

MÃ ĐỀ 132

Họ, tên thí sinh:.....Lớp:..... SBD:

Câu 1: Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $2|z-1|=|z+\bar{z}+2|$ trên mặt phẳng tọa độ là một

- A. đường thẳng. B. parabol. C. đường tròn. D. hypebol.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, ΔABC là tam giác đều cạnh a và tam giác SAB cân. Tính khoảng cách h từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) .

- A. $h = \frac{a\sqrt{3}}{7}$. B. $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $h = \frac{2a}{\sqrt{7}}$. D. $h = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

Câu 3: Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Tính iz_0 .

- A. $iz_0 = -3i + 1$. B. $iz_0 = 3 - i$. C. $iz_0 = -3 - i$. D. $iz_0 = 3i - 1$.

Câu 4: Một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 3$, công bội $q = 2$. Biết $S_n = 765$. Tìm n .

- A. $n = 9$. B. $n = 6$. C. $n = 8$. D. $n = 7$.

Câu 5: Tập xác định của hàm số $y = (x-1)^{\frac{1}{5}}$ là

- A. $(1; +\infty)$. B. $\mathbb{R}$. C. $[1; +\infty)$. D. $(0; +\infty)$.

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm là $A(1; 3; -1)$, $B(3; -1; 5)$. Tìm tọa độ của điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB}$.

- A. $M\left(\frac{5}{3}; \frac{13}{3}; 1\right)$. B. $M\left(\frac{7}{3}; \frac{1}{3}; -3\right)$. C. $M\left(\frac{7}{3}; \frac{1}{3}; 3\right)$. D. $M(4; -3; 8)$.

Câu 7: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm $B(2; 1; -3)$, đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng $(Q): x + y + 3z = 0$, $(R): 2x - y + z = 0$ là

- A. $4x + 5y - 3z + 22 = 0$. B. $4x - 5y - 3z - 12 = 0$. C. $2x + y - 3z - 14 = 0$. D. $4x + 5y - 3z - 22 = 0$.

Câu 8: Hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
y'		-	-	+	-
y	-1	2	-4	3	0

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

- A. 2. B. 4. C. 1. D. 3.

Câu 9: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a , gọi α là góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BB'D'D)$. Tính $\sin \alpha$.

- A. $\frac{\sqrt{3}}{5}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 10: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm nguyên dương của bất phương trình $\log_2(1+x) < 2$. Tính giá trị của $P = x_1 + x_2$.

- A. $P = 6$. B. $P = 4$. C. $P = 5$. D. $P = 3$.

Câu 11: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$. Tính diện tích mặt cầu (S) .

- A. 36π . B. 42π . C. 9π . D. 12π .

Câu 12: Biết $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = a \ln 2 + \frac{b}{c}$ (với a là số hữu tỉ, b, c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản). Tính giá trị của $S = 2a + 3b + c$.

- A. $S = 4$. B. $S = -6$. C. $S = 6$. D. $S = 5$.

Câu 13: Cho $a = \log_2 5$, $b = \log_2 9$. Biểu diễn của $P = \log_2 \frac{40}{3}$ theo a và b là

- A. $P = 3 + a - 2b$. B. $P = 3 + a - \frac{1}{2}b$. C. $P = \frac{3a}{2b}$. D. $P = 3 + a - \sqrt{b}$.

Câu 14: Tích các nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1} - 36^x) = -2$ bằng

- A. 0. B. $\log_6 5$. C. 5. D. 1.

Câu 15: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x + a - 1 & \text{khi } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x} & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Tìm tất cả giá trị thực của a để hàm số đã cho

liên tục trên $\mathbb{R}$.

- A. $a = 1$. B. $a = 3$. C. $a = 4$. D. $a = 2$.

Câu 16: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $2a$. Thể tích khối trụ ngoại tiếp hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

- A. $2\pi a^3$. B. $\frac{\pi a^3}{2}$. C. $8\pi a^3$. D. $4\pi a^3$.

Câu 17: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; -2; 3)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm M . Tọa độ của điểm M là

- A. $M(1; 0; 3)$. B. $M(0; -2; 3)$. C. $M(1; 0; 0)$. D. $M(1; -2; 0)$.

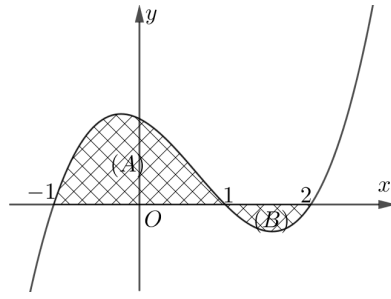
Câu 18: Tìm điểm M có hoành độ âm trên đồ thị $(C): y = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

- A. $M\left(-1; \frac{4}{3}\right)$. B. $M(-2; 0)$. C. $M\left(2; \frac{4}{3}\right)$. D. $M(-2; -4)$.

Câu 19: Khối đa diện đều loại $\{3; 5\}$ là khối

- A. Hai mươi mặt đều. B. Tứ diện đều. C. Tám mặt đều. D. Lập phương.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng diện tích các hình phẳng $(A), (B)$ lần lượt bằng 15 và 3. Tích phân $\int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{x} \cdot f(3\ln x + 2) dx$ bằng



A. 4.

B. -4.

C. 6.

D. -6.

Câu 21: Gọi a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $z = |1 - \sqrt{3}i|(1 + 2i) + |3 - 4i|(2 + 3i)$. Giá trị của $a - b$ là

A. 7.

B. -7.

C. 31.

D. -31.

Câu 22: Cho số phức z thỏa mãn $z + 4\bar{z} = 7 + i(z - 7)$. Tính môđun của z .

A. $|z| = 5$.

B. $|z| = 3$.

C. $|z| = \sqrt{5}$.

D. $|z| = \sqrt{3}$.

Câu 23: Đạo hàm của hàm số $y = 3^x$ là

A. $y' = \frac{-3^x}{\ln 3}$.

B. $y' = -3^x \ln 3$.

C. $y' = 3^x \ln 3$.

D. $y' = \frac{3^x}{\ln 3}$.

Câu 24: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ trên đoạn $[2; 4]$ là

A. $\min_{[2; 4]} y = 7$.

B. $\min_{[2; 4]} y = 5$.

C. $\min_{[2; 4]} y = 3$.

D. $\min_{[2; 4]} y = 0$.

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y			3		-1		3	
	$-\infty$							$-\infty$

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0; 2)$.

B. $(0; +\infty)$.

C. $(-2; 0)$.

D. $(-\infty; -2)$.

Câu 26: Giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ là

A. 7.

B. -25.

C. -20.

D. 3.

Câu 27: Xét một phép thử có không gian mẫu Ω và A là một biến cố của phép thử đó. Phát biểu nào sau đây **sai**?

A. Xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$.

B. $0 \leq P(A) \leq 1$.

C. $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

D. $P(A) = 0$ khi và chỉ khi A là biến cố chắc chắn.

Câu 28: Cho hàm số: $y = (1 - m)x^4 - mx^2 + 2m - 1$. Tìm m để hàm số có đúng một điểm cực trị.

A. $m \leq 0$ hoặc $m \geq 1$.

B. $m < 0$ hoặc $m > 1$.

C. $m > 1$.

D. $m < 0$.

Câu 29: Lăng trụ tam giác đều có độ dài tất cả các cạnh bằng 3. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{27\sqrt{3}}{4}$.

C. $\frac{27\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

Câu 30: Gọi l, h, r lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính mặt đáy của hình nón. Diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón là

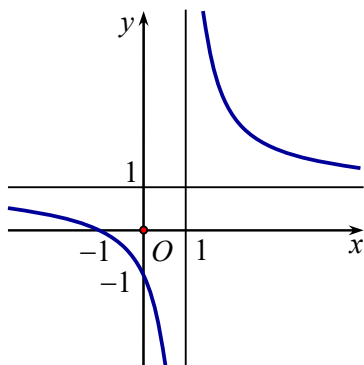
A. $S_{xq} = \pi rh$.

B. $S_{xq} = 2\pi rl$.

C. $S_{xq} = \pi rl$.

D. $S_{xq} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Câu 31: Đồ thị sau là đồ thị của hàm số nào?



A. $\frac{x-1}{x+1}$.

B. $y = \frac{2x-3}{2x-2}$.

C. $y = \frac{x}{x-1}$.

D. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $BD = 2a$. Tam giác SAC vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là

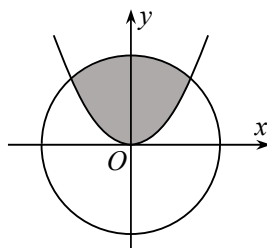
A. $\frac{4\pi a^3}{3}$.

B. $4\pi a^3 \sqrt{3}$.

C. πa^3 .

D. $4\pi a^3$.

Câu 33: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2$ và đường tròn $x^2 + y^2 = 2$ (phần tô đậm trong hình). Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành.



A. $V = \frac{5\pi}{3}$.

B. $V = \frac{22\pi}{15}$.

C. $V = \frac{\pi}{5}$.

D. $V = \frac{44\pi}{15}$.

Câu 34: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M(3;3;-2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;3;1)$. Phương trình của d là

A. $\frac{x+3}{1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-2}{1}$. B. $\frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+2}{1}$. C. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{-2}$. D. $\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+1}{-2}$.

Câu 35: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + \sin 2x$ là

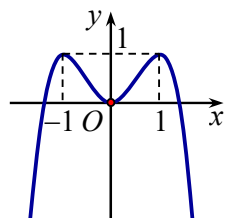
A. $x^2 + \frac{1}{2}\cos 2x + C$.

B. $x^2 + 2\cos 2x + C$.

C. $x^2 - \frac{1}{2}\cos 2x + C$.

D. $x^2 - 2\cos 2x + C$.

Câu 36: Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ có đồ thị như hình vẽ bên



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $-x^4 + 2x^2 = \log_2 m$ có bốn nghiệm thực phân biệt.

A. $1 < m < 2$.

B. $0 \leq m \leq 1$.

C. $m \geq 2$.

D. $m > 0$.

Câu 37: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;0;2)$ và đường thẳng

$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I , tiếp xúc với đường thẳng d . Bán kính của (S) bằng

A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

B. $\frac{5}{3}$.

C. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{30}}{3}$.

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và số thực k tùy ý. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

A. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$.

B. $\int_a^a kf(x) dx = 0$.

C. $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$.

D. $\int_a^b xf(x) dx = x \int_a^b f(x) dx$.

Câu 39: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-1)(x-4) \cdot u(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $u(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $(1; 2)$.

B. $(-1; 1)$.

C. $(-2; -1)$.

D. $(-\infty; -2)$.

Câu 40: Cho phương trình $25^x - 20 \cdot 5^{x-1} + 3 = 0$. Khi đặt $t = 5^x$, ($t > 0$), ta được phương trình nào sau đây?

A. $t^2 - 3 = 0$.

B. $t^2 - 4t + 3 = 0$.

C. $t^2 - 20t + 3 = 0$.

D. $t - 20\frac{1}{t} + 3 = 0$.

Câu 41: Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{2x^2 + (1-m)x + 1+m}{x-m}$ đồng biến trên $(1; +\infty)$ là $(-\infty; a]$. Khi đó a thuộc khoảng nào sau đây?

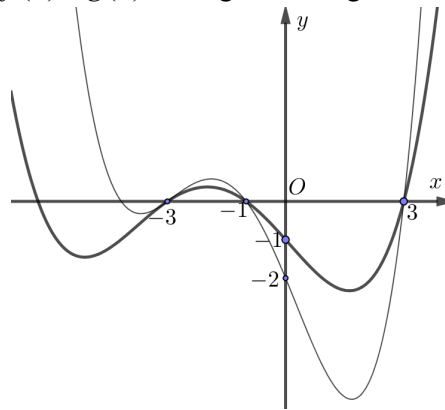
A. $(-4; -2)$.

B. $(-2; -1)$.

C. $(0; 2)$.

D. $(1; 3)$.

Câu 42: Cho hai hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới, trong đó đường **đậm hơn** là đồ thị hàm số $y = f(x)$. Biết rằng hai đồ thị này tiếp xúc với nhau tại điểm có hoành độ là -3 và cắt nhau tại hai điểm nữa có hoành độ lần lượt là -1 và 3 . Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $f(x) \geq g(x) + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-3; 3]$.



A. $\left(-\infty; \frac{12-8\sqrt{3}}{9}\right]$.

B. $\left[\frac{12-10\sqrt{3}}{9}; +\infty\right)$.

C. $\left(-\infty; \frac{12-10\sqrt{3}}{9}\right]$.

D. $\left[\frac{12-8\sqrt{3}}{9}; +\infty\right)$.

Câu 43: Một người mỗi đầu tháng đều đặn gửi vào ngân hàng một khoản tiền T theo hình thức lãi kép với lãi suất $0,6\%$ mỗi tháng. Biết đến cuối tháng thứ 15 thì người đó có số tiền là 10 triệu đồng. Hỏi số tiền T gần với số tiền nào nhất trong các số sau?

- A. 635000 đồng. B. 535000 đồng. C. 613000 đồng. D. 643000 đồng.

Câu 44: Cho hàm số $y = f(x)$ là một hàm đa thức có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - |x|)$ là

- A. 5. B. 3. C. 7. D. 1.

Câu 45: Cho tập $A = \{3; 4; 5; 6\}$. Tìm số các số tự nhiên có bốn chữ số được thành lập từ tập A sao cho trong mỗi số tự nhiên đó, hai chữ số 3 và 4 mỗi chữ số có mặt nhiều nhất 2 lần, còn hai chữ số 5 và 6 mỗi chữ số có mặt không quá 1 lần.

- A. 24. B. 30. C. 102. D. 360.

Câu 46: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Một mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C (A, B, C không trùng với gốc tọa độ O) thỏa mãn $OA^2 + OB^2 + OC^2 = 27$. Diện tích của tam giác ABC bằng

- A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$. C. $9\sqrt{3}$. D. $3\sqrt{3}$.

Câu 47: Cho các số thực dương x, y, z và thỏa mãn $x + y + z = 3$. Biểu thức $P = x^4 + y^4 + 8z^4$ đạt GTNN bằng $\frac{a}{b}$, trong đó a, b là các số tự nhiên dương, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a - b$.

- A. 234. B. 523. C. 235. D. 525.

Câu 48: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho điểm $A(2; 1; 3)$ và

$(P): x + my + (2m + 1)z - m - 2 = 0$, m là tham số thực. Gọi $H(a; b; c)$ là hình chiếu vuông góc của điểm A trên (P) . Khi khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất, tính $a + b$.

- A. 2. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{3}{2}$. D. 0.

Câu 49: Số phức $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ là nghiệm của phương trình $\frac{(|z| - 1)(1 + iz)}{z - \frac{1}{\bar{z}}} = i$. Tổng $T = a^2 + b^2$

bằng

- A. 4. B. $4 - 2\sqrt{3}$. C. $3 + 2\sqrt{2}$. D. 3.

Câu 50: Cho mặt cầu (S) có bán kính bằng 3 (m), đường kính AB. Qua A và B dựng các tia At_1, Bt_2 tiếp xúc với mặt cầu và vuông góc với nhau. M và N là hai điểm lần lượt di chuyển trên At_1, Bt_2 sao cho MN cũng tiếp xúc với (S) . Biết rằng khối tứ diện ABMN có thể tích $V(m^3)$ không đổi. V thuộc khoảng nào sau đây?

- A. (17; 21). B. (15; 17). C. (25; 28). D. (23; 25).

----- HẾT -----

BẢNG ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
B	D	C	C	A	D	D	D	C	D	A	A	B	A	D	D	B	B	A	A	B	C	C	A	C
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
B	D	A	B	C	D	A	D	B	C	A	D	D	C	B	C	A	A	A	C	B	B	C	C	A

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $2|z-1| = |z+\bar{z}+2|$ trên mặt phẳng tọa độ là một

- A.** đường thẳng. **B.** parabol. **C.** đường tròn. **D.** hypebol.

Lời giải

Chọn B

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có $2|z-1| = |z+\bar{z}+2| \Leftrightarrow 2|x+yi-1| = |x+yi+x-yi+2|$

$$\Leftrightarrow |x+yi-1| = |x+1| \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow y^2 = 4x$$

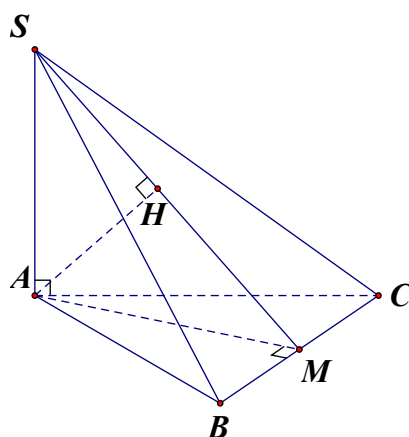
Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là một parabol.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, ΔABC là tam giác đều cạnh a và tam giác SAB cân. Tính khoảng cách h từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) .

- A.** $h = \frac{a\sqrt{3}}{7}$. **B.** $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $h = \frac{2a}{\sqrt{7}}$. **D.** $h = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm BC .

Ta có $AM \perp BC$ (ΔABC đều) và $SA \perp BC$ (vì $SA \perp (ABC)$) nên $BC \perp (SAM)$ (1).

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên $SM \Rightarrow AH \perp SM$ mà $BC \perp AH$ (do (1))

Nên $AH \perp (SBC)$.

Do đó $d(A; (SBC)) = AH$.

Xét tam giác SAM vuông tại A có $SA = AB = a$, $AM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{7}{3a^2} \Leftrightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

- Câu 3.** Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Tính iz_0 .
A. $iz_0 = -3i + 1$. **B.** $iz_0 = 3 - i$. **C.** $iz_0 = -3 - i$. **D.** $iz_0 = 3i - 1$.

Lời giải

Chọn C

$$z^2 + 2z + 10 = 0 \Rightarrow z = -1 - 3i \text{ hoặc } z = -1 + 3i \Rightarrow z_0 = -1 + 3i.$$

$$iz_0 = i(-1 + 3i) = -i + 3i^2 = -i - 3.$$

- Câu 4.** Một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 3$, công bội $q = 2$. Biết $S_n = 765$. Tìm n .
A. $n = 9$. **B.** $n = 6$. **C.** $n = 8$. **D.** $n = 7$.

Lời giải

Chọn C

$$S_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q} \Leftrightarrow 765 = \frac{3 \cdot (1 - 2^n)}{1 - 2} \Leftrightarrow 255 = 2^n - 1 \Leftrightarrow n = 8.$$

- Câu 5.** Tập xác định của hàm số $y = (x - 1)^{\frac{1}{5}}$ là
A. $(1; +\infty)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $[1; +\infty)$. **D.** $(0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = (x - 1)^{\frac{1}{5}}$ xác định khi và chỉ khi $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Nên tập xác định của hàm số $y = (x - 1)^{\frac{1}{5}}$ là: $(1; +\infty)$

- Câu 6.** Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm là $A(1; 3; -1)$, $B(3; -1; 5)$. Tìm tọa độ của điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB}$.

- A.** $\left(\frac{5}{3}; \frac{13}{3}; 1\right)$. **B.** $M\left(\frac{7}{3}; \frac{1}{3}; -3\right)$. **C.** $M\left(\frac{7}{3}; \frac{1}{3}; 3\right)$. **D.** $M(4; -3; 8)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi điểm $M = (x; y; z) \Rightarrow \overrightarrow{MA} = (1 - x; 3 - y; -1 - z)$, $\overrightarrow{MB} = (3 - x; -1 - y; 5 - z)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x = 3(3 - x) \\ 3 - y = 3(-1 - y) \\ -1 - z = 3(5 - z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \\ z = 8 \end{cases} \Rightarrow M(4; -3; 8)$$

Câu 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm $B(2;1;-3)$, đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng $(Q): x + y + 3z = 0$, $(R): 2x - y + z = 0$ là

A. $4x + 5y - 3z + 22 = 0$.

B. $4x - 5y - 3z - 12 = 0$.

C. $2x + y - 3z - 14 = 0$.

D. $4x + 5y - 3z - 22 = 0$.

Lời giải

Chọn D

Mặt phẳng (Q) có vec tơ pháp tuyến : $\vec{n}_Q = (1;1;3)$.

Mặt phẳng (R) có vec tơ pháp tuyến : $\vec{n}_R = (2;-1;1)$.

Mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q) và (R) nên vec tơ pháp tuyến :

$$\vec{n}_P = [\vec{n}_Q; \vec{n}_R] = \left(\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (4;5;-3).$$

Phương trình mặt phẳng (P) là:

$$4(x-2) + 5(y-1) - 3(z+3) = 0 \Leftrightarrow 4x + 5y - 3z - 22 = 0$$

Vậy chọn đáp án $4x + 5y - 3z - 22 = 0$.

Câu 8. Hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
y'		-	-	+	-
y	-1	2	3	0	

$\swarrow \quad \searrow \quad \nearrow \quad \searrow$
 $\quad \quad \quad -\infty \quad \quad \quad -4 \quad \quad \quad 3 \quad \quad \quad 0$

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số có :

Một tiệm cận đứng : $x = -2$.

Hai tiệm cận ngang : $y = -1$, $y = 0$.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả 3 đường tiệm cận.

Câu 9. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a , gọi α là góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BB'D'D)$. Tính $\sin \alpha$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{5}$.

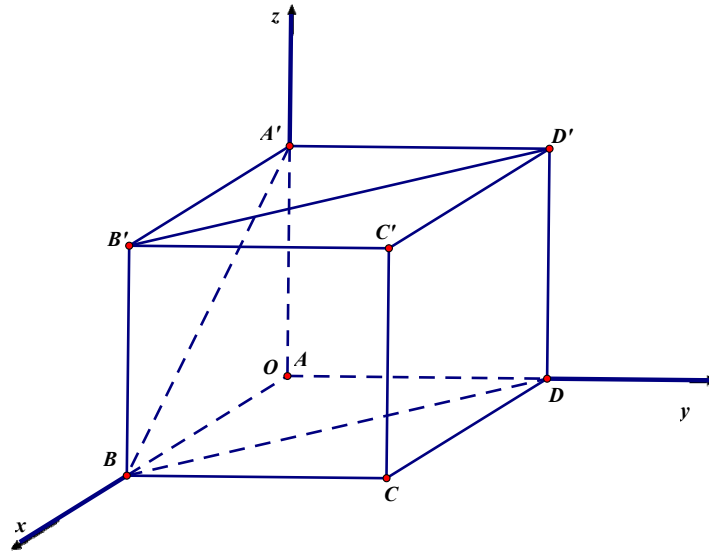
B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn C



+Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với $A \equiv O(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a;0), D(0;a;0), A'(0;0;a), B'(a;0;a), C'(a;a;a), D'(0;a;a)$.

+Ta thấy $OC \perp (BB'D'D)$ và $\overrightarrow{OC} = (a;a;0)$ nên suy ra mặt phẳng $(BB'D'D)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1;1;0)$.

+Đường thẳng $A'B$ có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{A'B} = (a;0;-a)$ ta chọn $\vec{u} = (1;0;-1)$.

$$+Ta \text{ có } \sin \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{2}.$$

Câu 10. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm nguyên dương của bất phương trình $\log_2(1+x) < 2$. Tính giá trị của $P = x_1 + x_2$

A. $P = 6$.

B. $P = 4$.

C. 5.

D. $P = 3$.

Lời giải

Chọn D

$$Ta \text{ có } \log_2(1+x) < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1+x > 0 \\ 1+x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 3.$$

Do x_1, x_2 là hai nghiệm nguyên dương nên $x_1 = 1$ và $x_2 = 2$, khi đó $P = x_1 + x_2 = 1 + 2 = 3$.

Câu 11. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$. Tính diện tích mặt cầu (S) .

A. 36π .

B. 42π .

C. 9π .

D. 12π .

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$ có tâm $I(1;2;3)$, bán kính

$$R = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 - 5} = 3.$$

Diện tích mặt cầu (S) là $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 9 = 36\pi$.

Câu 12. Biết $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = a \ln 2 + \frac{b}{c}$ (với a là số hữu tỉ; b, c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản). Tính giá trị của $S = 2a + 3b + c$.

A. $S = 4$.

B. $S = -6$.

C. $S = 6$.

D. $S = 5$.

Lời giải

Chọn A

Xét $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{1}{x^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$

Ta có $I = -\frac{1}{x} \ln x \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{x} \Big|_1^2 = -\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2}$.

Vậy $a = -\frac{1}{2}; b = 1; c = 2 \Rightarrow S = 2a + 3b + c = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 \cdot 1 + 2 = 4$.

Câu 13. Cho $a = \log_2 5, b = \log_2 9$. Biểu diễn của $P = \log_2 \frac{40}{3}$ theo a và b là

A. $P = 3 + a - 2b$. **B.** $P = 3 + a - \frac{1}{2}b$. **C.** $P = \frac{3a}{2b}$. **D.** $P = 3 + a - \sqrt{b}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $b = \log_2 9 \Leftrightarrow b = 2 \log_2 3 \Leftrightarrow \log_2 3 = \frac{1}{2}b$.

$P = \log_2 \frac{40}{3} = \log_2 40 - \log_2 3 = \log_2 (8 \cdot 5) - \log_2 3 = 3 + \log_2 5 - \log_2 3 = 3 + a - \frac{1}{2}b$.

Câu 14. Tích các nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} (6^{x+1} - 36^x) = -2$ bằng

A. 0. **B.** $\log_6 5$. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} (6^{x+1} - 36^x) = -2 \Leftrightarrow -2 \log_5 (6^{x+1} - 36^x) = -2 \Leftrightarrow \log_5 (6^{x+1} - 36^x) = 1$.

$\Leftrightarrow 6^{x+1} - 36^x = 5 \Leftrightarrow 6^{2x} - 6 \cdot 6^x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6^x = 1 \\ 6^x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \log_6 5 \end{cases}$.

Vậy tích các nghiệm của phương trình bằng: $0 \cdot \log_6 5 = 0$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x + a - 1 & \text{khi } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x} & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Tìm tất cả giá trị thực của a để hàm số đã cho liên

tục trên $\mathbb{R}$.

A. $a = 1$. **B.** $a = 3$. **C.** $a = 4$. **D.** $a = 2$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số liên tục tại mọi điểm $x \neq 0$ với bất kỳ a .

Với $x=0$ Ta có $f(0)=a-1$;

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x + a - 1) = a - 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{x(\sqrt{1+2x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\sqrt{1+2x}+1} = 1;$$

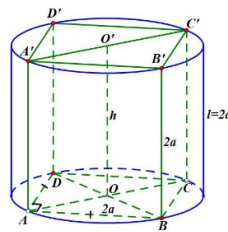
Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x=0 \Leftrightarrow a-1=1 \Leftrightarrow a=2$.

Câu 16. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $2a$. Thể tích khối trụ ngoại tiếp hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

- A. $2\pi a^3$. B. $\frac{\pi a^3}{2}$. C. $8\pi a^3$. D. $4\pi a^3$.

Lời giải

Chọn D



Ta có : + Bán kính đáy của khối trụ là $R = \frac{AC}{2} = \frac{2a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$.

+ Chiều cao khối trụ là $h = AA' = 2a$.

Vậy thể tích khối trụ bằng $V = \pi R^2 h = \pi (a\sqrt{2})^2 \cdot 2a = 4\pi a^3$

Câu 17. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; -2; 3)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm M . Tọa độ của điểm M là

- A. $M(1; 0; 3)$. B. $M(0; -2; 3)$. C. $M(1; 0; 0)$. D. $M(1; -2; 0)$.

Lời giải

Chọn B

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(x; y; z)$ lên mặt phẳng (Oyz) là điểm có tọa độ: $(0; y; z)$

Do đó hình chiếu vuông góc của $A(1; -2; 3)$ trên mặt phẳng (Oyz) là điểm có tọa độ: $(0; -2; 3)$

Câu 18. Tìm điểm M có hoành độ âm trên đồ thị $(C): y = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông

góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

- A. $M\left(-1; \frac{4}{3}\right)$. B. $M(-2; 0)$. C. $M\left(2; \frac{4}{3}\right)$. D. $M(-2; -4)$.

Lời giải

Chọn B

Tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ nên tiếp tuyến có hệ số góc $k = 3$

Ta có: $y'(x) = x^2 - 1$

Xét phương trình: $y'(x) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

Do M có hoành độ âm nên $x = -2$ thỏa mãn, $x = 2$ loại.

Với $x = -2$ thay vào phương trình (C) $\Rightarrow y = 0$. Vậy điểm M cần tìm là: $M(-2; 0)$

Câu 19. Khối đa diện đều loại $\{3; 5\}$ là khối

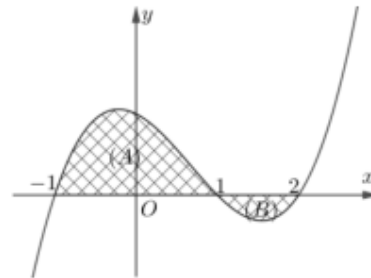
A. Hai mươi mặt đều. **B.** Tứ diện đều. **C.** Tám mặt đều. **D.** Lập phương.

Lời giải

Chọn A

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng diện tích của hình

phẳng (A), (B) lần lượt bằng 15 và 3. Tích phân $\int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{x} \cdot f(3 \ln x + 2) dx$ bằng



A. 4.

B. -4.

C. 6.

D. -6.

Lời giải

Chọn A

Xét $I = \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{x} \cdot f(3 \ln x + 2) dx$

Đặt $t = 3 \ln x + 2 \Rightarrow \frac{1}{3} dt = \frac{1}{x} dx$

Đổi cận $x = \frac{1}{e} \Rightarrow t = -1$; $x = 1 \Rightarrow t = 2$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{3} \int_{-1}^2 f(t) dt = \frac{1}{3} \int_{-1}^2 f(x) dx = \frac{1}{3} \left[\int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \right] = \frac{1}{3} (S_A + S_B) = \frac{1}{3} (15 - 3) = 4.$$

Câu 21. Gọi a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $z = |1 - \sqrt{3}i|(1 + 2i) + |3 - 4i|(2 + 3i)$. Giá trị của $a - b$ là

A. 7.

B. -7.

C. 31.

D. -31.

Lời giải

Chọn B

Ta có $z = |1 - \sqrt{3}i|(1 + 2i) + |3 - 4i|(2 + 3i) = 2(1 + 2i) + 5(2 + 3i) = 12 + 19i$.

Vậy $a = 12, b = 19 \Rightarrow a - b = -7$.

Câu 22. Cho số phức z thỏa mãn $z + 4\bar{z} = 7 + i(z - 7)$. Tính môđun của z .

A. $|z| = 5$.

B. $|z| = 3$.

C. $|z| = \sqrt{5}$.

D. $|z| = \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = x - yi$.

Khi đó $z + 4\bar{z} = 7 + i(z - 7) \Leftrightarrow x + yi + 4(x - yi) = 7 + i(x + yi - 7) \Leftrightarrow 5x - 3yi = 7 - y + (x - 7)i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 7 - y \\ -3y = x - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + y = 7 \\ x + 3y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Vậy $z = 1 + 2i \Rightarrow |z| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

Câu 23. Đạo hàm của hàm số $y = 3^x$ là

A. $y' = \frac{-3^x}{\ln 3}$.

B. $y' = -3^x \ln 3$.

C. $y' = 3^x \ln 3$.

D. $y' = \frac{3^x}{\ln 3}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $y = 3^x \Rightarrow y' = 3^x \ln 3$.

Câu 24. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ trên đoạn $[2; 4]$ là

A. $\min_{[2; 4]} y = 7$.

B. $\min_{[2; 4]} y = 5$.

C. $\min_{[2; 4]} y = 3$.

D. $\min_{[2; 4]} y = 0$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $y' = 3x^2 - 3 > 0, \forall x \in [2; 4]$.

Do đó hàm số đồng biến trên đoạn $[2; 4] \Rightarrow \min_{[2; 4]} y = y(2) = 7$.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y			3		-1		3	
	$-\infty$							$-\infty$

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0; 2)$.

B. $(0; +\infty)$.

C. $(-2; 0)$

D. $(-\infty; -2)$.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$

Xét đáp án ta chọn C

Câu 26. Giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ là

A. 7.

B. -25.

C. -20.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		7		-25		$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có giá trị cực tiểu của hàm số là -25

Câu 27. Xét một phép thử có không gian mẫu Ω và A là một biến cố của phép thử đó. Phát biểu nào sau đây **sai**?

A. Xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$.

B. $0 \leq P(A) \leq 1$.

C. $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

D. $P(A) = 0$ khi và chỉ khi A là biến cố chắc chắn.

Lời giải

Chọn D

Theo định nghĩa và tính chất của xác suất của biến cố liên quan đến phép thử ta có nhận xét: các phương án A, B, C đều đúng.

Phương án D sai vì $P(A) = 0$ khi A là biến cố không thể (hay là biến cố không); Nếu A là biến cố chắc chắn thì $P(A) = 1$.

Câu 28. Cho hàm số: $y = (1-m)x^4 - mx^2 + 2m - 1$. Tìm m để hàm số có đúng một điểm cực trị.

A. $m \leq 0$ hoặc $m \geq 1$. **B.** $m < 0$ hoặc $m > 1$. **C.** $m > 1$.

D. $m < 0$.

Lời giải

Chọn A

$$y' = 4(1-m)x^3 - 2mx = x[4(1-m)x^2 - 2m]$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4(1-m)x^2 = 2m \quad (1) \end{cases}$$

Hàm số có đúng một điểm cực trị khi $y' = 0$ có đúng một nghiệm.

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm hoặc có một nghiệm bằng 0.

+ $m = 1$: phương trình (1) vô nghiệm (thỏa).

+ $m \neq 1$: phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow (1-m)m < 0 \Leftrightarrow m < 0$ hoặc $m > 1$.

+ Phương trình (1) có một nghiệm bằng 0 $\Leftrightarrow m = 0$.

Vậy $m \leq 0$ hoặc $m \geq 1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 29. Lăng trụ tam giác đều có độ dài tất cả các cạnh bằng 3. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{27\sqrt{3}}{4}$.

C. $\frac{27\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Lăng trụ tam giác đều có độ dài tất cả các cạnh bằng 3 có:

Đáy là tam giác đều có độ dài các cạnh bằng 3 có diện tích $S = \frac{9\sqrt{3}}{4}$.

Chiều cao của khối lăng trụ $h = 3$.

Thể tích khối lăng trụ tam giác đều có độ dài tất cả các cạnh bằng 3 là

$$V = S.h = \frac{9\sqrt{3}}{4} \cdot 3 = \frac{27\sqrt{3}}{4}.$$

Câu 30. Gọi l , h , r lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính mặt đáy của hình nón. Diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón là

A. $S_{xq} = \pi rh$.

B. $S_{xq} = 2\pi rl$.

C. $S_{xq} = \pi rl$.

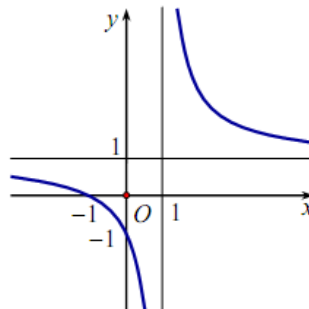
D. $S_{xq} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Lời giải

Chọn C

Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi rl$.

Câu 31. Đồ thị sau là đồ thị của hàm số nào?



A. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

B. $y = \frac{2x-3}{2x-2}$.

C. $y = \frac{x}{x-1}$.

D. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

Lời giải

Chọn D

Ta thấy đồ thị hàm số đi qua hai điểm $(-4; 3)$ và $(3; -4)$

Thế tọa độ cả hai điểm trên vào từng phương án, ta thấy chỉ có D thỏa mãn.

Câu 32. Cho hình chóp $VDEFG$ có đáy là hình vuông, $EG = 5d$. Tam giác VDF vuông cân tại V và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $VDEFG$ là

A. $\frac{4\pi a^3}{3}$.

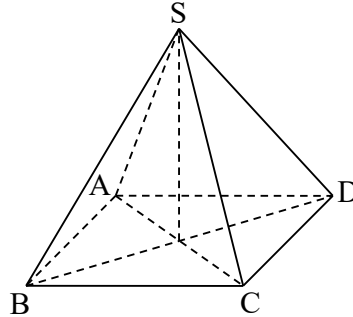
B. $4\pi a^3\sqrt{3}$.

C. πa^3 .

D. $4\pi a^3$.

Lời giải

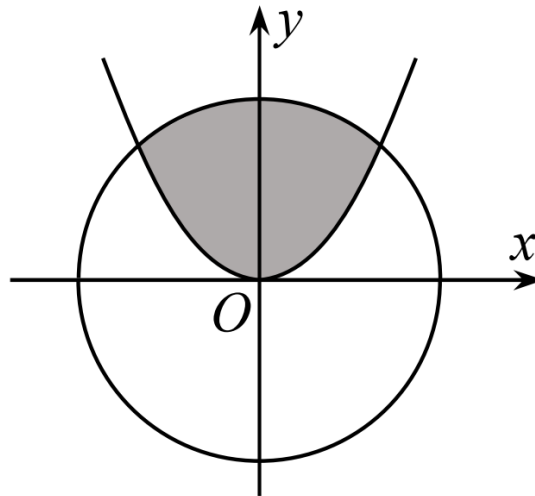
Chọn A



Vì $V \in EG$ cùng nhìn DF dưới một góc vuông nên khối cầu ngoại tiếp hình chóp $VDEFG$ có đường kính là $DF = EG = 5d \Rightarrow$ Bán kính khối cầu là $U = d$.

Thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $VDEFG$ là $Y = \frac{7}{6}\pi U^6 = \frac{7}{6}\pi d^6$

Câu 33. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2$ và đường tròn $x^2 + y^2 = 2$ (phần tô đậm trong hình). Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành.



A. $V = \frac{5\pi}{3}$.

B. $V = \frac{22\pi}{15}$.

C. $V = \frac{\pi}{5}$.

D. $V = \frac{44\pi}{15}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$x^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow y^2 = 2 - x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2 - x^2} \\ y = -\sqrt{2 - x^2} \end{cases}$$

Phương trình nửa đường tròn trên là $y = \sqrt{2 - x^2}$.

Phương trình hoành độ giao điểm nửa đường tròn trên và parabol là:

$$\sqrt{2-x^2} = x^2 \Leftrightarrow 2-x^2 = x^4 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 & (n) \\ x^2 = -2 & (l) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Hình (H) giới hạn bởi parabol và nửa đường tròn trên, ta có công thức

$$V = \pi \int_{-1}^1 \left(\left(\sqrt{2-x^2} \right)^2 - (x^2)^2 \right) dx = \pi \int_{-1}^1 (2-x^2-x^4) dx = \pi \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{44\pi}{15}.$$

$\Rightarrow$ Chọn phương án D.

Câu 34. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M(3;3;-2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;3;1)$. Phương trình của d là

A. $\frac{x+3}{1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-2}{1}.$

B. $\frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+2}{1}.$

C. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{-2}.$

D. $\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+1}{-2}.$

Lời giải

Chọn B

Phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(3;3;-2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;3;1)$ là:

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+2}{1}$$

$\Rightarrow$ Chọn phương án B.

Câu 35. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + \sin 2x$ là

A. $x^2 + \frac{1}{2} \cos 2x + C.$

B. $x^2 + 2 \cos 2x + C.$

C. $x^2 - \frac{1}{2} \cos 2x + C.$

D. $x^2 - 2 \cos 2x + C.$

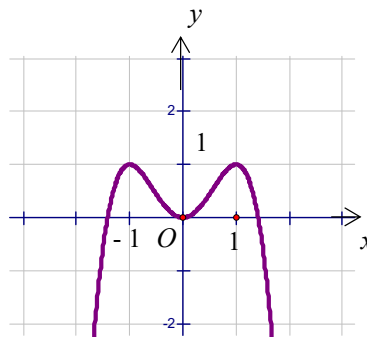
Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$\int f(x) dx = \int (2x + \sin 2x) dx = \int 2x dx + \frac{1}{2} \int \sin 2x d(2x) = x^2 - \frac{1}{2} \cos 2x + C.$$

Câu 36. Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ có đồ thị như hình vẽ bên



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $-x^4 + 2x^2 = \log_2 m$ có bốn nghiệm thực phân biệt

A. $1 < m < 2.$

B. $0 \leq m \leq 1.$

C. $m \geq 2.$

D. $m > 0.$

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị ta suy ra điều kiện để phương trình đã cho có bốn nghiệm thực phân biệt là $0 < \log_2 m < 1 \Leftrightarrow 1 < m < 2$.

Câu 37. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;0;2)$ và đường thẳng

$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I , tiếp xúc với đường thẳng d . Bán kính của (S) bằng

A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

B. $\frac{5}{3}$.

C. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{30}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

PTTS của đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$. Gọi $H(1+2t; -t; t)$ là hình chiếu của I trên d .

Ta có $IH \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0$; $\overrightarrow{IH} = (2t; -t; t-2)$; $\overrightarrow{u_d} = (2; -1; 1)$.

$$\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow 4t + t + t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow H\left(\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

$$R = IH = \sqrt{\left(\frac{5}{3} - 1\right)^2 + \left(-\frac{1}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 2\right)^2} = \frac{\sqrt{30}}{3}.$$

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và số thực k tùy ý. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

A. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$.

B. $\int_a^a kf(x) dx = 0$.

C. $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

D. $\int_a^b xf(x) dx = x \int_a^b f(x) dx$.

Lời giải

Chọn D

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-1)(x-4)u(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $u(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(1; 2)$.

B. $(-1; 1)$.

C. $(-2; -1)$.

D. $(-\infty; -2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2)$.

Theo giả thiết $f'(x) = x^2(x-1)(x-4)u(x) \Rightarrow f'(x^2) = x^4(x^2-1)(x^2-4)u(x^2)$.

Từ đó suy ra $g'(x) = 2x^5(x^2-1)(x^2-4)u(x^2)$.

Mà $u(x) > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow u(x^2) > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên dấu của $g'(x)$ cùng dấu với $2x^5(x^2-1)(x^2-4)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
g							

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với đáp án ta chọn C.

Câu 40. Cho phương trình $25^x - 20 \cdot 5^{x-1} + 3 = 0$. Khi đặt $t = 5^x$ ($t > 0$), ta được phương trình nào sau đây?

- A. $t^2 - 3 = 0$. B. $t^2 - 4t + 3 = 0$. C. $t^2 - 20t + 3 = 0$. D. $t^2 - 20\frac{1}{t} + 3 = 0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có phương trình $25^x - 20 \cdot 5^{x-1} + 3 = 0 \Leftrightarrow 5^{2x} - 20 \cdot \frac{5^x}{5} + 3 = 0 \Leftrightarrow 5^{2x} - 4 \cdot 5^x + 3 = 0$.

Đặt $t = 5^x$ ($t > 0$), ta được phương trình $t^2 - 4t + 3 = 0$.

Câu 41. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{2x^2 + (1-m)x + 1 + m}{x - m}$ đồng biến trên $(1; +\infty)$ là $(-\infty; a]$. Khi đó a thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(-4; -2)$. B. $(-2; -1)$. C. $(0; 2)$. D. $(1; 3)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = \frac{2x^2 - 4mx + m^2 - 2m - 1}{(x - m)^2}$.

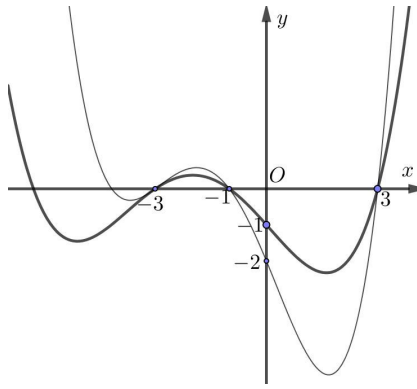
Để hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$ điều kiện $\begin{cases} y' \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \\ m \leq 1 \end{cases}$ (1), dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm.

Đặt $g(x) = 2x^2 - 4mx + m^2 - 2m - 1$, $\Delta_{g(x)} = 2(m+1)^2 \geq 0$. Gọi S là tổng hai nghiệm của phương trình $g(x) = 0$.

$$\text{Điều kiện (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(1) \geq 0 \\ \frac{S}{2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 1 \geq 0 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 3 - 2\sqrt{2}.$$

Kết hợp các điều kiện ta có $m \in (-\infty; 3 - 2\sqrt{2}]$ suy ra $a = 3 - 2\sqrt{2}$ thuộc khoảng $(0; 2)$.

Câu 42. Cho hai hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới, trong đó đường đậm hơn là đồ thị hàm số $y = f(x)$. Biết rằng hai đồ thị này tiếp xúc với nhau tại điểm có hoành độ -3 và cắt nhau tại hai điểm phân biệt nữa có hoành độ lần lượt là -1 và 3 . Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $f(x) \geq g(x) + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-3; 3]$.



A. $\left(-\infty; \frac{12-8\sqrt{3}}{9}\right]$. **B.** $\left[\frac{12-10\sqrt{3}}{9}; +\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty; \frac{12-10\sqrt{3}}{9}\right]$. **D.** $\left[\frac{12-8\sqrt{3}}{9}; +\infty\right)$.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ cắt trục tung lần lượt tại điểm có tung độ bằng -1 , -2 suy ra $f(0) = -1$, $g(0) = -2$.

Phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = g(x)$. Do hai đồ thị này tiếp xúc với nhau tại điểm có hoành độ -3 và cắt nhau tại hai điểm phân biệt nữa có hoành độ lần lượt là -1 và 3 nên

$$f(x) - g(x) = a(x+3)^2(x+1)(x-3). \text{ Suy ra } f(0) - g(0) = -27a \Leftrightarrow a = -\frac{1}{27}.$$

$$\text{Ta có } f(x) \geq g(x) + m \Leftrightarrow m \leq f(x) - g(x) \Leftrightarrow m \leq -\frac{1}{27}(x+3)^2(x+1)(x-3) \quad (1).$$

$$\text{Đặt } h(x) = -\frac{1}{27}(x+3)^2(x+1)(x-3)$$

$$\text{Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi } x \in [-3; 3] \Leftrightarrow m \leq \min_{[-3; 3]} h(x).$$

$$\text{Ta có } h'(x) = -\frac{4}{27}(x+3)(x^2-3); h'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{4}{27}(x+3)(x^2-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \\ x = -3 \end{cases}.$$

$$h(-\sqrt{3}) = \frac{12-8\sqrt{3}}{9}; h(\sqrt{3}) = \frac{12+8\sqrt{3}}{9}; h(3) = 0; h(-3) = 0. \text{ Suy ra } \min_{[-3; 3]} h(x) = \frac{12-8\sqrt{3}}{9}.$$

$$\text{Vậy } m \leq \frac{12-8\sqrt{3}}{9}. \text{ Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số } m \text{ là } \left(-\infty; \frac{12-8\sqrt{3}}{9}\right].$$

Câu 43. Một người mỗi đầu tháng đều đặn gửi vào ngân hàng một khoản tiền T theo hình thức lãi kép với lãi suất $0,6\%$ mỗi tháng. Biết đến cuối tháng thứ 15 thì người đó có số tiền là 10 triệu đồng. Hỏi số tiền T gần với số tiền nào nhất trong các số sau?

A. 635000 đồng. **B.** 535000 đồng. **C.** 613000 đồng. **D.** 643000 đồng.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt: } r = 0,6\%.$$

Ta có, bảng thông kê số tiền cuối mỗi tháng là

Tháng	1	2	3	n
Tiền ban đầu	T	$T + T(1+r)$	$T + T((1+r) + (1+r)^2)$	$T + T((1+r) + (1+r)^2 + \dots + (1+r)^{n-1})$
Tiền lãi	$T.r$	$T.r + T(1+r).r$	$T.r + T.(1+r).r + T.1 + r)^2.r$	$T.r + T.((1+r) + (1+r)^2 + \dots + (1+r)^{n-1}).r$
Tiền cuối tháng	$T + T.r = T(1+r)$	$T + T.r + T(1+r) + T(1+r).r$ $= T((1+r) + (1+r)^2)$	$T.((1+r) + (1+r)^2 + (1+r)^3)$	$T.((1+r) + (1+r)^2 + (1+r)^3 + \dots + (1+r)^n)$

Dựa, vào bảng thống kê ta có: $T_n = T.(1+r). \frac{1-(1+r)^n}{1-(1+r)} = T.(1+r). \frac{(1+r)^n - 1}{r}$.

Vậy, cuối tháng 15 ta có $T_{15} = T.(1+r). \frac{(1+r)^{15} - 1}{r} = 10.000.000$

$$\Rightarrow T = \frac{10.000.000.r}{(1+r)((1+r)^{15} - 1)} = 635301.4591 \text{ đồng.}$$

Câu 44. Cho hàm số $y = f(x)$ là một hàm đa thức có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - |x|)$ là

A. 5.

B. 3.

C. 7.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$y = f(x^2 - |x|) = \begin{cases} f(x^2 - x) & ; x \geq 0 \\ f(x^2 + x) & ; x < 0 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow y' = f'(x^2 - |x|) = \begin{cases} (2x-1)f'(x^2 - x) & ; x \geq 0 \\ (2x+1)f'(x^2 + x) & ; x < 0 \end{cases}.$$

Dựa vào bản xét dấu của hàm số $y = f(x)$,

$$\text{ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}.$$

*) Với $x \geq 0$ thì $f'(x^2 - |x|) = 0 \Leftrightarrow (2x-1)f'(x^2 - x) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \\ f'(x^2 - x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x^2 - x = 1 \\ x^2 - x = -1 (vn) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

so với điều kiện $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (loại).

$$*) \text{ với } x < 0 \text{ thì } f'(x^2 - |x|) = 0 \Leftrightarrow (2x+1)f'(x^2 + x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \\ f'(x^2 + x) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{2} \\ x^2 + x = 1 \\ x^2 + x = -1 \text{ (vn)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{2} \\ x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}, \text{ so với điều kiện } x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ (loại).}$$

$$\text{Mặt khác: } f'(x) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 1 \end{cases} \text{ và } f'(x) < 0 \Rightarrow -1 < x < 1.$$

$$*) \text{ Với } x \geq 0 \text{ thì } f'(x^2 - x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x < -1 \\ x^2 - x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}, \text{ giao điều kiện } x \geq 0,$$

$$\text{suy ra } x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

$$*) \text{ Với } x < 0 \text{ thì } f'(x^2 + x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x < -1 \\ x^2 + x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}, \text{ giao điều kiện } x < 0,$$

$$\text{suy ra } x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

$$*) \text{ Với } x \geq 0 \text{ thì } f'(x^2 - x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x > -1 \\ x^2 - x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \text{ giao điều kiện } x \geq 0,$$

$$\text{suy ra } 0 \leq x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

$$*) \text{ Với } x < 0 \text{ thì } f'(x^2 + x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x > -1 \\ x^2 + x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \text{ giao điều kiện}$$

$x < 0,$

$$\text{suy ra } \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < 0.$$

Ta sẽ có bảng xét dấu của hàm số $y = f'(x^2 - |x|)$ như sau

x	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$2x-1$					-	0	+
$2x+1$	-	-	0	+			
$f'(x^2-x)$					-	-	0
$f'(x^2+x)$	+	0	-	-			
$f'(x^2- x)$	-	0	+	0	-	0	+

Vậy, số cực trị của hàm số là 5.

- Câu 45.** Cho tập $A = \{3; 4; 5; 6\}$. Tìm số các số tự nhiên có bốn chữ số được thành lập từ tập A sao cho trong mỗi số tự nhiên đó, hai chữ số 3 và 4 mỗi chữ số có mặt nhiều nhất hai lần, còn hai chữ số 5 và 6 mỗi chữ số có mặt không quá một lần.
- A.** 24. **B.** 30. **C.** 102. **D.** 360.

Lời giải

Chọn C

Có 3 trường hợp thỏa mãn bài toán:

Trường hợp 1: Bốn chữ số trong số cần lập khác nhau thuộc tập A .

Trường hợp này có $4! = 24$ (số).

Trường hợp 2: Chữ số 3 có mặt hai lần và mỗi chữ số còn lại có mặt không quá một lần hoặc chữ số 4 có mặt hai lần và mỗi chữ số còn lại có mặt không quá một lần.

Trường hợp này có $2 \times C_4^2 \times A_3^2 = 72$ (số).

Trường hợp 3: Mỗi chữ số 3 và 4 có mặt đúng hai lần.

Trường hợp này có $C_4^2 \times C_2^2 = 6$ (số).

Vậy số các số thỏa mãn bài toán là $24 + 72 + 6 = 102$ (số).

- Câu 46.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Một mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C (không trùng với gốc tọa độ O) thỏa mãn $OA^2 + OB^2 + OC^2 = 27$. Diện tích của tam giác ABC bằng
- A.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{9\sqrt{3}}{2}$. **C.** $9\sqrt{3}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $O(0; 0; 0)$, bán kính $R = \sqrt{3}$.

Gọi $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$, từ giả thiết suy ra $a, b, c > 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 27$ (1).

Mặt phẳng (P) đi qua 3 điểm A, B, C có dạng: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

$MP(P)$ tiếp xúc với mặt cầu (S) khi và chỉ khi

$$d(O, (P)) = R \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{3} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra: $(a^2 + b^2 + c^2) \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = 9$.

Mặt khác, $(a^2 + b^2 + c^2) \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq 3 \cdot \sqrt[3]{a^2 b^2 c^2} \cdot 3 \sqrt[3]{\frac{1}{a^2 b^2 c^2}} = 9$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a = b = c > 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 3$.

Ta có

$$\overrightarrow{AB} = (-a; b; 0) = (-3; 3; 0), \overrightarrow{AC} = (-3; 0; 3), \overrightarrow{BC} = (0; -3; 3) \Rightarrow AB = AC = BC = 3\sqrt{2}.$$

$$\text{Do đó, } S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

Chú ý: Có thể tính diện tích tam giác bằng công thức $S_{ABC} = \frac{1}{2} [\|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\|] = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

Câu 47. Cho các số thực dương x, y, z và thỏa mãn $x + y + z = 3$. Biểu thức $P = x^4 + y^4 + 8z^4$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{a}{b}$, trong đó a, b là các số tự nhiên dương, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a - b$.

A. 234.

B. 523.

C. 235.

D. 525.

Lời giải

Chọn B

***Chứng minh bài toán tổng quát:** Cho a, b là các số thực không âm và n là số nguyên

dương. Chứng minh rằng: $\frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2} \right)^n$.

+ Với $n = 1$: Bất đẳng thức trở thành đẳng thức.

+ Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k > 1$, ta được $\frac{a^k + b^k}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2} \right)^k$.

+ Ta cần chứng minh: $\frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2} \right)^{k+1}$.

$$\text{Có } \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^k + b^k}{2} \geq \frac{a+b}{2} \left(\frac{a+b}{2} \right)^k = \left(\frac{a+b}{2} \right)^{k+1} \quad (1).$$

$$\text{Xét bất đẳng thức } \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2} \geq \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^k + b^k}{2} \Leftrightarrow a^{k+1} + b^{k+1} \geq ab^k + ba^k \Leftrightarrow$$

$$a^k(a-b) + b^k(b-a) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a^k - b^k) \geq 0 \text{ (luôn đúng)} \Rightarrow \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2} \geq \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^k + b^k}{2} \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2} \right)^{k+1}.$$

+ Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh $\frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2} \right)^n$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

+ Tổng quát với n số thực không âm và m nguyên dương:

$$\frac{a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m}{n} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^m.$$

***Áp dụng vào bài toán:**

$$+ \text{Ta có } \frac{x^4 + y^4}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^4 \Leftrightarrow x^4 + y^4 \geq \frac{1}{8}(x+y)^4. \text{ Mà } x+y+z=3 \Leftrightarrow x+y=3-z.$$

$$+ P = x^4 + y^4 + 8z^4 \geq \frac{1}{8}(3-z)^4 + 8z^4$$

$$+ \text{Xét hàm số } f(z) = \frac{1}{8}(3-z)^4 + 8z^4, \forall z \in (0,3) \Rightarrow f'(z) = \frac{65}{2}z^3 - \frac{9}{2}z^2 + \frac{27}{2}z - \frac{27}{2}.$$

$$f'(z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{3}{5}.$$

Bảng biến thiên hàm số $f(z)$

z	0	$\frac{3}{5}$	3
$f'(z)$		- 0 +	
$f(z)$			

$\frac{648}{125}$

$$+ \text{ Suy ra } P \geq f(z) \geq \min f(z) = \frac{648}{125}. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = \frac{6}{5} \\ z = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$+ \text{ Vậy } \min P = \frac{a}{b} = \frac{648}{125} \Rightarrow a-b = 523.$$

Câu 48. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x + my + (2m+1)z - m - 2 = 0$, m là tham số thực. Gọi $H(a;b;c)$ là hình chiếu vuông góc của điểm A trên (P) . Khi khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất, tính $a+b$.

A. 2.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{3}{2}$.

D. 0.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } d(A, (P)) = \frac{|2+m+3(2m+1)-m-2|}{\sqrt{1^2+m^2+(2m+1)^2}} = \frac{3|2m+1|}{\sqrt{1+m^2+(2m+1)^2}}.$$

$$\text{Vì } 1+m^2 \geq \frac{1}{5}(2m+1)^2, \forall m \in \mathbb{R} \text{ nên } d(A, (P)) \leq \frac{3|2m+1|}{\sqrt{\frac{1}{5}(2m+1)^2 + (2m+1)^2}} = \frac{\sqrt{30}}{2}.$$

Suy ra, khoảng cách từ điểm A đến (P) là lớn nhất khi và chỉ khi $m = 2$.

$$\text{Khi đó: } (P): x+2y+5z-4=0; AH: \begin{cases} x=2+t \\ y=1+2t \\ z=3+5t \end{cases}$$

$$H = d \cap (P) \Rightarrow 2+t+2(1+2t)+5(3+5t)-4=0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \Rightarrow H\left(\frac{3}{2}; 0; \frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Vậy } a = \frac{3}{2}, b = 0 \Rightarrow a+b = \frac{3}{2}.$$

- Câu 49.** Số phức $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ là nghiệm của phương trình $\frac{(|z|-1)(1+iz)}{z - \frac{1}{z}} = i$. Tổng $T = a^2 + b^2$ bằng
- A.** 4. **B.** $4 - 2\sqrt{3}$. **C.** $3 + 2\sqrt{2}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $z \neq 0; z \neq 1$.

$$\text{Ta có } \frac{(|z|-1)(1+iz)}{z - \frac{1}{z}} = i \Leftrightarrow (|z|-1)(\bar{z} + i|z|^2) = (|z|^2 - 1)i$$

$$\Leftrightarrow \bar{z} + i|z|^2 = (|z|+1)i \Leftrightarrow \bar{z} = (-|z|^2 + |z| + 1)i$$

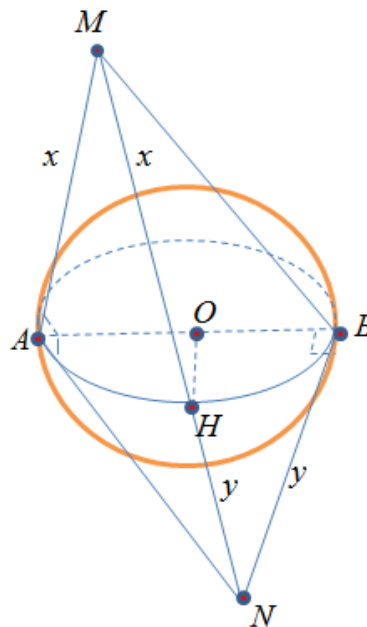
$$\Leftrightarrow |\bar{z}| = \pm(-|z|^2 + |z| + 1) \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \text{ hoặc } |z|^2 - 2|z| - 1 = 0 \Leftrightarrow |z| = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow |z|^2 = 3 + 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } T = a^2 + b^2 = 3 + 2\sqrt{2}.$$

- Câu 50.** Cho mặt cầu (S) có bán kính bằng $3(m)$, đường kính AB . Qua A và B dựng các tia At_1, Bt_2 tiếp xúc với mặt cầu và vuông góc với nhau. M và N là hai điểm lần lượt di chuyển trên At_1, Bt_2 sao cho MN cũng tiếp xúc với (S) . Biết rằng khối tứ diện $ABMN$ có thể tích $V(m^3)$ không đổi. V thuộc khoảng nào sau đây?
- A.** $(17; 21)$. **B.** $(15; 17)$. **C.** $(25; 28)$. **D.** $(23; 25)$.

Lời giải

Chọn A



Giả sử MN tiếp xúc (S) tại H .

Đặt $MA = MH = x$, $NB = NH = y$. Khi đó $V = \frac{1}{6} \cdot x \cdot 2R \cdot y = \frac{1}{3} Rxy$.

Ta có tam giác AMN vuông tại A (Vì $MA \perp AB, MA \perp BN$).

$$\Rightarrow AN^2 = (x + y)^2 - x^2.$$

$$\text{Lại có tam giác } ABN \text{ vuông tại } B \Rightarrow AN^2 = 4R^2 + y^2.$$

$$\text{Suy ra } (x+y)^2 - x^2 = 4R^2 + y^2 \Leftrightarrow xy = 2R^2. \text{ Vậy } V = \frac{1}{3}.R.2R^2 = \frac{2R^3}{3} = 18 \in (17; 21).$$

----- **HẾT** -----