

Đề gồm có 01 trang

Câu 1 (2,0 điểm):

a) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\sqrt{\cos x + 1} - 3$.

b) Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} + \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}}$, cho biết $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Câu 2 (2,0 điểm): Giải các phương trình sau:

a) $2\cos^2 x - 3\sin x = 0$.

b) $\frac{1}{2}\log_2(x-1)^2 + \log_2(x+1) = \log_2(5-x)$.

Câu 3 (2,0 điểm):

a) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+1}{x-1} = 16$. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + x)f(x) + 2}{x-1}$.

b) Học sinh Nam tới Hội chợ Xuân 2025 và tham gia trò chơi ném bóng, mỗi lần ném người chơi phải đặt cược một số tiền sau đó mới được chơi. Lần chơi đầu tiên Nam đặt 20 000 đồng, mỗi lần chơi tiếp theo tiền đặt gấp đôi lần tiền đặt cược trước. Nam chơi thua 9 lần liên tiếp và thắng ở lần thứ 10. Hỏi Nam thắng hay thua bao nhiêu tiền?

Câu 4 (1,0 điểm):

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và a, b là các số thực bất kì. Xét hàm số $g(x) = f(a) + f(b) - 2f(x)$. Chứng minh rằng phương trình $g(x) = 0$ luôn có nghiệm thực

Câu 5 (1,0 điểm):

Cho các số thực x, y thỏa mãn các điều kiện $5x - y, 2x - 3y, x + 2y$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng, và các số $(y + 1)^2, xy + 1, (x - 1)^2$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tìm x, y .

Câu 6 (2,0 điểm):

Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a , $SA = SB = SC$, đường cao SO của hình chóp S.ABC có độ dài bằng $2a$.

a) Chứng minh rằng $SA \perp BC$

b) M là điểm thuộc đường cao AH của tam giác ABC (M khác A và H). Mặt phẳng (P) đi qua M và vuông góc với AH cắt hình chóp theo thiết diện. Tìm vị trí của M để diện tích thiết diện lớn nhất.

-----Hết-----

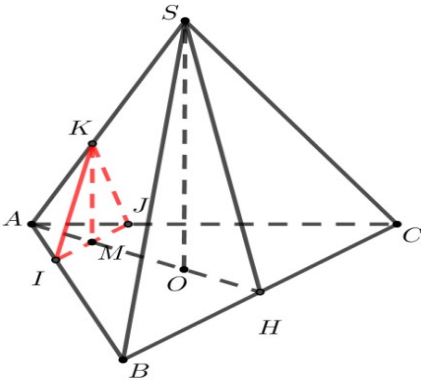
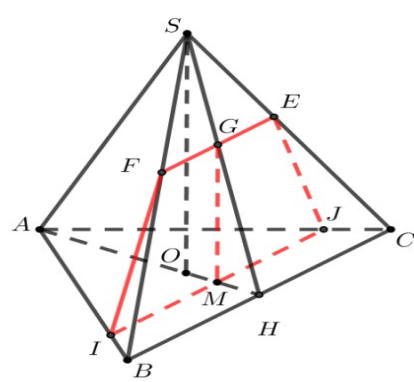
Lưu ý: Giám thị không giải thích gì thêm. Học sinh không được sử dụng tài liệu.

HƯỚNG DẪN CHẤM

Đáp án này gồm có 06 trang

Câu	Nội dung	Điểm
1a	Câu 1 (2,0 điểm): a) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\sqrt{\cos x + 1} - 3$.	1,0
	$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \cos x + 1 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{\cos x + 1} \leq \sqrt{2}$	0,50
	$0 \leq 2\sqrt{\cos x + 1} \leq 2\sqrt{2} \Rightarrow -3 \leq 2\sqrt{\cos x + 1} - 3 \leq 2\sqrt{2} - 3$	0,25
	GTNN bằng -3 khi $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$	0,25
	GTLN bằng $2\sqrt{2} - 3$ khi $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$	
1b	b) Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}} + \sqrt{\frac{1-\sin \alpha}{1+\sin \alpha}}$, cho biết $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.	1,0
	Khi đó $A^2 = \left(\sqrt{\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}} + \sqrt{\frac{1-\sin \alpha}{1+\sin \alpha}} \right)^2 = \frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha} + \frac{1-\sin \alpha}{1+\sin \alpha} + 2 = \frac{4}{1-\sin^2 \alpha} = \frac{4}{\cos^2 \alpha}$	0,50
	Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos \alpha > 0$ do đó $A = \frac{2}{\cos \alpha}$.	0,50
2a	Câu 2 (2,0 điểm): Giải các phương trình sau: a) $2\cos^2 x - 3\sin x = 0$.	1,0
	Ta có: $2\cos^2 x - 3\sin x = 0 \Leftrightarrow 2(1 - \sin^2 x) - 3\sin x = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$	0,5
	$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -2(VN) \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$	0,25
	$\sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$	0,25
	Vậy phương trình có 2 họ nghiệm là $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$	
2b	b) $\frac{1}{2}\log_2(x-1)^2 + \log_2(x+1) = \log_2(5-x)$.	1,0
	Đk: $-1 < x < 5; x \neq 1$.	0,25
	Ta có $\frac{1}{2}\log_2(x-1)^2 + \log_2(x+1) = \log_2(5-x)$	
	$\Leftrightarrow \log_2 x-1 + \log_2(x+1) = \log_2(5-x)$	
	$\Leftrightarrow \log_2 x-1 (x+1) = \log_2(5-x) \Leftrightarrow x-1 (x+1) = 5-x$	0,25

	$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ (x-1)(x+1) = 5-x \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x < 1 \\ (-x+1)(x+1) = 5-x \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x < 1 \\ x^2 - x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \text{ thỏa mãn.}$	0,25
	Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.	0,25
3a	Câu 3 (2,0 điểm): a) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+1}{x-1} = 16$. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2+x)f(x)+2}{x-1}$.	1,0
	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2+x)f(x)+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2+x)(f(x)+1) - x^2 - x + 2}{x-1}$ $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2+x)(f(x)+1)}{x-1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x-1}$	0,25
	$* \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2+x)(f(x)+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2+x) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+1}{x-1} = 2 \cdot 16 = 32$	0,25
	$* \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3$	0,25
	Vậy $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2+x)f(x)+2}{x-1} = 32 - 3 = 29$	0,25
3b	b) Học sinh Nam tới Hội chợ Xuân 2025 và tham gia trò chơi ném bóng, mỗi lần ném người chơi phải đặt cược một số tiền sau đó mới được chơi. Lần chơi đầu tiên Nam đặt 20 000 đồng, mỗi lần chơi tiếp theo tiền đặt gấp đôi lần tiền đặt cược trước. Nam chơi thua 9 lần liên tiếp và thắng ở lần thứ 10. Hỏi Nam thắng hay thua bao nhiêu tiền?	1,0
	Số tiền Nam đặt trong mỗi lần là cấp số nhân có $u_1 = 20\,000$ và công bội $q = 2$. Nam thua trong 9 lần đầu tiên nên tổng số tiền thua là: $S_9 = u_1 + u_2 + \dots + u_9 = \frac{u_1(1-p^9)}{1-p} = 10220000 \text{ đồng}$	0,5
	Số tiền mà Nam thắng trong lần thứ 10 là: $u_{10} = u_1 q^9 = 10240000$ đồng Ta có: $u_{10} - S_9 = 20\,000 > 0$ nên Nam thắng 20 000 đồng	0,5
4	Câu 4 (1,0 điểm): Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Xét hàm số $g(x) = f(a) + f(b) - 2f(x)$. Chứng minh rằng phương trình $g(x) = 0$ luôn có nghiệm.	1,00
	Đặt $g(x) = f(a) + f(b) - 2f(x)$ khi đó $g(x)$ cũng là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Ta có : $g(a) = f(a) + f(b) - 2f(a) = f(b) - f(a)$ và $g(b) = f(a) + f(b) - 2f(b) = f(a) - f(b)$. Do đó : $g(a).g(b) = -[f(b) - f(a)]^2$.	0,25
	Nếu $f(a) = f(b)$ thì $\begin{cases} x = a \\ x = b \end{cases}$ thỏa mãn bài toán.	0,25
	Nếu $f(a) \neq f(b)$ thì $g(a).g(b) = -[f(b) - f(a)]^2 < 0$ nên phương trình $g(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $(a; b)$.	0,25
	Vậy phương trình $g(x) = 0$ luôn có nghiệm.	0,25

5	Câu 5 (1,0 điểm): Cho các số thực x, y thỏa mãn các điều kiện $5x - y, 2x - 3y, x + 2y$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng, và các số $(y + 1)^2, xy + 1, (x - 1)^2$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tìm x, y .	1,0
	$5x - y, 2x - 3y, x + 2y$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng nên $2(2x - 3y) = (x + 2y) + (5x - y) \Leftrightarrow 2x + 7y = 0$ (1)	0,25
	$(y + 1)^2, xy + 1, (x - 1)^2$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân nên $(xy + 1)^2 = (y + 1)^2 (x - 1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} xy + 1 = (y + 1)(x - 1)(2) \\ xy + 1 = -(y + 1)(x - 1)(3) \end{cases}$	0,25
	Giải hệ gồm (1) và (2) ta được nghiệm $(x; y) = \left(\frac{14}{9}; -\frac{4}{9}\right)$	0,25
	Giải hệ gồm (1) và (3) ta được nghiệm $(x; y) = (0; 0)$ và $(x; y) = \left(\frac{9}{4}; -\frac{9}{14}\right)$	0,25
6a	Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a, $SA = SB = SC$, đường cao SO của hình chóp S.ABC có độ dài bằng $2a$. a) Chứng minh rằng $SA \perp BC$	1,0
	Từ $SA = SB = SC \rightarrow OA = OB = OC \rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC \Rightarrow O$ cũng là trực tâm tam giác $ABC \rightarrow OA$ vuông góc BC (1)	0,25
	Mà SO vuông góc với (ACB) nên SO vuông góc với BC (2)	0,25
	Từ (1) và (2) suy ra BC vuông góc với (OSA)	0,25
	Vậy BC vuông góc với SA	0,25
6b	b) M là điểm thuộc đường cao AH của tam giác ABC (M khác A và H). Mặt phẳng (P) đi qua M và vuông góc với AH cắt hình chóp theo thiết diện. Tìm vị trí của M để diện tích thiết diện lớn nhất.	1,0
	 Hình 1  Hình 2 Vì (P) đi qua M và vuông góc với AH nên (P) song song hoặc chứa AH . Do đó: Giao tuyến (P) với (SAH) song song hoặc trùng với AH $\Rightarrow$ Gọi giao tuyến là GM. Theo định lý giao tuyến thì (P), (SCB), (ABC) đôi một cắt nhau nên giao tuyến EF (qua G) $\parallel BC \parallel IJ$ (qua M) Chú ý: Vẽ đúng hình cả hai trường hợp thiết diện là tam giác và tính đúng cho 0,5 điểm, hình thang cân và tính đúng cho 0,5 điểm Đặt $AM = x, x \in \left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right), SO = SO = 2a; OH = \frac{a\sqrt{3}}{6}; OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$	0,5

	TH1. Nếu $0 < x \leq \frac{a\sqrt{3}}{3}$ thì thiết diện là tam giác KIJ. Thiết diện có diện tích lớn nhất, khi $AM = AO = \frac{2}{3}AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ hay $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	
	TH2. Nếu $\frac{a\sqrt{3}}{3} < x < \frac{a\sqrt{3}}{2}$ thì thiết diện là hình thang IJEF. Ta có: $\frac{IJ}{BC} = \frac{AM}{AH} = \frac{x}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow IJ = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$ $\frac{EF}{BC} = \frac{SG}{SH} = \frac{OM}{OH} = \frac{x - \frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} \Rightarrow EF = 2\left(x\sqrt{3} - a\right)$	0,25
	$\frac{EF}{BC} = \frac{GM}{SO} = \frac{MH}{OH} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} - x}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} \Rightarrow GM = 2\left(3a - 2x\sqrt{3}\right)$ Khi đó, diện tích thiết diện IJEF là $S = \frac{1}{2}(IJ + EF)GM = \frac{1}{3}(4x\sqrt{3} - 3a)(6a - 4x\sqrt{3}) \leq \frac{3a^2}{4}$ (BĐT Cô-si). Vậy diện tích thiết diện lớn nhất là $\frac{3a^2}{4}$ khi $x = \frac{3a\sqrt{3}}{8}$ Kết hợp các trường hợp, diện tích thiết diện lớn nhất là $\frac{3a^2}{4}$ khi $x = \frac{3a\sqrt{3}}{8}$	0,25

-----Hết-----

Xem thêm: ĐỀ THI HSG TOÁN 11
<https://toanmath.com/de-thi-hsg-toan-11>