

Tài liệu bài giảng:

01. MỞ ĐẦU VỀ SỐ PHỨC – P1

Thầy Đặng Việt Hùng

1. KHÁI NIỆM SỐ PHỨC

Một số phức z là một biểu thức dạng $z = a + bi$, trong đó a, b là những số thực và số i thỏa mãn $i^2 = -1$.
Trong đó:

i là đơn vị ảo.

a được gọi là **phần thực của số phức**

b được gọi là **phần ảo của số phức**

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức kí hiệu là C .

⚡ **Chú ý:**

♦ Số phức z là số thực nếu $b = 0$, khi đó $z = a$.

♦ Số phức z là số ảo (hay số thuần ảo) nếu $a = 0$, khi đó $z = bi$.

♦ Hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$ nếu $\begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

♦ Với i là đơn vị ảo ta có: $i^2 = -1$; $i^3 = i^2 \cdot i = -i$; $i^4 = (i^2)^2 = 1$; $i^5 = i^4 \cdot i = i \dots$

Từ đó suy ra $i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2} + i^{4n+3} = 0$

Ví dụ: Tính tổng $S = 1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2012}$.

Ví dụ 1. Tìm phần thực và phần ảo của các số phức sau

a) $z = 2 + 3i$

b) $z = 4i$

c) $z = -1$

d) $z = \sqrt{2} - 2i$

e) $z = (1 + i)^2 - (1 - i)^2$

f) $z = (11 - 6i) - (2 - 4i)$

Hướng dẫn giải:

Theo định nghĩa số phức ta có

a) $z = 2 + 3i \Rightarrow a = 2; b = 3$

b) $z = 4i \Rightarrow a = 0; b = 4$

c) $z = -1 \Rightarrow a = -1; b = 0$

d) $z = \sqrt{2} - 2i \Rightarrow a = \sqrt{2}; b = -2$

e) Để tìm phần thực, phần ảo ta cần biến đổi số phức đã cho về dạng rút gọn.

Ta có $(1+i)^2 - (1-i)^2 = (1+2i+i^2) - (1-2i+i^2) = 2i - (-2i) = 4i \Rightarrow a = 0; b = 4$, (do $i^2 = -1$)

f) $z = (11 - 6i) - (2 - 4i) = 9 - 2i \Rightarrow a = 9; b = -2$.

Ví dụ 2. Tìm các số thực x và y , biết:

a) $(2x+1) + (3y-2)i = (x+2) + (y+4)i$

b) $(1-3x) + (y+1)i = (x+y) - (2x+1)i$

Hướng dẫn giải:

Ta biết rằng hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$ nếu $\begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

a) Ta có $\begin{cases} 2x+1 = x+2 \\ 3y-2 = y+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

b) Ta có $\begin{cases} 1-3x = x+y \\ y+1 = -(2x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+y = 1 \\ 2x+y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -5 \end{cases}$

Ví dụ 3. Cho $z = (3a+2) + (b-4)i$. Tìm các số a, b để:

a) z là số thực

b) z là số thuần ảo

Hướng dẫn giải:

a) z là số thực khi $b-4 = 0$, hay $b = 4$.

b) z là số thuần ảo khi $3a+2 = 0$, hay $a = -2/3$

Bài tập áp dụng:

Bài 1. Xác định phần thực và phần ảo của các số phức:

1. $z = -3 + 5i$

3. $z = 12$

5. $z = (4 - i) + (2 + 3i) - (5 + i)$.

7. $z = (2 + i)^3 - (3 - i)^3$.

9. $z = (11 - 6i) - (2 - 4i)$

2. $z = -\sqrt{2}i$

4. $z = 0$

6. $z = (1 + i)^2 - (1 - i)^2$

8. $z = (3 - 5i) + (2 + 4i)$

10. $z = (2 + i) - (1 + 4i)$

Bài 2. Cho $z = (2a - 1) + (3b + 5)i$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Tìm các số a, b để:

1. z là số thực

2. z là số thuần ảo

Bài 3. Tìm các số thực x và y , biết:

1. $(2x + 1) + 5i = -4 + (3y - 2)i$

2. $(x - \sqrt{2}) - 4i = 3 - (y + 1)i$

2. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CỦA SỐ PHỨC

Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$ (hay $M(z)$) trong mặt phẳng tọa độ Oxy (hay còn gọi là **mặt phẳng phức**)

Trong đó:

- Trục hoành Ox (trục thực) biểu diễn phần thực a .

- Trục tung Oy (trục ảo) biểu diễn phần ảo b .

Ví dụ. Cho các số phức $2 + 3i$; 3 ; $-i$; $-1 + 2i$ có các điểm biểu diễn lần lượt là A, B, C, D

a) Chứng minh rằng $ABCD$ là một hình bình hành

b) Tâm I của hình bình hành $ABCD$ biểu diễn số phức nào?

3. MODULE CỦA SỐ PHỨC

Khái niệm:

Cho số phức $z = a + bi$, module của số phức z kí hiệu là $|z|$ và được tính theo biểu thức: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Ví dụ: Tính module của các số phức sau

1. $z = 1 + 3i$

2. $z = 2i$

3. $z = \sqrt{3} - i$

4. $z = (2 + i)^2 + (1 + 2i)^2$

Hướng dẫn giải:

Áp dụng công thức $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ta có

1. $z = 1 + 3i \Rightarrow |z| = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$

2. $z = 2i \Rightarrow |z| = \sqrt{4} = 2$

3. $z = \sqrt{3} - i \Rightarrow |z| = \sqrt{3 + 1} = 2$

4. $z = (2 + i)^2 + (1 + 2i)^2 = (4 + 2i + i^2) + (1 + 4i + 4i^2) = (3 + 2i) + (4i - 3) = 6i \Rightarrow |z| = 6$

4. SỐ PHỨC LIÊN HỢP

Khái niệm:

Cho số phức $z = a + bi$, số phức liên hợp của số phức z kí hiệu là $\bar{z}$ và được tính theo biểu thức: $\bar{z} = a - bi$

Chú ý:

+ Các điểm $M(a; b)$ và $M'(a; -b)$ biểu diễn các số phức z và $\bar{z}$ đối xứng nhau qua trục Ox .

+ Các số phức z và $\bar{z}$ có module bằng nhau: $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Ví dụ: Viết các số phức liên hợp của mỗi số phức sau và tính module của chúng

1. $z = 2 - 5i$

2. $z = 7i$

3. $z = 6 + i$

4. $z = \sqrt{3} - 2i$

Hướng dẫn giải:

Áp dụng $\bar{z} = a - bi$, ta được :

$$1. z = 2 - 5i \Rightarrow \bar{z} = 2 + 5i \Rightarrow |\bar{z}| = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$$

$$2. z = 7i \Rightarrow \bar{z} = -7i \Rightarrow |\bar{z}| = \sqrt{49} = 7$$

$$3. z = 6 + i \Rightarrow \bar{z} = 6 - i \Rightarrow |\bar{z}| = \sqrt{36 + 1} = \sqrt{37}$$

$$4. z = \sqrt{3} - 2i \Rightarrow \bar{z} = \sqrt{3} + 2i \Rightarrow |\bar{z}| = \sqrt{3 + 4} = \sqrt{7}$$

LUYỆN TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Tính $z + z'$, $z - z'$, $z.z'$ với

$$1) z = 5 + 2i, z' = 4 + 3i$$

$$3) z = -4 - 7i, z' = 2 - 5i$$

Bài 2. Thực hiện các phép tính sau :

$$1) (1 - i)^2$$

$$3) (1 + i)^3 + 3i$$

Bài 3. Viết các số phức sau dạng đại số:

$$1) z = \frac{1}{(1 + i)(4 - 3i)}$$

$$3) z = \left(\frac{7 - 2i}{8 - 6i} \right)$$

$$5) z = \frac{1}{2 - 3i}$$

$$7) z = \frac{3 - 2i}{i}$$

$$9) z = \frac{4i}{1 - i}$$

$$11) z = \frac{(2 + i)(12i)}{2i} + \frac{(2i)(1 + 2i)}{2 + i}$$

Bài 4. Cho $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Hãy tính: $\frac{1}{z}$, $\bar{z}$, z^2 , $(\bar{z})^3$, $1 + z + z^2$.

Bài 5. Tính modun, tìm số phức liên hợp của mỗi số phức sau:

$$1) z = \frac{1}{2 + 3i}$$

$$3) z = \frac{4 - 3i}{2 - i}$$

$$5) z = (2 - i)(-3 + 2i)(5 - 4i)$$

$$7) z = \frac{2 + 3i}{(4 + i)(2 - 2i)}$$

$$9) z = \frac{3 + 7i}{2 + 3i} + \frac{5 - 8i}{2 - 3i}$$

$$11) z = \frac{(3 - 2i)(4 + 3i)}{1 - 2i} + 5 - 4i$$

$$13) z = \frac{(3 + 2i)(1 - 3i)}{1 + \sqrt{3}i} + (2 - i)$$

$$15) z = \frac{1}{2i} \left(i^7 - \frac{1}{i^7} \right)$$

$$2) z = 2 - 3i, z' = 6 + 4i$$

$$4) z = 1 + i\sqrt{3}, z' = -\sqrt{3} + 2i$$

$$2) (2 + 3i)^2$$

$$4) (1 + i)^{2010}$$

$$2) z = \frac{-5 + 6i}{4 + 3i}$$

$$4) z = \frac{3 - 4i}{4 - i}$$

$$6) z = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$8) z = \frac{2 + i}{5i}$$

$$10) z = \frac{1 + 2i}{12i} + \frac{12i}{1 + 2i}$$

$$2) z = \frac{4 + 5i}{i}$$

$$4) z = \frac{1 - 2i}{2 + i}$$

$$6) z = \frac{1}{(1 + 2i)(3 - i)}$$

$$8) z = \frac{5 + 5i}{3 - 4i} + \frac{20}{4 + 3i}$$

$$10) z = \frac{3 + 2i + (2 - i)(4 - 3i)}{2 + i}$$

$$12) z = \frac{(3 - 2i)^2(1 - i)}{1 + i}$$

$$14) z = \frac{(1 + 2i)^2 - (1 - i)^3}{(3 + 2i)^3 - (2 + i)^2}$$

$$16) z = \left(\frac{1 + i}{1 - i} \right)^{33} + (1 - i)^{10} + (2 + 3i)(2 - 3i) + \frac{1}{i}$$

17) $z = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^{20}$

18) $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^8 + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$

Bài 6. Cho các số phức $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -2 + 3i$, $z_3 = 1 - i$. Hãy tính và sau đó tìm phần thực, phần ảo, môđun, số phức đối và số phức liên hợp của mỗi số phức sau:

1) $z = z_1 + z_2 + z_3$

2) $z = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$

3) $z = z_1 z_2 z_3$

4) $z = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$

5) $z = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1}$

6) $z = \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_2^2 + z_3^2}$

Bài 7. Tính $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $|z_1 - 2z_2|$, $\overline{2z_1 + z_2}$, biết:

1) $z_1 = -5 + 6i$, $z_2 = 1 - 2i$

2) $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 4 - 3i$

3) $z_1 = -\frac{1}{2} + i$, $z_2 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}i$

Tài liệu bài giảng:

01. MỞ ĐẦU VỀ SỐ PHỨC – P2

Thầy Đặng Việt Hùng

5. CÁC PHÉP TOÁN VỀ SỐ PHỨC

5.1 Phép cộng, trừ hai số phức

♦ Cho hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$

Khi đó số phức $w = z + z'$ được tính bởi : $w = (a + a') + (b + b')i$

♦ Tương tự, số phức $u = z - z'$ được tính bởi : $u = (a - a') + (b - b')i$

⚡ **Chú ý:**

Phép cộng hai số phức có đầy đủ tính chất như phép cộng hai số thực là tính giao hoán, kết hợp.

♦ Tính chất kết hợp : $(z + z') + z'' = z + (z' + z'') \forall z, z', z'' \in \mathbb{C}$

♦ Tính chất giao hoán : $z + z' = z' + z \forall z, z' \in \mathbb{C}$

♦ Cộng với 0 : $z + 0 = 0 + z = z \forall z \in \mathbb{C}$

♦ Với mỗi số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), nếu kí hiệu số phức $-a - bi$ là $-z$ thì ta có

$$z + (-z) = (-z) + z = 0$$

Số $-z$ được gọi là số đối của số phức z

Ví dụ. *Thực hiện phép cộng, trừ các số phức sau*

1. $z = 2 + 3i$; $z' = 5 - 2i$

2. $z = -5 + 2i$; $z' = 3i$

3. $z = 2 - 3i$; $z' = 2 - i$

Hướng dẫn giải:

Áp dụng công thức $z + z' = (a + a') + (b + b')i$; $z - z' = (a - a') + (b - b')i$, ta có

1. $z + z' = (2 + 5) + (3 - 2)i = 7 + i$; $z - z' = (2 - 5) + (3 + 2)i = -3 + 5i$

2. $z + z' = -5 + (3 + 2)i = -5 + 5i$; $z - z' = -5 + (2 - 3)i = -5 - i$

3. $z + z' = (2 + 2) - (3 + 1)i = 4 - 4i$; $z - z' = (2 - 2) + (-3 + 1)i = -2i$

5.2 Phép nhân hai số phức

♦ Cho hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$

Khi đó số phức $w = z.z'$ được tính bằng công thức : $w = aa' - bb' + (ab' + a'b)i$

✍ **Nhận xét :**

Với mọi số thực k và mọi số phức $a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), ta có $k(a + bi) = (k + 0i)(a + bi) = ka + kbi$

$0z = 0$ với mọi số phức z

⚡ **Chú ý:** Phép nhân các số phức có đầy đủ tính chất như phép nhân các số thực

♦ Tính chất giao hoán : $z.z' = z'.z, \forall z, z' \in \mathbb{C}$

♦ Tính chất kết hợp : $(zz')z'' = z(z'z''), \forall z, z', z'' \in \mathbb{C}$

♦ Nhân với 1 : $1.z = z.1 = z, \forall z \in \mathbb{C}$

♦ Tính chất phân phối của phép nhân với phép cộng

$$z(z' + z'') = zz' + zz'', \forall z, z', z'' \in \mathbb{C}$$

Ví dụ. *Phân tích ra thừa số phức các biểu thức sau*

1. $a^2 + 1$

2. $2a^2 + 3$

3. $4a^2 + 9b^2$

4. $3a^2 + 5b^2$

Hướng dẫn giải:

Sử dụng $i^2 = -1$ ta được

1. $a^2 + 1 = a^2 - i^2 = (a - i)(a + i)$

2. $4a^2 + 9b^2 = 4a^2 - 9b^2i^2 = (2a - 3bi)(2a + 3bi)$

3. $2a^2 + 3 = 2a^2 - 3i^2 = (a\sqrt{2} - \sqrt{3}i)(a\sqrt{2} + \sqrt{3}i)$

4. $3a^2 + 5b^2 = 3a^2 - 5b^2i^2 = (\sqrt{3}a + \sqrt{5}bi)(\sqrt{3}a - \sqrt{5}bi)$

5.3 Phép chia cho số phức khác 0

♦ Số nghịch đảo của số phức z khác 0 là số $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}$

♦ Thương $\frac{z'}{z}$ của phép chia số phức z' cho số phức z khác 0 là tích của z' với số phức nghịch đảo của z , tức là

$$\frac{z'}{z} = z' z^{-1}$$

$$\text{Vậy } \frac{z'}{z} = \frac{z' \bar{z}}{|z|^2} = \frac{(a - bi)(a' + b'i)}{(a^2 + b^2)} \text{ với } z \neq 0$$

✍ Nhận xét :

• Với $z \neq 0$, ta có $\frac{1}{z} = 1 \cdot z^{-1} = z^{-1}$

• Thương $\frac{z'}{z}$ là số phức w sao cho $zw = z'$. Có thể nói phép chia cho số phức khác 0 là phép toán ngược của phép nhân

• *Thực chất của phép chia hai số phức là nhân cả tử số và mẫu số với biểu thức phức liên hợp của mẫu số.*

Ví dụ. *Thực hiện phép chia các số phức sau*

$$1. z = \frac{1}{(1+i)(4-3i)}$$

$$2. z = \frac{-5+6i}{4+3i}$$

$$3. z = \left(\frac{7-2i}{8-6i} \right)$$

$$4. z = \frac{3-4i}{4-i}$$

Hướng dẫn giải:

$$1. z = \frac{1}{(1+i)(4-3i)} = \frac{1}{7+i} = \frac{7-i}{(7+i)(7-i)} = \frac{7-i}{7^2-i^2} = \frac{7-i}{50} = \frac{7}{50} - \frac{1}{50}i$$

$$2. z = \frac{-5+6i}{4+3i} = \frac{(-5+6i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} = \frac{-2+39i}{4^2+3^2} = \frac{-2}{25} + \frac{39}{25}i$$

$$3. \text{ Tính } z' = \frac{7-2i}{8-6i} = \frac{(7-2i)(8+6i)}{(8-6i)(8+6i)} = \frac{68+26i}{8^2+6^2} = \frac{17}{25} + \frac{13}{50}i$$

$$\text{Vậy } z = \bar{z'} = \left(\frac{7-2i}{8-6i} \right) = \frac{17}{25} + \frac{13}{50}i = \frac{17}{25} - \frac{13}{50}i$$

✍ Nhận xét :

Ta cũng có thể giải câu này theo cách khác như sau (sử dụng tính chất của số phức):

$$z = \left(\frac{7-2i}{8-6i} \right) = \frac{7-2i}{8-6i} = \frac{7+2i}{8+6i} = \frac{(7+2i)(8-6i)}{8^2+6^2} = \frac{17}{25} - \frac{13}{50}i$$

$$4. z = \frac{3-4i}{4-i} = \frac{(3-4i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} = \frac{16-13i}{4^2+1} = \frac{16}{17} - \frac{13}{17}i$$

6. CÁC TÍNH CHẤT CỦA SỐ PHỨC

♦ Cho số phức $z = x + yi$, ba tính chất sau của số phức được xếp vào 1 nhóm:

Tính chất 1: Số phức z là số thực $\Leftrightarrow z = \bar{z}$

Chứng minh:

Ta có : $z = \bar{z} \Leftrightarrow x + yi = x - yi \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow z = x$. Vậy z là số thực.

Tính chất 2: Số phức z là số ảo $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$

Chứng minh:

Ta có : $z = -\bar{z} \Leftrightarrow x + yi = -x + yi \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow z = yi$. Vậy z là số ảo.

Tính chất 3: Cho số phức z có số phức liên hợp $\bar{z}$ và module là $|z|$. Khi đó: $z\bar{z} = |z|^2$

Chứng minh:
$$\begin{cases} \bar{z}z = (x + yi)(x - yi) = x^2 - y^2i^2 = x^2 + y^2 \\ |z|^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = x^2 + y^2 \end{cases} \longrightarrow \bar{z}z = |z|^2$$

♦ Cho 2 số phức $z_1 = x_1 + y_1i$; $z_2 = x_2 + y_2i$, ba tính chất tiếp theo được xếp vào nhóm liên hợp:

Tính chất 4: $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

Chứng minh:

$$\begin{cases} \overline{z_1 + z_2} = \overline{(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i} = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i \\ \overline{z_1 + z_2} = \overline{x_1 - y_1i + x_2 - y_2i} = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i \end{cases} \longrightarrow \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

Tính chất 5: $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

Chứng minh:

$$\begin{cases} \overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1 + y_1i)(x_2 + y_2i)} = \overline{(x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i} = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - (x_1 y_2 + x_2 y_1)i \\ \overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1 - y_1i)(x_2 - y_2i)} = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - (x_1 y_2 + x_2 y_1)i \end{cases} \longrightarrow \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

Tính chất 6: $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

Chứng minh:

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \overline{\left(\frac{x_1 + y_1i}{x_2 + y_2i}\right)} = \overline{\left(\frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) - (x_1 y_2 - x_2 y_1)i}{x_2^2 + y_2^2}\right)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} - \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2}i \\ \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} &= \frac{x_1 - y_1i}{x_2 - y_2i} = \frac{(x_1 - y_1i)(x_2 + y_2i)}{(x_2 - y_2i)(x_2 + y_2i)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2}i \end{aligned} \longrightarrow \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

✍ **Nhận xét :**

Ngoài cách chứng minh cổ điển trên thì ta có thể sử dụng ngay một “thành quả” đã chứng minh được là tính chất số 5.

Thật vậy, đặt $z = \frac{z_1}{z_2} \Rightarrow z_1 = z.z_2$

Theo tính chất 5 ta có: $\bar{z}_1 = \overline{z.z_2} = \bar{z}.\bar{z}_2 \Rightarrow \bar{z} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, hay $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

♦ Cho 2 số phức $z_1 = x_1 + y_1i$; $z_2 = x_2 + y_2i$, ba tính chất tiếp theo được xếp vào nhóm module:

Tính chất 7: $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$

Chứng minh:

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= |(x_1 + y_1i)(x_2 + y_2i)| = |(x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i| \\ \Rightarrow |z_1 z_2| &= \sqrt{(x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2} = \sqrt{(x_1 x_2)^2 + (x_1 y_2)^2 + (x_2 y_1)^2 + (y_1 y_2)^2}, (1) \end{aligned}$$

$$|z_1| |z_2| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{(x_1 x_2)^2 + (x_1 y_2)^2 + (x_2 y_1)^2 + (y_1 y_2)^2}, (2)$$

Từ (1) và (2) ta có (đpcm)

Tính chất 8: $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

Chứng minh:

$$\begin{aligned} \left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \left|\frac{x_1 + y_1i}{x_2 + y_2i}\right| = \left|\frac{(x_1 + y_1i)(x_2 - y_2i)}{(x_2 + y_2i)(x_2 - y_2i)}\right| = \left|\frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + (x_2 y_1 - x_1 y_2)i}{x_2^2 + y_2^2}\right| \\ \Rightarrow \left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \sqrt{\left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)^2 + \left(\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}{(x_2^2 + y_2^2)^2}} = \sqrt{\frac{x_1^2 + y_1^2}{x_2^2 + y_2^2}} \quad (1) \end{aligned}$$

✍ **Nhận xét :**

Tương tự như nhận xét đã nêu ở tính chất 6, ta đặt $z = \frac{z_1}{z_2} \Rightarrow z_1 = z.z_2$

Theo tính chất 7 ta có: $|z_1| = |z \cdot z_2| = |z| \cdot |z_2| \Rightarrow |z| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, hay $\frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

Tính chất 9: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Chứng minh:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| &\Leftrightarrow \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \\ &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} \\ &\Leftrightarrow (x_1x_2 + y_1y_1)^2 \leq (x_1x_2)^2 + (x_2y_1)^2 + (x_1y_2)^2 + (y_1y_2)^2 \\ &\Leftrightarrow (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Ví dụ 1. Thực hiện các phép tính sau :

$$\begin{aligned} 1. z &= \left(\frac{7-2i}{8-6i} \right) & 2. z &= |(1+i)(3-2i)| & 3. z &= \overline{(2+3i) + (1-i)} \\ 4. z &= \left| \frac{1+i}{1-i} \right| & 5. z &= \overline{(5+i)(2-3i)} \end{aligned}$$

Hướng dẫn giải:

$$\begin{aligned} 1. z &= \left(\frac{7-2i}{8-6i} \right) = \frac{7-2i}{8-6i} = \frac{7+2i}{8+6i} = \frac{(7+2i)(8-6i)}{8^2+6^2} = \frac{17}{25} - \frac{13}{50}i \\ 2. z &= |(1+i)(3-2i)| = |1+i| |3-2i| = \sqrt{1^2+1^2} \cdot \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{26} \\ 3. z &= \overline{(2+3i) + (1-i)} = \overline{2+3i+1-i} = \overline{3+2i} = 3-2i \\ 4. z &= \left| \frac{1+i}{1-i} \right| = \frac{|1+i|}{|1-i|} = \frac{\sqrt{1+1}}{\sqrt{1+1}} = 1 \\ 5. z &= \overline{(5+i)(2-3i)} = \overline{5+2i-3i-2} = \overline{3-i} = 3+i \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Tính module của các số phức sau

$$\begin{aligned} 1. z(1+2i) &= -1+3i & 2. \frac{z}{-1+3i} &= 3+2i \\ 3. \frac{z}{2+3i} - (1+2i) &= 5-6i & 4. \frac{2+i}{1-i} z &= \frac{-1+3i}{2+i} \end{aligned}$$

Hướng dẫn giải:

Áp dụng các lớp tính chất liên quan đến module ta có:

$$\begin{aligned} 1. z(1+2i) &= -1+3i \Rightarrow |z(1+2i)| = |-1+3i| \Leftrightarrow |z| \cdot |1+2i| = \sqrt{10} \Rightarrow |z| = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2} \\ 2. \frac{z}{-1+3i} &= 3+2i \Rightarrow \left| \frac{z}{-1+3i} \right| = |3+2i| \Leftrightarrow \frac{|z|}{|-1+3i|} = \sqrt{13} \Rightarrow |z| = \sqrt{13} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{130} \\ 3. \frac{z}{2+3i} - (1+2i) &= 5-6i \Leftrightarrow \frac{z}{2+3i} = 6-4i \Rightarrow \left| \frac{z}{2+3i} \right| = |6-4i| \Leftrightarrow \frac{|z|}{|2+3i|} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \Rightarrow |z| = 26 \\ 4. \frac{2+i}{1-i} z &= \frac{-1+3i}{2+i} \Rightarrow \left| \frac{2+i}{1-i} z \right| = \left| \frac{-1+3i}{2+i} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{2+i}{1-i} \right| \cdot |z| = \left| \frac{-1+3i}{2+i} \right| \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \cdot |z| = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} \Rightarrow |z| = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

Bài tập áp dụng:

Bài 1: Tính module và số phức liên hợp của mỗi số phức z sau :

$$\begin{aligned} 1. z &= (2-5i)(3+i) & 2. (1+i)z + 3 &= 2i-4z \\ 3. z &= \frac{1}{(3i+4)(2-i)} & 4. z &= \frac{3i-7}{10+i} \\ 5. z(2+3i) &= 4+5i & 6. (1+2i)z &= (-1+3i)(2+i) \\ 7. (1-3i)z + (4+3i) &= 7-5i & 8. z &= \frac{3+7i}{2+3i} + \frac{5-8i}{2-3i} \end{aligned}$$

9. $z = (1 + 2i)(2 - 4i)$

10. $z = \frac{3 - 4i}{2 - i}$

11. $z = \frac{7 + i}{2 - i}$

12. $z = (2 - i)(-3 + 2i)(5 - 4i)$

13. $z = \frac{5 + 5i}{3 - 4i} + \frac{20}{4 + 3i}$

14. $z = \frac{(3 - 2i)(4 + 3i)}{1 - 2i} + 5 - 4i$

15. $z = \frac{2 + 3i}{(4 + i)(2 - 2i)}$

Bài 2. Tìm số phức z biết

a) $\bar{z} = \frac{(\sqrt{2} - i)^3}{1 + \sqrt{2}i}$

b) $z \cdot \bar{z} + 3(z - \bar{z}) = 1 - 4i$

c) $z^{-1} = 1 - \sqrt{2}i$

Bài 3. Tính mô-đun của số phức z biết

a) $\frac{1 - i}{z} = \frac{(2 - 3i)\bar{z}}{|z|^2} + 2 - i$

b) Cho số phức $z_1 = 4 - 3i + (1 - i)^3$; $z_2 = \frac{1 + 2i - (1 - i)^3}{1 + i}$. Tính mô-đun của số phức $z = z_1 \cdot \bar{z}_2$

c) Cho số phức $z = \frac{(1 - \sqrt{3}i)^3}{1 - i}$. Tính mô-đun của số phức $\bar{z} + iz$.

Bài 4: Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = (-1 + \sqrt{3}i)^{2012} + (1 + \sqrt{3}i)^{2012}$

Bài 5: Cho số phức $z + 1 = i^{2013} + i^{2012}$. Tìm $|z|$ biết $z' = \bar{z} + i\bar{z}$

Bài 6. Tìm số phức z thỏa mãn các hệ thức sau:

a) $z^2 = 2\bar{z}$

b) $z^2 - |z|^2 + 1 = 0$

c) $z^2 + |z| = 0$

d) $\frac{(\bar{z})^2 + i}{z + 1} = i$

e) $\frac{z + \bar{z}}{1 + i} - \frac{i(z - \bar{z})}{2 - 2i} = 4 + 6i$

f) $(z + \bar{z})(1 + i) + (z - \bar{z})(2 + 3i) = 4 - i$

g) $z^2 + 2|z| = 0$

h) $z^2 + i|z| = 0$

i) $iz^2 + |z| + 1 = 0$

Bài 7. Tìm số phức z thỏa mãn các hệ thức sau:

a) $z^2 + \bar{z} = \frac{|z|^2 - 8}{z}$

b) $|z - 3i| = |1 - i\bar{z}|$ và $z - \frac{9}{z}$ là số thuần ảo.

c) $|z|^2 = (z + 1)(1 + i) + \frac{\bar{z} - 1}{1 - i}$

d) $|z - 1| = |z + 3|$ và $|z|^2 + z^2 = 2$

e) $\begin{cases} |z| = \sqrt{2} \\ |z + 2i\bar{z}| = \sqrt{2} \end{cases}$

f) $z^2 + z\bar{z} - 2 = 0$

g) $4\bar{z} + (1 + 3i)z = 25 + 21i$

h) $2z^2 + 4|z| - 5\bar{z} = \frac{35}{8}$

i) $|z|^4 = 2z^2(\bar{z} - 5)$

j) $\begin{cases} |z + 3| + |z - 3| = 10 \\ |2z + 3i| = \sqrt{109} \end{cases}$

Bài 8. Tìm số phức z thỏa mãn $(1 - 3i)z$ là số thực và $|\bar{z} - 2 + 5i| = 1$.

Tài liệu bài giảng:

02. CÁC DẠNG QUỸ TÍCH PHỨC – P1

Thầy Đặng Việt Hùng

I. CÁC DẠNG QUỸ TÍCH CƠ BẢN

a) Đường thẳng

Quỹ tích các điểm M biểu diễn số phức $z = x + yi$ là đường thẳng nếu như $M(x; y)$ có tọa độ thỏa mãn phương trình đường thẳng: $Ax + By + C = 0$.

b) Đường tròn

Quỹ tích các điểm M biểu diễn số phức $z = x + yi$ là đường tròn nếu như $M(x; y)$ có tọa độ thỏa mãn phương trình đường tròn $(C): (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, trong đó $I(a; b)$ là tâm đường tròn và R là bán kính đường tròn.

c) Đường Elip

Quỹ tích các điểm M biểu diễn số phức $z = x + yi$ là đường elip nếu như $M(x; y)$ có tọa độ thỏa mãn phương trình đường elip $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, trong đó a, b tương ứng là các bán trục lớn và bán trục nhỏ của elip.

⚡Chú ý:

- Điểm M thuộc Elip nhận A, B làm các tiêu điểm thì theo định nghĩa elip ta có $MA + MB = 2a$, và đồng thời $AB = 2c$, là độ dài tiêu cự của elip.
- Mối quan hệ giữa các đại lượng a, b, c của elip là $a^2 = b^2 + c^2$

II. CÁC VÍ DỤ ĐIỂN HÌNH

Ví dụ 1. Trên mặt phẳng phức, tìm tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện:

- Phần thực của z bằng hai lần phần ảo của nó.
- Phần thực của z thuộc đoạn $[-2; 1]$
- Phần thực của z thuộc đoạn $[-2; 1]$ và phần ảo của z thuộc đoạn $[1; 3]$.
- $|z| \leq 2$
- $2 \leq |z| \leq 3$
- $|z - 1 + 2i| \leq 2$
- $|2i - 2z| = |2z - 1|$

Hướng dẫn giải:

Gọi $z = x + yi$ và $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z .

a) Phần thực của z bằng hai lần phần ảo của z , tức là $x = 2y$, hay $x - 2y = 0$.

Vậy quỹ tích các điểm $M(z)$ là đường thẳng $d: x - 2y = 0$.

b) Phần thực của z thuộc đoạn $[-2; 1]$, tức là $-2 \leq x \leq 1$.

Vậy quỹ tích các điểm $M(z)$ là phần mặt phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $x = -2$ và $x = 1$

c) Phần thực của z thuộc đoạn $[-2; 1]$ và phần ảo của z thuộc đoạn $[1; 3]$, tức là $-2 \leq x \leq 1$ và $1 \leq y \leq 3$

Vậy quỹ tích các điểm $M(z)$ là miền trong của hình chữ nhật $ABCD$ giới hạn bởi bốn đường thẳng $x = -2; x = 1; y = 1$ và $y = 3$.

d) $|z| \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4$

Vậy quỹ tích các điểm $M(z)$ là miền trong của hình tròn tâm $I(0; 0)$, bán kính $R = 2$, (kể cả những điểm nằm trên đường tròn)

Cách giải khác:

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z

M_1 là điểm biểu diễn số phức $z_1 = 0 \Rightarrow M_1(0; 0)$

Theo bài toán tiền đề ta được $|z - z_1| = MM_1$, hay $|z| = MM_1$

Từ đó ta được $MM_1 \leq 2$, (1)

Do điểm M_1 cố định, nên từ (1) ta thấy quỹ tích M là miền trong của hình tròn tâm $M_1(0; 0)$, bán kính $R = 2$.

$$\text{e) } 2 \leq |z| \leq 3 \Leftrightarrow 2 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 3 \Leftrightarrow 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$$

Vậy quỹ tích các điểm $M(z)$ là hình vành khăn giới hạn bởi hai hình tròn đồng tâm $(C_1): x^2 + y^2 = 4$ và $(C_2): x^2 + y^2 = 9$

$$\text{f) } |z - 1 + 2i| \leq 2 \Leftrightarrow |(x-1) + (y+2)i| \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} \leq 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 \leq 4$$

Vậy quỹ tích các điểm $M(z)$ là miền trong của hình tròn tâm $I(1; -2)$, bán kính $R = 2$, (kể cả những điểm nằm trên đường tròn)

Cách giải khác:

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z

M_1 là điểm biểu diễn số phức $z_1 = 1 - 2i \Rightarrow M_1(1; -2)$

Theo bài toán tiền đề ta được $|z - z_1| = MM_1$, hay $|z - 1 + 2i| = MM_1$

Từ đó ta được $MM_1 \leq 2$, (2)

Do điểm M_1 cố định, nên từ (2) ta thấy quỹ tích M là miền trong của hình tròn tâm $M_1(1; -2)$, $R = 2$.

$$\text{g) } |2i - 2z| = |2z - 1|$$

Ta có $\bar{z} = x - yi$, từ đó ta được:

$$|2i - 2z| = |2z - 1| \Leftrightarrow |2i - 2(x - yi)| = |2(x + yi) - 1| \Leftrightarrow |-2x + (2y + 2)i| = |(2x - 1) + 2yi|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + 4(y+1)^2} = \sqrt{(2x-1)^2 + 4y^2} \Leftrightarrow 4x^2 + 4(y^2 + 2y + 1) = (4x^2 - 4x + 1) + 4y^2$$

$$\Leftrightarrow 4x + 8y + 3 = 0$$

Vậy quỹ tích các điểm $M(z)$ là đường thẳng $d: 4x + 8y + 3 = 0$

Ví dụ 2. Trên mặt phẳng phức, tìm tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện:

$$\text{a) } |z + \bar{z} + 3| = 4$$

$$\text{b) } |z - \bar{z} + 1 - i| = 2$$

$$\text{c) } |2 + z| = |i - z|$$

Hướng dẫn giải :

Giả sử số phức $z = x + yi$, có điểm biểu diễn là $M(x; y)$.

$$\text{a) } |z + \bar{z} + 3| = 4 \Leftrightarrow |(x + yi) + (x - yi) + 3| = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x+3)^2} = 4 \Leftrightarrow |x+3| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -5 \end{cases}$$

Vậy quỹ tích các điểm $M(z)$ là hai đường thẳng $x = -1$ và $x = -5$

$$\text{b) } |z - \bar{z} + 1 - i| = 2 \Leftrightarrow |(x + yi) - (x - yi) + 1 - i| = 2 \Leftrightarrow |1 + (2y - 1)i| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{1 + (2y - 1)^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow 1 + (2y - 1)^2 = 4 \Rightarrow |2y - 1| = \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Vậy quỹ tích các điểm $M(z)$ là hai đường thẳng $y = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$.

$$\text{c) } |2 + z| = |i - z| \Leftrightarrow |2 + (x + yi)| = |i - (x + yi)| \Leftrightarrow |(x + 2) + yi| = |-x + (1 - y)i|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (1-y)^2} \Leftrightarrow (x^2 + 4x + 4) + y^2 = x^2 + (y^2 - 2y + 1) \Leftrightarrow 4x + 2y + 3 = 0$$

Vậy quỹ tích các điểm $M(z)$ là đường thẳng $d: 4x + 2y + 3 = 0$

Ví dụ 3. Trên mặt phẳng phức, tìm tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện:

$$\text{a) } |z + \bar{z} + 1| = 3$$

$$\text{b) } |z - \bar{z} + 2 + i| = 2\sqrt{5}$$

$$\text{c) } |z + 3i| = |\bar{z} + 2 + i|$$

Ví dụ 4. Trên mặt phẳng phức, tìm tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện:

$$\text{a) } |z^2 + (\bar{z})^2| = 4$$

$$\text{b) } |2iz + i| = 2|z + 1 - i|$$

$$\text{c) } |2i - 2\bar{z}| = |2\bar{z} + 3|$$

Ví dụ 5. Trên mặt phẳng phức, tìm tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện:

a) $\frac{z^2}{z-i}$ là số thực

b) $\frac{z+i}{z+i}$ là số thực

c) $(z-2)(\bar{z}+i)$ là số thực

Ví dụ 6. Cho số phức z thỏa mãn hệ thức $|z+2i-1| = |\bar{z}+i|$. Tìm các điểm M biểu diễn số phức z sao cho MA ngắn nhất, với $A(1; 4)$.

Ví dụ 7. Cho số phức z thỏa mãn hệ thức $|2z+i| = |2\bar{z}-3i+1|$. Tìm các điểm M biểu diễn số phức z sao cho MA ngắn nhất, với $A\left(1; \frac{3}{4}\right)$.

Đ/s: $M\left(-1; -\frac{5}{4}\right)$.

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho số phức $z = a + bi$. Hỏi a, b phải thỏa mãn điều kiện gì để

a) Điểm biểu diễn chúng nằm trong dải giữa 2 đường thẳng $x = -2$ và $x = 2$

b) Điểm biểu diễn chúng nằm trong dải giữa 2 đường thẳng $y = -3i$ và $y = 3i$

c) Điểm biểu diễn chúng nằm trong hình tròn tâm O , bán kính 2

Bài 2. Tìm quỹ tích các điểm $M(z)$ biểu diễn số phức z thỏa mãn:

a) $1 \leq |z| \leq 2$ và phần ảo lớn hơn hoặc bằng $\frac{1}{2}$.

b) $|z+1| < 1$

c) $1 < |z-i| < 2$

d) $|2iz-1| = 2|z+3|$

Bài 3. Tìm quỹ tích các điểm $M(z)$ biểu diễn số phức z thỏa mãn:

a) $(2-z)(i+\bar{z})$ là số thực tùy ý, $(2-z)(i+\bar{z})$ là số ảo tùy ý.

b) $|z-(3-4i)| = 2$

c) $2|z-i| = |z-\bar{z}+2i|$

d) $|z^2 - (\bar{z})^2| = 4$

Bài 4. Tìm quỹ tích các điểm $M(z)$ biểu diễn số phức z thỏa mãn:

a) $|z-1+i| = 2$

b) $2|z-3i| = |z+\bar{z}-2i|$

c) $|z-1| + |z+1| = 4$

d) $|z-1-2i| + |z+3-2i| = 6$

Bài 5. Trên mặt phẳng tọa độ, tìm tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa điều kiện:

a) Phần thực của z bằng 2.

b) Phần ảo của z thuộc khoảng $(-1; 3)$.

c) Phần thực và phần ảo của z đều thuộc đoạn $[-2; 2]$.

Bài 6. Tìm quỹ tích các điểm $M(z)$ biểu diễn số phức z thỏa mãn:

a) $|z| \leq 3$

b) $1 < |z| \leq 3$

c) $|z| > 4$

d) $|z+i| < 1$

Tài liệu bài giảng:

02. CÁC DẠNG QUỸ TÍCH PHỨC – P2

Thầy Đặng Việt Hùng

III. MỘT SỐ DẠNG TOÁN NÂNG CAO VỀ QUỸ TÍCH PHỨC

Cho hai số phức z_1 và z_2 được biểu diễn bởi các điểm tương ứng là M_1 và M_2 . Khi đó $|z_1 - z_2| = M_1M_2$

Chứng minh:

Giả sử $z_1 = x_1 + y_1i$; $z_2 = x_2 + y_2i \longrightarrow M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$.

Từ đó ta được:

$$\text{Khi đó } \begin{cases} z_1 - z_2 = (x_1 + y_1i) - (x_2 + y_2i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i \\ \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ M_1M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \end{cases}$$

$$\longrightarrow |z_1 - z_2| = M_1M_2$$

Ví dụ 1. Tìm quỹ tích các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - 4i| + |z + 4i| = 10$, (1)

Hướng dẫn giải:

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z

A là điểm biểu diễn số phức $z_1 = 4i \Rightarrow A(0; 4)$

B là điểm biểu diễn số phức $z_2 = -4i \Rightarrow B(0; -4)$

Khi đó, (1) $\Leftrightarrow MA + MB = 10$, (2)

Hệ thức trên chứng tỏ quỹ tích các điểm $M(z)$ là elip nhận A, B làm các tiêu điểm.

Gọi phương trình của elip là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (b > a; b^2 = a^2 + c^2)$

Từ (2) ta có $2a = 10 \Rightarrow a = 5$.

$AB = 2c \Leftrightarrow 8 = 2c \Rightarrow c = 4$, từ đó $b^2 = a^2 + c^2 = 41$

Vậy quỹ tích $M(z)$ là Elip có phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{41} = 1$

Ví dụ 2. Xác định tập hợp các điểm M trên mặt phẳng phức biểu diễn các số phức $(1 + i\sqrt{3})z + 2$ trong đó $|z - 1| \leq 2$.

Hướng dẫn giải:

Đặt $w = (1 + i\sqrt{3})z + 2$ thì $z = \frac{w - 2}{1 + i\sqrt{3}}$.

Do đó theo giả thiết $|z - 1| \leq 2 \Leftrightarrow \left| \frac{w - 2}{1 + i\sqrt{3}} - 1 \right| \leq 2 \Leftrightarrow |w - (3 + i\sqrt{3})| \leq 2|1 + i\sqrt{3}| \Leftrightarrow |w - (3 + i\sqrt{3})| \leq 4$.

Vậy tập hợp cần tìm là hình tròn có tâm $I(3; \sqrt{3})$, bán kính $R = 4$ kể cả đường tròn biên.

Đó là hình tròn có phương trình $(x - 3)^2 + (y - \sqrt{3})^2 \leq 16$.

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình sau với ẩn là số phức z và λ là tham số thực khác 0:
$$\begin{cases} \frac{z - 4 - 2i}{z + 2} = \lambda i & (1) \\ \left| \frac{z - 2}{z + 2i} \right| = 1 & (2) \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

+ Gọi A, B theo thứ tự là các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức $4 + 2i, -2$. Khi đó tập hợp điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn (1) là đường tròn đường kính AB , trừ hai điểm A và B . Đường tròn

này có tâm E biểu diễn số phức $1 + i$ và bán kính $R = \frac{1}{2}|6 + 2i| = |3 + i| = \sqrt{10}$ nên có phương trình là

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 10 \quad (1')$$

+ Gọi C, D theo thứ tự là các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức $2, -2i$. Khi đó tập hợp điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn (2) là đường trung trực của đoạn thẳng CD . Đường trung trực này đi qua trung điểm $H(1; -1)$ của đoạn thẳng CD và nhận $\overrightarrow{CD}(-2; -2)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là $-2(x-1) - 2(y+1) = 0 \Leftrightarrow x + y = 0$ (2').

Suy ra giao điểm của đường tròn và đường trung trực là nghiệm của hệ đã cho. Đó là các điểm $(x; y)$ thỏa

$$\text{mãn (1')} \text{ và (2')}, \text{ tức là nghiệm của hệ phương trình sau } \begin{cases} x + y = 0 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ (x-1)^2 + (-x-1)^2 = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là $z = 2 - 2i$ và $z = -2 + 2i$.

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình sau với z là ẩn số

$$\begin{cases} |z - 1 - 4i| = 3 & (3) \\ \left| \frac{z + 3 + 2i}{z + \frac{3}{2} - i} \right| = 2 & (4) \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

+ Gọi E là điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn số phức $1 + 4i$. Khi đó tập hợp điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn (3) là đường tròn tâm E , bán kính $R = 3$.

Phương trình đường tròn này là $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 9$ (3')

+ Gọi A, B theo thứ tự là các điểm biểu diễn các số phức $-3 - 2i, -\frac{3}{2} + i$. Khi đó tập hợp điểm M biểu diễn số phức z

thỏa mãn (4) là đường tròn $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$ (4')

Suy ra nghiệm của hệ đã cho là giao điểm của hai đường tròn (3') và (4'), tức là các điểm $(x; y)$ thỏa

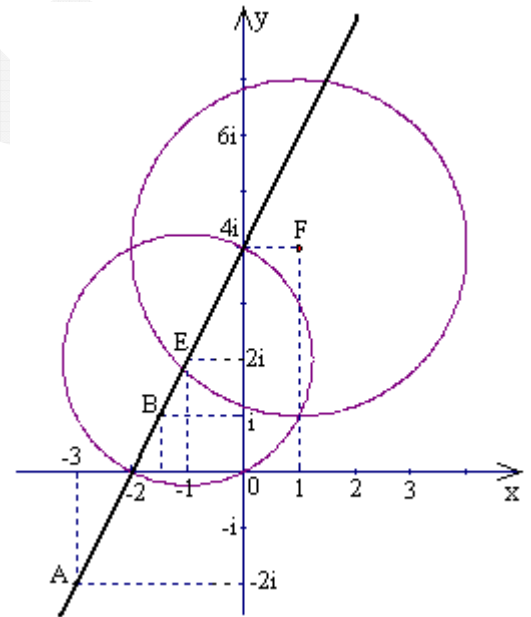
$$\text{mãn hệ phương trình sau } \begin{cases} (x-1)^2 + (y-4)^2 = 9 \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 8y + 8 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ x^2 + (2-x)^2 + 2x - 4(2-x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $z = 1 + i$ và $z = -2 + 4i$.



Ví dụ 5: Giải hệ bất phương trình sau với ẩn là số phức z : $\begin{cases} |z - 3 - i| \leq 2 & (5) \\ |2z - 9 - 2i| \geq 5 & (6) \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là tọa vị của điểm M bất kỳ trong mặt phẳng phức.

+ Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn (5) là hình tròn tâm

$A(3;1)$, bán kính $R = 2$ (kể cả biên).

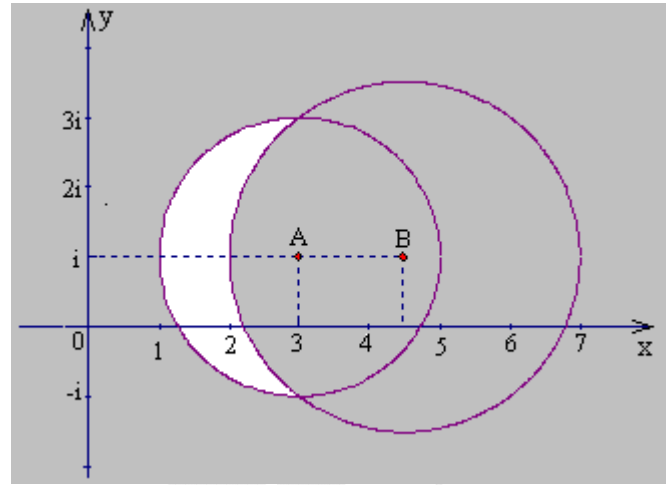
+ Ta có (6) $\Leftrightarrow \left| z - \frac{9}{2} - i \right| \geq \frac{5}{2}$

Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn (6) là phần của mặt phẳng nằm bên ngoài

hình tròn tâm $B\left(\frac{9}{2}; 1\right)$, bán kính $R = \frac{5}{2}$

(kể cả biên).

Vậy nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là giao của hai tập hợp trên. Đó là “hình trăng lưỡi liềm” không bị bôi đen trong hình vẽ.



Ví dụ 6: Giải hệ bất phương trình sau với ẩn là số phức z : $\begin{cases} \left| \frac{z + 3 - 2i}{z + 1} \right| \geq 1 & (7) \\ |z - 1 - 2i| \leq 2 & (8) \end{cases}$

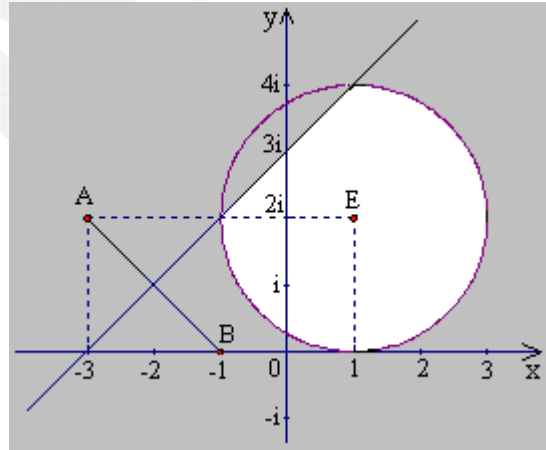
Hướng dẫn giải:

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là tọa vị của điểm M bất kỳ trong mặt phẳng phức.

+ Tập hợp các điểm M có tọa vị z thỏa mãn (7) là nửa mặt phẳng không chứa điểm A có bờ là đường trung trực của đoạn thẳng AB (kể cả đường trung trực), với $A(-3; 2)$ và $B(-1; 0)$.

+ Tập hợp các điểm M có tọa vị z thỏa mãn (8) là hình tròn tâm $E(1; 2)$, bán kính $R = 2$ (kể cả biên).

Vậy nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là giao của hai tập hợp trên. Đó là phần hình tròn kể cả biên không bị bôi đen trong hình vẽ.



Ví dụ 7: Trong các số phức z' thỏa mãn các hệ thức sau khi biết quỹ tích của số phức z tương ứng?

a) $z' = (1 + i)z + 2i$ biết $|z + \bar{z} + 1| = 2$

b) $z' = 3z + i\bar{z}$ biết $|z + 2i| = |\bar{z} - 3 + i|$

c) $z' = (2 + i)z + 1$ biết $|z + 1 - i|^2 = 4z\bar{z} + 1$

Ví dụ 8: Trong các số phức z' thỏa mãn các hệ thức sau khi biết quỹ tích của số phức z tương ứng?

a) $z' = (1 + i)z + 2i$ biết $|z + \bar{z} + 1| = 2$

b) $z' = 3z + i\bar{z}$ biết $|z + 2i| = |\bar{z} - 3 + i|$

c) $z' = (2 + i)z + 1$ biết $|z + 1 - i|^2 = 4z\bar{z} + 1$

Ví dụ 9: Trong các số phức z thỏa mãn các hệ thức sau, tìm số phức có module nhỏ nhất ?

a) $|z+1-i| = |\bar{z}+3i-2|$

b) $|z+2i| = |z+1+3i|$.

Ví dụ 10: Trong các số phức z thỏa mãn $|z-2+2i|=1$, tìm số phức z có mô-đun nhỏ nhất.

Ví dụ 11: Trong các số phức z thỏa mãn $|z-2-i|=\sqrt{52}$, tìm số phức z sao cho $|z-4+2i|$ đạt max, min?

Đ/s: $\begin{cases} \max = 3\sqrt{13} \Rightarrow M(-2;7) \\ \min = \sqrt{13} \Rightarrow M(6;-5) \end{cases}$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong các số phức z' thỏa mãn các hệ thức sau khi biết quỹ tích của số phức z tương ứng?

a) $z' = (1-i)z+1$ biết $|z-i|^2 \geq 3z\bar{z}-10$

b) $z' = 2z+i$ biết $|z+i| \leq 1$

c) $z' = (1-i\sqrt{3})z+1$ biết $|z+2i-1|^2 \geq 9z\bar{z}+3$

d) $z' = 2z+i-1$ biết $|z-3| = 2$

Bài 2. Trong các số phức z thỏa mãn các hệ thức sau, tìm số phức có module nhỏ nhất ?

a) $|z-2-4i| = |z-2i|$

Đ/s: $z = 2+2i$

b) $|z+1-5i| = |\bar{z}+3-i|$.

Đ/s: $z = \frac{2}{5} + \frac{6}{5}i$

c) $|z| = |\bar{z}-3+4i|$

Bài 3. Trong các số phức z thỏa mãn các hệ thức sau, tìm số phức có module nhỏ nhất và lớn nhất

a) $|z-2-4i| = \sqrt{5}$.

Đ/s: $\begin{cases} z = 1+2i \Rightarrow |z|_{\min} = \sqrt{5} \\ z = 3+6i \Rightarrow |z|_{\max} = 3\sqrt{5} \end{cases}$

b) $|z+1+2i| = 4\sqrt{5}$.

Đ/s: $\begin{cases} z = 1+2i \Rightarrow |z|_{\min} = \sqrt{5} \\ z = -3-6i \Rightarrow |z|_{\max} = 3\sqrt{5} \end{cases}$

c) $|z+3-\frac{3}{2}i| = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Đ/s: $\begin{cases} z = -2+i \Rightarrow |z|_{\min} = \sqrt{5} \\ z = -4+2i \Rightarrow |z|_{\max} = 2\sqrt{5} \end{cases}$

Bài 4. Trong các số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=\sqrt{10}$, tìm số phức z sao cho $|z+1-4i|$ max, min?

Đ/s: $\begin{cases} \max = 3\sqrt{10} \Rightarrow M(-2;7) \\ \min = \sqrt{10} \Rightarrow M(0;1) \end{cases}$

Bài 5. Trong các số phức z thỏa mãn $|z+i|=\sqrt{5}$, tìm số phức z sao cho $|z+4+3i|$ max, min?

Đ/s: $\begin{cases} \max = 3\sqrt{5} \Rightarrow M(2;0) \\ \min = \sqrt{5} \Rightarrow M(-2;-2) \end{cases}$

Tài liệu bài giảng:

03. PHƯƠNG TRÌNH PHỨC

Thầy Đặng Việt Hùng

I. CĂN BẬC HAI SỐ PHỨC

Cho số phức $z = a + bi$, số phức $w = x + yi$ được gọi là căn bậc hai của số phức z nếu $w^2 = z$ hay $(x + yi)^2 = a + bi$.

⚠️ Chú ý:

• Khi $b = 0$ thì $z = a$, ta có 2 trường hợp đơn giản sau :

+ TH1 : $a > 0 \Rightarrow \omega = \pm\sqrt{a}$

+ TH2 : $a < 0 \Rightarrow z = i^2 |a| \Rightarrow \omega = \pm i\sqrt{|a|}$

• Khi $b \neq 0$, để tìm căn bậc 2 của z ta giải hệ phương trình từ đồng nhất thức: $(x + yi)^2 = a + bi$

$$\text{hay } x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Ví dụ 1. Tìm các căn bậc hai của các số phức sau

a. $z = 5$

b. $z = -7$

c. $z = -1 - 2\sqrt{6}i$

Hướng dẫn giải:

a. $z = 5 \Rightarrow \omega = \pm\sqrt{5}$

b. $z = -7 = 7i^2 \Rightarrow \omega = \pm i\sqrt{7}$

c. Gọi $w = x + yi$ là căn bậc hai của số phức $z = -1 - 2\sqrt{6}i$, ta có

$$(x + yi)^2 = -1 - 2\sqrt{6}i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = -1 - 2\sqrt{6}i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -1 \\ 2xy = -2\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-\sqrt{6}}{x} \\ x^2 - \left(\frac{-\sqrt{6}}{x}\right)^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ y = \frac{-\sqrt{6}}{x} \end{cases}$$

Hệ phương trình trên có 2 nghiệm $(\sqrt{2}; -\sqrt{3}); (-\sqrt{2}; \sqrt{3})$

Vậy có 2 căn bậc hai của $-1 - 2\sqrt{6}i$ là $\sqrt{2} - \sqrt{3}i$ và $-\sqrt{2} + \sqrt{3}i$

Ví dụ 2. Tính căn bậc hai của các số phức sau :

a. $z = -1 + 4\sqrt{3}i$

b. $z = 4 + 6\sqrt{5}i$

c. $z = -18i$

d. $z = 4i$

e. $z = -5 - 12i$

f. $z = 11 + 4\sqrt{3}i$

g. $z = -40 + 42i$

h. $z = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

i. $z = -8 + 6i$

Ví dụ 3. Viết các số phức sau dưới dạng chính phương ?

a) $z = -21 + 20i = \dots\dots\dots$

b) $z = 1 + 4\sqrt{3}i = \dots\dots\dots$

c) $z = -15 + 8i = \dots\dots\dots$

d) $z = -1 - 2\sqrt{2}i = \dots\dots\dots$

e) $z = 5 - 12i = \dots\dots\dots$

f) $z = 13 + 8\sqrt{3}i = \dots\dots\dots$

g) $z = 22 - 10\sqrt{2}i = \dots\dots\dots$

II. PHƯƠNG TRÌNH PHỨC BẬC 2

Xét phương trình phức bậc 2 : $Az^2 + Bz + C = 0$ có $\Delta = B^2 - 4AC$.

• **TH1:** Các hệ số A, B, C là các số thực. Tính $\Delta = B^2 - 4AC$

+ Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có nghiệm thực $z = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}$

+ Nếu $\Delta < 0 \Rightarrow \Delta = -i^2 |\Delta| \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm i \sqrt{|\Delta|} \Rightarrow z = \frac{-B \pm i \sqrt{|\Delta|}}{2A}$

• **TH2:** Các hệ số A, B, C là các số phức.

Tính $\Delta = B^2 - 4AC = a + bi = (x + yi)^2$

Khi đó phương trình có nghiệm $z = \frac{-B \pm (x + yi)}{2A}$

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau trên tập hợp số phức

a. $z^2 + 2z + 5 = 0$

b. $z^2 - 4z + 20 = 0$

c. $(z^2 + i)(z^2 - 2iz - 1) = 0$

d. $z^2 + (1 - 3i)z - 2(1 + i) = 0$

Hướng dẫn giải:

a. $z^2 + 2z + 5 = 0$.

Ta có $\Delta' = -4 = 4i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm 2i \Rightarrow z = -1 \pm 2i$

b. Ta có $\Delta' = -16 = 16i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm 4i \Rightarrow z = 2 \pm 4i$

c. $(z^2 + i)(z^2 - 2iz - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = -i \\ z^2 - 2iz - 1 = 0 \end{cases}$

• TH₁: $z^2 + i = 0 \Leftrightarrow z^2 = -i = \frac{1}{2}(-2i) = \frac{1}{2}(1-i)^2 = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \\ z = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \end{cases}$

• TH₂: $z^2 - 2iz - 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 - 2iz + i^2 = 0 \Leftrightarrow (z-i)^2 = 0 \Leftrightarrow z = i$.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$; $z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$; $z_3 = i$.

Nhận xét:

Ngoài các cách giải chuẩn mực ở trên, chúng ta có thể giải tắt mà không cần tính toán Δ hay Δ' như sau

a. $z^2 + 2z + 5 = 0 \Leftrightarrow (z+1)^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (z+1)^2 - 4i^2 = 0 \Leftrightarrow (z+1)^2 = (2i)^2 \Rightarrow z = -1 \pm 2i$

b. $z^2 - 4z + 20 = 0 \Leftrightarrow (z-2)^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow (z-2)^2 = 16i^2 = (4i)^2 \Rightarrow z = 2 \pm 4i$

d. $z^2 + (1 - 3i)z - 2(1 + i) = 0$.

Ta có $\Delta = (1 - 3i)^2 + 8(1 + i) = 2i = (1 + i)^2$

Vậy các nghiệm của phương trình đã cho là $\begin{cases} z_1 = \frac{3i-1+1+i}{2} = 2i \\ z_2 = \frac{3i-1-1-i}{2} = i-1 \end{cases}$

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau trên tập hợp số phức

a) $\left(\frac{iz+3}{z-2i}\right)^2 - 3 \cdot \frac{iz+3}{z-2i} - 4 = 0$

b) $z^3 - 8 = 0$

c) $4z^4 - 3z^2 - 1 = 0$

Hướng dẫn giải:

a) $\left(\frac{iz+3}{z-2i}\right)^2 - 3 \cdot \frac{iz+3}{z-2i} - 4 = 0$

Đặt $\frac{iz+3}{z-2i} = t \Rightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 4 \end{cases}$

• Với $t = 4 \Leftrightarrow \frac{iz+3}{z-2i} = 4 \Leftrightarrow iz+3 = 4(z-2i) \Leftrightarrow z(i-4) = -3-8i \Rightarrow z = \frac{-3-8i}{i-4} = \frac{(-3-8i)(i+4)}{i^2-16} = \frac{-4-35i}{-17}$
 $\Rightarrow z = \frac{4}{17} + \frac{35}{17}i$

• Với $t = -1 \Leftrightarrow \frac{iz+3}{z-2i} = -1 \Leftrightarrow iz+3 = 2i-z \Leftrightarrow z(i+1) = 2i-3 \Rightarrow z = \frac{2i-3}{i+1} = \frac{(2i-3)(i-1)}{i^2-1} = \frac{1-5i}{-2}$
 $\Rightarrow z = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phức là $z_1 = \frac{4}{17} + \frac{35}{17}i$; $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$

b) $z^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow (z-2)(z^2 + 2z + 4) = 0$

• TH₁: $z-2 = 0 \Leftrightarrow z = 2$

• TH₂: $z^2 + 2z + 4 = 0 \Leftrightarrow (z+1)^2 = -3 = 3i^2 \Rightarrow z = -1 \pm i\sqrt{3}$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm phức là $z_1 = 2$; $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$; $z_3 = -1 + i\sqrt{3}$

c) $4z^4 - 3z^2 - 1 = 0$.

Đặt $z^2 = t$. Phương trình đã cho tương đương với $4t^2 - 3t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{1}{4} \end{cases}$

Giải phương trình tìm được $t = 1$ hoặc $t = -\frac{1}{4}$.

• Với $t = 1$ ta được $z^2 = 1 \Rightarrow z = \pm 1$

• Với $t = -\frac{1}{4} = \frac{i^2}{4} = 0 \Leftrightarrow z = \pm \frac{i}{2}$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm phức là $z = \pm 1$; $z = \pm \frac{i}{2}$.

Ví dụ 3. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm của các phương trình $z^2 + 2z + 5 = 0$. Tính giá trị các biểu thức sau

$A = |z_1|^2 + |z_2|^2$; $B = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 4|z_1||z_2|$

Hướng dẫn giải:

Ta có $z^2 + 2z + 5 = 0 \Leftrightarrow (z+1)^2 = -4 = (2i)^2 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = -1 + 2i \\ z_2 = -1 - 2i \end{cases}$

Khi ta có $\begin{cases} |z_1| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \\ |z_2| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \end{cases}$ và $\begin{cases} \overline{z_1} = -1 - 2i \\ \overline{z_2} = -1 + 2i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\overline{z_1}| = \sqrt{5} \\ |\overline{z_2}| = \sqrt{5} \end{cases}$

• $A = |z_1|^2 + |z_2|^2 = 5 + 5 = 10$

• $B = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 4|z_1||z_2| = 5 + 5 - 4 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = -10$

Vậy $A = 10$ và $B = -10$

Ví dụ 4. Giải các phương trình sau trên tập hợp số phức:

a) $z^2 + 2z + 5 = 0$

b) $z^2 - 4z + 20 = 0$

c) $-3z^2 + z - 5 = 0$

d) $4z^2 + 9 = 0$

e) $3z^2 - z + 2 = 0$

f) $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$

Ví dụ 5. Giải các phương trình sau trên tập hợp số phức:

a) $z^2 + 2(i-2)z + 3 - 2i = 0$

b) $z^2 - (i+3)z - 2 - 2i = 0$

c) $z^2 - (3+i)z + 4 + 3i = 0$

e) $iz^2 + 2iz - 4 = 0$

g) $3iz^2 - 2z - 4 + i = 0$

Ví dụ 6. Giải các phương trình sau trên tập hợp số phức:

a) $z^3 - 8 = 0$

c) $z^4 - z^3 + 6z^2 - 8z - 16 = 0$

e) $z^4 - 2z^2 - 8 = 0$

g) $z^4 - 6z^2 + 8 = 0$

Ví dụ 7. Giải các phương trình sau trên tập hợp số phức:

a) $(1+i)z^2 = -1 + 7i$

c) $(2 + 3i)z = z - 1$

e) $(z + 3 - i)^2 - 6(z + 3 - i) + 13 = 0$

g) $(z^2 + 1)^2 + (z + 3)^2 = 0$

i) $(z + 3i)(z^2 - 2z + 5) = 0$

Ví dụ 8. Giải các phương trình sau trên tập hợp số phức:

a) $z^4 + 16 = 0$

c) $(z^2 + 3z + 6)^2 + 2z(z^2 + 3z + 6) - 3z^2 = 0$

Ví dụ 9. Giải các phương trình sau:

a) $z^2 - 7z + 11 + 3i = 0$

Đ/s: a) $z = 5 - i; z = 2 + i$ b) $z = 1 + 2i; z = -3 + 2i$

c) $z^2 - 2(2 - i)z + 6 - 8i = 0$

Đ/s: c) $z = 3 + i; z = 1 - 3i$ d) $z = 1; z = 1 + i$

Ví dụ 10. Giải các phương trình sau (bậc ba):

a) $z^3 - (2 + i)z^2 + (2 + 2i)z - 2i = 0$ biết phương trình có một nghiệm là $z = i$.

Đ/s: $z = i; z = 1 \pm i$

b) $z^3 + 4z^2 + (4 + i)z + 3 + 3i = 0$ biết phương trình có một nghiệm là $z = -i$.

Đ/s: $z = -i; z = -1 + i; z = -3$

c) $z^3 - z^2 + (2 - 2i)z + 2 + 4i = 0$ biết phương trình có một nghiệm là $z = 1 - i$.

Đ/s: $z = 3 + i; z = 1 - 3i$ d) $z = 1; z = 1 + i$

Tài liệu bài giảng:

04. DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC

Thầy Đặng Việt Hùng

1. Khái niệm về dạng lượng giác của số phức

Cho số phức $z = a + bi$, số phức trên được gọi là dạng đại số của số phức

Số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ được gọi là dạng lượng giác của số phức

Trong đó:

r : là **module** của số phức

φ : là **argument** của số phức

2. Cách chuyển đổi một số phức từ dạng đại số sang lượng giác

Để chuyển số phức $z = a + bi$ sang dạng lượng giác $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ta phải tìm được module và argument của số phức.

Bằng việc đồng nhất biểu thức hai số phức ta có:

$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ a = r \cos \varphi \\ b = r \sin \varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos \varphi = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, (1) \\ \sin \varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, (2) \end{cases}$$

Hệ phương trình trên cho phép chúng ta thực hiện việc chuyển đổi dễ dàng từ đại số sang lượng giác.

⚡ **Chú ý:**

♦ Từ các hệ thức (1) và (2), kết hợp với kiến thức lượng giác về cung và góc lượng giác ta sẽ xác định được φ .

♦ Nhiều số phức cho dạng “na ná” lượng giác rất dễ làm chúng ta “lầm tưởng” đó chính là dạng lượng giác. Nhưng không, bằng việc chuyển đổi linh hoạt các công thức từ cos sang sin và ngược lại ta sẽ thu được dạng lượng giác “chính gốc”

♦ Trong các biểu thức cho phép xác định φ thì thường có hai giá trị φ chấp nhận được, tùy thuộc vào chiều quay mà ta chọn để lấy φ theo chiều dương hay chiều âm (ví dụ cặp giá trị $\varphi = -5\pi/6$ hoặc $\varphi = 7\pi/6$ đều chấp nhận được)

Ví dụ 1. Tính modun và argument của các số phức sau

a) $z = 1 + i$

b) $z = \sqrt{3} + i$

c) $z = \sqrt{3} - i$

d) $z = 1 + i\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải:

Áp dụng các công thức

$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos \varphi = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \text{ ta có} \\ \sin \varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

a) $z = 1 + i \Rightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

Đồng thời

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \varphi = \frac{b}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{b) } z = \sqrt{3} + i \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{3+1} = 2 \\ \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \varphi = \frac{1}{r} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \varphi = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\text{c) } z = \sqrt{3} - i \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{3+1} = 2 \\ \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \varphi = -\frac{1}{r} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \varphi = -\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\text{d) } z = 1 + i\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{1+3} = 2 \\ \cos \varphi = \frac{1}{r} = \frac{1}{2} \\ \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \varphi = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Ví dụ 2. Viết các số phức sau dạng lượng giác

a) $z = -\sqrt{6} - i\sqrt{2}$

b) $z = -2 + 2\sqrt{3}i$

c) $z = -1 - i\sqrt{3}$

d) $z = -5 - 5\sqrt{3}i$

Hướng dẫn giải:

$$\text{a) } z = -\sqrt{6} - i\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{6+2} = 2\sqrt{2} \\ \cos \varphi = \frac{-\sqrt{6}}{r} = \frac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} \\ \sin \varphi = \frac{-\sqrt{2}}{r} = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2\sqrt{2} \\ \cos \varphi = \frac{-\sqrt{6}}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin \varphi = \frac{-\sqrt{2}}{r} = \frac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 2\sqrt{2} \\ \varphi = \frac{7\pi}{6} \end{cases}$$

Từ đó $z = -\sqrt{6} - i\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right)$

$$\text{b) } z = -2 + 2\sqrt{3}i \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{4+12} = 4 \\ \cos \varphi = \frac{-2}{r} = \frac{-1}{2} \\ \sin \varphi = \frac{2\sqrt{3}}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 4 \\ \varphi = \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow z = 4 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$\text{c) } z = -1 - i\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{1+3} = 2 \\ \cos \varphi = \frac{-1}{r} = \frac{-1}{2} \\ \sin \varphi = \frac{-\sqrt{3}}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \varphi = \frac{4\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow z = 2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$$

$$\text{d) } z = -5 - 5\sqrt{3}i \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{25 + 75} = 10 \\ \cos \varphi = \frac{-5}{r} = \frac{-1}{2} \\ \sin \varphi = \frac{-5\sqrt{3}}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 10 \\ \varphi = \frac{4\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow z = 10 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$$

Ví dụ 3. Viết số phức sau dạng lượng giác: $z = \sin \varphi + 2i \sin^2 \frac{\varphi}{2}$

Hướng dẫn giải:

Biến đổi số phức đã cho ta được $z = \sin \varphi + 2i \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + 2i \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right)$

Do module của số phức luôn là số dương nên ta xét các trường hợp sau

TH1: $\sin \frac{\varphi}{2} > 0 \Rightarrow z = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right)$

TH2: $\sin \frac{\varphi}{2} < 0 \Rightarrow z = -2 \sin \frac{\varphi}{2} \left[\cos \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) \right]$

Ví dụ 4. Viết các số phức sau dạng lượng giác

1. $z = -\sqrt{3} - i$
3. $z = 1 - i\sqrt{3}$
5. $z = 2 - 2i$
7. $z = 8i$

2. $z = -1 + i\sqrt{3}$
4. $z = 5 - 5\sqrt{3}i$
6. $z = i$
8. $z = -4i$

3. Nhân và chia hai số phức dạng lượng giác

a) Nhân hai số phức dạng lượng giác

Cho hai số phức dạng lượng giác: $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ và $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$

Khi đó số phức $z = z_1 \cdot z_2$ được cho bởi công thức $z = z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$

Từ đó ta có số phức $z = z_1 \cdot z_2$ có module và argument thỏa mãn $r = r_1 \cdot r_2$ và $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$

Chứng minh:

Thật vậy ta có: $z = z_1 \cdot z_2 = [r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)] \cdot [r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)] =$

$r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) + i(\cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2)] = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$

Ví dụ 1. Viết các số phức sau dạng đại số

a) $z = \sqrt{2} (\cos 18^\circ + i \sin 18^\circ) (\cos 72^\circ + i \sin 72^\circ)$

b) $z = 3 (\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) (\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$

Hướng dẫn giải:

Áp dụng công thức $z = z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$ ta có

a) $z = \sqrt{2} (\cos 18^\circ + i \sin 18^\circ) (\cos 72^\circ + i \sin 72^\circ) = \sqrt{2} [\cos(18^\circ + 72^\circ) + i \sin(18^\circ + 72^\circ)]$
 $= \sqrt{2} (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) = i\sqrt{2} \Rightarrow z = i\sqrt{2}$

b) $z = 3 (\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) (\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ) = 3 [\cos(120^\circ + 15^\circ) + i \sin(120^\circ + 15^\circ)]$
 $= 3 (\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ) = 3 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) \Rightarrow z = -\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} i$

Ví dụ 2. Viết các số phức sau dạng lượng giác

a) $z = (1+i)(\sqrt{3}-i)$

b) $z = (\sqrt{2}+i\sqrt{6})(1-i\sqrt{3})$

Hướng dẫn giải:

♦ Với bài này chúng ta hoàn toàn có thể thực hiện phép nhân ngay rồi chuyển kết quả thành lượng giác, nhưng thường thì do argument của số phức khó tìm được kết quả đẹp nên chúng ta sẽ chuyển từng biểu thức sang lượng giác rồi thực hiện phép nhân sau.

♦ Với những dạng bài toán như thế này thì khi chuyển sang lượng giác chúng ta có thể thực hiện nhanh mà không phải trình bày rườm rà thao tác chuyển như thế nào (tức là phải pro về cách chuyển rồi đó).

a) Ta có: $1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$; $\sqrt{3}-i = 2 \left(\cos \frac{-\pi}{6} + i \sin \frac{-\pi}{6} \right)$

Khi đó $z = (1+i)(\sqrt{3}-i) = \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right] \cdot \left[2 \left(\cos \frac{-\pi}{6} + i \sin \frac{-\pi}{6} \right) \right] = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$

b) Ta có: $\sqrt{2}+i\sqrt{6} = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$; $1-i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{-\pi}{3} + i \sin \frac{-\pi}{3} \right)$

Khi đó $z = (\sqrt{2}+i\sqrt{6})(1-i\sqrt{3}) = \left[2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \right] \cdot \left[2 \left(\cos \frac{-\pi}{3} + i \sin \frac{-\pi}{3} \right) \right] = 2\sqrt{2} (\cos 0 + i \sin 0)$

b) Chia hai số phức dạng lượng giác

Cho hai số phức dạng lượng giác: $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ và $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$

Khi đó số phức $z = \frac{z_1}{z_2}$ được cho bởi công thức $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$

Từ đó ta có số phức $z = \frac{z_1}{z_2}$ có module và argument thỏa mãn $r = \frac{r_1}{r_2}$ và $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$

Chứng minh:

Thật vậy ta có $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{[r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)] [r_2 (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)]}{r_2^2}$

$$= \frac{r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)]}{r_2^2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

Ví dụ 1. Viết các số phức sau dạng đại số

a) $z = \frac{\cos 85^\circ + i \sin 85^\circ}{\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ}$ b) $z = \frac{\sqrt{2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)}{2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)}$

Hướng dẫn giải:

Áp dụng công thức $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$, ta được:

a) $z = \frac{\cos 85^\circ + i \sin 85^\circ}{\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ} = \cos(85^\circ - 40^\circ) + i \sin(85^\circ - 40^\circ) = \cos 45^\circ + i \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$

b) $z = \frac{\sqrt{2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)}{2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\cos \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right] = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i$

Ví dụ 2. Viết các số phức sau dạng lượng giác

a) $z = \frac{1-i}{2+2i}$ b) $z = \frac{-1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i}$

Hướng dẫn giải:

a) Ta có: $1-i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{-\pi}{4} + i \sin \frac{-\pi}{4} \right)$; $2+2i = 2(1+i) = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

Khi đó:

$$z = \frac{1-i}{2+2i} = \frac{\sqrt{2} \left(\cos \frac{-\pi}{4} + i \sin \frac{-\pi}{4} \right)}{2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{1}{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{-\pi}{2} + i \sin \frac{-\pi}{2} \right) = -\frac{1}{2}i$$

b) Ta có: $-1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$; $\sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$

Khi đó $z = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{\sqrt{3} + i} = \frac{2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)}{2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)} = \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow z = i$

Ví dụ 3. Viết các số phức sau dạng đại số

a) $z = 5 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \cdot 3 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

b) $z = \frac{\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)}{\sqrt{3}(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)}$

4. Công thức Moiver và ứng dụng dạng lượng giác của số phức

a) Công thức Moiver

Cho số phức $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, khi đó $z^n = [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n [\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)]$

Công thức $z^n = r^n [\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)]$ được gọi là **công thức Moiver**.

Ví dụ:

$$z = (1+i)^4 = \left(\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^4 = (\sqrt{2})^4 \left[\cos \left(4 \cdot \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(4 \cdot \frac{\pi}{4} \right) \right] = 4(\cos \pi + i \sin \pi) = -4$$

Bằng các phép tính toán đại số ta cũng dễ dàng thu được kết quả như trên!!!

b) Ứng dụng dạng lượng giác

♦ **Ứng dụng 1:** Tính toán các biểu thức số phức với lũy thừa lớn

Ví dụ 1. Tính module và viết các số phức liên hợp của mỗi số phức sau

a) $z = (-1 + i\sqrt{3})^6$

b) $z = \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^{100}$

Hướng dẫn giải:

a) Ta có: $-1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \Rightarrow z = (-1 + i\sqrt{3})^6 = \left[2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \right]^6$
 $= 2^6 \left(\cos \frac{12\pi}{3} + i \sin \frac{12\pi}{3} \right) = 2^6 (\cos 4\pi + i \sin 4\pi) = 2^6 \Rightarrow z = 64$

Từ đó ta có $|z| = 64$; $\bar{z} = 64$

b) Ta có: $1-i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{-\pi}{4} + i \sin \frac{-\pi}{4} \right)$

$$1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow \frac{1-i}{1+i} = \frac{\sqrt{2} \left(\cos \frac{-\pi}{4} + i \sin \frac{-\pi}{4} \right)}{\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)} = \cos \frac{-\pi}{2} + i \sin \frac{-\pi}{2} = -i$$

$$\Rightarrow z = \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^{100} = \left(\cos \frac{-\pi}{2} + i \sin \frac{-\pi}{2} \right)^{100} = \cos \frac{-100\pi}{2} + i \sin \frac{-100\pi}{2} = 1$$

Từ đó ta được $|z| = 1$; $\bar{z} = 1$

Ví dụ 2. Tính module của mỗi số phức sau

a) $z = \frac{(1+i\sqrt{3})^8 (\sqrt{3}-i)^6}{(1-i)^5}$

b) $z = \frac{(1+i)^6 (\sqrt{3}-\sqrt{3}i)^4}{(1-\sqrt{3}i)^5}$

Hướng dẫn giải:

a) Ta có:

♦ $1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow (1+i\sqrt{3})^8 = 2^8 \left(\cos\frac{8\pi}{3} + i\sin\frac{8\pi}{3}\right) = 2^8 \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

♦ $\sqrt{3}-i = 2\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right) \Rightarrow (\sqrt{3}-i)^6 = 2^6 \left(\cos\frac{-6\pi}{6} + i\sin\frac{-6\pi}{6}\right) = 2^6 [\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)]$

♦ $1-i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right) \Rightarrow (1-i)^5 = (\sqrt{2})^5 \left(\cos\frac{-5\pi}{4} + i\sin\frac{-5\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2} \left(\cos\frac{-5\pi}{4} + i\sin\frac{-5\pi}{4}\right)$

Từ đó ta có:

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1+i\sqrt{3})^8 (\sqrt{3}-i)^6}{(1-i)^5} = \frac{2^8 \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \cdot 2^6 [\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)]}{4\sqrt{2} \left(\cos\frac{-5\pi}{4} + i\sin\frac{-5\pi}{4}\right)} = \frac{2^{14} \cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}}{4\sqrt{2} \cos\frac{-5\pi}{4} + i\sin\frac{-5\pi}{4}} \\ &= \frac{2^{14} \left[\cos\left(\frac{-\pi}{3} + \frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3} + \frac{5\pi}{4}\right)\right]}{4\sqrt{2} \left[\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right]} \Rightarrow |z| = \frac{2^{14}}{4\sqrt{2}} \end{aligned}$$

b) Ta có:

♦ $1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow (1+i)^6 = (\sqrt{2})^6 \left(\cos\frac{6\pi}{4} + i\sin\frac{6\pi}{4}\right) = 8 \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

♦ $\sqrt{3}-\sqrt{3}i = \sqrt{3}(1-i) = \sqrt{6}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right) \Rightarrow (\sqrt{3}-\sqrt{3}i)^4 = (\sqrt{6})^4 \left(\cos\frac{-6\pi}{4} + i\sin\frac{-6\pi}{4}\right) = 36 \left(\cos\frac{-3\pi}{2} + i\sin\frac{-3\pi}{2}\right)$

♦ $1-\sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right) \Rightarrow (1-\sqrt{3}i)^5 = 2^5 \left(\cos\frac{-5\pi}{3} + i\sin\frac{-5\pi}{3}\right)$

Từ đó ta có:

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1+i)^6 (\sqrt{3}-\sqrt{3}i)^4}{(1-\sqrt{3}i)^5} = \frac{8 \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) \cdot 36 \left(\cos\frac{-3\pi}{2} + i\sin\frac{-3\pi}{2}\right)}{2^5 \left(\cos\frac{-5\pi}{3} + i\sin\frac{-5\pi}{3}\right)} = 9 \cdot \frac{\cos 0 + i\sin 0}{\cos\frac{-5\pi}{3} + i\sin\frac{-5\pi}{3}} \\ &= 9 \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) \Rightarrow |z| = 9 \end{aligned}$$

♦ **Ứng dụng 2:** Tìm căn bậc n của số phức

- Khái niệm căn bậc n:

Cho số phức z, một số phức w được gọi là căn bậc n của số phức z nếu $w^n = z$.

- Cách tìm căn bậc n của số phức z

Giải sử số phức z đã cho là $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, và số phức w là $w = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$

Khi đó điều kiện $w^n = z$ tương đương với:

$$[r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')]^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Leftrightarrow r'^n [\cos(n\varphi') + i\sin(n\varphi')] = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Từ đó ta suy ra
$$\begin{cases} r'^n = r \\ n\varphi' = \varphi + k2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r' = \sqrt[n]{r} \\ \varphi' = \frac{\varphi + k2\pi}{n} \end{cases}, \text{ với } k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Vậy các căn bậc n của số phức z là
$$w = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + k2\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + k2\pi}{n} \right), k = \overline{0, n-1}$$

Ví dụ. Tìm các căn bậc n theo yêu cầu

a) Căn bậc 3 của $z = \sqrt{3} - i$

b) Căn bậc 4 của $z = i$

Hướng dẫn giải:

a) Ta có $z = \sqrt{3} - i = 2 \left(\cos \frac{-\pi}{6} + i \sin \frac{-\pi}{6} \right)$

Gọi số phức $w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ là căn bậc 3 của z, khi đó $w^3 = z$.

Theo công thức tính căn bậc n của số phức ta có
$$w = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\frac{-\pi}{6} + k2\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{-\pi}{6} + k2\pi}{3} \right), k = \overline{0, 2}$$

Với $k = 0$ ta được $w_1 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{-\pi}{6} + i \sin \frac{-\pi}{6} \right) = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{-\pi}{18} + i \sin \frac{-\pi}{18} \right)$

Với $k = 1$ ta được $w_2 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\frac{-\pi}{6} + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{-\pi}{6} + 2\pi}{3} \right) = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{11\pi}{18} + i \sin \frac{11\pi}{18} \right)$

Với $k = 2$ ta được $w_3 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\frac{-\pi}{6} + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{-\pi}{6} + 4\pi}{3} \right) = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{23\pi}{18} + i \sin \frac{23\pi}{18} \right)$

Vậy số phức đã cho có ba căn bậc ba là w_1, w_2, w_3 như trên.

b) Ta có $z = i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$

Gọi số phức $w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ là căn bậc 4 của z, khi đó $w^4 = z$.

Theo công thức tính căn bậc n của số phức ta có:

$$w = \sqrt[4]{1} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + k2\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + k2\pi}{4} \right) = \cos \frac{\frac{\pi}{2} + k2\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + k2\pi}{4}, k = \overline{0, 3}$$

Với $k = 0$ ta được $w_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}$

Với $k = 1$ ta được $w_2 = \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{4} = \cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8}$

Với $k = 2$ ta được $w_3 = \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{4} = \cos \frac{9\pi}{8} + i \sin \frac{9\pi}{8}$

Với $k = 3$ ta được $w_4 = \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 6\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 6\pi}{4} = \cos \frac{13\pi}{8} + i \sin \frac{13\pi}{8}$

Vậy số phức đã cho có bốn căn bậc bốn là w_1, w_2, w_3, w_4 như trên.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Viết các số phức sau dạng đại số

a) $z = (1+i)^8 (1-i\sqrt{3})^6$

c) $z = \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) i^5 \cdot (1+\sqrt{3}i)^7$

b) $z = (2-2\sqrt{3}i)^{15}$

d) $z = \frac{(3\sqrt{3}-3i)^4 \cdot (1-i)}{(\sqrt{3}+i)^6}$

Bài 2. Viết các số phức sau dạng lượng giác

a) $z = (\sqrt{3}-i)^7 (1-i)^{10}$

b) $z = \frac{(1+i)^7}{(\sqrt{3}-i)^8}$

b) $z = (\sqrt{6}-i\sqrt{2})^8 (\sqrt{3}-i)^{10}$

d) $z = (1-i)^9 (1+i\sqrt{3})^8$

Bài 3. Viết các số phức sau dạng lượng giác

a) $z = (\sqrt{3}+i)^7 (1-i\sqrt{3})^{10} (1+i)^4$

c) $z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^{20}$

b) $z = \frac{(\sqrt{3}+i)^5}{(1-i\sqrt{3})^{11}}$

d) $z = \frac{(\sqrt{3}-i)^6 \cdot (3i)^7}{(1+i)^{10}}$

Bài 4. Tìm các căn bậc 3 của:

a) $z = 1$

c) $z = 1 - i$

b) $z = 1 + i$

d) $z = 1 + \sqrt{3}i$

Bài 5. Tìm các căn bậc 4 của:

a) $z = \sqrt{3} - i$

c) $z = 1 + i\sqrt{3}$

b) $z = 2 - 2i$

d) $z = -i$

Bài 6. Tính: $z^{2010} + \frac{1}{z^{2010}}$ biết $z + \frac{1}{z} = 1$