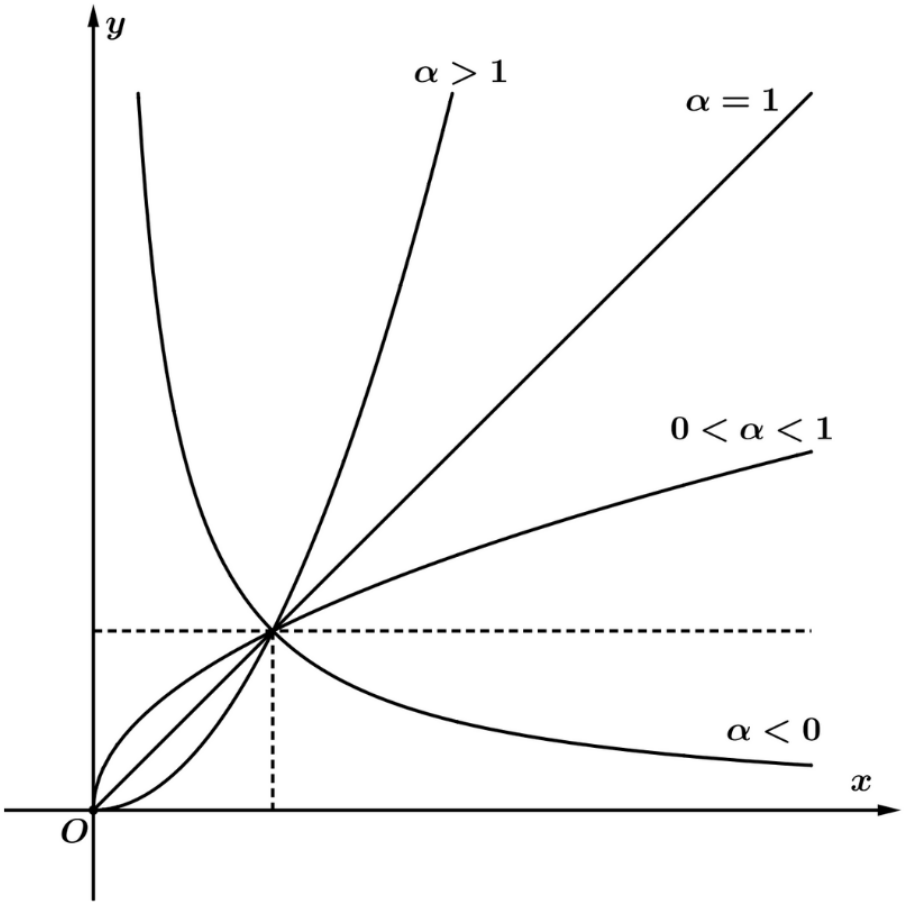
PHAN NHẬT LINH

MŨ - LOGARIT

TÀI LIỆU MỚI NĂM 2024

File word cho giáo viên liên hệ Zalo: 0817.098.716



NẮM TRỌN CÁC CHUYÊN ĐỀ NĂM 2024 - PHAN NHẬT LINH

CHƯƠNG 3

HÀM SỐ LŨY THỪA HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

CHỦ ĐỀ 9 LŨY THỪA

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Cho n là một số nguyên dương. Với a là một số thực tùy ý, lũy thừa bậc n của a là tích của n thừa số a $\quad a^n = \underbrace{a.a.....a}_{n}$ (n thừa số)

Ta gọi a là cơ số, n là số mũ của lũy thừa a^n.

Với $a \neq 0, n = 0$ hoặc n là một số nguyên âm thì lũy thừa bậc n của a là số a^n xác định bởi $a^0 = 1; a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$. Chú ý rằng: 0^0 và 0^{-n} không có nghĩa

Cho $a > 0$ và số hữu tỉ $r = \dfrac{m}{n}$; trong đó $m \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{R}, n \geq 2$. Khi đó $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

2. Một số tính chất của lũy thừa

Với $a, b \neq 0$ và $m, n \in \mathbb{Z}$, ta có:

$\oplus \quad a^m.a^n = a^{n+m};$ $\qquad \oplus \quad \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n};$ $\qquad \oplus \quad \left(a^m\right)^n = a^{m.n};$

$\oplus \quad (a.b)^m = a^m.b^m$ $\qquad \oplus \quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m};$ $\qquad \oplus \quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^m;$

$\oplus \quad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}\left(n \in \mathbb{N}^*\right);$ $\qquad \oplus \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\left(a > 0, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*\right)$

Với $a > 1$ thì $a^m > a^n \Leftrightarrow m > n$. Còn với $0 < a < 1$ thì $a^m > a^n \Leftrightarrow m < n$.

Với mọi $0 < a < b$, ta có $a^m < b^m \Leftrightarrow m > 0$; $\quad a^m > b^m \Leftrightarrow m < 0$.

3. Căn bậc n

Định nghĩa: cho số thực b và số nguyên dương $n\left(n \geq 2\right)$. Số a được gọi căn bậc n của số b nếu $a^n = b$. Một số chú ý quan trọng:

- Nếu n lẻ và $a \in \mathbb{R}$ thì có duy nhất một căn bậc n, được kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$.
- Nếu n chẵn thì có các trường hợp sau:
  - Với $a < 0$ thì không tồn tại căn bậc n của a.
  - Với $a = 0$ thì có một căn bậc n của a là số 0.
  - Với $a > 0$ thì có hai căn bậc n là $\pm\sqrt[n]{a}$.

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Với a là số thực dương tùy ý, $\sqrt[3]{a^2}$ bằng:

A. $a^{\frac{1}{6}}$. **B.** a^6. **C.** $a^{\frac{2}{3}}$. **D.** $a^{\frac{3}{2}}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 2: Với $x>0$ thì $x^{\frac{1}{5}}.\sqrt[3]{x}$ bằng

A. $x^{\frac{16}{15}}$. **B.** $x^{\frac{3}{5}}$. **C.** $x^{\frac{8}{15}}$. **D.** $x^{\frac{1}{15}}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Với a là số thực dương tùy ý, $\sqrt[4]{a^5}$ bằng

A. $a^{\frac{5}{4}}$. **B.** $a^{\frac{4}{5}}$. **C.** a^{20}. **D.** $a^{\frac{5}{2}}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 4: Cho số thực $a>0$. Biểu thức $P=a.\sqrt[3]{a}$ được viết lại dưới dạng lũy thừa hữu tỉ là:

A. $a^{\frac{2}{3}}$. **B.** a^3. **C.** $a^{\frac{4}{3}}$. **D.** $a^{\frac{1}{3}}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 5: Biết $9^x+9^{-x}=23$. Tính giá trị của biểu thức $P=3^x+3^{-x}$.

A. 25. **B.** $\sqrt{27}$. **C.** $\sqrt{23}$. **D.** 5.

Lời giải

.....

Câu 6: Giá trị của biểu thức $P=\dfrac{2^3.2^{-1}+5^{-3}.5^4}{10^{-3}:10^{-2}-(0,1)^0}$ là

A. 10. **B.** 9. **C.** -10. **D.** -9.

Lời giải

.....

Câu 7: Giá trị của biểu thức $T=\left(2+\sqrt{5}\right)^{2021}\left(\sqrt{5}-2\right)^{2019}$ tương ứng bằng

A. $+\infty$. **B.** $9-\sqrt{45}$. **C.** $9+\sqrt{45}$. **D.** $9+2\sqrt{5}$.

Lời giải

.....

Câu 8: Với a là số thực dương tuỳ ý, $\sqrt{a^3.\sqrt[4]{a}}$ bằng

A. $a^{\frac{17}{4}}$. **B.** $a^{\frac{13}{6}}$. **C.** $a^{\frac{13}{8}}$. **D.** $a^{\frac{17}{6}}$.

Lời giải

.....

Câu 9: Cho $9^x+9^{-x}=47$. Khi đó giá trị của biểu thức $P=\dfrac{13+3^x+3^{-x}}{2-3^x-3^{-x}}$ bằng

A. $-\dfrac{5}{2}$. **B.** 2. **C.** -4. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

.....

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1: Tính, rút gọn, so sánh các số liên quan đến lũy thừa

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

Câu 1: Giá trị $\sqrt[3]{2021}.\sqrt[5]{2021}$ viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ là

A. $2021^{\frac{2}{5}}$. **B.** $2021^{\frac{1}{15}}$. **C.** $2021^{\frac{8}{15}}$. **D.** $2021^{\frac{1}{10}}$

Câu 2: Cho $a=\dfrac{1}{256}$ và $b=\dfrac{1}{27}$. Tính $A=a^{-\frac{3}{4}}+b^{-\frac{4}{3}}$

A. 23. **B.** 89. **C.** 145. **D.** 26.

Câu 3: Cho số $x\in\mathbb{N}^*$ và $x\geq 2$. Giá trị của $\sqrt[x]{2021^{x+1}}$ bằng

A. $2021^{\frac{x}{x+1}}$. **B.** 2021. **C.** $2021^{\frac{x+1}{x}}$. **D.** Đáp án khác.

Câu 4: Viết biểu thức $P=\sqrt[3]{x.\sqrt[4]{x}}$, $(x>0)$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ

A. $P=x^{\frac{5}{4}}$. **B.** $P=x^{\frac{1}{12}}$. **C.** $P=x^{\frac{1}{7}}$. **D.** $P=x^{\frac{5}{12}}$.

Câu 5: Cho $4^x+4^{-x}=7$. Biểu thức $P=\dfrac{5+2^x+2^{-x}}{8-4.2^x-4.2^{-x}}$ có giá trị bằng

A. $P=\dfrac{3}{2}$. **B.** $P=-\dfrac{5}{2}$. **C.** $P=2$. **D.** $P=-2$.

Câu 6: Cho hai số thực a, b tuỳ ý khác 0 thoả mãn $3^a=4^b$. Giá trị của $\dfrac{a}{b}$ bằng

A. $\ln 0,75$. **B.** $\log_3 4$. **C.** $\log_4 3$. **D.** $\ln 12$.

Câu 7: Biết $4^x+4^{-x}=14$, tính giá trị của biểu thức $P=2^x+2^{-x}$.

A. 4. **B.** 16. **C.** $\sqrt{17}$. **D.** ± 4.

Câu 8: Cho a là một số thực dương, tính giá trị của biểu thức $P=\left(\sqrt{2^a}\right)^{\frac{4}{a}}$ bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 8. **D.** 1.

Câu 9: Cho $9^x+9^{-x}=23$. Khi đó biểu thức $A=\dfrac{5+3^x+3^{-x}}{1-3^x-3^{-x}}=\dfrac{a}{b}$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a,b\in\mathbb{Z}$.

Tích $a.b$ bằng

A. -10. **B.** 10. **C.** -8. **D.** 8.

Câu 10: Cho a là một số thực dương. Giá trị của biểu thức $P=\left(\sqrt{2^a}\right)^{\frac{4}{a}}$ bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 8. **D.** 1.

Câu 11: Cho biểu thức $T=\dfrac{1}{2^{-x-1}}+3.\sqrt{2}^{2x}-4^{\frac{x-1}{2}}$. Khi $2^x=\sqrt{3}$ thì giá trị của biểu thức T là

A. $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$.

Câu 12: Cho $4^x+4^{-x}=7$. Khi đó biểu thức $P=\dfrac{5-2^x-2^{-x}}{3+2^{x+1}+2^{1-x}}=\dfrac{a}{b}$ với $\dfrac{a}{b}$ tối giản và $a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{Z}^+$. Tính tổng $a+b$ có giá trị bằng

A. 8. **B.** 11. **C.** 17. **D.** 4.

Câu 13: Với a là số thực dương, biểu thức $P=a^{\frac{1}{3}}.\sqrt{a}$ bằng

A. $a^{\frac{1}{6}}$. **B.** $a^{\frac{2}{5}}$. **C.** $a^{\frac{5}{6}}$. **D.** $a^{\frac{4}{3}}$.

Câu 14: Cho a,b là các số thực dương, m là một số nguyên và n là một số nguyên dương. Tìm khẳng định **sai**.

A. $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$. **B.** $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[m]{a^n}$. **C.** $\dfrac{a^m}{b^m}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^m$. **D.** $(ab)^m=a^m.b^m$.

Câu 15: Cho bốn số thực a,b,x,y với a,b là các số thực dương khác 1. Mệnh đề nào đưới dây đúng?

A. $\left(a^x\right)^y=a^{x+y}$. **B.** $a^x.a^y=a^{xy}$. **C.** $(ab)^x=ab^x$. **D.** $\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$.

Câu 16: Với a là số thực dương tùy ý, $\sqrt{\dfrac{1}{a^3}}$ bằng?

A. a^{-3}. **B.** $a^{\frac{3}{2}}$. **C.** $a^{\frac{1}{6}}$. **D.** $a^{-\frac{3}{2}}$.

Câu 17: Với a là số thực dương tuỳ ý, $\sqrt{a^3}$ bằng

A. $a^{\frac{1}{6}}$. **B.** $a^{\frac{2}{3}}$. **C.** a^6. **D.** $a^{\frac{3}{2}}$.

Câu 18: Cho a là số thực dương. Giá trị rút gọn của biểu thức $P=a^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}$ bằng:

A. $a^{\frac{2}{3}}$. **B.** a^5. **C.** $a^{\frac{5}{6}}$. **D.** $a^{\frac{1}{6}}$.

Câu 19: Cho a là một số thực dương khác 1, biểu thức $a^{\frac{3}{5}}.\sqrt[3]{a}$ viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ là

A. $a^{\frac{14}{15}}$. **B.** $a^{\frac{1}{15}}$. **C.** $a^{\frac{17}{5}}$. **D.** $a^{\frac{2}{15}}$.

Câu 20: Cho $a>0$, khi đó $\sqrt[4]{a}$ bằng

A. $a^{\frac{1}{4}}$. **B.** a^4. **C.** $\dfrac{1}{a^4}$. **D.** a^{-4}.

Câu 21: Giá trị $\sqrt[3]{2021}.\sqrt[5]{2021}$ viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ là

A. $2021^{\frac{2}{5}}$ **B.** $2021^{\frac{1}{15}}$ **C.** $2021^{\frac{8}{15}}$ **D.** $2021^{\frac{1}{10}}$

Câu 22: Với a là số thực dương tùy ý, $a^{\frac{5}{3}}$ bằng

A. $\sqrt[5]{a^3}$. **B.** $a^5.a^3$. **C.** $\dfrac{a^5}{a^3}\cdot$ **D.** $\sqrt[3]{a^5}$

Câu 23: Cho a là số thực dương và biểu thức $P=a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $P=a^{\frac{1}{3}}$. **B.** $P=a^{\frac{7}{6}}$. **C.** $P=a^{\frac{5}{6}}$. **D.** $P=a^5$.

Câu 24: Cho x,y là hai số thực dương khác 1 và m,n là hai số thực tùy ý. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\dfrac{x^m}{y^n}=\left(\dfrac{x}{y}\right)^{m-n}$. **B.** $(xy)^n=x^n.y^n$. **C.** $\left(x^n\right)^m=x^{n.m}$. **D.** $x^n.x^m=x^{n+m}$.

Câu 25: Cho a là số thực tùy ý khác 0 và 1. Biểu thức $P=\left(a^3\right)^2$ bằng

A. a^6. **B.** a. **C.** a^9. **D.** a^5.

Câu 26: Với α là một số thực bất kỳ, mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\sqrt{10^\alpha}=\left(\sqrt{10}\right)^\alpha$. **B.** $\left(10^\alpha\right)^2=10^{\alpha^2}$. **C.** $\left(10^\alpha\right)^2=(100)^\alpha$. **D.** $\sqrt{10^\alpha}=10^{\frac{\alpha}{2}}$.

Câu 27: Với α là một số thực bất kỳ, mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\left(5^\alpha\right)^2=25^\alpha$. **B.** $\left(5^\alpha\right)^2=5^{\alpha^2}$. **C.** $\sqrt{5^\alpha}=\left(\sqrt{5}\right)^\alpha$. **D.** $\sqrt{5^\alpha}=5^{\frac{\alpha}{2}}$.

Câu 28: Cho a là số thực dương. Giá trị của biểu thức $P=a^{\frac{2}{3}}.\sqrt{a}$ bằng

A. $a^{\frac{2}{3}}$. **B.** $a^{\frac{7}{6}}$. **C.** a^5. **D.** $a^{\frac{5}{6}}$.

Câu 29: Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{x^{\frac{1}{3}}\sqrt[6]{x}}{\sqrt[4]{x}}$, với $x>0$.

A. $P=\sqrt[4]{x}$. **B.** $P=x^{-\frac{1}{6}}$. **C.** $P=\sqrt{x}$. **D.** $P=x^{\frac{1}{6}}$.

Câu 30: Rút gọn biểu thức $A=x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{x}, x>0$ ta được

A. $A=\sqrt{x}$. **B.** $A=x^{\frac{2}{9}}$. **C.** $A=x^2$. **D.** $A=x^{\frac{81}{}}$.

Câu 31: Cho $a\neq 1$ là số thực dương. Viết và rút gọn biểu thức $a^{\frac{3}{2022}}\cdot\sqrt[2022]{a}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ. Tìm số mũ của biểu thức rút gọn đó.

A. $\dfrac{1}{1011}$. **B.** $\dfrac{3}{2022^2}$. **C.** $\dfrac{2}{1011}$. **D.** $\dfrac{3}{1011}$.

Câu 32: Rút gọn biểu thức $P=x^{\frac{2}{5}}.\sqrt[6]{x}$ với $x>0$.

A. $P=x^{\frac{1}{15}}$. **B.** $P=x^{\frac{17}{15}}$. **C.** $P=x^{\frac{17}{30}}$. **D.** $P=\sqrt{x}$.

Câu 33: Đơn giản biểu thức $P=a^{\sqrt{2}}.\left(\dfrac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1}$ với $a>0$, được kết quả là

A. $a^{\sqrt{2}}$. **B.** $a^{2\sqrt{2}-1}$. **C.** $a^{1-\sqrt{2}}$. **D.** a.

Câu 34: Viết biểu thức $\sqrt{a}\ (a>0)$ về dạng lũy thừa của a là:

A. $a^{\frac{5}{4}}$. **B.** $a^{\frac{1}{2}}$. **C.** $a^{\frac{1}{4}}$. **D.** $a^{\frac{3}{4}}$.

Câu 35: Với a là số thực dương tùy ý, $a^4.a^{\frac{1}{2}}$ bằng

A. a^8. **B.** a^2. **C.** $a^{\frac{7}{2}}$. **D.** $a^{\frac{9}{2}}$.

Câu 36: Cho số thực dương a và số nguyên dương n tùy ý. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\sqrt{a^n}=a^{2+n}$. **B.** $\sqrt{a^n}=a^{2n}$. **C.** $\sqrt{a^n}=a^{\frac{2}{n}}$. **D.** $\sqrt{a^n}=a^{\frac{n}{2}}$.

Câu 37: Giá trị biểu thức $a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{5}{2}}$ với $a>0$ bằng

A. a^3. **B.** $a^{\frac{5}{4}}$. **C.** a^5. **D.** a^2.

Câu 38: Giả sử a là số thực dương, khác 1. Biểu thức $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$ được viết dưới dạng a^{α}. Khi đó:

A. $\alpha=\frac{1}{6}$. **B.** $\alpha=\frac{5}{3}$. **C.** $\alpha=\frac{2}{3}$. **D.** $\alpha=\frac{11}{6}$.

Câu 39: Với a là số thực dương tùy ý, tích $a^3.a^{\frac{1}{4}}$ bằng:

A. $a^{\frac{3}{4}}$. **B.** $a^{\frac{13}{4}}$. **C.** $a^{\frac{4}{3}}$. **D.** $a^{\frac{11}{4}}$.

Câu 40: Với x là số thực dương lớn tùy ý, $x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{x}$ bằng

A. $x^{\frac{1}{8}}$. **B.** $x^{\frac{2}{9}}$. **C.** $\sqrt{x}$. **D.** x^2.

Câu 41: Với $x\geq 0$ thì $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x^2}}}$ bằng

A. x. **B.** x^2. **C.** $\sqrt{x}$. **D.** x^4.

Câu 42: Với a là số thực dương tùy ý, $a^{\frac{5}{3}}$ bằng

A. $\sqrt[5]{a^3}$. **B.** $\sqrt[3]{a^5}$. **C.** a^8. **D.** a^2.

Câu 43: Với a là số thực dương tùy ý khi đó $\sqrt{a^2.\sqrt[5]{a}}$ bằng

A. $a^{\frac{11}{10}}$. **B.** $a^{\frac{1}{10}}$. **C.** $a^{\frac{22}{5}}$. **D.** $a^{\frac{10}{11}}$.

Câu 44: Viết biểu thức $P=\sqrt[3]{x.\sqrt[4]{x}}$ ($x>0$) dưới dạng luỹ thừa với số mũ hữu tỷ.

A. $P=x^{\frac{5}{4}}$. **B.** $P=x^{\frac{1}{12}}$. **C.** $P=x^{\frac{1}{7}}$. **D.** $P=x^{\frac{5}{12}}$.

Câu 45: Cho x là số thực dương. Biết $\sqrt{x.\sqrt[3]{x\sqrt{x\sqrt[3]{x}}}}=x^{\frac{b}{a}}$ với a, b là các số tự nhiên và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+b$.

A. 16. **B.** 15. **C.** 14. **D.** 17.

Câu 46: Cho số thực x và số thực $y\neq 0$ tùy ý. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $(2.7)^x=2^x.7^x$. **B.** $3^x.3^y=3^{x+y}$. **C.** $\left(5^x\right)^y=\left(5^y\right)^x$. **D.** $4^{\frac{x}{y}}=\frac{4^x}{4^y}$.

Câu 47: Rút gọn biểu thức $P=x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{x}$ với $x>0$.

A. $P=x^{\frac{1}{8}}$. **B.** $P=x^2$. **C.** $P=x^{\frac{2}{9}}$. **D.** $P=\sqrt{x}$.

Câu 48: Cho x, y là các số thự **C.** Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $x^2.y^2=(xy)^2$. **B.** $3^x.3^y=3^{x+y}$. **C.** $\left(2^x\right)^{2y}=4^{xy}$. **D.** $2^x.\left(\frac{1}{2}\right)^y=xy$.

Câu 49: Rút gọn biểu thức $P=a\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$, $(a>0)$ ta được kết quả là

A. $P=a^{\frac{5}{3}}$. **B.** $P=a^6$. **C.** $P=a^{\frac{5}{6}}$. **D.** $P=a^{\frac{10}{3}}$.

Câu 50: Cho hai số thực dương a,b. Rút gọn biểu thức $A=\frac{a^{\frac{1}{4}}\sqrt[3]{b}+b^{\frac{1}{4}}\sqrt[3]{a}}{\sqrt[12]{a}+\sqrt[12]{b}}$ ta thu được $A=a^m.b^n$. Tích của $m.n$ là

A. $\frac{1}{9}$. **B.** $\frac{1}{16}$. **C.** $\frac{1}{18}$. **D.** $\frac{1}{8}$.

Câu 51: Biết biểu thức $P=\sqrt[6]{x^3\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}}$ $(x>0)$ được viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ là x^α. Khi đó, giá trị của α bằng

A. $\frac{37}{15}$. **B.** $\frac{23}{36}$. **C.** $\frac{23}{30}$. **D.** $\frac{53}{30}$.

Câu 52: Biết biểu thức $P=\sqrt[6]{x^3\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}}$ $(x>0)$ được viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ là x^α. Khi đó, giá trị của α bằng

A. $\frac{37}{15}$. **B.** $\frac{23}{36}$. **C.** $\frac{23}{30}$. **D.** $\frac{53}{30}$.

Câu 53: Đơn giản biểu thức $P=a^{\sqrt{2}}.\left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1}$ với $a>0$, được kết quả là

A. $a^{\sqrt{2}}$. **B.** $a^{2\sqrt{2}-1}$. **C.** $a^{1-\sqrt{2}}$. **D.** a.

Câu 54: Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^3}},(x>0)$ bằng

A. $y'=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$. **B.** $y'=\frac{7}{6}\sqrt[6]{x}$. **C.** $y'=\frac{6}{7\sqrt[7]{x}}$. **D.** $y'=\sqrt[9]{x}$.

Câu 55: Cho x là số thực dương. Biểu thức $\sqrt[4]{x^2\sqrt[3]{x}}$ được viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ là

A. $x^{\frac{12}{7}}$. **B.** $x^{\frac{5}{6}}$. **C.** $x^{\frac{7}{12}}$. **D.** $x^{\frac{6}{5}}$.

Câu 56: Rút gọn biểu thức $P=x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{\sqrt[3]{x^5}}$ với $x>0$.

A. $P=x^{\frac{2}{9}}$. **B.** $P=x^{\frac{11}{8}}$. **C.** $P=x^2$. **D.** $P=x^{\frac{11}{18}}$.

Câu 57: Cho hàm số $f(a)=\frac{a^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{a^{-2}}-\sqrt[3]{a}\right)}{a^{\frac{1}{8}}\left(\sqrt[8]{a^3}-\sqrt[8]{a^{-1}}\right)}$ với $a>0, a\neq 1$. Giá trị của $M=f\left(2021^{2022}\right)$ là

A. 2021^{1011} **B.** $2021^{1011}+1$ **C.** $-2021^{1011}+1$ **D.** $-2021^{1011}-1$

Câu 58: Cho a là số thực dương. Rút gọn biểu thức $A=a\sqrt{a^3\sqrt{a\sqrt{a}}}$ về dạng $a^{\frac{m}{n}}$ trong đó $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản và $m,n\in\mathbb{N}^*$. Tính giá trị của biểu thức $T=m^2+n^2$.

A. 2425. **B.** 539. **C.** 593. **D.** 1369.

Câu 59: Rút gọn biểu thức $A=\frac{\sqrt[3]{a^5}.a^{\frac{7}{3}}}{a^4.\sqrt[7]{a^{-2}}}$ với $a>0$ ta được kết quả $A=a^{\frac{m}{n}}$, trong đó $m,n\in\mathbb{N}^*$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $3m^2-2n=2$. **B.** $m^2+n^2=43$. **C.** $2m^2+n=15$. **D.** $m^2+n^2=25$.

Câu 60: Với x là số thực dương tùy ý, $x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{x}$ bằng

A. $x^{\frac{1}{8}}$. **B.** x^2. **C.** $\sqrt{x}$. **D.** $x^{\frac{2}{9}}$.

Câu 61: Cho a,b là hai số thực dương và x,y là hai số thực bất kì. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $a^{x+y}=a^x+a^y$. **B.** $(a+b)^x=a^x+b^x$. **C.** $\left(\frac{a}{b}\right)^x=a^x\cdot b^{-x}$. **D.** $a^x\cdot b^y=(ab)^{xy}$.

Câu 62: Cho $a>0$. Biểu thức $P=a^{\frac{4}{3}}:\sqrt[3]{a}$ bằng

A. $a^{\frac{4}{9}}$. **B.** a. **C.** a^4. **D.** $x^{-\frac{5}{3}}$.

Câu 63: Cho $4^x+4^{-x}=7$. Biểu thức $P=\frac{5+2^x+2^{-x}}{8-4.2^x-4.2^{-x}}$ có giá trị bằng

A. $P=\frac{3}{2}$. **B.** $P=-\frac{5}{2}$. **C.** $P=2$. **D.** $P=-2$.

Câu 64: Viết biểu thức $P=\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x}}\,(x>0)$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ.

A. $P=x^{\frac{5}{4}}$. **B.** $P=x^{\frac{1}{12}}$. **C.** $P=x^{\frac{1}{7}}$. **D.** $P=x^{\frac{5}{12}}$.

Câu 65: Cho a là số thực dương và m,n là các số thực tùy ý. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a^m.a^n=a^m+a^n$. **B.** $a^m.a^n=(a^m.a)^n$. **C.** $a^m.a^n=a^{m+n}$. **D.** $a^m.a^n=a^{mn}$.

Câu 66: Cho $a\neq 1$ là số thực dương. Viết và rút gọn biểu thức $a^{\frac{3}{2022}}\cdot\sqrt[2022]{a}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ. Tìm số mũ của biểu thức rút gọn đó.

A. $\frac{1}{1011}$. **B.** $\frac{3}{2022^2}$. **C.** $\frac{2}{1011}$. **D.** $\frac{3}{1011}$.

Câu 67: Với mọi a,b thỏa mãn $2^a=4.8^b$, khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a=2+3b$. **B.** $a=2b^3$. **C.** $a=4b^3$. **D.** $a=6b$.

Câu 68: Cho m, n là hai số dương không đồng thời bằng 1, biểu thức $\frac{m^{2\sqrt{2}}-n^{2\sqrt{3}}}{\left(m^{\sqrt{2}}-n^{\sqrt{3}}\right)^2}-1$ bằng

A. $\frac{2n^{\sqrt{3}}}{m^{\sqrt{2}}-n^{\sqrt{3}}}$. **B.** $\frac{-2n^{\sqrt{3}}}{m^{\sqrt{2}}-n^{\sqrt{3}}}$. **C.** $\frac{2m^{\sqrt{3}}}{m^{\sqrt{2}}-n^{\sqrt{3}}}$. **D.** $\frac{-2m^{\sqrt{3}}}{m^{\sqrt{2}}-n^{\sqrt{3}}}$.

Câu 69: Cho a là số thực dương. Viết và rút gọn biểu thức $a^{\frac{3}{2022}}.\sqrt[2022]{a}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ. Tìm số mũ của biểu thức rút gọn đó

A. $\frac{2}{1011}$. **B.** $\frac{1}{1011}$. **C.** $\frac{3}{1011}$. **D.** $\frac{3}{2022^2}$.

Câu 70: Cho $4^x+4^{-x}=7$. Biểu thức $P=\frac{5+2^x+2^{-x}}{8-4.2^x-4.2^{-x}}$ có giá trị bằng

A. $P=\frac{3}{2}$. **B.** $P=-\frac{5}{2}$. **C.** $P=2$. **D.** $P=-2$.

Câu 71: Cho x,y là hai số nguyên thỏa mãn: $3^x.6^y=\frac{2^{15}.6^{40}}{9^{50}.12^{25}}$. Tính $x.y$?

A. –445. **B.** –755. **C.** –450. **D.** -425.

Câu 72: Xét α,β là hai số th,ực bất kì. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $3^\alpha<3^\beta\Leftrightarrow\alpha=\beta$. **B.** $3^\alpha>3^\beta\Leftrightarrow\alpha>\beta$. **C.** $3^\alpha>3^\beta\Leftrightarrow\alpha<\beta$. **D.** $3^\alpha>3^\beta\Leftrightarrow\alpha=\beta$.

Câu 73: Nếu $a^{\frac{1}{3}}>a^{\frac{1}{6}}$ và $b^{\sqrt{3}}>b^{\sqrt{5}}$ thì

A. $a<1;0<b<1$. **B.** $a>1;b<1$. **C.** $0<a<1;b<1$ **D.** $a>1;0<b<1$.

Câu 74: Với $a>0$, $b>0,m,n$ là các số thực bất kì, đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\left(a^m\right)^n=a^m.a^n$. **B.** $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$. **C.** $a^m.b^m=(ab)^m$. **D.** $a^m.a^n=a^{m+n}$.

Câu 75: Xét α,β là hai số thực bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $3^\alpha>3^\beta\Leftrightarrow\alpha=\beta$. **B.** $3^\alpha>3^\beta\Leftrightarrow\alpha<\beta$. **C.** $3^\alpha>3^\beta\Leftrightarrow\alpha>\beta$. **D.** $3^\alpha<3^\beta\Leftrightarrow\alpha=\beta$.

Câu 76: Cho $a>1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\frac{1}{a^{2016}}<\frac{1}{a^{2017}}$. **B.** $a^{\frac{1}{3}}>\sqrt{a}$. **C.** $a^{-\sqrt{3}}>\frac{1}{a^{\sqrt{5}}}$. **D.** $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a}>1$.

Câu 77: Cho a,b là 2 số thực khác 0. Biết $\left(\frac{1}{16}\right)^{a^2+ab}=\left(\sqrt[8]{64}\right)^{a^2-7ab}$. Tính tỉ số $\frac{a}{b}$.

A. $\frac{1}{8}$. **B.** 2. **C.** $\frac{5}{19}$. **D.** $\frac{76}{3}$.

CHƯƠNG 3

HÀM SỐ LŨY THỪA HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

CHỦ ĐỀ 9 HÀM SỐ LŨY THỪA

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Cho n là một số nguyên dương. Với a là một số thực tùy ý, lũy thừa bậc n của a là tích của n thừa số a $\quad a^n = \underbrace{a.a.....a}_{n}$ (n thừa số)

Ta gọi a là cơ số, n là số mũ của lũy thừa a^n.

Với $a \neq 0, n = 0$ hoặc n là một số nguyên âm thì lũy thừa bậc n của a là số a^n xác định bởi $a^0 = 1; a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$. Chú ý rằng: 0^0 và 0^{-n} không có nghĩa

Cho $a > 0$ và số hữu tỉ $r = \dfrac{m}{n}$; trong đó $m \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{R}, n \geq 2$. Khi đó $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

2. Một số tính chất của lũy thừa

Với $a, b \neq 0$ và $m, n \in \mathbb{Z}$, ta có:

$\oplus \quad a^m.a^n = a^{n+m};$ $\qquad \oplus \quad \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n};$ $\qquad \oplus \quad \left(a^m\right)^n = a^{m.n};$

$\oplus \quad (a.b)^m = a^m.b^m$ $\qquad \oplus \quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m};$ $\qquad \oplus \quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^m;$

$\oplus \quad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}\left(n \in \mathbb{N}^*\right);$ $\qquad \oplus \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\left(a > 0, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*\right)$

Với $a > 1$ thì $a^m > a^n \Leftrightarrow m > n$. Còn với $0 < a < 1$ thì $a^m > a^n \Leftrightarrow m < n$.

Với mọi $0 < a < b$, ta có $a^m < b^m \Leftrightarrow m > 0$; $\quad a^m > b^m \Leftrightarrow m < 0$.

3. Căn bậc n

Định nghĩa: cho số thực b và số nguyên dương $n\left(n \geq 2\right)$. Số a được gọi căn bậc n của số b nếu $a^n = b$. Một số chú ý quan trọng:

- Nếu n lẻ và $a \in \mathbb{R}$ thì có duy nhất một căn bậc n, được kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$.
- Nếu n chẵn thì có các trường hợp sau:
  - Với $a < 0$ thì không tồn tại căn bậc n của a.
  - Với $a = 0$ thì có một căn bậc n của a là số 0.
  - Với $a > 0$ thì có hai căn bậc n là $\pm\sqrt[n]{a}$.

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Tập xác định của hàm số $y=(x-1)^{\sqrt{3}}$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 2: Hàm số $y=(x-1)^{\frac{1}{3}}$ có tập xác định là

A. $[1;+\infty)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^3}}$, $(x>0)$.

A. $y'=\frac{7}{6}\sqrt[6]{x}$. **B.** $y'=\frac{6}{7\sqrt[7]{x}}$. **C.** $y'=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$. **D.** $y'=\sqrt[9]{x}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 4: Tập xác định của hàm số $y=(x^2-2x-3)^{-4}$ là

A. $D=\mathbb{R}$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;3\}$. **C.** $D=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$. **D.** $D=(-1;3)$.

Lời giải

.....

.....

.....

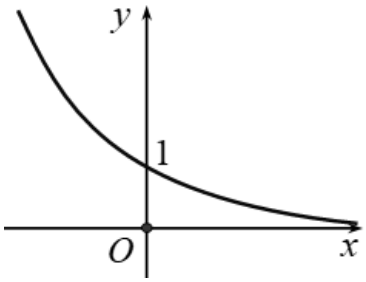
.....

.....

.....

.....

Câu 5: Cho đồ thị hàm số $y=(a-1)^x$ như hình vẽ dưới.



Hệ số thực a nằm trong khoảng:

A. $(0;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

✍ Lời giải

……

……

……

……

Câu 6: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\left(x^2-3x-4\right)^{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

A. $D=(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$. **B.** $D=(-\infty;-1]\cup[4;+\infty)$

C. $D=\mathbb{R}$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;4\}$.

✍ Lời giải

……

……

……

……

Câu 7: Đạo hàm của hàm số $y=\left(x^2+x+1\right)^{\frac{1}{3}}$

A. $y'=\dfrac{2x+1}{3\sqrt[3]{\left(x^2+x+1\right)^2}}$. **B.** $y'=\dfrac{1}{3}\left(x^2+x+1\right)^{\frac{1}{3}}$.

C. $y'=\dfrac{2x+1}{2\sqrt[3]{x^2+x+1}}$. **D.** $y'=\dfrac{1}{3}\left(x^2+x+1\right)^{\frac{2}{3}}$.

✍ Lời giải

……

……

……

……

……

……

Câu 8: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [0;2020]$ để tập xác định của hàm số $y=\left(6-x-x^2\right)^{\frac{m}{3}}$ chỉ chứa hữu hạn các biến nguyên x. Số phần tử của tập S là:

A. 2021. **B.** 1347. **C.** 674. **D.** 1011.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 9: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-2021;2021)$ để hàm số $y=\left(x^2-2x-m+1\right)^{\sqrt{7}}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$?

A. 4039. **B.** 2020. **C.** 2021. **D.** 4038.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 10: Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)^y \le \left(e^y+\frac{1}{e^y}\right)^x$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x-2y}{6(x+y)}-\frac{x+y}{\sqrt{x^2-xy+y^2}}$.

A. $\min P=-\frac{25}{12}$. **B.** $\min P=-\frac{12}{5}$. **C.** $\min P=-2$. **D.** $\min P=-\frac{19}{9}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 2: Hàm số lũy thừa

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

Câu 1: Tập xác định của hàm số $y=(x-2)^{\pi}$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 2: Tập xác định của hàm số $f(x)=(x-1)^{-3}$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $4+\log_4 a$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Câu 3: Tập xác định của hàm số $y=(x-1)^{\pi}$ là

A. $D=(0;+\infty)$. **B.** $D=(1;+\infty)$. **C.** $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **D.** $D=\mathbb{R}$.

Câu 4: Tìm tập xác định của hàm số $y=x^{\sqrt{7}}$.

A. $\mathbb{R}$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Câu 5: Tìm tập xác định D của hàm số $(x-5)^{\sqrt{3}}$.

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{5\}$. **B.** $D=(-\infty;5)$. **C.** $D=[5;+\infty)$. **D.** $D=(5;+\infty)$.

Câu 6: Tập xác định của hàm số $y=(x^2-x-2)^{-5}$ là

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;2\}$. **B.** $D=(0;+\infty)$.

C. $D=(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$. **D.** $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.

Câu 7: Tập xác định của hàm số $y=(x-2)^{\sqrt{3}}$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 8: Tập xác định của hàm số $y=(x-2)^{\frac{2}{3}}$ là

A. $D=(2;+\infty)$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **C.** $D=\mathbb{R}$. **D.** $D=[2;+\infty)$

Câu 9: Tập xác định của hàm số $y=(x^2-3x)^{-5}$ là:

A. $(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{0;3\}$. **D.** $[0;3]$.

Câu 10: Tìm tập xác định D của hàm số $y=(x^2-2x+1)^{\frac{1}{3}}$

A. $D=(0;+\infty)$. **B.** $D=\mathbb{R}$. **C.** $D=(1;+\infty)$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Câu 11: Tập xác định của hàm số $y=(x^2-6x+8)^{-3}$

A. $(-\infty;2)\cup(4;+\infty)$. **B.** $(2;4)$. **C.** $D=\mathbb{R}\setminus\{2;4\}$. **D.** $\mathbb{R}$.

Câu 12: Điều kiện xác định của hàm số $y=(x^2-4)^{-2}$ là

A. $x\neq 2$. **B.** $x\neq\pm 2$. **C.** $x\neq -2$. **D.** $|x|>2$.

Câu 13: Tập xác định của hàm số $y=(x-1)^{\frac{1}{5}}$ là

A. $(0;+\infty)$. **B.** $[1;+\infty)$. **C.** $(1:+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}$

Câu 14: Tìm tập xác định D của hàm số $y=(x^2-2x+1)^{\frac{1}{3}}$

A. $D=(0;+\infty)$. **B.** $D=\mathbb{R}$. **C.** $D=(1;+\infty)$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Câu 15: Trên khoảng $(-1;+\infty)$ thì đạo hàm của hàm số $y=(x+1)^{\frac{4}{3}}$ là

A. $y'=\frac{4}{3}(x+1)^{\frac{1}{3}}$ **B.** $y'=\frac{4}{3}(x+1)^{\frac{4}{3}}$ **C.** $y'=\frac{3}{7}(x+1)^{\frac{7}{3}}$ **D.** $y'=\frac{3}{4}(x+1)^{-\frac{1}{3}}$

Câu 16: Tập xác định của hàm số $y=(x^3-27)^{\frac{\pi}{3}}$ là

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{3\}$. **B.** $D=[3;+\infty)$. **C.** $D=(3;+\infty)$. **D.** $D=\mathbb{R}$.

Câu 17: Tập xác định của hàm số $y=x^{2\sin\frac{\pi}{6}}$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Câu 18: Tập xác định của hàm số $y=(x-1)^{\frac{1}{2}}$ là

A. $(0;+\infty)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $[1;+\infty)$.

Câu 19: Tập xác định của hàm số $y=(x-1)^{\sqrt{2}}$ là:

A. $D=(-\infty;1)$. **B.** $D=\mathbb{R}$. **C.** $D=(1;+\infty)$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Câu 20: Tập xác định của hàm số $y=(1-3x)^{\sqrt{2022}}$ là

A. $(0;+\infty)$. **B.** $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$. **D.** $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$.

Câu 21: Tìm tập xác định của hàm số $y=(x^3-27)^{\frac{\pi}{3}}$ là

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{3\}$. **B.** $D=[3;+\infty)$. **C.** $D=(3;+\infty)$. **D.** $D=\mathbb{R}$.

Câu 22: Tập xác định của hàm số $y=(9x^2-1)^{\frac{1}{5}}$ là

A. $D=\left(-\infty;\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{3};+\infty\right)$. **B.** $D=\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$.

C. $D=\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\frac{1}{3}\right\}$.

Câu 23: Hàm số $y=(2x+1)^{2\frac{1}{2}}$ có tập xác định là:

A. $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$. **D.** $\varnothing$.

Câu 24: Tập xác định của hàm số $y=(x^2-12x+36)^{\frac{1}{2}}$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $(6;+\infty)$. **C.** $[6;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{6\}$.

Câu 25: Tập xác định của hàm số $y=(2x-3)^{2022}$ là

A. $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$. **D.** $(0;+\infty)$.

Câu 26: Tập xác định của hàm số $y=(x-2021)^{\frac{2019}{2021}}$ là

A. $(-2021;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{2021\}$. **C.** $(2021;+\infty)$. **D.** $(-\infty;2021)$.

Câu 27: Tập xác định của hàm số $y=(x+1)^{\frac{1}{5}}$ là

A. $(-1;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **D.** $(0;+\infty)$.

Câu 28: Tập xác định D của hàm số $y=(x-2)^2(x-1)^{\frac{1}{5}}$

A. $D=(-\infty;1)$. **B.** $D=(1;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **D.** $D=\mathbb{R}$.

Câu 29: Tập xác định của hàm số $y=(x^3-27)^{\frac{\pi}{4}}$ là

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{3\}$. **B.** $D=(3;+\infty)$. **C.** $D=[3;+\infty)$. **D.** $D=\mathbb{R}$.

Câu 30: Tập xác định của hàm số $y=(x-2)^{\sqrt{2022}}$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **C.** $[2;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 31: Điều kiện xác định của hàm số $y=(x-2)^{\sqrt{2}}$ là

A. $x\geq 2$. **B.** $x>2$. **C.** $x\neq 2$. **D.** $x<2$.

Câu 32: Tập xác định của hàm số $y=(x^2-12x+36)^{\frac{1}{2}}$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $(6;+\infty)$. **C.** $[6;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{6\}$.

Câu 33: Tập xác định D của hàm số $y=(9-x^2)^{\frac{2}{3}}$ là

A. $D=(3;+\infty)$. **B.** $D=\mathbb{R}$.

C. $D=\mathbb{R}\setminus\{3;-3\}$. **D.** $D=(-3;3)$.

Câu 34: Tập xác định của hàm số $y=(x^2-3x-4)^{\frac{2}{3}}$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\{-1;4\}$. **B.** $(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$.

C. $(-1;4)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Câu 35: Tập xác định D của hàm số $y=(5+4x-x^2)^{\sqrt{2022}}$.

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;5\}$. **B.** $D=\{1;-5\}$.

C. $D=(-\infty;-1)\cup(5;+\infty)$. **D.** $D=(-1;5)$.

Câu 36: **Tập xác định của** hàm số $y=(x-1)^{\frac{1}{3}}$ là:

A. $(1;+\infty)$. **B.** $[1;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Câu 37: Tìm tập xác định của hàm số $y=\left(x^2-1\right)^{-4}$.

A. $D=\mathbb{R}$. **B.** $D=(-1;1)$.

C. $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$. **D.** $D=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

Câu 38: Tìm tập xác định của hàm số $y=\left(x^2-x-2\right)^{\sqrt{2}}$.

A. $D=\mathbb{R}$. **B.** $D=(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$.

C. $D=(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;2\}$.

Câu 39: Tập xác định của hàm số $y=\left(x^2-x-12\right)^{\frac{2}{3}}$ là

A. $(-3;4)$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{-4;3\}$. **C.** $(-\infty;-3)\cup(4;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{-3;4\}$.

Câu 40: Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số $f(x)=\left(2x^2+mx+2\right)^{\frac{1}{2}}$ xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$?

A. 5. **B.** 4. **C.** 9. **D.** 7.

Câu 41: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\left(x^2-x+6\right)^{\sqrt{2}}$.

A. $D=(0;+\infty)$. **B.** $D=\mathbb{R}$.

C. $D=\mathbb{R}\setminus\{-2;3\}$. **D.** $D=(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$.

Câu 42: Tập xác định của hàm số $y=\left(x-x^2\right)^{\pi}$ là

A. $[0;1]$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(0;1)$.

Câu 43: Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số $f(x)=\left(2x^2+mx+2\right)^{\frac{1}{2}}$ xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$?

A. 5. **B.** 4. **C.** 9. **D.** 7.

Câu 44: Tập xác định của hàm số $y=\left(x^2-3x+2\right)^{\frac{1}{3}}$ là

A. $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$. **C.** $(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$. **D.** $(1;2)$.

Câu 45: Tập xác định của hàm số $y=\left(x^2-3x+2\right)^{-5}$ là

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$. **B.** $D=(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

C. $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **D.** $D=\mathbb{R}$.

Câu 46: Tập xác định D của hàm số $y=\left(x^2-2x-3\right)^{-4}$ là

A. $D=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;3\}$.

C. $D=\mathbb{R}$. **D.** $D=(0;+\infty)$.

Câu 47: Tập xác định D của hàm số $y=(x-2)^2(x-1)^{\frac{1}{5}}$ là

A. $D=(1;+\infty)$. **B.** $D=\mathbb{R}$. **C.** $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **D.** $D=(-\infty;1)$.

Câu 48: Hàm số $y=\left(\sqrt{x-1}-2\right)^{\frac{1}{3}}$ có tập xác định là

A. $[1;+\infty)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(5;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{5\}$.

Câu 49: Tìm tập xác định D của hàm số $y=(2-x)^{\frac{1}{3}}$.

A. $D=(-\infty;2]$. **B.** $D=(2;+\infty)$. **C.** $D=(-\infty;2)$. **D.** $D=(-\infty;+\infty)$.

Câu 50: Tập xác định của hàm số $y=(x+1)^{\frac{1}{5}}$ là

A. $(-1;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **D.** $(0;+\infty)$.

Câu 51: Hàm số $y=(x^2-2x)^{-\frac{1}{2}}$ có tập xác định là:

A. $(0;2)$ **B.** $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$ **C.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ **D.** $\mathbb{R}\setminus\{0;2\}$

Câu 52: Tập xác định của hàm số $y=(2x-1)^{\pi}$ là:

A. $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **B.** $D=\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $D=\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $D=\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$.

Câu 53: Tập xác định của hàm số $y=\left(x^2-3x+2\right)^{\frac{1}{2}}$ là

A. $D=[1;2]$. **B.** $D=(1;2)$.

C. $D=(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$. **D.** $D=(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

Câu 54: Trên khoảng $(0;+\infty)$, đạo hàm của hàm số $y=x^{\frac{7}{3}}$ là:

A. $y'=\frac{7}{3}x^{-\frac{4}{3}}$. **B.** $y'=\frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}$. **C.** $y'=\frac{3}{7}x^{-\frac{4}{3}}$. **D.** $y'=\frac{3}{7}x^{\frac{4}{3}}$.

Câu 55: Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^3}},(x>0)$ bằng

A. $y'=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$. **B.** $y'=\frac{7}{6}\sqrt[6]{x}$. **C.** $y'=\frac{6}{7\sqrt[7]{x}}$. **D.** $y'=\sqrt[9]{x}$.

Câu 56: Tính đạo hàm của hàm số $y=\left(x^2+\pi\right)^{\frac{5}{2}}$

A. $y'=\frac{5}{2}\left(x^2+\pi\right)^{\frac{3}{2}}$. **B.** $y'=\frac{5}{2}\left(x^2+\pi\right)^{\frac{7}{2}}$.

C. $y'=5x\left(x^2+\pi\right)^{\frac{3}{2}}$. **D.** $y'=5x\left(x^2+\pi\right)^{\frac{7}{2}}$.

Câu 57: Trên khoảng $(0;+\infty)$, đạo hàm của hàm số $y=\sqrt[3]{x^4}$ là :

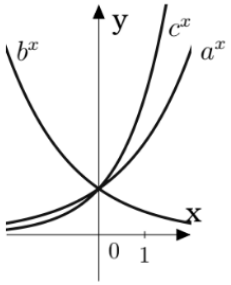
A. $y'=\frac{1}{3}\sqrt[3]{x}$. **B.** $y'=\frac{4}{3}\sqrt{x}$. **C.** $y'=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$. **D.** $y'=\frac{1}{3}\sqrt{x}$.

Câu 58: Cho hàm số $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ có đồ thị (C). Chọn mệnh đề đúng:

A. (C) đi qua điểm $M(4;1)$. **B.** Tập giá trị của hàm số là $[0;+\infty)$.

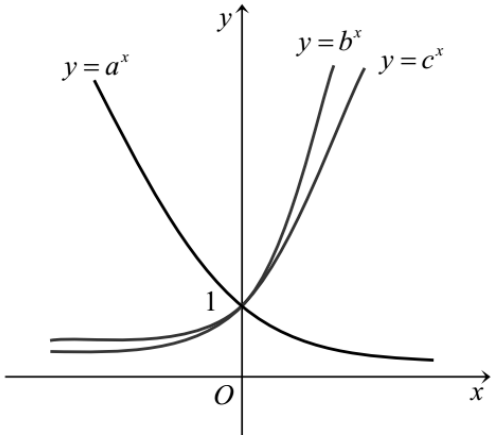
C. Tập xác định của hàm số $D=[0;+\infty)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Câu 59: Cho đồ thị của ba hàm số $y=a^x$, $y=b^x$ và $y=c^x$ như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $b>a>c$. **B.** $a>c>b$. **C.** $c>a>b$. **D.** $c>b>a$.

Câu 60: Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị các hàm số $y=a^x$, $y=b^x$, $y=c^x$ được cho trong hình vẽ dưới đây. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $c<a<b$. **B.** $b<c<a$. **C.** $a<b<c$. **D.** $a<c<b$.

Câu 61: Cho ba số thực x,y,z không âm thỏa mãn $2^x+4^y+8^z=4$. Gọi M,N lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\frac{x}{6}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}$. Đặt $T=2M+6N$, khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $T\in(1;2)$. **B.** $T\in(2;3)$. **C.** $T\in(3;4)$. **D.** $T\in(4;5)$.

CHƯƠNG 3

HÀM SỐ LŨY THỪA HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

CHỦ ĐỀ 9 LOGARIT

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Cho hai số dương a,b với $a\neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^{\alpha}=b$ được gọi là logarit cơ số a của b và được kí hiệu là $\log_a b$. Ta viết như sau: $\alpha=\log_a b\Leftrightarrow a^{\alpha}=b.$

Một số chú ý:

Không có logarit của số 0 và số âm vì $a^{\alpha}>0,\forall a$.

Cơ số của logarit phải dương và khác 1 $(a\neq 1)$.

Một số công thức logarit theo định nghĩa:

$\oplus$ $\log_a 1=0;$ $\oplus$ $\log_a a=1;$

$\oplus$ $\log_a a^b=1,\ \forall b\in\mathbb{R}$ $\oplus$ $a^{\log_a b}=a,\forall b\in\mathbb{R},b>0$

2. Các tính chất của logarit

- So sánh hai logarit cùng cơ số:

Cho số dương $a\neq 1$ và các số dương b,c

  - Khi $a>0$ thì $\log_a b>\log_a c\Leftrightarrow b>c$
  - Khi $0<a<1$ thì $\log_a b>\log_a c\Leftrightarrow b<c$
  - Ta có $\log_a b=\log_a c\Leftrightarrow b=c$
- Logarit của một tích: $\log_a\left(b.c\right)=\log_a b+\log_a c$
- Logarit của một thương:

  $\log_a\dfrac{b}{c}=\log_a b-\log_a c$. Đặc biệt: với $a,b>0,\ a\neq 1$ thì $\log_a\dfrac{1}{b}=-\log_a b$.
- Logarit của một lũy thừa

  $\log_a b^{\alpha}=\alpha.\log_a b$. Đặc biệt: $\log_a\sqrt[n]{b}=\dfrac{1}{n}\log_a b$
- Công thức đổi cơ số

  $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$. Đặt biệt: $\log_a c=\dfrac{1}{\log_c a}$ và $\log_{a^{\alpha}} b=\dfrac{1}{\alpha}.\log_a b\ \left(\alpha\neq 0\right)$

3. Logarit tự nhiên và logarit thập phân

- Logarit tự nhiên (hay còn được gọi là logarit Nepe) là logarit cơ số e, được viết là: $\log_e b=\ln b$
- Logarit thập phân là logarit cơ số 10, được viết là: $\log_{10} b=\log b=\lg b$.

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $4^{\log_2(ab)} = 3a$. Giá trị của ab^2 bằng

A. 3. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 12.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 2: Biết $\log_a b = 2; \log_a c = 3; a,b,c > 0; a \neq 1$. Khi đó giá trị của $\log_a\left(\frac{a^2\sqrt[3]{b}}{c}\right)$ bằng

A. 6. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** 5. **D.** $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Cho biết $a = \log_2 5$ và $b = \log_5 7$. Tính $\log_{\sqrt[3]{5}} \frac{49}{8}$ theo a và b.

A. $3\left(2b - \frac{3}{a}\right)$. **B.** $3\left(\frac{2}{a} - 3b\right)$. **C.** $3\left(\frac{2}{b} - 3a\right)$. **D.** $3\left(2a - \frac{3}{b}\right)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 4: Cho số thực a thỏa mãn $0 < a \neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $T = \log_a\left(\frac{a^2\sqrt[3]{a}\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[15]{a^4}}\right)$

A. $T = 8$. **B.** $T = 11$. **C.** $T = \frac{8}{3}$. **D.** $\frac{17}{15}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 5: Giá trị biểu thức: $M=\log_2 2+\log_2 4+\log_2 8+...+\log_2 256$ bằng

A. 56. **B.** $8\log_2 256$. **C.** 36. **D.** 48.

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 6: Cho $a>0,\ a\neq 1$ và $\log_a x=-1,\ \log_a y=4$. Giá trị của $\log_a\left(x^2y^3\right)$ bằng

A. 14. **B.** 10. **C.** 18. **D.** 6.

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 7: Cho các số nguyên dương x, y, z đôi một nguyên tố cùng nhau và thỏa mãn $x\log_{200}5+y\log_{200}2=z$. Giá trị của biểu thức $29x-y-2021z$ bằng

A. -1966. **B.** -2020. **C.** -2019. **D.** -1993.

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 8: Cho x, y, z là ba số dương lập thành cấp số nhân; còn $\log_a x;\ \log_{\sqrt{a}} y;\ \log_{\sqrt[3]{a}} z$ lập thành cấp số cộng. Tính giá trị của biểu thức $Q=\dfrac{2017x}{y}+\dfrac{2y}{z}+\dfrac{z}{x}$.

A. 2019. **B.** 2021. **C.** 2020. **D.** 2018.

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 9: Xét a và b là hai số thực dương tùy ý. Đặt $x=\ln\left(a^2-ab+b^2\right)^{1000}$; $y=1000\ln a-\ln\frac{1}{b^{1000}}$.

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $x>y$. **B.** $x\geq y$. **C.** $x\leq y$. **D.** $x<y$.

Lời giải

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1: Tính, rút gọn, so sánh các số liên quan đến lũy thừa

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

Câu 1: Tính $\left(\sqrt[5]{8}\right)^{\log_2 243}$

A. 27. **B.** 9. **C.** $3^{\frac{29}{3}}$. **D.** 8.

Câu 2: Cho số thực $0<a\neq 1$, $\log_{\sqrt{a}}\left(a^2\sqrt[3]{a}\right)$.

A. $\frac{10}{3}$. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** $\frac{14}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Câu 3: Với mọi số thực a dương khác 1, $\log_a \sqrt[3]{a}$ bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** 3. **C.** -3. **D.** 0.

Câu 4: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $2^{30}<3^{20}$. **B.** $\log_{a^2+2}\left(a^2+1\right)\geq 0$. **C.** $4^{-\sqrt{3}}<4^{-\sqrt{2}}$. **D.** $0{,}99^{\pi}>0{,}99^{e}$.

Câu 5: Với a, b là hai số thực thỏa $0<a\neq 1, b\neq 0$, ta có

A. $\log_a b^2=2\log_a b$. **B.** $\log_a b^2=\log_{a^2}|b|$.

C. $\log_a b^2=2\log_a|b|$. **D.** $\log_a b^2=\log_{\frac{1}{a^2}} b$.

Câu 6: Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $ab^2=9$. Giá trị của biểu thức $\log_3 a+2\log_3 b$ bằng

A. 6. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 7: Với a là số thực dương tùy ý, $\ln(5a)-\ln(2a)$ bằng

A. $\frac{\ln 5}{\ln 2}$.. **B.** $\ln(3a)$.. **C.** $\frac{\ln 5a}{\ln 2a}$.. **D.** $\ln\frac{5}{2}$.

Câu 8: Cho a và b là các số thực dương tùy ý. Nếu $a^{\frac{1}{2}}>a^{\frac{1}{3}}$ và $\log_b\left(\frac{1}{3}\right)<\log_b\left(\frac{1}{4}\right)$ thì

A. $a>1, 0<b<1$. **B.** $0<a<1, 0<b<1$.

C. $a>1, b>1$. **D.** $0<a<1, b>1$.

Câu 9: Giá trị của $\log_a\frac{1}{\sqrt{a^3}}$ với $a>0$ và $a\neq 1$ bằng

A. $-\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $-\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 10: Với a, b là hai số dương tùy ý thì $\log\left(a^3b^2\right)$ có giá trị bằng biểu thức nào sau đây?

A. $3\log a+\frac{1}{2}\log b$. **B.** $2\log a+3\log b$. **C.** $3\log a+2\log b$. **D.** $3\left(\log a+\frac{1}{2}\log b\right)$.

Câu 11: Với a là số dương tùy ý khác 1, $\log_a\sqrt{a}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $2a$. **C.** 2. **D.** $\frac{1}{2}a$.

Câu 12: Với a là số thực dương bất kỳ, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\ln a^4 = 4\ln a$. **B.** $\ln(4a) = 4\ln a$. **C.** $\ln(4a) = \frac{1}{4}\ln a$. **D.** $\ln a^3 = \frac{1}{3}\ln a$.

Câu 13: Với mọi số thực dương a, b, x, y và $a,b \neq 1$, mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\log_a(xy) = \log_a(x)\log_a(y)$. **B.** $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

C. $a^{\log_a b} = b$. **D.** $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

Câu 14: Cho a, b là các số thực dương và a khác 1, thỏa mãn $\log_{a^2}\left(\frac{a^3}{\sqrt[5]{b^3}}\right) = 3$. Giá trị của biểu thức $\log_a b$ bằng

A. -5. **B.** 5. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $-\frac{1}{5}$.

Câu 15: Cho $a > 0$ và $a \neq 1$, khi đó $\log_a \sqrt{a}$ bằng

A. $-\frac{1}{2}$. **B.** -2. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 2.

Câu 16: Cho số thực dương a khác 1. Giá trị của biểu thức $\log_2(4a)$ bằng

A. $4 + \log_2 a$. **B.** $2 + \log_2 a$. **C.** $2\log_2 a$. **D.** $4\log_2 a$.

Câu 17: Cho biểu thức $P = \log_a b^3 + \log_{a^3} b^6$ trong đó a, b là các số thực dương tùy ý và $a \neq 1$. Khi đó mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P = 9.\log_a b$. **B.** $P = 15.\log_a b$. **C.** $P = 5.\log_a b$. **D.** $P = 21.\log_a b$.

Câu 18: Cho số $a > 0, a \neq 1$ thỏa mãn $a^x = b$. Khi đó đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $a = \log_x b$. **B.** $a = \log_b x$. **C.** $x = \log_a b$. **D.** $x = \log_b a$.

Câu 19: Cho $\log_a x = 2$, $\log_b x = 3$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Tính $P = \log_{\frac{a}{b^2}} x$?

A. $P = 6$. **B.** $P = -6$. **C.** $P = \frac{1}{6}$. **D.** $P = -\frac{1}{6}$.

Câu 20: Cho $a,b,c > 0, a \neq 1$ và $\log_a b = \sqrt{2022}$. Tính $\log_{\sqrt[6]{a}}\left(a^{\frac{7}{4}}.\sqrt[6]{b}\right)$.

A. $42 + \frac{\sqrt{2022}}{6}$. **B.** $\frac{7}{4} + 6\sqrt{2022}$. **C.** $\frac{21}{2} + \sqrt{2022}$. **D.** $\frac{2}{21} + \sqrt{2022}$.

Câu 21: Cho $a = \log_{25} 7$; $b = \log_2 5$. Tính $\log_5 \frac{49}{8}$ theo a, b.

A. $\frac{4a-3}{b}$. **B.** $\frac{4ab+3}{b}$. **C.** $\frac{5ab-3}{b}$. **D.** $\frac{4ab-3}{b}$.

Câu 22: Cho $a,\ b$ là các số thực dương khác 1 thỏa mãn $\log_a b=\sqrt{3}$. Giá trị của $\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}\left(\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}}\right)$ là

A. $-\sqrt{3}$. **B.** $-2\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 23: Với mọi số thực a dương, $\log\frac{a}{100}$ bằng

A. $\log a-1$. **B.** $\log a-2$. **C.** $\frac{1}{2}\log a$. **D.** $\log a+2$.

Câu 24: Với mọi a,b thoả mãn $\frac{\log_3 a.\log_2 3}{1+\log_2 5}+\log b=1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a=1-b\log_2 5$. **B.** $ab=10$. **C.** $a\log_2 5+b=1$. **D.** $a+b=1$.

Câu 25: Cho các số thực dương a,b thoả mãn $\log a+2\log b=1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+b^2=1$. **B.** $a+2b=10$. **C.** $ab^2=10$. **D.** $a+b^2=10$.

Câu 26: Xét tất cả các số dương a và b thỏa mãn $\log_3 a+\log_3 b=\log_9(ab)$. Tính giá trị của ab.

A. $ab=1$. **B.** $ab=2$. **C.** $ab=\frac{1}{2}$. **D.** $ab=0$.

Câu 27: Cho $\log_3 5=a;\log_5 7=b$, khi đó $\log_{45}175$ bằng.

A. $\frac{a(a+b)}{2+a}$. **B.** $\frac{a+b}{2+a}$. **C.** $\frac{a(2+b)}{2+a}$. **D.** $\frac{2(2+b)}{2+a}$.

Câu 28: Với a,b là hai số thực khác 0 tùy ý, $\ln\left(a^2b^4\right)$ bằng

A. $2\ln a+4\ln b$. **B.** $2\ln|a|+4\ln|b|$. **C.** $4\ln a+2\ln b$. **D.** $4\left(\ln|a|+\ln|b|\right)$.

Câu 29: Cho a là số thực dương khác 4. Giá trị của biểu thức $I=\log_{\frac{a}{4}}\left(\frac{a^3}{64}\right)$ bằng

A. $-\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** -3. **D.** 3.

Câu 30: Cho $\log_2 5=a;\ \log_5 3=b$. Tính $\log_5 24$ theo a và b.

A. $\log_5 24=\frac{3+ab}{a}$. **B.** $\log_5 24=\frac{a+3b}{a}$. **C.** $\log_5 24=\frac{a+b}{3ab}$. **D.** $\log_5 24=\frac{3a+b}{b}$.

Câu 31: Với a là số thực dương tùy ý, $\log_5\left(\frac{25}{a^3}\right)$ bằng

A. $\frac{2}{3\log_5 a}$. **B.** $2-3\log_5 a$. **C.** $25-3\log_5 a$. **D.** $2+3\log_5 a$.

Câu 32: Với hai số thực dương a,b tùy ý và $\frac{2\log_3 a}{\log_3 6}-\log_6 b=2$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a^2=b\log_6 2$. **B.** $a^2=36b$. **C.** $2a^2+3b=0$. **D.** $a^2=b\log_6 3$.

Câu 33: Biết x và y là hai số thực thỏa mãn $\log_4 x=\log_9 y=\log_6(x-2y)$. Giá trị của $\frac{x}{y}$ bằng

A. $\log_{\frac{2}{3}}^{2} 2$. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 34: Ba số $a+\log_2 3$; $a+\log_4 3$; $a+\log_8 3$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Công bội của cấp số nhân này bằng

A. $\frac{1}{4}$. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 35: Cho $\log_9 5=a, \log_4 7=b, \log_2 3=c$. Biết $\log_{24} 175=\frac{mb+nac}{pc+q}$ với $m,n,p,q\in\mathbb{Z}$ và q là số nguyên tố. Tính $A=mnpq$.

A. 42. **B.** 24. **C.** $8\cdot$ **D.** $12\cdot$

Câu 36: Cho x,y là hai số thực dương, $x\neq 1$ thỏa mãn $\log_{\sqrt[3]{x}} y=\frac{3y}{8}, \log_{\sqrt{2}} x=\frac{32}{y}$. Tính giá trị của $P=x^2-y^2$.

A. $P=120$. **B.** $P=132$. **C.** $P=240$. **D.** $P=340$.

Câu 37: Với hai số thực dương a,b tùy ý và $\frac{\log_3 5\log_5 a}{1+\log_3 2}-\log_6 b=2$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $a=b\log_6 2$. **B.** $a=36b$. **C.** $2a+3b=0$. **D.** $a=b\log_6 3$.

Câu 38: Có bao nhiêu số nguyên dương b sao cho ứng với mỗi b, có đúng 3 giá trị nguyên dương của a thoả mãn $\log_2 \frac{2^a+a}{ab}+2^a\le a(b-1)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 39: Cho ba số thực dương a,b,c theo thứ tự lập thành một cấp số nhân và $a+b+c=64$. Giá trị của biểu thức $P=3\log_2(ab+bc+ca)-\log_2(abc)$ bằng:

A. 18. **B.** 24. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 40: Cho a,b,c là ba số thực dương khác 1 và $abc\neq 1$. Biết $\log_a 5=3, \log_b 5=4, \log_{abc} 5=\frac{10}{17}$. Khi đó giá trị của $\log_c 5$ bằng bao nhiêu?

A. $\log_c 5=2$. **B.** $\log_c 5=\frac{1}{5}$. **C.** $\log_c 5=\frac{67}{60}$. **D.** $\log_c 5=\frac{60}{67}$.

Câu 41: Cho x,y là hai số thực dương, $x\neq 1$ thỏa mãn $\log_{\sqrt[3]{x}} y=\frac{3y}{8}, \log_{\sqrt{2}} x=\frac{32}{y}$. Tính giá trị của $P=x^2-y^2$.

A. $P=120$. **B.** $P=132$. **C.** $P=240$. **D.** $P=340$.

Câu 42: Có bao nhiêu số thực dương $n\neq 1$ để $\log_n 265$ là một số nguyên?

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

CHƯƠNG 3

HÀM SỐ LŨY THỪA HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

CHỦ ĐỀ 9 HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. HÀM SỐ MŨ

1. Định nghĩa

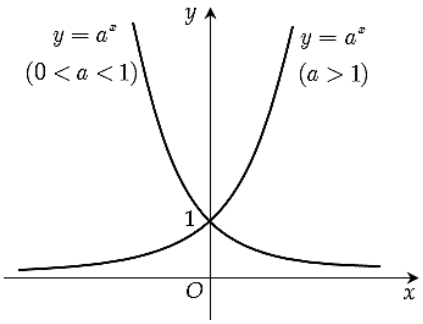
- Hàm số $y=a^x$ với $a>0, a\neq 1$ được gọi là hàm số mũ với cơ số a

2. Tập xác định và tập giá trị

- Tập xác định: $D=\mathbb{R}$
- Tập giá trị: $T=(0;+\infty)$

3. Tính đơn điệu và đồ thị

- Khi $a>1$ thì hàm số $y=a^x$ đồng biến, khi đó ta có $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)>g(x)$
- Khi $0<a<1$ thì hàm số $y=a^x$ nghịch biến, khi đó ta có $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)<g(x)$



Đồ thị nhận Ox là tiệm cận ngang, luôn đi qua điểm $(0;1)$ và $(1;a)$, nằm về phía trên trục hoành $(y=a^x>0,\ \forall x\in\mathbb{R})$.

4. Đạo hàm

$\oplus\ \left(a^x\right)'=a^x.\ln a$ $\oplus\ \left(a^u\right)'=u'.a^u.\ln a$

$\oplus\ \left(\sqrt[n]{u}\right)'=\dfrac{u'}{n.\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ $\oplus\ \left(e^x\right)'=e^x$ $\oplus\ \left(e^u\right)'=u'.e^u$

II. HÀM SỐ LOGARIT

1. Định nghĩa

- Hàm số dạng $y=\log_a x, (a>0;a\neq 1)$ được gọi là hàm số logarit cơ số a.

2. Tập xác định và tập giá trị

- Tập xác định: $D=(0;+\infty)$
- Tập giá trị: $T=\mathbb{R}$.

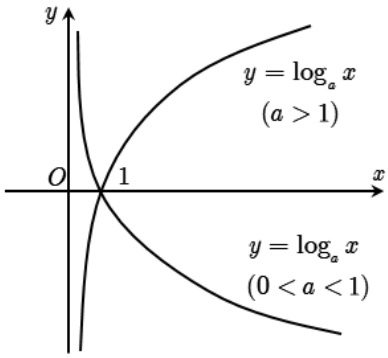
3. Tính đơn điệu và đồ thị

- Khi $a > 0$ thì hàm số $y = \log_a x$ đồng biến trên D, khi đó nếu:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x).$$

- Khi $0 < a < 1$ thì hàm số $y = \log_a x$ nghịch biến trên D, khi đó nếu:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x).$$



4. Đạo hàm

$\oplus$ $\left(\log_a |x|\right)' = \dfrac{1}{x.\ln a} \Rightarrow \left(\log_a |u|\right)' = \dfrac{u'}{u.\ln a}$ $\oplus$ $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}\left(x > 0\right) \Rightarrow \left(\ln |u|\right)' = \dfrac{u'}{u}$

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Tập xác định của hàm số $y=\log_2(3-x)+(x-1)^{\pi}$ là

A. $(-\infty;3)\setminus\{1\}$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 2: Tập xác định của hàm số $y=\ln\left|x^2+2x-3\right|$ là

A. $D=(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$. **B.** $D=(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$.

C. $D=\mathbb{R}$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-3;1\}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Tập xác định của hàm số $y=\log_9(x-1)^2-\ln(3-x)+3$.

B. $D=(1;3)$. **B.** $D=(-\infty;1)\cup(1;3)$.

C. $D=(3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;3)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 4: Tập xác định của hàm số $f(x)=\left(2x^2-5x+2\right)^{-2021}+\log_{2021}(x-1)$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2};2\right\}$. **B.** $(1;+\infty)\setminus\{2\}$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty)$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 5: Tìm tập xác định D của hàm số $y=(1-x)^{\frac{2}{3}}+\log_2(x+1)$.

A. $D=(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$. **B.** $D=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

C. $D=[-1;1]$. **D.** $D=(-1;1)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\log\left(x^2-2mx+4\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$

A. $\left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right.$. **B.** $m=2.$. **C.** $m<2.$. **D.** $-2<m<2.$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 7: Đạo hàm của hàm số $y=\log(\tan x)$ tại điểm $x=\dfrac{\pi}{3}$ bằng

A. $\dfrac{4}{3\ln 10}$. **B.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{9\ln 10}$. **C.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3\ln 10}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 8: Đạo hàm của hàm số $y=x.3^x$ là

A. $y'=3^x\ln 3$. **B.** $y'=(1+x\ln 3)3^x$. **C.** $y'=(1+x)3^x$. **D.** $y'=3^x$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 9: Cho hàm số $y = 2xe^x + 3\sin 2x$. Khi đó, $y'(0)$ có giá trị bằng

A. 2. **B.** 8. **C.** 5. **D.** –4.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 10: Tính đạo hàm của hàm số $y = 2^{x^2}$

A. $y' = 2^x.\ln 2^x$. **B.** $y' = x.2^{1+x^2}.\ln 2$. **C.** $y' = \dfrac{x.2^{1+x}}{\ln 2}$. **D.** $y' = \dfrac{x.2^{1+x^2}}{\ln 2}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 11: Hàm số $y = \ln\left(4 - x^2\right)$ đồng biến trên khoảng

A. $(-2;2)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-2;0)$.

Lời giải

.....

.....

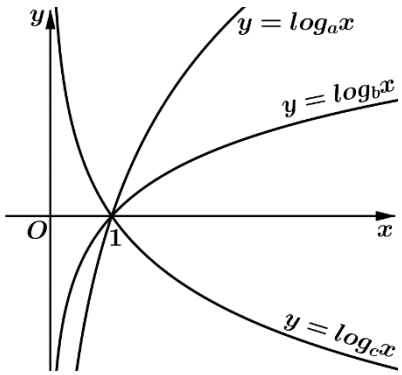
.....

.....

Câu 12: Hàm số nào sau đây là hàm số đồng biến?

A. $y = \left(\dfrac{2020}{2021}\right)^x$. **B.** $y = \left(\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^x$. **C.** $y = \left(\dfrac{1}{e}\right)^x$. **D.** $y = \left(\sqrt[2020]{\pi}\right)^x$.

Câu 13: Cho a, b, c là các số thực dương khác 1. Hình vẽ dưới đây là đồ thị của ba hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$ và $y = \log_c x$.



Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $a < c < b$. **B.** $a < b < c$. **C.** $c < b < a$. **D.** $c < a < b$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 14: Số giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2020;2021]$ sao cho hàm số $y=\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{x-4}{x-2m}}$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ là

A. 2020. **B.** 2022. **C.** 2021. **D.** 2019.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 15: Tìm S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=2^{\frac{mx+1}{x+m}}$ nghịch biến trên $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

A. $S=(-1;1)$. **B.** $S=\left[\frac{1}{2};1\right]$. **C.** $S=\left[\frac{-1}{2};1\right)$. **D.** $\left(-\frac{1}{2};1\right)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 4: Tập xác định, đạo hàm và sự biến thiên hàm số mũ - logarit

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

Câu 1: Tập xác định của hàm số $y=(1-x)^{-3}+\log_2 x$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(0;+\infty)\setminus\{1\}$.

Câu 2: Có bao nhiêu số nguyên thuộc tập xác định của hàm số $y=\ln(15-x^2)$?

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 8.

Câu 3: Với giá trị nào của x thì biểu thức sau $f(x)=\log_5(x^3-x^2-2x)$ xác định?

A. $x\in(-1;0)\cup(2;+\infty)$. **B.** $x\in(0;1)$.

C. $x\in(1;+\infty)$. **D.** $x\in(0;2)\cup(4;+\infty)$.

Câu 4: Tìm tập xác định D của hàm số $y=x^{\frac{1}{3}}+\log_3(1-x)$.

A. $D=(0;1]$. **B.** $D=(0;+\infty)$. **C.** $D=(0;1)$. **D.** $D=(1;+\infty)$.

Câu 5: Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1}{\log_2 x-1}$ là

A. $R\setminus\{2\}$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)\setminus\{2\}$. **D.** $(0;+\infty)\setminus\{1\}$.

Câu 6: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\log_5\dfrac{x-3}{x+2}$.

A. $D=(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$. **B.** $D=(-2;3)$.

C. $D=(-\infty;-2)\cup[3;+\infty)$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Câu 7: Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1}{\log_2 x-1}$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)\setminus\{2\}$. **D.** $(0;+\infty)\setminus\{1\}$.

Câu 8: Tập xác định của hàm số $y=(x-2021)^{\frac{2019}{2021}}$ là

A. $(-2021;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{2021\}$. **C.** $(2021;+\infty)$. **D.** $(-\infty;2021)$.

Câu 9: Tập xác định của hàm số: $y=\log_3(x^2-4x+3)$ là:

A. $(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Câu 10: Tập xác định của hàm số $y=\log_{2021}\dfrac{x+3}{2-x}$ là:

A. $D=[-3;2]$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-3;2\}$. **C.** $D=(-\infty;-3)\cup(2;+\infty)$. **D.** $(-3;2)$.

Câu 11: Tập xác định D của hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{\log_3\dfrac{2x}{x+1}-1}}$ là:

A. $D=(-\infty;-3)$. **B.** $D=(-1;+\infty)$. **C.** $D=(-3;-1)$. **D.** $D=(0;3)$.

Câu 12: Tập xác định của hàm số $y=(x-2)^{-1}$ là:

A. $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **B.** $\{2\}$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Câu 13: Tập xác định D của hàm số $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ là

A. $D=\mathbb{R}$. **B.** $D=(-\infty;0)$. **C.** $D=(0;+\infty)$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Câu 14: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=e^{\frac{1}{\sqrt{x^2+mx+1}}}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$. **B.** $m>2$. **C.** $-2<m<2$. **D.** $m<2$.

Câu 15: Tập xác định của hàm số $y=\frac{1}{\sqrt{2-x}}+\ln\ x-1$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **B.** $[0;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1]\cup(2;+\infty)$. **D.** $(1;2)$.

Câu 16: Hàm số $y=\log_5(4x-x^2)$ có tập xác định là

A. $D=(0;4)$. **B.** $D=\mathbb{R}$.

C. $D=(0;+\infty)$. **D.** $D=(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$.

Câu 17: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\frac{\ln(x-1)}{(x^2-1)\sqrt{2x-6}}$

A. $D=(3;+\infty)$. **B.** $D=(-1;1)\cup(3;+\infty)$.

C. $D=(-1;1)$. **D.** $D=\mathbb{R}$.

Câu 18: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\log_5\frac{x-3}{x+2}$.

A. $D=(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$. **B.** $D=(-2;3)$.

C. $D=(-\infty;-2)\cup[3;+\infty)$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Câu 19: Tìm tập xác định của hàm số $y=\log_{2022}(3x-x^2)$.

A. $D=\mathbb{R}$ **B.** $D=(0;+\infty)$ **C.** $D=(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$ **D.** $D=(0;3)$

Câu 20: Tập xác định của hàm số $y=(\pi-1)^x$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Câu 21: Tập xác định của hàm số $y=(x-2)^{-2}+\log_2(x-1)$ là

A. $(1;+\infty)\setminus\{2\}$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $[1;+\infty)\setminus\{2\}$. **D.** $(1;2)$.

Câu 22: Tính đạo hàm của hàm số $y=\log_2(x+e^x)$.

A. $\frac{1+e^x}{(x+e^x)\ln 2}$. **B.** $\frac{1+e^x}{x+e^x}$. **C.** $\frac{1}{(x+e^x)\ln 2}$. **D.** $\frac{1+e^x}{\ln 2}$.

Câu 23: Đạo hàm của hàm số $y=e^{3x}$ là

A. $y' = e^{3x}$. **B.** $y' = e^{3x}.\ln 3$. **C.** $y' = 3e^{3x}$. **D.** $y' = \dfrac{e^{3x}}{3}$.

Câu 24: Đạo hàm của hàm số $y = \log_2(2x+1)$ là

A. $y' = \dfrac{1}{(2x+1)\ln 2}$. **B.** $y' = \dfrac{1}{2x+1}$. **C.** $y' = \dfrac{2}{2x+1}$. **D.** $y' = \dfrac{2}{(2x+1)\ln 2}$.

Câu 25: Đạo hàm của hàm số $y = \log_4\left(2x^2-3\right)$ là

A. $y' = \dfrac{4x}{\left(2x^2-3\right)\ln 2}$. **B.** $y' = \dfrac{4x}{2x^2-3}$. **C.** $y' = \dfrac{1}{\left(2x^2-3\right)\ln 4}$. **D.** $y' = \dfrac{2x}{\left(2x^2-3\right)\ln 2}$.

Câu 26: Đạo hàm của hàm số $y = 2^{x^2-3x}$ là

A. $y' = 2^{x^2-3x-1}$. **B.** $y' = 2^{x^2-3x}\ln 2$.

C. $y' = (2x-3).2^{x^2-3x-1}$. **D.** $(2x-3).2^{x^2-3x}.\ln 2$.

Câu 27: Đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{\ln x}{x}$ là

A. $y = -4$. **B.** $y' = \dfrac{1+\ln x}{x^2}$. **C.** $y' = -\dfrac{1}{x^3}$. **D.** $y' = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

Câu 28: Đạo hàm của hàm số $y = \ln\left(x^2-2x+1\right)$ bằng

A. $y' = \dfrac{2}{x-1}$. **B.** $y' = \dfrac{2}{x^2-2x+1}$. **C.** $y' = \dfrac{1}{x-1}$. **D.** $y' = 2x-2$.

Câu 29: Hàm số $f(x) = 5^{2x^2-1}$ có đạo hàm là

A. $2x.5^{2x^2-1}.\ln 5$. **B.** $4x.5^{2x^2-1}$. **C.** $4x.5^{2x^2-1}.\ln 5$. **D.** 5^{2x^2-1}.

Câu 30: Trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$, đạo hàm của hàm số $y = \log(2x-1)$ là

A. $y' = \dfrac{1}{(2x-1)\ln 10}$. **B.** $y' = \dfrac{2}{(2x-1)\ln 10}$.

C. $y' = \dfrac{2}{2x-1}$. **D.** $y' = \dfrac{1}{2x-1}$.

Câu 31: Đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{\ln x}{x}$ là

A. $y' = \dfrac{1+\ln x}{x^2}$. **B.** $y' = \dfrac{1}{x}$. **C.** $y' = -\dfrac{1}{x^3}$. **D.** $y' = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

Câu 32: Đạo hàm của hàm số $y = \left(x^2-2x+2\right)e^x$ là

A. $y' = (2x-2)e^x$. **B.** $y' = x^2e^x$. **C.** $y' = \left(x^2+2\right)e^x$. **D.** $y' = -2xe^x$.

Câu 33: Đạo hàm của hàm số $y = \log_5\left(3x^2-x+1\right)$ là

A. $\dfrac{3x-1}{\left(3x^2-x+1\right)\ln 5}$. **B.** $\dfrac{(6x-1)\ln 5}{\left(3x^2-x+1\right)}$. **C.** $\dfrac{6x-1}{\left(3x^2-x+1\right)\ln 5}$. **D.** $\dfrac{6x-1}{\left(3x^2-x+1\right)}$.

Câu 34: Đạo hàm của hàm số $y=\log\left(\cos x+2\right)$ bằng

A. $\dfrac{\sin x}{\left(\cos x+2\right)\ln 10}$. **B.** $\dfrac{-\sin x}{\cos x+2}$. **C.** $\dfrac{-\sin x}{\left(\cos x+2\right)\ln 10}$. **D.** $\dfrac{1}{\left(\cos x+2\right)\ln 10}$.

Câu 35: Trong bốn hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=2022^{x}$. **B.** $y=\left(\dfrac{2022}{2021}\right)^{x}$. **C.** $y=\log_{2022}x$. **D.** $y=\left(\dfrac{2021}{2022}\right)^{x}$.

Câu 36: Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. Đồ thị hàm số $y=x^{\alpha}$ (với α là một số thực âm) luôn có một đường tiệm cận đứng và một đường tiệm cận ngang.

B. Hàm số $y=\sqrt[3]{x}$ có đạo hàm là $y'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x}}$.

C. Hàm số $y=\log_{2}x^{2}$ có tập xác định là $\left(0;+\infty\right)$.

D. Hàm số $y=\left(\dfrac{2021}{2020}\right)^{x^{2}}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Câu 37: Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{-x}$. **B.** $y=\left(\dfrac{e}{3}\right)^{x}$. **C.** $y=\dfrac{1}{5^{x}}$. **D.** $y=\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}\right)^{x}$.

Câu 38: Cho hàm số $y=x^{\pi-4}$ trong các kết luận sau kết luận nào **sai?**

A. Đồ thị hàm số có trục Ox là tiệm cận ngang và trục Oy là tiệm cận đứng.

B. Đồ thị hàm số luôn đi qua $M\left(1;1\right)$.

C. Hàm số luôn đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$.

D. Tập xác định của hàm số là $D=\left(0;+\infty\right)$.

Câu 39: Hàm số $y=\log_{2}\left(x^{2}-3x+2\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\mathbb{R}$. **B.** $\left(1;2\right)$. **C.** $\left(-\infty;1\right)$. **D.** $\left(2;+\infty\right)$.

Câu 40: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\log_{2}\left(4^{x}+2^{x}-m\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $m\le 0$. **B.** $m\ge 0$. **C.** $m>0$. **D.** $m<0$.

Câu 41: Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\log\left(x^{2}-2x-m+1\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $m\ge 0$. **B.** $m<0$. **C.** $m\le 2$. **D.** $m>2$.

Câu 42: Cho hàm số $y=\dfrac{1}{x+1+\ln x}$ với $x>0$. Khi đó $-\dfrac{y'}{y^{2}}$ bằng

A. $1+\dfrac{1}{x}$. **B.** $\dfrac{x}{x+1}$. **C.** $\dfrac{x+1}{1+x+\ln x}$. **D.** $\dfrac{x}{1+x+\ln x}$.

Câu 43: Cho hàm số $f\left(x\right)=\ln\left(1-\dfrac{1}{x^{2}}\right)$. Biết rằng $f'\left(2\right)+f'\left(3\right)+...+f'\left(2019\right)+f'\left(2020\right)=\dfrac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Giá trị của $2a-b$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** -2. **D.** -4.

Câu 44: Cho hàm số $y=\dfrac{\ln x-6}{\ln x-2m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;\,e)$. Tìm số phần tử của S.

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 45: Hàm số nào sau đây luôn đồng biến trên tập xác định?

A. $y=0,3^x$. **B.** $y=\log_{\frac{1}{3}}x$. **C.** $y=\log_{\frac{3}{2}}x$. **D.** $y=\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$.

Câu 46: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2021;2021]$ để hàm số $y=\ln\left(x^2+2021\right)-mx+2022$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 2022. **B.** 4042. **C.** 4044. **D.** 2021.

Câu 47: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\log_2\left(x^2-2x+2022-m\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$?

A. 2022. **B.** 2021. **C.** 2020. **D.** 2019.

Câu 48: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=\dfrac{\ln x-3}{\ln x-m}$ đồng biến trên khoảng $(1;e)$?

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 49: Cho hàm số $f(x)=3^x-3^{-x}$ tìm tất cả các giá trị của m để $f(m)+f\left(3m-2^{15}\right)<0$

A. $m>8192$. **B.** $m\geq 8192$. **C.** $m<8192$. **D.** $m\leq 8192$.

Câu 50: Cho các số thực a,b sao cho $0<a,b\neq 1$, biết rằng đồ thị các hàm số $y=a^x$ và $y=\log_b x$ cắt nhau tại điểm $M\left(\sqrt{2021};\sqrt{2022^{-1}}\right)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $0<a<1,\ b>1$. **B.** $a>1,b>1$. **C.** $0<a<1,\ 0<b<1$. **D.** $a>1,0<b<1$.

Dạng 5: Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức chứa hàm mũ - logarit

- Nếu hàm số đơn điệu trên một đoạn thì giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất đạt được tại các đầu mút của đoạn.
- Nếu hàm số không đơn điệu thì tiến hành việc tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất như sau:

Bước 1: Tìm các điểm $x_1, x_2, ..., x_n$ trên các khoảng $(a;b)$ mà tại đó $f'(x)=0$.

Bước 2: Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), f(b)$

Bước 3: Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên: $M=\max\limits_{[a;b]} f(x); m=\min\limits_{[a;b]} f(x)$

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{1}{e^x+1}-\dfrac{1}{4e^x+1}$ trên $(-\infty;0]$ bằng

A. 0. **B.** $\dfrac{17}{50}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{10}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x.e^{x+1}$ trên đoạn $[-2;4]$ là:

A. $4e^3$. **B.** $-2e$. **C.** $\dfrac{-2}{e}$. **D.** -1

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=(2x-1)+\ln(2x+1)$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{4};0\right]$ bằng

A. $-\frac{3}{2}-\ln 2$. **B.** -1. **C.** $\ln 2$. **D.** $1+\ln 3$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x+y=2$. Giá trị nhỏ nhất của $A=2.3^{y}+\frac{1}{24}.3^{2x}$ là

A. $A_{\min}=2$. **B.** $A_{\min}=\frac{81}{8}$. **C.** $A_{\min}=\frac{9}{2}$. **D.** $A_{\min}=\frac{51}{8}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5: Cho các số thực dương a,b thỏa mãn $\log_2\left(\frac{b}{2a+2}\right)=a-b$. Giá trị nhỏ nhất của $P=b+\frac{9}{a+2}$ là

A. 7. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 6: Cho các số thực a,b,c,d thỏa mãn $\frac{1}{2^a}+\frac{1}{4^b}+\frac{1}{8^c}+\frac{1}{16^d}=\frac{1}{4}$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=a+2b+3c+4d$. Giá trị của biểu thức $\log_2 m$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** 4.

✍ Lời giải

……

……

……

……

……

……

……

……

Câu 7: Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2^{8x+2^{x+1}+1}-4^{3x-y+2^x+2}+2x+2y-3\geq 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+6x+4y$ gần nhất với số nào dưới đây?

A. 6. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 8.

✍ Lời giải

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \mathrm{e}^x.\cos x$ trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ là

A. 1. **B.** $\frac{1}{2}.\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}.\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}.\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$.

Câu 2: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \ln x$ trên $\left[1;e^2\right]$ là.

A. $1+e$. **B.** 2. **C.** $2e^2$. **D.** 1.

Câu 3: Cho hàm số $y = \ln x + x$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[1;e]$ lần lượt là M và m. Tính $M+m$

A. $e-2$. **B.** 3. **C.** $1+e$. **D.** $e+2$

Câu 4: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = e^{x^2-4x+5}$ trên đoạn $[0;3]$.

A. 5. **B.** e^5. **C.** e. **D.** e^2.

Câu 5: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \log^2_2 x - 2\log_2 x + 5$ trên đoạn $[1;8]$. Khi đó $M+m$ bằng

A. 16. **B.** -12. **C.** 12. **D.** -16.

Câu 6: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2e^x$ trên đoạn $[-3;-1]$. Tính $S = \frac{m}{M}$.

A. $S = \frac{e}{4}$. **B.** $S = \frac{4}{e^2}$. **C.** $S = \frac{4}{e}$. **D.** $S = \frac{e^2}{4}$.

Câu 7: Trên đoạn $[-2;0]$, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 4\ln(1-x)$ bằng

A. 0. **B.** -1. **C.** $1-4\ln 2$. **D.** $4-4\ln 3$.

Câu 8: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (x-1)\ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{e};e\right]$. Khi đó $M+m$ bằng

A. $\frac{e^2-1}{e}$. **B.** $\frac{1}{e}$. **C.** $e-1$. **D.** $\frac{e-1}{e}$.

Câu 9: Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 4^x + (a-2)2^x + 2$ trên đoạn $[-1;1]$. Tất cả các giá trị của a để $m \geq 1$ là

A. $a \geq 1$. **B.** $-\frac{1}{2} \leq a \leq 0$. **C.** $a \leq -\frac{1}{2}$. **D.** $a \geq 0$.

Câu 10: Cho các hàm số $f(x) = x + 3^x$ và $g(x) = x^3 - mx^2 + (m^2+1)x - 3$ với m là tham số thực. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = g(2x + f(x))$ trên đoạn $[0;1]$. Khi M đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của m bằng

A. 3. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** 2.

Câu 11: Với các số thực không âm a,b thỏa mãn $16b+3a.2^{3a+4b}\ge 8$, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3a^2+3b^2+12a+18b+6$ bằng

A. 15. **B.** 18. **C.** 25. **D.** 21.

Câu 12: Gọi a,b là các số thực lớn hơn 1 sao cho biểu thức $T=\left(\log_{a^2} b\right)^3+6\log_b a$ đạt giá trị nhỏ nhất. Gía trị của $P=\log_{\sqrt{a}}\sqrt[3]{ab}$ bằng

A. 7 **B.** 1 **C.** $\dfrac{10}{3}$ **D.** 2

Câu 13: Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $a^{x^2+1}b^{2x}=1$ với a,b là các số thực lớn hơn 1. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x_1+x_2+\dfrac{2x_1x_2}{x_1+x_2}$ bằng

A. -4. **B.** $-2\sqrt{2}$. **C.** 4. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 14: Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho ứng với mỗi y có không quá 20 số nguyên x thỏa mãn $\dfrac{2^{x+1}-\dfrac{1}{4}}{y-2^{\sqrt{x}}}\ge 0$?

A. 21. **B.** 22. **C.** 23. **D.** 24.

Câu 15: Cho a,b là các số thực thay đổi thỏa mãn $\log_{a^2+b^2+20}\left(6a-8b-4\right)=1$ và c,d là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $\sqrt{c^2+c+\log_2\dfrac{c}{d}-7}=\sqrt{2\left(2d^2+d-3\right)}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\sqrt{\left(a-c+1\right)^2+\left(b-d\right)^2}$ là

A. $4\sqrt{2}-1$. **B.** $\sqrt{29}-1$. **C.** $\dfrac{12\sqrt{5}-5}{5}$. **D.** $\dfrac{8\sqrt{5}-5}{5}$.

Câu 16: Cho các số thực $a,b\in(1;3]$ thỏa mãn $a<b$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_a\left(b^2+9b-9\right)+6\log^2_{\frac{b}{a}} a$ là $9\sqrt[3]{\dfrac{1}{m}}+n$ với m,n là các số nguyên dương. Tính $S=m^2+n^2$

A. $S=13$. **B.** $S=8$. **C.** $S=20$. **D.** $S=29$.

Câu 17: Cho các số thực a,b thỏa mãn $\dfrac{1}{3}<b<a<1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_a\dfrac{4\left(3b-1\right)}{9}+8\log^2_{\frac{b}{a}} a$.

A. 7. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 9.

Câu 18: Xét các số thực x, y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right).4^x$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{3x-4y}{2x+y+1}$ bằng $a\sqrt{113}+b$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Khi đó $a+b$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 19: Cho hai số thực $a>1,b>1$. Gọi $x_1;x_2$ là hai nghiệm của phương trình $a^x b^{x^2-1}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\left(\dfrac{x_1x_2}{x_1+x_2}\right)^2-4x_1-4x_2$.

A. $3\sqrt[3]{2}$. **B.** 4. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt[3]{4}$.

Câu 20: Xét các số thực dương a,b,c lớn hơn 1 (với $a>b$) thỏa mãn $4\left(\log_a c+\log_b c\right)=25\log_{ab} c$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\log_b a+\log_a c+\log_c b$ bằng

A. 8. **B.** $\dfrac{17}{4}$. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 21: Xét hai số thực $a,\ b$ thỏa mãn $2^{a+b-1}+2^{2a+2b-1}\le 7\log_2(a+b)+3$ và hai số thực $x,\ y$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(4x+6y-10)=1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(2a-x)^2+(b-y)^2$ bằng

A. $\dfrac{41-12\sqrt{5}}{5}$. **B.** $9-4\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{11-6\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{21-8\sqrt{5}}{5}$.

Câu 22: Gọi M và m tương ứng là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2^{|\sin x|}+2^{|\cos x|}$. Tính tổng $T=1010M+2021m$.

A. $T=1010\cdot 2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}+6063$. **B.** $T=2020\cdot 2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}+2021$.

C. $T=1010\cdot 2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}+2021$. **D.** $T=2020\cdot 2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}+6063$.

Câu 23: Xét các số nguyên dương x,y thỏa mãn $(y+z)\left(3^x-81^{\frac{1}{y+z}}\right)=xy+xz-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\log_{\sqrt{2}} x+\log_2\left(2y^2+z^2\right)$.

A. $2+\log_2 3$. **B.** $5-\log_2 3$. **C.** $\log_2 11$. **D.** $4-\log_3 2$

Câu 24: Xét các số thực dương x,y,z thỏa mãn $(x+y)\left(5^z-25^{\frac{1}{x+y}}\right)=xz+yz-2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_{\sqrt{5}} z+\log_5\left(4x^2+y^2\right)$ bằng

A. $1-\log_2 3$. **B.** $5-\log_2 3$. **C.** $1+\log_2 3$. **D.** $-1+2\log_5 4$.

Câu 25: Xét các số thực dương x,y thỏa mãn $\left(x^2+y^2+1\right)+\log_2\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=(xy-1)^2$. Khi đó $x+y$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

A. 4. **B.** 8. **C.** 1. **D.** $\dfrac{9}{2}$.

Câu 26: Cho các số thực a,b thỏa mãn $a>\dfrac{1}{2},b>1$. Khi biểu thức $P=\log_{2a} b+\log_{\sqrt{b}}\left(a^4-4a^2+16\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất thì tổng $a+b$ bằng

A. 4. **B.** 18. **C.** 14. **D.** 20.

Câu 27: **Xét các** số thực dương x, y, z thỏa mãn $(y+2z)\left(3^x - 27^{\frac{1}{y+2z}}\right) = xy + 2xz - 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_5\left(y^2+z^2\right) + \frac{1}{4}\log_5^2\left(\frac{9}{x^2} + 3y^2 - 3z^2\right)$.

A. $3 - \log_3^2 5$. **B.** $4 - \log_5 3$. **C.** -2. **D.** -1.

Câu 28: Tập hợp nào sau đây chứa tất cả các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|\log_{\frac{1}{2}}^2 x - \log_{\frac{1}{2}} x^2 + m\right|$ trên đoạn $\left[\frac{1}{4};2\right]$ bằng 5?

A. $(-5;-3)\cup(1;3)$. **B.** $(-6;-3)\cup(4;7)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-9;-5)\cup(0;3)$.

Câu 29: Cho hai số thực dương $a, b\ (a \neq 1)$ thỏa mãn $\log_a \frac{4}{b} = 2$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 6\ln\left(a^3 + 4b^3\right) - \frac{a^3}{2} - 2b^3$ là số viết được dưới dạng $x(\ln y - 1)$ với x, y là các số nguyên. Giá trị của $x + y$ là

A. 18. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 0.

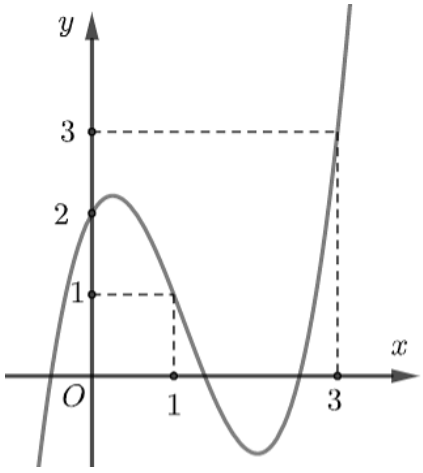
Câu 30: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $2^{\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)}.5^{\ln(x+y)} = 2^{\ln 5}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (x+1)\ln x + (y+1)\ln y$.

A. $P_{\max} = 10$. **B.** $P_{\max} = 0$. **C.** $P_{\max} = 1$. **D.** $P_{\max} = \ln 2$.

Câu 31: Cho các số thực x, y, $x^2 \le 1$ thoản mãn $2^{x-2+\sqrt[3]{y-3x}} + \left(x^3 - 6x^2 + 9x + y\right)2^{x-2} = 2^{x+1} + 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^3 - y - 3x + 4$.

A. -10. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 6.

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Trên $[-2;4]$, gọi x_0 là điểm mà tại đó hàm số $g(x) = f\left(\frac{x}{2}+1\right) - \ln\left(x^2+8x+16\right)$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó x_0 thuộc khoảng nào?



A. $\left(\frac{1}{2};2\right)$. **B.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$. **C.** $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$.

Câu 33: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{2022}\dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy}=x(x-1)+y(y-1)+xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{2x+2y+1}{x+y+5}$.

A. $\dfrac{11}{19}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{10}{23}$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Câu 34: Cho x, y là các số dương thỏa mãn $\log(x+2y)=\log(x)+\log(y)$. Khi đó, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x^2}{1+2y}+\dfrac{4y^2}{1+x}$ là:

A. $\dfrac{32}{5}$ **B.** $\dfrac{29}{5}$ **C.** 6. **D.** $\dfrac{31}{5}$

Câu 35: `Cho x là số thực, y là số nguyên thỏa mãn $x^2+y^2-xy+2x-3y+2<0$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\ln\left(1+xy+x^2\right)-(1+y)x^3-\dfrac{3}{2}x^2y$ bằng $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)-\dfrac{c}{d}$ (với a,b,c,d là các số nguyên dương; $\dfrac{a}{b}$ và $\dfrac{c}{d}$ là hai phân số tối giản). Giá trị của $a+b+c+d$ bằng

A. 16. **B.** 14. **C.** 75. **D.** 20.

Câu 36: Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x+y.4^{x+y-1}\geq 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+4x+6y$ bằng

A. $\dfrac{33}{4}$. **B.** $\dfrac{65}{8}$. **C.** $\dfrac{49}{8}$. **D.** $\dfrac{57}{8}$.

Câu 37: Có bao nhiêu số nguyên m để $\min\limits_{x\in[1;8]}f(x)+\max\limits_{x\in[1;8]}f(x)\leq 2020$ với $f(x)=\left|\dfrac{5\log_2 x+1}{\log_2 x+1}+m\right|$.

A. 2021. **B.** 2019. **C.** 2022. **D.** 2020.

Câu 38: Cho $0\leq x, y\leq 1$ thỏa mãn $2020^{1-x-y}=\dfrac{x^2+2021}{y^2-2y+2022}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x}{y+1}+\dfrac{y}{x+1}$. Khi đó $M+m$ bằng

A. $\dfrac{4}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{7}{4}$.

Câu 39: Cho hai số x, y thỏa mãn $x+y>0$ và $10^{x^2+y^2}+2021^{2021}.\log\dfrac{x^2+y^2}{x+y}\leq 100^{x+y}+2021^{2021}.\log 2$. Tìm tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2-10x-2y+2$.

A. $8\sqrt{2}-6$. **B.** $-6-8\sqrt{2}$. **C.** -8. **D.** -12.

Câu 40: Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $3^a+9^b+27^c=9$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=a+2b+3c$. Giá trị của biểu thức $M+3^m$ bằng

A. 10. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 13.

Câu 41: Cho các số thực a, b thỏa mãn $\mathrm{e}^{a^2+2b^2}+\mathrm{e}^{ab}\left(a^2-ab+b^2-1\right)-\mathrm{e}^{1+ab+b^2}=0$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{1+2ab}$. Khi đó $m+M$ bằng

A. $\dfrac{10}{3}$. **B.** $\dfrac{10}{3}$. **C.** $\dfrac{7}{3}$ **D.** $\dfrac{2}{5}$.

CHƯƠNG 3

HÀM SỐ LŨY THỪA HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

CHỦ ĐỀ 9 PHƯƠNG TRÌNH MŨ – PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình mũ cơ bản $a^x = b,\ (a > 0,\ a \neq 1)$.

Nếu $b > 0$ thì phương trình $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$.

Nếu $b \leq 0$ thì phương trình $a^x = b$ vô nghiệm.

2. Phương trình đưa về cùng cơ số

Sử dụng tính chất $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)\ (0 < a \neq 1)$.

3. Phương pháp đặt ẩn phụ: với $0 < a \neq 1$, $f\left[a^{g(x)}\right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = a^{g(x)} > 0 \\ f(t) = 0 \end{cases}$.

Dạng 1: Phương trình có dạng: $m.a^{2f(x)} + n.a^{f(x)} + p = 0\ (1)$

Đặt $t = a^{f(x)}, t > 0$ đưa phương trình (1) về dạng phương trình bậc 2: $mt^2 + nt + p = 0$.

Giải phương trình tìm nghiệm t và kiểm tra điều kiện $t > 0$.

Sau đó thế vào phương trình $t = a^{f(x)}$ tìm nghiệm x.

Dạng 2: $m.a^{f(x)} + n.b^{f(x)} + p = 0$, trong đó $a.b = 1$. Đặt $t = a^{f(x)}, t > 0$ suy ra $b^{f(x)} = \dfrac{1}{t}$.

Dạng 3: $m.a^{2f(x)} + n.(a.b)^{f(x)} + p.b^{2f(x)} = 0$. Chia hai vế cho $b^{2f(x)}$ và đặt $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{f(x)} = t > 0$.

4. Phương pháp logarit hóa.

Dạng 1: $a^{g(x)} = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) = \log_a f(x) \end{cases}$ với $0 < a \neq 1$.

Dạng 2: $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).\log_a b$.

5. Phương pháp hàm số

Định nghĩa

Hàm số f được gọi là đồng biến trên K khi và chỉ khi $\forall u, v \in (a;b); u < v \Rightarrow f(u) < f(v)$.

Hàm số f được gọi là nghịch biến trên $(a;b)$ khi và chỉ khi $\forall u, v \in (a;b); u < v \Rightarrow f(u) > f(v)$.

Định lí và tính chất:

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$. Nếu $f'(x) \geq 0\ (f'(x) \leq 0) \forall x \in (a;b)$ và $f'(x) = 0$ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến *(nghịch biến)* trên khoảng $(a;b)$.

Các tính chất:

- Nếu hàm số f đồng biến (hoặc nghịch biến) trên khoảng $(a;b)$ thì phương trình $f(x)=0$ có nhiều nhất một nghiệm trên khoảng $(a;b)$.
- Nếu phương trình $f'(x)=0$ có một nghiệm trên khoảng $(a;b)$ thì phương trình $f(x)=0$ có nhiều nhất hai nghiệm trên khoảng $(a;b)$.
- Nếu hàm số f đồng biến (hoặc nghịch biến) trên khoảng $(a;b)$ thì $\forall u,v\in(a;b)$; $f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v$.
- Nếu hàm số f liên tục, đồng biến trên khoảng $(a;b)$ và hàm số g liên tục, nghịch biến *(hoặc hàm hằng)* trên khoảng $(a;b)$ phương trình $f(x)=g(x)$ có nhiều nhất một nghiệm trên khoảng $(a;b)$.

Nhận xét

- Khi bài toán yêu cầu giải phương trình $f(x)=0$, ta có thể chứng minh $f(x)$ đơn điệu bằng cách khảo sát hàm số, sau đó tìm nghiệm và chứng minh nghiệm đó duy nhất.
- Ta cũng có thể thực hiện các phép biến đổi tương đương đưa về phương trình dạng $f(u)=f(v)$ (trong đó $u=u(x),v=v(x)$) hoặc $f(x)=g(x)$ và sử dụng các tính chất đã nêu trên.
- Khi bài toán yêu cầu giải phương trình $f(x)=m$ thì số nghiệm của phương trình sẽ là số giao điểm giữa đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=m$.

6. Phương pháp đánh giá

Quy tắc 1. Giải phương trình $f(x)=g(x)$.

Bước 1: Xác định $x=x_0$ là một nghiệm của phương trình.

Bước 2: Chứng minh với mọi $\begin{cases}x>x_0\\x<x_0\end{cases}$ thì phương trình vô nghiệm.

Bước 3: Kết luận $x=x_0$ là nghiệm duy nhất.

Quy tắc 2. Giải phương trình $f(x)=g(x)$.

Xét trên tập xác định D ta có $\begin{cases}f(x)\le m,\forall x\in D\\g(x)\ge m,\forall x\in D\end{cases}\Leftrightarrow f(x)\le m\le g(x),\forall x\in D$.

Phương trình thỏa mãn khi $f(x)=g(x)=m$.

Áp dụng tương tự với bài toán bất phương trình $f(x)\ge g(x)$.

Quy tắc 3. Sử dụng tính chất của hàm số lượng giác.

Ta có: $\sin x\in[-1;1];\cos x\in[-1;1]$.

Điều kiện để hàm số lượng giác $a\cos x+b\sin x=c$ có nghiệm là $a^2+b^2\ge c^2$.

Giá trị lượng giác của góc (cung) có liên quan đặc biệt.

Quy tắc 4. Sử dụng tính chất của hàm số mũ, hàm trị tuyệt đối, điều kiện có nghiệm của phương trình bậc 2

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Tập nghiệm của phương trình $0,5^{x^2-4}=8$ tương ứng là

A. $\{1\}$. **B.** $\{\pm 1\}$. **C.** $\left\{\pm\sqrt{7}\right\}$. **D.** $\{0;1\}$.

Lời giải

.....

.....

.....

Câu 2: Cho phương trình $4^{x^2-4x+6}=64$ tổng lập phương các nghiệm thực của phương trình là

A. 25. **B.** 26. **C.** 27. **D.** 28.

Lời giải

.....

.....

.....

Câu 3: Tìm tập nghiệm S của phương trình $2^{x+1}=8$.

A. $S=\{4\}$. **B.** $S=\{2\}$. **C.** $S=\{1\}$. **D.** $S=\{-1\}$.

Lời giải

.....

.....

.....

Câu 4: Tổng các nghiệm của phương trình $\ln\left(x^2-3x+1\right)=-9$ là:

A. -3. **B.** 9. **C.** 3. **D.** e^{-9}.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 5: Tìm m để phương trình $\log_2\left(x^3-3x\right)=m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

A. $m>0$. **B.** $m>1$. **C.** $m<1$. **D.** $0<m<1$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 6: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2 x + 2\log_7 x = 2 + \log_2 x.\log_7 x$ bằng

A. 13. **B.** 11. **C.** 15. **D.** 10.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 7: Cho phương trình logarit $\log_{x+m}\left(x^2-2x\right)=\log_{x+m}\left(2x+m\right)$. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của m để phương trình có hai nghiệm x. Tập nào dưới đây nằm trong tập S ?

A. $(0;1)\cup(2;8)$. **B.** $(-4;-1)\cup(-1;+\infty)$.

C. $(0;2)\cup(2;4)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1: Tính, rút gọn, so sánh các số liên quan đến lũy thừa

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

Câu 1: Nghiệm của phương trình $2^{3x-5}=16$ là

A. $x=3$. **B.** $x=2$. **C.** $x=7$. **D.** $x=\frac{1}{3}$.

Câu 2: Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $3^{x^2-4x+5}=9$ là

A. $12\cdot$ **B.** $10\cdot$ **C.** $11\cdot$ **D.** $9\cdot$

Câu 3: Nghiệm của phương trình $7^x=2$ là

A. $x=\log_7 2$. **B.** $x=\log_2 7$. **C.** $x=\frac{2}{7}$. **D.** $x=\sqrt{7}$.

Câu 4: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2-2x-3}=1$ là

A. $S=\{1;-3\}$. **B.** $S=\{2\}$. **C.** $S=\{-1;3\}$. **D.** $S=\{0\}$.

Câu 5: Nghiệm của phương trình $2^x=e$ là

A. 2^e. **B.** $\ln 2$. **C.** $\log e$. **D.** $\log_2 e$.

Câu 6: Nghiệm của phương trình $7^x=2$ là

A. $x=\log_7 2$. **B.** $x=\log_2 7$. **C.** $x=\frac{2}{7}$. **D.** $x=\sqrt{7}$.

Câu 7: Số nghiệm của phương trình $2^x=(0,5)^{-1}$ là

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 8: Nghiệm của phương trình $3^{x-1}=27$ là

A. $x=4$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-1$.

Câu 9: Nghiệm của phương trình $2^{x+4}=64$ là

A. $x=4$. **B.** $x=12$. **C.** $x=2$. **D.** $x=5$.

Câu 10: Nghiệm của phương trình $2^{2x+3}=2^{x+7}$ là:

A. $x=\frac{10}{3}$. **B.** $x=\frac{4}{3}$. **C.** $x=4$. **D.** $x=10$.

Câu 11: Nghiệm của phương trình $3^{3x+5}=3^{1-x}$ là :

A. $x=-1$. **B.** $x=2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-2$.

Câu 12: Nghiệm của phương trình $10^x=5$ là

A. $x=\frac{1}{2}$. **B.** $x=2$. **C.** $x=\log 5$. **D.** $x=\log_5 10$.

Câu 13: Tích các nghiệm của phương trình $2^{x^2-2x}=8$ là

A. 3 **B.** 2. **C.** -3 **D.** 0

Câu 14: Tìm tập nghiệm S của phương trình $5^{2x^2-x}=5$.

A. $S=\{0;2\}$. **B.** $S=\left\{0;\frac{1}{2}\right\}$. **C.** $S=\left\{1;-\frac{1}{2}\right\}$. **D.** $S=\varnothing$.

Câu 15: Tập nghiệm của phương trình $2^{x+1}=5$ có bao nhiêu phần tử?

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 16: Tìm tập nghiệm S của phương trình $2^{x+1}=8$.

A. $S=\{3\}$. **B.** $S=\{2\}$. **C.** $S=\{1\}$. **D.** $S=\{4\}$.

Câu 17: Nghiệm của phương trình $\log_3 x=2$ là

A. $x=9$ **B.** $x=5$ **C.** $x=6$ **D.** $x=8$

Câu 18: Giải phương trình $\log_3(x-1)=2$.

A. $x=7$. **B.** $x=9$. **C.** $x=8$. **D.** $x=10$.

Câu 19: Nghiệm của phương trình $\log_3(x-2)=4$ là

A. $x=79$. **B.** $x=81$. **C.** $x=66$. **D.** $x=83$.

Câu 20: Phương trình $\log_{25}(2x-3)=1$ có nghiệm là

A. $x=25$. **B.** $x=13$. **C.** $x=14$. **D.** $x=15$.

Câu 21: Nghiệm của phương trình $\log_2(x-1)=3$ là

A. $x=10$. **B.** $x=9$. **C.** $x=7$. **D.** $x=8$.

Câu 22: Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2+1)=2$ là

A. $S=\{\sqrt{3}\}\cdot$ **B.** $S=\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}\cdot$ **C.** $S=\{-1;1\}\cdot$ **D.** $S=\{1\}\cdot$

Câu 23: Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2+1)=2$ là

A. $S=\{\sqrt{3}\}$. **B.** $S=\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$. **C.** $S=\{-1;1\}$. **D.** $S=\{1\}$.

Câu 24: Tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $3^{x^2+1}=m-1$ có nghiệm là

A. $m\geq 4$. **B.** $m>4$. **C.** $m>1$. **D.** $m\geq 1$.

Câu 25: Cho a,b,c là các số thực khác 0 thỏa mãn $4^a=25^b=10^c$. Giá trị $T=\dfrac{c}{a}+\dfrac{c}{b}$ là

A. $T=\dfrac{1}{2}$. **B.** $T=\dfrac{1}{10}$. **C.** $T=2$. **D.** $T=\sqrt{10}$.

Câu 26: Phương trình $5^{2x+1}=125$ có nghiệm là

A. $x=3$. **B.** $x=\dfrac{5}{2}$. **C.** $x=\dfrac{3}{2}$. **D.** $x=1$.

Câu 27: Nghiệm của phương trình $3^{x^2-3x+4}=9$ là

A. $x=1;\ x=2$. **B.** $x=1;\ x=-2$. **C.** $x=-1;\ x=3$. **D.** $x=1;\ x=3$.

Câu 28: Gọi x_1,x_2 là 2 nghiệm của phương trình $6^x+12=3^{x+1}+2^{x+2}$. Tích x_1,x_2 bằng

A. 4, **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 29: Nghiệm của phương trình $2^{1-3x}=\dfrac{1}{32}$ là

A. $x=2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=\dfrac{1}{3}$. **D.** $x=-\dfrac{4}{3}$.

Câu 30: Nghiệm của phương trình $3^{2x-1}=3^{2-x}$ là:

A. $x=\frac{1}{3}$. **B.** $x=0$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-1$

Câu 31: Phương trình $\left(\sqrt{5}\right)^{x^2+4x+6}=5$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 0

Câu 32: Phương trình $5^{2x^2+5x+4}=25$ có tổng tất cả các nghiệm bằng

A. $-\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** -1. **D.** 1.

Câu 33: Tìm tập nghiệm của bất phương trình $3^x<\mathrm{e}^x$.

A. $(-\infty;0)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **D.** $(0;+\infty)$.

Câu 34: Số nghiệm thực của phương trình: $1+\ln(x+3)-\ln(x-1)^2=0$ là

A. 2. **B.** 1 **C.** 0. **D.** 3.

Câu 35: Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log_2\left(x^2+x+1\right)=3$ khi đó x_1+x_2 bằng

A. -1. **B.** -3. **C.** -2. **D.** 2

Câu 36: Phương trình $\ln\left(x-\frac{2}{3}\right)\ln\left(x+\frac{2}{3}\right)\ln\left(x+\frac{1}{3}\right)\ln\left(x+\frac{1}{6}\right)=0$ có bao nhiêu nghiệm thực.

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 37: Tập nghiệm của phương trình $\ln\left(2x^2-x+1\right)=0$ là

A. $\{0\}$. **B.** $\left\{0;\frac{1}{2}\right\}$. **C.** $\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **D.** $\varnothing$.

Câu 38: Số nghiệm của phương trình $\log_3 x.\log_3(2x-1)=2\log_3 x$

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 39: Gọi S là tập nghiệm của phương trình $2\log_2(2x-2)+\log_2(x-3)^2=2$ trên $\mathbb{R}$. Tổng các phần tử của S bằng

A. $4+\sqrt{2}$. **B.** 8. **C.** $8+\sqrt{2}$. **D.** $6+\sqrt{2}$.

Câu 40: Phương trình $\log_4(3.2^x)=x-1$ có nghiệm là $x_0=a+\log_2 b$ (với a,b nguyên dương và a,b là hai số nguyên tố cùng nhau). Tính $S=a+2b$.

A. 5. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 14. .

Câu 41: Có bao nhiêu số nguyên $m\in[-10;10]$ để phương trình $(mx-1)\sqrt{2-\log_2 x}=0$ có hai nghiệm thực phân biệt?

A. 20. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 11.

Câu 42: Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình $\log_3(x+2)=\log_3\left[x^2-(m-1)x+m^2-6m+2\right]$ có hai nghiệm trái dấu?

A. 4. **B.** 3. **C.** vô số. **D.** 5.

Câu 43: Biết rằng điều kiện cần và đủ của tham số m để phương trình $\log_3\left(m+\sqrt{m+3^x}\right)=2x$ có nghiệm là $m\ge -\frac{a}{b}$ (phân số $\frac{a}{b}$ tối giản) với a,b là hai số nguyên dương và $b<7$. Hỏi $2a+b+b^2$ bằng bao nhiêu?

A. 31. **B.** 32. **C.** 22. **D.** 23.

Câu 44: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\ln\left(x-2\right)=\ln\left(mx\right)$ có nghiệm

A. $0<m<1$. **B.** $m>1$. **C.** $m<\frac{1}{2}$. **D.** $0<m<\frac{1}{2}$.

Câu 45: Phương trình $\sqrt{9-x^2}.\log\left(9+2x-x^2\right)=0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 46: Xét hàm số $f\left(t\right)=\frac{9^t}{9^t+m^2}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\begin{cases} f\left(x\right)+f\left(y\right)=1 \\ e^{x+y}\le e.\left(x+y\right) \end{cases}$. Tìm tổng các phần tử của tập S.

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -1.

Câu 47: Cho phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(2x-m\right)+\log_2\left(3-x\right)=0$, với m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình có nghiệm.

A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 48: Có bao nhiêu số nguyên $a\in\left[-2021;2021\right]$ sao cho tồn tại duy nhất số thực x thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}}\left(x+3\right)=\log_3\left(ax\right)$?

A. 2022. **B.** 2020. **C.** 2023. **D.** 2021.

Câu 49: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in\left(-10;10\right)$ để phương trình $\frac{\log\left(mx\right)}{\log\left(x+1\right)}=2$ có nghiệm thực duy nhất?

A. 15. **B.** 10. **C.** 16. **D.** 11.

Câu 50: Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_{(x-1)}\left(x^4-mx^2+x+m-1\right)=1$ có đúng một nghiệm thực x. Tổng bình phương các phần tử của S bằng:

A. 41. **B.** 20. **C.** $\frac{185}{4}$. **D.** $\frac{400}{9}$.

Dạng 7: Phương pháp đưa về cùng cơ số giải phương trình mũ - logarit

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Phương trình $5^{x^2-1}=25^{x+1}$ có tập nghiệm là

A. $\{-1;3\}$. **B.** $\{1;3\}$. **C.** $\{-3;1\}$. **D.** $\{-3;-1\}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 2: Tập nghiệm của phương trình $\log(x-1)-\log(2x+3)=0$ là

A. $\left\{-4;\frac{2}{3}\right\}$. **B.** $\{2\}$. **C.** $\{-4\}$. **D.** $\varnothing$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Có bao nhiêu số nguyên m thỏa mãn $|m|<2023$ và phương trình $\log_{16}(mx)=\log_2\left(\sqrt{x+1}\right)$ có nghiệm thực duy nhất?

A. 2024. **B.** 2025. **C.** 2023. **D.** 2022.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị m nguyên trong $[-2022;2022]$ để phương trình $\log(mx)=2\log(x+1)$ có nghiệm duy nhất?

A. 2023. **B.** 2022. **C.** 4045. **D.** 4044.

✍ Lời giải

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Phương trình $5^{2x+1}=125$ có nghiệm là

A. $x=3$. **B.** $x=\frac{5}{2}$. **C.** $x=1$. **D.** $x=\frac{3}{2}$.

Câu 2: Nghiệm của phương trình $4^{x-1}=8^{2-x}$ là:

A. $x=8$ **B.** $\frac{1}{8}$ **C.** $x=4$ **D.** $x=\frac{8}{5}$

Câu 3: Phương trình $3^{2x-1}=3$ có nghiệm là

A. $x=1$. **B.** $x=0$. **C.** $x=\frac{1}{2}$. **D.** $x=2$.

Câu 4: Số nghiệm của phương trình $3^{x^2-x}=\left(\frac{1}{9}\right)^{2022}$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 5: Số nghiệm của phương trình $2^x=(0,5)^{-1}$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 6: Tập nghiệm của phương trình $2^{x^2}=16$ là.

A. $\{4\}$. **B.** $\varnothing$. **C.** $\{-2;2\}$. **D.** $\{2\}$.

Câu 7: Nghiệm của phương trình $4^{x-1}=8^{2-x}$ là:

A. $x=8$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $x=4$. **D.** $x=\frac{8}{5}$.

Câu 8: Nghiệm của phương trình $3^{2x-3}=3^x$ là

A. $x=2$. **B.** $x=0$. **C.** $x=1$. **D.** $x=3$.

Câu 9: Phương trình $5^{2x+3}=25$ có nghiệm là

A. $x=1$. **B.** $x=\frac{1}{2}$. **C.** $x=-\frac{1}{2}$. **D.** $x=\frac{5}{2}$.

Câu 10: Phương trình $2^{2x^2+5x+6}=8$ có tổng tất cả các nghiệm bằng

A. 1. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** -1. **D.** $-\frac{5}{2}$.

Câu 11: Nghiệm của phương trình $3^{x-1}=\frac{1}{9}$ là

A. -3. **B.** 3. **C.** -1. **D.** 1.

Câu 12: Nghiệm của phương trình $2^{3x-1}=8$ là

A. $x=3$. **B.** $x=\frac{4}{3}$. **C.** $x=\frac{2}{3}$. **D.** $x=1$.

Câu 13: Nghiệm của phương trình $2^{2x+3}=2^{x+7}$ là:

A. $x=\dfrac{10}{3}$. **B.** $x=\dfrac{4}{3}$. **C.** $x=4$. **D.** $x=10$.

Câu 14: Tập nghiệm của phương trình $2^{-x^2-3x}=\dfrac{1}{16}$ là

A. $\varnothing$. **B.** $\{-1;4\}$. **C.** $\{0;1\}$. **D.** $\{1;-4\}$.

Câu 15: Nghiệm của phương trình $3^{x+1}=9^{2x}$ là

A. $x=1$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=\dfrac{1}{4}$. **D.** $x=\dfrac{1}{3}$.

Câu 16: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x-3\log_2 x+2=0$ bằng

A. 8 **B.** 6 **C.** 16 **D.** 2

Câu 17: Tập nghiệm của phương trình $\log_2(1-x)=2$ là

A. $x=-4$. **B.** $x=3$. **C.** $x=-3$. **D.** $x=5$.

Câu 18: Số nghiệm dương của phương trình $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2-4x}=9$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 19: Biết rằng phương trình $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{x}=\sqrt[3]{2^{x+1}}$ có một nghiệm thực duy nhất. Nghiệm thực đó thuộc khoảng nào dưới đây

A. $(-6;-5)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(-1;0)$.

Câu 20: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $2^{2x^2+5x+4}=4$ bằng

A. 1. **B.** -2. **C.** 2. **D.** -1.

Câu 21: Nghiệm của phương trình $(2,4)^{3x+1}=\left(\dfrac{5}{12}\right)^{x-9}$ là

A. $x=-2$ **B.** $x=-5$ **C.** $x=5$ **D.** $x=2$

Câu 22: Tập nghiệm của phương trình $2^{x^2-x+1}=2^{2x+1}$ là

A. $\{0;1\}$. **B.** $\{0\}$. **C.** $\{0;3\}$. **D.** $\{1\}$.

Câu 23: Biết rằng nghiệm của phương trình $3^{7^x}=7^{3^x}$ có dạng $x=\log_{\frac{a}{b}}(\log_b a)$, với a,b là các số nguyên tố, $a>b$. Tính $S=7a-3b$.

A. 43. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 40.

Câu 24: Tập nghiệm của phương trình $\log\left(x^2-3x+1\right)=\log(2x-5)$ là

A. $\{3\}$. **B.** $\{3;6\}$. **C.** $\{6\}$. **D.** $\{2;3\}$.

Câu 25: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $7^{x+1}=\left(\dfrac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3}$. Khi đó x_1+x_2 bằng:

A. -2. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 26: Tổng bình phương tất cả các nghiệm của phương trình $3^{x^2-3x-\frac{1}{3}}=9^{x+\frac{4}{3}}$

A. 31. **B.** 19. **C.** 35. **D.** 22.

Câu 27: Tổng các nghiệm thực của phương trình $\log_2\left(x^2+x+1\right)=2+\log_2 x$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1

Câu 28: Tổng các nghiệm của phương trình $3^{x^2-3x}=\frac{1}{9}$ bằng

A. 3 **B.** 4 **C.** 2 **D.** -2

Câu 29: Nghiệm của phương trình $4^{5x-1}=16$ là

A. $x=\frac{3}{5}$. **B.** $x=1$. **C.** $x=\frac{5}{3}$. **D.** $x=2$.

Câu 30: Tích các nghiệm của phương trình $3^{2x^2-5x-1}=\frac{1}{3}$ là

A. 2. **B.** 0. **C.** -2. **D.** $\frac{5}{2}$.

Câu 31: Số nghiệm của phương trình $\log_2\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)+\log_3\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\log_6\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 32: Cho phương trình $2\log_3\left(x^3+1\right)=\log_3(2x-1)^2+\log_{\sqrt{3}}(x+1)$. Tổng các nghiệm của phương trình là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 33: Cho phương trình $\log_2(x+1)-\log_2\left(x^2-3x-2m+5\right)=0$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt?

A. 8. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 34: Cho số thực dương $x\left(x\neq 1, x\neq\frac{1}{2}\right)$ thoả mãn $\log_x(16x)=\log_{2x}(8x)$. Giá trị $\log_x(16x)$ bằng $\log\left(\frac{m}{n}\right)$ với m,n là các số nguyên dương và phân số $\frac{m}{n}$ tối giản. Tổng $m+n$ bằng

A. 11. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 9.

Câu 35: Cho hai số thực a, b lớn hơn 1 thỏa mãn $a+b=2020$. Gọi m, n là hai nghiệm của phương trình $(\log_a x)(\log_b x)-2\log_a x-2=0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $mn+4a$ là

A. 8076. **B.** 8077. **C.** 8078. **D.** 8079.

Câu 36: Cho phương trình $\log_{\sqrt{5}+2}\left(x^2+mx+m+7\right)+\log_{\sqrt{5}-2}x=0$. Số giá trị nguyên m thuộc $[-10;9]$ để phương trình có nghiệm duy nhất là

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 37: Cho phương trình $\log^2_3\left(1-x^2\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(x+\frac{m}{4}\right).\log_{\sqrt{3}}\sqrt{1-x^2}=0$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm phân biệt ?

A. 1. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 38: Cho phương trình $\left(\log_2^2 x-\log_2\frac{x^3}{4}\right)\sqrt{e^x-m}=0$. Gọi S là tập hợp giá trị m nguyên với $m\in[-10;10]$ để phương trình có đúng 2 nghiệm. Tổng giá trị các phần tử của S bằng

A. -28. **B.** -3. **C.** -27. **D.** -12.

Câu 39: Số giá trị nguyên âm của tham số m để phương trình $\log_{\sqrt{5}}(x-1)=\log_5(mx+4x)$ có nghiệm là

A. 4 **B.** 2 **C.** 5 **D.** 3

Câu 40: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_{2022}\left(1-x^2\right)+\log_{\frac{1}{2022}}(x+2m-4)=0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $\frac{3}{2}<m<\frac{21}{8}$. **B.** $\frac{5}{2}\le m\le\frac{21}{8}$. **C.** $\frac{5}{2}<m<\frac{21}{8}$. **D.** $\frac{5}{2}\le m<\frac{21}{8}$.

Câu 41: Biết rằng $(x_0;y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}x-y=3\\ e^{2x}.e^y=1\end{cases}$. Khi đó $\frac{y_0}{x_0}$ bằng

A. -2. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 2.

Câu 42: Số nghiệm của phương trình $\frac{2^{x^3-5x^2}-4^{-3x}}{\ln(x-1)}=0$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 43: Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1)=\log_2(mx-8)$ có hai nghiệm thực phân biệt là:

A. Vô số. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 44: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y);y\in\left[0;2021^3\right]$ thỏa mãn phương trình $\log_4\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}\right)=\log_2(y-x)$?

A. 90854. **B.** 90855. **C.** 2021^2. **D.** 2021^2-1.

Câu 45: Phương trình $\log_3(x+2)+\frac{1}{2}\log_3(x-5)^2+\log_{\frac{1}{3}}8=0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 46: Gọi S là tập nghiệm của phương trình $2\log_2(2x-2)+\log_2(x-3)^2=2$ trên $\mathbb{R}$. Tổng các phần tử của S bằng:

A. $4+\sqrt{2}$. **B.** $8+\sqrt{2}$. **C.** 6. **D.** $6+\sqrt{2}$.

Câu 47: Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2\left(x^2+x+1\right)=2+\log_2 x$.

A. 6. **B.** 3. **C.** 1. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 48: Có bao nhiêu số nguyên $m \in (0;2023)$ để phương trình $\log_2(mx) = 3\log_2(x+1)$ có hai nghiệm phân biệt.

A. 4028. **B.** 2011. **C.** 2017. **D.** 2016.

Dạng 8: Phương pháp đặt ẩn phụ giải phương trình mũ - logarit

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Tính tổng các nghiệm của phương trình $2^{x+1}+2^{1-x}=5$

A. 0. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** -2.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 2: Tính tổng T tất cả các nghiệm thực của phương trình $4.9^x-13.6^x+9.4^x=0$

A. $T=\frac{13}{4}$. **B.** $T=3$. **C.** $T=\frac{1}{4}$. **D.** $T=2$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Cho các số thực dương a,b thõa mãn $\log_{16} a=\log_{20} b=\log_{25}\frac{2a-b}{3}$. Tỉ số $\frac{a}{b}$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;0)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$. **D.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4: Cho phương trình $\log_2^2 x-\left(m^2-2m\right)\log_2 x+m+3=0$ (m là tham số thực). Gọi S là tập các giá trị của m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1.x_2=8$. Tổng các phần tử của S là

A. -1. **B.** 2. **C.** 5. **D.** -2.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5: Biết x và y là hai số thực thoả mãn $\log_4 x=\log_9 y=\log_6\left(x-2y\right)$. Giá trị của $\frac{x}{y}$ bằng

A. $\log_{\frac{2}{3}}^2 2$. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 6: Cho phương trình $\left(2\log_3^2 x-\log_3 x-1\right)\sqrt{5^x-m}=0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 125. **B.** 123. **C.** 122. **D.** 124.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Biết phương trình $\log_3^2 x - 5\log_3 x + 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Gía trị $x_1.x_2$ là:

A. 243 **B.** 5 **C.** 3 **D.** 81

Câu 2: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log^2 x + 2\log x - 3 = 0$ là

A. -2. **B.** -3. **C.** $\frac{1}{100}$. **D.** $\frac{1}{1000}$.

Câu 3: Biết phương trình $2\log_3 x + 2\log_x 3 = 5$ có hai nghiệm thực phân biệt $x_1 < x_2$. Tính giá trị của biểu thức $T = 6x_1^2 - x_2 + 1$.

A. $T = 16$. **B.** $T = 10$. **C.** $T = 8$. **D.** $T = 12$.

Câu 4: Cho bất phương trình $\log_2^2(2x) - 4\log_2 x - 4 \le 0$. Khi đặt $t = \log_2 x$ thì bất phương trình đã cho trở thành bất phương trình nào sau đây?

A. $t^2 - 4t - 4 \le 0$. **B.** $t^2 - 4t - 3 \le 0$. **C.** $t^2 \le 0$. **D.** $t^2 - 2t - 3 \le 0$.

Câu 5: Nếu đặt $t = \log x$ thì bất phương trình $\log^2 x^3 - 10\log\sqrt{x} + 1 \ge 0$ trở thành:

A. $3t^2 + 1 \ge 0$. **B.** $3t^2 - 5t + 1 \ge 0$. **C.** $9t^2 - 5t + 1 \ge 0$. **D.** $9t^2 - 20t + 1 \ge 0$.

Câu 6: Tổng các nghiệm của phương trình $\log^2 x - \log x - 2 = 0$ bằng

A. $\frac{1001}{100}$. **B.** 101. **C.** $\frac{1001}{10}$. **D.** 1

Câu 7: Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x = 3$.

A. 8 **B.** -2 **C.** 2 **D.** $\frac{17}{2}$

Câu 8: Giải phương trình $\log_2{}^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0$. Ta có tổng các nghiệm là

A. 6. **B.** 3. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Câu 9: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{2}}^2(2x) - 2\log_2(4x^2) - 8 = 0$ bằng:

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{9}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 10: Cho phương trình $\log_{\sqrt{2}}^2 x + \log_2(x\sqrt{8}) - 3 = 0$. Khi đặt $t = \log_2 x$, phương trình đã cho trở thành phương trình nào dưới đây?

A. $8t^2 + 2t - 3 = 0$. **B.** $4t^2 + t = 0$. **C.** $4t^2 + t - 3 = 0$. **D.** $8t^2 + 2t - 6 = 0$.

Câu 11: Cho phương trình $(4\log_3^2 x - 15\log_3 x + 9)\sqrt{\log_4 x + m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 12: Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_2 x.\log_2(64x) + 8 = 0$ là

A. $\frac{7}{16}$. **B.** $\frac{5}{16}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{32}$.

Câu 13: Biết phương trình $\log_5^2 x - 3\log_5 x + 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Giá trị $x_1.x_2$ bằng

A. 25. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 125.

Câu 14: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3^2 x - 2\log_3 x - 7 = 0$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 9. **D.** -7.

Câu 15: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $\pi \log_7^2 x - 10\log_7 x + e = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_{\sqrt{7}} x_1.\log_{\sqrt{7}} x_2$

A. $P = \dfrac{e}{4\pi}$. **B.** $P = \dfrac{e}{\pi}$. **C.** $P = \dfrac{2e}{\pi}$. **D.** $P = \dfrac{4e}{\pi}$.

Câu 16: Biết rằng phương trình $3\log_2{}^2 x - 2\log_2 x - 1 = 0$ có hai nghiệm là a, b. Khẳng định nào sau đây đúng

A. $a + b = -\dfrac{1}{3}$. **B.** $a.b = \sqrt[3]{4}$. **C.** $a + b = \sqrt[3]{2}$. **D.** $a.b = \dfrac{2}{3}$.

Câu 17: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log^2{}_2 x - \log_2(8x) + 3 = 0$ bằng

A. 16. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 8.

Câu 18: Tích các nghiệm của phương trình $6\log^2{}_4 x - \log_4 x^3 + \dfrac{1}{5} = 0$ bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** $\sqrt[3]{2}$. **D.** $\dfrac{1}{30}$.

Câu 19: Số nghiệm của phương trình $\log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 20: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $2^{2x+1} - 5.2^x + 2 = 0$ bằng

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** 0. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** -1.

Câu 21: Cho phương trình $4.4^x - 9.2^{x+1} + 8 = 0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình trên. Khi đó tích x_1, x_2 bằng

A. 2. **B.** -2. **C.** 1. **D.** -1.

Câu 22: Biết phương trình $9^x - 3.3^x - 4 = 0$ có nghiệm $x = \log_a b$ (a, b là các số nguyên dương nhỏ hơn 10). Giá trị của $a - b$ bằng

A. 1. **B.** -2. **C.** 2. **D.** -1.

Câu 23: Biết phương trình $\log_5^2 x - m\log_5 x - 7 = 0$ (m là tham số) có hai nghiệm x_1, x_2. Tính tích $x_1.x_2$

A. $x_1.x_2 = 5^{-m}$. **B.** $x_1.x_2 = -7$. **C.** $x_1.x_2 = 5^{-7}$. **D.** $x_1.x_2 = 5^m$.

Câu 24: Phương trình $9^x - 3.3^x + 2 = 0$ có hai nghiệm $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$. Giá trị $2x_1 + 3x_2$ bằng

A. $4\log_2 3$. **B.** 2. **C.** 0. **D.** $3\log_3 2$.

Câu 25: Phương trình $9^x - 3.3^x + 2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$. Tính $2x_1 + 3x_2$?

A. 1. **B.** $2\log_2 3$. **C.** $3\log_3 2$. **D.** $4\log_3 2$.

Câu 26: Tổng tất các các nghiệm của phương trình $9^x - 5.6^x + 6.4^x = 0$ bằng

A. $\log_{\frac{3}{2}} 2$. **B.** $\log_{\frac{3}{2}} 6$. **C.** $\log_{\frac{3}{2}} 3$. **D.** $\log_{\frac{2}{3}} 6$.

Câu 27: Tổng các nghiệm của phương trình $4.9^x - 13.6^x + 9.4^x = 0$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 28: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $3^{2x} - 2.3^{x+2} + 27 = 0$ bằng

A. 3. **B.** 18. **C.** 27. **D.** 9.

Câu 29: Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $100^x - 7.10^x + 10 = 0$.

A. 7. **B.** $\log 7$. **C.** 1. **D.** $\ln 7$

Câu 30: Tìm tập nghiệm S của phương trình $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$.

A. $S = (1;2)$. **B.** $S = \{1;2\}$. **C.** $S = (2;4)$. **D.** $S = \{2;4\}$.

Câu 31: Tìm tập nghiệm S của phương trình $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$.

A. $S = (1;2)$. **B.** $S = \{1;2\}$. **C.** $S = (2;4)$. **D.** $S = \{2;4\}$.

Câu 32: Biết phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2(2x) - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Giá trị của $x_1.x_2$ bằng

A. 4. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** -3. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 33: Gọi S là tập nghiệm của phương trình $4^x - 3.2^{x+1} + 8 = 0$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng.

A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 1.

Câu 34: Hỏi phương trình $49^x - 2.7^{x+3} + 685 = 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 35: Gọi T là tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_{\frac{1}{5}}^2 x - 5\log_5 x + 6 = 0$. Tính T.

A. $T = 5$. **B.** $T = 100$. **C.** $T = 6$. **D.** $T = 150$.

Câu 36: Biết phương trình $\log_9^2 x + \log_3 \frac{x}{27} = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 với $x_1 < x_2$. Hiệu $x_2 - x_1$ bằng

A. $\frac{80}{3}$. **B.** $\frac{6560}{729}$. **C.** $\frac{80}{27}$. **D.** $\frac{6560}{27}$.

Câu 37: Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $4\sqrt{5}$.

A. $\frac{9}{2}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{17}{2}$ **D.** $\frac{5}{2}$

Câu 38: Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m; n; p$ để phương trình có đúng 2 nghiệm phân biệt thuộc khoảng -20.?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 39: Có bao nhiêu số nguyên dương a để tồn tại đúng hai số thực b phân biệt, thỏa mãn điều kiện $\left(4\log_2^2 b + \log_2 b - 5\right)\sqrt{7^b - a} = 0$.

A. 48. **B.** 47. **C.** 49. **D.** 46.

Câu 40: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2\log_2(x-3) + (2m+5)\log_{\sqrt{x-3}} 2 = 2m$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < x_2 < 5$.

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 41: Gọi x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_9 x = \log_6 y = \log_4\left(\frac{x+y}{6}\right)$. Tính tỉ số $\frac{x}{y}$

A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 42: Số nghiệm của phương trình $\log_2 \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\log_2 x} = \frac{4}{3}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 43: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(9^x - 244.3^x + 243\right).\sqrt{8 - \log_2(x+2)} \ge 0$ có tất cả bao nhiêu số nguyên?

A. 252. **B.** 250. **C.** 249. **D.** 254.

Câu 44: Phương trình $4^x - 3.2^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 2$. Giá trị của m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(0;1)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(-5;0)$. **D.** $(-7;-5)$.

Câu 45: Phương trình $4^x - 3.2^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 2$. Giá trị của m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(0;1)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(-5;0)$. **D.** $(-7;-5)$.

Câu 46: Biết rằng phương trình $25^x - 6.10^x - 7.4^x = 0$ có một nghiệm duy nhất được viết dưới dạng $x = \frac{1}{\log_a b - \log_a c}$, với a, b, c là các số nguyên tố. Tính giá trị $S = 2a + b - 3c$?

A. $S = 8$. **B.** $S = -2$. **C.** $S = 13$. **D.** $S = 2$.

Câu 47: Cho phương trình $9^{x^2-2x+1} - 2m.3^{x^2-2x+1} + 3m - 2 = 0$. Số tất cả các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có nghiệm sao cho $2m \in \mathbb{Z}; \mathrm{m} \in [-5;5]$ là:

A. 10. **B.** 21. **C.** 20 **D.** 11.

Câu 48: Biết tập nghiệm của bất phương trình $3^x < 4 - 3^{1-x}$ là $(a;b)$. Giá trị $a + b$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 49: Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^x - 2^{x+2} + 5 + m = 0$ có nghiệm duy nhất trên nửa khoảng $(0;2]$ là

A. 5. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 50: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^x - (m+1).2^x + 2m - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2 + x_1 + x_2 \le 2$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 51: Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình $9^x - 2m.3^x + m^2 - 8m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1 + x_2 = 2$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 9. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** 1. **D.** 8.

Câu 52: Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình $9^x - 2m.3^x + m^2 - 8m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 2$. Tổng các giá trị của S bằng.

A. 9. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** 1. **D.** 8.

Câu 53: Cho phương trình $4^x - (m+3)2^x + 8 = 0$ (m là tham số). Để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $(x_1+3)(x_2+3) = 8$ thì giá trị của tham số m thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(29;30)$. **B.** $(27;28)$. **C.** $(30;31)$. **D.** $(28;29)$.

Câu 54: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-21;21]$ để hai phương trình $4^{x+1} + 2^{x+4} = 2^{x+2} + 16$ và $|m-9|.3^{x-2} + m.9^{x-1} = 1$ là hai phương trình tương đương?

A. 32. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 31.

Câu 55: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $25^x - m.5^{x+1} + 7m^2 - 7 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Tập S có bao nhiêu phần tử?

A. 2. **B.** 1. **C.** 7. **D.** 3.

Câu 56: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\ln^2 x + 2\ln x - 3 = 0$ bằng

A. $\frac{1}{e^3}$. **B.** -2. **C.** -3. **D.** $\frac{1}{e^2}$.

Câu 57: Biết phương trình $\log^2_{\sqrt{3}} x - m\log_{\sqrt{3}} x + 1 = 0$ có nghiệm duy nhất nhỏ hơn 1 với m là tham số. Hỏi m nhận giá trị thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $(1;3)$. **B.** $(-3;0)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(0;2)$.

Câu 58: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2 + 2\log_2(x-3) + (2m+3)\log_{\sqrt{x-3}} 2 = 2m$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thoả mãn $x_1 < x_2 < 5$?

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 59: Có bao nhiêu số nguyên dương x sao cho ứng với mỗi x tồn tại đúng hai số thực y thỏa mãn $\left(\log_2^2 y - 3\log_2 y + 2\right)\sqrt{3^y - x} = 0$?

A. 78. **B.** 72. **C.** 79. **D.** 73.

Câu 60: Cho phương trình $4^{x+1} + 4^{1-x} - (m+1)\left(2^{2+x} - 2^{2-x}\right) + 8m - 16 = 0$ (m là tham số thực). Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình đã cho có nghiệm trên đoạn $[0;1]$.

A. $\left[0;\frac{3}{2}\right]$. **B.** $\left[1;\frac{5}{2}\right)$. **C.** $\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left[1;\frac{5}{2}\right]$.

Câu 61: Có bao nhiêu m nguyên $m \in [-2023;2023]$ đề phương trình $5^x - 2m = \log_{\sqrt[4]{5}}\left(20(x+1) + 10m\right)$ có nghiệm?

A. 2026. **B.** 2023. **C.** 2025. **D.** 2024.

CHƯƠNG 3

HÀM SỐ LŨY THỪA HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

CHỦ ĐỀ 9 BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ - LOGAARIT

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa:

Bất phương trình mũ cơ bản có dạng $a^x > b$ (hoặc $a^x \ge b, a^x < b, a^x \le b$) với $a > 0, a \ne 1$.

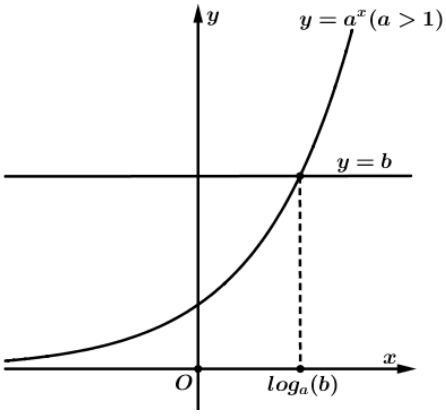
2. Định lí, quy tắc:

Ta xét bất phương trình dạng $a^x > b$.

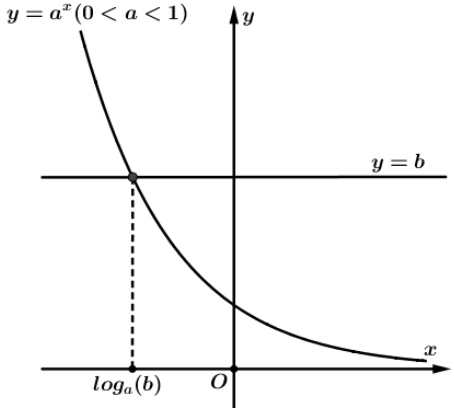
- Nếu $b \le 0$ thì bất phương trình vô nghiệm.
- Nếu $b > 0$ thì bất phương trình tương đương với $a^x > a^{\log_a b}$.

  Với $a > 1$ thì nghiệm của bất phương trình là $x > \log_a b$ (Hình 1).

  Với $0 < a < 1$ thì nghiệm của bất phương trình là $x < \log_a b$ (hình 2).



Hình 1.



Hình 2.

- **Kết luận:** Tập nghiệm của bất phương trình $a^x > b$ được cho bởi bảng sau:

$a^x > b$	Tập nghiệm	
	$a > 1$	$0 < a < 1$
$b \le 0$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$b > 0$	$(\log_a b; +\infty)$	$(-\infty; \log_a b)$

3. Phương pháp đưa về cùng cơ số

- Nếu gặp bất phương trình $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ thì xét hai trường hợp:

  Trường hợp 1: Nếu $a > 1$ thì bất phương trình $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.

  Trường hợp 2: Nếu $0 < a < 1$ thì bất phương trình $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.

4. Phương pháp đặt ẩn phụ

- Ta thường gặp các dạng: $m.a^{2f(x)}+n.a^{f(x)}+p>0,(1)$.

  Đặt $t=a^{f(x)}$, $t>0$ đưa pt (1) về dạng phương trình bậc 2: $mt^2+nt+p>0$.

  Giải bất phương trình tìm nghiệm t và kiểm tra điều kiện $t>0$ sau đó tìm nghiệm x.

  $m.a^{f(x)}+n.b^{f(x)}+p>0$, trong đó $a.b=1$. Đặt $t=a^{f(x)}$, $t>0$, suy ra $b^{f(x)}=\dfrac{1}{t}$.

  $m.a^{2f(x)}+n.(a.b)^{f(x)}+p.b^{2f(x)}>0$. Chia hai vế cho $b^{2f(x)}$ và đặt $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{f(x)}=t>0$.

5. Phương pháp hàm số, đánh giá

- **Định nghĩa**

  Hàm số f được gọi là đồng biến trên K khi và chỉ khi $\forall u,v\in(a;b);u<v\Rightarrow f(u)<f(v)$.

  Hàm số f được gọi là nghịch biến trên $(a;b)$ khi và chỉ khi $\forall u,v\in(a;b);u<v\Rightarrow f(u)>f(v)$

- **Định lí, quy tắc:**

  Tính chất 1. Nếu hàm số f đồng biến trên khoảng $(a;b)$ thì $\forall u,v\in(a;b);\ f(u)>f(v)\Leftrightarrow u>v$

  Nếu hàm số f nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ thì $\forall u,v\in(a;b);\ f(u)>f(v)\Leftrightarrow u<v$.

  Tính chất 2. Nếu hàm số f đồng biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\min\limits_{[a;b]}f(x)=f(a)$ và $\max\limits_{[a;b]}f(x)=f(b)$

  Nếu hàm số f nghịch biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\min\limits_{[a;b]}f(x)=f(b)$ và $\max\limits_{[a;b]}f(x)=f(a)$.

- **Nhận xét**

  Khi bài toán yêu tìm tham số m để bất phương trình $m\ge f(x)$ (hoặc $m\le f(x)$) **có nghiệm đúng** với mọi $x\in D$ thì $m\ge\max\limits_{D}f(x)$ (hoặc $m\le\min\limits_{D}f(x)$) .

  Khi bài toán yêu tìm tham số m để bất phương trình $m\ge f(x)$ (hoặc $m\le f(x)$) **có nghiệm** với mọi $x\in D$ thì $m\le\max\limits_{D}f(x)$ (hoặc $m\ge\min\limits_{D}f(x)$) .

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Bất phương trình $2^x > 3^x$ có tập nghiệm là:

A. $S=(0;1)$. **B.** $S=(-\infty;0)$. **C.** $S=(1;+\infty)$. **D.** $S=(-1;1)$.

Lời giải

.....

.....

Câu 2: Tập nghiệm của bất phương trình $5^{x+1} > 3$ là

A. $(-\infty;1+\log_5 3)$ **B.** $(-\infty;-1+\log_5 3)$ **C.** $(-1+\log_5 3;+\infty)$ **D.** $(\log_5 3;+\infty)$

Lời giải

.....

.....

.....

Câu 3: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_3(2x-3)<2$ là

A. $S=\left(\frac{11}{2};+\infty\right)$. **B.** $S=\left(\frac{3}{2};\frac{11}{2}\right)$. **C.** $S=\left(-\infty;\frac{11}{2}\right)$. **D.** $S=\left(\frac{3}{2};6\right)$.

Lời giải

.....

.....

.....

Câu 4: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(2x-1)>\log_2 x$ là

A. $S=\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $S=(0;1)$. **C.** $S=(0;+\infty)$. **D.** $S=(1;+\infty)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 5: Có bao nhiêu số nguyên dương thuộc tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(31-x^2)\geq 3$?

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 6: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)\geq 0$ là

A. $(1;2)$. **B.** $[2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;2]$. **D.** $(1;2]$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 7: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ sao cho bất phương trình $5^x-2(m+1)5^x-3-2m>0$ nghiệm đúng với mọi số thực x?

A. 9 **B.** 18. **C.** 20. **D.** 7.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 8: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để tập nghiệm của bất phương trình $\left(3^{x+4}-3\sqrt{3}\right)\left(3^x-m\right)<0$ chứa không quá 9 số nguyên?

A. 3787. **B.** 729. **C.** 2188. **D.** 2187.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 9: Cho $0<m\neq 1$. Gọi $(a;b)$ là tập hợp các giá trị của m để bất phương trình $\log_m\left(1-8m^{-x}\right)\geq 2(1-x)$ có hữu hạn nghiệm nguyên. Tính $b-a$

A. 1. **B.** $3\sqrt{2}-1$. **C.** $2\sqrt{2}-1$. **D.** $4\sqrt{2}-1$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1: Bất phương trình mũ – logarit cơ bản

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

Câu 1: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} > 3$ là

A. $[-2;+\infty)$. **B.** $(-2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-2)$. **D.** $(-\infty;-2]$.

Câu 2: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x-2} \geq 2$ là

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $[2;+\infty)$. **D.** $[3;+\infty)$.

Câu 3: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1) > 3$ là

A. $(1;7)$. **B.** $(1;9)$. **C.** $(9;+\infty)$. **D.** $(7;+\infty)$.

Câu 4: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} \geq \frac{1}{27}$ là

A. $(-\infty;2]$. **B.** $[2;+\infty)$. **C.** $(-2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;3]$.

Câu 5: Tập nghiệm của bất phương trình $2^x > 8$ là

A. $[4;+\infty)$. **B.** $[3;+\infty)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(4;+\infty)$.

Câu 6: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} < 3$ là

A. $(-2;+\infty)$ **B.** $(-\infty;-3)$ **C.** $(-3;+\infty)$ **D.** $(-\infty;-1)$

Câu 7: Nghiệm của phương trình $2^x > 3$ là

A. $x < \log_3 2$. **B.** $x < \log_2 3$. **C.** $x > \log_3 2$. **D.** $x > \log_2 3$.

Câu 8: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(3x) > \log_2 5$ là

A. $\left(\frac{3}{5};+\infty\right)$. **B.** $\left(0;\frac{5}{3}\right)$. **C.** $\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$. **D.** $\left(0;\frac{3}{5}\right)$.

Câu 9: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) \leq 1$ là

A. $\left[\frac{5}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$. **C.** $(-\infty;\log_2 5)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{5}{2}\right)$.

Câu 10: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(x+4) \leq 3$ là:

A. $(-4;23]$. **B.** $(-\infty;23]$. **C.** $(-\infty;27]$. **D.** $(-4;5]$.

Câu 11: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 x < 0$ là

A. $0;1$. **B.** $-\infty;1$. **C.** $1;+\infty$. **D.** $0;+\infty$.

Câu 12: Tập nghiệm của bất phương trình $\log(2x) < \log(x+6)$ là:

A. $[0;6)$ **B.** $(0;6)$ **C.** $(6;+\infty)$ **D.** $(-\infty;6)$

Câu 13: Tập nghiệm của bất phương trình $\log(x-2)<0$ là

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(12;+\infty)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(-\infty;3)$.

Câu 14: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1)>2$ là

A. $(-5;+\infty)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;5)$. **D.** $(5;+\infty)$.

Câu 15: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1)\le 3$ là

A. $S=[1;8]$. **B.** $S=(1;8]$. **C.** $S=[1;9]$. **D.** $S=(1;9]$.

Câu 16: Bất phương trình $\log(x-1)\le 2$ có tập nghiệm là

A. $(1;3]$. **B.** $(0;101]$. **C.** $(1;101]$. **D.** $(-\infty;101]$.

Câu 17: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2+2x+5}+3^{x^2+2x}\ge 3^{(x+1)^2+1}+5.2^{x^2+2x}$ là

A. $(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$. **B.** $[-1:3]$. **C.** $[-3;1]$. **D.** $[-1;0]$.

Câu 18: Biết tập nghiệm của bất phương trình $3^x<4-3^{1-x}$ là $(a;b)$. Giá trị $a+b$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 19: Tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4}\ge 27$ chứa bao nhiêu số nguyên

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Câu 20: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x}\le\left(\frac{3}{2}\right)^{2-x}$ là?

A. $\left[\frac{2}{5};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]$. **C.** $\left[\frac{-2}{3};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{2}{5}\right]$.

Câu 21: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)>-3$ là

A. $(-1;5)$. **B.** $(7;+\infty)$. **C.** $(-1;7)$. **D.** $[-1;7)$.

Câu 22: Tập nghiệm của bất phương trình $\ln\frac{1}{2x-1}\ge 0$ là

A. $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};1\right]$. **D.** $(-\infty;1)$.

Câu 23: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-2)\le 1$ là

A. $\left[\frac{5}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$. **C.** $(-\infty;\log_2 5)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{5}{2}\right)$.

Câu 24: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x+1)<3$ là

A. $S=(-\infty;8)$. **B.** $S=(-1;8)$. **C.** $S=(-1;7)$. **D.** $S=(-\infty;7)$.

Câu 25: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x^2+3x)\le 2$ là

A. $(0;1]$. **B.** $\left(0;\frac{1}{2}\right]$. **C.** $[-4;-3)\cup(0;1]$. **D.** $[-4;-3]\cup[0;1]$.

Câu 26: Số các giá trị nguyên của x thỏa $\left(2^{x^2}-16\right)\left(\log_3 x-4\right)\le 0$ là

A. Vô số. **B.** 80. **C.** 17. **D.** 78.

Câu 27: Gọi S là tập hợp các số nguyên x thoả mãn bất phương trình $\log_3\left(\frac{2x^2-7}{625}\right)\le\log_5\left(\frac{2x^2-7}{81}\right)$.

Số tập hợp con của S là

A. 2^{316}. **B.** 2^{318}. **C.** 319. **D.** 2^{319}.

Câu 28: Số nghiệm nguyên của bất phương trình thỏa mãn $\left[1-\log_2(x+8)\right]\sqrt{2.4^{x+1}-17.2^x+2}\ge 0$?

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 29: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_3 x+2\log_x 9-5\le 0$?

A. 79. **B.** 80. **C.** 81. **D.** 27.

Câu 30: Tính tổng tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $\log_3\left(x^2+8\right)-\log_3 x+x^2-9x+6\le 0$.

A. 72. **B.** 28 **C.** 36. **D.** 45.

Câu 31: Số các số nguyên dương x thỏa mãn $4^x+2023\left(x+1\right)<\left(x+2024\right).2^x$ là:

A. 7. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 32: Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho ứng với mỗi y có không quá 10 số nguyên x thỏa mãn $\left(2^{x+1}-\sqrt{2}\right)\left(2^x-y\right)<0$?

A. 2047. **B.** 1022. **C.** 1023. **D.** 1024.

Câu 33: Tổng tất cả các giá trị nguyên của m thỏa $\log_3\left|\frac{x^2-2\left(m-1\right)x+2-m}{3x^2+2x+1}\right|\le 1$ với mọi x là

A. -14. **B.** 21. **C.** 14. **D.** Đáp án khác.

Dạng 10: Phương pháp đưa về cùng cơ số giải BPT mũ - logarit

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Số nghiệm nguyên dương của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{25-x}} > \frac{1}{16}$ là

A. 15. **B.** 8. **C.** 16. **D.** 9.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 2: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{2}{5}\right)^{1-3x} \geq \frac{25}{4}$.

A. $S=(-\infty,1]$. **B.** $S=\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$. **C.** $S=\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$. **D.** $S=[1,+\infty)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x+2} < 9^{2x+7}$ là

A. $(-\infty,-4)$. **B.** $(-4,+\infty)$. **C.** $(-\infty,-5)$. **D.** $(-5,+\infty)$.

Lời giải

.....

.....

Câu 4: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(9^x-5.6^x-6.4^x\right)\sqrt{128-2^{\sqrt{x}}} > 0$ là

A. 44. **B.** 45. **C.** 48. **D.** 49.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5: Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{x+2}} > 5^{-x}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 6: Cho bất phương trình $\log_{m^2+1}\left[x^3+(m-3)x^2-mx-m^2+2m+1\right] > \log_{m^2+1}\left(1-x^2\right)$. Tập hợp các giá trị của m để bất phương trình trên có nghiệm $(a;b)$. Giá trị của biểu thức a^2+b^2 là

A. 3. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 9.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 7: Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $\log_a\left(x^2-x-2\right) > \log_a\left(-x^2+2x+3\right)$. Biết $S=(m;n)$ và $\frac{7}{3}$ thuộc S, tính $m+n$.

A. $m+n=\frac{13}{3}$. **B.** $m+n=\frac{7}{2}$. **C.** $m+n=\frac{11}{3}$. **D.** $m+n=\frac{9}{2}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 8: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left[\log_3\left(x^2+1\right)-\log_3\left(x+31\right)\right]\left(32-2^{x-1}\right)\geq 0$?

A. Vô số. **B.** 28. **C.** 26. **D.** 27.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3x^2} < 5^{5x+2}$ là

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 2: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+1} < 32$ là

A. $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. **B.** $\left(-\infty;-\sqrt{6}\right)\cup\left(\sqrt{6};+\infty\right)$.

C. $\left(-\sqrt{6};\sqrt{6}\right)$. **D.** $(-2;2)$.

Câu 3: Bất phương trình $3^{x^2-6x-16} < 9^{x+2}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 12. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 9.

Câu 4: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{x-1} < 5^{x+3}$ là

A. $(0;+\infty)$ **B.** $(-5;+\infty)$ **C.** $(-\infty;0)$ **D.** $(-\infty;-5)$

Câu 5: Bất phương trình: $8^{x(x+1)} < 4^{x^2-1}$ có tập nghiệm $S=(a;b)$. Tính giá trị $T=a+3b$.

A. $T=7$. **B.** $T=-7$. **C.** $T=5$. **D.** $T=-5$.

Câu 6: Tập nghiệm của bất phương trình $5.6^{x+1} \le 2.3^{x+1}$ là

A. $(-\infty;-\log_2 5]$ **B.** $(-\log_2 5;0)$ **C.** $[-\log_2 5;0)$ **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{10}\right)$

Câu 7: Tập nghiệm của bất phương trình $6^{2x+1} \ge 6^{x^2-3x+7}$ là

A. $[1;6]$. **B.** $[2;3]$. **C.** $[1;5]$. **D.** $(-\infty;1]\cup[6;+\infty)$.

Câu 8: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(3^x+2\right)\left(4^{x+1}-8^{2x+1}\right)\le 0$

A. $\left[-\frac{1}{4};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right]$. **C.** $(-\infty;4]$ **D.** $[4;+\infty)$.

Câu 9: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2} > 2^{4-3x}$ là

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 10: Tập nghiệm của bất phương trình $5^{x+2} < \left(\frac{1}{25}\right)^{-x}$ là:

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Câu 11: Bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} < 4$ có bao nhiêu nghiệm nguyên âm?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** Vô số.

Câu 12: Tập nghiệm của bất phương trình $5^{x+3} < 25^{2x-3}$ là

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(-\infty;3)$.

Câu 13: Bất phương trình $3^{|x|}<81$ có tập nghiệm là

A. $[0;4]$. **B.** $(0;4)$. **C.** $(-\infty;4)$. **D.** $(-4;4)$.

Câu 14: Bất phương trình $8^{x(x+1)}<4^{x^2-1}$ có tập nghiệm $S=(a;b)$. Tính giá trị $T=a+3b$.

A. $T=-7$. **B.** $T=7$. **C.** $T=5$. **D.** $T=-5$.

Câu 15: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\sqrt{x}}>\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2-\sqrt{x}}$ là

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $[0;1)$.

Câu 16: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)<\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$.

A. $S=\left(\frac{1}{2};2\right)$. **B.** $S=(-1;2)$. **C.** $S=(2;+\infty)$. **D.** $S=(-\infty;2)$.

Câu 17: Tập nghiệm của bất phương trình $2\log_2(x-1)\le\log_2(5-x)+1$ là

A. $(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$. **B.** $(1;3]$. **C.** $[-3;1]$. **D.** $[-1;0]$.

Câu 18: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_5(x+1)>2$ là

A. $(9;+\infty)$. **B.** $(24;+\infty)$. **C.** $(31;+\infty)$. **D.** $(25;+\infty;)$.

Câu 19: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>1$.

A. $S=\left[1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $S=\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$. **C.** $S=\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$. **D.** $S=\left(1;\frac{3}{2}\right)$.

Câu 20: Tập nghiệm của bất phương trình $\log(x+2)<1$ là

A. $(-\infty;8)$. **B.** $(-2;+\infty)$. **C.** $(-2;8)$. **D.** $(8;+\infty)$.

Câu 21: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_4(x+6)<2-2\log_4 x$ bằng

A. 2. **B.** Vô số. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 22: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)<\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$ là

A. $S=\left(\frac{1}{2};2\right)$. **B.** $S=(-1;2)$. **C.** $S=(-\infty;2)$. **D.** $S=(2;+\infty)$.

Câu 23: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_5\frac{x^2-4}{49}<\log_7\frac{x^2-4}{25}$?

A. 66. **B.** 70. **C.** 33. **D.** 64.

Câu 24: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)<\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$.

A. $S=(-\infty;2)$. **B.** $S=\left(\frac{1}{2};2\right)$. **C.** $S=(2;+\infty)$. **D.** $S=(-1;2)$.

Câu 25: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(2x+3)<\log_3(1-x)$ là khoảng $(a;b)$. Giá trị $a.b$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** -1. **D.** 1.

Câu 26: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x+1)<\log_2(3-x)$ là

A. $S=(-1;1)$. **B.** $S=(1;+\infty)$. **C.** $S=(1;3]$. **D.** $S=(-\infty;1)$

Câu 27: Tất cả các giá trị nguyên của x thoả mãn bất phương trình $\log_{\frac{\pi}{4}}(x^2-3x)<\log_{\frac{\pi}{4}}(x+4)$

A. $2-2\sqrt{2}<x<2+2\sqrt{2}$. **B.** $\left[\begin{array}{l} x<2-2\sqrt{2} \\ x>2+2\sqrt{2} \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} -4<x<2-2\sqrt{2} \\ x>2+2\sqrt{2} \end{array}\right.$. **D.** $2-2\sqrt{2}<x<0$.

Câu 28: Bất phương trình $2\log_3(4x-3)+\log_{\frac{1}{9}}(2x+3)^2\le 2$ có tập nghiệm là

A. $\left(\frac{3}{4};+\infty\right)$. **B.** $\left(\frac{3}{4};3\right]$. **C.** $\left(-\frac{3}{8};3\right)$. **D.** $\left[-\frac{3}{8};3\right]$.

Câu 29: Tìm tất cả các nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{2}{5}\right)^{3x+2}\le\left(\frac{5}{2}\right)^{x^2}$.

A. $\left[\begin{array}{l} x\ge 2 \\ x\le 1 \end{array}\right.$. **B.** $1\le x\le 2$. **C.** $-2\le x\le 1$. **D.** $\left[\begin{array}{l} x\ge -1 \\ x\le -2 \end{array}\right.$.

Câu 30: Tập nghiệm của bất phương trình $1+\log_2(x-2)>\log_2(x-1)$ là

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(1;3)$.

Câu 31: Tập hợp nghiệm của bất phương trình $2\log_3(4x-3)+\log_{\frac{1}{3}}(2x+3)\le 2$ là $S=(a;b]$. Giá trị của $b-a$

A. $\frac{15}{7}$. **B.** $\frac{27}{8}$. **C.** $\frac{9}{4}$. **D.** $\frac{150}{67}$.

Câu 32: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{5}}(x^2-1)<\log_{\frac{1}{5}}(3x-3)$.

A. $S=(2;+\infty)$. **B.** $S=(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

C. $S=(1;2)$. **D.** $S=(-1;2)$

Câu 33: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)+\log_2(3x-3)<0$ là

A. $S=(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$. **B.** $S=(1;2)$.

C. $S=(-1;2)$. **D.** $S=(2;+\infty)$.

Câu 34: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{0,8}(15x+2)>\log_{0,8}(13x+8)$ là

A. Vô số. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 35: Cho các số thực dương x,y thỏa mãn $\left(\frac{10}{9}\right)^{2x^2-5xy} \le \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^{xy+5y^2}$. Hiệu giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{x}{y}$ bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $\frac{5}{4}$

Câu 36: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^{x^2+2mx+1} \le \left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right)^{2x-3m}$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$?

A. 8. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 37: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_2 \frac{x^2-16}{54} < \log_3 \frac{x^2-16}{24}$?

A. 10.. **B.** 11.. **C.** 22.. **D.** 20.

Câu 38: Số các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $2^{2x^2+2x-2} - 2^{x^2+4x+m} - 2^{x^2-2x-m} + 4 < 0$ có không quá 6 nghiệm nguyên là:

A. 7. **B.** 4. **C.** 10. **D.** 9.

Câu 39: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left[\log_3\left(x^2+1\right) - \log_3\left(x+31\right)\right]\left(32-2^{x-1}\right) \ge 0$ **?**

A. 27. **B.** Vô số. **C.** 28. **D.** 26.

Câu 40: Bất phương trình $\log_2\left(x^2-x-2\right) \ge \log_{0,5}\left(x-1\right)+1$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thuộc [0;2023] ?

A. 2019. **B.** 2022. **C.** 2021. **D.** 2020.

Câu 41: Với m là tham số thực dương khác 1. Hãy tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_m \frac{1}{2}\left(x+2\right) - 2\log_m x > \log_{\frac{1}{m}}\left(x^2-x\right)$ biết rằng $x=\frac{5}{4}$ là nghiệm của bất phương trình

A. $S=(1;2)$. **B.** $S=(1;2)\cup(2;+\infty)$. **C.** $S=(0;2)$. **D.** $S=(2;+\infty)$.

Câu 42: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_2\left(8x^2\right)+\log_3\left(3x^3\right) \ge \log_2 x.\log_3 x$?

A. 27. **B.** 8. **C.** 134. **D.** 133.

Câu 43: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_3 \frac{x^2-9}{125} \le \log_5 \frac{x^2-9}{27}$?

A. 116. **B.** 58. **C.** 117. **D.** 110.

Câu 44: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(2^{x^2}-4^x\right)\left[\log_3\left(x+25\right)-3\right] \le 0$?

A. 25 **B.** Vô số. **C.** 26. **D.** 24.

Câu 45: Gọi S là tập hợp các nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2-3x-10}} > 3^{2-x}$. Số phần tử của S là

A. 1. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 0.

Câu 46: Cho bất phương trình $\log_7\left(x^2+2x+2\right)+1>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right)$. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình trên nghiệm đúng với mọi $x\in[1;3]$.

A. 187. **B.** 36. **C.** 198. **D.** 34.

Câu 47: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn bất phương trình $\log_2(2x).\log\left(\frac{100}{x}\right)>2$?

A. 198. **B.** 48. **C.** 96. **D.** 149.

Câu 48: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left[\log_3(x^2-3x+29)-\log_3(x+15)-1\right]\left(2^{x+7}-32\right)<0$?

A. 24. **B.** 22. **C.** 21. **D.** 23.

Câu 49: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(\log_3\left(x^2+10\right)-\log_3(x+40)\right)\left(32-2^{x-1}\right)\geq 0$?

A. Vô số. **B.** 38. **C.** 36. **D.** 37.

Câu 50: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left[\log_2\left(x^2+1\right)-\log_2(x+31)\right]\left(32-2^{x-1}\right)\geq 0$?

A. 26. **B.** 28. **C.** 29. **D.** 27.

Câu 51: Cho bất phương trình $\log_5\left(x^2+1\right)>\log_5\left(x^2+6x+m\right)-1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình trên có tập nghiệm chứa khoảng $(2;3)$?

A. 27. **B.** 24. **C.** 26. **D.** 25.

Câu 52: Cho bất phương trình $\log_5\left(x^2+1\right)>\log_5\left(x^2+6x+m\right)-1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình trên có tập nghiệm chứa khoảng $(2;3)$?

A. 27. **B.** 24. **C.** 26. **D.** 25.

Câu 53: Có bao nhiêu số tự nhiên $x\in[0;2023]$ thỏa mãn bất phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1)>\log_2(x+5)$?

A. 2023. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 2021.

Câu 54: Cho bất phương trình $\log_3(x+1)+\log_{\frac{1}{2}}(x-2)\geq\log_4(x+1)^2-\log_3\left(\frac{x-2}{4}\right)-2$. Tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình bằng

A. 5. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 9.

Câu 55: Cho bất phương trình $\log_2(x-1)<\log_5(5x-5)$ có tập nghiệm là $S=(a;b)$. Khi đó $b-a$ gần bằng giá trị nào sau đây

A. $3{,}17$. **B.** $3{,}27$. **C.** $3{,}07$. **D.** $3{,}37$.

Câu 56: Có tât cả bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(\log_{2023}\left(x^2+2\right)-\log_{2023}(x+14)\right)\left(729-3^{x-1}\right)\geq 0$

A. Vô số **B.** 16. **C.** 17. **D.** 15.

Câu 57: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0;100]$ để bất phương trình $4^{2x-m}-4.2^{3x-2m}+4.2^{x-m}<1$ nghiệm đúng với $\forall x\in(-\infty;4]$?

A. 99. **B.** 92. **C.** 98. **D.** 93.

Câu 58: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\log\left(60x^2+120x+10m-10\right)-3\log\left(x+1\right)>1$ có miền nghiệm chứa đúng 4 giá trị nguyên của biến x. Số phần tử của S là

A. 10. **B.** 12 **C.** 9 **D.** 11

Câu 59: Gọi S là tập hợp nghiệm nguyên của bất phương trình $mx^2+\log_2\left(mx^2\right)>2^{\log_2^2 x}+\log_2^2 x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tập hợp S có đúng 8 phần tử?

A. 5. **B.** 6. **C.** 10. **D.** 4.

Câu 60: Xét tất cả các cặp số nguyên dương $(a;b)$, ở đó $a\geq b$ sao cho ứng với mỗi cặp số như vậy có đúng 50 số nguyên dương x thỏa mãn $\left|\ln a-\ln x\right|<\ln b$. Hỏi tổng $a+b$ nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

A. 22. **B.** 36. **C.** 11. **D.** 50.

Dạng 11: Phương pháp đặt ẩn phụ giải BPT mũ - logarit

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Tập nghiệm của bất phương trình $9^x - 3^{x+1} - 4 > 0$ là

A. $(\log_3 4; +\infty)$. **B.** $[\log_3 4; +\infty)$. **C.** $(1; 4)$. **D.** $(-\infty; \log_3 4)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 2: Bất phương trình: $4^x - 8.6^x + 7.9^x \le 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 7.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 6 \le 0$ là $S = [a; b]$. Tính $2a + b$.

A. 8 **B.** –8 **C.** 7 **D.** 16

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 4: Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn

$$\left(4^{\log(x+3)} - 5.2^{\log(x+3)} + 4\right)\sqrt{\log_{x+3}\left(x^2 - x\right) - 1} \le 0 ?$$

A. 96 **B.** 95. **C.** 98. **D.** 97.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_4\left(3^x-1\right).\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{3^x-1}{16}\right)\le\frac{3}{4}$ là

A. $(0;1]\cup[2;+\infty)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $[1;2]$. **D.** $(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$.

Lời giải

Câu 6: Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn bất phương trình $\left(\log_2^2 x-\log_2 x^3+2\right)\sqrt{32-2^x}\ge 0$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Câu 7: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(2^x+2^{4-x}-17\right)\sqrt{10-\log_2 x}\ge 0$?

A. 1023. **B.** 1021. **C.** 1022. **D.** 1024.

Lời giải

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Số nghiệm nguyên trong khoảng $(-50;50)$ của bất phương trình $16^x - 5.4^x + 4 \ge 0$ là

A. 100. **B.** 98. **C.** 99. **D.** 51.

Câu 2: Biết tập nghiệm của bất phương trình $3^x < 4 - 3^{1-x}$ là $(a;b)$. Giá trị của $a+b$ bằng:

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 3: Biết tập nghiệm của bất phương trình $3^x < 4 - 3^{1-x}$ là $(a;b)$. Giá trị của $a+b$ bằng:

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 4: Tập nghiệm của bất phương trình $3.9^x - 10.3^x + 3 \le 0$ có dạng $S = [a;b]$ trong đó a,b là các số nguyên. Giá trị biểu thức $5b - 2a$ bằng

A. $\frac{43}{3}$. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** 7. **D.** 3.

Câu 5: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 = 0$ bằng

A. 2. **B.** 27. **C.** 3. **D.** 12

Câu 6: Tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 5\log_3 x + 6 = 0$ bằng

A. -3. **B.** 36. **C.** $\frac{1}{243}$. **D.** 5.

Câu 7: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $2^x + 8.2^{-x} < 9$ là

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 8: Cho bất phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{x}} - 2\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}} > 15$ có tập nghiệm $S = a;b$. Giá trị của biểu thức $2a + 5b$ bằng

A. -5. **B.** -2. **C.** 0. **D.** -3.

Câu 9: Bất phương trình $25^x - 6.5^x + 5 \le 0$ có tập nghiệm là $[a;b]$. Tính $a.b$

A. 1. **B.** 0. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 10: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{\sqrt{2}}^2 (2x) - 23\log_2 x + 7 < 0$ là

A. 4. **B.** 3. **C.** vô số. **D.** 5

Câu 11: Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn điều kiện $\left(7^x - 49\right)\left(\log_3^2 x - 7\log_3 x + 6\right) < 0$?

A. 728. **B.** 726. **C.** 725. **D.** 729.

Câu 12: Gọi S là tập hợp tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $\left[\left(x^3 - 4x\right)e^{x^2-2x+2+\sqrt{100-x}} - \left(x^3 - 4x\right)\right]\sqrt{4^x - 5.2^{x+1} + 16} \ge 0$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 5045. **B.** 5048. **C.** 5047. **D.** 5046.

Câu 13: Số nghiệm nguyên của phương trình $\left(9^x - 5.6^x - 6.4^x\right)\sqrt{128 - 2^{\sqrt{x}}} > 0$.

A. 45 **B.** 48 **C.** 49. **D.** 44.

Câu 14: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình $4^x - m.2^{x+1} - m^2 + 9m = 0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 15: Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc $[-20;20]$ của tham số m để bất phương trình $4^x - (m+1)2^x + m \le 0$ có tập nghiệm là một đoạn có độ dài lớn hơn 2?

A. 16. **B.** 17. **C.** 37. **D.** 38.

Câu 16: Số nghiệm nguyên của bất phương trình: $\left(9^x - 5.6^x - 6.4^x\right)\sqrt{128 - 2^{\sqrt{x}}} > 0$ là

A. 45. **B.** 48. **C.** 49. **D.** 44.

Câu 17: Tập tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $\log_2^2 x - (2m+5)\log_2 x + m^2 + 5m + 4 < 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [2;4]$ là

A. $(0;1)$. **B.** $[0;1]$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $[-2;0]$.

Câu 18: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-20;20]$ để bất phương trình $\log_3 x^2 + m\sqrt{\log_3 x^3} + m + 1 \le 0$ có không quá 20 nghiệm nguyên?

A. 23. **B.** 20. **C.** 21. **D.** 22.

Câu 19: Biết tập nghiệm của bất phương trình $\log_{2^2}\left(x^2-1\right) - \log_3\left(x^2-1\right) + \log_2 \frac{2}{3}\log_3 2 \le 0$ là $S = [a;b] \cup [c;d]$ với $a < b < c < d$. Giá trị của biểu thức $a + b + c + 2d$ bằng

A. $\frac{1}{\log_2 3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $-\sqrt{3}$. **D.** $\frac{1}{\log_2 3} + 1$.

Câu 20: Tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $\log^2 x - m\log x + m + 3 \le 0$ có nghiệm trong khoảng $(1;+\infty)$ là

A. $m \in (3;6]$. **B.** $m \in (-\infty;-3) \cup [6;+\infty)$.

C. $m \in (-\infty;-3)$. **D.** $m \in [6;+\infty)$.

Câu 21: Gọi a là số thực lớn nhất để bất phương trình $x^2 - x + 2 + a\ln\left(x^2 - x + 1\right) \ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a \in (2;3]$ **B.** $a \in (6;7]$ **C.** $a \in (8;+\infty)$ **D.** $a \in (-6;-5]$

Câu 22: Số nghiệm nguyên thuộc $[-100;100]$ của bất phương trình $\log_5\left(3^x - 1\right).\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{3^x - 1}{25}\right) \le -143$ là

A. 81. **B.** 79. **C.** 83. **D.** 84.

Câu 23: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(2^x - 16\right)\left(\log_3^2 x - 9\log_3 x + 18\right) < 0$?

A. 704. **B.** 701. **C.** 707. **D.** 728.

Câu 24: Có bao nhiêu giá trị số nguyên x thỏa mãn $\left(3^x - 27\right)\left(\log_3^2 x - 7\log_3 x + 10\right) < 0$

A. 242. **B.** 235. **C.** 233. **D.** 238.

Câu 25: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_3\left(x^2+4y^2+x\right)+\log_2\left(x^2+4y^2\right)+\frac{x^2-8x+4y^2}{x}\le\log_3 x+\log_2\left(x^2+4y^2+24x\right)$$

A. 24. **B.** 25. **C.** 22. **D.** 48.

Câu 26: Xét tất cả các số thực x,y cho sao cho $a^{4x-\log_5 a^2}\le 25^{40-y^2}$ với mọi số thực dương a. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+x-3y$ bằng

A. 60. **B.** 20. **C.** $\frac{125}{2}$. **D.** 80.

Câu 27: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để bất phương trình $\left|\frac{3\ln^2 x+2\ln x+24}{\ln^2 x-(m+1)\ln x+4}\right|\ge 2$ nghiệm đúng với mọi $x>0$?

A. 9. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 7.

Dạng 12: Hàm đặc trưng giải phương trình mũ - logarit

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Cho phương trình $e^x = \ln(x+a) + a$, với a là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thuộc khoảng $(0;19)$ để phương trình đã cho có nghiệm dương?

A. 15. **B.** 18. **C.** 17. **D.** 16.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2: Cho a,b là những số thực dương thỏa mãn điều kiện $2a+b=2$. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại $y \in \left(1;\frac{10}{3}\right)$ để $3^{ax+by} = a.3^x + \frac{b.9^y}{2}$.

A. 4. **B.** 2. **C.** 7. **D.** 6.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Có bao nhiêu số nguyên y thuộc đoạn $[-2022;2022]$ sao cho tồn tại $x \in \mathbb{R}$ thoả mãn $12.\sqrt[3]{3y+12.2^x} = 2^{3x} - 3y$

A. 2027. **B.** 2022. **C.** 2021. **D.** 2028.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10;10]$ để phương trình:

$$2^{3^m} \cdot 7^{x^2-2x} + 7^{3^m} \cdot 2^{x^2-2x} = 14^{3^m}\left(7x^2 - 14x + 2 - 7 \cdot 3^m\right)$$

có bốn nghiệm phân biệt trong đó có đúng hai nghiệm lớn hơn -1?

A. 10. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 8.

Lời giải

Câu 5: Cho phương trình $3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}} + \left(x^3 - 9x^2 + 24x + m\right).3^{x-3} = 3^x + 1$. Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình trên có 3 nghiệm phân biệt là

A. 38. **B.** $34\cdot$ **C.** $27\cdot$ **D.** $5\cdot$

Lời giải

Câu 6: Có bao nhiêu số nguyên dương m để phương trình $\log_{\sqrt{3}}\left(x^3-6x^2+9x+1\right)+x\left(x-3\right)^2=3^m+2m-1$ có duy nhất một nghiệm thuộc khoảng $\left(-2;2\right)$

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 7: Số các giá trị nguyên của tham số $m\in[-6;6]$ để phương trình $\log_6\left(2022x+m\right)=\log_4\left(674x\right)$ có hai nghiệm phân biệt là

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 12.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Có bao nhiêu số nguyên dương m để phương trình $m\left(\mathrm{e}^{x}-1\right)\cdot\ln\left(mx+1\right)+2\mathrm{e}^{x}=\mathrm{e}^{2x}+1$ có hai nghiệm phân biệt không lớn hơn 5.

A. 29. **B.** 27. **C.** 28. **D.** 26.

Câu 2: Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^{x}-m.2^{x+1}+m+2=0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $(0;2)$ là

A. $(-\infty;-1)\cup\left(2;\frac{18}{7}\right)$. **B.** $(-2;2)$. **C.** $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$. **D.** $\left(2;\frac{18}{7}\right)$.

Câu 3: Số nghiệm của phương trình $7^{x}=6x+1$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 4: Tìm số giá trị nguyên của tham số thực m để tồn tại các số thực $x;y$ thỏa mãn $e^{x^2+y^2-m}+e^{x+y+xy-m}=x^2+y^2+x+y+xy-2m+2$.

A. 7. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 6.

Câu 5: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2^{x}=mx+1$ có đúng một nghiệm.

A. $\left[\begin{array}{l}m\le 0\\ m=\ln 2\end{array}\right.$. **B.** $m>0$. **C.** $\left\{\begin{array}{l}m>0\\ m\ne\ln 2\end{array}\right.$. **D.** $m=\ln 2$.

Câu 6: Tìm số giá trị nguyên của tham số $a\le 2$ để phương trình $e^{e^{2x}-a}-2x-a=0$ có nhiều nghiệm nhất.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 7: Có bao nhiêu số nguyên dương m để phương trình $\log_{\sqrt{3}}\left(x^3-6x^2+9x+1\right)+x(x-3)^2=3^m+2m-1$ có duy nhất một nghiệm thuộc $(-2;2)$.

A. 0. **B. 3.** **C. 1.** **D.** 4.

Câu 8: Cho x và y là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{2}\log_3\frac{x}{9}+\log_3 y=\frac{9-xy^2}{y^2}$. Khi $P=x+6y$ đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của $\frac{x}{y}$ bằng

A. $\sqrt[3]{3}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\sqrt[3]{9}$. **D.** 3.

Câu 9: Có bao nhiêu số nguyên m để bất phương trình $\log_2\frac{3x^2+3x+m+1}{2x^2-x+1}<x^2-5x+2-m$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 10: Có bao nhiêu số nguyên dương m nhỏ hơn 20 thỏa mãn phương trình $\log\left(mx+\log m^{m}\right)=10^{x}$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt.

A. 11. **B.** 13. **C.** 12. **D.** 10

Câu 11: Cho phương trình $\left(4\log_2^2 x+\log_2 x-5\right)\sqrt{7^{x}-m}=0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu

giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 47 **B.** 49 **C.** Vô số **D.** 48

Câu 12: Cho hàm số $f(x)=e^{2022x}-e^{-2022x}+\ln^{2023}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. Trên khoảng $(-25;25)$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $f\left(e^{x+m}+m\right)+f\left(x-x^2-\ln x^2\right)=0$ có đúng ba nghiệm phân biệt?

A. 25. **B.** 26. **C.** 24. **D.** 48.

Câu 13: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị m để phương trình $m\ln x-x\ln m=x-m$ có 2 nghiệm phân biệt. Tập S là

A. $\left(\frac{1}{e};1\right)\cup(1;+\infty)$. **B.** $(1;e)\cup(e;+\infty)$.

C. $\left[\frac{1}{e};+\infty\right)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Câu 14: Cho phương trình $\log_{\sqrt[3]{2}}\left(x^3+3x^2+4\right)+(x+2)^2(x-1)+8=2^m+3m$, ($m$ là tham số). Tìm số giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất thuộc $[-2;4)$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2.

Câu 15: Cho phương trình $\log_9(x+1)^2+\log_{\frac{1}{3}}\frac{x}{m}=1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình đã cho có nghiệm thực?

A. 1. **B.** Vô số. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 16: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x+y>0,-20\le x\le 20$ và $\log_2(x+2y)+x^2+2y^2+3xy-x-y=0$

A. 6.. **B.** 10.. **C.** 19.. **D.** 41.

Câu 17: Phương trình $2^{x-2+\sqrt[3]{m-3x}}+\left(x^3-6x^2+9x+m\right)2^{x-2}=2^{x+1}+1$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m\in(a;b)$. Đặt $T=b^2-a^2$ thì

A. $T=36$. **B.** $T=48$. **C.** $T=64$. **D.** $T=72$.

Câu 18: Gọi S là tập hợp tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $\left[\left(x^3-4x\right)e^{x^2-2x+2+\sqrt{100-x}}-\left(x^3-4x\right)\right]\sqrt{4^x-5.2^{x+1}+16}\ge 0$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 5045. **B.** 5048. **C.** 5047. **D.** 5046.

Câu 19: Cho các số thực a, b thỏa mãn $\mathrm{e}^{a^2+2b^2}+\mathrm{e}^{ab}\left(a^2-ab+b^2-1\right)-\mathrm{e}^{1+ab+b^2}=0$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{1}{1+2ab}$. Khi đó, $m+M=\frac{c}{d}$ (với $c,d\in\mathbb{N}$ và $\frac{c}{d}$ là phân số tối giản). Tính $S=3c+2d$.

A. 36. **B.** 29. **C.** 27. **D.** 67.

Câu 20: Có bao nhiêu số nguyên dương y để tồn tại số thực $x>1$ thỏa mãn

$$x\left(2^{xy}+\log_2(xy)\right)=xy^4+15xy-30+10y$$

A. 16 **B.** 15. **C.** 26. **D.** 27.

Câu 21: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $125.5^{x^2}-\left(12x^2-12m+37\right)5^m=0$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 22: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\left(8.64^x-m\right)^3-162.4^x-27m=0$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;1]$?

A. 487. **B.** 489. **C.** 483. **D.** 485.

Câu 23: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ sao cho đẳng thức sau được thỏa mãn $\log_{2022}\left(4^x-2^{x+1}+2023\right)^{y^2+101}-20y-1=0$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 24: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thoả mãn $1\le x\le 2020$ và $2^y+y=2x+\log_2(x+2^{y-1})$?

A. 2020. **B.** 2021. **C.** 11. **D.** 10.

Câu 25: Cho a,b,c là các số thực khác 0 thỏa mãn $6^a=9^b=24^c$. Giá trị của biểu thức $T=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}$ bằng

A. $\frac{11}{12}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 26: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\ln\left(x\sqrt{x^2+16}-x^2\right)\le\sqrt{x^2+16}-15x$.

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 27: Cho x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log_7\left(\frac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x$ và $x_1+2x_2=\frac{1}{4}\left(a+\sqrt{b}\right)$ với a,b là hai số nguyên dương. Tính $a+b$.

A. $a+b=14$. **B.** $a+b=11$. **C.** $a+b=16$. **D.** $a+b=13$.

Câu 28: Cho các số thực dương x và y thỏa mãn $4+3^{2x^2-y+2}=\left(4+9^{2x^2-y}\right)\cdot 7^{y-2x^2+2}$. Khi biểu thức $P=\frac{x+y+10}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất thì tổng $x+y$ bằng.

A. $1+8\sqrt{2}$. **B.** 8. **C.** 9. **D.** $1+9\sqrt{2}$.

Câu 29: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-8;+\infty)$ để phương trình $x^2+x(x-1)2^{x+m}+m=\left(2x^2-x+m\right).2^{x-x^2}$ có nhiều hơn hai nghiệm phân biệt?

A. 8 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 5

Câu 30: Kí hiệu S là tập tất cả số nguyên m sao cho phương trình $3^{x^2+mx+1}=(3+mx)3^{9x}$ có nghiệm thuộc khoảng $(1;9)$. Số phần tử của S là?

A. 11. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 12.

Câu 31: Tìm số các số nguyên dương a không vượt quá 10 để phương trình $9^{1-\frac{1}{x^2}}-a.3^{1-\frac{1}{x^2}}+2=0$ có hai nghiệm phân biệt.

A. 7. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 32: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thoả mãn $0<x\le 2023$ và $3^x(x+1)=27^y y$?

A. 2020. **B.** 674. **C.** 672. **D.** 2019.

Câu 33: Số nghiệm của phương trình $\log_3\left|x^2-\sqrt{2}x\right|=\log_5\left(x^2-\sqrt{2}x+2\right)$ là

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 34: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $(x-1)\log\left(e^{-x}+m+2023\right)=x-2$ có hai nghiệm thực?

A. 2023. **B.** 2024. **C.** 10. **D.** 11.

Câu 35: Gọi S là tập tất cả các số nguyên a sao cho ứng với mỗi a, tồn tại ít nhất số thực b thỏa mãn $\frac{1}{2}a^{\log_3 8}+2^{\log_3 a}=\left(b+\sqrt{4-b^2}\right)\left(3+b\sqrt{4-b^2}\right)$. Tổng các phần tử của tập hợp S bằng

A. 10. **B.** 15. **C.** 28. **D.** 21.

Câu 36: Cho hàm số $f(x)=e^{2022x}-e^{-2022x}+\ln^{2023}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. Trên khoảng $(-25;25)$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $f\left(e^{x+m}+m\right)+f\left(x-x^2-\ln x^2\right)=0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt?

A. 24. **B.** 25. **C.** 48. **D.** 26.

Câu 37: Có bao nhiêu số nguyên dương m để phương trình $\log_{\sqrt{3}}\left(x^3-6x^2+9x+1\right)+x(x-3)^2=3^m+2m-1$ có duy nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-2;2)$?

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 38: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $\log_2(2x-2002)+x=y+1002+2^y$ và $1002\le x\le 2022$?

A. 10. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 18.

Câu 39: Cho phương trình $\log_3\frac{2x^2-x+m}{x^2+1}=x^2+x+4-m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2022;2022]$ để phương trình có hai nghiệm trái dấu?

A. 2022. **B.** 2021. **C.** 2016. **D.** 2019.

Câu 40: Có bao nhiêu số nguyên dương x thoả mãn $\log_2\left(\frac{x+1}{2}\right)+x=4^{\sin^4 y+\cos^4 y}-\sin^2 2y$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** Vô số.

Câu 41: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2022;2023]$ để phương trình $x\log_2(x+1)=\log_4\left[16(x+1)^{2m}\right]$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 2022. **B.** 2021. **C.** 2023. **D.** 2024.

Câu 42: Có bao nhiêu cặp số $(x;y)$ thoả mãn

$\log_2\left(y^{2\log_3 x}-2^{2+\log_3 x\log_2 y}+8\right)=\log_3\left[7-\left(x^2+y^3-2025\right)\sqrt{x^2+y^3-2022}\right]$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0

Câu 43: Cho $x,y,z\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2\\x+y+z=2\end{cases}$ và hàm số $f(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+x\right)\ln 2$. Đặt hàm số $g(x)=2022^{f(x)+x-\left(x-1+\sqrt{3}\right)\ln\left(x-1+\sqrt{3}\right)}-2023^{\left(x-1+\sqrt{3}\right)\ln\left(x-1+\sqrt{3}\right)-f(x)-x}$. Số nghiệm thực của phương trình $g'(x)=0$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

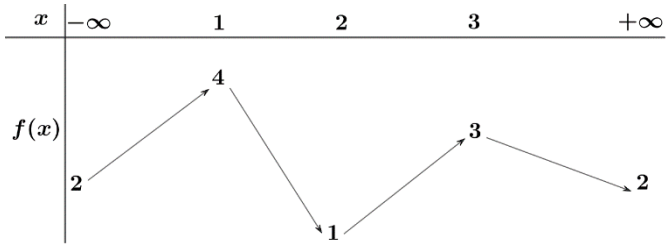
Câu 44: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0<y<2023$ và $3^x+3x-6=9y+\log_3 y^3$.

A. 9. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 2023.

Câu 45: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2023;2023]$ để phương trình $\left(x^2-1\right)\log^2\left(x^2+1\right)-m\sqrt{2\left(x^2-1\right)}\log\left(x^2+1\right)+m+4=0$ có đúng hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $1\le|x_1|\le|x_2|\le 3$?

A. 4035. **B.** 4040. **C.** 2025. **D.** 2023.

Câu 46: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:



Tổng các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2^{f(x)+\frac{4}{f(x)}}+\log_2\left(f^2(x)-4f(x)+5\right)=m$ có đúng hai nghiệm phân biệt bằng

A. 83. **B.** 34. **C.** 50. **D.** 67.

Câu 47: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_3(m-x)+3m=3^x+4x-1$ có nghiệm thuộc $[0;2]$?

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 15.

Câu 48: Có bao nhiêu số nguyên dương x sao cho tồn tại số thực y lớn hơn 1 thỏa mãn

$\left(xy^2+x-2y-5\right)\ln y=\ln\frac{2y-x+7}{x}$?

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** Vô số.

Câu 49: Có bao nhiêu số nguyên $a \in (-2023;2023)$ để phương trình $\frac{1}{\log_3(x+8)} + \frac{1}{7^x - 1} = x + a$ có 2 nghiệm phân biệt?

A. 2028. **B.** 2016. **C.** 2027. **D.** 2015.

Câu 50: Có bao nhiêu số nguyên $a \in (-2023;2023)$ để phương trình $\frac{1}{\log_2(x+7)} + \frac{1}{5^x - 1} = x + a$ có 3 nghiệm phân biệt

A. 2028. **B.** 2027. **C.** 2017. **D.** 2016.

Câu 51: Xét các số thực dương a, b thoả mãn $\log_2(a+b) = \log_3(a^2+b^2)$. Khi đó a^3+b^3 có thể nhận nhiều nhất bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 36. **B.** 35. **C.** 37. **D.** 38.

Câu 52: Xét các số thực dương a, b thoả mãn $\log_2(a+b) = \log_3(a^2+b^2)$. Khi đó a^3+b^3 có thể nhận nhiều nhất bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 36. **B.** 35. **C.** 37. **D.** 38.

Câu 53: Cho hàm số $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + x^3 + x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(me^{-x}\right) + f(3-x) = 0$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt?

A. 7. **B.** 8. **C.** Vô số. **D.** 6.

Câu 54: Số các giá trị nguyên của tham số $m \in [0;2023]$ để phương trình $2^{x-2+\sqrt[3]{m-3x}} + \left(x^3 - 6x^2 + 9x + m\right)2^{x-2} = 2^{x+1} + 1$ có đúng 1 nghiệm là

A. 2023. **B.** 2019. **C.** 2022. **D.** 2021.

Câu 55: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ với $0 \le x \le 2023$ và $1 \le y \le 2023$, thỏa mãn $4^{x+1} + \log_2(y+3) = 2^{y+4} + \log_2(2x+1)$

A. 2023. **B.** 1011. **C.** 2022. **D.** 1012.

Câu 56: Có bao nhiêu cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn $1 \le x \le 2023$ và $384.128^{x^2-2x} - 6.8^y + 6 = 3y - 7x^2 + 14x$?

A. 2022. **B.** 674. **C.** 1348. **D.** 1346.

Câu 57: Có bao nhiêu số nguyên dương x sao cho tồn tại số thực y lớn hơn 1 thỏa mãn $\left(xy^2 + x - 2y - 1\right)\log y = \log\frac{2y - x + 3}{x}$

A. 3. **B.** 1. **C.** vô số. **D.** 2.

Câu 58: Trong khoảng $(-10;20)$ có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4x\log_3(x+1) = \log_9\left[9(x+1)^{2m}\right]$ có đúng 2 nghiệm phân biệt.

A. 23. **B.** 20. **C.** 8. **D.** 15.

Câu 59: Tính tổng các giá trị nguyên của tham số m để tồn tại đúng 2 cặp số $(x;y)$ thỏa mãn

$$\begin{cases}(x+y)\left(\log_2(x+y)+x+y\right)+3=\log_2(x+y)+4x+4y\ (1)\\ x+y=\sqrt{2(x+4)(y+3)+m}\ (2)\end{cases}$$

A. -170. **B.** -165. **C.** -238. **D.** -207.

Câu 60: Có bao nhiêu số nguyên y sao cho ứng với mỗi số nguyên y có đúng 5 số nguyên x thỏa mãn $7^{x^2-|y-2x+4|}.\log_{(|y-2x+4|+5)}\left(x^2+5\right)\le 1$?

A. 10. **B.** 11. **C.** 16. **D.** 12.

Câu 61: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x tồn tại $y\in[2;8]$ thoả mãn $(y-x)\log_2(x+y)=y+x^2$

A. 5. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 7.

Câu 62: Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3^2(3x)-2\log_3 x^2=\dfrac{x^2-6x+9}{4}$.

A. $\dfrac{5+2\sqrt{3}}{2}$. **B.** 4. **C.** $5+2\sqrt{3}$. **D.** $4+2\sqrt{3}$.

Câu 63: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của y sao cho ứng với mỗi y, tồn tại duy nhất một giá trị $x\in\left[\dfrac{3}{2};\dfrac{9}{2}\right]$ thỏa mãn $\log_2\left(x^3-6x^2+9x+y\right)=\log_3\left(-x^2+6x\right)$. Số phần tử của S là

A. 3. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 1.

Câu 64: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của y sao cho ứng với mỗi y, tồn tại duy nhất một giá trị $x\in\left[\dfrac{5}{2};\dfrac{11}{2}\right]$ thoả mãn $\log_3\left(x^3-9x^2+24x+y\right)=\log_2\left(-x^2+8x-12\right)$. Số phần tử của S là

A. 3. **B.** 8. **C.** 1. **D.** 7.

Câu 65: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của y sao cho ứng với mỗi y, tồn tại duy nhất một giá trị $x\in\left[\dfrac{5}{2};\dfrac{11}{2}\right]$ thỏa mãn $\log_2\left(x^3-9x^2+24x+y\right)=\log_3\left(-x^2+8x-7\right)$. Số phần tử của S bằng

A. 8. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 66: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của y sao cho ứng với mỗi y, tồn tại duy nhất một giá trị $x\in\left[\dfrac{3}{2};\dfrac{9}{2}\right]$ thỏa mãn $\log_3\left(x^3-6x^2+9x+y\right)=\log_2\left(-x^2+6x-5\right)$. Số phần tử của S là

A. 7. **B.** 1. **C.** 8. **D.** 3.

Dạng 13: Phương pháp hàm số giải bất phương trình mũ - logarit

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Cho bất phương trình: $9^x+(m-1).3^x+m>0\,(1)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2022;2022]$ để bất phương trình (1) nghiệm đúng $\forall x>1$.

A. 2021. **B.** 2024. **C.** 2022. **D.** 2023.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2: Có bao nhiêu số nguyên a sao cho ứng với mỗi a, tồn tại ít nhất bốn số nguyên $b\in(-12;12)$ thỏa mãn $4^{a^2+b}\le 3^{b-a}+65$?

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Có bao nhiêu số nguyên a sao cho ứng với mỗi a, tồn tại ít nhất bốn số nguyên $b \in (-12;12)$ thỏa mãn $4^{a^2+b} \le 3^{b-a} + 65$?

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

.....

Câu 4: Với a là tham số thực để bất phương trình $2^x + 3^x \ge ax + 2$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$. Khi đó:

A. $a \in (1;3)$. **B.** $a \in (0;1)$. **C.** $a \in (-\infty;0)$. **D.** $a \in (3;+\infty)$.

Lời giải

.....

Câu 5: Biết nửa khoảng $S = \left[p^m; p^n \right) \left(p,m,n \in \mathbb{N}^* \right)$ là tập tất cả các số thực y sao cho ứng với mỗi y tồn tại đúng 6 số nguyên x thỏa mãn $\left(3^{x^2-2x} - 27\right)\left(5^{x^2} - y\right) \le 0$. Tổng $m+n+p$ bằng

A. $m+n+p=46$. **B.** $m+n+p=66$. **C.** $m+n+p=14$. **D.** $m+n+p=30$.

Lời giải

.....

.....

Câu 6: Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn $\sqrt{2\log_3(x+2)}-\sqrt{\log_3(2x^2-1)}\geq(x+1)(x-5)$?

A. 8. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

.....

Câu 7: Cho bất phương trình $\log_5(x^2-4x+4+m)-1<\log_5(x^2+2x+3)$ với m là tham số. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x thuộc khoảng $(1;3)$?

A. 30. **B.** 28. **C.** 29. **D.** Vô số.

Lời giải

.....

Câu 8: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(a;b)$, trong đó $a,b\in[1;2022]$ thỏa mãn $\left(\frac{2a}{a+2^b}\right)^{2^b}\geq\left(\frac{a+2^b}{2^{b+1}}\right)^a$?

A. 5. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 9: Có bao nhiêu bộ $(x;y)$ với x,y nguyên và $1\leq x,y\leq 15$ thỏa mãn $(xy+2x+4y+8)\log_3\left(\frac{2y}{y+2}\right)\leq(2x+3y-xy-6)\log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right).$

A. 30. **B.** 11. **C.** 24. **D.** 16.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tập nghiệm của bất phương trình $\log_2\left(x^2+2x+2^m\right)-2\log_2\left(2x-1\right)\geq 0$ chứa đúng hai nghiệm nguyên.

A. 10. **B.** 9. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$, với $x\le 2023$ thỏa mãn bất phương trình

$$4.2^{\frac{\log_2 x+3y}{4}}\ge x+3.2^y$$

A. 30. **B.** 23. **C.** 11. **D.** 10.

Câu 2: Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $2^{2x^2-15x+100}-2^{x^2+10x-50}+x^2-25x+150<0$

A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 3: Có bao nhiêu số nguyên a sao cho ứng với mỗi a, tồn tại ít nhất bốn số nguyên $b\in(-10;10)$ thỏa mãn $5^{a^2+b}\le 4^{b-a}+26$?

A. 7. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 4: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{2023}\left(x\sqrt{x^2+5}-x^2\right)\le\sqrt{x^2+5}-4x$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 5: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(\sqrt{x^2-x+4}+1\right)+2\log_5\left(x^2-x+5\right)\le 3$ là $(a;b)$. Khi đó tổng $a+2b$ bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị nguyên của m trên $(-2021;2021)$ thỏa mãn

$$\left(\sqrt{m^2-2m+4}+1-m\right)\left(\sqrt{4^m+3}-2^m\right)\ge 3$$

A. 2020. **B.** 2021. **C.** 1. **D.** 0

Câu 7: Xét các số thực x,y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right)\cdot 4^x$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{8x+4}{2x-y+1}$ gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)=2^x-2^{-x}+2023x^3$. Biết rằng tồn tại số thực m sao cho bất phương trình $f\left(4^x-mx+37m\right)+f\left((x-m-37)2^x\right)\ge 0$ có nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hỏi m thuộc khoảng nào dưới đây

A. $(50;70)$. **B.** $(-10;10)$. **C.** $(30;50)$. **D.** $(10;30)$.

Câu 9: Giải bất phương trình $\sqrt{2-5x-3x^2}+2x-4x^2.3^x>2x.3^x.\sqrt{2-5x-3x^2}$ được tập nghiệm là $(a;b]$. Tính $T=3a+b+1$.

A. -3. **B.** $-\dfrac{7}{3}$. **C.** $-\dfrac{5}{3}$. **D.** -2.

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tập nghiệm của bất phương trình $2023^{\ln\left(2x^2+4x+m\right)}-2023^{2\ln(2x-1)}>0$ chứa đúng bốn số nguyên?

A. 16. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 9.

Câu 11: Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $\frac{-2x+4y}{x^2+y^2+1} \ge 1$ và $32\left(2^{x-y}+\frac{x-y+5}{2^y}\right) \le 1$. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $T = x^2+y^2-4x-4y$ lần lượt là M, m. Tổng $M+m$ bằng

A. 22. **B.** 12. **C.** −22. **D.** −12.

Câu 12: Có bao nhiêu số nguyên dương a ($a \le 2024$) sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn $x.\left(\ln a^3 + e^x\right) \le e^x.\left[1+\ln\left(3x\ln a\right)\right]$?

A. 2022. **B.** 2019. **C.** 2023. **D.** 2018.

Câu 13: Gọi S là tập các số nguyên dương a để bất phương trình $6^x + 2^{a+2} < 4\cdot 3^x + 2^{x+a}$ có ít nhất 1 và không quá 10 nghiệm nguyên. Tổng các phần tử của S bằng

A. 204. **B.** 201. **C.** 205. **D.** 208.

Câu 14: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0 \le x \le 2023$ và $\log_2(2x+2)+x = 2y+4^y$?

A. 2022. **B.** 6. **C.** 2023. **D.** 4.

Câu 15: Cho 2 số thực $x; y$ thỏa mãn $x^2+y^2 \ge 3$ và $\log_{x^2+y^2}\left[x\left(4x^2-3x+4y^2\right)-3y^2\right] \ge 2$ gọi $M; m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x-y$ khi đó biểu $T = 2(M+m)$ có giá trị gần nhất với số nào sau đây

A. 9. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 10.

Câu 16: Biết tập nghiệm của bất phương trình $\log_2{}^2\left(x^2-1\right)-\log_3\left(x^2-1\right)+\log_2\frac{2}{3}\log_3 2 \le 0$ là $S = [a;b]\cup[c;d]$ với $a<b<c<d$. Giá trị của biểu thức $a+b+c+2d$ bằng

A. $\frac{1}{\log_2 3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $-\sqrt{3}$. **D.** $\frac{1}{\log_2 3}+1$.

Câu 17: Có bao nhiêu số nguyên x trong khoảng $(0;2023)$ thỏa mãn $\log_3(2x+5) < \log_2 x+1$.

A. 2022. **B.** 2002. **C.** 2000. **D.** 2020.

Câu 18: Có bao nhiêu số nguyên x là nghiệm của bất phương trình

$$\log_3\left(\frac{\sqrt{x^2-x+4}+1}{27}\right)+\log_5\left(x^2-x+5\right)^2 \le 0?$$

A. 5. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 19: Bất phương trình $\ln(2x^2+3) > \ln\left(x^2+ax+1\right)$ nghiệm đúng với mọi số thực x khi

A. $-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$. **B.** $0 < a < 2\sqrt{2}$. **C.** $0 < a < 2$. **D.** $-2 < a < 2$.

Câu 20: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thoả mãn điều kiện $3\left(9^y+2y\right) \le x+\log_3(x+1)^3-2$ và $x \le 2023$?

A. 2. **B.** 4040. **C.** 3780. **D.** 3776.

Câu 21: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(\sqrt{x^2-x+4}+1\right)+2\log_5\left(x^2-x+5\right) < 3$ là $(a;b)$. Tính $6a+8b$

A. 9. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{17}{2}$. **D.** 8

Câu 22: Có bao nhiêu số nguyên dương a thỏa mãn $\log_6\left(\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}\right)>\log_3\sqrt[3]{a}$?

A. 6^3. **B.** 3^6. **C.** 3^6-1. **D.** 6^3-1.

Câu 23: Gọi S là tập hợp các số nguyên dương x sao cho tồn tại số thực dương y thỏa mãn $y\log_2(x+3y)\le 8-x$ và $\log_3(3x)\ge 27^{-y}$. Tổng các phần tử của tập S bằng

A. 45. **B.** 21. **C.** 28. **D.** 36.

Câu 24: Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_3\left(x^3+3x^2+25\right)>2\log_2 x$

A. 6 **B.** 7 **C.** 8 **D.** 5

Câu 25: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 127 số nguyên y thỏa mãn $\log_3\left(x^2+y\right)\ge\log_2(x+y)$?

A. 89. **B.** 90. **C.** 46. **D.** 45.

Câu 26: Tìm số các giá trị nguyên của x sao cho với mỗi x tồn tại đúng 5 số nguyên y thỏa mãn

$$3^{y^2-|x-2y|}\le\log_{y^2+3}\left(|x-2y|+3\right).$$

A. 5. **B.** 6. **C.** 11. **D.** 10.

Câu 27: Trong các nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn bất phương trình $\log_{x^2+2y^2}(2x+y)\ge 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T=2x+y$ bằng

A. 9. **B.** $\frac{9}{4}$. **C.** $\frac{9}{8}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Câu 28: Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-100;100]$ sao cho bất phương trình sau đây có nghiệm thực $3^{x^2-2x+1}-\log_5\left(x^2-2x+6\right)^8+10-\sqrt{-x^2+2x+m}<0$. Tổng tất các phần tử của S bằng

A. 5044. **B.** 4914. **C.** 5014. **D.** 5022.

Câu 29: Có bao nhiêu số nguyên x là nghiệm của bất phương trình

$$\log_3\left(\frac{\sqrt{x^2-x+4}+1}{27}\right)+\log_5\left(x^2-x+5\right)^2\le 0?$$

A. 5. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 30: Có bao nhiêu số nguyên dương a sao cho ứng với mỗi a có đúng hai số nguyên b thỏa mãn $(b-2)(b-6+\log_2 a)<0$?

A. 67. **B.** 64. **C.** 65. **D.** 66.

Câu 31: Có bao nhiêu số nguyên y sao cho ứng với mỗi y có đúng 5 số nguyên x thỏa mãn: $\log\left(x^2+2x+y\right)-2\log(2x-1)>0$?

A. 75. **B.** 26. **C.** 27. **D.** 74.

Câu 32: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (x,y) thỏa mãn $2^{y+2}-\log_2(x+3)\le\dfrac{x-3-2y}{2}$ và $x<1000$?

A. 4998. **B.** 5004. **C.** 5010. **D.** 5998.

Câu 33: Có tất cả bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ với $y\le 20$ thỏa mãn:

$$\log_{2023}\frac{x+1}{y+1}+x^2y^2+2xy^2\le(y+2)y^3?$$

A. 380 **B.** 210 **C.** 420 **D.** 200

Câu 34: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn

$$\log_5\left(x^2+y^2+x\right)+\log_3\left(x^2+y^2\right)\le\log_5 x+\log_3\left(x^2+y^2+8x\right)?$$

A. 5. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 10.

Câu 35: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ và $x\le 93$ thoả mãn điều kiện $4\left(2^{3y}+6y\right)\le x+8\log_2(x+7)-9$?

A. 106. **B.** 69. **C.** 2. **D.** 92.

Câu 36: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0;10]$ đế bất phương trình $\log_2\dfrac{x^2+2x+m+1}{x^2+2x+2}\ge 2x^2+4x+7-2m$ có nghiệm. Số phần tử của tập hợp S bằng

A. 9. **B.** 7. **C.** 10. **D.** 8.

Câu 37: Cho bất phương trình $\ln\dfrac{x^4+x^3+x^2+2}{x^3-3x^2+m}+x^4+x^2+2-m\ge 0$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x\in[0;3]$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 0.

Câu 38: Gọi a là số thực lớn nhất để bất phương trình $x^2-x+2+a\ln\left(x^2-x+1\right)\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a\in(2;3]$ **B.** $a\in(6;7]$ **C.** $a\in(8;+\infty)$ **D.** $a\in(-6;-5]$

Câu 39: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_2\left(3x^2+2x+3y^2+2y\right)^2+\log_3\left(x^2+y^2\right)^3\le 3\log_3\left[7\left(x^2+y^2\right)+4(x+y)\right]+2\log_2(x+y)?$$

A. 7. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 40: Gọi S là tập hợp các giá trị thực của m để tồn tại duy nhất cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}\left(4x+4y+m^2-6m+3\right)\ge 1$ và $x^2+y^2+2x-4y+1=0$. Tổng giá trị các phần tử của tập S bằng

A. 12. **B.** 0. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 41: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_2\frac{x+y}{x^2+y^2+2}\ge x(x-4)+y(y-4)?$$

A. 13.. **B.** 18.. **C.** 15.. **D.** 21.

Câu 42: Cho hàm số $f(x)=2^x-2^{-x}+2023x^3$. Biết rằng tồn tại số thực m sao cho bất phương trình $f\left(4^x-mx+37m\right)+f\left(\left(x-m-37\right)2^x\right)\geq 0$ có nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hỏi m thuộc khoảng nào dưới đây

A. $(50;70)$. **B.** $(-10;10)$. **C.** $(30;50)$. **D.** $(10;30)$.

Câu 43: Có bao nhiêu cặp số $(x;y)$ với x,y là các số nguyên thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau: $4.2^{y^4-2y^2}-2\log_2(2x)+x=0$ và $2\log_2(x+y)-x-y\geq 0$?

A. 6. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 9.

Câu 44: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (x,y) thoả mãn $5^{y+1}+y-\log_5(x+2)\leq\dfrac{x-8}{5}$ và $x<2023$?

A. 3302. **B.** 3296. **C.** 3300. **D.** 3298.

Câu 45: Xét các số thực x, y thỏa mãn $\log_{\frac{1}{2}}x+\log_2\left(x^2+y\right)\leq -2\log_{\frac{1}{4}}y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3x+4y$.

A. $11+4\sqrt{7}$. **B.** $11+5\sqrt{7}$. **C.** $11-5\sqrt{7}$. **D.** $11-4\sqrt{7}$.

Câu 46: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_3\left(5-|x|+2|y|\right)+2\log_2\left(5-|x|\right)+3\geq\log_3|y|+\log_2\left(5-|x|+3|y|\right)^2$$

A. 50. **B.** 61. **C.** 60. **D.** 51.

Câu 47: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ với $1\leq x,y\leq 2023$ và thỏa mãn

$$(2x+4y-xy-8)\log_2\left(\frac{2x-1}{x-4}\right)\geq(xy+2x+3y+6)\log_3\left(\frac{2y}{y+2}\right)?$$

A. 4038. **B.** 2023. **C.** 2020. **D.** 4040.

Câu 48: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $a(a>0)$ thoả mãn $\left(2^a+\dfrac{1}{2^a}\right)^{2017}\leq\left(2^{2017}+\dfrac{1}{2^{2017}}\right)^a$.

A. $0<a<1$. **B.** $a\geq 2017$. **C.** $1<a<2017$. **D.** $0\leq a<2017$.

Câu 49: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_3\left(x^2+4y^2+x\right)+\log_2\left(x^2+4y^2\right)+\frac{x^2-8x+4y^2}{x}\leq\log_3 x+\log_2\left(x^2+4y^2+24x\right)$$

A. 24. **B.** 25. **C.** 22. **D.** 48.

Câu 50: Tất cả các cặp số $(x;y)$, sao cho $x,y\in\mathbb{N}^*$ sao cho $\left(3y-2y^2+2\right)\log_3\left(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)>(y+1)\log_2\sqrt{x}$ luôn đúng là

A. 3684 **B.** 4095. **C.** 5406. **D.** 4012

Câu 51: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 242 số nguyên y thỏa mãn $\log_4\left(2x^2+y\right)\geq\log_3(x+y)$?

A. 21. **B.** 40. **C.** 20. **D.** 39.

Câu 52: Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a>1,b>0,c>0$ và bất phương trình $a^{x^2}.(b+4c)^{2x+3}\ge 1$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$. Biết rằng biểu thức $P=\frac{16a}{3}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $a=m,b=n,c=p$. Khi đó, tổng $m+n+p$ bằng

A. $\frac{32}{3}$. **B.** $\frac{81}{16}$. **C.** $\frac{57}{20}$. **D.** $\frac{51}{16}$.

Câu 53: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (x,y) sao cho ứng với mỗi giá trị nguyên dương của y có không quá 15 giá trị nguyên dương của x thỏa mãn

$$\log_5\left(3x^2+xy+36y^2\right)+\log_3\left(x^2+12y^2\right)<\log_5(xy)+\log_3\left(x^2+16xy+12y^2\right)+1?$$

A. 40. **B.** 36. **C.** 21. **D.** 33.

Câu 54: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $1\le x\le 2023$ và

$$(y+2)\log_3\left(\frac{y-2}{y+2}+1\right)+\frac{xy-2x-y+2}{x+2}\log_2\left(\frac{x+2}{x-1}+1\right)\le 0?$$

A. 4046. **B.** 2022. **C.** 2023. **D.** 4044.

Câu 55: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $1\le x\le 2023$ và

$$(y+2)\log_3\left(\frac{y-2}{y+2}+1\right)+\frac{xy-2x-y+2}{x+2}\log_2\left(\frac{x+2}{x-1}+1\right)\le 0?$$

A. 4046. **B.** 2022. **C.** 2023. **D.** 4044.

Câu 56: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-10;60)$ để bất phương trình $\log_3\left(x^2+1\right)+(2m-1)\log_{\left(x^2+1\right)}3+4\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\ne 0$.

A. 59. **B.** 57. **C.** 55. **D.** 61.

Câu 57: Cho x; y là các số nguyên dương nhỏ hơn 2023. Gọi S là tập hợp các giá trị của y thoả mãn: Với mỗi giá trị của y luôn có ít nhất 100 giá trị không nhỏ hơn 3 của x thoả mãn $\left(2^{x+y^2}-2^{y^2-x}\right)\log_x y>4^{\frac{2y^2-1}{2}}-\frac{1}{2}$, đồng thời các tập hợp có y phần tử có tập con lớn hơn 2048. Số phần tử của tập S là

A. 32. **B.** 1921. **C.** 1912. **D.** 33.

Câu 58: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_3\left(x+y^2+3y\right)+\log_2\left(x+y^2\right)\le\log_3 y+\log_2\left(x+y^2+6y\right)?$$

A. 69. **B.** 34. **C.** 35. **D.** 70.

Câu 59: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_2\left(16x^2+25y^2+400\right)+\log_3\left(16x^2+25y^2\right)\le\log_2 400+\log_3\left(16x^2+25y^2+800\right)?$$

A. 54. **B.** 63. **C.** 62. **D.** 44.

Câu 60: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $\log_2\frac{1+x^2+y^2}{x-2y}\le 4^{x-2y}-2.2^{x^2+y^2}+1$?

A. 6. **B.** 13. **C.** 21. **D.** 9.

Câu 61: Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để có duy nhất cặp $(x;y)$ thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} 2^{x^2+y^2+1} \le \left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x \\ \log_{x^2+y^2+1}\left(2x+4y+m\right)=1 \end{cases}.$$

Tổng các phần tử của S bằng

A. -3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 62: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_3\left(x^2+y^2+x\right)+\log_2\left(x^2+y^2\right)\le \log_3 x+\log_2\left(x^2+y^2+24x\right)?$$

A. 89. **B.** 48. **C.** 90. **D.** 49.

Câu 63: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn:

$$\frac{x^2+y^2+7x}{x} > \log_2\frac{x^2+y^2}{x}+\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)^{\log_2 3}$$

A. 4 **B.** 5 **C.** 9 **D.** 6

Câu 64: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_2\frac{x+y}{x^2+y^2+2}\ge x(x-4)+y(y-4)?$$

A. 13. **B.** 18. **C.** 15. **D.** 21.

Câu 65: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn:

$$\log_2\left(x^2+y^2-3x\right)+\log_5 x\le \log_2 x+\log_5\left(5x-x^2-y^2\right)$$

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 5.

Câu 66: Có tất cả bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn bất phương trình $(x+2y).\left[\log_2\left(x^2+y^2\right)-\log_2\left(x+2y\right)-2y+x\right]<6x+y(12-5y)$?

A. 61. **B.** 62. **C.** 64. **D.** 65.

Dạng 14: Bài toán lãi suất

1. Bài toán theo hình thức lãi kép, gửi a đồng, lãi suất r một kì theo hình thức lãi kép. Tính số tiền thu về sau n kì

- Công thức tính nhanh: $A_n = a(1+r)^n$

2. Bài toán theo hình thức lãi kép, đầu mỗi kì gửi a đồng, lãi suất r một kì. Tính số tiền thu được sau n kì (gồm cả gốc và lãi)

- Công thức tính nhanh $A_n = a(1+r)\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}$

3. Bài toán theo hình thức lãi kép, vay A đồng, lãi suất r, trả nợ đều đặn mỗi kì số tiền m đồng. Hỏi sau bao nhiêu kì thì trả hết số nợ gồm cả gốc và lãi

- Công thức tính nhanh $m = \dfrac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$

4. Bài toán theo hình thức lãi kép, gửi a đồng vào tài khoản tiết kiệm, lãi suất r/kì. Sau đúng một kì rút ra m đồng và các kì sau cũng vậy. Hỏi số tiền còn lại trong tài khoản sau n?

- Công thức tính nhanh $A_n = a(1+r)^n - m\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}$

❖ **Lưu ý:** Trên đây là một số công thức tổng quát. Trong quá trình giải toán, các em cần biến đổi linh hoạt các đại lượng mà bài toán yêu cầu dựa trên công thức giải nhanh. Đồng thời kết hợp nhuần nhuyễn các bài toán trong trường hợp đề bài phức tạp.

❖ Việc chứng minh các công thức trên được tác giả trình bày thông qua bài tập rèn luyện. Ở mỗi bài giải chi tiết, tác giả sẽ làm theo cách tự luận để suy ra vấn đề, việc đưa ra công thức giải nhanh chỉ nhằm mục đích cho người đọc tham khảo, người đọc nên làm và hiểu theo cách tự luận sẽ thấy được cái hay của bài toán về lãi kép.

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Ông A gửi vào ngân hàng số tiền 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép với lãi suất 6% /năm. Hỏi sau 5 năm tổng tất cả số tiền ông A thu về là bao nhiêu? Giả sử lãi suất không thay đổi và kết quả làm tròn đến 2 chữ số thập phân.

A. 148,58 (triệu đồng). **B.** 133,82 (triệu đồng).

C. 126,25 (triệu đồng). **D.** 141,85 (triệu đồng).

Lời giải

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

Câu 2: Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6% /năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền lớn hơn 100 triệu đồng bao gồm gốc và lãi? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.

A. 14 năm. **B.** 12 năm. **C.** 11 năm. **D.** 13 năm.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Đầu năm 2016 ông A thành lập một công ty. Tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong năm 2016 là 1 tỷ đồng. Biết rằng sau mỗi năm thì tổng số tiền dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm đó tăng thêm 15% so với năm trước đó. Hỏi năm nào dưới đây là năm đầu tiên mà tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm lớn hơn 2 tỷ đồng?

A. Năm 2023. **B.** Năm 2020. **C.** Năm 2021. **D.** Năm 2022.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 4: Một người gửi vào ngân hàng 50 triệu đồng với lãi suất 4% /tháng, sau mỗi tháng tiền lãi được nhập vào vốn. Hỏi sau một năm người đó rút tiền thì tổng số tiền người đó nhận được là bao nhiêu?

A. $50.(1,004)^{12}$ (triệu đồng). **B.** $50.\ 1+12\times 0,04^{\ 12}$ (triệu đồng).

C. $50.\ 1+0,04^{\ 12}$ (triệu đồng). **D.** $50\times 1,004$ (triệu đồng).

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 5: Một người gửi số tiền m triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất $6\%/$ năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng, thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Sau 5 năm số tiền người này nhận được là 500 triệu đồng. Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra. Tính số tiền m.

Lời giải

.....

.....

……

……

……

……

……

……

Câu 6: Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7% / năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng, thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau 5 năm người đó mới rút lãi thì số tiền lãi người đó nhận được là? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.

A. 20,128 triệu đồng. **B.** 70,128 triệu đồng.

C. 17,5 triệu đồng. **D.** 67,5 triệu đồng.

✍ Lời giải

……

……

……

……

Câu 7: Đầu năm 2016, ông A thành lập một công ty. Tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong năm 2016 là 1 tỷ đồng. Biết rằng cứ sau mỗi năm thì tổng số tiền dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm đó tăng thêm 15% so với năm trước. Hỏi tổng số tiền ông A trả lương cho nhân viên trong cả năm 2020 là bao nhiêu? Kết quả làm tròn 2 chữ số thập phân.

A. 2,01 tỷ đồng. **B.** 1,52 tỷ đồng. **C.** 2,31 tỷ đồng. **D.** 1,75 tỷ đồng.

✍ Lời giải

……

……

……

……

Câu 8: Đầu năm 2017, ông A thành lập một công ty. Tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong năm 2017 là 1 tỷ đồng. Biết rằng cứ sau mỗi năm thì tổng số tiền dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm đó tăng thêm 20% so với năm trước. Hỏi năm nào dưới đây là năm đầu tiên tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm lớn hơn 5 tỷ đồng?

A. Năm 2025. **B.** Năm 2026. **C.** Năm 2027. **D.** Năm 2024.

✍ Lời giải

……

……

……

……

Câu 9: Một người đi làm với mức lương khởi điểm 7 triệu đồng một tháng. Cứ sau 3 năm mức lương tăng thêm 7% so với năm trước. Hỏi sau đúng 36 năm, mức lương một tháng của người này là bao nhiêu? Kết quả làm tròn 2 chữ số thập phân.

A. 15,77 triệu đồng. **B.** 14,73 triệu đồng. **C.** 21,97 triệu đồng. **D.** 16,87 triệu đồng.

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 10: Một người đi làm với mức lương khởi điểm là 7 triệu đồng một tháng. Cứ sau 3 năm mức lương được tăng thêm 7% so với năm trước. Hỏi sau đúng 36 năm, tổng số tiền lương người này nhận được là bao nhiêu? Làm tròn đến hai chữ số thập phân.

A. 3024 triệu đồng. **B.** 3235,68 triệu đồng.

C. 4507,89 triệu đồng. **D.** 3977,47 triệu đồng.

✍ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất $6{,}1\%$ / năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?
A. 11 năm. **B.** 12 năm. **C.** 13 năm. **D.** 10 năm.

Câu 2: Một người gửi ngân hàng 18 triệu đồng theo hình thức lãi kép kì hạn 1 năm với lãi suất 8% / năm. Hỏi sau 7 năm người đó có bao nhiêu tiền? (đơn vị: triệu đồng, kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)
A. 31,17. **B.** 30,85. **C.** 31,45. **D.** 31,34.

Câu 3: Một người gửi tiền vào ngân hàng với lãi suất không thay đổi là 6% trên năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi đó là lãi kép). Người đó định gửi tiền trong vòng 3 năm, sau đó rút 500 triệu đồng. Hỏi số tiền ít nhất người đó phải gửi vào ngân hàng (kết quả làm tròn đến hàng triệu) là bao nhiêu triệu đồng?
A. 420. **B.** 400. **C.** 410. **D.** 390.

Câu 4: Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6% /năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền hơn 100 triệu đồng bao gồm cả gốc và lãi? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.
A. 13 năm. **B.** 12 năm. **C.** 14 năm. **D.** 11 năm.

Câu 5: Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất $0{,}4\%$ / tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ta khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được lập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi xuất không thay đổi?
A. 102423000 (đồng). **B.** 102160000 (đồng).
C. 102017000 (đồng). **D.** 102424000 (đồng).

Câu 6: Một người gửi số tiền 500 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất $6{,}5\%$ một năm theo hình thức lãi kép. Đến hết năm thứ 3, vì cần tiền nên người đó đến rút ra 100 triệu đồng, phần còn lại vẫn tiếp tục gửi. Hỏi sau 5 năm kể từ lúc bắt đầu gửi, người đó có được số tiền gần với số nào nhất dưới đây?
A. 572,150 (triệu đồng). **B.** 571,990 (triệu đồng).
C. 580,135 (triệu đồng). **D.** 571,620 (triệu đồng).

Câu 7: Một người gửi ngân hàng 18 triệu đồng theo hình thức lãi kép kì hạn 1 năm với lãi suất 8% / năm. Hỏi sau 7 năm người đó có bao nhiêu tiền? (đơn vị: triệu đồng, kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)
A. 31,17. **B.** 30,85. **C.** 31,45. **D.** 31,34.

Câu 8: Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 0,4% / tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ta khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được lập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi xuất không thay đổi?
A. 102.423.000 đồng. **B.** 102.016.000đồng. **C.** 102.017.000đồng. **D.** 102.424.000 đồng.

Câu 9: Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6% / năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 300 triệu bao gồm cả gốc lẫn lãi? (Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra).

A. 20 năm. **B.** 18 năm. **C.** 21 năm. **D.** 19 năm.

Câu 10: Ông Nguyễn Văn B là thương binh hạng $4/4$, được hưởng trợ cấp hàng tháng là 2082000 đồng. Do tình hình dịch bệnh Covid-19 diễn biến phức tạp nên từ tháng 4 năm 2021 ông không đi lĩnh tiền mà nhờ thủ quỹ lập một sổ tiết kiệm ở ngân hàng để gởi số tiền hàng tháng vào đó với lãi suất $0,5\%/$ tháng (theo hình thức lãi kép). Hỏi đến đầu tháng 4 năm 2022 ông đến ngân hàng nhận được số tiền (bao gồm cả gốc và lãi) là bao nhiêu (làm tròn đến đơn vị đồng)?

A. $25\,811\,054$ đồng. **B.** $2\,210\,413$ đồng. **C.** $25\,682\,641$ đồng. **D.** $27\,893\,054$ đồng.

Câu 11: Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất $6\%/$ năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 300 triệu đồng bao gồm cả gốc lẫn lãi? (Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra).

A. 20 năm. **B.** 18 năm. **C.** 21 năm. **D.** 19 năm.

Câu 12: Đầu mỗi tháng, anh Hiếu gửi tiết kiệm ngân hàng số tiền 10 triệu đồng với hình thức lãi kép, lãi suất là 0,5%/ tháng. Hỏi sau đúng 5 năm thì anh Hiếu nhận được số tiền cả gốc và lãi gần nhất với số tiền nào dưới đây, giả sử rằng trong suốt quá trình gửi, anh Hiếu không rút tiền ra và lãi suất của ngân hàng không thay đổi.

A. $600+10.1,005^{60}$ (triệu đồng). **B.** $10.1,005.\dfrac{1,005^{60}-1}{0,005}$ (triệu đồng).

C. $10.1,005^{60}$ (triệu đồng). **D.** $10.\dfrac{1,005^{60}-1}{0,005}$ (triệu đồng).

Câu 13: Một người gửi số tiền 300 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất kép 6% một năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi suất sẽ được nhập vào vốn ban đầu (lãi kép). Hỏi sau 3 năm không rút tiền gốc và lãi, số tiền trong ngân hàng của người đó gần nhất với số nào sau đây? (Giả sử lãi suất ngân hàng không thay đổi, kết quả làm tròn đến hàng nghìn)

A. 357000000 đồng. **B.** 357300000 đồng. **C.** 357350000 đồng. **D.** 357305000 đồng.

Câu 14: Gia đình nhà bác Long Thắm gửi số tiền 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 7% /năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Sau 10 năm, nếu không rút lãi lần nào thì số tiền mà nhà bác Long Thắm nhận được gồm cả gốc lẫn lãi tính theo công thức nào dưới đây?

A. $10^8.(1+0,07)^9$ (đồng). **B.** $10^8(1+0,7)^{10}$ (đồng).

C. $10^8.(1+0,07)^{10}$ (đồng). **D.** $10^8.0,07^{10}$ (đồng).

Câu 15: Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất $0,7\%/\text{thang}$. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau đúng 5 tháng, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

A. 103.473.000 đồng. **B.** 103.548.000 đồng.

C. 103.549.000 đồng . **D.** 103.474.000 đồng.

Câu 16: Tại thời điểm ban đầu nếu đầu tư P đô la với tỷ lệ lãi suất được tính gộp liên tục hàng năm không đổi là r thì giá trị tương lai của khoản đầu tư này sau t năm là $B(t)=P.e^{rt}$ đô la. Giả sử tỷ lệ lãi suất tính gộp hàng năm là 8%. Hỏi sau bao nhiêu năm thì số tiền đầu tư ban đầu tăng thêm ít nhất 50%.

A. 5. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 6.

Câu 17: Bác Minh gửi 60 triệu vào ngân hàng kì hạn 1 năm với lãi suất $5,6\%$/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm bác Minh nhận được số tiền nhiều hơn 120 triệu đồng bao gồm cả gốc và lãi?

A. 11 năm. **B.** 12 năm. **C.** 13 năm. **D.** 14 năm.

Câu 18: Một người gởi 60 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 6% một năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 100 triệu đồng gồm cả gốc lẫn lãi?

A. 10 năm. **B.** 7 năm. **C.** 8 năm. **D.** 9 năm.

Câu 19: Một học sinh A khi đủ 18 tuổi được cha mẹ cho $200\,000\,000$ VNĐ. Số tiền này được bảo quản trong ngân hàng MSB với kì hạn thanh toán 1 năm và học sinh A chỉ nhận được số tiền này khi học xong 4 năm đại họ **C.** Biết rằng khi đủ 22 tuổi, số tiền mà học sinh A được nhận sẽ là $243\,101\,250$ VNĐ. Vậy lãi suất kì hạn một năm của ngân hàng MSB là bao nhiêu?

A. 8%. **B.** 7%. **C.** 6% **D.** 5%.

Câu 20: Một người gửi 50 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép với lãi suất $5,5\%$ / năm, kì hạn 1 năm. Hỏi sau 4 năm, người đó rút cả vốn lẫn lãi được số tiền gần với số nào nhất trong các số tiền sau? (Biết lãi suất hàng năm không đổi)

A. 72 triệu đồng. **B.** $61,94$ triệu đồng. **C.** 52 triệu đồng. **D.** $63,5$ triệu đồng.

Câu 21: Ông A gửi 100 triệu (đồng) vào ngân hàng theo hình thức lãi kép trong một thời gian khá lâu với lãi suất ổn định trong suốt thời gian tiết kiệm là 10% /1 năm. Tết năm nay do dịch bệnh nên ông rút hết tiền trong ngân hàng ra để gia đình chi tiêu. Sau khi rút cả vốn lẫn lãi, ông trích ra 10 triệu (đồng) để sắm sửa đồ Tết thì ông còn 240 triệu (đồng). Hỏi ông đã gửi tiết kiệm trong bao nhiêu năm?

A. 9 năm. **B.** 20 năm. **C.** 12 năm. **D.** 10 năm.

Câu 22: Lãi suất gửi tiền tiết kiệm của các ngân hàng trong thời gian qua liên tục thay đổi. Bác Mạnh gửi vào một ngân hàng số tiền 5 triệu đồng với lãi suất 0,7%/tháng. Sau sáu tháng gửi tiền, lãi suất tăng lên 0,9%/tháng. Đến tháng thứ 10 sau khi gửi tiền, lãi suất giảm xuống 0,6%/tháng và giữ ổn định. Biết rằng nếu bác Mạnh không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Sau một năm gửi tiền, bác Mạnh rút được số tiền là bao nhiêu?

A. 5436521,164 đồng. **B.** 5452771,729 đồng. **C.** 5436566,169 đồng. **D.** 5452733,453 đồng.

Câu 23: Ông A gửi 200 triệu vào một ngân hàng theo hình thức lãi kép, với lãi suất là 6,5% một năm và lãi suất không đổi trong suốt thời gian gửi. Sau 6 năm, số tiền lãi của ông bằng bao nhiêu?

A. 92 triệu. **B.** 226 triệu. **C.** 74 triệu. **D.** 175 triệu.

Câu 24: Ông A gửi tiền tiết kiệm với lãi suất $8,1\%$ / năm và lãi suất hằng năm được nhập vào vốn (hình thức lãi kép). Hỏi sau bao nhiêu năm Ông A được số tiền gấp đôi số tiền ban đầu?

A. 9. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 7.

Câu 25: Một học sinh A khi đủ 18 tuổi được cha mẹ cho $200\,000\,000$ VNĐ. Số tiền này được bảo quản trong ngân hàng MSB với kì hạn thanh toán 1 năm và học sinh A chỉ nhận được số tiền này khi học xong 4 năm đại học. Biết rằng khi đủ 22 tuổi, số tiền mà học sinh A được nhận sẽ là $243\,101\,250$ VNĐ. Vậy lãi suất kì hạn một năm của ngân hàng MSB là bao nhiêu?

A. 8%. **B.** 7%. **C.** 6% **D.** 5%.

Câu 26: Một người gửi 200 vào ngân hàng với lãi suất $0,2\%$ / tháng. Biết rằng nếu không rút tiền khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau đúng 10 tháng người đó được lĩnh số tiền gần nhất với số tiền nào dưới đây?

A. 205.063.000 . **B.** 204.044.000 . **C.** 204.036.000 . **D.** 203.063.000 .

Câu 27: Ông An gửi 200 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép theo kì hạn năm, với lãi suất là $6,5\%$ một năm và lãi suất không đổi trong thời gian gửi. Sau 6 năm, số tiền lãi (làm tròn đến hàng triệu) của ông là

A. 92 triệu. **B.** 96 triệu. **C.** 78 triệu. **D.** 69 triệu.

Câu 28: Một người gửi số tiền 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 7% / năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó lĩnh được số tiền (cả tiền gửi ban đầu lẫn tiền lãi) nhiều hơn 200 triệu đồng, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi suất không đổi?

A. 11 năm. **B.** 12 năm. **C.** 10 năm. **D.** 9 năm.

Câu 29: Ông A vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất 1% một tháng. Cứ sau mỗi tháng kể từ ngày vay ông trả góp số tiền 5 triệu đồng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng thì ông A trả hết nợ, biết tháng cuối cùng ông có thể trả số tiền ít hơn 5 triệu đồng?

A. 22 tháng. **B.** 23 tháng. **C.** 24 tháng. **D.** 25 tháng.

Câu 30: Anh A vay ngân hàng $600.000.000$ đồng để mua xe ô tô với lãi suất $7,8\%$ một năm. Anh A bắt đầu trả nợ cho ngân hàng theo cách: sau đúng 1 năm kể từ ngày vay anh bắt đầu trả nợ và hai lần trả nợ liên tiếp cách nhau đúng 1 năm. Số tiền trả nợ là như nhau ở mỗi lần và sau đúng 8 năm thì anh A trả hết nợ. Biết rằng lãi suất ngân hàng không thay đổi trong suốt thời gian anh A trả nợ. Số tiền anh A trả nợ ngân hàng trong mỗi lần là:

A. $103.618.000$ đồng. **B.** $121.800.000$ đồng. **C.** $130.000.000$ đồng. **D.** $136.776.000$ đồng.

Câu 31: Vợ chồng nhà chị Thơm vay ngân hàng 400 triệu đồng để mua nhà với hình thức trả góp, chị chọn gói lãi suất ưu đãi cố định $0,5\%$ tháng trong 12 tháng đầu và sang tháng thứ 13 trở đi thì ngân hàng tính lãi suất thả nổi theo quy định. Gia đình chị hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: sau đúng một tháng kể từ ngầy vay thì bắt $_{\text{đầu}}$ hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi tháng là 15 triệu đồng. Sau khi hết 12 tháng ưu đãi thì chị Thơm phải trả lãi suất thả nổi là 1%tháng. Biết rằng mỗi tháng ngân hàng chỉ tính lãi trên số dư nợ thực tế của tháng đó và lãi suất thả nổi của ngân hàng không thay đổi trong thời gian chị Thơm hoàn nợ. Hỏi chị Thơm cần bao nhiêu tháng để trả hết nợ ngân hàng kể từ khi vay?

A. 17 tháng. **B.** 29 tháng. **C.** 30 tháng. **D.** 18 tháng.

Câu 32: Một người gửi số tiền 3 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất $0,55\%$ / tháng. Biết rằng nếu người đó không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi đó là lãi kép). Số tiền người đó lãnh được sau hai năm, nếu trong khoảng thời gian này không rút tiền ra và lãi suất không đổi là:

A. $3.(1.0055)^2$ triệu đồng. **B.** $3.(1,0055)^{24}$ triệu đồng.

C. $3.(1,055)^{24}$ triệu đồng. **D.** $(3,0055)^{24}$ triệu đồng.

Câu 33: Ông Nguyễn Văn B là thương binh hạng 4/4, được hưởng trợ cấp hàng tháng là 2 082 000 đồng. Do tình hình Covid-19 diễn biến phức tạp nên từ tháng 4 năm 2021 ông không đi lĩnh tiền mà nhờ thủ quỹ lập một sổ tiết kiệm ở ngân hàng để gửi số tiền đó với lãi suất 0.5% / tháng. Hỏi đến đầu tháng 4 năm 2022 ông đến ngân hàng nhận được số tiền là bao nhiêu?

A. 2 210 413 đồng. **B.** 27 893 054 đồng.

C. 25 682 641 đồng. **D.** 25 811 054 đồng.

Câu 34: Vào ngày 15 hàng tháng, ông An đều đến gửi tiết kiệm tại ngân hàng với số tiền 5 triệu đồng theo

hình thức lãi kép với lãi suất không đổi trong suốt quá trình gửi là $0,6\%/$ tháng. Hỏi sau đúng ba năm (kể từ ngày bắt đầu gửi), ông An thu được số tiền cả gốc lẫn lãi là bao nhiêu (làm tròn đến nghìn đồng)?

A. 195251000 (đồng). **B.** 195252000 (đồng).

C. 201450000 (đồng). **D.** 201453000 (đồng).

Câu 35: Lãi suất gửi tiền tiết kiệm của các ngân hàng trong thời gian qua liên tục thay đổi. Bác Mạnh gửi vào một ngân hàng số tiền 5 triệu đồng với lãi suất 0,7%/tháng. Sau sáu tháng gửi tiền, lãi suất tăng lên 0,9%/tháng. Đến tháng thứ 10 sau khi gửi tiền, lãi suất giảm xuống 0,6%/tháng và giữ ổn định. Biết rằng nếu bác Mạnh không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (ta gọi đó là lãi kép). Sau một năm gửi tiền, bác Mạnh rút được số tiền là bao nhiêu? (biết trong khoảng thời gian này bác Mạnh không rút tiền ra)

A. 5436521,164 đồng. **B.** 5452771,729 đồng. **C.** 5436566,169 đồng. **D.** 5452733,453 đồng.

Câu 36: Hai anh em An và Bình cùng vay tiền ở ngân hàng với lãi suất $0,7\%$ một tháng với tổng số tiền vay là 200 triệu đồng. Sau đúng 1 tháng kể từ khi vay, mỗi người bắt đầu trả nợ cho ngân hàng khoản vay của mình. Mỗi tháng hai người trả số tiền bằng nhau cho ngân hàng để trừ vào tiền gốc và lãi. Để trả hết gốc và lãi cho ngân hàng thì An cần 10 tháng, Bình cần 15 tháng. Hỏi số tiền mà mỗi người trả cho ngân hàng mỗi tháng là bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn)?

A. 7614000 đồng. **B.** 10214000 đồng. **C.** 9248000 đồng. **D.** 8397000 đồng.

Câu 37: Anh An gửi số tiền 50 triệu đồng vào một ngân hàng theo hình thức lãi kép với lãi suất $0,6\%$ /tháng. Sau 6 tháng anh rút về 10 triệu, số tiền còn lại vẫn gửi tiếp với lãi suất như cũ. Hỏi sau một năm anh có số tiền cả gốc lẫn lãi gần nhất với kết quả nào sau đây?

A. $43,7$ triệu. **B.** $44,9$ triệu. **C.** $43,5$ triệu. **D.** 43 triệu.

Câu 38: Bạn Bình được gia đình gửi vào sổ tiết kiệm 200 triệu đồng với lãi suất 0,45% một tháng theo hình thức lãi kép. Nếu mỗi tháng Bình rút ra một số tiền như nhau vào ngày ngân hàng trả lãi thì hàng tháng Bình rút ra số tiền gần nhất với số nào sau đây để đúng 4 năm vừa hết số tiền trong sổ tiết kiệm?

A. 4620000. **B.** 4529000. **C.** 4756000. **D.** 4642000.

Câu 39: Ông Đại mới xin được việc làm nên gửi tiết kiệm vào ngân hàng với hình thức cứ mỗi đầu tháng đóng vào 5 triệu đồng với lãi suất 0,33%/ tháng. Tính số tiền mà ông Đại thu được từ ngân hàng sau 5 năm.

A. 399 triệu đồng. **B.** 365 triệu đồng. **C.** 332 triệu đồng. **D.** 330 triệu đồng.

Câu 40: Ông Bình vay vốn ngân hàng với số tiền 100000000 đồng. Ông dự định sau đúng 5 năm thì trả hết nợ theo hình thức: sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau. Hỏi theo cách đó, số tiền a mà ông sẽ phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết lãi suất hàng tháng là $1,2\%$ và không thay đổi trong thời gian ông hoàn nợ.

A. $a=\dfrac{12.10^5\left(1,012\right)^{59}}{\left(1,012\right)^{60}-1}$ (đồng). **B.** $a=\dfrac{12.10^5\left(1,012\right)^{60}}{\left(1,012\right)^{60}-1}$ (đồng).

C. $a=\dfrac{12.10^6\left(1,012\right)^{60}}{\left(1,012\right)^{60}-1}$ (đồng). **D.** $a=\dfrac{12.10^6\left(1,012\right)^{59}}{\left(1,012\right)^{60}-1}$ (đồng).

Câu 41: Lãi suất cho vay tại PVcomBank trong tháng 5/2022 rất ưu đãi, ở mức 5%/năm, được áp dụng trong 6 tháng đầu, từ tháng thứ 7 trở đi ấn định mức lãi 12%/năm. Tại ngân hàng này, thời hạn cho vay mua nhà tối đa là 20 năm, mức vay tối đa 85% giá trị tài sản đảm bảo (chính là căn nhà muốn mua).

Một người có khả năng trả cố định hằng tháng là 15 triệu. Giả sử người đó có thể mượn người thân 15% giá trị căn nhà, nếu được sử dụng gói vay ở trên với thời hạn tối đa và mức vay tối đa thì có thể mua được căn nhà có giá trị tối đa khoảng

A. $1,213428$ tỷ đồng. **B.** $1,65784$ tỷ đồng. **C.** $2,023572$ tỷ đồng. **D.** $2,542739$ tỷ đồng.

Câu 42: Anh Nam vay tiền ngân hàng 1 tỷ đồng theo phương thức trả góp (chịu lãi số tiền chưa trả) với lãi suất $0,5\%$/ tháng. Nếu cuối mỗi tháng bắt đầu từ tháng thứ nhất anh Nam trả 30 triệu đồng. Hỏi sau bao nhiêu tháng anh Nam trả hết nợ?

A. 35 tháng. **B.** 36 tháng. **C.** 37 tháng. **D.** 38 tháng.

Câu 43: Một người gửi số tiền 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 7%/ năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó lĩnh được số tiền (cả tiền gửi ban đầu lẫn tiền lãi) nhiều hơn 200 triệu đồng, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi suất không đổi?

A. 11 năm. **B.** 12 năm. **C.** 10 năm. **D.** 9 năm.

Câu 44: Một nhóm bạn thực hiện dự án khởi nghiệp làm tinh dầu tự nhiên từ cây xả. Trong bản kế hoạch nhóm đề ra vay ngân hàng 300 triệu đồng theo phương thức trả góp với lãi suất $0,5\%$/ tháng. Nếu cuối mỗi tháng bắt đầu từ tháng thứ chín nhóm bắt đầu trả trả 10 triệu đồng. Hỏi sau bao nhiêu tháng kể từ ngày vay nhóm trả hết nợ?

A. 31. **B.** 30. **C.** 23. **D.** 22.

Câu 45: Anh tài gửi 400 triệu đồng vào ngân hàng A và B theo phương thức lãi kép. Số tiền thứ nhất gửi vào ngân hàng A với lãi suất $2,1\%$ /quý trong thời gian 15 tháng. Số tiền còn lại gửi vào ngân hàng B với lãi suất $0,73\%$ /tháng trong thời gian 9 tháng. Biết tổng số tiền lãi**.** Anh tài nhận được ở hai ngân hàng là $49144986,76$ đồng. Hỏi số tiền Anh tài lần lượt gửi ở hai ngân hàng A và B là bao nhiêu?

A. 120 triệu đồng và 280 triệu đồng. **B.** 160 triệu đồng và 240 triệu đồng.

C. 200 triệu đồng và 200 triệu đồng. **D.** 220 triệu đồng và 180 triệu đồng.

Câu 46: Năm 2023 một hãng xe niêm yết giá bán loại xe X là $750.000.000$ đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán so với giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó, năm 2030 hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là bao nhiêu? *(kết quả làm tròn đến hàng nghìn).*

A. $677.941.000$ đồng. **B.** $638.072.000$ đồng.

C. $664.382.000$ đồng. **D.** $651.094.000$ đồng.

Câu 47: Ông A có 200 triệu đồng gửi tiết kiệm tại ngân hàng với kì hạn 1 tháng so với lãi suất $0,6\%$ trên 1 tháng được trả cuối kì. Sau mỗi kì hạn ông đến tất toán cả gốc lẫn lãi, rút ra 4 triệu đồng để tiêu dùng, số tiền còn lại ông gửi vào ngân hàng theo phương thức trên (phương thức giao dịch và lãi suất không thay đổi trong suốt quá trình gửi). Sau đúng 1 năm (đúng 12 kì hạn) kể từ ngày gửi, ông A tất toán và rút ra toàn bộ số tiền nói trên ở ngân hàng, số tiền đó là bao nhiêu? (làm tròn đến nghìn đông).

A. 165269 (nghìn đông). **B.** 168269 (nghìn đông).

C. 169234 (nghìn đông). **D.** 165288 (nghìn đông).

Câu 48: Bác Bình cần sửa lại căn nhà với chi phí 1 tỷ đồng. Đặt kế hoạch sau 5 năm phải có đủ số tiền trên thì mỗi năm bác Bình cần gửi vào ngân hàng một khoản tiền tiết kiệm như nhau gần nhất bằng giá trị nào sau đây, biết lãi suất của ngân hàng là 7% /năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn.

A. 162 triệu đồng**.** **B.** $162,5$ triệu đồng**.** **C.** $162,2$ triệu đồng**.** **D.** $162,3$ triệu đồng**.**

Câu 49: Anh Bình muốn vay ngân hàng 200 triệu đồng theo phương thức trả góp (trả tiền vào cuối tháng) với lãi suất $0,75\%/$ tháng. Hỏi hàng tháng anh Bình phải trả số tiền là bao nhiêu (làm tròn đến nghìn đồng) để sau đúng hai năm thì trả hết nợ ngân hàng.

A. 9236000. **B.** 9137000. **C.** 9970000. **D.** 9971000.

Dạng 15: Bài toán tăng trưởng

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Ông A bị nhiễm một loại virus nên phải nhập viện và được điều trị ngay lập tức. Kể từ ngày nhập viện, sau mỗi ngày điều trị thì lượng virus trong cơ thể ông A giảm đi 10% so với ngày trước đó. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu ngày thì ông A sẽ được xuất viện, biết rằng ông A được xuất viện khi lượng virus trong cơ thể không quá 30% so với ngày nhập viện?

A. 11 ngày **B.** 12 ngày **C.** 13 ngày **D.** 14 ngày

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2: Các nhà tâm lí học sử dụng mô hình hàm số để mô phỏng quá trình học tập của một học sinh như sau: $f\left(x\right)=K.\left(1-\frac{1}{e^{v.x}}\right)$, trong đó K là tổng số đơn vị kiến thức học sinh phải học, v (kiến thức/ngày) là tốc độ tiếp thu của học sinh, x (ngày) là thời gian học, $f\left(x\right)$ là số đơn vị kiến thức đã học được sau x ngày. Giả sử một học sinh cần phải học 35 đơn vị kiến thức. Biết rằng tốc độ tiếp thu của học sinh này là $v=0,28$. Hỏi học sinh đó sẽ nhớ được bao nhiêu đơn vị kiến thức sau 7 ngày (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

A. 31. **B.** 30. **C.** 26. **D.** 21.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Năm 2022, một hãng công nghệ có 30 triệu người dùng phần mềm của họ. Hãng đặt kế hoạch, tron 3 năm tiếp theo, mỗi năm số lượng người dùng phần mềm tăng 8% so với năm trước và từ năm thứ 4 trở đi, số lượng người dùng phần mềm sẽ tăng 5% so với năm trước đó. Theo kế hoạch đó, hỏi bắt đầu từ năm nào số lượng người dùng phần mềm của hãng sẽ vượt quá 50 triệu người?

A. Năm 2029. **B.** Năm 2028. **C.** Năm 2031. **D.** Năm 2030.

Lời giải

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Dân số thế giới được ước tính theo công thức $P_n = P_0.e^{nr}$, trong đó P_0 là dân số của năm lấy làm mốc, P_n là dân số sau n năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Biết rằng năm 2001 dân số Việt Nam là 76.685.800 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là $1,7\%$. Hỏi cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 115 triệu người.

A. 2023. **B.** 2025. **C.** 2027. **D.** 2020.

Câu 2: Theo dự báo với mức tiêu thụ dầu không đổi như hiện nay thì trữ lượng dầu của một nước sẽ hết sau 50 năm nữa. Nhưng do nhu cầu thực tế nên mức tiêu thụ dầu tăng lên 5% mỗi năm. Giả sử N là số năm tiêu thụ hết số dầu dự trữ đúng với nhu cầu thực tế trên. Tìm giá trị N.

A. 26. **B.** 24. **C.** 25. **D.** 27.

Câu 3: Một điện thoại đang nạp pin, dung lượng pin nạp được tính theo công thức $Q(t) = Q_0.\left(1 - e^{-t\sqrt{2}}\right)$ với t là khoảng thời gian tính bằng giờ và Q_0 là dung lượng nạp tối đa (pin đầy). Hãy tính thời gian nạp pin của điện thoại tính từ lúc cạn hết pin cho đến khi điện thoại đạt được 90% dung lượng pin tối đa (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).

A. $t \approx 1,65$ giờ. **B.** $t \approx 1,61$ giờ. **C.** $t \approx 1,63$ giờ. **D.** $t \approx 1,50$ giờ.

Câu 4: Trong năm đầu tiên đi làm, anh A được nhận lương là 10 triệu đồng mỗi tháng. Cứ hết một năm, anh A lại được tăng lương, mỗi tháng của năm sau tăng 10% so với mỗi tháng của năm trước. Mỗi khi lĩnh lương, anh A đều cất đi phần lương tăng so với năm ngay trước để tiết kiệm mua ô tô. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm thì anh A mua được ô tô giá 500 triệu, biết rằng anh A được gia đình hỗ trợ 50% giá trị chiếc xe?

A. 11. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 13.

Câu 5: Một nghiên cứu cho thấy một nhóm học sinh được xem cùng một danh sách các loài động vật và được kiểm tra lại xem họ nhớ được bao nhiêu % mỗi tháng. Sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh tính theo công thức $M(t) = 75 - 20\ln(t+1), t \geq 0$ (đơn vị %). Hỏi sau khoảng bao lâu thì tỉ số học sinh nhớ được danh sách đó là dưới 10%.

A. Sau khoảng 25 tháng. **B.** Sau khoảng 24 tháng.
C. Sau khoảng 22 tháng. **D.** Sau khoảng 23 tháng.

Câu 6: Khi nuôi một loại virus trong một dưỡng chất đặc biệt sau một khoảng thời gian, người ta nhận thấy số lượng virus có thể được ước lượng theo công thức $m(\mathrm{t}) = m_0.2^{kt}$, trong đó m_0 là số lượng virus (đơn vị "con") được nuôi tại thời điểm ban đầu; k là hệ số đặc trưng của dưỡng chất đã sử dụng để nuôi virus; t là khoảng thời gian nuôi virus (tính bằng phút). Biết rằng sau 2 phút, từ một lượng virus nhất định đã sinh sôi thành đàn 112 con, và sau 5 phút ta có tổng cộng 7168 con virus. Hỏi sau 10 phút trong dưỡng chất này, tổng số virus có được là bao nhiêu con ?

A. 7340032 con. **B.** 874496 con. **C.** 2007040 con. **D.** 4014080 con.

Câu 7: Áp suất không khí P (đo bằng milimet thủy ngân, kí hiệu mmHg) là một đại lượng được tính theo công thức $P = P_0\mathrm{e}^{xi}$ trong đó x là độ cao (đo bằng mét, so với mực nước biển), $P_0 = 760\,\mathrm{mmHg}$ là áp suất ở mực nước biển, i là hệ số suy giảm. Biết rằng, ở độ cao 1000 m thì

áp suất của không khí là 672,72 mmHg. Hỏi áp suất của không khí ở độ cao 15 km gần nhất với số nào trong các số sau?

A. 121. **B.** 122. **C.** 123. **D.** 124.

Câu 8: Sự tăng trưởng của loại vi khuẩn tuân theo công thức $S = Ae^{r.t}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng $(r > 0)$, t là thời gian tăng trưởng. Biết số vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Thời gian để số vi khuẩn tăng gấp đôi số vi khuẩn ban đầu gần nhất với kết quả nào trong các kết quả sau

A. 2 giờ 5 phút. **B.** 3 giờ 15 phút. **C.** 4 giờ 10 phút. **D.** 3 giờ 9 phút.

Câu 9: Với mức tiêu thụ thức ăn của trang trại A không đổi như dự định thì lượng thức ăn dự trữ sẽ đủ cho 100 ngày. Nhưng thực tế, mức tiêu thụ thức ăn tăng thêm 4% mỗi ngày (ngày sau tăng 4% so với ngày trước đó). Hỏi thực tế lượng thức ăn dự trữ đó chỉ đủ dùng cho bao nhiêu ngày?

A. 42. **B.** 40. **C.** 39. **D.** 41.

Câu 10: Gọi $N(t)$ là số phần trăm cacbon 14 còn lại trong một bộ phận của một cây sinh trưởng từ t năm trước đây thì ta có công thức $N(t) = 100.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{A}}(\%)$ với A là hằng số. Biết rằng một mẫu gỗ có tuổi khoảng 3754 năm thì lượng cacbon 14 còn lại là 65%. Phân tích mẫu gỗ từ một công trình kiến trúc cổ, người ta thấy lượng cacbon 14 còn lại trong mẫu gỗ là 79%. Hãy xác định tuổi của mẫu gỗ được lấy từ công trình đó.

A. 2057. **B.** 2020. **C.** 2135. **D.** 2054.

Câu 11: Để đảm bảo điều kiện sinh sống của người dân tại thành phố X, một nhóm các nhà khoa học cho biết với các điều kiện y tế, giáo dục, cơ sở hạ tầng,… của thành phố thì chỉ nên có tối đa 50000 người dân sinh sống. Các nhà khoa học cũng chỉ ra rằng dân số được ước tính theo công thức $S = A.e^{ni}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm, i là tỉ lệ tăng dân số hằng năm. Biết rằng vào đầu năm 2017, thành phố X có 40000 người và tỉ lệ tăng dân số là 1,2%. Hỏi trong năm nào thì dân số thành phố bắt đầu vượt ngưỡng cho phép, biết rằng số liệu chỉ được lấy vào đầu mỗi năm và giả thiết tỉ lệ tăng dân số không thay đổi?

A. 2034. **B.** 2035. **C.** 2036. **D.** 2037.

Câu 12: Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn trong phòng thí nghiệm được tính theo công thức $S(t) = S_0.e^{r.t}$. Trong đó S_0 là số lượng vi khuẩn ban đầu, $S(t)$ là số lượng vi khuẩn có sau t (phút), r là tỷ lệ tăng trưởng $(r > 0), t$ (tính theo phút) là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu có 500 con và sau 5 giờ có 1500 con. Hỏi sau bao nhiêu giờ kể từ lúc ban đầu có 500 con để số lượng vi khuẩn đạt 121500 con?

A. 35 (giờ). **B.** 25 (giờ). **C.** 45 (giờ). **D.** 15 (giờ).

Câu 13: Khối lượng chất đã bị phân rã sau thời gian t được xác định bởi công thức $\Delta m = m_0.\left(1 - 2^{-\frac{t}{T}}\right)$, trong đó: m_0 là khối lượng chất phóng xạ ban đầu; T là chu kỳ bán rã. Một chất phóng xạ có chu kỳ bán rã là 20 phút. Ban đầu một mẫu chất đó có khối lượng là $2 gram.$ Hỏi sau 1 giờ 40 phút, lượng chất còn lại bao nhiêu phần trăm so với ban đầu?

A. $19,37\%$. **B.** $3,125\%$. **C.** $6,25\%$. **D.** $87,05\%$.

Câu 14: Ông Nam gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn một năm, với công thức $C = A(1+r)^n$, lãi suất $r = 12\%$ một năm. Trong đó C là số tiền nhận được (cả gốc lẫn lãi) sau thời gian n năm. Tìm n nguyên dương nhỏ nhất để sau n năm ông Nam nhận được số tiền lãi hơn 40 triệu đồng. (Giả sử rằng lãi suất hằng năm không thay đổi).

A. 5. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 15: Số lượng của loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t) = s(0)2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A có sau t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc bắt đầu, số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con?

A. 48 phút. **B.** 19 phút. **C.** 7 phút. **D.** 12 phút.

Câu 16: Công ty bất động sản Hoàng Thổ đang đầu tư xây dựng và kinh doanh khu nghỉ dưỡng. Công ty dự định tổ chức quảng bá theo hình thức quảng cáo trên truyền hình. Nghiên cứu của công ty cho thấy: nếu cứ sau n lần phát quảng cáo thì tỉ lệ người xem quảng cáo đó tới khu nghỉ dưỡng tuân theo công thức $P(n) = \dfrac{1}{1+65.3^{-0.13n}}$. Hỏi ít nhất cần bao nhiêu lần phát quảng cáo để tỉ lệ người xem tới khu nghỉ dưỡng đạt trên 50%?

A. 30. **B.** 29. **C.** 39. **D.** 31.

Câu 17: Các loài cây xanh trong quá trình quang hợp sẽ nhận được một lượng nhỏ cacbon 14 (một đồng vị của cacbon). Khi một bộ phận của cái cây nào đó bị chết thì hiện tượng quang hợp cũng ngưng và nó sẽ không nhận thêm cacbon 14 nữa. Lượng cacbon 14 của bộ phận đó sẽ phân hủy một cách chậm chạp, chuyển hóa thành nitơ 14. Biết rằng nếu gọi $P(t)$ là số phần trăm cacbon 14 còn lại trong một bộ phận của cái cây sinh trưởng từ t năm trước đây thì $P(t)$ được tính theo công thức $P(t) = 100.(0,5)^{\frac{t}{5750}}\ (\%)$. Phân tích một mẩu gỗ từ một công trình kiến trúc cổ, người ta thấy lượng cacbon 14 còn lại trong mẩu gỗ đó là 60%. Niên đại của công trình kiến trúc đó gần với số nào sau đây nhất? (Giả sử khoảng thời gian từ lúc thu hoạch gỗ đến khi xây dựng công trình đó là không đáng kể).

A. 4238. **B.** 8243. **C.** 3248. **D.** 2483.

Câu 18: Cường độ một trận động đất được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$ độ Richter, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ đo được 8 độ Richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác ở Nhật Bản có cường độ đo được 6 độ Richer. Hỏi trận động đất ở San Francisco có biên độ gấp bao nhiêu lần biên độ trận động đất ở Nhật Bản?

A. 1000 lần. **B.** 10 lần. **C.** 2 lần. **D.** 100 lần.

Câu 19: Giả sử số lượng một bầy ruồi tại thời điểm t được tính theo công thức là $N(t) = N_o.e^{kt}$, trong đó N_o là số lượng bầy ruồi tại thời điểm $t = 0$ và k là hằng số tăng trưởng của bầy ruồi. Biết số lượng bầy ruồi tăng lên gấp đôi sau 9 ngày và biết $N_0 = 100$ con. Hỏi sau bao nhiêu ngày bầy ruồi có 800 con?

A. 27. **B.** 25. **C.** 28. **D.** 26.

Câu 20: Số lượng của một loại vi khuẩn X trong phòng thí nghiệm được tính theo công thức $P(t) = P_0.2^t$, trong đó P_0 là số lượng vi khuẩn ban đầu, $P(t)$ là số lượng vi khuẩn X sau t

phút. Biết sau 2 phút thì số lượng vi khuẩn X là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn X là 10 triệu con

A. 5 phút. **B.** 8 phút. **C.** 7 phút. **D.** 6 phút.

Câu 21: Một công ty khai thác thủy lợi cho biết đã kết thúc đợt xả nước đẩy mặn xuống sông Trà Vinh. Giúp người dân Trà Vinh đảm bào nước sinh hoạt, phục vụ nông nghiệp. Một đợt xả nước x ngày có công suất $86400\sqrt{800-x^2}\left(m^3/ngay\right)$. Để xả $100000000\,m^3$ nước cần ít nhất mấy đợt xả?

A. 1 đợt. **B.** 2 đợt. **C.** 3 đợt. **D.** 4 đợt.

Câu 22: Chu kì bán rã của chất phóng xạ Plutolium ^{239}Pu là 24360 năm (tức là một lượng chất ^{239}Pu sau 24360 năm phân hủy còn một nửa). Sự phân hủy này được tính theo công thức $S=Ae^{-rt}$, trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỉ lệ phân hủy hàng năm, t là thời gian phân hủy, S là lượng còn lại sau thời gian phân hủy t. Hỏi 20 gam ^{239}Pu sau ít nhất bao nhiêu năm thì phân hủy còn 4 gam?

A. 56563 năm. **B.** 56562 năm. **C.** 56561 năm. **D.** 56564 năm.

Câu 23: Trong môi trường nuôi cấy ổn định người ta nhận thấy rằng: cứ sau đúng 5 ngày số lượng loài của vi khuẩn A tăng lên gấp đôi, còn sau đúng 10 ngày số lượng loài của vi khuẩn B tăng lên gấp ba. Giả sử ban đầu có 100 con vi khuẩn A và 200 con vi khuẩn B, hỏi sau bao nhiêu ngày nuôi cấy trong môi trường đó thì số lượng loài vi khuẩn A vượt quá số lượng loại vi khuẩn B, biết rằng tốc độ tăng trưởng của mỗi loài ở mọi thời điểm là như nhau?

A. 26 (ngày). **B.** 23 (ngày). **C.** 25 (ngày). **D.** 24 (ngày).

Câu 24: Cho áp suất không khí P (đo bằng milimet thuỷ ngân, kí hiệu là mmHg) suy giảm mũ so với độ cao x (đo bằng mét), tức P giảm theo công thức $P=P_0\mathrm{e}^{xi}$ trong đó $P_0=760mmHg$ là áp suất ở mực nước biển $\left(x=0\right)$, i là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao $1000m$ thì áp suất của không khí là $672,71mmHg$. Hỏi áp suất không khí ở độ cao $3580m$ gần với số nào sau đây nhất?

A. $491mmHg$. **B.** $490\,mmHg$. **C.** $492\,mmHg$. **D.** $493mmHg$.

Câu 25: Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S_n=S_0.e^{r.n}$, trong đó S_0 là dân số của năm lấy làm mốc, S_n là dân số sau n năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Tính đến đầu năm 2011, dân số toàn tỉnh Bình Phước đạt gần 905300 người, mức tăng dân số là 1,37% mỗi năm. Tỉnh thực hiện tốt chủ trương 100% trẻ em đúng độ tuổi vào lớp 1. Hỏi đến năm học 2024 – 2025 ngành giáo dục của tỉnh cần chuẩn bị ít nhất bao nhiêu phòng học cho học sinh lớp 1, mỗi phòng chỉ dành cho 35 học sinh? Giả sử trong năm sinh của lứa học sinh vào lớp 1 đó toàn tỉnh có 2400 người chết, số trẻ tử vong trước 6 tuổi không đáng kể.

A. 458. **B.** 462. **C.** 459. **D.** 461.

Câu 26: Trong năm đầu tiên đi làm, anh A được nhận lương là 10 triệu đồng mỗi tháng. Cứ hết một năm, anh A lại được tăng lương, mỗi tháng năm sau tăng 12% so với mỗi tháng năm trước. Mỗi khi lĩnh lương anh A đều cất đi phần lương tăng so với năm ngay trước để tiết kiệm mua ô tô. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm thì anh A mua được ô tô giá 500 triệu biết rằng anh A được gia đình hỗ trợ 32% giá trị chiếc xe?

A. 11. **B.** 13. **C.** 10. **D.** 12.

Câu 27: Các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm virus corona kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f\left(t\right)=45t^2-t^3$ với $\left(0\le t\le 25\right)$. Nếu coi $f\left(t\right)$ là một hàm xác định trên

đoạn $[0;25]$ thì hàm $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t. Xác định ngày mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất?

A. 15. **B.** 20. **C.** 10. **D.** 5.

Câu 28: Theo kế hoạch, với mức tiêu thu thức ăn chăn nuôi của trang trại X không đổi theo dự định thì lượng thức ăn dự trữ sẽ đủ dùng trong 365 ngày. Thực tế, 50 ngày đầu mức tiêu thụ thức ăn với ngày sau tăng 5% so với ngày trước, những ngày tiếp theo mức tiêu thụ thức ăn ngày sau tăng 10% so với ngày trước. Hỏi thực tế lượng thức ăn dự trữ đó đủ dùng trong bao nhiêu ngày?

A. 9. **B.** 60. **C.** 8. **D.** 59.

Câu 29: Áp suất không khí P theo công thức $P = P_0.\mathrm{e}^{kx}$ (mmHg), trong đó x là độ cao, $P_0 = 760$ (mmHg) là áp suất không khí ở mức nước biển $(x = 0)$, k là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao 1000 m thì áp suất không khí là $672,71$ (mmHg). Tính áp suất của không khí ở độ cao 4000 m.

A. $466,52$ (mmHg). **B.** $530,23$ (mmHg). **C.** $530,73$ (mmHg). **D.** $545,01$ (mmHg).

Câu 30: Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn tuân theo công thức $S = A.\mathrm{e}^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng, t là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Hỏi số con vi khuẩn sau 10 giờ?

A. 800. **B.** 900. **C.** 950. **D.** 1000.

Câu 31: Một cửa hàng bán lẻ bán 2500 cái tivi mỗi năm. Chi phí gửi trong kho là 10USD một cái một năm. Để đặt hàng nhà sản xuất thì mỗi lần chi phí cố định là 20USD, cộng thêm 9USD mỗi chiếc. Biết rằng số lượng tivi trung bình gửi trong kho bằng một nửa số tivi của mỗi lần đặt hàng. Như vậy cửa hàng nên đặt hàng nhà sản xuất bao nhiêu lần mỗi năm và mỗi lần đặt bao nhiêu cái để chi phí hàng tồn kho là thấp nhất?

A. 20 lần mỗi năm và 90 cái mỗi lần. **B.** 25 lần mỗi năm và 110 cái mỗi lần.
C. 25 lần mỗi năm và 120 cái mỗi lần. **D.** 25 lần mỗi năm và 100 cái mỗi lần.

Câu 32: Một công ty thời trang vừa tung ra thị trường một mẫu quần áo mới và họ tổ chức quảng cáo trên truyền hình mỗi ngày. Một nghiên cứu của một thị trường uy tín cho thấy, nếu sau t lần quảng cáo được phát trên truyền hình thì số phần trăm người xem mua sản phẩm này là: $P = \dfrac{100}{1 + 49.\mathrm{e}^{-0,015t}}(\%)$. Hỏi cần phát quảng cáo trên truyền hình tối thiểu bao nhiêu lần để số người mua sản phẩm đạt hơn 80%?

A. 356 lần. **B.** 348 lần. **C.** 352 lần. **D.** 344 lần.

Câu 33: Ông An gửi 250 triệu đồng ở ngân hàng theo hình thức lãi kép với lãi suất $9,2\%$ /năm. Hỏi sau bao nhiêu năm ông An có số tiền ít nhất là 650 triệu đồng (giả sử lãi suất hàng năm không đổi)?

A. 11. **B.** 10. **C.** 18. **D.** 19.

Câu 34: Gọi $I(t)$ là số ca bị nhiễm bệnh Covid-19 ở quốc gia X sau t ngày khảo sát. Khi đó ta có công thức $I(t) = A.\mathrm{e}^{r_0(t-1)}$ với A là số ca bị nhiễm trong ngày khảo sát đầu tiên, r_0 là hệ số lây nhiễm. Biết rằng ngày đầu tiên khảo sát có 500 ca bị nhiễm bệnh và ngày thứ 10 khảo sát có 1000 ca bị nhiễm bệnh. Hỏi ngày thứ 20 số ca nhiễm bệnh gần nhất với số nào dưới đây, biết rằng trong suốt quá trình khảo sát hệ số lây nhiễm là không đổi?

A. 2000. **B.** 2160. **C.** 2340. **D.** 2520.

Câu 35: Áp suất không khí P (đo bằng milimet thủy ngân, kí hiệu mmHg) theo công thức $P = P_0.e^{kx}$ (mmHg),trong đó x là độ cao (đo bằng mét), $P_0 = 760$ (mmHg) là áp suất không khí ở mức nước biển $(x = 0)$, k là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao 1000 m thì áp suất không khí là $672,71$ (mmHg). Tính áp suất của không khí ở độ cao 3000 m.

A. $527,06$ (mmHg). **B.** $530,23$ (mmHg). **C.** $530,73$ (mmHg). **D.** $545,01$ (mmHg).

Câu 36: Trang trại X dự trữ thức ăn cho cá, với mức tiêu thụ không đổi như dự định thì lượng thức ăn dự trữ đủ cho 90 ngày. Nhưng thực tế, kể từ ngày thứ hai trở đi lượng tiêu thụ thức ăn của cá tăng thêm 3% so với ngày trước đó. Hỏi lượng thức ăn dự trữ của trang trại X thực tế chỉ đủ cho cá trong bao nhiêu ngày?

A. 43 ngày. **B.** 44 ngày. **C.** 31 ngày. **D.** 30 ngày.

Câu 37: Biết rằng vi khuẩn E. coli là vi khuẩn gây tiêu chảy đường ruột, gây đau bụng dữ dội, ngoài ra cứ sau 20 phút thì số lượng vi khuẩn tăng gấp đôi, nghĩa là số lượng tính theo công thức $S = S_0.2^n$, S_0 là số lượng ban đầu, n là số lần nhân đôi. Ban đầu chỉ có 40 con vi khuẩn nói trên trong đường ruột, hỏi sau bao lâu số lượng vi khuẩn là 671088640 con?

A. 24 giờ. **B.** 8 giờ. **C.** 12 giờ. **D.** 48 giờ.

Câu 38: Vào cuối năm 2022, báo Rossiyskaya Gazeta dẫn lời Bộ trưởng Tài nguyên Nga cảnh báo nước này sẽ cạn kiệt dầu mỏ sau 28 năm nữa nếu sản lượng khai thác hằng năm vẫn giữ như năm 2022. Bắt đầu từ năm 2023, nếu nước Nga mỗi năm giảm sản lượng khai thác 2% so với năm trước thì sau bao nhiêu năm nữa nước này cạn kiệt dầu mỏ (chọn phương án có kết quả gần nhất với tính toán của bạn)?

A. 48. **B.** 30. **C.** 42. **D.** 36.

CHƯƠNG 3

HÀM SỐ LŨY THỪA HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

CHỦ ĐỀ 9 LŨY THỪA

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Cho n là một số nguyên dương. Với a là một số thực tùy ý, lũy thừa bậc n của a là tích của n thừa số a $\quad a^n = \underbrace{a.a.....a}_{n}$ (n thừa số)

Ta gọi a là cơ số, n là số mũ của lũy thừa a^n.

Với $a \neq 0, n = 0$ hoặc n là một số nguyên âm thì lũy thừa bậc n của a là số a^n xác định bởi $a^0 = 1; a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$. Chú ý rằng: 0^0 và 0^{-n} không có nghĩa

Cho $a > 0$ và số hữu tỉ $r = \dfrac{m}{n}$; trong đó $m \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{R}, n \geq 2$. Khi đó $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

2. Một số tính chất của lũy thừa

Với $a, b \neq 0$ và $m, n \in \mathbb{Z}$, ta có:

$\oplus \quad a^m.a^n = a^{n+m};$ $\qquad \oplus \quad \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n};$ $\qquad \oplus \quad \left(a^m\right)^n = a^{m.n};$

$\oplus \quad (a.b)^m = a^m.b^m$ $\qquad \oplus \quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m};$ $\qquad \oplus \quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^m;$

$\oplus \quad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}\left(n \in \mathbb{N}^*\right);$ $\qquad \oplus \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\left(a > 0, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*\right)$

Với $a > 1$ thì $a^m > a^n \Leftrightarrow m > n$. Còn với $0 < a < 1$ thì $a^m > a^n \Leftrightarrow m < n$.

Với mọi $0 < a < b$, ta có $a^m < b^m \Leftrightarrow m > 0$; $\quad a^m > b^m \Leftrightarrow m < 0$.

3. Căn bậc n

Định nghĩa: cho số thực b và số nguyên dương $n\left(n \geq 2\right)$. Số a được gọi căn bậc n của số b nếu $a^n = b$. Một số chú ý quan trọng:

- Nếu n lẻ và $a \in \mathbb{R}$ thì có duy nhất một căn bậc n, được kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$.
- Nếu n chẵn thì có các trường hợp sau:
  - Với $a < 0$ thì không tồn tại căn bậc n của a.
  - Với $a = 0$ thì có một căn bậc n của a là số 0.
  - Với $a > 0$ thì có hai căn bậc n là $\pm\sqrt[n]{a}$.

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Với a là số thực dương tùy ý, $\sqrt[3]{a^2}$ bằng:

A. $a^{\frac{1}{6}}$. **B.** a^6. **C.** $a^{\frac{2}{3}}$. **D.** $a^{\frac{3}{2}}$.

Lời giải

Chọn C

Với mọi số thực dương a ta có: $\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}}$.

Câu 2: Với $x>0$ thì $x^{\frac{1}{5}}.\sqrt[3]{x}$ bằng

A. $x^{\frac{16}{15}}$. **B.** $x^{\frac{3}{5}}$. **C.** $x^{\frac{8}{15}}$. **D.** $x^{\frac{1}{15}}$.

Lời giải

Chọn C

Với $x>0$ ta có $x^{\frac{1}{5}}.\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{5}}.x^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{8}{15}}$.

Câu 3: Với a là số thực dương tùy ý, $\sqrt[4]{a^5}$ bằng

A. $a^{\frac{5}{4}}$. **B.** $a^{\frac{4}{5}}$. **C.** a^{20}. **D.** $a^{\frac{5}{2}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}\left(a>0,\ m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}^*\right)$. Suy ra $\sqrt[4]{a^5}=a^{\frac{5}{4}}$.

Câu 4: Cho số thực $a>0$. Biểu thức $P=a.\sqrt[3]{a}$ được viết lại dưới dạng lũy thừa hữu tỉ là:

A. $a^{\frac{2}{3}}$. **B.** a^3. **C.** $a^{\frac{4}{3}}$. **D.** $a^{\frac{1}{3}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $P=a.\sqrt[3]{a}=a.a^{\frac{1}{3}}=a^{1+\frac{1}{3}}=a^{\frac{4}{3}}$.

Câu 5: Biết $9^x+9^{-x}=23$. Tính giá trị của biểu thức $P=3^x+3^{-x}$.

A. 25. **B.** $\sqrt{27}$. **C.** $\sqrt{23}$. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

$P=3^x+3^{-x}\Leftrightarrow P^2=9^x+9^{-x}+2=25\Rightarrow P=5$.

Câu 6: Giá trị của biểu thức $P=\dfrac{2^3.2^{-1}+5^{-3}.5^4}{10^{-3}:10^{-2}-(0,1)^0}$ là

A. 10. **B.** 9. **C.** -10. **D.** -9.

Lời giải

Chọn C

Ta có $P=\dfrac{2^3.2^{-1}+5^{-3}.5^4}{10^{-3}:10^{-2}-(0,1)^0}=\dfrac{2^2+5}{10^{-1}-1}=\dfrac{4+5}{\frac{1}{10}-1}=-10$.

Câu 7: Giá trị của biểu thức $T=\left(2+\sqrt{5}\right)^{2021}\left(\sqrt{5}-2\right)^{2019}$ tương ứng bằng

A. $+\infty$. **B.** $9-\sqrt{45}$. **C.** $9+\sqrt{45}$. **D.** $9+2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $T=\left(2+\sqrt{5}\right)^{2021}.\left(\sqrt{5}-2\right)^{2019}=\left(2+\sqrt{5}\right)^{2019}.\left(\sqrt{5}-2\right)^{2019}.\left(2+\sqrt{5}\right)^{2}$

$=\left[\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)\right]^{2019}.\left(2+\sqrt{5}\right)^{2}=1.\left(2+\sqrt{5}\right)^{2}=9+4\sqrt{5}$.

Câu 8: Với a là số thực dương tuỳ ý, $\sqrt{a^3.\sqrt[4]{a}}$ bằng

A. $a^{\frac{17}{4}}$. **B.** $a^{\frac{13}{6}}$. **C.** $a^{\frac{13}{8}}$. **D.** $a^{\frac{17}{6}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\sqrt{a^3.\sqrt[4]{a}}=\sqrt{a^3.a^{\frac{1}{4}}}=\sqrt{a^{\frac{13}{4}}}=a^{\frac{13}{8}}$.

Câu 9: Cho $9^x+9^{-x}=47$. Khi đó giá trị của biểu thức $P=\dfrac{13+3^x+3^{-x}}{2-3^x-3^{-x}}$ bằng

A. $-\dfrac{5}{2}$. **B.** 2. **C.** -4. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\left(3^x+3^{-x}\right)^2=9^x+9^{-x}+2\Leftrightarrow\left(3^x+3^{-x}\right)^2=49\Leftrightarrow 3^x+3^{-x}=7$.

Do vậy $P=\dfrac{13+3^x+3^{-x}}{2-3^x-3^{-x}}=\dfrac{13+3^x+3^{-x}}{2-\left(3^x+3^{-x}\right)}=\dfrac{13+7}{2-7}=-4$.

Vậy $P=\dfrac{13+3^x+3^{-x}}{2-3^x-3^{-x}}=-4$.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1: Tính, rút gọn, so sánh các số liên quan đến lũy thừa

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

Câu 1: Giá trị $\sqrt[3]{2021}.\sqrt[5]{2021}$ viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ là

A. $2021^{\frac{2}{5}}$. **B.** $2021^{\frac{1}{15}}$. **C.** $2021^{\frac{8}{15}}$. **D.** $2021^{\frac{1}{10}}$

Lời giải

Chọn C

$\sqrt[3]{2021}.\sqrt[5]{2021}=2021^{\frac{1}{3}}.2021^{\frac{1}{5}}=2021^{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}=2021^{\frac{8}{15}}.$

Câu 2: Cho $a=\dfrac{1}{256}$ và $b=\dfrac{1}{27}$. Tính $A=a^{-\frac{3}{4}}+b^{-\frac{4}{3}}$

A. 23. **B.** 89. **C.** 145. **D.** 26.

Lời giải

Chọn C

Thay $a=\dfrac{1}{256}$, $b=\dfrac{1}{27}$ vào $A=a^{-\frac{3}{4}}+b^{-\frac{4}{3}}$ ta được

$A=a^{-\frac{3}{4}}+b^{-\frac{4}{3}}=\left(\dfrac{1}{256}\right)^{-\frac{3}{4}}+\left(\dfrac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}}=\left(4^{-4}\right)^{-\frac{3}{4}}+\left(3^{-3}\right)^{-\frac{4}{3}}=4^3+3^4=145.$

Câu 3: Cho số $x\in\mathbb{N}^*$ và $x\geq 2$. Giá trị của $\sqrt[x]{2021^{x+1}}$ bằng

A. $2021^{\frac{x}{x+1}}$. **B.** 2021. **C.** $2021^{\frac{x+1}{x}}$. **D.** Đáp án khác.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\sqrt[x]{2021^{x+1}}=2021^{\frac{x+1}{x}}$.

Câu 4: Viết biểu thức $P=\sqrt[3]{x.\sqrt[4]{x}}$, $(x>0)$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ

A. $P=x^{\frac{5}{4}}$. **B.** $P=x^{\frac{1}{12}}$. **C.** $P=x^{\frac{1}{7}}$. **D.** $P=x^{\frac{5}{12}}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $P=\sqrt[3]{x.\sqrt[4]{x}}=\sqrt[3]{x.x^{\frac{1}{4}}}=\sqrt[3]{x^{\frac{5}{4}}}=x^{\frac{5}{12}}$.

Câu 5: Cho $4^x+4^{-x}=7$. Biểu thức $P=\dfrac{5+2^x+2^{-x}}{8-4.2^x-4.2^{-x}}$ có giá trị bằng

A. $P=\dfrac{3}{2}$. **B.** $P=-\dfrac{5}{2}$. **C.** $P=2$. **D.** $P=-2$.

Lời giải

Chọn D

$4^x+4^{-x}=7\Leftrightarrow\left(2^x+2^{-x}\right)^2=9\Leftrightarrow 2^x+2^{-x}=3.$

Suy ra $P=\dfrac{5+2^x+2^{-x}}{8-4.2^x-4.2^{-x}}=\dfrac{5+3}{8-12}=-2..$

Câu 6: Cho hai số thực a, b tuỳ ý khác 0 thoả mãn $3^a = 4^b$. Giá trị của $\frac{a}{b}$ bằng

A. $\ln 0,75.$ **B.** $\log_3 4.$ **C.** $\log_4 3.$ **D.** $\ln 12.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $3^a = 4^b \Leftrightarrow \log 3^a = \log 4^b \Leftrightarrow a\log 3 = b\log 4 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{\log 4}{\log 3} = \log_3 4.$

Câu 7: Biết $4^x + 4^{-x} = 14$, tính giá trị của biểu thức $P = 2^x + 2^{-x}$.

A. 4. **B.** 16. **C.** $\sqrt{17}$. **D.** ± 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $4^x + 4^{-x} = 14 \Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 + \left(2^{-x}\right)^2 + 2 = 16 \Leftrightarrow \left(2^x + 2^{-x}\right)^2 = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x + 2^{-x} = 4 \\ 2^x + 2^{-x} = -4 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow 2^x + 2^{-x} = 4$ (vì $2^x + 2^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$).

Vậy $P = 4$.

Câu 8: Cho a là một số thực dương, tính giá trị của biểu thức $P = \left(\sqrt{2^a}\right)^{\frac{4}{a}}$ bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 8. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $P = \left(\sqrt{2^a}\right)^{\frac{4}{a}} = \left(2^{\frac{a}{2}}\right)^{\frac{4}{a}} = 2^{\frac{a}{2}\cdot\frac{4}{a}} = 2^2 = 4.$

Câu 9: Cho $9^x + 9^{-x} = 23$. Khi đó biểu thức $A = \frac{5 + 3^x + 3^{-x}}{1 - 3^x - 3^{-x}} = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a, b \in \mathbb{Z}$.

Tích $a.b$ bằng

A. -10. **B.** 10. **C.** -8. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $9^x + 9^{-x} = 23 \Leftrightarrow \left(3^x + 3^{-x}\right)^2 = 25$

$\Leftrightarrow 3^x + 3^{-x} = 5$ vì $3^x + 3^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow A = \frac{5 + 3^x + 3^{-x}}{1 - 3^x - 3^{-x}} = \frac{5 + 5}{1 - 5} = \frac{-5}{2}.$

Vậy $a.b = -10$.

Câu 10: Cho a là một số thực dương. Giá trị của biểu thức $P = \left(\sqrt{2^a}\right)^{\frac{4}{a}}$ bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 8. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $P = \left(\sqrt{2^a}\right)^{\frac{4}{a}} = \left(2^{\frac{a}{2}}\right)^{\frac{4}{a}} = 2^{\frac{4}{a}\cdot\frac{a}{2}} = 2^2 = 4.$

Câu 11: Cho biểu thức $T=\frac{1}{2^{-x-1}}+3.\sqrt{2}^{2x}-4^{\frac{x-1}{2}}$. Khi $2^x=\sqrt{3}$ thì giá trị của biểu thức T là

A. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{7\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$T=\frac{1}{2^{-x-1}}+3.\sqrt{2}^{2x}-4^{\frac{x-1}{2}}=2^{x+1}+3.\left(\sqrt{2}^2\right)^x-\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{x-1}=2.2^x+3.2^x-\frac{1}{2}.2^x=\frac{9}{2}.2^x=\frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 12: Cho $4^x+4^{-x}=7$. Khi đó biểu thức $P=\frac{5-2^x-2^{-x}}{3+2^{x+1}+2^{1-x}}=\frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ tối giản và $a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{Z}^+$. Tính tổng $a+b$ có giá trị bằng

A. 8. **B.** 11. **C.** 17. **D.** 4.

Lời giải

Ta có: $\left(2^x+2^{-x}\right)^2=4^x+4^{-x}+2.2^x.2^{-x}=7+2=9$. Suy ra: $2^x+2^{-x}=3$.

$$P=\frac{5-2^x-2^{-x}}{3+2^{x+1}+2^{1-x}}=\frac{5-\left(2^x+2^{-x}\right)}{3+2\left(2^x+2^{-x}\right)}=\frac{5-3}{3+2.3}=\frac{2}{9}$$

Suy ra: $a=2$, $b=9\Rightarrow a+b=11$.

Câu 13: Với a là số thực dương, biểu thức $P=a^{\frac{1}{3}}.\sqrt{a}$ bằng

A. $a^{\frac{1}{6}}$. **B.** $a^{\frac{2}{5}}$. **C.** $a^{\frac{5}{6}}$. **D.** $a^{\frac{4}{3}}$.

Lời giải

Chọn C

$P=a^{\frac{1}{3}}.\sqrt{a}=a^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{5}{6}}$.

Câu 14: Cho a,b là các số thực dương, m là một số nguyên và n là một số nguyên dương. Tìm khẳng định **sai**.

A. $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$. **B.** $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[m]{a^n}$. **C.** $\frac{a^m}{b^m}=\left(\frac{a}{b}\right)^m$. **D.** $(ab)^m=a^m.b^m$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

Câu 15: Cho bốn số thực a,b,x,y với a,b là các số thực dương khác 1. Mệnh đề nào đưới dây đúng?

A. $\left(a^x\right)^y=a^{x+y}$. **B.** $a^x.a^y=a^{xy}$. **C.** $(ab)^x=ab^x$. **D.** $\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$.

Lời giải

Chọn D

Câu 16: Với a là số thực dương tùy ý, $\sqrt{\frac{1}{a^3}}$ bằng?

A. a^{-3}. **B.** $a^{\frac{3}{2}}$. **C.** $a^{\frac{1}{6}}$. **D.** $a^{-\frac{3}{2}}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\sqrt{\frac{1}{a^3}}=\left(\frac{1}{a^3}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(a^{-3}\right)^{\frac{1}{2}}=a^{-\frac{3}{2}}$.

Câu 17: Với a là số thực dương tuỳ ý, $\sqrt{a^3}$ bằng

A. $a^{\frac{1}{6}}$. **B.** $a^{\frac{2}{3}}$. **C.** a^6. **D.** $a^{\frac{3}{2}}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\sqrt{a^3}=a^{\frac{3}{2}}$.

Câu 18: Cho a là số thực dương. Giá trị rút gọn của biểu thức $P=a^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}$ bằng:

A. $a^{\frac{2}{3}}$. **B.** a^5. **C.** $a^{\frac{5}{6}}$. **D.** $a^{\frac{1}{6}}$.

Lời giải

Chọn C

$P=a^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}=a^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}=a^{\frac{5}{6}}$.

Câu 19: Cho a là một số thực dương khác 1, biểu thức $a^{\frac{3}{5}}.\sqrt[3]{a}$ viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ là

A. $a^{\frac{14}{15}}$. **B.** $a^{\frac{1}{15}}$. **C.** $a^{\frac{17}{5}}$. **D.** $a^{\frac{2}{15}}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 20: Cho $a>0$, khi đó $\sqrt[4]{a}$ bằng

A. $a^{\frac{1}{4}}$. **B.** a^4. **C.** $\frac{1}{a^4}$. **D.** a^{-4}.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\sqrt[4]{a}=a^{\frac{1}{4}}$.

Câu 21: Giá trị $\sqrt[3]{2021}.\sqrt[5]{2021}$ viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ là

A. $2021^{\frac{2}{5}}$ **B.** $2021^{\frac{1}{15}}$ **C.** $2021^{\frac{8}{15}}$ **D.** $2021^{\frac{1}{10}}$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\sqrt[3]{2021}.\sqrt[5]{2021}=\left(2021\right)^{\frac{1}{3}}.\left(2021\right)^{\frac{1}{5}}=\left(2021\right)^{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}=\left(2021\right)^{\frac{8}{15}}$.

Câu 22: Với a là số thực dương tùy ý, $a^{\frac{5}{3}}$ bằng

A. $\sqrt[5]{a^3}$. **B.** $a^5.a^3$. **C.** $\frac{a^5}{a^3}$. **D.** $\sqrt[3]{a^5}$

Lời giải

Chọn D

Câu 23: Cho a là số thực dương và biểu thức $P = a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $P = a^{\frac{1}{3}}$. **B.** $P = a^{\frac{7}{6}}$. **C.** $P = a^{\frac{5}{6}}$. **D.** $P = a^5$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $P = a^{\frac{2}{3}}.a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{6}}$.

Câu 24: Cho x, y là hai số thực dương khác 1 và m, n là hai số thực tùy ý. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\frac{x^m}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^{m-n}$. **B.** $(xy)^n = x^n.y^n$. **C.** $\left(x^n\right)^m = x^{n.m}$. **D.** $x^n.x^m = x^{n+m}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 25: Cho a là số thực tùy ý khác 0 và 1. Biểu thức $P = \left(a^3\right)^2$ bằng

A. a^6. **B.** a. **C.** a^9. **D.** a^5.

Lời giải

Chọn A

$P = \left(a^3\right)^2 = a^{3.2} = a^6$.

Câu 26: Với α là một số thực bất kỳ, mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\sqrt{10^\alpha} = \left(\sqrt{10}\right)^\alpha$. **B.** $\left(10^\alpha\right)^2 = 10^{\alpha^2}$. **C.** $\left(10^\alpha\right)^2 = (100)^\alpha$. **D.** $\sqrt{10^\alpha} = 10^{\frac{\alpha}{2}}$.

Lời giải

Chọn B

Công thức đúng: $\left(10^\alpha\right)^2 = 10^{2\alpha}$.

Câu 27: Với α là một số thực bất kỳ, mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\left(5^\alpha\right)^2 = 25^\alpha$. **B.** $\left(5^\alpha\right)^2 = 5^{\alpha^2}$. **C.** $\sqrt{5^\alpha} = \left(\sqrt{5}\right)^\alpha$. **D.** $\sqrt{5^\alpha} = 5^{\frac{\alpha}{2}}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\left(5^\alpha\right)^2 = 25^\alpha = 5^{2\alpha}$ và $\sqrt{5^\alpha} = \left(\sqrt{5}\right)^\alpha = 5^{\frac{\alpha}{2}}$.

Câu 28: Cho a là số thực dương. Giá trị của biểu thức $P = a^{\frac{2}{3}}.\sqrt{a}$ bằng

A. $a^{\frac{2}{3}}$. **B.** $a^{\frac{7}{6}}$. **C.** a^5. **D.** $a^{\frac{5}{6}}$.

Lời giải

Chọn B

$P = a^{\frac{2}{3}}.\sqrt{a} = a^{\frac{2}{3}}.a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{6}}$.

Câu 29: Rút gọn biểu thức $P = \frac{x^{\frac{1}{3}}\sqrt[6]{x}}{\sqrt[4]{x}}$, với $x > 0$.

A. $P = \sqrt[4]{x}$. **B.** $P = x^{-\frac{1}{6}}$. **C.** $P = \sqrt{x}$. **D.** $P = x^{\frac{1}{6}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $P=\dfrac{x^{\frac{1}{3}}\sqrt[6]{x}}{\sqrt[4]{x}}=\dfrac{x^{\frac{1}{3}}.x^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{4}}}=x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{4}}=x^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{x}$.

Câu 30: Rút gọn biểu thức $A=x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{x}, x>0$ ta được

A. $A=\sqrt{x}$. **B.** $A=x^{\frac{2}{9}}$. **C.** $A=x^2$. **D.** $A=x^{\frac{81}{}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $A=x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{x}=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$.

Câu 31: Cho $a\neq 1$ là số thực dương. Viết và rút gọn biểu thức $a^{\frac{3}{2022}}\cdot\sqrt[2022]{a}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ. Tìm số mũ của biểu thức rút gọn đó.

A. $\dfrac{1}{1011}$. **B.** $\dfrac{3}{2022^2}$. **C.** $\dfrac{2}{1011}$. **D.** $\dfrac{3}{1011}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $a^{\frac{3}{2022}}\cdot\sqrt[2022]{a}=a^{\frac{3}{2022}}\cdot a^{\frac{1}{2022}}=a^{\frac{3}{2022}+\frac{1}{2022}}=a^{\frac{2}{1011}}$.

Câu 32: Rút gọn biểu thức $P=x^{\frac{2}{5}}.\sqrt[6]{x}$ với $x>0$.

A. $P=x^{\frac{1}{15}}$. **B.** $P=x^{\frac{17}{15}}$. **C.** $P=x^{\frac{17}{30}}$. **D.** $P=\sqrt{x}$.

Lời giải

Chọn C

$P=x^{\frac{2}{5}}.\sqrt[6]{x}=x^{\frac{2}{5}}.x^{\frac{1}{6}}=x^{\frac{2}{5}+\frac{1}{6}}=x^{\frac{17}{30}}$.

Câu 33: Đơn giản biểu thức $P=a^{\sqrt{2}}.\left(\dfrac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1}$ với $a>0$, được kết quả là

A. $a^{\sqrt{2}}$. **B.** $a^{2\sqrt{2}-1}$. **C.** $a^{1-\sqrt{2}}$. **D.** a.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $P=a^{\sqrt{2}}.\left(\dfrac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1}=a^{\sqrt{2}}.\left(a^{-1}\right)^{\sqrt{2}-1}=a^{\sqrt{2}}.a^{-\sqrt{2}+1}=a^{\sqrt{2}-\sqrt{2}+1}=a^1=a$.

Vậy $P=a$.

Câu 34: Viết biểu thức $\sqrt{a}\ (a>0)$ về dạng lũy thừa của a là:

A. $a^{\frac{5}{4}}$. **B.** $a^{\frac{1}{2}}$. **C.** $a^{\frac{1}{4}}$. **D.** $a^{\frac{3}{4}}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}\ (a>0)$.

Câu 35: Với a là số thực dương tùy ý, $a^4.a^{\frac{1}{2}}$ bằng

A. a^8. **B.** a^2. **C.** $a^{\frac{7}{2}}$. **D.** $a^{\frac{9}{2}}$.

Lời giải

Ta có $a^4.a^{\frac{1}{2}} = a^{4+\frac{1}{2}} = a^{\frac{9}{2}}$.

Câu 36: Cho số thực dương a và số nguyên dương n tùy ý. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\sqrt{a^n} = a^{2+n}$. **B.** $\sqrt{a^n} = a^{2n}$. **C.** $\sqrt{a^n} = a^{\frac{2}{n}}$. **D.** $\sqrt{a^n} = a^{\frac{n}{2}}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\sqrt{a^n} = a^{\frac{n}{2}}$.

Câu 37: Giá trị biểu thức $a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{5}{2}}$ với $a > 0$ bằng

A. a^3. **B.** $a^{\frac{5}{4}}$. **C.** a^5. **D.** a^2.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{5}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{5}{2}} = a^3$.

Câu 38: Giả sử a là số thực dương, khác 1. Biểu thức $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$ được viết dưới dạng a^α. Khi đó:

A. $\alpha = \frac{1}{6}$. **B.** $\alpha = \frac{5}{3}$. **C.** $\alpha = \frac{2}{3}$. **D.** $\alpha = \frac{11}{6}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\sqrt{a\sqrt[3]{a}} = \left(a^{1+\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{4}{3}.\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{3}} = a^\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}$.

Câu 39: Với a là số thực dương tùy ý, tích $a^3.a^{\frac{1}{4}}$ bằng:

A. $a^{\frac{3}{4}}$. **B.** $a^{\frac{13}{4}}$. **C.** $a^{\frac{4}{3}}$. **D.** $a^{\frac{11}{4}}$.

Lời giải

Chọn B

Vì a là số thực dương nên $a^3.a^{\frac{1}{4}} = a^{3+\frac{1}{4}} = a^{\frac{13}{4}}$.

Câu 40: Với x là số thực dương lớn tùy ý, $x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{x}$ bằng

A. $x^{\frac{1}{8}}$. **B.** $x^{\frac{2}{9}}$. **C.** $\sqrt{x}$. **D.** x^2.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{3}}.x^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

Câu 41: Với $x \geq 0$ thì $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x^2}}}$ bằng

A. x. **B.** x^2. **C.** $\sqrt{x}$. **D.** x^4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x^2}}}=\sqrt{x\sqrt{x.x}}=\sqrt{x.x}=x$

Câu 42: Với a là số thực dương tùy ý, $a^{\frac{5}{3}}$ bằng

A. $\sqrt[5]{a^3}$. **B.** $\sqrt[3]{a^5}$. **C.** a^8. **D.** a^2.

Lời giải

Chọn B

Với $a>0$ ta có: $a^{\frac{5}{3}}=\sqrt[3]{a^5}$.

Câu 43: Với a là số thực dương tùy ý khi đó $\sqrt{a^2.\sqrt[5]{a}}$ bằng

A. $a^{\frac{11}{10}}$. **B.** $a^{\frac{1}{10}}$. **C.** $a^{\frac{22}{5}}$. **D.** $a^{\frac{10}{11}}$.

Lời giải

Chọn A

Với $a>0$ ta có $\sqrt{a^2.\sqrt[5]{a}}=\sqrt{a^2.a^{\frac{1}{5}}}=\sqrt{a^{\frac{11}{5}}}=a^{\frac{11}{10}}$.

Câu 44: Viết biểu thức $P=\sqrt[3]{x.\sqrt[4]{x}}$ ($x>0$) dưới dạng luỹ thừa với số mũ hữu tỷ.

A. $P=x^{\frac{5}{4}}$. **B.** $P=x^{\frac{1}{12}}$. **C.** $P=x^{\frac{1}{7}}$. **D.** $P=x^{\frac{5}{12}}$.

Lời giải

Chọn D

$P=\sqrt[3]{x.\sqrt[4]{x}}=\sqrt[3]{x.x^{\frac{1}{4}}}=\left(x^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{5}{12}}$.

Câu 45: Cho x là số thực dương. Biết $\sqrt{x.\sqrt[3]{x\sqrt{x\sqrt[3]{x}}}}=x^{\frac{b}{a}}$ với a, b là các số tự nhiên và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+b$.

A. 16. **B.** 15. **C.** 14. **D.** 17.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\sqrt{x.\sqrt[3]{x\sqrt{x\sqrt[3]{x}}}}=\sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt{x.x^{\frac{1}{3}}}}}=\sqrt{x\sqrt[3]{x.x^{\frac{2}{3}}}}=\sqrt{x.x^{\frac{5}{9}}}=x^{\frac{7}{9}}$.

Khi đó $a=7$; $b=7$ nên $a+b=16$.

Câu 46: Cho số thực x và số thực $y\neq 0$ tùy ý. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $(2.7)^x=2^x.7^x$. **B.** $3^x.3^y=3^{x+y}$. **C.** $\left(5^x\right)^y=\left(5^y\right)^x$. **D.** $4^{\frac{x}{y}}=\frac{4^x}{4^y}$.

Lời giải

Chọn D

Mệnh đề sai là $4^{\frac{x}{y}}=\frac{4^x}{4^y}$.

Câu 47: Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{x}$ với $x > 0$.

A. $P = x^{\frac{1}{8}}$. **B.** $P = x^2$. **C.** $P = x^{\frac{2}{9}}$. **D.** $P = \sqrt{x}$.

Lời giải

Chọn D

Với $x > 0$, ta có $P = x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{3}}.x^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}.$

Câu 48: Cho x, y là các số thự **C.** Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $x^2.y^2 = (xy)^2$. **B.** $3^x.3^y = 3^{x+y}$. **C.** $\left(2^x\right)^{2y} = 4^{xy}$. **D.** $2^x.\left(\frac{1}{2}\right)^y = xy$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $x^2.y^2 = (xy)^2$ và $3^x.3^y = 3^{x+y}$ đúng (tính chất).

$\left(2^x\right)^{2y} = 4^{xy}$ đúng, vì $\left(2^x\right)^{2y} = 2^{x.2y} = \left(2^2\right)^{xy} = 4^{xy}$.

$2^x.\left(\frac{1}{2}\right)^y = xy$ sai, vì $2^x.\left(\frac{1}{2}\right)^y = 2^x.2^{-y} = 2^{x-y}$.

Câu 49: Rút gọn biểu thức $P = a\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$, $(a > 0)$ ta được kết quả là

A. $P = a^{\frac{5}{3}}$. **B.** $P = a^6$. **C.** $P = a^{\frac{5}{6}}$. **D.** $P = a^{\frac{10}{3}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $P = a\sqrt{a\sqrt[3]{a}} = a.a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{6}} = a^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}} = a^{\frac{5}{3}}$.

Câu 50: Cho hai số thực dương a, b. Rút gọn biểu thức $A = \dfrac{a^{\frac{1}{4}}\sqrt[3]{b} + b^{\frac{1}{4}}\sqrt[3]{a}}{\sqrt[12]{a} + \sqrt[12]{b}}$ ta thu được $A = a^m.b^n$. Tích của $m.n$ là

A. $\frac{1}{9}$. **B.** $\frac{1}{16}$. **C.** $\frac{1}{18}$. **D.** $\frac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $A = \dfrac{a^{\frac{1}{4}}\sqrt[3]{b} + b^{\frac{1}{4}}\sqrt[3]{a}}{\sqrt[12]{a} + \sqrt[12]{b}} = \dfrac{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}\left(b^{\frac{1}{12}} + a^{\frac{1}{12}}\right)}{\left(a^{\frac{1}{12}} + b^{\frac{1}{12}}\right)} = a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}$

Suy ra $m.n = \frac{1}{4}.\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

Câu 51: Biết biểu thức $P = \sqrt[6]{x^3\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}}$ $(x > 0)$ được viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ là x^α. Khi đó, giá trị của α bằng

A. $\frac{37}{15}$. **B.** $\frac{23}{36}$. **C.** $\frac{23}{30}$. **D.** $\frac{53}{30}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $P=\sqrt[6]{x^3\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}}=\sqrt[6]{x^3\sqrt[3]{x^2.x^{\frac{1}{2}}}}=\sqrt[6]{x^3.x^{\frac{5}{6}}}=x^{\frac{23}{36}}$.

Câu 52: Biết biểu thức $P=\sqrt[6]{x^3\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}}\ (x>0)$ được viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ là x^{α}. Khi đó, giá trị của α bằng

A. $\frac{37}{15}$. **B.** $\frac{23}{36}$. **C.** $\frac{23}{30}$. **D.** $\frac{53}{30}$.

Lời giải

Chọn B

$P=\sqrt[6]{x^3\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}}=x^{\frac{3}{6}+\frac{2}{18}+\frac{1}{36}}=x^{\frac{23}{36}}$.

Câu 53: Đơn giản biểu thức $P=a^{\sqrt{2}}.\left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1}$ với $a>0$, được kết quả là

A. $a^{\sqrt{2}}$. **B.** $a^{2\sqrt{2}-1}$. **C.** $a^{1-\sqrt{2}}$. **D.** a.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $P=a^{\sqrt{2}}.\left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1}=a^{\sqrt{2}}.\left(a^{-1}\right)^{\sqrt{2}-1}=a^{\sqrt{2}}.a^{-\sqrt{2}+1}=a^{\sqrt{2}-\sqrt{2}+1}=a^1=a$.

Vậy $P=a$.

Câu 54: Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^3}},(x>0)$ bằng

A. $y'=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$. **B.** $y'=\frac{7}{6}\sqrt[6]{x}$. **C.** $y'=\frac{6}{7\sqrt[7]{x}}$. **D.** $y'=\sqrt[9]{x}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y=x^{\frac{7}{6}}$

$y'=\frac{7}{6}x^{\frac{1}{6}}=\frac{7}{6}\sqrt[6]{x}$.

Câu 55: Cho x là số thực dương. Biểu thức $\sqrt[4]{x^2\sqrt[3]{x}}$ được viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ là

A. $x^{\frac{12}{7}}$. **B.** $x^{\frac{5}{6}}$. **C.** $x^{\frac{7}{12}}$. **D.** $x^{\frac{6}{5}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\sqrt[4]{x^2\sqrt[3]{x}}=\sqrt[4]{x^2.x^{\frac{1}{3}}}=\sqrt[4]{x^{\frac{7}{3}}}=x^{\frac{7}{12}}$ với $x>0$.

Câu 56: Rút gọn biểu thức $P=x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{\sqrt[3]{x^5}}$ với $x>0$.

A. $P=x^{\frac{2}{9}}$. **B.** $P=x^{\frac{11}{8}}$. **C.** $P=x^2$. **D.** $P=x^{\frac{11}{18}}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $P = x^{\frac{1}{3}}.x^{\frac{5}{18}} = x^{\frac{1}{3}+\frac{5}{18}} = x^{\frac{11}{18}}$.

Câu 57: Cho hàm số $f(a) = \dfrac{a^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{a^{-2}} - \sqrt[3]{a}\right)}{a^{\frac{1}{8}}\left(\sqrt[8]{a^3} - \sqrt[8]{a^{-1}}\right)}$ với $a > 0,\ a \neq 1$. Giá trị của $M = f\left(2021^{2022}\right)$ là

A. 2021^{1011} **B.** $2021^{1011}+1$ **C.** $-2021^{1011}+1$ **D.** $-2021^{1011}-1$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f(a) = \dfrac{a^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{a^{-2}} - \sqrt[3]{a}\right)}{a^{\frac{1}{8}}\left(\sqrt[8]{a^3} - \sqrt[8]{a^{-1}}\right)} = \dfrac{a^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{-2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{8}}\left(a^{\frac{3}{8}} - a^{\frac{1}{8}}\right)} = \dfrac{1-a}{a^{\frac{1}{2}}-1} = \dfrac{-\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)}{a^{\frac{1}{2}}-1} = -a^{\frac{1}{2}}-1$

Khi đó $M = f\left(2021^{2022}\right) = -\left(2021^{2022}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 = -2021^{1011} - 1$.

Câu 58: Cho a là số thực dương. Rút gọn biểu thức $A = a\sqrt{a^3\sqrt{a\sqrt{a}}}$ về dạng $a^{\frac{m}{n}}$ trong đó $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản và $m, n \in \mathbb{N}^*$. Tính giá trị của biểu thức $T = m^2 + n^2$.

A. 2425. **B.** 539. **C.** 593. **D.** 1369.

Lời giải

Chọn C

Ta có $A = a\sqrt{a^3\sqrt{a\sqrt{a}}} = a.a^{\frac{3}{2}}.a^{\frac{1}{4}}.a^{\frac{1}{8}} = a^{1+\frac{3}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} = a^{\frac{23}{8}}$

$\Rightarrow m = 23; n = 8$

$\Rightarrow T = m^2 + n^2 = 23^2 + 8^2 = 593$.

Câu 59: Rút gọn biểu thức $A = \dfrac{\sqrt[3]{a^5}.a^{\frac{7}{3}}}{a^4.\sqrt[7]{a^{-2}}}$ với $a > 0$ ta được kết quả $A = a^{\frac{m}{n}}$, trong đó $m, n \in \mathbb{N}^*$ và $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $3m^2 - 2n = 2$. **B.** $m^2 + n^2 = 43$. **C.** $2m^2 + n = 15$. **D.** $m^2 + n^2 = 25$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$A = \frac{\sqrt[3]{a^5}.a^{\frac{7}{3}}}{a^4.\sqrt[7]{a^{-2}}} = \frac{a^{\frac{5}{3}}.a^{\frac{7}{3}}}{a^4.a^{\frac{-2}{7}}} = \frac{a^{\frac{5}{3}+\frac{7}{3}}}{a^{4-\frac{2}{7}}} = \frac{a^4}{a^{\frac{26}{7}}} = a^{4-\frac{26}{7}} = a^{\frac{2}{7}} \Rightarrow m = 2; n = 7 \Rightarrow 2m^2 + n = 15.$$

Câu 60: Với x là số thực dương tùy ý, $x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{x}$ bằng

A. $x^{\frac{1}{8}}$. **B.** x^2. **C.** $\sqrt{x}$. **D.** $x^{\frac{2}{9}}$.

Lời giải

Chọn C

Với x là số thực dương tùy ý, ta có $x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{3}}.x^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = x^{\frac{9}{18}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

Câu 61: Cho a,b là hai số thực dương và x,y là hai số thực bất kì. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $a^{x+y}=a^x+a^y$. **B.** $\left(a+b\right)^x=a^x+b^x$. **C.** $\left(\frac{a}{b}\right)^x=a^x\cdot b^{-x}$. **D.** $a^x\cdot b^y=\left(ab\right)^{xy}$.

Lời giải

Chọn C

Theo công thức $\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x}=a^x\cdot b^{-x}$.

Câu 62: Cho $a>0$. Biểu thức $P=a^{\frac{4}{3}}:\sqrt[3]{a}$ bằng

A. $a^{\frac{4}{9}}$. **B.** a. **C.** a^4. **D.** $x^{-\frac{5}{3}}$.

Lời giải

Chọn B

Với $a>0$ ta có: $P=a^{\frac{4}{3}}:\sqrt[3]{a}=a^{\frac{4}{3}}:a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}=a$.

Câu 63: Cho $4^x+4^{-x}=7$. Biểu thức $P=\frac{5+2^x+2^{-x}}{8-4.2^x-4.2^{-x}}$ có giá trị bằng

A. $P=\frac{3}{2}$. **B.** $P=-\frac{5}{2}$. **C.** $P=2$. **D.** $P=-2$.

Lời giải

Chọn D

Có $4^x+4^{-x}=7\Leftrightarrow\left(2^x+2^{-x}\right)^2-2\left(2^x.2^{-x}\right)=7\Leftrightarrow\left(2^x+2^{-x}\right)^2-2=7\Leftrightarrow\left(2^x+2^{-x}\right)^2=9$

$\Leftrightarrow 2^x+2^{-x}=3$.

Khi đó: $P=\frac{5+2^x+2^{-x}}{8-4.2^x-4.2^{-x}}=\frac{5+\left(2^x+2^{-x}\right)}{8-4.\left(2^x+2^{-x}\right)}=\frac{5+3}{8-4.3}=-2$.

Câu 64: Viết biểu thức $P=\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x}}\left(x>0\right)$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ.

A. $P=x^{\frac{5}{4}}$. **B.** $P=x^{\frac{1}{12}}$. **C.** $P=x^{\frac{1}{7}}$. **D.** $P=x^{\frac{5}{12}}$.

Lời giải

Chọn D

$P=\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x}}=\left(x.x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(x^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{5}{12}}$.

Câu 65: Cho a là số thực dương và m,n là các số thực tùy ý. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a^m.a^n=a^m+a^n$. **B.** $a^m.a^n=\left(a^m.a\right)^n$. **C.** $a^m.a^n=a^{m+n}$. **D.** $a^m.a^n=a^{mn}$.

Lời giải

Chọn C

Theo tính chất lũy thừa ta có **Chọn C**

Câu 66: Cho $a\neq 1$ là số thực dương. Viết và rút gọn biểu thức $a^{\frac{3}{2022}}\cdot\sqrt[2022]{a}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ. Tìm số mũ của biểu thức rút gọn đó.

A. $\frac{1}{1011}$. **B.** $\frac{3}{2022^2}$. **C.** $\frac{2}{1011}$. **D.** $\frac{3}{1011}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $a^{\frac{3}{2022}}\cdot\sqrt[2022]{a}=a^{\frac{3}{2022}}\cdot a^{\frac{1}{2022}}=a^{\frac{3}{2022}+\frac{1}{2022}}=a^{\frac{2}{1011}}$.

Câu 67: Với mọi a,b thỏa mãn $2^a=4.8^b$, khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a=2+3b$. **B.** $a=2b^3$. **C.** $a=4b^3$. **D.** $a=6b$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $2^a=4.8^b=2^2.2^{3b}\Rightarrow a=2+3b$.

Câu 68: Cho m, n là hai số dương không đồng thời bằng 1, biểu thức $\frac{m^{2\sqrt{2}}-n^{2\sqrt{3}}}{\left(m^{\sqrt{2}}-n^{\sqrt{3}}\right)^2}-1$ bằng

A. $\frac{2n^{\sqrt{3}}}{m^{\sqrt{2}}-n^{\sqrt{3}}}$. **B.** $\frac{-2n^{\sqrt{3}}}{m^{\sqrt{2}}-n^{\sqrt{3}}}$. **C.** $\frac{2m^{\sqrt{3}}}{m^{\sqrt{2}}-n^{\sqrt{3}}}$. **D.** $\frac{-2m^{\sqrt{3}}}{m^{\sqrt{2}}-n^{\sqrt{3}}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\frac{m^{2\sqrt{2}}-n^{2\sqrt{3}}}{\left(m^{\sqrt{2}}-n^{\sqrt{3}}\right)^2}-1=\frac{m^{2\sqrt{2}}-n^{2\sqrt{3}}-\left(m^{\sqrt{2}}-n^{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(m^{\sqrt{2}}-n^{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{m^{2\sqrt{2}}-n^{2\sqrt{3}}-m^{2\sqrt{2}}-n^{2\sqrt{3}}+2m^{\sqrt{2}}n^{\sqrt{3}}}{\left(m^{\sqrt{2}}-n^{\sqrt{3}}\right)^2}$

$=\frac{-2n^{\sqrt{3}}+2m^{\sqrt{2}}n^{\sqrt{3}}}{\left(m^{\sqrt{2}}-n^{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{2n^{\sqrt{3}}\left(m^{\sqrt{2}}-n^{\sqrt{3}}\right)}{\left(m^{\sqrt{2}}-n^{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{2n^{\sqrt{3}}}{m^{\sqrt{2}}-n^{\sqrt{3}}}$.

Câu 69: Cho a là số thực dương. Viết và rút gọn biểu thức $a^{\frac{3}{2022}}.\sqrt[2022]{a}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ. Tìm số mũ của biểu thức rút gọn đó

A. $\frac{2}{1011}$. **B.** $\frac{1}{1011}$. **C.** $\frac{3}{1011}$. **D.** $\frac{3}{2022^2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $a^{\frac{3}{2022}}.\sqrt[2022]{a}=a^{\frac{3}{2022}}.a^{\frac{1}{2022}}=a^{\frac{3}{2022}+\frac{1}{2022}}=a^{\frac{2}{1011}}$.

Vậy số mũ của biểu thức rút gọn cần tìm là $\frac{2}{1011}$.

Câu 70: Cho $4^x+4^{-x}=7$. Biểu thức $P=\frac{5+2^x+2^{-x}}{8-4.2^x-4.2^{-x}}$ có giá trị bằng

A. $P=\frac{3}{2}$. **B.** $P=-\frac{5}{2}$. **C.** $P=2$. **D.** $P=-2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $4^x+4^{-x}=7\Leftrightarrow\left(2^x\right)^2+\left(2^{-x}\right)^2=7\Leftrightarrow\left(2^x+2^{-x}\right)^2-2.2^x.2^{-x}=7\Leftrightarrow\left(2^x+2^{-x}\right)^2=9$

Suy ra $2^x+2^{-x}=3\Rightarrow P=\frac{5+3}{8-4.3}=-2$.

Câu 71: Cho x, y là hai số nguyên thỏa mãn: $3^x.6^y = \frac{2^{15}.6^{40}}{9^{50}.12^{25}}$. Tính $x.y$?

A. –445. **B.** –755. **C.** –450. **D.** -425.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $3^x.6^y = \frac{2^{15}.6^{40}}{9^{50}.12^{25}} \Leftrightarrow 3^x.3^y.2^y = \frac{2^{15}.2^{40}.3^{40}}{3^{100}.3^{25}.2^{50}} \Leftrightarrow 3^{x+y}.2^y = 3^{-85}.2^5$

$\Rightarrow \begin{cases} x+y=-85 \\ y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-90 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow xy=-450$

Câu 72: Xét α, β là hai số th,ực bất kì. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $3^\alpha < 3^\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$. **B.** $3^\alpha > 3^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$. **C.** $3^\alpha > 3^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$. **D.** $3^\alpha > 3^\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$.

Lời giải

Chọn B

Câu 73: Nếu $a^{\frac{1}{3}} > a^{\frac{1}{6}}$ và $b^{\sqrt{3}} > b^{\sqrt{5}}$ thì

A. $a<1; 0<b<1$. **B.** $a>1; b<1$. **C.** $0<a<1; b<1$ **D.** $a>1; 0<b<1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\frac{1}{3} > \frac{1}{6}$, lại có $a^{\frac{1}{3}} > a^{\frac{1}{6}} \Rightarrow a > 1$.

Ta có: $\sqrt{3} < \sqrt{5}$, lại có $b^{\sqrt{3}} > b^{\sqrt{5}} \Rightarrow 0 < b < 1$.

Câu 74: Với $a>0$, $b>0, m, n$ là các số thực bất kì, đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\left(a^m\right)^n = a^m.a^n$. **B.** $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. **C.** $a^m.b^m = (ab)^m$. **D.** $a^m.a^n = a^{m+n}$.

Lời giải

Chọn A

$\left(a^m\right)^n = a^{m.n}$

Câu 75: Xét α, β là hai số thực bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $3^\alpha > 3^\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$. **B.** $3^\alpha > 3^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$. **C.** $3^\alpha > 3^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$. **D.** $3^\alpha < 3^\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $3^\alpha > 3^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$.

Câu 76: Cho $a>1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\frac{1}{a^{2016}} < \frac{1}{a^{2017}}$. **B.** $a^{\frac{1}{3}} > \sqrt{a}$. **C.** $a^{-\sqrt{3}} > \frac{1}{a^{\sqrt{5}}}$. **D.** $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a} > 1$.

Lời giải

Chọn C

Vì $a>1$ nên $a^{\sqrt{3}} < a^{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{1}{a^{\sqrt{3}}} > \frac{1}{a^{\sqrt{5}}} \Rightarrow a^{-\sqrt{3}} > \frac{1}{a^{\sqrt{5}}}$.

Câu 77: Cho a,b là 2 số thực khác 0. Biết $\left(\frac{1}{16}\right)^{a^2+ab}=\left(\sqrt[8]{64}\right)^{a^2-7ab}$. Tính tỉ số $\frac{a}{b}$.

A. $\frac{1}{8}$. **B.** 2. **C.** $\frac{5}{19}$. **D.** $\frac{76}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\left(\frac{1}{16}\right)^{a^2+ab}=\left(\sqrt[8]{64}\right)^{a^2-7ab} \Leftrightarrow 4^{-2\left(a^2+ab\right)}=4^{\frac{3}{8}\left(a^2-7ab\right)} \Leftrightarrow 19a^2-5ab=0 \Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{5}{19}$.

CHƯƠNG 3

HÀM SỐ LŨY THỪA HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

CHỦ ĐỀ 9 HÀM SỐ LŨY THỪA

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Hàm số $y = x^{\alpha}$ với $\alpha \in \mathbb{R}$ được gọi là hàm số lũy thừa.

2. Tập xác định

Tập xác định của hàm số $y = x^{\alpha}$ là:

$D = \mathbb{R}$ nếu α là số nguyên dương

$D = \mathbb{R}$ nếu α là số nguyên âm hoặc bằng 0

$D = \mathbb{R}$ nếu α không nguyên

3. Đạo hàm của hàm lũy thừa

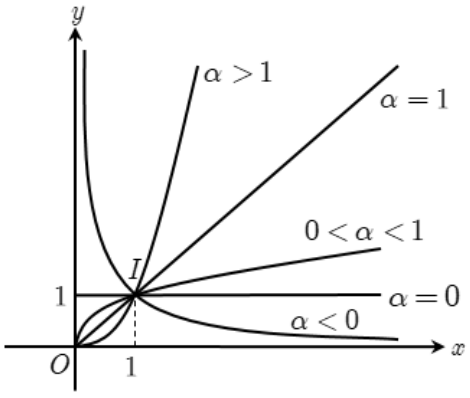
Hàm số $y = x^{\alpha}$ với $\alpha \in \mathbb{R}$ có đạo hàm với mọi $x > 0$ và $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha.x^{\alpha-1}$

Đạo hàm của hàm hợp $\left[u^{\alpha}(x)\right]' = \alpha.u^{\alpha-1}(x).u(x)$

4. Tính chất và đồ thị của hàm lũy thừa

Đồ thị hàm số $y = x^{\alpha}$ với $(a < 0)$ nhận Ox làm tiệm cận ngang, nhận Oy làm tiệm cận đứng.

Khi $a > 0$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận.



Đồ thị của hàm số lũy thừa $y = x^{\alpha}$ luôn đi qua điểm $I(1;1)$.

Lưu ý: Khi khảo sát hàm số lũy thừa với số mũ cụ thể, ta phải xét hàm số đó trên toàn bộ tập xác định của nó. Chẳng hạn: $y = x^3$, $y = x^{-2}$, $y = x^{\pi}$.

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Tập xác định của hàm số $y=(x-1)^{\sqrt{3}}$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x-1>0\Leftrightarrow x>1$. Vậy tập xác định của hàm số $y=(x-1)^{\sqrt{3}}$ là $(1;+\infty)$.

Câu 2: Hàm số $y=(x-1)^{\frac{1}{3}}$ có tập xác định là

A. $[1;+\infty)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Vì $\frac{1}{3}$ là số không nguyên nên hàm số $y=(x-1)^{\frac{1}{3}}$ xác định khi và chỉ khi $x-1>0\Leftrightarrow x>1$.

Vậy hàm số $y=(x-1)^{\frac{1}{3}}$ có tập xác định là $(1;+\infty)$.

Câu 3: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^3}}$, $(x>0)$.

A. $y'=\frac{7}{6}\sqrt[6]{x}$. **B.** $y'=\frac{6}{7\sqrt[7]{x}}$. **C.** $y'=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$. **D.** $y'=\sqrt[9]{x}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=\left(\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^3}}\right)'=\left(x^{\frac{7}{6}}\right)'=\frac{7}{6}x^{\frac{1}{6}}=\frac{7}{6}\sqrt[6]{x}$.

Câu 4: Tập xác định của hàm số $y=(x^2-2x-3)^{-4}$ là

A. $D=\mathbb{R}$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;3\}$. **C.** $D=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$. **D.** $D=(-1;3)$.

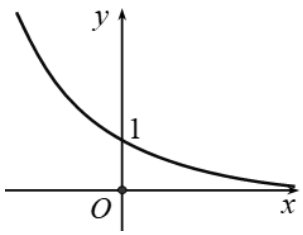
Lời giải

Chọn B

Hàm số xác định khi $x^2-2x-3\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -1\\ x\neq 3\end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số $y=(x^2-2x-3)^{-4}$ là $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;3\}$.

Câu 5: Cho đồ thị hàm số $y=(a-1)^x$ như hình vẽ dưới.



Hệ số thực a nằm trong khoảng:

A. $(0;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Nhìn vào đồ thị ta có: hàm số $y=(a-1)^x$ nghịch biến trên R nên $0<a-1<1\Leftrightarrow 1<a<2$

Câu 6: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\left(x^2-3x-4\right)^{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

A. $D=(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$. **B.** $D=(-\infty;-1]\cup[4;+\infty)$

C. $D=\mathbb{R}$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;4\}$.

Lời giải

Chọn B

Vì $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ không nguyên nên để hàm số xác định khi

$x^2-3x-4>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>4\\x<-1\end{array}\right.\Rightarrow D=(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$.

Câu 7: Đạo hàm của hàm số $y=\left(x^2+x+1\right)^{\frac{1}{3}}$

A. $y'=\dfrac{2x+1}{3\sqrt[3]{\left(x^2+x+1\right)^2}}$. **B.** $y'=\dfrac{1}{3}\left(x^2+x+1\right)^{\frac{1}{3}}$.

C. $y'=\dfrac{2x+1}{2\sqrt[3]{x^2+x+1}}$. **D.** $y'=\dfrac{1}{3}\left(x^2+x+1\right)^{\frac{2}{3}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=\dfrac{1}{3}\left(x^2+x+1\right)^{\frac{1}{3}-1}.\left(x^2+x+1\right)'=\dfrac{1}{3}\left(x^2+x+1\right)^{-\frac{2}{3}}(2x+1)=\dfrac{2x+1}{3\sqrt[3]{\left(x^2+x+1\right)^2}}$.

Câu 8: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[0;2020]$ để tập xác định của hàm số $y=\left(6-x-x^2\right)^{\frac{m}{3}}$ chỉ chứa hữu hạn các biến nguyên x. Số phần tử của tập S là:

A. 2021. **B.** 1347. **C.** 674. **D.** 1011.

Lời giải

Chọn B

Trường hợp 1: $\dfrac{m}{3}\in\mathbb{Z}^+$ thì hàm số xác định khi $6-x-x^2$ xác định, suy ra: có vô số biến nguyên x thỏa mãn. Loại trường hợp này.

Trường hợp 2: $\dfrac{m}{3}\in\mathbb{Z}^-$ hoặc $\dfrac{m}{3}=0$ thì hàm số xác định khi $6-x-x^2\neq 0$, suy ra: có vô số biến nguyên x thỏa mãn. Loại trường hợp này.

Trường hợp 3: $\dfrac{m}{3}\notin\mathbb{Z}$ thì hàm số xác định khi $6-x-x^2>0\Leftrightarrow -3<x<2$ hay có đúng 4 biến nguyên x thuộc tập xác định của hàm số.

Vậy m không chia hết cho 3.

Mà $m\in[0;2020]$ nên $m\in\{1;2;4;5;...;2017;2018;2020\}$ hay có 1347 giá trị nguyên m.

Câu 9: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-2021;2021)$ để hàm số $y=\left(x^2-2x-m+1\right)^{\sqrt{7}}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$?

A. 4039. **B.** 2020. **C.** 2021. **D.** 4038.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=\left(x^2-2x-m+1\right)^{\sqrt{7}}$ có tập xác định là $\mathbb{R}\Leftrightarrow x^2-2x-m+1>0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m<\left(x+1\right)^2,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m<\min\limits_{x\in\mathbb{R}}\left(x+1\right)^2\Leftrightarrow m<0$.

Mà $\begin{cases}m\in\mathbb{Z}\\ m\in(-2021;2021)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m\in\mathbb{Z}\\ m\in(-2021;0)\end{cases}$. Do đó, có 2020 giá trị m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 10: Cho x,y là hai số thực dương thỏa mãn $\left(\mathrm{e}^x+\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)^y\le\left(\mathrm{e}^y+\frac{1}{\mathrm{e}^y}\right)^x$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x-2y}{6(x+y)}-\frac{x+y}{\sqrt{x^2-xy+y^2}}$.

A. $\min P=-\frac{25}{12}$. **B.** $\min P=-\frac{12}{5}$. **C.** $\min P=-2$. **D.** $\min P=-\frac{19}{9}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$\left(\mathrm{e}^x+\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)^y\le\left(\mathrm{e}^y+\frac{1}{\mathrm{e}^y}\right)^x\Leftrightarrow\ln\left(\mathrm{e}^x+\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)^y\le\ln\left(\mathrm{e}^y+\frac{1}{\mathrm{e}^y}\right)^x\Leftrightarrow y\ln\left(\mathrm{e}^x+\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)\le x\ln\left(\mathrm{e}^y+\frac{1}{\mathrm{e}^y}\right)$

$\Leftrightarrow\frac{1}{x}\ln\left(\mathrm{e}^x+\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)\le\frac{1}{y}\ln\left(\mathrm{e}^y+\frac{1}{\mathrm{e}^y}\right)\Leftrightarrow f(x)\le f(y)$

với $f(t)=\frac{1}{t}\ln\left(\mathrm{e}^t+\frac{1}{\mathrm{e}^t}\right)=\frac{1}{t}\left(\ln\left(\mathrm{e}^{2t}+1\right)-t\right)=\frac{1}{t}\ln\left(\mathrm{e}^{2t}+1\right)-1,t>0$.

$f'(t)=-\frac{1}{t^2}\ln\left(\mathrm{e}^{2t}+1\right)+\frac{1}{t}.\frac{2.\mathrm{e}^{2t}}{\mathrm{e}^{2t}+1}=\frac{1}{t}\left(-\frac{1}{t}\ln\left(\mathrm{d}u^{2t}+1\right)+\frac{2\mathrm{e}^{2t}}{\mathrm{e}^{2t}+1}\right)$.

Ta chứng minh $-\frac{1}{t}\ln\left(\mathrm{e}^{2t}+1\right)+\frac{2.\mathrm{e}^{2t}}{\mathrm{e}^{2t}+1}<0\ (1),\forall t>0$

Thật vậy, ta có $(1)\Leftrightarrow\frac{2\mathrm{e}^{2t}}{\mathrm{e}^{2t}+1}<\frac{1}{t}\ln\left(\mathrm{e}^{2t}+1\right)\Leftrightarrow 2t.\mathrm{d}u^{2t}<\left(\mathrm{e}^{2t}+1\right).\ln\left(\mathrm{e}^{2t}+1\right)\ (2)$.

Vì $\mathrm{e}^{2t}<\mathrm{e}^{2t}+1,\forall t>0$ và $\ln\left(\mathrm{e}^{2t}+1\right)>\ln\left(\mathrm{e}^{2t}\right)=2t,\forall t>0$

Suy ra (2) đúng với mọi số thực t dương. Suy ra $f'(t)<0,\forall t>0$.

Suy ra hàm số $y=f(t)$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$. Suy ra $x\ge y$. Suy ra $\frac{x}{y}\ge 1$.

Ta có $P=\frac{\frac{x}{y}-2}{6\left(\frac{x}{y}+1\right)}-\frac{\frac{x}{y}+1}{\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2-\frac{x}{y}+1}}=\frac{u-2}{6(u+1)}-\frac{u+1}{\sqrt{u^2-u+1}}$ với $u=\frac{x}{y}\ge 1$.

Xét hàm số $g(u)=\frac{u-2}{6(u+1)}-\frac{u+1}{\sqrt{u^2-u+1}}, u\ge 1.$

$$g'(u)=\frac{1}{2(u+1)^2}-\frac{\sqrt{u^2-u+1}-(u+1)\frac{2u-1}{2\sqrt{u^2-u+1}}}{u^2-u+1}$$

$$=\frac{1}{2(u+1)^2}+\frac{3u-3}{2(u^2-u+1)\sqrt{u^2-u+1}}>0, \forall u\ge 1$$

Suy ra hàm số g đồng biến trên $[1;+\infty)$. Suy ra $\min P=\min\limits_{[1;+\infty)} g(u)=g(1)=-\frac{25}{12}$.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 2: Hàm số lũy thừa

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

Câu 1: Tập xác định của hàm số $y=(x-2)^{\pi}$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Vì $\pi\notin\mathbb{Z}$ nên hàm số $y=(x-2)^{\pi}$ xác định khi $x-2>0\Leftrightarrow x>2$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $(2;+\infty)$.

Câu 2: Tập xác định của hàm số $f(x)=(x-1)^{-3}$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $4+\log_4 a$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định của hàm số $f(x)=(x-1)^{-3}$ là $x-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1$.

Vậy tập xác định của hàm số $f(x)=(x-1)^{-3}$ là $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Câu 3: Tập xác định của hàm số $y=(x-1)^{\pi}$ là

A. $D=(0;+\infty)$. **B.** $D=(1;+\infty)$. **C.** $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **D.** $D=\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=(x-1)^{\pi}$ xác định khi và chỉ khi $x-1>0\Leftrightarrow x>1$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(1;+\infty)$.

Câu 4: Tìm tập xác định của hàm số $y=x^{\sqrt{7}}$.

A. $\mathbb{R}$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Lý thuyết.

Câu 5: Tìm tập xác định D của hàm số $(x-5)^{\sqrt{3}}$.

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{5\}$. **B.** $D=(-\infty;5)$. **C.** $D=[5;+\infty)$. **D.** $D=(5;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định: $x-5>0\Leftrightarrow x>5$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(5;+\infty)$.

Câu 6: Tập xác định của hàm số $y=(x^2-x-2)^{-5}$ là

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;2\}$. **B.** $D=(0;+\infty)$.

C. $D=(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$. **D.** $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x^2-x-2\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -1\\ x\neq 2\end{cases}$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;2\}$.

Câu 7: Tập xác định của hàm số $y=(x-2)^{\sqrt{3}}$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $x-2>0\Leftrightarrow x>2$.

Tập xác định: $D=(2;+\infty)$.

Câu 8: Tập xác định của hàm số $y=(x-2)^{\frac{2}{3}}$ là

A. $D=(2;+\infty)$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **C.** $D=\mathbb{R}$. **D.** $D=[2;+\infty)$

Lời giải

Điều kiện xác định: $x-2>0\Leftrightarrow x>2$

Vậy $D=(2;+\infty)$.

Câu 9: Tập xác định của hàm số $y=(x^2-3x)^{-5}$ là:

A. $(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{0;3\}$. **D.** $[0;3]$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện xác định của hàm số: $x^2-3x\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 3\\ x\neq 0\end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số $y=(x^2-3x)^{-5}$ là $\mathbb{R}\setminus\{0;3\}$.

Câu 10: Tìm tập xác định D của hàm số $y=(x^2-2x+1)^{\frac{1}{3}}$

A. $D=(0;+\infty)$. **B.** $D=\mathbb{R}$. **C.** $D=(1;+\infty)$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định khi $x^2-2x+1>0\Leftrightarrow x\neq 1$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Câu 11: Tập xác định của hàm số $y=(x^2-6x+8)^{-3}$

A. $(-\infty;2)\cup(4;+\infty)$. **B.** $(2;4)$. **C.** $D=\mathbb{R}\setminus\{2;4\}$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiên xác định: $x^2-6x+8\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 2\\ x\neq 4\end{cases}$.

Vậy TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{2;4\}$.

Câu 12: Điều kiện xác định của hàm số $y=\left(x^2-4\right)^{-2}$ là

A. $x\neq 2$. **B.** $x\neq\pm 2$. **C.** $x\neq -2$. **D.** $|x|>2$.

Lời giải

Chọn B

Vì hàm số $y=\left(x^2-4\right)^{-2}$ có số mũ nguyên âm nên điều kiện xác định của hàm số là:

$x^2-4\neq 0\Leftrightarrow x\neq\pm 2$.

Câu 13: Tập xác định của hàm số $y=(x-1)^{\frac{1}{5}}$ là

A. $(0;+\infty)$. **B.** $[1;+\infty)$. **C.** $(1:+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}$

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định khi $x-1>0\Leftrightarrow x>1$.

Câu 14: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\left(x^2-2x+1\right)^{\frac{1}{3}}$

A. $D=(0;+\infty)$. **B.** $D=\mathbb{R}$. **C.** $D=(1;+\infty)$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định khi $x^2-2x+1>0\Leftrightarrow x\neq 1.$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Câu 15: Trên khoảng $(-1;+\infty)$ thì đạo hàm của hàm số $y=(x+1)^{\frac{4}{3}}$ là

A. $y'=\frac{4}{3}(x+1)^{\frac{1}{3}}$ **B.** $y'=\frac{4}{3}(x+1)^{\frac{4}{3}}$ **C.** $y'=\frac{3}{7}(x+1)^{\frac{7}{3}}$ **D.** $y'=\frac{3}{4}(x+1)^{-\frac{1}{3}}$

Lời giải

Chọn A

Với $x\in(-1;+\infty)\Rightarrow x+1>0$ do đó: $y'=\left[(x+1)^{\frac{4}{3}}\right]'=\frac{4}{3}(x+1)^{\frac{1}{3}}$

Câu 16: Tập xác định của hàm số $y=\left(x^3-27\right)^{\frac{\pi}{3}}$ là

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{3\}$. **B.** $D=[3;+\infty)$. **C.** $D=(3;+\infty)$. **D.** $D=\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

ĐKXĐ: $x^3-27>0\Leftrightarrow x>3\Rightarrow D=(3;+\infty)$.

Câu 17: Tập xác định của hàm số $y=x^{2\sin\frac{\pi}{6}}$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y = x^{2\sin\frac{\pi}{6}} = x$ với số mũ 1 nguyên dương nên tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

Câu 18: Tập xác định của hàm số $y = (x-1)^{\frac{1}{2}}$ là

A. $(0;+\infty)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $[1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Phương pháp: hàm số $y = x^{\alpha}$, với α không nguyên xác định khi $x > 0$.

Điều kiện xác định của hàm số $y = (x-1)^{\frac{1}{2}}$ là $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Vậy tập xác định của hàm số: $D = (1;+\infty)$.

Câu 19: Tập xác định của hàm số $y = (x-1)^{\sqrt{2}}$ là:

A. $D = (-\infty;1)$. **B.** $D = \mathbb{R}$. **C.** $D = (1;+\infty)$. **D.** $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Lời giải

Hàm số $y = (x-1)^{\sqrt{2}}$ có số mũ không nguyên nên hàm số có nghĩa khi và chỉ khi $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Vậy: tập xác định $D = (1;+\infty)$

Câu 20: Tập xác định của hàm số $y = (1-3x)^{\sqrt{2022}}$ là

A. $(0;+\infty)$. **B.** $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$. **D.** $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = (1-3x)^{\sqrt{2022}}$ xác định khi và chỉ khi $1-3x > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} > x.$

Câu 21: Tìm tập xác định của hàm số $y = (x^3 - 27)^{\frac{\pi}{3}}$ là

A. $D = \mathbb{R}\setminus\{3\}$. **B.** $D = [3;+\infty)$. **C.** $D = (3;+\infty)$. **D.** $D = \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện xác định: $x^3 - 27 > 0 \Leftrightarrow x > 3$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (3;+\infty)$.

Câu 22: Tập xác định của hàm số $y = (9x^2 - 1)^{\frac{1}{5}}$ là

A. $D = \left(-\infty;\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3};+\infty\right)$. **B.** $D = \left(-\infty;\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3};+\infty\right)$.

C. $D = \left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. **D.** $D = \mathbb{R}\setminus\left\{\pm\frac{1}{3}\right\}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y=\left(9x^2-1\right)^{\frac{1}{5}}$ xác định khi và chỉ khi : $9x^2-1>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-\dfrac{1}{3} \\ x>\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)$.

Câu 23: Hàm số $y=\left(2x+1\right)^{2\frac{1}{2}}$ có tập xác định là:

A. $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$. **D.** $\varnothing$.

Lời giải

Chọn A

Vì $2\dfrac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$ nên $2x+1>0\Leftrightarrow x>-\dfrac{1}{2}$.

Câu 24: Tập xác định của hàm số $y=\left(x^2-12x+36\right)^{\frac{1}{2}}$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $\left(6;+\infty\right)$. **C.** $[6;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{6\}$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định $\Leftrightarrow x^2-12x+36>0\Leftrightarrow x\neq 6$

Câu 25: Tập xác định của hàm số $y=\left(2x-3\right)^{2022}$ là

A. $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$. **D.** $\left(0;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B

Do 2022 là số nguyên, dương nên hàm số thỏa mãn với mọi x.

Câu 26: Tập xác định của hàm số $y=\left(x-2021\right)^{\frac{2019}{2021}}$ là

A. $\left(-2021;+\infty\right)$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\left\{2021\right\}$. **C.** $\left(2021;+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;2021\right)$.

Lời giải

Chọn C

Vì $\dfrac{2019}{2021}\notin\mathbb{Z}$ nên hàm số $y=\left(x-2021\right)^{\frac{2019}{2021}}$ xác định khi $x-2021>0\Leftrightarrow x>2021$.

Vậy $D=\left(2021;+\infty\right)$.

Câu 27: Tập xác định của hàm số $y=\left(x+1\right)^{\frac{1}{5}}$ là

A. $\left(-1;+\infty\right)$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\left\{-1\right\}$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}$. **D.** $\left(0;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số đã cho là hàm số luỹ thừa với số mũ không nguyên nên hàm số xác định $\Leftrightarrow x+1>0\Leftrightarrow x>-1$.

Câu 28: Tập xác định D của hàm số $y=(x-2)^2(x-1)^{\frac{1}{5}}$

A. $D=(-\infty;1)$. **B.** $D=(1;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **D.** $D=\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện

$x-1>0\Leftrightarrow x>1$

Câu 29: Tập xác định của hàm số $y=\left(x^3-27\right)^{\frac{\pi}{4}}$ là

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{3\}$. **B.** $D=(3;+\infty)$. **C.** $D=[3;+\infty)$. **D.** $D=\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn B

ĐKXĐ: $x^3-27>0\Leftrightarrow x^3>27\Leftrightarrow x^3>3^3\Leftrightarrow x>3$.

Vậy tập xác định của hàm số $y=\left(x^3-27\right)^{\frac{\pi}{4}}$ là $D=(3;+\infty)$.

Câu 30: Tập xác định của hàm số $y=(x-2)^{\sqrt{2022}}$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **C.** $[2;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Câu 31: Điều kiện xác định của hàm số $y=(x-2)^{\sqrt{2}}$ là

A. $x\geq 2$. **B.** $x>2$. **C.** $x\neq 2$. **D.** $x<2$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định của hàm số là $x-2>0\Leftrightarrow x>2$.

Câu 32: Tập xác định của hàm số $y=\left(x^2-12x+36\right)^{\frac{1}{2}}$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $(6;+\infty)$. **C.** $[6;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{6\}$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=\left(x^2-12x+36\right)^{\frac{1}{2}}$ xác định khi

$x^2-12x+36>0\Leftrightarrow(x-6)^2>0\Leftrightarrow x-6\neq 0\Leftrightarrow x\neq 6$.

Tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}\setminus\{6\}$.

Câu 33: Tập xác định D của hàm số $y=\left(9-x^2\right)^{\frac{2}{3}}$ là

A. $D=(3;+\infty)$. **B.** $D=\mathbb{R}$.

C. $D=\mathbb{R}\setminus\{3;-3\}$. **D.** $D=(-3;3)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\alpha = \frac{2}{3}$ không nguyên do đó điều kiện xác định của hàm số $9 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -3 < x < 3$

Do đó $D = (-3;3)$.

Câu 34: Tập xác định của hàm số $y = (x^2 - 3x - 4)^{\frac{2}{3}}$ là

A. $\mathbb{R} \setminus \{-1;4\}$. **B.** $(-\infty;-1) \cup (4;+\infty)$.

C. $(-1;4)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số xác định khi và chỉ khi $x^2 - 3x - 4 > 0 \Leftrightarrow (-\infty;-1) \cup (4;+\infty)$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-\infty;-1) \cup (4;+\infty)\cdot$

Câu 35: Tập xác định D của hàm số $y = (5 + 4x - x^2)^{\sqrt{2022}}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1;5\}$. **B.** $D = \{1;-5\}$.

C. $D = (-\infty;-1) \cup (5;+\infty)$. **D.** $D = (-1;5)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $5 + 4x - x^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 5$.

Vậy $D = (-1;5)$.

Câu 36: **Tập xác định của** hàm số $y = (x-1)^{\frac{1}{3}}$ là:

A. $(1;+\infty)$. **B.** $[1;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn A

Vì $\frac{1}{3} \notin \mathbb{R}$ nên $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Vậy tập xác định là $(1;+\infty)$

Câu 37: Tìm tập xác định của hàm số $y = (x^2 - 1)^{-4}$.

A. $D = \mathbb{R}$. **B.** $D = (-1;1)$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$. **D.** $D = (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Vì $-4 \in \mathbb{Z}^-$ nên hàm số xác định khi $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$.

Câu 38: Tìm tập xác định của hàm số $y = (x^2 - x - 2)^{\sqrt{2}}$.

A. $D = \mathbb{R}$. **B.** $D = (-\infty;-1) \cup (2;+\infty)$.

C. $D = (-\infty;-1] \cup [2;+\infty)$. **D.** $D = \mathbb{R} \setminus \{-1;2\}$.

Lời giải

Chọn B

Vì $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$ nên hàm số xác định khi $x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 2 \end{array}\right.$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

Câu 39: Tập xác định của hàm số $y = \left(x^2 - x - 12\right)^{\frac{2}{3}}$ là

A. $(-3; 4)$. **B.** $\mathbb{R} \setminus \{-4; 3\}$. **C.** $(-\infty; -3) \cup (4; +\infty)$. **D.** $\mathbb{R} \setminus \{-3; 4\}$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định khi và chỉ khi $x^2 - x - 12 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -3 \\ x > 4 \end{array}\right.$.

Tập xác định của hàm số $D = (-\infty; -3) \cup (4; +\infty)$.

Câu 40: Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số $f(x) = \left(2x^2 + mx + 2\right)^{\frac{1}{2}}$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$?

A. 5. **B.** 4. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Do $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ nên hàm số đã cho xác định $\Leftrightarrow 2x^2 + mx + 2 > 0$.

Hàm số đã cho xác định với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2x^2 + mx + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta = m^2 - 16 < 0$ $\Leftrightarrow -4 < m < 4$.

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; ...; 2; 3\}$ nên có 7 giá trị m.

Câu 41: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \left(x^2 - x + 6\right)^{\sqrt{2}}$.

A. $D = (0; +\infty)$. **B.** $D = \mathbb{R}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$. **D.** $D = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Vì $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$ nên điều kiện xác định của hàm số là: $x^2 - x + 6 > 0$ luôn đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy $D = \mathbb{R}$.

Câu 42: Tập xác định của hàm số $y = \left(x - x^2\right)^{\pi}$ là

A. $[0; 1]$. **B.** $(1; 2)$. **C.** $(0; +\infty)$. **D.** $(0; 1)$.

Lời giải

Chọn D

Vì $\pi \notin \mathbb{Z}$ nên ta có ĐKXĐ: $x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (0; 1)$.

Câu 43: Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số $f(x) = \left(2x^2 + mx + 2\right)^{\frac{1}{2}}$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$?

A. 5. **B.** 4. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Do $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ nên hàm số đã cho xác định $\Leftrightarrow 2x^2 + mx + 2 > 0$.

Hàm số đã cho xác định với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2x^2 + mx + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta = m^2 - 16 < 0$ $\Leftrightarrow -4 < m < 4$.

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; ...; 2; 3\}$ nên có 7 giá trị m.

Câu 44: Tập xác định của hàm số $y = \left(x^2 - 3x + 2\right)^{\frac{1}{3}}$ là

A. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$. **B.** $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$. **C.** $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$. **D.** $(1; 2)$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số đã cho xác định khi $x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 1 \\ x > 2 \end{array}\right.$.

Câu 45: Tập xác định của hàm số $y = \left(x^2 - 3x + 2\right)^{-5}$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$. **B.** $D = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. **D.** $D = \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định khi $x^2 - 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$.

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.

Câu 46: Tập xác định D của hàm số $y = \left(x^2 - 2x - 3\right)^{-4}$ là

A. $D = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$. **B.** $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$.

C. $D = \mathbb{R}$. **D.** $D = (0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Vì số mũ -4 là số nguyên âm nên hàm số xác định khi $x^2 - 2x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 3 \end{cases}$.

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$.

Câu 47: Tập xác định D của hàm số $y = (x-2)^2 (x-1)^{\frac{1}{5}}$ là

A. $D = (1; +\infty)$. **B.** $D = \mathbb{R}$. **C.** $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. **D.** $D = (-\infty; 1)$.

Lời giải

Chọn A

Vì $\frac{1}{5} \notin \mathbb{Z}$ nên hàm số xác định khi $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Vậy $D = (1; +\infty)$.

Câu 48: Hàm số $y = \left(\sqrt{x-1} - 2\right)^{\frac{1}{3}}$ có tập xác định là

A. $[1; +\infty)$. **B.** $(1; +\infty)$. **C.** $(5; +\infty)$. **D.** $\mathbb{R} \setminus \{5\}$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện xác định của hàm số là

$$\begin{cases} x-1\ge 0 \\ \sqrt{x-1}-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x>5 \end{cases} \Leftrightarrow x>5$$

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $(5;+\infty)$.

Câu 49: Tìm tập xác định D của hàm số $y=(2-x)^{\frac{1}{3}}$.

A. $D=(-\infty;2]$. **B.** $D=(2;+\infty)$. **C.** $D=(-\infty;2)$. **D.** $D=(-\infty;+\infty)$.

Lời giải

ChọnC

ĐKXĐ: $2-x>0\Leftrightarrow x<2$. Suy ra TXĐ: $D=(-\infty;2)$.

Câu 50: Tập xác định của hàm số $y=(x+1)^{\frac{1}{5}}$ là

A. $(-1;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số đã cho là hàm số luỹ thừa với số mũ không nguyên nên hàm số xác định

$\Leftrightarrow x+1>0\Leftrightarrow x>-1$.

Câu 51: Hàm số $y=(x^2-2x)^{-\frac{1}{2}}$ có tập xác định là:

A. $(0;2)$ **B.** $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$ **C.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ **D.** $\mathbb{R}\setminus\{0;2\}$

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y=(x^2-2x)^{-\frac{1}{2}}$ làm hàm lũy thừa với số mũ không nguyên nên điều kiện xác định là: $x^2-2x>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>2. \end{array}\right.$

Vậy $D=(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$

Câu 52: Tập xác định của hàm số $y=(2x-1)^{\pi}$ là:

A. $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **B.** $D=\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $D=\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $D=\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Vì $\alpha=\pi$ là số không nguyên nên hàm số xác định khi và chỉ khi $2x-1>0\Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$.

Tập xác định cần tìm là $D=\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Câu 53: Tập xác định của hàm số $y=\left(x^2-3x+2\right)^{\frac{1}{2}}$ là

A. $D=[1;2]$. **B.** $D=(1;2)$.

C. $D=(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$. **D.** $D=(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số đã cho xác định khi $x^2-3x+2>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<1 \\ x>2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-\infty;1) \cup (2;+\infty)$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(-\infty;1) \cup (2;+\infty)$.

Câu 54: Trên khoảng $(0;+\infty)$, đạo hàm của hàm số $y=x^{\frac{7}{3}}$ là:

A. $y'=\frac{7}{3}x^{-\frac{4}{3}}$. **B.** $y'=\frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}$. **C.** $y'=\frac{3}{7}x^{-\frac{4}{3}}$. **D.** $y'=\frac{3}{7}x^{\frac{4}{3}}$.

Lời giải

Chọn B

Câu 55: Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^3}},(x>0)$ bằng

A. $y'=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$. **B.** $y'=\frac{7}{6}\sqrt[6]{x}$. **C.** $y'=\frac{6}{7\sqrt[7]{x}}$. **D.** $y'=\sqrt[9]{x}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y=x^{\frac{7}{6}}$

$y'=\frac{7}{6}x^{\frac{1}{6}}=\frac{7}{6}\sqrt[6]{x}$.

Câu 56: Tính đạo hàm của hàm số $y=\left(x^2+\pi\right)^{\frac{5}{2}}$

A. $y'=\frac{5}{2}\left(x^2+\pi\right)^{\frac{3}{2}}$. **B.** $y'=\frac{5}{2}\left(x^2+\pi\right)^{\frac{7}{2}}$.

C. $y'=5x\left(x^2+\pi\right)^{\frac{3}{2}}$. **D.** $y'=5x\left(x^2+\pi\right)^{\frac{7}{2}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=\frac{5}{2}\left(x^2+\pi\right)'\left(x^2+\pi\right)^{\frac{3}{2}}=5x\left(x^2+\pi\right)^{\frac{3}{2}}$.

Câu 57: Trên khoảng $(0;+\infty)$, đạo hàm của hàm số $y=\sqrt[3]{x^4}$ là :

A. $y'=\frac{1}{3}\sqrt[3]{x}$. **B.** $y'=\frac{4}{3}\sqrt{x}$. **C.** $y'=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$. **D.** $y'=\frac{1}{3}\sqrt{x}$.

Lời giải

Chọn C

Trên khoảng $(0;+\infty)$ ta có $y=\sqrt[3]{x^4}=x^{\frac{4}{3}}$, do đó ta có:

$y'=\left(x^{\frac{4}{3}}\right)'=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$.

Câu 58: Cho hàm số $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ có đồ thị (C). Chọn mệnh đề đúng:

A. (C) đi qua điểm $M(4;1)$. **B.** Tập giá trị của hàm số là $[0;+\infty)$.

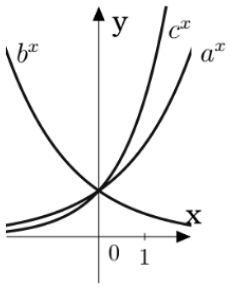
C. Tập xác định của hàm số $D=[0;+\infty)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

$y'=-\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}<0$ với $\forall x>0$ nên số nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Câu 59: Cho đồ thị của ba hàm số $y=a^x$, $y=b^x$ và $y=c^x$ như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây đúng?



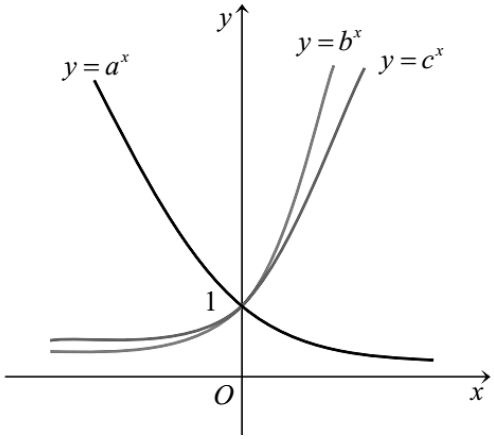
A. $b>a>c.$ **B.** $a>c>b.$ **C.** $c>a>b.$ **D.** $c>b>a.$

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị ta ta thấy hàm số $y=b^x$ là hàm nghịch biến nên $b<1$. Đồ thị hàm số $y=c^x$ nằm trên đồ thị hàm số $y=a^x$ và cùng là hàm đồng biến nên ta có: $c>a>b$.

Câu 60: Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị các hàm số $y=a^x$, $y=b^x$, $y=c^x$ được cho trong hình vẽ dưới đây. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $c<a<b$. **B.** $b<c<a$. **C.** $a<b<c$. **D.** $a<c<b$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: Hàm số $y=a^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}\Rightarrow 0<a<1$.

Các hàm số $y=b^x$ và $y=c^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên b, $c>1$.

Ta lại có $\forall x>0$ thì $b^x>c^x\Rightarrow b>c$.

Vậy $a<c<b$.

Câu 61: Cho ba số thực x,y,z không âm thỏa mãn $2^x+4^y+8^z=4$. Gọi M,N lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{2}$. Đặt $T=2M+6N$, khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $T\in(1;2)$. **B.** $T\in(2;3)$. **C.** $T\in(3;4)$. **D.** $T\in(4;5)$.

Lời giải

Chọn A

$2^x+4^y+8^z=4\Leftrightarrow 2^x+2^{2y}+2^{3z}=4$.

Ta có $4=2^x+2^{2y}+2^{3z}\ge 3.\sqrt[3]{2^{x+2y+3z}}\Leftrightarrow 2^{x+2y+3z}\le\frac{64}{27}\Leftrightarrow x+2y+3z\le 6-3\log_2 3$.

Khi đó $S\le 1-\frac{1}{2}\log_2 3$. Suy ra $M=1-\frac{1}{2}\log_2 3$.

Đặt $\begin{cases}a=2^x\Rightarrow x=\log_2 a\\ b=4^y=2^{2y}\Rightarrow y=\frac{1}{2}\log_2 b\\ c=8^y=2^{3z}\Rightarrow z=\frac{1}{3}\log_2 b\end{cases}$, khi đó $a+b+c=4\Rightarrow b+c=4-a$.

Do $x,y,z\ge 0$ nên $a,b,c\ge 1$, ta có

$(b-1)(c-1)\ge 0\Leftrightarrow bc\ge(b+c)-1\Leftrightarrow bc\ge 4-a-1\Leftrightarrow bc\ge 3-a\Leftrightarrow abc\ge a(3-a)$.

Xét $f(x)=3a-a^2$ đạt GTNN trên $a\in[1;+\infty)$ là $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}$.

Suy ra $abc\ge 3a-a^2\ge\frac{9}{4}$.

Mặt khác $S=\frac{x}{6}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}=\frac{1}{6}\log_2(abc)\ge\frac{1}{6}\log_2\left(\frac{9}{4}\right)$.

Khi đó $N=\frac{1}{6}(2\log_2 3-2)=\frac{1}{3}\log_2 3-\frac{1}{3}$.

Vậy $T=2M+6N=2\left(1-\frac{1}{2}\log_2 3\right)+6\left(\frac{1}{3}\log_2 3-\frac{1}{3}\right)=\log_2 3\longrightarrow T\in(1;2)$.

CHƯƠNG 3

HÀM SỐ LŨY THỪA HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

CHỦ ĐỀ 9 LOGARIT

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Cho hai số dương a,b với $a\neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^{\alpha}=b$ được gọi là logarit cơ số a của b và được kí hiệu là $\log_a b$. Ta viết như sau: $\alpha=\log_a b\Leftrightarrow a^{\alpha}=b.$

Một số chú ý:

Không có logarit của số 0 và số âm vì $a^{\alpha}>0,\forall a$.

Cơ số của logarit phải dương và khác 1 $(a\neq 1)$.

Một số công thức logarit theo định nghĩa:

$\oplus$ $\log_a 1=0;$ $\oplus$ $\log_a a=1;$

$\oplus$ $\log_a a^b=1,\ \forall b\in\mathbb{R}$ $\oplus$ $a^{\log_a b}=a,\forall b\in\mathbb{R},b>0$

2. Các tính chất của logarit

- So sánh hai logarit cùng cơ số:

Cho số dương $a\neq 1$ và các số dương b,c

  - Khi $a>0$ thì $\log_a b>\log_a c\Leftrightarrow b>c$
  - Khi $0<a<1$ thì $\log_a b>\log_a c\Leftrightarrow b<c$
  - Ta có $\log_a b=\log_a c\Leftrightarrow b=c$
- Logarit của một tích: $\log_a\left(b.c\right)=\log_a b+\log_a c$
- Logarit của một thương:

  $\log_a\dfrac{b}{c}=\log_a b-\log_a c$. Đặc biệt: với $a,b>0,\ a\neq 1$ thì $\log_a\dfrac{1}{b}=-\log_a b$.
- Logarit của một lũy thừa

  $\log_a b^{\alpha}=\alpha.\log_a b$. Đặc biệt: $\log_a\sqrt[n]{b}=\dfrac{1}{n}\log_a b$
- Công thức đổi cơ số

  $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$. Đặt biệt: $\log_a c=\dfrac{1}{\log_c a}$ và $\log_{a^{\alpha}} b=\dfrac{1}{\alpha}.\log_a b\ \left(\alpha\neq 0\right)$

3. Logarit tự nhiên và logarit thập phân

- Logarit tự nhiên (hay còn được gọi là logarit Nepe) là logarit cơ số e, được viết là: $\log_e b=\ln b$
- Logarit thập phân là logarit cơ số 10, được viết là: $\log_{10} b=\log b=\lg b$.

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $4^{\log_2(ab)}=3a$. Giá trị của ab^2 bằng

A. 3. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 12.

Lời giải

Chọn A

$4^{\log_2(ab)}=3a \Leftrightarrow \left(2^2\right)^{\log_2(ab)}=3a \Leftrightarrow 2^{2\log_2(ab)}=3a \Leftrightarrow 2^{\log_2(ab)^2}=3a$

$\Leftrightarrow (ab)^2=3a$, vì a và b là hai số thực dương $\Leftrightarrow ab^2=3$.

Câu 2: Biết $\log_a b=2;\log_a c=3;a,b,c>0;a\neq 1$. Khi đó giá trị của $\log_a\left(\dfrac{a^2\sqrt[3]{b}}{c}\right)$ bằng

A. 6. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** 5. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D

$\log_a\left(\dfrac{a^2\sqrt[3]{b}}{c}\right)=\log_a a^2+\log_a\sqrt[3]{b}-\log_a c=2\log_a a+\dfrac{1}{3}\log_a b-\log_a c=2+\dfrac{1}{3}.2-3=-\dfrac{1}{3}$.

Câu 3: Cho biết $a=\log_2 5$ và $b=\log_5 7$. Tính $\log_{\sqrt[3]{5}}\dfrac{49}{8}$ theo a và b.

A. $3\left(2b-\dfrac{3}{a}\right)$. **B.** $3\left(\dfrac{2}{a}-3b\right)$. **C.** $3\left(\dfrac{2}{b}-3a\right)$. **D.** $3\left(2a-\dfrac{3}{b}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $a=\log_2 5=\dfrac{1}{\log_5 2}\Leftrightarrow \log_5 2=\dfrac{1}{a}$.

$\log_{\sqrt[3]{5}}\dfrac{49}{8}=3\left[\log_5 49-\log_5 8\right]=3\left[2\log_5 7-3\log_5 2\right]=3\left[2b-\dfrac{3}{a}\right]$.

Câu 4: Cho số thực a thỏa mãn $0<a\neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $T=\log_a\left(\dfrac{a^2\sqrt[3]{a}\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[15]{a^4}}\right)$

A. $T=8$. **B.** $T=11$. **C.** $T=\dfrac{8}{3}$. **D.** $\dfrac{17}{15}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $T=\log_a\left(\dfrac{a^2\sqrt[3]{a}\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[15]{a^4}}\right)=\log_a\left(\dfrac{a^2a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{3}{5}}}{a^{\frac{4}{15}}}\right)=\log_a\left(\dfrac{a^2a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{3}{5}}}{a^{\frac{4}{15}}}\right)=\log_a a^{\frac{8}{3}}=\dfrac{8}{3}$.

Câu 5: Giá trị biểu thức: $M=\log_2 2+\log_2 4+\log_2 8+...+\log_2 256$ bằng

A. 56. **B.** $8\log_2 256$. **C.** 36. **D.** 48.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $M=\log_2 2^1+\log_2 2^2+\log_2 2^3+...+\log_2 2^8$

$=(1+2+3+...+8)\log_2 2=(1+2+3+...+8)=\dfrac{8(8+1)}{2}=36$.

Câu 6: Cho $a>0,\ a\neq 1$ và $\log_a x=-1,\ \log_a y=4$. Giá trị của $\log_a\left(x^2y^3\right)$ bằng

A. 14. **B.** 10. **C.** 18. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_a\left(x^2y^3\right)=2\log_a x+3\log_a y=2.(-1)+3.4=10$.

Câu 7: Cho các số nguyên dương x, y, z đôi một nguyên tố cùng nhau và thỏa mãn $x\log_{200}5+y\log_{200}2=z$. Giá trị của biểu thức $29x-y-2021z$ bằng

A. -1966. **B.** -2020. **C.** -2019. **D.** -1993.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $x\log_{200}5+y\log_{200}2=z$

$\Leftrightarrow \log_{200}5^x+\log_{200}2^y=z\Leftrightarrow \log_{200}5^x.2^y=z\Leftrightarrow 5^x.2^y=200^z\Leftrightarrow 5^x.2^y=(25.4.2)^z$

$\Leftrightarrow 5^x.2^y=5^{2z}.2^{3z}\Rightarrow\begin{cases}x=2z\\y=3z\end{cases}$

Do các số nguyên dương $x,\ y,\ z$ đôi một nguyên tố cùng nhau nên $\begin{cases}x=2\\y=3\\z=1\end{cases}$

Giá trị của biểu thức $29x-y-2021z=29.2-3-2021=-1966$.

Câu 8: Cho x,y,z là ba số dương lập thành cấp số nhân; còn $\log_a x;\ \log_{\sqrt{a}} y;\ \log_{\sqrt[3]{a}} z$ lập thành cấp số cộng. Tính giá trị của biểu thức $Q=\dfrac{2017x}{y}+\dfrac{2y}{z}+\dfrac{z}{x}$.

A. 2019. **B.** 2021. **C.** 2020. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn C

Theo bài ra, x,y,z là ba số dương lập thành cấp số nhân và $\log_a x;\ \log_{\sqrt{a}} y;\ \log_{\sqrt[3]{a}} z$ lập thành cấp số cộng nên ta có:

$\begin{cases}x.z=y^2\\\log_a x+\log_{\sqrt[3]{a}} z=2\log_{\sqrt{a}} y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x.z=y^2\\\log_a x+3\log_a z=4\log_a y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x.z=y^2\\\log_a xz^3=\log_a y^4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x.z=y^2\\xz^3=y^4\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x.z=y^2\\y^2z^2=y^4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x.y=y^2\\z=y\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z$.

Do đó: $Q=\dfrac{2017x}{y}+\dfrac{2y}{z}+\dfrac{z}{x}=\dfrac{2017x}{x}+\dfrac{2x}{x}+\dfrac{x}{x}=2017+2+1=2020$.

Câu 9: Xét a và b là hai số thực dương tùy ý. Đặt $x=\ln\left(a^2-ab+b^2\right)^{1000}$; $y=1000\ln a-\ln\dfrac{1}{b^{1000}}$.

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $x>y$. **B.** $x\geq y$. **C.** $x\leq y$. **D.** $x<y$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $a^2-ab+b^2=\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2>0,\forall a>0;b>0$.

$x=\ln\left(a^2-ab+b^2\right)^{1000}=1000.\ln\left(a^2-ab+b^2\right)$.

$y=1000\ln a-\ln\frac{1}{b^{1000}}=1000\ln a+1000.\ln b=1000.\ln(ab)$.

Với $\forall a>0;b>0$ thì $(a-b)^2\geq 0\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2\geq 0\Leftrightarrow a^2-ab+b^2\geq ab$.

Suy ra $\ln\left(a^2-ab+b^2\right)\geq\ln(ab)$.

Ta thấy $\ln\left(a^2-ab+b^2\right)=\ln(ab)$, khi và chỉ khi $x=y$. Do vậy $x\geq y$.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 3: Logarit

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

Câu 1: Tính $\left(\sqrt[5]{8}\right)^{\log_2 243}$

A. 27. **B.** 9. **C.** $3^{\frac{29}{3}}$. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\left(\sqrt[5]{8}\right)^{\log_2 243} = 8^{\frac{1}{5}.\log_2 3^5} = 8^{\log_2 3} = \left(2^{\log_2 3}\right)^3 = 3^3 = 27$

Câu 2: Cho số thực $0 < a \neq 1$, $\log_{\sqrt{a}}\left(a^2\sqrt[3]{a}\right)$.

A. $\frac{10}{3}$. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** $\frac{14}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$\log_{\sqrt{a}}\left(a^2\sqrt[3]{a}\right) = \log_{a^{\frac{1}{2}}}\left(a^2.a^{\frac{1}{3}}\right) = \log_{a^{\frac{1}{2}}}\left(a^{\frac{7}{3}}\right) = \frac{7/3}{1/2} = \frac{14}{3}$.

Câu 3: Với mọi số thực a dương khác 1, $\log_a \sqrt[3]{a}$ bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** 3. **C.** -3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_a \sqrt[3]{a} = \log_a a^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log_a a = \frac{1}{3}$.

Câu 4: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $2^{30} < 3^{20}$. **B.** $\log_{a^2+2}\left(a^2+1\right) \geq 0$. **C.** $4^{-\sqrt{3}} < 4^{-\sqrt{2}}$. **D.** $0{,}99^{\pi} > 0{,}99^{e}$.

Lời giải

Chọn D

Vì $\begin{cases} 0 < 0{,}99 < 1 \\ \pi > e \end{cases} \Rightarrow 0{,}99^{\pi} < 0{,}99^{e}$.

Câu 5: Với a, b là hai số thực thỏa $0 < a \neq 1, b \neq 0$, ta có

A. $\log_a b^2 = 2\log_a b$. **B.** $\log_a b^2 = \log_{a^2}|b|$.

C. $\log_a b^2 = 2\log_a |b|$. **D.** $\log_a b^2 = \log_{a^{\frac{1}{2}}} b$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_a b^2 = 2\log_a |b|$.

Câu 6: Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $ab^2 = 9$. Giá trị của biểu thức $\log_3 a + 2\log_3 b$ bằng

A. 6. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có $ab^2=9\Rightarrow \log_3\left(ab^2\right)=\log_3 9\Rightarrow \log_3 a+2\log_2 b=2$.

Câu 7: Với a là số thực dương tùy ý, $\ln\left(5a\right)-\ln\left(2a\right)$ bằng

A. $\frac{\ln 5}{\ln 2}$.. **B.** $\ln\left(3a\right)$.. **C.** $\frac{\ln 5a}{\ln 2a}$.. **D.** $\ln\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\ln\left(5a\right)-\ln\left(2a\right)=\ln\frac{5a}{2a}=\ln\frac{5}{2}$.

Câu 8: Cho a và b là các số thực dương tùy ý. Nếu $a^{\frac{1}{2}}>a^{\frac{1}{3}}$ và $\log_b\left(\frac{1}{3}\right)<\log_b\left(\frac{1}{4}\right)$ thì

A. $a>1,0<b<1$. **B.** $0<a<1,0<b<1$.

C. $a>1,b>1$. **D.** $0<a<1,b>1$.

Lời giải

Chọn A

$\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$ mà $a^{\frac{1}{2}}>a^{\frac{1}{3}}$ nên $a>1$

$\frac{1}{3}>\frac{1}{4}$ mà $\log_b\left(\frac{1}{3}\right)<\log_b\left(\frac{1}{4}\right)$ nên $0<b<1$.

Câu 9: Giá trị của $\log_a\frac{1}{\sqrt{a^3}}$ với $a>0$ và $a\neq 1$ bằng

A. $-\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $-\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Ta có: $\log_a\frac{1}{\sqrt{a^3}}=\log_a a^{-\frac{3}{2}}=-\frac{3}{2}$.

Câu 10: Với a,b là hai số dương tùy ý thì $\log\left(a^3b^2\right)$ có giá trị bằng biểu thức nào sau đây?

A. $3\log a+\frac{1}{2}\log b$. **B.** $2\log a+3\log b$. **C.** $3\log a+2\log b$. **D.** $3\left(\log a+\frac{1}{2}\log b\right)$.

Lời giải

Chon C

Do a,b là hai số dương nên ta có : $\log\left(a^3b^2\right)=\log a^3+\log b^2=3\log a+2\log b$.

Câu 11: Với a là số dương tùy ý khác 1, $\log_a\sqrt{a}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $2a$. **C.** 2. **D.** $\frac{1}{2}a$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_a \sqrt{a} = \log_a a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

Câu 12: Với a là số thực dương bất kỳ, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\ln a^4 = 4\ln a$. **B.** $\ln(4a) = 4\ln a$. **C.** $\ln(4a) = \frac{1}{4}\ln a$. **D.** $\ln a^3 = \frac{1}{3}\ln a$.

Lời giải

Chọn A

Mệnh đề đúng là $\ln a^4 = 4\ln a$.

Câu 13: Với mọi số thực dương a, b, x, y và $a, b \neq 1$, mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\log_a(xy) = \log_a(x)\log_a(y)$. **B.** $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

C. $a^{\log_a b} = b$. **D.** $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

Lời giải

Chọn A

Mệnh đề sai là " $\log_a(xy) = \log_a(x)\log_a(y)$ ", mệnh đề đúng là $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

Câu 14: Cho a, b là các số thực dương và a khác 1, thỏa mãn $\log_{a^2}\left(\frac{a^3}{\sqrt[5]{b^3}}\right) = 3$. Giá trị của biểu thức $\log_a b$ bằng

A. -5. **B.** 5. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $-\frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_{a^2}\left(\frac{a^3}{\sqrt[5]{b^3}}\right) = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\log_a a^3 - \log_a b^{\frac{3}{5}}\right) = 3 \Leftrightarrow 3 - \frac{3}{5}\log_a b = 6 \Leftrightarrow \log_a b = -5$.

Câu 15: Cho $a > 0$ và $a \neq 1$, khi đó $\log_a \sqrt{a}$ bằng

A. $-\frac{1}{2}$. **B.** -2. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_a \sqrt{a} = \log_a a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

Câu 16: Cho số thực dương a khác 1. Giá trị của biểu thức $\log_2(4a)$ bằng

A. $4 + \log_2 a$. **B.** $2 + \log_2 a$. **C.** $2\log_2 a$. **D.** $4\log_2 a$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_2(4a) = \log_2 4 + \log_2 a = 2 + \log_2 a$.

Câu 17: Cho biểu thức $P = \log_a b^3 + \log_{a^3} b^6$ trong đó a, b là các số thực dương tùy ý và $a \neq 1$. Khi đó mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P = 9.\log_a b$. **B.** $P = 15.\log_a b$. **C.** $P = 5.\log_a b$. **D.** $P = 21.\log_a b$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $P=\log_a b^3+\log_{a^3} b^6=3\log_a b+6.\frac{1}{3}\log_a b=5.\log_a b$.

Câu 18: Cho số $a>0, a\neq 1$ thỏa mãn $a^x=b$. Khi đó đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $a=\log_x b$. **B.** $a=\log_b x$. **C.** $x=\log_a b$. **D.** $x=\log_b a$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $a^x=b\Leftrightarrow x=\log_a b$.

Câu 19: Cho $\log_a x=2,\ \log_b x=3$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Tính $P=\log_{\frac{a}{b^2}} x$?

A. $P=6.$ **B.** $P=-6.$ **C.** $P=\frac{1}{6}.$ **D.** $P=-\frac{1}{6}.$

Lời giải

Chọn B

Với a, b là các số thực lớn hơn 1 và $x>0, x\neq 1$, ta có: $P=\log_{\frac{a}{b^2}} x=\frac{1}{\log_x \frac{a}{b^2}}=\frac{1}{\log_x a-2\log_x b}$

$$\Leftrightarrow P=\frac{1}{\frac{1}{\log_a x}-\frac{2}{\log_b x}}=\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}=-6.$$

Câu 20: Cho $a,b,c>0, a\neq 1$ và $\log_a b=\sqrt{2022}$. Tính $\log_{\sqrt[6]{a}}\left(a^{\frac{7}{4}}.\sqrt[6]{b}\right)$.

A. $42+\frac{\sqrt{2022}}{6}$. **B.** $\frac{7}{4}+6\sqrt{2022}$. **C.** $\frac{21}{2}+\sqrt{2022}$. **D.** $\frac{2}{21}+\sqrt{2022}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_{\sqrt[6]{a}}\left(a^{\frac{7}{4}}.\sqrt[6]{b}\right)=\log_{\sqrt[6]{a}} a^{\frac{7}{4}}+\log_{\sqrt[6]{a}}\sqrt[6]{b}=6.\frac{7}{4}+\sqrt{2022}=\frac{21}{2}+\sqrt{2022}.$

Câu 21: Cho $a=\log_{25}7$; $b=\log_2 5$. Tính $\log_5\frac{49}{8}$ theo a , b .

A. $\frac{4a-3}{b}$. **B.** $\frac{4ab+3}{b}$. **C.** $\frac{5ab-3}{b}$. **D.** $\frac{4ab-3}{b}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $a=\log_{25}7=\log_{5^2}7=\frac{1}{2}\log_5 7\Rightarrow\log_5 7=2a$ và $b=\log_2 5\Rightarrow\log_5 2=\frac{1}{b}$

$$\log_5\frac{49}{8}=\log_5 49-\log_5 8=\log_5 7^2-\log_5 2^3=2\log_5 7-3\log_5 2=2.2a-3.\frac{1}{b}=\frac{4ab-3}{b}$$

Câu 22: Cho $a,\ b$ là các số thực dương khác 1 thỏa mãn $\log_a b=\sqrt{3}$. Giá trị của $\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}\left(\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}}\right)$ là

A. $-\sqrt{3}$. **B.** $-2\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_a b=\sqrt{3}\Leftrightarrow b=a^{\sqrt{3}}\Rightarrow \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}\left(\dfrac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}}\right)=\log_{\frac{a^{\frac{\sqrt{3}}{2}}}{a}}\left(\dfrac{a^{\frac{\sqrt{3}}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}}\right)=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-1}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 23: Với mọi số thực a dương, $\log\dfrac{a}{100}$ bằng

A. $\log a-1$. **B.** $\log a-2$. **C.** $\dfrac{1}{2}\log a$. **D.** $\log a+2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log\dfrac{a}{100}=\log a-\log 100=\log a-2$.

Câu 24: Với mọi a,b thoả mãn $\dfrac{\log_3 a.\log_2 3}{1+\log_2 5}+\log b=1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a=1-b\log_2 5$. **B.** $ab=10$. **C.** $a\log_2 5+b=1$. **D.** $a+b=1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\dfrac{\log_3 a.\log_2 3}{1+\log_2 5}+\log b=1\Leftrightarrow\dfrac{\log_2 a}{\log_2 10}+\log b=1\Leftrightarrow\log a+\log b=1$

$\Leftrightarrow\log(ab)=1\Leftrightarrow ab=10$.

Câu 25: Cho các số thực dương a,b thoả mãn $\log a+2\log b=1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+b^2=1$. **B.** $a+2b=10$. **C.** $ab^2=10$. **D.** $a+b^2=10$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log a+2\log b=1\Leftrightarrow\log a+\log b^2=1\Leftrightarrow\log\left(ab^2\right)=1\Leftrightarrow ab^2=10$.

Câu 26: Xét tất cả các số dương a và b thỏa mãn $\log_3 a+\log_3 b=\log_9(ab)$. Tính giá trị của ab.

A. $ab=1$. **B.** $ab=2$. **C.** $ab=\dfrac{1}{2}$. **D.** $ab=0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_3 a+\log_3 b=\log_9(ab)\Leftrightarrow\log_3(ab)=\log_{3^2}(ab)\Leftrightarrow\log_3(ab)=\dfrac{1}{2}\log_3(ab)$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\log_3(ab)=0\Leftrightarrow ab=1.$

Câu 27: Cho $\log_3 5=a;\log_5 7=b$, khi đó $\log_{45}175$ bằng.

A. $\dfrac{a(a+b)}{2+a}$. **B.** $\dfrac{a+b}{2+a}$. **C.** $\dfrac{a(2+b)}{2+a}$. **D.** $\dfrac{2(2+b)}{2+a}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_{45}175=\dfrac{\log_5 5^2.7}{\log_5 3^2.5}=\dfrac{2+b}{1+2\log_5 3}=\dfrac{2+b}{1+\dfrac{2}{a}}=\dfrac{a(2+b)}{2+a}$.

Câu 28: Với a,b là hai số thực khác 0 tùy ý, $\ln\left(a^2b^4\right)$ bằng

A. $2\ln a+4\ln b$. **B.** $2\ln|a|+4\ln|b|$. **C.** $4\ln a+2\ln b$. **D.** $4\left(\ln|a|+\ln|b|\right)$.

Lời giải

Chọn B

$\ln\left(a^2b^4\right)=\ln a^2+\ln b^4=2\ln|a|+4\ln|b|$.

Câu 29: Cho a là số thực dương khác 4. Giá trị của biểu thức $I=\log_{\frac{a}{4}}\left(\dfrac{a^3}{64}\right)$ bằng

A. $-\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** -3. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

$I=\log_{\frac{a}{4}}\left(\dfrac{a^3}{64}\right)=\log_{\frac{a}{4}}\left(\dfrac{a}{4}\right)^3=3$.

Câu 30: Cho $\log_2 5=a$; $\log_5 3=b$. Tính $\log_5 24$ theo a và b.

A. $\log_5 24=\dfrac{3+ab}{a}$. **B.** $\log_5 24=\dfrac{a+3b}{a}$. **C.** $\log_5 24=\dfrac{a+b}{3ab}$. **D.** $\log_5 24=\dfrac{3a+b}{b}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_5 24=\log_5\left(3.2^3\right)=\log_5 3+3\log_5 2=\log_5 3+\dfrac{3}{\log_2 5}=b+\dfrac{3}{a}=\dfrac{ab+3}{a}$.

Câu 31: Với a là số thực dương tùy ý, $\log_5\left(\dfrac{25}{a^3}\right)$ bằng

A. $\dfrac{2}{3\log_5 a}$. **B.** $2-3\log_5 a$. **C.** $25-3\log_5 a$. **D.** $2+3\log_5 a$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức ta có: $\log_5\left(\dfrac{25}{a^3}\right)=\log_5 25-\log_5 a^3=2-3\log_5 a$.

Câu 32: Với hai số thực dương a,b tùy ý và $\dfrac{2\log_3 a}{\log_3 6}-\log_6 b=2$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a^2=b\log_6 2$. **B.** $a^2=36b$. **C.** $2a^2+3b=0$. **D.** $a^2=b\log_6 3$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng các công thức: $\dfrac{\log_a b}{\log_a c}=\log_c b$, $\alpha\log_a b=\log_a b^\alpha$, $\log_a b-\log_a c=\log_a(\dfrac{b}{c})$

Ta có: $\frac{2\log_3 a}{\log_3 6}-\log_6 b=2\Leftrightarrow 2\log_6 a-\log_6 b=2\Leftrightarrow \log_6 a^2-\log_6 b=2$

$\Leftrightarrow \log_6\frac{a^2}{b}=2\Leftrightarrow \frac{a^2}{b}=6^2\Leftrightarrow a^2=36b$

Câu 33: Biết x và y là hai số thực thỏa mãn $\log_4 x=\log_9 y=\log_6(x-2y)$. Giá trị của $\frac{x}{y}$ bằng

A. $\log_{\frac{2}{3}}^2 2$. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases}x>0\\y>0\\x>2y\end{cases}$

Đặt $\log_4 x=\log_9 y=\log_6(x-2y)=t$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=4^t\\y=9^t\\x-2y=6^t\end{cases}\Rightarrow 4^t-2.9^t=6^t\Leftrightarrow\left(\frac{4}{9}\right)^t-\left(\frac{2}{3}\right)^t-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{3}\right)^t=-1\ (loai)\\\left(\frac{2}{3}\right)^t=2\end{array}\right.$$

Khi đó $\frac{x}{y}=\left(\frac{4}{9}\right)^t=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^t\right]^2=4$.

Câu 34: Ba số $a+\log_2 3;\ a+\log_4 3;\ a+\log_8 3$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Công bội của cấp số nhân này bằng

A. $\frac{1}{4}$. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Theo giả thiết, ta có:

$$(a+\log_4 3)^2=(a+\log_2 3)(a+\log_8 3)\Leftrightarrow a\log_2 3+\left(\frac{1}{2}\log_2 3\right)^2=\frac{4}{3}a\log_2 3+\frac{1}{3}(\log_2 3)^2$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{3}a\log_2 3=-\frac{1}{12}(\log_2 3)^2\Leftrightarrow a=-\frac{1}{4}\log_2 3$$

Vậy: $q=\frac{a+\log_4 3}{a+\log_2 3}=\frac{-\frac{1}{4}\log_2 3+\frac{1}{2}\log_2 3}{-\frac{1}{4}\log_2 3+\log_2 3}=\frac{1}{3}$

Câu 35: Cho $\log_9 5=a,\log_4 7=b,\log_2 3=c$. Biết $\log_{24}175=\frac{mb+nac}{pc+q}$ với $m,n,p,q\in\mathbb{Z}$ và q là số nguyên tố. Tính $A=mnpq$.

A. 42. **B.** 24. **C.** $8\cdot$ **D.** $12\cdot$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_{24}175=\log_{2^3.3}5^2.7=\log_{2^3.3}5^2+\log_{2^3.3}7$

$=\dfrac{2}{\log_5 2^3.3}+\dfrac{1}{\log_7 2^3.3}=\dfrac{2}{3.\log_5 2+\log_5 3}+\dfrac{1}{3\log_7 2+\log_7 3}$

Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases}\log_9 5=a\Rightarrow\log_3 5=2a\\ \log_4 7=b\Rightarrow\log_2 7=2b\\ \log_2 3=c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log_7 3=\dfrac{c}{2b}\\ \log_5 3=\dfrac{1}{2a}\\ \log_5 2=\dfrac{1}{2ac}\end{cases}.$$

Suy ra:

$$\log_{24}175=\frac{2}{\frac{3}{2ac}+\frac{1}{2a}}+\frac{1}{\frac{3}{2b}+\frac{c}{2b}}=\frac{2}{\frac{3+c}{2ac}}+\frac{1}{\frac{3+c}{2b}}=\frac{4ac}{3+c}+\frac{2b}{3+c}=\frac{4ac+2b}{c+3}.$$

Vậy ta có: $\begin{cases}m=2\\ n=4\\ p=1\\ q=3\end{cases}\Rightarrow mnpq=24.$

Câu 36: Cho x,y là hai số thực dương, $x\neq 1$ thỏa mãn $\log_{\sqrt[3]{x}}y=\dfrac{3y}{8},\log_{\sqrt{2}}x=\dfrac{32}{y}$. Tính giá trị của $P=x^2-y^2$.

A. $P=120$. **B.** $P=132$. **C.** $P=240$. **D.** $P=340$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_{\sqrt{2}}x=\dfrac{32}{y}\Leftrightarrow 2\log_2 x=\dfrac{32}{y}\Leftrightarrow y=\dfrac{16}{\log_2 x}=16\log_x 2$ (*).

$\log_{\sqrt[3]{x}}y=\dfrac{3y}{8}\Leftrightarrow 3\log_x y=\dfrac{3y}{8}\Leftrightarrow\log_x y=\dfrac{y}{8}\Leftrightarrow\log_x\left(16\log_x 2\right)=2\log_x 2$

$\Leftrightarrow\log_x\left(16\log_x 2\right)=\log_x 2^2\Leftrightarrow 16\log_x 2=4\Leftrightarrow\log_x 2=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow\log_2 x=4\Leftrightarrow x=16.$

Từ (*) suy ra $y=4$.

Vậy $P=x^2-y^2=16^2-4^2=240.$

Câu 37: Với hai số thực dương a,b tùy ý và $\dfrac{\log_3 5\log_5 a}{1+\log_3 2}-\log_6 b=2$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $a=b\log_6 2$. **B.** $a=36b$. **C.** $2a+3b=0$. **D.** $a=b\log_6 3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\dfrac{\log_3 5\log_5 a}{1+\log_3 2}-\log_6 b=2\Leftrightarrow\dfrac{\log_3 a}{\log_3 6}-\log_6 b=2\Leftrightarrow\log_6 a-\log_6 b=2$

$\Leftrightarrow\log_6\dfrac{a}{b}=2\Leftrightarrow\dfrac{a}{b}=36\Leftrightarrow a=36b.$

Câu 38: Có bao nhiêu số nguyên dương b sao cho ứng với mỗi b, có đúng 3 giá trị nguyên dương của a thoả mãn $\log_2 \frac{2^a + a}{ab} + 2^a \le a(b-1)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_2 \frac{2^a + a}{ab} + 2^a \le a(b-1) \Leftrightarrow \log_2 (2^a + a) + 2^a + a \le \log_2 ab + ab \quad (1)$

Đặt $f(t) = \log_2 t + t,\ t > 0$.

Ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0\ \forall t > 0$

Nên từ suy ra $2^a + a \le ab \Leftrightarrow \frac{2^a}{a} + 1 \le b \Leftrightarrow \frac{2^a}{a} \le b - 1$

Xét $g(a) = \frac{2^a}{a}$, với a nguyên dương. Ta có $g'(a) = \frac{2^a \ln 2.a - 2^a}{a^2} > 0\ \forall a \in \mathbb{Z}^+$.

Theo yêu cầu bài toán ta có $g(3) \le b - 1 < g(4) \Leftrightarrow \frac{11}{3} \le b < 5$

Mà $b \in \mathbb{Z}$ nên $b = 4$.

Vậy có 1 giá trị nguyên dương của b thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 39: Cho ba số thực dương a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số nhân và $a + b + c = 64$. Giá trị của biểu thức $P = 3\log_2 (ab + bc + ca) - \log_2 (abc)$ bằng:

A. 18. **B.** 24. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Ta có: a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số nhân $\Rightarrow ac = b^2$.

$P = 3\log_2 (ab + bc + ca) - \log_2 (abc) = 3\log_2 (ab + bc + b^2) - \log_2 (b.b^2)$

$= 3\log_2 b(a + b + c) - \log_2 (b^3) = 3\log_2 64b - \log_2 (b^3) = \log_2 (64b)^3 - \log_2 (b^3)$

$= \log_2 \frac{(2^6.b)^3}{b^3} = \log_2 \frac{2^{18}.b^3}{b^3} = \log_2 2^{18} = 18$.

Câu 40: Cho a, b, c là ba số thực dương khác 1 và $abc \ne 1$. Biết $\log_a 5 = 3, \log_b 5 = 4, \log_{abc} 5 = \frac{10}{17}$. Khi đó giá trị của $\log_c 5$ bằng bao nhiêu?

A. $\log_c 5 = 2$. **B.** $\log_c 5 = \frac{1}{5}$. **C.** $\log_c 5 = \frac{67}{60}$. **D.** $\log_c 5 = \frac{60}{67}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_a 5 = 3 \Rightarrow \log_5 a = \frac{1}{3}$.

$\log_b 5 = 4 \Rightarrow \log_5 b = \frac{1}{4}$.

$\log_{abc} 5 = \frac{10}{17} \Rightarrow \log_5 abc = \frac{17}{10}$.

Khi đó: $\log_5 abc = \log_5 a + \log_5 b + \log_5 c \Rightarrow \log_5 c = \log_5 abc - \log_5 a - \log_5 b = \frac{17}{10} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{67}{60}$

Vậy: $\log_c 5 = \frac{60}{67}$.

Câu 41: Cho x, y là hai số thực dương, $x \neq 1$ thỏa mãn $\log_{\sqrt[3]{x}} y = \frac{3y}{8}, \log_{\sqrt{2}} x = \frac{32}{y}$. Tính giá trị của $P = x^2 - y^2$.

A. $P = 120$. **B.** $P = 132$. **C.** $P = 240$. **D.** $P = 340$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_{\sqrt{2}} x = \frac{32}{y} \Leftrightarrow 2\log_2 x = \frac{32}{y} \Leftrightarrow y = \frac{16}{\log_2 x} = 16\log_x 2$ (*).

$\log_{\sqrt[3]{x}} y = \frac{3y}{8} \Leftrightarrow 3\log_x y = \frac{3y}{8} \Leftrightarrow \log_x y = \frac{y}{8} \Leftrightarrow \log_x (16\log_x 2) = 2\log_x 2$

$\Leftrightarrow \log_x (16\log_x 2) = \log_x 2^2 \Leftrightarrow 16\log_x 2 = 4 \Leftrightarrow \log_x 2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \log_2 x = 4 \Leftrightarrow x = 16.$

Từ (*) suy ra $y = 4$.

Vậy $P = x^2 - y^2 = 16^2 - 4^2 = 240.$

Câu 42: Có bao nhiêu số thực dương $n \neq 1$ để $\log_n 265$ là một số nguyên?

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_n 256 = \log_n 2^8 = 8\log_n 2 = \frac{8}{\log_2 n}$.

Để $\log_n 265$ là một số nguyên thì

$\log_2 n \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\} \Leftrightarrow n \in \left\{\frac{1}{2}; 2; \frac{1}{4}; 4; \frac{1}{16}; 16; \frac{1}{256}; 256\right\}$

Vậy có tất cả 8 số thực dương $n \neq 1$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

CHƯƠNG 3

HÀM SỐ LŨY THỪA HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

CHỦ ĐỀ 9 HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. HÀM SỐ MŨ

1. Định nghĩa

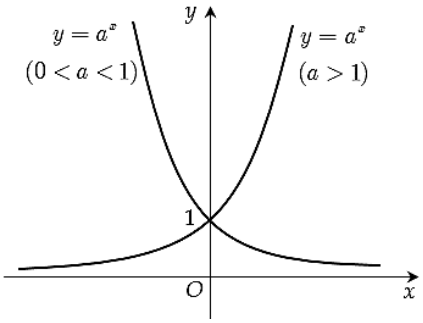
- Hàm số $y=a^x$ với $a>0, a\neq 1$ được gọi là hàm số mũ với cơ số a

2. Tập xác định và tập giá trị

- Tập xác định: $D=\mathbb{R}$
- Tập giá trị: $T=(0;+\infty)$

3. Tính đơn điệu và đồ thị

- Khi $a>1$ thì hàm số $y=a^x$ đồng biến, khi đó ta có $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)>g(x)$
- Khi $0<a<1$ thì hàm số $y=a^x$ nghịch biến, khi đó ta có $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)<g(x)$



Đồ thị nhận Ox là tiệm cận ngang, luôn đi qua điểm $(0;1)$ và $(1;a)$, nằm về phía trên trục hoành $(y=a^x>0,\ \forall x\in\mathbb{R})$.

4. Đạo hàm

$\oplus\ \left(a^x\right)'=a^x.\ln a$ $\oplus\ \left(a^u\right)'=u'.a^u.\ln a$

$\oplus\ \left(\sqrt[n]{u}\right)'=\dfrac{u'}{n.\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ $\oplus\ \left(e^x\right)'=e^x$ $\oplus\ \left(e^u\right)'=u'.e^u$

II. HÀM SỐ LOGARIT

1. Định nghĩa

- Hàm số dạng $y=\log_a x, (a>0;a\neq 1)$ được gọi là hàm số logarit cơ số a.

2. Tập xác định và tập giá trị

- Tập xác định: $D=(0;+\infty)$
- Tập giá trị: $T=\mathbb{R}$.

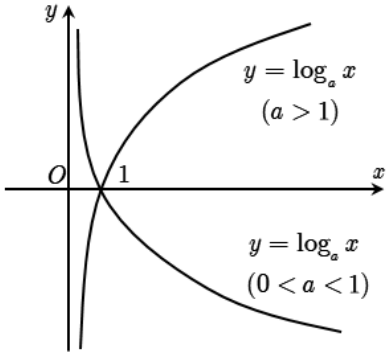
3. Tính đơn điệu và đồ thị

- Khi $a > 0$ thì hàm số $y = \log_a x$ đồng biến trên D, khi đó nếu:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x).$$

- Khi $0 < a < 1$ thì hàm số $y = \log_a x$ nghịch biến trên D, khi đó nếu:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x).$$



4. Đạo hàm

$\oplus$ $\left(\log_a |x|\right)' = \dfrac{1}{x.\ln a} \Rightarrow \left(\log_a |u|\right)' = \dfrac{u'}{u.\ln a}$ $\oplus$ $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}\left(x > 0\right) \Rightarrow \left(\ln |u|\right)' = \dfrac{u'}{u}$

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Tập xác định của hàm số $y=\log_2(3-x)+(x-1)^{\pi}$ là

A. $(-\infty;3)\setminus\{1\}$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases}3-x>0\\x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<3\\x>1\end{cases}\Leftrightarrow 1<x<3.$

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D=(1;3)$.

Câu 2: Tập xác định của hàm số $y=\ln\left|x^2+2x-3\right|$ là

A. $D=(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$. **B.** $D=(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$.

C. $D=\mathbb{R}$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-3;1\}$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định của hàm số đã cho là

$\left|x^2+2x-3\right|>0\Leftrightarrow x^2+2x-3\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\x\neq -3\end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số trên là $D=\mathbb{R}\setminus\{-3;1\}$.

Câu 3: Tập xác định của hàm số $y=\log_9(x-1)^2-\ln(3-x)+3$.

B. $D=(1;3)$. **B.** $D=(-\infty;1)\cup(1;3)$.

C. $D=(3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;3)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số xác định khi $\begin{cases}x-1\neq 0\\3-x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\x<3\end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(-\infty;1)\cup(1;3)$.

Câu 4: Tập xác định của hàm số $f(x)=\left(2x^2-5x+2\right)^{-2021}+\log_{2021}(x-1)$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2};2\right\}$. **B.** $(1;+\infty)\setminus\{2\}$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty)$

.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $f(x)=\left(2x^2-5x+2\right)^{-2021}+\log_{2021}(x-1)$ xác định khi

$\begin{cases}x-1>0\\2x^2-5x+2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\x\neq\frac{1}{2}\\x\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\x\neq 2\end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $(1;+\infty)\setminus\{2\}$.

Câu 5: Tìm tập xác định D của hàm số $y=(1-x)^{\frac{2}{3}}+\log_2(x+1)$.

A. $D=(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$. **B.** $D=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

C. $D=[-1;1]$. **D.** $D=(-1;1)$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $\begin{cases}1-x>0\\x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow -1<x<1.$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(-1;1)$.

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\log\left(x^2-2mx+4\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$

A. $\left[\begin{array}{l}m>2\\m<-2\end{array}\right.$. **B.** $m=2.$. **C.** $m<2.$. **D.** $-2<m<2.$

Lời giải

Chọn D

Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi $x^2-2mx+4>0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m^2-4<0\Leftrightarrow -2<m<2.$

Câu 7: Đạo hàm của hàm số $y=\log(\tan x)$ tại điểm $x=\dfrac{\pi}{3}$ bằng

A. $\dfrac{4}{3\ln 10}$. **B.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{9\ln 10}$. **C.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3\ln 10}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=\dfrac{(\tan x)'}{\tan x.\ln 10}=\dfrac{1+\tan^2 x}{\tan x.\ln 10}$. Vậy $y'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1+\tan^2\dfrac{\pi}{3}}{\tan\dfrac{\pi}{3}.\ln 10}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3\ln 10}$

Câu 8: Đạo hàm của hàm số $y=x.3^x$ là

A. $y'=3^x\ln 3$. **B.** $y'=(1+x\ln 3)3^x$. **C.** $y'=(1+x)3^x$. **D.** $y'=3^x$.

Lời giải

Chọn B

Đạo hàm của hàm số $y=x.3^x$ là $y'=3^x+x.3^x\ln 3=3^x(1+x\ln 3)$.

Câu 9: Cho hàm số $y=2xe^x+3\sin 2x.$ Khi đó, $y'(0)$ có giá trị bằng

A. 2. **B.** 8. **C.** 5. **D.** –4.

Lời giải

Chọn B

$y'(x)=2e^x+2xe^x+6\cos 2x\Rightarrow y'(0)=2+6=8.$

Câu 10: Tính đạo hàm của hàm số $y=2^{x^2}$

A. $y'=2^x.\ln 2^x$. **B.** $y'=x.2^{1+x^2}.\ln 2$. **C.** $y'=\dfrac{x.2^{1+x}}{\ln 2}$. **D.** $y'=\dfrac{x.2^{1+x^2}}{\ln 2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = \left(2^{x^2}\right)' = 2^{x^2}.\ln 2.\left(x^2\right)' = 2x.2^{x^2}.\ln 2 = x.2^{1+x^2}.\ln 2$.

Câu 11: Hàm số $y = \ln\left(4 - x^2\right)$ đồng biến trên khoảng

A. $(-2;2)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-2;0)$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = (-2;2)$. Ta có $y' = \dfrac{-2x}{4-x^2}$.

Trên D ta có $4 - x^2 > 0$ nên hàm số đồng biến khi $y' \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2x}{(2-x)(2+x)} \ge 0 \Leftrightarrow x \le 0$.

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

Câu 12: Hàm số nào sau đây là hàm số đồng biến?

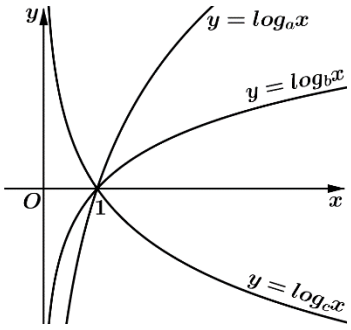
A. $y = \left(\dfrac{2020}{2021}\right)^x$. **B.** $y = \left(\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^x$. **C.** $y = \left(\dfrac{1}{e}\right)^x$. **D.** $y = \left(\sqrt[2020]{\pi}\right)^x$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = \left(\sqrt[2020]{\pi}\right)^x$ có $y' = \left(\sqrt[2020]{\pi}\right)^x.\ln\left(\sqrt[2020]{\pi}\right) > 0$ với mọi x nên hàm số $y = \left(\sqrt[2020]{\pi}\right)^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 13: Cho a, b, c là các số thực dương khác 1. Hình vẽ dưới đây là đồ thị của ba hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$ và $y = \log_c x$.



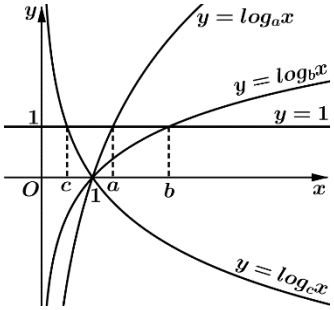
Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $a < c < b$. **B.** $a < b < c$. **C.** $c < b < a$. **D.** $c < a < b$.

Lời giải

Chọn D

Theo hình dạng của đồ thị ta có $a, b > 1$ và $0 < c < 1$.



Vẽ đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị hai hàm số $y=\log_a x,\ y=\log_b x$ lần lượt tại 2 điểm $M(a;1)$, $N(b;1)$. Ta thấy điểm N bên phải điểm M nên $b>a$. Vậy $c<a<b$.

Câu 14: Số giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2020;2021]$ sao cho hàm số $y=\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{x-4}{x-2m}}$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ là

A. 2020. **B.** 2022. **C.** 2021. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y=\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{x-4}{x-2m}} \Rightarrow y'=\left(\frac{x-4}{x-2m}\right)'.\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{x-4}{x-2m}}.\ln\left(\frac{1}{e}\right)$

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ thì $y'<0,\forall x\in(0;2)$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-4}{x-2m}\right)'.\underbrace{\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{x-4}{x-2m}}}_{>0,\forall x\in(0;2)}.\underbrace{\ln\left(\frac{1}{e}\right)}_{<0}<0,\forall x\in(0;2) \Leftrightarrow \left(\frac{x-4}{x-2m}\right)'>0,\forall x\in(0;2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2m+4}{(x-2m)^2}>0,\forall x\in(0;2) \Leftrightarrow \begin{cases}-2m+4>0\\ x\neq 2m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m<2\\ \left[\begin{array}{l}2m\le 0\\ 2m\ge 2\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m<2\\ \left[\begin{array}{l}m\le 0\\ m\ge 1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow m\in(-\infty;0]\cup[1;2)$$

Mặt khác, $m\in[-2020;2021] \Rightarrow m\in[-2020;0]\cup[1;2)$

Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{1;0;-1;-2;...;-2020\}$. Có 2022 giá trị nguyên của m.

Câu 15: Tìm S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=2^{\frac{mx+1}{x+m}}$ nghịch biến trên $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

A. $S=(-1;1)$. **B.** $S=\left[\frac{1}{2};1\right]$. **C.** $S=\left[\frac{-1}{2};1\right)$. **D.** $\left(-\frac{1}{2};1\right)$.

Lời giải

Chọn C

Đạo hàm: $y'=\frac{m^2-1}{(x+m)^2}.2^{\frac{mx+1}{x+m}}.\ln 2$

Để hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ thì $y'<0,\forall x\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

$$\Leftrightarrow \frac{m^2-1}{(x+m)^2}.2^{\frac{mx+1}{x+m}}.\ln 2<0,\forall x\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right) \Leftrightarrow \frac{m^2-1}{(x+m)^2}<0,\forall x\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}m^2-1<0\\ -m\le\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1<m<1\\ m\ge\frac{-1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \frac{-1}{2}\le m<1. \text{ Vậy } S=\left[\frac{-1}{2};1\right).$$

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 4: Tập xác định, đạo hàm và sự biến thiên hàm số mũ - logarit

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

Câu 1: Tập xác định của hàm số $y=(1-x)^{-3}+\log_2 x$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(0;+\infty)\setminus\{1\}$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $\begin{cases}1-x\neq 0\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\ x>0\end{cases}$. Tập xác định $D=(0;+\infty)\setminus\{1\}$.

Câu 2: Có bao nhiêu số nguyên thuộc tập xác định của hàm số $y=\ln(15-x^2)$?

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

ĐKXĐ: $15-x^2>0\Leftrightarrow -\sqrt{15}<x<\sqrt{15}$. Do $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\{\pm 3;\pm 2;\pm 1;0\}$.

Câu 3: Với giá trị nào của x thì biểu thức sau $f(x)=\log_5(x^3-x^2-2x)$ xác định?

A. $x\in(-1;0)\cup(2;+\infty)$. **B.** $x\in(0;1)$.

C. $x\in(1;+\infty)$. **D.** $x\in(0;2)\cup(4;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Biểu thức $f(x)=\log_5(x^3-x^2-2x)$ xác định khi và chỉ khi $x^3-x^2-2x>0$

$\Leftrightarrow x(x+1)(x-2)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x<0\\ x>2\end{array}\right.$.

Vậy hàm số $f(x)$ xác định khi $x\in(-1;0)\cup(2;+\infty)$.

Câu 4: Tìm tập xác định D của hàm số $y=x^{\frac{1}{3}}+\log_3(1-x)$.

A. $D=(0;1]$. **B.** $D=(0;+\infty)$. **C.** $D=(0;1)$. **D.** $D=(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định $\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ 1-x>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<x<1$. Vậy tập xác định $D=(0;1)$.

Câu 5: Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1}{\log_2 x-1}$ là

A. $R\setminus\{2\}$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)\setminus\{2\}$. **D.** $(0;+\infty)\setminus\{1\}$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định của hàm số $\begin{cases}x>0\\ \log_2 x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow x\in(0;+\infty)\setminus\{1\}$

Câu 6: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\log_5\dfrac{x-3}{x+2}$.

A. $D=(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$. **B.** $D=(-2;3)$.

C. $D=(-\infty;-2)\cup[3;+\infty)$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $\dfrac{x-3}{x+2}>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3\\x<-2\end{array}\right.$. Vậy tập xác định $D=(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$

Câu 7: Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1}{\log_2 x-1}$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)\setminus\{2\}$. **D.** $(0;+\infty)\setminus\{1\}$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định khi $\begin{cases}x>0\\\log_2 x-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\\log_2 x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x\neq 2\end{cases}$

Vậy tập xác định $D=(0;+\infty)\setminus\{2\}$.

Câu 8: Tập xác định của hàm số $y=(x-2021)^{\frac{2019}{2021}}$ là

A. $(-2021;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{2021\}$. **C.** $(2021;+\infty)$. **D.** $(-\infty;2021)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x-2021>0\Leftrightarrow x>2021\Leftrightarrow x\in(2021;+\infty)$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(2021;+\infty)$.

Câu 9: Tập xác định của hàm số: $y=\log_3\left(x^2-4x+3\right)$ là:

A. $(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x^2-4x+3>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<1\\x>3\end{array}\right.$. Vậy tập xác định của hàm số: $(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$.

Câu 10: Tập xác định của hàm số $y=\log_{2021}\dfrac{x+3}{2-x}$ là:

A. $D=[-3;2]$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-3;2\}$. **C.** $D=(-\infty;-3)\cup(2;+\infty)$. **D.** $(-3;2)$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=\log_{2021}\dfrac{x+3}{2-x}$ xác định khi $\dfrac{x+3}{2-x}>0\Leftrightarrow -3<x<2$.

Suy ra tập xác định của hàm số: $D=(-3;2)$.

Câu 11: Tập xác định D của hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{\log_3 \dfrac{2x}{x+1}-1}}$ là:

A. $D=(-\infty;-3)$. **B.** $D=(-1;+\infty)$. **C.** $D=(-3;-1)$. **D.** $D=(0;3)$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 \dfrac{2x}{x+1}>1 \\ \dfrac{2x}{x+1}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x}{x+1}>3^1 \\ \dfrac{2x}{x+1}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{2x}{x+1}>3$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x}{x+1}-3>0 \Leftrightarrow \dfrac{-x-3}{x+1}>0 \Leftrightarrow -3<x<-1$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(-3;-1)$.

Câu 12: Tập xác định của hàm số $y=(x-2)^{-1}$ là:

A. $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **B.** $\{2\}$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định $\Leftrightarrow x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$. Vậy tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Câu 13: Tập xác định D của hàm số $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ là

A. $D=\mathbb{R}$. **B.** $D=(-\infty;0)$. **C.** $D=(0;+\infty)$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Lời giải

Chọn A

Đây là hàm số mũ nên tập các định là $\mathbb{R}$.

Câu 14: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=e^{\frac{1}{\sqrt{x^2+mx+1}}}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$. **B.** $m>2$. **C.** $-2<m<2$. **D.** $m<2$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $x^2+mx+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \Delta<0 \Leftrightarrow m^2-4<0 \Leftrightarrow -2<m<2$.

Câu 15: Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}+\ln\ x-1$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **B.** $[0;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1]\cup(2;+\infty)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định khi $\begin{cases} 2-x>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<2$. Vậy $D=\ 1;2\ $.

Câu 16: Hàm số $y=\log_5\left(4x-x^2\right)$ có tập xác định là

A. $D=(0;4)$. **B.** $D=\mathbb{R}$.

C. $D=(0;+\infty)$. **D.** $D=(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định của hàm số trên là $4x-x^2>0\Leftrightarrow 0<x<4$.

Câu 17: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\dfrac{\ln(x-1)}{(x^2-1)\sqrt{2x-6}}$

A. $D=(3;+\infty)$. **B.** $D=(-1;1)\cup(3;+\infty)$.

C. $D=(-1;1)$. **D.** $D=\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định: $\begin{cases}x^2-1\neq 0\\ 2x-6>0\\ x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\pm1\\ x>3\\ x>1\end{cases}\Leftrightarrow x>3$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D=(3;+\infty)$.

Câu 18: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\log_5\dfrac{x-3}{x+2}$.

A. $D=(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$. **B.** $D=(-2;3)$.

C. $D=(-\infty;-2)\cup[3;+\infty)$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $\dfrac{x-3}{x+2}>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3\\ x<-2\end{array}\right.$. Vậy tập xác định $D=(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$

Câu 19: Tìm tập xác định của hàm số $y=\log_{2022}\left(3x-x^2\right)$.

A. $D=\mathbb{R}$ **B.** $D=(0;+\infty)$ **C.** $D=(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$ **D.** $D=(0;3)$

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định khi: $3x-x^2>0\Leftrightarrow x\in(0;3)$. Vậy $D=(0;3)$

Câu 20: Tập xác định của hàm số $y=(\pi-1)^x$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

$y=(\pi-1)^x$ là hàm số mũ với cơ số $a=\pi-1$ nên có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Câu 21: Tập xác định của hàm số $y=(x-2)^{-2}+\log_2(x-1)$ là

A. $(1;+\infty)\setminus\{2\}$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $[1;+\infty)\setminus\{2\}$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x-1>0 \\ x-2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x\neq 2 \end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(1;+\infty)\setminus\{2\}$.

Câu 22: Tính đạo hàm của hàm số $y=\log_2\left(x+\mathrm{e}^x\right)$.

A. $\dfrac{1+\mathrm{e}^x}{\left(x+\mathrm{e}^x\right)\ln 2}$. **B.** $\dfrac{1+\mathrm{e}^x}{x+\mathrm{e}^x}$. **C.** $\dfrac{1}{\left(x+\mathrm{e}^x\right)\ln 2}$. **D.** $\dfrac{1+\mathrm{e}^x}{\ln 2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=\dfrac{\left(x+\mathrm{e}^x\right)'}{\left(x+\mathrm{e}^x\right)\ln 2}=\dfrac{1+\mathrm{e}^x}{\left(x+\mathrm{e}^x\right)\ln 2}$.

Câu 23: Đạo hàm của hàm số $y=e^{3x}$ là

A. $y'=e^{3x}$. **B.** $y'=e^{3x}.\ln 3$. **C.** $y'=3e^{3x}$. **D.** $y'=\dfrac{e^{3x}}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$y'=\left(e^{3x}\right)'=3x'.e^{3x}=3e^{3x}$.

Câu 24: Đạo hàm của hàm số $y=\log_2(2x+1)$ là

A. $y'=\dfrac{1}{(2x+1)\ln 2}$. **B.** $y'=\dfrac{1}{2x+1}$. **C.** $y'=\dfrac{2}{2x+1}$. **D.** $y'=\dfrac{2}{(2x+1)\ln 2}$.

Lời giải

Chọn D

$y=\log_2(2x+1)\Rightarrow y'=\dfrac{(2x+1)'}{(2x+1)\ln 2}=\dfrac{2}{(2x+1)\ln 2}$.

Câu 25: Đạo hàm của hàm số $y=\log_4\left(2x^2-3\right)$ là

A. $y'=\dfrac{4x}{\left(2x^2-3\right)\ln 2}$. **B.** $y'=\dfrac{4x}{2x^2-3}$. **C.** $y'=\dfrac{1}{\left(2x^2-3\right)\ln 4}$. **D.** $y'=\dfrac{2x}{\left(2x^2-3\right)\ln 2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=\dfrac{4x}{\left(2x^2-3\right)\ln 4}=\dfrac{4x}{\left(2x^2-3\right)2\ln 2}=\dfrac{2x}{\left(2x^2-3\right)\ln 2}$.

Câu 26: Đạo hàm của hàm số $y=2^{x^2-3x}$ là

A. $y'=2^{x^2-3x-1}$. **B.** $y'=2^{x^2-3x}\ln 2$.

C. $y'=(2x-3).2^{x^2-3x-1}$. **D.** $(2x-3).2^{x^2-3x}.\ln 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=\left(2^{x^2-3x}\right)'=\left(x^2-3x\right)'.2^{x^2-3x}.\ln 2=(2x-3).2^{x^2-3x}.\ln 2$.

Câu 27: Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{\ln x}{x}$ là

A. $y=-4$. **B.** $y'=\dfrac{1+\ln x}{x^2}$. **C.** $y'=-\dfrac{1}{x^3}$. **D.** $y'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)'=\dfrac{(\ln x)'.x-x'.\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

Câu 28: Đạo hàm của hàm số $y=\ln\left(x^2-2x+1\right)$ bằng

A. $y'=\dfrac{2}{x-1}$. **B.** $y'=\dfrac{2}{x^2-2x+1}$. **C.** $y'=\dfrac{1}{x-1}$. **D.** $y'=2x-2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=\dfrac{\left(x^2-2x+1\right)'}{x^2-2x+1}=\dfrac{2x-2}{x^2-2x+1}=\dfrac{2(x-1)}{(x-1)^2}=\dfrac{2}{x-1}$

Câu 29: Hàm số $f(x)=5^{2x^2-1}$ có đạo hàm là

A. $2x.5^{2x^2-1}.\ln 5$. **B.** $4x.5^{2x^2-1}$. **C.** $4x.5^{2x^2-1}.\ln 5$. **D.** 5^{2x^2-1}.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức $\left(a^u\right)'=u'.a^u.\ln a$ suy ra $\left(5^{2x^2-1}\right)'=\left(2x^2-1\right)'.5^{2x^2-1}.\ln 5=4x.5^{2x^2-1}.\ln 5$.

Câu 30: Trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$, đạo hàm của hàm số $y=\log(2x-1)$ là

A. $y'=\dfrac{1}{(2x-1)\ln 10}$. **B.** $y'=\dfrac{2}{(2x-1)\ln 10}$.

C. $y'=\dfrac{2}{2x-1}$. **D.** $y'=\dfrac{1}{2x-1}$.

Lời giải

Chọn B

Trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$, ta có $y=\log(2x-1)\Rightarrow y'=\dfrac{(2x-1)'}{(2x-1)\ln 10}=\dfrac{2}{(2x-1)\ln 10}$.

Câu 31: Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{\ln x}{x}$ là

A. $y'=\dfrac{1+\ln x}{x^2}$. **B.** $y'=\dfrac{1}{x}$. **C.** $y'=-\dfrac{1}{x^3}$. **D.** $y'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)'=\dfrac{\frac{1}{x}.x-1.\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

Vậy đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{\ln x}{x}$ là $\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

Câu 32: Đạo hàm của hàm số $y=\left(x^2-2x+2\right)e^x$ là

A. $y'=\left(2x-2\right)e^x$. **B.** $y'=x^2e^x$. **C.** $y'=\left(x^2+2\right)e^x$. **D.** $y'=-2xe^x$.

Lời giải

Chọn B

$y=\left(x^2-2x+2\right)e^x \Rightarrow y'=\left(2x-2\right)e^x+\left(x^2-2x+2\right)e^x=x^2e^x$

Câu 33: Đạo hàm của hàm số $y=\log_5\left(3x^2-x+1\right)$ là

A. $\dfrac{3x-1}{\left(3x^2-x+1\right)\ln 5}$. **B.** $\dfrac{(6x-1)\ln 5}{\left(3x^2-x+1\right)}$. **C.** $\dfrac{6x-1}{\left(3x^2-x+1\right)\ln 5}$. **D.** $\dfrac{6x-1}{\left(3x^2-x+1\right)}$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}$.

$y'=\left[\log_5\left(3x^2-x+1\right)\right]'=\dfrac{\left(3x^2-x+1\right)'}{\left(3x^2-x+1\right)\ln 5}=\dfrac{6x-1}{\left(3x^2-x+1\right)\ln 5}$.

Vậy $y'=\dfrac{6x-1}{\left(3x^2-x+1\right)\ln 5}$.

Câu 34: Đạo hàm của hàm số $y=\log\left(\cos x+2\right)$ bằng

A. $\dfrac{\sin x}{\left(\cos x+2\right)\ln 10}$. **B.** $\dfrac{-\sin x}{\cos x+2}$. **C.** $\dfrac{-\sin x}{\left(\cos x+2\right)\ln 10}$. **D.** $\dfrac{1}{\left(\cos x+2\right)\ln 10}$.

Lời giải

Chọn C

$y'=\dfrac{\left(\cos x+2\right)'}{\left(\cos x+2\right)\ln 10}=\dfrac{-\sin x}{\left(\cos x+2\right)\ln 10}$.

Câu 35: Trong bốn hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=2022^x$. **B.** $y=\left(\dfrac{2022}{2021}\right)^x$. **C.** $y=\log_{2022}x$. **D.** $y=\left(\dfrac{2021}{2022}\right)^x$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

Hàm số $y=2022^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ vì $2022>1$.

Hàm số $y=\left(\dfrac{2022}{2021}\right)^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ vì $\dfrac{2022}{2021}>1$.

Hàm số $y=\log_{2022}x$ đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$.

Hàm số $y=\left(\dfrac{2021}{2022}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ vì $\dfrac{2021}{2022}<1$.

Câu 36: Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. Đồ thị hàm số $y=x^{\alpha}$ (với α là một số thực âm) luôn có một đường tiệm cận đứng và một đường tiệm cận ngang.

B. Hàm số $y=\sqrt[3]{x}$ có đạo hàm là $y'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x}}$.

C. Hàm số $y=\log_2 x^2$ có tập xác định là $(0;+\infty)$.

D. Hàm số $y=\left(\dfrac{2021}{2020}\right)^{x^2}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Lời giải

Chọn A

Câu 37: Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{-x}$. **B.** $y=\left(\dfrac{e}{3}\right)^{x}$. **C.** $y=\dfrac{1}{5^x}$. **D.** $y=\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}\right)^{x}$.

Lời giải

Chọn D

Câu 38: Cho hàm số $y=x^{\pi-4}$ trong các kết luận sau kết luận nào **sai?**

A. Đồ thị hàm số có trục Ox là tiệm cận ngang và trục Oy là tiệm cận đứng.

B. Đồ thị hàm số luôn đi qua $M(1;1)$.

C. Hàm số luôn đồng biến trên $(0;+\infty)$.

D. Tập xác định của hàm số là $D=(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} y=\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\pi-4}=+\infty$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng $x=0$.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to +\infty} y=\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\pi-4}=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=0$.

Vì $1^{\pi-4}=1$ nên đồ thị hàm số luôn đi qua $M(1;1)$.

Ta có $y'=\left(x^{\pi-4}\right)'=(\pi-4)x^{\pi-5}<0\,\forall x\in(0;+\infty)$. Vậy hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Vì $\pi-4\notin\mathbb{Z}$ nên hàm số xác định khi $x>0$. Vậy tập xác định của hàm số là $D=(0;+\infty)$.

Câu 39: Hàm số $y=\log_2\left(x^2-3x+2\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\mathbb{R}$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

Ta có $y'=\dfrac{\left(x^2-3x+2\right)'}{\left(x^2-3x+2\right)\ln 2}=\dfrac{2x-3}{\left(x^2-3x+2\right)\ln 2}$

$y'>0\Leftrightarrow\dfrac{2x-3}{\left(x^2-3x+2\right)\ln 2}>0\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3>0\\ x\in D\end{cases}\Leftrightarrow x>2$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 40: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\log_2\left(4^x+2^x-m\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $m\le 0$. **B.** $m\ge 0$. **C.** $m>0$. **D.** $m<0$.

Lời giải

Chọn A

Để hàm số $y=\log_2\left(4^x+2^x-m\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ thì điều kiện là $4^x+2^x-m>0\ \forall x\in\mathbb{R}$

Đặt $t=2^x\ (t>0)$ ta có $t^2+t-m>0,\forall t>0\Leftrightarrow t^2+t>m,\forall t>0$

Đặt $h(t)=t^2+t,\forall t>0\Rightarrow h'(t)=2t+1>0,\forall t>0$.

Bảng biến thiên

t	0	$+\infty$
$h'(t)$	$+$	
$h(t)$	0 ↗	$+\infty$

Yêu cầu bài toán $m\le 0$.

Câu 41: Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\log\left(x^2-2x-m+1\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $m\ge 0$. **B.** $m<0$. **C.** $m\le 2$. **D.** $m>2$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x^2-2x-m+1>0$. Để hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}\Leftrightarrow x^2-2x-m+1>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow(-1)^2-(-m+1)<0\Leftrightarrow m<0$.

Câu 42: Cho hàm số $y=\dfrac{1}{x+1+\ln x}$ với $x>0$. Khi đó $-\dfrac{y'}{y^2}$ bằng

A. $1+\dfrac{1}{x}$. **B.** $\dfrac{x}{x+1}$. **C.** $\dfrac{x+1}{1+x+\ln x}$. **D.** $\dfrac{x}{1+x+\ln x}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y=\dfrac{1}{x+1+\ln x}\Rightarrow\dfrac{1}{y}=x+1+\ln x\Rightarrow\left(\dfrac{1}{y}\right)'=\left(x+1+\ln x\right)'\Leftrightarrow-\dfrac{y'}{y^2}=1+\dfrac{1}{x}$.

Câu 43: Cho hàm số $f(x)=\ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$. Biết rằng $f'(2)+f'(3)+...+f'(2019)+f'(2020)=\dfrac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Giá trị của $2a-b$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** -2. **D.** -4.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x)=\dfrac{2}{x(x-1)(x+1)}=\dfrac{1}{x(x-1)}-\dfrac{1}{x(x+1)}$.

Khi đó

$f'2+f'3+...+f'2019+f'2020$

$=\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{2018.2019}-\frac{1}{2019.2020}+\frac{1}{2019.2020}-\frac{1}{2020.2021}$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2020.2021}=\frac{1010.2021-1}{2020.2021}$

Nên $a=1010.2021-1, b=2020.2021 \Rightarrow 2a-b=-2$.

Câu 44: Cho hàm số $y=\frac{\ln x-6}{\ln x-2m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;e)$. Tìm số phần tử của S.

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Xét $y=\frac{\ln x-6}{\ln x-2m}$ có đk $\begin{cases}\ln x\neq 2m\\ x>0\end{cases}$. Vì $x\in(1;e)$ nên $\ln x\in(0;1)$

Ta có $y'=\frac{6-2m}{(\ln x-2m)^2}.\frac{1}{x}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;e) \Leftrightarrow \begin{cases}6-2m>0\\ 2m\notin(0;1)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m<3\\ m\notin\left(0;\frac{1}{2}\right)\end{cases}$

Mà m nguyên dương nên $m\in\{1;2\}$. Vậy số phần tử của S là 2.

Câu 45: Hàm số nào sau đây luôn đồng biến trên tập xác định?

A. $y=0,3^x$. **B.** $y=\log_{\frac{1}{3}}x$. **C.** $y=\log_{\frac{3}{2}}x$. **D.** $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y=\log_{\frac{3}{2}}x$ xác định với mọi $x>0$ và có cơ số $\frac{3}{2}>1$ nên hàm số $y=\log_{\frac{3}{2}}x$ đồng biến trên tập xác định của nó.

Câu 46: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2021;2021]$ để hàm số $y=\ln(x^2+2021)-mx+2022$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 2022. **B.** 4042. **C.** 4044. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$y'=\frac{2x}{x^2+2021}-m=\frac{-mx^2+2x-2021m}{x^2+2021}$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ điều kiện là: $y'\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow -mx^2+2x-2021m\geq 0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases}-m>0\\ \Delta'=1-2021m^2\leq 0\end{cases} \Leftrightarrow m\leq -\frac{1}{\sqrt{2021}}$.

Vì $m \in [-2021;2021]$ nên $m \in \{-2021;-2020;...;-2;-1\}$.

Vậy có 2021 giá trị nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 47: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \log_2\left(x^2 - 2x + 2022 - m\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$?

A. 2022. **B.** 2021. **C.** 2020. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện xác định: $x^2 - 2x + 2022 - m > 0$.

Hàm số $y = \log_2\left(x^2 - 2x + 2022 - m\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$x^2 - 2x + 2022 - m > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = 1 - (2022 - m) < 0 \Leftrightarrow m < 2021.$

Vậy có 2020 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu 48: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = \dfrac{\ln x - 3}{\ln x - m}$ đồng biến trên khoảng $(1;e)$?

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \ln x \Rightarrow t' = \dfrac{1}{x} > 0,\ \forall x \in (1;e)$. Do đó $t = \ln x$ đồng biến trên khoảng $(1;e)$.

Hàm số đã cho trở thành $f(t) = \dfrac{t-3}{t-m}$, ta có: $f'(t) = \dfrac{3-m}{(t-m)^2}$

Hàm số $y = \dfrac{\ln x - 3}{\ln x - m}$ đồng biến trên khoảng $(1;e) \Leftrightarrow$ Hàm số $f(t) = \dfrac{t-3}{t-m}$ đồng biến trên khoảng $(0;1) \Leftrightarrow f'(t) > 0, \forall t \in (0;1) \Leftrightarrow \begin{cases} m \notin (0;1) \\ 3 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m \geq 1 \\ m \leq 0 \end{array}\right. \\ m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \leq m < 3 \\ m \leq 0 \end{array}\right.$.

Vì m nguyên dương nên $m \in \{1;2\}$.

Vậy có 2 giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = \dfrac{\ln x - 3}{\ln x - m}$ đồng biến trên khoảng $(1;e)$.

Câu 49: Cho hàm số $f(x) = 3^x - 3^{-x}$ tìm tất cả các giá trị của m để $f(m) + f\left(3m - 2^{15}\right) < 0$

A. $m > 8192$. **B.** $m \geq 8192$. **C.** $m < 8192$. **D.** $m \leq 8192$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x) = 3^x \ln 3 + 3^{-x} \ln 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta lại có $f(-x) = 3^{-x} - 3^{-(-x)} = -3^x + 3^{-x} = -f(x)$ nên $f(x)$ là hàm số lẻ.

Khi đó $f(m) + f\left(3m - 2^{15}\right) < 0 \Leftrightarrow f\left(3m - 2^{15}\right) < -f(m)$

$\Leftrightarrow f\left(3m - 2^{15}\right) < f(-m) \Leftrightarrow 3m - 2^{15} < -m \Leftrightarrow 4m < 2^{15} \Leftrightarrow m < 8192$.

Câu 50: Cho các số thực a, b sao cho $0 < a, b \neq 1$, biết rằng đồ thị các hàm số $y = a^x$ và $y = \log_b x$ cắt nhau tại điểm $M\left(\sqrt{2021}; \sqrt{2022^{-1}}\right)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $0<a<1,\ b>1$. **B.** $a>1, b>1$. **C.** $0<a<1,\ 0<b<1$. **D.** $a>1, 0<b<1$.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị các hàm số $y=a^x$ và $y=\log_b x$ cùng đi qua điểm $M\left(\sqrt{2021};\sqrt{2022^{-1}}\right)$ nên ta có

$$\begin{cases}\sqrt{2022^{-1}}=a^{\sqrt{2021}}\\ \sqrt{2022^{-1}}=\log_b\sqrt{2021}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{2022^{-1}}=a^{\sqrt{2021}}\\ b^{\sqrt{2022^{-1}}}=\sqrt{2021}\end{cases}$$

Ta có $a^{\sqrt{2021}}=\sqrt{2022^{-1}}<1=a^0\Rightarrow 0<a<1$.

Khi đó: $b^{\sqrt{2022^{-1}}}=\sqrt{2021}>b^0\Rightarrow b>1$

Dạng 5: Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức chứa hàm mũ - logarit

- Nếu hàm số đơn điệu trên một đoạn thì giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất đạt được tại các đầu mút của đoạn.
- Nếu hàm số không đơn điệu thì tiến hành việc tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất như sau:

Bước 1: Tìm các điểm $x_1, x_2, ..., x_n$ trên các khoảng $(a;b)$ mà tại đó $f'(x)=0$.

Bước 2: Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), f(b)$

Bước 3: Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên: $M=\max\limits_{[a;b]} f(x); m=\min\limits_{[a;b]} f(x)$

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{1}{e^x+1}-\dfrac{1}{4e^x+1}$ trên $(-\infty;0]$ bằng

A. 0. **B.** $\dfrac{17}{50}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{10}$.

Lời giải

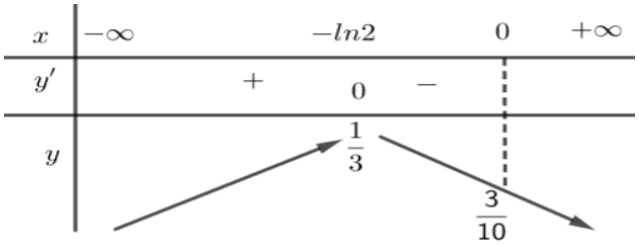
Chọn C

Ta có $y'=\dfrac{-e^x}{(1+e^x)^2}+\dfrac{4e^x}{(1+4e^x)^2}$. Cho $y'=0\Leftrightarrow\dfrac{-e^x}{(1+e^x)^2}+\dfrac{4e^x}{(1+4e^x)^2}=0$

$\Leftrightarrow -e^x.(1+4e^x)^2+4e^x.(1+e^x)^2=0\Leftrightarrow -(1+8e^x+16e^{2x})+4(1+2e^x+e^{2x})=0$

$\Leftrightarrow -12e^{2x}+3=0\Leftrightarrow e^{2x}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow e^x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=-\ln 2.$

Bảng biến thiên



Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{1}{e^x+1}-\dfrac{1}{4e^x+1}$ trên $(-\infty;0]$ bằng $\dfrac{1}{3}$.

Câu 2: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x.e^{x+1}$ trên đoạn $[-2;4]$ là:

A. $4e^3$. **B.** $-2e$. **C.** $\dfrac{-2}{e}$. **D.** -1

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x)=e^{x+1}+x.e^{x+1}=e^{x+1}(1+x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}e^{x+1}=0\ \ (VN)\\1+x=0\Leftrightarrow x=-1\end{array}\right.$

Ta có: $f(-2)=\dfrac{-2}{e}$; $f(-1)=-1$; $f(4)=4e^5$. Vậy $\min\limits_{[-2;4]} f(x)=-1$.

Câu 3: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=(2x-1)+\ln(2x+1)$ trên đoạn $\left[-\dfrac{1}{4};0\right]$ bằng

A. $-\frac{3}{2}-\ln 2$. **B.** -1. **C.** $\ln 2$. **D.** $1+\ln 3$.

Lời giải

Chọn B

$y'=2+\frac{2}{2x+1}=\frac{4x+4}{2x+1}=0\Leftrightarrow x=-1\notin\left[-\frac{1}{4};0\right]$

$y\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{3}{2}+\ln\frac{1}{2}$; $y(0)=-1$. Vậy $\max\limits_{\left[-\frac{1}{4};0\right]} y=-1$.

Câu 4: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x+y=2$. Giá trị nhỏ nhất của $A=2.3^y+\frac{1}{24}.3^{2x}$ là

A. $A_{\min}=2$. **B.** $A_{\min}=\frac{81}{8}$. **C.** $A_{\min}=\frac{9}{2}$. **D.** $A_{\min}=\frac{51}{8}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $x+y=2\Leftrightarrow y=2-x$. Xét: $A=2.3^y+\frac{1}{24}.3^{2x}=2.3^{2-x}+\frac{1}{24}.3^{2x}=\frac{18}{3^x}+\frac{1}{24}.\left(3^x\right)^2$.

Đặt $t=3^x$, $t>0$, khi đó $A=\frac{18}{t}+\frac{t^2}{24}$. Xét: $A'=\frac{t}{12}-\frac{18}{t^2}=0\Leftrightarrow t=6$.

Bảng biến thiên của hàm số $A=\frac{18}{t}+\frac{t^2}{24}$ trên $(0;+\infty)$.

x	0		6		$+\infty$
A'		$-$	0	$+$	
A		↘		↗	

Khi đó: A đạt giá trị nhỏ nhất tại $t=6\Rightarrow A_{\min}=\frac{9}{2}$.

Câu 5: Cho các số thực dương a,b thỏa mãn $\log_2\left(\frac{b}{2a+2}\right)=a-b$. Giá trị nhỏ nhất của $P=b+\frac{9}{a+2}$ là

A. 7. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

$\log_2\left(\frac{b}{2a+2}\right)=a-b\Leftrightarrow\log_2 b-1-\log_2(a+1)=a-b\Leftrightarrow\log_2 b+b=\log_2(a+1)+a+1$.

Do hàm số $f(x)=\log_2 x+x$ với $x>0$ là hàm số đồng biến nên từ đẳng thức trên ta được $b=a+1$. Khi đó $P=b+\frac{9}{a+2}=a+1+\frac{9}{a+2}$, tức là P là một hàm số của a với $a>0$.

Ta có $P'(a)=1-\frac{9}{(a+2)^2}=\frac{(a-1)(a+5)}{(a+2)^2}$; $P'(a)=0\Leftrightarrow a=1$ (vì $a>0$)

Ta thấy $P'(a)<0\Leftrightarrow 0<a<1$; $P'(a)>0\Leftrightarrow a>1$, suy ra $P_{\min}=P(1)=5$.

Cách 2. Ta có $P=b+\frac{9}{a+2}=a+1+\frac{9}{a+2}=a+2+\frac{9}{a+2}-1\ge 2\sqrt{(a+2).\frac{9}{(a+2)}}-1$

$\Rightarrow P\ge 5\Rightarrow P_{\min}=5$ khi $a+2=\frac{9}{a+2}\Leftrightarrow a=1$

Câu 6: Cho các số thực a,b,c,d thỏa mãn $\frac{1}{2^a}+\frac{1}{4^b}+\frac{1}{8^c}+\frac{1}{16^d}=\frac{1}{4}$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=a+2b+3c+4d$. Giá trị của biểu thức $\log_2 m$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho bốn số $\frac{1}{2^a},\frac{1}{4^b},\frac{1}{8^c}$ và $\frac{1}{16^d}$ ta được

$\frac{1}{4}=\frac{1}{2^a}+\frac{1}{4^b}+\frac{1}{8^c}+\frac{1}{16^d}\ge 4\sqrt[4]{\frac{1}{2^a}.\frac{1}{4^b}.\frac{1}{8^c}.\frac{1}{16^d}}=\frac{4}{\sqrt[4]{2^{a+2b+3c+4d}}}\Rightarrow \sqrt[4]{2^{a+2b+3c+4d}}\ge 16$

$\Rightarrow 2^{a+2b+3c+4d}\ge 16^4\Rightarrow a+2b+3c+4d\ge 16$

Suy ra $m=16$ và $\log_2 m=\log_2 16=4$.

Câu 7: Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2^{8x+2^{x+1}+1}-4^{3x-y+2^x+2}+2x+2y-3\ge 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+6x+4y$ gần nhất với số nào dưới đây?

A. 6. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $2^{8x+2^{x+1}+1}-4^{3x-y+2^x+2}+2x+2y-3\ge 0$

$\Leftrightarrow 2^{8x+2^{x+1}+1}+\left(8x+2^{x+1}+1\right)\ge 2^{6x-2y+2^{x+1}+4}+\left(6x-2y+2^{x+1}+4\right)\ (1)$

Xét hàm số $f(t)=2^t+t$ trên $\mathbb{R}$

$f'(t)=2^t.\ln 2+1>0\ \forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow$Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do đó $(1)\Leftrightarrow f\left(8x+2^{x+1}+1\right)\ge f\left(6x-2y+2^{x+1}+4\right)$

$\Leftrightarrow 8x+2^{x+1}+1\ge 6x-2y+2^{x+1}+4\Leftrightarrow 2x+2y-3\ge 0\Leftrightarrow x+y\ge\frac{3}{2}$

Khi đó $P=(x+3)^2+(y+2)^2-13\ge\frac{1}{2}(x+3+y+2)^2-13\ge\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+5\right)^2-13=\frac{65}{8}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P gần nhất với số 8.

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \mathrm{e}^x.\cos x$ trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ là

A. 1. **B.** $\frac{1}{2}.\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}.\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}.\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y = \mathrm{e}^x.\cos x \Rightarrow y' = \mathrm{e}^x.\cos x - \mathrm{e}^x \sin x = \mathrm{e}^x\left(\cos x - \sin x\right)$.

$y' = 0 \Rightarrow \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, ta được $x = \frac{\pi}{4}$.

Khi đó $y(0) = 1; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$. Vậy $\max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y = \frac{\sqrt{2}}{2}.\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$.

Câu 2: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \ln x$ trên $\left[1;e^2\right]$ là.

A. $1+e$. **B.** 2. **C.** $2e^2$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = (0;+\infty)$

Ta có $y' = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow y' > 0$ hàm số đồng biến với $\forall x \in D$.

Khi đó $\min\limits_{\left[1;e^2\right]} y = y(1) = 1$

Câu 3: Cho hàm số $y = \ln x + x$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[1;e]$ lần lượt là M và m. Tính $M + m$

A. $e-2$. **B.** 3. **C.** $1+e$. **D.** $e+2$

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y = \ln x + x$ trên $[1;e]$ có $y' = \frac{1}{x} + 1$

Có $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1 \notin [1;e]$

$y(1) = 1 = m;\ \ y(e) = 1 + e = M \Rightarrow M + m = e + 2$.

Câu 4: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = e^{x^2-4x+5}$ trên đoạn $[0;3]$.

A. 5. **B.** e^5. **C.** e. **D.** e^2.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $f(x) = e^{x^2-4x+5}$ xác định và liên tục trên đoạn $[0;3]$

Ta có $f'(x)=(2x-4)e^{x^2-4x+5}$ và $\begin{cases} f'(x)=0 \\ x\in(0;3) \end{cases} \Leftrightarrow x=2$.

Ta có: $f(0)=e^5,\ f(2)=e,\ f(3)=e^2$ nên giá trị lớn nhất của hàm số $y=e^{x^2-4x+5}$ trên đoạn $[0;3]$ là $f(0)=e^5$.

Câu 5: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\log^2_2 x-2\log_2 x+5$ trên đoạn $[1;8]$. Khi đó $M+m$ bằng

A. 16. **B.** -12. **C.** 12. **D.** -16.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y=\log^2_2 x-2\log_2 x+5$ trên đoạn $[1;8]$, đặt $t=\log_2 x$ với $\forall x\in[1;8]\Rightarrow t\in[0;3]$

$\Rightarrow y=f(t)=t^2-2t+5, t\in[0;3]$

$\Rightarrow f'(t)=2t-2=0\Rightarrow t=1\in[0;3]\Rightarrow f(0)=5,\ f(1)=4,\ f(3)=8$

$\Rightarrow M=8, m=4\Rightarrow M+m=12$

Câu 6: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2e^x$ trên đoạn $[-3;-1]$. Tính $S=\dfrac{m}{M}$.

A. $S=\dfrac{e}{4}$. **B.** $S=\dfrac{4}{e^2}$. **C.** $S=\dfrac{4}{e}$. **D.** $S=\dfrac{e^2}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=\left(x^2+2x\right)e^x;\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-2\in(-3;-1) \\ x=0\notin(-3;-1) \end{array}\right.$

Ta có $y(-3)=\dfrac{9}{e^3},\ y(-2)=\dfrac{4}{e^2},\ y(-1)=\dfrac{1}{e}$

Suy ra $M=\dfrac{4}{e^2}$ và $m=\dfrac{1}{e}$. Vậy $S=\dfrac{m}{M}=\dfrac{4}{e}$.

Câu 7: Trên đoạn $[-2;0]$, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2-4\ln(1-x)$ bằng

A. 0. **B.** -1. **C.** $1-4\ln 2$. **D.** $4-4\ln 3$.

Lời giải

Chọn C

Miền khảo sát: $D=[-2;0]$.

Đạo hàm: $y'=2x+\dfrac{4}{1-x}$.

$y'=0\Leftrightarrow 2x+\dfrac{4}{1-x}=0\Leftrightarrow -2x^2+2x+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-1\in[-2;0] \\ x=2\notin[-2;0] \end{array}\right.$.

Ta có $y(-2)=4-4\ln 3;\ y(-1)=1-4\ln 2;\ y(0)=0$.

Vậy $\min\limits_{[-2;0]} y=y(-1)=1-4\ln 2$.

Câu 8: Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=(x-1)\ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{e};e\right]$. Khi đó $M+m$ bằng

A. $\frac{e^2-1}{e}$. **B.** $\frac{1}{e}$. **C.** $e-1$. **D.** $\frac{e-1}{e}$.

Lời giải

Chọn C

$y'=\ln x+1-\frac{1}{x};\ y''=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0\ \forall x\in\left[\frac{1}{e};e\right]$

$$\begin{cases} y'=\ln x+1-\frac{1}{x} \\ y''=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0\ \forall x\in\left[\frac{1}{e};e\right] \\ y'\left(\frac{1}{e}\right)=-e<0;\ y'(e)=2-\frac{1}{e}>0 \end{cases}$$

Do đó $y'=0$ có nghiệm duy nhất $x=1$ trên $\left[\frac{1}{e};e\right]$

$$\begin{cases} y\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{e-1}{e} \\ y(e)=e-1=M \Rightarrow M+m=e-1. \\ y(1)=0=m \end{cases}$$

Câu 9: Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=4^x+(a-2)2^x+2$ trên đoạn $[-1;1]$. Tất cả các giá trị của a để $m\ge 1$ là

A. $a\ge 1$. **B.** $-\frac{1}{2}\le a\le 0$. **C.** $a\le -\frac{1}{2}$. **D.** $a\ge 0$.

Lời giải

Chọn D

Đặt: $t=2^x\ (t>0)$. Với $x\in[-1;1]\Rightarrow t\in\left[\frac{1}{2};2\right]$.

Xét hàm số $g(t)=t^2+(a-2)t+2$, $t\in\left[\frac{1}{2};2\right]$.

Ta có $g'(t)=2t+a-2$;

$g'(t)=0\Leftrightarrow 2t+a-2=0\Leftrightarrow t=\frac{2-a}{2}$;

$g'(t)>0\Leftrightarrow t>\frac{2-a}{2}; g'(t)<0\Leftrightarrow t<\frac{2-a}{2}$.

TH1: $\frac{2-a}{2}<\frac{1}{2}\Leftrightarrow a>1$. Khi đó ta có $m=\min\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]}g(t)=g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2a+5}{4}$.

$m\ge 1\Leftrightarrow\frac{2a+5}{4}\ge 1\Leftrightarrow a\ge -\frac{1}{2}$.

Vậy $a>1$.

TH2: $\frac{1}{2}\le\frac{2-a}{2}\le 2\Leftrightarrow -2\le a\le 1$. Khi đó ta có $m=\min\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]}g(t)=g\left(\frac{2-a}{2}\right)=\frac{-(a-2)^2+8}{4}$.

$m\ge 1\Leftrightarrow\frac{-(a-2)^2+8}{4}\ge 1\Leftrightarrow 0\le a\le 4$.

Vậy $0\le a\le 1$.

TH3: $-\frac{a-2}{2}>2\Leftrightarrow a<-2$. Khi đó ta có $m=\min\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]}g(t)=g(2)=2a+2$.

$m\ge 1\Leftrightarrow 2a+2\ge 1\Leftrightarrow a\ge -\frac{1}{2}$.

Suy ra không có giá trị nào của a thoả mãn.

Kết luận: Vậy $a\ge 0$.

Câu 10: Cho các hàm số $f(x)=x+3^x$ và $g(x)=x^3-mx^2+(m^2+1)x-3$ với m là tham số thực. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y=g(2x+f(x))$ trên đoạn $[0;1]$. Khi M đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của m bằng

A. 3. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Đặt $h(x)=2x+f(x)=3x+3^x$

$h'(x)=3+3^x.\ln 3>0$

Bảng biến thiên:

x	0		1
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	1	↗	6

Với $x\in[0;1]$ suy ra $h(x)\in[1;6]$

Xét hàm số $g(x)=x^3-mx^2+(m^2+1)x-3$ trên $[1;6]$.

$g'(x)=3x^2-2mx+(m^2+1)=x^2-2mx+m^2+2x^2+1=(x-m)^2+2x^2+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $M=g(6)=6m^2-36m+219=6(m^2-6m+9)+147=6(m-3)^2+147\ge 147$

M đạt giá trị nhỏ nhất khi $m=3$.

Câu 11: Với các số thực không âm a,b thỏa mãn $16b+3a.2^{3a+4b}\ge 8$, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3a^2+3b^2+12a+18b+6$ bằng

A. 15. **B.** 18. **C.** 25. **D.** 21.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=3a+4b\ge 0\Rightarrow 4b=t-3a$

Ta có $16b+3a.2^{3a+4b}\ge 8\Rightarrow 4t-12a+3a.2^t\ge 8$.

Xét hàm số $f(t)=4t-12a+3a.2^t\Rightarrow f'(t)=4+3a.2^t.\ln 2\ge 0\,\forall t\ge 0, a\ge 0$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có $f(t)\ge 8\Leftrightarrow f(t)\ge f(2)\Rightarrow t\ge 2\Rightarrow 3a+4b\ge 2\,(1)$

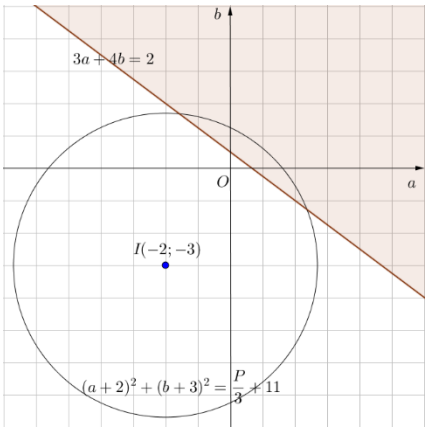
$P=3a^2+3b^2+12a+18b+6\Leftrightarrow 3\left(a^2+4a+4\right)+3\left(b^3+6b+9\right)=P+33$

$\Leftrightarrow (a+2)^2+(b+3)^2=\dfrac{P}{3}+11\ (2)$

Tập hợp các số a, b thỏa điều kiện (1) là nửa mặt phẳng (kể cả bờ $\Delta: 3a+4b=2$) tô đậm như hình vẽ. (2) là đường tròn tâm $I(-2;-3)$ bán kính bằng $\sqrt{\dfrac{P}{3}+11}$.

Điều kiện $(1), (2)$ có điểm chung thì $\sqrt{P+7}\ge d(I;\Delta)$

$d(I;\Delta)=\dfrac{|-6-12-2|}{5}=4$. Suy ra $\dfrac{P}{3}+11\ge 16\Leftrightarrow P\ge 15$



Câu 12: Gọi a,b là các số thực lớn hơn 1 sao cho biểu thức $T=\left(\log_{a^2} b\right)^3+6\log_b a$ đạt giá trị nhỏ nhất. Gía trị của $P=\log_{\sqrt{a}}\sqrt[3]{ab}$ bằng

A. 7 **B.** 1 **C.** $\dfrac{10}{3}$ **D.** 2

Lời giải

Chọn D

Ta có $T=\left(\log_{a^2} b\right)^3+6\log_b a=\dfrac{1}{8}\left(\log_a b\right)^3+\dfrac{6}{\log_a b}$;Đặt $x=\log_a b\ \left(do\, a; b>1\Rightarrow x>0\right)$

$T=\dfrac{1}{8}x^3+\dfrac{6}{x}(x>0)\Rightarrow T'=\dfrac{3}{8}x^2-\dfrac{6}{x^2}; T'=0\Rightarrow \dfrac{\frac{3}{8}x^4-6}{x^2}=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2(L) \\ x=2 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên:

x	0		2		$+\infty$
T'		$-$	0	$+$	
T	$+\infty$	↘	Min	↗	$+\infty$

Vậy $T=\left(\log_{a^2} b\right)^3+6\log_b a$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x=2\Leftrightarrow \log_a b=2\Leftrightarrow b=a^2$.

$P=\log_{\sqrt{a}}\sqrt[3]{ab}=\dfrac{2}{3}\log_a a.a^2=\dfrac{2}{3}\log_a a^3=2$

Câu 13: Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $a^{x^2+1}b^{2x}=1$ với a,b là các số thực lớn hơn 1. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x_1+x_2+\dfrac{2x_1x_2}{x_1+x_2}$ bằng

A. -4. **B.** $-2\sqrt{2}$. **C.** 4. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $a^{x^2+1}b^{2x}=1\Leftrightarrow \ln\left(a^{x^2+1}b^{2x}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2+1\right)\ln a+2x\ln b=0\Leftrightarrow \ln a.x^2+2\ln b.x+\ln a=0$

Phương trình có 2 nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'=\left(\ln b\right)^2-\left(\ln a\right)^2\geq 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\ln b\geq \ln a>0\\ \ln b\leq -\ln a<0\end{array}\right.\Rightarrow \log_a b>0;\forall a;b>1$

Ta có $\ln a.x^2+2\ln b.x+\ln a=0\Leftrightarrow x^2+2\left(\log_a b\right).x+1=0$

Theo định lý Vi-ét, ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=-2\log_a b\\ x_1x_2+1\end{cases}$

$P=x_1+x_2+\dfrac{2x_1x_2}{x_1+x_2}=-2\log_a b+\dfrac{2}{-2\log_a b}=-2\left(\log_a b+\dfrac{1}{2\log_a b}\right)$

Vì $\log_a b>0\Rightarrow \log_a b+\dfrac{1}{2\log_a b}\geq 2\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\sqrt{2}$ (theo Cô-si)

$\Rightarrow P=-2\left(\log_a b+\dfrac{1}{2\log_a b}\right)\leq -2\sqrt{2}$. Dấu "=" xãy ra khi $\log_a b=\dfrac{1}{2\log_a b}\Leftrightarrow b=a^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x_1+x_2+\dfrac{2x_1x_2}{x_1+x_2}$ bằng $-2\sqrt{2}$.

Câu 14: Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho ứng với mỗi y có không quá 20 số nguyên x thỏa mãn $\dfrac{2^{x+1}-\dfrac{1}{4}}{y-2^{\sqrt{x}}}\geq 0$?

A. 21. **B.** 22. **C.** 23. **D.** 24.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases}x\geq 0\\ y-2^{\sqrt{x}}\neq 0\\ y\geq 1\end{cases}$.

Trường hợp 1: $\begin{cases} 2^{x+1}-\dfrac{1}{4}\le 0 \\ y-2^{\sqrt{x}}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -3 \\ x>\left(\log_2 y\right)^2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing .$

Trường hợp 2: $\begin{cases} 2^{x+1}-\dfrac{1}{4}\ge 0 \\ y-2^{\sqrt{x}}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -3 \\ x<\left(\log_2 y\right)^2 \end{cases} .$

Kết hợp điều kiện: $x\ge 0;\ \log_2 y\ge \log_2 1=0$. Ta có: $0\le x<\left(\log_2 y\right)^2$.

Để có không quá 20 số nguyên x thì $1\le\left(\log_2 y\right)^2\le 20\Rightarrow 1\le\log_2 y\le\sqrt{20}\Leftrightarrow 2\le y\le 2^{\sqrt{20}}$

$\Rightarrow y\in\{2;3;...;22\}$. Có 22 số nguyên y.

Câu 15: Cho a,b là các số thực thay đổi thỏa mãn $\log_{a^2+b^2+20}\left(6a-8b-4\right)=1$ và c,d là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $\sqrt{c^2+c+\log_2\dfrac{c}{d}-7}=\sqrt{2\left(2d^2+d-3\right)}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\sqrt{\left(a-c+1\right)^2+\left(b-d\right)^2}$ là

A. $4\sqrt{2}-1$. **B.** $\sqrt{29}-1$. **C.** $\dfrac{12\sqrt{5}-5}{5}$. **D.** $\dfrac{8\sqrt{5}-5}{5}$.

Lời giải

Chọn B

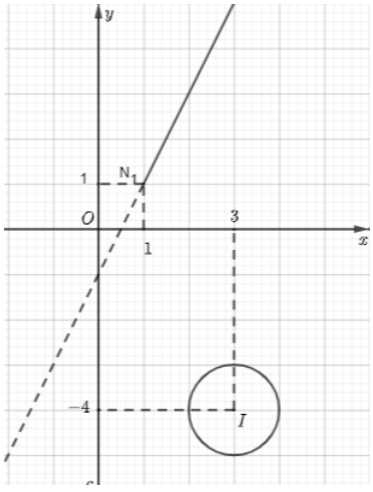
Ta có: $\log_{a^2+b^2+20}\left(6a-8b-4\right)=1\Leftrightarrow a^2+b^2+20=6a-8b-4\Leftrightarrow\left(a-3\right)^2+\left(b+4\right)^2=1\ (1)$

Lại có: $\sqrt{c^2+c+\log_2\dfrac{c}{d}-7}=\sqrt{2\left(2d^2+d-3\right)}\Leftrightarrow\begin{cases} c^2+c+\log_2\dfrac{c}{d}-7=2\left(2d^2+d-3\right) \\ 2d^2+d-3\ge 0;\ \ d,c>0(gt) \end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} c^2+c+\log_2 c=\left(2d\right)^2+2d+\log_2 2d \\ d\ge 1;c>0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} c-1=2d-1 \\ d\ge 1;c\ge 2 \end{cases}\ (2)$

Đặt $M\left(a;b\right)$ và $N\left(c-1;d\right)$. Theo (1) ta được M thuộc đường tròn tâm $I\left(3;-4\right)$ bán kính $R=1$; theo (2) ta được N thuộc nửa đường thẳng $y=2x-1$ ứng với $x\ge 1$.

Khi đó $MN=\sqrt{\left(a-c+1\right)^2+\left(b-d\right)^2}$.



Vậy $MN_{\min}=N_1I-R=\sqrt{29}-1$.

Câu 16: Cho các số thực $a,b\in(1;3]$ thỏa mãn $a<b$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_a\left(b^2+9b-9\right)+6\log_{\frac{b}{a}}^2 a$ là $9\sqrt[3]{\frac{1}{m}}+n$ với m,n là các số nguyên dương. Tính $S=m^2+n^2$

A. $S=13$. **B.** $S=8$. **C.** $S=20$. **D.** $S=29$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\forall b\in(1;3]:\ b^2+9b-9\geq 3b^2$

Do đó: $\log_a\left(b^2+9b-9\right)\geq\log_a\left(3b^2\right)\geq\log_a\left(b^3\right)=3\log_a b$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow b=3$

$$\Rightarrow P\geq 3\log_a b+\frac{6}{\left(\log_a b-1\right)^2}=3\left[1+\frac{\log_a b-1}{2}+\frac{\log_a b-1}{2}+\frac{2}{\left(\log_a b-1\right)^2}\right]$$

Theo BĐT Cô-si ta có:

$$\frac{\log_a b-1}{2}+\frac{\log_a b-1}{2}+\frac{2}{\left(\log_a b-1\right)^2}\geq 3\sqrt[3]{\left(\frac{\log_a b-1}{2}\right)^2.\frac{2}{\left(\log_a b-1\right)^2}}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow P\geq 3\left[1+\frac{\log_a b-1}{2}+\frac{\log_a b-1}{2}+\frac{2}{\left(\log_a b-1\right)^2}\right]\geq 3.\left[3\sqrt[3]{\frac{1}{2}}+1\right]=9\sqrt[3]{\frac{1}{2}}+3$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}b=3\\ \frac{\log_a b-1}{2}=\frac{2}{\left(\log_a b-1\right)^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=3\\ \left(\log_a b-1\right)^3=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=3\\ \log_a 3-1=\sqrt[3]{4}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=3\\ 3=a^{1+\sqrt[3]{4}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=3\\ 3^{\frac{1}{1+\sqrt[3]{4}}}=a\end{cases}\Rightarrow m=2;n=3\Rightarrow S=13.$$

Câu 17: Cho các số thực a,b thỏa mãn $\frac{1}{3}<b<a<1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_a\frac{4(3b-1)}{9}+8\log_{\frac{b}{a}}^2 a$.

A. 7. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Vì $\frac{1}{3}<b<a<1$ nên $(3b-2)^2\geq 0\Leftrightarrow b^2\geq\frac{4(3b-1)}{9}\Rightarrow\log_a\frac{4(3b-1)}{9}\leq\log_a b^2$

Ta có $8\log_{\frac{b}{a}}^2 a=8\left(\frac{1}{\log_a b-1}\right)^2$

Đặt $\log_a b=x$. Vì $\frac{1}{3}<b<a<1$ nên $x=\log_a b>1$. Khi đó

$$P=\log_a\frac{4(3b-1)}{9}+8\log_{\frac{b}{a}}^2 a\geq\log_a b^2+8\left(\frac{1}{\log_a b-1}\right)^2\Rightarrow P\geq 2x+\frac{8}{(x-1)^2}$$

Mà $2x+\dfrac{8}{(x-1)^2}=(x-1)+(x-1)+\dfrac{8}{(x-1)^2}+2\ge 3.\sqrt[3]{(x-1).(x-1).\dfrac{8}{(x-1)^2}}+2=8$

Suy ra $P\ge 8$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{2}{3} \\ a=\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}} \end{cases}$. Vậy $\min P=8$.

Câu 18: Xét các số thực x, y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1}\le (x^2+y^2-2x+2).4^x$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{3x-4y}{2x+y+1}$ bằng $a\sqrt{113}+b$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Khi đó $a+b$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2^{x^2+y^2+1}\le (x^2+y^2-2x+2).4^x \Leftrightarrow \dfrac{2^{x^2+y^2+1}}{4^x}\le x^2+y^2-2x+2$

$\Leftrightarrow 2^{x^2+y^2-2x+1}\le x^2+y^2-2x+2 \Leftrightarrow 2^{(x-1)^2+y^2}\le \left[(x-1)^2+y^2\right]+1 \quad (1)$

Đặt $u=(x-1)^2+y^2, u\ge 0$. Khi đó $(1)\Leftrightarrow 2^u\le u+1\Leftrightarrow 2^u-u-1\le 0 \quad (2)$.

Xét $f(u)=2^u-u-1$ có $f'(u)=2^u.\ln 2-1\Rightarrow f'(u)=0\Leftrightarrow u=\log_2\dfrac{1}{\ln 2}=-\log_2(\ln 2)$.

Bảng biến thiên

u	0		$-\log_2(\ln 2)$		$+\infty$
$f'(u)$		$-$	0	$+$	
$f(u)$	0	↘	$-0{,}086$	↗	$+\infty$

Mà $f(0)=f(1)=0\Rightarrow f(u)\le 0\Leftrightarrow 0\le u\le 1\Rightarrow (x-1)^2+y^2\le 1$.

◎Khi đó tập hợp điểm $M(x;y)$ là hình tròn (C) tâm $I(1;0)$, bán kính $R=1$.

Ta có $P=\dfrac{3x-4y}{2x+y+1}\Leftrightarrow (2x+y+1)P=3x-4y\Leftrightarrow (2P-3)x+(P+4)y+P=0$.

◎Khi đó tập hợp điểm $M(x;y)$ là đường thẳng $(d):(2P-3)x+(P+4)y+P=0$.

Do vậy (d) và (C) có điểm chung khi và chỉ khi $d(I;(d))\le 1\Leftrightarrow \dfrac{|2P-3+P|}{\sqrt{(2P-3)^2+(P+4)^2}}\le 1$

$\Leftrightarrow 3|P-1|\le\sqrt{5P^2-4P+25}\Leftrightarrow 9(P-1)^2\le 5P^2-4P+25\Leftrightarrow 4P^2-14P-16\le 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{7-\sqrt{113}}{4}\le P\le\dfrac{7+\sqrt{113}}{4}$.

Do đó $\max P=\dfrac{7+\sqrt{113}}{4}=\dfrac{1}{4}\sqrt{113}+\dfrac{7}{4}\Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{4} \\ b=\dfrac{7}{4} \end{cases}\Rightarrow a+b=2$.

Câu 19: Cho hai số thực $a>1,b>1$. Gọi $x_1;x_2$ là hai nghiệm của phương trình $a^x b^{x^2-1}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\left(\dfrac{x_1x_2}{x_1+x_2}\right)^2-4x_1-4x_2$.

A. $3\sqrt[3]{2}$. **B.** 4. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt[3]{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $a>1,b>1\Rightarrow \log_b a>0$. Khi đó: $a^x b^{x^2-1}=1\Leftrightarrow x^2+\log_b a.x-1=0\ (1)$

Phương trình (1) luôn có hai nghiệm trái dấu $x_1;x_2$, với mọi $a>1,b>1$.

Áp dụng định lí Vi-et cho (1) ta có:

$$S=\left(\frac{1}{\log_b a}\right)^2+4\log_b a=\left(\frac{1}{\log_b a}\right)^2+2\log_b a+2\log_b a\overset{AM-GM}{\geq}3\sqrt[3]{4}$$

$$S=3\sqrt[3]{4}\text{ khi }\begin{cases}a,b>1\\\left(\dfrac{1}{\log_b a}\right)^2=2\log_b a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a,b>1\\\log_b a=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\end{cases}\Leftrightarrow a=b^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}>1.$$

Vậy $\min S=3\sqrt[3]{4}$.

Câu 20: Xét các số thực dương a,b,c lớn hơn 1 (với $a>b$) thỏa mãn $4\left(\log_a c+\log_b c\right)=25\log_{ab} c$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\log_b a+\log_a c+\log_c b$ bằng

A. 8. **B.** $\dfrac{17}{4}$. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $4\left(\log_a c+\log_b c\right)=25\log_{ab} c\Leftrightarrow 4\left(\dfrac{1}{\log_c a}+\dfrac{1}{\log_c b}\right)=\dfrac{25}{\log_c a+\log_c b}$

$$\Leftrightarrow 4\left(\frac{\log_c a+\log_c b}{\log_c a.\log_c b}\right)=\frac{25}{\log_c a+\log_c b}\Leftrightarrow 4\left(\log_c a+\log_c b\right)^2=25\log_c a.\log_c b$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\frac{\log_c a}{\log_c b}+\frac{\log_c b}{\log_c a}\right)=17\Leftrightarrow 4\left(\log_b a+\log_a b\right)=17$$

$$\Leftrightarrow 4\log_a^2 b-17\log_a b+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_a b=4\\\log_a b=\dfrac{1}{4}\end{array}\right.\Rightarrow\log_a b=\frac{1}{4}\ (\text{do } a>b).\text{ Hay }\log_b a=4.$$

Mặt khác, theo giả thiết ta có

$\log_b a+\log_a c+\log_c b\geq 4+2\sqrt{\log_a c.\log_c b}\Leftrightarrow\log_b a+\log_a c+\log_c b\geq 4+2\sqrt{\log_a b}$

$$\Leftrightarrow\log_b a+\log_a c+\log_c b\geq 4+2\sqrt{\frac{1}{4}}\Leftrightarrow\log_b a+\log_a c+\log_c b\geq 5.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\log_b a+\log_a c+\log_c b$ bằng 5 khi $\begin{cases}\log_b a=4\\\log_a c=\log_c b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b^4\\c=b^2\end{cases}$ (vì a,b,c lớn hơn 1).

Câu 21: Xét hai số thực a, b thỏa mãn $2^{a+b-1}+2^{2a+2b-1}\le 7\log_2(a+b)+3$ và hai số thực x, y thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(4x+6y-10)=1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(2a-x)^2+(b-y)^2$ bằng

A. $\dfrac{41-12\sqrt{5}}{5}$. **B.** $9-4\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{11-6\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{21-8\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=a+b>0$, ta có $2^{a+b-1}+2^{2a+2b-1}\le 7\log_2(a+b)+3$ trở thành

$\dfrac{1}{2}.2^t+\dfrac{1}{2}.2^{2t}\le 7\log_2 t+3\Leftrightarrow 7\log_2 t+3-\dfrac{1}{2}.2^t-\dfrac{1}{2}.2^{2t}\ge 0$.

Xét hàm số $f(t)=7\log_2 t+3-\dfrac{1}{2}.2^t-\dfrac{1}{2}.2^{2t}\ge 0$ với $t>0$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{7}{t\ln 2}-\dfrac{1}{2}.2^t\ln 2-2^{2t}\ln 2$ và $f''(t)=-\dfrac{7}{t^2\ln 2}-\dfrac{1}{2}.2^t(\ln 2)^2-2.2^{2t}(\ln 2)^2<0$ với mọi $t>0$. Suy ra $f'(t)$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$ mà $f'(1)>0$ và $f'(2)<0$ nên $f'(t)=0$ có nghiệm duy nhất $t=t_0$. Ta có bảng biến thiên sau

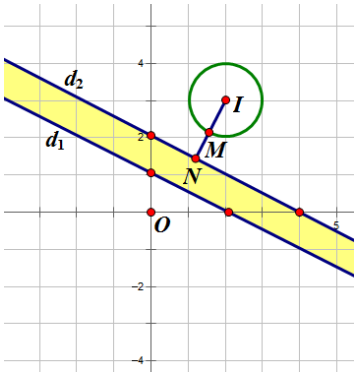
t	0		1		t_0		2		$+\infty$
$f'(t)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(t)$	$-\infty$	↗	0	↗	$f(t_0)$	↘	0	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $f(t)\ge 0\Leftrightarrow 1\le t\le 2$ hay $2^{a+b-1}+2^{2a+2b-1}\le 7\log_2(a+b)+3$ khi và chỉ khi $1\le a+b\le 2\Leftrightarrow 1\le\dfrac{1}{2}(2a)+b\le 2$.

Ta có $\log_{x^2+y^2+2}(4x+6y-10)=1\Leftrightarrow x^2+y^2+2=4x+6y-10\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-3)^2=1$.

Xét điểm $M(2a;b)$ thỏa mãn $1\le\dfrac{1}{2}(2a)+b\le 2$ và điểm $N(x;y)$ thỏa mãn $(x-2)^2+(y-3)^2=1$. Khi đó điểm M thuộc miền giới hạn bởi hai đường thẳng $(d_1):\dfrac{1}{2}x+y=1\Leftrightarrow x+2y-2=0$ và $(d_2):\dfrac{1}{2}x+y=2\Leftrightarrow x+2y-4=0$, còn điểm N thuộc đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-3)^2=1$.

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất MN^2. Ta có (C) có tâm $I(2;3)$, bán kính $R=1$.



Do $d\left(I,\left(d_1\right)\right)=\dfrac{\left|2+6-2\right|}{\sqrt{1+4}}=\dfrac{6}{\sqrt{5}}>1$ và $d\left(I,\left(d_2\right)\right)=\dfrac{\left|2+6-4\right|}{\sqrt{1+4}}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}>1$ nên MN^2 nhỏ nhất bằng $\left[d\left(I,\left(d_2\right)\right)-1\right]^2=\left(\dfrac{4}{\sqrt{5}}-1\right)^2=\dfrac{21-8\sqrt{5}}{5}$.

Câu 22: Gọi M và m tương ứng là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2^{|\sin x|}+2^{|\cos x|}$. Tính tổng $T=1010M+2021m$.

A. $T=1010\cdot 2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}+6063$. **B.** $T=2020\cdot 2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}+2021$.

C. $T=1010\cdot 2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}+2021$. **D.** $T=2020\cdot 2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}+6063$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=|\sin x|, t\in[0;1]$ suy ra $\sqrt{1-t^2}=|\cos x|$.

Khi đó $y=f(t)=2^t+2^{\sqrt{1-t^2}}$, với $t\in[0;1]$. Ta có $f'(t)=2^t\cdot\ln 2-2^{\sqrt{1-t^2}}\cdot\ln 2\cdot\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}=0$

$\Leftrightarrow 2^t\cdot\ln 2=2^{\sqrt{1-t^2}}\cdot\ln 2\cdot\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}\Leftrightarrow\dfrac{2^t}{t}=\dfrac{2^{\sqrt{1-t^2}}}{\sqrt{1-t^2}}(*)$.

Đặt $g(u)=\dfrac{2^u}{u}$ với $u\in(0;1)$; $g'(u)=\dfrac{2^u\cdot\ln 2-2^u}{u^2}>0,\forall u\in(0;1)$.

Do đó g đồng biến trên $(0;1)$.

Nên $(*)\Leftrightarrow t=\sqrt{1-t^2}\Leftrightarrow t^2=1-t^2\Leftrightarrow t^2=\dfrac{1}{2}\Rightarrow t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $f(0)=3$, $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}+2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\cdot 2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$, $f(1)=3$.

Do đó $M=\max y=\max\limits_{[0;1]}f(t)=3$, $m=\min y=\min\limits_{[0;1]}f(t)=2\cdot 2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Vậy $T=1010M+2021m=2020\cdot 2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}+6063$.

Câu 23: Xét các số nguyên dương x,y thỏa mãn $(y+z)\left(3^x-81^{\frac{1}{y+z}}\right)=xy+xz-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\log_{\sqrt{2}}x+\log_2\left(2y^2+z^2\right)$.

A. $2+\log_2 3$. **B.** $5-\log_2 3$. **C.** $\log_2 11$. **D.** $4-\log_3 2$

Lời giải

Chọn B

Ta có $(y+z)\left(3^x-81^{\frac{1}{y+z}}\right)=xy+xz-4\Leftrightarrow 3^x-3^{\frac{4}{y+z}}=x-\dfrac{4}{y+z}\Leftrightarrow 3^x-x=3^{\frac{4}{y+z}}-\dfrac{4}{y+z}$.

Xét hàm số $f(t)=3^t-t$ với $t>0$ ta có $f'(t)=3^t\ln 3-1>0,\forall t>0\Rightarrow$ hàm số $f(t)=3^t-t$

đồng biến trên $(0;+\infty)$. Do đó $3^x - x = 3^{\frac{4}{y+z}} - \frac{4}{y+z} \Leftrightarrow x = \frac{4}{y+z}$.

Mặt khác ta lại có $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}y + z\right)^2 \le \frac{3}{2}\left(2y^2 + z^2\right) \Rightarrow 2y^2 + z^2 \ge \frac{2}{3}(y+z)^2$.

Khi đó: $\log_{\sqrt{2}} x + \log_2\left(2y^2 + z^2\right) = 2\log_2 \frac{4}{x+y} + \log_2\left(2y^2 + z^2\right)$

$\ge 4 - 2\log_2(y+z) + \log_2 \frac{2}{3}(y+z)^2 = 5 - \log_2 3$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\log_{\sqrt{2}} x + \log_2\left(2y^2 + z^2\right)$ bằng $5 - \log_2 3$.

Câu 24: Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn $(x+y)\left(5^z - 25^{\frac{1}{x+y}}\right) = xz + yz - 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_{\sqrt{5}} z + \log_5\left(4x^2 + y^2\right)$ bằng

A. $1 - \log_2 3$. **B.** $5 - \log_2 3$. **C.** $1 + \log_2 3$. **D.** $-1 + 2\log_5 4$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình: $(x+y)\left(5^z - 25^{\frac{1}{x+y}}\right) = xz + yz - 2 \Leftrightarrow 5^z - z = 5^{\frac{2}{x+y}} - \frac{2}{x+y}$

Xét hàm số: $f(t) = 5^t - t, t \in (0;+\infty)$. Ta có $f'(t) = 5^t \ln 5 - 1 > 0, \forall t \in (0;+\infty)$ do đó hàm số đồng biến $(0;+\infty)$ suy ra $f(z) = f\left(\frac{2}{x+y}\right) \Leftrightarrow z = \frac{2}{x+y}$ thay lại ta được

$P = \log_{\sqrt{5}} \frac{2}{x+y} + \log_5\left(4x^2 + y^2\right) = \log_5 \frac{4\left(4x^2 + y^2\right)}{(x+y)^2}$

Ta có $(x+y)^2 = \left(2x.\frac{1}{2} + y.1\right)^2 \le \left(4x^2 + y^2\right).\frac{5}{4}$

Do đó : $P = \log_5 \frac{4\left(4x^2 + y^2\right)}{(x+y)^2} \ge \log_5 \frac{16}{5} = -1 + 2\log_5 4$.

Dấu bằng xảy ra $y = 4x, z = \frac{2}{5x}$.

Câu 25: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\left(x^2 + y^2 + 1\right) + \log_2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = (xy-1)^2$. Khi đó $x + y$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

A. 4. **B.** 8. **C.** 1. **D.** $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\left(x^2 + y^2 + 1\right) + \log_2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = (xy-1)^2$

$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2+1\right)+\log_2\left(\dfrac{x+y}{xy}\right)=(xy)^2-2xy+1$

$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2+1\right)+\log_2\left(\dfrac{x+y}{xy}\right)=(xy)^2-2xy+1$

$\Leftrightarrow \log_2(x+y)+(x+y)^2=\log_2 xy+(xy)^2$

Xét hàm số $f(t)=\log t+t^2,(t>0),\qquad f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 10}+2t>0,\forall t>0.$

Từ đó suy ra $x+y=xy\le\dfrac{(x+y)^2}{4}\Rightarrow(x+y)^2-4\left([x+y\right)\ge 0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x+y\ge 4\\x+y\le 0\end{array}\right.$

Vì các số thực dương x,y nên $x+y\ge 4\Rightarrow Min(x+y)=4$

Câu 26: Cho các số thực a,b thỏa mãn $a>\dfrac{1}{2},b>1$. Khi biểu thức $P=\log_{2a}b+\log_{\sqrt{b}}\left(a^4-4a^2+16\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất thì tổng $a+b$ bằng

A. 4. **B.** 18. **C.** 14. **D.** 20.

Lời giải

Chọn B

Do $a^4-4a^2+16\ge 4a^2\Leftrightarrow\left(a^2-4\right)^2\ge 0$ đúng $\forall a>\dfrac{1}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $a=2$.

Suy ra:

$$P\ge\log_{2a}b+2\log_b(2a)^2=\log_{2a}b+4\log_b(2a)=\log_{2a}b+\frac{4}{\log_{2a}b}\ge 2\sqrt{\log_{2a}b.\frac{4}{\log_{2a}b}}=4.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}a=2\\\log_{2a}b=\dfrac{4}{\log_{2a}b}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\\log_{2a}b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=16\end{cases}\Rightarrow a+b=18.$$

Câu 27: Xét các số thực dương x,y,z thỏa mãn $(y+2z)\left(3^x-27^{\frac{1}{y+2z}}\right)=xy+2xz-3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_5\left(y^2+z^2\right)+\dfrac{1}{4}\log_5^2\left(\dfrac{9}{x^2}+3y^2-3z^2\right)$.

A. $3-\log_3^2 5$. **B.** $4-\log_5 3$. **C.** -2. **D.** -1.

Lời giải

Chọn C

$$(y+2z)\left(3^x-27^{\frac{1}{y+2z}}\right)=xy+2xz-3\Leftrightarrow 3^x-x=3^{\frac{3}{y+2z}}-\frac{3}{y+2z}$$

Đặt $t=\dfrac{3}{y+2z}$ ta được $3^x-x=3^t-t\Leftrightarrow x=t\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{y+2z}\Leftrightarrow\dfrac{3}{x}=y+2z$.

$\dfrac{9}{x^2}+3y^2-3z^2=4y^2+4yz+z^2=(2y+z)^2$.

Ta có $(2y+z)^2 \le 5\left(y^2+z^2\right) \Leftrightarrow y^2+z^2 \ge \dfrac{(2y+z)^2}{5}$

$P = \log_5\left(y^2+z^2\right)+\dfrac{1}{4}\log_5^2\left(\dfrac{9}{x^2}+3y^2-3z^2\right) \ge \log_5\dfrac{(2y+z)^2}{5}+\dfrac{1}{4}\log_5^2(2y+z)^2$

$P \ge \log_5^2(2y+z)+2\log_5(2y+z)-1 \ge -2$

Câu 28: Tập hợp nào sau đây chứa tất cả các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\log_{\frac{1}{2}}^2 x-\log_{\frac{1}{2}} x^2+m\right|$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{4};2\right]$ bằng 5?

A. $(-5;-3)\cup(1;3)$. **B.** $(-6;-3)\cup(4;7)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-9;-5)\cup(0;3)$.

Lời giải

Chọn A

Xét: $P=\log_{\frac{1}{2}}^2 x-\log_{\frac{1}{2}} x^2=\log_{\frac{1}{2}}^2 x-2\log_{\frac{1}{2}} x \quad \left(\dfrac{1}{4}\le x\le 2\right)$

Đặt $t=\log_{\frac{1}{2}} x \Rightarrow -1\le t\le 2$. Ta được: $P=t^2-2t \ \ (-1\le t\le 2)$

Khảo sát hàm số $f(t)=t^2-2t$ trên $[-1;2]$, ta được $-1\le f(t)\le 3$

$\Rightarrow -1\le P\le 3 \Rightarrow -1\le \log_{\frac{1}{2}}^2 x-\log_{\frac{1}{2}} x^2\le 3 \Rightarrow -1+m\le \log_{\frac{1}{2}}^2 x-\log_{\frac{1}{2}} x^2+m\le 3+m$

Vậy

$$\begin{cases} \min\limits_{\frac{1}{4}\le x\le 2}\left(\log_{\frac{1}{2}}^2 x-\log_{\frac{1}{2}} x^2+m\right)=-1+m \\ \max\limits_{\frac{1}{4}\le x\le 2}\left(\log_{\frac{1}{2}}^2 x-\log_{\frac{1}{2}} x^2+m\right)=3+m \end{cases} \Rightarrow \max_{\frac{1}{4}\le x\le 2}\left|\log_{\frac{1}{2}}^2 x-\log_{\frac{1}{2}} x^2+m\right|=\max\left\{|-1+m|;|3+m|\right\}$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |-1+m|>|3+m| \\ |-1+m|=5 \end{cases} \\ \begin{cases} |-1+m|\le|3+m| \\ |3+m|=5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |-1+m|>|3+m| \\ \left[\begin{array}{l} m=6 \ \ (l) \\ m=-4\ (n) \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} |-1+m|\le|3+m| \\ \left[\begin{array}{l} m=2 \ \ (n) \\ m=-8\ (l) \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy $(-6;-3)\cup(4;7)$ chứa tất cả các giá trị m thỏa mãn

Câu 29: Cho hai số thực dương $a,b\ (a\ne 1)$ thỏa mãn $\log_a\dfrac{4}{b}=2$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=6\ln\left(a^3+4b^3\right)-\dfrac{a^3}{2}-2b^3$ là số viết được dưới dạng $x(\ln y-1)$ với x,y là các số nguyên. Giá trị của $x+y$ là

A. 18. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_a \frac{4}{b} = 2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{4}{b} \Leftrightarrow a^2 b = 4$.

Do $a, b > 0$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy: $2a^3 + 8b^3 = a^3 + a^3 + 8b^3 \geq 3\sqrt[3]{a^6 8b^3} = 6a^2 b = 24$.

Đặt $t = a^3 + 4b^3$ thì $t \geq 12$.

Xét hàm số $f(t) = 6\ln t - \frac{t}{2}$ với $t \geq 12$.

Ta có $f'(t) = \frac{6}{t} - \frac{1}{2} \leq \frac{6}{12} - \frac{1}{2} = 0$ với mọi $t \geq 12$ nên $f(t)$ là hàm số nghịch biến trên $[12; +\infty)$.

Suy ra $f(t) \leq f(12) = 6\ln 12 - 6, \forall t \geq 12$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 2, b = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $6\ln 12 - 6 = 6(\ln 12 - 1)$, suy ra $x + y = 6 + 12 = 18$.

Câu 30: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $2^{\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)}.5^{\ln(x+y)} = 2^{\ln 5}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (x+1)\ln x + (y+1)\ln y$.

A. $P_{\max} = 10$. **B.** $P_{\max} = 0$. **C.** $P_{\max} = 1$. **D.** $P_{\max} = \ln 2$.

Lời giải

Chọn B

$2^{\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)}.5^{\ln(x+y)} = 2^{\ln 5} \Leftrightarrow 2^{\ln(x+y)-\ln 2}.5^{\ln(x+y)} = 2^{\ln 5} \Leftrightarrow 2^{\ln(x+y)}.5^{\ln(x+y)} = 2^{\ln 5}.2^{\ln 2}$

$\Leftrightarrow 10^{\ln(x+y)} = 2^{\ln 10}$

$\Leftrightarrow \ln(x+y) = \log\left(2^{\ln 10}\right) \Leftrightarrow \ln(x+y) = \ln 10.\log 2 \Leftrightarrow e^{\ln(x+y)} = e^{\ln 10.\log 2}$

$\Leftrightarrow x + y = 10^{\log 2} \Leftrightarrow x + y = 2$.

Do đó $P = (x+1)\ln x + (3-x)\ln(2-x)$.

Xét hàm số $f(x) = (x+1)\ln x + (3-x)\ln(2-x)$

$f'(x) = \ln x + \frac{x+1}{x} - \ln(2-x) - \frac{3-x}{2-x} = \ln\frac{x}{2-x} + \frac{2-2x}{x(2-x)}$.

$f''(x) = -\frac{1}{(2-x)^2}.\frac{2-x}{x} - \frac{2x^2 - 4x + 4}{\left(2x - x^2\right)^2} < 0, \forall x \in (0;2)$

Do đó $f'(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm trên $(0;2)$.

Mà $x = 1$ là một nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ nên phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất là $x = 1$.

Lập bảng biến thiên ta được $\max f(x) = f(x) = 0$.

Câu 31: Cho các số thực x, y, $x^2 \leq 1$ thoản mãn $2^{x-2+\sqrt[3]{y-3x}} + \left(x^3 - 6x^2 + 9x + y\right)2^{x-2} = 2^{x+1} + 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^3 - y - 3x + 4$.

A. -10. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Chia 2 vế của phương trình cho 2^{x-2} ta được: $2^{\sqrt[3]{y-3x}}+\left(x^3-6x^2+9x+y\right)=8+2^{2-x}$

$\Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{y-3x}}+\left(\sqrt[3]{y-3x}\right)^3=2^{2-x}+(2-x)^3$.

Đặt $u=\sqrt[3]{y-3x},\ v=2-x$ ta có $2^u+u^3=2^v+v^3$

Xét hàm số $f(t)=2^t+t^3$. Ta có $f'(t)>0,\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, vì vậy

$2^u+u^3=2^v+v^3\Leftrightarrow f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v\Leftrightarrow\sqrt[3]{y-3x}=2-x\Leftrightarrow y=3x+(2-x)^3$

Ta có $P=x^3-y-3x+4=x^3-\left(3x+(2-x)^3\right)-3x+4=x^3-\left(-x^3-9x+6x^2+8\right)-3x+4$

$=2x^3-6x^2+6x+4,\ -1\le x\le 1$.

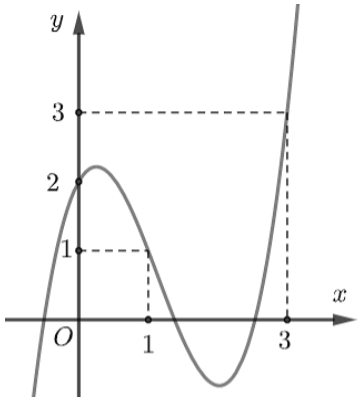
Xét hàm số $g(x)=2x^3-6x^2+6x+4;-1\le x\le 1$.

Ta có $g'(x)=6x^2-12x+6=6(x-1)^2\ge 0$

Do đó hàm số đồng biến trên đoạn $[-1;1]$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $P(-1)=-10$.

Câu 32: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Trên $[-2;4]$, gọi x_0 là điểm mà tại đó hàm số $g(x)=f\left(\frac{x}{2}+1\right)-\ln\left(x^2+8x+16\right)$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó x_0 thuộc khoảng nào?



A. $\left(\frac{1}{2};2\right)$. **B.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$. **C.** $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

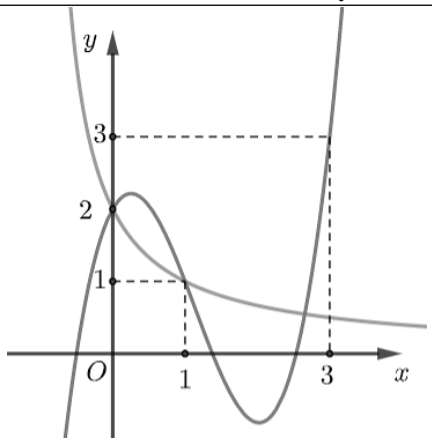
Chọn D

Ta có $g'(x)=\frac{1}{2}f'\left(\frac{x}{2}+1\right)-\frac{2x+8}{x^2+8x+16}=\frac{1}{2}f'\left(\frac{x}{2}+1\right)-\frac{2}{x+4}$.

Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow f'\left(\frac{x}{2}+1\right)=\frac{4}{x+4}$. Đặt $t=\frac{x}{2}+1\Rightarrow t\in[0;3]$

Phương trình trở thành $f'(t)=\frac{4}{2t+2}=\frac{2}{t+1}$

Vẽ đồ thị $y=\frac{2}{x+1}$ lên cùng một hệ tọa độ ta được:



Từ đồ thị ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $t=1\Rightarrow x=0.$

Câu 33: Xét các số thực dương x,y thỏa mãn $\log_{2022}\dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy}=x(x-1)+y(y-1)+xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{2x+2y+1}{x+y+5}$.

A. $\dfrac{11}{19}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{10}{23}$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_{2022}\dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy}=x(x-1)+y(y-1)+xy$

$\Leftrightarrow \log_{2022}(x+y)-\log_{2022}(x^2+y^2+xy)=x^2-x+y^2-y+xy$

$\Leftrightarrow \log_{2022}(x+y)+(x+y)=\log_{2022}(x^2+y^2+xy)+(x^2+y^2+xy)\quad (*)$

Xét hàm số $f(u)=\log_{2022}u+u,\ (u>0)\Rightarrow f'(u)=\dfrac{1}{u.\ln 2022}+1>0,\forall u>0$

$\Rightarrow f(u)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Nên ta có: $(*)\Leftrightarrow x+y=x^2+y^2+xy\Leftrightarrow x^2+y^2+xy-x-y=0\Leftrightarrow (x+y)^2-(x+y)=xy$

Mặt khác: $xy\le\dfrac{(x+y)^2}{4}\Rightarrow (x+y)^2-(x+y)\le\dfrac{(x+y)^2}{4}$

$\Leftrightarrow\dfrac{3}{4}(x+y)^2-(x+y)\le 0\Leftrightarrow 0\le x+y\le\dfrac{4}{3}$

Đặt $x+y=t\Rightarrow 0<t\le\dfrac{4}{3}$.

Ta có: $P=\dfrac{2x+2y+1}{x+y+5}=\dfrac{2t+1}{t+5}=2-\dfrac{9}{t+5}\le 2-\dfrac{9}{\frac{4}{3}+5}=\dfrac{11}{19}$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\dfrac{11}{19}$ khi $\begin{cases}x=y\\ x+y=\dfrac{4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\dfrac{2}{3}$.

Câu 34: Cho x,y là các số dương thỏa mãn $\log(x+2y)=\log(x)+\log(y)$. Khi đó, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x^2}{1+2y}+\dfrac{4y^2}{1+x}$ là:

A. $\frac{32}{5}$ **B.** $\frac{29}{5}$ **C.** 6. **D.** $\frac{31}{5}$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log(x+2y)=\log(x)+\log(y)\Leftrightarrow\log(x+2y)=\log(xy)\Leftrightarrow x+2y=xy$

Mặt khác: $xy=x+2y\geq 2\sqrt{2xy}\Leftrightarrow(xy)^2-8(xy)\geq 0\Rightarrow xy\geq 8$

Áp dụng bất đẳng thức cauchy- Swat ta có: $P=\frac{x^2}{1+2y}+\frac{4y^2}{1+x}\geq\frac{(x+2y)^2}{2+x+2y}=\frac{(xy)^2}{xy+2}$

Đặt $xy=t$ suy ra $P\geq\frac{(xy)^2}{xy+2}=\frac{t^2}{t+2}$. Xét hàm số $f(t)=\frac{t^2}{t+2}$, với $t\in[8;+\infty)$.

$f'(t)=\frac{t^2+4t}{(t+2)^2}>0,\forall t\geq 8$, suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(8;+\infty)$.

$\Rightarrow f(t)\geq f(8)=\frac{32}{5}\Rightarrow P\geq f(t)\geq\frac{32}{5}\Rightarrow \text{Min}P=\frac{32}{5}$ khi $\begin{cases}x=2y\\xy=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$.

Câu 35: `Cho x là số thực, y là số nguyên thỏa mãn $x^2+y^2-xy+2x-3y+2<0$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\ln\left(1+xy+x^2\right)-(1+y)x^3-\frac{3}{2}x^2y$ bằng $\ln\left(\frac{a}{b}\right)-\frac{c}{d}$ (với a,b,c,d là các số nguyên dương; $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ là hai phân số tối giản). Giá trị của $a+b+c+d$ bằng

A. 16. **B.** 14. **C.** 75. **D.** 20.

Lời giải

Chọn A

Ta có $x^2+y^2-xy+2x-3y+2<0\Leftrightarrow x^2+(2-y)x+y^2-3y+2<0$.

Nếu $\Delta_x=-3y^2+8y-4\leq 0$ thì nên Vế trái của BPT luôn không âm với mọi x vì $a=1>0$

suy ra $\Delta_x=-3y^2+8y-4>0\Leftrightarrow\frac{2}{3}<y<2$. Do y là số nguyên nên $y=1$.

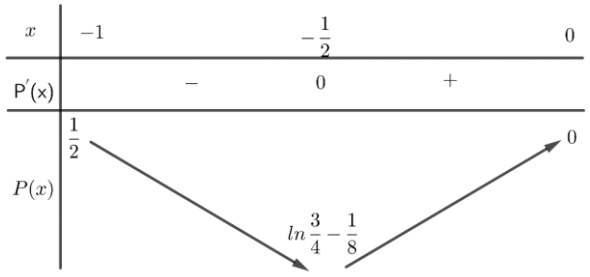
Thay $y=1$ vào $x^2+(2-y)x+y^2-3y+2<0$ ta được $x^2+x<0\Leftrightarrow -1<x<0$

Xét hàm số $P=\ln\left(1+x+x^2\right)-2x^3-\frac{3}{2}x^2$ trên $(-1;0)$.

$P'(x)=\frac{2x+1}{1+x+x^2}-6x^2-3x=(2x+1)\left(\frac{1}{1+x+x^2}-3x\right)$.

Ta có $\frac{1}{1+x+x^2}-3x>0$ vì $x\in(-1;0)$; $P'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên



Ta có giá trị nhỏ nhất của P bằng $\ln\left(\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{8}$.

Vậy $a=3,b=4,c=1,d=8\Rightarrow a+b+c+d=16$.

Câu 36: Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x+y.4^{x+y-1}\ge 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+4x+6y$ bằng

A. $\frac{33}{4}$. **B.** $\frac{65}{8}$. **C.** $\frac{49}{8}$. **D.** $\frac{57}{8}$.

Lời giải

Chọn B

Nhận xét: Giá trị của x,y thỏa mãn phương trình $2x+y\cdot 4^{x+y-1}=3(1)$ sẽ làm cho biểu thức P nhỏ nhất. Khi đó $(1):2x+y\cdot 4^{x+y-1}=3\Leftrightarrow 4^{x+y-1}+\frac{2}{y}(x+y)-2-\frac{3}{y}=0$

Đặt $a=x+y$, từ (1) ta được phương trình: $4^{a-1}+\frac{2}{y}.a-2-\frac{3}{y}=0\,(*)$.

Xét hàm số $f(a)=4^{a-1}+\frac{2}{y}.a-2-\frac{3}{y}$. Ta có $f'(a)=4^{a-1}.\ln 4+\frac{2}{y}>0,\forall y>0$ nên $f(a)$ hàm số đồng biến. Mặt khác, $\lim\limits_{a\to 0}f(a)=-\frac{7}{4}-\frac{3}{y}<0$, $\lim\limits_{a\to+\infty}f(a)=+\infty$.

Do đó, phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $a=\frac{3}{2}\Rightarrow x+y=\frac{3}{2}$.

Ta viết lại biểu thức $P=(x+y)^2+4(x+y)+2\left(y-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{8}=\frac{65}{8}$. Vậy $P_{\min}=\frac{65}{8}$.

Cách khác:

Với mọi x,y không âm ta có

$$2x+y.4^{x+y-1}\ge 3\Leftrightarrow x+y.4^{x+y-\frac{3}{2}}\ge\frac{3}{2}\Leftrightarrow\left(x+y-\frac{3}{2}\right)+y.\left(4^{x+y-\frac{3}{2}}-1\right)\ge 0\ (1)$$

Nếu $x+y-\frac{3}{2}<0$ thì $\left(x+y-\frac{3}{2}\right)+y.\left(4^{x+y-\frac{3}{2}}-1\right)<0+y.\left(4^0-1\right)=0$ (vô lí)

Vậy $x+y\ge\frac{3}{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhyakovski ta được

$$P=x^2+y^2+4x+6y=(x+3)^2+(y+2)^2-13\ge\frac{1}{2}(x+y+5)^2-13\ge\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+5\right)^2-13=\frac{65}{8}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}x+y=\frac{3}{2}\\ x+3=y+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{5}{4}\\ x=\frac{1}{4}\end{cases}$. Vậy $\min P=\frac{65}{8}$.

Câu 37: Có bao nhiêu số nguyên m để $\min\limits_{x\in[1;8]}f(x)+\max\limits_{x\in[1;8]}f(x)\le 2020$ với $f(x)=\left|\frac{5\log_2 x+1}{\log_2 x+1}+m\right|$.

A. 2021. **B.** 2019. **C.** 2022. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn D

Đặt $X=\log_2 x$, với $x\in[1;8]\Rightarrow X\in[0;3]$.

Khi đó $f(x)=\left|\dfrac{5\log_2 x+1}{\log_2 x+1}+m\right|=\left|\dfrac{5X+1}{X+1}+m\right|=|g(X)|$. Có $g'(X)=\dfrac{4}{(X+1)^2}>0,\forall X\neq -1$.

Nên với $X\in[0;3]$ thì $m+1\le g(X)\le m+4$.

Với $m+1>0\Leftrightarrow m>-1$ thì $\min\limits_{x\in[1;8]} f(x)=|m+1|=m+1;\ \max\limits_{x\in[1;8]} f(x)=|m+4|=m+4$.

Suy ra $m+1+m+4\le 2020\Leftrightarrow m\le 1007,5$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{0;1;2;...;1007\}\Rightarrow$ có 1008 số nguyên m.

Với $m+4<0\Leftrightarrow m<-4$ thì $\min\limits_{x\in[1;8]} f(x)=|m+4|=-m-4;\ \max\limits_{x\in[1;8]} f(x)=|m+1|=-m-1$.

Suy ra $-m-4-m-1\le 2020\Leftrightarrow m\ge -1012,5$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-1012;1011;...;-5\}\Rightarrow$ có 1008 số nguyên m.

Với $(m+1)(m+4)\le 0\Leftrightarrow -4\le m\le -1$ thì $\min\limits_{x\in[1;8]} f(x)=0;\ \max\limits_{x\in[1;8]} f(x)=|m+4|=m+4$ hoặc $\min\limits_{x\in[1;8]} f(x)=0;\ \max\limits_{x\in[1;8]} f(x)=|m+1|=-m-1$.

Suy ra $0+m+4\le 2020$ (luôn đúng) hoặc $0-m-1\le 2020$ (luôn đúng) với $-4\le m\le -1$.
Do đó với $-4\le m\le -1$ luôn thỏa mãn bài ra nên có 4 số nguyên m.
Vậy có $1008+1008+4=2020$ số nguyên m.

Câu 38: Cho $0\le x,y\le 1$ thỏa mãn $2020^{1-x-y}=\dfrac{x^2+2021}{y^2-2y+2022}$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x}{y+1}+\dfrac{y}{x+1}$. Khi đó $M+m$ bằng

A. $\dfrac{4}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{7}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $2020^{1-x-y}=\dfrac{x^2+2021}{y^2-2y+2022}\Leftrightarrow\dfrac{2020^{1-y}}{2020^x}=\dfrac{x^2+2021}{(1-y)^2+2021}$

$2020^x\left(x^2+2021\right)=2020^{1-y}\left[(1-y)^2+2021\right]\Leftrightarrow f(x)=f(1-y)$

Với hàm số $f(t)=2020^t\left(t^2+2021\right)=t^2.2020^t+2021.2020^t$

$f'(t)=2t.2020^t+t^2.2020^t.\ln 2020+2021.2020^t.\ln 2020>0;\forall t\ge 0$

Suy ra $f(t)$ là hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$ mà $f(x)=f(1-y)\Rightarrow x+y=1$

Lại có $P=\dfrac{x}{y+1}+\dfrac{y}{x+1}=\dfrac{x^2+x+y^2+y}{xy+x+y+1}=\dfrac{(x+y)^2-2xy+1}{xy+2}=\dfrac{2-2xy}{xy+2}$

Mà $1=x+y\ge 2\sqrt{xy}\Leftrightarrow xy\le\dfrac{1}{4}$ nên đặt $u=xy\in\left[0;\dfrac{1}{4}\right]$ khi đó $P=g(u)=\dfrac{2-2u}{u+2}$

Xét hàm số $g(u)=\dfrac{2-2u}{u+2}$ trên $\left[0;\dfrac{1}{4}\right]$ ta được $g'(u)=\dfrac{-6}{(u+2)^2}<0\forall u\neq -2$

Nên hàm số $g(u)$ nghịch biến trên $\left[0;\dfrac{1}{4}\right]$

Do đó $\underset{\left[0;\frac{1}{4}\right]}{Max}\, g(u)=g(0)=1;\underset{\left[0;\frac{1}{4}\right]}{Min}\, g(u)=g\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{2}{3}\Rightarrow M=1;m=\dfrac{2}{3}$.

Suy ra $M+m=1+\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{3}$.

Câu 39: Cho hai số x, y thỏa mãn $x+y>0$ và $10^{x^2+y^2}+2021^{2021}.\log\dfrac{x^2+y^2}{x+y}\le 100^{x+y}+2021^{2021}.\log 2$. Tìm tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2-10x-2y+2$.

A. $8\sqrt{2}-6$. **B.** $-6-8\sqrt{2}$. **C.** -8. **D.** -12.

Lời giải

Chọn D

Ta có $10^{x^2+y^2}+2021^{2021}.\log\dfrac{x^2+y^2}{x+y}\le 100^{x+y}+2021^{2021}.\log 2$

$\Leftrightarrow 10^{x^2+y^2}+2021^{2021}.\log\left(x^2+y^2\right)\le 10^{2(x+y)}+2021^{2021}.\log\left[2(x+y)\right](*)$

Xét hàm số $f(t)=10^t+2021^{2021}.\log t$ với $t>0$.

$f'(t)=10^t.\ln 10+\dfrac{2021^{2021}}{t\ln 10}>0,\forall t>0\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Bất phương trình $(*)\Leftrightarrow f\left(x^2+y^2\right)\le f\left(2(x+y)\right)\Leftrightarrow x^2+y^2\le 2(x+y)$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2\le 2\,(**)$.

Lại có: $P=x^2+y^2-10x-2y+2\Leftrightarrow P=(x-5)^2+(y-1)^2-24\,(***)$

Gọi điểm $M(x;y)$, $K(5;1)$ khi đó ta có điểm M thuộc hình tròn (C_1) có tâm $I(1;1)$, bán kính $r=\sqrt{2}$ và $P=MK^2-24$

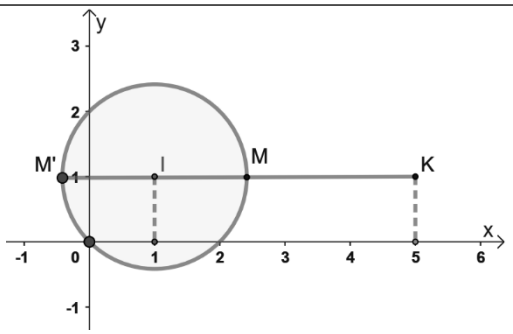
Vì $IK=4>r=\sqrt{2}$ nên điểm $K(5;1)$ nằm bên ngoài (C_1).

Do đó $P_{\min}\Leftrightarrow MK_{\min}\Leftrightarrow MK=IK-r=4-\sqrt{2}$

$P_{Max}\Leftrightarrow MK_{Max}\Leftrightarrow MK=IK+r=4+\sqrt{2}$

Suy ra $\min P=-6-8\sqrt{2},\ \max P=8\sqrt{2}-6$

Vậy tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P bằng -12.



Câu 40: Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $3^a+9^b+27^c=9$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=a+2b+3c$. Giá trị của biểu thức $M+3^m$ bằng

A. 10. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 13.

Lời giải

Chọn A

Đặt $x=3^a;\ y=3^{2b};\ z=3^{3c}$.

Khi đó $a=\log_3 x,\ 2b=\log_3 y,\ 3c=\log_3 z\ \ (x,y,z\ge 1)$. Ta có $S=\log_3(xyz)$.

Ta có: $9=x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}\Rightarrow xyz\le 27\Rightarrow S\le 3$.

Vậy $MaxS=M=3$ khi $x=y=z=3$.

Giả sử $z=\min\{x;y;z\}\Rightarrow 1\le z\le 3$.

Do $(x-1)(y-1)\ge 0\Rightarrow xy\ge x+y-1=8-z\ \Rightarrow xyz\ge z(8-z)\ge 7$ (vì $z\in[1;3]$)

Suy ra $S\ge\log_3 7$, do đó $m=\min S=\log_3 7$ khi $x=z=1,y=7$.

Vậy $M+3^m=3+3^{\log_3 7}=3+7=10.$

Câu 41: Cho các số thực a, b thỏa mãn $\mathrm{e}^{a^2+2b^2}+\mathrm{e}^{ab}\left(a^2-ab+b^2-1\right)-\mathrm{e}^{1+ab+b^2}=0$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{1+2ab}$. Khi đó $m+M$ bằng

A. $\dfrac{10}{3}$. **B.** $\dfrac{10}{3}$. **C.** $\dfrac{7}{3}$ **D.** $\dfrac{2}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\mathrm{e}^{a^2+2b^2}+\mathrm{e}^{ab}\left(a^2-ab+b^2-1\right)-\mathrm{e}^{1+ab+b^2}=0\Leftrightarrow \mathrm{e}^{a^2-ab+2b^2}+a^2-ab+b^2-1-\mathrm{e}^{1+b^2}=0$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{a^2-ab+2b^2}+a^2-ab+2b^2=\mathrm{e}^{1+b^2}+1+b^2,\ (*)$

Xét hàm số: $f(t)=\mathrm{e}^t+t\Rightarrow f'(t)=\mathrm{e}^t+1>0\Rightarrow f(t)=\mathrm{e}^t+t$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

$(*)\Leftrightarrow f\left(a^2-ab+2b^2\right)=f\left(1+b^2\right)\Leftrightarrow a^2-ab+2b^2=1+b^2\Leftrightarrow a^2-ab+b^2=1$

Do đó: $P=\dfrac{1}{1+2ab}=\dfrac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}$

TH1: $b=0\Rightarrow P=1$

TH2: $b\ne 0\Rightarrow P=\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2-\left(\dfrac{a}{b}\right)+1}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+\left(\dfrac{a}{b}\right)+1}=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}=g(x)$ với $x=\dfrac{a}{b}$

$$g'(x)=\frac{2x^2-2}{\left(x^2+x+1\right)^2};\ g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	↗	3	↘	$\frac{1}{3}$	↗	1

Do đó: $m=P_{\min}=\frac{1}{3};\ M=P_{\max}=3\ \Rightarrow m+M=\frac{10}{3}.$

CHƯƠNG 3

HÀM SỐ LŨY THỪA HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

CHỦ ĐỀ 9 PHƯƠNG TRÌNH MŨ – PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình mũ cơ bản $a^x = b,\ (a > 0,\ a \neq 1)$.

Nếu $b > 0$ thì phương trình $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$.

Nếu $b \leq 0$ thì phương trình $a^x = b$ vô nghiệm.

2. Phương trình đưa về cùng cơ số

Sử dụng tính chất $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)\ (0 < a \neq 1)$.

3. Phương pháp đặt ẩn phụ: với $0 < a \neq 1$, $f\left[a^{g(x)}\right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = a^{g(x)} > 0 \\ f(t) = 0 \end{cases}$.

Dạng 1: Phương trình có dạng: $m.a^{2f(x)} + n.a^{f(x)} + p = 0\ (1)$

Đặt $t = a^{f(x)}, t > 0$ đưa phương trình (1) về dạng phương trình bậc 2: $mt^2 + nt + p = 0$.

Giải phương trình tìm nghiệm t và kiểm tra điều kiện $t > 0$.

Sau đó thế vào phương trình $t = a^{f(x)}$ tìm nghiệm x.

Dạng 2: $m.a^{f(x)} + n.b^{f(x)} + p = 0$, trong đó $a.b = 1$. Đặt $t = a^{f(x)}, t > 0$ suy ra $b^{f(x)} = \dfrac{1}{t}$.

Dạng 3: $m.a^{2f(x)} + n.(a.b)^{f(x)} + p.b^{2f(x)} = 0$. Chia hai vế cho $b^{2f(x)}$ và đặt $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{f(x)} = t > 0$.

4. Phương pháp logarit hóa.

Dạng 1: $a^{g(x)} = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) = \log_a f(x) \end{cases}$ với $0 < a \neq 1$.

Dạng 2: $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).\log_a b$.

5. Phương pháp hàm số

Định nghĩa

Hàm số f được gọi là đồng biến trên K khi và chỉ khi $\forall u, v \in (a;b); u < v \Rightarrow f(u) < f(v)$.

Hàm số f được gọi là nghịch biến trên $(a;b)$ khi và chỉ khi $\forall u, v \in (a;b); u < v \Rightarrow f(u) > f(v)$.

Định lí và tính chất:

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$. Nếu $f'(x) \geq 0\ (f'(x) \leq 0) \forall x \in (a;b)$ và $f'(x) = 0$ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến *(nghịch biến)* trên khoảng $(a;b)$.

Các tính chất:

- Nếu hàm số f đồng biến (hoặc nghịch biến) trên khoảng $(a;b)$ thì phương trình $f(x)=0$ có nhiều nhất một nghiệm trên khoảng $(a;b)$.
- Nếu phương trình $f'(x)=0$ có một nghiệm trên khoảng $(a;b)$ thì phương trình $f(x)=0$ có nhiều nhất hai nghiệm trên khoảng $(a;b)$.
- Nếu hàm số f đồng biến (hoặc nghịch biến) trên khoảng $(a;b)$ thì $\forall u,v\in(a;b)$; $f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v$.
- Nếu hàm số f liên tục, đồng biến trên khoảng $(a;b)$ và hàm số g liên tục, nghịch biến *(hoặc hàm hằng)* trên khoảng $(a;b)$ phương trình $f(x)=g(x)$ có nhiều nhất một nghiệm trên khoảng $(a;b)$.

Nhận xét

- Khi bài toán yêu cầu giải phương trình $f(x)=0$, ta có thể chứng minh $f(x)$ đơn điệu bằng cách khảo sát hàm số, sau đó tìm nghiệm và chứng minh nghiệm đó duy nhất.
- Ta cũng có thể thực hiện các phép biến đổi tương đương đưa về phương trình dạng $f(u)=f(v)$ (trong đó $u=u(x),v=v(x)$) hoặc $f(x)=g(x)$ và sử dụng các tính chất đã nêu trên.
- Khi bài toán yêu cầu giải phương trình $f(x)=m$ thì số nghiệm của phương trình sẽ là số giao điểm giữa đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=m$.

6. Phương pháp đánh giá

Quy tắc 1. Giải phương trình $f(x)=g(x)$.

Bước 1: Xác định $x=x_0$ là một nghiệm của phương trình.

Bước 2: Chứng minh với mọi $\begin{cases}x>x_0\\x<x_0\end{cases}$ thì phương trình vô nghiệm.

Bước 3: Kết luận $x=x_0$ là nghiệm duy nhất.

Quy tắc 2. Giải phương trình $f(x)=g(x)$.

Xét trên tập xác định D ta có $\begin{cases}f(x)\le m,\forall x\in D\\g(x)\ge m,\forall x\in D\end{cases}\Leftrightarrow f(x)\le m\le g(x),\forall x\in D$.

Phương trình thỏa mãn khi $f(x)=g(x)=m$.

Áp dụng tương tự với bài toán bất phương trình $f(x)\ge g(x)$.

Quy tắc 3. Sử dụng tính chất của hàm số lượng giác.

Ta có: $\sin x\in[-1;1];\cos x\in[-1;1]$.

Điều kiện để hàm số lượng giác $a\cos x+b\sin x=c$ có nghiệm là $a^2+b^2\ge c^2$.

Giá trị lượng giác của góc (cung) có liên quan đặc biệt.

Quy tắc 4. Sử dụng tính chất của hàm số mũ, hàm trị tuyệt đối, điều kiện có nghiệm của phương trình bậc 2

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Tập nghiệm của phương trình $0,5^{x^2-4}=8$ tương ứng là

A. $\{1\}$. **B.** $\{\pm 1\}$. **C.** $\left\{\pm\sqrt{7}\right\}$. **D.** $\{0;1\}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $0,5^{x^2-4}=8\Leftrightarrow 2^{4-x^2}=2^3\Leftrightarrow 4-x^2=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$

Câu 2: Cho phương trình $4^{x^2-4x+6}=64$ tổng lập phương các nghiệm thực của phương trình là

A. 25. **B.** 26. **C.** 27. **D.** 28.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $4^{x^2-4x+6}=64\Leftrightarrow 4^{x^2-4x+6}=4^3\Leftrightarrow x^2-4x+6=3\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=1\\x_2=3\end{array}\right.$.

Do đó: $x_1^3+x_2^3=1^3+3^3=28$.

Câu 3: Tìm tập nghiệm S của phương trình $2^{x+1}=8$.

A. $S=\{4\}$. **B.** $S=\{2\}$. **C.** $S=\{1\}$. **D.** $S=\{-1\}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2^{x+1}=8\Leftrightarrow 2^{x+1}=2^3\Leftrightarrow x=2$. Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{2\}$

Câu 4: Tổng các nghiệm của phương trình $\ln\left(x^2-3x+1\right)=-9$ là:

A. -3. **B.** 9. **C.** 3. **D.** e^{-9}.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\ln\left(x^2-3x+1\right)=-9\Leftrightarrow x^2-3x+1=e^{-9}\Leftrightarrow x^2-3x+1-e^{-9}=0$.

Phương trình $x^2-3x+1-e^{-9}=0$ có $\Delta=5+4e^{-9}>0$ nên luôn có hai nghiệm phân biệt và có tổng bằng 3.

Câu 5: Tìm m để phương trình $\log_2\left(x^3-3x\right)=m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

A. $m>0$. **B.** $m>1$. **C.** $m<1$. **D.** $0<m<1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_2\left(x^3-3x\right)=m\Leftrightarrow x^3-3x=2^m$. Xét $f\left(x\right)=x^3-3x$ có $f'\left(x\right)=3x^2-3=0\Leftrightarrow x=\pm 1$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Để phương trình đã cho có 3 nghiệm thực phân biệt thì $-2<2^m<2\Leftrightarrow m<1$.

Câu 6: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2 x+2\log_7 x=2+\log_2 x.\log_7 x$ bằng

A. 13. **B.** 11. **C.** 15. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x>0$.

Ta có: $\log_2 x+2\log_7 x=2+\log_2 x.\log_7 x\Leftrightarrow\left(\log_2 x-\log_2 x.\log_7 x\right)+\left(2\log_7 x-2\right)=0$

$\Leftrightarrow\log_2 x\left(1-\log_7 x\right)-2\left(1-\log_7 x\right)=0\Leftrightarrow\left(1-\log_7 x\right)\left(\log_2 x-2\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-\log_7 x=0\\ \log_2 x-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_7 x=1\\ \log_2 x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=7\\ x=4\end{array}\right.$. Vậy tổng các nghiệm của phương trình là 11.

Câu 7: Cho phương trình logarit $\log_{x+m}\left(x^2-2x\right)=\log_{x+m}\left(2x+m\right)$. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của m để phương trình có hai nghiệm x. Tập nào dưới đây nằm trong tập S?

A. $(0;1)\cup(2;8)$. **B.** $(-4;-1)\cup(-1;+\infty)$.

C. $(0;2)\cup(2;4)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

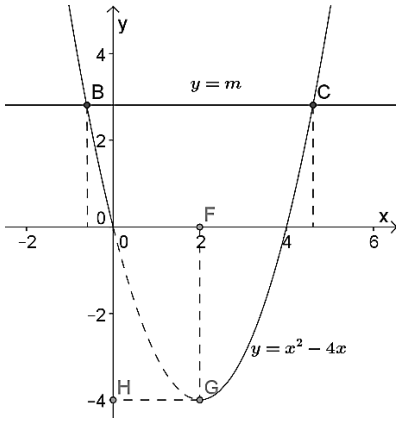
Chọn A

Xét phương trình $\log_{x+m}\left(x^2-2x\right)=\log_{x+m}\left(2x+m\right)\ (1)$.

Điều kiện $\left\{\begin{array}{l}x+m>0\\ x+m\neq 1\\ x^2-2x>0\\ 2x+m>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x>-m\\ x\neq -m+1\\ x<0\vee x>2\\ x>-\dfrac{m}{2}\end{array}\right.$

$(1)\Leftrightarrow x^2-4x=m$. Xét tương giao đồ thị hàm số $f(x)=x^2-4x$ và đường thẳng $y=m$ trên miền điều kiện ở trên.

Để phương trình (1) có 2 nghiệm x thì $m>f(0)=0$.



Suy ra $-m<-\dfrac{m}{2}<0$.

Nên yêu cầu bài toán tương đương $\left\{\begin{array}{l}f\left(-\dfrac{m}{2}\right)>m\\ f\left(-m+1\right)\neq m\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m^2+4m>0\\ m^2+m-3\neq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m>0\\ m\neq\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.$.

Do đó $S=\left(0;\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2};+\infty\right)$ chứa tập $(0;1)\cup(2;8)$.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 6: Phương trình mũ – phương trình logarit cơ bản

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

Câu 1: Nghiệm của phương trình $2^{3x-5}=16$ là

A. $x=3$. **B.** $x=2$. **C.** $x=7$. **D.** $x=\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $2^{3x-5}=16\Leftrightarrow 2^{3x-5}=2^4\Leftrightarrow 3x-5=4\Leftrightarrow x=3$.

Câu 2: Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $3^{x^2-4x+5}=9$ là

A. $12\cdot$ **B.** $10\cdot$ **C.** $11\cdot$ **D.** $9\cdot$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $3^{x^2-4x+5}=9\Leftrightarrow x^2-4x+5=\log_3 9\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=1\\x_2=3\end{array}\right.\Rightarrow x_1^2+x_2^2=10.$

Câu 3: Nghiệm của phương trình $7^x=2$ là

A. $x=\log_7 2$. **B.** $x=\log_2 7$. **C.** $x=\frac{2}{7}$. **D.** $x=\sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn A

$7^x=2\Leftrightarrow x=\log_7 2$.

Câu 4: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2-2x-3}=1$ là

A. $S=\{1;-3\}$. **B.** $S=\{2\}$. **C.** $S=\{-1;3\}$. **D.** $S=\{0\}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $2^{x^2-2x-3}=1\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$.

Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2-2x-3}=1$ là $S=\{-1;3\}$.

Câu 5: Nghiệm của phương trình $2^x=e$ là

A. 2^e. **B.** $\ln 2$. **C.** $\log e$. **D.** $\log_2 e$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $2^x=e\Leftrightarrow x=\log_2 e$.

Câu 6: Nghiệm của phương trình $7^x=2$ là

A. $x=\log_7 2$. **B.** $x=\log_2 7$. **C.** $x=\frac{2}{7}$. **D.** $x=\sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $7^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_7 2$.

Câu 7: Số nghiệm của phương trình $2^x = (0,5)^{-1}$ là

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $2^x = (0,5)^{-1} \Leftrightarrow 2^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \Leftrightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1.$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm duy nhất.

Câu 8: Nghiệm của phương trình $3^{x-1} = 27$ là

A. $x = 4$. **B.** $x = -2$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = -1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $3^{x-1} = 27 \Leftrightarrow x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 4$.

Câu 9: Nghiệm của phương trình $2^{x+4} = 64$ là

A. $x = 4$. **B.** $x = 12$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = 5$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $2^{x+4} = 64 \Leftrightarrow 2^{x+4} = 2^6 \Leftrightarrow x + 4 = 6 \Leftrightarrow x = 2$.

Câu 10: Nghiệm của phương trình $2^{2x+3} = 2^{x+7}$ là:

A. $x = \frac{10}{3}$. **B.** $x = \frac{4}{3}$. **C.** $x = 4$. **D.** $x = 10$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $2^{2x+3} = 2^{x+7} \Leftrightarrow 2x + 3 = x + 7 \Leftrightarrow x = 4$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 4$.

Câu 11: Nghiệm của phương trình $3^{3x+5} = 3^{1-x}$ là :

A. $x = -1$. **B.** $x = 2$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = -2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $3^{3x+5} = 3^{1-x} \Leftrightarrow 3x + 5 = 1 - x \Leftrightarrow 4x = -4 \Leftrightarrow x = -1$.

Câu 12: Nghiệm của phương trình $10^x = 5$ là

A. $x = \frac{1}{2}$. **B.** $x = 2$. **C.** $x = \log 5$. **D.** $x = \log_5 10$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $10^x = 5 \Leftrightarrow x = \log 5$.

Câu 13: Tích các nghiệm của phương trình $2^{x^2-2x} = 8$ là

A. 3 **B.** 2. **C.** -3 **D.** 0

Lời giải

Chọn C

Ta có: $2^{x^2-2x}=8\Leftrightarrow 2^{x^2-2x}=2^3\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-1 \\ x_2=3 \end{array}\right. \Rightarrow x_1.x_2=-3$

Câu 14: Tìm tập nghiệm S của phương trình $5^{2x^2-x}=5$.

A. $S=\{0;2\}$. **B.** $S=\left\{0;\frac{1}{2}\right\}$. **C.** $S=\left\{1;-\frac{1}{2}\right\}$. **D.** $S=\varnothing$.

Lời giải

Ta có $5^{2x^2-x}=5\Leftrightarrow 2x^2-x=1\Leftrightarrow 2x^2-x-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là : $S=\left\{1;-\frac{1}{2}\right\}$.

Câu 15: Tập nghiệm của phương trình $2^{x+1}=5$ có bao nhiêu phần tử?

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2^{x+1}=5\Leftrightarrow x=-1+\log_2 5$.

Vậy phương trình có nghiệm $x=-1+\log_2 5$.

Câu 16: Tìm tập nghiệm S của phương trình $2^{x+1}=8$.

A. $S=\{3\}$. **B.** $S=\{2\}$. **C.** $S=\{1\}$. **D.** $S=\{4\}$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $2^{x+1}=8\Leftrightarrow 2^{x+1}=2^3\Leftrightarrow x+1=3\Leftrightarrow x=2.$

Vậy $S=\{2\}$.

Câu 17: Nghiệm của phương trình $\log_3 x=2$ là

A. $x=9$ **B.** $x=5$ **C.** $x=6$ **D.** $x=8$

Lời giải

Chọn A

$\log_3 x=2\Leftrightarrow x=3^2\Leftrightarrow x=9$.

Câu 18: Giải phương trình $\log_3(x-1)=2$.

A. $x=7$. **B.** $x=9$. **C.** $x=8$. **D.** $x=10$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x>1$.

$\log_3(x-1)=2\Leftrightarrow x-1=3^2\Leftrightarrow x=10.$

Câu 19: Nghiệm của phương trình $\log_3(x-2)=4$ là

A. $x=79$. **B.** $x=81$. **C.** $x=66$. **D.** $x=83$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_3(x-2)=4\Leftrightarrow x-2=3^4\Leftrightarrow x=83$.

Câu 20: Phương trình $\log_{25}(2x-3)=1$ có nghiệm là

A. $x=25$. **B.** $x=13$. **C.** $x=14$. **D.** $x=15$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_{25}(2x-3)=1 \Leftrightarrow 2x-3=25 \Leftrightarrow 2x=28 \Leftrightarrow x=14$.

Câu 21: Nghiệm của phương trình $\log_2(x-1)=3$ là

A. $x=10$. **B.** $x=9$. **C.** $x=7$. **D.** $x=8$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_2(x-1)=3 \Leftrightarrow x-1=2^3 \Leftrightarrow x=9$.

Câu 22: Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2+1)=2$ là

A. $S=\{\sqrt{3}\}$. **B.** $S=\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$. **C.** $S=\{-1;1\}$. **D.** $S=\{1\}$.

Lời giải

Chọn B

$\log_2(x^2+1)=2 \Leftrightarrow x^2+1=2^2 \Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là: $S=\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$.

Câu 23: Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2+1)=2$ là

A. $S=\{\sqrt{3}\}$. **B.** $S=\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$. **C.** $S=\{-1;1\}$. **D.** $S=\{1\}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $x^2+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên $\log_2(x^2+1)=2 \Leftrightarrow x^2+1=4 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$.

Câu 24: Tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $3^{x^2+1}=m-1$ có nghiệm là

A. $m\geq 4$. **B.** $m>4$. **C.** $m>1$. **D.** $m\geq 1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $3^{x^2}\geq 3^0 \Leftrightarrow 3^{x^2+1}\geq 3$.

Phương trình $3^{x^2+1}=m-1$ có nghiệm khi và chỉ khi $m-1\geq 3 \Leftrightarrow m\geq 4$.

Câu 25: Cho a,b,c là các số thực khác 0 thỏa mãn $4^a=25^b=10^c$. Giá trị $T=\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$ là

A. $T=\frac{1}{2}$. **B.** $T=\frac{1}{10}$. **C.** $T=2$. **D.** $T=\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $4^a=25^b=10^c \Leftrightarrow \begin{cases}10^c=4^a\\10^c=25^b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=\log 4^a\\c=\log 25^b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=a\log 4\\c=b\log 25\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{c}{a}=\log 4\\\frac{c}{b}=\log 25\end{cases}$.

Vậy $T=\frac{c}{a}+\frac{c}{b}=\log 4+\log 25=\log 100=2$.

Câu 26: Phương trình $5^{2x+1}=125$ có nghiệm là

A. $x=3$. **B.** $x=\frac{5}{2}$. **C.** $x=\frac{3}{2}$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Chọn D

Ta xét: $5^{2x+1}=125\Leftrightarrow 5^{2x+1}=5^3\Leftrightarrow 2x+1=3\Leftrightarrow x=1.$

Câu 27: Nghiệm của phương trình $3^{x^2-3x+4}=9$ là

A. $x=1;\ x=2$. **B.** $x=1;\ x=-2$. **C.** $x=-1;\ x=3$. **D.** $x=1;\ x=3$.

Lời giải

Chọn A

$3^{x^2-3x+4}=9\Leftrightarrow x^2-3x+4=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Câu 28: Gọi x_1,x_2 là 2 nghiệm của phương trình $6^x+12=3^{x+1}+2^{x+2}$. Tích x_1,x_2 bằng

A. 4, **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $6^x+12=3^{x+1}+2^{x+2}\Leftrightarrow 6^x-3.3^x+12-4.2^x=0\Leftrightarrow 3^x\left(2^x-3\right)+4\left(3-2^x\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(3^x-4\right)\left(2^x-3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^x=4\\2^x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\log_3 4\\x=\log_2 3\end{array}\right.$

Vậy tích hai nghiệm $x_1.x_2=\log_2 3.\log_3 4=\log_2 4=2$

Câu 29: Nghiệm của phương trình $2^{1-3x}=\frac{1}{32}$ là

A. $x=2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=\frac{1}{3}$. **D.** $x=-\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $2^{1-3x}=\frac{1}{32}\Leftrightarrow 1-3x=\log_2\frac{1}{32}\Leftrightarrow 1-3x=-5\Leftrightarrow x=2$.

Câu 30: Nghiệm của phương trình $3^{2x-1}=3^{2-x}$ là:

A. $x=\frac{1}{3}$. **B.** $x=0$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-1$

Lời giải

Ta có $3^{2x-1}=3^{2-x}\Leftrightarrow 2x-1=2-x\Leftrightarrow x=1.$

Câu 31: Phương trình $\left(\sqrt{5}\right)^{x^2+4x+6}=5$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 0

Lời giải

Chọn A

$\left(\sqrt{5}\right)^{x^2+4x+6}=5\Leftrightarrow x^2+4x+6=2\Leftrightarrow x=-2$

Câu 32: Phương trình $5^{2x^2+5x+4}=25$ có tổng tất cả các nghiệm bằng

A. $-\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $5^{2x^2+5x+4}=25\Leftrightarrow 5^{2x^2+5x+4}=5^2\Leftrightarrow 2x^2+5x+4=2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Tổng tất cả các nghiệm bằng $-\frac{5}{2}$.

Câu 33: Tìm tập nghiệm của bất phương trình $3^x<\mathrm{e}^x$.

A. $(-\infty;0)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Có $3^x<\mathrm{e}^x\Leftrightarrow \ln\left(3^x\right)<\ln\left(\mathrm{e}^x\right)\Leftrightarrow x(\ln 3-1)<0\Leftrightarrow x<0$.

Câu 34: Số nghiệm thực của phương trình: $1+\ln(x+3)-\ln(x-1)^2=0$ là

A. 2. **B.** 1 **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases} x+3>0 \\ x\neq 1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x>-3 \\ x\neq 1 \end{cases}$

Ta có: $1+\ln(x+3)-\ln(x-1)^2=0\Leftrightarrow \ln(x-1)^2=\ln(x+3)+1$

$\Leftrightarrow \ln(x-1)^2=\ln e(x+3)\Leftrightarrow (x-1)^2=ex+3e\Leftrightarrow x^2-(2+e)x+1-3e=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{e+2-\sqrt{e^2+16e}}{2}(t/m) \\ x=\frac{e+2+\sqrt{e^2+16e}}{2}(t/m) \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 2 nghiệm.

Câu 35: **Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log_2\left(x^2+x+1\right)=3$ khi đó x_1+x_2 bằng**

A. -1. **B.** -3. **C.** -2. **D.** 2

Lời giải

Chọn A

$\log_2\left(x^2+x+1\right)=3\Leftrightarrow x^2+x+1=8\Leftrightarrow x^2+x-7=0$

Do $ac<0$ nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt nên $x_1+x_2=-1$.

Câu 36: Phương trình $\ln\left(x-\frac{2}{3}\right)\ln\left(x+\frac{2}{3}\right)\ln\left(x+\frac{1}{3}\right)\ln\left(x+\frac{1}{6}\right)=0$ có bao nhiêu nghiệm thực.

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Đk: $x>\frac{2}{3}$.

Khi đó, $\ln\left(x-\frac{2}{3}\right)\ln\left(x+\frac{2}{3}\right)\ln\left(x+\frac{1}{3}\right)\ln\left(x+\frac{1}{6}\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\ln\left(x-\frac{2}{3}\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{5}{3}\left(thoa\ man\right)\\ \ln\left(x+\frac{2}{3}\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}\left(loai\right)\\ \ln\left(x+\frac{1}{3}\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}\left(loai\right)\\ \ln\left(x+\frac{1}{6}\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{5}{6}\left(thoa\ man\right)\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm thực.

Câu 37: Tập nghiệm của phương trình $\ln\left(2x^2-x+1\right)=0$ là

A. $\{0\}$. **B.** $\left\{0;\frac{1}{2}\right\}$. **C.** $\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **D.** $\varnothing$.

Lời giải

Chọn B

Ta có : $\ln\left(2x^2-x+1\right)=0\Leftrightarrow 2x^2-x+1=1\Leftrightarrow 2x^2-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$.

Vậy $S=\left\{0;\frac{1}{2}\right\}$.

Câu 38: Số nghiệm của phương trình $\log_3 x.\log_3\left(2x-1\right)=2\log_3 x$

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x>\frac{1}{2}$.

Phương trình tương đương: $\log_3 x.\left[\log_3\left(2x-1\right)-2\right]=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_3 x=0\\ \log_3\left(2x-1\right)=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=5\end{array}\right.$ (thỏa mãn). Vậy phương trình có hai nghiệm.

Câu 39: Gọi S là tập nghiệm của phương trình $2\log_2\left(2x-2\right)+\log_2\left(x-3\right)^2=2$ trên $\mathbb{R}$. Tổng các phần tử của S bằng

A. $4+\sqrt{2}$. **B.** 8. **C.** $8+\sqrt{2}$. **D.** $6+\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases}2x-2>0\\(x-3)^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\x\neq 3\end{cases}$.

Phương trình đã cho tương đương với: $\log_2(2x-2)^2+\log_2(x-3)^2=2$

$\Leftrightarrow\log_2\left[(4x^2-8x+4)(x^2-6x+9)\right]=2\Leftrightarrow 4x^4-32x^3+88x^2-96x+32=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2+\sqrt{2}\\x=2\\x=2-\sqrt{2}\end{array}\right.$. So với điều kiện, nhận $x=2$ và $x=2+\sqrt{2}$.

Do đó, tập nghiệm của phương trình đã cho là: $S=\left\{2;2+\sqrt{2}\right\}$.

Vậy tổng các phần tử của tập S là: $4+\sqrt{2}$.

Câu 40: Phương trình $\log_4(3.2^x)=x-1$ có nghiệm là $x_0=a+\log_2 b$ (với a,b nguyên dương và a,b là hai số nguyên tố cùng nhau). Tính $S=a+2b$.

A. 5. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 14. .

Lời giải

Phương trình $\log_4(3.2^x)=x-1\Leftrightarrow\log_2 3+x=2x-2\Leftrightarrow x=2+\log_2 3\approx 3{,}58$.

$\Rightarrow S=a+2b=2+2.3=8$

Câu 41: Có bao nhiêu số nguyên $m\in[-10;10]$ để phương trình $(mx-1)\sqrt{2-\log_2 x}=0$ có hai nghiệm thực phân biệt?

A. 20. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 11.

Lời giải

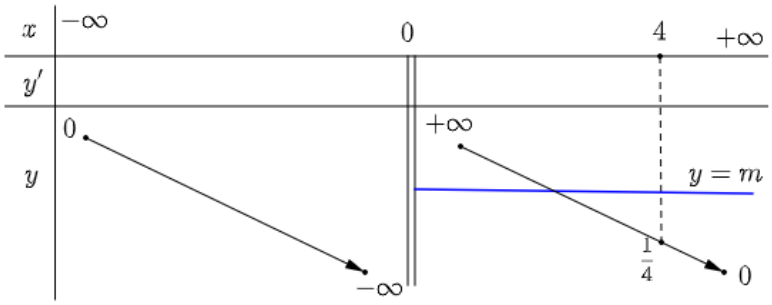
Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases}x>0\\2-\log_2 x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x\leq 4\end{cases}\Rightarrow 0<x\leq 4$.

Ta có $(mx-1)\sqrt{2-\log_2 x}=0$ (1) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}mx-1=0\\2-\log_2 x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{1}{x}\ (2)\\x=4\end{array}\right.$.

Dễ thấy, phương trình (1) luôn có nghiệm $x=4$. Do đó để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì phương trình (2) phải có nghiệm duy nhất thỏa $0<x<4$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=\dfrac{1}{x}$



Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình (2) có nghiệm duy nhất thỏa $0<x<4$ khi và chỉ khi

$m > \frac{1}{4}$. Kết hợp với điều kiện đầu bài, ta có $\frac{1}{4} < m \le 10$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Vậy có 10 giá trị thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Câu 42: Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình $\log_3(x+2) = \log_3\left[x^2-(m-1)x+m^2-6m+2\right]$ có hai nghiệm trái dấu?

A. 4. **B.** 3. **C.** vô số. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Phương trình đã cho tương đương: $\begin{cases} x > -2 \\ x^2-(m-1)x+m^2-6m+2 = x+2 \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x^2-mx+m^2-6m = 0 \ (*) \end{cases}$

Yêu cầu đề bài khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $-2 < x_1 < 0 < x_2$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1.x_2 < 0 \\ (x_1+2)(x_2+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1.x_2 < 0 \\ x_1x_2+2(x_1+x_2)+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-6m < 0 \\ m^2-4m+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 6 \\ m \ne 2 \end{cases}$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1;3;4;5\}$.

Suy ra có 4 giá trị của tham số m thoả mãn điều kiện bài toán.

Câu 43: Biết rằng điều kiện cần và đủ của tham số m để phương trình $\log_3\left(m+\sqrt{m+3^x}\right) = 2x$ có nghiệm là $m \ge -\frac{a}{b}$ (phân số $\frac{a}{b}$ tối giản) với a,b là hai số nguyên dương và $b < 7$. Hỏi $2a+b+b^2$ bằng bao nhiêu?

A. 31. **B.** 32. **C.** 22. **D.** 23.

Lời giải

Chọn C

$\log_3\left(m+\sqrt{m+3^x}\right) = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} m+3^x \ge 0 \\ m+\sqrt{m+3^x} = 3^{2x} \ (*) \end{cases}$.

$(*) \Leftrightarrow \left(m+3^x\right)+\sqrt{m+3^x} = \left(3^x\right)^2+3^x$.

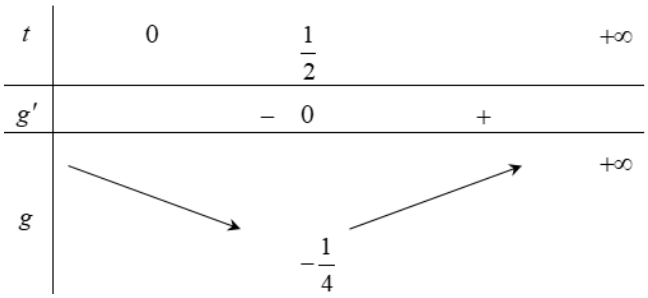
Xét hàm số $f(t) = t^2+t \ (t \ge 0)$. Ta có $f'(t) = 2t+1 > 0$ với mọi $t \ge 0$, suy ra hàm số luôn đồng biến với mọi $t \ge 0$.

$(*) \Leftrightarrow f\left(\sqrt{m+3^x}\right) = f\left(3^x\right) \Leftrightarrow \sqrt{m+3^x} = 3^x \Leftrightarrow \left(3^x\right)^2 = 3^x+m \ (**)$.

Đặt $t = 3^x \ (t > 0)$, khi đó phương trình $(**)$ trở thành $t^2-t = m \ (***)$.

Xét hàm $g(t) = t^2-t \ (t > 0)$, ta có $g'(t) = 2t-1 \Rightarrow g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên



Vậy để $(***)$ có nghiệm $t>0$ thì $m\ge -\frac{1}{4}\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=4 \end{cases}\Rightarrow 2a+b+b^2=22$.

Câu 44: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\ln(x-2)=\ln(mx)$ có nghiệm

A. $0<m<1$. **B.** $m>1$. **C.** $m<\frac{1}{2}$. **D.** $0<m<\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$\ln(x-2)=\ln(mx) \Leftrightarrow \begin{cases} x-2>0 \\ x-2=mx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ (m-1)x=-2 \end{cases}$.

Phương trình $\ln(x-2)=\ln(mx)$ có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $(m-1)x=-2$ có nghiệm $x>2$.

Xét phương trình $(m-1)x=-2$ (*)

Nếu $m=1$, (*) vô nghiệm.

Nếu $m\ne 1$, (*) $\Leftrightarrow x=-\frac{2}{m-1}$

(*) có nghiệm $x>2 \Leftrightarrow -\frac{2}{m-1}>2 \Leftrightarrow 1+\frac{1}{m-1}<0 \Leftrightarrow \frac{m}{m-1}<0 \Leftrightarrow 0<m<1$.

Vậy $0<m<1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 45: Phương trình $\sqrt{9-x^2}.\log(9+2x-x^2)=0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases} 9-x^2\ge 0 \\ 9+2x-x^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\le x\le 3 \\ 1-\sqrt{10}<x<1+\sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow 1-\sqrt{10}<x\le 3$.

Ta có $\sqrt{9-x^2}.\log(9+2x-x^2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{9-x^2}=0 \\ \log(9+2x-x^2)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 3 \\ 9+2x-x^2=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 3 \\ x=-2 \\ x=4 \end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện suy ra phương trình có 2 nghiệm $x=-2; x=3$.

Câu 46: Xét hàm số $f(t)=\frac{9^t}{9^t+m^2}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\begin{cases} f(x)+f(y)=1 \\ e^{x+y}\le e.(x+y) \end{cases}$. Tìm tổng các phần tử của tập S.

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f(x)+f(y)=1\Leftrightarrow f(y)=1-f(x)\Leftrightarrow \dfrac{9^y}{9^y+m^2}=1-\dfrac{9^x}{9^x+m^2}=\dfrac{m^2}{9^x+m^2}$

$\Leftrightarrow 9^{x+y}+m^2.9^y=9^y.m^2+m^4\Leftrightarrow 9^{x+y}=m^4\Leftrightarrow x+y=\log_9 m^4=2\log_3|m|$.

Đặt $t=\log_3|m|$ ta được: $e^{x+y}\le e(x+y)\Leftrightarrow e^{2t}\le 2e.t\Leftrightarrow e^{2t}-2e.t\le 0(*)$

Xét $g(t)=e^{2t}-2et$, có $g'(t)=2e^{2t}-2e=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$.

t	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$g'(t)$		-	0	+	
$g(t)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta được $e^{2t}-2et\ge 0,\forall t$.

Vậy (*) xảy ra $\Leftrightarrow e^{2t}-2et=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \log_3|m|=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow |m|=\sqrt{3}\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{3}.$

Vậy tổng các phần tử của tập S bằng 0.

Câu 47: Cho phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(2x-m)+\log_2(3-x)=0$, với m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình có nghiệm.

A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}(2x-m)+\log_2(3-x)=0\Leftrightarrow \log_2(3-x)=\log_2(2x-m)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}3-x>0\\2x-m=3-x\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x<3\ (*)\\m=3x-3=f(x)\end{cases}$.

Xét hàm số $f(x)=3x-3$ trên $(-\infty;3)$ ta có bảng biên thiên như sau:

x	$-\infty$		3
$f'(x)$		+	
$y=f(x)$	$-\infty$	↗	6

$y=m$

Yêu cầu bài toán tương đương với $m<6$. Vì $m\in\mathbb{Z}^+$ nên $m\in\{1;2;3;4;5\}$.

Câu 48: Có bao nhiêu số nguyên $a\in[-2021;2021]$ sao cho tồn tại duy nhất số thực x thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}}(x+3)=\log_3(ax)$?

A. 2022. **B.** 2020. **C.** 2023. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases} x > -3 \\ ax > 0 \end{cases}$.

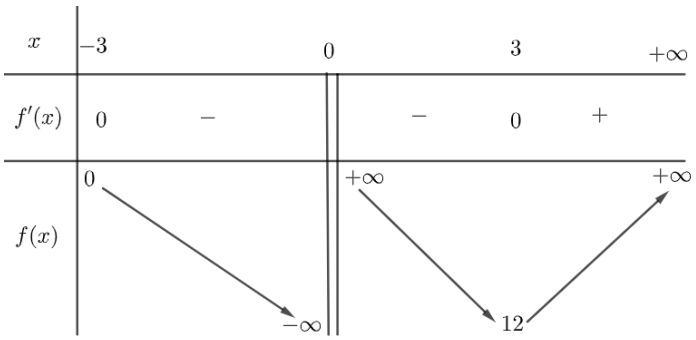
Phương trình $\log_{\sqrt{3}}(x+3) = \log_3(ax) \Leftrightarrow \log_3(x+3)^2 = \log_3(ax) \Leftrightarrow (x+3)^2 = ax$. (*)

Ta có: $x = 0$ không là nghiệm của phương trình (*).

Với $x \neq 0$, (*) $\Leftrightarrow \dfrac{(x+3)^2}{x} = a$. Xét $f(x) = \dfrac{(x+3)^2}{x}$, với $-3 < x \neq 0$.

$f'(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên, phương trình (*) có nghiệm duy nhất khi $a < 0 \vee a = 12$.

Mà $a \in \mathbb{Z}$ và $a \in [-2021; 2021]$ nên suy ra có 2022 giá trị thỏa yêu cầu.

Câu 49: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-10;10)$ để phương trình $\dfrac{\log(mx)}{\log(x+1)} = 2$ có nghiệm thực duy nhất?

A. 15. **B.** 10. **C.** 16. **D.** 11.

Lời giải

Chọn B

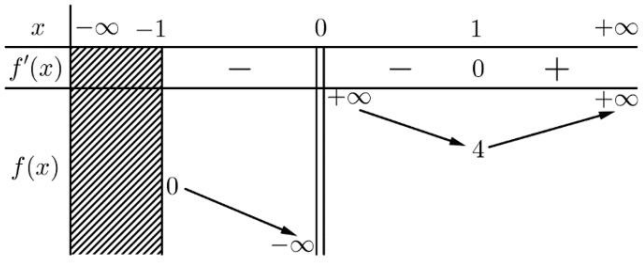
Điều kiện $\begin{cases} x > -1 \\ mx > 0 \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \log(mx) = \log(x+1)^2 \Leftrightarrow mx = (x+1)^2$, dễ thấy điều kiện $\begin{cases} x > -1 \\ mx > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ m \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ (1)

$\Leftrightarrow m = \dfrac{(x+1)^2}{x}$ (2). Xét hàm $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x}$ trên $(-1;+\infty)\setminus\{0\}$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên sau:



Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình đã cho có duy nhất một nghiệm

$\Leftrightarrow (2)$ có nghiệm duy nhất x thỏa $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=4 \\ m<0 \end{array}\right.$.

Xét $\begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ \left[\begin{array}{l} m=4 \\ m<0 \end{array}\right. \\ m\in(-10;10) \end{cases} \Rightarrow$ có 10 số $m\in\{-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;4\}$.

Vậy có 10 giá trị nguyên của tham số $m\in(-10;10)$ thỏa mãn.

Câu 50: Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_{(x-1)}\left(x^4-mx^2+x+m-1\right)=1$ có đúng một nghiệm thực x. Tổng bình phương các phần tử của S bằng:

A. 41. **B.** 20. **C.** $\frac{185}{4}$. **D.** $\frac{400}{9}$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $\begin{cases} x^4-mx^2+x+m-1>0 \\ x-1\neq 1 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4-mx^2+x+m-1>0 \\ x\neq 2 \\ x>1 \end{cases}$.

Với điều kiện trên, ta có: $\log_{(x-1)}\left(x^4-mx^2+x+m-1\right)=1 \Leftrightarrow x^4-mx^2+x+m-1=x-1$

$\Leftrightarrow x^4-mx^2+m=0 \Leftrightarrow m=\frac{x^4}{x^2-1}=f(x)$

Suy ra $f'(x)=\frac{2x^5-4x^3}{\left(x^2-1\right)^2} \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\sqrt{2}\ (l) \\ x=\sqrt{2} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$:

x	1		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$\frac{16}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Căn cứ vào bảng biến thiên trên ta suy ra phương trình có đúng một nghiệm thực khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m=4 \\ m=\frac{16}{3} \end{array}\right. \Rightarrow 4^2+\left(\frac{16}{3}\right)^2=\frac{400}{9}$.

Vậy tổng bình phương các phần tử của S bằng $\frac{400}{9}$.

Dạng 7: Phương pháp đưa về cùng cơ số giải phương trình mũ - logarit

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Phương trình $5^{x^2-1}=25^{x+1}$ có tập nghiệm là

A. $\{-1;3\}$. **B.** $\{1;3\}$. **C.** $\{-3;1\}$. **D.** $\{-3;-1\}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $5^{x^2-1}=25^{x+1}\Leftrightarrow 5^{x^2-1}=5^{2x+2}\Leftrightarrow x^2-1=2x+2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình $S=\{3;-1\}$.

Câu 2: Tập nghiệm của phương trình $\log(x-1)-\log(2x+3)=0$ là

A. $\left\{-4;\frac{2}{3}\right\}$. **B.** $\{2\}$. **C.** $\{-4\}$. **D.** $\varnothing$.

Lời giải

Chọn D

Ta có phương trình đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=2x+3 \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ x>1 \end{cases}$

Phương trình trên vô nghiệm.

Câu 3: Có bao nhiêu số nguyên m thỏa mãn $|m|<2023$ và phương trình $\log_{16}(mx)=\log_2\left(\sqrt{x+1}\right)$ có nghiệm thực duy nhất?

A. 2024. **B.** 2025. **C.** 2023. **D.** 2022.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x>-1 \\ mx>0 \end{cases}$

Ta có: $\log_{16}(mx)=\log_2\left(\sqrt{x+1}\right)\Leftrightarrow \log_2(mx)=4\log_2\left(\sqrt{x+1}\right)$

$\Leftrightarrow \log_2(mx)=\log_2(x+1)^2\Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x^2+(2-m)x+1=0 \quad (*) \end{cases}$

Để phương trình có nghiệm duy nhất thì phương trình $(*)$ có nghiệm kép lớn hơn -1 hoặc có 2 nghiệm phân biệt: $x_1>-1\ge x_2$

Trường hợp 1: $\Delta=0\Leftrightarrow (2-m)^2-4=0\Leftrightarrow m(m-4)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=4 \end{array}\right.$

Nếu $m=0 \Rightarrow x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow x=-1\ (KTM)$

Nếu $m=4 \Rightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow x=1\ (TM)$

Trường hợp 2: $x_1>-1>x_2 \Leftrightarrow f(-1)<0 \Leftrightarrow m<0$.

Do $\begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ |m|<2023 \end{cases}$ nên có 2022 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Trường hợp 3: Phương trình có một nghiệm $x=-1$ và có một nghiệm lớn hơn -1.

$x=-1 \Rightarrow 1-(2-m)+1=0 \Leftrightarrow m=0$

Với $m=0 \Rightarrow x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ khi đó phương trình có 2 nghiệm: $x_1=x_2=-1\ (KTM)$

Vậy có 2023 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị m nguyên trong $[-2022;2022]$ để phương trình $\log(mx)=2\log(x+1)$ có nghiệm duy nhất?

A. 2023. **B.** 2022. **C.** 4045. **D.** 4044.

Lời giải

Chọn A

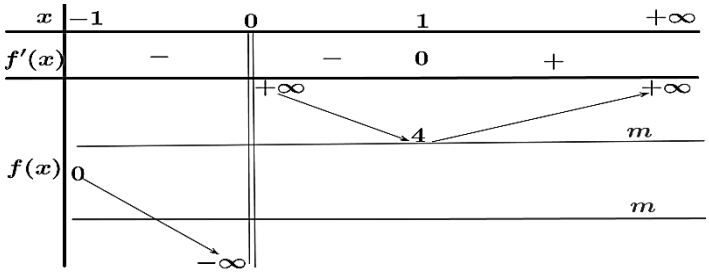
Điều kiện: $\begin{cases} mx>0 \\ x>-1 \end{cases}$

Phương trình suy ra: $mx=(x+1)^2 \Leftrightarrow m=\dfrac{(x+1)^2}{x},\ (x\neq 0)$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x}$ trên khoảng $(-1;+\infty)\setminus\{0\}$

Ta có: $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$, $f'(x)=0 \Rightarrow x=\pm 1$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(-1;+\infty)\setminus\{0\}$



Từ bảng biến thiên, để phương trình có nghiệm duy nhất khi $\left[\begin{array}{l} m=4 \\ m<0 \end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in[-2022;2022]$ ta có: $m=\{-2022;-2021;.....;-1;4\}$.

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Phương trình $5^{2x+1}=125$ có nghiệm là

A. $x=3$. **B.** $x=\frac{5}{2}$. **C.** $x=1$. **D.** $x=\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chon C

$5^{2x+1}=125\Leftrightarrow 2x+1=3\Leftrightarrow x=1$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Câu 2: Nghiệm của phương trình $4^{x-1}=8^{2-x}$ là:

A. $x=8$ **B.** $\frac{1}{8}$ **C.** $x=4$ **D.** $x=\frac{8}{5}$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $4^{x-1}=8^{2-x}\Leftrightarrow 2^{2x-2}=2^{6-3x}\Leftrightarrow 2x-2=6-3x\Leftrightarrow x=\frac{8}{5}$.

Vậy phương trình có duy nhất một nghiệm $x=\frac{8}{5}$.

Câu 3: Phương trình $3^{2x-1}=3$ có nghiệm là

A. $x=1$. **B.** $x=0$. **C.** $x=\frac{1}{2}$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $3^{2x-1}=3\Leftrightarrow 2x-1=1\Leftrightarrow x=1$.

Câu 4: Số nghiệm của phương trình $3^{x^2-x}=\left(\frac{1}{9}\right)^{2022}$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Ta có $3^{x^2-x}=\left(\frac{1}{9}\right)^{2022}\Leftrightarrow 3^{x^2-x}=3^{-4044}\Leftrightarrow x^2-x+4044=0$: phương trình vô nghiệm.

Vậy số nghiệm của phương trình là 0.

Câu 5: Số nghiệm của phương trình $2^x=(0,5)^{-1}$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $2^x=(0,5)^{-1}\Leftrightarrow 2^x=2\Leftrightarrow x=1$.

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất.

Câu 6: Tập nghiệm của phương trình $2^{x^2}=16$ là.

A. $\{4\}$. **B.** $\varnothing$. **C.** $\{-2;2\}$. **D.** $\{2\}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $2^{x^2}=16\Leftrightarrow 2^{x^2}=2^4\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=\pm 2$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $S=\{-2;2\}$.

Câu 7: Nghiệm của phương trình $4^{x-1}=8^{2-x}$ là:

A. $x=8$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $x=4$. **D.** $x=\frac{8}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $4^{x-1}=8^{2-x}\Leftrightarrow 2^{2x-2}=2^{6-3x}\Leftrightarrow 2x-2=6-3x\Leftrightarrow x=\frac{8}{5}$.

Vậy phương trình có duy nhất một nghiệm $x=\frac{8}{5}$.

Câu 8: Nghiệm của phương trình $3^{2x-3}=3^x$ là

A. $x=2$. **B.** $x=0$. **C.** $x=1$. **D.** $x=3$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $3^{2x-3}=3^x\Leftrightarrow 2x-3=x\Leftrightarrow x=3.$

Câu 9: Phương trình $5^{2x+3}=25$ có nghiệm là

A. $x=1$. **B.** $x=\frac{1}{2}$. **C.** $x=-\frac{1}{2}$. **D.** $x=\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $5^{2x+3}=25\Leftrightarrow 2x+3=2\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$.

Câu 10: Phương trình $2^{2x^2+5x+6}=8$ có tổng tất cả các nghiệm bằng

A. 1. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** -1. **D.** $-\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $2^{2x^2+5x+6}=8\Leftrightarrow 2^{2x^2+5x+6}=2^3\Leftrightarrow 2x^2+5x+6=3\Leftrightarrow 2x^2+5x+3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-\frac{3}{2} \end{array}\right.$

Tổng tất cả các nghiệm của phương trình đã cho là: $-1+\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{5}{2}$.

Câu 11: Nghiệm của phương trình $3^{x-1}=\frac{1}{9}$ là

A. -3. **B.** 3. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $3^{x-1}=\frac{1}{9}\Leftrightarrow 3^{x-1}=3^{-2}\Leftrightarrow x-1=-2\Leftrightarrow x=-1$.

Câu 12: Nghiệm của phương trình $2^{3x-1}=8$ là

A. $x=3$. **B.** $x=\frac{4}{3}$. **C.** $x=\frac{2}{3}$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2^{3x-1}=8\Leftrightarrow 3x-1=3\Leftrightarrow 3x=4\Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$.

Câu 13: Nghiệm của phương trình $2^{2x+3}=2^{x+7}$ là:

A. $x=\frac{10}{3}$. **B.** $x=\frac{4}{3}$. **C.** $x=4$. **D.** $x=10$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $2^{2x+3}=2^{x+7}\Leftrightarrow 2x+3=x+7\Leftrightarrow x=4$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=4$.

Câu 14: Tập nghiệm của phương trình $2^{-x^2-3x}=\frac{1}{16}$ là

A. $\varnothing$. **B.** $\{-1;4\}$. **C.** $\{0;1\}$. **D.** $\{1;-4\}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $2^{-x^2-3x}=\frac{1}{16}\Leftrightarrow 2^{-x^2-3x}=2^{-4}\Leftrightarrow -x^2-3x=-4\Leftrightarrow -x^2-3x+4=0$

$\Leftrightarrow x=1; x=-4$

Câu 15: Nghiệm của phương trình $3^{x+1}=9^{2x}$ là

A. $x=1$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=\frac{1}{4}$. **D.** $x=\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $3^{x+1}=9^{2x}\Leftrightarrow 3^{x+1}=3^{4x}\Leftrightarrow x+1=4x\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$.

Câu 16: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x-3\log_2 x+2=0$ bằng

A. 8 **B.** 6 **C.** 16 **D.** 2

Lời giải

Chọn A

$$\log_2^2 x-3\log_2 x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x=1\\ \log_2 x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=4\end{array}\right.$$

Suy ra $x_1.x_2=8$

Câu 17: Tập nghiệm của phương trình $\log_2(1-x)=2$ là

A. $x=-4$. **B.** $x=3$. **C.** $x=-3$. **D.** $x=5$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_2(1-x)=2 \Leftrightarrow 1-x=2^2 \Leftrightarrow x=-3$.

Câu 18: Số nghiệm dương của phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x}=9$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x}=9 \Leftrightarrow x^2-4x=-2 \Leftrightarrow x^2-4x+2=0 \Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{2}$.

Câu 19: Biết rằng phương trình $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^x=\sqrt[3]{2^{x+1}}$ có một nghiệm thực duy nhất. Nghiệm thực đó thuộc khoảng nào dưới đây

A. $(-6;-5)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^x=\sqrt[3]{2^{x+1}} \Leftrightarrow 2^{-\frac{3x}{2}}=2^{\frac{x+1}{3}} \Leftrightarrow -\frac{3x}{2}=\frac{x+1}{3} \Leftrightarrow -9x=2x+2 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{11}\in(-1;0)$.

Câu 20: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $2^{2x^2+5x+4}=4$ bằng

A. 1. **B.** -2. **C.** 2. **D.** -1.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $2^{2x^2+5x+4}=4 \Leftrightarrow 2^{2x^2+5x+4}=2^2 \Leftrightarrow 2x^2+5x+4=2 \Leftrightarrow 2x^2+5x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{1}{2} \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Vậy tích các nghiệm của phương trình là 1.

Câu 21: Nghiệm của phương trình $(2,4)^{3x+1}=\left(\frac{5}{12}\right)^{x-9}$ là

A. $x=-2$ **B.** $x=-5$ **C.** $x=5$ **D.** $x=2$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $(2,4)^{3x+1}=\left(\frac{5}{12}\right)^{x-9} \Leftrightarrow \left(\frac{12}{5}\right)^{3x+1}=\left(\frac{5}{12}\right)^{x-9} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{12}\right)^{-3x-1}=\left(\frac{5}{12}\right)^{x-9}$

$\Leftrightarrow -3x-1=x-9 \Leftrightarrow 4x=8 \Leftrightarrow x=2$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất một nghiệm $x=2$.

Câu 22: Tập nghiệm của phương trình $2^{x^2-x+1}=2^{2x+1}$ là

A. $\{0;1\}$. **B.** $\{0\}$. **C.** $\{0;3\}$. **D.** $\{1\}$.

Lời giải

Chọn C

$2^{x^2-x+1}=2^{2x+1}\Leftrightarrow x^2-x+1=2x+1\Leftrightarrow x^2-3x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=0\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm $S=\{0;3\}$.

Câu 23: Biết rằng nghiệm của phương trình $3^{7^x}=7^{3^x}$ có dạng $x=\log_{\frac{a}{b}}\left(\log_b a\right)$, với a,b là các số nguyên tố, $a>b$. Tính $S=7a-3b$.

A. 43. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 40.

Lời giải

Chọn D

Ta có $3^{7^x}=7^{3^x}\Leftrightarrow\log_3 3^{7^x}=\log_3 7^{3^x}\Leftrightarrow 7^x=3^x\log_3 7\Leftrightarrow\left(\frac{7}{3}\right)^x=\log_3 7\Leftrightarrow x=\log_{\frac{7}{3}}\left(\log_3 7\right)$.

Từ đó $a=7;b=3$. Tính $S=7a-3b=40$.

Câu 24: Tập nghiệm của phương trình $\log\left(x^2-3x+1\right)=\log\left(2x-5\right)$ là

A. $\{3\}$. **B.** $\{3;6\}$. **C.** $\{6\}$. **D.** $\{2;3\}$.

Lời giải

Chọn A

$\log\left(x^2-3x+1\right)=\log\left(2x-5\right)$

Điều kiện: $\begin{cases}2x-5>0\\x^2-3x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x>\dfrac{5}{2}\\\left[\begin{array}{l}x>\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\\x<\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow x>\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Với điều kiện trên: $(1)\Leftrightarrow x^2-3x+1=2x-5\Leftrightarrow x^2-5x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=3\end{array}\right.$.

Giá trị $x=3$ thỏa mãn điều kiện.

Câu 25: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $7^{x+1}=\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3}$. Khi đó x_1+x_2 bằng:

A. -2. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

$7^{x+1}=\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3}\Leftrightarrow 7^{x+1}=7^{-\left(x^2-2x-3\right)}\Leftrightarrow x+1=-x^2+2x+3\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=-1\\x_2=2\end{array}\right.$.

Vậy $x_1+x_2=1$.

Câu 26: Tổng bình phương tất cả các nghiệm của phương trình $3^{x^2-3x-\frac{1}{3}}=9^{x+\frac{4}{3}}$

A. 31. **B.** 19. **C.** 35. **D.** 22.

Lời giải

$3^{x^2-3x-\frac{1}{3}}=9^{x+\frac{4}{3}} \Leftrightarrow x^2-3x-\frac{1}{3}=2x+\frac{8}{3} \Leftrightarrow x^2-5x-3=0$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1+x_2=5; x_1.x_2=-3$

Suy ra: $x_1^2+x_2^2=31;$

Câu 27: Tổng các nghiệm thực của phương trình $\log_2\left(x^2+x+1\right)=2+\log_2 x$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_2\left(x^2+x+1\right)=2+\log_2 x \Leftrightarrow \log_2\left(x^2+x+1\right)=\log_2 4x$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x^2+x+1=4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x^2-3x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ x_2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow x_1+x_2=3.$$

Câu 28: Tổng các nghiệm của phương trình $3^{x^2-3x}=\frac{1}{9}$ bằng

A. 3 **B.** 4 **C.** 2 **D.** -2

Lời giải

Chọn A

Ta có $3^{x^2-3x}=\frac{1}{9}=3^{-2} \Leftrightarrow x^2-3x=-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Vậy tổng các nghiệm là 3.

Câu 29: Nghiệm của phương trình $4^{5x-1}=16$ là

A. $x=\frac{3}{5}$. **B.** $x=1$. **C.** $x=\frac{5}{3}$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $4^{5x-1}=16 \Leftrightarrow 4^{5x-1}=4^2 \Leftrightarrow 5x-1=2 \Leftrightarrow x=\frac{3}{5}$.

Nghiệm của phương trình $4^{5x-1}=16$ là $x=\frac{3}{5}$.

Câu 30: Tích các nghiệm của phương trình $3^{2x^2-5x-1}=\frac{1}{3}$ là

A. 2. **B.** 0. **C.** -2. **D.** $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $3^{2x^2-5x-1}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3^{2x^2-5x-1}=3^{-1} \Leftrightarrow 2x^2-5x=0$.

Theo Viet, ta có tích các nghiệm bằng 0.

Câu 31: Số nghiệm của phương trình $\log_2\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)+\log_3\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\log_6\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases} x^2-1\ge 0 \\ x-\sqrt{x^2-1}>0 \\ x+\sqrt{x^2-1}>0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 1$.

Ta có: $\log_2\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)+\log_3\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\log_6\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

$\Leftrightarrow -\log_2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+\dfrac{\log_2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{\log_2 3}=\dfrac{\log_2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{\log_2 6}$

$\Leftrightarrow \log_2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\left[-1+\dfrac{1}{\log_2 3}-\dfrac{1}{\log_2 6}\right]=0$

$\Leftrightarrow \log_2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=0 \Leftrightarrow x+\sqrt{x^2-1}=1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}+x-1=0$

Ta có: $x=1$ là nghiệm của phương trình.

Với $x>1 \Rightarrow \sqrt{x^2-1}+x-1>0$.

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm.

Câu 32: Cho phương trình $2\log_3\left(x^3+1\right)=\log_3(2x-1)^2+\log_{\sqrt{3}}(x+1)$. Tổng các nghiệm của phương trình là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x>-1 \\ x\ne \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

$2\log_3\left(x^3+1\right)=\log_3(2x-1)^2+\log_{\sqrt{3}}(x+1) \Leftrightarrow 2\log_3\left(x^3+1\right)=2\log_3|2x-1|+2\log_3(x+1)$.

$\Leftrightarrow \log_3\left(x^3+1\right)=\log_3|2x-1|.(x+1) \Leftrightarrow x^3+1=|2x-1|.(x+1)$.

Nếu $x\in\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$ phương trình

$\Leftrightarrow x^3+1=(-2x+1).(x+1) \Leftrightarrow x^3+2x^2+x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right. \Rightarrow x=0$

Nếu $x\in\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ phương trình $\Leftrightarrow x^3+1=(2x-1).(x+1) \Leftrightarrow x^3-2x^2-x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Vậy tổng nghiệm của phương trình là 3.

Câu 33: Cho phương trình $\log_2(x+1)-\log_2\left(x^2-3x-2m+5\right)=0$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt?

A. 8. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có phương trình đã cho tương đương

$$\log_2(x+1)=\log_2\left(x^2-3x-2m+5\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\x+1=x^2-3x-2m+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\x^2-4x+4-2m=0\end{cases}(1)$$

Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt lớn hơn -1 $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\\dfrac{S}{2}>-1\\1f(-1)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2m>0\\9-2m>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<\dfrac{9}{2}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 34: Cho số thực dương $x\left(x\neq 1,x\neq\dfrac{1}{2}\right)$ thoả mãn $\log_x(16x)=\log_{2x}(8x)$. Giá trị $\log_x(16x)$ bằng $\log\left(\dfrac{m}{n}\right)$ với m,n là các số nguyên dương và phân số $\dfrac{m}{n}$ tối giản. Tổng $m+n$ bằng

A. 11. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_x(16x)=\log_{2x}(8x)\Leftrightarrow\dfrac{\log_2(16x)}{\log_2 x}=\dfrac{\log_2(8x)}{\log_2(2x)}$

$\Leftrightarrow(4+\log_2 x)(1+\log_2 x)=\log_2 x(3+\log_2 x)\Leftrightarrow\log_2 x=-2\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}$.

Vậy $\log_x(16x)=\log_{\frac{1}{4}}4=\log\dfrac{1}{10}$, khi đó $m=1;n=10\Rightarrow m+n=11$.

Câu 35: Cho hai số thực a, b lớn hơn 1 thỏa mãn $a+b=2020$. Gọi m, n là hai nghiệm của phương trình $(\log_a x)(\log_b x)-2\log_a x-2=0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $mn+4a$ là

A. 8076. **B.** 8077. **C.** 8078. **D.** 8079.

Lời giải

Chọn A

Ta xét phương trình:

$$(\log_a x)(\log_b x)-2\log_a x-2=0\Leftrightarrow\frac{1}{\log_a b}\log_a^2 x-2\log_a x-2=0.\qquad(1)$$

Do a, $b>1$ nên $\dfrac{1}{\log_a b}>0$ nên luôn có hai nghiệm.

Với m, n là nghiệm của phương trình, ta có:

$\log_a m+\log_a n=2\log_a b\Leftrightarrow\log_a(mn)=\log_a b^2\Leftrightarrow mn=b^2$.

Xét $mn+4a=b^2+4a=b^2+4(2020-b)=b^2-4b+8080=(b-2)^2+8076\geq 8076$.

Như vậy giá trị nhỏ nhất của $mn+4a$ là 8076. Dấu bằng xảy ra khi $a=2018$ và $b=2$.

Câu 36: Cho phương trình $\log_{\sqrt{5}+2}\left(x^2+mx+m+7\right)+\log_{\sqrt{5}-2}x=0$. Số giá trị nguyên m thuộc $[-10;9]$ để phương trình có nghiệm duy nhất là

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

$\log_{\sqrt{5}+2}\left(x^2+mx+m+7\right)+\log_{\sqrt{5}-2}x=0\Leftrightarrow\log_{\sqrt{5}+2}\left(x^2+mx+m+7\right)+\log_{\left(\sqrt{5}+2\right)^{-1}}x=0$

$\Leftrightarrow\log_{\sqrt{5}+2}\left(x^2+mx+m+7\right)-\log_{\left(\sqrt{5}+2\right)}x=0\Leftrightarrow\log_{\sqrt{5}+2}\left(x^2+mx+m+7\right)=\log_{\left(\sqrt{5}+2\right)}x$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+mx+m+7=x\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\dfrac{-x^2+x-7}{x+1}\\x>0\end{cases}.$

Xét $g(x)=\dfrac{-x^2+x-7}{x+1}$ với $x>0$; $g'(x)=\dfrac{-x^2-2x+8}{(x+1)^2}$

$g'(x)=0\Leftrightarrow-x^2-2x+8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-4\end{array}\right.$, $g(2)=-3$.

x	-4		0		2		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$g(x)$				-7			$-\infty$

Từ BBT, nhận thấy phương trình $m=\dfrac{-x^2+x-7}{x+1}$ có 1 nghiệm dương khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l}m\le-7\\m=-3\end{array}\right.$

Vậy số giá trị nguyên m thuộc $[-10;9]$ là $m\in\{-10;-9;-8;-7;-3\}$.

Câu 37: Cho phương trình $\log^2_3\left(1-x^2\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(x+\dfrac{m}{4}\right).\log_{\sqrt{3}}\sqrt{1-x^2}=0$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm phân biệt ?

A. 1. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện của phương trình: $\begin{cases}1-x^2>0\\x+\dfrac{m}{4}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<1\\x+\dfrac{m}{4}>0\end{cases}.$

$\log^2_3\left(1-x^2\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(x+\dfrac{m}{4}\right).\log_{\sqrt{3}}\sqrt{1-x^2}=0$

$\Leftrightarrow\log^2_3\left(1-x^2\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(x+\dfrac{m}{4}\right).\log_3\left(1-x^2\right)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<1, x+\dfrac{m}{4}>0 \\ \left[\begin{array}{l} \log_3\left(1-x^2\right)=0 \\ \log_3\left(1-x^2\right)=\log_3\left(x+\dfrac{m}{4}\right) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<1, x+\dfrac{m}{4}>0 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 1-x^2=x+\dfrac{m}{4} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<1, x+\dfrac{m}{4}>0 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ m=-4x^2-4x+4 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm phân biệt khi đường thẳng $y=m$ cắt parabol $y=-4x^2-4x+4$ tại 1 điểm phân biệt có hoành độ thuộc khoảng $(-1;1)$ khác 0

Xét hàm số $y=-4x^2-4x+4, x\in(-1;1)$, có $y'=-2x-1=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

x	-1		-1/2		0		1
$y'(x)$		+	0	–			
$y(x)$	4	↗	5	↘	4	↘	-4

Từ đó suy ra bài toán được thỏa mãn khi $\left[\begin{array}{l} m=5 \\ -4<m<4, (0<x<1) \end{array}\right.$

Thử lại: $m=1, m=2, m=3$ thỏa mãn điều kiện $x+\dfrac{m}{4}>0$.

Vậy có 4 giá trị của m.

Câu 38: Cho phương trình $\left(\log_2^2 x-\log_2\dfrac{x^3}{4}\right)\sqrt{e^x-m}=0$. Gọi S là tập hợp giá trị m nguyên với $m\in[-10;10]$ để phương trình có đúng 2 nghiệm. Tổng giá trị các phần tử của S bằng

A. -28. **B.** -3. **C.** -27. **D.** -12.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ e^x\geq m \end{cases}$.

Ta có: $\left(\log_2^2 x-\log_2\dfrac{x^3}{4}\right)\sqrt{e^x-m}=0\ (1)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \log_2^2 x-\log_2\dfrac{x^3}{4}=0 & (1) \\ \sqrt{e^x-m}=0 & (2) \end{array}\right.$.

$(1)\Leftrightarrow \log_2^2 x-\log_2\dfrac{x^3}{4}=0\Leftrightarrow \log_2^2 x-3\log_2 x+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x=1 \\ \log_2 x=2 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$.

$(2)\Leftrightarrow \sqrt{e^x-m}=0\Leftrightarrow e^x=m$.

Xét 3 trường hợp:

Trường hợp 1: $m\leq 0$, điều kiện của phương trình là $x>0$, phương trình (1) có 2 nghiệm là $x=2$ và $x=4$.

Trường hợp 2: $0 < m \le 1$, điều kiện của phương trình là $x > 0$.

Khi đó, phương trình $e^x = m$ có 1 nghiệm là $x = \ln m \le 0$ nên phương trình (1) có 2 nghiệm là $x = 2$ và $x = 4$.

Trường hợp 3: $m > 1$, điều kiện của phương trình là $x \ge \ln m$.

Nên phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2 \le \ln m < 4 \Leftrightarrow e^2 \le m < e^4$.

Khi đó phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = \ln m$ và $x = 4$.

Suy ra, các giá trị m để phương trình có 2 nghiệm là $m \le 1$ và $e^2 \le m < e^4$.

Do đó các giá trị nguyên $m \in [-10;10]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là

$S = \{-10;-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;0;1;8;9;10\}$.

Vậy tổng giá trị các phần tử của S là -27.

Câu 39: Số giá trị nguyên âm của tham số m để phương trình $\log_{\sqrt{5}}(x-1) = \log_5(mx+4x)$ có nghiệm là

A. 4 **B.** 2 **C.** 5 **D.** 3

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x - 1 > 0$

$\log_{\sqrt{5}}(x-1) = \log_5(mx+4x) \Leftrightarrow 2\log_5(x-1) = \log_5(mx+4m)$

$\Leftrightarrow \log_5(x-1)^2 = \log_5(mx+4x) \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ (x-1)^2 = mx + 4x \end{cases}$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x} = x - 2 + \dfrac{1}{x}$ với $x > 1$.

Ta có số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của đường thẳng $y = m + 4$ với đồ thị hàm số $y = f(x) = x - 2 + \dfrac{1}{x}$ với $x > 1$.

Ta có: $y' = f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} > 0, \forall x > 1$. Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ và $f(1) = 0$.

Vậy để phương trình ban đầu có nghiệm thì $m + 4 > 0$ hay chỉ có 3 giá trị nguyên của m là $-3;-2;-1$.

Câu 40: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_{2022}(1-x^2) + \log_{\frac{1}{2022}}(x+2m-4) = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $\dfrac{3}{2} < m < \dfrac{21}{8}$. **B.** $\dfrac{5}{2} \le m \le \dfrac{21}{8}$. **C.** $\dfrac{5}{2} < m < \dfrac{21}{8}$. **D.** $\dfrac{5}{2} \le m < \dfrac{21}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình tương đương:

$\log_{2022}(1-x^2) = \log_{2022}(x+2m-4) \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2 > 0 \\ x+2m-4 = 1-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ 2m = -x^2 - x + 5 \end{cases}$

x	-1		$-\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	5	↗	$\frac{21}{4}$	↘	3

Vậy phương trình $2m=-x^2-x+5$ có hai nghiệm thực phân biệt trên $(-1;1)$ khi $3<2m<\frac{21}{4}\Leftrightarrow\frac{3}{2}<m<\frac{21}{8}$.

Câu 41: Biết rằng $(x_0;y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}x-y=3\\e^{2x}.e^{y}=1\end{cases}$. Khi đó $\frac{y_0}{x_0}$ bằng

A. -2. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{cases}x-y=3\\e^{2x}.e^{y}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=3\\e^{2x+y}=e^{0}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=3\\2x+y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases}.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(1;-2)$.Khi đó $\frac{y_0}{x_0}=\frac{-2}{1}=-2$.

Câu 42: Số nghiệm của phương trình $\frac{2^{x^3-5x^2}-4^{-3x}}{\ln(x-1)}=0$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $\begin{cases}x>1\\x\neq 2\end{cases}$.

Khi đó :

$$\frac{2^{x^3-5x^2}-4^{-3x}}{\ln(x-1)}=0\Leftrightarrow 2^{x^3-5x^2}-4^{-3x}=0\Leftrightarrow 2^{x^3-5x^2}=2^{-6x}\Leftrightarrow x^3-5x^2+6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\x=3.\end{array}\right.$$

So với điều kiện ta nhận nghiệm $x=3$. Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm.

Câu 43: Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1)=\log_2(mx-8)$ có hai nghiệm thực phân biệt là:

A. Vô số. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

$$\log_{\sqrt{2}}(x-1)=\log_2(mx-8)\Leftrightarrow\begin{cases}x-1>0\\mx-8>0\\(x-1)^2=mx-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\(x-1)^2=mx-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\m=\dfrac{x^2-2x+9}{x}\end{cases}$$

Xét hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+9}{x}$ trên $(1;+\infty)$, ta có : $y'=\dfrac{x^2-9}{x^2}$; $y'=0\Leftrightarrow x=\pm 3$

Bảng biến thiên

x	1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	8	↘	4	↗	$+\infty$

Để thỏa mãn yêu cầu thì $4<m<8$ nên các giá trị nguyên của tham số m là $5,6,7$.

Câu 44: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y);y\in\left[0;2021^3\right]$ thỏa mãn phương trình $\log_4\left(x+\dfrac{1}{2}+\sqrt{x+\dfrac{1}{4}}\right)=\log_2(y-x)$?

A. 90854. **B.** 90855. **C.** 2021^2. **D.** 2021^2-1.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases}y-x>0\\x\geq-\dfrac{1}{4}\\x+\dfrac{1}{2}+\sqrt{x+\dfrac{1}{4}}>0\end{cases}$. Ta có $\log_4\left(x+\dfrac{1}{2}+\sqrt{x+\dfrac{1}{4}}\right)=\log_2(y-x)$

$$\Leftrightarrow\log_4\left(\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}\right)^2=\log_2(y-x)\Leftrightarrow\log_2\left(\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}\right)=\log_2(y-x)$$

$$\Leftrightarrow y-x=\left(\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}\right)\Leftrightarrow y=\left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)^2$$

Vì $y\in\mathbb{Z}\Rightarrow\sqrt{x+\dfrac{1}{4}}+\dfrac{1}{2}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\sqrt{x+\dfrac{1}{4}}=\dfrac{2m+1}{2}(m\in\mathbb{N})\Rightarrow x=m^2+m$; khi đó $y=(m+1)^2$.

Mà $y\in\left[0;2021^3\right]\Rightarrow(m+1)^2\leq 2021^3\Rightarrow 0\leq m\leq 2021\sqrt{2021}-1\approx 90854{,}1$.

Do đó có 90855 giá trị của m, ứng với đó có 90855 cặp $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 45: Phương trình $\log_3(x+2)+\dfrac{1}{2}\log_3(x-5)^2+\log_{\frac{1}{3}}8=0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases} x > -2 \\ x \neq 5 \end{cases}$.

Ta có: $\log_3(x+2) + \frac{1}{2}\log_3(x-5)^2 + \log_{\frac{1}{3}} 8 = 0 \Leftrightarrow \log_3(x+2) + \log_3|x-5| = \log_3 8$

$\Leftrightarrow \log_3\left[(x+2)|x-5|\right] = \log_3 8 \Leftrightarrow (x+2)|x-5| = 8$.

Trường hợp 1: $x > 5$, ta có: $(x+2)(x-5) = 8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \ (tm) \\ x = -3 \ (l) \end{array}\right.$.

Trường hợp 2: $-2 < x < 5$, ta có: $(x+2)(x-5) = -8 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$ (tm).

Câu 46: Gọi S là tập nghiệm của phương trình $2\log_2(2x-2) + \log_2(x-3)^2 = 2$ trên $\mathbb{R}$. Tổng các phần tử của S bằng:

A. $4+\sqrt{2}$. **B.** $8+\sqrt{2}$. **C.** 6. **D.** $6+\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định của phương trình là $\begin{cases} 2x-2>0 \\ (x-3)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \neq 3 \end{cases}$ (*)

Với điều kiện (*) phương trình $2\log_2(2x-2) + \log_2(x-3)^2 = 2$

$\Leftrightarrow \log_2(2x-2)^2 + \log_2(x-3)^2 = 2 \Leftrightarrow \log_2\left[(2x-2)^2(x-3)^2\right] = 2$

$\Leftrightarrow \left[(2x-2)(x-3)\right]^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2x-2)(x-3) = 2 \\ (2x-2)(x-3) = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2 - 8x + 4 = 0 \ (1) \\ 2x^2 - 8x + 8 = 0 \ (2) \end{array}\right.$

Phương trình (1) có các nghiệm $x = 2+\sqrt{2}$ (N); $x = 2-\sqrt{2}$ (L)

Phương trình (2) có nghiệm $x = 2$ (N).

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{2+\sqrt{2};\ 2\right\}$. Tổng các nghiệm bằng $4+\sqrt{2}$.

Câu 47: Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2(x^2+x+1) = 2 + \log_2 x$.

A. 6. **B.** 3. **C.** 1. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x > 0$

Ta có $\log_2(x^2+x+1) = 2 + \log_2 x \Leftrightarrow \log_2(x^2+x+1) = \log_2(4x) \Leftrightarrow x^2+x+1 = 4x$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ (thoả mãn)

Vậy tổng các nghiệm bằng $\frac{3}{2}$.

Câu 48: Có bao nhiêu số nguyên $m \in (0;2023)$ để phương trình $\log_2(mx) = 3\log_2(x+1)$ có hai nghiệm

phân biệt.

A. 4028. **B.** 2011. **C.** 2017. **D.** 2016.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $\log_2(mx)=3\log_2(x+1)\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\mx=(x+1)^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\m=x^2+3x+3+\dfrac{1}{x}.\end{cases}$

Đặt $f(x)=x^2+3x+3+\dfrac{1}{x}$, ta có $f'(x)=2x+3-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{2x^3+3x^2-1}{x^2}$.

Phương trình $f'(x)=0\Leftrightarrow 2x^3+3x^2-1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ (vì $x>0$).

Lập bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $m>\dfrac{27}{4}$.

Vậy $m\in\{7;8;\ldots;2022\}$ có 2016 giá trị nguyên.

Dạng 8: Phương pháp đặt ẩn phụ giải phương trình mũ - logarit

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Tính tổng các nghiệm của phương trình $2^{x+1}+2^{1-x}=5$

A. 0. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** -2.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $2^{x+1}+2^{1-x}=5\Leftrightarrow 2.2^x+2.\frac{1}{2^x}=5$. Đặt $t=2^x\ (t>0)$, phương trình trở thành:

$$2t+\frac{2}{t}=5\Leftrightarrow 2t^2-5t+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}2^x=2\\2^x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right..$$

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình là 0.

Câu 2: Tính tổng T tất cả các nghiệm thực của phương trình $4.9^x-13.6^x+9.4^x=0$

A. $T=\frac{13}{4}$. **B.** $T=3$. **C.** $T=\frac{1}{4}$. **D.** $T=2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $4.9^x-13.6^x+9.4^x=0\Leftrightarrow 4.\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-13.\left(\frac{3}{2}\right)^x+9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\frac{3}{2}\right)^x=1\\\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{9}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right..$

Vậy $T=0+2=2$.

Câu 3: Cho các số thực dương a,b thỏa mãn $\log_{16}a=\log_{20}b=\log_{25}\frac{2a-b}{3}$. Tỉ số $\frac{a}{b}$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;0)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$. **D.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\log_{16}a=\log_{20}b=\log_{25}\frac{2a-b}{3}$. Suy ra $\begin{cases}a=16^t\\b=20^t\\\frac{2a-b}{3}=25^t\end{cases}$

Khi đó ta có $2.16^t-20^t=3.25^t\Leftrightarrow 2.\left(\frac{4}{5}\right)^{2t}-\left(\frac{4}{5}\right)^t-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\frac{4}{5}\right)^t=-1(L).\\\left(\frac{4}{5}\right)^t=\frac{3}{2}(N).\end{array}\right.\Leftrightarrow t=\log_{\frac{4}{5}}\frac{3}{2}$.

Suy ra $\begin{cases} a = 16^{\log_{\frac{4}{5}}\frac{3}{2}} \\ b = 20^{\log_{\frac{4}{5}}\frac{3}{2}} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{2} \in (1;2)$

Câu 4: Cho phương trình $\log_2^2 x - (m^2 - 2m)\log_2 x + m + 3 = 0$ (m là tham số thực). Gọi S là tập các giá trị của m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1.x_2 = 8$. Tổng các phần tử của S là

A. -1. **B.** 2. **C.** 5. **D.** -2.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > 0$. Đặt $t = \log_2 x \Leftrightarrow x = 2^t$

Khi đó ta có phương trình: $t^2 - (m^2 - 2m).t + m + 3 = 0\ (1)$.

Để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt, tương đương với $\Delta = \left[-(m^2 - 2m)\right]^2 - 4.(m+3) > 0$.

Giả sử phương trình (1) có 2 nghiệm $x_1 = 2^{t_1}$, $x_2 = 2^{t_2}$.

Yêu cầu bài toán $x_1.x_2 = 8 \Leftrightarrow 2^{t_1}.2^{t_2} = 8 \Leftrightarrow t_1 + t_2 = 3 \Leftrightarrow m^2 - 2m = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 3 \end{array}\right.$

Với $m = -1$ thì $\Delta = 1 > 0$

Với $m = 3$ thì $\Delta = -15 < 0$. Vậy $S = \{-1\}$. Khi đó tổng các phần tử của S là -1.

Câu 5: Biết x và y là hai số thực thoả mãn $\log_4 x = \log_9 y = \log_6 (x - 2y)$. Giá trị của $\frac{x}{y}$ bằng

A. $\log_{\frac{2}{3}}^2 2$. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\log_4 x = \log_9 y = \log_6 (x - 2y) = t \Rightarrow \begin{cases} x = 4^t \\ y = 9^t \\ x - 2y = 6^t \end{cases} \Rightarrow 4^t - 2.9^t = 6^t \Rightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^t - \left(\frac{2}{3}\right)^t - 2 = 0$

Đặt $u = \left(\frac{2}{3}\right)^t$, điều kiện $u > 0$. Ta có phương trình: $u^2 - u - 2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u = -1\ (\text{loại}) \\ u = 2 \end{array}\right.$.

Ta có: $\frac{x}{y} = \left(\frac{4}{9}\right)^t = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^t\right]^2 = 4$.

Câu 6: Cho phương trình $\left(2\log_3^2 x - \log_3 x - 1\right)\sqrt{5^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 125. **B.** 123. **C.** 122. **D.** 124.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $\begin{cases} x>0 \\ 5^x - m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ m \le 5^x \end{cases}$.

$$\left(2\log_3^2 x - \log_3 x - 1\right)\sqrt{5^x - m} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, 5^x - m \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} 5^x - m = 0 \\ 2\log_3^2 x - \log_3 x - 1 = 0 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0, 5^x - m \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} 5^x - m = 0 \\ \log_3 x = \dfrac{-1}{2} \\ \log_3 x = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, 5^x - m \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = \log_5 m \\ x = 3^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ x = 3 \end{array}\right. \end{cases}$$

Khi $m = 1 \Rightarrow x = \log_2 1 = 0$ vậy phương trình $\left(2\log_3^2 x - \log_3 x - 1\right)\sqrt{5^x - m} = 0$ có 2 nghiệm thì $\left[\begin{array}{l} x = 3^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ x = 3 \end{array}\right.$

Khi $m > 1 \Rightarrow x = \log_5 m$ là 1 nghiệm. Để phương trình có đúng 2 nghiệm thì:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \le \log_5 m < 3 \Leftrightarrow 5^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \le m < 5^3 \Leftrightarrow 2,53 \le m < 125$$

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Biết phương trình $\log_3^2 x - 5\log_3 x + 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Gía trị $x_1.x_2$ là:

A. 243 **B.** 5 **C.** 3 **D.** 81

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình $\log_3^2 x - 5\log_3 x + 3 = 0$, điều kiện $x > 0$

Đặt $t = \log_3 x \Rightarrow x = 3^t$

Ta được phương trình $t^2 - 5t + 3 = 0$ vì phương trình có hai nghiệm nên theo viet ta được $t_1 + t_2 = 5$

Do đó $x_1.x_2 = 3^{t_1}.3^{t_2} = 3^{t_1+t_2} = 3^5 = 243$.

Câu 2: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log^2 x + 2\log x - 3 = 0$ là

A. -2. **B.** -3. **C.** $\frac{1}{100}$. **D.** $\frac{1}{1000}$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện xác định: $x > 0$

Ta có: $\log^2 x + 2\log x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log\ x = 1\\ \log\ x = -3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 10\\ x = 10^{-3}\end{array}\right.$

Vậy tích hai nghiệm là: $\frac{1}{1000}.10 = \frac{1}{100}$.

Câu 3: Biết phương trình $2\log_3 x + 2\log_x 3 = 5$ có hai nghiệm thực phân biệt $x_1 < x_2$. Tính giá trị của biểu thức $T = 6x_1^{\,2} - x_2 + 1$.

A. $T = 16$. **B.** $T = 10$. **C.** $T = 8$. **D.** $T = 12$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $0 < x \neq 1$.

Phương trình $2\log_3 x + 2\log_x 3 = 5 \Leftrightarrow 2\log_3 x + 2\frac{1}{\log_3 x} = 5$

$\Leftrightarrow 2\log_3{}^2 x - 5\log_3 x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3 x = \frac{1}{2}\\ \log_3 x = 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1 = \sqrt{3}\\ x_2 = 9\end{array}\right. . \Rightarrow T = 6x_1^{\,2} - x_2 + 1 = 10$.

Câu 4: Cho bất phương trình $\log_2^2(2x) - 4\log_2 x - 4 \le 0$. Khi đặt $t = \log_2 x$ thì bất phương trình đã cho trở thành bất phương trình nào sau đây?

A. $t^2 - 4t - 4 \le 0$. **B.** $t^2 - 4t - 3 \le 0$. **C.** $t^2 \le 0$. **D.** $t^2 - 2t - 3 \le 0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_2^2(2x) - 4\log_2 x - 4 \le 0 \Leftrightarrow (\log_2 x + 1)^2 - 4\log_2 x - 4 \le 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 \le 0$.

Do đó, với $t = \log_2 x$ bất phương trình trở thành: $t^2 - 2t - 3 \le 0$.

Câu 5: Nếu đặt $t = \log x$ thì bất phương trình $\log^2 x^3 - 10\log\sqrt{x} + 1 \ge 0$ trở thành:

A. $3t^2 + 1 \ge 0$. **B.** $3t^2 - 5t + 1 \ge 0$. **C.** $9t^2 - 5t + 1 \ge 0$. **D.** $9t^2 - 20t + 1 \ge 0$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > 0$

Ta có: $\log^2 x^3 - 10\log\sqrt{x} + 1 \ge 0 \Leftrightarrow 9\log^2 x - 5\log x + 1 \ge 0$

Đặt, $t = \log x$, ta có phương trình: $9t^2 - 5t + 1 \ge 0$.

Câu 6: Tổng các nghiệm của phương trình $\log^2 x - \log x - 2 = 0$ bằng

A. $\frac{1001}{100}$. **B.** 101. **C.** $\frac{1001}{10}$. **D.** 1

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log^2 x - \log x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log x = 2\\ \log x = -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1 = 100\\ x_2 = \frac{1}{10}\end{array}\right. \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{1001}{10}$.

Câu 7: Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x = 3$.

A. 8 **B.** -2 **C.** 2 **D.** $\frac{17}{2}$

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x > 0$

$\log_2^2 x - 2\log_2 x = 3 \Leftrightarrow (\log_2 x - 3)(\log_2 x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x = 3\\ \log_2 x = -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 8\\ x = \frac{1}{2}\end{array}\right.$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

Ta có tổng 2 nghiệm: $8 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}$.

Câu 8: Giải phương trình $\log_2{}^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0$. Ta có tổng các nghiệm là

A. 6. **B.** 3. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Điều kiện: $x > 0$.

Ta có: $\log_2{}^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x = 1\\ \log_2 x = 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 2^1 = 2(TM)\\ x = 2^2 = 4(TM)\end{array}\right.$.

Tập nghiệm của phương trình là $S = \{2;4\}$.

Tổng tất cả các nghiệm của phương trình là: $2 + 4 = 6$.

Câu 9: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{2}}^2(2x) - 2\log_2(4x^2) - 8 = 0$ bằng:

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{9}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $x>0$

Phương trình $\Leftrightarrow \left(2\log_2(2x)\right)^2-2\log_2(2x)^2-8=0 \Leftrightarrow 4(1+\log_2 x)^2-4(1+\log_2 x)-8=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x=-2\\ \log_2 x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{4}\\ x=2\end{array}\right.$

Tổng tất cả các nghiệm của phương trình là $2+\dfrac{1}{4}=\dfrac{9}{4}$.

Câu 10: Cho phương trình $\log^2_{\sqrt{2}} x+\log_2\left(x\sqrt{8}\right)-3=0$. Khi đặt $t=\log_2 x$, phương trình đã cho trở thành phương trình nào dưới đây?

A. $8t^2+2t-3=0$. **B.** $4t^2+t=0$. **C.** $4t^2+t-3=0$. **D.** $8t^2+2t-6=0$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x>0$. Khi đó ta có: $\log^2_{\sqrt{2}} x+\log_2\left(x\sqrt{8}\right)-3=0$

$\Leftrightarrow \left(2\log_2 x\right)^2+\log_2 x+\log_2 2^{\frac{3}{2}}-3=0 \Leftrightarrow 4\log^2_2 x+\log_2 x-\dfrac{3}{2}=0$

$\Leftrightarrow 8\log^2_2 x+2\log_2 x-3=0$

Khi đặt $t=\log_2 x$, phương trình đã cho trở thành phương trình $8t^2+2t-3=0$.

Câu 11: Cho phương trình $\left(4\log^2_3 x-15\log_3 x+9\right)\sqrt{\log_4 x+m}=0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Xét $\left(4\log^2_3 x-15\log_3 x+9\right)\sqrt{\log_4 x+m}=0$ (ĐKXĐ: $x>0$ và $x\geq 4^{-m}$)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4\log^2_3 x-15\log_3 x+9=0\\ \log_4 x=-m\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3 x=3\\ \log_3 x=\dfrac{3}{4}\\ \log_4 x=-m\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3^3\\ x=3^{\frac{3}{4}}\\ x=4^{-m}\end{array}\right.$

Để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt thì

$3^{\frac{3}{4}}\leq 4^{-m}<3^3 \Leftrightarrow \log_4 3^{\frac{3}{4}}\leq -m<\log_4 3^3 \Leftrightarrow m\in\{-2;-1\}$

Câu 12: Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_2 x.\log_2(64x)+8=0$ là

A. $\dfrac{7}{16}$. **B.** $\dfrac{5}{16}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{32}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định: $x>0$

$\log_2 x.\log_2(64x)+8=0 \Leftrightarrow \log_2 x.(6+\log_2 x)+8=0$

$\Leftrightarrow \left(\log_2 x\right)^2 + 6\log_2 x + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x = -2\\ \log_2 x = -4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{1}{4}\\ x = \dfrac{1}{16}\end{array}\right.$. Tổng hai nghiệm là $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} = \dfrac{5}{16}$.

Câu 13: Biết phương trình $\log_5^2 x - 3\log_5 x + 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Giá trị $x_1.x_2$ bằng

A. 25. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 125.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > 0$. Ta có: $\log_5^2 x - 3\log_5 x + 1 = 0$

Đặt $t = \log_5 x$ ta được phương trình $t^2 - 3t + 1 = 0 \quad (\Delta = 5 > 0)$.

Áp dụng Định lí Viet: $t_1 + t_2 = 3 \Leftrightarrow \log_5 x_1 + \log_5 x_2 = 3 \Leftrightarrow \log_5 x_1.x_2 = 3 \Leftrightarrow x_1.x_2 = 5^3 = 125$.

Câu 14: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3^2 x - 2\log_3 x - 7 = 0$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 9. **D.** -7.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_3^2 x - 2\log_3 x - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3 x = 1 + 2\sqrt{2}\\ \log_3 x = 1 - 2\sqrt{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 3^{1+2\sqrt{2}}\\ x = 3^{1-2\sqrt{2}}\end{array}\right.$.

Vậy tích các nghiệm 9.

Câu 15: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $\pi\log_7^2 x - 10\log_7 x + e = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_{\sqrt{7}} x_1.\log_{\sqrt{7}} x_2$

A. $P = \dfrac{e}{4\pi}$. **B.** $P = \dfrac{e}{\pi}$. **C.** $P = \dfrac{2e}{\pi}$. **D.** $P = \dfrac{4e}{\pi}$.

Lời giải

Xét $\pi\log_7^2 x - 10\log_7 x + e = 0 \ (*)$. Đặt $t = \log_2 x$. Khi đó: $(*) \Leftrightarrow \pi t^2 - 10t + e = 0$

Theo Viet ta có: $t_1.t_2 = \log_7 x_1.\log_7 x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{e}{\pi}$.

Nên $P = \log_{\sqrt{7}} x_1.\log_{\sqrt{7}} x_2 = 2.2.\log_7 x_1.\log_7 x_2 = \dfrac{4e}{\pi}$

Câu 16: Biết rằng phương trình $3\log_{2^2} x - 2\log_2 x - 1 = 0$ có hai nghiệm là a, b. Khẳng định nào sau đây đúng

A. $a + b = -\dfrac{1}{3}$. **B.** $a.b = \sqrt[3]{4}$. **C.** $a + b = \sqrt[3]{2}$. **D.** $a.b = \dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $3\log_{2^2} x - 2\log_2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x = 1\\ \log_2 x = -\dfrac{1}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 2\\ x = 2^{-\frac{1}{3}}\end{array}\right.$.

Suy ra $a = 2, b = 2^{-\frac{1}{3}}$. Vậy $a.b = 2.2^{-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}$

Câu 17: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log^2_2 x - \log_2(8x) + 3 = 0$ bằng

A. 16. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log^2_2 x - \log_2(8x) + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log^2_2 x - \log_2 x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 0 \\ \log_2 x = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Vậy $x_1.x_2 = 2.$

Câu 18: Tích các nghiệm của phương trình $6\log^2_4 x - \log_4 x^3 + \frac{1}{5} = 0$ bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** $\sqrt[3]{2}$. **D.** $\frac{1}{30}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x > 0.$

Đặt $\log_4 x = t$ thì phương trình trở thành: $6t^2 - 3t + \frac{1}{5} = 0,$ do $\Delta = 9 - \frac{24}{5} > 0$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt, nên phương trình ban đầu luôn có 2 nghiệm phân biệt.

Ta có: $x_1.x_2 = 4^{t_1}.4^{t_2} = 4^{t_1+t_2} = 4^{0,5} = 2.$

Vậy tích các nghiệm của phương trình ban đầu bằng 2.

Câu 19: Số nghiệm của phương trình $\log^2_3 x - \log_3 x - 2 = 0$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log^2_3 x - \log_3 x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = -1 \\ \log_3 x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{3}. \\ x = 9 \end{array}\right.$

Câu 20: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $2^{2x+1} - 5.2^x + 2 = 0$ bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** 0. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2^{2x+1} - 5.2^x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2.2^{2x} - 5.2^x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 2 \\ 2^x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình bằng 0.

Câu 21: Cho phương trình $4.4^x - 9.2^{x+1} + 8 = 0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình trên. Khi đó tích x_1, x_2 bằng

A. 2. **B.** -2. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $4.4^x - 9.2^{x+1} + 8 = 0 \Leftrightarrow 4.\left(2^x\right) - 18.2^x + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 4 \\ 2^x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \end{array}\right.$

Khi đó $x_1.x_2 = -2$.

Câu 22: Biết phương trình $9^x - 3.3^x - 4 = 0$ có nghiệm $x = \log_a b$ (a, b là các số nguyên dương nhỏ hơn 10). Giá trị của $a - b$ bằng

A. 1. **B.** -2. **C.** 2. **D.** -1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $9^x - 3.3^x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = -1(\text{loai}) \\ 3^x = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \log_3 4$. Suy ra $a = 3; b = 4$

Vậy $a - b = -1$

Câu 23: Biết phương trình $\log_5^2 x - m\log_5 x - 7 = 0$ (m là tham số) có hai nghiệm x_1, x_2. Tính tích $x_1.x_2$.

A. $x_1.x_2 = 5^{-m}$. **B.** $x_1.x_2 = -7$. **C.** $x_1.x_2 = 5^{-7}$. **D.** $x_1.x_2 = 5^m$.

Lời giải

Chọn D

Với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình.

Ta có $\log_5\left(x_1.x_2\right) = \log_5 x_1 + \log_5 x_2 = m \Rightarrow x_1.x_2 = 5^m$.

Câu 24: Phương trình $9^x - 3.3^x + 2 = 0$ có hai nghiệm $x_1, x_2\left(x_1 < x_2\right)$. Giá trị $2x_1 + 3x_2$ bằng

A. $4\log_2 3$. **B.** 2. **C.** 0. **D.** $3\log_3 2$.

Lời giải

Ta có: $9^x - 3.3^x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(3^x\right)^2 - 3.3^x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 1 \\ 3^x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \log_3 2 \end{array}\right.$.

Vì $x_1 < x_2$ nên $x_1 = 0, x_2 = \log_3 2$.

Khi đó: $2x_1 + 3x_2 = 2.0 + 3.\log_3 2 = 3\log_3 2$.

Câu 25: Phương trình $9^x - 3.3^x + 2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 $\left(x_1 < x_2\right)$. Tính $2x_1 + 3x_2$?

A. 1. **B.** $2\log_2 3$. **C.** $3\log_3 2$. **D.** $4\log_3 2$.

Lời giải

Đặt $t = 3^x\left(t > 0\right)$, khi đó ta có phương trình: $t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right.$.

Với $t = 1 \Leftrightarrow 3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Với $t = 2 \Leftrightarrow 3^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_3 2 > 0$.

Vậy $2x_1 + 3x_2 = 2.0 + 3.\log_3 2 = 3\log_3 2$.

Câu 26: Tổng tất các các nghiệm của phương trình $9^x - 5.6^x + 6.4^x = 0$ bằng

A. $\log_{\frac{3}{2}} 2$. **B.** $\log_{\frac{3}{2}} 6$. **C.** $\log_{\frac{3}{2}} 3$. **D.** $\log_{\frac{2}{3}} 6$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình: $9^x - 5.6^x + 6.4^x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 5.\left(\frac{3}{2}\right)^x + 6 = 0$.

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x, t > 0$; khi đó phương trình trở thành: $t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \vee t = 3$.

Ta có: $\left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^x = 2 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \log_{\frac{3}{2}} 2 \\ t = \log_{\frac{3}{2}} 3 \end{array}\right.$

Do đó tổng các nghiệm: $\log_{\frac{3}{2}} 2 + \log_{\frac{3}{2}} 3 = \log_{\frac{3}{2}} (2.3) = \log_{\frac{3}{2}} 6$.

Câu 27: Tổng các nghiệm của phương trình $4.9^x - 13.6^x + 9.4^x = 0$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $4.9^x - 13.6^x + 9.4^x = 0 \Leftrightarrow 4.\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 13\left(\frac{3}{2}\right)^x + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{9}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Tổng các nghiệm của phương trình $4.9^x - 13.6^x + 9.4^x = 0$ bằng $0 + 2 = 2$.

Câu 28: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $3^{2x} - 2.3^{x+2} + 27 = 0$ bằng

A. 3. **B.** 18. **C.** 27. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $3^{2x} - 2.3^{x+2} + 27 = 0 \Leftrightarrow \left(3^x\right)^2 - 18.3^x + 27 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{x_1} = 9 + 3\sqrt{6} \\ 3^{x_2} = 9 - 3\sqrt{6} \end{array}\right.$.

Ta có $3^{x_1}.3^{x_2} = \left(9 + 3\sqrt{6}\right)\left(9 - 3\sqrt{6}\right) \Leftrightarrow 3^{x_1 + x_2} = 27 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 3$.

Câu 29: Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $100^x - 7.10^x + 10 = 0$.

A. 7. **B.** $\log 7$. **C.** 1. **D.** $\ln 7$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $100^x - 7.10^x + 10 = 0 \Leftrightarrow \left(10^x - 2\right)\left(10^x - 5\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 10^x - 2 = 0 \\ 10^x - 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \log 2 \\ x = \log 5 \end{array}\right.$

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình là: $\log 2 + \log 5 = \log 10 = 1$.

Câu 30: Tìm tập nghiệm S của phương trình $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$.

A. $S=(1;2)$. **B.** $S=\{1;2\}$. **C.** $S=(2;4)$. **D.** $S=\{2;4\}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $4^x-6\cdot 2^x+8=0\Leftrightarrow \left(2^x\right)^2-6.2^x+8=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^x=4\\2^x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\x=1\end{array}\right.$.

Vậy $S=\{1;2\}$.

Câu 31: Tìm tập nghiệm S của phương trình $4^x-6\cdot 2^x+8=0$.

A. $S=(1;2)$. **B.** $S=\{1;2\}$. **C.** $S=(2;4)$. **D.** $S=\{2;4\}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $4^x-6\cdot 2^x+8=0\Leftrightarrow \left(2^x\right)^2-6.2^x+8=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^x=4\\2^x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\x=1\end{array}\right.$.

Vậy $S=\{1;2\}$.

Câu 32: Biết phương trình $\log_2^2 x-2\log_2(2x)-1=0$ có hai nghiệm x_1,x_2. Giá trị của $x_1.x_2$ bằng

A. 4. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** -3. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x>0$.

Phương trình $\log_2^2 x-2\log_2(2x)-1=0\Leftrightarrow \log_2^2 x-2\log_2 x-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2=-1\\\log_2 x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\x=8\end{array}\right.$.

$\Rightarrow x_1.x_2=4$.

Câu 33: Gọi S là tập nghiệm của phương trình $4^x-3.2^{x+1}+8=0$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng.

A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $4^x-3.2^{x+1}+8=0\Leftrightarrow 4^x-6.2^x+8=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^x=4\\2^x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\x=1\end{array}\right.$.

Tập nghiệm của phương trình $S=\{2;1\}$. Do đó tổng các phần tử của S bằng 3.

Câu 34: Hỏi phương trình $49^x-2.7^{x+3}+685=0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $49^x-2.7^{x+3}+685=0\Leftrightarrow \left(7^x\right)^2-686.7^x+685=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7^x = 1 \\ 7^x = 685 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \log_7 685 \approx 3,36 \end{array}\right.$

Vậy có 1 nghiệm nguyên.

Câu 35: Gọi T là tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log^2_{\frac{1}{5}} x - 5\log_5 x + 6 = 0$. Tính T.

A. $T = 5$. **B.** $T = 100$. **C.** $T = 6$. **D.** $T = 150$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x > 0$

Ta có: $\log^2_{\frac{1}{5}} x - 5\log_5 x + 6 = 0 \Leftrightarrow \log^2_5 x - 5\log_5 x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5 x = 2 \\ \log_5 x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 25 \\ x = 125 \end{array}\right. \Rightarrow T = 150$.

Câu 36: Biết phương trình $\log^2_9 x + \log_3 \frac{x}{27} = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 với $x_1 < x_2$. Hiệu $x_2 - x_1$ bằng

A. $\frac{80}{3}$. **B.** $\frac{6560}{729}$. **C.** $\frac{80}{27}$. **D.** $\frac{6560}{27}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x > 0$.

Ta có $\log^2_9 x + \log_3 \frac{x}{27} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\log^2_3 x + \log_3 x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 2 \\ \log_3 x = -6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 9 \\ x = \frac{1}{729} \end{array}\right.$.

Ta có $x_2 - x_1 = 9 - \frac{1}{729} = \frac{6560}{729}$.

Câu 37: Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $4\sqrt{5}$.

A. $\frac{9}{2}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{17}{2}$ **D.** $\frac{5}{2}$

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > 0$

Ta có $4\sqrt{5} \Leftrightarrow \left(\log_2 x\right)^2 - 2\log_2 x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = -1 \\ \log_2 x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x = 8 \end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình đã cho là $8 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}$.

Câu 38: Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m; n; p$ để phương trình có đúng 2 nghiệm phân biệt thuộc khoảng -20.?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện xác định: $x>0$

Ta có: 60. $\Leftrightarrow \left(1+\log_3 x\right)^2+\log_3 x+m-1=0 \quad (1)$

Đặt $t=\log_3 x; x\in(0;1)\Leftrightarrow t<0$. Phương trình trở thành: $t^2+3t+m=0 \quad (2)$

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0;1)\Leftrightarrow (2)$ có 2 nghiệm âm phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ P>0\\ S<0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}9-4m>0\\ m>0\\ -3<0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<\dfrac{9}{4}$. Mà m nguyên nên $m\in\{1;2\}$

Câu 39: Có bao nhiêu số nguyên dương a để tồn tại đúng hai số thực b phân biệt, thỏa mãn điều kiện $\left(4\log_2^2 b+\log_2 b-5\right)\sqrt{7^b-a}=0$.

A. 48. **B.** 47. **C.** 49. **D.** 46.

Lời giải

Chọn D

$$\left(4\log_2^2 b+\log_2 b-5\right)\sqrt{7^b-a}=0\Leftrightarrow \begin{cases}b>0, b\ge \log_7 a\\ \log_2 b=1\\ \log_2 b=\dfrac{-5}{4}\\ 7^b=a\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}b>0, b\ge \log_7 a\\ b=2\\ b=2^{\frac{-5}{4}}\\ b=\log_7 a\end{cases}.$$

Để tồn tại đúng hai số thực b phân biệt $\Leftrightarrow 2^{\frac{-5}{4}}\le \log_7 a<2\Leftrightarrow 7^{2^{\frac{-5}{4}}}\le a<49\Rightarrow a\in\{3;4;...;48\}$

Câu 40: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2\log_2(x-3)+(2m+5)\log_{\sqrt{x-3}}2=2m$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1<x_2<5$.

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2\log_2(x-3)+(2m+5)\log_{\sqrt{x-3}}2=2m \quad (1)$. Điều kiện: $3<x\ne 4$

$(1)\Leftrightarrow \log_2^2(x-3)-m\log_2(x-3)+(2m+5)=0 \quad (2)$

Đặt $t=\log_2(x-3)$; $x\in(3;5)\setminus\{4\}\Rightarrow t\in(-\infty;1)\setminus\{0\}$.

Thay t vào (2) ta được: $t^2-mt+(2m+5)=0 \quad (3)$.

Phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1<x_2<5$

$\Leftrightarrow (3)$ có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $t_1, t_2\in(-\infty;1)\setminus\{0\}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=m^2-8m-20>0\\ 1.f(1)=m+6>0\\ f(0)=2m+5\ne 0\\ \dfrac{S}{2}=\dfrac{m}{2}<1\end{cases}, \text{ với } f(t)=t^2-mt+(2m+5)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty;-2) \cup (10;+\infty) \\ m \in (-6;2) \\ m \neq -\dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-6;-2) \\ m \neq -\dfrac{5}{2} \end{cases}.$$

Câu 41: Gọi x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_9 x = \log_6 y = \log_4\left(\dfrac{x+y}{6}\right)$. Tính tỉ số $\dfrac{x}{y}$

A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\log_9 x = \log_6 y = \log_4\left(\dfrac{x+y}{6}\right) = t \Rightarrow x = 9^t, y = 6^t, \dfrac{x+y}{6} = 4^t$. Cần tính $\dfrac{x}{y} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^t$.

Mặt khác $9^t + 6^t = 6.4^t \Rightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2t} + \left(\dfrac{3}{2}\right)^t - 6 = 0 \Rightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^t = 2$.

Câu 42: Số nghiệm của phương trình $\log_2 \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\log_2 x} = \dfrac{4}{3}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Điều kiện $x > 0$.

Phương trình $\log_2 \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\log_2 x} = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow \log_2 x^{\frac{1}{3}} + \sqrt[3]{\log_2 x} = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\log_2 x + \sqrt[3]{\log_2 x} = \dfrac{4}{3}$.

Đặt $t = \sqrt[3]{\log_2 x} \Rightarrow \log_2 x = t^3$, ta được phương trình $\dfrac{1}{3}t^3 + t = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow t = 1$.

Với $t = 1 \Rightarrow \log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2$ (t.m). Vậy phương trình có 1 nghiệm.

Câu 43: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(9^x - 244.3^x + 243\right).\sqrt{8 - \log_2(x+2)} \geq 0$ có tất cả bao nhiêu số nguyên?

A. 252. **B.** 250. **C.** 249. **D.** 254.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $\begin{cases} x+2 > 0 \\ 8 - \log_2(x+2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ \log_2(x+2) \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x+2 \leq 256 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x \leq 254$.

Trường hợp 1: $\log_2(x+2) = 8 \Leftrightarrow x + 2 = 256 \Leftrightarrow x = 254$ (thoả mãn).

Trường hợp 2: $8 - \log_2(x+2) > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 254$.

Ta có $\left(9^x - 244.3^x + 243\right).\sqrt{8 - \log_2(x+2)} \geq 0 \Leftrightarrow 9^x - 244.3^x + 243 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3^x \geq 243 \\ 3^x \leq 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \geq 5 \\ x \leq 0 \end{bmatrix}$

.

Kết hợp điều kiện $-2 < x < 254$ suy ra nghiệm của bất phương trình là $\begin{bmatrix} 5 \leq x < 254 \\ -2 < x \leq 0 \end{bmatrix}$.

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S = (-2;0] \cup [5;254]$.

Do đó tập nghiệm của bất phương trình có 252 số nguyên.

Câu 44: Phương trình $4^x - 3.2^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 2$. Giá trị của m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(0;1)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(-5;0)$. **D.** $(-7;-5)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $4^x - 3.2^{x+1} + m = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 6.2^x + m = 0$.

Đặt $t = 2^x (t > 0) \Rightarrow t^2 - 6t + m = 0$ $(*)$

$(*)$ có hai nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - m \geq 0 \\ 6 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 9$

Ta có: $t_1.t_2 = 2^{x_1 + x_2} = 2^2 = 4 = m$ (tm)

Câu 45: Phương trình $4^x - 3.2^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 2$. Giá trị của m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(0;1)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(-5;0)$. **D.** $(-7;-5)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $4^x - 3.2^{x+1} + m = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 6.2^x + m = 0$.

Đặt $t = 2^x (t > 0) \Rightarrow t^2 - 6t + m = 0$ $(*)$

Phương trình $(*)$ có hai nghiệm dương $\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - m \geq 0 \\ 6 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 9$

Ta có: $t_1.t_2 = 2^{x_1 + x_2} = 2^2 = 4 = m$ (tm)

Câu 46: Biết rằng phương trình $25^x - 6.10^x - 7.4^x = 0$ có một nghiệm duy nhất được viết dưới dạng $x = \dfrac{1}{\log_a b - \log_a c}$, với a, b, c là các số nguyên tố. Tính giá trị $S = 2a + b - 3c$?

A. $S = 8$. **B.** $S = -2$. **C.** $S = 13$. **D.** $S = 2$.

Lời giải

Ta có: $25^x - 6.10^x - 7.4^x = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{5}{2}\right)^{2x} - 6.\left(\dfrac{5}{2}\right)^x - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{5}{2}\right)^x = -1 \\ \left(\dfrac{5}{2}\right)^x = 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\dfrac{5}{2}\right)^x = 7$

$\Leftrightarrow x = \log_{\frac{5}{2}} 7 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\log_7 \left(\dfrac{5}{2}\right)} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\log_7 5 - \log_7 2}$

Suy ra: $a = 7, b = 5, c = 2 \Rightarrow S = 2a + b - 3c = 13$.

Câu 47: Cho phương trình $9^{x^2 - 2x + 1} - 2m.3^{x^2 - 2x + 1} + 3m - 2 = 0$. Số tất cả các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có nghiệm sao cho $2m \in \mathbb{Z}; \mathrm{m} \in [-5;5]$ là:

A. 10. **B.** 21. **C.** 20 **D.** 11.

Lời giải

Đặt $3^{x^2-2x+1}=t\ge 1$

Phương trình đã cho trở thành $t^2-2mt+3m-2=0\,(2)$

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $t\ge 1$.

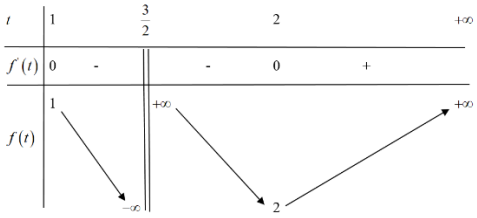
Với $t=\dfrac{3}{2}$ thì $m\in\varnothing$

Với $t\ne\dfrac{3}{2}$

Ta có $t^2-2mt+3m-2=0\Leftrightarrow\dfrac{t^2-2}{2t-3}=m\ (t\ge 1;t\ne\dfrac{3}{2})$.

Xét $f(t)=\dfrac{t^2-2}{2t-3}(t\ge 1;t\ne\dfrac{3}{2})$ có $f'(t)=\dfrac{2t^2-6t+4}{(2t-3)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=2\end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 2\\m\le 1\end{array}\right.$

Mà $2m\in\mathbb{Z};m\in[-5;5]$. Vậy có 21 giá trị thoả mãn đề bài.

Câu 48: Biết tập nghiệm của bất phương trình $3^x<4-3^{1-x}$ là $(a;b)$. Giá trị $a+b$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $3^x<4-3^{1-x}\Leftrightarrow 3^x<4-\dfrac{3}{3^x}\Leftrightarrow 3^{2x}-4.3^x+3<0\Leftrightarrow 1<3^x<3\Leftrightarrow 0<x<1$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(0;1)$ do đó $a=0,b=1$.

Giá trị $a+b=1$.

Câu 49: Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^x-2^{x+2}+5+m=0$ có nghiệm duy nhất trên nửa khoảng $(0;2]$ là

A. 5. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=2^x$, $t>0$ ta được phương trình $t^2-4t+m+5=0\Leftrightarrow -t^2+4t-5=m\,(1)$.

Ta có $x\in(0;2]\Leftrightarrow t\in(1;4]$. Đặt $f(t)=-t^2+4t-5\Rightarrow f'(t)=-2t+4=0\Leftrightarrow t=2$.

Bảng biến thiên của $f(t)$ trên $(1;4]$:

t	1	2	4
$f'(t)$	+	0	−
$f(t)$	-2	-1	-5

Từ bảng biến thiên ta thấy (1) có nghiệm duy nhất trên $(0;2]$ khi và chỉ khi

$\left[\begin{array}{l} -5 \le m \le -2 \\ m = -1 \end{array}\right.$.

Suy ra có 5 giá trị m nguyên là: $m \in \{-5;-4;-3;-2;-1\}$

Câu 50: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^x - (m+1).2^x + 2m - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2 + x_1 + x_2 \le 2$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = 2^x, t > 0$.

Phương trình có dạng $t^2 - (m+1)t + 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = m-1 \end{array}\right.$

Để phương trình ban đầu có hai nghiệm phân biệt thì $\begin{cases} m-1 > 0 \\ m-1 \ne 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \ne 3 \end{cases}$.

Khi đó $x_1 = 1; x_2 = \log_2(m-1)$

$x_1x_2 + x_1 + x_2 \le 2 \Leftrightarrow 1.\log_2(m-2) + 1 + \log_2(m-2) \le 2 \Leftrightarrow \log_2(m-2) \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow m \le 2 + \sqrt{2}$.

Kết hợp ta được $1 < m \le 2 + \sqrt{2}; m \ne 3$.

$m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 2$.

Câu 51: Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình $9^x - 2m.3^x + m^2 - 8m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1 + x_2 = 2$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 9. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** 1. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $9^x - 2m.3^x + m^2 - 8m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1 + x_2 = 2$ khi

$\begin{cases} m^2 - 1.(m^2 - 8m) > 0 \\ 2m > 0 \\ m^2 - 8m > 0 \\ m^2 - 8m = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 9 \end{array}\right. \Rightarrow S = \{-1;9\}$

Vậy tổng các phần tử của S bằng 8.

Câu 52: Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình $9^x - 2m.3^x + m^2 - 8m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 2$. Tổng các giá trị của S bằng.

A. 9. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** 1. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $9^x - 2m.3^x + m^2 - 8m = 0 \Leftrightarrow \left(3^x\right)^2 - 2m.3^x + m^2 - 8m = 0 (*)$

Đặt $3^x = t$ $(*) \Leftrightarrow t^2 - 2mt + m^2 - 8m = 0$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0$.

$\Leftrightarrow m^2 - m^2 + 8m > 0 \Leftrightarrow 8m > 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Theo vi-ét ta có: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 2m \\ t_1.t_2 = m^2 - 8m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x_1} + 3^{x_2} = 2m \\ 3^{x_1}.3^{x_2} = m^2 - 8m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x_1} + 3^{x_2} = 2m \\ 3^{x_1 + x_2} = m^2 - 8m \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x_1} + 3^{x_2} = 2m \\ x_1 + x_2 = \log_3\left(m^2 - 8m\right) \end{cases}$ mà $x_1 + x_2 = 2 \Rightarrow \log_3\left(m^2 - 8m\right) = 2$.

$\Leftrightarrow m^2 - 8m = 9 \Leftrightarrow m^2 - 8m - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 9 \\ m = -1 \end{array}\right. \Rightarrow S = 9$. Vì $m > 0$

Câu 53: Cho phương trình $4^x - (m+3)2^x + 8 = 0$ (m là tham số). Để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $\left(x_1 + 3\right)\left(x_2 + 3\right) = 8$ thì giá trị của tham số m thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(29;30)$. **B.** $(27;28)$. **C.** $(30;31)$. **D.** $(28;29)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt: $t = 2^x$.

Phương trình có dạng: $t^2 - (m+3)\mathrm{t} + 8 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ t_1 t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 + 6m - 23 > 0 \\ m + 3 > 0 \\ 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ \left[\begin{array}{l} m > 4\sqrt{2} - 3 \\ m < -4\sqrt{2} - 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m > 4\sqrt{2} - 3.$

$2^{x_1} = t_1 \Rightarrow x_1 = \log_2 t_1;\ 2^{x_2} = t_2 \Rightarrow x_2 = \log_2 t_2.$

Suy ra $x_1 + x_2 = \log_2 t_1 + \log_2 t_2 = \log_2\left(t_1 t_2\right) = \log_2 8 = 3.$

Ta có: $\left(x_1 + 3\right)\left(x_2 + 3\right) = 8 \Leftrightarrow x_1.x_2 + 3(x_1 + x_2) + 9 = 8 \Leftrightarrow x_1.x_2 = -10.$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} x_1 = -2 \\ x_2 = 5 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{1}{4} \\ t_2 = 32 \end{array}\right.$. Vậy nên $t_1 + t_2 = m + 3 \Rightarrow m + 3 = 32,25 \Leftrightarrow m = 29,25$.

Câu 54: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-21;21]$ để hai phương trình $4^{x+1} + 2^{x+4} = 2^{x+2} + 16$ và $|m-9|.3^{x-2} + m.9^{x-1} = 1$ là hai phương trình tương đương?

A. 32. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 31.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=3^x>0$, phương trình hai trở thành: $mt^2+|m-9|t-9=0\,(3)$.

Ta có: $4^{x+1}+2^{x+4}=2^{x+2}+16\Leftrightarrow 2^{2(x+1)}+6.2^{x+1}-16=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^{x+1}=2\Rightarrow x=0\\2^{x+1}=-8(ptvn)\end{array}\right.$.

Trường hợp 1: Để hai phương trình tương đương thì thỏa đồng thời 2 điều kiện sau:

$x=0$ cũng là nghiệm phương trình thứ hai $\Rightarrow |m-9|.3^{0-2}+m.9^{0-1}=1\Leftrightarrow |m-9|=9-m$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}9-m\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}m-9=9-m\Rightarrow m\le 9\\ m-9=m-9\end{array}\right.\end{array}\right.$.

Phương trình thứ hai có duy nhất 1 nghiệm $x=0$ thì $pt(3)$ có thêm 1 nghiệm $t\le 0$

$\Leftrightarrow -9.m\le 0\Leftrightarrow m\ge 0$.

Trường hợp 2: Để hai phương trình tương đương thì phương trình (3) có nghiệm kép $t=1$

$\Rightarrow -\dfrac{|m-9|}{2m}=1\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}m<0\\ \left[\begin{array}{l}m=-9\Rightarrow m=-9\\ m=6\end{array}\right.\end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện $m\in[-21;21]$ và $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=\{-9;0;1;2;.....;9\}$.

Câu 55: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $25^x-m.5^{x+1}+7m^2-7=0$ có hai nghiệm phân biệt. Tập S có bao nhiêu phần tử?

A. 2. **B.** 1. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $5^x=t\,(t>0)$ thì phương trình trở thành: $t^2-5mt+7m^2-7=0\ (*)$

Để phương trình ban đầu có hai nghiệm phân biệt thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm: $t_1>t_2>0$

Khi đó:

$$\left\{\begin{array}{l}\Delta>0\\S>0\\P>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}25m^2-4\left(7m^2-7\right)>0\\5m>0\\7m^2-7>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-3m^2+28>0\\m>0\\m>1\vee m<-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{2\sqrt{21}}{3}<m<\dfrac{2\sqrt{21}}{3}\\m>0\\ \left[\begin{array}{l}m>1\\m<-1\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow 1<m<\frac{2\sqrt{21}}{3}$$

Vậy tập hợp S có hai phần tử là: 2 và 3..

Câu 56: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\ln^2 x+2\ln x-3=0$ bằng

A. $\dfrac{1}{e^3}$. **B.** -2. **C.** -3. **D.** $\dfrac{1}{e^2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\ln^2 x+2\ln x-3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ (\ln x-1)(\ln x+3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \left[\begin{array}{l} x=e \\ x=e^{-3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=e \\ x=e^{-3} \end{array}\right.$

Vậy $x_1.x_2=\dfrac{1}{e^2}$.

Câu 57: Biết phương trình $\log_{\sqrt{3}}^2 x-m\log_{\sqrt{3}} x+1=0$ có nghiệm duy nhất nhỏ hơn 1 với m là tham số. Hỏi m nhận giá trị thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $(1;3)$. **B.** $(-3;0)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x>0$

Đặt $t=\log_{\sqrt{3}} x$

Phương trình trở thành: $t^2-mt+1=0$ (2)

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm kép âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=m^2-4=0 \\ \dfrac{-b}{2a}=\dfrac{m}{2}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-2 \end{array}\right. \\ m<0 \end{cases} \Leftrightarrow m=-2\in(-3;0)$$

Câu 58: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2+2\log_2(x-3)+(2m+3)\log_{\sqrt{x-3}} 2=2m$ có hai nghiệm $x_1;x_2$ thoả mãn $x_1<x_2<5$?

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $\begin{cases} x-3>0 \\ \sqrt{x-3}\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x\neq 4 \end{cases}$

Phương trình tương đương: $2+2\log_2(x-3)+\dfrac{2(2m+3)}{\log_2(x-3)}=2m$

$\Leftrightarrow 2\log_2{}^2(x-3)+2(1-m)\log_2(x-3)+2(2m+3)=0$

$\Leftrightarrow \log_2{}^2(x-3)+(1-m)\log_2(x-3)+2m+3=0$

Đặt $\log_2(x-3)=t$.

Do $3<x\neq 4 \Rightarrow \begin{cases} 3<x_1<x_2<5 \\ x_1\neq 4 \\ x_2\neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x_1-3<x_2-3<2 \\ x_1-3\neq 1 \\ x_2-3\neq 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x_1-3)<\log_2(x_1-3)<1 \\ \log_2(x_1-3)\neq 0 \\ \log_2(x_2-3)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1<t_2<1 \\ t_1\neq 0 \\ t_2\neq 0 \end{cases}$$

Bài toán trở thành: Tìm m để phương trình $t^2+(1-m)t+2m+3=0$ có có hai nghiệm $t_1;t_2$ thoả mãn $\begin{cases} t_1<t_2<1 \\ t_1\neq 0 \\ t_2\neq 0 \end{cases}$.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt cần:

$\Delta=(m-1)^2-4(2m+3)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m>11 \\ m<-1 \end{array}\right.$ $(*)$.

Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} t_1<t_2<1 \\ t_1\neq 0 \\ t_2\neq 0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} (t_1-1)(t_2-1)>0 \\ t_1+t_2<2 \\ t_1\neq 0 \\ t_2\neq 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} t_1.t_2-(t_1+t_2)+1>0 \\ m-1<2 \\ 2m+3\neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 2m+3+(1-m)+1>0 \\ m<3 \\ m\neq\dfrac{-3}{2} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -5<m<3 \\ m\neq\dfrac{-3}{2} \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện ta có $\begin{cases} -5<m<-1 \\ m\neq\dfrac{-3}{2} \end{cases}$, suy ra có 3 giá trị nguyên của m thoả mãn.

Câu 59: Có bao nhiêu số nguyên dương x sao cho ứng với mỗi x tồn tại đúng hai số thực y thỏa mãn $\left(\log_2^2 y-3\log_2 y+2\right)\sqrt{3^y-x}=0$?

A. 78. **B.** 72. **C.** 79. **D.** 73.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\left(\log_2^2 y-3\log_2 y+2\right)\sqrt{3^y-x}=0$. Điều kiện: $\begin{cases} y>0 \\ y\geq\log_3 x \end{cases}$.

Phương trình $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{c} \log_2^2 y-3\log_2 y+2=0 \\ 3^y-x=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=4 \\ y=\log_3 x \end{array}\right.$.

Để tồn tại đúng hai số thực $y\Leftrightarrow 2\leq\log_3 x<4\Leftrightarrow 9\leq x<81\Rightarrow x\in\{9;10;...;80\}$.

Câu 60: Cho phương trình $4^{x+1}+4^{1-x}-(m+1)\left(2^{2+x}-2^{2-x}\right)+8m-16=0$ (m là tham số thực). Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình đã cho có nghiệm trên đoạn $[0;1]$.

A. $\left[0;\dfrac{3}{2}\right]$. **B.** $\left[1;\dfrac{5}{2}\right)$. **C.** $\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left[1;\dfrac{5}{2}\right]$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $4^{x+1}+4^{1-x}-(m+1)\left(2^{2+x}-2^{2-x}\right)+8m-16=0\ (1)$

$\Leftrightarrow 4\left(4^x+4^{-x}\right)-4(m+1)\left(2^x-2^{-x}\right)+8m-16=0$

$\Leftrightarrow \left(4^x+4^{-x}\right)-(m+1)\left(2^x-2^{-x}\right)+2m-4=0$ (2)

Đặt $t=2^x-2^{-x}$

Ta có $t'=2^x\ln 2+2^{-x}\ln 2>0;\forall x$ nên hàm $t=2^x-2^{-x}$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

Vậy với $x\in[0;1]$ thì $t\in\left[0;\frac{3}{2}\right]$.

Khi đó phương trình $(2)\Leftrightarrow t^2-(m+1)t+2m-2=0$

$\Leftrightarrow (t-2)(t-m+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=m-1\end{array}\right.$

Để phương trình (1) có nghiệm trên đoạn $[0;1]$ khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm trên đoạn $\left[0;\frac{3}{2}\right]$ khi và chỉ khi $0\le m-1\le\frac{3}{2}\Leftrightarrow 1\le m\le\frac{5}{2}$.

Câu 61: Có bao nhiêu m nguyên $m\in[-2023;2023]$ đề phương trình $5^x-2m=\log_{\sqrt[4]{5}}\left(20(x+1)+10m\right)$ có nghiệm?

A. 2026. **B.** 2023. **C.** 2025. **D.** 2024.

Lời giải

Chọn C

$5^x-2m=\log_{\sqrt[4]{5}}\left(20(x+1)+10m\right)\Leftrightarrow 5^x-2m-4=4\log_5(4(x+1)+2m).$

Đặt $t=\log_5(4(x+1)+2m)\Rightarrow 5^t-2m-4=4x.$

Ta được hệ $\begin{cases}5^x-2m-4=4t\\5^t-2m-4=4x\end{cases}\Rightarrow 5^x-5^t=4t-4x\Rightarrow 5^x+4x=5^t+4t.$

Đặt $f(u)=5^u+4u\Rightarrow f'(u)=5^u.\ln 5+4>0,\forall u\in\mathbb{R}.$

Ta có $\begin{cases}f'(u)>0,\forall u\in\mathbb{R}\\f(x)=f(t)\end{cases}\Rightarrow t=x.$ Ta có $5^x-2m-4=4x.\Leftrightarrow 2m=5^x-4x-4.$

Đặt $h(x)=5^x-4x-4\Rightarrow h'(x)=5^x\ln 5-4.$

$h'(x)=0\Leftrightarrow 5^x\ln 5-4=0\Leftrightarrow 5^x=\frac{4}{\ln 5}\Leftrightarrow x=x_1=\log_5\frac{4}{\ln 5}\approx 0.566.$

Ta có bảng biến thiên của $y=h(x)$.

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	A=-3,7733	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên để phương trình có nghiệm $2m \geq -3,7733 \Rightarrow m \geq -1,886.$

Do $\begin{cases} m \in [-2023;2023] \\ m \in \mathbb{Z} \\ m \geq -1,886 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Số giá trị của m là $\left[2023+1\right]+1=2025.$

CHƯƠNG 3

HÀM SỐ LŨY THỪA HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

CHỦ ĐỀ 9 BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ - LOGAARIT

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa:

Bất phương trình mũ cơ bản có dạng $a^x > b$ (hoặc $a^x \ge b, a^x < b, a^x \le b$) với $a > 0, a \ne 1$.

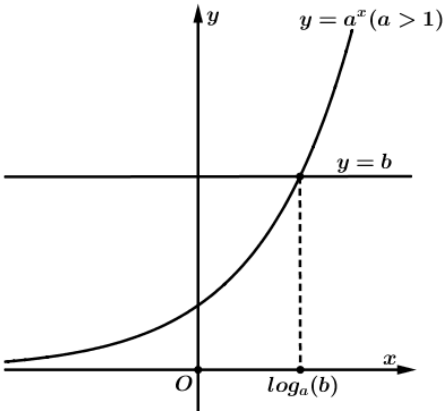
2. Định lí, quy tắc:

Ta xét bất phương trình dạng $a^x > b$.

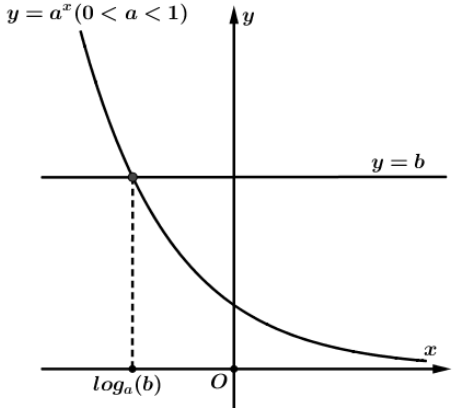
- Nếu $b \le 0$ thì bất phương trình vô nghiệm.
- Nếu $b > 0$ thì bất phương trình tương đương với $a^x > a^{\log_a b}$.

  Với $a > 1$ thì nghiệm của bất phương trình là $x > \log_a b$ (Hình 1).

  Với $0 < a < 1$ thì nghiệm của bất phương trình là $x < \log_a b$ (hình 2).



Hình 1.



Hình 2.

- **Kết luận:** Tập nghiệm của bất phương trình $a^x > b$ được cho bởi bảng sau:

$a^x > b$	Tập nghiệm	
	$a > 1$	$0 < a < 1$
$b \le 0$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$b > 0$	$(\log_a b; +\infty)$	$(-\infty; \log_a b)$

3. Phương pháp đưa về cùng cơ số

- Nếu gặp bất phương trình $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ thì xét hai trường hợp:

  Trường hợp 1: Nếu $a > 1$ thì bất phương trình $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.

  Trường hợp 2: Nếu $0 < a < 1$ thì bất phương trình $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.

4. Phương pháp đặt ẩn phụ

- Ta thường gặp các dạng: $m.a^{2f(x)}+n.a^{f(x)}+p>0,(1)$.

  Đặt $t=a^{f(x)}$, $t>0$ đưa pt (1) về dạng phương trình bậc 2: $mt^2+nt+p>0$.

  Giải bất phương trình tìm nghiệm t và kiểm tra điều kiện $t>0$ sau đó tìm nghiệm x.

  $m.a^{f(x)}+n.b^{f(x)}+p>0$, trong đó $a.b=1$. Đặt $t=a^{f(x)}$, $t>0$, suy ra $b^{f(x)}=\frac{1}{t}$.

  $m.a^{2f(x)}+n.(a.b)^{f(x)}+p.b^{2f(x)}>0$. Chia hai vế cho $b^{2f(x)}$ và đặt $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}=t>0$.

5. Phương pháp hàm số, đánh giá

- **Định nghĩa**

  Hàm số f được gọi là đồng biến trên K khi và chỉ khi $\forall u,v\in(a;b);u<v\Rightarrow f(u)<f(v)$.

  Hàm số f được gọi là nghịch biến trên $(a;b)$ khi và chỉ khi $\forall u,v\in(a;b);u<v\Rightarrow f(u)>f(v)$

- **Định lí, quy tắc:**

  Tính chất 1. Nếu hàm số f đồng biến trên khoảng $(a;b)$ thì $\forall u,v\in(a;b);\ f(u)>f(v)\Leftrightarrow u>v$

  Nếu hàm số f nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ thì $\forall u,v\in(a;b);\ f(u)>f(v)\Leftrightarrow u<v$.

  Tính chất 2. Nếu hàm số f đồng biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\min\limits_{[a;b]}f(x)=f(a)$ và $\max\limits_{[a;b]}f(x)=f(b)$

  Nếu hàm số f nghịch biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\min\limits_{[a;b]}f(x)=f(b)$ và $\max\limits_{[a;b]}f(x)=f(a)$.

- **Nhận xét**

  Khi bài toán yêu tìm tham số m để bất phương trình $m\ge f(x)$ (hoặc $m\le f(x)$) **có nghiệm đúng** với mọi $x\in D$ thì $m\ge\max\limits_{D}f(x)$ (hoặc $m\le\min\limits_{D}f(x)$) .

  Khi bài toán yêu tìm tham số m để bất phương trình $m\ge f(x)$ (hoặc $m\le f(x)$) **có nghiệm** với mọi $x\in D$ thì $m\le\max\limits_{D}f(x)$ (hoặc $m\ge\min\limits_{D}f(x)$) .

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Bất phương trình $2^x > 3^x$ có tập nghiệm là:

A. $S=(0;1)$. **B.** $S=(-\infty;0)$. **C.** $S=(1;+\infty)$. **D.** $S=(-1;1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2^x > 3^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x > 1 \Leftrightarrow x<0$.

Câu 2: Tập nghiệm của bất phương trình $5^{x+1} > 3$ là

A. $(-\infty;1+\log_5 3)$ **B.** $(-\infty;-1+\log_5 3)$ **C.** $(-1+\log_5 3;+\infty)$ **D.** $(\log_5 3;+\infty)$

Lời giải

Chọn C

Ta có $5^{x+1} > 3 \Leftrightarrow x+1 > \log_5 3 \Leftrightarrow x > -1+\log_5 3$

Câu 3: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_3(2x-3) < 2$ là

A. $S=\left(\frac{11}{2};+\infty\right)$. **B.** $S=\left(\frac{3}{2};\frac{11}{2}\right)$. **C.** $S=\left(-\infty;\frac{11}{2}\right)$. **D.** $S=\left(\frac{3}{2};6\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_3(2x-3) < 2 \Leftrightarrow 0 < 2x-3 < 3^2 \Leftrightarrow \frac{3}{2} < x < 6$.

Câu 4: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(2x-1) > \log_2 x$ là

A. $S=\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $S=(0;1)$. **C.** $S=(0;+\infty)$. **D.** $S=(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định: $x > \frac{1}{2}$.

Ta có $\log_2(2x-1) > \log_2 x \Leftrightarrow 2x-1 > x \Leftrightarrow x > 1$.

Kết hợp với điều kiện xác định, ta được tập nghiệm của bất phương trình là $S=(1;+\infty)$.

Câu 5: Có bao nhiêu số nguyên dương thuộc tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(31-x^2) \geq 3$?

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_3(31-x^2) \geq 3 \Leftrightarrow 31-x^2 \geq 27 \Leftrightarrow 4-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$.

Mà x nguyên dương nên $x \in \{1;2\}$.

Câu 6: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) \geq 0$ là

A. $(1;2)$. **B.** $[2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;2]$. **D.** $(1;2]$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)\ge 0\Leftrightarrow\begin{cases}x-1>0\\ x-1\le\left(\frac{1}{2}\right)^0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\ x\le 2\end{cases}\Leftrightarrow x\in(1;2]$.

Câu 7: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ sao cho bất phương trình $5^x-2(m+1)5^x-3-2m>0$ nghiệm đúng với mọi số thực x?

A. 9 **B.** 18. **C.** 20. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $5^x-2(m+1)5^x-3-2m>0$ đúng $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 5^x(1+2m)+3+2m<0$ $(*)$ đúng $\forall x\in\mathbb{R}$

Trường hợp 1: $m=-\frac{1}{2}$. Bpt $(*)\Leftrightarrow 5^x.0+2<0$ (Loại).

Trường hợp 2: $m>-\frac{1}{2}$. Bpt $(*)\Leftrightarrow 5^x<-\frac{3+2m}{1+2m}$ (Loại).

Trường hợp 3: $m<-\frac{1}{2}$. Bpt $(*)\Leftrightarrow 5^x>-\frac{3+2m}{1+2m}$ đúng $\forall x\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow -\frac{3+2m}{1+2m}\le 0\Leftrightarrow m\le -\frac{3}{2}$

Theo giả thiết $\begin{cases}m\in[-10;10]\\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow m\in\{-10;-9;-8;...;-2\}$

Vậy có 9 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 8: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để tập nghiệm của bất phương trình $\left(3^{x+4}-3\sqrt{3}\right)\left(3^x-m\right)<0$ chứa không quá 9 số nguyên?

A. 3787 . **B.** 729 . **C.** 2188 . **D.** 2187.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=3^x\,(t>0)$, bất phương trình $\left(3^{x+4}-3\sqrt{3}\right)\left(3^x-m\right)<0\,(1)$ trở thành:

$$\left(81t-3\sqrt{3}\right)(t-m)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^{\frac{-5}{2}}<t<m;\ \left(m>3^{\frac{-5}{2}}\right)\\ m<t<3^{\frac{-5}{2}};\ \left(m<3^{\frac{-5}{2}}\right)\end{array}\right.$$

Do $m\in\mathbb{N}^*$ nên $(1)\Leftrightarrow 3^{\frac{-5}{2}}<3^x<m\Leftrightarrow -\frac{5}{2}<x<\log_3 m$.

Tập nghiệm của bất phương trình có không quá 9 số nguyên khi và chỉ khi $\log_3 m\le 7\Leftrightarrow 0<m\le 3^7$. Do $m\in\mathbb{N}^*$ nên có 2187 giá trị của m.

Câu 9: Cho $0<m\ne 1$. Gọi $(a;b)$ là tập hợp các giá trị của m để bất phương trình $\log_m\left(1-8m^{-x}\right)\ge 2(1-x)$ có hữu hạn nghiệm nguyên. Tính $b-a$

A. 1. **B.** $3\sqrt{2}-1$. **C.** $2\sqrt{2}-1$. **D.** $4\sqrt{2}-1$.

Lời giải

Chọn A

Trường hợp 1: $m>1$

Ta có: $\log_m\left(1-8m^{-x}\right)\ge 2(1-x)\Leftrightarrow 1-8m^{-x}\ge m^{2-2x}\Leftrightarrow m^2.m^{-2x}+8m^{-x}-1\le 0$

$$\Leftrightarrow 0<m^{-x}\le\frac{\sqrt{16+m^2}-4}{m^2}\Leftrightarrow -x\le\log_m\left(\frac{\sqrt{16+m^2}-4}{m^2}\right)\Leftrightarrow x\ge-\log_m\left(\frac{\sqrt{16+m^2}-4}{m^2}\right).$$

Rỏ ràng trong trường hợp này không thể có hữu hạn nghiệm nguyên

Trường hợp 2: $0<m<1$

Ta có: $\log_m\left(1-8m^{-x}\right)\ge 2(1-x)\Leftrightarrow\begin{cases}1-8m^{-x}\le m^{2-2x}\\1-8m^{-x}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2.m^{-2x}+8m^{-x}-1\ge 0\\m^{-x}<\dfrac{1}{8}\end{cases}$

$$\begin{cases}m^{-x}\ge\dfrac{\sqrt{16+m^2}-4}{m^2}\\-x>\log_m\dfrac{1}{8}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x\le\log_m\dfrac{\sqrt{16+m^2}-4}{m^2}\\x<\log_m 8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-\log_m\dfrac{\sqrt{16+m^2}-4}{m^2}\\x<\log_m 8\end{cases}$$

Để bất phương trình có hữu hạn nghiệm nguyên thì:

$$\log_m 8+\log_m\frac{\sqrt{16+m^2}-4}{m^2}>0\Leftrightarrow\log_m\frac{8\sqrt{16+m^2}-32}{m^2}>0\Leftrightarrow\frac{8\sqrt{16+m^2}-32}{m^2}<1$$

$$\Leftrightarrow 8\sqrt{16+m^2}<m^2+32\Leftrightarrow m^4>0,\forall m\in(0;1)$$

Vậy $b-a=1$

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 9: Bất phương trình mũ – logarit cơ bản

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

Câu 1: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} > 3$ là

A. $[-2;+\infty)$. **B.** $(-2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-2)$. **D.** $(-\infty;-2]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} > 3 \Leftrightarrow x+1 < -1 \Leftrightarrow x < -2$.

Câu 2: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x-2} \geq 2$ là

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $[2;+\infty)$. **D.** $[3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2^{x-2} \geq 2 \Leftrightarrow x-2 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 3$.

Câu 3: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1) > 3$ là

A. $(1;7)$. **B.** $(1;9)$. **C.** $(9;+\infty)$. **D.** $(7;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_2(x-1) > 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ x-1>8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>9 \end{cases} \Leftrightarrow x > 9$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (9;+\infty)$.

Câu 4: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} \geq \frac{1}{27}$ là

A. $(-\infty;2]$. **B.** $[2;+\infty)$. **C.** $(-2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;3]$.

Lời giải

Ta có cơ số $0 < a = \frac{1}{3} < 1$.

Nên bất phương trình đã cho tương đương $2x-1 \leq \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} \Leftrightarrow 2x-1 \leq 3 \Leftrightarrow 2x \leq 4 \Leftrightarrow x \leq 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty;2]$.

Câu 5: Tập nghiệm của bất phương trình $2^x > 8$ là

A. $[4;+\infty)$. **B.** $[3;+\infty)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(4;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $2^x > 8 \Leftrightarrow x > \log_2 8 \Leftrightarrow x > 3$. Vậy $S = (3;+\infty)$.

Câu 6: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} < 3$ là

A. $(-2;+\infty)$ **B.** $(-\infty;-3)$ **C.** $(-3;+\infty)$ **D.** $(-\infty;-1)$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} < 3 \Leftrightarrow 3^{-x-2} < 3 \Leftrightarrow -x-2 < 1 \Leftrightarrow x > -3$

Câu 7: Nghiệm của phương trình $2^x > 3$ là

A. $x < \log_3 2$. **B.** $x < \log_2 3$. **C.** $x > \log_3 2$. **D.** $x > \log_2 3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2^x > 3 \Leftrightarrow x > \log_2 3$.

Câu 8: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(3x) > \log_2 5$ là

A. $\left(\frac{3}{5};+\infty\right)$. **B.** $\left(0;\frac{5}{3}\right)$. **C.** $\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$. **D.** $\left(0;\frac{3}{5}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_2(3x) > \log_2 5 \Leftrightarrow 3x > 5 \Leftrightarrow x > \frac{5}{3}$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$.

Câu 9: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) \le 1$ là

A. $\left[\frac{5}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$. **C.** $(-\infty;\log_2 5)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{5}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x-2>0 \Leftrightarrow x>2$.

Bất phương trình: $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) \le 1 \Leftrightarrow x-2 \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \ge \frac{5}{2}$.

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm $T = \left[\frac{5}{2};+\infty\right)$.

Câu 10: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(x+4) \le 3$ là:

A. $(-4;23]$. **B.** $(-\infty;23]$. **C.** $(-\infty;27]$. **D.** $(-4;5]$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > -4$. Bất phương trình $\Leftrightarrow x+4 \le 27 \Leftrightarrow x \le 23$.

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow x \in (-4;23]$.

Câu 11: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 x < 0$ là

A. $0;1$. **B.** $-\infty;1$. **C.** $1;+\infty$. **D.** $0;+\infty$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\log_2 x<0\Leftrightarrow 0<x<1$.

Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 x<0$ là $0;1$.

Câu 12: Tập nghiệm của bất phương trình $\log(2x)<\log(x+6)$ là:

A. $[0;6)$ **B.** $(0;6)$ **C.** $(6;+\infty)$ **D.** $(-\infty;6)$

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $\begin{cases}2x>0\\x+6>0\end{cases}\Leftrightarrow x>0$

Vì cơ số $a=10>1$ nên bất phương trình $\log(2x)<\log(x+6)$

$\Leftrightarrow 2x<x+6\Leftrightarrow x<6$.

Kết hợp điều kiện, suy ra $0<x<6$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(0;6)$.

Câu 13: Tập nghiệm của bất phương trình $\log(x-2)<0$ là

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(12;+\infty)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(-\infty;3)$.

Lời giải

Chọn C

$\log(x-2)<0\Leftrightarrow\begin{cases}x-2>0\\x-2<10^0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>2\\x<3\end{cases}\Leftrightarrow 2<x<3$.

Câu 14: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1)>2$ là

A. $(-5;+\infty)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;5)$. **D.** $(5;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x>1$

$\log_2(x-1)>2\Leftrightarrow x-1>4\Leftrightarrow x>5$

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của bất phương trình là $x>5$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $(5;+\infty)$.

Câu 15: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1)\le 3$ là

A. $S=[1;8]$. **B.** $S=(1;8]$. **C.** $S=[1;9]$. **D.** $S=(1;9]$.

Lời giải

Chọn D

$\log_2(x-1)\le 3\Leftrightarrow 0<x-1\le 2^3\Leftrightarrow 1<x\le 9\Rightarrow S=(1;9]$.

Câu 16: Bất phương trình $\log(x-1)\le 2$ có tập nghiệm là

A. $(1;3]$. **B.** $(0;101]$. **C.** $(1;101]$. **D.** $(-\infty;101]$.

Lời giải

Chọn C

$\log(x-1)\le 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ x-1\le 10^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x\le 101 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x\le 101$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S=(1;101]$.

Câu 17: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2+2x+5}+3^{x^2+2x}\ge 3^{(x+1)^2+1}+5.2^{x^2+2x}$ là

A. $(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$. **B.** $[-1:3]$. **C.** $[-3;1]$. **D.** $[-1;0]$.

Lời giải

Ta có: $2^{x^2+2x+5}+3^{x^2+2x}\ge 3^{(x+1)^2+1}+5.2^{x^2+2x} \Leftrightarrow 2^5.2^{x^2+2x}-5.2^{x^2+2x}\ge 3^2.3^{x^2+2x}-3^{x^2+2x}$

$\Leftrightarrow 27.2^{x^2+2x}\ge 8.3^{x^2+2x} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2+2x}\le \frac{27}{8} \Leftrightarrow x^2+2x\le \log_{\frac{3}{2}}\frac{27}{8}$

$\Leftrightarrow x^2+2x\le 3 \Leftrightarrow x^2+2x-3\le 0 \Leftrightarrow -3\le x\le 1.$

Câu 18: Biết tập nghiệm của bất phương trình $3^x<4-3^{1-x}$ là $(a;b)$. Giá trị $a+b$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

$3^x<4-3^{1-x} \Leftrightarrow 3^x<4-\frac{3}{3^x} \Leftrightarrow 3^{2x}-4.3^x+3<0 \Leftrightarrow 1<3^x<3 \Leftrightarrow 0<x<1$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(0;1)$ do đó $a=0, b=1$.

Giá trị $a+b=1$.

Câu 19: Tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4}\ge 27$ chứa bao nhiêu số nguyên

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4}\ge 27 \Leftrightarrow -x^2+4\ge 3 \Leftrightarrow -1\le x\le 1 \Rightarrow S=\{-1;0;1\}$

Câu 20: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x}\le\left(\frac{3}{2}\right)^{2-x}$ là?

A. $\left[\frac{2}{5};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]$. **C.** $\left[\frac{-2}{3};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{2}{5}\right]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x}\le\left(\frac{3}{2}\right)^{2-x} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{4x}\le\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} \Leftrightarrow 4x\ge x-2 \Leftrightarrow 3x\ge -2 \Leftrightarrow x\ge \frac{-2}{3}$.

Câu 21: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)>-3$ là

A. $(-1;5)$. **B.** $(7;+\infty)$. **C.** $(-1;7)$. **D.** $[-1;7)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)>-3\Leftrightarrow\begin{cases}x+1>0\\x+1<\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\x<7\end{cases}\Leftrightarrow -1<x<7$.

Câu 22: Tập nghiệm của bất phương trình $\ln\frac{1}{2x-1}\geq 0$ là

A. $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};1\right]$. **D.** $(-\infty;1)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $\frac{1}{2x-1}>0\Leftrightarrow 2x-1>0\Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$.

Ta có $\ln\frac{1}{2x-1}\geq 0\Leftrightarrow\frac{1}{2x-1}\geq 1\Leftrightarrow 2x-1\leq 1\Leftrightarrow x\leq 1$.

Kết hợp với điều kiện ta có: $\frac{1}{2}<x\leq 1$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $\left(\frac{1}{2};1\right]$.

Câu 23: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-2)\leq 1$ là

A. $\left[\frac{5}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$. **C.** $(-\infty;\log_2 5)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{5}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x-2>0\Leftrightarrow x>2$.

Bất phương trình: $\log_{\frac{1}{2}}(x-2)\leq 1\Leftrightarrow x-2\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow x\geq\frac{5}{2}$.

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm $T=\left[\frac{5}{2};+\infty\right)$.

Câu 24: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x+1)<3$ là

A. $S=(-\infty;8)$. **B.** $S=(-1;8)$. **C.** $S=(-1;7)$. **D.** $S=(-\infty;7)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_2(x+1)<3\Leftrightarrow\begin{cases}x+1>0\\x+1<2^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\x<7\end{cases}\Leftrightarrow S=(-1;7)$.

Câu 25: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x^2+3x)\leq 2$ là

A. $(0;1]$. **B.** $\left(0;\frac{1}{2}\right]$. **C.** $[-4;-3)\cup(0;1]$. **D.** $[-4;-3]\cup[0;1]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_2\left(x^2+3x\right)\le 2 \Leftrightarrow 0<x^2+3x\le 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x>0 \\ x^2+3x-4\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>0 \\ x<-3 \end{array}\right. \\ -4\le x\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4\le x<-3 \\ 0<x\le 1 \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $[-4;-3)\cup(0;1]$.

Câu 26: Số các giá trị nguyên của x thỏa $\left(2^{x^2}-16\right)\left(\log_3 x-4\right)\le 0$ là

A. Vô số. **B.** 80. **C.** 17. **D.** 78.

Lời giải

Chọn B

$$\left(2^{x^2}-16\right)\left(\log_3 x-4\right)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^{x^2}-16\ge 0 \\ \log_3 x-4\le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2^{x^2}-16\le 0 \\ \log_3 x-4\ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2\ge 4 \\ 0\le x\le 3^4 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2\le 4 \\ x\ge 3^4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\ge 2 \\ x\le -2 \end{array}\right. \\ 0\le x\le 81 \end{cases} \\ \begin{cases} -2\le x\le 2 \\ x\ge 81 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 2\le x\le 81.$$

Mà x nguyên nên có 80 giá trị thỏa mãn.

Câu 27: Gọi S là tập hợp các số nguyên x thoả mãn bất phương trình $\log_3\left(\frac{2x^2-7}{625}\right)\le \log_5\left(\frac{2x^2-7}{81}\right)$.

Số tập hợp con của S là

A. 2^{316}. **B.** 2^{318}. **C.** 319. **D.** 2^{319}.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định của bất phương trình $2x^2-7>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 2 \\ x\le -2 \end{array}\right.$ (*)(do x nguyên).

Bất phương trình tương đương với $\log_3\left(2x^2-7\right)-4\log_3 5\le \log_5\left(2x^2-7\right)-4\log_5 3$

$\Leftrightarrow \log_3\left(2x^2-7\right)-\log_5 3.\log_3\left(2x^2-7\right)\le 4\left(\log_3 5-\log_5 3\right)$

$\Leftrightarrow \log_3\left(2x^2-7\right)\left(1-\log_5 3\right)\le 4\left(\frac{1-\log_5{}^2 3}{\log_5 3}\right) \Leftrightarrow \log_3\left(2x^2-7\right)\le \frac{4\left(1+\log_5 3\right)}{\log_5 3}$

$\Leftrightarrow 2x^2-7\le 50625 \Leftrightarrow -\sqrt{25316}\le x\le \sqrt{25316} \Leftrightarrow -159\le x\le 159$ (do x nguyên)

Kết hợp với điều kiện (*) ta có tập S có 316 số nguyên. Do đó số tập con của S là 2^{316}.

Câu 28: Số nghiệm nguyên của bất phương trình thỏa mãn $\left[1-\log_2(x+8)\right]\sqrt{2.4^{x+1}-17.2^x+2}\ge 0$?

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} x+8>0 \\ 2.4^{x+1}-17.2^x+2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-8 \\ \left[\begin{array}{l} 2^x\ge 2 \\ 2^x\le \frac{1}{8} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-8 \\ \left[\begin{array}{l} x\ge 1 \\ x\le -3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 1 \\ -8<x\le -3 \end{array}\right.$.

Khi đó: $\left[1-\log_2(x+8)\right]\sqrt{2.4^{x+1}-17.2^x+2}\ge 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}2.4^{x+1}-17.2^{x}+2=0\\ x>-8\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}2.4^{x+1}-17.2^{x}+2>0\\ 1-\log_2(x+8)\geq 0\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-3\end{array}\right.\\ x>-8\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x\geq 1\\ -8<x<-3\end{array}\right.\\ \log_2(x+8)\leq 1\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-3\\ \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x\geq 1\\ -8<x<-3\end{array}\right.\\ x\leq -6\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-3\\ -8<x\leq -6\end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện $x\in\mathbb{Z}$ ta có trường hợp này các giá trị x thỏa mãn yêu cầu bài toán là $x\in\{-7;-6;-1;3\}$.

Câu 29: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_3 x+2\log_x 9-5\leq 0$?

A. 79. **B.** 80. **C.** 81. **D.** 27.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $0<x\neq 1$

Ta có: $\log_3 x+2\log_x 9-5\leq 0\Leftrightarrow \log_3 x+4\log_x 3-5\leq 0\Leftrightarrow \log_3 x+\dfrac{4}{\log_3 x}-5\leq 0$

Đặt $t=\log_3 x$, khi đó bất phương trình trở thành: $t+\dfrac{4}{t}-5\leq 0\Leftrightarrow \dfrac{t^2-5t+4}{t}\leq 0$

Suy ra $t^2-5t+4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=4\\ t=1\end{array}\right.$

Bảng xét dấu vế trái:

t	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
t		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
t^2-5t+4		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$\dfrac{t^2-5t+4}{t}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta có: $t\leq 0$ hoặc $1\leq t\leq 4$

Với $t\leq 0\Rightarrow \log_3 x\leq 0\Leftrightarrow x\leq 1$

Với $1\leq t\leq 4\Rightarrow 1\leq \log_3 x\leq 4\Leftrightarrow 3\leq x\leq 81$

Kết hợp điều kiện, ta có tập nghiệm của bất phương trình là: $S=(0;1)\cup[3;81]\xrightarrow{x\in\mathbb{Z}}x\in\{3;4;5;...;81\}$ nên có 79 số nguyên x thỏa mãn.

Câu 30: Tính tổng tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $\log_3\left(x^2+8\right)-\log_3 x+x^2-9x+6\leq 0$.

A. 72. **B.** 28 **C.** 36. **D.** 45.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x>0$

Ta có: $\log_3\left(x^2+8\right)-\log_3 x+x^2-9x+6\leq 0$

$\Leftrightarrow \log_3\left(x^2+8\right)+x^2+8\leq \log_3 x+2+9x\Leftrightarrow \log_3\left(x^2+8\right)+x^2+8\leq \log_3 9x+9x$

$\Leftrightarrow f\left(x^2+8\right)\leq f\left(9x\right)$

Với $f(t)=\log_3 t+t$ luôn đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

Do đó $x^2+8\le 9x \Leftrightarrow x^2-9x+8\le 0 \Leftrightarrow 1\le x\le 8$

Tổng tất cả nghiệm nguyên của phương trình là 36.

Câu 31: Số các số nguyên dương x thỏa mãn $4^x+2023(x+1)<(x+2024).2^x$ là:

A. 7. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $4^x+2023(x+1)<(x+2024).2^x \Leftrightarrow 4^x-2024.2^x+2023-(2^x-2023)x<0$

$\Leftrightarrow (2^x-1)(2^x-2023)-(2^x-2023)x<0 \Leftrightarrow (2^x-2023)(2^x-x-1)<0$

Do x nguyên dương nên $2^x>x+1 \Rightarrow 2^x-x-1>0$

Do đó bpt $\Leftrightarrow 2^x<2023 \Rightarrow x\in\{1;2;....;10\}$.

Vậy có 10 số nguyên dương x thỏa mãn.

Câu 32: Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho ứng với mỗi y có không quá 10 số nguyên x thỏa mãn $(2^{x+1}-\sqrt{2})(2^x-y)<0$?

A. 2047. **B.** 1022. **C.** 1023. **D.** 1024.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$(2^{x+1}-\sqrt{2})(2^x-y)<0 \Leftrightarrow \left(2^x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(2^x-y)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{cases}2^x-\frac{1}{\sqrt{2}}>0\\2^x-y<0\end{cases}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases}x>\frac{-1}{2}\\x<\log_2 y, y>0\end{cases}\right. (1)$$

$$\left[\begin{cases}2^x-\frac{1}{\sqrt{2}}<0\\2^x-y>0\end{cases}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases}x<\frac{-1}{2}\\x>\log_2 y, y>0\end{cases}\right. (2)$$

Nhận thấy (2) không thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy $y>0$ nên bất phương trình có không quá 10 nghiệm nguyên khi và chỉ khi

$\frac{1}{\sqrt{2}}<2^x<y \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<x<\log_2 y.$

Nếu $\log_2 y>10 \Rightarrow x\in\{0;1;2;...;10\}$ đều là nghiệm, do đó không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

$\Rightarrow \log_2 y\le 10 \Leftrightarrow y\le 1024.$

Mà y là số nguyên dương nên $y\in\{1;2;3;...;1023;1024\}$.

Vậy có 1024 giá trị nguyên dương của y thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 33: Tổng tất cả các giá trị nguyên của m thỏa $\log_3\left|\frac{x^2-2(m-1)x+2-m}{3x^2+2x+1}\right|\le 1$ với mọi x là

A. -14. **B.** 21. **C.** 14. **D.** Đáp án khác. **C.**

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_3\left|\dfrac{x^2-2(m-1)x+2-m}{3x^2+2x+1}\right|\le 1$ với mọi x.

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x^2-2(m-1)x+2-m\neq 0 \\ \left|x^2-2(m-1)x+2-m\right|\le 3\left(3x^2+2x+1\right)\end{cases} \text{ với mọi } x.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x^2-2(m-1)x+2-m\neq 0 \\ x^2-2(m-1)x+2-m\le 9x^2+6x+3 \\ x^2-2(m-1)x+2-m\ge -9x^2-6x-3\end{cases} \text{ với mọi } x.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x^2-2(m-1)x+2-m\neq 0 \\ -8x^2-2(m+2)x-1-m\le 0 \\ 10x^2-2(m-4)x+5-m\ge 0\end{cases} \text{ với mọi } x.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} (m-1)^2+m-2<0 \\ (m+2)^2-8(m+1)\le 0 \\ (m-4)^2-10(5-m)\le 0\end{cases} \Leftrightarrow\begin{cases} m^2-m-1<0 \\ (m+2)^2-8(m+1)\le 0 \\ (m-4)^2-10(5-m)\le 0\end{cases}.$$

Mà m là số nguyên nên $m=0$ hay $m=1$. Vậy tổng tất cả các giá trị m là 1.

Dạng 10: Phương pháp đưa về cùng cơ số giải BPT mũ - logarit

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Số nghiệm nguyên dương của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{25-x}} > \frac{1}{16}$ là

A. 15. **B.** 8. **C.** 16. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $25-x \ge 0 \Leftrightarrow x \le 25$.

Ta có $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{25-x}} > \frac{1}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{25-x}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{4} \Leftrightarrow \sqrt{25-x} < 4 \Rightarrow 25-x < 16 \Leftrightarrow x > 9$.

Kết hợp với điều kiện ta có nghiệm của bất phương trình đã cho là $9 < x \le 25$.

Suy ra bất phương trình đã cho có 16 nghiệm nguyên dương.

Câu 2: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{2}{5}\right)^{1-3x} \ge \frac{25}{4}$.

A. $S=(-\infty,1]$. **B.** $S=\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$. **C.** $S=\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$. **D.** $S=[1,+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\left(\frac{2}{5}\right)^{1-3x} \ge \frac{25}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{1-3x} \ge \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \Leftrightarrow 1-3x \le -2 \Leftrightarrow x \ge 1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=[1,+\infty)$.

Câu 3: Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x+2} < 9^{2x+7}$ là

A. $(-\infty,-4)$. **B.** $(-4,+\infty)$. **C.** $(-\infty,-5)$. **D.** $(-5,+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $3^{x+2} < 9^{2x+7} \Leftrightarrow x+2 < 4x+14 \Leftrightarrow -3x < 12 \Leftrightarrow x > -4$

Câu 4: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(9^x - 5.6^x - 6.4^x\right)\sqrt{128-2^{\sqrt{x}}} > 0$ là

A. 44. **B.** 45. **C.** 48. **D.** 49.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases} x \ge 0 \\ 128-2^{\sqrt{x}} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ \sqrt{x} \le 7 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le x \le 49$.

Với $x=49$ không thỏa mãn bất phương trình đã cho.

Với $0 \le x < 49$, khi đó bất phương trình đã cho tương đương với

$9^x - 5.6^x - 6.4^x > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{9}{4}\right)^x - 5.\left(\frac{3}{2}\right)^x - 6 > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x > 6 \Leftrightarrow x > \log_{\frac{3}{2}} 6$.

Kết hợp điều kiện ta được nghiệm của bất phương trình đã cho là $\log_{\frac{3}{2}} 6 < x < 49$.

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{5; 6; ....; 48\} \Rightarrow$ có 44 giá trị nguyên của x.

Vậy bất phương trình đã cho có 44 nghiệm nguyên.

Câu 5: Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{x+2}} > 5^{-x}$.

Ta có: $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{x+2}} > 5^{-x} \Leftrightarrow 5^{-\sqrt{x+2}} > 5^{-x} \Leftrightarrow -\sqrt{x+2} > -x \Leftrightarrow \sqrt{x+2} < x \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x > 0 \\ x+2 < x^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x > 0 \\ x^2 - x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x > 0 \\ x < -1 \vee x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (2; +\infty)$.

Câu 6: Cho bất phương trình $\log_{m^2+1}\left[x^3 + (m-3)x^2 - mx - m^2 + 2m + 1\right] > \log_{m^2+1}\left(1 - x^2\right)$. Tập hợp các giá trị của m để bất phương trình trên có nghiệm $(a;b)$. Giá trị của biểu thức $a^2 + b^2$ là

A. 3. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_{m^2+1}\left[x^3 + (m-3)x^2 - mx - m^2 + 2m + 1\right] > \log_{m^2+1}\left(1 - x^2\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + (m-3)x^2 - mx - m^2 + 2m + 1 > 1 - x^2 \\ 1 - x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + (m-2)x^2 - mx - m^2 + 2m > 0 \\ x \in (-1;1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2 - m\right)(x + m - 2) > 0 \\ x \in (-1;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 < m < 2 - x \\ x \in (-1;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \min\limits_{[-1;1]}\left(x^2\right) < m < \max\limits_{[-1;1]}(2 - x) \\ x \in (-1;1) \end{cases}$

$\Rightarrow m \in (0;3) \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = 9$

Câu 7: Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $\log_a\left(x^2 - x - 2\right) > \log_a\left(-x^2 + 2x + 3\right)$. Biết $S = (m;n)$ và $\frac{7}{3}$ thuộc S, tính $m + n$.

A. $m + n = \frac{13}{3}$. **B.** $m + n = \frac{7}{2}$. **C.** $m + n = \frac{11}{3}$. **D.** $m + n = \frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - x - 2 > 0 \\ -x^2 + 2x + 3 > 0 \\ 0 < a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 3 \\ 0 < a \neq 1 \end{cases}$.

Do $x = \frac{7}{3}$ là nghiệm của bất phương trình đã cho nên $\log_a \frac{10}{9} > \log_a \frac{20}{9} \Rightarrow 0 < a < 1$.

Vì $0<a<1$ nên bất phương trình $\Leftrightarrow x^2-x-2<-x^2+2x+3$

$\Leftrightarrow 2x^2-3x-5<0 \Leftrightarrow -1<x<\dfrac{5}{2} \xrightarrow{2<x<3} 2<x<\dfrac{5}{2}$. Vì vậy $m+n=2+\dfrac{5}{2}=\dfrac{9}{2}$

Câu 8: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left[\log_3\left(x^2+1\right)-\log_3\left(x+31\right)\right]\left(32-2^{x-1}\right)\geq 0$?

A. Vô số. **B.** 28. **C.** 26. **D.** 27.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x>-31$.

Ta có $\left[\log_3\left(x^2+1\right)-\log_3\left(x+31\right)\right]\left(32-2^{x-1}\right)\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{cases}\log_3\left(x^2+1\right)-\log_3\left(x+31\right)\geq 0\\ 32-2^{x-1}\geq 0\end{cases}\right.$
$\left.\begin{cases}\log_3\left(x^2+1\right)-\log_3\left(x+31\right)\leq 0\\ 32-2^{x-1}\leq 0\end{cases}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{cases}x^2+1\geq x+31\\ 2^{x-1}\leq 32\end{cases}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases}x^2-x-30\geq 0\\ 2^{x-1}\leq 2^5\end{cases}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\leq -5\\ x\geq 6\end{array}\right.\\ x\leq 6\end{cases}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\leq -5\\ x=6\end{array}\right.$.
$\left.\begin{cases}x^2+1\leq x+31\\ 2^{x-1}\geq 32\end{cases}\right. \left.\begin{cases}x^2-x-30\leq 0\\ 2^{x-1}\geq 2^5\end{cases}\right. \left.\begin{cases}-5\leq x\leq 6\\ x\geq 6\end{cases}\right.$

Kết hợp với điều kiện $x>-31$ ta có $\left[\begin{array}{l}-31<x\leq -5\\ x=6\end{array}\right.$.

Vậy có 27 số nguyên x.

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3x^2} < 5^{5x+2}$ là

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3x^2} < 5^{5x+2} \Leftrightarrow 5^{3x^2} < 5^{5x+2} \Leftrightarrow 3x^2 < 5x+2 \Leftrightarrow 3x^2 - 5x - 2 < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < 2$.

Do $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{0;1\}$.

Số nghiệm nguyên của bất phương trình là 2.

Câu 2: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+1} < 32$ là

A. $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. **B.** $\left(-\infty;-\sqrt{6}\right)\cup\left(\sqrt{6};+\infty\right)$.

C. $\left(-\sqrt{6};\sqrt{6}\right)$. **D.** $(-2;2)$.

Lời giải

Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow 2^{x^2-1} < 2^5 \Leftrightarrow x^2 - 1 < 5 \Leftrightarrow x^2 < 6 \Leftrightarrow -\sqrt{6} < x < \sqrt{6}.$

Câu 3: Bất phương trình $3^{x^2-6x-16} < 9^{x+2}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 12. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 9.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $3^{x^2-6x-16} < 9^{x+2} \Leftrightarrow 3^{x^2-6x-16} < 3^{2x+4} \Leftrightarrow x^2 - 6x - 16 < 2x + 4 \Leftrightarrow -2 < x < 10$

Vì $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-1;0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.

Câu 4: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{x-1} < 5^{x+3}$ là

A. $(0;+\infty)$ **B.** $(-5;+\infty)$ **C.** $(-\infty;0)$ **D.** $(-\infty;-5)$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{x-1} < 5^{x+3} \Leftrightarrow \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{x-1} < 5^{x+3} \Leftrightarrow 5^{\frac{x-1}{3}} < 5^{x+3} \Leftrightarrow \frac{x-1}{3} < x+3 \Leftrightarrow x-1 < 3x+9$

$\Leftrightarrow 2x > -10 \Leftrightarrow x > -5$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-5;+\infty)$.

Câu 5: Bất phương trình: $8^{x(x+1)} < 4^{x^2-1}$ có tập nghiệm $S = (a;b)$. Tính giá trị $T = a + 3b$.

A. $T = 7$. **B.** $T = -7$. **C.** $T = 5$. **D.** $T = -5$.

Lời giải

Chọn D

Bất phương trình $8^{x(x+1)} < 4^{x^2-1} \Leftrightarrow 2^{3x(x+1)} < 2^{2x^2-2}$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 3x < 2x^2 - 2 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < -1$

Nên tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-2;-1)$. Vậy $\begin{cases}a=-2\\b=-1\end{cases}\Rightarrow T=a+3b=-2-3=-5.$

Câu 6: Tập nghiệm của bất phương trình $5.6^{x+1}\le 2.3^{x+1}$ là

A. $(-\infty;-\log_2 5]$ **B.** $(-\log_2 5;0)$ **C.** $[-\log_2 5;0)$ **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{10}\right)$

Lời giải

Chọn A

Ta có

$5.6^{x+1}\le 2.3^{x+1}\Leftrightarrow\left(\frac{6}{3}\right)^{x+1}\le\frac{2}{5}\Leftrightarrow 2^{x+1}\le\frac{2}{5}\Leftrightarrow x+1\le\log_2\frac{2}{5}\Leftrightarrow x+1\le 1-\log_2 5\Leftrightarrow x\le-\log_2 5$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $S=(-\infty;-\log_2 5]$.

Câu 7: Tập nghiệm của bất phương trình $6^{2x+1}\ge 6^{x^2-3x+7}$ là

A. $[1;6]$. **B.** $[2;3]$. **C.** $[1;5]$. **D.** $(-\infty;1]\cup[6;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $6^{2x+1}\ge 6^{x^2-3x+7}\Leftrightarrow 2x+1\ge x^2-3x+7\Leftrightarrow x^2-5x+6\le 0\Leftrightarrow 2\le x\le 3$.

Vậy $S=[2;3]$.

Câu 8: Tập nghiệm của bất phương trình $(3^x+2)(4^{x+1}-8^{2x+1})\le 0$

A. $\left[-\frac{1}{4};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right]$. **C.** $(-\infty;4]$ **D.** $[4;+\infty)$.

Lời giải

Do $3^x+2>0\ \forall x$ nên $(3^x+2)(4^{x+1}-8^{2x+1})\le 0\Leftrightarrow 4^{x+1}-8^{2x+1}\le 0\Leftrightarrow 4^{x+1}\le 8^{2x+1}$

$\Leftrightarrow 2^{2x+2}\le 2^{6x+3}\Leftrightarrow 2x+2\le 6x+3\Leftrightarrow 4x\ge -1\Leftrightarrow x\ge-\frac{1}{4}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left[-\frac{1}{4};+\infty\right)$.

Câu 9: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2}>2^{4-3x}$ là

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2}>2^{4-3x}\Leftrightarrow 2^{-x^2+2}>2^{4-3x}\Leftrightarrow -x^2+2>4-3x\Leftrightarrow -x^2+3x-2>0$

$\Leftrightarrow x\in(1;2)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2}>2^{4-3x}$ là $(1;2)$.

Câu 10: Tập nghiệm của bất phương trình $5^{x+2} < \left(\frac{1}{25}\right)^{-x}$ là:

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $5^{x+2} < \left(\frac{1}{25}\right)^{-x} \; 5^{x+2} < 5^{2x} \Leftrightarrow x+2 < 2x \Leftrightarrow x > 2$.

Câu 11: Bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} < 4$ có bao nhiêu nghiệm nguyên âm?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} < 4 \Leftrightarrow 2^{-x-2} < 2^2 \Leftrightarrow -x-2 < 2 \Leftrightarrow x > -4$.

Bất phương trình có 3 nghiệm nguyên âm.

Câu 12: Tập nghiệm của bất phương trình $5^{x+3} < 25^{2x-3}$ là

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(-\infty;3)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $5^{x+3} < 25^{2x-3} \Leftrightarrow 5^{x+3} < \left(5^2\right)^{2x-3} \Leftrightarrow 5^{x+3} < 5^{4x-6} \Leftrightarrow x+3 < 4x-6 \Leftrightarrow 3x > 9 \Leftrightarrow x > 3$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(3;+\infty)$.

Câu 13: Bất phương trình $3^{|x|} < 81$ có tập nghiệm là

A. $[0;4]$. **B.** $(0;4)$. **C.** $(-\infty;4)$. **D.** $(-4;4)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $3^{|x|} < 81 \Leftrightarrow 3^{|x|} < 3^4 \Leftrightarrow |x| < 4 \Leftrightarrow -4 < x < 4.$

Câu 14: Bất phương trình $8^{x(x+1)} < 4^{x^2-1}$ có tập nghiệm $S = (a;b)$. Tính giá trị $T = a+3b$.

A. $T = -7$. **B.** $T = 7$. **C.** $T = 5$. **D.** $T = -5$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $8^{x(x+1)} < 4^{x^2-1} \Leftrightarrow 2^{3x^2+3x} < 2^{2x^2-2} \Leftrightarrow 3x^2+3x < 2x^2-2 \Leftrightarrow x^2+3x+2 < 0 \Leftrightarrow x \in (-2;-1)$.

Vậy $T = a+3b = -2+3.(-1) = -5$.

Câu 15: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\sqrt{x}} > \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2-\sqrt{x}}$ là

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $[0;1)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\sqrt{x}} > \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2-\sqrt{x}} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ \sqrt{x} < 2-\sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ \sqrt{x} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le x < 1.$

Do vậy, tập nghiệm của bất phương trình là: $S = [0;1)$.

Câu 16: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-1).$

A. $S = \left(\frac{1}{2};2\right).$ **B.** $S = (-1;2).$ **C.** $S = (2;+\infty).$ **D.** $S = (-\infty;2).$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1>0 \\ 2x-1>0 \\ x+1>2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>\frac{1}{2} \\ x<2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 2.$

Do đó tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(\frac{1}{2};2\right).$

Câu 17: Tập nghiệm của bất phương trình $2\log_2(x-1) \le \log_2(5-x)+1$ là

A. $(-\infty;-3] \cup [1;+\infty).$ **B.** $(1;3].$ **C.** $[-3;1].$ **D.** $[-1;0].$

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $1 < x < 5$

Ta có: $2\log_2(x-1) \le \log_2(5-x)+1 \Leftrightarrow \log_2(x-1)^2 \le \log_2(10-2x)$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 \le 10-2x \Leftrightarrow x^2 \le 9 \Leftrightarrow -3 \le x \le 3.$

Kết hợp với điều kiện suy ra tập nghiệm là: $S = (1;3]$

Câu 18: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_5(x+1) > 2$ là

A. $(9;+\infty).$ **B.** $(24;+\infty).$ **C.** $(31;+\infty).$ **D.** $(25;+\infty;).$

Lời giải

Điều kiện: $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1.$

Khi đó: $\log_5(x+1) > 2 \Leftrightarrow x+1 > 25 \Leftrightarrow x > 24.$

Kết hợp điều kiện ta có, tập nghiệm của bất phương trình là: $T = (24;+\infty).$

Câu 19: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > 1.$

A. $S = \left[1;\frac{3}{2}\right).$ **B.** $S = \left(-\infty;\frac{3}{2}\right).$ **C.** $S = \left(\frac{3}{2};+\infty\right).$ **D.** $S = \left(1;\frac{3}{2}\right).$

Lời giải

Chọn D

$\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > 1 \Leftrightarrow 0 < x-1 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 < x < \frac{3}{2}$. Vậy tập nghiệm là $S = \left(1;\frac{3}{2}\right).$

Câu 20: Tập nghiệm của bất phương trình $\log(x+2)<1$ là

A. $(-\infty;8)$. **B.** $(-2;+\infty)$. **C.** $(-2;8)$. **D.** $(8;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình $\log(x+2)<1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2>0 \\ x+2<10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x<8 \end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $\log(x+2)<1$ là $T=(-2;8)$

Câu 21: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_4(x+6)<2-2\log_4 x$ bằng

A. 2. **B.** Vô số. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x>0$.

Ta có: $\log_4(x+6)<2-2\log_4 x \Leftrightarrow \log_4(x+6)<\log_4\frac{16}{x^2}$

$\Leftrightarrow x+6<\frac{16}{x^2} \Leftrightarrow x^3+6x^2-16<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-2-2\sqrt{3} \\ -2<x<-2+2\sqrt{3}. \end{array}\right.$

So với điều kiện ta có $0<x<-2+2\sqrt{3}$.

Suy ra nghiệm nguyên của bất phương trình đã cho là $x=1$.

Vậy bất phương trình có 1 nghiệm nguyên.

Câu 22: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)<\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$ là

A. $S=\left(\frac{1}{2};2\right)$. **B.** $S=(-1;2)$. **C.** $S=(-\infty;2)$. **D.** $S=(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)<\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1>2x-1 \\ 2x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ x>\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2}<x<2$.

Câu 23: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_5\frac{x^2-4}{49}<\log_7\frac{x^2-4}{25}$?

A. 66. **B.** 70. **C.** 33. **D.** 64.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x^2-4>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-2 \\ x>2 \end{array}\right.$.

Ta có: $\log_5(x^2-4)-2\log_5 7<\log_7(x^2-4)-2\log_7 5$

$\Leftrightarrow \log_5\left(x^2-4\right)-2\log_5 7<\dfrac{\log_5\left(x^2-4\right)}{\log_5 7}-2\log_7 5$

$\Leftrightarrow \log_5\left(x^2-4\right)\left(1-\log_7 5\right)<2\left[\dfrac{1}{\log_7 5}-\log_7 5\right)$

$\Leftrightarrow \log_5\left(x^2-4\right)<2\dfrac{1+\log_7 5}{\log_7 5} \Leftrightarrow \log_5\left(x^2-4\right)<2\log_5 35$

$\Leftrightarrow x^2-4<35^2 \Leftrightarrow -\sqrt{1229}<x<\sqrt{1229}$

Kết hợp điều kiện ta được: $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2<x<\sqrt{1229} \\ -\sqrt{1229}<x<-2 \end{array}\right.$

Từ đó suy ra có 66 số nguyên x thỏa mãn**.**

Câu 24: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(x+1\right)<\log_{\frac{1}{2}}\left(2x-1\right).$

A. $S=\left(-\infty;2\right).$ **B.** $S=\left(\dfrac{1}{2};2\right).$ **C.** $S=\left(2;+\infty\right).$ **D.** $S=\left(-1;2\right).$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}\left(x+1\right)<\log_{\frac{1}{2}}\left(2x-1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1>2x-1 \\ 2x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ x>\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Vậy tập nghiệm S của bất phương trình đã cho là $S=\left(\dfrac{1}{2};2\right).$

Câu 25: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(2x+3\right)<\log_3\left(1-x\right)$ là khoảng $\left(a;b\right)$. Giá trị $a.b$ bằng

A. $\dfrac{2}{3}.$ **B.** $\dfrac{3}{2}.$ **C.** $-1.$ **D.** $1.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_3\left(2x+3\right)<\log_3\left(1-x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3<1-x \\ 2x+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x<-2 \\ x>-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{3}{2}<x<-\dfrac{2}{3}.$

Khi đó $a.b=-\dfrac{3}{2}.\left(-\dfrac{2}{3}\right)=1.$

Câu 26: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2\left(x+1\right)<\log_2\left(3-x\right)$ là

A. $S=\left(-1;1\right).$ **B.** $S=\left(1;+\infty\right).$ **C.** $S=\left(1;3\right].$ **D.** $S=\left(-\infty;1\right)$

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases} x+1>0 \\ 3-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x<3.$

Ta có: $\log_2\left(x+1\right)<\log_2\left(3-x\right) \Rightarrow x+1<3-x \Leftrightarrow x<1.$

Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $(-1;1)$.

Câu 27: Tất cả các giá trị nguyên của x thoả mãn bất phương trình $\log_{\frac{\pi}{4}}\left(x^2-3x\right)<\log_{\frac{\pi}{4}}(x+4)$

A. $2-2\sqrt{2}<x<2+2\sqrt{2}$.

B. $\left[\begin{array}{l} x<2-2\sqrt{2} \\ x>2+2\sqrt{2} \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} -4<x<2-2\sqrt{2} \\ x>2+2\sqrt{2} \end{array}\right.$.

D. $2-2\sqrt{2}<x<0$.

Lời giải

Chọn C

$$\log_{\frac{\pi}{4}}\left(x^2-3x\right)<\log_{\frac{\pi}{4}}(x+4)\Leftrightarrow\begin{cases} x^2-3x>x+4 \\ x+4>0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^2-4x-4>0 \\ x>-4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l} x>2+2\sqrt{2} \\ x<2-2\sqrt{2} \end{array}\right. \\ x>-4 \end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} -4<x<2-2\sqrt{2} \\ x>2+2\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Câu 28: Bất phương trình $2\log_3(4x-3)+\log_{\frac{1}{9}}(2x+3)^2\le 2$ có tập nghiệm là

A. $\left(\frac{3}{4};+\infty\right)$.

B. $\left(\frac{3}{4};3\right]$.

C. $\left(-\frac{3}{8};3\right)$.

D. $\left[-\frac{3}{8};3\right]$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $\begin{cases} 4x-3>0 \\ (2x+3)^2>0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x>\frac{3}{4} \\ x\ne-\frac{3}{2} \end{cases}\Leftrightarrow x>\frac{3}{4}$

Khi đó: $2\log_3(4x-3)+\log_{\frac{1}{9}}(2x+3)^2\le 2\Leftrightarrow\log_3(4x-3)^2-\frac{1}{2}.2\log_3(2x+3)\le 2$

$$\Leftrightarrow\log_3\frac{(4x-3)^2}{2x+3}\le 2\Leftrightarrow\frac{(4x-3)^2}{2x+3}\le 9\Leftrightarrow 16x^2-42x-18\le 0\Leftrightarrow-\frac{3}{8}\le x\le 3.$$

So với điều kiện $x>\frac{3}{4}$. Tập nghiệm của bất phương trình là $\left(\frac{3}{4};3\right]$.

Câu 29: Tìm tất cả các nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{2}{5}\right)^{3x+2}\le\left(\frac{5}{2}\right)^{x^2}$.

A. $\left[\begin{array}{l} x\ge 2 \\ x\le 1 \end{array}\right.$.

B. $1\le x\le 2$.

C. $-2\le x\le 1$.

D. $\left[\begin{array}{l} x\ge -1 \\ x\le -2 \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\left(\frac{2}{5}\right)^{3x+2}\le\left(\frac{5}{2}\right)^{x^2}\Leftrightarrow\left(\frac{5}{2}\right)^{-3x-2}\le\left(\frac{5}{2}\right)^{x^2}\Leftrightarrow -3x-2\le x^2\Leftrightarrow x^2+3x+2\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x\ge -1 \\ x\le -2 \end{array}\right.$.

Câu 30: Tập nghiệm của bất phương trình $1+\log_2(x-2)>\log_2(x-1)$ là

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $1+\log_2(x-2)>\log_2(x-1)$

Điều kiện: $\begin{cases}x-2>0\\x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>2\\x>1\end{cases}\Leftrightarrow x>2 \quad (1)$.

$1+\log_2(x-2)>\log_2(x-1)\Leftrightarrow\log_2\left[2.(x-2)\right]>\log_2(x-1)\Leftrightarrow 2x-4>x-1\Leftrightarrow x>3 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S=(3;+\infty)$.

Câu 31: Tập hợp nghiệm của bất phương trình $2\log_3(4x-3)+\log_{\frac{1}{3}}(2x+3)\le 2$ là $S=(a;b]$. Giá trị của $b-a$

A. $\frac{15}{7}$. **B.** $\frac{27}{8}$. **C.** $\frac{9}{4}$. **D.** $\frac{150}{67}$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác đinh: $D=\left(\frac{3}{4};+\infty\right)$

Ta có: $2\log_3(4x-3)+\log_{\frac{1}{3}}(2x+3)\le 2\Leftrightarrow\log_3(4x-3)^2-\log_3(2x+3)\le\log_3 9$

$\Leftrightarrow\log_3(4x-3)^2\le\log_3 9+\log_3(2x+3)\Leftrightarrow\log_3(4x-3)^2\le\log_3 9(2x+3)$

$\Leftrightarrow(4x-3)^2\le 9(2x+3)\Leftrightarrow 16x^2-42x-18\le 0\Leftrightarrow x\in\left[\frac{-3}{8};3\right]$

Kết hợp với điều kiện: $\left(\frac{3}{4};3\right]\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{3}{4};b-a=\frac{9}{4}\\b=3\end{cases}$

Câu 32: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{5}}(x^2-1)<\log_{\frac{1}{5}}(3x-3)$.

A. $S=(2;+\infty)$. **B.** $S=(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

C. $S=(1;2)$. **D.** $S=(-1;2)$

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $3x-3>0\Rightarrow x>1$

Bất phương trình tương đương $\log_{\frac{1}{5}}(x^2-1)<\log_{\frac{1}{5}}(3x-3)$

$\Leftrightarrow x^2-1>3x-3\Leftrightarrow x^2-3x+2>0\Leftrightarrow\begin{cases}x<1\\x>2\end{cases}$

Kết hợp điều kiện ta được $x>2$.

Câu 33: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)+\log_2(3x-3)<0$ là

A. $S=(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$. **B.** $S=(1;2)$.

C. $S=(-1;2)$. **D.** $S=(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x>1$.

Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)+\log_2(3x-3)<0\Leftrightarrow\log_2(3x-3)<\log_2(x^2-1)$

$\Leftrightarrow 3x-3<x^2-1\Leftrightarrow x^2-3x+2>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>2\\x<1\end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện, ta được tập nghiệm bất phương trình là $S=(2;+\infty)$.

Câu 34: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{0,8}(15x+2)>\log_{0,8}(13x+8)$ là

A. Vô số. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $x>-\frac{2}{15}$.

Khi đó, $\log_{0,8}(15x+2)>\log_{0,8}(13x+8)\Leftrightarrow 15x+2<13x+8\Leftrightarrow 2x<6\Leftrightarrow x<3$.

Tập nghiệm bất phương trình là: $T=\left(-\frac{2}{15};3\right)\Rightarrow x\in\{0;1;2\}$.

Câu 35: Cho các số thực dương x,y thỏa mãn $\left(\frac{10}{9}\right)^{2x^2-5xy}\le\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^{xy+5y^2}$.

Hiệu giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{x}{y}$ bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $\frac{5}{4}$

Lời giải

Chọn B.

$\left(\frac{10}{9}\right)^{2x^2-5xy}\le\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^{xy+5y^2}\Leftrightarrow\left(\frac{10}{9}\right)^{2x^2-5xy}\le\left(\frac{10}{9}\right)^{\frac{-(xy+5y^2)}{2}}$

$\Leftrightarrow 2x^2-5xy\le\frac{-(xy+5y^2)}{2}\Leftrightarrow 4x^2-9xy+5y^2\le 0$

$\Leftrightarrow(4x-5y)(x-y)\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4x-5y\le 0\\x-y\ge 0\end{cases}\\\begin{cases}4x-5y\ge 0\\x-y\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{x}{y}\le\frac{5}{4}\\\frac{x}{y}\ge 1\end{array}\right.$

Vậy $\min\frac{x}{y}=1;\max\frac{x}{y}=\frac{5}{4}$ nên $\max\frac{x}{y}-\min\frac{x}{y}=\frac{5}{4}-1=\frac{1}{4}$.

Câu 36: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^{x^2+2mx+1} \le \left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right)^{2x-3m}$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$?

A. 8. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Ta có: $\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^{x^2+2mx+1} \le \left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right)^{2x-3m} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^{x^2+2mx+1} \le \left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^{-2x+3m} \Leftrightarrow x^2+2mx+1 \ge -2x+3m$

$\Leftrightarrow x^2+2(m+1)x+1-3m \ge 0$, $(*)$

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ Bất phương trình $(*)$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \le 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2-(1-3m) \le 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2+5m \le 0 \Leftrightarrow -5 \le m \le 0$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-5;-4;-3;-2;-1;0\}$.

Câu 37: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_2 \frac{x^2-16}{54} < \log_3 \frac{x^2-16}{24}$?

A. 10.. **B.** 11.. **C.** 22.. **D.** 20.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D=(-\infty;-4)\cup(4;+\infty)$.

Ta có: $\log_2 \frac{x^2-16}{54} < \log_3 \frac{x^2-16}{24} \Leftrightarrow \log_2(x^2-16)-\log_2 54 < \log_3(x^2-16)-\log_3 24$

$\Leftrightarrow \log_2 3.\log_3(x^2-16)-\log_3(x^2-16) < 3\log_2 3-3\log_3 2$

$\Leftrightarrow (\log_2 3-1).\log_3(x^2-16) < 3(\log_2 3-\log_3 2)$

$\Leftrightarrow \log_3(x^2-16) < \frac{3(\log_3 2-\log_2 3)}{1-\log_2 3} \Leftrightarrow \log_3(x^2-16) < \frac{3\left(\log_3 2-\frac{1}{\log_3 2}\right)}{1-\frac{1}{\log_3 2}}$

$\Leftrightarrow \log_3(x^2-16) < \log_3 216 \Leftrightarrow x^2-232<0 \Leftrightarrow -\sqrt{232} < x < \sqrt{232}$

Kết hợp với điều kiện ta có các số nguyên x thuộc tập hợp $[-15;-5]\cup[5;15]$

Suy ra có 22 số nguyên x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 38: Số các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $2^{2x^2+2x-2}-2^{x^2+4x+m}-2^{x^2-2x-m}+4<0$ có không quá 6 nghiệm nguyên là:

A. 7. **B.** 4. **C.** 10. **D.** 9.

Lời giải

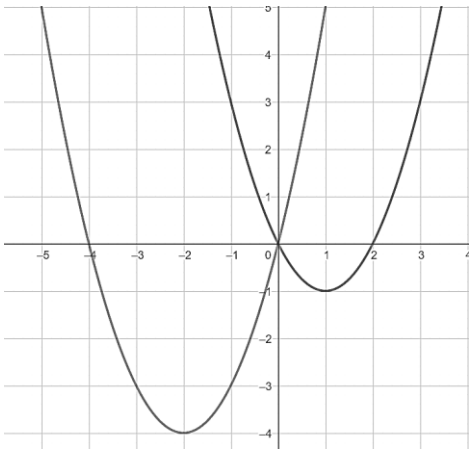
Chọn B

Đặt: $\begin{cases} x^2+4x+m=a \\ x^2-2x-m=b \end{cases} \Rightarrow 2x^2+2x-2=a+b-2$

Ta có: $2^{a+b-2}-2^a-2^b+4<0 \Leftrightarrow 2^{a+b}-2^{a+2}-2^{b+2}+2^4<0$

$\Leftrightarrow 2^a\left(2^b-2\right)-2^2\left(2^b-2^2\right)<0\Leftrightarrow\left(2^a-2^2\right)\left(2^b-2^2\right)<0$

Trường hợp 1: $\begin{cases}a>2\\b<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+4x+m>2\\x^2-2x-m<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+4x>2-m\\x^2-2x<2+m\end{cases}$



Để phương trình có không quá 6 nghiệm nguyên thì: $-1<2+m<2\Leftrightarrow -3<m<0$

Trường hợp 2: $\begin{cases}a<2\\b>2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+4x+m<2\\x^2-2x-m>2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+4x<2-m\\x^2-2x>2+m\end{cases}$

Để phương trình có không quá 6 nghiệm nguyên thì: $-4<2-m<-1\Leftrightarrow 3<m<6$

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên có: 4 giá trị m thỏa mãn.

Câu 39: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left[\log_3\left(x^2+1\right)-\log_3\left(x+31\right)\right]\left(32-2^{x-1}\right)\ge 0$ **?**

A. 27. **B.** Vô số. **C.** 28. **D.** 26.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\left[\log_3\left(x^2+1\right)-\log_3\left(x+31\right)\right]\left(32-2^{x-1}\right)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{cases}\log_3\left(x^2+1\right)-\log_3\left(x+31\right)\ge 0\\32-2^{x-1}\ge 0\end{cases}\right.$
$\left.\begin{cases}\log_3\left(x^2+1\right)-\log_3\left(x+31\right)\le 0\\32-2^{x-1}\le 0\end{cases}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{cases}\log_3\left(x^2+1\right)\ge\log_3\left(x+31\right)\\2^{x-1}\le 32\end{cases}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{cases}x^2+1\ge x+31\\x+31>0\\2^{x-1}\le 2^5\end{cases}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{cases}x^2-x-30\ge 0\\x>-31\\x\le 6\end{cases}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-31<x\le -5\\x=6\end{array}\right.$
$\left.\begin{cases}\log_3\left(x^2+1\right)\le\log_3\left(x+31\right)\\2^{x-1}\ge 32\end{cases}\right.\left.\begin{cases}x^2+1\le x+31\\2^{x-1}\ge 2^5\end{cases}\right.\left.\begin{cases}x^2-x-30\le 0\\x\ge 6\end{cases}\right.$

Mà $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{-30;-29;-28;....;-6;-5;6\}$

Vậy có 27 số nguyên x thỏa đề.

Câu 40: Bất phương trình $\log_2\left(x^2-x-2\right)\ge\log_{0,5}\left(x-1\right)+1$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thuộc [0;2023] ?

A. 2019. **B.** 2022. **C.** 2021. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn C

$\log_2\left(x^2-x-2\right)\ge\log_{0,5}\left(x-1\right)+1$

Điều kiện: $\begin{cases}x-1>0\\x^2-x-2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\\left[\begin{array}{l}x<-1\\x>2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x>2$

Ta có: $\log_2\left(x^2-x-2\right)\ge\log_{0,5}\left(x-1\right)+1\Leftrightarrow\log_2\left(x^2-x-2\right)\ge-\log_2\left(x-1\right)+1$

$\Leftrightarrow\log_2\left(x^2-x-2\right)\left(x-1\right)\ge1\Leftrightarrow\left(x^2-x-2\right)\left(x-1\right)\ge2\Leftrightarrow x^3-2x^2-x\ge0$

$\Leftrightarrow x\in\left[1-\sqrt{2};0\right]\cup\left[1+\sqrt{2};+\infty\right)$

So với điều kiện $\Rightarrow x\in\left[1+\sqrt{2};+\infty\right)$

Vậy có 2021 nghiệm nguyên x thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 41: Với m là tham số thực dương khác 1. Hãy tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_m\frac{1}{2}\left(x+2\right)-2\log_m x>\log_{\frac{1}{m}}\left(x^2-x\right)$ biết rằng $x=\frac{5}{4}$ là nghiệm của bất phương trình

A. $S=\left(1;2\right)$. **B.** $S=\left(1;2\right)\cup\left(2;+\infty\right)$. **C.** $S=\left(0;2\right)$. **D.** $S=\left(2;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $x=\frac{5}{4}$ là nghiệm của $\log_m\frac{1}{2}\left(x+2\right)-2\log_m x>\log_{\frac{1}{m}}\left(x^2-x\right)$ nên:

$\log_m\frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}+2\right)-2\log_m\frac{5}{4}>\log_{\frac{1}{m}}\left[\left(\frac{5}{4}\right)^2-\frac{5}{4}\right]$

$\Leftrightarrow\log_m\frac{13}{8}-\log_m\frac{25}{16}>\log_m\frac{16}{5}\Leftrightarrow\log_m\frac{26}{25}>\log_m\frac{16}{5}\Leftrightarrow0<m<1.$

Khi đó: $\log_m\frac{1}{2}\left(x+2\right)-2\log_m x>\log_{\frac{1}{m}}\left(x^2-x\right)$

$\Leftrightarrow\log_m\frac{1}{2}\left(x+2\right)+\log_m\left(x^2-x\right)>\log_m x^2\Leftrightarrow x^2-x+\frac{1}{2}.\left(x+2\right)<x^2\Leftrightarrow x>2.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=\left(2;+\infty\right)$.

Câu 42: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_2\left(8x^2\right)+\log_3\left(3x^3\right)\ge\log_2 x.\log_3 x$?

A. 27. **B.** 8. **C.** 134. **D.** 133.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x>0$. Với điều kiện trên, bpt tương đương với:

$3+2\log_2 x+1+3\log_3 x-\log_2 x.\log_3 x\ge0$

$\Leftrightarrow2\log_2 x+3\log_3 2.\log_2 x-\log_2 x.\log_3 2.\log_2 x+4\ge0$

$\Leftrightarrow-\log_3 2.\left(\log_2 x\right)^2+\left(2+3\log_3 2\right).\log_2 x+4\ge0$

$\Leftrightarrow\underbrace{-0,897...}_{A}\le\log_2 x\le\underbrace{7,067...}_{B}\Leftrightarrow0,536...\le x\le134,087...$ Vì $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\left\{1;2;...;134\right\}$.

Câu 43: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_3 \frac{x^2-9}{125} \le \log_5 \frac{x^2-9}{27}$?

A. 116. **B.** 58. **C.** 117. **D.** 110.

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D = (-\infty;-3) \cup (3;+\infty)$.

Ta có: $\log_3 \frac{x^2-9}{125} \le \log_5 \frac{x^2-9}{27} \Leftrightarrow \frac{1}{\ln 3} \ln(x^2-9) - \ln 125 \le \frac{1}{\ln 5} \ln(x^2-9) - \ln 27$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\ln 3} \ln(x^2-9) - 3\ln 5 \le \frac{1}{\ln 5} \ln(x^2-9) - 3\ln 3$

$\Leftrightarrow (\ln 5 - \ln 3) \ln(x^2-16) \le 3(\ln^2 5 - \ln^2 3)$

$\Leftrightarrow \ln(x^2-9) \le 3(\ln 5 + \ln 3)$

$\Leftrightarrow x^2 - 9 \le 15^3 \Leftrightarrow -\sqrt{3384} \le x \le \sqrt{3384}$

Kết hợp điều kiện ta có $x \in \{-58;-57;...;-4;4;...;57;58\}$. Vậy có 110 số nguyên x thỏa mãn.

Câu 44: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(2^{x^2} - 4^x\right)\left[\log_3(x+25) - 3\right] \le 0$?

A. 25 **B.** Vô số. **C.** 26. **D.** 24.

Lời giải

Điều kiện: $x > -25$

Ta có: $2^{x^2} - 4^x = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

$\log_3(x+25) - 3 = 0 \Leftrightarrow x + 25 = 27 \Leftrightarrow x = 2$

Bảng xét dấu

x	-25		0		2		$+\infty$
VT		$-$	0	$+$	0	$+$	

Vậy $x \in \{-24;-23;...;0;2\}$ nên có 26 giá trị.

Câu 45: Gọi S là tập hợp các nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2-3x-10}} > 3^{2-x}$. Số phần tử của S là

A. 1. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2-3x-10}} > 3^{2-x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2-3x-10}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x-10} < x-2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2>0 \\ x^2-3x-10 \ge 0 \\ x^2-3x-10 < (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ \left[\begin{array}{l} x \le -2 \\ x \ge 5 \end{array}\right. \\ x<14 \end{cases} \Leftrightarrow 5 \le x < 14.$

Do đó $S=\{5;6;7;8;9;10;11;12;13\}$ nên số phần tử của S là 9.

Câu 46: Cho bất phương trình $\log_7\left(x^2+2x+2\right)+1>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right)$. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình trên nghiệm đúng với mọi $x\in[1;3]$.

A. 187. **B.** 36. **C.** 198. **D.** 34.

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình $\log_7\left(x^2+2x+2\right)+1>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right)$ nghiệm đúng với mọi $x\in[1;3]$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}7x^2+14x+14>x^2+6x+5+m\\x^2+6x+5+m>0\end{cases},\forall x\in[1;3]\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=6x^2+8x+9>m\\g(x)=-x^2-6x-5<m\end{cases},\forall x\in[1;3]$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\min\limits_{[1;3]}f(x)=23>m\\\max\limits_{[1;3]}g(x)=-12<m\end{cases}\Leftrightarrow -12<m<23.$$

Vậy tổng các giá trị của tham số m là $\sum\limits_{m=-11}^{22}m=187$.

Câu 47: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn bất phương trình $\log_2(2x).\log\left(\dfrac{100}{x}\right)>2$?

A. 198. **B.** 48. **C.** 96. **D.** 149.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x>0$.

Phương trình: $\log_2(2x).\log\left(\dfrac{100}{x}\right)>2\Leftrightarrow(1+\log_2 x)(2-\log x)>2$

$\Leftrightarrow 2\log_2 x-\log x-\log_2 x.\log x>0\Leftrightarrow 2\log_2 x-\log 2.\log_2 x-\log_2 x.\log x>0$

$\Leftrightarrow\log_2 x(2-\log 2-\log x)>0\Leftrightarrow\log_2 x(\log 50-\log x)>0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{cases}\log_2 x>0\\\log 50-\log x>0\end{cases}\begin{cases}\log_2 x<0\\\log 50-\log x<0\end{cases}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<50\\x<1\vee 50<x\end{array}\right.\Leftrightarrow 0<x<50.$$

Câu 48: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left[\log_3(x^2-3x+29)-\log_3(x+15)-1\right]\left(2^{x+7}-32\right)<0$?

A. 24. **B.** 22. **C.** 21. **D.** 23.

Lời giải

Chọn B

$\left[\log_3(x^2-3x+29)-\log_3(x+15)-1\right]\left(2^{x+7}-32\right)<0$ (1)

Điều kiện xác định: $\begin{cases}x^2-3x+29>0\\x+15>0\end{cases}\Leftrightarrow x>-15$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_3(x^2-3x+29)-\log_3(x+15)-1<0\\ 2^{x+7}-32>0\end{cases}\\ \begin{cases}\log_3(x^2-3x+29)-\log_3(x+15)-1>0\\ 2^{x+7}-32<0\end{cases}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_3\dfrac{x^2-3x+29}{x+15}<1\\ 2^{x+7}>2^5\end{cases}\\ \begin{cases}\log_3\dfrac{x^2-3x+29}{x+15}>1\\ 2^{x+7}<2^5\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+29}{x+15}<3\\ x+7>5\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{x^2-3x+29}{x+15}>3\\ x+7<5\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-3x+29<3x+45\\ x>-2\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-3x+29>3x+45\\ x<-2\end{cases}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-6x-16<0\\ x>-2\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-6x-16>0\\ x<-2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-2<x<8\\ x>-2\end{cases}\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>8\\ x<-2\end{array}\right.\\ x<-2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2<x<8\\ x<-2\end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình (1) là: $T=(-15;8)\setminus\{-2\}$

Vậy có 22 giá trị nguyên của x thỏa mãn.

Câu 49: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(\log_3\left(x^2+10\right)-\log_3\left(x+40\right)\right)\left(32-2^{x-1}\right)\geq 0$?

A. Vô số. **B.** 38. **C.** 36. **D.** 37.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Ta có: $\left(\log_3\left(x^2+10\right)-\log_3\left(x+40\right)\right)\left(32-2^{x-1}\right)\geq 0$

Điều kiện: $x+40>0\Leftrightarrow x>-40$ $(*)$.

Xét $\left[\begin{array}{l}\log_3\left(x^2+10\right)-\log_3\left(x+40\right)=0\\ 32-2^{x-1}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3\left(x^2+10\right)=\log_3\left(x+40\right)\\ 32=2^{x-1}\end{array}\right.$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2+10=x+40\\ 5=x-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-x-30=0\\ x=6\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-5\\ x=6\end{array}\right.$ là nghiệm của bất phương trình.

Xét $\begin{cases}\log_3\left(x^2+10\right)-\log_3\left(x+40\right)\neq 0\\ 32-2^{x-1}\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq -5\\ x\neq 6\end{cases}$.

Khi đó $\left(\log_3\left(x^2+10\right)-\log_3\left(x+40\right)\right)\left(32-2^{x-1}\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\log_3\left(x^2+10\right)-\log_3\left(x+40\right)>0\\ 32-2^{x-1}>0\end{cases} \cup \begin{cases}\log_3\left(x^2+10\right)-\log_3\left(x+40\right)<0\\ 32-2^{x-1}<0\end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases}\log_3\left(x^2+10\right)>\log_3\left(x+40\right)\\ 32>2^{x-1}\end{cases} \cup \begin{cases}\log_3\left(x^2+10\right)<\log_3\left(x+40\right)\\ 32<2^{x-1}\end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+10 > x+40 \\ 5 > x-1 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2+10 < x+40 \\ 5 < x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-30 > 0 \\ x-6 < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2-x-30 < 0 \\ x-6 > 0 \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -5 \cup x > 6 \\ x < 6 \end{cases} \cup \begin{cases} -5 < x < 6 \\ x > 6 \end{cases} \Leftrightarrow x < -5$.

Từ các trường hợp trên, ta có nghiệm của bất phương trình là $-40 < x \le -5 \cup x = 6$.

Mà x nguyên nên ta có: $x \in \{-39; -38; \ldots -5; 6\}$.

Cách 2:

Chọn C

Điều kiện: $x+40 > 0 \Leftrightarrow x > -40$ $(*)$.

Ta xét $g(x) = \left(\log_3\left(x^2+10\right) - \log_3(x+40)\right)\left(32 - 2^{x-1}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \log_3\left(x^2+10\right) - \log_3(x+40) = 0 \\ 32 - 2^{x-1} = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = -5 \\ x = 6 \end{bmatrix}$.

Bảng xét dấu

x	-40		-5		6	$+\infty$
$log_3(x^2+10) - log_3(x+40)$	∥	$+$	0	$-$	0	$+$
$32 - 2^{x-1}$	∥	$+$	‖	$+$	0	$-$
$g(x)$	∥	$+$	0	$-$	0	$-$

Bất phương trình $\Leftrightarrow g(x) \ge 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -40 < x \le -5 \\ x = 6 \end{bmatrix}$

Mà x nguyên nên ta có: $x \in \{-39; -38; \ldots -5\} \cup \{6\}$.

Vậy có 36 giá trị nguyên x.

Câu 50: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left[\log_2\left(x^2+1\right) - \log_2(x+31)\right]\left(32 - 2^{x-1}\right) \ge 0$?

A. 26. **B.** 28. **C.** 29. **D.** 27.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x > -31$.

Cách 1:

Ta có: $\left[\log_2\left(x^2+1\right) - \log_2(x+31)\right]\left(32 - 2^{x-1}\right) \ge 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} \log_2\left(x^2+1\right) - \log_2(x+31) \ge 0 \\ 32 - 2^{x-1} \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_2\left(x^2+1\right) - \log_2(x+31) \le 0 \\ 32 - 2^{x-1} \le 0 \end{cases} \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} \log_2\left(x^2+1\right) \ge \log_2(x+31) \\ 2^5 \ge 2^{x-1} \end{cases} \\ \begin{cases} \log_2\left(x^2+1\right) \le \log_2(x+31) \\ 2^5 \le 2^{x-1} \end{cases} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} x^2+1 \ge x+31 \\ x-1 \le 5 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+1 \le x+31 \\ x-1 \ge 5 \end{cases} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} x^2-x-30 \ge 0 \\ x \le 6 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-x-30 \le 0 \\ x \ge 6 \end{cases} \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x\ge 6\\ x\le -5\end{array}\right.\\ x\le 6\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}-5\le x\le 6\\ x\ge 6\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\le -5\\ x=6\end{array}\right.$$. Kết hợp ĐKX $x>-31$ ta được $\left[\begin{array}{l}-31<x\le -5\\ x=6\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-31;-5]\cup\{6\}$.

Vì $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{-30;-29;...;-4;-5;6\}$. Vậy có 27 giá trị của x thỏa mãn.

Cách 2. Đặt $f(x)=\left[\log_2\left(x^2+1\right)-\log_2(x+31)\right]\left(32-2^{x-1}\right)$

$$f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2\left(x^2+1\right)-\log_2(x+31)=0\\ 32-2^{x-1}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2\left(x^2+1\right)=\log_2(x+31)\\ 2^{x-1}=32\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-x-30=0\\ x-1=5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=6\\ x=-5\end{array}\right.$$.

Bảng biến thiên

x	-31		-5		6		$+\infty$
$\log_2\left(x^2+1\right)-\log_2(x+31)$		+	0	−	0	+	
$32-2^{x-1}$		+	0	+	|	−	
$f(x)$		+	0	−	0	−	

Tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-31;-5]\cup\{6\}$.

Vì $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{-30;-29;...;-4;-5;6\}$. Vậy có 27 giá trị của x thỏa mãn.

Câu 51: Cho bất phương trình $\log_5\left(x^2+1\right)>\log_5\left(x^2+6x+m\right)-1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình trên có tập nghiệm chứa khoảng $(2;3)$?

A. 27. **B.** 24. **C.** 26. **D.** 25.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x^2+6x+m>0$.

Để $\log_5\left(5x^2+5\right)>\log_5\left(x^2+6x+m\right)$ có tập nghiệm chứa khoảng $(2;3)$

$\Leftrightarrow\log_5\left(5x^2+5\right)>\log_5\left(x^2+6x+m\right),\forall x\in(2;3)$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}5x^2+5>x^2+6x+m\\ x^2+6x+m>0\end{array}\right.,\forall x\in(2;3)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m<4x^2-6x+5\\ m>-x^2-6x\end{array}\right.,\forall x\in(2;3)$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\le 9\\ m\ge -16\end{array}\right.\Leftrightarrow -16\le m\le 9.$$

Câu 52: Cho bất phương trình $\log_5\left(x^2+1\right)>\log_5\left(x^2+6x+m\right)-1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình trên có tập nghiệm chứa khoảng $(2;3)$?

A. 27. **B.** 24. **C.** 26. **D.** 25.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x^2+6x+m>0$.

Để $\log_5\left(5x^2+5\right)>\log_5\left(x^2+6x+m\right)$ có tập nghiệm chứa khoảng $(2;3)$

$\Leftrightarrow \log_5\left(5x^2+5\right)>\log_5\left(x^2+6x+m\right), \forall x\in(2;3)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2+5>x^2+6x+m \\ x^2+6x+m>0 \end{cases}, \forall x\in(2;3) \Leftrightarrow \begin{cases} m<4x^2-6x+5 \\ m>-x^2-6x \end{cases}, \forall x\in(2;3)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\le 9 \\ m\ge -16 \end{cases} \Leftrightarrow -16\le m\le 9$.

Câu 53: Có bao nhiêu số tự nhiên $x\in[0;2023]$ thỏa mãn bất phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1)>\log_2(x+5)$?

A. 2023. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn B

Đk: x> 1

Khi đó $\log_{\sqrt{2}}(x-1)>\log_2(x+5) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2>x+5 \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x-4>0 \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>4\vee x<-1 \\ x>1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x>4$ mà x là số tự nhiên và $x\in[0;2023]$ nên $x\in\{5;6;7;...;2023\}$

Vậy có 2019 số tự nhiên x thỏa đề bài.

Câu 54: Cho bất phương trình $\log_3(x+1)+\log_{\frac{1}{2}}(x-2)\ge \log_4(x+1)^2-\log_3\left(\frac{x-2}{4}\right)-2$. Tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình bằng

A. 5. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x+1>0 \\ x-2>0 \end{cases} \Rightarrow x>2$.

Trên điều kiện, bất phương trình $\Leftrightarrow \log_3\left[\frac{(x+1)(x-2)}{4}\right]\ge \log_2\left[\frac{(x+1)(x-2)}{4}\right]$

$\Leftrightarrow \log_3 2.\log_2\left[\frac{(x+1)(x-2)}{4}\right]\ge \log_2\left[\frac{(x+1)(x-2)}{4}\right]$

$\Leftrightarrow \log_2\left[\frac{(x+1)(x-2)}{4}\right]\le 0 \Rightarrow (x+1)(x-2)\le 4 \Leftrightarrow -2\le x\le 3$.

Kết hợp điều kiện $x>2$, ta được: $2<x\le 3$ và $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=3$.

Câu 55: Cho bất phương trình $\log_2(x-1)<\log_5(5x-5)$ có tập nghiệm là $S=(a;b)$. Khi đó $b-a$ gần bằng giá trị nào sau đây

A. 3,17. **B.** 3,27. **C.** 3,07. **D.** 3,37.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x>1$.

Ta có: $\log_2(x-1)<\log_5(5x-5) \Leftrightarrow \log_2(x-1)<1+\log_5(x-1)$

$\Leftrightarrow \log_2(x-1) < 1+\log_5 2.\log_2(x-1) \Leftrightarrow (1-\log_5 2)\log_2(x-1) < 1$

$\Leftrightarrow \log_2(x-1) < \dfrac{1}{1-\log_5 2} \Leftrightarrow x < 2^{\frac{1}{1-\log_5 2}} + 1$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(1; 2^{\frac{1}{1-\log_5 2}} + 1\right) \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2^{\frac{1}{1-\log_5 2}} + 1 \end{cases} \Rightarrow b - a \approx 3.37$.

Câu 56: Có tất cả bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(\log_{2023}(x^2+2) - \log_{2023}(x+14)\right)\left(729 - 3^{x-1}\right) \geq 0$

A. Vô số **B.** 16. **C.** 17. **D.** 15.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x+14 > 0 \Leftrightarrow x > -14$

Xét phương trình:

$\log_{2023}(x^2+2) - \log_{2023}(x+14) = 0 \Leftrightarrow \log_{2023}(x^2+2) = \log_{2023}(x+14)$

$\Leftrightarrow x^2+2 = x+14 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -3 \end{array}\right.$

$729 - 3^{x-1} = 0 \Leftrightarrow 3^{x-1} = 3^6 \Leftrightarrow x - 1 = 6 \Leftrightarrow x = 7$

Lập trục xét dấu vế trái của bất phương trình:

x	-14		-3		4		7		$+\infty$
VT		+	0	-	0	+	0	-	

Nghiệm của bất phương trình: $x \in (-14; -3] \cup [4; 7]$

Do $x \in Z$ nên $x \in \{-13, ..., -3, 4, ..., 7\}$. Có 15 giá trị nguyên thỏa mãn

Câu 57: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0;100]$ để bất phương trình $4^{2x-m} - 4.2^{3x-2m} + 4.2^{x-m} < 1$ nghiệm đúng với $\forall x \in (-\infty; 4]$?

A. 99. **B.** 92. **C.** 98. **D.** 93.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $4^{2x-m} - 4.2^{3x-2m} + 4.2^{x-m} < 1 \Leftrightarrow 2^{4x} - 4.2^{3x} + 4.2^x.2^m < 2^{2m}$

$\Leftrightarrow \left(2^m - 2^{2x}\right)\left(2^m + 2^{2x} - 4.2^x\right) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^m > 2^{2x} \\ 2^m > 4.2^x - 2^{2x} \end{cases} (1) \\ \begin{cases} 2^m < 2^{2x} \\ 2^m < 4.2^x - 2^{2x} \end{cases} (2) \end{array}\right.$

$\forall x \in (-\infty; 4] \Rightarrow \begin{cases} 0 < 2^{2x} \leq 2^8 \\ -192 \leq 4.2^x - 2^{2x} \leq 2^2 \end{cases}$.

Giải $\begin{cases} 2^m > 2^{2x} \\ 2^m > 4.2^x - 2^{2x} \end{cases} (1)$

Để (1) nghiệm đúng với $\forall x \in (-\infty; 4] \Leftrightarrow \begin{cases} 2^m > 2^8 \\ 2^m > 2^2 \end{cases} \Leftrightarrow m > 8$. Do m nguyên thuộc đoạn $[0;100]$ nên có $100 - 8 = 92$ giá trị của m.

Giải $\begin{cases} 2^m < 2^{2x} \\ 2^m < 4.2^x - 2^{2x} \end{cases} (2)$

Để (1) nghiệm đúng với $\forall x \in (-\infty; 4] \Leftrightarrow \begin{cases} 2^m \le 0 \\ 2^m < -192 \end{cases}$ không có giá trị nào của m thỏa mãn.

Vậy có 92 giá trị của m.

Câu 58: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\log(60x^2 + 120x + 10m - 10) - 3\log(x+1) > 1$ có miền nghiệm chứa đúng 4 giá trị nguyên của biến x. Số phần tử của S là

A. 10. **B.** 12 **C.** 9 **D.** 11

Lời giải

Chọn D

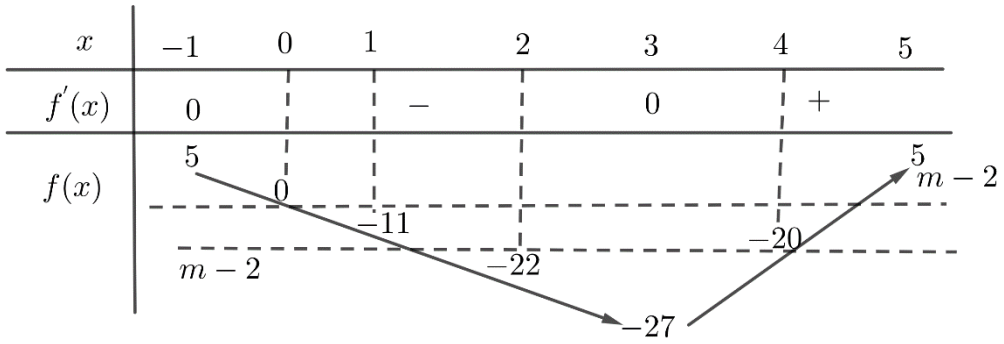
Điều kiện: $\begin{cases} 60x^2 + 120x + 10m - 10 > 0 \\ x > -1 \end{cases}$.

Ta có: $\log(60x^2 + 120x + 10m - 10) - 3\log(x+1) > 1$

$\Leftrightarrow 1 + \log(6x^2 + 12x + m - 1) > \log(x+1)^3 + 1 \Leftrightarrow 6x^2 + 12x + m - 1 > (x+1)^3 \ (*)$.

Từ $(*) \Rightarrow$ điều kiện: $x > -1$. Khi đó $(*) \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 9x < m - 2$.

Xét $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ với $x > -1$ có $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$. Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1 \end{array}\right.$.



Để miền nghiệm chứa 4 giá trị nguyên của biến x thì $-11 < m - 2 \le 0 \Leftrightarrow -9 < m \le 2$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên có 11 giá trị của tham số m thoả mãn yêu cầu bài.

Câu 59: Gọi S là tập hợp nghiệm nguyên của bất phương trình $mx^2 + \log_2(mx^2) > 2^{\log_2^2 x} + \log_2^2 x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tập hợp S có đúng 8 phần tử?

A. 5. **B.** 6. **C.** 10. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > 0$ và $m > 0$.

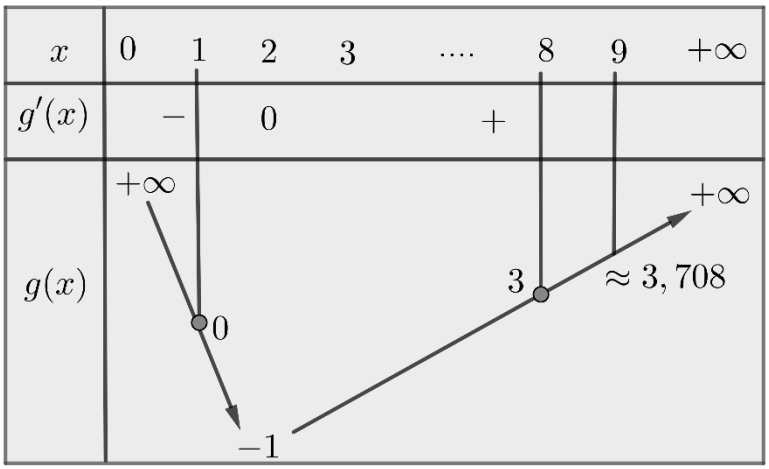
Bất phương trình tương đương với:

$mx^2 + \log_2(mx^2) > 2^{\log_2^2 x} + \log_2\left(2^{\log_2^2 x}\right) \Leftrightarrow f(mx^2) > f\left(2^{\log_2^2 x}\right)$ (1)

Với hàm $f(t) = t + \log_2 t$, $t > 0$. Ta có: $f'(t) = 1 + \dfrac{1}{t \ln 2} > 0$ với $t > 0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$. Khi đó ta được:

$(1) \Leftrightarrow mx^2 > 2^{\log_2^2 x} \Leftrightarrow \log_2 m + 2\log_2 x > \log_2^2 x \Leftrightarrow \log_2 m > \log_2^2 x - 2\log_2 x = g(x)$

Ta có: $g'(x) = \dfrac{2}{x\ln 2}\log_2 x - \dfrac{2}{x\ln 2} = \dfrac{2}{x\ln 2}(\log_2 x - 1)$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2$ (nhận)



Để S có đúng 8 nghiệm nguyên (gồm các nghiệm là: 1; 2; 3; 4; …; 8) thì

$$3 < \log_2 m \le 3{,}708 \Leftrightarrow 8 < m \le 13{,}068 .$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên ta chọn $m \in \{9;10;11;12;13\}$. Vậy có 5 giá trị nguyên của tham số m.

Câu 60: Xét tất cả các cặp số nguyên dương $(a;b)$, ở đó $a \ge b$ sao cho ứng với mỗi cặp số như vậy có đúng 50 số nguyên dương x thỏa mãn $|\ln a - \ln x| < \ln b$. Hỏi tổng $a+b$ nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

A. 22. **B.** 36. **C.** 11. **D.** 50.

Lời giải

Chọn A

Khi $b = 1 \Rightarrow$ bất phương trình vô nghiệm $\Rightarrow b \ge 2$

Ta có $|\ln a - \ln x| < \ln b \Leftrightarrow -\ln b < \ln a - \ln x < \ln b \Leftrightarrow \ln a - \ln b < \ln x < \ln a + \ln b$

$\Leftrightarrow \ln\dfrac{a}{b} < \ln x < \ln ab \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} < x < ab$.

Nhận xét: Nghiệm nguyên dương lớn nhất của bất phương trình là $x = ab - 1$ khi đó yêu cầu bài toán trở thành nghiệm nguyên dương bé nhất của bất phương trình là $x = ab - 50$ hay

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b} < ab - 50 \\ \dfrac{a}{b} \ge ab - 51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < ab^2 - 50b \\ a \ge ab^2 - 51b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 50b < a(b^2-1) \\ 51b \ge a(b^2-1) \end{cases}$$

Do $a \ge 1 \Rightarrow 51b \ge b^2 - 1 \Rightarrow 2 \le b \le 50$ (1)

Khi đó $\begin{cases} a > \dfrac{50}{b^2-1} \\ a \le \dfrac{51}{b^2-1} \end{cases}$

Lại có $a \ge b \Rightarrow \dfrac{51b}{b^2-1} \ge b \Rightarrow b \le 7$

Kết hợp với $(1) \Rightarrow 2 \le b \le 7$ thử trực tiếp ta tìm được với $b = 3; a = 19$ thì $a + b = 22$ và là nhỏ nhất.

Dạng 11: Phương pháp đặt ẩn phụ giải BPT mũ - logarit

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Tập nghiệm của bất phương trình $9^x - 3^{x+1} - 4 > 0$ là

A. $(\log_3 4; +\infty)$. **B.** $[\log_3 4; +\infty)$. **C.** $(1; 4)$. **D.** $(-\infty; \log_3 4)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $3^x = t$. Bất phương trình đã cho trở thành $t^2 - 3t - 4 > 0 \Leftrightarrow (t+1)(t-4) > 0 \Leftrightarrow t > 4$.

Ta được $3^x > 4 \Leftrightarrow x > \log_3 4$.

Câu 2: Bất phương trình: $4^x - 8.6^x + 7.9^x \le 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Chia cả hai vế của bpt cho 9^x ta được: $\left(\frac{4}{9}\right)^x - 8.\left(\frac{2}{3}\right)^x + 7 \le 0$.

Đặt $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t > 0$ ta suy ra $t^2 - 8t + 7 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le t \le 7 \Rightarrow \log_{\frac{2}{3}} 7 \le x \le 0$.

Vì $x \in Z$ nên suy ra x nhận các giá trị $-4, -3, -2, -1, 0$.

Câu 3: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 6 \le 0$ là $S = [a; b]$. Tính $2a + b$.

A. 8 **B.** -8 **C.** 7 **D.** 16

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $x > 0$.

Đặt $t = \log_2 x$ thì bất phương trình trở thành $t^2 - 5t + 6 \le 0 \Leftrightarrow 2 \le t \le 3$.

Thay $t = \log_2 x$ ta được $2 \le \log_2 x \le 3 \Leftrightarrow 2^2 \le x \le 2^3 \Leftrightarrow 4 \le x \le 8$

Khi đó tập nghiệm là $S = [2; 3]$.

Vậy $2a + b = 2.4 + 8 = 16$.

Câu 4: Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn

$$\left(4^{\log(x+3)} - 5.2^{\log(x+3)} + 4\right)\sqrt{\log_{x+3}\left(x^2 - x\right) - 1} \le 0 ?$$

A. 96 **B.** 95. **C.** 98. **D.** 97.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện:

$$\begin{cases}0<x+3\neq 1\\ x^2-x>0\\ \log_{x+3}\left(x^2-x\right)-1\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\begin{cases}x>-3\\ x\neq -2\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ x>1\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-2x-3\geq 0\\ x>-2\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-2x-3\leq 0\\ x<-2\end{cases}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\begin{cases}x>-3\\ x\neq -2\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ x>1\end{cases}\\ \begin{cases}-2<x\leq -1\\ x\geq 3\end{cases}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2<x\leq -1\\ x\geq 3\end{cases}$$

Với điều kiện trên, bất phương trình: $\left(4^{\log(x+3)}-5.2^{\log(x+3)}+4\right)\sqrt{\log_{x+3}\left(x^2-x\right)-1}\leq 0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4^{\log(x+3)}-5.2^{\log(x+3)}+4\leq 0\\ \log_{x+3}\left(x^2-x\right)-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\leq 2^{\log(x+3)}\leq 4\\ x^2-2x-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\leq x\leq 97\\ x=-1\\ x=3\end{cases}\Leftrightarrow -2\leq x\leq 97$$

So với điều kiện ta có: $\begin{cases}\begin{cases}-2<x\leq -1\\ x\geq 3\end{cases}\\ -2\leq x\leq 97\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3\leq x\leq 97\\ -2<x\leq -1\end{cases}$

Các số nguyên thoả mãn yêu cầu bài toán gồm: $-1;3;4;5;...;97$

Vậy có 96 số nguyên thoả yêu cầu bài toán.

Câu 5: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_4\left(3^x-1\right).\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{3^x-1}{16}\right)\leq\frac{3}{4}$ là

A. $(0;1]\cup[2;+\infty)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $[1;2]$. **D.** $(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định $3^x>1\Leftrightarrow x>0$

Khi đó bất phương trình đã cho tương đương với

$-\log_4\left(3^x-1\right).\left[\log_4\left(3^x-1\right)-\log_4 16\right]\leq\frac{3}{4}$ (1), đặt $\mathrm{t}=\log_4\left(3^x-1\right)\quad(t\in\mathbb{R})$

$$(1)\text{ trở thành }-t^2+2t-\frac{3}{4}\leq 0\Leftrightarrow\begin{cases}t\geq\frac{3}{2}\\ t\leq\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_4\left(3^x-1\right)\geq\frac{3}{2}\\ \log_4\left(3^x-1\right)\leq\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3^x-1\geq 8\\ 3^x-1\leq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 2\\ x\leq 1\end{cases}$$

Kết hợp điều kiện suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $(0;1]\cup[2;+\infty)$.

Câu 6: Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn bất phương trình $\left(\log_2^2 x-\log_2 x^3+2\right)\sqrt{32-2^x}\geq 0$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

$$\left(\log_2^2 x-\log_2 x^3+2\right)\sqrt{32-2^x}\geq 0\Leftrightarrow\begin{cases}\begin{cases}x>0\\ 32-2^x=0\end{cases}\\ \begin{cases}x>0\\ 32-2^x>0\\ \log_2^2 x-\log_2 x^3+2\geq 0\end{cases}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ \left\{\begin{array}{l} x>0 \\ x<5 \\ \log_2^2 x-3\log_2 x+2\geq 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ \left\{\begin{array}{l} x>0 \\ x<5 \\ \left[\begin{array}{l} \log_2 x\leq 1 \\ \log_2 x\geq 2 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ 0<x\leq 2 \\ 4\leq x<5 \end{array}\right.$$

Vậy có bốn giá trị nguyên của x thoả mãn.

Câu 7: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(2^x+2^{4-x}-17\right)\sqrt{10-\log_2 x}\geq 0$?

A. 1023. **B.** 1021. **C.** 1022. **D.** 1024.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $\begin{cases}\log_2 x\leq 10 \\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<x\leq 1024$

Khi đó $\left(2^x+2^{4-x}-17\right)\sqrt{10-\log_2 x}\geq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 10-\log_2 x=0(1) \\ 2^x+2^{4-x}-17\geq 0(2)\end{array}\right.$.

$(1)\Leftrightarrow x=1024(tm)$

$(2)\Leftrightarrow 2^x+\dfrac{16}{2^x}-17\geq 0\Leftrightarrow \left(2^x\right)^2-17.2^x+16\geq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x\leq 1 \\ 2^x\geq 16\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq 0 \\ x\geq 4\end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện ta được $4\leq x\leq 1024$.

Vậy có 1021 số nguyên x thỏa mãn bất phương trình đã cho.

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Số nghiệm nguyên trong khoảng $(-50;50)$ của bất phương trình $16^x - 5.4^x + 4 \ge 0$ là

A. 100. **B.** 98. **C.** 99. **D.** 51.

Lời giải

Chọn C.

Đặt $t = 4^x, (t > 0)$ ta được $t^2 - 5t + 4 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < t \le 1 \\ t \ge 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < 4^x \le 1 \\ 4^x \ge 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le 0 \\ x \ge 1 \end{array}\right.$

$\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ x \in (-50;50) \end{cases}$, vậy có 99 giá trị x thỏa mãn.

Câu 2: Biết tập nghiệm của bất phương trình $3^x < 4 - 3^{1-x}$ là $(a;b)$. Giá trị của $a+b$ bằng:

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $3^x < 4 - 3^{1-x} \Leftrightarrow 3^{2x} - 4.3^x + 3 < 0 \Leftrightarrow 1 < 3^x < 3 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

Do đó tập nghiệm của bất phương trình là: $(0;1)$.

Vậy $a = 0; b = 1 \Rightarrow a + b = 1$.

Câu 3: Biết tập nghiệm của bất phương trình $3^x < 4 - 3^{1-x}$ là $(a;b)$. Giá trị của $a+b$ bằng:

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $3^x < 4 - 3^{1-x} \Leftrightarrow 3^{2x} - 4.3^x + 3 < 0 \Leftrightarrow 1 < 3^x < 3 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

Do đó tập nghiệm của bất phương trình là: $(0;1)$.

Vậy $a = 0; b = 1 \Rightarrow a + b = 1$.

Câu 4: Tập nghiệm của bất phương trình $3.9^x - 10.3^x + 3 \le 0$ có dạng $S = [a;b]$ trong đó a, b là các số nguyên. Giá trị biểu thức $5b - 2a$ bằng

A. $\frac{43}{3}$. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải

Ta có: $3.9^x - 10.3^x + 3 \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \le 3^x \le 3 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$.

Suy ra $S = [-1;1] \Rightarrow a = -1; b = 1$.

Vậy $5b - 2a = 5 + 2 = 7$.

Câu 5: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 = 0$ bằng

A. 2. **B.** 27. **C.** 3. **D.** 12

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x > 0$

$\log_3^2 x-3\log_3 x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_3 x=1\\ \log_3 x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=9\end{array}\right.$

Tích các nghiệm là: $3.9=27$

Câu 6: Tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{3}}^2 x-5\log_3 x+6=0$ bằng

A. -3. **B.** 36. **C.** $\frac{1}{243}$. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Đk: $x>0$.

$\log_{\frac{1}{3}}^2 x-5\log_3 x+6=0\Leftrightarrow\log_3^2 x-5\log_3 x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_3 x=2\\ \log_3 x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=27\\ x=9\end{array}\right.$.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x_1=9;x_2=27\Rightarrow x_1+x_2=36$.

Câu 7: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $2^x+8.2^{-x}<9$ là

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình $2^x+8.2^{-x}<9\Leftrightarrow 2^{2x}-9.2^x+8<0\Leftrightarrow 1<2^x<8\Leftrightarrow 0<x<3$.

Số nghiệm nguyên của bất phương trình là 2.

Câu 8: Cho bất phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{x}}-2\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}}>15$ có tập nghiệm $S=a;b$. Giá trị của biểu thức $2a+5b$ bằng

A. -5. **B.** -2. **C.** 0. **D.** -3.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x\neq 0$. Đặt $t=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$, $t>0$.

Bất phương trình trở thành:

$t^2-2t-15>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t>5\\ t<-3\ \text{KTM}\end{array}\right.\Rightarrow\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}}>5\Leftrightarrow\frac{1}{x}<-1\Leftrightarrow\frac{x+1}{x}<0\Leftrightarrow -1<x<0$.

Vậy tập nghiệm là $S=-1;0$. Do đó $2a+5b=-2$.

Câu 9: Bất phương trình $25^x-6.5^x+5\leq 0$ có tập nghiệm là $[a;b]$. Tính $a.b$

A. 1. **B.** 0. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

$25^x-6.5^x+5\leq 0\Leftrightarrow\left(5^x\right)^2-6.5^x+5\leq 0$.

Đặt $t=5^x$, $t>0$.

Bất phương trình có dạng $t^2-6t+5\le 0\Leftrightarrow 1\le t\le 5\Rightarrow 1\le 5^x\le 5\Leftrightarrow 0\le x\le 1$.

Câu 10: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{\sqrt{2}}^2(2x)-23\log_2 x+7<0$ là

A. 4. **B.** 3. **C.** vô số. **D.** 5

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x>0$

$\log_{\sqrt{2}}^2(2x)-23\log_2 x+7<0\Leftrightarrow 4\log_2^2(2x)-23\log_2 x+7<0$

$\Leftrightarrow 4(1+\log_2 x)^2-23\log_2 x+7<0\Leftrightarrow 4\log_2^2 x-15\log_2 x+11<0$

$\Leftrightarrow 1<\log_2 x<\dfrac{11}{4}\Leftrightarrow 2<x<2^{\frac{11}{4}}$

So với điều kiện ta có $2<x<2^{\frac{11}{4}}$.

Vì $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{3,4,5,6\}$.

Vậy số nghiệm nguyên của bất phương trình đã cho là 4.

Câu 11: Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn điều kiện $\left(7^x-49\right)\left(\log_3^2 x-7\log_3 x+6\right)<0$?

A. 728. **B.** 726. **C.** 725. **D.** 729.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x>0$

$$\left(7^x-49\right)\left(\log_3^2 x-7\log_3 x+6\right)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}7^x-49>0\\ \log_3^2 x-7\log_3 x+6<0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}7^x-49<0\\ \log_3^2 x-7\log_3 x+6>0\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}7^x>49\\ 1<\log_3 x<6\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}7^x<49\\ \left[\begin{array}{l}\log_3 x<1\\ \log_3 x>6\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x>2\\ 3<x<3^6\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x<2\\ \left[\begin{array}{l}0<x<3\\ x>3^6\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<2\\ 3<x<3^6\end{array}\right.$$

Mà $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{1;4;5;...;728\}$

Vậy có 726 số thỏa mãn.

Câu 12: Gọi S là tập hợp tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $\left[\left(x^3-4x\right)e^{x^2-2x+2+\sqrt{100-x}}-\left(x^3-4x\right)\right]\sqrt{4^x-5.2^{x+1}+16}\ge 0$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 5045. **B.** 5048. **C.** 5047. **D.** 5046.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases}x\le 100\\ 4^x-5.2^{x+1}+16\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 100\\ \left[\begin{array}{l}x\le 1\\ x\ge 3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le 1\\ 3\le x\le 100\end{array}\right.$

Ta có

$\left[\left(x^3-4x\right)e^{x^2-2x+2+\sqrt{100-x}}-\left(x^3-4x\right)\right]\sqrt{4^x-5.2^{x+1}+16}\ge 0$

$\Leftrightarrow \left(x^3-4x\right)\left[e^{x^2-2x+2+\sqrt{100-x}}-1\right]\sqrt{4^x-10.2^x+16}\ge 0$

$\Leftrightarrow x\left(x^2-4\right)\sqrt{\left(2^x-2\right).\left(2^x-8\right)}\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 2 \\ x=1 \\ -2\le x\le 0 \end{array}\right.$

(Vì $e^{x^2-2x+2+\sqrt{100-x}}-1=e^{(x-1)^2+1+\sqrt{100-x}}-1>e-1>0$)

Đối chiếu điều kiện, ta được $\left[\begin{array}{l} -2\le x\le 0 \\ x=1 \\ 3\le x\le 100 \end{array}\right.$

Vậy $S=\{-2;-1;0;1;3;4;5;\ldots;100\}$ hay tổng các phần tử của S là 5045.

Câu 13: Số nghiệm nguyên của phương trình $\left(9^x-5.6^x-6.4^x\right)\sqrt{128-2^{\sqrt{x}}}>0$.

A. 45 **B.** 48 **C.** 49. **D.** 44.

Lời giải

Chọn D

$\left(9^x-5.6^x-6.4^x\right)\sqrt{128-2^{\sqrt{x}}}>0\Leftrightarrow \begin{cases} 9^x-5.6^x-6.4^x>0 \\ 128-2^{\sqrt{x}}>0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^x>6 \\ \sqrt{x}<7 \end{cases}\Leftrightarrow \log_{1,5}6<x<49$

$\Rightarrow x\in\{5;6;7;...;48\}$.

Vậy bất phương trình đã cho có 44 nghiệm nguyên.

Câu 14: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình $4^x-m.2^{x+1}-m^2+9m=0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1+x_2=3$?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Chọn B

Phương trình đã cho được viết lại thành: $4^x-2m.2^x-m^2+9m=0\ (1)$.

Đặt $t=2^x>0$.

Khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn:

$x_1+x_2=3\Rightarrow 2^{x_1+x_2}=8\Leftrightarrow 2^{x_1}.2^{x_2}=8\Leftrightarrow t_1.t_2=8$ thì yêu cầu bài toán tương đương phương trình $t^2-2m.t-m^2+9m=0$ có hai nghiệm dương $t_1;\ t_2$ thỏa mãn $t_1.t_2=8$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=m^2-\left(-m^2+9m\right)>0 \\ t_1+t_2=2m>0 \\ t_1.t_2=-m^2+9m=8 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2-9m>0 \\ m>0 \\ -m^2+9m-8=0 \end{cases}\Leftrightarrow m=8.$

Vậy có một giá trị thực của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 15: Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc $[-20;20]$ của tham số m để bất phương trình $4^x-(m+1)2^x+m\le 0$ có tập nghiệm là một đoạn có độ dài lớn hơn 2?

A. 16. **B.** 17. **C.** 37. **D.** 38.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=2^x$ với $t>0$

$f\left(x\right)=4^x-\left(m+1\right)2^x+m\le 0\Leftrightarrow t^2-\left(m+1\right)t+m\le 0$

Với $t=1\Leftrightarrow x=0$, $t=m\Leftrightarrow x=\log_2 m$

TH1: $x=\left[0;\log_2 m\right]$

Để tập nghiệm là một đoạn có độ dài lớn hơn 2

$2<\log_2 m\Leftrightarrow m>4\Rightarrow m=\left\{5;6;7;...;20\right\}$ có 16 giá trị

TH2: $x=\left[\log_2 m;0\right]$

Để tập nghiệm là một đoạn có độ dài lớn hơn 2

$\log_2 m<-2\Leftrightarrow m<\dfrac{1}{4}\Rightarrow m=\left\{-20;-19;...;0\right\}$ có 21 giá trị

Vậy có 37 giá trị thoả mãn

Câu 16: Số nghiệm nguyên của bất phương trình: $\left(9^x-5.6^x-6.4^x\right)\sqrt{128-2^{\sqrt{x}}}>0$ là

A. 45. **B.** 48. **C.** 49. **D.** 44.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định: $\begin{cases}128-2^{\sqrt{x}}\ge 0\\ x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 0\le x\le 49$.

Bất phương trình

$$\Leftrightarrow \begin{cases}128-2^{\sqrt{x}}>0\\ 9^x-5.6^x-6.4^x>0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}0\le x<49\\ \left(\dfrac{9}{4}\right)^x-5.\left(\dfrac{6}{4}\right)^x-6>0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}0\le x<49\\ \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x}-5.\left(\dfrac{3}{2}\right)^x-6>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}0\le x<49\\ \left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{3}{2}\right)^x>6\\ \left(\dfrac{3}{2}\right)^x<-1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}0\le x<49\\ x>\log_{\frac{3}{2}}6\end{cases}\Leftrightarrow \log_{\frac{3}{2}}6<x<49.$$

Kết hợp với điều kiện xác định, và x là số nguyên, nên $x\in\left\{5,6,7,...,47,48\right\}$.

Vậy có 44 số nguyên x thỏa mãn yêu cầu đề.

Câu 17: Tập tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $\log_2^2 x-\left(2m+5\right)\log_2 x+m^2+5m+4<0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left[2;4\right]$ là

A. $\left(0;1\right)$. **B.** $\left[0;1\right]$. **C.** $\left(-2;0\right)$. **D.** $\left[-2;0\right]$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\log_2 x\ \underrightarrow{x\in\left[2;4\right]}\ t\in\left[1;2\right]$

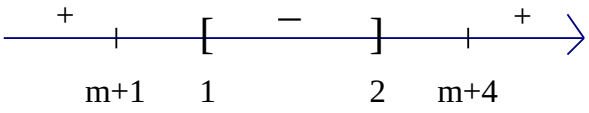
Khi đó yêu cầu bài toán tương đương:

$t^2-(2m+5)t+m^2+5m+4<0$ nghiệm đúng với mọi $t\in[1;2]$

$\Leftrightarrow t^2-(2m+5)t+(m+1)(m+4)<0,\ \forall t\in[1;2]$

$\Leftrightarrow [t-(m+1)][t-(m+4)]<0,\ \forall t\in[1;2]$

Ta có trục xét dấu:



Suy ra $[1;2]\subset(m+1;m+4)\Leftrightarrow\begin{cases}m+1<1\\m+4>2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\m>-2\end{cases}\Leftrightarrow m\in(-2;0)$

Câu 18: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-20;20]$ để bất phương trình $\log_3 x^2+m\sqrt{\log_3 x^3}+m+1\le 0$ có không quá 20 nghiệm nguyên?

A. 23. **B.** 20. **C.** 21. **D.** 22.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $\begin{cases}x>0\\\log_3 x^3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x^3\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 1$.

Ta có: $\log_3 x^2+m\sqrt{\log_3 x^3}+m+1\le 0\Leftrightarrow 2\log_3 x+m\sqrt{3\log_3 x}+m+1\le 0$.

Đặt $\sqrt{3\log_3 x}=t\ (t\ge 0)\Rightarrow\log_3 x=\dfrac{t^2}{3}$.

Ta có bất phương trình $\dfrac{2}{3}t^2+mt+m+1\le 0\Leftrightarrow 3m\le\dfrac{-2t^2+3}{t+1}$.

Nhận xét: Xét hàm số $f(t)=\dfrac{-2t^2+3}{t+1}$ trên $[0;+\infty)$ ta có:

$f'(t)=\dfrac{-2t^2+4t-3}{(t+1)^2}$. Giải phương trình $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{-2-\sqrt{10}}{2}(L)\\t=\dfrac{-2+\sqrt{10}}{2}(TM)\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

t	0		$\frac{-2+\sqrt{10}}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	3	↗	$4-2\sqrt{10}$	↘	$-\infty$

Bất phương trình $\log_3 x^2+m\sqrt{\log_3 x^3}+m+1\le 0$ có không quá 20 nghiệm nguyên $\Leftrightarrow 3a>\dfrac{-6\log_3 21+3}{\sqrt{3\log_3 21}+1}\Leftrightarrow\dfrac{-2\log_3 21+1}{\sqrt{3\log_3 21}+1}\approx -1,685$.

Tập các giá trị của m thỏa mãn là: $\{-1;0;...;20\}\Rightarrow$ Có 22 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 19: Biết tập nghiệm của bất phương trình $\log_2^2\left(x^2-1\right)-\log_3\left(x^2-1\right)+\log_2\frac{2}{3}\log_3 2\le 0$ là $S=[a;b]\cup[c;d]$ với $a<b<c<d$. Giá trị của biểu thức $a+b+c+2d$ bằng

A. $\frac{1}{\log_2 3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $-\sqrt{3}$. **D.** $\frac{1}{\log_2 3}+1$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l}x>1\\x<-1\end{array}\right.$. Đặt $t=\log_2\left(x^2-1\right)$.

Khi đó bất phương trình đã cho trở thành $t^2-t\log_3 2+\log_3 2-1\le 0\Leftrightarrow t\in[\log_3 2-1;1]$.

Suy ra $\left[\begin{array}{l}\sqrt{2^{(\log_3 2-1)}+1}\le x\le\sqrt{3}\\-\sqrt{3}\le x\le-\sqrt{2^{(\log_3 2-1)}+1}\end{array}\right.$, kết hợp với điều kiện ta được tập nghiệm của bpt là

$S=\left[-\sqrt{3};-\sqrt{2^{(\log_3 2-1)}+1}\right]\cup\left[\sqrt{2^{(\log_3 2-1)}+1};\sqrt{3}\right]$.

Vậy $a+b+c+2d=\sqrt{3}$.

Câu 20: Tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $\log^2 x-m\log x+m+3\le 0$ có nghiệm trong khoảng $(1;+\infty)$ là

A. $m\in(3;6]$. **B.** $m\in(-\infty;-3)\cup[6;+\infty)$.

C. $m\in(-\infty;-3)$. **D.** $m\in[6;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B.

Đặt $t=\log x>0,\ \forall x\in(1;+\infty)$, ta có: $t^2-mt+m+3\le 0\ (*)$.

Tam thức vế trái có $\Delta=m^2-4m-12$.

Nếu $\Delta<0\Leftrightarrow -2<m<6$. Khi đó $t^2-mt+m+3>0,\ \forall t$. Bài toán không thỏa mãn.

Nếu $\Delta=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2\\m=4\end{array}\right.$.

Với $m=-2\Rightarrow t^2+2t+1\le 0\Leftrightarrow(t+1)^2\le 0$ vô nghiệm $\forall t>0$.

Với $m=6\Rightarrow t^2-6t+9\le 0\Leftrightarrow(t-3)^2\le 0\Leftrightarrow t=3$ (thỏa mãn).

Nếu $\Delta>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-2\\m>6\end{array}\right.$. Khi đó tam thức có hai nghiệm phân biệt $t_1<t_2$ và ta có $t^2-mt+m+3\le 0\Leftrightarrow t_1\le t\le t_2$.

Để bất phương $(*)$ có nghiệm trong khoảng $(0;+\infty)$ ta phải có $t_2>0$ hay

$\frac{m+\sqrt{m^2-4m-12}}{2}>0\Leftrightarrow\sqrt{m^2-4m-12}>-m$

Nếu $m>6$ bất phương trình thỏa mãn

Nếu $m<-2$. Khi đó $\sqrt{m^2-4m-12}>-m\Leftrightarrow m^2-4m-12>m^2\Leftrightarrow m<-3$.

Kết luận $m \in (-\infty; -3) \cup [6; +\infty)$.

Câu 21: Gọi a là số thực lớn nhất để bất phương trình $x^2 - x + 2 + a\ln\left(x^2 - x + 1\right) \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a \in (2;3]$ **B.** $a \in (6;7]$ **C.** $a \in (8;+\infty)$ **D.** $a \in (-6;-5]$

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}, \left(t \geq \frac{3}{4}\right)$.

Ta có: $x^2 - x + 2 + a\ln\left(x^2 - x + 1\right) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 + 1 + a\ln\left(x^2 - x + 1\right) \geq 0$.

Đặt $t = x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}, \left(t \geq \frac{3}{4}\right)$.

Ta được bất phương trình $t + 1 + a\ln t \geq 0\,(2), \left(t \geq \frac{3}{4}\right)$.

Đặt $f(t) = t + 1 + a\ln t \geq 0 \Rightarrow f'(t) = 1 + \frac{a}{t} > 0, \forall t \geq \frac{3}{4}$.

Do đó để bất phương trình (2) nghiệm đúng $\forall t \geq \frac{3}{4}$ điều kiện là

$f\left(\frac{3}{4}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{7}{4} + a\ln\frac{3}{4} \geq 0 \Leftrightarrow a \leq \frac{-7}{4\ln\frac{3}{4}} \approx 6.09.$

Câu 22: Số nghiệm nguyên thuộc $[-100; 100]$ của bất phương trình $\log_5\left(3^x - 1\right).\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{3^x - 1}{25}\right) \leq -143$ là

A. 81. **B.** 79. **C.** 83. **D.** 84.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định của bất phương trình là $3^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$ (*).

Ta có, $\log_5\left(3^x - 1\right).\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{3^x - 1}{25}\right) \leq -143 \Leftrightarrow \log_5\left(3^x - 1\right)\left[\log_5\left(\frac{25}{3^x - 1}\right)\right] \leq -143$

$\Leftrightarrow \log_5\left(3^x - 1\right)\left[2 - \log_5\left(3^x - 1\right)\right] + 143 \leq 0$ (1)

Đặt $t = \log_5\left(3^x - 1\right)$, bất phương trình (1) trở thành

$t(2 - t) + 143 \leq 0 \Leftrightarrow -t^2 + 2t + 143 \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \leq -11 \\ t \geq 13 \end{array}\right.$.

Với $t \leq -11 \Rightarrow \log_5\left(3^x - 1\right) \leq -11 \Rightarrow 3^x - 1 \leq 5^{-11} \Rightarrow x < 1$. Do x nguyên thoả điều kiện $x > 0$ nên trường hợp này không tồn tại giá trị x.

Với $t \geq 13 \Rightarrow \log_5\left(3^x - 1\right) \geq 13 \Rightarrow 3^x - 1 \geq 5^{13} \Rightarrow 3^x \geq 1 + 5^{13}$. Do x nguyên thoả điều kiện $x > 0$ và $x \in [-100;100]$ nên chọn $x \in \{20, 21, ..., 100\}$. Vậy có 81 số nguyên x thoả mãn điều kiện.

Câu 23: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(2^x - 16\right)\left(\log_3^2 x - 9\log_3 x + 18\right) < 0$?

A. 704. **B.** 701. **C.** 707. **D.** 728.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x>0$.

Ta có $\left(2^x-16\right)\left(\log_3^2 x-9\log_3 x+18\right)<0$.

Trường hợp 1:

$$\begin{cases}2^x-16>0\\ \log_3^2 x-9\log_3 x+18<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>4\\ 3<\log_3 x<6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>4\\ 27<x<729\end{cases}\Leftrightarrow 27<x<729$$

Vì x nguyên nên $x=28;29;...;728$, có 701 giá trị nguyên của x.

Trường hợp 2:

$$\begin{cases}2^x-16<0\\ \log_3^2 x-9\log_3 x+18>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<4\\ \left[\begin{array}{l}\log_3 x<3\\ \log_3 x>6\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<4\\ \left[\begin{array}{l}x<27\\ x>729\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x<4$$

Vì x nguyên nên $x=1;2;3$, có 3 giá trị nguyên của x.

Vậy có tất cả 704 giá trị nguyên của x.

Câu 24: Có bao nhiêu giá trị số nguyên x thỏa mãn $\left(3^x-27\right)\left(\log_3^2 x-7\log_3 x+10\right)<0$

A. 242. **B.** 235. **C.** 233. **D.** 238.

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(x)=\left(3^x-27\right)\left(\log_3^2 x-7\log_3 x+10\right)$. ĐK: $x>0$.

$$f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^x=27\\ \log_3 x=2\\ \log_3 x=5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=9\\ x=243\end{array}\right..$$

Bảng xét dấu:

x	0		3		9		243		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu suy ra tập nghiệm của bất phương trình $S=(0;3)\cup(9;243)$.

Vậy $x\in\{1;2;10;11;...;242\}$.

Câu 25: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_3\left(x^2+4y^2+x\right)+\log_2\left(x^2+4y^2\right)+\frac{x^2-8x+4y^2}{x}\le\log_3 x+\log_2\left(x^2+4y^2+24x\right)$$

A. 24. **B.** 25. **C.** 22. **D.** 48.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\dfrac{x^2+4y^2}{x}$ $\left(t>0\ do\ x>0\right)$

Từ giả thiết $\Rightarrow\log_3(tx+x)+\log_2(tx)+t-8\le\log_3 x+\log_2(tx+24x)$

$$\Leftrightarrow\log_3(t+1)+t-8\le\log_2\left(\frac{t+24}{t}\right)\Leftrightarrow\log_3(t+1)+t-8-\log_2\left(\frac{t+24}{t}\right)\le 0$$

Đặt $f(t)=\log_3(t+1)+t-8-\log_2\left(\dfrac{t+24}{t}\right),\ t>0$

$f'(t)=\dfrac{1}{(t+1)\ln 3}+1-\dfrac{1}{\left(\dfrac{t+24}{t}\right)\ln 2}.\left(\dfrac{-24}{t^2}\right)>0$, $\forall t>0\Rightarrow f(t)$ đồng biến.

Mà $f(t)\le f(8)=0\Rightarrow 0<t\le 8$

Với $y=0\Rightarrow t=x\Rightarrow x\in\{1;2;...8\}$

Suy ra có 8 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn.

Ta có $t\le 8\Rightarrow x^2+4y^2\le 8x\Rightarrow (x-4)^2+4y^2\le 16\Leftrightarrow 4y^2\le 16\Leftrightarrow -2\le y\le 2$

Với $y=\pm 2\Rightarrow (x-4)^2\le 0\Rightarrow x=4$

Suy ra có 2 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn.

Với $y=\pm 1\Rightarrow (x-4)^2\le 12\Rightarrow -2\sqrt{3}\le x-4\le 2\sqrt{3}\ \Rightarrow x\in\{1;2;...7\}$

Suy ra có 14 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn.

Vậy có tất cả $8+2+14=24$ cặp số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 26: Xét tất cả các số thực x,y cho sao cho $a^{4x-\log_5 a^2}\le 25^{40-y^2}$ với mọi số thực dương a. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+x-3y$ bằng

A. 60. **B.** 20. **C.** $\dfrac{125}{2}$. **D.** 80.

Lời giải

Ta có: $a^{4x-\log_5 a^2}\le 25^{40-y^2}$

$\Leftrightarrow a^{4x-\log_5 a^2}\le 25^{40-y^2}\Leftrightarrow \log_5 a^{4x-\log_5 a^2}\le \log_5 5^{2\left(40-y^2\right)}\Leftrightarrow (4x-2\log_5 a)\log_5 a\le 80-2y^2\ (1)$

Đặt $t=\log_5 a$ khi đó bất phương trình (1) trở thành

$\Leftrightarrow (4x-2t)t\le 80-2y^2\Leftrightarrow 2t^2-4xt+80-2y^2\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2>0 \\ \Delta'\le 0 \end{cases}\Leftrightarrow \Delta'=4x^2-2\left(80-2y^2\right)\le 0\Leftrightarrow x^2+y^2\le 40$

Khi đó: $P=x^2+y^2+x-3y\le 40+x-3y\le 40+\sqrt{\left(x^2+y^2\right)\left(1^2+3^2\right)}=60$

$\Leftrightarrow P_{\max}=60$

Câu 27: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để bất phương trình $\left|\dfrac{3\ln^2 x+2\ln x+24}{\ln^2 x-(m+1)\ln x+4}\right|\ge 2$ nghiệm đúng với mọi $x>0$?

A. 9. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Đặt $t=\ln x$, $t\in\mathbb{R}$. Yêu cầu bài toán trở thành tìm giá trị nguyên của m để bất phương trình $\left|\dfrac{3t^2+2t+24}{t^2-(m+1)t+4}\right|\ge 2$ (*) nghiệm đúng với mọi $t\in\mathbb{R}$.

Để (*) nghiệm đúng với mọi $t\in\mathbb{R}$, trước hết phương trình $t^2-(m+1)t+4=0$ phải vô nghiệm, tức là

$$\Delta=(m+1)^2-16<0\Leftrightarrow -5<m<3.\ (1)$$

Với $-5<m<3$ thì $t^2-(m+1)t+4>0,\forall t\in\mathbb{R}$.

Ta lại có $3t^2+2t+24>0, \forall t\in\mathbb{R}$. Do đó

$$\left|\frac{3t^2+2t+24}{t^2-(m+1)t+4}\right|\geq 2 \Leftrightarrow 3t^2+2t+24\geq 2\left[t^2-(m+1)t+4\right] \Leftrightarrow t^2+2(m+2)t+16\geq 0. \ (2)$$

Bất phương trình (2) nghiệm đúng với mọi $t\in\mathbb{R}$ khi

$$\Delta'=(m+2)^2-16\leq 0 \Leftrightarrow -6\leq m\leq 2 . \ (3)$$

Kết hợp (1) và (3) ta được $-5<m\leq 2$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên các giá trị m cần tìm là $m\in\{-4;-3;-2;-1;0;1;2\}$.

Vậy có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng 12: Hàm đặc trưng giải phương trình mũ - logarit

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Cho phương trình $e^x = \ln(x+a) + a$, với a là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thuộc khoảng $(0;19)$ để phương trình đã cho có nghiệm dương?

A. 15. **B.** 18. **C.** 17. **D.** 16.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \ln(x+a) \Rightarrow a = e^t - x$ với $x > 0$ và $a \in (0;19)$.

Phương trình đã cho trở thành $e^x + x = e^t + t$ (*)

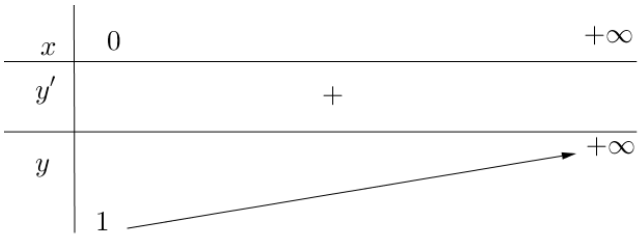
Xét hàm số $g(u) = e^u + u$.

Ta có $g'(u) = e^u + 1 > 0, \forall u \in \mathbb{R}$ nên hàm số $g(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra $(*) \Leftrightarrow g(x) = g(t) \Leftrightarrow x = t \Leftrightarrow x = \ln(x+a) \Leftrightarrow e^x = x + a \Leftrightarrow a = e^x - x$.

Xét $y = e^x - x$ trên $(0;+\infty)$ có $y' = e^x - 1 > 0, \forall x \in (0;+\infty)$.

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình đã cho có nghiệm dương $\Leftrightarrow a > 1$.

Mà $a \in (0;19)$ nên suy ra $a \in \{2;3;4;...;18\}$.

Vậy có 17 giá trị a thỏa mãn.

Câu 2: Cho a,b là những số thực dương thỏa mãn điều kiện $2a + b = 2$. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại $y \in \left(1;\frac{10}{3}\right)$ để $3^{ax+by} = a.3^x + \frac{b.9^y}{2}$.

A. 4. **B.** 2. **C.** 7. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $2a + b = 2 \Rightarrow b = 2 - 2a$.

$3^{ax+by} = a.3^x + \frac{b.9^y}{2} \Leftrightarrow 3^{ax+(2-2a)y} = a.3^x + (1-a).9^y \Leftrightarrow 3^{a(x-2y)} - a.3^{x-2y} + a - 1 = 0$

Đặt $t = x - 2y \Rightarrow f(t) = 3^{at} - a.3^t + a - 1 = 0, t \in \mathbb{R}$.

$f'(t) = a.3^{at}\ln 3 - a.3^t \ln 3 = a.\ln 3.\left(3^{at} - 3^t\right) = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	0	↘	

Suy ra $f(t)=0 \Leftrightarrow x=2y \in \left(2;\dfrac{20}{3}\right)$. Vậy có 4 số nguyên x.

Câu 3: Có bao nhiêu số nguyên y thuộc đoạn $[-2022;2022]$ sao cho tồn tại $x \in \mathbb{R}$ thoả mãn $12.\sqrt[3]{3y+12.2^x}=2^{3x}-3y$

A. 2027. **B.** 2022. **C.** 2021. **D.** 2028.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=2^x;\ t>0$. Khi đó từ giả thiết ta có phương trình

$12.\sqrt[3]{3y+12t}=t^3-3y \Leftrightarrow (3y+12t)+12.\sqrt[3]{3y+12t}=t^3+12t$ (1)

Xét hàm số $f(t)=t^3+12t;\ t>0$ có $f'(t)=3t^2+12>0;\ \forall t>0$

$\Rightarrow f(t)$ luôn đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow f\left(\sqrt[3]{3y+12t}\right)=f(t) \Leftrightarrow \sqrt[3]{3y+12t}=t \Leftrightarrow 3y=t^3-12t$.

Đặt $g(t)=t^3-12t;\ t>0$ có $g'(t)=3t^2-12;\ g'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-2\ (L) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

t	0		2		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	0	↘	-16	↗	$+\infty$

Để tồn tại $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (1)$ có nghiệm $t>0 \Leftrightarrow 3y \geq -16 \Leftrightarrow y \geq -\dfrac{16}{3}$.

Vì $y \in \mathbb{Z}$ và $y \in [-2022;2022]$ nên $y \in \{-5;-4;-3;....;2022\}$. Vậy có 2028 số nguyên y.

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10;10]$ để phương trình

$2^{3^m}\cdot 7^{x^2-2x}+7^{3^m}\cdot 2^{x^2-2x}=14^{3^m}\left(7x^2-14x+2-7\cdot 3^m\right)$

có bốn nghiệm phân biệt trong đó có đúng hai nghiệm lớn hơn -1?

A. 10. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $2^{3^m}.7^{x^2-2x}+7^{3^m}.2^{x^2-2x}=14^{3^m}\left(7x^2-14x+2-7.3^m\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{7^{x^2-2x}}{7^{3^m}}+\dfrac{2^{x^2-2x}}{2^{3^m}}=7x^2-14x+2-7.3^m \Leftrightarrow 7^{x^2-2x-3^m}+2^{x^2-2x-3^m}=7\left(x^2-2x-3^m\right)+2\ (*)$

Đặt $x^2-2x-3^m=a$ thì $(*)$ trở thành $7^a+2^a=7a+2\Leftrightarrow 7^a+2^a-7a-2=0$.

Xét hàm số $f(a)=7^a+2^a-7a-2$. Ta có $f'(a)=7^a\ln 7+2^a\ln 2-7$.

Ta có $f''(a)=7^a(\ln 7)^2+2^a(\ln 2)^2>0,\ \forall a\in\mathbb{R}$.

Suy ra $f'(a)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó $f'(a)=0$ có tối đa 1 nghiệm.

Mà $f'(0)=\ln 7+\ln 2-7<0$ và $f'(1)=7\ln 7+2\ln 2-7>0$.

Suy ra $f'(a)=0$ có nghiệm duy nhất $a_0\in(0;1)$.

Suy ra $f(a)=0$ có tối đa 2 nghiệm.

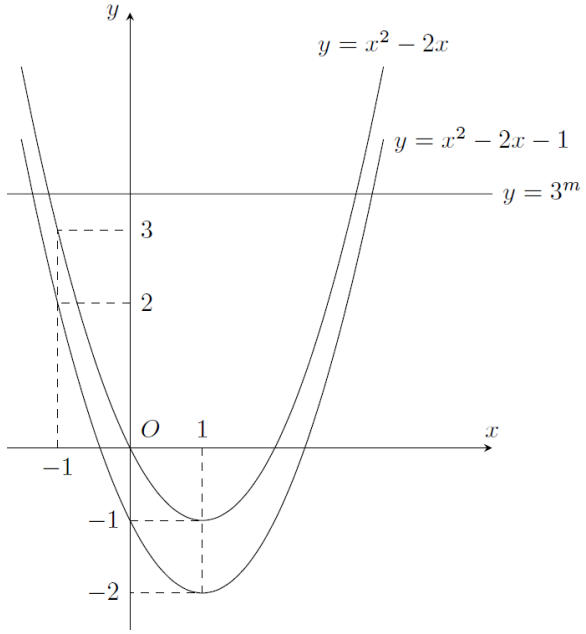
Bảng biến thiên của $y=f(a)$

a	$-\infty$		0		a_0		1		$+\infty$
$f'(a)$			$\|$	$-$	0	$+$	$\|$		
$f(a)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$f(a_0)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $f(a)=0$ có đúng 2 nghiệm $a=0$ và $a=1$.

Từ đó $\left[\begin{array}{l}a=x^2-2x-3^m=0\\a=x^2-2x-3^m=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^m=x^2-2x\\3^m=x^2-2x-1.\end{array}\right.(**)$

Để $(*)$ có 4 nghiệm thực phân biệt trong đó có đúng hai nghiệm lớn hơn -1 thì $(**)$ có 4 nghiệm thực phân biệt trong đó có đúng hai nghiệm lớn hơn -1 hay tương đương với đồ thị hàm số $y=3^m$ cắt đồ thị các hàm số $y=x^2-2x$ và $y=x^2-2x-1$ tại 4 điểm phân biệt trong đó có đúng hai điểm có hoành độ lớn hơn -1.



Dựa vào đồ thị ta có $3^m\ge 3\Leftrightarrow m\ge 1$ suy ra $m\in\{1;2;\ldots;10\}$.

Vậy có 10 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu 5: Cho phương trình $3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}}+\left(x^3-9x^2+24x+m\right).3^{x-3}=3^x+1$. Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình trên có 3 nghiệm phân biệt là

A. 38. **B.** 34. **C.** 27. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có hệ sau: $3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}}+\left(x^3-9x^2+24x+m\right).3^{x-3}=3^x+1 \quad (*)$.

Phương trình $(*)$ tương đương: $3^{\sqrt[3]{m-3x}}+\left(x^3-9x^2+24x+m\right)=\dfrac{3^x+1}{3^{x-3}}$

$\Leftrightarrow 3^{\sqrt[3]{m-3x}}+x^3-9x^2+24x+m-3x+3x=27+3^{3-x}$

$\Leftrightarrow 3^{\sqrt[3]{m-3x}}+m-3x=3^{3-x}+\left(27-27x+9x^2-x^3\right)\Leftrightarrow 3^{\sqrt[3]{m-3x}}+\left(\sqrt[3]{m-3x}\right)^3=3^{3-x}+(3-x)^3$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{m-3x}=3-x\Leftrightarrow m=-x^3+9x^2-24x+27=f(x)$

Xét $f'(x)=-3x^2+18x-24=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\x=4\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	7	$\nearrow$	11	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thì $7<m<11$.

Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=\{8,9,10\}\Rightarrow \sum m=27$.

Câu 6: Có bao nhiêu số nguyên dương m để phương trình $\log_{\sqrt{3}}\left(x^3-6x^2+9x+1\right)+x(x-3)^2=3^m+2m-1$ có duy nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-2;2)$

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_{\sqrt{3}}\left(x^3-6x^2+9x+1\right)+x(x-3)^2=3^m+2m-1$

$\Leftrightarrow 2\log_3\left(x^3-6x^2+9x+1\right)+x^3-6x^2+9x+1=3^m+2m$

Đặt $t=\log_3\left(x^3-6x^2+9x+1\right)\Rightarrow x^3-6x^2+9x+1=3^t$. Khi đó ta có

$2\log_3\left(x^3-6x^2+9x+1\right)+x^3-6x^2+9x+1=3^m+2m\Leftrightarrow 3^t+2t=3^m+2m$.

Xét hàm số $f(u)=3^u+2u$ là hàm đồng biến $\forall u\in\mathbb{R}$ nên suy ra

$f(t)=f(m)\Leftrightarrow t=m\Leftrightarrow x^3-6x^2+9x+1=3^m$.

Xét hàm số $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$ trên khoảng $(-2;2)$ có bbt:

x	-2		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-49	↗	5	↘	3

Để thỏa mãn ycbt thì $\left[\begin{array}{l} 0<3^m\le 3 \\ 3^m=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\log_3 5\notin\mathbb{Z} \end{array}\right.$.

Vậy có duy nhất 1 giá trị nguyên dương của m thỏa ycbt.

Câu 7: Số các giá trị nguyên của tham số $m\in[-6;6]$ để phương trình $\log_6(2022x+m)=\log_4(674x)$ có hai nghiệm phân biệt là

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C

ĐK: $\begin{cases} x>0 \\ 2022x+m>0 \end{cases}$.

Đặt

$$\log_6(2022x+m)=\log_4(674x)=t \Leftrightarrow \begin{cases} 2022x+m=6^t \\ 674x=4^t \end{cases} \Rightarrow 3.4^t+m=6^t \Leftrightarrow m=6^t-3.4^t \ (1)$$

Ta nhận thấy với mỗi nghiệm t của phương trình (1) thì tương ứng một nghiệm $x=\dfrac{4^t}{674}$ của phương trình đã cho. Nên bài toán trở thành tìm tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $f(t)=6^t-3.4^t$, có $f'(t)=6^t\ln 6-3.4^t\ln 4$.

$$f'(t)=0 \Leftrightarrow 6^t\ln 6-3.4^t\ln 4=0 \Leftrightarrow t=t_0=\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{3\ln 4}{\ln 6}\right).$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		t_0		$+\infty$
$f(x)$	0	↘	$f(t_0)\approx -12,08$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên thì để (1) có hai nghiệm phân biệt thì $f(t_0)<m<0$.

Do m nguyên và $m\in[-6;6] \Rightarrow m\in\{-6;-5;-4;-3;-2;-1\}$.

Vậy có 6 giá trị của tham số m.

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Có bao nhiêu số nguyên dương m để phương trình $m\left(\mathrm{e}^x-1\right)\cdot\ln\left(mx+1\right)+2\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{2x}+1$ có hai nghiệm phân biệt không lớn hơn 5.

A. 29. **B.** 27. **C.** 28. **D.** 26.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $m\left(\mathrm{e}^x-1\right)\cdot\ln\left(mx+1\right)+2\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{2x}+1\ (1)$

$\Leftrightarrow m\left(\mathrm{e}^x-1\right)\ln\left(mx+1\right)-\left(\mathrm{e}^x-1\right)^2=0\Leftrightarrow\left(\mathrm{e}^x-1\right)\left[m\ln\left(mx+1\right)-\left(\mathrm{e}^x-1\right)\right]=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\mathrm{e}^x-1=0\\ m\ln\left(mx+1\right)-\left(\mathrm{e}^x-1\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\mathrm{e}^x=1\\ m\ln\left(mx+1\right)=\mathrm{e}^x-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\quad(t/m)\\ m\ln\left(mx+1\right)=\mathrm{e}^x-1\end{array}\right.$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt không lớn hơn $5\Leftrightarrow$ Phương trình $m\ln\left(mx+1\right)=\mathrm{e}^x-1$ có một nghiệm duy nhất khác 0 và nhỏ hơn hoặc bằng 5.

Vì $x\neq0$ nên $m\ln\left(mx+1\right)=\mathrm{e}^x-1\Leftrightarrow m\ln\left(mx+1\right)+1=\mathrm{e}^x\ (2)$.

Đặt $t=\ln\left(mx+1\right)\Rightarrow mx+1=\mathrm{e}^x$. Ta có $\left\{\begin{array}{l}mx+1=\mathrm{e}^t\\ mt+1=\mathrm{e}^x\end{array}\right.\Rightarrow\mathrm{e}^x+mx=\mathrm{e}^t+mt\ (**)$.

Xét hàm số đặc trưng: $f\left(u\right)=\mathrm{e}^u+mu$ trên $\mathbb{R}$ có $f'\left(u\right)=\mathrm{e}^u+m>0$, $\forall u\in\mathbb{R}$ và $m\in\mathbb{Z}^+$.

Suy ra $(**)\Leftrightarrow x=t\Leftrightarrow\mathrm{e}^x-mx-1=0$.

Xét hàm số $g\left(x\right)=\mathrm{e}^x-mx-1$, có $g'\left(x\right)=\mathrm{e}^x-m$, suy ra $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=\ln m$.

Nếu $m=1$ loại.

Nếu $m>1$, ta có

x	$-\infty$		0		$\ln m$		c		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Để thỏa mãn bài toán thì $g\left(5\right)\geq0\Leftrightarrow m\leq\dfrac{\mathrm{e}^5-1}{5}$.

Kết hợp điều kiện, suy ra $m\in\left\{2;3;\ldots;29\right\}$.

Vậy có 28 giá trị nguyên dương m thỏa mãn.

Câu 2: Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x-m.2^{x+1}+m+2=0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $\left(0;2\right)$ là

A. $\left(-\infty;-1\right)\cup\left(2;\dfrac{18}{7}\right)$. **B.** $\left(-2;2\right)$. **C.** $\left(-\infty;-1\right)\cup\left(2;+\infty\right)$. **D.** $\left(2;\dfrac{18}{7}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = 2^x$. Do $x \in (0;2) \Rightarrow t \in (1;4)$.

Khi đó phương trình thành $t^2 - 2mt + m + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (2t-1)m - (t^2+2) = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{t^2+2}{2t-1} = g(t), \forall t \in (1;4)$.

Ta có: $g'(t) = \dfrac{2t^2 - 2t - 4}{(2t-1)^2}$, cho $g'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 (loai) \\ t = 2 (nhan) \end{array}\right.$.

Ta có $g(2) = 2, g(1) = 3, g(4) = \dfrac{18}{7}$ và bảng biến thiên của $g(t)$:

t	1		2		4
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	3	↘	2	↗	$\frac{18}{7}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \in \left(2; \dfrac{18}{7}\right)$.

Câu 3: Số nghiệm của phương trình $7^x = 6x + 1$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Phương trình $7^x = 6x + 1 \Leftrightarrow 7^x - 6x - 1 = 0$. Đặt $f(x) = 7^x - 6x - 1$.

Ta có $f'(x) = 7^x.\ln 7 - 6$

$f''(x) = 7^x.\ln^2 7 > 0 \ \forall x \in R$ nên phương trình $f(x) = 0$ có không quá hai nghiệm.

Lại có $f(0) = f(1) = 0$. Vậy phương trình $7^x = 6x + 1$ có hai nghiệm.

Câu 4: Tìm số giá trị nguyên của tham số thực m để tồn tại các số thực $x; y$ thỏa mãn $e^{x^2+y^2-m} + e^{x+y+xy-m} = x^2 + y^2 + x + y + xy - 2m + 2$.

A. 7. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 6.

Lời giải

Xét hàm số $f(t) = e^t - t - 1; \forall t \in \mathbb{R}$ có $f'(t) = e^t - 1$ và $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Ta thấy $f'(t)$ đổi dấu từ "–" sang "+" khi qua $t = 0$ nên $f(t) \ge f(0) = 0; \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó $\begin{cases} e^{x^2+y^2-m} - (x^2 + y^2 - m) - 1 \ge 0, \forall x, y \in \mathbb{R} \\ e^{x+y+xy-m} - (x + y + xy - m) - 1 \ge 0, \forall x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ x + y + xy = m \end{cases}$.

Hay $e^{x^2+y^2-m}+e^{x+y+xy-m}=x^2+y^2+x+y+xy-2m+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=m & (1) \\ x+y+xy=m & (2) \end{cases}$

Đặt $S=x+y; P=x.y$, ta có: $\begin{cases} S^2-2P=m \\ S+P=m \end{cases} \Rightarrow S^2-S-3P=0$. Vì $S^2 \geq 4P \Rightarrow S \in [0;4]$

Lấy $(1)+2.(2)$ vế theo vế ta được: $S^2+2S=3m \,(3)$

Xét hàm số $f(S)=S^2+2S; S \in [0;4]$, có $f'(S)=2S+2>0; \forall S \in [0;4]$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (3)$ có nghiệm $\Leftrightarrow f(0) \leq m \leq f(4) \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 8$.

Vậy có 9 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 5: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2^x=mx+1$ có đúng một nghiệm.

A. $\left[\begin{array}{l} m \leq 0 \\ m=\ln 2 \end{array}\right.$. **B.** $m>0$. **C.** $\begin{cases} m>0 \\ m \neq \ln 2 \end{cases}$. **D.** $m=\ln 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $2^x=mx+1 \Leftrightarrow 2^x-mx=1$ (*). Đặt $f(x)=2^x-mx$.

Nhận xét $x=0$ là nghiệm của phương trình $(*)$. Ta có: $f'(x)=2^x \ln 2-m$.

Trường hợp 1: $m \leq 0$ khi đó $f'(x)>0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Ta có bảng biến thiên của $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $m \leq 0$ thỏa yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: $m>0$. Khi đó $f'(x)=0 \Leftrightarrow x_o=\log_2 \dfrac{m}{\ln 2}$. Ta có bảng biến thiên của $f(x)$.

x	$-\infty$		x_o		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(x_o)$	$\nearrow$	$+\infty$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(x_o)=1$. Lại có $f(0)=1$ nên $x_o=0 \Leftrightarrow \log_2 \dfrac{m}{\ln 2}=0 \Leftrightarrow m=\ln 2$.

Tóm lại từ hai trường hợp, ta thấy phương trình có đúng 1 nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq 0 \\ m=\ln 2 \end{array}\right.$.

Câu 6: Tìm số giá trị nguyên của tham số $a \leq 2$ để phương trình $e^{e^{2x}-a}-2x-a=0$ có nhiều nghiệm nhất.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Đặt $e^{2x}-a=2t$, phương trình đã cho trở thành: $e^{2t}=2x+a\ (1)$.

Xét hệ $\begin{cases} e^{2x}=2t+a \\ e^{2t}=2x+a \end{cases} \Rightarrow e^{2x}-e^{2t}=2t-2a \Leftrightarrow e^{2x}+2x=e^{2t}+2t\ (2)$.

Xét hàm số $f(t)=e^t+t$ ta có $f'(t)=e^t+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$. Do đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(2x)=f(2t)\Leftrightarrow 2x=2t\Leftrightarrow x=t\Rightarrow e^{2x}=2x+a\Leftrightarrow a=e^{2x}-2x\ (3)$

Xét hàm số $g(x)=\mathrm{e}^{2x}-2x$. Ta có $g'(x)=2e^{2x}-2=0\Leftrightarrow e^{2x}=1\Leftrightarrow x=0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình (1) có nhiều nghiệm nhất khi và chỉ khi phương trình (3) có nhiều nghiệm nhất vậy $a>1$.

Câu 7: Có bao nhiêu số nguyên dương m để phương trình $\log_{\sqrt{3}}\left(x^3-6x^2+9x+1\right)+x(x-3)^2=3^m+2m-1$ có duy nhất một nghiệm thuộc $(-2;2)$.

A. 0. **B. 3.** **C. 1.** **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log_{\sqrt{3}}\left(x^3-6x^2+9x+1\right)+x(x-3)^2=3^m+2m-1$

$\Leftrightarrow 2\log_3\left[x(x-3)^2+1\right]+\left[x(x-3)^2+1\right]=2\log_3 3^m+3^m\ (1)$

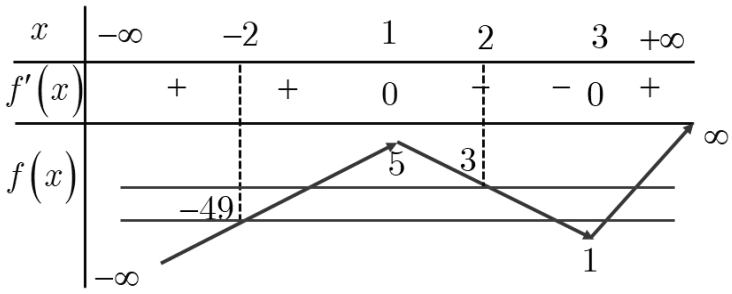
Xét hàm số $f(t)=t+2\log_3 t$ trên $(0;+\infty)$ có $f'(t)=1+2\dfrac{1}{t.\ln 3}>0\,\forall x\in(0;+\infty)$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên $(1)\Leftrightarrow x(x-3)^2+1=3^m\Leftrightarrow x^3-6x^2+9x+1=3^m\ (2)$

Số nghiệm của phương trình (2) là số giao điểm của đồ thị hàm số $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$ và đường thẳng $y=3^m$

Ta có: $f'(x)=3x-12x+9;\ f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:



Để phương trình có duy nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-2;2)$ thì $-49 \le 3^m \le 3$

Vì m nguyên dương nên $m \in \{1\}$

Vậy có 1 giá trị m nguyên dương thỏa mãn bài toán

Câu 8: Cho x và y là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{2}\log_3 \frac{x}{9} + \log_3 y = \frac{9 - xy^2}{y^2}$. Khi $P = x + 6y$ đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của $\frac{x}{y}$ bằng

A. $\sqrt[3]{3}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\sqrt[3]{9}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Với $x, y \in \mathbb{R}^+$, ta có: $\frac{1}{2}\log_3 \frac{x}{9} + \log_3 y = \frac{9 - xy^2}{y^2} \Leftrightarrow \log_3 \frac{x}{9} + 2\log_3 y = \frac{18 - 2xy^2}{y^2}$

$\Leftrightarrow \log_3 \frac{xy^2}{9} = \frac{18 - 2xy^2}{y^2} \Leftrightarrow \log_3 xy^2 + 2 \cdot \frac{xy^2}{y^2} = \log_3 9 + 2 \cdot \frac{9}{y^2} \quad (1)$

Xét hàm: $f(t) = \log_3 t + 2 \cdot \frac{t}{v^2}$, $t > 0$

Khi đó: $f'(t) = \frac{1}{3\ln t} + \frac{2}{v^2} > 0, \forall t > 0, v \in \mathbb{R}$. Suy ra: $(1) \Leftrightarrow xy^2 = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{y^2}$.

$\Rightarrow P = x + 6y = \frac{9}{y^2} + 6y = \frac{9}{y^2} + 3y + 3y \ge \sqrt[3]{\frac{9}{y^2} \cdot 3y \cdot 3y} = \sqrt[3]{81}$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{9}{y^2} = 3y \Rightarrow y = \sqrt[3]{3}$. Vậy khi $P_{\min}$ thì $\frac{x}{y} = \frac{9}{y^3} = \frac{9}{3} = 3$.

Câu 9: Có bao nhiêu số nguyên m để bất phương trình $\log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1} < x^2 - 5x + 2 - m$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Điều kiện xác định $\frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1} > 0$.

Để tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$ thì điều kiện xác định được thỏa mãn với mọi giá trị thực x.

Do $2x^2-x+1>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $3x^2+3x+m+1>0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\Delta<0\Leftrightarrow m>\frac{-1}{4}$ (1).

Với điều kiện bất phương trình đã cho tương đương

$\Leftrightarrow\log_2\left(3x^2+3x+m+1\right)-\log_2\left(2x^2-x+1\right)<x^2-5x+2-m$

$\Leftrightarrow\log_2\left(3x^2+3x+m+1\right)+\left(3x^2+3x+m+1\right)<\log_2\left(2x^2-x+1\right)+1+4x^2-2x+2$

$\Leftrightarrow\log_2\left(3x^2+3x+m+1\right)+\left(3x^2+3x+m+1\right)<\log_2\left(4x^2-2x+2\right)+4x^2-2x+2$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\frac{1}{t\ln 2}+1>0,\forall t>0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Như vậy $f\left(3x^2+3x+m+1\right)<f\left(4x^2-2x+2\right)$

$\Leftrightarrow 3x^2+3x+m+1<4x^2-2x+2\Leftrightarrow m<x^2-5x+1$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)=x^2-5x+1$

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{-21}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy để bất phương trình nghiệm đúng với mọi giá trị x thì $m<\frac{-21}{4}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 10: Có bao nhiêu số nguyên dương m nhỏ hơn 20 thỏa mãn phương trình $\log\left(mx+\log m^m\right)=10^x$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt.

A. 11. **B.** 13. **C.** 12. **D.** 10

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\log\left(mx+\log m^m\right)=10^x\Leftrightarrow mx+m\log m=10^{10^x}$

$\Leftrightarrow 10^x\left(mx+m\log m\right)=10^x.10^{10^x}\Leftrightarrow\left(m10^x\right)\log\left(m10^x\right)=10^x.10^{10^x}$ (1)

$10^x=a;\quad\log\left(m10^x\right)=b$

$a10^a=b10^b\Rightarrow a=b\Rightarrow 10^x=\log\left(m10^x\right)=\log m+x\Rightarrow\log m=10^x-x$

Ta có: $g(x)=10^x-x;\quad g'(x)=10^x\ln 10-1;\ g'(x)=0\Leftrightarrow x=-\log(\ln 10)$

x	$-\infty$		$-\log(\ln 10)$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	≈ 0.8	$\nearrow$	$+\infty$

Để phương trình có hai nghiệm thì $\Rightarrow\log m>0.8\Rightarrow m>10^{0.8}=6.72\Rightarrow m\in\{7;8;....19\}$

Vậy có 13 số nguyên của tham số m.

Câu 11: Cho phương trình $\left(4\log_2^2 x+\log_2 x-5\right)\sqrt{7^x-m}=0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 47 **B.** 49 **C.** Vô số **D.** 48

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình $\left(4\log_2^2 x+\log_2 x-5\right)\sqrt{7^x-m}=0$

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ m\le 7^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \log_7 m \\ x>0 \end{cases}$.

Phương trình tương đương $\left[\begin{array}{c} 4\log_2^2 x+\log_2 x-5=0 \\ 7^x-m=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=2 \\ x=2^{\frac{-5}{4}} \\ x=\log_7 m \end{array}\right.$.

Để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt:

TH1: $\log_7 m\le 0 \Leftrightarrow 0<m\le 1 \Rightarrow m=1$.

TH2: $2^{\frac{-5}{4}}\le \log_7 m<2 \Leftrightarrow 7^{2^{\frac{-5}{4}}}\le m<49 \Rightarrow m\in\{3;4;...;48\}$.

Vậy có tất cả 47 giá trị m thỏa mãn.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)=e^{2022x}-e^{-2022x}+\ln^{2023}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. Trên khoảng $(-25;25)$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $f\left(e^{x+m}+m\right)+f\left(x-x^2-\ln x^2\right)=0$ có đúng ba nghiệm phân biệt?

A. 25. **B.** 26. **C.** 24. **D.** 48.

Lời giải

Hàm số $f(x)$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$ nên $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.

Ta có:

$f(-x)=e^{-2022x}-e^{2022x}+\ln^{2023}\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right)=e^{-2022x}-e^{2022x}+\ln^{2023}\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)$

$=e^{-2022x}-e^{2022x}+\ln^{2023}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=e^{-2022x}-e^{2022x}-\ln^{2023}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=-f(x)$.

Do đó $f(x)$ là hàm số lẻ. Suy ra $f\left(x-x^2-\ln x^2\right)=-f\left(\ln x^2+x^2-x\right)$.

Mặt khác ta có: $f'(x)=2022e^{2022x}+2022e^{-2022x}+2023.\ln^{2022}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó phương trình $f\left(e^{x+m}+m\right)+f\left(x-x^2-\ln x^2\right)=0 \Leftrightarrow f\left(e^{x+m}+m\right)=f\left(\ln x^2+x^2-x\right)$

$e^{x+m}+m=\ln x^2+x^2-x\Leftrightarrow e^{x+m}+x+m=\ln x^2+x^2\Leftrightarrow e^{x+m}+x+m=e^{\ln x^2}+\ln x^2\ (*)$.

Xét hàm số $g(t)=e^t+t\Rightarrow g'(t)=e^t+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$(*)$ có dạng $g(x+m)=g\left(\ln x^2\right)$. Do đó $x+m=\ln x^2 \Leftrightarrow m=\ln x^2-x$.

Xét hàm số $h(x)=\ln x^2-x \Rightarrow h'(x)=\dfrac{2}{x}-1 \Rightarrow h'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$.

Phương trình $f\left(e^{x+m}+m\right)+f\left(x-x^2-\ln x^2\right)=0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m<2\ln 2-2$.

Mà $m\in(-25;25)$, $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-24;-23;...;-1\}$.

Vậy có 24 giá trị của tham số m thỏa mãn bài toán đã cho.

Câu 13: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị m để phương trình $m\ln x-x\ln m=x-m$ có 2 nghiệm phân biệt. Tập S là

A. $\left(\dfrac{1}{e};1\right)\cup(1;+\infty)$. **B.** $(1;e)\cup(e;+\infty)$.

C. $\left[\dfrac{1}{e};+\infty\right)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x>0;\ m>0$

Phương trình $m\ln x-x\ln m=x-m \Leftrightarrow \dfrac{1+\ln x}{x}=\dfrac{1+\ln m}{m}$

Xét $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x},\ \forall x>0$, ta có $f'(x)=\dfrac{-\ln x}{x^2};\ f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$

Bảng biến thiên $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x},\ \forall x>0$

x	0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	0

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $0<\dfrac{1+\ln m}{m}<1$ hay $\begin{cases}1+\ln m>0\\1+\ln m<m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>\dfrac{1}{e}\\m\neq 1\end{cases}$

Câu 14: Cho phương trình $\log_{\sqrt[3]{2}}\left(x^3+3x^2+4\right)+(x+2)^2(x-1)+8=2^m+3m$, ($m$ là tham số). Tìm số giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất thuộc $[-2;4)$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x^3+3x^2+4>0$

Ta có $\log_{\sqrt[3]{2}}\left(x^3+3x^2+4\right)+(x+2)^2(x-1)+8=2^m+3m$

$\Leftrightarrow 3\log_2\left(x^3+3x^2+4\right)+\left(x^3+3x^2+4\right)=3\log_2 2^m+2^m,\quad (1)$

Xét hàm số $y=f(t)=3\log_2 t+t$ với $t>0$ có $f'(t)=\dfrac{1}{t.\ln 2}+1>0,\forall t>0$ nên hàm số $y=f(t)=3\log_2 t+t$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Từ $(1)\Leftrightarrow f\left(x^3+3x^2+4\right)=f\left(2^m\right)\Leftrightarrow 2^m=x^3+3x^2+4$.

Đặt $g(x)=x^3+3x^2+4$ với $x\in[-2;4)$ có $g'(x)=3x^2+6x\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	-2		0		4
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	8	↘	4	↗	116

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất thuộc $[-2;4)$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^m=4\\8<2^m<116\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\3<m<\log_2 116\end{array}\right.$.

Mà tham số m nguyên nên $m\in\{2;4;5;6\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất thuộc $[-2;4)$

.

x	$-\infty$	-6	0		2		4	$+\infty$
$g'(x)$				$+$	0			
$g(x)$			$m-30$	↗	$m+14$			

Câu 15: Cho phương trình $\log_9(x+1)^2+\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x}{m}=1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình đã cho có nghiệm thực?

A. 1. **B.** Vô số. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Xét m nguyên dương nên ta có điều kiện phương trình $x>0$. Khi đó

$\log_9(x+1)^2+\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x}{m}=1\Leftrightarrow\log_3(x+1)-\log_3 x+\log_3 m=1$

.

$\Leftrightarrow\log_3\dfrac{x+1}{x}=\log_3\dfrac{3}{m}\Leftrightarrow\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{3}{m}\Leftrightarrow\dfrac{m}{3}=\dfrac{x}{x+1}$

Xét hàm số $y=\dfrac{x}{x+1}\Rightarrow y'=\dfrac{1}{(x+1)^2}>0,\forall x>0$.

Bảng biến thiên

x	0	$+\infty$
y'	$+$	
y	0 ↗	1

Để phương trình có nghiệm thì $0<\frac{m}{3}<1\Leftrightarrow 0<m<3\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}^+}m\in\{1,2\}$.

Câu 16: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x+y>0,-20\le x\le 20$ và $\log_2(x+2y)+x^2+2y^2+3xy-x-y=0$

A. 6.. **B.** 10.. **C.** 19.. **D.** 41.

Lời giải

Chọn B

$\log_2(x+2y)+x^2+2y^2+3xy-x-y=0\Leftrightarrow\log_2(x+2y)+x^2+2xy+2y^2+xy-x-y=0$

$\log_2(x+2y)+x(x+2y)+y(x+2y)+x+y=0\Leftrightarrow\log_2(x+2y)=(x+y)\left[1-(x+2y)\right].$

Do $\begin{cases}x+y>0,-20\le x\le 20\\x+2y>0\\x,y\in Z\end{cases}\Rightarrow x+2y\ge 1\Rightarrow\log_2(x+2y)\ge 0.$

Mà $\begin{cases}x+y>0\\\log_2(x+2y)\ge 0\end{cases}\Rightarrow 1-(x+2y)\ge 0\Leftrightarrow x+2y\le 1\Rightarrow x+2y=1.$

Do $\begin{cases}2x+2y>0,x+2y>0\\2y=1-x\\x,y\in Z,-20\le x\le 20\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>-1,x+2y>0\\x,y\in Z,-20\le x\le 20\Rightarrow x=1,3,5,7,9,11,13,15,17,19.\\2y=1-x\end{cases}$

Vậy có 10 cặp $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 17: Phương trình $2^{x-2+\sqrt[3]{m-3x}}+\left(x^3-6x^2+9x+m\right)2^{x-2}=2^{x+1}+1$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m\in(a;b)$. Đặt $T=b^2-a^2$ thì

A. $T=36$. **B.** $T=48$. **C.** $T=64$. **D.** $T=72$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2^{x-2+\sqrt[3]{m-3x}}+\left(x^3-6x^2+9x+m\right)2^{x-2}=2^{x+1}+1$.

$\Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{m-3x}}+(x-2)^3+8+m-3x=2^3+2^{2-x}\Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{m-3x}}+m-3x=2^{2-x}+(2-x)^3$.

Xét hàm $f(t)=2^t+t^3$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=2^t.\ln 2+3t^2>0,\forall t\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $f\left(\sqrt[3]{m-3x}\right)=f(2-x)\Leftrightarrow\sqrt[3]{m-3x}=2-x\Leftrightarrow m-3x=(2-x)^3\Leftrightarrow m=2-9x+6x^2-x^3$.

Số nghiệm phương trình là số giao điểm giữa đồ thị hàm số $y=-x^3+6x^2-9x+8$ và đường thẳng $y=m$.

Xét hàm số $f(x)=-x^3+6x^2-9x+8$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=-3x^2+12x-9; f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	8	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên để phương trình có 3 nghiệm phân biệt khi $4<m<8$.

Suy ra $a=4; b=8 \Rightarrow T=b^2-a^2=48$.

Câu 18: Gọi S là tập hợp tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $\left[\left(x^3-4x\right)e^{x^2-2x+2+\sqrt{100-x}}-\left(x^3-4x\right)\right]\sqrt{4^x-5.2^{x+1}+16}\ge 0$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 5045. **B.** 5048. **C.** 5047. **D.** 5046.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases} x\le 100 \\ 4^x-5.2^{x+1}+16\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 100 \\ \left[\begin{array}{l} x\le 1 \\ x\ge 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le 1 \\ 3\le x\le 100 \end{array}\right.$

Ta có : $\left[\left(x^3-4x\right)e^{x^2-2x+2+\sqrt{100-x}}-\left(x^3-4x\right)\right]\sqrt{4^x-5.2^{x+1}+16}\ge 0$

$\Leftrightarrow \left(x^3-4x\right)\left[e^{x^2-2x+2+\sqrt{100-x}}-1\right]\sqrt{4^x-10.2^x+16}\ge 0$

$\Leftrightarrow x\left(x^2-4\right)\sqrt{\left(2^x-2\right).\left(2^x-8\right)}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 2 \\ x=1 \\ -2\le x\le 0 \end{array}\right.$

(Vì $e^{x^2-2x+2+\sqrt{100-x}}-1=e^{(x-1)^2+1+\sqrt{100-x}}-1>e-1>0$)

Đối chiếu điều kiện, ta được $\left[\begin{array}{l} -2\le x\le 0 \\ x=1 \\ 3\le x\le 100 \end{array}\right.$

Vậy $S=\{-2;-1;0;1;3;4;5;\ldots;100\}$ hay tổng các phần tử của S là 5045.

Câu 19: Cho các số thực a, b thỏa mãn $\mathrm{e}^{a^2+2b^2}+\mathrm{e}^{ab}\left(a^2-ab+b^2-1\right)-\mathrm{e}^{1+ab+b^2}=0$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{1+2ab}$. Khi đó, $m+M=\dfrac{c}{d}$ (với $c,d\in\mathbb{N}$ và $\dfrac{c}{d}$ là phân số tối giản). Tính $S=3c+2d$.

A. 36. **B.** 29. **C.** 27. **D.** 67.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\mathrm{e}^{a^2+2b^2}+\mathrm{e}^{ab}\left(a^2-ab+b^2-1\right)-\mathrm{e}^{1+ab+b^2}=0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{a^2-ab+2b^2}+a^2-ab+b^2-1-\mathrm{e}^{1+b^2}=0$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{a^2-ab+2b^2}+a^2-ab+2b^2=\mathrm{e}^{1+b^2}+1+b^2,\ (*)$

Xét hàm số: $f(t)=\mathrm{e}^t+t \Rightarrow f'(t)=\mathrm{e}^t+1>0 \Rightarrow f(t)=\mathrm{e}^t+t$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

$(*) \Leftrightarrow f\left(a^2-ab+2b^2\right)=f\left(1+b^2\right) \Leftrightarrow a^2-ab+2b^2=1+b^2 \Leftrightarrow a^2-ab+b^2=1$

Do đó: $P=\dfrac{1}{1+2ab}=\dfrac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}$

TH1: $b=0 \Rightarrow P=1$

TH2: $b\neq 0 \Rightarrow P=\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2-\left(\dfrac{a}{b}\right)+1}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+\left(\dfrac{a}{b}\right)+1}=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}=g(x)$ với $x=\dfrac{a}{b}$

Cho $g'(x)=\dfrac{2x^2-2}{\left(x^2+x+1\right)^2};\ g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	↗	3	↘	$\frac{1}{3}$	↗	1

Do đó: $m=P_{\min}=\dfrac{1}{3};\ M=P_{\max}=3 \Rightarrow m+M=\dfrac{10}{3}.$

Câu 20: Có bao nhiêu số nguyên dương y để tồn tại số thực $x>1$ thỏa mãn

$$x\left(2^{xy}+\log_2(xy)\right)=xy^4+15xy-30+10y$$

A. 16 **B.** 15. **C.** 26. **D.** 27.

Lời giải

Chọn A

Đầu tiên ta có phương trình sau: $x\left(2^{xy}+\log_2(xy)\right)=xy^4+15xy-30+10y\ (*)$

$\Leftrightarrow 2^{xy}+\log_2(xy)=y^4+15y-\dfrac{30-10y}{x} \Leftrightarrow 2^{xy}+\log_2(xy)+\dfrac{30}{x}-\dfrac{10y}{x}=y^4+15y\ (1)$

Ta cô lập vế phải là một hàm theo biến y luôn đồng biến trên $(0;+\infty)$ ($f'(y)=4y^3+15>0$ $\forall y\in(0;+\infty)$)

Tiếp theo ta khảo sát hàm số $g(x)=2^{xy}+\log_2(xy)+\dfrac{30}{x}-\dfrac{10y}{x}$ trên $(1;+\infty)$

Ta có: $g'(x)=y2^{xy}\ln 2+\frac{1}{x\ln 2}-\frac{30}{x^2}+\frac{10y}{x^2}$. Thế $y=3$ vào ta có $g'(3)=8^{x+1}\ln 2-\frac{1}{x\ln 2}>64\ln 2-\frac{1}{\ln 2}>0,\forall x>1$

Suy ra $\forall y\ge 3$ thì $g'(x)>0$, kéo theo đó ta có được: $\begin{cases} g(x)>g(1)=2^y+\log_2(y)-10y+30 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty \end{cases}$.

Khi ấy để $(*)$ có nghiệm $\forall x>1$ thì cần có: $2^{xy}+\log_2(xy)+\frac{30}{x}-\frac{10y}{x}>2^y+\log_2(y)-10y+30$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $2^y+\log_2(y)-10y+30<y^4+15y\Leftrightarrow 2^y+\log_2(y)-25y+30-y^4<0,\ \forall y\ge 3$ (3)

Cho vế trái (3) bằng không giải ra nghiệm (shift SOLVE) $y\approx 16,01$ (**), khi đó ta có ý tưởng sau:

Giả sử đảo chiều (3), ta có: $2^y+\log_2(y)-10y+30>y^4+15y\Leftrightarrow 2^y+\log_2(y)-25y+30-y^4>0$ (4).

Tới đây ta sẽ chứng minh bất phương trình (4) luôn đúng với mọi $y\ge 17$.

Xét hàm số $h(y)=2^y+\log_2(y)-25y+30-y^4$ có $h(16)=-366<0; h(17)>0$ nên suy ra $h(y)<0,\forall y<17$ tức $h(y)>0,\forall y\ge 17$. Suy ra bất phương trình (4) luôn đúng với mọi $y\ge 17$ tức bất phương trình (3) luôn đúng với mọi $3\le y\le 17$.

Do (**) nên ta thử từng giá trị $y:3\to 17$ theo thứ tự từ lớn xuống, nhận thấy $y=17$ không thỏa nên $3\le y<17$

Mà đề cho $y\in\mathbb{Z}^+$ nên ta thử hai giá trị còn lại lần lượt là $y\in\{1;2\}$, nhận thấy hai giá trị này đều thỏa nên suy ra $1\le y<17$ tức $y\in\{1;2;...;15;16\}$. Vậy có tất cả 16 giá trị nguyên y thỏa mãn đề bài.

Câu 21: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $125.5^{x^2}-\left(12x^2-12m+37\right)5^m=0$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

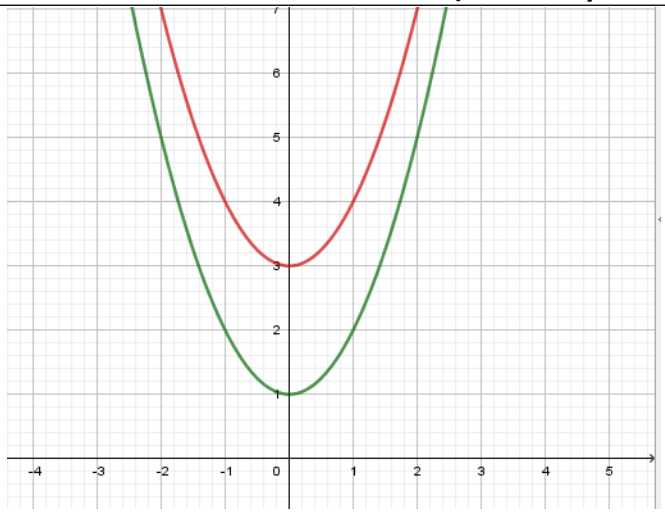
Chọn C

Ta có $\Leftrightarrow 125.5^{x^2-m}-\left(12x^2-12m+37\right)=0$

Đặt $t=x^2-m\Leftrightarrow 125.5^t-12t-37=0$

Xét $f(t)=125.5^t-12t-37\Rightarrow f'(t)=125.5^t-12=0$ có không quá 1 nhgiệm. Nên $125.5^t-12t-37=0$ có không quá hai nghiệm mà $f(-1)=f(-3)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=-3 \end{array}\right.$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x^2-m=-1 \\ x^2-m=-3 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=x^2+1 \\ m=x^2+3 \end{array}\right.$



Từ đồ thị ta thấy phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $m \in (1;3) \Rightarrow m = 2$

Câu 22: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\left(8.64^x - m\right)^3 - 162.4^x - 27m = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;1]$?

A. 487. **B.** 489. **C.** 483. **D.** 485.

Lời giải

Chọn A

$\left(8.64^x - m\right)^3 - 162.4^x - 27m = 0 \Leftrightarrow \left(\left(2.4^x\right)^3 - m\right)^3 = 3^3\left(3.\left(2.4^x\right) - m\right)$

$\left(2.4^x\right)^3 - m = 3\sqrt[3]{3.\left(2.4^x\right) + m} \Leftrightarrow \left(2.4^x\right)^3 + 3.\left(2.4^x\right) = 3\left(2.4^x\right) + m + 3\sqrt[3]{3.\left(2.4^x\right) + m}$.

Đặt $f(t) = t^3 + 3t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Ta có $\begin{cases} f'(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R} \\ f\left(2.4^x\right) = f\left(\sqrt[3]{3.2.4^x + m}\right) \end{cases} \Rightarrow 2.4^x = \sqrt[3]{3.2.4^x + m} \Leftrightarrow m = \left(2.4^x\right)^3 - 3.\left(2.4^x\right)$

Đặt $t = 2.4^x, x \in [0;1] \Rightarrow t \in [2;8]$.

Bài toán đưa về tìm m để phương trình $m = t^3 - 3.t$ có nghiệm thuộc $[0;1]$.

t	2		8
$h'(t)$		$+$	
$h(t)$	2	↗	488

Đặt $h(t) = t^3 - 3t \Rightarrow h'(t) = 3t^2 - 3 > 0 \ \forall t \in [2;8]$.

Vậy số giá trị nguyên của m là: $[488 - 2] + 1 = 487$.

Câu 23: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ sao cho đẳng thức sau được thỏa mãn $\log_{2022}\left(4^x - 2^{x+1} + 2023\right)^{y^2+101} - 20y - 1 = 0$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Đặt $m=\log_{2022}\left(4^x-2^{x+1}+2023\right)$. Ta có:

$\left(y^2+101\right).m=20y+1\Leftrightarrow my^2-20y+101m-1=0$ (*)

Do $m=\log_{2022}\left(4^x-2^{x+1}+2023\right)=\log_{2022}\left(\left(2^x-1\right)^2+2022\right)\geq\log_{2022}2022$ nên $m\geq 1$ (1)

Phương trình (*) có nghiệm y khi và chỉ khi $\Delta'=-101m^2+m+100\geq 0\Leftrightarrow -\dfrac{100}{101}\leq m\leq 1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$m=1\Leftrightarrow\log_{2022}\left(4^x-2^{x+1}+2023\right)=1\Leftrightarrow\left(2^x-1\right)^2+2022=2022\Leftrightarrow 2^x-1=0\Leftrightarrow x=0.$

Khi đó: $y^2-20y+100=0\Leftrightarrow y=10.$ Vậy $x=0,\ y=10.$.

Câu 24: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thoả mãn $1\leq x\leq 2020$ và $2^y+y=2x+\log_2(x+2^{y-1})$?

A. 2020. **B.** 2021. **C.** 11. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $2^y+y=2x+\log_2\left(x+2^{y-1}\right)\Leftrightarrow 2^y+2^y+y=2x+2^y+\log_2\left(x+2^{y-1}\right)$

$\Leftrightarrow 2.2^y+\log_2 2^y=2\left(x+2^{y-1}\right)+\log_2\left(x+2^{y-1}\right)(*)$.

Đặt $f(t)=2t+\log_2 t$ với $t>0$.

Ta có $f'(t)=2+\dfrac{1}{t\ln 2}>0,\forall t>0$ suy ra hàm số $y=f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Từ $(*)$ ta có $f(2^y)=f(x+2^{y-1})\Leftrightarrow 2^y=x+2^{y-1}\Leftrightarrow x=2^{y-1}.$

Vì $1\leq x\leq 2020$ nên $1\leq 2^{y-1}\leq 2020\Leftrightarrow\log_2 1\leq y-1\leq\log_2 2020\Leftrightarrow 1\leq y\leq\log_2 2020+1$

Theo bài y nguyên dương suy ra $y\in\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11\}$.

Vậy có 11 cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 25: Cho a,b,c là các số thực khác 0 thỏa mãn $6^a=9^b=24^c$. Giá trị của biểu thức $T=\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}$ bằng

A. $\dfrac{11}{12}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Đặt $6^a=9^b=24^c=t$, $(t>0,t\neq 1)$.

$$\Rightarrow\begin{cases}a=\log_6 t=\dfrac{1}{\log_t 6}\\ b=\log_9 t=\dfrac{1}{\log_t 9}\\ c=\log_{24} t=\dfrac{1}{\log_t 24}\end{cases}\Rightarrow T=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}=a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{\log_t 6}\left(\log_t 9+\log_t 24\right)$$

$\Leftrightarrow T=\dfrac{1}{\log_t 6}.\left(\log_t 216\right)=\dfrac{1}{\log_t 6}.\left(\log_t 6^3\right)=3$. Vậy $T=3$.

Câu 26: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\ln\left(x\sqrt{x^2+16}-x^2\right)\le\sqrt{x^2+16}-15x$.

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x\sqrt{x^2+16}-x^2>0\Leftrightarrow x\left(\sqrt{x^2+16}-x\right)>0\Leftrightarrow x>0$.

Ta có: $\ln\left[x\left(\sqrt{x^2+16}-x\right)\right]=\ln\dfrac{16x}{\sqrt{x^2+16}+x}=\ln(16x)-\ln\left(\sqrt{x^2+16}+x\right)$

Bất phương trình tương đương

$\ln(16x)-\ln\left(\sqrt{x^2+16}+x\right)\le\sqrt{x^2+16}+x-16x$

$\Leftrightarrow\ln(16x)+16x\le\ln\left(\sqrt{x^2+16}+x\right)+\sqrt{x^2+16}+x$ (*)

Xét hàm số $f(t)=\ln t+t$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có: $f'(t)=\dfrac{1}{t}+1>0$ trên $(0;+\infty)$. Suy ra hàm số $f(t)=\ln t+t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Từ (*) suy ra

$16x\le\sqrt{x^2+16}+x\Leftrightarrow\sqrt{x^2+16}\ge15x\Leftrightarrow x^2+16\ge225x^2\Leftrightarrow x^2\le\dfrac{1}{14}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{\sqrt{14}}\le x\le\dfrac{1}{\sqrt{14}}$.

So với điều kiện ta được $0<x\le\dfrac{1}{\sqrt{14}}$.

Mà $x\in\mathbb{Z}$ nên suy ra không có giá trị nguyên nào của x thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 27: Cho x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log_7\left(\dfrac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x$ và $x_1+2x_2=\dfrac{1}{4}\left(a+\sqrt{b}\right)$ với a,b là hai số nguyên dương. Tính $a+b$.

A. $a+b=14$. **B.** $a+b=11$. **C.** $a+b=16$. **D.** $a+b=13$.

Lời giải

Chọn A

$\log_7\left(\dfrac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x\ (1)$

$\Leftrightarrow\log_7\left(4x^2-4x+1\right)+\left(4x^2-4x+1\right)=\log_7(2x)+2x$

$\Leftrightarrow f\left(4x^2-4x+1\right)=f(2x)$ với $f(t)=\log_7 t+t$ xét trên khoảng $(0;+\infty)$.

$f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 7}+1>0,\forall t>0$. Suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Vậy $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2-4x+1=2x\\2x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2-4x+1=2x\\2x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2-6x+1=0\\2x>0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{4}$.

Mà $x_1+2x_2=\frac{1}{4}\left(a+\sqrt{b}\right)$ với a,b là hai số nguyên dương, suy ra: $x_1=\frac{3-\sqrt{5}}{4}$, $x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{4}$.

Do đó: $x_1+2x_2=\frac{1}{4}\left(9+\sqrt{5}\right)$. Suy ra: $(a;b)=(9;5)$.

Câu 28: Cho các số thực dương x và y thỏa mãn $4+3^{2x^2-y+2}=\left(4+9^{2x^2-y}\right)\cdot 7^{y-2x^2+2}$. Khi biểu thức $P=\frac{x+y+10}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất thì tổng $x+y$ bằng.

A. $1+8\sqrt{2}$. **B.** 8. **C.** 9. **D.** $1+9\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $4+3^{2x^2-y+2}=\left(4+9^{2x^2-y}\right)\cdot 7^{y-2x^2+2} \Leftrightarrow 7^{2x^2-y}\left(4+9\cdot 3^{2x^2-y}\right)=49\left(4+9^{2x^2-y}\right)$

$\Leftrightarrow 4\cdot 7^{2x^2-y}+9\cdot 21^{2x^2-y}-49\cdot 9^{2x^2-y}-196=0$. (*)

Đặt $t=2x^2-y$, ta được (*) $\Leftrightarrow 4\cdot 7^t+9\cdot 21^t-49\cdot 9^t-196=0 \Leftrightarrow \frac{4+3^{t+2}}{7^{t+2}}=\frac{4+3^{2t}}{7^{2t}}$.

Xét hàm số $f(a)=\frac{4+3^a}{7^a}=4\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^a+\left(\frac{3}{7}\right)^a$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó (*) $\Leftrightarrow f(t+2)=f(2t) \Leftrightarrow t+2=2t \Leftrightarrow t=2 \Leftrightarrow 2x^2-y=2$

Khi đó $P=\frac{2x^2+x+8}{x}=2x+\frac{8}{x}+1\geq 2\sqrt{2x\cdot\frac{8}{x}}+1=9$.

Vậy $P_{\min}=9$ khi $x=2$ và $y=6$, hay $x+y=8$.

Câu 29: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-8;+\infty)$ để phương trình $x^2+x(x-1)2^{x+m}+m=\left(2x^2-x+m\right).2^{x-x^2}$ có nhiều hơn hai nghiệm phân biệt?

A. 8 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 5

Lời giải

Chọn C

$\left(x^2+m\right)+\left(x^2-x\right)2^{x^2+m-(x^2-x)}=\left[\left(x^2+m\right)+\left(x^2-x\right)\right]2^{2-x^2}$ (1).

Đặt $x^2+m=a, x^2-x=b$ ta có phương trình (1) trở thành

$a+b.2^{a-b}=(a+b).2^{-b} \Leftrightarrow a.2^b+b.2^a=a+b \Leftrightarrow a\left(2^b-1\right)+b\left(2^a-1\right)=0$ (2).

Trường hợp 1: Nếu $ab\neq 0$ thì phương trình (2) $\Leftrightarrow \frac{2^a-1}{a}+\frac{2^b-1}{b}=0$ (3).

$+\ a>0\Rightarrow 2^a-1>0\Rightarrow \frac{2^a-1}{a}>0.$

$+a<0\Rightarrow 2^a-1<0\Rightarrow \frac{2^a-1}{a}>0$. Do đó $\frac{2^a-1}{a}>0$, với $a\neq 0$.

Tương tự $\frac{2^b-1}{b}>0$ với $b\neq 0$. Do vậy phương trình (3) vô nghiệm.

Trường hợp 2: Nếu $ab=0$ thì $(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=-m\\x^2-x=0\end{array}\right.$

Do m nguyên và $m\in(-8;+\infty)$ nên $m=-7,m=-6,m=-5,m=-4,m=-3,m=-2,m=-1$.

Do đó có 7 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 30: Kí hiệu S là tập tất cả số nguyên m sao cho phương trình $3^{x^2+mx+1}=(3+mx)3^{9x}$ có nghiệm thuộc khoảng $(1;9)$. Số phần tử của S là?

A. 11. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 12.

Lời giải

Chọn A

$3^{x^2+mx+1}=(3+mx)3^{9x}\Leftrightarrow 3^{x^2+mx+1-9x}-(3+mx)=0(1)$

Để phương trình có nghiệm $3+mx>0$

Khi đó, $3+mx>0\Leftrightarrow m>\dfrac{-3}{x}\Leftrightarrow m>-3\,(do\ 1<x<9)$

Xét hàm số $f(x)=3^{x^2+mx+1-9x}-(3+mx)$

Đạo hàm: $f'(x)=\ln 3.(2x+m-9)3^{x^2+mx+1-9x}-m$

Đạo hàm cấp 2: $f''(x)=\ln 3.2.3^{x^2+mx+1-9x}+\left(\ln 3.(2x+m-9)\right)^2 3^{x^2+mx+1-9x}>0$

Do đó $f'(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}\Rightarrow f'(x)=0$ có nhiều nhất một nghiệm $\Rightarrow f(x)=0$ có nhiều nhất hai nghiệm.

Mặt khác $x=0$ là một nghiệm của phương trình (1) nên để phương trình này có nghiệm $x\in(1;9)$ thì (1) phải có đúng một nghiệm $x\in(1;9)$

$\Rightarrow f(1).f(9)<0\Leftrightarrow\left(3^{m-7}-3-m\right)\left(3^{1+m}-3-9m\right)<0$

Giải ra ta được $m\in\{-2;-1;1;....;9\}$ có 11 giá trị.

Câu 31: Tìm số các số nguyên dương a không vượt quá 10 để phương trình $9^{1-\frac{1}{x^2}}-a.3^{1-\frac{1}{x^2}}+2=0$ có hai nghiệm phân biệt.

A. 7. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $9^{1-\frac{1}{x^2}}-a.3^{1-\frac{1}{x^2}}+2=0$

Điều kiện $x\neq 0$. Đặt $t=3^{1-\frac{1}{x^2}}\,(0<t<3)$. Vì $1-\dfrac{1}{x^2}<1$.

Ta được phương trình $t^2-a.t+2=0\,(2)$. Bài toán đưa về tìm số các số nguyên dương a không vượt quá 10 để phương trình $t^2-a.t+2=0\,(2)$ có 1 nghiệm duy nhất $t_0,(0<t_0<3)$.

Vì mỗi $t,(0<t<3)$ thì phương trình $t=3^{1-\frac{1}{x^2}}$ có 2 giá trị phân biệt của x.

$t^2 - a.t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = t + \dfrac{2}{t} \\ 0 < t < 3 \end{cases}$. Đặt $h(t) = t + \dfrac{2}{t} \Rightarrow h'(t) = 1 - \dfrac{2}{t^2} = \dfrac{t^2 - 2}{t^2}$.

$h'(t) = 0 \Rightarrow t = \sqrt{2}$.

Bảng biến thiên

t	0		$\sqrt{2}$		3
$h'(t)$		$-$	0	$+$	
$h(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{11}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên ta được $2\sqrt{2} \le a < \dfrac{11}{3}$. Do a là số nguyên dương nên $a = 3$.

Câu 32: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thoả mãn $0 < x \le 2023$ và $3^x(x+1) = 27^y y$?

A. 2020. **B.** 674. **C.** 672 . **D.** 2019 .

Lời giải

Chọn B

Ta có: $3^x.(x+1) = 27^y.y \Leftrightarrow \log_3\left[3^x.(x+1)\right] = \log_3\left(27^y.y\right)$

$\Leftrightarrow x + \log_3(x+1) = 3y + \log_3 y \Leftrightarrow (x+1) + \log_3(x+1) = 3y + \log_3 y + \log_3 3$

$\Leftrightarrow (x+1) + \log_3(x+1) = 3y + \log_3(3y)$.

Xét hàm số $f(t) = t + \log_3 t$, với $t \in (1;2024]$.

$f'(t) = 1 + \dfrac{1}{t\ln 3} > 0,\ \forall t \in (1;2024]$.

Suy ra hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $(0;2023)$.

Mà $\Leftrightarrow f(x+1) = f(3y) \Leftrightarrow x+1 = 3y \Leftrightarrow x = 3y - 1$.

Vì $0 < x \le 2023 \Leftrightarrow 0 < 3y - 1 \le 2023 \Leftrightarrow 1 < 3y \le 2024 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} < y \le \dfrac{2024}{3}$.

Do $y \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow y \in \{1;2;3;...;673;674\}$. Ứng với mỗi giá trị y cho ta một x nguyên dương.

Vậy có 674 cặp $(x;y)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 33: Số nghiệm của phương trình $\log_3\left|x^2 - \sqrt{2}x\right| = \log_5\left(x^2 - \sqrt{2}x + 2\right)$ là

A. 2 . **B.** 0 . **C.** 1. **D.** 3 .

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x \ne 0; x \ne \sqrt{2}$.

Đặt $\log_3\left|x^2 - \sqrt{2}x\right| = \log_5\left(x^2 - \sqrt{2}x + 2\right) = t$. Khi đó ta có

$\begin{cases} \left|x^2 - \sqrt{2}x\right| = 3^t \\ x^2 - \sqrt{2}x + 2 = 5^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|x^2 - \sqrt{2}x\right| = 3^t \\ x^2 - \sqrt{2}x = 5^t - 2 \end{cases}$

Từ đó suy ra $\left|5^t-2\right|=3^t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^t-2=3^t \quad (1) \\ 5^t-2=-3^t \quad (2) \end{array}\right.$.

Phương trình (1) tương đương $5^t-3^t-2=0 \Leftrightarrow 1-\left(\frac{3}{5}\right)^t-2.\left(\frac{1}{5}\right)^t=0$.

Xét hàm số $g(t)=1-\left(\frac{3}{5}\right)^t-2.\left(\frac{1}{5}\right)^t$.

Khi đó $g'(t)=-\left(\frac{3}{5}\right)^t \ln\frac{3}{5}-2.\left(\frac{1}{5}\right)^t \ln\frac{1}{5}>0$.

Do đó hàm số $g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra phương trình $g(x)=0$ có không quá một nghiệm.

Mặt khác vì $t=1$ là một nghiệm của phương trình $g(t)=0$, nên phương trình $g(x)=0$ có duy nhất một nghiệm $t=1$.

Với $t=1$ ta có phương trình $x^2-\sqrt{2}x=3 \Leftrightarrow x^2-\sqrt{2}x-3=0$.

Phương trình này có hai nghiệm, và hiển nhiên hai nghiệm này cũng là hai nghiệm của phương trình đã cho.

Phương trình (2) tương đương với $5^t+3^t-2=0$.

Xét hàm số $h(t)=5^t+3^t-2$.

Khi đó $h'(t)=5^t\ln 5+3^t\ln 3>0$. Suy ra $h(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lập luận tương tự phương trình (1), ta có phương trình (2) có duy nhất một nghiệm $t=0$.

Với $t=0$ ta có phương trình $x^2-\sqrt{2}x=-1 \Leftrightarrow x^2-\sqrt{2}x+1=0$.

Phương trình này vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 34: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $(x-1)\log\left(e^{-x}+m+2023\right)=x-2$ có hai nghiệm thực?

A. 2023. **B.** 2024. **C.** 10. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $(x-1)\log\left(e^{-x}+m+2023\right)=x-2$ (1).

TH1: Với $x=1$ ta có $VT=0; VP=-1$ suy ra $x=1$ không là nghiệm của phương trình.

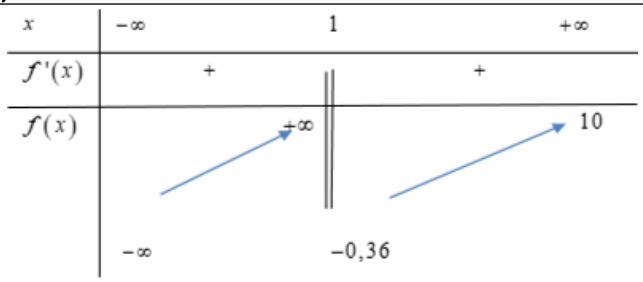
TH2: Với $x\neq 1$ thì phương trình trở thành $\log\left(e^{-x}+m+2023\right)=\frac{x-2}{x-1}$

$\Leftrightarrow e^{-x}+m+2023=10^{\frac{x-2}{x-1}} \Leftrightarrow m+2023=10^{\frac{x-2}{x-1}}-e^{-x}$.

Xét hàm số $f(x)=10^{\frac{x-2}{x-1}}-e^{-x}$ có TXĐ $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có $f'(x)=\frac{1}{(x-1)^2}10^{\frac{x-2}{x-1}}.\ln 10+e^{-x}>0;\ \forall x\in D$.

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình có 2 nghiệm thực khi $-0,36 < m + 2023 < 10 \Leftrightarrow -2023,36 - \frac{1}{e} < m < -2013$.

Vậy có 10 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 35: Gọi S là tập tất cả các số nguyên a sao cho ứng với mỗi a, tồn tại ít nhất số thực b thỏa mãn $\frac{1}{2}a^{\log_3 8} + 2^{\log_3 a} = \left(b + \sqrt{4-b^2}\right)\left(3 + b\sqrt{4-b^2}\right)$. Tổng các phần tử của tập hợp S bằng

A. 10. **B.** 15. **C.** 28. **D.** 21.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} a > 0 \\ -2 \le b \le 2 \end{cases}$.

Đặt $t(b) = b + \sqrt{4-b^2} \Rightarrow t'(b) = 1 - \frac{b}{\sqrt{4-b^2}}$

$t'(b) = 0 \Leftrightarrow b = \sqrt{2}$

Ta có $t(-2) = -2; t(2) = 2; t\left(\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}$. Do đó $t \in \left[-2; 2\sqrt{2}\right]$.

Lại có: $t^2 = \left(b + \sqrt{4-b^2}\right)^2 = 4 + 2b\sqrt{4-b^2} \Rightarrow b\sqrt{4-b^2} = \frac{t^2-4}{2}$

Do đó phương trình ban đầu trở thành: $\frac{1}{2}\left[2^{\log_3 a}\right]^3 + 2^{\log_3 a} = t\left(3 + \frac{t^2-4}{2}\right) = \frac{1}{2}t^3 + t \quad (*)$

Mà $f(t) = \frac{1}{2}t^3 + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $(*) \Leftrightarrow 2^{\log_3 a} = t$

Hay $2^{\log_3 a} = b + \sqrt{4-b^2} \Leftrightarrow \log_3 a = \log_2\left(b + \sqrt{4-b^2}\right) \Leftrightarrow a = 3^{\log_2\left(b+\sqrt{4-b^2}\right)}$

Ta có: $2^{\log_3 a} > 0$ nên $b + \sqrt{4-b^2} \in \left(0; 2\sqrt{2}\right] \Rightarrow \log_2\left(b + \sqrt{4-b^2}\right) \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right] \Rightarrow a \in \left(0; 3^{\frac{3}{2}}\right]$

Vậy $S = \{1;2;3;4;5\}$

Tổng các phần tử của tập hợp S bằng 15.

Câu 36: Cho hàm số $f(x) = e^{2022x} - e^{-2022x} + \ln^{2023}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$. Trên khoảng $(-25;25)$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $f\left(e^{x+m} + m\right) + f\left(x - x^2 - \ln x^2\right) = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt?

A. 24. **B.** 25. **C.** 48. **D.** 26.

Lời giải

Chọn A

Có $x+\sqrt{x^2+1}>x+\sqrt{x^2}=x+|x|\geq 0$ nê hàm số $f(x)=e^{2022x}-e^{-2022x}+\ln^{2023}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Có $f(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)=\ln\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{-1}=-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

Vậy, $f(-x)=-f(x)\Rightarrow$ Hàm số $f(x)$ là hàm số lẻ.

Đạo hàm của hàm số $f(x)$ là:

$$f'(x)=2022.e^{2022x}+2022.e^{-2022x}+2023\frac{\ln^{2022}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Do đó, hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do hàm số $f(x)$ là hàm số lẻ và $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên PT đã cho tương đương với PT:

$$f\left(e^{x+m}+m\right)=-f\left(x-x^2-\ln x^2\right)\Leftrightarrow f\left(e^{x+m}+m\right)=f\left(-x+x^2+\ln x^2\right)$$

$$\Leftrightarrow e^{x+m}+x+m=x^2+\ln x^2\ (1)$$

Đặt $t=\ln x^2\Rightarrow x^2=e^t$

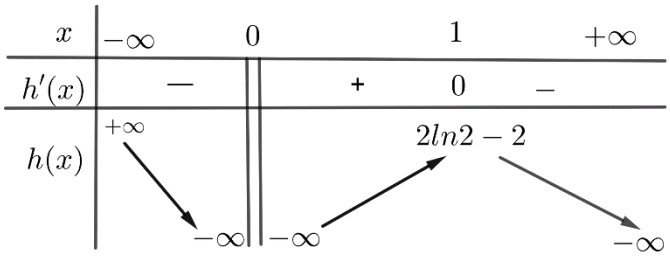
PT (1) trở thành: $e^{x+m}+x+m=e^t+t$

Hàm số $g(t)=e^t+t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên PT (1) $\Leftrightarrow x+m=\ln x^2$ ĐKXĐ: $x\neq 0$.

$\Leftrightarrow m=-x+\ln x^2=h(x)$

Có $h'(x)=-1+\dfrac{2}{x}=\dfrac{-x+2}{x}$; $h'(x)=0\Leftrightarrow x=2$

Lập bảng biến thiên của hàm số $h(x)$



Từ bảng biến thiên hàm số $h(x)$ suy ra PT đã cho có 3 nghiệm khi $m<2\ln 2-2\approx 0,614$

Do $m\in(-25;25)$ nên suy ra $m\in\{-24;-23;...;-1\}$

Vậy có 24 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 37: Có bao nhiêu số nguyên dương m để phương trình $\log_{\sqrt{3}}\left(x^3-6x^2+9x+1\right)+x(x-3)^2=3^m+2m-1$ có duy nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-2;2)$?

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_{\sqrt{3}}\left(x^3-6x^2+9x+1\right)+x(x-3)^2=3^m+2m-1$

$\Leftrightarrow 2\log_3\left(x^3-6x^2+9x+1\right)+\left(x^3-6x^2+9x+1\right)=3^m+2m$

Đặt $t=\log_3\left(x^3-6x^2+9x+1\right)\Leftrightarrow x^3-6x^2+9x+1=3^t$.

Khi đó phương trình trở thành $2t+3^t=2m+3^m$.

Xét hàm số $f(u)=2u+3^u$ có $f'(u)=2+3^u.\ln 3>0,\forall u$.

Suy ra hàm số $f(u)$ luôn đồng biến.

Nên $f(t)=f(m)\Leftrightarrow t=m\Rightarrow x^3-6x^2+9x+1=3^m$

Xét hàm số $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$ trên khoảng $(-2;2)$.

$f'(x)=3x^2-12x+9\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-12x+9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in(-2;2)\\x=3\notin(-2;2)\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	-2		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-49	↗	5	↘	3

Phương trình có duy nhất một nghiệm thuộc $(-2;2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<3^m\le 3\\3^m=5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le 1\\m=\log_3 5\end{array}\right.$.

Do m nguyên dương nên chọn $m=1$.

Vậy có 1 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 38: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $\log_2(2x-2002)+x=y+1002+2^y$ và $1002\le x\le 2022$?

A. 10. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 18.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x>1001$.

Pt $\Leftrightarrow 1+\log_2(x-1001)+x-1001=y+1+2^y\Leftrightarrow\log_2(x-1001)+2^{\log_2(x-1001)}=y+2^y$.

Xét hàm số $f(t)=t+2^t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên pt $\Leftrightarrow\log_2(x-1001)=y\Leftrightarrow x=2^y+1001$.

Ta có: $1002\le x\le 2022\Leftrightarrow 1002\le 2^y+1001\le 2022\Leftrightarrow 0\le y\le\log_2 1021$

Mà $y\in\mathbb{Z}$ nên $y\in\{0;1;...;9\}$.

Vậy có 10 cặp $(x;y)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 39: Cho phương trình $\log_3\dfrac{2x^2-x+m}{x^2+1}=x^2+x+4-m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2022;2022]$ để phương trình có hai nghiệm trái dấu?

A. 2022. **B.** 2021. **C.** 2016. **D.** 2019.

Lời giải

Điều kiện: $\frac{2x^2-x+m}{x^2+1}>0 \Leftrightarrow 2x^2-x+m>0$.

Ta có: $\log_3\frac{2x^2-x+m}{x^2+1}=x^2+x+4-m$

$\Leftrightarrow \log_3\left(2x^2-x+m\right)-\log_3\left(x^2+1\right)=\left(3x^2+3\right)-\left(2x^2-x+m\right)+1$

$\Leftrightarrow \log_3\left(2x^2-x+m\right)+\left(2x^2-x+m\right)=\log_3\left(x^2+1\right)+1+\left(3x^2+3\right)$

$\Leftrightarrow \log_3\left(2x^2-x+m\right)+\left(2x^2-x+m\right)=\log_3\left(3x^2+3\right)+\left(3x^2+3\right),\ (*)$

Xét hàm số: $f(t)=\log_3 t+t$ với $t>0$.

Ta có: $f'(t)=\frac{1}{t\ln 3}+1>0,\forall t>0$.

$\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Khi đó: $(*)\Leftrightarrow f\left(2x^2-x+m\right)=f\left(3x^2+3\right)$

$\Leftrightarrow 2x^2-x+m=3x^2+3 \Leftrightarrow x^2+x+3-m=0,\ (**)$

Phương trình đã cho có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow$ phương trình $(**)$ có 2 nghiệm trái dấu

$\Leftrightarrow 1.(3-m)<0 \Leftrightarrow m>3$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$, $m\in[-2022;2022]$ nên $m\in\{4;5;6;...;2022\}\Rightarrow$ Có 2019 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 40: Có bao nhiêu số nguyên dương x thoả mãn $\log_2\left(\frac{x+1}{2}\right)+x=4^{\sin^4 y+\cos^4 y}-\sin^2 2y$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x>-1$

Ta có $\log_2\left(\frac{x+1}{2}\right)+x=4^{\sin^4 y+\cos^4 y}-\sin^2 2y \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{x+1}{2}\right)+x=4^{1-2\sin^2 y\cos^2 y}-\sin^2 2y$

$\Leftrightarrow \log_2(x+1)-1+x=2^{2-\sin^2 2y}-\sin^2 2y \Leftrightarrow \log_2(x+1)+x+1=2^{2-\sin^2 2y}+\left(2-\sin^2 2y\right)$.

Xét hàm số $f(t)=t+\log_2 t$ trên $(0;+\infty)$ có $f'(t)=1+\frac{1}{t\ln 2}>0$, $\forall t>0$. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Phương trình đã cho có dạng $f(x+1)=f\left(2^{2-\sin^2 2y}\right)\Leftrightarrow x+1=2^{2-\sin^2 2y}$.

Ta có $2-\sin^2 2y\in[1;2]$, $\forall y$ nên $x+1=2^{2-\sin^2 2y}\in[2;4]\Leftrightarrow x\in[1;3]$. Vì $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{1;2;3\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên dương của x thoả mãn phương trình đã cho.

Câu 41: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2022;2023]$ để phương trình $x\log_2(x+1)=\log_4\left[16(x+1)^{2m}\right]$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 2022. **B.** 2021. **C.** 2023. **D.** 2024.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x>-1$.

Phương trình $\Leftrightarrow x\log_2(x+1)=\log_4 16+\log_4\left[(x+1)^{2m}\right]\Leftrightarrow x\log_2(x+1)=2+m\log_2(x+1)$.

Đặt $t=\log_2(x+1),\ t\in\mathbb{R}\Rightarrow x=2^t-1$. Khi đó ta có phương trình $\Leftrightarrow\left(2^t-1\right)t=2+mt$ (1)

Nếu $t=0$ thì không thoả mãn phương trình (1)

Nếu $t\neq 0$ thì $(1)\Leftrightarrow m=2^t-1-\dfrac{2}{t}$ (2).

Đặt $f(t)=2^t-1-\dfrac{2}{t};\ t\neq 0.\Rightarrow f'(t)=2^t.\ln 2+\dfrac{2}{t^2}>0,\ \forall t\neq 0$. Ta có bảng biến thiên

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(t)$	$+$		$+$
$f(t)$	-1 ↗ $+\infty$		$-\infty$ ↗ $+\infty$

Với $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=+\infty$, $\lim\limits_{t\to-\infty}f(t)=-1$, $\lim\limits_{t\to0^+}f(t)=-\infty$, $\lim\limits_{t\to0^-}f(t)=+\infty$.

Phương trình đã cho có 2 nghiệm $\Leftrightarrow(2)$ có 2 nghiệm phân biệt $t\neq 0\Leftrightarrow m>-1$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in[-2022;2023]$ nên $m\in\{0;1;2;...;2023\}$. Vậy có 2024 số nguyên m.

Câu 42: Có bao nhiêu cặp số $(x;y)$ thoả mãn

$\log_2\left(y^{2\log_3 x}-2^{2+\log_3 x\log_2 y}+8\right)=\log_3\left[7-\left(x^2+y^3-2025\right)\sqrt{x^2+y^3-2022}\right]$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$\log_2\left(y^{2\log_3 x}-2^{2+\log_3 x\log_2 y}+8\right)=\log_2\left(y^{2\log_3 x}-4.\left(2^{\log_2 y}\right)^{\log_3 x}+8\right)$

$=\log_2\left(y^{2\log_3 x}-4.y^{\log_3 x}+4+4\right)=\log_2\left(\left(y^{2\log_3 x}-2\right)^2+4\right)\geq\log_2 4=2$

$\log_3\left[7-\left(x^2+y^3-2025\right)\sqrt{x^2+y^3-2022}\right]=\log_3\left[7-\left(x^2+y^3-2022\right)\sqrt{x^2+y^3-2022}+3\sqrt{x^2+y^3-\right.}$

Đặt $t=\sqrt{x^2+y^3-2022},t\geq 0$

Xét hàm $-t^3+3t+7$ trên $[0;+\infty)$ thì hàm này có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	9	$\searrow$	$-\infty$

Vậy $\max\limits_{t\ge 0}\left(-t^3+3t+7\right)=y(1)=9\Rightarrow VP\le \log_3 9=2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x^2+y^3-2022}=1\\ y^{2\log_3 x}-2=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^3=2023\\ y^{2\log_3 x}=2\end{cases}$

$\Rightarrow \underbrace{x^2+8^{\frac{\ln 8}{\ln x}}}_{g(x)}=2023$

$g'(x)=2x-8^{\frac{\ln 3}{\ln 8}}.\dfrac{\ln 3}{x.\ln^2 x}.\ln 8$

$g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\approx 0{,}34\\ x\approx 2{,}91\end{array}\right.$

x	0		$\frac{17}{50}$		1		$\frac{291}{100}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{6}{25}$	$\nearrow$	1 $+\infty$	$\searrow$	$\frac{424}{25}$	$\nearrow$	$+\infty$

$\Rightarrow g(x)=2023$ có 2 nghiệm. Vậy có 2 cặp (x,y) thoả mãn.

Câu 43: Cho $x,y,z\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2\\ x+y+z=2\end{cases}$ và hàm số $f(x)=\left(\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+x\right)\ln 2$. Đặt hàm số $g(x)=2022^{f(x)+x-\left(x-1+\sqrt{3}\right)\ln\left(x-1+\sqrt{3}\right)}-2023^{\left(x-1+\sqrt{3}\right)\ln\left(x-1+\sqrt{3}\right)-f(x)-x}$. Số nghiệm thực của phương trình $g'(x)=0$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Từ hệ $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2\\ x+y+z=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y+z=2-x\\ yz=x^2-2x+1\end{cases}\Rightarrow y,z$ là nghiệm của phương trình:

$$t^2-(2-x)t+x^2-2x+1=0 \quad (1)$$

Hệ có nghiệm khi phương trình (1) có nghiệm. Tức là

$$(2-x)^2-4\left(x^2-2x+1\right)\ge 0\Leftrightarrow 4x-3x^2\ge 0\Leftrightarrow x\in\left[0;\frac{4}{3}\right].$$

Xét hàm số $g(x)=2022^{f(x)+x-\left(x-1+\sqrt{3}\right)\ln\left(x-1+\sqrt{3}\right)}-2023^{\left(x-1+\sqrt{3}\right)\ln\left(x-1+\sqrt{3}\right)-f(x)-x}$ trên $\left[0;\frac{3}{4}\right]$

Đặt $h(x)=f(x)+x-\left(x-1+\sqrt{3}\right)\ln\left(x-1+\sqrt{3}\right)\Rightarrow h'(x)=f'(x)-\ln\left(x-1+\sqrt{3}\right).$

Ta có: $g(x)=2022^{h(x)}-2023^{-h(x)}\Rightarrow g'(x)=h'(x)\left(2022^{h(x)}\ln 2022+2023^{-h(x)}\ln 2023\right).$

Vì $2022^{h(x)}\ln 2022+2023^{-h(x)}\ln 2023>0,\forall x\in\left[0;\frac{4}{3}\right]$ nên dó đó:

$$g'(x)=0\Leftrightarrow h'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)-\ln\left(x-1+\sqrt{3}\right)=0\Leftrightarrow\left(x^2-4x+1\right)\ln 2=\ln\left(x-1+\sqrt{3}\right)$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x+1=\log_2\left(x-1+\sqrt{3}\right)\quad(2)$$

Nhận xét: VT là hàm số nghịch biến trên $\left[0;\frac{3}{4}\right]$ vfa VP là hàm số đồng biến trên $\left[0;\frac{3}{4}\right]$ nên phương trình (2) nếu có nghiệm $x\in\left[0;\frac{3}{4}\right]$ thì đó là nghiệm duy nhất.

Mà $x=2-\sqrt{3}\in\left[0;\frac{3}{4}\right]$ thỏa mãn phương trình (2) nên $g'(x)=0$ có duy nhất 1 nghiệm.

Câu 44: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0<y<2023$ và $3^x+3x-6=9y+\log_3 y^3$.

A. 9. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 2023.

Lời giải

Chọn C

Ta có $3^x+3x-6=9y+\log_3 y^3\Leftrightarrow 3^x+3x+3=9y+3\log_3 y+9$.

Đặt $\log_3 y=z$ suy ra $y=3^z$. Do $0<y<2023$ nên $\log_3 y=z<\log_3 2023<8$.

Ta có $3^x+3x+3=9.3^z+3.z+9\Leftrightarrow 3^{x-2}+\frac{x-2}{3}+1=3^z+\frac{z}{3}+1.$

Xét hàm số $f(t)=3^t+\frac{t}{3}+1$ có $f'(t)=3^t.\ln 3+\frac{1}{3}>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $3^{x-2}+\frac{x-2}{3}+1=3^z+\frac{z}{3}+1\Leftrightarrow f(x-2)=f(z)\Leftrightarrow x-2=z$.

Mặt khác do x nguyên nên z cũng là số nguyên bé thua 8 và do $y=3^z$ mà y nguyên nên z phải là số nguyên không âm và bé thua 8 hay $z\in\{0;1;2;...;7\}$ suy ra có đúng 8 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0<y<2023$ và $3^x+3x-6=9y+\log_3 y^3$.

Câu 45: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2023;2023]$ để phương trình $\left(x^2-1\right)\log^2\left(x^2+1\right)-m\sqrt{2\left(x^2-1\right)}\log\left(x^2+1\right)+m+4=0$ có đúng hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $1\le|x_1|\le|x_2|\le 3$?

A. 4035. **B.** 4040. **C.** 2025. **D.** 2023.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình $\left(x^2-1\right)\log^2\left(x^2+1\right)-m\sqrt{2\left(x^2-1\right)}\log\left(x^2+1\right)+m+4=0 \quad (*)$.

Dễ thấy rằng nếu phương trình có nghiệm là x_0 thì phương trình cũng có nghiệm là $-x_0$

Đặt $t=x^2$, ta được phương trình $(t-1)\log^2(t+1)-m\sqrt{2(t-1)}\log(t+1)+m+4=0 \quad (1)$.

Để $(*)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $1\le|x_1|\le|x_2|\le 3$ thì (1) có đúng một nghiệm t thỏa mãn $1\le t\le 9$.

Đặt $u=\sqrt{2(t-1)}\log(t+1)$.

Ta có $u'=\dfrac{1}{\sqrt{2(t-1)}}\log(t+1)+\sqrt{2(t-1)}.\dfrac{1}{t+1}>0,\forall t\in(1;9]$.

Nên u đồng biến trên $(1;9]\Rightarrow 0\le u\le 4$.

Để (1) có đúng một nghiệm t thỏa mãn $1\le t\le 9$ thì phương trình $u^2-2mu+2m+8=0 \quad (2)$ có đúng một nghiệm u thỏa mãn $0\le u\le 4$.

Ta có $u^2-2mu+2m+8=0\Leftrightarrow 2m=\dfrac{u^2+8}{u-1}=u+1+\dfrac{9}{u-1}$ (do $u=1$ không thỏa mãn (2))

Xét hàm số $f(u)=u+1+\dfrac{9}{u-1}$, ta có $f'(u)=1-\dfrac{9}{(u-1)^2}=\dfrac{(u+2)(u-4)}{(u-1)^2}\le 0,\forall u\in[0;4]\setminus\{1\}$

.

Bảng biến thiên:

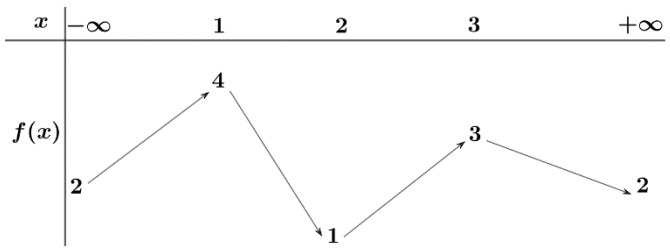
x	0		1		4
y'		$-$		$-$	
y	-8	↘	$-\infty$ / $+\infty$	↘	8

Phương trình $u^2-2mu+2m+8=0$ có đúng một nghiệm u thỏa mãn $0\le u\le 4$ khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l}2m\ge 8\\2m\le -8\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 4\\m\le -4\end{array}\right.$.

Do $m\in[-2023;2023]\cap\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2023;-2022;...;-4;4;5;...;2023\}$.

Vậy có tất cả 4040 giá trị m.

Câu 46: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:



Tổng các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2^{f(x)+\frac{4}{f(x)}}+\log_2\left(f^2(x)-4f(x)+5\right)=m$ có đúng hai nghiệm phân biệt bằng

A. 83. **B.** 34. **C.** 50. **D.** 67.

Lời giải

Chọn C

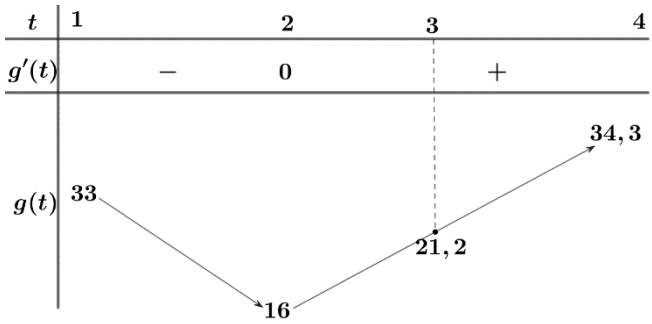
Ta có: $f^2(x)-4f(x)+5>0,\forall x$.

Đặt $t=f(x)$, vì $1\le f(x)\le 4\to 1\le t\le 4$.

Xét hàm số $g(t)=2^{t+\frac{4}{t}}+\log_2\left(t^2-4t+5\right)\to g'(t)=\left(1-\frac{4}{t^2}\right)2^{t+\frac{4}{t}}.\ln 2+\frac{2t-4}{\left(t^2-4t+5\right)\ln 2}$.

Cho $g'(t)=0\Rightarrow t=2$.

BBT của hàm số $g(t)$ trên đoạn $[1;4]$



Biện luận tham số $m\in\mathbb{Z}$

$m=16\to g(t)$ có 1 nghiệm $t=2\to f(x)$ có 2 nghiệm phân biệt.

$m=33\to g(t)$ có 1 nghiệm $t=1$ và 1 nghiệm $3<t<4\to f(x)$ có 3 nghiệm phân biệt.

$16<m<33\to g(t)$ có 2 nghiệm $1<t<3\to f(x)$ có 6 nghiệm phân biệt.

$33<m<34,3\to g(t)$ có 1 nghiệm $3<t<4\to f(x)$ có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy $m=16$ và $m=34$ thỏa điều kiện bài toán. Từ đó $\sum m=16+34=50$.

Câu 47: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_3(m-x)+3m=3^x+4x-1$ có nghiệm thuộc $[0;2]$?

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 15.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $\log_3(m-x)+3m=3^x+4x-1\Leftrightarrow\log_3(m-x)+3(m-x)=3.3^{x-1}+x-1$.

Xét hàm số $f(t)=3.3^t+t$; ta có $f'(t)=3.3^t\ln 3+1>0,\forall t$.

Do đó $f\left(\log_3(m-x)\right)=f(x-1)\Leftrightarrow\log_3(m-x)=x-1\Leftrightarrow m=3^{x-1}+x$.

Xét hàm số $g(x)=3^{x-1}+x$, ta có $g'(x)=3^{x-1}\ln 3+1>0,\forall x$.

Suy ra $\min\limits_{[0;2]}g(x)=g(0)=\frac{1}{3}$ và $\max\limits_{[0;2]}g(x)=g(2)=5$.

Phương trình đã cho có nghiệm thuộc $[0;2]$ khi và chỉ khi $\frac{1}{3}\le m\le 5$.

Vậy có 5 giá trị nguyên m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 48: Có bao nhiêu số nguyên dương x sao cho tồn tại số thực y lớn hơn 1 thỏa mãn $\left(xy^2+x-2y-5\right)\ln y=\ln\dfrac{2y-x+7}{x}$?

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

$\left(xy^2+x-2y-5\right)\ln y=\ln\dfrac{2y-x+7}{x}\Leftrightarrow\left(xy^2+x-2y-5\right)\ln y-2\ln y=\ln\dfrac{2y-x+7}{x}-2\ln y$

$\Leftrightarrow\left[x^2y-\left(2y-x+7\right)\right]\ln y=\ln\dfrac{2y-x+7}{xy^2}$

Do $y>1\Rightarrow\ln y>0$

Nếu $xy^2>\left(2y-x+7\right)\Rightarrow\begin{cases}\left[x^2y-\left(2y-x+7\right)\right]\ln y>0\\ \ln\dfrac{2y-x+7}{xy^2}<0\end{cases}$ phương trình vô nghiệm.

Nếu $xy^2<\left(2y-x+7\right)\Rightarrow\begin{cases}\left[x^2y-\left(2y-x+7\right)\right]\ln y<0\\ \ln\dfrac{2y-x+7}{xy^2}>0\end{cases}$ phương trình vô nghiệm.

Phương trình có nghiệm khi $xy^2=2y-x+7\Rightarrow x=\dfrac{2y+7}{y^2+1}$

Xét hàm số $f\left(y\right)=\dfrac{2y+7}{y^2+1}, f'\left(y\right)=\dfrac{-y^2-14y+2}{\left(y^2+1\right)^2}<0\,\forall\, y>1$

Khi đó:

y	1	$+\infty$
$f'(y)$	$-$	
$f(y)$	$\frac{9}{2}$ ↘	0

Do đó để tồn tại số thực $y>1$ thì $0<x<\dfrac{9}{2}$. Mà $x\in\mathbb{Z}^+\Rightarrow x\in\{1;2;3;4\}$

Câu 49: Có bao nhiêu số nguyên $a\in\left(-2023;2023\right)$ để phương trình $\dfrac{1}{\log_3\left(x+8\right)}+\dfrac{1}{7^x-1}=x+a$ có 2 nghiệm phân biệt?

A. 2028. **B.** 2016. **C.** 2027. **D.** 2015.

Lời giải

Chọn B

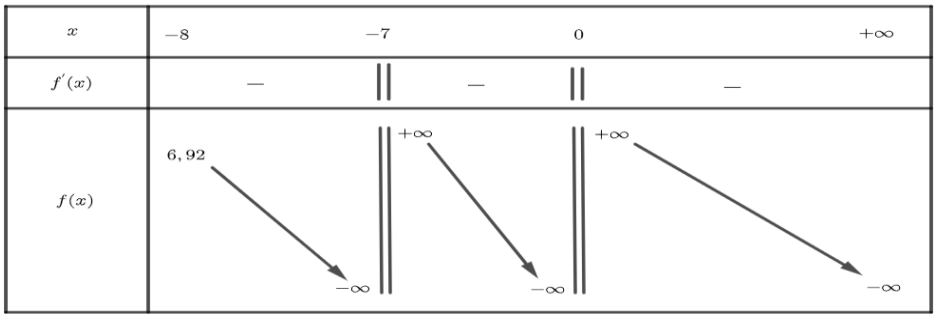
Điều kiện: $\begin{cases}x>-8\\ x\neq0, x\neq-7\end{cases}\Rightarrow D=\left(-8;-7\right)\cup\left(-7;0\right)\cup\left(0;+\infty\right).$

Xét hàm số

$$f(x)=\frac{1}{\log_3(x+8)}+\frac{1}{7^x-1}-x \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{(x+8)\ln 3.\log_3{}^2(x+8)}-\frac{7^x\ln 7}{\left(7^x-1\right)^2}-1.$$

$\Rightarrow f'(x)<0\forall x\in D\Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Bảng biến thiên:



Để phương trình $f(x)=a$ có 2 nghiệm phân biệt và $a\in\mathbb{Z}$ thì: $a\in\{7;8;9;...;2022\}$

Vậy có 2016 giá trị a nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 50: Có bao nhiêu số nguyên $a\in(-2023;2023)$ để phương trình $\frac{1}{\log_2(x+7)}+\frac{1}{5^x-1}=x+a$ có 3 nghiệm phân biệt

A. 2028. **B.** 2027. **C.** 2017. **D.** 2016.

Lời giải

Chọn A

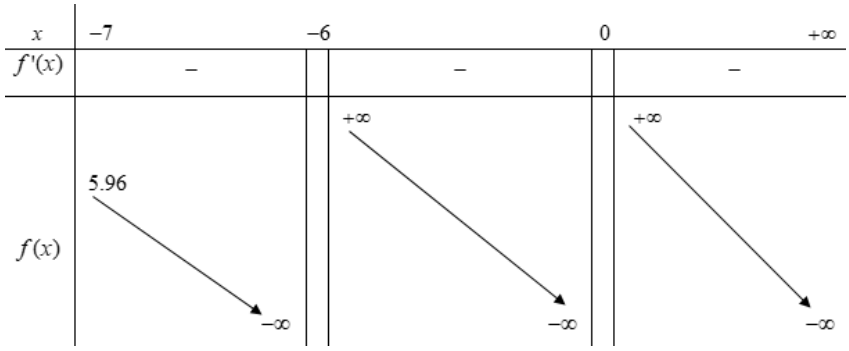
Điều kiện: $\begin{cases}x+7>0\\ \log_2(x+7)\neq 0\\ 5^x-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-7\\ x\neq -6\\ x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in D=(-7;+\infty)\setminus\{-6,0\}.$

$$\frac{1}{\log_2(x+7)}+\frac{1}{5^x-1}=x+a\Leftrightarrow\frac{1}{\log_2(x+7)}+\frac{1}{5^x-1}-x=a.$$

Xét $f(x)=\frac{1}{\log_2(x+7)}+\frac{1}{5^x-1}-x$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-\left(\log_2(x+7)\right)'}{\log^2{}_2(x+7)}-\frac{\left(5^x-1\right)'}{\left(5^x-1\right)^2}=\frac{-1}{(x+7)\ln 2.\log^2{}_2(x+7)}-\frac{5^x\ln 5}{\left(5^x-1\right)^2}-1<0\forall x\in D.$$

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên suy ra để phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt thì $a<5.96$

$\Rightarrow a\in\{-2022,-2021,...,5\}$. Suy ra có 2028 giá trị.

Câu 51: Xét các số thực dương a, b thoả mãn $\log_2(a+b)=\log_3\left(a^2+b^2\right)$. Khi đó a^3+b^3 có thể nhận nhiều nhất bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 36. **B.** 35. **C.** 37. **D.** 38.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\log_2(a+b)=\log_3\left(a^2+b^2\right)=x\Rightarrow\begin{cases}a+b=2^x\\a^2+b^2=3^x\end{cases}$.

Vì $(a+b)^2\le 2\left(a^2+b^2\right)\Leftrightarrow x\le\log_{\frac{4}{3}}2$.

Ta có $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=-\frac{1}{2}8^x+\frac{3}{2}6^x=f(x)$

Lập bảng biến thiên của $f(x)$ ta suy ra hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;\log_{\frac{4}{3}}2\right]$

Suy ra $0<a^3+b^3=f(x)\le f\left(\log_{\frac{4}{3}}2\right)\approx 37,48$.

Câu 52: Xét các số thực dương a, b thoả mãn $\log_2(a+b)=\log_3\left(a^2+b^2\right)$. Khi đó a^3+b^3 có thể nhận nhiều nhất bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 36. **B.** 35. **C.** 37. **D.** 38.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\log_2(a+b)=\log_3\left(a^2+b^2\right)=x\Rightarrow\begin{cases}a+b=2^x\\a^2+b^2=3^x\end{cases}$.

Vì $(a+b)^2\le 2\left(a^2+b^2\right)\Leftrightarrow x\le\log_{\frac{4}{3}}2$.

Ta có $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=-\frac{1}{2}8^x+\frac{3}{2}6^x=f(x)$

Lập bảng biến thiên của $f(x)$ ta suy ra hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;\log_{\frac{4}{3}}2\right]$

Suy ra $0<a^3+b^3=f(x)\le f\left(\log_{\frac{4}{3}}2\right)\approx 37,48$.

Câu 53: Cho hàm số $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+x^3+x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(me^{-x}\right)+f(3-x)=0$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt?

A. 7. **B.** 8. **C.** Vô số. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có hàm số $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+x^3+x$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)=-f(-x)$ nên $f(x)$ là hàm lẻ.

Mặt khác, $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}+3x^2+1>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$.

Khi đó $f\left(me^{-x}\right)+f(3-x)=0\Leftrightarrow f\left(-me^{-x}\right)=f(3-x)\Leftrightarrow -me^{-x}=3-x\Leftrightarrow -m=(3-x)e^{x}$.

Xét hàm số $h(x)=(3-x)e^{x}$.

Ta có $h'(x)=(2-x)e^{x}=0\Leftrightarrow x=2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	↗	e^2	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên, để $f\left(me^{-x}\right)+f(3-x)=0$ có đúng hai nghiệm khi và chỉ khi $0<-m<e^2$

$\Leftrightarrow -e^2<m<0$, mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-7;-6;...;-1\}$.

Câu 54: Số các giá trị nguyên của tham số $m\in[0;2023]$ để phương trình

$2^{x-2+\sqrt[3]{m-3x}}+\left(x^3-6x^2+9x+m\right)2^{x-2}=2^{x+1}+1$ có đúng 1 nghiệm là

A. 2023. **B.** 2019. **C.** 2022. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases}u=\sqrt[3]{m-3x}\\ v=x-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^3=m-3x\\ v^3=(x-2)^3\end{cases}\Rightarrow x^3-6x^2+9x+m=u^3+v^3+8$.

Từ giả thiết suy ra phương trình: $2^{v+u}+\left(u^3+v^3+8\right)2^{v}=2^{v+3}+1\Leftrightarrow 2^{u}+u^3=2^{-v}+(-v)^3$.

Hàm đặc trưng $f(t)=2^t+t^3$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Từ đó suy ra: $u=-v$

$\Rightarrow\sqrt[3]{m-3x}=2-x\Leftrightarrow m=\underbrace{(2-x)^3+3x}_{f(x)}$.

Ta có: $f'(x)=-3(2-x)^2+3$, cho $f'(x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=3\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	4	↗	8	↘	$-\infty$

m (đường ngang qua 8) và m (đường ngang qua 4)

Để phương trình có đúng 1 nghiệm thì $\left[\begin{array}{l}m>8\\ m<4\end{array}\right.$, kết hợp với $m\in[0;2023]$ và $m\in\mathbb{Z}$ ta có:

$m\in\underbrace{\{0;1;2;3\}}_{4}\cup\underbrace{\{9;10;11;.....;2023\}}_{2015}\rightarrow$ có 2019 số nguyên.

Câu 55: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ với $0 \le x \le 2023$ và $1 \le y \le 2023$, thỏa mãn

$4^{x+1} + \log_2(y+3) = 2^{y+4} + \log_2(2x+1)$

A. 2023. **B.** 1011. **C.** 2022. **D.** 1012.

Lời giải

Chọn B.

$4^{x+1} + \log_2(y+3) = 2^{y+4} + \log_2(2x+1) \Leftrightarrow 2.2^{2x+1} - \log_2(2x+1) = 2.2^{y+3} - \log_2(y+3)$.

Hàm đặc trưng $f(t) = 2.2^t - \log_2 t$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Từ đó suy ra $2x+1 = y+3 \Leftrightarrow y = 2(x-1)$.

Vì $1 \le y \le 2023 \Rightarrow 1 \le 2(x-1) \le 2023 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \le x \le \frac{2025}{2}$ và ứng với mỗi x thì tồn tại duy nhất một giá trị y, nên ta có 1011 cặp số nguyên $(x;y)$.

Câu 56: Có bao nhiêu cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn $1 \le x \le 2023$ và $384.128^{x^2-2x} - 6.8^y + 6 = 3y - 7x^2 + 14x$?

A. 2022. **B.** 674. **C.** 1348. **D.** 1346.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $384.128^{x^2-2x} - 6.8^y + 6 = 3y - 7x^2 + 14x$

$\Leftrightarrow 3.128^{x^2-2x+1} + 7x^2 - 14x + 7 = 6.8^y + 3y + 1$

$\Leftrightarrow 3.2^{7.(x^2-2x+1)} + 7(x^2-2x+1) = 3.2^{3y+1} + 3y + 1$ (1)

Xét hàm đặt trưng: $f(t) = 3.2^t + t \qquad \forall t \in R$.

$\Rightarrow f'(t) = 3.2^t \ln 2 + 1 > 0 \ \forall t \Rightarrow$ hàm số $f(t)$ đồng biến trên R.

$\Rightarrow$ phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow 7(x^2-2x+1) = 3y+1 \Leftrightarrow 7(x-1)^2 = 3y+1$

Vì $1 \le x \le 2023$

Với $x = 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$ loại.

Với $x = 2 \Rightarrow y = 2$ nhận.

Với $x = 3 \Rightarrow y = 9$ nhận.

Với $x = 4 \Rightarrow y = \frac{62}{3}$ loại.

……

……

Với $x = 2023 \Rightarrow y = 9539795,667$ loại.

$\Rightarrow$ các giá trị bị loại là $x_1 = 1, x_2 = 4 \ldots\ldots x_n = 2023$ là cấp số cộng với $u_1 = 1, d = 3$

và $u_n = 2023 \Rightarrow u_n = u_1 + (n-1)d \Rightarrow n = 675$ số.

Vậy có $2023 - 675 = 1348$ giá trị nguyên của y $\Rightarrow$ có 1348 cặp số $(x;y)$.

Câu 57: Có bao nhiêu số nguyên dương x sao cho tồn tại số thực y lớn hơn 1 thỏa mãn $\left(xy^2 + x - 2y - 1\right)\log y = \log\dfrac{2y - x + 3}{x}$

A. 3. **B.** 1. **C.** vô số. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases} 2y - x + 3 > 0 \\ y > 1 \\ x \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y < 3 \\ y > 1 \\ x \ge 1 \end{cases}$

$\left(xy^2 + x - 2y - 1\right)\log y = \log\dfrac{2y - x + 3}{x}$

$\Leftrightarrow \left(xy^2 + x - 2y - 1\right)\log y - 2\log y = \log\dfrac{2y - x + 3}{x} - 2\log y$

$\Leftrightarrow \left(xy^2 + x - 2y - 3\right)\log y = \log\dfrac{2y - x + 3}{xy^2}$

$\Leftrightarrow (a-b)\log y = \log\dfrac{b}{a} \Leftrightarrow (a-b)\log y + \log\dfrac{a}{b} = 0$, với $\begin{cases} a = xy^2 \\ b = 2y - x + 3 \end{cases} (a,b > 0)$

Nếu $a > b$ thì $(a-b)\log y + \log\dfrac{a}{b} > 0$, $a < b$ thì $(a-b)\log y + \log\dfrac{a}{b} < 0$.

Nên $(a-b)\log y + \log\dfrac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow xy^2 = 2y - x + 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{2y+3}{y^2+1}$.

Xét hàm số $f(y) = \dfrac{2y+3}{y^2+1}$ với $y > 1$. Ta có $f'(y) = \dfrac{-2y^2 - 6y + 2}{\left(y^2+1\right)^2} < 0, \forall y > 1$.

Nên $f(y)$ nghịch biến trên $(1;+\infty)$.

Bảng biến thiên:

y	1		$+\infty$
$f'(y)$		$-$	
$f(y)$	$\dfrac{5}{2}$	$\searrow$	0

Để tồn tại số thực y lớn hơn 1 thì $0 < x < \dfrac{5}{2} \Rightarrow x \in \{1;2\}$.

Câu 58: Trong khoảng $(-10;20)$ có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4x\log_3(x+1) = \log_9\left[9(x+1)^{2m}\right]$ có đúng 2 nghiệm phân biệt.

A. 23. **B.** 20. **C.** 8. **D.** 15.

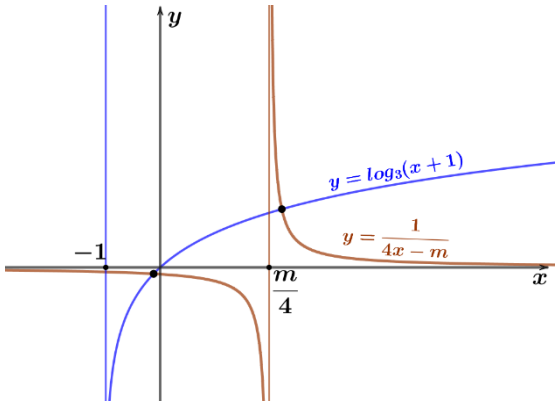
Lời giải

Chọn A

Với điều kiện: $x>-1$ thì phương trình ban đầu $\Leftrightarrow 4x\log_3(x+1)=1+m\log_3(x+1)$

$\Leftrightarrow \log_3(x+1)=\dfrac{1}{4x-m}$

Để phương trình có đúng 2 nghiệm phân biệt thì đồ thị hai hàm số $\begin{cases} y=\log_3(x+1) \\ y=\dfrac{1}{4x-m} \end{cases}$ có 2 giao điểm.



Từ đồ thị, điều kiện có 2 giao điểm khi $\dfrac{m}{4}>-1\Leftrightarrow m>-4$ và $m\in(-10;20)$, $m\in\mathbb{Z}$.

$\Rightarrow m=\{-3;-2;....;19\}$.

Câu 59: Tính tổng các giá trị nguyên của tham số m để tồn tại đúng 2 cặp số $(x;y)$ thỏa mãn

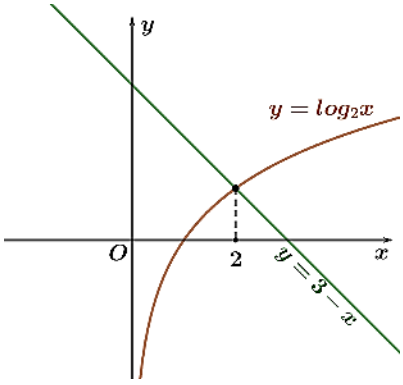
$$\begin{cases}(x+y)\left(\log_2(x+y)+x+y\right)+3=\log_2(x+y)+4x+4y\ (1)\\ x+y=\sqrt{2(x+4)(y+3)+m}\ (2)\end{cases}$$

A. -170. **B.** -165. **C.** -238. **D.** -207.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=x+y>0$.



Phương trình (1) trở thành: $t(\log_2 t+t)+3=\log_2 t+4t\Leftrightarrow(t-1)\log_2 t=(t-1)(3-t)$

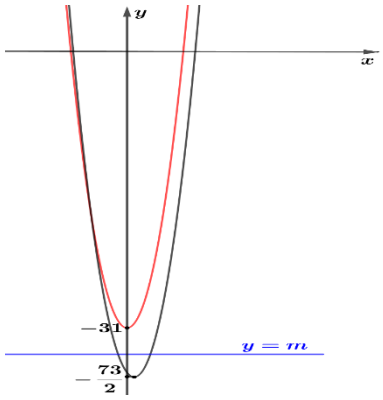
$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} t-1=0 \\ \log_2 t=3-t \end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=2 \end{array}\right.$.

Với $t=1=x+y\Rightarrow y=1-x$.

Phương trình (2) trở thành: $1=\sqrt{2(x+4)(4-x)+m} \Leftrightarrow m=\underbrace{2x^2-31}_{f(x)}$.

Với $t=2=x+y \Rightarrow y=2-x$.

Phương trình (2) trở thành: $1=\sqrt{2(x+4)(5-x)+m} \Leftrightarrow m=\underbrace{2x^2-2x-36}_{g(x)}$.



Từ đồ thị hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ để tồn tại đúng 2 cặp số $(x;y)$ thì $-\frac{73}{2}<m<-31$, kết hợp

$m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m=\{-36;-35;-34;-33;-32\} \rightarrow \sum m=-170$.

Câu 60: Có bao nhiêu số nguyên y sao cho ứng với mỗi số nguyên y có đúng 5 số nguyên x thỏa mãn $7^{x^2-|y-2x+4|}.\log_{(|y-2x+4|+5)}\left(x^2+5\right)\le 1$?

A. 10. **B.** 11. **C.** 16. **D.** 12.

Lời giải

Chọn B

$7^{x^2-|y-2x+4|}.\log_{(|y-2x+4|+5)}\left(x^2+5\right)\le 1 \Leftrightarrow 7^{x^2+5}.7^{-5-|y-2x+4|}.\log_{(|y-2x+4|+5)}7.\log_7\left(x^2+5\right)\le 1$

$\Leftrightarrow 7^{x^2+5}.\log_7\left(x^2+5\right)\le 7^{|y-2x+4|+5}.\log_7\left(|y-2x+4|+5\right)$ (1)

Xét hàm số $f(t)=7^t.\log_7 t$ với $t>1$ nên $f'(t)=7^t.\ln 7.\log_7 t+\frac{7^t}{t.\ln 7}>0,\forall t>1$, hay hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Vậy $(1)\Leftrightarrow x^2\le|y-2x+4| \Leftrightarrow x^2\le|y-2x+4| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y-2x+4\ge x^2 \\ y-2x+4\le -x^2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y+5\ge (x+1)^2 \\ y+3<-(x-1)^2 \end{array}\right.$

Phương trình có đúng 5 số nguyên x khi $\left[\begin{array}{l} 3>\sqrt{y+5}\ge 2 \\ 3>\sqrt{-y-3}\ge 2 \\ y=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9>y+5\ge 4 \\ 9>-y-3\ge 4 \\ y=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1\le y<4 \\ -12<y\le -7 \\ y=-4 \end{array}\right.$

.

Vậy có 11 giá trị nguyên của y thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 61: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x tồn tại $y\in[2;8]$ thoả mãn $(y-x)\log_2(x+y)=y+x^2$

A. 5. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

$(y-x)\log_2(x+y)=y+x^2(1).$

Do $y\in[2;8]\Rightarrow 2\le y+x^2\le 8\Rightarrow VP(1)>0.$

Nếu $\begin{cases}0<x+y\le 1\\ y-x\ge 0\\ y\in[2;8]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x+y\le 1\\ y\ge x\\ y\in[2;8]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}VT(1)\le 0\\ VT(1)\ge 2\end{cases}$ không có giá trị nào của x thỏa mãn.

Nếu $\begin{cases}0<x+y\le 1\\ y-x<0\\ y\in[2;8]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x+y\le 1\\ y<x\\ y\in[2;8]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2y\le 1\\ y\in[2;8]\end{cases}$ không thỏa mãn.

Nếu $\begin{cases}1<x+y\le 2\\ y-x\ge 0\\ y\in[2;8]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1<x+y\le 2\\ y\ge x\\ y\in[2;8]\end{cases}\Rightarrow(y-x)\log_2(x+y)\le y-x<y+x^2$ không có giá trị nào của x thỏa mãn.

Nếu $\begin{cases}x+y>2\\ y-x>0.\\ y\in[2;8]\end{cases}$

Đặt $f(y)=(y-x)\log_2(x+y)-y-x^2, y\in[2;4].$

$f'(y)=\log_2(x+y)+\dfrac{(y-x)}{(x+y)\ln 2}-1>0$

Do $\begin{cases}x+y>2\\ y\in[2;8]\end{cases}\Rightarrow\log_2(x+y)>1\Rightarrow \text{og}_2(x+y)-1+\dfrac{(y-x)}{(x+y)\ln 2}>0.$

Do hàm số đồng biến. để phuong trình $f(y)=0$ có nghiệm khi

$$\begin{cases}f(2)\le 0\\ f(8)\ge 0\\ x<y\\ y\in[2;8]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2-x)\log_2(x+2)-2-x^2\le 0\\ (8-x)\log_2(x+8)-8-x^2\ge 0\\ x<y\\ y\in[2;8]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2-x)\log_2(x+2)\le 2+x^2\\ (8-x)\log_2(x+8)\ge 2+x^2\\ -2<x<y, x\in\mathbb{Z}\\ y\in[2;8]\end{cases}.$$

$$\begin{cases}(2-x)\log_2(x+2)\le 2+x^2\\ (8-x)\log_2(x+8)\ge 2+x^2\\ x\in\{-1,0,1,2,3,4,5,6,7\}\end{cases}\Rightarrow x=-1, x=0, x=1, x=2, x=3.$$

Vậy có 5 giá trị nguyên thỏa mãn.

Câu 62: Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3^2(3x)-2\log_3 x^2=\dfrac{x^2-6x+9}{4}$.

A. $\frac{5+2\sqrt{3}}{2}$. **B.** 4. **C.** $5+2\sqrt{3}$. **D.** $4+2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

$\log_3^2(3x)-2\log_3 x^2=\frac{x^2-6x+9}{4}$. Điều kiện của phương trình $x>0$.

$$\log_3^2(3x)-2\log_3 x^2=\frac{x^2-6x+9}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\(1+\log_3 x)^2-4\log_3 x=\left(\frac{x-3}{2}\right)^2\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\(1-\log_3 x)^2=\left(\frac{x-3}{2}\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\\left[\begin{array}{l}1-\log_3 x=\frac{x-3}{2}\\-1+\log_3 x=\frac{x-3}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\\left[\begin{array}{l}\log_3 x=\frac{-x+5}{2}\ (2)\\\log_3 x=\frac{x-1}{2}\ (3)\end{array}\right.\end{cases}$$

+ $\log_3 x=\frac{-x+5}{2}(2)$ có nghiệm duy nhất $x=3$ vì hàm số $y=\log_3 x$ đồng biến, hàm số $y=\frac{-x+5}{2}$ nghịch biến.

+ $\log_3 x=\frac{x-1}{2}\Leftrightarrow\log_3 x-\left(\frac{x-1}{2}\right)=0$.

Đặt $y=\log_3 x-\left(\frac{x-1}{2}\right)\Rightarrow y'=\frac{1}{x\ln 3}-\frac{1}{2}\Rightarrow y''=\frac{-1}{x^2\ln 3}<0$.

Vậy phương trình (3) có không quá 2 nghiệm. Phương trình (3) có 2 nghiệm $x=1, x=3$.

Vậy tổng các nghiệm là $1+3=4$.

Câu 63: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của y sao cho ứng với mỗi y, tồn tại duy nhất một giá trị $x\in\left[\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right]$ thỏa mãn $\log_2\left(x^3-6x^2+9x+y\right)=\log_3\left(-x^2+6x\right)$. Số phần tử của S là

A. 3. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

$\log_2\left(x^3-6x^2+9x+y\right)=\log_3\left(-x^2+6x\right)$

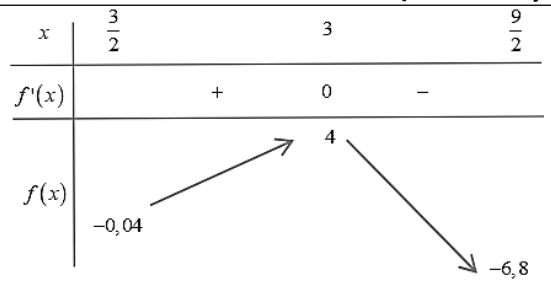
$\Leftrightarrow y=2^{\log_3\left(-x^2+6x\right)}-x^3+6x^2-9$

Xét $f(x)=2^{\log_3\left(-x^2+6x\right)}-x^3+6x^2-9, x\in\left[\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right]$

$\Rightarrow f'(x)=(3-x)\left[\frac{2}{\left(-x^2+6x\right)\ln 3}.2^{\log_3\left(-x^2+6x\right)}+3(x-1)\right]$.

Ta thấy $\frac{2}{\left(-x^2+6x\right)\ln 3}.2^{\log_3\left(-x^2+6x\right)}+3(x-1)>0\forall x\in\left[\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right]$. Khi đó $f'(x)=0\Leftrightarrow x=3$

Bảng biến thiên



Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=4 \\ -6,8<y<0,04 \end{array}\right.$.

Do y nguyên $\Rightarrow y\in\{-6;-5;-4;-3;-2;-1;4\}$.

Vậy số phần tử của S là 7.

Câu 64: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của y sao cho ứng với mỗi y, tồn tại duy nhất một giá trị $x\in\left[\frac{5}{2};\frac{11}{2}\right]$ thoả mãn $\log_3\left(x^3-9x^2+24x+y\right)=\log_2\left(-x^2+8x-12\right)$. Số phần tử của S là

A. 3. **B.** 8. **C.** 1. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} x^3-9x^2+24x+y>0 \\ -x^2+8x-12>0 \Leftrightarrow 2<x<6 \end{cases}$

Ta có: $\log_3\left(x^3-9x^2+24x+y\right)=\log_2\left(-x^2+8x-12\right)$

$\Leftrightarrow x^3-9x^2+24x+y=3^{\log_2\left(-x^2+8x-12\right)} \Leftrightarrow y=3^{\log_2\left(-x^2+8x-12\right)}-x^3+9x^2-24x$.

Xét hàm số $f(x)=3^{\log_2\left(-x^2+8x-12\right)}-x^3+9x^2-24x$ với $x\in\left[\frac{5}{2};\frac{11}{2}\right]$.

Ta có: $f'(x)=3^{\log_2\left(-x^2+8x-12\right)}.\ln 3.\frac{-2x+8}{\left(-x^2+8x-12\right).\ln 2}-3x^2+18x-24$

$=3^{\log_2\left(-x^2+8x-12\right)}.\ln 3.\frac{-2(x-4)}{\left(-x^2+8x-12\right).\ln 2}-3(x-4)(x-2)$

$=-(x-4)\left[3^{\log_2\left(-x^2+8x-12\right)}.\ln 3.\frac{2}{\left(-x^2+8x-12\right).\ln 2}+3(x-2)\right]$

Vì $2<x<6$ nên $3^{\log_2\left(-x^2+8x-12\right)}.\ln 3.\frac{2}{\left(-x^2+8x-12\right).\ln 2}+3(x-2)>0$

Do đó, $f'(x)=0\Leftrightarrow x=4$.

Bảng biến thiên

x	$\frac{5}{2}$		4		$\frac{11}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	-7	↘	
	$-16,95$				$-23,7$

Để với mỗi y, tồn tại duy nhất một giá trị $x \in \left[\frac{5}{2};\frac{11}{2}\right]$ thì $y=-7$ hoặc $-23,7 \le y < -16,95$.

Mà $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{-7;-23;-22;...;-17\}$. Vậy tập S có 8 phần tử.

Câu 65: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của y sao cho ứng với mỗi y, tồn tại duy nhất một giá trị $x \in \left[\frac{5}{2};\frac{11}{2}\right]$ thỏa mãn $\log_2\left(x^3-9x^2+24x+y\right)=\log_3\left(-x^2+8x-7\right)$. Số phần tử của S bằng

A. 8. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $x^3-9x^2+24x+y=2^{\log_3\left(-x^2+8x-7\right)} \Leftrightarrow y=2^{\log_3\left(-x^2+8x-7\right)}-x^3+9x^2-24x$

Xét hàm số $f(x)=2^{\log_3\left(-x^2+8x-7\right)}-x^3+9x^2-24x, \forall x \in \left[\frac{5}{2};\frac{11}{2}\right]$

$$f'(x)=2^{\log_3\left(-x^2+8x-7\right)}.\ln 2.\frac{-2x+8}{\left(-x^2+8x-7\right)\ln 3}-3x^2+18x-24$$

$$=-3(x-2)(x-4)-\frac{2(x-4)}{\left(-x^2+8x-7\right)\ln 3}.2^{\log_3\left(-x^2+8x-7\right)}.\ln 2$$

$$f'(x)=\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=4 \\ -3(x-2)-\frac{2}{\left(-x^2+8x-7\right)\ln 3}.2^{\log_3\left(-x^2+8x-7\right)}.\ln 2=0 \end{array}\right.$$

Ta có:

$$-x^2+8x-7>0, \forall x \in \left[\frac{5}{2};\frac{11}{2}\right] \Rightarrow -3(x-2)-\frac{2}{\left(-x^2+8x-7\right)\ln 3}.2^{\log_3\left(-x^2+8x-7\right)}.\ln 2<0, \forall x \in \left[\frac{5}{2};\frac{11}{2}\right]$$

Bảng biến thiên

x	5/2		4		11/2
y'		+	0	−	
y		↗	-12	↘	
	−16.038				−22.788

Yêu cầu bài toán suy ra $\left[\begin{array}{l} y=-12 \\ -22.788 \le y < 16.038 \end{array}\right.$

Do $y \in \mathbb{Z}$ nên ta được tập các giá trị của y là $\{-22;-21;-20;-19;-18;-17;-12\}$.

Vậy có 7 giá trị thỏa mãn.

Câu 66: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của y sao cho ứng với mỗi y, tồn tại duy nhất một giá trị $x \in \left[\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right]$ thỏa mãn $\log_3\left(x^3-6x^2+9x+y\right)=\log_2\left(-x^2+6x-5\right)$. Số phần tử của S là

A. 7. **B.** 1. **C.** 8. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số

$f(x)=\log_3\left(x^3-6x^2+9x+y\right)-\log_2\left(-x^2+6x-5\right)$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{3x^2-12x+9}{\left(x^3-6x^2+9x+y\right)\ln 3}+\frac{2x-6}{\left(-x^2+6x-5\right)\ln 2}$

$\Leftrightarrow f'(x)=(x-3)\left[\frac{3x-3}{\left(x^3-6x^2+9x+y\right)\ln 3}+\frac{2}{\left(-x^2+6x-5\right)\ln 2}\right]$

Xét trên tập $x \in \left[\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right]$ thì ta dễ thấy

$f'(x)>0$ với $x>3$

$f'(x)<0$ với $x<3$

Nếu $x=3$ thỏa mãn điều kiện.

Ta có $f(3)=\log_3 y-2; f\left(\frac{3}{2}\right)=\log_3\left(\frac{27}{8}+y\right)-\log_2\frac{7}{4}; f\left(\frac{9}{2}\right)=\log_3\left(\frac{81}{8}+y\right)-\log_2\frac{7}{4}$

TH1: $f(3)>0 \Leftrightarrow y>9 \Rightarrow$ Phương trình $f(x)=0$ vô nghiệm.

TH2: $f(3)=0 \Leftrightarrow y=9 \Rightarrow$ Phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

TH3: $f(3)<0$ hoặc $x=3$ không thuộc tập xác định của phương trình, khi đó phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} f\left(\frac{3}{2}\right)<0 \\ f\left(\frac{9}{2}\right)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3\left(\frac{27}{8}+y\right)<\log_2\frac{7}{4} \\ \log_3\left(\frac{81}{8}+y\right)\geq\log_2\frac{7}{4} \end{cases} \Rightarrow -7,7<y<-0,9$

Do y nguyên $\Rightarrow y \in \{-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1\}$.

Vậy số phần tử của S là 8.

Dạng 13: Phương pháp hàm số giải bất phương trình mũ - logarit

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Cho bất phương trình: $9^x+(m-1).3^x+m>0\,(1)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2022;2022]$ để bất phương trình (1) nghiệm đúng $\forall x>1$.

A. 2021. **B.** 2024. **C.** 2022. **D.** 2023.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=3^x$. Vì $x>1\Rightarrow t>3$ Bất phương trình đã cho thành: $t^2+(m-1).t+m>0$ nghiệm đúng $\forall t>3\Leftrightarrow \dfrac{t^2-t}{t+1}>-m$ nghiệm đúng $\forall t>3$.

Xét hàm số $g(t)=\dfrac{t^2-t}{t+1}=t-2+\dfrac{2}{t+1},\forall t>3,\ g'(t)=1-\dfrac{2}{(t+1)^2}>0,\forall t>3$.

Hàm số $g(t)$ đồng biến trên $(3;+\infty)$ và $g(3)=\dfrac{3}{2}$.

Yêu cầu bài toán tương đương $-m\le\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow m\ge-\dfrac{3}{2}$.

Vì $m\in[-2022;2022]$ nên có 2024 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 2: Có bao nhiêu số nguyên a sao cho ứng với mỗi a, tồn tại ít nhất bốn số nguyên $b\in(-12;12)$ thỏa mãn $4^{a^2+b}\le 3^{b-a}+65$?

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Chia cả hai vế cho 4^b, ta được

$$\frac{1}{3^a}\left(\frac{3}{4}\right)^b+65\left(\frac{1}{4}\right)^b-4^{a^2}\ge 0.$$

Đặt $f(b)=\dfrac{1}{3^a}\left(\dfrac{3}{4}\right)^b+65\left(\dfrac{1}{4}\right)^b-4^{a^2}$, với $b\in[-11;11]$. Ta có

$$f'(b)=\frac{1}{3^a}\left(\frac{3}{4}\right)^b\ln\frac{3}{4}+65\left(\frac{1}{4}\right)^b\ln\frac{1}{4}<0,\forall b\in[-11;11].$$

Do đó $f(b)$ nghịch biến trên $[-11;11]$. Điều này dẫn đến yêu cầu bài toán trở thành

$$f(-8)\ge 0\Leftrightarrow 4^{a^2-8}\le 3^{-a-8}+65.$$

Nếu $a\le -8$ thì $a^2-8>-a-8+4$. Suy ra

$$4^{a^2-8}>4^{-a-8}\cdot 4^4\ge 3^{-a-8}\cdot 4^4=3^{-a-8}+\left(4^4-1\right)3^{-a-8}>3^{a-8}+65.$$

Nếu $a>-8$ thì do thì $3^{-a-8}<1$, mà $a\in\mathbb{Z}$ nên

$$4^{a^2-8}\le 66\Leftrightarrow a^2\le 8+\log_4 66\Rightarrow a\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}.$$

Thử lại tất cả 7 giá trị nguyên trên đều thỏa mãn yêu cầu.

Câu 3: Có bao nhiêu số nguyên a sao cho ứng với mỗi a, tồn tại ít nhất bốn số nguyên $b\in(-12;12)$ thỏa mãn $4^{a^2+b}\le 3^{b-a}+65$?

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $4^{a^2+b}\le 3^{b-a}+65 \Leftrightarrow 4^{a^2+b}-3^{b-a}-65\le 0 \Leftrightarrow 4^{a^2}-\dfrac{3^{b-a}}{4^b}-\dfrac{65}{4^b}\le 0$

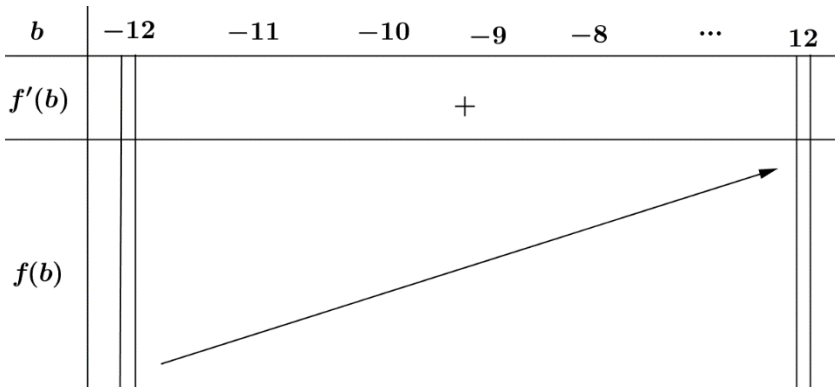
$\Leftrightarrow 4^{a^2}-\left(\dfrac{3}{4}\right)^b.\dfrac{1}{3^a}-65.\left(\dfrac{1}{4}\right)^b\le 0$.

Xét hàm số $f(b)=4^{a^2}-\left(\dfrac{3}{4}\right)^b.\dfrac{1}{3^a}-65.\left(\dfrac{1}{4}\right)^b$, $b\in(-12;12)$.

Ta có $f'(b)=-\ln\left(\dfrac{3}{4}\right).\left(\dfrac{3}{4}\right)^b.\dfrac{1}{3^a}-65.\ln\left(\dfrac{1}{4}\right).\left(\dfrac{1}{4}\right)^b>0$, $\forall b\in(-12;12)$.

Do đó $f(b)$ đồng biến trên $(-12;12)$.

Ta có bảng biến thiên:



Để có ít nhất 4 số nguyên $b\in(-12;12)$ thỏa mãn $f(b)\le 0$ thì $f(-8)\le 0$ $\Leftrightarrow 4^{a^2-8}\le 3^{-8-a}+65$.

Suy ra $4^{a^2-8}\le 65 \Leftrightarrow a^2\le 8+\log_4 65\approx 11$. Do $a\in\mathbb{Z}$ nên $a\in\{-3;-2;...;2;3\}$.

Vậy có 7 giá trị nguyên của a thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4: Với a là tham số thực để bất phương trình $2^x+3^x\ge ax+2$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$. Khi đó:

A. $a\in(1;3)$. **B.** $a\in(0;1)$. **C.** $a\in(-\infty;0)$. **D.** $a\in(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $f(x)=2^x+3^x-ax-2$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Ta có $f'(x)=2^x\ln 2+3^x\ln 3-a$; $f(0)=0$

Do đó $f(x)\ge 0\ \forall x\Rightarrow f(x)\ge f(0)\ \forall x\Rightarrow x=0$ là điểm cực tiểu

$\Rightarrow f'(0)=0\Leftrightarrow \ln 2+\ln 3-a=0\Leftrightarrow a=\ln 6$

Thử lại: Với $a=\ln 6$ có $f'(x)=2^x\ln 2+3^x\ln 3-\ln 6$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 2^x\ln 2+3^x\ln 3=\ln 6\Leftrightarrow x=0$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$\Rightarrow$Bất phương trình $f(x)\ge 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

Câu 5: Biết nửa khoảng $S=\left[p^m;p^n\right)\left(p,m,n\in\mathbb{N}^*\right)$ là tập tất cả các số thực y sao cho ứng với mỗi y tồn tại đúng 6 số nguyên x thỏa mãn $\left(3^{x^2-2x}-27\right)\left(5^{x^2}-y\right)\le 0$. Tổng $m+n+p$ bằng

A. $m+n+p=46$. **B.** $m+n+p=66$. **C.** $m+n+p=14$. **D.** $m+n+p=30$.

Lời giải

Chọn A

$\left(3^{x^2-2x}-27\right)\left(5^{x^2}-y\right)\le 0$ (1)

Th1: Xét $3^{x^2-2x}-27=0\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$ là nghiệm của bất phương trình (1). Không đủ 6 nghiệm.

Th2: Xét $3^{x^2-2x}-27>0\Leftrightarrow x^2-2x-3>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1\\x>3\end{array}\right.$.

Khi đó, $(1)\Leftrightarrow 5^{x^2}\le y\Leftrightarrow x^2\le\log_5 y\,(2)$

Nếu $0<y<1$ thì (2) vô nghiệm. Không có y thỏa mãn.

Nếu $y\ge 1$ thì $(2)\Leftrightarrow-\sqrt{\log_5 y}\le x\le\sqrt{\log_5 y}$.

Do đó, (1) có đúng 6 nghiệm nguyên $x\in\left((-\infty;-1)\cup(3;+\infty)\right)\cap\left[-\sqrt{\log_5 y};\sqrt{\log_5 y}\right]$

$\Rightarrow 4\le\sqrt{\log_5 y}<5\Leftrightarrow 16\le\log_5 y<25\Leftrightarrow 5^{16}\le y<5^{25}$. Suy ra $S=\left[5^{16};5^{25}\right)\left(p,m,n\in\mathbb{N}^*\right)$.

Th3: Xét $3^{x^2-2x}-27<0\Leftrightarrow x^2-2x-3<0\Leftrightarrow -1<x<3$. Vì $(-1;3)$ chỉ có ba số nguyên nên không có giá trị y nào để bất phương trình (1) có 6 nghiệm nguyên.

Vậy $S=\left[5^{16};5^{25}\right)\left(p,m,n\in\mathbb{N}^*\right)$ Nên $m+n+p=16+25+5=46$.

Câu 6: Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn $\sqrt{2\log_3(x+2)}-\sqrt{\log_3\left(2x^2-1\right)}\ge(x+1)(x-5)$?

A. 8. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

ĐKXĐ: $\begin{cases}x+2\ge 1\\2x^2-1\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\x\le -1\vee x\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 1\Rightarrow D=[1;+\infty)$

Ta có $\sqrt{2\log_3(x+2)}-\sqrt{\log_3\left(2x^2-1\right)}\ge(x+1)(x-5)$

$\Leftrightarrow\sqrt{\log_3\left(x^2+4x+4\right)}+\left(x^2+4x+4\right)\ge\sqrt{\log_3\left(2x^2-1\right)}+\left(2x^2-1\right)$

Đặt $f(t)=\sqrt{\log_3 t}+t,\ \forall t\ge 1\Rightarrow f'(t)=\dfrac{1}{t.\ln 3}.\dfrac{1}{2\sqrt{\log_3 t}}+1>0,\ \forall t>1$

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$

Suy ra $f\left(x^2+4x+4\right)\ge f\left(2x^2-1\right)\Leftrightarrow x^2+4x+4\ge 2x^2-1\Leftrightarrow -1\le x\le 5$

Vậy có 7 số nguyên x thoả mãn.

Câu 7: Cho bất phương trình $\log_5\left(x^2-4x+4+m\right)-1<\log_5\left(x^2+2x+3\right)$ với m là tham số. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x thuộc khoảng $(1;3)$?

A. 30. **B.** 28. **C.** 29. **D.** Vô số.

Lời giải

Bất phương trình đã cho tương đương với $\log_5\left(x^2-4x+4+m\right)<1+\log_5\left(x^2+2x+3\right)$

$\Leftrightarrow \log_5\left(x^2-4x+4+m\right)<\log_5\left(5x^2+10x+15\right)\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-4x+4+m>0\\ x^2-4x+4+m<5x^2+10x+15\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-4x+4>-m\quad (1)\\ 4x^2+14x+11>m\quad (2)\end{cases}$. Để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi x thuộc khoảng $(1;3)$ thì bất phương trình (1) và (2) phải nghiệm đúng với mọi x thuộc khoảng $(1;3)$.

Ta có với $\forall x\in(1;3)$ thì $x^2-4x+4\ge 0$ và $4x^2+14x+11>29$.

Do đó để bất phương trình (1) và (2) nghiệm đúng với mọi x thuộc khoảng $(1;3)$ thì $\begin{cases}-m<0\\ m\le 29\end{cases}\Leftrightarrow 0<m\le 29$. Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{1;2;3;...;29\}\Rightarrow$ có 29 giá trị nguyên của m.

Vậy có 29 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài ra.

Câu 8: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(a;b)$, trong đó $a,b\in[1;2022]$ thỏa mãn $\left(\dfrac{2a}{a+2^b}\right)^{2^b}\ge\left(\dfrac{a+2^b}{2^{b+1}}\right)^a$?

A. 5. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

Đặt $x=a;y=2^b$, ta có $\left(\dfrac{2x}{x+y}\right)^y\ge\left(\dfrac{x+y}{2y}\right)^x\Leftrightarrow\left(\dfrac{2x}{x+y}\right)^y.\left(\dfrac{2y}{x+y}\right)^x\ge 1$

Xét hàm $f(x;y)=\left(\dfrac{2x}{x+y}\right)^y.\left(\dfrac{2y}{x+y}\right)^x$

Khi $x=y\Rightarrow f(x;y)=1$

Giả sử $x>y\Rightarrow f(x;y)<\left(\dfrac{2x}{x+y}\right)^x.\left(\dfrac{2y}{x+y}\right)^x=\left(\dfrac{4xy}{(x+y)^2}\right)^x<1^x=1(4xy<x^2+y^2)$

Giả sử $x<y\Rightarrow f(x;y)<\left(\dfrac{2x}{x+y}\right)^y.\left(\dfrac{2y}{x+y}\right)^y=\left(\dfrac{4xy}{(x+y)^2}\right)^y<1^x=1$

Vậy, $f(x;y)\ge 1\Leftrightarrow f(x;y)=1\Leftrightarrow x=y\Leftrightarrow a=2^b$

Trên đoạn $a,b\in[1;2022]\Rightarrow 2^b<2022\Rightarrow b<11$

Vậy, có 10 giá trị của b, và có 10 giá trị của a nên có 10 cặp $(a;b)$ thỏa mãn.

Câu 9: Có bao nhiêu bộ $(x;y)$ với x,y nguyên và $1\le x,y\le 15$ thỏa mãn

$$(xy+2x+4y+8)\log_3\left(\frac{2y}{y+2}\right)\le(2x+3y-xy-6)\log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right).$$

A. 30. **B.** 11. **C.** 24. **D.** 16.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết $\begin{cases}4\le x\le 15\\1\le y\le 15\\x;y\in\mathbb{Z}\end{cases}$

$$(xy+2x+4y+8)\log_3\left(\frac{2y}{y+2}\right)\le(2x+3y-xy-6)\log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)$$

$$\Leftrightarrow(x+4)(y+2)\log_3\left(\frac{2y}{y+2}\right)+(x-3)(y-2)\log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)\le 0(*)$$

Xét $f(x)=\log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)=\log_2\left(2+\frac{1}{x-3}\right)>0;\forall x\in[4;15](1)$

Với $y=1$ thay vào $(*)$ ta có:

$3(x+4)\log_3\left(\frac{2}{3}\right)-(x-3)\log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)\le 0$ luôn đúng $\forall x\in[4;15]$

Vậy có 12 bộ $(x;y)$ nguyên thỏa mãn.

Với $y=2$ thay vào $(*)$ ta có: $4(x+4)\log_3 1\le 0$ luôn đúng $\forall x\in[4;15]$

Vậy có 12 bộ $(x;y)$ nguyên thỏa mãn.

Với $3\le y\le 15\Rightarrow y+2>0$

Xét $h(y)=\log_3\left(\frac{2y}{y+2}\right)=\log_3\left(\frac{y+y}{y+2}\right)>\log_3\left(\frac{y+2}{y+2}\right)=0;\forall y\in[3;15](2)$

Từ (1) và $(2)\Rightarrow(*)$ vô nghiệm. Vậy có 24 bộ $(x;y)$ thỏa mãn.

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tập nghiệm của bất phương trình $\log_2\left(x^2+2x+2^m\right)-2\log_2(2x-1)\ge 0$ chứa đúng hai nghiệm nguyên.

A. 10. **B.** 9. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_2\left(x^2+2x+2^m\right)-2\log_2(2x-1)\ge 0\Leftrightarrow\log_2\left(x^2+2x+2^m\right)\ge 2\log_2(2x-1)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x-1>0\\x^2+2x+2^m\ge(2x-1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{1}{2}\\2^m\ge 3x^2-6x+1\end{cases}.$$

Xét hàm số $f(x)=3x^2-6x+1$ trên $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$, ta có $f'(x)=6x-6;\ f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên

x	$\frac{1}{2}$		1		2		3	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0			$+$		
$f(x)$	$-\frac{5}{4}$		-2		1		10	$+\infty$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 1\le 2^m<10\Leftrightarrow 0\le m<\log_2 10$, $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{0;1;2;3\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$, với $x\le 2023$ thỏa mãn bất phương trình $4.2^{\frac{\log_2 x+3y}{4}}\ge x+3.2^y$

A. 30. **B.** 23. **C.** 11. **D.** 10.

Lời giải

Với mọi cặp số nguyên dương $(x;y)$ ta có: $4.2^{\frac{\log_2 x+3y}{4}}=4.\sqrt[4]{2^{\log_2 x+3y}}=4.\sqrt[4]{x.2^{3y}}$.

Áp dụng Bất đẳng thức AM-GM cho 4 số dương $x;2^y;2^y;2^y$ ta có: $x+3.2^y\ge 4.\sqrt[4]{x.2^{3y}}=4.2^{\frac{\log_2 x+3y}{4}}\ (1)$

Mà theo giả thiết $4.2^{\frac{\log_2 x+3y}{4}}\ge x+3.2^y$ suy ra dấu "=" tại (1) xảy ra $\Leftrightarrow x=2^y$.

$(x;y)$ nguyên dương, $x\le 2023$ suy ra $1\le y\le 10, y\in\mathbb{Z}$.

Vậy có 10 cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn.

Câu 2: Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $2^{2x^2-15x+100}-2^{x^2+10x-50}+x^2-25x+150<0$

A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Đặt $\begin{cases}2x^2-15x+100=a\\ x^2+10x-50=b\end{cases}$. Khi đó bất phương trình trở thành $2^a-2^b+(a-b)<0$.

$\Leftrightarrow 2^a+a<2^b+b$ (I).

Xét hàm số $f(t)=2^t+t$ trên $(-\infty;+\infty)$. Ta có $f'(t)=2^t\ln 2+1>0,\ \forall t\in(-\infty;+\infty)$.

Suy ra, hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$.

Từ (I) ta lại có $f(a)<f(b)\Leftrightarrow a<b\Leftrightarrow 2x^2-15x+100<x^2+10x-50$

$\Leftrightarrow x^2-25x+150<0\Leftrightarrow x\in(10;15)$.

Vì $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{11;12;13;14\}$.

Vậy bất phương trình có 4 nghiệm nguyên.

Câu 3: Có bao nhiêu số nguyên a sao cho ứng với mỗi a, tồn tại ít nhất bốn số nguyên $b\in(-10;10)$ thỏa mãn $5^{a^2+b}\le 4^{b-a}+26$?

A. 7. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

$5^{a^2+b}\le 4^{b-a}+26\Leftrightarrow 5^{a^2+b}-4^{b-a}-26\le 0\Leftrightarrow 5^{a^2}-\frac{1}{4^a}.\left(\frac{4}{5}\right)^b-26.\left(\frac{1}{5}\right)^b\le 0$

Xét $f(b)=5^{a^2}-\frac{1}{4^a}.\left(\frac{4}{5}\right)^b-26.\left(\frac{1}{5}\right)^b$, $b\in(-10;10)$

$\Rightarrow f'(b) = -\frac{1}{4^a}.\left(\frac{4}{5}\right)^b.\ln\frac{4}{5} - 26.\left(\frac{1}{5}\right)^b.\ln\frac{1}{5} > 0$

Suy ra, $f(b)$ đồng biến với $b \in (-10;10)$

Để $f(b) \le 0$ có ít nhất bốn nghiệm nguyên thì $f(-6) \le 0 \Leftrightarrow 5^{a^2-6} - 4^{-a-6} - 26 \le 0$

$\Rightarrow 5^{a^2-6} \le 26 \Leftrightarrow -2,83... \le a \le 2,83...$

Vì $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \in \{-2;-1;0;1;2\}$.

Câu 4: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{2023}\left(x\sqrt{x^2+5} - x^2\right) \le \sqrt{x^2+5} - 4x$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x\sqrt{x^2+5} - x^2 > 0 \Leftrightarrow x\left(\sqrt{x^2+5} - x\right) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ (do $\sqrt{x^2+5} > |x| \ge x, \forall x \in \mathbb{R}$)

Ta có: $\log_{2023}\left(x\sqrt{x^2+5} - x^2\right) \le \sqrt{x^2+5} - 4x \Leftrightarrow \log_{2023}\left(x\sqrt{x^2+5} - x^2\right) - \sqrt{x^2+5} + 4x \le 0$

Đặt $f(x) = \log_{2023}\left(x\sqrt{x^2+5} - x^2\right) - \sqrt{x^2+5} + 4x$.

Khi đó: $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+5} + x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+5}} - 2x}{\ln 2023 \cdot \left(x\sqrt{x^2+5} - x^2\right)} - \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} + 4$

$= \frac{2x^2 - 2x\sqrt{x^2+5} + 5}{\ln 2023 \cdot \left(x\sqrt{x^2+5} - x^2\right)\sqrt{x^2+5}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} + 4$

$= \frac{\left(\sqrt{x^2+5} - x\right)^2}{\ln 2023 \cdot \left(x\sqrt{x^2+5} - x^2\right)\sqrt{x^2+5}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} + 4$

Suy ra $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (do $\sqrt{x^2+5} > |x| \ge x, \forall x \in \mathbb{R}$).

Do đó, f đồng biến trên $(0;+\infty)$. Do $x > 0, x \in \mathbb{Z}$ nên $x \ge 1$ suy ra $f(x) \ge f(1) \approx 1,6 > 0$.

Vậy bất phương trình $f(x) \le 0$ vô nghiệm.

Câu 5: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(\sqrt{x^2-x+4}+1\right) + 2\log_5\left(x^2-x+5\right) \le 3$ là $(a;b)$. Khi đó tổng $a+2b$ bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \sqrt{x^2-x+4}\,(t>0)$ thì bất phương trình trở thành: $\log_3(t+1) + 2\log_5\left(t^2+1\right) - 3 \le 0$

Xét hàm số $f(t) = \log_3(t+1) + 2\log_5\left(t^2+1\right) - 3$ trên $(0;+\infty)$.

$\Rightarrow f'(t) = \frac{1}{(t+1)\ln 3} + \frac{4t}{\left(t^2+1\right)\ln 5} > 0, \forall t \in (0;+\infty)$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Mà $f(t)<0=f(2)\Rightarrow t<2\Rightarrow\sqrt{x^2-x+4}<2\Leftrightarrow x^2-x<0\Leftrightarrow 0<x<1.$

Vậy $a=0,b=1\Rightarrow a+2b=2$.

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị nguyên của m trên $(-2021;2021)$ thỏa mãn

$\left(\sqrt{m^2-2m+4}+1-m\right)\left(\sqrt{4^m+3}-2^m\right)\geq 3$

A. 2020. **B.** 2021. **C.** 1. **D.** 0

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\left(\sqrt{m^2-2m+4}+1-m\right)\left(\sqrt{4^m+3}-2^m\right)\geq 3\Leftrightarrow\dfrac{\left(\sqrt{m^2-2m+4}+1-m\right).3}{\left(\sqrt{4^m+3}+2^m\right)}\geq 3$

$\Leftrightarrow\sqrt{m^2-2m+4}+1-m\geq\sqrt{4^m+3}+2^m\Leftrightarrow\sqrt{(1-m)^2+3}+1-m\geq\sqrt{\left(2^m\right)^2+3}+2^m$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x^2+3}+x$ với $x>0$

Ta có: $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}+1=\dfrac{x+\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+3}}>0,\forall x>0$

Nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

Mà $f(1-m)\geq f\left(2^m\right)\Leftrightarrow 1-m\geq 2^m\Leftrightarrow 2^m+m-1\leq 0$

Xét hàm số $f(m)=2^m+m-1$:

Ta có: $f'(m)=2^m\ln 2+1>0,\forall m$ nên hàm $f(m)=2^m+m-1$ đồng biến

Mặt khác: $f(m)\leq f(0)\Rightarrow m\leq 0$

Vậy $m\in\{-2020;-2019;...;0\}\Rightarrow$ có 2021 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 7: Xét các số thực x,y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1}\leq\left(x^2+y^2-2x+2\right)\cdot 4^x$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{8x+4}{2x-y+1}$ gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2^{x^2+y^2+1}\leq\left(x^2+y^2-2x+2\right)\cdot 4^x\Leftrightarrow 2^{x^2+y^2-2x+1}\leq x^2+y^2-2x+2$.

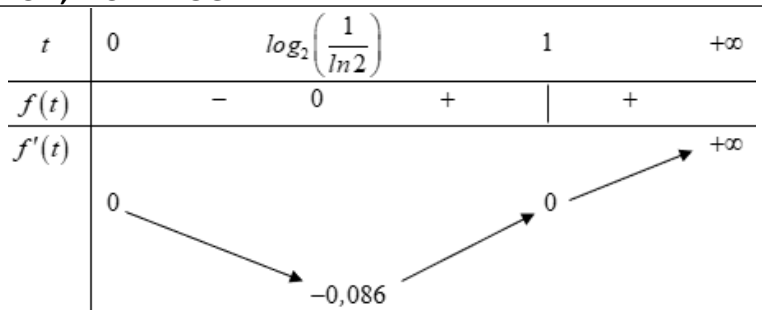
Đặt $t=x^2+y^2-2x+1=(x-1)^2+y^2\Rightarrow t\geq 0\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

Khi đó, ta có bất phương trình: $2^t\leq t+1\ (t\geq 0)$.

Xét hàm số $f(t)=2^t-t-1$ trên $[0;+\infty)$.

Có $f'(t)=2^t\ln 2-1=0\Leftrightarrow t=\log_2\dfrac{1}{\ln 2}\approx 0,53$.

Ta có bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên ta có $2^t \le t+1 \Leftrightarrow 0 \le t \le 1 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x+1 \le 1 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2 \le 1$ (1).

Xét các điểm $M(x;y)$ thỏa mãn (1) thì M thuộc hình tròn tâm $I(1;0)$, bán kính $R=1$.

Khi đó ta có $2x-y+1>0$.

Mặt khác $P=\dfrac{8x+4}{2x-y+1} \Leftrightarrow P(2x-y+1)=8x+4 \Leftrightarrow (2P-8)x-Py-4+P=0$ (2).

Ta cần tìm giá trị của P để hệ $\begin{cases}(x-1)^2+y^2 \le 1\\(2P-8)x-Py-4+P=0\end{cases}$ có nghiệm.

Gọi Δ là đường thẳng có phương trình (2).

$\Rightarrow d(I,\Delta) \le R \Leftrightarrow \dfrac{|(2P-8)\cdot 1-P\cdot 0-4+P|}{\sqrt{(2P-8)^2+P^2}} \le 1 \Leftrightarrow |3P-12| \le \sqrt{5P^2-32P+64}$.

$\Leftrightarrow 9P^2-72P+144 \le 5P^2-32P+64 \Leftrightarrow 4P^2-40P+80 \le 0 \Leftrightarrow 5-\sqrt{5} \le P \le 5+\sqrt{5}$.

Suy ra $\max P = 5+\sqrt{5}$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)=2^x-2^{-x}+2023x^3$. Biết rằng tồn tại số thực m sao cho bất phương trình $f\left(4^x-mx+37m\right)+f\left((x-m-37)2^x\right)\ge 0$ có nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hỏi m thuộc khoảng nào dưới đây

A. $(50;70)$. **B.** $(-10;10)$. **C.** $(30;50)$. **D.** $(10;30)$.

Lời giải

Chọn C

$f\left(4^x-mx+37m\right)+f\left((x-m-37)2^x\right)\ge 0 \Leftrightarrow f\left(4^x-mx+37m\right)\ge -f\left((x-m-37)2^x\right)$.

Ta thấy rằng $f(x)=2^x-2^{-x}+2023x^3$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)=-f(-x)$ nên $f(x)$ là hàm lẻ, khi đó:

$f\left(4^x-mx+37m\right)\ge -f\left((x-m-37)2^x\right) \Leftrightarrow f\left(4^x-mx+37m\right)\ge f\left(-(x-m-37)2^x\right)$.

Mặc khắc $f(x)=2^x-2^{-x}+2023x^3$ đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$ nên:

$\Leftrightarrow f\left(4^x-mx+37m\right)\ge f\left(-(x-m-37)2^x\right) \Leftrightarrow 4^x-mx+37m \ge -(x-m-37)2^x$

$\Leftrightarrow 4^x-mx+37m \ge -2^x x+2^x m+37.2^x \Leftrightarrow -mx+37m-2^x m+4^x+2^x x-37.2^x \ge 0$

$\Leftrightarrow m\left(-x+37-2^x\right)-2^x\left(-x+37-2^x\right)\ge 0 \Leftrightarrow \left(m-2^x\right)\left(-x+37-2^x\right)\ge 0$

Xét hàm số $h(x)=-x+37-2^x$, ta có $h'(x)=-1-2^x\ln 2<0, \forall x\in\mathbb{R}$ nên $h(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$. Nên phương trình $h(x)=0$ có tối đa một nghiệm. Mà $h(5)=0$ nên $x=5$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Để $\left(m-2^x\right)\left(-x+37-2^x\right)\geq 0$ có nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ thì phương trình $m-2^x=0$ có nghiệm $x=5\Leftrightarrow m=32$.

Thử lại ta thấy $m=32$ thỏa.

Câu 9: Giải bất phương trình $\sqrt{2-5x-3x^2}+2x-4x^2.3^x>2x.3^x.\sqrt{2-5x-3x^2}$ được tập nghiệm là $\left(a;b\right]$. Tính $T=3a+b+1$.

A. -3. **B.** $-\frac{7}{3}$. **C.** $-\frac{5}{3}$. **D.** -2.

Lời giải

Chọn C.

Điều kiện: $2-5x-3x^2\geq 0\Leftrightarrow -2\leq x\leq\frac{1}{3}$.

Ta có:

$\sqrt{2-5x-3x^2}+2x-4x^2.3^x>2x.3^x.\sqrt{2-5x-3x^2}\Leftrightarrow\left(1-2x.3^x\right)\left(\sqrt{2-5x-3x^2}+2x\right)>0$

$\Leftrightarrow\left(3^{-x}-2x\right)\left(\sqrt{2-5x-3x^2}+2x\right)>0\ \ (*)$

Xét hàm số $f\left(x\right)=3^{-x}-2x$ trên đoạn $\left[-2;\frac{1}{3}\right]$.

Ta có: $f'\left(x\right)=-3^{-x}.\ln 3-2<0,\forall x\in\left(-2;\frac{1}{3}\right)$ và hàm số $f\left(x\right)=3^{-x}-2x$ liên tục trên đoạn $\left[-2;\frac{1}{3}\right]$. Suy ra hàm số $f\left(x\right)=3^{-x}-2x$ nghịch biến trên đoạn $\left[-2;\frac{1}{3}\right]$.

Hay $f\left(x\right)\geq f\left(\frac{1}{3}\right)=3^{-\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}\Rightarrow f\left(x\right)>0,\forall x\in\left[-2;\frac{1}{3}\right]$.

Khi đó: $(*)\Leftrightarrow\sqrt{2-5x-3x^2}+2x>0\Leftrightarrow\sqrt{2-5x-3x^2}>-2x$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-2x<0\\2-5x-3x^2\geq 0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}-2x\geq 0\\2-5x-3x^2>4x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\-2\leq x\leq\frac{1}{3}\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x\leq 0\\-1<x<\frac{2}{7}\end{cases}$

$\Leftrightarrow 0<x\leq\frac{1}{3}$ hoặc $-1<x\leq 0\Leftrightarrow -1<x\leq\frac{1}{3}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-1;\frac{1}{3}\right]\Rightarrow a=-1;b=\frac{1}{3}\Rightarrow T=3.\left(-1\right)+\frac{1}{3}+1=-\frac{5}{3}$.

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tập nghiệm của bất phương trình $2023^{\ln\left(2x^2+4x+m\right)}-2023^{2\ln(2x-1)}>0$ chứa đúng bốn số nguyên?

A. 16. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 9.

Lời giải

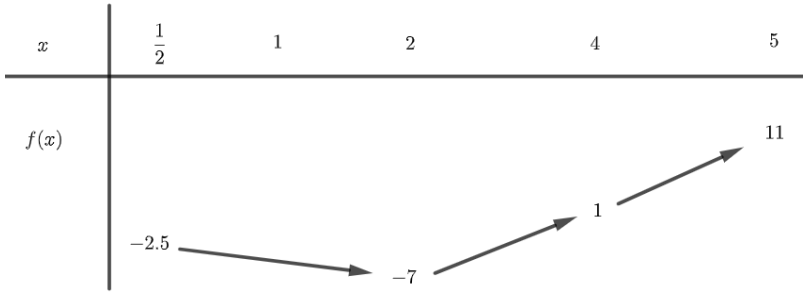
Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases}2x-1>0\\2x^2+4x+m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{1}{2}\\2x^2+4x+m>0\end{cases}$

Ta có: $2023^{\ln\left(2x^2+4x+m\right)}-2023^{2\ln(2x-1)}>0\Leftrightarrow \ln\left(2x^2+4x+m\right)>2\ln\left(2x-1\right)$

$\Leftrightarrow 2x^2+4x+m>\left(2x-1\right)^2\Leftrightarrow 2x^2-8x+1-m<0\Leftrightarrow m>2x^2-8x+1$

Xét $f\left(x\right)=2x^2-8x+1$ với $x>\dfrac{1}{2}$. Ta có đồ thị hàm số như sau:



Để bất phương trình có đúng 4 nghiệm thì: $1<m\le 11$

Vậy có 10 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 11: Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $\dfrac{-2x+4y}{x^2+y^2+1}\ge 1$ và $32\left(2^{x-y}+\dfrac{x-y+5}{2^y}\right)\le 1$. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $T=x^2+y^2-4x-4y$ lần lượt là M,m. Tổng $M+m$ bằng

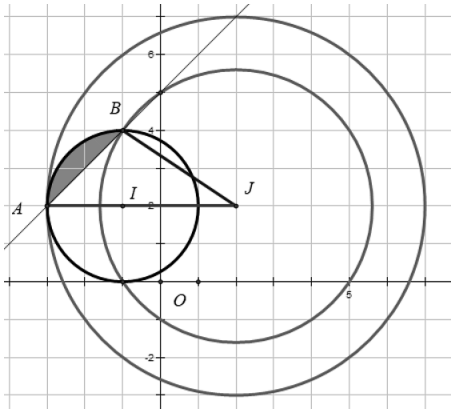
A. 22. **B.** 12. **C.** -22. **D.** -12.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\dfrac{-2x+4y}{x^2+y^2+1}\ge 1\Leftrightarrow x^2+y^2+2x-4y+1\le 0\Rightarrow N\left(x;y\right)$ thuộc hình tròn tâm $I\left(-1;2\right)$, bán kính $R=2$.

$32\left(2^{x-y}+\dfrac{x-y+5}{2^y}\right)\le 1\Leftrightarrow 2^x+x\le 2^{y-5}+y-5\Leftrightarrow x\le y-5\left(*\right)\Rightarrow N\left(x;y\right)$ thuộc miền nghiệm của (*). Khi đó, điểm $N\left(x;y\right)$ thuộc phần hình tròn tô màu(như hình vẽ)



Xét hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2+2x-4y+1=0\\ y=x+5\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3;y=2\Rightarrow A\left(-3;2\right)\\ x=-1;y=4\Rightarrow B\left(-1;4\right)\end{array}\right.$.

$T=x^2+y^2-4x-4y\Leftrightarrow\left(x-2\right)^2+\left(y-2\right)^2=T+8>0$. Điểm $N\left(x;y\right)$ thuộc đường tròn tâm $J\left(2;2\right)$, bán kính $R'=\sqrt{T+8}$; $JA^2=25, JB^2=13$.

Như vậy, ta được $JB^2\le T+8\le JA^2\Leftrightarrow 5\le T\le 17$.

$T_{\max}=17\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\y=2\end{cases};T_{\min}=5\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=4\end{cases}$. Vậy, $M+m=22$.

Câu 12: Có bao nhiêu số nguyên dương a $(a\le 2024)$ sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn $x.\left(\ln a^3+e^x\right)\le e^x.\left[1+\ln\left(3x\ln a\right)\right]$?

A. 2022. **B.** 2019. **C.** 2023. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: Vì a nguyên dương nên $3x\ln a>0\Rightarrow x>0$. ta có

$$x.\left(\ln a^3+e^x\right)\le e^x\left[1+\ln\left(3x\ln a\right)\right]\Leftrightarrow 3x\ln a\le e^x\left(1+\ln\left(3x\ln a\right)-x\right)\Leftrightarrow\frac{3x.\ln a}{e^x}\le 1+\ln\frac{3x\ln a}{e^x}$$

Đặt: $t=\dfrac{3x.\ln a}{e^x}>0.$

Bất phương trình có dạng: $t\le 1+\ln t\Leftrightarrow t-\ln t-1\le 0$.

Đặt: $f\left(t\right)=t-\ln t-1\le 0$ với $t\in\left(0;+\infty\right)$ có $f'\left(t\right)=1-\dfrac{1}{t}=0\Rightarrow t=1$

Bảng biến thiên

t	0		1		$+\infty$
$f(t)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên, suy ra $t=1\Leftrightarrow 3x\ln a=e^x$

Do: $a\ge 1\Rightarrow$ phương trình có nghiệm thì $x>0$

$\Leftrightarrow 3.\ln a=\dfrac{e^x}{x}$. Xét hàm số $g(x)=\dfrac{e^x}{x}\Rightarrow g'(x)=\dfrac{e^x x-e^x}{x^2},g'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$\searrow$	e	$\nearrow$	

Phương trình có nghiệm:

$\Leftrightarrow 3\ln a\ge e\Leftrightarrow\ln a\ge\dfrac{e}{3}\Leftrightarrow a\ge e^{\frac{e}{3}}\Leftrightarrow a\ge 2,47\Rightarrow a\in\left\{3;4;5;.....;2024\right\}$ vì a $(a\le 2024)$ nguyên dương. Vậy có 2022 giá trị.

Câu 13: Gọi S là tập các số nguyên dương a để bất phương trình $6^x+2^{a+2}<4\cdot 3^x+2^{x+a}$ có ít nhất 1 và không quá 10 nghiệm nguyên. Tổng các phần tử của S bằng

A. 204. **B.** 201. **C.** 205. **D.** 208.

Lời giải

Chọn B

Bất phương trình đã cho tương đương

$6^x - 2^{x+a} + 2^{a+2} - 4\cdot 3^x < 0 \Leftrightarrow \left(2^x - 4\right)\left(3^x - 2^a\right) < 0.$

Ta có các trường hợp sau

TH1: $a\log_3 2 \le 2$. Do a nguyên nên $a \le 3$. Khi đó bất phương trình tương đương $a\log_3 2 < x < 2.$

Do $a\log_3 2 > 0$ nên hiển nhiên bất phương trình có không quá 10 nghiệm nguyên. Bất phương trình có ít nhất 1 nghiệm nguyên khi và chỉ khi $a\log_3 2 < 1 \Leftrightarrow a < \log_2 3 \approx 1,6.$

Vậy $a = 1$.

TH2: $a\log_3 2 > 2$. Do a nguyên nên $a \ge 4$. Khi đó bất phương trình tương đương $2 < x < a\log_3 2.$

Dẫn đến bất phương trình có ít nhất 1 và không quá 10 nghiệm nguyên, khi và chỉ khi $3 < a\log_3 2 \le 13 \Leftrightarrow 4,6 \approx 3\log_2 3 < a \le 13\log_2 3 \approx 20,6.$

Suy ra $5 \le a \le 20$.

Vậy $S = \{1;5;6;\ldots;20\}$ và tổng các phần tử của S là $1+5+6+\cdots+20 = 201$.

Câu 14: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0 \le x \le 2023$ và $\log_2(2x+2) + x = 2y + 4^y$?

A. 2022 . **B.** 6 . **C.** 2023 . **D.** 4 .

Lời giải

Chọn B

$\log_2(2x+2) + x = 2y + 4^y \Leftrightarrow \log_2 2(x+1) + x = 2y + 2^{2y} \Leftrightarrow \log_2(x+1) + x + 1 - 2y + 2^{2y}$

Xét $f(t) = t + 2^t$ với $t \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = 1 + 2^t.\ln 2 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow f\left[\log_2(x+1)\right] = f(2y) \Leftrightarrow \log_2(x+1) = 2y \Leftrightarrow x+1 = 2^{2y} \Leftrightarrow x = 4^y - 1$

Vì $0 \le x \le 2023 \Leftrightarrow 0 \le 4^y - 1 \le 2023 \Leftrightarrow 1 \le 4^y \le 2024 \Leftrightarrow 0 \le y \le \log_4 2024 \approx 5,49$

$\Rightarrow y \in \{0;1;2;3;4;5\}$. Với mỗi giá trị của y thì có duy nhất 1 giá trị của x.

Vậy có 6 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 15: Cho 2 số thực $x;y$ thỏa mãn $x^2 + y^2 \ge 3$ và $\log_{x^2+y^2}\left[x\left(4x^2 - 3x + 4y^2\right) - 3y^2\right] \ge 2$ gọi $M;m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x - y$ khi đó biểu $T = 2(M+m)$ có giá trị gần nhất với số nào sau đây

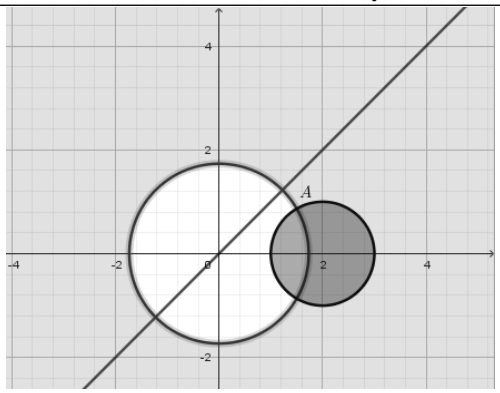
A. 9 . **B.** 8 . **C.** 7 . **D.** 10 .

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_{x^2+y^2}\left[x\left(4x^2 - 3x + 4y^2\right) - 3y^2\right] \ge 2 \Leftrightarrow \log_{x^2+y^2}\left[\left(x^2+y^2\right)(4x-3)\right] \ge 2$

$1 + \log_{x^2+y^2}(4x-3) \ge 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 3 \le 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 \le 1$



Giả sử M là giá trị lớn nhất của P. Gọi $\Delta_1 : x-y-M=0$ để tồn tại giá trị lớn nhất thì

$d\left(I;(\Delta)\right) \le R \Leftrightarrow \dfrac{|2-M|}{\sqrt{2}} \le 1 \Leftrightarrow M \le 2+\sqrt{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $M = 2+\sqrt{2}$

Giả sử m là giá trị nhỏ nhất của P. Gọi $\Delta_2 : x-y-m=0$. Dựa vào miền nghiệm của P ta thấy P đạt giá trị nhỏ nhất khi Δ_2 đi qua điểm $A\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow m = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

Vậy $T = 2\left(M+m\right) = 2\left(2+\sqrt{2}+\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right) \approx 8.096$

Câu 16: Biết tập nghiệm của bất phương trình $\log_2{}^2\left(x^2-1\right) - \log_3\left(x^2-1\right) + \log_2\dfrac{2}{3}\log_3 2 \le 0$ là $S = [a;b] \cup [c;d]$ với $a<b<c<d$. Giá trị của biểu thức $a+b+c+2d$ bằng

A. $\dfrac{1}{\log_2 3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $-\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{1}{\log_2 3}+1$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<-1 \end{array}\right.$. Đặt $t = \log_2\left(x^2-1\right)$.

Khi đó bất phương trình đã cho trở thành $t^2 - t\log_3 2 + \log_3 2 - 1 \le 0 \Leftrightarrow t \in \left[\log_3 2 - 1; 1\right]$.

Suy ra $\left[\begin{array}{l} \sqrt{2^{(\log_3 2-1)}+1} \le x \le \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \le x \le -\sqrt{2^{(\log_3 2-1)}+1} \end{array}\right.$, kết hợp với điều kiện ta được tập nghiệm của bpt là

$S = \left[-\sqrt{3}; -\sqrt{2^{(\log_3 2-1)}+1}\right] \cup \left[\sqrt{2^{(\log_3 2-1)}+1}; \sqrt{3}\right]$.

Vậy $a+b+c+2d = \sqrt{3}$.

Câu 17: Có bao nhiêu số nguyên x trong khoảng $(0;2023)$ thỏa mãn $\log_3\left(2x+5\right) < \log_2 x + 1$.

A. 2022. **B.** 2002. **C.** 2000. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x>0$.

Đặt $t=\log_3(2x+5)\Rightarrow 2x+5=3^t\Rightarrow x=\dfrac{3^t-5}{2}$.

Khi đó $\log_2 x+1=\log_2\dfrac{3^t-5}{2}+1=\log_2\left(3^t-5\right)$.

Bất phương trình đã cho thành $t<\log_2\left(3^t-5\right)\Leftrightarrow 2^t<3^t-5\Leftrightarrow\left(\dfrac{2}{3}\right)^t+5\left(\dfrac{1}{3}\right)^t<1$ (*).

Đặt $f(t)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^t+5\left(\dfrac{1}{3}\right)^t$. Khi đó (*) $\Leftrightarrow f(t)<f(2)$.

Ta có $f'(t)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^t\ln\dfrac{2}{3}+5\left(\dfrac{1}{3}\right)^t\ln\dfrac{1}{3}<0,\forall t$.

Do đó hàm số $f(t)$ nghịch biến.

Từ đó suy ra $t>2\Leftrightarrow\log_3(2x+5)>2\Leftrightarrow x>2$.

Vì số nguyên x trong khoảng $(0;2023)$ nên $x\in\{3;4;...;2022\}$.

Vậy có 2020 số thỏa đề bài.

Câu 18: Có bao nhiêu số nguyên x là nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(\dfrac{\sqrt{x^2-x+4}+1}{27}\right)+\log_5\left(x^2-x+5\right)^2\le 0$?

A. 5. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\sqrt{x^2-x+4}\,(t>0)$.

Khi đó: $\log_3(t+1)+2\log_5\left(t^2+1\right)-3\le 0\Leftrightarrow\log_3(t+1)+2\log_5\left(t^2+1\right)\le 3$.

Xét hàm số $f(t)=\log_3(t+1)+2\log_5\left(t^2+1\right)-3\Rightarrow f'(t)=\dfrac{1}{(t+1)\ln 3}+\dfrac{4t}{2\left(t^2+1\right)\ln 5}>0,\forall t>0$ Hàm số luôn đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Mặt khác từ bất phương trình suy ra

$f(t)\le f(2)\Leftrightarrow t\le 2\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x+4}\le 2\Leftrightarrow x^2-x\le 0\Leftrightarrow 0\le x\le 1$.

Do $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{0;1\}$ nên có 2 giá trị của x thỏa mãn.

Câu 19: Bất phương trình $\ln(2x^2+3)>\ln\left(x^2+ax+1\right)$ nghiệm đúng với mọi số thực x khi

A. $-2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$. **B.** $0<a<2\sqrt{2}$. **C.** $0<a<2$. **D.** $-2<a<2$.

Lời giải

Ta có $\ln(2x^2+3) > \ln\left(x^2+ax+1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+3 > x^2+ax+1 \\ x^2+ax+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-ax+2>0 \\ x^2+ax+1>0 \end{cases} (I)$.

Để bất phương trình $\ln(2x^2+3) > \ln\left(x^2+ax+1\right)$ đúng với mọi số thực x thì (I) phải đúng với mọi số thực x.

Điều này tương đương với $\begin{cases} (-a)^2-4.2<0 \\ a^2-4<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2<8 \\ a^2<4 \end{cases} \Leftrightarrow a^2<4 \Leftrightarrow -2<a<2$.

Vậy $-2<a<2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 20: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thoả mãn điều kiện $3\left(9^y+2y\right) \le x+\log_3(x+1)^3-2$ và $x \le 2023$?

A. 2. **B.** 4040. **C.** 3780. **D.** 3776.

Lời giải

Chọn C

Ta có $3\left(9^y+2y\right) \le x+\log_3(x+1)^3-2 \Leftrightarrow 3\left(3^{2y}+2y\right) \le x+1+3\log_3(x+1)-3$

$\Leftrightarrow 3\left(3^{2y}+2y\right) \le 3^{\log_3(x+1)}+3\log_3(x+1)-3 \Leftrightarrow 3^{2y}+2y \le 3^{\log_3(x+1)-1}+\log_3(x+1)-1, \quad (1)$

Xét hàm số $y=f(t)=3^t+t$ có $f'(t)=3^t.\ln 3+1>0, \forall t$ nên hàm số $y=f(t)=3^t+t$ đồng biến.

Từ $(1) \Leftrightarrow f(2y) \le f\left(\log_3(x+1)-1\right) \Leftrightarrow 2y \le \log_3(x+1)-1$.

Mà $x \le 2023$, suy ra $2y \le \log_3(x+1)-1 \le \log_3 2024-1 \Rightarrow y \le \frac{1}{2}\log_3 2024-\frac{1}{2}$.

Do y nguyên dương nên $y=1$ hoặc $y=2$.

Với $y=1 \Rightarrow \log_3(x+1) \ge 2.1+1 \Leftrightarrow x+1 \ge 27 \Leftrightarrow x \ge 26$.

Mà $x \le 2023$ và x nguyên dương nên $x \in \{26;27;...;2023\}$.

Do đó có 1998 cặp số nguyên dương $(x;y)$ thoả mãn.

Với $y=2 \Rightarrow \log_3(x+1) \ge 2.2+1 \Leftrightarrow x+1 \ge 243 \Leftrightarrow x \ge 242$.

Mà $x \le 2023$ và x nguyên dương nên $x \in \{242;243;...;2023\}$.

Do đó có 1782 cặp số nguyên dương $(x;y)$ thoả mãn.

Vậy có tất cả 3780 cặp số nguyên dương $(x;y)$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 21: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(\sqrt{x^2-x+4}+1\right)+2\log_5\left(x^2-x+5\right)<3$ là $(a;b)$. Tính $6a+8b$

A. 9. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{17}{2}$. **D.** 8

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\sqrt{x^2-x+4}, t>0 \Rightarrow \log_3(t+1)+2\log_5\left(t^2+1\right)<3$

$VT=f(t)=\log_3(t+1)+2\log_5\left(t^2+1\right) \Rightarrow f'(t)=\frac{1}{(t+1)\ln 3}+\frac{4t}{\left(t^2+1\right)\ln 5}>0, \forall t$

Nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ mà $f(2)=3$

$\Rightarrow f(t)<f(2)\Leftrightarrow t<2\rightarrow\sqrt{x^2-x+4}<2\Leftrightarrow x^2-x+4<4$

$\Leftrightarrow x^2-x<0\Leftrightarrow 0<x<1\Rightarrow a=0,b=1\Rightarrow 6a+8b=8$

Câu 22: Có bao nhiêu số nguyên dương a thỏa mãn $\log_6\left(\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}\right)>\log_3\sqrt[3]{a}$?

A. 6^3. **B.** 3^6. **C.** 3^6-1. **D.** 6^3-1.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\sqrt[6]{a}$, do $a>0\Rightarrow t>0$.

Bất phương trình trở thành: $\log_6\left(t^3+t^2\right)>\log_3 t^2\Leftrightarrow\log_6\left(t^3+t^2\right)-\log_3 t^2>0$.

Xét hàm số: $f(t)=\log_6\left(t^3+t^2\right)-\log_3 t^2,\ t>0$.

Khi đó, $f'(t)=\dfrac{3t^2+2t}{\left(t^3+t^2\right)\ln 6}-\dfrac{2t}{t^2\ln 3}<0,\ \forall t>0$.

Suy ra hàm số $f(t)$ luôn nghịch biến với mọi $t>0$

Suy ra $t=3$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(t)=0$.

Yêu cầu bài toán

$f(t)>0\Leftrightarrow f(t)>f(3)\Leftrightarrow 0<t<3$ (do hàm số $f(t)$ luôn nghịch biến với mọi $t>0$).

Suy ra $\sqrt[6]{a}<3\Leftrightarrow a<3^6$. Vì a nguyên dương nên có 3^6-1 số nguyên dương a thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 23: Gọi S là tập hợp các số nguyên dương x sao cho tồn tại số thực dương y thỏa mãn $y\log_2(x+3y)\le 8-x$ và $\log_3(3x)\ge 27^{-y}$. Tổng các phần tử của tập S bằng

A. 45. **B.** 21. **C.** 28. **D.** 36.

Lời giải

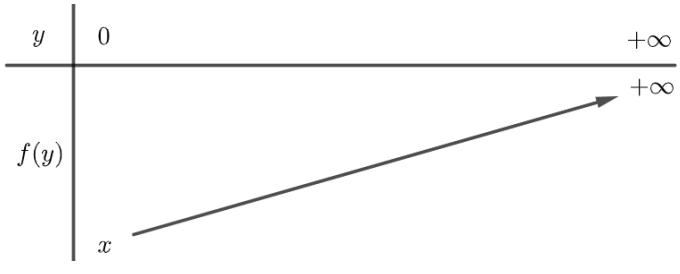
Chọn B

Ta có: $\log_3(3x)\ge 27^{-y}\Leftrightarrow y\ge-\log_{27}\left(\log_3(3x)\right)<0$ (Do $x\ge 1$) nên bất phương trình sẽ có nghiệm đúng với mọi $y>0$.

Xét bất phương trình: $y\log_2(x+3y)\le 8-x\Leftrightarrow y\log_2(x+3y)+x\le 8$.

Xét $f(y)=y.\log_2(x+3y)+x\Rightarrow f'(y)=\log_2(x+3y)+\dfrac{3y}{(x+3y)\ln 2}>0\ \forall y>0$

Nên $f(y)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$



Nên $f(y) \le 8$ có nghiệm thì $x < 8$. Do x nguyên dương nên $x \in \{1;2;3;4;5;6;7\}$.

Vậy có 7 giá trị nguyên dương x thỏa mãn.

Câu 24: Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_3\left(x^3+3x^2+25\right) > 2\log_2 x$

A. 6 **B.** 7 **C.** 8 **D.** 5

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} x^3+3x^2+25>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>0$

$\log_3\left(x^3+3x^2+25\right) > 2\log_2 x \Leftrightarrow \log_3\left(x^3+3x^2+25\right) - 2\log_2 x > 0$.

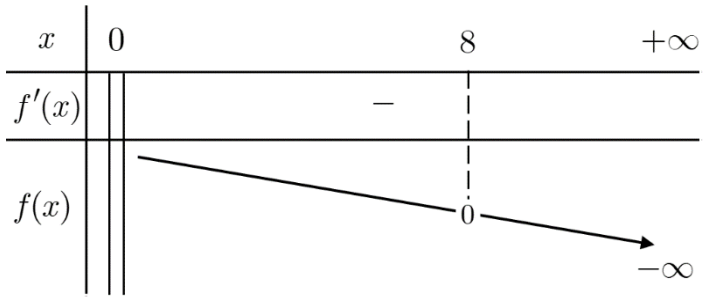
Xét $f(x) = \log_3\left(x^3+3x^2+25\right) - 2\log_2 x$ với $x>0$

$$f'(x) = \frac{3x^2+6x}{\left(x^3+3x^2+25\right)\ln 3} - \frac{2}{x\ln 2} = \frac{3x^3\ln 2 + 6x^2\ln 2 - 2x^3\ln 3 - 6x^2\ln 3 - 50\ln 3}{\left(x^3+3x^2+25\right)\ln 3 \cdot x\ln 2}$$

$$= \frac{(3\ln 2 - 2\ln 3)x^3 + 6(\ln 2 - \ln 3)x^2 - 50\ln 3}{\left(x^3+3x^2+25\right)\ln 3 \cdot x\ln 2} < 0, \forall x > 0.$$

Suy ra $f'(x) < 0, \forall x > 0.$

Ta có:



Từ bảng biến thiên $f(x) > 0$ khi $0 < x < 8$, vậy bất phương trình có 7 số nguyên.

Câu 25: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 127 số nguyên y thỏa mãn $\log_3\left(x^2+y\right) \ge \log_2(x+y)$?

A. 89. **B.** 90. **C.** 46. **D.** 45.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $\begin{cases} x^2+y>0 \\ x+y>0 \end{cases}$.

Ta có: $\log_3\left(x^2+y\right) \ge \log_2(x+y) \Leftrightarrow x^2+y \ge 3^{\log_2(x+y)}$

$\Leftrightarrow x^2+y \ge (x+y)^{\log_2 3} \Leftrightarrow x^2 - x \ge (x+y)^{\log_2 3} - (x+y)$ (1)

Đặt $x+y=t\ (t>0)$. Khi đó, (1) trở thành $x^2 - x \ge t^{\log_2 3} - t$ (2).

Với mỗi số nguyên x có không quá 127 số nguyên y thỏa mãn (1).

Suy ra với mỗi số nguyên x có không quá 127 số nguyên dương t ($t \in \mathbb{N}^*$) thỏa mãn (2).

Xét hàm số $f(t)=t^{\log_2 3}-t \Rightarrow f'(t)=(\log_2 3).t^{(\log_2 3)-1}-1>0, \forall t \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{N}^*$.

Nếu có quá 127 số nguyên dương t thì $x^2-x>128^{\log_2 3}-128=2059$.

Yêu cầu bài toán trở thành

$$x^2-x\le 2059 \Leftrightarrow x^2-x-2059\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -44\le x\le 45 \\ x\in\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow x\in\{-44,-43,...,45\}.$$

Vậy có 90 số.

Câu 26: Tìm số các giá trị nguyên của x sao cho với mỗi x tồn tại đúng 5 số nguyên y thỏa mãn

$$3^{y^2-|x-2y|}\le \log_{y^2+3}\left(|x-2y|+3\right).$$

A. 5. **B.** 6. **C.** 11. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

$$3^{y^2-|x-2y|}\le \log_{y^2+3}\left(|x-2y|+3\right) \Leftrightarrow \frac{3^{y^2+3}}{3^{|x-2y|+3}}\le \frac{\ln\left(|x-2y|+3\right)}{\ln\left(y^2+3\right)}$$

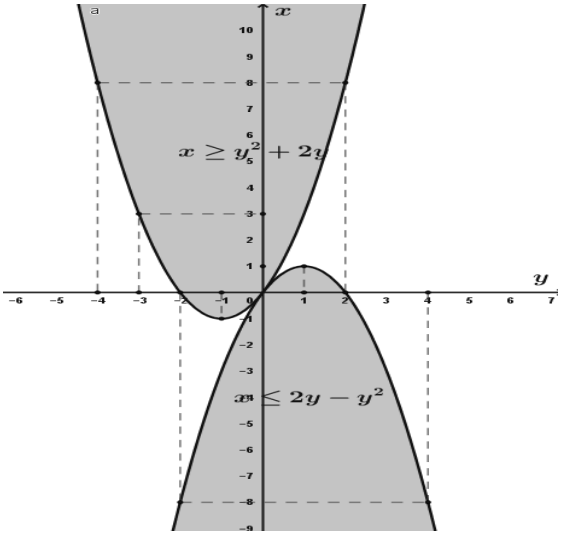
$$\Leftrightarrow 3^{y^2+3}\ln\left(y^2+3\right)\le 3^{|x-2y|+3}\ln\left(|x-2y|+3\right).$$

Xét hàm số $f(t)=3^t\ln t$ với $t\ge 3$.

$f'(t)=3^t\ln t.\ln t+\dfrac{3^t}{t}>0, \forall t\ge 3 \Rightarrow$ hàm số đồng trên $[3;+\infty)$.

Ta có: $f\left(y^2+3\right)\le f\left(|x-2y|+3\right) \Leftrightarrow y^2+3\le |x-2y|+3 \Leftrightarrow y^2\le |x-2y|$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge y^2+2y=g_1(y) \\ x\le 2y-y^2=g_2(y) \end{array}\right.$$



Ta thấy $\left[\begin{array}{l} 3\le x<8 \\ x=0 \\ -8<x\le -3 \end{array}\right.$ thì sẽ có đúng 5 giá trị nguyên của y với mỗi giá trị nguyên của x.

Vậy có tất cả 11 giá trị.

Câu 27: Trong các nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn bất phương trình $\log_{x^2+2y^2}(2x+y)\ge 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T=2x+y$ bằng

A. 9. **B.** $\frac{9}{4}$. **C.** $\frac{9}{8}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_{x^2+y^2}(2x+y)\ge 1\Leftrightarrow\left[\begin{cases}0<x^2+2y^2<1\\0<2x+y\le x^2+2y^2\end{cases}(I)\right.$

$\left.\begin{cases}x^2+2y^2>1\\2x+y\ge x^2+2y^2\end{cases}(II)\right.$

Xét biểu thức $T=2x+y$.

TH1: $(x;y)$ thỏa mãn (I), khi đó: $0<T=2x+y\le x^2+2y^2<1$.

TH2: $(x;y)$ thỏa mãn (II): $2x+y\ge x^2+2y^2\Leftrightarrow(x-1)^2+\left(\sqrt{2}y-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2\le\frac{9}{8}$.

Khi đó: $T=2x+y=2(x-1)+\frac{1}{\sqrt{2}}.\left(\sqrt{2}y-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)+\frac{9}{4}\le\sqrt{\left(2^2+\frac{1}{2}\right)\left[(x-1)^2+\left(\sqrt{2}y-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2\right]}$

$\Rightarrow T\le\sqrt{\frac{9}{2}.\frac{9}{8}}+\frac{9}{4}=\frac{9}{2}\Rightarrow\max T=\frac{9}{2}\Leftrightarrow(x;y)=\left(2;\frac{1}{2}\right)$..

Câu 28: Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-100;100]$ sao cho bất phương trình sau đây có nghiệm thực $3^{x^2-2x+1}-\log_5\left(x^2-2x+6\right)^8+10-\sqrt{-x^2+2x+m}<0$. Tổng tất các phần tử của S bằng

A. 5044. **B.** 4914. **C.** 5014. **D.** 5022.

Lời giải

Chọn C

$3^{x^2-2x+1}-\log_5\left(x^2-2x+6\right)^8+10-\sqrt{-x^2+2x+m}<0$

$\Leftrightarrow 3^{(x-1)^2}-8\log_5\left[(x-1)^2+5\right]+10-\sqrt{-(x-1)^2+1+m}<0$.

Đặt $t=(x-1)^2$, $(t\ge 0)$. Bất phương trình trở thành: $3^t-8\log_5(t+5)+10-\sqrt{-t+1+m}<0$.

Xét hàm số $f(t)=3^t-8\log_5(t+5)+10-\sqrt{-t+1+m}$ với $t\ge 0$.

$f'(t)=3^t\ln 3-8.\frac{1}{(t+5).\ln 5}+\frac{1}{2\sqrt{-t+1+m}}$

Với mọi $t\ge 0$ ta có $t+5\ge 5\Leftrightarrow(t+5)\ln 5>8\Rightarrow 8.\frac{1}{(t+5)\ln 5}<1$

$\Rightarrow 3^t\ln 3-8\frac{1}{(t+5)\ln 5}>0,\forall t\ge 0$

$\Rightarrow f'(t)=3^t\ln 3-8.\frac{1}{(t+5).\ln 5}+\frac{1}{2\sqrt{-t+1+m}}>0,\forall t\ge 0$

Do đó hàm số $y=f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty) \Rightarrow f(t) \geq f(0)=3-\sqrt{1+m}$, $\forall t \geq 0$

Để bất phương trình có nghiệm thực $\Leftrightarrow 3-\sqrt{1+m}<0 \Leftrightarrow 1+m>9 \Leftrightarrow m>8$.

Mà $m \in \mathbb{Z}, m \in [-100;100] \Rightarrow m \in \{9;10;11;....;100\}$.

Tổng các phần tử của tập S là: $9+10+11+....+100=\dfrac{(9+100)92}{2}=5014$.

Câu 29: Có bao nhiêu số nguyên x là nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(\dfrac{\sqrt{x^2-x+4}+1}{27}\right)+\log_5\left(x^2-x+5\right)^2 \leq 0$?

A. 5. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\sqrt{x^2-x+4}(t>0)$.

Khi đó: $\log_3(t+1)+2\log_5\left(t^2+1\right)-3 \leq 0 \Leftrightarrow \log_3(t+1)+2\log_5\left(t^2+1\right) \leq 3$.

Xét hàm số $f(t)=\log_3(t+1)+2\log_5\left(t^2+1\right)-3 \Rightarrow f'(t)=\dfrac{1}{(t+1)\ln 3}+\dfrac{4t}{2\left(t^2+1\right)\ln 5}>0, \forall t>0$. Hàm số luôn đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Mặt khác từ bất phương trình suy ra

$f(t) \leq f(2) \Leftrightarrow t \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+4} \leq 2 \Leftrightarrow x^2-x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$.

Do $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{0;1\}$ nên có 2 giá trị của x thỏa mãn.

Câu 30: Có bao nhiêu số nguyên dương a sao cho ứng với mỗi a có đúng hai số nguyên b thỏa mãn $(b-2)(b-6+\log_2 a)<0$?

A. 67. **B.** 64. **C.** 65. **D.** 66.

Lời giải

Chọn A

TH1: $\begin{cases} b<2 \\ b-6+\log_2 a>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b<2 \\ b>\log_2 \dfrac{64}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \log_2 \dfrac{64}{a}<b<2$.

Để có đúng hai số nguyên b thỏa mãn thì $-1 \leq \log_2 \dfrac{64}{a}<0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{64}{a}<1 \Leftrightarrow 64<a \leq 128$.

Có $128-63+1=66$ số.

TH2: $\begin{cases} b>2 \\ b-6+\log_2 a<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b>2 \\ b<\log_2 \dfrac{64}{a} \end{cases} \Leftrightarrow 2<b<\log_2 \dfrac{64}{a}$.

Để có đúng hai số nguyên b thỏa mãn thì $5 \le \log_2 \frac{64}{a} < 6 \Leftrightarrow 32 \le \frac{64}{a} < 64 \Leftrightarrow 1 < a \le 2 \Rightarrow a = 2$

Vậy có 67 số thỏa mãn.

Câu 31: Có bao nhiêu số nguyên y sao cho ứng với mỗi y có đúng 5 số nguyên x thỏa mãn: $\log\left(x^2+2x+y\right)-2\log\left(2x-1\right)>0$?

A. 75. **B.** 26. **C.** 27. **D.** 74.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x > \frac{1}{2}$.

Ta có: $\log\left(x^2+2x+y\right)-2\log\left(2x-1\right)>0 \Leftrightarrow \log\left(x^2+2x+y\right)>\log\left(2x-1\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2+2x+y>4x^2-4x+1 \Leftrightarrow y>3x^2-6x+1.$

Đặt $f\left(x\right)=3x^2-6x+1$ với $x>\frac{1}{2}$, ta có $f'\left(x\right)=6x-6=0 \Leftrightarrow x=1.$

Lập bảng biến thiên

x	$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{5}{4}$	↘	-2	↗	$+\infty$

Ứng với mỗi y có đúng 5 số nguyên x thỏa mãn

$$y > f\left(x\right) \Leftrightarrow f\left(5\right) < y \le f\left(6\right) \Leftrightarrow 46 < y \le 73.$$

Vậy có 27 số nguyên y thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 32: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $\left(x,y\right)$ thỏa mãn $2^{y+2}-\log_2\left(x+3\right)\le\frac{x-3-2y}{2}$ và $x<1000$?

A. 4998. **B.** 5004. **C.** 5010. **D.** 5998.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x+3>0 \Leftrightarrow x>-3.$

Ta có: $2^{y+2}-\log_2\left(x+3\right)\le\frac{x-3-2y}{2}$

$\Leftrightarrow 2^{y+3}-2\log_2\left(x+3\right)\le x+3-2\left(y+3\right) \Leftrightarrow 2^{y+3}+2\left(y+3\right)\le x+3+2\log_2\left(x+3\right)$

Đặt $\log_2\left(x+3\right)=t \Rightarrow x+3=2^t$. Khi đó:

$2^{y+3}+2\left(y+3\right)\le 2^t+2t \Leftrightarrow f\left(y+3\right)\le f\left(t\right)$ với $f\left(t\right)=2^t+2t \Rightarrow f'\left(t\right)=2^t.\ln 2+2>0,\forall t$,

do đó: $f\left(y+3\right)\le f\left(t\right) \Leftrightarrow y+3\le t \Leftrightarrow y+3\le\log_2\left(x+3\right).$

Suy ra $x+3\ge 2^{y+3} \Rightarrow x\ge 2^{y+3}-3 \Rightarrow 2^{y+3}-3\le 1000 \Rightarrow y\le\log_2 1003-3 \Leftrightarrow y\le 6.$

$y=1\Rightarrow x\ge 13\Rightarrow x\in\{13;...;999\}:987$ cặp.

$y=2\Rightarrow x\ge 29\Rightarrow x\in\{29;...;999\}:971$ cặp.

$y=3\Rightarrow x\ge 29\Rightarrow x\in\{61;...;999\}:939$ cặp.

$y=4\Rightarrow x\ge 125\Rightarrow x\in\{125;...;999\}:875$ cặp.

$y=5\Rightarrow x\ge 253\Rightarrow x\in\{253;...;999\}:747$ cặp.

$y=5\Rightarrow x\ge 509\Rightarrow x\in\{509;...;999\}:491$ cặp.

Vậy có 5010 cặp.

Câu 33: Có tất cả bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ với $y\le 20$ thỏa mãn:

$\log_{2023}\dfrac{x+1}{y+1}+x^2y^2+2xy^2\le(y+2)y^3$?

A. 380 **B.** 210 **C.** 420 **D.** 200

Lời giải

Chọn B

$\log_{2023}\dfrac{x+1}{y+1}+x^2y^2+2xy^2\le(y+2)y^3\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\log_{2023}\dfrac{(x+1)^2}{(y+1)^2}+y^2\left(x^2+2x\right)\le y^2\left(y^2+2y\right)$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\log_{2023}\dfrac{y^2(x+1)^2}{y^2(y+1)^2}+y^2(x+1)^2\le y^2(y+1)^2$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\log_{2023}\left[y^2(x+1)^2\right]+y^2(x+1)^2\le\dfrac{1}{2}\log_{2023}\left[y^2(y+1)^2\right]+y^2(y+1)^2(1)$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{1}{2}\log_{2023}t+t$. Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\ln 2023.t}+1>0,\forall t>0$.

Nên $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$, khi đó:

$(1)\Leftrightarrow y^2(x+1)^2\le y^2(y+1)^2\Leftrightarrow x+1\le y+1\Leftrightarrow x\le y(x,y>0)$.

Với $y=n$ $(1\le n\le 20)$ thì ta có được n giá trị nguyên dương x tương ứng.

Nên số cặp nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn là $\sum_{k=1}^{20}k=210$.

Câu 34: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn

$$\log_5\left(x^2+y^2+x\right)+\log_3\left(x^2+y^2\right)\le\log_5 x+\log_3\left(x^2+y^2+8x\right)?$$

A. 5. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x>0$.

$\log_5\left(x^2+y^2+x\right)+\log_3\left(x^2+y^2\right)\le\log_5 x+\log_3\left(x^2+y^2+8x\right)$

$\Leftrightarrow\log_5\left(\dfrac{x^2+y^2+x}{x}\right)\le\log_3\left(\dfrac{x^2+y^2+8x}{x^2+y^2}\right)\Leftrightarrow\log_5\left(\dfrac{x^2+y^2}{x}+1\right)-\log_3\left(1+\dfrac{8x}{x^2+y^2}\right)\le 0.$

Đặt $t=\dfrac{x^2+y^2}{x},(t>0)$. ta được bất phương trình $\log_5(t+1)-\log_3\left(1+\dfrac{8}{t}\right)\le 0.$

Xét hàm số

$$f(t)=\log_5(t+1)-\log_3\left(1+\frac{8}{t}\right),(t>0)\Rightarrow f'(t)=\frac{1}{(t+1)\ln 5}+\frac{8}{t^2\left(1+\dfrac{8}{t}\right)\ln 3}>0,(t>0).$$

Ta có $f(4)=0\Rightarrow t\le 4$ hay $x^2+y^2\le 4x\Leftrightarrow (x-2)^2+y^2\le 2^2.$

Ta có $\begin{cases}x>0\\(x-2)^2\le 2^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\(x-2)^2\le 2^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\0\le x\le 4\end{cases}\Leftrightarrow 0<x\le 4.$

Với $x=1\Rightarrow y=-1,y=0,y=1$ nên có 3 cặp $(x;y)$ nguyên.

Với $x=2\Rightarrow y=-2,y=-1,y=0,y=1,y=2.$ nên có 5 cặp $(x;y)$ nguyên.

Với $x=3\Rightarrow y=-1,y=0,y=1$ nên có 3 cặp. $(x;y)$ nguyên.

Với $x=4\Rightarrow y=0$ nên có 1 cặp $(x;y)$ nguyên.

Vậy có 12 cặp giá trị nguyên $(x;y)$.

Câu 35: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ và $x\le 93$ thoả mãn điều kiện $4\left(2^{3y}+6y\right)\le x+8\log_2(x+7)-9$?

A. 106. **B.** 69. **C.** 2. **D.** 92.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $4\left(2^{3y}+6y\right)\le x+8\log_2(x+7)-9\Leftrightarrow 2^{3y+2}+8(3y+2)\le 2^{\log_2(x+7)}+8\log_2(x+7).\ (*)$

Xét hàm số $f(t)=2^t+8t$, ta có $f'(t)=2^t\ln 2+8>0,\forall t$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến.

Khi đó $(*)\Leftrightarrow f(3y+2)\le f\left(\log_2(x+7)\right)\Leftrightarrow 3y+2\le\log_2(x+7)\Leftrightarrow y\le\dfrac{\log_2(x+7)-2}{3}.$

Vì $y\in\mathbb{Z}^+$ nên $\dfrac{\log_2(x+7)-2}{3}\ge 1\Leftrightarrow x\ge 25.$

Mặt khác $x\le 93$ suy ra $y\le\dfrac{\log_2(x+7)-2}{3}\le\dfrac{\log_2(93+7)-2}{3}\approx 1{,}548.$

Do đó ứng với mỗi $25\le x\le 93$ luôn xác định được duy nhất giá trị $y=1$.

Vậy có 69 cặp số nguyên dương $(x;y)$.

Câu 36: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0;10]$ đế bất phương trình $\log_2\dfrac{x^2+2x+m+1}{x^2+2x+2}\ge 2x^2+4x+7-2m$ có nghiệm. Số phần tử của tập hợp S bằng

A. 9. **B.** 7. **C.** 10. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Ta có $BPT \Leftrightarrow \log_2\left(x^2+2x+m+1\right)-\log_2\left(x^2+2x+2\right)\geq 2x^2+4x+7-2m$

$\Leftrightarrow \log_2\left(x^2+2x+m+1\right)+2\left(x^2+2x+m+1\right)\geq \log_2\left(2x^2+4x+4\right)+2\left(2x^2+4x+4\right)$

Xét $f(t)=\log_2 t+2t$ có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+2>0,\forall t>0$

Nên $bpt \Leftrightarrow f\left(x^2+2x+m+1\right)\geq f\left(2x^2+4x+4\right)\Leftrightarrow x^2+2x+m+1\geq 2x^2+4x+4$

$\Leftrightarrow m\geq x^2+2x+3\Leftrightarrow m\geq (x+1)^2+2\Leftrightarrow m\geq 2$ thì bpt có nghiệm

$\Rightarrow m\in\{2;...;10\}$. Vậy có 9 giá trị thoả mãn.

Câu 37: Cho bất phương trình $\ln\dfrac{x^4+x^3+x^2+2}{x^3-3x^2+m}+x^4+x^2+2-m\geq 0$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x\in[0;3]$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Do $x^4+x^3+x^2+2>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ nên điều kiện xác định của phương trình là $x^3-3x^2+m>0$

Ta có $\ln\dfrac{x^4+x^3+x^2+2}{x^3-3x^2+m}+x^4+x^2+2-m\geq 0$

$\Leftrightarrow \ln\left(x^4+x^3+x^2+2\right)+x^4+x^3+x^2+2\geq \ln\left(x^3-3x^2+m\right)+x^3-3x^2+m\ \ (*)$

Xét hàm số $f(t)=\ln t+t$ trên khoảng $(0;+\infty)$ ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t}+1>0,\forall t\in(0;+\infty)\Rightarrow$ hàm số $f(t)=\ln t+t$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow x^4+x^3+x^2+2\geq +x^3-3x^2+m\Leftrightarrow x^4+4x^2+2\geq m\ (**)$.

Để bất phương trình $(*)$ nghiệm đúng với $\forall x\in[0;3]$ thì bất phương trình $(**)$ nghiệm đúng với $\forall x\in[0;3]$.

Xét hàm số $g(x)=x^4+4x^2+2$ trên đoạn $[0;3]$ ta có :

$g'(x)=4x^3+8x=4x\left(x^2+2\right)\geq 0,\forall x\in[0;3]$.

Khi đó $\max\limits_{[0;3]}g(x)=g(3)=119;\min\limits_{[0;3]}g(x)=g(0)=2$.

Vậy bất phương trình $(**)$ nghiệm đúng với $\forall x\in[0;3]\Leftrightarrow m\leq\min\limits_{[0;3]}g(x)=g(0)=2$.

Do m là số nguyên dương nên $m=1;m=2$.

Câu 38: Gọi a là số thực lớn nhất để bất phương trình $x^2-x+2+a\ln\left(x^2-x+1\right)\geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a\in(2;3]$ **B.** $a\in(6;7]$ **C.** $a\in(8;+\infty)$ **D.** $a\in(-6;-5]$

Lời giải

Chọn B

Đot $t=x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{3}{4}\geq\dfrac{3}{4},\left(t\geq\dfrac{3}{4}\right)$.

Ta có: $x^2-x+2+a\ln\left(x^2-x+1\right)\geq 0\Leftrightarrow x^2-x+1+1+a\ln\left(x^2-x+1\right)\geq 0$.

Đặt $t=x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4},\left(t\geq\frac{3}{4}\right)$.

Ta được bất phương trình $t+1+a\ln t\geq 0\,(2),\left(t\geq\frac{3}{4}\right)$.

Đặt $f(t)=t+1+a\ln t\geq 0\Rightarrow f'(t)=1+\frac{a}{t}>0,\forall t\geq\frac{3}{4}$.

Do đó để bất phương trình (2) nghiệm đúng $\forall t\geq\frac{3}{4}$ điều kiện là

$$f\left(\frac{3}{4}\right)\geq 0\Leftrightarrow\frac{7}{4}+a\ln\frac{3}{4}\geq 0\Leftrightarrow a\leq\frac{-7}{4\ln\frac{3}{4}}\approx 6.09.$$

Câu 39: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_2\left(3x^2+2x+3y^2+2y\right)^2+\log_3\left(x^2+y^2\right)^3\leq 3\log_3\left[7\left(x^2+y^2\right)+4(x+y)\right]+2\log_2(x+y)?$$

A. 7. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x+y>0$.

Đặt $\begin{cases}u=x+y\\ v=x^2+y^2\end{cases}(u,v>0)$. Thì bất phương trình trở thành:

$$2\log_2(2u+3v)+3\log_3 v\leq 3\log_3(4u+7v)+2\log_2 u$$

$$\Leftrightarrow 2\log_2\left(2+3\frac{v}{u}\right)-3\log_3\left(7+4\frac{u}{v}\right)\leq 0$$

Đặt $\frac{u}{v}=t\ (t>0)$ thì bất phương trình trở thành: $2\log_2\left(2+\frac{3}{t}\right)-3\log_3(7+4t)\leq 0$

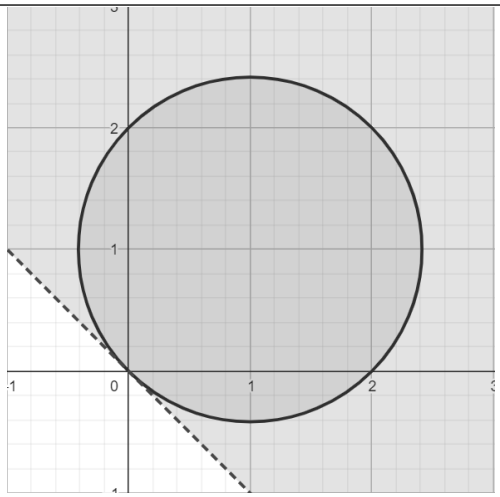
Xét hàm số $f(t)=2\log_2\left(2+\frac{3}{t}\right)-3\log_3(7+4t)\ (t>0)$

$$\Rightarrow f'(t)=\frac{-6}{\left(2t^2+3t\right)\ln 2}-\frac{12}{(7+4t)\ln 3}<0\ \forall t>0$$

Nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ mà $f(0,5)=0$ nên $f(t)\leq f(0,5)\Leftrightarrow t\geq 0,5$.

$$\frac{x+y}{x^2+y^2}\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow x^2+y^2-2x-2y\leq 0\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-1)^2\leq 2.\ (*)$$

Từ (*) và kết hợp điều kiện ban đầu $x+y>0$ và mô tả miền nghiệm trên cùng hệ trục tọa độ với (*) ta được:



Dựa vào hình ảnh miền nghiệm ta thấy có 8 cặp số $(x;y)$ nguyên thỏa mãn.

Câu 40: Gọi S là tập hợp các giá trị thực của m để tồn tại duy nhất cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}\left(4x+4y+m^2-6m+3\right)\geq 1$ và $x^2+y^2+2x-4y+1=0.$ Tổng giá trị các phần tử của tập S bằng

A. 12. **B.** 0. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Ta có $x^2+y^2+2x-4y+1=0\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=2^2 \quad (1)$ và

$\log_{x^2+y^2+2}\left(4x+4y+m^2-6m+3\right)\geq 1\Leftrightarrow 4x+4y+m^2-6m+3\geq x^2+y^2+2$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2\leq (m-3)^2 \quad (2).$

Xét $m=3$, ta có $(2)\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$. Cặp số $(x;y)=(2;2)$ không thỏa mãn điều kiện (1).

Xét $m\neq 3$, khi đó tập hợp các cặp số $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện (1) là tọa độ các điểm thuộc đường tròn tâm $I(-1;2)$ bán kính $R=2$.

Tập hợp các cặp số $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện (2) là tọa độ các điểm thuộc hình tròn tâm $I_1(2;2)$ bán kính $R_1=|m-3|,(m\neq 3)$.

Do đó để tồn tại duy nhất cặp số $(x;y)$ thỏa mãn hai điều kiện trên thì:

TH1. Hai đường tròn $(I;R)$ và $(I_1;R_1)$ tiếp xúc ngoài. Khi đó

$$II_1=R+R_1\Leftrightarrow 3=|m-3|+2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=4 \\ m=2 \end{array}\right.$$

TH2. Hai đường tròn $(I;R)$ và $(I_1;R_1)$ tiếp xúc trong và $R>R_1$. Khi đó

$\begin{cases} II_1=R-R_1 \\ R>R_1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} 3=2-|m-3| \\ 2>|m-3| \end{cases}$, không tồn tại m.

Vậy tổng giá trị các phần tử của tập S bằng 6.

Câu 41: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_2\frac{x+y}{x^2+y^2+2}\geq x(x-4)+y(y-4)?$$

A. $13.$. **B.** $18.$. **C.** $15.$. **D.** 21.

Lời giải

Chọn C

$\log_2 \dfrac{x+y}{x^2+y^2+2} \ge x(x-4)+y(y-4) \Leftrightarrow \log_2(x+y)-\log_2\left(x^2+y^2+2\right) \ge x^2+y^2-4(x+y)$

$\Leftrightarrow \log_2 4(x+y)+4(x+y) \ge \log_2\left(x^2+y^2+2\right)+x^2+y^2+2.$

Đặt $f(t)=\log_2 t+t, (t>0) \Rightarrow f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0, \forall t>0.$

Ta có $\begin{cases} f'(t)>0 \\ f\left(4(x+y)\right) \ge f\left(x^2+y^2+2\right) \end{cases} \Rightarrow 4x+4y \ge x^2+y^2+2 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2 \le 6.$

$\Rightarrow \begin{cases} (x-2)^2 \le 6 \\ (y-2)^2 \le 6 \\ x,y \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{6}+2 \le x \le 2+\sqrt{6} \\ -\sqrt{6}+2 \le y \le 2+\sqrt{6} \\ x,y \in \mathbb{Z}, x>0, y>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1,2,3,4 \\ y=1,2,3,4 \end{cases}.$

Thay $(x;y)$ thảo điều kiện $\begin{cases} x=1,2,3,4 \\ y=1,2,3,4 \end{cases}$ và $(x-2)^2+(y-2)^2 \le 6$ thì có 15 cặp $(x;y)$ là

$(x;y) \in \{(1;1),(1;2),(1;3),(1;4),(2;1),(2;2),(2;3),(2;4),(3;1),(3;2),(3;3),(3;4),(4;1),(4;2),(4;3)\}.$

Câu 42: Cho hàm số $f(x)=2^x-2^{-x}+2023x^3$. Biết rằng tồn tại số thực m sao cho bất phương trình $f\left(4^x-mx+37m\right)+f\left((x-m-37)2^x\right) \ge 0$ có nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hỏi m thuộc khoảng nào dưới đây

A. $(50;70)$. **B.** $(-10;10)$. **C.** $(30;50)$. **D.** $(10;30)$.

Lời giải

Chọn C

$f\left(4^x-mx+37m\right)+f\left((x-m-37)2^x\right) \ge 0 \Leftrightarrow f\left(4^x-mx+37m\right) \ge -f\left((x-m-37)2^x\right).$

Ta thấy rằng $f(x)=2^x-2^{-x}+2023x^3$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)=-f(-x)$ nên $f(x)$ là hàm lẻ, khi đó:

$f\left(4^x-mx+37m\right) \ge -f\left((x-m-37)2^x\right) \Leftrightarrow f\left(4^x-mx+37m\right) \ge f\left(-(x-m-37)2^x\right).$

Mặc khắc $f(x)=2^x-2^{-x}+2023x^3$ đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$ nên:

$\Leftrightarrow f\left(4^x-mx+37m\right) \ge f\left(-(x-m-37)2^x\right) \Leftrightarrow 4^x-mx+37m \ge -(x-m-37)2^x$

$\Leftrightarrow 4^x-mx+37m \ge -2^x x+2^x m+37.2^x \Leftrightarrow -mx+37m-2^x m+4^x+2^x x-37.2^x \ge 0$

$\Leftrightarrow m\left(-x+37-2^x\right)-2^x\left(-x+37-2^x\right) \ge 0 \Leftrightarrow \left(m-2^x\right)\left(-x+37-2^x\right) \ge 0$

Xét hàm số $h(x)=-x+37-2^x$, ta có $h'(x)=-1-2^x\ln 2<0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $h(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$. Nên phương trình $h(x)=0$ có tối đa một nghiệm. Mà $h(5)=0$ nên $x=5$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Để $\left(m-2^x\right)\left(-x+37-2^x\right) \ge 0$ có nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì phương trình $m-2^x=0$ có nghiệm $x=5 \Leftrightarrow m=32$.

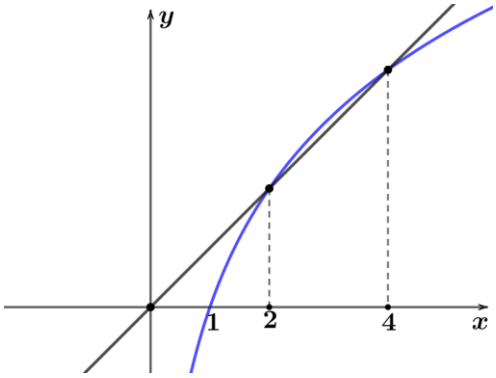
Thử lại ta thấy $m=32$ thỏa.

Câu 43: Có bao nhiêu cặp số $(x;y)$ với x,y là các số nguyên thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau: $4.2^{y^4-2y^2}-2\log_2(2x)+x=0$ và $2\log_2(x+y)-x-y\ge 0$?

A. 6. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B



Xét đồ thị 2 hàm số $y=2\log_2 x$ và $y=x$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Từ đó suy ra tập nghiệm chủa bất phương trình $2\log_2 x-x\ge 0\Leftrightarrow 2\le x\le 4$.

$2\log_2(x+y)-x-y\ge 0\Leftrightarrow 2\le x+y\le 4\ (1)$.

$4.2^{y^4-2y^2}-2\log_2(2x)+x=0\Leftrightarrow 2.2^{\left(y^2-1\right)^2}=2\log_2 x-x+2$.

Điều kiện có nghiệm: $2\log_2 x-x+2\ge 2\Leftrightarrow 2\le x\le 4$.

Với $x=2\Rightarrow 2.2^{\left(y^2-1\right)^2}=2\Rightarrow y=\pm 1$.

Với $x=3$ (loại), vì $VP=2\log_2 3-1\notin\mathbb{Z}$.

Với $x=4\Rightarrow 2.2^{\left(y^2-1\right)^2}=2\Rightarrow y=\pm 1$

Kết hợp với điều kiện (1), ta có 2 cặp số nguyên là $(2;1)$ và $(4;-1)$.

Câu 44: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (x,y) thoả mãn $5^{y+1}+y-\log_5(x+2)\le\dfrac{x-8}{5}$ và $x<2023$?

A. 3302. **B.** 3296. **C.** 3300. **D.** 3298.

Lời giải

Ta có: $5^{y+1}+y-\log_5(x+2)\le\dfrac{x-8}{5}\Leftrightarrow 5^{y+2}+5y-5\log_5(x+2)\le x-8$

$\Leftrightarrow 5^{y+2}+5(y+2)\le 5^t+5t$ với $t=\log_5(x+2)$

$\Leftrightarrow y+2\le t$ (vì hàm số $f(u)=5^u+5u$ đồng biến trên $\mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow y+2\le\log_5(x+2)$.

Do $x<2023\Rightarrow y+2<\log_5 2025\Rightarrow y<2{,}8$ mà $y\in\mathbb{Z}^+\Rightarrow y\in\{1;2\}$.

Nếu $y=1$ ta có: $\log_5(x+2)\ge 3\Leftrightarrow x\ge 123$ mà $x\in\mathbb{Z}^+$, $x<2023\Rightarrow x\in\{123;124;...;2022\}$

Trường hợp này có 1900 cặp số nguyên dương (x,y) thoả mãn.

Nếu $y=2$ ta có: $\log_5(x+2)\geq 4\Leftrightarrow x\geq 623$ mà $x\in\mathbb{Z}^+$, $x<2023\Rightarrow x\in\{623;624;...;2022\}$

Trường hợp này có 1400 cặp số nguyên dương (x,y) thoả mãn.

Vậy có tất cả $1900+1400=3300$ cặp số nguyên dương (x,y) thoả mãn.

Câu 45: Xét các số thực x, y thỏa mãn $\log_{\frac{1}{2}}x+\log_2\left(x^2+y\right)\leq -2\log_{\frac{1}{4}}y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3x+4y$.

A. $11+4\sqrt{7}$. **B.** $11+5\sqrt{7}$. **C.** $11-5\sqrt{7}$. **D.** $11-4\sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x,y>0$. Bất phương trình đã cho tương đương

$$\log_{\frac{1}{2}}x+\log_2\left(x^2+y\right)\leq -2\log_{\frac{1}{4}}y\Leftrightarrow\log_2\frac{x^2+y}{x}\leq\log_2 y\Leftrightarrow\frac{x^2+y}{x}\leq y\Leftrightarrow x^2+y\leq xy.$$

Xét $0<x\leq 1$, ta có $x^2+y\leq xy\Leftrightarrow x^2\leq(x-1)y\leq 0$ (vô nghiệm).

Xét $x>1$, ta có $P=3x+4y>3x>3$. (1)

Mặt khác $P=3x+4y\Leftrightarrow y=\dfrac{P-3x}{4}$ suy ra

$$x^2+y\leq xy\Leftrightarrow x^2+\frac{P-3x}{4}\leq x\cdot\frac{P-3x}{4}\Leftrightarrow 7x^2-(P+3)x+P\leq 0.$$

Tồn tại x, y thỏa mãn yêu cầu bài toán khi và chỉ khi $7x^2-(P+3)x+P\leq 0$ có nghiệm.

Do đó $\Delta=(P+3)^2-28P\geq 0\Leftrightarrow P^2-22P+9\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}P\geq 11+4\sqrt{7}\\P\leq 11-4\sqrt{7}.\end{array}\right.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $P\geq 11+4\sqrt{7}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi:

$$7x^2-\left(14+4\sqrt{7}\right)x+\left(11+4\sqrt{7}\right)\leq 0\Leftrightarrow x=\frac{7+2\sqrt{7}}{7}\Rightarrow y=\frac{28+11\sqrt{7}}{14}.$$

Câu 46: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_3\left(5-|x|+2|y|\right)+2\log_2\left(5-|x|\right)+3\geq\log_3|y|+\log_2\left(5-|x|+3|y|\right)^2$$

A. 50. **B.** 61. **C.** 60. **D.** 51.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases}x;y\in\mathbb{Z}\\5-|x|>0\\y\neq 0\end{cases}$.

Ta có: $\log_3\left(5-|x|+2|y|\right)+2\log_2\left(5-|x|\right)+3\geq\log_3|y|+\log_2\left(5-|x|+3|y|\right)^2$

$$\Leftrightarrow\log_3\left(\frac{5-|x|}{|y|}+2\right)+2\log_2\left(\frac{5-|x|}{5-|x|+3|y|}\right)+3\geq 0$$

$\Leftrightarrow \log_3\left(\frac{5-|x|}{|y|}+2\right)-2\log_2\left(1+3\frac{|y|}{5-|x|}\right)+3\ge 0$ (*).

Đặt $t=\frac{5-|x|}{|y|}>0$,

$(*)\Leftrightarrow \log_3(t+2)-2\log_2\left(1+\frac{3}{t}\right)+3\ge 0$ (**).

Xét hàm số $h(t)=\log_3(t+2)-2\log_2\left(1+\frac{3}{t}\right)+3$.

$h'(t)=\frac{1}{\ln 3(t+2)}+\frac{6}{t^2.\left(1+\frac{3}{t}\right).\ln 2}>0,\forall t>0$, mặt khác $h(1)=0$.

Do đó $(**)\Leftrightarrow t\ge 1\Leftrightarrow \frac{5-|x|}{|y|}\ge 1\Leftrightarrow |y|\le 5-|x|$.

Với $x=0\Rightarrow |y|\le 5\Rightarrow y\in(-5,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,5)$, có 10 cặp $(x;y)$ thỏa mãn.

Với $x=\pm 1\Rightarrow |y|\le 4\Rightarrow y\in(-4,-3,-2,-1,1,2,3,4)$, có 16 cặp $(x;y)$ thỏa mãn.

Với $x=\pm 2\Rightarrow |y|\le 3\Rightarrow y\in(-3,-2,-1,1,2,3)$, có 12 cặp $(x;y)$ thỏa mãn.

Với $x=\pm 3\Rightarrow |y|\le 2\Rightarrow y\in(-2,-1,1,2)$, có 8 cặp $(x;y)$ thỏa mãn.

Với $x=\pm 4\Rightarrow |y|\le 1\Rightarrow y\in(-1,1)$, có 4 cặp $(x;y)$ thỏa mãn.

Vậy có 50 cặp $(x;y)$ thỏa mãn.

Câu 47: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ với $1\le x,y\le 2023$ và thỏa mãn

$$(2x+4y-xy-8)\log_2\left(\frac{2x-1}{x-4}\right)\ge(xy+2x+3y+6)\log_3\left(\frac{2y}{y+2}\right)?$$

A. 4038. **B.** 2023. **C.** 2020. **D.** 4040.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases}x,y\in\mathbb{N}^*:x,y\le 2023\\ \frac{2x-1}{x-4}>0,\frac{2y}{y+2}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x,y\in\mathbb{N}^*:x,y\le 2023\\ x>4,y>0\end{cases}$.

BPT đã cho tương đương với

$(4-x)(y-2)\log_2\left(\frac{x+3}{x-4}+1\right)\ge(x+3)(y+2)\log_3\left(\frac{y-2}{y+2}+1\right)$

$\Leftrightarrow(x-4)(y-2)\log_2\left(\frac{x+3}{x-4}+1\right)+(x+3)(y+2)\log_3\left(\frac{y-2}{y+2}+1\right)\le 0$ (*).

Xét $y=1$ thì (*) thành $-(x-4)\log_2\left(\frac{x+3}{x-4}+1\right)+3(x+3)\log_3\frac{2}{3}\le 0$, rõ ràng BPT này nghiệm đúng với mọi $x>4$ vì $-(x-4)<0,\ \log_2\left(\frac{x+3}{x-4}+1\right)>\log_2 1=0,\ 3(x+3)>0,\ \log_3\frac{2}{3}<0$.

Như vậy trường hợp này cho ta đúng 2019 cặp số nguyên $(x;y)=(x;1)$ với $5\le x\le 2023$.

Xét $y=2$ thì (*) thành $4(x+3)\log_3 1\le 0$, BPT này cũng luôn đúng với mọi x mà $5\le x\le 2023, x\in\mathbb{N}$.

Trường hợp này cũng cho ta 2019 cặp số nguyên $(x;y)=(x;2)$ với $5\le x\le 2023$.

Với $y>2, x>4$ thì $VT(*)>0$ nên (*) không xảy ra.

Vậy có đúng 4038 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 48: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $a(a>0)$ thoả mãn $\left(2^a+\frac{1}{2^a}\right)^{2017}\le\left(2^{2017}+\frac{1}{2^{2017}}\right)^a$.

A. $0<a<1$. **B.** $a\ge 2017$. **C.** $1<a<2017$. **D.** $0\le a<2017$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có: $2017\ln\left(2^a+\frac{1}{2^a}\right)\le a\ln\left(2^{2017}+\frac{1}{2^{2017}}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{\ln\left(2^a+\frac{1}{2^a}\right)}{a}\le\frac{\ln\left(2^{2017}+\frac{1}{2^{2017}}\right)}{2017}$ (do $a>0$) $\Leftrightarrow \frac{\ln\left(4^a+1\right)-\ln 2^a}{a}\le\frac{\ln\left(4^{2017}+1\right)-\ln 2^{2017}}{2017}$

$\Leftrightarrow f(a)\le f(2017)(*)$ với $f(t)=\frac{\ln\left(4^t+1\right)-\ln 2^t}{t}(t>0)$

Ta có $f'(t)=\frac{\left(\frac{4^t\ln 4}{4^t+1}-\ln 2\right)t-\ln\left(4^t+1\right)+\ln 2^t}{t^2}=\frac{4^t\ln 4^t-\left(4^t+1\right)\ln\left(4^t+1\right)}{\left(4^t+1\right)t^2}$

Xét $g(s)=s\ln s$ với $s>1$, ta có $g'(s)=\ln s+1>0\ \forall s>1$ suy ra $g(s)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Mà với $t>0$ ta có $1<4^t<4^t+1$ nên $g\left(4^t\right)<g\left(4^t+1\right)\Leftrightarrow 4^t\ln 4^t<\left(4^t+1\right)\ln\left(4^t+1\right)$

suy ra $f'(t)<0\ \forall t>0$. Vậy $f(t)$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$; do đó $(*)\Leftrightarrow a\ge 2017$.

Câu 49: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_3\left(x^2+4y^2+x\right)+\log_2\left(x^2+4y^2\right)+\frac{x^2-8x+4y^2}{x}\le\log_3 x+\log_2\left(x^2+4y^2+24x\right)$$

A. 24. **B.** 25. **C.** 22. **D.** 48.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\frac{x^2+4y^2}{x}$ $(t>0\ do\ x>0)$

Từ giả thiết $\Rightarrow\log_3(tx+x)+\log_2(tx)+t-8\le\log_3 x+\log_2(tx+24x)$

$\Leftrightarrow\log_3(t+1)+t-8\le\log_2\left(\frac{t+24}{t}\right)\Leftrightarrow\log_3(t+1)+t-8-\log_2\left(\frac{t+24}{t}\right)\le 0$

Đặt $f(t)=\log_3(t+1)+t-8-\log_2\left(\frac{t+24}{t}\right),\ t>0$

$f'(t)=\frac{1}{(t+1)\ln 3}+1-\frac{1}{\left(\frac{t+24}{t}\right)\ln 2}.\left(\frac{-24}{t^2}\right)>0$, $\forall t>0\Rightarrow f(t)$ đồng biến.

Mà $f(t)\le f(8)=0\Rightarrow 0<t\le 8$

Với $y=0\Rightarrow t=x\Rightarrow x\in\{1;2;...8\}$

Suy ra có 8 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn.

Ta có $t \le 8 \Rightarrow x^2 + 4y^2 \le 8x \Rightarrow (x-4)^2 + 4y^2 \le 16$

$4y^2 \le 16 \Leftrightarrow -2 \le y \le 2$

Với $y = \pm 2 \Rightarrow (x-4)^2 \le 0 \Rightarrow x = 4$

Suy ra có 2 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn.

Với $y = \pm 1 \Rightarrow (x-4)^2 \le 12 \Rightarrow -2\sqrt{3} \le x-4 \le 2\sqrt{3} \Rightarrow x \in \{1;2;...7\}$

Suy ra có 14 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn.

Vậy có tất cả $8+2+14=24$ cặp số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 50: Tất cả các cặp số $(x;y)$, sao cho $x, y \in \mathbb{N}^*$ sao cho $(3y-2y^2+2)\log_3\left(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right) > (y+1)\log_2\sqrt{x}$ luôn đúng là

A. 3684 **B.** 4095. **C.** 5406. **D.** 4012

Lời giải

Chọn B

Do $\begin{cases} (y+1)\log_2\sqrt{x} \ge 0 \\ \log_3\left(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right) > 0 \end{cases}, \forall x, y \in \mathbb{N}^*$

Nên để bất phương trình có nghiệm khi $3y - 2y^2 + 2 > 0 \Rightarrow y = 1$.

Với $y = 1$, bất phương trình tương đương $3\log_3\left(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right) - \log_2 x > 0$.

Đặt $t = \log_2 x \ (t \ge 0) \Leftrightarrow x = 2^t$, bất phương trình tương đương:

$$1 + 2^{\frac{t}{2}} + 2^{\frac{t}{3}} > 3^{\frac{t}{3}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{3}} + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}\right)^t + \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{3}} - 1 > 0$$

Đặt $f(t) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{3}} + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}\right)^t + \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{3}} - 1$. Do $f(t)$ là hàm nghịch biến và $f(12) = 0$

Nên $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{3}} + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}\right)^t + \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{3}} - 1 > 0 \Leftrightarrow 0 \le t < 12 \Leftrightarrow 1 \le x < 4096$.

Vậy có 4095 cặp $(x;y)$ thỏa mãn.

Câu 51: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 242 số nguyên y thỏa mãn $\log_4\left(2x^2+y\right) \ge \log_3(x+y)$?

A. 21. **B.** 40. **C.** 20. **D.** 39.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases} 2x^2 + y > 0 \\ x + y > 0 \end{cases}$.

Ta có: $\log_4\left(2x^2+y\right)\geq\log_3(x+y)\Leftrightarrow 2x^2+y\geq 4^{\log_3(x+y)}\Leftrightarrow 2x^2+y\geq(x+y)^{\log_3 4}(1)$.

Điều kiện: $x+y\geq 1$ (do $x,y\in\mathbb{Z},x+y>0$).

Đặt $t=x+y(t\geq 1)$. Ta được $2x^2+t-x\geq t^{\log_3 4}\Leftrightarrow 2x^2-x\geq t^{\log_3 4}-t$

Để (1) không có quá 242 nghiệm nguyên $y\Leftrightarrow(2)$ có không quá 242 nghiệm nguyên dương t.

Đặt $f(t)=t^{\log_3 4}-t$. Ta có: $f'(t)=\log_3 4\cdot t^{\log_3 4-1}-1>0\quad\forall t>1\Rightarrow f(t)$ là hàm số đồng biến trên $[1;+\infty)\Rightarrow(2)$ có không quá 242 nghiệm nguyên $\Leftrightarrow f(t_1)\leq 242$ hay $2x^2-x\leq 242^{\log_3 4}-242\Leftrightarrow 2x^2-x-242^{\log_3 4}+242\leq 0\Leftrightarrow -19{,}5\leq x\leq 19.96$

Lại có: $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow$ Có 39 số nguyên x thỏa mãn bài toán.

Câu 52: Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a>1,b>0,c>0$ và bất phương trình $a^{x^2}.\left(b+4c\right)^{2x+3}\geq 1$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$. Biết rằng biểu thức $P=\frac{16a}{3}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $a=m,b=n,c=p$. Khi đó, tổng $m+n+p$ bằng

A. $\frac{32}{3}$. **B.** $\frac{81}{16}$. **C.** $\frac{57}{20}$. **D.** $\frac{51}{16}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $a^{x^2}.\left(b+4c\right)^{2x+3}\geq 1\Leftrightarrow x^2+\log_a\left(b+4c\right).\left(2x+3\right)\geq\log_a 1=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\Delta'=\log_a{}^2\left(b+4c\right)-3\log_a\left(b+4c\right)\leq 0\Leftrightarrow 0\leq\log_a\left(b+4c\right)\leq 3\Rightarrow 1\leq b+4c\leq a^3$.

Ta có: $P=\frac{16a}{3}+\frac{1}{b}+\frac{2^2}{4c}\geq\frac{16a}{3}+\frac{\left(1+2\right)^2}{b+4c}\geq\frac{16a}{3}+\frac{9}{a^3}=\frac{16a}{9}+\frac{16a}{9}+\frac{16a}{9}+\frac{9}{a^3}$

$\geq 4\sqrt[4]{\left(\frac{16}{9}\right)^3.9}=\frac{32}{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{16a}{9}=\frac{9}{a^3}\Rightarrow a=\frac{3}{2}$ và $\begin{cases}\frac{1}{b}=\frac{2}{4c}\\ b+4c=\frac{27}{8}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=\frac{9}{8}\\ c=\frac{9}{16}\end{cases}$. Vậy $m+n+p=\frac{51}{16}$.

Câu 53: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (x,y) sao cho ứng với mỗi giá trị nguyên dương của y có không quá 15 giá trị nguyên dương của x thỏa mãn

$$\log_5\left(3x^2+xy+36y^2\right)+\log_3\left(x^2+12y^2\right)<\log_5(xy)+\log_3\left(x^2+16xy+12y^2\right)+1?$$

A. 40. **B.** 36. **C.** 21. **D.** 33.

Lời giải

Chọn B

$\log_5\left(3x^2+xy+36y^2\right)+\log_3\left(x^2+12y^2\right)<\log_5(xy)+\log_3\left(x^2+16xy+12y^2\right)+1$

$\Leftrightarrow \log_5\dfrac{3x^2+xy+36y^2}{xy}<\log_3\dfrac{3x^2+48xy+36y^2}{x^2+12y^2}$

$\Leftrightarrow \log_5\left(3\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{12y}{x}\right)+1\right)<\log_3\left(3+\dfrac{48}{\dfrac{x}{y}+12\dfrac{y}{x}}\right)$

Đặt $a=\dfrac{x}{y}+\dfrac{12y}{x}>0$. Ta được $\log_5(3a+1)-\log_3\left(3+\dfrac{48}{a}\right)<0$.

Xét $f(a)=\log_5(3a+1)-\log_3\left(3+\dfrac{48}{a}\right),\ a\in(0,+\infty).$

$\Rightarrow f'(a)=\dfrac{3}{(3a+1)\ln 5}+\dfrac{\dfrac{48}{a^2}}{\left(3+\dfrac{48}{a}\right)\ln 3}>0,\forall a>0\Rightarrow f(a)$ đồng biến trên $(0+\infty)$

Mà $f(8)=0\Rightarrow f(a)<0\Leftrightarrow a<8$. Khi đó ta có

$\dfrac{x}{y}+12\dfrac{y}{x}<8\Leftrightarrow x^2+12y^2<8xy\ \Leftrightarrow x^2-8xy+12y^2<0\ \Leftrightarrow (x-2y)(x-6y)<0\Leftrightarrow$

$2y<x<6y.$

Để mỗi giá trị của y có không quá 15 giá trị nguyên dương của x thì điều kiện là

$(6y-1)-(2y+1)+1\le 15\Leftrightarrow y\le 4, y\in N^*\Rightarrow 1\le y\le 4.$

Với $y=1\Rightarrow x\in(2;6)\Rightarrow$ có 3 cặp $(x;y)$.

Với $y=2\Rightarrow x\in(4;12)\Rightarrow$ có 7 cặp $(x;y)$.

Với $y=3\Rightarrow x\in(6;18)\Rightarrow$ có 11 cặp $(x;y)$.

Với $y=4\Rightarrow x\in(8;24)\Rightarrow$ có 15 cặp $(x;y)$.

Vậy có 36 cặp $(x;y)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 54: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $1\le x\le 2023$ và

$$(y+2)\log_3\left(\frac{y-2}{y+2}+1\right)+\frac{xy-2x-y+2}{x+2}\log_2\left(\frac{x+2}{x-1}+1\right)\le 0\ ?$$

A. 4046. **B.** 2022. **C.** 2023. **D.** 4044.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases}\dfrac{y-2}{y+2}+1>0\\ \dfrac{x+2}{x-1}+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2y}{y+2}>0\\ \dfrac{2x+1}{x-1}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x,y\in\mathbb{Z}\\ y\ge 1\\ x\ge 2\end{cases}.$

Bất phương trình tương đương $(y+2)\log_3\left(\dfrac{y-2}{y+2}+1\right)+\dfrac{(x-1)(y-2)}{x+2}\log_2\left(\dfrac{x+2}{x-1}+1\right)\le 0$

$(y+2)\log_3\left(\dfrac{y-2}{y+2}+1\right)+(y-2)\dfrac{x-1}{x+2}\log_2\left(\dfrac{3}{x-1}+2\right)\le 0$

Với $x \ge 2$, ta có $\frac{x-1}{x+2}\log_2\left(\frac{3}{x-1}+2\right)>0$.

Nên với $y=1$ và $x \ge 2$ $(y+2)\log_3\left(\frac{y-2}{y+2}+1\right)+(y-2)\frac{x-1}{x+2}\log_2\left(\frac{3}{x-1}+2\right)<0$ (Thỏa).

Trường hợp này có 2022 cặp $(x;y)$ thỏa mãn.

Với $y=2$ và $x \ge 2$ $(y+2)\log_3\left(\frac{y-2}{y+2}+1\right)+(y-2)\frac{x-1}{x+2}\log_2\left(\frac{3}{x-1}+2\right)=0$ (Thỏa).

Trường hợp này có 2022 cặp $(x;y)$ thỏa mãn.

Với $y>2$, $\begin{cases} y+2>0 \\ \frac{y-2}{y+2}+1>1 \\ y-2>0 \end{cases}$ nên $(y+2)\log_3\left(\frac{y-2}{y+2}+1\right)+(y-2)\frac{x-1}{x+2}\log_2\left(\frac{3}{x-1}+2\right)>0$ không thỏa mãn bất phương trình.

Vậy có tất cả 4044 cặp $(x;y)$ thỏa mãn.

Câu 55: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $1 \le x \le 2023$ và

$$(y+2)\log_3\left(\frac{y-2}{y+2}+1\right)+\frac{xy-2x-y+2}{x+2}\log_2\left(\frac{x+2}{x-1}+1\right)\le 0\,?$$

A. 4046. **B.** 2022. **C.** 2023. **D.** 4044.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases} \frac{y-2}{y+2}+1>0 \\ \frac{x+2}{x-1}+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2y}{y+2}>0 \\ \frac{2x+1}{x-1}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x,y \in \mathbb{Z} \\ y \ge 1 \\ x \ge 2 \end{cases}$.

Bất phương trình tương đương $(y+2)\log_3\left(\frac{y-2}{y+2}+1\right)+\frac{(x-1)(y-2)}{x+2}\log_2\left(\frac{x+2}{x-1}+1\right)\le 0$

$(y+2)\log_3\left(\frac{y-2}{y+2}+1\right)+(y-2)\frac{x-1}{x+2}\log_2\left(\frac{3}{x-1}+2\right)\le 0$

Với $x \ge 2$, ta có $\frac{x-1}{x+2}\log_2\left(\frac{3}{x-1}+2\right)>0$.

Nên với $y=1$ và $x \ge 2$ $(y+2)\log_3\left(\frac{y-2}{y+2}+1\right)+(y-2)\frac{x-1}{x+2}\log_2\left(\frac{3}{x-1}+2\right)<0$ (Thỏa).

Trường hợp này có 2022 cặp $(x;y)$ thỏa mãn.

Với $y=2$ và $x \ge 2$ $(y+2)\log_3\left(\frac{y-2}{y+2}+1\right)+(y-2)\frac{x-1}{x+2}\log_2\left(\frac{3}{x-1}+2\right)=0$ (Thỏa).

Trường hợp này có 2022 cặp $(x;y)$ thỏa mãn.

Với $y>2$, $\begin{cases} y+2>0 \\ \dfrac{y-2}{y+2}+1>1 \\ y-2>0 \end{cases}$ nên $(y+2)\log_3\left(\dfrac{y-2}{y+2}+1\right)+(y-2)\dfrac{x-1}{x+2}\log_2\left(\dfrac{3}{x-1}+2\right)>0$ không thỏa mãn bất phương trình.

Vậy có tất cả 4044 cặp $(x;y)$ thỏa mãn.

Câu 56: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-10;60)$ để bất phương trình $\log_3\left(x^2+1\right)+(2m-1)\log_{\left(x^2+1\right)}3+4\geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x\neq 0$.

A. 59. **B.** 57. **C.** 55. **D.** 61.

Lời giải

Chọn A

Ta thấy $x^2+1>1;\ \forall x\neq 0 \Rightarrow \log_3\left(x^2+1\right)>0$.

Đặt $t=\log_3\left(x^2+1\right);\ t>0$, khi đó ta được bất phương trình mới

$t+\dfrac{2m-1}{t}+4\geq 0\Leftrightarrow t^2+2m-1+4t\geq 0\Leftrightarrow 2m\geq -t^2-4t+1$ **(1)**

Đặt $f(t)=-t^2-4t+1;\ t>0$. Ta có $f'(t)=-2t-4;\ f'(t)=0\Leftrightarrow t=-2\notin(0;+\infty)$.

Ta có bảng biến thiên:

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	1 ↘	$-\infty$

Để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x\neq 0\Leftrightarrow(2)$ nghiệm đúng với mọi $t>0$

$\Leftrightarrow 2m\geq 1\Leftrightarrow m\geq\dfrac{1}{2}$.

Vì $m\in\mathbb{Z},\ m\in(-10;60)$ nên $m\in\{1;2;3;....;59\}$. Vậy có 59 số nguyên m thoả mãn.

Câu 57: Cho $x;\ y$ là các số nguyên dương nhỏ hơn 2023. Gọi S là tập hợp các giá trị của y thoả mãn: Với mỗi giá trị của y luôn có ít nhất 100 giá trị không nhỏ hơn 3 của x thoả mãn $\left(2^{x+y^2}-2^{y^2-x}\right)\log_x y>4^{\frac{2y^2-1}{2}}-\dfrac{1}{2}$, đồng thời các tập hợp có y phần tử có tập con lớn hơn 2048. Số phần tử của tập S là

A. 32. **B.** 1921. **C.** 1912. **D.** 33.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases} x,y\in\mathbb{N}^*;\ x,y<2023 \\ x\geq 3 \\ 2^y>2048 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x,y\in\mathbb{N}^* \\ 3\leq x<2023 \\ 11<y<2023 \end{cases}$.

Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow \left(2^x-2^{-x}\right)\log_x y > 2^{y^2-1}-2^{-1-y^2}$

$\Leftrightarrow \left(2^x-2^{-x}\right)\dfrac{\log_2 y}{\log_2 x} > \dfrac{2^{y^2}-2^{-y^2}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{2^x-2^{-x}}{\log_2 x} > \dfrac{2^{y^2}-2^{-y^2}}{\log_2 y^2}$ **(1)**

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{2^t-2^{-t}}{\log_2 t}$, $t\ge 3$, có $f'(t)=\dfrac{\left(2^t.\ln 2+2^{-t}.\ln 2\right)\log_2 t-\dfrac{\left(2^t-2^{-t}\right)t}{\ln 2}}{\log_2^2 t}>0;\ \forall t\ge 3$.

$\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $[3;+\infty)$.

Khi đó bất phương trình $(1)\Leftrightarrow x>y^2$.

Với $y=12$ thì $x>12^2\Leftrightarrow x>144\Rightarrow x\in\{145;146;...;2022\}\Rightarrow$ có 1878 số x.

Với $y=13$ thì $x>13^2\Leftrightarrow x>169\Rightarrow x\in\{170;171;...;2022\}\Rightarrow$ có 1853 số x.

Với $y=43$ thì $x>43^2\Leftrightarrow x>1849\Rightarrow x\in\{1850;1851;...2022\}\Rightarrow$ có 173 số x.

Với $y=44$ thì $x>44^2\Leftrightarrow x>1936\Rightarrow x\in\{1937;1938;...;2022\}\Rightarrow$ có 86 số x **(Loại)**

Vậy $y\in\{12;13;...;43\}\Rightarrow$ Có 32 số nguyên y.

Câu 58: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn

$\log_3\left(x+y^2+3y\right)+\log_2\left(x+y^2\right)\le\log_3 y+\log_2\left(x+y^2+6y\right)$?

A. 69. **B.** 34. **C.** 35. **D.** 70.

Lời giải

Chọn C

Đầu tiên ta có bất phương trình tương đương với:

$\log_3\left(x+y^2+3y\right)+\log_2\left(x+y^2\right)\le\log_3 y+\log_2\left(x+y^2+6y\right)$

$\Leftrightarrow \log_3\left(x+y^2+3y\right)-\log_3(9y)+2\left(\log_2\left(x+y^2+6y\right)-\log_2\left(2x+2y^2\right)\right)\le 0$

$\Leftrightarrow \log_3\left(\dfrac{x+y^2+3y}{y}\right)-2\log_2\left(\dfrac{x+y^2+6y}{x+y^2}\right)\le 0$

$\Leftrightarrow \log_3\left(\dfrac{x+y^2}{y}+3\right)-2\log_2\left(1+6\dfrac{y}{x+y^2}\right)\le 0$ **(*)**

Đặt $t=\dfrac{x+y^2}{y}=\dfrac{x}{y}+y>0$ thì bất phương trình **(*)** trở thành: $\log_3(t+3)-2\log_2\left(1+\dfrac{6}{t}\right)\le 0$.

Xét hàm số $f(t)=\log_3(t+3)-2\log_2\left(1+\dfrac{6}{t}\right)$ có

$f'(t)=\dfrac{1}{(t+3)\ln 3}+\dfrac{12}{t^2\left(1+\dfrac{6}{t}\right)\ln 2}>0,\ \forall t>0$ và $f(6)=0$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ và với $f(t)\le 0$ ta suy ra $t\le 6\Leftrightarrow\dfrac{x+y^2}{y}\le 6$

$\Leftrightarrow -y^2+6y \ge x > 0 \Leftrightarrow 0 < y < 6 \xrightarrow{y\in\mathbb{Z}} y \in \{1;2;3;4;5\}$.

Thế $y=1 \to x \le 5 \to x \in \{1;2;3;4;5\}$ có 5 cặp, $y=2 \to x \le 8 \to x \in \{1;2;..;8\}$ có 8 cặp, $y=3 \to x \le 9 \to x \in \{1;2;...;9\}$ có 9 cặp, $y=4 \to x \le 8 \to x \in \{1;2;..;8\}$ có 8 cặp và cuối cùng thế $y=5 \to x \le 5 \to x \in \{1;2;3;4;5\}$ có 5 cặp.

Tổng cộng có 35 cặp thỏa mãn.

Câu 59: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_2\left(16x^2+25y^2+400\right)+\log_3\left(16x^2+25y^2\right) \le \log_2 400+\log_3\left(16x^2+25y^2+800\right)?$$

A. 54. **B.** 63. **C.** 62. **D.** 44.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x^2+y^2>0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với:

$$\log_2\left(\frac{16x^2+25y^2+400}{400}\right)+\log_3\left(\frac{16x^2+25y^2}{16x^2+25y^2+800}\right) \le 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{16x^2+25y^2}{400}+1\right)+\log_3\left(\frac{1}{1+\dfrac{800}{16x^2+25y^2}}\right) \le 0 \ (1)$$

Đặt $t=\dfrac{16x^2+25y^2}{400}$ khi đó $t>0$ thì $(1) \Leftrightarrow \log_2(t+1)+\log_3\left(\dfrac{t}{t+2}\right) \le 0 \ (2)$

Xét hàm số $f(t)=\log_2(t+1)+\log_3\left(\dfrac{t}{t+2}\right), t>0$

Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{(t+1)\ln 2}+\dfrac{2}{t(t+2)\ln 3}>0$ với mọi $t>0$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Khi đó:

$$\log_2(t+1)+\log_3\left(\frac{t}{t+2}\right) \le 0 \Leftrightarrow f(t) \le f(1) \Leftrightarrow t \le 1 \Rightarrow \frac{16x^2+25y^2}{400} \le 1 \Leftrightarrow 16x^2+25y^2 \le 400.$$

Suy ra $25y^2 \le 400 \Rightarrow -4 \le y \le 4$

Xét $y=0 \Rightarrow 16x^2 \le 400 \Leftrightarrow -5 \le x \le 5$ vì x,y không đồng thời bằng không nên có 10 cặp $(x;y)$ thỏa mãn.

Xét $y=\pm 1 \Rightarrow 16x^2+25 \le 400 \Rightarrow -4,8 \approx -\dfrac{5\sqrt{15}}{4} \le x \le \dfrac{5\sqrt{15}}{4} \approx 4,8$: có 18 cặp $(x;y)$ thỏa mãn.

Xét $y=\pm 2 \Rightarrow 16x^2+25.4 \le 400 \Rightarrow -4,3 \approx -\dfrac{5\sqrt{3}}{2} \le x \le \dfrac{5\sqrt{3}}{2} \approx 4,3$: có 18 cặp $(x;y)$ thỏa mãn.

Xét $y=\pm 3 \Rightarrow 16x^2+25.9 \le 400 \Rightarrow -3,3 \approx -\dfrac{5\sqrt{7}}{4} \le x \le \dfrac{5\sqrt{7}}{4} \approx 3,3$: có 14 cặp $(x;y)$ thỏa mãn.

Xét $y=\pm 4 \Rightarrow 16x^2+25.16 \le 400 \Rightarrow x=0$: có 2 cặp $(x;y)$ thỏa mãn.

Vậy có $10+18+18+14+2=62$ cặp $(x;y)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 60: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $\log_2\frac{1+x^2+y^2}{x-2y}\le 4^{x-2y}-2.2^{x^2+y^2}+1$?

A. 6. **B.** 13. **C.** 21. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Đk: $x-2y>0\,(1)$

$\log_2\frac{1+x^2+y^2}{x-2y}\le 4^{x-2y}-2.2^{x^2+y^2}+1\Leftrightarrow \log_2(1+x^2+y^2)-\log_2(x-2y)\le 2^{2x-4y}-2^{1+x^2+y^2}+1$

$\Leftrightarrow \log_2\left(1+x^2+y^2\right)+2^{1+x^2+y^2}\le \log_2\left(2x-4y\right)+2^{2x-4y}$ (*)

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+2^t, t>0;\ f'(t)=\frac{1}{t\ln 2}+2^t\ln 2>0,\forall t>0$

Nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

$(*)\Leftrightarrow 1+x^2+y^2\le 2x-4y\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2\le 4$ (**).

Có $(x-1)^2\le 4\Leftrightarrow -2\le x-1\le 2\Leftrightarrow -1\le x\le 3$. Mà $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{-1;0;1;2;3\}$

Với $x=-1\Rightarrow (**)\Leftrightarrow (y+2)^2\le 0\Leftrightarrow y=-2(T/m(1))$

Với $x=0\Rightarrow (**)\Leftrightarrow (y+2)^2\le 3, y\in\mathbb{Z}\Rightarrow y\in\{-3;-2;-1\}(T/m(1))$

Với $x=1\Rightarrow (**)\Leftrightarrow (y+2)^2\le 4, y\in\mathbb{Z}\Rightarrow y\in\{-4;-3;-2;-1;0\}(T/m(1))$

Với $x=2\Rightarrow (**)\Leftrightarrow (y+2)^2\le 3, y\in\mathbb{Z}\Rightarrow y\in\{-3;-2;-1\}(T/m(1))$

Với $x=3\Rightarrow (**)\Leftrightarrow (y+2)^2\le 0\Leftrightarrow y=-2(T/m(1))$

Vậy có tất cả 13 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa đề bài.

Câu 61: Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để có duy nhất cặp $(x;y)$ thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases}2^{x^2+y^2+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x\\ \log_{x^2+y^2+1}(2x+4y+m)=1\end{cases}.$$

Tổng các phần tử của S bằng

A. -3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2^{x^2+y^2+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x\Leftrightarrow 2^{x^2+y^2-2x+1}-\left(x^2+y^2-2x+2\right)\le 0(1)$

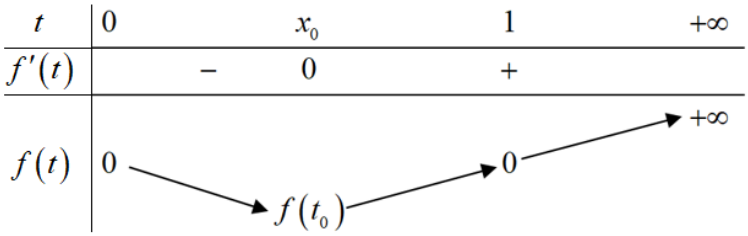
Đặt $t=x^2+y^2-2x+1=(x-1)^2+y^2\ge 0$

Khi đó $(1)\Leftrightarrow 2^t-t-1\le 0,\ t\ge 0$.

Xét hàm số $f(t)=2^t-t-1$ với $t\ge 0$.

ta có $f'(t)=2^t\ln 2-1=0\Leftrightarrow t=\log_2\left(\frac{1}{\ln 2}\right)=x_0\Rightarrow f(t_0)<0$.

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta thấy được $f(t)=2^t-t-1\le 0\Leftrightarrow 0\le t\le 1\Rightarrow (x-1)^2+y^2\le 1$.

Khi đó tập hợp các điểm biểu diễn $(x;y)$ thỏa mãn là hình tròn (C_1) có tâm $I_1(1;0)$ và bán kính $R_1=1$.

Ta có $\log_{x^2+y^2+1}(2x+4y+m)=1\Leftrightarrow x^2+y^2+1=2x+4y+m\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=m+4$.

Khi đó tập hợp các điểm biểu diễn $(x;y)$ thỏa mãn là đường tròn (C_2) có tâm $I_2(1;2)$ và bán kính $R_2=\sqrt{m+4}(m>-4)$.

Để đường tồn tại một cặp $(x;y)$ thỏa mãn thì hai đường tròn (C_1) tiếp xúc (C_2)

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}R_1+R_2=I_1I_2\\|R_1-R_2|=I_1I_2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1+\sqrt{m+4}=2\\|1-\sqrt{m+4}|=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1+\sqrt{m+4}=2\\1-\sqrt{m+4}=2\\1-\sqrt{m+4}=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-3\\m=5\end{array}\right.$$

Câu 62: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_3\left(x^2+y^2+x\right)+\log_2\left(x^2+y^2\right)\le\log_3 x+\log_2\left(x^2+y^2+24x\right)?$$

A. 89. **B.** 48. **C.** 90. **D.** 49.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x>0$.

Ta có: $\log_3\left(x^2+y^2+x\right)+\log_2\left(x^2+y^2\right)\le\log_3 x+\log_2\left(x^2+y^2+24x\right)$

$$\Leftrightarrow\log_3\left(x^2+y^2+x\right)-\log_3 x\le\log_2\left(x^2+y^2+24x\right)-\log_2\left(x^2+y^2\right)$$

$$\Leftrightarrow\log_3\left(\frac{x^2+y^2+x}{x}\right)\le\log_2\left(\frac{x^2+y^2+24x}{x^2+y^2}\right)\Leftrightarrow\log_3\left(1+\frac{x^2+y^2}{x}\right)\le\log_2\left(1+\frac{24x}{x^2+y^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\log_3\left(\frac{x^2+y^2}{x}+1\right)-\log_2\left(1+\frac{24x}{x^2+y^2}\right)\le 0.$$

Đặt: $t=\dfrac{x^2+y^2}{x}(t>0)$, bất phương trình trở thành: $\log_3(1+t)-\log_2\left(1+\dfrac{24}{t}\right)\le 0$ (1).

Xét hàm số $f(t)=\log_3(1+t)-\log_2\left(1+\dfrac{24}{t}\right)$ có $f'(t)=\dfrac{1}{(1+t)\ln 3}+\dfrac{24}{\left(t^2+24t\right)\ln 2}>0,\forall t>0$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có $f(8)=\log_3(1+8)-\log_2\left(1+\dfrac{24}{8}\right)=0$

Từ đó suy ra: (1) $\Leftrightarrow f(t)\le f(8)\Leftrightarrow t\le 8\Leftrightarrow\dfrac{x^2+y^2}{x}\le 8\Leftrightarrow(x-4)^2+y^2\le 16$.

Đếm các cặp giá trị nguyên của $(x;y)$

Ta có: $(x-4)^2 \le 16 \Leftrightarrow 0 \le x \le 8$, mà $x > 0$ nên $0 < x \le 8$.

Với $x = 1, x = 7 \Rightarrow y = \{\pm 2; \pm 1; 0\}$ nên có 10 cặp.

Với $x = 2, x = 6 \Rightarrow y = \{\pm 3; \pm 2; \pm 1; 0\}$ nên có 14 cặp.

Với $x = 3, x = 5 \Rightarrow y = \{\pm 3; \pm 2; \pm 1; 0\}$ nên có 14 cặp.

Với $x = 4 \Rightarrow y = \{\pm 4; \pm 3; \pm 2; \pm 1; 0\}$ nên có 9 cặp.

Với $x = 8 \Rightarrow y = 0$ có 1 cặp.

Vậy có 48 cặp giá trị nguyên $(x;y)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 63: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn:

$$\frac{x^2+y^2+7x}{x} > \log_2 \frac{x^2+y^2}{x} + \left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)^{\log_2 3}$$

A. 4 **B.** 5 **C.** 9 **D.** 6

Lời giải

Chọn C

$$\frac{x^2+y^2+7x}{x} > \log_2 \frac{x^2+y^2}{x} + \left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)^{\log_2 3} (1).$$

Điều kiện $\frac{x^2+y^2}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$, mà $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \ge 1$. Đặt $t = \frac{x^2+y^2}{x} \Rightarrow t \ge 1$.

Khi đó, $(1) \Leftrightarrow t + 7 > \log_2 t + t^{\log_2 3} \Leftrightarrow t + 7 - \log_2 t - t^{\log_2 3} > 0$.

Xét hàm số $f(t) = t + 7 - \log_2 t - t^{\log_2 3}$ với $t \ge 1$.

$$\Rightarrow f'(t) = 1 - \frac{1}{t \ln 2} - \log_2 3 . t^{\log_2 \frac{3}{2}} < 0, \forall t \ge 1$$

Nên $f(t)$ nghịch biến trên $[1;+\infty)$.

Mặt khác $f(4) = 0$ nên $t = 4$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(t) = 0$.

Khi đó $f(t) > 0 \Leftrightarrow 0 < t < 4 \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{x} < 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 < 4x \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 < 4$

Để tồn tại số thực y thì $x \in \{1;2;3\}$ nên ta có tất cả 9 cặp số nguyên $(x;y)$.

Câu 64: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_2 \frac{x+y}{x^2+y^2+2} \ge x(x-4) + y(y-4)?$$

A. 13. **B.** 18. **C.** 15. **D.** 21.

Lời giải

Chọn C

$$\log_2 \frac{x+y}{x^2+y^2+2} \ge x(x-4) + y(y-4) \Leftrightarrow \log_2 (x+y) - \log_2 \left(x^2+y^2+2\right) \ge x^2 + y^2 - 4(x+y)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 4(x+y) + 4(x+y) \ge \log_2 \left(x^2+y^2+2\right) + x^2 + y^2 + 2.$$

Đặt $f(t) = \log_2 t + t, (t > 0) \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0.$

Ta có $\begin{cases} f'(t) > 0 \\ f\left(4(x+y)\right) \ge f\left(x^2+y^2+2\right) \end{cases} \Rightarrow 4x+4y \ge x^2+y^2+2 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2 \le 6.$

$\Rightarrow \begin{cases} (x-2)^2 \le 6 \\ (y-2)^2 \le 6 \\ x, y \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{6}+2 \le x \le 2+\sqrt{6} \\ -\sqrt{6}+2 \le y \le 2+\sqrt{6} \\ x, y \in \mathbb{Z}, x>0, y>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1,2,3,4 \\ y = 1,2,3,4 \end{cases}.$

Thay $(x;y)$ thảo điều kiện $\begin{cases} x = 1,2,3,4 \\ y = 1,2,3,4 \end{cases}$ và $(x-2)^2+(y-2)^2 \le 6$ thì có 15 cặp $(x;y)$ là

$(x;y) \in \{(1;1),(1;2),(1;3),(1;4),(2;1),(2;2),(2;3),(2;4),(3;1),(3;2),(3;3),(3;4),(4;1),(4;2),(4;3)\}.$

Câu 65: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn:

$\log_2\left(x^2+y^2-3x\right)+\log_5 x \le \log_2 x+\log_5\left(5x-x^2-y^2\right)$

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases} x, y \in \mathbb{Z} \\ x > 0 \\ 3x < x^2+y^2 < 5x \end{cases}$

Ta có:

$\log_2\left(x^2+y^2-3x\right)+\log_5 x \le \log_2 x+\log_5\left(5x-x^2-y^2\right)$

$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{x^2+y^2-3x}{x}\right)+\log_5\frac{x}{5x-x^2-y^2} \le 0$

$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{x^2+y^2}{x}-3\right)+\log_5\frac{1}{5-\frac{x^2+y^2}{x}} \le 0 \ (1)$

Đặt $t=\frac{x^2+y^2}{x}$, $3<t<5$, khi đó $(1) \Leftrightarrow \log_2(t-3)+\log_5\left(\frac{1}{5-t}\right) \le 0$.

Xét $f(t)=\log_2(t-3)+\log_5\left(\frac{1}{5-t}\right)$ với $3<t<5$

Ta có: $f'(t)=\frac{1}{(t-3)\ln 2}+\frac{1}{(5-t)\ln 5}>0 \ \forall t \in (3;5)$ suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(3;5)$.

Khi đó: $\log_2(t-3)+\log_5\left(\frac{1}{5-t}\right) \le 0 \Leftrightarrow f(t) \le f(4) \Leftrightarrow t \le 4$

Kết hợp với điều kiện $3<t \le 4 \Leftrightarrow 3x < x^2+y^2 \le 4x$

Xét $x^2+y^2 \le 4x \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2 \le 4 \Rightarrow y^2 \le 4 \Leftrightarrow -2 \le y \le 2$

Với $y=\pm 2$, suy ra $3x<x^2+4\le 4x\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-3x+4>0\\ x^2-4x+4\le 0\end{cases}\Leftrightarrow x=2$: có 2 cặp $(x;y)$ thỏa mãn.

Với $y=\pm 1$, suy ra $3x<x^2+1\le 4x\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-3x+1>0\\ x^2-4x+1\le 0\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0,3\approx 2-\sqrt{3}\le x<\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\approx 0,4\\ 2,6\approx \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}<x\le 2+\sqrt{3}\approx 3,7\end{array}\right.$

vì $x\in\mathbb{Z}$ nên $x=3$: có 2 cặp $(x;y)$ thỏa mãn.

Với $y=0$, suy ra $3x<x^2\le 4x\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-3x>0\\ x^2-4x\le 0\end{cases}\Leftrightarrow 3<x\le 4$ vì $x\in\mathbb{Z}$ nên $x=4$: có 1 cặp $(x;y)$ thỏa mãn.

Vậy có 5 cặp $(x;y)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 66: Có tất cả bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn bất phương trình $(x+2y).\left[\log_2\left(x^2+y^2\right)-\log_2(x+2y)-2y+x\right]<6x+y(12-5y)$?

A. 61. **B.** 62. **C.** 64. **D.** 65.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định: $\begin{cases}x^2+y^2>0\\ x+2y>0\end{cases}$.

Ta có:

$$(x+2y).\left[\log_2\left(x^2+y^2\right)-\log_2(x+2y)-2y+x\right]<6x+y(12-5y)$$

$$\Leftrightarrow (x+2y).\log_2\left(\frac{x^2+y^2}{x+2y}\right)+(x+2y).(x-2y)<6x+y(12-5y)$$

$$\Leftrightarrow (x+2y).\log_2\left(\frac{x^2+y^2}{x+2y}\right)+\left(x^2-4y^2\right)-6x-12y+5y^2<0$$

$$\Leftrightarrow (x+2y).\log_2\left(\frac{x^2+y^2}{x+2y}\right)+\left(x^2+y^2\right)-6(x+2y)<0\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{x^2+y^2}{x+2y}\right)+\left(\frac{x^2+y^2}{x+2y}\right)-6<0$$

Đặt $t=\dfrac{x^2+y^2}{x+2y}>0$. Khi đó bất phương trình trở thành: $\log_2 t+t-6<0$ với mọi $t>0$.

Xét hàm $f(t)=\log_2 t+t-6,$ với $t>0$. Ta có: $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0,\forall t>0$ nên hàm $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Mặt khác ta có: $f(4)=\log_2 4+4-6=0$ nên bất phương trình tương đương:

$$f(t)<f(4)\Leftrightarrow t<4\Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{x+2y}<4\Leftrightarrow x^2+y^2-4x-8y<0\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-4)^2<20$$

Suy ra: $(x-2)^2<20\Leftrightarrow 2-\sqrt{2}<x<2+\sqrt{2}$. Mà x nguyên nên $x\in\{-2;-1;0;1;2;3;4;5;6\}$.

Lần lượt thay x vào hệ điều kiện $\begin{cases} x^2+y^2>0 \\ x+2y>0 \\ (x-2)^2+(y-4)^2<20 \end{cases}$ để tìm y và kết hợp lại ta thu được 61 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng 14: Bài toán lãi suất

1. Bài toán theo hình thức lãi kép, gửi a đồng, lãi suất r một kì theo hình thức lãi kép. Tính số tiền thu về sau n kì

- Công thức tính nhanh: $A_n = a(1+r)^n$

2. Bài toán theo hình thức lãi kép, đầu mỗi kì gửi a đồng, lãi suất r một kì. Tính số tiền thu được sau n kì (gồm cả gốc và lãi)

- Công thức tính nhanh $A_n = a(1+r)\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}$

3. Bài toán theo hình thức lãi kép, vay A đồng, lãi suất r, trả nợ đều đặn mỗi kì số tiền m đồng. Hỏi sau bao nhiêu kì thì trả hết số nợ gồm cả gốc và lãi

- Công thức tính nhanh $m = \dfrac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$

4. Bài toán theo hình thức lãi kép, gửi a đồng vào tài khoản tiết kiệm, lãi suất r/kì. Sau đúng một kì rút ra m đồng và các kì sau cũng vậy. Hỏi số tiền còn lại trong tài khoản sau n?

- Công thức tính nhanh $A_n = a(1+r)^n - m\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}$

❖ **Lưu ý:** Trên đây là một số công thức tổng quát. Trong quá trình giải toán, các em cần biến đổi linh hoạt các đại lượng mà bài toán yêu cầu dựa trên công thức giải nhanh. Đồng thời kết hợp nhuần nhuyễn các bài toán trong trường hợp đề bài phức tạp.

❖ Việc chứng minh các công thức trên được tác giả trình bày thông qua bài tập rèn luyện. Ở mỗi bài giải chi tiết, tác giả sẽ làm theo cách tự luận để suy ra vấn đề, việc đưa ra công thức giải nhanh chỉ nhằm mục đích cho người đọc tham khảo, người đọc nên làm và hiểu theo cách tự luận sẽ thấy được cái hay của bài toán về lãi kép.

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Ông A gửi vào ngân hàng số tiền 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép với lãi suất 6% /năm. Hỏi sau 5 năm tổng tất cả số tiền ông A thu về là bao nhiêu? Giả sử lãi suất không thay đổi và kết quả làm tròn đến 2 chữ số thập phân.

A. 148,58 (triệu đồng). **B.** 133,82 (triệu đồng).

C. 126,25 (triệu đồng). **D.** 141,85 (triệu đồng).

Lời giải:

Chọn B

Số tiền thu được sau 5 năm là $T_n = 100.(1+0,06)^5 \approx 133,82$ triệu đồng.

Công thức tính: Khách hàng gửi vào ngân hàng A đồng với lãi kép $r(\%)$/ kì hạn thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n kì hạn $(n \in \mathbb{N}^*)$ là $T_n = A.(1+r)^n$.

Câu 2: Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6% /năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm

tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền lớn hơn 100 triệu đồng bao gồm gốc và lãi? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.

A. 14 năm. **B.** 12 năm. **C.** 11 năm. **D.** 13 năm.

Lời giải:

Chọn B

Số tiền thu được sau n năm là $T_n = 50.(1+0,06)^n$ triệu đồng.

Để $T_n \geq 100$ thì $50.(1+0,06)^n \geq 100 \Leftrightarrow 1,06^n \geq 2 \Leftrightarrow n \geq \log_{1,06} 2 \Leftrightarrow n \geq 11,89...$

Vậy sau ít nhất 12 năm thì người đó nhận được số tiền lớn hơn 100 triệu đồng.

Câu 3: Đầu năm 2016 ông A thành lập một công ty. Tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong năm 2016 là 1 tỷ đồng. Biết rằng sau mỗi năm thì tổng số tiền dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm đó tăng thêm 15% so với năm trước đó. Hỏi năm nào dưới đây là năm đầu tiên mà tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm lớn hơn 2 tỷ đồng?

A. Năm 2023. **B.** Năm 2020. **C.** Năm 2021. **D.** Năm 2022.

Lời giải:

Chọn C

Tổng số tiền trả lương cho nhân viên trong năm n $(n \geq 2017)$ là $T_n = 1.(1+15\%)^{n-2016}$ tỷ đồng.

Để $T_n \geq 2$ thì $1.(1+15\%)^{n-2016} > 2 \Leftrightarrow n-2016 > \log_{1+15\%} 2 \Leftrightarrow n > 2020,959...$

Vậy năm đầu tiên mà tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm lớn hơn 2 tỷ đồng là năm 2021.

Câu 4: Một người gửi vào ngân hàng 50 triệu đồng với lãi suất 4% /tháng, sau mỗi tháng tiền lãi được nhập vào vốn. Hỏi sau một năm người đó rút tiền thì tổng số tiền người đó nhận được là bao nhiêu?

A. $50.(1,004)^{12}$ (triệu đồng). **B.** $50.\ 1+12\times 0,04\ ^{12}$ (triệu đồng).

C. $50.\ 1+0,04\ ^{12}$ (triệu đồng). **D.** $50\times 1,004$ (triệu đồng).

Lời giải:

Chọn C

Áp dụng công thức lãi kép số tiền người đó nhận được sau n tháng là: $A\times(1+r)^n$.

Vậy sau một năm (tức là sau 12 tháng) gửi tiền vào ngân hàng, người đó nhận được số tiền là**:** $50\times(1+0,04)^{12}$ (triệu đồng).

Câu 5: Một người gửi số tiền m triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6%/ năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng, thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Sau 5 năm số tiền người này nhận được là 500 triệu đồng. Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra. Tính số tiền m.

.

A. $m = \dfrac{500}{1,06^{\ 5}}$ (triệu đồng). **B.** $m = \dfrac{500}{1,06}$ (triệu đồng).

C. $m = \dfrac{500}{1,006^{\ 5}}$ (triệu đồng). **D.** $m = \dfrac{500}{1+5\times 0,06}$ (triệu đồng).

Lời giải:

Chọn A

Áp dụng công thức lãi kép số tiền người đó nhận được sau n năm là: $A_n = A\times(1+r)^n$ .Vậy sau 5 năm gửi tiền vào ngân hàng, người đó nhận được số tiền là 500 triệu, nên ta có: $500 = m\times(1+0,06)^5 \Leftrightarrow m = \dfrac{500}{(1+0,06)^5} = \dfrac{500}{(1,06)^5}$.

Câu 6: Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7% / năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng, thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau 5 năm người đó mới rút lãi thì số tiền lãi người đó nhận được là? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.

A. 20,128 triệu đồng. **B.** 70,128 triệu đồng.

C. 17,5 triệu đồng. **D.** 67,5 triệu đồng.

Lời giải:

Chọn A

Áp dụng công thức lãi kép số tiền người đó nhận được sau n năm là: $A_n = A\times(1+r)^n$.

Sau 5 năm gửi tiền vào ngân hàng, người đó nhận được số tiền là:

$A_n = 50\times(1+0,07)^5 \approx 70,128$ (triệu đồng).

Vậy sau 5 năm gửi tiền vào ngân hàng, người đó nhận được số tiền lãi là:

$70,128-50 = 20,128$ (triệu đồng).

Câu 7: Đầu năm 2016, ông A thành lập một công ty. Tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong năm 2016 là 1 tỷ đồng. Biết rằng cứ sau mỗi năm thì tổng số tiền dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm đó tăng thêm 15% so với năm trước. Hỏi tổng số tiền ông A trả lương cho nhân viên trong cả năm 2020 là bao nhiêu? Kết quả làm tròn 2 chữ số thập phân.

A. 2,01 tỷ đồng. **B.** 1,52 tỷ đồng. **C.** 2,31 tỷ đồng. **D.** 1,75 tỷ đồng.

Lời giải:

Chọn D

Tổng số tiền ông A trả lương cho nhân viên trong cả năm 2020 là $A.(1+r)^n = 1.1,15^{2020-2016} \approx 1,75$ tỷ đồng.

Câu 8: Đầu năm 2017, ông A thành lập một công ty. Tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong năm 2017 là 1 tỷ đồng. Biết rằng cứ sau mỗi năm thì tổng số tiền dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm đó tăng thêm 20% so với năm trước. Hỏi năm nào dưới đây là năm đầu tiên tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm lớn hơn 5 tỷ đồng?

A. Năm 2025. **B.** Năm 2026. **C.** Năm 2027. **D.** Năm 2024.

Lời giải:

Chọn B

Tổng số tiền ông A trả lương cho nhân viên trong cả năm thứ *x* là

$A.(1+r)^x = 1.1,2^x > 5 \Leftrightarrow x > \log_{1,2} 5 \approx 8,8$. Vậy $x = 9$ năm cần tìm là 2026.

Câu 9: Một người đi làm với mức lương khởi điểm 7 triệu đồng một tháng. Cứ sau 3 năm mức lương tăng thêm 7% so với năm trước. Hỏi sau đúng 36 năm, mức lương một tháng của người này là bao nhiêu? Kết quả làm tròn 2 chữ số thập phân.

A. 15,77 triệu đồng. **B.** 14,73 triệu đồng. **C.** 21,97 triệu đồng. **D.** 16,87 triệu đồng.

Lời giải:

Chọn A

Mức lương một tháng của người này sau *n* năm là: $A.(1+r)^{\frac{n}{3}} = 7.1,07^{\frac{36}{3}} \approx 15,77$

Câu 10: Một người đi làm với mức lương khởi điểm là 7 triệu đồng một tháng. Cứ sau 3 năm mức lương được tăng thêm 7% so với năm trước. Hỏi sau đúng 36 năm, tổng số tiền lương người này nhận được là bao nhiêu? Làm tròn đến hai chữ số thập phân.

A. 3024 triệu đồng. **B.** 3235,68 triệu đồng.

C. 4507,89 triệu đồng. **D.** 3977,47 triệu đồng.

Lời giải:

Chọn C

Tổng số tiền lương người này nhận trong 3 năm đầu là: $7.3.12 = 252$ triệu đồng.

Vậy sau đúng 36 năm, tổng số lương người này nhận được là:

$$S = 252 + 252(1+0,07)^1 + 252(1+0,07)^2 + ... + 252(1+0,07)^{11} = 252.\frac{(1+0,07)^{12}-1}{0,07} \approx 4507,89.$$

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất $6,1\%$ / năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

A. 11 năm. **B.** 12 năm. **C.** 13 năm. **D.** 10 năm.

Lời giải

Chọn B

Gọi số tiền ban đầu người đó gửi là A (đông), $A>0$.

Số tiền lãi và gốc sau n năm là $T=a\left(1+6,1\%\right)^n$.

Ta có $a\left(1+6,1\%\right)^n=2a\Leftrightarrow\left(1+6,1\%\right)^n=2\Leftrightarrow n=\log_{1+6,1\%}2\approx11,7$.

Vậy sau ít nhất 12 năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền gửi ban đầu

Câu 2: Một người gửi ngân hàng 18 triệu đồng theo hình thức lãi kép kì hạn 1 năm với lãi suất 8% / năm. Hỏi sau 7 năm người đó có bao nhiêu tiền? (đơn vị: triệu đồng, kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

A. 31,17. **B.** 30,85. **C.** 31,45. **D.** 31,34.

Lời giải

Chọn B

Theo công thức lãi kép, ta có: $A=A_0\left(1+r\%\right)^n$

Trong đó A_0 là số tiền ban đầu gửi vào; $r\%$ là lãi suất của một kì hạn; n là số kì hạn.

Sau 7 năm người đó có số tiền là $A=18.\left(1+8\%\right)^7\approx30,85$.

Câu 3: Một người gửi tiền vào ngân hàng với lãi suất không thay đổi là 6% trên năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi đó là lãi kép). Người đó định gửi tiền trong vòng 3 năm, sau đó rút 500 triệu đồng. Hỏi số tiền ít nhất người đó phải gửi vào ngân hàng (kết quả làm tròn đến hàng triệu) là bao nhiêu triệu đồng?

A. 420. **B.** 400. **C.** 410. **D.** 390.

Lời giải

Chọn A

Số tiền thu được sau năm thứ n là: $T_n=T_0\left(1+r\right)^n\Rightarrow500=T_0\left(1+6\%\right)^3\Leftrightarrow T_0\approx420$

Câu 4: Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6% /năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền hơn 100 triệu đồng bao gồm cả gốc và lãi? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.

A. 13 năm. **B.** 12 năm. **C.** 14 năm. **D.** 11 năm.

Lời giải

Chọn B

Ta có số tiền cả gốc và lãi người đó nhận được sau n năm là: $S_n=50.\left(1+6\%\right)^n=50.1,06^n$

$S_n>100\Leftrightarrow50.1,06^n>100\Leftrightarrow n>11,9$.

Vậy sau ít nhất 12 năm người đó sẽ nhận được số tiền cả gốc lẫn lãi là hơn 100 triệu đồng.

Câu 5: Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất $0,4\%/$ tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ta khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được lập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi xuất không thay đổi?

A. 102423000 (đồng). **B.** 102160000 (đồng).

C. 102017000 (đồng). **D.** 102424000 (đồng).

Lời giải

Chọn D

Sau 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền là $100000000.\left(1+0,4\%\right)^6 \approx 102424000$ (đồng).

Câu 6: Một người gửi số tiền 500 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất $6,5\%$ một năm theo hình thức lãi kép. Đến hết năm thứ 3, vì cần tiền nên người đó đến rút ra 100 triệu đồng, phần còn lại vẫn tiếp tục gửi. Hỏi sau 5 năm kể từ lúc bắt đầu gửi, người đó có được số tiền gần với số nào nhất dưới đây?

A. $572,150$ (triệu đồng). **B.** $571,990$ (triệu đồng).

C. $580,135$ (triệu đồng). **D.** $571,620$ (triệu đồng).

Lời giải

Chọn D

Sau 3 năm kể từ lúc bắt đầu gửi, người đó nhận được số tiền là

$T = 500\left(1+6.5\%\right)^3 \approx 603,975$ triệu đồng.

Sau 5 năm kể từ lúc bắt đầu gửi, người đó nhận được số tiền là

$T = 503,975\left(1+6.5\%\right)^2 \approx 571,620$ triệu đồng.

Câu 7: Một người gửi ngân hàng 18 triệu đồng theo hình thức lãi kép kì hạn 1 năm với lãi suất $8\%/$ năm. Hỏi sau 7 năm người đó có bao nhiêu tiền? (đơn vị: triệu đồng, kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

A. 31,17. **B.** 30,85. **C.** 31,45. **D.** 31,34.

Lời giải

Chọn B

Theo công thức lãi kép, ta có: $A = A_0\left(1+r\%\right)^n$

Trong đó A_0 là số tiền ban đầu gửi vào; $r\%$ là lãi suất của một kì hạn; n là số kì hạn.

Sau 7 năm người đó có số tiền là $A = 18.\left(1+8\%\right)^7 \approx 30,85$.

Câu 8: Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 0,4% / tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ta khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được lập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi xuất không thay đổi?

A. 102.423.000 đồng. **B.** 102.016.000đồng. **C.** 102.017.000đồng. **D.** 102.424.000 đồng.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng công thức lãi kép ta có sau đúng 6 tháng, người đó lĩnh được số tiền:

Ta có: $A_n = A_0(1+r)^n = 100.000.000\left(1+\dfrac{0,4}{100}\right)^6 = 102.424.128$

Câu 9: Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6% / năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 300 triệu bao gồm cả gốc lẫn lãi?

(Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra).

A. 20 năm. **B.** 18 năm. **C.** 21 năm. **D.** 19 năm.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng công thức lãi kép thì sau n năm, số tiền người gửi nhận được là $A=10^8.1,06^n$.

Để nhận được số tiền hơn 300 triệu thì

$A>3.10^8 \Leftrightarrow 10^8.1,06^n>3.10^8 \Leftrightarrow 1,06^n>3 \Leftrightarrow n>\log_{1,06}3\approx 18,85$ (năm).

Vậy ít nhất sau 18 năm thì người đó nhận được số tiền nhiều hơn 300 triệu.

Câu 10: Ông Nguyễn Văn B là thương binh hạng $4/4$, được hưởng trợ cấp hàng tháng là 2082000 đồng. Do tình hình dịch bệnh Covid-19 diễn biến phức tạp nên từ tháng 4 năm 2021 ông không đi lĩnh tiền mà nhờ thủ quỹ lập một sổ tiết kiệm ở ngân hàng để gởi số tiền hàng tháng vào đó với lãi suất $0,5\%/$ tháng (theo hình thức lãi kép). Hỏi đến đầu tháng 4 năm 2022 ông đến ngân hàng nhận được số tiền (bao gồm cả gốc và lãi) là bao nhiêu (làm tròn đến đơn vị đồng)?

A. 25 811 054 đồng. **B.** 2 210 413 đồng. **C.** 25 682 641 đồng. **D.** 27 893 054 đồng.

Lời giải

Chọn A

Ta có $T=A(1+r).\dfrac{(1+r)^n-1}{r}$ $-=2\,082\,000(1+0,5\%).\dfrac{(1+0,5\%)^{12}-1}{0,5\%}=25811054,06$ là số tiền ông B sẽ nhận được.

Câu 11: Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất $6\%/$ năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 300 triệu đồng bao gồm cả gốc lẫn lãi? (Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra).

A. 20 năm. **B.** 18 năm. **C.** 21 năm. **D.** 19 năm.

Lời giải

Chọn D

Theo công thức tính lãi suất kép, ta có vốn tích luỹ sau n năm là $P_n=P(1+r)^n$ với P là vốn ban đầu (đvt: triệu đồng), r là lãi suất (tính theo năm).

$\Rightarrow 300=100\left(1+\dfrac{6}{100}\right)^n \Leftrightarrow n=\log_{1,06}3\approx 19$.

Câu 12: Đầu mỗi tháng, anh Hiếu gửi tiết kiệm ngân hàng số tiền 10 triệu đồng với hình thức lãi kép, lãi suất là 0,5%/ tháng. Hỏi sau đúng 5 năm thì anh Hiếu nhận được số tiền cả gốc và lãi gần nhất với số tiền nào dưới đây, giả sử rằng trong suốt quá trình gửi, anh Hiếu không rút tiền ra và lãi suất của ngân hàng không thay đổi.

A. $600+10.1,005^{60}$ (triệu đồng). **B.** $10.1,005.\dfrac{1,005^{60}-1}{0,005}$ (triệu đồng).

C. $10.1,005^{60}$ (triệu đồng). **D.** $10.\dfrac{1,005^{60}-1}{0,005}$ (triệu đồng).

Lời giải

Chọn B

Sau đúng 5 năm thì anh Hiếu nhận được số tiền cả gốc và lãi là

$$T_{60}=10^7.(1+0,5\%)\left(\frac{(1+0,5\%)^{60}-1}{0,5\%}\right)=10.1,005.\frac{1,005^{60}-1}{0,005}.10^6$$

$$=10.1,005.\frac{1,005^{60}-1}{0,005}\text{(triệu đồng).}$$

Câu 13: Một người gửi số tiền 300 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất kép 6% một năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi suất sẽ được nhập vào vốn ban đầu (lãi kép). Hỏi sau 3 năm không rút tiền gốc và lãi, số tiền trong ngân hàng của người đó gần nhất với số nào sau đây? (Giả sử lãi suất ngân hàng không thay đổi, kết quả làm tròn đến hàng nghìn)

A. 357000000 đồng. **B.** 357300000 đồng. **C.** 357350000 đồng. **D.** 357305000 đồng.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng công thức tính lãi suất theo hình thức lãi kép: $P=A(1+r)^n$.

Trong đó: P là số tiền (triệu đồng) gồm vốn lẫn lãi tại thời điểm n (năm) tính từ thời điểm gửi; A (triệu đồng) là số tiền gửi vào ban đầu và $r(\%)$ là lãi suất.

Với $\begin{cases}A=300.000.000\\n=3\\r=6\%\end{cases}$, suy ra $P=300.000.000(1+6\%)^3=357.304.800\approx 357.305.000$ (đồng).

Câu 14: Gia đình nhà bác Long Thắm gửi số tiền 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 7% /năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Sau 10 năm, nếu không rút lãi lần nào thì số tiền mà nhà bác Long Thắm nhận được gồm cả gốc lẫn lãi tính theo công thức nào dưới đây?

A. $10^8.(1+0,07)^9$ (đồng). **B.** $10^8(1+0,7)^{10}$ (đồng).

C. $10^8.(1+0,07)^{10}$ (đồng). **D.** $10^8.0,07^{10}$ (đồng).

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức lãi kép thì số tiền mà nhà bác Long Thắm nhận được gồm cả gốc lẫn lãi là $10^8.(1+7\%)^{10}=10^8.(1+0,07)^{10}$.

Câu 15: Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất $0,7\%/\text{tháng}$. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau đúng 5 tháng, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

A. 103.473.000 đồng. **B.** 103.548.000 đồng.

C. 103.549.000 đồng . **D.** 103.474.000 đồng.

Lời giải

Chọn C

Sau 5 tháng, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi) là

$S=100.10^6.(1+0,7\%)^5=103.549.000$ đồng.

Câu 16: Tại thời điểm ban đầu nếu đầu tư P đô la với tỷ lệ lãi suất được tính gộp liên tục hàng năm không đổi là r thì giá trị tương lai của khoản đầu tư này sau t năm là $B(t)=P.e^{rt}$ đô la. Giả sử tỷ lệ lãi suất tính gộp hàng năm là 8%. Hỏi sau bao nhiêu năm thì số tiền đầu tư ban đầu tăng thêm ít nhất 50%.

A. 5. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Theo đề ra ta có:

$P.e^{0,08.t} > 1,5P \Leftrightarrow e^{0,08t} > 1,5 \Rightarrow 0,08t > \ln 1,5 \Rightarrow t > \dfrac{\ln 1,5}{0,08} \simeq 5,06$.

Câu 17: Bác Minh gửi 60 triệu vào ngân hàng kì hạn 1 năm với lãi suất $5,6\%$/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm bác Minh nhận được số tiền nhiều hơn 120 triệu đồng bao gồm cả gốc và lãi?

A. 11 năm. **B.** 12 năm. **C.** 13 năm. **D.** 14 năm.

Lời giải

Chọn C

Sau n năm số tiền bác Minh nhận được cả gốc và lãi là: $60(1+5,6\%)^n$ (triệu).

Vậy bác Minh nhận được số tiền nhiều hơn 120 triệu đồng bao gồm cả gốc và lãi khi:

$60(1+5,6\%)^n > 120 \Leftrightarrow n > \log_{1,056} 2 \approx 12,7$.

Vậy bác Minh cần gửi ít nhất 13 năm.

Câu 18: Một người gởi 60 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 6% một năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 100 triệu đồng gồm cả gốc lẫn lãi?

A. 10 năm. **B.** 7 năm. **C.** 8 năm. **D.** 9 năm.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $S = A.(1+r)^n$. Để số tiền cả gốc lẫn lãi lớn hơn 100 triệu

$\Rightarrow n > \log_{1+r}\left(\dfrac{S}{A}\right) = \log_{1+6\%}\left(\dfrac{100}{60}\right) \approx 8,766$.

Câu 19: Một học sinh A khi đủ 18 tuổi được cha mẹ cho 200 000 000 VNĐ. Số tiền này được bảo quản trong ngân hàng MSB với kì hạn thanh toán 1 năm và học sinh A chỉ nhận được số tiền này khi học xong 4 năm đại họ **C.** Biết rằng khi đủ 22 tuổi, số tiền mà học sinh A được nhận sẽ là 243 101 250 VNĐ. Vậy lãi suất kì hạn một năm của ngân hàng MSB là bao nhiêu?

A. 8%. **B.** 7%. **C.** 6% **D.** 5%.

Lời giải

Chọn D

Gọi lãi suất kỳ hạn một năm của ngân hàng MSB là r. Áp dụng công thức lãi suất kép $P = a(1+r)^n$ trong đó (a là số tiền gửi, n là số chu kỳ gửi, r là lãi suất một chu kỳ, P là số tiền sau khi gửi n chu kỳ) ta có :

$243101250 = 200000000(1+r)^4 \Leftrightarrow (1+r)^4 = \dfrac{243101250}{200000000}$

$\Leftrightarrow 1+r = \sqrt[4]{\dfrac{243101250}{200000000}} \Leftrightarrow r = \sqrt[4]{\dfrac{243101250}{200000000}} - 1 \Leftrightarrow r = 0,05$.

Câu 20: Một người gửi 50 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép với lãi suất $5,5\%$ / năm, kì hạn 1 năm. Hỏi sau 4 năm, người đó rút cả vốn lẫn lãi được số tiền gần với số nào nhất trong các số tiền

sau? (Biết lãi suất hàng năm không đổi)

A. 72 triệu đồng. **B.** 61,94 triệu đồng. **C.** 52 triệu đồng. **D.** 63,5 triệu đồng.

Lời giải

Chọn B

Gọi số tiền ban đầu A. Lãi suất tính theo năm là r.

Số tiền cả vốn lẫn lãi sau n năm được tính theo công thức: $A_n = A(1+r)^n$.

Thay số với $A = 50; r = 5,5\%, n = 4$ ta được số tiền là: $A_4 = 50.\left(1+\frac{5,5}{100}\right)^4 = 61,94$ (triệu đồng)

Câu 21: Ông A gửi 100 triệu (đồng) vào ngân hàng theo hình thức lãi kép trong một thời gian khá lâu với lãi suất ổn định trong suốt thời gian tiết kiệm là 10% /1 năm. Tết năm nay do dịch bệnh nên ông rút hết tiền trong ngân hàng ra để gia đình chi tiêu. Sau khi rút cả vốn lẫn lãi, ông trích ra 10 triệu (đồng) để sắm sửa đồ Tết thì ông còn 240 triệu (đồng). Hỏi ông đã gửi tiết kiệm trong bao nhiêu năm?

A. 9 năm. **B.** 20 năm. **C.** 12 năm. **D.** 10 năm.

Lời giải

Chọn D

Giả sử ông A đã gửi tiết kiệm trong n năm.

Số tiền ông đã nhận được là 250 triệu (đồng).

Theo công thức lãi suất kép, ta có: $250.10^6 = 100.10^6(1+0,1)^n \Leftrightarrow n = \log_{1,1} 2,5 \Leftrightarrow n \approx 9,61$

Vậy, ông A đã gửi tiết kiệm trong 10 năm.

Câu 22: Lãi suất gửi tiền tiết kiệm của các ngân hàng trong thời gian qua liên tục thay đổi. Bác Mạnh gửi vào một ngân hàng số tiền 5 triệu đồng với lãi suất 0,7%/tháng. Sau sáu tháng gửi tiền, lãi suất tăng lên 0,9%/tháng. Đến tháng thứ 10 sau khi gửi tiền, lãi suất giảm xuống 0,6%/tháng và giữ ổn định. Biết rằng nếu bác Mạnh không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Sau một năm gửi tiền, bác Mạnh rút được số tiền là bao nhiêu?

A. 5436521,164 đồng. **B.** 5452771,729 đồng. **C.** 5436566,169 đồng. **D.** 5452733,453 đồng.

Lời giải

Chọn D

Số tiền bác Mạnh thu được: $5(1+0,007)^6(1+0,009)^3(1+0,006)^3 = 5,452733453$ triệu đồng.

Câu 23: Ông A gửi 200 triệu vào một ngân hàng theo hình thức lãi kép, với lãi suất là 6,5% một năm và lãi suất không đổi trong suốt thời gian gửi. Sau 6 năm, số tiền lãi của ông bằng bao nhiêu?

A. 92 triệu. **B.** 226 triệu. **C.** 74 triệu. **D.** 175 triệu.

Lời giải

Chọn A

Ta có $T = A(1+r)^n = 200.(1+6,5\%)^6 \simeq 292$ triệu.

Vậy số tiền lãi là $292 - 200 = 92$ triệu.

Câu 24: Ông A gửi tiền tiết kiệm với lãi suất 8,1% / năm và lãi suất hằng năm được nhập vào vốn (hình thức lãi kép). Hỏi sau bao nhiêu năm Ông A được số tiền gấp đôi số tiền ban đầu?

A. 9. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Gọi số tiền ban đầu ông A gửi tiết kiệm là B (đồng).

Theo công thức lãi kép ta có số tiền sau n năm là: $B(1+0,081)^n$.

Để số tiền tăng gấp đôi thì n phải thỏa mãn phương trình:

$B(1+0,081)^n = 2B \Leftrightarrow (1,081)^n = 2 \Leftrightarrow n = \log_{1,081} 2 \Leftrightarrow n = 8,899$.

Như vậy sau 9 năm Ông A sẽ thu được số tiền gấp đôi số tiền ban đầu.

Câu 25: Một học sinh A khi đủ 18 tuổi được cha mẹ cho $200\,000\,000$ VNĐ. Số tiền này được bảo quản trong ngân hàng MSB với kì hạn thanh toán 1 năm và học sinh A chỉ nhận được số tiền này khi học xong 4 năm đại học. Biết rằng khi đủ 22 tuổi, số tiền mà học sinh A được nhận sẽ là $243\,101\,250$ VNĐ. Vậy lãi suất kì hạn một năm của ngân hàng MSB là bao nhiêu?

A. 8%. **B.** 7%. **C.** 6% **D.** 5%.

Lời giải

Chọn D

Gọi lãi suất kỳ hạn một năm của ngân hàng MSB là r. Áp dụng công thức lãi suất kép $P = a(1+r)^n$ trong đó (*a* là số tiền gửi, *n* là số chu kỳ gửi, *r* là lãi suất một chu kỳ, *P* là số tiền sau khi gửi *n* chu kỳ) ta có :

$$243101250 = 200000000(1+r)^4 \Leftrightarrow (1+r)^4 = \frac{243101250}{200000000}$$

$$\Leftrightarrow 1+r = \sqrt[4]{\frac{243101250}{200000000}} \Leftrightarrow r = \sqrt[4]{\frac{243101250}{200000000}} - 1 \Leftrightarrow r = 0,05.$$

Câu 26: Một người gửi 200 vào ngân hàng với lãi suất $0,2\%$ / tháng. Biết rằng nếu không rút tiền khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau đúng 10 tháng người đó được lĩnh số tiền gần nhất với số tiền nào dưới đây?

A. $205.063.000$. **B.** $204.044.000$. **C.** $204.036.000$. **D.** $203.063.000$.

Lời giải

Chọn C

Theo công thức lãi kép ta có số tiền cả lãi và vốn sau 10 tháng là:

$T = X(1+r)^n = 200(1+0.2\%)^{10} \approx 204,036$ triệu đồng.

Câu 27: Ông An gửi 200 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép theo kì hạn năm, với lãi suất là $6,5\%$ một năm và lãi suất không đổi trong thời gian gửi. Sau 6 năm, số tiền lãi (làm tròn đến hàng triệu) của ông là

A. 92 triệu. **B.** 96 triệu. **C.** 78 triệu. **D.** 69 triệu.

Lời giải

Chọn A

Đặt số tiền gốc của ông An là: $A = 200$ triệu.

Hết năm thứ nhất, số tiền cả gốc và lãi ông An nhận được là: $A_1 = 200(1+6,5\%)$ triệu.

Hết năm thứ hai, số tiền cả gốc và lãi ông An nhận được là: $A_2 = 200(1+6,5\%)^2$ triệu.

…….

Hết năm thứ sáu, số tiền cả gốc và lãi ông An nhận được là: $A_6 = 200(1+6,5\%)^6$ triệu.

Vậy sau 6 năm số tiền lãi ông An nhận được là: $A_6 - A \approx 92$ triệu.

Câu 28: Một người gửi số tiền 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 7% / năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó lĩnh được số tiền (cả tiền gửi ban đầu lẫn tiền lãi) nhiều

hơn 200 triệu đồng, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi suất không đổi?

A. 11 năm. **B.** 12 năm. **C.** 10 năm. **D.** 9 năm.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức lãi kép gửi 1 lần: $N = A(1+r)^n$, với $A = 100.10^6$ và $r = 7\%$.

Theo đề bài ta tìm n bé nhất sao cho: $10^8(1+7\%)^n > 200.10^6$

$\Leftrightarrow (1+7\%)^n > 2 \Leftrightarrow n > \log_{\frac{107}{100}} 2 \approx 10,245$.

Câu 29: Ông A vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất 1% một tháng. Cứ sau mỗi tháng kể từ ngày vay ông trả góp số tiền 5 triệu đồng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng thì ông A trả hết nợ, biết tháng cuối cùng ông có thể trả số tiền ít hơn 5 triệu đồng?

A. 22 tháng. **B.** 23 tháng. **C.** 24 tháng. **D.** 25 tháng.

Lời giải

Chọn B

Sau n tháng, ông A còn vay số tiền là:

$$100(1+r)^n - 5\left[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + ... + 1\right] = 100(1+r)^n - 5\frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

với r là lãi suất/1 tháng.

Để tháng thứ n ông trả hết nợ thì: $100(1,01)^n - 5\frac{(1,01)^n - 1}{0,01} = 0 \Leftrightarrow (1,01)^n = \frac{5}{4} \Leftrightarrow n \approx 23$ tháng.

Câu 30: Anh A vay ngân hàng $600.000.000$ đồng để mua xe ô tô với lãi suất $7,8\%$ một năm. Anh A bắt đầu trả nợ cho ngân hàng theo cách: sau đúng 1 năm kể từ ngày vay anh bắt đầu trả nợ và hai lần trả nợ liên tiếp cách nhau đúng 1 năm. Số tiền trả nợ là như nhau ở mỗi lần và sau đúng 8 năm thì anh A trả hết nợ. Biết rằng lãi suất ngân hàng không thay đổi trong suốt thời gian anh A trả nợ. Số tiền anh A trả nợ ngân hàng trong mỗi lần là:

A. $103.618.000$ đồng. **B.** $121.800.000$ đồng. **C.** $130.000.000$ đồng. **D.** $136.776.000$ đồng.

Lời giải

Chọn A

Đặt $r = 7,8\%$

Gọi M là số tiền anh A trả hàng năm.

Sau năm thứ 1, số tiền còn lại: $V_1 = 600(1+r) - M$.

Sau năm thứ 2, số tiền còn lại: $V_2 = V_1(1+r) - M = 600(1+r)^2 - M(1+r) - M$.

……

Sau năm thứ n, số tiền còn lại: $V_n = 600(1+r)^n - M(1+r)^{n-1} - ... - M(1+r) - M$.

Vậy sau 8 năm anh A trả hết nợ, ta có:

$$600(1+r)^8 - M\frac{(1+r)^8 - 1}{r} = 0 \Leftrightarrow M = \frac{600(1+r)^8.r}{(1+r)^8 - 1}$$

$$\Leftrightarrow M = \frac{600(1+7,8\%)^8.7,8\%}{(1+7,8\%)^8 - 1} \approx 103,618 \text{ triệu đồng.}$$

Câu 31: Vợ chồng nhà chị Thơm vay ngân hàng 400 triệu đồng để mua nhà với hình thức trả góp, chị chọn gói lãi suất ưu đãi cố định $0,5\%$ tháng trong 12 tháng đầu và sang tháng thứ 13 trở đi thì ngân hàng tính lãi suất thả nổi theo quy định. Gia đình chị hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: sau đúng một tháng kể từ ngầy vay thì bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi tháng là 15 triệu đồng. Sau khi hết 12 tháng ưu đãi thì chị Thơm phải trả lãi suất thả nổi là 1%tháng. Biết rằng mỗi tháng ngân hàng chỉ tính lãi trên số dư nợ thực tế của tháng đó và lãi suất thả nổi của ngân hàng không thay đổi trong thời gian chị Thơm hoàn nợ. Hỏi chị Thơm cần bao nhiêu tháng để trả hết nợ ngân hàng kể từ khi vay?

A. 17 tháng. **B.** 29 tháng. **C.** 30 tháng. **D.** 18 tháng.

Lời giải

Chọn C

Số tiền chị Thơm nợ sau một tháng là $400+400.0,5\%=400(1+0,5\%)$ (triệu đồng).

Sau 1 tháng thì số tiền chị Thơm phải trả là $400(1+0,5\%)-15$ (triệu đồng).

Sau 2 tháng thì số tiền chị Thơm phải trả là

$400(1+0,5\%)-15+[400(1+0,5\%)-15]\cdot 0,5\%-15$

$=400(1+0,5\%)^2-15[(1+0,5\%)+1]$ (triệu đồng).

Sau 12 tháng thì số tiền chị Thơm phải trả là

$A=400(1+0,5\%)^{12}-15\left[(1+0,5\%)^{11}+(1+0,5\%)^{10}+\ldots+(1+0,5\%)+1\right]$

$=400(1+0,5\%)^{12}-15\dfrac{(1+0,5\%)^{12}-1}{(1+0,5\%)-1}=400(1+0,5\%)^{12}-\dfrac{15}{0,5\%}\left[(1+0,5\%)^{12}-1\right].$

$=239,637$ (triệu đồng).

Gọi n là số tháng tiếp theo mà chị Thơm cần đề trả hết nợ, tương tự như trên ta được

$$A(1+1\%)^n-\frac{15\left[(1+1\%)^n-1\right]}{1\%}=0\Leftrightarrow n=\log_{1+1\%}\frac{-15}{A.1\%-15}\approx 17.49.$$

Tức là chị Thơm cần thêm 18 tháng để trả hết nợ.

Vậy chị Thơm cần $12+18=30$ tháng để trả hết nợ ngân hàng kể từ khi vay.

Câu 32: Một người gửi số tiền 3 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất $0,55\%$ / tháng. Biết rằng nếu người đó không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi đó là lãi kép). Số tiền người đó lãnh được sau hai năm, nếu trong khoảng thời gian này không rút tiền ra và lãi suất không đổi là:

A. $3.(1.0055)^2$ triệu đồng. **B.** $3.(1,0055)^{24}$ triệu đồng.

C. $3.(1,055)^{24}$ triệu đồng. **D.** $(3,0055)^{24}$ triệu đồng.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức lãi kép: $T_n=T_0(1+r)^n$ trong đó: T_0 là số tiền gửi ban đầu.

T_n là số tiền cả gốc lẫn lãi sau n kì.

r là lãi suất một kì.

Thời gian gửi là 2 năm với chu kì 1 tháng nên số chu kì là $n=24$.

Suy ra số tiền người đó lãnh được sau hai năm là: $T_n=3.(1+0,55\%)^{24}=3.(1,0055)^{24}$ triệu đồng.

Câu 33: Ông Nguyễn Văn B là thương binh hạng 4/4, được hưởng trợ cấp hàng tháng là 2 082 000 đồng. Do tình hình Covid-19 diễn biến phức tạp nên từ tháng 4 năm 2021 ông không đi lĩnh tiền mà nhờ thủ

quỹ lập một sổ tiết kiệm ở ngân hàng để gửi số tiền đó với lãi suất 0.5% / tháng. Hỏi đến đầu tháng 4 năm 2022 ông đến ngân hàng nhận được số tiền là bao nhiêu?

A. 2 210 413 đồng. **B.** 27 893 054 đồng.

C. 25 682 641 đồng. **D.** 25 811 054 đồng.

Lời giải

Chọn D

Ta có công thức tính lãi kép là $T = M(1+r)^n$

Trong đó: T là số tiền vốn và lãi sau thời hạn n tháng

M là mức tiền gửi ban đầu

n là số kì hạn tính lãi

r là lãi suất

Theo đề bài ta có $M = 2082000, n = 12, r = 0,5\%$

Vì mỗi tháng ông B lĩnh lương một lần, nên sau một năm số tiền ông B nhận được là:

$T = M(1+r)^{12} + M(1+r)^{11} + ... + M(1+r)^2 + M(1+r)$

$= M.(1+r).\left[\dfrac{(1+r)^{12}-1}{1+r-1}\right] = M.(1+r).\left[\dfrac{(1+r)^{12}-1}{r}\right]$

$= 2082000.(1+0,5\%).\left[\dfrac{(1+0,5\%)^{12}-1}{0,5\%}\right] \simeq 25811054$ đồng.

Câu 34: Vào ngày 15 hàng tháng, ông An đều đến gửi tiết kiệm tại ngân hàng với số tiền 5 triệu đồng theo hình thức lãi kép với lãi suất không đổi trong suốt quá trình gửi là $0,6\%/$ tháng. Hỏi sau đúng ba năm (kể từ ngày bắt đầu gửi), ông An thu được số tiền cả gốc lẫn lãi là bao nhiêu (làm tròn đến nghìn đồng)?

A. 195251000 (đồng). **B.** 195252000 (đồng).

C. 201450000 (đồng). **D.** 201453000 (đồng).

Lời giải

Chọn D

Đặt $A = 5$ triệu, $r = 0,6\%$.

Sau một tháng ông An có số tiền cả vốn và lãi là $A(1+r)$, tiếp tục gửi vào ngân hàng A đồng nên số tiền trong ngân hàng lúc này là $T_1 = A(1+r) + A = A\left[(1+r)+1\right]$.

Sau hai tháng ông An có số tiền cả vốn và lãi là $T_2 = T_1(1+r) + A = A\left[(1+r)^2 + (1+r) + 1\right]$.

….

Sau 36 tháng ông An có số tiền cả vốn và lãi là

$T_{36} = A\left[(1+r)^{36} + (1+r)^{35} + ... + (1+r) + 1\right] - A = A.\dfrac{(1+r)^{37}-1}{r} - A \approx 201453000$ đồng.

Câu 35: Lãi suất gửi tiền tiết kiệm của các ngân hàng trong thời gian qua liên tục thay đổi. Bác Mạnh gửi vào một ngân hàng số tiền 5 triệu đồng với lãi suất 0,7%/tháng. Sau sáu tháng gửi tiền, lãi suất tăng lên 0,9%/tháng. Đến tháng thứ 10 sau khi gửi tiền, lãi suất giảm xuống 0,6%/tháng và giữ ổn định. Biết rằng nếu bác Mạnh không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (ta gọi đó là lãi kép). Sau một năm gửi tiền, bác Mạnh rút được số tiền là bao nhiêu? (biết trong khoảng thời gian này bác Mạnh không rút tiền ra)

A. 5436521,164 đồng. **B.** 5452771,729 đồng. **C.** 5436566,169 đồng. **D.** 5452733,453 đồng.

Lời giải

Chọn D

Số tiền bác Mạnh thu được: $5(1+0,007)^6(1+0,009)^3(1+0,006)^3 = 5,452733453$ triệu đồng.

Câu 36: Hai anh em An và Bình cùng vay tiền ở ngân hàng với lãi suất $0,7\%$ một tháng với tổng số tiền vay là 200 triệu đồng. Sau đúng 1 tháng kể từ khi vay, mỗi người bắt đầu trả nợ cho ngân hàng khoản vay của mình. Mỗi tháng hai người trả số tiền bằng nhau cho ngân hàng để trừ vào tiền gốc và lãi. Để trả hết gốc và lãi cho ngân hàng thì An cần 10 tháng, Bình cần 15 tháng. Hỏi số tiền mà mỗi người trả cho ngân hàng mỗi tháng là bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn)?

A. 7614000 đồng. **B.** 10214000 đồng. **C.** 9248000 đồng. **D.** 8397000 đồng.

Lời giải

Chọn D

Gọi số tiền vay ban đầu là u_0, tiền trả hàng tháng là x, lãi suất hàng tháng là $0,7\%$.

Số tiền còn lại sau 1 tháng: $u_1 = u_0 1,007 - x$ (đồng).

Số tiền còn lại sau 2 tháng:

$u_2 = u_1 1,007 - x = u_0 1,007^2 - 1,007x - x = u_0 1,007^2 - x(1+1,007)$ (đồng).

Số tiền còn lại sau n tháng:

$$u_n = u_0 1,007^n - x\left(1+1,007+1,007^2+...+1,007^{n-1}\right) = u_0 1,007^n - x\frac{1,007^n - 1}{0,007}$$ (đồng).

Sau n tháng thì hết nợ $\Rightarrow u_n = 0 \Leftrightarrow u_0 = \frac{x\left(1,007^n - 1\right)}{0,007.1,007^n}$ (đồng).

Để trả hết nợ thì An cần 10 tháng và Bình cần 15 tháng, ta được:

$$\frac{x\left(1,007^{10} - 1\right)}{0,007.1,007^{10}} + \frac{x\left(1,007^{15} - 1\right)}{0,007.1,007^{15}} = 2.10^8 \Leftrightarrow x = 8397068,067$$ (đồng).

Câu 37: Anh An gửi số tiền 50 triệu đồng vào một ngân hàng theo hình thức lãi kép với lãi suất $0,6\%$ /tháng. Sau 6 tháng anh rút về 10 triệu, số tiền còn lại vẫn gửi tiếp với lãi suất như cũ. Hỏi sau một năm anh có số tiền cả gốc lẫn lãi gần nhất với kết quả nào sau đây?

A. $43,7$ triệu. **B.** $44,9$ triệu. **C.** $43,5$ triệu. **D.** 43 triệu.

Lời giải

Chọn C

Sau 6 tháng đầu, số tiền cả gốc lẫn lãi anh Aan có là: $50.\left(1+\frac{0,6}{100}\right)^6 = 51,82721697$ (triệu)

Sau khi rút 10 triệu, số tiền còn lại của anh An là: $41,82721697$ (triệu). Số tiền này là gốc cho lần gửi tiếp theo.

Sau một năm, số tiền cả gốc lẫn lãi anh An có là: $41,82721697.\left(1+\frac{0,6}{100}\right)^6 = 43,35576499$ (triệu).

Câu 38: Bạn Bình được gia đình gửi vào sổ tiết kiệm 200 triệu đồng với lãi suất 0,45% một tháng theo hình thức lãi kép. Nếu mỗi tháng Bình rút ra một số tiền như nhau vào ngày ngân hàng trả lãi thì hàng tháng Bình rút ra số tiền gần nhất với số nào sau đây để đúng 4 năm vừa hết số tiền trong sổ tiết kiệm?

A. 4620000. **B.** 4529000. **C.** 4756000. **D.** 4642000.

Lời giải

Chọn D

Gọi số tiền bạn Bình rút ra hàng tháng là x (triệu đồng) $x>0$, số tiền ban đầu là P (triệu đồng), $P>0$, lãi suất tiền gửi hàng tháng là r , $r>0$.

Lãi suất nhận được sau tháng thứ nhất là: $P.r$ (triệu đồng).

Số tiền cuối tháng thứ nhất sau khi rút còn lại: $P_1=P\ 1+r\ -x$ (triệu đồng).

Lãi suất nhận được sau tháng thứ nhất là: $P_1.r$ (triệu đồng).

Số tiền cuối tháng thứ nhất sau khi rút còn lại: $P_2=P_1\ 1+r\ -x=P\ 1+r\ ^2-x\ 1+r\ -x$ (triệu đồng).

Cứ như thế, số tiền còn lại sau n tháng là:

$P_n=P\ 1+r\ ^n-x\ 1+r\ ^{n-1}-x\ 1+r\ ^{n-2}-....-x\ 1+r\ -x$

$P_n=P\ 1+r\ ^n-x.\dfrac{1+r\ ^n-1}{r}$ (triệu đồng).

Sau 48 tháng, số vừa hết khi và chỉ khi

$P_n=0\Leftrightarrow P\ 1+r\ ^{48}-x.\dfrac{1+r\ ^{48}-1}{r}=0\Leftrightarrow 200\ 1,0045\ ^{48}-x.\dfrac{1,0045\ ^{48}-1}{0,0045}=0$

$\Leftrightarrow x\approx 4,642$ (triệu đồng).

Câu 39: Ông Đại mới xin được việc làm nên gửi tiết kiệm vào ngân hàng với hình thức cứ mỗi đầu tháng đóng vào 5 triệu đồng với lãi suất 0,33%/ tháng. Tính số tiền mà ông Đại thu được từ ngân hàng sau 5 năm.

A. 399 triệu đồng. **B.** 365 triệu đồng. **C.** 332 triệu đồng. **D.** 330 triệu đồng.

Lời giải

Chọn C

Với a (triệu đồng) là số tiền ông Đại đóng vào hằng tháng, $r\%$ lãi suất ông Đại gửi tiết kiệm hằng tháng.

Gọi P_n là số tiền mà ông Đại thu được sau n tháng $(n\ge 1)$.

Suy ra

$P_1=a.(1+r\%)$.

$P_2=(P_1+a)(1+r\%)=a.(1+r\%)^2+a.(1+r\%)$

$P_3=(P_2+a)(1+r\%)=a.(1+r\%)^3+a.(1+r\%)^2+a.(1+r\%)$

……

……

……

$P_n=(P_{n-1}+a)(1+r\%)=a.(1+r\%)^n+a.(1+r\%)^{n-1}+...+a.(1+r\%)$

Xét cấp số nhân có số hạng đầu là $u_1=a.(1+r\%)$ và công bội $q=1+r\%$ thì

$P_n=u_1+u_2+...+u_n=u_1\dfrac{1-q^n}{1-q}$.

Vậy số tiền ông Đại nhận được từ ngân hàng sau 5 năm (60 tháng) là

$P_{60}=u_1\dfrac{1-q^{60}}{1-q}=5.(1,0033).\dfrac{1-(1,0033)^{60}}{0,0033}\approx 332$ triệu đồng.

Câu 40: Ông Bình vay vốn ngân hàng với số tiền $100\,000\,000$ đồng. Ông dự định sau đúng 5 năm thì trả hết nợ theo hình thức: sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau. Hỏi theo cách đó, số tiền a mà ông sẽ phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết lãi suất hàng tháng là $1,2\%$ và không thay đổi trong thời gian ông hoàn nợ.

A. $a=\dfrac{12.10^5\left(1,012\right)^{59}}{\left(1,012\right)^{60}-1}$ (đồng). **B.** $a=\dfrac{12.10^5\left(1,012\right)^{60}}{\left(1,012\right)^{60}-1}$ (đồng).

C. $a=\dfrac{12.10^6\left(1,012\right)^{60}}{\left(1,012\right)^{60}-1}$ (đồng). **D.** $a=\dfrac{12.10^6\left(1,012\right)^{59}}{\left(1,012\right)^{60}-1}$ (đồng).

Lời giải

Chọn B

Gọi m, r, T_n, a lần lượt là số tiền vay ngân hàng, lãi suất hàng tháng, tổng số tiền vay còn lại sau n tháng, số tiền trả đều đặn mỗi tháng.

Sau khi hết tháng thứ nhất $\left(n=1\right)$ thì còn lại: $T_1=m\left(r+1\right)-a.$

Sau khi hết tháng thứ hai $\left(n=2\right)$ thì còn lại: $T_2=\left[m\left(r+1\right)-a\right]\left(r+1\right)-a$

$=m\left(r+1\right)^2-a\left(r+1\right)-a=m\left(r+1\right)^2-a\left(r+2\right)=m\left(r+1\right)^2-\dfrac{a}{r}\left[\left(r+1\right)^2-1\right].$

Sau khi hết tháng thứ ba $\left(n=3\right)$ thì còn: $T_3=\left[m\left(r+1\right)^2-\dfrac{a}{r}\left[\left(r+1\right)^2-1\right]\right]\left(r+1\right)-a$

$=m\left(r+1\right)^3-\dfrac{a}{r}\left[\left(r+1\right)^3-1\right].$

Sau khi hết tháng thứ n thì còn lại: $T_n=m\left(r+1\right)^n-\dfrac{a}{r}\left[\left(r+1\right)^n-1\right]$

Áp dụng công thức trên, ta có $T_n=0\Leftrightarrow a=\dfrac{m\left(r+1\right)^n r}{\left(r+1\right)^n-1}=\dfrac{12.10^5\left(\dfrac{1,2}{100}+1\right)^{60}}{\left(\dfrac{1,2}{100}+1\right)^{60}-1}$ (đồng).

Câu 41: Lãi suất cho vay tại PVcomBank trong tháng 5/2022 rất ưu đãi, ở mức 5%/năm, được áp dụng trong 6 tháng đầu, từ tháng thứ 7 trở đi ấn định mức lãi 12%/năm. Tại ngân hàng này, thời hạn cho vay mua nhà tối đa là 20 năm, mức vay tối đa 85% giá trị tài sản đảm bảo (chính là căn nhà muốn mua). Một người có khả năng trả cố định hằng tháng là 15 triệu. Giả sử người đó có thể mượn người thân 15% giá trị căn nhà, nếu được sử dụng gói vay ở trên với thời hạn tối đa và mức vay tối đa thì có thể mua được căn nhà có giá trị tối đa khoảng

A. $1,213428$ tỷ đồng. **B.** $1,65784$ tỷ đồng. **C.** $2,023572$ tỷ đồng. **D.** $2,542739$ tỷ đồng.

Lời giải

Chọn B

Gọi A là số tiền tối đa người này có thể vay, A_i là số tiền nợ sau tháng thứ i. (đơn vị: triệu đồng)

$r_1=\dfrac{5\%}{12}$ là lãi suất/1 tháng, trong 6 tháng đầu

$r_2 = \dfrac{12\%}{12} = 1\%$ là lãi suất/1 tháng, từ tháng thứ 7 trở đi.

Sau 1 tháng, số tiền gốc và lãi là $A(1+r)$, người đó trả 15 triệu nên còn nợ:

$A_1 = A(1+r) - 15$

Sau tháng thứ 2:

$A_2 = A_1(1+r_1) - 15 = \left(A(1+r_1) - 15\right)(1+r_1) - 15 = A(1+r_1)^2 - \dfrac{15}{r_1}\left[(1+r_1)^2 - 1\right]$

Sau tháng thứ 3: $A_3 = A(1+r_1)^3 - \dfrac{15}{r_1}\left[(1+r_1)^3 - 1\right]$

…….

Sau tháng thứ 6: $A_6 = A(1+r_1)^6 - \dfrac{15}{r_1}\left[(1+r_1)^6 - 1\right]$.

Sau tháng thứ 7: $A_7 = A_6(1+r_2) - 15$

Sau tháng thứ 8: $A_8 = A_6(1+r_2)^2 - \dfrac{15}{r_2}\left[(1+r_2)^2 - 1\right]$

……

Sau tháng thứ 240 (sau đúng 20 năm): $A_{240} = A_6(1+r_2)^{234} - \dfrac{15}{r_2}\left[(1+r_2)^{234} - 1\right]$

Vì phải trả hết nợ sau 20 năm nên $A_{240} = 0 \Leftrightarrow A_6 = \dfrac{15\left[(1+r_2)^{234} - 1\right]}{(1+r_2)^{234} r_2} \approx 1353,819328$

$\Rightarrow A = \dfrac{A_6 + \dfrac{15}{r_1}\left[(1+r_1)^6 - 1\right]}{(1+r_1)^6} \approx 1409,163992$.

Vậy người này có thể mua được căn nhà có giá trị tối đa là $\dfrac{A}{85\%} \approx 1657,83999$ triệu đồng $\approx 1,65784$ tỷ đồng.dd

Câu 42: Anh Nam vay tiền ngân hàng 1 tỷ đồng theo phương thức trả góp (chịu lãi số tiền chưa trả) với lãi suất $0,5\%$ / tháng. Nếu cuối mỗi tháng bắt đầu từ tháng thứ nhất anh Nam trả 30 triệu đồng. Hỏi sau bao nhiêu tháng anh Nam trả hết nợ?

A. 35 tháng. **B.** 36 tháng. **C.** 37 tháng. **D.** 38 tháng.

Lời giải

Chọn C

Gọi a là số tiền vay (triệu đồng), r là lãi suất, m là số tiền hàng tháng trả (triệu đồng).

Số tiền nợ sau tháng thứ nhất là: $N_1 = a(1+r) - m$.

Số tiền nợ sau tháng thứ hai là: $N_2 = \left[a(1+r) - m\right] + \left[a(1-r) - m\right]r - m$

$= a(1+r)^2 - m\left[(1+r) + 1\right]$

….

Số tiền nợ sau n tháng là:

$N_n = a(1+r)^n - m\left[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + ... + 1\right] = a(1+r)^n - m\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}$.

Sau n tháng anh Nam trả hết nợ: $N_n = a(1+r)^n - m\dfrac{(1+r)^n - 1}{r} = 0$

$\Leftrightarrow 1000(1+0,005)^n - 30\dfrac{(1+0,005)^n - 1}{0,005} = 0 \Leftrightarrow n = 36,55$

Vậy 37 tháng thì anh Nam trả hết nợ.

Câu 43: Một người gửi số tiền 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 7%/ năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó lĩnh được số tiền (cả tiền gửi ban đầu lẫn tiền lãi) nhiều hơn 200 triệu đồng, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi suất không đổi?

A. 11 năm. **B.** 12 năm. **C.** 10 năm. **D.** 9 năm.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức lãi kép gửi 1 lần: $N = A(1+r)^n$, với $A = 100.10^6$ và $r = 7\%$.

Theo đề bài ta tìm n bé nhất sao cho: $10^8(1+7\%)^n > 200.10^6$

$\Leftrightarrow (1+7\%)^n > 2 \Leftrightarrow n > \log_{\frac{107}{100}} 2 \approx 10,245$.

Câu 44: Một nhóm bạn thực hiện dự án khởi nghiệp làm tinh dầu tự nhiên từ cây xả. Trong bản kế hoạch nhóm đề ra vay ngân hàng 300 triệu đồng theo phương thức trả góp với lãi suất $0,5\%$/ tháng. Nếu cuối mỗi tháng bắt đầu từ tháng thứ chín nhóm bắt đầu trả trả 10 triệu đồng. Hỏi sau bao nhiêu tháng kể từ ngày vay nhóm trả hết nợ?

A. 31. **B.** 30. **C.** 23. **D.** 22.

Lời giải

Chọn A

Gọi a là tổng số tiền vay số tiền vay ngân hàng sau 8 tháng, r là lãi, m là số tiền hàng tháng trả.

Ta có: $a = 300(1+0,5\%)^8$

Số tiền nợ sau tháng thứ chín là: $N_1 = a(1+r) - m$.

Số tiền nợ sau tháng thứ mười là:
$$N_2 = \left[a(1+r) - m\right] + \left[a(1-r) - m\right]r - m$$
$$= a(1+r)^2 - m\left[(1+r) + 1\right]$$

….

Số tiền nợ sau tháng thứ $n+9$ là: $N_n = a(1+r)^n - m\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}$.

Sau $n+9$ tháng trả hết nợ: $N_n = a(1+r)^n - m\dfrac{(1+r)^n - 1}{r} = 0$.

$\Leftrightarrow \left[300.(1+0,5\%)^8\right](1+0,5\%)^n - 10.\dfrac{(1+0,5\%)^n - 1}{0,5\%} = 0 \Rightarrow n \approx 23$.

Vậy 31 tháng thì nhóm bạn trả hết nợ.

Câu 45: Anh tài gửi 400 triệu đồng vào ngân hàng A và B theo phương thức lãi kép. Số tiền thứ nhất gửi vào ngân hàng A với lãi suất $2,1\%$ /quý trong thời gian 15 tháng. Số tiền còn lại gửi vào ngân hàng B với lãi suất $0,73\%$ /tháng trong thời gian 9 tháng. Biết tổng số tiền lãi**.** Anh tài nhận được ở hai ngân hàng là $49144986,76$ đồng. Hỏi số tiền Anh tài lần lượt gửi ở hai ngân hàng A và B là bao nhiêu?

A. 120 triệu đồng và 280 triệu đồng. **B.** 160 triệu đồng và 240 triệu đồng.

C. 200 triệu đồng và 200 triệu đồng. **D.** 220 triệu đồng và 180 triệu đồng.

Lời giải

Gọi số tiền Anh tài gửi ở ngân hàng A là x triệu đồng. Suy ra số tiền Anh tài gửi ở ngân hàng B là $400-x$ triệu đồng.

Số tiền cả vốn và lãi Anh tài nhận được khi gửi ở ngân hàng A sau 15 tháng là: $x\left(1+\frac{2,1}{100}\right)^5$. Suy ra số tiền lãi Anh tài nhận được khi gửi ở ngân hàng A sau 15 tháng là: $x\left(1+\frac{2,1}{100}\right)^5-x.$

Số tiền cả vốn và Anh tài nhận được khi gửi ở ngân hàng B sau 9 tháng là: $400-x\left(1+\frac{0,73}{100}\right)^9$.

Suy ra số tiền lãi Anh tài nhận được khi gửi ở ngân hàng B sau 9 tháng là: $400-x\left(1+\frac{0,73}{100}\right)^9-400-x$.

Tổng số tiền lãi Anh tài nhận được ở hai ngân hàng là $49144986,76$ đồng nên ta có phương trình

$$x\left(1+\frac{2,1}{100}\right)^5-x+400-x\left(1+\frac{0,73}{100}\right)^9-400-x=49144986,76\Leftrightarrow x=160.$$

Vậy Anh tài gửi ở A là 160 triệu và B 240 triệu.

Câu 46: Năm 2023 một hãng xe niêm yết giá bán loại xe X là $750.000.000$ đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán so với giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó, năm 2030 hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là bao nhiêu? *(kết quả làm tròn đến hàng nghìn).*

A. $677.941.000$ đồng. **B.** $638.072.000$ đồng.

C. $664.382.000$ đồng. **D.** $651.094.000$ đồng.

Lời giải

Chọn D

Từ năm 2023 đến năm 2030 là 7 năm, suy ra $n=7$ và có $A=750.000.000,\ r=2\%=0,02.$

Áp dụng công thức lãi kép, có $C=A(1-r\%)^7=750.000.000(1-0,02)^7\approx 651.094.000.$

Câu 47: Ông A có 200 triệu đồng gửi tiết kiệm tại ngân hàng với kì hạn 1 tháng so với lãi suất $0,6\%$ trên 1 tháng được trả cuối kì. Sau mỗi kì hạn ông đến tất toán cả gốc lẫn lãi, rút ra 4 triệu đồng để tiêu dùng, số tiền còn lại ông gửi vào ngân hàng theo phương thức trên (phương thức giao dịch và lãi suất không thay đổi trong suốt quá trình gửi). Sau đúng 1 năm (đúng 12 kì hạn) kể từ ngày gửi, ông A tất toán và rút ra toàn bộ số tiền nói trên ở ngân hàng, số tiền đó là bao nhiêu? (làm tròn đến nghìn đồng).

A. 165269 (nghìn đồng). **B.** 168269 (nghìn đồng).

C. 169234 (nghìn đồng). **D.** 165288 (nghìn đồng).

Lời giải

Áp dụng công thức tính số tiền còn lại sau n tháng $\boxed{S_n=A\left(1+\frac{r}{100}\right)^n-X\frac{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n-1}{\frac{r}{100}}}$

Với $A=200$ triệu đồng, $r=0,6\%$ và $X=4$ triệu đồng ta được $S_{12}=200.1,006^{12}-4.\dfrac{1,006^{12}-1}{0,006}=165259$.

Câu 48: Bác Bình cần sửa lại căn nhà với chi phí 1 tỷ đồng. Đặt kế hoạch sau 5 năm phải có đủ số tiền trên thì mỗi năm bác Bình cần gửi vào ngân hàng một khoản tiền tiết kiệm như nhau gần nhất bằng giá trị nào sau đây, biết lãi suất của ngân hàng là 7% /năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn.

A. 162 triệu đồng. **B.** 162,5 triệu đồng. **C.** 162,2 triệu đồng. **D.** 162,3 triệu đồng.

Lời giải

Nếu đầu mỗi năm gửi vào ngân hàng số tiền m, lãi suất không đổi $r\%$/năm và lãi sau mỗi năm được nhập vào vốn thì sau n năm số tiền thu được T_n được tính theo công thức $T_n=\dfrac{m}{r}\left[\left(1+r\right)^n-1\right]\left(1+r\right)$.

Áp dụng công thức trên với $n=5$; $T_5=1000000000$; $r=7\%=0,07$ ta có:

$$1000000000=\frac{m}{0,07}\left[\left(1+0,07\right)^5-1\right]\left(1+0,07\right)$$

$$\Leftrightarrow 70000000=m\left(1,07^5-1\right)1,07\Leftrightarrow m=\frac{70000000}{1,07\left(1,07^5-1\right)}\approx 162,5 \text{ triệu đồng.}$$

Câu 49: Anh Bình muốn vay ngân hàng 200 triệu đồng theo phương thức trả góp (trả tiền vào cuối tháng) với lãi suất $0,75\%$/ tháng. Hỏi hàng tháng anh Bình phải trả số tiền là bao nhiêu (làm tròn đến nghìn đồng) để sau đúng hai năm thì trả hết nợ ngân hàng.

A. 9236000. **B.** 9137000. **C.** 9970000. **D.** 9971000.

Lời giải

Gọi q (triệu đồng) là số tiền hàng tháng anh Bình phải trả.

Cuối tháng thứ nhất, sau khi anh Bình trả số tiền q (triệu đồng) thì số tiền anh còn nợ là:

$$T_1=200\left(1+\frac{0,75}{100}\right)-q.$$

Cuối tháng thứ hai, sau khi anh Bình trả số tiền q (triệu đồng) thì số tiền anh còn nợ là:

$$T_2=200\left(1+\frac{0,75}{100}\right)^2-q\left(1+\frac{0,75}{100}\right)-q.$$

Cuối tháng thứ ba, sau khi anh Bình trả số tiền q (triệu đồng) thì số tiền anh còn nợ là:

$$T_3=200\left(1+\frac{0,75}{100}\right)^3-q\left(1+\frac{0,75}{100}\right)^2-q\left(1+\frac{0,75}{100}\right)-q$$

$$=200\left(1+\frac{0,75}{100}\right)^3-\frac{q\left[\left(1+\frac{0,75}{100}\right)^3-1\right]}{\frac{0,75}{100}}.$$

…

Cuối tháng thứ N, sau khi anh Bình trả số tiền q (triệu đồng) thì số tiền anh còn nợ là:

$$T_N = 200\left(1+\frac{0,75}{100}\right)^N - q\left(1+\frac{0,75}{100}\right)^{N-1} - q\left(1+\frac{0,75}{100}\right)^{N-2} - ... - q$$

$$= 200\left(1+\frac{0,75}{100}\right)^N - \frac{q\left[\left(1+\frac{0,75}{100}\right)^N - 1\right]}{\frac{0,75}{100}}.$$

Đúng hai năm hết nợ, tức là ta có

$T_{24} = 0$

$$\Leftrightarrow 200\left(1+\frac{0,75}{100}\right)^{24} = \frac{q\left[\left(1+\frac{0,75}{100}\right)^{24} - 1\right]}{\frac{0,75}{100}} \Leftrightarrow q = 9,137 \text{ (triệu đồng)}$$

Dạng 15: Bài toán tăng trưởng

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Ông A bị nhiễm một loại virus nên phải nhập viện và được điều trị ngay lập tức. Kể từ ngày nhập viện, sau mỗi ngày điều trị thì lượng virus trong cơ thể ông A giảm đi 10% so với ngày trước đó. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu ngày thì ông A sẽ được xuất viện, biết rằng ông A được xuất viện khi lượng virus trong cơ thể không quá 30% so với ngày nhập viện?

A. 11 ngày **B.** 12 ngày **C.** 13 ngày **D.** 14 ngày

Lời giải

Chọn B

Gọi K là lượng virus trong cơ thể ông A khi bắt đầu nhập viện.

Sau mỗi ngày điều trị thì lượng virus trong cơ thể ông A giảm đi 10% so với ngày trước đó, nên lượng virus trong cơ thể ông A ở ngày thứ n là : $T \le K.(1-10\%)^n$

Ông A được xuất viện khi lượng virus trong cơ thể không quá 30% so với ngày nhập viện, nên ta có : $K.(1-10\%)^n \le K.30\% \Leftrightarrow (1-10\%)^n \le 30\% \Leftrightarrow n \le \log_{(1-10\%)} 30\% \Leftrightarrow n \ge 11.4$

Vậy, sau ít nhất 12 ngày thì ông A sẽ được xuất viện.

Câu 2: Các nhà tâm lí học sử dụng mô hình hàm số để mô phỏng quá trình học tập của một học sinh như sau: $f(x) = K.\left(1-\frac{1}{e^{v.x}}\right)$, trong đó K là tổng số đơn vị kiến thức học sinh phải học, v (kiến thức/ngày) là tốc độ tiếp thu của học sinh, x (ngày) là thời gian học, $f(x)$ là số đơn vị kiến thức đã học được sau x ngày. Giả sử một học sinh cần phải học 35 đơn vị kiến thức. Biết rằng tốc độ tiếp thu của học sinh này là $v = 0,28$. Hỏi học sinh đó sẽ nhớ được bao nhiêu đơn vị kiến thức sau 7 ngày (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

A. 31. **B.** 30. **C.** 26. **D.** 21.

Lời giải

Chọn B

Đơn vị kiến thức học sinh đó nhớ được sau 7 ngày là $f(7) = 35.\left(1-\frac{1}{e^{7.0,28}}\right) \approx 30$.

Câu 3: Năm 2022, một hãng công nghệ có 30 triệu người dùng phần mềm của họ. Hãng đặt kế hoạch, tron 3 năm tiếp theo, mỗi năm số lượng người dùng phần mềm tăng 8% so với năm trước và từ năm thứ 4 trở đi, số lượng người dùng phần mềm sẽ tăng 5% so với năm trước đó. Theo kế hoạch đó, hỏi bắt đầu từ năm nào số lượng người dùng phần mềm của hãng sẽ vượt quá 50 triệu người?

A. Năm 2029. **B.** Năm 2028. **C.** Năm 2031. **D.** Năm 2030.

Lời giải

Chọn C

Số lượng người dùng phần mềm của công ty sau 3 năm: $T_1 = 30.\left(1+\frac{8}{100}\right)^3 = 37,79136$.

Số lượng người dùng phần mềm của công ty sau n năm tiếp theo: $T_2 = 37,79.\left(1+\frac{5}{100}\right)^n$

Để người dùng vượt quá 50 triệu người thì $37,79136.\left(1+\frac{5}{100}\right)^n > 50 \Leftrightarrow n > 5$, $n \in \mathbb{N}$ nên $n = 6$. Suy ra cần ít nhất $3+6=9$ năm nên $2022+9=2031$.

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Dân số thế giới được ước tính theo công thức $P_n = P_0.e^{nr}$, trong đó P_0 là dân số của năm lấy làm mốc, P_n là dân số sau n năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Biết rằng năm 2001 dân số Việt Nam là 76.685.800 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là $1,7\%$. Hỏi cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 115 triệu người.

A. 2023. **B.** 2025. **C.** 2027. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn B

Theo bài ra ta xét phương trình:

$$P_n = 115.10^6 \Leftrightarrow P_0.e^{nr} = 115.10^6 \Leftrightarrow \ln P_0 + nr = \ln\left(115.10^6\right)$$

Suy ra $n = \dfrac{\ln\left(115.10^6\right) - \ln P_0}{r} \approx 23,8$.

Như vậy đến năm 2025 dân số nước ta sẽ ở mức 115 triệu người.

Câu 2: Theo dự báo với mức tiêu thụ dầu không đổi như hiện nay thì trữ lượng dầu của một nước sẽ hết sau 50 năm nữa. Nhưng do nhu cầu thực tế nên mức tiêu thụ dầu tăng lên 5% mỗi năm. Giả sử N là số năm tiêu thụ hết số dầu dự trữ đúng với nhu cầu thực tế trên. Tìm giá trị N.

A. 26. **B.** 24. **C.** 25. **D.** 27.

Lời giải

Chọn A

Gọi mức tiêu thụ dầu không đổi hằng năm như hiện nay là A

Khi đó lượng dầu tiêu thụ sau 50 năm là $50A$

Gọi u_n là số lượng dầu tiêu thụ vào năm thứ N

Theo đề ta có: $\begin{cases} u_{n+1} = 1,05.u_n \\ u_1 = A \end{cases}$

Vì N là số năm tiêu thụ hết dầu dự trữ đúng với nhu cầu thực tế trên nên ta có:

$$u_1 + u_2 + ... + u_N = 50\text{A} \Leftrightarrow A.\frac{1-1,05^N}{1-1,05} = 50\text{A} \Leftrightarrow \frac{1,05^N - 1}{0,05} = 50 \Leftrightarrow 1,05^N = 3,5$$

$$\Leftrightarrow N = \log_{1,05} 3,5 \Leftrightarrow N \approx 25,68.$$

Câu 3: Một điện thoại đang nạp pin, dung lượng pin nạp được tính theo công thức $Q(t) = Q_0.\left(1 - e^{-t\sqrt{2}}\right)$ với t là khoảng thời gian tính bằng giờ và Q_0 là dung lượng nạp tối đa (pin đầy). Hãy tính thời gian nạp pin của điện thoại tính từ lúc cạn hết pin cho đến khi điện thoại đạt được 90% dung lượng pin tối đa (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).

A. $t \approx 1,65$ giờ. **B.** $t \approx 1,61$ giờ. **C.** $t \approx 1,63$ giờ. **D.** $t \approx 1,50$ giờ.

Lời giải

Chọn C

Theo bài ta có

$$Q_0.\left(1 - e^{-t\sqrt{2}}\right) = 0,9.Q_0 \Leftrightarrow 1 - e^{-t\sqrt{2}} = 0,9 \Leftrightarrow e^{-t\sqrt{2}} = 0,1 \Leftrightarrow t = -\frac{\ln(0,1)}{\sqrt{2}} \approx 1,63.$$

Vậy sau khoảng thời gian $t \approx 1,63$ giờ thì dung lượng pin của điện thoại tính từ lúc cạn hết pin sẽ nạp được 90% dung lượng pin tối đa.

Câu 4: Trong năm đầu tiên đi làm, anh A được nhận lương là 10 triệu đồng mỗi tháng. Cứ hết một năm, anh A lại được tăng lương, mỗi tháng của năm sau tăng 10% so với mỗi tháng của năm trước. Mỗi khi lĩnh lương, anh A đều cất đi phần lương tăng so với năm ngay trước để tiết kiệm mua ô tô. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm thì anh A mua được ô tô giá 500 triệu, biết rằng anh A được gia đình hỗ trợ 50% giá trị chiếc xe?

A. 11. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 13.

Lời giải

Chọn D

Số tiền anh A cần tiết kiệm là $500 - 500.0,5 = 250$ (triệu).

Gọi số tiền mà anh A nhận được ở mỗi tháng trong năm thứ n là u_n (triệu).

Ta có $u_n = 10.(1+0,1)^{n-1} = 10.(1,1)^{n-1}$ (triệu).

Số tiền mà anh A tiết kiệm được sau n năm là:

$12.\left[(u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + ... + (u_{n-1} - u_{n-2}) + (u_n - u_{n-1})\right] = 12.(u_n - u_1)$

$= 12.\left[10.(1,1)^{n-1} - 10\right] = 120.\left[(1,1)^{n-1} - 1\right]$.

Để anh A mua được ô tô thì:

$120.\left[(1,1)^{n-1} - 1\right] \geq 250 \Leftrightarrow (1,1)^{n-1} \geq \dfrac{37}{12} \Leftrightarrow n \geq \log_{1,1}\dfrac{37}{12} + 1 \approx 12,814$

Vậy sau 13 năm thì anh A sẽ tiết kiệm đủ tiền để mua ô tô.

Câu 5: Một nghiên cứu cho thấy một nhóm học sinh được xem cùng một danh sách các loài động vật và được kiểm tra lại xem họ nhớ được bao nhiêu % mỗi tháng. Sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh tính theo công thức $M(t) = 75 - 20\ln(t+1), t \geq 0$ (đơn vị %). Hỏi sau khoảng bao lâu thì tỉ số học sinh nhớ được danh sách đó là dưới 10%.

A. Sau khoảng 25 tháng. **B.** Sau khoảng 24 tháng.

C. Sau khoảng 22 tháng. **D.** Sau khoảng 23 tháng.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $75 - 20\ln(t+1) \leq 10 \Leftrightarrow \ln(t+1) \geq 3,25 \Leftrightarrow t \geq e^{3,25} - 1 (\approx 24,79)$.

Khoảng 25 tháng thì số học sinh nhớ được danh sách đó là dưới 10%.

Câu 6: Khi nuôi một loại virus trong một dưỡng chất đặc biệt sau một khoảng thời gian, người ta nhận thấy số lượng virus có thể được ước lượng theo công thức $m(t) = m_0.2^{kt}$, trong đó m_0 là số lượng virus (đơn vị "con") được nuôi tại thời điểm ban đầu; k là hệ số đặc trưng của dưỡng chất đã sử dụng để nuôi virus; t là khoảng thời gian nuôi virus (tính bằng phút). Biết rằng sau 2 phút, từ một lượng virus nhất định đã sinh sôi thành đàn 112 con, và sau 5 phút ta có tổng cộng 7168 con virus. Hỏi sau 10 phút trong dưỡng chất này, tổng số virus có được là bao nhiêu con ?

A. 7340032 con. **B.** 874496 con. **C.** 2007040 con. **D.** 4014080 con.

Lời giải

Chọn A

Theo công thức $m(\mathrm{t}) = m_0.2^{kt}$ ta có: $\begin{cases} 112 = m(2) = \mathrm{m}_0.2^{2k} \\ 7168 = m(5) = \mathrm{m}_0.2^{5k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_0 = 7 \\ k = 2 \end{cases}$

Vậy sau 10 phút trong dưỡng chất này, tổng số virus có được là: $m(10) = 7.2^{2.10} = 7340032$ con.

Câu 7: Áp suất không khí P (đo bằng milimet thủy ngân, kí hiệu mmHg) là một đại lượng được tính theo công thức $P = P_0\mathrm{e}^{xi}$ trong đó x là độ cao (đo bằng mét, so với mực nước biển), $P_0 = 760$ mmHg là áp suất ở mực nước biển, i là hệ số suy giảm. Biết rằng, ở độ cao 1000 m thì áp suất của không khí là 672,72 mmHg. Hỏi áp suất của không khí ở độ cao 15 km gần nhất với số nào trong các số sau?

A. 121. **B.** 122. **C.** 123. **D.** 124.

Lời giải

Chọn B

Do ở độ cao 1000 m, áp suất của không khí là 672,72 mmHg nên ta có:

$$672,72 = 760e^{1000i} \Leftrightarrow i = \frac{1}{1000}\ln\frac{672,72}{760}$$

Khi ở độ cao 15 km tức là 15000 m thì áp suất của không khí:

$$P = 760\mathrm{e}^{15000\times\frac{1}{1000}\ln\frac{672,72}{760}} \approx 121,93399$$

Vậy, áp suất của không khí ở độ cao 15 km gần nhất với số 122.

Câu 8: Sự tăng trưởng của loại vi khuẩn tuân theo công thức $S = Ae^{r.t}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng ($r > 0$), t là thời gian tăng trưởng. Biết số vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Thời gian để số vi khuẩn tăng gấp đôi số vi khuẩn ban đầu gần nhất với kết quả nào trong các kết quả sau

A. 2 giờ 5 phút. **B.** 3 giờ 15 phút. **C.** 4 giờ 10 phút. **D.** 3 giờ 9 phút.

Lời giải

Chọn D

Vì sau 5h có 300 con vi khuẩn, nên suy ra $300 = 100.\mathrm{e}^{5r} \Leftrightarrow r = \frac{\ln 3}{5}$.

Để vi khuẩn tăng gấp đôi thì ta có phương trình:

$200 = 100.\mathrm{e}^{\frac{1}{5}\ln 3.t} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{1}{5}\ln 3.t} = 2 \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{5}.t} = 2 \Leftrightarrow t = 5\log_3 2 \Leftrightarrow t \approx 3,15$

Vậy thời gian để số vi khuẩn tăng gấp đôi số vi khuẩn ban đầu là 3 giờ 9 phút.

Câu 9: Với mức tiêu thụ thức ăn của trang trại A không đổi như dự định thì lượng thức ăn dự trữ sẽ đủ cho 100 ngày. Nhưng thực tế, mức tiêu thụ thức ăn tăng thêm 4% mỗi ngày (ngày sau tăng 4% so với ngày trước đó). Hỏi thực tế lượng thức ăn dự trữ đó chỉ đủ dùng cho bao nhiêu ngày?

A. 42. **B.** 40. **C.** 39. **D.** 41.

Lời giải

Chọn D

Giả sử lượng thức ăn ngày đầu tiên là m. Tổng số thức ăn trong kho dự trữ là $100m$.

Thực tế: Ngày đầu tiên dùng hết m thức ăn.

Ngày thứ 2 dùng hết $m(1+4\%)$ thức ăn.

Ngày thứ 3 dùng hết $m(1+4\%)^2$ thức ăn.

……

Ngày thứ n dùng hết $m(1+4\%)^{n-1}$ thức ăn. Giả sử ngày thứ n ta dùng hết thức ăn.

Ta có phương trình sau: $m+m(1+4\%)+m(1+4\%)^2+...+m(1+4\%)^{n-1}=100m$

$\Leftrightarrow 1+(1+4\%)+(1+4\%)^2+...+(1+4\%)^{n-1}=100 \Leftrightarrow \dfrac{(1+4\%)^n-1}{(1+4\%)-1}=100$

$\Leftrightarrow (1+4\%)^n=5 \Leftrightarrow n=\log_{1,04}5\approx 41,04 \longrightarrow$ đủ cho 41 ngày.

Câu 10: Gọi $N(t)$ là số phần trăm cacbon 14 còn lại trong một bộ phận của một cây sinh trưởng từ t năm trước đây thì ta có công thức $N(t)=100.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{A}}(\%)$ với A là hằng số. Biết rằng một mẫu gỗ có tuổi khoảng 3754 năm thì lượng cacbon 14 còn lại là 65%. Phân tích mẫu gỗ từ một công trình kiến trúc cổ, người ta thấy lượng cacbon 14 còn lại trong mẫu gỗ là 79%. Hãy xác định tuổi của mẫu gỗ được lấy từ công trình đó.

A. 2057. **B.** 2020. **C.** 2135. **D.** 2054.

Lời giải

Chọn D

Theo bài ta có $65=100.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{3754}{A}} \Leftrightarrow 0,65=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{3754}{A}} \Leftrightarrow \dfrac{3754}{A}=\log_{\frac{1}{2}}0,65 \Leftrightarrow A=\dfrac{3754}{\log_{\frac{1}{2}}0,65}$

Do mẫu gỗ còn 79% lượng Cacbon 14 nên ta có: $79=100.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{A}} \Leftrightarrow 0,79=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{A}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{t}{A}=\log_{\frac{1}{2}}0,79 \Leftrightarrow t=A.\log_{\frac{1}{2}}0,79=\dfrac{3754}{\log_{\frac{1}{2}}0,65}.\log_{\frac{1}{2}}0,79\approx 2054$.

Câu 11: Để đảm bảo điều kiện sinh sống của người dân tại thành phố X, một nhóm các nhà khoa học cho biết với các điều kiện y tế, giáo dục, cơ sở hạ tầng,… của thành phố thì chỉ nên có tối đa 50000 người dân sinh sống. Các nhà khoa học cũng chỉ ra rằng dân số được ước tính theo công thức $S=A.e^{ni}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm, i là tỉ lệ tăng dân số hằng năm. Biết rằng vào đầu năm 2017, thành phố X có 40000 người và tỉ lệ tăng dân số là 1,2%. Hỏi trong năm nào thì dân số thành phố bắt đầu vượt ngưỡng cho phép, biết rằng số liệu chỉ được lấy vào đầu mỗi năm và giả thiết tỉ lệ tăng dân số không thay đổi?

A. 2034. **B.** 2035. **C.** 2036. **D.** 2037.

Lời giải

Chọn C

Theo bài ra ta có: $40000.e^{0,012n}\le 50000 \Leftrightarrow e^{0,012n}\le \dfrac{5}{4} \Leftrightarrow 0,012n\le \ln\dfrac{5}{4} \Leftrightarrow n\le 18,595$.

Suy ra sau 19 năm thì dân số vượt ngưỡng cho phép.

Vậy trong năm 2036 dân số thành phố sẽ vượt ngưỡng cho phép.

Câu 12: Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn trong phòng thí nghiệm được tính theo công thức $S(t)=S_0.e^{r.t}$. Trong đó S_0 là số lượng vi khuẩn ban đầu, $S(t)$ là số lượng vi khuẩn có sau t (phút), r là tỷ lệ tăng trưởng $(r>0)$, t (tính theo phút) là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu có 500 con và sau 5 giờ có 1500 con. Hỏi sau bao nhiêu giờ kể từ lúc ban đầu có 500 con để số lượng vi khuẩn đạt 121500 con?

A. 35 (giờ). **B.** 25 (giờ). **C.** 45 (giờ). **D.** 15 (giờ).

Lời giải

Chọn B

Ta có: $S_0=500$ (con); 5 giờ $=300$ phút.

Sau 5 giờ số vi khuẩn là: $S(300)=500.e^{300r}\Leftrightarrow 1500=500.e^{300r}\Leftrightarrow r=\dfrac{\ln 3}{300}$

Vậy khoảng thời gian t kể từ lúc bắt đầu có 500 con vi khuẩn đến khi số lượng vi khuẩn đạt 121500 con thỏa mãn $121500=500.e^{r.t}$

$\Leftrightarrow t=\dfrac{\ln 243}{r}=\dfrac{300\ln 243}{\ln 3}=1500$ (phút) $=25$ (giờ).

Câu 13: Khối lượng chất đã bị phân rã sau thời gian t được xác định bởi công thức $\Delta m=m_0.\left(1-2^{-\frac{t}{T}}\right)$, trong đó: m_0 là khối lượng chất phóng xạ ban đầu; T là chu kỳ bán rã. Một chất phóng xạ có chu kỳ bán rã là 20 phút. Ban đầu một mẫu chất đó có khối lượng là $2gram.$ Hỏi sau 1 giờ 40 phút, lượng chất còn lại bao nhiêu phần trăm so với ban đầu?

A. $19,37\%$. **B.** $3,125\%$. **C.** $6,25\%$. **D.** $87,05\%$.

Lời giải

Chọn C

Đổi 1 giờ 40 phút $=100$ phút.

Lượng chất đã phân rã là: $\Delta m=m_0.\left(1-2^{-\frac{t}{T}}\right)=2.\left(1-2^{-\frac{100}{20}}\right)=1,9375gram.$

Phần trăm khối lượng chất còn lại là: $\dfrac{2-1,9375}{2}.100\%=3,125\%.$

Câu 14: Ông Nam gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn một năm, với công thức $C=A(1+r)^n$, lãi suất $r=12\%$ một năm. Trong đó C là số tiền nhận được (cả gốc lẫn lãi) sau thời gian n năm. Tìm n nguyên dương nhỏ nhất để sau n năm ông Nam nhận được số tiền lãi hơn 40 triệu đồng. (Giả sử rằng lãi suất hằng năm không thay đổi).

A. 5. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Từ công thức $C=A(1+r)^n$ với $A=100$, $r=0,12$ và n nguyên dương.

Ta có: Số tiền thu được cả gốc lẫn lãi sau n năm là $C=100.(1+0,12)^n$.

Số tiền lãi thu được sau n năm là $L=100.(1+0,12)^n-100$.

Để số tiền lãi nhận được hơn 40 triệu đồng thì:

$L > 40 \Leftrightarrow 100(1+0,12)^n - 100 > 40 \Leftrightarrow 1,12^n > \frac{7}{5} \Leftrightarrow n > \log_{1,12}\frac{7}{5} \approx 2,97$.

Vậy số nguyên dương nhỏ nhất cần tìm là $n = 3$.

Câu 15: Số lượng của loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t) = s(0)2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A có sau t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc bắt đầu, số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con?

A. 48 phút. **B.** 19 phút. **C.** 7 phút. **D.** 12 phút.

Lời giải

Chọn C

Theo công thức, tại thời điểm $t = 3$ phút, ta có

$s(3) = s(0)2^3 = 625000 \Rightarrow s(0) = 78125$ con.

Gọi t (phút) là thời điểm mà số lượng vi khuẩn là 10 triệu con, ta có: $s(t) = s(0)2^t \Rightarrow 10\,000000 = 78125.2^t \Leftrightarrow 2^t = 128 \Rightarrow t = 7$.

Câu 16: Công ty bất động sản Hoàng Thổ đang đầu tư xây dựng và kinh doanh khu nghỉ dưỡng. Công ty dự định tổ chức quảng bá theo hình thức quảng cáo trên truyền hình. Nghiên cứu của công ty cho thấy: nếu cứ sau n lần phát quảng cáo thì tỉ lệ người xem quảng cáo đó tới khu nghỉ dưỡng tuân theo công thức $P(n) = \frac{1}{1+65.3^{-0.13n}}$. Hỏi ít nhất cần bao nhiêu lần phát quảng cáo để tỉ lệ người xem tới khu nghỉ dưỡng đạt trên 50%?

A. 30. **B.** 29. **C.** 39. **D.** 31.

Lời giải

Chọn A

Để để tỉ lệ người xem tới khu nghỉ dưỡng đạt trên 50%

$\Leftrightarrow P(n) = \frac{1}{1+65.3^{-0,13n}} > 50\% \Leftrightarrow 1+65.3^{-0,13n} < 2$

$\Leftrightarrow -0,13n < \log_3\frac{1}{65} \Leftrightarrow n > \frac{\log_3 65}{0.13} \approx 29,23$

Vậy cần ít nhất 30 lần phát quảng cáo để tỉ lệ người xem tới khu nghỉ dưỡng đạt trên 50%.

Câu 17: Các loài cây xanh trong quá trình quang hợp sẽ nhận được một lượng nhỏ cacbon 14 (một đồng vị của cacbon). Khi một bộ phận của cái cây nào đó bị chết thì hiện tượng quang hợp cũng ngưng và nó sẽ không nhận thêm cacbon 14 nữa. Lượng cacbon 14 của bộ phận đó sẽ phân hủy một cách chậm chạp, chuyển hóa thành nitơ 14. Biết rằng nếu gọi $P(t)$ là số phần trăm cacbon 14 còn lại trong một bộ phận của cái cây sinh trưởng từ t năm trước đây thì $P(t)$ được tính theo công thức $P(t) = 100.(0,5)^{\frac{t}{5750}}\ (\%)$. Phân tích một mẩu gỗ từ một công trình kiến trúc cổ, người ta thấy lượng cacbon 14 còn lại trong mẩu gỗ đó là 60%. Niên đại của công trình kiến trúc đó gần với số nào sau đây nhất? (Giả sử khoảng thời gian từ lúc thu hoạch gỗ đến khi xây dựng công trình đó là không đáng kể).

A. 4238. **B.** 8243. **C.** 3248. **D.** 2483.

Lời giải

Chọn A

Theo đầu bài ta có phương trình: $P(t)=60 \Leftrightarrow 60=100.(0,5)^{\frac{t}{5750}} \Leftrightarrow (0,5)^{\frac{t}{5750}}=\frac{60}{100}=0,6$

$\Leftrightarrow t=5750.\frac{\ln 0,6}{\ln 0,5}\approx 4237,55$.

Vậy tuổi của công trình đó khoảng 4238 năm.

Câu 18: Cường độ một trận động đất được cho bởi công thức $M=\log A-\log A_0$ độ Richter, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ đo được 8 độ Richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác ở Nhật Bản có cường độ đo được 6 độ Richer. Hỏi trận động đất ở San Francisco có biên độ gấp bao nhiêu lần biên độ trận động đất ở Nhật Bản?

A. 1000 lần. **B.** 10 lần. **C.** 2 lần. **D.** 100 lần.

Lời giải

Chọn D

Nhận thấy ở San Francisco trận động đất có cường độ là: $M_1=\log A_1-\log A_0=\log\frac{A_1}{A_0}=8$

Ở Nhật Bản trận động đất có cường độ là: $M_2=\log\frac{A_2}{A_0}=6$

Khi đó: $8-6=\log\frac{A_1}{A_0}-\log\frac{A_2}{A_0}=\log\frac{A_1}{A_2}\Leftrightarrow 2=\log\frac{A_1}{A_2}\Leftrightarrow\frac{A_1}{A_2}=10^2=100.$

Câu 19: Giả sử số lượng một bầy ruồi tại thời điểm t được tính theo công thức là $N(t)=N_o.\mathrm{e}^{kt}$, trong đó N_o là số lượng bầy ruồi tại thời điểm $t=0$ và k là hằng số tăng trưởng của bầy ruồi. Biết số lượng bầy ruồi tăng lên gấp đôi sau 9 ngày và biết $N_0=100$ con. Hỏi sau bao nhiêu ngày bầy ruồi có 800 con?

A. 27. **B.** 25. **C.** 28. **D.** 26.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $2N_0=N_0.\mathrm{e}^{9k}\Leftrightarrow k=\frac{\ln 2}{9}$

Để được 800 con ruồi, ta có: $800=100.\mathrm{e}^{t.\frac{\ln 2}{9}}\Leftrightarrow t=\frac{\ln 8}{\ln 2}.9=27$ ngày.

Câu 20: Số lượng của một loại vi khuẩn X trong phòng thí nghiệm được tính theo công thức $P(t)=P_0.2^t$, trong đó P_0 là số lượng vi khuẩn ban đầu, $P(t)$ là số lượng vi khuẩn X sau t phút. Biết sau 2 phút thì số lượng vi khuẩn X là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn X là 10 triệu con

A. 5 phút. **B.** 8 phút. **C.** 7 phút. **D.** 6 phút.

Lời giải

Chọn D.

Sau 2 phút số lượng vi khuẩn 625000 con tức là: $625000=P_0.2^2\Leftrightarrow P_0=\frac{625000}{4}=156250$.

Số lượng vi khuẩn là 10 triệu con $\Leftrightarrow 10000000=156250.2^t\Leftrightarrow 2^t=64\Leftrightarrow t=6$.

Câu 21: Một công ty khai thác thủy lợi cho biết đã kết thúc đợt xả nước đẩy mặn xuống sông Trà Vinh. Giúp người dân Trà Vinh đảm bảo nước sinh hoạt, phục vụ nông nghiệp. Một đợt xả nước x ngày có công suất $86400\sqrt{800-x^2}\left(m^3/ngay\right)$. Để xả $100000000\,m^3$ nước cần ít nhất mấy đợt xả?

A. 1 đợt. **B.** 2 đợt. **C.** 3 đợt. **D.** 4 đợt.

Lời giải

Chọn C

Số đợt xả nhỏ nhất khi và chỉ khi lượng nước xả một đợt lớn nhất.

Lượng nước xả trong x ngày là $86400.x.\sqrt{800-x^2}\left(m^3\right)$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=86400x\sqrt{800-x^2}\left(m^3\right),\ x\in\left(0;20\sqrt{2}\right]$.

Ta có $86400x\sqrt{800-x^2}\le 86400.\dfrac{x^2+800-x^2}{2}=34560000$.

Vậy $Maxf\left(x\right)=34560000m^3$ đạt được khi $x=\sqrt{800-x^2}\Leftrightarrow x=20$.

$\dfrac{100000000}{34560000}\simeq 2,9$.

Vậy cần xả 3 đợt mỗi đợt 20 ngày.

Câu 22: Chu kì bán rã của chất phóng xạ Plutolium ^{239}Pu là 24360 năm (tức là một lượng chất ^{239}Pu sau 24360 năm phân hủy còn một nửa). Sự phân hủy này được tính theo công thức $S=Ae^{-rt}$, trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỉ lệ phân hủy hàng năm, t là thời gian phân hủy, S là lượng còn lại sau thời gian phân hủy t. Hỏi 20 gam ^{239}Pu sau ít nhất bao nhiêu năm thì phân hủy còn 4 gam?

A. 56563 năm. **B.** 56562 năm. **C.** 56561 năm. **D.** 56564 năm.

Lời giải

Chọn A

Vì ^{239}Pu có chu kì bán rã là 24360 năm nên với 20 gam ^{239}Pu ta có:

$10=20.e^{-r.24360}\Leftrightarrow -r.24360=\ln\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow r=\dfrac{\ln 2}{24360}$.

Theo bài ra ta có phương trình $4=20.e^{-rt}\Leftrightarrow -rt=\ln\dfrac{1}{5}\Leftrightarrow rt=\ln 5\Leftrightarrow t=\dfrac{\ln 5}{r}$.

Suy ra $t\approx 56562,2$.

Vậy sau ít nhất 56563 năm thì 20 gam ^{239}Pu sẽ phân hủy còn 4 gam.

Câu 23: Trong môi trường nuôi cấy ổn định người ta nhận thấy rằng: cứ sau đúng 5 ngày số lượng loài của vi khuẩn A tăng lên gấp đôi, còn sau đúng 10 ngày số lượng loài của vi khuẩn B tăng lên gấp ba. Giả sử ban đầu có 100 con vi khuẩn A và 200 con vi khuẩn B, hỏi sau bao nhiêu ngày nuôi cấy trong môi trường đó thì số lượng loài vi khuẩn A vượt quá số lượng loại vi khuẩn B, biết rằng tốc độ tăng trưởng của mỗi loài ở mọi thời điểm là như nhau?

A. 26 (ngày). **B.** 23 (ngày). **C.** 25 (ngày). **D.** 24 (ngày).

Lời giải

Chọn C

Giả sử sau x ngày nuôi cấy thì số lượng vi khuẩn hai loài bằng nhau. Điều kiện $x>0$.

Ở ngày thứ x số lượng vi khuẩn của loài A là: $100.2^{\frac{x}{5}}$ con vi khuẩn.

Ở ngày thứ x số lượng vi khuẩn của loài B là: $200.3^{\frac{x}{10}}$ con vi khuẩn.

Khi đó ta có bất phương trình $100.2^{\frac{x}{5}} > 200.3^{\frac{x}{10}} \Leftrightarrow \frac{2^{\frac{x}{5}}}{3^{\frac{x}{10}}} > 2 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{x}{10}} > 2 \Leftrightarrow x > 10.\log_{\frac{4}{3}} 2$.

Câu 24: Cho áp suất không khí P (đo bằng milimet thuỷ ngân, kí hiệu là mmHg) suy giảm mũ so với độ cao x (đo bằng mét), tức P giảm theo công thức $P = P_0 \mathrm{e}^{xi}$ trong đó $P_0 = 760mmHg$ là áp suất ở mực nước biển $(x = 0)$, i là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao $1000m$ thì áp suất của không khí là $672,71mmHg$. Hỏi áp suất không khí ở độ cao $3580m$ gần với số nào sau đây nhất?

A. $491mmHg$. **B.** $490\,mmHg$. **C.** $492\,mmHg$. **D.** $493\,mmHg$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $P = P_0 \mathrm{e}^{xi}$

Ở độ cao $1000m$, ta có : $P_0 = 760mmHg, x = 1000m, P = 672,71mmHg$, từ giả thiết này ta tìm được hệ số suy giảm i. Ta có $672,71 = 760\mathrm{e}^{1000\times i} \Leftrightarrow 1000i = \ln\frac{672,71}{760} \Leftrightarrow i \approx -0,000$

Khi đó ở độ cao $3580m$, áp suất của không khí là: $P = 760\mathrm{e}^{-0,00012\times 3580} \approx 49112$.

Câu 25: Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S_n = S_0.e^{r.n}$, trong đó S_0 là dân số của năm lấy làm mốc, S_n là dân số sau n năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Tính đến đầu năm 2011, dân số toàn tỉnh Bình Phước đạt gần 905300 người, mức tăng dân số là $1,37\%$ mỗi năm. Tỉnh thực hiện tốt chủ trương 100% trẻ em đúng độ tuổi vào lớp 1. Hỏi đến năm học 2024 – 2025 ngành giáo dục của tỉnh cần chuẩn bị ít nhất bao nhiêu phòng học cho học sinh lớp 1, mỗi phòng chỉ dành cho 35 học sinh? Giả sử trong năm sinh của lứa học sinh vào lớp 1 đó toàn tỉnh có 2400 người chết, số trẻ tử vong trước 6 tuổi không đáng kể.

A. 458. **B.** 462. **C.** 459. **D.** 461.

Lời giải

Chọn B

Chỉ những em sinh năm 2018 mới đủ tuổi đi học (6 tuổi) vào lớp 1 năm học 2024 – 2025.

Áp dụng công thức lãi kép để tính dân số năm 2017 và 2018.

Dân số năm 2018 là: $S_8 = S_0\mathrm{e}^{r.n} = 905300.\mathrm{e}^{1,37\%.8} \approx 1010162$.

Dân số năm 2017 là: $S_7 = S_0\mathrm{e}^{r.n} = 905300.\mathrm{e}^{1,37\%.7} \approx 996418$.

Số trẻ vào lớp 1 trong năm học 2024 – 2025 là: $1010162 - 996418 + 2400 = 16144$.

Số phòng học cần chuẩn bị là: $16144 : 35 \approx 461,26$.

Vậy số phòng học cần là 462 phòng.

Câu 26: Trong năm đầu tiên đi làm, anh A được nhận lương là 10 triệu đồng mỗi tháng. Cứ hết một năm, anh A lại được tăng lương, mỗi tháng năm sau tăng 12% so với mỗi tháng năm trước. Mỗi khi lĩnh lương anh A đều cất đi phần lương tăng so với năm ngay trước để tiết kiệm mua ô tô. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm thì anh A mua được ô tô giá 500 triệu biết rằng anh A được gia đình hỗ trợ 32% giá trị chiếc xe?

A. 11. **B.** 13. **C.** 10. **D.** 12.

Lời giải

Chọn B

Số tiền anh A cần tiết kiệm là $500-500.0,32=340$ (triệu).

Gọi số tiền mà anh A nhận được ở mỗi tháng trong năm đầu tiên là

$$u_1=10 \text{ (triệu).}$$

Thì số tiền mà anh A nhận được ở mỗi tháng trong năm thứ hai là

$$u_2=u_1.(1+0,12)=u_1.1,12 \text{ (triệu).}$$

Số tiền mà anh A nhận được ở mỗi tháng trong năm thứ ba là

$$u_3=u_1.(1+0,12)^2=u_1.(1,12)^2 \text{ (triệu).}$$

…

Số tiền mà anh A nhận được ở mỗi tháng trong năm thứ n là

$$u_n=u_1.(1+0,12)^{n-1}=u_1.(1,12)^{n-1} \text{ (triệu).}$$

Vậy số tiền mà anh A tiết kiệm được sau n năm là

$$12.(u_2-u_1+u_3-u_2+\cdots+u_{n-1}-u_{n-2}+u_n-u_{n-1})=12.(u_n-u_1)=12.\left[u_1.(1,12)^{n-1}-u_1\right].$$

Cho $12.\left[u_1.(1,12)^{n-1}-u_1\right]\geq 340 \Leftrightarrow (1,12)^{n-1}\geq \dfrac{23}{6} \Leftrightarrow n\geq \log_{1,12}\dfrac{23}{6}+1\approx 12.86$.

Vậy sau ít nhất 13 năm thì anh A sẽ tiết kiệm đủ tiền để mua ô tô.

Câu 27: Các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm virus corona kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t)=45t^2-t^3$ với $(0\leq t\leq 25)$. Nếu coi $f(t)$ là một hàm xác định trên đoạn $[0;25]$ thì hàm $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t. Xác định ngày mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất?

A. 15. **B.** 20. **C.** 10. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết suy ra tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t là: $f'(t)=90t-3t^2$.

Xét hàm $f'(t)=90t-3t^2$ với $0\leq t\leq 25$.

Ta có: $f''(t)=90-6t=0\Leftrightarrow t=15$.

Bảng biến thiên:

t	0		15		25
f''		+	0	−	
f'	0	↗	675	↘	375

Từ bảng biến thiên ta có ngày mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất là ngày thứ 15.

Câu 28: Theo kế hoạch, với mức tiêu thu thức ăn chăn nuôi của trang trại X không đổi theo dự định thì lượng thức ăn dự trữ sẽ đủ dùng trong 365 ngày. Thực tế, 50 ngày đầu mức tiêu thụ thức ăn với ngày sau tăng 5% so với ngày trước, những ngày tiếp theo mức tiêu thụ thức ăn ngày sau tăng 10% so với ngày trước. Hỏi thực tế lượng thức ăn dự trữ đó đủ dùng trong bao nhiêu ngày?

A. 9. **B.** 60. **C.** 8. **D.** 59.

Lời giải

Chọn D

Gọi lượng thức ăn tiêu thụ mỗi ngày theo kế hoạch của trang trại X là x

Vậy lượng thức ăn dự trữ của trang tại X là $365x$

Lượng thức ăn tiêu thụ trong 50 ngày đầu là:

$$x+x.1,05+x.1,05^2+...+x.1,05^{49}=x\left(1+1,05+\ldots+1,05^{49}\right)=x.\frac{\left(1-1,05^{50}\right)}{1-1,05}$$

Lượng thức ăn tiêu thụ trong những ngày tiếp theo là: (đặt $x.1,05^{49}=B$: lượng thức ăn tiêu thụ ngày thứ 50)

$$B.1,1+B.1,1^2+...+B.1,1^n=B.1,1\left(1+1,1+\ldots+1,1^{n-1}\right)=\frac{B.1,1.\left(1-1,1^n\right)}{1-1,1}=x\frac{1,05^{49}.1,1.\left(1-1,1^n\right)}{1-1,1}$$

Ta có: $x.\frac{\left(1-1,05^{50}\right)}{1-1,05}+x\frac{1,05^{49}.1,1.\left(1-1,1^n\right)}{1-1,1}=365x$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(1-1,05^{50}\right)}{1-1,05}+\frac{1,05^{49}.1,1.\left(1-1,1^n\right)}{1-1,1}=365\Leftrightarrow n=8,72$$

Vậy lượng thức ăn dự trữ đủ dùng trong $50+8=58$ ngày

Câu 29: Áp suất không khí P theo công thức $P=P_0.\mathrm{e}^{kx}\ \left(\mathrm{mmHg}\right)$, trong đó x là độ cao, $P_0=760\ \left(\mathrm{mmHg}\right)$ là áp suất không khí ở mức nước biển $\left(x=0\right)$, k là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao 1000 m thì áp suất không khí là $672,71\ \left(\mathrm{mmHg}\right)$. Tính áp suất của không khí ở độ cao 4000 m.

A. $466,52\ \left(\mathrm{mmHg}\right)$. **B.** $530,23\ \left(\mathrm{mmHg}\right)$. **C.** $530,73\ \left(\mathrm{mmHg}\right)$. **D.** $545,01\ \left(\mathrm{mmHg}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ở độ cao 1000 m áp suất không khí là $672,71\ \left(\mathrm{mmHg}\right)$.

Nên ta có $672,71=760\mathrm{e}^{1000k}\Leftrightarrow\mathrm{e}^{1000k}=\frac{672,71}{760}\Leftrightarrow k=\frac{1}{1000}\ln\frac{672,71}{760}$.

Áp suất ở độ cao 4000 m là $P=760\mathrm{e}^{4000k}=760\mathrm{e}^{4000.\frac{1}{1000}\ln\frac{672,71}{760}}\approx466,52\ \left(\mathrm{mmHg}\right)$.

Câu 30: Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn tuân theo công thức $S=A.\mathrm{e}^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng, t là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Hỏi số con vi khuẩn sau 10 giờ?

A. 800. **B.** 900. **C.** 950. **D.** 1000.

Lời giải

Chọn B

Trước tiên, ta tìm tỉ lệ tăng trưởng mỗi giờ của loại vi khuẩn này.

Từ giả thiết ta có: $300=100.\mathrm{e}^{5r}\Leftrightarrow r=\frac{\ln300-\ln100}{5}=\frac{\ln3}{5}$.

Sau 10 giờ, từ 100 con vi khuẩn sẽ có $100.\mathrm{e}^{10.\frac{\ln3}{5}}=900$ con.

Câu 31: Một cửa hàng bán lẻ bán 2500 cái tivi mỗi năm. Chi phí gửi trong kho là 10USD một cái một năm. Để đặt hàng nhà sản xuất thì mỗi lần chi phí cố định là 20USD, cộng thêm 9USD mỗi

chiếc. Biết rằng số lượng tivi trung bình gửi trong kho bằng một nửa số tivi của mỗi lần đặt hàng. Như vậy cửa hàng nên đặt hàng nhà sản xuất bao nhiêu lần mỗi năm và mỗi lần đặt bao nhiêu cái để chi phí hàng tồn kho là thấp nhất?

A. 20 lần mỗi năm và 90 cái mỗi lần. **B.** 25 lần mỗi năm và 110 cái mỗi lần.

C. 25 lần mỗi năm và 120 cái mỗi lần. **D.** 25 lần mỗi năm và 100 cái mỗi lần.

Lời giải

Gọi x là số tivi mỗi lần đặt hàng thì $x \in [1;2500]$

Khi đó, số lượng tivi trung bình gửi trong kho sẽ là $\frac{x}{2}$. Do đó, chi phí gửi hàng trong khi mỗi năm sẽ là $10.\frac{x}{2} = 5x$.

Số lần đặt hàng mỗi năm sẽ là $\frac{2500}{x}$.

Do đó chi phí đặt hàng mỗi năm sẽ là $(20+9x).\frac{2500}{x} = \frac{50000}{x} + 22500$

Suy ra, chi phí hàng tồn kho là $C(x) = 5x + \frac{50000}{x} + 22500$

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của $C(x)$ với $x \in [1;2500]$.

Ta có: $C'(x) = 5 - \frac{50000}{x^2}, C'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 100^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 100(tm) \\ x = -100(ktm) \end{array}\right.$

Do $C''(x) = \frac{100000}{x^3} > 0, \forall x \in [1;2500]$ nên $\min\limits_{x\in[1;2500]} C(x) = C(100) = 23500$

Khi đó số lần đặt hàng mỗi năm sẽ là $\frac{2500}{100} = 25$ lần.

Vậy để chi phí hàng tồn kho là nhỏ nhất thì cửa hàng cần đặt hàng 25 lần mỗi năm và 100 cái mỗi lần.

Câu 32: Một công ty thời trang vừa tung ra thị trường một mẫu quần áo mới và họ tổ chức quảng cáo trên truyền hình mỗi ngày. Một nghiên cứu của một thị trường uy tín cho thấy, nếu sau t lần quảng cáo được phát trên truyền hình thì số phần trăm người xem mua sản phẩm này là: $P = \frac{100}{1+49.\mathrm{e}^{-0,015t}}(\%)$. Hỏi cần phát quảng cáo trên truyền hình tối thiểu bao nhiêu lần để số người mua sản phẩm đạt hơn 80%?

A. 356 lần. **B.** 348 lần. **C.** 352 lần. **D.** 344 lần.

Lời giải

Chọn C

Để số người mua sản phẩm đạt hơn 80% thì $P > 80 \Leftrightarrow \frac{100}{1+49.\mathrm{e}^{-0,015t}} > 80$

$\Leftrightarrow 1+49.\mathrm{e}^{-0,015t} < \frac{100}{80} \Leftrightarrow 49.\mathrm{e}^{-0,015t} < \frac{10}{8} - 1$

$\Leftrightarrow 49.\mathrm{e}^{-0,015t} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0,015t} < \frac{1}{196} \Leftrightarrow -0,015t < \ln\frac{1}{196} \Leftrightarrow t > \frac{1}{0,015}\ln 196 \approx 351,8743$

Vậy số lần quảng cáo tối thiểu là 352 lần.

Câu 33: Ông An gửi 250 triệu đồng ở ngân hàng theo hình thức lãi kép với lãi suất $9,2\%$ /năm. Hỏi sau bao nhiêu năm ông An có số tiền ít nhất là 650 triệu đồng (giả sử lãi suất hàng năm không đổi)?

A. 11. **B.** 10. **C.** 18. **D.** 19.

Lời giải

Chọn A

Gọi S là số tiền gửi ban đầu.

Áp dụng công thức lãi kép sau n năm $(n \in \mathbb{N})$ thì số tiền thu được là: $S_n = S(1+0,092)^n$

Theo đề ta có: $250(1+0,092)^n \geq 650 \Leftrightarrow (1,092)^n \geq \frac{13}{5} \Leftrightarrow n \geq \log_{1,092}\left(\frac{13}{5}\right) \approx 10,8567$.

Vì $n \in \mathbb{N}$ nên ta chọn $n = 11$.

Câu 34: Gọi $I(t)$ là số ca bị nhiễm bệnh Covid-19 ở quốc gia X sau t ngày khảo sát. Khi đó ta có công thức $I(t) = A.\mathrm{e}^{r_0(t-1)}$ với A là số ca bị nhiễm trong ngày khảo sát đầu tiên, r_0 là hệ số lây nhiễm. Biết rằng ngày đầu tiên khảo sát có 500 ca bị nhiễm bệnh và ngày thứ 10 khảo sát có 1000 ca bị nhiễm bệnh. Hỏi ngày thứ 20 số ca nhiễm bệnh gần nhất với số nào dưới đây, biết rằng trong suốt quá trình khảo sát hệ số lây nhiễm là không đổi?

A. 2000. **B.** 2160. **C.** 2340. **D.** 2520.

Lời giải

Chọn B.

Theo giả thiết ta có $I(1) = A = 500$.

Ngày thứ 10 có 1000 ca nên $I(10) = A.\mathrm{e}^{9r_0} \Leftrightarrow 1000 = 500.\mathrm{e}^{9r_0} \Leftrightarrow r_0 = \frac{\ln 2}{9}$.

Vậy ngày thứ 20 số ca nhiễm bệnh là $I(20) = 500.\mathrm{e}^{\frac{19\ln 2}{9}} \approx 2160$.

Câu 35: Áp suất không khí P (đo bằng milimet thủy ngân, kí hiệu mmHg) theo công thức $P = P_0.e^{kx}$ (mmHg),trong đó x là độ cao (đo bằng mét), $P_0 = 760$ (mmHg) là áp suất không khí ở mức nước biển $(x = 0)$, k là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao 1000 m thì áp suất không khí là $672,71$ (mmHg). Tính áp suất của không khí ở độ cao 3000 m.

A. $527,06$ (mmHg). **B.** $530,23$ (mmHg). **C.** $530,73$ (mmHg). **D.** $545,01$ (mmHg).

Lời giải

Chọn A

Ở độ cao 1000 m áp suất không khí là $672,71$ (mmHg).

Nên ta có: $672,71 = 760e^{1000k} \Leftrightarrow e^{1000k} = \frac{672,71}{760} \Leftrightarrow k = \frac{1}{1000}\ln\frac{672,71}{760}$.

Áp suất ở độ cao 3000 m là $P = 760e^{3000k} = 760e^{3000.\frac{1}{1000}\ln\frac{672,71}{760}} \approx 527,06$ (mmHg).

Câu 36: Trang trại X dự trữ thức ăn cho cá, với mức tiêu thụ không đổi như dự định thì lượng thức ăn dự trữ đủ cho 90 ngày. Nhưng thực tế, kể từ ngày thứ hai trở đi lượng tiêu thụ thức ăn của cá tăng thêm 3% so với ngày trước đó. Hỏi lượng thức ăn dự trữ của trang trại X thực tế chỉ đủ cho cá trong bao nhiêu ngày?

A. 43 ngày. **B.** 44 ngày. **C.** 31 ngày. **D.** 30 ngày.

Lời giải

Chọn B.

Giả sử lượng thức ăn tiêu thụ mỗi ngày như dự định là x.

Khi đó lượng thức ăn tiêu thụ mỗi ngày thực tế là vào ngày thứ n là $x(1+3\%)^{n-1}$.

Khi đó ta có được: $90x = x + x(1+3\%) + x(1+3\%) + ... + x(1+3\%)^{n-1}$

$$\Leftrightarrow 90x = x\left[1 + (1+3\%) + (1+3\%) + ... + (1+3\%)^{n-1}\right]$$

$$\Leftrightarrow 90 = \frac{(1+3\%)^n - 1}{(1+3\%) - 1} \Leftrightarrow n \approx 44,26.$$

Vậy lượng thức ăn thực tế đủ trong 44 ngày.

Câu 37: Biết rằng vi khuẩn E. coli là vi khuẩn gây tiêu chảy đường ruột, gây đau bụng dữ dội, ngoài ra cứ sau 20 phút thì số lượng vi khuẩn tăng gấp đôi, nghĩa là số lượng tính theo công thức $S = S_0.2^n$, S_0 là số lượng ban đầu, n là số lần nhân đôi. Ban đầu chỉ có 40 con vi khuẩn nói trên trong đường ruột, hỏi sau bao lâu số lượng vi khuẩn là 671088640 con?

A. 24 giờ. **B.** 8 giờ. **C.** 12 giờ. **D.** 48 giờ.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $S = S_0.2^n$.

Suy ra $671088640 = 40.2^n \Leftrightarrow 2^n = \frac{671088640}{40} = 16777216 \Leftrightarrow n = \log_2 16777216 = 24$.

Để số lượng vi khuẩn là 671088640 con thì vi khuẩn đã có 24 lần nhân đôi.

Do đó, thời gian mà vi khuẩn đã thực hiện 24 lần nhân đôi đó là $20.24 = 480$ phút(8 giờ).

Vậy, sau 8 giờ số lượng vi khuẩn là 671088640 con.

Câu 38: Vào cuối năm 2022, báo Rossiyskaya Gazeta dẫn lời Bộ trưởng Tài nguyên Nga cảnh báo nước này sẽ cạn kiệt dầu mỏ sau 28 năm nữa nếu sản lượng khai thác hằng năm vẫn giữ như năm 2022. Bắt đầu từ năm 2023, nếu nước Nga mỗi năm giảm sản lượng khai thác 2% so với năm trước thì sau bao nhiêu năm nữa nước này cạn kiệt dầu mỏ (chọn phương án có kết quả gần nhất với tính toán của bạn)?

A. 48. **B.** 30. **C.** 42. **D.** 36.

Chọn C

Gọi S (tỷ tấn) là sản lượng dầu mỏ còn lại của Nga trên thực tế tính từ cuối năm 2022.

x (tỷ tấn) là sản lượng khai khác hằng năm như năm 2022.

Theo đề bài, ta có: $S = 28x$ (tỷ tấn).

Gọi n là số năm khai thác còn lại với sản lượng khai thác thay đổi hằng năm tính từ 2023.

Lượng khai thác mỗi năm tính từ năm 2023 là: $x.\frac{(1-2\%)^n - 1}{(1-2\%) - 1} = \frac{0,98^n - 1}{-0,02}x$ (tỷ tấn).

Đến khi khai thác hết, ta có: $\frac{0,98^n - 1}{-0,02}x = 28x \Leftrightarrow n = \log_{0,98}(1 - 0,02.28) \approx 40.64$.