

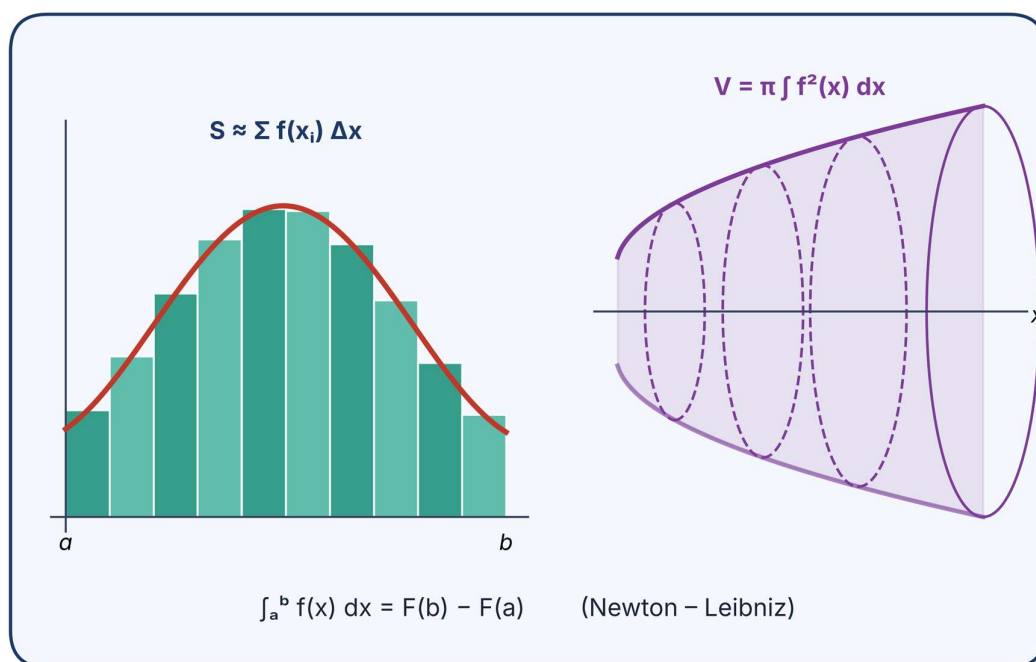


CHUYÊN ĐỀ TOÁN THPT – TOÁN 12

ÔN THI ĐÁNH GIÁ NĂNG LỰC HSA VÀ TỐT NGHIỆP THPT

CHIA NHỎ ĐỂ HIỂU CÁI TOÀN THỂ

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG TỪ ARCHIMEDES ĐẾN ĐỀ THI HSA



MỤC LỤC

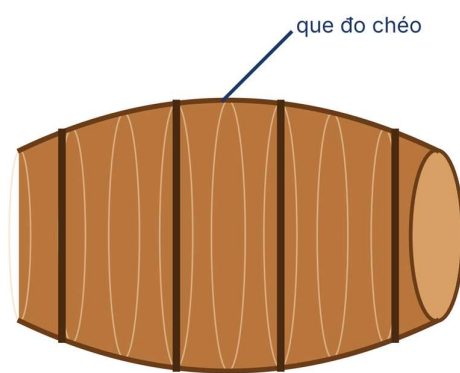
MỞ ĐẦU – ĐAM CƯỚI CỦA KEPLER VÀ NHỮNG THÙNG RƯỢU	4
Mục tiêu của chuyên đề	5
Đối tượng và cách sử dụng	5
PHẦN I. CÂU CHUYỆN LỊCH SỬ – HAI NGHÌN NĂM CHIA NHỎ VÀ CỘNG LẠI	7
1. Eudoxus và phương pháp vét cạn (thế kỉ IV TCN)	7
2. Archimedes – bậc thầy của “cắt nhỏ” (thế kỉ III TCN)	7
3. Phương Đông: Lưu Huy và cha con Tổ Xung Chi	8
4. Kepler, Cavalieri, Fermat: vô cùng bé trở lại (thế kỉ XVII)	9
5. Newton và Leibniz: định lí cơ bản của giải tích	9
6. Cauchy, Riemann, Lebesgue: xây móng vững chắc	10
7. Tích phân trong nhà trường Việt Nam	11
PHẦN II. TỪ TÌNH HUỐNG ĐẾN KHÁI NIỆM	12
Tình huống 1. Biết vận tốc, tìm quãng đường	12
Tình huống 2. Diện tích dưới parabol $y = x^2$	12
Tình huống 3. Lượng nước chảy vào bể	13
1. Nguyên hàm	13
2. Hai phương pháp tìm nguyên hàm	14
3. Tích phân	15
4. Ứng dụng hình học của tích phân	16
5. Ứng dụng vật lí và thực tế	19
PHẦN III. CÁC DẠNG TOÁN VÀ VÍ DỤ PHÂN TÍCH.....	20
Dạng 1. Nguyên hàm cơ bản – dùng bảng và tính chất	20
Dạng 2. Nguyên hàm thỏa mãn điều kiện cho trước.....	21
Dạng 3. Phương pháp đổi biến số tìm nguyên hàm	23
Dạng 4. Phương pháp nguyên hàm từng phần	25
Dạng 5. Tích phân: định nghĩa và tính chất	27
Dạng 6. Tích phân hàm phân thức hữu tỉ.....	28
Dạng 7. Tích phân đổi biến số	30
Dạng 8. Đổi biến lượng giác	31
Dạng 9. Tích phân từng phần.....	33
Dạng 10. Tích phân chứa dấu giá trị tuyệt đối, hàm số cho từng khúc	35
Dạng 11. Tích phân hàm ẩn và các tích phân đặc biệt.....	36
Dạng 12. Diện tích hình phẳng	39
Dạng 13. Thể tích vật thể và khối tròn xoay.....	43
Dạng 14. Bài toán chuyển động	46
Dạng 15. Bài toán thực tế.....	49
Dạng 16. Tích phân trong đề thi tuyển sinh Đại học (2002 – 2015)	53

Dạng 17. Tích phân trong đề thi học sinh giỏi và Olympic	59
PHẦN IV. TÍCH PHÂN QUANH TA	62
1. Chiếc công tơ điện và hóa đơn tiền điện	62
2. Giao thông: khoảng cách an toàn và quãng đường phanh	62
3. Thủy điện: vì sao chân đập phải dày?	63
4. Y học: đo lưu lượng máu bằng một mũi tiêm	64
5. Kinh tế: thặng dư của người mua và người bán	65
6. Xác suất: phổ điểm và đường cong chuông	66
7. Đo diện tích mặt hồ: khi không có công thức	67
8. Chiếc bình gốm: thể tích khối tròn xoay	67
9. Kiến trúc: vòm parabol và những mái nhà cong	68
PHẦN V. HỆ THỐNG BÀI TẬP	69
Mức 1 – Nhận biết	69
Mức 2 – Thông hiểu	70
Mức 3 – Vận dụng	71
Mức 4 – Vận dụng cao	72
Mức 5 – Bài toán thực tế	73
Mức 6 – Thử thách (học sinh giỏi)	76
Mức 7 – Đề thi tuyển sinh Đại học	76
PHẦN VI. LỜI GIẢI CHI TIẾT	79
Mức 1 – Nhận biết	79
Mức 2 – Thông hiểu	81
Mức 3 – Vận dụng	85
Mức 4 – Vận dụng cao	89
Mức 5 – Bài toán thực tế	94
Mức 6 – Thử thách (học sinh giỏi)	99
Mức 7 – Đề thi tuyển sinh Đại học	101
PHẦN VII. THIẾT KẾ BUỔI DẠY, LUYỆN TẬP THEO ĐỊNH DẠNG HAS...107	
1. Kế hoạch buổi dạy (120 phút)	107
2. Phiếu học tập	108
3. Đề luyện tập số 1 – Nền tảng (20 câu, 30 phút)	108
4. Đề luyện tập số 2 – Phương pháp đổi biến và từng phần (20 câu, 30 phút)	110
5. Đề luyện tập số 3 – Diện tích và thể tích (20 câu, 30 phút)	111
6. Đề luyện tập số 4 – Hàm ẩn và tính chất tích phân (20 câu, 30 phút)	113
7. Đề luyện tập số 5 – Thực tế, liên môn và nâng cao (20 câu, 30 phút)	115
8. Đáp án và lời giải chi tiết	118
LỜI KẾT	148
TÀI LIỆU THAM KHẢO	149

MỞ ĐẦU – ĐÁM CƯỚI CỦA KEPLER VÀ NHỮNG THÙNG RƯỢU

Mùa thu năm 1613, nhà thiên văn Johannes Kepler chuẩn bị đám cưới lần thứ hai ở thành phố Linz (Áo) và mua mấy thùng rượu vang để đãi khách. Ông để ý cách người bán rượu tính tiền: chỉ cần cắm một cây que qua lỗ rót ở giữa thân thùng, chéo xuống mép đáy, đọc độ dài phần que bị ướt rồi tra bảng là ra thể tích. Mọi thùng, dù béo hay gầy, đều được tính theo đúng một con số ấy.

Nhà thiên văn vốn quen tính quỹ đạo các hành tinh thấy cách làm này quá vội vàng. Liệu hai thùng có cùng “độ dài que” có chứa cùng một lượng rượu? Kepler tưởng tượng chia thùng rượu thành vô số lát mỏng, tính thể tích từng lát rồi cộng lại. Năm 1615, ông in cuốn *Nova stereometria doliorum vinariorum* (Phép đo thể tích mới cho thùng rượu vang). Đó là một trong những cuốn sách đầu tiên dùng một cách có hệ thống ý tưởng mà ngày nay ta gọi là **tích phân**.



Kepler (1615):

chia thùng thành vô số

lát mỏng, cộng thể tích

$$V = \int S(x) dx$$

Kepler chia thùng rượu thành vô số lát mỏng để tính thể tích.

Ý tưởng ấy thật ra đã có từ rất sớm. Archimedes (thế kỉ III TCN) đã tính được diện tích một mảnh parabol và thể tích hình cầu bằng cách “cắt nhỏ rồi ghép lại”. Phải đến Newton và Leibniz (cuối thế kỉ XVII), con người mới nhận ra rằng phép cộng vô số lát mỏng ấy lại là **phép toán ngược của đạo hàm**. Định lí cơ bản của giải tích ra đời, và chỉ với một công thức

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

những bài toán từng làm khó các nhà toán học hàng nghìn năm được giải trong vài dòng.

Tích phân là nghệ thuật chia nhỏ để hiểu cái toàn thể.

Trước khi đọc tiếp, hãy thử sức với ba câu hỏi:

- Một cổng hình parabol rộng 8 m, cao 8 m. Người ta làm một cánh cửa hình chữ nhật rộng 4 m, cao 4,5 m ở giữa cổng, phần còn lại trang trí bằng hoa văn. Phần trang trí có diện tích bao nhiêu mét vuông?
- Một ô tô đang chạy với vận tốc 20 m/s thì phanh, sau đó chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t) = 20 - 5t$ (m/s). Từ lúc phanh đến khi dừng hẳn, ô tô đi thêm được bao nhiêu mét?

- Không tìm nguyên hàm, hãy tính

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}}$$

Câu trả lời (khoảng 24,67 m²; 40 m; $\frac{\pi}{4}$) sẽ lần lượt xuất hiện trong chuyên đề. Câu thứ ba là một bài thi Putnam năm 1980, kì thi Toán dành cho sinh viên Mỹ và Canada!

Mục tiêu của chuyên đề

- **Về kiến thức:** hiểu khái niệm nguyên hàm, tích phân và ý nghĩa hình học, vật lí của chúng; nắm vững bảng nguyên hàm, các tính chất của tích phân; thành thạo phương pháp đổi biến số và tích phân từng phần; biết ứng dụng tích phân tính diện tích hình phẳng, thể tích vật thể, thể tích khối tròn xoay, quãng đường và các đại lượng thực tế.
- **Về kĩ năng:** giải nhanh, chính xác các câu hỏi tích phân theo định dạng bài thi đánh giá năng lực HSA của ĐHQG Hà Nội (trắc nghiệm 4 lựa chọn và điền đáp án) và bài thi tốt nghiệp THPT (trắc nghiệm, đúng – sai, trả lời ngắn), đặc biệt các dạng hàm ẩn, đọc đồ thị, bài toán thực tế.
- **Về tư duy:** nhìn mọi đại lượng “tích lũy” (quãng đường, lượng nước, điện năng, chi phí) bằng con mắt của tổng Riemann: *chia nhỏ, xấp xỉ, cộng lại, lấy giới hạn*.

Đối tượng và cách sử dụng

Chuyên đề dành cho học sinh lớp 12 ôn thi HSA và tốt nghiệp THPT, giáo viên dạy chương *Nguyên hàm và tích phân* (Toán 12, Chương trình GDPT 2018), và những ai yêu toán. Học sinh mới học nên đọc lần lượt Phần II và Dạng 1 – 9 của Phần III; học sinh ôn thi có thể đi thẳng tới các dạng toán, bài tập và đề luyện tập; giáo viên có thể dùng Phần I, Phần IV làm tư liệu mở đầu bài giảng và Phần VII để tổ chức buổi ôn tập.

Bảng. Cấu trúc chuyên đề

Phần	Nội dung	Mức độ
I	Câu chuyện lịch sử: Eudoxus, Archimedes, Lưu Huy, Tổ Hùng, Kepler, Cavalieri, Newton, Leibniz, Riemann	Đọc hiểu
II	Từ tình huống đến khái niệm: nguyên hàm, tích phân, các phương pháp tính, ứng dụng hình học và vật lí	Cơ bản
III	17 dạng toán, 108 ví dụ phân tích chi tiết: câu hỏi kiểu HSA và tốt nghiệp THPT, đề thi tuyển sinh Đại học, đề thi học sinh giỏi và Olympic	Cơ bản → Olympic
IV	Tích phân quanh ta: kiến trúc, giao thông, thủy điện, điện năng, y học, kinh tế, xác suất	Mở rộng
V	94 bài tập chia 7 mức độ	Luyện tập
VI	Lời giải chi tiết: trích lại đề, lời giải ngay sau từng bài	Tự kiểm tra

Phần	Nội dung	Mức độ
VII	Kế hoạch buổi dạy, phiếu học tập, 5 đề luyện tập mô phỏng HSA (100 câu) có đáp án và lời giải chi tiết	Dạy học

★ Về bài thi HSA và bài thi tốt nghiệp THPT.

Phần *Toán học và xử lý số liệu* của bài thi HSA (ĐHQG Hà Nội) gồm **50 câu trong 75 phút**: 35 câu trắc nghiệm 4 lựa chọn và 15 câu điền đáp án, trung bình khoảng 1,5 phút một câu. Bài thi tốt nghiệp THPT môn Toán (từ năm 2025) gồm ba phần: trắc nghiệm nhiều lựa chọn, trắc nghiệm đúng – sai và trả lời ngắn. Vì vậy chuyên đề chú trọng **mẹo giải nhanh**, cách **loại trừ phương án**, cách **kiểm tra bằng máy tính cầm tay** (nếu được phép) và có cả câu hỏi đúng – sai. Mọi đáp số đều đã được kiểm tra lại bằng tính toán.

PHẦN I. CÂU CHUYỆN LỊCH SỬ – HAI NGHÌN NĂM CHIA NHỎ VÀ CỘNG LẠI

Tích phân là một trong những ý tưởng cổ xưa nhất của toán học, nhưng lại thành hình muộn hơn đạo hàm. Suốt gần hai nghìn năm, các nhà toán học tính diện tích và thể tích bằng những mẹo hình học riêng cho từng bài. Chỉ khi Newton và Leibniz phát hiện mối liên hệ giữa *diện tích* và *tốc độ thay đổi*, tích phân mới trở thành một công cụ chung, mạnh mẽ đến mức ngày nay có mặt trong mọi ngành khoa học.



Dòng thời gian hơn hai nghìn năm của tích phân.

1. Eudoxus và phương pháp vét cạn (thế kỉ IV TCN)

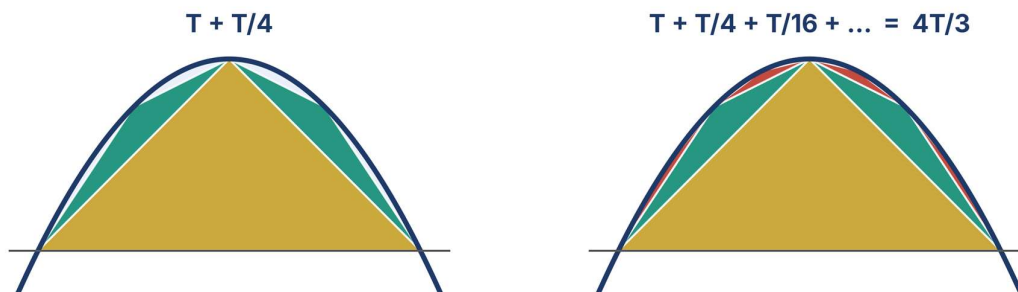
Người Hi Lạp cổ đại rất “sợ” vô hạn: nghịch lí Zeno (Achilles không bao giờ đuổi kịp con rùa) cho thấy lập luận với vô số phần nhỏ dễ dẫn tới mâu thuẫn. Eudoxus xứ Cnidus (khoảng 408 – 355 TCN) tìm ra cách né tránh: **phương pháp vét cạn**. Để chứng minh một hình có diện tích S , ông lồng vào hình đó những đa giác có diện tích ngày càng gần S , rồi chứng minh bằng phản chứng rằng diện tích không thể lớn hơn, cũng không thể nhỏ hơn S . Nhờ phương pháp này, Eudoxus chứng minh được thể tích khối chóp bằng $\frac{1}{3}$ thể tích khối lăng trụ cùng đáy, cùng chiều cao, kết quả được ghi lại trong cuốn XII bộ *Cơ sở* của Euclid.

2. Archimedes – bậc thầy của “cắt nhỏ” (thế kỉ III TCN)

Archimedes xứ Syracuse (khoảng 287 – 212 TCN) đưa phương pháp vét cạn lên đỉnh cao. Trong *Phép cầu phương parabol*, ông lồng vào mảnh parabol một tam giác có diện tích T , rồi hai tam giác nhỏ có tổng diện tích $\frac{T}{4}$, rồi bốn tam giác nhỏ hơn có tổng $\frac{T}{16}$,... Tổng vô hạn

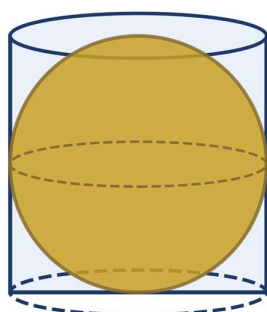
$$T + \frac{T}{4} + \frac{T}{16} + \dots = \frac{4T}{3}$$

cho diện tích mảnh parabol: đúng bằng $\frac{4}{3}$ diện tích tam giác nội tiếp. Đây là một trong những tổng của cấp số nhân lùi vô hạn đầu tiên trong lịch sử.



Archimedes vét cận mảnh parabol bằng các tam giác.

Trong cuốn *Về mặt cầu và hình trụ*, Archimedes chứng minh thể tích hình cầu bằng $\frac{2}{3}$ thể tích hình trụ ngoại tiếp, và diện tích mặt cầu bằng diện tích xung quanh của hình trụ ấy. Ông tự hào về kết quả này đến mức dặn khắc hình cầu nội tiếp hình trụ lên bia mộ mình. Năm 75 TCN, Cicero, khi đó làm quan ở Sicily, kể rằng ông đã tìm thấy ngôi mộ bị cây cỏ che lấp nhờ chính hình khắc ấy.



$$V \text{ cầu} = \frac{2}{3} V \text{ trụ}$$

$$S \text{ cầu} = S \text{ xung quanh trụ}$$

(Archimedes, *Về mặt cầu và hình trụ*)

Hình khắc trên bia mộ Archimedes: hình cầu nội tiếp hình trụ.

❖ Cuốn sách bị viết đè.

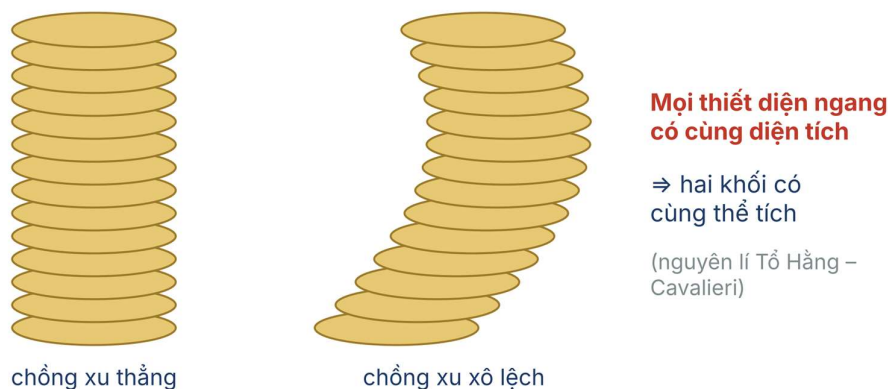
Năm 1906, nhà ngữ văn học Đan Mạch J. L. Heiberg phát hiện ở Constantinople một cuốn sách kinh cầu nguyên thế kỉ XIII được viết đè lên một bản chép tay các tác phẩm của Archimedes đã bị cạo chữ. Trong đó có cuốn *Phương pháp*, tưởng đã thất truyền, nơi Archimedes kể cách ông tìm ra các kết quả: tưởng tượng hình được ghép từ vô số lát mỏng rồi “cân” chúng trên một đòn bẩy. Đó chính là tư duy tích phân, đi trước Newton gần hai nghìn năm.

3. Phương Đông: Lưu Huy và cha con Tổ Xung Chi

Ở Trung Hoa, năm 263, Lưu Huy chú giải bộ *Cửu chương toán thuật* và dùng đa giác đều 3072 cạnh nội tiếp đường tròn để tính $\pi \approx 3,1416$. Ông viết: “Cắt càng nhỏ thì phần mất đi càng ít; cắt mãi đến không thể cắt được nữa thì đa giác trùng với hình tròn, không mất gì cả”, một mô tả rất

gần với khái niệm giới hạn. Lưu Huy cũng nghiên cứu khối “mô hợp phương cái” (phần chung của hai hình trụ vuông góc) để tính thể tích hình cầu, nhưng chưa hoàn thành.

Khoảng hai trăm năm sau, Tổ Xung Chi (429 – 500), người tính π chính xác tới 7 chữ số thập phân, cùng con trai là Tổ Hằng giải trọn bài toán. Tổ Hằng phát biểu nguyên lý: “*Nếu diện tích các thiết diện ở cùng một độ cao luôn bằng nhau thì thể tích hai khối không thể khác nhau*”. Phương Tây chỉ biết đến nguyên lý này hơn một nghìn năm sau, dưới tên **nguyên lý Cavalieri**.



Nguyên lý Tổ Hằng – Cavalieri: các lát cắt bằng nhau thì thể tích bằng nhau.

4. Kepler, Cavalieri, Fermat: vô cùng bé trở lại (thế kỉ XVII)

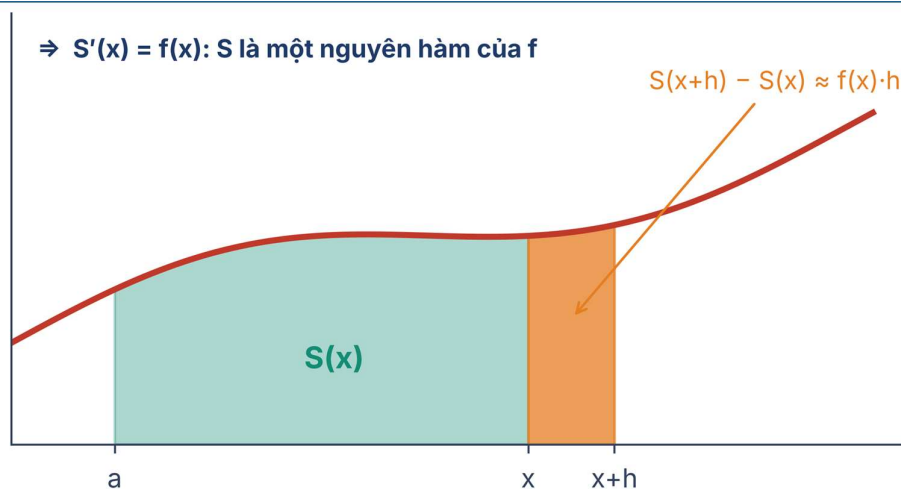
Sau cuốn sách về thùng rượu của Kepler (1615), Bonaventura Cavalieri, học trò của Galileo, xuất bản *Geometria indivisibilibus* (1635), xem hình phẳng như tập hợp vô số “đoạn thẳng không chia được” và khối như tập hợp vô số “lát phẳng”. Phương pháp tuy chưa chặt chẽ nhưng cho kết quả đúng rất nhanh, chẳng hạn diện tích dưới đường $y = x^n$ từ 0 đến a là $\frac{a^{n+1}}{n+1}$.

Pierre de Fermat (khoảng năm 1636) tính lại kết quả này cho cả số mũ hữu tỉ bằng một mẹo tài tình: chia đoạn $[0; a]$ theo cấp số nhân thay vì chia đều, để tổng diện tích các hình chữ nhật trở thành tổng một cấp số nhân. Năm 1643, Evangelista Torricelli làm cả châu Âu kinh ngạc với “chiếc kèn Gabriel”: khối tròn xoay sinh bởi đường $y = \frac{1}{x}$ ($x \geq 1$) dài vô hạn nhưng thể tích chỉ bằng π .

5. Newton và Leibniz: định lý cơ bản của giải tích

Isaac Barrow, thầy của Newton ở Cambridge, đã nhận thấy bằng hình học rằng bài toán tìm tiếp tuyến và bài toán tìm diện tích là ngược nhau. Isaac Newton (những năm 1665 – 1666, khi trường Cambridge đóng cửa vì dịch hạch) và Gottfried Wilhelm Leibniz (khoảng 1675, ở Paris) độc lập biến nhận xét ấy thành một phương pháp tính toán tổng quát: muốn tính diện tích dưới đường cong $y = f(x)$, chỉ cần tìm một hàm F có đạo hàm bằng f . Đó là **định lý cơ bản của giải tích**:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad F'(x) = f(x).$$



Vì sao diện tích lại liên quan đến đạo hàm: phần diện tích tăng thêm xấp xỉ $f(x) \cdot h$.

Ngày 29 tháng 10 năm 1675, trong một bản thảo, Leibniz lần đầu viết kí hiệu $\int$, một chữ S kéo dài, viết tắt của *summa* (tổng), cùng với kí hiệu dx chỉ một “lượng vô cùng bé” của x . Kí hiệu $\int f(x) dx$ vì thế kể lại đúng ý nghĩa: *tổng của vô số tích* $f(x) \cdot dx$. Cuộc tranh cãi ai là người phát minh trước giữa Newton và Leibniz kéo dài nhiều thập kỉ và chia rẽ giới toán học Anh với lục địa châu Âu; nhưng chính các kí hiệu thông minh của Leibniz đã chiến thắng và được dùng đến tận hôm nay.

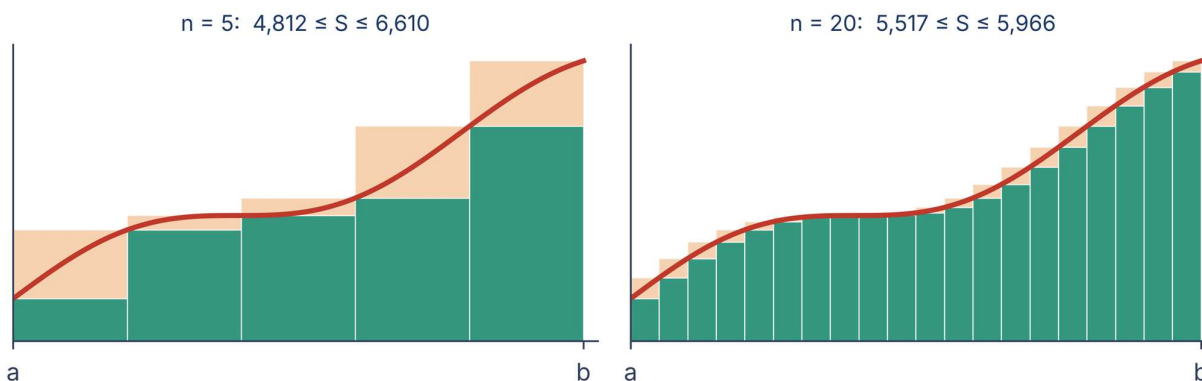
❖ Vì sao gọi là “tích phân”?

Từ *integral* do Jacob Bernoulli dùng lần đầu năm 1690, gốc Latin *integer* nghĩa là “nguyên vẹn”: tích phân ghép các phần nhỏ thành một thể nguyên vẹn. Thuật ngữ tiếng Việt *tích phân* (積分) mượn từ Hán: *tích* là gom góp, tích lũy; *phân* là các phần chia nhỏ. Còn *nguyên hàm* (原函數) nghĩa là “hàm gốc”: hàm mà từ đó lấy đạo hàm thì được hàm đã cho.

6. Cauchy, Riemann, Lebesgue: xây móng vững chắc

Suốt thế kỉ XVIII, tích phân được dùng rộng rãi nhưng “vô cùng bé” vẫn là khái niệm mơ hồ; giám mục Berkeley từng chế giễu chúng là “bóng ma của những đại lượng đã chết”. Năm 1823, Augustin-Louis Cauchy định nghĩa tích phân bằng giới hạn của tổng. Năm 1854, Bernhard Riemann tổng quát hóa định nghĩa đó: chia $[a; b]$ thành các đoạn nhỏ, chọn trên mỗi đoạn một điểm ξ_i , lập **tổng Riemann** $\sum f(\xi_i) \Delta x_i$ và cho độ dài các đoạn dần tới 0.

Tổng dưới (xanh) và tổng trên (cam) kẹp diện tích S ; n càng lớn khoảng kẹp càng hẹp



Tổng dưới và tổng trên kẹp diện tích; chia càng mịn, hai tổng càng gần nhau.

Năm 1902, Henri Lebesgue đưa ra một cách tích phân mới: thay vì chia trục hoành, ông chia trục tung, “giống như người đếm tiền phân loại các tờ bạc theo mệnh giá rồi mới cộng”. Tích phân Lebesgue trở thành nền tảng của lý thuyết xác suất và vật lý lượng tử hiện đại.

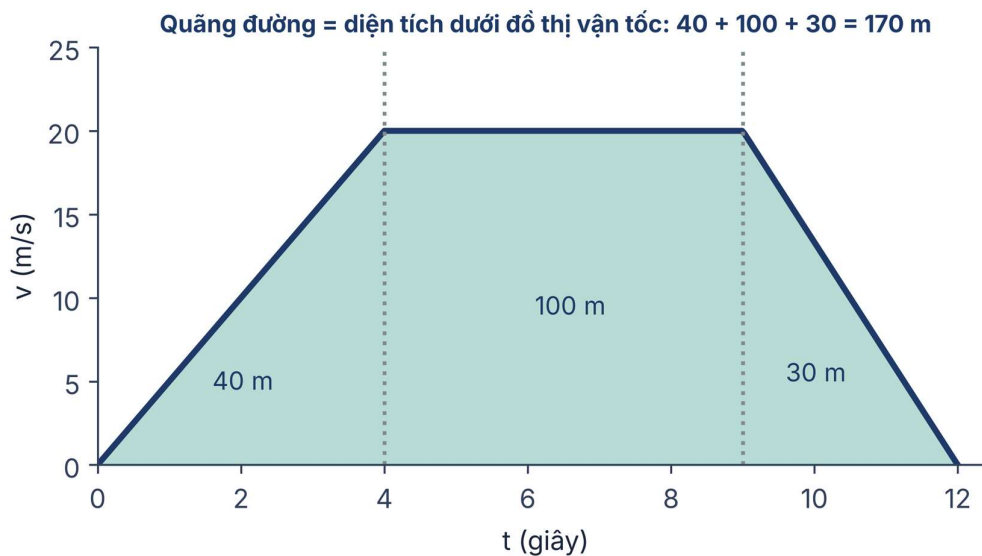
7. Tích phân trong nhà trường Việt Nam

Theo Chương trình giáo dục phổ thông 2018, chủ đề *Nguyên hàm và tích phân* thuộc Toán 12, gồm: nguyên hàm và bảng nguyên hàm của các hàm số sơ cấp thường gặp; tích phân và tính chất; ứng dụng tích phân tính diện tích hình phẳng, thể tích vật thể và thể tích khối tròn xoay; các bài toán thực tế (quãng đường, lượng tích lũy). Đây là nội dung xuất hiện đều đặn trong đề thi tốt nghiệp THPT và đề thi đánh giá năng lực HSA, thường với các câu hỏi về hàm ẩn, đọc đồ thị và mô hình thực tế.

PHẦN II. TỪ TÌNH HUỐNG ĐẾN KHÁI NIỆM

Tình huống 1. Biết vận tốc, tìm quãng đường

Đồng hồ tốc độ của ô tô cho biết vận tốc $v(t)$ tại từng thời điểm. Nếu vận tốc không đổi, quãng đường bằng vận tốc nhân thời gian. Nhưng nếu vận tốc thay đổi liên tục thì sao? Ta chia khoảng thời gian thành nhiều khoảng nhỏ Δt , trên mỗi khoảng coi vận tốc gần như không đổi, quãng đường xấp xỉ $\sum v(t_i)\Delta t$. Hình vẽ cho thấy tổng này chính là **diện tích dưới đồ thị vận tốc**. Mặt khác, quãng đường $s(t)$ có đạo hàm $s'(t) = v(t)$. Vậy *biết đạo hàm, tìm lại hàm và tính diện tích* là hai mặt của cùng một bài toán.

Tình huống 2. Diện tích dưới parabol $y = x^2$

Chia đoạn $[0; 1]$ thành n phần bằng nhau, dựng các hình chữ nhật có chiều cao $\left(\frac{k}{n}\right)^2$.

Tổng diện tích

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3}.$$

Kết quả $\frac{1}{3}$ cũng nhận được ngay từ hàm $F(x) = \frac{x^3}{3}$ (có $F'(x) = x^2$): $F(1) - F(0) = \frac{1}{3}$. Tính toán bằng tổng thì vất vả, bằng nguyên hàm thì chỉ một dòng: đó là sức mạnh của định lý Newton – Leibniz.

Tình huống 3. Lượng nước chảy vào bể

Nước chảy vào bể với tốc độ $r(t)$ lít/phút thay đổi theo thời gian. Lượng nước tích lũy sau T phút là $\int_0^T r(t) dt$. Mọi bài toán “biết *tốc độ*, tìm *tổng lượng*” (điện năng từ công suất, dân số từ tốc độ tăng, chi phí từ chi phí biên) đều có cùng mô hình này.

★ Nhận xét.

Ba tình huống dẫn tới hai khái niệm trụ cột của chương: **nguyên hàm** (phép toán ngược của đạo hàm) và **tích phân** (tổng tích lũy, diện tích có dấu). Định lý cơ bản của giải tích nối hai khái niệm ấy với nhau.

1. Nguyên hàm**■ Nguyên hàm.**

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng K . Hàm số $F(x)$ được gọi là **một nguyên hàm** của $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$.

■ Họ nguyên hàm.

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$ với C là hằng số. Kí hiệu $\int f(x) dx = F(x) + C$. Mọi hàm số liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K .

Tính chất. Với $k \neq 0$ là hằng số:

$$\int f'(x) dx = f(x) + C; \quad \int kf(x) dx = k \int f(x) dx; \quad \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

Bảng. Nguyên hàm của các hàm số thường gặp

Hàm số $f(x)$	Nguyên hàm $\int f(x) dx$	Mở rộng với $u = ax + b$ ($a \neq 0$)
x^α ($\alpha \neq -1$)	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{a(\alpha+1)} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$	$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln ax+b + C$
e^x	$e^x + C$	$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$
a^x ($0 < a \neq 1$)	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{kx} dx = \frac{a^{kx}}{k \ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$

Hàm số $f(x)$	Nguyên hàm $\int f(x) dx$	Mở rộng với $u = ax + b$ ($a \neq 0$)
$\cos x$	$\sin x + C$	$\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2(ax + b)} = \frac{1}{a} \tan(ax + b) + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2(ax + b)} = -\frac{1}{a} \cot(ax + b) + C$

★ Mẹo kiểm tra nguyên hàm.

Mọi kết quả nguyên hàm đều kiểm tra được bằng cách **lấy đạo hàm ngược lại**. Với câu trắc nghiệm “hàm số nào là một nguyên hàm của f ”, hãy đạo hàm từng phương án thay vì đi tìm nguyên hàm. Với $u = ax + b$, nhớ **chia cho a** : đây là lỗi sai phổ biến nhất của học sinh.

Các nguyên hàm mở rộng thường dùng (kiểm tra bằng đạo hàm):

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad \int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C, \quad \int \ln x dx = x \ln x - x + C.$$

2. Hai phương pháp tìm nguyên hàm

■ Phương pháp đổi biến số.

Nếu $\int f(u) du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục thì

$$\int f(u(x)) u'(x) dx = F(u(x)) + C.$$

Dấu hiệu đặt ẩn phụ (nhận ra “ $u'(x) dx$ ” đi kèm):

Biểu thức xuất hiện	Cách đặt	Ví dụ
$f(x^n) \cdot x^{n-1}$	$t = x^n$	$\int x e^{x^2} dx$
$f(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$	$t = \ln x$	$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$
$f(\sin x) \cos x, f(\cos x) \sin x$	$t = \sin x, t = \cos x$	$\int \sin^3 x \cos x dx$
$f(\tan x) \frac{1}{\cos^2 x}$	$t = \tan x$	$\int \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x} dx$
$f(e^x) e^x$	$t = e^x$	$\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$
$\sqrt[n]{ax + b}$	$t = \sqrt[n]{ax + b}$	$\int x \sqrt{x + 1} dx$
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin t$	$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$

Biểu thức xuất hiện	Cách đặt	Ví dụ
$\frac{1}{a^2 + x^2}$	$x = atant$	$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

■ Phương pháp nguyên hàm từng phần.

Nếu $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục thì

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Nhất lô, nhì đa, tam lượng, tứ mũ.

Câu khẩu quyết trên cho biết **thứ tự ưu tiên chọn** u khi nguyên hàm từng phần: hàm *logarit* trước, rồi *đa thức*, rồi *lượng giác*, cuối cùng *mũ*; phần còn lại là dv . Chẳng hạn $\int x \ln x dx$ đặt $u = \ln x$; $\int x e^x dx$ đặt $u = x$; $\int e^x \sin x dx$ đặt $u = \sin x$ (từng phần hai lần rồi giải phương trình).

3. Tích phân

■ Tích phân.

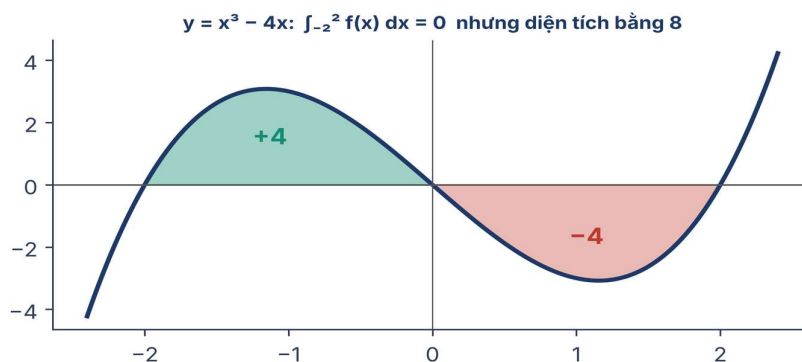
Cho $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn đó. Hiệu $F(b) - F(a)$ được gọi là **tích phân từ a đến b** của $f(x)$:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Tích phân không phụ thuộc vào cách chọn nguyên hàm (hằng số C triệt tiêu) và không phụ thuộc vào tên biến: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$.

■ Ý nghĩa hình học.

Nếu $f(x) \geq 0$ và liên tục trên $[a; b]$ thì $\int_a^b f(x) dx$ là **diện tích hình thang cong** giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$. Khi f đổi dấu, tích phân là **diện tích có dấu**: phần trên trục hoành mang dấu cộng, phần dưới mang dấu trừ.



Tích phân là diện tích có dấu: phần dưới trục hoành mang dấu âm.

Bảng. Tính chất của tích phân (f, g liên tục, k là hằng số)

Tính chất	Công thức
Cận trùng nhau	$\int_a^a f(x) dx = 0$
Đổi cận	$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$
Tuyến tính	$\int_a^b [kf(x) \pm g(x)] dx = k \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
Cộng cận	$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$
So sánh	$f(x) \geq g(x)$ trên $[a; b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$
Hàm chẵn, hàm lẻ	f chẵn: $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$; f lẻ: $\int_{-a}^a f = 0$
Đối xứng	$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$
Đạo hàm của tích phân cận trên	$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)$

⚠ Ba lỗi kinh điển.

(1) Đổi biến nhưng **quên đổi cận**. (2) Tính $\int_a^b |f(x)| dx$ mà bỏ dấu giá trị tuyệt đối không xét dấu. (3) Dùng công thức nguyên hàm trên đoạn có điểm hàm số không xác định, ví dụ “tính” $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^1 = -2$: vô lí vì hàm dương mà tích phân âm! (Tích phân này không tồn tại theo nghĩa thông thường.)

Đổi biến và từng phần cho tích phân:

$$\int_a^b f(u(x))u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du, \quad \int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du.$$

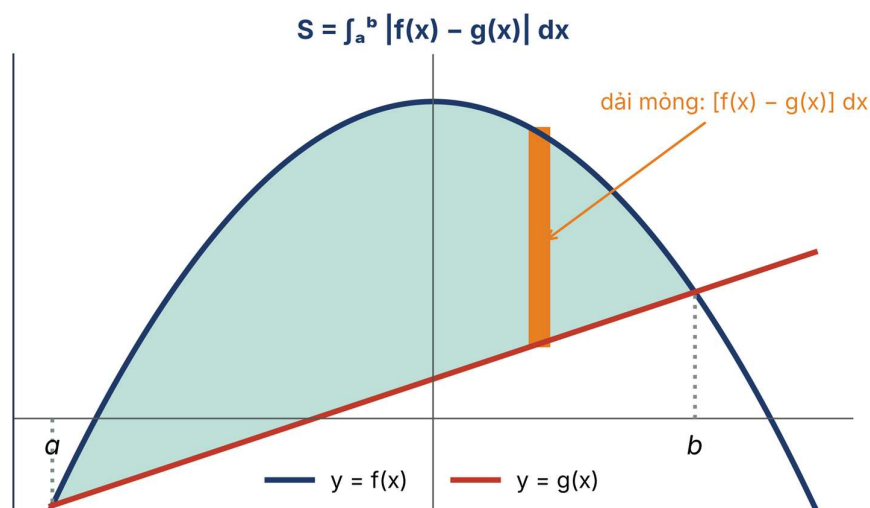
4. Ứng dụng hình học của tích phân**■ Diện tích hình phẳng.**

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số liên tục $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ có diện tích

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Đặc biệt, hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x)$, trục hoành, $x = a$, $x = b$ có diện tích

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$



Diện tích giữa hai đường cong là “tổng” của các dải mỏng có chiều cao $|f(x) - g(x)|$.

★ Quy trình 4 bước tính diện tích.

- (1) Giải phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = g(x)$ để tìm các cận (nếu đề chưa cho).
- (2) Xét dấu $f(x) - g(x)$ trên từng khoảng giữa các nghiệm, hoặc vẽ phác đồ thị.
- (3) Tách tích phân, bỏ dấu giá trị tuyệt đối. (4) Tính và kiểm tra: diện tích luôn **đương**.

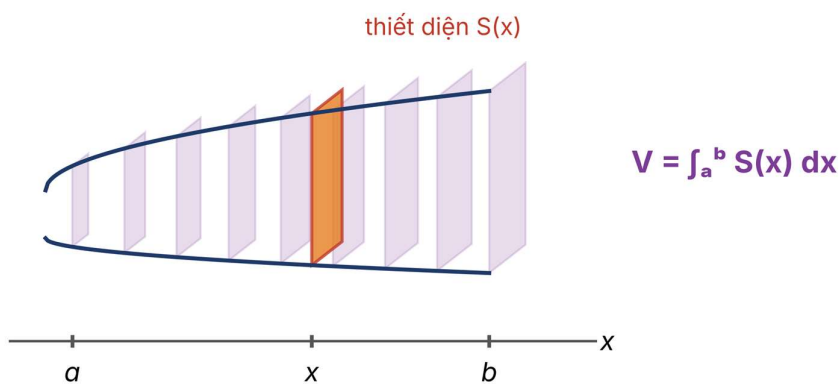
Mẹo nhanh: nếu $f - g$ không đổi dấu trên $(a; b)$ thì

$$\int_a^b |f - g| dx = \left| \int_a^b (f - g) dx \right|$$

■ Thể tích vật thể.

Cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($a \leq x \leq b$), được thiết diện có diện tích $S(x)$ liên tục. Khi đó thể tích vật thể là

$$V = \int_a^b S(x) dx$$



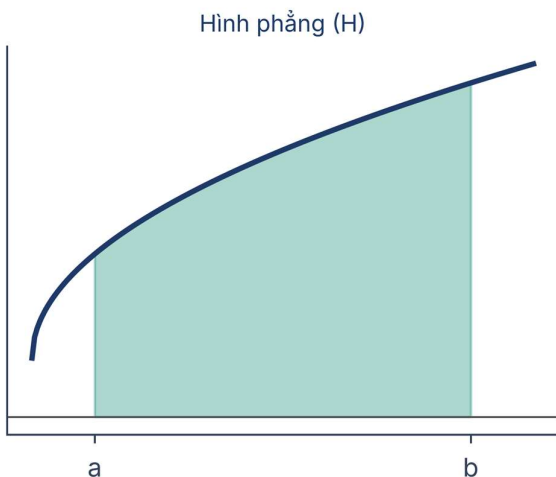
Thể tích vật thể bằng tích phân của diện tích thiết diện.

■ Thể tích khối tròn xoay.

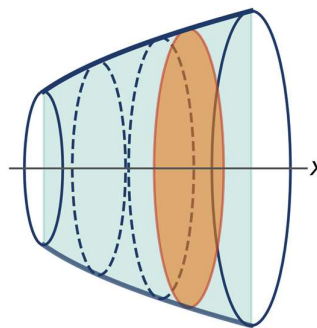
Quay hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x)$, trục hoành, $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox , mỗi thiết diện là hình tròn bán kính $|f(x)|$, nên

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Nếu quay hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x)$, $y = g(x)$ với $0 \leq g(x) \leq f(x)$ thì thiết diện là hình vành khăn: $V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx$.



lát cắt là hình tròn bán kính $f(x)$: $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$



Quay hình phẳng quanh trục hoành: mỗi lát cắt là một hình tròn.

△ Vành khăn không phải hiệu bình phương của hiệu.

Khi quay miền nằm giữa hai đồ thị, thể tích là $\pi \int (f^2 - g^2) dx$, **không phải** $\pi \int (f - g)^2 dx$. Ngoài ra nếu hai đồ thị nằm ở hai phía trục hoành, phải lấy đối xứng phần dưới lên rồi xét đồ thị “ngoài cùng”.

5. Ứng dụng vật lý và thực tế

- **Chuyển động:** $v(t) = s'(t)$, $a(t) = v'(t)$. Quãng đường đi được trong khoảng $[t_1; t_2]$ là $\int_{t_1}^{t_2} |v(t)| dt$; độ dịch chuyển là $\int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$.

- **Lượng tích lũy:** nếu $Q'(t) = r(t)$ thì

$$Q(t_2) - Q(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} r(t) dt$$

(lượng nước, điện năng, dân số, doanh thu...).

- **Công của lực biến thiên:** $A = \int_a^b F(x) dx$.
- **Giá trị trung bình** của hàm số trên $[a; b]$: $\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Bảng. Tóm tắt quy trình giải các bài toán tích phân

Bước	Việc cần làm	Câu hỏi tự đặt ra
1	Nhận dạng hàm dưới dấu tích phân	Có trong bảng nguyên hàm không? Có “ $u' dx$ ” đi kèm không? Là tích của hai loại hàm khác nhau không?
2	Chọn phương pháp	Biến đổi đại số, đổi biến hay từng phần?
3	Tính toán	Đã đổi cận chưa? Đã xét dấu giá trị tuyệt đối chưa?
4	Kiểm tra	Đạo hàm lại nguyên hàm; ước lượng dấu và độ lớn; bấm máy tính kiểm tra

PHẦN III. CÁC DẠNG TOÁN VÀ VÍ DỤ PHÂN TÍCH

Dạng 1. Nguyên hàm cơ bản – dùng bảng và tính chất

★ Phương pháp.

Biến đổi hàm số thành **tổng các hàm có trong bảng** (khai triển, chia tách phân thức, hạ bậc lượng giác), rồi dùng tính chất tuyến tính. Với câu trắc nghiệm, cách nhanh nhất thường là **lấy đạo hàm các phương án**.

◆ Ví dụ 1.

Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 - \frac{2}{x} + e^x$ trên khoảng $(0; +\infty)$ là

A. $x^3 - 2\ln x + e^x + C.$

B. $x^3 + \frac{2}{x^2} + e^x + C.$

C. $6x + \frac{2}{x^2} + e^x + C.$

D. $\frac{x^3}{3} - 2\ln x + e^x + C.$

Lời giải. $\int 3x^2 dx = x^3$, $\int \frac{2}{x} dx = 2\ln x$ (vì $x > 0$), $\int e^x dx = e^x$.

Vậy $\int f(x) dx = x^3 - 2\ln x + e^x + C$. Chọn A.

⚠ Nhầm đạo hàm với nguyên hàm.

Phương án C là *đạo hàm* của f ; phương án B nhầm $\int \frac{1}{x} dx$ với $\int \frac{1}{x^2} dx$. Đây là hai phương án nhiễu kinh điển trong đề thi.

◆ Ví dụ 2.

$\int \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) dx$ bằng

A. $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + C.$

B. $-\frac{1}{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + C.$

C. $\frac{1}{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + C.$

D. $-2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + C.$

Lời giải.

$$\int \sin(ax + b) dx = -\frac{1}{a}\cos(ax + b) + C$$

với $a = 2$. Chọn B.

◆ Ví dụ 3.

Hàm số $F(x) = xe^x$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

A. $f(x) = e^x$.

B. $f(x) = xe^x$.

C. $f(x) = (x+1)e^x$.

D. $f(x) = (x-1)e^x$.

Phân tích. Không cần tìm nguyên hàm: F là nguyên hàm của f nghĩa là $F' = f$.

Lời giải. $F'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$. Chọn C.

◆ Ví dụ 4.

Biết

$$\int (x^2 + 1)^2 dx = ax^5 + bx^3 + cx + C$$

Tính $15(a + b + c)$.

Lời giải. Khai triển $(x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$, nên

$$\int (x^2 + 1)^2 dx = \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + C.$$

Do đó $a = \frac{1}{5}$, $b = \frac{2}{3}$, $c = 1$ và $15(a + b + c) = 3 + 10 + 15 = 28$. **Đáp số: 28**

◆ Ví dụ 5.

Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x + \sin^2 \frac{x}{2}$ là

A. $2^x \ln 2 + \frac{x - \sin}{2} + C$.

B. $\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{x - \sin}{2} + C$.

C. $\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{x + \sin x}{2} + C$.

D. $\frac{2^{x+1}}{x+1} + \frac{x - \sin x}{2} + C$.

Lời giải. $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2}$. Hạ bậc: $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$, nên $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \frac{x - \sin x}{2}$.

Chọn B. (Phương án D nhầm hàm mũ 2^x với hàm lũy thừa x^2 .)

Dạng 2. Nguyên hàm thỏa mãn điều kiện cho trước

★ Phương pháp.

Tìm họ nguyên hàm $F(x) + C$, rồi thay điều kiện $F(x_0) = y_0$ để tìm C . Trong bài toán chuyển động: $v(t) = \int a(t) dt$, $s(t) = \int v(t) dt$, hằng số C xác định từ vận tốc, vị trí ban đầu.

◆ Ví dụ 6.

Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = 4x^3 - 6x + 1$ và $F(1) = 3$. Tính $F(2)$.

Lời giải. $F(x) = x^4 - 3x^2 + x + C$. Từ $F(1) = -1 + C = 3$ được $C = 4$.

Vậy $F(2) = 16 - 12 + 2 + 4 = 10$. **Đáp số: 10**

★ Mẹo không cần tìm C.

$F(2) - F(1) = \int_1^2 f(x) dx$, nên

$$F(2) = F(1) + \int_1^2 f(x) dx = 3 + 7 = 10$$

Cách này đặc biệt hữu ích khi bấm máy tính.

◆ Ví dụ 7.

Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{2x-1}$ trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ và $F(1) = 2$. Giá trị của $F(3)$ là

A. $\ln 5 + 2$.

B. $\frac{1}{2}\ln 5 + 2$.

C. $2\ln 5 + 2$.

D. $\frac{1}{2}\ln 5$.

Lời giải. $F(x) = \frac{1}{2}\ln(2x-1) + C$; $F(1) = C = 2$. Vậy $F(3) = \frac{1}{2}\ln 5 + 2$. Chọn B.

◆ Ví dụ 8.

Một vật chuyển động với gia tốc $a(t) = 6t$ (m/s²), vận tốc ban đầu là 2 m/s. Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 3$ giây là bao nhiêu m/s?

Lời giải. $v(t) = \int 6t dt = 3t^2 + C$; $v(0) = C = 2$. Vậy $v(3) = 27 + 2 = 29$. **Đáp số: 29**

◆ Ví dụ 9.

Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = 3 - 5\sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $f(x) = 3x + 5\cos x + 2$.

B. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$.

C. $f(\pi) = 3\pi + 10$.

D. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} + 5$.

Lời giải. $f(x) = 3x + 5\cos x + C$, $f(0) = 5 + C = 10 \Rightarrow C = 5$.

Vậy $f(x) = 3x + 5\cos x + 5$, nên $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} + 5$ và $f(\pi) = 3\pi$. Chọn **D**.

⚠ Quên hằng số C.

Phương án B ứng với việc bỏ qua hằng số C (coi $f(x) = 3x + 5\cos x$); phương án A tính sai hằng số C .

◆ Ví dụ 10.

Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = 1$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$F(x) = e^x + x^2$.		
b)	$F(1) = e + 1$.		
c)	Hàm số $F(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.		
d)	$\int_0^1 f(x) dx = e$.		

Lời giải. $F(x) = e^x + x^2 + C$, $F(0) = 1 + C = 1 \Rightarrow C = 0$.

a) $F(x) = e^x + x^2$: **Đúng**.

b) $F(1) = e + 1$: **Đúng**.

c) $F'(x) = e^x + 2x$, tại $x = -1$ có $F'(-1) = e^{-1} - 2 < 0$ nên F không đồng biến trên $\mathbb{R}$: **Sai**.

d)

$$\int_0^1 f(x) dx = F(1) - F(0) = e:$$

Đúng.

Dạng 3. Phương pháp đổi biến số tìm nguyên hàm

★ Phương pháp.

Tìm trong biểu thức một hàm $u(x)$ mà **đạo hàm $u'(x)$ cũng xuất hiện** (sai khác hằng số). Đặt $t = u(x)$, $dt = u'(x) dx$, đưa về nguyên hàm theo t , cuối cùng **trả lại biến x** .

◆ Ví dụ 11.

 $\int x(x^2 + 1)^5 dx$ bằng

A. $\frac{(x^2+1)^6}{6} + C.$

B. $\frac{(x^2+1)^6}{12} + C.$

C. $\frac{x^2(x^2+1)^6}{12} + C.$

D. $\frac{(x^2+1)^6}{3} + C.$

Lời giải. Đặt $t = x^2 + 1$, $dt = 2x dx$:

$$\int x(x^2 + 1)^5 dx = \frac{1}{2} \int t^5 dt = \frac{t^6}{12} + C.$$

Chọn B.

◆ Ví dụ 12.

 $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$ bằng

A. $\frac{\ln^4 x}{4} + C.$

B. $3\ln^2 x + C.$

C. $\frac{\ln^4 x}{4x} + C.$

D. $\ln^4 x + C.$

Lời giải. Đặt $t = \ln x$, $dt = \frac{dx}{x}$: $\int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C$. Chọn A.

◆ Ví dụ 13.

 $\int \cos^3 x dx$ bằng

A. $\frac{\cos^4 x}{4} + C.$

B. $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$

C. $\sin x + \frac{\sin^3 x}{3} + C.$

D. $\frac{\sin^4 x}{4\cos x} + C.$

Phân tích. Lũy thừa lẻ của $\cos$: tách một $\cos x$ để làm $d(\sin x)$, phần còn lại $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.**Lời giải.**

$$\int \cos^3 x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \int (1 - t^2) dt = t - \frac{t^3}{3} + C$$

với $t = \sin x$. Chọn B.

◆ Ví dụ 14.

 $\int \frac{e^x}{e^x + 2} dx$ bằng

A. $\ln(e^x + 2) + C.$

B. $e^x \ln(e^x + 2) + C.$

C. $\frac{1}{e^x + 2} + C.$

D. $x - \ln(e^x + 2) + C.$

Lời giải. Tử số là đạo hàm của mẫu số: $\int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + C$. Chọn A.

◆ Ví dụ 15.

Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ thỏa mãn $F(0) = 3$. Tính $F(4)$.

Lời giải. Đặt $t = x^2 + 9$:

$$F(x) = \int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t} + C = \sqrt{x^2 + 9} + C.$$

Từ $F(0) = 3 + C = 3$ được $C = 0$, nên $F(4) = \sqrt{25} = 5$. **Đáp số: 5**

Dạng 4. Phương pháp nguyên hàm từng phần

★ Phương pháp.

Dùng khi hàm dưới dấu nguyên hàm là **tích của hai loại hàm khác nhau** (đa thức nhân mũ, đa thức nhân lượng giác, đa thức nhân lôgarit, mũ nhân lượng giác). Chọn u theo thứ tự “**nhất lô, nhì đa, tam lượng, tứ mũ**”, phần còn lại là dv .

◆ Ví dụ 16.

$\int xe^x dx$ bằng

- A. $xe^x + C$. B. $(x+1)e^x + C$. C. $(x-1)e^x + C$. D. $\frac{x^2}{2}e^x + C$.

Lời giải. Đặt $u = x$, $dv = e^x dx$ thì $du = dx$, $v = e^x$:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = (x-1)e^x + C.$$

Chọn C.

◆ Ví dụ 17.

$\int x \ln x dx$ bằng

- A. $\frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$. B. $\frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{2} + C$. C. $x^2 \ln x - \frac{x^2}{4} + C$. D. $\frac{x^2 \ln x}{2} + \frac{x^2}{4} + C$.

Lời giải. Ưu tiên “lô”: $u = \ln x$, $dv = x dx$, nên $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^2}{2}$. Khi đó

$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{x}{2} \, dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C.$$

Chọn A.

◆ Ví dụ 18.

$\int x \cos x \, dx$ bằng

A. $x \sin x - \cos x + C.$

B. $-x \sin x + \cos x + C.$

C. $x \sin x + \cos x + C.$

D. $\frac{x^2}{2} \sin x + C.$

Lời giải. $u = x, dv = \cos x \, dx$:

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Chọn C.

◆ Ví dụ 19.

Tìm $I = \int e^x \sin x \, dx$.

Phân tích. Mũ và lượng giác “không chịu biến mất” khi lấy đạo hàm hay nguyên hàm. Từng phần **hai lần** sẽ quay về chính I , và ta giải phương trình ẩn I .

Lời giải. Đặt $u = \sin x, dv = e^x \, dx$: $I = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$. Lại đặt $u = \cos x, dv = e^x \, dx$:

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx = e^x \cos x + I.$$

Vậy $I = e^x \sin x - e^x \cos x - I$, suy ra

$$I = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} + C.$$

◆ Ví dụ 20.

Biết

$$\int (2x + 1) \ln x \, dx = (x^2 + x) \ln x - \frac{x^2}{a} - bx + C$$

với a, b là các số nguyên. Tính $a + b$.

Lời giải. Đặt $u = \ln x, dv = (2x + 1) \, dx$, chọn $v = x^2 + x$:

$$\int (2x + 1)\ln x \, dx = (x^2 + x)\ln x - \int (x + 1) \, dx = (x^2 + x)\ln x - \frac{x^2}{2} - x + C.$$

Vậy $a = 2, b = 1, a + b = 3$. **Đáp số: 3**

★ Mẹo chọn

vkhéo. Ở ví dụ trên, chọn $v = x^2 + x$ (thay vì $x^2 + x +$ hằng số khác) giúp $\frac{v}{x} = x + 1$ gọn gàng. Tương tự, với $\int x \ln(x + 1) \, dx$ nên chọn $v = \frac{x^2 - 1}{2}$ để $v \cdot \frac{1}{x+1} = \frac{x-1}{2}$.

Dạng 5. Tích phân: định nghĩa và tính chất

◆ Ví dụ 21.

Giá trị của $\int_0^1 (3x^2 + 2x) \, dx$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 5.

Lời giải. $[x^3 + x^2]_0^1 = 2$. Chọn **B**.

◆ Ví dụ 22.

Cho $\int_0^2 f(x) \, dx = 3$ và $\int_0^2 g(x) \, dx = -1$. Tính $\int_0^2 [2f(x) - 3g(x) + x] \, dx$.

Lời giải. Theo tính chất tuyến tính:

$$2 \cdot 3 - 3 \cdot (-1) + \int_0^2 x \, dx = 6 + 3 + 2 = 11.$$

Đáp số: 11

◆ Ví dụ 23.

Cho f liên tục trên $\mathbb{R}$ với $\int_1^4 f(x) \, dx = 7$ và $\int_1^2 f(x) \, dx = 3$. Tính $\int_2^4 2f(x) \, dx$.

Lời giải. Cộng cận: $\int_2^4 f = \int_1^4 f - \int_1^2 f = 4$, nên $\int_2^4 2f(x) \, dx = 8$. **Đáp số: 8**

◆ Ví dụ 24.

Giá trị của $\int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x) \, dx$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. $\sqrt{2}$.**Lời giải.**

$$[-\cos x + \sin x]_0^{\pi/2} = (0 + 1) - (-1 + 0) = 2.$$

Chọn C.

◆ Ví dụ 25.Cho f liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^3 f(x) dx = 6$. Giá trị của $\int_0^1 f(3x) dx$ là

A. 18.

B. 6.

C. 3.

D. 2.

Lời giải. Đặt $t = 3x$, $dt = 3 dx$; $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = 1 \Rightarrow t = 3$:

$$\int_0^1 f(3x) dx = \frac{1}{3} \int_0^3 f(t) dt = 2.$$

Chọn D.

◆ Ví dụ 26.Cho $F(x) = \int_1^x \sqrt{t^3 + 1} dt$. Giá trị của $F'(2)$ là

A. 3.

B. 9.

C. $\sqrt{2}$.D. $3 - \sqrt{2}$.**Lời giải.** Theo định lý cơ bản: $F'(x) = \sqrt{x^3 + 1}$, nên $F'(2) = \sqrt{9} = 3$. Chọn A. (Không cần, và cũng không thể, tìm nguyên hàm của $\sqrt{t^3 + 1}$ bằng các hàm sơ cấp!)**Dạng 6. Tích phân hàm phân thức hữu tỉ****★ Phương pháp.**(1) Nếu bậc tử $\geq$ bậc mẫu: **chia đa thức** để tách phần nguyên.

(2) Mẫu bậc nhất:

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b|.$$

(3) Mẫu bậc hai có hai nghiệm phân biệt: **tách thành tổng hai phân thức** $\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$.(4) Mẫu bậc hai có nghiệm kép: đặt $t = x - x_0$.(5) Mẫu bậc hai vô nghiệm: đưa về $\int \frac{du}{u^2+a^2}$ và đặt $u = atant$ (Dạng 8).

◆ Ví dụ 27.

Biết $\int_0^1 \frac{x^2+x+1}{x+1} dx = a + b\ln 2$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính $a + b$.

Lời giải. Chia đa thức: $\frac{x^2+x+1}{x+1} = x + \frac{1}{x+1}$. Do đó tích phân bằng

$$\left[\frac{x^2}{2} + \ln(x+1) \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \ln 2.$$

Vậy $a = \frac{1}{2}, b = 1, a + b = 1,5$. **Đáp số: 1,5**

◆ Ví dụ 28.

Giá trị của $\int_2^3 \frac{dx}{x^2-1}$ là

A. $\ln \frac{3}{2}$.

B. $\frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$.

C. $\frac{1}{2} \ln \frac{2}{3}$.

D. $2 \ln \frac{3}{2}$.

Lời giải. $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$, nên tích phân bằng

$$\frac{1}{2} \left[\ln \frac{x-1}{x+1} \right]_2^3 = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}.$$

Chọn B.

◆ Ví dụ 29.

Biết

$$\int_0^1 \frac{4x+11}{x^2+5x+6} dx = a\ln 2 + b\ln 3$$

với a, b nguyên. Tính $a + 2b$.

Phân tích. Mẫu $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$. Tìm A, B sao cho $\frac{4x+11}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}$. Mẹo “che nghiệm”: thay $x = -2$ vào phần còn lại sau khi che $(x+2)$ được $A = \frac{-8+11}{1} = 3$; thay $x = -3$ được $B = \frac{-12+11}{-1} = 1$.

Lời giải. Tích phân bằng

$$[3\ln(x+2) + \ln(x+3)]_0^1 = 3\ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} = 2\ln 3 - \ln 2.$$

Vậy $a = -1$, $b = 2$, $a + 2b = 3$. **Đáp số: 3**

◆ Ví dụ 30.

Giá trị của $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2} dx$ là

A. $\ln 2 - \frac{1}{2}$.

B. $\ln 2 + \frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $1 - \ln 2$.

Lời giải. $\frac{x}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$, nên tích phân bằng

$$\left[\ln(x+1) + \frac{1}{x+1} \right]_0^1 = \ln 2 + \frac{1}{2} - 1 = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

Chọn A.

Dạng 7. Tích phân đổi biến số

★ Đổi biến nhớ đổi cận.

Khi đặt $t = u(x)$, cận mới là $u(a)$ và $u(b)$; tính xong theo t là xong, **không cần trả lại biến** x . Đây là ưu điểm lớn của tích phân so với nguyên hàm.

◆ Ví dụ 31.

Giá trị của $\int_0^1 x e^{x^2} dx$ là

A. $e - 1$.

B. $\frac{e-1}{2}$.

C. $\frac{e}{2}$.

D. $2(e - 1)$.

Lời giải. Đặt $t = x^2$, $dt = 2x dx$, cận $0 \rightarrow 1$: $\frac{1}{2} \int_0^1 e^t dt = \frac{e-1}{2}$. Chọn B.

◆ Ví dụ 32.

Tính $\int_1^e \frac{e^{(1+\ln x)^2}}{x} dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải. Đặt $t = 1 + \ln x$, $dt = \frac{dx}{x}$; $x = 1 \Rightarrow t = 1$, $x = e \Rightarrow t = 2$:

$$\int_1^2 t^2 dt = \frac{8-1}{3} = \frac{7}{3} \approx 2,33$$

Đáp số: 2,33

◆ Ví dụ 33.

Giá trị của $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x \, dx$ là

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. 1.

D. $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải. Đặt $t = \sin x$, cận $0 \rightarrow 1$: $\int_0^1 t^2 \, dt = \frac{1}{3}$. Chọn A.

◆ Ví dụ 34.

Biết $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} \, dx = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a + b$.

Phân tích. Căn của biểu thức bậc nhất: đặt t bằng cả căn để “phá căn”.

Lời giải. Đặt $t = \sqrt{x+1}$ thì $x = t^2 - 1$, $dx = 2t \, dt$; $x = 0 \Rightarrow t = 1$, $x = 3 \Rightarrow t = 2$:

$$\int_1^2 \frac{t^2 - 1}{t} \cdot 2t \, dt = 2 \int_1^2 (t^2 - 1) \, dt = 2 \left[\frac{t^3}{3} - t \right]_1^2 = 2 \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) = \frac{8}{3}.$$

Vậy $a + b = 11$. **Đáp số: 11**

◆ Ví dụ 35.

Giá trị của $\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx$ là

A. $\ln 2$.

B. $\frac{1}{2} \ln 2$.

C. $-\frac{1}{2} \ln 2$.

D. 1.

Lời giải. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{(\cos x)'}{\cos x}$, nên tích phân bằng

$$[-\ln \cos x]_0^{\pi/4} = -\ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \ln 2.$$

Chọn B.

Dạng 8. Đổi biến lượng giác

★ Ba phép đặt quen thuộc.

$\sqrt{a^2 - x^2}$: đặt $x = a \sin t$; $\frac{1}{a^2 + x^2}$: đặt $x = a \tan t$; $\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$: đặt $x = a \sin t$. Với $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ thì $\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = a \cos t$ (không cần dấu giá trị tuyệt đối).

◆ Ví dụ 36.

Giá trị của $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ là

A. $\frac{\pi}{2}$.

B. $\frac{\pi}{4}$.

C. π .

D. 1.

Lời giải. Cách 1 (hình học): $y = \sqrt{1-x^2}$ là nửa trên đường tròn đơn vị; tích phân là diện tích một phần tư hình tròn bán kính 1, bằng $\frac{\pi}{4}$. Cách 2: đặt $x = \sin t$, $dx = \cos t dt$, cận $0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Chọn B.

◆ Ví dụ 37.

Giá trị của $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+3}$ là

A. $\frac{\pi}{4}$.

B. $\frac{\pi\sqrt{3}}{12}$.

C. $\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{\pi}{12}$.

Lời giải. Đặt $x = \sqrt{3}\tan t$, $dx = \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t} dt$, $x^2 + 3 = \frac{3}{\cos^2 t}$; cận $0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{3}}{3} dt = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi\sqrt{3}}{12}.$$

Chọn B.

◆ Ví dụ 38.

Tính $\int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải. Đặt $x = 2\sin t$, $dx = 2\cos t dt$, cận $0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} 4 \sin^2 t \cdot 2\cos t \cdot 2\cos t dt &= 16 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t dt = 4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t) dt = \pi. \end{aligned}$$

Đáp số: 3,14

◆ Ví dụ 39.

Giá trị của $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ là

A. $\frac{\pi}{3}$.

B. $\frac{\pi}{4}$.

C. $\frac{\pi}{6}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải. Đặt $x = \sin t$, $dx = \cos t dt$, $\sqrt{1-x^2} = \cos t$; cận $0 \rightarrow \frac{\pi}{6}$: $\int_0^{\pi/6} dt = \frac{\pi}{6}$. Chọn C.

Dạng 9. Tích phân từng phần

★ Công thức.

$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$. Với $\int_a^b P(x)e^x dx$ hay $\int_a^b P(x)\sin x dx$ (P là đa thức bậc cao), có thể dùng **sơ đồ đường chéo**: cột trái lấy đạo hàm liên tiếp của P đến khi bằng 0, cột phải lấy nguyên hàm liên tiếp của hàm còn lại, nhân chéo với dấu $+$, $-$, $+$, $-$, ...

◆ Ví dụ 40.

Giá trị của $\int_0^1 x e^x dx$ là

A. 1.

B. e .

C. $e - 1$.

D. $2e - 1$.

Lời giải. $[(x-1)e^x]_0^1 = 0 - (-1) = 1$. Chọn A.

◆ Ví dụ 41.

Giá trị của $\int_1^e x \ln x dx$ là

A. $\frac{e^2-1}{4}$.

B. $\frac{e^2+1}{4}$.

C. $\frac{e^2+1}{2}$.

D. $\frac{e^2}{4}$.

Lời giải. Theo Dạng 4:

$$\left[\frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

Chọn B.

◆ Ví dụ 42.

Tính $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải.

$$[x \sin x + \cos x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0,57.$$

Đáp số: 0,57**◆ Ví dụ 43.**Giá trị của $\int_0^1 x^2 e^x dx$ là

- A. e . B. $e - 1$. C. $e - 2$. D. $2 - e$.

Lời giải. Sơ đồ đường chéo: đạo hàm của x^2 là $x^2, 2x, 2, 0$; nguyên hàm của e^x là e^x . Nguyên hàm bằng $e^x(x^2 - 2x + 2)$. Tích phân bằng $e(1 - 2 + 2) - 2 = e - 2$. Chọn C.

◆ Ví dụ 44.Biết $\int_1^2 \ln x dx = a \ln 2 + b$ với a, b nguyên. Tính $a - b$.**Lời giải.** $u = \ln x, dv = dx$:

$$[x \ln x]_1^2 - \int_1^2 dx = 2 \ln 2 - 1.$$

Vậy $a = 2, b = -1, a - b = 3$. **Đáp số: 3****◆ Ví dụ 45.**Giá trị của $\int_0^\pi e^x \sin x dx$ là

- A. $\frac{e^\pi + 1}{2}$. B. $\frac{e^\pi - 1}{2}$. C. $e^\pi + 1$. D. $\frac{1 - e^\pi}{2}$.

Lời giải. Theo Dạng 4:

$$\left[\frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} \right]_0^\pi = \frac{e^\pi \cdot 1}{2} - \frac{-1}{2} = \frac{e^\pi + 1}{2}.$$

Chọn A.

Dạng 10. Tích phân chứa dấu giá trị tuyệt đối, hàm số cho từng khúc**★ Phương pháp.**

Tìm nghiệm của biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối trên $[a; b]$, **tách cận tại các nghiệm**, xét dấu trên từng đoạn rồi bỏ dấu giá trị tuyệt đối. Với hàm cho từng khúc, tách cận tại điểm “nối”.

◆ Ví dụ 46.

Tính $\int_0^3 |x - 1| dx$.

Lời giải.

$$\int_0^1 (1 - x) dx + \int_1^3 (x - 1) dx = \frac{1}{2} + 2 = 2,5.$$

(Hình học: tổng diện tích hai tam giác vuông cân có cạnh 1 và 2.) **Đáp số: 2,5**

◆ Ví dụ 47.

Giá trị của $\int_0^2 |x^2 - 3x + 2| dx$ là

A. $\frac{2}{3}$.

B. 1.

C. $\frac{5}{6}$.

D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải. $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ dương trên $(0; 1)$, âm trên $(1; 2)$. Tích phân bằng

$$\int_0^1 (x^2 - 3x + 2) dx - \int_1^2 (x^2 - 3x + 2) dx = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1.$$

Chọn B.

◆ Ví dụ 48.

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Tính $\int_0^3 f(x) dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải. f liên tục tại $x = 1$.

$$\int_0^1 x^2 dx + \int_1^3 (2x - 1) dx = \frac{1}{3} + [x^2 - x]_1^3 = \frac{1}{3} + 6 = \frac{19}{3} \approx 6,33.$$

Đáp số: 6,33

◆ Ví dụ 49.

Giá trị của $\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} \, dx$ là

- A. 0. B. $2\sqrt{2}$. C. $4\sqrt{2}$. D. 4.

Lời giải.

$$\sqrt{1 - \cos 2x} = \sqrt{2\sin^2 x} = \sqrt{2}|\sin x|.$$

Trên $[0; 2\pi]$:

$$\int_0^{2\pi} |\sin x| \, dx = 2 \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 4.$$

Vậy tích phân bằng $4\sqrt{2}$. Chọn C.

⚠ Bẫy “căn của bình phương”.

$\sqrt{\sin^2 x} = |\sin x|$, **không phải** $\sin x$. Ai quên dấu giá trị tuyệt đối sẽ tính ra $\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sin x \, dx = 0$ (phương án A), một kết quả vô lí vì hàm dưới dấu tích phân không âm.

Dạng 11. Tích phân hàm ẩn và các tích phân đặc biệt

★ Bốn kĩ thuật then chốt.

(1) **Đổi biến** để đưa về tích phân đã biết. (2) **Từng phần** để chuyển f' thành f . (3) **Tính chẵn lẻ, đối xứng** $x \mapsto a + b - x$. (4) Với hệ thức chứa $f(x)$ và $f(a + b - x)$: **lấy tích phân hai vế** trên $[a; b]$ rồi giải phương trình ẩn $\int f$.

◆ Ví dụ 50.

Cho f liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(x) \, dx = 3$. Giá trị của $\int_0^{\pi/2} f(\sin x) \cos x \, dx$ là

- A. 3. B. $\frac{3}{2}$. C. 6. D. 1.

Lời giải. Đặt $t = \sin x$, $dt = \cos x \, dx$, cận $0 \rightarrow 1$: tích phân bằng $\int_0^1 f(t) \, dt = 3$. Chọn A.

◆ Ví dụ 51.

Cho f là hàm số lẻ, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^2 f(x) \, dx = 5$. Tính $\int_{-2}^2 [f(x) + 3x^2] \, dx$.

Lời giải. f lẻ nên $\int_{-2}^2 f(x) dx = 0$ (dữ kiện $\int_0^2 f = 5$ là “mồi nhử”!).

$$\int_{-2}^{23} x^2 dx = [x^3]_{-2}^{23} = 16$$

Đáp số: 16

◆ Ví dụ 52.

Giá trị của

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2026} x}{\sin^{2026} x + \cos^{2026} x} dx$$

là

A. $\frac{\pi}{2}$.

B. $\frac{\pi}{4}$.

C. 1.

D. $\frac{\pi}{2026}$.

Phân tích. Số mũ khổng lồ là dấu hiệu không thể tính trực tiếp. Phép đổi biến $x = \frac{\pi}{2} - t$ biến sin thành cos và ngược lại.

Lời giải. Đặt $x = \frac{\pi}{2} - t$:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2026} t}{\cos^{2026} t + \sin^{2026} t} dt.$$

Cộng với biểu thức ban đầu: $2I = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2}$, nên $I = \frac{\pi}{4}$. Chọn **B**.

◆ Ví dụ 53.

Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + 2f(1-x) = 3x^2$ với mọi x . Tính $\int_0^1 f(x) dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải. Lấy tích phân hai vế trên $[0; 1]$. Vì

$$\int_0^1 f(1-x) dx = \int_0^1 f(t) dt$$

(đặt $t = 1 - x$), ta được

$$3 \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 3x^2 dx = 1.$$

Vậy $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3} \approx 0,33$. **Đáp số: 0,33**

◆ Ví dụ 54.

Cho hàm số f có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$, $f(0) = 1$, $f(1) = 3$ và $\int_0^1 f(x) dx = 2$. Tính $\int_0^1 x f'(x) dx$.

Lời giải. Từng phần với $u = x$, $dv = f'(x) dx$:

$$\int_0^1 x f'(x) dx = [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = 3 - 2 = 1.$$

(Dữ kiện $f(0) = 1$ không cần dùng.) **Đáp số: 1**

◆ Ví dụ 55.

Cho hàm số $f(x) > 0$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x) = 2xf(x)$ và $f(0) = 1$. Giá trị của $\int_0^1 x f(x) dx$ là

A. $e - 1$.

B. $\frac{e-1}{2}$.

C. $\frac{e}{2}$.

D. $\frac{e+1}{2}$.

Phân tích. Hệ thức $f' = 2xf$ gợi ý chia hai vế cho f : vế trái $\frac{f'}{f} = (\ln f)'$.

Lời giải.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2x \Rightarrow \ln f(x) = x^2 + C;$$

$f(0) = 1 \Rightarrow C = 0$, nên $f(x) = e^{x^2}$. Khi đó $\int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{e-1}{2}$ (Dạng 7). Chọn B.

◆ Ví dụ 56.

Giá trị của $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+2^x} dx$ là

A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. 0.

D. $\frac{1}{3\ln 2}$.

Lời giải. Gọi tích phân là I . Đặt $x = -t$:

$$I = \int_{-1}^1 \frac{t^2}{1+2^{-t}} dt = \int_{-1}^1 \frac{2^t t^2}{2^t + 1} dt.$$

Cộng lại: $2I = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$, nên $I = \frac{1}{3}$. Chọn B.

★ Tổng quát.

Nếu g là hàm chẵn và $a > 0$ thì $\int_{-c}^c \frac{g(x)}{1+a^x} dx = \int_0^c g(x) dx$. Mẹo này xuất hiện rất nhiều trong đề thi thử và đề học sinh giỏi.

Dạng 12. Diện tích hình phẳng

◆ Ví dụ 57.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2 - 2x$ và trục hoành là

A. $\frac{4}{3}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $-\frac{4}{3}$.

D. $\frac{8}{3}$.

Lời giải. Hoành độ giao điểm: $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; 2\}$. Trên $(0; 2)$ hàm số âm:

$$S = \int_0^2 (2x - x^2) dx = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$$

Chọn A.

◆ Ví dụ 58.

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = x + 2$.

Lời giải. $x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x \in \{-1; 2\}$; trên $(-1; 2)$ đường thẳng nằm trên parabol:

$$S = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = \frac{10}{3} + \frac{7}{6} = \frac{9}{2}.$$

Đáp số: 4,5

★ Công thức “một phần sáu”.

Diện tích giữa parabol $y = ax^2 + bx + c$ và đường thẳng cắt nó tại hai điểm có hoành độ $x_1 < x_2$ là $S = \frac{|a|(x_2 - x_1)^3}{6}$. Kiểm tra: $\frac{1 \cdot 3^3}{6} = \frac{9}{2}$. Đây cũng chính là kết quả “ $\frac{4}{3}$ tam giác” của Archimedes viết theo ngôn ngữ đại số.

◆ Ví dụ 59.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = x^3$ và $y = 4x$ là

A. 4.

B. 8.

C. 0.

D. 16.

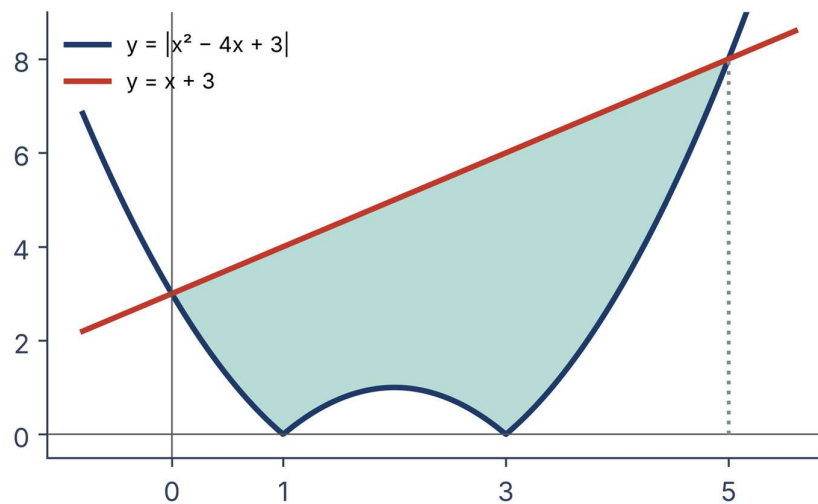
Lời giải. $x^3 = 4x \Leftrightarrow x \in \{-2; 0; 2\}$. Do tính đối xứng tâm,

$$S = 2 \int_0^2 (4x - x^3) dx = 2(8 - 4) = 8.$$

Chọn **B**. (Nếu tính $\int_{-2}^2 (4x - x^3) dx$ sẽ ra 0: phương án C là bẫy.)

◆ **Ví dụ 60.** (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A năm 2002)

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = |x^2 - 4x + 3|$ và $y = x + 3$.



Miền giới hạn bởi $y = |x^2 - 4x + 3|$ và $y = x + 3$.

Phân tích. Đồ thị $y = |x^2 - 4x + 3|$ được lấy từ parabol bằng cách lật phần nằm dưới trục hoành (trên $(1; 3)$) lên trên. Phải tách thành ba đoạn tại $x = 1$ và $x = 3$.

Lời giải. Hoàn chỉnh đồ thị: với $x \leq 1$ hoặc $x \geq 3$: $x^2 - 4x + 3 = x + 3 \Leftrightarrow x \in \{0; 5\}$; với $1 < x < 3$:

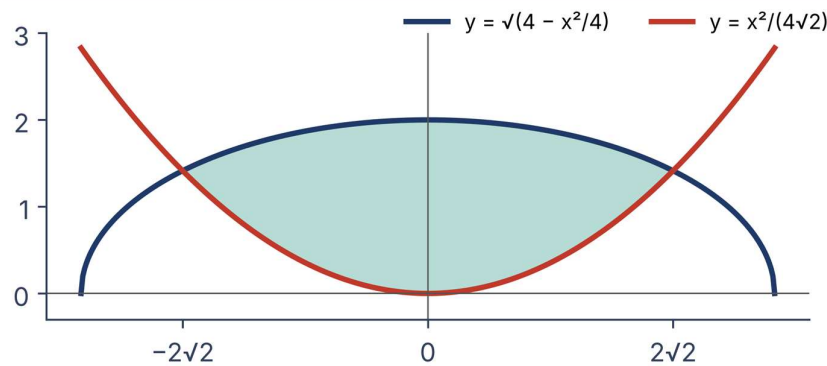
$$-x^2 + 4x - 3 = x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 6 = 0$$

(vô nghiệm). Vậy

$$S = \int_0^1 (5x - x^2) dx + \int_1^3 (x^2 - 3x + 6) dx + \int_3^5 (5x - x^2) dx = \frac{13}{6} + \frac{26}{3} + \frac{22}{3} = \frac{109}{6}.$$

◆ **Ví dụ 61.** (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B năm 2002)

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$ và $y = \frac{x^2}{4\sqrt{2}}$.



Miền giới hạn bởi nửa elip và parabol.

Lời giải. Hoành độ giao điểm:

$$4 - \frac{x^2}{4} = \frac{x^4}{32} \Leftrightarrow x^4 + 8x^2 - 128 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}.$$

Theo tính đối xứng,

$$S = 2 \int_0^{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{4\sqrt{2}} \right) dx = \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{16 - x^2} dx - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{(2\sqrt{2})^3}{3}.$$

Đặt $x = 4\sin t$ (cận $0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$):

$$\int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{16 - x^2} dx = 16 \int_0^{\pi/4} \cos^2 t dt = 2\pi + 4.$$

Phần sau bằng $\frac{8}{3}$. Vậy $S = 2\pi + 4 - \frac{8}{3} = 2\pi + \frac{4}{3}$.

◆ Ví dụ 62. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D năm 2002)

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong

$$y = \frac{-3x - 1}{x - 1}$$

và hai trục tọa độ.

Lời giải. Đồ thị cắt trục hoành tại $x = -\frac{1}{3}$, cắt trục tung tại $y = 1$; trên $[-\frac{1}{3}; 0]$ ta có $y \geq 0$. Vì

$$\frac{-3x-1}{x-1} = -3 - \frac{4}{x-1},$$

$$S = \int_{-1/3}^0 \left(-3 - \frac{4}{x-1} \right) dx = [-3x - 4\ln|x-1|]_{-1/3}^0 = -1 + 4\ln \frac{4}{3}.$$

◆ Ví dụ 63. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A năm 2007)

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = (e + 1)x$ và $y = (1 + e^x)x$.

Lời giải.

$$(e + 1)x = (1 + e^x)x \Leftrightarrow x(e - e^x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; 1\}.$$

Trên $(0; 1)$: $x(e - e^x) > 0$. Vậy

$$S = \int_0^1 (ex - xe^x) dx = \frac{e}{2} - [(x - 1)e^x]_0^1 = \frac{e}{2} - 1.$$

◆ Ví dụ 64. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A, A1 năm 2014)

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x^2 - x + 3$ và đường thẳng $y = 2x + 1$.

Lời giải.

$$x^2 - x + 3 = 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; 2\}.$$

$$S = \int_1^2 |x^2 - 3x + 2| dx = \frac{1}{6} \text{ (theo công thức “một phần sáu”: } \frac{1 \cdot 1^3}{6} \text{)}.$$

◆ Ví dụ 65.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-1; 3]$. Đồ thị của nó cùng trục hoành giới hạn hai miền: miền nằm trên trục hoành ứng với $x \in [-1; 1]$ có diện tích bằng 5, miền nằm dưới trục hoành ứng với $x \in [1; 3]$ có diện tích bằng 2. Giá trị của

$$\int_{-1}^3 f(x) dx$$

là

A. 7.

B. 3.

C. -3.

D. 10.

Lời giải. Tích phân là diện tích có dấu: $5 + (-2) = 3$.

Chọn B. (Diện tích hình phẳng mới bằng 7.)

◆ Ví dụ 66.

Tìm số thực dương m để diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = mx$ bằng $\frac{4}{3}$.

Lời giải. Giao điểm $x = 0, x = m$.

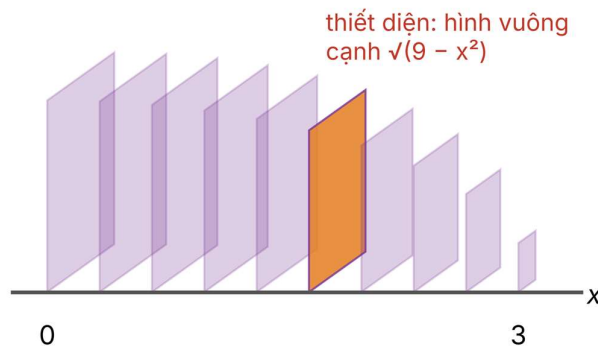
$$S = \int_0^m (mx - x^2) dx = \frac{m^3}{6} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow m^3 = 8 \Leftrightarrow m = 2.$$

Đáp số: 2

Dạng 13. Thể tích vật thể và khối tròn xoay

◆ Ví dụ 67.

Cho vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = 3$. Cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq 3$) được thiết diện là hình vuông cạnh $\sqrt{9 - x^2}$. Tính thể tích vật thể.



Lời giải. $S(x) = 9 - x^2$, nên

$$V = \int_0^3 (9 - x^2) dx = 27 - 9 = 18.$$

Đáp số: 18

◆ Ví dụ 68.

Một vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = -1, x = 1$; thiết diện vuông góc với Ox tại x là tam giác đều cạnh $2\sqrt{1 - x^2}$. Thể tích vật thể là

A. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. $\frac{4\pi}{3}$.

Lời giải. Tam giác đều cạnh a có diện tích $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$: $S(x) = \sqrt{3}(1 - x^2)$.

$$V = \sqrt{3} \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Chọn A.

◆ Ví dụ 69.

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$, trục hoành và đường thẳng $x = 4$ quanh trục Ox là

A. 8π .

B. 16π .

C. $\frac{16\pi}{3}$.

D. 4π .

Lời giải. $V = \pi \int_0^4 x dx = 8\pi$. Chọn A. (Phương án C là $\pi \int_0^4 \sqrt{x} dx$: quên bình phương.)

◆ Ví dụ 70.

Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = \sin x$, trục hoành, $x = 0$, $x = \pi$ quanh trục Ox (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải.

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi^2}{2} \approx 4,93.$$

Đáp số: 4,93

◆ Ví dụ 71. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B năm 2007)

Cho hình phẳng H giới hạn bởi các đường $y = x \ln x$, $y = 0$, $x = e$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình H quanh trục Ox .

Lời giải. $x \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (với $x > 0$). $V = \pi \int_1^e x^2 \ln^2 x dx$. Từng phần với $u = \ln^2 x$, $dv = x^2 dx$:

$$\int_1^e x^2 \ln^2 x dx = \left[\frac{x^3 \ln^2 x}{3} \right]_1^e - \frac{2}{3} \int_1^e x^2 \ln x dx = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2e^3 + 1}{9},$$

trong đó

$$\int_1^e x^2 \ln x dx = \left[\frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} \right]_1^e = \frac{2e^3 + 1}{9}.$$

Vậy

$$V = \pi \left(\frac{e^3}{3} - \frac{4e^3 + 2}{27} \right) = \frac{\pi(5e^3 - 2)}{27}.$$

◆ Ví dụ 72.

Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = x$ và $y = x^2$ quanh trục Ox là

A. $\frac{2\pi}{15}$.

B. $\frac{\pi}{30}$.

C. $\frac{\pi}{6}$.

D. $\frac{\pi}{15}$.

Lời giải. Giao điểm $x = 0, x = 1$; trên $(0; 1)$: $0 \leq x^2 \leq x$. Thiết diện là hình vành khăn:

$$V = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{2\pi}{15}.$$

Chọn A. (Phương án B là $\pi \int_0^1 (x - x^2)^2 dx$: sai công thức vành khăn.)

◆ Ví dụ 73.

Chứng minh rằng thể tích khối cầu bán kính R là $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

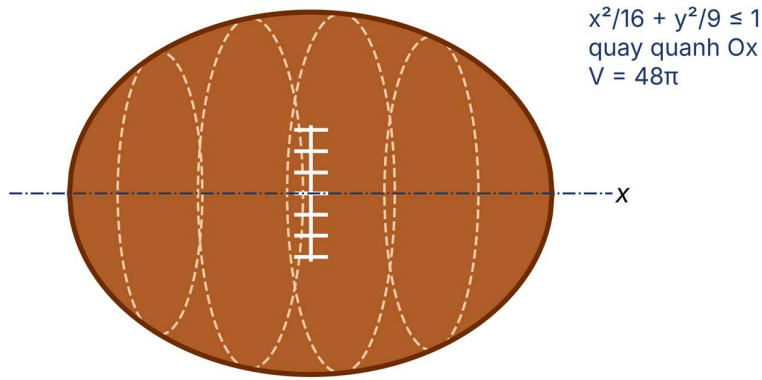
Lời giải. Khối cầu sinh ra khi quay nửa hình tròn $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \leq x \leq R$ quanh trục Ox :

$$V = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \pi \left(2R^3 - \frac{2R^3}{3} \right) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Archimedes mất cả một cuốn sách để chứng minh, ta chỉ cần một dòng!

◆ Ví dụ 74.

Quay hình elip $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \leq 1$ quanh trục Ox được một khối tròn xoay (khối “quả bóng bầu dục”). Tính thể tích khối đó (làm tròn đến hàng phần mười).



Khối “quả bóng bầu dục” sinh ra khi quay elip quanh trục Ox .

Lời giải. $y^2 = 9 \left(1 - \frac{x^2}{16}\right)$, nên

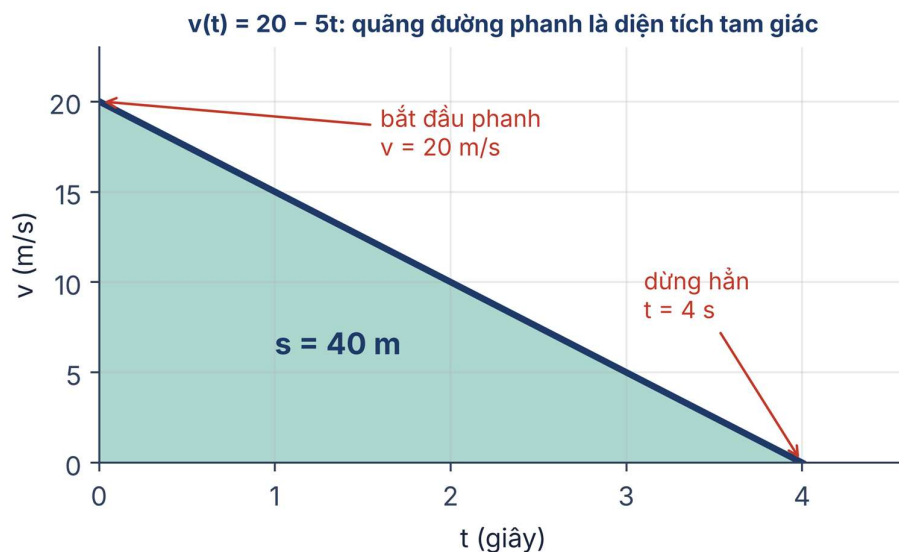
$$V = \pi \int_{-4}^4 \left(1 - \frac{x^2}{16}\right) dx = 9\pi \left(8 - \frac{128}{48}\right) = 48\pi \approx 150,8.$$

(Tổng quát: $V = \frac{4}{3}\pi ab^2$.) **Đáp số: 150,8**

Dạng 14. Bài toán chuyển động

♦ Ví dụ 75.

Một ô tô đang chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 20 - 5t$ (m/s). Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn đi được bao nhiêu mét?



Đồ thị vận tốc khi phanh: quãng đường là diện tích tam giác.

Lời giải. Xe dừng khi $v(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4$. Quãng đường

$$s = \int_0^4 (20 - 5t) dt = \left[20t - \frac{5t^2}{2} \right]_0^4 = 80 - 40 = 40 \text{ m.}$$

Đáp số: 40

◆ Ví dụ 76.

Một xe đua tăng tốc đều từ trạng thái đứng yên, sau 4 giây đạt 20 m/s; chạy đều với vận tốc đó trong 5 giây rồi giảm tốc đều và dừng hẳn sau 3 giây nữa. Tổng quãng đường xe đã đi là

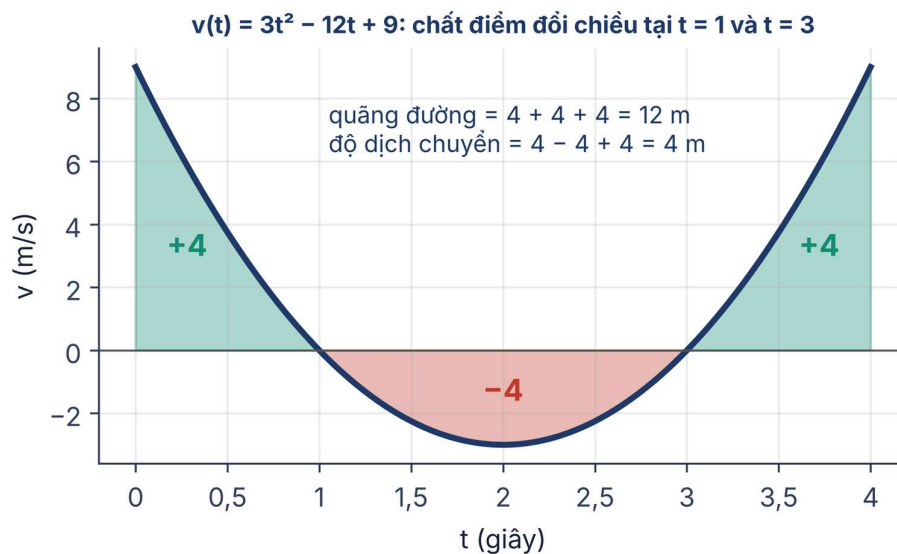
- A. 170 m. B. 240 m. C. 140 m. D. 200 m.

Lời giải. Quãng đường là diện tích hình thang dưới đồ thị vận tốc (xem hình ở Phần II): $40 + 100 + 30 = 170 \text{ m}$. Chọn A.

◆ Ví dụ 77.

Một chất điểm chuyển động thẳng với vận tốc $v(t) = 3t^2 - 12t + 9 \text{ (m/s)}$. Quãng đường chất điểm đi được trong 4 giây đầu là

- A. 4 m. B. 12 m. C. 8 m. D. 36 m.



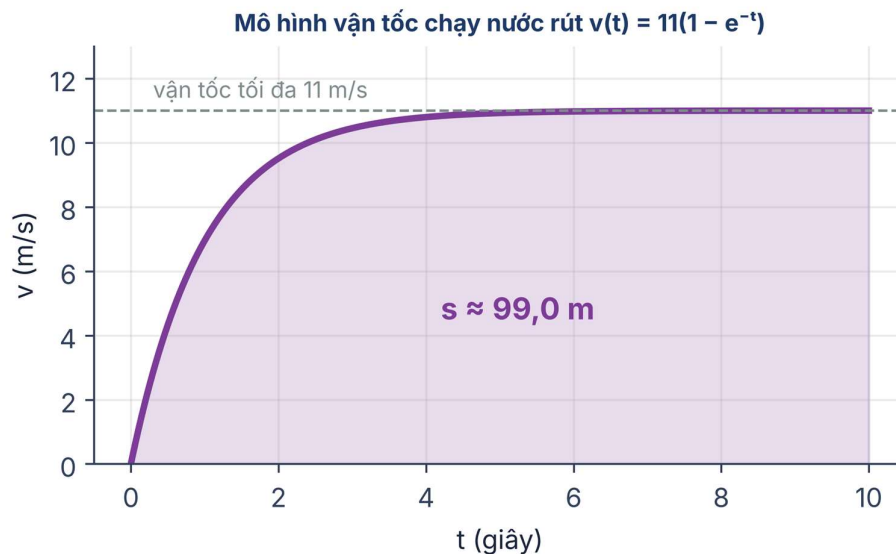
Phần diện tích phía dưới trục hoành ứng với lúc chất điểm chạy ngược chiều.

Phân tích. Vận tốc đổi dấu tại $t = 1$ và $t = 3$ (chất điểm đổi chiều). Quãng đường là $\int |v| dt$, khác với độ dịch chuyển $\int v dt$.

Lời giải. Với $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$: $\int_0^1 v = 4$, $\int_1^3 v = -4$, $\int_3^4 v = 4$. Quãng đường bằng $4 + 4 + 4 = 12$ m (độ dịch chuyển chỉ bằng 4 m). Chọn **B**.

◆ Ví dụ 78.

Vận tốc của một vận động viên chạy 100 m được mô hình hóa bởi $v(t) = 11(1 - e^{-t})$ (m/s). Quãng đường vận động viên chạy được trong 10 giây đầu là bao nhiêu mét (làm tròn đến hàng phần mười)?



Mô hình vận tốc của vận động viên chạy nước rút.

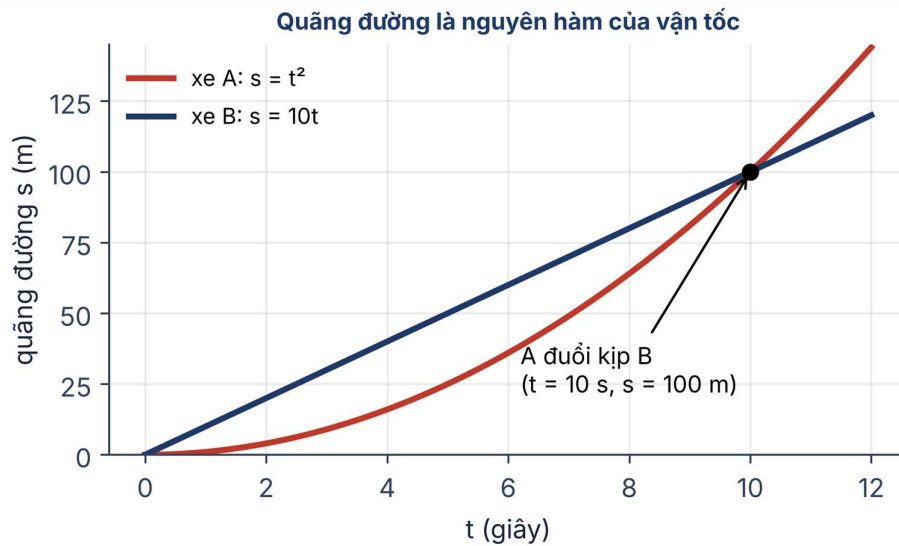
Lời giải.

$$s = \int_0^{10} 11(1 - e^{-t}) dt = 11[t + e^{-t}]_0^{10} = 11(9 + e^{-10}) \approx 99,0 \text{ m.}$$

Đáp số: 99,0

◆ Ví dụ 79.

Hai ô tô xuất phát cùng lúc từ cùng một vị trí, chạy cùng chiều trên đường thẳng. Ô tô A chạy với vận tốc $v_A(t) = 2t$ (m/s), ô tô B chạy với vận tốc không đổi 10 m/s. Sau bao nhiêu giây ô tô A đuổi kịp ô tô B?



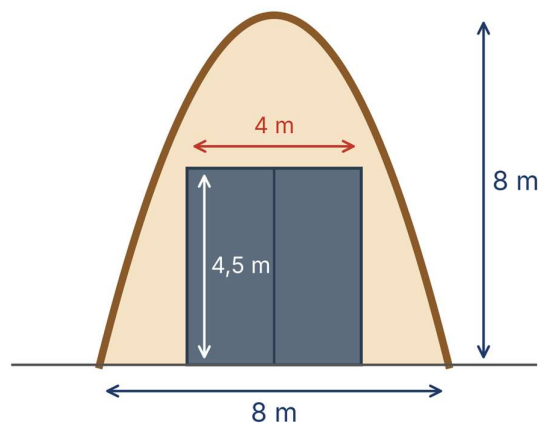
Đồ thị quãng đường của hai xe theo thời gian.

Lời giải. Quãng đường sau T giây: $s_A = \int_0^T 2t \, dt = T^2$, $s_B = 10T$. Đuổi kịp khi $T^2 = 10T \Leftrightarrow T = 10$ (giây). **Đáp số: 10**

Dạng 15. Bài toán thực tế

◆ Ví dụ 80.

Một cổng hình parabol rộng 8 m, cao 8 m. Người ta làm cánh cửa hình chữ nhật rộng 4 m, cao 4,5 m ở chính giữa cổng; phần còn lại của mặt cổng được trang trí hoa văn. Tính diện tích phần trang trí (m^2 , làm tròn đến hàng phần trăm).



Cổng parabol và cánh cửa hình chữ nhật.

Phân tích. Gắn hệ trục với gốc tại trung điểm chân cổng: parabol đi qua $(\pm 4; 0)$ và đỉnh $(0; 8)$ nên $y = 8 - \frac{x^2}{2}$. Kiểm tra cửa lọt cổng: tại $x = \pm 2, y = 6 > 4,5$.

Lời giải. Diện tích cổng

$$S_1 = \int_{-4}^4 \left(8 - \frac{x^2}{2}\right) dx = 64 - \frac{64}{3} = \frac{128}{3}$$

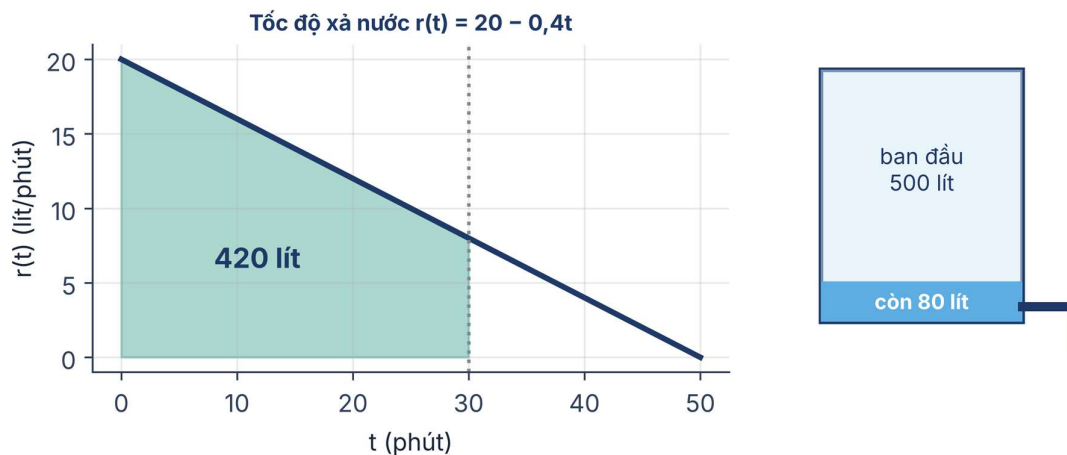
(đúng bằng $\frac{2}{3} \cdot 8 \cdot 8$). Diện tích cửa $S_2 = 4 \cdot 4,5 = 18$. Phần trang trí: $\frac{128}{3} - 18 = \frac{74}{3} \approx 24,67$ m². **Đáp số: 24,67**

★ Công thức Archimedes.

Diện tích “vòm parabol” có đáy a , chiều cao h luôn bằng $\frac{2}{3}ah$: hai phần ba diện tích hình chữ nhật bao quanh. Đây là kết quả hay dùng nhất trong các bài toán cổng, cầu vòm, cửa sổ hình parabol.

◆ Ví dụ 81.

Một bể chứa 500 lít nước. Người ta mở van xả, nước chảy ra với tốc độ $r(t) = 20 - 0,4t$ (lít/phút), $0 \leq t \leq 50$. Sau 30 phút, trong bể còn bao nhiêu lít nước?



Lượng nước chảy ra là diện tích dưới đồ thị tốc độ xả.

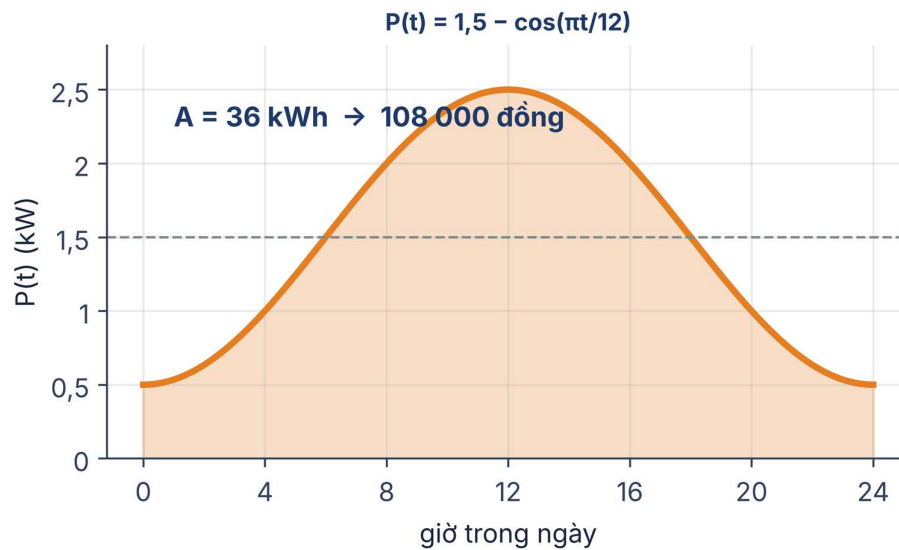
Lời giải. Lượng nước chảy ra trong 30 phút:

$$\int_0^{30} (20 - 0,4t) dt = [20t - 0,2t^2]_0^{30} = 600 - 180 = 420 \text{ lít.}$$

Còn lại $500 - 420 = 80$ lít. **Đáp số: 80**

◆ Ví dụ 82.

Công suất tiêu thụ điện của một hộ gia đình trong một ngày được mô hình hóa bởi $P(t) = 1,5 - \cos \frac{\pi t}{12}$ (kW), t là số giờ kể từ 0 giờ, $0 \leq t \leq 24$. Với giá điện 3000 đồng/kWh, tiền điện trong ngày đó là bao nhiêu nghìn đồng?



Điện năng tiêu thụ trong ngày là diện tích dưới đồ thị công suất.

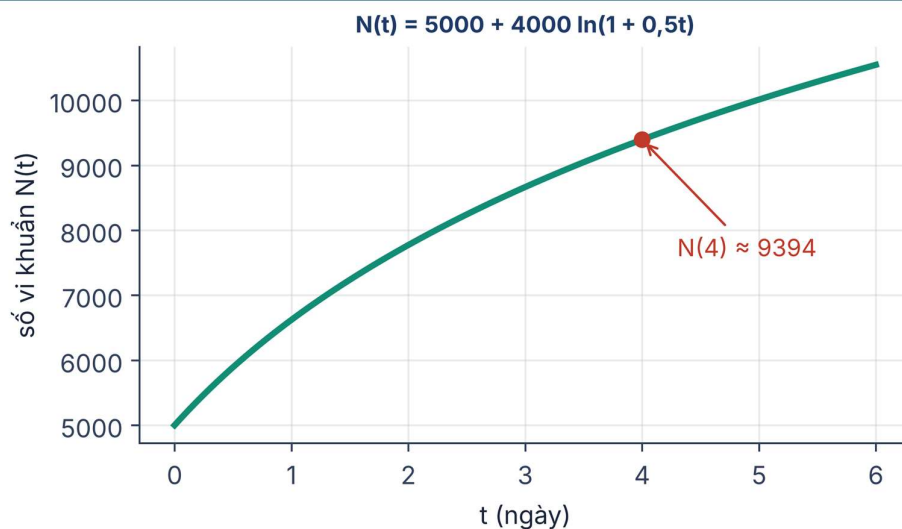
Lời giải. Điện năng

$$A = \int_0^{24} \left(1,5 - \cos \frac{\pi t}{12}\right) dt = 36 - \frac{12}{\pi} \left[\sin \frac{\pi t}{12} \right]_0^{24} = 36 \text{ kWh.}$$

Tiền điện $36 \cdot 3000 = 108\,000$ đồng. **Đáp số: 108**

◆ Ví dụ 83.

Một quần thể vi khuẩn ban đầu có 5000 con, tốc độ tăng số lượng sau t ngày là $N'(t) = \frac{2000}{1+0,5t}$ (con/ngày). Sau 4 ngày, quần thể có khoảng bao nhiêu con (làm tròn đến hàng đơn vị)?



Số lượng vi khuẩn theo thời gian.

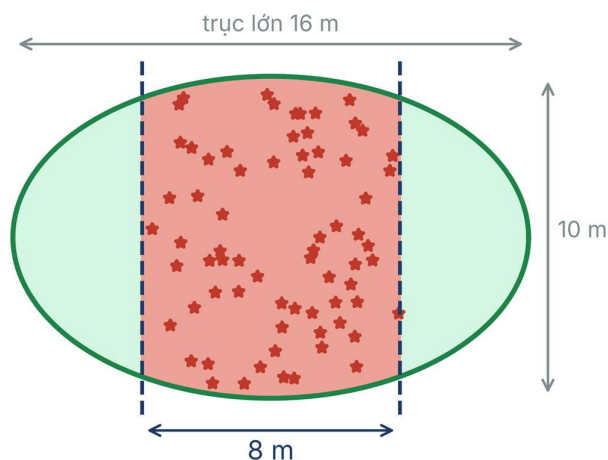
Lời giải.

$$N(4) = 5000 + \int_0^4 \frac{2000}{1 + 0,5t} dt = 5000 + 4000[\ln(1 + 0,5t)]_0^4 = 5000 + 4000\ln 3 \approx 9394.$$

Đáp số: 9394

◆ Ví dụ 84.

Một mảnh vườn hình elip có độ dài trục lớn 16 m, trục nhỏ 10 m. Người ta trồng hoa trên một dải đất đối xứng qua trục nhỏ, giới hạn bởi hai đường thẳng vuông góc với trục lớn và cách nhau 8 m. Tính diện tích dải trồng hoa (m^2 , làm tròn đến hàng phần trăm).



Dải trồng hoa giữa hai đường thẳng cách nhau 8 m.

Lời giải. Chọn hệ trục với elip $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{25} = 1$; dải hoa ứng với $-4 \leq x \leq 4$. Diện tích $S = 2 \int_{-4}^4 \sqrt{1 - \frac{x^2}{64}} dx$. Đặt $x = 8\sin t$ (cận $-\frac{\pi}{6} \rightarrow \frac{\pi}{6}$):

$$S = 80 \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos^2 t dt = 80 \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_{-\pi/6}^{\pi/6} = \frac{40\pi}{3} + 20\sqrt{3} \approx 76,53 \text{ m}^2.$$

Đáp số: 76,53

Dạng 16. Tích phân trong đề thi tuyển sinh Đại học (2002 – 2015)

Trong kì thi tuyển sinh Đại học “ba chung” (2002 – 2014) và kì thi THPT Quốc gia đầu tiên (2015), câu tích phân (1 điểm) có mặt trong mọi đề. Đây là kho bài tập mẫu mực về **đổi biến** và **từng phần**, rất đáng để luyện kĩ năng trình bày. Các câu diện tích, thể tích (A2002, B2002, D2002, A2007, B2007, A2014) đã được giới thiệu ở Dạng 12, 13.

★ Đọc “chữ kí” của đề.

Trước khi tính, hãy hỏi: biểu thức nào có đạo hàm nằm sẵn trong tích phân? Có cần cần phá không? Có tích của hai loại hàm khác nhau không? Có thể **tách** tích phân thành tổng của một phần dễ và một phần đổi biến không (như A2010, A2011)?

◆ Ví dụ 85. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A năm 2003)

Tính

$$I = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4}}$$

Phân tích. Đặt $t = \sqrt{x^2 + 4}$ thì $t dt = x dx$. Nhân cả tử và mẫu với x để “tạo” ra $x dx$.

Lời giải. Với $t = \sqrt{x^2 + 4}$:

$$\frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{x dx}{x^2\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{t dt}{(t^2 - 4)t} = \frac{dt}{t^2 - 4};$$

cận t từ 3 đến 4. Do đó

$$I = \int_3^4 \frac{dt}{t^2 - 4} = \frac{1}{4} \left[\ln \frac{t-2}{t+2} \right]_3^4 = \frac{1}{4} \left(\ln \frac{1}{3} - \ln \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{4} \ln \frac{5}{3}.$$

◆ Ví dụ 86. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B năm 2003)

$$\text{Tính } I = \int_0^{\pi/4} \frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x} dx.$$

Lời giải. Từ số $1 - 2\sin^2 x = \cos 2x$, và $(1 + \sin 2x)' = 2\cos 2x$. Đặt $t = 1 + \sin 2x$, cận $1 \rightarrow 2$: $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln 2$.

◆ Ví dụ 87. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A năm 2004)

Tính

$$I = \int_1^2 \frac{x}{1 + \sqrt{x-1}} dx$$

Lời giải. Đặt $t = \sqrt{x-1}$, $x = t^2 + 1$, $dx = 2t dt$, cận $0 \rightarrow 1$:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{(t^2 + 1)2t}{1 + t} dt = 2 \int_0^1 \left(t^2 - t + 2 - \frac{2}{t+1} \right) dt = 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - 2\ln 2 \right) \\ &= \frac{11}{3} - 4\ln 2. \end{aligned}$$

◆ Ví dụ 88. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B năm 2004)

$$\text{Tính } I = \int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x} \ln x}{x} dx.$$

Lời giải. Đặt $t = \sqrt{1+3\ln x}$: $t^2 = 1 + 3\ln x$, $2t dt = \frac{3dx}{x}$, $\ln x = \frac{t^2-1}{3}$; cận $1 \rightarrow 2$:

$$I = \int_1^2 t \cdot \frac{t^2-1}{3} \cdot \frac{2t}{3} dt = \frac{2}{9} \int_1^2 (t^4 - t^2) dt = \frac{2}{9} \left(\frac{31}{5} - \frac{7}{3} \right) = \frac{116}{135}.$$

◆ Ví dụ 89. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A năm 2005)

Tính

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1+3\cos x}} dx$$

Lời giải. Từ số $= \sin x(2\cos x + 1)$. Đặt $t = \sqrt{1+3\cos x}$: $\cos x = \frac{t^2-1}{3}$, $\sin x dx = -\frac{2t}{3} dt$; $x = 0 \Rightarrow t = 2$, $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$:

$$I = \int_1^2 \frac{2(t^2 - 1)}{3} + 1 \cdot \frac{2t}{3} dt = \frac{2}{9} \int_1^2 (2t^2 + 1) dt = \frac{2}{9} \left(\frac{14}{3} + 1 \right) = \frac{34}{27}.$$

◆ Ví dụ 90. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B năm 2006)

Tính

$$I = \int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3}$$

Lời giải. Nhân tử và mẫu với e^x : $I = \int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{e^x dx}{e^{2x} - 3e^x + 2}$. Đặt $t = e^x$, cận $3 \rightarrow 5$:

$$I = \int_3^5 \frac{dt}{(t-1)(t-2)} = \left[\ln \frac{t-2}{t-1} \right]_3^5 = \ln \frac{3}{4} - \ln \frac{1}{2} = \ln \frac{3}{2}.$$

◆ Ví dụ 91. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D năm 2007)

Tính

$$I = \int_1^e x^3 \ln^2 x dx$$

Lời giải. Từng phần hai lần. Với $u = \ln^2 x$, $dv = x^3 dx$:

$$I = \left[\frac{x^4 \ln^2 x}{4} \right]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x^3 \ln x dx = \frac{e^4}{4} - \frac{1}{2} J.$$

Với

$$J = \int_1^e x^3 \ln x dx = \left[\frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{x^4}{16} \right]_1^e = \frac{3e^4 + 1}{16}.$$

Vậy $I = \frac{e^4}{4} - \frac{3e^4 + 1}{32} = \frac{5e^4 - 1}{32}.$

◆ Ví dụ 92. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A năm 2008)

Tính

$$I = \int_0^{\pi/6} \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} dx$$

Phân tích. Viết $\cos 2x = \cos^2 x (1 - \tan^2 x)$ để xuất hiện $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\tan x).$

Lời giải. Đặt $t = \tan x$, cận $0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}$:

$$I = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{t^4}{1-t^2} dt = \int_0^{1/\sqrt{3}} \left(-t^2 - 1 + \frac{1}{1-t^2} \right) dt.$$

Do đó

$$I = \left[-\frac{t^3}{3} - t + \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t} \right]_0^{1/\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{10}{9\sqrt{3}}.$$

♦ Ví dụ 93. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B năm 2008)

Tính

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2x + 2(1 + \sin x + \cos x)} dx.$$

Phân tích. Mẫu chứa $\sin x + \cos x$ và $\sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 - 1$; tử $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{2}}$ chính là (sai khác hằng số) vi phân của $\sin x + \cos x$.

Lời giải. Đặt $t = \sin x + \cos x$, $dt = (\cos x - \sin x) dx$, cận $1 \rightarrow \sqrt{2}$. Mẫu bằng $t^2 - 1 + 2 + 2t = (t + 1)^2$. Vậy

$$I = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{(t+1)^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2} \right) = \frac{4-3\sqrt{2}}{4}.$$

♦ Ví dụ 94. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A năm 2009)

Tính

$$I = \int_0^{\pi/2} (\cos^3 x - 1) \cos^2 x dx$$

Lời giải.

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos^5 x dx - \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx.$$

Với $t = \sin x$:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^5 x dx = \int_0^1 (1-t^2)^2 dt = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}.$$

Còn $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{4}$. Vậy $I = \frac{8}{15} - \frac{\pi}{4}$.

◆ Ví dụ 95. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D năm 2009)

Tính

$$I = \int_1^3 \frac{dx}{e^x - 1}$$

Lời giải. Đặt $t = e^x$, $dx = \frac{dt}{t}$, cận $e \rightarrow e^3$:

$$I = \int_e^{e^3} \frac{dt}{t(t-1)} = \left[\ln \frac{t-1}{t} \right]_e^{e^3} = \ln \frac{e^3-1}{e^2(e-1)} = \ln(e^2 + e + 1) - 2.$$

◆ Ví dụ 96. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A năm 2010)

Tính

$$I = \int_0^1 \frac{x^2 + e^x + 2x^2 e^x}{1 + 2e^x} dx$$

Phân tích. Nhóm $x^2 + 2x^2 e^x = x^2(1 + 2e^x)$: tách được thành một phần đa thức và một phần $\frac{u'}{u}$.

Lời giải.

$$I = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 \frac{e^x}{1 + 2e^x} dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} [\ln(1 + 2e^x)]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + 2e}{3}.$$

◆ Ví dụ 97. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A năm 2011)

Tính

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{x \sin x + (x+1) \cos x}{x \sin x + \cos x} dx.$$

Lời giải. Từ số $= (x \sin x + \cos x) + x \cos x$, và $(x \sin x + \cos x)' = x \cos x$. Vậy

$$I = \int_0^{\pi/4} \left(1 + \frac{x \cos x}{x \sin x + \cos x} \right) dx = \frac{\pi}{4} + [\ln(x \sin x + \cos x)]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} + \ln \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\pi}{4} + 1 \right) \right).$$

◆ Ví dụ 98. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B năm 2011)

Tính

$$I = \int_0^{\pi/3} \frac{1 + x \sin x}{\cos^2 x} dx$$

Lời giải.

$$I = \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^2 x} + \int_0^{\pi/3} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx = \sqrt{3} + J.$$

Với J : đặt $u = x$, $dv = \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$, $v = \frac{1}{\cos x}$:

$$\begin{aligned} J &= \left[\frac{x}{\cos x} \right]_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x} = \frac{2\pi}{3} - \int_0^{\pi/3} \frac{\cos x dx}{1 - \sin^2 x} = \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2} \left[\ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right]_0^{\pi/3} \\ &= \frac{2\pi}{3} - \ln(2 + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Vậy $I = \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + \ln(2 - \sqrt{3})$.

◆ Ví dụ 99. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A, A1 năm 2012)

Tính

$$I = \int_1^3 \frac{1 + \ln(x+1)}{x^2} dx$$

Lời giải. Đặt $u = 1 + \ln(x+1)$, $dv = \frac{dx}{x^2}$, $v = -\frac{1}{x}$:

$$I = \left[-\frac{1 + \ln(x+1)}{x} \right]_1^3 + \int_1^3 \frac{dx}{x(x+1)} = \frac{2}{3} + \ln 2 - \frac{2}{3} \ln 2 + \left[\ln \frac{x}{x+1} \right]_1^3.$$

Mà

$$\left[\ln \frac{x}{x+1} \right]_1^3 = \ln \frac{3}{4} - \ln \frac{1}{2} = \ln \frac{3}{2}.$$

Vậy $I = \frac{2}{3} + \ln 3 - \frac{2}{3} \ln 2$.

◆ Ví dụ 100. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A, A1 năm 2013)

Tính

$$I = \int_1^2 \frac{x^2 - 1}{x^2} \ln x dx$$

Lời giải. Đặt $u = \ln x$, $dv = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx$, chọn $v = x + \frac{1}{x}$:

$$I = \left[\left(x + \frac{1}{x}\right) \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{5}{2} \ln 2 - \left[x - \frac{1}{x} \right]_1^2 = \frac{5}{2} \ln 2 - \frac{3}{2}.$$

Dạng 17. Tích phân trong đề thi học sinh giỏi và Olympic

Ở các kì thi Olympic, tích phân hiếm khi đòi hỏi tính toán dài; vẻ đẹp nằm ở **phép đổi biến đổi xứng, sự co rút** và những **bất đẳng thức bất ngờ**. Các bài dưới đây đều có thể giải chỉ bằng kiến thức lớp 12.

◆ Ví dụ 101. (Putnam 1968, Bài A1)

Chứng minh rằng

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} dx = \frac{22}{7} - \pi$$

Phân tích. Đây là một trong những bài toán đẹp nhất về số π : vì hàm dưới dấu tích phân dương, kết quả chứng minh rằng $\frac{22}{7}$ (giá trị gần đúng của Archimedes) **lớn hơn** π .

Lời giải. Chia đa thức:

$$\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} = x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - \frac{4}{1+x^2}.$$

Do đó

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} dx = \frac{1}{7} - \frac{2}{3} + 1 - \frac{4}{3} + 4 - 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{22}{7} - \pi.$$

Vì tích phân dương nên $\pi < \frac{22}{7}$. Đánh giá thêm

$$\frac{x^4(1-x)^4}{2} \leq \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} \leq x^4(1-x)^4$$

trên $[0; 1]$ và $\int_0^1 x^4(1-x)^4 dx = \frac{1}{630}$, ta còn được $\frac{22}{7} - \frac{1}{630} < \pi < \frac{22}{7} - \frac{1}{1260}$.

◆ Ví dụ 102. (Putnam 1980, Bài A3)

Tính

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}}$$

Lời giải. Đặt $x = \frac{\pi}{2} - t$, $\tan x = \cot t = \frac{1}{\tan t}$: $I = \int_0^{\pi/2} \frac{(\tan t)^{\sqrt{2}}}{(\tan t)^{\sqrt{2}+1}} dt$. Cộng hai biểu thức của I : $2I = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$, nên $I = \frac{\pi}{4}$. Số mũ $\sqrt{2}$ chỉ để “dọa”: với mọi số mũ, kết quả vẫn là $\frac{\pi}{4}$.

◆ Ví dụ 103. (Putnam 1987, Bài B1)

Tính

$$I = \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}} dx.$$

Lời giải. Phép đổi biến $x = 6 - t$ (đối xứng qua trung điểm 3 của đoạn $[2; 4]$) biến $9 - x$ thành $t + 3$ và $x + 3$ thành $9 - t$. Vậy

$$I = \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(t+3)}}{\sqrt{\ln(t+3)} + \sqrt{\ln(9-t)}} dt.$$

Cộng lại: $2I = \int_2^4 dx = 2$, nên $I = 1$.

◆ Ví dụ 104. (Putnam 2005, Bài A5)

Tính

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1} dx$$

Phân tích. Mẫu $x^2 + 1$ gợi ý đặt $x = \tan t$; sau đó $1 + \tan t$ có một tính chất đối xứng đẹp: $1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - t\right) = \frac{2}{1 + \tan t}$.

Lời giải. Đặt $x = \tan t$: $I = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan t) dt$. Đặt tiếp $t = \frac{\pi}{4} - u$:

$$I = \int_0^{\pi/4} \ln \frac{2}{1 + \tan u} du = \frac{\pi}{4} \ln 2 - I.$$

Vậy $I = \frac{\pi}{8} \ln 2$.

◆ Ví dụ 105.

Tính giới hạn

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1^2} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right).$$

Phân tích. Đưa tổng về dạng $\frac{1}{n} \sum f\left(\frac{k}{n}\right)$: đó là tổng Riemann của f trên $[0; 1]$.

Lời giải. $\frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$. Theo định nghĩa tích phân, $L = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$.

◆ Ví dụ 106.

Đặt $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$ ($n \in \mathbb{N}$). Chứng minh $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ với $n \geq 2$, rồi tính I_6 .

Lời giải. Tắt phần với $u = \sin^{n-1} x$, $dv = \sin x \, dx$:

$$I_n = [-\cos x \sin^{n-1} x]_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n).$$

Suy ra $nI_n = (n-1)I_{n-2}$. Với $I_0 = \frac{\pi}{2}$: $I_6 = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{32}$. (Công thức này dẫn tới tích Wallis nổi tiếng $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \dots$)

◆ Ví dụ 107.

Quay phần đồ thị $y = \frac{1}{x}$ với $1 \leq x \leq b$ quanh trục Ox . Tính thể tích $V(b)$ của khối tròn xoay và giới hạn của $V(b)$ khi $b \rightarrow +\infty$.

Lời giải.

$$V(b) = \pi \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \pi \left(1 - \frac{1}{b}\right) \rightarrow \pi$$

khi $b \rightarrow +\infty$. Đó là “chiếc kèn Gabriel” của Torricelli (1643): dài vô hạn, diện tích mặt ngoài cũng vô hạn (vì $\int_1^b \frac{dx}{x} = \ln b \rightarrow +\infty$), nhưng thể tích chỉ bằng π . Nói vui: *có thể đổ đầy sơn vào chiếc kèn, nhưng không đủ sơn để sơn mặt ngoài của nó!*

PHẦN IV. TÍCH PHÂN QUANH TA

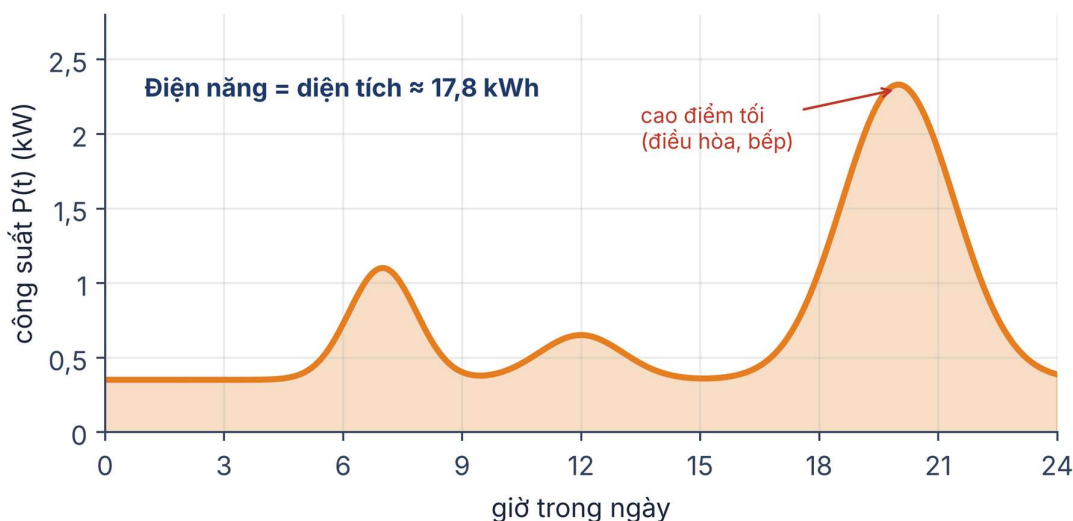
Ở đâu có một đại lượng **tích lũy dần** (quãng đường từ vận tốc, điện năng từ công suất, lượng nước từ tốc độ chảy, doanh thu từ giá bán từng sản phẩm) hay một hình **không thể đo bằng thước** (mặt hồ, chiếc bình gốm, mặt đập thủy điện), ở đó có tích phân. Phần này giới thiệu những ứng dụng gần gũi nhất, kèm theo các con số cụ thể để thầy cô có thể dùng ngay làm tình huống mở đầu bài giảng.

1. Chiếm công tơ điện và hóa đơn tiền điện

Công tơ điện trong mỗi gia đình thực chất là một **máy tính tích phân**: nó liên tục đo công suất tiêu thụ $P(t)$ (kW) và cộng dồn lại thành điện năng

$$A = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt \quad (\text{kWh}).$$

Một “số điện” chính là 1 kWh: lượng điện năng tiêu thụ khi dùng thiết bị công suất 1 kW liên tục trong 1 giờ.



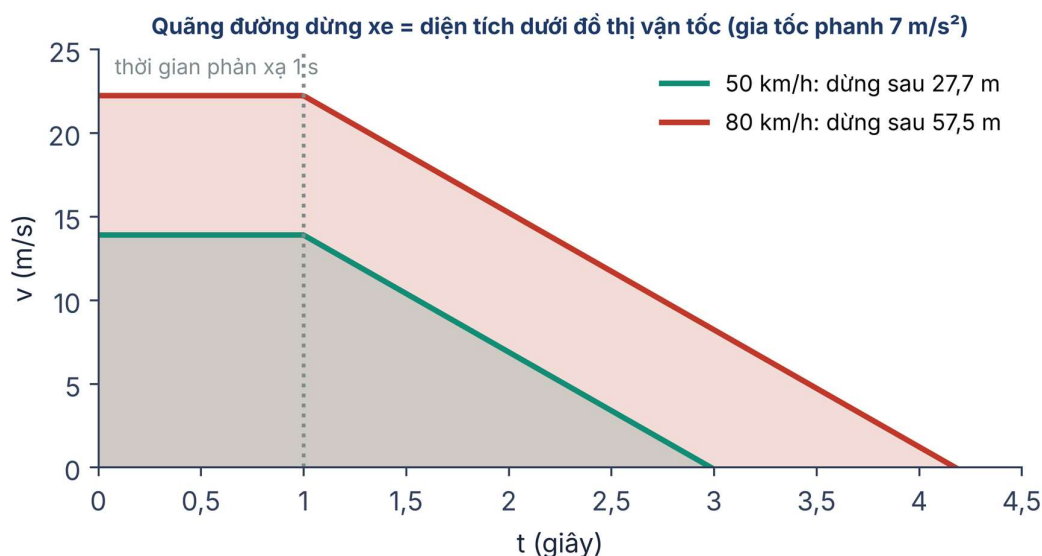
Đồ thị công suất điện của một gia đình trong một ngày: điện năng tiêu thụ là diện tích dưới đồ thị.

Đồ thị cho thấy một điều thú vị: dù chỉ kéo dài vài giờ, “cao điểm tối” (điều hòa, bếp điện, bình nóng lạnh cùng bật) chiếm gần một nửa điện năng cả ngày. Đó là lí do ngành điện khuyến khích dịch chuyển bớt việc dùng điện ra khỏi giờ cao điểm, và vì sao một số nước tính giá điện khác nhau theo giờ.

2. Giao thông: khoảng cách an toàn và quãng đường phanh

Khi người lái phát hiện chướng ngại vật, xe còn chạy thêm một đoạn trong **thời gian phản xạ** (khoảng 1 giây) rồi mới bắt đầu giảm tốc. Quãng đường dừng xe là diện tích dưới đồ thị vận tốc:

$$s = v_0 t_r + \int_0^{v_0/a} (v_0 - at) dt = v_0 t_r + \frac{v_0^2}{2a}.$$



Số hạng $\frac{v_0^2}{2a}$ cho thấy quãng đường phanh tỉ lệ với **bình phương** vận tốc: tăng tốc từ 50 km/h lên 80 km/h (tăng 60%) làm quãng đường dừng xe tăng hơn gấp đôi, từ khoảng 28 m lên khoảng 57 m. Đây là cơ sở khoa học của các biển báo giới hạn tốc độ trong khu dân cư và quy định về khoảng cách an toàn giữa hai xe trên đường cao tốc.

◆ Ví dụ 108.

Một ô tô chạy với vận tốc 72 km/h thì người lái phát hiện chướng ngại vật. Sau thời gian phản xạ 1 giây, xe phanh với vận tốc $v(t) = 20 - 8t \text{ (m/s)}$. Tính quãng đường xe đi được từ lúc phát hiện chướng ngại vật đến khi dừng hẳn.

Lời giải. $72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$. Trong 1 giây phản xạ, xe đi 20 m. Xe dừng khi $20 - 8t = 0 \Leftrightarrow t = 2,5$; quãng đường phanh

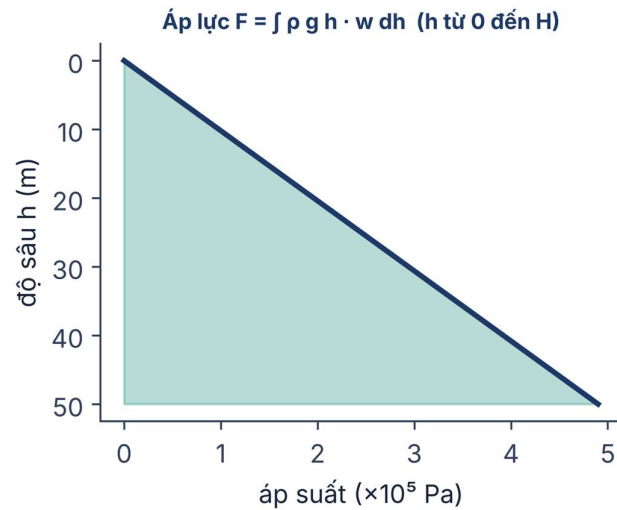
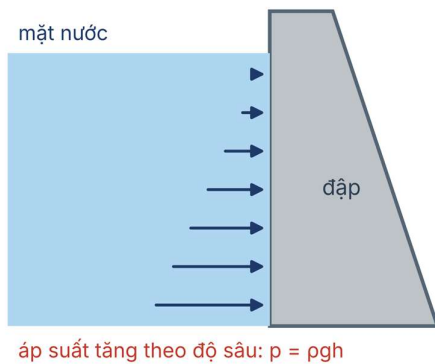
$$\int_0^{2,5} (20 - 8t) dt = 50 - 25 = 25 \text{ m}.$$

Tổng cộng $20 + 25 = 45 \text{ m}$. **Đáp số: 45**

3. Thủy điện: vì sao chân đập phải dày?

Áp suất nước tăng tuyến tính theo độ sâu: $p = \rho gh$. Trên một dải nằm ngang mỏng của mặt đập ở độ sâu h , rộng w , cao dh , áp lực là $\rho gh \cdot w dh$. Cộng tất cả các dải:

$$F = \int_0^H \rho g h w dh = \frac{\rho g w H^2}{2}.$$



Áp suất nước tăng theo độ sâu: phần chân đập chịu lực lớn nhất.

Với mặt đập hình chữ nhật rộng 100 m, mực nước sâu 50 m ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$):

$$F = \frac{1000 \cdot 9,8 \cdot 100 \cdot 50^2}{2} \approx 1,23 \cdot 10^9$$

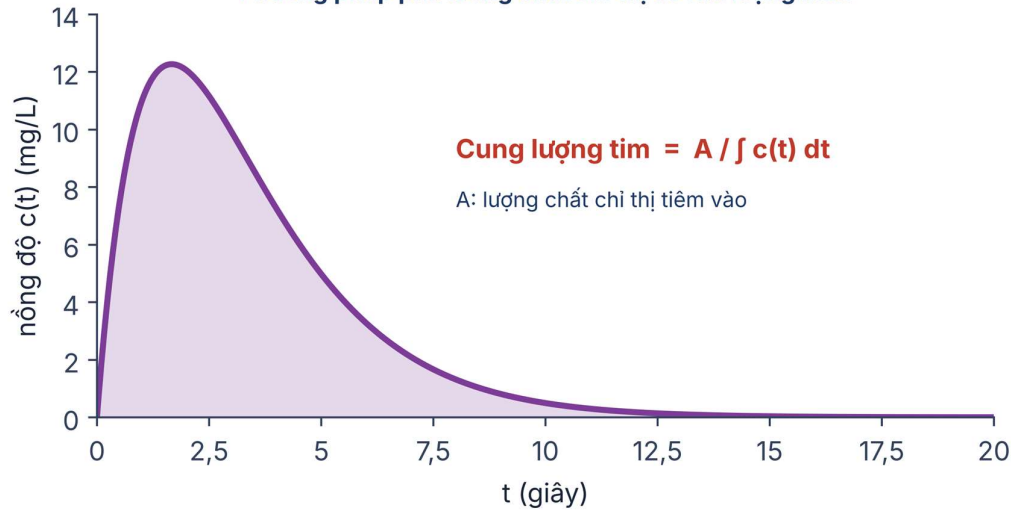
N, tương đương sức nặng của khoảng 125 nghìn tấn. Vì lực tập trung ở phía dưới, các đập thủy điện như Hòa Bình, Sơn La đều có mặt cắt hình thang, chân đập dày hơn nhiều so với đỉnh đập.

4. Y học: đo lưu lượng máu bằng một mũi tiêm

Để đo **cung lượng tim** (lượng máu tim bơm mỗi phút), bác sĩ tiêm một lượng nhỏ A (mg) chất chỉ thị vào tĩnh mạch gần tim, rồi đo nồng độ $c(t)$ của nó trong động mạch theo thời gian. Lượng máu chảy qua trong khoảng thời gian chất chỉ thị đi qua thỏa mãn $A = F \int c(t) dt$, nên lưu lượng máu là

$$F = \frac{A}{\int_0^T c(t) dt}.$$

Phương pháp pha loãng chất chỉ thị đo lưu lượng máu

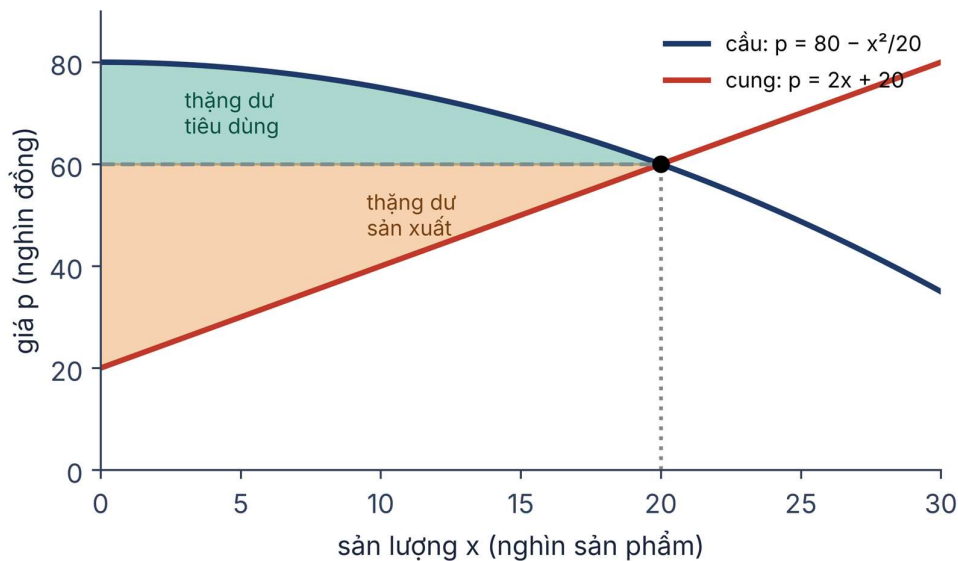


Đường cong nồng độ chất chỉ thị: lưu lượng máu tỉ lệ nghịch với diện tích dưới đường cong.

Chẳng hạn với $A = 5$ mg và $c(t) = 20te^{-0,6t}$ (mg/L), diện tích dưới đường cong (lấy T đủ lớn) xấp xỉ $\frac{20}{0,36} \approx 55,6$ mg·s/L. Lưu lượng máu khoảng $\frac{5}{55,6} \approx 0,09$ L/s, tức khoảng 5,4 lít mỗi phút, đúng với giá trị bình thường ở người trưởng thành.

5. Kinh tế: thặng dư của người mua và người bán

Đường cầu $p = D(x)$ cho biết người mua sẵn sàng trả bao nhiêu cho sản phẩm thứ x ; đường cung $p = S(x)$ cho biết người bán chấp nhận bán với giá nào. Tại điểm cân bằng $(x_0; p_0)$, mọi người đều mua bán ở giá p_0 . Người mua sẵn lòng trả cao hơn đã “được lợi”: tổng phần lợi ấy là **thặng dư tiêu dùng** $\int_0^{x_0} [D(x) - p_0] dx$; tương tự, **thặng dư sản xuất** là $\int_0^{x_0} [p_0 - S(x)] dx$.



Thặng dư tiêu dùng và thặng dư sản xuất là diện tích giữa các đường cung, cầu và đường giá cân bằng.

Với $D(x) = 80 - \frac{x^2}{20}$, $S(x) = 2x + 20$ (giá tính bằng nghìn đồng, sản lượng bằng nghìn sản phẩm): cân bằng tại $x_0 = 20$, $p_0 = 60$; thặng dư tiêu dùng

$$\int_0^{20} \left(20 - \frac{x^2}{20} \right) dx = \frac{800}{3} \approx 266,7 \text{ triệu đồng,}$$

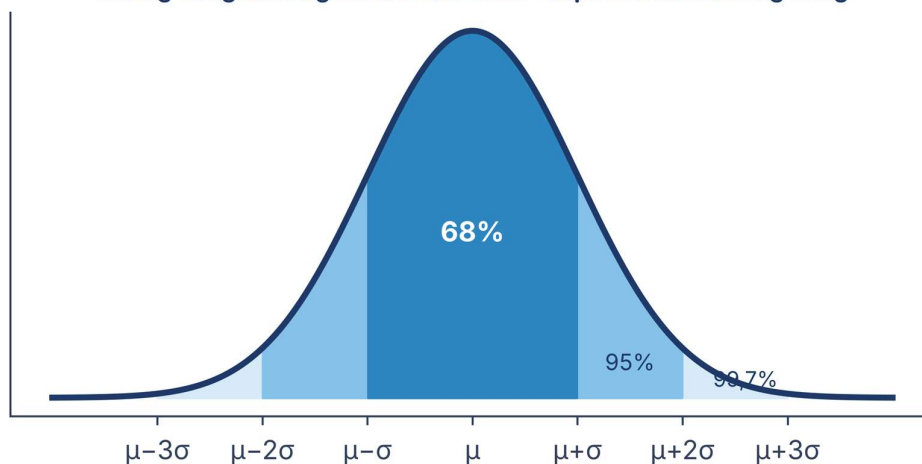
thặng dư sản xuất $\int_0^{20} (40 - 2x) dx = 400$ triệu đồng. Các nhà kinh tế dùng những con số này để đánh giá tác động của thuế, trợ giá lên người tiêu dùng và doanh nghiệp.

6. Xác suất: phổ điểm và đường cong chuông

Phổ điểm của một kì thi đồng thí sinh thường có dạng gần với **phân phối chuẩn**, đồ thị hình chuông do Gauss nghiên cứu. Với phân phối liên tục, xác suất để một đại lượng rơi vào khoảng $[a; b]$ chính là **diện tích** dưới đường cong mật độ trên khoảng đó:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Đường cong chuông Gauss: xác suất = diện tích dưới đường cong



Quy tắc 68 – 95 – 99,7 của phân phối chuẩn.

Quy tắc “68 – 95 – 99,7” nói rằng khoảng 68% giá trị nằm trong phạm vi một độ lệch chuẩn quanh trung bình, 95% trong phạm vi hai độ lệch chuẩn và 99,7% trong phạm vi ba độ lệch chuẩn. Mọi con số này đều là các tích phân!

❖ Gauss trên tờ tiền.

Tờ 10 mác của Đức (lưu hành từ năm 1991 đến khi đồng euro ra đời) in chân dung Carl Friedrich Gauss bên cạnh đồ thị và công thức của đường cong chuông $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$. Hàm này không có nguyên hàm biểu diễn được bằng các hàm sơ cấp, nên các bảng giá trị tích phân của nó đã được tính sẵn từ thế kỉ XIX, và ngày nay nằm trong mọi máy tính cầm tay.

7. Đo diện tích mặt hồ: khi không có công thức

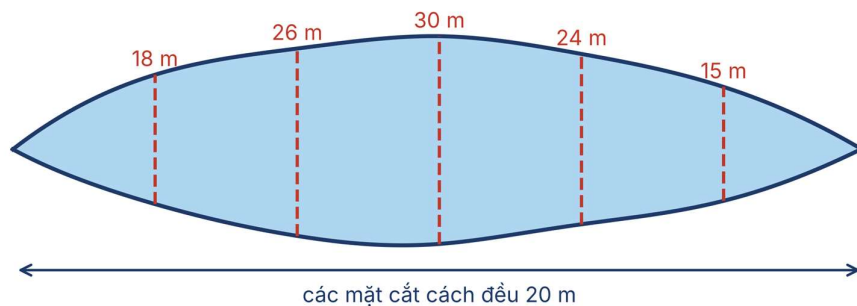
Muốn tính diện tích một mặt hồ, người ta không có hàm số $f(x)$ nào cả, chỉ có các số đo. Đo chiều rộng hồ tại các mặt cắt cách đều h rồi dùng **công thức hình thang**

$$S \approx h \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right)$$

hoặc **công thức Simpson** (với n chẵn) chính xác hơn

$$S \approx \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 4y_{n-1} + y_n).$$

Ước lượng diện tích mặt hồ bằng công thức hình thang và Simpson

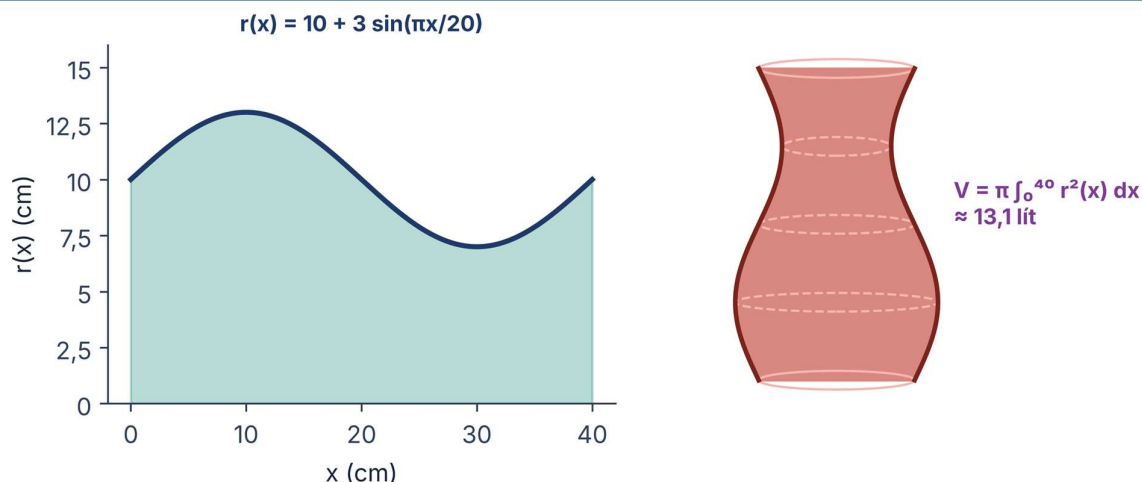


Đo chiều rộng hồ tại các mặt cắt cách đều 20 m.

Với các chiều rộng 0; 18; 26; 30; 24; 15; 0 (m) đo cách nhau 20 m, công thức hình thang cho $S \approx 20 \cdot 113 = 2260 \text{ m}^2$, còn công thức Simpson cho $S \approx \frac{20}{3} \cdot 352 \approx 2347 \text{ m}^2$. Chính những công thức “tích phân số” này chạy bên trong máy tính cầm tay mỗi khi bạn bấm phím $\int$, và bên trong các phần mềm đo đạc, bản đồ.

8. Chiếc bình gốm: thể tích khối tròn xoay

Bình gốm, lọ hoa, chum vại làm trên bàn xoay đều là khối tròn xoay. Nếu biết bán kính $r(x)$ của mặt cắt ngang ở độ cao x , thể tích bình là $V = \pi \int_0^h r^2(x) dx$.



Chiếc bình có mặt cắt dọc mô tả bởi $r(x) = 10 + 3 \sin(\pi x/20)$.

Với chiếc bình cao 40 cm, $r(x) = 10 + 3 \sin \frac{\pi x}{20}$ (cm):

$$V = \pi \int_0^{40} \left(100 + 60 \sin \frac{\pi x}{20} + 9 \sin^2 \frac{\pi x}{20} \right) dx = \pi(4000 + 0 + 180) = 4180\pi \approx 13\,132 \text{ cm}^3,$$

tức khoảng 13,1 lít. Các xưởng gốm Bát Tràng ngày nay dùng phần mềm thiết kế 3D để tính trước dung tích sản phẩm theo đúng nguyên lý này.

9. Kiến trúc: vòm parabol và những mái nhà cong

Cổng, cầu vòm, mái vòm hình parabol vừa đẹp vừa chịu lực tốt. Khi thi công, cần biết diện tích mặt cổng để tính vật liệu ốp, hay thể tích phần bê tông của vòm: đó là các bài toán diện tích, thể tích quen thuộc ở Dạng 12, 15. Công thức “hai phần ba” của Archimedes, diện tích vòm parabol bằng $\frac{2}{3} \times \text{đáy} \times \text{chiều cao}$, đến nay vẫn được các kỹ sư dùng để ước lượng nhanh.

★ Hoạt động trải nghiệm.

Mỗi nhóm học sinh chọn một vật thật: một chiếc lá, một chiếc cốc, đồ thị lượng mưa hằng tháng của địa phương. Hãy dùng số đo thực tế và công thức hình thang để ước lượng diện tích lá, dung tích cốc (đo đường kính tại nhiều độ cao), hay tổng lượng mưa cả năm, rồi so sánh với kết quả đo trực tiếp (đổ nước vào cốc, đếm ô vuông trên giấy kẻ li).

PHẦN V. HỆ THỐNG BÀI TẬP

Bài tập chia làm 7 mức độ. Các bài đánh dấu [TN] là câu trắc nghiệm 4 lựa chọn, [ĐA] là câu điền đáp án theo định dạng HSA; Mức 6 là các bài chứng minh dành cho học sinh giỏi; Mức 7 gồm các câu tích phân trong đề thi tuyển sinh Đại học. Học sinh nên tự bấm giờ: trung bình **1,5 phút mỗi câu** ở các mức 1 – 3.

Mức 1 – Nhận biết

Bài 1. [TN] $\int (4x^3 - 1)dx$ bằng

- A. $\frac{x^4}{4} - x + C$. B. $12x^2 + C$. C. $x^4 - 1 + C$. D. $x^4 - x + C$.

Bài 2. [TN] $\int \cos 3x \, dx$ bằng

- A. $3\sin 3x + C$. B. $-\frac{1}{3}\sin 3x + C$. C. $\frac{1}{3}\sin 3x + C$. D. $\sin 3x + C$.

Bài 3. [TN] $\int e^{2x} dx$ bằng

- A. $2e^{2x} + C$. B. $\frac{1}{2}e^{2x} + C$. C. $e^{2x} + C$. D. $\frac{e^{2x+1}}{2x+1} + C$.

Bài 4. [TN] Trên khoảng $(0; +\infty)$, $\int \frac{dx}{x^2}$ bằng

- A. $\ln x^2 + C$. B. $-\frac{1}{x} + C$. C. $\frac{1}{x} + C$. D. $-\frac{2}{x^3} + C$.

Bài 5. [ĐA] Tính $\int_1^{22} x \, dx$.

Bài 6. [ĐA] Tính $\int_0^\pi \sin x \, dx$.

Bài 7. [TN] Cho $\int_a^b f(x) \, dx = 5$. Giá trị của $\int_b^a f(x) \, dx$ là

- A. 5. B. 0. C. -5. D. $\frac{1}{5}$.

Bài 8. [TN] Hàm số $F(x) = x^2 + \sin x$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

- A. $f(x) = 2x - \cos x$. B. $f(x) = 2x + \cos x$. C. $f(x) = \frac{x^3}{3} - \cos x$. D. $f(x) = x + \cos x$.

Bài 9. [ĐA] Tính $\int_0^1 e^x \, dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 10. [TN] Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số liên tục $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ ($a < b$) là

- A. $\int_a^b f(x) \, dx$. B. $\int_a^b |f(x)| \, dx$. C. $\pi \int_a^b f^2(x) \, dx$. D. $|\int_a^b f(x) \, dx|$.

Bài 11. [TN] Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x)$, trục hoành, $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox là

- A. $\pi \int_a^b f^2(x) \, dx$. B. $\int_a^b f^2(x) \, dx$. C. $\pi \int_a^b |f(x)| \, dx$. D. $\pi^2 \int_a^b f(x) \, dx$.

Bài 12. [ĐA] Tính $\int_1^e \frac{dx}{x}$.

Mức 2 – Thông hiểu

Bài 13. [TN] Trên khoảng $(0; +\infty)$, $\int \frac{(x+1)^2}{x} dx$ bằng

- A. $\frac{x^2}{2} + 2x + \ln x + C$. B. $\frac{(x+1)^3}{3x} + C$. C. $x^2 + 2x + \ln x + C$. D. $\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{x^2} + C$.

Bài 14. [TN] $\int \sin^2 x dx$ bằng

- A. $\frac{\sin^3 x}{3} + C$. B. $\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$. C. $\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$. D. $x - \frac{\sin 2x}{2} + C$.

Bài 15. [TN] $\int \frac{dx}{3x+1}$ bằng

- A. $\ln|3x+1| + C$. B. $3\ln|3x+1| + C$. C. $\frac{1}{3}\ln|3x+1| + C$. D. $-\frac{3}{(3x+1)^2} + C$.

Bài 16. [ĐA] Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = e^x + 1$ và $F(0) = 2$. Tính $F(1)$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 17. [ĐA] Tính

$$\int_0^2 (3x^2 - 4x + 1) dx$$

Bài 18. [ĐA] Cho $\int_1^4 f(x) dx = 9$ và $\int_1^4 g(x) dx = 2$. Tính

$$\int_1^4 [f(x) - 2g(x) + 1] dx$$

Bài 19. [TN] Giá trị của

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$$

- A. $\sqrt{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{\pi}{4}$. D. 1.

Bài 20. [ĐA] Tính

$$\int_0^1 \frac{dx}{2x+1}$$

(làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 21. [TN] Giá trị của

$$\int_{-1}^2 |x| dx$$

- A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{5}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. 2.

Bài 22. [ĐA] Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = 4$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 23. [TN] Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = 2x$, trục hoành, $x = 0$, $x = 3$ quanh trục Ox là

- A. 18π . B. 36π . C. 12π . D. 9π .

Bài 24. [ĐA] Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 3t^2$ (m/s). Tính quãng đường vật đi được trong 2 giây đầu (mét).

Bài 25. [TN] Giá trị của $\int_{-1}^1 x^3 \cos x \, dx$ là

- A. $2\cos 1$. B. $2\sin 1$. C. 1 . D. 0 .

Bài 26. [ĐA] Tính $\int_0^{\ln 2} e^{2x} \, dx$.

Mức 3 – Vận dụng

Bài 27. [TN] $\int x\sqrt{x^2 + 1} \, dx$ bằng

- A. $\frac{(x^2+1)^{3/2}}{3} + C$. B. $\frac{2(x^2+1)^{3/2}}{3} + C$.
C. $\frac{x^2(x^2+1)^{3/2}}{3} + C$. D. $\sqrt{x^2 + 1} + C$.

Bài 28. [TN] $\int x \sin x \, dx$ bằng

- A. $x \cos x + \sin x + C$. B. $-x \cos x - \sin x + C$.
C. $-x \cos x + \sin x + C$. D. $\frac{x^2}{2} \sin x + C$.

Bài 29. [ĐA] Gọi $I = \int_0^1 x(1-x)^5 \, dx$. Tính $\frac{1}{I}$.

Bài 30. [ĐA] Tính $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} \, dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 31. [TN] Giá trị của $\int_0^1 \frac{2x+3}{x+1} \, dx$ là

- A. $1 + 2\ln 2$. B. $2\ln 2$. C. $3 + \ln 2$. D. $2 + \ln 2$.

Bài 32. [ĐA] Tính $\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} \, dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 33. [TN] Giá trị của $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x} \, dx$ là

- A. $\ln 2$. B. $-\ln 2$. C. $\frac{1}{2} \ln 2$. D. 1 .

Bài 34. [ĐA] Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = x^3$ và $y = x$.

Bài 35. [ĐA] Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = e^x$, $y = 1$ và $x = 2$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 36. [TN] Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = e^x$, trục hoành, $x = 0$, $x = 1$ quanh trục Ox là

- A. $\pi(e-1)$. B. $\frac{e^2-1}{2}$. C. $\pi(e^2-1)$. D. $\frac{\pi(e^2-1)}{2}$.

Bài 37. [ĐA] Một chất điểm chuyển động thẳng với vận tốc $v(t) = 10 - 2t$ (m/s). Tính quãng đường chất điểm đi được trong 8 giây đầu (mét).

Bài 38. [ĐA] Tính $\int_0^1 x e^{2x} dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 39. [TN] Cho f liên tục và $\int_0^1 f(x) dx = 4$. Giá trị của $\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx$ là

- A. 2. B. 4. C. 8. D. 16.

Bài 40. [ĐA] Tính $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + 1} dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 41. [TN] Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$ và $y = x$ là

- A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{5}{6}$.

Bài 42. [ĐA] Tìm số thực $a > 0$ thỏa mãn $\int_0^a (2x-1) dx = 6$.

Mức 4 – Vận dụng cao

Bài 43. [TN] Cho f liên tục và $\int_1^4 f(x) dx = 6$. Giá trị của $\int_1^2 x f(x^2) dx$ là

- A. 12. B. 6. C. 3. D. $\frac{3}{2}$.

Bài 44. [ĐA] Cho f có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(2) = 16$ và $\int_0^2 f(x) dx = 4$. Tính $\int_0^1 x f'(2x) dx$.

Bài 45. [ĐA] Cho f liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f(-x) = 2\cos^2 x$ với mọi x . Tính $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 46. [TN] Giá trị của $\int_0^\pi x \sin x dx$ là

- A. π . B. 2π . C. 0. D. $\frac{\pi}{2}$.

Bài 47. [ĐA] Tính $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 48. [TN] Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = |x^2 - 1|$ và $y = 3$ là

- A. $\frac{32}{3}$. B. 4. C. $\frac{16}{3}$. D. 8.

Bài 49. [ĐA] Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2$, tiếp tuyến của nó tại điểm $A(1; 1)$ và trục hoành (làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 50. [TN] Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = x^2$ và $y = 2x$ quanh trục Ox là

- A. $\frac{32\pi}{5}$. B. $\frac{16\pi}{15}$. C. $\frac{4\pi}{3}$. D. $\frac{64}{15}$.

Bài 51. [ĐA] Đường thẳng $x = k$ chia hình phẳng giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$, trục hoành và $x = 4$ thành hai phần có diện tích bằng nhau. Tìm k (làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 52. [ĐA] Cho $F(x) = \int_0^x (t^2 - 4t + 3) dt$. Hàm số $F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Bài 53. [TN] Một vật xuất phát từ trạng thái nghỉ, chuyển động với gia tốc $a(t) = 6 - 2t$ (m/s²). Quãng đường vật đi được tính đến thời điểm vận tốc đạt giá trị lớn nhất là

- A. 9 m. B. 18 m. C. 27 m. D. 36 m.

Bài 54. [ĐA] Nước chảy vào một bể rỗng với tốc độ $r(t) = 3\sqrt{t}$ (lít/phút). Sau bao nhiêu phút bể có 128 lít nước?

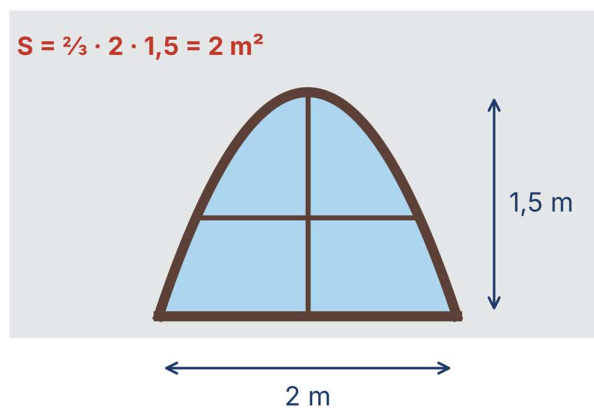
Bài 55. [TN] Cho hàm số f liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn $f(x) = x + 2 \int_0^1 f(t) dt$. Giá trị của $\int_0^1 f(x) dx$ là

- A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. 1. D. -1.

Bài 56. [ĐA] Cho f có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn $\int_0^1 (x + 1) f'(x) dx = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$.

Mức 5 – Bài toán thực tế

Bài 57. [ĐA] Một cửa sổ có dạng vòm parabol, chân vòm rộng 2 m, chiều cao 1,5 m, được lắp kính với giá 1,2 triệu đồng/m². Tính chi phí lắp kính (triệu đồng).



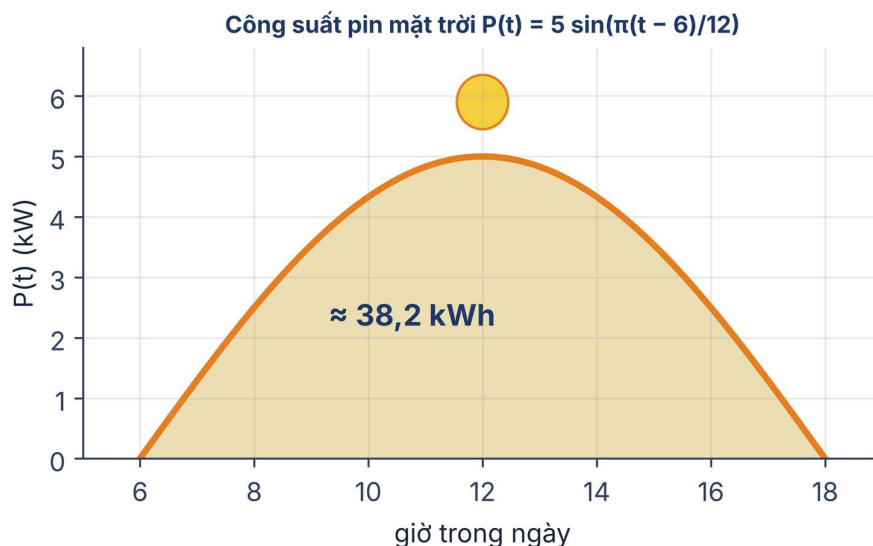
Cửa sổ hình vòm parabol.

Bài 58. [ĐA] Một ô tô đang chạy với vận tốc 54 km/h thì phanh, sau đó chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t) = 15 - 3t$ (m/s). Tính quãng đường ô tô đi được từ lúc phanh đến khi dừng (mét, viết dưới dạng số thập phân).

Bài 59. [ĐA] Một bồn chứa bị rò rỉ dầu với tốc độ $r(t) = 100e^{-0,1t}$ (lít/giờ). Tính lượng dầu rò rỉ trong 10 giờ đầu (lít, làm tròn đến hàng đơn vị).

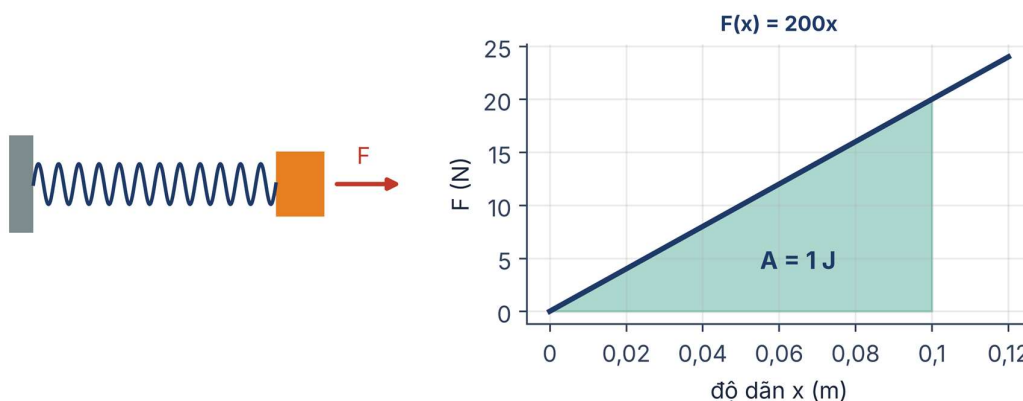
Bài 60. [ĐA] Một bồn chứa có dạng khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = \sqrt{2x}$, trục hoành, $x = 3$ (đơn vị: mét) quanh trục Ox . Tính thể tích bồn (m^3 , làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 61. [ĐA] Công suất của một hệ thống pin mặt trời trong ngày là $P(t) = 5 \sin \frac{\pi(t-6)}{12}$ (kW) với $6 \leq t \leq 18$ (t là giờ trong ngày). Tính điện năng hệ thống tạo ra trong ngày (kWh, làm tròn đến hàng phần mười).



Công suất của hệ thống pin mặt trời trong ngày.

Bài 62. [ĐA] Lực đàn hồi của một lò xo khi bị kéo dãn một đoạn x (mét) là $F(x) = 200x$ (N). Tính công cần thực hiện để kéo dãn lò xo từ độ dài tự nhiên thêm 10 cm (jun).

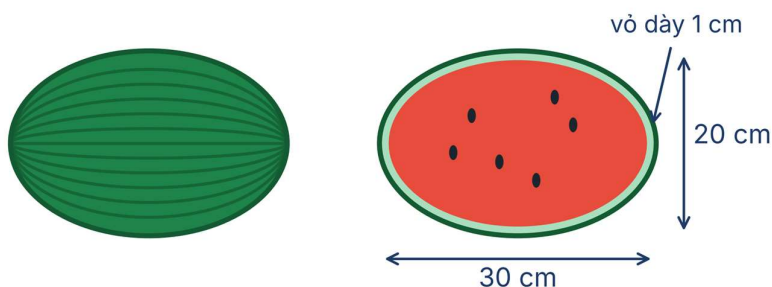


Công kéo dãn lò xo bằng diện tích dưới đồ thị lực.

Bài 63. [ĐA] Nhiệt độ ngoài trời được mô hình hóa bởi $T(t) = 25 + 5 \sin \frac{\pi t}{12}$ ($^{\circ}\text{C}$), t là số giờ kể từ 0 giờ. Tính nhiệt độ trung bình từ 0 giờ đến 12 giờ (làm tròn đến hàng phần mười).

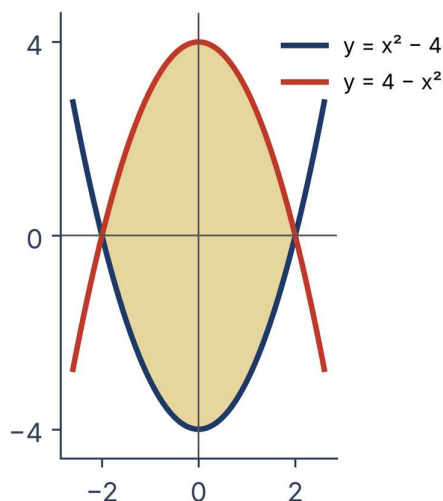
Bài 64. [ĐA] Doanh thu biên của một doanh nghiệp khi bán sản phẩm thứ x là $R'(x) = 100 - 0,4x$ (nghìn đồng). Doanh thu tăng thêm bao nhiêu nghìn đồng khi sản lượng tăng từ 100 lên 200 sản phẩm?

Bài 65. [ĐA] Một quả dưa hấu có dạng khối elipxoit tròn xoay, chiều dài 30 cm, đường kính lớn nhất 20 cm. Vỏ dày đều 1 cm. Tính thể tích phần ruột dưa (cm^3 , làm tròn đến hàng đơn vị).



Quả dưa hấu dạng elipxoit và phần ruột bên trong.

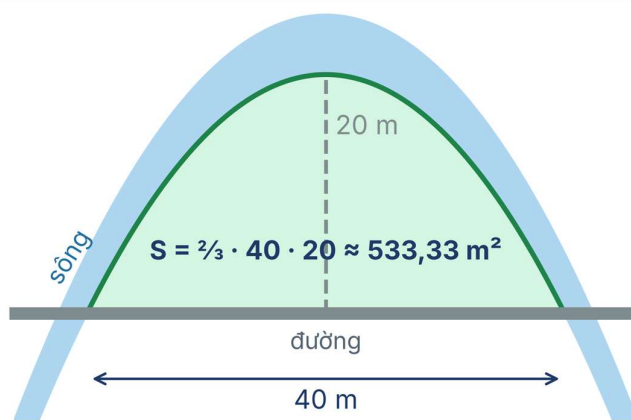
Bài 66. [ĐA] Một logo có dạng hình phẳng giới hạn bởi hai parabol $y = x^2 - 4$ và $y = 4 - x^2$ (đơn vị: dm). Tính diện tích logo (dm^2 , làm tròn đến hàng phần trăm).



Logo giới hạn bởi hai parabol.

Bài 67. [ĐA] Tốc độ tải dữ liệu của một ứng dụng tăng dần theo quy luật $v(t) = 4 + 2t$ (MB/s). Tính dung lượng tải được trong 10 giây đầu (MB).

Bài 68. [ĐA] Một mảnh đất ven sông giới hạn bởi bờ sông có dạng đường $y = 20 - \frac{x^2}{20}$ và con đường thẳng $y = 0$ (đơn vị: mét). Tính diện tích mảnh đất (m^2 , làm tròn đến hàng phần trăm).



Mảnh đất ven sông.

Mức 6 – Thử thách (học sinh giỏi)

Bài 69. Tính $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$.

Bài 70. Chứng minh rằng $0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+1}$ với mọi số tự nhiên n , rồi tính giới hạn của tích phân đó khi $n \rightarrow \infty$.

Bài 71. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n}} \right)$.

Bài 72. Tính $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+e^x} dx$.

Bài 73. Chứng minh rằng $\frac{1}{2} \leq \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \leq \frac{\pi}{6}$.

Bài 74. Tìm hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) = x + \int_0^1 x t f(t) dt$ với mọi x .

Bài 75. Cho f liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x f(x) dx = 1.$$

Chứng minh rằng $\int_0^1 f^2(x) dx \geq 4$.

Bài 76. Cho $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$. Chứng minh $I_n = e - n I_{n-1}$ ($n \geq 1$) và tính I_3 .

Mức 7 – Đề thi tuyển sinh Đại học

Tính các tích phân sau.

Bài 77. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D năm 2003)

$$\int_0^2 |x^2 - x| dx$$

Bài 78. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D năm 2004)

$$\int_2^3 \ln(x^2 - x) dx$$

Bài 79. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B năm 2005)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x \cos x}{1 + \cos x} dx$$

Bài 80. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D năm 2005)

$$\int_0^{\pi/2} (e^{\sin x} + \cos x) \cos x dx$$

Bài 81. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A năm 2006)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4 \sin^2 x}} dx$$

Bài 82. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D năm 2006)

$$\int_0^1 (x - 2) e^{2x} dx$$

Bài 83. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D năm 2008)

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x^3} dx$$

Bài 84. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B năm 2009)

$$\int_1^3 \frac{3 + \ln x}{(x + 1)^2} dx$$

Bài 85. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B năm 2010)

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x(2 + \ln x)^2} dx$$

Bài 86. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D năm 2010)

$$\int_1^e \left(2x - \frac{3}{x}\right) \ln x dx$$

Bài 87. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D năm 2011)

$$\int_0^4 \frac{4x - 1}{\sqrt{2x + 1} + 2} dx$$

Bài 88. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B năm 2012)

$$\int_0^1 \frac{x^3}{x^4 + 3x^2 + 2} dx$$

Bài 89. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D năm 2012)

$$\int_0^{\pi/4} x (1 + \sin 2x) dx$$

Bài 90. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B năm 2013)

$$\int_0^1 x \sqrt{2 - x^2} dx$$

Bài 91. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D năm 2013)

$$\int_0^1 \frac{(x+1)^2}{x^2+1} dx$$

Bài 92. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B năm 2014)

$$\int_1^2 \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + x} dx$$

Bài 93. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D năm 2014)

$$\int_0^{\pi/4} (x+1) \sin 2x dx$$

Bài 94. (Đề thi THPT Quốc gia năm 2015)

$$\int_0^1 (x-3) e^x dx$$

PHẦN VI. LỜI GIẢI CHI TIẾT

Mỗi bài được trích lại đề trong khung tím, lời giải đặt ngay sau đề. Với câu trắc nghiệm, thứ tự các phương án giữ nguyên như ở Phần V.

Mức 1 – Nhận biết

✎ Bài 1.

[TN] $\int (4x^3 - 1)dx$ bằng

- A. $\frac{x^4}{4} - x + C$. B. $12x^2 + C$. C. $x^4 - 1 + C$. D. $x^4 - x + C$.

Lời giải. $\int 4x^3 dx = x^4$ và $\int 1 dx = x$, nên $\int (4x^3 - 1)dx = x^4 - x + C$. Chọn D.

✎ Bài 2.

[TN] $\int \cos 3x dx$ bằng

- A. $3\sin 3x + C$. B. $-\frac{1}{3}\sin 3x + C$. C. $\frac{1}{3}\sin 3x + C$. D. $\sin 3x + C$.

Lời giải. Áp dụng

$$\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + C$$

với $a = 3$: kết quả $\frac{1}{3}\sin 3x + C$. Chọn C.

✎ Bài 3.

[TN] $\int e^{2x} dx$ bằng

- A. $2e^{2x} + C$. B. $\frac{1}{2}e^{2x} + C$. C. $e^{2x} + C$. D. $\frac{e^{2x+1}}{2x+1} + C$.

Lời giải. Áp dụng $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$ với $a = 2$: kết quả $\frac{1}{2}e^{2x} + C$. Chọn B.

✎ Bài 4.

[TN] Trên khoảng $(0; +\infty)$, $\int \frac{dx}{x^2}$ bằng

- A. $\ln x^2 + C$. B. $-\frac{1}{x} + C$. C. $\frac{1}{x} + C$. D. $-\frac{2}{x^3} + C$.

Lời giải. $\int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$. Kiểm tra: $\left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$. Chọn **B**.

Bài 5.

[ĐA] Tính $\int_1^{22} x \, dx$.

Lời giải. $\int_1^{22} x \, dx = [x^2]_1^{22} = 4 - 1 = 3$. **Đáp số: 3**

Bài 6.

[ĐA] Tính $\int_0^\pi \sin x \, dx$.

Lời giải.

$$\int_0^\pi \sin x \, dx = [-\cos x]_0^\pi = 1 + 1 = 2.$$

Đáp số: 2

Bài 7.

[TN] Cho $\int_a^b f(x) \, dx = 5$. Giá trị của $\int_b^a f(x) \, dx$ là

- A. 5. B. 0. C. -5. D. $\frac{1}{5}$.

Lời giải. Theo tính chất đối cận:

$$\int_b^a f(x) \, dx = -\int_a^b f(x) \, dx = -5.$$

Chọn C.

Bài 8.

[TN] Hàm số $F(x) = x^2 + \sin x$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

- A. $f(x) = 2x - \cos x$. B. $f(x) = 2x + \cos x$. C. $f(x) = \frac{x^3}{3} - \cos x$. D. $f(x) = x + \cos x$.

Lời giải. $F'(x) = 2x + \cos x$, nên F là một nguyên hàm của $f(x) = 2x + \cos x$. Chọn **B**.

Bài 9.

[ĐA] Tính $\int_0^1 e^x dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải.

$$\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e - 1 \approx 1,72.$$

Đáp số: 1,72

Bài 10.

[TN] Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số liên tục $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$) là

A. $\int_a^b f(x) dx$. B. $\int_a^b |f(x)| dx$. C. $\pi \int_a^b f^2(x) dx$. D. $|\int_a^b f(x) dx|$.

Lời giải. Diện tích luôn không âm nên phải lấy giá trị tuyệt đối của hàm số: $S = \int_a^b |f(x)| dx$.
Chọn B.

Bài 11.

[TN] Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x)$, trục hoành, $x = a, x = b$ quanh trục Ox là

A. $\pi \int_a^b f^2(x) dx$. B. $\int_a^b f^2(x) dx$. C. $\pi \int_a^b |f(x)| dx$. D. $\pi^2 \int_a^b f(x) dx$.

Lời giải. Mỗi thiết diện vuông góc với Ox là hình tròn bán kính $|f(x)|$, diện tích $\pi f^2(x)$, nên $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. Chọn A.

Bài 12.

[ĐA] Tính $\int_1^e \frac{dx}{x}$.

Lời giải. $\int_1^e \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^e = 1 - 0 = 1$. **Đáp số: 1**

Mức 2 – Thông hiểu

 Bài 13.

[TN] Trên khoảng $(0; +\infty)$, $\int \frac{(x+1)^2}{x} dx$ bằng

- A. $\frac{x^2}{2} + 2x + \ln x + C$. B. $\frac{(x+1)^3}{3x} + C$. C. $x^2 + 2x + \ln x + C$. D. $\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{x^2} + C$.

Lời giải. Khai triển: $\frac{(x+1)^2}{x} = x + 2 + \frac{1}{x}$. Do đó nguyên hàm là $\frac{x^2}{2} + 2x + \ln x + C$ (với $x > 0$). Chọn A.

 Bài 14.

[TN] $\int \sin^2 x dx$ bằng

- A. $\frac{\sin^3 x}{3} + C$. B. $\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$. C. $\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$. D. $x - \frac{\sin 2x}{2} + C$.

Lời giải. Hạ bậc $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, nên $\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$. Chọn C.

 Bài 15.

[TN] $\int \frac{dx}{3x+1}$ bằng

- A. $\ln|3x+1| + C$. B. $3\ln|3x+1| + C$. C. $\frac{1}{3}\ln|3x+1| + C$. D. $-\frac{3}{(3x+1)^2} + C$.

Lời giải. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$ với $a = 3$. Chọn C.

 Bài 16.

[ĐA] Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = e^x + 1$ và $F(0) = 2$. Tính $F(1)$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải. $F(x) = e^x + x + C$; $F(0) = 1 + C = 2 \Rightarrow C = 1$. Vậy $F(1) = e + 2 \approx 4,72$. **Đáp số: 4,72**

 Bài 17.

[ĐA] Tính $\int_0^2 (3x^2 - 4x + 1) dx$.

Lời giải.

$$\int_0^2 (3x^2 - 4x + 1) dx = [x^3 - 2x^2 + x]_0^2 = 8 - 8 + 2 = 2.$$

Đáp số: 2** Bài 18.**

[ĐA] Cho $\int_1^4 f(x) dx = 9$ và $\int_1^4 g(x) dx = 2$. Tính $\int_1^4 [f(x) - 2g(x) + 1] dx$.

Lời giải. Theo tính chất tuyến tính: $9 - 2 \cdot 2 + \int_1^4 1 dx = 9 - 4 + 3 = 8$. **Đáp số: 8**

 Bài 19.

[TN] Giá trị của $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$ là

A. $\sqrt{2}$.B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.C. $\frac{\pi}{4}$.

D. 1.

Lời giải. $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = [\tan x]_0^{\pi/4} = 1$. Chọn D.

 Bài 20.

[ĐA] Tính $\int_0^1 \frac{dx}{2x+1}$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải.

$$\int_0^1 \frac{dx}{2x+1} = \frac{1}{2} [\ln(2x+1)]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 3 \approx 0,55.$$

Đáp số: 0,55** Bài 21.**

[TN] Giá trị của $\int_{-1}^2 |x| dx$ là

A. $\frac{3}{2}$.B. $\frac{5}{2}$.C. $\frac{1}{2}$.

D. 2.

Lời giải. Tách cận tại 0:

$$\int_{-1}^0 (-x) dx + \int_0^2 x dx = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}.$$

Chọn B.

Bài 22.

[ĐA] Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = 4$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải. Giao điểm $x = \pm 2$; trên $(-2; 2)$ đường thẳng nằm trên parabol:

$$S = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3} \approx 10,67.$$

Đáp số: 10,67

Bài 23.

[TN] Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = 2x$, trục hoành, $x = 0$, $x = 3$ quanh trục Ox là

A. 18π .

B. 36π .

C. 12π .

D. 9π .

Lời giải.

$$V = \pi \int_0^3 (2x)^2 dx = 4\pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 36\pi.$$

Chọn B.

Bài 24.

[ĐA] Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 3t^2$ (m/s). Tính quãng đường vật đi được trong 2 giây đầu (mét).

Lời giải. $s = \int_0^{23} t^2 dt = [t^3]_0^2 = 8$ m. **Đáp số: 8**

Bài 25.

[TN] Giá trị của $\int_{-1}^1 x^3 \cos x dx$ là

A. $2\cos 1$.

B. $2\sin 1$.

C. 1.

D. 0.

Lời giải. $g(x) = x^3 \cos x$ thỏa mãn $g(-x) = -g(x)$ nên là hàm lẻ; tích phân của hàm lẻ trên đoạn đối xứng bằng 0. Chọn **D**.

Bài 26.

[ĐA] Tính $\int_0^{\ln 2} e^{2x} dx$.

Lời giải.

$$\int_0^{\ln 2} e^{2x} dx = \frac{1}{2} [e^{2x}]_0^{\ln 2} = \frac{4-1}{2} = 1,5.$$

Đáp số: 1,5

Mức 3 – Vận dụng

Bài 27.

[TN] $\int x\sqrt{x^2+1} dx$ bằng

A. $\frac{(x^2+1)^{3/2}}{3} + C.$

B. $\frac{2(x^2+1)^{3/2}}{3} + C.$

C. $\frac{x^2(x^2+1)^{3/2}}{3} + C.$

D. $\sqrt{x^2+1} + C.$

Lời giải. Đặt $t = x^2 + 1$, $dt = 2x dx$:

$$\int x\sqrt{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int t^{1/2} dt = \frac{1}{3} t^{3/2} + C.$$

Chọn A.

Bài 28.

[TN] $\int x \sin x dx$ bằng

A. $x \cos x + \sin x + C.$

B. $-x \cos x - \sin x + C.$

C. $-x \cos x + \sin x + C.$

D. $\frac{x^2}{2} \sin x + C.$

Lời giải. Đặt $u = x$, $dv = \sin x dx$ thì $du = dx$, $v = -\cos x$:

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Chọn C.

Bài 29.

[ĐA] Gọi $I = \int_0^1 x(1-x)^5 dx$. Tính $\frac{1}{I}$.

Lời giải. Đặt $t = 1 - x$:

$$I = \int_0^1 (1-t)t^5 dt = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}.$$

Vậy $\frac{1}{I} = 42$. **Đáp số: 42**

Bài 30.

[ĐA] Tính $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải. Từng phần với $u = \ln x$, $dv = \frac{dx}{x^2}$, $v = -\frac{1}{x}$:

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^e + \int_1^e \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{e} + 1 - \frac{1}{e} = 1 - \frac{2}{e} \approx 0,26.$$

Đáp số: 0,26

Bài 31.

[TN] Giá trị của $\int_0^1 \frac{2x+3}{x+1} dx$ là

A. $1 + 2\ln 2$.

B. $2\ln 2$.

C. $3 + \ln 2$.

D. $2 + \ln 2$.

Lời giải. $\frac{2x+3}{x+1} = 2 + \frac{1}{x+1}$, nên tích phân bằng $[2x + \ln(x+1)]_0^1 = 2 + \ln 2$. Chọn D.

Bài 32.

[ĐA] Tính $\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải. $\frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}$, nên tích phân bằng

$$\left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 \approx 0,15.$$

Đáp số: 0,15

Bài 33.

[TN] Giá trị của $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} dx$ là

A. $\ln 2$.

B. $-\ln 2$.

C. $\frac{1}{2} \ln 2$.

D. 1.

Lời giải. Đặt $t = 1 + \cos^2 x$, $dt = -\sin 2x dx$; $x = 0 \Rightarrow t = 2$, $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$: tích phân bằng $\int_1^2 \frac{dt}{t} = \ln 2$. Chọn A.

Bài 34.

[ĐA] Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = x^3$ và $y = x$.

Lời giải. $x^3 = x \Leftrightarrow x \in \{-1; 0; 1\}$. Theo tính đối xứng:

$$S = 2 \int_0^1 (x - x^3) dx = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = 0,5.$$

Đáp số: 0,5

Bài 35.

[ĐA] Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = e^x$, $y = 1$ và $x = 2$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải. $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$; trên $(0; 2)$ có $e^x > 1$:

$$S = \int_0^2 (e^x - 1) dx = e^2 - 1 - 2 = e^2 - 3 \approx 4,39.$$

Đáp số: 4,39

Bài 36.

[TN] Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = e^x$, trục hoành, $x = 0$, $x = 1$ quanh trục Ox là

A. $\pi(e-1)$.

B. $\frac{e^2-1}{2}$.

C. $\pi(e^2-1)$.

D. $\frac{\pi(e^2-1)}{2}$.

Lời giải.

$$V = \pi \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{\pi}{2} [e^{2x}]_0^1 = \frac{\pi(e^2-1)}{2}.$$

Chọn D.

Bài 37.

[ĐA] Một chất điểm chuyển động thẳng với vận tốc $v(t) = 10 - 2t$ (m/s). Tính quãng đường chất điểm đi được trong 8 giây đầu (mét).

Lời giải. $v(t) = 0 \Leftrightarrow t = 5$; chất điểm đổi chiều tại $t = 5$. Quãng đường:

$$\int_0^5 (10 - 2t) dt + \left| \int_5^8 (10 - 2t) dt \right| = 25 + |-9| = 34 \text{ m.}$$

Đáp số: 34**Bài 38.**

[ĐA] Tính $\int_0^1 x e^{2x} dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải. Từng phần $u = x$, $dv = e^{2x} dx$, $v = \frac{1}{2} e^{2x}$:

$$\int_0^1 x e^{2x} dx = \left[\frac{x}{2} e^{2x} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2 - 1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4} \approx 2,10.$$

Đáp số: 2,10**Bài 39.**

[TN] Cho f liên tục và $\int_0^1 f(x) dx = 4$. Giá trị của $\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx$ là

A. 2.

B. 4.

C. 8.

D. 16.

Lời giải. Đặt $t = \frac{x}{2}$, $dx = 2 dt$, cận $0 \rightarrow 1$:

$$\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = 2 \int_0^1 f(t) dt = 8.$$

Chọn C.

Bài 40.

[ĐA] Tính $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + 3} dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải. Đặt $t = \sin x + 3$, $dt = \cos x dx$, cận $3 \rightarrow 4$: $\int_3^4 \frac{dt}{t} = \ln \frac{4}{3} \approx 0,29$. **Đáp số: 0,29**

Bài 41.

[TN] Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$ và $y = x$ là

A. $\frac{1}{6}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{5}{6}$.

Lời giải. $\sqrt{x} = x \Leftrightarrow x \in \{0; 1\}$; trên $(0; 1)$ có $\sqrt{x} > x$:

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x) dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Chọn A.

Bài 42.

[ĐA] Tìm số thực $a > 0$ thỏa mãn $\int_0^a (2x - 1) dx = 6$.

Lời giải.

$$\int_0^a (2x - 1) dx = a^2 - a = 6 \Leftrightarrow a = 3$$

hoặc $a = -2$. Vì $a > 0$ nên $a = 3$. **Đáp số: 3**

Mức 4 – Vận dụng cao

Bài 43.

[TN] Cho f liên tục và $\int_1^4 f(x) dx = 6$. Giá trị của $\int_1^2 x f(x^2) dx$ là

A. 12.

B. 6.

C. 3.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải. Đặt $t = x^2$, $dt = 2x dx$, cận $1 \rightarrow 4$:

$$\int_1^2 x f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_1^4 f(t) dt = 3.$$

Chọn C.

Bài 44.

[ĐA] Cho f có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(2) = 16$ và $\int_0^2 f(x) dx = 4$. Tính $\int_0^1 x f'(2x) dx$.

Lời giải. Đặt $t = 2x$, $dx = \frac{dt}{2}$:

$$\int_0^1 x f'(2x) dx = \frac{1}{4} \int_0^2 t f'(t) dt.$$

Tùng phần:

$$\int_0^2 t f'(t) dt = [tf(t)]_0^2 - \int_0^2 f(t) dt = 32 - 4 = 28.$$

Vậy kết quả bằng 7. **Đáp số: 7**

Bài 45.

[ĐA] Cho f liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f(-x) = 2\cos^2 x$ với mọi x . Tính $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải. Đặt $x = -t$ thấy

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(-x) dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) dx.$$

Lấy tích phân hai vế của giả thiết:

$$2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2 \cos^2 x dx = \pi.$$

Vậy tích phân bằng $\frac{\pi}{2} \approx 1,57$. **Đáp số: 1,57**

Bài 46.

[TN] Giá trị của $\int_0^\pi x \sin x dx$ là

A. π .B. 2π .

C. 0.

D. $\frac{\pi}{2}$.**Lời giải.** Từng phần $u = x$, $dv = \sin x \, dx$:

$$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx = [-x \cos x + \sin x]_0^{\pi} = \pi.$$

Chọn A.

Bài 47.**[ĐA]** Tính $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} \, dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).**Lời giải.** Đặt $x = \pi - t$:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t) \sin t}{1 + \cos^2 t} \, dt = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t \, dt}{1 + \cos^2 t} - I.$$

Với $u = \cos t$:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t \, dt}{1 + \cos^2 t} = \int_{-1}^1 \frac{du}{1 + u^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Vậy $I = \frac{\pi^2}{4} \approx 2,47$. **Đáp số: 2,47****Bài 48.****[TN]** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = |x^2 - 1|$ và $y = 3$ làA. $\frac{32}{3}$.

B. 4.

C. $\frac{16}{3}$.

D. 8.

Lời giải. $|x^2 - 1| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 2$. Theo tính đối xứng:

$$S = 2 \left[\int_0^1 (2 + x^2) \, dx + \int_1^2 (4 - x^2) \, dx \right] = 2 \left(\frac{7}{3} + \frac{5}{3} \right) = 8.$$

Chọn D.

Bài 49.**[ĐA]** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2$, tiếp tuyến của nó tại điểm $A(1; 1)$ và trục hoành (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải. Tiếp tuyến tại $A(1; 1)$: $y = 2x - 1$, cắt trục hoành tại $x = \frac{1}{2}$. Diện tích bằng diện tích dưới parabol trên $[0; 1]$ trừ diện tích tam giác dưới tiếp tuyến: $S = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{12} \approx 0,08$.

Đáp số: 0,08

Bài 50.

[TN] Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = x^2$ và $y = 2x$ quanh trục Ox là

A. $\frac{32\pi}{5}$.

B. $\frac{16\pi}{15}$.

C. $\frac{4\pi}{3}$.

D. $\frac{64\pi}{15}$.

Lời giải. Giao điểm $x = 0, x = 2$; trên $(0; 2)$: $0 \leq x^2 \leq 2x$. Thiết diện là hình vành khăn:

$$V = \pi \int_0^2 (4x^2 - x^4) dx = \pi \left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5} \right) = \frac{64\pi}{15}.$$

Chọn D.

Bài 51.

[ĐA] Đường thẳng $x = k$ chia hình phẳng giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$, trục hoành và $x = 4$ thành hai phần có diện tích bằng nhau. Tìm k (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải. Diện tích cả hình: $\int_0^4 \sqrt{x} dx = \frac{16}{3}$. Cần

$$\int_0^k \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} k^{3/2} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow k^{3/2} = 4 \Leftrightarrow k = \sqrt[3]{16} \approx 2,52.$$

Đáp số: 2,52

Bài 52.

[ĐA] Cho $F(x) = \int_0^x (t^2 - 4t + 3) dt$. Hàm số $F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải.

$$F'(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$$

đổi dấu khi qua $x = 1$ và $x = 3$, nên F có 2 điểm cực trị. **Đáp số: 2**

 Bài 53.

[TN] Một vật xuất phát từ trạng thái nghỉ, chuyển động với gia tốc $a(t) = 6 - 2t$ (m/s²). Quãng đường vật đi được tính đến thời điểm vận tốc đạt giá trị lớn nhất là

A. 9 m.

B. 18 m.

C. 27 m.

D. 36 m.

Lời giải.

$$v(t) = \int (6 - 2t) dt = 6t - t^2$$

(vì $v(0) = 0$), lớn nhất tại $t = 3$. Quãng đường: $\int_0^3 (6t - t^2) dt = 27 - 9 = 18$ m. Chọn B.

 Bài 54.

[ĐA] Nước chảy vào một bể rỗng với tốc độ $r(t) = 3\sqrt{t}$ (lít/phút). Sau bao nhiêu phút bể có 128 lít nước?

Lời giải. Lượng nước sau T phút: $\int_0^T 3\sqrt{t} dt = 2T^{3/2}$. Giải $2T^{3/2} = 128 \Leftrightarrow T^{3/2} = 64 \Leftrightarrow T = 16$. **Đáp số: 16**

 Bài 55.

[TN] Cho hàm số f liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn $f(x) = x + 2 \int_0^1 f(t) dt$. Giá trị của $\int_0^1 f(x) dx$ là

A. $\frac{1}{2}$.B. $-\frac{1}{2}$.

C. 1.

D. -1.

Lời giải. Đặt $I = \int_0^1 f(x) dx$ thì $f(x) = x + 2I$. Lấy tích phân hai vế trên $[0; 1]$: $I = \frac{1}{2} + 2I \Rightarrow I = -\frac{1}{2}$. Chọn B.

 Bài 56.

[ĐA] Cho f có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1)f'(x) dx = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$.

Lời giải. Từng phần:

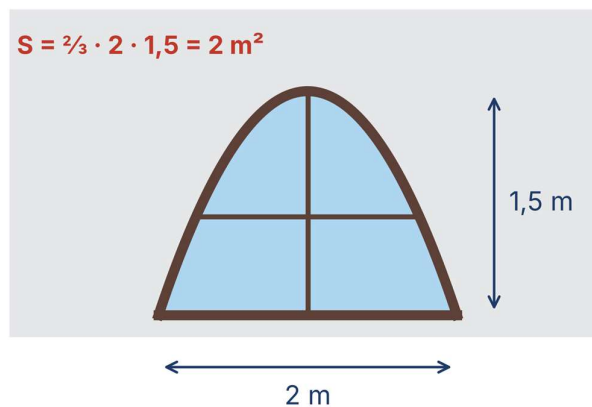
$$\int_0^1 (x+1)f'(x)dx = [(x+1)f(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x)dx = 2f(1) - f(0) - I = 2 - I.$$

Từ $2 - I = 10$ suy ra $I = -8$. **Đáp số: -8**

Mức 5 – Bài toán thực tế

Bài 57.

[ĐA] Một cửa sổ có dạng vòm parabol, chân vòm rộng 2 m, chiều cao 1,5 m, được lắp kính với giá 1,2 triệu đồng/m². Tính chi phí lắp kính (triệu đồng).



Cửa sổ hình vòm parabol.

Lời giải. Diện tích vòm parabol bằng $\frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 1,5 = 2 \text{ m}^2$. Chi phí: $2 \cdot 1,2 = 2,4$ triệu đồng. **Đáp số: 2,4**

Bài 58.

[ĐA] Một ô tô đang chạy với vận tốc 54 km/h thì phanh, sau đó chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t) = 15 - 3t$ (m/s). Tính quãng đường ô tô đi được từ lúc phanh đến khi dừng (mét, viết dưới dạng số thập phân).

Lời giải. 54 km/h = 15 m/s. Xe dừng khi $15 - 3t = 0 \Leftrightarrow t = 5$. Quãng đường:

$$\int_0^5 (15 - 3t) dt = 75 - 37,5 = 37,5 \text{ m.}$$

Đáp số: 37,5

 Bài 59.

[ĐA] Một bồn chứa bị rò rỉ dầu với tốc độ $r(t) = 100e^{-0,1t}$ (lít/giờ). Tính lượng dầu rò rỉ trong 10 giờ đầu (lít, làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải.

$$\int_0^{10} 100 e^{-0,1t} dt = [-1000e^{-0,1t}]_0^{10} = 1000(1 - e^{-1}) \approx 632 \text{ lít.}$$

Đáp số: 632

 Bài 60.

[ĐA] Một bồn chứa có dạng khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = \sqrt{2x}$, trục hoành, $x = 3$ (đơn vị: mét) quanh trục Ox . Tính thể tích bồn (m^3 , làm tròn đến hàng phần trăm).

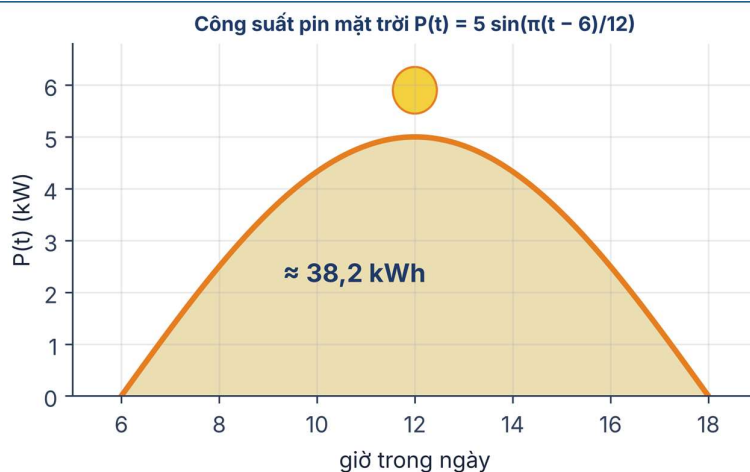
Lời giải.

$$V = \pi \int_0^3 (\sqrt{2x})^2 dx = \pi \int_0^3 x dx = 9\pi \approx 28,27 \text{ m}^3.$$

Đáp số: 28,27

 Bài 61.

[ĐA] Công suất của một hệ thống pin mặt trời trong ngày là $P(t) = 5\sin \frac{\pi(t-6)}{12}$ (kW) với $6 \leq t \leq 18$ (t là giờ trong ngày). Tính điện năng hệ thống tạo ra trong ngày (kWh, làm tròn đến hàng phần mười).



Công suất của hệ thống pin mặt trời trong ngày.

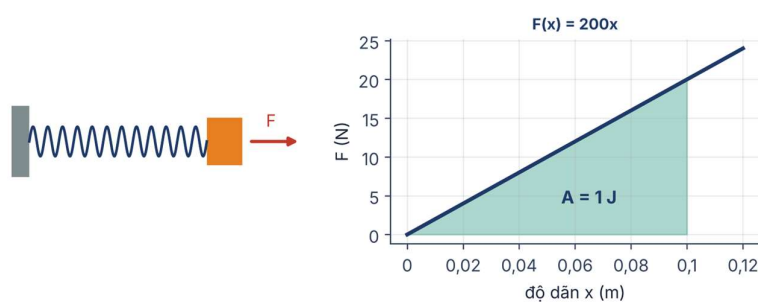
Lời giải.

$$A = \int_6^{18} 5 \sin \frac{\pi(t-6)}{12} dt = \left[-\frac{60}{\pi} \cos \frac{\pi(t-6)}{12} \right]_6^{18} = \frac{120}{\pi} \approx 38,2 \text{ kWh.}$$

Đáp số: 38,2

Bài 62.

[ĐA] Lực đàn hồi của một lò xo khi bị kéo dãn một đoạn x (mét) là $F(x) = 200x$ (N). Tính công cần thực hiện để kéo dãn lò xo từ độ dài tự nhiên thêm 10 cm (jun).



Công kéo dãn lò xo bằng diện tích dưới đồ thị lực.

Lời giải. 10 cm = 0,1 m. Công:

$$A = \int_0^{0,1} 200x dx = [100x^2]_0^{0,1} = 1 \text{ J.}$$

Đáp số: 1

Bài 63.

[ĐA] Nhiệt độ ngoài trời được mô hình hóa bởi $T(t) = 25 + 5\sin\frac{\pi t}{12}$ ($^{\circ}\text{C}$), t là số giờ kể từ 0 giờ. Tính nhiệt độ trung bình từ 0 giờ đến 12 giờ (làm tròn đến hàng phần mười).

Lời giải. Nhiệt độ trung bình:

$$\frac{1}{12} \int_0^{12} \left(25 + 5\sin\frac{\pi t}{12} \right) dt = \frac{1}{12} \left(300 + \frac{120}{\pi} \right) = 25 + \frac{10}{\pi} \approx 28,2 \text{ } ^{\circ}\text{C}.$$

Đáp số: 28,2

Bài 64.

[ĐA] Doanh thu biên của một doanh nghiệp khi bán sản phẩm thứ x là $R'(x) = 100 - 0,4x$ (nghìn đồng). Doanh thu tăng thêm bao nhiêu nghìn đồng khi sản lượng tăng từ 100 lên 200 sản phẩm?

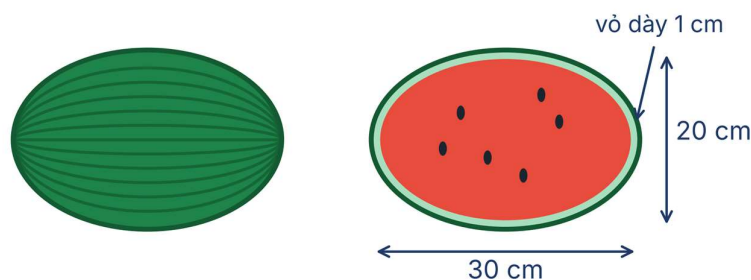
Lời giải. Doanh thu tăng thêm:

$$\int_{100}^{200} (100 - 0,4x) dx = [100x - 0,2x^2]_{100}^{200} = 10\,000 - 6000 = 4000 \text{ nghìn đồng}.$$

Đáp số: 4000

Bài 65.

[ĐA] Một quả dưa hấu có dạng khối elipxoit tròn xoay, chiều dài 30 cm, đường kính lớn nhất 20 cm. Vỏ dày đều 1 cm. Tính thể tích phần ruột dưa (cm^3 , làm tròn đến hàng đơn vị).



Quả dưa hấu dạng elipxoit và phần ruột bên trong.

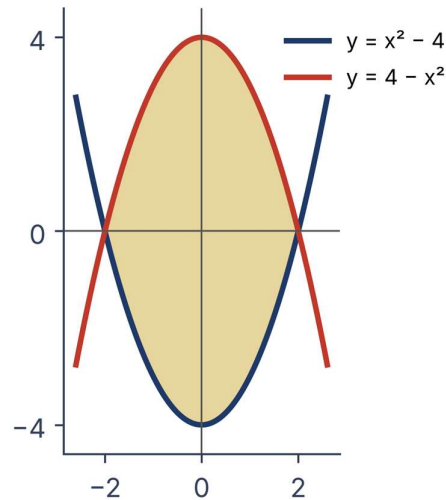
Lời giải. Phần ruột là elipxoit tròn xoay có bán trục $15 - 1 = 14$ cm và $10 - 1 = 9$ cm. Quay elip $\frac{x^2}{14^2} + \frac{y^2}{9^2} \leq 1$ quanh Ox :

$$V = \pi \int_{-14}^{14} 81 \left(1 - \frac{x^2}{196} \right) dx = \frac{4}{3} \pi \cdot 14 \cdot 81 = 1512\pi \approx 4750 \text{ cm}^3.$$

Đáp số: 4750

Bài 66.

[ĐA] Một logo có dạng hình phẳng giới hạn bởi hai parabol $y = x^2 - 4$ và $y = 4 - x^2$ (đơn vị: dm). Tính diện tích logo (dm^2 , làm tròn đến hàng phần trăm).



Logo giới hạn bởi hai parabol.

Lời giải. $x^2 - 4 = 4 - x^2 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

$$S = \int_{-2}^2 [(4 - x^2) - (x^2 - 4)] dx = \int_{-2}^2 (8 - 2x^2) dx = 32 - \frac{32}{3} = \frac{64}{3} \approx 21,33 \text{ dm}^2.$$

Đáp số: 21,33

Bài 67.

[ĐA] Tốc độ tải dữ liệu của một ứng dụng tăng dần theo quy luật $v(t) = 4 + 2t$ (MB/s). Tính dung lượng tải được trong 10 giây đầu (MB).

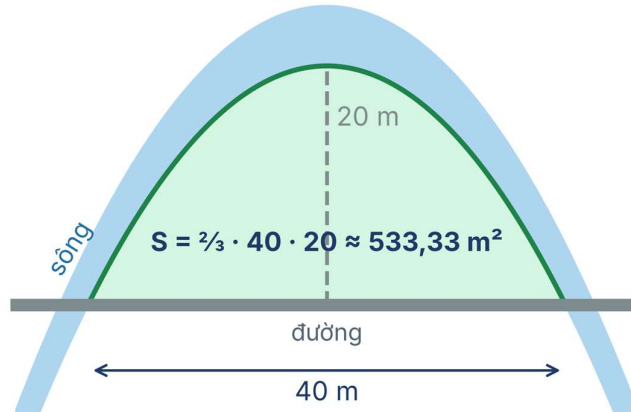
Lời giải.

$$\int_0^{10} (4 + 2t) dt = [4t + t^2]_0^{10} = 140 \text{ MB}.$$

Đáp số: 140

✎ Bài 68.

[ĐA] Một mảnh đất ven sông giới hạn bởi bờ sông có dạng đường $y = 20 - \frac{x^2}{20}$ và con đường thẳng $y = 0$ (đơn vị: mét). Tính diện tích mảnh đất (m^2 , làm tròn đến hàng phần trăm).



Mảnh đất ven sông.

Lời giải. Bờ sông cắt đường tại $x = \pm 20$:

$$S = \int_{-20}^{20} \left(20 - \frac{x^2}{20} \right) dx = 800 - \frac{800}{3} = \frac{1600}{3} \approx 533,33 \text{ m}^2$$

(đúng bằng $\frac{2}{3} \cdot 40 \cdot 20$). **Đáp số: 533,33**

Mức 6 – Thử thách (học sinh giỏi)

✎ Bài 69.

Tính $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$.

Lời giải. Gọi $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$, $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$. Đặt $x = \frac{\pi}{2} - t$ biến I thành J , nên $I = J$. Mà $I + J = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$. Vậy $I = \frac{\pi}{4}$.

✎ Bài 70.

Chứng minh rằng $0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+1}$ với mọi số tự nhiên n , rồi tính giới hạn của tích phân đó khi $n \rightarrow \infty$.

Lời giải. Trên $[0; 1]$: $0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n$. Lấy tích phân: $0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$. Theo nguyên lý kẹp, $\lim I_n = 0$. Hơn nữa $I_n + I_{n-1} = \int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n}$, từ đó suy ra công thức đẹp $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

Bài 71.

Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n}} \right)$.

Lời giải. Biểu thức là tổng Riemann $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ của $f(x) = \sqrt{x}$ trên $[0; 1]$. Giới hạn bằng $\int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}$.

Bài 72.

Tính $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+e^x} dx$.

Lời giải. Gọi tích phân là I . Đặt $x = -t$: $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^t \cos t}{1+e^t} dt$. Cộng hai biểu thức: $2I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x dx = 2$, nên $I = 1$.

Bài 73.

Chứng minh rằng $\frac{1}{2} \leq \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \leq \frac{\pi}{6}$.

Lời giải. Trên $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ có $0 \leq x^4 \leq x^2 < 1$, nên $1 \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Lấy tích phân từ 0 đến $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} \leq \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \leq \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{6}.$$

Bài 74.

Tìm hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) = x + \int_0^1 x t f(t) dt$ với mọi x .

Lời giải. Đặt $c = \int_0^1 t f(t) dt$ (hằng số) thì $f(x) = (1 + c)x$. Thay lại: $c = (1 + c) \int_0^1 t^2 dt = \frac{1+c}{3}$, suy ra $c = \frac{1}{2}$. Vậy $f(x) = \frac{3}{2}x$.

Bài 75.

Cho f liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x f(x) dx = 1.$$

Chứng minh rằng $\int_0^1 f^2(x) dx \geq 4$.

Lời giải. Xét

$$\int_0^1 [f(x) - (6x - 2)]^2 dx \geq 0.$$

Khai triển và dùng giả thiết:

$$\int_0^1 f^2 dx - 2 \left(6 \int_0^1 x f dx - 2 \int_0^1 f dx \right) + \int_0^1 (6x - 2)^2 dx \geq 0,$$

tức $\int_0^1 f^2 dx - 8 + 4 \geq 0$. Vậy $\int_0^1 f^2(x) dx \geq 4$, dấu bằng khi $f(x) = 6x - 2$.

Bài 76.

Cho $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$. Chứng minh $I_n = e - nI_{n-1}$ ($n \geq 1$) và tính I_3 .

Lời giải. Từng phần $u = x^n, dv = e^x dx$:

$$I_n = [x^n e^x]_0^1 - n \int_0^1 x^{n-1} e^x dx = e - nI_{n-1}.$$

Với $I_0 = e - 1$: $I_1 = 1, I_2 = e - 2, I_3 = e - 3(e - 2) = 6 - 2e$.

Mức 7 – Đề thi tuyển sinh Đại học

Bài 77. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D năm 2003)

Tính $\int_0^2 |x^2 - x| dx$.

Lời giải. $x^2 - x \leq 0$ trên $[0; 1]$ và ≥ 0 trên $[1; 2]$:

$$\int_0^1 (x - x^2) dx + \int_1^2 (x^2 - x) dx = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1.$$

 **Bài 78.** (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D năm 2004)

Tính $\int_2^3 \ln(x^2 - x) dx$.

Lời giải. Từng phần $u = \ln(x^2 - x)$, $dv = dx$, $du = \frac{2x-1}{x^2-x} dx$, $v = x$:

$$I = [x \ln(x^2 - x)]_2^3 - \int_2^3 \frac{2x-1}{x-1} dx = 3 \ln 6 - 2 \ln 2 - [2x + \ln(x-1)]_2^3 = 3 \ln 3 - 2.$$

 **Bài 79.** (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B năm 2005)

Tính $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x \cos x}{1 + \cos x} dx$.

Lời giải. $\frac{\sin 2x \cos x}{1 + \cos x} = \frac{2 \cos^2 x \sin x}{1 + \cos x}$. Đặt $t = 1 + \cos x$, cận $2 \rightarrow 1$:

$$I = 2 \int_1^2 \frac{(t-1)^2}{t} dt = 2 \left[\frac{t^2}{2} - 2t + \ln t \right]_1^2 = 2 \ln 2 - 1.$$

 **Bài 80.** (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D năm 2005)

Tính $\int_0^{\pi/2} (e^{\sin x} + \cos x) \cos x dx$.

Lời giải.

$$I = \int_0^{\pi/2} e^{\sin x} \cos x dx + \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx = [e^{\sin x}]_0^{\pi/2} + \frac{\pi}{4} = e - 1 + \frac{\pi}{4}.$$

 **Bài 81.** (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A năm 2006)

Tính $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4 \sin^2 x}} dx$.

Lời giải. $\cos^2 x + 4 \sin^2 x = 1 + 3 \sin^2 x$. Đặt $t = \sqrt{1 + 3 \sin^2 x}$, $t dt = 3 \sin x \cos x dx$, nên $\sin 2x dx = \frac{2}{3} t dt$; cận $1 \rightarrow 2$: $I = \frac{2}{3} \int_1^2 dt = \frac{2}{3}$.

Bài 82. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D năm 2006)

Tính $\int_0^1 (x-2)e^{2x} dx$.

Lời giải. Từng phần $u = x - 2$, $dv = e^{2x} dx$:

$$I = \left[\frac{(x-2)e^{2x}}{2} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx = -\frac{e^2}{2} + 1 - \frac{e^2 - 1}{4} = \frac{5 - 3e^2}{4}.$$

Bài 83. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D năm 2008)

Tính $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^3} dx$.

Lời giải. Từng phần $u = \ln x$, $dv = x^{-3} dx$, $v = -\frac{1}{2x^2}$:

$$I = \left[-\frac{\ln x}{2x^2} \right]_1^2 + \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln 2}{8} + \frac{3}{16} = \frac{3 - 2\ln 2}{16}.$$

Bài 84. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B năm 2009)

Tính $\int_1^3 \frac{3+\ln x}{(x+1)^2} dx$.

Lời giải. Từng phần $u = 3 + \ln x$, $dv = \frac{dx}{(x+1)^2}$, $v = -\frac{1}{x+1}$:

$$I = \left[-\frac{3+\ln x}{x+1} \right]_1^3 + \int_1^3 \frac{dx}{x(x+1)} = \frac{3}{4} - \frac{\ln 3}{4} + \ln \frac{3}{2} = \frac{1}{4} \left(3 + \ln \frac{27}{16} \right).$$

Bài 85. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B năm 2010)

Tính $\int_1^e \frac{\ln x}{x(2+\ln x)^2} dx$.

Lời giải. Đặt $t = 2 + \ln x$, $dt = \frac{dx}{x}$, cận $2 \rightarrow 3$:

$$I = \int_2^3 \frac{t-2}{t^2} dt = \left[\ln t + \frac{2}{t} \right]_2^3 = \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{3}.$$

Bài 86. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D năm 2010)

Tính $\int_1^e \left(2x - \frac{3}{x}\right) \ln x \, dx$.

Lời giải.

$$I = \int_1^e 2x \ln x \, dx - 3 \int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx = \left[x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} \right]_1^e - \frac{3}{2} = \frac{e^2 + 1}{2} - \frac{3}{2} = \frac{e^2}{2} - 1.$$

Bài 87. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D năm 2011)

Tính $\int_0^4 \frac{4x-1}{\sqrt{2x+1}+2} \, dx$.

Lời giải. Đặt $t = \sqrt{2x+1}$, $x = \frac{t^2-1}{2}$, $dx = t \, dt$, cận $1 \rightarrow 3$:

$$I = \int_1^3 \frac{2t^3 - 3t}{t+2} \, dt = \int_1^3 \left(2t^2 - 4t + 5 - \frac{10}{t+2} \right) \, dt = \frac{34}{3} + 10 \ln \frac{3}{5}.$$

Bài 88. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B năm 2012)

Tính $\int_0^1 \frac{x^3}{x^4+3x^2+2} \, dx$.

Lời giải. Đặt $t = x^2$, $x^3 \, dx = \frac{1}{2} t \, dt$:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t \, dt}{(t+1)(t+2)} = \frac{1}{2} [2 \ln(t+2) - \ln(t+1)]_0^1 = \ln 3 - \frac{3}{2} \ln 2.$$

Bài 89. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D năm 2012)

Tính $\int_0^{\pi/4} x (1 + \sin 2x) \, dx$.

Lời giải.

$$I = \int_0^{\pi/4} x \, dx + \int_0^{\pi/4} x \sin 2x \, dx = \frac{\pi^2}{32} + \left[-\frac{x \cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi^2}{32} + \frac{1}{4}.$$

Bài 90. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B năm 2013)

Tính $\int_0^1 x \sqrt{2-x^2} dx$.

Lời giải. Đặt $t = \sqrt{2-x^2}$, $t dt = -x dx$, cận $\sqrt{2} \rightarrow 1$: $I = \int_1^{\sqrt{2}} t^2 dt = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$.

Bài 91. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D năm 2013)

Tính $\int_0^1 \frac{(x+1)^2}{x^2+1} dx$.

Lời giải. $\frac{(x+1)^2}{x^2+1} = 1 + \frac{2x}{x^2+1}$, nên

$$I = [x + \ln(x^2 + 1)]_0^1 = 1 + \ln 2.$$

Bài 92. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B năm 2014)

Tính $\int_1^2 \frac{x^2+3x+1}{x^2+x} dx$.

Lời giải. $\frac{x^2+3x+1}{x^2+x} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$, nên

$$I = [x + \ln x + \ln(x+1)]_1^2 = 1 + \ln 3.$$

Bài 93. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D năm 2014)

Tính $\int_0^{\pi/4} (x+1) \sin 2x dx$.

Lời giải. Từng phần $u = x+1$, $dv = \sin 2x dx$, $v = -\frac{\cos 2x}{2}$:

$$I = \left[-\frac{(x+1)\cos 2x}{2} \right]_0^{\pi/4} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \cos 2x dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Bài 94. (Đề thi THPT Quốc gia năm 2015)

Tính $\int_0^1 (x-3) e^x dx$.

Lời giải. Từng phần $u = x-3$, $dv = e^x dx$:

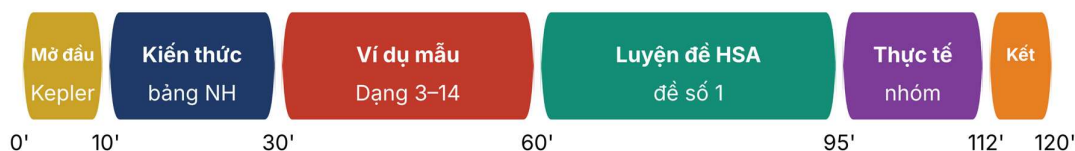
$$I = [(x - 3)e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = -2e + 3 - (e - 1) = 4 - 3e.$$

PHẦN VII. THIẾT KẾ BUỔI DẠY VÀ ĐỀ LUYỆN TẬP THEO ĐỊNH DẠNG HSA

Phần này giúp giáo viên tổ chức **một buổi dạy ôn thi HSA 120 phút** về chủ đề tích phân, kèm phiếu học tập và **năm đề luyện tập** mô phỏng định dạng phần *Toán học và xử lý số liệu* của bài thi HSA (trắc nghiệm 4 lựa chọn và điền đáp án, tỉ lệ xấp xỉ 7 : 3, trung bình 1,5 phút một câu). Mỗi đề gồm 20 câu (14 câu trắc nghiệm, 6 câu điền đáp án), làm trong 30 phút; năm đề tăng dần độ khó, không có câu nào trùng nhau hay trùng với các ví dụ, bài tập ở các phần trước. Mọi đáp án đều đã được kiểm tra bằng tính toán.

1. Kế hoạch buổi dạy (120 phút)

Tiến trình một buổi dạy ôn thi HSA 120 phút



Tiến trình buổi dạy ôn thi HSA 120 phút.

Mục tiêu. Sau buổi học, học sinh: (1) thuộc bảng nguyên hàm và các tính chất của tích phân; (2) nhận dạng nhanh phương pháp đổi biến hay từng phần; (3) tính đúng diện tích, thể tích và giải bài toán chuyển động; (4) làm Đề luyện số 1 (20 câu) trong 30 phút với độ chính xác từ 80% trở lên.

Chuẩn bị. Giáo viên: máy chiếu (dùng các hình trong chuyên đề), phiếu học tập, Đề luyện số 1 in sẵn. Học sinh: máy tính cầm tay, giấy nháp.

Thời gian	Hoạt động của giáo viên	Hoạt động của học sinh	Tư liệu trong chuyên đề
0' – 10'	Kể chuyện Kepler và thùng rượu; nêu ba câu đố (công parabol, ô tô phanh, bài Putnam)	Dự đoán, thảo luận nhanh	Mở đầu, hình thùng rượu
10' – 30'	Hệ thống kiến thức: bảng nguyên hàm, tính chất tích phân, công thức diện tích, thể tích	Hoàn thành phiếu học tập	Phần II, các bảng
30' – 60'	Chữa ví dụ mẫu: Dạng 3, 4, 7, 9, 11, 12, 13, 14 (mỗi dạng một ví dụ)	Làm theo cặp, trình bày trên bảng	Ví dụ ở Phần III
60' – 95'	Phát Đề luyện số 1, bấm giờ 30 phút; chữa nhanh 5 phút	Làm bài cá nhân, chấm chéo	Đề luyện số 1

Thời gian	Hoạt động của giáo viên	Hoạt động của học sinh	Tư liệu trong chuyên đề
95' – 112'	Chia 4 nhóm bài thực tế: hóa đơn tiền điện, quãng đường phanh, chiếc bình gốm, diện tích mặt hồ	Mô hình hóa, trình bày 2 phút/nhóm	Phần IV, Dạng 15
112' – 120'	Tổng kết các bẫy thường gặp, giao bài về nhà	Ghi chép, nhận nhiệm vụ	Đề luyện số 2 – 5; Bài 57 – 94

★ Mẹo làm bài HSA phân tích phân.

(1) *Câu nguyên hàm*: đạo hàm ngược các phương án. (2) *Câu tích phân có số*: bấm máy tính kiểm tra, rồi so sánh với giá trị gần đúng của từng phương án. (3) *Câu hàm ẩn*: nghĩ ngay tới đổi biến, từng phần, tính chẵn lẻ hoặc phép đối xứng $x \mapsto a + b - x$. (4) *Câu diện tích*: luôn kiểm tra dấu, diện tích phải dương; nhớ công thức $\frac{|a|(x_2 - x_1)^3}{6}$. (5) *Câu chuyển động*: phân biệt quãng đường $\int |v|$ với độ dịch chuyển $\int v$.

2. Phiếu học tập

STT	Nội dung cần điền	Học sinh điền
1	$\int x^\alpha dx = \dots\dots; \int \frac{dx}{x} = \dots\dots; \int e^{ax+b} dx = \dots\dots$	
2	$\int \sin(ax + b) dx = \dots\dots; \int \cos(ax + b) dx = \dots\dots$	
3	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \dots\dots; \int a^x dx = \dots\dots$	
4	Công thức đổi biến: $\int_a^b f(u(x))u'(x) dx = \dots\dots$	
5	Công thức từng phần: $\int_a^b u dv = \dots\dots$; thứ tự ưu tiên chọn u : $\dots\dots$	
6	$\int_a^b f = \int_a^c f + \dots\dots; f$ lẻ thì $\int_{-a}^a f = \dots\dots$	
7	Diện tích giữa $y = f(x), y = g(x), x = a, x = b$: $S = \dots\dots$	
8	Thể tích vật thể: $V = \dots\dots$; khối tròn xoay quanh Ox : $V = \dots\dots$	
9	Quãng đường từ t_1 đến t_2 : $s = \dots\dots$; độ dịch chuyển: $\dots\dots$	
10	Diện tích vòm parabol đáy a , cao h : $S = \dots\dots$	

3. Đề luyện tập số 1 – Nền tảng (20 câu, 30 phút)

Phần trắc nghiệm (14 câu)

Câu 1. $\int (6x^2 + 2)dx$ bằng

- A. $12x + C$. B. $2x^3 + 2x + C$. C. $6x^3 + 2x + C$. D. $2x^3 + C$.

Câu 2. $\int 5^x dx$ bằng

- A. $5^x \ln 5 + C$. B. $x \cdot 5^{x-1} + C$. C. $\frac{5^x}{\ln 5} + C$. D. $\frac{5^{x+1}}{x+1} + C$.

Câu 3. Trên khoảng $(0; +\infty)$, $\int \left(\frac{1}{x} - \sin x\right) dx$ bằng

- A. $\ln x - \cos x + C$. B. $-\frac{1}{x^2} - \cos x + C$. C. $\ln x + \sin x + C$. D. $\ln x + \cos x + C$.

Câu 4. Hàm số $F(x) = e^{x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số

- A. $f(x) = 2xe^{x^2}$. B. $f(x) = e^{x^2}$. C. $f(x) = x^2 e^{x^2-1}$. D. $f(x) = e^{2x}$.

Câu 5. Trên khoảng $(-\infty; 5)$, $\int \frac{dx}{5-x}$ bằng

- A. $\ln(5-x) + C$. B. $-\ln(5-x) + C$. C. $\frac{1}{(5-x)^2} + C$. D. $-\frac{1}{5-x} + C$.

Câu 6. $\int \left(\cos x - \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx$ bằng

- A. $-\sin x - \tan x + C$. B. $\sin x + \tan x + C$. C. $\sin x - \tan x + C$. D. $-\sin x + \cot x + C$.

Câu 7. Giá trị của $\int_0^2 (x+1) dx$ là

- A. 2. B. 3. C. 6. D. 4.

Câu 8. Cho $\int_1^3 f(x) dx = 4$. Giá trị của $\int_3^{13} f(x) dx$ là

- A. -12. B. 12. C. $-\frac{4}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.

Câu 9. Giá trị của $\int_0^{\pi/6} \cos 3x dx$ là

- A. 1. B. $-\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. 3.

Câu 10. Giá trị của $\int_{-2}^2 (x^5 + 1) dx$ là

- A. 0. B. 4. C. 8. D. 2.

Câu 11. Giá trị của $\int_0^1 e^{3x} dx$ là

- A. $e^3 - 1$. B. $3(e^3 - 1)$. C. $\frac{e^3}{3}$. D. $\frac{e^3-1}{3}$.

Câu 12. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = 3x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$ là

- A. 8. B. 24. C. 4. D. 12.

Câu 13. Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = \sqrt{x+1}$, trục hoành, $x = 0$, $x = 2$ quanh trục Ox là

- A. 2π . B. 8π . C. 4π . D. $\frac{16\pi}{3}$.

Câu 14. Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 2t + 1$ (m/s). Quãng đường vật đi được từ giây thứ 1 đến giây thứ 3 là

- A. 8 m. B. 10 m. C. 12 m. D. 9 m.

Phần điền đáp án (6 câu)

Câu 15. Tính $\int_1^4 \sqrt{x} \, dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 16. Tính $\int_0^{\pi/2} (2\sin x + 1) \, dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 17. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = 3x^2 - 2x$ và $F(2) = 5$. Tính $F(0)$.

Câu 18. Cho $\int_0^3 f(x) \, dx = 5$ và $\int_3^5 f(x) \, dx = -2$. Tính $\int_0^5 [f(x) + 2] \, dx$.

Câu 19. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2 - 1$ và trục hoành (làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 20. Tính $\int_1^2 \frac{x^2+1}{x} \, dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

4. Đề luyện tập số 2 – Phương pháp đổi biến và từng phần (20 câu, 30 phút)**Phần trắc nghiệm (14 câu)**

Câu 1. $\int \frac{2x}{x^2+4} \, dx$ bằng

- A. $2\ln(x^2 + 4) + C$. B. $\frac{1}{x^2+4} + C$. C. $\ln(x^2 + 4) + C$. D. $x^2\ln(x^2 + 4) + C$.

Câu 2. $\int \sin x \cos^4 x \, dx$ bằng

- A. $-\frac{\cos^5 x}{5} + C$. B. $\frac{\cos^5 x}{5} + C$. C. $-\frac{\sin^5 x}{5} + C$. D. $\frac{\sin x \cos^5 x}{5} + C$.

Câu 3. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$ bằng

- A. $e^{\sqrt{x}} + C$. B. $\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}} + C$. C. $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} + C$. D. $2e^{\sqrt{x}} + C$.

Câu 4. $\int \ln x \, dx$ bằng

- A. $\frac{1}{x} + C$. B. $x \ln x - x + C$. C. $x \ln x + x + C$. D. $\frac{\ln^2 x}{2} + C$.

Câu 5. $\int x e^{-x} \, dx$ bằng

- A. $-(x+1)e^{-x} + C$. B. $(x+1)e^{-x} + C$. C. $(1-x)e^{-x} + C$. D. $-x e^{-x} + C$.

Câu 6. Giá trị của $\int_0^1 x(x^2 + 1)^3 \, dx$ là

- A. $\frac{15}{4}$. B. $\frac{15}{16}$. C. $\frac{15}{8}$. D. 2.

Câu 7. Giá trị của $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x(1+\ln x)}$ là

- A. $\ln 2$. B. $\ln 3$. C. 2. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 8. Giá trị của $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx$ là

- A. 2. B. $\frac{1}{2}$. C. -1. D. 1.

Câu 9. Giá trị của $\int_0^1 x^3 e^{x^4} dx$ là

- A. $\frac{e-1}{4}$. B. $e - 1$. C. $\frac{e-1}{3}$. D. $\frac{e}{4}$.

Câu 10. Giá trị của $\int_0^{\pi/2} x \sin x dx$ là

- A. $\frac{\pi}{2}$. B. 0. C. π . D. 1.

Câu 11. Giá trị của $\int_1^2 x \ln x dx$ là

- A. $2\ln 2 - 1$. B. $2\ln 2 - \frac{3}{4}$. C. $\ln 2 - \frac{3}{4}$. D. $4\ln 2 - \frac{3}{4}$.

Câu 12. Giá trị của $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$ là

- A. 2π . B. $\frac{\pi}{2}$. C. π . D. 4.

Câu 13. Giá trị của $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+3}$ là

- A. $\frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$. B. $\ln \frac{3}{2}$. C. $\frac{1}{2} \ln \frac{2}{3}$. D. $2\ln \frac{3}{2}$.

Câu 14. Giá trị của $\int_0^{\ln} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$ là

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{3}{4}$. C. $\ln 2$. D. $\frac{1}{4}$.

Phần điền đáp án (6 câu)

Câu 15. Tính $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$.

Câu 16. Tính $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 17. Tính $\int_1^e x^2 \ln x dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 18. Tính $\int_0^1 (2x+1)e^x dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 19. Tính $\int_0^3 x \sqrt{x+1} dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 20. Biết $\int_2^4 \frac{dx}{x^2-x} = a \ln 2 + b \ln 3$ với a, b nguyên. Tính $a^2 + b^2$.

5. Đề luyện tập số 3 – Diện tích và thể tích (20 câu, 30 phút)

Phần trắc nghiệm (14 câu)

Câu 1. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2 - 4x + 3$ và trục hoành là

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{4}{3}$. C. $\frac{8}{3}$. D. 2.

Câu 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = 3x$ là

- A. 9. B. 3. C. $\frac{27}{2}$. D. $\frac{9}{2}$.

Câu 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = \sin x$, trục hoành, $x = 0$, $x = 2\pi$ là

- A. 4. B. 0. C. 2. D. 2π .

Câu 4. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = \frac{1}{x}$, trục hoành, $x = 1$, $x = e^2$ là

- A. 1. B. e^2 . C. 2. D. $e^2 - 1$.

Câu 5. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ và trục hoành là

- A. 0. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{2}$. D. 1.

Câu 6. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = e^x$, $y = e^{-x}$ và $x = 1$ là

- A. $e + \frac{1}{e} - 2$. B. $e - \frac{1}{e}$. C. $e + \frac{1}{e}$. D. $e - \frac{1}{e} - 2$.

Câu 7. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = \ln x$, trục hoành và $x = e$ là

- A. e . B. $e - 1$. C. 2. D. 1.

Câu 8. Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = x^2$, trục hoành, $x = 0$, $x = 1$ quanh trục Ox là

- A. $\frac{\pi}{3}$. B. $\frac{\pi}{5}$. C. $\frac{\pi}{2}$. D. $\frac{2\pi}{5}$.

Câu 9. Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = \cos x$, trục hoành, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ quanh trục Ox là

- A. $\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{\pi}{2}$. C. $\frac{\pi^2}{2}$. D. $\frac{\pi^2}{4}$.

Câu 10. Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = \frac{1}{x}$, trục hoành, $x = 1$, $x = 2$ quanh trục Ox là

- A. $\frac{\pi}{2}$. B. $\pi \ln 2$. C. $\ln 2$. D. $\frac{\pi}{4}$.

Câu 11. Một vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$, $x = 2$; thiết diện vuông góc với trục Ox tại x là hình vuông cạnh x^2 . Thể tích vật thể là

- A. $\frac{8}{3}$. B. $\frac{32}{5}$. C. $\frac{16}{5}$. D. $\frac{32\pi}{5}$.

Câu 12. Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$ và $y = x$ quanh trục Ox là

- A. $\frac{\pi}{3}$. B. $\frac{\pi}{30}$. C. $\frac{\pi}{6}$. D. $\frac{\pi}{15}$.

Câu 13. Quay tam giác giới hạn bởi $y = \frac{x}{2}$, trục hoành và $x = 6$ quanh trục Ox được một khối nón có thể tích

- A. 36π . B. 6π . C. 72π . D. 18π .

Câu 14. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$, $y = 2 - x$ và trục hoành là

- A. $\frac{7}{6}$. B. $\frac{5}{6}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{1}{2}$.

Phần điền đáp án (6 câu)

Câu 15. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = 6 - x^2$ và đường thẳng $y = x$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 16. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = \frac{2x}{x^2+1}$, trục hoành, $x = 0$, $x = 2$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 17. Quay nửa hình tròn $y = \sqrt{4 - x^2}$ ($-2 \leq x \leq 2$) quanh trục Ox . Tính thể tích khối tròn xoay (làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 18. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = e^{x/2}$, trục hoành, $x = 0$, $x = 2$ quanh trục Ox (làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 19. Tìm số thực $k > 0$ để diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = k$ bằng 36.

Câu 20. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = 4$ quanh trục Ox (làm tròn đến hàng phần trăm).

6. Đề luyện tập số 4 – Hàm ẩn và tính chất tích phân (20 câu, 30 phút)**Phần trắc nghiệm (14 câu)**

Câu 1. Cho f là hàm số lẻ, liên tục trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_{-3}^3 [f(x) + 1] dx$ là

- A. 0. B. 3. C. $2 \int_0^3 f(x) dx$. D. 6.

Câu 2. Cho f là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^2 f(x) dx = 3$. Giá trị của $\int_{-2}^2 f(x) dx$ là

- A. 0. B. 6. C. 3. D. 12.

Câu 3. Cho $\int_0^2 f(x) dx = 4$. Giá trị của $\int_0^1 [f(2x) + x] dx$ là

- A. $\frac{9}{2}$. B. 2. C. $\frac{5}{2}$. D. 4.

Câu 4. Cho $\int_0^1 f(x) dx = 5$. Giá trị của $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx$ là

- A. 5. B. $5e$. C. $\frac{1}{5}$. D. e .

Câu 5. Cho $F(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt$. Giá trị của $F'(\sqrt{\pi})$ là

- A. 1. B. -1. C. 0. D. $2\sqrt{\pi}$.

Câu 6. Cho $G(x) = \int_0^{x^2} e^t dt$. Giá trị của $G'(1)$ là

- A. e . B. $e - 1$. C. e^2 . D. $2e$.

Câu 7. Hàm số $f(x) = \int_1^x (t - 1)(t - 2) dt$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(1; 2)$. B. $(0; 1)$. C. $(2; 3)$. D. $(-\infty; 1)$.

Câu 8. Cho f có đạo hàm liên tục, $f(0) = 2$, $f(3) = 7$. Giá trị của $\int_0^3 f'(x) dx$ là

- A. 9. B. 14. C. 5. D. 7.

Câu 9. Cho f có đạo hàm liên tục, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Giá trị của $\int_0^1 f'(x)e^{f(x)} dx$ là

- A. e . B. $e - 1$. C. 1. D. $e + 1$.

Câu 10. Cho f liên tục trên $[0; 4]$, $f(4 - x) = f(x)$ với mọi $x \in [0; 4]$ và $\int_0^4 f(x) dx = 6$. Giá trị của $\int_0^4 x f(x) dx$ là

- A. 6. B. 24. C. 12. D. 3.

Câu 11. Cho hàm số f liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn $f(x) = 3x^2 - \int_0^1 f(t) dt$. Giá trị của $f(1)$ là

- A. 3. B. 2. C. $\frac{7}{2}$. D. $\frac{5}{2}$.

Câu 12. Cho hàm số f có $f(1) = 2$ và $\int_1^3 f'(x) dx = 4$. Giá trị của $f(3)$ là

- A. 6. B. 2. C. 4. D. 8.

Câu 13. Cho hàm số $f(x) > 0$ có đạo hàm liên tục, $f'(x) = f(x)$ với mọi x và $f(0) = 3$. Giá trị của $\int_0^1 f(x) dx$ là

- A. $e - 1$. B. $3e$. C. $3(e - 1)$. D. $3e - 1$.

Câu 14. Giá trị của $\int_0^2 \max\{x; x^2\} dx$ là

- A. $\frac{17}{6}$. B. $\frac{8}{3}$. C. 3. D. $\frac{19}{6}$.

Phần điền đáp án (6 câu)

Câu 15. Cho $\int_0^1 f(x) dx = 2$. Tính $\int_0^1 [3f(1 - x) - 2x] dx$.

Câu 16. Cho f có đạo hàm liên tục trên $[0; 2]$, $f(0) = 1$, $f(2) = 3$ và $\int_0^2 f(x) dx = 1$. Tính $\int_0^2 (x + 1) f'(x) dx$.

Câu 17. Cho f liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f(2 - x) = 2x^2$ với mọi x . Tính $\int_0^2 f(x) dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 18. Cho $\int_1^4 f(x) dx = 8$. Tính $\int_1^{\sqrt{3}} x f(x^2 + 1) dx$.

Câu 19. Cho hàm số f có $f'(x) = 2x + 1$ và $\int_0^1 f(x) dx = 2$. Tính $f(1)$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 20. Cho $F(x) = \int_0^x e^t (t^2 - 4) dt$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $F(x)$ trên đoạn $[0; 3]$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

7. Đề luyện tập số 5 – Thực tế, liên môn và nâng cao (20 câu, 30 phút)**Phần trắc nghiệm (14 câu)**

Câu 1. Một đoàn tàu đang chạy với vận tốc 25 m/s thì hãm phanh, chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t) = 25 - 5t$ (m/s). Từ lúc hãm phanh đến khi dừng, tàu đi được

- A. 62,5 m. B. 125 m. C. 50 m. D. 31,25 m.

Câu 2. Một vật được ném thẳng đứng lên trên với vận tốc $v(t) = 30 - 10t$ (m/s). Độ cao lớn nhất vật đạt được so với điểm ném là

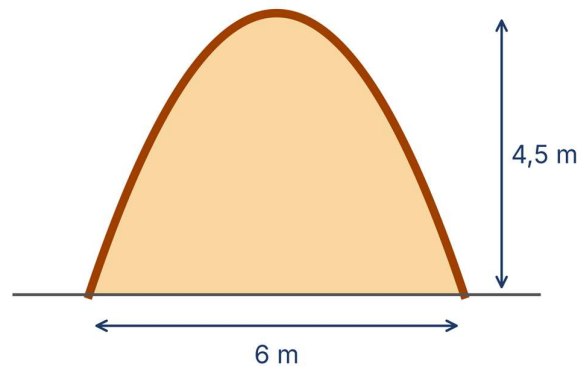
- A. 30 m. B. 90 m. C. 45 m. D. 60 m.

Câu 3. Nước được bơm vào một bể với tốc độ $r(t) = 6t - t^2$ (m³/giờ), $0 \leq t \leq 6$. Lượng nước bơm được trong 6 giờ là

- A. 18 m³. B. 36 m³. C. 72 m³. D. 108 m³.

Câu 4. Một cổng hình parabol có chân cổng rộng 6 m, chiều cao 4,5 m. Diện tích mặt cổng là

- A. 27 m². B. 13,5 m². C. 9 m². D. 18 m².



Cổng hình parabol rộng 6 m, cao 4,5 m.

Câu 5. Chi phí biên để sản xuất sản phẩm thứ x là $C'(x) = 3x^2 - 2x + 10$ (nghìn đồng). Chi phí tăng thêm khi sản lượng tăng từ 10 lên 20 sản phẩm là

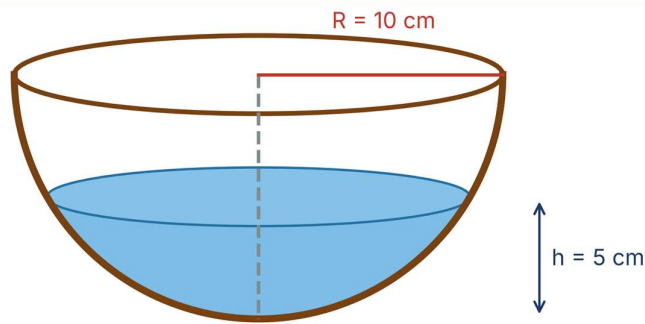
- A. 680 nghìn đồng. B. 7800 nghìn đồng. C. 6800 nghìn đồng. D. 8000 nghìn đồng.

Câu 6. Dân số một thành phố tăng với tốc độ $P'(t) = 0,3e^{0,03t}$ (triệu người/năm). Trong 10 năm, dân số tăng thêm khoảng

- A. 3,5 triệu người. B. 3 triệu người.
C. 4,5 triệu người. D. 0,35 triệu người.

Câu 7. Một chiếc bát có dạng nửa mặt cầu bán kính 10 cm. Rót nước vào bát đến độ cao 5 cm (tính từ đáy). Thể tích nước trong bát xấp xỉ bằng

- A. 1309 cm³. B. 654,5 cm³. C. 523,6 cm³. D. 2094,4 cm³.



Bát nửa mặt cầu chứa nước cao 5 cm.

Câu 8. Một lực có độ lớn $F(x) = 10 + 2x$ (N) kéo một vật theo phương của lực, x là quãng đường dịch chuyển (mét). Công của lực khi kéo vật đi 5 m là

- A. 50 J. B. 60 J. C. 100 J. D. 75 J.

Câu 9. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi elip $4x^2 + 9y^2 = 36$ là

- A. 6π . B. 36π . C. 3π . D. 12π .

Câu 10. Thời gian chờ X (phút) có hàm mật độ $f(x) = \frac{3}{8}x^2$ trên đoạn $[0; 2]$. Xác suất $P(X \leq 1) = \int_0^1 f(x) dx$ bằng

- A. $\frac{3}{8}$. B. $\frac{1}{8}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 11. Giá trị trung bình của hàm số $f(x) = \sin x$ trên đoạn $[0; \pi]$ là

- A. $\frac{1}{2}$. B. 1. C. $\frac{2}{\pi}$. D. $\frac{\pi}{2}$.

Câu 12. Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right)$ bằng

- A. 1. B. $\frac{1}{2}$. C. $\ln 3$. D. $\ln 2$.

Câu 13. Giá trị của $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx$ là

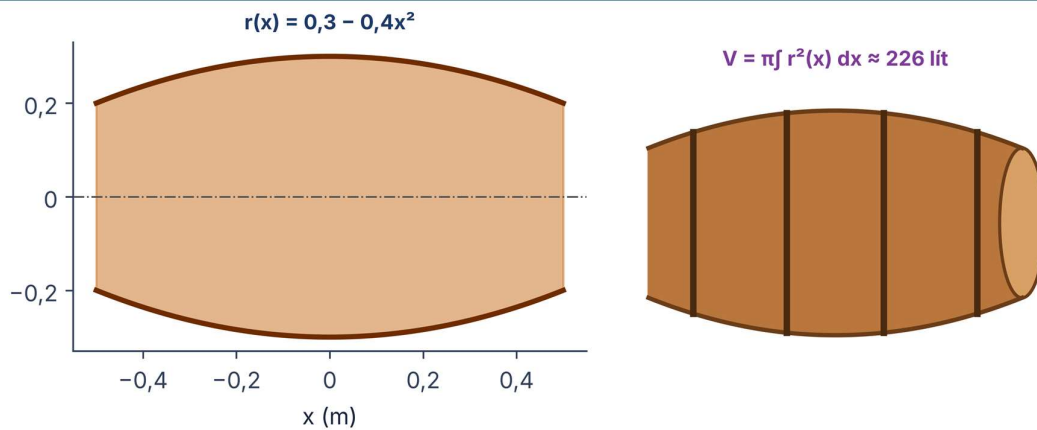
- A. $\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{\pi}{8}$. C. $\frac{\pi}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 14. Giá trị của $\int_0^1 x(1-x)^9 dx$ là

- A. $\frac{1}{110}$. B. $\frac{1}{90}$. C. $\frac{1}{100}$. D. $\frac{1}{11}$.

Phần điền đáp án (6 câu)

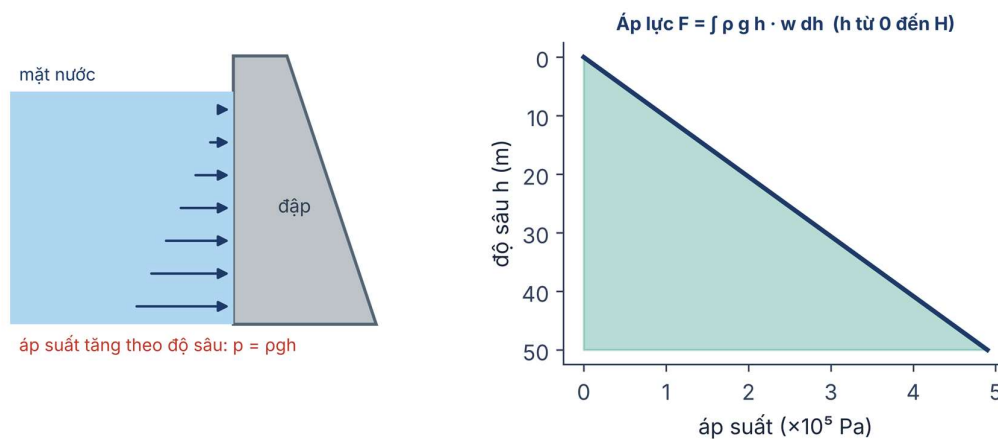
Câu 15. Một thùng rượu dài 1 m có dạng khối tròn xoay; bán kính mặt cắt ngang cách tâm thùng x mét là $r(x) = 0,3 - 0,4x^2$ (m), $-0,5 \leq x \leq 0,5$. Thùng chứa được bao nhiêu lít rượu (làm tròn đến hàng phần mười)?



Mặt cắt dọc và hình dạng thùng rượu.

Câu 16. Một hạt chuyển động thẳng với vận tốc $v(t) = t^2 - 4t + 3$ (m/s). Tính quãng đường hạt đi được trong 4 giây đầu (mét).

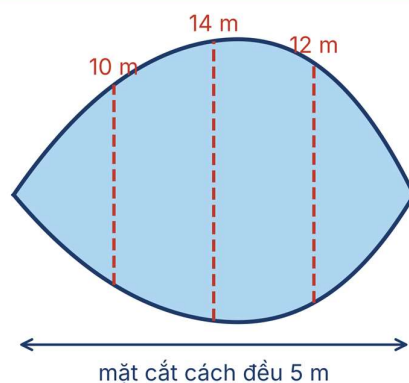
Câu 17. Mặt đập hình chữ nhật rộng 20 m chắn một hồ nước sâu 10 m. Lấy $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $g = 10 \text{ m/s}^2$. Tính áp lực của nước lên mặt đập (đơn vị: meganewton, $1 \text{ MN} = 10^6 \text{ N}$).



Áp suất nước tăng theo độ sâu.

Câu 18. Hàm cầu của một mặt hàng là $p = 100 - 2x$ (nghìn đồng, x nghìn sản phẩm). Tại mức giá cân bằng $p_0 = 60$, tính thặng dư tiêu dùng $\int_0^{x_0} [100 - 2x - p_0] dx$ (triệu đồng).

Câu 19. Đo chiều rộng một mặt hồ tại các mặt cắt cách đều 5 m được các giá trị 0; 10; 14; 12; 0 (m). Ước lượng diện tích mặt hồ bằng công thức Simpson (m^2 , làm tròn đến hàng phần trăm).



Các mặt cắt của mặt hồ.

Câu 20. Gọi $I = \int_0^1 x^4 (1-x)^4 dx$. Tính $\frac{1}{I}$.

8. Đáp án và lời giải chi tiết

Mỗi câu được trích lại đề trong khung tím, lời giải đặt ngay sau đề. Bảng đáp án phần trắc nghiệm đặt ở đầu mỗi đề để giáo viên chấm nhanh.

Đề số 1

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Đáp án	B	C	D	A	B	C	D	A	C	B	D	A	C	B

Câu 1.

$\int (6x^2 + 2)dx$ bằng

- A. $12x + C$. B. $2x^3 + 2x + C$. C. $6x^3 + 2x + C$. D. $2x^3 + C$.

Lời giải. $\int 6x^2 dx = 2x^3$, $\int 2 dx = 2x$. Vậy nguyên hàm là $2x^3 + 2x + C$. Chọn B.

Câu 2.

$\int 5^x dx$ bằng

- A. $5^x \ln 5 + C$. B. $x \cdot 5^{x-1} + C$. C. $\frac{5^x}{\ln 5} + C$. D. $\frac{5^{x+1}}{x+1} + C$.

Lời giải. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ với $a = 5$. Chọn C.

Câu 3.

Trên khoảng $(0; +\infty)$, $\int \left(\frac{1}{x} - \sin x\right) dx$ bằng

- A. $\ln x - \cos x + C$. B. $-\frac{1}{x^2} - \cos x + C$. C. $\ln x + \sin x + C$. D. $\ln x + \cos x + C$.

Lời giải. $\int \frac{dx}{x} = \ln x$ (vì $x > 0$) và $\int (-\sin x) dx = \cos x$. Chọn **D**.

Câu 4.

Hàm số $F(x) = e^{x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số

- A. $f(x) = 2xe^{x^2}$. B. $f(x) = e^{x^2}$. C. $f(x) = x^2 e^{x^2-1}$. D. $f(x) = e^{2x}$.

Lời giải. $F'(x) = (x^2)'e^{x^2} = 2xe^{x^2}$. Chọn **A**.

Câu 5.

Trên khoảng $(-\infty; 5)$, $\int \frac{dx}{5-x}$ bằng

- A. $\ln(5-x) + C$. B. $-\ln(5-x) + C$. C. $\frac{1}{(5-x)^2} + C$. D. $-\frac{1}{5-x} + C$.

Lời giải.

$$\int \frac{dx}{5-x} = \frac{1}{-1} \ln|5-x| + C = -\ln(5-x) + C$$

(vì $x < 5$). Chọn **B**.

Câu 6.

$\int \left(\cos x - \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx$ bằng

- A. $-\sin x - \tan x + C$. B. $\sin x + \tan x + C$. C. $\sin x - \tan x + C$. D. $-\sin x + \cot x + C$.

Lời giải. $\int \cos x dx = \sin x$, $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$. Vậy kết quả $\sin x - \tan x + C$. Chọn **C**.

Câu 7.

Giá trị của $\int_0^2 (x + 1) dx$ là

A. 2.**B. 3.****C. 6.****D. 4.****Lời giải.**

$$\int_0^2 (x + 1) dx = \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_0^2 = 2 + 2 = 4.$$

Chọn **D**.

Câu 8.

Cho $\int_1^3 f(x) dx = 4$. Giá trị của $\int_3^{13} f(x) dx$ là

A. -12.**B. 12.****C. $-\frac{4}{3}$.****D. $\frac{4}{3}$.****Lời giải.**

$$\int_3^{13} f(x) dx = -3 \int_1^3 f(x) dx = -12.$$

Chọn **A**.

Câu 9.

Giá trị của $\int_0^{\pi/6} \cos 3x dx$ là

A. 1.**B. $-\frac{1}{3}$.****C. $\frac{1}{3}$.****D. 3.****Lời giải.**

$$\int_0^{\pi/6} \cos 3x dx = \left[\frac{1}{3} \sin 3x \right]_0^{\pi/6} = \frac{1}{3} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{3}.$$

Chọn **C**.

Câu 10.

Giá trị của $\int_{-2}^2 (x^5 + 1) dx$ là

A. 0.**B. 4.****C. 8.****D. 2.**

Lời giải. x^5 là hàm lẻ nên $\int_{-2}^2 x^5 dx = 0$; còn $\int_{-2}^{21} dx = 4$. Chọn **B**.

✎ Câu 11.

Giá trị của $\int_0^1 e^{3x} dx$ là

- A. $e^3 - 1$. B. $3(e^3 - 1)$. C. $\frac{e^3}{3}$. D. $\frac{e^3 - 1}{3}$.

Lời giải.

$$\int_0^1 e^{3x} dx = \left[\frac{1}{3} e^{3x} \right]_0^1 = \frac{e^3 - 1}{3}.$$

Chọn **D**.

✎ Câu 12.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = 3x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$ là

- A. 8. B. 24. C. 4. D. 12.

Lời giải. $3x^2 \geq 0$ nên $S = \int_0^2 x^2 dx = [x^3]_0^2 = 8$. Chọn **A**.

✎ Câu 13.

Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = \sqrt{x + 1}$, trục hoành, $x = 0$, $x = 2$ quanh trục Ox là

- A. 2π . B. 8π . C. 4π . D. $\frac{16\pi}{3}$.

Lời giải.

$$V = \pi \int_0^2 (x + 1) dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_0^2 = 4\pi.$$

Chọn **C**.

✎ Câu 14.

Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 2t + 1$ (m/s). Quãng đường vật đi được từ giây thứ 1 đến giây thứ 3 là

- A. 8 m. B. 10 m. C. 12 m. D. 9 m.

Lời giải. $v(t) > 0$ nên quãng đường

$$s = \int_1^3 (2t + 1) dt = [t^2 + t]_1^3 = 12 - 2 = 10 \text{ m.}$$

Chọn B.

Câu 15.

Tính $\int_1^4 \sqrt{x} dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải.

$$\int_1^4 \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_1^4 = \frac{2}{3} (8 - 1) = \frac{14}{3} \approx 4,67.$$

Đáp số: 4,67

Câu 16.

Tính $\int_0^{\pi/2} (2\sin x + 1) dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải.

$$\int_0^{\pi/2} (2\sin x + 1) dx = [-2\cos x + x]_0^{\pi/2} = 2 + \frac{\pi}{2} \approx 3,57.$$

Đáp số: 3,57

Câu 17.

Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = 3x^2 - 2x$ và $F(2) = 5$. Tính $F(0)$.

Lời giải. $F(x) = x^3 - x^2 + C$; $F(2) = 4 + C = 5 \Rightarrow C = 1$. Vậy $F(0) = 1$. **Đáp số: 1**

Câu 18.

Cho $\int_0^3 f(x) dx = 5$ và $\int_3^5 f(x) dx = -2$. Tính $\int_0^5 [f(x) + 2] dx$.

Lời giải. $\int_0^5 f(x) dx = 5 + (-2) = 3$; $\int_0^5 2 dx = 10$. Tổng bằng 13. **Đáp số: 13**

Câu 19.

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2 - 1$ và trục hoành (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải. $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$; trên $(-1; 1)$ hàm số âm:

$$S = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \approx 1,33.$$

Đáp số: 1,33

Câu 20.

Tính $\int_1^2 \frac{x^2+1}{x} dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải. $\frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}$, nên tích phân bằng

$$\left[\frac{x^2}{2} + \ln x \right]_1^2 = \frac{3}{2} + \ln 2 \approx 2,19.$$

Đáp số: 2,19

Đề số 2

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Đáp án	C	A	D	B	A	C	B	D	A	D	B	C	A	D

Câu 1.

$\int \frac{2x}{x^2+4} dx$ bằng

A. $2\ln(x^2 + 4) + C$. B. $\frac{1}{x^2+4} + C$. C. $\ln(x^2 + 4) + C$. D. $x^2\ln(x^2 + 4) + C$.

Lời giải. Tử số là đạo hàm của mẫu số $x^2 + 4 > 0$:

$$\int \frac{u'}{u} dx = \ln u + C = \ln(x^2 + 4) + C.$$

Chọn C.

Câu 2. $\int \sin x \cos^4 x \, dx$ bằng

- A. $-\frac{\cos^5 x}{5} + C.$ B. $\frac{\cos^5 x}{5} + C.$ C. $-\frac{\sin^5 x}{5} + C.$ D. $\frac{\sin x \cos^5 x}{5} + C.$

Lời giải. Đặt $t = \cos x$, $dt = -\sin x \, dx$:

$$\int \sin x \cos^4 x \, dx = -\int t^4 dt = -\frac{t^5}{5} + C.$$

Chọn A.

Câu 3. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$ bằng

- A. $e^{\sqrt{x}} + C.$ B. $\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}} + C.$ C. $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} + C.$ D. $2e^{\sqrt{x}} + C.$

Lời giải. Đặt $t = \sqrt{x}$, $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$:

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx = 2 \int e^t \, dt = 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

Chọn D.

Câu 4. $\int \ln x \, dx$ bằng

- A. $\frac{1}{x} + C.$ B. $x \ln x - x + C.$ C. $x \ln x + x + C.$ D. $\frac{\ln^2 x}{2} + C.$

Lời giải. Từng phần $u = \ln x$, $dv = dx$:

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - x + C.$$

Chọn B.

Câu 5. $\int x e^{-x} \, dx$ bằng

- A. $-(x+1)e^{-x} + C.$ B. $(x+1)e^{-x} + C.$ C. $(1-x)e^{-x} + C.$ D. $-xe^{-x} + C.$

Lời giải. Từng phần $u = x$, $dv = e^{-x}dx$, $v = -e^{-x}$:

$$\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -(x+1)e^{-x} + C.$$

Chọn A.

Câu 6.

Giá trị của $\int_0^1 x(x^2 + 1)^3 dx$ là

- A. $\frac{15}{4}$. B. $\frac{15}{16}$. C. $\frac{15}{8}$. D. 2.

Lời giải. Đặt $t = x^2 + 1$, $dt = 2x dx$, cận $1 \rightarrow 2$:

$$\frac{1}{2} \int_1^2 t^3 dt = \frac{1}{8} (16 - 1) = \frac{15}{8}.$$

Chọn C.

Câu 7.

Giá trị của $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x(1+\ln x)}$ là

- A. $\ln 2$. B. $\ln 3$. C. 2. D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải. Đặt $t = 1 + \ln x$, $dt = \frac{dx}{x}$, cận $1 \rightarrow 3$: $\int_1^3 \frac{dt}{t} = \ln 3$. Chọn B.

Câu 8.

Giá trị của $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$ là

- A. 2. B. $\frac{1}{2}$. C. -1. D. 1.

Lời giải. Đặt $t = \cos x$, $dt = -\sin x dx$, cận $1 \rightarrow \frac{1}{2}$:

$$\int_{1/2}^1 \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t} \right]_{1/2}^1 = -1 + 2 = 1.$$

Chọn D.

Câu 9.Giá trị của $\int_0^1 x^3 e^{x^4} dx$ là

A. $\frac{e-1}{4}$.

B. $e - 1$.

C. $\frac{e-1}{3}$.

D. $\frac{e}{4}$.

Lời giải. Đặt $t = x^4$, $dt = 4x^3 dx$, cận $0 \rightarrow 1$: $\frac{1}{4} \int_0^1 e^t dt = \frac{e-1}{4}$. Chọn A.**Câu 10.**Giá trị của $\int_0^{\pi/2} x \sin x dx$ là

A. $\frac{\pi}{2}$.

B. 0.

C. π .

D. 1.

Lời giải. Từng phần $u = x$, $dv = \sin x dx$: $[-x \cos x + \sin x]_0^{\pi/2} = 1$. Chọn D.**Câu 11.**Giá trị của $\int_1^2 x \ln x dx$ là

A. $2\ln 2 - 1$.

B. $2\ln 2 - \frac{3}{4}$.

C. $\ln 2 - \frac{3}{4}$.

D. $4\ln 2 - \frac{3}{4}$.

Lời giải.

$$\int_1^2 x \ln x dx = \left[\frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} \right]_1^2 = 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{4} = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

Chọn B.

Câu 12.Giá trị của $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$ là

A. 2π .

B. $\frac{\pi}{2}$.

C. π .

D. 4.

Lời giải. $y = \sqrt{4-x^2}$ là nửa trên đường tròn bán kính 2; trên $[0; 2]$ tích phân là diện tích một phần tư hình tròn: $\frac{1}{4} \pi \cdot 2^2 = \pi$. Chọn C.

Câu 13.

Giá trị của $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+3}$ là

A. $\frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$.

B. $\ln \frac{3}{2}$.

C. $\frac{1}{2} \ln \frac{2}{3}$.

D. $2 \ln \frac{3}{2}$.

Lời giải.

$$\frac{1}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right),$$

nên tích phân bằng

$$\frac{1}{2} \left[\ln \frac{x+1}{x+3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}.$$

Chọn A.

Câu 14.

Giá trị của $\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$ là

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{3}{4}$.

C. $\ln 2$.

D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải. Đặt $t = 1 + e^x$, cận $2 \rightarrow 4$: $\int_2^4 \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Chọn D.

Câu 15.

Tính $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$.

Lời giải.

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} = [\sqrt{2x+1}]_0^4 = 3 - 1 = 2.$$

Đáp số: 2

Câu 16.

Tính $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải. $\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, nên

$$\int_0^{\pi/4} \tan^2 x \, dx = [\tan x - x]_0^{\pi/4} = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0,21.$$

Đáp số: 0,21

Câu 17.

Tính $\int_1^e x^2 \ln x \, dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải. Từng phần $u = \ln x$, $dv = x^2 dx$:

$$\left[\frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} \right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3 + 1}{9} \approx 4,57.$$

Đáp số: 4,57

Câu 18.

Tính $\int_0^1 (2x + 1) e^x \, dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải. Từng phần $u = 2x + 1$, $dv = e^x dx$:

$$[(2x + 1)e^x]_0^1 - 2 \int_0^1 e^x \, dx = 3e - 1 - 2(e - 1) = e + 1 \approx 3,72.$$

Đáp số: 3,72

Câu 19.

Tính $\int_0^3 x \sqrt{x+1} \, dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải. Đặt $t = \sqrt{x+1}$, $x = t^2 - 1$, $dx = 2t \, dt$, cận $1 \rightarrow 2$:

$$\int_1^2 (t^2 - 1) t \cdot 2t \, dt = 2 \left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right]_1^2 = \frac{116}{15} \approx 7,73.$$

Đáp số: 7,73

Câu 20.

Biết $\int_2^4 \frac{dx}{x^2 - x} = a \ln 2 + b \ln 3$ với a, b nguyên. Tính $a^2 + b^2$.

Lời giải. $\frac{1}{x^2-x} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$, nên tích phân bằng

$$\left[\ln \frac{x-1}{x} \right]_2^4 = \ln \frac{3}{4} - \ln \frac{1}{2} = \ln \frac{3}{2} = \ln 3 - \ln 2.$$

Vậy $a = -1, b = 1, a^2 + b^2 = 2$. **Đáp số: 2**

Đề số 3

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Đáp án	B	D	A	C	C	A	D	B	D	A	B	C	D	A

Câu 1.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2 - 4x + 3$ và trục hoành là

A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{4}{3}$.

C. $\frac{8}{3}$.

D. 2.

Lời giải. Hoành độ giao điểm $x = 1, x = 3$; hàm số âm trên $(1; 3)$: $S = \frac{|1| \cdot (3-1)^3}{6} = \frac{4}{3}$. Chọn **B**.

Câu 2.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = 3x$ là

A. 9.

B. 3.

C. $\frac{27}{2}$.

D. $\frac{9}{2}$.

Lời giải. $x^2 = 3x \Leftrightarrow x \in \{0; 3\}$:

$$S = \int_0^3 (3x - x^2) dx = \frac{27}{2} - 9 = \frac{9}{2}.$$

Chọn **D**.

Câu 3.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = \sin x$, trục hoành, $x = 0, x = 2\pi$ là

A. 4.

B. 0.

C. 2.

D. 2π .

Lời giải.

$$S = \int_0^{2\pi} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = 2 + 2 = 4.$$

Chọn A.

 Câu 4.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = \frac{1}{x}$, trục hoành, $x = 1$, $x = e^2$ là

- A. 1. B. e^2 . C. 2. D. $e^2 - 1$.

Lời giải. $S = \int_1^{e^2} \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^{e^2} = 2$. Chọn C.

 Câu 5.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ và trục hoành là

- A. 0. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{2}$. D. 1.

Lời giải.

$$x^3 - 3x^2 + 2x = x(x - 1)(x - 2).$$

$\int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx = \frac{1}{4}$, $\int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx = -\frac{1}{4}$. Vậy $S = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Chọn C.

 Câu 6.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = e^x$, $y = e^{-x}$ và $x = 1$ là

- A. $e + \frac{1}{e} - 2$. B. $e - \frac{1}{e}$. C. $e + \frac{1}{e}$. D. $e - \frac{1}{e} - 2$.

Lời giải. $e^x = e^{-x} \Leftrightarrow x = 0$; trên $(0; 1)$ có $e^x > e^{-x}$:

$$S = \int_0^1 (e^x - e^{-x}) dx = [e^x + e^{-x}]_0^1 = e + \frac{1}{e} - 2.$$

Chọn A.

 Câu 7.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = \ln x$, trục hoành và $x = e$ là

- A. e . B. $e - 1$. C. 2. D. 1.

Lời giải. $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$:

$$S = \int_1^e \ln x \, dx = [x \ln x - x]_1^e = 1.$$

Chọn **D**.

Câu 8.

Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = x^2$, trục hoành, $x = 0$, $x = 1$ quanh trục Ox là

A. $\frac{\pi}{3}$.

B. $\frac{\pi}{5}$.

C. $\frac{\pi}{2}$.

D. $\frac{2\pi}{5}$.

Lời giải. $V = \pi \int_0^1 x^4 \, dx = \frac{\pi}{5}$. Chọn **B**.

Câu 9.

Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = \cos x$, trục hoành, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ quanh trục Ox là

A. $\frac{\pi}{4}$.

B. $\frac{\pi}{2}$.

C. $\frac{\pi^2}{2}$.

D. $\frac{\pi^2}{4}$.

Lời giải.

$$V = \pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx = \pi \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

Chọn **D**.

Câu 10.

Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = \frac{1}{x}$, trục hoành, $x = 1$, $x = 2$ quanh trục Ox là

A. $\frac{\pi}{2}$.

B. $\pi \ln 2$.

C. $\ln 2$.

D. $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải. $V = \pi \int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \pi \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 = \frac{\pi}{2}$. Chọn **A**.

Câu 11.

Một vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$, $x = 2$; thiết diện vuông góc với trục Ox tại x là hình vuông cạnh x^2 . Thể tích vật thể là

A. $\frac{8}{3}$.

B. $\frac{32}{5}$.

C. $\frac{16}{5}$.

D. $\frac{32\pi}{5}$.

Lời giải. $S(x) = (x^2)^2 = x^4$, nên $V = \int_0^2 x^4 dx = \frac{32}{5}$. Chọn B.

Câu 12.

Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$ và $y = x$ quanh trục Ox là

A. $\frac{\pi}{3}$.

B. $\frac{\pi}{30}$.

C. $\frac{\pi}{6}$.

D. $\frac{\pi}{15}$.

Lời giải. Giao điểm $x = 0$, $x = 1$; trên $(0; 1)$: $x \leq \sqrt{x}$.

$$V = \pi \int_0^1 (x - x^2) dx = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{\pi}{6}.$$

Chọn C.

Câu 13.

Quay tam giác giới hạn bởi $y = \frac{x}{2}$, trục hoành và $x = 6$ quanh trục Ox được một khối nón có thể tích

A. 36π .

B. 6π .

C. 72π .

D. 18π .

Lời giải. $V = \pi \int_0^6 \frac{x^2}{4} dx = \frac{\pi}{4} \cdot 72 = 18\pi$, đúng bằng thể tích khối nón $\frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 6$. Chọn D.

Câu 14.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$, $y = 2 - x$ và trục hoành là

A. $\frac{7}{6}$.

B. $\frac{5}{6}$.

C. $\frac{4}{3}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải. $\sqrt{x} = 2 - x \Leftrightarrow x = 1$. Hình gồm phần dưới $y = \sqrt{x}$ trên $[0; 1]$ và phần dưới $y = 2 - x$ trên $[1; 2]$: $S = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$. Chọn A.

Câu 15.

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = 6 - x^2$ và đường thẳng $y = x$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải. $6 - x^2 = x \Leftrightarrow x \in \{-3; 2\}$:

$$S = \int_{-3}^2 (6 - x - x^2) dx = \frac{5^3}{6} = \frac{125}{6} \approx 20,83.$$

Đáp số: 20,83

Câu 16.

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = \frac{2x}{x^2+1}$, trục hoành, $x = 0$, $x = 2$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải. $y \geq 0$ trên $[0; 2]$:

$$S = \int_0^2 \frac{2x}{x^2+1} dx = [\ln(x^2+1)]_0^2 = \ln 5 \approx 1,61.$$

Đáp số: 1,61

Câu 17.

Quay nửa hình tròn $y = \sqrt{4 - x^2}$ ($-2 \leq x \leq 2$) quanh trục Ox . Tính thể tích khối tròn xoay (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải. Khối cầu bán kính 2:

$$V = \pi \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \frac{32\pi}{3} \approx 33,51.$$

Đáp số: 33,51

Câu 18.

Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = e^{x/2}$, trục hoành, $x = 0$, $x = 2$ quanh trục Ox (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải.

$$V = \pi \int_0^2 (e^{x/2})^2 dx = \pi \int_0^2 e^x dx = \pi(e^2 - 1) \approx 20,07.$$

Đáp số: 20,07

Câu 19.

Tìm số thực $k > 0$ để diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = k$ bằng 36.

Lời giải. Giao điểm $x = \pm\sqrt{k}$:

$$S = \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} (k - x^2) dx = \frac{4}{3} k\sqrt{k}.$$

Giải $\frac{4}{3} k\sqrt{k} = 36 \Leftrightarrow k\sqrt{k} = 27 \Leftrightarrow k = 9$. **Đáp số: 9**

Câu 20.

Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = 4$ quanh trục Ox (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải. Giao điểm $x = \pm 2$; thiết diện là hình vành khăn bán kính ngoài 4, trong x^2 :

$$V = \pi \int_{-2}^2 (16 - x^4) dx = \pi \left(64 - \frac{64}{5} \right) = \frac{256\pi}{5} \approx 160,85.$$

Đáp số: 160,85

Đề số 4

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Đáp án	D	B	C	A	B	D	A	C	B	C	D	A	C	A

Câu 1.

Cho f là hàm số lẻ, liên tục trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_{-3}^3 [f(x) + 1] dx$ là

A. 0. B. 3. C. $2 \int_0^3 f(x) dx$. D. 6.

Lời giải. f lẻ nên $\int_{-3}^3 f(x) dx = 0$; còn $\int_{-3}^3 1 dx = 6$. Chọn **D**.

Câu 2.

Cho f là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^2 f(x) dx = 3$. Giá trị của $\int_{-2}^2 f(x) dx$ là

- A. 0. B. 6. C. 3. D. 12.

Lời giải. f chẵn nên

$$\int_{-2}^2 f(x) dx = 2 \int_0^2 f(x) dx = 6.$$

Chọn B.

Câu 3.

Cho $\int_0^2 f(x) dx = 4$. Giá trị của $\int_0^1 [f(2x) + x] dx$ là

- A. $\frac{9}{2}$. B. 2. C. $\frac{5}{2}$. D. 4.

Lời giải. Đặt $t = 2x$:

$$\int_0^1 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t) dt = 2;$$

$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$. Tổng bằng $\frac{5}{2}$. Chọn C.

Câu 4.

Cho $\int_0^1 f(x) dx = 5$. Giá trị của $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx$ là

- A. 5. B. $5e$. C. $\frac{1}{5}$. D. e .

Lời giải. Đặt $t = \ln x$, $dt = \frac{dx}{x}$, cận $0 \rightarrow 1$: tích phân bằng $\int_0^1 f(t) dt = 5$. Chọn A.

Câu 5.

Cho $F(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt$. Giá trị của $F'(\sqrt{\pi})$ là

- A. 1. B. -1. C. 0. D. $2\sqrt{\pi}$.

Lời giải. Theo định lý cơ bản: $F'(x) = \cos(x^2)$, nên $F'(\sqrt{\pi}) = \cos \pi = -1$. Chọn B.

Câu 6.

Cho $G(x) = \int_0^{x^2} e^t dt$. Giá trị của $G'(1)$ là

- A. e . B. $e - 1$. C. e^2 . D. $2e$.

Lời giải. $G(x) = e^{x^2} - 1$, nên $G'(x) = 2xe^{x^2}$ và $G'(1) = 2e$. Chọn D.

Câu 7.

Hàm số $f(x) = \int_1^x (t - 1)(t - 2) dt$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(1; 2)$. B. $(0; 1)$. C. $(2; 3)$. D. $(-\infty; 1)$.

Lời giải.

$$f'(x) = (x - 1)(x - 2) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

Hàm số nghịch biến trên $(1; 2)$. Chọn A.

Câu 8.

Cho f có đạo hàm liên tục, $f(0) = 2$, $f(3) = 7$. Giá trị của $\int_0^3 f'(x) dx$ là

- A. 9. B. 14. C. 5. D. 7.

Lời giải.

$$\int_0^3 f'(x) dx = f(3) - f(0) = 7 - 2 = 5.$$

Chọn C.

Câu 9.

Cho f có đạo hàm liên tục, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Giá trị của $\int_0^1 f'(x)e^{f(x)} dx$ là

- A. e . B. $e - 1$. C. 1. D. $e + 1$.

Lời giải. Đặt $t = f(x)$, $dt = f'(x) dx$, cận $0 \rightarrow 1$: $\int_0^1 e^t dt = e - 1$. Chọn B.

Câu 10.

Cho f liên tục trên $[0; 4]$, $f(4 - x) = f(x)$ với mọi $x \in [0; 4]$ và $\int_0^4 f(x) dx = 6$. Giá trị của $\int_0^4 x f(x) dx$ là

- A. 6. B. 24. C. 12. D. 3.

Lời giải. Đặt $x = 4 - t$:

$$I = \int_0^4 (4 - t) f(4 - t) dt = \int_0^4 (4 - t) f(t) dt = 4 \cdot 6 - I.$$

Suy ra $I = 12$. Chọn C.

Câu 11.

Cho hàm số f liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn $f(x) = 3x^2 - \int_0^1 f(t) dt$. Giá trị của $f(1)$ là

- A. 3. B. 2. C. $\frac{7}{2}$. D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải. Đặt $I = \int_0^1 f(t) dt$ thì $f(x) = 3x^2 - I$. Lấy tích phân hai vế: $I = 1 - I \Rightarrow I = \frac{1}{2}$. Vậy $f(1) = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$. Chọn D.

Câu 12.

Cho hàm số f có $f(1) = 2$ và $\int_1^3 f'(x) dx = 4$. Giá trị của $f(3)$ là

- A. 6. B. 2. C. 4. D. 8.

Lời giải.

$$\int_1^3 f'(x) dx = f(3) - f(1) = 4,$$

nên $f(3) = 2 + 4 = 6$. Chọn A.

Câu 13.

Cho hàm số $f(x) > 0$ có đạo hàm liên tục, $f'(x) = f(x)$ với mọi x và $f(0) = 3$. Giá trị của $\int_0^1 f(x) dx$ là

- A. $e - 1$. B. $3e$. C. $3(e - 1)$. D. $3e - 1$.

Lời giải. $\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \Rightarrow \ln f(x) = x + C; f(0) = 3$ cho $f(x) = 3e^x$. Vậy $\int_0^{13} e^x dx = 3(e - 1)$.
Chọn C.

Câu 14.

Giá trị của $\int_0^2 \max\{x; x^2\} dx$ là

A. $\frac{17}{6}$.

B. $\frac{8}{3}$.

C. 3.

D. $\frac{19}{6}$.

Lời giải. Trên $[0; 1]$: $\max\{x; x^2\} = x$; trên $[1; 2]$: bằng x^2 . Tích phân bằng

$$\int_0^1 x dx + \int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{2} + \frac{7}{3} = \frac{17}{6}.$$

Chọn A.

Câu 15.

Cho $\int_0^1 f(x) dx = 2$. Tính $\int_0^1 [3f(1-x) - 2x] dx$.

Lời giải. Đặt $t = 1 - x$:

$$\int_0^1 f(1-x) dx = \int_0^1 f(t) dt = 2.$$

Vậy tích phân bằng $3 \cdot 2 - \int_0^1 2x dx = 6 - 1 = 5$. **Đáp số: 5**

Câu 16.

Cho f có đạo hàm liên tục trên $[0; 2]$, $f(0) = 1$, $f(2) = 3$ và $\int_0^2 f(x) dx = 1$. Tính $\int_0^2 (x+1)f'(x) dx$.

Lời giải. Từng phần $u = x + 1$, $dv = f'(x) dx$:

$$[(x+1)f(x)]_0^2 - \int_0^2 f(x) dx = 3 \cdot 3 - 1 \cdot 1 - 1 = 7.$$

Đáp số: 7

Câu 17.

Cho f liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f(2-x) = 2x^2$ với mọi x . Tính $\int_0^2 f(x) dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải. Vì

$$\int_0^2 f(2-x) dx = \int_0^2 f(x) dx,$$

lấy tích phân hai vế trên $[0; 2]$: $2I = \int_0^2 2x^2 dx = \frac{16}{3}$, nên $I = \frac{8}{3} \approx 2,67$. **Đáp số: 2,67**

Câu 18.

Cho $\int_1^4 f(x) dx = 8$. Tính $\int_0^{\sqrt{3}} x f(x^2 + 1) dx$.

Lời giải. Đặt $t = x^2 + 1$, $dt = 2x dx$, cận $1 \rightarrow 4$: tích phân bằng $\frac{1}{2} \int_1^4 f(t) dt = 4$. **Đáp số: 4**

Câu 19.

Cho hàm số f có $f'(x) = 2x + 1$ và $\int_0^1 f(x) dx = 2$. Tính $f(1)$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải. $f(x) = x^2 + x + C$. Từ $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + C = 2$ được $C = \frac{7}{6}$. Vậy $f(1) = 2 + \frac{7}{6} = \frac{19}{6} \approx 3,17$. **Đáp số: 3,17**

Câu 20.

Cho $F(x) = \int_0^x e^t (t^2 - 4) dt$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $F(x)$ trên đoạn $[0; 3]$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải. $F'(x) = e^x (x^2 - 4)$ âm trên $(0; 2)$, dương trên $(2; 3)$, nên $\min_{[0; 3]} F = F(2)$. Nguyên hàm của $e^t (t^2 - 4)$ là $e^t (t^2 - 2t - 2)$, nên

$$F(2) = -2e^2 - (-2) = 2 - 2e^2 \approx -12,78.$$

Đáp số: -12,78

Đề số 5

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Đáp án	A	C	B	D	C	A	B	D	A	B	C	D	B	A

 Câu 1.

Một đoàn tàu đang chạy với vận tốc 25 m/s thì hãm phanh, chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t) = 25 - 5t$ (m/s). Từ lúc hãm phanh đến khi dừng, tàu đi được

- A. 62,5 m. B. 125 m. C. 50 m. D. 31,25 m.

Lời giải. Tàu dừng khi $25 - 5t = 0 \Leftrightarrow t = 5$. Quãng đường:

$$\int_0^5 (25 - 5t) dt = 125 - 62,5 = 62,5 \text{ m.}$$

Chọn A.

 Câu 2.

Một vật được ném thẳng đứng lên trên với vận tốc $v(t) = 30 - 10t$ (m/s). Độ cao lớn nhất vật đạt được so với điểm ném là

- A. 30 m. B. 90 m. C. 45 m. D. 60 m.

Lời giải. Vật lên cao nhất khi $v = 0 \Leftrightarrow t = 3$. Độ cao:

$$\int_0^3 (30 - 10t) dt = 90 - 45 = 45 \text{ m.}$$

Chọn C.

 Câu 3.

Nước được bơm vào một bể với tốc độ $r(t) = 6t - t^2$ (m³/giờ), $0 \leq t \leq 6$. Lượng nước bơm được trong 6 giờ là

- A. 18 m³. B. 36 m³. C. 72 m³. D. 108 m³.

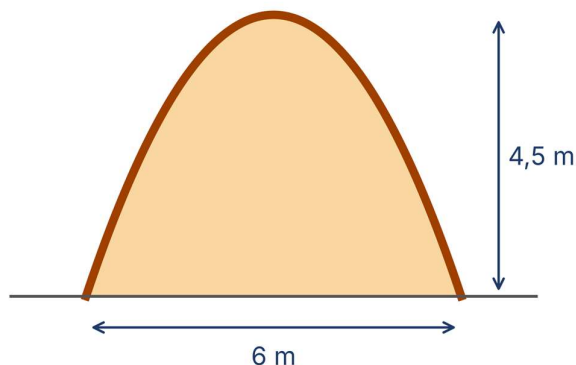
Lời giải.

$$\int_0^6 (6t - t^2) dt = \left[3t^2 - \frac{t^3}{3} \right]_0^6 = 108 - 72 = 36 \text{ m}^3.$$

Chọn B.

Câu 4.

Một cổng hình parabol có chân cổng rộng 6 m, chiều cao 4,5 m. Diện tích mặt cổng là

A. 27 m².B. 13,5 m².C. 9 m².D. 18 m².

Cổng hình parabol rộng 6 m, cao 4,5 m.

Lời giải. Diện tích vòm parabol bằng $\frac{2}{3}$ diện tích hình chữ nhật bao quanh: $\frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 4,5 = 18 \text{ m}^2$.

Chọn D.

Câu 5.

Chi phí biên để sản xuất sản phẩm thứ x là $C'(x) = 3x^2 - 2x + 10$ (nghìn đồng). Chi phí tăng thêm khi sản lượng tăng từ 10 lên 20 sản phẩm là

A. 680 nghìn đồng.

B. 7800 nghìn đồng.

C. 6800 nghìn đồng.

D. 8000 nghìn đồng.

Lời giải.

$$\int_{10}^{20} (3x^2 - 2x + 10) dx = [x^3 - x^2 + 10x]_{10}^{20} = 7800 - 1000 = 6800 \text{ nghìn đồng.}$$

Chọn C.

Câu 6.

Dân số một thành phố tăng với tốc độ $P'(t) = 0,3e^{0,03t}$ (triệu người/năm). Trong 10 năm, dân số tăng thêm khoảng

A. 3,5 triệu người.

B. 3 triệu người.

C. 4,5 triệu người.

D. 0,35 triệu người.

Lời giải.

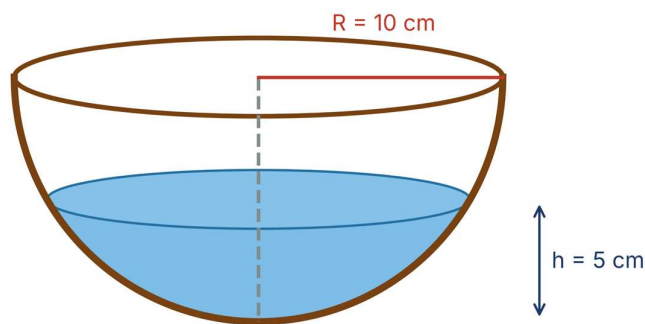
$$\int_0^{10} 0,3e^{0,03t} dt = [10e^{0,03t}]_0^{10} = 10(e^{0,3} - 1) \approx 3,5 \text{ triệu người.}$$

Chọn A.

Câu 7.

Một chiếc bát có dạng nửa mặt cầu bán kính 10 cm. Rót nước vào bát đến độ cao 5 cm (tính từ đáy). Thể tích nước trong bát xấp xỉ bằng

- A. 1309 cm³. B. 654,5 cm³. C. 523,6 cm³. D. 2094,4 cm³.



Bát nửa mặt cầu chứa nước cao 5 cm.

Lời giải. Đặt tâm mặt cầu tại gốc, trục Ox thẳng đứng, đáy bát tại $x = -10$; mặt nước tại $x = -5$. Thiết diện là hình tròn bán kính $\sqrt{100 - x^2}$:

$$V = \pi \int_{-10}^{-5} (100 - x^2) dx = \frac{625\pi}{3} \approx 654,5 \text{ cm}^3.$$

Chọn B.

Câu 8.

Một lực có độ lớn $F(x) = 10 + 2x$ (N) kéo một vật theo phương của lực, x là quãng đường dịch chuyển (mét). Công của lực khi kéo vật đi 5 m là

- A. 50 J. B. 60 J. C. 100 J. D. 75 J.

Lời giải.

$$A = \int_0^5 (10 + 2x) dx = [10x + x^2]_0^5 = 75 \text{ J.}$$

Chọn D.

Câu 9.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi elip $4x^2 + 9y^2 = 36$ là

- A. 6π . B. 36π . C. 3π . D. 12π .

Lời giải. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ có bán trục $a = 3, b = 2$.

$$S = 4 \int_0^3 \frac{2}{3} \sqrt{9 - x^2} dx = \frac{8}{3} \cdot \frac{9\pi}{4} = 6\pi.$$

Chọn A.

Câu 10.

Thời gian chờ X (phút) có hàm mật độ $f(x) = \frac{3}{8}x^2$ trên đoạn $[0; 2]$. Xác suất $P(X \leq 1) = \int_0^1 f(x) dx$ bằng

- A. $\frac{3}{8}$. B. $\frac{1}{8}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải. $P(X \leq 1) = \int_0^1 \frac{3}{8}x^2 dx = \frac{1}{8}$. Chọn B.

Câu 11.

Giá trị trung bình của hàm số $f(x) = \sin x$ trên đoạn $[0; \pi]$ là

- A. $\frac{1}{2}$. B. 1. C. $\frac{2}{\pi}$. D. $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải. $\bar{f} = \frac{1}{\pi-0} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{2}{\pi}$. Chọn C.

Câu 12.

Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right)$ bằng

- A. 1. B. $\frac{1}{2}$. C. $\ln 3$. D. $\ln 2$.

Lời giải.

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2.$$

Chọn **D**.

🔪 Câu 13.

Giá trị của $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx$ là

A. $\frac{\pi}{4}$.

B. $\frac{\pi}{8}$.

C. $\frac{\pi}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

$$y = \sqrt{x(1-x)} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

($y \geq 0$): nửa hình tròn bán kính $\frac{1}{2}$, diện tích $\frac{1}{2} \pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8}$. Chọn **B**.

🔪 Câu 14.

Giá trị của $\int_0^1 x(1-x)^9 dx$ là

A. $\frac{1}{110}$.

B. $\frac{1}{90}$.

C. $\frac{1}{100}$.

D. $\frac{1}{11}$.

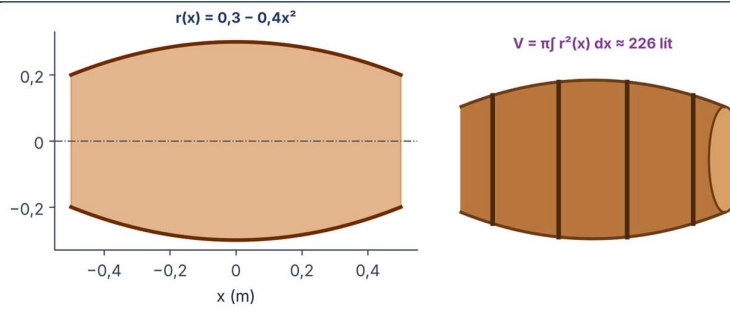
Lời giải. Đặt $t = 1 - x$:

$$\int_0^1 (1-t)t^9 dt = \frac{1}{10} - \frac{1}{11} = \frac{1}{110}.$$

Chọn **A**.

🔪 Câu 15.

Một thùng rượu dài 1 m có dạng khối tròn xoay; bán kính mặt cắt ngang cách tâm thùng x mét là $r(x) = 0,3 - 0,4x^2$ (m), $-0,5 \leq x \leq 0,5$. Thùng chứa được bao nhiêu lít rượu (làm tròn đến hàng phần mười)?



Mặt cắt dọc và hình dạng thùng rượu.

Lời giải.

$$V = \pi \int_{-0,5}^{0,5} (0,3 - 0,4x^2)^2 dx = \pi \int_{-0,5}^{0,5} (0,09 - 0,24x^2 + 0,16x^4) dx$$

$$= \pi(0,09 - 0,02 + 0,002) = 0,072\pi \approx 0,2262 \text{ m}^3,$$

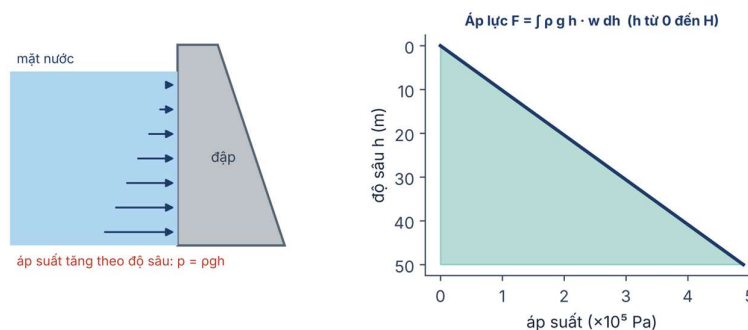
tức khoảng 226,2 lít. **Đáp số: 226,2****✎ Câu 16.**

Một hạt chuyển động thẳng với vận tốc $v(t) = t^2 - 4t + 3$ (m/s). Tính quãng đường hạt đi được trong 4 giây đầu (mét).

Lời giải. $v(t) = (t - 1)(t - 3)$ đổi dấu tại $t = 1, t = 3$. $\int_0^1 v = \frac{4}{3}$, $\int_1^3 v = -\frac{4}{3}$, $\int_3^4 v = \frac{4}{3}$. Quãng đường bằng $\frac{4}{3} \cdot 3 = 4$ m. **Đáp số: 4**

✎ Câu 17.

Mặt đập hình chữ nhật rộng 20 m chắn một hồ nước sâu 10 m. Lấy $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $g = 10 \text{ m/s}^2$. Tính áp lực của nước lên mặt đập (đơn vị: meganewton, $1 \text{ MN} = 10^6 \text{ N}$).



Áp suất nước tăng theo độ sâu.

Lời giải. Ở độ sâu h áp suất $p = \rho gh$.

$$F = \int_0^{10} 1000 \cdot 10 \cdot h \cdot 20 \, dh = 200\,000 \cdot \frac{10^2}{2} = 10^7$$

$N = 10 \text{ MN}$. **Đáp số: 10**

Câu 18.

Hàm cầu của một mặt hàng là $p = 100 - 2x$ (nghìn đồng, x nghìn sản phẩm). Tại mức giá cân bằng $p_0 = 60$, tính thặng dư tiêu dùng $\int_0^{x_0} [100 - 2x - p_0] \, dx$ (triệu đồng).

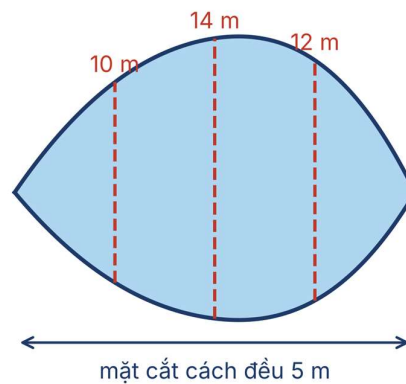
Lời giải. $100 - 2x_0 = 60 \Rightarrow x_0 = 20$. Thặng dư tiêu dùng:

$$\int_0^{20} (40 - 2x) \, dx = 800 - 400 = 400$$

(triệu đồng). **Đáp số: 400**

Câu 19.

Đo chiều rộng một mặt hồ tại các mặt cắt cách đều 5 m được các giá trị 0; 10; 14; 12; 0 (m). Ước lượng diện tích mặt hồ bằng công thức Simpson (m^2 , làm tròn đến hàng phần trăm).



Các mặt cắt của mặt hồ.

Lời giải. Công thức Simpson với $h = 5$, $n = 4$:

$$S \approx \frac{5}{3} (0 + 4 \cdot 10 + 2 \cdot 14 + 4 \cdot 12 + 0) = \frac{5}{3} \cdot 116 \approx 193,33 \text{ m}^2.$$

Đáp số: 193,33

 Câu 20.

Gọi

$$I = \int_0^1 x^4 (1-x)^4 dx$$

Tính

$$\frac{1}{I}$$

Lời giải. Khai triển

$$x^4(1-x)^4 = x^4 - 4x^5 + 6x^6 - 4x^7 + x^8:$$

$$I = \frac{1}{5} - \frac{4}{6} + \frac{6}{7} - \frac{4}{8} + \frac{1}{9} = \frac{1}{630}. \text{ Vậy } \frac{1}{I} = 630. \text{ Đáp số: 630}$$

LỜI KẾT

Từ những tam giác Archimedes lồng vào mảnh parabol, nguyên lí lát cắt của Tô Hăng, những thùng rượu của Kepler, đến kí hiệu $\int$ mà Leibniz viết lần đầu vào một ngày cuối thu năm 1675, tích phân đã đi một hành trình hơn hai nghìn năm để trở thành một chương của Toán 12. Đằng sau những công thức tưởng như khô khan là một ý tưởng giản dị mà sâu sắc: *muốn hiểu cái toàn thể, hãy chia nó thành những phần thật nhỏ, hiểu từng phần rồi cộng lại*; và một phát hiện kì diệu: *phép cộng vô số phần nhỏ ấy chính là phép toán ngược của đạo hàm*.

Khi gặp một câu hỏi tích phân trong phòng thi, hãy nhớ bốn câu hỏi: *Hàm này có trong bảng không? Đạo hàm của phần nào đang nằm sẵn trong tích phân? Có phải tích của hai loại hàm khác nhau? Có tính đối xứng nào để khai thác?* Và khi nhìn hóa đơn tiền điện, đồng hồ tốc độ hay một chiếc bình gốm, hãy thử hỏi: *đại lượng nào đang được tích lũy, và nó là diện tích dưới đồ thị nào?*

Chúc các em học sinh đạt kết quả cao trong kì thi HSA và kì thi tốt nghiệp THPT, và chúc quý thầy cô có thêm tư liệu để kể cho học trò nghe câu chuyện đẹp này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Lịch sử và tài liệu nước ngoài

- [1] C. B. Boyer (1959), *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*, Dover.
- [2] V. J. Katz (2009), *A History of Mathematics: An Introduction*, 3rd ed., Addison-Wesley.
- [3] E. Hairer, G. Wanner (2008), *Analysis by Its History*, Springer.
- [4] T. L. Heath (1912), *The Method of Archimedes, Recently Discovered by Heiberg*, Cambridge University Press.
- [5] R. Netz, W. Noel (2007), *The Archimedes Codex*, Da Capo Press.
- [6] J. Kepler (1615), *Nova stereometria doliorum vinariorum*, Linz.
- [7] G. Strang (2010), *Calculus*, Wellesley-Cambridge Press (bản trực tuyến của MIT OpenCourseWare).
- [8] J. Stewart (2015), *Calculus: Early Transcendentals*, 8th ed., Cengage Learning.
- [9] Art of Problem Solving, *Putnam Competition Problems and Solutions* (1968, 1980, 1987, 2005), artofproblemsolving.com.

Chương trình, đề thi và tài liệu trong nước

- [10] Bộ Giáo dục và Đào tạo (2018), *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán*; Sách giáo khoa Toán 12 (các bộ sách hiện hành), chương Nguyên hàm và tích phân.
- [11] Trung tâm Khảo thí ĐHQG Hà Nội, *Cấu trúc bài thi đánh giá năng lực HSA* (phần Toán học và xử lý số liệu: 50 câu, 75 phút, gồm 35 câu trắc nghiệm 4 lựa chọn và 15 câu điền đáp án), cet.vnu.edu.vn.
- [12] Bộ Giáo dục và Đào tạo, *Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng môn Toán các khối A, A1, B, D* (2002 – 2014); *Đề thi THPT Quốc gia môn Toán* (2015); *Định dạng đề thi tốt nghiệp THPT từ năm 2025*.