SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HÓA
CỤM CÁC TRƯỜNG THPT

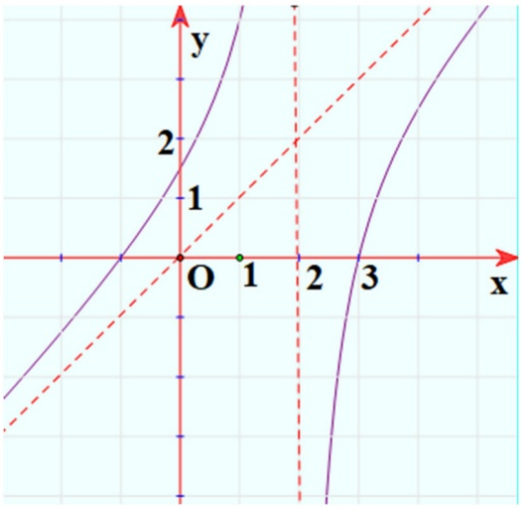
Mã đề 1101

ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HỌC SINH GIỎI LẦN 6 NĂM HỌC 2026 – 2027
MÔN: TOÁN
Thời gian làm bài: 90 phút
Ngày khảo sát: 05/11/2026
(Đề gồm 06 trang)

Họ tên thí sinh……; SBD……;.Chữ kí của CBCT:……

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{x^2-3x}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{x^2+3x}{x+1}$.

C. $y=\dfrac{x^2-2x-3}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-2x}{x-1}$.

Câu 2. Phương trình $\dfrac{\sin 2x}{\cos x+1}=0$ có tất cả các nghiệm là

A. $x=k\dfrac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$.

B. $x=k2\pi$; $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

C. $x=k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

D. $x=\pi+k2\pi$; $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$	

Kết luận nào sau đây đúng?

A. Hàm số có 3 điểm cực đại. **B.** Hàm số có 2 điểm cực trị.

C. Hàm số có 4 điểm cực trị. **D.** Hàm số có 2 điểm cực tiểu.

Câu 4. Một bác tài xế thống kê lại độ dài quãng đường (đơn vị: km) bác đã lái xe mỗi ngày trong một tháng ở bảng sau:

Độ dài quãng đường (km)	$[50;100)$	$[100;150)$	$[150;200)$	$[200;250)$	$[250;300)$
Số ngày	5	10	9	4	2

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm có giá trị gần nhất với giá trị nào dưới đây?

A. $50,34$. **B.** $45,23$. **C.** $56,14$. **D.** $55,68$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)=x-\ln x$. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{3};2\right]$ bằng $\dfrac{a}{b}+\ln c$ trong đó $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản, c là số nguyên. Tính giá trị biểu thức $T=a+b+c$.

A. 4. **B.** 3. **C.** -8. **D.** 7.

Câu 6. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2\left(x^2-5x+4\right)\le 2$ là

A. 6. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 7. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=3$ và $u_1-4u_2+6u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất. Số hạng thứ 20 là

A. $u_{20}=\dfrac{1}{387.420.489}$. **B.** $u_{20}=\dfrac{1}{387.421.498}$.

C. $u_{20}=387.420.489$. **D.** $u_{20}=387.421.498$.

Câu 8. Cho các véc tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ thỏa mãn các điều kiện $|\vec{a}|=10,\ |\vec{b}|=8,\ |\vec{c}|=5$ và $\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}$.

Tính $A=\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}$.

A. $A=25$. **B.** $A=-44,5$. **C.** $A=44,5$. **D.** $A=-25$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB,CD. Khi đó $\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}$ bằng

A. $\overrightarrow{SA}$. **B.** $\overrightarrow{AC}$. **C.** $\overrightarrow{SN}$. **D.** $\overrightarrow{SM}$.

Câu 10. Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-5x+1}{x-2}$. Tính **tan** của góc hợp bởi tiệm cận xiên và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số trên?

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{4}$.

Câu 11. Từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 5; 8 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ có bốn chữ số đôi một khác nhau và phải có mặt chữ số 3.

A. 108. **B.** 36. **C.** 228. **D.** 144.

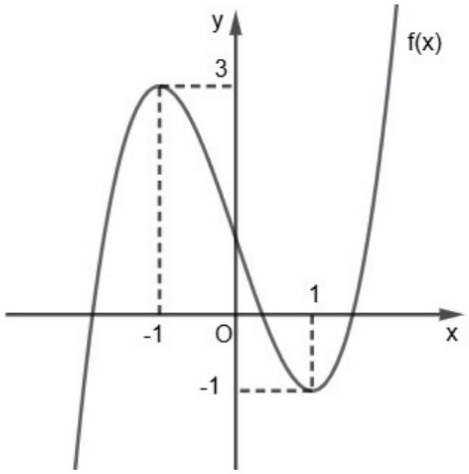
Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;2;-1),B(2;-1;3),C(-4;7;5)$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là

A. $\left(\dfrac{11}{3};-2;1\right)$. **B.** $(-2;11;1)$. **C.** $\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{11}{3};\dfrac{1}{3}\right)$. **D.** $\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{11}{3};1\right)$.

Câu 13. Cho hàm số $y=-\dfrac{1}{3}x^3+(m-1)x^2+(m+3)x+2026$ (với m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;3)$?

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

Câu 14. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq 0)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi $g(x)=f\left(x^2-2x+2\right)$ và d tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=g(x)$ tại điểm M có hoành độ bằng 2. Khi đó hệ số góc của d có giá trị bằng?



A. 6. **B.** 12.

C. 18. **D.** 24.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{ABC}=60°$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Gọi α là góc phẳng nhị diện $[S,BD,C]$. Biết rằng $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

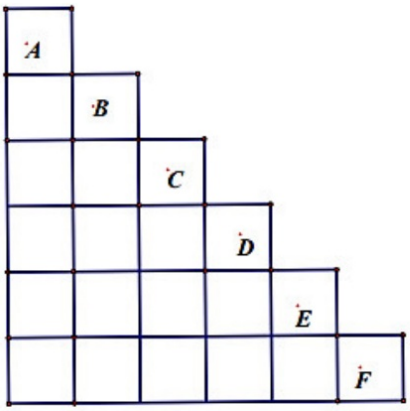
Câu 16. Một doanh nghiệp sản xuất xe đạp điện đang trong giai đoạn mở rộng thị trường. Số lượng xe sản xuất mỗi tháng là x (chiếc), với $x \in \mathbb{N}^*$ và $50 \le x \le 700$. Mỗi chiếc xe được bán với giá cố định là 15 triệu đồng, tổng chi phí sản xuất mỗi tháng là $C(x) = 150 \cdot e^{0,005x} + 400$ (triệu đồng). Để doanh nghiệp đạt lợi nhuận cao nhất trong mỗi tháng thì doanh nghiệp cần sản xuất và tiêu thụ bao nhiêu chiếc xe một tháng?

A. 500. **B.** 600. **C.** 599. **D.** 700.

Câu 17. Cho số nguyên dương n thỏa mãn: $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + C_{2n}^6 + \cdots\cdots + C_{2n}^{2n} = 512$. Tìm hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển nhị thức Newton $P(x) = 2\left(3 + x^2\right)\left(3 - 2x\right)^n$.

A. 1800. **B.** 3600. **C.** 240. **D.** 1320.

Câu 18. Từ tập $A = \{1;2;.....;50\}$ gồm 50 số tự nhiên liên tiếp, cần chọn ra 21 số phân biệt để gắn vào 21 ô vuông đơn vị như hình vẽ. Gọi T là số cách chọn số sao cho mọi số ở hàng trên luôn nhỏ hơn mọi số ở hàng dưới, mọi số bên trái luôn nhỏ hơn mọi số bên phải cùng hàng, đồng thời các số thuộc các ô A, B, C, D, E, F theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Tìm số dư khi chia T cho 1000? .



A. 152. **B.** 163.
C. 212. **D.** 150.

Câu 19. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $\widehat{BAD} = \widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 60^0; AA' = 1; AB.AD = 3$. Các điểm $M; N$ theo thứ tự thuộc đường thẳng $A'C$ và $C'D$ sao cho MN song song BD'. Khi độ dài đoạn thẳng MN đạt giá trị nhỏ nhất, tính giá trị biểu thức $2AB + 2AD$.

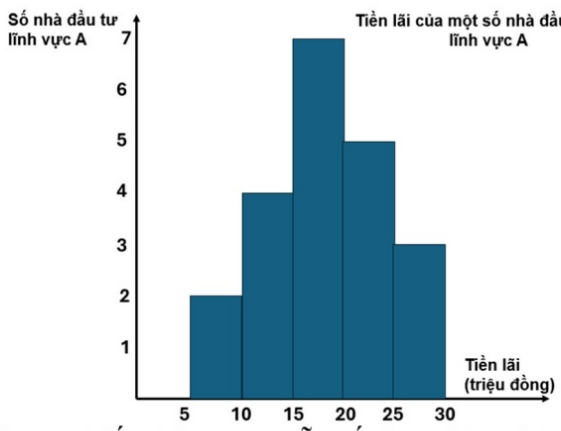
A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

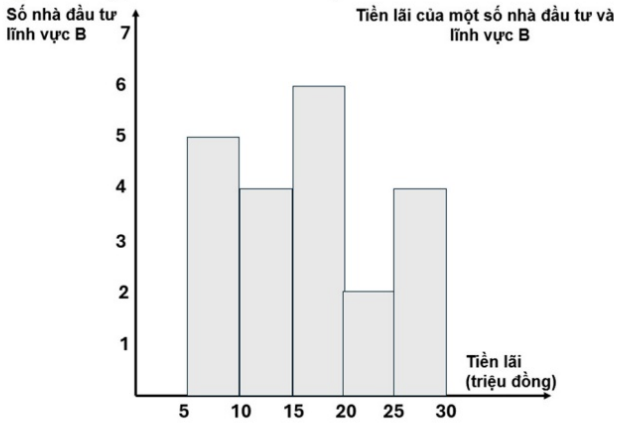
Câu 20. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thoả mãn $10\left(x^2 + y^2 - xy\right) + 32 \ge x^3 + y^3 + \sqrt{2^{x+y}}$?

A. 43. **B.** 45. **C.** 42. **D.** 46.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Trong mỗi ý **a), b), c), d)** ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Người ta ghi lại tiền lãi (đơn vị: triệu đồng) của một số nhà đầu tư khi đầu tư vào hai lĩnh vực A (nội thất) và B (dệt may) với cùng số tiền ban đầu, cho kết quả bằng biểu đồ dưới đây:





a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm ở cả hai lĩnh vực A và B đều bằng 25 triệu đồng.

b) Trung vị của mẫu số liệu tiền lãi trong lĩnh vực B bằng 16,25 triệu đồng.

c) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu lĩnh vực B lớn hơn khoảng tứ phân vị của lĩnh vực A.

d) Nếu gộp hai mẫu số liệu trên thành một mẫu số liệu ghép nhóm chung gồm 42 nhà đầu tư với các nhóm tiền lãi giữ nguyên như cũ, thì số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm mới này lớn hơn 17,5 triệu đồng.

Câu 2. Cho hai hàm số $f(x)=\log_2 x$ và $g(x)=2^x$.

a) Hàm số $u(x)=f(x)+g(x)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Phương trình $f\left(\dfrac{2^x-1}{|x|}\right)+g(x)=1+x$ có đúng hai nghiệm dương.

c) Hàm số $f\left(\left[g(x)-1\right]^2\right)$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

d) Phương trình $f(x+1)-f(x+2)+\dfrac{1}{(x+2)\ln 2}=m$ có 1 nghiệm duy nhất khi m không dương.

Câu 3. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+2m-1}{x-1}$ (với m là tham số thực). Gọi (C) là đồ thị của hàm số đã cho.

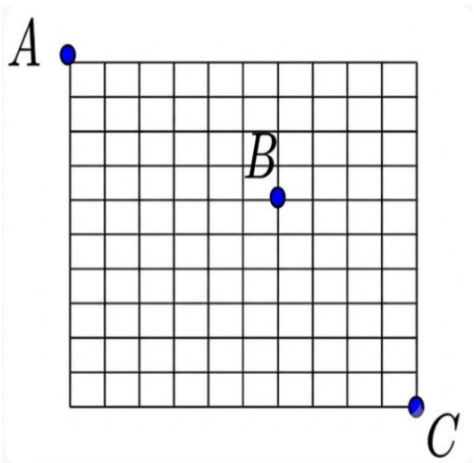
a) Khi $m=3$, giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị (C) là điểm $I(1;0)$.

b) Với mọi $m\neq 1$, đồ thị (C) luôn có đường tiệm cận xiên đi qua điểm cố định $A(2;1)$.

c) Có đúng 2 giá trị nguyên dương của m để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[2;3]$ bằng 3.

d) Với $m=3$, tiếp tuyến tại một điểm bất kỳ thuộc đồ thị (C) cùng với hai đường tiệm cận tạo thành một tam giác có diện tích không đổi và bằng 8.

Câu 4. Mạng lưới giao thông trong một thành phố được bố trí dạng lưới hình chữ nhật kích thước 10×10 như hình vẽ bên. Lần đầu đến thành phố, anh Trúc muốn đi từ điểm A đến điểm C. Biết rằng tại các điểm giao nhau, anh Trúc luôn chọn ngẫu nhiên một trong các hướng đi để quãng đường đi từ A đến C là ngắn nhất (không rẽ trái, không đi lùi lại).

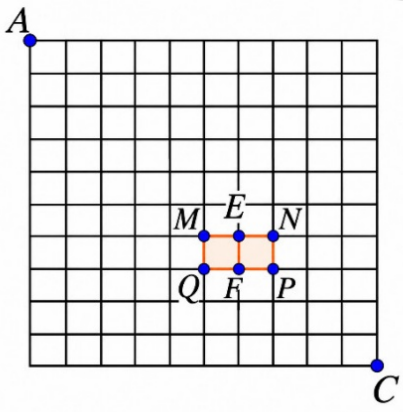


a) Số cách để Anh Trúc di chuyển từ A đến C là C_{20}^{10}.

b) Giả sử có một địa điểm B ở vị trí 6×4 như hình vẽ. Số cách anh Trúc đi từ A đến C mà phải đi qua B là C_{10}^{4}.

c) Xác suất anh Trúc đi từ A đến C nhưng không đi qua địa điểm B là khoảng $0,76$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

d) Giả sử người ta rào hình chữ nhật $MNPQ$ như hình vẽ để sửa đường. Biết rằng anh Trúc không được đi vào vùng bên trong hình chữ nhật $MNPQ$, nhưng có thể đi ở đường biên MN, NP, QP, MQ. Khi đó, xác suất anh Trúc đi từ A đến C nhưng không đi vào vùng sửa đường là khoảng $0,82$ (làm tròn đến hàng phần trăm).



Câu 5. Trong một khu bảo tồn sinh thái, ban quản lý thiết lập một hệ trục tọa độ không gian $Oxyz$ (đơn vị: km) để quản lý vùng hoạt động của các thiết bị bay không người lái (drone). Hiện tại có 3 trạm cố định được đặt tại: Trạm điều hành trung tâm $A(1;2;1)$, trạm quan trắc $B(2;-1;3)$ và trạm quan trắc $C(0;4;1)$.

a) Đội bay cần xác định một mốc tọa độ $D(a;b;c)$ trên không sao cho khu vực bay là tứ giác lồi $ABCD$ tạo thành một hình thang có đáy AD. Để đảm bảo độ phủ, diện tích vùng bay $ABCD$ phải gấp 4 lần diện tích vùng tam giác cơ sở ABC. Khi đó, tổng tọa độ $a+b+c$ của điểm D bằng 8.

b) Một drone khác được lập trình bay theo quỹ đạo hình tròn đi qua đúng 3 trạm A,B,C. Bán kính của quỹ đạo bay này là $R=2\sqrt{3}$ km.

c) Trên bức tường chắn nhiễu dọc theo mặt phẳng biên (Oxz), cần đặt một ăng-ten tại điểm I để nhận tín hiệu. Yêu cầu định vị I sao cho tổng xung lực tín hiệu (có trọng số) $P=\left|\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}\right|$ đạt mức nhỏ nhất. Độ dài đường cáp nối từ gốc tọa độ O đến ăng-ten I là $\frac{5\sqrt{5}}{6}$ km.

d) Trên một mặt phẳng biên khác (Oyz), một cảm biến $M(0;a;b)$ cần được lắp đặt. Vị trí M được chọn để hiệu suất chênh lệch MA^2-2MB^2 đạt giá trị lớn nhất. Khi đó hiệu số tọa độ $a-b=-9$.

Câu 6: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên bằng a, O là trọng tâm đáy ABC và diện tích mặt bên bằng $\frac{a^2}{4}$.

a) $S_{ABC}=\frac{2\sqrt{3}-3}{4}a^2$.

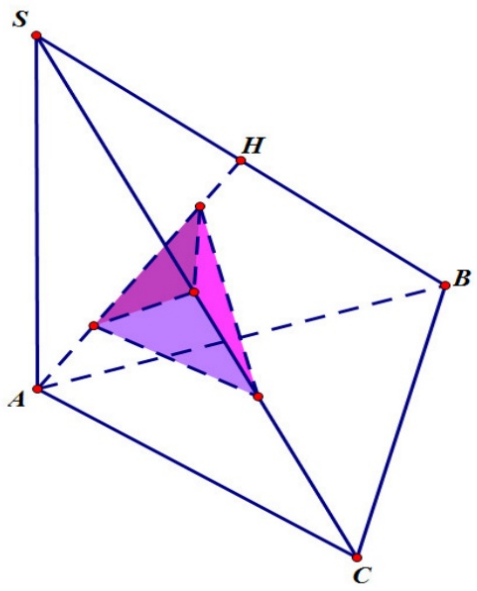
b) Đường thẳng Δ di động trong mặt phẳng (ABC) sao cho Δ đi qua O thì khoảng cách lớn nhất giữa đường thẳng Δ và đường thẳng SA bằng $\frac{\sqrt{3SA^2.AB^2-AB^4}}{3SA}$.

c) Với P là trung điểm của SA và 2 điểm E, F lần lượt thay đổi trên các cạnh SB và SC (E và F không trùng với các đỉnh của hình chóp). Giá trị nhỏ nhất của $AE+EF+FP$ bằng $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

d) Biết điểm M trong không gian sao cho $P=MB^2+MC^2+MS^2-MA^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $3\overrightarrow{SM}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}$.

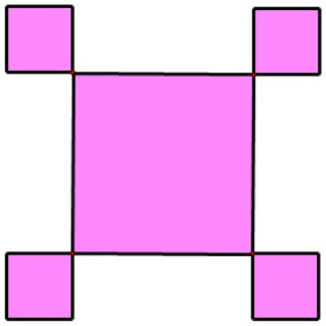
PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh làm từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$. Đáy ABC là tam giác cân tại B và cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy. Biết $AB=6$ cm, góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng 60°. Tính thể tích của khối tứ diện đều có hai cạnh đối lần lượt nằm trên hai đường thẳng chứa cạnh bên SC và đường cao AH của tam giác SAB (làm tròn đến hàng phần chục).



Câu 2. Trong không gian xét hệ tọa độ $Oxyz$ có một đơn vị dài trên các trục tương ứng với 10 mét trên thực tế. Một mục tiêu cần được bảo vệ có vị trí ở gốc tọa độ O. Người ta thiết lập một vành đai bảo vệ quanh mục tiêu theo một đường tròn tâm O có bán kính bằng 6 đơn vị (tương ứng 60 mét trên thực tế) nằm trong mặt phẳng Oxy. Một máy bay không người lái (được coi như một hạt) bay theo một đường thẳng, xuất phát từ vị trí $M(2;11;3)$ hướng đến vị trí $N\left(4;\frac{19}{2};3\right)$. Tại mỗi vị trí của máy bay, khoảng cách từ máy bay đến vành đai bảo vệ là độ dài ngắn nhất của các đoạn thẳng nối từ vị trí đó đến một điểm bất kỳ trên vành đai. Trong suốt quá trình bay từ M tới N, hãy tính khoảng cách ngắn nhất theo mét từ máy bay tới vành đai bảo vệ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

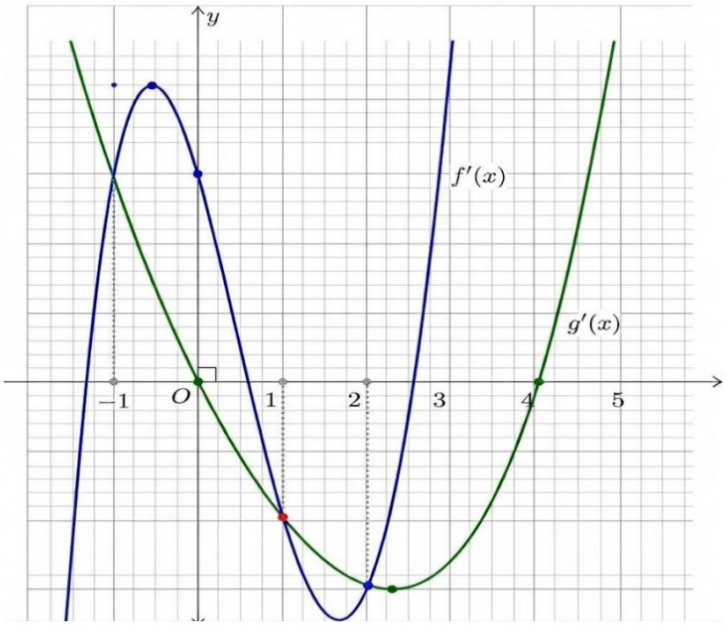
Câu 3. Cho tập X={1;2;3.;…;12;13}. Chọn ngẫu nhiên 5 số phân biệt từ tập X rồi đặt 1 số vào ô vuông lớn ở chính giữa, đặt 4 số còn lại vào 4 ô vuông nhỏ xung quanh (4 ô vuông nhỏ không phân biệt vị trí). Gọi P là xác suất để tổng các số tự nhiên trên hai ô vuông nhỏ bất kì luôn nhỏ hơn số ở ô vuông lớn chính giữa đồng thời số ở ô vuông lớn chia hết cho 6 và tổng cả bốn số trên bốn ô vuông nhỏ luôn là một số chia hết cho 3. Tính giá trị của 6435P.



Câu 4. Cho bất phương trình: $\log_4 \dfrac{-2x^3+2x^2+2m-2}{4x^2-4x+2}+2x-2+m \geq x^3+x^2 \ (1)$

Tìm tất cả giá trị nguyên và nhỏ hơn 2027 của tham số m để bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi số thực $x \in [1;2]$?

Câu 5. Cho các hàm số $f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$ và $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(m,n,p,q,r,a,b,c,d \in \mathbb{R}, m>0)$ thỏa mãn $f(0)=g(0)$. Các hàm số $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới.



Tính tổng tất cả nghiệm của phương trình $f(x)=g(x)$ *(làm tròn đến hàng phần chục).*

Câu 6. Ông An bắt đầu kế hoạch tích lũy quỹ hưu trí từ năm 30 tuổi. Vào đầu mỗi năm, ông gửi vào ngân hàng một khoản tiền là M (triệu đồng) với lãi suất cố định $r=6\%$/năm, lãi nhập gốc vào cuối năm.

1. Giai đoạn tích lũy (30 năm): Ông An liên tục gửi tiền đầu mỗi năm từ năm 30 tuổi đến hết năm 59 tuổi (tổng cộng gửi 30 lần).

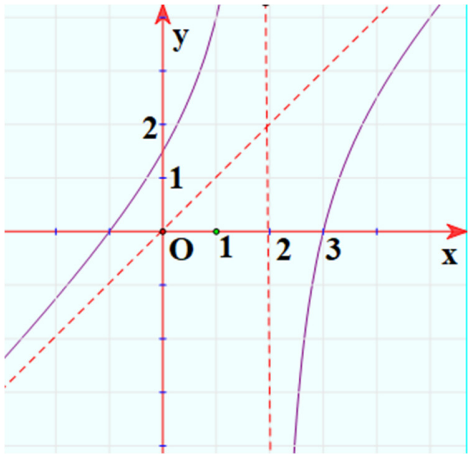
2. Giai đoạn nghỉ hưu: Bắt đầu từ năm 60 tuổi (ngay sau khi hoàn thành 30 năm tích lũy), ông An không gửi thêm tiền nữa. Tuy nhiên, để bù đắp lạm phát và chi tiêu, vào đầu mỗi năm (bắt đầu từ năm 60 tuổi), ông rút ra một khoản tiền để sinh hoạt. Năm 60 tuổi ông rút 200 triệu đồng; các năm tiếp theo, số tiền rút ra đầu mỗi năm tăng thêm 4% so với năm trước đó. Số tiền còn lại trong ngân hàng vẫn tiếp tục sinh lời với lãi suất 6%/năm.

Giả sử ông An muốn quỹ hưu trí của mình duy trì việc rút tiền như trên trong đúng 25 năm (tức rút lần cuối vào đầu năm 84 tuổi) sao cho ngay sau lần rút thứ 25 này, tài khoản vừa hết sạch tiền. Hãy tính số tiền M mà ông An cần gửi hàng năm ở giai đoạn tích lũy (làm tròn đến hàng đơn vị triệu đồng).

----------**Hết**----------

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{x^2-3x}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{x^2+3x}{x+1}$.

C. $y=\dfrac{x^2-2x-3}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-2x}{x-1}$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy:

+) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2$ nên ta loại phương án B, D.

+) Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x}{x-2}$ đi qua gốc tọa độ nên ta loại phương án A.

Vậy đồ thị đã cho là đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2x-3}{x-2}$.

Câu 2. Phương trình $\dfrac{\sin 2x}{\cos x+1}=0$ có tất cả các nghiệm là

A. $x=k\dfrac{\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$. **B.** $x=k2\pi\ ;\ x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

C. $x=k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$. **D.** $x=\pi+k2\pi\ ;\ x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$	

Kết luận nào sau đây đúng?

A. Hàm số có 3 điểm cực đại. **B.** Hàm số có 2 điểm cực trị.

C. Hàm số có 4 điểm cực trị. **D.** Hàm số có 2 điểm cực tiểu.

Câu 4. Một bác tài xế thống kê lại độ dài quãng đường (đơn vị: km) bác đã lái xe mỗi ngày trong một tháng ở bảng sau:

Độ dài quãng đường (km)	$[50;100)$	$[100;150)$	$[150;200)$	$[200;250)$	$[250;300)$
Số ngày	5	10	9	4	2

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm có giá trị gần nhất với giá trị nào dưới đây?

A. $50,34$. **B.** $45,23$. **C.** $56,14$. **D.** $55,68$.

Lời giải

Chọn D

Cỡ mẫu $n=30$

Giá trị đại diện	75	125	175	225	275
Số ngày	5	10	9	4	2

Số trung bình: $\bar{x}=\dfrac{5.75+10.125+9.175+4.225+2.275}{30}=155$

Độ lệch chuẩn: $s=\sqrt{\dfrac{5.75^2+10.125^2+9.175^2+4.225^2+2.275^2}{30}-155^2}=\sqrt{3100}\approx 55,68$

Câu 5. Cho hàm số $f(x)=x-\ln x$. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $\left[\frac{1}{3};2\right]$ bằng $\frac{a}{b}+\ln c$ trong đó $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, c là số nguyên. Tính giá trị biểu thức $T=a+b+c$.

A. 4. **B.** 3. **C.** -8. **D.** 7.

Lời giải

Tập xác định của hàm số là: $D=(0;+\infty)$. Do đó hàm số xác định và liên tục trên đoạn $\left[\frac{1}{3};2\right]$.

Đạo hàm $f'(x)=1-\frac{1}{x}$.

Ta có $f'(x)=0\Rightarrow 1-\frac{1}{x}=0\Leftrightarrow x=1\in\left[\frac{1}{3};2\right]$

Ta có $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}+\ln 3; f(1)=1; f(2)=2-\ln 2$.

Suy ra $\underset{\left[\frac{1}{3};2\right]}{Max} f(x)=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}+\ln 3$.

Khi đó $a=1;b=3;c=3\Rightarrow T=a+b+c=1+3+3=7$.

Câu 6. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2\left(x^2-5x+4\right)\le 2$ là

A. 6. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Đáp án: D

Ta có $\log_2\left(x^2-5x+4\right)\le 2\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-5x+4>0\\x^2-5x+4\le 4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<1,x>4\\0\le x\le 5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}0\le x<1\\4<x\le 5\end{bmatrix}$.

Vậy bất phương trình đã cho có 2 nghiệm nguyên là $x=0$ và $x=5$.

Suy ra đáp án đúng là D

Câu 7. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=3$ và $u_1-4u_2+6u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất. Số hạng thứ 20 là

A. $u_{20}=\frac{1}{387.420.489}$. **B.** $u_{20}=\frac{1}{387.421.498}$.

C. $u_{20}=387.420.489$. **D.** $u_{20}=387.421.498$.

Lời giải

Gọi q là công bội của cấp số nhân.

Ta có: $u_1-4u_2+6u_3=u_1-4u_1q+6u_1q^2=3-4.3q+6.3q^2=18q^2-12q+3=2(3q-1)^2+1\ge 1$

$u_1-4u_2+6u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất là 1 khi $q=\frac{1}{3}$.

Vậy $u_{20}=u_1q^{19}=3.\left(\frac{1}{3}\right)^{19}=\frac{1}{3^{18}}=\frac{1}{387.420.489}$.

Câu 8. Cho các véc tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ thỏa mãn các điều kiện $|\vec{a}|=10$, $|\vec{b}|=8$, $|\vec{c}|=5$ và $\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}$.

Tính $A=\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}$.

A. $A=25$. **B.** $A=-44,5$. **C.** $A=44,5$. **D.** $A=-25$.

Lời giải

Ta có: $\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a}+\vec{b}=-3\vec{c}\Rightarrow\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=9\vec{c}^2\Leftrightarrow\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}.\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2=9\left|\vec{c}\right|^2$

$\Leftrightarrow 100+2\vec{a}.\vec{b}+64=9.25\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=\dfrac{61}{2}$.

Mặt khác: $\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}\Leftrightarrow\left(\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}\right)^2=0\Leftrightarrow\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+9\left|\vec{c}\right|^2+2\vec{a}.\vec{b}+6\vec{a}.\vec{c}+6\vec{b}.\vec{c}=0$

$\Leftrightarrow 100+64+9.25+2.\dfrac{61}{2}+6\vec{b}.\vec{c}+6\vec{a}.\vec{c}=0\Leftrightarrow\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}=-75$.

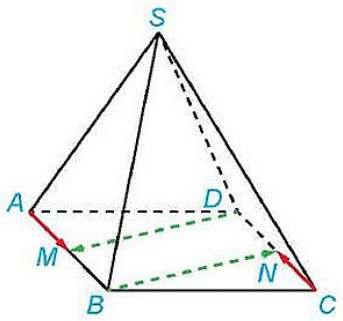
Vậy $A=\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}=\dfrac{61}{2}-75=-\dfrac{89}{2}=-44,5$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB,CD. Khi đó $\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}$ bằng

A. $\overrightarrow{SA}$. **B.** $\overrightarrow{AC}$. **C.** $\overrightarrow{SN}$. **D.** $\overrightarrow{SM}$.

Lời giải

Chọn A



Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $AB=CD$ và $AB//CD$ suy ra $AM=CN$ và $AM//CN$ suy ra $\overrightarrow{CN}=-\overrightarrow{AM}$.

$\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{CN}-\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{SN}-\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{SN}+\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{SA}$.

Câu 10. Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-5x+1}{x-2}$. Tính **tan** của góc hợp bởi tiệm cận xiên và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số trên?

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{4}$.

Lời giải

$y=\dfrac{2x^2-5x+1}{x-2}=2x-1-\dfrac{1}{x-2}$

$\lim\limits_{x\to 2^+}y=+\infty;\lim\limits_{x\to 2^-}y=-\infty$. Suy ra đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng $\left(d_1\right)$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[y-\left(2x-1\right)\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-1}{x-2}=0$. Suy ra đường thẳng $y=2x-1$ là tiệm cận xiên $\left(d_2\right)$

Câu 11. Từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 5; 8 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ có bốn chữ số đôi một khác nhau và phải có mặt chữ số 3.

A. 108. **B.** 36. **C.** 228. **D.** 144.

Lời giải

Số các số lẻ có 4 chữ số đôi một khác nhau: Chữ số hàng đơn vị có 3 cách chọn, chữ số hàng nghìn có 4 cách chọn, chữ số hang trăm có 4 cách chọn, chữ số hang chục có 3 cách chọn.

Do đó có: $3.4.4.3=144$ số.

Tương tự số các số lẻ có 4 chữ số đôi một khác nhau không có chữ số 3 là: $2.3.3.2=36$ số.

Vậy có: $144-36=108$ số.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;2;-1), B(2;-1;3), C(-4;7;5)$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là

A. $\left(\frac{11}{3};-2;1\right)$. **B.** $(-2;11;1)$. **C.** $\left(\frac{2}{3};\frac{11}{3};\frac{1}{3}\right)$. **D.** $\left(-\frac{2}{3};\frac{11}{3};1\right)$.

Lời giải

Gọi D là chân đường phân giác trong của tam giác ABC. Khi đó: $\frac{AD}{DC}=\frac{BA}{BC}\Rightarrow \overrightarrow{AD}=\frac{BA}{BC}.\overrightarrow{DC}$.

Ta có: $BA=\sqrt{1+9+16}=\sqrt{26}; BC=\sqrt{36+64+4}=2\sqrt{26}\Rightarrow \frac{BA}{BC}=\frac{1}{2}$

Suy ra

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D-x_A=\frac{1}{2}(x_C-x_D)\\ y_D-y_A=\frac{1}{2}(y_C-y_D)\\ z_D-z_A=\frac{1}{2}(z_C-z_D)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=\frac{1}{3}(x_C+2x_A)=-\frac{2}{3}\\ y_D=\frac{11}{3}\\ z_D=\frac{3}{3}=1\end{cases}\Rightarrow D\left(-\frac{2}{3};\frac{11}{3};1\right).$$

Câu 13. Cho hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3+(m-1)x^2+(m+3)x+2026$ (với m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;3)$?

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

Lời giải

Chọn B.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y'=-x^2+2(m-1)x+(m+3)$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;3)$ khi và chỉ khi $y'\ge 0, \forall x\in(0;3)$:

$$\begin{aligned}&-x^2+2(m-1)x+(m+3)\ge 0, \forall x\in(0;3)\\ &\Leftrightarrow 2mx+m\ge x^2+2x-3, \forall x\in(0;3)\\ &\Leftrightarrow m(2x+1)\ge x^2+2x-3, \forall x\in(0;3)\end{aligned}$$

Vì $x\in(0;3)$ nên $2x+1>0$. Bất phương trình tương đương với:

$$m\ge\frac{x^2+2x-3}{2x+1}, \forall x\in(0;3).$$

Xét $g(x)=\frac{x^2+2x-3}{2x+1}$ trên đoạn $[0;3]$:

$$g'(x)=\frac{(2x+2)(2x+1)-2(x^2+2x-3)}{(2x+1)^2}=\frac{4x^2+6x+2-2x^2-4x+6}{(2x+1)^2}=\frac{2x^2+2x+8}{(2x+1)^2}$$

Vì $2x^2+2x+8>0, \forall x\in[0;3]$ nên $g'(x)>0, \forall x\in[0;3]$.

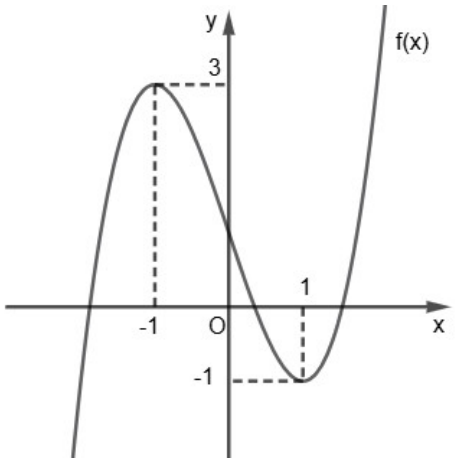
Suy ra hàm số $g(x)$ đồng biến trên đoạn $[0;3]$, do đó:

$$\max_{[0;3]} g(x) = g(3) = \frac{3^2 + 2\cdot 3 - 3}{2\cdot 3 + 1} = \frac{12}{7}$$

Để $m \ge g(x), \forall x \in (0;3)$ thì $m \ge \max_{[0;3]} g(x) \Leftrightarrow m \ge \frac{12}{7} \approx 1,71$.

Do $m \in [-10;10]$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$.

Câu 14. Cho hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a \ne 0)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi $g(x) = f(x^2 - 2x + 2)$ và d tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = g(x)$ tại điểm M có hoành độ bằng 2. Khi đó hệ số góc của d có giá trị bằng?

A. 6. **B.** 12. **C.** 18. **D.** 24.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ nên có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Dựa vào đồ thị ta có đồ thị hàm số có điểm cực đại $(-1;3)$ và điểm cực tiểu $(1;-1)$.

Khi đó ta có hệ $\begin{cases} -a + b - c + d = 3 \\ a + b + c + d = -1 \\ 3a - 2b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \\ d = 1 \end{cases}$.

Suy ra $f(x) = x^3 - 3x + 1$ và $f'(x) = 3x^2 - 3$.

Ta có $g(x) = f(x^2 - 2x + 2)$ nên $g'(x) = (2x - 2)\cdot f'(x^2 - 2x + 2)$.

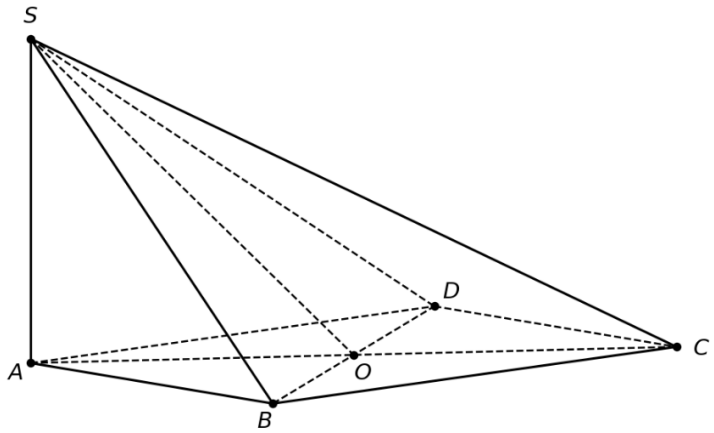
Hệ số góc tại $x = 2$

$k = g'(2) = 2\cdot f'(2) = 2\cdot 9 = 18$

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{ABC} = 60°$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Gọi α là góc phẳng nhị diện $[S,BD,C]$. Biết rằng $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Lời giải



Vì $(SAB)\perp(ABCD)$ và $(SAD)\perp(ABCD)$ nên giao tuyến của chúng là $SA\perp(ABCD)$.

Đặt $SA=h$ $(h>0)$. Đáy $ABCD$ gồm hai tam giác đều ABC và ADC cạnh a.

$S_{ABCD}=2\cdot S_{ABC}=2\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}\cdot SA\cdot S_{ABCD}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}h$.

Gọi $O=AC\cap BD$. Vì $ABCD$ là hình thoi nên $AC\perp BD$ tại O.

Ta có $BD\perp AC$ và $BD\perp SA\Rightarrow BD\perp(SAC)\Rightarrow BD\perp SO$ và $BD\perp CO$.

Do đó, góc phẳng nhị diện $[S,BD,C]$ chính là góc $\widehat{SOC}=\alpha$.

Tam giác đều ABC có $AO=\dfrac{a}{2}$. Trong tam giác vuông SOA có $SO=\sqrt{SA^2+AO^2}=\sqrt{h^2+\dfrac{a^2}{4}}$.

Ta có $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\cos\alpha=-\cos\widehat{SOA}=-\dfrac{AO}{SO}=-\dfrac{\dfrac{a}{2}}{\sqrt{h^2+\dfrac{a^2}{4}}}$ suy ra $h=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

nên $V_{S.ABCD}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}\cdot\dfrac{a\sqrt{2}}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 16. Một doanh nghiệp sản xuất xe đạp điện đang trong giai đoạn mở rộng thị trường. Số lượng xe sản xuất mỗi tháng là x (chiếc), với $x\in\mathbb{N}^*$ và $50\le x\le 700$. Mỗi chiếc xe được bán với giá cố định là 15 triệu đồng, tổng chi phí sản xuất mỗi tháng là $C(x)=150\cdot e^{0,005x}+400$ (triệu đồng). Để doanh nghiệp đạt lợi nhuận cao nhất trong mỗi tháng thì doanh nghiệp cần sản xuất và tiêu thụ bao nhiêu chiếc xe một tháng?

A. 500. **B.** 600. **C.** 599. **D.** 700.

Lời giải

Chọn C.

Gọi x là số lượng xe sản xuất và tiêu thụ mỗi tháng, theo giả thiết ta có $x\in\mathbb{N}^*$ và $50\le x\le 700$.

Doanh thu của doanh nghiệp khi bán được x chiếc xe mỗi tháng là

$$R(x)=15x \text{ (triệu đồng).}$$

Lợi nhuận $P(x)$ của doanh nghiệp mỗi tháng là hiệu giữa tổng doanh thu và tổng chi phí sản xuất

$$P(x)=R(x)-C(x)=15x-\left(150\cdot e^{0,005x}+400\right)=15x-150\cdot e^{0,005x}-400 \text{ (triệu đồng).}$$

Yêu cầu bài toán là tìm số lượng xe x sao cho lợi nhuận $P(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn [50;700]. Xét hàm số $P(x)$ trên đoạn [50; 700], ta có

$P'(x)=15-150\cdot 0,005\cdot e^{0,005x}=15-0,75\cdot e^{0,005x}$.

$P'(x)=0\Leftrightarrow 15-0,75\cdot e^{0,005x}=0\Leftrightarrow e^{0,005x}=\dfrac{15}{0,75}=20\Leftrightarrow 0,005x=\ln 20$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\ln 20}{0,005}=200\ln 20\approx 599,15$.

$P''(x)=-0,75\cdot 0,005\cdot e^{0,005x}=-0,00375\cdot e^{0,005x}<0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Bảng biến thiên

x	50		599		$200\ln 20$		600		700
$P''(x)$			$-$		$-$		$-$		
$P'(x)$	$P'(50)$	↘		↘	0	↘		↘	$P'(700)$
$P'(x)$			$+$		0		$-$		
$P(x)$	$P(50)$	↗		↗	$P(200\ln 20)$	↘		↘	$f(700)$
			$P(599)$				$P(600)$		

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $P(x)$ đạt cực đại tại điểm $x=200\ln 20$ nhưng điểm này không nguyên nên ta cần xét hai giá trị nguyên lân cận của điểm này là $x=599$ và $x=600$:

Với $x=599: P(599)=15\cdot 599-150\cdot e^{0,005\cdot 599}-400\approx 8985-150\cdot e^{2,995}-400\approx 4230,5$.

Với $x=600: P(600)=15\cdot 600-150\cdot e^{0,005\cdot 600}-400\approx 9000-150\cdot e^{3}-400\approx 4226,5$.

So sánh giá trị, ta thấy lợi nhuận đạt mức lớn nhất tại $x=599$ chiếc xe.

Vậy doanh nghiệp cần sản xuất và tiêu thụ 599 chiếc xe mỗi tháng để đạt lợi nhuận cao nhất.

Câu 17. Cho số nguyên dương n thỏa mãn: $C_{2n}^0+C_{2n}^2+C_{2n}^4+C_{2n}^6+\cdots\cdots+C_{2n}^{2n}=512$. Tìm hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển nhị thức Newton $P(x)=2\left(3+x^2\right)(3-2x)^n$.

A. 1800. **B.** 3600. **C.** 240. **D.** 1320.

Lời giải

Xét $(1+1)^{2n}=C_{2n}^0+C_{2n}^1+C_{2n}^2+C_{2n}^3+C_{2n}^4+\cdots+C_{2n}^{2n}$

Xét $(1-1)^{2n}=C_{2n}^0-C_{2n}^1+C_{2n}^2-C_{2n}^3+C_{2n}^4-\cdots+C_{2n}^{2n}$

Lấy (1) cộng (2) vế theo vế ta được: $2^{2n}+0^{2n}=2\cdot\left(C_{2n}^0+C_{2n}^2+C_{2n}^4+C_{2n}^6+\cdots+C_{2n}^{2n}\right)$

$\Leftrightarrow 2^{2n}=2.512\Leftrightarrow 2^{2n}=1024\Leftrightarrow 2^{2n}=2^{10}\Leftrightarrow 2n=10\Leftrightarrow n=5.$

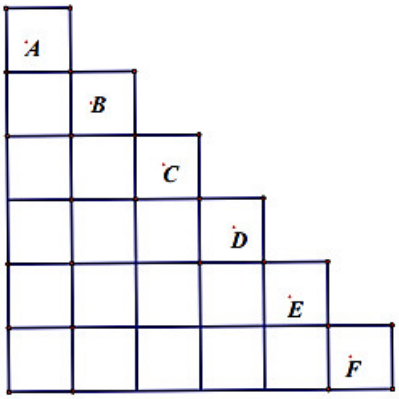
Ta có: $P(x)=\left(3+x^2\right)(3-2x)^5=3(3-2x)^5+x^2(3-2x)^5$.

Khai triển $M=(3-2x)^5=-32x^5+240x^4-720x^3+1080x^2-810x+243$

Số hạng chứa x^2 và x^4 lần lượt là $1080x^2$ và $240x^4$.

Suy ra số hạng chứa x^4 trong khai triển $P(x)$ là $2(3.240+1080)x^4=3600x^4$.

Câu 18. Từ tập $A=\{1;2;.....;50\}$ gồm 50 số tự nhiên liên tiếp, cần chọn ra 21 số phân biệt để gắn vào 21 ô vuông đơn vị như hình vẽ. Gọi T là số cách chọn số sao cho mọi số ở hàng trên luôn nhỏ hơn mọi số ở hàng dưới, mọi số bên trái luôn nhỏ hơn mọi số bên phải cùng hàng, đồng thời các số thuộc các ô A,B,C,D,E,F theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Tìm số dư khi chia T cho 1000? .



A. 152. **B.** 163. **C.** 212. **D.** 150.

Lời giải

Gọi d là công sai của cấp số cộng. Khi đó nếu số $A=a\geq 1$ thì số $E=a+4d;\ F=a+5d$.

Do khoảng cách giữa $E,\ F$ là 5 ô nên suy ra $d\geq 6$.

Mặt khác $\begin{cases} a+5d\leq 50 \\ a\geq 1 \end{cases} \Rightarrow d\leq 9$.

Trường hợp 1: $d=6\Rightarrow a\leq 50-5.6=20$

Có 20 cách chọn a. Với mỗi cách chọn a có $C_5^1.C_5^2.C_5^3.C_5^4.C_5^5$ cách chọn các số để xếp vào các ô vuông giữa A,B,C,D,E,F.

Trường hợp 2: $d=7$

Có 15 cách chọn a. Với mỗi cách chọn a có $C_6^1.C_6^2.C_6^3.C_6^4.C_6^5$ cách chọn các số để xếp vào các ô vuông giữa A,B,C,D,E,F.

Trường hợp 3: $d=8$

Có 10 cách chọn a. Với mỗi cách chọn a có $C_7^1.C_7^2.C_7^3.C_7^4.C_7^5$ cách chọn các số để xếp vào các ô vuông giữa A,B,C,D,E,F.

Trường hợp 4: $d=9$

Có 5 cách chọn a. Với mỗi cách chọn a có $C_8^1.C_8^2.C_8^3.C_8^4.C_8^5$ cách chọn các số để xếp vào các ô vuông giữa A,B,C,D,E,F.

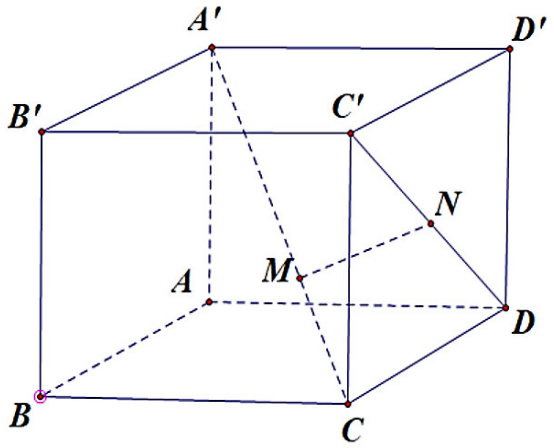
$T=20.C_5^1.C_5^2.C_5^3.C_5^4.C_5^5+15.C_6^1.C_6^2.C_6^3.C_6^4.C_6^5+10.C_7^1.C_7^2.C_7^3.C_7^4.C_7^5+5.C_8^1.C_8^2.C_8^3.C_8^4.C_8^5=286158150.$

Vậy đáp số là 150.

Câu 19. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $\widehat{BAD}=\widehat{BAA'}=\widehat{DAA'}=60^0; AA'=1; AB.AD=3$. Các điểm $M;N$ theo thứ tự thuộc đường thẳng $A'C$ và $C'D$ sao cho MN song song BD'. Khi độ dài đoạn thẳng MN đạt giá trị nhỏ nhất, tính giá trị biểu thức $2AB+2AD$.

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải



Đặt: $\overrightarrow{AA'}=\vec{a};\ \overrightarrow{AB}=\vec{b};\ \overrightarrow{AD}=\vec{c}$.

Ta có:

* $\overrightarrow{A'M}=x.\overrightarrow{A'C}=x(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AA'})=x(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA'})=x(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})$.

* $\overrightarrow{C'N}=y.\overrightarrow{C'D}=y(\overrightarrow{C'D}+\overrightarrow{D'D})=y(-\vec{b}-\vec{a})=-y(\vec{b}+\vec{a})$.

* $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{D'C'}+\overrightarrow{C'N}=-x(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})+\vec{c}+\vec{b}-y(\vec{a}+\vec{b})$

$=(x-y)\vec{a}+(1-x-y)\vec{b}+(1-x)\vec{c}$

* $\overrightarrow{BD'}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

*Do $BD'//MN$ suy ra hai véc tơ $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{BD'}$ cùng phương $\Rightarrow \exists t\in\mathbb{R}:\overrightarrow{MN}=t.\overrightarrow{BD'}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=t\\1-x-y=-t\\1-x=t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3}{4}\\y=\dfrac{1}{2}\\t=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

Vậy $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$

Theo giả thiết ta có : * $AA'=1\Rightarrow|\vec{a}|=1$

$$*\begin{cases}\widehat{BAD}=60^0\\AB.AD=3\end{cases}\Rightarrow\vec{b}.\vec{c}=AB.AD.\cos\widehat{BAD}=\frac{3}{2}$$

$$*\widehat{BAA'}=\widehat{DAA'}=60^0\Rightarrow(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AA'})=(\vec{b},\vec{a})=60^0$$

Và $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA'})=(\vec{c},\vec{a})=60^0\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{1}{2}AB$

$$\vec{a}.\vec{c} = |\vec{a}|.|\vec{c}|\cos(\vec{a},\vec{c}) = \frac{1}{2}AD$$

$*AB.AD = 3 \Rightarrow AD = \dfrac{3}{AB}$

$*\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{4}\vec{a} - \dfrac{1}{4}\vec{b} + \dfrac{1}{4}\vec{c} \Rightarrow MN^2 = \dfrac{1}{16}\vec{a}^2 + \dfrac{1}{16}\vec{b}^2 + \dfrac{1}{16}\vec{c}^2 - \dfrac{1}{8}\vec{a}\vec{b} - \dfrac{1}{8}\vec{c}\vec{b} + \dfrac{1}{8}\vec{a}\vec{c}$

$= \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{16}\overrightarrow{AB}^2 + \dfrac{1}{16}.\dfrac{9}{AB^2} - \dfrac{1}{16}AB - \dfrac{3}{16} + \dfrac{1}{16}.\dfrac{3}{AB} = \dfrac{1}{16}(AB^2 + \dfrac{9}{AB^2} - AB + \dfrac{3}{AB} - 2)$

Đặt $AB = x > 0$ bài toán trở thành tìm GTNN của hàm số $f(x) = x^2 + \dfrac{9}{x^2} - x + \dfrac{3}{x} - 2$ trên $(0;+\infty)$.

$f'(x) = 2x - \dfrac{18}{x^3} - 1 - \dfrac{3}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \dfrac{18}{x^3} - 1 - \dfrac{3}{x^2} = 0 \Rightarrow (x-2)(2x^3 + 3x^2 + 6x + 9) = 0 \Rightarrow x = 2$

(Do $x > 0$ nên $2x^3 + 3x^2 + 6x + 9 > 0$)

Ta có BBT:

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

Vậy $f(x)$ đạt GTNN $\Leftrightarrow x = 2 \Leftrightarrow AB = 2, AD = \dfrac{3}{2} \Rightarrow 2AB + 2AD = 7$

Câu 20. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thoả mãn $10\left(x^2 + y^2 - xy\right) + 32 \ge x^3 + y^3 + \sqrt{2^{x+y}}$?

A. 43. **B.** 45. **C.** 42. **D.** 46.

Lời giải

Ta có $10\left(x^2 + y^2 - xy\right) - \sqrt{2^{x+y}} \ge x^3 + y^3 - 32$

$\Leftrightarrow \left(x^2 + y^2 - xy\right)\left[10 - \left(x + y\right)\right] \ge 2^{\frac{x+y}{2}} - 2^5$ (*).

Vì $x^2 + y^2 - xy = \left(x - \dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{3y^2}{4} > 0$ với mọi x, y nguyên dương và hàm số $f\left(t\right) = 2^t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó ta có:

+ Nếu $x + y \le 10$ thì $VT\left(*\right) \ge 0$ và $VP\left(*\right) \le 0$ nên (*) thoả mãn.

+ Nếu $x + y > 10$ thì $VT\left(*\right) < 0$ và $VP\left(*\right) > 0$ nên (*) không thoả mãn.

Từ đó $10\left(x^2 + y^2 - xy\right) - \sqrt{2^{x+y}} \ge x^3 + y^3 - 32 \Leftrightarrow x + y \le 10$.

Vì x, y nguyên dương nên ta có $\begin{cases} x + y \le 10 \\ x \in \{1;2;...;9\} \\ y \in \{1;2;...;9\} \end{cases}$.

+ Với $x=1$, $y\in\{1;2;...;9\}$ có 9 cách chọn nên có tất cả 9 cặp $(x;y)$ thoả mãn.

+ Với $x=2$, $y\in\{1;2;...;8\}$ có 8 cách chọn nên có tất cả 8 cặp $(x;y)$ thoả mãn.

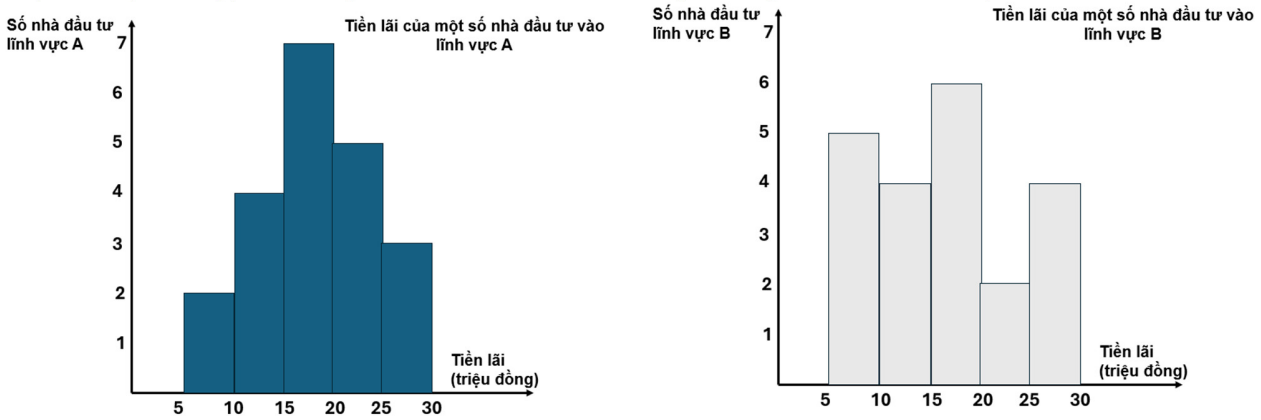
….

+ Với $x=9$, $y\in\{1\}$ có 1 cách chọn nên có tất cả 1 cặp $(x;y)$ thoả mãn.

Vậy số cặp $(x;y)$ thoả mãn bài toán là $1+2+...+9=45$ cặp.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Trong mỗi ý **a), b), c), d)** ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Người ta ghi lại tiền lãi (đơn vị: triệu đồng) của một số nhà đầu tư khi đầu tư vào hai lĩnh vực A (nội thất) và B (dệt may) với cùng số tiền ban đầu, cho kết quả bằng biểu đồ dưới đây:



a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm ở cả hai lĩnh vực A và B đều bằng 25 triệu đồng.

b) Trung vị của mẫu số liệu tiền lãi trong lĩnh vực B bằng 16,25 triệu đồng.

c) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu lĩnh vực B lớn hơn khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu lĩnh vực A.

d) Nếu gộp hai mẫu số liệu trên thành một mẫu số liệu ghép nhóm chung gồm 42 nhà đầu tư với các nhóm tiền lãi giữ nguyên như cũ, thì số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm mới này lớn hơn 17,5 triệu đồng.

Câu 2. Cho hai hàm số $f(x)=\log_2 x$ và $g(x)=2^x$.

a) Hàm số $u(x)=f(x)+g(x)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Phương trình $f\left(\dfrac{2^x-1}{|x|}\right)+g(x)=1+x$ có đúng hai nghiệm dương.

c) Hàm số $f\left(\left[g(x)-1\right]^2\right)$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

d) Phương trình $f(x+1)-f(x+2)+\dfrac{1}{(x+2)\ln 2}=m$ có 1 nghiệm duy nhất khi m không dương.

Lời giải

a) Mệnh đề **sai vì**

TXĐ: $x>0$ nên hàm số $u(x)=f(x)+g(x)$ luôn đồng biến trên $(0;+\infty)$.

b) Mệnh đề **sai, vì**

Ta có

$$f\left(\frac{2^x-1}{|x|}\right)+g(x)=1+x\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{2^x-1}{|x|}\right)=1+x-2^x\ (*).$$

Điều kiện: $2^x-1>0\Leftrightarrow x>0\Rightarrow |x|=x$.

Từ đó $(*) \Leftrightarrow \log_2\left(2^x-1\right)+2^x-1=\log_2 x+x$.

Xét hàm số $h(t)=\log_2 t+t,\ \forall t>0$, có $h'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0,\forall t>0$, nên hàm số $h(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Phương trình có dạng $h\left(2^x-1\right)=h(x)$, do đó $2^x-1=x$.

Ta xét hàm số $k(x)=2^x-x-1=0$, vì $k'(x)=2^x\ln 2-1$, $k''(x)=2^x.(\ln 2)^2>0,\forall x$ nên $k(x)=0$ có tối đa 2 nghiệm.

Nhận thấy $k(0)=k(1)=0$.

Do đó phương trình $(*)$ có tập nghiệm là $S=\{0;1\}$.

c) Mệnh đề **đúng, vì**

Điều kiện của hàm số $f\left(\left[g(x)-1\right]^2\right)=\log_2\left(2^x-1\right)^2$ là $2^x-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq 0$.

d) Mệnh đề **sai, vì**

Điều kiện: $x>-1$.

Phương trình $\Leftrightarrow \log_2(x+1)-\log_2(x+2)+\dfrac{1}{(x+2)\ln 2}=m$

Khi đó đặt $v(x)=\log_2(x+1)-\log_2(x+2)+\dfrac{1}{(x+2)\ln 2}$ thì

$$v'(x)=\frac{1}{\ln 2}\left[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{(x+2)^2}\right]=\frac{1}{(x+1)(x+2)^2.\ln 2}>0,\forall x>-1.$$

Vậy hàm số $v(x)$ đồng biến trên $(-1;+\infty)$.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\log_2(x+1)-\log_2(x+2)+\dfrac{1}{(x+2)\ln 2}\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\log_2\left(\frac{x+1}{x+2}\right)+\frac{1}{(x+2)\ln 2}\right]=0.$$

$\lim\limits_{x\to-1^+} v(x)=-\infty$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất khi $m<0$.

Câu 3. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+2m-1}{x-1}$ (với m là tham số thực). Gọi (C) là đồ thị của hàm số đã cho.

a) Khi $m=3$, giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị (C) là điểm $I(1;0)$.

b) Với mọi $m\neq 1$, đồ thị (C) luôn có đường tiệm cận xiên đi qua điểm cố định $A(2;1)$.

c) Có đúng 2 giá trị nguyên dương của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[2;3]$ bằng 3.

d) Với $m=3$, tiếp tuyến tại một điểm bất kỳ thuộc đồ thị (C) cùng với hai đường tiệm cận tạo thành một tam giác có diện tích không đổi và bằng 8.

Lời giải

a) Đúng.

Với $m=3$, hàm số trở thành $y=\dfrac{x^2-2x+5}{x-1}=x-1+\dfrac{4}{x-1}$.

Đồ thị có tiệm cận đứng $x=1$ và tiệm cận xiên $y=x-1$.

Giao điểm hai tiệm cận là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases}x=1\\y=x-1\end{cases}\Rightarrow I(1;0)$.

b) Sai.

Với $m=1$, hàm số trở thành $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}=x-1$. Hàm số không có tiệm cận xiên

c) Sai.

$(C): y=\dfrac{x^2-2x+2m-1}{x-1}=x-1+\dfrac{2m-2}{x-1}$

Ta có đạo hàm $y'=1-\dfrac{2m-2}{(x-1)^2}=\dfrac{(x-1)^2-(2m-2)}{(x-1)^2}$.

Để tìm GTLN trên đoạn $[2;3]$, ta xét phương trình $y'=0$ tương đương với $(x-1)^2=2m-2$.

Vì đề bài yêu cầu m là số nguyên dương, nên các giá trị nguyên dương có thể có của m nên ta xét các trường hợp:

- Trường hợp 1: Với $m=1$, hàm số trở thành $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}=x-1$. Hàm số đồng biến trên $[2;3]$ nên $\max_{[2;3]} y=y(3)=3-1=2\neq 3$ nên loại.

- Trường hợp 2: Với $m\geq 2$, suy ra $2m-2>0$.

$y'=0\Leftrightarrow (x-1)^2=2m-2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1+\sqrt{2m-2}\\x=1-\sqrt{2m-2}\left(\notin[2;3]\right)\end{array}\right.$

$y''=\dfrac{2(2m-2)}{(x-1)^3}>0,\forall x\in[2;3], m\in Z^+$

Do đó, đồ thị hàm số có bề lõm quay lên trên, điểm $x=1+\sqrt{2m-2}$ (nếu thuộc đoạn $[2;3]$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Vì vậy, giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[2;3]$ chỉ có thể đạt được tại một trong hai đầu mút:

$y(2)=(2-1)+\dfrac{2m-2}{2-1}=2m-1$

$y(3)=(3-1)+\dfrac{2m-2}{3-1}=2+(m-1)=m+1$

$y(2)-y(3)=m-2$

Khi $m=2: y(2)=y(3)=3$. Vậy $\max_{[2;3]} y=3.$ đạt được tại $m=2$, thỏa mãn.

Khi $m>2: y(2)>y(3)\Rightarrow \max_{[2;3]} y=y(2)\Leftrightarrow 2m-1=3\Leftrightarrow m=2$, loại

Chỉ có đúng 1 giá trị nguyên dương của m (là $m=2$) thỏa mãn yêu cầu bài toán => Sai

d) Đúng.

Với $m=3$, hàm số trở thành $y=\dfrac{x^2-2x+5}{x-1}=x-1+\dfrac{4}{x-1}$.

Đồ thị có tiệm cận đứng $x=1$ và tiệm cận xiên $y=x-1$. Tâm đối xứng $I(1;0)$.

Lấy điểm $M(x_0;y_0)\in(C)$ tùy ý ($x_0\neq 1$). Ta có: $y_0=x_0-1+\dfrac{4}{x_0-1}$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại M là: $y'(x_0)=1-\dfrac{4}{(x_0-1)^2}$

Phương trình tiếp tuyến Δ của (C) tại điểm $M: y=\left[1-\dfrac{4}{(x_0-1)^2}\right](x-x_0)+x_0-1+\dfrac{4}{x_0-1}$

Giao điểm $A=\Delta\cap d_1$ (với $(d_1): x=1$):

Thay $x=1$ vào phương trình tiếp tuyến Δ, ta được:

$$y_A=\left[1-\frac{4}{(x_0-1)^2}\right](1-x_0)+x_0-1+\frac{4}{x_0-1}$$

$$y_A=-(x_0-1)+\frac{4}{x_0-1}+x_0-1+\frac{4}{x_0-1}=\frac{8}{x_0-1}$$

Suy ra: $A\left(1;\dfrac{8}{x_0-1}\right)$.

Giao điểm $B=\Delta\cap d_2$ (với $(d_2): y=x-1$):

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x-1=\left[1-\dfrac{4}{(x_0-1)^2}\right](x-x_0)+x_0-1+\dfrac{4}{x_0-1}$

$\Leftrightarrow (x-x_0)=\left[1-\dfrac{4}{(x_0-1)^2}\right](x-x_0)+\dfrac{4}{x_0-1} \Leftrightarrow \dfrac{4}{(x_0-1)^2}(x-x_0)=\dfrac{4}{x_0-1}$

$\Leftrightarrow x-x_0=x_0-1\Leftrightarrow x_B=2x_0-1$

Thay vào phương trình d_2, ta được:

$y_B=(2x_0-1)-1=2x_0-2$

Suy ra: $B(2x_0-1;2x_0-2)$.

Tính diện tích tam giác IAB

$\overrightarrow{IA}=\left(0;\dfrac{8}{x_0-1}\right)\Rightarrow IA=\dfrac{8}{|x_0-1|}$

$\overrightarrow{IB}=\big(2(x_0-1);2(x_0-1)\big)\Rightarrow IB=\sqrt{4(x_0-1)^2+4(x_0-1)^2}=2\sqrt{2}\,|x_0-1|$

Góc giữa hai đường tiệm cận d_1 và d_2:

Tiệm cận đứng $d_1: x=1$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1=(0;1)$.

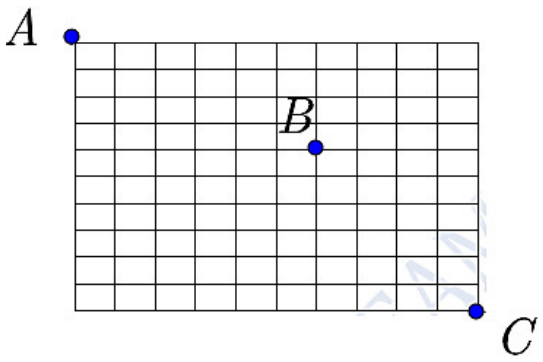
Tiệm cận xiên $d_2: y=x-1$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2=(1;1)$.

$\cos(d_1,d_2)=\dfrac{|\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2|}{|\vec{u}_1|\cdot|\vec{u}_2|}=\dfrac{|0\cdot1+1\cdot1|}{1\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \sin\widehat{AIB}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (Vì $0^0\le\widehat{(d_1,d_2)}\le180^0$)

Diện tích tam giác IAB là: $S_{\Delta IAB}=\dfrac{1}{2}\cdot IA\cdot IB\cdot\sin\widehat{AIB}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{8}{|x_0-1|}\cdot2\sqrt{2}\,|x_0-1|\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=8$

Vậy khẳng định Đúng.

Câu 4. Mạng lưới giao thông trong một thành phố được bố trí dạng lưới hình chữ nhật kích thước 10×10 như hình vẽ dưới đây. Lần đầu đến thành phố, anh Trúc muốn đi từ điểm A đến điểm C. Biết rằng tại các điểm giao nhau, anh Trúc luôn chọn ngẫu nhiên một trong các hướng đi để quãng đường đi từ A đến C là ngắn nhất (không rẽ trái, không đi lùi lại).

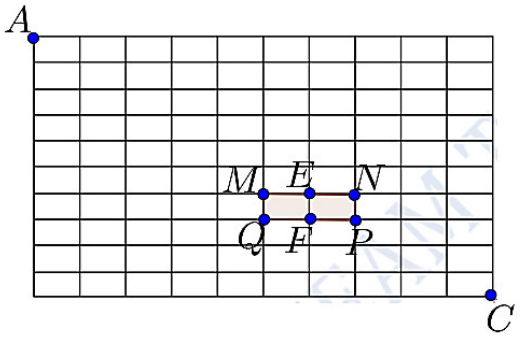


a) Số cách để di chuyển từ A đến C khi không có vật cản nào là C_{20}^{10}.

b) Giả sử có một địa điểm B ở vị trí 6×4 như hình vẽ. Số cách anh Trúc đi từ A đến C mà phải đi qua B là C_{10}^{4}.

c) Xác suất anh Trúc đi từ A đến C nhưng không đi địa điểm B là khoảng $0,76$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

d) Giả sử người ta rào hình chữ nhật $MNPQ$ như hình vẽ để sửa đường. Biết rằng anh Trúc không được đi vào vùng bên trong hình chữ nhật $MNPQ$, nhưng có thể đi ở đường biên MN, NP, QP, MQ. Khi đó, xác suất anh Trúc đi từ A đến C nhưng không đi vào vùng sửa đường là khoảng $0,82$ (làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải

a) Để di chuyển từ A đến C theo hướng ngắn nhất, anh Trúc cần bước xuống 10 bước, qua phải 10 bước, tổng cộng là 20 bước.Trong 20 bước đó, chọn 10 bước đi xuống là C_{20}^{10} cách. Chọn 10 bước qua phải trong 10 bước còn lại có 1 cách.

Vậy, số cách để di chuyển từ A đến C là C_{20}^{10}.

$\rightarrow$ **a) Đúng**

b) Số cách đi là $C_{10}^{4}.C_{10}^{6}$.

$\rightarrow$ **b) Sai**

c) Gọi A là biến cố "Anh Trúc đi từ A đến C nhưng không đi qua B"

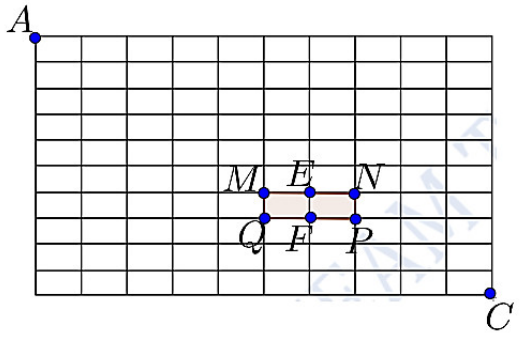
Không gian mẫu: C_{20}^{10}

Số cách đi từ A đến C mà không đi qua vật cản B là $C_{20}^{10}-C_{10}^{4}.C_{10}^{6}$.

Xác suất $P(A)=\dfrac{C_{20}^{10}-C_{10}^{4}.C_{10}^{6}}{C_{20}^{10}}\approx 0,76$

$\rightarrow$ **c) Đúng**

d)



Số cách đi từ A đến E: C_{12}^{6} cách.

Số cách đi từ E đến F (đi vào vùng bên trong): 1 cách.

Số cách đi từ F đến C: C_{7}^{3} cách.

Suy ra, số cách di chuyển lỗi là $C_{12}^{6}.C_{7}^{3}=32340$.

Số cách để di chuyển từ A đến C và không đi qua vùng bên trong hình chữ nhật $MNPQ$, là $C_{20}^{10}-32340$.

Gọi B là biến cố "Anh Trúc đi từ A đến C nhưng không đi vào vùng sửa đường"

Không gian mẫu: C_{20}^{10}

Xác suất $P(B)=\dfrac{C_{20}^{10}-32340}{C_{20}^{10}}\approx 0,82$

$\rightarrow$**d) Đúng**

Câu 5. Trong một khu bảo tồn sinh thái, ban quản lý thiết lập một hệ trục tọa độ không gian $Oxyz$ (đơn vị: km) để quản lý vùng hoạt động của các thiết bị bay không người lái (drone). Hiện tại có 3 trạm cố định được đặt tại: Trạm điều hành trung tâm $A(1;2;1)$, trạm quan trắc $B(2;-1;3)$ và trạm quan trắc $C(0;4;1)$.

a) Đội bay cần xác định một mốc tọa độ $D(a;b;c)$ trên không sao cho khu vực bay là tứ giác lồi $ABCD$ tạo thành một hình thang có 2 đáy AD và BC. Để đảm bảo độ phủ, diện tích vùng bay $ABCD$ phải gấp 4 lần diện tích vùng tam giác c ABC. Khi đó, tổng tọa độ $a+b+c$ của điểm D bằng 8.

b) Một drone khác được lập trình bay theo quỹ đạo hình tròn đi qua đúng 3 trạm A,B,C. Bán kính của quỹ đạo bay này là $R=2\sqrt{3}$ km.

c) Trên bức tường chắn nhiễu dọc theo mặt phẳng biên (Oxz), cần đặt một ăng-ten tại điểm I để nhận tín hiệu. Yêu cầu định vị I sao cho tổng xung lực tín hiệu (có trọng số) $P=\left|\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}\right|$ đạt mức nhỏ nhất. Độ dài đường cáp nối từ gốc tọa độ O đến ăng-ten I là $\dfrac{5\sqrt{5}}{6}$ km.

d) Trên một mặt phẳng biên khác (Oyz), một cảm biến $M(0;a;b)$ cần được lắp đặt. Vị trí M được chọn để hiệu suất chênh lệch MA^2-2MB^2 đạt giá trị lớn nhất. Khi đó hiệu số tọa độ $a-b=-9$.

Lời giải

a) SAI

Vì $ABCD$ là hình thang có đáy AD, nên $AD\parallel BC$, suy ra vectơ $\overrightarrow{AD}$ cùng hướng với $\overrightarrow{BC}$. Do đó $\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{BC}$ ($k>0$).

Diện tích hình thang: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot d(A, BC) \cdot (AD + BC)$.

Diện tích tam giác: $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot d(A, BC) \cdot BC$.

Theo giả thiết, $S_{ABCD} = 4S_{ABC}$, ta có:

$AD + BC = 4BC \Rightarrow AD = 3BC$.

Về mặt vectơ, điều này tương đương với $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{BC}$.

Ta có $\overrightarrow{BC} = (-2;5;-2)$, suy ra $\overrightarrow{AD} = 3(-2;5;-2) = (-6;15;-6)$.

Tọa độ điểm D: $(1-6; 2+15; 1-6) = (-5;17;-5)$.

Nên $a + b + c = -5 + 17 - 5 = 7$.

b) SAI

Tích có hướng: $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \left((-3)\cdot 0 - 2\cdot 2;\ 2\cdot(-1) - 1\cdot 0;\ 1\cdot 2 - (-3)\cdot(-1)\right) = (-4;-2;-1)$.

Diện tích tam giác ABC:

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{21}}{2}$.

Độ dài các cạnh:

$AB = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$.

$AC = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}$.

$BC = \sqrt{(-2)^2 + 5^2 + (-2)^2} = \sqrt{33}$.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp:

$$R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S_{ABC}} = \frac{\sqrt{14}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{33}}{4\cdot\frac{\sqrt{21}}{2}} = \frac{\sqrt{2310}}{2\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{110}}{2}.$$

So sánh với giả thiết $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$. Rõ ràng $\frac{\sqrt{110}}{2} \neq \sqrt{12}$.

c) Đúng

Gọi E là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{EB} + 3\overrightarrow{EC} = \vec{0}$.

Tọa độ điểm E được tính theo công thức:

$$x_E = \frac{x_A + 2x_B + 3x_C}{1+2+3} = \frac{1 + 2(2) + 3(0)}{6} = \frac{5}{6}$$

$$y_E = \frac{y_A + 2y_B + 3y_C}{6} = \frac{2 + 2(-1) + 3(4)}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

$$z_E = \frac{z_A + 2z_B + 3z_C}{6} = \frac{1 + 2(3) + 3(1)}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

Suy ra $E\left(\frac{5}{6}; 2; \frac{5}{3}\right)$.

Biểu thức $P = \left|(1+2+3)\overrightarrow{IE}\right| = 6IE$. Để P nhỏ nhất, I phải là hình chiếu vuông góc của E lên mặt phẳng (Oxz) (phương trình $y = 0$).

Suy ra tọa độ điểm I là $I\left(\frac{5}{6}; 0; \frac{5}{3}\right)$.

Độ dài đoạn thẳng OI:

$OI=\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2+0^2+\left(\frac{5}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{36}+\frac{25}{9}}=\sqrt{\frac{125}{36}}=\frac{5\sqrt{5}}{6}$.

d) ĐÚNG

Điểm $M\in(Oyz)\Rightarrow M(0;a;b)$.

Ta có: $MA^2=(1-0)^2+(2-a)^2+(1-b)^2=a^2+b^2-4a-2b+6$.

$MB^2=(2-0)^2+(-1-a)^2+(3-b)^2=a^2+b^2+2a-6b+14$.

Gọi $f(a,b)=MA^2-2MB^2=(a^2+b^2-4a-2b+6)-2(a^2+b^2+2a-6b+14)$

$f(a,b)=-a^2-b^2-8a+10b-22$

Biến đổi về dạng bình phương để tìm max:

$f(a,b)=-(a^2+8a+16)-(b^2-10b+25)-22+16+25$

$f(a,b)=19-(a+4)^2-(b-5)^2\le 19$.

Giá trị này lớn nhất bằng 19 khi và chỉ khi:

$a+4=0\Rightarrow a=-4$

$b-5=0\Rightarrow b=5$

Lúc này, hiệu số $a-b=-4-5=-9$.

Câu 6: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên bằng a, O là trọng tâm đáy ABC và diện tích mặt bên bằng $\frac{a^2}{4}$.

a) $S_{ABC}=\frac{2\sqrt{3}-3}{4}a^2$.

b) Đường thẳng Δ di động trong mặt phẳng (ABC) sao cho Δ đi qua O thì khoảng cách lớn nhất giữa đường thẳng Δ và đường thẳng SA bằng $\frac{\sqrt{3SA^2.AB^2-AB^4}}{3SA}$.

c) Với P là trung điểm của SA và 2 điểm E, F lần lượt thay đổi trên các cạnh SB và SC (E và F không trùng với các đỉnh của hình chóp). Giá trị nhỏ nhất của $AE+EF+FP$ bằng $\frac{a\sqrt{5}}{2}$

d) Biết điểm M trong không gian sao cho $P=MB^2+MC^2+MS^2-MA^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $3\overrightarrow{SM}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}$.

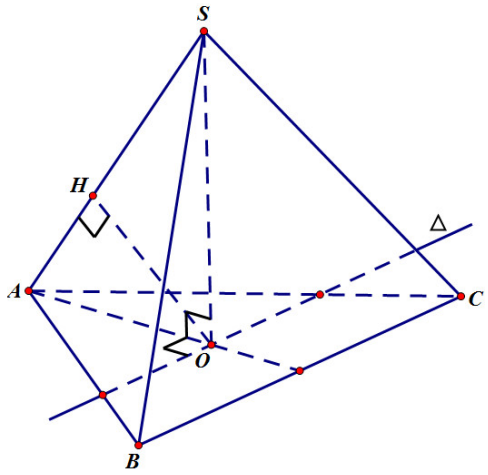
Lời giải

a) Ta có diện tích tam giác SAB là:

$S_{\Delta SAB}=\frac{1}{2}SA.SB.\sin\widehat{ASB}\Leftrightarrow\frac{a^2}{4}=\frac{1}{2}a.a.\sin\widehat{ASB}\Leftrightarrow\sin\widehat{ASB}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\widehat{ASB}=30^0$.

Suy ra $AB=\sqrt{a^2+a^2-2.a.a.\cos 30^0}=a\sqrt{2-\sqrt{3}}\Rightarrow S_{ABC}=\frac{2\sqrt{3}-3}{4}a^2$

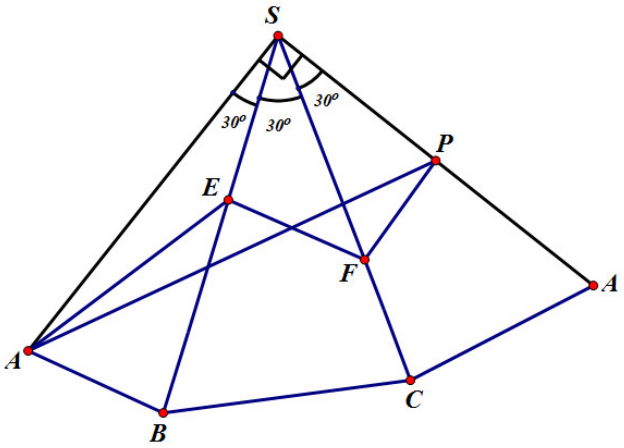
b) Dễ thấy khoảng cách giữa đường thẳng Δ và đường thẳng SA lớn nhất khi $\Delta\perp SA$.



Kẻ $OH \perp SA$ khi đó

$$d\left(\Delta;SA\right)=OH=\frac{SO.OA}{SA}=\frac{\sqrt{SA^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}AB\right)^2}.\frac{\sqrt{3}}{3}AB}{SA}=\frac{\sqrt{3SA^2.AB^2-AB^4}}{3SA}.$$

c) Ta trải các mặt bên của hình chóp trên cùng một mặt phẳng.

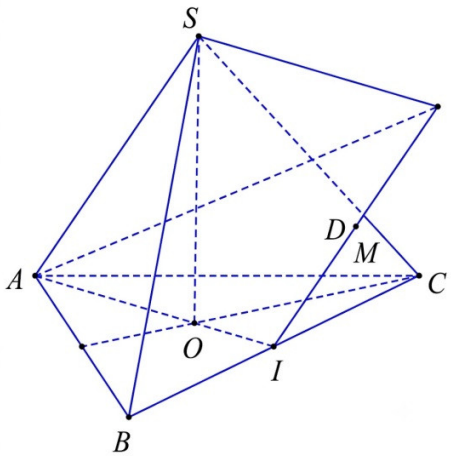


Khi đó $AE+EF+FP\geq AP$.
Dấu bằng xảy ra khi A,E,F,P thẳng hàng.
Ta có $\widehat{ASB}=30^0 \Rightarrow \widehat{ASP}=90^0$.

Xét tam giác vuông ASP có $AP=\sqrt{SA^2+SP^2}=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $AE+EF+FP$ bằng $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

d) Gọi D là điểm sao cho $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DS}-\overrightarrow{DA}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AS}=2\overrightarrow{ID}$ (Với I là trung điểm của BC). Từ đây suy ra D cố định.



Xét $P = MB^2 + MC^2 + MS^2 - MA^2$

$= \left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DS}\right)^2 - \left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA}\right)^2$

$= 2\overrightarrow{MD}^2 + 2\overrightarrow{MD}\left(\underbrace{\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DS} - \overrightarrow{DA}}_{\vec{0}}\right) + \overrightarrow{DB}^2 + \overrightarrow{DC}^2 + \overrightarrow{DS}^2 - \overrightarrow{DA}^2$

$= DB^2 + DC^2 + DS^2 - DA^2 + 2MD^2$.

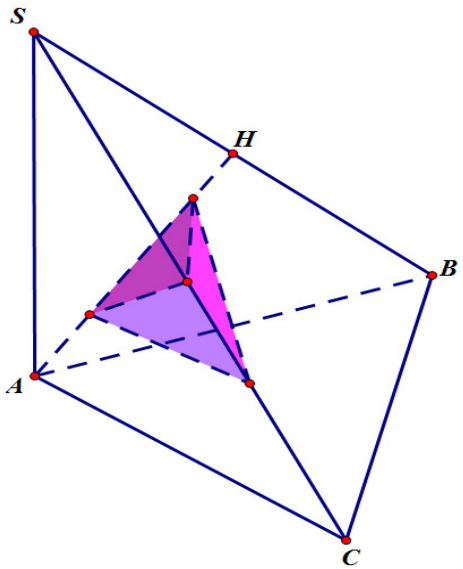
Vì $DB^2 + DC^2 + DS^2 - DA^2$ không đổi nên $P_{\min} \Leftrightarrow MD = 0 \Leftrightarrow M \equiv D$.

Khi đó $\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{SA} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh làm từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$. Đáy ABC là tam giác cân tại B và cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy. Biết $AB = 6$ cm, góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng 60°. Tính thể tích của khối tứ diện đều có hai cạnh đối lần lượt nằm trên hai đường thẳng chứa cạnh bên SC và đường cao AH của tam giác SAB (làm tròn đến hàng phần chục).

Đán án: 4,9



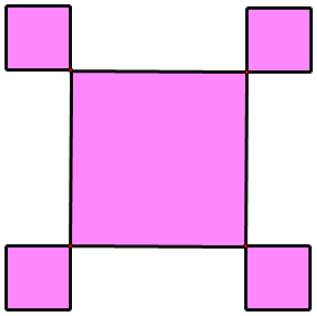
Câu 2. Trong không gian xét hệ tọa độ $Oxyz$ có một đơn vị dài trên các trục tương ứng với 10 mét trên thực tế. Một mục tiêu cần được bảo vệ có vị trí ở gốc tọa độ O. Người ta thiết lập một vành đai bảo vệ quanh mục tiêu theo một đường tròn tâm O có bán kính bằng 6 đơn vị (tương ứng 60 mét trên thực tế) nằm trong mặt phẳng Oxy. Một máy bay không người lái (được coi như một hạt) bay theo một đường thẳng, xuất phát từ vị trí $M(2; 11; 3)$ hướng đến vị trí $N\left(4; \frac{19}{2}; 3\right)$. Tại mỗi vị trí của máy bay, khoảng cách từ máy bay đến vành đai bảo vệ là độ dài ngắn nhất của các đoạn thẳng nối từ vị trí đó đến một điểm bất

kỳ trên vành đai. Trong suốt quá trình bay từ M tới N, hãy tính khoảng cách ngắn nhất theo mét từ máy bay tới vành đai bảo vệ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Đáp số: 52

Câu 3. Cho tập X={1;2;3.;…;12;13}. Chọn ngẫu nhiên 5 số phân biệt từ tập X rồi đặt 1 số vào ô vuông lớn ở chính giữa, đặt 4 số còn lại vào 4 ô vuông nhỏ xung quanh (4 ô vuông nhỏ không phân biệt vị trí). Gọi P là xác suất để tổng các số tự nhiên trên hai ô vuông nhỏ bất kì luôn nhỏ hơn số ở ô vuông lớn chính giữa đồng thời số ở ô vuông lớn chia hết cho 6 và tổng cả bốn số trên bốn ô vuông nhỏ luôn là một số chia hết cho 3. Tính giá trị của 6435P.

Đáp số: 6



Câu 4. Cho bất phương trình: $\log_4 \dfrac{-2x^3+2x^2+2m-2}{4x^2-4x+2}+2x-2+m\ge x^3+x^2\ (1)$. Tìm tất cả giá trị nguyên và nhỏ hơn 2027 của tham số m để bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi số thực $x\in[1;2]$?

Đáp số: 2017

Lời giải

Điều kiện: $-2x^3+2x^2+2m-2>0,\forall x\in[1;2]\Leftrightarrow 2m>g(x)=2x^3-2x^2+2,\forall x\in[1;2]$

Bất phương trình (1)

$\Leftrightarrow \log_2\left(4x^2-4x+2\right)+4x^2-4x+2\le \log_2\left(-2x^3+2x^2+2m-2\right)+\left(-2x^3+2x^2+2m-2\right)$

Xét hàm số: $f(t)=t+\log_2 t$ với $t>0$, có $f'(t)=1+\dfrac{1}{t\ln 2}>0,\ \forall t>0$.

Nên

$f\left(4x^2-4x+2\right)\le f\left(-2x^3+2x^2+2m-2\right)$

$\Leftrightarrow 4x^2-4x+2\le -2x^3+2x^2+2m-2$

$\Leftrightarrow h(x)=x^3+x^2-2x+2\le m$.

Xét hàm số: $h(x)=x^3+x^2-2x+2$ với $x\in[1;2]$

có $h'(x)=3x^2+2x-2>0$ với $\forall x\in[1;2]$.

Suy ra hàm số $h(x)$ đồng biến trên đoạn $[1;2]\Rightarrow \max\limits_{[1;2]} h(x)=h(2)=10$.

Xét hàm số: $g(x)=2x^3-2x^2+2$ với $x\in[1;2]$

có $g'(x)=6x^2-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{c} x=0\notin[1;2] \\ x=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$

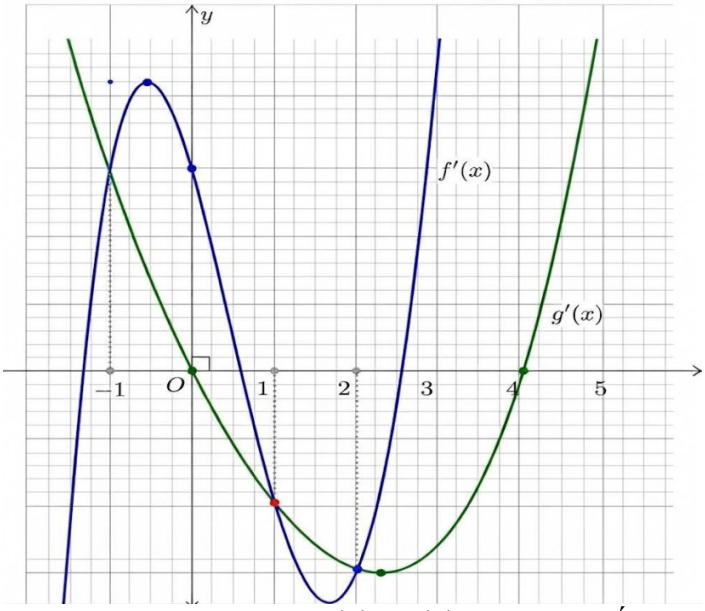
Ta có $g(1)=2;g(2)=10;g\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{46}{27}\Rightarrow \max\limits_{[1;2]} g(x)=g(2)=10$.

Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi số thực $x\in[1;2]$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2m>g(x),\forall x\in[1;2]\\ m\ge h(x),\forall x\in[1;2]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2m>\max\limits_{[1;2]}g(x)\\ m\ge\max\limits_{[1;2]}h(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>5\\ m\ge10\end{cases}\Leftrightarrow m\ge10.$$

Vậy $m\ge10$. Vậy có 2017 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5. Cho các hàm số $f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$ và $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(m,n,p,q,r,a,b,c,d\in\mathbb{R},m>0)$ thỏa mãn $f(0)=g(0)$. Các hàm số $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Tính tổng tất cả nghiệm của phương trình $f(x)=g(x)$ *(làm tròn đến hàng phần chục).*

Lời giải

Đáp án: 2,7

Ta có $f(x)=g(x)\Leftrightarrow mx^4+nx^3+px^2+qx+r=ax^3+bx^2+cx+d$

$\Leftrightarrow mx^4+(n-a)x^3+(p-b)x^2+(q-c)x+r-d=0$ (1)

Do $f(0)=g(0)\Rightarrow x=0$ là nghiệm của phương trình (1) $\Rightarrow r-d=0$.

Lại có $f'(x)=4mx^3+3nx^2+2px+q, g'(x)=3ax^2+2bx+c.$

$f'(x)=g'(x)\Leftrightarrow 4mx^3+3(n-a)x^2+2(p-b)x+q-c=0.$

Từ đồ thị suy ra $a>0, g'(0)=0\Rightarrow c=0.$

Ngoài ra, phương trình $f'(x)=g'(x)$ có các nghiệm $x=-1,x=1,x=2$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases}-4m+3(n-a)-2(p-b)+q=0\\ 4m+3(n-a)+2(p-b)+q=0\\ 32m+12(n-a)+4(p-b)+q=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p-b=-2m\\ q=-3(n-a)\\ 32m-4q-8m+q=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p-b=-2m\\ n-a=-\dfrac{8}{3}m\\ q=8m\end{cases}$$

Khi đó phương trình (1) thành $\Leftrightarrow mx^4-\dfrac{8}{3}mx^3-2mx^2+8mx=0\Leftrightarrow x^4-\dfrac{8}{3}x^3-2x^2+8x=0.$

Do đó, tổng tất cả các nghiệm của phương trình *làm tròn đến hàng phần chục* là $-1,6$.

Câu 6. Ông An bắt đầu kế hoạch tích lũy quỹ hưu trí từ năm 30 tuổi. Vào đầu mỗi năm, ông gửi vào ngân hàng một khoản tiền là M (triệu đồng) với lãi suất cố định $r=6\%$/năm, lãi nhập gốc vào cuối năm.

1. Giai đoạn tích lũy (30 năm): Ông An liên tục gửi tiền đầu mỗi năm từ năm 30 tuổi đến hết năm 59 tuổi (tổng cộng gửi 30 lần).
2. Giai đoạn nghỉ hưu: Bắt đầu từ năm 60 tuổi (ngay sau khi hoàn thành 30 năm tích lũy), ông An không gửi thêm tiền nữa. Tuy nhiên, để bù đắp lạm phát và chi tiêu, vào đầu mỗi năm (bắt đầu từ năm 60 tuổi), ông rút ra một khoản tiền để sinh hoạt. Năm 60 tuổi ông rút 200 triệu đồng; các năm tiếp theo, số tiền rút ra đầu mỗi năm tăng thêm 4% so với năm trước đó. Số tiền còn lại trong ngân hàng vẫn tiếp tục sinh lời với lãi suất 6%/năm.
Giả sử ông An muốn quỹ hưu trí của mình duy trì việc rút tiền như trên trong đúng 25 năm (tức rút lần cuối vào đầu năm 84 tuổi) sao cho ngay sau lần rút thứ 25 này, tài khoản vừa hết sạch tiền. Hãy tính số tiền M mà ông An cần gửi hàng năm ở giai đoạn tích lũy (làm tròn đến hàng đơn vị triệu đồng).

Lời giải

Đáp án: 48

Gọi $r = 6\% = 0,06$. Đặt $q = 1 + r = 1,06$.

Đầu năm thứ 1 (30 tuổi): Gửi số tiền M. Cuối năm 1 (tròn 31 tuổi) có số tiền $M \cdot q$.

Đầu năm thứ 2 (31 tuổi): Gửi thêm M, tổng tiền là $(M \cdot q + M)$. Cuối năm 2 (tròn 32 tuổi) có $(M \cdot q + M)q = Mq^2 + Mq$.

...

Cuối năm thứ 30 (tròn 60 tuổi), ngay trước khi rút tiền:

$T = Mq^{30} + Mq^{29} + \ldots + Mq = Mq(1 + q + q^2 + \ldots + q^{29})$

Biểu thức $(1 + q + q^2 + \ldots + q^{29})$ là tổng của 30 số hạng đầu tiên của một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = 1,06$.

Áp dụng công thức tổng cấp số nhân $S_n = u_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$:

$$T = M \cdot q \cdot \frac{q^{30} - 1}{q - 1} = M \cdot 1,06 \cdot \frac{1,06^{30} - 1}{0,06} \approx 83,8017 \cdot M \text{ (triệu đồng)}$$

Gọi $k = 200$ (triệu đồng) là số tiền rút ở đầu năm 60 tuổi (lần 1).

Độ tăng chi tiêu hàng năm là $g = 4\% = 0,04$. Đặt $p = 1 + g = 1,04$.

Số tiền rút ở các năm tiếp theo:

Đầu năm 60 tuổi (Lần 1): Rút $R_1 = k = 200$.

Đầu năm 61 tuổi (Lần 2): Rút $R_2 = k \cdot p = 200 \times 1,04$.

...

Đầu năm $60 + n - 1$ tuổi (Lần thứ n): Rút $R_n = k \cdot p^{n-1}$.

Ta lập mô hình diễn biến dư nợ tài khoản sau mỗi lần rút tiền:

Tại thời điểm 60 tuổi (sau khi rút lần 1): $A_1 = T - k$

Cuối năm 60 tuổi, số tiền sinh lời thành: $A_1 \cdot q = (T - k)q$.

Tại thời điểm 61 tuổi (ngay sau khi rút lần 2): $A_2 = (T - k)q - k \cdot p = Tq - kq - kp$

Cuối năm 61 tuổi, số tiền sinh lời thành: $A_2 \cdot q = Tq^2 - kq^2 - kpq$.

Tại thời điểm 62 tuổi (ngay sau khi rút lần 3): $A_3 = A_2 \cdot q - k \cdot p^2 = Tq^2 - kq^2 - kpq - kp^2$

Bằng phương pháp quy nạp, số tiền còn lại ngay sau lần rút thứ n (A_n) là

$A_n = T \cdot q^{n-1} - k\left(q^{n-1} + q^{n-2}p + q^{n-3}p^2 + \ldots + p^{n-1}\right)$

Xét tổng trong ngoặc $S = q^{n-1} + q^{n-2}p + q^{n-3}p^2 + \ldots + p^{n-1}$:

Đây là tổng của n số hạng thuộc cấp số nhân có số hạng đầu $v_1 = q^{n-1}$ và công bội $Q = \frac{p}{q} = \frac{1,04}{1,06} \neq 1$.

Áp dụng công thức tổng cấp số nhân:

$$S = v_1 \frac{1-Q^n}{1-Q} = q^{n-1} \cdot \frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^n}{1-\frac{p}{q}} = q^{n-1} \cdot \frac{\frac{q^n - p^n}{q^n}}{\frac{q-p}{q}} = \frac{q^n - p^n}{q-p}$$

Do đó, công thức tổng quát cho số tiền còn lại sau lần rút thứ n là:

$$A_n = T \cdot q^{n-1} - k \cdot \frac{q^n - p^n}{q-p}$$

Theo bài ra, sau lần rút thứ 25 (n = 25), tài khoản vừa hết sạch tiền, nghĩa là $A_{25} = 0$

$$T \cdot q^{24} - k \cdot \frac{q^{25} - p^{25}}{q-p} = 0 \Rightarrow T = \frac{k}{q^{24}} \cdot \frac{q^{25} - p^{25}}{q-p}$$

Thay $k = 200, q = 1,06, p = 1,04, n = 25$ vào

$$T = \frac{200}{1,06^{24}} \cdot \frac{1,06^{25} - 1,04^{25}}{1,06 - 1,04} \approx 49,403 \cdot \frac{4,29187 - 2,66584}{0,02} \approx 4016,32 \text{ (triệu đồng)}$$

Cho hai giá trị T bằng nhau:

$$83,8017 \cdot M = 4016,32 \Rightarrow M = \frac{4016,32}{83,8017} \approx 48 \text{ (triệu đồng)}$$