^2\alpha+5}{4\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha-5}$ với $\tan\alpha=-1$.

Bài 2. Chứng minh các đẳng thức lượng giác :

1) $\cot^2 x - \cos^2 x = \cot^2 x.\cos^2 x$.

2) $\dfrac{\sin x - \cos x + 1}{1 - \cos x} = \dfrac{2\cos x}{\sin x + \cos x - 1}$.

Bài 3. Thu gọn các biểu thức :

1) $A = \cos x\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}} - \sin x\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}} \quad \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

2) $B = \sqrt{\dfrac{1}{\sin^2 x} + \dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\tan^2 x} - \dfrac{1}{\cot^2 x}}$.

Bài 4. Chứng minh các biểu thức độc lập đối với x :

1) $A = \sin^2 x(1+\cot x) + \cos^2 x(1-\tan x)$.

2) $B = \sin^6 x + \cos^6 x - 2\sin^4 x - \cos^4 x + \sin^2 x$.

Bài 5. Chứng minh : $1 - \cos^2\alpha - \sin^2\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta = \sin^2\alpha.\cos^2\beta$.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. $A = -3$.

Bài 2. 1) Biến đổi vế trái.

2) Dùng phép biến đổi tương đương.

Bài 3. 1) $A = \sin x - \cos x$. 2) $B = \sqrt{2}$.

Bài 4. 1) $A = 1$.

2) Đặt $\begin{cases} a = \cos^2\alpha \\ b = \sin^2\alpha \end{cases} \Rightarrow a = 1 - b$

$$\Rightarrow B = (1-b)^3 + b^3 - 2b^2 - (1-b)^2 + b = 0.$$

Bài 5. $1 - \cos^2\alpha - \sin^2\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta =$

$= 1 - \cos^2\alpha + \cos^2\alpha\sin^2\beta - \sin^2\beta$

$= \sin^2\alpha - \sin^2\beta(1 - \cos^2\alpha)$

$= \sin^2\alpha(1 - \sin^2\beta)$

$= \sin^2\alpha.\cos^2\beta.$

§ 2. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Công thức cộng

$$\begin{aligned}
&\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b\\
&\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b\\
&\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b\\
&\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b\\
&\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}\\
&\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}
\end{aligned}\qquad (1)$$

2. Công thức nhân đôi

$$\begin{aligned}
&\sin 2a=2\sin a\cos a\\
&\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a\\
&\qquad=2\cos^2 a-1\\
&\qquad=1-2\sin^2 a\\
&\tan 2a=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}
\end{aligned}\qquad (2)$$

3. Công thức biến đổi TỔNG thành TÍCH

$$\begin{aligned}
&\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\
&\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\\
&\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\
&\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\\
&\tan\alpha\pm\tan\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}\\
&\cot\alpha\pm\cot\beta=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha.\sin\beta}
\end{aligned}\qquad (3)$$

4. Công thức biến đổi TÍCH thành TỔNG

$$\cos a.\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$$
$$\sin a.\sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)] \quad (4)$$
$$\sin a.\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$$

B. CÁC DẠNG TOÁN

Về phần "CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC", các dạng toán và phương pháp chứng minh tương tự như phần §1 ; tuy nhiên ở phần §2 này, ngoài các hằng đẳng thức lượng giác cơ bản (công thức lượng giác cơ bản) ta được phép dùng các loại công thức cộng, nhân, biến đổi, ... thành ra phép chứng minh phong phú hơn và dĩ nhiên cũng phức tạp hơn !

Dạng 1. TÍNH GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC ĐẶC BIỆT

Ví dụ 1. Tính $\cos 105^0$.

Giải

$$\sin 15^0 = \sin(45^0-30^0) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right).$$

$$\cos 105^0 = \cos(15^0+90^0) = -\sin 15^0 = -\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right).$$

Ví dụ 2. Tính $\cos\frac{\pi}{5}.\cos\frac{2\pi}{5}$.

Giải

$$A = \cos\frac{\pi}{5}.\cos\frac{2\pi}{5} \Rightarrow 2\sin\frac{\pi}{5}A = \sin\frac{2\pi}{5}.\cos\frac{2\pi}{5}$$
$$= \frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{5}$$
$$\Rightarrow A = \frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{1}{4}.$$

Dạng 2. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC

Ví dụ 1. Chứng minh : $\dfrac{\tan^2\alpha-\tan^2\beta}{1-\tan^2\alpha.\tan^2\beta}=\tan(\alpha+\beta).\tan(\alpha-\beta).$

Giải

$$\frac{\tan^2\alpha-\tan^2\beta}{1-\tan^2\alpha.\tan^2\beta}=\frac{(\tan\alpha+\tan\beta)(\tan\alpha-\tan\beta)}{(1-\tan\alpha.\tan\beta)(1+\tan\alpha.\tan\beta)}$$
$$=\tan(\alpha+\beta).\tan(\alpha-\beta).$$

Ví dụ 2. Chứng minh : $\left(1+\tan\alpha+\dfrac{1}{\cos\alpha}\right)\left(1+\tan\alpha-\dfrac{1}{\cos\alpha}\right)=\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha}.$

Giải

$$\left(1+\tan\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}\right)\left(1+\tan\alpha-\frac{1}{\cos\alpha}\right)=(1+\tan\alpha)^2-\frac{1}{\cos^2\alpha}$$
$$=1+2\tan\alpha+\tan^2\alpha-(1+\tan^2\alpha)=2\tan\alpha$$
$$=\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha.\cos\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

Ví dụ 3. Chứng minh : $\dfrac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1}=2\cos\alpha.$

Giải

$$\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1}=\frac{(1+\cos 2\alpha)+(\cos 3\alpha+\cos\alpha)}{(2\cos^2\alpha-1)+\cos\alpha}$$
$$=\frac{2\cos^2\alpha+2\cos 2\alpha.\cos\alpha}{\cos 2\alpha+\cos\alpha}$$
$$=\frac{2\cos\alpha(\cos 2\alpha+\cos\alpha)}{\cos 2\alpha+\cos\alpha}=2\cos\alpha.$$

Dạng 3. THU GỌN BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC

Ví dụ 1. Thu gọn : $A=\cos^2\alpha+\cos^2(\alpha+\beta)-2\cos\alpha.\cos\beta.\cos(\alpha+\beta).$

Giải

$$A=\cos^2\alpha+\cos(\alpha+\beta)\big(\cos(\alpha+\beta)-2\cos\alpha.\cos\beta\big)$$

$$= \cos^2\alpha + \cos(\alpha+\beta)(-\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$$
$$= +\cos^2\alpha - \cos(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta)$$
$$= \cos^2\alpha - \frac{1}{2}[\cos 2\alpha + \cos 2\beta]$$
$$= \cos^2\alpha - \frac{1}{2}[2\cos^2\alpha - 1 + 2\cos^2\beta - 1]$$
$$= \cos^2\alpha - \cos^2\alpha - \cos^2\beta + 1 = +\sin^2\beta .$$

Cách khác.

$$A = \cos^2\alpha + (\cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)^2 -$$
$$-2\cos\alpha\cos\beta(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$$
$$= \cos^2\alpha + \cos^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta -$$
$$-2\cos^2\alpha\cos^2\beta + 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta$$
$$= \cos^2\alpha - \cos^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta$$
$$= \cos^2\alpha(1-\cos^2\beta) + \sin^2\alpha\sin^2\beta$$
$$= \cos^2\alpha.\sin^2\beta + \sin^2\alpha.\sin^2\beta = \sin^2\beta .$$

Ví dụ 2. Thu gọn biểu thức : $B = \dfrac{\cot^2 2\alpha - 1}{2\cot 2\alpha} - \cos 8\alpha.\cot 4\alpha$.

Giải

Ta có : $\dfrac{\cot^2 2\alpha - 1}{2\cot 2\alpha} = \dfrac{1}{2}\left(\cot 2\alpha - \dfrac{1}{\cot 2\alpha}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} - \dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}\right)$

$$= \frac{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha}{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha} = \frac{\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha}.$$

Do đó : $B = \dfrac{\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha} - \cos 8\alpha\cdot\dfrac{\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha} = \dfrac{\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha}(1-\cos 8\alpha)$

$$= \frac{\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha}\cdot 2\sin^2 4\alpha = \sin 8\alpha .$$

Dạng 4. CHỨNG MINH BIỂU THỨC ĐỘC LẬP ĐỐI VỚI α.

Ví dụ 1. Chứng minh biểu thức sau là một hằng số :

$$y = \sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} - \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x} - \cos 2x .$$

Giải

$$y=\sqrt{\sin^4 x+4(1-\sin^2 x)}-\sqrt{\cos^4 x+4(1-\cos^2 x)}-\cos 2x$$
$$=\sqrt{(\sin^2 x-2)^2}-\sqrt{(\cos^2 x-2)^2}-\cos 2x$$
$$=|\sin^2 x-2|-|\cos^2 x-2|-\cos 2x$$
$$=2-\sin^2 x-(2-\cos^2 x)-\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x-\cos 2x=0.$$

Ví dụ 2. Chứng minh biểu thức sau không chứa x :

$$y=\frac{1}{\cos^6 x}-\tan^6 x-\frac{3\tan^2 x}{\cos^2 x}.$$

Giải

$$y=\frac{1-\sin^6 x}{\cos^6 x}-\frac{3\sin^2 x}{\cos^4 x}=\frac{1-\sin^6 x-3\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^6 x}$$
$$=\frac{(1-\sin^2 x)(1+\sin^2 x+\sin^4 x)-3\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^6 x}$$
$$=\frac{\cos^2 x}{\cos^6 x}(1+\sin^4 x-2\sin^2 x)=\frac{(1-\sin^2 x)^2}{\cos^4 x}=1.$$

Dạng 5. TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC

Ví dụ 1. Tính giá trị biểu thức : $A=\sin 15^0+\tan 30^0.\cos 15^0$.

Giải

$$A=\sin 15^0+\frac{\sin 30^0}{\cos 30^0}\cdot\cos 15^0$$
$$=\frac{1}{\cos 30^0}(\sin 15^0.\cos 30^0+\cos 15^0.\sin 30^0)=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin 45^0=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ví dụ 2. Tính : $B=\cos\frac{\pi}{17}\cos\frac{2\pi}{17}\cos\frac{4\pi}{17}\cos\frac{8\pi}{17}$.

Giải

$$2\sin\frac{\pi}{17}\cdot B=2\sin\frac{\pi}{17}\cos\frac{\pi}{17}\cos\frac{2\pi}{17}\cos\frac{4\pi}{17}\cos\frac{8\pi}{17}$$
$$=\sin\frac{2\pi}{17}\cos\frac{2\pi}{17}\cos\frac{4\pi}{17}\cos\frac{8\pi}{17}=\frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{17}\cos\frac{4\pi}{17}\cos\frac{8\pi}{17}$$

$$= \frac{1}{4}\sin\frac{8\pi}{17}\cos\frac{8\pi}{17} = \frac{1}{8}\sin\frac{16\pi}{17}.$$

Vậy : $$B = \frac{\sin\frac{16\pi}{17}}{16\sin\frac{\pi}{17}} = \frac{1}{16}.$$

Ví dụ 3. Tính $C = \tan 9^0 - \tan 27^0 - \tan 63^0 + \tan 81^0$.

Giải

$$C = \tan 81^0 + \tan 9^0 - (\tan 63^0 + \tan 27^o)$$
$$= \frac{\sin 90^0}{\cos 81^0.\cos 9^0} - \frac{\sin 90^0}{\cos 63^0.\cos 27^0} = \frac{1}{\sin 9^0.\cos 9^0} - \frac{1}{\sin 27^0.\sin 27^0}$$
$$= \frac{2}{\sin 18^0} - \frac{2}{\sin 54^0} = 2.\frac{\sin 54^0 - \sin 18^0}{\sin 18^0.\sin 54^0} = 4.\frac{\cos 36^0.\sin 18^0}{\sin 18^0.\cos 36^0} = 4.$$

C. BÀI TẬP

Bài 1. 1) Cho $\sin a = \frac{4}{5}, \cos b = \frac{3}{5}\left(0 < b < \frac{\pi}{2} < a < \pi\right)$. Tính $a + b$.

2) Cho $\tan a = \frac{1}{2}, \tan b = \frac{1}{3}\left(0 < a, b < \frac{\pi}{2}\right)$. Tính $a + b$.

Bài 2. Cho a, b là hai góc nhọn. Chứng minh điều kiện cần và đủ để $a + b = \frac{\pi}{4}$ là $(1 + \tan a)(1 + \tan b) = 2$.

Bài 3. Chứng minh các đẳng thức :

1) $\tan(\alpha + \beta) - \tan\alpha - \tan\beta = \tan(\alpha + \beta).\tan\alpha.\tan\beta$.

2) $\tan^2\alpha - \tan^2\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta).\sin(\alpha - \beta)}{\cos^2\alpha.\cos^2\beta}$.

Bài 4. Chứng minh các đẳng thức :

1) $\frac{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha}{2(1 - \cos\alpha)} = \cos^2\frac{\alpha}{2}$.

2) $\cot\alpha - \tan\alpha - 2\tan 2\alpha - 4\tan 4\alpha - 8\tan 8\alpha = 16\cot 16\alpha$.

3) $\frac{\cos^3\alpha.\sin\alpha - \sin^3\alpha.\cos\alpha}{\cos^3\alpha.\sin\alpha + \sin^3\alpha.\cos\alpha} = \cos 2\alpha$.

Bài 5. Chứng minh các đẳng thức :

1) $\cos 3a.\cos^3 a + \sin 3a.\sin^3 a = \cos^3 2a$.

2) $1 + 2\cos 2x + 2\cos 4x + 2\cos 6x = \dfrac{\sin 7x}{\sin x}$.

3) $\tan\alpha + \cot\alpha + \tan 3\alpha + \cot 3\alpha = \dfrac{8\cos^2 2\alpha}{\sin 6\alpha}$.

Bài 6. Thu gọn các biểu thức :

1) $A = \sin^2 x + \sin^2\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) + \sin^2\left(x + \dfrac{4\pi}{3}\right)$.

2) $B = \dfrac{\sin x + \sin 7x + \sin 8x}{1 + \cos x + \cos 7x + \cos 8x}$.

3) $C = \dfrac{1}{\cos x + \sqrt{\tan^2 x - \sin^2 x}}$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Bài 7. Chứng minh biểu thức độc lập đối với x :

1) $A = \dfrac{\sin 6x + \sin 4x + \sin 2x}{\sin 2x.\cos 4x + \sin 2x.\cos 2x + \sin 2x}$.

2) $B = \dfrac{\cos 3x.\sin^3 x + \sin 3x.\cos^3 x}{\sin 2x.\cos 2x}$.

Bài 8. Tính giá trị các biểu thức lượng giác :

1) $A = \tan 12^0.\tan 24^0 + \tan 24^0.\tan 54^0 + \tan 54^0.\tan 12^0$.

2) $B = \sin^4 x + \cos^4 x + \sin^4\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \cos^4\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

3) $C = \cos^2\dfrac{\pi}{5} + \cos^2\dfrac{2\pi}{5} + \cos^2\dfrac{7\pi}{10} + \cos^2\dfrac{9\pi}{10}$.

Bài 9. Cho $\sin(\alpha + 2\beta) = 3\sin\alpha$. Chứng minh : $\tan(\alpha + \beta) = 2\tan\beta$.

Bài 10. Chứng minh : $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos(\alpha + \beta + \gamma) =$

$$= 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

Suy ra trong mọi tam giác ABC, ta có :

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2},$$

và nếu $\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{8}$ thì ΔABC là tam giác đều.

LỜI GIẢI

Bài 1. 1) $\cos^2 a = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos a = -\frac{3}{5} < 0$.

$\sin^2 b = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin b = \frac{4}{5} > 0$.

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b = -\frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -1 \Rightarrow a + b = \pi$.

2) $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a.\tan b} = 1 \Rightarrow a + b = \frac{\pi}{4}$.

Bài 2. Chứng minh : $a + b = \frac{\pi}{4} \Rightarrow (1+\tan a)(1+\tan b) = 2$. (1)

$$a + b = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 1 = \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a.\tan b} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 - \tan a.\tan b = \tan a + \tan b$$
$$\Leftrightarrow 2 = 1 + \tan a + \tan b + \tan a.\tan b$$
$$\Leftrightarrow 2 = (1+\tan a)(1+\tan b)$$

Chứng minh : $(1+\tan a)(1+\tan b) = 2 \Rightarrow a + b = \frac{\pi}{4}$. (2)

$$(1+\tan a)(1+\tan b) = 2 \Rightarrow 1 + \tan a + \tan b + \tan a.\tan b = 2$$
$$\Leftrightarrow \tan a + \tan b = 1 - \tan a.\tan b$$
$$\Leftrightarrow \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a.\tan b} = 1$$
$$\Leftrightarrow \tan(a+b) = 1$$
$$\Rightarrow a + b = \frac{\pi}{4} (a, b \text{ góc nhọn}).$$

Bài 3. 1) $\tan(\alpha+\beta) - \tan\alpha - \tan\beta = \tan(\alpha+\beta).\tan\alpha.\tan\beta$

$\Leftrightarrow \tan(\alpha+\beta)(1 - \tan\alpha.\tan\beta) = \tan\alpha + \tan\beta$

$\Leftrightarrow \tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha.\tan\beta}$ (đúng).

2) $\frac{\sin(\alpha+\beta).\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha.\cos^2\beta} =$

$= \frac{(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)}{\cos^2\alpha.\cos^2\beta}$

$$= \frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta}{\cos^2\alpha\cos^2\beta} = \tan^2\alpha - \tan^2\beta .$$

Bài 4. 1) $\dfrac{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha}{2(1-\cos\alpha)} = \dfrac{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha}{2(1-\cos\alpha)}$

$$= \frac{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) + \cos^2\alpha}{2(1-\cos\alpha)}$$

$$= \frac{\sin^2\alpha}{2(1-\cos\alpha)} = \frac{1-\cos^2\alpha}{2(1-\cos\alpha)} = \cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

2) Ta có :

$$\cot x - \tan x = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x\cos x}$$

$$= \frac{2\cos 2x}{\sin 2x} = 2\cot 2x . \qquad (1)$$

Do (1) nên :

$\cot\alpha - \tan\alpha - 2\tan 2\alpha - 4\tan 4\alpha - 8\tan 8\alpha =$

$= 2\cot 2\alpha - 2\tan 2\alpha - 4\tan 4\alpha - 8\tan 8\alpha$

$= 4\cot 4\alpha - 4\tan 4\alpha - 8\tan 8\alpha$

$= 8\cot 8\alpha - 8\tan 8\alpha = 16\cot 16\alpha .$

3) $\dfrac{\cos^3\alpha.\sin\alpha - \sin^3\alpha.\cos\alpha}{\cos^3\alpha.\sin\alpha + \sin^3\alpha.\cos\alpha} = \dfrac{\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}$

$$= \cos 2\alpha .$$

Bài 5. 1) $\cos 3a.\cos^3 a + \sin 3a.\sin^3 a =$

$= \cos 3a.\cos a.\cos^2 a + \sin 3a.\sin a.\sin^2 a$

$$= \frac{1}{2}(\cos 4a + \cos 2a)\left(\frac{1+\cos 2a}{2}\right) + \frac{1}{2}(\cos 2a - \cos 4a)\left(\frac{1-\cos 2a}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}[\cos 4a + \cos 4a.\cos 2a + \cos 2a + \cos^2 2a + \cos 2a - \cos^2 2a -$$

$$- \cos 4a + \cos 4a\cos 2a]$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 2(\cos 4a\cos 2a + \cos 2a) = \frac{1}{2}\cos 2a(\cos 4a + 1) = \cos^3 2a .$$

2) $1 + 2\cos 2x + 2\cos 4x + 2\cos 6x = \dfrac{\sin 7x}{\sin x}$

$\Leftrightarrow \sin x + 2\sin x\cos 2x + 2\sin x\cos 4x + 2\sin x\cos 6x = \sin 7x$

$\Leftrightarrow \sin x + \sin 3x - \sin x + \sin 5x - \sin 3x + \sin 7x - \sin 5x = \sin 7x$

$\Leftrightarrow \sin 7x = \sin 7x$ (đúng).

3) $\tan\alpha+\cot\alpha+\tan 3\alpha+\cot 3\alpha=$

$=\tan 3\alpha+\tan\alpha+\cot 3\alpha+\cot\alpha$

$=\dfrac{\sin 4\alpha}{\cos 3\alpha\cos\alpha}+\dfrac{\sin 4\alpha}{\sin 3\alpha.\sin\alpha}$

$=\dfrac{\sin 4\alpha(\sin 3\alpha.\sin\alpha+\cos 3\alpha.\cos\alpha)}{\sin 3\alpha.\cos 3\alpha.\sin\alpha.\cos\alpha}$

$=\dfrac{4\sin 4\alpha.\cos 2\alpha}{\sin 6\alpha.\sin 2\alpha}=\dfrac{8\sin 2\alpha.\cos^2 2\alpha}{\sin 6\alpha.\sin 2\alpha}=\dfrac{8\cos^2 2\alpha}{\sin 6\alpha}.$

Bài 6. 1) $A=\dfrac{1-\cos 2x}{2}+\dfrac{1-\cos\left(2x+\dfrac{4\pi}{3}\right)}{2}+\dfrac{1-\cos\left(2x+\dfrac{8\pi}{3}\right)}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\left[3-\cos 2x-\left(\cos\left(2x+\dfrac{8\pi}{3}\right)+\cos\left(2x+\dfrac{4\pi}{3}\right)\right)\right]$

$=\dfrac{1}{2}\left(3-\cos 2x-2\cos(2x+2\pi).\cos\dfrac{2\pi}{3}\right)$

$=\dfrac{1}{3}(3-\cos 2x+\cos 2x)=1.$

2) $B=\dfrac{(\sin 8x+\sin x)+\sin 7x}{(\cos 7x+\cos x)+(1+\cos 8x)}$

$=\dfrac{2\sin\dfrac{9x}{2}\cos\dfrac{7x}{2}+2\sin\dfrac{7x}{2}.\cos\dfrac{7x}{2}}{2\cos 4x.\cos 3x+2\cos^2 4x}$

$=\dfrac{2\cos\dfrac{7x}{2}\left(\sin\dfrac{9x}{2}+\sin\dfrac{7x}{2}\right)}{2\cos 4x(\cos 4x+\cos 3x)}=\dfrac{4\cos\dfrac{7x}{2}\sin 4x\cos\dfrac{x}{2}}{4\cos 4x\cos\dfrac{7x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}=\tan 4x$

3) $C=\dfrac{1}{\cos x+\sqrt{\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\sin^2 x}}=\dfrac{1}{\cos x+\dfrac{\sqrt{\sin^2 x(1-\cos^2 x)}}{|\cos x|}}$

$=\dfrac{1}{\cos x+\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}}=\cos x\ (\text{do } \cos x>0).$

Bài 7. 1) $A=\dfrac{(\sin 6x+\sin 2x)+\sin 4x}{\sin 2x(\cos 2x+1+\cos 4x)}=\dfrac{2\sin 4x\cos 2x+\sin 4x}{\sin 2x(\cos 2x+2\cos^2 2x)}$

$$= \frac{\sin 4x(1+2\cos 2x)}{\sin 2x.\cos 2x(1+2\cos 2x)} = 2.$$

2) $B = \dfrac{\cos 3x \sin x \sin^2 x + \sin 3x \cos x \cos^2 x}{\sin 2x.\cos 2x}$

$$= \frac{(\sin 4x - \sin 2x)(1-\cos 2x) + (\sin 4x + \sin 2x)(1+\cos 2x)}{4\sin 2x \cos 2x}$$

$$= \left(\frac{1}{2\sin 4x}\right)(\sin 4x - \sin 4x\cos 2x - \sin 2x + \sin 2x\cos 2x +$$

$$+ \sin 4x + \sin 4x\cos 2x + \sin 2x + \sin 2x\cos 2x)$$

$$= \frac{1}{2\sin 4x}(2\sin 4x + 2\sin 2x\cos 2x) = \frac{3}{2}.$$

Bài 8. 1) $A = \tan 12^0 \tan 24^0 + \tan 24^0 \tan 54^0 + \tan 54^0 \tan 12^0$

$$= \tan 54^0(\tan 24^0 + \tan 12^0) + \tan 12^0 \tan 24^0$$

$$= \cot 36^0(\tan 24^0 + \tan 12^0) + \tan 12^0 \tan 24^0$$

$$= \frac{\tan 24^0 + \tan 12^0}{\tan 36^0} + \tan 12^0 \tan 24^0$$

$$= \frac{\tan 24^0 + \tan 12^0}{\dfrac{\tan 24^0 + \tan 12^0}{1 - \tan 24^0 \tan 12^0}} + \tan 12^0 \tan 24^0$$

$$= 1 - \tan 24^0 \tan 12^0 + \tan 12^0 \tan 24^0 = 1.$$

2) $B = \sin^4 x + \cos^4 x + \sin^4\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \cos^4\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

$$= 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x + 1 - 2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{2}\sin^2 2x - \frac{1}{2}\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{2}(\sin^2 2x + \cos^2 2x) = \frac{3}{2}.$$

3) $C = \cos^2\dfrac{\pi}{5} + \cos^2\dfrac{2\pi}{5} + \cos^2\dfrac{7\pi}{10} + \cos^2\dfrac{9\pi}{10}$

$$= \frac{1+\cos\frac{2\pi}{5}}{2} + \frac{1+\cos\frac{4\pi}{5}}{2} + \frac{1+\cos\frac{7\pi}{5}}{2} + \frac{1+\cos\frac{9\pi}{5}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(4 + \cos\frac{9\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{7\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(4 + 2\cos\frac{11\pi}{10}.\cos\frac{7\pi}{10} + 2\cos\frac{11\pi}{10}.\cos\frac{3\pi}{10}\right)$$

$$= 2 + \cos\frac{11\pi}{10}\left(\cos\frac{7\pi}{10} + \cos\frac{3\pi}{10}\right) = 2 + 2\cos\frac{11\pi}{10}\cos\frac{\pi}{2}.\cos\frac{\pi}{5}$$

$$= 2 \text{ (do } \cos\frac{\pi}{2} = 0\text{)}.$$

Bài 9. $3\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\beta) \Rightarrow 3\sin\alpha = \sin\alpha\cos 2\beta + \cos\alpha.\sin 2\beta$

Chia hai vế cho $\cos\alpha.\cos 2\beta$ ta được :

$$\frac{3\tan\alpha}{\cos 2\beta} = \tan\alpha + \tan 2\beta. \qquad (1)$$

Áp dụng công thức nhân :

$$\begin{cases} \cos 2\beta = \dfrac{1-\tan^2\beta}{1+\tan^2\beta} \\ \tan 2\beta = \dfrac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}. \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{3\tan\alpha(1+\tan^2\beta)}{1-\tan^2\beta} = \tan\alpha + \frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}$$

$$\Leftrightarrow \tan\alpha + 2\tan\alpha\tan^2\beta = \tan\beta$$

$$\Leftrightarrow \tan\alpha + \tan\beta + 2\tan\alpha\tan^2\beta = 2\tan\beta$$

$$\Leftrightarrow \tan\alpha + \tan\beta = 2\tan\beta(1 - \tan\alpha\tan\beta)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha.\tan\beta} = 2\tan\beta.$$

Bài 10. Áp dụng công thức biến đổi tổng thành tích :

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos(\alpha+\beta+\gamma)$$

$$= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \gamma\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \gamma\right) + \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]$$

$$= 4\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).\cos\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}\right).\cos\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right) \text{ (đpcm).} \qquad (1)$$

Áp dụng 1.

Với $\Delta ABC \Rightarrow A+B+C=\pi \Rightarrow \cos(A+B+C)=-1.$

$$\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)=\sin\left(\frac{C}{2}\right).$$

$$(1) \Rightarrow \cos A+\cos B+\cos C-1=4\sin\frac{C}{2}.\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} \qquad (2)$$

Áp dụng 2. Nếu $\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{8}$, ta có :

$$(2) \Rightarrow \cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{4}{8}=\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+1-2\sin^2\frac{C}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\frac{C}{2}-2\sin\frac{C}{2}.\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\frac{1}{2}=0\ . \qquad (3)$$

Bài toán có lời giải $\Leftrightarrow$ (3) có nghiệm $\sin\frac{C}{2}$

$$\Leftrightarrow \Delta'=\cos^2\left(\frac{A-B}{2}\right)-1=-\sin^2\left(\frac{A-B}{2}\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{A-B}{2}\right)=0 \ (\Delta'=0)$$

Vì $\Delta'=0$ nên phương trình (3) có nghiệm kép. Vậy :

$$\begin{cases}\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)=0\\ \sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}A-B=0\\ \sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{A-B}{2}=\pi \ (\text{loại})\\ \sin\frac{C}{2}=-\frac{1}{2}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}A=B\\ \frac{C}{2}=\frac{\pi}{6}\\ \frac{C}{2}=\frac{5\pi}{6}\ (\text{loại})\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases}A=B\\ C=\frac{\pi}{3}\end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta ABC$ đều.

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Chứng minh các đẳng thức lượng giác :

1) $\sin^2\beta-\cos^2(\alpha-\beta)+2\cos\alpha.\cos\beta.\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha$.

2) $\dfrac{\cot^2 2\alpha-\cot^2\alpha}{1-\cot^2 2\alpha}=\dfrac{1+2\cos 2\alpha}{\tan 4\alpha}$.

3) $\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-\cos 2\alpha.\cos 2\beta=1$.

Bài 2. Thu gọn các biểu thức :

1) $A=\cos^2 x+\cos^2\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\cos^2\left(x+\dfrac{4\pi}{3}\right)$.

2) $B=\dfrac{\sin^4 x+\cos^4 x-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x}{\cos^4 x-\sin^4 x}$.

3) $C=\dfrac{\sin 7\alpha+2\sin 8\alpha+\sin 9\alpha}{\sin 3\alpha+2\sin 4\alpha+\sin 5\alpha}$.

Bài 3. Tính giá trị biểu thức :

1) $A=\cos 68^0\cos 78^0+\cos 12^0\cos 22^0-\cos 10^0$.

2) $B=\cos 20^0\cos 40^0\cos 60^0\cos 80^0$.

3) $C=\cos\dfrac{\pi}{7}-\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{3\pi}{7}$.

Bài 4. Cho $\tan\alpha=\dfrac{1}{7}$, $\tan\beta=\dfrac{1}{3}$. Chứng minh : $\cos 2\alpha=\sin 4\beta$.

Bài 5. Cho $\tan(\alpha+\beta)=3+2\sqrt{2}$, $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Tính góc β (cho biết $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$).

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. 1) Dùng công thức cộng, biến đổi $\cos(\alpha-\beta)$.

2) Biến đổi vế trái về sin và cosin của α và 2α bằng cách dùng công thức $\cot u=\dfrac{\cos u}{\sin u}$ và kết hợp dùng công thức :

$$\sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a.$$

3) Sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng.

Bài 2. 1) $A=\frac{3}{2}$. 2) $B=\cos 2x$.

3) $C=2\cos 4\alpha$.

Bài 3. 1) $A=0$. 2) $B=\frac{1}{16}$ (tách riêng $\cos 60^0=\frac{1}{2}$)

3) $C=\frac{1}{2}$ (nhân cho $2\sin\frac{\pi}{7}$).

Bài 4. Dùng công thức nhân đôi.

Bài 5. Tính $\tan(u-v)$ với $\begin{cases}u=\alpha+\beta\\ v=\alpha-\beta\end{cases}\Rightarrow \beta=\frac{\pi}{8}$.

ÔN TẬP CHƯƠNG VI

A. BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Chứng minh đẳng thức lượng giác :

$$\left(\frac{\cos\alpha+\tan\alpha}{1+\cos\alpha.\cot\alpha}\right)^3=\frac{\cos^3\alpha+\tan^3\alpha}{1+\cos^3\alpha.\cot^3\alpha}.$$

Bài 2. Thu gọn biểu thức lượng giác :

$$\frac{\cos^4\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha}+\frac{\cos^4\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\cos^2\alpha}.$$

Bài 3. Tính giá trị của biểu thức lượng giác :

$$A=\frac{\cos^4\alpha-\sin^2\alpha+1}{\sin^4\alpha+\cos^2\alpha+1} \text{ với } \tan\alpha=\frac{1}{2}.$$

Bài 4. Cho $\tan\alpha=\frac{\sin\beta-3\cos\beta}{3\sin\beta+\cos\beta}$. Chứng minh rằng $\tan(\beta-\alpha)=3$.

Bài 5. Chứng minh đẳng thức lượng giác :

$$\sin(\alpha+\beta).\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta.$$

Bài 6. Chứng minh :

$$\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos 2\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos 4\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos 8\alpha}\right)=\cot\frac{\alpha}{2}\tan 8\alpha.$$

Bài 7. Tính giá trị biểu thức : $A = \sin^2 7^0 + \sin^2 53^0 + \sin^2 67^0$.

Bài 8. Chứng minh :

$$\frac{1}{\cos a \cos 2a} + \frac{1}{\cos 2a \cos 3a} + \frac{1}{\cos 3a \cos 4a} + \frac{1}{\cos 4a \cos 5a} = \frac{4\cos 2a}{\cos 5a}.$$

Bài 9. Cho ΔABC với $0 < B < C < \frac{\pi}{2}$ với $\tan B$ và $\tan C$ là nghiệm của phương trình $x^2 - (3-\sqrt{3})x + 2 - \sqrt{3} = 0$. Tính các góc của tam giác ABC.

Bài 10. 1) Chứng minh mọi ΔABC, ta có :

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1.$$

2) Chứng minh, nếu ΔABC thoả $\frac{\sin A + \cos B}{\cos A + \sin B} = \tan A$ thì ΔABC vuông.

HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài 1. Chứng minh vế trái bằng vế phải bằng $\tan^3 \alpha$.

Bài 2. Tính bằng cách đặt nhân tử chung :

$$A_1 = \frac{\cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = 1;$$

$$A_2 = \frac{\cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = -1.$$

$A = A_1 + A_2 = 0$.

Bài 3. Chia tử và mẫu cho $\cos^4 \alpha \Rightarrow A = \frac{201}{346}$.

Bài 4. Chia tử và mẫu của $\tan\alpha = \frac{\sin\beta - 3\cos\beta}{3\sin\beta + \cos\beta}$ cho $\cos\beta$.

Bài 5. Sử dụng phương pháp tương đương, kết hợp với công thức cộng hoặc dùng công thức biến đổi tích thành tổng, biến đổi vế trái.

Bài 6. Sử dụng $1 + \cos a = 2\cos^2 \frac{a}{2}$.

Bài 7. Sử dụng công thức hạ bậc và biến đổi tổng thành tích, suy ra $A = 3/2$.

Bài 8. Gộp thành hai tổng và áp dụng công thức biến đổi tổng thành tích.

Bài 9. Hướng dẫn : Giải (1) :

$$\begin{bmatrix} x_1 = 2-\sqrt{3} < 1 \\ x_2 = 1. \end{bmatrix}$$

Do $B < C \Rightarrow C = \dfrac{\pi}{4}$.

Sử dụng Định lí Vi-ét, suy ra :

$\tan(B+C) = \sqrt{3} \Rightarrow B+C = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow B = \dfrac{\pi}{12}$ và $A = \dfrac{2\pi}{3}$.

Bài 10. 1) Khai triển $\tan\left(\dfrac{A+B}{2}\right) = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{C}{2}\right)$.

2) Biến đổi $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A} \Rightarrow \cos(A+B) = 0$

$$\Rightarrow A+B = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{2}.$$

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Kết quả nào sau đây đúng (α là một góc tuỳ ý) ?

A) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

B) $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 2$.

C) $\sin^2\dfrac{\alpha}{2} + \cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}$.

D) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha = 1$.

Câu 2. Kết quả nào cho ta tìm được góc α ?

A) $\begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{1}{4} \\ \cos\alpha = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$

B) $\begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{5}{13} \\ \cos\alpha = \dfrac{12}{13}. \end{cases}$

C) $\begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{3}. \end{cases}$

D) $\begin{cases} \sin\alpha = 0,3 \\ \cos\alpha = 0,7. \end{cases}$

Câu 3. Cho $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Kết quả nào sau đây sai ?

A) $\cos(-\alpha)<0$.

B) $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)>0$.

C) $\cot\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)<0$.

D) $\tan(\alpha+\pi)<0$.

Câu 4. $\cos\frac{47\pi}{4}$ có giá trị là :

A) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D) $-\frac{1}{2}$.

Câu 5. Biểu thức nào sau đây phụ thuộc vào x ?

A) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin(\pi-x)+\cos(\pi+x)$.

B) $\frac{\cot x}{1-\cot^2 x}:\frac{\tan x}{1-\tan^2 x}$.

C) $3(\sin^4 x+\cos^4 x)-2(\sin^6 x+\cos^6 x)$.

D) $(\tan^2 x+\cot^2 x)^2-4$.

Câu 6. Biểu thức $y=\sqrt{\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}}-\sqrt{\frac{1+\sin 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}}$ $\left(\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ được rút gọn bằng :

A) $2\tan 2\alpha$.

B) $-2\tan 2\alpha$.

C) $\tan 2\alpha$.

D) $-\tan 2\alpha$.

Câu 7. Biểu thức $y=\sqrt{\sin^4 x+4\cos^2 x}+\sqrt{\cos^4 x+4\sin^2 x}$ có giá trị là :

A) -3.

B) 2.

C) 3.

D) 4.

Câu 8. Biểu thức $y=\cos^2 15^0+\cos 35^0+\cos 55^0+\cos 75^0$ có giá trị là :

A) 1.

B) 2.

C) 3.

D) 4.

Câu 9. Biểu thức sau có giá trị bằng bao nhiêu ?

$y=\tan 10^0\tan 20^0\tan 30^0\tan 40^0\tan 50^0\tan 60^0\tan 70^0\tan 80^0$.

A) 1.

B) 2.

C) 3.

D) 4.

Câu 10. Biểu thức $y=\left(1+\tan^2\alpha+\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\right)\left(1+\tan^2\alpha-\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\right)$ bằng :

A) 0 B) 1.

C) 2. D) 3.

Câu 11. Biểu thức $y=\dfrac{\cos^4\alpha+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^4\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$ bằng :

A) $\tan\alpha$. B) $\tan^2\alpha$.

C) $\tan^3\alpha$. D) $\tan^4\alpha$.

Câu 12. Biểu thức $y=\dfrac{\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right).\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}{\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}$ có giá trị bằng :

A) -2. B) -1.

C) 1. D) 2.

Câu 13. Một học sinh lập luận :

(I) $\left(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\right)^2=\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

(II) $\left(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\right)^2=1-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\cos^2 2\alpha$.

(III) $\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=\cos 2\alpha$.

Hỏi, nếu lập luận trên là sai thì sai tại :

A) (I). B (II).

C) (III). D) Lập luận đúng.

Câu 14. Câu nào sau đây sai ?

A) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}.\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

B) $\sin x-\cos x=\sqrt{2}.\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

C) $\cos x-\sin x=\sqrt{2}.\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

D) $\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan x-1}{\tan x+1}$.

Câu 15. α và β là hai góc nhọn mà $\tan\alpha=\dfrac{1}{7}$ và $\tan\beta=\dfrac{3}{4}$. Góc $\alpha+\beta$ có giá trị bằng :

A) $\frac{\pi}{6}$.

B) $\frac{\pi}{4}$.

C) $\frac{\pi}{3}$.

D) Kết quả khác.

Câu 16. Biểu thức $y=(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)$, với α,β là hai góc nhọn thoả $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$, có giá trị bằng :

A) 1.

B) 2.

C) 3.

D) 4.

Câu 17. Biểu thức $y=\sin 15^0+\tan 30^0.\cos 15^0$ có giá trị bằng :

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C) $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

D) $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 18. Biểu thức $y=\sin\alpha.\cos\alpha.\cos 2\alpha.\cos 4\alpha$ bằng :

A) $\sin 8\alpha$.

B) $\frac{1}{8}\sin 8\alpha$.

C) $\cos 8\alpha$.

D) $\frac{1}{8}\cos 8\alpha$.

Câu 19. Biểu thức $y=\frac{\sqrt{3}}{\sin 20^0}-\frac{1}{\cos 20^0}$ có giá trị bằng :

A) 1.

B) 2.

C) 4.

D) 8.

Câu 20. Biểu thức $y=\frac{\cos^3\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha\cos\alpha}{\sin 4\alpha}$ có giá trị bằng :

A) $\frac{1}{4}$.

B) $\frac{1}{2}$.

C) 2.

D) 4.

Câu 21. Biểu thức $y=\cos\frac{\pi}{5}.\cos\frac{2\pi}{5}$ có giá trị bằng :

A) $\frac{1}{4}$.

B) $\frac{1}{2}$.

C) 2.

D) Kết quả khác.

Câu 22. Biểu thức $y=\sin 10^0.\sin 50^0.\sin 70^0$ có giá trị bằng :

A) $\frac{1}{4}$.
B) $\frac{1}{2}$.
C) 2.
D) Kết quả khác.

Câu 23. Cho biết $\sin a+\cos a=\frac{7}{5}$. Hỏi $\tan a$ có giá trị nào ?

A) $\tan a=\frac{3}{4}$.
B) $\tan a=\frac{4}{3}$.
C) $\tan a=\frac{2}{3}$.
D) $\tan a=\frac{3}{4} \vee \tan a=\frac{4}{3}$.

Câu 24. Biểu thức $A=(\sin 75^0+\cos 15^0).\cos 75^0$ có giá trị bằng :

A) $\frac{1}{2}$.
B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
D) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Câu 25. Biểu thức $B=\frac{\cos 15^0}{\cos 75^0}$ có giá trị bằng :

A) $2-\sqrt{3}$.
B) $2+\sqrt{3}$.
C) $\sqrt{3}-2$.
D) Kết quả khác.

Câu 26. $\sin^2 7^0 30'$ có giá trị là :

A) $\frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
B) $\frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}$.
C) $\frac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$.
D) $\frac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Câu 27. Cho $\sin 2\alpha=\frac{\sqrt{15}}{4}$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$. Hỏi $\tan\frac{\alpha}{2}$ có giá trị nào ?

A) $\frac{\sqrt{15}}{5}$.
B) $\frac{\sqrt{15}}{3}$.
C) $\frac{2\sqrt{10}-5}{\sqrt{15}}$.
D) $\frac{-2\sqrt{10}-5}{\sqrt{15}}$.

Câu 28. Cho $\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\tan x}+\frac{1}{\cot x}=-2$. Hỏi $\sin 2x$ có giá trị nào ?

A) 0. B) 1.
C) -1. D) Không tính được.

Câu 29. Cho $\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\tan^2 x}+\frac{1}{\cot^2 x}=6$. Hỏi $\cos 2x$ có giá trị nào ?

A) 0. B) 1.
C) 2. D) 4.

Câu 30. Cho ΔABC có các góc là A,B,C. Giả sử phương trình sau đây có nghiệm kép :

$$(\sin B-\sin C)x^2+(\sin C-\sin A)x+\sin A-\sin B=0.$$

Mệnh đề nào đúng ?

A) Với mọi ΔABC, nếu phương trình bậc hai tồn tại thì nó có nghiệm $x=1$.

B) $2\sin B=\sin A+\sin C$.

C) $\sin^2 B\geq \sin A.\sin C$.

D) Cả 3 đều đúng.

Câu 31. Biểu thức $\cot 15^0-\tan 15^0$ có giá trị bằng bao nhiêu ?

A) 2. B) $2\sqrt{3}$.
C) $\sqrt{3}$. D) 4.

Câu 32. Biểu thức $\cot 15^0+\tan 15^0$ có giá trị bằng bao nhiêu ?

A) 2. B) $2\sqrt{3}$.
C) $\sqrt{3}$. D) 4.

Câu 33. Biểu thức $\frac{1}{2\sin 10^0}-2\sin 70^0$ có giá trị bằng bao nhiêu ?

A) 2. B) 4.
C) 1. D) $\frac{1}{2}$.

Câu 34. Biểu thức $\frac{\cos 20^0.\cos 80^0}{\sin 30^0-\sin 10^0}$ có giá trị bằng bao nhiêu ?

A) $\frac{1}{2}$. B) 1.
C) 2. D) 4.

Câu 35. Biểu thức $(\cot 9^0+\tan 9^0)\sin 18^0$ có giá trị bằng bao nhiêu ?

A) $\frac{1}{2}$. B) 1.

C) 2. D) 3.

Câu 36. Biểu thức $\cot 20^0 + \cot 10^0 + \tan 20^0 + \tan 10^0$ có giá trị bằng :

A) $\sqrt{3}$. B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

C) $2\sqrt{3}$. D) Kết quả khác.

Câu 37. Trong 4 biểu thức sau :

A) $\sin A + \sin B + \sin C$; B) $\cos A + \cos B + \cos C$;

C) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$; D) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C$.

Biểu thức nào có giá trị $4\sin A.\sin B.\sin C$, với A, B, C là các góc tam giác ?

Câu 38. Trong tam giác thường ABC, câu nào sau đây đúng ?

A) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A.\tan B.\tan C$.

B) $\cot A + \cot B + \cot C = \cot A.\cot B.\cot C$.

C) $\sin A + \sin B + \sin C = \cos A + \cos B + \cos C$.

D) $\sin A.\sin B.\sin C = \cos A.\cos B.\cos C$.

Câu 39. ΔABC nếu có quan hệ $\sin A(\cos B + \cos C) = \sin B + \sin C$ thì đó là tam giác gì ?

A) cân. B) vuông.

C) vuông cân. D) đều.

Câu 40. Để tính $\cos 75^0$, bốn học sinh A, B, C, D đưa ra 4 cách chứng minh sau đây. Hỏi phương pháp của em nào không cho ra kết quả ?

A) Dùng công thức cộng :

$$\cos 75^0 = \cos(45^0 + 30^0)$$
$$= \cos 45^0.\cos 30^0 - \sin 45^0.\sin 30^0$$

...

B) Dùng cung phụ, kết hợp công thức cộng :

$$\begin{array}{r} \cos 75^0 = \sin 15^0 \\ \times \quad \cos 15^0 = \sin 75^0 \\ \hline \cos 75^0.\cos 15^0 - \sin 75^0.\sin 15^0 = 0 \end{array}$$

...

C) Dùng công thức nhân :

$$\sin 45^0 = 3\sin 15^0 - 4\sin^3 15^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Suy ra $\sin 15^0 = \cos 75^0$ là nghiệm của phương trình :

$$4t^3 - 3t + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

...

D) Dùng công thức biến đổi :

$$\begin{array}{l} \cos 75^0 + \cos 15^0 = 2\cos 45^0 \cos 30^0 = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ + \\ \cos 75^0 - \cos 15^0 = -2\sin 45^0 \sin 30^0 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \hline 2\cos 75^0 = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \end{array}$$

...

GIẢI THÍCH - HƯỚNG DẪN

Câu 1. Câu A).

Câu 2. Câu B), vì $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{25}{169} + \frac{144}{169} = 1$.

Câu 3. $\cot\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \cot\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan\alpha > 0$

(do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \tan\alpha < 0$). Câu C).

Câu 4. $\cos\frac{47\pi}{4} = \cos\left(12\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Câu B).

Câu 5. $\left(\tan^2 x + \cot^2 x\right)^2 - 4 = \left(\tan^2 x + \cot^2 x - 2\right)\left(\tan^2 x + \cot^2 x + 2\right)$

$$= (\tan x - \cot x)^2 (\tan x + \cot x)^2$$

$$= \left(\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x.\cos x}\right)^2 \left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x.\cos x}\right)^2$$

$$= \frac{4\cos^2 2x}{\sin^2 2x} \cdot \frac{4}{\sin^2 2x} = \frac{16\cos^2 2x}{\sin^4 2x}$$ (phụ thuộc vào x). Câu D).

Câu 6. $y=\left|\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}\right|-\left|\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}\right|$

$=\dfrac{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2-(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$ (vì $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\cos\alpha<\sin\alpha<1$)

$=\dfrac{-2\sin 2\alpha}{-\cos 2\alpha}=2\tan 2\alpha$. Câu A).

Câu 7. $y=\sqrt{\sin^4 x+4-4\sin^2 x}+\sqrt{\cos^4 x+4-4\cos^2 x}$

$=|\sin^2 x-2|+|\cos^2 x-2|$

$=(2-\sin^2 x)+(2-\cos^2 x)=3$. Câu C).

Câu 8. $y=\cos^2 15^0+\cos^2 35^0+\sin^2 35^0+\sin^2 15^0=2$. Câu B).

Câu 9. $y=\tan 10^0\tan 20^0\tan 30^0\tan 40^0\cot 40^0\cot 30^0\cot 20^0\cot 10^0$

$=(\tan 10^0\cot 10^0)(\tan 20^0\cot 20^0)(\tan 30^0\cot 30^0)(\tan 40^0\cot 40^0)$

$=1$. Câu A).

Câu 10. $y=(1+\tan^2\alpha+1+\tan^2\alpha)(1+\tan^2\alpha-1-\tan^2\alpha)$

$=2(1+\tan^2\alpha)(0)=0$. Câu A).

Câu 11. $y=\dfrac{\cos^4\alpha+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^4\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha-(1-\sin^2\alpha)\sin^2\alpha}$

$=\dfrac{\sin^2\alpha(1-\cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha(1-\sin^2\alpha)}=\tan^4\alpha$. Câu D).

Câu 12. $y=\dfrac{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}{\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}$ ($\dfrac{\pi}{4}-x$ phụ với $\dfrac{\pi}{4}+x$)

$=\dfrac{\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}=1$. Câu C).

Câu 13. (III) sai, vì $(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)^2=\cos^2 2\alpha$ suy ra :

$$|\sin^2\alpha-\cos^2\alpha|=|\cos 2\alpha|.$$

Do đó : $\begin{cases}\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=\cos 2\alpha\ (\text{loại})\\ \cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha.\end{cases}$ Câu C).

Câu 14. Ta có : $\cos x-\sin x=\sqrt{2}.\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$,

vì $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$. Câu C).

Câu 15. $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}=1\Rightarrow\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$. Câu B).

Câu 16. $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}=1$

$\Leftrightarrow\tan\alpha+\tan\beta+\tan\alpha.\tan\beta=1$

$\Rightarrow 1+\tan\alpha+\tan\beta+\tan\alpha.\tan\beta=2$

$\Leftrightarrow(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)=2$. Câu B).

Câu 17. $y=\sin 15^0+\dfrac{\sin 30^0}{\cos 30^0}.\cos 15^0$

$=\dfrac{1}{\cos 30^0}(\cos 30^0\sin 15^0+\sin 30^0\cos 15^0)=\dfrac{\sin 45^0}{\cos 30^0}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu D).

Câu 18. $y=\sin\alpha.\cos\alpha.\cos 2\alpha.\cos 4\alpha=\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha.\cos 2\alpha.\cos 4\alpha$

$=\dfrac{1}{4}\sin 4\alpha.\cos 4\alpha=\dfrac{1}{8}\sin 8\alpha$. Câu B).

Câu 19. $y=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 20^0}-\dfrac{1}{\cos 20^0}=2\left(\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^0-\frac{1}{2}\sin 20^0}{\sin 20^0\cos 20^0}\right)=4\dfrac{\cos 50^0}{\sin 40^0}$

$=4\dfrac{\sin 40^0}{\sin 40^0}=4$. Câu C).

Câu 20. $y=\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{4\sin 2\alpha}=\dfrac{1}{4}$. Câu A).

Câu 21. $2y\sin\dfrac{\pi}{5}=2\sin\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{2\pi}{5}=\text{ṣin}\dfrac{2\pi}{5}\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{4\pi}{5}=\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{5}$

Suy ra : $y=1/4$. Câu A).

Câu 22. $y=\sin 10^0 \sin 50^0 \sin 70^0 \Rightarrow 2y\cos 10^0 = \sin 20^0 \sin 50^0 \cos 20^0$

$$= \frac{1}{2}\sin 40^0 .\cos 40^0$$

$$= \frac{1}{4}\sin 80^0 = \frac{1}{4}\cos 10^0.$$

Suy ra $y = 1/8$. Câu D).

Câu 23. Ta có $(\sin a+\cos a)^2 = \frac{49}{25} \Rightarrow \sin a.\cos a = \frac{12}{25}$. Vậy $\sin a, \cos a$ là nghiệm của phương trình :

$$25t^2 - 35t + 12 = 0 \Leftrightarrow (t = 3/5 \vee t = 4/5).$$

Vậy $\tan a = \frac{3}{4} \vee \tan a = \frac{4}{3}$. Câu D).

Câu 24. $A = (\sin 75^0 + \cos 15^0).\cos 75^0 = (\sin 75^0 + \sin 75^0).\cos 75^0$

$= 2\sin 75^0 \cos 75^0 = \sin 150^0 = \sin 30^0 = \frac{1}{2}$. Câu A).

Câu 25. $B = \frac{\cos 15^0}{\cos 75^0} = \frac{\sin 75^0}{\cos 75^0} = \tan 75^0 = \tan(45^0 + 30^0) = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}$

$= 2+\sqrt{3}$. Câu B).

Câu 26. $\cos 15^0 = 1 - 2\sin^2 7^0 30' = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \sin^2 7^0 30' = \frac{1}{8}(4-\sqrt{6}-\sqrt{2})$

Câu C).

Câu 27. $\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{\sqrt{15}}{4} \Leftrightarrow \sqrt{15}\tan^2\alpha - 8\tan\alpha + \sqrt{15} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan\alpha = \frac{\sqrt{15}}{3} > 1 \ (\text{loại}) \\ \tan\alpha = \frac{\sqrt{15}}{5} < 1. \end{cases}$$

$$\tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{15}}{5} \Leftrightarrow \sqrt{15}\tan^2\frac{\alpha}{2} + 10\tan\frac{\alpha}{2} - \sqrt{15} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{-2\sqrt{10}-5}{\sqrt{15}}<0 \text{ (loại)} \\ \tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{2\sqrt{10}-5}{\sqrt{15}}. \text{ Câu C).} \end{array}\right.$$

Câu 28. $\dfrac{1}{\cos x}+\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\tan x}+\dfrac{1}{\cot x}=-2$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}+\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x\cos x}+2=0$ (với $\sin 2x\neq 0$)

$\Leftrightarrow \sin x+\cos x+1+2\sin x\cos x=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=\sin x+\cos x \\ t^2+t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\sin x+\cos x \\ \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=0 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x+\cos x=-1\Rightarrow \sin 2x=0 \text{ (loại)} \\ \sin x+\cos x=0\Rightarrow \sin 2x=-1. \end{array}\right.$$ Câu C).

Câu 29. $\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\sin^2 x}+\dfrac{1}{\tan^2 x}+\dfrac{1}{\cot^2 x}=6$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x.\cos x\neq 0 \\ \dfrac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=2 \end{cases} \Rightarrow (\cos^2 x-\sin^2 x)^2=0$$

$\Rightarrow \cos^2 2x=0 \Leftrightarrow \cos 2x=0$. Câu A).

Câu 30. Do yêu cầu phương trình có nghiệm kép nên :

$$\sin B-\sin C\neq 0\Leftrightarrow B\neq C$$

- Do $a+b+c=0\Rightarrow$ phương trình có một nghiệm $x=1$ với mọi tam giác ABC mà $B\neq C$. Câu A) đúng.
- Do $a+b+c=0$ và phương trình có nghiệm kép, suy ra :

$$1=\frac{\sin A-\sin B}{\sin B-\sin C}\Leftrightarrow 2\sin B=\sin A+\sin C.$$

Câu B) đúng.

- Vì A,B,C là các góc của tam giác nên $\sin A, \sin C$ đều dương.

Theo Bất đẳng thức Cô-si cho $\sin A, \sin C$ ta có :

$2\sin B=\sin A+\sin C\geq 2\sqrt{\sin A\sin C}\Rightarrow \sin^2 B\geq \sin A\sin C$.

Câu C) đúng.

Vậy câu D) là câu trả lời.

Câu 31. $\cot 15^0 - \tan 15^0 = \tan 75^0 - \tan 15^0 = \dfrac{\sin 60^0}{\cos 75^0 . \cos 15^0}$

$= \dfrac{2\sin 60^0}{\sin 30^0} = 2\tan 60^0 = 2\sqrt{3}$. Câu B).

Câu 32. $\cot 15^0 + \tan 15^0 = \tan 75^0 + \tan 15^0 = \dfrac{\sin 90^0}{\cos 75^0 . \cos 15^0}$

$= \dfrac{2\sin 90^0}{\sin 30^0} = 4$. Câu D).

Câu 33. $\dfrac{1}{2\sin 10^0} - 2\sin 70^0 = \dfrac{1 - 4\sin 70^0 . \sin 10^0}{2\sin 10^0}$

$= \dfrac{1 + 2(\cos 80^0 - \cos 60^0)}{2\sin 10^0} = \dfrac{1 + 2\sin 10^0 - 1}{2\sin 10^0}$

$= 1$. Câu C).

Câu 34. $\dfrac{\cos 20^0 . \cos 80^0}{\sin 30^0 - \sin 10^0} = \dfrac{\cos 20^0 . \cos 80^0}{2\cos 20^0 . \sin 10^0} = \dfrac{\cos 20^0 . \sin 10^0}{2\cos 20^0 . \sin 10^0} = \dfrac{1}{2}$.

Câu A).

Câu 35. $(\cot 9^0 + \tan 9^0)\sin 18^0 = (\tan 81^0 + \tan 9^0)\sin 18^0$

$= \dfrac{\sin 90^0 (2\sin 9^0 . \cos 9^0)}{\cos 81^0 . \cos 9^0} = 2$. Câu C).

Câu 36. $\cot 20^0 + \cot 10^0 + \tan 20^0 + \tan 10^0$

$= \dfrac{\sin 30^0}{\sin 20^0 \sin 10^0} + \dfrac{\sin 30^0}{\cos 20^0 \cos 10^0}$

$= \dfrac{\sin 30^0 . \cos 10^0}{\cos 20^0 . \sin 20^0 . \cos 10^0 . \sin 10^0}$

$= \dfrac{1}{\sin 40^0 . \sin 10^0} = \dfrac{2}{\cos 30^0 - \cos 50^0} = \dfrac{4}{\sqrt{3} - 2\sin 40^0}$. Câu D).

Câu 37. $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 2\sin(A+B)\cos(A-B) - \sin 2(A+B)$

$= 2\sin(A+B)[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$

$= 2\sin(A+B)(-(2)(\sin A \sin(-B)))$

$= 4\sin A \sin B \sin C$. Câu C).

Câu 38. $\forall \Delta ABC: A+B=\pi-C$ suy ra :

$$\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A.\tan B}=-\tan C \Rightarrow \tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$$

Câu A).

Câu 39. $\sin A(\cos B+\cos C)=\sin B+\sin C$. (*)

$$(*) \Leftrightarrow \sin A=\frac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C}$$

$$\Leftrightarrow \sin A=\frac{2\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)} \qquad \left(\begin{array}{l}\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)\neq 0\\ \cos\left(\frac{B-C}{2}\right)\neq 0\end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} \Leftrightarrow \sin^2\frac{A}{2}=\frac{1}{2} \qquad \left(\cos\frac{A}{2}\neq 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}>0 \Rightarrow A=\frac{\pi}{2}.$$ Câu B).

Câu 40. Câu B). Tiếp tục lập luận : $\cos(75^0+15^0)=0 \Leftrightarrow \cos 90^0=0$ đúng, nhưng vẫn không tính được giá trị của $\cos 75^0$.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG VI

1	A	11	D	21	A	31	B
2	B	12	C	22	D	32	D
3	C	13	C	23	D	33	C
4	B	14	C	24	A	34	A
5	D	15	B	25	B	35	C
6	A	16	B	26	C	36	D
7	C	17	D	27	C	37	C
8	B	18	B	28	C	38	A
9	A	19	C	29	A	39	B
10	A	20	A	30	D	40	B

MỤC LỤC

Chương I. MỆNH ĐỀ – TẬP HỢP 3

§ 1. MỆNH ĐỀ 3

A. Tóm tắt lí thuyết 3
B. Các dạng toán 4
Dạng 1. Định giá trị của một mệnh đề 4
Dạng 2. Phát biểu định lí dưới dạng điều kiện cần, đủ 5
Dạng 3. Phủ định mệnh đề 6
Dạng 4. Phương pháp chứng minh bằng phản chứng 7
C. Bài tập 8
Lời giải 10
D. Bài tập tự luyện 12
Hướng dẫn – Đáp số 14

§ 2. TẬP HỢP 15

A. Tóm tắt lí thuyết 15
B. Các dạng toán 16
Dạng 1. Xác định tập hợp 16
Dạng 2. Tập hợp con 17
Dạng 3. Tập hợp bằng nhau 17
Dạng 4. Các phép toán : giao, hợp, hiệu 18
C. Bài tập 19
Lời giải 20
D. Bài tập tự luyện 22
Hướng dẫn – Đáp số 22

ÔN TẬP CHƯƠNG I 23

A. Bài tập tổng hợp 23
Hướng dẫn – Đáp số 24
B. Câu hỏi trắc nghiệm 25
Giải thích – Hướng dẫn 31
Đáp án câu hỏi trắc nghiệm Chương I 33

Chương II. HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI 34

§ 1. HÀM SỐ 34

A. Tóm tắt lí thuyết 34
B. Các dạng toán 35
Dạng 1. Tìm tập xác định của hàm số 35
Dạng 2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số 36
Dạng 3. Khảo sát tính chẵn, lẻ của hàm số 37
C. Bài tập 38
Lời giải 39
D. Bài tập tự luyện 43
Hướng dẫn – Đáp số 44

§ 2. HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI 45

A. Tóm tắt lí thuyết 45
B. Các dạng toán 46
Dạng 1. Xác định hàm số bậc nhất 46
Dạng 2. Vẽ đồ thị hàm số $y=|ax+b|$ 47
Dạng 3. Xác định hàm số bậc hai 48
Dạng 4. Vẽ đồ thị hàm số dạng bậc hai có chứa dấu giá trị tuyệt đối 49
C. Bài tập 51
Lời giải 52
D. Bài tập tự luyện 59
Hướng dẫn – Đáp số 60
E. Áp dụng 61
Dạng 1. Phương trình $f(x)=0$ có nghiệm $x\in D$ 61
Dạng 2. Tìm giá trị lớn nhất - giá trị nhỏ nhất một hàm số nhờ parabol 62
Bài tập 64

ÔN TẬP CHƯƠNG II 65

A. Bài tập tổng hợp 65
Hướng dẫn – Đáp số 67
B. Câu hỏi trắc nghiệm 68
Giải thích – Hướng dẫn 73
Đáp án câu hỏi trắc nghiệm Chương II 77

Chương III. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH 78

§ 1. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT 78

A. Tóm tắt lí thuyết 78
B. Các dạng toán 79
Dạng 1. Giải và biện luận phương trình $ax+b=0$ 79
Dạng 2. Xác định tham số để phương trình có nghiệm ..... thoả điều kiện cho trước 80
Dạng 3. Phương trình có chứa dấu giá trị tuyệt đối 81
Dạng 4. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn 83
C. Bài tập 85
Lời giải 86
D. Bài tập tự luyện 90
Hướng dẫn – Đáp số 91

§ 2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI 93

A. Tóm tắt lí thuyết 93
B. Các dạng toán 94
Dạng 1. Giải và biện luận phương trình $ax^2+bx+c=0$ 94
Dạng 2. Xác định tham số để nghiệm phương trình ..... thoả mãn điều kiện cho trước 96
Dạng 3. Dấu các nghiệm của phương trình bậc hai 98
Dạng 4. Các phương trình quy về phương trình bậc hai 99
Dạng 5. Giải hệ phương trình bậc hai chứa hai ẩn 101
C. Bài tập 102
Lời giải 103
D. Bài tập tự luyện 110
Hướng dẫn – Đáp số 111

ÔN TẬP CHƯƠNG III 113

A. Bài tập tổng hợp 113
Hướng dẫn – Đáp số 114
B. Câu hỏi trắc nghiệm 116
Giải thích – Hướng dẫn 125
Đáp án câu hỏi trắc nghiệm Chương III 133

Chương IV. BẤT ĐẲNG THỨC VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH 135

§ 1. BẤT ĐẲNG THỨC 135

A. Tóm tắt lí thuyết 135
B. Các dạng toán 136
Dạng 1. Chứng minh bất đẳng thức nhờ định nghĩa 136
Dạng 2. Sử dụng Bất đẳng thức Cô-si 137
C. Bài tập 138

Lời giải 139
D. Bài tập tự luyện 142
Hướng dẫn – Đáp số 143
E. Áp dụng 143
Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một đại lượng ..... nhờ bất đẳng thức 143
Bài tập 145

§ 2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH 147

A. Tóm tắt lí thuyết 147
B. Các dạng toán 149
Dạng 1. Giải và biện luận bất phương trình bậc nhất 149
Dạng 2. Giải bất phương trình bậc nhất quy về việc ..... xét dấu một tích hoặc một thương 152
Dạng 3. Bất phương trình có chứa dấu giá trị tuyệt đối 154
Dạng 4. Xét dấu một biểu thức 155
Dạng 5. Giải và biện luận bất phương trình bậc hai 157
Dạng 6. Tam thức có dấu nhất định trên $\mathbb{R}$ 158
Dạng 7. Bất phương trình vô nghiệm, có nghiệm 159
Dạng 8. Bất phương trình có chứa căn thức 160
C. Bài tập 162
Lời giải 163
D. Bài tập tự luyện 169
Hướng dẫn – Đáp số 170

ÔN TẬP CHƯƠNG IV 171

A. Bài tập tổng hợp 171
Hướng dẫn – Đáp số 172
B. Câu hỏi trắc nghiệm 174
Giải thích – Hướng dẫn 184
Đáp án câu hỏi trắc nghiệm Chương IV 194

Chương V. THỐNG KÊ 195

A. Tóm tắt lí thuyết 195
B. Bài tập 203
Lời giải 206
C. Bài tập tự luyện 213
Hướng dẫn – Đáp số 214
D. Câu hỏi trắc nghiệm 216
Giải thích - Hướng dẫn 220
Đáp án câu hỏi trắc nghiệm Chương V 223

Chương VI. GÓC LƯỢNG GIÁC VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC 224

§ 1. GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC – GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC (CUNG) LƯỢNG GIÁC 224

A. Tóm tắt lí thuyết 224
B. Các dạng toán 226
Dạng 1. Tính các giá trị lượng giác còn lại khi đã cho trước một giá trị 226
Dạng 2. Chứng minh một đẳng thức giữa các giá trị lượng giác 227
Dạng 3. Thu gọn một biểu thức lượng giác 228
C. Bài tập 230
Lời giải 232
D. Bài tập tự luyện 235
Hướng dẫn – Đáp số 236

§ 2. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC 237

A. Tóm tắt lí thuyết 237
B. Các dạng toán 238
Dạng 1. Tính giá trị lượng giác của góc đặc biệt 238
Dạng 2. Chứng minh đẳng thức lượng giác 239
Dạng 3. Thu gọn biểu thức lượng giác 239
Dạng 4. Chứng minh biểu thức độc lập đối với α 240
Dạng 5. Tính giá trị của biểu thức 241
C. Bài tập 242
Lời giải 244
D. Bài tập tự luyện 250
Hướng dẫn – Đáp số 250

ÔN TẬP CHƯƠNG VI 251

A. Bài tập tổng hợp 251
Hướng dẫn – Đáp số 252
B. Câu hỏi trắc nghiệm 253
Giải thích – Hướng dẫn 260
Đáp án câu hỏi trắc nghiệm Chương VI 266

MỤC LỤC 267

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm Tổng Giám đốc **NGÔ TRẦN ÁI**
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập **VŨ VĂN HÙNG**

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung :
Giám đốc Công ti Cổ phần Dịch vụ xuất bản Giáo dục tại Đà Nẵng BÙI VIỆT PHÚ
Trợ lí Tổng biên tập ĐỖ VĂN THẢO

Biên tập lần đầu : NGUYỄN THANH PHƯƠNG – TRẦN PHƯỚC CHƯƠNG

Biên tập tái bản và sửa bản in : NGUYỄN VĂN NHO

Trình bày bìa : PHAN MINH NHẬT

Chế bản : HỒ NGƯNG

Công ti CP Dịch vụ xuất bản Giáo dục tại Đà Nẵng – Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam
giữ quyền công bố tác phẩm

CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI ĐẠI SỐ 10

Mã số: TXT48n3 - TTS

Số đăng kí KHXB: 17-2013/CXB/669-1972/GD.
In 1.500 bản, (QĐ: 78TK), khổ 17 x 24 cm. Tại Công ty CP In Thái Nguyên.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 năm 2013.